



HAL
open science

Conception robuste de structures périodiques à non-linéarités fonctionnelles

Khaoula Chikhaoui

► **To cite this version:**

Khaoula Chikhaoui. Conception robuste de structures périodiques à non-linéarités fonctionnelles. Mécanique des structures [physics.class-ph]. Université Bourgogne Franche-Comté; Université de Tunis (1958-1988), 2017. Français. NNT: 2017UBFCD029 . tel-01810643

HAL Id: tel-01810643

<https://theses.hal.science/tel-01810643v1>

Submitted on 8 Jun 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

SPIM

Thèse de Doctorat

UFC

école doctorale **sciences pour l'ingénieur et microtechniques**
UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ



Conception robuste de structures périodiques à non-linéarités fonctionnelles

■ KHAOULA CHIKHAOUI

SPIM

Thèse de Doctorat

UBFC

école doctorale sciences pour l'ingénieur et microtechniques
UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ



Thèse présentée par

Khaoula CHIKHAOUI

en vue de l'obtention du grade de

Docteur

Spécialité : **Mécanique**

Conception robuste de structures périodiques à non-linéarités fonctionnelles

Soutenue à Besançon le 27 / 01 / 2017 devant le Jury :

I. Tawfiq	Professeur des Universités, SUPMECA, Paris	Président
M. N. Ichchou	Professeur des Universités, Ecole Centrale de Lyon	Rapporteur
F. Chaari	Professeur des Universités, ENIS, Sfax	Rapporteur
T. Weisser	Maître de Conférences, Université de Haute Alsace	Examineur
M. Soula	Maître de Conférences HDR, ENSIT, Tunis	Examineur
N. Bouhaddi	Professeur des Universités, Université de Franche-Comté	Directeur de thèse
M. Guedri	Maître de Conférences HDR, ENSIT, Tunis	Directeur de thèse
N. Kacem	Maître de Conférences, Université de Franche-Comté	Co-encadrant

A ma mère,

A mon père,

A mes frères

A Ramzi,

A tous mes chers

Un merci sincère ...

Remerciements

Ces travaux de recherche ont été réalisés dans le cadre d'une thèse en cotutelle entre l'Université Bourgogne Franche-Comté, Institut FEMTO-ST, Département Mécanique Appliquée (Besançon, France) et l'Ecole Nationale Supérieure d'Ingenieurs de Tunis (ENSIT), Université de Tunis (Tunis, Tunisie).

J'adresse d'abord mes vifs remerciements à M. Mohamed Najib ICHCHOU et M. Fakher CHAARI pour avoir accepté d'être les rapporteurs de ces travaux. Je remercie également M. Imad TAWFIQ, M. Thomas WEISSER et M. Mohamed SOULA d'en être les examinateurs.

Mes sincères remerciements s'adressent à mes directeurs de thèse : M. Nouredine BOUHADDI et M. Mohamed GUEDRI ainsi qu'à mon co-encadrant Najib KACEM.

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à M. Nouredine BOUHADDI pour la confiance qu'il m'a accordée, son encouragement, son soutien, la qualité de son encadrement et sa disponibilité.

Un grand merci à l'adresse de l'ensemble du personnel du Département Mécanique Appliquée pour l'excellente ambiance de travail dans laquelle j'ai bien avancé mes travaux. Je remercie particulièrement tous les doctorants avec lesquels j'ai passé des moments inoubliables.

Enfin, merci maman de m'avoir initié au goût de la réussite. J'adresse mes profonds remerciements à mon père, à mes frères, à mon fiancé Ramzi et à tous mes proches pour leur affection et leurs encouragements.

Résumé

L'analyse dynamique des structures de grandes dimensions incluant de nombreux paramètres incertains et des non-linéarités localisées ou réparties peut être numériquement prohibitive. Afin de surmonter ce problème, des modèles d'approximation peuvent être développés pour reproduire avec précision et à faible coût de calcul la réponse de la structure.

L'objectif de la première partie de ce mémoire est de développer des modèles numériques robustes vis-à-vis des modifications structurales (non-linéarités localisées, perturbations ou incertitudes paramétriques) et « légers » au sens de la réduction de la taille. Ces modèles sont construits, selon les approches de condensation directe et par synthèse modale, en enrichissant des bases de réduction tronquées, modale et de Craig-Bampton respectivement, avec des résidus statiques prenant compte des modifications structurales. Pour propager les incertitudes, l'accent est mis particulièrement sur la méthode du chaos polynomial généralisé. Sa combinaison avec les modèles réduits ainsi obtenus permet de créer des métamodèles mono et bi-niveaux, respectivement. Les deux métamodèles proposés sont comparés à d'autres métamodèles basés sur les méthodes du chaos polynomial généralisé et du Latin Hypercube appliquées sur des modèles complets et réduits. Les métamodèles proposés permettent d'approximer les comportements structuraux avec un coût de calcul raisonnable et sans perte significative de précision.

La deuxième partie de ce mémoire est consacrée à l'analyse dynamique des structures périodiques non-linéaires en présence des imperfections : perturbations des paramètres structuraux ou incertitudes paramétriques. Deux études : déterministe ou stochastique, respectivement, sont donc menées. Pour ces deux configurations, un modèle analytique discret générique est proposé. Il consiste à appliquer la méthode des échelles multiples et la méthode de perturbation pour résoudre l'équation de mouvement et de projeter la solution obtenue sur des modes d'ondes stationnaires. Le modèle proposé conduit à un ensemble d'équations algébriques complexes couplées, fonctions du nombre et des positions des imperfections dans la structure. La propagation des incertitudes à travers le modèle ainsi construit est finalement assurée par les méthodes du Latin Hypercube et du chaos polynomial généralisé. La robustesse de la dynamique collective vis-à-vis des imperfections est étudiée à travers l'analyse statistique de la dispersion des réponses fréquentielles et des bassins d'attraction dans le domaine de multistabilité. L'étude numérique montre que la présence des imperfections dans une structure périodique renforce sa non-linéarité, élargit son domaine de multistabilité et génère une multiplicité de branches multimodale.

Mots clés : modèles numériques, incertitudes paramétriques, robustesse, analyse stochastique, chaos polynomial, réduction de modèle, non-linéarités, structures périodiques, dynamique collective, solutions multimodales, bassins d'attraction

Abstract

Dynamic analysis of large scale structures including several uncertain parameters and localized or distributed nonlinearities may be computationally unaffordable. In order to overcome this issue, approximation models can be developed to reproduce accurately the structural response at a low computational cost.

The purpose of the first part of this thesis is to develop numerical models which must be robust against structural modifications (localized nonlinearities, parametric uncertainties or perturbations) and reduce the size of the initial problem. These models are created, according to the direct condensation and the component mode synthesis, by enriching truncated reduction modal bases and Craig-Bampton transformations, respectively, with static residual vectors accounting for the structural modifications. To propagate uncertainties through these first-level and second-level reduced order models, respectively, we focus particularly on the generalized polynomial chaos method. This methods combination allows creating first-level and second-level metamodels, respectively. The two proposed metamodels are compared to other metamodels based on the polynomial chaos method and Latin Hypercube method applied on reduced and full models. The proposed metamodels allow approximating the structural behavior at a low computational cost without a significant loss of accuracy.

The second part of this thesis is devoted to the dynamic analysis of nonlinear periodic structures in presence of imperfections: parametric perturbations or uncertainties. Deterministic or stochastic analyses, respectively, are therefore carried out. For both configurations, a generic discrete analytical model is proposed. It consists in applying the multiple scales method and the perturbation theory to solve the equation of motion and then on projecting the resulting solution on standing wave modes. The proposed model leads to a set of coupled complex algebraic equations, depending on the number and positions of imperfections in the structure. Uncertainty propagation through the proposed model is finally done using the Latin Hypercube method and the generalized polynomial chaos expansion. The robustness the collective dynamics against imperfections is studied through statistical analysis of the frequency responses and the basins of attraction dispersions in the multistability domain. Numerical results show that the presence of imperfections in a periodic structure strengthens its nonlinearity, expands its multistability domain and generates a multiplicity of multimodal branches.

Keywords : numerical models, parametric uncertainties, robustness, stochastic analysis, polynomial chaos, model reduction, nonlinearities, periodic structures, collective dynamics, multimodal solutions, basins of attraction

Table des Matières

Résumé	i
Abstract	ii
Table des Matières	iii
Liste des Figures	v
Liste des Tableaux	xiii
Chapitre 1. Introduction générale	1
Chapitre 2. Incertitudes dans les modèles numériques	5
2.1. Introduction	5
2.2. Quantification et propagation des incertitudes	6
2.2.1. Caractérisation des incertitudes	6
2.2.2. Quantification des incertitudes	7
2.2.3. Propagation des incertitudes.....	10
2.3. Chaos Polynomial généralisé (gPC).....	12
2.3.1. Historique et applications	12
2.3.2. Fondements mathématiques	13
2.3.3. Expansion du chaos polynomial généralisé.....	15
2.3.4. Approche intrusive	17
2.3.5. Approche non intrusive	20
2.3.6. Au-delà d'une expansion classique	24
2.3.7. Post-traitement : statistiques.....	25
2.4. Simulations numériques	25
2.4.1. Oscillateur linéaire	25
2.4.2. Oscillateur avec non-linéarité localisée.....	35
2.5. Conclusion	40
Chapitre 3. Modèles réduits dédiés aux modifications structurales	43
3.1. Introduction	43
3.2. Réduction de modèle : généralités.....	44
3.2.1. Surface de réponse	44
3.2.2. Réseaux de neurones	44
3.2.3. Modèles condensés.....	45
3.2.4. Principales méthodes de réduction de modèle.....	49
3.3. Méthodes de réduction de modèle dédiées aux modifications structurales	55
3.3.1. Méthode de décomposition orthogonale propre	56
3.3.2. Méthode des approximations combinées.....	56
3.3.3. Base modale enrichie adaptée aux modifications structurales.....	57
3.3.4. Méthode de Craig-Bampton adaptée aux modifications structurales	60
3.4. Simulations numériques	64

3.4.1.	Exemple 1 : Assemblage de poutres.....	64
3.4.2.	Exemple 2 : Structure de plaques couplées	74
3.5.	Conclusion	79
Chapitre 4.	Métamodèles robustes combinant méthodes stochastiques et réduction de modèle.....	81
4.1.	Introduction	81
4.2.	Métamodèles : généralités.....	82
4.3.	Métamodèles proposés	83
4.3.1.	Métamodèle mono-niveau: gPC-BME	83
4.3.2.	Métamodèle bi-niveaux: gPC-TCBE	84
4.4.	Simulations numériques	85
4.4.1.	Réponse dynamique d'un portique 2D évaluée par le métamodèle mono-niveau.....	86
4.4.2.	Réponse dynamique d'un microsysteme par le métamodèle bi-niveaux.....	95
4.5.	Conclusion	103
Chapitre 5.	Analyse de robustesse de la dynamique collective des structures périodiques	105
5.1.	Introduction	105
5.2.	Etude bibliographique	106
5.2.1.	Dynamique des structures périodiques linéaires	106
5.2.2.	Dynamique des structures périodiques non-linéaires	106
5.2.3.	Dynamique des structures périodiques en présence des imperfections	107
5.3.	Méthodologie proposée	109
5.3.1.	Cadre de l'étude	109
5.3.2.	Equation de mouvement.....	109
5.3.3.	Résolution de l'équation de mouvement par la méthode des échelles multiples.....	110
5.3.4.	Projection de la solution sur les ondes stationnaires	111
5.3.5.	Résolution des équations complexes	114
5.4.	Structure périodique constituée de pendules faiblement couplés.....	115
5.4.1.	Modèle générique.....	115
5.4.2.	Exemple 1 : structure de deux pendules couplés.....	116
5.4.3.	Exemple 2 : structure de trois pendules couplés.....	139
5.5.	Conclusion	154
Chapitre 6.	Conclusion générale et Perspectives	155
Annexe :	Méthode de Newmark non-linéaire.....	159
Bibliographie	163

Liste des Figures

Fig.2.1	Oscillateur linéaire amorti à trois degrés de liberté.....	26
Fig.2.2	Moyennes des amplitudes des déplacements calculées par les méthodes de MC à 10^4 tirages et LHS à 10^3 et 200 tirages pour (a) $\delta_k = 10\%$ et (b) $\delta_k = 20\%$	28
Fig.2.3	Enveloppes des amplitudes des déplacements calculés par les méthodes de MC à 10^4 tirages et LHS à 10^3 et 200 tirages pour (a) $\delta_k = 10\%$ et (b) $\delta_k = 20\%$	29
Fig.2.4	Dispersion des amplitudes des déplacements calculés par les méthodes de MC à 10^4 tirages et LHS à 10^3 et 200 tirages pour $\delta_k = 10\%$ et $\delta_k = 20\%$	30
Fig.2.5	Erreurs sur les moyennes des amplitudes des déplacements calculés par la méthode LHS à 10^3 et 200 tirages par rapport à la méthode MC à 10^4 tirages pour $\delta_k = 10\%$ et $\delta_k = 20\%$	30
Fig.2.6	Moyennes des déplacements calculés par les méthodes de MC à 10^4 tirages et du gPC de projection d'ordre 2 et 4 et de régression d'ordre 2 et 4 pour (a) $\delta_k = 10\%$ et (b) $\delta_k = 20\%$	32
Fig.2.7	Enveloppes des déplacements calculés par les méthodes de MC à 10^4 tirages et du gPC de régression d'ordre 2 et 4 pour (a) $\delta_k = 10\%$ et (b) $\delta_k = 20\%$	33
Fig.2.8	Dispersion des déplacements calculés par les méthodes de MC à 10^4 tirages et du gPC de projection d'ordre 4 et de régression d'ordre 4 pour $\delta_k = 10\%$ et $\delta_k = 20\%$	34
Fig.2.9	Erreurs sur les moyennes des amplitudes des déplacements calculés par la méthode du gPC de projection d'ordre 4 et de régression d'ordre 4 par rapport à la méthode MC à 10^4 tirages pour $\delta_k = 10\%$ et $\delta_k = 20\%$	34
Fig.2.10	Oscillateur à trois degrés de liberté contenant une non-linéarité localisée.....	36
Fig.2.11	Moyennes des déplacement, vitesse, diagramme de phase et force non-linéaire du ddl 1 calculés par les méthodes LHS à 10^3 tirages et du gPC de régression d'ordre 2 et 4 pour (a) $\delta_k = 10\%$ et (b) $\delta_k = 20\%$	38
Fig.2.12	Moyennes des déplacement, vitesse, diagramme de phase et force non-linéaire du ddl 2 calculés par les méthodes LHS à 10^3 tirages et du gPC de régression d'ordre 2 et 4 pour (a) $\delta_k = 10\%$ et (b) $\delta_k = 20\%$	39
Fig.3.1	Schéma d'un RNA [111].....	45
Fig.3.2	Algorithme de Newmark non-linéaire adapté au modèle réduit.....	48
Fig.3.3	Exemple de répartition des ddls par sous-structure	51
Fig.3.4	Processus de réduction de modèle : approche directe et approche par synthèse modale.....	63
Fig.3.5	Structure de poutres couplées par des ressorts et des amortisseurs linéaires.....	64
Fig.3.6	Matrice (1-MAC) comparant les modes propres des systèmes initial et modifié.....	66
Fig.3.7	Amplitude du déplacement du point d'observation P_1 , et erreurs associées, calculées par le modèle REF et les modèles réduits BM et BME	67
Fig.3.8	Amplitude du déplacement du point d'observation P_3 , et erreurs associées, calculées par le modèle REF et les modèles réduits BM et BME	68

Fig.3.9	Amplitude du déplacement du point d'observation P_5 , et erreurs associées, calculées par le modèle REF et les modèles réduits BM et BME	68
Fig.3.10	Structure de poutres couplées par des amortisseurs linéaires et des ressorts linéaires et non-linéaires	69
Fig.3.11	Vitesse et diagramme de phase du point d'observation P_1 calculés par le modèle REF et les modèles réduits BM et BME	70
Fig.3.12	Vitesse et diagramme de phase du point d'observation P_3 calculés par le modèle REF et les modèles réduits BM et BME	71
Fig.3.13	Vitesse et diagramme de phase du point d'observation P_5 calculés par le modèle REF et les modèles réduits BM et BME	71
Fig.3.14	Modèle de la sous-structure k	72
Fig.3.15	Vitesse et diagramme de phase du point d'observation P_1 calculés par le modèle REF et le modèle réduits TCBE.....	73
Fig.3.16	Vitesse et diagramme de phase du point d'observation P_3 calculés par le modèle REF et le modèle réduits TCBE.....	74
Fig.3.17	Vitesse et diagramme de phase du point d'observation P_5 calculés par le modèle REF et le modèle réduits TCBE.....	74
Fig.3.18	Structure de deux plaques couplées par des ressorts linéaires et non-linéaires	75
Fig.3.19	Matrice (1-MAC) comparant les modes propres des systèmes initial et modifié.....	76
Fig.3.20	Réponses fréquentielles linéaires des systèmes initial et modifié	77
Fig.3.21	Vitesse et diagramme de phase du point d'observation P_1 calculés par le modèle REF et les modèles réduits TCB et TCBE	78
Fig.3.22	Vitesse et diagramme de phase du point d'observation P_2 calculés par le modèle REF et les modèles réduits TCB et TCBE	78
Fig.3.23	Vitesse et diagramme de phase du point d'observation P_3 calculés par le modèle REF et les modèles réduits TCB et TCBE	78
Fig.3.24	Vitesse et diagramme de phase du point d'observation P_4 calculés par le modèle REF et les modèles réduits TCB et TCBE	79
Fig.4.1	Schéma d'un métamodèle	82
Fig.4.2	Schéma récapitulatif des métamodèles appliqués	86
Fig.4.3	Schéma d'un portique 2D avec non-linéarités localisées	87
Fig.4.4	Matrice (1-MAC) comparant les modes normaux du système déterministe et les moyennes des modes normaux du système stochastique correspondant aux 10^3 tirages de la méthode LHS.....	89
Fig.4.5	Moyenne du déplacement stochastique du point d'observation P_{o1} calculée avec le modèle de référence (LHS-REF) comparée au déplacement dans le cas déterministe	89
Fig.4.6	Moyennes du déplacement stochastique du point d'observation P_{o2} calculée avec le modèle de référence (LHS-REF) comparée au déplacement dans le cas déterministe	90
Fig.4.7	Comparaison des moyennes des déplacements et des diagrammes de phase stochastiques du point d'observation P_{o1} calculées par la méthode LHS utilisant la BM (LHS-BM), la BME (LHS-BME) et le modèle EF complet (LHS-REF).....	90
Fig.4.8	Comparaison des moyennes des déplacements et des diagrammes de phase stochastiques du point d'observation P_{o2} calculées par la méthode LHS utilisant la BM (LHS-BM), la BME (LHS-BME) et le modèle EF complet (LHS-REF).....	91

Fig.4.9	Comparaison des moyennes des déplacements et des diagrammes de phase stochastiques du point d'observation P_{o1} calculées par la méthode LHS (LHS-REF) et par la méthode gPC d'ordre 2 (gPC-2-REF) et 6 (gPC-6-REF), sur le modèle EF complet	92
Fig.4.10	Comparaison des moyennes des déplacements et des diagrammes de phase stochastiques du point d'observation P_{o2} calculées par la méthode LHS (LHS-REF) et par la méthode gPC d'ordre 2 (gPC-2-REF) et 6 (gPC-6-REF), sur le modèle EF complet	92
Fig.4.11	Comparaison des moyennes des déplacements et des diagrammes de phase stochastiques du point d'observation P_{o1} calculées par la méthode LHS (LHS-REF) et par la méthode gPC d'ordre 6 sur le modèle EF complet (gPC-2-REF) et le modèle réduit (gPC-6-REF)	93
Fig.4.12	Comparaison des moyennes des déplacements et des diagrammes de phase stochastiques du point d'observation P_{o2} calculées par la méthode LHS (LHS-REF) et par la méthode gPC d'ordre 6 sur le modèle EF complet (gPC-2-REF) et le modèle réduit (gPC-6-REF)	94
Fig.4.13	Schéma de la structure de 20 micro-poutres couplées.....	96
Fig.4.14	Matrice (1-MAC) comparant les modes normaux du système déterministe et la moyenne des modes normaux du système stochastique correspondant aux 10^3 tirages de la méthode LHS	97
Fig.4.15	Comparaison des moyennes des vitesses et des diagrammes de phase stochastiques du point d'observation P_{o1} calculées par la méthode LHS (LHS-REF) sur le modèle EF complet (LHS-REF) et le modèle réduit (LHS-TCBE)	98
Fig.4.16	Comparaison des moyennes des vitesses et des diagrammes de phase stochastiques du point d'observation P_{o2} calculées par la méthode LHS (LHS-REF) sur le modèle EF complet (LHS-REF) et le modèle réduit (LHS-TCBE)	98
Fig.4.17	Comparaison des moyennes des vitesses et des diagrammes de phase stochastiques du point d'observation P_{o3} calculées par la méthode LHS (LHS-REF) sur le modèle EF complet (LHS-REF) et le modèle réduit (LHS-TCBE)	99
Fig.4.18	Comparaison des moyennes des vitesses et des diagrammes de phase stochastiques du point d'observation P_{o1} calculées par la méthode LHS (LHS-REF) et la méthode gPC (gPC-REF) sur le modèle EF complet	100
Fig.4.19	Comparaison des moyennes des vitesses et des diagrammes de phase stochastiques du point d'observation P_{o2} calculées par la méthode LHS (LHS-REF) et la méthode gPC (gPC-REF) sur le modèle EF complet	100
Fig.4.20	Comparaison des moyennes des vitesses et des diagrammes de phase stochastiques du point d'observation P_{o3} calculées par la méthode LHS (LHS-REF) et la méthode gPC (gPC-REF) sur le modèle EF complet	101
Fig.4.21	Comparaison des moyennes des vitesses et des diagrammes de phase stochastiques du point d'observation P_{o1} calculées par la méthode LHS sur le modèle EF complet (LHS-REF) et la méthode gPC sur le modèle réduit (gPC-TCBE)	101
Fig.4.22	Comparaison des moyennes des vitesses et des diagrammes de phase stochastiques du point d'observation P_{o2} calculées par la méthode LHS sur le modèle EF complet (LHS-REF) et la méthode gPC sur le modèle réduit (gPC-TCBE)	102
Fig.4.23	Comparaison des moyennes des vitesses et des diagrammes de phase stochastiques du point d'observation P_{o3} calculées par la méthode LHS sur le modèle EF complet (LHS-REF) et la méthode gPC sur le modèle réduit (gPC-TCBE)	102
Fig.5.1	Schéma d'une structure périodique de N pendules non-linéaires couplés par des ressorts linéaires..	115
Fig.5.2	Schéma d'une structure périodique de deux pendules non-linéaires couplés par des ressorts linéaires ...	116

Fig.5.3	Amplitudes des réponses des deux pendules en coordonnées généralisées, sans prendre en compte l'imperfection.....	117
Fig.5.4	Amplitudes des réponses des deux pendules en coordonnées physiques, sans prendre en compte l'imperfection.....	117
Fig.5.5	Bassins d'attraction des réponses (a) $ A_1 ^2$ et (b) $ A_2 ^2$ dans le plan de Nyquist $((a_1)_0, (b_1)_0)$ pour $\sigma = -1.2$ et $(a_2)_0 = (b_2)_0 = 0.25$, sans prendre en compte l'imperfection	119
Fig.5.6	Bassins d'attraction des réponses (a) $ A_1 ^2$ et (b) $ A_2 ^2$ dans le plan de Nyquist $((a_1)_0, (b_1)_0)$ pour $\sigma = -1$ et $(a_2)_0 = (b_2)_0 = 0.25$, sans prendre en compte l'imperfection	119
Fig.5.7	Bassins d'attraction des réponses (a) $ A_1 ^2$ et (b) $ A_2 ^2$ dans le plan de Nyquist $((a_1)_0, (b_1)_0)$ pour $\sigma = -0.8$ et $(a_2)_0 = (b_2)_0 = 0.25$, sans prendre en compte l'imperfection	119
Fig.5.8	Amplitudes des réponses (a) $ \tilde{A}_1 ^2$ et $ \tilde{A}_2 ^2$ du premier pendule et (b) $ A_1 ^2$ et $ A_2 ^2$ du deuxième pendule en coordonnées généralisées pour $l_1 = l(1 + \delta_l)$	121
Fig.5.9	Amplitudes des réponses $\tilde{\phi}_1$ et ϕ_2 des deux pendules en coordonnées physiques pour $l_1 = l(1 + \delta_l)$..	121
Fig.5.10	Amplitudes des réponses (a) $ \tilde{A}_1 ^2$ et $ \tilde{A}_2 ^2$ du premier pendule et (b) $ A_1 ^2$ et $ A_2 ^2$ du deuxième pendule en coordonnées généralisées pour $l_1 = l(1 - \delta_l)$	122
Fig.5.11	Amplitudes des réponses $\tilde{\phi}_1$ et ϕ_2 des deux pendules en coordonnées physiques pour $l_1 = l(1 - \delta_l)$..	122
Fig.5.12	Exemple de mesures des intervalles d'amplitude et de fréquence dans le domaine de multistabilité, suivant les types de branches SM et DM	122
Fig.5.13	Comparaison des intervalles fréquentiels Δf du domaine de multistabilité pour $l_1 = l(1 + \delta_l)$ et $l_1 = l(1 - \delta_l)$, suivant les types de branches SM et DM.....	123
Fig.5.14	Comparaison des intervalles des amplitudes $\Delta\phi$ dans le domaine de multistabilité pour $l_1 = l(1 + \delta_l)$ et $l_1 = l(1 - \delta_l)$, suivant les types de branches SM et DM.....	123
Fig.5.15	Bassins d'attraction des amplitudes (a) $ \tilde{A}_1 ^2$ et (b) $ \tilde{A}_2 ^2$ de la réponse du premier pendule dans le plan de Nyquist $((a_1)_0, (b_1)_0)$ pour $\sigma = -1$, $(a_2)_0 = (b_2)_0 = 0.25$ et $l_1 = l(1 + \delta_l)$	124
Fig.5.16	Bassins d'attraction des amplitudes (a) $ A_1 ^2$ et (b) $ A_2 ^2$ de la réponse du deuxième pendule dans le plan de Nyquist $((a_1)_0, (b_1)_0)$ pour $\sigma = -1$, $(a_2)_0 = (b_2)_0 = 0.25$ et $l_1 = l(1 + \delta_l)$	124
Fig.5.17	Bassins d'attraction des amplitudes (a) $ \tilde{A}_1 ^2$ et (b) $ \tilde{A}_2 ^2$ de la réponse du premier pendule dans le plan de Nyquist $((a_1)_0, (b_1)_0)$ pour $\sigma = -1$, $(a_2)_0 = (b_2)_0 = 0.25$ et $l_1 = l(1 - \delta_l)$	125
Fig.5.18	Bassins d'attraction des amplitudes (a) $ A_1 ^2$ et (b) $ A_2 ^2$ de la réponse du deuxième pendule dans le plan de Nyquist $((a_1)_0, (b_1)_0)$ pour $\sigma = -1$, $(a_2)_0 = (b_2)_0 = 0.25$ et $l_1 = l(1 - \delta_l)$	125
Fig.5.19	Moyennes des amplitudes $ \tilde{A}_1 ^2$ et $ \tilde{A}_2 ^2$ des réponses, en coordonnées généralisées, du premier pendule calculées par (a) la méthode LHS et (b) la méthode gPC, pour $\delta_l = 2\%$	127
Fig.5.20	Enveloppes des amplitudes $ \tilde{A}_1 ^2$ et $ \tilde{A}_2 ^2$ des réponses, en coordonnées généralisées, du premier pendule calculées par (a) la méthode LHS et (b) la méthode gPC, pour $\delta_l = 2\%$	127
Fig.5.21	Moyennes des amplitudes $ A_1 ^2$ et $ A_2 ^2$ des réponses, en coordonnées généralisées, du deuxième pendule calculées par (a) la méthode LHS et (b) la méthode gPC, pour $\delta_l = 2\%$	128
Fig.5.22	Enveloppes des amplitudes $ A_1 ^2$ et $ A_2 ^2$ des réponses, en coordonnées généralisées, du deuxième pendule calculées par (a) la méthode LHS et (b) la méthode gPC, pour $\delta_l = 2\%$	128

Fig.5.23	Moyennes des amplitudes des réponses $\tilde{\phi}_1$ et ϕ_2 , en coordonnées physiques, des deux pendules calculées par (a) la méthode LHS et (b) la méthode gPC, pour $\delta_l = 2\%$	128
Fig.5.24	Enveloppes des amplitudes des réponses $\tilde{\phi}_1$ et ϕ_2 , en coordonnées physiques, des deux pendules calculées par (a) la méthode LHS et (b) la méthode gPC, pour $\delta_l = 2\%$	129
Fig.5.25	Moyennes des amplitudes $ \tilde{A}_1 ^2$ et $ \tilde{A}_2 ^2$ des réponses, en coordonnées généralisées, du premier pendule calculées par (a) la méthode LHS et (b) la méthode gPC, pour $\delta_l = 5\%$	129
Fig.5.26	Enveloppes des amplitudes $ \tilde{A}_1 ^2$ et $ \tilde{A}_2 ^2$ des réponses, en coordonnées généralisées, du premier pendule calculées par (a) la méthode LHS et (b) la méthode gPC, pour $\delta_l = 5\%$	129
Fig.5.27	Moyennes des amplitudes $ A_1 ^2$ et $ A_2 ^2$ des réponses, en coordonnées généralisées, du deuxième pendule calculées par (a) la méthode LHS et (b) la méthode gPC, pour $\delta_l = 2\%$	130
Fig.5.28	Enveloppes des amplitudes $ A_1 ^2$ et $ A_2 ^2$ des réponses, en coordonnées généralisées, du deuxième pendule calculées par (a) la méthode LHS et (b) la méthode gPC, pour $\delta_l = 5\%$	130
Fig.5.29	Moyennes des amplitudes des réponses $\tilde{\phi}_1$ et ϕ_2 , en coordonnées physiques, des pendules calculées par (a) la méthode LHS et (b) la méthode gPC, pour $\delta_l = 5\%$	130
Fig.5.30	Enveloppes des amplitudes des réponses $\tilde{\phi}_1$ et ϕ_2 , en coordonnées physiques, des pendules calculées par (a) la méthode LHS et (b) la méthode gPC, pour $\delta_l = 5\%$	131
Fig.5.31	Evolution des plages fréquentielles du SM et du DM dans de domaine de multistabilité calculées par les méthodes LHS et gPC.....	131
Fig.5.32	Evolution des enveloppes des amplitudes des réponses fréquentielles du SM et du DM dans de domaine de multistabilité calculées par les méthodes LHS et gPC.....	132
Fig.5.33	Enveloppes des bassins d'attraction de la réponse $ \tilde{A}_1 ^2$ du premier pendule, dans le plan de Nyquist $((a_1)_0, (b_1)_0)$ pour $\sigma = -1$ et $(a_2)_0 = (b_2)_0 = 0.25$, calculées par (a) la méthode LHS et (b) la méthode gPC, pour $\delta_l = 2\%$	133
Fig.5.34	Enveloppes des bassins d'attraction de la réponse $ A_1 ^2$ du deuxième pendule, dans le plan de Nyquist $((a_1)_0, (b_1)_0)$ pour $\sigma = -1$ et $(a_2)_0 = (b_2)_0 = 0.25$, calculées par (a) la méthode LHS et (b) la méthode gPC, pour $\delta_l = 2\%$	133
Fig.5.35	Enveloppes des bassins d'attraction de la réponse $ \tilde{A}_1 ^2$ du premier pendule, dans le plan de Nyquist $((a_1)_0, (b_1)_0)$ pour $\sigma = -1$ et $(a_2)_0 = (b_2)_0 = 0.25$, calculées par (a) la méthode LHS et (b) la méthode gPC, pour $\delta_l = 5\%$	134
Fig.5.36	Enveloppes des bassins d'attraction de la réponse $ A_1 ^2$ du deuxième pendule, dans le plan de Nyquist $((a_1)_0, (b_1)_0)$ pour $\sigma = -1$ et $(a_2)_0 = (b_2)_0 = 0.25$, calculées par (a) la méthode LHS et (b) la méthode gPC, pour $\delta_l = 5\%$	134
Fig.5.37	Enveloppes des attracteurs des (a) SM-RB, (b) SM-NRB et (c) DM de la réponse $ \tilde{A}_1 ^2$ du premier pendule, dans le plan de Nyquist $((a_1)_0, (b_1)_0)$ pour $\sigma = -1$ et $(a_2)_0 = (b_2)_0 = 0.25$, calculées par la méthode LHS pour $\delta_l = 2\%$	135
Fig.5.38	Enveloppes des attracteurs des (a) SM-RB, (b) SM-NRB et (c) DM de la réponse $ \tilde{A}_1 ^2$ de la réponse du premier pendule, dans le plan de Nyquist $((a_1)_0, (b_1)_0)$ pour $\sigma = -1$ et $(a_2)_0 = (b_2)_0 = 0.25$, calculées par la méthode gPC pour $\delta_l = 2\%$	135
Fig.5.39	Enveloppes des attracteurs des (a) SM-RB, (b) SM-NRB et (c) DM de la réponse $ A_1 ^2$ de la réponse du deuxième pendule, dans le plan de Nyquist $((a_1)_0, (b_1)_0)$ pour $\sigma = -1$ et $(a_2)_0 = (b_2)_0 = 0.25$, calculées par la méthode LHS pour $\delta_l = 2\%$	136

Fig.5.40	Enveloppes des attracteurs des (a) SM-RB, (b) SM-NRB et (c) DM de la réponse $ A_1 ^2$ de la réponse du deuxième pendule, dans le plan de Nyquist $((a_1)_0, (b_1)_0)$ pour $\sigma = -1$ et $(a_2)_0 = (b_2)_0 = 0.25$, calculées par la méthode gPC pour $\delta_l = 2\%$	136
Fig.5.41	Enveloppes des attracteurs des (a) SM-RB, (b) SM-NRB et (c) DM de la réponse $ \tilde{A}_1 ^2$ de la réponse du premier pendule, dans le plan de Nyquist $((a_1)_0, (b_1)_0)$ pour $\sigma = -1$ et $(a_2)_0 = (b_2)_0 = 0.25$, calculées par la méthode LHS pour $\delta_l = 5\%$	136
Fig.5.42	Enveloppes des attracteurs des (a) SM-RB, (b) SM-NRB et (c) DM de la réponse $ \tilde{A}_1 ^2$ de la réponse du premier pendule, dans le plan de Nyquist $((a_1)_0, (b_1)_0)$ pour $\sigma = -1$ et $(a_2)_0 = (b_2)_0 = 0.25$, calculées par la méthode gPC pour $\delta_l = 5\%$	136
Fig.5.43	Enveloppes des attracteurs des (a) SM-RB, (b) SM-NRB et (c) DM de la réponse $ A_1 ^2$ de la réponse du deuxième pendule, dans le plan de Nyquist $((a_1)_0, (b_1)_0)$ pour $\sigma = -1$ et $(a_2)_0 = (b_2)_0 = 0.25$, calculées par la méthode LHS pour $\delta_l = 5\%$	137
Fig.5.44	Enveloppes des attracteurs des (a) SM-RB, (b) SM-NRB et (c) DM de la réponse $ A_1 ^2$ de la réponse du deuxième pendule, dans le plan de Nyquist $((a_1)_0, (b_1)_0)$ pour $\sigma = -1$ et $(a_2)_0 = (b_2)_0 = 0.25$, calculées par la méthode gPC pour $\delta_l = 5\%$	137
Fig.5.45	Trois pendules non-linéaires couplés par des ressorts linéaires	139
Fig.5.46	Amplitudes $ A_1 ^2$, $ A_2 ^2$ et $ A_3 ^2$ des réponses des trois pendules en coordonnées généralisées, sans prendre en compte l'imperfection	140
Fig.5.47	Amplitudes ϕ_1 , ϕ_2 et ϕ_3 des réponses des trois pendules en coordonnées physiques, sans prendre en compte l'imperfection	140
Fig.5.48	Identification des différentes branches modales pour les amplitudes des réponses des trois pendules en coordonnées généralisées	141
Fig.5.49	Bassins d'attraction des réponses (a) $ A_1 ^2$, (b) $ A_2 ^2$ et (c) $ A_3 ^2$ dans le plan de Nyquist $((a_1)_0, (b_1)_0)$ pour $\sigma = -1$, $(a_2)_0 = (b_2)_0 = 0.2$ et $(a_3)_0 = (b_3)_0 = 0.3$	141
Fig.5.50	Répartition des attracteurs des DM et TM des réponses (a) $ A_1 ^2$, (b) $ A_2 ^2$ et (c) $ A_3 ^2$ dans le plan de Nyquist $((a_1)_0, (b_1)_0)$ pour $\sigma = -1$, $(a_2)_0 = (b_2)_0 = 0.2$ et $(a_3)_0 = (b_3)_0 = 0.3$	142
Fig.5.51	Enveloppes des amplitudes $ \tilde{A}_1 ^2$, $ \tilde{A}_2 ^2$ et $ \tilde{A}_3 ^2$ des réponses du premier pendule calculées par (a) la méthode LHS et (b) la méthode gPC, pour $\delta_l = 2\%$	143
Fig.5.52	Enveloppes des amplitudes $ A_1 ^2$, $ A_2 ^2$ et $ A_3 ^2$ des réponses du deuxième pendule calculées par (a) la méthode LHS et (b) la méthode gPC, pour $\delta_l = 2\%$	144
Fig.5.53	Enveloppes des amplitudes $\tilde{\phi}_1$, ϕ_2 et ϕ_3 des réponses des trois pendules calculées par (a) la méthode LHS à 200 tirages et (b) la méthode gPC, pour $\delta_l = 5\%$	144
Fig.5.54	Enveloppes des amplitudes $ \tilde{A}_1 ^2$, $ \tilde{A}_2 ^2$ et $ \tilde{A}_3 ^2$ des réponses du premier pendule calculées par (a) la méthode LHS et (b) la méthode gPC, pour $\delta_l = 5\%$	145
Fig.5.55	Enveloppes des amplitudes $ A_1 ^2$, $ A_2 ^2$ et $ A_3 ^2$ des réponses du deuxième pendule calculées par (a) la méthode LHS et (b) la méthode gPC, pour $\delta_l = 5\%$	145
Fig.5.56	Enveloppes des amplitudes $\tilde{\phi}_1$, ϕ_2 et ϕ_3 des réponses des trois pendules calculées par (a) la méthode LHS et (b) la méthode gPC, pour $\delta_l = 5\%$	146
Fig.5.57	Evolution des plages fréquentielles du DM et du TM dans le domaine de multistabilité calculées par les méthodes LHS et gPC	147
Fig.5.58	Evolution des enveloppes des amplitudes des réponses fréquentielles du DM et du TM dans le domaine de multistabilité calculées par les méthodes LHS et gPC	147

Fig.5.59	Enveloppes des bassins d'attraction de la réponse $ \tilde{A}_1 ^2$ du premier pendule, dans le plan de Nyquist $((a_1)_0, (b_1)_0)$ pour $\sigma = -1$, $(a_2)_0 = (b_2)_0 = 0.2$ et $(a_3)_0 = (b_3)_0 = 0.3$, calculées par (a) la méthode LHS et (b) la méthode gPC, pour $\delta_l = 2\%$	148
Fig.5.60	Enveloppes des bassins d'attraction de la réponse $ A_1 ^2$ du deuxième pendule, dans le plan de Nyquist $((a_1)_0, (b_1)_0)$ pour $\sigma = -1$, $(a_2)_0 = (b_2)_0 = 0.2$ et $(a_3)_0 = (b_3)_0 = 0.3$, calculées par (a) la méthode LHS et (b) la méthode gPC, pour $\delta_l = 2\%$	148
Fig.5.61	Enveloppes des bassins d'attraction de la réponse $ \tilde{A}_1 ^2$ du premier pendule, dans le plan de Nyquist $((a_1)_0, (b_1)_0)$ pour $\sigma = -1$, $(a_2)_0 = (b_2)_0 = 0.2$ et $(a_3)_0 = (b_3)_0 = 0.3$, calculées par (a) la méthode LHS et (b) la méthode gPC, pour $\delta_l = 5\%$	149
Fig.5.62	Enveloppes des bassins d'attraction de la réponse $ A_1 ^2$ du deuxième pendule, dans le plan de Nyquist $((a_1)_0, (b_1)_0)$ pour $\sigma = -1$, $(a_2)_0 = (b_2)_0 = 0.2$ et $(a_3)_0 = (b_3)_0 = 0.3$, calculées par (a) la méthode LHS et (b) la méthode gPC, pour $\delta_l = 5\%$	149
Fig.5.63	Enveloppes des attracteurs des (a) DM-RB, (b) DM-NRB, (c) DM-B1, (d) DM-B2, (e) TM-B1 et (f) TM-B2 de la réponse $ \tilde{A}_1 ^2$ du premier pendule, dans le plan de Nyquist $((a_1)_0, (b_1)_0)$ pour $\sigma = -1$, $(a_2)_0 = (b_2)_0 = 0.2$ et $(a_3)_0 = (b_3)_0 = 0.3$, calculées par la méthode LHS pour $\delta_l = 2\%$	151
Fig.5.64	Enveloppes des attracteurs des (a) DM-RB, (b) DM-NRB, (c) DM-B1, (d) DM-B2, (e) TM-B1 et (f) TM-B2 de la réponse $ \tilde{A}_1 ^2$ du premier pendule, dans le plan de Nyquist $((a_1)_0, (b_1)_0)$ pour $\sigma = -1$, $(a_2)_0 = (b_2)_0 = 0.2$ et $(a_3)_0 = (b_3)_0 = 0.3$, calculées par la méthode gPC pour $\delta_l = 2\%$	151
Fig.5.65	Enveloppes des attracteurs des (a) DM-RB, (b) DM-NRB, (c) DM-B1, (d) DM-B2, (e) TM-B1 et (f) TM-B2 de la réponse $ A_1 ^2$ de la réponse du deuxième pendule, dans le plan de Nyquist $((a_1)_0, (b_1)_0)$ pour $\sigma = -1$, $(a_2)_0 = (b_2)_0 = 0.2$ et $(a_3)_0 = (b_3)_0 = 0.3$, calculées par la méthode LHS pour $\delta_l = 2\%$	152
Fig.5.66	Enveloppes des attracteurs des (a) DM-RB, (b) DM-NRB, (c) DM-B1, (d) DM-B2, (e) TM-B1 et (f) TM-B2 de la réponse $ A_1 ^2$ du deuxième pendule, dans le plan de Nyquist $((a_1)_0, (b_1)_0)$ pour $\sigma = -1$, $(a_2)_0 = (b_2)_0 = 0.2$ et $(a_3)_0 = (b_3)_0 = 0.3$, calculées par la méthode gPC pour $\delta_l = 2\%$...	152
Fig.A.1	Algorithme de la méthode de Newmark non-linéaire	162

Liste des Tableaux

Tab.2.1	Correspondance polynômes d'Askey - distributions de variables aléatoires continues	14
Tab.2.2	Transformation de variables aléatoires en fonction de Gaussiennes centrées réduites avec $erf(X) = (2/\sqrt{\pi}) \int_0^X e^{-t^2} dt$	15
Tab.2.3	Effet des incertitudes sur les fréquences propres du système.	27
Tab.2.4	Comparaison des temps de calcul CPU des différentes méthodes implémentées.	35
Tab.2.5	Comparaison des indicateurs temporels des déplacements déterministes et des déplacements calculés par la méthode LHS.	37
Tab.2.6	Comparaison des temps de calcul CPU.....	40
Tab.2.7	Comparaison des indicateurs temporels des déplacements calculés par les méthodes LHS et de régression à l'ordre 2 et 4.....	40
Tab.3.1	Caractéristiques géométriques et mécaniques de la structure initiale.....	64
Tab.3.2	Fréquences propres des systèmes initial et modifié.....	66
Tab.3.3	Comparaison des temps de calcul CPU.....	67
Tab.3.4	Indicateurs temporels et temps de calcul CPU calculés pour le modèle REF et les modèles réduits BM et BME.....	72
Tab.3.5	Indicateurs temporels et temps de calcul CPU calculés pour les modèles complet (REF) et réduit (TCBE).....	73
Tab.3.6	Caractéristiques géométriques et mécaniques de la structure initiale.....	75
Tab.3.7	Fréquences propres des systèmes initial et modifié.....	76
Tab.3.8	Indicateurs temporels et temps de calcul CPU calculés pour les modèles complet (REF) et réduits (TCB et TCBE).....	79
Tab.4.1	Caractéristiques géométriques et mécaniques du portique.....	87
Tab.4.2	Résultats obtenus par différents métamodèles pour le portique 2D	95
Tab.4.3	Caractéristiques géométriques et mécaniques du microsystème.	96
Tab.4.4	Résultats obtenus par différents métamodèles pour la structure de micro-poutres couplées.....	103
Tab.5.1	Paramètres de la structure périodique de deux pendules couplés.....	116
Tab.5.2	Distributions des attracteurs des branches SM-RB, SM-NRB et DM dans les bassins d'attraction pour les trois cas: $\sigma = -1.2$, $\sigma = -1$ et $\sigma = -0.8$	120
Tab.5.3	Evolution des intervalles Δf et $\Delta \phi$ du SM et du DM, pour $l_1 = l(1 + \delta_l)$ et $l_1 = l(1 - \delta_l)$, par rapport aux intervalles obtenus sans prendre en compte l'imperfection	123
Tab.5.4	Comparaison des distributions des attracteurs des SM-RB, SM-NRB et DM dans les bassins d'attraction pour $l_1 = l(1 + \delta_l)$ et $l_1 = l(1 - \delta_l)$	125

Tab.5.5	Evolution des intervalles Δf et $\Delta\phi$ du SM et du DM, obtenues pour les méthodes LHS et gPC, pour $\delta_l = 2\%$ et $\delta_l = 5\%$, par rapport à celles obtenues dans le cas déterministe	132
Tab.5.6	Rapports en % de la taille des enveloppes des bassins d'attraction par la taille globale des bassins calculés pour les deux méthodes LHS et gPC	134
Tab.5.7	Evolution des distributions des attracteurs des différentes branches modales dans les bassins d'attraction calculées dans le cas déterministe et par les méthodes LHS et gPC	138
Tab.5.8	Temps de calcul CPU pour les méthodes LHS et gPC	138
Tab.5.9	Paramètres de la structure périodique de pendules couplés	139
Tab.5.10	Distributions des attracteurs des différents modes et branches modales dans les bassins d'attraction.....	142
Tab.5.11	Evolution des intervalles Δf et $\Delta\phi$ du DM et du TM obtenus pour les méthodes LHS et gPC, pour $\delta_l = 2\%$ et $\delta_l = 5\%$, par rapport à ceux obtenus dans le cas déterministe.....	147
Tab.5.12	Rapport en % de la taille des enveloppes des bassins d'attraction par leur taille globale	149
Tab.5.13	Temps de calcul CPU pour les méthodes LHS et gPC.....	150
Tab.5.14	Evolution des distributions des attracteurs des différentes branches modales dans les bassins d'attraction calculées dans le cas déterministe et par les méthodes LHS et gPC	153

La conception d'une structure mécanique nécessite généralement l'élaboration d'un modèle mathématique de connaissance permettant de prédire le comportement structurel tout en réduisant le besoin en études expérimentales souvent coûteuses à mettre en œuvre. La confiance qu'on peut avoir dans ce modèle est fortement liée aux hypothèses sur lesquelles il est basé. Cette confiance est généralement estimée par le taux de convergence de l'approximation obtenue par le modèle construit vers le comportement réel de la structure. Les hypothèses auxquelles l'étude prévisionnelle des structures mécaniques faisait auparavant appel supposent que tous les paramètres du modèle sont connus avec exactitude. Ceci impose le recours à des techniques déterministes et mène par conséquent à des prédictions non réalistes. Pour minimiser la différence entre les prédictions numériques et le comportement réel du système étudié, la prise en compte des incertitudes est incontournable. Pour prévoir l'effet des incertitudes sur les comportements des systèmes dynamiques, il est nécessaire de les quantifier et les propager. Intégrer ceci dans le processus de conception nécessite le choix d'une approche appropriée. Ce choix est directement lié aux types d'incertitudes considérées : incertitudes sur les données, ou paramétriques, (paramètres structuraux, excitation, etc.), incertitudes numériques (discrétisation, etc.) et incertitudes de modèle (hypothèses simplificatrices, etc.). Une approche paramétrique prend en considération les incertitudes sur les données alors qu'une approche non-paramétrique tient compte des autres types d'incertitude. En focalisant l'étude sur l'approche paramétrique, les incertitudes peuvent être quantifiées selon la théorie des possibilités (par des intervalles, par exemple) ou la théorie des probabilités (par des variables aléatoires, par exemple).

Dans ce cadre, l'accent est mis particulièrement sur la méthode stochastique (probabiliste) du chaos polynomial généralisé. Ses fondements théoriques, ses applications et ses variantes développées dans la littérature sont présentés dans le **chapitre 2**. L'évaluation de son efficacité par rapport à des méthodes considérées souvent comme références, notamment les méthodes de Monte Carlo et du Latin Hypercube, est effectuée pour des exemples de structures académiques simples.

La méthode des éléments finis permet de créer des modèles suffisamment précis et flexibles pour une description satisfaisante du comportement dynamique. Pour des systèmes d'ingénierie complexes, des modèles éléments finis de grande taille sont générés. La complexité et la taille de ces modèles dépendent fortement de l'exigence en précision, imposant la finesse du maillage, de la présence des non-linéarités et des méthodes de résolution mises en œuvre, telles que les techniques itératives. En présence des incertitudes, en plus de ces complexités, le calcul devient prohibitif. Pour pallier donc à la difficulté majeure résumée en effort calculatoire, le recours à des modèles de dimension réduite mais suffisante pour bien décrire le comportement dynamique est incontournable. Une première

catégorie de modèles réduits est basée sur l'approximation paramétrique de la réponse à partir de calculs évaluant la réponse sans avoir recours à la réanalyse exacte. Les exemples les plus fréquemment utilisés de ces modèles réduits sont les méthodes de surface de réponses et les réseaux de neurones. Une deuxième catégorie de modèles réduits est basée sur la condensation du modèle élément finis complet à un système réduit par élimination de degrés de liberté. Pour construire des modèles réduits par condensation, deux approches, directe et par synthèse modale, peuvent être utilisées. L'approche directe consiste à tronquer des bases modales à un nombre de vecteurs propres linéaires couvrant deux, à trois, fois la plage fréquentielle sur laquelle l'étude est menée. L'approche par synthèse modale consiste à décomposer la structure globale en sous-structures pour lesquelles des bases de réduction sont construites. Selon cette classification des approches de réduction, des modèles réduits mono et multi-niveaux, respectivement, sont construits.

Des métamodèles qui combinent des méthodes de propagation des incertitudes et des modèles réduits par condensation sont proposés dans ce mémoire. Pour prendre en compte les incertitudes et les non-linéarités, les modèles réduits par condensation, qui sont généralement construits à base de vecteurs propres linéaires de la structure étudiée, sont enrichis par des résidus statiques. Afin de vérifier l'efficacité des modèles réduits proposés, on propose en premier lieu d'évaluer leur robustesse vis-à-vis des modifications structurales (paramètres perturbés et non-linéarités localisées). Ceci fait l'objet du **chapitre 3** présentant des modèles réduits dédiés aux modifications structurales, selon les deux approches de réduction de modèle : directe et par synthèse modale. La robustesse des modèles ainsi proposés étant vérifiée vis-à-vis des modifications structurales sur des structures académiques de poutres et de plaques avec modifications structurales, leur extension à la prise en compte des incertitudes est par la suite proposée dans le **chapitre 4**. Dans ce chapitre, deux métamodèles mono et bi-niveaux sont proposés selon les deux approches, directe et par synthèse modale, respectivement, et validés à travers des simulations numériques sur des structures académiques de poutres et de plaques avec modifications structurales.

Les structures étudiées dans les **chapitres 2, 3 et 4** sont périodiques : oscillateurs, poutres couplées, assemblage de plaques. Le couplage linéaire entre les cellules de chaque structure est fort, ce qui a permis de séparer les fréquences propres de la structure globale. De plus, seules les non-linéarités localisées sont considérées. Ceci a permis d'appliquer les métamodèles ainsi proposés, basés principalement sur les propriétés linéaires des structures. Cependant, quand un couplage linéaire faible est imposé entre les cellules d'une structure, une localisation modale est générée (fréquences propres très proches). Si, en plus, les non-linéarités sont réparties, d'autres méthodologies doivent être appliquées pour analyser le comportement dynamique des structures périodiques non-linéaires. Sous l'hypothèse d'une périodicité parfaite, de nombreux travaux dans la littérature se sont intéressés au développement de telles méthodologies. Néanmoins, loin de l'idéalisation mathématique due à cette hypothèse, des imperfections peuvent perturber l'arrangement parfait des cellules de la structure et changer significativement le comportement dynamique prévu dans le cas d'une périodicité parfaite. Ceci reflète la réalité des systèmes d'ingénierie périodiques tels que les composites stratifiés, les réseaux cristallins, les turbines, les moteurs multicylindres, les

coques de navires, les systèmes de fuselage d'avion, les micro/nano-systèmes électromécaniques, etc. En effet, des défauts matériels, des dommages structurels, le vieillissement, la fatigue, etc., peuvent générer des imperfections perturbant la périodicité d'une structure.

L'étude est focalisée dans ce mémoire sur les imperfections de type paramétrique. Ceci signifie que des paramètres structuraux sont perturbés. Dans ce contexte, deux types d'étude peuvent être menés. Une étude déterministe implique la considération des imperfections comme des modifications (ou perturbations) structurales. Une étude stochastique suppose que les imperfections sont caractérisées par une certaine variabilité impliquant leur modélisation par des incertitudes paramétriques et nécessite, par conséquent, leur quantification et leur propagation. Pour ces deux cas, un modèle discret générique est proposé se basant sur la méthode des échelles multiples et la projection de la réponse sur des ondes stationnaires.

La prise en compte de la périodicité, des non-linéarités réparties et des imperfections est l'objet du **chapitre 5** dans lequel une étude bibliographique non exhaustive sur les méthodologies utilisées dans la littérature pour étudier les structures périodiques, linéaires ou non-linéaires, sans ou avec imperfections, est présentée. Le modèle générique proposé est par la suite introduit pour l'analyse de la dynamique collective des structures périodique non-linéaire (réseau de pendules couplés) en présence des imperfections. L'effet des imperfections sur la dynamique collective est analysé dans le cadre déterministe (faibles perturbations des paramètres structuraux) et stochastique (incertitudes paramétriques).

Au-delà des objectifs atteints dans ce mémoire, récapitulés dans le dernier chapitre (**chapitre 6**), quelques perspectives intéressantes, autant du point de vue méthodologie qu'applications, sont citées dans ce chapitre.

2.1. Introduction

Pour réduire le besoin en études expérimentales souvent coûteuses à mettre en œuvre, les simulations numériques forment l'outil inévitable dont se servent les ingénieurs tout au long du processus de conception. La confiance qu'on peut avoir dans un calcul numérique est fortement liée à la façon dont les simulations sont conçues et effectuées. Ceci est évidemment contradictoire avec les hypothèses aux quelles l'étude prévisionnelle des systèmes dynamiques faisait auparavant appel supposant que tous les paramètres des modèles sont connus avec exactitude, faisant ainsi appel à des techniques déterministes et menant par conséquent à des résultats loin de la réalité. Pour minimiser la différence entre les prédictions numériques et le comportement réel du système étudié, la prise en compte des incertitudes est incontournable.

Pour cette raison, de nombreux travaux de recherche visent à modéliser les incertitudes et prévoir leur influence sur les comportements des systèmes dynamiques à travers leur propagation. Dans les problèmes directs, la propagation des incertitudes permet de prévoir l'influence des paramètres d'entrée incertains sur la réponse à évaluer. Ce type de problème fera objet de ce mémoire. Cependant, une propagation inverse, permettant de déterminer le niveau d'incertitude des paramètres d'entrée à partir de l'estimation de la variabilité de la réponse à évaluer, est effectuée dans les problèmes inverses.

Grâce aux développements récents des moyens de calcul numérique, il est maintenant possible d'appliquer cette démarche à des simulations industrielles complexes, et d'évaluer ainsi la pertinence d'un résultat compte tenu du manque de connaissances portant sur les données d'entrée.

L'objectif de ce chapitre est de présenter en premier lieu quelques généralités sur la thématique de l'incertain et les méthodes numériques de quantification et de propagation des incertitudes en **section 2.2**. La méthode du chaos polynomial généralisée fera objet de la **section 2.3** dans laquelle ses fondements théoriques et un état de l'art non exhaustif de ses applications et variantes seront présentés. La **section 2.4** sera consacrée à des applications académiques simples validant les méthodes retenues.

2.2. Quantification et propagation des incertitudes

2.2.1. Caractérisation des incertitudes

Dans la littérature, les incertitudes peuvent être classées selon leurs sources [1, 2] :

- **Incertitudes paramétriques (sur les données)**

Les paramètres du modèle mathématique du système dynamique (conditions aux limites, conditions initiales, constantes physiques, géométrie, excitations extérieurs, etc.) peuvent être incertains. Ces dernières proviennent d'une variété de sources telles que les erreurs de mesure, les erreurs de classification, l'estimation à travers des échantillons non représentatifs ou à nombre insuffisant.

L'approche s'intéressant à la représentation des incertitudes sur les données est dite approche paramétrique et fera objet des travaux présentés dans ce mémoire.

- **Incertitudes de modèle**

La capacité limitée d'un modèle mathématique à représenter la dynamique du système étudié est traduite à travers l'incertitude de modèle. En effet, ces modèles restituent les caractéristiques essentielles du système à étudier à travers des hypothèses simplificatrices pouvant être plus ou moins éloignées de la complexité du système modélisé et ainsi de la réalité.

Ainsi, l'approche paramétrique, si elle permet de bien modéliser les incertitudes sur les données, est incapable de modéliser les incertitudes de modèle. C'est la raison pour laquelle une approche non paramétrique est considérée [3].

- **Incertitudes numériques**

Le modèle mathématique choisi est résolu en utilisant des techniques de discrétisation et des algorithmes appropriés (discrétisation spatiale, discrétisation temporelle, etc.) qui fournissent une approximation de la solution exacte du modèle et introduisent donc une erreur numérique.

La présence de ce type d'incertitudes peut remettre en question la fiabilité des codes numériques mis en œuvre et peut être contrôlée et réduite en utilisant des moyens de calcul plus performants.

Les incertitudes peuvent également être classées selon leurs types :

- **Incertitudes réductibles**

Ce type d'incertitude dit aussi incertitude épistémique (épistémologique) résulte d'un manque de connaissance. Les incertitudes de données et de modèle peuvent être de type réductible. En effet, ces incertitudes représentent tout manque de connaissance ou d'information tout au long du processus de modélisation et peuvent être réduites par l'ajout

d'information (amélioration de la méthodologie, de l'instrumentation, du modèle mathématique, des outils numériques, etc) [4].

- **Incertitudes irréductibles**

Ce type d'incertitude dit aussi aléatoire, stochastique ou inhérent (intrinsèque) provient d'une variabilité naturelle. En effet, dû au hasard, l'imprévisibilité des systèmes environnementaux est inévitable. Les incertitudes de données et de modèle peuvent aussi être de type irréductible si elles sont affectées par l'incertitude naturelle.

2.2.2. Quantification des incertitudes

Se focalisant dans ce travail sur les incertitudes affectant les paramètres du modèle, une approche paramétrique est utilisée pour leur quantification. Cette approche, contrairement à l'approche non-paramétrique ne peut pas prendre en considération les incertitudes numériques et de modèle [3]. La quantification paramétrique des incertitudes peut être mise en œuvre selon plusieurs approches allant de la théorie des possibilités, à la probabilité [5]. Ce mémoire exploite l'approche probabiliste paramétrique [6, 7, 8].

2.2.2.1. Démarche de quantification

Mathématiquement, On dispose d'un ou plusieurs paramètres d'entrées X incertains, d'un modèle (ou métamodèle) numérique f et d'une ou plusieurs grandeurs d'intérêts (réponses du système en sortie) incertaines Y interagissant via la relation $Y = f(X)$. On souhaite représenter les incertitudes sur X , les propager moyennant f et les analyser sur Y . Cela peut se résumer à travers le processus suivant :

- i.** Proposition d'un modèle mathématique ou d'un métamodèle f représentant le comportement du système physique étudié ;
- ii.** Modélisation des paramètres incertains avec des variables ou champs aléatoires ;
- iii.** Propagation des incertitudes modélisées en **ii** à travers le modèle (ou le métamodèle) proposé en **i** en utilisant la méthode de propagation d'incertitudes appropriée ;
- iv.** Post-traitement des résultats obtenus en **iii** reflétant l'influence des incertitudes d'entrée sur les sorties.

Dans ce mémoire, à l'étape **ii**, les paramètres qu'on considèrera incertains seront supposés variables suivant des distributions de probabilité connues.

2.2.2.2. Cadre probabiliste paramétrique

Les notions probabilistes fondamentales utilisées dans cette thèse dans le cadre de l'approche paramétrique de propagation des incertitudes sont brièvement présentées dans cette section.

Les paramètres incertains peuvent être modélisés par des variables, champs ou processus aléatoires. Les variables aléatoires dépendent de l'aléa et sont uniformes dans l'espace et dans

le temps. En plus de l'aléa, les champs aléatoires dépendent de l'espace et les processus aléatoires dépendent du temps.

- **Variables et champs aléatoires**

Modéliser un paramètre incertain par une variable aléatoire revient à faire l'hypothèse d'homogénéité en espace du paramètre. Une variable aléatoire X est la modélisation stochastique de la variable x dans l'ensemble ouvert Ω de \mathbb{R}^n décrivant la géométrie du système. Munir Ω d'une tribu \mathcal{F} et d'une probabilité P permet de construire l'espace de probabilité (Ω, \mathcal{F}, P) . Une variable aléatoire est entièrement définie par sa fonction de répartition, sa fonction densité de probabilité et ses moments statistiques. La moyenne et la variance d'une variable aléatoire X sont définis respectivement par

$$\mu_X = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x p_X(x) dx \quad (2.1)$$

$$\sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p_X(x) dx - (E(X))^2 = E(X^2) - (E(X))^2 \quad (2.2)$$

La covariance de deux variables aléatoires X et Y est exprimée par

$$Cov[X, Y] = E((X - \mu_X) - (Y - \mu_Y)) \quad (2.3)$$

Une variable aléatoire est du second ordre si X est d'ordre $p = 2$: $X \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$, c'est-à-dire si

$$E\{\|X\|^2\} < +\infty \quad (2.4)$$

avec $\|X\|$ la norme euclidienne de X dans \mathbb{R}^n et $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$ l'ensemble des variables aléatoires du second ordre définies sur Ω , à valeurs dans \mathbb{R}^n .

La mesure de probabilité $P_X(dx)$ sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})$, où $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ est la tribu Borélienne, est appelée la loi de probabilité ou la distribution de la variable aléatoire X , $\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$

$$\int_B P_X(dx) = P_X(B) = P(X \in B) \quad (2.5)$$

La loi de probabilité la plus utilisée est la loi normale, encore appelée loi de Gauss, ou de Laplace-Gauss. Soit $\mu_X \in \mathbb{R}$ et $\sigma_X > 0$. Alors la fonction Φ_X définie sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{C} telle que

$$\Phi_X(u) = \exp\left(i\mu_X u - \frac{1}{2}\sigma_X^2 u^2\right) \quad (2.6)$$

est la fonction caractéristique d'une variable aléatoire du second ordre X , à valeurs dans \mathbb{R} , de loi de probabilité $P_X(dx)$ appelée loi normale $\mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X)$ dont les deux paramètres sont la moyenne μ_X et la variance σ_X^2 de la variable aléatoire X . La loi de probabilité $P_X(dx)$ s'écrit

$$P_X(dx) = p_X(x)dx \quad (2.7)$$

avec, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$p_X(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma_X^{-2}(x - \mu_X)^2\right) \quad (2.8)$$

La loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$ est un cas particulier de la loi normale avec une moyenne nulle ($\mu = 0$) et un écart-type qui vaut l'unité ($\sigma = 1$).

Étendre la modélisation à la prise en compte de la variabilité spatiale implique l'utilisation des champs aléatoires. Un champ aléatoire $H(x, \theta)$ peut être défini comme une collection de variables aléatoires indexées par un paramètre $x \in \Omega$ à valeurs dans \mathbb{R}^n ($n \geq 1$).

Un champ aléatoire gaussien est caractérisé par sa moyenne μ , son écart-type σ (sa variance σ^2) et sa fonction d'auto-covariance

$$C_{HH}(x, y) = \text{Cov}[H(x), H(y)] = \sigma(x)\sigma(y)\rho(x, y) \quad (2.9)$$

où $\rho(x, y)$ est la fonction d'autocorrélation. Un champ aléatoire est stationnaire si sa moyenne et sa variance sont constantes et ρ ne dépend que de la différence ($y - x$).

- **Discrétisation de champs aléatoires**

Pour simplifier l'analyse, des discrétisations des champs aléatoires séparant l'espace et l'aléa sont utilisées. Le processus de discrétisation consiste à approximer le champ initial $H(x, \theta)$ par un champ $\tilde{H}(x, \theta)$ défini au moyen d'un nombre fini de variables aléatoires $\{\xi_r(\theta), r = 1, \dots, d\}$ qui forment un vecteur aléatoire noté χ

$$H(x, \theta) \approx \tilde{H}(x, \theta) = \mathcal{F}[x, \chi] \quad (2.10)$$

Trois grandes catégories de méthodes de discrétisation existent dans la littérature [9, 10, 11]:

- discrétisation par valeurs ponctuelles, où les variables aléatoires $\{\xi_r\}_{r=1}^d$ sont sélectionnées parmi des valeurs de $H(x, \theta)$ en certains points x ;
- discrétisation par valeurs moyennes, où les $\{\xi_r\}_{r=1}^d$ sont des intégrales pondérées de $H(x, \theta)$ sur un domaine Ω_e ;
- méthodes de développement en séries, où le champ est représenté par une série tronquée de variables aléatoires et de fonctions spatiales déterministes.

Une des méthodes de développement en série est choisie pour discrétiser les champs aléatoires dans le développement de la méthode des éléments finis stochastiques détaillée par la suite : c'est la discrétisation de Karhunen-Loève.

- **Discrétisation de Karhunen-Loève**

La méthode de discrétisation de Karhunen-Loève [12, 13] permet de décomposer tout champ aléatoire $H(x, \theta)$ en une partie déterministe (la moyenne $\mu(x)$), et une partie aléatoire décomposée sur la base des valeurs propres λ_r et fonctions propres $\varphi_r(x)$ de la fonction d'auto-covariance $C_{HH}(x, y)$ telle que

$$\forall r = 1, \dots \int_{\Omega} C_{HH}(x, y) \varphi_r(y) d\Omega = \lambda_r \varphi_r(x) \quad (2.11)$$

Le spectre dénombrable $\{\lambda_r\}_{i=0}^{\infty}$ est positif borné ayant comme seul point d'accumulation 0

$$\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_i \geq \dots \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2 < \infty \quad (2.12)$$

Ses fonctions propres φ_r forment une base hilbertienne de $\mathcal{L}^2(\Omega)$

$$\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle_{\mathcal{L}^2(\Omega)} = \delta_{ij} \quad (2.13)$$

Dans cette base, le développement de $\tilde{H}(x, \theta)$ est défini comme suit

$$\tilde{H}(x, \theta) = \mu(x) + \sum_{r=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_r} \xi_r(\theta) \varphi_r(x) \quad (2.14)$$

où $\{\xi_r(\theta)\}$ sont des variables aléatoires centrées réduite décorrélées ($E(\xi_i \xi_j) = \sigma_i^2 \delta_{ij} = \delta_{ij}$), coordonnées des réalisations du champ aléatoire \tilde{H} dans l'ensemble des fonctions déterministes $\{\varphi_r\}$,

$$\xi_r(\theta) = \langle \tilde{H}, \varphi_r \rangle_{\mathcal{L}^2(\Omega)} = \int_{\Omega} \tilde{H}(x, \theta) \varphi_r(x) dx \quad (2.15)$$

Tenant compte de l'orthogonalité des fonctions propres, chaque variable aléatoire $\xi_r(\theta)$ est exprimée par

$$\xi_r(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_r}} \int_{\Omega} [H(x, \theta) - \mu(x)] \varphi_r(x) d\Omega \quad (2.16)$$

La troncature à l'ordre d mène à l'approximation de Karhunen-Loève du champ aléatoire \tilde{H}

$$\tilde{H}(x, \theta) \cong \mu(x) + \sum_{r=1}^d \sqrt{\lambda_r} \xi_r(\theta) \varphi_r(x) \quad (2.17)$$

La variance de l'erreur obtenue après troncature à l'ordre d est définie par

$$Var[H(x) - \tilde{H}(x)] = \sigma^2(x) - \sum_{r=1}^d \lambda_r \varphi_r^2(x) = Var[H(x)] - Var[\tilde{H}(x)] \geq 0 \quad (2.18)$$

La discrétisation de Karhunen-Loève est utilisée dans ce mémoire pour la décomposition des champs aléatoires dans la méthode intrusive de Galerkin détaillée dans la **section 2.3.4**.

2.2.3. Propagation des incertitudes

Dans le cadre de l'approche probabiliste paramétrique, une variété de méthodes de propagation des incertitudes existe dans la littérature. Des revues détaillées de ces méthodes peuvent être consultées dans [2, 14, 15, 16]. Ces méthodes sont classées en méthodes statistiques et méthodes non statistiques. On s'intéresse dans cette section à présenter brièvement les méthodes statistiques de Monte Carlo (MC) et du Latin Hypercube (LHS pour Latin Hypercube Sampling) et on consacrera la **section 2.3** à la présentation de la méthode non statistique du chaos polynomial généralisé (gPC : generalized Polynomial Chaos).

2.2.3.1. Méthode de Monte Carlo

La méthode MC est très répandue grâce à la simplicité de son application [17, 18]. Elle consiste à effectuer des résolutions déterministes successives correspondant à un nombre de variables aléatoires tirées aléatoirement suivant la ou les distributions de probabilité choisies des jeux de valeurs des paramètres incertains afin de reconstruire la réponse du système de manière statistique. Les réponses aléatoires en résultats sont enfin analysées et une caractérisation statistique est effectuée quantifiant l'effet des incertitudes d'entrée sur les réponses en sortie.

Les simulations de MC sont des méthodes d'estimation d'intégrales multidimensionnelles par des espérances mathématiques. En effet, l'intégrale I à d dimensions

$$I = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} p_X(x) \frac{f(x)}{p_X(x)} dx = \int_{\mathbb{R}^d} g(x) p_X(x) dx \quad (2.19)$$

où $f(x)$ est une fonction de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R} , $x = (x_1, x_2, \dots, x_d)$ est un vecteur à d dimensions, $p_X(x)$ est la densité de probabilité d'une variable aléatoire X , $p_X(x) \geq 0$ et $\int p_X(x) dx = 1$ et $g(x)$ est dite la fonction poids de MC.

La méthode MC directe permet d'écrire l'intégrale I sous la forme

$$I = E[g(X)] = E[Y] \quad (2.20)$$

I est l'espérance de Y transformée de la variable aléatoire X par la fonction g . Elle permet de générer n variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de densité de probabilité p_X pour estimer l'intégrale I par

$$\hat{I}_{MC} = \frac{S_N}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(X_i) \xrightarrow{p.s.} I \quad \text{quand } N \rightarrow \infty \quad (2.21)$$

La vitesse de convergence de la méthode MC est de l'ordre de $(1/\sqrt{N})$.

La méthode MC présente un grand nombre d'avantages : la précision, le peu d'exigence en termes d'hypothèses sur le modèle, l'insensibilité à la dimension et la géométrie du problème, la facilité d'implémentation, etc. En ingénierie des systèmes mécaniques, elle est souvent considérée comme une référence.

L'inconvénient majeur de la méthode MC est sa vitesse de convergence lente $(1/\sqrt{N})$ ne permettant pas d'obtenir un résultat de bonne précision sans avoir procédé à un nombre élevé de tirages conduisant à un effort calculatoire important. Ceci est extrêmement coûteux en terme de temps de calcul, surtout lorsque la taille et la complexité des modèles augmentent.

Dans le but d'améliorer cette méthode et de viser à optimiser sa stratégie de tirage pour accélérer sa convergence plusieurs techniques sont introduites. Parmi ces dernières, on peut citer les techniques de réduction de la variance (Importance sampling) [19], les chaînes de Markov (MCMC) [20], la méthode Quasi-Monte Carlo (QMC) [21] et la technique du Latin Hypercube, dite aussi de MC accélérée, introduite par McKay [22].

2.2.3.2. Méthode du Latin Hypercube

La méthode LHS [22, 23] permet de réduire le nombre de tirages en divisant le domaine de définition de chaque variable aléatoire en n intervalles équiprobables et en tirant aléatoirement une valeur sur chacun de ces intervalles. Les n valeurs ainsi tirées pour chaque variable aléatoire sont groupées aléatoirement avec les n valeurs tirées pour l'autre, et ainsi de suite. La même procédure est effectuée pour les d variables aléatoires du problème menant aux n tirages finalement utilisés pour calculer la réponse. Ce nombre de tirages n est bien plus faible que celui requis avec une méthode MC classique ($n \ll N$) pour un même niveau de convergence.

L'estimateur de l'intégrale I (2.19) est dans ce cas

$$\hat{I}_{LHC} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(X_i) \quad (2.22)$$

Grace à la simplicité de leur implémentation et leur précision, les méthodes MC et LHS sont considérées, le long de ce travail, comme référence.

2.3. Chaos Polynomial généralisé (gPC)

2.3.1. Historique et applications

Le passage du «Chaos Polynomial Homogène» (PC : Polynomial Chaos) ou Chaos de Wiener [24] au «Chaos Polynomial généralisé» (gPC) ou Chaos d'Askey est effectué par le biais de la généralisation de la base polynomiale utilisée ne comportant que les polynômes d'Hermite à une base s'étendant à divers types de polynômes. Par conséquent, ceci permet la quantification et la propagation des incertitudes modélisées par des distributions de probabilité gaussienne et non gaussiennes. Et c'est grâce à Xiu et Karniadakis [25] que cette généralisation a vu le jour.

En effet, selon le théorème de Cameron-Martin [26] la convergence des approximations de la solution par les polynômes d'Hermite est lente pour le cas d'usage des variables non gaussiennes. Pour pallier à cette difficulté, il a été incontournable d'étendre l'étude à l'emploi d'autres bases polynomiales, et ainsi, le théorème de Cameron-Martin est généralisé et une convergence optimale pourrait être atteinte en choisissant convenablement la base. Ce choix peut, en fait, être effectué parmi les polynômes hypergéométriques du schéma d'Askey [27]. Dans ce cadre, il existe une correspondance entre la densité de probabilité des entrées aléatoires et les fonctions poids des polynômes orthogonaux.

La méthode du gPC a été mise en œuvre dans plusieurs domaines de l'ingénierie. Xiu et Karniadakis [28] étaient les premiers à l'avoir appliqué en mécanique des fluides, particulièrement pour les simulations des écoulements en présence d'incertitude. En chimie, Du et al. [29] l'ont utilisée dans le cadre de la détection et la diagnostique des défauts. La méthode a été également implémentée pour la résolution d'équations différentielles stochastiques ordinaires [30, 31], et partielles [32]. En dynamique des structures linéaires, le

gPC a été appliqué par Kewlani et al. [33], Sepahvand et al. [34] et Sarrouy et al. [35] pour l'analyse, respectivement, des réponses dynamiques stochastique des véhicules, des vibrations libres stochastiques des plaques orthotropes et du comportement stochastique des systèmes linéaires de freinage. L'analyse des fissures dans les chaînes des systèmes de rotors et l'étude de leur comportement vibratoire en présence d'incertitudes étaient aussi menées à l'aide du gPC par Sinou et al. [36, 37]. La méthode présentait aussi un outil pour l'estimation de la probabilité de collision des engins spatiaux [38], des irrégularités des voies ferrées [39], de la durée de vie orbitale des stellites [40], de l'impact des incertitudes sur les trajectoires des missiles [41, 42], etc. La méthode du gPC a été combinée avec la méthode des éléments finis ondulatoire (WFEM : Wave Finite Element Method) par Ben Souf et al. [43] dans une approche dite WFEM stochastique (SWFEM) pour l'étude du comportement ondulatoire en moyennes et hautes fréquences, en présence d'incertitudes paramétriques. En dynamique non-linéaire, la méthode a été appliquée par Sarrouy et al. pour propager les incertitudes dans les systèmes de freinage non-linéaires auto-excités [44]. Elle a été combinée avec la Méthode de la Balance Harmonique (HBM : Harmonic Balance Method) pour l'étude des systèmes de rotors non-linéaires [37, 45, 46]. Clément et al. [47] l'ont appliquée pour l'analyse multi-échelle stochastique de structures non-linéaires en matériaux hétérogènes hyper-élastiques. En fiabilité des structures [48, 49] ainsi qu'en analyse de sensibilité [50, 51, 52, 53, 54] plusieurs applications ont également été menées.

Dans cette section, on commencera par introduire quelques rappels mathématiques sur les polynômes orthogonaux du schéma d'Askey et on détaillera par la suite la formulation du gPC tout en se référant aux travaux réalisés dans [14, 25, 55, 56].

2.3.2. Fondements mathématiques

2.3.2.1. Schéma d'Askey des polynômes orthogonaux

Le schéma d'Askey [14, 25, 27, 57] arrange les polynômes orthogonaux et détermine des relations limite entre eux. Chacun de ces polynômes orthogonaux est caractérisé par une fonction poids, cette dernière peut être identique à une certaine fonction de densité de probabilité. La correspondance de ces deux types de fonctions se traduit entre:

- les polynômes d'Hermite, de Laguerre, de Jacobi et de Legendre et les distributions continues, respectivement, Gaussienne, Gamma, Beta et uniforme (**Tab.2.1**);
- les polynômes de Charlier, de Meixner, de Krawtchouk et de Hahn et les distributions discrètes, respectivement, Binomiale négative, Binomiale et Hypergéométrique.

De ce fait, la représentation des champs aléatoires par différents types de polynômes orthogonaux en fonction de leurs distributions de probabilité est aisée.

Tab.2.1. Correspondance polynômes d'Askey - distributions de variables aléatoires continues

Densité de probabilité	Polynôme d'Askey	Fonction poids	Support
Gaussienne	Hermite	$(1/\sqrt{2\pi})e^{-\frac{x^2}{2}}$	$]-\infty, +\infty[$
Exponentielle	Laguerre	e^{-x}	$[0, +\infty[$
Gamma	Laguerre généralisé	$x^\alpha e^{-x}$	$[0, +\infty[$
Beta	Jacobi	$(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$	$[a, b]$
Uniforme	Legendre	1	$[a, b]$

Mathématiquement, l'ensemble des polynômes $\{\phi_m, m = 0, 1, \dots, M\}$ de degré maximal p sont dits deux à deux orthogonaux par rapport à la fonction poids $\rho(\xi)$ si

$$\langle \phi_m, \phi_n \rangle = \|\phi_m\|^2 \delta_{mn} \quad (2.23)$$

où δ_{mn} est le symbole de Kronecker et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit interne dans l'espace de Hilbert de la variable ξ défini dans le cas continu et discret respectivement par

$$\langle \phi_m(\xi), \phi_n(\xi) \rangle = \int \phi_m(\xi) \phi_n(\xi) \rho(\xi) d\xi \quad (2.24)$$

$$\langle \phi_m(\xi), \phi_n(\xi) \rangle = \sum_{\xi} \phi_m(\xi) \phi_n(\xi) \rho(\xi) d\xi \quad (2.25)$$

2.3.2.2. Polynômes unidimensionnels

Les polynômes orthogonaux classiques sont solutions de l'équation différentielle du second ordre

$$a(\xi)\ddot{\phi}_m(\xi) + b(\xi)\dot{\phi}_m(\xi) - c(\xi)\phi_m(\xi) = 0 \quad (2.26)$$

Les fonctions polynomiales $a(\xi)$, $b(\xi)$ et $c(\xi)$ sont déterminées de manière unique par la fonction poids $\rho(\xi)$.

Tous les polynômes $\phi_m(\xi)$ satisfont la relation de récurrence, à trois termes, suivante

$$\phi_{m+1}(\xi) = (A_m \xi + C_m) \phi_m(\xi) - C_m \phi_{m-1}(\xi), \quad m \geq 0 \quad (2.27)$$

où $A_m, C_m \neq 0$ et $C_m A_m A_{m-1} > 0$. Avec $\phi_{-1}(\xi) = 0$, $\phi_0(\xi) = 1$ et $\phi_1(\xi) = \xi$, tous les $\phi_m(\xi)$ peuvent être déterminés par la relation de récurrence.

2.3.2.3. Polynômes multidimensionnels

Les polynômes orthogonaux $\{\phi_\alpha(\xi)\}$ N -dimensionnels sont des produits de polynômes $\phi(\xi_i)$ unidimensionnels d'ordre α_i dans chaque direction de $\xi_i, i = 1, \dots, N$, tels que

$$\phi_\alpha(\xi) = \phi_{\alpha_1}(\xi_1) \dots \phi_{\alpha_N}(\xi_N) = \prod_{i=1}^N \phi_{\alpha_i}(\xi_i) \quad (2.28)$$

Si les polynômes unidimensionnels $\phi(\xi_i)$ sont orthogonaux entre eux par rapport à $\rho_i(\xi_i)$ pour i fixé et si les variables aléatoires ξ_i sont indépendantes, alors les polynômes multidimensionnels $\{\phi_\alpha(\xi)\}$ sont orthogonaux deux à deux par rapport à la fonction poids $\rho(\xi) = \prod_{i=1}^N \rho_i(\xi_i)$ et l'espérance est donnée par

$$\begin{aligned} E[\phi_\alpha(\xi)\phi_\beta(\xi)] &= \langle \prod_{i=1}^N \phi_{\alpha_i}(\xi_i), \prod_{j=1}^N \phi_{\beta_j}(\xi_j) \rangle \\ &= \prod_{i=1}^N \langle \phi_{\alpha_i}(\xi_i), \phi_{\beta_j}(\xi_j) \rangle \\ &= \int \phi_\alpha(\xi)\phi_\beta(\xi)\rho(\xi)d\xi \\ &= \delta_{\alpha\beta}, \quad \forall 1 \leq \alpha, \beta \leq D \end{aligned} \quad (2.29)$$

La dimension D de la base polynomiale est le nombre total des polynômes qu'elle contient, exprimé par la fonction factorielle

$$D = \binom{N+p}{N} = C_{N+p}^N = \frac{(N+p)!}{N!p!} \quad (2.30)$$

2.3.2.4. Polynômes d'Hermite

Les polynômes d'Hermite peuvent être utilisés comme base du chaos polynomial généralisé en effectuant des transformations sur les variables d'entrées de distributions de probabilité quelconques en variables aléatoires gaussiennes. Des techniques de transformation ont été présentées par Devroye [58] et le tableau 2.2 en présente quelques exemples.

Tab.2.2. Transformation de variables aléatoires en fonction de Gaussiennes centrées réduites avec

$$erf(X) = (2/\sqrt{\pi}) \int_0^X e^{-t^2} dt$$

Densité de probabilité	Transformation
Gaussienne (μ, σ)	$\mu + \sigma\xi$
Log-normale (μ, σ)	$exp(\mu + \sigma\xi)$
Exponentielle (λ)	$-1/\lambda \log(0.5(1 + erf(\xi/\sqrt{2})))$
Gamma (a, b)	$ab(\xi\sqrt{1/9a} + 1 - 1/9a)^3$
Uniforme (a, b)	$a + 0.5(b - a)(1 + erf(\xi/\sqrt{2}))$

2.3.3. Expansion du chaos polynomial généralisé

2.3.3.1. Expansion de dimension infinie

Se plaçant dans l'espace de probabilité (Θ, \mathcal{F}, P) , tout champs aléatoire du second ordre $X(\theta) \in \mathcal{L}^2(\Theta, \mathcal{F}, P)$ peut être représenté sous la forme

$$\begin{aligned}
X(\theta) = & x_0 \Psi_0 + \sum_{i_1=1}^{\infty} x_{i_1} \Psi_1(\xi_{i_1}(\theta)) + \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{i_1} x_{i_1 i_2} \Psi_2(\xi_{i_1}(\theta), \xi_{i_2}(\theta)) \\
& + \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{i_1} \sum_{i_3=1}^{i_2} x_{i_1 i_2 i_3} \Psi_3(\xi_{i_1}(\theta), \xi_{i_2}(\theta), \xi_{i_3}(\theta)) + \dots
\end{aligned} \tag{2.31}$$

où $\Psi_n(\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_n})$ représente le chaos polynomial généralisé d'ordre n , en termes de variables aléatoires de dimension infinie, dépendant des événements aléatoires $\theta \in \Theta$ de l'espace de probabilité (Θ, \mathcal{F}, P) .

Pour simplifier la notation, l'équation (2.31) est réécrite sous la forme

$$X = \sum_{j=0}^{\infty} x_j \Phi_j(\xi) \tag{2.32}$$

tenant compte des correspondances entre $\Psi_n(\xi_1, \dots, \xi_n)$ et $\Phi_j(\xi)$ et où x_j sont les modes stochastiques du champs aléatoire X et Φ_j sont les polynômes orthogonaux satisfaisant les relations d'orthogonalité (2.23).

2.3.3.2. Expansion de dimension finie : troncature

En pratique, la taille des $\xi(\theta)$ est limitée à un certain d fini, ce qui entraîne $\xi(\theta) \approx \xi(\theta)^d = \{\xi_1(\theta), \dots, \xi_d(\theta)\}$ et l'ordre maximal des polynômes de chaos doit être fixé à un ordre fini p , tel qu'on garde seulement les termes d'ordre inférieur ou égal, selon les exigences en précision. On obtient ainsi

$$X = \sum_{j=0}^P x_j \Phi_j(\{\xi_i(\theta)\}_{i=1}^d) \tag{2.33}$$

Dans ce cas, le nombre total de termes dans une expansion de chaos à polynômes d'ordre maximal p fonctions de d variables aléatoires $\{\xi_i(\theta)\}_{i=1}^d$ est donné par

$$P + 1 = 1 + \sum_{s=1}^P \frac{1}{s!} \prod_{n=0}^{s-1} (d + n) = \frac{(d+p)!}{d!p!} \tag{2.34}$$

qui est égal au nombre d'inconnues x_j . Notons que dans les expansions unidimensionnelles ($d = 1$), $p = P$.

2.3.3.3. Exemple d'approximation

On considère un vecteur aléatoire $\tilde{y}(x, \xi)$ (vecteur des déplacements nodaux) solution du système linéaire défini par les matrices aléatoires $[\tilde{K}(x, \xi)]$ (matrice de rigidité globale), $[\tilde{M}(x, \xi)]$ (matrice de masse globale), $[\tilde{B}(x, \xi)]$ (matrice d'amortissement globale) et le vecteur aléatoire $\tilde{f}(x, \xi)$ (vecteur des forces nodales). L'équation modélisant ce système est de la forme

$$[\tilde{M}]\tilde{y} + [\tilde{B}]\dot{\tilde{y}} + [\tilde{K}]\tilde{y} = \tilde{f} \tag{2.35}$$

La procédure générale de l'approximation par le gPC consiste à suivre les étapes suivantes :

i. exprimer les entrées incertaines modélisées par des champs stochastiques par un nombre fini de variables aléatoires $\xi(\theta) = \{\xi_1(\theta), \dots, \xi_d(\theta)\}$ en appliquant la décomposition de

Karhunen-Loève [12]. Pour le cas général où les propriétés matérielles et le chargement ($[\tilde{K}]$, $[\tilde{B}]$, $[\tilde{M}]$ et \tilde{f}) sont incertains, on a :

$$\begin{aligned} [\tilde{K}] &= \sum_{i=1}^{d_1} [K_i(x)](\xi_1)_i; \quad [\tilde{B}] = \sum_{i=1}^{d_2} [B_i(x)](\xi_2)_i; \quad [\tilde{M}] = \sum_{i=1}^{d_3} [M_i(x)](\xi_3)_i; \\ \tilde{f} &= \sum_{i=1}^{d_4} f_i(x)(\xi_4)_i \end{aligned} \quad (2.36)$$

avec $\{(\xi_s)_i\}_{i=1}^{d_s}$ d_s variables aléatoires de lois de probabilité données, modélisant l'incertitude du paramètre s ;

ii. approximer la solution \tilde{y} par une expansion du gPC tronquée à un nombre fini de termes telle que

$$\tilde{y} = \sum_{j=0}^P y_j(x) \Phi_j(\xi) \quad (2.37)$$

iii. calculer les coefficients (les modes stochastiques) y_j de l'expansion.

2.3.3.4. Calcul des coefficients de l'expansion

Pour calculer les coefficients de la solution obtenue par l'expansion du gPC, appelés aussi modes stochastiques, deux principales approches sont envisagées : l'approche intrusive et l'approche non intrusive [49]. L'application de la première implique la définition d'un nouveau système d'équations déterministes couplant les modes stochastiques. Ce nouveau système est significativement plus large que le système original et est généralement résolu en utilisant un code numérique différent. La deuxième s'applique en rassemblant un ensemble de réalisations du système original, correspondant à des échantillons particuliers des paramètres aléatoires. Dans ce cas, le modèle original est utilisé comme « boîte noire ».

Les sections 2.3.4 et 2.3.5 seront consacrées à présenter un état de l'art non exhaustif de ces deux approches.

2.3.4. Approche intrusive

2.3.4.1. Principe et applications

L'approche intrusive se sert de la technique de projection de Galerkin pour calculer les coefficients de l'expansion du gPC en exprimant le système stochastique sous forme d'un système d'équations déterministes couplant les différents modes stochastiques et conservant les mêmes propriétés de linéarité du système original.

Une première mise en œuvre de l'approche était proposée dans le cadre de la Méthode des Eléments Finis Stochastique Spectrale (MEFSS) [13] pour la résolution de problèmes mécaniques linéaires à coefficients spatialement aléatoires discrétisés par la méthode de Karhunen-Loève. Son formalisme était limité à la propagation des incertitudes modélisées par des variables aléatoires gaussiennes via le chaos homogène à base polynomiale Hermiteenne. La méthode a été appliquée par la suite en fiabilité des structures [10, 59], à la résolution des équations différentielles partielles elliptiques [60], à l'analyse des écoulements fluides [61] et

des interactions sismiques [62]. En généralisant le chaos polynomial, la méthode de Galerkin a été mise en œuvre pour la résolution des équations aléatoires de diffusion [63], des équations de Navier-Stokes [64] et des équations différentielles non-linéaires [30]. Des applications diverses en dynamique des structures linéaires [42] et non-linéaires [36, 37, 45, 46, 65, 66] ont également été basées sur la méthode intrusive de Galerkin.

Pour appliquer l'approche intrusive, trois étapes principales sont à suivre :

- i. remplacer les expansions du gPC (2.33) dans (2.35) ;
- ii. calculer les coefficients y_j à partir des valeurs connues des coefficients $[K_i]$, $[B_i]$, $[M_i]$ et $\{f_i\}$. Pour ce faire, on effectue une projection de Galerkin qui consiste à multiplier les deux membres de l'équation (2.35) par les différents polynômes Φ_j de la base choisie et faire la moyenne en utilisant la relation d'orthogonalité des polynômes de la base du gPC ;
- iii. résoudre un système de $(P + 1)$ équations déterministes couplant les modes stochastiques de la solution. Si le système déterministe de base comprend N degrés de liberté (ddl), alors le système couplé comprend $(P + 1) \times N$ équations.

2.3.4.2. Formulation dans le domaine fréquentiel

On considère le même cas de système linéaire, dont le comportement est modélisé par l'équation (2.35). Dans le domaine fréquentiel, en suivant les étapes mentionnées ci-dessus, cette équation est réécrite, en fonction de la pulsation ω , sous la forme matricielle

$$[D + A]y_j = b \quad (2.38)$$

avec $[D]$ une matrice diagonale par blocs, et $[A]$ une matrice creuse telles que

$$\begin{aligned} [D]_{jj} &= ([K_0] + j\omega[B_0] - \omega^2[M_0])\langle \Phi_j^2 \rangle \\ &= \begin{bmatrix} D_{0,0} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & D_{P,P} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.39)$$

$$\begin{aligned} [A]_{jk} &= \sum_{i=1}^{d_1} [K_i](c_1)_{ijk} + j\omega \sum_{i=1}^{d_2} [B_i](c_2)_{ijk} - \omega^2 \sum_{i=1}^{d_3} [M_i](c_3)_{ijk} \\ &= \begin{bmatrix} A_{0,0} & \dots & A_{0,P} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{P,0} & \dots & A_{P,P} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.40)$$

avec

$$(c_s)_{ijk} = E[(\xi_s)_i \Phi_j \Phi_k] = \langle (\xi_s)_i \Phi_j \Phi_k \rangle \quad (2.41)$$

A noter bien que les valeurs de $\langle \Phi_j^2 \rangle$ et $\langle (\xi_s)_i \Phi_j \Phi_k \rangle$ ne doivent être calculées qu'une seule fois, et gardées en mémoire pour tous les calculs utilisant cette méthode et que, du fait de l'orthogonalité des polynômes, la plupart des expressions $\langle (\xi_s)_i \Phi_j \Phi_k \rangle$ sont nulles.

2.3.4.3. Formulation dans le domaine temporel

Pour procéder à la résolution du système dynamique dans le domaine temporel, la méthode d'intégration temporelle de type Newmark [67] est utilisée. Le procédé de résolution temporelle par le schéma de Newmark [Annexe] consiste à discrétiser le temps afin d'évaluer l'état du système (déplacement, vitesse et accélération) à l'instant t_{n+1} connaissant son état à un instant antérieur t_n .

L'équation de mouvement, à l'instant t_{n+1} , est donnée par

$$[M]\tilde{y}_{n+1} + [B]\dot{\tilde{y}}_{n+1} + [K]\tilde{y}_{n+1} = \tilde{f}_{n+1} \quad (2.42)$$

avec les conditions initiales sur le déplacement et la vitesse : $y(0) = y_0, \dot{y}(0) = \dot{y}_0$. L'application de la méthode d'intégration temporelle de Newmark mène à l'écriture

$$\begin{aligned} ([\tilde{K}] + a_0[\tilde{M}] + a_1[\tilde{B}])\tilde{y}_{n+1} &= \tilde{f}_{n+1} + [\tilde{B}](a_1\tilde{y}_n + a_4\dot{\tilde{y}}_n + a_5\ddot{\tilde{y}}_n) \\ &+ [\tilde{M}](a_0\tilde{y}_n + a_2\dot{\tilde{y}}_n + a_3\ddot{\tilde{y}}_n) \end{aligned} \quad (2.43)$$

Tenant compte des décompositions (2.36) des matrices selon la technique de Karhunen-Loève et de l'expansion du gPC de la réponse, en multipliant par Φ_j et en faisant la moyenne, on obtient l'équation

$$(D_1 + A_1)y_{n+1} = E f_{n+1} + (D_2 + A_2)y_n + (D_3 + A_3)\dot{y}_n + (D_4 + A_4)\ddot{y}_n \quad (2.44)$$

où D_s sont des matrices diagonales par blocs et $A_s, s = 1 \dots 4$, des matrices creuses telles que

$$\begin{cases} [D_1]_{jj} = ([K_0] + a_0[M_0] + a_1[B_0])\langle \Phi_j^2 \rangle \\ [D_2]_{jj} = (a_0[M_0] + a_1[B_0])\langle \Phi_j^2 \rangle \\ [D_3]_{jj} = (a_2[M_0] + a_4[B_0])\langle \Phi_j^2 \rangle \\ [D_4]_{jj} = (a_3[M_0] + a_5[B_0])\langle \Phi_j^2 \rangle \end{cases} \quad (2.45)$$

$$\begin{cases} [A_1]_{jk} = \sum_{i=1}^{d_1} [K_i] \langle (\xi_1)_i \Phi_j \Phi_k \rangle + a_0 \sum_{i=1}^{d_3} [M_i] \langle (\xi_3)_i \Phi_j \Phi_k \rangle + \sum_{i=1}^{d_2} [B_i] \langle (\xi_2)_i \Phi_j \Phi_k \rangle \\ [A_2]_{jk} = a_0 \sum_{i=0}^{d_3} [M_i] \langle (\xi_3)_i \Phi_j \Phi_k \rangle + a_1 \sum_{i=0}^{d_4} [B_i] \langle (\xi_4)_i \Phi_j \Phi_k \rangle \\ [A_3]_{jk} = a_2 \sum_{i=0}^{d_3} [M_i] \langle (\xi_3)_i \Phi_j \Phi_k \rangle + a_4 \sum_{i=0}^{d_4} [B_i] \langle (\xi_4)_i \Phi_j \Phi_k \rangle \\ [A_4]_{jk} = a_3 \sum_{i=0}^{d_3} [M_i] \langle (\xi_3)_i \Phi_j \Phi_k \rangle + a_5 \sum_{i=0}^{d_4} [B_i] \langle (\xi_4)_i \Phi_j \Phi_k \rangle \end{cases} \quad (2.46)$$

$$E = \langle (\xi_4)_i \Phi_j \rangle \quad (2.47)$$

2.3.4.4. Limitations

Les principales limitations de la méthode intrusive de Galerkin est la dimension du système incertain (le nombre de ses ddls et de ses paramètres incertains) qui rend le calcul prohibitif. En effet, le modèle original est transformé en un système d'équations déterministes dont la taille et la complexité dépendent sensiblement du nombre de paramètres incertains et du nombre de ddls du modèle original. Cette dépendance engendre l'explosion de la

dimension du système résultant. En outre, le passage qu'exige cette approche d'un système stochastique à un système déterministe implique des modifications pénibles de l'algorithme de résolution numérique existant selon les exigences particulières de chaque problème.

Pour contourner ces difficultés, des stratégies d'optimisation se basant sur la réduction de la base ont été proposées. Dans ce cadre a été introduite la méthode de la base stochastique réduite [68] qui consiste à projeter la réponse du modèle sur une base stochastique réduite d'un sous-espace de Krylov définie a priori. Nouy [69] a introduit la méthode de décomposition spectrale généralisée (GSD : Generalized Spectral Decomposition) qui construit la base réduite de manière itérative.

2.3.5. Approche non intrusive

« Boite noire », la notion souvent rencontrée dans la littérature pour désigner l'approche non intrusive, renseigne qu'aucune modification ou manipulation n'intervient dans le calcul des coefficients du modèle incertain initial [11, 15, 49, 70, 71, 72]. En fait, il s'agit d'effectuer un certain nombre de calculs déterministes permettant d'obtenir des solutions en un nombre fini de points du domaine de variabilité probabiliste.

Deux catégories de méthodes sont distinguées, à savoir :

- une approche interpolative, connue par la méthode de collocation stochastique, dans laquelle l'approximation polynomiale doit s'adapter exactement à la réponse du modèle pour un ensemble de points approprié;
- une approche non interpolative, dans laquelle les coefficients du gPC sont calculés par deux techniques: la projection spectrale de la solution aléatoire dans la base du chaos polynomial et la régression basée sur la minimisation au sens des moindres carrés de l'écart entre la solution exacte et son approximation dans la base du chaos polynomial.

2.3.5.1. Méthode de collocation

La méthode de collocation s'appuie sur une interpolation polynomiale de la réponse du modèle sur un ensemble approprié de réalisations du vecteur aléatoire $\{\xi^{(n)}\}_{n=1}^N$ appelées points de collocation dont des poids $\rho^{(n)}$ de collocation sont associés. En effet, pour chaque réalisation, la solution approximative est égalisée à la solution exacte

$$y^{(n)} = \tilde{y}(\xi^{(n)}), \quad \forall n = 1, \dots, N \quad (2.48)$$

où $\{y^{(n)}\}_{n=1}^N$ sont les évaluations correspondantes de la réponse du modèle. Pour ce faire, il s'agit de chercher un polynôme d'interpolation permettant de vérifier cette égalité si les N points de collocation sont donnés. Sinon, une forme polynomiale de l'interpolant est fixée et les points de collocation permettant de déterminer de manière unique cette interpolation sont calculés.

Par conséquent, les coefficients de l'approximation sont solution d'un système linéaire à N équations et $(P + 1)$ inconnues

$$\begin{bmatrix} \Phi_0(\xi^{(1)}) & \dots & \Phi_P(\xi^{(1)}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_0(\xi^{(N)}) & \dots & \Phi_P(\xi^{(N)}) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^{(1)} \\ \vdots \\ y^{(N)} \end{pmatrix} \quad (2.49)$$

Pour que la solution de ce système existe, on exige d'avoir $N \leq (P + 1)$ fonctions polynomiales.

Les coefficients de l'expansion du gPC sont alors calculés

$$\tilde{y}_j = \sum_{n=1}^N \tilde{y}(\xi^{(n)}) \Phi_j(\xi^{(n)}) \rho^{(n)} \quad , \quad j = 0, \dots, P \quad (2.50)$$

L'effort calculatoire majeur est lié aux résolutions déterministes répétitives pour un nombre fini de points de collocation. Les difficultés majeures sont liées au nombre de résolutions imposé par la taille du chaos polynomial et l'hypothèse contraignante d'égalité entre les solutions exacte et approximative aux points de collocation.

A noter que les méthodes d'échantillonnage statistiques (MC, LHS, etc.) peuvent être considérées comme des méthodes de collocation dans le sens qu'elles vérifient le système d'équations régissant le modèle sur tous les échantillons.

Dans la littérature, la méthode de collocation a été mise en œuvre pour l'analyse de fiabilité des structures [49, 73], pour la résolution des équations différentielles [74, 75, 76, 77] et pour l'étude des lois de conservation stochastiques avec viscosité aléatoire [78].

2.3.5.2. Méthode de projection spectrale

La méthode de projection spectrale [51, 79, 80, 81] exploite les propriétés d'orthogonalité de la base du gPC pour calculer les coefficients à partir de quelques évaluations du modèle. En effet, en multipliant les deux parties, gauche et droite, de l'expansion (2.35) par $\Phi_k(\xi)$ et en effectuant la moyenne, on obtient

$$\langle y(\xi), \Phi_k(\xi) \rangle = \sum_{j=0}^P y_j \langle \Phi_j(\xi), \Phi_k(\xi) \rangle \quad (2.51)$$

Exploitant les propriétés d'orthogonalité (2.23), les coefficients y_j peuvent être calculés par

$$y_j = \frac{\langle y(\xi), \Phi_k(\xi) \rangle}{\langle \Phi_j(\xi), \Phi_k(\xi) \rangle} \quad , \quad \forall j = 1, \dots, P. \quad (2.52)$$

Dans cette expression, le dénominateur est déjà connu et le numérateur peut être calculé par l'intégrale multidimensionnelle

$$\langle y(\xi), \Phi_k(\xi) \rangle = E[y(\xi) \Phi_k(\xi)] = \int_{\xi} y(\xi) \Phi_k(\xi) p(\xi) d\xi \quad (2.53)$$

estimée dans la pratique par la somme pondérée

$$\langle y(\xi), \Phi_k(\xi) \rangle = \sum_{n=1}^N y(\xi^{(n)}) \Phi_k(\xi^{(n)}) \rho^{(n)} \quad (2.54)$$

Les techniques d'approximation de (2.54) diffèrent par le choix des poids $\rho^{(n)}$ et des points $\xi^{(n)}$ d'intégration. Ces techniques peuvent être de simulation ou de quadrature.

- **Technique de simulation**

A faible vitesse de convergence, cette technique repose sur le choix de N points d'intégration aléatoire $\xi^{(n)}$ et les poids d'intégration définis par $\rho^{(1)} = \dots = \rho^{(N)} = 1/N$ tel que

$$y_n \approx \tilde{y}_n = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N y(\xi^{(n)}) \Phi_k(\xi^{(n)}) \quad (2.55)$$

- **Technique de quadrature**

Se basant sur l'usage des polynômes orthogonaux de la base du gPC, la formule de quadrature Q , à niveau s , peut être exprimée, dans le cas unidimensionnel, sous la forme

$$Q_s^1 \approx \sum_{n=1}^N y(\xi^{(n)}) \Phi_k(\xi^{(n,s)}) \rho^{(n,s)} \quad (2.56)$$

et dans le cas d -dimensionnel ($\{\xi_i\}_{i=1}^d$) sous la forme

$$\begin{aligned} Q_s^d &= (Q_s^1 \otimes \dots \otimes Q_s^d) = \sum_{i_1=1}^N \dots \sum_{i_d=1}^N U(\xi^{i_1}, \dots, \xi^{i_d}) \Phi_l(\xi^{i_1}, \dots, \xi^{i_d}) \rho^{i_1} \dots \rho^{i_d} \\ &= \sum_{i_1=1}^N \dots \sum_{i_d=1}^N f(\xi^{i_1}, \dots, \xi^{i_d}) \rho^{i_1} \dots \rho^{i_d} \end{aligned} \quad (2.57)$$

Ce produit tensoriel exige N^d calculs qui augmentent exponentiellement avec le nombre d de variables aléatoires et exigent par conséquent un effort calculatoire prohibitif. Pour contourner ce problème, les schémas de quadrature creux [82] sont introduits et le coût d'implémentation n'augmente plus exponentiellement (N^d) avec la dimension d mais de sorte que

$$N \sim \frac{2^p}{p!} d^p \quad (2.58)$$

2.3.5.3. Méthode de régression

Localiser un ensemble discret de points spécifiques dans l'espace aléatoire correspondant afin d'atteindre une précision maximale sur les coefficients de la solution est le point fort de la méthode de régression [11, 48, 50, 73, 83, 84, 85]. De ce fait, seuls quelques coefficients qui sont importants pour un problème donné sont à calculer. Pour ce faire, la différence entre la solution exacte et la solution approximative obtenue par l'expansion du gPC doit être minimisée. Ceci revient à calculer les coefficients du gPC qui minimisent l'erreur quadratique moyenne de l'approximation de la réponse du modèle.

$$\Delta y = \sum_{n=1}^N [y^{(n)} - \tilde{y}(\xi^{(n)})]^2 \quad (2.59)$$

entre N échantillons de la solution exacte $y^{(n)}$, $n = 1 \dots N$ et la solution approximative $\tilde{y}(\xi^{(n)})$. L'ensemble $\{\xi^{(n)}\}_{n=1}^N$ de N réalisations de la variable aléatoire est appelé plan d'expérience.

Les coefficients du gPC sont ainsi solution du système

$$(\Phi^T \Phi) \tilde{y} = \Phi^T y \quad (2.60)$$

où la matrice Φ est définie par

$$\Phi_{nj} \equiv \left(\Phi_j(\xi^{(n)}) \right)_{\substack{n=1,\dots,N \\ j=0,\dots,P}} \quad (2.61)$$

Le système (2.60) peut être réécrit sous la forme

$$\begin{bmatrix} \sum_{n=1}^N \Phi_0(\xi^{(n)})\Phi_0(\xi^{(n)}) & \dots & \sum_{n=1}^N \Phi_0(\xi^{(n)})\Phi_P(\xi^{(n)}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{n=1}^N \Phi_P(\xi^{(n)})\Phi_0(\xi^{(n)}) & \dots & \sum_{n=1}^N \Phi_P(\xi^{(n)})\Phi_P(\xi^{(n)}) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{n=1}^N y^{(n)}\Phi_0(\xi^{(n)}) \\ \vdots \\ \sum_{n=1}^N y^{(n)}\Phi_P(\xi^{(n)}) \end{pmatrix} \quad (2.62)$$

où la matrice, à gauche, de taille $(P + 1) \times (P + 1)$, dite de données ou informative, est indépendante du problème mécanique en considération puisqu'elle est fonction seulement de la base polynomiale choisie et est à calculer une fois pour tout le calcul.

La résolution du système (2.60) mène au calcul des coefficients de l'expansion pour chaque point par

$$\tilde{y} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T y = \Phi^+ y \quad (2.63)$$

où Φ^+ est la pseudo-inverse de Moore-Penrose de la matrice Φ .

Une condition nécessaire pour que la solution de ce système existe est que la taille N du plan d'expérience $\{\xi^{(n)}\}_{n=1}^N$ ne doit en aucun cas être inférieure au nombre $(P + 1)$ de coefficients ($N \geq P + 1$). La principale difficulté de cette technique est le choix des points du plan d'expérience.

Pour choisir le plan d'expérience $\{\xi^{(n)}\}_{n=1}^N$, deux techniques peuvent être utilisées [11, 49, 50]:

- Une technique aléatoire où les $\xi^{(n)}$ sont générées suivant la loi de probabilité de ξ en utilisant la méthode MC ou LHS.
- Une technique déterministe selon laquelle les $\xi^{(n)}$ sont choisies à l'avance comme étant les N racines d'un polynôme $\Phi(\xi)$ sous la contrainte $N \geq P + 1$

Le choix des $\{\xi^{(n)}\}_{n=1}^N$ est basé sur le critère de bon-conditionnement de la matrice $\Phi^T \Phi$.

Pour avoir une matrice bien-conditionnée, Webster [86], par exemple, a sélectionné $N = P + 1$ variables aléatoires parmi les $(p + 1)^d$ combinaisons possibles des racines du polynôme d'Hermite d'ordre $(p + 1)$ maximisant la fonction

$$\varphi_N(\xi^{(n)}) = 2\pi^{-d/2} \exp\left(-\frac{\|\xi^{(n)}\|^2}{2}\right) \quad (2.64)$$

Notons que la matrice $\Phi^T \Phi$ obtenue après avoir effectué le choix du plan d'expérience peut toujours être mal-conditionnée, ce qui implique une utilisation à posteriori

de la technique de décomposition en valeurs singulières (SVD : Singular Value Decomposition) [87] pour régulariser cette matrice.

2.3.6. Au-delà d'une expansion classique

2.3.6.1. Chaos polynomial généralisé multiéléments

Pour diminuer l'erreur et assurer la convergence du gPC dans le cas des intégrations sur une durée plus longue, l'approche dite gPC-multiélément (gPC-ME) a été introduite dans [88, 89]. Elle consiste à décomposer l'espace aléatoire en plusieurs sous-espaces ou éléments de probabilité. Pour chaque élément est définie une nouvelle variable aléatoire correspondant à une nouvelle densité de probabilité et par conséquent à une nouvelle sélection de polynômes orthogonaux. Par la suite, le gPC est appliqué élément par élément. Par conséquent, l'erreur locale peut être réduite de façon proportionnelle à la taille de l'élément, l'ordre polynomial exigé est moins élevé et l'effort calculatoire est plus raisonnable.

Dans la littérature, la méthode du gPC-ME a été utilisée par Kewlani et al. [33, 90] pour l'analyse dynamique des véhicules en présence d'incertitudes, par Nechak [65, 66] pour l'étude des oscillations de cycles limites des systèmes non-linéaires à lois de frottement incertaines, par Sarrouy et al. [35] pour l'étude d'un système non-linéaire auto-excité avec frottement et dans [91] pour l'étude des systèmes stochastiques linéaires et non-linéaires simples. Une variante de la méthode du gPC-ME basée sur l'utilisation de la technique de collocation, dite méthode de collocation probabiliste multiélément (MCP-ME) est introduite dans [92] et appliquée dans [93] pour l'étude stochastique des systèmes électromécaniques utilisés dans un navire électrique.

2.3.6.2. Chaos polynomial généralisé dépendant du temps

Dans le même objectif de contourner les erreurs de convergence du gPC en cas d'intégrations à long terme, une autre stratégie a été proposée dans [94] se basant sur l'actualisation de la base polynomiale à un certain nombre d'instants discrets pour maintenir une expansion optimale en progressant dans le temps. La nouvelle base est définie à l'instant d'actualisation à base des propriétés stochastiques de la solution à cet instant.

La méthode a été appliquée par la suite dans le cadre d'une approche hybride qui la combine avec le gPC-ME [95].

2.3.6.3. Chaos polynomial généralisé creux et adaptatif

Quel que soit le gain qu'offre une méthode de calcul des coefficients de l'expansion du gPC par rapport à une autre, en termes d'effort calculatoire, la dimension du problème augmente considérablement avec la taille du modèle et le nombre de paramètres incertains. Pour contourner cette difficulté, une stratégie de troncature basée sur le principe de « sparsity-of-effects » confirmant que la plupart des modèles sont régis par des effets principaux et des interactions d'ordre inférieur (les effets des interactions d'ordre supérieur sont généralement négligeables) est utilisée dans [96, 97, 98] pour développer une expansion creuse (sparse) du gPC. En effet, un nombre faible de coefficients non nuls sont retenus en appliquant un

algorithme de recherche incrémentale des termes significatifs dans l'expansion du gPC basé sur une technique de régression dite «Least-Angle-Regression (LAR)» [99, 100]. Ce nombre réduit de coefficients implique donc un nombre réduit d'évaluations du modèle et par conséquent un effort calculatoire réduit.

Une variété d'applications du gPC creux existe dans la littérature : en fiabilité des structures [100], en analyse de sensibilité [52, 54, 101, 102, 103], etc. D'autres extensions du gPC creux sont également introduites afin d'améliorer l'adaptabilité de la base polynomiale à divers problèmes [81, 104, 105, 106, 107]. Schobi et al. [108] ont combiné le gPC creux avec la méthode de Krigeage qui consiste à considérer que le modèle se comporte comme une réalisation d'un processus aléatoire gaussien dont les paramètres sont estimés à partir des données disponibles (paramètres d'entrée et réponses en sortie). Le nouveau méta-modèle se sert d'une technique de régression similaire à la LAR pour l'obtention d'une expansion creuse optimale.

2.3.7. Post-traitement : statistiques

Une fois, une approximation par le gPC est disponible, des statistiques de la réponse peuvent être calculées, comme la moyenne, la variance, les moments d'ordre plus élevé, les fonctions de densité, etc.

Le premier moment statistique, la moyenne, est

$$E[y] = \int (\sum_{j=0}^P y_j \Phi_j(\xi)) p(\xi) d\xi = y_0 \quad (2.65)$$

La variance de la solution peut être approximée par

$$Var(y) = E[(y - E[y])^2] \approx \sum_{j=1}^P \langle \Phi_j^2 \rangle y_j^2 \quad (2.66)$$

2.4. Simulations numériques

2.4.1. Oscillateur linéaire

2.4.1.1. Modèle et paramètres

On choisit de valider les méthodes du gPC, intrusive de Galerkin et non intrusive de régression, sur un système mécanique linéaire simple : masse-ressort-amortisseur à trois ddl (Fig.2.1) en comparaison avec les méthodes de référence MC et LHS. Les masses, les raideurs et les amortisseurs sont supposées être déterministes et identiques telles que $m = 1 \text{ kg}$, $k = 1.10^3 \text{ N.m}^{-1}$ et $c = 1 \text{ kg.s}^{-1}$, respectivement. La première raideur propre est supposée être incertaine telle que $k_s = k_0(1 + \delta_k \xi)$ où k_0 est sa moyenne valant $k_0 = 1.10^3 \text{ N.m}^{-1}$, δ_k sa dispersion et ξ est une variable aléatoire de loi de probabilité uniforme. Le système est soumis à une force excitatrice déterministe $f = 1 \text{ N}$ appliquée au ddl y_3 .

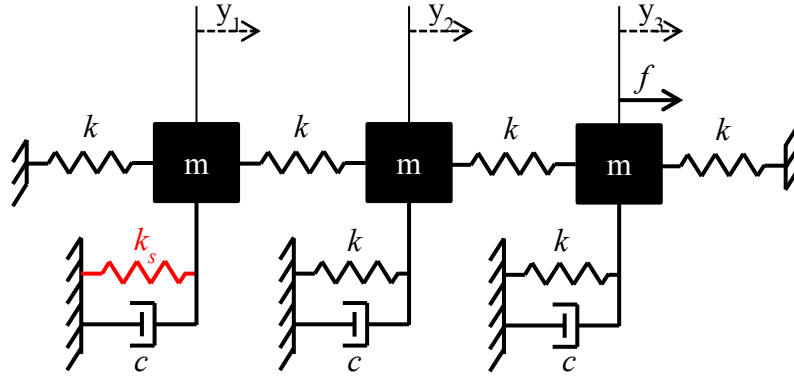


Fig.2.1. Oscillateur linéaire amorti à trois degrés de liberté

Le comportement dynamique du système est régi par l'équation différentielle

$$[M]\ddot{y}(t) + [B]\dot{y}(t) + [K_s]y(t) = f(t) \quad (2.67)$$

où $[K_s]$ est la matrice de rigidité incertaine. L'équation (2.67) peut s'écrire sous la forme

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k + k_s & -k & 0 \\ -k & 3k & -k \\ 0 & -k & 3k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ f \end{Bmatrix} \quad (2.68)$$

En régime harmonique stationnaire : $f(t) = f(\omega)e^{i\omega t}$ et $y(t) = y(\omega)e^{i\omega t}$, l'équation fréquentielle régissant le mouvement stationnaire du système est de la forme

$$([K_s] + i\omega[B] - \omega^2[M])y(\omega) = f(\omega) \quad (2.69)$$

La réponse en fréquence est donc obtenue pour chaque pulsation ω par

$$y(\omega) = [Z_s(\omega)]^{-1}f(\omega) \quad (2.70)$$

où $[Z_s(\omega)]$ est l'impédance stochastique ou raideur dynamique stochastique du système à la pulsation ω . L'inverse de la matrice $[Z_s(\omega)]$ est peu coûteuse pour les modèles de faible taille ($N < 100$). Par contre, pour les modèles de grande taille, cet inversion peut s'avérer coûteuse voire inenvisageable. Dans ce cas, on doit faire appel à des méthodes de projection modale ou de réduction de modèles pour réduire la taille de $[Z_s(\omega)]$.

2.4.1.2. Résultats et interprétations

L'effet des incertitudes sur la réponse fréquentielle du système peut être évalué à travers la comparaison des moyennes des fréquences propres du système stochastique, pour 10^4 tirages de MC et à deux niveaux de dispersion $\delta_k = 10\%$ et $\delta_k = 20\%$, aux fréquences propres du système déterministe associé. Cet effet peut aussi être déduit de la figure 2.2 où les réponses déterministes et stochastiques sont superposées.

Tab.2.3. Effet des incertitudes sur les fréquences propres du système.

N° du mode	Fréquence propres (Hz)		
	Cas déterministe	$\delta_k = 10 \%$	$\delta_k = 20 \%$
1	6.34	6.37	6.4
2	8.72	8.77	8.82
3	10.57	10.6	10.62

Partant du fait que la mise en œuvre de la méthode MC est incontournable tout au long de ce mémoire en tant que méthode de référence, une étude comparative avec la méthode LHS à 10^3 et 200 tirages est présentée en premier lieu. Ceci permettra par la suite de se contenter des résultats de cette dernière qui est moins coûteuse dans le cas des structures plus complexes. Cette comparaison est effectuée en termes de précision, moyennant les moments statistiques des amplitudes des déplacements des différents ddls, et de temps de calcul CPU (Central Processing Unit). En effet, les figures **2.2** et **2.5** présentent respectivement les moyennes et leurs erreurs pour les deux niveaux de dispersion tout en considérant les résultats de la méthode MC à 10^4 tirages comme référence.

Cette comparaison montre qu'une réduction de 90% du nombre de tirages et ainsi de 93.3% du temps de calcul (**Tab.2.4**) en passant de la méthode MC à 10^4 tirages à la méthode LHS à 10^3 tirages est obtenue avec une faible perte de précision. L'erreur est plus importante en baissant le nombre de tirages à 200 pour la méthode LHS malgré le gain qui atteint 98.7% en temps de calcul.

La figure **2.3** compare les enveloppes des réponses et prouve ainsi que la méthode LHS à 10^3 tirages couvre bien le domaine de variabilité des déplacements stochastiques. Le calcul des dispersions des déplacements présentées par la figure **2.4** permet, outre la comparaison des méthodes, d'évaluer l'effet du niveau de dispersion du paramètre stochastique sur le niveau de variabilité de la réponse. A noter que les enveloppes sont obtenues par le calcul des statistiques extrêmes et les dispersions par les ratios des écart-types par les moyennes.

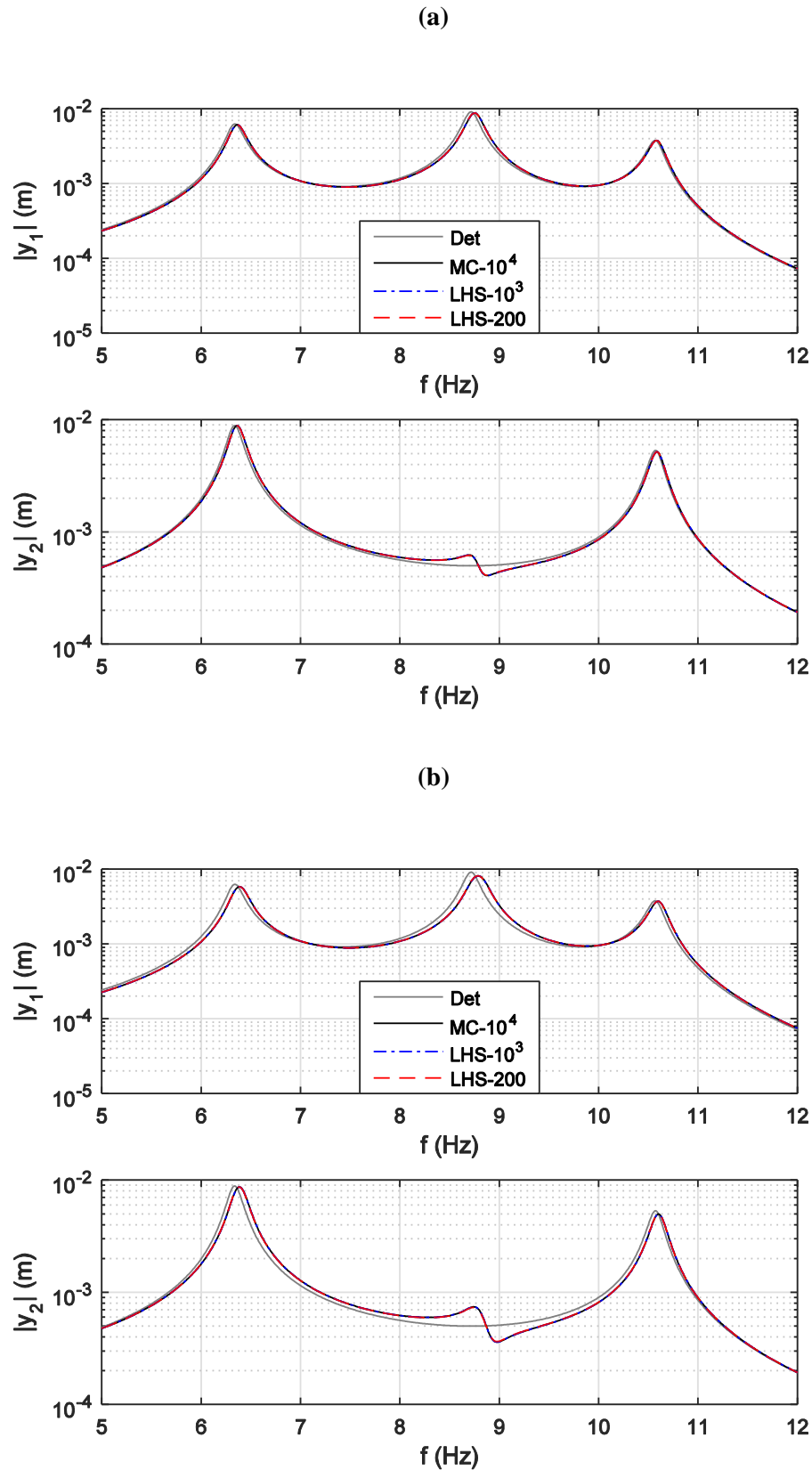


Fig.2.2. Moyennes des amplitudes des déplacements calculées par les méthodes de MC à 10^4 tirages et LHS à 10^3 et 200 tirages pour **(a)** $\delta_k = 10\%$ et **(b)** $\delta_k = 20\%$.

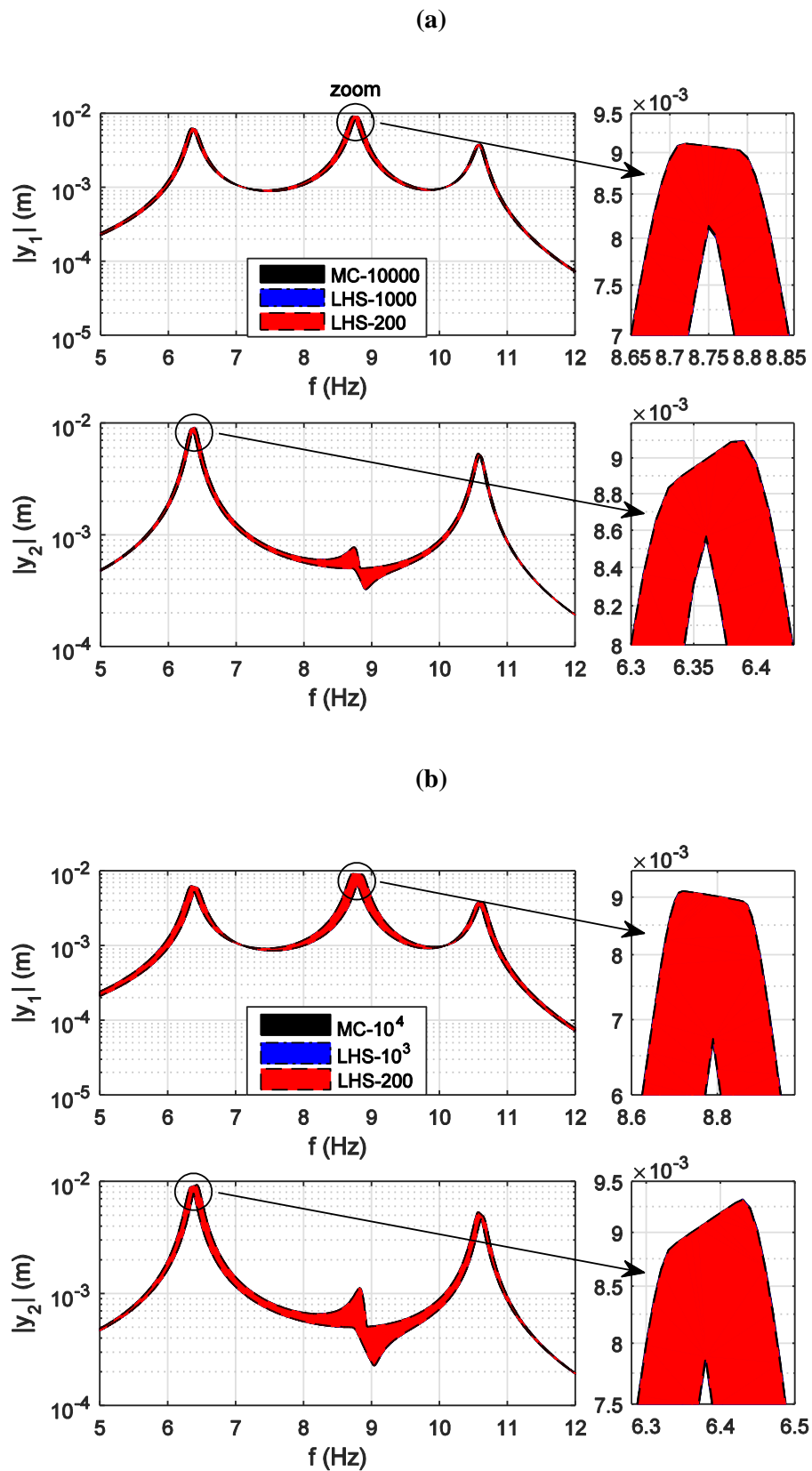


Fig.2.3. Envelopes des amplitudes des déplacements calculés par les méthodes de MC à 10^4 tirages et LHS à 10^3 et 200 tirages pour (a) $\delta_k = 10\%$ et (b) $\delta_k = 20\%$.

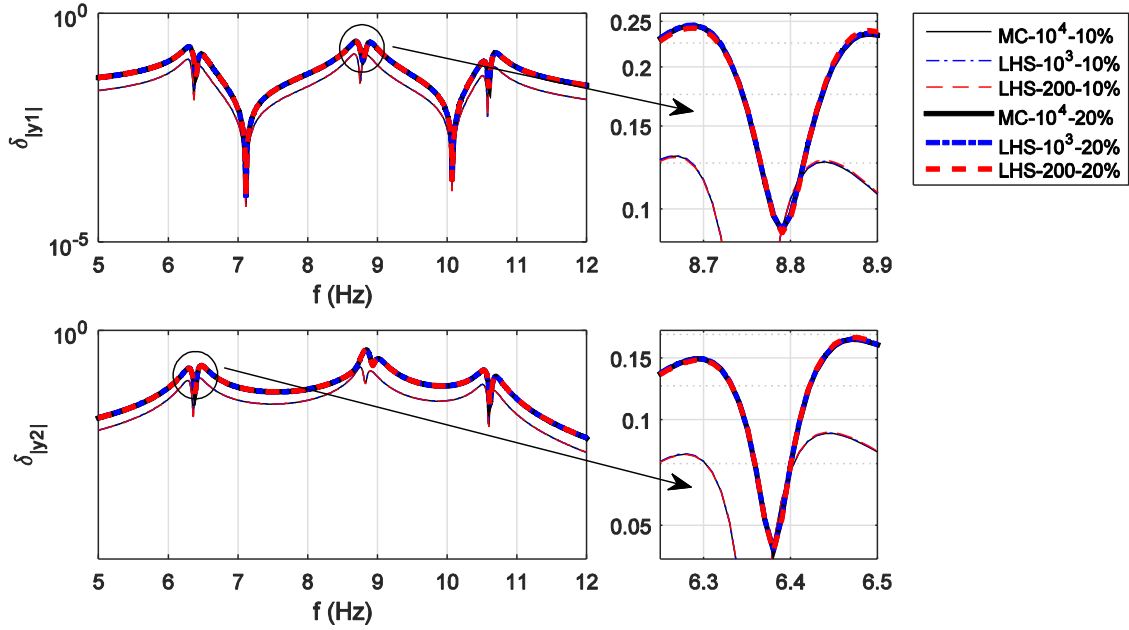


Fig.2.4. Dispersions des amplitudes des déplacements calculés par les méthodes de MC à 10^4 tirages et LHS à 10^3 et 200 tirages pour $\delta_k = 10\%$ et $\delta_k = 20\%$.

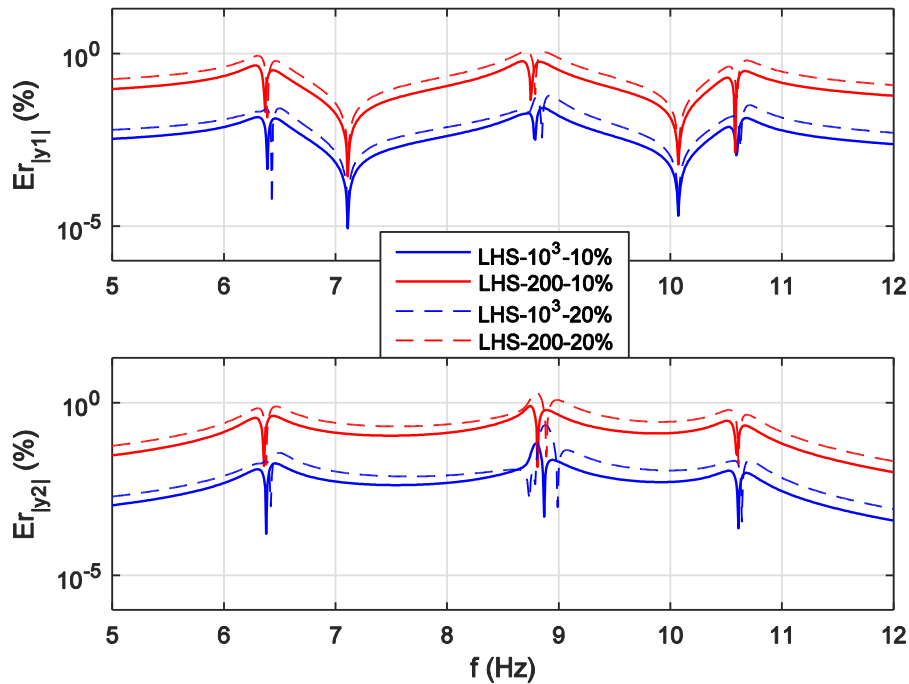


Fig.2.5. Erreurs sur les moyennes des amplitudes des déplacements calculés par la méthode LHS à 10^3 et 200 tirages par rapport à la méthode MC à 10^4 tirages pour $\delta_k = 10\%$ et $\delta_k = 20\%$.

En second lieu, la comparaison des deux méthodes intrusive de Galerkin et non intrusive de régression permet de retenir une méthode pour les prochaines applications de ce mémoire. La comparaison est toujours effectuée par rapport à la méthode MC de référence à 10^4 tirages en termes de précision et temps de calcul. Pour ce faire, les moyennes, les enveloppes et les dispersions des déplacements calculés en utilisant les trois méthodes sont comparées pour deux niveaux de dispersions (10% et 20%) de la raideur incertaine. Les méthodes de Galerkin et de régression sont implémentées pour deux ordres polynomiaux : 2 et 4.

Tenant compte que l'incertitude sur la raideur est modélisée par une loi de probabilité uniforme, la base polynomiale du gPC doit être construite par des polynômes de Legendre ou par les polynômes d'Hermite si on effectue des transformations des variables aléatoires uniformes en variables gaussiennes suivant les fonctions listées dans le tableau 2.2.

La méthode intrusive de Galerkin est appliquée selon la formulation présentée dans la **section 2.3.4**. Ses résultats aux deux ordres de dispersion mentionnés sont comparés à ceux de la méthode MC à 10^4 tirages et de la méthode de régression pour les mêmes ordres. Malgré un gain de temps de 80%, ces résultats montrent que la méthode intrusive ne permet pas d'atteindre la précision souhaitée. En effet, cette dernière engendre des oscillations autour de la réponse de référence, surtout au voisinage des résonances, malgré l'augmentation de l'ordre polynomial. L'ampleur de ces oscillations est accentuée par l'augmentation du niveau de dispersion.

Pour les ordres 2 et 4 respectivement, seulement 3 et 5 simulations déterministes correspondant à deux plans d'expérience contenant respectivement 3 et 5 variables aléatoires, choisies suivant le critère défini dans la **section 2.3.5.3**, sont suffisantes pour l'application de la méthode de régression. Les coefficients de l'expansion du gPC sont par la suite calculés suivant l'équation (2.63) et les déplacements stochastiques par conséquent suivant l'équation (2.37).

Les figures 2.6 et 2.9 présentent les moyennes des amplitudes des déplacements des trois masses et les erreurs associées et montrent que pour un gain supplémentaire de 20.7% du temps de calcul, la méthode de régression d'ordre 4 est beaucoup plus précise que celle de Galerkin de même ordre.

Les figures 2.7 et 2.8 présentant les enveloppes et les dispersions des déplacements montrent que la méthode de régression permet de bien couvrir l'enveloppe de variabilité de la réponse par rapport à la méthode MC, ce que ne permet pas la méthode de projection de Galerkin.

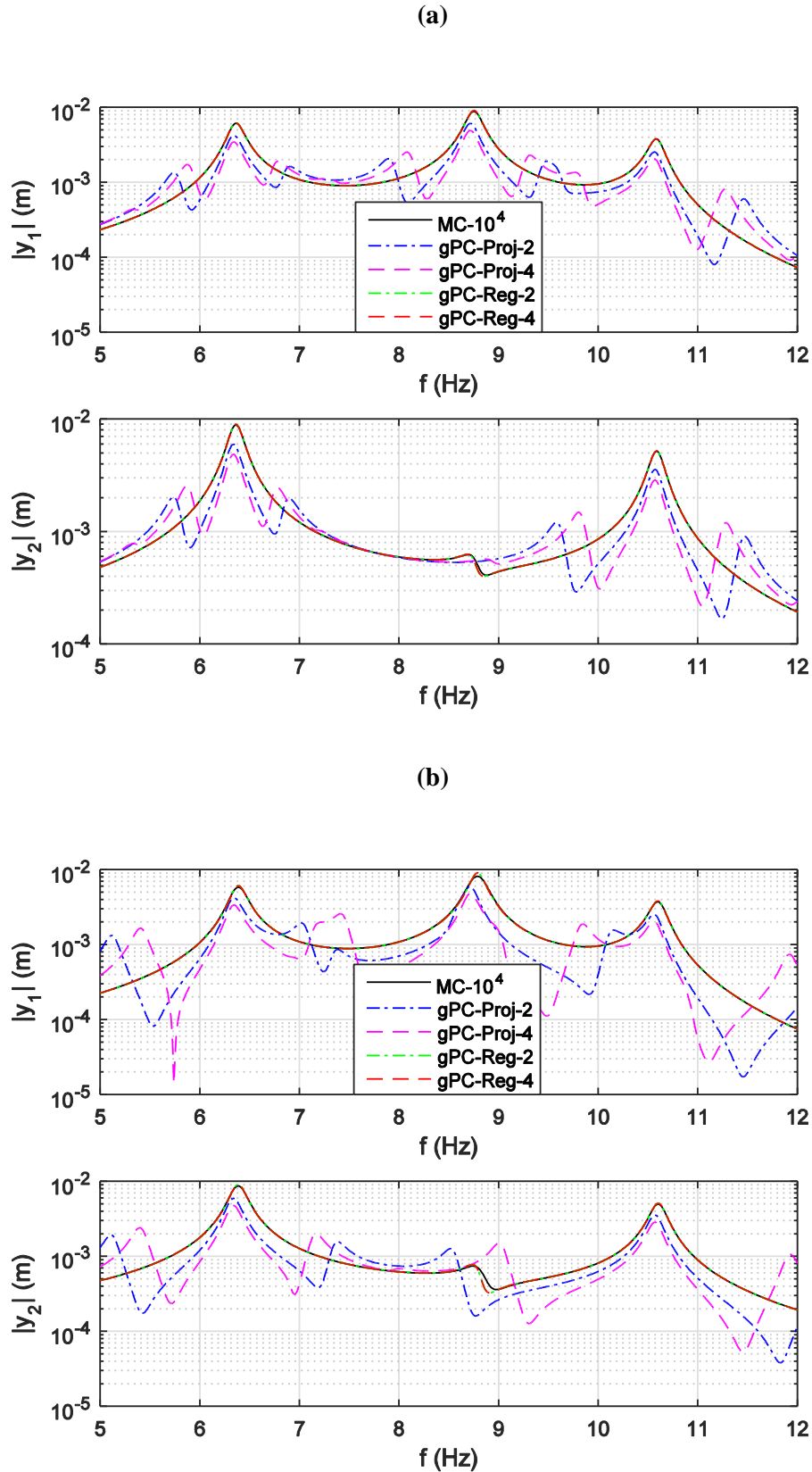


Fig.2.6. Moyennes des déplacements calculés par les méthodes de MC à 10^4 tirages et du gPC de projection d'ordre 2 et 4 et de régression d'ordre 2 et 4 pour (a) $\delta_k = 10\%$ et (b) $\delta_k = 20\%$.

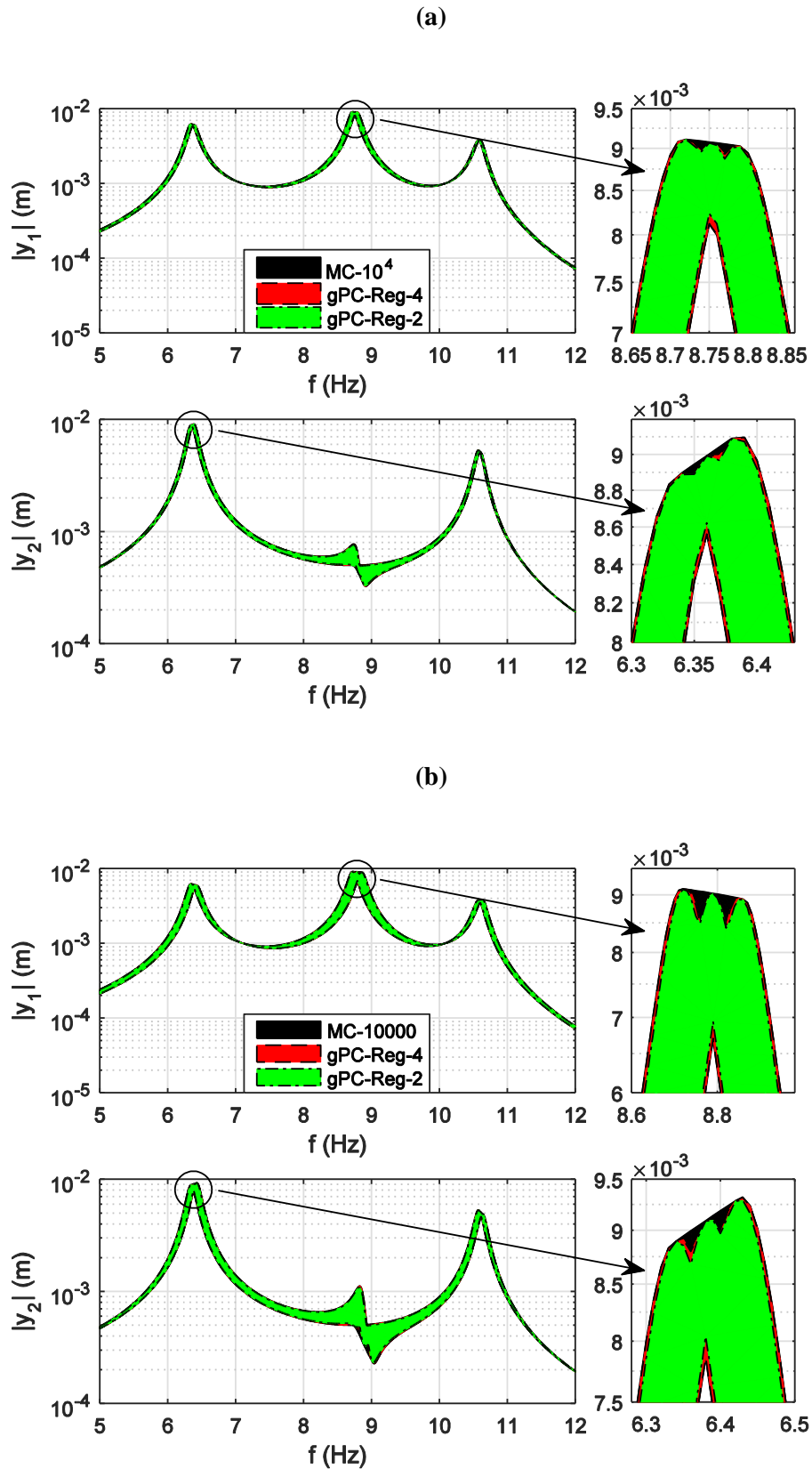


Fig.2.7. Envelopes des déplacements calculés par les méthodes de MC à 10⁴ tirages et du gPC de régression d'ordre 2 et 4 pour (a) $\delta_k = 10\%$ et (b) $\delta_k = 20\%$.

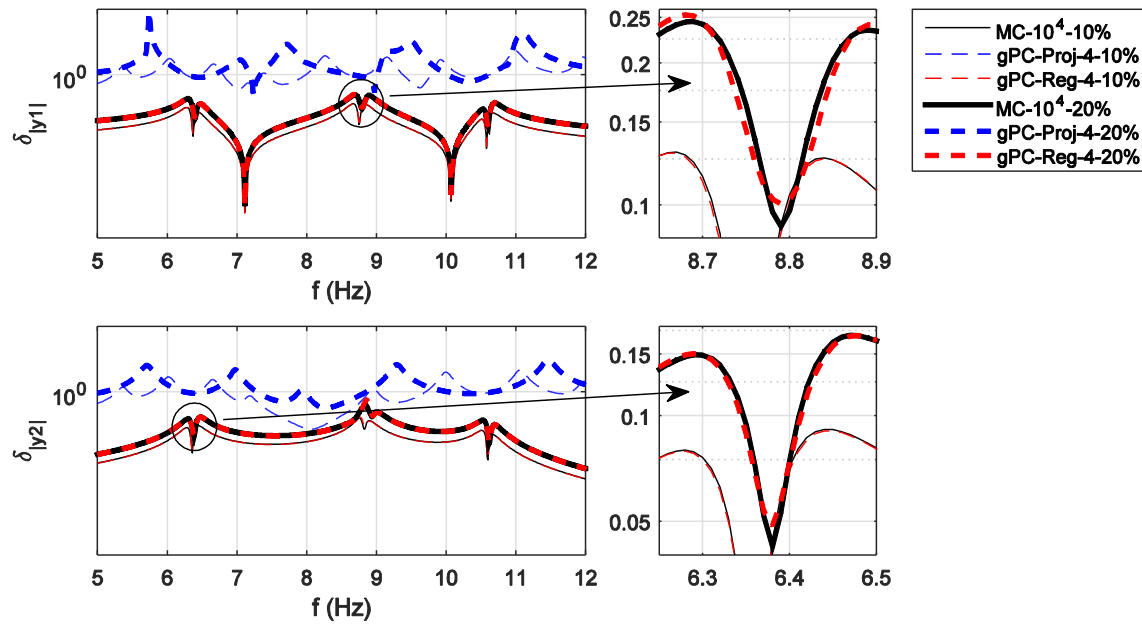


Fig.2.8. Dispersions des déplacements calculés par les méthodes de MC à 10^4 tirages et du gPC de projection d'ordre 4 et de régression d'ordre 4 pour $\delta_k = 10\%$ et $\delta_k = 20\%$.

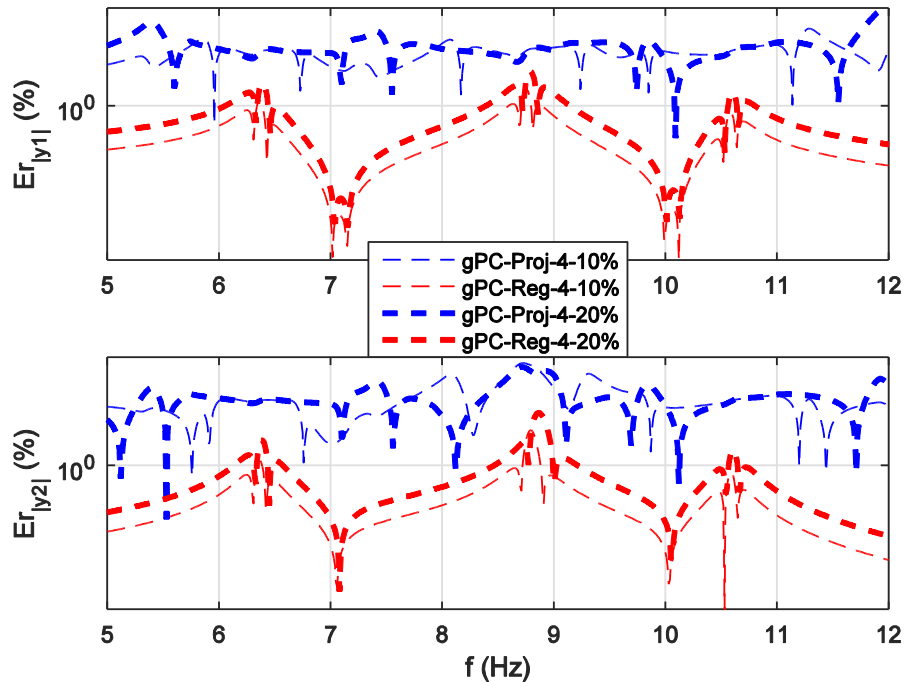


Fig.2.9. Erreurs sur les moyennes des amplitudes des déplacements calculés par la méthode du gPC de projection d'ordre 4 et de régression d'ordre 4 par rapport à la méthode MC à 10^4 tirages pour $\delta_k = 10\%$ et $\delta_k = 20\%$.

Tab.2.4. Comparaison des temps de calcul CPU des différentes méthodes implémentées.

Méthode	CPU (%)
MC-10 ⁴	100
LHS-10 ³	6.7
LHS-200	1.3
gPC-Proj-2	20
gPC-Proj-4	20.9
gPC-Reg-2	0.04
gPC-Reg-4	0.1

L'application numérique dans ce cas linéaire simple permet de conclure que la méthode de régression est beaucoup plus efficace et moins coûteuse que la méthode de Galerkin. De plus, étant intrusive, cette dernière est plus compliquée que la méthode non intrusive de régression. En effet, la première se base sur les propriétés d'orthogonalité de la base polynomiale sur laquelle une technique de projection est appliquée alors que la deuxième considère le modèle éléments finis de départ comme «boîte noire». De ce fait, aucune modification du système n'est exigée et la seule difficulté réside dans le choix du plan d'expérience.

La méthode de régression permet un gain en temps de calcul allant jusqu'à 99% (**Tab.2.4**) pour un ordre polynomial égal à 4 et plus que 99% pour un ordre 2 (pour ce cas simple d'application). Ce gain dépend de la taille du modèle, du nombre de paramètres incertains et du niveau de dispersion imposé et peut par conséquent être moins important pour des modèles de grande taille et comportant un nombre de paramètres incertains plus élevé.

Ces premières interprétations permettent de favoriser la méthode de régression pour l'application suivante dans le cas non-linéaire et pour la suite du mémoire. Il est important de noter que la version classique de cette méthode est utilisée dans ce mémoire, une extension aux variantes développées dans la littérature dont quelques-unes sont mentionnées dans la **section 2.3.6** est possible et plus intéressante dans le cas d'applications plus complexes où la durée d'intégration de la solution est un élément fondamental dans la convergence du gPC.

2.4.2. Oscillateur avec non-linéarité localisée

2.4.2.1. Modèle et paramètres

Dans ce cas d'application, le même oscillateur étudié dans la **section 2.4.1** est supposé contenir en plus de la raideur incertaine, une raideur non-linéaire cubique de type Duffing (**Fig.2.10**) $k_{nl} = 10^8 N.m^{-3}$, localisée au ddl y_2 . La méthode du gPC non intrusive de régression est appliquée cette fois en comparaison avec la méthode LHS à 10³ tirages.

Le comportement dynamique du système est régi, dans le cas non-linéaire, par l'équation différentielle

$$[M]\ddot{y}(t) + [B]\dot{y}(t) + f_{int}(t) = f(t) \quad (2.71)$$

où le vecteur des forces non-linéaires $f_{int}(t)$ est défini par

$$f_{int}(t) = ([K] + f_{NL}(y, \dot{y}))y(t) \quad (2.72)$$

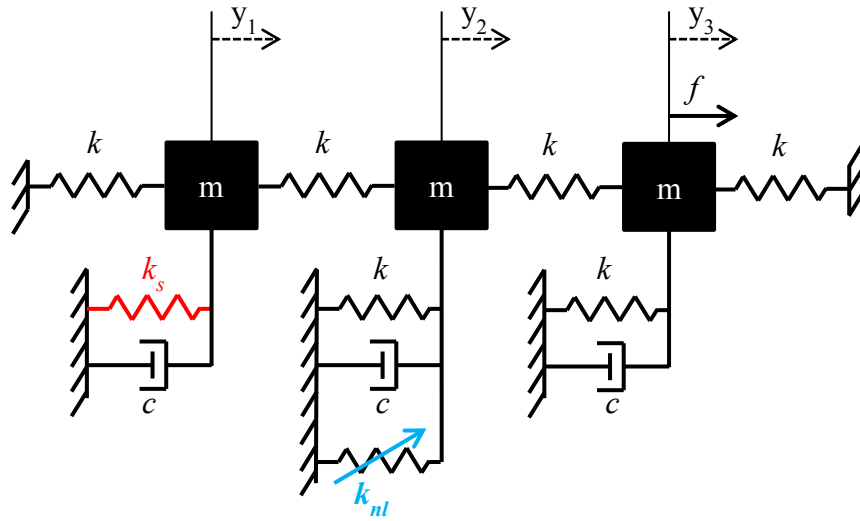


Fig.2.10. Oscillateur à trois degrés de liberté contenant une non-linéarité localisée

L'application est cette fois effectuée dans le domaine temporel moyennant la méthode d'intégration de Newmark non-linéaire [Annexe]. Pour ce faire, la fréquence d'excitation est fixée à 6.5 Hz au voisinage de la première fréquence propre valant dans le cas déterministe 6.34 Hz et l'étude du comportement stochastique temporel du système est effectuée en régime stationnaire. Les résultats sont présentés en termes de déplacement, vitesse, diagramme de phase et évolution de la force non-linéaire en fonction du déplacement.

2.4.2.2. Résultats et Interprétations

Comme dans le cas linéaire, l'effet des incertitudes est illustré à travers la superposition des amplitudes déterministes et des moyennes des amplitudes stochastiques présentées par les figures 2.11-2.12. Cet effet peut également être évalué en calculant des indicateurs temporels statistiques. Ces derniers permettent d'évaluer la précision de la réponse en termes d'amplitudes et de périodicité. Ils sont calculés en fonctions d'un ensemble d'indicateurs temporels similaires à ceux définis dans [109, 110], dans le cas de réponse temporelle transitoire, par

$$\mathcal{M}_i = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - t_s)^i y(t)^2 dt \quad (2.73)$$

où $y(t)$ est la réponse temporelle calculée, i l'ordre du moment et t_s le décalage temporel.

Pour prendre en compte des données discrétisées et contourner le problème de convergence de l'intégrale (2.73), rencontré dans le cas de réponse stationnaire, le $i^{\text{ème}}$ moment m_i est calculé en utilisant une somme discrète tronquée à l'instant t_f :

$$m_i = \sum_{t=0}^{t_f} t^i y(t)^2 \quad (2.74)$$

où l'intervalle $[0, t_f]$ contient un nombre fini de périodes de la réponse stationnaire $y(t)$.

Pour vérifier la précision des réponses en terme d'amplitude, un premier indicateur I_1 est défini par

$$I_1 = m_0 \quad (2.75)$$

Pour vérifier la précision des réponses en terme de périodicité, deux indicateurs I_2 et I_3 sont définis, respectivement, par

$$I_2 = m_1/m_0 \quad (2.76)$$

$$I_3 = m_2/m_0 - (m_1/m_0)^2 \quad (2.77)$$

La superposition des courbes (**Fig.2.11-2.12**) et les indicateurs temporels (**Tab.2.5**) permettent d'interpréter que l'effet stochastique est plus important sur les réponses du premier ddl contenant la raideur incertaine. Moins d'effet est constaté sur le deuxième ddl affecté par la non-linéarité localisée et le plus faible effet est sur le troisième ddl. Ceci permet de conclure que la précision des résultats dépend fortement de la position du ddl en question par rapport à la localisation des incertitudes ainsi que des non-linéarités.

La méthode de régression donne des résultats en accord avec ceux obtenus par la méthode LHS à 10^3 tirages, considérée comme référence. Cet accord est clairement présenté par les figures **2.11-2.12** et est illustré par les faibles erreurs sur les indicateurs temporels (**Tab.2.7**) par rapport à la référence. Il dépend de la nature déterministe ou stochastique de chaque ddl et de sa position par rapport aux incertitudes et aux non linéarités ainsi que du niveau de dispersion imposé.

Pour cet exemple simple d'application, un ordre 2 est suffisant pour avoir des résultats à faibles erreurs en précision et à coût de calcul considérablement réduit par rapport à une méthode de référence. Le gain en temps de calcul atteint 99.5% pour une expansion d'ordre 2 du gPC (**Tab.2.6**).

Tab.2.5. Comparaison des indicateurs temporels des déplacements déterministes et des déplacements calculés par la méthode LHS.

Méthode		Det	LHS- 10^3	
Dispersion		-	$\delta_k = 10 \%$	$\delta_k = 20 \%$
I_1 ($\times 10^4$ m ² s)	ddl 1	1.16	1.07	0.98
	ddl 2	1.08	1.07	1.07
	ddl 3	20.99	20.99	21.01
I_2 (s)	ddl 1	0.38	0.35	0.34
	ddl 2	1.01	1.01	1.00
	ddl 3	19.37	19.38	19.40
I_3 (s)	ddl 1	0.24	0.22	0.21
	ddl 2	0.38	0.38	0.38
	ddl 3	7.34	7.33	7.33

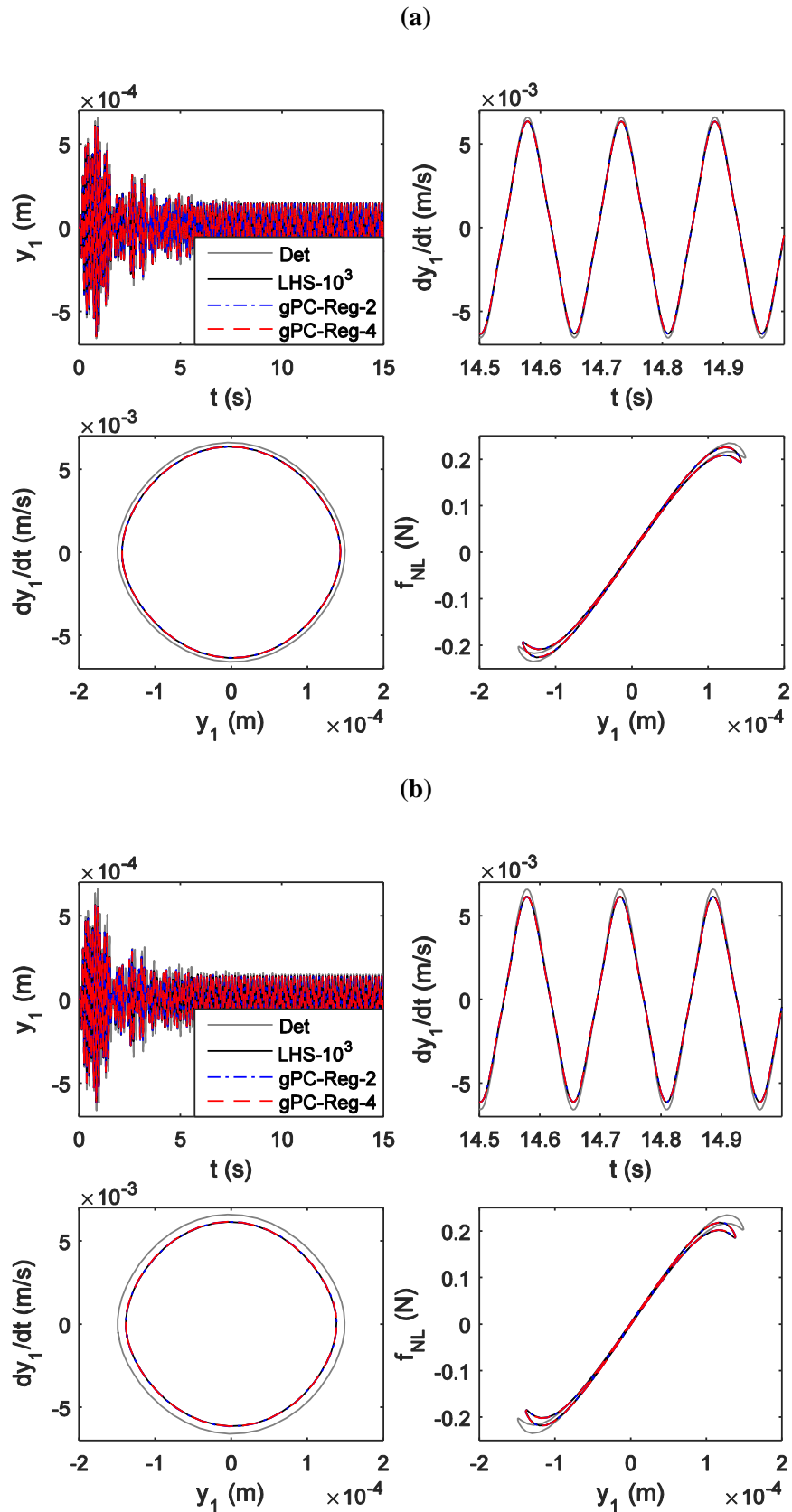


Fig.2.11. Moyennes des déplacement, vitesse, diagramme de phase et force non-linéaire du ddl 1 calculés par les méthodes LHS à 10^3 tirages et du gPC de régression d'ordre 2 et 4 pour (a) $\delta_k = 10\%$ et (b) $\delta_k = 20\%$.

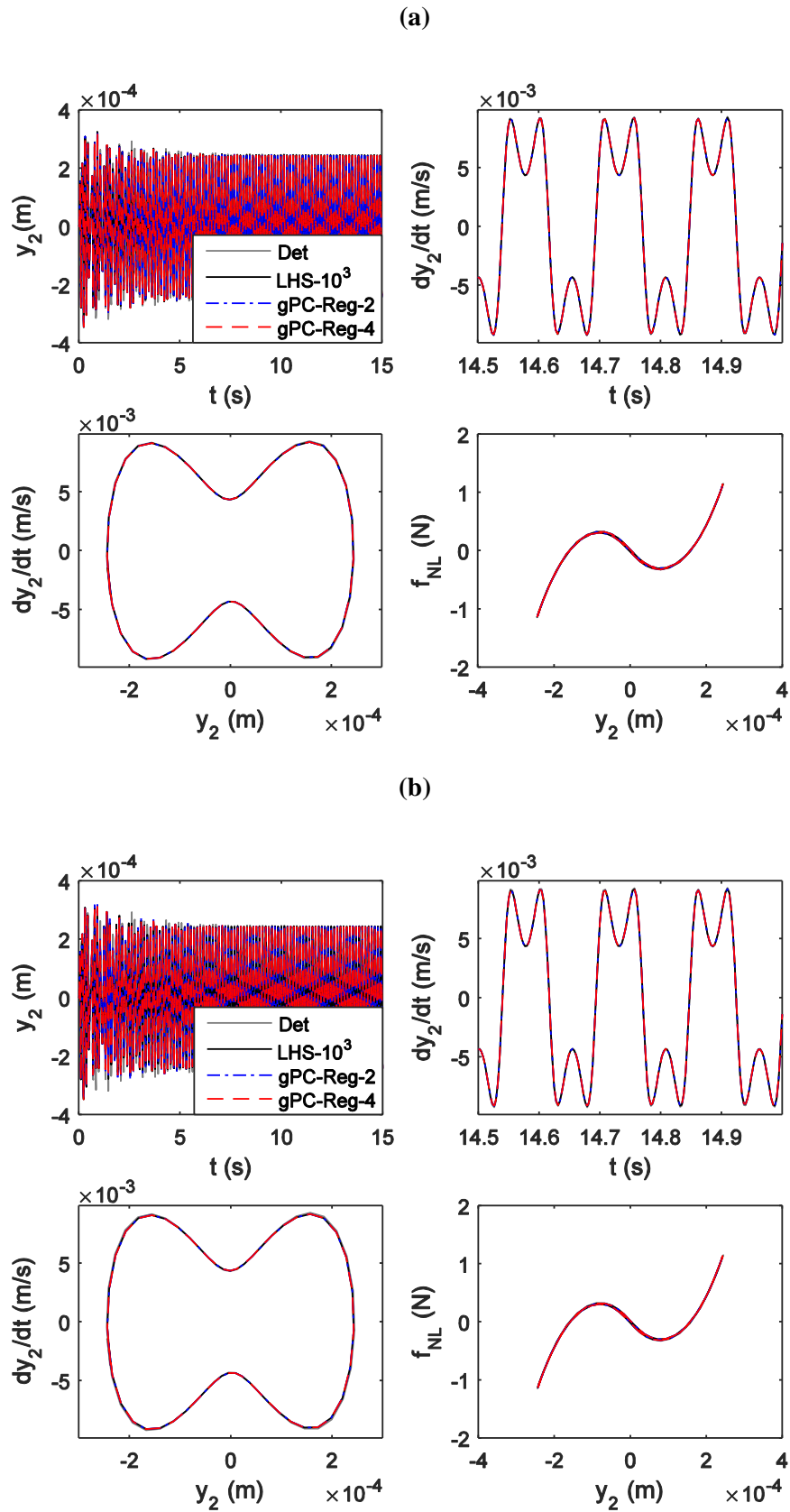


Fig.2.12. Moyennes des déplacement, vitesse, diagramme de phase et force non-linéaire du ddl 2 calculés par les méthodes LHS à 10^3 tirages et du gPC de régression d'ordre 2 et 4 pour (a) $\delta_k = 10\%$ et (b) $\delta_k = 20\%$.

Tab.2.6. Comparaison des temps de calcul CPU.

Méthode	CPU (%)
LHS-1000	100
gPC-Reg-2	0.3
gPC-Reg-4	0.5

Tab.2.7. Comparaison des indicateurs temporels des déplacements calculés par les méthodes LHS et de régression à l'ordre 2 et 4.

Dispersion		$\delta_k = 10 \%$			$\delta_k = 20 \%$		
Méthode		LHS-10 ³	Reg-2	Reg-4	LHS-10 ³	Reg-2	Reg-4
Erreur sur I_1 (%)	ddl 1	0.000	0.084	0.056	0.000	0.196	0.158
	ddl 2	0.000	0.075	0.028	0.000	0.100	0.100
	ddl 3	0.000	0.008	0.007	0.000	0.005	0.003
Erreur sur I_2 (%)	ddl 1	0.000	0.368	0.255	0.000	0.977	0.651
	ddl 2	0.000	0.020	0.000	0.000	0.070	0.070
	ddl 3	0.000	0.006	0.005	0.000	0.012	0.008
Erreur sur I_3 (%)	ddl 1	0.000	0.090	0.005	0.000	0.438	0.292
	ddl 2	0.000	0.000	0.000	0.000	0.080	0.053
	ddl 3	0.000	0.005	0.005	0.000	0.004	0.003

La méthode de régression, aussi bien en non-linéaire qu'en linéaire, permet une approximation de la variabilité de la réponse stochastique du système avec une très bonne précision sans être prohibitive. Par conséquent, cette méthode est une alternative aux méthodes de référence (MC et LHS) permettant de contourner leur inconvénient majeur qui est leur coût de calcul.

2.5. Conclusion

Une étude bibliographique non exhaustive des méthodes de propagation des incertitudes, dont on peut se servir en dynamique des structures linéaires et non-linéaires, a été présentée dans ce chapitre. Une attention particulière a été portée à la méthode du chaos polynomial généralisé, les théories sur lesquelles elle se base, son historique, son principe, sa formulation, ses applications, ses variantes et les différentes méthodes intrusives et non intrusives pouvant servir à calculer les coefficients de son expansion polynomiale. La mise en œuvre de la méthode et sa validation ont été effectuées dans le cadre de la dynamique linéaire et non-linéaire sur des structures mécaniques simples.

Grâce à la disponibilité d'une forme analytique simple de la réponse, la mise en œuvre de la méthode non intrusive de régression est plus simple, comparée à la méthode intrusive de projection de Galerkin qui utilise les propriétés d'orthogonalité de la base polynomiale du gPC et nécessite de ce fait un algorithme d'implémentation plus complexe. Les résultats des simulations numériques ont prouvé les avantages de la technique de régression par rapport à

la technique de Galerkin et aux méthodes de référence MC et LHS en termes de précision d'approximation et du gain qu'elle offre en temps de calcul. En effet, à précision comparable, elle est beaucoup moins coûteuse. Par conséquent, la méthode de régression est considérée comme étant particulièrement efficace et sera retenue pour la suite de ce mémoire pour la propagation des incertitudes.

Au-delà de la simplicité des applications qui nous ont servi pour la validation de la méthode de régression dans ce chapitre, existe la complexité. Elle est engendrée, en dynamique des structures linéaires et non-linéaires, par la taille du modèle de conception, la méthodologie de résolution et ses exigences, la répartition et le niveau des incertitudes et des non-linéarités imposées, l'optimisation du temps de calcul vis-à-vis de la précision exigée, etc. En passant à de telles applications, il n'est pas garanti d'atteindre les chiffres en précision et temps de calcul obtenu dans ce chapitre pour la méthode de régression. Il est par conséquent incontournable de l'adapter à la complexité des problèmes à traiter à travers l'introduction de techniques plus performantes et non prohibitives.

Dans ce cadre, une première voie mène aux métamodèles et plus particulièrement à la réduction de modèle qui sera présentée dans le **chapitre 3**.

Chapitre 3. Modèles réduits dédiés aux modifications structurales

3.1. Introduction

Les modèles obtenus en appliquant la méthode des éléments finis, par exemple, sont suffisamment précis et flexibles permettant ainsi une description satisfaisante du comportement dynamique. Cependant, plus les bornes d'exigence en précision sont serrées, plus fins les modèles doivent être et, par conséquent, plus épineuses et prohibitives sont les simulations numériques à générer, surtout dans le cas de systèmes d'ingénierie complexes, et des analyses dynamiques basées sur des calculs itératifs. Ceci est une difficulté majeure dont de nombreux travaux dans la littérature sont menés afin de la contourner.

Pour pallier donc à la difficulté majeure résumée en temps de calcul, le recours à des métamodèles de dimension réduite mais suffisante pour bien décrire le comportement dynamique est incontournable. Ces métamodèles représentent des solutions approximatives du problème complet et peuvent être introduits selon deux approches différentes : la première est basée sur l'approximation paramétrique de la réponse à partir de calculs évaluant la réponse sans avoir recours à la réanalyse exacte. Les méthodes de surface de réponses et les réseaux de neurones en présentent les méthodes les plus fréquemment utilisées. La deuxième approche est cependant basée sur la réduction de la taille du modèle en condensant le modèle élément finis complet à un système réduit par élimination de ddl.

Dans ce contexte, les modèles réduits peuvent être introduits dans le cadre d'une approche directe ou par sous-structuration qu'on peut également nommer modèles réduits mono ou multi-niveaux. Une variété de méthodes de réduction de modèle existe dans la littérature. Le choix d'une méthode est fortement lié au problème traité et au type d'analyse à mener : statique ou dynamique, linéaire ou non-linéaire, mono ou multi-physique, etc.

Ce chapitre présentera un état de l'art non exhaustif des méthodes de réduction de modèles utilisées dans la littérature et sera particulièrement consacré à celles dédiées aux modifications structurales. Pour ce faire, une première section (**section 3.2**) présentera les généralités sur la réduction de modèle et les principales méthodes associées. La **section 3.3** présentera la réduction de modèle adaptée aux modifications structurales selon les deux approches : directe et par sous-structuration. Des simulations numériques sur des structures académiques feront l'objet de la dernière section (**section 3.4**).

3.2. Réduction de modèle : généralités

3.2.1. Surface de réponse

Le comportement d'un système mécanique ou mécatronique peut être représenté par une série de grandeurs regroupée dans un vecteur appelé vecteur de sortie ou de réponse y fonction de plusieurs paramètres formant un vecteur x dit d'entrée. Le comportement du système est par conséquent représenté par la relation $y = f(x)$. L'objectif d'une approximation est de créer une nouvelle fonction $g(x)$ présentant le mieux possible la fonction $f(x)$ qui ne peut être accessible et est remplacée par une série de couples entrée-sortie ($x_i, y_i = f(x_i)$). La performance de la nouvelle fonction $g(x)$ est quantifiée par l'erreur entre y_i et $g(x_i)$ dont le minimum correspond à la fonction $g(x)$ recherchée.

Pour construire la fonction $g(x)$, des métamodèles sont introduits dans l'objectif de faire les approximations les plus précises pour les efforts calculatoires les moins coûteux. Les méthodes les plus fréquemment utilisées pour construire ces métamodèles sont la méthode des surfaces de réponse (RSM : Response Surface Method) basée sur les plans d'expériences et les réseaux de neurones à base d'apprentissage. Une revue détaillée de ces deux méthodes peut être consultée dans [111].

La méthode RSM [112, 113] est basée sur les plans d'expérience numériques et consiste à faire une approximation moyennant une combinaison linéaire d'une base polynomiale $p(x)$ et d'un vecteur de variables généralisées $a(x)$ de la forme

$$g(x) = \sum_{i=1}^N p_i(x) a_i(x) = \mathbf{p}(x)^T \mathbf{a}(x) \quad (3.1)$$

Les coefficients $a_i(x)$ sont calculés par la minimisation de l'erreur quadratique pondérée de l'approximation.

3.2.2. Réseaux de neurones

Inspirés des neurones biologiques, les réseaux de neurones artificiels (RNA) [111, 114, 115] sont utilisés pour approximer des fonctions et des réponses de systèmes complexes à travers une décomposition en tâches élémentaires réalisées par des neurones organisés en couches, reliés entre eux et possédant chacun des entrées et des sorties (**Fig.3.1**). Les RNA sont adaptatifs et des modifications, en phase d'apprentissage, peuvent être apportées aux paramètres de chaque neurone en vue de son adaptation à une tâche particulière.

L'optimisation des RNA est généralement effectuée par des méthodes d'apprentissage. Une base d'apprentissage représente pour ces réseaux l'ensemble de cas réels servant à leur apprentissage résumé en mémorisation et généralisation.

La sortie y d'un neurone formel est exprimée en fonction de ses entrées x par

$$y = A(w_0 + x_1 w_1 + \dots + x_n w_n) = A(w_0 + \mathbf{w}^T \mathbf{x}) \quad (3.2)$$

où A est la fonction d'activation, de préférence strictement croissante et bornée, et w_i les poids synaptiques. L'assemblage des neurones, par la suite, permet la multiplication de leurs

capacités d'apprentissage. Cet assemblage est effectué en couches multiples allant des entrées jusqu'aux sorties.

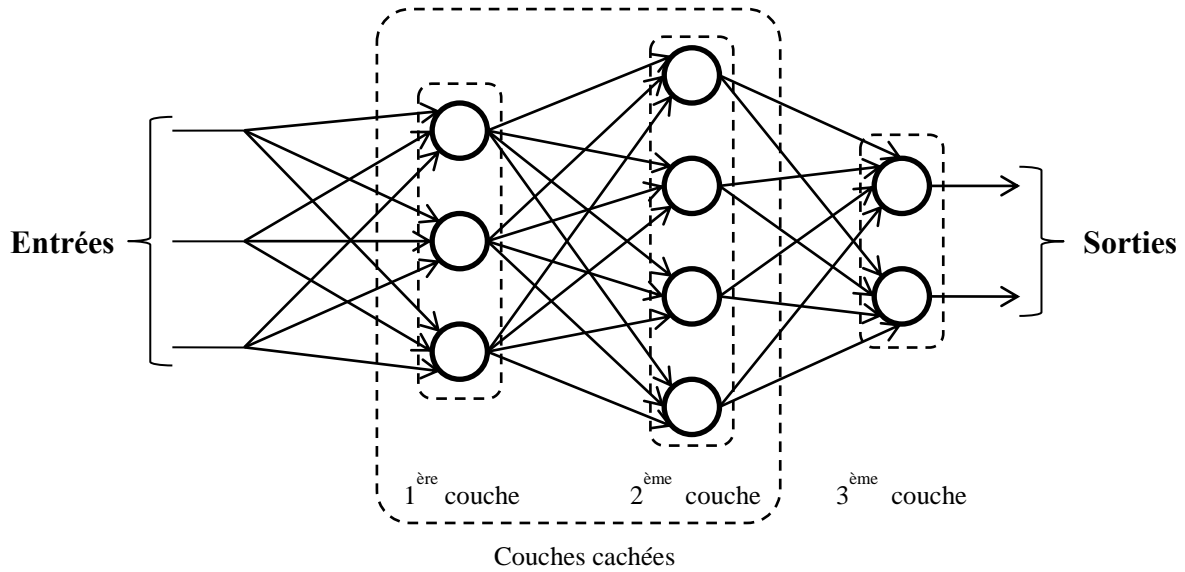


Fig.3.1. Schéma d'un RNA [111]

3.2.3. Modèles condensés

- **Equation de mouvement**

Les comportements dynamiques des systèmes linéaire et non-linéaire décrits par des modèles éléments finis à N ddl sont modélisés respectivement par les systèmes différentiels d'ordre N

$$[M]\ddot{y}(t) + [B]\dot{y}(t) + [K]y(t) = f(t) \quad (3.3)$$

$$\begin{cases} [M]\ddot{y}(t) + [B]\dot{y}(t) + f_{int}(t) = f(t) \\ y(t_0) = y_0, \dot{y}(t_0) = \dot{y}_0 \end{cases} \quad (3.4)$$

où $[M]$, $[B]$ et $[K]$ sont respectivement les matrices de masse, d'amortissement et de rigidité et f le vecteur des forces extérieures appliquées au système ; f_{int} est le vecteur des forces internes, incluant à la fois la contribution des forces élastiques et de dissipation linéaire et non-linéaire :

$$f_{int}(t) = ([K] + f_{NL}(y, \dot{y}))y(t) \quad (3.5)$$

La réduction de modèle consiste à appliquer une transformation à ces matrices et vecteurs et permet de ne plus conserver les déplacements des nœuds de la structure comme inconnues en changeant de base dans l'expression de l'équation de mouvement. En effet, l'équation de mouvement, exprimée initialement, dans l'espace de taille N est exprimée dans l'espace réduit de taille n_r , ($n_r \ll N$). Pour ce faire, une transformation est effectuée comme suit

$$y(t) = Tq(t) \quad (3.6)$$

où : le vecteur $q(t)$ contient les nouvelles inconnues du problème et T la matrice de transformation nommée aussi base de réduction. En fonction de ces nouvelles variables, les équations de mouvement (3.3) et (3.4), après pré-multiplication des deux membres de chaque équation par T^T , deviennent

$$[M_r]\ddot{q}(t) + [B_r]\dot{q}(t) + [K_r]q(t) = f_r(t) \quad (3.7)$$

$$\begin{cases} [M_r]\ddot{q}(t) + [B_r]\dot{q}(t) + (f_{int})_r(t) = f_r(t) \\ q(t_0) = T^+y_0, \dot{q}(t_0) = T^+\dot{y}_0 \end{cases} \quad (3.8)$$

où $[M_r] = T^T[M]T$, $[B_r] = T^T[B]T$, $[K_r] = T^T[K]T$ et $f_r(t) = T^T f(t)$ sont respectivement les matrices réduites de masse, d'amortissement et de rigidité généralisées et le vecteur réduit des forces généralisées. $T^+ = (T^T T)^{-1} T^T$ est la pseudo-inverse de T . Le vecteur des forces internes réduit $(f_{int})_r$ est dans ce cas donné par

$$(f_{int})_r(t) = T^T([K] + f_{NL}(q, \dot{q}))Tq(t) \quad (3.9)$$

- **Résolution dans le domaine fréquentiel des problèmes linéaires**

L'équation fréquentielle dérivant de l'équation (3.7) et régissant le mouvement de la structure sous excitation harmonique à la pulsation ω , exprimée dans la base réduite, est

$$([K_r] + i\omega[B_r] - \omega^2[M_r])q(\omega) = f_r \quad (3.10)$$

La réponse en fréquence est donc obtenue par l'inversion de l'équation (3.10) à chaque pulsation ω

$$q(\omega) = ([K_r] + i\omega[B_r] - \omega^2[M_r])^{-1} f_r \quad (3.11)$$

La transformation (3.6) permet de reconstituer la réponse du système complet initial par

$$y(\omega) = Tq(\omega) = T([K_r] + i\omega[B_r] - \omega^2[M_r])^{-1} f_r \quad (3.12)$$

- **Résolution dans le domaine temporel des problèmes non-linéaires**

Pour résoudre le système non-linéaire (3.8), le schéma de Newmark est implémenté de la même façon que pour le cas de résolution par la méthode directe détaillée dans [Annexe]. En effet, l'équation (3.8) est écrite sous la forme

$$[(K_{eff})_r]\Delta q_n = ((\Delta f_{eff})_r)_n \quad (3.13)$$

avec

$$[(K_{eff})_r] = [(K_T)_r] + \frac{\gamma}{\beta h} [B_r] + \frac{1}{\beta h^2} [M_r] \quad (3.14)$$

la matrice de rigidité effective réduite fonction de la matrice de rigidité tangente réduite ayant pour expression

$$[(K_T)_r] = T^T \left(\frac{\partial(f_{int})}{\partial Tq} \right)_{Tq^i} T \quad (3.15)$$

et

$$((\Delta f_{eff})_r)_n = (\Delta f_r)_n + \left[\frac{1}{\beta h} [M_r] + \frac{\gamma}{\beta} [B_r] \right] \dot{q}_n + \left[\frac{1}{2\beta} [M_r] + h \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) [B_r] \right] \ddot{q}_n \quad (3.16)$$

le vecteur réduit des forces dynamiques effectives.

La méthode de Newton-Raphson permet d'écrire l'équation (3.13) sous la forme

$$[(K_{eff})_r] \Delta q_n^i = -\mathbf{r}(q_n^i) \quad (3.17)$$

où \mathbf{r} est le vecteur résiduel qui doit être minimisé moyennant l'algorithme itératif de correction donné par la figure 3.2 de façon similaire au cas de résolution directe [Annexe].

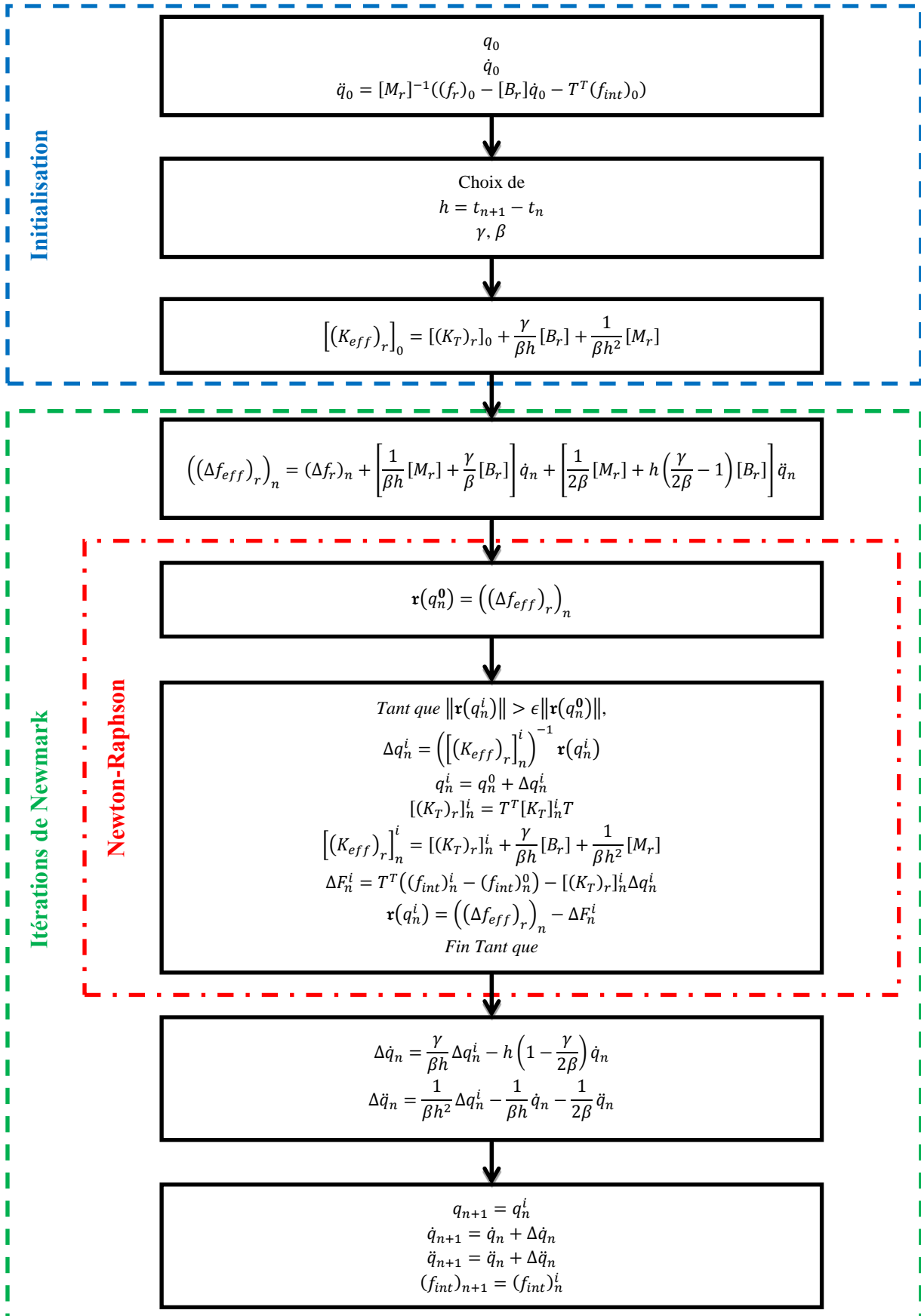


Fig.3.2. Algorithme de Newmark non-linéaire adapté au modèle réduit

3.2.4. Principales méthodes de réduction de modèle

La qualité de la solution approximée par un modèle réduit est fortement liée au choix de la base de réduction T . Cette dernière doit permettre une transformation d'espace de représentation de la réponse du système sans perte d'informations quels que soient les chargements considérés. Une grande variété de méthodes de réduction existent dans la littérature dont quelques revues peuvent être consultées dans [116, 117, 118, 119, 120]. Dans ce qui suit, une revue des méthodes les plus fréquemment utilisées est présentée.

- **Base modale réduite**

Une base modale (BM) est l'ensemble des modes normaux ou modes propres du système $T = Y$, solutions du problème aux valeurs propres (problème homogène), indépendant de l'amortissement et du chargement,

$$[K]Y - [M]Y[\Lambda] = 0 \quad (3.18)$$

où $[\Lambda]$ est la matrice spectrale, diagonale des carrés des pulsations (ω^2).

Ces N modes propres vérifient des conditions d'orthogonalité par rapport aux matrices de masse et de rigidité tels que

$$Y^T [M] Y = [D] \quad (3.19)$$

$$Y^T [K] Y = [D][\Lambda] \quad (3.20)$$

où $[D]$ est la matrice de normalisation diagonale déterminant la norme des vecteurs propres. Elle est égale à la matrice unité $[I]$ quand la normalisation est effectuée par rapport à la matrice de masse. Dans ce cas l'équation (3.7) devient

$$\ddot{q}(t) + [\beta]\dot{q}(t) + [\Lambda]q(t) = Y^T f(t) \quad (3.21)$$

où $[\beta]$ est la matrice d'amortissement généralisée dont la forme dépend de l'hypothèse prise en considération. Dans le cas d'amortissement proportionnel, l'hypothèse de Rayleigh exprimant l'amortissement physique en terme de combinaison linéaire de $[M]$ et $[K]$ mène à exprimer $[\beta]$ sous la forme diagonale

$$[\beta] = \text{diag}(2\eta_j \omega_j) \quad (3.22)$$

où η_j est le coefficient d'amortissement du mode j .

La précision de la solution approchée du système est directement liée au nombre n_r de modes retenus dans la BM. Plus ce nombre est élevé, plus l'erreur de troncature est faible et par conséquent l'approximation est meilleure. Généralement, les n_r premiers modes propres retenus correspondent aux fréquences propres inférieures à deux ou trois fois la valeur maximale de la plage fréquentielle d'intérêt. La matrice T est de ce fait de taille $(N \times n_r)$, $n_r \ll N$.

- **Base de Ritz**

Se basant sur le fait que le chargement n'est pas pris en considération en formant une BM, une alternative a été proposée dans [121] sous le nom de base de Ritz ou base de Rayleigh-Ritz. Elle est basée sur une analyse statique du problème permettant d'écrire le vecteur de déplacement sous la forme

$$y_1 = [K]^{-1}p \quad (3.23)$$

où p est le chargement statique appliquée à la structure.

Le calcul des autres vecteurs est effectué à travers une procédure itérative

$$[K]y = [M]y_{i-1}; y_i = y - \sum_{j=1}^{i-1} (y_j^T [M]y) y_j, i = 2, \dots, n_R \quad (3.24)$$

Les vecteurs de Ritz y_i sont normalisés par rapport à la matrice de masse. Ils forment ainsi une base $T = [y_1 \ \dots \ y_{n_R}]$.

- **Sous-espace de Krylov**

Le sous-espace de Krylov [122] d'ordre n_k est défini par

$$\mathcal{K}_{n_k}(A, r) = \{r, Ar, Ar^2, \dots, Ar^{n_k-1}\} \quad (3.25)$$

où $r = [K]^{-1}p$ et $A = [K]^{-1}[M]$. La base de réduction T est cette fois construite à partir de ces sous-espaces $\mathcal{K}_{n_k}(A, r)$. La multiplication répétitive des vecteurs r par la matrice A engendre une dominance des vecteurs propres de cette dernière et minimise par conséquent la différence entre les colonnes successives de la base construite. Une orthogonalisation des sous-espaces est par conséquent inévitable. Pour ce faire, les algorithmes d'Arnoldi [123], de Gram-Schmidt [124] et de Lanczos [125] sont généralement utilisés.

- **Sous-structuration et synthèse modale**

Lorsque des systèmes plus complexes sont considérés et par conséquent des modèles éléments finis de grande taille sont à mettre en œuvre, le nombre n_r de modes propres retenus dans la base de réduction doit être élevé pour donner une approximation satisfaisante de la réponse dynamique. De plus, la réanalyse du système complet est pratiquement infaisable ou bien très coûteuse dans une procédure itérative de type optimisation du comportement dynamique du modèle. Pour contourner ces difficultés, une décomposition du système en sous-structures est effectuée et la réduction est appliquée par sous-structure séparément avant l'assemblage des modèles réduits permettant l'obtention du modèle condensé final. Cette approche est dite de synthèse modale (CMS : Component Mode Synthesis) [126, 127] et est également baptisée méthode de réduction statique-dynamique. Les sous-structures sont indépendantes et séparées par des interfaces. Ceci est le point fort de cette approche lui permettant de traiter indépendamment chaque sous-structure et par conséquent de paralléliser les calculs et réduire l'effort calculatoire associé tout en conservant suffisamment d'informations sur le comportement dynamique et garantissant une précision satisfaisante. De

plus, la modification structurale d'une sous-structure n'affecte pas les autres. La sous-structuration permet également de construire des sous-modèles mesurés expérimentalement, le couplage de sous-structures issues d'analyses multi-physiques (couplage fluide-structure, etc.) et de profiter de la symétrie dans les structures périodiques.

Pour un système à N ddls, le sous-ensemble n des N ddls, correspondant à la sous-structure k , comprend i ddls internes et j ddls de jonctions qui lui sont complémentaires tels que $i \oplus j = n$. Le sous-ensemble i des ddls internes est partitionné en e ddls excités et c ddls qui lui sont complémentaires tels que $e \oplus c = i$. Le sous-ensemble joignant les j ddls de jonction et les e ddls d'excitation est nommé f et est tel que $j \oplus e = f$ et $f \oplus c = n$. Ces notations introduites répartissent les ddls de la structure (**Fig.3.3**) tel que présenté dans [116].

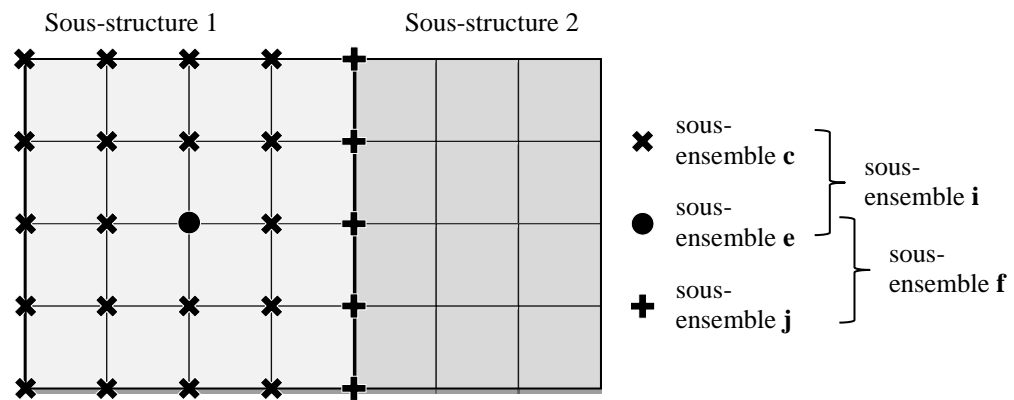


Fig.3.3. Exemple de répartition des ddls par sous-structure

Des notions, liées à la nature des modes (modes statiques et modes normaux) dont dépend la classification des méthodes, doivent être introduites. Le type de modes dépend des conditions aux limites appliquées aux interfaces de chaque sous-structure : libres, fixes, mixtes, chargées, etc. Ci-dessous, les principaux types de modes qui peuvent être pris en compte dans les matrices de transformation sont cités.

- **Modes normaux**

Les modes à interface libre sont obtenus par résolution du problème aux valeurs propres associé à la sous-structure k quand aucune condition aux limites n'est appliquée sur les ddls d'interface j . Ces modes normaux peuvent être de type modes de corps rigide ou modes déformables.

Les modes à interface bloquée sont obtenus par résolution du problème aux valeurs propres associé à l'ensemble i des ddls internes de la sous-structure k lorsque des conditions d'encastrement, supprimant généralement tout mode de corps rigides, sont supposées être appliquées à l'ensemble j des ddls de jonction tel que

$$Y = \begin{bmatrix} 0 \\ \varphi_i \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Les modes à interface chargée sont obtenus par résolution du problème homogène obtenu après ajout de masse et de raideur aux frontières de la sous-structure k .

Les modes à interface mixte sont obtenus par résolution du problème aux valeurs propres associé à l'ensemble i des ddls internes de la sous-structure k lorsque des conditions d'encastrement sont appliquées sur certains ddls de jonctions, les autres ddls de l'ensemble j étant libre.

- **Modes statiques**

Les modes contraints, également nommés modes statiques de liaison, sont introduits par Przemieniecki [128]. Ils représentent les déformations statiques causées par les sous-structures voisines à la sous-structure k et forment une base ψ_j de taille $(n \times j)$. Ils sont obtenus par le calcul des réponses statiques des ddls internes i à des déplacements unitaires successifs par ddl d'interface, les déplacements des autres ddls d'interface j étant nuls. La base des modes contraints est de la forme

$$\psi_j = \begin{bmatrix} I_{jj} \\ \psi_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{jj} \\ -K_{ii}^{-1}K_{ij} \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

et est obtenue par la résolution du problème statique

$$\begin{bmatrix} K_{jj} & K_{ji} \\ K_{ij} & K_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{jj} \\ \psi_{ij} \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_j \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.28)$$

où F_j est le vecteur des efforts statiques de réaction à l'interface dus aux déplacements imposés tel que $F_j = K_{jj} - K_{ji}K_{ii}^{-1}K_{ij}$. La matrice de rigidité $[K]$ étant arrangée selon la répartition des ddls internes et de jonction.

Les modes d'attache, également nommés modes de souplesse ou de flexibilité, sont obtenus en appliquant successivement des forces unitaires $I_j = [I_{jj} \ 0]^T$ sur les ddls de jonction j et forment une base S_j de taille $(n \times j)$

$$S_j = [K]^{-1}I_j \quad (3.29)$$

Les modes d'attache résiduels, également nommés modes de flexibilité résiduelle ou résidus statiques, ces modes sont analogues aux modes de flexibilité sans contribution statique des modes propres retenus dans la base de réduction de la sous-structure k . Ils constituent une base R_j de taille $(n \times j)$ exprimée dans le cas de modes à interfaces bloquées par

$$R_j = S_j - \begin{bmatrix} 0 \\ \varphi_i \end{bmatrix} [\Lambda]^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \varphi_i \end{bmatrix}^T \quad (3.30)$$

- **Principales méthodes de synthèse modale**

Deux principales catégories de méthodes de synthèse modale sont définies, dans la littérature, selon les conditions encastree ou libre imposées aux interfaces de la sous-structure

en question. De ce fait, les méthodes à interface libre sont distinguées des méthodes à interface fixe, et des combinaisons des deux classes sont toutefois possibles. Dans ce cadre, les méthodes de Guyan-Irons [129] et de Craig-Bampton [130] font partie de la première catégorie alors que celles de Martinez et al. [131], de MacNeal [132] et de Rubin [133] appartiennent à la deuxième. Des revues des méthodes de sous-structuration peuvent être consultées dans [134, 135, 136], et dans [116, 117, 118, 137, 138, 139].

- **Méthode de Guyan-Irons**

Introduite par Przemieniecki [128] et étendue par Guyan et Irons [129], la méthode de Guyan-Irons consiste à construire une base de transformation uniquement par des modes contraints. Les effets d'inertie sur les ddls internes retenus dans la base sont négligés.

- **Méthode de Craig-Bampton**

Nommée également méthode à interface bloquée, cette méthode présente une des méthodes de synthèse modale les plus utilisées. C'est l'extension directe de la méthode de sous-structuration en statique (Guyan-Irons) introduite par Craig et Bampton [130], sous l'hypothèse d'interface bloquée. Cette méthode sera détaillée dans la section suivante et sera retenue pour la suite de ce travail.

- **Méthode de Martinez et al.**

C'est une méthode dite à interface libre [131] qui repose sur la construction de la matrice de transformation par des modes à interface libre et des modes d'attache résiduels.

- **Méthode de MacNeal**

Introduite par MacNeal [132], cette méthode est basée sur les modes à interface libre et les modes de flexibilité résiduelle menant à un système d'équations liant seulement les participations modales de chaque sous-structure sans tenir compte des ddls d'interfaces. Cette méthode fait partie avec la méthode de Craig et Bampton, détaillée ci-dessous, des méthodes les plus utilisées.

- **Méthode de Rubin**

Cette méthode [133] dérive de celle de MacNeal avec l'ajout d'un terme fonction de résidus dynamique. Cela mène à des termes additionnels de couplages dans la matrice de masse réduite et présente son point fort par rapport à la méthode MacNeal permettant ainsi une synthèse modale plus précise.

- **Méthode à interface mixte**

Nommée également méthode hybride, cette méthode consiste à partitionner l'interface entre une sous-structure et les sous-structures adjacentes en interface fixe et interface libre [139, 140]. Elle inclut comme cas particuliers les méthodes à interface bloquée ou libre.

Synthèse modale : assemblage

Le couplage des sous-structures est la dernière étape du processus de mise en œuvre des méthodes de synthèse modale et se fait de manière identique à l'assemblage des éléments finis classiques (assemblage de super-éléments). Les sous-structures voisines interagissent les unes avec les autres lors de l'assemblage. Quelle que soit la méthode de synthèse modale appliquée, des conditions de compatibilité doivent être satisfaites : équilibre des efforts de jonction et égalité des déplacements au niveau des interfaces communes.

- **Synthèse modale par la méthode de Craig-Bampton**

La matrice de transformation T_{CB} associée à la sous-structure k est construite à partir des modes contraints et des modes à interface bloquée telle que $T_{CB}^k = [\psi_j \ Y_r]^k$. La relation de transformation, relative à la sous-structure k , utilisant la base T_{CB}^k est de la forme

$$\begin{Bmatrix} y_j \\ y_i \end{Bmatrix}^k = \begin{bmatrix} I_{jj} & 0 \\ \psi_{ij} & \varphi_i \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} y_j \\ q_i \end{Bmatrix}^k = T_{CB}^k \begin{Bmatrix} y_j \\ q_i \end{Bmatrix}^k \quad (3.31)$$

De ce fait, les ddls internes i sont liés de façon linéaire aux ddls de jonction j et aux coordonnées généralisées q_i :

$$y_i = \psi_{ij} y_j + \varphi_i q_i \quad (3.32)$$

Les matrices réduites de rigidité et de masse ainsi que le vecteur réduit des forces extérieures sont calculés, respectivement, par

$$K_{CB}^k = (T_{CB}^k)^T [K]^k T_{CB}^k = \begin{bmatrix} K_{jj}^{CB} & 0 \\ 0 & K_{ii}^{CB} \end{bmatrix}^k \quad (3.33)$$

$$M_{CB}^k = (T_{CB}^k)^T [M]^k T_{CB}^k = \begin{bmatrix} M_{jj}^{CB} & M_{ji}^{CB} \\ M_{ij}^{CB} & M_{ii}^{CB} \end{bmatrix}^k \quad (3.34)$$

$$f_{CB}^k = (T_{CB}^k)^T f^k = \begin{Bmatrix} f_j + \psi_{ij}^T f_i \\ \varphi_i^T f_i \end{Bmatrix}^k \quad (3.35)$$

où $K_{ii} = \varphi_i^T K_{ii} \varphi_i = \Lambda$ et $M_{ii} = \varphi_i^T M_{ii} \varphi_i = I_{ii}$ (en normalisant par rapport à M) sont les matrices généralisées réduites de rigidité et de masse, respectivement, de taille $(n_i \times n_r)$ où n_i est le nombre de ddls internes de la sous-structure k et n_r le nombre retenu de modes normaux de la sous-structure k à interface bloquée.

$K_{jj}^{CB} = K_{jj} + K_{ji} \psi_{ij}$ et $M_{jj}^{CB} = M_{jj} + M_{ji} \psi_{ij} + \psi_{ij}^T (M_{ij} + M_{ii} \psi_{ij})$ sont les matrices de rigidité et de masse réduites statiquement sur les ddls de jonction (matrices condensées de Guyan sur les ddls de jonction). $M_{ij}^{CB} = \varphi_i^T (M_{ij} + M_{ii} \psi_{ij})$ et $M_{ji}^{CB} = \psi_{ij}^T (M_{ji} + M_{ii} \varphi_i)$ présentent les matrices de couplage.

A noter que dans la méthode Craig-Bampton il n'y a pas de couplage dans la matrice de raideur réduite.

L'usage des modes à interface bloquée, qui sont propres à chaque sous-structure et indépendants des autres sous-structures, permet l'analyse et la réduction de chaque sous-structure indépendamment des autres et fournissent une bonne précision en absence de couplage avec les modes contraints au niveau de la matrice de rigidité [141].

Plusieurs variantes de la méthode de Craig-Bampton ont été présentées dans la littérature. Des procédures itératives ont été proposées dans [142] afin d'améliorer l'approximation par modèle réduit. Dans [143], les auteurs remplacent les modes contraints par des modes quasi-statiques pour des analyses dynamiques en moyennes fréquences. Une méthode de Craig-Bampton multi-niveaux a été proposée dans [144] et mise en œuvre pour des applications industrielles dans [145]. Rixen a proposé une variante dite méthode de Craig-Bampton duale basée sur une formulation hybride des connexions d'interfaces [146]. Une méthode dite de Craig-Bampton mixte est également introduite dans [147]. Dans [148], les auteurs ont proposé d'améliorer la méthode par l'ajout d'une ou plusieurs itérations de sous-espaces selon l'exigence en précision. Kim et al. [149] ont proposé une méthode pour estimer l'erreur de la méthode de Craig-Bampton.

3.3. Méthodes de réduction de modèle dédiées aux modifications structurales

En présence de modifications structurales, les méthodes classiques de réduction, présentées précédemment, ne permettent pas des approximations satisfaisantes des comportements de systèmes réels, faute du manque d'information à propos de ces modifications dans les bases de réduction. De ce fait, il est nécessaire d'avoir recours à des techniques permettant d'étendre ces méthodes à la prise en compte des modifications structurales. Ces dernières peuvent, en fait, être des perturbations paramétriques de certains paramètres ou zones de la structure, des non-linéarités localisées, etc. Les perturbations paramétriques peuvent à leur tour découler de simples perturbations déterministes d'un ou de plusieurs paramètres physiques du système ou d'incertitude imposant une variabilité de ces derniers dans un domaine qui peut être quantifié de façon possibiliste (intervalles, ...) ou aléatoire (suivant des distributions de probabilité). Dans ce chapitre, l'étude est limitée au premier type de perturbations paramétriques, en plus des non-linéarités localisées, et une extension à la quantification d'incertitude fera l'objet du chapitre suivant.

Pratiquement, une matrice contenant des modifications structurales, pouvant être de rigidité, d'amortissement ou de masse, est décrite par la forme

$$M = M_0 + \Delta M \quad (3.36)$$

où M_0 désigne la matrice associée au système initial sans tenir compte des modifications et ΔM la matrice contenant des termes dans les zones dans lesquelles se situent les perturbations, le reste des termes de la matrice étant nuls.

Dans la littérature, de nombreuses recherches se sont focalisées sur l'adaptation de modèles réduits à la présence de modifications structurales. Dans cette section, un aperçu non exhaustif des principales méthodes de réduction de modèles dédiées aux modifications structurales est présenté.

3.3.1. Méthode de décomposition orthogonale propre

La méthode de décomposition orthogonale propre (POD : Proper Orthogonal Decomposition) est basée soit sur la décomposition de Karhunen-Loève [12], soit en combinant cette dernière à l'analyse en composantes principales (PCA : Principle Component Analysis) ou à la décomposition en valeurs singulières (SVD) [150]. Le modèle réduit repose, en fait, sur le calcul (ou la mesure expérimentale) des réponses temporelles de certains points du modèle complet sur quelques pas de temps permettant ainsi une prise en considération du chargement réel du système et par conséquent des informations spatiales nécessaires pour caractériser la dynamique du système. Après une SVD, un ensemble de modes propres orthogonaux (POM) est ainsi obtenu et classé par ordre d'importance en utilisant des indicateurs scalaires nommés valeurs orthogonales propres (POV) permettant la troncature de la base orthogonale de transformation. Grâce à son implémentation facile, cette méthode est fréquemment utilisée. Une synthèse des applications de cette méthode est présentée par Kerschen dans [151, 152] et des variantes ont été introduites dans [153] dans le cadre d'analyse dynamique non-linéaire.

3.3.2. Méthode des approximations combinées

Développée par Kirsch pour la réduction de problèmes statiques linéaires, la méthode des approximations combinées (CA : Combined Approximations) [154, 155] consiste à construire une base de réduction à partir des premiers termes d'une série binomiale prenant en compte les modifications appliquées à la structure et nécessite la formulation d'un nouveau problème aux valeurs propres pour toute modification structurale. En effet, pour chaque mode propre ν de la structure modifiée, de valeur et vecteur propres λ^ν et r^ν respectivement, résoudre le problème homogène

$$([K] - \lambda^\nu [M])r^\nu = 0 \quad (3.37)$$

permet de construire une base de réduction $r_B^\nu = [r_i^\nu]$ de la forme

$$\begin{aligned} r_B^\nu &= [r_1^\nu \quad \dots \quad r_i^\nu \quad \dots \quad r_s^\nu] \\ &= [[K_0]^{-1}[M] r_0^\nu \quad \dots \quad -B r_{i-1}^\nu \quad \dots \quad -B r_{s-1}^\nu] \end{aligned} \quad (3.38)$$

où $B = [K_0]^{-1}[\Delta K]$ et r_0^ν représente les vecteurs propres du problème initial sans prendre en compte les modifications.

La réduction de modèle modifié par la base de transformation (3.38) mène à un nouveau problème homogène réduit

$$[K_r]y^\nu = \lambda^\nu [M_r]y^\nu \quad (3.39)$$

dont les vecteurs propres r^ν sont calculés par

$$r^\nu = \sum_{i=1}^s r_i^\nu y_i^\nu \quad (3.40)$$

Afin de contourner quelques limitations de la méthode CA liées à la convergence de la série binomiale et affectant l'approximation, une variante de la méthode a été proposée par Guedri et al. [156] et appliquée par la suite dans [157]. Cette extension repose sur la conservation de l'information en balayant l'espace des solutions. Pour ce faire une SVD est appliquée à chaque base des m modes ν

$$r_B = [r_B^1 \quad \dots \quad r_B^\nu \quad \dots \quad r_B^m] \quad (3.41)$$

Les vecteurs propres (3.40) sont cette fois calculés par

$$r^\nu = r_B y^\nu \quad (3.42)$$

3.3.3. Base modale enrichie adaptée aux modifications structurales

- **Principe de la méthode**

Afin de contourner le problème de manque d'informations sur les modifications structurales dans la BM du système initial, des techniques basées sur l'enrichissement de la BM ont été proposées. Une première tentative a été proposée par Kapania et Byun [158] et consiste en l'addition de nouveaux vecteurs, orthogonalisés par rapport à la matrice de masse, dérivées des vecteurs choisis initialement dans la base de Ritz. La nouvelle base a été actualisée itérativement pour des analyses transitoires non-linéaires de plaques minces.

Les techniques d'enrichissement fréquemment utilisées sont celles basées sur le calcul de résidus statiques. Dans ce cadre, l'idée de Dickens [159] était de combiner une BM avec une base de Ritz dont les vecteurs sont calculés à partir des vecteurs de forces résiduelles associés aux composantes non nulles du vecteur de chargement statique initial. Balmès [160] a proposé une technique d'enrichissement basée sur la technique SVD pour le choix de résidus ayant les contributions les plus importantes, et l'a étendue à la synthèse modale pour la réduction de modèles de plaques assemblées. Cette technique a été appliquée par la suite par Bouazzouni et al. [161] en combinaison avec la méthode d'intégration temporelle de Newmark pour des modèles de plaques bidimensionnelles contenant des amortisseurs visqueux localisés avec des modifications des matrices de rigidité et de masse.

En pratique, après la troncature modale, la base Y_r est de taille $(N \times n_r)$, $n_r \ll N$, ne prenant ainsi en compte que les n_r premiers modes propres. Enrichir Y_r par une sous-base complémentaire ΔT de vecteurs statiques permet de construire une base enrichie

$$T_E = [Y_r \quad \Delta T] \quad (3.43)$$

Pour procéder à la correction statique, les forces d'inertie des modes n'appartenant pas à la base tronquée sont négligées et seules les forces élastiques sont à prendre en compte. La projection du vecteur des déplacements sur la nouvelle base est par conséquent exprimée par

$$y = Y_r q + \Delta T q_\Delta \quad (3.44)$$

où q et q_Δ sont les coordonnées généralisées relatives respectivement aux deux sous-bases Y_r et ΔT .

Dans cette section une combinaison des techniques d'enrichissement par résidus statiques pour le traitement du cas général prenant en considération à la fois des modifications paramétriques et des non-linéarités localisées est détaillée. Pour ce faire, plusieurs configurations doivent être mises en évidence compte tenu de la linéarité ou non du système et du type de modifications. Le cas linéaire où seules des modifications de type paramétrique existent est traité en premier lieu. Le passage par la suite au cas non-linéaire, mène à deux cas : le premier tient compte des non-linéarités localisées pour l'enrichissement et le deuxième tient compte à la fois de ces dernières et des modifications paramétriques.

En régime harmonique, et en présence de modifications paramétriques, l'équation de mouvement (3.3) devient

$$Z(\omega)y(\omega) = f(\omega) \quad (3.45)$$

où $Z(\omega)$ est l'impédance du système modifié définie par

$$\begin{aligned} Z(\omega) &= [K] + j\omega[B] - \omega^2[M] \\ &= Z_0(\omega) + \Delta Z(\omega) \end{aligned} \quad (3.46)$$

L'équation (3.45) peut être réécrite sous la forme

$$\begin{aligned} Z_0(\omega)y(\omega) &= f(\omega) - \Delta Z(\omega)y(\omega) \\ &= f(\omega) + F_\Delta(\omega) \end{aligned} \quad (3.47)$$

où $F_\Delta(\omega) = -\Delta Z y(\omega)$ est le vecteur des forces dynamiques associées aux modifications $\Delta Z(\omega)$.

La matrice des résidus statiques est dans ce cas

$$\Delta T = R_\Delta = R F_\Delta \quad (3.48)$$

- **Résidus statiques enrichissant**

Pour calculer la matrice R_Δ , il suffit de calculer les modes de flexibilité résiduelle R et les forces F_Δ associées aux modifications. Les modes de flexibilité résiduelle sont, en fait, donnés par l'expression (3.30)

$$R = [K_0]^{-1} - Y_r[\Lambda]^{-1}Y_r^T \quad (3.49)$$

- **Résidus statiques associés aux excitations extérieures**

Un premier type de résidus statique R_E est associé aux excitations extérieures f appliquées au système et est calculé en imposant des forces unitaires F_e à ces dernières aux ddl excités

$$R_E = [\Delta K]R_e = [\Delta K]RF_e \quad (3.50)$$

- **Résidus statiques associés aux modifications paramétriques**

Le calcul des forces associées aux modifications paramétriques est effectué selon la répartition de ces modifications dans la structure. Ceci revient à calculer ces forces par zone de modification. Pour ce faire, dans une zone i ,

$$F_{\Delta i} = [(F_{\Delta}^K)_i \quad (F_{\Delta}^M)_i] \quad (3.51)$$

avec $(F_{\Delta}^K)_i$ et $(F_{\Delta}^M)_i$ sont les forces associées aux modifications des matrices de rigidité et de masse respectivement, définies par

$$(F_{\Delta}^K)_i = [\Delta K]Y_r \quad (3.52)$$

$$(F_{\Delta}^M)_j = [\Delta M]Y_r[\Lambda] \quad (3.53)$$

et associées par la suite afin d'obtenir les sous-bases relatives à chaque type d'enrichissement telles que

$$F_{\Delta}^K = [(F_{\Delta}^K)_1 \quad \dots \quad (F_{\Delta}^K)_i \quad \dots \quad (F_{\Delta}^K)_m] \quad (3.54)$$

$$F_{\Delta}^M = [(F_{\Delta}^M)_1 \quad \dots \quad (F_{\Delta}^M)_j \quad \dots \quad (F_{\Delta}^M)_n] \quad (3.55)$$

Une fois les sous-bases (3.54-3.55) sont construites, l'assemblage est effectué et une base de forces résiduelles de la forme (3.56) est créée

$$F_{\Delta} = [F_{\Delta}^K \quad F_{\Delta}^M] \quad (3.56)$$

Dans ce cas, les résidus statiques sont obtenus par

$$R_{\Delta} = RF_{\Delta} = [K_0]^{-1}F_{\Delta} - Y_r[\Lambda]^{-1}Y_r^T F_{\Delta} \quad (3.57)$$

Par conséquent la base enrichie (3.43) est obtenue et permet de réduire le temps de calcul sans perte de précision.

- **Résidus statiques associés aux non-linéarités localisées**

Dans le cas non-linéaire, une sous-base de résidus ΔT_{NL} est formée par l'ensemble des vecteurs représentant les réponses statiques du système pour des forces unitaires F_i appliquées chacune à un ddl où est localisée la non-linéarité $i, i = 1 \dots p$

$$\Delta T_{NL}^i = [K_0]^{-1}F_i \quad (3.58)$$

La base des résidus statiques associée aux non-linéarités localisées est donc de la forme

$$R_{NL} = \Delta T_{NL} = [\Delta T_{NL}^1 \dots \Delta T_{NL}^i \dots \Delta T_{NL}^p] \quad (3.59)$$

Dans le cas général où des modifications structurales paramétriques et non-linéarités localisées sont présentes, la base modale enrichie (BME) est de la forme

$$T_E = [Y_r \quad ; \quad R_E \quad ; \quad R_\Delta \quad ; \quad R_{NL}] \quad (3.60)$$

- **Réduction, normalisation et conditionnement de la base enrichie**

Deux principales conditions sont à satisfaire lors de la construction de la BME pour garantir sa précision et sa robustesse vis-à-vis des modifications structurales, sans augmentation du temps de calcul : la normalisation homogène et le bon-conditionnement. En effet, pour satisfaire la première condition, les résidus statiques quelle que soit leur nature (R_E, R_Δ, R_{NL}), doivent être normalisés de la même façon que la sous-base réduite de modes propres Y_r : une normalisation par exemple de ces derniers par rapport à la matrice de masse implique la normalisation des résidus également par rapport à cette matrice. Pour satisfaire la deuxième condition, la décomposition en valeurs singulières (SVD) est utilisée. Elle est appliquée en premier lieu à la base des forces résiduelles F_Δ ce qui permet de réduire le nombre de vecteurs dans la base et les arranger de façon homogène garantissant le bon conditionnement de la base. Une SVD est également appliquée à la BME pour homogénéiser les vecteurs qui la composent: modes propres et résidus statiques.

3.3.4. Méthode de Craig-Bampton adaptée aux modifications structurales

- **Historique et Applications**

La technique d'enrichissement utilisant les résidus statique a été adaptée à la méthode de synthèse modale de Craig-Bampton par Balmès [160, 162] pour des modèles de plaques assemblées. [163]. Masson et al. [164] l'ont également appliqué pour la réduction de modèles de composants de moteur d'avion en présence de modifications structurales. L'efficacité de la méthode a été aussi prouvée par l'application effectuée par De Lima et al. [165] sur des systèmes complexes comportant des modifications dans des zones viscoélastiques. Bouazizi et al. [166] et Gerges [167] ont mis en œuvre cette méthode pour tenir compte des non-linéarités localisées. Dans [168], la méthode Craig-Bampton enrichie est appliquée dans le cadre d'une approche d'optimisation hybride de systèmes de fuselage contenant des modifications paramétriques. Thomas [169] a appliqué la méthode de Craig-Bampton enrichie pour l'analyse vibratoire de micro/nano structures piézoélectriques non-linéaires.

En outre, d'autres travaux ont été menés pour adapter cette méthode à la prise en compte des incertitudes paramétriques dans le cadre de la quantification et la propagation des incertitudes. Le **chapitre 4** en citera quelques-unes. La robustesse du modèle réduit obtenue par cette technique en termes de précision et de gain en temps de calcul a été mise en évidence dans tous ces travaux. Pour cette raison, les techniques d'enrichissement par résidus statiques, dans le cadre de réduction directe ou par sous-structuration, seront retenues pour les applications abordées dans les **chapitre 3** et **4**.

- **Transformation de Craig-Bampton enrichie**

Pratiquement, la matrice de transformation de Craig-Bampton de la sous-structure k , définie auparavant par $T_{CB}^k = [\psi_j \ Y_r]^k$, est étendue aux résidus statiques menant à une base enrichie de la forme

$$T_{CBE}^k = [\psi_j \ Y_r \ \Delta T]^k \quad (3.61)$$

Elle permet d'écrire la relation de transformation en coordonnées généralisées comme suit

$$\begin{Bmatrix} y_j \\ y_i \end{Bmatrix}^k = \begin{bmatrix} I_{jj} & 0 & \Delta T \\ \psi_{ij} & \varphi_i & \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} q_j \\ q_i \\ q_\Delta \end{Bmatrix}^k \quad (3.62)$$

Pour simplifier la présentation, on omettra par la suite l'exposant k , relatif à la sous-structure k .

La forme de la sous-base enrichissante ΔT dépend de la répartition des modifications dans la sous-structure k . En effet, selon les deux cas correspondant à des modifications qui affectent l'ensemble des ddls internes i ou de jonction j , ΔT peut avoir, respectivement, les formes $[0 \ \Delta T]^T$ ou $[\Delta T \ 0]^T$.

Les sous matrices de la sous-base ΔT sont construites de façon similaire à sa formation dans le cas de réduction directe (**section 3.3.3**).

Dans ce cas, les forces associées aux modifications des matrices de rigidité et de masse, respectivement, sont calculées par

$$(F_\Delta^K)_z = [\Delta K] \begin{bmatrix} 0 \\ \varphi_i \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

$$(F_\Delta^M)_z = [\Delta M] \begin{bmatrix} 0 \\ \varphi_i \end{bmatrix} [\Lambda] \quad (3.64)$$

et les résidus statiques sont obtenus par

$$R_\Delta = RF_\Delta = [K_0]^{-1}F_\Delta - \begin{bmatrix} 0 \\ \varphi_i \end{bmatrix} [\Lambda]^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \varphi_i \end{bmatrix}^T F_\Delta \quad (3.65)$$

De ce fait, une matrice de Craig-Bampton enrichie de la forme (3.66) est obtenue.

$$T_{CBE} = \begin{bmatrix} I_{jj} & 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 \\ \psi_{ij} & \varphi_i & & R_E & & R_\Delta & & R_{NL} \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

Cette matrice de transformation contient $n_j + n_r + n_e$ colonnes, où n_j , n_r et n_e représentent respectivement le nombre de ddls de jonction j , le nombre de modes normaux retenus dans la sous-base φ_i relative aux ddls internes i et le nombre de vecteurs de résidus statiques enrichissants. Ce dernier est à son tour composé de trois types de vecteur selon la nature de l'enrichissement.

Les matrices réduites de rigidité et de masse ainsi que le vecteur réduit des forces extérieures de la sous-structure k sont calculés, respectivement, par

$$K_{CBE} = \mathbf{T}_{CBE}^T [K] \mathbf{T}_{CBE} \quad (3.67)$$

$$= \begin{bmatrix} K_{jj}^{CBE} & & \text{sym} \\ \varphi_i^T (\Delta K_{ij} + \Delta K_{ii} \psi_{ij}) & \Lambda + \varphi_i^T \Delta K_{ii} \varphi_i & \\ \Delta \mathbf{T}^T (\Delta K_{ij} + \Delta K_{ii} \psi_{ij}) & \Delta \mathbf{T}^T \Delta K_{ii} \varphi_i & \Delta \mathbf{T}^T (K_{ii}^0 + \Delta K_{ii}) \Delta \mathbf{T} \end{bmatrix}$$

$$M_{CBE} = \mathbf{T}_{CBE}^T [M] \mathbf{T}_{CBE} \quad (3.68)$$

$$= \begin{bmatrix} M_{jj}^{CBE} & & \text{sym} \\ M_{ij}^{CBE} & I_{ii} + \varphi_i^T \Delta M_{ii} \varphi_i & \\ \Delta \mathbf{T}^T (\Delta M_{ij} + \Delta M_{ii} \psi_{ij}) & \Delta \mathbf{T}^T \Delta M_{ii} \varphi_i & \Delta \mathbf{T}^T (M_{ii}^0 + \Delta M_{ii}) \Delta \mathbf{T} \end{bmatrix}$$

$$f_{CBE} = \mathbf{T}_{CBE}^T \begin{Bmatrix} f_j \\ f_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_j + \psi_{ij}^T f_i \\ \varphi_i^T f_i \\ R_E^T f_i \\ R_{\Delta}^T f_i \\ R_{NL}^T f_i \end{Bmatrix} \quad (3.69)$$

avec

$$\begin{aligned} K_{jj}^{CBE} &= K_{ii}^0 + K_{ij}^0 \psi_{ij} + \Delta K_{jj} + \Delta K_{ij} \psi_{ij} + \psi_{ij}^T (\Delta K_{ij} + \Delta K_{ii} \psi_{ij}) \\ M_{jj}^{CBE} &= M_{jj}^0 + \Delta M_{jj} + (M_{ji}^0 + \Delta M_{ji}) \psi_{ij} + \psi_{ij}^T (M_{ij}^0 + \Delta M_{ij} + M_{ii}^0 \psi_{ij} + \Delta M_{ii} \psi_{ij}) \\ M_{ij}^{CBE} &= \varphi_i^T (M_{ij}^0 + \Delta M_{ij} + M_{ii}^0 \psi_{ij} + \Delta M_{ii} \psi_{ij}) \end{aligned} \quad (3.70)$$

Dans le cas où les ddls internes ne sont pas chargés ($f_i = 0$), on a

$$f_{CBE} = \mathbf{T}_{CBE}^T \begin{Bmatrix} f_j \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.71)$$

Le vecteur excitation n'est pas modifié.

La combinaison des méthodes de réduction classiques et des techniques d'enrichissement par les résidus statiques a permis de construire deux types de modèles réduits. Ces modèles sont introduits en se basant sur deux approches : directe et de synthèse modale. La figure 3.4 résume les processus de réduction utilisant ces modèles.

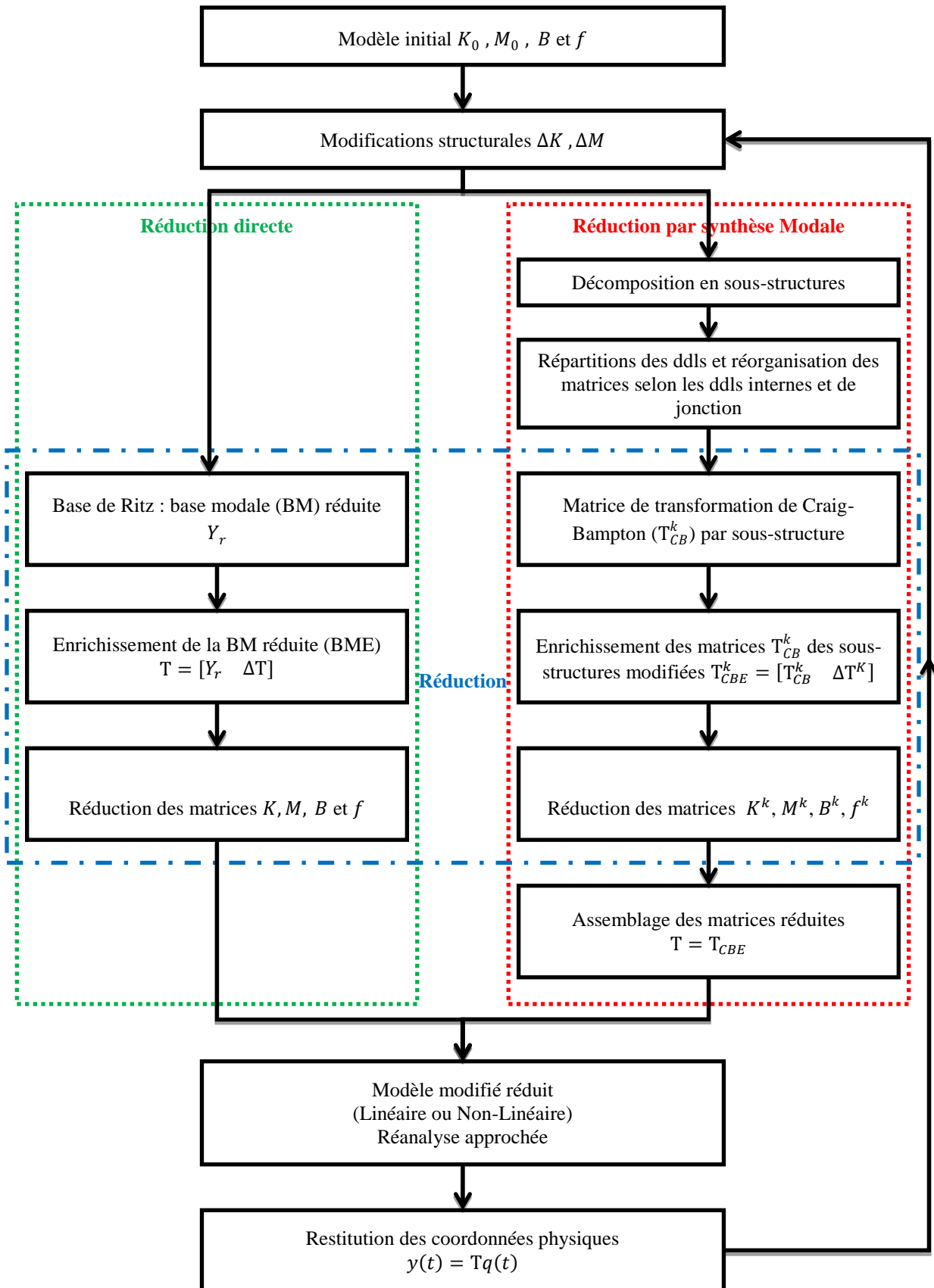


Fig.3.4. Processus de réduction de modèle : approche directe et approche par synthèse modale

3.4. Simulations numériques

3.4.1. Exemple 1 : Assemblage de poutres

3.4.1.1. Réduction de modèle linéaire par Base Modale Enrichie

La structure proposée, **Fig.3.5**, est composée de 5 poutres identiques sollicitées en vibration transversale dans le plan (x, y) . La discrétisation éléments finis de chaque poutre en 20 éléments ayant chacun deux ddl par nœud conduit à un modèle éléments finis à 200 ddl. Les poutres sont couplées par des ressorts linéaires et des amortisseurs visqueux linéaires et sont soumises chacune à une force $f^k(t) = 10 \text{ N}$ (**Fig.3.5**). Le choix de la répartition des excitations sur toutes les poutres est dû à la présence de modes locaux de poutres. Les caractéristiques mécaniques et géométriques de la structure sont listées dans le tableau **3.1**.

Tab.3.1. Caractéristiques géométriques et mécaniques de la structure initiale.

$b \text{ (m)}$	$h \text{ (m)}$	$L \text{ (m)}$	$E_0 \text{ (Pa)}$	$\rho_0 \text{ (kg.m}^{-3}\text{)}$	$k_0 \text{ (N.m}^{-1}\text{)}$	$c \text{ (N.s.m}^{-1}\text{)}$
3×10^{-2}	10^{-2}	5×10^{-1}	2.1×10^{11}	7800	10^6	10^2

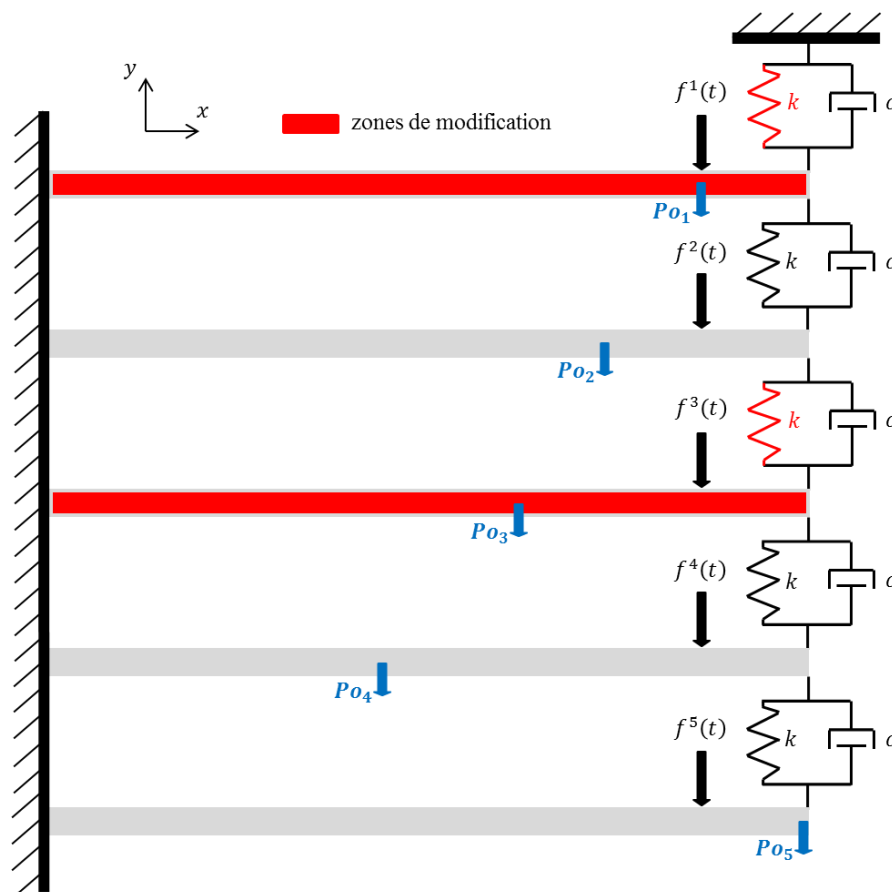


Fig.3.5. Structure de poutres couplées par des ressorts et des amortisseurs linéaires

Les modifications structurales sont les perturbations du Module d'Young de la première et de la troisième poutre et la première et la troisième raideur de couplage. A cet

effet, des niveaux de perturbation $\Delta E = 20\%$ et $\Delta k = 80\%$ sont considérés respectivement sur le Module d'Young et la raideur

$$E = E_0 + \Delta E \quad (3.72)$$

$$k = k_0 - \Delta k \quad (3.73)$$

Le modèle réduit dans cette application est construit par une BME dont l'efficacité est évaluée par rapport à une BM de même taille.

L'effet des perturbations est montré par la matrice MAC (Modal Assurance Criterion), représentée par la figure 3.6. En effet, cette matrice compare les modes normaux de la structure initiale et ceux de la structure modifiée. Pratiquement, pour deux bases modales $[Y^1]$ et $[Y^2]$ de tailles N_1 et N_2 mais un nombre de ddl identique la matrice MAC est définie par

$$MAC_{ij} = \frac{[(\varphi_i^1)^t \varphi_j^2]^2}{\|\varphi_i^1\|^2 \|\varphi_j^2\|^2}, i = 1, \dots, N_1; j = 1, \dots, N_2 \quad (3.74)$$

Cette matrice permet de quantifier le degré de corrélation entre ces vecteurs deux à deux par un nombre compris entre 0 et 1.

- Si $MAC_{ij} = 1$, les modes propres φ_i^1 et φ_j^2 sont identiques et parfaitement corrélés.
- Si $MAC_{ij} = 0$, les modes propres φ_i^1 et φ_j^2 sont orthogonaux et sans aucune corrélation.

Pour une représentation plus claire, la matrice (1-MAC) est considérée dans la figure 3.6. De plus, une comparaison des fréquences propres des systèmes initial et modifié est montrée dans le tableau 3.2 listant les 10 premières fréquences propres avant et après modifications structurales. L'effet des perturbations peut également être déduit des figures 3.7-3.9 superposant les réponses fréquentielles des structures initiale et modifiée.

La BME est construite de 20 vecteurs dont 14 sont des modes propres de la structure initiale et 6 des vecteurs de résidus statiques après application de la SVD. De ce fait, la taille de cette base est (200×20) . Le modèle réduit comporte 20 ddl en coordonnées généralisées. Ceci permet une réduction de 90% de la taille du modèle EF et une réduction de 67% du temps de calcul par rapport au modèle modifié complet (REF).

Pour comparer les résultats obtenus lors de l'application de la BME par rapport à la BM, les amplitudes des déplacements de quelques points d'observation (Fig.3.7-3.9) sont superposées avec celles des déplacements calculés par le modèle de référence (REF). Les erreurs des deux modèles réduits par rapport au modèle REF sont représentées dans les figures 3.7-3.9. Plusieurs points d'observations sont sélectionnés, les réponses des points $P_1 \dots P_5$ (Fig.3.6) sont interprétées et seules les réponses des points d'observation P_1, P_3 et P_5 sont présentées.

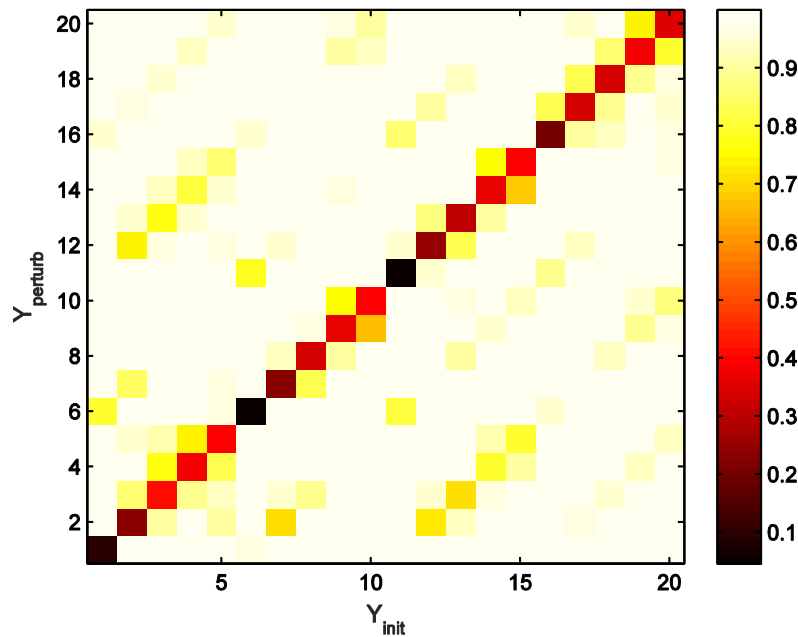


Fig.3.6. Matrice (1-MAC) comparant les modes propres des systèmes initial et modifié

Tab.3.2. Fréquences propres des systèmes initial et modifié.

N° du mode	Fréquences propres (Hz)	
	Modèle Initial	Modèle Modifié
1	82.96	67.30
2	134.09	129.85
3	141.76	141.79
4	143.83	143.65
5	144.57	149.31
6	228.10	224.95
7	341.31	316.29
8	412.38	391.43
9	437.84	435.53
10	447.11	447.35

On remarque que les réponses des points proches des zones de modification sont plus affectées par les modifications structurales. En effet, les déplacements des premier et troisième points d'observation, P_1 et P_3 , sont les plus affectés par les perturbations. Cependant, l'effet le moins important est détecté sur la réponse du cinquième point d'observation qui est localisé loin des zones de modification.

Les erreurs calculées sur les amplitudes des déplacements montrent la bonne précision assurée par la BME contrairement à la BM de même taille (200×20). Elle permet en plus d'atteindre 80% de réduction de temps de calcul comparé 75% atteint avec une BM. La robustesse de la BME vis-à-vis des modifications structurales est par conséquent prouvée.

A noter que la précision des résultats de la BM tend vers celle des résultats de la BME quand les modifications sont moins importantes. Ceci signifie qu'une BM peut suffire pour réduire avec approximation satisfaisante un modèle linéaire faiblement perturbé. Néanmoins, les informations introduites par les vecteurs des résidus statiques enrichissant cette base garantissent une bonne précision pour des niveaux importants de modifications structurales.

Tab.3.3. Comparaison des temps de calcul CPU.

Modèle	Taille (ddl)	CPU (%)
REF	200	100
BM	20	20
BME	20	25

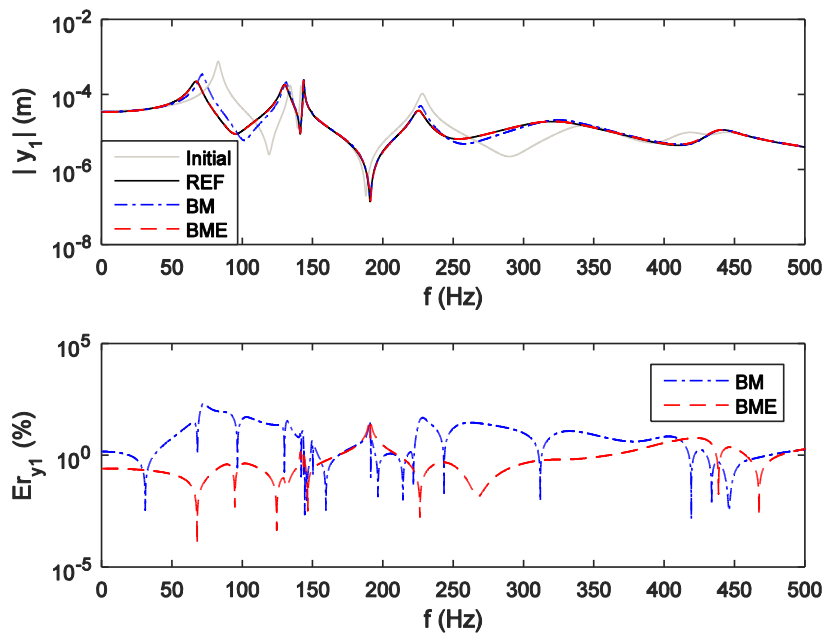


Fig.3.7. Amplitude du déplacement du point d'observation P_1 , et erreurs associées, calculées par le modèle REF et les modèles réduits BM et BME

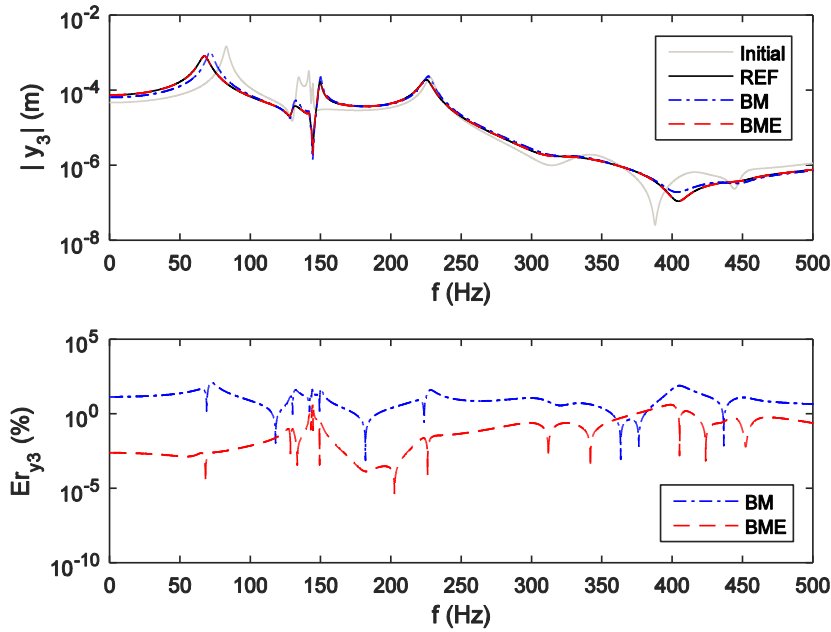


Fig.3.8. Amplitude du déplacement du point d'observation P_3 , et erreurs associées, calculées par le modèle REF et les modèles réduits BM et BME

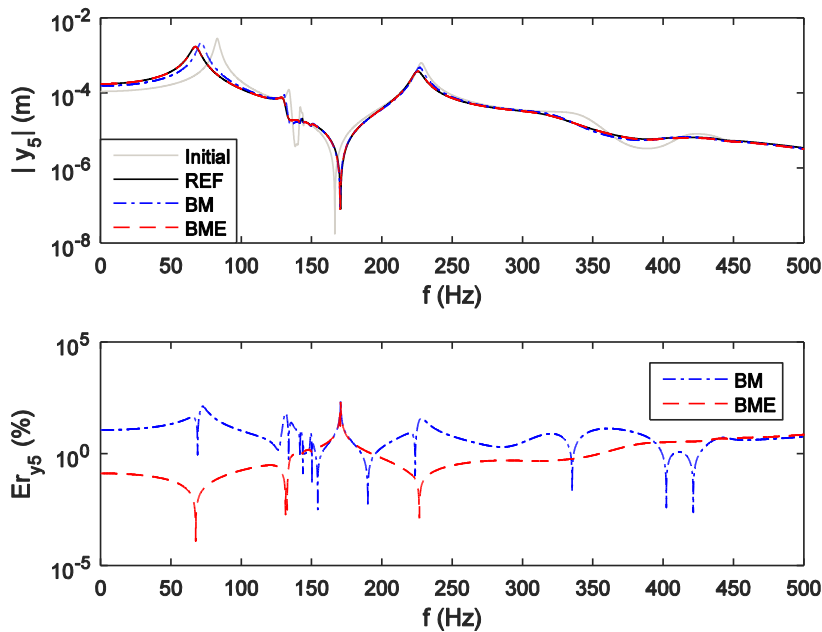


Fig.3.9. Amplitude du déplacement du point d'observation P_5 , et erreurs associées, calculées par le modèle REF et les modèles réduits BM et BME

3.4.1.2. Réduction de modèle non-linéaire

La même structure étudiée dans la **section 3.4.1.1** est considéré dans cette section avec addition de non-linéarités localisées dans les zones de couplage entre les poutres. En effet, 5 ressorts non-linéaires identiques de raideurs $k_{nl} = 2 \times 10^{12} \text{ N.m}^{-3}$ sont localisés tel que

montré dans la figure 3.10. Les poutres sont soumises chacune à une force $f^k(t) = 10 \times \cos(2\pi f_1 t)$ (N) excitant le premier mode de la structure ($f_1 = 82.96$ Hz).

Le calcul de la réponse temporelle de la structure est effectuée dans l'intervalle $[0 - 1s]$ avec un pas de temps 1 ms. Les réponses temporelles sont présentées sur l'intervalle $[0.92 - 1s]$ dans lequel le régime stationnaire est déjà établi.

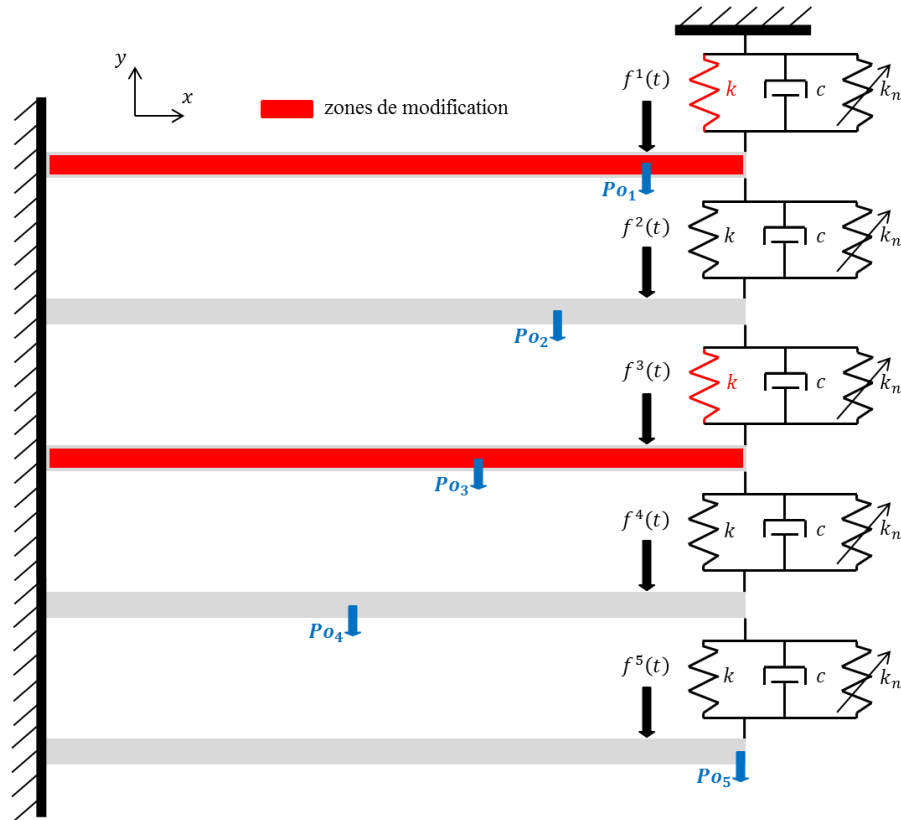


Fig.3.10. Structure de poutres couplées par des amortisseurs linéaires et des ressorts linéaires et non-linéaires

- **Réduction par base modale enrichie**

La BME est dans ce cas construite de 20 vecteurs dont 8 sont des modes propres de la structure initiale, et 12 des vecteurs de résidus statiques : 9 vecteurs correspondent aux modifications paramétriques et 3 vecteurs correspondent aux non-linéarités localisées. Une réduction de 90% de la taille du modèle EF est atteinte permettant ainsi 50% environ de gain de temps de calcul par rapport au modèle REF.

Les mêmes cas et les mêmes niveaux de modifications paramétriques de l'application linéaire (**section 3.4.1**) sont considérés dans cette application. En présence de non-linéarités localisées, l'effet des modifications est mis en évidence à partir de la superposition des réponses des systèmes initial et modifié (**Figs.3.11-3.13**) et des indicateurs temporels I_1, I_2 et I_3 permettant une comparaison des réponses temporelles en termes d'amplitude et de périodicité (**Tab.3.4**).

Les réponses de la structure sont présentées en termes de vitesse (pour montrer de façon plus prononcée le comportement non-linéaire de la structure) et de diagrammes de phase pour différents points d'observation (**Figs.3.11-3.13**).

Les valeurs des indicateurs temporels (**Tab.3.4**) représentent les moyennes de ces indices pour tous les ddls. Ceci permet d'évaluer les réponses de la structure globale comportant aussi bien des ddls à comportement faiblement linéaire que des ddls fortement affectés par les non-linéarités.

Comme dans l'application linéaire, une approximation par un modèle réduit utilisant une BM est insuffisante dans le cas de fortes modifications structurales.

Les résultats de cette application, combinant à la fois des modifications paramétriques et des non-linéarités localisées, illustrent la limitation de la BM et montrent en revanche la robustesse de la BME vis-à-vis de ces modifications. En effet, des erreurs inférieures à 0.02% sont obtenues, illustrant l'efficacité de la BME par rapport à la BM.

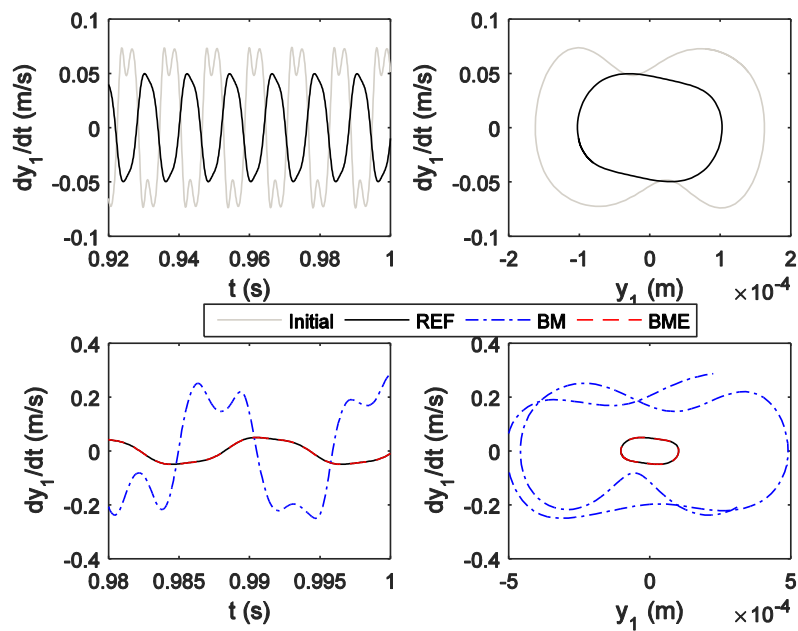


Fig.3.11. Vitesse et diagramme de phase du point d'observation P_1 calculés par le modèle REF et les modèles réduits BM et BME

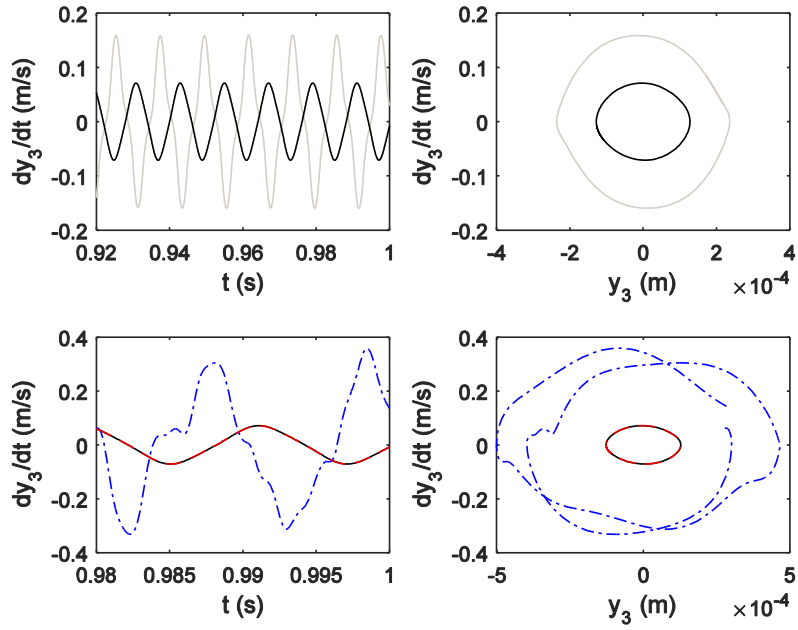


Fig.3.12. Vitesse et diagramme de phase du point d'observation P_3 calculés par le modèle REF et les modèles réduits BM et BME

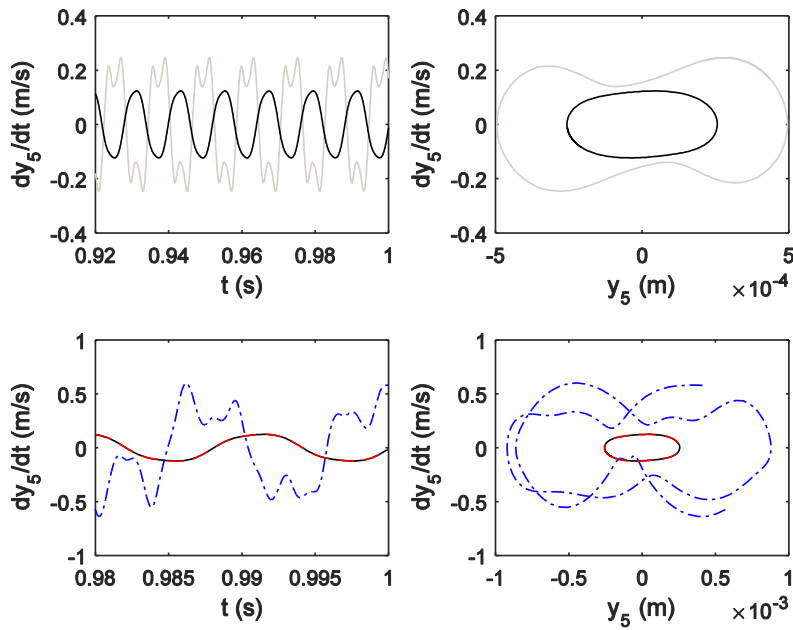


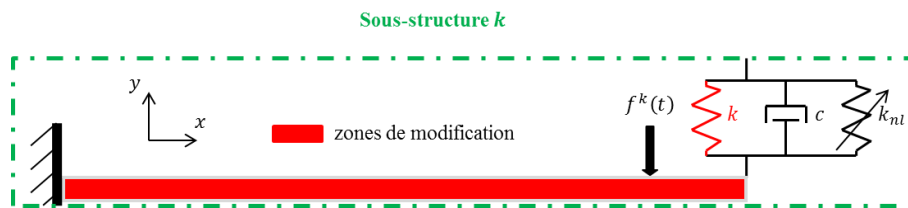
Fig.3.13. Vitesse et diagramme de phase du point d'observation P_5 calculés par le modèle REF et les modèles réduits BM et BME

Tab.3.4. Indicateurs temporels et temps de calcul CPU calculés pour le modèle REF et les modèles réduits BM et BME

Modèle	Taille (ddls)	Erreurs sur les indicateurs temporels (%)			CPU (%)
		I_1	I_2	I_3	
Initial	200	-	-	-	-
REF	200	0.00	0.00	0.00	100
BM	20	>100	12.52	17.46	51
BME	20	<0.01	0.02	0.02	53

- **Réduction par transformation de Craig-Bampton enrichie**

Pour appliquer la méthode de Craig-Bampton, la structure est décomposée en sous-structures. Etant donné que la structure est périodique, chaque sous-structure est construite d'éléments de couplage (ressort linéaire, ressort non-linéaire et amortisseur visqueux linéaire) et d'une poutre (**Fig.3.14**).

**Fig.3.14.** Modèle de la sous-structure k

L'utilisation de la méthode de synthèse modale permet de considérer chaque cellule de la structure périodique comme sous-structure. La réduction de modèle de structure périodique de taille plus importante est traitée dans le chapitre 4. Pour le cas des 5 poutres couplées, la première et la troisième sous-structure sont réduites de façon différente des autres sous-structures. En fait, seules les transformations locales de Craig-Bampton formées pour ces sous-structures sont enrichies par les résidus statiques R_Δ . Cependant, toutes les transformations sont enrichies par des résidus statiques R_E et R_{NL} .

L'enrichissement est effectué tel que la matrice de transformation de Craig-Bampton enrichie (TCBE) de la sous-structure k ait la forme

$$T_{CBE}^k = \begin{bmatrix} I_{jj} & 0 & 0 & 0 & R_{NL} \\ \psi_{ij} & \varphi_i & R_E & R_\Delta & 0 \end{bmatrix}^k \quad (3.75)$$

L'enrichissement par les non-linéarités est effectué au niveau des ddls de jonction tenant compte qu'elles sont localisées entre ces derniers.

La TCBE globale, obtenue après assemblage, contient 8 ddls de jonction, 8 modes normaux et 8 vecteurs de résidus statiques dont 2 vecteurs sont associés à l'enrichissement par modifications paramétriques, 5 vecteurs sont associés aux non-linéarités localisées et 1

vecteur est associé aux excitations extérieures. La taille de la TCBE est par conséquent (200×24) permettant des réductions de 88 % de la taille du modèle EF (modèle réduit à 24 ddl) et 50% environ du temps de calcul.

Les indicateurs temporels I_1, I_2 et I_3 de la TCBE sont calculés et groupés dans le tableau 3.5 et comparés à ceux du modèle complet (REF). En effet, l'erreur en terme d'amplitude ne dépasse pas 0.15% pour les deux cas de perturbation. En terme de périodicité, les erreurs sont inférieures à 0.06% et 0.02% respectivement. Ceci illustre l'efficacité de la TCBE. Les figures 3.15-3.17 montrent le très bon accord entre les réponses des modèles réduits et complet.

Tab.3.5. Indicateurs temporels et temps de calcul CPU calculés pour les modèles complet (REF) et réduit (TCBE)

Modèle	Taille (ddls)	Erreurs sur les indicateurs temporels (%)			CPU (%)
		I_1	I_2	I_3	
Initial	200	-	-	-	-
REF	200	0.00	0.00	0.00	100
TCBE	20	<0.01	0.02	0.02	52

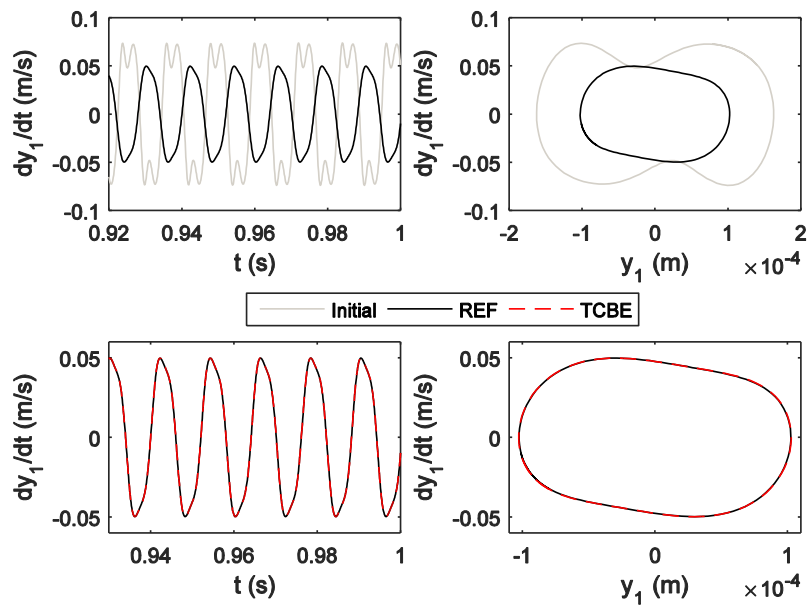


Fig.3.15. Vitesse et diagramme de phase du point d'observation P_1 calculés par le modèle REF et le modèle réduits TCBE

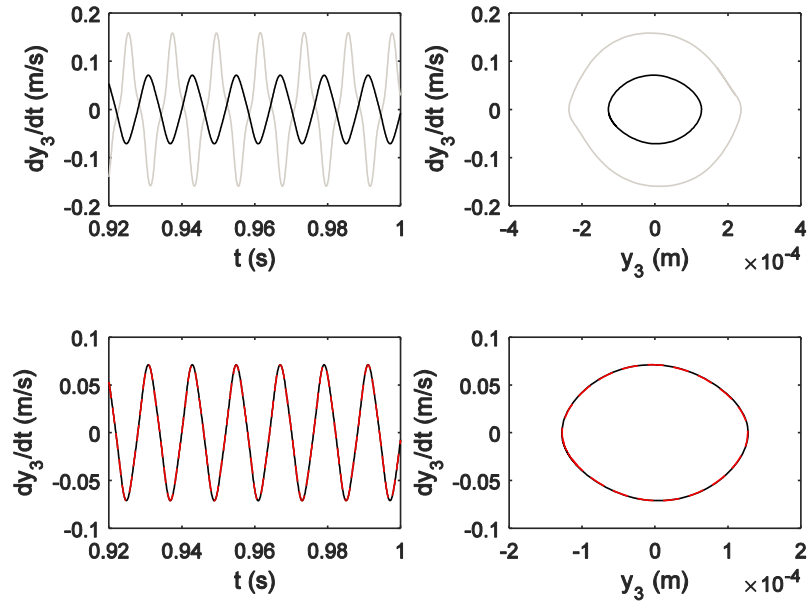


Fig.3.16. Vitesse et diagramme de phase du point d'observation P_3 calculés par le modèle REF et le modèle réduits TCBE

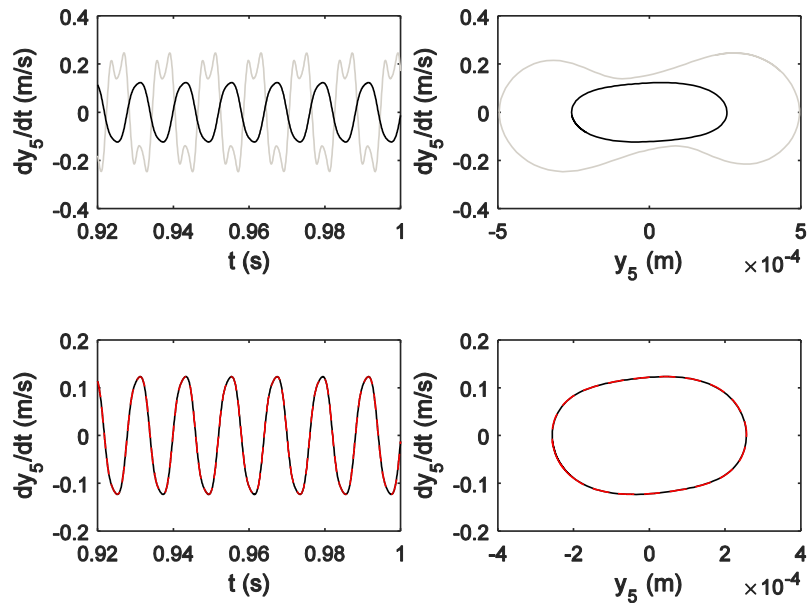


Fig.3.17. Vitesse et diagramme de phase du point d'observation P_5 calculés par le modèle REF et le modèle réduits TCBE

3.4.2. Exemple 2 : Structure de plaques couplées

La structure proposée, **Fig.3.18**, est composée de 2 plaques identiques sollicitées en vibration transversale dans le plan (x, y) . La discrétisation éléments finis de chaque plaque en 400 éléments ayant chacun cinq ddls par nœud conduit à un modèle éléments finis à 4200 dills.

Les deux plaques sont couplées par des ressorts linéaires et non-linéaires. La première plaque est soumise à une force $F = 5 \text{ N}$ (**Fig.3.18**). Les caractéristiques mécaniques et géométriques de la structure sont listées dans le tableau **Tab3.6**.

Tab.3.6. Caractéristiques géométriques et mécaniques de la structure initiale.

$A \text{ (m)}$	$B \text{ (m)}$	$h \text{ (m)}$	$E_0 \text{ (Pa)}$	$\rho_0 \text{ (kg.m}^{-3}\text{)}$	$k \text{ (N.m}^{-1}\text{)}$	$k_{nl} \text{ (N.m}^{-3}\text{)}$
0.2	0.5	2×10^{-3}	67.5×10^9	2700	10^7	10^{11}

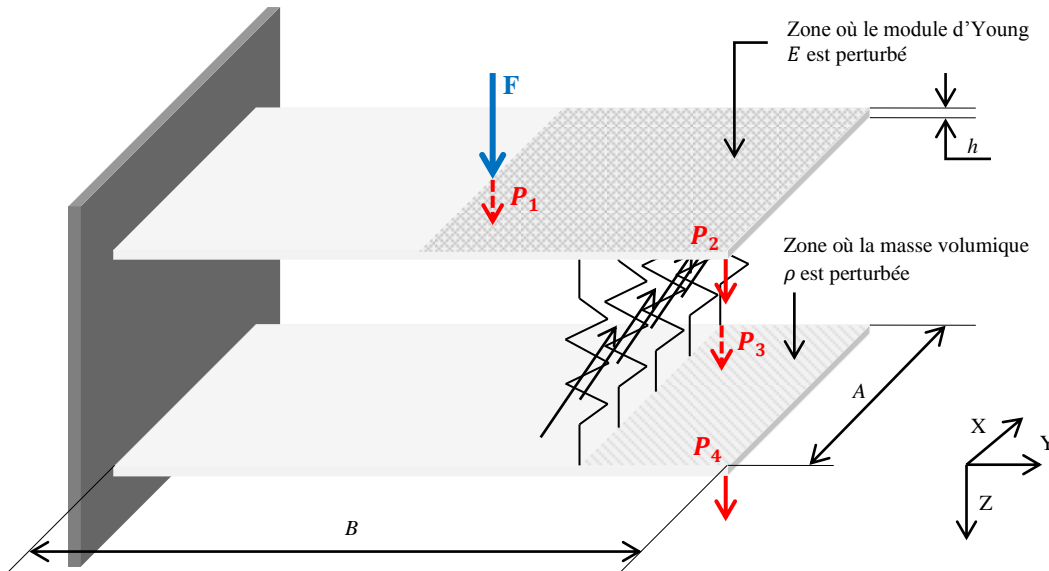


Fig.3.18. Structure de deux plaques couplées par des ressorts linéaires et non-linéaires

Les modifications structurales sont les perturbations du Module d'Young de la première plaque et la masse volumique de la deuxième plaque tel que décrit dans la figure **3.18**. Des niveaux de perturbation $\Delta E = 80\%$ et $\Delta \rho = 50\%$ sont considérés respectivement sur le module d'Young et la masse volumique

$$E = E_0 - \Delta E \quad (3.76)$$

$$\rho = \rho_0 + \Delta \rho \quad (3.77)$$

L'effet des perturbations est montré par la matrice 1-MAC, représentée par la figure **3.19**. Cette dernière montre que les modifications structurales introduites perturbent considérablement les propriétés modales linéaires de la structure. De plus, le tableau **3.7** groupe les dix premières fréquences propres du système sans et avec modifications structurales. L'effet de ces modifications sur le comportement de la structure est également illustré par la superposition des réponses fréquentielles des systèmes initial et modifié (**Fig.20**).

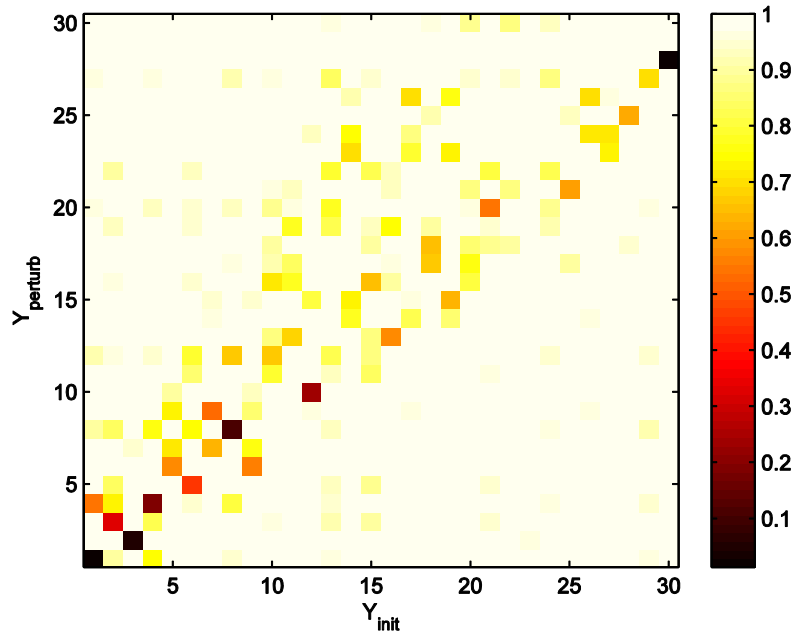


Fig.3.19. Matrice (1-MAC) comparant les modes propres des systèmes initial et modifié

Tab.3.7. Fréquences propres des systèmes initial et modifié.

N° du mode	Fréquences propres (Hz)	
	Modèle initial	Modèle modifié
1	6,65	5,86
2	34,20	21,37
3	36,52	28,04
4	41,44	36,32
5	83,91	60,56
6	109,12	63,61
7	109,27	92,65
8	116,59	100,76
9	136,45	104,13
10	203,12	141,58

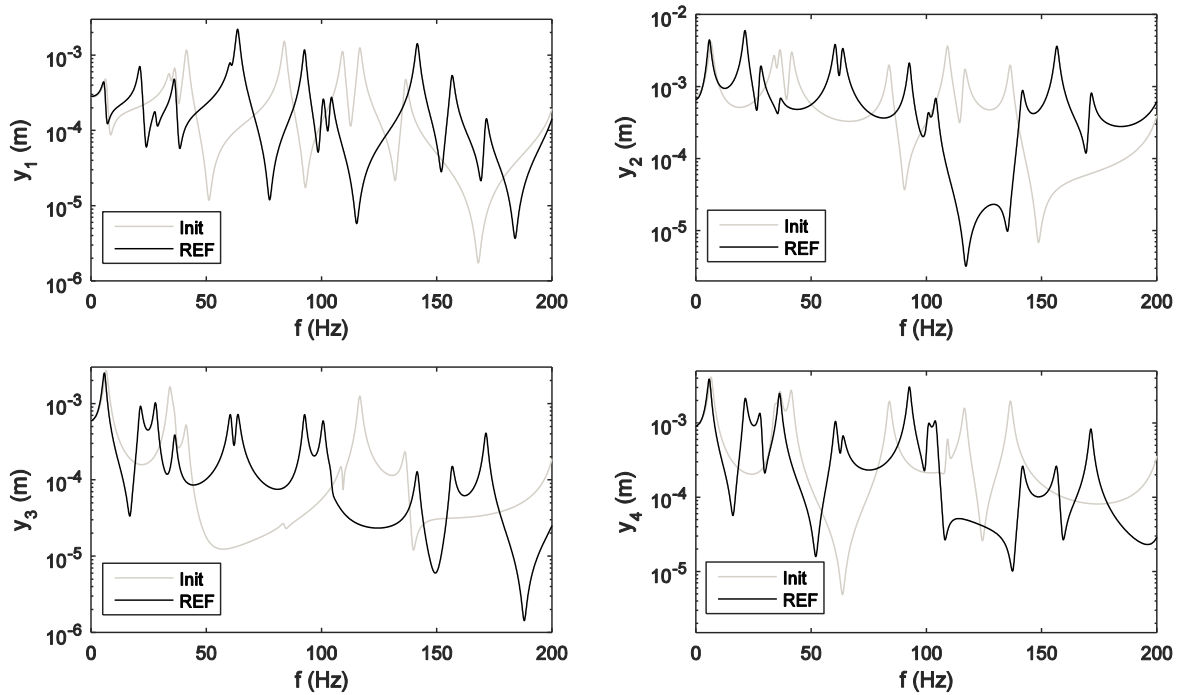


Fig.3.20. Réponses fréquentielles linéaires des systèmes initial et modifié

La force excitatrice est dans ce cas $F(t) = 5 \cos(2\pi f_e t) N$, avec $f_e = 40 \text{ Hz}$. Le calcul de des réponses temporelles de la structure est effectué dans l'intervalle $[0 - 2s]$ avec un pas de temps 0.2 ms . Les réponses temporelles sont présentées sur l'intervalle $[1.8 - 2s]$ dans lequel le régime stationnaire est déjà établi.

Les réponses de la structure sont présentées en termes de vitesses et de diagrammes de phase pour différents points d'observation (**Figs.3.21-24**). Les résultats obtenus en appliquant la méthode de Craig-Bampton enrichie sont comparés à ceux calculés en utilisant une TCB standard (non enrichie) tout en considérant les résultats obtenus pour le modèle EF modifié complet comme référence.

La TCBE globale contient 5 ddls de jonction, 25 modes normaux et 35 vecteurs de résidus statiques. La taille de la TCBE est par conséquent (4200×65) permettant des réductions de 98.5 % de la taille du modèle EF (modèle réduit à 65 ddls) et 30% environ du temps de calcul (**Tab.3.8**).

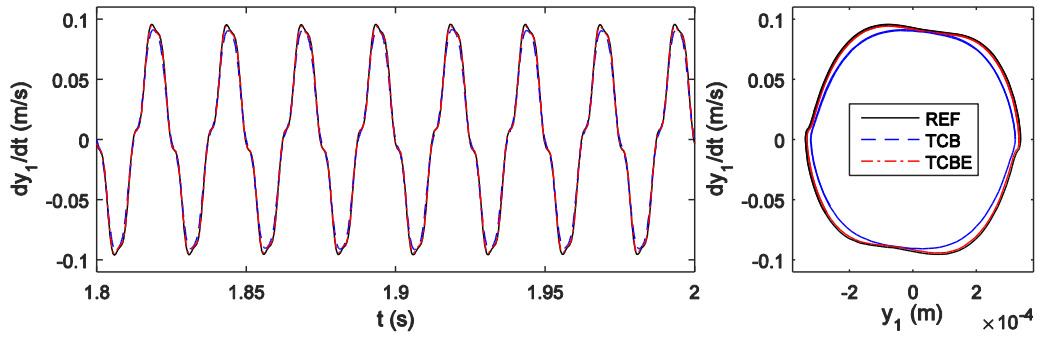


Fig.3.21. Vitesse et diagramme de phase du point d'observation P_1 calculés par le modèle REF et les modèles réduits TCB et TCBE

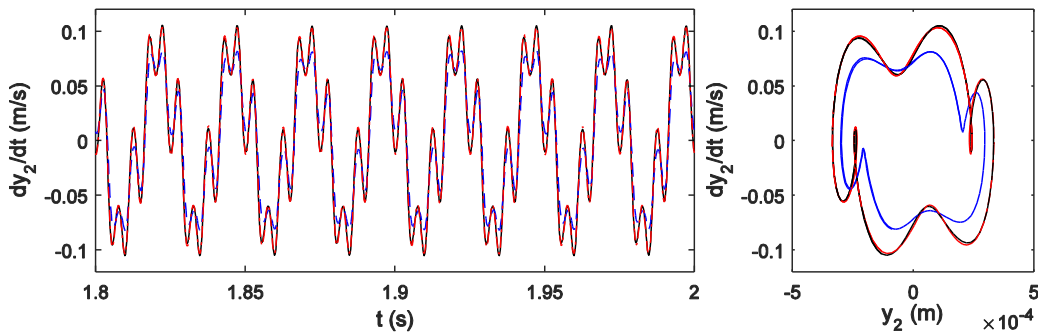


Fig.3.22. Vitesse et diagramme de phase du point d'observation P_2 calculés par le modèle REF et les modèles réduits TCB et TCBE

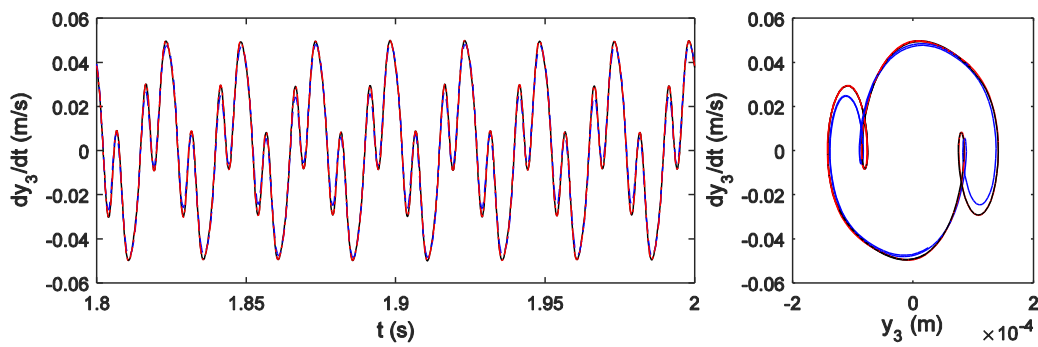


Fig.3.23. Vitesse et diagramme de phase du point d'observation P_3 calculés par le modèle REF et les modèles réduits TCB et TCBE

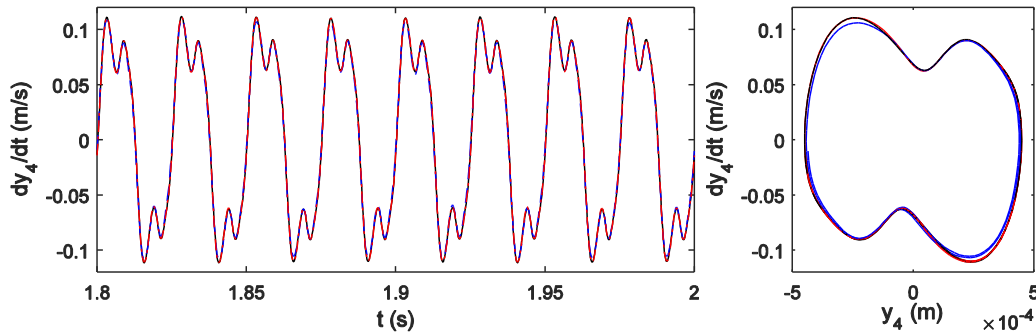


Fig.3.24. Vitesse et diagramme de phase du point d'observation P_4 calculés par le modèle REF et les modèles réduits TCB et TCBE

Les indicateurs temporels I_1, I_2 et I_3 correspondant aux modèles TCB et TCBE sont calculés et groupés dans le tableau **3.8** et comparés à ceux du modèle complet (REF). En plus de l'accord des réponses de la TCBE avec ceux de référence (**Figs.3.21-3.24**), l'efficacité de la TCBE est illustrée par des erreurs des indicateurs temporels ne dépassant pas 0.01% et 0.24%, en termes d'amplitude et de périodicité, respectivement. Cependant, les erreurs de la TCB atteignent 8.22%.

Tab.3.8. Indicateurs temporels et temps de calcul CPU calculés pour les modèles complet (REF) et réduits (TCB et TCBE)

Modèle	Taille (ddl)	Erreurs sur les indicateurs temporels (%)			CPU (%)
		I_1	I_2	I_3	
REF	4200	0.00	0.00	0.00	100
TCB	65	8.22	0.33	0.29	71
TCBE	65	<0.01	0.24	0.06	73

3.5. Conclusion

Une étude bibliographique non exhaustive des principales méthodes de réduction de modèle dédiées aux modifications structurales est présentée dans ce chapitre. Une méthode combinant la prise en compte des perturbations paramétriques et des non-linéarités localisées est proposée selon deux approches : approche directe par condensation et approche de synthèse modale par sous-structuration dynamique. Enrichir une base modale ou une base de transformation de Craig-Bampton permet de construire des modèles réduits robustes vis-à-vis des modifications structurales et peu coûteux par rapport aux modèles éléments finis complets.

Etendre ce type de modèle réduit à la prise en compte des incertitudes paramétriques en plus des non-linéarités localisées est l'objectif principal du **chapitre 4**.

Chapitre 4. Métamodèles robustes combinant méthodes stochastiques et réduction de modèle

4.1. Introduction

Dans l'objectif de concevoir des systèmes dynamiques complexes de grande taille, en présence d'incertitudes paramétriques, avec un coût raisonnable et sans perte significative de précision, des métamodèles combinant des méthodes stochastiques de propagation d'incertitude et des méthodes de réduction de modèle adaptées aux modifications structurales sont proposés dans ce chapitre. La robustesse des métamodèles proposés est évaluée vis-à-vis des incertitudes paramétriques et des non-linéarités localisées.

Dans la pratique, quand le modèle éléments finis est de grande taille, le nombre de paramètres incertains est élevé et des techniques itératives de résolution sont mises en œuvre, le recours à des modèles condensés est nécessaire pour compenser l'exigence en temps de calcul imposée par les méthodes de propagation d'incertitude. En effet, malgré l'efficacité de la méthode du chaos polynomial généralisé et la réduction du temps de calcul atteinte en l'appliquant par rapport à d'autres méthodes (MC, LHS, ...), l'effort qu'elle exige est fortement dépendant des facteurs cités ci-dessus. La technique de régression utilisée pour calculer les coefficients de l'expansion du gPC est basée sur des calculs successifs dont le nombre augmente avec l'ordre des polynômes dans l'expansion. En effet, l'ordre polynomial exigé pour une approximation satisfaisante augmente avec le nombre de paramètres incertains du modèle et les niveaux des dispersions et des non-linéarités.

Après avoir cité quelques méthodologies introduites dans la littérature combinant des méthodes de propagation d'incertitude et de réduction de modèle dans la **section 4.2**, la **section 4.3** sera consacrée à introduire les métamodèles proposés. Des exemples numériques illustrant l'efficacité de ces métamodèles seront présentés dans la **section 4.4**.

4.2. Métamodèles : généralités

Pour contourner les difficultés mentionnées auparavant, des métamodèles combinant des méthodes stochastiques de propagation des incertitudes et des modèles réduits sont proposés dans ce chapitre. La figure 4.1 représente un schéma illustrant le principe de ces métamodèles.

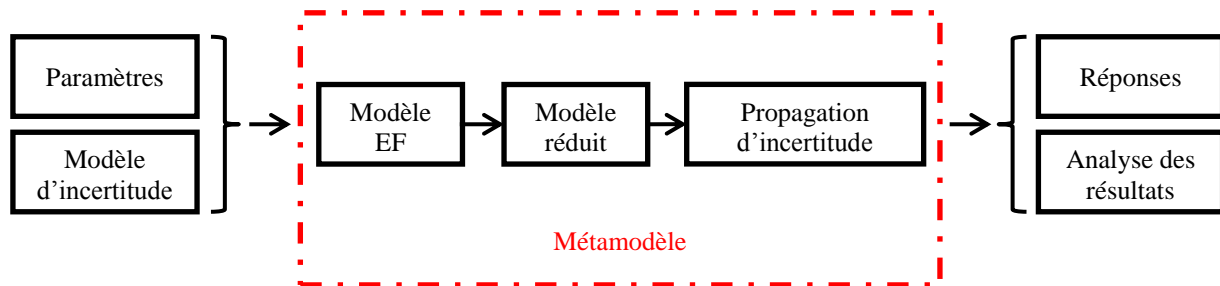


Fig.4.1. Schéma d'un métamodèle

Le couplage propagation d'incertitude - réduction de modèle a été proposé sous plusieurs formes et a été appliqué avec succès dans la littérature. La méthode de synthèse modale, par exemple, a été combinée avec des méthodes de propagation d'incertitudes telles que la méthode SSFEM [170] et la méthode de perturbation [171] pour des analyses linéaires stochastiques. Sarsri et al. [172] ont combiné la méthode de synthèse modale avec la méthode du chaos polynomial adaptatif pour étudier les fonctions de transfert pour des modèles éléments finis de grande taille ayant des paramètres stochastiques linéaires et non-linéaires. Des méthodes de réduction de type POD ont également été couplées avec des méthodes de propagation d'incertitude. Par exemple, Rasee et al. [173] ont développé un modèle réduit stochastique non intrusif combinant la méthode du chaos polynomial homogène, une méthode POD adaptée et une expansion de Karhunen-Loève modifiée afin de résoudre des problèmes de diffusion de chaleur en régime stationnaire. La méthode POD a été également combinée avec la méthode de Galerkin dans [174] pour approximer le comportement transitoire de structures linéaires ayant des paramètres aléatoires. D'autres méthodes de réduction de modèle ont aussi été adaptées à la propagation d'incertitude. Un modèle réduit généré par des déplacements et leurs dérivés a été, par exemple, combiné avec la méthode SSFEM dans [175] pour l'optimisation de forme d'une structure linéaire en coque. Gaurav et al. [176] ont proposé une méthode qui consiste à séparer les ddls non-linéaires et/ou stochastiques des ddls linéaires déterministes et à utiliser l'équation intégrale non-linéaire de Volterra pour calculer les termes de modification ajoutés à la réponse nominale linéaire et obtenir ainsi la réponse du système en utilisant la méthode de Monte Carlo (MC). Des techniques d'optimisation multi-objectif ont été intégrées dans des modèles réduits combinés avec les méthodes de propagation d'incertitude de MC et de collocation probabiliste [177]. Récemment, la méthode SFEM a été couplée avec une technique de condensation adaptée aux problèmes non-linéaires basée sur une réduction de Guyan à deux niveaux [178].

Les métamodèles qu'on propose dans ce chapitre combinent la méthode gPC, utilisant la technique non intrusive de régression pour le calcul des coefficients de l'expansion polynomiale, et la méthode LHS avec des modèles réduits utilisant des bases de réduction

construites principalement de modes normaux linéaires et enrichies par des résidus statiques prenant compte des incertitudes paramétriques et des non-linéarités localisées [179]. Ces métamodèles sont introduits selon l'approche directe, ce qui permet de construire un métamodèle mono-niveau [180], et l'approche de synthèse modale permettant de créer un métamodèle bi-niveaux [181, 182].

4.3. Métamodèles proposés

La technique de régression utilisée pour le calcul des coefficients de l'expansion du gPC est basée sur une succession de N calculs de réponses déterministes $\{y^{(n)}, n = 1 \dots N\}$ correspondant à un ensemble choisi de réalisations de variables aléatoires $\{\xi^{(n)}\}_{n=1}^N$. Comme dans le cas des méthodes MC et LHS, combiner cette méthode avec la réduction de modèle consiste à générer ces calculs sur des modèles réduits en coordonnées généralisées $q^{(n)}, n = 1 \dots N$ et le retour aux coordonnées physiques est effectué par la suite par le biais de la transformation $y = Tq$. Les coefficients de l'expansion du gPC sont calculés à partir de ces réponses en utilisant la relation (2.63)

$$\tilde{y} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T y = \Phi^+ y \quad (4.1)$$

et l'expansion du gPC (2.37)

$$\tilde{Y} = \sum_{j=0}^P \tilde{y}_j(x) \Phi_j(\xi) \quad (4.2)$$

permet ainsi d'obtenir les réponses stochastiques sur lesquelles une analyse statistique peut être effectuée.

4.3.1. Métamodèle mono-niveau: gPC-BME

Le métamodèle mono-niveau est basé sur la méthode de réduction directe tel que détaillé dans la **section 3.3.3** du **chapitre 3**. En effet, les réponses déterministes successives $\{y^{(n)}, n = 1 \dots N\}$ sont projetées sur une BME. Pour ce faire, des sous-bases complémentaires doivent être combinées avec la BM tronquée.

Les résidus d'enrichissement correspondant aux excitations et aux non-linéarités sont calculés de la même façon détaillée dans la **section 3.3.3** du **chapitre 3**. De plus, des résidus statiques R_S sont calculés pour prendre en compte les incertitudes.

Par zone stochastique i , les vecteurs des forces résiduelles sont définis par

$$(F_S)_i = [(F_S^K)_i \quad (F_S^M)_i] \quad (4.3)$$

avec $(F_S^K)_i$ et $(F_S^M)_i$ sont les forces associées aux incertitudes affectant les matrices de rigidité et de masse, respectivement, définies par

$$(F_S^K)_i = \sum_{n=1}^N K_i(\xi^n) [Y_r] \quad (4.4)$$

$$(F_S^M)_j = \sum_{n=1}^N M_j(\xi^n) [Y_r][\Lambda] \quad (4.5)$$

La base des forces résiduelles est par la suite calculée par

$$F_S = [F_S^K \quad F_S^M] = [(F_S^K)_1 \quad \dots \quad (F_S^K)_m | (F_S^M)_1 \quad \dots \quad (F_S^M)_p] \quad (4.6)$$

Cette base est normalisée par rapport à la matrice de masse et une SVD est appliquée pour assurer l'homogénéité de ses vecteurs et par conséquent son bon-conditionnement.

La sous-base des résidus statiques est donc calculée par

$$R_S = RF_S = [K_0]^{-1}F_S - [Y_r][\Lambda]^{-1}[Y_r]^t F_S \quad (4.7)$$

La combinaison de la BM réduite et des sous-bases de résidus statiques tenant comptes des excitations extérieures (3.46), des incertitudes (4.7) et des non-linéarités localisées (3.55) permet de construire une base modal enrichie (BME) de la forme

$$T_E = [Y_r \quad \vdots \quad R_E \quad \vdots \quad R_S \quad \vdots \quad R_{NL}] \quad (4.8)$$

Comme détaillé dans le **chapitre 3**, des normalisations homogènes et des SVD sont incontournables à effectuer pour régulariser la base enrichie et assurer son bon-conditionnement et sa robustesse vis-à-vis des incertitudes et des non-linéarités localisées sans augmentation du temps de calcul.

la BME contient $(n_r + n_e)$ vecteurs, où n_r est le nombre de modes propres retenus et n_e le nombre de vecteurs statiques d'enrichissement.

4.3.2. Métamodèle bi-niveaux: gPC-TCBE

Le métamodèle bi-niveaux consiste à étendre la réduction à la méthode de synthèse modale de Craig-Bampton enrichie. Une transformation de Craig-Bampton enrichie (TCBE) est construite pour chaque sous-structure k

$$T_{CBE}^k = \begin{bmatrix} I_{jj} & 0 & 0 \\ \psi_{ij} & \varphi_i & \Delta T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{jj} & 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 \\ \psi_{ij} & \varphi_i & \vdots & R_E & \vdots & R_S & \vdots & R_{NL} \end{bmatrix}^k \quad (4.9)$$

Les résidus statiques tenant compte des excitations extérieures et des non-linéarités localisées sont calculées de la même façon introduite dans la **section 3.3.3** du **chapitre 3**. Les résidus statiques relatifs aux incertitudes sont cette fois calculés par

$$R_S = RF_S = [K]^{-1}F_S - \begin{bmatrix} 0 \\ \varphi_i \end{bmatrix} [\Lambda]^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \varphi_i \end{bmatrix}^T F_S \quad (4.10)$$

où les vecteurs de forces résiduelles formant les sous-bases

$$F_S = [F_S^K \quad F_S^M] = [(F_S^K)_1 \quad \dots \quad (F_S^K)_m | (F_S^M)_1 \quad \dots \quad (F_S^M)_p] \quad (4.11)$$

sont donnés par

$$(F_S^K)_i = \sum_{n=1}^N K_i(\xi^n) \begin{bmatrix} 0 \\ \varphi_i \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

$$(F_S^M)_j = \sum_{n=1}^N M_j(\xi^n) \begin{bmatrix} 0 \\ \varphi_i \end{bmatrix} [\Lambda] \quad (4.13)$$

L'assemblage des matrices de transformations locales T_{CBE}^k relatives à chaque sous-structure k , tenant compte de la continuité des déplacements au niveau des interfaces communes des sous-structures voisines, permet d'obtenir une matrice de transformation globale T_{CBE} qui contient $n_j + n_r + n_e$ colonnes, où n_j , n_r et n_e représentent, respectivement, le nombre de ddls de jonction, le nombre des modes normaux retenus et le nombre de vecteurs statiques d'enrichissement.

4.4. Simulations numériques

Six métamodèles sont calculés et comparés entre eux dans cette section :

- Méthode LHS appliquée sur le modèle EF complet : LHS-REF ;
- Méthode gPC appliquée sur le modèle EF complet : gPC-REF ;
- Méthode LHS appliquée sur le modèle réduit BME : LHS-BME ;
- Méthode gPC appliquée sur le modèle réduit BME : gPC-BME ;
- Méthode LHS appliquée sur le modèle réduit TCBE : LHS- TCBE ;
- Méthode gPC appliquée sur le modèle réduit TCBE: gPC- TCBE ;

Un schéma récapitulatif de ces métamodèles est représenté par la figure 4.2.

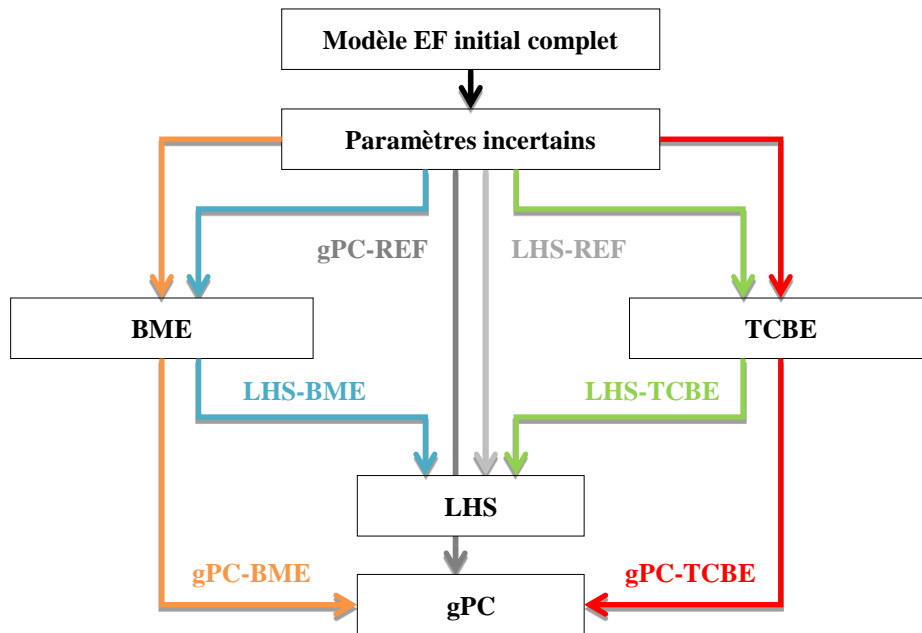


Fig.4.2. Schéma récapitulatif des métamodèles appliqués

La méthode LHS basée sur 10^3 tirages appliquée sur le modèle EF complet est considérée comme référence. Le nombre de calculs successifs exigés par la méthode de régression pour calculer les coefficients de l'expansion du gPC est déterminé par la taille du plan d'expérience tel que mentionné dans le **chapitre 2, section 2.3.5.3**.

4.4.1. Réponse dynamique d'un portique 2D évaluée par le métamodèle mono-niveau

Pour évaluer la robustesse du métamodèle mono-niveau, on propose de calculer la réponse temporelle d'une structure portique 2D (**Fig.4.3**). La structure est discrétisée en 160 éléments finis poutres à trois ddl par nœud. Un modèle éléments finis de 474 ddl est par conséquent obtenu. Les propriétés mécaniques et géométriques de la structure sont groupées dans le tableau **4.1**. L'amortissement de la structure est supposé proportionnel de coefficient modal $\eta = 0.05$. Deux ressorts non-linéaires sont attachés au portique comme illustré par la figure **4.3**. La structure est soumise à deux forces d'excitation $F_1(N) = 10^3 \times \cos(\omega_5 t)$ et $F_2(N) = 10^4 \times \cos(\omega_5 t)$ appliquées aux points P_{f1} et P_{f2} excitant son cinquième mode propre ($\omega_5 = 1435.9 \text{ rad.s}^{-1}$). A noter que le choix de la fréquence d'excitation est arbitraire.

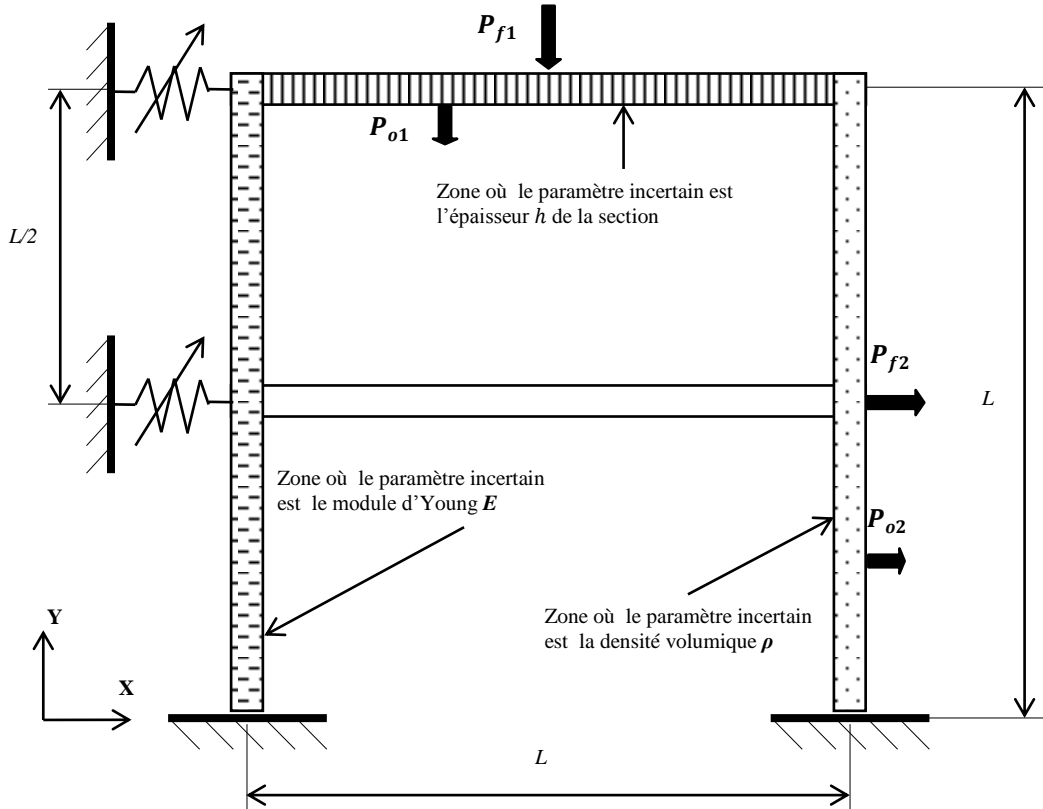


Fig.4.3. Schéma d'un portique 2D avec non-linéarités localisées

Tab.4.1. Caractéristiques géométriques et mécaniques du portique.

$b(m)$	$h_0(m)$	$L(m)$	$E_0(GPa)$	$\rho_0(kg.m^{-3})$	$k(N.m^{-1})$	$k_{NL}(N.m^{-3})$
0.03	0.05	1.5	210	7800	10^6	10^{16}

Le module d'Young E et la masse volumique ρ des poutres verticales, respectivement, et l'épaisseur h de la section de la poutre horizontale située en haut sont les trois paramètres incertains (**Fig.4.3**) tels que

$$\begin{aligned}
 E &= E_0(1 + \delta_E \xi_E) \\
 \rho &= \rho_0(1 + \delta_\rho \xi_\rho) \\
 h &= h_0(1 + \delta_h \xi_h)
 \end{aligned}
 \tag{4.14}$$

où ξ_E , ξ_ρ et ξ_h sont des variables aléatoires de lois de probabilité log-normale, log-normale et exponentielle, respectivement. Les dispersions considérées sont $\delta_E = \delta_\rho = 20\%$ et $\delta_h = 10\%$.

La réponse temporelle de la structure est calculée dans l'intervalle $[0 - 0.2 \text{ s}]$, divisé en pas de temps de 0.1 ms , dans lequel le régime stationnaire est bien établi.

L'interprétation des résultats obtenus est effectuée par rapport aux réponses calculées par le modèle de référence (LHS-REF). Les résultats représentés ci-dessous sont relatifs à deux points d'observation choisis P_{o1} et P_{o2} (**Fig.4.3**).

La BME contient $n_r = 20$ modes normaux retenus de la BM et $n_e = 37$ vecteurs de résidus statiques d'enrichissement. 44 vecteurs de résidus statiques sont calculés en premiers lieu : 40 vecteurs tiennent compte des incertitudes, 2 vecteurs correspondent aux non-linéarités localisées et 2 vecteurs aux excitations extérieures. En appliquant la SVD, la sous-base de 44 vecteurs est réduite à 37 vecteurs. La taille de la BME est donc (474×57) permettant une réduction de taille de 88% environ par rapport au modèle EF complet (modèle réduit à 57 ddls).

Les résultats des différents métamodèles implémentés sont comparés en termes de précision et de temps de calcul. Les indicateurs temporels I_1 , I_2 et I_3 et les temps CPU sont groupés dans le tableau **4.2**. Ce tableau indique aussi la taille du modèle EF utilisé et le nombre de tirages exigé par chaque méthode de propagation d'incertitude. A noter que les indicateurs temporels donnés représentent les moyennes pour tous les ddls.

L'effet des incertitudes est illustré par la matrice (1-MAC) (**Fig.4.4**) qui compare les modes normaux du modèle déterministe et la moyenne des modes normaux du modèle stochastique linéaire calculées pour les 10^3 tirages de la méthode LHS. Les figures **4.5** et **4.6** montrent également cet effet à travers la superposition des réponses déterministes et des moyennes des réponses stochastiques.

En comparaison avec une BM de même taille (57 vecteurs), la robustesse de la BME est illustrée par les indicateurs temporels (**Tab.4.2**) et les figures **4.7** et **4.8** superposant les moyennes des déplacements et des diagrammes de phase des points d'observation choisis calculées par ces deux métamodèles (LHS-BM et LHS-BME) et par le modèle de référence LHS-REF.

D'après la comparaison des temps de calcul CPU (**Tab.4.2**), le métamodèle mono-niveau (LHS-BME) permet de réduire le temps de calcul de 46% environ avec des erreurs inférieures à 0.07% par rapport au modèle de référence (LHS-REF).

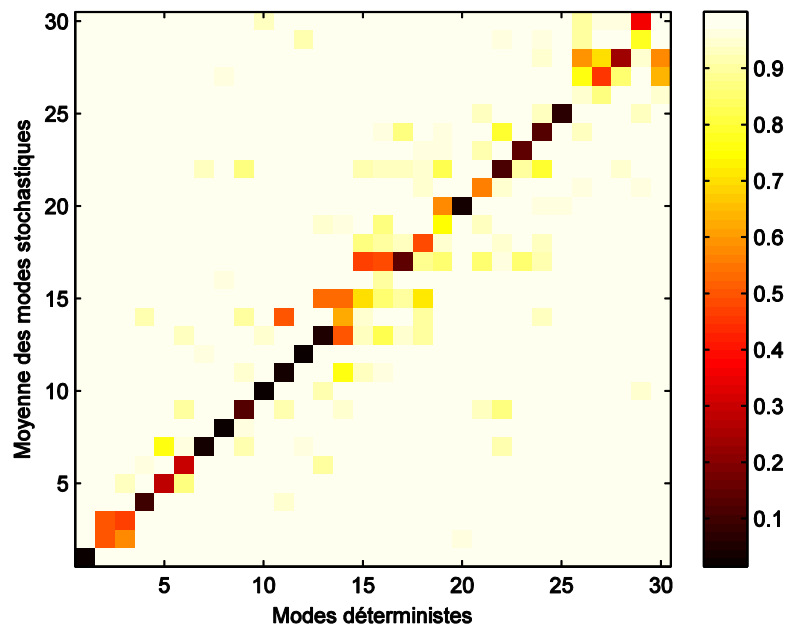


Fig.4.4. Matrice (1-MAC) comparant les modes normaux du système déterministe et les moyennes des modes normaux du système stochastique correspondant aux 10^3 tirages de la méthode LHS

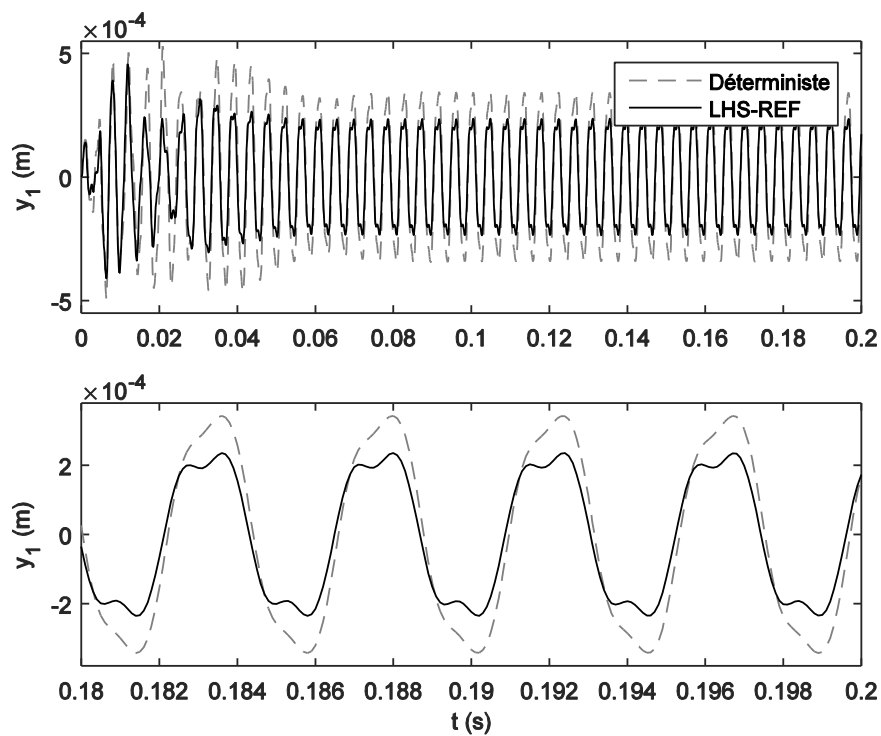


Fig.4.5. Moyenne du déplacement stochastique du point d'observation P_{01} calculée avec le modèle de référence (LHS-REF) comparée au déplacement dans le cas déterministe

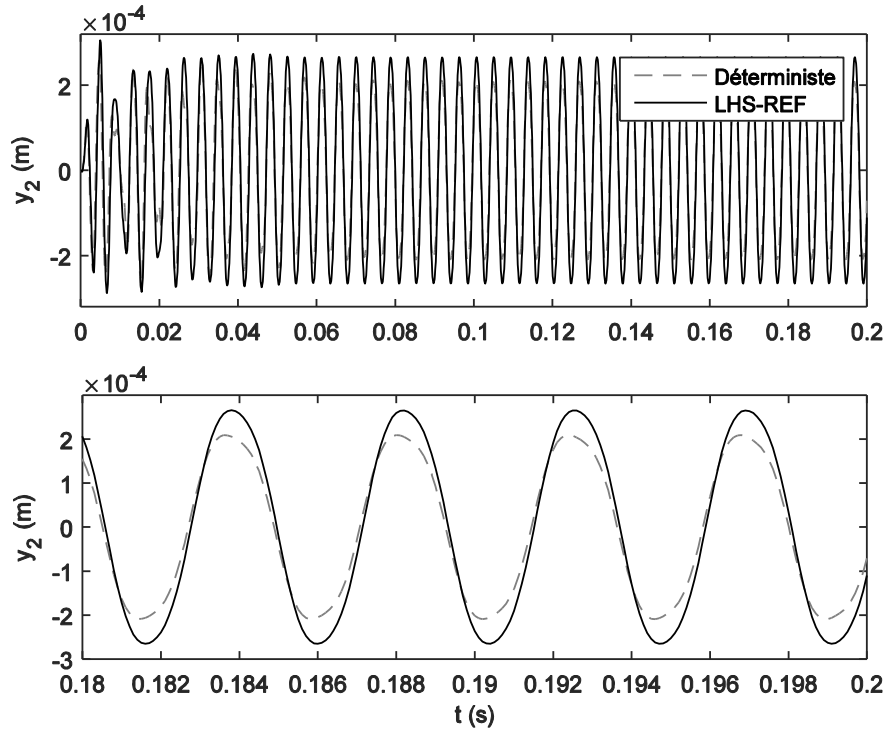


Fig.4.6. Moyennes du déplacement stochastique du point d'observation P_{o2} calculée avec le modèle de référence (LHS-REF) comparée au déplacement dans le cas déterministe

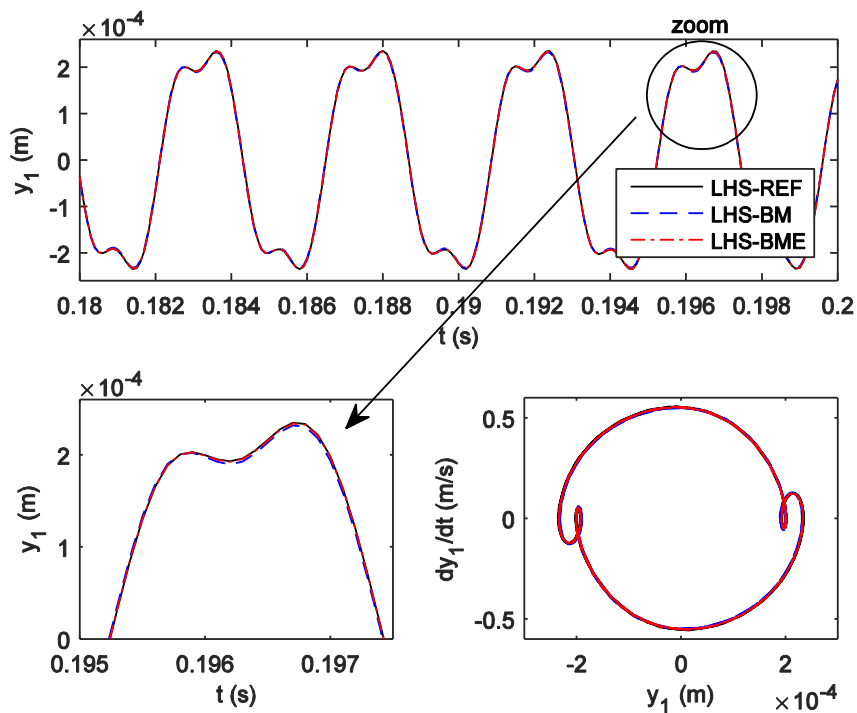


Fig.4.7. Comparaison des moyennes des déplacements et des diagrammes de phase stochastiques du point d'observation P_{o1} calculées par la méthode LHS utilisant la BM (LHS-BM), la BME (LHS-BME) et le modèle EF complet (LHS-REF)

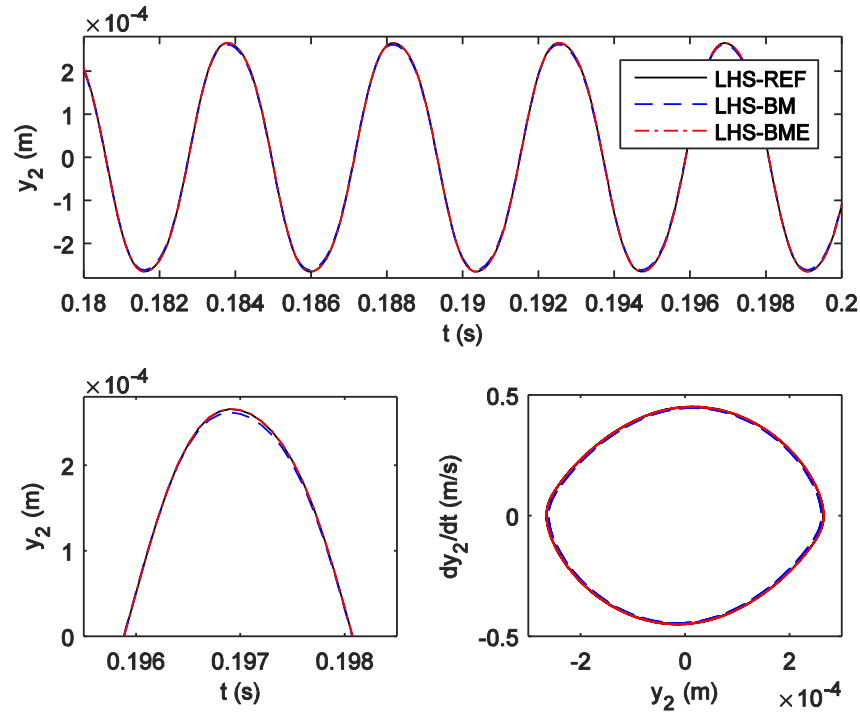


Fig.4.8. Comparaison des moyennes des déplacements et des diagrammes de phase stochastiques du point d'observation P_{o2} calculées par la méthode LHS utilisant la BM (LHS-BM), la BME (LHS-BME) et le modèle EF complet (LHS-REF)

Pour appliquer la méthode gPC, trois ordres polynomiaux sont considérés : $p = 2$, $p = 4$ et $p = 6$. A ces ordres correspondent des plans d'expérience numériques contenant 27, 57 et 171 réalisations de variables aléatoires choisies parmi, respectivement, $(2 + 1)^3 = 27$, $(4 + 1)^3 = 125$ et $(6 + 1)^3 = 343$ combinaisons de racines de polynômes d'Hermite d'ordre $(p + 1)$, avec $d = 3$ le nombre de variables aléatoires, en vérifiant la relation (2.64), **chapitre 2**. Ces variables sont transformées en variables aléatoires lognormales et exponentielles en utilisant les relations de transformation données par le **tableau 2.2** du **chapitre 2**.

Les figures **4.9** et **4.10** comparent les moyennes des amplitudes des déplacements et des digrammes de phase calculées par la méthode gPC d'ordre 2 et 6 implémentée sur le modèle EF complet (LHS-REF). Cette comparaison montre que plus l'ordre de l'expansion est élevé plus la précision est meilleure. Néanmoins, le temps de calcul augmente (**Tab.4.2**). Ces figures montrent également que l'approximation la moins précise est détectée sur le ddl le plus affecté par les non-linéarités.

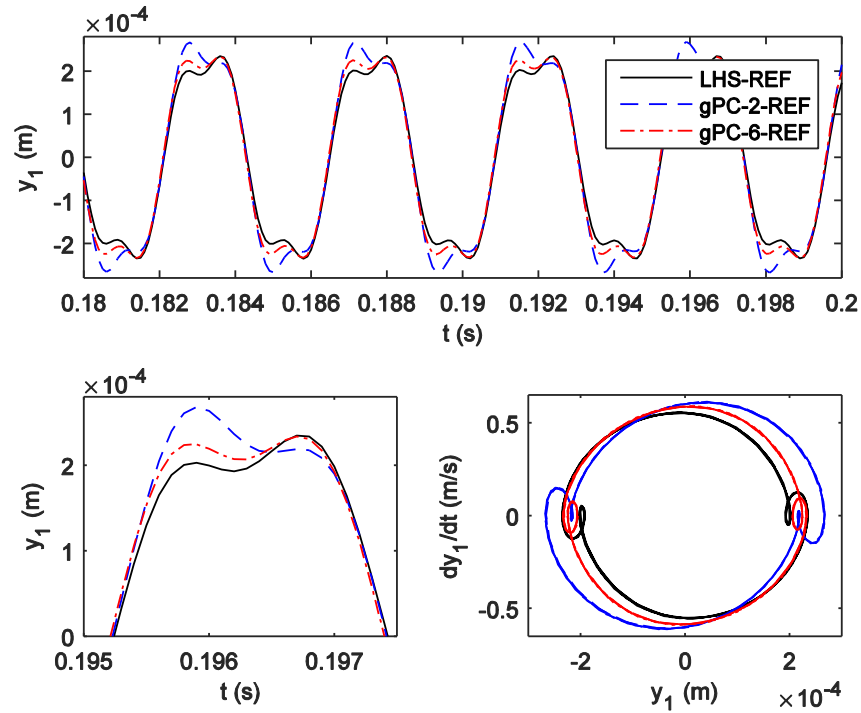


Fig.4.9. Comparaison des moyennes des déplacements et des diagrammes de phase stochastiques du point d'observation P_{o1} calculées par la méthode LHS (LHS-REF) et par la méthode gPC d'ordre 2 (gPC-2-REF) et 6 (gPC-6-REF), sur le modèle EF complet

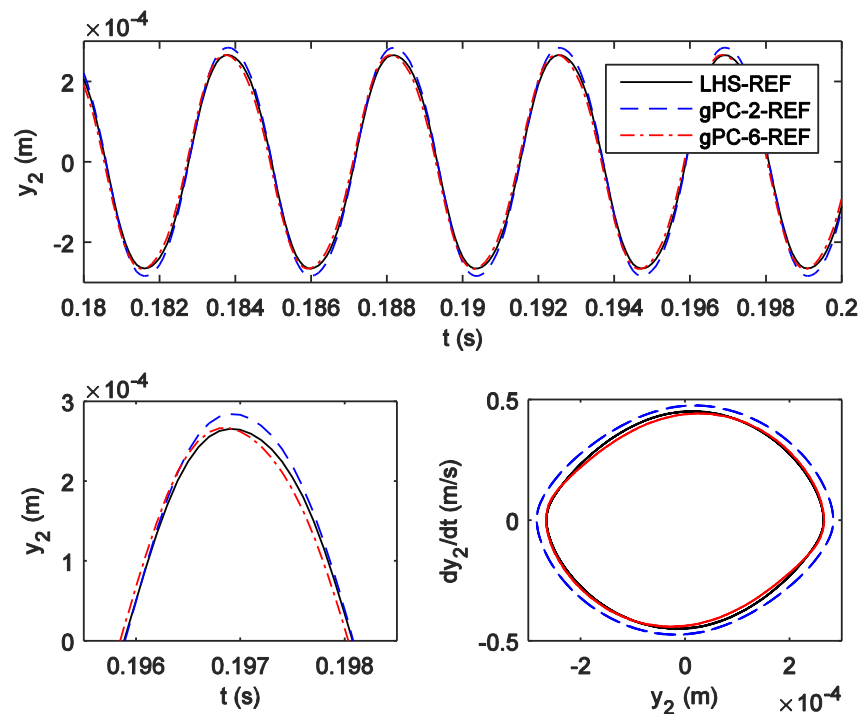


Fig.4.10. Comparaison des moyennes des déplacements et des diagrammes de phase stochastiques du point d'observation P_{o2} calculées par la méthode LHS (LHS-REF) et par la méthode gPC d'ordre 2 (gPC-2-REF) et 6 (gPC-6-REF), sur le modèle EF complet

La comparaison des résultats d'application de la méthode gPC sur la BME (gPC-BME) et sur le modèle EF complet (gPC-REF) est illustrée par les figures 4.11 et 4.12 et les indicateurs temporels groupés dans le tableau 4.2. Le métamodèle mono-niveau permet une bonne approximation avec des erreurs inférieures à 0.07% et 0.61% en termes d'amplitude et de périodicité, respectivement, pour un ordre polynomial égal à 6. Notons que les niveaux des non-linéarités et des incertitudes sont choisis élevés pour cet exemple. Ceci explique la nécessité d'atteindre un ordre polynomial égal à 6 pour une approximation précise sachant que pour les ddls les plus affectés par les incertitudes, des expansions du gPC à ordre plus élevé doivent être plus intéressantes mais à coût beaucoup plus élevé. Néanmoins, ce coût reste toujours plus faible que celui exigé pour l'implémentation de la méthode LHS sur le modèle EF complet (LHS-REF).

A noter que les points d'observation P_{o1} et P_{o2} sont choisis pour montrer les effets les plus importants des incertitudes et des non-linéarités localisées sur le comportement de la structure. Ceci explique l'écart remarqué entre les niveaux de précision quantifiés par les indicateurs temporels (valeurs moyennes des indicateurs calculées sur tous les ddls) et les niveaux de précision déduits des superpositions des courbes (réponses des points d'observation choisis).

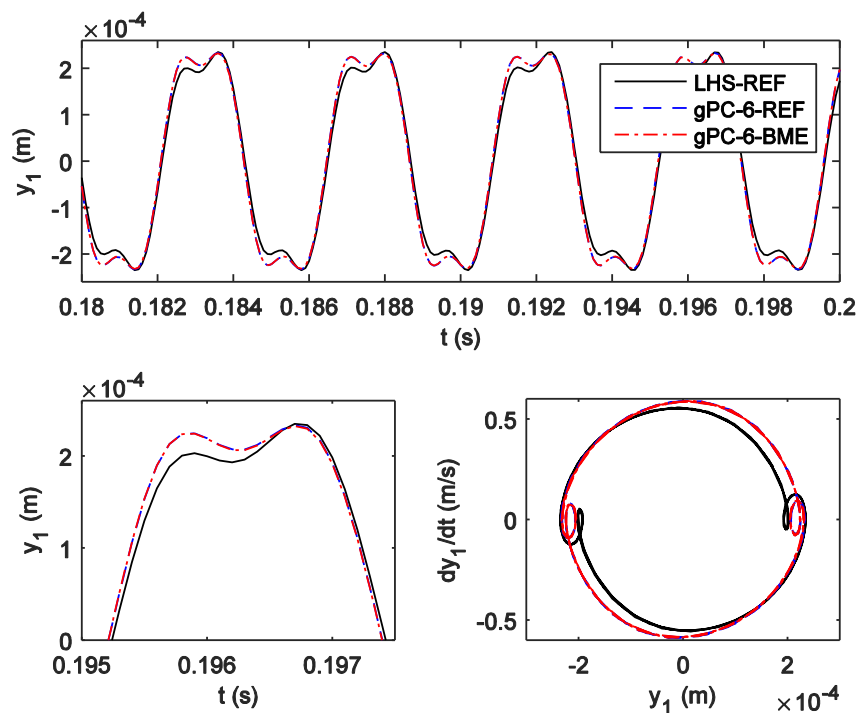


Fig.4.11. Comparaison des moyennes des déplacements et des diagrammes de phase stochastiques du point d'observation P_{o1} calculées par la méthode LHS (LHS-REF) et par la méthode gPC d'ordre 6 sur le modèle EF complet (gPC-2-REF) et le modèle réduit (gPC-6-REF)

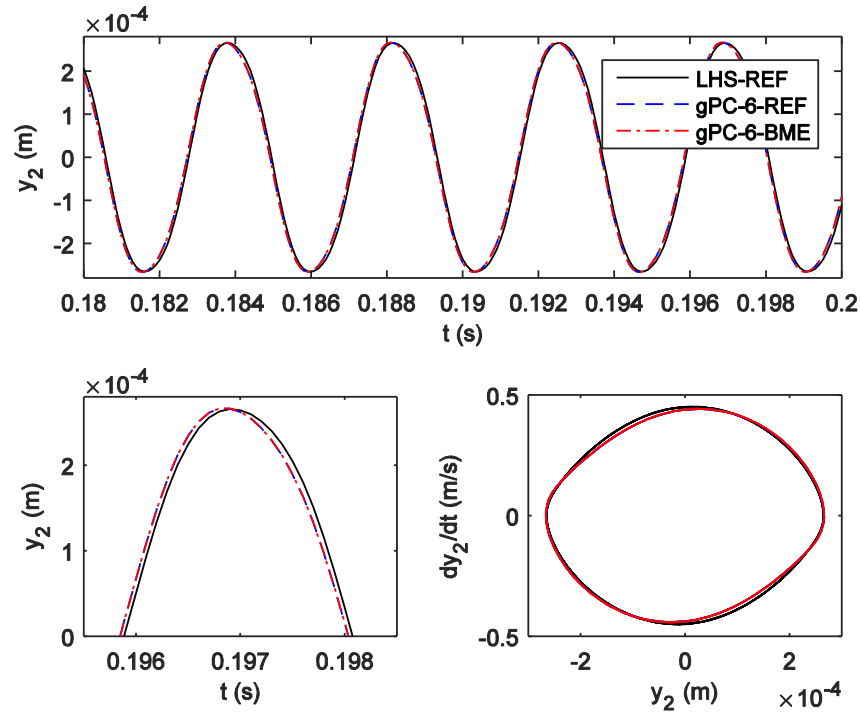


Fig.4.12. Comparaison des moyennes des déplacements et des diagrammes de phase stochastiques du point d'observation P_{o2} calculées par la méthode LHS (LHS-REF) et par la méthode gPC d'ordre 6 sur le modèle EF complet (gPC-2-REF) et le modèle réduit (gPC-6-REF)

On peut conclure pour cet exemple que le métamodèle mono-niveau proposé (gPC-BME) peut remplacer le modèle de référence (LHS-REF) sans perte significative de précision. Une réduction de temps de calcul de 90% est atteinte grâce à ce métamodèle sachant qu'une réduction de 82% peut être atteinte en appliquant le gPC sur le modèle EF complet (gPC-REF). Une différence de 53.5% est obtenue en passant du métamodèle gPC-REF au métamodèle gPC-BME. Ceci est similaire à la réduction du temps CPU atteinte en passant du modèle de référence (LHS-REF) au métamodèle (LHS-BME).

Il est important de noter que pour des exemples plus complexes en termes de taille et de niveaux d'incertitudes et de non-linéarités, on peut avoir recours à des variantes de la méthode gPC au lieu d'augmenter l'ordre de l'expansion classique utilisée dans ce mémoire. Parmi ces variantes, celles les plus fréquemment utilisées sont le gPC-multiélément et le gPC creux et adaptatif. Le **chapitre 2, section 2.3.6**, en cite plusieurs exemples et applications.

Tab.4.2. Résultats obtenus par différents métamodèles pour le portique 2D

Modèle	Nombre de tirages	Nombre de ddls	Erreurs sur les indicateurs temporels (%)			CPU (%)
			I_1	I_2	I_3	
LHS-REF	1000	474	-	-	-	100
LHS-BM	1000	57	2.60	0.20	0.30	49.2
LHS-BME	1000	57	0.07	0.00	0.00	53.7
gPC-2-REF	17	474	20.20	2.15	2.13	1.8
gPC-2-BME	17	57	20.27	2.15	2.13	0.9
gPC-4-REF	57	474	6.80	1.26	1.52	6.0
gPC-4-BME	57	57	6.87	1.26	1.52	3.2
gPC-6-REF	171	474	0.13	0.52	0.61	18.3
gPC-6-BME	171	57	0.07	0.52	0.61	9.8

4.4.2. Réponse dynamique d'un microsysteme par le métamodèle bi-niveaux

Les micro/nano systèmes électromécaniques (N/MEMS) ont des applications dans des domaines variés : biotechnologie, biomédecine, technologies aérospatiales, automobile, robotique, etc. Les MEMS périodiques sont formés par plusieurs résonateurs couplés pour des applications spécifiques telles que la détection de masse ou de gaz [179]. La conception de ces structures peut présenter quelques limitations telles que le couplage entre les composantes, surtout en présence des incertitudes et des non-linéarités localisées ou réparties [184]. La réduction de modèle pour la conception des MEMS est un challenge qui attire de plus en plus la communauté scientifique et plusieurs travaux s'intéressent au développement de modèles réduits adaptés à ces systèmes [185, 186].

Dans ce contexte, le métamodèle bi-niveaux est utilisé pour évaluer la réponse temporelle d'un microsysteme contenant des paramètres incertains et des non-linéarités localisées. Ce système (**Fig.4.13**) est constitué de 20 micro-poutres en vibration transversale dans le plan (x, y) . La discrétisation de chaque micro-poutre en 20 éléments finis ayant deux ddls par nœud mène à un modèle éléments finis de 800 ddls. Chaque micro-poutre est soumise à une force $P_f(N) = 10^{-6} \times \cos(2\pi f_1 t)$ excitant le premier mode normal de la structure, de fréquence propre $f_1 = 565.53 \text{ kHz}$. L'excitation est effectuée sur la première fréquence propre du système afin d'éviter les capacités parasites à des fréquences plus élevées [187]. Les 20 micro-poutres de longueur L_b et de section $b \times h$ sont espacées d'une distance e et couplées par des ressorts linéaires $k_0 = 10 \text{ N.m}^{-1}$ et non-linéaires $k_{NL} = 10^{14} \text{ N.m}^{-3}$ et des amortisseurs $c = 10^{-5} \text{ N.s.m}^{-1}$. Les caractéristiques mécaniques et géométriques des micro-poutres sont données par le tableau **4.3**.

La réponse temporelle de la microstructure est calculée dans l'intervalle $[0 - 50 \mu\text{s}]$, divisé en pas de temps de $0.01 \mu\text{s}$, dans lequel le régime stationnaire est établi.

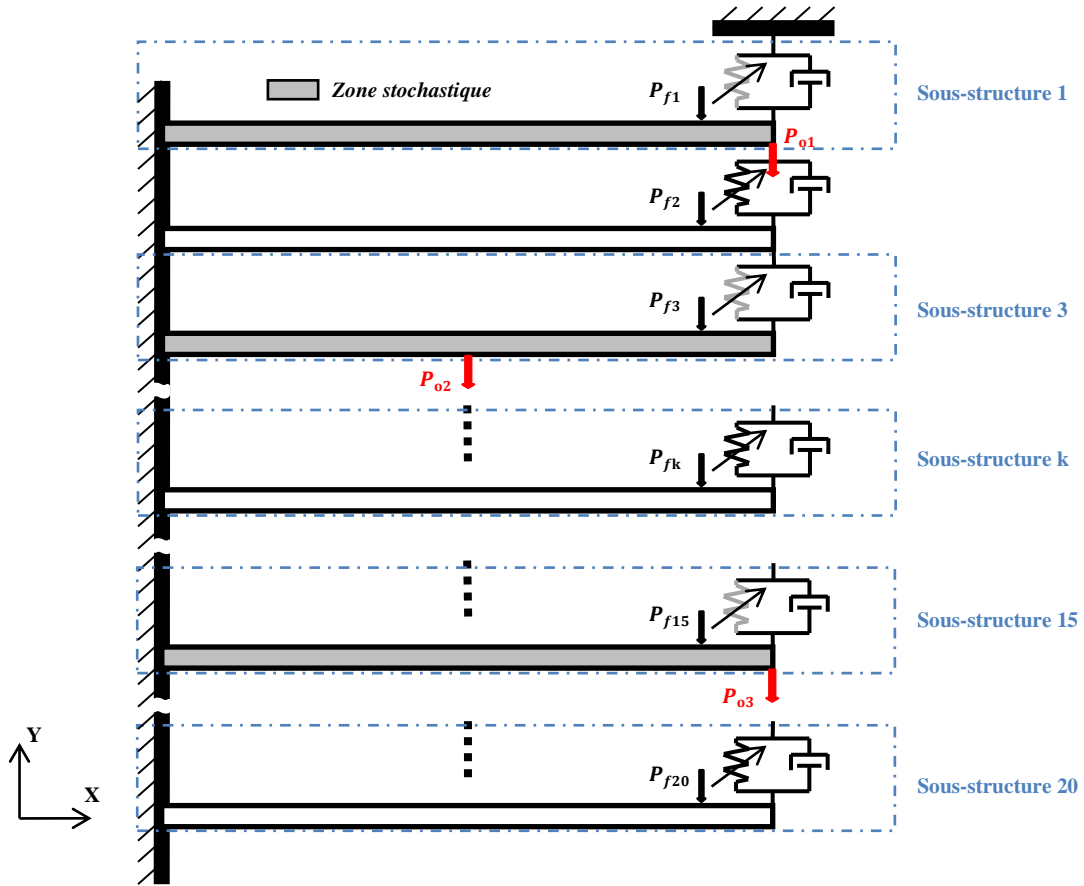


Fig.4.13. Schéma de la structure de 20 micro-poutres couplées

Tab.4.3. Caractéristiques géométriques et mécaniques du microsystème.

$b(\mu m)$	$h(\mu m)$	$L_b(\mu m)$	$e(\mu m)$	$E_0(GPa)$	$\rho_0(kg.m^{-3})$
3	1	50	2	169	2330

Pour appliquer le métamodèle bi-niveaux, la structure est décomposée en 20 sous-structures. L'ensemble d'une poutre et des éléments de couplage (ressort linéaire, ressort non-linéaire et amortisseur visqueux linéaire) est considéré comme sous-structure (**Fig.4.13**). La première, troisième et quinzième sous-structures sont les trois zones contenant des paramètres incertains. En effet, le module d'Young des micro-poutres et les ressorts linéaires de ces sous-structures sont incertains et varient comme suit

$$\begin{aligned} E_i &= E_0(1 + \delta_{E_i}\xi_{E_i}) \\ k_i &= k_0(1 + \delta_{k_i}\xi_{k_i}) \end{aligned} \quad (4.15)$$

où $i = 1, 3, 15$, ξ_{E_i} et ξ_{k_i} sont deux variables aléatoires de lois de probabilité uniforme et lognormale, respectivement et $\delta_{E_i} = \delta_{k_i} = 10\%$ sont les niveaux de dispersion considérés.

La performance du métamodèle bi-niveaux est évaluée de façon similaire au métamodèle mono-niveau, en remplaçant la BME par la TCBE.

L'effet des incertitudes est illustré par la matrice (1-MAC) représentée par la figure 4.14. Pour ce choix de zones et de niveaux d'incertitudes, l'effet des incertitudes est moins important. Cette matrice est, en fait, plus diagonale et plus de cohérence existe donc entre les modes normaux du modèle déterministe et la moyenne des modes correspondant aux 10^3 tirages de la méthode LHS.

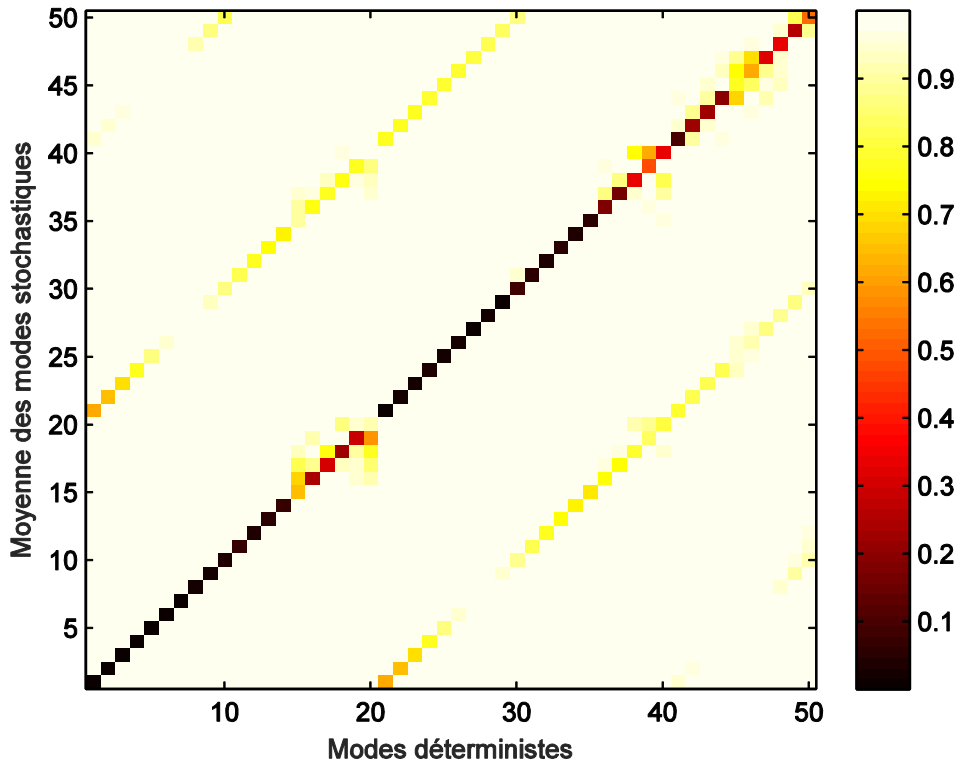


Fig.4.14. Matrice (1-MAC) comparant les modes normaux du système déterministe et la moyenne des modes normaux du système stochastique correspondant aux 10^3 tirages de la méthode LHS

La matrice de TCBE est formée de $n_j = 38$ ddls de jonction, $n_r = 20$ modes normaux retenus et $n_e = 24$ vecteurs de résidus statiques enrichissant (20 vecteurs correspondent aux non-linéarités, 3 aux incertitudes et 1 aux excitations). La taille de la TCBE est donc (800×82) menant à une réduction de 90% de la taille du modèle EF (modèle réduit à 82 ddls).

Comme dans la première application (**section 4.3.1**), plusieurs métamodèles sont comparés en termes de temps de calcul CPU et de précision quantifiée par les indicateurs temporels (**Tab.4.4**). Parmi les points d'observation étudiés, seules les réponses temporelles de trois points P_{o1} , P_{o2} et P_{o3} (**Fig.4.13**) sont analysées. Les résultats sont, cette fois, représentés en termes de vitesses pour bien illustrer le comportement non-linéaire. Les figures 4.15-4.17 comparent les moyennes des vitesses et des diagrammes de phase stochastiques calculées par la méthode LHS sur le modèle EF complet (LHS-REF) et la TCBE (LHS-TCBE).

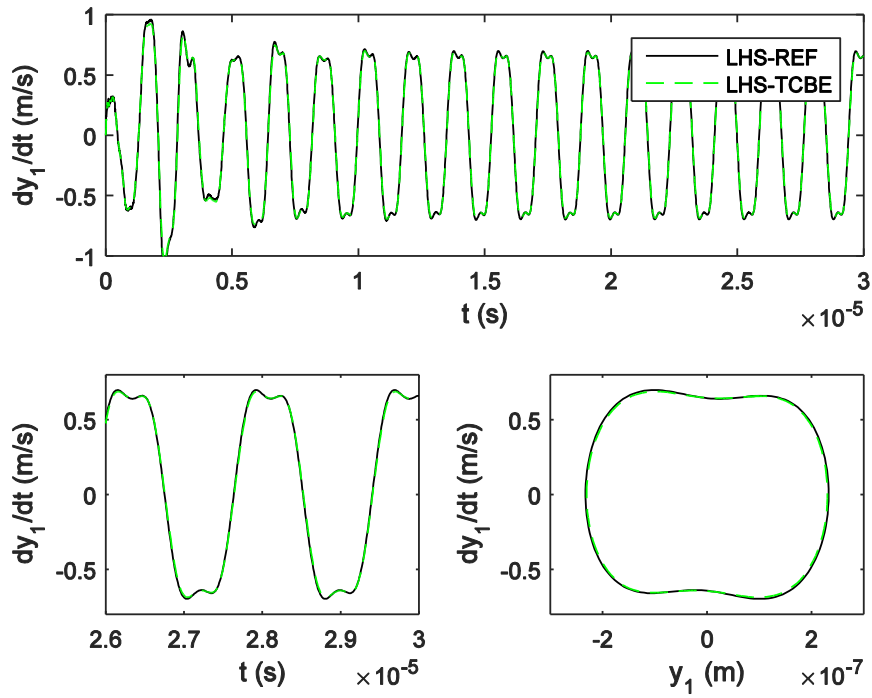


Fig.4.15. Comparaison des moyennes des vitesses et des diagrammes de phase stochastiques du point d'observation P_{o1} calculées par la méthode LHS (LHS-REF) sur le modèle EF complet (LHS-REF) et le modèle réduit (LHS-TCBE)

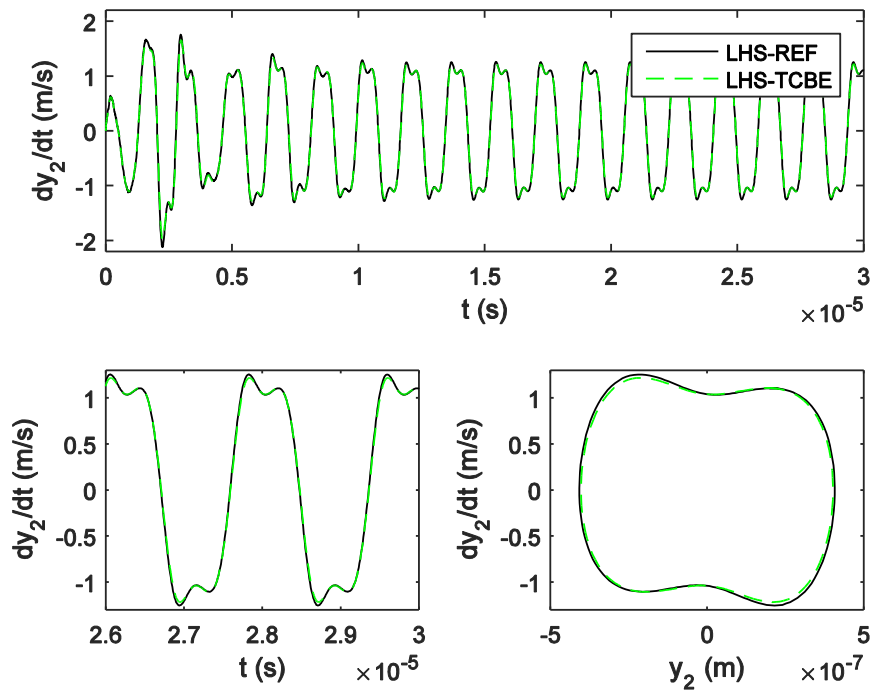


Fig.4.16. Comparaison des moyennes des vitesses et des diagrammes de phase stochastiques du point d'observation P_{o2} calculées par la méthode LHS (LHS-REF) sur le modèle EF complet (LHS-REF) et le modèle réduit (LHS-TCBE)

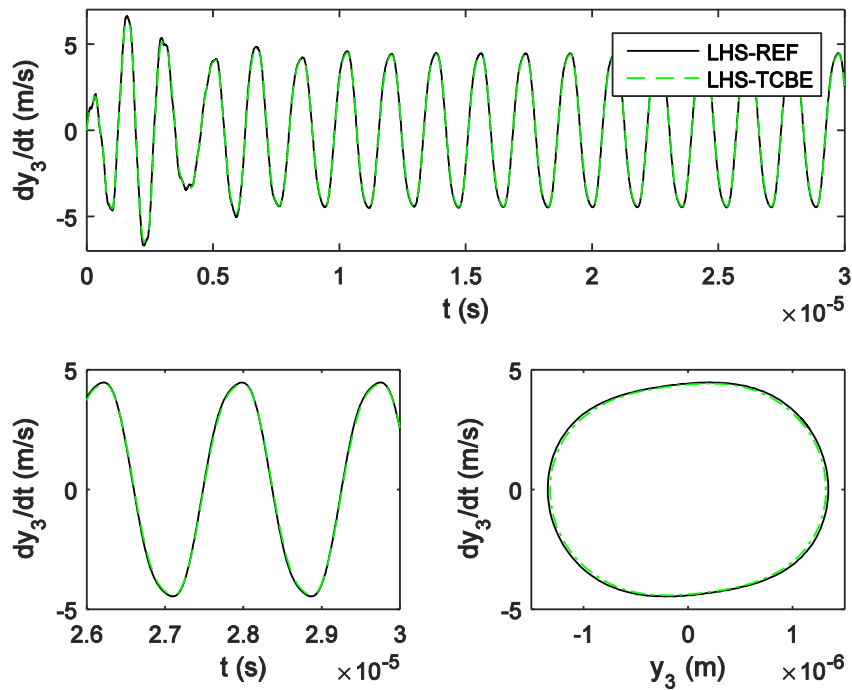


Fig.4.17. Comparaison des moyennes des vitesses et des diagrammes de phase stochastiques du point d'observation P_{o_3} calculées par la méthode LHS (LHS-REF) sur le modèle EF complet (LHS-REF) et le modèle réduit (LHS-TCBE)

Ces figures, ainsi que le tableau 4.5, montrent la bonne précision obtenue par la TCBE par rapport au modèle de référence (LHS-REF). Une erreur maximale de 2.5% est atteinte pour une réduction de 55% du temps de calcul. Cette erreur peut être minimisée en ajoutant plus de vecteurs dans la base de réduction.

Les figures 4.18-4.20 comparent les résultats de la méthode de référence (LHS-REF) à ceux de la méthode gPC d'ordre 2 appliquée sur le modèle EF complet (gPC-REF). D'après les indicateurs temporels listés dans le tableau 4.4, des erreurs inférieures à 0.14% sont obtenues lors de l'application du modèle gPC-REF et une réduction de 93.5% est atteinte par rapport au modèle de référence (LHS-REF). La méthode gPC n'exige, en effet, que 6.5% du temps de calcul qu'exige la méthode LHS en les implémentant sur le modèle EF complet.

Pour un ordre polynomial égal à 2, 73 calculs successifs doivent être effectués. Ces calculs correspondent aux 73 réalisations de variables aléatoires choisies parmi 729 combinaisons possibles de racines de polynôme d'Hermite $((p + 1)^d = 3^6 = 729$, où $d = 6$ est le nombre de paramètres incertains) en vérifiant la relation (2.64), chapitre 2, et transformées par la suite en variables aléatoires uniformes et log-normales. Ceci permet de réduire le nombre de simulations successives de 92.7% en passant de 10^3 en appliquant la méthode LHS à 73 en appliquant la méthode gPC. Pour un ordre plus élevé, plus de calculs sont exigés. Ceci implique plus de temps de calcul. Pour ce cas d'application, un ordre polynomial égal à 2 est suffisant pour atteindre une précision satisfaisante. Mais dans la pratique, il est difficile de connaître à priori l'ordre suffisant pour atteindre une précision donnée ; plusieurs essais sont alors nécessaires pour obtenir une bonne convergence.

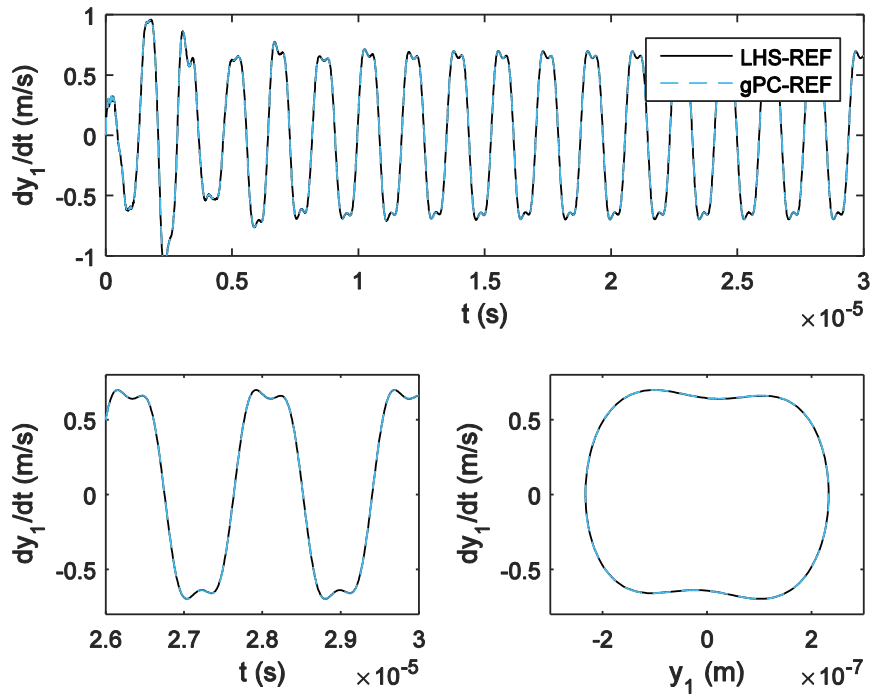


Fig.4.18. Comparaison des moyennes des vitesses et des diagrammes de phase stochastiques du point d'observation P_{o1} calculées par la méthode LHS (LHS-REF) et la méthode gPC (gPC-REF) sur le modèle EF complet

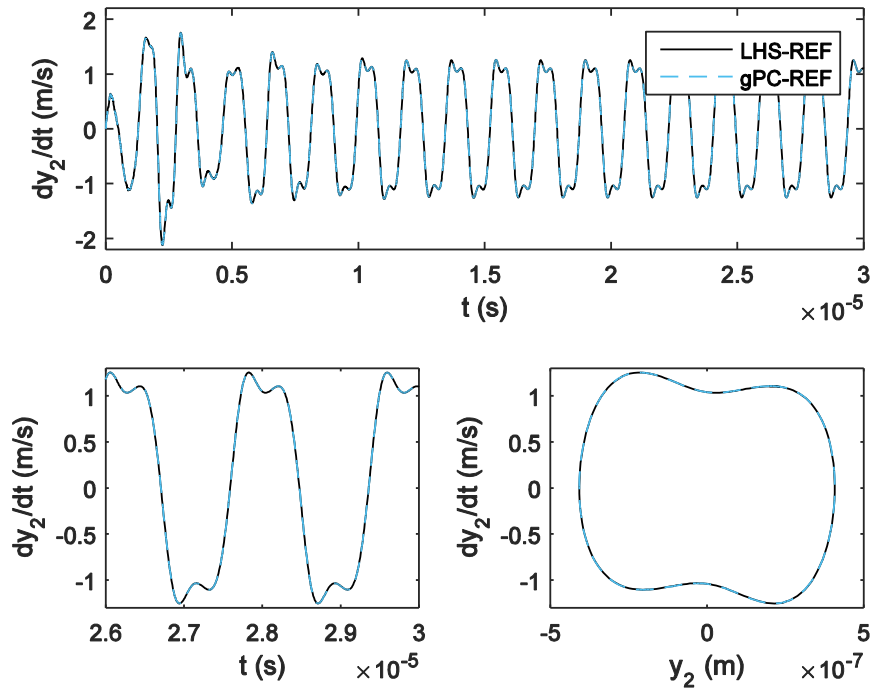


Fig.4.19. Comparaison des moyennes des vitesses et des diagrammes de phase stochastiques du point d'observation P_{o2} calculées par la méthode LHS (LHS-REF) et la méthode gPC (gPC-REF) sur le modèle EF complet

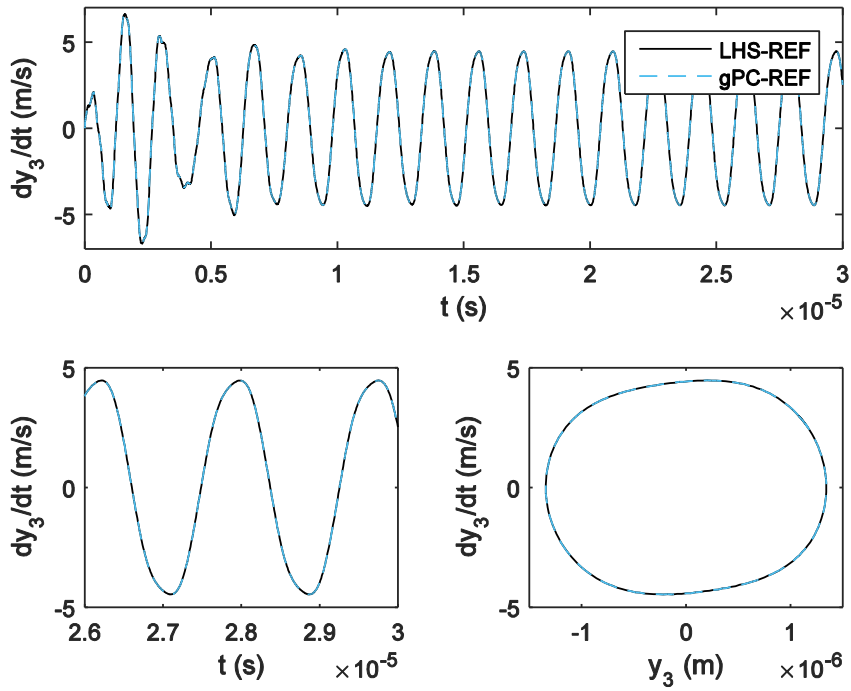


Fig.4.20. Comparaison des moyennes des vitesses et des diagrammes de phase stochastiques du point d'observation P_{o3} calculées par la méthode LHS (LHS-REF) et la méthode gPC (gPC-REF) sur le modèle EF complet

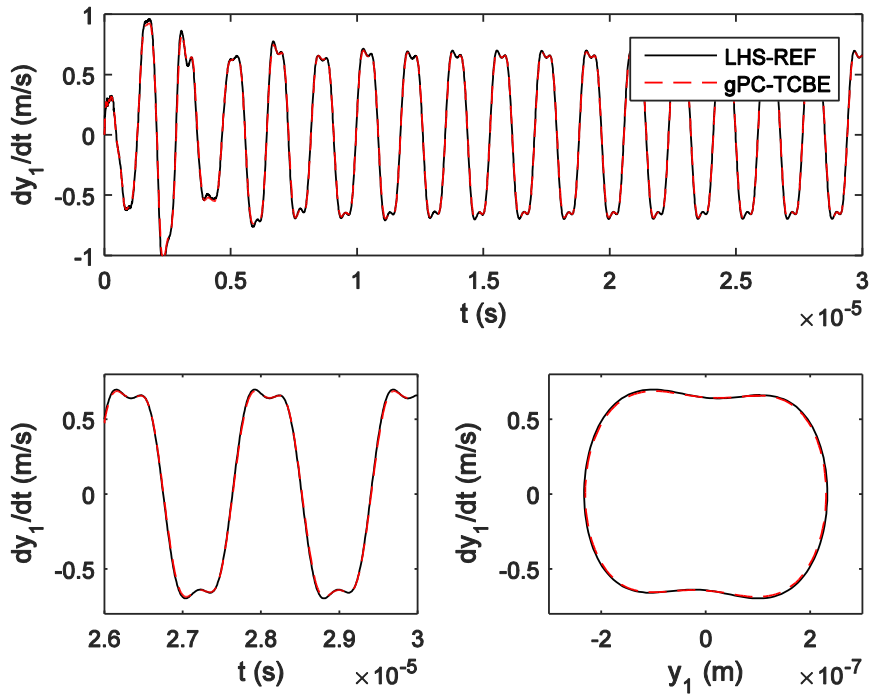


Fig.4.21. Comparaison des moyennes des vitesses et des diagrammes de phase stochastiques du point d'observation P_{o1} calculées par la méthode LHS sur le modèle EF complet (LHS-REF) et la méthode gPC sur le modèle réduit (gPC-TCBE)

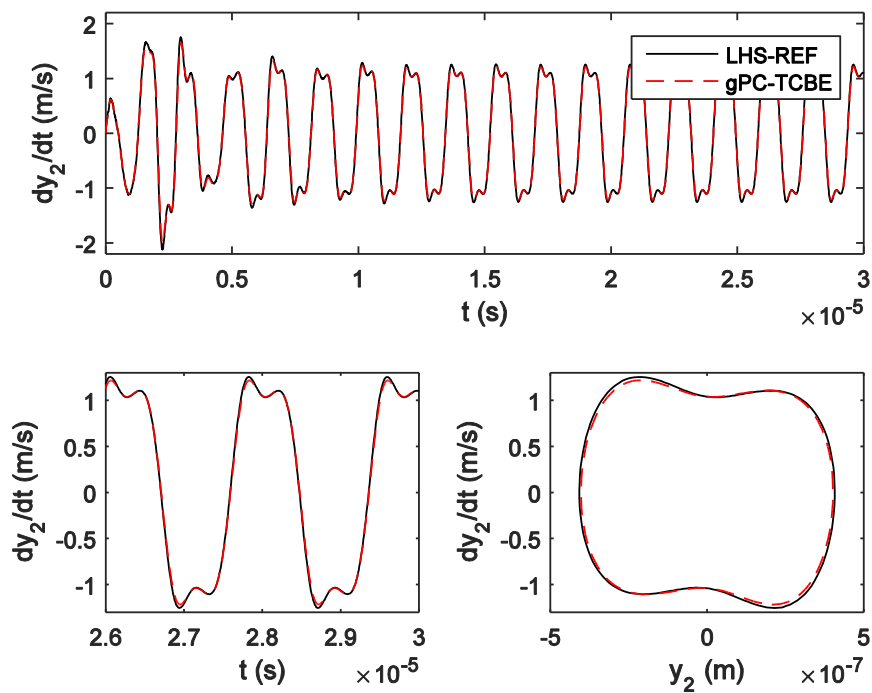


Fig.4.22. Comparaison des moyennes des vitesses et des diagrammes de phase stochastiques du point d'observation P_{o2} calculées par la méthode LHS sur le modèle EF complet (LHS-REF) et la méthode gPC sur le modèle réduit (gPC-TCBE)

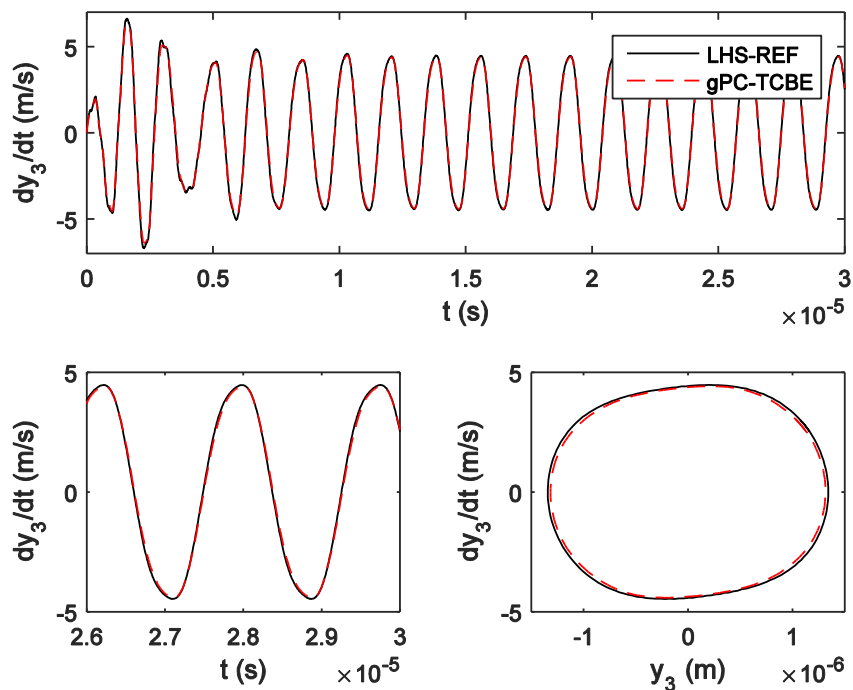


Fig.4.23. Comparaison des moyennes des vitesses et des diagrammes de phase stochastiques du point d'observation P_{o3} calculées par la méthode LHS sur le modèle EF complet (LHS-REF) et la méthode gPC sur le modèle réduit (gPC-TCBE)

Tab.4.4. Résultats obtenus par différents métamodèles pour la structure de micro-poutres couplées

Modèle	Nombre de tirages	Nombre de ddls	Erreurs sur les indicateurs temporels (%)			CPU (%)
			I_1	I_2	I_3	
LHS-REF	1000	800	-	-	-	100
LHS-TCBE	1000	82	2.50	0.07	0.14	45.1
gPC-REF	73	800	0.00	0.07	0.14	6.5
gPC-TCBE	73	82	2.50	0.20	0.41	2.8

Une comparaison du métamodèle bi-niveaux (gPC-TCBE) avec le modèle de référence (LHS-REF) est illustrée par les figures 4.21-4.23 et le tableau 4.4. Le métamodèle bi-niveaux permet une réduction de 97.1% du temps de calcul par rapport à la référence LHS-REF. Cela signifie qu'une réduction supplémentaire de presque 55 % est atteinte grâce au modèle réduit (TCBE).

On peut conclure pour cet exemple, que la robustesse du métamodèle bi-niveaux est illustrée vis-à-vis des incertitudes et des non-linéarités. Une facilité d'implémentation est obtenue grâce à la méthode de sous-structuration qui permet de profiter de la périodicité de la structure pour appliquer une procédure de réduction plus aisée. En effet, seules les TCBE locales relatives aux sous-structures 1, 3 et 15 sont enrichies tenant compte des incertitudes. Les TCBE locales des sous-structures 2, 4-14 et 16-19 sont construites de manière identique.

4.5. Conclusion

Deux métamodèles ont été proposés dans ce chapitre pour approximer les réponses dynamiques stochastiques des structures contenant des non-linéarités localisées. Le premier métamodèle est dit mono-niveau, il combine un modèle réduit obtenu par réduction directe, dont la base de réduction est une base modale tronquée enrichie avec des résidus statiques prenant compte des incertitudes et des non-linéarités localisées, avec la méthode de propagation d'incertitude gPC. Le deuxième métamodèle, dit bi-niveaux, est une extension du premier à la méthode de synthèse modale de Craig-Bampton qui permet de réduire et enrichir les bases de transformation des sous-structures contenant des incertitudes et/ou non-linéarités indépendamment des autres.

La robustesse des deux métamodèles a été illustrée à travers deux exemples d'applications numériques analysant les réponses stochastiques temporelles non-linéaires d'un portique 2D et d'une structure de 20 micro-poutres couplées. Dans ce cadre, six métamodèles ont été calculés et comparés impliquant les méthodes LHS et gPC, les modèles réduits mono-niveau et bi-niveaux et les modèles éléments finis complets des structures étudiées. Les résultats obtenus ont montré que l'approche combinant la réduction de modèle à base d'enrichissement et la propagation d'incertitudes, proposée à travers les deux métamodèles, permet d'approximer le comportement dynamique des structures stochastiques contenant des

non-linéarités localisées avec un coût de calcul raisonnable et sans perte significative de précision par rapport au modèle de référence utilisant la méthode LHS appliquée sur le modèle éléments finis complet.

Les modèles réduits présentés dans le **chapitre 3** et étendus dans ce chapitre à la prise en compte des incertitudes paramétriques sont basés principalement sur les propriétés modales linéaires des structures en présence des non-linéarités localisées. Ceci a permis d'utiliser des bases de réduction enrichies construites principalement de modes normaux des structures linéaires associées. C'est la principale hypothèse sur laquelle se basent les métamodèles proposés dans ce chapitre.

Cependant, l'analyse dynamique des structures avec non-linéarités réparties (grands déplacements) exige la mise en œuvre d'autres méthodologies de réduction de modèle. Les méthodes de propagation d'incertitudes utilisées dans ce mémoire, quant à elles, sont applicables aussi bien en dynamique linéaire qu'en dynamique non-linéaire. Néanmoins, plus de difficultés sont rencontrées pour des problèmes non-linéaires complexes et par conséquent le recours à des variantes adéquates est nécessaire.

Les métamodèles proposés ont été appliqués pour l'étude d'un exemple de structure périodique de micro-poutres couplées. Le couplage linéaire entre les micro-poutres est fort, ce qui a permis de séparer les fréquences propres de la structure globale et par conséquent de considérer la structure comme toute autre structure non-périodique. Pour un couplage faible entre les poutres, on tend naturellement vers une structure périodique avec modes propres localisés (fréquences propres très proches). Ces caractéristiques ainsi que le cas de répartition des non-linéarités sur toute la structure nécessitent l'application d'autres méthodologies pour analyser le comportement dynamique des structures périodiques non-linéaires ; ceci fera l'objet du **chapitre 5**.

Chapitre 5. Analyse de robustesse de la dynamique collective des structures périodiques

5.1. Introduction

En mécanique des structures, ainsi que dans plusieurs domaines de l'ingénierie, la périodicité caractérise la structuration de nombreux systèmes tels que les composites stratifiés, les réseaux cristallins, les turbines, les moteurs multicylindres, les coques de navires, les systèmes de fuselage d'avion, les micro/nano-systèmes électromécaniques, etc. La périodicité implique une répétition géométrique finie ou infinie d'une cellule unitaire dans un, deux ou trois dimensions et nécessite des approches appropriées pour l'étudier. Les structures périodiques peuvent être aussi bien non-linéaires que linéaires. Ces deux cas de figure nécessitent différents types d'analyse dynamique et par conséquent l'application de méthodologies différentes.

Sous l'hypothèse d'une périodicité parfaite, des études intéressantes ont été menées, dans de nombreux travaux de la littérature, sur les comportements des structures périodiques linéaires ou non-linéaires. Néanmoins, loin de l'idéalisation mathématique due à cette hypothèse, des imperfections peuvent perturber l'arrangement parfait des cellules de la structure et changer significativement le comportement dynamique prévu dans le cas d'une périodicité parfaite. Ces imperfections reflètent la réalité des systèmes d'ingénierie et peuvent être dues à des défauts matériels, aux procédés de fabrication, à des dommages structuraux, au vieillissement, à la fatigue, etc.

En se focalisant sur les imperfections de type paramétrique qui impliquent que ces dernières affectent les paramètres structuraux, deux études possibles peuvent être menées : une étude déterministe et une étude stochastique. Dans un cadre déterministe, ces imperfections sont considérées comme des modifications (ou perturbations) structurales. En outre, supposer que ces imperfections sont caractérisées par une certaine variabilité implique leur modélisation par des incertitudes paramétriques. Ceci mène à d'autre type d'analyse incluant la quantification et la propagation des incertitudes.

L'objectif principal de ce chapitre est l'analyse de la robustesse de la dynamique collective des structures périodiques non-linéaires. Ceci implique à la fois la périodicité, les non-linéarités et les imperfections. Pour ce faire, une étude bibliographique non exhaustive est présentée, en **section 5.2**, sur les méthodologies introduites dans la littérature pour l'analyse dynamique des structures périodiques linéaires et non-linéaires, sans et avec imperfections. La **section 5.3** sera consacrée à introduire la méthodologie proposée pour l'analyse de la dynamique collective des structures périodiques non-linéaires en présence des imperfections. Dans la dernière section (**section 5.4**), des exemples d'applications sont traités selon deux configurations. L'effet des modifications structurales sur la dynamique collective est analysé en première partie. Et l'extension de l'étude aux incertitudes fait l'objet de la dernière partie.

5.2. Etude bibliographique

5.2.1. Dynamique des structures périodiques linéaires

Sous l'hypothèse d'une périodicité parfaite, de nombreux travaux ont fourni des études intéressantes sur le comportement des structures périodiques linéaires. Dans le cadre de l'approche de propagation des ondes dans les réseaux périodiques, les travaux de base ont été effectués par Brillouin [188] et Mead [189], se basant sur le principe de Floquet ou l'approche de la matrice de transfert, afin de calculer les constantes de propagation. Se basant sur l'approche de la matrice de transfert, une combinaison de l'approche de propagation d'onde et de la méthode des éléments finis a été proposée par Duhamed et al. [190] et a été utilisée plus tard par Goldstein et al. [191] pour calculer les réponses forcées des structures de guides d'ondes. Casadei et al. [192] ont développé des modèles analytiques et numériques basés sur l'approche de la matrice de transfert pour étudier les propriétés de dispersion et les band-gaps d'une poutre avec un réseau périodique de cellules résonantes, en forme de profil d'aile, attaché sur toute sa longueur. En utilisant le théorème de Floquet-Bloch, Gosse et al. [193] ont décrit le comportement dynamique d'une structure périodique d'échangeur de chaleur à partir de l'étude vibro-acoustique de la cellule de base. Collet et al. [194] ont étendu l'analyse à des structures périodiques bidimensionnelles avec des configurations d'amortissement complexes et ont prouvé la réduction du temps de calcul atteinte en appliquant le théorème de Floquet-Bloch pour l'analyse des structures entières à partir du modèle de la cellule unitaire. Récemment, Droz et al. [195] ont évalué les caractéristiques de dispersion des guides d'ondes périodiques bidimensionnels et ont combiné la méthode des éléments finis ondulatoire (WFEM : Wave Finite Element Method) avec l'approche de synthèse modale.

5.2.2. Dynamique des structures périodiques non-linéaires

Appliquer l'approche de propagation d'onde devient considérablement compliqué lorsque l'équation d'onde, modélisant la propagation de l'onde dans la structure périodique, contient des termes non-linéaires (générés par des non-linéarités géométriques, matérielles ou de contact). Dans ce cas, des phénomènes plus complexes surviennent tels que la localisation, les solitons, les breathers, etc. Par conséquent, les analyses traditionnelles basées sur le théorème de Floquet-Bloch et la matrice de transfert ne sont plus applicables.

Dans la littérature, d'autres méthodes sont développées pour l'analyse dynamique de structures périodiques non-linéaires telles que les approches de perturbation. Par exemple, Chakraborty et al. [196] ont étudié la propagation d'onde harmonique dans un réseau périodique unidimensionnel constitué de masses identiques et de ressorts faiblement non-linéaires. La méthodologie utilisée combine la méthode de la balance harmonique (HBM) et l'approche de perturbation pour calculer les constantes de propagation et d'atténuation. Une méthode de perturbation directe a été appliquée par Boechler et al. [197] pour l'analyse de la dispersion, dépendant de l'amplitude, d'un réseau périodique non-linéaire unidimensionnel discret avec un contact de Hertz. Comme une alternative à l'approche de perturbation pour l'analyse dynamique des systèmes fortement non-linéaires, Georgiades et al. [198] ont proposé une combinaison de la méthode de continuation basée sur la pseudo-longueur d'arc et de la méthode de tir pour étudier les modes normaux non-linéaires et leurs bifurcations dans

les structures périodiques cycliques. En outre, la méthode des échelles multiples a été combinée avec la méthode de perturbation par Nayfeh [199] pour étudier des systèmes à plusieurs degrés de liberté sous excitation paramétrique avec différents types de non-linéarité. Lifshitz et al. [200, 201] ont utilisé la méthode des échelles multiples pour calculer la réponse d'un réseau de micro-poutres couplées par des non-linéarités sous excitation paramétrique, en utilisant des modèles discrets. En utilisant la même méthodologie, Bitar et al. [202] ont étudié la dynamique collective d'une structure périodique d'oscillateurs de Duffing-Van Der Pol couplés sous deux excitations simultanées : paramétrique et extérieure. La méthode des échelles multiples a également été utilisée par Gutschmidt et al. [203] dans un modèle continu pour étudier le comportement dynamique d'un réseau de micro-poutres électrostatiquement couplées. Manktelow et al. [204] ont appliqué la méthode des échelles multiples pour étudier les interactions des ondes dans une chaîne de masse-ressort monoatomique avec une non-linéarité cubique. La méthode des échelles multiples a été combinée avec un modèle éléments finis, discrétisant les cellules unitaires, pour étudier la propagation des ondes dans les structures périodiques continues faiblement non-linéaires [205]. Les mêmes auteurs ont proposé plus tard des outils robustes pour l'analyse des interactions des ondes dans une chaîne diatomique avec deux degrés de liberté par cellule [206]. Récemment, Andreassen et al. [207] ont étudié les interactions entre les ondes dans une plaque périodiquement perforée à travers l'analyse des caractéristiques de la dispersion bidimensionnelle, des vitesses de groupe et des résonances internes. Romeo et al. [208] ont identifié les régions de génération des breathers discrets et les ont analysés en utilisant la région de propagation non-linéaire d'une chaîne d'oscillateurs à non-linéarité cubique. S'inspirant des travaux effectués dans [196], Marathe et al. [209] ont combiné la méthode HBM avec la méthode des échelles multiples afin d'étudier l'atténuation causée par l'amortissement faible des ondes harmoniques à travers une structure périodique discrète. La méthode HBM a été utilisée plus tard par Narisetti et al. [210] pour analyser l'influence de la non-linéarité et de l'amplitude d'onde sur les propriétés de dispersion des ondes planes dans les milieux granulaires uniformes fortement non-linéaires.

5.2.3. Dynamique des structures périodiques en présence des imperfections

L'analyse dynamique des structures périodiques est considérablement simplifiée en supposant qu'une périodicité parfaite existe. Cependant, les systèmes d'ingénierie sont en réalité affectés par des imperfections et le terme quasi-périodique est donc plus adéquat pour caractériser leur structuration. Dans la littérature, les premiers travaux prenant en compte la présence des imperfections sont menés dans le contexte du désordre dans les structures périodiques. Kissel [211], par exemple, a étudié théoriquement l'effet du désordre dans une structure périodique unidimensionnelle et numériquement en utilisant la méthode de Monte Carlo (MC). Il a utilisé un modèle basé sur l'approche de la matrice de transfert et le théorème de frontière de Furstenberg pour calculer des produits des matrices aléatoires des structures dans lesquelles une seule paire d'ondes se propage. Le théorème d'Oseledets est par contre utilisé pour le cas de propagation d'une multiplicité d'ondes dans la structure. Les résultats montrent que le désordre permet l'atténuation des ondes et la localisation spatiale prononcée des modes normaux dans une plage fréquentielle proche des bandes atténuées de la structure parfaitement périodique associée. Une analyse statistique de l'effet du désordre sur la

dynamique des structures périodiques unidimensionnelles faiblement/fortement couplées, en utilisant la méthode MC, a été réalisée par Pierre [212]. L'effet du désordre est évalué à travers des statistiques du facteur de localisation reflétant la décroissance exponentielle de l'amplitude de vibration. Cha et al. [213] ont étendu l'analyse du cas des cellules à un seul degré de liberté au cas des cellules à plusieurs ddl, plus représentatif de la réalité des structures périodiques d'ingénierie. De plus, pour étudier les effets du caractère aléatoire des joints flexibles sur les vibrations libres des grandes structures périodiques de treillis simplement appuyées, Koch [214] a combiné un modèle continu de poutre de Timoshenko, la méthode de MC et la méthode de perturbation du premier ordre. En conclusion, ces travaux ont montré que les modes normaux des structures périodiques sont localisés dans la région où la périodicité est perturbée.

Le réseau de pendules couplés est un exemple de structure périodique dont un bon nombre de travaux dans la littérature s'intéressent à étudier son comportement dynamique non-linéaire. Marlin [215], par exemple, a introduit plusieurs théorèmes sur l'existence des mouvements oscillatoires, rotatifs et mixtes dans les réseaux de pendules couplés. Khomeriki et al. [216] ont démontré numériquement et expérimentalement l'existence de régimes stationnaires tristables. Jallouli et al. [217] ont étudié la dynamique non-linéaire d'un réseau bidimensionnel de pendules couplés sous une excitation paramétrique en combinant la méthode HBM et la méthode asymptotique numérique (ANM) [218, 219] implémentée sur le logiciel à interface graphique MANLAB [220]. Jallouli et al. [221] ont récemment étudiés le phénomène de localisation d'énergie dans un réseau de pendules couplés sous excitations externes et paramétriques simultanées moyennant l'équation de Schrödinger non-linéaire. Bitar et al. [222] ont étudié la dynamique collective d'un réseau de pendules non-linéaires couplés en combinant la méthode des échelles multiples et la projection sur des ondes stationnaires.

Dans le contexte des imperfections, Tjavaras et al. [223] ont étudié numériquement l'effet des non-linéarités sur la réponse forcée de deux pendules désordonnés couplés par un ressort linéaire. Les résultats de l'étude ont montré la grande sensibilité de la structure aux petites variations paramétriques et que le désordre génère la localisation modale. Alexeeva et al. [224] ont étudié l'effet d'une impureté introduite dans une chaîne de pendules couplés amortis sous excitation paramétrique, générant des solitons. L'impureté introduite en augmentant la longueur d'un seul pendule élargit significativement la zone de stabilité. En diminuant la longueur d'un pendule les solitons sont repoussés et la chaîne de pendules est répartie en des intervalles plus petits permettant un effet stabilisateur puisque les instabilités dues aux longueurs d'ondes importantes n'existent pas. Hai-Quing et al. [225] ont développé un modèle théorique discret basé sur l'approche de la fonction enveloppe pour étudier analytiquement et numériquement l'effet de l'impureté de masse sur les modes non-linéaires localisés dans un réseau non-linéaire de pendules couplés amortis sous excitation paramétrique. L'influence des impuretés sur les ondes enveloppes dans une chaîne non-linéaire de pendules excités a été étudiée numériquement dans [226], puis expérimentalement dans [227]. Un défaut introduit en augmentant ou diminuant, respectivement, la longueur d'un pendule permet d'attirer ou de repousser un breather.

5.3. Méthodologie proposée

5.3.1. Cadre de l'étude

Le comportement dynamique d'une structure périodique est fortement dépendant du couplage entre ses cellules. Quand le couplage est faible, les fréquences propres d'une structure à N cellules sont groupées en des ensembles de N fréquences propres proches (identiques si le couplage est nul). Dans ce travail, le couplage entre les cellules est supposé très faible.

La méthodologie proposée dans ce travail est basée sur l'hypothèse des petites imperfections qui implique que la dynamique collective et le phénomène de localisation dû au couplage faible des cellules ne sont pas détruits. Se basant sur les travaux réalisés par Lifshitz et al. [200] et Bitar et al. [202, 222] pour étudier la dynamique collective des systèmes périodiques non-linéaires déterministes et les interactions modales entre les cellules couplées, un modèle analytique discret générique combinant la méthode des échelles multiples, la théorie des perturbations et une décomposition sur des ondes stationnaires est proposé et adapté à la présence des imperfections. Le modèle analytique obtenu conduit à un ensemble d'équations algébriques complexes couplées. Ces équations sont écrites en fonction du nombre et des positions des imperfections dans la structure. Leur résolution numérique est effectuée par la méthode d'intégration temporelle de Runge-Kutta. La formulation détaillée dans ce chapitre est développée pour le cas où seules des non-linéarités cubiques sont considérées et les cellules unitaires sont à un ddl.

Pour construire le modèle analytique discret, la méthode des échelles multiples et la méthode de perturbation sont appliquées pour résoudre l'équation de mouvement du système. La solution obtenue est ensuite projetée sur des modes d'ondes stationnaires permettant d'étudier les interactions modales et d'analyser les solutions aussi bien en coordonnées généralisées qu'en coordonnées physiques.

5.3.2. Equation de mouvement

Le mouvement de la $n^{\text{ème}}$ cellule unitaire d'une structure périodique linéairement couplée avec des non-linéarités cubiques est modélisé par l'équation

$$m\ddot{y}_n + c_l \dot{y}_n + k_l y_n + k_c \mathcal{L}_c(y, \tilde{y}) + k_{nl} y_n^3 = f_{ext} \cos(\Omega t) \quad (5.1)$$

où m est la masse, c_l l'amortissement visqueux linéaire, k_l la raideur linéaire propre, k_c la raideur linéaire de couplage, k_{nl} la raideur non-linéaire et f_{ext} l'excitation extérieure à la fréquence angulaire Ω , y est le déplacement de la cellule non perturbée et \tilde{y} celui de la cellule contenant des imperfections.

L'équation (5.1) peut être réécrite sous la forme

$$\ddot{y}_n + c_n \dot{y}_n + \omega_n^2 y_n + k_n \mathcal{L}_c(y, \tilde{y}) + \alpha_n y_n^3 = f_n \cos(\Omega t) \quad (5.2)$$

avec $c_n = \frac{c_l}{m}$, $\omega_n^2 = \frac{k_l}{m}$, $k_n = \frac{k_c}{m}$, $\alpha_n = \frac{k_{nl}}{m}$ et $f_n = \frac{f_{ext}}{m}$, pour $n = 1 \dots N$.

Etant donné que le couplage linéaire entre les cellules est très faible et que des petites imperfections sont considérées, chaque fréquence ω_n est supposée être égale à la fréquence propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{k_l}{m}}$.

Le terme de couplage linéaire $\mathcal{L}_c(y, \tilde{y})$ dépend de la position de la cellule affectée par les imperfections dans la structure. Pour des raisons de simplification de la formulation, on considère le cas où les cellules avec imperfections ne sont pas adjacentes. Dans ce cas quatre configurations sont distinguées :

- a. Si la cellule concernée et les cellules qui lui sont adjacentes sont parfaites (sans imperfections), alors $\mathcal{L}_c(y, \tilde{y}) = (2y_n - y_{n-1} - y_{n+1})$;
- b. Si la cellule considérée est parfaite mais celle qui la précède contient des imperfections, alors $\mathcal{L}_c(y, \tilde{y}) = (2y_n - \tilde{y}_{n-1} - y_{n+1})$;
- c. Si la cellule considérée est parfaite mais la suivante contient des imperfections, alors $\mathcal{L}_c(y, \tilde{y}) = (2y_n - y_{n-1} - \tilde{y}_{n+1})$;
- d. Si la cellule concernée contient des imperfections et ses voisines sont parfaites, l'équation de mouvement (5.2) est de la forme

$$\ddot{\tilde{y}}_n + c_n \dot{\tilde{y}}_n + \omega_n^2 \tilde{y}_n + k_n \mathcal{L}_c(y, \tilde{y}) + \alpha_n \tilde{y}_n^3 = f_n \cos(\Omega t) \quad (5.3)$$

$$\text{et } \mathcal{L}_c(y, \tilde{y}) = (2\tilde{y}_n - y_{n-1} - y_{n+1}).$$

5.3.3. Résolution de l'équation de mouvement par la méthode des échelles multiples

La méthode des échelles multiple [228, 229, 230] consiste à remplacer la seule variable temporelle t par une séquence d'échelles de temps indépendantes (échelles temporelles multiples) $T_i = \varepsilon^i t$ où ε est un paramètre adimensionnel de valeur très faible.

En limitant l'étude à une perturbation d'ordre 1 ($T = \varepsilon t$), l'équation (5.2) est approximée par

$$\ddot{y}_n + \varepsilon c_n \dot{y}_n + \omega_n^2 y_n + \varepsilon k_n \mathcal{L}_c(y, \tilde{y}) + \varepsilon \alpha_n y_n^3 = \varepsilon f_n \cos(\Omega t) \quad (5.4)$$

où la fréquence d'excitation Ω est exprimée par $\Omega = \omega_0 + \varepsilon \sigma$, avec σ le paramètre de réglage. Par conséquent, $\Omega t = \omega_0 t + \sigma T$.

La solution de l'équation (5.4) peut généralement être approximée par l'expansion $y_n = \sum_i \varepsilon^i y_{ni}$. A l'ordre 1, la solution est de la forme

$$y_n = y_{n0} + \varepsilon y_{n1} \quad (5.5)$$

Ses dérivées sont données par

$$\dot{y}_n = \frac{dy_n}{dt} = y_{n0}^{(0,1)} + \varepsilon \left[y_{n0}^{(1,0)} + y_{n1}^{(0,1)} \right] \quad (5.6)$$

$$\ddot{y}_n = \frac{d^2 y_n}{dt^2} = y_{n0}^{(0,2)} + 2 \varepsilon y_{n0}^{(1,1)} + \varepsilon y_{n1}^{(0,2)} \quad (5.7)$$

avec $y_{n0}^{(0,1)} = \frac{\partial y_{n0}}{\partial t}$, $y_{n0}^{(0,2)} = \frac{\partial^2 y_{n0}}{\partial t^2}$, $y_{n0}^{(1,0)} = \frac{\partial y_{n0}}{\partial T}$ et $y_{n0}^{(1,1)} = \frac{\partial^2 y_{n0}}{\partial t \partial T}$.

En substituant les équations (5.5-5.7) dans l'équation (5.4) et en séparant les termes pour les deux ordre 0 et 1, deux équations sont obtenues. En effet, pour l'ordre 0, une équation non perturbée est donnée par

$$\ddot{y}_{n0} + \omega_0^2 y_{n0} = 0 \quad (5.8)$$

Sa solution est de la forme

$$y_{n0} = A_n \exp(i\omega_0 t) + c. c \quad (5.9)$$

Pour l'ordre 1,

$$\begin{aligned} y_{n1}^{(0,2)} + \omega_0^2 y_{n1} + c_n y_{n0}^{(0,1)} + 2y_{n0}^{(1,1)} + k_n \mathcal{L}_c(y_{n0}, \tilde{y}_{n0}) + \alpha_n y_{n0}^3 \\ = \frac{f_n}{2} \exp[i(\omega_0 t + \sigma T)] \end{aligned} \quad (5.10)$$

5.3.4. Projection de la solution sur les ondes stationnaires

Le déplacement y_n peut être exprimé comme une somme de modes d'ondes stationnaires. Pour le cas où les bords de la structure sont fixes, les modes d'ondes stationnaires ont comme expression

$$u_n = \sin(nq_m); q_m = \frac{m\pi}{N+1}, m = 1 \dots N \quad (5.11)$$

Le déplacement y_n d'une cellule parfaite est donc exprimé par

$$y_n = \underbrace{\sum_{m=1}^N A_m \sin(nq_m) \exp(i\omega_0 t)}_{y_{n0}} + c. c. + \varepsilon y_{n1} \quad (5.12)$$

En présence d'imperfection,

$$\tilde{y}_n = \underbrace{\sum_{m=1}^N \tilde{A}_m \sin(nq_m) \exp(i\omega_0 t)}_{\tilde{y}_{n0}} + c. c. + \varepsilon \tilde{y}_{n1} \quad (5.12)$$

5.3.4.1. Modèle sans imperfections

Pour des raisons de simplification, la formulation est détaillée en considérant la cellule parfaite. En présence des imperfections le développement est similaire tout en remplaçant y_n par \tilde{y}_n .

En projetant sur les ondes stationnaires, les expressions de $y_{n0}^{(0,1)}$, $y_{n0}^{(1,1)}$ et y_{n0}^3 dans l'équation (5.10) sont données par

$$\begin{aligned} y_{n0}^{(0,1)} &= \sum_{m=1}^N \left(i\omega_0 A_m + \varepsilon A_m^{(1,0)} \right) \sin(nq_m) \exp(i\omega_0 t) + c. c. \\ &= i\omega_0 \sum_{m=1}^N A_m \sin(nq_m) \exp(i\omega_0 t) + c. c. + \mathcal{O}(\varepsilon) \end{aligned} \quad (5.13)$$

$$\begin{aligned}
y_{n0}^{(1,1)} &= \sum_{m=1}^N \left(i\omega_0 A_m^{(1,0)} + \varepsilon A_m^{(2,0)} \right) \sin(nq_m) \exp(i\omega_0 t) + c. c. \\
&= i\omega_0 \sum_{m=1}^N A_m^{(1,0)} \sin(nq_m) \exp(i\omega_0 t) + c. c. + \mathcal{O}(\varepsilon)
\end{aligned} \tag{5.14}$$

$$\begin{aligned}
y_{n0}^3 &= \sum_{j,k,l} \sin(nq_j) \sin(nq_k) \sin(nq_l) (A_j e^{i\omega_j t} + c. c.) (A_k e^{i\omega_k t} + c. c.) (A_l e^{i\omega_l t} + c. c.) \\
&= \frac{1}{4} \sum_{j,k,l} \{ \sin[n(-q_j + q_k + q_l)] + \sin[n(q_j - q_k + q_l)] + \sin[n(q_j + q_k - q_l)] \\
&\quad - \sin[n(q_j + q_k + q_l)] \} \{ A_j A_k A_l e^{3i\omega_0 t} + 3A_j A_k A_l^* e^{i\omega_0 t} + c. c. \}
\end{aligned} \tag{5.15}$$

En substituant les équations (5-13-5.15) dans l'équation (5.10) on obtient

$$\begin{aligned}
&y_{n1}^{(0,2)} + \omega_0^2 y_{n1} = \\
&-2i\omega_0 \sum_{m=1}^N A_m^{(1,0)} \sin[nq_m] \exp(i\omega_0 t) + ic_n \omega_0 \sum_{m=1}^N A_m \sin[nq_m] \exp(i\omega_0 t) - \\
&\quad k_n (2 \sum_{m=1}^N A_m \sin[nq_m] - \sum_{m=1}^N A_m \sin[(n+1)q_m] - \sum_{m=1}^N A_m \sin[(n-1)q_m]) \exp(i\omega_0 t) + \frac{fn}{2} \exp[i(\omega_0 t + \sigma T)] - \frac{1}{4} \alpha_n \sum_{j,k,l} \{ \sin[n(-q_j + q_k + q_l)] + \\
&\quad \sin[n(q_j - q_k + q_l)] + \sin[n(q_j + q_k - q_l)] - \sin[n(q_j + q_k + q_l)] \} \{ A_j A_k A_l e^{3i\omega_0 t} + 3A_j A_k A_l^* e^{i\omega_0 t} + c. c. \}
\end{aligned} \tag{5.16}$$

L'équation (5.16) peut être réécrite sous la forme

$$y_{n1}^{(0,2)} + \omega_0^2 y_{n1} = \sum_m (m^{\text{ème}} \text{ termes séculaires}) e^{i\omega_0 t} + \text{autres termes} \tag{5.17}$$

Les termes séculaires, coefficients de $e^{i\omega_0 t}$, doivent être nuls :

$$\begin{aligned}
&2i\omega_0 \sum_{m=1}^N A_m^{(1,0)} \sin[nq_m] + ic_n \omega_0 \sum_{m=1}^N A_m \sin[nq_m] + k_n (2 \sum_{m=1}^N A_m \sin[nq_m] - \\
&\sum_{m=1}^N A_m \sin[(n+1)q_m] - \sum_{m=1}^N A_m \sin[(n-1)q_m]) + \frac{3}{4} \alpha_n \sum_{j,k,l} \{ \sin[n(-q_j + q_k + q_l)] + \sin[n(q_j - q_k + q_l)] + \sin[n(q_j + q_k - q_l)] - \sin[n(q_j + q_k + q_l)] \} A_j A_k A_l^* - \\
&\quad \frac{fn}{2} \exp(i\sigma T) = 0
\end{aligned} \tag{5.18}$$

La projection de la solution sur les ondes stationnaires implique la multiplication de tous les termes par $\sin(nq_m)$ et la sommation sur n . Ceci mène à l'équation

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^N \sin[nq_m] \{ 2i\omega_0 \sum_{m=1}^N A_m^{(1,0)} \sin[nq_m] + i\omega_0 c_n \sum_{m=1}^N A_m \sin[nq_m] + \\
&k_n (2 \sum_{m=1}^N A_m \sin[nq_m] - \sum_{m=1}^N A_m \sin[(n+1)q_m] - \sum_{m=1}^N A_m \sin[(n-1)q_m]) + \\
&\frac{3}{4} \alpha_n \sum_{j,k,l} \{ \sin[n(-q_j + q_k + q_l)] + \sin[n(q_j - q_k + q_l)] + \sin[n(q_j + q_k - q_l)] - \\
&\quad \sin[n(q_j + q_k + q_l)] \} A_j A_k A_l^* - \frac{fn}{2} \exp(i\sigma T) \} = 0
\end{aligned} \tag{5.19}$$

L'équation de la $m^{\text{ème}}$ amplitude A_m est donc de la forme

$$2i\omega_0 A_m^{(1,0)} + i\omega_0 c_n A_m + 4k_n \sin\left[\frac{q_m}{2}\right]^2 A_m + \frac{3}{4}\alpha_n \sum_{j,k,l} A_j A_k A_l^* \Delta_{jkl,m}^{(1)} - \frac{1}{(N+1)} f_n \exp(i\sigma T) \sum_{n=1}^N \sin[nq_m] = 0 \quad (5.20)$$

où la fonction $\Delta_{jkl,m}^{(1)}$ [200, 202] est définie par

$$\Delta_{jkl,m}^{(1)} = \delta_{-j+k+l,m} - \delta_{-j+k+l,-m} - \delta_{-j+k+l,2(N+1)-m} + \delta_{j-k+l,m} - \delta_{j-k+l,-m} - \delta_{j-k+l,2(N+1)-m} - \delta_{j+k+l,m} - \delta_{j+k+l,2(N+1)-m} \quad (5.21)$$

avec $\delta_{v,w}$ est le symbole de Kronecker égal à 1 si $v = w$ et 0 si $v \neq w$.

5.3.4.2. Introduction d'imperfections : forme générique

Pour généraliser la formulation détaillée dans la **section 4.3.4.1** illustrant le cas où les imperfections ne sont pas prise en compte, une forme générique de l'équation (5.20) est introduite telle que

$$2i\omega_0 A_m^{(1,0)} + i\omega_0 c_n A_m + k_n (2A_m - \cos[q_m] * G_m) + S * \frac{2k_n}{N+1} \sum_{n=1}^N \sin[nq_m] \sum_{x=1}^N \cos[nq_x] \sin[q_x] (A_x - \tilde{A}_x) + \frac{3}{4}\alpha_n \sum_{j,k,l} A_j A_k A_l^* \Delta_{jkl,m}^{(1)} - \frac{1}{(N+1)} f_n \exp(i\sigma T) \sum_{n=1}^N \sin[nq_m] = 0 \quad (5.22)$$

où les fonctions G_m et S sont définies en fonction du nombre et des positions des cellules affectées par les imperfections dans la structure. Partons donc des quatre configurations possibles (**a-d**) définies dans la **section 4.3.2**.

- a.** Si la cellule concernée et les cellules qui lui sont adjacentes sont parfaites (sans imperfections), $G_m = 2A_m$ et $S = 0$. Dans ce cas, l'équation complexe d'amplitude a la forme (5.20)
- b.** Si la cellule considérée est parfaite mais celle qui la précède contient des imperfections, $G_m = A_m + \tilde{A}_m$ et $S = -1$. L'équation (5.22) devient

$$2i\omega_0 A_m^{(1,0)} + i\omega_0 c_n A_m + k_n \left(2A_m - \cos[q_m] (A_m + \tilde{A}_m) \right) + \frac{2k_n}{N+1} \sum_{n=1}^N \sin[nq_m] \sum_{x=1}^N \cos[nq_x] \sin[q_x] (\tilde{A}_x - A_x) + \frac{3}{4}\alpha_n \sum_{j,k,l} A_j A_k A_l^* \Delta_{jkl,m}^{(1)} - \frac{1}{(N+1)} f_n \exp(i\sigma T) \sum_{n=1}^N \sin[nq_m] = 0 \quad (5.23)$$

- c.** Si la cellule considérée est parfaite mais la suivante contient des imperfections, $G_m = A_m + \tilde{A}_m$ et $S = +1$. L'équation (5.22) devient

$$2i\omega_0 A_m^{(1,0)} + i\omega_0 c_n A_m + k_n \left(2A_m - \cos[q_m] (A_m + \tilde{A}_m) \right) + \frac{2k_n}{N+1} \sum_{n=1}^N \sin[nq_m] \sum_{x=1}^N \cos[nq_x] \sin[q_x] (A_x - \tilde{A}_x)$$

$$+\frac{3}{4}\alpha_n \sum_{j,k,l} A_j A_k A_l^* \Delta_{jkl,m}^{(1)} - \frac{1}{(N+1)} f_n \exp(i\sigma T) \sum_{n=1}^N \sin[nq_m] = 0 \quad (5.24)$$

- d. Si la cellule concernée contient des imperfections et ses voisines sont parfaites, \tilde{A}_m remplace A_m dans l'équation (5.22), $G_m = 2A_m$ et $S = 0$. L'équation (5.22) prend la forme

$$2i\omega_0 \tilde{A}_m^{(1,0)} + i\omega_0 c_n \tilde{A}_m + 2k_n (\tilde{A}_m - \cos[q_m] A_m) + \frac{3}{4}\alpha_n \sum_{j,k,l} \tilde{A}_j \tilde{A}_k \tilde{A}_l^* \Delta_{jkl,m}^{(1)} - \frac{1}{(N+1)} f_n \exp[i\sigma T] \sum_{n=1}^N \sin[nq_m] = 0 \quad (5.25)$$

Le nombre d'équations complexes obtenues dépend du nombre et des positions des imperfections dans la structure. En effet, les N équations obtenues dans le cas sans imperfections deviennent $N(p + q + d)$ dans le cas où les imperfections sont prises en compte. p et q sont, respectivement, le nombre de cellules affectées et le nombre des cellules parfaites voisines de celles avec imperfections. $d = 1$ si la structure contient des cellules parfaites ayant des cellules voisines parfaites et 0 autrement.

5.3.5. Résolution des équations complexes

Pour résoudre les équations complexes obtenues, une transformation de l'amplitude de la solution en forme cartésienne est introduite telle que

$$A_m = (a_m + ib_m) \exp(i\sigma T) \quad (5.26)$$

En substituant l'équation (5.26) dans l'équation (5.22) et en simplifiant par $\exp(i\sigma T)$, deux équations génériques sont obtenues en fonction des parties réelles (Re) et imaginaire (Im), respectivement, de l'amplitude A_m .

$$\begin{aligned} a_m^{(1,0)} &= \frac{\sigma}{2\omega_0} b_m - \frac{c_n}{2} a_m - \frac{k_n}{2\omega_0} (2b_m - \cos[q_m] Im(G_m)) \\ -S * \frac{1}{N+1} \frac{k_n}{\omega_0} \sum_{n=1}^N \sin[nq_m] \sum_{x=1}^N \cos[nq_x] \sin[q_x] (b_x - \tilde{b}_x) \\ &\quad - \frac{3}{8} \frac{\alpha_n}{\omega_0} \sum_{j,k,l} [a_j a_k b_l + b_j b_k b_l] \Delta_{jkl,m}^{(1)} \end{aligned} \quad (5.27)$$

$$\begin{aligned} b_m^{(1,0)} &= -\frac{\sigma}{2\omega_0} a_m - \frac{c_n}{2} b_m + \frac{k_n}{2\omega_0} (2a_m - \cos[q_m] Re(G_m)) \\ +S * \frac{1}{N+1} \frac{k_n}{\omega_0} \sum_{n=1}^N \sin[nq_m] \sum_{x=1}^N \cos[nq_x] \sin[q_x] (a_x - \tilde{a}_x) \\ + \frac{3}{8} \frac{\alpha_n}{\omega_0} \sum_{j,k,l} [a_j a_k a_l + a_j b_k b_l] \Delta_{jkl,m}^{(1)} - \frac{1}{2(N+1)} \frac{f_n}{\omega_0} \sum_{n=1}^N \sin[nq_m] \end{aligned} \quad (5.28)$$

Par conséquent, un système à $2N(p + q + d)$ équations algébriques non-linéaires couplées est obtenu.

5.4. Structure périodique constituée de pendules faiblement couplés

5.4.1. Modèle générique

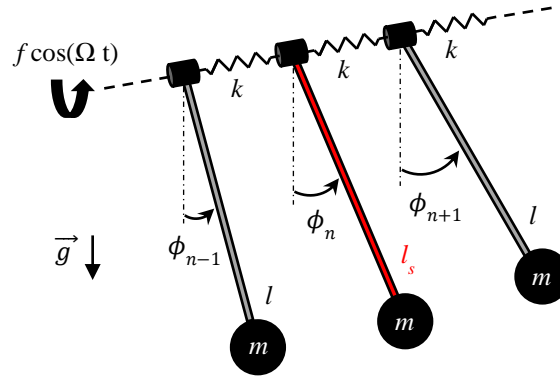


Fig.5.1. Schéma d'une structure périodique de N pendules non-linéaires couplés par des ressorts linéaires

La figure 5.1 représente un modèle générique d'une structure périodique de N pendules non-linéaires couplées par des ressorts linéaires k . Les pendules sont de masse m , de longueur l et le déplacement rotationnel du $n^{\text{ème}}$ pendule est noté ϕ_n . La longueur d'un pendule est perturbée et est notée l_s .

L'équation de Lagrange associée au $n^{\text{ème}}$ pendule est de la forme

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_n} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi_n} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\phi}_n} = Q_n \quad (5.29)$$

où L est l'opérateur de Lagrange calculé par la différence entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle $L = T - V$ et D l'énergie de dissipation. Soient

$$T = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N m (\dot{x}_n^2 + \dot{y}_n^2) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N m l^2 \dot{\phi}_n^2 \quad (5.30)$$

$$V = \sum_{n=1}^N m g l (1 - \cos(\phi_n)) \dot{\phi}_n^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N-1} k (\phi_{n+1} - \phi_n)^2 \quad (5.31)$$

$$D = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \alpha l^2 \dot{\phi}_n^2 \quad (5.32)$$

Les coordonnées cartésiennes sont $x_n = l \sin \phi_n$ et $y_n = -l \cos \phi_n$.

Le déplacement ϕ_n est exprimé sous forme d'une expansion en série de Taylor à l'ordre 3, centrée en 0 :

$$\sin \phi_n = \sum_{i=0}^{+\infty} (-1)^i \frac{\phi_n^{2i+1}}{(2i+1)!} = \phi_n - \frac{\phi_n^3}{6} + \dots \quad (5.33)$$

En substituant les expressions (5.30-5.33) dans l'équation (5.29), l'équation de mouvement du $n^{\text{ème}}$ pendule est donnée par

$$m l^2 \ddot{\phi}_n + \alpha l^2 \dot{\phi}_n + m g l \phi_n + k \mathcal{L}_c(\phi, \tilde{\phi}) - \frac{1}{6} m g l \phi_n^3 = f_{ext} \cos(\Omega t) \quad (5.34)$$

L'équation (5.34) est réécrite sous la forme

$$\ddot{\phi}_n + c_n \dot{\phi}_n + \omega_n^2 \phi_n + k_n \mathcal{L}_c(\phi, \tilde{\phi}) + \alpha_n \phi_n^3 = f_n \cos(\Omega t) \quad (5.35)$$

avec $c_n = \frac{\alpha}{m}$, $k_n = \frac{k}{ml^2}$, $\alpha_n = -\frac{g}{6l}$ et $f_n = \frac{f}{ml^2}$ quand le $n^{\text{ème}}$ pendule n'est pas affecté par les imperfections. $c_n = \frac{\alpha}{m}$, $k_n = \frac{k}{ml_s^2}$, $\alpha_n = -\frac{g}{6l_s}$ et $f_n = \frac{f_{ext}}{ml_s^2}$ quand la longueur du $n^{\text{ème}}$ pendule, de déplacement $\tilde{\phi}_n$, est perturbée.

L'équation (5.35) est similaire à l'équation (5.2) et sa résolution se fait comme détaillé dans la section 4.3.

5.4.2. Exemple 1 : structure de deux pendules couplés

Considérons en premier lieu une structure périodique de deux pendules non-linéaires couplés linéairement (Fig.5.2) dont les paramètres sont groupés dans le tableau 5.1.

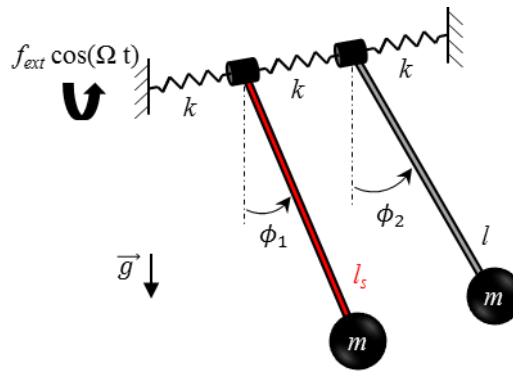


Fig.5.2. Schéma d'une structure périodique de deux pendules non-linéaires couplés linéaires

Tab.5.1. Paramètres de la structure périodique de deux pendules couplés

m (kg)	l (m)	k (N.m)	α (kg.s ⁻¹)	f_{ext} (N.m)	ω_0 (rad.s ⁻¹)
0.25	0.062	$9 \cdot 10^{-4}$	0.16	0.01	12.58

Le nombre $2N(p + q + d)$ d'équations algébriques générées dans ce cas ($N = 2$) est 8 tel que le nombre p de cellules affectées est 1, le nombre q des cellules parfaites voisines de celles avec imperfections est 1 et $d = 0$ puisque la structure ne contient aucune cellule parfaite ayant des cellules voisines parfaites. Ces équations sont résolues en utilisant la méthode d'intégration temporelle de Runge-Kutta.

5.4.2.1. Réponses fréquentielles de la structure sans imperfections

Dans le cas sans imperfections ($p = 0$, $q = 0$ et $d = 1$), un système à 4 équations algébriques est à résoudre.

Les réponses fréquentielles en coordonnées modales (généralisées) et physiques sont représentées par les figures 5.3 et 5.4.

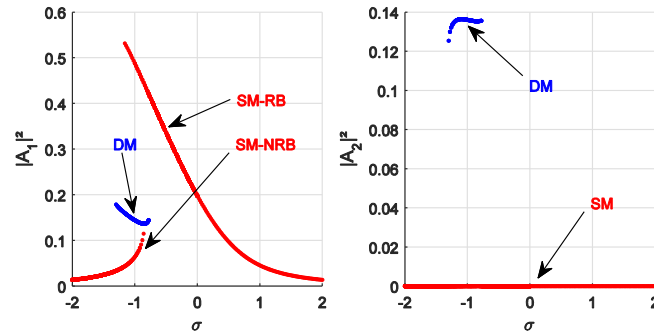


Fig.5.3. Amplitudes des réponses des deux pendules en coordonnées généralisées, sans prendre en compte l'imperfection

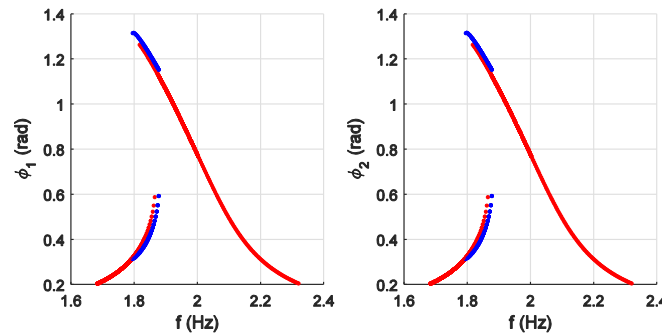


Fig.5.4. Amplitudes des réponses des deux pendules en coordonnées physiques, sans prendre en compte l'imperfection

Dans le domaine de multistabilité, plusieurs solutions stables existent. Cette multiplicité de solution est due à la non-linéarité et aux interactions modales entre les réponses générées par la dynamique collective. Trois solutions stables sont, en effet, obtenues pour plusieurs fréquences dans le domaine de multistabilité. Trois types de branches sont, par conséquent, générés correspondant à deux types de modes : mode simple (SM : Single Mode) et mode double (DM : Double Mode). La seule solution correspondant au SM est la solution triviale nulle de l'équation d'amplitude du deuxième pendule. Elle est représentée par les courbes rouges. Deux types de branches sont identifiables pour le SM, une branche résonante (SM-RB : Single Mode-Resonant Branch) et une branche non-résonante (SM-NRB : Single Mode-Non-Resonant Branch) (**Fig.5.3**). Les autres solutions correspondent au DM (courbes bleues) et elles sont dues aux interactions entre les deux pendules.

En comparant les réponses du premier et du deuxième pendule, une correspondance en termes de points de bifurcation est obtenue. Elle est générée par le transfert de la topologie de bifurcation. De plus, les réponses des deux pendules en coordonnées physiques (**Fig.5.4**) sont identiques vue la symétrie entre les deux pendules.

5.4.2.2. Bassins d'attraction de la structure sans imperfections

Les bassins d'attraction sont utilisés pour analyser qualitativement et quantitativement la robustesse de la dynamique collective de la structure à travers la taille et la compacité des attracteurs des différents modes et branches modales et leurs contributions dans les réponses.

Dans la littérature, les bassins d'attraction d'un pendule plan sous excitation paramétrique périodique ont été déterminés numériquement par Bartuccelli et al. [231]. Une étude expérimentale des bassins d'attraction de deux points fixes d'un nano-résonateur mécanique non linéaire a été menée par Kozinsky et al. [232]. Sliwa et al. [233] ont étudié les bassins d'attraction de deux oscillateurs de Kerr couplés. Ruzziconi et al. [234] ont étudié les réponses fréquentielles, les diagrammes de phase et les bassins d'attraction d'un nano-système électromécanique. Récemment, les bassins d'attraction d'un système amorti sous excitation périodique ont été estimés numériquement par Wright et al. [235]. Bitar et al. [202] ont étudié les bassins d'attraction pour des systèmes périodiques à 2 et 3 oscillateurs non-linéaires couplés sous excitations simultanées extérieure et paramétrique.

Les bassins d'attractions sont généralement dessinés dans le plan de phase $(\phi, \dot{\phi})$. Dans ce travail, les bassins sont dessinés dans le plan de Nyquist (a, b) des parties réelles et imaginaires des conditions initiales utilisées pour le calcul des amplitudes des réponses fréquentielles afin de les adapter à la méthodologie de résolution utilisée [202]. En effet, l'évolution de l'amplitude de la réponse du $n^{\text{ème}}$ pendule en fonction des conditions initiales en un point fréquentiel choisi dans le domaine de multistabilité est tracée dans le plan (a, b) . En variant les conditions initiales sur a et b , la distribution des solutions est partitionnée suivant les types de branches (ou types de mode). Les attracteurs sont, par conséquent, définis et leur robustesse est analysée en les comparant quantitativement à travers leurs tailles.

Pour ce système à 2 ddls, le traçage des bassins d'attraction est effectué en fixant les conditions initiales pour calculer l'amplitude de la réponse d'un pendule et en variant celles relatives à l'autre. Les figures 5.5-5.7 illustrent les bassins d'attraction des amplitudes modales $|A_1|^2$ et $|A_2|^2$ des réponses du premier et du deuxième pendule, respectivement. Ces bassins sont tracés dans le plan de Nyquist $((a_1)_0, (b_1)_0)$ en fixant le paramètre de réglage fréquentiel à $\sigma = -1.2$, $\sigma = -1$ et $\sigma = -0.8$. A ces points fréquentiels correspondent trois types de branches de solutions stables. Les exemples traités correspondent au cas où les conditions initiales de l'amplitude de la réponse du premier pendule sont variables et celles du deuxième pendule sont fixées à $(a_2)_0 = (b_2)_0 = 0.25$.

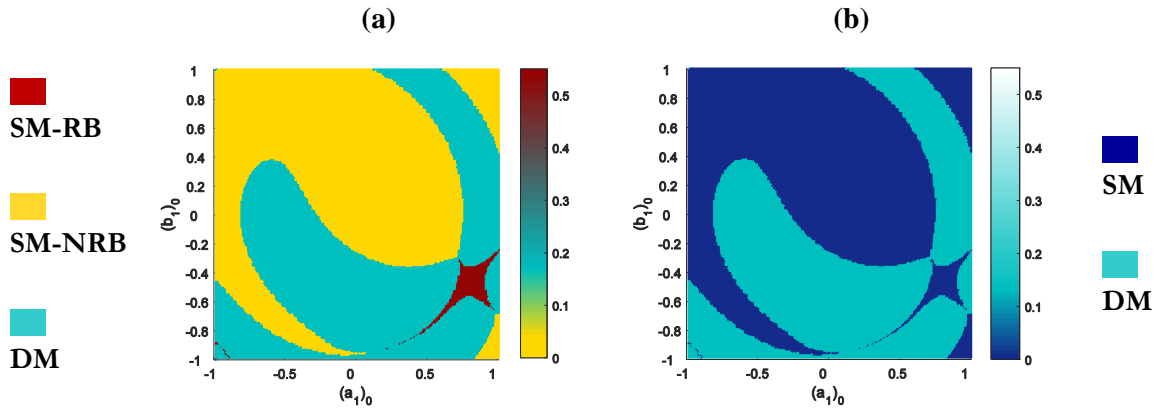


Fig.5.5. Bassins d'attraction des réponses (a) $|A_1|^2$ et (b) $|A_2|^2$ dans le plan de Nyquist $((a_1)_0, (b_1)_0)$ pour $\sigma = -1.2$ et $(a_2)_0 = (b_2)_0 = 0.25$, sans prendre en compte l'imperfection

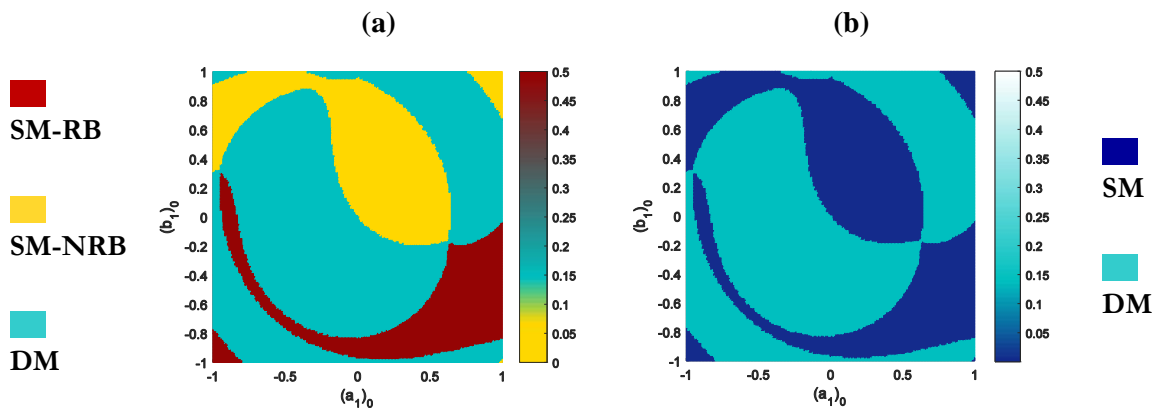


Fig.5.6. Bassins d'attraction des réponses (a) $|A_1|^2$ et (b) $|A_2|^2$ dans le plan de Nyquist $((a_1)_0, (b_1)_0)$ pour $\sigma = -1$ et $(a_2)_0 = (b_2)_0 = 0.25$, sans prendre en compte l'imperfection

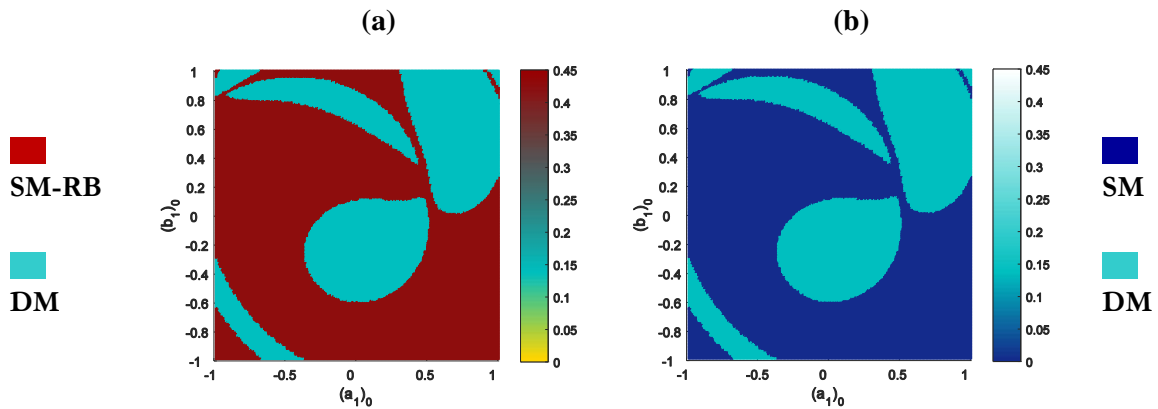


Fig.5.7. Bassins d'attraction des réponses (a) $|A_1|^2$ et (b) $|A_2|^2$ dans le plan de Nyquist $((a_1)_0, (b_1)_0)$ pour $\sigma = -0.8$ et $(a_2)_0 = (b_2)_0 = 0.25$, sans prendre en compte l'imperfection

Tab.5.2. Distributions des attracteurs des branches SM-RB, SM-NRB et DM dans les bassins d'attraction pour les trois cas: $\sigma = -1.2$, $\sigma = -1$ et $\sigma = -0.8$

	$\sigma = -1.2$	$\sigma = -1$	$\sigma = -0.8$
SM-RB (%)	1.6	15.7	35.5
SM-NRB (%)	52.5	23.4	0
DM (%)	45.9	60.9	64.5

Le transfert de la topologie de bifurcation entre les réponses $|A_1|^2$ et $|A_2|^2$ des deux pendules a été illustré par les figures 5.3 et 5.4. Ce phénomène est montré de façon plus claire et détaillée par les bassins d'attraction (Fig.5.5-5.7). En effet, quand la réponse $|A_1|^2$ du premier pendule varie entre les branches de types SM-RB et SM-NRB, la réponse du deuxième pendule $|A_2|^2$ est toujours sur la branche de type SM. De façon similaire, une correspondance est détectée entre les solutions de type DM des amplitudes $|A_1|^2$ et $|A_2|^2$. Ceci permet de se contenter de l'analyse de la robustesse des bassins d'attraction d'une seule réponse.

La comparaison des bassins d'attraction tracés pour les trois cas $\sigma = -1.2$, $\sigma = -1$ et $\sigma = -0.8$ (Fig.5.5-5.7) et la comparaison des tailles des attracteurs des différentes branches (ratios des surfaces occupées par chaque attracteur par rapport à la surface globale des bassins) permettent de comparer leurs robustesse. En effet, pour $\sigma = -1.2$ les attracteurs les plus robustes sont de type SM-NRB occupant 52.5% des bassins. Pour $\sigma = -1$, la robustesse des attracteurs du DM est illustrée par leur taille représentant 60.9% de la totalité des bassins d'attraction. Cependant, pour $\sigma = -0.8$, les attracteurs de la SM-NRB disparaissent et 64.5% et 35.5% sont, respectivement, occupés par les attracteurs des branches DM et SM-RB.

5.4.2.3. Réponses fréquentielles de la structure perturbée

Dans un premier cas, l'imperfection est supposée être une perturbation (modification) de la longueur l_1 du premier pendule telle que

$$l_1 = l(1 \pm \delta_l) \quad (5.36)$$

avec $\delta_l = 2\%$.

- **Cas 1 :** $l_1 = l(1 + \delta_l)$

Les figures 5.8 et 5.9 illustrent les réponses fréquentielles des deux pendules, en coordonnées généralisées et physiques, quand l'imperfection introduite est une augmentation de la longueur du premier pendule ($l_1 = l(1 + \delta_l)$).

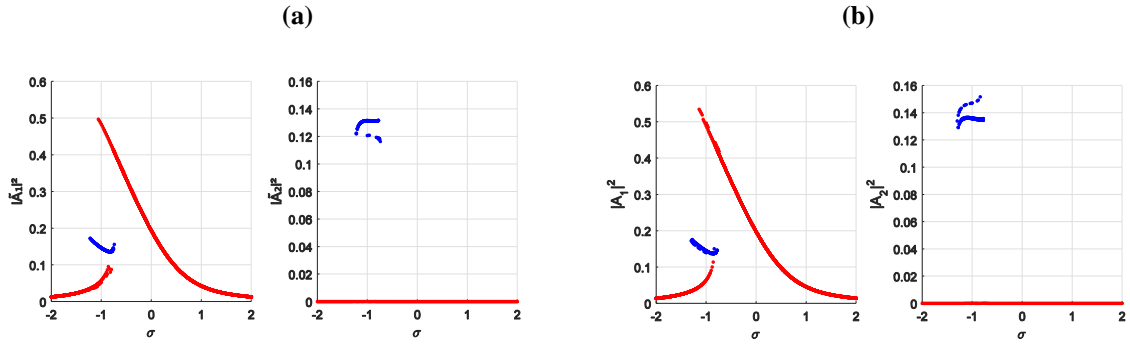


Fig.5.8. Amplitudes des réponses (a) $|\tilde{A}_1|^2$ et $|\tilde{A}_2|^2$ du premier pendule et (b) $|A_1|^2$ et $|A_2|^2$ du deuxième pendule en coordonnées généralisées pour $l_1 = l(1 + \delta_l)$

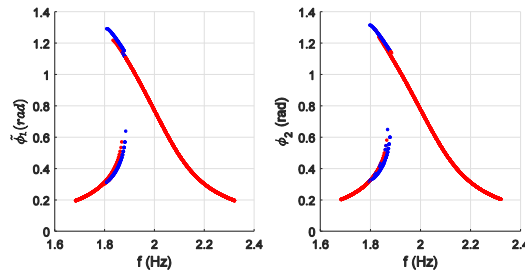


Fig.5.9. Amplitudes des réponses $\tilde{\phi}_1$ et ϕ_2 des deux pendules en coordonnées physiques pour $l_1 = l(1 + \delta_l)$

En comparant ces réponses perturbées avec les réponses obtenues dans le cas sans imperfection (**Fig.5.3-5.4**), on remarque que d'autres solutions stables sont ajoutées. Les nouvelles solutions stables sont identifiables sur les réponses en coordonnées généralisées et physiques. Plus de solutions stables sont, en effet, ajoutées à la réponse du deuxième pendule qu'à la réponse du premier pendule. Les solutions de type DM sont enrichies dans les deux cas. Cependant, la localisation des solutions stables sur la SM-NRB est favorisée pour le premier pendule alors que les solutions stables sont localisées sur la SM-RB pour le deuxième pendule.

Les amplitudes de la réponse perturbée du deuxième pendule $|A_2|^2$ et ϕ_2 augmentent par rapport à sa réponse non perturbée. De plus, la bande fréquentielle sur laquelle s'étend le domaine de multistabilité est plus large pour le deuxième pendule que pour le premier pendule. Ceci est également déduit des mesures des intervalles de fréquence Δf et d'amplitude $\Delta\phi$ dans le domaine de multistabilité (**Fig.5.13-5.14**), tel que montre l'exemple illustré par la figure **5.12**. Les ratios (en %) des Δf et $\Delta\phi$ par rapport à ceux calculés dans le cas sans imperfection sont groupés dans le tableau **5.3**.

- **Cas 2 :** $l_1 = l(1 - \delta_l)$

Les figures **5.10** et **5.11** représentent les réponses fréquentielles des deux pendules, en coordonnées généralisées et physiques, quand l'imperfection introduite est une réduction de la longueur du premier pendule ($l_1 = l(1 - \delta_l)$).

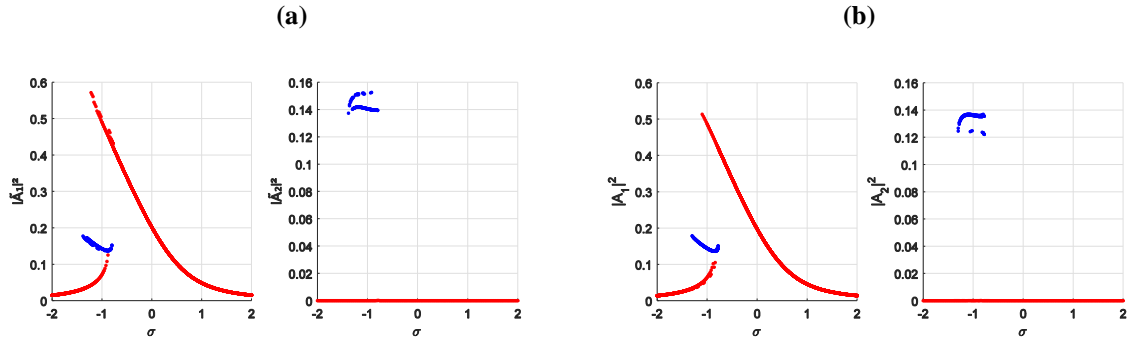


Fig.5.10. Amplitudes des réponses (a) $|\tilde{A}_1|^2$ et $|\tilde{A}_2|^2$ du premier pendule et (b) $|A_1|^2$ et $|A_2|^2$ du deuxième pendule en coordonnées généralisées pour $l_1 = l(1 - \delta_l)$

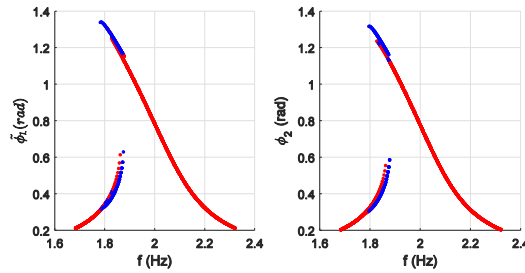


Fig.5.11. Amplitudes des réponses $\tilde{\phi}_1$ et $\tilde{\phi}_2$ des deux pendules en coordonnées physiques pour $l_1 = l(1 - \delta_l)$

Dans ce cas, il y'a plus de branches stables ajoutées à la réponse du pendule perturbé qu'à celle du pendule non-perturbé et son domaine de multistabilité est plus large. La localisation modale est cette fois plus importante sur les branches DM et SM-RB de la réponse du premier pendule alors que peu de solutions stables additionnelles sont détectées sur les branches DM et SM-NRB de la réponse du deuxième pendule. En plus des figures 5.10 et 5.11 des réponses fréquentielles, ceci est illustré par les intervalles de fréquence et d'amplitude comparés dans les figures 5.13 et 5.14 et le tableau 5.3 aux intervalles calculés sans prendre en compte l'imperfection.

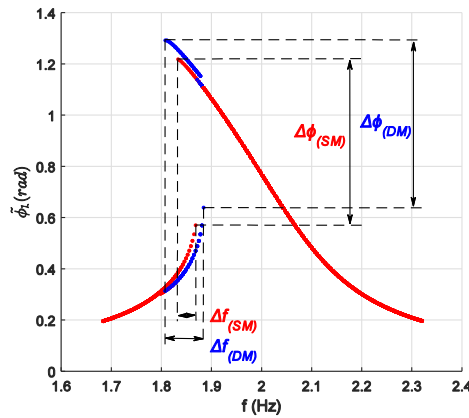


Fig.5.12. Exemple de mesures des intervalles d'amplitude et de fréquence dans le domaine de multistabilité, suivant les types de branches SM et DM

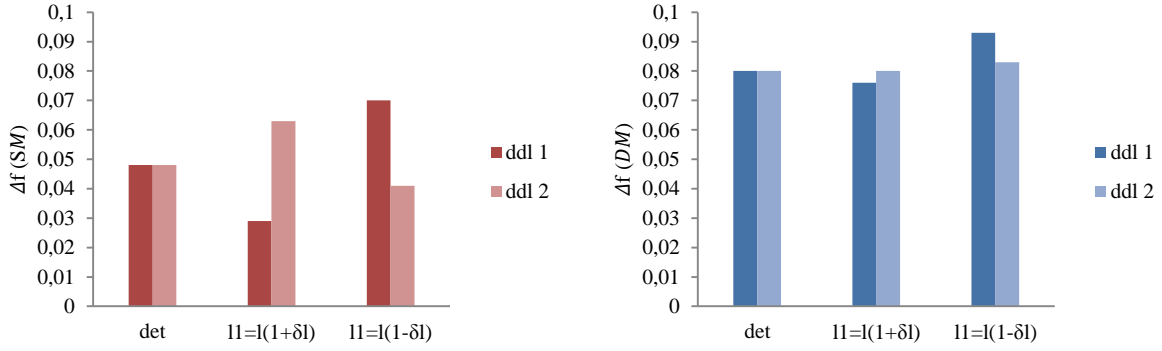


Fig.5.13. Comparaison des intervalles fréquentiels Δf du domaine de multistabilité pour $l_1 = l(1 + \delta_l)$ et $l_1 = l(1 - \delta_l)$, suivant les types de branches SM et DM

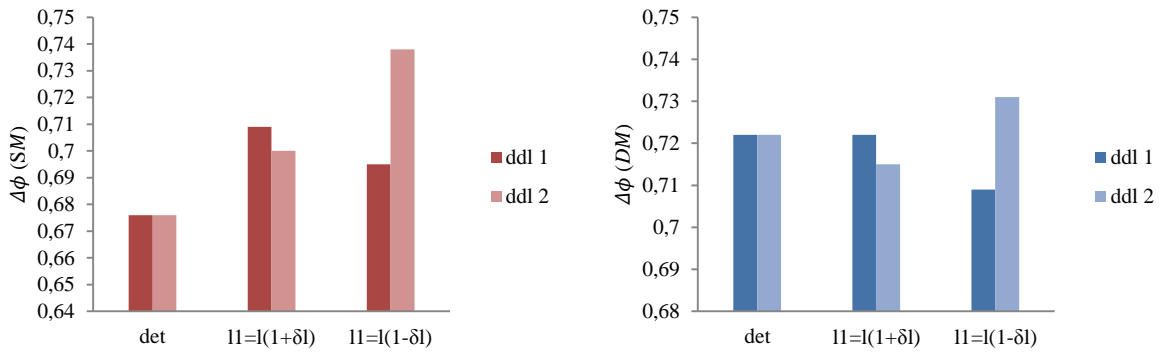


Fig.5.14. Comparaison des intervalles des amplitudes $\Delta\phi$ dans le domaine de multistabilité pour $l_1 = l(1 + \delta_l)$ et $l_1 = l(1 - \delta_l)$, suivant les types de branches SM et DM

Tab.5.3. Evolution des intervalles Δf et $\Delta\phi$ du SM et du DM, pour $l_1 = l(1 + \delta_l)$ et $l_1 = l(1 - \delta_l)$, par rapport aux intervalles obtenus sans prendre en compte l'imperfection

	ddl	SM		DM	
		$l_1 = l(1 + \delta_l)$	$l_1 = l(1 - \delta_l)$	$l_1 = l(1 + \delta_l)$	$l_1 = l(1 - \delta_l)$
Δf (%)	1	60.42	145.83	95	116.25
	2	131.25	85.42	100	103.25
$\Delta\phi$ (%)	1	104.88	102.81	100	98.20
	2	103.55	109.17	99.03	101.25
$\frac{\Delta f}{\Delta\phi}$ (%)	1	57.75	142.25	94.59	118.02
	2	126.76	78.87	100.90	102.70

On peut conclure pour ces deux cas de perturbation qu'en présence de l'imperfection, la stabilité du système est améliorée. La perturbation réduisant la longueur d'un pendule favorise la localisation modale sur sa réponse. De plus, les ratios $\Delta f/\Delta\phi$ groupés dans le tableau 5.3 montrent que si l'imperfection consiste à réduire la longueur d'un pendule, l'ampleur de la non-linéarité de sa réponse est plus importante que celle de la réponse du pendule non-perturbé. De façon similaire, quand l'imperfection consiste à augmenter la

longueur d'un pendule, la localisation modale et la non-linéarité de la réponse du pendule non perturbé sont les plus importantes.

5.4.2.4. Bassins d'attraction de la structure perturbée

L'étude des bassins d'attraction et l'analyse de la robustesse des attracteurs de chaque type de branche sont également effectués pour les deux de perturbation $l_1 = l(1 + \delta_l)$ et $l_1 = l(1 - \delta_l)$. Les figures 5.15-5.18 montrent les bassins d'attraction des réponses $|\tilde{A}_1|^2$ et $|\tilde{A}_2|^2$ du premier pendule et des réponses $|A_1|^2$ et $|A_2|^2$ du deuxième pendule, pour les deux cas de perturbation.

- **Cas 1 :** $l_1 = l(1 + \delta_l)$

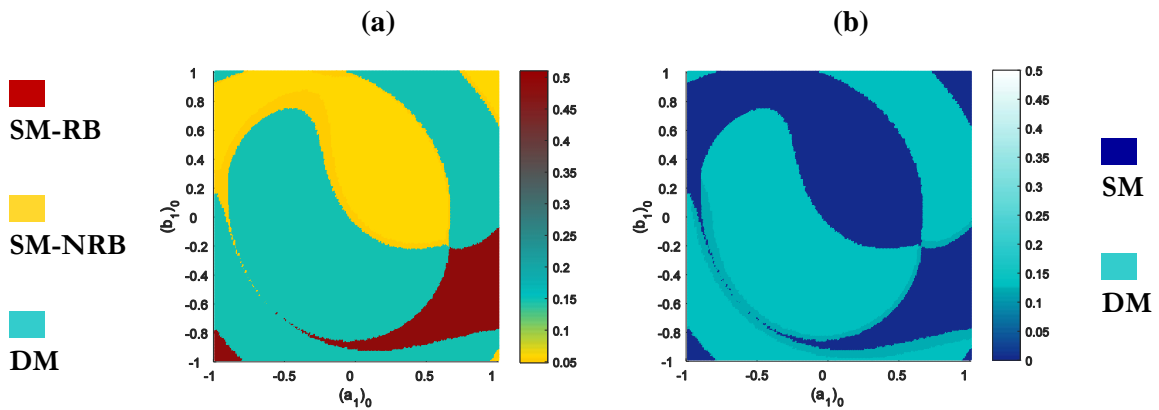


Fig.5.15. Bassins d'attraction des amplitudes (a) $|\tilde{A}_1|^2$ et (b) $|\tilde{A}_2|^2$ de la réponse du premier pendule dans le plan de Nyquist $((a_1)_0, (b_1)_0)$ pour $\sigma = -1$, $(a_2)_0 = (b_2)_0 = 0.25$ et $l_1 = l(1 + \delta_l)$

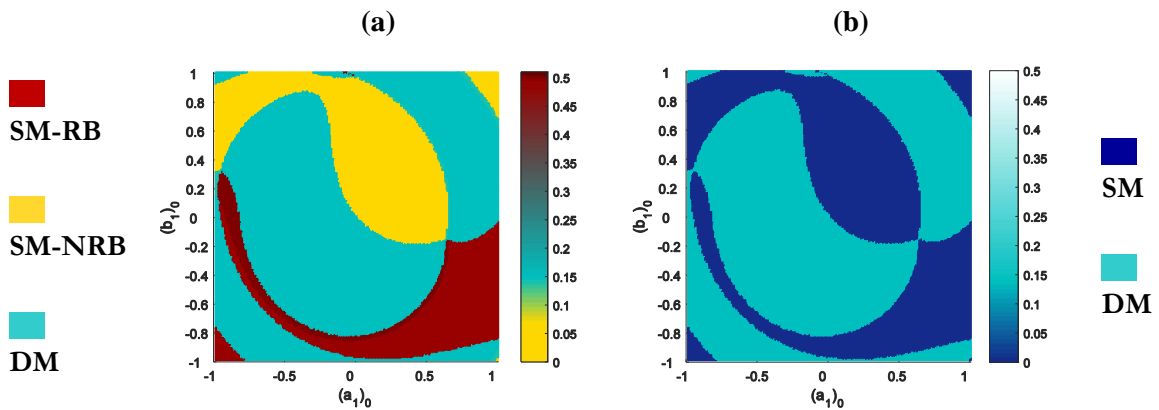


Fig.5.16. Bassins d'attraction des amplitudes (a) $|A_1|^2$ et (b) $|A_2|^2$ de la réponse du deuxième pendule dans le plan de Nyquist $((a_1)_0, (b_1)_0)$ pour $\sigma = -1$, $(a_2)_0 = (b_2)_0 = 0.25$ et $l_1 = l(1 + \delta_l)$

- **Cas 2 :** $l_1 = l(1 - \delta_l)$

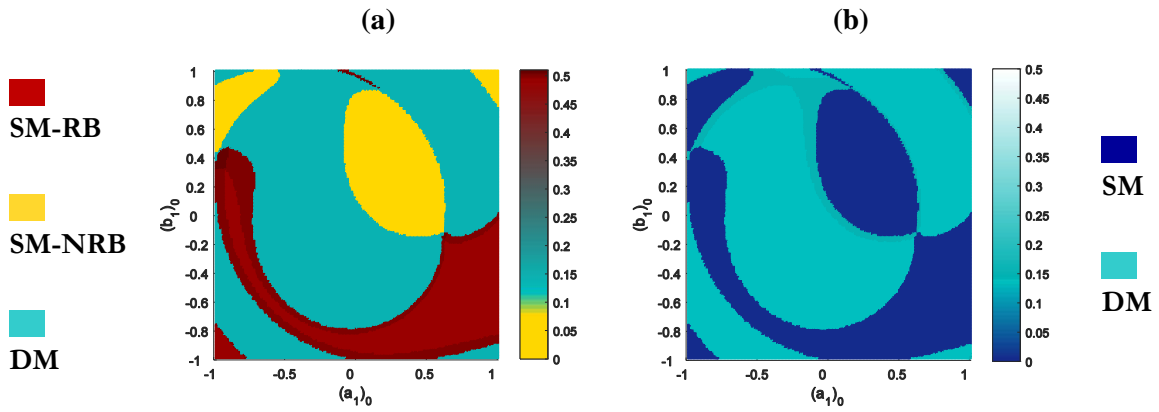


Fig.5.17. Bassins d'attraction des amplitudes (a) $|\tilde{A}_1|^2$ et (b) $|\tilde{A}_2|^2$ de la réponse du premier pendule dans le plan de Nyquist $((a_1)_0, (b_1)_0)$ pour $\sigma = -1$, $(a_2)_0 = (b_2)_0 = 0.25$ et $l_1 = l(1 - \delta_l)$

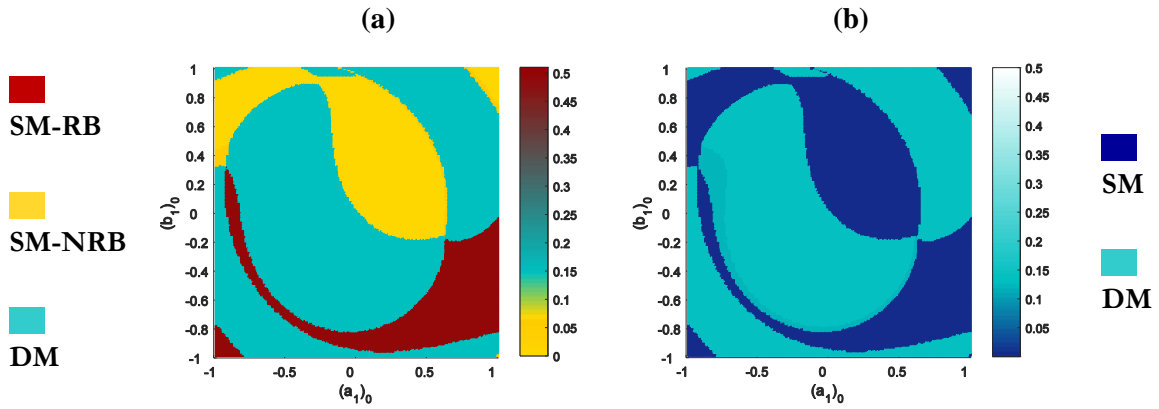


Fig.5.18. Bassins d'attraction des amplitudes (a) $|A_1|^2$ et (b) $|A_2|^2$ de la réponse du deuxième pendule dans le plan de Nyquist $((a_1)_0, (b_1)_0)$ pour $\sigma = -1$, $(a_2)_0 = (b_2)_0 = 0.25$ et $l_1 = l(1 - \delta_l)$

Tab.5.4. Comparaison des distributions des attracteurs des SM-RB, SM-NRB et DM dans les bassins d'attraction pour $l_1 = l(1 + \delta_l)$ et $l_1 = l(1 - \delta_l)$

Attracteurs	Taille (%)	
	$l_1 = l(1 + \delta_l)$	$l_1 = l(1 - \delta_l)$
SM-RB	9.7	23.4
SM-NRB	29.8	17
DM	60.5	59.6

L'analyse des bassins d'attraction à partir des figures 5.15-5.18 et du tableau 5.4, comparant les distributions des attracteurs dans les bassins, montre la robustesse des attracteurs du DM pour les deux cas de perturbation. Les attracteurs des solutions stables additionnelles sont identifiables à partir des couleurs qui diffèrent légèrement des couleurs des attracteurs définis initialement pour le même type de solution.

En comparant les figures 5.15 et 5.17, on déduit que la taille des attracteurs de la SM-NRB de la réponse du premier pendule augmente dans le cas $l_1 = l(1 + \delta_l)$, ces attracteurs sont donc plus robustes que ceux de la SM-RB. Ceci est confirmé par le fait que ces derniers occupent 29.8% des bassins d'attraction, comparé à 23.4% dans le cas non perturbé. Cependant, la taille des attracteurs de la SM-RB de la réponse du premier pendule augmente quand $l_1 = l(1 - \delta_l)$ et ces attracteurs sont cette fois plus robustes que ceux de la SM-NRB puisqu'ils occupent 23.4% des bassins, comparé à 15.7% dans le cas non perturbé.

En conclusion, l'introduction d'une imperfection dans une structure périodique de pendules couplés a plusieurs avantages. En effet, à partir des réponses fréquentielles et des bassins d'attraction, on a montré que la stabilité du système est améliorée. De plus, une localisation modale est générée en favorisant suivant le type d'imperfection introduite la domination d'un ou de plusieurs types de modes ou de branches modales. Enfin, la non-linéarité du système est amplifiée.

5.4.2.5. Réponses fréquentielles de la structure en présence d'incertitudes

Dans un deuxième cas, l'imperfection sur la longueur du premier pendule est supposée varier aléatoirement. Cette variabilité est modélisée par des incertitudes paramétriques telle que

$$l_1 = l(1 + \delta_l \xi_l) \quad (5.37)$$

où ξ_l est une variable aléatoire de loi de probabilité normale et δ_l la dispersion.

L'analyse stochastique de l'effet des incertitudes sur la réponse de la structure est effectuée en appliquant deux méthodes de propagation d'incertitudes : la méthode LHS à 200 tirages et la méthode gPC d'ordre 4. La méthode gPC d'ordre 4 exige seulement 5 calculs successifs alors que 200 calculs sont générés en appliquant la méthode LHS. Une réduction de 97.5% du nombre des calculs est donc atteinte grâce à la méthode gPC. En effet, pour un nombre $d = 1$ de paramètre incertain et un ordre polynomial $p = 4$, $(p + 1)^d = 5$ racines des polynômes d'Hermite d'ordre $p + 1 = 5$ sont utilisées pour générer $N = 5$ calculs successifs sous la condition $N \geq P + 1$ avec $P + 1 = (d + p)!/d!p! = 5$. La superposition des courbes des réponses calculées par les deux méthodes afin de les comparer ne donnent pas des figures claires et comparables. Pour une raison de clarification, les figures des réponses des deux méthodes sont séparées.

Il est important de noter que la méthode LHS conduit à des coûts de calcul prohibitifs. Ceci est dû au fait que la précision des résultats dépend fortement de la finesse du pas fréquentiel et de la variation des conditions initiales. Pour contourner cette difficulté, 200 tirages seulement sont utilisés pour la méthode LHS.

Une analyse statistique est menée afin d'évaluer la robustesse des branches multimodales vis-à-vis des incertitudes dans le domaine de multistabilité. En effet, les résultats sont présentés en termes de moyennes et enveloppes des amplitudes des réponses fréquentielles en coordonnées généralisées et physiques. L'évolution des plages fréquentielles

Δf ainsi que des intervalles d'amplitudes des réponses fréquentielles $\Delta\phi$ dans la zone de multistabilité est illustrée par les figures 5.31-5.32 et le tableau 5.5.

Afin de pouvoir comparer les réponses stochastiques avec les réponses déterministes (sans imperfection) représentées par les figures 5.3 et 5.4, les mêmes conditions initiales, utilisées pour le calcul des solutions dans le domaine de multistabilité dans le cas déterministe, sont utilisées dans le cas stochastique. La discontinuité des courbes est due à l'insuffisance des conditions initiales utilisées. Il est important de noter que varier encore plus les conditions initiales rend le calcul prohibitif et il est difficile de couvrir toutes les solutions possibles.

L'analyse stochastique est effectuée pour deux niveaux de dispersion : $\delta_l = 2\%$ et $\delta_l = 5\%$ afin d'évaluer l'effet des dispersions du paramètre incertain d'entrée sur les dispersions des réponses en sortie. A noter que les enveloppes des réponses sont dans ce cas calculées par les statistiques extrêmes (minimum et maximum) pour chaque point fréquentiel.

Les figures 5.19-5.24 et 5.25-5.30 représentent les statistiques des réponses stochastiques pour $\delta_l = 2\%$ et $\delta_l = 5\%$, respectivement.

- **Cas 1 : $\delta_l = 2\%$**

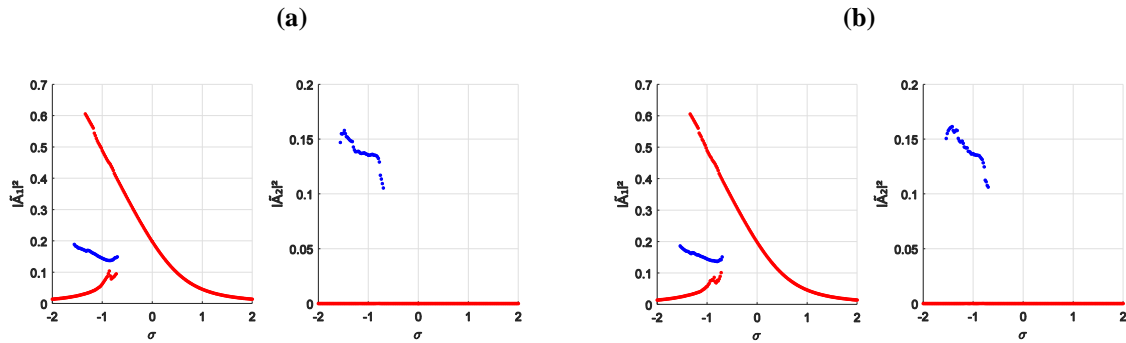


Fig.5.19. Moyennes des amplitudes $|\tilde{A}_1|^2$ et $|\tilde{A}_2|^2$ des réponses, en coordonnées généralisées, du premier pendule calculées par (a) la méthode LHS et (b) la méthode gPC, pour $\delta_l = 2\%$

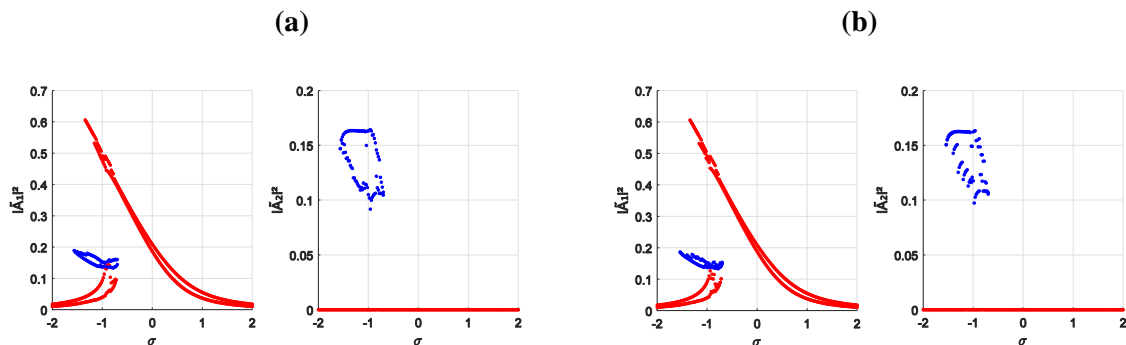


Fig.5.20. Enveloppes des amplitudes $|\tilde{A}_1|^2$ et $|\tilde{A}_2|^2$ des réponses, en coordonnées généralisées, du premier pendule calculées par (a) la méthode LHS et (b) la méthode gPC, pour $\delta_l = 2\%$

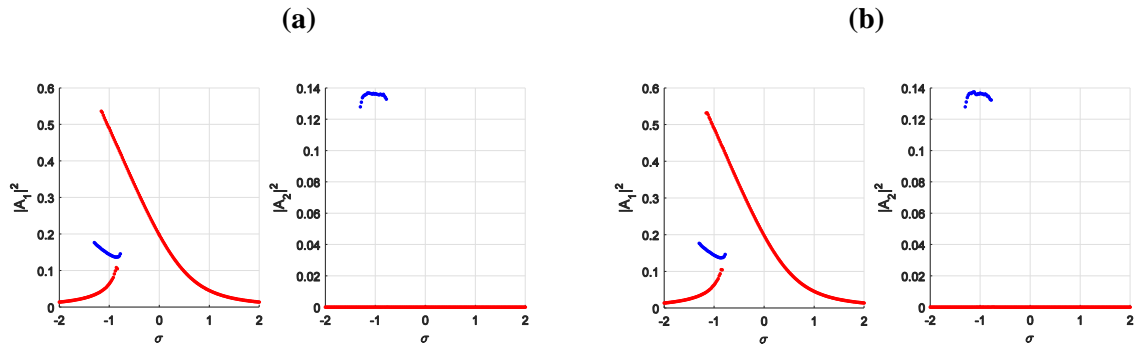


Fig.5.21. Moyennes des amplitudes $|A_1|^2$ et $|A_2|^2$ des réponses, en coordonnées généralisées, du deuxième pendule calculées par (a) la méthode LHS et (b) la méthode gPC, pour $\delta_l = 2\%$

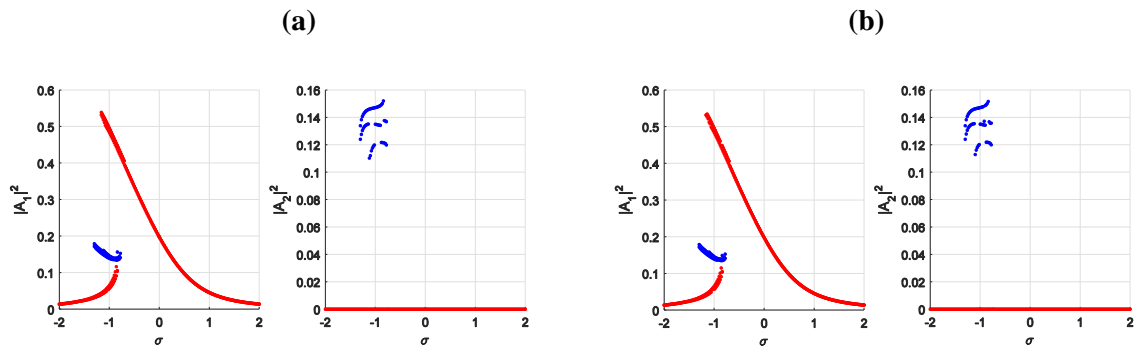


Fig.5.22. Enveloppes des amplitudes $|A_1|^2$ et $|A_2|^2$ des réponses, en coordonnées généralisées, du deuxième pendule calculées par (a) la méthode LHS et (b) la méthode gPC, pour $\delta_l = 2\%$

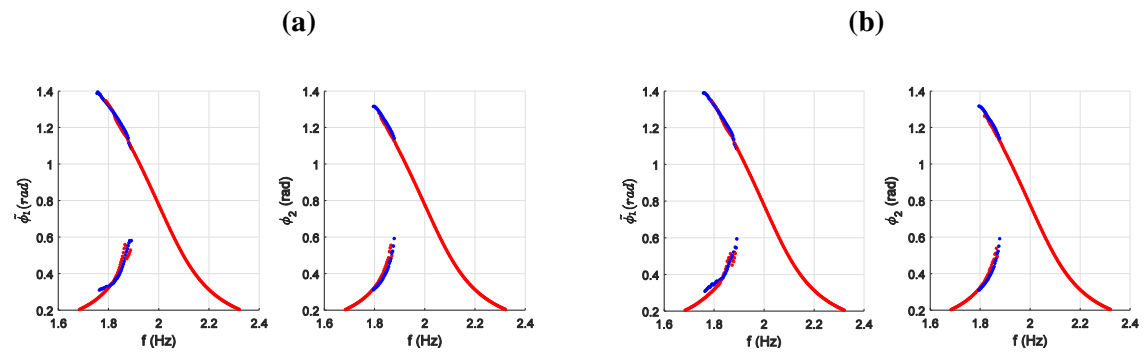


Fig.5.23. Moyennes des amplitudes des réponses $\tilde{\phi}_1$ et ϕ_2 , en coordonnées physiques, des deux pendules calculées par (a) la méthode LHS et (b) la méthode gPC, pour $\delta_l = 2\%$

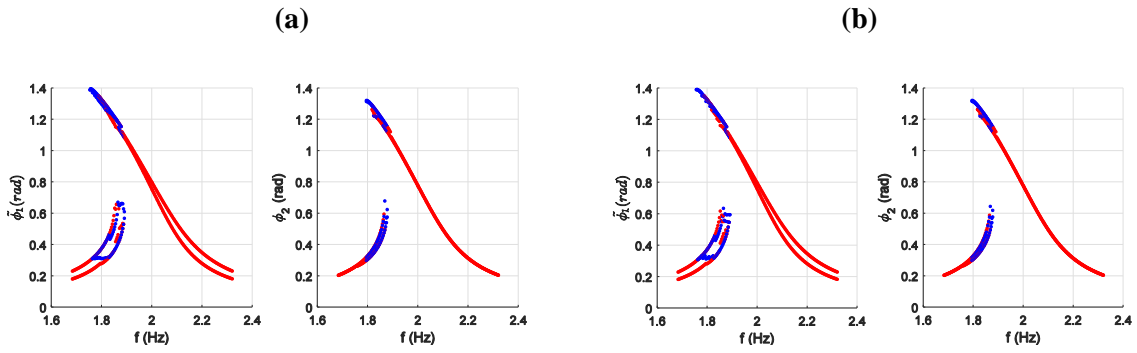


Fig.5.24. Envelopes des amplitudes des réponses $\tilde{\phi}_1$ et ϕ_2 , en coordonnées physiques, des deux pendules calculées par (a) la méthode LHS et (b) la méthode gPC, pour $\delta_l = 2\%$

• **Cas 2 : $\delta_l = 5\%$**

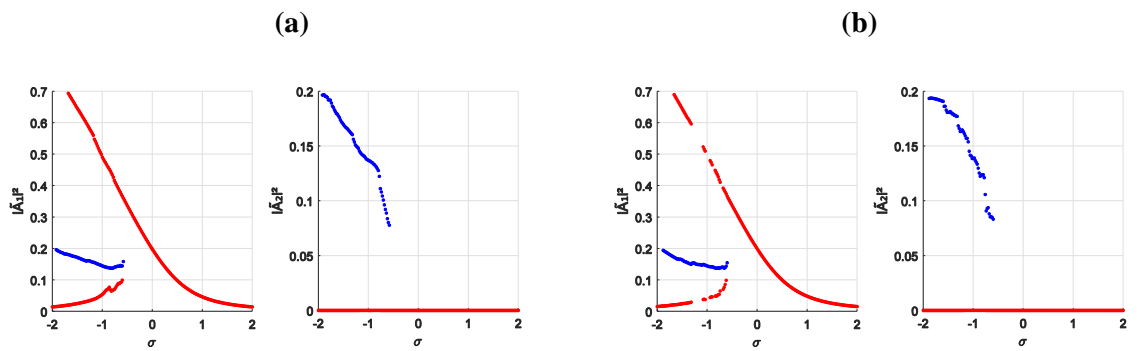


Fig.5.25. Moyennes des amplitudes $|\tilde{A}_1|^2$ et $|\tilde{A}_2|^2$ des réponses, en coordonnées généralisées, du premier pendule calculées par (a) la méthode LHS et (b) la méthode gPC, pour $\delta_l = 5\%$

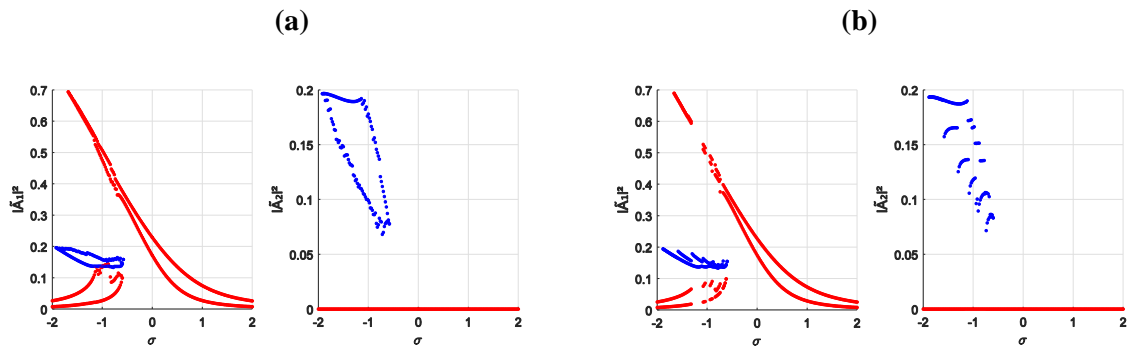


Fig.5.26. Envelopes des amplitudes $|\tilde{A}_1|^2$ et $|\tilde{A}_2|^2$ des réponses, en coordonnées généralisées, du premier pendule calculées par (a) la méthode LHS et (b) la méthode gPC, pour $\delta_l = 5\%$

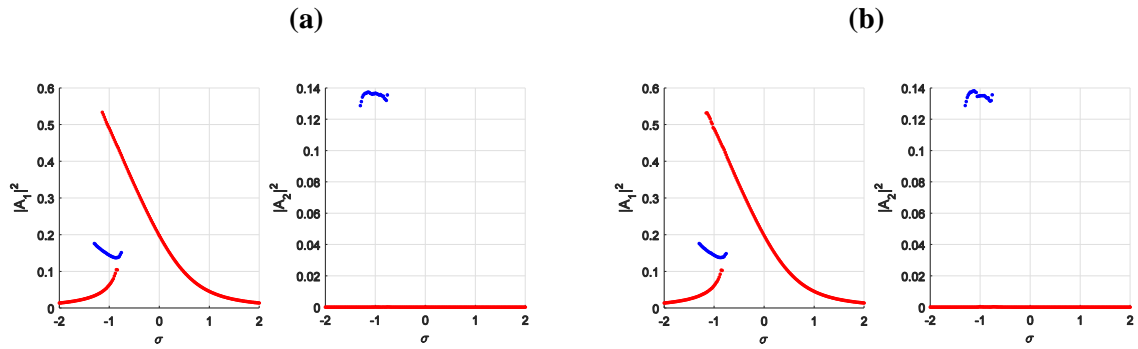


Fig.5.27. Moyennes des amplitudes $|A_1|^2$ et $|A_2|^2$ des réponses, en coordonnées généralisées, du deuxième pendule calculées par (a) la méthode LHS et (b) la méthode gPC, pour $\delta_l = 2\%$

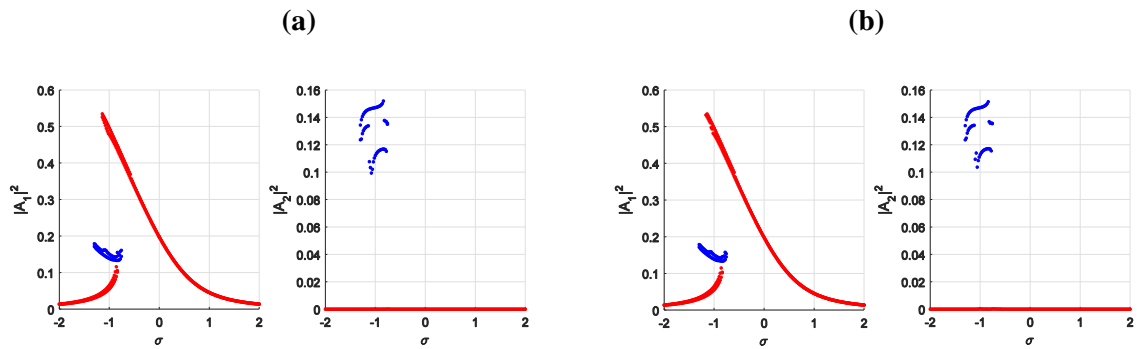


Fig.5.28. Envelopes des amplitudes $|A_1|^2$ et $|A_2|^2$ des réponses, en coordonnées généralisées, du deuxième pendule calculées par (a) la méthode LHS et (b) la méthode gPC, pour $\delta_l = 5\%$

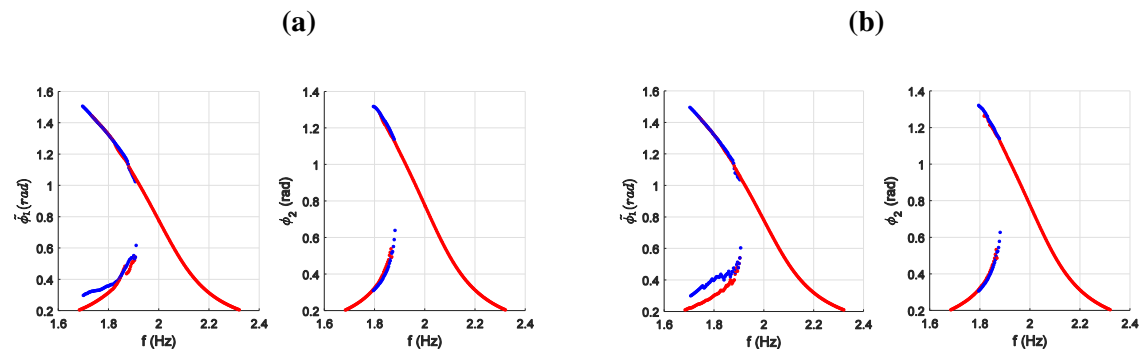


Fig.5.29. Moyennes des amplitudes des réponses $\tilde{\phi}_1$ et ϕ_2 , en coordonnées physiques, des pendules calculées par (a) la méthode LHS et (b) la méthode gPC, pour $\delta_l = 5\%$

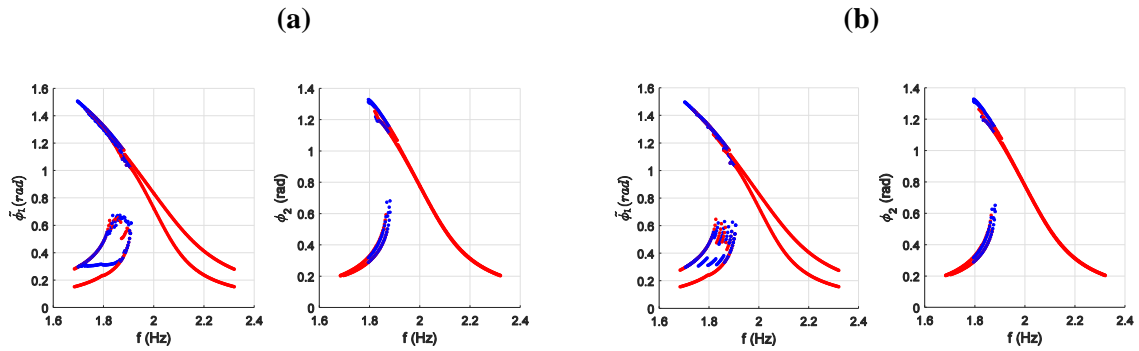


Fig.5.30. Enveloppes des amplitudes des réponses $\tilde{\phi}_1$ et ϕ_2 , en coordonnées physiques, des pendules calculées par (a) la méthode LHS et (b) la méthode gPC, pour $\delta_l = 5\%$

La comparaison des statistiques (moyennes et enveloppes) des réponses calculées par les méthodes LHS et gPC pour les deux niveaux de dispersion $\delta_l = 2\%$ et $\delta_l = 5\%$ montre que plus le niveau de dispersion est élevé plus la variabilité des amplitudes des réponses est importante. De plus, la réponse du premier pendule est plus affectée par les incertitudes que celle du deuxième pendule. Les enveloppes des amplitudes sont plus larges pour $\delta_l = 5\%$ et la plage fréquentielle du domaine de multistabilité est étendue. Par conséquent, une multiplicité de solutions multimodales est obtenue et la stabilité du système est améliorée.

L'évolution du domaine de multistabilité en fonction des niveaux de dispersion imposés est effectuée moyennant les intervalles d'amplitude et de fréquence calculés dans ce domaine pour chaque cas de dispersion par rapport à ceux obtenus dans le cas déterministe. Ces intervalles sont comparés dans les figures 5.31 et 5.32 et les ratios (en %) les rapportant aux intervalles calculés dans le cas déterministe sont groupés dans le tableau 5.5.

Une variation plus importante est détectée sur la plage fréquentielle du domaine de multistabilité Δf comparée à celle sur les intervalles d'amplitude $\Delta\phi$. Le rapport $\Delta f/\Delta\phi$ permet d'évaluer l'effet des incertitudes sur l'ampleur de la non-linéarité du système. Cette dernière est, en effet, proportionnelle au niveau de dispersion. On peut donc conclure que les incertitudes renforcent aussi bien la non-linéarité du système que sa stabilité.

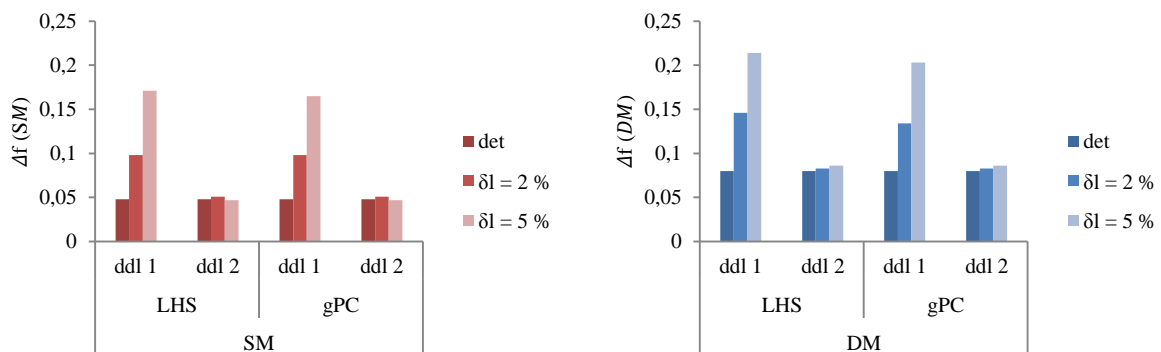


Fig.5.31. Evolution des plages fréquentielles du SM et du DM dans le domaine de multistabilité calculées par les méthodes LHS et gPC

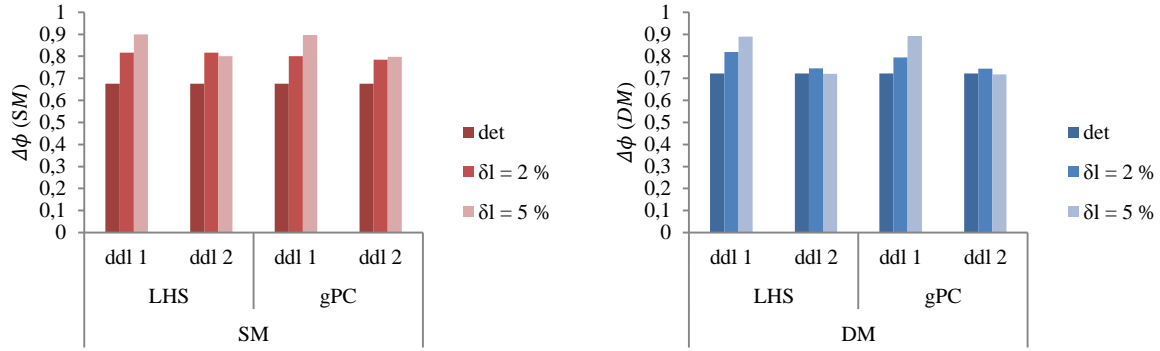


Fig.5.32. Evolution des enveloppes des amplitudes des réponses fréquentielles du SM et du DM dans de domaine de multistabilité calculées par les méthodes LHS et gPC

Tab.5.5. Evolution des intervalles Δf et $\Delta\phi$ du SM et du DM, obtenues pour les méthodes LHS et gPC, pour $\delta_l = 2\%$ et $\delta_l = 5\%$, par rapport à celles obtenues dans le cas déterministe

	ddl	SM				DM			
		LHS		gPC		LHS		gPC	
		2%	5%	2%	5%	2%	5%	2%	5%
Δf (%)	1	204.17	356.25	204.17	343.75	182.50	267.50	167.50	253.75
	2	106.25	97.92	106.25	97.92	103.75	107.50	103.75	107.75
$\Delta\phi$ (%)	1	120.86	133.14	118.49	132.69	113.57	123.13	110.11	123.55
	2	120.86	118.34	116.12	118.05	103.19	99.72	103.05	99.31
$\frac{\Delta f}{\Delta\phi}$ (%)	1	204.23	267.61	171.83	259.15	160.36	217.12	152.25	205.41
	2	87.32	83.10	91.55	83.55	100.90	107.21	100.90	108.11

La comparaison des réponses obtenues par la méthode LHS à 200 tirages et les réponses calculées par la méthode gPC d'ordre 4 montrent que cette dernière permet une approximation satisfaisante des réponses. Cette comparaison est effectuée à partir des réponses fréquentielles et des intervalles quantifiant l'évolution du domaine de multistabilité illustrés par les figures 5.31 et 5.32 et le tableau 5.5.

Les erreurs obtenues pour la méthode gPC par rapport à la méthode LHS considérée comme référence sont plus élevées pour un niveau de dispersion de 5%. A noter que des erreurs sur les intervalles d'amplitude et de fréquence sont dues au nombre limité de conditions initiales utilisées dans le calcul. Ceci rend difficile la détection des points de bifurcation.

5.4.2.6. Bassins d'attraction de la structure en présence d'incertitudes

L'analyse de la robustesse des bassins d'attraction vis-à-vis des incertitudes est effectuée à travers le traçage des zones de chevauchement des différents attracteurs. Ces zones sont colorées en noir dans les figures 5.33-5.36. Elles représentent les enveloppes des bassins d'attraction ; incluant les enveloppes des différents attracteurs.

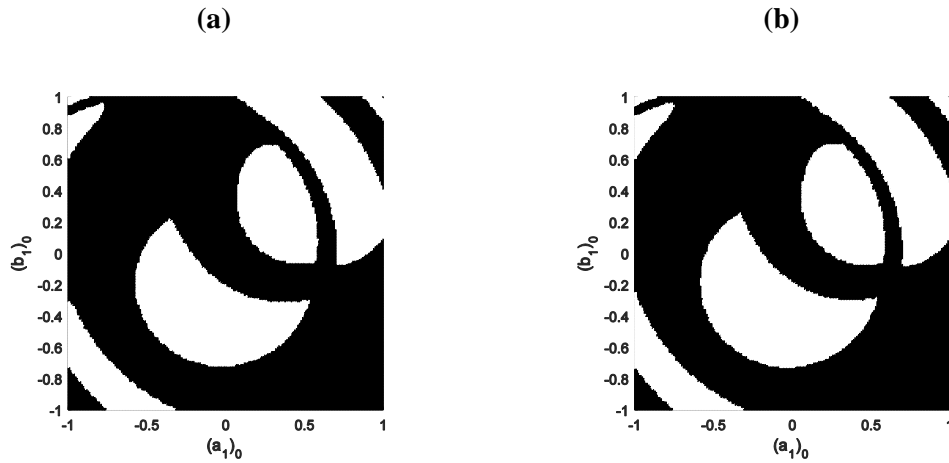


Fig.5.33. Enveloppes des bassins d'attraction de la réponse $|\tilde{A}_1|^2$ du premier pendule, dans le plan de Nyquist $((a_1)_0, (b_1)_0)$ pour $\sigma = -1$ et $(a_2)_0 = (b_2)_0 = 0.25$, calculées par (a) la méthode LHS et (b) la méthode gPC, pour $\delta_l = 2\%$

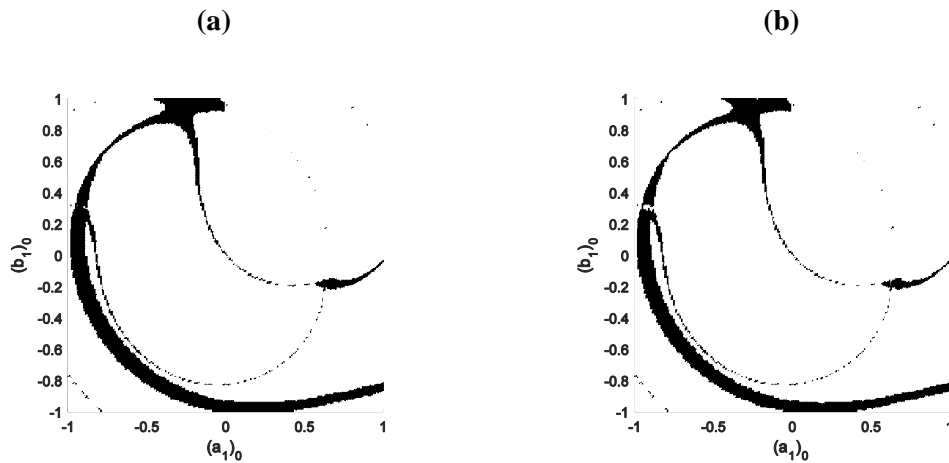


Fig.5.34. Enveloppes des bassins d'attraction de la réponse $|A_1|^2$ du deuxième pendule, dans le plan de Nyquist $((a_1)_0, (b_1)_0)$ pour $\sigma = -1$ et $(a_2)_0 = (b_2)_0 = 0.25$, calculées par (a) la méthode LHS et (b) la méthode gPC, pour $\delta_l = 2\%$

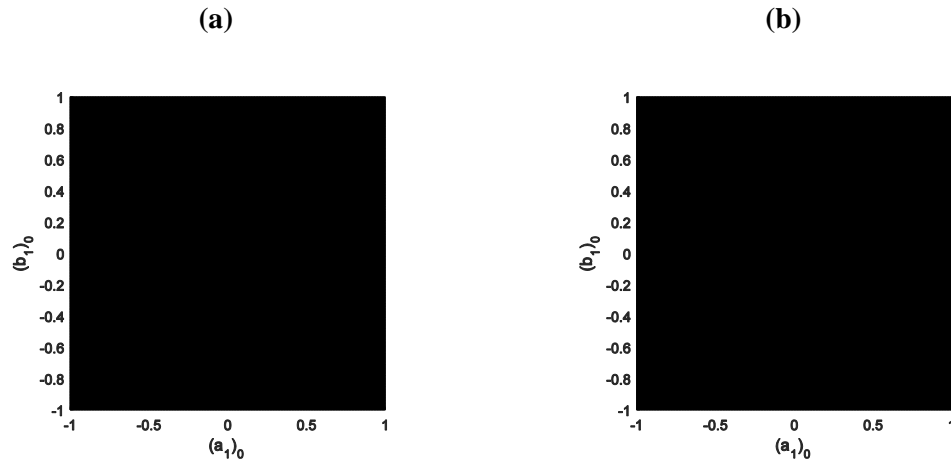


Fig.5.35. Enveloppes des bassins d'attraction de la réponse $|\tilde{A}_1|^2$ du premier pendule, dans le plan de Nyquist $((a_1)_0, (b_1)_0)$ pour $\sigma = -1$ et $(a_2)_0 = (b_2)_0 = 0.25$, calculées par (a) la méthode LHS et (b) la méthode gPC, pour $\delta_l = 5\%$

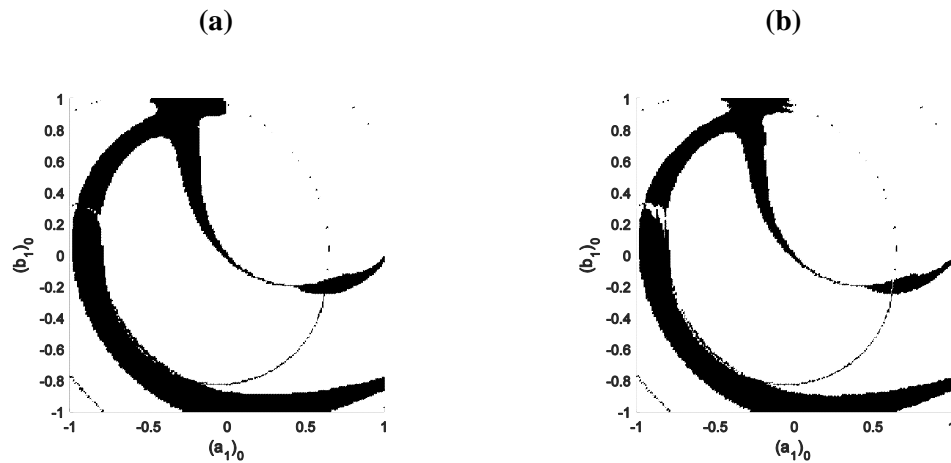


Fig.5.36. Enveloppes des bassins d'attraction de la réponse $|A_1|^2$ du deuxième pendule, dans le plan de Nyquist $((a_1)_0, (b_1)_0)$ pour $\sigma = -1$ et $(a_2)_0 = (b_2)_0 = 0.25$, calculées par (a) la méthode LHS et (b) la méthode gPC, pour $\delta_l = 5\%$

De plus, pour quantifier l'effet des incertitudes sur la dispersion des attracteurs et leurs évolutions en fonction du niveau de dispersion imposé, les rapports (en %) des zones de chevauchement (taille) par rapport à la totalité des bassins d'attraction sont groupés dans le tableau 5.6.

Tab.5.6. Rapports en % de la taille des enveloppes des bassins d'attraction par la taille globale des bassins calculés pour les deux méthodes LHS et gPC

δ_l	ddl	LHS	gPC
2 %	1	64.57	62.34
	2	9.67	8.97
5 %	1	100	100
	2	19.04	17.55

A partir la représentation des enveloppes des bassins d'attraction par les figures 5.33-5.36 et leurs tailles groupées dans le tableau 5.6, l'effet des incertitudes est beaucoup plus important sur la réponse du premier pendule que sur le deuxième pendule. Pour une dispersion de 5%, les bassins d'attraction de la réponse du premier pendule sont complètement chevauchés.

La comparaison des bassins d'attraction calculés par la méthode gPC avec ceux obtenus en appliquant la méthode LHS prouvent la bonne précision atteinte par la méthode gPC. Une réduction de 97.5% du temps CPU est atteinte grâce à l'application de la méthode gPC par rapport à la méthode de référence LHS (Tab.5.8).

Pour une analyse plus détaillée des bassins d'attraction, ils sont tracés dans les figures 5.37-5.44 par type d'attracteur (SM-RB, SM-NRB et DM). Ceci permet de voir l'évolution des attracteurs des branches séparément. Entre une taille minimale représentée par la couleur définie initialement (cas déterministe) pour l'attracteur concerné et une limite imposée par un autre attracteur, colorée en blanc, l'enveloppe de chaque attracteur est colorée en noir.

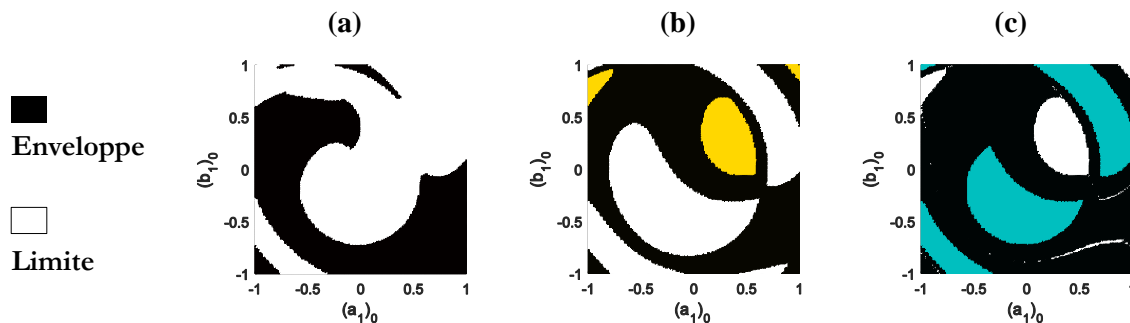


Fig.5.37. Enveloppes des attracteurs des (a) SM-RB, (b) SM-NRB et (c) DM de la réponse $|\tilde{A}_1|^2$ du premier pendule, dans le plan de Nyquist $((a_1)_0, (b_1)_0)$ pour $\sigma = -1$ et $(a_2)_0 = (b_2)_0 = 0.25$, calculées par la méthode LHS pour $\delta_l = 2\%$

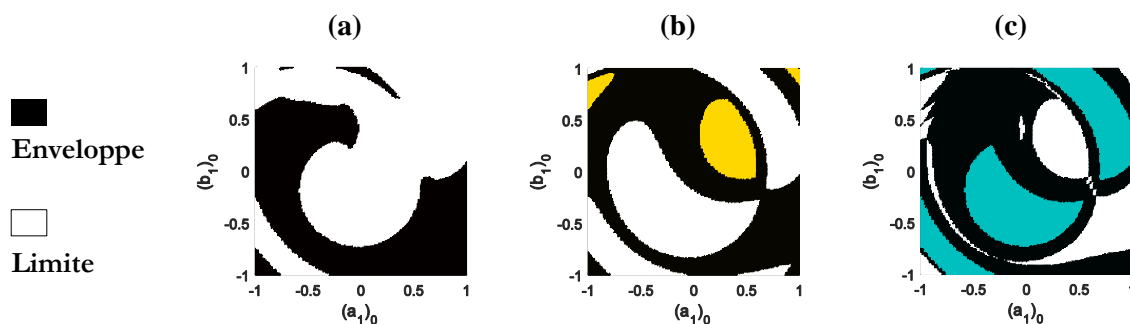


Fig.5.38. Enveloppes des attracteurs des (a) SM-RB, (b) SM-NRB et (c) DM de la réponse $|\tilde{A}_1|^2$ de la réponse du premier pendule, dans le plan de Nyquist $((a_1)_0, (b_1)_0)$ pour $\sigma = -1$ et $(a_2)_0 = (b_2)_0 = 0.25$, calculées par la méthode gPC pour $\delta_l = 2\%$

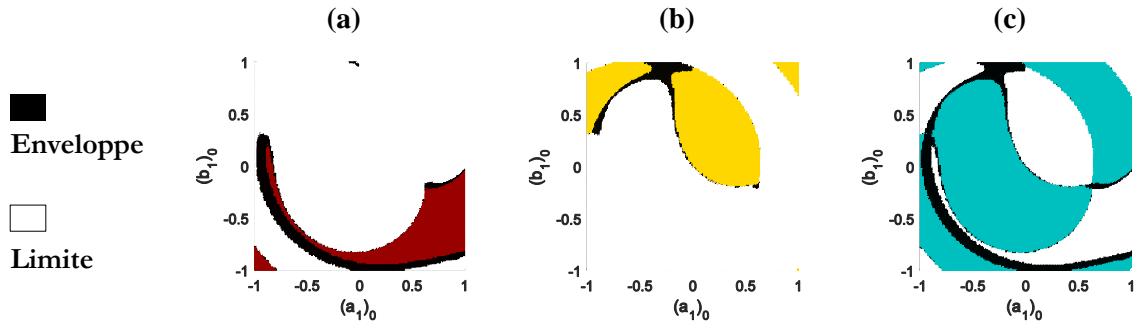


Fig.5.39. Envelopes des attracteurs des (a) SM-RB, (b) SM-NRB et (c) DM de la réponse $|A_1|^2$ de la réponse du deuxième pendule, dans le plan de Nyquist $((a_1)_0, (b_1)_0)$ pour $\sigma = -1$ et $(a_2)_0 = (b_2)_0 = 0.25$, calculées par la méthode LHS pour $\delta_l = 2\%$

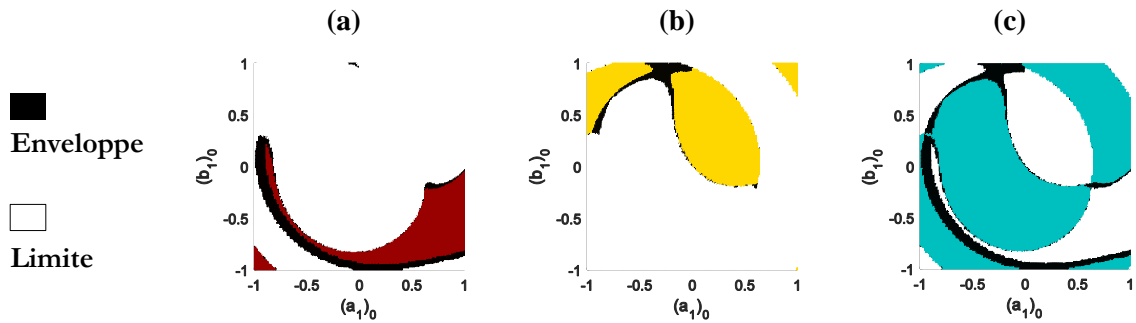


Fig.5.40. Envelopes des attracteurs des (a) SM-RB, (b) SM-NRB et (c) DM de la réponse $|A_1|^2$ de la réponse du deuxième pendule, dans le plan de Nyquist $((a_1)_0, (b_1)_0)$ pour $\sigma = -1$ et $(a_2)_0 = (b_2)_0 = 0.25$, calculées par la méthode gPC pour $\delta_l = 2\%$

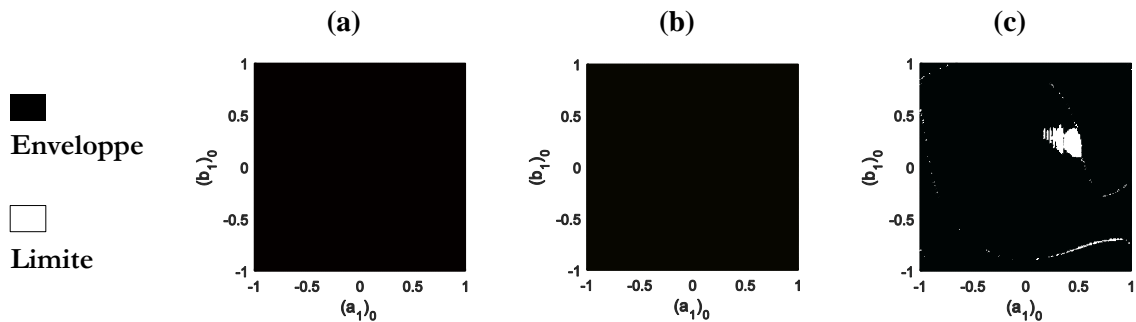


Fig.5.41. Envelopes des attracteurs des (a) SM-RB, (b) SM-NRB et (c) DM de la réponse $|\tilde{A}_1|^2$ de la réponse du premier pendule, dans le plan de Nyquist $((a_1)_0, (b_1)_0)$ pour $\sigma = -1$ et $(a_2)_0 = (b_2)_0 = 0.25$, calculées par la méthode LHS pour $\delta_l = 5\%$

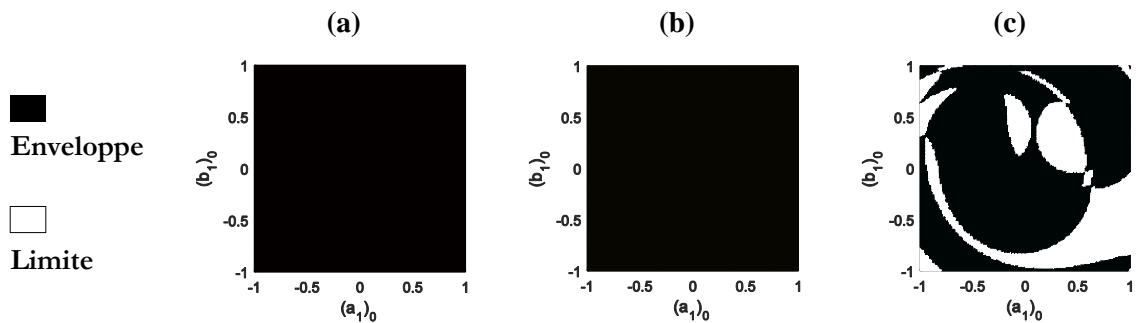


Fig.5.42. Envelopes des attracteurs des (a) SM-RB, (b) SM-NRB et (c) DM de la réponse $|\tilde{A}_1|^2$ de la réponse du premier pendule, dans le plan de Nyquist $((a_1)_0, (b_1)_0)$ pour $\sigma = -1$ et $(a_2)_0 = (b_2)_0 = 0.25$, calculées par la méthode gPC pour $\delta_l = 5\%$

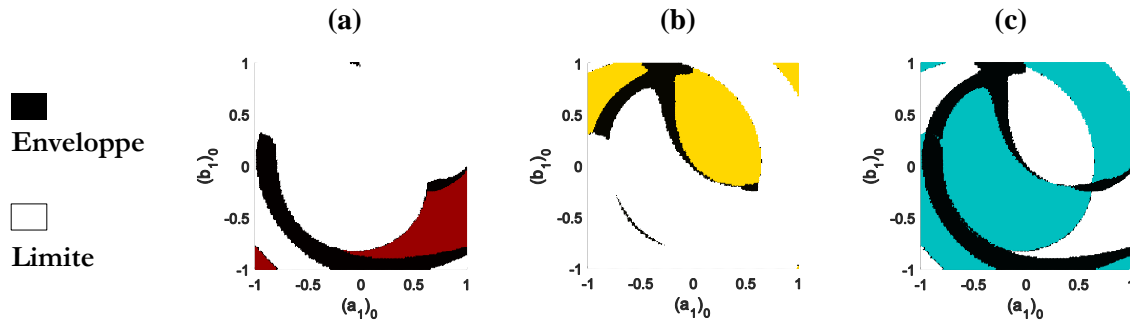


Fig.5.43. Enveloppes des attracteurs des (a) SM-RB, (b) SM-NRB et (c) DM de la réponse $|A_1|^2$ de la réponse du deuxième pendule, dans le plan de Nyquist $((a_1)_0, (b_1)_0)$ pour $\sigma = -1$ et $(a_2)_0 = (b_2)_0 = 0.25$, calculées par la méthode LHS pour $\delta_l = 5\%$

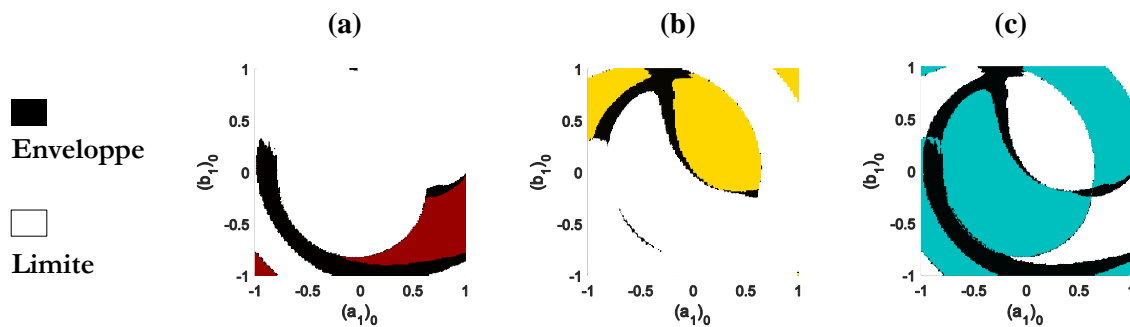


Fig.5.44. Enveloppes des attracteurs des (a) SM-RB, (b) SM-NRB et (c) DM de la réponse $|A_1|^2$ de la réponse du deuxième pendule, dans le plan de Nyquist $((a_1)_0, (b_1)_0)$ pour $\sigma = -1$ et $(a_2)_0 = (b_2)_0 = 0.25$, calculées par la méthode gPC pour $\delta_l = 5\%$

En comparant les figures (a), (b) et (c), les attracteurs du DM sont les plus robustes. Ceci est traduit par la domination des zones colorées et noires représentant, respectivement, leurs tailles minimales et leurs enveloppes par rapport aux autres attracteurs (SM-RB et SM-NRB). De plus, leurs limites représentées par les zones blanches, sont les plus petites.

L'étude comparative peut également se baser sur les ratios groupés dans le tableau 5.7 quantifiant l'évolution des attracteurs du cas déterministe au cas $\delta_l = 5\%$. Les valeurs calculées incluent la taille minimale et l'enveloppe de chaque attracteur et représentent les zones colorées et noires dans les figures 5.37-5.44.

A noter que la superposition des enveloppes des attracteurs séparés donne les zones de chevauchement globales des bassins d'attraction représentées en noir dans les figures 5.33-5.36.

En comparant les enveloppes des bassins calculés par la méthode gPC à ceux obtenus par la méthode LHS, les erreurs les plus importantes de la méthode gPC sont détectées sur les approximations des attracteurs du DM de l'amplitude modale $|\tilde{A}_1|^2$ de la réponse du premier pendule, dont la dispersion est la plus importante. Ceci montre la limite de la méthode gPC face à des niveaux de dispersion élevés. Cependant, pour les autres attracteurs, la méthode gPC permet une bonne approximation.

D'après les rapports des temps de calcul CPU qu'exigent l'application de la méthode gPC par rapport aux temps de calcul exigés par la méthode LHS à 200 tirages, la méthode gPC permet une réduction de 96.4% et 97.6% des temps de calcul des réponses fréquentielles et des bassins d'attraction, respectivement.

Tab.5.7. Evolution des distributions des attracteurs des différentes branches modales dans les bassins d'attraction calculées dans le cas déterministe et par les méthodes LHS et gPC

Amplitude	Attracteur	Det	Taille (%)				
			LHS		gPC		
			$\delta_l = 2\%$	$\delta_l = 5\%$	$\delta_l = 2\%$	$\delta_l = 5\%$	
$ \tilde{A}_1 ^2$ (ddl 1)	Min	SM-RB	15.7	0	0	0	0
		SM-NRB	23.4	8.39	0	8.93	0
		DM	60.9	27.04	0	28.73	0
	Enveloppe	SM-RB	0	43.93	100	42.29	100
		SM-NRB	0	52.14	100	48.91	100
		DM	0	63.97	97.86	51.52	72.41
$ A_1 ^2$ (ddl 2)	Min	SM-RB	15.7	12.73	9.91	12.89	10.03
		SM-NRB	23.4	22.13	21.75	22.20	22.16
		DM	60.9	55.47	49.30	55.94	50.26
	Enveloppe	SM-RB	0	6.81	11.55	6.32	11.04
		SM-NRB	0	2.86	7.49	2.65	6.50
		DM	0	9.67	19.04	8.97	17.55

Tab.5.8. Temps de calcul CPU pour les méthodes LHS et gPC

	Méthode	CPU (%)
FRFs	LHS	100
	gPC	3.6
Bassins	LHS	100
	gPC	2.4

Pour résumer l'analyse de l'exemple de la structure périodique à deux pendules non-linéaires couplés, les points suivants sont à noter

- Une multiplicité de solutions stables (jusqu'à 3 branches) existe dans le domaine de multistabilité grâce aux non-linéarités et aux interactions modales entre les réponses des deux pendules générées par la dynamique collective ;
- La robustesse du DM est illustrée par la domination de ses attracteurs dans les bassins d'attraction tracés dans les cas déterministe, perturbé et incertain ;
- L'introduction d'une imperfection sur la longueur d'un pendule permet d'améliorer la stabilité du système, de localiser les solutions stables sur des modes bien précis (localisation modale) et de renforcer sa non-linéarité ;

- La méthode gPC permet une bonne approximation des réponses fréquentielles et des bassins d'attraction et une réduction de temps de calcul allant jusqu'à 97.5% par rapport à la méthode LHS.

5.4.3. Exemple 2 : structure de trois pendules couplés

L'exemple d'une structure périodique de trois pendules non-linéaires couplés linéairement (**Fig.5.45**) est considéré dans cette section. Les paramètres de la structure sont groupés dans le tableau **5.9**.

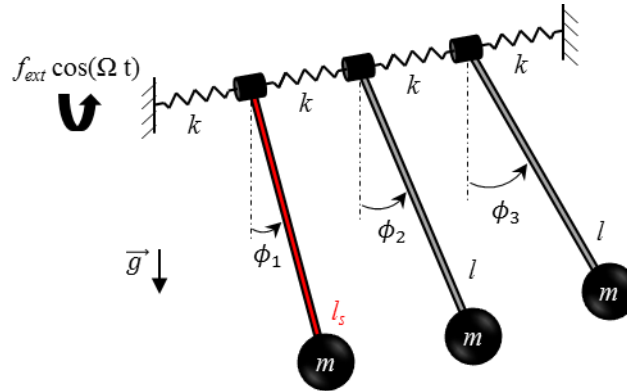


Fig.5.45. Trois pendules non-linéaires couplés par des ressorts linéaires

Tab.5.9. Paramètres de la structure périodique de pendules couplés

m (kg)	l (m)	k (N.m)	α (kg.s ⁻¹)	f_{ext} (N.m)	ω_0 (rad.s ⁻¹)
0.25	0.062	$9 \cdot 10^{-4}$	0.01	0.16	12.58

Le nombre $2N(p + q + d)$ d'équations algébriques générées dans ce cas ($N = 3$) est 18 tel que le nombre p de cellules affectées est 1, le nombre q des cellules parfaites voisines de celles avec imperfections est 1 et $d = 1$ puisque la structure contient une cellule parfaite (troisième pendule) ayant une cellule voisine parfaite (deuxième pendule). Ces équations sont résolues en utilisant la méthode d'intégration temporelle de Runge-Kutta.

5.4.3.1. Réponses fréquentielles de la structure sans imperfections

Dans le cas sans imperfections ($p = 0$, $q = 0$ et $d = 1$), un système à 6 équations algébriques est à résoudre. Les réponses fréquentielles en coordonnées généralisées et physiques sont représentées par les figures **5.46** et **5.47**.

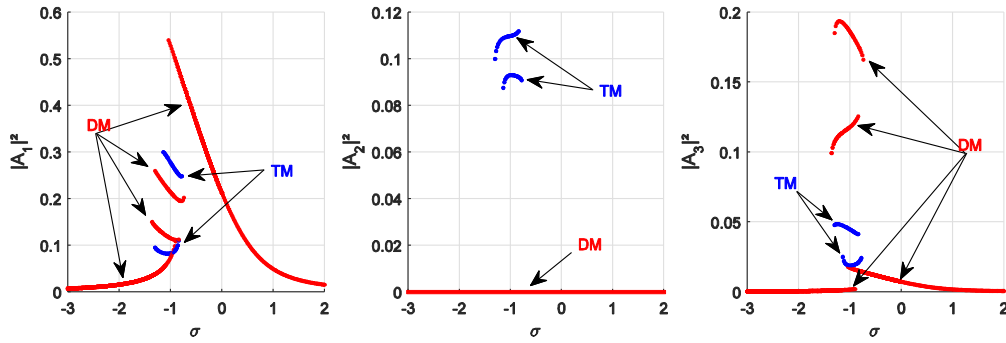


Fig.5.46. Amplitudes $|A_1|^2$, $|A_2|^2$ et $|A_3|^2$ des réponses des trois pendules en coordonnées généralisées, sans prendre en compte l'imperfection

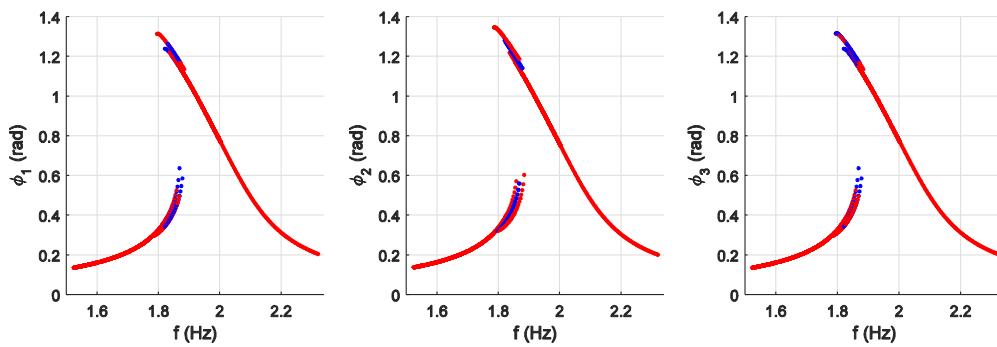


Fig.5.47. Amplitudes ϕ_1 , ϕ_2 et ϕ_3 des réponses des trois pendules en coordonnées physiques, sans prendre en compte l'imperfection

A noter que la symétrie entre le premier et de troisième pendule est traduite par la conformité de leurs réponses physiques.

Les interactions modales entre les réponses génèrent une multiplicité de solutions stables dans le domaine de multistabilité. En effet, jusqu'à six solutions stables peuvent être obtenues en quelques points fréquentiels du domaine de multistabilité. Les six branches stables obtenues sont classées par type de mode : double (DM) et triple (TM). Les branches du DM (couleur rouge) sont les solutions de la première et la troisième amplitude. Les branches du TM (couleur bleue) résultent du couplage entre les réponses des trois pendules. Le transfert de la topologie de bifurcation entre les réponses est traduit par les correspondances entre les branches stables et les points de bifurcation de chaque amplitude modale dans le domaine de multistabilité.

5.4.3.2. Bassins d'attraction de la structure sans imperfections

Pour ce système à 3 ddls, le traçage des bassins d'attraction est effectué en fixant les conditions initiales pour calculer l'amplitude des réponses du deuxième et troisième pendule et en variant celles relatives au premier pendule. La figure 5.49 illustre les bassins d'attraction des réponses des trois pendules. Ces bassins sont tracés dans le plan de Nyquist $((a_1)_0, (b_1)_0)$ pour $\sigma = -1$, $(a_2)_0 = (b_2)_0 = 0.2$ et $(a_3)_0 = (b_3)_0 = 0.3$.

Sept types de branches de solutions stables sont identifiables à partir des bassins d'attraction (**Fig.5.49**). Ces branches sont définies dans la figure **5.48**. Quatre branches correspondent au DM (DM-RB, DM-NRB, DM-B1 et DM-B2) et deux au TM (TM-B1 et TM-B2). Une seule branche correspondant au SM est définie dans la réponse du deuxième pendule (**Fig.5.49 (b)**). Les bassins d'attraction donnent en plus les amplitudes des différentes branches selon les correspondances entre les couleurs et les amplitudes définies dans les barres des couleurs.

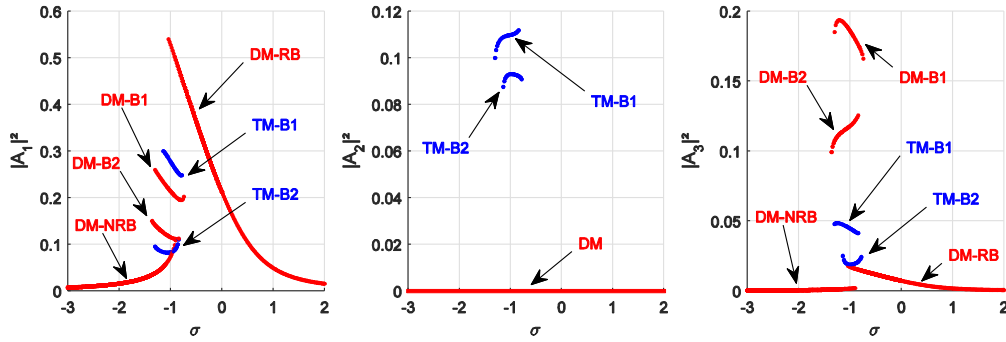


Fig.5.48. Identification des différentes branches modales pour les amplitudes des réponses des trois pendules en coordonnées généralisées

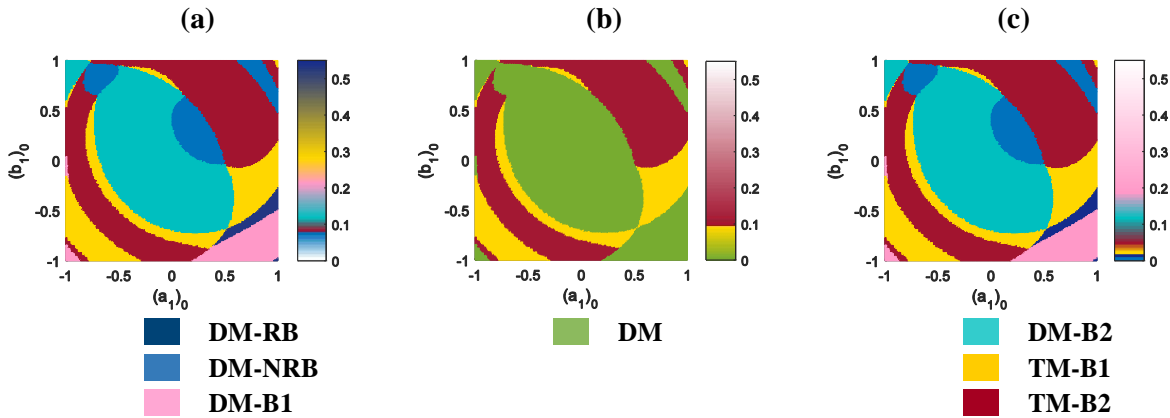


Fig.5.49. Bassins d'attraction des réponses (a) $|A_1|^2$, (b) $|A_2|^2$ et (c) $|A_3|^2$ dans le plan de Nyquist $((a_1)_0, (b_1)_0)$ pour $\sigma = -1$, $(a_2)_0 = (b_2)_0 = 0.2$ et $(a_3)_0 = (b_3)_0 = 0.3$

Le transfert de la topologie de bifurcation impose une répartition identiques des attracteurs des différentes branches définies dans les amplitudes modales $|A_1|^2$ et $|A_3|^2$ des réponses de ces pendules. Les mêmes couleurs sont utilisées pour identifier ces branches, pour des amplitudes différentes.

Une représentation des bassins d'attraction en fonction des types de modes est illustrée par la figure **5.50**. Pour les trois bassins d'attraction, correspondant aux amplitudes modales des réponses des trois pendules (**Fig.5.50 (a), (b) et (c)**), une correspondance existe entre les attracteurs du TM pour les trois amplitudes modales (TM-B1 et TM-B2). Cependant aux attracteurs du DM de l'amplitude modale de la réponse du deuxième pendule correspondent les attracteurs du DM des amplitudes modales du premier et du troisième pendule. En effet,

quand ces dernières passent d'une branche de type DM (DM-RB, DM-NRB, DM-B1 ou DM-B2) à une autre du même type, l'amplitude modale de la réponse du deuxième pendule est toujours de type DM. Ceci est dû au transfert de la topologie de bifurcation entre les amplitudes modales des trois pendules.

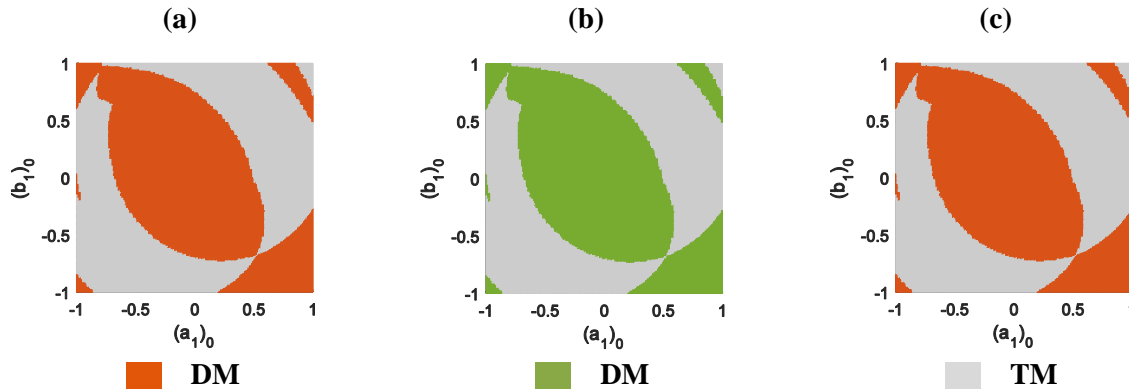


Fig.5.50. Répartition des attracteurs des DM et TM des réponses (a) $|A_1|^2$, (b) $|A_2|^2$ et (c) $|A_3|^2$ dans le plan de Nyquist $((a_1)_0, (b_1)_0)$ pour $\sigma = -1$, $(a_2)_0 = (b_2)_0 = 0.2$ et $(a_3)_0 = (b_3)_0 = 0.3$

Les distributions des différents attracteurs dans la totalité des bassins représentés dans les figures 5.49 et 5.50 sont quantifiées dans le tableau 5.10. En effet, la taille de chaque attracteur est rapportée à la taille globale des bassins d'attraction. Ceci permet d'évaluer la robustesse des attracteurs des différents modes et branches modales.

Tab.5.10. Distributions des attracteurs des différents modes et branches modales dans les bassins d'attraction

Attracteurs	Taille (%)
DM	50.98
DM-RB	1.69
DM-NRB	8.71
DM-B1	5.71
DM-B2	34.87
TM	49.02
TM-B1	16.08
TM-B2	32.94

Le tableau 5.10 montre que pour le paramètre de réglage choisi, $\sigma = -1$, une répartition presque égale des bassins d'attraction entre le DM et le TM existe (50.98% et 49.02%, respectivement). Cependant, en s'intéressant au DM, les attracteurs de la branche DM-B2 sont les plus robuste en occupant 34.87% des 50.98% qu'occupe le DM de la totalité des bassins d'attraction. A distribution presque égale à celle de la branche DM-B2 (32.94%), les attracteurs de la branche TM-B2 sont plus robustes que ceux de la branche TM-B1.

5.4.3.3. Réponses fréquentielles de la structure en présence d'incertitudes

Comme dans l'exemple de la structure de deux pendules couplés, les conditions initiales utilisées pour le calcul des réponses déterministes et stochastiques sont les mêmes afin de permettre une comparaison des résultats. L'effet des incertitudes est quantifié par les moyennes et les statistiques extrêmes des réponses pour deux niveaux de dispersion $\delta_l = 2\%$ et $\delta_l = 5\%$. Seules les enveloppes des réponses sont représentées ici.

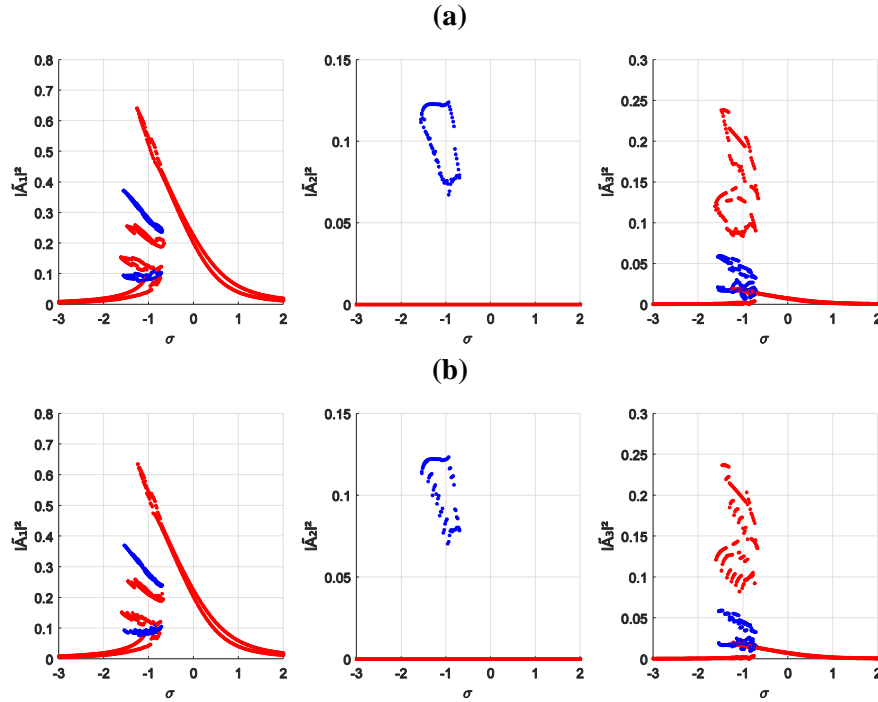


Fig.5.51. Enveloppes des amplitudes $|\tilde{A}_1|^2$, $|\tilde{A}_2|^2$ et $|\tilde{A}_3|^2$ des réponses du premier pendule calculées par (a) la méthode LHS et (b) la méthode gPC, pour $\delta_l = 2\%$

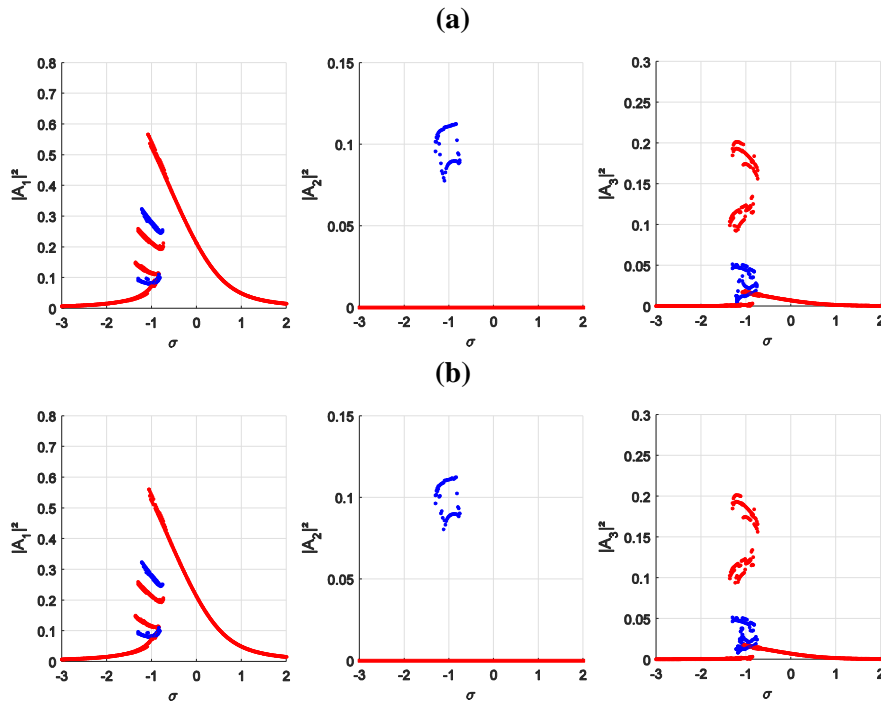


Fig.5.52. Envelopes des amplitudes $|A_1|^2$, $|A_2|^2$ et $|A_3|^2$ des réponses du deuxième pendule calculées par (a) la méthode LHS et (b) la méthode gPC, pour $\delta_l = 2\%$

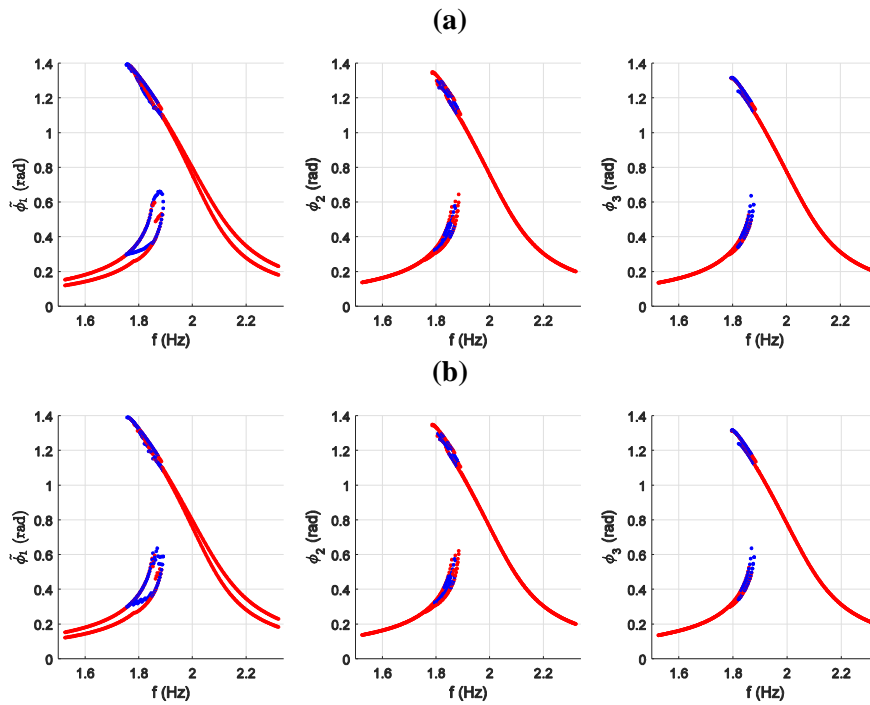


Fig.5.53. Envelopes des amplitudes ϕ_1 , ϕ_2 et ϕ_3 des réponses des trois pendules calculées par (a) la méthode LHS à 200 tirages et (b) la méthode gPC, pour $\delta_l = 5\%$

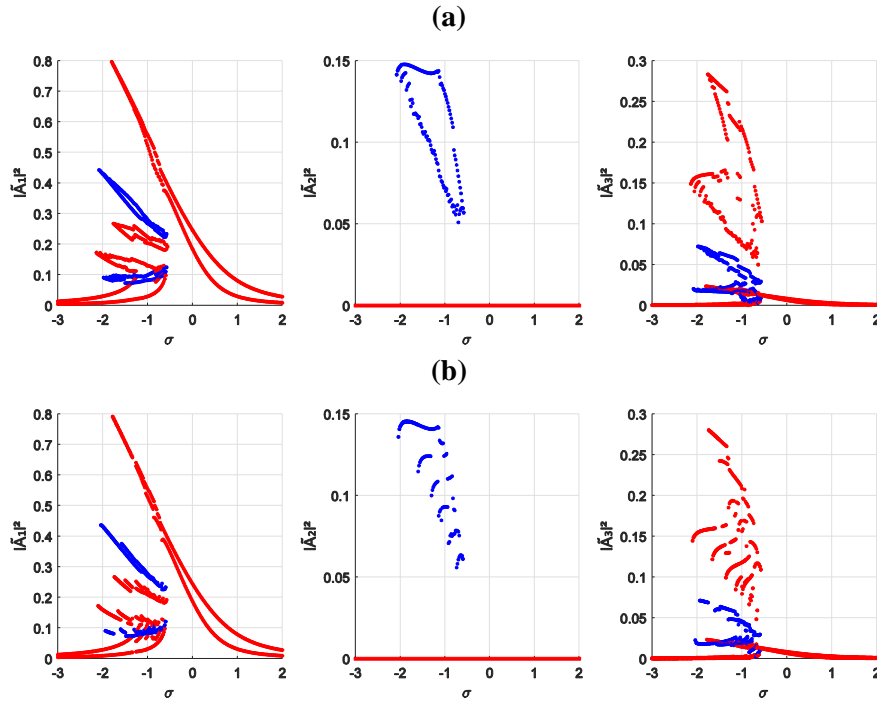


Fig.5.54. Envelopes des amplitudes $|\tilde{A}_1|^2$, $|\tilde{A}_2|^2$ et $|\tilde{A}_3|^2$ des réponses du premier pendule calculées par (a) la méthode LHS et (b) la méthode gPC, pour $\delta_l = 5\%$

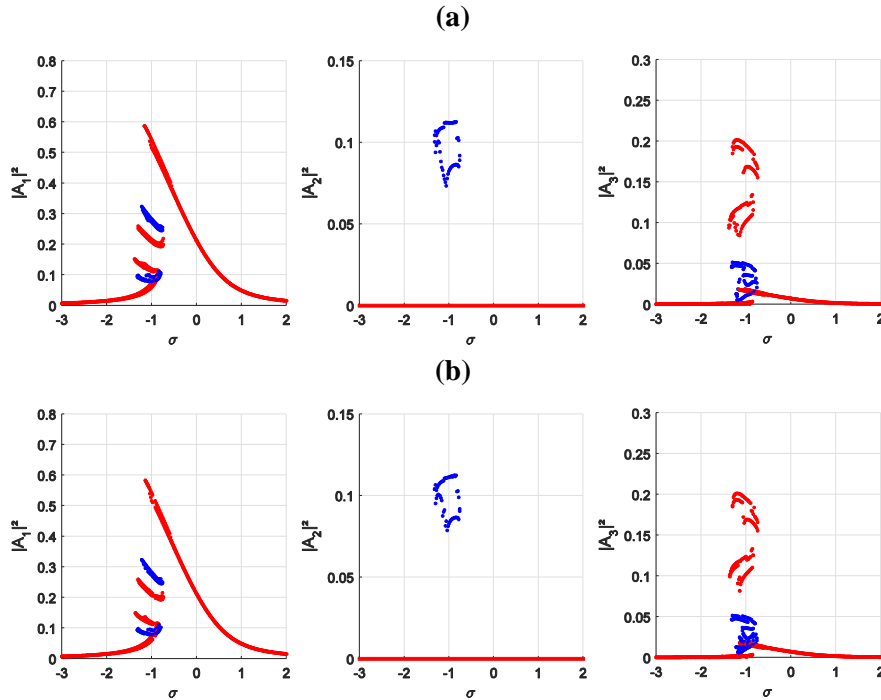


Fig.5.55. Envelopes des amplitudes $|A_1|^2$, $|A_2|^2$ et $|A_3|^2$ des réponses du deuxième pendule calculées par (a) la méthode LHS et (b) la méthode gPC, pour $\delta_l = 5\%$

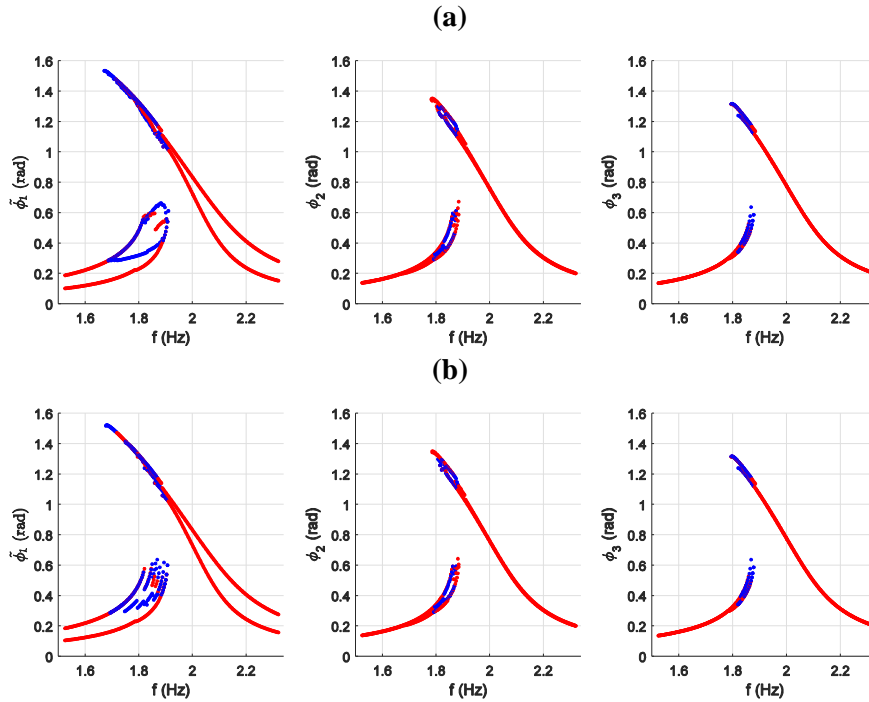


Fig.5.56. Enveloppes des amplitudes $\tilde{\phi}_1$, ϕ_2 et ϕ_3 des réponses des trois pendules calculées par (a) la méthode LHS et (b) la méthode gPC, pour $\delta_l = 5\%$

La comparaison des figures pour les deux niveaux de dispersion imposés montre que la dispersion des réponses est beaucoup plus importante quand $\delta_l = 5\%$. Des enveloppes plus larges des amplitudes des réponses sont, en effet, obtenues. Il en résulte un chevauchement des enveloppes et la distinction des statistiques extrêmes des branches voisines devient plus difficile.

L'effet des incertitudes sur les réponses dépend de la position du pendule considéré par rapport au pendule affecté par les incertitudes. La longueur du premier pendule est un paramètre incertain. Par conséquent, sa réponse est la plus affectée par les incertitudes. La réponse du deuxième pendule est moins affectée. Cependant, aucun effet n'est détecté sur la réponse du troisième pendule. Ceci est dû au fait qu'aucun couplage n'existe entre les équations d'amplitudes du premier pendule incertain et du troisième pendule. De ce fait, les réponses du troisième pendule ne sont pas représentées, elles sont identiques aux réponses déterministes représentées par les figures 5.46 et 5.47.

En augmentant la dispersion, toutes les branches s'élargissent en termes d'amplitude et de fréquence. Le domaine de multistabilité est donc plus large. Par conséquent, la stabilité du système est améliorée. De plus, comme pour l'exemple de deux pendules, la variation de la plage fréquentielle du domaine de multistabilité Δf est plus importante que celle des intervalles d'amplitude $\Delta\phi$. Ceci est déduit des figures 5.57 et 5.58 et du tableau 5.11. D'après les rapports (en %) des $\Delta f/\Delta\phi$, la non-linéarité du système est amplifiée.

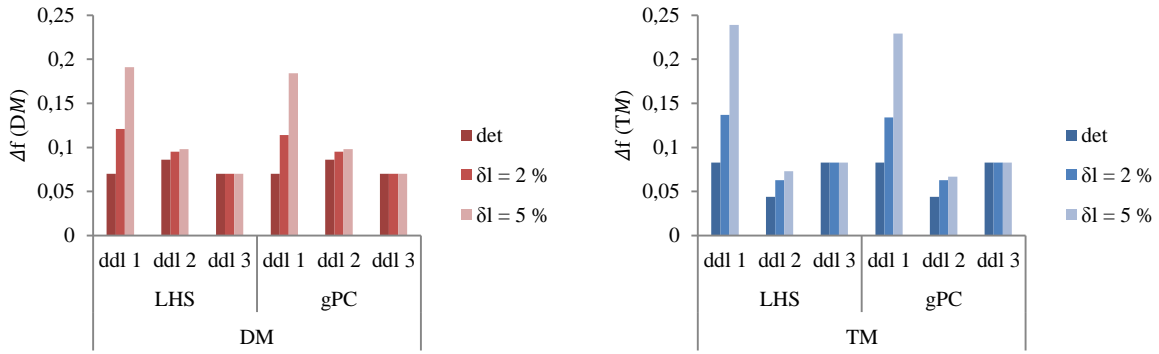


Fig.5.57. Evolution des plages fréquentielles du DM et du TM dans le domaine de multistabilité calculées par les méthodes LHS et gPC

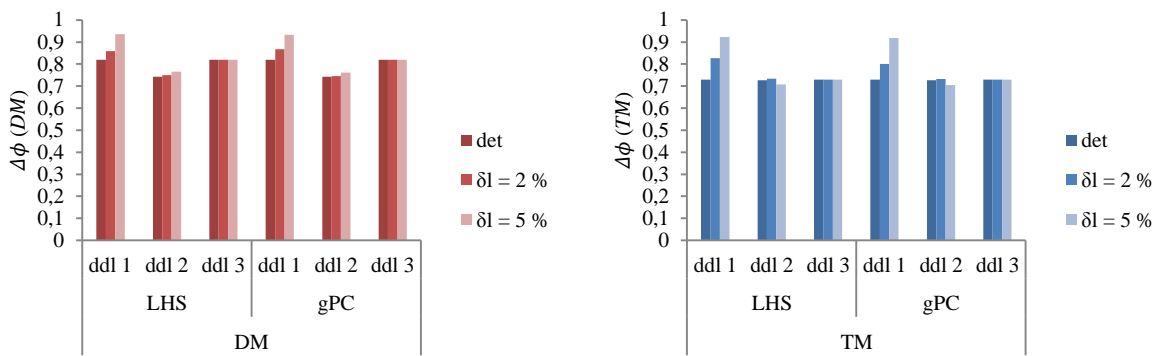


Fig.5.58. Evolution des enveloppes des amplitudes des réponses fréquentielles du DM et du TM dans le domaine de multistabilité calculées par les méthodes LHS et gPC

Tab.5.11. Evolution des intervalles Δf et $\Delta \phi$ du DM et du TM obtenus pour les méthodes LHS et gPC, pour $\delta_l = 2\%$ et $\delta_l = 5\%$, par rapport à ceux obtenus dans le cas déterministe

	ddl	DM				TM			
		LHS		gPC		LHS		gPC	
		2%	5%	2%	5%	2%	5%	2%	5%
Δf (%)	1	172.86	272.86	162.86	262.86	165.06	287.95	161.45	275.90
	2	110.47	113.95	110.47	113.95	143.18	165.91	143.18	152.27
$\Delta \phi$ (%)	1	104.76	114.15	105.73	113.66	113.29	126.44	109.73	125.75
	2	100.94	103.10	100.40	102.56	100.83	97.39	100.69	96.97
$\frac{\Delta f}{\Delta \phi}$ (%)	1	165.88	240.00	154.12	231.76	145.61	227.19	146.49	218.42
	2	109.48	110.34	109.48	111.21	140.98	168.85	140.98	155.74

En comparant les résultats des méthodes gPC et LHS (réponses fréquentielles, intervalles de variation des amplitudes et des fréquences dans le domaine de multistabilité), on constate que la méthode gPC permet généralement une bonne approximation de la réponse de la structure. Cependant, la précision diminue en augmentant le niveau de dispersion de 2% à 5%. De plus, la discontinuité des courbes des réponses calculées par la méthode gPC est due

au fait que seulement 5 réponses sont calculée (correspondant à 5 variables aléatoires tel que détaillé dans l'exemple de deux pendules) alors que 200 réponses sont obtenues par la méthode LHS. En outre, comme mentionné dans le cas de la structure à deux pendules, des erreurs sur les intervalles d'amplitude et de fréquence sont dues au nombre limité des conditions initiales utilisées dans le calcul et rendent la détection des points de bifurcation plus difficile.

5.4.3.4. Bassins d'attraction de la structure en présence d'incertitudes

Les zones de chevauchement des attracteurs des différentes branches modales dans les bassins d'attraction sont illustrées par les figures 5.59-5.62. Ces résultats correspondent aux deux cas de dispersion 2% et 5% et sont calculés par les méthodes LHS et gPC. Pour quantifier ces zones de chevauchement, les rapports (en %) de leurs tailles par rapport à la taille globale des bassins sont groupés dans le tableau 5.12.

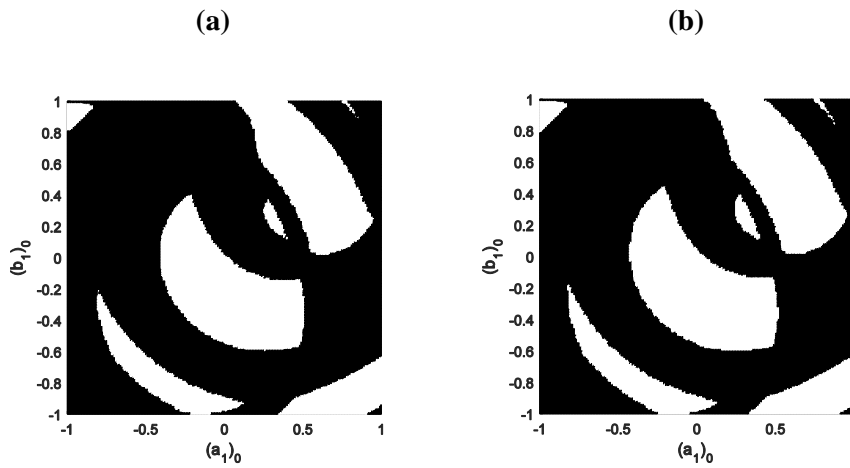


Fig.5.59. Enveloppes des bassins d'attraction de la réponse $|\tilde{A}_1|^2$ du premier pendule, dans le plan de Nyquist $((a_1)_0, (b_1)_0)$ pour $\sigma = -1$, $(a_2)_0 = (b_2)_0 = 0.2$ et $(a_3)_0 = (b_3)_0 = 0.3$, calculées par (a) la méthode LHS et (b) la méthode gPC, pour $\delta_l = 2\%$

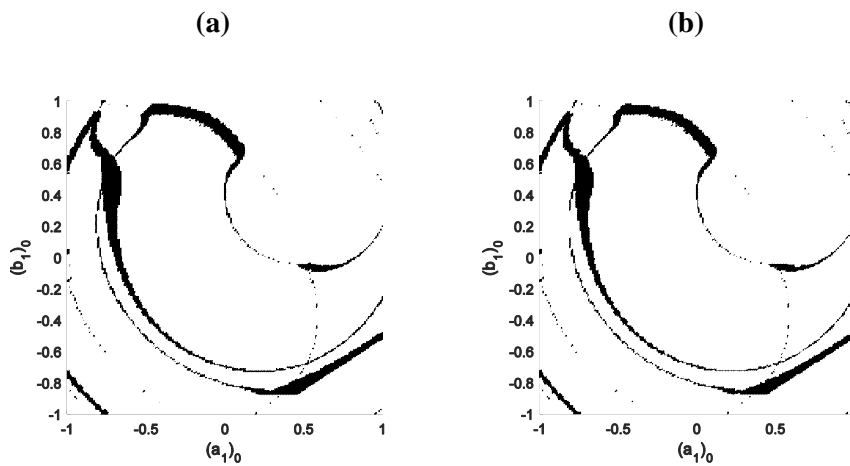


Fig.5.60. Enveloppes des bassins d'attraction de la réponse $|A_1|^2$ du deuxième pendule, dans le plan de Nyquist $((a_1)_0, (b_1)_0)$ pour $\sigma = -1$, $(a_2)_0 = (b_2)_0 = 0.2$ et $(a_3)_0 = (b_3)_0 = 0.3$, calculées par (a) la méthode LHS et (b) la méthode gPC, pour $\delta_l = 2\%$

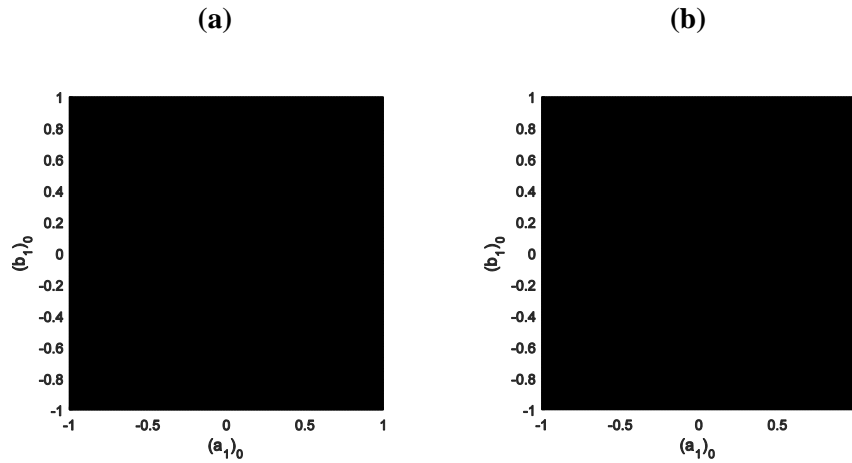


Fig.5.61. Enveloppes des bassins d'attraction de la réponse $|\tilde{A}_1|^2$ du premier pendule, dans le plan de Nyquist $((a_1)_0, (b_1)_0)$ pour $\sigma = -1$, $(a_2)_0 = (b_2)_0 = 0.2$ et $(a_3)_0 = (b_3)_0 = 0.3$, calculées par (a) la méthode LHS et (b) la méthode gPC, pour $\delta_l = 5\%$

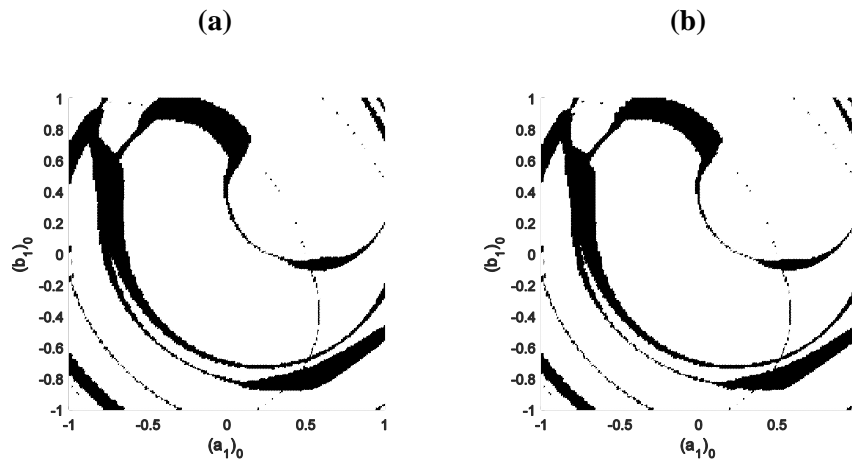


Fig.5.62. Enveloppes des bassins d'attraction de la réponse $|A_1|^2$ du deuxième pendule, dans le plan de Nyquist $((a_1)_0, (b_1)_0)$ pour $\sigma = -1$, $(a_2)_0 = (b_2)_0 = 0.2$ et $(a_3)_0 = (b_3)_0 = 0.3$, calculées par (a) la méthode LHS et (b) la méthode gPC, pour $\delta_l = 5\%$

Tab.5.12. Rapport en % de la taille des enveloppes des bassins d'attraction par leur taille globale

δ_l	ddl	LHS	gPC
2 %	1	69.27	66.85
	2	7.58	6.91
	3	0	0
5 %	1	100	100
	2	16.40	15.02
	3	0	0

Tab.5.13. Temps de calcul CPU pour les méthodes LHS et gPC

	Méthode	CPU (%)
FRFs	LHS	100
	gPC	4.7
Bassins	LHS	100
	gPC	2.4

En passant d'un niveau de dispersion de 2% à un niveau de 5%, les zones de chevauchement couvrent la totalité des bassins d'attraction pour la réponse du premier pendule.

La méthode gPC permet une bonne approximation de la dispersion des bassins d'attraction par rapport à la méthode LHS considérée comme référence pour une réduction de 97.5% du temps de calcul (**Tab.5.13**). Une réduction de 95.3% est atteinte pour le calcul des réponses fréquentielles.

Une analyse détaillée, similaire à celle faite pour le cas de la structure à deux pendules, est effectuée ici, pour le cas de la dispersion de 2%. En effet, les figures **5.63-5.66** illustrent la variation des attracteurs des branches modales DM-RB, DM-NRB, DM-B1, DM-B2, TM-B1 et TM-B2.

Pour une dispersion de 2%, les attracteurs les plus robustes sont, comme dans le cas déterministe, ceux des branches DM-B2 (figures **(d)**). Le tableau **5.14** montre la variation des distributions des attracteurs de chaque branche par rapport au cas déterministe. Les dispersions les plus importantes sont celles des attracteurs des branches DM-RB et DM-NRB qui passent de 1.69% et 8.71%, respectivement, pour $\delta_l = 2\%$, à 100% pour $\delta_l = 5\%$.

L'approximation de la dispersion des bassins d'attraction par la méthode gPC est satisfaisante pour une dispersion de 2%. Cependant, les erreurs augmentent en passant à 5% de dispersion. Pour contourner ces limites, un ordre polynomial plus élevé de l'expansion du gPC ou une variante de la méthode (voir **chapitre 2**) peuvent être utilisés.

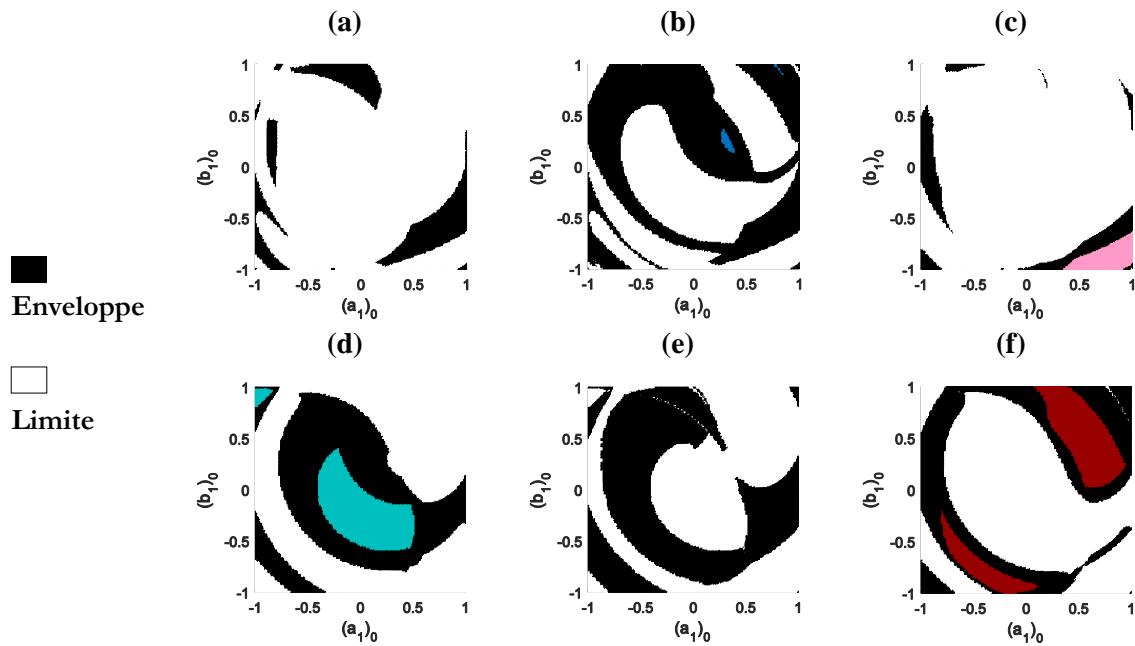


Fig.5.63. Enveloppes des attracteurs des (a) DM-RB, (b) DM-NRB, (c) DM-B1, (d) DM-B2, (e) TM-B1 et (f) TM-B2 de la réponse $|\tilde{A}_1|^2$ du premier pendule, dans le plan de Nyquist $((a_1)_0, (b_1)_0)$ pour $\sigma = -1$, $(a_2)_0 = (b_2)_0 = 0.2$ et $(a_3)_0 = (b_3)_0 = 0.3$, calculées par la méthode LHS pour $\delta_l = 2\%$

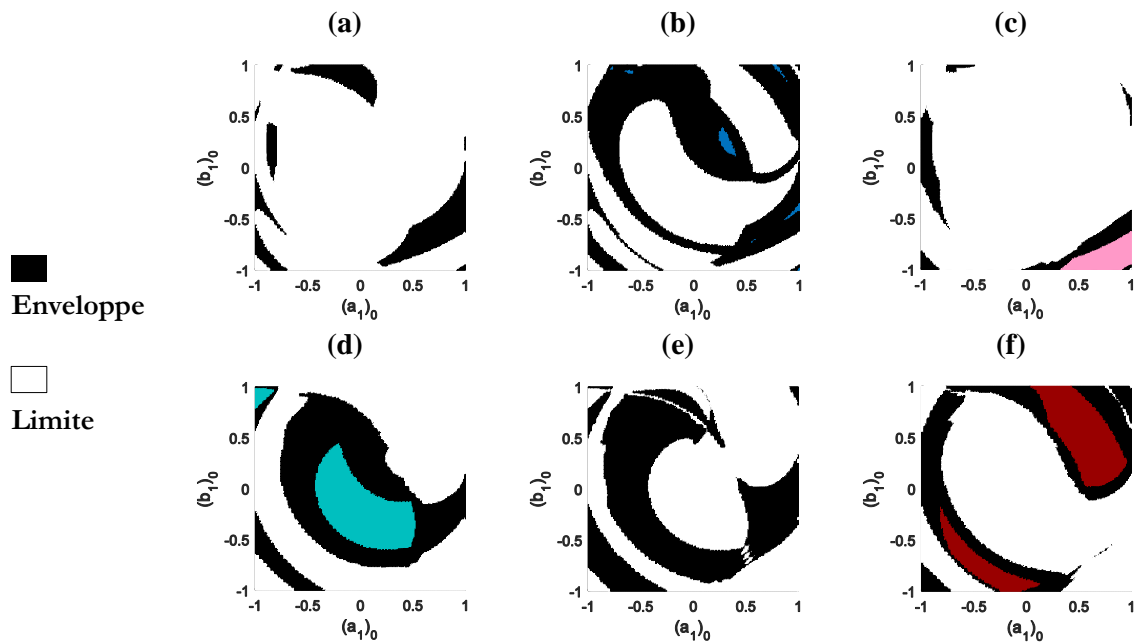


Fig.5.64. Enveloppes des attracteurs des (a) DM-RB, (b) DM-NRB, (c) DM-B1, (d) DM-B2, (e) TM-B1 et (f) TM-B2 de la réponse $|\tilde{A}_1|^2$ du premier pendule, dans le plan de Nyquist $((a_1)_0, (b_1)_0)$ pour $\sigma = -1$, $(a_2)_0 = (b_2)_0 = 0.2$ et $(a_3)_0 = (b_3)_0 = 0.3$, calculées par la méthode gPC pour $\delta_l = 2\%$

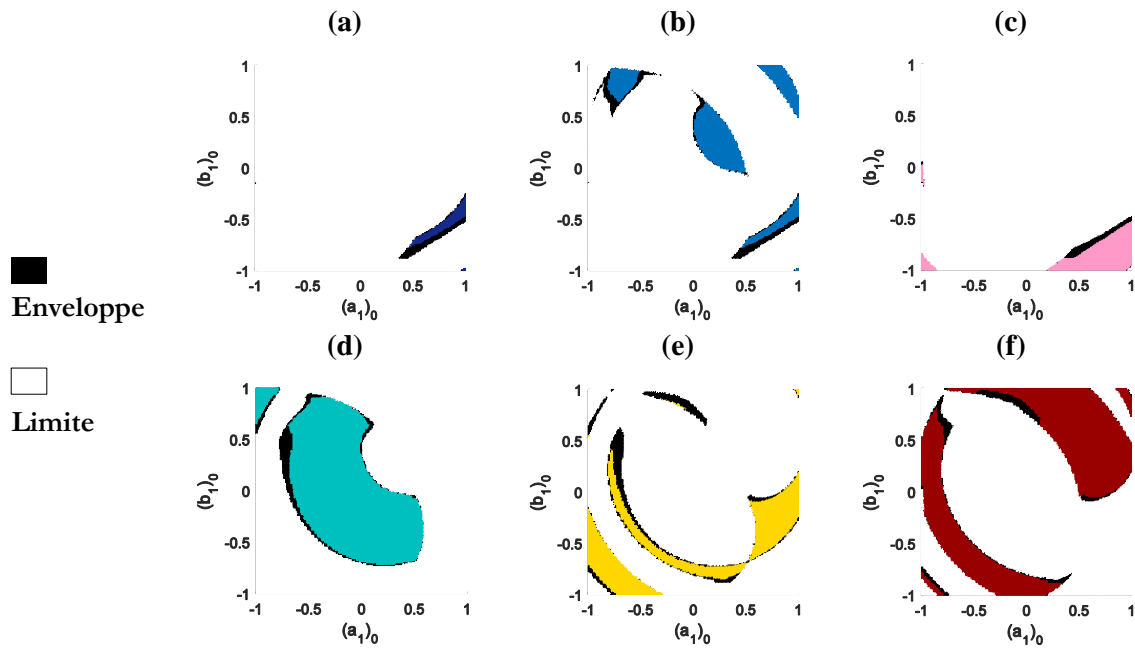


Fig.5.65. Envelopes des attracteurs des (a) DM-RB, (b) DM-NRB, (c) DM-B1, (d) DM-B2, (e) TM-B1 et (f) TM-B2 de la réponse $|A_1|^2$ de la réponse du deuxième pendule, dans le plan de Nyquist $((a_1)_0, (b_1)_0)$ pour $\sigma = -1$, $(a_2)_0 = (b_2)_0 = 0.2$ et $(a_3)_0 = (b_3)_0 = 0.3$, calculées par la méthode LHS pour $\delta_l = 2\%$

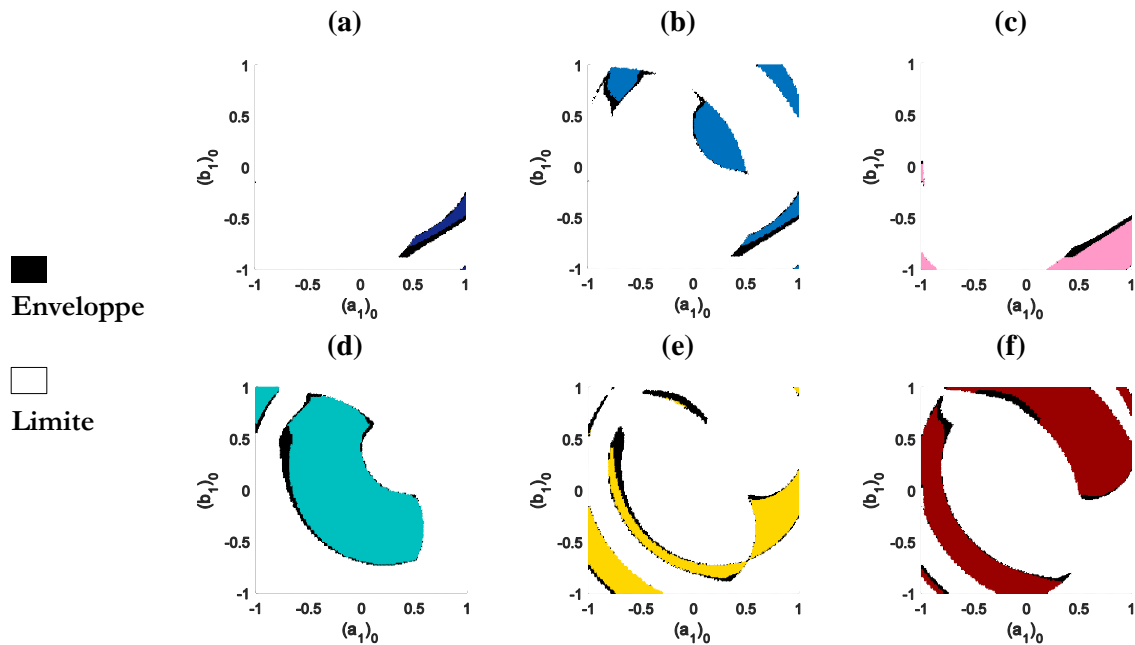


Fig.5.66. Envelopes des attracteurs des (a) DM-RB, (b) DM-NRB, (c) DM-B1, (d) DM-B2, (e) TM-B1 et (f) TM-B2 de la réponse $|A_1|^2$ du deuxième pendule, dans le plan de Nyquist $((a_1)_0, (b_1)_0)$ pour $\sigma = -1$, $(a_2)_0 = (b_2)_0 = 0.2$ et $(a_3)_0 = (b_3)_0 = 0.3$, calculées par la méthode gPC pour $\delta_l = 2\%$

Tab.5.14. Evolution des distributions des attracteurs des différentes branches modales dans les bassins d'attraction calculées dans le cas déterministe et par les méthodes LHS et gPC

Amplitude	Attracteur	Taille (%)					
		Det	LHS		gPC		
			$\delta_l = 2\%$	$\delta_l = 5\%$	$\delta_l = 2\%$	$\delta_l = 5\%$	
$ \tilde{A}_1 ^2$ (ddl 1)	Min	DM-RB (%)	1.69	0	0	0	0
		DM-NRB (%)	8.71	0.43	0	0.82	0
		DM-B1 (%)	5.71	3.19	0	3.30	0
		DM-B2 (%)	34.87	12.72	0	13.77	0
		TM-B1 (%)	16.08	0	0	0	0
		TM-B2 (%)	32.94	14.40	0	15.46	0
	Enveloppe	DM-RB (%)	0	14.53	100	12.21	99.93
		DM-NRB (%)	0	47.16	100	42.38	97.82
		DM-B1 (%)	0	8.12	25.50	7.01	10.30
		DM-B2 (%)	0	38.17	51.19	35.07	44.58
		TM-B1 (%)	0	47.31	69.55	43.44	44.27
		TM-B2 (%)	0	28.64	44.79	24.55	35.59
$ A_1 ^2$ (ddl 2)	Min	DM-RB (%)	1.69	1.30	0.97	1.33	0.99
		DM-NRB (%)	8.71	9.59	9.08	9.65	9.30
		DM-B1 (%)	5.71	5.02	4.28	5.08	4.39
		DM-B2 (%)	34.87	32.91	30.72	33.12	30.96
		TM-B1 (%)	16.08	13.87	10.82	13.27	11.04
		TM-B2 (%)	32.94	31.05	28.72	31.27	29.29
	Enveloppe	DM-RB (%)	0	1.19	2.47	1.09	2.29
		DM-NRB (%)	0	2.63	6.97	2.37	6.29
		DM-B1 (%)	0	1.03	2.07	0.95	1.94
		DM-B2 (%)	0	3.27	6.48	3	5.98
		TM-B1 (%)	0	5.12	10.46	4.64	9.53
		TM-B2 (%)	0	3.22	7.61	2.91	6.73

Récapitulation :

- Jusqu'à six branches de solutions stables sont obtenues en quelques points fréquentiels du domaine de multistabilité grâce aux interactions modales entre les réponses des trois pendules générées par la dynamique collective ;
- La robustesse des attracteurs des différents modes et branches modales est illustrée par l'analyse de la dispersion des bassins d'attraction et l'étude quantitative de l'évolution de la distribution de ces attracteurs en passant du cas déterministe au cas $\delta_l = 5\%$;
- En présence d'incertitudes, la stabilité du système est améliorée grâce à la multiplicité des solutions stables et l'extension du domaine de multistabilité en termes de plage fréquentielle et d'amplitude des réponses. De plus, la non-linéarité du système est amplifiée en augmentant les rapports des intervalles fréquentiels par les intervalles des

amplitudes détectés entre les points de bifurcation extrêmes dans le domaine de multistabilité ;

- Pour une réduction allant à 97.5% du temps de calcul par rapport à la méthode de référence LHS, la méthode gPC permet des approximations satisfaisantes des réponses fréquentielles et des bassins d'attraction. Ces approximations sont plus précises pour les réponses fréquentielles que pour les bassins d'attraction puisque ces derniers permettent une analyse plus détaillée et fine. Pour des niveaux de dispersion élevés (> 2%), les limites de la méthode gPC sont atteintes.

5.5. Conclusion

Se basant sur l'hypothèse des petites perturbations, un modèle analytique discret générique combinant la méthode des échelles multiples, la théorie des perturbations et une décomposition sur des ondes stationnaires a été proposé. Ce modèle a été adapté aux structures non-linéaires périodiques en présence d'imperfection. Le modèle analytique obtenu a conduit à un système d'équations algébriques complexes couplées. La résolution numérique de ce système d'équation pour deux exemples de structure périodique de pendules non-linéaires faiblement couplés par des ressorts linéaires à deux et trois degrés de liberté a été effectuée. Deux types d'études ont été menés : une étude déterministe considérant les imperfections comme modifications (ou perturbations) structurales et une étude stochastique supposant que les imperfections varient aléatoirement et impliquant le recours à des méthodes de propagation d'incertitudes.

L'analyse de la dynamique collective en présence d'imperfections a montré que la stabilité des structures étudiées est améliorée en permettant d'obtenir plus de solutions stables et d'élargir le domaine de multistabilité en termes d'amplitude et de fréquence et leur non-linéarité est amplifiée. Une variation du niveau de dispersion des paramètres incertains a permis d'évaluer leur effet sur la dispersion des réponses fréquentielles et des bassins d'attraction. Pour des niveaux de dispersion élevés, des chevauchements des enveloppes des branches des réponses fréquentielles existent. Pour les attracteurs des branches multimodales les plus robustes et dont la dispersion est la plus importante, des chevauchements complets des bassins d'attraction peuvent être atteints.

A partir de l'étude comparative de deux méthodes de propagation d'incertitudes, notamment la méthode LHS et la méthode gPC, l'efficacité de la méthode gPC pour l'approximation des réponses fréquentielles et des bassins d'attraction en présence des incertitudes est prouvée. Les limites de la méthode, se basant sur une technique de régression classique, sont également soulignées pour des niveaux de dispersion élevés, surtout pour des analyses stochastiques plus fines, soient ici la dispersion des bassins d'attraction. Le recours à des variantes de la méthode, dont les plus fréquemment utilisées sont citées dans le **chapitre 2**, est dans ce cas nécessaire.

Chapitre 6. Conclusion générale et Perspectives

Dans divers domaines de l'ingénierie, en particulier dans la dynamique des structures, afin de construire des modèles de conception réalistes, la prise en compte des incertitudes est indispensable. Ceci est assuré en incluant dans le processus de modélisation des méthodes de propagation des incertitudes. Dans un cadre paramétrique probabiliste, l'objectif de telles méthodes est d'évaluer l'effet de la variabilité des paramètres incertains d'entrée, modélisés par des variables aléatoires, sur la réponse dynamique du système variant aussi de façon aléatoire. Une attention particulière a été portée, dans ce mémoire, à la méthode du chaos polynomial généralisé ; ses fondements théoriques, ses applications et ses variantes. Comme il a été prouvé dans ce mémoire (particulièrement dans le **chapitre 2**), à précision comparable, la méthode non-intrusive de régression est beaucoup moins coûteuse que les méthodes de Monte Carlo et du Latin Hypercube, considérées comme références.

En revanche, l'intégration des méthodes de propagation des incertitudes dans les modèles numériques complique souvent le processus de modélisation. Cette complexité est engendrée par la taille du modèle de conception, la méthodologie de résolution et ses exigences, la répartition et le niveau des incertitudes et des non-linéarités imposées, l'optimisation du temps de calcul vis-à-vis de la précision exigée, etc. Pour contourner cette difficulté, il est indispensable de réduire les modèles. Cependant, les méthodes de réduction de modèle doivent être adaptées à la présence des incertitudes paramétriques et des non-linéarités localisées. Pour ce faire, des méthodes de réduction à base de condensation de la taille des modèles ont été adaptées, en premier lieu dans le **chapitre 3**, à la présence des modifications structurales, notamment les perturbations paramétriques et les non-linéarités localisées. Selon l'approche directe et de synthèse modale, respectivement, des bases modales tronquées et des transformations de Craig-Bampton ont été enrichies par des résidus statiques permettant de construire des modèles réduits robustes vis-à-vis des modifications structurales et peu coûteux par rapport aux modèles complets.

Ces deux types de modèle réduit ont été par la suite étendus à la prise en compte des incertitudes paramétriques en plus des non-linéarités localisées dans le **chapitre 4**. Les résidus statiques dans ce cas prennent comptes des incertitudes paramétriques et des non-linéarités localisées. Un métamodèle, dit mono-niveau, combine un modèle réduit obtenu par réduction directe avec la méthode de propagation d'incertitude du chaos polynomial généralisé. L'extension de la réduction à la méthode de synthèse modale de Craig-Bampton permet de construire un métamodèle, dit bi-niveaux, permettant de réduire et enrichir les bases de transformation des sous-structures contenant des incertitudes et/ou non-linéarités indépendamment des autres. La robustesse des deux métamodèles a été illustrée à travers des applications numériques, par rapport au modèle de référence dans lequel la méthode du Latin Hypercube est implémentée sur le modèle éléments finis complet. D'autres métamodèles ont

été également construits et comparés impliquant cette méthode. Les métamodèles proposés permettent d'approximer le comportement dynamique des structures stochastiques avec non-linéarités localisées avec un coût de calcul raisonnable et sans perte significative de précision par rapport au modèle de référence.

L'application des métamodèles proposés pour des structures périodiques, soit l'exemple traité des micro-poutres couplées, est limitée au cas du couplage linéaire fort entre les cellules unitaires dans lequel les fréquences propres de la structure globale sont séparées. Néanmoins, si le couplage est faible, une localisation modale se produit (modes propres très proches). Si, en plus, les non-linéarités sont réparties sur toute la structure, l'application d'autres méthodologies est incontournable. Pour ce faire, un modèle analytique discret générique combinant la méthode des échelles multiples, la théorie des perturbations et une décomposition sur des ondes stationnaires a été proposé dans le **chapitre 5** pour l'analyse des structures périodiques non-linéaires avec imperfections (faibles perturbations ou incertitudes paramétriques). Une étude déterministe considérant les imperfections comme des modifications (ou perturbations) structurales a été menée en premier lieu. Son extension au cas stochastique, supposant que les imperfections varient aléatoirement et impliquant le recours à des méthodes de propagation des incertitudes, est par la suite proposée. Les deux études ont montré que la stabilité des structures étudiées est améliorée en permettant d'obtenir plus de solutions stables et d'élargir le domaine de multistabilité en termes d'amplitude et de fréquence et leur non-linéarité est amplifiée. L'effet des niveaux de dispersion a été analysé sur les réponses fréquentielles et les bassins d'attraction. Des chevauchements des enveloppes des branches des réponses fréquentielles existent et varient suivant la robustesse des attracteurs des branches multimodales.

Malgré l'efficacité prouvée de la méthode du chaos polynomial généralisé, basée sur une technique de régression classique, par rapport à la méthode du Latin Hypercube, aussi bien en dynamique linéaire qu'en dynamique non-linéaire, ses limites sont également soulignées pour des niveaux de dispersion élevés. Ceci est surtout remarqué pour des analyses stochastiques fines, soient ici la dispersion des bassins d'attraction. Le recours à des variantes de la méthode, dont les plus fréquemment utilisées, sont cités dans le **chapitre 2**, est dans ce cas nécessaire.

Dans ce mémoire, seules les incertitudes sur les paramètres structuraux sont prises en compte et une approche paramétrique a été utilisée pour leur propagation. Néanmoins, en réalité d'autres types d'incertitudes (comme cité dans le **chapitre 2**) existent. Les hypothèses simplifiant le processus de modélisation, par exemple, peuvent être plus ou moins éloignées de la complexité du système modélisé et ainsi de la réalité et représentent donc une source d'incertitude de modèle. Le recours à une approche non paramétrique pour propager ces incertitudes est dans ce cas nécessaire et représente une perspective à ces travaux.

Les modèles réduits présentés dans ce mémoire sont basés principalement sur les propriétés modales linéaires des structures en présence des non-linéarités localisées. Ceci a permis d'utiliser des bases de réduction enrichies construites principalement de modes normaux des structures linéaires associées. C'est la principale hypothèse sur laquelle se basent

les métamodèles proposés. Cependant, l'analyse dynamique des structures avec non-linéarités réparties exige la mise en œuvre d'autres méthodologies de réduction de modèle. Une des principales perspectives à ces travaux est donc le développement de métamodèles combinant propagation d'incertitudes et réduction de modèles dédiées au cas des structures périodiques non-linéaires. La nécessité de telle méthodologie est justifiée, dans ce mémoire, par les temps de calculs prohibitifs exigés pour l'analyse stochastique des structures périodiques non-linéaires en présence d'incertitudes paramétriques (**chapitre 5**), malgré le gain obtenu grâce à la méthode du chaos polynomial et le nombre faible de degrés de liberté et de paramètres incertains choisis dans les applications illustrées.

L'analyse stochastique abordée dans le **chapitre 5**, en combinaison avec le modèle analytique basé sur les méthodes des échelles multiples et de la projection sur les ondes stationnaires, devient numériquement prohibitive, voire inabordable, quand la taille du système discret est plus importante. Rappelons que la dynamique collective des structures périodiques non-linéaires à, seulement, deux et trois degrés de libertés a été étudiée. Le gain qu'offre la méthode du chaos polynomial en temps de calcul a bien facilité l'analyse. Néanmoins, la recherche d'une alternative à la méthodologie utilisée devient nécessaire pour contourner l'explosion de la taille du problème quand des structures de grandes dimensions sont étudiées.

Les travaux réalisés dans cette thèse représentent une contribution purement numérique. La confiance qu'on peut donner à un modèle numérique est toujours liée à l'écart entre la réalité et l'approximation qu'il permet. Cet écart est plus concrètement quantifiable si une analyse expérimentale est effectuée. Comme perspective à ces travaux, l'étude expérimentale d'un réseau de structures périodiques non-linéaires de type pendules couplés peut être effectuée en présence d'imperfections. Cette étude permettra une validation réelle du modèle proposé dans ce mémoire et mettra en évidence la contribution innovante de ces travaux dans l'étude numérique de la dynamique non-linéaire des réseaux de structures périodiques en présence d'incertitudes.

Annexe : *Méthode de Newmark non-linéaire*

Le comportement d'un système non-linéaire est modélisé, à l'instant t_{n+1} , par l'équation

$$[M]\dot{y}_{n+1} + [B]\dot{y}_{n+1} + (f_{int})_{n+1} = f_{n+1} \quad (\text{A.1})$$

avec

$$f_{int} = ([K] + f_{NL}(y, \dot{y}))y \quad (\text{A.2})$$

Les expressions des approximations par la méthode de Newmark du déplacement et de la vitesse, à l'instant t_{n+1} sont données par

$$\dot{y}_{n+1} = \dot{y}_n + (1 - \gamma)h\ddot{y}_n + \gamma h\ddot{y}_{n+1} \quad (\text{A.3})$$

$$y_{n+1} = y_n + h\dot{y}_n + \left(\frac{1}{2} - \beta\right)h^2\ddot{y}_n + \beta h^2\ddot{y}_{n+1} \quad (\text{A.4})$$

où β et γ sont les paramètres contrôlant, respectivement, la stabilité et la dissipation du schéma de Newmark. Si $(\beta, \gamma) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$, le schéma est dit d'accélération moyenne et est le plus utilisé dans la littérature pour sa précision.

La méthode de Newmark non-linéaire consiste à exprimer les déplacements à l'instant t_{n+1} à partir de celles à l'instant t_n . Entre ces deux instants, les quantités incrémentales (A.5) sont définies

$$\begin{aligned} \Delta y_n &= y_{n+1} - y_n \\ \Delta \dot{y}_n &= \dot{y}_{n+1} - \dot{y}_n \\ \Delta \ddot{y}_n &= \ddot{y}_{n+1} - \ddot{y}_n \\ \Delta f_n &= f_{n+1} - f_n \\ (\Delta f_{int})_n &= (f_{int})_{n+1} - (f_{int})_n \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Ce qui permet d'écrire l'équation de mouvement incrémentale sous la forme

$$[M]\Delta \ddot{y}_n + [B]\Delta \dot{y}_n + (\Delta f_{int})_n = \Delta f_n \quad (\text{A.6})$$

ou

$$[K_{eff}]\Delta y_n = (\Delta f_{eff})_n \quad (\text{A.7})$$

avec $[K_{eff}]$ est la matrice d'itération (effective) définie par

$$[K_{eff}] = [K_T] + \frac{\gamma}{\beta h}[B] + \frac{1}{\beta h^2}[M] \quad (\text{A.8})$$

où $[K_T] = \partial f_{int} / \partial y$ est la matrice de rigidité tangente et $(\Delta f_{eff})_n$ est le terme assimilé à une force dynamique instantanée (effective)

$$(\Delta f_{eff})_n = (\Delta f)_n + \left[\frac{1}{\beta h} [M] + \frac{\gamma}{\beta} [B] \right] \dot{y}_n + \left[\frac{1}{2\beta} [M] + h \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) [B] \right] \ddot{y}_n \quad (\text{A.9})$$

- **Méthode de Newton-Raphson**

On peut résoudre le système non-linéaire par la méthode de Newton ou par une de ses dérivées telle que la méthode de Newton-Raphson. Dans ce cadre, l'équation (A.1) est réécrite sous la forme

$$[K_{eff}] \Delta y_n^i = -\mathbf{r}(y_n^i) \quad (\text{A.10})$$

où $\mathbf{r}(y_n^i)$ est le vecteur des résidus à l'itération i de l'instant t_n . L'algorithme itératif de Newton Raphson, ainsi obtenu, est donc associé à l'intérieur de celui du schéma temporel de Newmark et est arrêtée une fois la solution converge de façon que le résidus d'équilibre soit inférieur à un certain de précision et stable vis-à-vis de sa variation tel que

$$\|\mathbf{r}(y_n^i)\| > \epsilon \|\mathbf{r}(y_n^0)\| \quad (\text{A.11})$$

Tenant compte des termes de correction des déplacements Δy_n^i ainsi obtenues, des termes de correction des vitesses et des accélérations, $\Delta \dot{y}_n^i$ et $\Delta \ddot{y}_n^i$ respectivement, sont calculés par

$$\Delta \dot{y}_n^i = \frac{\gamma}{\beta h} \Delta y_n^i \quad (\text{A.12})$$

$$\Delta \ddot{y}_n^i = \frac{1}{\beta h^2} \Delta y_n^i \quad (\text{A.13})$$

- **Algorithme d'implémentation**

La procédure de calcul associée au schéma implicite de Newmark couplé à la méthode itérative de correction de Newton Raphson est résumée par l'organigramme ci-dessous, présenté également par la figure **A.1**,

- a. Initialisation :

- a.1. conditions initiales y_0, \dot{y}_0 et

$$\ddot{y}_0 = [M]^{-1} (f_0 - [B] \dot{y}_0 - (f_{int})_0) ; \quad (\text{A.14})$$

- a.2. choix de h et γ, β ;

- a.3. calcul de la matrice de rigidité effective $[K_{eff}]_0$ à partir de $[K_T]_0$ (A.8) ;

- b. itérations : à chaque pas de temps n :

- b.1. calcul du vecteur de force dynamique effective $(\Delta f_{eff})_n$ (A.9) ;

b.2. Newton-Raphson

Initialisation

$$\mathbf{r}(y_n^0) = (\Delta f_{eff})_n \quad (\text{A.15})$$

Correction

$$\begin{aligned} & \text{Tant que } \|\mathbf{r}(y_n^i)\| > \epsilon \|\mathbf{r}(y_n^0)\|, \\ & \Delta y_n^i = \left([K_{eff}]_n^i\right)^{-1} \mathbf{r}(y_n^i) \\ & y_n^i = y_n^0 + \Delta y_n^i \\ & [K_{eff}]_n^i = [K_T]_n^i + \frac{\gamma}{\beta h} [B] + \frac{1}{\beta h^2} [M] \\ & \Delta F_n^i = ((f_{int})_n^i - (f_{int})_n^0) - [K_T]_n^i \Delta y_n^i \\ & r(y_n^i) = (\Delta f_{eff})_n - \Delta F_n^i \\ & \text{Fin Tant que} \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

b.3. calcul des valeurs incrémentales des vitesses et des accélérations :

$$\begin{aligned} \Delta \dot{y}_n &= \frac{\gamma}{\beta h} \Delta y_n^i - h \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right) \dot{y}_n \\ \Delta \ddot{y}_n &= \frac{1}{\beta h^2} \Delta y_n^i - \frac{1}{\beta h} \dot{y}_n - \frac{1}{2\beta} \ddot{y}_n \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

b.4. calcul des vecteurs des déplacements, vitesses, accélérations et forces internes à l'instant t_{n+1}

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n^i \\ \dot{y}_{n+1} &= \dot{y}_n + \Delta \dot{y}_n \\ \ddot{y}_{n+1} &= \ddot{y}_n + \Delta \ddot{y}_n \\ (f_{int})_{n+1} &= (f_{int})_n^i \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

b.5. retour à **b.1.**

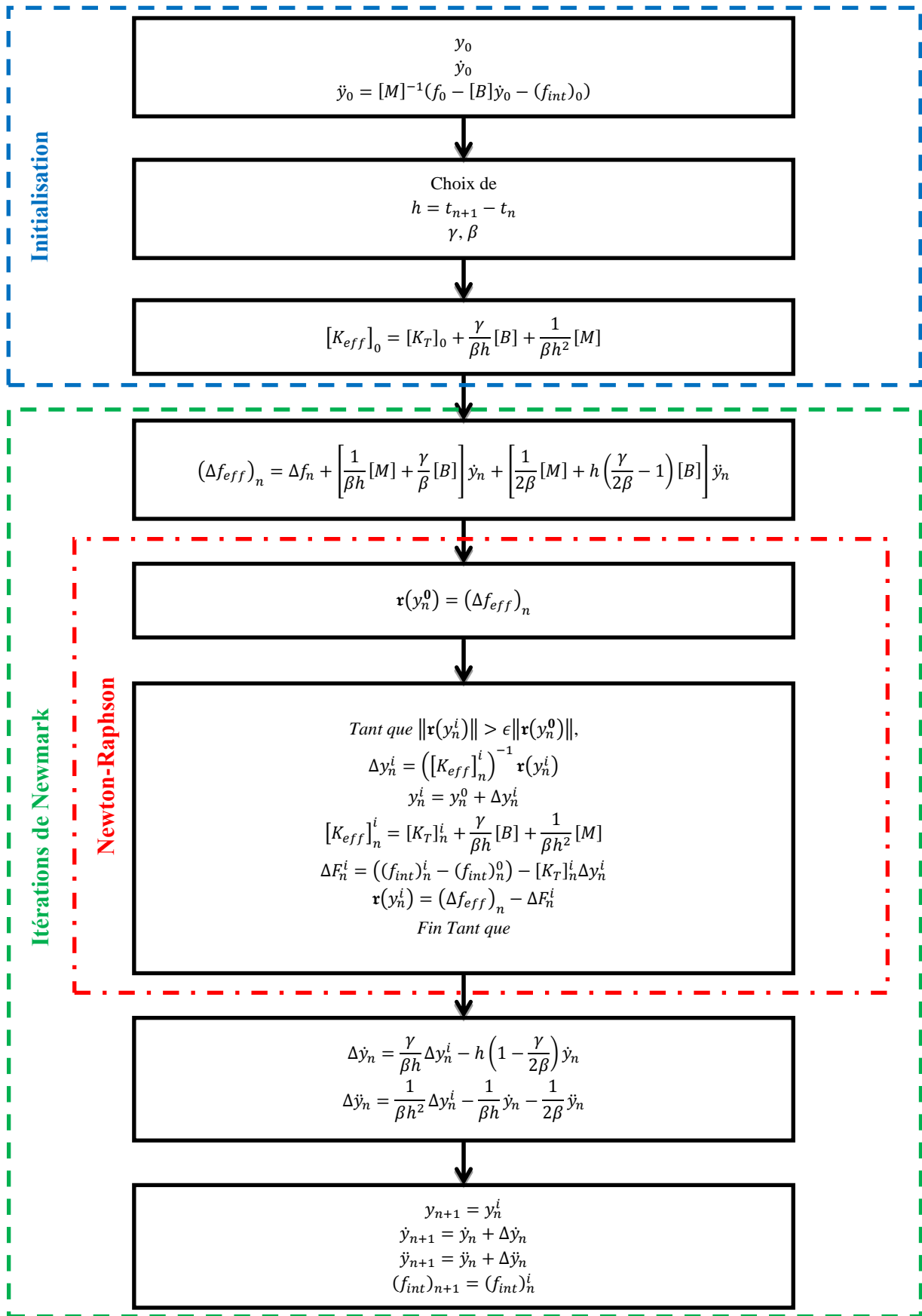


Fig.A.1. Algorithme de la méthode de Newmark non-linéaire

Bibliographie

1. G. J. Klir. The Many Faces of Uncertainty. In B.M Ayyub and M.M. Gupta, editors, *Uncertainty Modeling and Analysis: Theory and Applications*: 3-19. Elsevier Science, 1994.
2. S. S. Isukapalli. *Uncertainty Analysis of Transport-Transformation Models*. Thèse de doctorat, The State University of New Jersey, 1999.
3. C. A. Soize. Nonparametric model of random uncertainties on reduced matrix model in structural dynamics. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 15 (3): 277-294, 2000.
4. F. O. Hoffman, J. S. Hammonds. Propagation of Uncertainty in Risk Assessments: The Need to Distinguish Between Uncertainty Due to Lack of Knowledge and Uncertainty Due to Variability. *Risk Analysis*, 14 (5): 707-12, 1994.
5. R. Langley. Unified approach to probabilistic and possibilistic analysis of uncertain systems. *Journal of Engineering Mechanics*, 126(11): 1163-1172, 2000.
6. R. Mace, W. Worden, G. Manson. Uncertainty in Structural Dynamics. *Special issue of the Journal of Sound and Vibration*, 288 (3): 431-790, 2005.
7. G. I. Schueller. Computational methods in stochastic mechanics and reliability analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194(12-16): 1251-1795, 2005.
8. G. Saporta. *Probabilités, analyse des données et statistique*. Editions Technip, 2nd edition, Paris, 2006.
9. C. Li, A. Der Kiureghian. Optimal discretization of random fields. *Journal of Engineering Mechanics*, 119(6), 1136-1154, 1996.
10. B. Sudret, A. Der Kiureghian. *Stochastic finite elements and reliability: a state-of-the-art report*. Technical Report UCB/SEMM-2000/08, University of California, Berkeley, 2000.
11. B. Sudret. *Uncertainty propagation and sensitivity analysis in mechanical models-Contributions to structural reliability and stochastic spectral methods*. Habilitation à diriger des recherches, Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand, 2007.
12. M. Loève. *Probability Theory*. Springer-Verlag, 4th edition, 1977.
13. R. G. Ghanem, P. D. Spanos. *Stochastic Finite Elements: a Spectral Approach*. Springer-Verlag, 1991.
14. D. Xiu. *Generalized (Wiener-Askey) Polynomial Chaos*. Thèse de doctorat, Brown University, 2004.
15. D. Xiu. Fast Numerical Methods for Stochastic Computations: A Review. *Communications in Computational Physics*, 5(2-4): 242-272, 2009.
16. A. Nouy. Recent developments in spectral stochastic methods for the numerical solution of stochastic partial differential equations. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 16: 251-285, 2009.
17. G. S. Fishman. *Monte Carlo: Concepts, Algorithms, and Applications*. Springer-Verlag, New York, 1996.
18. R. Y. Rubinstein, D. P. Kroese. *Simulation and the Monte Carlo Method*. Wiley & Sons, 2nd edition, 2008.
19. O. Ditlevsen, H. O. Madsen. *Structural Reliability methods*. Wiley, Chichester, New York, 1996.
20. W. R. Gilks, S. Richardson, D. J. Spiegelhalter. *Markov Chain Monte Carlo in practice*. Chapman & Hall, 1995.
21. H. Niederreiter, P. Hellekalek, G. Larcher, P. Zinterhof. *Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Methods*. Springer-Verlag, 1998.
22. M. D. McKay, R. J. Beckman, W. J. Conover. A comparison of three methods for selecting values of input variables in the analysis of output from a computer code. *Technometrics*, 2: 239-245, 1979.
23. J. C. Helton, F. J. Davis. Latin hypercube sampling and the propagation of uncertainty in analyses of complex systems. *Reliability Engineering and System Safety*, 81: 23-69, 2003.
24. N. Wiener. The homogeneous chaos. *American Journal of Mathematics*, 60: 897-936, 1938.

25. D. Xiu, G. E. Karniadakis. The Wiener Askey polynomial chaos for stochastic differential equations. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 24(2): 619-644, 2002.
26. R. H. Cameron, W. T. Martin. The orthogonal development of nonlinear functionals in series of Fourier-Hermite functionals. *Annals of Mathematics*, 48: 385-392, 1947.
27. R. Askey, J. Wilson. Some basic hypergeometric polynomials that generalize Jacobi polynomials. *Memoirs of the American Mathematical Society*, 54: 319, 1985.
28. D. Xiu, G. E. Karniadakis. Modeling uncertainty in flow simulations via generalized polynomial chaos. *Journal of Computational Physics*, 187: 137-167, 2003.
29. Y. Du, T. A. Duever, H. Budman. Fault detection and diagnosis with parametric uncertainty using generalized polynomial chaos. *Computers and Chemical Engineering*, 76: 63-75, 2015.
30. W. Shi, C. Zhang. Error analysis of generalized polynomial chaos for nonlinear random ordinary differential equations. *Applied Numerical Mathematics*, 62: 1954-1964, 2012.
31. B. M. Chen-Charpentier, J.-C. Cortés, J.-V. Romero, M.-D. Roselló. Some recommendations for applying gPC (generalized polynomial chaos) to modeling: An analysis through the Airy random differential equation. *Applied Mathematics and Computation*, 219: 4208-4218, 2013.
32. A. Doostan, R. G. Ghanem, J. Red-Horse. Stochastic model reduction for chaos representations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196: 3951-66, 2007.
33. G. Kewlani, J. Crawford, K. Iagnemma. A polynomial chaos approach to the analysis of vehicle dynamics under uncertainty. *Vehicle System Dynamics*, 1-26, 2012.
34. K. Sepahvand, S. Marburg, H.-J. Hardtke. Stochastic free vibration of orthotropic plates using generalized polynomial chaos expansion. *Journal of Sound and Vibration*, 331: 167-179, 2012.
35. E. Sarrouy, O. Dessombz, J.-J. Sinou. Piecewise polynomial chaos expansion with an application to brake squeal of a linear brake system. *Journal of Sound and Vibration*, 332: 577-594, 2013.
36. J.-J. Sinou, B. Faverjon. The vibration signature of chordal cracks in a rotor system including uncertainties. *Journal of Sound and Vibration*, 331: 138-154, 2012.
37. J.-J. Sinou, J. Didier, B. Faverjon. Stochastic nonlinear response of a flexible rotor with local nonlinearities. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 74: 92-99, 2015.
38. B. A. Jones, A. Doostan. Satellite collision probability estimation using polynomial chaos expansions. *Advances in Space Research*, 52: 1860-1875, 2013.
39. G. Perrin, C. Soize, D. Duhamel, C. Funfschilling. Track irregularities stochastic modeling. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 34: 123-130, 2013.
40. L. Dell'Elce, G. Kerschen. Probabilistic Assessment of Lifetime of Low-Earth-Orbit Spacecraft: Uncertainty Propagation and Sensitivity Analysis. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 38(5): 886-899, 2013.
41. X. Fenfen, C. Shishi, X. Ying. Dynamic system uncertainty propagation using polynomial chaos. *Chinese Journal of Aeronautics*, 27(5): 1156-1170, 2014.
42. E. Jacquelin, S. Adhikari, J.-J. Sinou, M. I. Friswell. Polynomial chaos expansion in structural dynamics: Accelerating the convergence of the first two statistical moment sequences. *Journal of Sound and Vibration*, 356: 144-154, 2015.
43. M. A. Ben Souf, M. Ichchou, O. Bareille, N. Bouhaddi, M. Haddar. Dynamics of random coupled structures through the wave finite element method. *Engineering Computation: International Journal for Computer-Aided Engineering and Software*, 32(7): 2020-2045, 2015.
44. E. Sarrouy, O. Dessombz, J.-J. Sinou. Stochastic study of a non-linear self-excited system with friction. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 40: 1-10, 2013.
45. J. Didier, J.-J. Sinou, B. Faverjon. Study of the non-linear dynamic response of a rotor system with faults and uncertainties. *Journal of Sound and Vibration*, 331: 671-703, 2012.
46. J. Didier, J.-J. Sinou, B. Faverjon. Nonlinear vibrations of a mechanical system with non-regular nonlinearities and uncertainties. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 18: 3250-3270, 2013.
47. A. Clément, C. Soize, J. Yvonnet. Uncertainty quantification in computational stochastic multiscale analysis of nonlinear elastic materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 254: 61-82, 2013.

48. M. Berveiller, B. Sudret, M. Lemaire. Presentation of two methods for computing the response coefficients in stochastic finite element analysis. In *Proceeding of the 9th ASCE specialty Conference on Probabilistic Mechanics and Structural Reliability*, Albuquerque, USA, 2004.
49. M. Berveiller. *Eléments finis stochastiques: approches intrusive et non intrusive pour des analyses de fiabilité*. Thèse de doctorat, Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand, 2005.
50. B. Sudret. Global sensitivity analysis using polynomial chaos expansions. *Reliability Engineering and System Safety*, 93: 964-979, 2008.
51. E. H. Sandoval, F. Anstett-Collin, M. Basset. Sensitivity study of dynamic systems using polynomial chaos. *Reliability Engineering and System Safety*, 104: 15-26, 2012.
52. S. Dubreuil, M. Berveiller, F. Petitjean, M. Salaün. Construction of bootstrap confidence intervals on sensitivity indices computed by polynomial chaos expansion. *Reliability Engineering and System Safety*, 121: 263-275, 2014.
53. O. Garcia-Cabrejo, A. Valocchi. Global Sensitivity Analysis for multivariate output using Polynomial Chaos Expansion. *Reliability Engineering and System Safety*, 126: 25-36, 2014.
54. B. Sudret, C. V. Mai. Computing derivative based global sensitivity measures using Polynomial chaos expansions. *Reliability Engineering and System Safety*, 134: 241-250, 2015.
55. C. Soize, R. Ghanem. Physical systems with random uncertainties : Chaos representation with arbitrary probability measure. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 26(2): 395-410, 2004.
56. B. Sudret. Polynomial chaos expansions and stochastic finite element methods. In K K Phoon and J Ching, editors, *Risk and Reliability in Geotechnical Engineering*, chapter 5. Taylor and Francis, 2014.
57. R. Koekoek, R. F. Swarttouw. *The Askey-scheme of hypergeometric orthogonal polynomials and its q-analogue*. Technical Report 98-17, Department of Technical Mathematics and Informatics, Delft University of Technology, 1998.
58. L. Devroye. *Non-Uniform Random Variate Generation*. Springer-Verlag, New York, 1986.
59. B. Sudret, A. Der Kiureghian. Comparison of finite element reliability methods. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 17: 337-348, 2002.
60. I. Babuska, R. Tempone, G. Zouraris. Solving elliptic boundary value problems with uncertain coefficients by the finite element method: the stochastic formulation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194: 1251-1294, 2005.
61. O. Le Maitre, M. Reagan, H. Najm, R. Ghanem, O. Knio. A stochastic projection method for fluid flow: random process. *Journal of Computational Physics*, 181: 9-44, 2002.
62. D. Ghiocel, R. Ghanem. Stochastic finite element analysis of seismic soil-structure interaction. *Journal of Engineering Mechanics*, 128: 66-77, 2002.
63. D. Xiu, J. Shen. Efficient Stochastic Galerkin Methods for Random Diffusion Equations. *Journal of Computational Physics*, 228: 266-281, 2009.
64. P. Pettersson, J. Nordström, A. Doostan. A well-posed and stable stochastic Galerkin formulation of the incompressible Navier–Stokes equations with random data. *Journal of Computational Physics*, 306: 92-116, 2016.
65. L. Nechak. *Approches Robustes du comportement dynamique des systèmes Non Linéaires - Application aux Systèmes Frottants*. Thèse de doctorat, Université de Haute Alsace de Mulhouse, 2011.
66. L. Nechak, S. Berger, E. Aubry. A polynomial chaos approach to the robust analysis of the dynamic behavior of friction systems. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 30: 594-607, 2011.
67. N. M. Newmark. A method of computation for structural dynamics. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 85(3): 67-94, 1959.
68. S. Sachdeva, P. Nair, A. Keane. Hybridization of stochastic reduced basis methods with polynomial chaos expansions. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 21(2): 182-192, 2006.
69. A. Nouy. Generalized spectral decomposition method for solving stochastic finite element equations: invariant subspace problem and dedicated algorithms. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(51-52): 4718-4736, 2008.
70. M. S. Eldred, C. G. Webster, P. G. Constantine. Evaluation of Non-Intrusive Approaches for Wiener-Askey Generalized Polynomial Chaos. In *Proceeding of the 49th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*, Schaumburg, IL, 2008.

71. M. S. Eldred, J. Burkardt. Comparison of Non-Intrusive Polynomial Chaos and Stochastic Collocation Methods for Uncertainty Quantification. *American Institute of Aeronautics and Astronautics*, Paper 2009-0976, 2009.
72. K. Beddek. *Propagation d'incertitudes dans les modèles éléments finis en électromagnétisme- Application au contrôle non destructif par courants de Foucault*. Thèse de doctorat, Université des Sciences et Technologies de Lille, 2012.
73. M. Berveiller, B. Sudret, M. Lemaire. Stochastic finite elements: a non intrusive approach by regression. *European Journal of Computational Mechanics*, 15 (1-3): 81-92, 2006.
74. D. Xiu, J. S. Hesthaven. High Order Collocation Methods for Differential Equations with Random Inputs. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 27(3): 1118-1139, 2005.
75. D. Xiu. Efficient Collocational Approach for Parametric Uncertainty Analysis. *Communications in Computational Physics*, 2(2): 293-309, 2007.
76. F. Nobile, R. Tempone, C. Webster. *A sparse grid stochastic collocation method for elliptic partial differential equations with random input data*. Technical Report MOX Report 85, Politecnico di Milano, 2006.
77. I. Babuska, F. Nobile, R. Tempone. A stochastic collocation method for elliptic partial differential equations with random input data. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 45(3): 1005-1034, 2007.
78. P. Pettersson, A. Doostan, J. Nordström. On stability and monotonicity requirements of finite difference approximations of stochastic conservation laws with random viscosity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 258: 134-151, 2013.
79. G. Poëtte, D. Lucor. Non intrusive iterative stochastic spectral representation with application to compressible gas dynamics. *Journal of Computational Physics*, 231: 3587-3609, 2012.
80. L. Gilli, D. Lathouwers, J. L. Kloosterman, T. H. J. Van der Hagen, A. J. Koning, D. Rochman. Uncertainty quantification for criticality problems using non-intrusive and adaptive Polynomial Chaos techniques. *Annals of Nuclear Energy*, 56: 71-80, 2013.
81. Z. Perkó, D. Lathouwers, J. L. Kloosterman, T. Van der Hagen. Large scale applicability of a Fully Adaptive Non-Intrusive Spectral Projection technique: Sensitivity and uncertainty analysis of a transient. *Annals of Nuclear Energy*, 71: 272-292, 2014.
82. T. Gerstner, M. Griebel. Numerical integration using sparse grids. *Numerical Algorithms*, 18(3-4): 209-232, 1998.
83. M. Berveiller, B. Sudret, M. Lemaire. Nonlinear non intrusive stochastic finite element method - application to a fracture mechanics problem. In *Proceeding of the 9th International Conference Structural Safety and Reliability (ICOSSAR'2005)*, Rome, Italy, 2005.
84. M. Berveiller, B. Sudret, M. Lemaire. Structural reliability using non-intrusive stochastic finite elements. In *Proceeding of the 12th IFIP WG7.5 Conference on Reliability and Optimization of Structural Systems*, Aalborg, Denmark, 2005.
85. J. Hampton, A. Doostan. Coherence motivated sampling and convergence analysis of least squares polynomial Chaos regression. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 290: 73-97, 2015.
86. M. Webster, M. A. Tatang, G. J. Mcrae. *Application of the probabilistic collocation method for an uncertainty analysis of a simple ocean model*. MIT Joint Program on the Science and Policy of Global Change Report Series 4, Massachusetts Institute of Technology, USA, 1996.
87. A. Bjorck. *Numerical methods for least squares problems*. SIAM Press, Philadelphia, PA, 1996.
88. X. Wan, G. E. Karniadakis. An adaptive multi-element generalized polynomial chaos method for stochastic differential equations. *Journal of Computational Physics*, 209: 617-642, 2005.
89. X. Wan, G. E. Karniadakis. Multi-Element Generalized Polynomial Chaos for arbitrary probability measures. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 28(3): 901-928, 2006.
90. G. Kewlani, K. Iagnemma. A Multi-Element Generalized Polynomial Chaos Approach to Analysis of Mobile Robot Dynamics under Uncertainty. In *The 2009 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, St. Louis, USA, 2009.
91. B. Chouvion, E. Sarrouy. Development of error criteria for adaptive multi-element polynomial chaos approaches. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 66-67: 201-222, 2016.

92. J. Foo, X. Wan, G. Karniadakis. The multi-element probabilistic collocation method (ME-PCM): error analysis and applications. *Journal of Computational Physics*, 227: 9572-9595, 2008.
93. P. Prempraneerach, F. S. Hover, M. S. Triantafyllou, G. E. Karniadakis. Uncertainty quantification in simulations of power systems: Multi-element polynomial chaos methods. *Reliability Engineering and System Safety*, 95: 632-646, 2010.
94. M. Gerritsma, J.-B. Van der Steen, P. Vos, G. Karniadakis. Time-dependent generalized polynomial chaos. *Journal of Computational Physics*, 229: 8333-8363, 2010.
95. V. Heuveline, M. Schick. *Towards a hybrid numerical method using Generalized Polynomial Chaos for Stochastic Differential Equations*. Preprint Series of the Engineering Mathematics and Computing Lab (EMCL), 2011.
96. G. Blatman, B. Sudret. Adaptive sparse polynomial chaos expansions - Application to structural reliability. In *Proceeding of the 4th International ASRANet Colloquium*, Athens, Greece, 2008.
97. G. Blatman. *Adaptive sparse polynomial chaos expansions for uncertainty propagation and sensitivity analysis*. Thèse de doctorat, Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand, 2009.
98. G. Blatman, B. Sudret. An adaptive algorithm to build up sparse polynomial chaos expansions for stochastic finite element analysis. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 25 (2): 183-197, 2010.
99. B. Efron, T. Hastie, I. Johnstone, R. Tibshirani. Least angle regression. *Annals of Statistics*, 32: 407-499, 2004.
100. G. Blatman, B. Sudret. Adaptive sparse polynomial chaos expansion based on Least Angle Regression. *Journal of Computational Physics*, 230: 2345-2367, 2011.
101. G. Blatman, B. Sudret. Efficient computation of Sobol' sensitivity indices using sparse polynomial chaos expansions. *Reliability Engineering and System Safety*, 95(11): 1216-1229, 2010.
102. P. G. Constantine, M. Eldred, E. Phipps. Sparse pseudo spectral approximation method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 229-232: 1-12, 2012.
103. G. Deman, K. Konakli, B. Sudret, J. Kerrou, P. Perrochet, H. Benabderrahmane. Using sparse polynomial chaos expansions for the global sensitivity analysis of groundwater lifetime expectancy in a multi-layered hydrogeological model. *Reliability Engineering and System Safety*, 147: 156-169, 2016.
104. X. Yang, M. Choi, G. Lin, G. Karniadakis. Adaptive ANOVA decomposition of stochastic incompressible and compressible flows. *Journal of Computational Physics*, 231: 1587-1614, 2012.
105. R. Tipireddy, R. Ghanem. Basis adaptation in homogeneous chaos spaces. *Journal of Computational Physics*, 259: 304-317, 2014.
106. J. D. Jakeman, M. S. Eldred, K. Sargsyan. *Enhancing l_1 -minimization estimates of polynomial chaos expansions using basis selection*. ArXiv: 1407.8093, 2014.
107. B. M. Chen-Charpentier, J.-C. Cortés, J.-A. Licea, J.-V. Romero, M.-D. Roselló, F.-J. Santonjac, R.-J. Villanuevab. Constructing adaptive generalized polynomial chaos method to measure the uncertainty in continuous models: A computational approach. *Mathematics and Computers in Simulation*, 109: 113-129, 2015.
108. R. Schobi, B. Sudret, J. Wiart. Polynomial-Chaos-Based Kriging. *International Journal for Uncertainty Quantification*, 5(2): 171-193, 2015.
109. D. O. Smallwood. Characterization and simulation of transient vibrations using band limited moments. *Shock and Vibration*, 1(6): 507-527, 1994.
110. F. M. Hemez, S. W. Doebling. From shock response spectrum to temporal moments and vice-versa. In *Proceeding of the 21st International Modal Analysis Conference (IMAC-XXI)*, Kissimmee, Florida, 2003.
111. B. Ait Brik. *Méthodologies de conception robuste et d'optimisation dans un contexte de conception d'architectures mécaniques nouvelles en avant projet*. Thèse de doctorat, Université de Franche-Comté, 2005.
112. R. H. Myers, D. C. Montgomery. *Response Surface Methodologie*, 2nd Edition, Wiley, New York, 2002.
113. I. Batmaz, S. Tunali. Small response surface designs for metamodel estimation. *European Journal of Operational Research*, 145 : 455-470, 2003.
114. C. Bishop. *Neural Networks for Pattern Recognition*. Oxford University Press, New York, USA, 1995.
115. W. Ling. A hybrid genetic algorithm-neural network strategy for simulation optimization. *Applied Mathematics and computation*, 170: 1329-1343, 2005.

116. J. P. Lombard. *Contribution à la réduction des modèles éléments finis par synthèse modale*. Thèse de doctorat, Université de Franche-Comté, 1999.
117. M. Guedri. *Synthèse modale / approches stochastiques en élastodynamique linéaire et non-linéaire*. Thèse de doctorat, Faculté des Sciences de Tunis, Tunisie, 2006.
118. F. Wenneker. *Component Mode Synthesis for geometrically nonlinear structures*. MSc thesis, Delf University of Technology, 2013.
119. B. Besselink, U. Tabak, A. Lutowska, N. VandeWouw, H. Nijmeijer, D. J. Rixen, M. E. Hochstenbach, W. H. A. Schilders. A comparison of model reduction techniques from structural dynamics, numerical mathematics and systems and control. *Journal of Sound and Vibration*, 332: 4403-4422, 2013.
120. F. Ihlenburg, R. Mollenhoff, M. Wandel. Computational assessment of reduction methods in FE-based frequency-response analysis. In *11th World Congress on Computational Mechanics (WCCM XI), 5th European Conference on Computational Mechanics (ECCM V), 6th European Conference on Computational Fluid Dynamics (ECFD VI)*, E. Onate, J. Oliver and A. Huerta (Eds), 2014.
121. E. L. Wilson, M.-W. Yuan, J. M. Dickens. Dynamic analysis by direct superposition of Ritz vectors. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 10: 813-821, 1982.
122. O. B. Nour, R. W. Clough. *Dynamic analysis of structures using Lanczos coordinates*. University of California, Berkeley, Center for Pure and Applied Mathematics, 1983.
123. T. Bonin, H. Fassbender, A. Soppa, M. Zaeh. A fully adaptive rational global Arnoldi method for the model-order reduction of second-order MIMO systems with proportional damping. *Journal of Mathematics and Computers in Simulation*, 122: 1-19, 2016.
124. H. Van der Vorst. Iterative Krylov methods for large linear systems. *Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics*, Cambridge University press, 2003.
125. Z. Bai. Krylov subspace techniques for reduced-order modeling of large-scale dynamical systems. *Applied Numerical Mathematics*, 43: 9-44, 2002.
126. W. C. Hurty. Vibrations of structural systems by component mode synthesis. *Journal of the Engineering Mechanics Division. In Proceedings of the American Society of Civil Engineers*, 86(EM 4): 51-69, 1960.
127. M. Gérardin, D. Rixen. *Théorie des vibrations, application à la dynamique des structures*. 2^{ème} Edition, Masson, Paris, 1996.
128. J. S. Przemieniecki. Matrix structural analysis of substructures. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 1: 138-147, 1963.
129. R. Guyan. Reduction of stiffness and mass matrices. *American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA) Journal*, 3(2): 380, 1965.
130. R. R. Craig, M. C. C. Bampton. Coupling of substructures for dynamic analysis. *American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA) Journal*, 6(7): 1313-1319, 1968.
131. D. R. Martinez, T. G. Carne, D. L. Gregory, A. K. Miller. Combined experimental/analytical modeling using component mode synthesis. In *Proceeding of the AIAA/ASME/ASCE/AHS 25th Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*: 140-152, 1984.
132. R. H. MacNeal. A hybrid method of component mode synthesis. *Computers & Structures*, 1(4): 581-601, 1971.
133. S. Rubin. Improved component-mode representation for structural dynamic analysis. *American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA) Journal*, 13(8): 995-1006, 1974.
134. R. R. Craig, C.-J. Chang. A review of substructure coupling methods for dynamic analysis. *NASA Langley Research Center Advances in Engineering Sciences*, 2, 1976.
135. R. R. Craig. *Structural Dynamics, an introduction to Computer Methods*, Wiley, 1981.
136. R. R. Craig. Coupling of Substructures for Dynamic Analyses, An Overview. In *Proceedings of AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference and Exhibit*, 1573-1584, 2000.
137. R. Ohayon, C. Soize. Clarification about Component Mode Synthesis Methods for Substructures with Physical Flexible Interfaces. Review Paper, *International Journal of Aeronautical and Space Sciences*, 15(2): 113-122, 2014.

138. R. Ohayon, C. Soize, R. Sampaio. Variational-based reduced-order model in dynamic substructuring of coupled structures through a dissipative physical interface: Recent advances. *Archives of Computational Methods in Engineering*, Springer Verlag (Germany), 21(3): 321-329, 2014.
139. D. M. Tran. *Réduction de modèle en dynamique des structures et des systèmes couplés aéroélastiques*. Habilitation à diriger les recherches, Université Claude Bernard Lyon I, 2015.
140. D. M. Tran. Méthodes de synthèse modale mixtes. *Actes du Colloque National en Calcul des Structures*, Giens, Editions Hermès, 874-883, 1993.
141. T. Y. John. *Primer on the Craig-Bampton Method, An introduction to boundary node functions, base shake analyses, load transformation matrices, modal synthesis and much more*, 2000.
142. A. Ramani, C. E. Knight. Two-Step Component- Mode Synthesis for the Eigensolution of Large Systems. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 34(7): 1529-1525, 1996.
143. W.-H. Shyu, J. Gu, G. M. Hulbert, Z.-D. Ma. On the use of multiple quasi-static mode compensation sets for component mode synthesis of complex structures. *Finite Elements in Analysis and Design*, 35: 119-140, 2000.
144. J. K. Bennighof, M. F. Kaplan, M. B. Muller. Extending the Frequency Response Capabilities of Automated Multi-Level Substructuring. Structures. In *41st Structural Dynamics and Material Conference and Exhibit*, Atlanta, SA, USA, 2000.
145. A. Kropp, D. Heiserer. Efficient Broadband Vibro-Acoustic Analysis of Passenger Car Bodies Using a FEBased Component Mode Synthesis Approach. In *5th World Congress on Computational Mechanics (WCCM V)*. Vienna University of Technology, Austria, 2002.
146. D. J. Rixen. The dual Craig-Bampton method. In *Proceeding of the 21st International Modal Analysis Conference (IMAC-XXI)*, Kissimmee, Florida, 2003.
147. P. L. C. Van der Valk. *Model Reduction & Interface Modeling in Dynamic Substructuring, Application to a multi-megawatt wind turbine*. MSc. Thesis, 2010.
148. K.-J. Bathe, J. Dong. Component mode synthesis with subspace iterations for controlled accuracy of frequency and mode shape solutions. *Computers & Structures*, 139: 28-32, 2014.
149. J.-G. Kim, K.-H. Lee, P.-S. Lee. Estimating relative eigenvalue errors in the Craig-Bampton method. *Computers & Structures*, 139: 54-64, 2014.
150. Y. Liang, H. Lee, S. Lim, W. Lin, K. Lee, C. Wu. Proper orthogonal decomposition and its applications—part I: Theory. *Journal of Sound and Vibration*, 252(3): 527-544, 2002.
151. G. Kerschen, J. Golinval. Physical interpretation of the proper orthogonal modes using the singular value decomposition. *Journal of Sound and Vibration*, 249(5): 849-865, 2002.
152. G. Kerschen, J. C. Golinval, A. F. Vakakis, L. A. Bergman. The Method of Proper Orthogonal Decomposition for Dynamical Characterization and Order Reduction of Mechanical Systems, An Overview. *Nonlinear Dynamics*, 41: 147-169, 2005.
153. F. A. Lulf, D.-M. Tran, R. Ohayon. Reduced bases for nonlinear structural dynamic systems: A comparative study. *Journal of Sound and Vibration*, 332(3): 897-921, 2013.
154. U. Kirsch. Combined approximations - a general reanalysis approach for structural optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 20: 97-106, 2000.
155. U. Kirsch, M. Bogomolni, I. Sheinman. Efficient procedures for repeated calculations of the structural response using combined approximations. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 32: 435-446, 2006.
156. M. Guedri, T. Weisser, N. Bouhaddi. Reanalysis of nonlinear structures by a reduction method of combined approximations. In *10th International Conference on Computational Structures Technology (CST 2010)*, Valencia, Spain, 2010.
157. Y. Gerges, E. Sadoulet-Reboul, M. Guedri, M. Ouisse, N. Bouhaddi. Réduction de modèles dynamiques non-linéaires en grands déplacements - Application aux plaques minces. *20^{ème} Congrès Français de Mécanique*, Besançon, France, 2011.
158. R. K. Kapania, C. Byun. Reduction methods based on eigenvectors and Ritz vectors for nonlinear transient analysis. *Computational Mechanics*, 11: 65-82, 1993.
159. J. Dickens. A critique of mode acceleration and modal truncation augmentation methods for modal response analysis. *Computer & Structures*, 6: 985-998, 1997.

160. E. Balmès. Parametric families of reduced finite element models, Theory and applications. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 10(4): 381-394, 1996.
161. A. Bouazzouni, G. Lallement, S. Cogan. Selecting a Ritz basis for the reanalysis of the frequency response functions of modified structures. *Journal of Sound and Vibration*, 199(2): 309-322, 1997.
162. E. Balmès. Optimal Ritz Vectors for Component Mode Synthesis Using the Singular Value Decomposition. *American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA) Journal*, 34(6), 1996.
163. D. J. Rixen. High Order Static Correction Modes for Component Mode Synthesis. In *5th World Congress on Computational Mechanics*, Vienna, Austria, 2002.
164. G. Masson, B. Ait Brik, S. Cogan, N. Bouhaddi. Component mode synthesis (CMS) based on an enriched Ritz approach for efficient structural optimization. *Journal of Sound and Vibration*, 296: 845-860, 2006.
165. A. M. G. De Lima, A. R. Da Silva, D. A. Rade, N. Bouhaddi. Component mode synthesis combining robust enriched Ritz approach for viscoelastically damped structures. *Engineering Structures*, 32: 1479-1488, 2010.
166. M.-L. Bouazizi, M. Guedri, N. Bouhaddi. Robust component modal synthesis method adapted to the survey of the dynamic behaviour of structures with localised non-linearities. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 20: 131-157, 2006.
167. Y. Gerges. *Méthodes de réduction de modèles en vibroacoustique non-linéaire*. Thèse de doctorat, Université de Franche-Comté, 2013.
168. D. A. Perdahcioglu, M. H. M. Ellenbroek, A. De Boer. A hybrid design optimization method using enriched Craig-Bampton approach. In *the 16th International Congress on Sound and Vibration ICSV16*, Krakow, Poland, 2009.
169. O. Thomas, S. Nezamabadi, J.-F. Deü. Calcul de vibrations non-linéaires de micro/nano structures piézoélectriques stratifiées par modèles réduits avec correction quasi-statique. *11^{ème} Colloque National en Calcul des Structures*, France, 2013.
170. M. Guedri, N. Bouhaddi, R. Majed. Reduction of the stochastic finite element models using a robust dynamic condensation method. *Journal of Sound and Vibration*, 297: 123-45, 2006.
171. L. Hinke, F. Dohnal, B. R. Mace, T. P. Waters, N. S. Ferguson. Component mode synthesis as a framework for uncertainty analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 324: 161-178, 2009.
172. D. Sarsri, L. Azrar, A. Jebbouri, A. El Hami. Component mode synthesis and polynomial chaos expansions for stochastic frequency functions of large linear FE models. *Computers & Structures*, 89: 346-356, 2011.
173. M. Raisee, D. Kumar, C. Lacor. Stochastic model reduction for polynomial chaos expansion using proper orthogonal decomposition. In *Proceeding of the 6th Chaotic Modeling and Simulation International Conference*, 4, 615-623, 2013.
174. G. Weickum, M. S. Eldred, K. Maute. A multi-point reduced-order modeling approach of transient structural dynamics with application to reliability-based design optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 38(6): 599-611, 2009.
175. K. Maute, G. Weickum, M. Eldred. A reduced-order stochastic finite element approach for design optimization under uncertainty. *Structural Safety*, 31: 450-459, 2009.
176. Gaurav, S. F. Wojtkiewicz, E. A. Johnson. Efficient uncertainty quantification of dynamical systems with local nonlinearities and uncertainties. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 26: 561-569, 2011.
177. R. S. Motta, Afonso S. M. B., P. B. Lyra, R. B. Willmersdorf. Development of a computational efficient tool for robust structural optimization. *Engineering Computations*, 32 (2): 258-288, 2015.
178. A. Llau, J. Baroth, L. Jason, F. Dufour. Condensed SFEs for nonlinear mechanical problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 309: 434-452, 2016.
179. K. Chikhaoui, N. Bouhaddi, N. Kacem, M. Guedri, M. Soula. Uncertainty quantification/propagation in nonlinear models: robust reduction - generalized polynomial chaos. *Accepted for publication in Engineering Computations*, 2016.
180. K. Chikhaoui, N. Bouhaddi, N. Kacem, M. Guedri, M. Soula. Uncertainties propagation through robust reduced model. In *Proceeding of the 6th Conference on Design and Modeling of Mechanical Systems (CMSM'2015)*, 537-544, Hammamet, Tunisia, 2015.

181. K. Chikhaoui, N. Kacem, N. Bouhaddi, M. Guedri. Uncertainty Propagation Combining Robust Condensation and Generalized Polynomial Chaos Expansion. *Model Validation and Uncertainty Quantification, 3: Proceedings of the 33rd International Modal Analysis Conference (IMAC-XXXIII), A Conference and Exposition on Structural Dynamics: 225-233*, Orlando, Florida, USA, 2015.
182. K. Chikhaoui, N. Bouhaddi, N. Kacem, M. Guedri, M. Soula. Low cost metamodel for robust design of periodic nonlinear coupled micro-systems. In Proceeding of the The 3rd International Conference on Structural Nonlinear Dynamics and Diagnosis (CSNDD'2016), Marrakesh, Morocco, 2016.
183. N. Kacem, J. Arcamone, F. Perez-Murano, S. Hentz. Dynamic range enhancement of nonlinear nanomechanical resonant cantilevers for high sensitive NEMS gas/mass sensors applications. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 20(4): 045023, 2010.
184. M. Liu, K. Maute, D. M. Frangopol. Multi-objective design optimization of electrostatically actuated microbeam resonators with and without parameter uncertainty. *Reliability Engineering and System Safety*, 92(10): 1333-1343, 2007.
185. A. H. Nayfeh, M. I. Younis, E. M. Abdel-Rahman. Reduced-order models for MEMS applications. *Nonlinear Dynammmics*, 41 : 211-236, 2005.
186. A. Lazarus, O. Thomas, J.-F. Deü. Finite elements reduced order models for nonlinear vibrations of piezoelectric layered beams with applications to NEMS. *Finite Elements in Analysis and Design*, 49(1): 35-51, 2012.
187. N. Kacem, S. Baguet, L. Duraffourg, G. Jourdan, R. Dufour, S. Hentz. Overcoming limitations of nanomechanical resonators with simultaneous resonances. *Applied Physics Letters*, 107(7): 073105, 2015.
188. L. Brillouin. *Wave Propagation in Periodic Structures: Electric Filters and Crystal Lattices*. Dover Publications, 1953.
189. D. J. Mead. Wave propagation in continuous periodic structures: research contributions from Southampton, 1964-1995. *Journal of Sound and Vibration*, 190(3): 495-524, 1996.
190. D. Duhamel, B. R. Mace, M. J. Brennan. Finite element analysis of the vibrations of waveguides and periodic structures. *Journal of Sound and Vibration*, 294: 205-220, 2006.
191. A. L. Goldstein, J. R. F. Arruda, P. B. Silva, R. Nascimento. Building Spectral Element Dynamic Matrices Using Finite Element Models of Waveguide Slices. In *Proceedings of the The 24th International Conference on Noise and Vibration engineering (ISMA2010) and the 3rd International Conference on Uncertainty in Structural Dynamics (USD2010)*, Leuven, Belgium, 2010.
192. F. Casadei, K. Bertoldi. Wave propagation in beams with periodic arrays of airfoil-shaped resonating units. *Journal of Sound and Vibration*, 333: 6532-6547, 2014.
193. G. Gosse, C. Pézerat, F. Bessac. Periodic assembly of multi-coupled beams: Wave propagation and natural modes. *Acoustics 08 Conference*, Paris, 2008.
194. M. Collet, M. Ouisse, M. Ruzzene, M. N. Ichchou. Floquet–Bloch decomposition for the computation of dispersion of two-dimensional periodic, damped mechanical systems. *International Journal of Solids and Structures*, 48: 2837-2848, 2011.
195. C. Droz, C. Zhou, M. N. Ichchou, J.-P. Lainé. A hybrid wave-mode formulation for the vibro-acoustic analysis of 2D periodic structures. *Journal of Sound and Vibration*, 363: 285-302, 2016.
196. G. Chakraborty, A. K. Mallik. Dynamics of a weakly non-linear periodic chain. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 36(2): 375-389, 2001.
197. N. Boechler, C. Daraio, R. K. Narisetti, M. Ruzzene, M. J. Leamy. Analytical and experimental analysis of bandgaps in nonlinear one dimensional periodic structures. In *Tsung-Tsong Wu and Chien-Ching Ma, editors, IUTAM Symposium on Recent Advances of Acoustic Waves in Solids*, IUTAM Bookseries 26: 209-219. Springer Netherlands, 2010.
198. F. Georgiades, M. Peeters, G. Kerschen, J. C. Golinval, M. Ruzzene. Modal Analysis of a Nonlinear Periodic Structure with Cyclic Symmetry. *American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA) Journal*, 47 : 1014-1025, 2009.
199. A. H. Nayfeh. The response of multidegree-of-freedom systems with quadratic non-linearities to a harmonic parametric resonance. *Journal of Sound and Vibration*, 90(2): 237-244, 1983.

200. R. Lifshitz, M. C. Cross. Response of parametrically driven nonlinear coupled oscillators with application to micromechanical and nanomechanical resonator arrays. *Physical Review*, B 67: 134302, 2003.
201. R. Lifshitz, M. C. Cross. *Nonlinear Dynamics of Nanomechanical and Micromechanical Resonators*. Wiley, 2008.
202. D. Bitar, N. Kacem, N. Bouhaddi, M. Collet. Collective dynamics of periodic nonlinear oscillators under simultaneous parametric and external excitations. *Nonlinear Dynamics*, 82: 749-766, 2015.
203. S. Gutschmidt, O. Gottlieb. Nonlinear dynamic behavior of a microbeam array subject to parametric actuation at low, medium and large dc-voltages. *Nonlinear Dynamics*, 67(1): 1-36, 2012.
204. K. Manktelow, M. J. Leamy, M. Ruzzene. Multiple scales analysis of wave-wave interactions in a cubically nonlinear monoatomic chain. *Nonlinear Dynamics*, 63(1-2): 193-203, 2011.
205. K. Manktelow, R. K. Narisetti, M. J. Leamy, M. Ruzzene. Finite-element based perturbation analysis of wave propagation in nonlinear periodic structures. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 39(1-2): 32-46, 2013.
206. K. Manktelow, M. J. Leamy, M. Ruzzene. Weakly nonlinear wave interactions in multi-degree of freedom periodic structures. *Wave Motion*, 51: 886-904, 2014.
207. E. Andreassen, K. Manktelow, M. Ruzzene. Directional bending wave propagation in periodically perforated plates. *Journal of Sound and Vibration*, 335: 187-203, 2015.
208. F. Romeo, G. Rega. Periodic and localized solutions in chains of oscillators with softening or hardening cubic nonlinearity. *Meccanica*, 50(3): 721-730, 2015.
209. A. Marathe, A. Chatterjee. Wave attenuation in nonlinear periodic structures using harmonic balance and multiple scales. *Journal of Sound and Vibration*, 289(45): 871-888, 2006.
210. R. K. Narisetti, M. Ruzzene, M. J. Leamy. Study of wave propagation in strongly nonlinear periodic lattices using a harmonic balance approach. *Wave Motion*, 49: 394-410, 2012.
211. G. J. Kissel. *Localization in disordered periodic structures*. Thèse de doctorat, Massachusetts Institute of Technology, 1988.
212. C. Pierre. Weak and strong vibration localization in disordered structures: a statistical investigation, *Journal of Sound and Vibration*, 139(1): 111-132, 1990.
213. P. D. Cha, C. Pierre. A statistical investigation of the forced response of finite\ nearly periodic assemblies. *Journal of Sound and Vibration*, 203(1): 158-168, 1997.
214. R. M. Koch. Structural Dynamics of Large Space Structures Having Random Parametric Uncertainties. *International Journal of Acoustics and Vibration*, 8(2): 95-103, 2003.
215. J. A. Marlin. Periodic motions of coupled simple pendulums with periodic disturbances. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 3: 439-447, 1968.
216. R. Khomeriki, J. Leon. Tristability in the pendula chain. *Physical Review E*, 78: 057202, 2008.
217. A. Jallouli, N. Kacem, N. Bouhaddi. Nonlinear dynamics of a 2D array of coupled pendulums under parametric excitation. In *5th ECCOMAS Thematic Conference on Computational Methods in Structural Dynamics and Earthquake Engineering (COMPdyn 2015)*, 8, 2015.
218. B. Cochelin. A path-following technique via an asymptotic-numerical method. *Computers & Structures*, 53: 1181-1192, 1994.
219. P. Vannucci, B. Cochelin, N. Damil, M. Potier-Ferry. An asymptotic-numerical method to compute bifurcating branches. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 41(8): 1365-1389, 1998.
220. *Manlab 2.0, an interactive continuation software*. (last viewed 3/16/2011) Software written by S. Karkar, R. Arquier, B. Cochelin, C. Vergez, O. Thomas and A. Lazarus.
221. A. Jallouli, N. Kacem, N. Bouhaddi. Stabilization of solitons in coupled nonlinear pendulums with simultaneous external and parametric excitations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 42: 1-11, 2017.
222. D. Bitar, N. Kacem, N. Bouhaddi. Multi-mode solutions in a periodic array of coupled nonlinear pendulums under primary resonance. In *Proceeding of the 11th International Conference on Engineering Vibration*, Ljubljana, Slovenia, 2015.
223. A. A. Tjavaras, M. S. Triantafyllou. Non-linear response of two disordered pendula. *Journal of Sound and Vibration*, 190(1) : 65-76, 1996.

224. N. V. Alexeeva, I. V. Barashenkov, G. P. Tsironis. Impurity-induced stabilization of solitons in arrays of parametrically driven nonlinear oscillators. *Physical Review Letters*, 84(14), 2000.
225. X. Hai-Quing, T. Yi. Parametrically driven solitons in a chain of nonlinear coupled pendula with an impurity. *Chinese Physics Letters*, 23(6): 15-44, 2006.
226. W. Chen, B. Hu, H. Zhang. Interactions between impurities and nonlinear waves in a driven nonlinear pendulum chain. *Physical Review Letters*, 64: 134302, 2002.
227. Y. Zhu, W. Chen, L. Lu. Experiments on the interactions between impurities and solitary waves in lattice model. *Science in China (Series G)*, 46(5), 2003.
228. J. Kevorkian, J. D. Cole. *Multiple scale and singular perturbation methods*. Springer, 1996.
229. C. M. Bender, S. A. Orszag. *Advanced mathematical methods for scientists and engineers*. Springer, 1999.
230. A. H. Nayfeh. *Perturbation methods*. Wiley-VCH Verlag, 2004.
231. M. V. Bartuccelli, G. Gentile, K. V. Georgiou. On the Dynamics of a Vertically Driven Damped Planar Pendulum. *In Proceeding of The Royal Society A*, 457: 3007-3022, 2001.
232. H. W. C. Kozinsky, I. Postma, A. Kogan, O. Husain, M. L. Roukes. Basins of attraction of a nonlinear nanomechanical resonator. *Physical Review Letters*, 99(20), 2007.
233. I. Sliwa, K. Grygiel. Periodic orbits, basins of attraction and chaotic beats in two coupled kerr oscillators. *Nonlinear Dynamics*, 67(1): 755-765, 2012.
234. L. Ruzziconi, M. I. Younis, L. Stefano. Multistability in an electrically actuated carbon nanotube: a dynamical integrity perspective. *Nonlinear Dynamics*, 74(3): 533-549, 2013.
235. J. A. Wright, J. H. B. Deane, M. Bartuccelli, G. Gentile. Basins of attraction in forced systems with time-varying dissipation. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 29: 72-87, 2015.

Résumé

L'analyse dynamique des structures de grandes dimensions incluant de nombreux paramètres incertains et des non-linéarités localisées ou réparties peut être numériquement prohibitive. Afin de surmonter ce problème, des modèles d'approximation peuvent être développés pour reproduire avec précision et à faible coût de calcul la réponse de la structure.

L'objectif de la première partie de ce mémoire est de développer des modèles numériques robustes vis-à-vis des modifications structurales (non-linéarités localisées, perturbations ou incertitudes paramétriques) et « légers » au sens de la réduction de la taille. Ces modèles sont construits, selon les approches de condensation directe et par synthèse modale, en enrichissant des bases de réduction tronquées, modale et de Craig-Bampton respectivement, avec des résidus statiques prenant compte des modifications structurales. Pour propager les incertitudes, l'accent est mis particulièrement sur la méthode du chaos polynomial généralisé. Sa combinaison avec les modèles réduits ainsi obtenus permet de créer des métamodèles mono et bi-niveaux, respectivement. Les deux métamodèles proposés sont comparés à d'autres métamodèles basés sur les méthodes du chaos polynomial généralisé et du Latin Hypercube appliquées sur des modèles complets et réduits. Les métamodèles proposés permettent d'approximer les comportements structuraux avec un coût de calcul raisonnable et sans perte significative de précision.

La deuxième partie de ce mémoire est consacrée à l'analyse dynamique des structures périodiques non-linéaires en présence des imperfections : perturbations des paramètres structuraux ou incertitudes paramétriques. Deux études : déterministe ou stochastique, respectivement, sont donc menées. Pour ces deux configurations, un modèle analytique discret générique est proposé. Il consiste à appliquer la méthode des échelles multiples et la méthode de perturbation pour résoudre l'équation de mouvement et de projeter la solution obtenue sur des modes d'ondes stationnaires. Le modèle proposé conduit à un ensemble d'équations algébriques complexes couplées, fonctions du nombre et des positions des imperfections dans la structure. La propagation des incertitudes à travers le modèle ainsi construit est finalement assurée par les méthodes du Latin Hypercube et du chaos polynomial généralisé. La robustesse de la dynamique collective vis-à-vis des imperfections est étudiée à travers l'analyse statistique de la dispersion des réponses fréquentielles et des bassins d'attraction dans le domaine de multistabilité. L'étude numérique montre que la présence des imperfections dans une structure périodique renforce sa non-linéarité, élargit son domaine de multistabilité et génère une multiplicité de branches multimodale.

Mots clés : modèles numériques, incertitudes paramétriques, robustesse, analyse stochastique, chaos polynomial, réduction de modèle, non-linéarités, structures périodiques, dynamique collective, solutions multimodales, bassins d'attraction

Abstract

Dynamic analysis of large scale structures including several uncertain parameters and localized or distributed nonlinearities may be computationally unaffordable. In order to overcome this issue, approximation models can be developed to reproduce accurately the structural response at a low computational cost.

The purpose of the first part of this thesis is to develop numerical models which must be robust against structural modifications (localized nonlinearities, parametric uncertainties or perturbations) and reduce the size of the initial problem. These models are created, according to the direct condensation and the component mode synthesis, by enriching truncated reduction modal bases and Craig-Bampton transformations, respectively, with static residual vectors accounting for the structural modifications. To propagate uncertainties through these first-level and second-level reduced order models, respectively, we focus particularly on the generalized polynomial chaos method. This methods combination allows creating first-level and second-level metamodells, respectively. The two proposed metamodells are compared to other metamodells based on the polynomial chaos method and Latin Hypercube method applied on reduced and full models. The proposed metamodells allow approximating the structural behavior at a low computational cost without a significant loss of accuracy.

The second part of this thesis is devoted to the dynamic analysis of nonlinear periodic structures in presence of imperfections: parametric perturbations or uncertainties. Deterministic or stochastic analyses, respectively, are therefore carried out. For both configurations, a generic discrete analytical model is proposed. It consists in applying the multiple scales method and the perturbation theory to solve the equation of motion and then on projecting the resulting solution on standing wave modes. The proposed model leads to a set of coupled complex algebraic equations, depending on the number and positions of imperfections in the structure. Uncertainty propagation through the proposed model is finally done using the Latin Hypercube method and the generalized polynomial chaos expansion. The robustness the collective dynamics against imperfections is studied through statistical analysis of the frequency responses and the basins of attraction dispersions in the multistability domain. Numerical results show that the presence of imperfections in a periodic structure strengthens its nonlinearity, expands its multistability domain and generates a multiplicity of multimodal branches.

Keywords : numerical models, parametric uncertainties, robustness, stochastic analysis, polynomial chaos, model reduction, nonlinearities, periodic structures, collective dynamics, multimodal solutions, basins of attraction

