



Surfaces de Cauchy polyédrales des espaces temps plats singuliers

Léo Brunswic

► To cite this version:

Léo Brunswic. Surfaces de Cauchy polyédrales des espaces temps plats singuliers. Géométrie différentielle [math.DG]. Université d'Avignon, 2017. Français. NNT : 2017AVIG0420 . tel-01818016

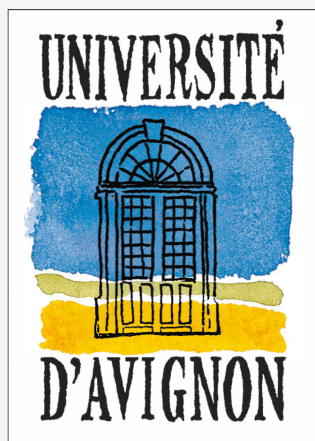
HAL Id: tel-01818016

<https://theses.hal.science/tel-01818016>

Submitted on 18 Jun 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



UNIVERSITÉ D'AVIGNON
ET DES PAYS DE VAUCLUSE

ÉCOLE DOCTORALE 536
« AGROSCIENCES
& SCIENCES »

LABORATOIRE DE
MATHÉMATIQUES
D'AVIGNON

LMA
301, rue Baruch de Spinoza, BP 21239
84911 AVIGNON Cedex 9, France
Tél. +33 (0)4 90 84 35 00
Fax +33 (0)4 90 84 35 01
<http://math.univ-avignon.fr>

Surfaces de Cauchy polyédrales des espaces-temps plats singuliers

THÈSE

pour obtenir le grade de

**Docteur en sciences
de l'université d'Avignon
et des Pays de Vaucluse**

Discipline :

Mathématiques

Présentée et soutenue le 22 décembre 2017 par

Léo Brunswic

Jury :

Thierry BARBOT

Directeur de thèse

Erwann DELAY

Examineur

François FILLASTRE

Rapporteur

Miguel SANCHEZ

Examineur

Marc TROYANOV

Rapporteur

Abdelghani ZEGHIB

Président du jury

À mon petit chat qui me suivra toujours partout où j'irai.

Si je me trouvais à la limite extrême du ciel, autrement dit sur la sphère des fixes, pourrais-je tendre au-dehors la main ou un bâton ?

Archytas de Tarente

Remerciements

Où serais-je aujourd'hui sans Thomas et Thierry ? Je l'ignore. Je faisais mes premiers pas dans le monde fascinant de la géométrie lorentzienne, Thomas a su me guider puis me soutenir alors que mes élèves tournoyaient autour de mon esprit abîmé tels des vautours guettant leur prochain repas. À un moment où les alliés étaient rares, Thierry a su me faire confiance. Je continue de découvrir chaque jour ce que Thierry a donné pour cette thèse : de son temps à son amitié, je me suis sentis propulsé par son idéal scientifique et humain.

Je remercie du fond du cœur François Fillastre et Marc Troyanov d'avoir accepté de rapporter cette thèse. Autant les travaux de François que de Marc ont été des sources d'inspiration continues pour cette thèse. Je suis heureux de la présence dans le jury de Miguel Sanchez et Abdelghani Zeghib. Zeghib a été le premier mathématicien à l'ENS de Lyon avec qui j'ai pu discuter de relativité et je garde un souvenir très agréable de chacune de nos rencontres. Sans avoir eu la chance de le rencontrer en personne, les travaux de Miguel Sanchez ont été une source d'inspiration pour cette thèse de part leur caractère systématique : peu de mathématiciens ont pris autant de temps que lui pour réfléchir aux subtilités de la notion d'espace-temps. Enfin, je suis heureux de voir Erwann Delay dans mon jury avec le regret de n'avoir pu échanger avec lui autant que je l'aurais souhaité au cours de ma thèse.

Jean Dieudonné décrit très bien ma jeune vie mathématiques : je suis né en 2003 au lycée de la Tourelle à Sarcelles, M. Amouyal succinctement d'abord puis (et surtout) Martial Leroy ont chéri le nourrisson que j'étais. De calcul en propriété et de théorème en théorie Martial n'a eu de cesse de me nourrir des mathématiques dont j'avais besoin. Mes professeurs de classe préparatoire M. Reliquet puis M. Duval ont alors pris le relais. Je dois avouer que même si l'incompatibilité de nos caractères a toujours généré des étincelles dans nos échanges, Yves Duval m'a beaucoup apporté : d'une part, il m'a donné l'opportunité inconcevable pour un enfant de banlieue de se retrouver dans l'une sinon la meilleure classe de mathématiques spéciales de France, d'autre part c'est à son contact que j'ai compris l'importance de la volonté et du travail. Ma puberté mathématique, l'âge des premiers théorèmes, c'est Marie-France Vignéras qui en fut le premier témoin. Je garde un souvenir particulier d'elle et si j'avais persisté en théorie des nombres, j'aurais aimé qu'elle encadre ma thèse. J'espère à présent de ne pas voir le feu sacré s'éteindre aussi vite que Dieudonné ne le prédit.

Au moment d'écrire ces lignes, j'ai déjà quitté Avignon pour rejoindre ma dulcinée. Avignon restera pour moi un lieu de bon vivre. Moussa, Chiara, Mohammed et Ahmed ont grandement participé à la bonne ambiance du laboratoire. J'ai une pensée spéciale pour Masoud et nos longues discussions mathématiques et politiques ainsi que pour Anna qui j'espère trouvera les ressources de continuer à faire fonctionner le séminaire des doctorants naissant que nous avons mis en place ensemble. J'ai aimé travailler avec Daniel, la liberté pédagogique que j'ai eu avec lui m'a permis de faire mes petites expériences. Marie-Claude a su me rappeler des mathématiques que j'avais oubliées et m'en apprendre de nouvelles ainsi que me pousser à m'investir dans la vie de l'université. Je me prépare à présent à rejoindre l'équipe de l'ERC arthUs et je me réjouis d'y retrouver l'équipe de Thomas Buchert. Certains sont déjà partis comme Alexandre, Boud et Fosca mais Frank, Martin et Pierre sont toujours là sans compter ceux que je rencontrerai bientôt.

Il me faut aussi remercier tous mes amis qu'ils soient ratons laveurs ou headbangers, que j'aie joué avec eux aux échecs ou au poker. Antoine un frère mathématique, Barthélémy avec qui la réflexion continuera je l'espère longtemps ; Tim, Arthur M, Bibiane, Adrien et tous les headbangers pour m'avoir fait découvrir le « death métal posé » ; Léo, Bertrand, Alice et Aurore pour leurs « A » privés ; Rémi qui m'a appris à faire du Coq ; Elie parce que les Lego c'est bien ; Arthur V avec qui l'agrégation a été un plaisir ; Esther pour son écoute mathématique ; Sébastien avec qui mes diagrammes ont toujours commuté ; Lauriane pour sa différence ; J3A sans qui le cinéma serait bien terne ; Eutrope pour le goût de la culture qu'il m'a donné ; Marie avec qui je partage mon goût pour le piano ; Alexandre et Etienne pour leurs opinions si différentes des miennes ; Nils pour ses histoires et Frédéric pour l'avoir supporté et avoir pris le temps de relire mon manuscrit ; Line et Lucas parce que 10 ans c'est long ; Xavier je ne sais pas pourquoi et enfin Pavel pour ses cocktails. Il ne manque que Vincent qui a fait un choix différent du mien.

Ma famille ancienne à qui je dois tout de ma culture à mon ambition en passant par mon humanité et ma famille nouvelle qui m'a chaleureusement ouvert cette porte vers l'inconnu. Puisse cette thèse être à la hauteur de l'amour que vous m'avez donné.

Table des matières

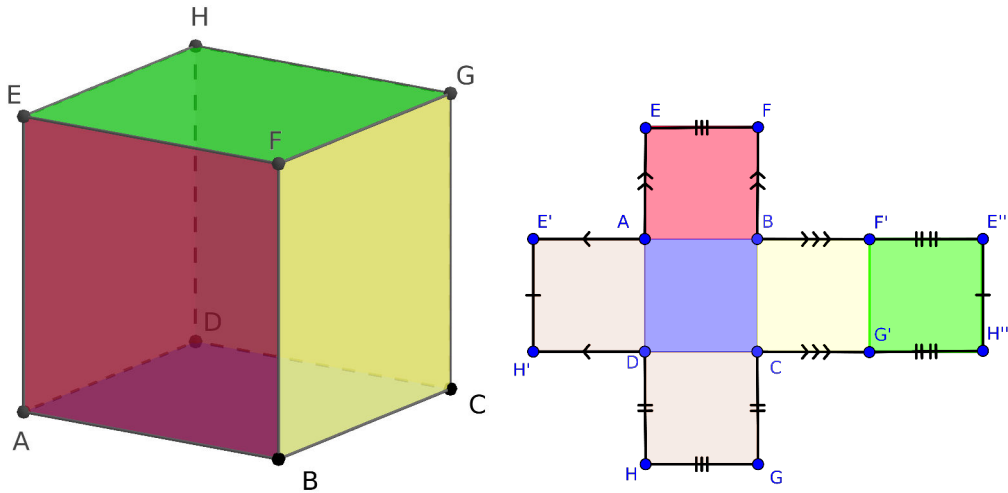
I	(G, X)-variétés singulières	18
1	Introduction aux (G, X)-variétés et (G, X)-variétés singulières	22
1.1	Des (G, X) -Atlas aux (G, X) -variétés	22
1.1.1	Préliminaires : Atlas	22
1.1.2	Structures analytiques et (G, X) -atlas	23
1.1.3	Catégorie des (G, X) -variétés	24
1.1.4	Quotients de (G, X) -structures	27
1.1.5	Théorème fondamental des (G, X) -variétés	28
1.1.6	Uniformisation de certaines (G, X) -structures riemanniennes complètes	33
1.1.7	$(\mathrm{SO}_0(1, 2), \overline{\mathbb{H}^2})$ -variétés compactes	36
1.1.8	Métriques semi-riemanniennes et (G, X) -structures	37
1.2	(G, X) -variétés singulières	38
1.2.1	Préliminaires (I) : connexité semi-locale	38
1.2.2	Préliminaires (II) : nappes	41
1.2.3	(G, X) -brouillard	42
1.2.4	Catégorie des (G, X) -variétés singulières	44
1.2.5	Développement, holonomie et quotient de (G, X) -variétés singulières	46
1.3	(G, X, X_A) -variétés	47
1.3.1	(G, X) -espaces modèles singuliers et (G, X, X_A) -atlas	47
1.3.2	Catégorie des X_A -variétés	48
1.3.3	Famille analytique d'espaces modèles	50
1.3.4	Foncteurs de régularisation	52
2	Espaces modèles	53
2.0.1	Suspension topologique	53
2.1	Singularités coniques euclidiennes et hyperboliques	54
2.1.1	$(\mathrm{SO}(2), \mathbb{S}^1)$ -variétés et $\mathbb{RP}^1$ -variétés	55
2.1.2	Voûte céleste dans $\mathbb{E}^2$ et $\overline{\mathbb{H}^2}$	56
2.1.3	Variétés singulières	57
2.1.4	$\mathbb{H}_{\geq 0}^2$ -variétés compacte et extension cuspidale	57
2.2	Singularités lorentziennes	59
2.2.1	Particules Massives et trous blancs BTZ extrêmes	59
2.2.2	Revêtement universel de l'espace modèle BTZ	62
2.2.3	Suspension de surfaces hyperboliques singulières	62
2.2.4	Analyticité	63
2.3	Constructions de (G, X) -variétés singulières	65
2.3.1	Collages de triangles euclidiens ou hyperboliques	66
2.3.2	Collages de cônes polygonaux futurs de l'espace de Minkowski	66

II	Espaces-temps globalement hyperboliques singuliers	68
3	Généralisations de théorèmes classiques aux espaces-temps plats singuliers, un détour par les espaces-temps topologiques	72
3.1	Espaces-temps topologiques et théorème de Geroch	72
3.1.1	Causalité et espaces-temps topologiques	73
3.1.2	Causalité engendrée et causalité des espaces temps-plats singuliers	74
3.1.3	Espaces-temps tarentin, topologie d’Alexandrov et causalité forte	78
3.1.4	Passé et futur continûment atteignable	79
3.1.5	Théorème de Geroch	82
3.2	Espace-temps plat singulier	86
3.2.1	Quelques propriétés causales des espaces-temps plats singuliers	87
3.2.2	Théorème de Geroch pour les espaces-temps plats singuliers	88
3.2.3	Quelques lemmes causaux complémentaires	89
3.2.4	Surface de Cauchy lisse : existence et propriétés	90
3.3	Théorème de Choquet-Bruhat-Geroch	93
3.3.1	Cauchy-plongement et extension de Cauchy	93
3.3.2	Existence et unicité de l’extension de Cauchy maximale : énoncé et idée de la preuve	94
3.3.3	Sous-extensions de Cauchy communes	95
3.3.4	Sur-extensions de Cauchy communes	97
3.3.5	Conclusion	103
3.4	Théorème de Mess et successeurs	103
3.4.1	Quotients globalement hyperbolique de domaines réguliers	105
3.4.2	Espace-temps $\mathbb{E}_A^{1,2}$ -maximaux	106
3.4.3	Structures marquées et espaces de modules	107
3.4.4	Une nouvelle preuve de la surjectivité de l’holonomie	111
4	Théorie des extensions BTZ	114
4.1	Extension BTZ	116
4.1.1	BTZ-extensions, définitions et exemples	116
4.1.2	Préliminaires	117
4.1.3	Extension BTZ maximale	121
4.1.4	Une remarque sur les extensions de Cauchy et BTZ successives	126
4.2	Cauchy-complétude et extension BTZ	126
4.2.1	Chirurgie de surfaces de Cauchy autour de BTZ	128
4.2.2	Cauchy-complétude sans BTZ	132
4.2.3	Cauchy-complétude et extensions BTZ	133
4.2.4	Preuve du théorème de l’extension BTZ Cauchy-complète	136
4.3	Extension BTZ explicite des espaces-temps plats Cauchy-complets	136
4.3.1	Exemple et domaine régulier augmenté	136
4.3.2	Fonctions temps sur un domaine régulier augmenté	138
4.3.3	Construction de l’extension BTZ maximale d’un domaine régulier	141
4.3.4	Extension BTZ maximale des espaces-temps plats Cauchy-complets absolument maximaux	143
4.4	Application : Extension $\mathbb{E}_0^{1,2}$ -maximale et théorème de Mess pour les espaces-temps avec BTZ	145
4.4.1	Espaces-temps $\mathbb{E}_0^{1,2}$ -maximaux	145
4.4.2	Théorème de Mess pour les espaces-temps Cauchy-compacts avec BTZ . . .	146

III Paramétrisations d'espaces-temps plats singuliers munis de surfaces polyédrales et théorème d'Alexandrov	148
5 Surface de Penner-Epstein et espaces temps espaces-temps BTZ	153
5.1 Surface de Penner-Epstein dans les espaces-temps BTZ	153
5.2 Suspension linéaire des surfaces localement euclidiennes	159
5.2.1 Cellulation de Delaunay	160
5.2.2 Suspension BTZ d'une $\mathbb{E}_{>0}^2$ -surface compacte	161
5.2.3 Espaces de modules décorés	162
6 Un théorème d'Alexandrov pour les espaces-temps plats singuliers radiants	164
6.1 Préliminaires : τ -suspension d'une surface localement euclidienne marquée	165
6.1.1 τ -Suspension d'une surface localement euclidienne	166
6.1.2 Plongement convexe	168
6.2 Triangulation de Delaunay pondérée et domaine des temps admissibles	170
6.2.1 Caractérisation locale de Q-convexité	171
6.2.2 Algorithme d'inversion	173
6.2.3 Convexité du domaine des temps admissibles	175
6.2.4 Compacité transverse du domaine des temps admissibles	179
6.3 Fonctionnelles d'Einstein-Hilbert	183
6.3.1 Préliminaires : angles lorentziens et formule de Schläfli	183
6.3.2 Définition et différentielle des fonctionnelles d'Einstein-Hilbert	185
6.3.3 Convexité des fonctionnelles d'Einstein-Hilbert	186
6.4 Bord du domaine des temps admissibles	190
6.4.1 Plans d'appui du domaine des temps admissibles	190
6.4.2 Germes de cônes lorentziens	191
6.4.3 Une borne inférieure pour κ	193
6.5 Démonstration du théorème principal	200
References	206

Introduction générale

FIGURE 1 – Cube plongé dans $\mathbb{E}^3$ et patron de son bord



Considérons un cube C plongé dans $\mathbb{E}^3$ l'espace euclidien de dimension 3 et notons $\Sigma := \partial C$ son bord tel que sur la figure 1. D'une part, il est clair que Σ est une surface homéomorphe à la sphère de dimension 2 ; d'autre part, au voisinage d'un point p dans l'intérieur d'une des faces du cube, Σ est isométrique à un ouvert du plan euclidien. De plus, si l'on considère un point p sur l'intérieur d'une des arêtes du cube, un voisinage de p peut-être obtenu en recollant deux demi-disques : l'un sur la face à droite et l'autre sur la face à gauche de l'arête. Ainsi, un tel point p dans l'intérieur d'une arête admet également un voisinage isométrique à un ouvert du plan euclidien. Il est alors clair que Σ est naturellement dotée d'une structure de surface localement euclidienne singulière : Σ est une $\mathbb{E}_{>0}^2$ -surface. Enfin, les singularités coniques aux sommets du cube sont chacune d'angle $3\pi/2$ car il y a exactement 3 carrés adjacents à un sommet p chacun contribuant à hauteur de $\pi/2$ à l'angle conique en p .

Plus généralement, le bord Σ de n'importe quel polyèdre P compact convexe plongé dans $\mathbb{E}^3$ est homéomorphe à une sphère et est naturellement doté d'une structure de surface localement euclidienne à singularités coniques. Cependant, au voisinage d'un sommet, la surface Σ est un cône convexe plongé dans $\mathbb{E}^3$ et on peut démontrer qu'un tel cône ne peut avoir de singularité conique d'angle inférieur à 2π . Pour résumer :

Proposition. *Soit P un polyèdre compact convexe de $\mathbb{E}^3$, le bord ∂P est une surface localement euclidienne à singularités coniques d'angle inférieur à 2π et homéomorphe à la sphère $\mathbb{S}^2$.*

Un théorème classique d'Alexandrov [Ale42] énonce que cette construction est bijective : non seulement tout polyèdre compact convexe est totalement déterminé à isométrie de $\mathbb{E}^3$ près par la métrique de son bord près mais également toute une surface localement euclidienne singulière Σ homéomorphe à la sphère $\mathbb{S}^2$ et dont les singularités coniques sont toutes d'angle inférieur à 2π est isométrique au bord d'un polyèdre convexe P .

Théorème ([Ale42]). *Soit Σ une surface localement euclidienne à singularités coniques d'angle inférieur à 2π et homéomorphe à la sphère $\mathbb{S}^2$, il existe un polyèdre compact convexe P dans $\mathbb{E}^3$ tel que ∂P est isométrique à Σ . De plus, si P_1 et P_2 sont deux tels polyèdres, alors il existe une isométrie ϕ de $\mathbb{E}^3$ telle que $\phi P_1 = P_2$.*

Ce théorème inclut en particulier le cas d'un polyèdre aplati qui correspond à un polygone convexe collé à une copie de lui-même bord à bord. La méthode proposée par Alexandrov est très générale et il l'utilise pour redémontrer plusieurs théorèmes historiques attribués à Cauchy et Minkowski [Ale05] ainsi que des généralisations aux polyèdres convexes de $\mathbb{H}^3$ et $\mathbb{S}^3$ dont le bord est alors respectivement une surface hyperbolique à singularités coniques et une surface sphérique à singularités coniques. Cependant, sa démonstration reposant sur le théorème d'invariance du domaine, celle-ci n'est pas constructive dans le sens où elle ne permet pas d'en dériver une méthode efficace pour construire un polyèdre dont le bord a une métrique donnée. Si Volkov publia une série d'articles dans les années 60 développant des méthodes constructives [VP71], le sujet n'a connu un nouvel élan qu'au début des années 2000 sous l'impulsion de Bobenko, Fillastre, Izmistiev et Schlenker qui démontrent alors une série de généralisations. D'une part, Izmistiev et Bobenko [BI08] proposent une nouvelle démonstration du théorème d'Alexandrov complètement constructive en considérant une fonctionnelle d'Einstein-Hilbert (ou fonctionnelle de courbure scalaire). Izmistiev applique subséquemment la même méthode à un problème similaire pour des polyèdres convexes à bord [Izm08]. D'autre part, Hodgson et Rivin [HR93] puis Schlenker [Sch06] démontrent des généralisations faisant intervenir des surfaces d'angles coniques supérieurs à 2π et plongées dans des espaces lorentziens.

Pour comprendre comment cela est possible, considérons l'espace de Minkowski de dimension 3,

$$\mathbb{E}^{1,2} := (\mathbb{R}^3, -dz^2 + dx^2 + dy^2),$$

et un cône de révolution $\mathcal{C}$ dans $\mathbb{E}^{1,2}$ convexe ($\mathbb{E}^{1,2}$ est un espace affine, la notion de convexité est donc la même que pour l'espace euclidien usuel); enfin supposons que la métrique semi-riemannienne ambiante induise une métrique riemannienne sur $\mathcal{C}$. De la même manière que pour un cône dans $\mathbb{E}^3$, l'angle conique est égal à la longueur de la courbe de Jordan donnée par l'intersection de $\mathcal{C}$ avec la sphère unité. La différence ici est que la sphère unité de $\mathbb{E}^{1,2}$ est $\mathbb{S}^{1,1} : "-t^2 + x^2 + y^2 = 1"$; cette surface est une hyperboloïde à une nappe (voir figure 2). La courbe $\gamma := \mathbb{S}^{1,1} \cap \mathcal{C}$ est alors un cercle horizontal de rayon $\cosh(\alpha)$ si les directions des rayons de $\mathcal{C}$ forment un angle α avec le plan horizontal. On remarque alors que plus le cône $\mathcal{C}$ se rapproche du cône lumière plus le rayon de ce cercle est grand. À l'inverse de la situation euclidienne, l'angle conique minimum (atteint lorsque le cône est un plan) est 2π mais n'est pas majoré. De manière générale, on peut démontrer que l'angle conique d'un cône convexe dans $\mathbb{E}^{1,2}$ est toujours plus grand que 2π . Cette propriété est purement locale et donc, de manière générale, toute surface plongée dans une variété lorentzienne M de dimension 3 de manière $\mathcal{C}^1$ par morceau et totalement géodésique par morceau et dont les sommets sont convexes à des singularités coniques d'angle supérieur à 2π .

Le problème d'Alexandrov se pose alors dans un cadre plus général qui a été étudié récemment de manière systématique par Fillastre et Izmistiev.

Problème. *Soit Σ une surface fermée de genre g munie d'une métrique singulière de courbure $K \in \{-1, 0, 1\}$ dont les singularités coniques sont toutes d'angle plus grand que 2π (cas $\varepsilon = -$) ou toutes d'angle plus petit que 2π (cas $\varepsilon = +$). On note X_K^ε l'espace modèle de courbure K riemannien si $\varepsilon = +$ et lorentzien si $\varepsilon = -$.*

Existe-t-il un polyèdre convexe P de X_K^ε dont le bord est isométrique au revêtement universel de Σ ? Ce polyèdre, s'il existe, est-il de plus unique?

Soit (Σ, S) une surface marquée de genre g , munie d'une métrique de courbure constante K et donc les singularités coniques sont d'angles θ_σ pour $\sigma \in S$. La formule de Gauss-Bonnet donne alors une restriction sur les cas possibles :

$$\sum_{\sigma \in S} (2\pi - \theta_\sigma) + \text{Aire}(\Sigma)K = (4 - 4g)\pi = 2\pi\chi(\Sigma).$$

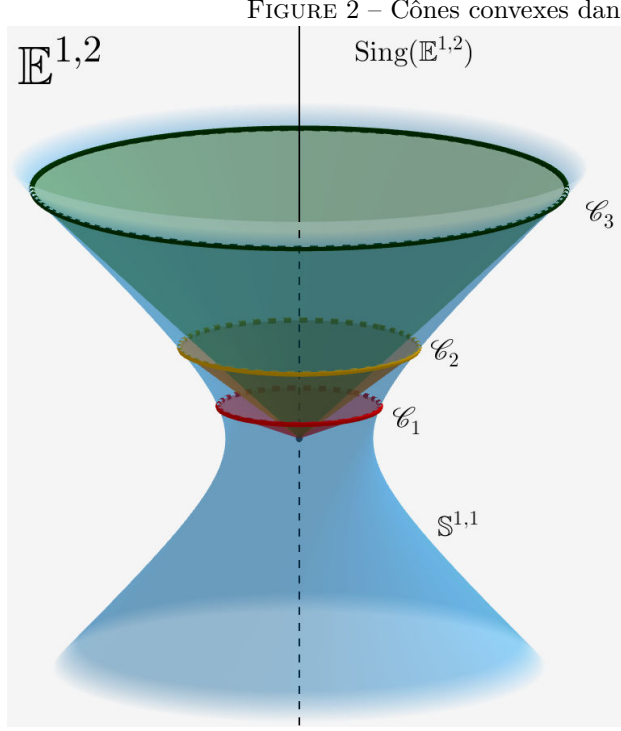


FIGURE 2 – Cônes convexes dans l'espace de Minkowski

Dans les coordonnées cylindriques (t, r, θ) , les cônes $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ respectivement d'angle conique θ_1, θ_2 et θ_3 sont de la forme

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_i & : t = \sinh(\alpha_i)r \\ \theta_i & = \cosh(\alpha_i)\kappa \end{aligned}$$

En particulier,

$$\lim_{\alpha_3 \rightarrow +\infty} \theta_3 = +\infty$$

Par exemple, il n'existe pas de surface localement euclidienne singulière homéomorphe à la sphère et dont les angles coniques sont tous plus grand que 2π : le cas $g = K = 0$ et $\varepsilon = -$ est impossible. Par ailleurs, l'unicité dans le cas général nécessite une contrainte supplémentaire d'holonomie linéaire. La réalisation du revêtement universel de Σ dans l'espace modèle $X = X_K^\varepsilon$ vient avec une représentation du groupe fondamental $\rho : \pi_1(\Sigma) \rightarrow \text{Isom}(X)$ sous l'action de laquelle le plongement de $\tilde{\Sigma}$ dans X est invariant. Dans le cas historique d'Alexandrov, cette représentation est triviale car la sphère est simplement connexe, dans le cas général cette représentation n'est pas triviale et en particulier dans le cas $g \geq 2, K = 0, \varepsilon = -$, un plongement peut venir avec un continuum de déformations d'holonomies différentes. C'est ce que suggèrent par exemple les théorèmes 27 et 28. Nous reproduisons 3 un tableau résumant les cas possibles et les références de leurs démonstrations,

FIGURE 3 – Généralisations du théorème d'Alexandrov [Fil10].

MD : Méthode de Déformation (non effective). MV : Méthode Variationnelle (effective). [Bru17] réfère à la présente thèse.

g	K	ε	MD	MV
0	-1	+	[Ale42]	[BI08]
0	0	+	[Ale05]	
0	1	+	[Ale05]	
0	1	-	[HR93]	
1	-1	+		[FI09]
1	1	-		[FI11]
≥ 2	-1	+	[Fil07]	[Bru17]
≥ 2	-1	-	[Fil11]	
≥ 2	0	-	[Fil11]	
≥ 2	1	-	[Sch06]	

Un point intéressant dans la méthode employée par Bobenko, Fillastre et Izmistiev est l'apparition naturelle d'espace singulier. Les détails de cette méthode seront développés dans le chapitre 6, cependant nous pouvons d'ores et déjà en expliquer les grandes lignes. Avant toute chose, l'holonomie du plongement que nous cherchons à construire étant linéaire, le polyèdre putatif a un centre O et donc les points marqués de Σ ont des « hauteurs » naturelles : leur distance à O (ou leur séparation temporelle si X_K^ε est lorentzien). De plus, le plongement induit une cellulation sur la surface Σ dont les sommets sont exactement les points marqués. L'objectif est alors de retrouver le couple (hauteur, cellulation) et de reconstruire le plongement cellule par cellule. Les grandes étapes de la méthodes alors sont les suivantes.

- I. Se donner un couple (hauteurs, triangulation) arbitraire. Les hauteurs à ce stade n'étant qu'une famille de nombres réels positifs chacun attaché à un point marqué.
- II. Pour chaque triangle T , le plonger dans l'espace modèle X_K^ε de sorte que les distances des sommets du triangle au point O prescrit sont exactement les hauteurs choisies. Chaque triangle donne ainsi une pyramide.
- III. Coller les pyramides de sorte à construire une X_K^ε -variété singulière M d'holonomie linéaire ainsi qu'un plongement $\iota : \Sigma \rightarrow M$ envoyant triangle sur base de pyramide.
- IV. Étudier des critères sur le couple (hauteur, triangulation) permettant de vérifier que le collage de deux pyramides est « convexe ». Étudier le domaine des hauteurs induisant un plongement convexe, ces hauteurs sont dites « admissibles ».
- V. Définir une fonctionnelle d'Einstein-Hilbert sur l'espace des hauteurs admissibles dont les points critiques induisent des collages des pyramides tels que la X_K^ε -variété obtenue est **régulière**. L'étudier et montrer qu'elle admet un unique point critique.
- VI. Par des théorèmes d'uniformisations, le revêtement universel $\widetilde{M}$ de la X_K^ε -variété M (construite avec un jeu critique de hauteurs pour la fonctionnelle d'Einstein-Hilbert) s'identifie à un domaine convexe de X_K^ε . On obtient ainsi un plongement de Σ dans X_K^ε qui est polyédral (c'est-à-dire le bord d'un polyèdre) muni d'une représentation d'holonomie du groupe fondamental.

Avant le présent travail, cette méthode n'avait pas encore été appliquée pour démontrer de manière effective le cas $(g, K, \varepsilon) = (\geq 2, 0, -)$ que Fillastre avait démontré dans sa thèse par une méthode de déformation similaire à celle d'Alexandrov ; c'était une des motivations initiales de ce travail.

La seconde motivation vient du fait que le cadre lorentzien est porté par des ambitions différentes provenant de la physique à la suite des travaux de Lorentz, Poincaré, Minkowski et d'Einstein.

L'espace de Minkowski est le premier exemple d'espace-temps, nous faisons un court détour pour le décrire plus précisément. L'espace de Minkowski de dimension $n+1$, noté $\mathbb{E}^{1,n}$, d'une part, est l'espace affine $\mathbb{R}^{n+1}$ de coordonnées nommées par convention $(t, x_1, \dots, x_n)$ et muni de la forme quadratique $Q(t, x_1, \dots, x_n) = -t^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2$. Supposons $n \geq 2$, le groupe d'isométrie linéaire $O(Q) \simeq O(1, n)$ comporte 4 composantes connexes contrairement au groupe d'isométrie linéaire de l'espace euclidien $O(n)$ qui n'en comporte que deux. Les deux composantes connexes de $O(n)$ correspondent, d'une part aux isométries préservant les deux orientations de $\mathbb{E}^n$, d'autre part aux isométries échangeant ces deux orientations. Le fait que $O(Q) \simeq O(1, n)$ comporte 4 composantes connexes est associé à l'existence de deux types d'orientations : l'orientation usuelle de $\mathbb{R}^{n+1}$ et l'orientation temporelle. Cette orientation temporelle s'obtient en différenciant les vecteurs $\vec{u} : (t, x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbb{E}^{1,n}$ non nuls selon que $Q(\vec{u})$ est positif, négatif ou nul. Si $Q(\vec{u}) > 0$ (resp. $Q(\vec{u}) < 0$, resp. $Q(\vec{u}) = 0$) on dit que $\vec{u}$ est de type espace (resp. de type temps, resp. de type lumière ou isotrope). Un vecteur non nul tel que $Q \leq 0$ est dit causal. Lorsque $n \geq 2$, l'ensemble des vecteurs causaux comporte deux composantes connexes, celles-ci sont préservées par deux composantes connexes de $O(1, n)$ et échangées par les deux autres. Une orientation temporelle

est le choix d'une composante connexe privilégiée de vecteurs causaux que nous appelons *vecteurs causaux futurs*, les vecteurs causaux de l'autre composante connexe sont appelés *vecteurs causaux passés*. Le choix d'une orientation temporelle induit deux relations d'ordres sur $\mathbb{E}^{1,n}$:

- la relation d'ordre causale : soient $x, y \in \mathbb{E}^{1,n}$, on dira que y est dans le futur causal de x et on notera $x \leq y$ si le vecteur $y - x$ est causal futur ;
- la relation d'ordre chronale : soient $x, y \in \mathbb{E}^{1,n}$, on dira que y est dans le futur chronologique de x et on notera $x \ll y$ si le vecteur $y - x$ est de type temps futur.

Ces deux relations d'ordre sont invariantes sous l'action du groupe des isométries affines de l'espace de Minkowski que l'on note $\text{Isom}(\mathbb{E}^{1,n})$. L'espace de Minkowski « physique » est alors le quadruplet

$$\mathbb{E}^{1,n} : (\mathbb{R}^{n+1}, Q, \leq, \ll).$$

Plus généralement, l'espace tangent d'une variété lorentzienne M s'identifie à l'espace de Minkowski, le choix d'une orientation temporelle sur M est un choix continu d'orientation temporelle sur chacun des espaces tangents de M . On rappelle qu'une variété lorentzienne est un couple (M, g) où M est une variété différentielle de dimension $n + 1$ et g un $(0,2)$ -tenseur symétrique non dégénéré de signature $(1, n)$. L'espace de de Sitter (ici plongée dans l'espace de Minkowski) $\mathbb{S}^{1,n} := \{x \in \mathbb{E}^{1,n} \mid Q(x) = 1\}$ est un exemple de variété lorentzienne. Sur une variété lorentzienne M muni d'une orientation temporelle on définit les courbes de classe $\mathcal{C}^1$ causales futures (resp. chronales) comme les courbes $c : I \rightarrow M$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que c' est un vecteur causal (resp. de type temps) futur. On peut alors définir deux relations de pré-ordre sur tout ouvert $\mathcal{U}$ de M :

- la relation causale : soient $x, y \in \mathcal{U}$, on dit que y est dans le futur causal de x dans $\mathcal{U}$ et on note $x \leq_{\mathcal{U}} y$ s'il existe une courbe causale future de $\mathcal{U}$ allant de x à y ;
- la relation chronale : soient $x, y \in \mathcal{U}$, on dit que y est dans le futur chronologique de x dans $\mathcal{U}$ et on note $x \ll_{\mathcal{U}} y$ s'il existe une courbe chronale future de $\mathcal{U}$ allant de x à y .

Un *espace-temps lorentzien* est alors un quadruplet

$$(M, g, \leq, \ll)$$

où M est une variété différentielle, g un tenseur métrique de signature $(1, n)$ et $\leq$ et $\ll$ les faisceaux de relations transitives induite par le choix d'une orientation temporelle. Dans un espace-temps lorentzien, on peut définir les courbes causales de classes $\mathcal{C}^0$ comme les courbes $c : I \rightarrow M$ continue localement strictement croissante. C'est-à-dire que pour tout ouvert $\mathcal{U}$ de M et tout intervalle $J \subset I$ tel que $c(J) \subset \mathcal{U}$, $c|_J : (J, \leq) \rightarrow (\mathcal{U}, \leq_{\mathcal{U}})$ est une fonction strictement croissante. Le fait que les deux relations $(\leq, \ll)$ ne soient pas des relations d'ordre en général est à la base de l'étude de la *hiérarchie causale* [MS08] des espaces-temps. Nous nous intéressons à trois degrés de cette hiérarchie : un espace-temps lorentzien M est

1. causal si $\leq_M$ est une relation d'ordre ;
2. fortement causal si aucune courbe causale inextensible ne revient une infinité de fois arbitrairement proche d'un point donné de M ;
3. globalement hyperbolique si M est causal et si l'espace des courbes causales allant d'un point p à un point q est compact pour la norme $\mathcal{C}^0$.

Revenons aux singularités qui apparaissent dans l'étape III ci-dessus, elles correspondent à une idéalisation des « particules massives » : une particule est idéalisée en la supposant ponctuelle. Dans les années 80-90, Deser, Jackiw et 't Hooft [DJ84, DJ88, DJtH84, tH88] ont commencé une étude systématique de la gravité en dimension 2+1 avec, entre autre, deux objectifs : calculer de manière plus efficace des solutions aux équations d'Einstein et construire un modèle jouet de gravitation quantique dont certaines propriétés pourraient être extrapolées au problème de la gravitation

quantique en dimension $3+1$. L'excellent livre de Carlip [Car98] décrit en détail ces travaux et leurs ambitions en physique des particules. Les espaces-temps considérés sont presque tous globalement hyperboliques. Par un théorème de Geroch [Ger70], de tels espaces-temps admettent une surface de Cauchy c'est-à-dire une hypersurface qui intersecte toutes les courbes causales inextensibles exactement une fois. 'T Hooft [tH93] utilise des surfaces de Cauchy polyédrales pour étudier la dynamique en dimension $2+1$. En effet, l'évolution d'une telle surface dans un espace-temps plat avec particules massives est plus facile à simuler numériquement que l'évolution d'une surface de Cauchy dans un espace-temps lorentzien arbitraire. Cela motive la problématique suivante.

Problème. *Quelles paramétrisations peut-on avoir des espaces-temps plats singuliers globalement hyperboliques ? Quelles paramétrisations peut-on avoir des espaces-temps plats singuliers munis d'une surface de Cauchy polyédrale convexe ?*

Il est remarquable que le théorème d'Alexandrov-Fillastre donne une réponse à un cas particulier de ce problème : les espaces-temps plats réguliers munis d'une surface de Cauchy polyédrale convexe à s sommets sont paramétrés par les surfaces localement euclidiennes à singularités coniques d'angle supérieur à 2π homéomorphe à une surface de genre deux ou plus. Par ailleurs, cette problématique soulève également la question des paramétrisations des espaces-temps admettant une surface de Cauchy sans en fixer une en particulier. Ce dernier problème semble plus simple et il s'avère être résolu en grande partie.

Un point de départ pour obtenir une telle paramétrisation est de remarquer que le plan hyperbolique $\mathbb{H}^2$ se plonge dans $\mathbb{E}^{1,2}$ comme la partie supérieure de l'hyperboloïde à deux nappes :

$$\mathbb{H}^2 : \{-t^2 + x^2 + y^2 = -1, \quad t > 0\}.$$

Le groupe des isométries du plan hyperbolique se réalise alors comme le groupe des isométries linéaires de l'espace de Minkowski : $\mathrm{SO}_0(1, 2)$. Le cône issu de l'origine et de base $\mathbb{H}^2$ est préservé par le groupe $\mathrm{SO}_0(1, 2)$. On peut alors faire agir n'importe quel groupe fuchsien Γ sur $\mathbb{H}^2$ et au lieu de quotienter simplement $\mathbb{H}^2$ par Γ , on peut faire agir Γ sur la totalité du cône (ouvert). De cette manière, l'action est propre totalement discontinue et le quotient du cône par Γ est un espace-temps régulier globalement hyperbolique : une fonction temps de Cauchy est donnée par la coordonnée t de Minkowski. On obtient alors une paramétrisation d'une famille d'espace-temps plats réguliers admettant une surface de Cauchy compacte (on dira Cauchy-compact) par l'espace de Teichmüller. Un théorème aujourd'hui très connu de Mess [Mes07] énonce que si cette paramétrisation ne parcourt pas tous les espaces-temps plats réguliers Cauchy-compact, on peut la prolonger au fibré tangent de l'espace de Teichmüller et obtenir une paramétrisation de tous les espaces-temps plats Cauchy-compacts.

Théorème ([Mes07, ABB⁺07]). *Soit $g \geq 2$, on note Teich_g l'espace de Teichmüller d'une surface fermée de genre g et $\mathcal{M}_g(\mathbb{E}^{1,2})$ l'espace des classes d'équivalence d'espaces-temps localement isométriques à $\mathbb{E}^{1,2}$ globalement hyperboliques Cauchy-compact maximaux. On a des bijections naturelles :*

$$T\mathrm{Teich}_g \xrightleftharpoons{\quad} \mathcal{M}_g(\mathbb{E}^{1,2})$$

Cette correspondance est particulièrement naturelle si l'on se représente l'espace de Teichmüller comme un ouvert de la variété des caractères. Un théorème classique d'uniformisation des surfaces localement hyperboliques énonce que toute surface hyperbolique compacte s'obtient comme le quotient du plan hyperbolique $\mathbb{H}^2$ par un groupe discret Γ d'isométries. L'espace de Teichmüller s'identifie alors naturellement aux classes de conjugaison de représentations marquées fidèles d'image discrète $\Gamma \rightarrow \mathrm{SO}_0(1, 2)$ où Γ est le groupe fondamental d'une surface fermée de genre g . Un vecteur tangent à l'espace de Teichmüller s'identifie alors à une application de Γ dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(1, 2)$ de $\mathrm{SO}_0(1, 2)$, la forme de Killing de cette dernière est de signature $(1, 2)$ et donc $\mathfrak{so}(1, 2)$ s'identifie à l'espace de Minkowski. Un calcul effectué par Goldman [Gol84] montre que l'espace tangent à la variété de caractère en une représentation ρ fidèle discrète est formé des cocycles pour l'action de Γ sur $\mathfrak{so}(1, 2)$ via $\mathrm{Ad} \circ \rho$. On peut alors se représenter un point du fibré tangent de l'espace de Teichmüller comme une représentation marquée $\Gamma \rightarrow \mathrm{Isom}(\mathbb{E}^{1,2})$ de

partie linéaire fidèle et discrète. On peut comprendre le théorème de Mess comme un théorème d'uniformisation des espaces-temps plats globalement hyperboliques Cauchy-compacts : si M est un espace-temps globalement hyperbolique Cauchy-compact maximal homéomorphe à $\Sigma \times \mathbb{R}$ avec Σ une surface fermée de genre g , alors le revêtement universel $\widetilde{M}$ de M s'identifie à un domaine convexe de $\mathbb{E}^{1,2}$ invariant sous l'action de la représentation d'holonomie $\pi_1(M) \rightarrow \text{Isom}(\mathbb{E}^{1,2})$ de M qui est de plus de partie linéaire fidèle et discrète.

Problématique et résultats

La problématique de cette thèse s'articule alors comme suit.

1. Qu'entend-t-on par espace-temps plat singulier ?
2. Peut-on penser un espace-temps plat singulier comme nous pensons un espace-temps plat non singulier ? C'est-à-dire, les raisonnements usuels sont-ils toujours valables et les théorèmes classiques sont-ils toujours vrais ?
3. Existe-t-il des variantes singulières du théorème de Mess ?
4. Existe-t-il des variantes singulières du théorème d'Alexandrov-Fillastre ?

Si les variétés riemanniennes singulières sont aujourd'hui bien connues et font parties du folklore du géomètre, la théorie des espaces-temps singuliers est aujourd'hui à la fois balbutiante et beaucoup plus riche. La première partie de ce mémoire est consacrée à l'étude axiomatique et à la construction de certains types d'espaces-temps plats singuliers. Les seuls points originaux de notre exposition est l'introduction et l'utilisation systématique de la notion de (G, X) -structure *presque partout*.

La deuxième question nous semble très riche car l'intuition d'espace-temps d'un physicien est à la fois très simple et très large : un espace-temps est un lieu où les notions de futurs et de passés ont un sens. Nous introduisons une notion d'*espace-temps topologique* très générale qui est aux variétés lorentziennes ce que les espaces topologiques sont aux variétés riemanniennes. Le troisième chapitre est consacré d'une part à la définition et l'étude élémentaire de ces espaces-temps topologiques qui est une proposition originale de cette thèse formalisant l'intuition physique ; et d'autre part à la démonstration de trois théorèmes classiques de la théorie des variétés lorentziennes globalement hyperboliques : le théorème de Geroch [Ger70], le théorème de Choquet-Bruhat-Geroch [CBG69] et le théorème de Seifert-Bernal-Sanchez [Sei77, BS03]. Barbot, Bonsante et Schlenker ont proposé une démonstration des deux premiers de ces théorèmes dans [BBS11] dans le cas des espaces-temps plats avec particules massives d'angle plus petit que 2π par une méthode de déformation conforme permettant de se ramener au théorème classique. Nous proposons une nouvelle preuve fondée sur une généralisation substantielle des techniques classiques telles qu'exposées dans [S05, Sbi15] avec l'introduction de la notion de *passé/futur continûment atteignable*. Nous démontrons ainsi ces théorèmes pour les espaces-temps admettant des particules massives et des singularités de type BTZ que l'on peut se représenter comme des particules massives d'angle nul. Les preuves ne sont exposées que pour les espaces-temps plats singuliers mais les techniques couvrent certainement un cadre plus général de variétés lorentziennes singulières si tant est que l'on définisse une notion de particule massive et de singularité BTZ dans ce cadre. La théorie des espaces-temps topologiques est très riche d'exemples et de contre-exemples pertinents mathématiquement et physiquement mais leur étude complète sort largement du cadre de cette thèse, nous espérons pouvoir continuer à développer cet outil à l'avenir.

La troisième question a fait l'objet de travaux récents de Bonsante et Seppi [BS16] pour les espaces-temps plats singuliers globalement hyperboliques Cauchy-compacts dont les particules massives sont d'angle plus petit que 2π et admettant une surface de Cauchy strictement convexe.

Théorème ([BS16]). *Soient $g, s \geq 0$ tels que $2g - 2 + s > 0$, Σ une surface fermée de genre g et soit $(\kappa_i)_{i \in [1, s]}$ tels que $\kappa_i \in]0, 2\pi[$ pour tout i . En notant $\text{Teich}_{g,s}$ l'espace de Teichmüller d'une surface de genre g à s points marqués et $\mathcal{M}_{g,s}(\mathbb{E}_{>0}^{1,2}, \kappa)$ l'espace des classes d'équivalence d'espaces-temps plats globalement hyperboliques Cauchy-compacts maximaux homéomorphes à $\Sigma \times \mathbb{R}$ comportant exactement s particules massives d'angles $\kappa_1, \dots, \kappa_s$. Nous avons des bijections naturelles :*

$$T\text{Teich}_{g,s} \xrightleftharpoons{\quad} \mathcal{M}_{g,s}(\mathbb{E}_{>0}^{1,2}, \kappa_1, \dots, \kappa_s) .$$

Le chapitre 4 est consacré à une étude des espaces-temps globalement hyperboliques comportant des singularités BTZ. Nous construisons une extension BTZ maximale qui est aux espaces-temps plats singuliers ce que la compactification des pointes est aux surfaces hyperboliques de volume fini.

Théorème ([Bru16a]). *Soit M un espace-temps plat singulier globalement hyperbolique. Il existe une extension BTZ maximale de M , celle-ci est unique à isomorphisme près.*

Notre résultat principal est que cette extension BTZ préserve des propriétés importantes (Cauchy-maximalité, Cauchy-complétude, absolue maximalité que nous redéfinirons) et permet de compactifier les surfaces de Cauchy sous des hypothèses supplémentaires.

Théorème ([Bru16a]). *Soit M un espace-temps plat globalement hyperbolique possiblement singulier mais sans singularité BTZ.*

M est Cauchy-maximal et Cauchy-complet si et seulement si son extension BTZ maximale est Cauchy-maximale et Cauchy-complète.

Comme application de cette théorie des extensions BTZ nous obtenons un théorème de Mess pour les espaces-temps plats singuliers Cauchy-compacts ne comportant que des singularités BTZ.

Théorème ([Bru16b]). *Soient $g, s \geq 0$ tels que $2g - 2 + s > 0$ et soit Σ une surface fermée de genre g . En notant $\text{Teich}_{g,s}$ l'espace de Teichmüller d'une surface de genre g à s points marqués et $\mathcal{M}_{g,s}(\mathbb{E}_0^{1,2})$ l'espace des classes d'équivalences d'espaces-temps plats globalement hyperboliques Cauchy-compacts maximaux homéomorphes à $\Sigma \times \mathbb{R}$ comportant exactement s lignes singulières BTZ. Nous avons des bijections naturelles :*

$$T\text{Teich}_{g,s} \xrightleftharpoons{\quad} \mathcal{M}_{g,s}(\mathbb{E}_0^{1,2}) .$$

Notre travail s'ajoute au résultat de Bonsante et Seppi sans pour autant le compléter : pour le moment aucun théorème ne traite les cas mixtes BTZ et particules massives. Il est possible que la théorie de extensions BTZ que nous développons permette de traiter le cas mixte BTZ-particules massives mais cette étude sort du cadre de la présente thèse et pourra faire l'objet de travaux ultérieurs.

La quatrième question occupera la troisième et dernière partie de cette thèse. Nous proposons deux réponses, la première réponse s'appuie sur notre étude des espaces-temps avec BTZ pour interpréter un travail de Penner [Pen87] sur l'espace de Teichmüller décoré comme un théorème d'Alexandrov pour les espaces-temps avec BTZ d'holonomie linéaire.

Théorème ([Pen87, Bru16b]). *Pour $g \in \mathbb{N}$ et $s \in \mathbb{N}^*$ tels que $2g - 2 + s > 0$, il existe des bijections naturelles :*

$$\widetilde{\mathcal{M}}_{g,s}^L(\mathbb{E}_0^{1,2}) \xrightleftharpoons{\quad} \mathcal{M}_{g,s}(\mathbb{E}_{>0}^2)$$

avec

-
- $\widetilde{\mathcal{M}}_{g,s}^L(\mathbb{E}_0^{1,2})$ l'espace des classes d'équivalence de $\mathbb{E}^{1,2}$ -espaces-temps Cauchy-compacts de genre g comportant exactement s lignes singulières BTZ, à holonomie linéaire munis d'une surface de Cauchy polyédrale convexe dont les sommets sont sur les lignes singulières;
 - $\mathcal{M}_{g,s}(\mathbb{E}_{>0}^2)$ l'espace des classes d'équivalence de $\mathbb{E}_{>0}^2$ -surfaces de genre g ayant exactement s points singuliers.

La seconde réponse est une généralisation des méthodes de Bobenko, Ismertz et Fillastre pour démontrer un théorème d'Alexandrov-Fillastre pour les espaces-temps plats singuliers Cauchy-compacts avec BTZ et particules massives radiants c'est-à-dire dont l'holonomie est linéaire et admettant une surface de Cauchy strictement convexe. Nous présentons un théorème de réalisation des surfaces localement euclidiennes singulières dont les angles sont tous plus grands que 2π comme bord de polyèdre convexe dans des espaces-temps plats de singularités d'angle plus petit que 2π et d'holonomie linéaire.

Théorème (B. 17). *Soit Σ une surface localement euclidienne fermée de genre g avec $s > 0$ points singuliers d'angle conique strictement supérieur à 2π . Pour tout $\bar{\kappa} \in [0, 2\pi]^s$, il existe un espace-temps plat singulier radiant comportant s lignes singulières d'angles $\kappa_1, \dots, \kappa_s$ et un polyèdre convexe $P \subset M$ dont le bord est isométrique à Σ .*

De plus, un tel couple (M, P) est unique à équivalence près.

La méthode devrait permettre de démontrer un résultat légèrement plus général sans contrainte sur les singularités coniques des surfaces localement euclidiennes. Le temps manquant, cette étude sera précisée pour la publication de ces résultats.

Première partie

(G, X) -variétés singulières

Introduction

Si vous avez construit des châteaux dans les nuages, votre travail n'est pas vain ; c'est là qu'ils doivent être. À présent, donnez-leurs des fondations.

Henry David Thoreau

Dans [Thu98], Thurston décrit un processus itératif lui permettant de définir une notion de « variété conique » (*cone-manifold* en anglais). Il part de l'exemple des variétés localement euclidiennes singulières, l'idée étant de procéder par induction sur la dimension en étudiant l'espace des rayons issus d'un point que nous avons choisi d'appeler *voûte céleste* (*link* en anglais). Le cas des variétés localement sphériques se fait comme suit.

- Une variété sphérique de dimension 1 sera toujours régulière, c'est-à-dire une $(\mathrm{SO}(2), \mathbb{S}^1)$ -variété.
- L'espace des rayons issus d'un point de $\mathbb{S}^2$ est $\mathbb{S}^1$ sur lequel agit $\mathrm{SO}(2)$. Il propose alors de considérer les surfaces munies d'un atlas identifiant des voisinages de chaque point avec la *suspension* d'une $(\mathrm{SO}(2), \mathbb{S}^1)$ -variété. La suspension d'une $(\mathrm{SO}(2), \mathbb{S}^1)$ -variété compacte S étant définie comme :

$$([0, \pi/2[\times \mathbb{S}^1 / \sim ; dr^2 + \sin(r)^2 ds_S^2) \quad \text{avec} \quad (r, \theta) \sim (r', \theta') \Leftrightarrow r = r' = 0$$

Nous obtenons alors une notion de $(\mathrm{SO}(3), \mathbb{S}^2)$ -variété singulière.

- L'espace des rayons issus d'un point de $\mathbb{S}^3$ est $\mathbb{S}^2$ sur laquelle agit $\mathrm{SO}(3)$. On peut de la même manière considérer les espaces topologiques séparés munis d'un atlas identifiant des voisinages de chaque point avec la *suspension* d'une $(\mathrm{SO}(3), \mathbb{S}^2)$ -variété singulière compacte.
- etc.

Plusieurs remarques méritent d'être faites. Premièrement, les singularités de dimension 2 obtenues par la construction ci-dessus ne sont autre que les singularités coniques. Elles peuvent être construites, par exemple, en considérant le bord d'un polyèdre convexe ou en collant des polygones bord à bord. Deuxièmement, une fois comprise la récurrence pour les variétés localement sphériques, il n'y a pas de difficultés à généraliser pour les variétés localement hyperboliques ou localement euclidiennes. La seule chose qui importe est de comprendre la géométrie d'un espace de rayons qui s'identifie à $(\mathrm{SO}(n+1), \mathbb{S}^n)$ pour les variétés riemanniennes de dimension $n+1$. Troisièmement, pour que l'espace topologique ainsi modélisé soit une variété, il faut supposer les voûtes célestes homéomorphes à $\mathbb{S}^n$. En effet, il existe des surfaces compactes localement sphériques singulières qui ne sont pas homéomorphes à $\mathbb{S}^2$: un exemple peut être obtenu en collant deux à deux les côtés d'un octogone régulier de $\mathbb{S}^2$.

Nous décidons d'introduire une terminologie des X_A -variétés pour contrôler les types des singularités que comportent les variétés que nous considérons. En effet, si les singularités riemanniennes de dimension 2 sont paramétrées par un simple paramètre (l'angle conique) et si les singularités riemanniennes de dimension 3 sont aisément décrites comme des collisions de lignes singulières coniques, la situation lorentzienne est autrement plus complexe : la voûte céleste d'un point d'une

variété lorentzienne de dimension $n + 1$ est $(\mathrm{SO}(1, n), \mathbb{HS}^n)$. D'une part, le groupe $\mathrm{SO}(1, n)$ n'agit pas transitivement sur $\mathbb{HS}^n$ qui comporte cinq orbites : deux orbites isomorphes à $\mathbb{H}^n$ notées $\mathbb{H}_+^n$ et $\mathbb{H}_-^n$ respectivement, deux orbites isomorphes à $\partial\mathbb{H}^n$ notées $\partial\mathbb{H}_+^n$ et $\partial\mathbb{H}_-^n$ respectivement et une orbite isomorphe à $\mathbb{S}^{1, n-1}$. La voûte céleste d'un point p de $\mathbb{HS}^2$ est donc $(\mathrm{SO}(2), \mathbb{S}^1)$ ou $(\mathrm{SO}(1, 1), \mathbb{HS}^1)$, ou bien $(\mathrm{Aff}(\mathbb{R}), \mathbb{RP}^1)$ selon que le point p est sur $\mathbb{H}_\pm^2$, $\mathbb{S}^{1, 1}$ ou $\mathbb{RP}_\pm^1$. D'autre part, la suspension d'une $(\mathrm{SO}_0(1, 2), \mathbb{HS}^2)$ -variété S peut être lorentzienne sans pour autant que S comporte une composante lorentzienne comme c'est le cas par exemple de

$$(\mathbb{R}_+ \times S / \sim, -dt^2 + r^2 ds_S^2)$$

avec S une surface hyperbolique compacte de genre $g \geq 2$. Par suite, apparaît naturellement une classification des singularités en fonction de la *Causalité*, c'est-à-dire du nombre de composantes de chacun des cinq types (cinq types et non 3 car nous nous intéressons à des espaces-temps munis d'une orientation causale). Barbot, Bonsante et Schlenker [BBS11, BBS14] donnent une description locale des singularités possibles d'une $(\mathrm{SO}_0(1, 2), \mathbb{HS}^2)$ -variété singulière ainsi que des résultats partiels de classification des $(\mathrm{SO}_0(1, 2), \mathbb{HS}^2)$ -variétés singulières homéomorphes à $\mathbb{S}^2$ et nombres d'exemples. Dans le cadre de ce travail, nous nous restreignons à deux des singularités décrites par Barbot, Bonsante et Schlenker à savoir les *particules massives* et les *singularités BTZ extrêmes* que nous appellerons BTZ pour simplifier. En particulier, nos variétés singulières ne comporteront pas de collisions.

En écrivant cette thèse nous nous sommes heurtés à quelques difficultés bibliographiques sur la théorie des (G, X) -structures pour lesquelles nous aurions apprécié avoir à disposition un ouvrage de référence comportant des preuves complètes dans un cadre le plus général possible de sorte à mieux cerner les limites de la théorie. Ceci est d'autant plus vrai en ce qui concerne les (G, X) -variétés singulières. En effet, si l'idée que nous attribuons à Thurston permet d'envisager un travail d'étude au cas par cas des types de singularités, il n'existe à notre connaissance aucune théorie générale des variétés (G, X) -singulières. En effet tous les auteurs dont nous avons connaissance qu'ils soient physiciens ou mathématiciens, se contentent d'une description rapide de ce qu'ils appellent « singularité » en introduisant au plus ce dont ils ont besoin. Les principes généraux « folkloriques » de constructions de singularités vont des collages bord à bord de polytopes aux quotients. Les premières sections de ce chapitre sont une tentative de combler ce manque au moins pour notre propre usage. Les exemples qui ont guidé l'étude qui suit (et que le lecteur peut alors avoir en tête) vont des revêtements ramifiés de surfaces de Riemann aux suspensions de Thurston, Barbot, Bonsante et Schlenker à Alexandrov, en passant par les extensions BTZ que nous décrirons plus loin dans cette thèse. Deux visions « folkloriques » de variétés singulières sont à la base de cette étude.

La première se contente de définir une variété singulière comme une (G, X) -structure définie « presque partout » : si l'on considère une (G, X) -variété singulière M qui est une variété différentielle de dimension finie, on peut alors se contenter de voir son lieu singulier comme les facettes de co-dimension au moins 2 d'une cellulation. D'une part, nous proposons une définition de « (G, X) -structure presque partout » en nous appuyant sur la notion d'ouvert *dense semi-localement connexe* : un ouvert $\mathcal{U}$ d'un espace topologique M est semi-localement connexe si son intersection avec un ouvert connexe de M est connexe. C'est par exemple le cas lorsque l'on restreint l'atlas d'une $\mathbb{E}^2$ -variété au complémentaire d'un point p : on devrait être capable de retrouver la (G, X) -structure en p . D'autre part, de nombreuses constructions font apparaître le quotient d'une (G, X) -variété par un groupe discret dont l'action n'est ni libre ni propre. Il peut être alors nécessaire d'oublier qu'un point est régulier : lorsque l'on fait agir un groupe fini de rotations sur $\mathbb{E}^2$, le quotient doit être restreint au complémentaire du stabilisateur pour obtenir une action libre et proprement discontinue. Ces considérations mènent à la notion de *brouillard* introduit dans les sections 1.2.2 et 1.2.3. La notion d'ouvert *dense semi-localement connexe* n'est pas originale et a fait l'objet d'études dont nous avons du mal à estimer la portée aujourd'hui. Toutefois, cette notion est intéressante dans notre étude car Fox [Fox57] introduit une généralisation des revêtements ramifiés qu'il nomme *étalement* (« spread » en anglais) avec notamment un résultat très

intéressant eu égard à notre travail : l'existence et l'unicité de l'étalement complété (en un sens que nous développerons pas). Il est assez clair (mais nous ne l'avons pas démontré) que l'étalement complété du revêtement universel de la partie régulière d'une (G, X) -variété singulière est une (G, X) -variété singulière qui devrait jouer le rôle d'un revêtement ramifié « universel ». Un développement envisageable serait alors l'écriture d'une théorie des orbifolds de groupes d'isotropie possiblement infinis. Ces éléments mis bout à bout permettraient de voir les *domaines réguliers augmentés* construits au chapitre 4 (deuxième partie) comme les revêtements ramifiés universels des espaces-temps avec BTZ vu comme orbifolds et plus généralement définir un revêtement ramifié universel des espaces-temps plats singuliers qui font l'objet de cette thèse.

La seconde est celle décrite plus haut provenant des écrits de Thurston et utilisée par Barbot, Bonsante et Schlenker. L'expression « localement modelée à une suspension » pose les problèmes de la structure de ces suspensions et de leur recollement. D'une part, il est nécessaire de décrire la structure de la voûte céleste, la reconstruction de la (G, X) -structure sur le lieu régulier d'une telle suspension et enfin la reconstruction des points non essentiellement singuliers. Un dernier problème est la concomitance de plusieurs espaces modèles essentiellement équivalents. La méthode de résolution de ces difficultés n'est pas originale pour la majeure partie car connue des spécialistes, seules la tentative d'écriture axiomatique comporte une part d'originalité. La complétion de cet effort d'axiomatisation sort du cadre de cette thèse et nous l'espérons fera l'objet de travaux ultérieurs.

Nous prions le lecteur d'excuser le style axiomatique choisi pour ces premiers chapitres. Cette attitude nous permet de considérer des (G, X) -variétés singulières qui ne sont à priori pas des variétés différentielles et donc nous donne une liberté qui par endroit est bien utile. L'objet de notre travail est bien entendu l'étude de variétés topologiques ou différentielles munies de (G, X) -structures mais il nous arrivera de considérer des (G, X) -structures sur des espaces topologiques comportant des bords à l'infini ou sur des espaces topologiques quotients dont la topologie peut être à priori mal maîtrisée. Au delà du point de vue purement utilitaire, ce recul nous semble agréable et est à notre connaissance absent de la littérature.

Chapitre 1

Introduction aux (G, X) -variétés et (G, X) -variétés singulières

Tous les espaces topologiques considérés dans ce chapitre sont séparés sauf mention explicite contraire.

1.1 Des (G, X) -Atlas aux (G, X) -variétés

1.1.1 Préliminaires : Atlas

Définition 1.1.1 (Préatlas). Soit M un espace topologique, un préatlas sur M est un ensemble de quadruplets $\mathcal{A} = \{(\mathcal{U}_i, X_i, \mathcal{V}_i, \phi_i) : i \in I\}$ telle que pour tout $i \in I$, $\mathcal{U}_i$ est un ouvert non vide de M , X_i est un espace topologique, $\mathcal{V}_i$ est un ouvert non vide de X_i et $\phi_i : \mathcal{U}_i \rightarrow \mathcal{V}_i$ est un homéomorphisme. Par abus de langage, on notera $\mathcal{A} = (\mathcal{U}_i, X_i, \mathcal{V}_i, \phi_i)_{i \in I}$ l'atlas $\{(\mathcal{U}_i, X_i, \mathcal{V}_i, \phi_i) : i \in I\}$.

L'union des $\mathcal{U}_i$ est un ouvert de M appelé le support de $\mathcal{A}$ et noté

$$\text{supp}(\mathcal{A}) := \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i.$$

Les X_i sont les espaces modèles du préatlas, lorsque ceux-ci ne portent pas à confusion, on les omettra en notant simplement $\mathcal{A} = (\mathcal{U}_i, \mathcal{V}_i, \phi_i)_{i \in I}$.

Définition 1.1.2 (Atlas). Soit M un espace topologique, un atlas sur M est un préatlas dont le support est M tout entier.

Définition 1.1.3 (Tiré en arrière d'un préatlas). Soient M et N deux espaces topologiques, $\mathcal{B} = (\mathcal{U}_i, X_i, \mathcal{V}_i, \phi_i)_{i \in I}$ un préatlas sur N et $f : M \rightarrow N$ un homéomorphisme local. Pour tout $i \in I$, on pose $J(i)$ l'ensemble des ouverts $\mathcal{U}$ de M tels que $f|_{\mathcal{U}}$ est un homéomorphisme sur son image et tels que $f(\mathcal{U}) \subset \mathcal{U}_i$.

Le tiré en arrière de $\mathcal{B}$ par f est le préatlas

$$f^* \mathcal{B} := (\mathcal{U}_{i, \mathcal{U}}, X_i, \mathcal{V}_{i, \mathcal{U}}, \phi_{i, \mathcal{U}})_{i \in I, \mathcal{U} \in J(i)}$$

où $\mathcal{U}_{i, \mathcal{U}} := \mathcal{U}$, $\mathcal{V}_{i, \mathcal{U}} := \phi_i \circ f(\mathcal{U})$ et $\phi_{i, \mathcal{U}} := \phi_i \circ f|_{\mathcal{U}}$.

Propriété 1.1.4. Soient M et N deux espaces topologiques, $\mathcal{B} = (\mathcal{U}_i, X_i, \mathcal{V}_i, \phi_i)_{i \in I}$ un préatlas sur N et $f : M \rightarrow N$ un homéomorphisme local.

Le tiré en arrière $f^* \mathcal{B}$ est un préatlas sur M de support

$$\text{supp}(f^*(\mathcal{B})) = f^{-1}(\text{supp}(\mathcal{B}))$$

Démonstration. Soit $x \in f^{-1}(\text{supp}(\mathcal{B}))$, on se donne $i \in I$ tel que $f(x) \in \mathcal{U}_i$ et un ouvert $\mathcal{V}$ contenant x tel que $f|_{\mathcal{V}}$ est un homéomorphisme. En posant $\mathcal{W} := \mathcal{V} \cap f^{-1}(\mathcal{U}_i)$, $f|_{\mathcal{W}}$ est un homomorphisme et $f(\mathcal{W}) \subset \mathcal{U}_i$ donc $(\mathcal{W}, X_i, \mathcal{V}_i, \phi_i \circ f) \in f^*\mathcal{B}$. Enfin $x \in \mathcal{W}$ donc $x \in \text{supp}(f^*(\mathcal{B}))$.

Soit $x \in \text{supp}(f^*(\mathcal{B}))$, il existe $i \in I$ et un ouvert $\mathcal{V} \subset M$ tels que $f|_{\mathcal{V}}$ est un homéomorphisme, $f(\mathcal{V}) \subset \mathcal{U}_i$ et $x \in \mathcal{V}$. Par suite $f(x) \in \mathcal{U}_i$ et donc $f(x) \in \text{supp}(\mathcal{B})$. $\square$

Définition 1.1.5 (Finesse d'un préatlas). Soient M un espace topologique et $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ deux préatlas sur M . Si $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, on dira alors que $\mathcal{B}$ est un atlas plus fin que $\mathcal{A}$.

Définition 1.1.6 (Restriction d'un atlas). Soient M un espace topologique et $\mathcal{A} = (\mathcal{U}_i, X_i, \mathcal{V}_i, \phi_i)_{i \in I}$ un préatlas sur M .

La restriction $\mathcal{A}|_{\mathcal{U}}$ de $\mathcal{A}$ à un ouvert $\mathcal{U}$ de M est le tiré en arrière $i^*\mathcal{A}$ avec $i : \mathcal{U} \rightarrow M$ l'inclusion naturelle.

Définition 1.1.7 (P -(pré)atlas). Soit M un espace topologique et soit P une propriété, un P -atlas (resp. préatlas) est un atlas qui satisfait la propriété P .

Définition 1.1.8 (P -atlas maximal). Soient M un espace topologique et P une propriété. Un P -atlas $\mathcal{A}$ est maximal si pour tout P -atlas $\mathcal{B}$, si $\mathcal{B}$ est plus fin que $\mathcal{A}$ alors $\mathcal{B} = \mathcal{A}$.

Un P -préatlas $\mathcal{A}$ est maximal si pour tout P -préatlas $\mathcal{B}$ tel que $\text{supp}\mathcal{B} = \text{supp}\mathcal{A}$ si $\mathcal{B}$ est plus fin que $\mathcal{A}$ alors $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.

1.1.2 Structures analytiques et (G, X) -atlas

Définition 1.1.9 (Structure analytique). Soit X est un espace topologique et soit G un groupe agissant sur X par homéomorphisme. On note $\rho : G \rightarrow \text{Homeo}(X)$ le morphisme provenant de cette action.

Le couple (G, X) est une structure analytique si pour tout ouvert $\mathcal{U}$ non vide de X , deux éléments g_1, g_2 de G sont égaux si et seulement si les restrictions de $\rho(g_1)$ et de $\rho(g_2)$ à $\mathcal{U}$ sont égales.

On dira que (G, X) est une structure analytique localement connexe (resp. localement connexe par arc, ...) si l'espace topologique X est localement connexe (resp. localement connexe par arc, ...).

Si (G, X) est une structure analytique, alors l'action de G sur X est fidèle. Par abus de langage, on identifiera g et $\rho(g)$.

Exemple 1.1.10. Soit $G = \mathbb{R}$ agissant sur $X = \mathbb{R}$ par translation, c'est-à-dire que pour tout $g \in G$ et tout $x \in X$, $g \cdot x := x + g$. Le couple $(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est une structure analytique. En effet, soient $g, g' \in \mathbb{R}$ et soit $]a, b[$ un intervalle non vide de $\mathbb{R}$. Si pour tout $x \in]a, b[$, $x + g = x + g'$ alors $g = g'$.

Exemple 1.1.11. Quelques exemples de structures analytiques classiques :

1. $G = \text{GL}_n\mathbb{R}$, le groupe linéaire agissant sur $X = \mathbb{R}^n$ de manière naturelle forme une structure analytique $(\text{GL}_n\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. De même pour $G = \text{Aff}_n\mathbb{R}$, le groupe des transformations affines de dimension n , et $X = \mathbb{R}^n$.
2. $G = \text{Diff}^\omega(\mathbb{R}^n)$ le groupe des difféomorphismes analytiques de $\mathbb{R}^n$ alors $(\text{Diff}^\omega(\mathbb{R}^n), \mathbb{R}^n)$ est une structure analytique.

Contre-exemple 1.1.12. Posons $X = \mathbb{R}^n$, si $G = \text{Homeo}(\mathbb{R}^n)$, le groupe des homéomorphismes de $\mathbb{R}^n$, ou si $G = \text{Diff}(\mathbb{R}^n)$, le groupe des difféomorphismes $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^n$; alors (G, X) n'est pas une structure analytique.

Remarque 1.1.13. Soit (G, X) une structure analytique, pour tout sous groupe H de G et tout ouvert $Y \subset X$ stable par H , la structure (H, Y) est analytique.

Définition 1.1.14 ((G, X) -atlas). Soit (G, X) une structure analytique et soit M un espace topologique. Un (G, X) -atlas (resp. (G, X) -préatlas) sur M est un P -atlas (resp. P -préatlas) $\mathcal{A} = (\mathcal{U}_i, X_i, \mathcal{V}_i, \phi_i)_{i \in I}$ satisfaisant les propriétés :

- pour tout $i \in I$, $X_i = X$;
- pour tout $i, j \in I$, pour tout $\mathcal{W}$ ouvert non vide connexe inclus dans $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{V}_i$, il existe $g \in G$ tel que $\phi_j \circ \phi_i^{-1}$ est la restriction de g à $\phi_i(\mathcal{W})$.

Propriété 1.1.15. Soit (G, X) une structure analytique, soient M et N deux espaces topologiques et soit $\mathcal{A} = (\mathcal{U}_i, \mathcal{V}_i, \phi_i)_{i \in I}$ (G, X) -atlas sur M . Soit enfin $f : N \rightarrow M$ un homéomorphisme local.

Alors, $f^* \mathcal{A}$ est bien un (G, X) -atlas sur M .

Démonstration. On reprend les notations de la définition 1.1.3. Soient $i, j \in I$, $\mathcal{U} \in J(i)$ et $\mathcal{U}' \in J(j)$ et soit $\mathcal{W}$ un ouvert connexe de $\mathcal{U}_{i, \mathcal{U}} \cap \mathcal{U}_{j, \mathcal{U}'}$. Comme $f(\mathcal{W})$ est un ouvert connexe de $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j$, il existe $g \in G$ tel que

$$\phi_j|_{f(\mathcal{W})} = g \circ \phi_i|_{f(\mathcal{W})}.$$

On se donne un tel $g \in G$, on a alors

$$\begin{aligned} \phi_{j, \mathcal{U}'|_{\mathcal{W}}} &= \phi_j \circ f|_{\mathcal{W}} \\ &= \phi_j|_{f(\mathcal{W})} \circ f|_{\mathcal{W}} \\ &= (g \circ \phi_i|_{f(\mathcal{W})}) \circ f|_{\mathcal{W}} \\ &= g \circ (\phi_i \circ f|_{\mathcal{W}}) \\ \phi_{j, \mathcal{U}'|_{\mathcal{W}}} &= g \circ \phi_{i, \mathcal{U}|_{\mathcal{W}}}. \end{aligned}$$

□

Proposition 1.1.16. Soit (G, X) une structure analytique localement connexe et soit M un espace topologique. Pour tout (G, X) -atlas $\mathcal{A}$ sur M , il existe un unique (G, X) -atlas maximal plus fin que $\mathcal{A}$

Démonstration. Cette proposition est une conséquence directe de la proposition 1.2.20 que nous démontrerons plus loin. La proposition 1.2.20 étant beaucoup plus forte et se démontrant essentiellement de la même manière nous préférons nous y référer plutôt que de reproduire une preuve redondante. □

Propriété 1.1.17. Soient M un espace topologique, $\mathcal{A}$ un (G, X) -atlas sur M et N un ouvert de M .

Si $\mathcal{A}$ est maximal alors $\mathcal{A}|_N$ est maximal.

Démonstration. On note $\iota : N \rightarrow M$ l'inclusion naturelle et $\mathcal{B}$ le (G, X) -atlas maximal de N plus fin que $\iota^* \mathcal{A}$. Soit $(\mathcal{U}, \mathcal{V}, \phi) \in \mathcal{B}$, on remarque que $(\iota(\mathcal{U}), \mathcal{V}, \phi \circ (\iota_{\mathcal{U}})^{-1})$ est une carte de N et donc que $(\mathcal{U}, \mathcal{V}, \phi) \in \iota^* \mathcal{A}$. □

1.1.3 Catégorie des (G, X) -variétés

Définition 1.1.18 ((G, X) -structure). Une (G, X) -structure sur un espace topologique M est un (G, X) -atlas maximal sur M .

Définition 1.1.19 ((G, X) -variété). Soit (G, X) une structure analytique. Une (G, X) -variété est la donnée d'un espace topologique M séparé à base dénombrable et d'une (G, X) -structure sur M .

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur le groupe G , on notera X -variété au lieu de (G, X) -variété.

Remarque 1.1.20. Si (G, X) est localement connexe (resp. localement connexe par arc) et si M est un espace topologique muni d'un (G, X) -préatlas $\mathcal{A}$, alors M est localement connexe (resp. localement connexe par arc) sur le support de $\mathcal{A}$.

Remarque 1.1.21. Soit (G, X) une structure analytique et soit $\mathcal{U}$ un ouvert de X . L'ouvert $\mathcal{U}$ est naturellement muni d'une (G, X) -structure en posant $\mathcal{A} = (\mathcal{U}', X, \mathcal{U}', Id_{\mathcal{U}'})_{\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}}$.

Remarque 1.1.22. Soit (G, X) une structure analytique et soit $(M, \mathcal{A})$ une (G, X) -variété.

- a) Si on suppose que X est muni d'une métrique semi-riemannienne G -invariante sur X alors toute (G, X) -variété admet une unique métrique semi-riemannienne telle que pour toute carte $(\mathcal{U}, \mathcal{V}, \phi)$ de $\mathcal{A}$, ϕ est une isométrie.
- a) Si on suppose que X est muni d'une métrique G -invariante, montrer que toute (G, X) -variété admet une métrique telle que pour toute carte $(\mathcal{U}, \mathcal{V}, \phi)$ de $\mathcal{A}$, ϕ est une isométrie.

Définition 1.1.23 ((G, X) -morphisme). Soit (G, X) une structure analytique et soient $(M_1, \mathcal{A}_1)$ et $(M_2, \mathcal{A}_2)$ deux (G, X) -variétés. Un (G, X) -morphisme de $(M_1, \mathcal{A}_1)$ vers $(M_2, \mathcal{A}_2)$ est une application $f : M_1 \rightarrow M_2$ telle que pour tout $x \in M_1$, pour toute carte $(\mathcal{U}_1, \mathcal{V}_1, \phi_1)$ de $\mathcal{A}_1$ au voisinage de $x \in \mathcal{U}_1$, toute carte $(\mathcal{U}_2, \mathcal{V}_2, \phi_2)$ de $\mathcal{A}_2$ au voisinage de $f(x) \in \mathcal{U}_2$ et tout ouvert connexe $\mathcal{W} \subset \mathcal{U}_1 \cap f^{-1}(\mathcal{U}_2)$, l'application

$$\phi_2 \circ f \circ \phi_1^{-1} : \phi_1(f^{-1}(\mathcal{U}_2) \cap \mathcal{U}_1) \rightarrow \mathcal{V}_2$$

est la restriction d'un élément du groupe G .

Remarque 1.1.24. Soit (G, X) une structure analytique et soit $\mathcal{U}$ un ouvert de X . Alors, tout (G, X) -morphisme $\mathcal{U} \xrightarrow{f} X$ est la restriction d'un élément de G .

En effet, $(\mathcal{U}, \mathcal{U}, Id)$ est une carte de la (G, X) -structure de $\mathcal{U}$ et (X, X, Id) est une carte de la (G, X) -structure de X donc il existe $g \in G$ tel que $f = g|_{\mathcal{U}}$.

Proposition 1.1.25. Soient $(M, \mathcal{A})$ et $(N, \mathcal{B})$ deux (G, X) -variétés et soit $f : M \rightarrow N$ un homéomorphisme local. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) f est un (G, X) -morphisme ;
- (ii) $\mathcal{A} \cup f^* \mathcal{B}$ est (G, X) -atlas.

Démonstration. Supposons que f est un (G, X) -morphisme et montrons que $\mathcal{A} \cup f^* \mathcal{B}$ est un (G, X) -atlas. Soient $(\mathcal{U}_1, \mathcal{V}_1, \phi_1) \in \mathcal{A}$ et $(\mathcal{U}_2, \mathcal{V}_2, \phi_2) \in f^* \mathcal{B}$ tels que $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \neq \emptyset$ et soit $\mathcal{W}$ ouvert connexe inclus dans $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$. Par définition de $f^* \mathcal{A}$, atlas on peut supposer $f|_{\mathcal{U}_2}$ est un homéomorphisme sur son image et que $(f(\mathcal{U}_2), \mathcal{V}_2, \phi_2 \circ f|_{\mathcal{U}_2})$ est une carte de $\mathcal{B}$. Or f est un (G, X) -morphisme, donc il existe $g \in G$ tel que

$$\phi_2 \circ \left(f|_{\mathcal{W}} \right)^{-1} \circ f \circ \phi_1^{-1}|_{\mathcal{W}} = \phi_2 \circ \phi_1^{-1}|_{\mathcal{W}} = g|_{\phi_1(\mathcal{W})}.$$

Ainsi, $\mathcal{A} \cup f^* \mathcal{B}$ est un (G, X) -atlas.

Supposons que $\mathcal{A} \cup f^* \mathcal{B}$ est un (G, X) -atlas, soient alors $x \in M$, une carte $(\mathcal{U}_2, \mathcal{V}_2, \phi_2)$ au voisinage de $f(x)$, une carte $(\mathcal{U}_1, \mathcal{V}_1, \phi_1) \in \mathcal{A}$ voisinage de x telle que $f|_{\mathcal{U}_1}$ est un homéomorphisme sur son image et $f(\mathcal{U}_1) \subset \mathcal{V}_2$ et soit $\mathcal{W}$ un ouvert connexe de $\mathcal{U}_1$ contenant x . On remarque que $(\mathcal{U}_1, \phi_2 \circ f|_{\mathcal{U}_1}, \phi_2 \circ f|_{\mathcal{U}_1})$ est une carte de $f^* \mathcal{A}$, or $\mathcal{A} \cup f^* \mathcal{B}$ est un (G, X) -atlas, donc il existe $g \in G$ tel que

$$(\phi_2 \circ f) \circ \phi_1^{-1}|_{\mathcal{W}} = g|_{\phi_1(\mathcal{W})}$$

Et donc f est un (G, X) -morphisme. □

Corollaire 1.1.26. Soit (G, X) une structure analytique, soit M une (G, X) -variété et soit $N \xrightarrow{p} M$ un homéomorphisme local. Alors, il existe une unique (G, X) -structure sur N telle que p est un morphisme de (G, X) -variétés.

Définition 1.1.27 (Catégorie des (G, X) -variétés). On note $\mathbf{Var}_{G, X}$ la catégorie des (G, X) -variétés dont les objets sont les (G, X) -variétés et les morphismes les (G, X) -morphismes.

Lemme 1.1.28. Soit (G, X) une structure analytique, soient $(M, \mathcal{A})$ et $(N, \mathcal{B})$ deux (G, X) -variétés et soit $f : (M, \mathcal{A}) \rightarrow (N, \mathcal{B})$ un (G, X) -morphisme. Les propriétés suivantes sont vérifiées :

(a) f est un homéomorphisme local;

(b) f est un isomorphisme si et seulement si f est bijectif.

Démonstration. Soient $x \in M$, $(\mathcal{U}_1, \mathcal{V}_1, \phi_1) \in \mathcal{A}$ contenant x et $(\mathcal{U}_2, \mathcal{V}_2, \phi_2) \in \mathcal{B}$ contenant $f(x)$, enfin soit $\mathcal{W}$ la composante connexe de x dans $\mathcal{U}_1 \cap f^{-1}(\mathcal{U}_2)$. Il existe $g \in G$ tel que $\phi_2 \circ f \circ \phi_1^{-1}|_{\phi_1(\mathcal{W})} = g|_{\phi_1(\mathcal{W})}$, or ϕ_1 et ϕ_2 sont des homéomorphismes et g agit par homéomorphismes sur X donc $\mathcal{W}' := \phi_2^{-1} \circ g \circ \phi_1(\mathcal{W})$ est un ouvert de N et $f|_{\mathcal{W}'}^{\mathcal{W}'}$ est un homéomorphisme. Ainsi, f est un homéomorphisme local.

On suppose à présent de plus que f est bijectif et on reprend les mêmes notations, on a alors :

$$f^{-1}|_{\mathcal{W}'}^{\mathcal{W}} = (f|_{\mathcal{W}'}^{\mathcal{W}'})^{-1} = (\phi_1^{-1} \circ g^{-1} \circ \phi_2)|_{\mathcal{W}'}^{\mathcal{W}}.$$

Ainsi, f^{-1} est un (G, X) -morphisme. □

Proposition 1.1.29. Soient $(M_1, \mathcal{A}), (M_2, \mathcal{B})$ deux (G, X) -variétés et soient $f_1, f_2 : M_1 \rightarrow M_2$ deux morphismes de (G, X) -variétés.

Si M_1 est connexe et s'il existe un ouvert non vide $\mathcal{U}$ de M_1 tel que $f_1|_{\mathcal{U}} = f_2|_{\mathcal{U}}$ alors $f_1 = f_2$.

Démonstration. On pose $\mathcal{O} = \text{Int}\{x \in M_1 \mid f_1(x) = f_2(x)\} \neq \emptyset$. Soit $x \in \overline{\mathcal{O}}$, soit $(\mathcal{U}_1, \mathcal{V}_1, \phi_1)$ une carte de $\mathcal{A}$ au voisinage de x et soit $(\mathcal{U}_2, \mathcal{V}_2, \phi_2)$ une carte de $\mathcal{B}$ au voisinage de $f_1(x)$. Comme f_1 et f_2 sont continues d'après le lemme 1.1.28, $f_1(x) = f_2(x)$ donc

$$x \in \mathcal{U}_1 \cap f_1^{-1}(\mathcal{U}_2) \cap f_2^{-1}(\mathcal{U}_2) \neq \emptyset.$$

Soit $\mathcal{W} \subset \mathcal{U}_1 \cap f_1^{-1}(\mathcal{U}_2) \cap f_2^{-1}(\mathcal{U}_2)$ un ouvert connexe non vide, on se donne g_1, g_2 deux éléments de G tels que

$$\phi_2 \circ f_1|_{\mathcal{W}} = g_i \circ \phi_1|_{\mathcal{W}}, \quad i \in \{1, 2\}.$$

Comme $f_2|_{\mathcal{O}} = f_1|_{\mathcal{O}}$, $g_2|_{\phi_1(\mathcal{W} \cap \mathcal{O})} = g_1|_{\phi_1(\mathcal{W} \cap \mathcal{O})}$ or $\mathcal{W} \cap \mathcal{O}$ est non vide donc $\phi_1(\mathcal{W} \cap \mathcal{O})$ est un ouvert non vide de X ; ainsi $g_1 = g_2$ donc $f_1|_{\mathcal{W}} = f_2|_{\mathcal{W}}$ et donc $x \in \mathcal{O}$.

Finalement, $\overline{\mathcal{O}} = \mathcal{O}$ donc $\mathcal{O}$ est un ouvert fermé, or M_1 est connexe donc $\mathcal{O} = M_1$. □

Lemme 1.1.30. Soit (G, X) une structure analytique et soit M un espace topologique muni d'un atlas $\mathcal{A} = (\mathcal{U}_i, X_i, \mathcal{V}_i, \phi_i)_{i \in I}$ tel que

- pour tout $i \in I$, X_i est une (G, X) -variété;
- pour tout $i, j \in I$ tel que $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j \neq \emptyset$, on a $(\phi_j \circ \phi_i^{-1})|_{\phi_i(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j)}$ est un (G, X) -morphisme.

Alors, il existe une unique (G, X) -structure sur M telle que pour tout $i \in I$, $\phi_i : \mathcal{U}_i \rightarrow \mathcal{V}_i$ est un (G, X) -morphisme.

Démonstration. Pour tout $i \in I$, on note $\mathcal{B}_i := (\mathcal{U}_i^{(k)}, \mathcal{V}_i^{(k)}, \phi_i^{(k)})_{k \in K_i}$ l'atlas maximal sur $\mathcal{U}_i$ obtenu par le tiré en arrière par ϕ_i de celui sur $\mathcal{V}_i$. On définit l'atlas $\mathcal{B}$ sur M comme l'union des atlas $\mathcal{B}_i$.

Soient $i, j \in I$, $k \in K_i$ et $l \in K_j$, le changement de carte $\phi_j^{(l)} \circ (\phi_i^{(k)})^{-1}$ est un (G, X) -morphisme de $\phi_i(\mathcal{U}_i^{(k)} \cap \mathcal{U}_j^{(l)}) \subset X$ dans X , c'est donc la restriction d'un élément de G sur chacune des composantes connexes de $\phi_i(\mathcal{U}_i^{(k)} \cap \mathcal{U}_j^{(l)})$. Par suite, $\mathcal{B}$ est un (G, X) -atlas sur M . □

1.1.4 Quotients de (G, X) -structures

Dans cette section, on se donne une structure analytique (G, X) avec X connexe séparé et localement connexe par arc.

Proposition 1.1.31 (Revêtement galoisien d'une (G, X) -variété).

Soit M une (G, X) -variété connexe et soit $M' \xrightarrow{p} M$ un revêtement galoisien de groupe de Galois Γ . Alors il existe une unique (G, X) -structure sur M' telle que π est un (G, X) -morphisme, de plus Γ agit sur M' par (G, X) -isomorphismes.

Démonstration. Comme p est un revêtement, c'est en particulier un homéomorphisme local et d'après le Corollaire 1.1.26, il existe une unique (G, X) -structure sur M' telle que p est un (G, X) -morphisme. On remarque que pour tout $\gamma \in \Gamma$, l'application $p \circ \gamma$ est un revêtement et donc M' admet une unique (G, X) -structure telle que $p \circ \gamma$ est un (G, X) -morphisme. γ est alors un (G, X) -isomorphisme de M' muni de la (G, X) -structure induite par p vers M' muni de la (G, X) -structure induite par $p \circ \gamma$. Or γ est un automorphisme de revêtement, donc $p \circ \gamma = p$ c'est-à-dire que les deux (G, X) -structures sont identiques et donc que γ est un (G, X) -isomorphisme de M' . $\square$

Ces propriétés seront utilisées essentiellement dans le cas du revêtement universel d'une (G, X) -variété M .

Corollaire 1.1.32. Soit M une (G, X) -variété connexe localement connexe par arc admettant un revêtement universel $\widetilde{M}$, il existe une unique (G, X) -structure sur le revêtement universel $\widetilde{M}$ de M et son groupe fondamental $\pi_1(M)$ agit par (G, X) -isomorphismes sur $\widetilde{M}$.

Proposition 1.1.33 (Quotient d'une (G, X) -variété). Soient M une (G, X) -variété connexe, Γ un groupe discret agissant librement et proprement sur M par (G, X) -isomorphismes.

Alors, le quotient M/Γ est un espace topologique admettant une unique (G, X) -structure telle que la projection naturelle $\pi : M \rightarrow M/\Gamma$ est un (G, X) -morphisme.

Démonstration. Comme X est localement connexe par arc, il en va de même pour M , de plus M est connexe et séparé. Enfin l'action de Γ est libre et proprement discontinue donc la projection naturelle $\pi : M \rightarrow M/\Gamma$ est un revêtement galoisien et M/Γ est séparé.

Soit $\mathcal{A} = (\mathcal{U}_i, \mathcal{V}_i, \phi_i)_{i \in I}$ le (G, X) -atlas maximal de M . Pour chaque $x \in M/\Gamma$, on se donne $\mathcal{U}_x$ ouvert de M/Γ tel que $\pi^{-1}(\mathcal{U}_x)$ est union disjointe d'ouverts de carte $\mathcal{U}_i$ de $\mathcal{A}$ tels que $\pi|_{\mathcal{U}_i}$ est un homéomorphisme. De cette manière, en notant $\widetilde{\mathcal{U}}_x$ l'un de ces ouverts, on a :

$$\pi^{-1}(\mathcal{U}_x) = \bigsqcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma \cdot \widetilde{\mathcal{U}}_x$$

On note alors ϕ_x une carte $\widetilde{\mathcal{U}}_x \rightarrow X$ de $\mathcal{A}$ et on note $\mathcal{V}_x$ l'image de ϕ_x . Enfin, on pose le préatlas

$$\mathcal{B} := \left(\mathcal{U}_x, \mathcal{V}_x, \phi_x \circ (\pi|_{\widetilde{\mathcal{U}}_x})^{-1} \right)_{x \in M/\Gamma}.$$

Vérifions que $\mathcal{B}$ est un (G, X) -atlas sur M/Γ , tout d'abord le support de $\mathcal{B}$ est clairement M/Γ , c'est donc un atlas. Soient $x, y \in M/\Gamma$, tels que $\mathcal{U}_x \cap \mathcal{U}_y \neq \emptyset$ et soit $\mathcal{W} \subset \mathcal{U}_x \cap \mathcal{U}_y$ un ouvert connexe. Si $x = y$ il n'y a rien à démontrer, supposons alors $x \neq y$. On remarque qu'il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $(\pi|_{\widetilde{\mathcal{U}}_y})|_{\mathcal{W}}^{-1} = \gamma \cdot (\pi|_{\widetilde{\mathcal{U}}_x})|_{\mathcal{W}}^{-1}$ de sorte que, en posant $\mathcal{W}' := (\pi|_{\widetilde{\mathcal{U}}_x})^{-1}(\mathcal{W})$,

$$\begin{aligned} \left(\phi_y \circ (\pi|_{\widetilde{\mathcal{U}}_y})^{-1} \right) \circ \left(\phi_x \circ (\pi|_{\widetilde{\mathcal{U}}_x})^{-1} \right)^{-1} &= \phi_y \circ (\pi|_{\widetilde{\mathcal{U}}_y})^{-1} \circ \pi|_{\widetilde{\mathcal{U}}_x} \circ (\phi_x|_{\mathcal{W}'})^{-1} \\ &= \phi_y \circ (\pi|_{\widetilde{\mathcal{U}}_y})|_{\mathcal{W}}^{-1} \circ \pi|_{\widetilde{\mathcal{U}}_x} \circ (\phi_x|_{\mathcal{W}'})^{-1} \\ &= \phi_y \circ \gamma \cdot (\pi|_{\widetilde{\mathcal{U}}_x})|_{\mathcal{W}}^{-1} \circ \pi|_{\widetilde{\mathcal{U}}_x} \circ (\phi_x|_{\mathcal{W}'})^{-1} \\ &= \phi_y \circ \gamma \circ (\phi_x|_{\mathcal{W}'})^{-1} \end{aligned}$$

Or Γ agit par (G, X) -isomorphismes et les ϕ_x, ϕ_y sont des cartes de $\mathcal{A}$ donc il existe $g \in G$ tel que

$$\phi_y \circ \gamma \circ (\phi_x|_{\mathcal{W}'})^{-1} = g|_{\phi_x(\mathcal{W}')}$$

et donc il existe $g \in G$ tel que

$$\left(\phi_y \circ (\pi|_{\tilde{\mathcal{U}}_y})^{-1} \right) \circ \left(\phi_x \circ (\pi|_{\tilde{\mathcal{U}}_x})^{-1} \right)^{-1} = g|_{\phi_x(\mathcal{W}')} .$$

Par conséquent, $\mathcal{B}$ est un (G, X) -atlas et, par construction, la projection naturelle est un morphisme de (G, X) -atlas, c'est donc un (G, X) -morphisme pour la structure $(M/\Gamma, \widehat{\mathcal{B}})$ avec $\widehat{\mathcal{B}}$ le (G, X) -atlas maximal plus fin que $\mathcal{B}$.

Enfin, si $\mathcal{C}$ est un (G, X) -atlas maximal sur M/Γ tel que π est un (G, X) -morphisme, alors pour tout $x \in M/\Gamma$, $\pi|_{\tilde{\mathcal{U}}_x}^{\mathcal{U}_x}$ est un (G, X) -isomorphisme, donc $\mathcal{C}|_{\mathcal{U}_x}$ est plus fin que le (G, X) -atlas tiré en arrière de $\mathcal{A}$ par $\left(\pi|_{\tilde{\mathcal{U}}_x}^{\mathcal{U}_x} \right)^{-1}$. C'est donc que $\mathcal{C}|_{\mathcal{U}_x}$ contient la carte $(\mathcal{U}_x, \mathcal{V}_x, \phi_x \circ (\pi|_{\tilde{\mathcal{U}}_x})^{-1})$. Ainsi $\mathcal{C}$ est maximal et plus fin que $\mathcal{B}$ et par unicité du (G, X) -atlas maximal plus fin que $\mathcal{B}$ on déduit $\mathcal{C} = \widehat{\mathcal{B}}$. □

1.1.5 Théorème fondamental des (G, X) -variétés

On se donne une (G, X) -structure analytique. Pour $g \in G$ et $\rho : \Gamma \rightarrow G$ un morphisme de groupes, on notera

$$\rho^g : \begin{cases} \Gamma & \longrightarrow G \\ \gamma & \longmapsto g\rho(\gamma)g^{-1} \end{cases} .$$

Soit M une (G, X) -variété et soit Γ un groupe agissant par isomorphisme sur M . Le groupe G agit sur les couples $(\rho, \mathcal{D})$ par

$$\forall g \in G, \quad g \cdot (\rho, \mathcal{D}) := (\rho^g, g \circ \mathcal{D})$$

où $\rho : \Gamma \rightarrow G$ est un homomorphisme et $\mathcal{D} : M \rightarrow X$ un morphisme de (G, X) -variétés. De plus, si $\mathcal{D}$ est ρ -équivariant, on vérifie aisément que $g \circ \mathcal{D}$ est ρ^g équivariant. L'objectif de cette sous-section est de démontrer le théorème suivant où un espace topologique est dit *délaçable* s'il admet un revêtement universel c'est-à-dire s'il est séparé, connexe, localement connexe par arc et semi-localement simplement connexe.

Théorème 1 ([Ehr83]). *Soit M une (G, X) -variété délaçable, il existe un homomorphisme $\rho : \pi_1(M) \rightarrow G$ et un (G, X) -morphisme $\mathcal{D} : \widetilde{M} \rightarrow X$ ρ -équivariant.*

Le couple $(\mathcal{D}, \rho)$ est unique modulo l'action de G , on appelle $\mathcal{D}$ l'application développante de M et ρ l'holonomie de M .

Remarque 1.1.34. *Ce théorème*

- ne dit rien sur l'injectivité de ρ ;
- ne dit rien ni sur l'injectivité ni sur l'image de $\mathcal{D}$;
- ne dit rien ni sur la propriété, ni la liberté, ni la discontinuité de l'action de $\pi_1(M)$ sur X via ρ .

Corollaire 1.1.35. *Soit M une (G, X) -variété connexe par arc et délaçable. Alors, tout (G, X) -morphisme $f : \widetilde{M} \rightarrow X$ est une application développante, c'est-à-dire qu'il existe un morphisme $\rho : \pi_1(M) \rightarrow G$ tel que f est ρ -équivariant.*

Ce théorème est mentionné une première fois par Charles Ehresmann en 1935 [Ehr83] et popularisé par Thurston [Thu02] dans les années 1970. La littérature traitant de ce théorème est aujourd'hui abondante mais aucune des preuves faciles d'accès ne me satisfont complètement : celle d'Ehresmann [Ehr83] est faite dans le style de 1935 avec peu de détails, Thurston [Thu02] se contente d'une argumentation d'un paragraphe, Kuiper [Kui49] traite très précisément uniquement le cas $X = \mathbb{C}$ et G le groupe des biholomorphismes de $\mathbb{C}$, Epstein [Eps84] donne une argumentation survolant la topologie de l'espace des chemins,...

Nous commençons par rappeler des résultats usuels sur la topologie compacte ouverte, la représentation du revêtement universel comme quotient de l'espace des chemins et l'action du groupe de Poincaré, voir par exemple [Pau10] pour un cours introductif ou [Bre97] pour un exposé très complet. Puis, nous démontrons le théorème fondamental des (G, X) -variétés.

Nous rappelons d'ors et déjà la propriété de topologie générale suivante :

Propriété 1.1.36. *Soient M un espace localement connexe par arc et $\mathcal{U}$ un ouvert de M , les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i) $\mathcal{U}$ est connexe ;
- (ii) $\mathcal{U}$ est connexe par arc.

Rappels sur la topologie compacte-ouverte et l'espace des chemins

Définition 1.1.37 (Topologie compacte ouverte). *Soient X, Y deux espaces topologiques et $E := \mathcal{C}^0(X, Y)$ l'ensemble des applications continues de X dans Y . La topologie compacte-ouverte de E est la topologie engendrée par les ensembles :*

$$\mathcal{U}_{K, \mathcal{V}} := \{f \in E \mid f(K) \subset \mathcal{V}\}$$

pour $K \subset X$ compact et $\mathcal{V} \subset Y$ ouvert.

Définition 1.1.38. *Soient M un espace topologique et $A, B \subset M$, on note :*

$$\Omega(M, A, B) := \{\alpha \in \mathcal{C}^0([0, 1], M) \mid \alpha(0) \in A \text{ et } \alpha(1) \in B\}$$

que l'on munit de la topologie induite par la topologie compacte-ouverte de $\mathcal{C}^0([0, 1], M)$.

Lorsque $A = \{a\}$ est un singleton on notera $\Omega(M, a, B)$ au lieu de $\Omega(M, \{a\}, B)$, de même si B est un singleton.

Définition 1.1.39. *Soit M un espace topologique et soient $a, b, c \in M$. La concaténation $\gamma_1 \star \gamma_2$ de deux courbes $\gamma_1 \in \Omega(M, a, b)$ et $\gamma_2 \in \Omega(M, b, c)$ est définie par*

$$\gamma_1 \star \gamma_2 : \begin{cases} [0, 1] & \longrightarrow & M \\ x \leq 1/2 & \longmapsto & \gamma_1(2x) \\ x \geq 1/2 & \longmapsto & \gamma_2(2x - 1) \end{cases}$$

Définition 1.1.40. *Un espace topologique M est simplement connexe s'il est connexe par arc et si pour tout $a \in M$, $\Omega(M, a, a)$ est connexe par arc.*

Définition 1.1.41 (Lacet). *Soient M un espace topologique et $a \in M$. Un élément de $\Omega(M, a, a)$ est appelé lacet de M de point base a .*

Définition 1.1.42. *Soient M un espace topologique et $a, b \in M$. Deux éléments de $\Omega(M, a, b)$ sont homotopes à extrémités fixées s'ils sont dans la même composante connexe par arc de $\Omega(M, a, b)$. On notera $\sim_H$ la relation d'équivalence associée.*

Définition 1.1.43. *Un espace topologique M est semi-localement simplement connexe si pour tout $a \in M$ il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de a tel que tout lacet γ de $\mathcal{U}$ de base a est homotope à extrémités fixées au lacet trivial $[0, 1] \rightarrow M, s \mapsto a$.*

Définition 1.1.44 (Espace délaçable). *Un espace topologique M est délaçable s'il est séparé, connexe, localement connexe par arc et semi-localement simplement connexe.*

Définition 1.1.45. *Soit M un espace topologique délaçable et $p \in M$, on pose $\widetilde{M}_p := \Omega(M, p, M) / \sim_H$*

Définition 1.1.46. *Soit M un espace topologique délaçable et $p \in M$, on pose $\pi_1(M, p) := \Omega(M, p, p) / \sim_H$*

Proposition 1.1.47. *Soient M un espace topologique délaçable et $A, B \subset M$. Si A et B sont localement connexes par arc, alors $\Omega(M, A, B)$ est localement connexe par arc.*

Proposition 1.1.48. *Soit M un espace topologique délaçable, alors :*

- (a) *les concaténations $\pi_1(M, a) \times \pi_1(M, a) \rightarrow \pi_1(M, a)$ et $\pi_1(M, a) \times \widetilde{M}_a \rightarrow \widetilde{M}_a$ sont bien définies ;*
- (b) *$(\pi_1(M, a), \star)$ est un groupe discret agissant librement proprement discontinûment sur $\widetilde{M}_a$ par concaténations à gauche.*
- (c) *L'application $p : \widetilde{M}_a \rightarrow M, [\gamma] \mapsto \gamma(1)$ est bien définie, continue et ouverte. De plus, $\forall x, y \in \widetilde{M}_a, p(x) = p(y) \Leftrightarrow y \in \pi_1(M, a)x$.*

Théorème 2 (Revêtement universel comme espace de chemin). *Soit M un espace topologique délaçable et soit $a \in M$.*

Alors $\widetilde{M}_p$ est simplement connexe et l'application $p : \widetilde{M}_a \rightarrow M, [\gamma] \mapsto \gamma(1)$ est un revêtement.

Preuve du théorème fondamental des (G, X) -variétés

Dans cette partie, pour X un espace topologique et $x \in X$, on notera $CC(x, X)$ la composante connexe de x dans X .

Définition 1.1.49 (Subdivision adaptée à un chemin). *Soit M une (G, X) -variété, soit $x_0 \in M$ et soit une carte $(\mathcal{U}, \mathcal{V}, \phi)$ de M telle que $x_0 \in \mathcal{U}$. Soit $\gamma \in \mathcal{C}^0([0, 1], M)$ tel que $\gamma(0) = x_0$.*

Une subdivision adaptée à γ de base $(\mathcal{U}, \mathcal{V}, \phi)$ est la donnée d'une famille finie de cartes $(\mathcal{U}_i, \mathcal{V}_i, \phi_i)_{i \in [0, n]}$ et d'une suite $(t_i)_{i \in [0, n+1]} \in [0, 1]^{n+1}$ strictement croissante telles que

- (i) $(\mathcal{U}_0, \mathcal{V}_0, \phi_0) = (\mathcal{U}, \mathcal{V}, \phi)$;
- (i) $t_0 = 0, t_{n+1} = 1$ et $\forall i \in [0, n], \gamma([t_i, t_{i+1}]) \subset \mathcal{U}_i$.

Pour $i \in [0, n-1]$, on pose alors g_i l'unique élément de G tel que

$$\phi_i|_{\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_{i+1}} = g_i \circ \phi_{i+1}|_{\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_{i+1}} \quad (\star)$$

Lemme 1.1.50. *Soit M une (G, X) -variété, soit γ un chemin continu dans M et soit $\mathfrak{S} := [(\mathcal{U}_i, \mathcal{V}_i, \phi_i)_{i \in [0, n+1]}; (t_i)_{i \in [1, n+1]}]$ une subdivision adaptée à γ . Il existe un voisinage $\mathcal{W}$ de γ dans $\mathcal{C}^0([0, 1], M)$ muni de la topologie compacte-ouverte telle que pour tout $\gamma' \in \mathcal{W}$, la subdivision $\mathfrak{S}$ est adaptée à γ' .*

Démonstration. Pour $i \in [0, n]$, on pose $\mathcal{W}_i = \{\alpha \in \mathcal{C}^0([0, 1], M) \mid \alpha([t_i, t_{i+1}]) \subset \mathcal{U}_i\}$ et $\mathcal{W} = \mathcal{W}_0 \cap \dots \cap \mathcal{W}_n$. $\mathcal{W}$ est un ouvert contenant γ et par définition, $\mathfrak{S}$ est une subdivision adaptée à tout $\gamma' \in \mathcal{W}$. $\square$

Lemme 1.1.51. *Soient M une (G, X) -variété délaçable, $x_0 \in M$, une carte $(\mathcal{U}, \mathcal{V}, \phi)$ de M au voisinage de x_0 et $\gamma \in \Omega(M, x_0, M)$.*

Si $((\mathcal{U}_i, \mathcal{V}_i, \phi_i)_{i \in [0, n]}; (t_i)_{i \in [0, n+1]})$ et $((\mathcal{U}'_i, \mathcal{V}'_i, \phi'_i)_{i \in [0, n']}; (t'_i)_{i \in [0, n'+1]})$ sont deux subdivisions adaptées à γ de base $(\mathcal{U}, \mathcal{V}, \phi)$ alors pour tout (k, k') tel qu'il existe $s \in [t_k, t_{k+1}] \cap [t'_{k'}, t'_{k'+1}]$, on a :

$$\left(\prod_{i=0}^{k-1} g_i \right) \phi_k = \left(\prod_{i=0}^{k'-1} g'_i \right) \phi'_{k'} \quad \text{sur } CC(\gamma(s), \mathcal{U}_k \cap \mathcal{U}'_{k'}).$$

Démonstration. Pour $(k, k') \in \llbracket 0, n \rrbracket \times \llbracket 0, n' \rrbracket$, notons

$$\mathcal{P}(k, k') : \begin{cases} \exists s \in [t_k, t_{k+1}] \cap [t'_{k'}, t'_{k'+1}], \\ \phi_k = \left(\prod_{i=0}^{k-1} g_i \right)^{-1} \left(\prod_{i=0}^{k'-1} g'_i \right) \phi'_{k'} \quad \text{sur} \quad \text{CC}(\gamma(s), \mathcal{U}_k \cap \mathcal{U}'_{k'}) \end{cases}.$$

- $\mathcal{P}(0, 0)$ est vrai car $\phi_0 = \phi'_0$.
- Supposons $\mathcal{P}(k, k')$ vraie pour k, k' donnés. Si $k' < n'$ et $[t_k, t_{k+1}] \cap [t'_{k'+1}, t'_{k'+2}] \neq \emptyset$, alors $\gamma(t'_{k'+1}) \in \mathcal{U}_k \cap \mathcal{U}'_{k'} \cap \mathcal{U}'_{k'+1}$

On a

$$\begin{aligned} \phi_k &= \left(\prod_{i=0}^{k-1} g_i \right)^{-1} \left(\prod_{i=0}^{k'-1} g'_i \right) \phi'_{k'} \quad \text{sur} \quad \text{CC}(\gamma(t'_{k'+1}), \mathcal{U}_k \cap \mathcal{U}'_{k'}) \\ \phi'_{k'} &= g'_{k'} \phi'_{k'+1} \quad \text{sur} \quad \mathcal{U}'_{k'+1} \cap \mathcal{U}'_{k'} \end{aligned}$$

et donc

$$\phi_k = \left(\prod_{i=0}^{k-1} g_i \right)^{-1} \left(\prod_{i=0}^{k'} g'_i \right) \phi'_{k'+1} \quad \text{sur} \quad \text{CC}(\gamma(t'_{k'+1}), \mathcal{U}_k \cap \mathcal{U}'_{k'} \cap \mathcal{U}'_{k'+1}).$$

Et donc, d'après la propriété 1.1.29,

$$\phi_k = \left(\prod_{i=0}^{k-1} g_i \right)^{-1} \left(\prod_{i=0}^{k'} g'_i \right) \phi'_{k'+1} \quad \text{sur} \quad \text{CC}(\gamma(t'_{k'+1}), \mathcal{U}_k \cap \mathcal{U}'_{k'+1}).$$

Ainsi, $\mathcal{P}(k, k' + 1)$ est vrai et par symétrie, on obtient :

- (i) Si $[t_k, t_{k+1}] \cap [t'_{k'}, t'_{k'+1}] \neq \emptyset$ alors $\mathcal{P}(k, k') \Rightarrow \mathcal{P}(k, k' + 1)$
- (i) Si $[t_k, t_{k+1}] \cap [t'_{k'-1}, t'_{k'}] \neq \emptyset$ alors $\mathcal{P}(k, k') \Rightarrow \mathcal{P}(k, k' - 1)$
- (i) Si $[t_{k+1}, t_{k+2}] \cap [t'_{k'}, t'_{k'+1}] \neq \emptyset$ alors $\mathcal{P}(k, k') \Rightarrow \mathcal{P}(k + 1, k')$
- Tout point de l'ensemble des (k, k') tels que $[t_k, t_{k+1}] \cap [t'_{k'}, t'_{k'+1}] \neq \emptyset$ peut être atteint en partant de $(0, 0)$ via une succession finie de mouvements $(k, k') \rightarrow (k, k' + 1)$ ou $(k, k') \rightarrow (k, k' - 1)$ ou $(k, k') \rightarrow (k + 1, k')$. Ainsi, par récurrence, pour tout (k, k') tel que $[t_k, t_{k+1}] \cap [t'_{k'}, t'_{k'+1}] \neq \emptyset$, $\mathcal{P}(k, k')$ est vrai.

□

Démonstration du théorème 1. On se donne $x \in M$ et $(\mathcal{U}, \mathcal{V}, \phi)$ une carte de M au voisinage de x .

1. Définition de $(\rho, \mathcal{D})$

- Pour tout chemin $\gamma \in \Omega(M, x, M)$, on se donne $(\mathcal{U}_i, \mathcal{V}_i, \phi_i)_{i \in [0, n]}$, $(t_i)_{i \in [0, n+1]}$ subdivision adaptée à γ de base $(\mathcal{U}, \mathcal{V}, \phi)$.

$$\mathcal{D}(\gamma, t) = \left(\prod_{i=0}^{k-1} g_i \right) \phi_k(\gamma(t)) \quad \text{pour} \quad t \in [t_k, t_{k+1}], \quad k \in [1, n].$$

D'après le lemme 1.1.51, la définition de $\mathcal{D}(\gamma, \cdot)$ ne dépend pas du choix de la subdivision adaptée à γ de base $(\mathcal{U}, \mathcal{V}, \phi)$.

- Soit $y \in M$, d'après le lemme 1.1.50, pour tout $\gamma \in \Omega(M, x, y)$, il existe un voisinage $\mathcal{W}$ de γ dans $\Omega(M, x, y)$ tel que pour tout $\gamma' \in \mathcal{W}$, la subdivision $(\mathcal{U}_i, \mathcal{V}_i, \phi_i)_{i \in [0, n]}$, $(t_i)_{i \in [0, n+1]}$ est adaptée à γ' . Ainsi,

$$\mathcal{D}(\gamma', 1) = \left(\prod_{i=0}^{n-1} g_i \right) \phi_n(y) = \mathcal{D}(\gamma, 1).$$

Par suite, l'application $\mathcal{D}(\cdot, 1)$ est localement constante sur $\Omega(M, x, y)$ donc constante sur les composantes connexes de $\Omega(M, x, y)$. Or les $\Omega(M, x, y)$ est localement connexe par arc donc les composantes connexes de $\Omega(M, x, y)$ sont les composantes connexes par arc. Ainsi, $\mathcal{D}([\gamma], 1)$ est bien défini avec $[\gamma]$ la classe d'homotopie à extrémités fixées de γ .

- Comme M est délaçable, le revêtement universel de M s'identifie à $\widetilde{M}_x$. On pose alors :

$$\mathcal{D}: \begin{array}{ccc} \widetilde{M}_x & \longrightarrow & X \\ [\gamma] & \longmapsto & \mathcal{D}([\gamma], 1) \end{array}$$

- Montrons que $\mathcal{D}$ est un (G, X) -morphisme. Soient $\gamma \in \Omega(M, x, M)$, $\pi: \widetilde{M}_x \rightarrow M$, $[\gamma] \mapsto \gamma(1)$ le revêtement naturel et $(\mathcal{U}_i, \mathcal{V}_i, \phi_i)_{i \in [1, n]}$ une subdivision adaptée à γ . La (G, X) -structure sur $\widetilde{M}_x$ est obtenue en prenant le tiré en arrière de la (G, X) -structure de M par π . Soit $\mathcal{W}$ un ouvert connexe contenant $[\gamma]$ et contenu dans $\pi^{-1}(\mathcal{U}')$; quitte à prendre $\mathcal{U}_n$ plus petit, on peut supposer que $\pi|_{\mathcal{W}}$ est un homéomorphisme sur son image. Une carte de $\widetilde{M}_x$ au voisinage de $[\gamma]$ est alors donnée par $(\mathcal{W}, \phi_n \circ \pi(\mathcal{W}), \phi_n \circ \pi|_{\mathcal{W}})$. Soit $z \in \phi_n \circ \pi(\mathcal{W})$, on se donne $\bar{z} \in M$ tel que $\phi_n(\bar{z}) = z$ puis $[\gamma'] \in \mathcal{W}$ tel que $\gamma'(1) = \bar{z}$. On a

$$\mathcal{D} \circ (\phi_n \circ \pi|_{\mathcal{W}})^{-1}(z) = \mathcal{D} \circ (\pi|_{\mathcal{W}})^{-1}(\bar{z}) \quad (1.1)$$

$$= \mathcal{D}([\gamma']) \quad (1.2)$$

$$= \left(\prod_{i=0}^{n-1} g_i \right) \phi_n(\gamma'(1)) \quad (1.3)$$

$$= \left(\prod_{i=0}^{n-1} g_i \right) \phi_n(\bar{z}) \quad (1.4)$$

$$= \left(\prod_{i=0}^{n-1} g_i \right) z \quad (1.5)$$

Ainsi, $\mathcal{D}$ est un (G, X) -morphisme

- Soit une carte $(\mathcal{U}, \mathcal{V}, \phi)$ de M au voisinage de x . Pour $[\gamma'] \in \pi_1(M, x)$, on se donne une subdivision $((\mathcal{U}_i, \mathcal{V}_i, \phi_i)_{i \in [0, n]}; (t_i)_{i \in [0, n+1]})$ de base $(\mathcal{U}, \mathcal{V}, \phi)$ adaptée à γ' et telle que $(\mathcal{U}_n, \mathcal{V}_n, \phi_n) = (\mathcal{U}, \mathcal{V}, \phi)$. On pose

$$\rho(\gamma') := \prod_{i=0}^{n-1} g_i.$$

Cette définition ne dépend pas de la subdivision choisie car pour tout autre subdivision $((\mathcal{U}'_i, \mathcal{V}'_i, \phi'_i)_{i \in [0, n']}; (t'_i)_{i \in [0, n'+1]})$ adaptée à γ de base $(\mathcal{U}, \mathcal{V}, \phi)$ et telle que $(\mathcal{U}'_{n'}, \mathcal{V}'_{n'}, \phi'_{n'}) = (\mathcal{U}, \mathcal{V}, \phi)$, on a :

$$\begin{aligned} \phi &= \phi_n \\ &= \left(\prod_{i=0}^{k-1} g_i \right)^{-1} \left(\prod_{i=0}^{k'-1} g'_i \right) \phi'_{n'} \text{ sur } \text{CC}(\gamma(1), \mathcal{U}_n \cap \mathcal{U}'_{n'}) \\ &= \left(\prod_{i=0}^{k-1} g_i \right)^{-1} \left(\prod_{i=0}^{k'-1} g'_i \right) \phi \text{ sur } \mathcal{U} \end{aligned}$$

Et donc, par analyticité de l'action de G sur X ,

$$\prod_{i=0}^{k-1} g_i = \prod_{i=0}^{k'-1} g'_i$$

- De la même manière que précédemment, d'après le lemme 1.1.50, ρ est localement constante sur $\Omega(M, x, x)$ et donc ρ est bien définie sur $\pi_1(M, x)$.

2. $\mathcal{D}$ est ρ -équivariant

Pour $[\gamma] \in \widetilde{M}$ et $[\gamma'] \in \Gamma$, on se donne une subdivision

$$((\mathcal{U}_i, \mathcal{V}_i, \phi_i)_{i \in [0, n]}; (t_i)_{i \in [0, n+1]})$$

de base $(\mathcal{U}, \mathcal{V}, \phi)$ adaptée à γ' telle que $(\mathcal{U}_n, \mathcal{V}_n, \phi_n) = (\mathcal{U}, \mathcal{V}, \phi)$ et une subdivision

$$((\mathcal{U}_i, \mathcal{V}_i, \phi_i)_{i \in [n+1, m]}; (t_i)_{i \in [n+2, m+1]})$$

de base $(\mathcal{U}, \mathcal{V}, \phi)$ adaptée à γ . La subdivision $((\mathcal{U}_i, \mathcal{V}_i, \phi_i)_{i \in [0, m]}; (t_i)_{i \in [0, m+1]})$ est adaptée à $\gamma \circ \gamma'$ et comme $(\mathcal{U}_n, \mathcal{V}_n, \phi_n) = (\mathcal{U}, \mathcal{V}, \phi) = (\mathcal{U}_{n+1}, \mathcal{V}_{n+1}, \phi_{n+1})$, on a $g_n = 1$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}([\gamma'] \cdot [\gamma]) &= \mathcal{D}(\gamma \circ \gamma', 1) \\ &= \left(\prod_{i=0}^{m-1} g_i \right) \phi_m(\gamma(1)) \\ &= \left(\prod_{i=0}^{n-1} g_i \right) g_n \left(\prod_{i=n+1}^{m-1} g_i \right) \phi_m(\gamma(1)) \\ &= \rho([\gamma']) \cdot 1 \cdot \mathcal{D}([\gamma]) \end{aligned}$$

3. $(\rho, \mathcal{D})$ est unique modulo G .

Soit $\mathcal{D}' : \widetilde{M}_x \rightarrow X$ un (G, X) -morphisme, $\mathcal{D}' \circ \phi^{-1} : \mathcal{V} \rightarrow X$ est la restriction d'un élément g de G à $\mathcal{V}$. Comme $\mathcal{D} \circ \phi^{-1} = 1$, on a alors :

$$\mathcal{D}' \circ \phi^{-1} = g \circ \mathcal{D} \circ \phi^{-1}$$

D'après la proposition 1.1.29, $\mathcal{D}' = g \circ \mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ est donc ρ^g -équivariante. Par ailleurs, $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont des homéomorphismes locaux et donc g est l'unique élément de G tel que $\mathcal{D}' = g \circ \mathcal{D}$.

Enfin, pour tout $\gamma \in \Gamma$, l'application $x \mapsto \mathcal{D}(\gamma \cdot x)$ est un (G, X) -morphisme et donc il existe un unique $g \in G$ tel que

$$\forall x \in \widetilde{M}, \mathcal{D}(\gamma \cdot x) = g \mathcal{D}(x).$$

Ainsi, ρ est l'unique morphisme $\Gamma \rightarrow G$ pour lequel $\mathcal{D}$ est équivariant.

□

1.1.6 Uniformisation de certaines (G, X) -structures riemanniennes complètes

Préliminaires

Lemme 1.1.52. *Soient (M, d) et (N, δ) deux variétés de mêmes dimensions chacun muni d'une métrique compatible avec la topologie de variété. Soit $\varphi : M \rightarrow N$ une application continue qui dilate les distances. Si M est complète et N connexe, simplement connexe, alors φ est un homéomorphisme.*

Démonstration. Comme φ dilate les distances, en particulier φ est injective. D'après le théorème d'invariance du domaine et comme M et N ont même dimension, φ est un homéomorphisme local. Par ailleurs, φ est propre. En effet, soit K une partie compacte que N et soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans $\varphi^{-1}(K)$. Par compacité de K , il existe une sous-suite convergente de $\varphi \circ x$, soit alors $i : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\varphi \circ x \circ i$ converge. La suite $\varphi \circ x \circ i$ est donc de Cauchy pour δ or φ élargit les distances donc $x \circ i$ est également de Cauchy ; finalement, M étant complet, $x \circ i$ converge.

φ est ainsi un homomorphisme local propre donc un revêtement. Cependant, N est simplement connexe, φ est donc un homéomorphisme. □

Proposition 1.1.53. *Soit (G, X) une structure analytique avec X une variété riemannienne simplement connexe et G un groupe d'isométries de X .*

Si M est une (G, X) -variété complète pour la métrique riemannienne induite alors l'application développante de M est un homéomorphisme et son holonomie est injective, d'image discrète et son action sur X est propre et totalement discontinue.

Démonstration. L'application développante $\mathcal{D} : M \rightarrow X$ est une isométrie locale, elle est donc dilatante. $\mathcal{D}$ satisfait alors les hypothèses du lemme 1.1.52 et est un homéomorphisme. Soient $x \in X$, $m \in \widetilde{M}$ tel que $\mathcal{D}(m) = x$ et $\gamma \in \pi_1(M)$. On a $\rho(\gamma) \cdot x = \rho(\gamma)\mathcal{D}(m) = \mathcal{D}(\gamma \cdot m)$ or $\pi_1(M)$ agit librement sur $\widetilde{M}$ donc $\mathcal{D}(\gamma \cdot m) \neq \mathcal{D}(m)$ et donc $\rho(\gamma) \cdot x \neq x$. Ainsi, $\rho(\gamma) \neq 1$ et ρ est injective.

$\pi_1(M)$ agit totalement discontinûment sur $\widetilde{M}$ donc $\text{Im}(\rho)$ agit totalement discontinûment sur X par isométrie. $\text{Im}(\rho)$ est donc discret. □

Corollaire 1.1.54. *Soit (G, X) une structure analytique avec X une variété riemannienne simplement connexe et G un groupe d'isométries de X .*

Si M est une (G, X) -variété complète pour la métrique riemannienne induite alors M est homogène.

Variétés euclidiennes complètes

Définition 1.1.55 (Espace euclidien). *Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathbb{E}^n$ l'espace euclidien de dimension n et soit $\text{Isom}(\mathbb{E}^n) := \text{SO}(n) \ltimes \mathbb{E}^n$ le groupe des isométries directes affines de $\mathbb{E}^n$.*

Proposition 1.1.56. *$(\text{Isom}(\mathbb{E}^n), \mathbb{E}^n)$ est une structure analytique.*

Démonstration. Le groupe $\text{Isom}(\mathbb{E}^n)$ est composé de transformations affines bijectives. C'est donc un groupe d'homéomorphismes analytiques. □

Proposition 1.1.57. *Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit M une $\mathbb{E}^n$ -variété. Si M est métriquement complète alors M est isométrique au quotient de $\mathbb{E}^n$ par un sous-groupe discret de $\text{Isom}(\mathbb{E}^n)$.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer la proposition 1.1.53. □

Pour compléter la classification des variétés localement euclidiennes complètes, il suffit alors de classer les sous-groupes discrets de $\text{Isom}(\mathbb{E}^n)$. Le théorème de Bieberbach répond à cette question.

Théorème 3 (Bieberbach). *Soit G un groupe discret d'isométries affines de $\mathbb{E}^n$. G admet un sous-groupe distingué T d'indice fini et formé de translations. De plus, l'indice de T est borné par une constante explicite dépendant de n .*

Démonstration. Le chapitre 5.4 de [Rat94] présente une preuve rapide. □

La réponse complète au théorème de classification des variétés localement euclidiennes complètes se ramène alors à faire une liste des groupes G/T possibles.

Corollaire 1.1.58. *Soit Σ une $\mathbb{E}^2$ -variété complète. Σ est isomorphe l'une des surfaces suivantes*

- $\mathbb{E}^2$
- $\mathbb{E}^1/\alpha\mathbb{Z} \times \mathbb{E}^1$
- $\mathbb{E}^2/(\mathbb{Z}u \oplus \mathbb{Z}v)$ avec (u, v) une base de $\mathbb{R}^2$.

Démonstration. D'après la proposition 1.1.53, le résultat revient à montrer que dans les sous-groupes discrets G de $\text{Isom}(\mathbb{E}^2)$, le groupe de translation T du théorème 3 de Bieberbach est le groupe G . Si G contient un élément R qui n'est pas une translation, celui-ci admet un point fixe $\omega \in \mathbb{E}^2$ et le quotient d'un voisinage de ω par $\langle R \rangle$ n'est pas isométrique à un ouvert de $\mathbb{E}^2$. En effet il est aisé de vérifier que le cercle de rayon ε centré en ω est de périmètre $2\pi\varepsilon/p$ avec $R^p = 1$. $\mathbb{E}^2/G$ n'est donc pas une $\mathbb{E}^2$ -variété, absurde. Par suite, G ne contient que des translations. $\square$

En dimension 3, la liste des $\mathbb{E}^3$ -variétés complètes contient 14 cas compacts correspondant aux réseaux de Bravais et 3 cas non-compacts correspondant aux cas $\Sigma \times \mathbb{E}^2$ avec Σ une $\mathbb{E}^2$ -variété complète.

Surfaces hyperboliques complètes

Le théorème 1 d'uniformisation des (G, X) -variétés riemanniennes complètes permet de ramener l'étude des surfaces hyperboliques complètes à l'étude des sous-groupes discrets sans torsion de $\text{SO}_0(1, 2)$. Nous en présentons un théorème fondamental dans la classification des groupes fuchsien. Nous ne donnons aucune démonstration, le lecteur non familier avec ces propriétés est invité à se référer à [Kat92] pour une introduction concise et à [Rat94] pour une étude plus approfondie.

Proposition 1.1.59. $(\text{SO}_0(1, 2), \mathbb{H}^2)$ est une structure analytique.

Le corollaire 1.1.54 permet alors d'uniformiser les surfaces hyperboliques complètes.

Proposition 1.1.60. Si Σ est une $\mathbb{H}^2$ -variété complète alors Σ est homogène.

L'étude des surfaces hyperboliques complètes se ramène donc à l'étude des sous-groupes discrets de $\text{SO}_0(1, 2)$ sans torsion et agissant librement sur $\mathbb{H}^2$.

Définition 1.1.61 (Groupe fuchsien). Un sous-groupe discret de $\text{SO}_0(1, 2)$ est appelé groupe fuchsien.

Proposition 1.1.62. Un groupe fuchsien agit proprement, totalement discontinûment sur $\mathbb{H}^2$. S'il est de plus sans torsion, alors il agit librement.

Théorème 4. Soit Γ un groupe fuchsien sans torsion, on a les faits suivants :

- (a) Si Γ est abélien alors Γ est cyclique infini engendré par une isométrie parabolique ou hyperbolique. De plus $\mathbb{H}^2/\Gamma$ est de volume infini.
- (a) Si Γ est non-abélien de type fini, alors Γ admet une présentation de la forme

$$\left\langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, c_1, \dots, c_s \mid \prod_{i=1}^g [a_i, b_i] \prod_{j=1}^s c_j = 1 \right\rangle$$

avec $2g - 2 + s > 0$ telle que pour tout $i \in \llbracket 1, g \rrbracket$, a_i, b_i sont hyperboliques. De plus $\mathbb{H}^2/\Gamma$ est une surface géométriquement finie de genre g percée s fois.

Enfin $\mathbb{H}^2/\Gamma$ est de volume fini si et seulement si pour tout $j \in \llbracket 1, s \rrbracket$, c_j est parabolique.

- (a) Si Γ est non abélien de type infini, alors $\mathbb{H}^2/\Gamma$ est de volume infini.

1.1.7 $(\mathrm{SO}_0(1, 2), \overline{\mathbb{H}^2})$ -variétés compactes

Dans le cadre de ce travail, nous considérons principalement le cas non-abélien de type fini du théorème 4, certains théorèmes s'étendent cependant au cas général. Le cas d'une surface hyperbolique complète de volume fini est d'un intérêt particulier pour nous car c'est un modèle jouet des extension BTZ que nous présenterons en détail au chapitre 4. Ces surfaces peuvent être compactifiées en une variété hyperbolique singulière homéomorphe à une surface fermée.

Définition 1.1.63 (Bord à l'infini de $\mathbb{H}^2$). *On note $\overline{\mathbb{H}^2}$ le disque fermé de $\mathbb{R}^2$ dont l'intérieur est identifié au disque de Poincaré $\mathbb{H}^2$. On le munit de la topologie usuelle sur l'intérieur et une base voisinage d'un point à l'infini étant donnée par les parties contenant une horoboule :*

$$\mathcal{H} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < 1 - x^2 - y^2\} \cup \{p\}$$

pour (x_0, y_0) dans le disque unité de $\mathbb{R}^2$.

Le bord à l'infini de $\mathbb{H}^2$, noté $\partial\mathbb{H}$, est le complémentaire de $\mathbb{H}^2$ dans $\overline{\mathbb{H}^2}$.

En fait $\partial\mathbb{H}^2$ est une description du bord à l'infini de $\mathbb{H}^2$ vue comme une variété $CAT(0)$ munie de la topologie des horoboules. Voir par exemple [BH99]. On remarque que la topologie induite sur $\partial\mathbb{H}^2$ est la topologie discrète.

Proposition 1.1.64. $(\mathrm{SO}_0(1, 2), \overline{\mathbb{H}^2})$ est une structure analytique.

Démonstration. Tout ouvert de $\overline{\mathbb{H}^2}$ contient un ouvert de $\mathbb{H}^2$, par conséquent l'analyticité se déduit de l'analyticité de $(\mathrm{SO}_0(1, 2), \mathbb{H}^2)$. $\square$

Définition 1.1.65. Soit Σ une $\overline{\mathbb{H}^2}$ -variété, on note

- $\mathrm{Int}(\Sigma)$ l'ensemble des points p de Σ tel qu'il existe une carte $(\mathcal{U}, \phi)$ au voisinage de p et tel que $\phi(p) \in \mathbb{H}^2$;
- $\partial\Sigma$ l'ensemble des points p de Σ tel qu'il existe une carte $(\mathcal{U}, \phi)$ au voisinage de p et tel que $\phi(p) \in \partial\mathbb{H}^2$;

Lemme 1.1.66. Soit Σ une $\overline{\mathbb{H}^2}$ -variété, Σ est l'union disjointe de $\mathrm{Int}(\Sigma)$ et de $\partial\Sigma$.

Démonstration. D'une part, pour tout point p de Σ , en prenant une carte $(\mathcal{U}, \phi)$ au voisinage de p , on a $\phi(p) \in \mathbb{H}^2 \sqcup \partial\mathbb{H}^2$ donc $p \in \partial\Sigma \cup \mathrm{Int}(\Sigma)$.

D'autre part, soit $p \in \Sigma$ et soit $(\mathcal{U}, \phi), (\mathcal{V}, \psi)$ deux cartes au voisinage de p . Sur l'intersection $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$, il existe $g \in \mathrm{SO}_0(1, 2)$ tel que $g \circ \phi|_{\mathcal{U} \cap \mathcal{V}} = \psi|_{\mathcal{U} \cap \mathcal{V}}$ donc $g \cdot \phi(p) = \psi(p)$. Or l'action de $\mathrm{SO}_0(1, 2)$ sur $\overline{\mathbb{H}^2}$ a deux orbites disjointes : $\mathbb{H}^2$ et $\partial\mathbb{H}^2$; donc $\phi(p)$ et $\psi(p)$ sont ou bien tout deux dans $\mathbb{H}^2$ ou bien tout deux dans $\partial\mathbb{H}^2$. Ainsi, $\partial\Sigma \cap \mathrm{Int}(\Sigma) = \emptyset$. $\square$

Lemme 1.1.67. Soit Σ une $(\mathrm{SO}_0(1, 2), \overline{\mathbb{H}^2})$ -variété compacte.

L'intérieur de Σ est une $(\mathrm{SO}_0(1, 2), \mathbb{H}^2)$ -variété complète.

Démonstration. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $\mathrm{Int}(\Sigma)$. Comme Σ est compacte, il existe $i : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(u_{i(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un certain $l \in \Sigma$. Supposons $l \in \partial\Sigma$, dans ce cas, il existe un ouvert horocyclique $\mathcal{U}$ de carte autour l et $N \geq 0$ tel que pour tout $n \geq N$, $u_{i(n)} \in \mathcal{U}$. On se donne $N' \geq N$ tel que pour tout $p, q \geq N'$, $d(u_p, u_q) \leq 1$ et deux horodisques $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$ dans $\mathcal{U}$ tels que $u_{N'} \notin \mathcal{V}_1$ et $d_{\mathcal{U}}(\mathcal{V}_1, \mathcal{U} \setminus \mathcal{V}_2) \geq 2$. Toute courbe C^1 partant de $u_{N'}$ et entrant dans $\mathcal{V}_2$ doit alors entrer dans $\mathcal{V}_1$ puis $\mathcal{V}_2$ et est donc de longueur au moins 2. Par suite, $d_{\Sigma}(u_{N'}, \mathcal{V}_2) \geq 2$. Or $\mathcal{V}_2$ est un voisinage de l et donc il existe $N'' \geq N'$ tel que pour tout $n \geq N''$, $u_n \in \mathcal{V}_2$. On a alors, $1 \geq d(u_{N''}, u_{N'}) \geq 2$, absurde, donc $l \in \mathrm{Int}(\Sigma)$.

Enfin, comme $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de Σ et admet une sous-suite convergente dans Σ , elle converge. $\square$

Proposition 1.1.68. *Soit Σ une $(\mathrm{SO}_0(1, 2), \overline{\mathbb{H}^2})$ -variété compacte. L'application développante $\mathcal{D}$ de Σ est un homéomorphisme sur son image.*

Démonstration. Il suffit de montrer que $\mathcal{D}$ est injective. D'une part $\mathcal{D}$ envoie $\mathrm{Int}(\tilde{\Sigma})$ sur $\mathbb{H}^2$ et $\partial\Sigma$ sur $\partial\mathbb{H}^2$. D'autre part, comme $\mathrm{Int}(\Sigma)$ est complet, $\mathcal{D}$ est un homéomorphisme de $\mathrm{Int}(\tilde{\Sigma})$ dans $\mathbb{H}^2$. Enfin, si $x_1, x_2 \in \tilde{\Sigma}$ sont tels $\mathcal{D}(x_1) = \mathcal{D}(x_2)$, il existe des ouverts de carte $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$ horocycliques aux voisinages de x_1 et x_2 respectivement. $\mathcal{D}|_{\mathcal{U}_i}$ est un homéomorphisme sur son image qui est un horodisque $\mathcal{V}_i$ de $\mathbb{H}^2$. Comme $\mathcal{D}(x_1) = \mathcal{D}(x_2)$, les horodisques $\mathcal{V}_1$ et $\mathcal{V}_2$ sont tout deux centrés sur $\mathcal{D}(x_2) = \mathcal{D}(x_1)$; on peut alors choisir $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$ de sorte que $\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_2$ et $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 = \emptyset$. Soient $p_1 \in \mathrm{Int}(\mathcal{U}_1)$ et $p_2 \in \mathrm{Int}(\mathcal{U}_2)$ tels que $\mathcal{D}(p_1) = \mathcal{D}(p_2)$ et soit c une géodésique minimisante de p_1 à p_2 . L'image $\mathcal{D} \circ c$ est une géodésique de $\mathbb{H}^2$ qui s'auto-intersecte, c'est absurde car $\mathbb{H}^2$ est convexe. $\square$

Corollaire 1.1.69. *Une $(\mathrm{SO}_0(1, 2), \overline{\mathbb{H}^2})$ -variété compacte d'application développante et d'holonomie $(\mathcal{D}, \rho)$ est isomorphe au quotient de l'enveloppe convexe de $\mathcal{D}(\partial\tilde{\Sigma})$ dans $\mathbb{H}^2$ par ρ .*

1.1.8 Métriques semi-riemanniennes et (G, X) -structures

Considérons (G, X) une structure analytique avec X une variété semi-riemannienne et G agissant sur X par isométries. Toute (G, X) -variété M est alors naturellement dotée d'une métrique semi-riemannienne localement isométrique à X . La réciproque n'est pas vraie, il existe des (G, X) -structures analytiques semi-riemanniennes et des variétés semi-riemanniennes localement isométriques à X qui ne sont pas des (G, X) -variétés.

Contre-exemple 1.1.70. *Soit $X = \mathbb{R}^2$ et $G = \mathbb{Z}^2$ agissant par addition sur X et considérons X muni de sa métrique riemannienne usuelle $dx^2 + dy^2$. La variété $M := \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ munie de la métrique $dr^2 + r^2 d\theta^2$ est localement isométrique à X , elle n'est pourtant pas une $(\mathbb{Z}^2, \mathbb{R}^2)$ -variété. Pour le vérifier, il suffit de remarquer que M est le quotient de $\mathbb{E}^2 \setminus \{0\}$ par la rotation d'angle π , c'est donc une $(\mathrm{Isom}(\mathbb{E}^2), \mathbb{E}^2)$ -variété et l'holonomie d'un lacet simple non trivial est une rotation d'angle π . Une telle rotation n'est pas dans $\mathbb{Z}^2$.*

La proposition suivante donne un critère permettant de reconstruire une (G, X) -structure depuis une métrique semi-riemannienne.

Proposition 1.1.71. *Soit (G, X) une structure analytique telle X est une variété semi-riemannienne sur laquelle G agit par isométrie.*

Si pour tout ouvert connexe $\mathcal{U} \subset X$ et tout plongement isométrique $f : \mathcal{U} \rightarrow X$ il existe une isométrie $g \in G$ telle que $g|_{\mathcal{U}} = f$ alors toute variété semi-riemannienne M localement isométrique à X admet une unique (G, X) -structure dont les cartes sont des isométries.

Démonstration. Supposons que pour tout ouvert connexe $\mathcal{U} \subset X$ et tout plongement isométrique $f : \mathcal{U} \rightarrow X$ il existe une isométrie $g \in G$ telle que $g|_{\mathcal{U}} = f$.

Soit M une variété semi-riemannienne localement isométrique à X . Pour tout $p \in M$, on se donne un ouvert $\mathcal{U}_p$ contenant p , un plongement isométrique $\phi_p : \mathcal{U}_p \rightarrow X$ et on pose $\mathcal{V}_p := \phi_p(\mathcal{U}_p)$. Soient $p, q \in M$ tels que $\mathcal{U}_p \cap \mathcal{U}_q \neq \emptyset$ et soit $\mathcal{W}$ un ouvert connexe de $\mathcal{U}_p \cap \mathcal{U}_q$. l'application $\phi_q \circ \phi_p^{-1} : \phi_p(\mathcal{W}) \rightarrow \phi_q(\mathcal{W}) \subset X$ est un plongement isométrique et est donc la restriction d'un élément de G . L'atlas $(\mathcal{U}_p, \mathcal{V}_p, \phi_p)_{p \in M}$ est donc un (G, X) -atlas. $\square$

Remarque 1.1.72. *Les couples (G, X) suivants sont des structures analytiques semi-riemanniennes satisfaisant les hypothèses de la propriété 1.1.71 :*

1. $X = \mathbb{E}^{1,n}$ avec $G = \mathrm{Isom}(\mathbb{E}^{1,n})$ et $n \geq 1$;
2. $X = \mathbb{S}^{1,n}$ avec $G = \mathrm{Isom}(\mathbb{S}^{1,n})$ et $n \geq 1$.

1.2 (G, X) -variétés singulières

1.2.1 Préliminaires (I) : connexité semi-locale

Cette section a pour objet de définir la notion d'ouvert dense semi-localement connexe et d'en obtenir des propriétés. Le résultat le plus important est la localisation de cette propriété : un ouvert « localement » dense et semi-localement connexe est dense et semi-localement connexe.

Définition 1.2.1 (Connexité semi-locale). *Soit M un espace topologique, une partie P de M est semi-localement connexe si pour tout ouvert connexe $\mathcal{U}$ de M , $\mathcal{U} \cap P$ est connexe.*

Une application continue $M \rightarrow N$ est semi-localement connexe si son image est semi-localement connexe.

Remarque 1.2.2. *Si ouvert $\mathcal{U}$ d'un espace topologique M est semi-localement connexe alors il est « localement connexe dans M » suivant la terminologie de Fox [Fox57].*

Exemple 1.2.3. • *Soit M un espace topologique, on remarque aisément que $\emptyset$ et M sont des parties semi-localement connexes de M .*

- *Soit E un espace vectoriel, le complémentaire d'un sous-espace vectoriel fermé de codimension au moins deux est un ouvert semi-localement connexe.*
- *Le complémentaire de $\mathbb{Q}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ est semi-localement connexe mais n'est pas un ouvert.*

Lemme 1.2.4. *Soit M un espace topologique et soient $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ deux ouverts de M tels que $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i) $\mathcal{U}$ est dense et semi-localement connexe dans M
- (ii) $\mathcal{U}$ est dense et semi-localement connexe dans $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}$ est dense et semi-localement connexe dans M

Démonstration.

- Montrons d'abord (i) $\Rightarrow$ (ii)

Supposons $\mathcal{U}$ dense et semi-localement connexe dans M , alors $\mathcal{U}$ est clairement dense dans $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}$ est dense dans M . De plus, soit $\mathcal{W}$ un ouvert connexe de $\mathcal{V}$, en particulier, $\mathcal{W}$ est un ouvert connexe de M . Comme $\mathcal{U}$ est semi-localement connexe dans M , $\mathcal{U} \cap \mathcal{W}$ est connexe. Ainsi $\mathcal{U}$ est dense et semi-localement connexe dans $\mathcal{V}$.

Comme $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ et $\mathcal{U}$ dense dans M , $\mathcal{V}$ est dense dans M . Enfin, pour tout $\mathcal{W}$ ouvert connexe de M , on a $\mathcal{V} \cap \mathcal{W} \supset \mathcal{U} \cap \mathcal{W}$. Soient $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2$ deux ouverts de M tels que $\mathcal{V} \cap \mathcal{W} = \mathcal{W}_1 \sqcup \mathcal{W}_2$, alors $(\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{U}) \sqcup (\mathcal{W}_2 \cap \mathcal{U}) = \mathcal{U} \cap \mathcal{W}$. Or $\mathcal{U} \cap \mathcal{W}$ est connexe donc $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{U} = \emptyset$ ou $\mathcal{W}_2 \cap \mathcal{U} = \emptyset$, de plus $\mathcal{U}$ est dense dans M donc $\mathcal{W}_i \cap \mathcal{U} = \emptyset \Leftrightarrow \mathcal{W}_i = \emptyset$. Par suite, $\mathcal{W}_1 = \emptyset$ ou $\mathcal{W}_2 = \emptyset$, donc $\mathcal{W} \cap \mathcal{V}$ est connexe. Finalement, $\mathcal{V}$ est dense et semi-localement connexe.

- Montrons à présent (ii) $\Rightarrow$ (i)]

Réciproquement, supposons $\mathcal{V}$ dense et semi-localement connexe dans M . Si $\mathcal{U}$ est dense et semi-localement connexe dans $\mathcal{V}$ alors pour tout $\mathcal{W}$ ouvert connexe de M , d'une part $\mathcal{W} \cap \mathcal{V}$ est connexe et d'autre part $\mathcal{U} \cap \mathcal{W} = \mathcal{U} \cap (\mathcal{W} \cap \mathcal{V})$; et comme $\mathcal{U}$ est semi-localement connexe dans $\mathcal{V}$, l'intersection $\mathcal{U} \cap (\mathcal{W} \cap \mathcal{V})$ est connexe et donc $\mathcal{U} \cap \mathcal{W}$ est connexe. De plus, $\mathcal{V}$ est dense dans M et $\mathcal{U}$ est dense dans $\mathcal{V}$ donc $\mathcal{U}$ est dense dans M . Finalement, $\mathcal{U}$ est dense et semi-localement connexe dans M .

□

Lemme 1.2.5. *Soit M un espace topologique, les propriétés suivantes sont vérifiées :*

- (a) *toute union non vide d'ouverts denses semi-localement connexes est dense et semi-localement connexe,*

- (b) toute intersection finie d'ouverts denses semi-localement connexes est dense et semi-localement connexe.

Démonstration.

- (a) Si $(\mathcal{U}_i)_{i \in I}$ est une famille non vide d'ouverts denses et semi-localement connexes dans M , alors on se donne $i_0 \in I$ de sorte que $\mathcal{U}_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i$. L'union contient ainsi un ouvert dense et semi-localement connexe, le lemme 1.2.4 permet de conclure.
- (b) Il suffit de traiter l'intersection de deux ouverts denses semi-localement connexes. Soient $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ ouverts denses et semi-localement connexes dans M , alors $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ est dense dans M . Enfin, pour tout $\mathcal{W}$ ouvert connexe de M , comme $\mathcal{U}$ est semi-localement connexe, $\mathcal{U} \cap \mathcal{W}$ est un ouvert connexe de M et comme $\mathcal{V}$ est semi-localement connexe, $\mathcal{V} \cap (\mathcal{U} \cap \mathcal{W})$ est un ouvert connexe de M . Par suite $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ est semi-localement connexe dans M .

□

Lemme 1.2.6. *Soit M un espace topologique et soit $(\mathcal{U}_i)_{i \in I}$ une famille de parties connexes non vides. On pose $\sim$ la relation d'équivalence sur I engendrée par la relation réflexive et symétrique $i \mathcal{R} j \Leftrightarrow \mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j \neq \emptyset$.*

Alors l'union des $\mathcal{U}_i$ est connexe si et seulement si $I/\sim$ est un singleton.

Démonstration. On pose $\mathcal{U} := \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i$.

- Supposons que $I/\sim$ est un singleton et donnons nous $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2$ deux ouverts de $\mathcal{U}$ tels que $\mathcal{U} = \mathcal{W}_1 \sqcup \mathcal{W}_2$. Pour tout $i \in I$, comme $\mathcal{U}_i$ est connexe, ou bien $\mathcal{U}_i \subset \mathcal{W}_1$ ou bien $\mathcal{U}_i \subset \mathcal{W}_2$. On définit alors la relation $\mathcal{S}$ sur I telle que $i, j \in I$ sont reliés par $\mathcal{S}$ si $\mathcal{U}_i$ et $\mathcal{U}_j$ sont dans le même ouvert $\mathcal{W}_k, k \in \{1, 2\}$. C'est à dire :

$$i \mathcal{S} j \Leftrightarrow (\mathcal{U}_i \cap \mathcal{W}_1 = \mathcal{U}_j \cap \mathcal{W}_1 \neq \emptyset \text{ ou } \mathcal{U}_i \cap \mathcal{W}_2 = \mathcal{U}_j \cap \mathcal{W}_2 \neq \emptyset).$$

$\mathcal{S}$ est une relation d'équivalence sur I et on a pour tout $i, j \in I, i \mathcal{R} j \Rightarrow i \mathcal{S} j$. Par suite $i \sim j \Rightarrow i \mathcal{S} j$.

Or $I/\sim$ est un singleton, on a donc $\forall i, j \in I, i \sim j$ et donc $\forall i, j \in I, i \mathcal{S} j$ c'est-à-dire qu'il existe $k \in \{1, 2\}$ tel que tous les $\mathcal{U}_i$ sont dans $\mathcal{W}_k$. Cela implique donc que $\mathcal{W}_1 = \emptyset$ ou $\mathcal{W}_2 = \emptyset$ et donc l'union des $\mathcal{U}_i$ est connexe.

- Supposons à présent $I/\sim$ n'est pas un singleton, dans ce cas, pour $\omega \in I/\sim$, on pose $\mathcal{W}_\omega := \bigcup_{i \in \omega} \mathcal{U}_i$. Montrons que l'union à droite de l'égalité

$$\bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i = \bigcup_{\omega \in I/\sim} \mathcal{W}_\omega$$

est disjointe. Soient $\omega, \omega' \in I/\sim$ tels que $\mathcal{W}_\omega \cap \mathcal{W}_{\omega'} \neq \emptyset$. Soit $p \in \mathcal{W}_\omega \cap \mathcal{W}_{\omega'}$, il existe $i \in \omega$ et $j \in \omega'$ tels que $p \in \mathcal{U}_i$ et $p \in \mathcal{U}_j$, donc tels que $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j \neq \emptyset$, et donc tels que $i \sim j$, c'est-à-dire $\omega = \omega'$.

Aucun des $\mathcal{W}_\omega$ n'est vide c'est donc que l'union des $\mathcal{U}_i$ n'est pas connexe.

□

Corollaire 1.2.7. *Soit M un espace topologique et soient $(\mathcal{U}_i)_{i \in I}$ et $(\mathcal{V}_i)_{i \in I}$ deux familles de parties connexes non vides de M .*

Si $\bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i$ est connexe et si

$$\forall i, j \in I, \mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j \neq \emptyset \Rightarrow \mathcal{V}_i \cap \mathcal{V}_j \neq \emptyset$$

alors $\bigcup_{i \in I} \mathcal{V}_i$ est connexe.

Démonstration. On reprend les notations du lemme 1.2.6. On considère les relations $\sim_{\mathcal{U}}$ et $\sim_{\mathcal{V}}$ sur I données respectivement par l'union des $(\mathcal{U}_i)_{i \in I}$ et l'union des $(\mathcal{V}_i)_{i \in I}$. Comme l'union des $(\mathcal{U}_i)_{i \in I}$ est connexe et aucun des $\mathcal{U}_i$ n'est vide, $I / \sim_{\mathcal{U}}$ est un singleton. Or $\forall i, j \in I, \mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j \neq \emptyset \Rightarrow \mathcal{V}_i \cap \mathcal{V}_j \neq \emptyset$ donc $\sim_{\mathcal{V}}$ est plus grossière que $\sim_{\mathcal{U}}$ et donc $I / \sim_{\mathcal{V}}$ est un singleton. Enfin, aucun des $\mathcal{V}_i$ n'est vide donc leur union est connexe. $\square$

Lemme 1.2.8. *Soient M un espace topologique et B une partie de M . S'il existe une partie connexe $A \subset B$ dense dans B alors B est connexe.*

Démonstration. Voir par exemple [Dix81] théorème 10.1.7. $\square$

Lemme 1.2.9. *Soient M un espace topologique et $\mathcal{U}$ un ouvert de M . On pose $\mathcal{U} = \bigsqcup_{i \in I} \mathcal{U}_i$ la décomposition de $\mathcal{U}$ en composantes connexes.*

Si M est localement connexe, alors chacun des $\mathcal{U}_i$ est ouvert.

Démonstration. Supposons M localement connexe. Soient $i \in I$ et $x \in \mathcal{U}_i$. Comme $\mathcal{U}$ est un ouvert contenant x , il existe $\mathcal{V}$ un voisinage ouvert connexe de x inclus dans $\mathcal{U}$. Comme $\mathcal{V}$ est connexe et contient x , $\mathcal{V}$ est inclus dans l'un des $\mathcal{U}_i$ et donc $\mathcal{U}_i$ contient un voisinage de x . Par suite, $\mathcal{U}_i$ est ouvert. $\square$

Lemme 1.2.10. *Soient M, N deux espaces topologiques localement connexes, $\mathcal{U}$ un ouvert de M et $\pi : M \rightarrow N$ une application continue ouverte et surjective.*

Si $\mathcal{U}$ est dense et semi-localement connexe dans M alors $\pi(\mathcal{U})$ est dense et semi-localement connexe dans N .

Démonstration. Soit $\mathcal{U}$ un ouvert dense et semi-localement connexe dans M et supposons N localement connexe. Considérons $\mathcal{V}$ un ouvert connexe de N et posons $\mathcal{W} := \pi^{-1}\mathcal{V} = \bigsqcup_{i \in I} \mathcal{W}_i$ la décomposition en composantes connexes de $\mathcal{W}$.

$\mathcal{W}$ est ouvert car π est continue; comme M est localement connexe, d'après le lemme 1.2.9, chacun des $\mathcal{W}_i$ est ouvert et connexe; par continuité et ouverture de π , chacun des $\pi(\mathcal{W}_i)$ est ouvert et connexe; de plus $\mathcal{U} \cap \mathcal{W}_i$ est ouvert, connexe et dense dans $\mathcal{W}_i$ donc $\pi(\mathcal{U} \cap \mathcal{W}_i)$ est ouvert connexe et dense dans $\pi(\mathcal{W}_i)$. Ainsi pour tout $i, j \in I$, $\pi(\mathcal{W}_i) \cap \pi(\mathcal{W}_j)$ est un ouvert et

$$\pi(\mathcal{W}_i \cap \mathcal{U}) \cap \pi(\mathcal{W}_j \cap \mathcal{U}) \neq \emptyset \Leftrightarrow \pi(\mathcal{W}_i) \cap \pi(\mathcal{W}_j) \neq \emptyset.$$

Or $\bigcup_{i \in I} \pi(\mathcal{W}_i) = \mathcal{V}$ est connexe, aucun des $\pi(\mathcal{W}_i)$ n'est vide, aucun des $\pi(\mathcal{W}_i \cap \mathcal{U})$ n'est vide donc, d'après le lemme 1.2.6,

$$\bigcup_{i \in I} \pi(\mathcal{W}_i \cap \mathcal{U})$$

est connexe.

Par ailleurs,

$$\mathcal{V} \cap \pi(\mathcal{U}) = \bigcup_{i \in I} \pi(\mathcal{W}_i) \cap \pi(\mathcal{U}) \quad (1.6)$$

$$\supset \bigcup_{i \in I} \pi(\mathcal{W}_i \cap \mathcal{U}). \quad (1.7)$$

Ainsi $\mathcal{V} \cap \pi(\mathcal{U})$ est un ouvert contenant une partie dense et connexe; N étant localement connexe, d'après le lemme 1.2.8, $\mathcal{W} \cap \pi(\mathcal{U})$ est connexe. $\square$

Lemme 1.2.11. *Soient M un espace topologique, $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ deux ouverts de M .*

Si $\mathcal{U}$ est dense et semi-localement connexe dans M , alors $\mathcal{V} \cap \mathcal{U}$ est dense et semi-localement connexe dans $\mathcal{V}$

Démonstration. Supposons $\mathcal{U}$ dense et semi-localement connexe dans M . Soit $\mathcal{W}$ un ouvert non vide de $\mathcal{V}$, alors $\mathcal{W}$ est un ouvert non vide de M et par densité de $\mathcal{U}$ dans M , $\mathcal{U} \cap \mathcal{W} = (\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \cap \mathcal{W}$ est non vide. Soit à présent $\mathcal{W}$ un ouvert connexe dans $\mathcal{V}$, c'est un ouvert connexe de M . Or $\mathcal{U}$ est semi-localement connexe dans M donc $\mathcal{W} \cap \mathcal{U} = \mathcal{W} \cap (\mathcal{U} \cap \mathcal{V})$ est connexe. $\square$

Proposition 1.2.12. *Soient M un espace topologique localement connexe, $(\mathcal{U}_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de M et soit $(\mathcal{V}_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts de M . On pose $\mathcal{V} := \bigcup_{i \in I} \mathcal{V}_i$.*

Si pour tout $i \in I$, $\mathcal{V}_i$ est inclus dans $\mathcal{U}_i$, dense dans $\mathcal{U}_i$ et semi-localement connexe dans $\mathcal{U}_i$; alors $\mathcal{V}$ est dense et semi-localement connexe dans M ,

Démonstration. C'est une conséquence du lemme 1.2.10. En effet, l'application

$$\coprod_{i \in I} \mathcal{U}_i \xrightarrow{\pi} M = \left(\coprod_{i \in I} \mathcal{U}_i \right) / \sim$$

est continue surjective et ouverte (avec $\sim$ l'identification naturelle de $\mathcal{U}_i$ et $\mathcal{U}_j$ sur $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j$). Ainsi, d'une part M est localement connexe, d'autre part $\pi(\mathcal{U})$ est ouverte et enfin $\coprod_{i \in I} \mathcal{V}_i$ est dense et semi-localement connexe dans $\coprod_{i \in I} \mathcal{U}_i$. Le lemme 1.2.10 permet de conclure. $\square$

Corollaire 1.2.13. *Soient M, N deux espaces topologiques, $f : M \rightarrow N$ un homéomorphisme local et $\mathcal{U} \subset N$ un ouvert.*

Si M est localement connexe et $\mathcal{U}$ est dense et semi-localement connexe dans N , alors $f^{-1}(\mathcal{U})$ est dense et semi-localement connexe dans M .

Démonstration. Supposons $\mathcal{U}$ dense et semi-localement connexe dans N et montrons que $f^{-1}(\mathcal{U})$ est semi-localement connexe. Considérons un ouvert connexe $\mathcal{W}$ de M . Comme f est un homéomorphisme local, il existe un recouvrement $(\mathcal{V}_i)_{i \in I}$ de M tel que pour tout $i \in I$, $f|_{\mathcal{V}_i}$ soit un homéomorphisme sur son image et $f(\mathcal{V}_i)$ est un ouvert de N . Comme $\mathcal{U}$ est un ouvert dense et semi-localement connexe de N , $\mathcal{U} \cap f(\mathcal{V}_i)$ est un ouvert dense semi-localement connexe de $f(\mathcal{V}_i)$ et donc $(f|_{\mathcal{V}_i})^{-1}(\mathcal{U} \cap f(\mathcal{V}_i)) = f^{-1}(\mathcal{U}) \cap \mathcal{V}_i$ est un ouvert dense et semi-localement connexe dans $\mathcal{V}_i$. La proposition 1.2.12 permet de conclure. $\square$

1.2.2 Préliminaires (II) : nappes

Définition 1.2.14 (Prénappe). *Une prénappe sur un espace topologique M est un ensemble non vide d'ouverts denses semi-localement connexes de M qui est stable par union quelconque.*

Définition 1.2.15 (Nappe). *Une nappe sur un espace topologique M est un ensemble non vide d'ouverts denses semi-localement connexes de M qui est stable par intersection finie et union quelconque.*

Une nappe $\mathcal{F}$ prolonge une nappe $\mathcal{F}'$ si $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$.

Lemme 1.2.16. *Soit M un espace topologique. Pour toute prénappe $\mathcal{F}$, il existe une unique nappe $\overline{\mathcal{F}}$ contenant $\mathcal{F}$ et qui est minimale pour l'inclusion.*

Démonstration. On pose $\mathcal{F}' := (\bigcap_{\mathcal{U} \in \mathcal{G}} \mathcal{U})_{\mathcal{G} \subset \mathcal{F} \text{ fini}}$ et $\overline{\mathcal{F}} := (\bigcup_{\mathcal{U} \in \mathcal{G}} \mathcal{U})_{\mathcal{G} \subset \mathcal{F}'}$. On vérifie aisément que $\overline{\mathcal{F}}$ est stable par union quelconque et intersection finie, c'est donc une nappe contenant $\mathcal{F}$. Par ailleurs, toute nappe contenant $\mathcal{F}$, étant stable par intersection finie et union quelconque contient nécessairement $\overline{\mathcal{F}}$. $\square$

Définition 1.2.17 (Nappe engendrée). *Soit M un espace topologique et soit une prénappe $\mathcal{F}$ sur M , l'unique nappe $\overline{\mathcal{F}}$ contenant $\mathcal{F}$ et minimale pour l'inclusion est appelée nappe engendrée par $\mathcal{F}$.*

1.2.3 (G, X) -brouillard

Définition 1.2.18 ((G, X) -brouillard). Soient (G, X) une structure analytique, M un espace topologique. Un (G, X) -brouillard un couple $(\mathcal{F}, \mathcal{A})$, avec $\mathcal{F}$ une prénappe sur M et $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_U)_{U \in \mathcal{F}}$ une famille telle que pour tout $U \in \mathcal{F}$, $\mathcal{A}_U$ est un (G, X) -atlas.

Définition 1.2.19 (Restriction et prolongement). Soient $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ deux nappes telles que $\mathcal{F}'$ prolonge $\mathcal{F}$. La restriction d'un brouillard $\mathcal{B}$ sur $\mathcal{F}'$ à $\mathcal{F}$ est le brouillard $\mathcal{B}|_{\mathcal{F}} := (\mathcal{B}_U)_{U \in \mathcal{F}}$.

Un brouillard $\mathcal{B}$ sur $\mathcal{F}'$ est plus épais qu'un brouillard $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{F}$ si $\mathcal{A} = \mathcal{B}|_{\mathcal{F}}$ et on le note

$$(\mathcal{F}, \mathcal{A}) \leq (\mathcal{F}', \mathcal{B}).$$

Proposition 1.2.20. Soit (G, X) une structure analytique séparée localement connexe, et soit N un espace topologique. Soit $(\mathcal{B}_k)_{k \in K}$ une famille de (G, X) -préatlas telle que :

- Pour tout $k \in K$, $\text{supp}(\mathcal{B}_k)$ est dense et semi-localement connexe ;
- Pour tout $(k, k') \in K^2$, il existe un ouvert $M \subset \text{supp}(\mathcal{B}_k) \cap \text{supp}(\mathcal{B}_{k'})$ dense semi-localement connexe de N et $\mathcal{A}$ un (G, X) -atlas sur M tels que $\mathcal{B}_k|_M$ et $\mathcal{B}_{k'}|_M$ sont plus fins que $\mathcal{A}$.

Alors l'union $\bigcup_{k \in K} \mathcal{B}_k$ est un (G, X) -préatlas.

Démonstration. Soient $k, k' \in K$, on note $\mathcal{B}_k = (\mathcal{U}_i, \mathcal{V}_i, \phi_i)_{i \in I(k)}$ et $\mathcal{B}_{k'} = (\mathcal{U}_i, \mathcal{V}_i, \phi_i)_{i \in I(k')}$. Soient $i \in I(k), j \in I(k')$ tels que $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j \neq \emptyset$ et soit $\widehat{\mathcal{W}} \subset \mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j$ un ouvert connexe non vide. Soient $M \subset \text{supp}(\mathcal{B}_k) \cap \text{supp}(\mathcal{B}_{k'})$ un ouvert dense semi-localement connexe et $\mathcal{A}$ un (G, X) -atlas sur M tel que $\mathcal{B}_k|_M$ et $\mathcal{B}_{k'}|_M$ sont plus fins que $\mathcal{A}$.

- Prenons un point $p \in \widehat{\mathcal{W}} \cap M$, une carte $(\mathcal{U}, \mathcal{V}, \phi)$ dans $\mathcal{A}$ autour de p et prenons $\mathcal{W} \subset \widehat{\mathcal{W}} \cap \mathcal{U}$ un ouvert connexe contenant p , un tel ouvert existe car M est localement connexe. Il existe $g, h \in G$ tel que

$$\phi|_{\mathcal{W}} = g \circ \phi_i|_{\mathcal{W}} \quad \phi|_{\mathcal{W}} = h \circ \phi_j|_{\mathcal{W}},$$

donc

$$\phi_j|_{\mathcal{W}} = (h^{-1}g) \circ \phi_i|_{\mathcal{W}}.$$

On pose alors $g_{p, \mathcal{U}, \mathcal{W}} := h^{-1}g$.

- Montrons que $g_{p, \mathcal{U}, \mathcal{W}}$ ne dépend ni de $\mathcal{U}$ ni de $\mathcal{W}$ ni de p .

Soient $p \in \widehat{\mathcal{W}} \cap M$, $(\mathcal{U}, \mathcal{V}, \phi)$ et $(\mathcal{U}', \mathcal{W}', \phi')$ sont deux cartes de $\mathcal{A}$ au voisinage de p et $\mathcal{W}$ et $\mathcal{W}'$ sont deux ouverts connexes contenant p inclus dans $\widehat{\mathcal{W}} \cap \mathcal{U}$ et $\widehat{\mathcal{W}} \cap \mathcal{U}'$ respectivement. Les restrictions de $g_{p, \mathcal{U}, \mathcal{W}}$ et $g_{p, \mathcal{U}', \mathcal{W}'}$ à $\phi_i(\mathcal{W} \cap \mathcal{W}')$ sont égales or (G, X) est une structure analytique, donc $g_{p, \mathcal{U}, \mathcal{W}} = g_{p, \mathcal{U}', \mathcal{W}'}$. Par suite $g_p := g_{p, \mathcal{U}, \mathcal{W}}$ ne dépend que de p , de plus si $q \in \mathcal{W}$ alors, de la même manière, $g_{q, \mathcal{U}, \mathcal{W}} = g_{p, \mathcal{U}, \mathcal{W}}$; l'application $\mathcal{W} \cap M \rightarrow G, p \mapsto g_p$ est donc localement constante. Comme M est une partie semi-localement connexe de N et que $\widehat{\mathcal{W}}$ est connexe, l'intersection $\widehat{\mathcal{W}} \cap M$ est connexe ; finalement $p \mapsto g_p$ est constante sur $\widehat{\mathcal{W}} \cap M$.

- On a démontré qu'il existe $g \in G$ tel que

$$\forall x \in M \cap \widehat{\mathcal{W}}, \quad \phi_j(x) = g \circ \phi_i(x)$$

Comme ϕ_i, ϕ_j et g sont continues, X est séparé et M est dense, l'intersection $\widehat{\mathcal{W}} \cap M$ est donc dense dans $\widehat{\mathcal{W}}$ et

$$\phi_j|_{\widehat{\mathcal{W}}} = g \circ \phi_i|_{\widehat{\mathcal{W}}}.$$

Ainsi, $\mathcal{B}_k \cup \mathcal{B}_{k'}$ est un (G, X) -préatlas et comme $k, k' \in K$ sont quelconque, $\bigcup_{k \in K} \mathcal{B}_k$ est un (G, X) -préatlas. □

Lemme 1.2.21. *Soient (G, X) une structure analytique séparée localement connexe par arc, M un espace topologique et soient $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ deux prénapes sur M tels que $\mathcal{F}'$ prolonge $\mathcal{F}$. Si $(\mathcal{F}, \mathcal{A}_0)$ est un (G, X) -brouillard $\mathcal{F}$ alors il existe au plus un (G, X) -brouillard $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{F}'$ plus épais que $\mathcal{A}_0$.*

Démonstration. Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux brouillards sur $\mathcal{F}$ plus épais que $\mathcal{A}_0$.

Pour tout $\mathcal{U} \in \mathcal{F}$, si $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}_0$ alors par définition $\mathcal{A}_{\mathcal{U}} = \mathcal{A}_0|_{\mathcal{U}} = \mathcal{B}_{\mathcal{U}}$ et si $\mathcal{U} \supset \mathcal{U}_0$ alors d'après la proposition 1.2.20, l'union $\mathcal{A}_{\mathcal{U}} \cup \mathcal{B}_{\mathcal{U}}$ est un (G, X) -atlas et par maximalité de $\mathcal{A}$ et de $\mathcal{B}$, on obtient $\mathcal{A}_{\mathcal{U}} = \mathcal{A}_{\mathcal{U}} \cup \mathcal{B}_{\mathcal{U}} = \mathcal{B}_{\mathcal{U}}$. $\square$

Proposition 1.2.22 (Prolongement d'un (G, X) -brouillard). *Soient (G, X) une structure analytique séparée localement connexe par arc, M un espace topologique, $\mathcal{F}$ une prénappe sur M et soit $\mathcal{A}$ un brouillard sur $\mathcal{F}$. On note $\overline{\mathcal{F}}$ la nappe engendrée par $\mathcal{F}$.*

Il existe un unique (G, X) -brouillard $\overline{\mathcal{A}}$ sur $\overline{\mathcal{F}}$ plus épais que $(\mathcal{F}, \mathcal{A})$.

Démonstration. L'unicité est donnée par le lemme 1.2.21. Pour $\mathcal{U} \in \overline{\mathcal{F}}$, on se donne une famille $(\mathcal{U}_{i,j})_{i \in I, j \in J(i)}$ d'ouverts de $\mathcal{F}$ tels que

$$\mathcal{U} = \bigcup_{i \in I} \bigcap_{j \in J(i)} \mathcal{U}_{i,j}.$$

Pour tout $a \in I$ et $b \in J(a)$, $\tilde{\mathcal{U}} := \bigcup_{i,j} \mathcal{U}_{i,j} \in \mathcal{F}$ car $\mathcal{F}$ est stable par union quelconque, on pose alors $\overline{\mathcal{A}}_{\mathcal{U}} := \mathcal{A}_{\tilde{\mathcal{U}}|_{\mathcal{U}}}$. Soit $\mathcal{V}$ un ouvert de $\overline{\mathcal{F}}$ contenant $\mathcal{U}$, on se donne de la même manière une famille $(\mathcal{V}_{i,j})_{i \in I', j \in J'(i)}$ telle que

$$\mathcal{V} = \bigcup_{j \in I'} \bigcap_{j \in J'(i)} \mathcal{V}_{i,j}.$$

On définit $\tilde{\mathcal{V}}$ de la même manière, on a alors $\tilde{\mathcal{V}} \in \mathcal{F}$ et $\tilde{\mathcal{U}} \cup \tilde{\mathcal{V}} \in \mathcal{F}$, et donc $\mathcal{A}_{\tilde{\mathcal{U}} \cup \tilde{\mathcal{V}}|_{\mathcal{U}}} = \mathcal{A}_{\tilde{\mathcal{U}}}$ et $\mathcal{A}_{\tilde{\mathcal{U}} \cup \tilde{\mathcal{V}}|_{\mathcal{V}}} = \mathcal{A}_{\tilde{\mathcal{V}}}$. Par suite $\mathcal{A}_{\tilde{\mathcal{V}}|_{\mathcal{U}}} = \mathcal{A}_{\tilde{\mathcal{U}} \cup \tilde{\mathcal{V}}|_{\mathcal{U}}} = \mathcal{A}_{\tilde{\mathcal{U}}}$. Ainsi $\overline{\mathcal{A}} := (\overline{\mathcal{A}}_{\mathcal{U}})_{\mathcal{U} \in \overline{\mathcal{F}}}$ est un brouillard sur $\overline{\mathcal{F}}$. $\square$

Définition 1.2.23 ((G, X) -brouillard opaque). *Un (G, X) -brouillard $(\mathcal{F}, \mathcal{A})$ sur un espace topologique M est opaque si pour tout (G, X) -brouillard $(\mathcal{F}', \mathcal{A}')$ sur M plus épais que $(\mathcal{F}, \mathcal{A})$ on a $(\mathcal{F}, \mathcal{A}) = (\mathcal{F}', \mathcal{A}')$.*

Proposition 1.2.24. *Soient (G, X) une structure analytique, M un espace topologique, $\mathcal{F}$ une nappe sur M et $\mathcal{A}$ un (G, X) -brouillard sur $\mathcal{F}$. Il existe un unique (G, X) -brouillard $(\overline{\mathcal{F}}, \overline{\mathcal{A}})$ opaque plus épais que $(\mathcal{F}, \mathcal{A})$.*

Démonstration. Soit $(\mathcal{F}_k, \mathcal{A}_k)_{k \in K}$ la famille des brouillards prolongeant $(\mathcal{F}, \mathcal{A})$. On pose $\mathcal{F}_K$ la prénappe

$$\mathcal{F}_K := \left(\bigcup_{k \in K} \mathcal{U}_k \right)_{(\mathcal{U}_k) \in \prod_{k \in K} \mathcal{F}_k}.$$

Soit $\mathcal{U} = \bigcup_{k \in K} \mathcal{U}_k \in \mathcal{F}_K$, d'après le lemme 1.2.4, $\mathcal{U}$ est dense et semi-localement connexe car il contient un ouvert dense et semi-localement connexe. On se donne $\mathcal{U}' \in \mathcal{F}$, d'après le lemme 1.2.5, $\mathcal{U}'' := \mathcal{U}' \cap \mathcal{U}$ est un ouvert dense semi-localement connexe, de même que pour $\mathcal{U}' \cap \mathcal{U}_k = \mathcal{U}'' \cap \mathcal{U}_k$ pour tout $k \in K$.

Soient $k, k' \in K$, $M_{k,k'} := \mathcal{U}_k \cap \mathcal{U}_{k'} \cap \mathcal{U}'$ est un ouvert dense semi-localement connexe. Comme $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_k$, $\mathcal{F}_k$ stable par intersection finie et union, et comme $\mathcal{A}_k$ prolonge $\mathcal{A}$, d'une part $\mathcal{A}_{k, \mathcal{U}_k \cup \mathcal{U}'|_{\mathcal{U}_k}}$ est plus fin que $\mathcal{A}_{k, \mathcal{U}_k}$ et d'autre part $\mathcal{A}_{k, \mathcal{U}_k \cup \mathcal{U}'|_{\mathcal{U}'}}$ est plus fin que $\mathcal{A}_{\mathcal{U}'}$; donc $\mathcal{A}_{k, \mathcal{U}_k|_{\mathcal{U}_k \cap \mathcal{U}'}} = \mathcal{A}_{k, \mathcal{U}_k \cup \mathcal{U}'|_{\mathcal{U}_k \cap \mathcal{U}'}}$ est plus fin que $\mathcal{A}_{\mathcal{U}'|_{\mathcal{U}_k \cap \mathcal{U}'}}$; ainsi $\mathcal{A}_{k, \mathcal{U}_k|_{M_{k,k'}}}$ est plus fin que $\mathcal{A}_{\mathcal{U}'|_{M_{k,k'}}}$. De la même manière, $\mathcal{A}_{k', \mathcal{U}_{k'}|_{M_{k,k'}}}$ est plus fin que $\mathcal{A}_{\mathcal{U}'|_{M_{k,k'}}}$. D'après, la proposition 1.2.20, l'union $\bigcup_{k \in K} \mathcal{A}_{\mathcal{U}_k}$ est un brouillard sur l'union des $\mathcal{U}_k$ c'est-à-dire sur $\mathcal{U}$. On note $\overline{\mathcal{A}}_{\mathcal{U}}$ l'unique (G, X) -atlas maximal sur $\mathcal{U}$ plus fin que $\bigcup_{k \in K} \mathcal{A}_{\mathcal{U}_k}$. De sorte que $\overline{\mathcal{A}} := (\overline{\mathcal{A}}_{\mathcal{U}})_{\mathcal{U} \in \mathcal{F}_K}$ est un brouillard sur $\mathcal{F}_K$. La proposition 1.2.22 permet de conclure. $\square$

Corollaire 1.2.25. *Soient (G, X) une structure analytique, M un espace topologique, $\mathcal{F}$ une nappe sur M , $\mathcal{A}$ un (G, X) -brouillard sur $\mathcal{F}$ et $\mathcal{U} \in \mathcal{F}$.*

Si $\mathcal{F}$ est opaque, alors tout ouvert dense et semi-localement $\mathcal{V}$ inclus dans $\mathcal{U}$ est dans $\mathcal{F}$.

1.2.4 Catégorie des (G, X) -variétés singulières

Définition 1.2.26 ((G, X) -structure singulière). Soit (G, X) une structure analytique et soit M un espace topologique. Une (G, X) -structure singulière sur M est la donnée d'un (G, X) -brouillard opaque sur M .

Définition 1.2.27 ((G, X) -variété singulière). Soit (G, X) une structure analytique. Une (G, X) -variété singulière est un triplet $(M, \mathcal{F}, \mathcal{A})$ où M est un espace topologique et $(\mathcal{F}, \mathcal{A})$ un (G, X) -brouillard opaque.

Définition 1.2.28 ((G, X) -morphisme presque partout). Soit (G, X) une structure analytique et soient $(M, \mathcal{F}, \mathcal{A})$ et $(N, \mathcal{G}, \mathcal{B})$ deux (G, X) -variétés singulières

Une application continue $\phi : M \rightarrow N$ est presque partout un (G, X) -morphisme s'il existe un ouvert $\mathcal{U} \in \mathcal{F}$ et un ouvert $\mathcal{V} \in \mathcal{G}$ tel que

$$\phi|_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}} : (\mathcal{U}, \mathcal{A}_{\mathcal{U}}) \rightarrow (\mathcal{V}, \mathcal{B}_{\mathcal{V}})$$

est un (G, X) -morphisme.

Remarque 1.2.29. Soient (G, X) une structure analytique, $(M, \mathcal{F}, \mathcal{A})$ et $(N, \mathcal{G}, \mathcal{B})$ deux (G, X) -variétés singulières. Tout isomorphisme $M \rightarrow N$ est un homéomorphisme.

Lemme 1.2.30. Soient (G, X) une structure analytique avec X localement connexe et séparé, $(M, \mathcal{F}, \mathcal{A})$, $(N, \mathcal{G}, \mathcal{B})$, $(O, \mathcal{H}, \mathcal{C})$ trois (G, X) -variétés singulières et soient $f_1 : M \rightarrow N$ et $f_2 : N \rightarrow O$ deux (G, X) -morphisms presque partout.

Alors $f_2 \circ f_1$ est un (G, X) -morphisme presque partout.

Démonstration. Soient $\mathcal{U}_1 \in \mathcal{F}$, $\mathcal{U}_2 \in \mathcal{G}$, $\mathcal{U}_3 \in \mathcal{G}$, $\mathcal{U}_4 \in \mathcal{H}$ tels que $f_1|_{\mathcal{U}_1}^{\mathcal{U}_2}$ et $f_2|_{\mathcal{U}_3}^{\mathcal{U}_4}$ sont des (G, X) -morphisms. D'une part $\mathcal{U}_2 \cap \mathcal{U}_3$ est dense et semi-localement connexe d'après le lemme 1.2.5, d'autre part $f_1|_{\mathcal{U}_1}^{\mathcal{U}_2}$ est un homéomorphisme local d'après le lemme 1.1.28. Par suite $\mathcal{U}_0 := (f_2|_{\mathcal{U}_1})^{-1}(\mathcal{U}_2 \cap \mathcal{U}_3)$ est dense et semi-localement connexe dans $\mathcal{U}_1$ d'après le corollaire 1.2.13. Enfin, $\mathcal{U}_1$ est dense et semi-localement connexe dans M donc $\mathcal{U}_0$ est dense et semi-localement connexe dans M d'après le lemme 1.2.4. Ainsi $(f_2 \circ f_1)|_{\mathcal{U}_0}^{\mathcal{U}_4}$ est un (G, X) -morphisme. De plus $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}_1$ donc $\mathcal{U}_0 \in \mathcal{F}$ et donc $f_2 \circ f_1$ est un (G, X) -morphisme presque partout. $\square$

Proposition 1.2.31. Soient (G, X) une structure analytique, $(M, \mathcal{F}, \mathcal{A})$ et $(N, \mathcal{G}, \mathcal{B})$ deux (G, X) -variétés singulières et $f_1, f_2 : M \rightarrow N$ deux (G, X) -morphisms presque partout.

Si M est connexe et s'il existe un ouvert $\mathcal{U} \subset M$ non vide tel que $f_1|_{\mathcal{U}} = f_2|_{\mathcal{U}}$ alors $f_1 = f_2$.

Démonstration. Supposons qu'il existe un ouvert $\mathcal{U} \subset M$ non vide tel que $f_1|_{\mathcal{U}} = f_2|_{\mathcal{U}}$ et prenons en un. Soient $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \mathcal{V}_3, \mathcal{V}_4$ ouverts denses semi-localement connexes tels que $f_1|_{\mathcal{V}_1}^{\mathcal{V}_2}$ et $f_2|_{\mathcal{V}_3}^{\mathcal{V}_4}$ sont des (G, X) -morphisms. $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_3$ est un ouvert dense dans $\mathcal{U}$ donc non vide. De plus, $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_3$ est un ouvert semi-localement connexe et M est connexe donc $M \cap \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_3 = \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_3$ est connexe. Ainsi $f_1|_{\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_3}^{\mathcal{V}_2 \cup \mathcal{V}_4}$ et $f_2|_{\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_3}^{\mathcal{V}_2 \cup \mathcal{V}_4}$ sont deux (G, X) -morphisms définis sur une (G, X) -variété connexe et égaux sur un ouvert non vide, ils sont donc égaux sur $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_3$. Enfin f_1 et f_2 sont continues et $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_3$ est dense donc $f_1 = f_2$. $\square$

Proposition 1.2.32. Soit (G, X) une structure analytique et soient $(M, \mathcal{F}, \mathcal{A})$ et $(N, \mathcal{G}, \mathcal{B})$ deux (G, X) -variétés singulières et soit $f : M \rightarrow N$ une application. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

- (i) f est un (G, X) -morphisme presque partout ;
- (ii) f est localement un (G, X) -morphisme presque partout ;
- (iii) Il existe un ouvert $\mathcal{U} \in \mathcal{F}$ tel que $f|_{\mathcal{U}}$ est localement un (G, X) -morphisme presque partout.

Démonstration. Les implications $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$ sont évidentes, montrons alors l'implication $(iii) \Rightarrow (i)$. Soit $\mathcal{U} \in \mathcal{F}$ tel que $f|_{\mathcal{U}}$ est localement un (G, X) -morphisme presque partout. Pour tout $p \in \mathcal{U}$ on choisit un ouvert $\mathcal{U}_p \subset \mathcal{U}$ tel que $f|_{\mathcal{U}_p}$ est un (G, X) -morphisme presque partout ; on choisit ensuite $\mathcal{V}_p \subset \mathcal{U}_p$ dense et semi-localement connexe dans $\mathcal{U}_p$ tel que $f|_{\mathcal{V}_p}^{\text{Reg}(N)}$ est un (G, X) -morphisme. D'après le lemme 1.2.6, $\bigcup_{p \in \mathcal{U}} \mathcal{V}_p$ est dense et semi-localement connexe dans $\mathcal{U}$ et donc dense et semi-localement connexe dans M d'après le lemme 1.2.4. De plus, d'après le Corollaire 1.2.25, $\bigcup_{p \in \mathcal{U}} \mathcal{V}_p \in \mathcal{F}$, donc f est un (G, X) -morphisme presque partout. $\square$

Définition 1.2.33 (Catégorie des (G, X) -variétés singulières). *Soit (G, X) une structure analytique. On note $\mathbf{Var}_{(G, X)\text{-sing}}$ la catégorie dont les objets sont les (G, X) -variétés singulières et dont les morphismes sont les (G, X) -morphismes presque partout.*

Définition 1.2.34. *Soit (G, X) une structure analytique et soit $(M, \mathcal{F}, \mathcal{A})$ une (G, X) -variété singulière. On note $\text{Aut}(M)$ le groupe des automorphismes de M dans la catégorie des (G, X) -variétés singulières.*

Définition 1.2.35 (Partie singulière essentielle et partie régulière). *Soit (G, X) une structure analytique et soit $(M, \mathcal{F}, \mathcal{A})$ une (G, X) -variété singulière.*

- La partie régulière de $(M, \mathcal{F}, \mathcal{A})$, notée $\text{Reg}(M)$ est l'élément maximal de $\mathcal{F}$, elle est naturellement équipée de la (G, X) -structure $\mathcal{A}_{\text{Reg}(M)}$.
- La partie singulière essentielle de $(M, \mathcal{F}, \mathcal{A})$, notée $\text{Sing}(M)$, est le complémentaire de $\text{Reg}(M)$ dans M .

Proposition 1.2.36. *Soit (G, X) une structure analytique et soient $(M, \mathcal{F}, \mathcal{A})$ et $(N, \mathcal{G}, \mathcal{B})$ deux (G, X) -variétés singulières et soit $f : M \rightarrow N$ un (G, X) -morphisme presque partout.*

Si f est un homéomorphisme local, alors $f|_{\text{Reg}(M)}^{\text{Reg}(N)}$ est un (G, X) -morphisme.

Démonstration. Supposons que f est un homéomorphisme local, on se donne M_0 et N_0 tels que $f|_{M_0}^{N_0} : (M_0, \mathcal{A}_{M_0}) \rightarrow (N_0, \mathcal{A}_{N_0})$ est un (G, X) -morphisme.

- On note $M_1 := f^{-1}(\text{Reg}(N))$ et $\mathcal{A}_1$ l'atlas maximal sur M_1 plus fin que $f^*\mathcal{B}_{\text{Reg}(M)}$ de sorte que $(M_1, \mathcal{A}_1)$ soit une (G, X) -variété. D'une part, les atlas maximaux plus fins que $(f^*\mathcal{B}_{\text{Reg}(M)})|_{M_0}$ et $f^*\mathcal{B}_{N_0}$ sont égaux car $\mathcal{B}_{\text{Reg}(M)}|_{N_0} = \mathcal{B}_{N_0}$; d'autre part, l'atlas $\mathcal{A}_{M_0}$ et l'atlas maximal plus fin que $f^*\mathcal{B}_{N_0}$ sont égaux d'après la proposition 1.1.25 ; donc $\mathcal{A}_{M_0}$ est l'atlas maximal plus fin que $(f^*\mathcal{B}_{\text{Reg}(M)})|_{M_0}$. Or M_0 est dense et semi-localement connexe dans M , d'après le lemme 1.2.4 M_1 est dense et semi-localement connexe dans M ; par suite $M_1 \in \mathcal{F}$ et $\mathcal{A}_{M_1} = f^*\mathcal{B}_{\text{Reg}(M)}$. Par conséquent, $f|_{M_1}^{\text{Reg}(N)}$ est un (G, X) -morphisme d'après la proposition 1.1.25.
- Montrons à présent que $M_1 = \text{Reg}(M)$.

Prenons $x \in \text{Reg}(M)$, une carte $(\mathcal{U}_1, \mathcal{V}_1, \phi_1) \in \mathcal{A}_{\text{Reg}(M)}$ au voisinage de x telle que $f|_{\mathcal{U}_1}$ est un homéomorphisme sur son image. On pose $\mathcal{U}_3 := f(\mathcal{U}_1)$, $\mathcal{V}_3 := \mathcal{V}_1$ et $\phi_3 := \phi_1 \circ (f|_{\mathcal{U}_1})^{-1}$ et on commence par démontrer que $\mathcal{C} := \mathcal{B}_{\text{Reg}(M)} \cup (\mathcal{U}_3, \mathcal{V}_3, \phi_3)$ est un (G, X) -atlas sur $\text{Reg}(M) \cup \mathcal{U}_3$.

Pour tout $(\mathcal{U}_2, \mathcal{V}_2, \phi_2) \in \mathcal{B}_{\text{Reg}(N)}$ carte de $\text{Reg}(M)$ telle que $\mathcal{U}_2 \cap f(\mathcal{U}_1) \neq \emptyset$ et pour tout $\mathcal{W}$ ouvert connexe inclus dans $\mathcal{U}_2 \cap \mathcal{U}_3$. On pose $\mathcal{W}' := f|_{\mathcal{U}_1}^{-1}(\mathcal{W})$ et on a

$$\phi_2 \circ \phi_3|_{\mathcal{W}}^{-1} = \phi_2 \circ (\phi_1 \circ f|_{\mathcal{U}_1}^{-1})|_{\mathcal{W}}^{-1} = \phi_2 \circ f \circ (\phi_1|_{\mathcal{W}'})^{-1}.$$

On a $\mathcal{W} \subset \text{Reg}(N)$ donc $f|_{\mathcal{U}_1}^{-1}(\mathcal{W}) \subset M_1$ or $f|_{M_1}^{\text{Reg}(N)}$ est un (G, X) -morphisme, donc il existe $g \in G$ tel que $\phi_2 \circ f \circ (\phi_1|_{\mathcal{W}'})^{-1} = g|_{\phi_1(\mathcal{W}'})$. Finalement, $\mathcal{C}$ est bien un (G, X) -atlas sur $\text{Reg}(M) \cup \mathcal{U}_3$.

- On pose $\mathcal{G}'$ la prénappe $\mathcal{G} \cup \{\mathcal{U}_3 \cup \mathcal{V} \mid \mathcal{V} \in \mathcal{G}\}$ sur N et on définit le brouillard $\mathcal{B}'$ sur $\mathcal{G}'$ en posant $\mathcal{B}'_{\mathcal{U}} = \mathcal{B}_{\mathcal{U}}$ si $\mathcal{U} \in \mathcal{G}$ et $\mathcal{B}'_{\mathcal{U}}$ l'atlas maximal plus fin que $\mathcal{B}_{\mathcal{U}} \cup \mathcal{C}$ si $\mathcal{U} = \mathcal{V} \cup \mathcal{U}_3$. D'après la propriété 1.2.20, $(\mathcal{G}', \mathcal{B}')$ est un (G, X) -brouillard. Or $(\mathcal{G}', \mathcal{B}')$ est plus épais que $(\mathcal{G}, \mathcal{B})$ qui est déjà opaque donc $(\mathcal{G}, \mathcal{B}) = (\mathcal{G}', \mathcal{B}')$. Finalement, $\mathcal{U}_3 \in \mathcal{G}$ donc $\mathcal{U}_3 \subset \text{Reg}(M)$, et donc $M_1 = \text{Reg}(M)$.

□

Corollaire 1.2.37. *Soit (G, X) une structure analytique. Les automorphismes d'une (G, X) -variété singulière préservent sa partie régulière.*

1.2.5 Développement, holonomie et quotient de (G, X) -variétés singulières

Définition 1.2.38 (Application développante et holonomie). *Soit (G, X) une structure analytique et soit $(M, \mathcal{F}, \mathcal{A})$ une (G, X) -variété singulière séparée, localement connexe par arc et délaçable.*

L'application développante $\mathcal{D}$ et l'holonomie ρ de M sont respectivement l'application développante et l'holonomie de $\text{Reg}(M)$ muni de sa (G, X) -structure naturelle.

La proposition suivante nous permet d'assurer que l'holonomie d'une variété singulière ne dépend essentiellement pas du support de la (G, X) -structure presque partout.

Proposition 1.2.39. *Soit M un espace topologique séparé à base dénombrable, localement connexe par arc et délaçable. Pour tout ouvert $\mathcal{U} \subset M$ dense et semi-localement connexe, le morphisme $\pi_1(\mathcal{U}) \xrightarrow{i^*} \pi_1(M)$ induit par l'inclusion $\mathcal{U} \xrightarrow{i} M$ est surjectif.*

Démonstration. Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ un lacet de M , il s'agit de construire un lacet $\bar{\gamma}$ de $\mathcal{U}$ homotope à γ dans M . Par densité de $\mathcal{U}$ et quitte à changer de point de base, on peut supposer que $\gamma(0) \in \mathcal{U}$. Commençons par considérer pour chaque point $t \in [0, 1]$ un voisinage de $\gamma(t)$ ouvert connexe par arc et semi-simplement connexe; cette famille d'ouverts est un recouvrement de $\gamma([0, 1])$ qui est compact, nous pouvons en extraire un sous-recouvrement fini $(\mathcal{U}_i)_{i \in [1, p]}$. Choisissons une suite $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n+1} = 1$ et une suite $(k_i)_{i \in [0, n]}$ telle que pour tout $i \in [0, n]$, $\gamma([t_i, t_{i+1}]) \subset \mathcal{U}_{k_i}$ et pour tout $i \in [1, n]$, $\gamma(t_i) \in \mathcal{U}_{k_i} \cap \mathcal{U}_{k_{i+1}}$. Pour $i \in [1, n]$, on choisit un point $\bar{\gamma}(t_i) \in \mathcal{U}_{k_i} \cap \mathcal{U}_{k_{i+1}} \cap \mathcal{U}$ dans la composante connexe par arc de $\gamma(t_i)$; un tel point existe car $\mathcal{U}_{k_i} \cap \mathcal{U}_{k_{i+1}}$ est un ouvert contenant $\gamma(t_i)$ donc non vide et car $\mathcal{U}$ est dense dans M . On pose par ailleurs $\bar{\gamma}(t_0) = \bar{\gamma}(t_{n+1}) = \gamma(t_0) = \gamma(t_{n+1})$. Pour $i \in [1, n]$, on se donne un chemin u_i de $\gamma(t_i)$ à $\bar{\gamma}(t_i)$ dans $\mathcal{U}_{k_i} \cap \mathcal{U}_{k_{i+1}}$. Comme $\mathcal{U}_i$ est connexe par arc et $\mathcal{U}$ semi-localement connexe l'intersection $\mathcal{U}_{k_i} \cap \mathcal{U}$ est connexe par arc, on se donne alors un chemin v_i de $\bar{\gamma}(t_i)$ à $\bar{\gamma}(t_{i+1})$ dans $\mathcal{U}_{k_i} \cap \mathcal{U}$. On considère alors les chemins w_i obtenus en composant $\gamma|_{[0, t_i]}$, u_i , v_i , u_{i+1} en sens inverse et enfin $\gamma|_{[0, t_{i+1}]}$ en sens inverse. Par simple connexité semi-locale, chacun des w_i est homotope au lacet trivial et donc $w_1^{-1} \circ \dots \circ w_n^{-1} \circ \gamma$ est homotope à γ . Enfin, on remarque que les portions $\gamma|_{[0, t_i]}$ des w_i peuvent être omises dans le lacet $w_1^{-1} \circ \dots \circ w_n^{-1} \circ \gamma$ qui est donc homotope à un lacet entièrement dans $\mathcal{U}$. □

Théorème 5. *Soit (G, X) une structure analytique, et soit $(M, \mathcal{F}, \mathcal{A})$ une (G, X) -variété singulière séparée connexe et localement connexe par arc, enfin, soit Γ un groupe discret agissant sur M par automorphismes de M .*

S'il existe un élément $M_0 \in \mathcal{F}$ de la nappe de M , Γ -invariant sur lequel l'action de Γ est proprement discontinue alors il existe une unique (G, X) -structure singulière sur M/Γ telle que la projection naturelle $\pi : M \rightarrow M/\Gamma$ est presque partout un (G, X) -morphisme.

Démonstration. Supposons qu'il existe un tel M_0 et considérons en un. Notons π la projection naturelle $\pi : M \rightarrow M/\Gamma$. Il suffit de démontrer que $\pi(M_0)$ est un ouvert dense semi-localement connexe muni d'une (G, X) -structure telle que $\pi|_{M_0}$ est un (G, X) -morphisme. En effet, il suffira alors d'épaissir $\mathcal{U}$ en un (G, X) -brouillard opaque dont l'existence et l'unicité sont assurées par la proposition 1.2.24.

Γ agit par (G, X) -isomorphisme donc par homéomorphisme d'après le lemme 1.2.29, π est donc ouverte, de plus l'injection naturelle $i : M_0 \rightarrow M$ descend en une injection ouverte $\bar{i} : M_0/\Gamma \rightarrow M/\Gamma$. On peut alors identifier l'ouvert $\pi(M_0)$ avec M_0/Γ qui est muni d'une unique (G, X) -structure telle que $\pi|_{M_0}$ est un (G, X) -morphisme d'après la proposition 1.1.33. Vérifions à présent que $\pi(M_0)$ est dense et semi-localement connexe. La densité de $\pi(M_0)$ dans M/Γ provient de la densité de M_0 dans M . Ensuite M_0 est dense et semi-localement connexe dans M , π est surjective et $\pi|_{M_0}$ est ouverte, d'après le lemme 1.2.10, $\pi(M_0)$ est dense et semi-localement connexe. $\square$

1.3 (G, X, X_A) -variétés

1.3.1 (G, X) -espaces modèles singuliers et (G, X, X_A) -atlas

Définition 1.3.1 (Espace modèle singulier). *Soit (G, X) une structure analytique, un (G, X) -espace modèle singulier Y est une (G, X) -variété singulière.*

On notera G_Y le groupe des automorphismes de Y .

Définition 1.3.2 $((G, X, X_A)$ -Atlas). *Soient (G, X) une structure analytique, $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille de (G, X) -espaces modèles singuliers et M un espace topologique.*

Un (G, X, X_A) -atlas (resp. (G, X, X_A) -préatlas) est un atlas (resp. préatlas)

$$\mathcal{A} = (\mathcal{U}_i, Y_i, \mathcal{V}_i, \phi_i)_{i \in I}$$

sur M tel que

- Pour tout $i \in I$, $Y_i \in \{X_\alpha : \alpha \in A\} \cup \{X\}$
- Pour tout $i, j \in I$ tels que $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j \neq \emptyset$,

$$\phi_j \circ (\phi_i|_{\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j})^{-1} : \phi_i(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j) \rightarrow \phi_j(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j)$$

est un (G, X) -morphisme presque partout.

Si la structure analytique (G, X) ne porte pas à confusion, on parlera simplement de X_A -atlas. Enfin, on note $G_\alpha := \text{Aut}(X_\alpha)$ le groupe des automorphismes de X_α dans la catégorie des (G, X) -variétés singulières.

Définition 1.3.3 $((G, X, X_A)$ -atlas maximal). *Soient (G, X) une structure analytique, $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille de (G, X) -espaces modèles singuliers et soit M un espace topologique.*

Un (G, X, X_A) -préatlas $\mathcal{A}$ sur M est maximal si tout (G, X, X_A) -préatlas plus fin que $\mathcal{A}$ est égal à $\mathcal{A}$.

Proposition 1.3.4. *Soient (G, X) une structure analytique, $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille de (G, X) -espaces modèles singuliers, et soit N un espace topologique. Soit $(\mathcal{B}_k)_{k \in K}$ une famille de (G, X, X_A) -préatlas telle que :*

- Pour tout $k \in K$, $\text{supp}(\mathcal{B}_k)$ est dense et semi-localement connexe ;
- Pour tout $(k, k') \in K^2$, il existe un ouvert $M \subset \text{supp}(\mathcal{B}_k) \cap \text{supp}(\mathcal{B}_{k'})$ dense semi-localement connexe de N et $\mathcal{A}$ un (G, X, X_A) -atlas sur M tels que $\mathcal{B}_k|_M$ et $\mathcal{B}_{k'}|_M$ sont plus fins que $\mathcal{A}$.

Alors l'union $\bigcup_{k \in K} \mathcal{B}_k$ est un (G, X, X_A) -préatlas.

Démonstration. Pour tout $k \in K$, on note $\mathcal{B}_k = (\mathcal{U}_i, Y_i, \mathcal{V}_i, \phi_i)_{i \in I(k)}$ et $\mathcal{A} = (\mathcal{U}_i, Y_i, \mathcal{V}_i, \phi_i)_{i \in I}$ de sorte que pour tout $k \in K$, $I \subset I(k)$.

Soient $i, j \in \bigcup_{k \in K} I(k)$ avec $i \in I(k)$ et $j \in I(k')$ tels que $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j \neq \emptyset$. On se donne $M \subset \text{supp}(\mathcal{B}_k) \cap \text{supp}(\mathcal{B}_{k'})$ dense semi-localement connexe dans N et $\mathcal{A}$ un (G, X, X_A) -atlas sur M tel

que $\mathcal{B}_{k|M}$ et $\mathcal{B}_{k'|M}$ sont plus fins que $\mathcal{A}$. On pose $M_0 = M \cap \mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j$, et pour tout $p \in M_0$, on se donne $l \in I$ tel que $p \in \mathcal{U}_l$. D'une part

$$\phi_l \circ (\phi_{i|\mathcal{U}_l \cap M_0})^{-1} : \phi_i(\mathcal{U}_l \cap M_0) \rightarrow \phi_l(\mathcal{U}_l \cap M_0)$$

est presque partout un (G, X) -morphisme car $\mathcal{B}_{k|M}$ est plus fin que $\mathcal{A}$. D'autre part

$$\phi_j \circ (\phi_{l|\mathcal{U}_l \cap M_0})^{-1} : \phi_l(\mathcal{U}_l \cap M_0) \rightarrow \phi_j(\mathcal{U}_l \cap M_0)$$

est presque partout un (G, X) -morphisme car $\mathcal{B}_{k'|M}$ est plus fin que $\mathcal{A}$. Donc, par composition,

$$(\phi_j \circ (\phi_{i|M_0})^{-1})|_{\phi_i(M_0 \cap \mathcal{U}_l)} = \phi_j \circ (\phi_{i|\mathcal{U}_l \cap M_0})^{-1}$$

est un (G, X) -morphisme presque partout. Or les $\mathcal{U}_l \cap M_0$ considérés recouvrent M_0 lorsque p parcourt M_0 ; de plus M_0 est dense et semi-localement connexe dans $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j$ donc $\phi_i(M_0)$ est dense et semi-localement connexe dans $\phi_i(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j)$. Nous avons donc démontré que $(\phi_j \circ (\phi_{i|M_0})^{-1})$ est localement un (G, X) -morphisme presque partout, la proposition 1.2.32 permet de conclure que c'est un (G, X) -morphisme presque partout. $\square$

Corollaire 1.3.5. *Soient (G, X) une structure analytique, $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille de (G, X) -espaces modèles singuliers, et soit M un espace topologique.*

Si $\mathcal{A}$ est un X_A -atlas sur M alors il existe un unique X_A -atlas maximal plus fin que $\mathcal{A}$.

Démonstration. Il suffit de considérer l'union $\widehat{\mathcal{A}}$ des X_A -atlas plus fin que $\mathcal{A}$. D'après la proposition 1.3.4, $\widehat{\mathcal{A}}$ est un X_A -atlas et il est clairement maximal et plus fin que $\mathcal{A}$. $\square$

Définition 1.3.6 (Partie régulière d'un atlas). *Soient (G, X) une structure analytique, $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille de (G, X) -espaces modèles singuliers et $\mathcal{A} = (\mathcal{U}_i, X_i, \mathcal{V}_i, \phi_i)$ un X_A -atlas sur un espace topologique M . La partie régulière de l'atlas $\mathcal{A}$ est le préatlas*

$$\text{Reg}(\mathcal{A}) := \left(\phi_i^{-1}(\text{Reg}(\mathcal{V}_i)), \text{Reg}(\mathcal{V}_j), \phi_j|_{\text{Reg}(\mathcal{U}_j)}^{\text{Reg}(\mathcal{V}_j)} \right)_{i \in I}.$$

1.3.2 Catégorie des X_A -variétés

Définition 1.3.7 (X_A -structure). *Soient (G, X) une structure analytique, $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille de (G, X) -espaces modèles singuliers et M un espace topologique. Une (G, X, X_A) -structure sur M est la donnée d'un (G, X, X_A) -atlas maximal sur M .*

Lorsque la structure analytique ne porte pas à confusion, on parlera simplement de X_A -structure.

Définition 1.3.8 (X_A -variété). *Soient (G, X) une structure analytique et $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille de (G, X) -espaces modèles singuliers.*

Une (G, X, X_A) -variété est un couple $(M, \mathcal{A})$ où M est un espace topologique et $\mathcal{A}$ est un (G, X, X_A) -atlas maximal.

Pour $\alpha \in A$, $\text{Sing}_\alpha(M)$ dénote l'ensemble des points p de M tels qu'il existe au voisinage de p une carte $(\mathcal{U}, X_\alpha, \mathcal{V}, \phi)$, $\phi : \mathcal{U} \rightarrow X_\alpha$ et $\phi(p) \in \text{Sing}(X_\alpha)$. De plus

$$\text{Sing}(M) := \bigcup_{\alpha \in A} \text{Sing}_\alpha(M)$$

De même $\text{Reg}(M)$ est l'ensemble des points p de M tels qu'il existe une carte $(\mathcal{U}, Y, \mathcal{V}, \phi)$ au voisinage de p , telle que $\phi(p) \in \text{Reg}(Y)$.

Définition 1.3.9 (Morphismes et isomorphismes). *Soient (G, X) une structure analytique, une famille $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ de (G, X) -espaces modèles singuliers et $(M, \mathcal{A})$ et $(N, \mathcal{B})$ deux X_A -variétés.*

Un X_A -morphisme est une application $f : M \rightarrow N$ telle que pour tout $x \in \text{Sing}(M)$, il existe une carte $(\mathcal{U}_1, Y_1, \mathcal{V}_1, \phi_1)$ de $\mathcal{A}$ au voisinage de x , et une carte $(\mathcal{U}_2, Y_2, \mathcal{V}_2, \phi_2)$ au voisinage de $f(x)$ telles que pour tout ouvert connexe $\mathcal{W} \subset \mathcal{U}_1 \cap f^{-1}(\mathcal{U}_2)$, on ait :

(i) $Y_1 = Y_2 = Y$;

(ii) il existe $g \in G_Y$ tel que

$$f|_{\mathcal{W}} = \phi_2^{-1} \circ g \circ \phi_1|_{\mathcal{W}}$$

Un morphisme f est un isomorphisme s'il est bijectif et que son inverse $f^{-1} : N \rightarrow M$ est un morphisme.

Définition 1.3.10 (Catégorie des X_A -variété). Soit (G, X) une structure analytique, soit $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille de (G, X) -espaces modèles singuliers. On note $\mathbf{Var}_{X_A}$ la catégorie dont les objets sont les X_A -variétés et les morphismes sont les X_A -morphisms.

Remarque 1.3.11. Soit (G, X) une structure analytique, soient $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ et $(X_\beta)_{\beta \in B}$ deux familles rigides de (G, X) -espaces modèles singuliers telles que $B \subset A$. Il est clair d'après les définitions qu'une X_B -variété M est également une X_A -variété.

On peut alors définir des foncteurs d'oubli

$$\mathbf{Var}_{X_A} : \mathbf{Var}_{X_B} \rightsquigarrow \mathbf{Var}_{X_A}.$$

Remarque 1.3.12. La catégorie des $X_\emptyset$ -variétés n'est autre que la catégorie des (G, X) -variétés.

Lemme 1.3.13. Soient (G, X) une structure analytique, $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille de (G, X) -espaces modèles singuliers et $(M, \mathcal{A})$ et $(N, \mathcal{B})$ deux X_A -variétés. Pour tout X_A -morphisme $f : (M, \mathcal{A}) \rightarrow (N, \mathcal{B})$ un X_A -morphisme, on a les faits suivants :

(i) f est un homéomorphisme local ;

(ii) f est un isomorphisme si et seulement si f est bijectif.

Démonstration. f est un homéomorphisme local car les éléments du groupe G_Y sont des homéomorphismes.

Si f est un isomorphisme, elle admet un inverse et est donc bijective. Supposons à présent f bijective. Soient $x \in \text{Sing}(M)$, $(\mathcal{U}_1, Y, \mathcal{V}_1, \phi_1) \in \mathcal{A}$ contenant x , $(\mathcal{U}_2, Y, \mathcal{V}_2, \phi_2) \in \mathcal{B}$ contenant $f(x)$, $\mathcal{W}$ la composante connexe de x dans $\mathcal{U}_1 \cap f^{-1}(\mathcal{U}_2)$ et $\mathcal{W}' := f(\mathcal{W})$. Il existe $g \in G_Y$ tel que

$$\phi_2 \circ f \circ (\phi_1|_{\mathcal{W}})^{-1} = g|_{\phi_1(\mathcal{W})}$$

de sorte que

$$f^{-1}|_{\mathcal{W}'} = (f|_{\mathcal{W}'})^{-1} = (\phi_1^{-1} \circ g^{-1} \circ \phi_2)|_{\mathcal{W}'}.$$

□

Proposition 1.3.14. Soient (G, X) une structure analytique, $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille de (G, X) -espaces modèles singuliers et $(M, \mathcal{A})$ une X_A -variété. Alors :

$$M = \text{Reg}(M) \bigsqcup \text{Sing}(M)$$

Démonstration. L'union est claire montrons qu'elle est disjointe. Soit $x \in \text{Reg}(M)$, montrons que pour toute carte $(\mathcal{U}_1, Y_1, \mathcal{V}_1, \phi_1)$ au voisinage de x , $\phi(x) \in \text{Reg}(Y_1)$. Comme $x \in \text{Reg}(M)$, il existe une carte $(\mathcal{U}_2, Y_2, \mathcal{V}_2, \phi_2)$ au voisinage de x telle que $\phi(x) \in \text{Reg}(Y_2)$, prenons alors une telle carte. Par définition l'application

$$\phi_1 \circ (\phi_2|_{\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2})^{-1} : \phi_2(Y_2) \rightarrow \phi_1(Y_1)$$

est un (G, X) -morphisme presque partout. Cette application est de plus un homéomorphisme et donc, d'après la proposition 1.2.36, elle envoie partie régulière sur partie régulière. Or $\phi_2(x) \in \text{Reg}(Y_2)$, donc $\phi_1(x) = \phi_1 \circ \phi_2^{-1}(\phi_2(x)) \in \text{Reg}(Y_1)$.

□

Proposition 1.3.15. *Soient (G, X) une structure analytique, $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille de (G, X) -espaces modèles singuliers et $(M, \mathcal{A})$ une X_A -variété.*

Alors M admet une unique structure de (G, X) -variété singulière telle que la partie régulière de M pour la structure de (G, X) -variété singulière et la partie régulière de M pour la X_A -structure coïncident.

Démonstration. Il nous faut démontrer d'une part que la partie régulière de M pour la X_A -structure est un ouvert dense semi-localement connexe et d'autre part qu'elle est dotée d'une unique (G, X) -structure telle que la partie régulière des cartes

$$\text{Reg}(\mathcal{U}) \xrightarrow{\phi|_{\text{Reg}(\mathcal{U})}^{\text{Reg}(X_\alpha)}} \text{Reg}(X_\alpha)$$

est un (G, X) -morphisme pour tout $(\mathcal{U}, Y, \mathcal{V}, \phi) \in \mathcal{A}$. Le second point est la conséquence directe du lemme 1.1.30 appliquée à $(\text{Reg}(M), \text{Reg}(\mathcal{A}))$; il nous suffit donc de démontrer le premier point.

Par définition,

$$\text{Reg}(M) = \bigcup_{(\mathcal{U}, Y, \mathcal{V}, \phi) \in \mathcal{A}} \phi^{-1}(\text{Reg}(\mathcal{V})),$$

or pour tout $(\mathcal{U}, Y, \mathcal{V}, \phi) \in \mathcal{A}$, la partie régulière de $\mathcal{V}$, est un ouvert dense semi-localement connexe dans $\mathcal{V}$ et ϕ est un homéomorphisme. Le corollaire 1.2.13 implique donc que $\phi^{-1}(\text{Reg}(\mathcal{V}))$ est un ouvert dense semi-localement connexe dans $\mathcal{U}$. Enfin

$$\bigcup_{(\mathcal{U}, Y, \mathcal{V}, \phi) \in \mathcal{A}} \mathcal{U} = M$$

ainsi, d'après la proposition 1.2.12, $\bigcup_{(\mathcal{U}, Y, \mathcal{V}, \phi) \in \mathcal{A}} \phi^{-1}(\text{Reg}(\mathcal{V}))$ est un ouvert dense semi-localement connexe dans M . □

Lemme 1.3.16. *Soient (G, X) une structure analytique, $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille de (G, X) -espaces modèles singuliers et $(M, \mathcal{A})$ et $(N, \mathcal{B})$ deux X_A -variétés. Tout X_A -morphisme $f : M \rightarrow N$ est un (G, X) -morphisme presque partout pour les (G, X) -structures singulières naturelles sur M et N .*

Démonstration. Par définition, f est localement un (G, X) -morphisme presque partout et donc d'après la proposition 1.2.32, c'est un (G, X) -morphisme presque partout. □

Corollaire 1.3.17. *Soient (G, X) une structure analytique, $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille de (G, X) -espaces modèles singuliers, M_1, M_2 deux X_A -variétés et $\phi : M_1 \rightarrow M_2$ un X_A -morphisme. Alors $\phi(\text{Reg}(M_1)) \subset \text{Reg}(M_2)$*

Remarque 1.3.18. *Soient (G, X) une structure analytique, $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille de (G, X) -espaces modèles singuliers.*

L'application qui envoie une X_A -variété sur sa (G, X) -variété singulière singulière naturellement associée et qui envoie une application f qui est un X_A -morphisme sur elle même (vue comme (G, X) -morphisme presque partout) est un foncteur fidèle $\mathbf{Var}_{X_A} \rightsquigarrow \mathbf{Var}_{X\text{-Sing}}$.

1.3.3 Famille analytique d'espaces modèles

Définition 1.3.19 (Espaces modèles incompatibles). *Soient (G, X) une structure analytique et Y_1, Y_2 deux (G, X) -espace modèles singuliers.*

Y_1 et Y_2 sont incompatibles si pour tout ouvert $\mathcal{U} \subset Y_1$,

$$\mathcal{U} \cap \text{Sing}(Y) \neq \emptyset \Rightarrow \text{Hom}_{(G, X)}(\text{Reg}(\mathcal{U}), \text{Reg}(Y_1)) = \emptyset$$

Définition 1.3.20 (Espace modèle analytique). Soient (G, X) une structure analytique et Y un (G, X) -espace modèle singulier. Y est analytique si pour tout ouvert connexe $\mathcal{U}$ voisinage d'un point singulier, tout (G, X) -morphisme

$$f : \text{Reg}(\mathcal{U}) \rightarrow \text{Reg}(Y)$$

est la restriction d'un automorphisme de Y .

Définition 1.3.21 (Famille analytique). Soient (G, X) une structure analytique et $X_A = (X_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille d'espaces modèles singuliers.

X_A est analytique si les deux propriétés suivantes sont satisfaites :

(a) pour tout $\alpha \in A$, X_α est analytique ;

(b) pour tout $Y_1, Y_2 \in X_A \cup \{X\}$, si $Y_1 \neq Y_2$ alors Y_1 et Y_2 sont incompatibles.

Proposition 1.3.22. Soient (G, X) une structure analytique et $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille analytique de (G, X) -espaces modèles singuliers.

Pour tout X_A -variété M on a :

$$M = \text{Reg}(M) \bigsqcup_{\alpha \in A} \text{Sing}_\alpha(M)$$

De plus, pour tout $\alpha \in A$, $\text{Sing}_\alpha(M)$ est fermé.

Démonstration. Soit $\alpha, \beta \in A$ et supposons qu'il existe $p \in \text{Sing}_\alpha(M) \cap \text{Sing}_\beta(M)$ et montrons que $\alpha = \beta$. On se donne un tel p et on considère $(\mathcal{U}_\alpha, \phi_\alpha)$ et $(\mathcal{U}_\beta, \phi_\beta)$ deux cartes au voisinage de p telles que $\phi_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \rightarrow X_\alpha$ et $\phi_\beta : \mathcal{U}_\beta \rightarrow X_\beta$. D'une part, $\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta$ est un voisinage de p et on note $\mathcal{V} := \phi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta)$, l'ouvert $\mathcal{V}$ est un voisinage de $\phi_\alpha(p) \in \text{Sing}_\alpha(X_\alpha)$. D'autre part, la restriction de $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \mathcal{V} \rightarrow X_\beta$ à $\text{Reg}(\mathcal{V})$ est un (G, X) -morphisme. La famille $(X_\omega)_{\omega \in A}$ est analytique donc $\alpha = \beta$. On montre de la même manière que $\text{Reg}(M) \cap \text{Sing}_\alpha(M) = \emptyset$ pour tout α .

Pour tout $p \in \text{Reg}(M)$, soit $(\mathcal{U}_p, \phi_p : \mathcal{U}_p \rightarrow \mathcal{V}_p)$ un ouvert de carte au voisinage de p . Comme $\text{Reg}(\mathcal{V})$ est un ouvert de $\mathcal{V}_p$ alors $\text{Reg}(\mathcal{U}_p) = \phi_p^{-1}(\text{Reg}(\mathcal{V}_p))$ est un ouvert contenant p et inclus dans $\text{Reg}(M)$. Ainsi $\text{Reg}(M)$ est ouvert.

Pour tout $\alpha \in A$ et tout $p \in \text{Sing}_\alpha(M)$ on se donne une carte $(\mathcal{U}_p, \phi_p)$ au voisinage de p . D'après ce qui précède, $\text{Reg}(\mathcal{U}_p) \sqcup \text{Sing}_\alpha(\mathcal{U}_p) = \mathcal{U}_p$ donc

$$\mathcal{U}_\alpha := \bigcup_p \bigcup_{(\mathcal{U}_p, \phi_p)} \mathcal{U}_p$$

est un voisinage ouvert de $\text{Sing}_\alpha(M)$ et $\text{Sing}_\alpha(\mathcal{U}_\alpha) \sqcup \text{Reg}(\mathcal{U}_\alpha) = \mathcal{U}_\alpha$. On en déduit que pour tout $\beta \in A$,

$$\text{Sing}_\beta(M) = M \setminus \left(\text{Reg}(M) \bigcup_{\alpha \in A \setminus \{\beta\}} \mathcal{U}_\alpha \right).$$

Ainsi, pour tout $\beta \in A$, $\text{Sing}_\beta(M)$ est fermé. □

Proposition 1.3.23. Soient (G, X) une structure analytique, $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille analytique de (G, X) -espaces modèles singuliers, M, N deux X_A -variétés et $f : M \rightarrow N$ un homéomorphisme local. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) f est un X_A -morphisme

(ii) f est un (G, X) -morphisme presque partout ;

Démonstration. L'implication $(i) \Rightarrow (ii)$ est la conséquence du lemme 1.3.16. Montrons l'implication $(ii) \Rightarrow (i)$. Soient $x \in M$, $(\mathcal{U}_1, Y_1, \mathcal{V}_1, \phi_1)$ une carte au voisinage de x , $(\mathcal{U}_2, Y_2, \mathcal{V}_2, \phi_2)$ une carte au voisinage de $f(x)$ et $\mathcal{W} \subset \mathcal{U}_1 \cap f^{-1}(\mathcal{U}_2)$ un ouvert connexe contenant x . $\phi_2 \circ (\phi_1|_{\mathcal{W}})^{-1}$ est un (G, X) -morphisme presque partout donc sa restriction sur la partie régulière donne un (G, X) -morphisme $\phi_1(\mathcal{W}) \rightarrow Y_2$. Or $x \in \phi_1(\mathcal{W}) \cap \text{Sing}(Y_1) \neq \emptyset$ et Y_1 et Y_2 sont incompatibles s'ils sont différents, ainsi $Y_1 = Y_2$. Enfin, Y_1 est analytique donc $(\phi_2 \circ (\phi_1|_{\mathcal{W}})^{-1})|_{\text{Reg}(Y_1)}^{\text{Reg}(Y_1)}$ est la restriction d'un élément de G_{Y_1} . □

1.3.4 Foncteurs de régularisation

Définition 1.3.24 (Foncteurs de régularisation). Soit (G, X) une structure analytique, soient $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ et $(X_\beta)_{\beta \in B}$ deux familles rigides de (G, X) -espaces modèles singuliers telles que $B \subset A$. On pose

$$\text{Reg}_B : \mathbf{Var}_{\mathbf{X}_A} \rightsquigarrow \mathbf{Var}_{\mathbf{X}_B}$$

le foncteur qui à une X_A -variété M associe la X_B -variété

$$\text{Reg}_B(M) := M \setminus \left(\bigcup_{\alpha \in A \setminus B} \text{Sing}_\alpha(M) \right)$$

et à un X_A -morphisme $\phi : M \rightarrow N$ associe :

$$\text{Reg}_B(\phi) := \phi|_{\text{Reg}_B(M)}^{\text{Reg}_B(N)} : \text{Reg}_B(M) \rightarrow \text{Reg}_B(N).$$

Proposition 1.3.25. Soit (G, X) une structure analytique, soient $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ et $(X_\beta)_{\beta \in B}$ deux familles rigides de (G, X) -espaces modèles singuliers telles que $B \subset A$.

Alors, le foncteur Reg_B est fidèle.

Démonstration. Soient M_1 et M_2 deux X_A -variétés, il faut montrer que l'application

$$\text{Hom}(M_1, M_2) \xrightarrow{\text{Reg}_B} \text{Hom}(\text{Reg}(M_1), \text{Reg}(M_2))$$

est injective. Soient $\phi_1, \phi_2 : M_1 \rightarrow M_2$ deux X_A -morphisms tels que $\text{Reg}_B(\phi_1) = \text{Reg}_B(\phi_2)$. $\text{Reg}_B(M_1)$ est une partie dense de M_1 et ϕ_1 et ϕ_2 sont continues et égaux sur $\text{Reg}_B(M_1)$. Ainsi, $\phi_1 = \phi_2$. □

Chapitre 2

Espaces modèles

Nous continuons nos constructions de (G, X) -variétés singulières. L'objectif du présent chapitre est de construire et décrire des espaces modèles singuliers qui formeront les variétés que nous considérerons. Nous sommes principalement intéressé par les surfaces localement euclidiennes singulières, les surface localement hyperboliques singulières et les variétés localement Minkowski singulières dont les singularités sont des particules massives et singularité de type BTZ. Nous commençons par une première description conique de ces espaces modèles par suspension. Nous continuons en décrivant les singularités euclidiennes et hyperboliques obtenues par le biais de suspensions : nous obtenons les singularités coniques et les pointes. Puis nous construisons et décrivons les particules massives et les singularités BTZ.

Nous devons toujours garder en tête que la seule description par suspension est insuffisante. Elle est très utile pour identifier et comprendre qualitativement ces singularités cependant, d'une part, la métrique semi-riemannienne dans des coordonnées adéquates sera très utile en particulier pour l'étude des singularités BTZ qui sera faite dans la partie suivante ; d'autre part, nos généralisations du théorème d'Alexandrov repose la construction de singularités par collages de polyèdres de l'espace de Minkowski. Nous faisons ainsi une étude partielle nous permettant de justifier que les singularités obtenues dans les constructions de la troisième partie de cette thèse seront bien des particules massives et des singularités BTZ.

2.0.1 Suspension topologique

Définition 2.0.1 (Suspension topologique). *Soit X un espace topologique, la suspension topologique de X est*

$$\text{susp}(X) := X \times \mathbb{R}_+ / \sim \quad \text{avec} \quad (x, r) \sim (x', r') \Leftrightarrow r = r' = 0.$$

On note O , l'origine de la suspension, le point $(x, 0)$ et on note $\text{susp}^(X) := \text{susp}(X) \setminus \{O\}$.*

Remarque 2.0.2. *susp est un foncteur de la catégorie des espaces topologiques dans elle même. C'est à dire que si X et Y sont deux espaces topologiques et si $\phi : X \rightarrow Y$ est une fonction alors ϕ induit un homéomorphisme naturel $\text{susp}(X) \xrightarrow{\text{susp}(\phi)} \text{susp}(Y)$.*

Lemme 2.0.3. *Soit M un espace topologique.*

Si M est localement connexe, alors $\text{susp}(M)$ est localement connexe

Démonstration. Supposons M localement connexe, soit $x \in \text{susp}(M)$ et $\mathcal{U}$ un ouvert contenant x . On note $\pi : \text{susp}^*(M) \rightarrow M$ la projection naturelle.

Si $x = O$, il existe un voisinage ouvert de x inclus dans $\mathcal{U}$ de la forme $[0, \varepsilon[\times M / \sim$. Un tel voisinage est clairement connexe.

Si $x \neq O$, on se donne un voisinage ouvert de x inclus dans $\mathcal{U}$ de la forme $] \alpha, \beta[\times \mathcal{V}$. Comme M est localement connexe, il existe $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}$ connexe et contenant $\pi(x)$. On se donne un tel $\mathcal{W}$ et on remarque que $\mathcal{W} \times] \alpha, \beta[$ est ouvert, connexe, contient x et inclus dans $\mathcal{U}$.

□

Lemme 2.0.4. *Soit M un espace topologique connexe et localement connexe et soit $\mathcal{U}$ un ouvert de M . Si $\mathcal{U}$ est dense et semi-localement connexe, alors $\text{susp}^*(\mathcal{U})$ est dense et semi-localement connexe dans $\text{susp}(M)$.*

Démonstration. Supposons $\mathcal{U}$ dense et semi-localement connexe. D'après le lemme 2.0.3, $\text{susp}(M)$ est localement connexe. Il suffit alors de démontrer que l'intersection de tout ouvert connexe non vide $\mathcal{W}$ avec $\text{susp}^*(\mathcal{U})$ est connexe et non vide. Posons $\pi : \text{susp}^*(M) \rightarrow M$ la projection naturelle, on remarque que π est un homéomorphisme local d'après le corollaire 1.2.13, $\text{susp}^*(\mathcal{U}) = \pi^{-1}(\mathcal{U})$ est semi-localement connexe dans $\text{susp}^*(M)$.

Soit $\mathcal{W}$ un ouvert non vide connexe de $\text{susp}(M)$.

- Montrons que $\mathcal{W}^* := \mathcal{W} \setminus \{O\}$ est connexe. D'une part, si $O \notin \mathcal{W}$ alors, $\mathcal{W}^* = \mathcal{W}$ est évidemment connexe. D'autre part, si $O \in \mathcal{W}$, il existe un ouvert $\mathcal{V} := M \times [0, \varepsilon[\sim$ inclus dans $\mathcal{W}$; or $\mathcal{V}^* := \mathcal{V} \setminus \{O\} = M \times]0, \varepsilon[$ est connexe car M est connexe. Pour tout $i \in I$, si $\mathcal{W}_i \cap \mathcal{V}^* \neq \emptyset$ alors $\mathcal{W}_i \cup \mathcal{V}^*$ est connexe car $\mathcal{W}_i$ et $\mathcal{V}^*$ sont connexes. Par suite, l'union A des $\mathcal{W}_i \cup \mathcal{V}_i^*$ où i parcourt $\{j \in I \mid \mathcal{W}_j \cap \mathcal{V}^* \neq \emptyset\}$ est connexe. De plus, pour tout $i \in I$, $\mathcal{W}_i \cap \mathcal{V} = \mathcal{W}_i \cap \mathcal{V}^*$; donc, en posant B l'union des $\mathcal{W}_i$ disjoints de $\mathcal{V}^*$, on a $A \sqcup B = \mathcal{W}^*$ et $(A \cup \mathcal{V}) \sqcup B = \mathcal{W}$. Or $A \cup \mathcal{V}$ et B sont ouverts et $\mathcal{W}$ connexe donc $A \cup \mathcal{V} = \emptyset$ ou $B = \emptyset$, et comme $\mathcal{V} \neq \emptyset$ on a $B = \emptyset$ et $A \cup \mathcal{V} = \mathcal{W}$. On en déduit donc que $A = \mathcal{W}^*$ et donc que $\mathcal{W}^*$ est connexe.
- D'après ce qui précède, $\mathcal{W}^*$ est un ouvert non vide et connexe de $\text{susp}^*(M)$ donc $\mathcal{W} \cap \pi^{-1}(\mathcal{U}) = \mathcal{W}^* \cap \pi^{-1}(\mathcal{U})$ est connexe non vide.

□

Lemme 2.0.5. *Soit X un espace topologique et soit $n \in \mathbb{N}^*$, si X est homéomorphe à $\mathbb{S}^n$ alors $\text{susp}(X)$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^n$.*

Démonstration. Supposons qu'il existe $X \xrightarrow{\phi} \mathbb{S}^n$ homéomorphisme, on pose alors

$$\psi : \begin{cases} X \times \mathbb{R}_+ & \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x, r) & \longmapsto r\phi(x) \end{cases}.$$

Il est aisé de vérifier que ψ est continue, passe au quotient et induit un homéomorphisme $\text{susp}(X) \rightarrow \mathbb{R}^n$. □

2.1 Singularités coniques euclidiennes et hyperboliques

Une singularité conique euclidienne peut être construite en quotientant le plan euclidien $\mathbb{E}^2$ par un groupe fini G de rotations linéaires. Ce quotient est un espace métrique muni d'une métrique riemannienne en dehors de l'origine qui est un point singulier. L'angle conique est alors $2\pi/k$ où k est l'ordre du groupe G .

Une construction plus générale peut se faire comme suit. Soit $\mathbb{E}_\infty^2$ le revêtement universel de $\mathbb{E}^2 \setminus \{O\}$, il est homéomorphe à $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et peut être muni des coordonnées polaire (r, θ) dans laquelle sa métrique riemannienne s'écrit $dr^2 + r^2 d\theta^2$. Le groupe des isométries de $\mathbb{E}_\infty^2$ est formé des rotations $R_\omega := (r, \theta) \mapsto (r, \theta + \omega)$ et est donc isomorphe à $\mathbb{R}$. Un sous-groupe discret Γ est donc monogène, si Γ est engendré par une rotation d'angle $\alpha > 0$ on note alors $\Gamma = \alpha\mathbb{Z}$. Le complété métrique de $\mathbb{E}_\infty^2/\alpha\mathbb{Z}$ est noté $\mathbb{E}_\alpha^2$, le complémentaire de $\mathbb{E}_\infty^2/\alpha\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{E}_\alpha^2$ est un point noté O . De plus

$$\Phi : \begin{cases} \mathbb{E}_\alpha^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (r, \theta) \in \mathbb{E}_\infty^2/\alpha\mathbb{Z} & \longmapsto (r \cos(2\pi\theta/\alpha), r \sin(2\pi\theta/\alpha)) \\ O & \longmapsto (0, 0) \end{cases}$$

est un homéomorphisme. On remarque que pour $R > 0$, l'ensemble $C_R := \{(r, \theta) \in \mathbb{E}_\infty^2 / \Gamma \mid r = R\}$ est le cercle de centre O et de rayon R . Ce cercle a pour périmètre αR et non $2\pi R$ comme dans le plan euclidien usuel $\mathbb{E}^2$. Nous l'interprétons en disant que l'angle autour du point singulier O vaut α .

Le nom de ces singularités vient du fait qu'un cône $\mathcal{C}$ de révolution dans l'espace euclidien de dimension 3 $\mathbb{E}^3$ est isométrique à $\mathbb{E}_\alpha^2$ pour un certain $\alpha \in]0, 2\pi]$. De manière plus générale, si $\gamma : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{S}^2$ est une courbe de Jordan de classe $\mathcal{C}^1$ sur la sphère $\mathbb{S}^2$ de rayon 1 dans $\mathbb{E}^3$ et $\mathcal{C}$ le cône $\{r\gamma(\theta) : r \in \mathbb{R}_+, \theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}\}$, $\mathcal{C}$ est isométrique à $\mathbb{E}_\alpha^2$ avec la longueur de la courbe γ . De plus, la longueur d'une courbe de Jordan convexe sur $\mathbb{S}^2$ est au plus 2π donc un cône convexe de $\mathbb{E}^3$ est isométrique à $\mathbb{E}_\alpha^2$ pour un certain $\alpha \in]0, 2\pi]$.

2.1.1 $(\mathrm{SO}(2), \mathbb{S}^1)$ -variétés et $\mathbb{RP}^1$ -variétés

Il est clair que $(\mathrm{SO}(2), \mathbb{S}^1)$ et $(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sont des structures analytiques. Nous remarquons également qu'une $(\mathrm{SO}(2), \mathbb{S}^1)$ -variété admet une $(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ -structure naturelle et que les $(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ variétés compactes sont caractérisées à isomorphisme près par leur longueur c'est-à-dire leur volume.

Un résultat classique montre que l'action de $\mathrm{PSL}_2\mathbb{R}$ sur $\mathbb{RP}^1$ est exactement 3-transitive, en particulier $(\mathrm{PSL}_2\mathbb{R}, \mathbb{RP}^1)$ est une structure analytique.

Corollaire 2.1.1. *Pour $p \in \mathbb{RP}^1$, $(\mathrm{Stab}(p), \mathbb{RP}^1 \setminus \{p\})$ est une structure analytique.*

Corollaire 2.1.2. *$(\mathrm{SO}(2), \mathbb{RP}^1)$ est une structure analytique.*

Proposition 2.1.3. *Soit $p \in \mathbb{RP}^1$, la structure analytique $(\mathrm{Stab}(p), \mathbb{RP}^1 \setminus \{p\})$ est équivalente à la structure analytique $(\mathrm{Aff}^+(\mathbb{R}), \mathbb{R})$.*

Démonstration. Prenons $p = [1; 0] \in \mathbb{RP}^1$, la partie $\mathbb{RP}^1 \setminus \{p\}$ est paramétré par la carte affine

$$\phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{RP}^1 \setminus \{p\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ [x; 1] & \longmapsto & x \end{array}$$

le stabilisateur de p est

$$\mathrm{Stab}(p) = \left\{ A_{\lambda, \mu} := \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \right\}$$

et le groupe des transformations affines directe de $\mathbb{R}$ est

$$\mathrm{Aff}^+(\mathbb{R}) = \{ \tau_{\lambda, \mu} : x \mapsto \lambda x + \mu, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \}.$$

En posant

$$\rho : \begin{array}{ccc} \mathrm{Stab}(p) & \longrightarrow & \mathrm{Aff}^+(\mathbb{R}) \\ A_{\lambda, \mu} & \longmapsto & \tau_{\lambda, \mu} \end{array}$$

ρ est un isomorphisme de groupes et ϕ est un homéomorphisme ρ -équivariant. □

Corollaire 2.1.4. *Pour tout $p \in \mathbb{RP}^1$, il existe une $(\mathrm{SO}(2), \mathbb{S}^1)$ -structure sur $\mathbb{RP}^1 \setminus \{p\}$ telle que $\mathrm{Stab}(p)$ agit sur $\mathbb{RP}^1 \setminus \{p\}$ par isométries et dilatations (c'est-à-dire par similitudes). De plus, cette $(\mathrm{SO}(2), \mathbb{S}^1)$ -structure est unique à un facteur d'échelle près.*

Lemme 2.1.5. *Il existe une $(\mathrm{SO}(2), \mathbb{S}^1)$ -structure sur $\mathbb{RP}^1$ telle que $\mathrm{SO}(2)$ agit sur $\mathbb{RP}^1$ par isométries. De plus, cette $(\mathrm{SO}(2), \mathbb{S}^1)$ -structure est unique à un facteur d'échelle près.*

Démonstration. L'application

$$\phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{RP}^1 & \longrightarrow & \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C} \\ [x; y] & \longmapsto & (x + iy)/|x + iy| \end{array}$$

est $\mathrm{SO}(2)$ -équivariante et donc on peut choisir la $(\mathrm{SO}(2), \mathbb{S}^1)$ -structure tirée en arrière par ϕ . De plus, si on muni $\mathbb{RP}^1$ d'une $(\mathbb{R}, \mathbb{S}^1)$ -structure $\mathrm{SO}(2)$ -invariante et soit $\mathcal{A}$ l'atlas maximal associé. Soit $(\mathcal{U}, \psi)$ une carte de $\mathcal{A}$, la carte $(R\mathcal{U}, \psi \circ R^{-1})$ est également dans $\mathcal{A}$, par suite il existe une rotation $R' \in \mathrm{SO}(2)$ telle que $\psi|_{\mathcal{U} \cap R\mathcal{U}} = R' \circ \psi|_{\mathcal{U} \cap R^{-1}\mathcal{U}} \circ R^{-1}$. Et donc

$$\phi \circ \psi|_{\mathcal{U} \cap R\mathcal{U}} \circ \phi^{-1} = R' \circ \phi \circ \psi|_{\mathcal{U} \cap R^{-1}\mathcal{U}} \circ \phi^{-1} \circ R^{-1}$$

De telles fonctions continues $\phi \circ \psi \circ \phi^{-1}$ sont de la forme $e^{i\theta} \mapsto e^{i\lambda\theta + \mu}$. Le paramètre λ ne dépend pas de la carte choisie et finalement $\lambda^{-1}\phi : \mathbb{RP}^1 \rightarrow \lambda^{-1}\mathbb{S}^1$ est un isomorphisme de $(\mathrm{SO}(2), \mathbb{S}^1)$ -variétés. $\square$

2.1.2 Voûte céleste dans $\mathbb{E}^2$ et $\overline{\mathbb{H}^2}$

Définition 2.1.6 (Suspension euclidienne). *Soit $\mathcal{C}$ une $(\mathrm{SO}_0(1, 2), \mathbb{S}^1)$ -variété, la suspension euclidienne de $\mathcal{C}$ est définie comme*

$$\mathrm{susp}_{\mathbb{E}^2} := (\mathrm{susp}(\mathcal{C}), r^2 d\theta^2 + dr^2)$$

muni de sa $\mathbb{E}^2$ -structure naturelle sur $\{r > 0\}$.

Proposition 2.1.7 (Voûte céleste dans $\mathbb{E}^2$). *Soit $p \in \mathbb{E}^2$, notons X_p la voûte céleste en p , G_p le stabilisateur de p dans $\mathrm{Isom}(\mathbb{E}^2)$ et $\widetilde{\mathbb{RP}^1}$ le revêtement double de $\mathbb{RP}^1$. Alors $(G_p, X_p) = (\mathrm{SO}(2), \widetilde{\mathbb{RP}^1})$ et il existe un voisinage de p isomorphe à $\mathrm{susp}_{\mathbb{E}^2}(\mathbb{S}^1)$.*

Démonstration. Le stabilisateur de p est le groupe des rotations de centre p qui est isomorphe à $\mathrm{SO}(2)$ et l'ensemble des rayons sortant de p est naturellement le quotient de $\mathbb{E}^2 \setminus \{p\}$ le groupe des homothéties de centre p .

Il suffit alors pour finir de remarquer que l'application

$$\psi : \begin{array}{ccc} \mathrm{susp}_{\mathbb{E}^2}(\mathbb{S}^1) & \longrightarrow & \mathbb{E}^2 \\ (x, r) & \longmapsto & rx \end{array}$$

est un homéomorphisme et une isométrie. $\square$

Définition 2.1.8 (Suspension hyperbolique). *Soit $\mathcal{C}$ une $(\mathrm{SO}(2), \mathbb{S}^1)$ -variété, la suspension hyperbolique de $\mathcal{C}$ est définie comme suit :*

$$\mathrm{susp}_{\mathbb{H}^2}(\mathcal{C}) := (\mathrm{susp}(\mathcal{C}), \sinh(r) ds_{\mathcal{C}}^2 + dr^2)$$

Définition 2.1.9 (Suspension hyperbolique). *Soit $\mathcal{C}$ une $(\mathrm{Stab}(1), \mathbb{RP}^1 \setminus \{1\})$ -variété, la suspension hyperbolique de $\mathcal{C}$ est définie comme suit :*

$$\mathrm{susp}_{\mathbb{H}^2}(\mathcal{C}) := \left(\mathrm{susp}(\mathcal{C}), \frac{dr^2 + r^2 ds_{\mathcal{C}}^2}{r^2 \log(r)^2} \right)$$

où $ds_{\mathcal{C}}^2$ est la métrique riemannienne induite par l'une des $(\mathrm{SO}(2), \mathbb{S}^1)$ -structure naturelle donnée par le lemme 2.1.4.

Remarque 2.1.10. *La suspension hyperbolique est bien définie en effet une dilatation de $\mathcal{C}$ induit une isométrie de $\mathrm{susp}_{\mathbb{H}^2}(\mathcal{C})$:*

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{C}, ds_{\mathcal{C}}^2) & \xrightarrow{\times \lambda} & (\mathcal{C}, \lambda ds_{\mathcal{C}}^2) \\ \downarrow \iota & & \downarrow \iota \\ \mathrm{susp}_{\mathbb{H}^2}(\mathcal{C}, ds_{\mathcal{C}}^2) & \xrightarrow{(\theta, r) \mapsto (\lambda\theta, r^\lambda)} & \mathrm{susp}_{\mathbb{H}^2}(\mathcal{C}, \lambda ds_{\mathcal{C}}^2) \end{array}$$

En effet, le changement de variable $(\theta, r) = (\lambda\alpha, u^\lambda)$ donne :

$$\begin{aligned} \frac{dr^2 + r^2 d\theta}{r^2 \log(r)^2} &= \frac{(du^\lambda)^2 + u^{2\lambda} d(\lambda\alpha)^2}{u^{2\lambda} \log(u^\lambda)} \\ &= \frac{u^{2(\lambda-1)} du + \lambda^2 u^{2\lambda} d\alpha^2}{u^{2\lambda} \lambda^2 \log(u)^2} \\ &= \frac{du^2 + u^2 d\alpha^2}{u^2 \log(u)^2} \end{aligned}$$

Proposition 2.1.11. *Voute céleste dans $\overline{\mathbb{H}^2}$* Soit $p \in \overline{\mathbb{H}^2}$, notons X_p la voute céleste en p et G_p le stabilisateur de p dans $\mathrm{SO}_0(1, 2)$.

- Si $p \in \mathbb{H}^2$, alors $(G_p, X_p) = (\mathrm{SO}(2), \mathbb{S}^1)$ et p a un voisinage isométrique à $\mathrm{susp}_{\mathbb{H}^2}(\mathbb{S}^1)$.
- Si $p \in \partial\mathbb{H}^2$, alors $(G_p, X_p) = (\mathrm{Stab}(1), \mathbb{RP}^1 \setminus \{p\})$ et p a un voisinage isométrique à

$$\mathrm{susp}_{\mathbb{H}^2}(\mathbb{RP}^1 \setminus \{p\}).$$

Démonstration. Il suffit de remarquer que les suspension $\mathrm{susp}_{\mathbb{H}^2}(\mathbb{RP}^1 \setminus \{p\})$ et $\mathrm{susp}_{\mathbb{H}^2}(\mathbb{S}^1)$ sont des surfaces simplement connexes riemanniennes de courbure -1 métriquement complètes. $\square$

2.1.3 Variétés singulières

2.1.4 $\mathbb{H}_{\geq 0}^2$ -variétés compacte et extension cuspidale

$\mathbb{H}_{\geq 0}^2$ -variétés

La proposition 2.1.11 motive la définition suivante.

Définition 2.1.12 (Singularités hyperboliques). On note $\mathbb{D}$ le disque de centre 0 et de rayon 1 dans $\mathbb{R}^2$. Pour $\alpha \geq 0$, on pose

$$\mathbb{H}_\alpha^2 := (\mathbb{D}, ds^2) \quad \text{avec} \quad ds^2 = \begin{cases} 4 \frac{dr^2 + \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2 r^2 d\theta^2}{(1-r^2)^2} & \text{Si } \alpha > 0 \\ \frac{dr^2 + r^2 d\theta^2}{r^2 \log(r)^2} & \text{Si } \alpha = 0 \end{cases}$$

Remarque 2.1.13.

- Soit $\mathcal{C}$ une $(\mathrm{SO}(2), \mathbb{S}^1)$ -variété compacte de longueur α , la suspension hyperbolique de $\mathcal{C}$ est isométrique à $\mathbb{H}_\alpha^2$.
- Soit $p \in \mathbb{RP}^1$ et soit $\mathcal{C}$ une $(\mathrm{Stab}(p), \mathbb{RP}^1 \setminus \{p\})$ -variété compacte, la suspension hyperbolique de $\mathcal{C}$ est isométrique à $\mathbb{H}_0^2$.

Définition 2.1.14 (Surface hyperbolique singulière). Une surface hyperbolique singulière est une $(\mathrm{SO}_0(1, 2), \mathbb{H}^2, \mathbb{H}_{\geq 0}^2)$ -variété Σ . Par simplicité, on parlera simplement de $\mathbb{H}_{\geq 0}^2$ -variété.

Une surface hyperbolique singulière Σ est sans pointe si $\mathrm{Sing}_0(\Sigma) = \emptyset$.

Remarque 2.1.15. Une $(\mathrm{SO}_0(1, 2), \overline{\mathbb{H}^2}, \mathbb{H}_{\geq 0}^2)$ -structure sur une surface Σ est également une $(\mathrm{SO}_0(1, 2), \mathbb{H}^2, \mathbb{H}_{\geq 0}^2)$ -structure.

Il suffit de montrer que $\partial\Sigma = \emptyset$. Un point du bord de Σ est localement modelé sur un horodisque et n'est donc pas localement homéomorphe à $\mathbb{R}^2$ auquel cas Σ ne serait pas une surface.

Extension cuspidale, modèle jouet des extensions BTZ

Nous introduisons la notion d'extension cuspidale qui est d'une part une compactification naturelle des surfaces hyperboliques complètes de volume finies et d'autre part un modèle jouet des extensions BTZ que nous introduirons un peu plus loin. Les propositions 2.1.18 et 2.1.19, sans être particulièrement difficiles à démontrer, présentent les mêmes schémas de preuve que leurs équivalents BTZ. Les preuves n'en sont pas présentées en détail, d'une part parce que les arguments sont simples et classiques et, d'autre part, parce qu'elles seraient redondantes avec les preuves des théorèmes semblables portant sur les extensions BTZ.

Définition 2.1.16 (Extension cuspidale). *Soit Σ une $\mathbb{H}_{\geq 0}^2$ -variété, une extension cuspidale de Σ est un couple $(\bar{\Sigma}, \iota)$ où $\bar{\Sigma}$ est une $\mathbb{H}_0^2$ -variété et $\iota : \Sigma \rightarrow \bar{\Sigma}$ un $\mathbb{H}_{\geq 0}^2$ -plongement tels que le complémentaire de l'image de ι est inclus dans $\text{Sing}_0(\bar{\Sigma})$.*

Lemme 2.1.17. *Soit H un horodisque de $\bar{\mathbb{H}}^2$, soit $\partial H \cap \partial \mathbb{H}^2 = \{p\}$ et soit $\gamma \in \text{Stab}(p)$. Il existe $R > 0$ et un homéomorphisme*

$$(H \cup \{p\})/\langle \gamma \rangle \xrightarrow{\phi} \mathcal{U} \subset \mathbb{H}_0^2$$

avec $\mathcal{U} := \{r < R\}$ tel que $\phi(H/\langle \gamma \rangle) \subset \text{Reg}(\mathbb{H}_0^2)$ et tel que sa restriction à $H/\langle \gamma \rangle$ est un $\mathbb{H}^2$ -morphisme.

De plus, si ψ est un autre tel homéomorphisme alors il existe $\omega \in \text{Isom}(\mathbb{H}_0^2)$ tel que $\psi = \omega\phi$.

admis. □

Proposition 2.1.18 (Compactification (I)). *Soit Σ une $\mathbb{H}^2$ -variété complète et de volume fini, il existe une extension cuspidale maximale. De plus, cette extension est unique à isomorphisme près et celle-ci est compacte.*

Schéma de preuve. Soit $(\mathcal{D}, \rho)$ l'application développante et l'holonomie de Σ , on pose Λ l'ensemble des points de $\partial \mathbb{H}^2$ fixés par une isométrie parabolique de $\Gamma := \rho(\pi_1 \Sigma)$. On pose $\bar{\Sigma} := (\Lambda \cup \mathbb{H}^2)/\rho$ et $\pi : \Lambda \cup \mathbb{H}^2 \rightarrow \bar{\Sigma}$ la projection naturelle. Comme Σ est de volume fini, Σ est de type fini, Γ est un réseau de $\text{SO}_0(1, 2)$, chaque orbite de Λ correspond à un lacet simple périphérique de Σ dont l'holonomie est parabolique, et il existe un choix d'horodisque $(H_{[\gamma]})_\gamma$ pour chacun de ces lacets tel que $\omega H_{[\gamma]} \cap H_{[\gamma']} \neq \emptyset \Rightarrow \gamma' = \gamma^\omega$. Par suite, le quotient $(\mathbb{H}^2 \cup \Lambda)/\Gamma$ est séparé et chaque point $p \in \Lambda$ fixé par un certain $\gamma \in \Gamma$ parabolique, $H_{[\gamma]}/\langle \gamma \rangle \subset \bar{\Sigma}$ est un voisinage de $\pi(p)$. Or $H_{[\gamma]}/\langle \gamma \rangle$ est isométrique à un ouvert de $\mathbb{H}_0^2$. On se donne alors un $\mathbb{H}^2$ -atlas $\mathcal{A}$ de $\mathbb{H}^2/\Gamma$ et on construit un atlas $\mathcal{B}$ de $\bar{\Sigma}$ en ajoutant à $\mathcal{A}$ les cartes $(H_{[\gamma]}, \phi_\gamma)_\gamma$ où γ est l'homéomorphisme donné par le lemme 2.1.17. La deuxième partie du lemme 2.1.17 assure que l'atlas $\mathcal{B}$ est un $\mathbb{H}_{\geq 0}^2$ -atlas et donc $(\bar{\Sigma}, \mathcal{B})$ est une $\mathbb{H}_0^2$ -variété. Enfin, $\pi \circ \mathcal{D}$ est $\pi_1 \Sigma$ -invariant et donc induit un $\mathbb{H}_{\geq 0}^2$ -morphisme injectif $\iota : \Sigma \rightarrow \bar{\Sigma}$.

Pour démontrer l'unicité, il suffit de remarquer que le développement d'une telle surface $\bar{\Sigma}$ est toujours $\mathbb{H}^2 \cup \Lambda$ tel que précédemment. □

Proposition 2.1.19 (Compactification (II)). *Soit Σ une $\mathbb{H}^2 \geq 0$ -variété complète et de volume fini, il existe une extension cuspidale maximale. De plus, cette extension est unique à isomorphisme près et celle-ci est compacte.*

Schéma de preuve. On considère la famille des plongements $(\Sigma_i, \iota_i)_{i \in I}$ où Σ_i est une $\mathbb{H}_{\geq 0}^2$ -variété complète et de volume finie et ι_i un $\mathbb{H}_{\geq 0}^2$ -plongement dont le complémentaire de l'image ne contient que des pointes. On montre que deux tels extensions de Σ peuvent être collées de sorte à construire une extension commune, on montre ainsi que la famille est filtrante à droite. Puis on considère la limite inductive de cette famille, celle-ci sera la variété recherchée et sera unique par construction. □

2.2 Singularités lorentziennes

2.2.1 Particules Massives et trous blancs BTZ extrêmes

Espaces modèles des particules massives

Définition 2.2.1 (Espace modèle des particules massives). Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. définissons :

$$\mathbb{E}_\alpha^{1,2} := (\mathbb{R} \times \mathbb{E}_\alpha^2, ds^2) \text{ avec } ds^2 = -dt^2 + dr^2 + \frac{\alpha}{2\pi} r^2 d\theta^2$$

où t est la première coordonnée du produit et (r, θ) les coordonnées polaires de $\mathbb{R}^2$.

Le complémentaire de la ligne singulière $\text{Sing}(\mathbb{E}_\alpha^{1,2}) := \{r = 0\}$ est une $\mathbb{E}_\alpha^{1,2}$ -variété appelée le lieu régulier et dénoté par $\text{Reg}(\mathbb{E}_\alpha^{1,2})$. Pour $p \in \text{Sing}(\mathbb{E}_\alpha^{1,2})$, on note $]p, +\infty[$ (resp. $[p, +\infty[$) le rayon singulier futur ouvert (resp. fermé) issu de p . Une notation comparable sera également utilisée pour le rayon singulier passé issu p .

Pour définir une causalité sur $\mathbb{E}_\alpha^{1,2}$ compatible avec sa structure de (G, X) -variété singulière, il suffit de prolonger la causalité naturelle de $\text{Reg}(\mathbb{E}_\alpha^{1,2})$ à $\mathbb{E}_\alpha^{1,2}$ tout entier.

Définition 2.2.2 (Causalité de $\mathbb{E}_\alpha^{1,2}$). Soient $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{E}_\alpha^{1,2}$ et $p, q \in \mathcal{U}$. On pose $p <_{\mathcal{U}} q$ (resp. $p \ll_{\mathcal{U}} q$) s'il existe une courbe continue $c : p \leadsto q$ dans $\mathcal{U}$ satisfaisant les propriétés suivantes :

- (a) la restriction de c à $\text{Reg}(\mathcal{U})$ est une courbe future causale (resp. future chronale) de $\text{Reg}(\mathcal{U})$,
- (b) la coordonnée t de c est strictement croissante.

Cette définition de causalité sur $\mathbb{E}_\alpha^{1,2}$ satisfait les hypothèses de la propriété 3.1.17.

Proposition 2.2.3. Soient $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $c : I \rightarrow \mathbb{E}_\alpha^{1,2}$ une courbe continue. La courbe c est future causale si et seulement si elle satisfait les conditions (a) et (b) de la définition 2.2.2

Démonstration. Par définition, si c satisfait les conditions (a) et (b), elle est future causale. Réciproquement, supposons c future causale, alors sa restriction à $\text{Reg}(\mathbb{E}_\alpha^{1,2})$ est future causale et donc c satisfait la propriété (a) ; de plus, pour tout $s_1 < s_2$ dans I , $c(s_1) <_{\mathbb{E}_\alpha^{1,2}} c(s_2)$ donc il existe une courbe reliant $c(s_1)$ à $c(s_2)$ satisfaisant (b), et donc la coordonnée t de $c(s_1)$ est plus petite que la coordonnée t de $c(s_2)$. $\square$

Définition 2.2.4 (Voisinage tubulaire). Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, un voisinage tubulaire autour d'un point $p = (r, \theta, t)$ de $\text{Sing}(\mathbb{E}_\alpha^{1,2})$ est un domaine de la forme

$$\mathcal{T} = \{(r, \theta, t) \in \mathbb{E}_\alpha^{1,2} \mid r < R, t_* < t < t^*\}$$

avec $R > 0$ et $+\infty \geq t^* > t_* \geq -\infty$.

Espace modèle BTZ

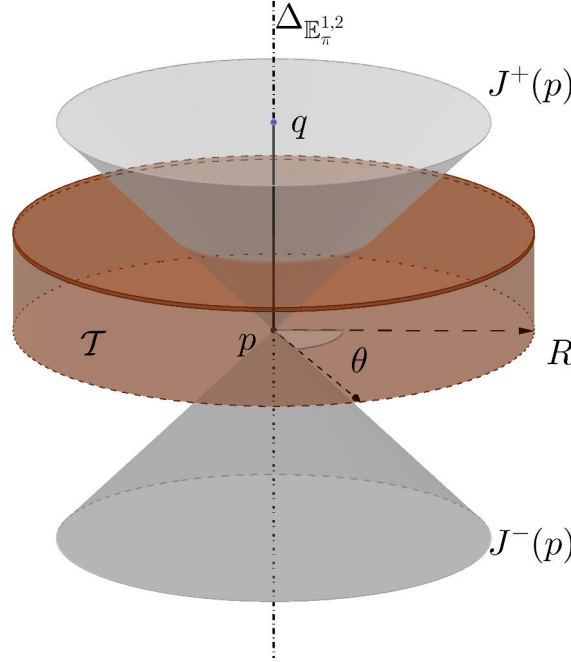
Nous introduisons à présent les trous blancs BTZ extrêmes. Partons d'une particule massive d'angle $\alpha \leq 2\pi$ et posons $\alpha = \frac{2\pi}{\cosh(\beta)}$. En partant des coordonnées données dans la définition 2.2.1, on considère le changement de coordonnées suivant :

$$\begin{cases} \tau &= t \cosh(\beta) - r \sinh(\beta) \\ \mathfrak{r} &= \frac{r}{\cosh(\beta)} \\ \theta' &= \theta \end{cases}$$

Dans ces nouvelles coordonnées, en posant $\omega = \tanh(\beta)$, la métrique s'écrit

$$ds_\omega^2 = \mathfrak{r}^2 d\theta^2 + d\mathfrak{r}^2 - (1 - \omega^2) d\tau^2 - 2\omega d\mathfrak{r} d\tau.$$

FIGURE I.1 – Coordonnées, cône futur et cône passé autour d'une particule massive



Lorsque ω varie dans l'intervalle $] -1, 1[$, on obtient une famille continue à 1 paramètre de métriques lorentziennes sur $\{r > 0\}$ dans $\mathbb{R}^3$ et localement isométriques à $\mathbb{E}^{1,2}$. Elle paramétrise les particules massives d'angle plus petit que 2π et admet des limites lorsque ω tend vers $\omega = -1$ et $\omega = 1$. Les métriques limites sont non dégénérées, lorentziennes, localement isométriques à $\mathbb{E}^{1,2}$ et définissent donc une (G, X) -structure singulière sur $\mathbb{R}^3$ de domaine régulier contenant $\{r > 0\}$. On peut vérifier que l'holonomie autour de l'axe $\{r = 0\}$ est parabolique et donc que le domaine régulier est bien $\{r > 0\}$. Les surfaces $\{\tau = Cte\}$ sont isométriques à $\mathbb{E}^2$ donc non singulières en dépit du caractère singulier de l'espace ambiant.

Définition 2.2.5 (Espace modèle BTZ). *L'espace modèle des trous blancs BTZ, noté $\mathbb{E}_0^{1,2}$, est $\mathbb{R}^3$ muni de la métrique lorentzienne*

$$ds^2 = -2d\tau d\mathbf{r} + d\mathbf{r}^2 + \mathbf{r}^2 d\theta^2$$

où $(\tau, \mathbf{r}, \theta)$ sont les coordonnées cylindriques de $\mathbb{R}^3$.

La ligne singulière $\text{Sing}(\mathbb{E}_0^{1,2}) := \{\mathbf{r} = 0\}$ est aussi appelée ligne BTZ et son complémentaire est appelé lieu régulier de $\mathbb{E}_0^{1,2}$ et noté $\text{Reg}(\mathbb{E}_0^{1,2})$.

Pour $p \in \text{Sing}(\mathbb{E}_0^{1,2})$, on note $]p, +\infty[$ (resp. $[p, +\infty[$) le rayon singulier futur ouvert (resp. fermé) issu de p . Une notation similaire est utilisée pour les rayons singuliers passés issus de p .

Définition 2.2.6 (Causalité de $\mathbb{E}_0^{1,2}$). Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, une courbe c est causale (resp. chronale) future si les conditions suivantes sont satisfaites :

- (i) La restriction de c à $\text{Reg}(\mathbb{E}_0^{1,2})$ est une courbe causale (resp. chronale) future de $\text{Reg}(\mathbb{E}_0^{1,2})$ vu en tant que $\mathbb{E}^{1,2}$ -variété.
- (ii) La coordonnée τ de c est strictement croissante.

Une courbe $c :]a, b[\rightarrow \mathbb{E}_0^{1,2}$ est causale (resp. chronale) passée si $s \mapsto c(-s)$ est causale (resp. chronale) future.

Définition 2.2.7 (Voisinage tubulaire). Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, un voisinage tubulaire autour d'un point $p = (r, \theta, t)$ de $\text{Sing}(\mathbb{E}_\alpha^{1,2})$ est un domaine de la forme

$$\mathcal{T} = \{(r, \theta, t) \in \mathbb{E}_\alpha^{1,2} \mid r < R, t_* < t < t_*\}$$

avec $R > 0$ et $+\infty \geq t_* > t_* \geq -\infty$.

Quelques propriétés élémentaires des singularités lorentziennes

Lemme 2.2.8. On a les fait suivants :

1. pour tout $p, q \in \mathbb{E}_0^{1,2}$, si $p \leq q$ (resp. si $p \ll q$), alors $\mathfrak{r}(p) \leq \mathfrak{r}(q)$ (resp. $\mathfrak{r}(p) < \mathfrak{r}(q)$) ;
2. si c est future causale (resp. future chronale) de $\mathbb{E}_0^{1,2}$, alors $\mathfrak{r} \circ c$ est croissante (resp. strictement croissante).

Démonstration. Les deux propriétés sont clairement équivalentes, contentons nous de démontrer la première dans le cas $\leq$, le cas $\ll$ se démontrant de la même manière. Soient $p, q \in \mathbb{E}_0^{1,2}$ tels que $p \leq q$. Si $p \in \text{Sing}(\mathbb{E}_0^{1,2})$, il n'y a rien à démontrer car $\mathfrak{r}(p) = 0$. Sinon, par définition de la relation $\leq$, il existe une courbe $c \in \mathcal{C}_{pm}^1([0, 1], \mathbb{E}_0^{1,2})$ telle que $c(0) = p$, $c(1) = q$, $\tau \circ c$ est croissant et $c'(s)$ est causal pour tout $s \in [0, 1]$ pour lequel $\mathfrak{r} \circ c(s) > 0$. Sur le lieu $\mathfrak{r} \circ c > 0$, on a

$$\begin{aligned} 0 &\geq ds^2(c') \\ &= (\mathfrak{r} \circ c)'^2 + (\mathfrak{r} \circ c)^2 (\theta \circ c)'^2 - 2(\tau \circ c)'(\mathfrak{r} \circ c)' \\ &\geq (\mathfrak{r} \circ c)'^2 - 2(\tau \circ c)'(\mathfrak{r} \circ c)' \\ &\geq (\mathfrak{r} \circ c)'((\mathfrak{r} \circ c)' - 2(\tau \circ c)') \end{aligned}$$

Or $(\tau \circ c)'$ est négatif donc, nécessairement, $(\mathfrak{r} \circ c)'$ est positif. Comme $\mathfrak{r} \circ c(0) = \mathfrak{r}(p) > 0$, le lieu des s tels que $\mathfrak{r}(c(s)) > 0$ est non vide ouvert ; le calcul précédent permet de montrer qu'il est également fermé et donc que $\mathfrak{r} \circ c$ est croissante sur $[0, 1]$. Enfin $\mathfrak{r}(q) \geq \mathfrak{r}(p)$. $\square$

Lemme 2.2.9. Pour tout $p \in \text{Sing}(\mathbb{E}_0^{1,2})$,

$$I^+(p) = \{x \in \mathbb{E}_0^{1,2} \mid 0 < \mathfrak{r}(x) < 2\tau(x)\} \quad J^+(p) = \{x \in \mathbb{E}_0^{1,2} \mid \mathfrak{r}(x) \leq 2\tau(x)\}$$

$$I^-(p) = \emptyset \quad J^-(p) =]-\infty, p]$$

Démonstration. Les deux dernières assertions sont conséquences directes du lemme 2.2.8. Les deux premières se démontrent en remarquant que les inclusions $\supset$ sont triviales et les inclusions $\subset$ s'obtiennent en faisant un calcul similaire à celui de la démonstration du lemme 2.2.8. $\square$

Lemme 2.2.10. Pour tout $\alpha > 0$ et tout $p \in \text{Sing}(\mathbb{E}_\alpha^{1,2})$,

$$I^+(p) = \{x \in \mathbb{E}_\alpha^{1,2} \mid r(x) < t(x) - t(p)\} \quad J^+(p) = \{x \in \mathbb{E}_\alpha^{1,2} \mid r(x) \leq t(x) - t(p)\}$$

$$I^-(p) = \{x \in \mathbb{E}_\alpha^{1,2} \mid r(x) < t(p) - t(x)\} \quad J^-(p) = \{x \in \mathbb{E}_\alpha^{1,2} \mid r(x) \leq t(p) - t(x)\}$$

Démonstration. Les inclusions $\supset$ se démontrent en vérifiant que les rayons $[px]$ sont bien cauxaux ou chronaux selon les cas et x appartenant au terme de droite. Les inclusions contraires se démontrent par un calcul similaire à celui de la démonstration du lemme 2.2.8. $\square$

2.2.2 Revêtement universel de l'espace modèle BTZ

Proposition 2.2.11. Soit $\widetilde{Reg}(\mathbb{E}_0^{1,2})$ le revêtement universel de la partie régulière de $\mathbb{E}_0^{1,2}$.

- L'application développante $\mathcal{D} : \widetilde{Reg}(\mathbb{E}_0^{1,2}) \rightarrow \mathbb{E}^{1,2}$ est injective ;
- l'holonomie envoie $(t, r, \theta) \mapsto (t, r, \theta + 2\pi)$ sur une isométrie parabolique γ fixant une droite lumière Δ ;
- L'image de $\mathcal{D}$ est le futur chronologique de Δ .

Démonstration. On considère $\widetilde{Reg}(\mathbb{E}_0^{1,2})$ paramétré par

$$(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, -2d\tau dr + dr^2 + r^2 d\theta^2).$$

Le groupe fondamental de $Reg(\mathbb{E}_0^{1,2})$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$ et engendré par une translation

$$g : (\tau, r, \theta) \mapsto (\tau, r, \theta + 2\pi).$$

On utilise (t, x, y) les coordonnées cartésiennes de $\mathbb{E}^{1,2}$ dans lesquelles $-dt^2 + dx^2 + dy^2$.

Soit $\Delta = \mathbb{R} \cdot (1, 1, 0)$ et soit γ l'isométrie parabolique de $\mathbb{E}^{1,2}$ fixant Δ et envoyant $(0, 0, 1)$ sur $(1, 1, 1)$. Définissons

$$\mathcal{D} : \begin{cases} \widetilde{Reg}(\mathbb{E}_0^{1,2}) & \longrightarrow & \mathbb{E}^{1,2} \\ \left(\tau, r, \frac{\theta}{2\pi} \right) & \longmapsto & \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau + \frac{1}{2}r\theta^2 \\ \tau + \frac{1}{2}r\theta^2 - r \\ -r\theta \end{pmatrix} \end{cases}.$$

Un calcul direct montre que $\mathcal{D}$ est injective d'image $I^+(\Delta)$; c'est, de plus, un $\mathbb{E}^{1,2}$ -morphisme et

$$\mathcal{D}(g \cdot (\tau, r, \theta)) = \gamma \mathcal{D}(\tau, r, \theta)$$

$\mathcal{D}$ est donc une application développante map et l'holonomie associée à $\mathcal{D}$ envoie g sur γ . □

Corollaire 2.2.12. L'application développante induit un homéomorphisme

$$\overline{\mathcal{D}} : Reg(\mathbb{E}_0^{1,2}) \rightarrow I^+(\Delta)/\langle \gamma \rangle.$$

Remarque 2.2.13. Soit $\mathcal{D}$ l'application développante de $Reg(\mathbb{E}_0^{1,2})$ et soit γ un générateur de l'image de l'holonomie associée à $\mathcal{D}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et soit h une isométrie hyperbolique linéaire de $\mathbb{E}^{1,2}$ dont l'espace propre associé à λ est la ligne de point fixe de γ . L'isométrie h stabilise $\widetilde{Reg}(\mathbb{E}_0^{1,2})$ et la métrique tirée en arrière par h est

$$ds_\lambda^2 = -2d\tau d\mathfrak{r} + d\mathfrak{r}^2 + \lambda^2 \mathfrak{r}^2 d\theta^2$$

dans les coordonnées $(\mathfrak{r}, \theta, \tau)$. Ainsi cette métrique sur $\mathbb{R}^3$ est isométrique à $\mathbb{E}_0^{1,2}$ pour tout $\lambda > 0$.

2.2.3 Suspension de surfaces hyperboliques singulières

Les particules massives et les singularités BTZ s'obtiennent par suspension de singularités coniques et de pointes hyperboliques. Le cas des particules massives est le plus direct.

Définition 2.2.14. Soit $\kappa > 0$ on définit la suspension de $\mathbb{H}_\kappa^2$ en posant :

$$\text{susp}_{\mathbb{E}^{1,2}}(\mathbb{H}_\kappa^2) := (\text{susp}(\mathbb{H}_\kappa^2), ds_\kappa^2)$$

avec

$$ds_\kappa^2 = -dt^2 + t^2 ds_{\mathbb{H}_\kappa^2}^2.$$

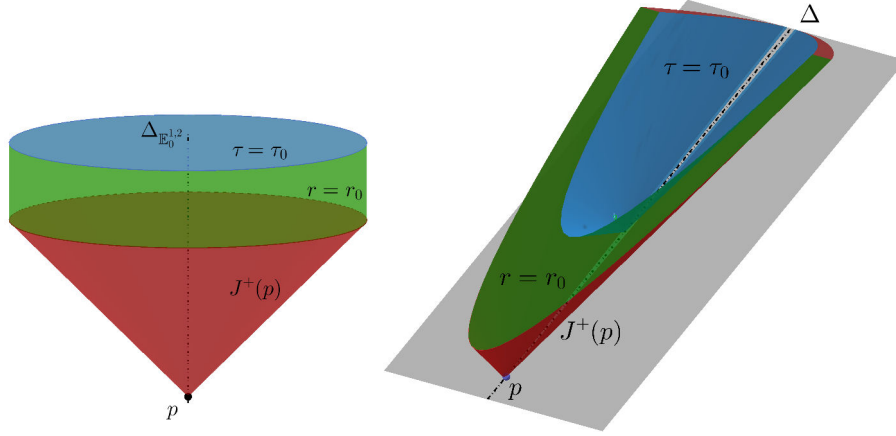


FIGURE I.2 – Voisinage tubulaire d'un point BTZ point et son développement
À gauche, un voisinage tubulaire dans $\mathbb{E}_0^{1,2}$. À droite son développement dans $\mathbb{E}^{1,2}$. Les surfaces correspondantes sont coloriées de la même couleur.

Le cas des singularités BTZ est légèrement plus subtil : l'intérieur de $\mathbb{H}_0^2$ se plonge dans $\mathbb{E}_0^{1,2}$ comme la surface

$$\text{Int}(\mathbb{H}_0^2) := \left\{ \tau = \frac{\tau^2 + 1}{2\tau} \right\}.$$

On voit que cette surface ne peut pas être prolongée continûment en $\tau = 0$ et donc il n'est pas envisageable de plonger $\mathbb{H}_0^2$ dans $\mathbb{E}_0^{1,2}$ avec sa partie singulière. Or si l'on définit $\text{susp}_{\mathbb{E}^{1,2}}(\mathbb{H}_0^2)$ de la même manière que $\text{susp}_{\mathbb{E}^{1,2}}(\mathbb{H}_\kappa^2)$, la ligne singulière $r = 0$ est composée des pointes des surfaces $t\mathbb{H}_0^2$. La singularité n'est donc pas de type BTZ. Une autre manière de se rendre compte que cette suspension n'est pas adaptée est de remarquer que les géodésiques des plans $\{\theta = cte\}$ passent toutes par l'origine !

Une bonne définition de la suspension de $\mathbb{H}_0^2$ se fait donc avec un facteur d'échelle lorsque la coordonnée r de $\mathbb{H}_0^2$ tend vers 0. On remarque que le changement de variable $r = e^{-1/\tau}$ transforme la métrique de $\mathbb{H}_0^2$ en la métrique induite sur $\left\{ \tau = \frac{\tau^2 + 1}{2\tau} \right\} \subset \mathbb{E}_0^{1,2}$. Cela motive la définition suivante.

Définition 2.2.15. On définit la suspension de $\mathbb{H}_0^2$ en posant :

$$\text{susp}_{\mathbb{E}^{1,2}}(\mathbb{H}_0^2) := (\text{susp}(\mathbb{H}_0^2), ds_0^2)$$

avec

$$ds_0^2 = -d(-\log(r)t)^2 + t^2 \frac{dr^2 + r^2 d\theta^2}{r^2}$$

Avec ces définitions, on obtient aisément la proposition suivante que nous ne démontrons pas.

Proposition 2.2.16. Pour tout $\kappa \geq 0$, $\text{susp}_{\mathbb{E}^{1,2}}^*(\mathbb{H}_\kappa^2)$ est isomorphe en tant que (G, X) -variété singulière à l'intérieur du futur causal d'un point singulier de $\mathbb{E}_\kappa^{1,2}$.

□

2.2.4 Analyticité

L'objet de cette section est de démontrer l'analyticité de la structure singulière

$$(\text{Isom}(\mathbb{E}^{1,2}), \mathbb{E}^{1,2}, \mathbb{E}_{\geq 0}^{1,2}).$$

Celle-ci est une formulation de l'unicité locale des solutions des équations d'Einstein dans notre contexte d'espace-temps plats singuliers. La preuve consiste à remonter aux revêtements universels et de comparer les applications développantes.

Proposition 2.2.17. *La structure $(\text{Isom}(\mathbb{E}^{1,2}), \mathbb{E}^{1,2}, \mathbb{E}_{\geq 0}^{1,2})$ est analytique.*

Démonstration. Soient $\alpha, \beta \geq 0$ avec $\alpha \neq 2\pi$ de sorte que $\text{Sing}(X_\alpha) \neq \emptyset$. Soient $p \in \text{Sing}(X_\alpha)$, $\mathcal{U}$ un voisinage de p et $\phi : \text{Reg}(\mathcal{U}) \rightarrow \text{Reg}(X_\beta)$ un (G, X) -morphisme. Sans perte de généralité, on peut supposer que $\mathcal{U}$ est un voisinage tubulaire relativement compact de p .

- Supposons $\alpha\beta \neq 0$. Relevons ϕ en

$$\tilde{\phi} : \widetilde{\text{Reg}}(\mathcal{U}) \subset \mathbb{E}_{\infty}^{1,2} \longrightarrow \mathbb{E}_{\infty}^{1,2}$$

application χ -équivariante pour un certain morphisme de groupes $\chi : \alpha\mathbb{Z} \rightarrow \beta\mathbb{Z}$. On note $\mathcal{D} : \mathbb{E}_{\infty}^{1,2} \rightarrow \mathbb{E}^{1,2}$ la projection naturelle. Les $\mathbb{E}^{1,2}$ -morphisms $\mathcal{D}|_{\widetilde{\text{Reg}}(\mathcal{U})}$ et $\mathcal{D} \circ \tilde{\phi}$ sont deux applications développantes de $\text{Reg}(\mathcal{U})$, d'après le Theoreme 1, il existe donc $\gamma \in \text{Isom}(\mathbb{E}^{1,2})$ tel que $\gamma \circ \mathcal{D}|_{\widetilde{\text{Reg}}(\mathcal{U})} = \mathcal{D} \circ \tilde{\phi}$. Dans la suite l'application développante standard fera référence à $\mathcal{D}|_{\widetilde{\text{Reg}}(\mathcal{U})}$ et l'application développante déformée à $\mathcal{D} \circ \tilde{\phi}$. Les images de ces applications sont des tubes d'axes respectifs $\Delta = \{r = 0\}$ pour l'application standard et $\gamma\Delta$ pour la déformée. Notons $\rho : \text{Isom}(\mathbb{E}_{\infty}^{1,2}) \rightarrow \text{Isom}(\mathbb{E}^{1,2})$ la projection naturelle, on a alors $\gamma \cdot \rho|_{\alpha\mathbb{Z}} \cdot \gamma^{-1} = (\rho \circ \chi)$.

- Supposons par l'absurde que $\gamma\Delta \neq \Delta$. Comme l'image de $\mathcal{D}$ ne rencontre pas Δ , il en va de même pour l'application développante déformée de $\mathcal{U}$. C'est donc un tube ne rencontrant pas Δ et inclus dans un demi-espace H de $\mathbb{E}^{1,2}$ dont le plan d'appui contient l'axe vertical Δ . Par suite, l'image de $\tilde{\phi}$ est incluse dans un secteur $\{\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + \pi\}$. Cependant, l'image est invariante sous l'action de $\chi(\alpha\mathbb{Z})$, et le seul sous-groupe de $\beta\mathbb{Z}$ qui laisse invariant un tel secteur invariant est le groupe trivial. Par suite $\chi = 0$, donc le relevé $\phi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{E}_{\infty}^{1,2}$ est bien défini et $\mathcal{D} \circ \tilde{\phi}$ est injectif, il va donc de même pour $\mathcal{D}|_{\widetilde{\text{Reg}}(\mathcal{U})}$. De plus, $\rho(\alpha) = 0$, donc $\alpha = 2\pi n$ pour un certain n plus grand que deux. Ainsi $\mathcal{D}$ ne peut être injective sur un lacet $\{r = \varepsilon, t = t_0\}$ dans $\mathcal{U}$. C'est absurde.
- Nous avons donc $\gamma\Delta = \Delta$. L'isométrie γ est donc elliptique d'axe Δ et de partie de translation γ dans Δ , par suite γ est dans l'image de ρ , on peut alors supposer $\gamma = 1$ quitte à considérer $\tilde{\gamma}^{-1}\tilde{\phi}$ au lieu de $\tilde{\phi}$ pour un certain $\tilde{\gamma}$ tel que $\rho(\tilde{\gamma}) = \gamma$. De cette manière, $\mathcal{D} \circ \tilde{\phi} = \mathcal{D}$ et donc $\tilde{\phi}$ est une rotation d'angle $2\pi n$ et l'on peut choisir le relevé $\tilde{\gamma}$ de sorte que $n = 0$. Par suite, $\tilde{\phi}$ est la restriction à $\widetilde{\text{Reg}}(\mathcal{U})$ d'un élément de $\text{Isom}(\mathbb{E}_{\infty}^{1,2})$, on en déduit que ϕ est un recouvrement et que le morphisme χ est la restriction d'un morphisme $\text{Isom}(\mathbb{E}_{\infty}^{1,2}) \xrightarrow{\times n} \text{Isom}(\mathbb{E}_{\infty}^{1,2})$. Enfin $\alpha\mathbb{Z} = n\beta\mathbb{Z}$ et par injectivité de ϕ sur un lacet simple autour de $\text{Sing}(X_\alpha)$, on obtient $\alpha = \beta$.
- Supposons à présent $\alpha\beta = 0$, on obtient de la même manière un morphisme φ tel que $\rho_\alpha = \rho_\beta \circ \varphi$ induit par un relèvement $\tilde{\varphi} : \widetilde{\text{Reg}}(\mathbb{E}_{\alpha}^{1,2}) \rightarrow \widetilde{\text{Reg}}(\mathbb{E}_{\beta}^{1,2})$. Cependant, $\text{Imp}\rho_\alpha$ est engendrée par une isométrie elliptique si $\alpha > 0$ et une isométrie parabolique si $\alpha = 0$. Par suite, α ne peut être nul si β ne l'est pas et réciproquement, et donc $\alpha = \beta = 0$. On obtient à nouveau deux développements de $\mathcal{U}$ l'un standard l'autre déformé par un certain γ , l'image du standard contient un horocycle autour d'une droite de type lumière Δ et est invariante sous l'action du stabilisateur de Δ . L'image déformée est alors invariante sous l'action du stabilisateur de $\gamma\Delta$. Par suite, l'image de χ est dans l'intersection des deux et est non triviale. On remarque que les seules isométries γ telles que $\gamma\text{Stab}(\Delta)\gamma^{-1} \cap \text{Stab}(\Delta) \neq \{1\}$ sont exactement celles dans $\text{Stab}(\Delta)$. Finalement, γ stabilise Δ et sur conclu de la même manière que précédemment.

□

Remarque 2.2.18. *L'argument principal de la preuve précédente montre sans hypothèse d'injectivité que ϕ provient d'un (G, X) -morphisme p.p. $\widetilde{\text{Reg}}(\mathbb{E}_{\alpha}^{1,2}) \rightarrow \widetilde{\text{Reg}}(\mathbb{E}_{\beta}^{1,2})$, donc que $\alpha = n\beta$ pour un certain n et donc savoir que $\alpha = \beta$ donne que ϕ est un (G, X) -isomorphisme p.p. à condition que $\alpha \neq 0$.*

Il faut faire attention au fait que $\mathbb{E}_0^{1,2}$ est un revêtement ramifié de lui-même. En utilisant les coordonnées usuelles $(\tau, \mathfrak{r}, \theta)$, la projection $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/(\frac{2\pi}{p}\mathbb{Z})$ est un (G, X) -morphisme p.p.

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$; le premier muni de la métrique $-\mathrm{d}\tau\mathrm{d}r + \mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\theta^2$ et le second de la métrique $-\mathrm{d}\tau\mathrm{d}r + \mathrm{d}r^2 + \frac{1}{p^2}r^2\mathrm{d}\theta^2$. D'après la remarque 2.2.13, ces deux variétés sont isomorphes à $\mathbb{E}_0^{1,2}$. L'hypothèse d'injectivité est alors nécessaire pour obtenir que ϕ provient bien d'un (G, X) -automorphisme p.p.

2.3 Constructions de (G, X) -variétés singulières

Dans la suite de ce travail, nous serons amenés à considérer des collages de polygones de $\mathbb{E}^2$ et $\mathbb{H}^2$ ainsi que des collages de polyèdres de $\mathbb{E}^{1,2}$. Nous commençons par donner les définitions et propriétés élémentaires sans preuve.

Définition 2.3.1. Soit $\mathcal{K}$ est complexe simplicial de dimension n , on note $\mathcal{K}^*$ le complémentaire des k -cellules pour $k \leq n-2$ dans $\mathcal{K}$.

Définition 2.3.2 (Polytope). Soit (G, X) une structure analytique telle que X est une variété semi-riemanienne de dimension n sur laquelle G agit par isométries. Soit M une (G, X) -variété singulière, un polytope de M est un couple $(\mathcal{K}, \psi)$ tel que

- $\mathcal{K}$ est un complexe simplicial (non nécessairement connexe);
- $\psi: \widetilde{\mathcal{K}}^* \rightarrow M$ est un homéomorphisme local sur l'intérieur de $\widetilde{\mathcal{K}}^*$;
- pour toute n -cellule C de $\mathcal{K}$, la restriction de ψ à C est injective.
- pour toute face F de $\mathcal{K}$ l'image de l'intérieur de F par ψ est dans la partie régulière de M et est totalement géodésique.

Remarque 2.3.3. Tout polyèdre de $\mathbb{E}^3$ ou de $\mathbb{E}^{1,2}$ au sens usuel est un polytope et un triangle idéal de $\mathbb{H}^2$ (c'est-à-dire dont les sommet sont sur le bord à l'infini) est un polytope. En effet, $\overline{\mathbb{H}^2}$ est une $\mathbb{H}^2$ -variété singulière et les côtés d'un triangle idéal sont des géodésiques sur la partie régulière de $\mathbb{H}^2$.

Définition 2.3.4 (Isomorphisme de polytopes). Soit (G, X) une structure analytique telle que X est une variété semi-riemanienne de dimension n sur laquelle G agit par isométries et soit M une (G, X) -variété singulière. Enfin, soient $P_i := (\mathcal{K}_i, \psi_i)$, $i \in \{1, 2\}$ deux polytopes de M ,

Un isomorphisme $P_1 \rightarrow P_2$ est un homéomorphisme $\mathcal{K}_1 \xrightarrow{f} \mathcal{K}_2$ envoyant k -cellules sur k -cellules et tel que

$$\psi_2 \circ \widetilde{f}: \widetilde{\mathcal{K}}_1^* \rightarrow M$$

est un (G, X) -morphisme p.p. pour la structure singulière sur $\mathcal{K}$ induite par ψ_1 .

Cette dernière définition laisse la liberté de composer ψ par une isométrie de M différente sur chaque composante connexe du complexe simplicial $\mathcal{K}$.

Définition 2.3.5. Soit (G, X) une structure analytique telle que X est une variété semi-riemanienne de dimension n sur laquelle G agit par isométries et soit M une (G, X) -variété singulière.

Soient $P := (\mathcal{K}, \psi)$ un polytope de M , F_1 et F_2 deux faces dans le bord de $\mathcal{K}$ et soit ϕ une isométrie de M telle que $\phi \circ \psi(F_2) = \psi(F_1)$. Le collage de P le long de F_1 et F_2 via ϕ est le polytope $(\mathcal{K}', \psi')$ avec

- $\mathcal{K}' = \mathcal{K}/\sim$, où $x \sim y$ si et seulement si $x \in F_1$, $y \in F_2$ et $\phi \circ \psi(y) = x$;
- Si F_1 et F_2 sont dans deux composantes connexes différentes de P , on pose $\mathcal{K}_2$ la composante connexe de F_2 et on définit

$$\begin{aligned} \forall x \in \widetilde{\mathcal{K}}_2^* & \quad \psi''(x) = \phi \circ \psi(x) \\ \forall x \in \widetilde{\mathcal{K}}^* \setminus \widetilde{\mathcal{K}}_2^* & \quad \psi''(x) = \psi(x) \end{aligned}$$

de sorte que ψ'' induit une application continue $\psi': \widetilde{\mathcal{K}}'^* \rightarrow M$.

- Si F_1 et F_2 sont dans la même composante connexe de P , on choisit un point base p dans le complémentaire du relevé des faces F_i dans $\widehat{\mathcal{K}}'^*$. Pour tout $q \in \widehat{\mathcal{K}}'^*$, on se donne une courbe continue allant de p à q et on pose n_q le nombre d'intersections de cette courbe avec le relevé des faces F_i . On pose alors :

$$\forall x \in \widehat{\mathcal{K}}'^*, \quad \psi'(x) = \phi^{n_x} \circ \psi(x).$$

Cette définition définit alors une structure de polytope à tout tels collages de polytopes, de plus par construction le lieu singulier du collage est inclus dans les k -cellules $k \leq n - 2$.

2.3.1 Collages de triangles euclidiens ou hyperboliques

Nous souhaitons justifier que tout collage de polygones (possiblement idéaux) euclidiens, hyperboliques ou sphériques sont des X -variétés à singularités coniques (et pointes dans le cas hyperbolique). La définition 2.3.5 donne une X -structure singulière sur un tel collage, il reste alors à identifier des cartes autour des points singuliers vers un espace modèle. Plus précisément, nous justifions le théorème suivant.

Théorème 6. Soient $X \in \{\mathbb{E}^2, \overline{\mathbb{H}}^2, \mathbb{S}^2\}$ et Σ une X -variété singulière obtenue comme l'intérieur d'un collage de X -polytopes, alors Σ est une X_A -variété avec $A = \mathbb{R}_+^*$ si $X \in \{\mathbb{E}^2, \mathbb{S}^2\}$ et $A = \mathbb{R}_+$ si $X = \overline{\mathbb{H}}^2$.

Esquisse de démonstration. Nous commençons par remarquer qu'un tel collage est toujours localement fini, puis quitte à découper les polygones du collage, on se ramène au cas d'un collage de triangle $(T_k)_{k \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} = ([A_k B_k C_k])_{k \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$ identifié le longs des côtés $\mathcal{C} := ([A_k B_k], [A_k, C_k])_{k \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$ et d'involution $\iota([A_k B_k]) = [A_k C_k]$. On remarque alors que quitte à repositionner les triangles de sorte que pour tout $k \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $A_k = A_0$; pour tout $k \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $g_{[A_k B_k]}$ est une rotation de centre A_0 (ou une isométrie parabolique fixant A_0 dans le cas $X = \overline{\mathbb{H}}^2$ et $A_0 \in \partial\mathbb{H}^2$).

□

2.3.2 Collages de cônes polygonaux futurs de l'espace de Minkowski

Définition 2.3.6 (Cône polygonal futur). Un cône polygonal futur C de $\mathbb{E}^{1,2}$ est un cône de sommet O inclus dans $J^+(O)$ et tel que pour tout plan Π de type espace dans le futur de O , l'intersection $C \cap \Pi$ est un polygone.

Proposition 2.3.7. Soit M un collage dénombrable de cônes polygonaux futurs, alors l'intérieur de M est une $\mathbb{E}_{\geq 0}^{1,2}$ -variété. De plus, la projection d'une 1-cellule Δ est

- (a) localement modelée sur $\mathbb{E}_\alpha^{1,2}$ pour un certain $\alpha > 0$ si et seulement si Δ est de type temps ;
- (a) localement modelée sur $\mathbb{E}_0^{1,2}$ si et seulement si Δ est de type lumière.

Ébauche de démonstration de la proposition 2.3.7. On sait déjà que M est une $\mathbb{E}^{1,2}$ -variété singulière, il suffit alors de trouver des voisinages des points singuliers isomorphes (en tant que (G, X) -variétés singulières) à un ouvert d'un des espaces modèles. Une manière rapide de démontrer la proposition est alors de remarquer que l'intérieur de M est la suspension d'une $\overline{\mathbb{H}}^2$ surface singulière obtenue en collant des triangles de $\overline{\mathbb{H}}^2$ (possiblement idéaux). Un point singulier intérieur d'un tel collage est une singularité conique si le point considéré est la projection d'un point localement modelé sur $\mathbb{H}^2$ et une pointe s'il est la projection d'un point localement modelé sur $\partial\mathbb{H}^2$. Or, la suspension d'une pointe est un ouvert de $\mathbb{E}_0^{1,2}$ et la suspension d'une singularité conique est un ouvert d'une particule massive.

□

Cette propriété est loin d'être aussi évidente qu'il n'y paraît au premier abord. En effet, un collage arbitraire de polytopes convexes de $\mathbb{E}^{1,2}$ peut donner lieu à des singularités très différentes.

Contre-exemple 2.3.8. Soit Π un demi-plan de type $(1, 1)$ plongé dans $\mathbb{E}^{1,2}$ dont le bord Δ est de type espace et soit γ une isométrie hyperbolique fixant Δ point par point. On considère le polytope donné par l'enveloppe convexe de Π et $\gamma\Pi$. Les deux 2-cellules du polytope P sont exactement les demi-plans Π et $\gamma\Pi$. Le collage de P sur lui-même en identifiant ses deux 2-cellules via γ est une $\mathbb{E}^{1,2}$ -variété singulière de lieu singulier Δ qui n'est pas une $\mathbb{E}_{\geq 0}^{1,2}$ -variété. En effet, l'holonomie autour de la droite singulière Δ est hyperbolique alors que l'holonomie de $\mathbb{E}_{\alpha}^{1,2}$ est parabolique ou elliptique selon que $\alpha = 0$ ou $\alpha > 0$.

Le type de singularité obtenue correspond à une singularité de Misner au sens de [BBS11].

Contre-exemple 2.3.9. Considérons γ une isométrie linéaire parabolique de $\mathbb{E}^{1,2}$, on pose $\Delta = \text{Fix}(\gamma)$, $P^+ = J^+(\Delta)$ et $P^- = J^-(\Delta)$. On munit $\Delta^\perp$ de la cellulation composée de deux 2-cellules séparées par la 1-cellule Δ . On recolle P^+ et P^- le long de $\Delta^\perp$ via γ d'un côté de Δ et via l'identité de l'autre côté pour obtenir une (G, X) -variété singulière M . Le lieu singulier de M est alors Δ et l'holonomie est parabolique. M n'est cependant pas une $\mathbb{E}_0^{1,2}$ -variété. En effet, les points singuliers de Δ ont un passé chronologique non vide au contraire des points singuliers de $\mathbb{E}_0^{1,2}$. Le type de singularité obtenue est un photon au sens de [BBS11].

Deuxième partie

**Espaces-temps globalement
hyperboliques singuliers**

Introduction

Le poète fait abstraction de la réalité, alors, ce rêveur compte les étoiles et va même jusqu'à les imaginer.

Giacomo Bardi

Considérons une variété lorentzienne connexe (M, g) de dimension $n + 1$ avec $n \geq 2$ avec g son tenseur métrique et prenons un point p de M . La composante connexe de l'identité du groupe d'isométrie linéaire $\text{SO}_0(g)$ de la forme bilinéaire non dégénérée g sur l'espace tangent $T_p M$ en p est isomorphe à $\text{SO}_0(1, n)$ et son action admet 6 orbites : l'origine $\{O\}$, les deux composantes connexes du cône isotrope, les deux composantes connexes des vecteurs de type temps et l'ensemble des vecteurs de type espace. L'ensemble des vecteurs $(p, u) \in TM$ non nuls tels que $g_p(u, u) \leq 0$ admet deux composantes connexes localement et donc au plus deux composantes connexes globalement ; on dit que M admet une orientation temporelle si cet ensemble admet bien deux composantes connexes et le choix d'une de ces composantes connexes est alors une orientation temporelle. Les vecteurs appartenant à ce choix de composante connexe sont appelés *vecteurs causaux futurs* et les vecteurs de l'autre composante connexe sont les vecteurs causaux passés. Usuellement, une fois le choix d'une orientation temporelle fait, on définit une notion de courbe $\mathcal{C}^1$ causale future : une courbe $\mathcal{C}^1$ de M est causale future si son vecteur tangent en tout point est causal futur. Puis, les courbes $\mathcal{C}^1$ causales futures définissent un faisceau de relation d'ordre sur M : pour tout ouvert $\mathcal{U}$ de M et toute paire de points $(x, y) \in M^2$, on note $x \leq_{\mathcal{U}} y$ s'il existe une courbe causale future dans $\mathcal{U}$ allant de x à y . Ce faisceau de relation d'ordre encapsule notre intuition de la causalité, c'est-à-dire le fait qu'un certain événement se déroule avant un certain autre, la courbe causale joignant deux événements est alors le témoignage d'un observateur qui a vu se dérouler ces deux événements dans cet ordre. Cette notion de causalité est bien antérieure au concept de variété lorentzienne propre à la relativité générale : la perception de l'écoulement du temps n'est pas propre à une théorie mais une constante des civilisations humaines. L'espace-temps classique dans lequel sont modélisés la gravitation de Newton et l'électromagnétisme de Maxwell (jusqu'à la fin du XIXe) est l'espace-temps de Galilée :

$$\mathbb{R}^{n+1} = \{(t, \mathbf{x}) : t \in \mathbb{R}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\} \quad (t, \mathbf{x}) < (t', \mathbf{x}') \Leftrightarrow t < t'.$$

Nous voyons par cet exemple qui correspond bien à notre intuition d'espace-temps sans être une variété lorentzienne que le concept d'espace-temps est plus général que celui de variété lorentzienne. Cet exemple cache cependant la nature locale de la causalité, en effet si l'on considère le tore lorentzien $\mathbb{T} := \mathbb{E}^{1,1}/\mathbb{Z}^2$, la causalité sur $\mathbb{T}$ est triviale globalement

$$\forall x, y \in \mathbb{T}, \quad x \leq_{\mathbb{T}} y$$

mais elle ne l'est pas localement. Ainsi, la notion de causalité est bien un faisceau de relation causale sur M : chaque ouvert est doté de sa propre relation causale.

Notre travail porte sur des variétés localement Minkowski singulières qui ont une causalité naturelle, en effet les espaces modèles singuliers $\mathbb{E}_{\kappa}^{1,2}$ que nous avons décrits au chapitre précédent ont

une causalité, il est donc naturel que les $\mathbb{E}_{\geq 0}^{1,2}$ -variétés héritent d'une causalité qui ferait d'elles des espaces-temps. De plus, les $\mathbb{E}_{\geq 0}^{1,2}$ -variétés semblent suffisamment proches des variétés lorentziennes pour que les résultats principaux de la théorie des variétés lorentziennes et plus particulièrement des espaces-temps plats globalement hyperboliques Cauchy-compacts admettent des généralisations aux espaces-temps plats singuliers que nous considérons. Quatre théorèmes sont d'un intérêt particulier pour nous : les théorèmes de Geroch, Choquet-Bruhat-Geroch, Seifert-Bernal-Sanchez et Mess.

Le théorème de Geroch [Ger70] caractérise la notion d'hyperbolicité globale en donnant une condition simple pour l'existence de surfaces de Cauchy de classe $\mathcal{C}^0$, c'est-à-dire une hypersurface intersectant toutes les courbes causales exactement une fois, et l'existence de fonction temps de Cauchy, c'est-à-dire des fonctions continues $T : M \rightarrow \mathbb{R}$ dont la restriction à n'importe quelle courbe causale future est croissante et surjective. En particulier, ce théorème donne des informations importantes sur la topologie d'un espace-temps globalement hyperbolique en montrant qu'il se scinde topologiquement en un produit $\Sigma \times \mathbb{R}$. Le théorème de Seifert-Bernal-Sanchez [Sei77, BS03, FS12] est un raffinement du théorème de Geroch, qui permet d'affirmer l'existence d'une surface de Cauchy $\mathcal{C}^k$ de type espace dans une variété lorentzienne de classe $\mathcal{C}^k$ admettant une surface de Cauchy de classe $\mathcal{C}^0$. Au contraire d'une surface de Cauchy de classe $\mathcal{C}^0$, une surface de Cauchy de classe $\mathcal{C}^2$ peut supporter des conditions initiales d'un problème de Cauchy associé aux équations d'Einstein et permet de démontrer l'existence et l'unicité locale de solutions aux équations d'Einstein [FB52, Rin09].

Le théorème de Choquet-Bruhat-Geroch [CBG69] était à l'origine un théorème d'existence globale de solution d'un système d'équations aux dérivées partielles : les équations d'Einstein. Plus précisément, étant donné une *condition initiale* fixée sur une variété Σ de dimension n , le théorème énonce l'existence et l'unicité d'une variété lorentzienne satisfaisant les équations d'Einstein dans laquelle Σ se plonge comme une surface de Cauchy. Nous ne manipulons aucun système différentiel mais le choix d'espaces modèles et de changement de cartes tient lieu d'équation différentielle et l'analyticité de notre famille d'espaces modèles tient lieu d'unicité locale des solutions. Le théorème de Choquet-Bruhat-Geroch dans notre contexte est un problème essentiellement algébrique, les thèses de Rossi Salvelmini [RS12] et de Sbierski [Sbi15] sont particulièrement claires de ce point de vue. Ce théorème permet de réduire significativement l'ensemble des espaces-temps à considérer, en effet étant donné un espace-temps M muni d'une surface de Cauchy Σ , nous pourrions considérer un voisinage M' de Σ pour lequel Σ serait toujours une surface de Cauchy. Le théorème de Choquet-Bruhat-Geroch que l'espace-temps M peut être reconstruit à partir de M' et que l'on peut considérer un espace-temps $\bar{M}$ dans lequel M se plonge tel que l'image de Σ dans $\bar{M}$ est une surface de Cauchy de $\bar{M}$ et qui est maximal parmi les variétés lorentziennes satisfaisant cette propriété. Nous ne faisons donc pas de différence entre M' , M et $\bar{M}$ en considérant uniquement des espaces-temps maximaux en ce dernier sens et que nous appelons *Cauchy-maximaux*.

Enfin, le théorème de Mess propose une paramétrisation de l'espace des modules des espaces-temps plats globalement hyperboliques Cauchy-compacts Cauchy-maximaux de dimension $2+1$ d'une topologie $\Sigma \times \mathbb{R}$ donnée par le fibré tangent de l'espace de Teichmüller de Σ , c'est-à-dire l'espace des déformations de structures conformes sur Σ . Les travaux de Bonsante et Benedetti [Bon03, BB09] ont généralisé ce théorème en toute dimension et ceux de Barbot [Bar05] aux espaces-temps plats de toute dimension admettant une surface de Cauchy $\mathcal{C}^1$ de type espace complète pour la métrique riemannienne induite.

L'objectif de cette deuxième partie est d'étendre cette littérature à notre catégorie des espaces-temps plats singuliers : les $\mathbb{E}_{\geq 0}^{1,2}$ -variétés. Nous profitons de l'occasion pour poser des bases d'une théorie des espaces-temps topologiques c'est-à-dire des espaces topologiques munis d'une *causalité* i.e. un faisceau de relation. Nous nous contentons de construire les outils permettant de redémontrer les théorèmes classiques de Geroch et Choquet-Bruhat-Geroch sans modifier la substance des

arguments : la preuve que nous obtenons n'est qu'une réécriture plus générale des arguments originaux. Cela se fait au prix de quelques efforts d'axiomatisation mais la solidité des démonstrations s'en trouve grandement améliorée. Une partie des cas que nous traitons ont déjà fait l'objet de travaux de Barbot, Bonsante et Schlenker [BBS11] par des méthodes de déformation conforme. Nous avons préféré une approche de refondation car si l'approche de déformation conforme pourrait être adaptée pour traiter les cas des particules massives et BTZ de dimension 3, nous sommes assez dubitatifs sur la possibilité de l'étendre en dimension supérieure ou à des singularités causalement plus complexes que Barbot, Bonsante et Schlenker décrivent dans ce même article. De plus, l'extension *ad hoc* de résultats classiques qu'elle soit faite par déformation ou par restriction comme nous le faisons nous même pour le théorème de Seifert-Bernal-Sanchez nous semble manquer une occasion d'affiner notre compréhension des structures, actuelles ou potentielles, de l'espace-temps. C'est une entreprise longue et difficile qui reste donc incomplète dans le cadre de cette thèse. Le premier chapitre de cette partie est consacré au développement des premiers éléments de théorie des espaces-temps topologiques et aux démonstrations des théorèmes de Geroch, Seifert-Bernal-Sanchez et Choquet-Bruhat-Geroch.

L'obtention d'une extension du théorème de Mess aux espaces-temps plats avec singularités BTZ est l'objet d'un long travail qui occupe l'intégralité de la seconde partie. Bonsante et Seppi [BS15] proposent une généralisation importante du théorème de Mess aux $\mathbb{E}_{[0,2\pi]}^{1,2}$ -variétés admettant une surface de Cauchy strictement convexe, il semble probable que leurs techniques puissent être appliqués pour inclure des singularités BTZ et il est également probable que l'obtention d'un théorème de Mess pour des espaces-temps présentant à la fois des singularités BTZ et des particules massives se fasse par un raffinement de leur méthode. Notre approche est fondamentalement différente et repose d'une part sur les résultats de Barbot sur les espaces-temps plats Cauchy-complets [Bar05] et d'autre part sur l'identification de composantes particulières du bord conforme d'un espace-temps plat singulier comme des singularités BTZ. Nous développons ainsi une théorie originale des extensions BTZ pour les espaces-temps plats singuliers dont nous donnons une description précise pour les espaces-temps plats singuliers Cauchy-complets. Le théorème de Mess pour les espaces-temps BTZ est une conséquence de cette étude. Nous remarquons que le théorème obtenu est plus fort que celui attendu par la méthode de Bonsante et Seppi ; en effet, nous ne requérons par l'existence d'une surface de Cauchy strictement convexe dans les espaces-temps plats avec singularités BTZ que nous considérons.

Chapitre 3

Généralisations de théorèmes classiques aux espaces-temps plats singuliers, un détour par les espaces-temps topologiques

L'étude élémentaire des $\mathbb{E}^{1,2}$ -variétés singulières n'est pas très éloignée de l'étude des variétés lorentziennes que l'on peut trouver dans [O'N83] ou [BEE96] : sur le domaine régulier, ces variétés sont lorentziennes et, lorsque nous avons un modèle local pour les points singuliers, ceux-ci sont dotés d'une causalité naturelle qui prolonge celle de leur partie régulière c'est-à-dire une notion de courbe causale. Quelques difficultés apparaissent cependant, la théorie des espaces-temps décrite dans les livres cités est purement semi-riemannienne, la littérature moderne a étendu nombre de résultats classiques, allant de caractérisations de la hiérarchie causale aux constructions de bord conformes, aux espaces-temps admettant une pseudo-métrique de Finsler [CJS11, FHS13, JS14a, JS14b] ou un champ de cônes continu [FS12]. Malheureusement, les $\mathbb{E}^{1,2}$ -variétés singulières qui sont l'objet de notre travail ne sont pas des variétés de Finsler et n'admettent pas de champs de cônes continu. Nous considérons des variétés localement modelées sur des suspensions qui, de ce fait, admettent un cône de vecteurs causaux futurs ; cependant, ce champs de cônes naturel n'est pas continu et sort donc du cadre proposé par Fathi et Siconolfi. Pour dépasser ces difficultés, la tactique la plus simple consiste à essayer de se ramener au cas lorentzien en considérant des sous-espaces-temps bien choisis puis de prolonger les résultats au points singuliers via une étude de cas. C'est ce qui est notamment fait pour notre preuve du théorème 12. Une tactique de plus long terme consiste à fonder une théorie des espaces-temps topologiques véhiculant notre intuition causale de la même manière que la théorie des espaces métriques ou topologiques véhicule notre intuition géométrique. Le théorème de Geroch 9, démontré dans ce chapitre, sera notre excuse pour présenter cette théorie originale.

3.1 Espaces-temps topologiques et théorème de Geroch

Nous introduisons donc dans cette section une amorce possible pour une théorie plus générale des espaces-temps. Une construction axiomatique possible prendrait pour modèle la topologie générale avec d'une part une hiérarchie structurelle :

1. Espaces-temps topologiques,
2. Espaces-temps métriques à la Busemann [Bus67, PY16],
3. Espaces-temps différentiels,

4. Espaces-temps à champ de cônes [FS12],
5. Espaces-temps de Finsler [CJS11],
6. Espaces-temps semi-riemanniens [O’N83, BEE96, HE73],

augmenté de propriétés topologiques usuelles telles que la connexité par arcs locale ou des degrés divers de séparation ; d’autre part une hiérarchie causale sur le modèle de celle proposée dans [MS08].

Nous commençons par définir les notions de causalité et d’espace-temps topologiques puis nous montrons comment construire une causalité à partir de données locales enfin nous définissons et étudions les espaces-temps topologiques tarentins et les passé et futur continûment atteignables. La dernière sous-section propose une généralisation du théorème de Geroch.

3.1.1 Causalité et espaces-temps topologiques

Définition 3.1.1 (Causalité). *Soit M un espace topologique et soit $(\leq, \ll) = (\leq_{\mathcal{U}}, \ll_{\mathcal{U}})_{\mathcal{U} \subset M}$ un faisceau de couples de relations binaires transitives sur M . Pour tout ouvert $\mathcal{U}$ de M et $A \subset \mathcal{U}$, on pose*

$$\begin{aligned} J_{\mathcal{U}}^+(A) &:= \{y \in \mathcal{U} \mid \exists x \in A, x \leq_{\mathcal{U}} y\}, & I_{\mathcal{U}}^+(A) &:= \{y \in \mathcal{U} \mid \exists x \in A, x \ll_{\mathcal{U}} y\}, \\ J_{\mathcal{U}}^-(A) &:= \{y \in \mathcal{U} \mid \exists x \in A, x \geq_{\mathcal{U}} y\}, & I_{\mathcal{U}}^-(A) &:= \{y \in \mathcal{U} \mid \exists x \in A, x \gg_{\mathcal{U}} y\}. \end{aligned}$$

Le couple $(\leq, \ll)$ est une causalité sur M si elle satisfait les propriétés suivantes pour tout ouvert $\mathcal{U}$ de M :

- (a) $\leq_{\mathcal{U}}$ est réflexive ;
- (b) pour tout ouvert $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ de M et tout $x, y \in \mathcal{V}$,

$$x \leq_{\mathcal{V}} y \Rightarrow x \leq_{\mathcal{U}} y \quad x \ll_{\mathcal{V}} y \Rightarrow x \ll_{\mathcal{U}} y;$$

- (c) $\ll_{\mathcal{U}}$ est ouverte ;
- (d) pour tout $A \subset \mathcal{U}$,

$$I_{\mathcal{U}}^{\pm}(A) \subset \text{Int}(J_{\mathcal{U}}^{\pm}(A)) \subset \overline{I_{\mathcal{U}}^{\pm}(A)};$$

- (e) pour tout $A \subset \mathcal{U}$,

$$I_{\mathcal{U}}^{\pm}(A) \subset J_{\mathcal{U}}^{\pm}(A).$$

Définition 3.1.2 (Espace-temps topologique). *Un espace-temps topologique est un espace topologique M séparé à base dénombrable muni d’une causalité.*

Exemple 3.1.3. *Quelques exemples d’espaces-temps topologiques*

1. On munit la droite réelle $\mathbb{R}$ du faisceau de relations $(\leq_{\mathcal{U}}, \ll_{\mathcal{U}})_{\mathcal{U}}$ où pour $\mathcal{U}$ ouvert, $x \leq_{\mathcal{U}} y$ (resp. $x \ll_{\mathcal{U}} y$) si $x \leq y$ (resp. $x < y$) et x, y sont dans la même composante connexe de $\mathcal{U}$.
2. L’espace-temps de Galilée $(\mathbb{R}^{n+1}, \leq, \ll)$ où pour $\mathcal{U}$ ouvert,

$$(t, x_1, \dots, x_n) \ll_{\mathcal{U}} (t', x'_1, \dots, x'_n)$$

si $t < t'$ et les deux $(n+1)$ -uplets sont dans la même composante connexe de $\mathcal{U}$. On pose $p \leq_{\mathcal{U}} q$ si $p \ll q$ ou $p = q$.

3. L’espace-temps de Minkowski $\mathbb{E}^{1,n}$ pour $n \geq 1$ et plus généralement toute variété lorentzienne munie du faisceau de relations causales et chronales usuelles.

Définition 3.1.4 (Diamants). *Soit M un espace-temps topologique, pour tout ouvert $\mathcal{U}$ de M et tout $p, q \in M$, on pose*

- $J_{\mathcal{U}}(p, q) := J_{\mathcal{U}}^-(q) \cap J_{\mathcal{U}}^+(p)$ le diamant complet de p à q ;
- $\overset{\circ}{J}_{\mathcal{U}}(p, q) := \text{Int}(J_{\mathcal{U}}(p, q))$ le diamant ouvert de p à q .

La définition de diamant diffère légèrement de la définition habituelle : usuellement, le diamant ouvert de p à q est défini comme $I^+(p) \cap I^-(q)$. Cette définition coïncide avec notre définition dans le cas des variétés lorentziennes mais pas le cas $\mathbb{E}_0^{1,2}$ (voir Remarque 3.1.5). Notre définition permet de garder des diamants proches de notre intuition au prix de la convexité causale (Définition 3.1.28) des diamants ouverts.

Remarque 3.1.5. Nous aurions pu ajouter un axiome (d') à la définition de causalité :

(d') Pour tout $\mathcal{U} \subset M$ ouvert et tout $x \in \mathcal{U}$,

$$I^\pm(x) = \text{Int}(J^\pm(x)).$$

Cette propriété est connue pour les variétés lorentziennes mais on peut remarquer que dans le cas $\mathbb{E}_0^{1,2}$ cette propriété est mise en défaut en prenant x un point singulier. En effet, le futur chronologique d'un point singulier p de $\mathbb{E}_0^{1,2}$ est égal à $\text{Reg}(J^+(p))$ et $\text{Int}(J^+(p))$ a un lieu singulier non vide.

Définition 3.1.6. Une fonction $f : (M, \leq) \rightarrow (N, \leq)$ entre deux ensembles munis de relations transitives réflexives est strictement croissante) si pour tout $x, y \in M$,

$$x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$$

avec $x < y \Leftrightarrow (x \leq y \text{ et } x \neq y)$

Définition 3.1.7 (Morphisme d'espaces-temps). Un morphisme entre deux espaces-temps topologiques M et N est une application continue $f : M \rightarrow N$ telle que pour tout $p \in M$, il existe deux voisinages $\mathcal{V}$ et $\mathcal{U}$ respectivement de $f(p)$ et de p tels que $f(\mathcal{U}) \subset \mathcal{V}$, $f|_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}}$ est strictement croissante pour les relations $\leq$ et $\ll$.

Remarque 3.1.8. Si M est un espace-temps topologique, alors toute partie P de M admet une unique structure d'espace-temps topologique telle que l'inclusion est un morphisme d'espaces-temps topologiques.

Définition 3.1.9 (Courbe causale et chronale). Soit $(M, \leq, \ll)$ un espace-temps topologique et I un intervalle de $\mathbb{R}$, une courbe $c : I \rightarrow M$ est

- causale future si pour tout ouvert $\mathcal{U} \subset M$ et tout intervalle $J \subset c^{-1}(\mathcal{U})$, $c|_J$ est strictement croissante pour la relation $\leq_{\mathcal{U}}$;
- chronale future si pour tout ouvert $\mathcal{U} \subset M$ et tout intervalle $J \subset c^{-1}(\mathcal{U})$, $c|_J$ est strictement croissante pour la relation $\ll_{\mathcal{U}}$;

On remarque aisément que les courbes causales sont stables par reparamétrage, restriction et concaténation.

Remarque 3.1.10. Une courbe chronale peut également être définie comme un morphisme $(I, \leq, <) \rightarrow (M, \leq, \ll)$ avec I un intervalle de $\mathbb{R}$ muni de sa causalité induite.

3.1.2 Causalité engendrée et causalité des espaces temps-plats singuliers

Nous souhaitons construire des causalités sur des espaces topologiques munis d'atlas dont les espaces modèles sont des espaces-temps comme c'est par exemple le cas pour les $\mathbb{E}_{\geq 0}^{1,2}$ -variété. Nous avons besoin pour cela de définitions « techniques » de précausalité et de causalité absolument minimale. L'objectif principal de cette sous-section est la démonstration du théorème 7 permettant de construire une causalité à partir d'une donnée locale. Comme corollaire, nous construisons une causalité sur les $\mathbb{E}_{\geq 0}^{1,2}$ -variétés.

Causalité engendrée

Définition 3.1.11 (Précausalité). *Soit M un espace topologique, un faisceau $(\leq, \ll)$ de couple relations binaires transitives est une précausalité s'il satisfait les hypothèses (a) et (b) de la définition 3.1.1.*

Lemme 3.1.12. *Soient M un espace topologique et $(\mathcal{U}_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de M . On suppose :*

- (A) *chacun des $\mathcal{U}_i$ est muni d'une précausalité ;*
- (B) *pour tout $i, j \in I$, les restrictions de $\ll^i$ et $\ll^j$ (resp. de $\leq^i$ et $\leq^j$) à $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j$ sont égales ;*

alors il existe une précausalité minimale $(\leq, \ll)$ prolongeant la famille $(\leq^i, \ll^i)_{i \in I}$, celle-ci est de plus unique.

Démonstration. Pour $x \in M$ et $\mathcal{U}$ ouvert de M , on pose

1. $I_{\mathcal{U}}^{+, (0)}(x) := \bigcup_{i \in I} I_{\mathcal{U} \cap \mathcal{U}_i}^+(x) ;$
2. $I_{\mathcal{U}}^{+, (n+1)}(x) := I_{\mathcal{U}}^{+, (n)}(x) \cup \bigcup_{i \in I} I_{\mathcal{U} \cap \mathcal{U}_i}^+ \left(I_{\mathcal{U}}^{+, (n)}(x) \right)$
3. $I_{\mathcal{U}}^+(x) := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_{\mathcal{U}}^{+, (n)}(x)$

$I_{\mathcal{U}}^+(\cdot)$ définit un faisceau de relations binaires transitives sur M que l'on note $\ll$. On définit de même $J_{\mathcal{U}}^+(\cdot)$ de sorte à obtenir un faisceau de couple de relations binaires transitives $(\leq, \ll)$ sur M . La propriété (B) assure que ce faisceau prolonge la famille $(\mathcal{U}_i, \leq^i, \ll^i)_{i \in I}$.

Enfin, le faisceau est caractérisé par la propriété pour tout $\mathcal{U}$ ouvert, $p \ll_{\mathcal{U}} q$ (resp. $p \leq_{\mathcal{U}} q$) si et seulement s'il existe une suite $(p_k)_{k \in [0, n]}$ telle que $p_0 = p$, $p_n = q$ et pour tout $k \in [0, n-1]$, $(p_k, p_{k+1}) \in \mathcal{U}_i^2$ et $p_k \ll^i p_{k+1}$ (resp. $p_k \leq^i p_{k+1}$) pour un certain $i \in I$. Il est clair que tout faisceau satisfaisant le (b) de la définition 3.1.1 et prolongeant la famille $(\leq^i, \ll^i)_{i \in I}$ satisfait cette propriété : $(\leq, \ll)$ est donc minimal. $\square$

Définition 3.1.13. *On reprend les notations du lemme 3.1.12, $(\leq, \ll)$ est la précausalité engendrée par la famille $(\mathcal{U}_i, \leq^i, \ll^i)_{i \in I}$.*

La notion de précausalité absolument minimale ainsi que les deux lemmes suivants permettent d'assurer que le choix du recouvrement n'a pas d'importance dans les cas que nous considérons. En particulier, nous pourrions considérer des précausalités engendrées par des raffinements d'un recouvrement donné.

Définition 3.1.14. *Soit M un espace topologique. Une précausalité $(\leq, \ll)$ sur M est absolument minimale si pour tout recouvrement ouvert $(\mathcal{U}_i)_{i \in I}$, la précausalité engendrée par $(\mathcal{U}_i, \leq_{\mathcal{U}_i}, \ll_{\mathcal{U}_i})_{i \in I}$ est égale à $(\leq, \ll)$.*

Lemme 3.1.15. *Soit M un espace topologique et soit $(\leq, \ll)$ une précausalité sur M . Si $(\leq, \ll)$ est absolument minimale, alors il en va de même de sa restriction à $\mathcal{U}$ pour tout ouvert $\mathcal{U}$ de M .*

Lemme 3.1.16. *Soit M un espace topologique et soit $(\leq, \ll)$ la précausalité engendrée par une famille $(\mathcal{U}_i, \leq^i, \ll^i)_{i \in I}$.*

Si les précausalités $(\leq^i, \ll^i)$ sont absolument minimales, alors $(\leq, \ll)$ est absolument minimale.

Nous démontrons à présent le résultat principal de cette sous-section.

Théorème 7. *Soient M un espace topologique et $(\mathcal{U}_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de M . On suppose :*

- (A) *chacun des $\mathcal{U}_i$ est muni d'une causalité $(\leq^i, \ll^i)$ absolument minimale ;*
- (B) *pour tout $i, j \in I$, les restrictions de $\ll^i$ et $\ll^j$ (resp. de $\leq^i$ et $\leq^j$) à $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j$ sont égales ;*

(C) M est un espace de Baire

alors la précausalité engendrée par la famille $(\mathcal{U}_i, \leq^i, \ll^i)$ est une causalité absolument minimale.

Démonstration. Considérons la précausalité $(\ll, \leq)$ engendrée par la famille $(\leq^i, \ll^i)_{i \in I}$; celle-ci existe d'après le lemme 3.1.12. D'après le lemme 3.1.16, celle-ci est absolument minimale. Comme M est à base dénombrable, on peut supposer I dénombrable. Les propriétés (a), (b), (c) et (e) sont claires au vu de la construction donnée dans le lemme 3.1.12.

Montrons à présent la propriété (d). Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de M et soit $A \subset \mathcal{U}$, on commence par remarquer que la construction donnée au lemme 3.1.12 donne

$$J_{\mathcal{U}}^+(A) = \bigcup_{i \in I, n \in I} J_{\mathcal{U}_i}^+(A_{i,n})$$

pour une certaine famille $(A_{i,n})_{i \in I, n \in \mathbb{N}}$ de parties de $\mathcal{U}$; en particulier nous avons donc :

$$J_{\mathcal{U}}^+(A) \subset \bigcup_{i \in I, n \in I} \text{Int} \{J_{\mathcal{U}_i}^+(A_{i,n})\} \cup \bigcup_{i \in I, n \in \mathbb{N}} \partial J_{\mathcal{U}_i}^+(A_{i,n}).$$

Par ailleurs, les $(\leq^i, \ll^i)$ étant des causalités, on a pour tout $i \in I$ et toute partie $B \subset \mathcal{U}_i$ $J_{\mathcal{U}_i}^+(B) \subset \overline{I_{\mathcal{U}_i}^+(B)}$, donc :

$$\begin{aligned} \overline{\bigcup_{i \in I, n \in I} \text{Int} \{J_{\mathcal{U}_i}^+(A_{i,n})\}} &\subset \overline{\bigcup_{i \in I, n \in \mathbb{N}} \overline{I_{\mathcal{U}_i}^+(A_{i,n})}} \\ &= \overline{\bigcup_{i \in I, n \in \mathbb{N}} I_{\mathcal{U}_i}^+(A_{i,n})} \\ &= \overline{I_{\mathcal{U}}^+(A)}. \end{aligned}$$

Soit $x \in \text{Int}(J_{\mathcal{U}}^+(A))$, nous souhaitons montrer que $x \in \overline{I_{\mathcal{U}}^+(A)}$. Soit $\mathcal{V}$ voisinage de x et soit $\mathcal{U}$ un voisinage de x inclus dans $\text{Int}(J_{\mathcal{U}}^+(A))$, l'intersection $\mathcal{V} \cap \mathcal{U}$ est un voisinage de x inclus dans $\text{Int}(J_{\mathcal{U}}^+(A))$. Comme $\bigcup_{i \in I, n \in \mathbb{N}} \partial J_{\mathcal{U}_i}^+(A_{i,n})$ est une union dénombrable de fermés d'intérieur vide et comme M est un espace de Baire, $\bigcup_{i \in I, n \in \mathbb{N}} \partial J_{\mathcal{U}_i}^+(A_{i,n})$ est d'intérieur vide. Ainsi

$$\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \not\subset \bigcup_{i \in I, n \in \mathbb{N}} \partial J_{\mathcal{U}_i}^+(A_{i,n})$$

donc

$$\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \cap \bigcup_{i \in I, n \in \mathbb{N}} \text{Int} \{J_{\mathcal{U}_i}^+(A_{i,n})\} \neq \emptyset$$

On en déduit donc que

$$x \in \overline{\bigcup_{i \in I, n \in \mathbb{N}} \text{Int} \{J_{\mathcal{U}_i}^+(A_{i,n})\}}$$

et donc $x \in \overline{I_{\mathcal{U}}^+(A)}$. □

Connexité causale par arc et causalité des espaces-temps plats singuliers

Pour commencer, nous avons les deux corollaires immédiats du théorème 7.

Proposition 3.1.17. Soient (G, X) une structure analytique et $(M, \mathcal{A})$ une (G, X) -variété.

Si X est un espace-temps topologique de Baire absolument minimal sur lequel G agit par morphismes d'espaces-temps topologiques, alors M admet une unique structure d'espace-temps topologique telle que pour toute carte $(\mathcal{U}, \mathcal{V}, \phi) \in \mathcal{A}$, $\phi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ est un isomorphisme d'espaces-temps topologiques.

Proposition 3.1.18. Soit (G, X, X_A) une structure singulière analytique et soit $(M, \mathcal{A})$ une (G, X, X_A) -variété. Si de plus :

- (a) X est un espace-temps topologique de Baire absolument minimal sur lequel G agit par morphismes d'espaces-temps topologiques ;
- (b) pour tout $\alpha \in A$, l'espace modèle X_α est un espace-temps topologique muni d'une causalité absolument minimale prolongeant la causalité naturelle de $\text{Reg}(X_\alpha)$ donnée par sa structure de (G, X) -variété ;

alors M admet une unique structure d'espace-temps topologique telle que quelque soit la carte $(\mathcal{U}, Y, \mathcal{V}, \phi)$ de A , l'homéomorphisme $\phi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ est un isomorphisme d'espaces-temps topologiques.

Remarque 3.1.19. Sous les hypothèses de la proposition 3.1.18, tout (G, X) -morphisme p.p. est un morphisme d'espaces-temps topologiques.

Nous souhaitons à présent utiliser ces propriétés pour construire une causalité sur les $\mathbb{E}_{\geq 0}^{1,2}$ -variétés. Pour ce faire, nous devons démontrer que les causalités sur les espaces modèles $\mathbb{E}_\kappa^{1,2}$ pour $\kappa \geq 0$ sont absolument minimales. Nous le démontrons en utilisant la notion de connexité causale par arc.

Définition 3.1.20 (Connexité causale par arc). Soit M un espace-temps topologique, M est causalement connexe par arc si pour tout ouvert $\mathcal{U}$ et tout $p, q \in \mathcal{U}$, les propriétés suivantes sont équivalentes,

- (i) $p \leq_{\mathcal{U}} q$ (resp. $p \ll_{\mathcal{U}} q$) ;
- (ii) il existe une courbe future causale (resp. future chronale) $c : [0, 1] \rightarrow \mathcal{U}$ telle que $c(0) = p$ et $c(1) = q$.

Définition 3.1.21 (Connexité causale par arc locale). Soit M un espace-temps topologique, M est localement causalement connexe par arc si pour tout $x \in M$ et tout voisinage $\mathcal{U}$ de x , il existe un voisinage ouvert $\mathcal{V}$ de x inclus dans $\mathcal{U}$ tel que $\mathcal{V}$ est causalement connexe par arc.

Proposition 3.1.22. Soit M un espace-temps topologique localement causalement connexe par arc. Pour tout recouvrement $(\mathcal{U}_i)_{i \in I}$ de M par des ouverts causalement connexes par arc, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) la causalité de M est la causalité engendrée par la famille $(\mathcal{U}_i, \leq^i, \ll^i)_{i \in I}$;
- (ii) M est causalement connexe par arc.

Démonstration.

- Montrons l'implication (i) $\Rightarrow$ (ii).

Soient $\mathcal{V}$ un ouvert de M et $p, q \in \mathcal{V}$ tels que $p <_{\mathcal{V}} q$, par la construction de la causalité minimale de M donnée dans la preuve de la proposition 7, il existe une suite $p_0 = p, p_1, p_2, \dots, p_n = q$ et une suite $(i_k)_{k \in [0, n-1]}$ telles que pour tout $k \in [0, n-1]$, $p_k, p_{k+1} \in \mathcal{U}_{i_k}$ et $p_k <_{\mathcal{U}_{i_k}} p_{k+1}$. Comme chacun des $\mathcal{U}_{i_k}$ est causalement connexe par arc, il existe une courbe causale future reliant p_k à p_{k+1} pour tout $k \in [0, n-1]$ et donc, par concaténation, une courbe causale future reliant p à q . On traite de la même manière le cas $p \ll_{\mathcal{V}} q$.

- Montrons à présent l'implication (ii) $\Rightarrow$ (i).

Soient $\mathcal{V}$ un ouvert de M et $p, q \in \mathcal{V}$ tels que $p <_{\mathcal{V}} q$. Comme M est causalement connexe par arc, il existe une courbe causale future $c : [0, 1] \rightarrow \mathcal{V}$ reliant p à q . Une telle courbe future causale est également future causale pour la causalité engendrée par $(\mathcal{U}_i)_{i \in I}$ et donc $p <_{\mathcal{V}} q$ pour la causalité engendrée par $(\mathcal{U}_i)_{i \in I}$. On montre de la même manière que si $p \ll_{\mathcal{V}} q$ pour la causalité de M alors $p \ll_{\mathcal{V}} q$ pour la causalité engendrée par $(\mathcal{U}_i)_{i \in I}$. Par minimalité de la causalité engendrée par $(\mathcal{U}_i, \leq_{\mathcal{U}_i}, \ll_{\mathcal{U}_i})_{i \in I}$, ces deux causalités sont égales.

□

Corollaire 3.1.23. *Soit M un espace-temps topologique, si M est causalement connexe par arc, alors la causalité de M est absolument minimale.*

Corollaire 3.1.24. *Pour tout $\kappa \geq 0$, la causalité de $\mathbb{E}_\kappa^{1,2}$ est absolument minimale.*

Corollaire 3.1.25. *Toute $\mathbb{E}_{\geq 0}^{1,2}$ -variété est dotée d'une causalité absolument minimale naturelle.*

3.1.3 Espaces-temps tarentin, topologie d'Alexandrov et causalité forte

Les quatre premières définitions sont des transcription des définitions classiques.

Définition 3.1.26 (Topologie d'Alexandrov). *Soit M un espace-temps topologique, la topologie d'Alexandrov sur M est la topologie engendrée par les diamants ouverts de M .*

Définition 3.1.27 (Espace-temps causal). *Un espace-temps topologique est causal si la relation $\leq_M$ est une relation d'ordre sur M .*

Définition 3.1.28 (Convexité causale). *Soit M un espace-temps topologique et soient $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ deux ouverts de M avec $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$. L'ouvert $\mathcal{V}$ est causalement convexe dans $\mathcal{U}$ si pour tout $p, q \in \mathcal{V}$, le diamant complet $J_{\mathcal{U}}(p, q)$ est inclus dans $\mathcal{V}$.*

Définition 3.1.29 (Espace-temps fortement causal). *Soit M un espace-temps topologique, M est fortement causal si pour tout $p \in M$ et tout $\mathcal{U}$ voisinage de p , il existe un voisinage $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ de p causalement convexe dans M .*

Remarque 3.1.30. *Soit M un espace-temps topologique, si M est fortement causal alors, M est causal.*

Remarque 3.1.31. *Les espaces-temps plats modèles $\mathbb{E}_\alpha^{1,2}$ pour $\alpha \geq 0$ sont fortement causaux mais l'espace-temps de Galilée ne l'est pas.*

Nous introduisons à présent une hypothèse causale nouvelle.

Définition 3.1.32 (Espace-temps tarentin). *Un espace-temps topologique M est tarentin si pour tout $x \in M$ et pour tout voisinage $\mathcal{U}$ de x , il existe $p, q \in \mathcal{U}$ tels que $x \in \text{Int}(J_M(p, q))$.*

Remarque 3.1.33. *Le choix de la terminologie provient de la phrase d'Archytas de Tarente que nous avons citée plus tôt. Que nous interprétons comme l'affirmation que tout observateur peut "tendre un bâton" dans le futur et dans le passé (c'est-à-dire qu'il a un futur et un passé).*

Remarque 3.1.34. *Toute $\mathbb{E}_{\geq 0}^{1,2}$ -variété est un espace-temps topologique tarentin.*

Contre-exemple 3.1.35. *Considérons de nouveau M la $\mathbb{E}^{1,2}$ -variété singulière contenant une singularité de Misner décrite dans le contre exemple 2.3.8. On peut aisément prolonger la causalité à M tout entier, les courbes causales issues d'un point singulier sont toutes futures et donc un point singulier n'a pas de passé. M n'est donc pas tarentin.*

Définition 3.1.36 (Causalement ouvert/Causalité ouverte). *Soit M un espace-temps topologique, la causalité de M est ouverte et M est causalement ouvert si pour tout ouvert $\mathcal{U}$ de M et tout ouvert $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$, $J_{\mathcal{U}}^+(\mathcal{V})$ est ouvert.*

Proposition 3.1.37. *Soit M un espace-temps topologique. Si M est absolument minimal et si pour tout $p \in M$ il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de p tel que la causalité de $\mathcal{U}$ est ouverte, alors la causalité de M est ouverte.*

Démonstration. Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de M , soit $\mathcal{V}$ une partie ouverte de $\mathcal{U}$ et soit $(\mathcal{U}_i, \leq^i, \ll^i)$ un recouvrement ouvert de M tel que $(\leq^i, \ll^i)$ est une causalité ouverte. On reprend la construction donnée dans la démonstration du lemme 3.1.12, on a alors

$$J^{+, (0)}(\mathcal{V}) = \bigcup_{i \in I} J_{\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}}^+(\mathcal{V}) \quad J^{+, (n+1)}(\mathcal{V}) = \bigcup_{i \in I} J_{\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}}^+(\mathcal{U}_i \cap J^{+, (n)}(\mathcal{V}))$$

Comme $\mathcal{V}$ est ouvert et $(\leq^i, \ll^i)$ est une causalité ouverte, $J^{+, (0)}(\mathcal{V})$ est ouvert et par récurrence, $J^{+, (n)}(\mathcal{V})$ est ouvert. Ainsi $J_{\mathcal{U}}^+(\mathcal{V}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_{\mathcal{U}}^{+, (n)}(\mathcal{V})$ est ouvert. $\square$

Proposition 3.1.38. *Soit M un espace-temps topologique tarentin, si la causalité de M est ouverte alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i) M est fortement causal,
- (ii) la topologie d’Alexandrov sur M coïncide avec la topologie de M .

Démonstration. Comme les diamants ouverts sont des ouverts de la topologie de M , la topologie de M est plus fine que la topologie d’Alexandrov sur M .

- Montrons (i) $\Rightarrow$ (ii).

Supposons M fortement causal. Soient $p \in M$ et $\mathcal{U}$ un voisinage ouvert de p . Comme M est fortement causal, il existe $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ voisinage ouvert de p tel que tous les diamants fermés de sommets dans $\mathcal{V}$ sont inclus dans $\mathcal{V}$. On se donne un tel $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$, comme M est tarentin, il existe un diamant ouvert de sommets dans $\mathcal{V}$ contenant p . Un tel diamant est ouvert, contient p et est inclus dans $\mathcal{V}$. Par suite la topologie d’Alexandrov sur M coïncide avec la topologie de M .

- Montrons à présent (ii) $\Rightarrow$ (i).

Supposons que la topologie d’Alexandrov coïncide avec la topologie de M . Soit $p \in M$ et soit $\mathcal{U}$ un voisinage ouvert de p .

Il existe un ouvert

$$\bigcup_{i \in I} \bigcap_{j \in J} \mathring{J}_M(a_{i,j}, b_{i,j}) \subset \mathcal{U}$$

contenant p et donc il existe une intersection finie de diamants ouverts $\mathcal{W} := \bigcap_{i \in I} \mathring{J}(a_i, b_i) \subset \mathcal{U}$ contenant p . Soient $a, b \in \mathcal{W}$, comme la causalité de M est ouverte, pour tout $i \in I$,

$$J(a, b) = J^+(a) \cap J^-(b) \quad (3.1)$$

$$\subset J^+(\mathring{J}^+(a_i)) \cap J^-(\mathring{J}^-(b_i)) \quad (3.2)$$

$$= \mathring{J}^+(a_i) \cap \mathring{J}^-(b_i) \quad (3.3)$$

$$= \mathring{J}(a_i, b_i) \quad (3.4)$$

et donc $J(a, b) \subset \mathcal{W} \subset \mathcal{U}$.

□

3.1.4 Passé et futur continûment atteignable

Dans cette sous-section, nous introduisons les notions de passé et de futur continûment atteignables qui nous seront utiles pour la démonstration du théorème de Geroch et de Choquet-Bruhat-Geroch. La définition est « technique » : nous l’avons choisie pour faire fonctionner l’argumentation de la sous-section suivante, en particulier la proposition 3.1.61.

Définition 3.1.39 (Futur et passé continûment atteignable). *Soit M un espace-temps topologique et soit $p \in M$. On pose $K^+(p)$ (resp. $K^-(p)$) le futur (resp. le passé) continûment atteignable de p :*

$$K^\pm(p) = \bigcap_{p_n \rightarrow p} \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \text{Int}_{J^\pm(p)} \left(J^\pm(p) \cap \bigcap_{n \geq N} J^\pm(p_n) \right)$$

Pour mieux s’appropriier la notion, nous commençons par montrer qu’elle coïncide avec $I^\pm$ sur les points les moins pathologiques d’un espace-temps topologique.

Définition 3.1.40 (Point fortement tarentin). *Soit M un espace-temps topologique. Un point $p \in M$ est fortement tarentin dans le futur (resp. dans le passé) si pour tout voisinage $\mathcal{U}$ de p , $I^+(p) \cap \mathcal{U}$ est non vide (resp. $I^-(p) \cap \mathcal{U}$ est non vide).*

On note $Z^+(M)$ (resp. $Z^-(M)$) l’ensemble de points de M fortement tarentin dans le futur (resp. dans le passé).

Remarque 3.1.41. Si M est un espace-temps topologique absolument minimal, alors un point est fortement tarentin dans le passé (resp. dans le futur) si et seulement si son passé (resp. son futur) chronologique est non vide.

Remarque 3.1.42. Tout point d'une variété lorentzienne est fortement tarentin dans le futur et dans le passé. De plus, tout point d'une $\mathbb{E}_{\geq 0}^{1,2}$ -variété est tarentin dans le futur et les seuls points qui ne sont pas tarentin dans le passé sont les points BTZ.

Remarque 3.1.43. Soit M un espace-temps topologique. Si $p \in M$ est un point fortement tarentin dans le passé, alors on peut construire par récurrence des suites croissantes pour $\ll$ convergeant vers p . En effet, partons d'un point quelconque $p_0 \in I^-(p)$ et d'une base de voisinage ouvert $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de p ; on remarque que $I^+(p_0) \cap \mathcal{U}_1$ est un voisinage ouvert de p et donc qu'il existe $p_1 \in I^+(p_0) \cap \mathcal{U}_1 \cap I^-(p)$. Par récurrence, on peut ainsi construire une suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \geq 1$, $p_n \in \mathcal{U}_n$ et $p_{n-1} \ll p_n$. Une telle suite converge vers p et est croissante pour $\ll$.

Lemme 3.1.44. Soit M un espace-temps topologique tarentin et soit $p \in M$. Soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points de M convergeant vers p et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p \in \dot{J}^+(p_n)$; alors :

$$K^-(p) = \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \text{Int}_{J^-(p)} \left(\bigcap_{n \geq N} J^-(p_n) \right).$$

Démonstration. L'inclusion $\subset$ est triviale, montrons l'inclusion $\supset$. Soit une suite $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $q_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} p$. Soit $m \in \mathbb{N}$, $p \in \dot{J}^+(p_m)$ donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $q_n \in \dot{J}^+(p_m)$ et donc tel que pour tout $n \geq N$, $J^-(p_m) \subset J^-(q_n)$. Or $p_m \leq p$ donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\begin{aligned} J^-(p_m) &\subset J^-(p) \cap \bigcap_{n \geq N} J^-(q_n) \\ \text{Int}_{J^-(p)}(J^-(p_m)) &\subset \text{Int}_{J^-(p)} \left(J^-(p) \cap \bigcap_{n \geq N} J^-(q_n) \right) \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$\text{Int}_{J^-(p)}(J^-(p_m)) \subset \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \text{Int}_{J^-(p)} \left(J^-(p) \cap \bigcap_{n \geq N} J^-(q_n) \right).$$

Donc, pour tout $N_0 \in \mathbb{N}$,

$$\text{Int}_{J^-(p)} \left(\bigcap_{m \geq N_0} \text{Int}_{J^-(p)}(J^-(p_m)) \right) \subset \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \text{Int}_{J^-(p)} \left(J^-(p) \cap \bigcap_{n \geq N} J^-(q_n) \right).$$

Or pour tout espace topologique X et toute famille $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de partie de X

$$\text{Int} \left(\bigcap_{n \geq 0} \text{Int}(A_n) \right) = \text{Int} \left(\bigcap_{n \geq 0} A_n \right)$$

donc pour tout $N_0 \in \mathbb{N}$,

$$\text{Int}_{J^-(p)} \left(\bigcap_{m \geq N_0} J^-(p_m) \right) \subset \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \text{Int}_{J^-(p)} \left(J^-(p) \cap \bigcap_{n \geq N} J^-(q_n) \right)$$

et donc

$$\bigcup_{N \in \mathbb{N}} \text{Int}_{J^-(p)} \left(\bigcap_{n \geq N} J^-(p_n) \right) \subset \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \text{Int}_{J^-(p)} \left(J^-(p) \cap \bigcap_{n \geq N} J^-(q_n) \right).$$

Cette dernière inclusion étant vérifiée quelque soit la suite $q_n \rightarrow p$ choisie, on a enfin

$$\bigcup_{N \in \mathbb{N}} \text{Int}_{J^-(p)} \left(\bigcap_{n \geq N} J^-(p_n) \right) \subset \bigcap_{q_n \rightarrow p} \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \text{Int}_{J^-(p)} \left(J^-(p) \cap \bigcap_{n \geq N} J^-(q_n) \right) = K^-(p).$$

□

Remarque 3.1.45. Un lemme équivalent est évidemment vrai pour K^+ .

Lemme 3.1.46. Soit M un espace-temps topologique. Pour tout point $p \in M$ fortement tarentin dans le passé,

$$J^-(I^-(p)) = I^-(p).$$

Démonstration. La relation $\leq$ étant réflexive, l'inclusion $\supset$ est triviale. Montrons à présent l'inclusion $\subset$.

Soit $p \in M$ et soit $q \in J^-(I^-(p))$, on se donne $p' \in I^-(p)$ tel que $q \in J^-(p')$. On a $I^+(p') \subset J^+(p') \subset J^+(q)$, donc $I^+(p') \cap I^-(p) \subset J^+(q)$ or $p \in Z^-(M)$ et $p \in I^+(p')$ donc $I^+(p') \cap I^-(p) \neq \emptyset$. Par suite $I^+(p') \cap I^-(p)$ est un ouvert non vide inclus dans $J^+(q)$. De plus, $I^+(q) \subset \text{Int}(J^+(q)) \subset \overline{I^+(q)}$ donc tout ouvert non vide inclus dans $J^+(q)$ intersecte $I^+(q)$. En particulier, $I^+(p') \cap I^-(p)$ intersecte $I^+(q)$. Finalement, il existe $r \in M$ tel que $q \ll r \ll p$ donc $q \in I^-(p)$. $\square$

Proposition 3.1.47. Soit M un espace-temps topologique tarentin absolument minimal et soit $p \in M$.

Si p est fortement tarentin dans le passé, alors $K^-(p) = I^-(p)$.

Démonstration. Supposons $p \in Z^-(M)$.

Soit $q \in I^-(p)$, il existe une suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $I^-(p)$ croissante pour la relation $\ll$ tendant vers p et telle que $p_0 = q$. Pour une telle suite, $q \in I^-(p_1) \subset I^-(p_n)$ pour tout $n \geq 1$. Or $I^-(p_1)$ est ouvert dans M donc dans $J^-(p)$; et donc, en appliquant le lemme 3.1.44,

$$q \in I^-(p_1) \subset \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \text{Int}_{J^-(p)} \left(\bigcap_{n \geq N} J^-(p_n) \right) = K^-(p).$$

Ainsi $I^-(p) \subset K^-(p)$.

On considère à nouveau une suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croissante pour $\ll$ convergeant vers p . D'après le lemme 3.1.46, $J^-(I^-(p)) = I^-(p)$ et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $J^-(p_n) \subset I^-(p)$. En appliquant à nouveau le lemme 3.1.44 on obtient

$$K^-(p) = \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \text{Int}_{J^-(p)} \left(\bigcap_{n \geq N} J^-(p_n) \right) \subset I^-(p)$$

$\square$

Remarque 3.1.48. Une propriété comparable est évidemment vraie pour K^+ .

Corollaire 3.1.49. Soit M une variété lorentzienne.

$$\forall p \in M, \quad K^\pm(p) = I^\pm(p).$$

$\square$

Proposition 3.1.50. Soit M un espace-temps topologique. Si M est fortement causal, alors l'application

$$\begin{array}{ccc} Z^\pm(M) & \longrightarrow & \mathcal{P}(M) \\ x & \longmapsto & I^\pm(x) \end{array}$$

est injective.

Démonstration. Soit $x, y \in Z^+(M)$ tels que $I^+(x) = I^+(y)$. Soient $\mathcal{U}_x, \mathcal{U}_y$ des voisinages ouverts de x et y respectivement. Comme M est fortement causal, il existe un voisinage $\mathcal{V}_x \subset \mathcal{U}_x$ de x (resp. $\mathcal{V}_y \subset \mathcal{U}_y$ de y) causalement convexe dans M . Comme x est fortement tarentin dans le futur, on se donne $a \in \mathcal{V}_x \cap I^+(x)$. Comme $I^+(x) = I^+(y)$, alors $a \in I^+(y)$ et donc $y \in I^-(a)$, or $I^-(a) \cap \mathcal{V}_y$ est ouvert contenant y et y est fortement tarentin donc il existe $b \in I^-(a) \cap \mathcal{V}_y \cap I^+(y)$, on se donne un tel b . Comme $b \in I^+(y) = I^+(x)$, on obtient $b \in I_M(x, a)$, or $I_M(x, a) \subset J_M(x, a) \subset \mathcal{V}_x$ car $\mathcal{V}_x$ est causalement convexe dans M et $x, a \in \mathcal{V}_x$; donc $b \in \mathcal{V}_x$ et donc $\mathcal{V}_x \cap \mathcal{V}_y \neq \emptyset$ et donc $\mathcal{U}_x \cap \mathcal{U}_y \neq \emptyset$. Ainsi, tous les voisinages de x intersectent tous les voisinages de y , or M est séparé donc $x = y$. Finalement, $x \mapsto I^+(x)$ est injective sur $Z^+(M)$ et on démontre de la même manière que $x \mapsto I^-(x)$ est injective sur $Z^-(M)$. $\square$

Nous finissons par un lemme utile.

Lemme 3.1.51. *Soient M un espace-temps topologique absolument minimal, $p \in M$ et $(p_n)_{n \in \mathbb{N}} \in M^{\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers p .*

Si pour tout $x \in M$, $J^+(x)$ est fermé, alors :

$$I^-(p) \subset \text{Int} \left(\bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq N} I^-(p_n) \right) \subset \mathring{J}^-(p) \cap Z^+(M)$$

Démonstration.

- Soit $x \in I^-(p)$, alors $p \in I^+(x)$. Or $I^+(x)$ est ouvert donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $p_n \in I^+(x)$ et donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $x \in I^-(p_n)$. Par suite, $I^-(p) \subset \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq N} I^-(p_n)$ or $I^-(p)$ est ouvert donc

$$I^-(p) \subset \text{Int} \left(\bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq N} I^-(p_n) \right).$$

- Soit $x \in \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq N} I^-(p_n)$, soit $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $x \in I^-(p_n)$. On a alors pour tout $n \geq N$, $p_n \in I^+(x) \subset J^+(x)$. En particulier, $I^+(x) \neq \emptyset$ donc $x \in Z^+(M)$. De plus, $J^+(x)$ est fermé donc

$$p = \lim_{n \rightarrow +\infty} p_n \in J^+(x)$$

et donc $x \in J^-(p)$.

Finalement,

$$\text{Int} \left(\bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq N} I^-(p_n) \right) \subset \mathring{J}^-(p) \cap Z^+(M).$$

□

Remarque 3.1.52. *Avec les mêmes notations, on démontre de la même manière une propriété relative au futur chronologique.*

Si pour tout $x \in M$, $J^-(x)$ est fermé, alors :

$$I^+(p) \subset \text{Int} \left(\bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq N} I^+(p_n) \right) \subset \mathring{J}^+(p) \cap Z^-(M)$$

3.1.5 Théorème de Geroch

Le théorème de séparation de Geroch énonce qu'une variété lorentzienne globalement hyperbolique admet une surface de Cauchy.

Définition 3.1.53 (Globalement hyperbolique). *Soit M un espace-temps topologique, M est globalement hyperbolique si M est causal et si pour tout $p, q \in M$, $J_M(p, q)$ est compact.*

Définition 3.1.54 (Surface de Cauchy). *Soit M un espace-temps topologique, une surface de Cauchy dans M est une partie $S \subset M$ telle que toute courbe causale de M intersecte S exactement une fois.*

Théorème 8 (Geroch [Ger70]). *Soit M une variété lorentzienne, les propriétés suivantes sont équivalentes*

- (i) M est globalement hyperbolique ;
- (ii) M admet une hypersurface de Cauchy.

De plus, si ces propriétés sont satisfaites, M est homéomorphe à $\Sigma \times \mathbb{R}$

Ce théorème est fondamental dans l'étude des espaces-temps lorentziens et nous souhaitons avoir une version de ce théorème pour les espaces-temps plats singuliers. Une preuve complète serait à la fois laborieuse et, pour la plus grande partie, redondante vis à vis de la littérature. Nous nous contentons donc d'en retracer les étapes principales en suivant les points de la très claire exposition donnée dans [S05] et en généralisant les points importants au contexte des espaces-temps plats singuliers.

Mesures admissibles

La première étape de la preuve de ce théorème est de définir des fonctions temps continues sur un espace-temps M , voir Définition 3.1.55. Un théorème classique de Hawking énonce que l'existence de fonctions temps est équivalent à la stabilité causale. D'une part cette notion n'est pas encore clairement définie pour les espaces-temps topologiques et le travail nécessaire à la recherche des hypothèses minimales pour énoncer une généralisation du théorème de Hawking n'a pas encore été fait. La méthode classique [Ger70, HS74, Die88, S05] pour construire des fonctions temps continues consiste à construire une mesure μ finie sur M compatible avec la topologie de M et sa causalité; une telle mesure s'appelle une *mesure admissible* (Définition 3.1.56); puis d'étudier la continuité des fonctions $t^\pm : x \mapsto \mu(J^\pm(x))$. Usuellement, les $I^\pm$ sont utilisés comme support de la mesure admissible, cela n'est pas possible en général car ceux-ci peuvent être vides! La notion de passé et futur continûment atteignable 3.1.39 qui généralise $I^\pm$ comme support de mesure admissible à des espaces-temps plus généraux incluant le cas des $\mathbb{E}_{\geq 0}^{1,2}$ -variété.

Définition 3.1.55 (Fonction temps). *Soit $(M, \leq, \ll)$ un espace-topologique, une fonction temps T sur M est un morphisme d'espaces-temps topologiques*

$$(M, \leq, \ll) \xrightarrow{T} (\mathbb{R}, \leq, <).$$

Définition 3.1.56 (Mesure admissible). *Soit M un espace-temps topologique, une mesure μ sur M est admissible dans le passé (resp. le futur) si elle satisfait les propriétés suivantes :*

1. μ est une mesure de Borel régulière sur M ;
2. $\mu(M) < +\infty$;
3. pour tout $p, q \in M$, si $p < q$ alors

$$\mu(J^-(q) \setminus J^-(p)) > 0 \quad (\text{resp. } \mu(J^+(q) \setminus J^+(p)) > 0).$$

4. pour tout $A \subset M$, $\mu(J^-(A) \setminus K^-(A)) = 0$ (resp. $\mu(J^+(A) \setminus K^+(A)) = 0$).

Proposition 3.1.57. *Soit M une variété lorentzienne fortement causale, alors M admet une mesure admissible dans le passé et le futur.*

Démonstration. Comme M est fortement causale et lorentzienne, la topologie d'Alexandrov est la topologie de la variété M . Dans ce cas, $K^\pm = I^\pm$, on peut alors se ramener au résultat classique, voir par exemple [S05] Section 3.1. $\square$

Proposition 3.1.58. *Soit M un espace-temps topologique causalement connexe par arc et fortement causal tel que*

- (i) pour tout $p \in M$, il existe un voisinage ouvert $\mathcal{U}_p$ de p causalement convexe dans M et une mesure admissible dans le passé sur $\mathcal{U}_p$;
- (ii) pour tout $p \in M$ et tout $q \leq p$ on a $K^-(q) \subset K^-(p)$;
- (iii) pour tout $p \in M$ et tout $q \in K^-(M)$, il existe une courbe causale passée $c : [0, 1] \rightarrow K^-(p)$ de p à q telle que

$$\forall t \in [0, 1], \quad q \in K^-(c(t));$$

alors il existe une mesure admissible sur M .

Démonstration. Supposons que pour tout $p \in M$, il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de p et une mesure admissible sur $\mathcal{U}$. Comme M est à base dénombrable, il existe une famille $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'ouverts de M recouvrant M et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{U}_n$ admet une mesure admissible et $\mathcal{U}_n$ est . On se donne alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ une mesure μ_n sur $\mathcal{U}_n$ admissible de normalisée : $\forall n \in \mathbb{N}, \mu_n(\mathcal{U}_n) = 1$. On pose alors $\mu := \sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{-n-1} \mu_n$.

Comme chaque μ_n est de Borel régulière normalisée, μ est de Borel régulière de volume fini. Soient $p < q \in M$, comme la causalité de M est absolument minimale, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et $q' \in \mathcal{U}_{n_0}$ tels $p \in \mathcal{U}_{n_0}$ et $p <_{\mathcal{U}_{n_0}} q'$.

$$\mu(J^-(q) \setminus J^-(p)) > \mu(J^-(p') \setminus J^-(p)) \quad (3.5)$$

$$\geq \mu_{n_0}((J^-(p') \setminus J^-(p)) \cap \mathcal{U}_{n_0}) \quad (3.6)$$

$$= \mu_{n_0}((J_{\mathcal{U}_{n_0}}^-(q) \setminus J_{\mathcal{U}_{n_0}}^-(p))) \quad (3.7)$$

$$> 0 \quad (3.8)$$

L'avant dernière ligne est obtenue par convexité causale de $\mathcal{U}_n$.

Pour démontrer la propriété 4., comme M est causalement connexe par arc, M est absolument minimal. On pose $K^{-(0)}(A) = K_{\mathcal{U}_1}^-(A)$, puis

$$K^{-(n+1)}(A) = K^{-(n)}(A) \cup K_{\mathcal{U}_{n+1}}^-(K^{-(n)}(A) \cap \mathcal{U}_{n+1}).$$

Avec la convexité causale des $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et les hypothèses "techniques" (ii), (iii) on vérifie que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$K^-(A) \cap (\mathcal{U}_1 \cup \dots \cup \mathcal{U}_n) = K^{-(n)}(A).$$

Finalement, $K^-(A) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K^{-(n)}(A)$ et la propriété 4. se vérifie par récurrence sur $(K^{-(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ $\square$

Proposition 3.1.59. *Soit M un espace-temps topologique. Si M est tarentin et globalement hyperbolique alors pour tout $K \subset M$ compact, $J^\pm(K)$ est fermé.*

Démonstration. Supposons M globalement hyperbolique et tarentin. On commence par démontrer que pour tout $p \in M$, $J^+(p)$ est fermé.

Soit $p \in M$, comme M est à base dénombrable, il suffit de montrer que $J^+(p)$ est séquentiellement fermé. Soit alors $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $J^+(p)$ convergeant vers un certain $q \in M$. Comme M est tarentin, on se donne $q' \in I^+(q)$ de sorte que $J^-(q')$ est un voisinage de q . Pour n assez grand, $q_n \in J^-(q')$ et donc $q_n \in J_M((p, q'))$ pour n assez grand. Comme M est globalement hyperbolique, $J_M(p, q')$ est compact donc fermé et donc $q \in J_M(p, q') \subset J^+(p)$. On en déduit donc que $J^+(p)$ est fermé. $\square$

Proposition 3.1.60. *Soit M un espace-temps topologique tarentin.*

Si M est globalement hyperbolique, alors M est fortement causal.

Démonstration. Soit $p \in M$ et $\mathcal{U}$ un voisinage de p . Supposons par l'absurde que pour tout $a, b \in \mathcal{U}$ tels que $p \in \mathring{J}_M(a, b)$, on ait $J_M(a, b) \not\subset \mathcal{U}$. Comme M est tarentin, il existe des suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ respectivement croissante et décroissante de points de $\mathcal{U}$ tendant vers p et telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathring{J}_M(a_n, b_n)$. La suite $(J_M(a_n, b_n) \setminus \mathcal{U})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante de compacts non vides car M est globalement hyperbolique et séparé, donc, par Borel-Lebesgue,

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (J_M(a_n, b_n) \setminus \mathcal{U}) \neq \emptyset.$$

Soit q un point de cette intersection. On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in J^-(q)$ et $b_n \in J^+(q)$; or $a_n, b_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} p$ et $J^\pm(q)$ sont fermés d'après la proposition 3.1.59. Ainsi $p \in J^\pm(q)$, c'est-à-dire $p \leq q$ et $q \leq p$. C'est absurde car M est causal (c'est-à-dire que $\leq$ est anti-symétrique) et $p \neq q$.

On se donne alors $a, b \in M$ tels que $p \in \mathring{J}_M(a, b) \subset \mathcal{U}$. L'ouvert $\mathring{J}_M(a, b)$ contient p , est inclus dans $\mathcal{U}$ et est causalement convexe dans M . Finalement, M est localement causalement convexe donc fortement causal.

□

Proposition 3.1.61. *Soit M un espace-temps topologique. Si M est tarentin, globalement hyperbolique et si μ est une mesure admissible dans le passé (resp. dans le futur) sur M , alors $p \mapsto \mu(J^-(p))$ (resp. $p \mapsto \mu(J^+(p))$) est continue.*

Démonstration. Soient $p \in M$, $\varepsilon > 0$ et $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite tendant vers p .

- On se donne $C \subset K^-(p)$ un compact tel que $\mu(K^-(p) \setminus C) < \varepsilon$.

Comme $C \subset K^-(p)$, C est recouvert par les ouverts

$$\text{Int}_{J^-(p)} \left(\bigcap_{n \geq N} J^-(q_n) \cap J^-(p) \right), \quad N \in \mathbb{N};$$

comme C est compact, il existe un recouvrement fini de C par ces mêmes ouverts. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq N$,

$$C \subset J^-(q_n) \cap J^-(p) \subset J^-(q_n)$$

On se donne un tel $N \in \mathbb{N}$, pour tout $n \geq N$, on a donc

$$\mu(J^-(q_n)) \geq \mu(C) \geq \mu(K^-(p)) - \varepsilon = \mu(J^-(p)) - \varepsilon.$$

- On se donne $C \subset M \setminus J^-(p)$ un compact tel que $\mu(C) > \mu(M \setminus J^-(p)) - \varepsilon$.

Comme C est compact et M globalement hyperbolique, $J^+(C)$ est fermé. Comme $C \subset M \setminus J^-(p)$, on a $p \notin J^+(C)$, donc $M \setminus J^+(C)$ est un voisinage ouvert de p . On se donne $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $q_n \notin J^+(C)$, on a alors :

$$\mu(J^-(q_n)) \leq \mu(J^+(q)) + \mu(M \setminus C) \leq \mu(J^+(q)) + \varepsilon.$$

On en déduit que $p \mapsto \mu(J^-(p))$ est continue et on démontre de la même manière que $p \mapsto \mu(J^+(p))$ est continue si μ est admissible dans le futur. □

Fonction temps de Cauchy d'un espace-temps globalement hyperbolique

Définition 3.1.62 (Fonction temps de Cauchy). *Soit M un espace-temps topologique, une fonction temps T est de Cauchy si pour toute courbe causale $c : \mathbb{R} \rightarrow M$ inextensible,*

$$-\lim_{-\infty} (T \circ c) = \lim_{+\infty} (T \circ c) = +\infty.$$

Théorème 9 (Geroch généralisé). *Soit M un espace-temps topologique métrisable et localement compact. On suppose de plus M tarentin, causalement connexe par arc, localement causalement convexe et tel que pour tout $p \in M$, $J^\pm(x) \neq \{x\}$. Si M admet un couple (μ_+, μ_-) de mesures admissibles respectivement dans le futur et le passé, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i) M est globalement hyperbolique,
- (ii) M admet une fonction temps de Cauchy,
- (iii) M admet une hypersurface de Cauchy.

Esquisse de démonstration.

• (i) $\Rightarrow$ (ii)

Supposons M globalement hyperbolique. On utilise la proposition 3.1.61 pour montrer que les fonctions $t^+ : x \mapsto \mu_+(I^+(x))$ et $t^- : x \mapsto -\mu_-(I^-(x))$ sont des fonctions temps (donc continues); on pose alors

$$T : \begin{cases} M & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \log\left(-\frac{t^-(x)}{t^+(x)}\right) \end{cases}.$$

T est une fonction temps et supposons que $\lim_{s \rightarrow 0} T \circ c(s) > -\infty$ pour $c : I \rightarrow M$ une courbe causale future donnée avec $I = [0, 1]$ ou $I =]0, 1]$. On se donne alors une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}}$ décroissante tendant vers 0 et on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(I^-(c(x_n))) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(J^-(c(x_n))) = l > 0$$

Par suite, $\mu(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} J^-(c(x_n))) \neq 0$ et donc il existe $q \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} J^-(c(x_n))$. La courbe causale c est entièrement incluse dans $J^+(q)$ et pour $t < 1$, $c(t) \in J_M(q, c(0))$ qui est compact; par suite, $c(s)$ admet des valeurs d'adhérences lorsque s tend vers 0. Si c admettait deux valeurs d'adhérences distinctes p_1 et p_2 , alors il existerait des voisinages convexes disjoints $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$ respectivement de p_1 et de p_2 car M est séparé et fortement causal par la propriété 3.1.60. La courbe c devant revenir une infinité de fois dans $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$, cela contredirait la convexité causale de $\mathcal{U}_1$ et de $\mathcal{U}_2$. On en déduit que c n'a qu'une seule valeur d'adhérence et donc admet une limite p en 0. Si $I =]0, 1]$ alors c est extensible en posant $c(0) = p$. Supposons à présent $I = [0, 1]$. Il existe $q' \in J^-(p) \setminus \{p\}$ donc, par convexité causale par arc, on peut prolonger c en lui ajoutant une courbe causale future de q' à p , et donc c est extensible. Finalement, pour toute courbe inextensible dans le passé $c : I \rightarrow M$, $\lim_{s \rightarrow \inf I} T \circ c(s) = -\infty$. On démontre de la même manière que pour toute courbe inextensible dans le futur $c : I \rightarrow M$, $\lim_{s \rightarrow \sup I} T \circ c(s) = +\infty$. Ainsi T est de Cauchy.

• (ii) $\Rightarrow$ (iii)

Il suffit de prendre $S = T^{-1}(0)$ comme hypersurface de Cauchy.

• (iii) $\Rightarrow$ (i)

Cette étape est technique et utilise la notion de quasi-limite d'une suite de courbe causale (Définition 7 p.407 [O'N83]). La démonstration est l'objet de la proposition 8 et du théorème 35 p.415 de [O'N83]. Cette preuve est identique sous l'hypothèse de métrisabilité et de compacité locale.

□

Ce « théorème de Geroch » n'implique pas complètement le théorème de Geroch usuel pour les variétés lorentziennes. Il manque en effet deux éléments, d'une part le fait que la topologie d'un espace-temps globalement hyperbolique M est scindée : $M \simeq \Sigma \times \mathbb{R}$; d'autre part, toute surface de Cauchy est une $\mathcal{C}^0$ -surface. Le premier point est faux pour les espaces-temps topologiques généraux comme le montre l'exemple de deux copies de $(\mathbb{R}, \leq, <)$ collées le long de $\mathbb{R}_-$: cet espace-temps topologique est globalement hyperbolique, on remarque qu'il admet bien une fonction temps de Cauchy mais il n'est pas topologiquement scindé. Le second point n'a de sens que si M est une variété de classe au moins $\mathcal{C}^0$, nous reviendrons dessus lorsque nous aborderons le théorème de Seifert-Bernal-Sanchez.

3.2 Espace-temps plat singulier

Définition 3.2.1 (Espace-temps plat singulier). *Soit A une partie de $\mathbb{R}_+$. Un $\mathbb{E}_A^{1,2}$ -espace-temps est une $\mathbb{E}_A^{1,2}$ -variété connexe munie de la causalité engendrée par son X_A -atlas et les causalités de X et des $(X_\alpha)_{\alpha \geq 0}$.*

Nous dirons simplement espace-temps plat singulier lorsque $A = \mathbb{R}_+$.

Remarque 3.2.2. *Un espace-temps plat singulier est donc une variété différentielle et satisfait toutes les hypothèses du théorème de Geroch 9.*

3.2.1 Quelques propriétés causales des espaces-temps plats singuliers

Propriété 3.2.3. *Soit M un espace-temps singulier. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $\text{Sing}_\alpha(M)$ est une sous-variété fermée de dimension 1. De plus, $\bigsqcup_{\alpha \in \mathbb{R}_+} \text{Sing}_\alpha(M)$ est un fermé de M .*

Démonstration. L'union $\bigcup_{\alpha \in \mathbb{R}_+} \text{Sing}_\alpha(M)$ est disjointe et fermée d'après la proposition 1.3.22 car $(\text{Isom}(\mathbb{E}^{1,2}), \mathbb{E}^{1,2}, \mathbb{E}_{\geq 0}^{1,2})$ est une structure singulière analytique. De même chacun des $\text{Sing}_\alpha(M)$ est fermé.

Soient $\alpha \in \mathbb{R}_+ \setminus \{2\pi\}$ et $p \in \text{Sing}_\alpha$ un point singulier, il existe une carte $\phi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ autour de p telle que $\mathcal{V} \subset \mathbb{E}_\alpha$ et telle que $\phi(p) \in \text{Sing}(\mathbb{E}_\alpha)$. Pour toute autre carte $\phi' : \mathcal{U}' \rightarrow \mathcal{V}'$, $\phi' \circ \phi^{-1}(\text{Reg}(\mathcal{V}) \cap \phi(\mathcal{U}')) \subset \text{Reg}(\mathcal{V}')$ donc $\text{Sing}_\alpha \cap \mathcal{U} = \phi^{-1}(\text{Sing}(\mathbb{E}_\alpha^{1,2}))$. Comme ϕ est un difféomorphisme et comme $\text{Sing}(\mathbb{E}_\alpha^{1,2})$ est une sous-variété de dimension 1 de $\mathbb{E}_\alpha^{1,2}$, il en va de même pour $\text{Sing}_\alpha \cap \mathcal{U}$. $\square$

Lemme 3.2.4. *Soit M un espace-temps singulier alors*

- (a) *pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+$, chaque composante connexe de $\text{Sing}_\alpha(M)$ est une courbe causale inextensible ; si $\alpha > 0$, une telle composante connexe est de plus chronale ;*
- (b) *toute courbe causale c de M se décompose en*

$$c = \Delta \cup c^0$$

avec $\Delta = c \cap \text{Sing}_0(M)$ et $c^0 = c \setminus \text{Sing}_0(M)$. De plus, Δ et c^0 sont connexes, Δ est fermé et dans le passé de c^0 .

Démonstration.

- (a) Soient $\alpha \in \mathbb{R}_+$ et Δ une composante connexe de $\text{Sing}_\alpha(M)$, d'après la propriété 3.2.3, c'est une sous-variété de dimension 1 connexe, comme M est une variété différentielle elle est paramétrable par $\mathbb{R}$. De plus elle est localement chronale d'après la définition 2.2.2 si $\alpha > 0$ et localement causale d'après la définition 2.2.6. Par suite, c'est une courbe chronale si $\alpha > 0$ et causale si $\alpha = 0$. Enfin, Δ est inextensible car c'est une sous-variété fermée sans bord.
- (b) Soient $c : \mathbb{R} \rightarrow M$ une courbe causale future de M , $\Delta := c \cap \text{Sing}_0(M)$ et $c^0 := c \cap \text{Reg}(M)$. Montrons

$$\forall s_0 \in \mathbb{R}, (c(s_0) \in \Delta \Rightarrow \forall s < s_0, c(s) \in \Delta),$$

dont on déduit aisément la propriété à démontrer. Supposons $\Delta \neq \emptyset$, prenons $s_0 \in \mathbb{R}$ tel que $c(s_0) \in \Delta$,

$$I := \{s \in]-\infty, s_0] \mid c([s, s_1]) \subset \Delta\}.$$

- $s_0 \in I$ donc $I \neq \emptyset$.
- Pour $s \in I$, $c(s)$ est localement modelé sur $\mathbb{E}_0^{1,2}$ et dans une carte locale $\mathcal{U}$, $J_{\mathcal{U}}^-(c(s)) \subset \text{Sing}_0(\mathcal{U})$. Donc pour un certain $\varepsilon > 0$, $c([s - \varepsilon, s]) \subset \text{Sing}_0(\mathcal{U}) \subset \text{Sing}_0(M)$; donc $[s - \varepsilon, s_0] \subset I$ et donc I est ouvert.
- Soit $(s_n)_{n \in \mathbb{N}} \in I^\mathbb{N}$ une suite décroissante convergente dans $\mathbb{R}$ vers s_∞ . D'une part, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c([s_n, s_1]) \subset \text{Sing}_0(M)$ donc $c([s_\infty, s_0]) \subset \text{Sing}_0(M)$; d'autre part $\text{Sing}_0(M)$ est fermé ; donc $c([s_\infty, s_0]) \subset \text{Sing}_0(M)$ et donc $s_\infty \in I$. Ainsi, I est fermé.

I est un ouvert fermé non vide $] - \infty, s_0]$, donc $I =] - \infty, s_0]$ et donc $c([s_\infty, s_0]) \subset \Delta$. $\square$

Proposition 3.2.5. *Soit M une $\mathbb{E}_{\geq 0}^{1,2}$ -variété et soit $p \in M$.*

- (a) $K^\pm(p) = I^\pm(p)$ si $p \notin \text{Sing}_0(M)$.
- (b) $K^+(p) = I^+(p)$ si $p \in \text{Sing}_0(M)$.
- (c) Si M est causal et $p \in \text{Sing}_0(M)$, alors $K^-(p) = J^-(p) \setminus \{p\}$.

Démonstration. Seul le troisième cas n'est pas une conséquence directe de la proposition 3.1.47. Supposons M causal et $p \in \text{Sing}_0(M)$, considérons une suite $p_n \in J^-(p) \setminus \{p\}$ croissante et convergente vers p . D'après le lemme 3.2.4, $J^-(p_n)$ est inclus dans la ligne BTZ contenant p ; or M est causal et pour tout $n \in \mathbb{N}, p_n < p$; donc pour tout $n \in \mathbb{N}, p \notin J^-(p_n)$. On en déduit l'inclusion $K^-(p) \subset J^-(p) \setminus \{p\}$. Le lemme 3.1.44 nous donne ensuite

$$K^-(p) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} J^-(p_n)$$

or nous pouvons choisir p_0 arbitrairement dans $J^-(p) \setminus \{p\}$ donc $K^-(p) \supset J^-(p) \setminus \{p\}$. □

Corollaire 3.2.6. Si M est une $\mathbb{E}_{\geq 0}^{1,2}$ -variété fortement causale, alors l'application

$$\begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & \mathcal{P}(M) \\ x & \longmapsto & K^\pm(x) \end{array}$$

est injective.

3.2.2 Théorème de Geroch pour les espaces-temps plats singuliers

Cette étude causale permet de démontrer le théorème de Geroch pour les espaces-temps plats singuliers.

Proposition 3.2.7. Toute $\mathbb{E}_{\geq 0}^{1,2}$ -variété fortement causale admet une mesure admissible.

Démonstration. On applique la proposition 3.1.58, il suffit donc de remarquer que la mesure de Lebesgue λ_3 sur $\mathbb{R}^3$ donne une mesure admissible dans le passé et le futur pour $\mathbb{E}_\kappa^{1,2}$ si $\kappa > 0$ et dans le futur si $\kappa = 0$, et qu'en notant λ_1 la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ que l'on identifie à $\text{Sing}(\mathbb{E}_0^{1,2})$ la mesure $\lambda_3 + \lambda_1$ est admissible dans le passé pour $\mathbb{E}_0^{1,2}$. □

On rappelle le lemme suivant dont la preuve est identique

Lemme 3.2.8. Soit M un espace-temps plat singulier, il existe un champ de vecteur X sur M tel que :

- X est $\mathcal{C}^1$ et non singulier ;
- X est futur causal ;
- pour $p \in \text{Sing}(M)$, X_p est parallèle à la direction de la ligne singulière passant par p .

Ébauche de preuve. La preuve est identique à celle du lemme 32 p145 de [O'N83]. On utilise la paracompacité de M pour construire une partition de l'unité $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ sur M telles que pour tout $\alpha \in A$, le support de f_α soit inclus dans un ouvert de carte. Pour $\kappa \geq 0$, le champs de vecteurs vertical X_κ de $\mathbb{E}_\kappa^{1,2}$ est $\mathcal{C}^1$, non singulier, futur causal et parallèle à la direction singulière en tout point singulier. Par conséquent, en notant $(\mathcal{U}_\alpha, \mathbb{E}_{\kappa(\alpha)}^{1,2}, \mathcal{V}_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ un jeu de cartes contenant les supports des fonctions $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$, le champs de vecteur

$$X := \sum_{\alpha \in A} f_\alpha \varphi_\alpha^* X_{\kappa(\alpha)}$$

satisfait les propriétés désirées. □

Théorème 10. *Soit M un espace-temps plat singulier, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i) M est globalement hyperbolique,
- (ii) M admet une fonction temps de Cauchy,
- (iii) M admet une hypersurface de Cauchy.

De plus, si Σ est une surface de Cauchy de M , alors M est homéomorphe à $\Sigma \times \mathbb{R}$.

Démonstration. La première partie est une conséquence directe du théorème 9 et de la proposition 3.2.7.

Donnons nous une surface de Cauchy Σ de M . Soit X un champ de vecteurs donné par le lemme 3.2.8, quitte à le multiplier par un champ scalaire strictement positif on peut supposer son flot complet. Posons $\Phi : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$ le flot de X . On pose alors l'application

$$\psi : \begin{cases} \Sigma \times \mathbb{R} & \longrightarrow M \\ (x, t) & \longmapsto \Phi(x, t) \end{cases}.$$

Comme X n'est pas singulier, ψ est un difféomorphisme local. De plus, X est également causal, les courbes $c_x : t \rightarrow \psi(x, t)$ pour $x \in M$ sont donc causales inextensibles. Elles intersectent donc Σ exactement une fois. ψ est donc bijective, c'est donc un difféomorphisme. $\square$

3.2.3 Quelques lemmes causaux complémentaires

Nous démontrons deux lemmes permettant de reconstruire le futur atteignable d'un point d'une manière plus facile à manipuler.

Lemme 3.2.9. *Soit M un espace-temps plat singulier fortement causal.*

Pour tout $p \in M$,

$$\mathring{J}^\pm(p) \cap Z^\mp(M) = I^\pm(p).$$

Démonstration. Soit $p \in M$ de type $\kappa \geq 0$, comme M est fortement causal, il suffit de démontrer l'égalité dans une carte $(\mathcal{U}, \mathbb{E}_\kappa^{1,2}, \mathcal{V}, \phi)$ de M autour de p telle que $\mathcal{U}$ est causalement convexe dans M . On peut la choisir de sorte que $\mathcal{V}$ est causalement convexe dans $\mathbb{E}_\kappa^{1,2}$. On est ainsi ramené à démontrer le lemme dans le cas où M est un espace modèle $\mathbb{E}_\kappa^{1,2}$. Le calcul de $I^\pm$ et $J^\pm$ dans les espaces modèles fait dans le lemme 2.2.10 permet de conclure. $\square$

Lemme 3.2.10. *Soient M un espace-temps plat singulier globalement hyperbolique, $p \in M$ et soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de M convergeant vers p . On a alors :*

$$I^\pm(p) = \text{Int} \left(\bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq N} I^\pm(p_n) \right).$$

Démonstration. Démontrons le lemme pour $-$, la preuve pour $+$ étant similaire. D'après le lemme 3.1.51, le terme de droite contient $I^-(p)$ et est inclus dans $\mathring{J}^-(p) \cap Z^+(M)$. Or M est globalement hyperbolique donc fortement causal, d'après le lemme 3.2.9, on a donc

$$I^-(p) \subset \text{Int} \left(\bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq N} I^-(p_n) \right) \subset \mathring{J}^-(p) \cap Z^+(M) = I^-(p).$$

$\square$

Lemme 3.2.11. *Soient M un espace-temps plat singulier fortement causal, $p \in M$ et soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de M convergeant vers p .*

Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p \notin J^-(p_n)$ et si $p \in \text{Sing}_0(M)$, alors :

$$\bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq N} J^-(p_n) = J^-(p) \setminus \{p\}.$$

Démonstration. On procède de la même manière que pour la démonstration du lemme 3.2.9. $\square$

3.2.4 Surface de Cauchy lisse : existence et propriétés

Un résultat classique énonce qu'une partie acausale d'une variété lorentzienne est une sous-variété de classe $\mathcal{C}^0$ (et même Lipchitz). En particulier, une surface de Cauchy est une sous-variété $\mathcal{C}^0$. Le problème à présent est l'existence de surface de Cauchy $\mathcal{C}^k$ dans les espaces-temps globalement hyperboliques.

Définition 3.2.12 (Surface de type espace). *Soit M une variété lorentzienne. Une surface Σ de classe $\mathcal{C}^1$ est de type espace si la métrique induite sur Σ est non-dégénérée et définie positive.*

Seifert [Sei77] a été le premier à poser la question suivante :

Problème. *Soit M un espace-temps globalement hyperbolique, admet-il une surface de Cauchy de classe $\mathcal{C}^k$ pour $k \geq 1$? Cette surface peut-elle de plus être choisie de type espace ?*

Seifert donna une réponse positive pour M un espace-temps semi-riemannien mais la preuve proposée se révéla incorrecte. De nombreuses tentatives ont été consacrées à la résolution de ce problème, toutes ont été invalidées sauf les deux dernières : une de Bernal et Sanchez [BS03] et une autre de Fathi et Siconolfi [FS12].

Théorème 11 ([BS03], [FS12]). *Soit M une $\mathbb{E}^{1,2}$ -variété globalement hyperbolique, M admet une surface de Cauchy $\mathcal{C}^\infty$ de type espace.*

L'objet de cette section est d'étendre ce théorème aux espaces-temps plats singuliers.

Définition 3.2.13. *Soit M un espace-temps plat singulier globalement hyperbolique et soit Σ une surface de Cauchy de M .*

- Σ est essentiellement lisse (resp. essentiellement lisse par morceaux) si $\Sigma \cap \text{Reg}(M)$ est $\mathcal{C}^\infty$ (resp. $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux) ;
- Σ est essentiellement lisse (resp. essentiellement lisse par morceaux) et de type espace si $\Sigma \cap \text{Reg}(M)$ est lisse (resp. lisse par morceaux, resp. lisse) et de type espace.

Théorème 12. *Soit M un espace-temps plat singulier globalement hyperbolique, alors M admet une surface de Cauchy essentiellement lisse de type espace.*

Démonstration. Soit Σ_1 une surface de Cauchy $\mathcal{C}^0$ de M .

- Étape 1

Soit

$$\text{Sing}_{\geq 0}(M) = \bigsqcup_{i \in \Lambda_0} \Delta_i \bigsqcup_{i \in \Lambda_{>0}} \Delta_i$$

la décomposition du lieu singulier de M en composantes connexes avec $\forall i \in \Lambda_0, \Delta_i \subset \text{Sing}_0(M)$ et $\forall i \in \Lambda_{>0}, \Delta_i \subset \text{Sing}_{>0}(M)$. Pour tout $i \in \Lambda_{\geq 0}$, d'après le lemme 3.2.4, Δ_i est courbe causale inextensible de M et donc intersecte Σ_1 exactement une fois ; on pose alors $p_i = \Sigma_1 \cap \Delta_i$ le point d'intersection de Δ_i avec Σ_1 . Soit $i \in \Lambda_{\geq 0}$, on se donne

$$(\mathcal{U}_i, \mathbb{E}_{\alpha_i}^{1,2}, \mathcal{T}_i, \phi_i) \quad \mathcal{T}_i := \{\tau \in [\tau_i^-, \tau_i^+], \mathfrak{r} \leq R_i\}$$

une carte tubulaire au voisinage de p_i . Si $i \in \Lambda_0$, on pose

$$\mathbb{D}_i^- = \phi_i^{-1}(\{\tau = \tau_i^-, r \leq R\}) \quad \mathbb{D}_i^+ := \{\tau = \tau_i^+, r \leq R\}.$$

Dans ce cas, $I^-(\Sigma_1 \cap \mathcal{U}_i)$ est voisinage ouvert du rayon BTZ passé $J^-(p_i) \setminus \{p_i\}$ issu de p_i . Le passé de Σ_1 contient un voisinage de $\mathbb{D}_i^- \cap J^-(p_i)$ donc quitte à prendre un R_i plus petit, on peut supposer $\mathbb{D}_i^- \subset I^-(\Sigma_1)$; quitte à prendre R_i plus petit encore, nous pouvons supposer $\mathbb{D}_i^+ \subset J^+(p_i)$.

Comme $\Lambda_{\geq 0}$ est dénombrable, on peut construire par récurrence une famille de cartes tubulaires $(\mathcal{U}_i, \mathbb{E}_{\alpha_i}^{1,2}, \mathcal{T}_i, \phi_i)_{i \in \Lambda_{\geq 0}}$ telle que pour tout $i \in \Lambda_{\geq 0}$, $\mathcal{U}_i$ est disjoint de $\bigcup_{j \neq i} J^\pm(\mathcal{U}_j)$ et telle que

$$N = \left(\bigcup_{i \in \Lambda_0} J^+(\mathbb{D}_i^+) \cup J^-(\mathbb{D}_i^-) \right) \cup \left(\bigcup_{j \in \Lambda_{>0}} J^+(p_j) \cup J^-(p_j) \right)$$

est fermé. On pose alors $M' = \text{Reg}(M \setminus N)$.

Les diamants de M' sont compact et M' est causal, d'après le théorème 9, M' admet donc une surface de Cauchy $\mathcal{C}^0$. De plus M' est une $\mathbb{E}^{1,2}$ -variété donc une variété lorentzienne, le théorème 11 assure l'existence d'une surface Σ_2 de Cauchy de M' lisse et de type espace.

• Étape 2a

Il nous faut à présent prolonger Σ_2 en une surface de Cauchy putative de M . Commençons par prolonger Σ_2 aux singularités massives. Notons $\mathbb{D}_R$ le disque compact de rayon R dans $\mathbb{E}^2$ et $\mathbb{D}_R^* := \mathbb{D}_R \setminus \{0\}$ le disque épointé. Considérons la particule massive Δ_j passant par p_j pour un certain $j \in \Lambda_{\geq 0}$ et une carte tubulaire $(\mathcal{U}, \mathbb{E}_\alpha^{1,2}, \mathcal{T}, \phi)$ avec $\mathcal{T} = \{t \in [t^-, t^+], r \leq R\}$ et $p_j \in \mathcal{U}$. On peut supposer $t(\phi(p_j)) = 0$, $t^- = -t^+$ et $R = t^+$ de sorte que $\{t = t^\pm, r < R\}$ est exactement la base du cône $J^\pm(\phi(p_j))$ dans $\mathcal{T}$.

On considère la projection

$$\pi : \begin{cases} \phi((\Sigma_2 \cap \mathcal{U}) \cup \{p_j\}) & \longrightarrow \mathbb{D}_R \\ x & \longmapsto (r(x), \theta(x)) \end{cases}.$$

- D'une part, on remarque que π est continue ;
- d'autre part, pour $r_0 \in]0, R]$ et $\theta_0 \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, les courbes causales $\phi^{-1}(\{r = r_0, \theta = \theta_0, t \in]-r_0, r_0[\})$ sont inextensibles dans M' . Elles intersectent donc Σ_2 exactement une fois, on en déduit donc que π est bijective ;
- enfin, soit $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points de $\Sigma_2 \cap \mathcal{U}$ telle que $r \circ \phi(q_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Comme Σ_2 est coïncé entre $J^+(p_j)$ et $J^-(p_j)$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|t \circ \phi(q_n)| < r \circ \phi(q_n)$; donc $q_n \rightarrow p_j$. Par suite π^{-1} est continue et donc π est un homéomorphisme.

• Étape 2b

Prolongeons à présent Σ_2 au singularités BTZ. Soit p_i un point BTZ avec $i \in \Lambda_0$, nous avons un voisinage tubulaire $(\mathcal{U}_i, \mathbb{E}_0^{1,2}, \mathcal{T}_i, \phi_i)$ de p_i . La surface $\phi(\Sigma_2 \cap \mathcal{U})$ est prisonnière entre $\mathbb{D}_i^+$ et $\mathbb{D}_i^-$. De la même manière que précédemment, on montre que la projection

$$\pi : \phi(\Sigma_2 \cap \mathcal{U}) \rightarrow \mathbb{D}_R^*$$

est un homéomorphisme. Posons $f := \tau \circ \pi^{-1} : \mathbb{D}_R^* \rightarrow [\tau^-, \tau^+]$ de sorte que $\phi(\Sigma \cap \mathcal{U})$ s'identifie au graphe de f . Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points de $\mathbb{D}_R^*$ tendant vers 0. Par compacité, $(\tau(a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ admet des valeurs d'adhérence, si elle en admet deux, disons τ_a et τ_b avec $\tau_a < \tau_b$, alors, $(\tau_a, 0)$ appartient à l'ouvert $I^-(\pi^{-1}(a_n))$ une infinité de $n \in \mathbb{N}$; ainsi il existe $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $\pi^{-1}(a_n) \in I^-(\pi^{-1}(b_m))$. Or Σ_2 est acausale, c'est absurde et donc $\tau_a = \tau_b$. Par suite $(\tau(a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge et π^{-1} se prolonge continûment en une application

$$\mathbb{D}_R \rightarrow \phi(\Sigma_2 \cap \mathcal{U}) \cup \{q_i\}$$

qui est alors un homéomorphisme (pour un certain $q_i \in \Delta_i$).

On définit donc la surface essentiellement lisse et de type espace

$$\Sigma = \Sigma_2 \cup \{p_j : j \in \Lambda_{>0}\} \cup \{q_i : i \in \Lambda_0\} = \overline{\Sigma}_2.$$

• Étape 3

Montrons que Σ est une surface de Cauchy de M . Soit c une courbe causale future inextensible de M . Commençons par remarquer que N se décompose en

$$N = N^+ \cup N^- \quad \text{avec} \quad N^\pm = \bigcup_{i \in \Lambda_0} J^\pm(\mathbb{D}_i^\pm) \bigcup_{j \in \Lambda_{>0}} J^\pm(p_j).$$

Une courbe causale future entrant dans N^+ ne peut plus quitter N^+ et une courbe causale quittant N^- ne peut plus y revenir. Ainsi, $c = c^- \cup c^0 \cup c^+$, où c^-, c^0, c^+ sont les intersections de c avec $N^-, M \setminus N$ et N^+ respectivement.

- Si $c^0 = \emptyset$ alors $c \subset N$ donc

$$c \cap \Sigma_1 \subset N \cap \Sigma_1 = \{p_j : j \in \Lambda_{>0}\} = \Sigma \cap N.$$

c intersecte donc Σ exactement une fois à un p_j pour un certain $j \in \Lambda_{>0}$.

- Si $c^0 \neq \emptyset$, alors d'après le lemme 3.2.4, c^0 se décompose en une partie BTZ Δ et une partie non BTZ c^1 avec Δ dans le passé de c^1 . On a alors $c = c^- \cup \Delta \cup c^1 \cup c^+$.
 - * Si $c^1 \neq \emptyset$, alors c^1 est inextensible dans M' et intersecte donc Σ_2 et Σ , exactement une fois. Si $q_i \in \Delta$ pour un certain $i \in \Lambda_0$, alors $q_i \in J_M^-(\Sigma_2) \setminus \Sigma_2 = I^-(\Sigma_2)$. Cependant, $I^-(\Sigma_2)$ est ouvert et $q_i \in \overline{\Sigma_2}$, donc $I^-(\Sigma_2) \cap \Sigma_2 \neq \emptyset$ ce qui est absurde puisque Σ_2 est acausal dans M' . Finalement, $c \cap \Sigma = c^1 \cap \Sigma$ qui est un singleton.
 - * Si $c^1 = \emptyset$, alors Δ est une composante connexe de $\text{Sing}_0(M \setminus N)$. Ces composantes connexes contiennent exactement un des $(q_i)_{i \in \Lambda_0}$ donc $c \cap \Sigma = \Delta \cap \Sigma$ est un singleton.

□

Lemme 3.2.14. Soient M un espace-temps plat singulier globalement hyperbolique et Σ une surface de Cauchy de M essentiellement lisse par morceaux et de type espace. En notant $\mathbb{D}_R = \{r \leq R\} \subset \mathbb{E}^2$. Pour tout $p \in \Sigma$, il existe une carte $(\mathcal{U}, \mathbb{E}_\alpha^{1,2}, \mathcal{T}, \phi)$ au voisinage de p telle que

- $\mathcal{T} = \{\tau \in [\tau_1, \tau_2], \mathfrak{r} \leq R\}$ si $\alpha = 0$;
- $\mathcal{T} = \{t \in [t_1, t_2], r \leq R\}$ si $\alpha > 0$;
- $\Sigma \cap \mathcal{U} = \{(f(r, \theta), r, \theta) : (r, \theta) \in \mathbb{D}_R\}$ pour une certaine fonction $f : \mathbb{D}_R \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{D}_R$ et lisse par morceaux sur $\mathbb{D}_R^*$.

Démonstration. Soit $\alpha \geq 0$, dans une carte au voisinage de p localement modelé sur $\mathbb{E}_\alpha^{1,2}$, et soit $\pi : \mathbb{E}_\alpha^{1,2} \rightarrow \mathbb{E}_\alpha^2$ la projection verticale de $\mathbb{E}_\alpha^{1,2}$. Quitte à prendre $\mathcal{U}$ plus petit, $\mathcal{U}$ peut être supposé causalement convexe dans M , les droites verticales de $\mathcal{T}$ pouvant être prolongées en des courbes causales inextensibles de M intersectent alors $\Sigma' := \phi(\Sigma \cap \mathcal{U})$ exactement une fois et donc $\pi|_{\Sigma'}^{\mathbb{D}_R} : \phi(\Sigma \cap \mathcal{U}) \rightarrow \mathbb{D}_R$ est bijective, continue et est donc un homéomorphisme. On pose $f := t \circ (\pi|_{\Sigma'}^{\mathbb{D}_R})^{-1}$ si $\alpha > 0$ et $f := \tau \circ (\pi|_{\Sigma'}^{\mathbb{D}_R})^{-1}$ si $\alpha = 0$.

La surface Σ' est de type espace donc les plans tangents à $\text{Reg}(\phi(\Sigma \cap \mathcal{U}))$ sont toujours transverses à la direction de π qui est de type temps si $\alpha > 0$ et de type lumière si $\alpha = 0$. Par conséquent, f est lisse par morceaux sur $\mathbb{D}_R^*$.

□

La métrique riemannienne sur $\text{Reg}(\Sigma)$ induit une structure d'espace de longueur sur $\text{Reg}(\Sigma)$ et une fonction distance sur $\text{Reg}(\Sigma) \times \text{Reg}(\Sigma)$. La proposition suivante prolonge cette structure d'espace de longueur à Σ tout entier.

Proposition 3.2.15. Soit M un espace-temps plat singulier et soit Σ une surface de Cauchy essentiellement lisse et de type espace. Alors, la fonction distance sur $\text{Reg}(\Sigma) \times \text{Reg}(\Sigma)$ s'étend continûment à $\Sigma \times \Sigma$.

Démonstration. Il suffit de montrer que la structure d'espace de longueur sur $\text{Reg}(\Sigma)$ se prolonge au voisinage d'un point singulier. Nous distinguons deux cas de points singulier : BTZ et massif.

Soit $p \in \Sigma \cap \text{Sing}_0$, d'après le lemme 3.2.14, il suffit de considérer le graphe dans $\mathbb{E}_0^{1,2}$ d'une fonction $f : \mathbb{D}_R \rightarrow \mathbb{R}$ lisse. Il faut démontrer que pour $\theta_0 \in [0, 2\pi[$, la courbe $r \mapsto (f(r, \theta_0), r, \theta_0)$ est de longueur L finie. Rappelons que la métrique de $\mathbb{E}_0^{1,2}$ s'écrit :

$$-2d\tau dr + dt^2 + r^2 d\theta^2.$$

On a donc $1 - 2\frac{\partial\tau}{\partial r} \geq 0$ et

$$\begin{aligned} L &= \int_0^R \sqrt{1 - 2\frac{\partial\tau}{\partial r}} dr \\ &\leq \int_0^R \sqrt{1 + 1 - 2\frac{\partial\tau}{\partial r}} dr \\ &\leq \int_0^R \left(2 - 2\frac{\partial\tau}{\partial r}\right) dr \\ &\leq 2R - 2(\tau(R) - \tau(0)) \end{aligned}$$

Ainsi la distance induite par la métrique riemannienne sur $\text{Reg}(\Sigma)$ se prolonge continûment à p .

Soit $p \in \Sigma \cap \text{Sing}_\alpha$ pour un certain $\alpha > 0$, considérons de la même manière une paramétrisation locale de Σ donnée par le lemme 3.2.14 au voisinage de p . Il suffit de démontrer que la courbe de $\Sigma \cap \mathcal{U}$, $r \mapsto c(r) = (t(r), r, \theta_0)$ est de longueur L finie. Comme Σ est essentiellement lisse et de type espace, $1 - \left(\frac{\partial t}{\partial r}\right)^2 \geq 0$ et

$$\begin{aligned} M &= \int_0^R \sqrt{1 - \left(\frac{\partial t}{\partial r}\right)^2} dr \\ &\leq R \end{aligned}$$

Ainsi, la distance induite par la métrique riemannienne sur $\text{Reg}(\Sigma)$ se prolonge à p . $\square$

Remarque 3.2.16. *Fathi et Siconolfi [FS12] ont démontré l'existence de surfaces de Cauchy lisses dans un contexte plus large que celui des espaces-temps lorentziens. Cependant, leur résultat ne s'applique pas naïvement aux espaces-temps plats singuliers. Considérons M une variété différentielle, leur point de départ est un champs de cônes continu i.e. un choix continu de cônes dans $T_x M$ pour $x \in M$. Un espace-temps plat singulier admet un champ de cônes naturel associant à chaque point x l'ensemble des vecteurs causaux futurs partant de x . Cependant, comme la figure II.1 le montre, ce champs de cônes est **discontinu** en tout point singulier ! Il serait possible de construire un champ de cônes continu contenant celui des vecteurs causaux futurs. En supposant que ce nouveau champs de cônes est globalement hyperbolique (au sens de de Fathi et Siconolfi), on pourrait alors appliquer le théorème de Fathi et Siconolfi pour construire une surface de Cauchy lisse. Cette procédure serait peut être légèrement plus simple et est bien plus forte car elle autorise un contrôle sur la position et le plan tangent de la surface de Cauchy construite. Ayant besoin du lemme 3.2.14 dans la suite de ce travail, nous avons préféré ne pas proposer cette preuve alternative. Il serait cependant intéressant d'avoir une version plus générale du théorème de Fathi et Siconolfi qui s'appliquerait directement. Une piste pourrait être de remarquer que si le champs de cônes naturel d'un espace-temps plat singulier est discontinu, il est semi-continu dans le sens où la réunion des cônes limites lorsque l'on tend vers un point p est égal au cônes en p .*

3.3 Théorème de Choquet-Bruhat-Geroch

3.3.1 Cauchy-plongement et extension de Cauchy

Définition 3.3.1 (Cauchy-plongement). *Soient M et N deux espaces-temps plats singuliers globalement hyperboliques. Un Cauchy-plongement de M dans N est un $\mathbb{E}_A^{1,2}$ -morphisme injectif tel que l'image d'une surface de Cauchy de M est une surface de Cauchy de N .*

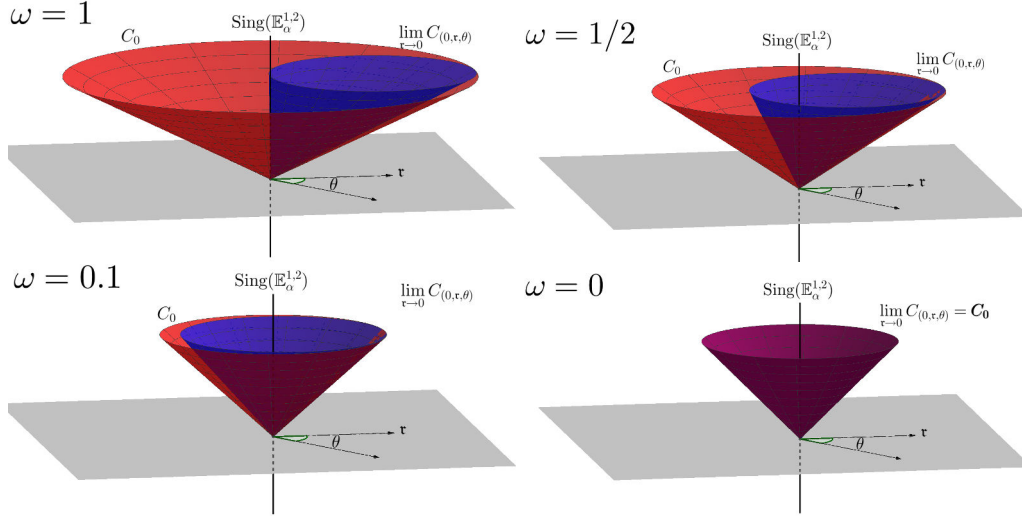


FIGURE II.1 – Cônes futurs et limites de cônes futurs dans l'espace tangent d'un point singulier. Nous dessinons les cônes des vecteurs causaux futurs dans $T_p \mathbb{E}_\alpha^{1,2}$ avec $\alpha = 2\pi\sqrt{1 - \omega^2}$ pour $p \in \text{Sing}(\mathbb{E}_\alpha^{1,2})$ en utilisant les coordonnées (τ, r, θ) . Le cône C_0 en rouge représente le cône des vecteurs causaux futurs issus de p et le cône bleu représente la limite radiale lorsque l'on tend vers p du cône des vecteurs causaux futurs. Lorsque $\omega = 0$ (i.e. $\alpha = 2\pi$), les deux cônes sont identiques, c'est-à-dire que le champ de cônes est continu.

N est alors une extension de Cauchy de M .

Lemme 3.3.2. Soient M et N deux espaces-temps plats singuliers globalement hyperboliques et soit $\phi : M \rightarrow N$ un $\mathbb{E}_A^{1,2}$ -morphisme injectif. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) Il existe une surface de Cauchy de M dont l'image par ϕ est une surface de Cauchy de N ;
- (ii) Pour toute surface de Cauchy Σ de M , son image $\phi(\Sigma)$ par ϕ est une surface de Cauchy de N .

Démonstration. (ii) $\Rightarrow$ (i) est évident, montrons (i) $\Rightarrow$ (ii). Soit Σ_1 une surface de Cauchy de M telle que $\phi(\Sigma_1)$ est une surface de Cauchy de N et soit Σ_2 une autre surface de Cauchy de M . Soit c une courbe causale inextensible de N chaque composante connexe de $\phi^{-1}(c \cap \phi(M))$ est une courbe causale inextensible de M . Ainsi :

$$\begin{aligned}
 \#c \cap \phi(\Sigma_2) &= \#\phi^{-1}(c \cap \phi(M)) \cap \Sigma_2 \\
 &= \#\phi^{-1}(c \cap \phi(M)) \cap \Sigma_1 \\
 &= \#c \cap \phi(\Sigma_1) \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

□

Définition 3.3.3. Soit M un espace-temps plat singulier globalement hyperbolique. Une extension de Cauchy de M est la donnée d'un espace-temps plat singulier globalement hyperbolique N et d'un plongement de Cauchy $M \rightarrow N$.

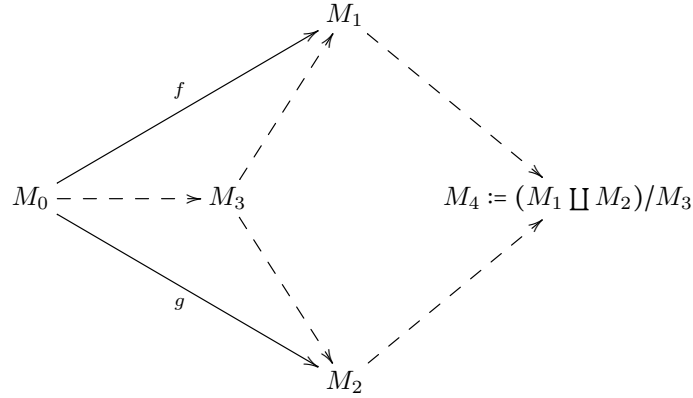
3.3.2 Existence et unicité de l'extension de Cauchy maximale : énoncé et idée de la preuve

Théorème 13 (Extension Cauchy-maximale). Soit M un espace-temps singulier globalement hyperbolique. Il existe une extension de Cauchy de M maximale, cette extension est de plus unique

à isomorphisme près.

La démonstration de ce théorème proposée ici suit la méthode de Sbierski [Sbi15] qui est un raffinement des arguments originaux de Choquet-Bruhat et Geroch. Cette dernière utilisait l'axiome du choix sous la forme du lemme de Zorn, Sbierski a montré qu'il était possible avec un peu de précaution et en changeant légèrement l'ordre des arguments de se passer de l'axiome du choix.

L'essence de la démonstration est, étant données deux extensions de Cauchy M_1 et M_2 d'un espace-temps globalement hyperbolique M_0 , de contruire une sous-extension de Cauchy commune maximale à $M_0 \rightarrow M_1$ et à $M_0 \rightarrow M_2$ puis de coller M_1 et M_2 le long de cette extension commune maximale pour obtenir un espace-topologique M_4 . Il faut démontrer que ce dernier est bien un espace topologique séparé qui héritera alors des $\mathbb{E}_{\geq 0}^{1,2}$ -structures de M_1 et M_2 ; enfin, il faut également démontrer que M_4 est une extension de Cauchy de M_1 et de M_2 .



Cela démontre que la famille des extensions de Cauchy de M_0 est filtrante à droite et donc admet une limite inductive¹ dans la catégorie des espaces topologiques séparés muni d'une $\mathbb{E}_{\geq 0}^{1,2}$ -structure.

Il reste alors à démontrer que cette limite inductive est dénombrable à l'infinie (c'est-à-dire qu'elle est un espace-temps) et que le plongement naturel de M_0 dans cette limite inductive est bien un plongement de Cauchy. Une autre formulation plus pédante consisterait à dire que la catégorie dont les objets sont les espaces-temps singuliers globalement hyperboliques et dont les morphismes sont les plongements de Cauchy a une somme amalgamée et une limite inductive.

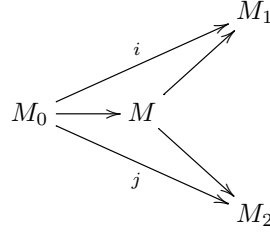
La séparation topologique du recollement de deux extensions de Cauchy provenait, dans les articles originaux de Choquet-Bruhat et Geroch, de l'unicité locale de la solution des Équations d'Einstein. La description des espaces-temps ici évite soigneusement les Équations d'Einstein avec une description locale algébrique de $\mathbb{E}_A^{1,2}$ -structure, l'unicité locale s'exprime alors en terme de morphismes de $\mathbb{E}_A^{1,2}$ -variétés. Il s'agit essentiellement de montrer qu'il n'existe pas de morphisme « déraisonnable » entre les ouverts des espaces modèles : c'est-à-dire que la structure singulière $(\text{Isom}(\mathbb{E}^{1,2}), \mathbb{E}^{1,2}, \mathbb{E}_A^{1,2})$ est analytique. Cela a été démontré précédemment, voir propriété 2.2.17. Nous développons alors la construction du produit amalgamée dans la catégorie des espaces-temps plats singuliers globalement hyperboliques et démontrons les propriétés attendues de la limite inductive des extensions de Cauchy.

3.3.3 Sous-extensions de Cauchy communes

Définition 3.3.4 (Sous-extension de Cauchy commune). *Soient M_0 un espace-temps plat singulier globalement hyperbolique et soient $M_0 \xrightarrow{i} M_1$ et $M_0 \xrightarrow{j} M_2$ deux extensions de Cauchy de M_0 .*

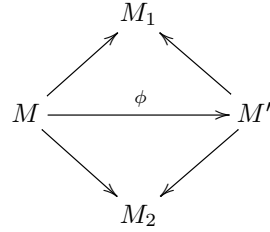
1. En fait, l'existence d'une limite inductive nécessite également de montrer que l'on peut trouver un petit squelette de la catégorie des $\mathbb{E}_{\geq 0}^{1,2}$ -variétés globalement hyperboliques c'est-à-dire une sous-catégorie pleine contenant un représentant de chaque classe d'isomorphisme et dont les morphismes forment un ensemble. Comme toutes les $\mathbb{E}_{\geq 0}^{1,2}$ -variétés globalement hyperboliques ont la puissance du continu c'est un fait aisé à vérifier.

Une sous-extension de Cauchy commune à M_1 et M_2 est une $\mathbb{E}_{\geq 0}^{1,2}$ -variété M munie de plongements de Cauchy $M_0 \rightarrow M$; $M \xrightarrow{a} M_1$; $M \rightarrow M_2$ tels que le diagramme suivant commute :



Définition 3.3.5 (Morphisme de sous-extensions communes). Soient M_0 un espace-temps plat singulier globalement hyperbolique et soient $M_0 \xrightarrow{i} M_1$ et $M_0 \xrightarrow{j} M_2$ deux extensions de Cauchy de M_0 . Soient M et M' deux sous-extensions communes à M_1 et M_2 .

Un morphisme de M vers M' est un morphisme de $\mathbb{E}_{\geq 0}^{1,2}$ -variétés $M \xrightarrow{\phi} M'$ tel que le diagramme suivant commute :



Si le morphisme ϕ est bijectif, alors M et M' sont dit équivalents.

Définition 3.3.6 (Sous-extension commune maximale). Soient M_0 un espace-temps plat singulier globalement hyperbolique et soient $M_0 \rightarrow M_1$ et $M_0 \rightarrow M_2$ deux extensions de Cauchy de M_0 . Soit M une sous-extension commune à M_1 et M_2 .

M est maximal si pour toute sous-extension M' commune à M_1 et M_2 , et tout morphisme de sous-extension commune $\phi : M \rightarrow M'$ est bijectif.

Lemme 3.3.7. Soit $M \xrightarrow{\phi} N$ une extension de Cauchy d'un espace-temps plat singulier M globalement hyperbolique connexe. Si A, B sont deux ouverts de N contenant $\phi(M)$ et tels que les inclusions naturelles $\phi(M) \rightarrow A$ et $\phi(M) \rightarrow B$ sont des plongements de Cauchy, alors $A \cap B$ est connexe.

Démonstration. Posons Σ une surface de Cauchy de M comme M est connexe, Σ est connexe. On remarque que $M \xrightarrow{\phi} A \cap B$ est un plongement de Cauchy et que tout point de $A \cap B$ est relié à $\phi(\Sigma)$ par une courbe causale. En particulier, $A \cap B$ est connexe par arc. $\square$

Proposition 3.3.8 (PGCD de deux extensions de Cauchy). Soient M_0 un espace-temps plat singulier globalement hyperbolique et soient $M_0 \xrightarrow{i_1} M_1$ et $M_0 \xrightarrow{i_2} M_2$ deux extensions de Cauchy de M_0 .

Il existe une sous-extension de Cauchy $M_1 \wedge M_2$ commune à M_1 et M_2 maximale parmi les sous-extensions de Cauchy communes à M_1 et M_2 . De plus, $M_1 \wedge M_2$ est unique à équivalence de sous-extensions communes près.

Démonstration. Considérons l'ensemble $\mathcal{E}$ des couples (M, ϕ) tels que

- (a) $M_0 \subset M \subset M_1$ et l'inclusion $M_0 \rightarrow M$ est un plongement de Cauchy ;
- (b) il existe $\phi_M : M \rightarrow M_2$ tel que $\phi_M \circ i_1 = i_2$.

On pose $M_1 \wedge M_2 := \bigcup_{M \in \mathcal{E}} M$ et

$$\phi : \begin{cases} M_1 \wedge M_2 & \longrightarrow & M_2 \\ x \in M & \longmapsto & \phi_M(x) \end{cases} .$$

ϕ est bien définie car pour tous couples $(M, \phi_M), (M', \phi_{M'}) \in \mathcal{E}$, $M \cap M'$ est connexe d'après le lemme 3.3.7 et les $\mathbb{E}_{\geq 0}^{1,2}$ -morphisms ϕ_M et $\phi_{M'}$ étant égaux sur l'ouvert $i(M_0)$, ils sont égaux sur $M \cap M'$ d'après la proposition 1.1.29 et $(M_1 \wedge M_2, \phi)$ est alors dans $\mathcal{E}$ et maximal dans $\mathcal{E}$.

Si (N, a, b, c) est une sous-extension commune à $M_0 \xrightarrow{i_1} M_1$ et $M_0 \xrightarrow{i_2} M_2$ alors $(b(M), c \circ b^{-1}) \in \mathcal{E}$, donc $b(M) \subset M_1 \wedge M_2$ et $c \circ b^{-1} = \phi_{b(M)}$. Ainsi $(M_1 \wedge M_2, \phi)$ est maximal. En particulier, si N est maximal alors N est équivalent à M ; on en déduit que M est unique à équivalence près. $\square$

3.3.4 Sur-extensions de Cauchy communes

Définitions

Définition 3.3.9 (Sur-extension de Cauchy commune). *Soit M_0 un espace-temps plat singulier globalement hyperbolique et soient $M_0 \xrightarrow{i} M_1$ et $M_0 \xrightarrow{j} M_2$ deux extensions de Cauchy de M_0 .*

Une sur-extension de Cauchy commune à M_1 et M_2 est une $\mathbb{E}_{\geq 0}^{1,2}$ -variété M muni de plongements de Cauchy $M_1 \xrightarrow{a} M$; $M_2 \rightarrow M$ tels que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} & M_1 & \\ i \nearrow & & \searrow \\ M_0 & & M \\ j \searrow & & \nearrow \\ & M_2 & \end{array}$$

Définition 3.3.10 (Morphisme de sur-extensions communes). *Soient M_0 un espace-temps plat singulier globalement hyperbolique et $M_0 \xrightarrow{i} M_1$ et $M_0 \xrightarrow{j} M_2$ deux extensions de Cauchy de M_0 . Soient M et M' deux sur-extensions communes à M_1 et M_2 .*

Un morphisme de sur-extensions de M vers M' est un morphisme de $\mathbb{E}_{\geq 0}^{1,2}$ -variétés $M \xrightarrow{\phi} M'$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} & M_1 & \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ M & \xrightarrow{\phi} & M' \\ & \nwarrow \quad \nearrow & \\ & M_2 & \end{array}$$

Si le morphisme ϕ est bijectif, alors M et M' sont dit équivalents.

Définition 3.3.11. *Soient M_0 un espace-temps plat singulier globalement hyperbolique et $M_0 \xrightarrow{i} M_1$ et $M_0 \xrightarrow{j} M_2$ deux extensions de Cauchy de M_0 . Soient M et M' deux sur-extensions communes à M_1 et M_2 .*

Une sur-extension M commune à M_0 et M_1 est minimale si pour toute sur-extension M' commune à M_0 et M_1 , il existe un morphisme de sur-extensions $M \rightarrow M'$.

Définition 3.3.12. *Soient M_0 un espace-temps plat singulier globalement hyperbolique et $M_0 \xrightarrow{i} M_1$ et $M_0 \xrightarrow{j} M_2$ deux extensions de Cauchy de M_0 . On pose*

$$M_1 \vee M_2 := (M_1 \coprod M_2) / \sim$$

avec $p \sim q$ s'il existe $x \in M_1 \wedge M_2$ tel que $i(x) = p$ et $j(x) = q$ ou $j(x) = q$ et $i(x) = p$.

Proposition 3.3.13 (PPCM de deux extensions de Cauchy). *Soient M_0 un espace-temps plat singulier globalement hyperbolique et soient $M_0 \xrightarrow{i} M_1$ et $M_0 \xrightarrow{j} M_2$ deux extensions de Cauchy de M_0 .*

$M_1 \vee M_2$ est l'unique sur-extension commune minimale à M_1 et M_2 à équivalence près.

La preuve de cette dernière propriété fait l'objet du reste de cette section et sera achevée à la fin de la section.

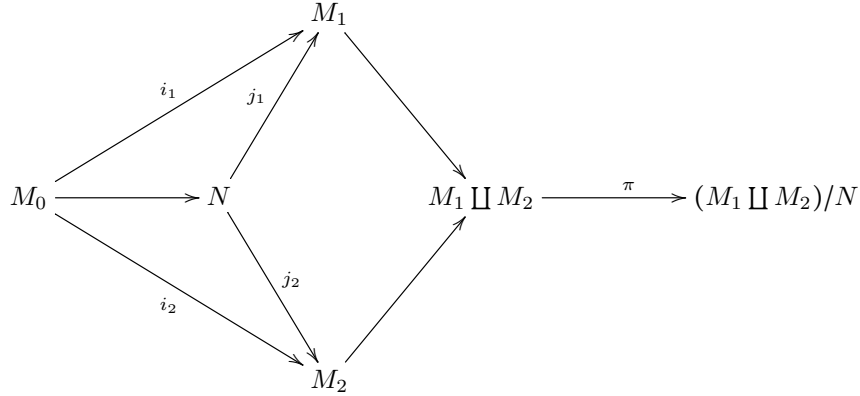
Démonstration que $M_1 \vee M_2$ est séparé

Dans la suite de cette section, on se donne M_0 un espace-temps plat singulier globalement hyperbolique, $M_0 \xrightarrow{i_1} M_1$ et $M_0 \xrightarrow{i_2} M_2$ deux extensions de Cauchy de M_0 . On se donne N une sous-extension commune à M_1 et M_2 munis de ses plongements de Cauchy $j_1 : M_1 \wedge M_2 \rightarrow M_1$, $j_2 : M_1 \wedge M_2 \rightarrow M_2$. On se donne une surface de Cauchy Σ_0 de M_0 , on pose Σ son image dans N , Σ_1 son image dans M_1 et Σ_2 son image dans M_2 .

Enfin on pose

$$\pi : M_0 \coprod M_1 \rightarrow (M_1 \coprod M_2)/N =: M$$

la projection naturelle. Le diagramme suivant résume la situation.



Par ailleurs, on introduit

$$C := \{(p, q) \in M_1 \times M_2 \mid \pi(q) \text{ et } \pi(p) \text{ non séparés}\},$$

si $(p, q) \in C$ sur dit que p et q sont correspondants.

Remarque 3.3.14. *Soient $p, q \in M_1 \coprod M_2$, si $\pi(p)$ et $\pi(q)$ sont non séparés alors on est dans exactement l'une des situations suivantes :*

- (a) $p = q$
- (b) il existe $x \in N$ tel que $p = j_1(x)$ et $q = j_2(x)$;
- (c) il existe $x \in N$ tel que $p = j_2(x)$ et $q = j_1(x)$;
- (d) $p \in \partial_{M_1} j_1(N)$ et $q \in \partial_{M_2} j_2(N)$
- (e) $q \in \partial_{M_1} j_1(N)$ et $p \in \partial_{M_2} j_2(N)$

Lemme 3.3.15. *Soit M un espace-temps plat singulier globalement hyperbolique de surface de Cauchy Σ , soit $M \xrightarrow{i} N$ une extension de Cauchy de M et soit $p \in M$. Si $p \in J_M^+(\Sigma)$, alors :*

$$i(J_M(\Sigma, p)) = J_N(i(\Sigma), i(p)).$$

Démonstration. Notons $p' := i(p)$, $\Sigma' := i(\Sigma)$, $K := J_M(\Sigma, p)$, $K' = i(K)$ et $K'' := J_N(i(\Sigma), i(p))$. L'inclusion $K' \subset K''$ est claire, montrons l'inclusion $K'' \subset K'$. Soit $q \in K''$, il existe une courbe causale passée $c : [0, 1] \rightarrow N$ telle que $c(0) = p'$ et $c(1) = q$ et on pose

$$I = \{s \in [0, 1] \mid c([0, s]) \subset K'\}.$$

Comme K est compact, K' est compact et donc $c^{-1}(K')$ est fermé. Par suite I est fermé et on se donne $s_1 := \max I$. Comme $i(M)$ est ouvert dans N , si $s_1 < 1$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $s \in [0, s_1 + \varepsilon]$, $c(0, s_1 + \varepsilon] \subset N$. On montre aisément que $i \circ c^{-1}([0, s_1 + \varepsilon]) \subset K$ et donc que $(s_1 + \varepsilon) \in I$. On en déduit donc que $s_1 = 1$ et que $q \in K'$. $\square$

Lemme 3.3.16. *Soit M un espace-temps plat singulier globalement hyperbolique de surface de Cauchy Σ , soit $M \xrightarrow{i} N$ une extension de Cauchy de M et soit $p \in \partial i(M) \cap J^+(i(\Sigma))$.*

Si $p \in \text{Sing}_{>0}(M)$ alors

$$I_N^-(p) \cap I_N^+(i(\Sigma)) \subset i(M),$$

et si $p \in \text{Sing}_0(M)$ alors

$$J_N(i(\Sigma), p) \setminus \{p\} \subset i(M).$$

Démonstration. Considérons une suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de $i(M)$ tendant vers p , on remarque que

$$\bigcup_{N \geq 0} \bigcap_{n \geq N} J_N^-(\Sigma, p_n)$$

contient $K_N^-(p) \cap J^+(\Sigma)$ et est inclus dans $i(M)$ d'après le lemme 3.3.15. La proposition 3.2.5 donne alors le résultat. $\square$

Lemme 3.3.17. *Soient $p \in \partial j_1(N) \cap J^+(\Sigma_1)$ et $q \in \partial j_2(N) \cap J^+(\Sigma_2)$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) $(p, q) \in C$

(ii) $j_2 \circ j_1^{-1}$ induit une bijection

$$K^-(p) \cap J^+(\Sigma_1) \xrightarrow{j_2 \circ j_1^{-1}} K^-(q) \cap J^+(\Sigma_2).$$

Démonstration.

- Supposons $(p, q) \in C$, et considérons une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in N^{\mathbb{N}}$ telle que $j_1(a_n) \rightarrow p$ et $j_2(a_n) \rightarrow q$. Les lemmes 3.2.10 et 3.3.15 appliqués aux suites $(j_1(a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(j_2(a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ montrent que $j_2 \circ j_1^{-1}$ induit une bijection

$$I^-(p) \cap J^+(\Sigma_1) \longrightarrow I^-(q) \cap J^+(\Sigma_2).$$

Ainsi, $I^-(p)$ est vide si et seulement si $I^-(q)$ est vide et donc que p est de type BTZ si et seulement si q est de type BTZ.

- Si p n'est pas un point BTZ, alors $K^-(p) = I^-(p)$ et $K^-(q) = I^-(q)$ et donc $j_2 \circ j_1^{-1}$ induit une bijection

$$K^-(p) \cap J^+(\Sigma_1) = I^-(p) \cap J^+(\Sigma_1) \longrightarrow I^-(q) \cap J^+(\Sigma_2) = K^-(q) \cap J^+(\Sigma_2).$$

- Si q est un point BTZ, alors $K^-(p) = J^-(p) \setminus \{p\}$ et $K^-(q) = J^-(q) \setminus \{q\}$. Les lemmes 3.2.11 et 3.3.15 appliqués aux suites $(j_1(a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(j_2(a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ montrent que $j_2 \circ j_1^{-1}$ induit une bijection

$$K^-(p) \cap J^+(\Sigma_1) = J^-(p) \setminus \{p\} \cap J^+(\Sigma_1) \longrightarrow J^-(q) \setminus \{q\} \cap J^+(\Sigma_2) = K^-(q) \cap J^+(\Sigma_2).$$

2. On suppose que $j_2 \circ j_1^{-1}$ induit une bijection $K^-(q) \cap J^+(\Sigma_1) \xrightarrow{j_2 \circ j_1^{-1}} K^-(q) \cap J^+(\Sigma_1)$.

On se donne une suite croissante $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in N^{\mathbb{N}}$ telle que $j_1(a_n) \rightarrow p$. Comme $(j_2(a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante majorée par q dans M_2 qui est globalement hyperbolique. Elle converge donc vers un certain $q' \in J(\Sigma_2, q)$, on remarque qu'alors $(p, q') \in C$ donc en appliquant le point 1., on en déduit que $j_2 \circ j_1^{-1}$ induit une bijection

$$K^-(q) \cap J^+(\Sigma_1) \xrightarrow{j_2 \circ j_1^{-1}} K^-(q') \cap J^+(\Sigma_2)$$

et donc $K^-(q) \cap J^+(\Sigma_1) = K^-(q') \cap J^+(\Sigma_2)$. Or $x \mapsto K^-(x)$ est injective d'après le corollaire 3.2.6 donc $q = q'$.

Finalement, la suite $j_1 \circ a$ converge vers p et $j_2 \circ a$ converge vers q , donc $(p, q) \in C$.

□

Corollaire 3.3.18. *Si $p \in \partial M_1$, alors p a au plus un point correspondant q . De plus si $(p, q) \in C$ et $p \in \text{Sing}_\alpha(M_1)$, alors $\text{Sing}_\alpha(M_2)$.*

Corollaire 3.3.19. *Soit $(p, q) \in C$, l'application $f := j_2 \circ j_1^{-1}$ se prolonge continûment en p en posant $f(p) = q$.*

Proposition 3.3.20. *S'il existe $(p, q) \in C$ tels que $J_{M_1}(\Sigma_1, p) \setminus \{p\} \subset j_1(N)$; alors N n'est pas maximale parmi les sous-extensions de Cauchy de M_1 et M_2 .*

Démonstration. Par simplicité et sans perte de généralité, on peut supposer que $M_0 \subset N \subset M_1$ et que j_1 est l'inclusion naturelle. On pose $f := j_2 \circ j_1^{-1} : N \rightarrow M_2$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+$ tel que $p \in \text{Sing}_\alpha(M_1)$. Comme j_2 et j_1 sont des $\mathbb{E}_{\geq 0}^{1,2}$ -plongement, f est un $\mathbb{E}_{\geq 0}^{1,2}$ -isomorphisme sur son image et un homéomorphisme local. Considérons $(\mathcal{U}_1, \mathbb{E}_\alpha^{1,2}, \mathcal{V}_1, \phi_1)$ une carte de M_1 au voisinage de p et $(\mathcal{U}_2, \mathbb{E}_\alpha^{1,2}, \mathcal{V}_2, \phi_2)$ une de carte de M_2 au voisinage de q . Quitte à prendre $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$ plus petit, on peut supposer que $\mathcal{V}_1$ et $\mathcal{V}_2$ sont des diamants ouverts de $\mathbb{E}_\alpha^{1,2}$, que $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$ sont causalement convexes et que $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$ sont inclus dans $\dot{J}^+(\Sigma_1)$ et $\dot{J}^+(\Sigma_2)$ respectivement.

- f se prolonge continûment à p en posant $f(p) = q$ d'après le Corollaire 3.3.19, on note $\bar{f}$ le prolongement de f . On peut donc choisir $\mathcal{U}_1$ de sorte que $f(\mathcal{U}_1 \cap N) \subset \mathcal{U}_2$.
- $N \cap \mathcal{U}_1$ est un ouvert contenant $J_{\mathcal{U}_1}^-(\phi_1(p))$ par hypothèse, il existe donc une surface acausale connexe Σ' de $\mathcal{U}_1$ inclus dans $N \cap \mathcal{U}_1$ et contenant p . On se donne une telle surface acausale Σ'_1 , on note alors D_1 l'intérieur de son développement de Cauchy dans $\mathcal{U}_1$. On remarque que $\Sigma'_2 := \bar{f}(\Sigma'_1)$ est acausale dans M_2 et on note D_2 l'intérieur du développement de Σ'_2 dans $\mathcal{U}_2$.
- $\mathcal{W}_1 := D_1 \cap N$ (resp. $\mathcal{W}_2 := D_2 \cap f(N)$) est un ouvert connexe causalement convexe dans M_1 (resp. M_2).

En effet, D_1 et N sont des ouverts causalement convexes dans M_1 donc il en va de même pour leur intersection. Soient $x_1, x_2 \in D_1 \cap N$, on se donne une courbe causale inextensible c_1 (resp. c_2) de D_1 passant par x_1 (resp. x_2). Les deux courbes c_1 et c_2 intersectent Σ'_1 . Or N est causalement convexe dans M_1 donc les courbes c_1 et c_2 sont incluses dans N . De plus, Σ'_1 est connexe, il existe donc une courbe de Σ_1 reliant $c_1 \cap \Sigma'_1$ à $c_2 \cap \Sigma'_1$, et donc il existe une courbe de $N \cap D_1$ reliant x_1 à x_2 .

On démontre de la même manière que $\mathcal{W}_2$ est connexe et causalement convexe.

- $\mathcal{W}_1 = \mathcal{U}_1 \cap f^{-1}(\mathcal{W}_2)$.

Commençons par démontrer l'inclusion $\subset$. Soit $x \in \mathcal{W}_1$, comme $f(\mathcal{U}_1) \subset \mathcal{U}_2$, $f(x) \in \mathcal{U}_2$. On se donne une courbe causale inextensible c de $\mathcal{U}_2$ passant par $f(x)$. Comme $f(N)$ est causalement connexe dans M_2 , $c_1 := c \cap f(N)$ est connexe, c'est donc une courbe causale inextensible de $f(N) \cap \mathcal{U}_2$. De plus $f : N \rightarrow f(N)$ est un isomorphisme, donc $f^{-1}(c_1)$ est

une courbe causale inextensible de $N \cap f^{-1}(\mathcal{U}_2)$. Or $\mathcal{U}_1$ est causalement convexe dans M_1 donc $c_2 := \mathcal{U}_1 \cap f^{-1}(c_1)$ est une courbe causale inextensible de $\mathcal{U}_1 \cap f^{-1}(\mathcal{U}_2 \cap f(N))$, et comme $f(\mathcal{U}_1) \subset \mathcal{U}_2$, c_2 est alors une courbe causale inextensible de $\mathcal{U}_1 \cap N$ passant par x . On prolonge c_2 en une courbe causale $c_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{U}_1$ inextensible dans $\mathcal{U}_1$. Comme $x \in D_1$, c_3 intersecte Σ'_1 , il y a alors deux cas :

- ou bien $c_3 \cap \Sigma'_1 = \{p\} = \{c_3(s_0)\}$ auquel cas pour tout $s < s_0$, $c_3(s) \in N \cap \mathcal{U}_1$ car $J(\Sigma_1, p) \setminus \{p\} \subset N$ par hypothèse (B) ; ainsi, d'une part,

$$c_3[-\infty, s_0] \subset \mathcal{U}_1 \cap N \cup \{p\} \quad c_3[-\infty, s_0[\subset \mathcal{U}_1 \cap N$$

et d'autre part c est fermé donc $f(c_3[-\infty, s_0]) \subset c$ et donc $\bar{f}(c_3[-\infty, s_0]) \subset c$ et donc $q \in c \cap \Sigma'_2$;

- ou bien $c_3 \cap \Sigma'_1 \subset N \cap \mathcal{U}_1$, or $c_3 \cap N = c_2$ car c_2 est inextensible et $N \cap \mathcal{U}_1$ est causalement convexe dans M_1 , donc $c_3 \cap \Sigma'_1 = \{c - 3(s_0)\} \subset \mathcal{U}_1 \cap N$ et $f(c_3(s_0)) \in c \cap \Sigma'_2$.

Dans tous les cas, c intersecte Σ'_2 , on en déduit donc que x est dans D_2 et donc que x est dans $\mathcal{W}_2$.

L'inclusion inverse se démontre de la même manière.

- Comme $\mathcal{W}_1$ est connexe et inclus dans $\mathcal{U}_1 \cap f^{-1}(\mathcal{U}_2 \cap f(N))$, on peut se donner $g \in \text{Isom}(\mathbb{E}_\alpha^{1,2})$ tel que $f|_{\mathcal{W}_1} = \phi_2^{-1} \circ g \circ \phi_1|_{\mathcal{W}_1}$. Comme $\mathcal{W}_1 = D_1 \cap N$, on peut poser

$$\tilde{f} : \begin{cases} N \cup D_1 & \longrightarrow & M_2 \\ x \in N & \longmapsto & f(x) \\ x \in D_1 & \longmapsto & \phi_2^{-1} \circ g \circ \phi_1(x) \end{cases},$$

- Σ_1 est une surface de Cauchy de $N \cup D_1$.

En effet, considérons une courbe c future causale inextensible de $N \cup D_1$, il suffit de montrer que $c \cap N$ est non vide de sorte que $c \cap N$ est une courbe causale inextensible de N qui donc intersecte Σ_1 . Comme $\mathcal{U}_1$ causalement convexe dans M_1 et comme D_1 est causalement convexe dans $\mathcal{U}_1$ alors D_1 est causalement convexe dans M_1 . Ainsi, ou bien $c \cap D_1$ est vide et donc $c \subset N$ et donc à fortiori $c \cap N \neq \emptyset$, ou bien $c \cap D_1 \neq \emptyset$ est une courbe causale inextensible dans D_1 qui intersecte alors Σ'_1 en un certain $c(s_0)$. On démontre de la même manière que précédemment qu'alors pour tout $s < s_0$, $c(s) \in N$ et donc que $c \cap N$ est non vide. Dans tous les cas, $c \cap \Sigma_1 \neq \emptyset$.

Ainsi, en notant $\tilde{j}_1 : N \cup D_1 \rightarrow M_1$ l'inclusion naturelle, $(N \cup D_1, \tilde{j}_1, \tilde{f})$ est une sous-extension de Cauchy de $M_0 \rightarrow M_1$ et $M_0 \rightarrow M_2$. De plus l'inclusion naturelle $N \rightarrow N \cup D_1$ est un morphisme non bijectif de sous-extension, donc N n'est pas maximal. $\square$

Pour compléter la preuve de la proposition 3.3.13, il nous suffit alors de construire un couple de points (p, q) non séparés dont l'intégralité du passé causal au dessus d'une surface de Cauchy de M_0 est dans $M_1 \wedge M_2$. C'est l'objet des lemmes suivants.

Proposition 3.3.21. *D'une part, $C_1 := \{p \in \partial j_1(N) \mid \exists q, (p, q) \in C\}$ est un ouvert de $\partial j_1(N)$ et d'autre part C est un fermé de $\partial j_1(N) \times \partial j_2(N)$.*

Démonstration. Par simplicité et sans perte de généralité, on peut supposer que $M_0 \subset N \subset M_1$ et que j_1 est l'inclusion naturelle. On se donne $(p, q) \in C$. On pose $f := j_2 \circ j_1^{-1} : N \rightarrow M_2$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+$ tel que $p \in \text{Sing}_\alpha(M_1)$. Comme j_2 et j_1 sont des $\mathbb{E}_{\geq 0}^{1,2}$ -plongement, f est un $\mathbb{E}_{\geq 0}^{1,2}$ -isomorphisme sur son image et un homéomorphisme local. Considérons $(\mathcal{U}_1, \mathbb{E}_\alpha^{1,2}, \mathcal{V}_1, \phi_1)$ une carte de M_1 au voisinage de p et $(\mathcal{U}_2, \mathbb{E}_\alpha^{1,2}, \mathcal{V}_2, \phi_2)$ une de carte de M_2 au voisinage de q .

- f se prolonge continûment à p en posant $f(p) = q$ d'après le Corollaire 3.3.19, on note $\bar{f}$ le prolongement de f . On peut donc choisir $\mathcal{U}_1$ de sorte que $f(\mathcal{U}_1 \cap N) \subset \mathcal{U}_2$.

- Il existe un voisinage ouvert connexe $\mathcal{W}$ de p inclus dans $\mathcal{U}_1$ tel que $\mathcal{W} \cap N$ est connexe et $f(\mathcal{W} \cap N) \subset \mathcal{U}_2$.

On commence par remarquer que $(\bar{f})^{-1}(\mathcal{U}_2)$ est un ouvert contenant p , on se donne $\mathcal{V}$ un ouvert connexe de $N \cup \{p\} \cap \mathcal{U}_1$ inclus dans $(\bar{f})^{-1}(\mathcal{U}_2)$, puis on se donne $\mathcal{V}'$ un ouvert de $\mathcal{U}_1$ tel que $\mathcal{V} \cap (N \cup \{p\}) = \mathcal{V}$ et on pose $\mathcal{W}$ la composante connexe de p dans $\mathcal{V}'$. Comme $\mathcal{V}$ est connexe, $\mathcal{V} \subset \mathcal{W}$ et donc $\mathcal{W} \cap (N \cup \{p\}) = \mathcal{V}$ est connexe. Enfin $\mathcal{V} \setminus \{p\}$ est connexe, donc $\mathcal{W} \cap N$ est connexe.

- Comme $\mathcal{W} \cap N$ est connexe et inclus dans $\mathcal{U}_1 \cap f^{-1}(\mathcal{U}_2 \cap f(N))$, on peut se donner $g \in \text{Isom}(\mathbb{E}_\alpha^{1,2})$ tel que $f|_{\mathcal{W} \cap N} = \phi_2^{-1} \circ g \circ \phi_1|_{\mathcal{W} \cap N}$. On a $g^{-1}\mathcal{U}_2 \supset \phi_1(\mathcal{W} \cap N)$, on se donne alors $\mathcal{W}'$ la composante connexe de $\mathcal{W} \cap N$ dans $\mathcal{W} \cap \phi_1^{-1}(g^{-1}\mathcal{U}_2)$ de sorte que la fonction

$$\tilde{f}: \begin{cases} N \cup \mathcal{W}' & \longrightarrow M_2 \\ x \in N & \longmapsto f(x) \\ x \in \mathcal{W}' & \longmapsto \phi_2^{-1} \circ g \circ \phi_1(x) \end{cases}$$

est bien définie.

- On remarque que $(\mathcal{W}' \cap \partial N) \times \tilde{f}(\mathcal{W}' \cap \partial N)$ est un ouvert inclus dans C et contient (p, q) , et donc que C est ouvert.

Montrons à présent que C est fermé. Soit $(p_n, q_n) \in C^{\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers $(p, q) \in \partial N \times \partial f(N)$. Pour tout $\mathcal{U}, \mathcal{V}$, voisinages de p et q respectivement, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $p_n \in \mathcal{U}$ et $q_n \in \mathcal{V}$. On se donne un tel $N \in \mathbb{N}$, comme $\mathcal{U}$ est un voisinage de p_N et $\mathcal{V}$ un voisinage de q_N et que $(p_n, q_n) \in C$, $f(\mathcal{U} \cap N) \cap \mathcal{V}$ est non vide. Finalement, $(p, q) \in C$. □

Proposition 3.3.22. *Si $C \neq \emptyset$, alors il existe $(p', q') \in C$ et tels que*

$$J_{M_1}(\Sigma_1, p') \setminus \{p'\} \subset j_1(N).$$

Démonstration. Soit $(p, q) \in C$, on applique l'algorithme suivant :

- (A) On pose $n := 0$
- (B) On pose $P := p$;
- (C) Est-ce que $J(\Sigma_1, P) \setminus \{P\} \subset j_1(N)$?
- (D) Si oui,
 - suivre une géodésique lumière passée $c: [0, T^*[\rightarrow J^+(\Sigma_1)$ telle que $c(0) = P$ et telle qu'il existe $s > 0$ de sorte que $c(s) \notin j_1(N)$;
 - On pose P le premier point $c(s)$ tel que l'une des propriétés suivantes est satisfaite
 - $c(s) \in \text{Sing}(M_1)$ et $s > 0$,
 - pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $s' \in]s, s + \varepsilon[$ tel que $c(s') \in j_1(N)$.
 - Retourner au (C) ;
- (E) Si non, l'algorithme s'arrête en renvoyant P .

Posons $(P_n)_{n \in A}$ la suite des points P de l'algorithme avec $A = \llbracket 0, n^* \rrbracket$ et $n^* \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. On note $c_n: [0, s_n] \rightarrow M_1$ la géodésique lumière joignant P_n à P_{n+1} .

1. Commençons par vérifier que l'algorithme est bien défini et ne stationne pas. On remarque qu'il existe une géodésique lumière passée sortante c (possiblement dans $j_1(N)$) car Σ_1 ne contient pas P . De plus, pour toute géodésique lumière passée sortante $c: [0, T^*[\rightarrow J^+(\Sigma_1)$ de P , $\{s \geq 0 \mid c(s) \in j_1(N)\}$ est un intervalle ouvert ne contenant pas 0 d'après le lemme

3.3.15. On en déduit que si $J(\Sigma_1, P) \setminus \{P\} \not\subset j_1(N)$ alors il existe une géodésique lumière passée telle que $c(0) = P$ et telle qu'il existe $s > 0$ de sorte que $c(s) \notin j_1(N)$. Ensuite, P ne peut pas être dans $\text{Sing}_0(M)$ car sinon $J^-(\Sigma, P) \setminus \{P\} \subset j_1(N)$, donc toutes les géodésiques lumières sortantes sont régulières au voisinage de P . On en déduit que l'algorithme est bien défini et que $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne stationne pas.

2. Montrons que pour tout n , P_n est dans

$$C_1 := \{p \in \partial j_1(N) \mid \exists q, (p, q) \in C\}.$$

P_0 est dans C_1 , supposons $P_n \in C_1$ pour un certain $n < n_* - 1$. Comme remarqué précédemment, P_n n'est pas dans $\text{Sing}_0(M_1)$, donc $I^-(P_n)$ est dense dans $J^-(P_n)$. Le même argument s'applique aux points de c_n car $c_n \setminus \{P_n, P_{n+1}\} \subset \text{Reg}(M_1)$. D'après le lemme 3.3.16, $I^-(P_n) \cap J^+(\Sigma_1)$ est inclus dans N , c_n est dans la fermeture de $j_1(N)$ dans M_1 . Comme c_n est dans $M_1 \setminus j_1(N)$, on a donc $c_n \subset \partial j_1(N)$. La proposition 3.3.21 permet alors de montrer que c_n est entièrement dans C_1 . Par suite, pour tout $n \in A$, $P_n \in C_1$.

3. On montre à présent que l'algorithme s'arrête. Soit $n \in A$, on remarque que si $P_{n+1} \in \text{Sing}_\alpha(M_1)$ pour $\alpha < 2\pi$ alors $I^-(c_n)$ contient $J^-(P_{n+1}) \setminus \{P_{n+1}\}$. Par suite, si $P_n \in \text{Sing}_\alpha(M_1)$ avec $\alpha < 2\pi$, alors l'algorithme s'arrête sur P_n . Ensuite, si $P_{n+1} \in \text{Reg}(M)$, alors $I^-(c_n)$ contient le complémentaire de la géodésique lumière prolongeant c dans $\partial J^-(P_{n+1})$. Comme c n'est pas prolongeable en une géodésique plus longue de $\partial j_1(N)$ c'est donc que $J(\Sigma_1, P_{n+1}) \setminus \{P_{n+1}\}$ est inclus dans $j_1(N)$. Encore une fois, l'algorithme s'arrête sur P_{n+1} .

Enfin, on pose c la courbe causale passée obtenue en concaténant les $(c_n)_{n \in A}$. On remarque que si P_n est dans $\text{Sing}_\alpha(M_1)$ alors, que $\alpha = 0$ ou $\alpha > 0$, alors l'intervalle de ligne singulière passé, ouvert en P_n et allant jusqu'à Σ_1 , est entièrement dans $j_1(N)$. Par suite c ne peut intersecter deux fois la même composante connexe de $\text{Sing}(M_1)$. De plus, $J^-(P_0) \cap \Sigma_1$ est une partie compacte de Σ_1 et $\Sigma_1 \cap \text{Sing}(M_1)$ est discret donc il n'y a qu'un nombre fini de lignes singulières rencontrant potentiellement c . En conclusion, l'algorithme s'arrête sur un point de C_1 ayant la propriété désirée. □

Démonstration de la proposition 3.3.13. Les propriétés 3.3.22, 3.3.20 et 3.3.8 montrent que l'ensemble C est vide si l'on prend $N = M_1 \wedge M_2$, et donc que $M_1 \vee M_2$ est séparé. Par suite $M_1 \vee M_2$ est un espace-temps plat singulier.

Soit M une sur-extension de Cauchy commune à M_1 et M_2 munie de Cauchy-plongements $M_1 \xrightarrow{f} M$ et $M_2 \xrightarrow{g} M$. Les applications $f \circ j_1, g \circ j_1 : M_1 \wedge M_2 \rightarrow M$ coïncident sur M_0 et sont donc égales. l'application $(f \amalg g) : M_1 \amalg M_2 \rightarrow M$ passe alors au quotient et donne un plongement de Cauchy $M_1 \vee M_2 \rightarrow M$ qui est un morphisme de sur-extensions. □

3.3.5 Conclusion

La famille des extensions de Cauchy d'un espace-temps plat singulier M globalement hyperbolique est donc une famille filtrante à droite dont on peut prendre la limite inductive. Cette limite inductive $\overline{M}$ est une $\mathbb{E}_{\geq 0}^{1,2}$ -variété séparée qui est automatiquement maximale et unique à équivalence près. Le seul point manquant est de vérifier que $\overline{M}$ est bien à base dénombrable. Nous ne donnons pas de démonstration de ce dernier point, celle-ci devrait suivre une ligne comparable à celle de Geroch pour les variétés lorentziennes, voir l'appendice de [Ger68].

3.4 Théorème de Mess et successeurs

Définition 3.4.1 (Espace-temps Cauchy-complet/compact). *Soit M une $\mathbb{E}_A^{1,2}$ -variété globalement hyperbolique, M est Cauchy-complète (resp. Cauchy-compacte) s'il existe une surface Cauchy Σ*

de M de classe $\mathcal{C}^1$ et de type espace telle que Σ est complète (compacte) pour la métrique induite sur Σ .

La première remarque qui guide l'analyse des $\mathbb{E}^{1,2}$ -variétés Cauchy-complètes est la propriété 8.1 de [Bar05].

Proposition 3.4.2 ([Bar05]). *Soit M un espace-temps plat (régulier) et soit Σ une surface de classe $\mathcal{C}^1$ de type espace dans Σ . Soit $\mathcal{D} : \widetilde{M} \rightarrow \mathbb{E}^{1,2}$ l'application développante de M .*

Si Σ est complète pour la métrique induite, alors la restriction de $\mathcal{D}$ à $\widetilde{\Sigma}$ est injective et $\mathcal{D}(\widetilde{\Sigma})$ est une surface acausale de $\mathbb{E}^{1,2}$ qui intersecte toute les géodésiques de type temps.

Cette propriété très simple à démontrer a de nombreuses conséquences intéressantes.

Proposition 3.4.3 ([Bar05]). *Soit M un espace-temps plat (régulier) et soit $\mathcal{D} : \widetilde{M} \rightarrow \mathbb{E}^{1,2}$ l'application développante de M .*

Si M est Cauchy-complet, alors $\mathcal{D}$ est un $\mathbb{E}^{1,2}$ -plongement et l'application d'holonomie est fidèle d'image discrète.

Ainsi, pour étudier et classifier les espaces-temps plats Cauchy-complet, il « suffit » d'une part d'étudier les surfaces complètes acausales Σ de type espaces plongées dans $\mathbb{E}^{1,2}$ et leur domaines de dépendance c'est-à-dire l'ensemble des points de $\mathbb{E}^{1,2}$ tels que toute courbe causale de $\mathbb{E}^{1,2}$ intersecte Σ . En effet, un théorème classique (théorème 38 page 421 de [O'N83]) énonce que l'intérieur du domaine de dépendance d'une surface de acausale est globalement hyperbolique. Ces domaines de dépendances sont des *domaines réguliers* et seront décrits brièvement dans la section 3.4.1. D'autre part, il faut faire une étude des sous-groupes de $\text{Isom}(\mathbb{E}^{1,2})$ susceptibles d'agir sur un tel domaine régulier de manière propre et totalement discontinues et de quotient globalement hyperbolique. Cette étude a été faite par Mess dans le cas Cauchy-compact, généralisé par Bonsante et Benedetti aux $\mathbb{E}^{1,n}$ -variétés globalement Hyperboliques Cauchy-compact puis par Barbot aux $\mathbb{E}^{1,n}$ -variétés globalement hyperboliques Cauchy-complètes. Bonsante et Benedetti ont alors complété l'étude de Barbot pour certains sous-groupes de $\text{Isom}(\mathbb{E}^{1,2})$ sur lesquels nous reviendrons.

Théorème 14 ([Bar05, BB09]). *Soit M un espace-temps plat globalement hyperbolique Cauchy-complet. Alors, l'application développante est un plongement de sorte que le revêtement universel $\widetilde{M}$ de M s'identifie à un $\Omega \subset \mathbb{E}^{1,2}$. De plus, à inversion du temps près, on est dans l'un des cas suivants :*

- (i) $\Omega = \mathbb{E}^{1,2}$ et le groupe d'holonomie agit par un groupe abélien libre de rang au plus 2 composé de translations de type espace.
- (ii) Ω est le futur d'un plan de type lumière Π et le groupe d'holonomie, si non trivial, est libre de rang 1 et engendré par une translation de type espace ou une isométrie parabolique.
- (iii) $\Omega = I^+(\Pi^-) \cap I^-(\Pi^+)$, avec Π^+, Π^- deux plans de type lumière parallèles. le groupe d'holonomie, si non trivial, est libre de rang 1 et engendré par une translation de type espace ou un isométrie parabolique.
- (iv) Ω est un domaine régulier, la partie linéaire de l'holonomie $\rho_L : \pi_1(M) \rightarrow \text{SO}_0(1,2)$ est fidèle et discrète.

Corollaire 3.4.4. *En particulier un espace-temps plat Cauchy-complet Cauchy-maximal dont le groupe fondamental n'est pas monogène est futur complet à inversion du temps près.*

Définition 3.4.5. *Un espace-temps plat M est de type (i) (resp. (ii), resp. (iii), resp (iv)) s'il est globalement hyperbolique, Cauchy-complet et s'il correspond au cas (i) (resp. (ii), resp. (iii), resp. (iv)) du théorème 14.*

Dans le cas où M est homéomorphe à $\Sigma \times \mathbb{R}$ avec Σ une surface de type fini de caractéristique d'Euler négative, M est systématiquement de type (v) qui est de loin le cas le plus intéressant. Mess a démontré dans le cas où Σ est compact (sans bord) la correspondance suivante.

Théorème 15 ([Mes07],[ABB⁺07]). *Soit $g \geq 2$, l'application d'holonomie*

$$\mathcal{M}_g(\mathbb{E}^{1,2}) \xrightarrow{\text{Hol}} T\text{Teich}_g$$

est bijective avec $\mathcal{M}_g(\mathbb{E}^{1,2})$ l'espace de module de $\mathbb{E}^{1,2}$ -variétés globalement hyperboliques Cauchy-maximales Cauchy-compactes marquées définit section 3.4.3.

Ce théorème a été ensuite généralisé en toute dimension par Bonsante et Benedetti [Bon03, BB09] toujours sous l'hypothèse de Cauchy-compacité. Puis généralisé par Barbot sous l'hypothèse de Cauchy-complétude [Bar05]. Dans ce travail, Barbot donne une description plus précise de la structure géométrique des espaces-temps plats Cauchy-complets dont nous n'aurons pas besoin. Nous nous contentons de la version affaiblie suivante de son théorème.

Théorème 16 ([Bar05]). *Soient $g \in \mathbb{N}$ et $s \geq 0$ tels que $2g - 2 + s > 0$. L'application d'holonomie*

$$\mathcal{M}_{g,s}(\mathbb{E}^{1,2}) \xrightarrow{\text{Hol}} T\text{Teich}_{g,s}$$

est bijective avec $\mathcal{M}_{g,s}(\mathbb{E}^{1,2})$ l'espace de module de $\mathbb{E}^{1,2}$ -variétés globalement hyperboliques Cauchy-maximales Cauchy-complètes marquées définit section 3.4.3.

Nous commençons par donner une description des quotients globalement hyperboliques de domaines réguliers, puis nous rappelons définitions et propriétés sur les espaces-temps absolument maximaux. Nous définirons ensuite les espaces de modules $\mathcal{M}_g$ et $\mathcal{M}_{g,s}$ et ferons quelques rappels sur l'espace de Teichmüller. Nous finissons cette section par une démonstration originale de la surjectivité de l'application d'holonomie.

3.4.1 Quotients globalement hyperbolique de domaines réguliers

Définition 3.4.6 (Domaine régulier). *Un domaine régulier $\Omega \subset \mathbb{E}^{1,2}$ est une partie convexe de $\mathbb{E}^{1,2}$ non vide de la forme*

$$\Omega_\Lambda := \bigcap_{\Pi \in \Lambda} I^+(\Pi)$$

avec Λ une famille non vide de plans de type lumière.

Théorème 17 ([Bar05]). *Soit Γ un sous-groupe discret de $\text{Isom}(\mathbb{E}^{1,2})$ sans torsion tel que $\Gamma \cdot \Omega = \Omega$. Alors Γ agit proprement discontinûment sur Ω et Ω/Γ un espace-temps plat globalement hyperbolique Cauchy-complet.*

Lemme 3.4.7. *Soit $\phi \in \text{Isom}(\mathbb{E}^{1,2})$ parabolique, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i) $\text{Fix}(\phi) \neq \emptyset$
- (ii) $\tau_\phi \in \text{Fix}(\phi_L)^\perp$

Démonstration. Premièrement, ces deux propriétés sont invariantes par conjugaison de ϕ . Supposons $\text{Fix}(\phi) \neq \emptyset$ et soit $p \in \mathbb{E}^{1,2}$ tel que $\phi p = p$, à conjugaison près, on peut supposer $p = O$ et donc $\tau_\phi = 0 \in \text{Fix}(\phi_L)^\perp$.

Supposons $\tau_\phi \in \text{Fix}(\phi_L)^\perp$. La conjugaison de ϕ par une translation de vecteur u change τ_ϕ en $\tau_\phi + (\phi_L - 1)u$. L'application $\mathbb{E}^{1,2} \xrightarrow{\phi_L - 1} \mathbb{E}^{1,2}$ est linéaire de rang 2 car ϕ_L a exactement une direction de points fixes. Comme $\text{Im}(\phi_L - 1) \subset \text{Fix}(\phi_L)^\perp$ et sont tout deux de dimension 2, alors $\text{Im}(\phi_L - 1) = \text{Fix}(\phi_L)^\perp$. Par suite, il existe $u \in \mathbb{E}^{1,2}$ tel que la conjugaison de ϕ par la translation de vecteur u est linéaire. Finalement, ϕ est conjugué à une isométrie admettant un point fixe et donc $\text{Fix}(\phi) \neq \emptyset$. □

Lemme 3.4.8. *Soit Ω un domaine régulier non vide stabilisé par un sous-groupe discret sans torsion $G \subset \text{Isom}(\mathbb{E}^{1,2})$. Alors, pour tout $\phi \in G$ parabolique, τ_ϕ est tangent.*

Démonstration. [Bar05] section 7.3. □

Corollaire 3.4.9. *Soient Σ une surface compacte, S une partie finie de Σ et $\Gamma = \pi_1(\Sigma^*)$ tels que $2g - 2 + s > 0$. Soit M un $\mathbb{E}^{1,2}$ -espace-temps globalement hyperbolique Cauchy-complet homéomorphe à $(\Sigma^*) \times \mathbb{R}$ et $\rho : \Gamma \rightarrow \text{Isom}(\mathbb{E}^{1,2})$ son holonomie.*

Alors ρ est admissible si et seulement si ρ_L est admissible.

Démonstration. Si ρ est admissible, par définition, ρ_L est admissible. Supposons à présent ρ_L admissible. Comme $\rho(\Gamma)$ fixe un domaine régulier non vide, d'après le lemme 3.4.8, $\tau_{\rho(\gamma)}$ est tangent pour γ parabolique, et donc ρ est admissible. □

3.4.2 Espace-temps $\mathbb{E}_A^{1,2}$ -maximaux

Dans cette courte section, nous introduisons la notion d'espace-temps $\mathbb{E}_A^{1,2}$ -maximal.

Définition 3.4.10. *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}_+$. Un $\mathbb{E}_A^{1,2}$ -espace-temps M_1 globalement hyperbolique Cauchy-complet est $\mathbb{E}_A^{1,2}$ -absolument maximal si pour tout $\mathbb{E}_A^{1,2}$ -plongement $\phi : M_1 \rightarrow M_2$, où M_2 est un $\mathbb{E}_A^{1,2}$ -espace-temps globalement hyperbolique Cauchy-complet, ϕ est surjectif.*

On dira simplement $\mathbb{E}_A^{1,2}$ -maximal ou absolument maximal s'il n'y a pas d'ambiguïté.

Remarque 3.4.11. *Il faut faire attention au fait que l'absolue maximalité dépend fortement de la catégorie de $\mathbb{E}_A^{1,2}$ -variété que l'on considère. Par exemple, $\text{Reg}(\mathbb{E}_0^{1,2})$ est $\mathbb{E}^{1,2}$ -maximal mais pas $\mathbb{E}_0^{1,2}$ -maximal puisqu'il se plonge dans $\mathbb{E}_0^{1,2}$.*

Lemme 3.4.12. *Soit M un espace-temps plat singulier globalement hyperbolique. Si M est Cauchy-compact, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *M est Cauchy-maximal ;*
2. *M est $\mathbb{E}_{\geq 0}^{1,2}$ -maximal.*

Démonstration. On suppose M Cauchy-compact.

- Supposons M $\mathbb{E}_{\geq 0}^{1,2}$ -maximal. Comme un Cauchy-plongement est un plongement de $\mathbb{E}_{\geq 0}^{1,2}$ -variété, en particulier tout Cauchy-plongement est surjectif et donc M est Cauchy-maximal.
- Supposons M Cauchy-maximal et considérons $M \xrightarrow{i} M'$ un $\mathbb{E}_{\geq 0}^{1,2}$ -plongement avec M' globalement hyperbolique. Prenons Σ_1 (resp. Σ_2) une surface de Cauchy essentielle lisse et de type espace de M_1 (resp. M_2), une telle surface existe d'après le théorème 12.

Prenons X un champ de vecteurs sur M' donné par le lemme 3.2.8. Pour tout $p \in \Sigma_1$, la ligne de flot de X passant par p intersecte Σ_2 exactement une fois. L'application $f : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ de cette manière est un homéomorphisme local et comme Σ_1 est compact, f est propre et donc f est un recouvrement ; finalement $f^* : \pi_1(\Sigma_1) \rightarrow \pi_1(\Sigma_2)$ est surjective et $i^* : \pi_1(M_1) \rightarrow \pi_1(M_2)$ est surjective. La preuve du lemme 45 p427 de [O'N83] s'applique au contexte des $\mathbb{E}_{\geq 0}^{1,2}$ -variétés et on peut en déduire que Σ_1 est achronal, donc acausal.

D'après le lemme 43 p426 de [O'N83], le développement de Cauchy de Σ_1 est ouvert et, comme Σ_1 est compact, il est également fermé. Par connexité de M_2 , le développement de Cauchy de Σ_1 est M_2 tout entier et donc i est un Cauchy-plongement. Or, M est Cauchy-maximal donc i est surjective.

□

Proposition 3.4.13 ([Bar05]). *Soit M un espace-temps plat globalement hyperbolique Cauchy-complet, alors il existe un espace-temps $\mathbb{E}^{1,2}$ -absolument maximal $\overline{M}$ dans lequel M se plonge isométriquement. De plus, $\overline{M}$ est unique à isomorphisme près.*

Proposition 3.4.14 ([Bar05]). *Soit M un espace-temps plat globalement hyperbolique Cauchy-complet, soient $\Gamma := \pi_1(\mathcal{M})$ et $\rho : \Gamma \rightarrow \text{Isom}(\mathbb{E}^{1,2})$ son groupe fondamental et son holonomie. On pose*

$$\Omega(\rho) = \bigcap_{\Pi \in \Lambda(\rho)} I^+(\Pi)$$

avec $\Lambda(\rho)$ la fermeture de l'ensemble des plans de type lumière stabilisés par un isométrie hyperbolique de $\rho(\Gamma)$.

Alors l'extension $\mathbb{E}^{1,2}$ -maximale de M est isomorphe à $\Omega(\rho)/\rho$.

3.4.3 Structures marquées et espaces de modules

Structures marquées et équivalences

Soit Σ une surface de genre g et soit S une partie finie de cardinal $s \geq 0$ telle que $2g - 2 + s > 0$. $\Sigma^* := \Sigma \setminus S$ peut être munie d'une métrique hyperbolique d'aire finie et Σ admet alors une unique $(\text{SO}_0(1, 2), \mathbb{H}^2, \mathbb{H}_0^2)$ -structure. C'est un exemple de $\mathbb{H}^2$ -surface marquée.

Définition 3.4.15 (X -surface marquée). *Soit (G, X) une structure analytique telle que X est une surface topologique et soient Σ une surface et S une partie finie.*

Une X -surface (Σ, S) -marquée est un triplet $(\Sigma_1, \mathcal{F}_1, h_1)$ tel que $(\Sigma_1, \mathcal{F}_1)$ est une X -surface singulière, h_1 est un homéomorphisme $\Sigma \rightarrow \Sigma_1$ tel que $\text{Sing}(\Sigma_1) \subset h_1(S)$.

Exemple 3.4.16. *Quelques exemples de surfaces marquées.*

- Une $\mathbb{H}^2$ -structure singulière à singularités coniques et pointes sur une surface de genre 2.
- Une $\mathbb{E}^2$ -surface à singularités coniques sur la sphère.

Plus généralement nous aurons besoin d'une notion de X -variété marquée pour définir des espaces de modules lorentziens.

Définition 3.4.17 (X -variété marquée). *Soit (G, X) une structure analytique et soient M un espace topologique séparé à base dénombrable et Δ une partie de complémentaire dense et semi-localement connexe.*

Une X -variété (M, Δ) -marquée est un triplet $(M_1, \mathcal{F}_1, h_1)$ tel que $(M_1, \mathcal{F}_1)$ est une X -variété singulière et h_1 est un homéomorphisme $M \rightarrow M_1$ tel que $\text{Sing}(M_1) \subset h_1(\Delta)$.

Définition 3.4.18 (X_A -variété marquée). *Soit (G, X, X_A) une structure analytique singulière et soient M un espace topologique séparé à base dénombrable et Δ une partie de complémentaire dense et semi-localement connexe.*

Une X_A -variété (M, Δ) -marquée est un triplet $(M_1, \mathcal{F}_1, h_1)$ tel que $(M_1, \mathcal{F}_1)$ est une X -variété singulière et h_1 est un homéomorphisme $M \rightarrow M_1$ tel que $\text{Sing}(M_1) \subset h_1(\Delta)$.

Définition 3.4.19 (Équivalence de structures marquées). *Soit (G, X) une structure analytique telle et soient M un espace topologique séparé à base dénombrable et Δ une partie de complémentaire dense et semi-localement connexe. Un tel couple (M, Δ) est appelé un marquage.*

Deux X -variétés (M, Δ) -marquée $(M_1, \mathcal{F}_1, h_1)$ et $(M_2, \mathcal{F}_2, h_2)$ sont équivalentes s'il existe un (G, X) -isomorphisme p.p $\phi : M_1 \rightarrow M_2$ tel que $h_2^{-1} \circ \phi \circ h_1$ est un homéomorphisme de M homotope à l'identité induisant une bijection $\Delta \rightarrow \Delta$ et dont la restriction à Δ est homotope à l'identité.

$$(M_1, \mathcal{F}_1, h_1) \sim (M_2, \mathcal{F}_2, h_2) \Leftrightarrow \begin{array}{ccc} & & (M_1, \mathcal{F}_1) \\ & \nearrow h_1 & \vdots \\ (M, \Delta) & & \exists \varphi \\ & \searrow h_2 & \vdots \\ & & (M_2, \mathcal{F}_2) \end{array}$$

Exemple 3.4.20. Soit Σ_1 la $\mathbb{E}^2$ -surface singulière obtenue en collant les bords opposés d'un octogone régulier de $\mathbb{E}^2$; on note $\mathcal{F}$ son $\mathbb{E}^2$ -brouillard naturel. C'est une surface de genre 2 admettant une unique singularité conique p . On peut voir cette surface comme marquée par elle-même $(\Sigma_1, \{p\})$ avec h_1 l'identité sur Σ_1 . Si $\phi : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_1$ est un homéomorphisme homotope à l'identité envoyant p sur p , alors ϕ définit une équivalence entre $(\Sigma_1, \mathcal{F}_1, h_1)$ et $(\Sigma_1, \phi^* \mathcal{F}, \phi_1 \circ h_1)$.

Espace de Teichmüller

Le premier espace de module que nous définissons est l'espace de Teichmüller. Historiquement, cet espace est défini comme l'espace des structures conformes c'est-à-dire des $\mathbb{C}$ -structures marquées. Cependant dans notre contexte, il est plus naturel de le considérer comme l'espace des $\mathbb{H}^2$ -structures marquées.

Définition 3.4.21. Soit Σ une surface de genre g et $S \subset \Sigma$ une partie de Σ de cardinal s . On note $\text{Teich}_{g,s}$ l'ensemble des classes d'équivalence de $\mathbb{H}_0^2$ -surfaces (Σ, S) -marquées $(\Sigma_1, \mathcal{F}_1, h_1)$ telles que $\text{Sing}(\Sigma) = h_1(S)$.

Soit (Σ, S) un marquage avec $\#S = s$, on note $\Sigma^* := \Sigma \setminus S$ et $\Gamma := \pi_1(\Sigma^*)$; chaque point $[\Sigma_1]$ de $\text{Teich}_{g,s}$ est donc une classe de $\mathbb{H}_0^2$ -variété et à ce titre, tout représentant admet une application développante et une holonomie $\rho : \pi_1(\text{Reg}(\Sigma_1)) \rightarrow \text{SO}_0(1, 2)$ bien définie à conjugaison près. Quitte à composer par $\omega_1 := (h_1|_{\Sigma^*})^* : \Gamma \rightarrow \pi_1(\text{Reg}(\Sigma_1))$, on peut voir l'holonomie de Σ_1 comme un élément de

$$[\rho \circ \omega] \in \text{Hom}(\pi_1(\Gamma, \text{SO}_0(1, 2))/\text{SO}_0(1, 2))$$

Il est aisé de vérifier que deux représentants d'une même classe induisent la même représentation d'holonomie :

$$(\Sigma_1, \mathcal{F}_1, h_1) \sim (\Sigma_2, \mathcal{F}_2, h_2) \Rightarrow [\rho_1 \circ \omega_1] = [\rho_2 \circ \omega_1].$$

Une propriété plus forte est en vérité satisfaite, si l'on dote le groupe fondamental de Σ^* d'une famille génératrice de lacets $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, l'image de ces γ_k par h_1 donne alors une famille de générateurs de $\pi_1(\text{Reg}(\Sigma_1))$; de plus, si $\varphi : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ est une équivalence de $\mathbb{H}^2$ -surface (Σ, S) -marquée alors $h_2^{-1} \circ \varphi \circ h_1$ induit un automorphisme de $\pi_1(\Sigma^*)$ envoyant $[\gamma_k]$ sur lui-même. Ainsi, si on note $\tilde{\Gamma}$ le groupe fondamental de Σ^* muni d'une famille génératrice,

$$[\rho_1 \circ \omega_1] \in \text{Hom}(\tilde{\Gamma}, \text{SO}_0(1, 2))/\text{SO}_0(1, 2)$$

est une *représentation marquée* qui ne dépend que de la classe d'équivalence de Σ_1 .

Si Σ est une surface fermée de genre g , le groupe fondamental de Σ^* admet une présentation de la forme

$$\left\langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, c_1, \dots, c_s \left| \prod_{i=1}^g [a_i, b_i] \prod_{j=1}^s c_j = 1 \right. \right\rangle.$$

où $c_1, \dots, c_s$ sont des lacets simples autour des points de S . On définit alors l'application d'holonomie.

Définition 3.4.22. Soit (Σ, S) un marquage avec Σ une surface fermée, on définit l'application d'holonomie

$$\text{Hol} : \begin{array}{ccc} \text{Teich}_{g,s} & \longrightarrow & \text{Hom}(\tilde{\Gamma}, \text{SO}_0(1, 2))/\text{SO}_0(1, 2) \\ [(\Sigma_1, \mathcal{F}_1, h_1)] & \longmapsto & [\rho \circ \omega] \end{array}$$

où $\tilde{\Gamma}$ est le groupe fondamental de Σ^* muni d'une présentation

$$\left\langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, c_1, \dots, c_s \left| \prod_{i=1}^g [a_i, b_i] \prod_{j=1}^s c_j = 1 \right. \right\rangle.$$

Il y a deux ambiguïtés, l'une provenant du choix du marquage (Σ, S) et l'autre provenant du choix d'une présentation de Γ . Elles se lèvent toutes deux de la même manière. Pour deux tels jeux de générateurs $(a_i, b_j, c_j)_{i \in [1, g], j \in [1, s]}$ du groupe fondamental Γ d'un marquage (Σ, S) et

$(a'_i, b'_j, c'_j)_{i \in \llbracket 1, g \rrbracket; j \in \llbracket 1, s \rrbracket}$ du groupe fondamental Γ' d'un marquage (Σ', S') , il existe un homéomorphisme $h : \Sigma \rightarrow \Sigma'$ envoyant S sur S' tel que $h|_{\Sigma^*}^s$ envoie a_i sur a'_i , b_i sur b'_i et c_j sur c'_j . Cet homéomorphisme induit une équivalence de catégorie de la catégorie des $\mathbb{H}_0^2$ -surfaces (Σ, S) -marquées vers la catégorie des $\mathbb{H}_0^2$ -surfaces (Σ', S') -marquées en associant $(\Sigma_1, \mathcal{F}_1, h_1 \circ h)$ à $(\Sigma_1, \mathcal{F}_1, h_1)$. On obtient donc une bijection « naturelle »

$$[h] : \text{Teich}_{g,s}(\Sigma, S) \rightarrow \text{Teich}_{g,s}(\Sigma', S')$$

On obtient également un morphisme de groupes marqués $h^* : \tilde{\Gamma} \rightarrow \tilde{\Gamma}'$. On vérifie aisément que $\text{Hol} \circ [h] = h^* \circ \text{Hol}$, l'application d'holonomie ne dépend donc essentiellement ni du choix du marquage (Σ, S) du moment qu'il sont « isomorphes » ni du choix d'une telle présentation de Γ ; l'ambiguïté est levée.

L'image de Hol est connue, on sait d'une part que l'holonomie d'une surface hyperbolique complète est fidèle et discrète, d'autre part si la surface est de volume finie, la classification des groupes fuchsien permet de montrer que l'holonomie est de plus admissible.

Définition 3.4.23 (Représentation linéaires admissibles).

Soit $\tilde{\Gamma} = \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, c_1, \dots, c_s \mid \prod_{i=1}^g [a_i, b_i] \prod_{j=1}^s c_j = 1 \rangle$ un groupe de surface marqué. Une représentation marquée $\rho : \Gamma \rightarrow \text{SO}_0(1, 2)$ est admissible si

- ρ est fidèle et discrète ;
- pour tout $j \in \{1, \dots, s\}$, $\rho(c_j)$ est parabolique ;
- pour tout $i \in \{1, \dots, g\}$, $\rho(a_i)$ et $\rho(b_i)$ sont hyperboliques.

Remarque 3.4.24. On remarque qu'une représentation marquée est admissible si et seulement si son image est un réseau de $\text{SO}_0(1, 2)$.

Fibré tangent de Teichmüller

Nous donnons à présent une description du fibré tangent de l'espace de Teichmüller $\text{Teich}_{g,s}$ en suivant Goldman [Gol84] ; on se donne (Σ, S) un marquage et $\tilde{\Gamma}$ le groupe fondamental marqué de Σ^* . Soit $[\rho] \in \text{Teich}_{g,s}$, l'espace tangent à $\text{Hom}(\Gamma, \text{SO}_0(1, 2))$ en ρ est l'espace des ρ -cocycles, i.e. l'espace des $\tau : \Gamma \rightarrow \mathfrak{so}(1, 2)$ tels que

$$\forall \gamma_1, \gamma_2, \tau(\gamma_1 \gamma_2) = \tau(\gamma_1) + \text{Ad}(\rho(\gamma_1))\tau(\gamma_2).$$

De plus, l'action de $\text{SO}_0(1, 2)$ par conjugaison induit une relation d'équivalence entre les cocycles : deux cocycles τ_1, τ_2 sont équivalents s'ils diffèrent d'un cobord, c'est-à-dire s'il existe $u \in \mathfrak{so}(1, 2)$ tel que

$$\tau_1 - \tau_2 : \gamma \mapsto \text{Ad}(\rho(\gamma)) \cdot u - u.$$

Alors, pour $\rho : \tilde{\Gamma} \rightarrow \text{SO}_0(1, 2)$ admissible, l'espace tangent $T_{\mathbb{H}^2/\rho} \text{Teich}_{g,s}$ s'identifie naturellement à un sous-espace de $H_{\text{Ad}\rho}^1(\Gamma, \mathfrak{so}(1, 2))$.

Prenons $j \in \llbracket 1, s \rrbracket$ et une famille à 1-paramètre $(\rho_s)_{s \in \mathbb{R}}$ de représentations admissibles avec $\rho_0 = \rho$. L'image $\rho_s(c_j)$ est parabolique pour tout $s \in \mathbb{R}$ donc il existe une famille à 1-paramètre (ϕ_s) d'éléments de $\text{SO}_0(1, 2)$ telle que pour tout $s \in \mathbb{R}$, $\rho_s(c_j) = \phi_s \rho(c_j) \phi_s^{-1}$. Un calcul simple montre qu'il existe u tel que

$$\left. \frac{d\rho_s}{ds} \right|_{s=0} (c_j) = \text{Ad}(\rho(c_j))u - u$$

Donc, si τ est un vecteur tangent en $[\rho]$, pour $j \in \llbracket 1, s \rrbracket$, $\tau(c_j)$ est orthogonal à la ligne de points fixes de $\text{Ad}(\rho(c_j))$; l'orthogonal étant pris pour la forme de Killing de $\mathfrak{so}(1, 2)$. Lorsque $s > 0$, Γ est un groupe libre et un simple argument dimensionnel permet de conclure que les vecteurs tangents en $[\rho]$ sont exactement les cocycles satisfaisant cette propriété à cobord près. Ceci est toujours vrai lorsque $s = 0$ [Gol84].

Nous avons été un brin mystérieux à propos de $\mathfrak{so}(1, 2)$, comme $\mathrm{SO}_0(1, 2)$ est une $\mathbb{R}$ -variété de dimension 3, $\mathfrak{so}(1, 2)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 3 ; de plus, la forme de Killing est non-dégénérée de signature $(1, 2)$. Ainsi, $\mathfrak{so}(1, 2)$ est un avatar de l'espace de Minkowski $\mathbb{E}^{1,2}$.

De plus, l'action adjointe de $\phi \in \mathrm{SO}_0(1, 2)$ sur $\mathfrak{so}(1, 2)$ est hyperbolique (resp. parabolique, resp. elliptique) si et seulement si ϕ est hyperbolique (resp. parabolique, resp. elliptique). Un point de $T\mathrm{Teich}_{g,s}$ peut alors être vu comme une représentation marquée $\tilde{\Gamma} \rightarrow \mathrm{Isom}(\mathbb{E}^{1,2})$ à conjugaison près.

Définition 3.4.25. En notant L la projection $\mathrm{Isom}(\mathbb{E}^{1,2}) \rightarrow \mathrm{SO}_0(1, 2)$. Soit $\rho : \tilde{\Gamma} \rightarrow \mathrm{Isom}(\mathbb{E}^{1,2})$ une représentation marquée ;

- la partie linéaire de ρ est $\rho_L := L \circ \rho$,
- la partie de translation de ρ , est $\tau_\rho := \rho - \rho_L$.

Pour $\phi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{E}^{1,2})$, on écrira également $\phi_L = \phi_L$ et $\tau_\phi := \phi - \phi_L$.

Définition 3.4.26. Pour $\phi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{E}^{1,2})$, $\mathrm{Fix}(\phi) = \{p \in \mathbb{E}^{1,2} \mid \phi x = x\}$ est le fixateur de ϕ .

Définition 3.4.27. Soit $\phi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{E}^{1,2})$, τ_ϕ est tangent si $\tau_\phi \in \mathrm{Fix}(\rho(c_j))^\perp$.

Le fibré tangent de $\mathrm{Teich}_{g,s}$ est alors l'ensemble des représentations admissibles au sens suivant.

Définition 3.4.28 (Représentation admissible affine).

Soit $\Gamma = \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, c_1, \dots, c_s \mid \prod_{i=1}^g [a_i, b_i] \prod_{j=1}^s c_j = 1 \rangle$ un groupe de surface marqué. Une représentation $\rho : \Gamma \rightarrow \mathrm{Isom}(\mathbb{E}^{1,2})$ est admissible si

- ρ_L est admissible ;
- $\tau_\rho(c_j)$ est tangent pour tout j .

Proposition 3.4.29. Le fibré tangent de l'espace de Teichmüller $T\mathrm{Teich}_{g,s}$ s'identifie naturellement à l'ensemble des classes de conjugaisons de représentations admissibles marquées de $\tilde{\Gamma}$ dans $\mathrm{Isom}(\mathbb{E}^{1,2})$.

Espaces de module lorentziens

De la même manière que précédemment, on définit les espaces de modules lorentziens.

Définition 3.4.30 (Espace de module des $\mathbb{E}^{1,2}$ -variétés marquées linéaires). Soient Σ une surface fermée de genre g et S une partie de Σ de cardinal $s > 0$.

L'espace de module $\mathcal{M}_{g,s}^L(\mathbb{E}^{1,2})$ est l'espace des classes d'équivalence de $\mathbb{E}^{1,2}$ -variétés $(\Sigma^* \times \mathbb{R}, \emptyset)$ -marquées globalement hyperboliques Cauchy-complètes et Cauchy-maximales dont l'holonomie est linéaire admissible.

Définition 3.4.31 (Espace de module des $\mathbb{E}^{1,2}$ -variétés marquées). Soient Σ une surface fermée de genre g et S une partie de Σ de cardinal $s > 0$.

L'espace de module $\mathcal{M}_{g,s}(\mathbb{E}^{1,2})$ est l'espace des classes d'équivalence de $\mathbb{E}^{1,2}$ -variétés $(\Sigma^* \times \mathbb{R}, \emptyset)$ -marquées globalement hyperboliques Cauchy-complètes $\mathbb{E}^{1,2}$ -maximales dont l'holonomie est affine admissible.

Définition 3.4.32 (Espace de module des $\mathbb{E}_0^{1,2}$ -variétés linéaires marquées). Soient Σ une surface fermée de genre g et S une partie de Σ de cardinal $s > 0$.

L'espace de module $\mathcal{M}_{g,s}^L(\mathbb{E}_0^{1,2})$ est l'espace des classes d'équivalence de $\mathbb{E}_0^{1,2}$ -variétés $(\Sigma \times \mathbb{R}, S \times \mathbb{R})$ -marquées $(M, \mathcal{F}, h)$ globalement hyperboliques Cauchy-compactes Cauchy-maximales telles que $\mathrm{Sing}(M) = h(S \times \mathbb{R})$.

Définition 3.4.33 (Espace de module des $\mathbb{E}_0^{1,2}$ -variétés marquées). Soient Σ une surface fermée de genre g et S une partie de Σ de cardinal $s > 0$.

L'espace de module $\mathcal{M}_{g,s}(\mathbb{E}_0^{1,2})$ est l'espace des classes d'équivalence de $\mathbb{E}_0^{1,2}$ -variétés $(\Sigma \times \mathbb{R}, S \times \mathbb{R})$ -marquées $(M, \mathcal{F}, h)$ globalement hyperboliques Cauchy-compactes Cauchy-maximales et telles que $\mathrm{Sing}(M) = h(S \times \mathbb{R})$.

3.4.4 Une nouvelle preuve de la surjectivité de l'holonomie

On rappelle le théorème de Mess-Barbot-Bonsante-Benedetti

Théorème 18 ([Bar05, BB09]). *Soient $g \in \mathbb{N}$ et $s \geq 0$ tels que $2g - 2 + s > 0$. L'application d'holonomie*

$$\mathcal{M}_{g,s}(\mathbb{E}^{1,2}) \xrightarrow{\text{Hol}} T\text{Teich}_{g,s}$$

est bijective.

Nous souhaitons proposer une nouvelle preuve de la surjectivité de cette application. La preuve de Bonsante et Benedetti passe par la représentation du fibré tangent de Teichmüller comme espace des tremblements de terre due à Thurston et des constructions de domaines réguliers associés à un tel tremblement de terre. Ces différents points sont hautement non élémentaires et une preuve plus simple nous semble alors intéressante.

Proposition 3.4.34. *Soit Σ une surface compacte de genre g et soit S une partie finie de cardinal $s > 0$ telle que $2g - 2 + s > 0$. Soit $\Gamma := \pi_1(\Sigma^*)$, pour $[\rho] \in T\text{Teich}_{g,s}$, le domaine régulier $\Omega(\rho)$ est celui défini dans la proposition 3.4.14.*

Alors, l'application

$$\text{dsusp}_{\mathbb{E}^{1,2}} : \begin{array}{c|c} T\text{Teich}_{g,s} & \longrightarrow \mathcal{M}_{g,s}(\mathbb{E}^{1,2}) \\ [\rho] & \longmapsto [\Omega(\rho)/\rho] \end{array}$$

est bien définie et la classe de conjugaison de l'holonomie de $\Omega(\rho)/\rho$ est $[\rho]$.

Pour commencer, Γ est toujours non-abélien dans notre cas, les espaces-temps que nous considérons sont donc de type (v). La proposition 3.4.14 nous donne alors qu'étant donné un espace-temps plat Cauchy-complet M d'holonomie ρ , son extension $\mathbb{E}^{1,2}$ -absolument maximale isomorphe est au quotient $\overline{M} := \Omega(\rho)/\rho$ avec $\Omega(\rho)$ le domaine régulier bordé par les plans lumières stables sous l'action d'une isométrie hyperbolique de ρ . Par ailleurs, le quotient d'un domaine régulier comportant au moins deux plans par une représentation admissible est un espace-temps globalement hyperbolique. Partant d'une holonomie ρ , il nous suffit donc vérifier que $\Omega(\rho)$ est non vide et bordé par au moins deux plans lumières. Dans notre cas, le groupe Γ est non-abélien donc $\Omega(\rho)$ est toujours bordé par plus de 2 plans lumières, il nous suffit donc de montrer que $\Omega(\rho)$ est non vide.

On se donne Σ une surface compacte de genre g , S une partie finie de Σ de cardinal s avec $2g - g + s > 0$. On pose $\Gamma := \pi_1(\Sigma^*)$ et on se donne $\rho : \tilde{\Gamma} \rightarrow \text{Isom}(\mathbb{E}^{1,2})$ une représentation marquée admissible.

La méthode employée est très proche de celle employée par Barbot et Meusburger dans un travail en cours d'élaboration [BM] sur les espaces-temps avec singularités à spin. Nous utilisons des champs de directions divergent pour définir un plongement (ρ_L, ρ) -invariant de $\mathbb{H}^2$ dans $\mathbb{E}^{1,2}$.

Définition 3.4.35 (Champs de directions divergents). *Soit $X \subset \mathbb{H}^2$ une partie de $\mathbb{H}^2$.*

- *Un champs de directions sur X est une application $f : X \rightarrow \mathbb{E}^{1,2}$;*
- *Un champs de directions sur X est divergent si pour tout $x, y \in \mathbb{H}^2$*

$$\langle f(x) - f(y) | x + \langle x | y \rangle y \rangle \geq 0$$

- *Un champs de directions sur X est localement divergent si pour tout $p \in \mathbb{H}^2$, il existe un voisinage ouvert $\mathcal{U}$ autour de p tel que $f|_{\mathcal{U}}$ est divergent.*

Définition 3.4.36. *Un champs de directions f sur $\mathbb{H}^2$ est ρ -équivalent si pour tout $p \in \mathbb{H}^2$ et tout $\gamma \in \Gamma$,*

$$f(\rho_L(\gamma)p) = \rho(\gamma)f(p).$$

Définition 3.4.37. Soit f un champ de directions. On pose l'application

$$\mathcal{D}_f : \begin{cases} \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow \mathbb{E}^{1,2} \\ (x, t) & \longmapsto f(x) + tx \end{cases}$$

Remarque 3.4.38. Soit $\rho : \Gamma \rightarrow \text{Isom}(\mathbb{E}^{1,2})$ un morphisme. Si f est un champ de directions localement divergent et ρ -équivalent alors il existe une unique $\mathbb{E}^{1,2}$ -structure sur $\mathbb{H}^2/\Gamma \times \mathbb{R}_+^*$ tel que $\mathcal{D}_f$ est une application développante. Enfin, l'holonomie associée à $\mathcal{D}_f$ est ρ .

Lemme 3.4.39. Soit $X \subset \mathbb{H}^2$ un ouvert et soit $f : X \rightarrow \mathbb{E}^{1,2}$ un champ de directions $\mathcal{C}^1$ sur X . Si pour tout $\xi \in T\mathbb{H}^2$, $\langle df(\xi)|\xi \rangle > 0$ alors f est localement divergent.

Démonstration. Quitte à se restreindre à des parties ouvertes plus petites, on peut supposer X convexe. Soit u, v éléments de X , et soit ξ l'unique élément de $T_u X$ dont l'image par l'exponentielle de $\mathbb{H}^2$ est v . On a alors

$$v = \frac{\sinh(\|\xi\|)}{\|\xi\|} \xi + \cosh(\|\xi\|)u$$

et comme $\langle u|\xi \rangle = 0$,

$$\begin{aligned} v + \langle u|v \rangle &= \frac{\sinh(\|\xi\|)}{\|\xi\|} \xi + \cosh(\|\xi\|) - \cosh(\|\xi\|)u \\ &= \frac{\sinh(\|\xi\|)}{\|\xi\|} \xi. \end{aligned}$$

Par ailleurs, on a :

$$\begin{aligned} \|u - v\|^2 &= \sinh(\|\xi\|)^2 - (\cosh(\|\xi\|) - 1)^2 \\ &= 2 \cosh(\|\xi\|) - 2 \\ &= 4 \sinh^2(\|\xi\|/2) \end{aligned}$$

Donc f est $\mathcal{C}^1$, il y a donc une application continue $\varepsilon : X \times X \rightarrow \mathbb{E}^{1,2}$, s'annulant sur la diagonale, telle que :

$$f(v) = f(u) + df(\xi) + \|v - u\|\varepsilon(u, v).$$

Par suite,

$$\begin{aligned} \langle f(v) - f(u) | \langle u|v \rangle u \rangle &= \left\langle f(u) + df(\xi) + \|v - u\|\varepsilon(u, v) \left| \frac{\sinh(\|\xi\|)}{\|\xi\|} \xi \right. \right\rangle \\ &= \frac{\sinh(\|\xi\|)}{\|\xi\|} \langle df(\xi)|\xi \rangle + 2 \sinh(\|\xi\|/2) \langle \varepsilon(u, v) | \xi \rangle. \end{aligned}$$

Soit $u_0 \in X$, soit $\varepsilon_0 = \frac{1}{2} \min_{\xi \in T_{u_0} X, \|\xi\|=1} \langle df(\xi)|\xi \rangle$. Comme ε et df sont strictement positifs et continus sur $X \times X$, il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de u_0 tel que pour tout $(u, v) \in \mathcal{U}^2$, $\langle \varepsilon(u, v) | \xi \rangle \leq \frac{\varepsilon_0}{2} \|\xi\|$ et $\langle df(\xi)|\xi \rangle \geq \|\xi\|^2 \varepsilon_0$. Aini, pour tout $(u, v) \in \mathcal{U}^2$, $\langle f(v) - f(u) | \langle u|v \rangle u \rangle \geq 0$, et donc f est divergent sur $\mathcal{U}$. $\square$

La proposition suivante construit un champ de directions approprié à la démonstration de la proposition 3.4.34. La construction de ce champs de directions se fait par morceau en découpant $\mathbb{H}^2$ de manière ρ_L -invariante ; nous partons d'une triangulation idéale de $\mathbb{H}^2/\rho_L$ dont nous rappelons d'abord définition et existence.

Définition 3.4.40. Soit Σ une $\mathbb{H}_0^2$ -surface fermée comportant au moins 1 point singulier.

Une triangulation $\mathcal{T}$ de Σ est idéale si les arêtes de $\mathcal{T}$ sont des géodésiques de $\text{Reg}(\Sigma)$ d'extrémités dans $\text{Sing}_0(\Sigma)$.

Lemme 3.4.41. Soit Σ une $\mathbb{H}_0^2$ -surface fermée comportant au moins 1 point singulier.

Il existe une triangulation idéale de Σ dont l'ensemble des sommets est exactement $\text{Sing}_0(\Sigma)$.

Démonstration. On note $S := \text{Sing}_0(\Sigma)$ et on se donne une triangulation $\mathcal{C}^0$ non nécessairement géodésique $\mathcal{T}_0$ de Σ dont l'ensemble des sommets est exactement S et dont l'intérieur des arête est dans $\Sigma \setminus S$.

On identifie Σ au quotient $(\mathbb{H}^2 \sqcup \Lambda)/\Gamma$ pour Γ groupe fuchsien et Λ l'ensemble des points fixes des éléments paraboliques de Γ situés dans le bord à l'infini de $\mathbb{H}^2$. Le revêtement universel de $\text{Reg}(\Sigma)$ s'identifie à $\mathbb{H}^2$ et S à Λ/Γ . la triangulation $\mathcal{T}_0$ se relève en une triangulation Γ -invariante $\tilde{\mathcal{T}}_0$ de $\mathbb{H}^2 \sqcup \Lambda$ dont les extrémités des arêtes sont dans Λ et l'intérieur des arête est dans $\mathbb{H}^2$.

On remarque que deux arêtes e_1, e_2 de $\tilde{\mathcal{T}}_0$ d'extrémités A_1, B_1 et A_2, B_2 respectivement ne peuvent s'intersecter qu'en A_1, B_1, A_2, B_2 . Par conséquent, les géodésiques $[A_1 B_1]$ et $[A_2 B_2]$ ne peuvent s'intersecter qu'en A_1, B_1, A_2, B_2 . Ainsi, en remplaçant dans chaque arête e de $\tilde{\mathcal{T}}_0$ par la géodésique de $\mathbb{H}^2$ reliant les extrémités de e on obtient une triangulation géodésique Γ -invariante $\tilde{\mathcal{T}}$ de $\mathbb{H}^2 \sqcup \Lambda$ dont l'ensemble des extrémités est exactement Λ . Finalement, le quotient $\tilde{\mathcal{T}}$ sous l'action de Γ est une triangulation idéale de Σ dont l'ensemble des extrémité est exactement S . $\square$

Proposition 3.4.42. *Il existe un champ de directions ρ -équivalent localement divergent g sur $\mathbb{H}^2$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathcal{D}_g(\mathbb{H}^2, t)$ est une surface acausale et complète.*

Démonstration. Considérons $(\gamma T_i)_{\gamma \in \Gamma, i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ le relevé d'une triangulation géodésique idéale de $\mathbb{H}^2/\Gamma$ donnée par le lemme 3.4.41. Prenons une famille d'horodisques plongés disjoints

$$(\gamma H_j)_{j \in \{1, \dots, s\}, \gamma \in \Gamma},$$

nous obtenons une cellulation non-géodésique $(\gamma T'_i, H_j)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket, j \in \llbracket 1, s \rrbracket}$ avec $T'_i := T_i \setminus \bigcup_{j=1}^s H_j$.

Comme ρ est admissible, pour tout $j \in \llbracket 1, s \rrbracket$, il existe un unique Δ_j tel que tout γ parabolique stabilisant H_j fixe Δ_j point par point. Pour chacun des j , choisissons un point $p_j \in \Delta_j$ et posons

$$\forall x \in \gamma H_j, f(x) = \rho(\gamma)p_j.$$

Soit $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $\mathcal{C}^1$, strictement croissante et telle que $\varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi'(1) = 0$ et $\varphi(1) = 1$. Pour $i \in I$, la cellule T'_i est un hexagone non-géodésique $[A_k]_{k \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}}$ de frontière $\mathcal{C}_{pm}^1$. f est déjà défini sur la partie horocyclique $[A_0 A_1] \cup [A_2 A_3] \cup [A_4 A_5]$. Prolongeons f sur $[A_{2k+1} A_{2k+2}]$, $k \in \{0, 1, 2\}$ en posant

$$f(x) = \varphi\left(\frac{d_{\mathbb{H}^2}(x, A_{2k+1})}{d_{\mathbb{H}^2}(A_{2k+1}, A_{2k+2})}\right)f(A_{2k+2}) + (1 - \varphi)\left(\frac{d_{\mathbb{H}^2}(x, A_{2k+1})}{d_{\mathbb{H}^2}(A_{2k+1}, A_{2k+2})}\right)f(A_{2k+1})$$

Prolongeons ensuite f de manière $\mathcal{C}^1$ à T'_i de sorte que $d_x f \cdot h = 0$ pour $x \in \partial T'_i$ et $h \perp \partial T'_i$. De cette manière, f est un champ de directions $\mathcal{C}^1$, Γ -invariant sur $\mathbb{H}^2$. Ensuite, $\xi \mapsto \langle df(\gamma\xi)|\gamma\xi \rangle = \langle df(\xi)|\xi \rangle$, est Γ -invariante (avec Γ agissant trivialement sur $\mathbb{R}$), homogène de degré 2 sur chaque fibre et nulle sur tout TH_j , $j \in \llbracket 1, s \rrbracket$. En notant $T^1(\mathbb{H}^2/\Gamma)$ le fibré unitaire tangent au dessus de $\mathbb{H}^2/\Gamma$,

$$\begin{array}{ccc} T^1(\mathbb{H}^2/\Gamma) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \xi & \longmapsto & \langle df(\xi)|\xi \rangle \end{array}$$

est bien définie, est à support compact et est donc bornée, on pose $M \in \mathbb{R}$ son minimum. La fonction $g : x \mapsto f(x) + (M + 1)x$ satisfait alors les hypothèses du lemme 3.4.39 et est donc localement divergent.

Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$, la forme quadratique induite sur le niveau $\mathcal{D}_g(\mathbb{H}^2, t)$ par la métrique de $\mathbb{E}^{1,2}$ est $q(\xi) = \langle d(g + t\text{Id})(\xi)|\xi \rangle = \langle dg(\xi)|\xi \rangle + t\|\xi\|^2 \geq (1+t)\|\xi\|^2 > 0$. Par suite, ce niveau est une hypersurface fermée de type espace de $\mathbb{E}^{1,2}$. D'après le Corollaire 46, du chapitre 14 de [O'N83], $\mathcal{D}_g(\mathbb{H}^2, t)$ est acausale. Comme $q(\xi) \geq (1+t)\|\xi\|^2$, l'application $x \mapsto \mathcal{D}_g(x, t)$ étend distances, et comme $\mathbb{H}^2$ est métriquement complète, $\mathcal{D}_g(\mathbb{H}^2, t)$ est métriquement complète. $\square$

Preuve de la proposition 3.4.34. Soient g donné par la proposition 3.4.42, Ω le développement de Cauchy de $\mathcal{D}_g(\mathbb{H}^2, 1)$ dans $\mathbb{E}^{1,2}$ et $M := \Omega/\Gamma$. L'espace-temps M est globalement hyperbolique, Cauchy-complet, Cauchy-maximal, futur complet et homéomorphe à $\mathbb{H}^2/\Gamma \times \mathbb{R}$ et d'holonomie ρ . D'après la proposition 3.4.14, $\Omega(\rho)$ est non vide et $\Omega(\rho)/\rho$ est l'extension $\mathbb{E}^{1,2}$ -maximale de M . $\square$

Chapitre 4

Théorie des extensions BTZ

Considérons la partie régulière de $\mathbb{E}_0^{1,2}$, c'est un espace-temps plat Cauchy-maximal globalement hyperbolique. Ayant $\mathbb{E}_0^{1,2}$ dans notre liste d'espaces modèles singuliers, il semble assez étrange de considérer $\text{Reg}(\mathbb{E}_0^{1,2})$ sans le voir comme une partie de $\mathbb{E}_0^{1,2}$. C'est-à-dire que nous imaginons naturellement $\text{Reg}(\mathbb{E}_0^{1,2})$ muni d'un plongement $\text{Reg}(\mathbb{E}_0^{1,2}) \xrightarrow{\phi} \mathbb{E}_0^{1,2}$. Ce point de vue est le même que celui consistant à voir une pointe comme la partie régulière de $\mathbb{H}_0^2$ sous plusieurs aspects. D'une part, le point singulier d'une pointe vue dans $\mathbb{H}^2$ est usuellement considéré « à l'infini » alors que l'espace modèle $\mathbb{H}_0^2$ le positionne au centre donc dans l'intérieur ; de la même manière, une ligne de points BTZ est naturellement vue sur le bord conforme comme le suggère le revêtement universel de $\text{Reg}(\mathbb{E}_0^{1,2})$ alors que dans l'espace modèle $\mathbb{E}_0^{1,2}$ celle-ci est un axe de révolution donc dans l'intérieur. D'autre part, s'il semble assez naturel de compactifier une surface hyperbolique complète d'aire finie en lui ajoutant des points singuliers, on peut se demander si une opération comparable existe pour les espaces-temps. Nous répondons par l'affirmative pour les espaces-temps plats singuliers globalement hyperboliques.

Théorème ([Bru16a]). *Pour tout espace-temps plat singulier globalement hyperbolique M , il existe une extension BTZ globalement hyperbolique de M maximale.*

Cette extension BTZ maximale est de plus unique à équivalence près.

Pour comprendre le comportement de cette extension BTZ maximale, il est instructif de comparer les extensions BTZ maximales des espaces-temps globalement hyperboliques

$$M_0 := \text{Reg}(\mathbb{E}_0^{1,2}) \quad \text{et} \quad M_1 := \{(\tau, \mathfrak{r}, \theta) \in \text{Reg}(\mathbb{E}_0^{1,2}) \mid 2\tau - \mathfrak{r} < 0\} = \text{Reg}(\mathbb{E}_0^{1,2}) \setminus J^+(O).$$

Ces deux espaces sont Cauchy-maximaux mais, de manière intéressante, si l'extension BTZ maximale de M_0 , qui n'est autre que $\mathbb{E}_0^{1,2}$, est Cauchy-maximal ; au contraire, l'extension BTZ maximale de M_1 ne l'est pas. En effet, l'extension BTZ maximale de M_1 est

$$\overline{M}_1 := \{(\tau, \mathfrak{r}, \theta) \in \mathbb{E}_0^{1,2} \mid 2\tau - \mathfrak{r} < 0\} = \mathbb{E}_0^{1,2} \setminus J^+(O)$$

dont une surface de Cauchy est le plan horizontal $\{\tau = -1\}$, or ce dernier est une surface de Cauchy de $\mathbb{E}_0^{1,2}$ et donc l'extension de Cauchy maximale de $\overline{M}_1$ est $\mathbb{E}_0^{1,2} \neq \overline{M}_1$. La différence importante entre ces deux exemples est que M_0 est Cauchy-complet alors que M_1 ne l'est pas. Inversement, considérons l'espace-temps M_3 d'extension BTZ maximale $\overline{M}_3$

$$M_3 := \{(\tau, \mathfrak{r}, \theta) \in \text{Reg}(\mathbb{E}_0^{1,2}) \mid \tau > 0\} \quad \overline{M}_3 := \{(\tau, \mathfrak{r}, \theta) \in \mathbb{E}_0^{1,2} \mid \tau > 0\}.$$

M_3 est globalement hyperbolique Cauchy-complet mais pas Cauchy-maximal et son extension BTZ maximale $\overline{M}_3$ est Cauchy-complète mais pas Cauchy-maximale. L'intuition que nous retirons de ces exemples (et d'autres du même genre) est que la Cauchy-maximalité assure qu'un espace-temps plat singulier contient un voisinage de tous les points BTZ « virtuels » dans le passé de la surface de Cauchy et la Cauchy-complétude oblige la surface de Cauchy à partir à l'infini futur en

s'allongeant comme le fait le plongement usuel de la pointe $\mathbb{H}_0^2$ dans $\mathbb{E}_0^{1,2}$. Cette intuition aboutit au théorème suivant dont la démonstration fait l'objet de la deuxième section de ce chapitre.

Théorème ([Bru16a]). *Soit M un espace-temps plat globalement hyperbolique possiblement avec particules massives mais sans singularité BTZ.*

Alors, M est Cauchy-maximal et Cauchy-complet si et seulement si son extension BTZ maximale est Cauchy-maximale et Cauchy-complète.

Une des motivations de l'étude de ces extensions BTZ provient de la remarque suivante. Soit Σ une surface hyperbolique complète de volume finie et soit $\bar{\Sigma}$ son extension cuspidale maximale (voir propriété 2.1.18). D'une part, $M := \text{susp}_{\mathbb{E}^{1,2}}^*(\Sigma)$ est un $\mathbb{E}^{1,2}$ -espace-temps **Cauchy-complet** d'holonomie linéaire et d'autre part $\bar{M} := \text{susp}_{\mathbb{E}^{1,2}}^*(\bar{\Sigma})$ est un $\mathbb{E}_0^{1,2}$ -espace-temps **Cauchy-compact** d'holonomie linéaire. De plus, le plongement naturel

$$\Sigma \longrightarrow \bar{\Sigma}$$

induit naturellement un plongement

$$M = \text{susp}_{\mathbb{E}^{1,2}}^*(\Sigma) \longrightarrow \text{susp}_{\mathbb{E}^{1,2}}^*(\bar{\Sigma}) = \bar{M}$$

dont le complémentaire de l'image ne contient que des points BTZ ; le plongement naturel $M \rightarrow \bar{M}$ est donc une extension BTZ. On peut vérifier que $\bar{M}$ est Cauchy-compact et Cauchy-maximal, il est donc $\mathbb{E}_0^{1,2}$ -maximal. En particulier, $\bar{M}$ est l'extension BTZ maximale de M . On voit alors que dans ce contexte, l'extension BTZ maximale définit un foncteur réciproque au foncteur Reg et définit donc une équivalence entre la catégorie des $\mathbb{E}^{1,2}$ -espaces-temps globalement hyperboliques Cauchy-maximaux Cauchy-complet homéomorphes à $\Sigma \times \mathbb{R}$ et la catégorie des $\mathbb{E}_0^{1,2}$ -espaces-temps maximaux homéomorphes à $\bar{\Sigma} \times \mathbb{R}$ comportant autant de singularités BTZ que Σ comporte de pointes. En substance, cela démontre un théorème de Mess pour les $\mathbb{E}_0^{1,2}$ -espaces-temps Cauchy-compacts maximaux d'holonomie linéaire.

Théorème ([Bru16b]). *Soient $g, s > 0$ tels que $2g - 2 + s > 0$. Il existe des bijections naturelles*

$$\text{Teich}_{g,s} \xrightleftharpoons[\text{Hol}]{\text{susp}_{\mathbb{E}^{1,2}}^*} \mathcal{M}_{g,s}^L(\mathbb{E}^{1,2}) \xrightleftharpoons[\text{Reg}]{\text{Ext}_{\text{BTZ}}} \mathcal{M}_{g,s}^L(\mathbb{E}_0^{1,2})$$

avec Ext_{BTZ} l'application qui à un $\mathbb{E}^{1,2}$ -espace-temps associe son extension BTZ maximale.

Nous souhaitons généraliser ce théorème aux $\mathbb{E}_0^{1,2}$ -espaces-temps dont l'holonomie est potentiellement affine. Nous nous heurtons à une difficulté technique pour généraliser l'argument précédent : nous ne sommes certain de pouvoir définir la suspension $\text{dsusp}_{\mathbb{E}^{1,2}}^*(\bar{\Sigma}, \tau)$ pour un couple $(\Sigma, \tau) \in T\text{Teich}_{g,s}$ autrement qu'en posant

$$\text{dsusp}_{\mathbb{E}^{1,2}}^*(\bar{\Sigma}, \tau) := \text{Ext}_{\text{BTZ}} \circ \text{dsusp}^*(\Sigma, \tau).$$

Nous partons alors de la construction de l'extension cuspidale maximale d'une surface hyperbolique complète de volume fini Σ d'holonomie ρ_L comme un quotient :

$$\bar{\Sigma} = (\mathbb{H}^2 \sqcup \Lambda(\rho_L)) / \rho_L \quad \Sigma = \mathbb{H}^2 / \rho_L$$

avec $\Lambda(\rho_L)$ l'ensemble des points fixes paraboliques de ρ_L ; puis, nous la généralisons en montrant que pour un $\mathbb{E}^{1,2}$ -espace-temps M globalement hyperbolique Cauchy-complet $\mathbb{E}^{1,2}$ -maximal d'holonomie affine admissible ρ :

$$\text{Ext}_{\text{BTZ}}(M) = (\Omega(\rho) \sqcup \tilde{\Lambda}(\rho)) / \rho \quad M = \Omega(\rho) / \rho$$

avec $\tilde{\Lambda}(\rho)$ l'ensemble des points fixes parabolique de ρ dans le bord de $\Omega(\rho)$. Une analyse minutieuse de ce quotient nous permettra de démontrer un théorème de Mess complet pour les espaces-temps BTZ.

Théorème ([Bru16b]). Soient $g, s > 0$ tels que $2g - 2 + s > 0$. Il existe des bijections naturelles

$$T\text{Teich}_{g,s} \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{dsusp}_{\mathbb{E}^{1,2}}^*} \\ \xleftarrow{\text{Hol}} \end{array} \mathcal{M}_{g,s}(\mathbb{E}^{1,2}) \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{Ext}_{\text{BTZ}}} \\ \xleftarrow{\text{Reg}} \end{array} \mathcal{M}_{g,s}(\mathbb{E}_0^{1,2}).$$

Ce chapitre comporte quatre sections, la première introduit la notion d'extension BTZ et démontre l'existence et l'unicité d'une extension BTZ maximale pour les espaces-temps plats singuliers globalement hyperboliques. Nous donnons un certain nombre de contre-exemples montrant que l'hypothèse globalement hyperbolique est difficile à affaiblir ne serait-ce que pour des raisons de causalité. La deuxième section démontre la compatibilité de l'extension BTZ maximale avec la Cauchy-complétude et la Cauchy-maximalité. La troisième section, reprend précisément la construction des extensions BTZ d'un espace-temps plat Cauchy-complet par quotient que nous avons introduit rapidement au paragraphe précédent. Enfin la quatrième et dernière section présente le théorème de type Mess pour les espaces-temps plats singuliers globalement hyperboliques Cauchy-compacts d'holonomie **affine** ne comportant que des points singuliers de type BTZ comme une application de cette théorie.

4.1 Extension BTZ

4.1.1 BTZ-extensions, définitions et exemples

Définition 4.1.1 (plongement BTZ, Extension BTZ). Soient M_1, M_2 deux espaces-temps plats singuliers. Un plongement BTZ de M_1 dans M_2 est un $\mathbb{E}_{\geq 0}^{1,2}$ -morphisme injectif $\phi : M_1 \rightarrow M_2$ tel que le complémentaire (possiblement vide) de l'image de ϕ est inclus dans $\text{Sing}_0(M_2)$.

Une extension BTZ d'un espace-temps plat singulier M est la donnée d'un couple (N, ϕ) où N est un espace-temps plat singulier et ϕ un $\mathbb{E}_0^{1,2}$ -plongement.

Définition 4.1.2. Soit M un espace-temps plat singulier globalement hyperbolique et soient $M \xrightarrow{\phi_1} M_1$ et $M \xrightarrow{\phi_2} M_2$ deux extensions BTZ de M . Un morphisme d'extensions BTZ est un $\mathbb{E}_{\geq 0}^{1,2}$ -morphisme $\phi : M_1 \rightarrow M_2$ tel que le diagramme suivant commute.

$$\begin{array}{ccc} & & M_1 \\ & \nearrow \phi_1 & \downarrow \phi \\ M & & \\ & \searrow \phi_2 & \\ & & M_2 \end{array}$$

Si ϕ est un isomorphisme, alors (M_1, ϕ_1) et (M_2, ϕ_2) sont dit équivalents.

Exemple 4.1.3 (Extension BTZ de $\text{Reg}(\mathbb{E}_0^{1,2})$). Le plongement $\text{Reg}(\mathbb{E}_0^{1,2}) \rightarrow \mathbb{E}_0^{1,2}$ donné par l'inclusion naturelle est un plongement BTZ.

Exemple 4.1.4. Considérons Σ une $\mathbb{H}_0^2$ -surface compacte, la suspension M_0 de $\text{Reg}(\Sigma)$ est un $\mathbb{E}_0^{1,2}$ -espace-temps et la suspension M_1 de Σ est un $\mathbb{E}_0^{1,2}$ -espace-temps singulier qui admet un $\mathbb{E}_0^{1,2}$ -atlas, c'est donc un $\mathbb{E}_0^{1,2}$ -espace-temps. De plus, le plongement naturel $\text{Reg}(\Sigma) \rightarrow \Sigma$ induit un plongement $M_0 \rightarrow M_1$ dont le complémentaire de l'image ne contient que des points singuliers BTZ. C'est donc une extension BTZ.

4.1.2 Préliminaires

Causalité et extensions BTZ

Proposition 4.1.5. *Soit M_1 un espace-temps plat singulier et soit $\phi : M_1 \rightarrow M_2$ une extension BTZ de M_1 .*

Si M_1 est fortement causal, M_2 est causal.

Démonstration. Supposons M_2 non causal, prenons une courbe c future causale dans M_2 périodique. D'après le lemme 3.2.4, c se décompose en une partie BTZ Δ connexe dans le passé de c^0 la partie non BTZ de c . Comme c est périodique, ou bien $\Delta = c$ ou bien $c^0 = c$.

1. Si $c^0 = c$, alors $c \subset M_1$ et donc M_1 contient une courbe causale fermée. M_1 n'est donc pas causal.
2. Si $\Delta = c$, considérons un voisinage de c recouvert par une union d'ouverts de carte modélisés sur $\mathbb{E}_0^{1,2}$ voisinages des points de c . Ce voisinage est doté d'une $(\mathbb{E}_0^{1,2}, \text{Isom}(\mathbb{E}_0^{1,2}))$ -structure naturelle. Quitte à le restreindre, on peut le choisir tubulaire de rayon constant ; ce voisinage est le quotient d'un tube de rayon constant par une rotation translation d'axe et de direction de translation parallèle à c . La géodésique lumière parallèle à c partant d'un point $p \notin c$ reste donc dans le voisinage tubulaire et admet donc un point d'accumulation. La courbe c et ses points d'accumulation sont dans M_1 qui n'est donc pas fortement causal.

□

Contre-exemple 4.1.6. *Une extension BTZ d'un espace-temps causal n'est pas nécessairement causale.*

Soit $M_2 := \mathbb{E}_0^{1,2}/\gamma$ avec $\gamma(\tau, \theta, \tau) = (\tau, \theta + 1, \tau + 1)$ et soit $M_1 = \text{Reg}(M_2)$. Le premier est bien une extension BTZ du premier. Une courbe causale c dans M_1 a une coordonnée τ croissante, si c est fermée, alors cette la coordonnée τ de c doit être constante et donc c est parallèle à $\text{Sing}_0(M_2)$. Or :

$$\forall s, s' \in \mathbb{R}, \quad \forall \tau_0 \in \mathbb{R}_+, \quad \forall \theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad \gamma^n(s, \tau_0, \theta_0) = (s', \tau_0, \theta_0) \Leftrightarrow n = 0$$

Ainsi, M_1 est causal mais M_2 ne l'est pas puisque la ligne BTZ est périodique.

Contre-exemple 4.1.7. *Soit M_2 une extension BTZ d'un espace-temps M_1 fortement causal, M_2 n'est pas nécessairement fortement causal.*

On se place dans $\mathbb{E}_0^{1,2}$ et on considère les surfaces

$$\Sigma_{\pm} = \left\{ (\tau, \tau, \theta) \mid \tau + \frac{1}{2}r\theta^2 = \pm 2, \theta \in [-\pi/3, \pi/3] \right\}$$

Les surfaces $\Sigma_{\pm}$ sont localement isométriques à $\mathbb{E}^2$ et totalement géodésiques. Soit $x_n := (2^{-n}, 0, 2)$ pour $n \in \mathbb{N}$ une suite de points de Σ_+ et $y_n := (2^{1-n}, 0, -2)$ pour $n \in \mathbb{N}$ une suite de points de Σ_- . On considère une suite strictement décroissante $(\rho_n) \in (\mathbb{R}_+^)^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$\mathbb{D}_{\Sigma_+}(x_n, \rho_n) \subset \left\{ (r, \theta, \tau) \mid r \in \left] \frac{3}{2^{n+2}}, \frac{5}{2^{n+2}} \right[; \theta \in \left] \frac{-\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \right[\right\}$$

et

$$\mathbb{D}_{\Sigma_-}(y_n, \rho_n) \subset \left\{ (r, \theta, \tau) \mid r \in \left] \frac{3}{2^{n+1}}, \frac{5}{2^{n+1}} \right[; \theta \in \left] \frac{-\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \right[\right\}$$

On pose :

$$M_2 := (\{-1 \leq \tau \leq 1\} \cup (\mathbb{D}_{\Sigma_+}(x_n, \rho_n) +]-2, 0]u) \cup (\mathbb{D}_{\Sigma_-}(y_n, \rho_n) + [0, 2[u) / \sim$$

avec $u = (0, 0, 1)$ et $\sim$ une identification de $\mathbb{D}_{\Sigma_+}(x_n, \rho_n)$ avec $\mathbb{D}_{\Sigma_-}(y_n, \rho_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

On peut vérifier que $M_1 := \text{Reg}(M_2)$ est bien fortement causal ; en effet puisque les courbes causales de $\mathbb{E}_0^{1,2}$ sont à coordonnée radiale r croissante, pour tout $p \in M_1$ et tout $\mathcal{U}$ voisinage de p ,

on peut choisir un voisinage $\mathcal{V}$ de p tel que $\mathcal{V} \subset \{3/2^{n_0+2} < r < 5/2^{n_0+2}\} \cap \mathcal{U}$ pour une certain n_0 . Une courbe causale future de M_1 partant de $\mathcal{V}$ qui quitte $\mathcal{V}$ ne peut espérer y revenir qu'en passant par un des disques de Σ_+ pour $n \geq n_0$ et donc revenir à $\mathcal{V}$ depuis un disque de Σ_- pour $n \geq n_0$. Or aucun de ces disques n'est dans le passé de $\{3/2^{n_0+2} < r < 5/2^{n_0+2}\}$ et donc une telle courbe causale ne peut revenir à $\mathcal{V}$. Un tel voisinage $\mathcal{V}$ est donc causalement convexe dans M_1 , et donc M_1 est fortement causal.

Cependant, il existe des courbes causales futures partant de $p := (0, 0, 0)$ passant par l'un des disques de Σ_+ et arrivant à $(\varepsilon, 0, 0)$ pour $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit. Le point p n'admet donc aucun voisinage causalement convexe dans M_2 et donc M_2 n'est pas fortement causal.

Rayons BTZ des espaces-temps globalements hyperboliques

Lemme 4.1.8. Soient M_1 et M_2 deux espaces-temps plats singuliers et soit $M_1 \xrightarrow{\phi} M_2$ une extension BTZ.

Si M_1 est globalement hyperbolique, alors :

$$\forall p \in M_1, \quad J_{M_2}^+(\phi(p)) = \phi(J_{M_1}^+(p))$$

Démonstration. On identifie M_1 à une partie de M_2 de sorte que ϕ est l'inclusion naturelle. Soient $p \in M_1$ et $q \in M_2$, supposons $p \in J_{M_2}^{-1}(q)$. Si $p \notin \text{Sing}_0(M_1)$, le futur de p dans M_2 ne contient aucun point BTZ et le résultat s'ensuit. Si $p = q$, c'est terminé, nous supposons alors $p \neq q$.

Comme p est dans le passé de q dans M_2 , d'après le lemme 3.2.4, p et q sont sur une même ligne BTZ de M_2 . Soit $\mathcal{T}$ un voisinage tubulaire de $[p, q]$ de rayon constant R . Soit $q' \in J_{\mathcal{T}}^+(q)$, comme $p \neq q$, $p \in I_{M_2}^-(q')$. Le diamant $J_{M_1}(p, q')$ est compact.

La partie régulière de $\mathcal{T}$ est sans point BTZ, elle est donc dans $\phi(M_1)$; le diamant ouvert $\mathring{J}(p, q)$ dans M_2 est inclus dans $\mathcal{T}$ et donc dans $\phi(M_1)$; c'est donc le diamant ouvert $\mathring{J}(p, q)$ de $\phi(M_1)$. De plus, la fermeture de $\mathring{J}(p, q)$ dans $\phi(M_1)$ est le diamant complet $J(p, q')$ de $\phi(M_1)$ qui est compact donc fermé dans M_2 . La fermeture de $\mathring{J}(p, q)$ dans $\phi(M_1)$ est donc égale à sa fermeture dans M_2 , comme le second contient $[p, q]$ il en va de même pour le premier; donc $[p, q] \subset \phi(M_1)$. $\square$

Corollaire 4.1.9. Soient M_1 et M_2 deux espaces-temps plats singuliers globalement hyperboliques et soit $M_1 \xrightarrow{\phi} M_2$ une extension BTZ. Pour tout $p, q \in \text{Sing}_0(M_1)$, si p et q sont dans la même composante connexe de $\text{Sing}_0(M_2)$ alors ils sont dans la même composante connexe de $\text{Sing}_0(M_1)$.

Proposition 4.1.10. Soit M un espace-temps plat singulier Cauchy-maximal et soit $p \in \text{Sing}_0(M)$.

Alors, le rayon BTZ futur partant de p est complet et il existe un voisinage tubulaire de $[p, +\infty[$ de rayon constant.

Démonstration. Considérons Σ une surface de Cauchy de M . La composante connexe Δ de p dans $\text{Sing}_0(M)$ est une courbe causale inextensible qui intersecte donc la surface de Cauchy Σ exactement une fois en un certain $q \in \Sigma \cap \Delta$. Il existe un voisinage de carte $(\bar{\mathcal{U}}, \mathbb{E}_0^{1,2}, \phi, \mathcal{V})$ de q tel que

$$\mathcal{V} = \{\tau \in [\tau_1, \tau_2], r \leq R\} \subset \mathbb{E}_0^{1,2}$$

pour un certain $R > 0$ et certains $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}$. Prenons ce voisinage assez petit de sorte que la surface $\{\tau = \tau_2, r < R\}$ est acausale M . Considérons alors le tube ouvert $\mathcal{T} = \{\tau > \tau_1, r < R\} \subset \mathbb{E}_0^{1,2}$ et $\mathcal{U} = \text{Int}(\bar{\mathcal{U}})$; nous posons alors

- $M_0 = M \setminus J^+(\phi^{-1}(\{\tau = \tau_2, r \leq R\}))$;
- $M_2 = (M_0 \amalg \mathcal{T}) / \sim$ avec $x \sim y \Leftrightarrow (x \in \mathcal{U}, y \in \mathcal{T} \text{ et } \phi(x) = y)$.

Σ est une surface de Cauchy de M_0 et M est une extension de Cauchy de M_0 . Pour démontrer que M_2 est un espace-temps plat singulier, il nous suffit de démontrer qu'il est séparé. En effet, ϕ est un isomorphisme donc l'union des atlas de M_0 et de $\mathcal{T}$ définit une $\mathbb{E}_A^{1,2}$ -structure sur M_2 .

- M_2 est séparé

Soit $x, y \in M_2$, $x \neq y$ et soit la projection naturelle $\pi : M_0 \amalg \mathcal{T} \rightarrow M_2$. Si $x, y \in \pi(\mathcal{U})$, considérons $x_1 = \pi^{-1}(x) \cap \mathcal{U}$, $x_2 = \pi^{-1}(x) \cap \mathcal{T}$, $y_1 = \pi^{-1}(y) \cap \mathcal{U}$, $y_2 = \pi^{-1}(y) \cap \mathcal{T}$; puis considérons des voisinages ouverts $\mathcal{V}_{x_1}$ et $\mathcal{V}_{y_1}$ de x_1 et y_1 disjoints. Remarquons que $\mathcal{V}_x := \pi^{-1}(\pi(\mathcal{V}_{x_1})) = \mathcal{V}_{x_1} \cup \phi(\mathcal{V}_{x_1})$ et que $\mathcal{V}_y := \pi^{-1}(\pi(\mathcal{V}_{y_1})) = \mathcal{V}_{y_1} \cup \phi(\mathcal{V}_{y_1})$. Par suite $\mathcal{V}_x$ et $\mathcal{V}_y$ sont des voisinages ouverts et disjoints de x et y respectivement. Remarquons également que $\pi^{-1}(\pi(\mathcal{U})) = \overline{\mathcal{U}} \cup \{\tau \in]\tau_1, \tau_2], r < R\}$ de sorte que, si x et y sont dans $M_2 \setminus \pi(\mathcal{U})$, alors ils sont séparés..

Reste à traiter le cas $x, y \in \partial\pi(\mathcal{U}) = \pi(\partial\mathcal{U}) \cup \pi(\{\tau = \tau_2\})$. Supposons alors $x, y \in \partial\pi(\mathcal{U})$ et considérons $x_1 \in \overline{\mathcal{U}}$, $y_1 \in \overline{\mathcal{U}}$ tel que $\pi(x_1) = x$ et $\pi(y_1) = y$. Prenons deux voisinages ouverts dans M_0 disjoints $\mathcal{V}_{x_1}$ et $\mathcal{V}_{y_1}$ de x_1 et y_1 respectivement. On a $\pi^{-1}(\pi(\mathcal{V}_{x_1})) = \mathcal{V}_{x_1} \cup \phi(\mathcal{V}_{x_1} \cap \mathcal{U})$ et $\pi^{-1}(\pi(\mathcal{V}_{y_1})) = \mathcal{V}_{y_1} \cup \phi(\mathcal{V}_{y_1} \cap \mathcal{U})$; donc x et y sont séparés. De la même manière, on peut séparer deux points $x, y \in \pi(\{\tau = \tau_2, r < R\})$. Supposons à présent $x = \pi(x_1)$ avec $x_1 \in \partial\overline{\mathcal{U}}$ et $y = \pi(y_1)$ avec $y_1 \in \{\tau = \tau_2, r < R\}$. Le point x_1 n'est pas dans $\phi^{-1}(\{\tau = \tau_2\})$ par définition de M_0 . Par suite, $\tau \circ \phi(x_1) \leq \tau_2$. Prenons un voisinage $\mathcal{V}_{x_1}$ de x_1 tel que $\phi(\mathcal{V}_{x_1} \cap \mathcal{U}) \subset \{\tau < \tau_2 - \varepsilon\}$ pour un certain $\varepsilon > 0$; puis, prenons $\mathcal{V}_{y_2} = \{\tau > \tau_2 - \varepsilon, r < R\}$; nous obtenons $\pi^{-1}(\pi(\mathcal{V}_{x_1})) = \mathcal{V}_{x_1} \cup \phi(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}_{x_1})$ et $\pi^{-1}(\pi(\mathcal{V}_{y_2})) = \mathcal{V}_{y_2} \cup \phi^{-1}(\{\tau \in]\tau_2 - \varepsilon, \tau_2])$. Ainsi, $\pi(\mathcal{V}_{x_1})$ et $\pi(\mathcal{V}_{y_2})$ sont ouverts et disjoints. Finalement, M_2 est séparé.

- Σ est une surface de Cauchy de M_2

Considérons c une courbe causale future inextensible de M_2 et posons $\Pi = \{\tau = \tau_2, r < R\} \subset \mathcal{T}$. La courbe c se décompose en une partie $c_0 = c \cap M_0$ et une partie $c_1 = c \cap J^+(\pi(\{\tau = \tau_2, r < R\}))$. Ces deux parties sont connexes puisque Π est acausal dans $\mathcal{T}$ et $\phi^{-1}(\Pi)$ est acausal dans M . De plus, c_1 et c_0 sont deux courbes causales inextensibles si non vides. Si c_1 est non vide, alors elle intersecte Π car $D_{\mathcal{T}}^+(\Pi) = \{\tau \geq \tau_2, r < R\}$ et alors c_0 est non vide. On en déduit que c_0 est toujours non vide. c_1 n'intersecte pas Σ et c_0 intersecte Σ exactement une fois donc c intersecte Σ exactement une fois.

Par suite M et M_2 sont des extensions de Cauchy de M_0 or M est Cauchy-maximal donc, d'après le théorème 13, M_2 se plonge dans M et on obtient le résultat. $\square$

Un lemme de recollement

Lemme 4.1.11. *Soit M_0 un espace-temps plat singulier. Soient $i : M_0 \rightarrow M_1$ une extension BTZ de M_0 et $j : M_0 \rightarrow M_2$ un $\mathbb{E}_{\geq 0}^{1,2}$ -plongement avec M_2 un espace-temps plat singulier. On pose $M_3 := (M_1 \amalg M_2)/M_0$ de sorte à obtenir le diagramme suivant :*

$$\begin{array}{ccc} M_0 & \xrightarrow{i} & M_1 \\ j \downarrow & & \downarrow \pi_1 \\ M_2 & \xrightarrow{\pi_2} & M_3 \end{array}$$

Si M_2 est globalement hyperbolique et si $\text{Sing}_0(M_2) = j(\text{Sing}_0(M_0))$, alors M_3 est séparé.

Démonstration. Soient $p \in M_1$ et $q \in M_2$ tels que pour tout $\mathcal{U}$ voisinage de p et $\mathcal{V}$ voisinage de q on a :

$$i^{-1}(\mathcal{U}) \cap j^{-1}(\mathcal{V}) \neq \emptyset.$$

On doit montrer que $\pi_1(p) = \pi_2(q)$.

On remarque que pour tout $x \in M_1$, $I^+(x) \subset i(M_0)$ car M_1 est une extension BTZ de M_0 et donc en considérant $(a_n) \in M_0^{\mathbb{N}}$ une suite telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} i(a_n) = p \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} j(a_n) = q.$$

$$\begin{aligned}
 j \circ i^{-1}(I^+(p)) &= j \circ i^{-1} \left\{ \text{Int} \left(\bigcap_{N \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq N} I^+(a_n) \right) \right\} \\
 &= \text{Int} \left(\bigcap_{N \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq N} j(I^+(i^{-1}(a_n))) \right) \\
 &\subset \text{Int} \left(\bigcap_{N \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq N} I^+(j \circ i^{-1}(a_n)) \right) \\
 &\subset I^+(q)
 \end{aligned}$$

Prenons une suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in M_0^{\mathbb{N}}$ décroissante telle que $i(b_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} p$. La suite $(j(b_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et dans $J^+(q)$ donc elle converge dans $J^+(q)$. On note $q' := \lim_{n \rightarrow +\infty} j(b_n)$.

De la même manière que précédemment, $j \circ i^{-1}(I^+(p)) \subset I^+(q')$. Soit $\mathcal{U} \xrightarrow{\phi} \mathcal{U}' \subset \mathbb{E}_\alpha^{1,2}$ un ouvert de carte autour de q' avec $\mathcal{U}'$ diamant de $\mathbb{E}_\alpha^{1,2}$ et soit $\mathcal{V} \xrightarrow{\psi} \mathcal{V}' \subset \mathbb{E}_0^{1,2}$ un ouvert de carte autour de p avec $\mathcal{V}'$ diamant de $\mathbb{E}_0^{1,2}$. On se donne $n \in \mathbb{N}$ tel que $i(b_n) \in \mathcal{V}$ et $j(b_n) \in \mathcal{U}$. On pose $f := \phi \circ j \circ i^{-1} \circ \psi^{-1}$ et $\mathcal{W} := I(p, i(b_n))$ et on a alors :

$$f : \mathcal{W} \longrightarrow \mathbb{E}_\alpha^{1,2}$$

et $\mathcal{W}$ est la partie régulière d'un voisinage d'un point de $\text{Sing}(\mathbb{E}_0^{1,2})$. On déduit alors de la propriété 2.2.17 que $\alpha = 0$, donc $q' \in \text{Sing}_0(M_2) = \text{Sing}_0(j(M_0))$ et donc $q' \in j(M_0)$. Par suite,

$$i \circ j^{-1}(q') = \lim_{n \rightarrow +\infty} i(b_n) = p$$

donc $p \in i(M_0)$ et donc

$$q = \lim_{n \rightarrow +\infty} j(a_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} j \circ i^{-1} \circ i(a_n) = j \circ i^{-1}(p).$$

Finalement, $\pi_1(p) = \pi_2(q)$. □

Holonomie des lignes singulières

On rappelle que tout $\mathbb{E}_{\geq 0}^{1,2}$ -espace-temps est une variété orientable.

Définition 4.1.12. Soient M un $\mathbb{E}_{\geq 0}^{1,2}$ -espace-temps, $\alpha \in \mathbb{R}_+$, et $p \in \text{Sing}_\alpha(M)$.

On pose $\gamma(p) \in \pi_1(\text{Reg}(M))$ la classe d'homotopie d'un lacet simple tournant dans le sens direct autour de la droite singulière portant p dans un voisinage de carte de p .

Lemme 4.1.13. Soient M un $\mathbb{E}_{\geq 0}^{1,2}$ -espace-temps, $\alpha \in \mathbb{R}_+$, et $p \in \text{Sing}_\alpha(M)$. On a les points suivants :

- (i) $\gamma(p)$ ne dépend que de la composante connexe de $\text{Sing}(M)$ contenant p .
- (ii) Si M est globalement hyperbolique alors

$$\gamma : \pi_0(\text{Sing}(M)) \rightarrow \pi_1(M)$$

est d'ordre au plus deux, c'est à dire que pour tout $\gamma_0 \in \pi_1(M)$, $\#\gamma^{-1}(\gamma_0) \leq 2$.

Démonstration.

- (i) Soient p et q deux points appartenant à la même composante connexe de $\text{Sing}(M)$. Il existe un voisinage tubulaire $\mathcal{U}$ de rayon constant du segment de points singuliers $[p, q]$. Un lacet simple autour de la ligne singulière portant p dans ce voisinage est alors clairement homotope à un lacet simple autour de q dans ce voisinage.

- (ii) Supposons M globalement hyperbolique et prenons Σ une surface de Cauchy de M . Soit Δ une composante connexe de $\text{Sing}(M)$, d'après le lemme 3.2.4, Δ est une courbe causale inextensible qui intersecte donc Σ exactement une fois. On considère alors $\gamma_\Delta := \gamma(p)$ avec $p = \Delta \cap \Sigma$ et $\gamma_\Delta \subset \Sigma$. On note $\Sigma^* := \text{Reg}(\Sigma)$

Si Σ^* est homéomorphe à une sphère percée zéro, une ou deux fois, alors $\#\pi_0(\text{Sing}(M)) \leq 2$ et donc $\#\gamma^{-1}(c) \leq 2$ pour tout lacet $[c] \in \pi_1(\Sigma)$.

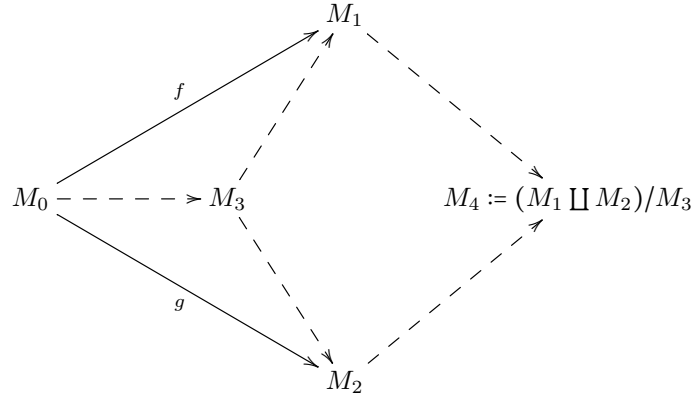
Sinon Σ^* est une surface hyperbolique et les classes d'homotopies des lacets périphériques sont disjointes. L'application γ est alors injective.

□

4.1.3 Extension BTZ maximale

Théorème 19 (Extension BTZ maximale). *Soit M un espace-temps plat singulier globalement hyperbolique. Il existe une extension BTZ globalement hyperbolique maximale $\bar{M}$ de M . De plus, $\bar{M}$ est unique à équivalence près.*

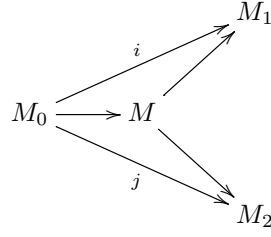
De la même manière que pour le théorème de Choquet-Bruhat-Geroch, l'essence de la preuve de ce théorème est, étant donné deux extensions BTZ globalement hyperboliques M_1 et M_2 d'un espace-temps globalement hyperbolique M_0 , de contruire une sous-extension BTZ commune maximale à $M_1|M_0$ et à $M_2|M_0$ puis de coller M_1 et M_2 le long de cette extension commune maximale pour obtenir un M_4 . Il faut démontrer que ce dernier est bien un espace topologique séparé qui héritera alors des $\mathbb{E}_{\geq 0}^{1,2}$ -structures de M_1 et M_2 ; enfin, il faut également démontrer que M_4 est globalement hyperbolique de sorte à montrer que M_4 est une extension BTZ globalement hyperbolique de M_1 et de M_2 .



Cela démontre que la famille des extensions BTZ globalement hyperboliques de M_0 est filtrante à droite et donc admet une limite inductive dans la catégorie des espaces topologiques séparés munis d'une $\mathbb{E}_{\geq 0}^{1,2}$ -structure. Il reste alors à démontrer que cette limite inductive est dénombrable à l'infini (et donc qu'elle est une $\mathbb{E}_{\geq 0}^{1,2}$ -variété) et globalement hyperbolique.

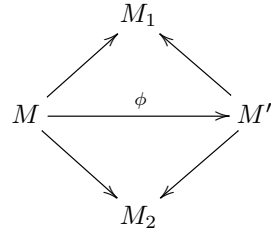
Définition 4.1.14 (Sous-extension BTZ commune). *Soit M_0 un espace-temps plat singulier globalement hyperbolique et soient $M_0 \xrightarrow{i} M_1$ et $M_0 \xrightarrow{j} M_2$ deux extensions BTZ globalement hyperboliques de M_0 .*

Une sous-extension BTZ commune à M_1 et M_2 est une $\mathbb{E}_{\geq 0}^{1,2}$ -variété M munie de plongement BTZ $M_0 \rightarrow M$; $M \xrightarrow{a} M_1$; $M \rightarrow M_2$ tels que le diagramme suivant commute :



Définition 4.1.15 (Morphisme de sous-extensions communes). Soit M_0 un espace-temps plat singulier globalement hyperbolique et soient $M_0 \xrightarrow{i} M_1$ et $M_0 \xrightarrow{j} M_2$ deux extensions BTZ globalement hyperboliques de M_0 . Soient M et M' deux sous-extensions communes à M_1 et M_2 .

Un morphisme de M vers M' est un morphisme de $\mathbb{E}_{\geq 0}^{1,2}$ -variétés $M \xrightarrow{\phi} M'$ tel que le diagramme suivant commute :



Si le morphisme ϕ est bijectif, alors M et M' sont dit équivalents.

Définition 4.1.16 (Sous-extension commune maximale). Soient M_0 un espace-temps plat singulier globalement hyperbolique et $M_0 \rightarrow M_1$ et $M_0 \rightarrow M_2$ deux extensions BTZ globalement hyperboliques de M_0 . Soit M une sous-extension commune à M_1 et M_2 .

M est maximal si pour toute sous-extension M' commune à M_1 et M_2 , et tout morphisme de sous-extension commune $\phi : M \rightarrow M'$ est bijectif.

Proposition 4.1.17 (PGCD de deux extensions BTZ). Soient M_0 un espace-temps plat singulier globalement hyperbolique et $M_0 \xrightarrow{i} M_1$ et $M_0 \xrightarrow{j} M_2$ deux extensions BTZ globalement hyperboliques de M_0 .

Il existe une sous-extension BTZ $M_1 \wedge M_2$ commune à M_1 et M_2 maximale parmi les sous-extensions BTZ communes à M_1 et M_2 . De plus, $M_1 \wedge M_2$ est unique à équivalence de sous-extensions communes près.

Démonstration.

- On pose $M_1 \wedge M_2$ l'union des ouverts M de M_1 globalement hyperboliques, contenant $i(M_0)$ et tels qu'il existe un plongement BTZ $M \xrightarrow{\phi_M} M_2$ dont la restriction à $i(M_0)$ est $j \circ i^{-1}$. Pour un tel ouvert M de M_1 , l'application ϕ_M est unique d'après la proposition 1.1.29. L'inclusion $M_1 \wedge M_2 \rightarrow M_1$ est clairement un plongement BTZ de même que le plongement $M_0 \xrightarrow{i} M_1 \wedge M_2$. On pose

$$\phi : \left\{ \begin{array}{ll} M_1 \wedge M_2 & \longrightarrow M_2 \\ x & \longmapsto \phi_M(x) \text{ si } x \in M \end{array} \right.$$

Comme $j(M_0)$ est dense de complémentaire composée de points BTZ et comme $j(M_0) \subset \phi(M_1 \wedge M_2)$, il en va de même pour $\phi(M_1 \wedge M_2)$.

Soient $x, y \in M_1 \wedge M_2$ tels que $p := \phi(x) = \phi(y)$. Soient M_x (resp. M_y) un ouvert globalement hyperbolique de M_1 contenant $i(M_0)$ et x (resp. y). Remarquons que $I^+(p) \subset \text{Reg}_{>0}(M_2)$ donc

$$\emptyset \neq I^+(p) = \phi(I^+(x)) = \phi(I^+(y)) \subset j(M_0);$$

et donc $I^+(x) = I^+(y)$ et $x = y$.

Ainsi, ϕ est un plongement BTZ.

- Montrons que $M_1 \wedge M_2$ est globalement hyperbolique. Comme M_1 est fortement causal, il en va de même pour $M_1 \wedge M_2$ qui en est une partie. Soient p et q dans $M_1 \wedge M_2$ et soient M_p et M_q deux ouverts globalement hyperboliques de M_1 contenant respectivement p et q et $i(M_0)$. Si $p \notin \text{Sing}_0(M_2)$ alors, $J_{M_2}^+(p) \subset i(M_0)$ et donc ou bien $q \in \text{Sing}_0(M_2)$ et $J_{M_2}^+(p) \cap J_{M_2}^-(q) = \emptyset$ ou bien $q \in i(M_0)$ et $J_{M_2}^+(p) \cap J_{M_2}^-(q) = J_{M_0}^+(p) \cap J_{M_0}^-(q)$ qui est compact car M_2 est globalement hyperbolique. Or

$$J_{M_2}^+(p) \cap J_{M_2}^-(q) \supset J_{M_1 \wedge M_2}^+(p) \cap J_{M_1 \wedge M_2}^-(q) \supset J_{M_0}^+(p) \cap J_{M_0}^-(q)$$

donc le diamant complet de p à q dans $M_1 \wedge M_2$ est compact. Si $p \in \text{Sing}_0(M_2)$, d'après le lemme 4.1.8, tout point BTZ de M_2 dans le futur de p est dans M_p ; par suite, on a

$$J_{M_2}^+(p) \cap J_{M_2}^-(q) = J_{M_1 \wedge M_2}^+(p) \cap J_{M_1 \wedge M_2}^-(q)$$

et donc le diamant complet de p à q dans $M_1 \wedge M_2$ est compact.

$M_1 \wedge M_2$ est fortement causal et tous les diamants complets sont compacts c'est donc un espace-temps globalement hyperbolique.

- Soit M une sous-extension BTZ commune à M_1 et M_2 , un morphisme de $\mathbb{E}_{\geq 0}^{1,2}$ -variétés est un homéomorphisme local, l'image du plongement $k : M \rightarrow M_1$ est donc un ouvert de M_1 globalement hyperbolique contenant $i(M_0)$. Cet ouvert est donc inclus dans $M_1 \wedge M_2$, de plus le plongement $k' : M \rightarrow M_2$ est égal à $\phi \circ k$ sur le plongement de M_0 dans M qui est un ouvert. D'après la proposition 1.1.29, $k' = \phi \circ k$ et donc M se plonge naturellement dans $M_1 \wedge M_2$.
- Soit M une sous-extension BTZ commune à M_1 et M_2 maximale. D'après ce qui précède, il existe un plongement BTZ naturel de M dans $M_1 \wedge M_2$. Comme M est une sous-extension maximale, ce morphisme est bijectif et donc M et $M_1 \wedge M_2$ sont équivalents.

□

Définition 4.1.18 (Sur-extension BTZ commune). Soit M_0 un espace-temps plat singulier globalement hyperbolique et soient $M_0 \xrightarrow{i} M_1$ et $M_0 \xrightarrow{j} M_2$ deux extensions BTZ globalement hyperboliques de M_0 .

Une sur-extension BTZ commune à M_1 et M_2 est une $\mathbb{E}_{\geq 0}^{1,2}$ -variété M munie de plongements BTZ $M_1 \xrightarrow{a} M$; $M_2 \rightarrow M$ tels que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} & M_1 & \\ i \nearrow & & \searrow \\ M_0 & & M \\ j \searrow & & \nearrow \\ & M_2 & \end{array}$$

Définition 4.1.19 (Morphisme de sur-extensions communes). Soient M_0 un espace-temps plat singulier globalement hyperbolique et $M_0 \xrightarrow{i} M_1$ et $M_0 \xrightarrow{j} M_2$ deux extensions BTZ globalement hyperboliques de M_0 . Soient M et M' deux sur-extensions communes à M_1 et M_2 .

Un morphisme de sur-extensions de M vers M' est un morphisme de $\mathbb{E}_{\geq 0}^{1,2}$ -variétés $M \xrightarrow{\phi} M'$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} & M_1 & \\ \swarrow & & \searrow \\ M & \xrightarrow{\phi} & M' \\ \nwarrow & & \nearrow \\ & M_2 & \end{array}$$

Si le morphisme ϕ est bijectif, alors M et M' sont dits équivalents.

Proposition 4.1.20 (PPCM de deux extensions BTZ). Soient M_0 un espace-temps plat singulier globalement hyperbolique et $M_0 \xrightarrow{i} M_1$ et $M_0 \xrightarrow{j} M_2$ deux extensions BTZ globalement hyperboliques de M_0 .

Il existe une sur-extension BTZ $M_1 \wedge M_2$ commune à M_1 et M_2 minimale parmi les sur-extensions BTZ communes à M_1 et M_2 . De plus, $M_1 \vee M_2$ est unique à équivalence de sur-extensions près.

Démonstration. On pose ϕ_1 le plongement BTZ naturel de $M_1 \wedge M_2$ dans M_1 et ϕ_2 le plongement BTZ naturel de $M_1 \wedge M_2$ dans M_2 . On définit alors $M_1 \vee M_2 := (M_1 \amalg M_2) / \sim$ avec $x \sim y$ s'il existe $p \in M_1 \wedge M_2$ tel que $\phi_1(p) = x$ et $\phi_2(x) = y$ ou $\phi_2(p) = x$ et $\phi_1(x) = y$. Il faut démontrer que $M_1 \vee M_2$ est séparé, admet une $\mathbb{E}_{\geq 0}^{1,2}$ -structure et est globalement hyperbolique. Deux points p et q de $M_1 \vee M_2$ sont dits non séparés si pour tout voisinage $\mathcal{U}$ de p et tout voisinage $\mathcal{V}$ de q , l'intersection $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ est non vide. Un point p est dit non séparé s'il existe un point q tel que le couple (p, q) est non séparé. Dans la suite, on identifie $M_1 \wedge M_2$ à un ouvert de M_1 et on se donne ϕ le plongement BTZ naturel de $M_1 \wedge M_2$ dans M_2 .

On pose C l'ensemble des points p de M_1 dont l'image dans $M_1 \vee M_2$ est non séparée. On souhaite démontrer que C est vide, pour cela, on commence par démontrer que $M_1 \wedge M_2 \cup C$ est un ouvert connexe et que ϕ s'étend injectivement à C ; ensuite on démontre que $M_1 \wedge M_2 \cup C$ est globalement hyperbolique; la maximalité de $M_1 \wedge M_2$ permettra de conclure.

- Tout d'abord, $C \subset \text{Sing}_0(M_2) \subset \overline{M_1 \wedge M_2}$ car $i(M_0)$ est dense dans $M_1 \wedge M_2$ et $M_2 \setminus (M_1 \wedge M_2) \subset \text{Sing}_0$. Soient $p \in C$ et $p' \in M_2$ tels que p et p' ne sont pas séparés dans $M_1 \vee M_2$. Soit $\mathcal{U}_p \xrightarrow{\phi_p} \mathcal{V}_p \subset \mathbb{E}_0^{1,2}$ une carte au voisinage de p et $\mathcal{U}_{p'} \xrightarrow{\phi_{p'}} \mathcal{V}_{p'} \subset \mathbb{E}_\alpha^{1,2}$ une carte au voisinage de p' pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Comme p et p' ne sont pas séparés dans $M_1 \vee M_2$, il existe une suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \text{Reg}(M_1)^\mathbb{N}$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = p$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(p_n) = p'$. Soit alors une telle suite, on remarque que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I^+(p_n) \subset j(M_0) \quad \text{et} \quad \phi(I^+(p_n)) = I^+(\phi(p_n))$$

on a alors

$$\begin{aligned} I^+(p') &= \text{Int} \left\{ \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq N} I^+(\phi(p_n)) \right\} \\ &= \text{Int} \left\{ \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq N} \phi(I^+(p_n)) \right\} \\ &= \phi \left(\text{Int} \left\{ \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq N} I^+(p_n) \right\} \right) \\ I^+(p') &= \phi(I^+(p)). \end{aligned}$$

Quitte à prendre $\mathcal{U}_p$ et $\mathcal{U}_{p'}$ plus petit, on peut supposer $\mathcal{U}_p$ connexe et $\phi(I^+(p) \cap \mathcal{U}_p) = I^+(p') \cap \mathcal{U}_{p'}$; ainsi

$$\psi_{p'} \circ \phi \circ \psi_p^{-1} : I^+(\psi_p(p)) \cap \mathcal{V}_p \rightarrow I^+(\psi_{p'}(p')) \cap \mathcal{V}_{p'}$$

est un $\mathbb{E}^{1,2}$ -morphisme injectif. Le futur d'un point BTZ de $\mathcal{V}_p$ est la partie régulière d'un voisinage d'un intervalle de points BTZ de $\mathcal{V}_p$; la proposition 2.2.17 s'applique donc $\alpha = 0$ et $\psi_{p'} \circ \phi \circ \psi_p^{-1}$ est la restriction d'un isomorphisme γ_p de $\mathbb{E}_0^{1,2}$.

Prenons une famille $(\mathcal{U}_p \xrightarrow{\psi_p} \mathcal{V}_p, \mathcal{U}_{p'} \xrightarrow{\psi_{p'}} \mathcal{V}_{p'}, \gamma_p)_{p \in C}$ de telles cartes et isométries. $(M_1 \wedge M_2) \cup \bigcup_{p \in C} \mathcal{U}_p$ est un ouvert de M_1 et donc une $\mathbb{E}_{\geq 0}^{1,2}$ -variété et le $\mathbb{E}_{\geq 0}^{1,2}$ -morphisme

$$\bar{\phi} : \left\{ \begin{array}{ll} (M_1 \wedge M_2) \cup \bigcup_{p \in C} \mathcal{U}_p & \longrightarrow M_2 \\ x & \longmapsto \begin{cases} \phi(x) & \text{si } x \in M_1 \wedge M_2 \\ \psi_{p'}^{-1} \circ \gamma \circ \psi_p(x) & \text{si } x \in \mathcal{U}_p \end{cases} \end{array} \right.$$

est donc bien défini d'après la proposition 1.1.29. On remarque que pour tout $p \in C$ et tout $q \in \text{Sing}_0(\mathcal{U}_p)$, les points q et $\bar{\phi}(q)$ ne sont pas séparés dans $M_1 \vee M_2$. Par suite, ou bien $q \in C$ ou bien $q \in M_1 \wedge M_2$, donc

$$(M_1 \wedge M_2) \cup C = (M_1 \wedge M_2) \bigcup_{p \in C} \mathcal{U}_p.$$

et donc $(M_1 \wedge M_2) \cup C$ est ouvert et $\bar{\phi}$ s'étend en $\bar{\phi} : (M_1 \wedge M_2) \cup C \rightarrow M_2$.

- Soient $p, q \in (M_1 \wedge M_2) \cup C$ tels que $\bar{\phi}(p) = \bar{\phi}(q)$. On a alors

$$I^+(p) = \phi^{-1}(I^+(\bar{\phi}(p))) = \phi^{-1}(I^+(\bar{\phi}(q))) = I^+(q),$$

or $(M_1 \wedge M_2) \cup C$ est un espace-temps topologique fortement causal donc $x \mapsto I^+(x)$ est injective sur $Z^+((M_1 \wedge M_2) \cup C)$; de plus les points p et q sont fortement tarentin dans le futur; donc $p = q$.

- Posons $M = (M_1 \wedge M_2) \cup C$ et $p, q \in M$, nous savons déjà que $J_{M_1}^-(q) \cap J_{M_1}^+(p)$ est compact. On identifie M_0 et $i(M_0) \subset M_1$. Si $p \notin \text{Sing}_0(M_1)$, $J^+(p) \subset M \setminus \text{Sing}_0(M_1) \subset M_0$ et $J_M^-(q) \cap J_M^+(p) = J_{M_0}^-(q) \cap J_{M_0}^+(p)$ qui est compact. Supposons à présent $p \in \text{Sing}_0$ et considérons $(x_n) \in M^{\mathbb{N}}$ une suite telle que $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in J_M^+(p) \cap J_M^-(q)$. Par compacité de $J_M^+(p) \cap J_M^-(q)$, on peut supposer que (x_n) converge vers un certain $x \in \text{Sing}_0(M_1)$.

Considérons un voisinage tubulaire compact $\mathcal{T}$ de $[p, x]$ dans M_1 , la partie $M \cap [p, x]$ est ouverte dans $[p, x]$ et contient p . Considérons $I = \{y \in [p, x] \mid [p, y] \subset M\}$. L'ensemble I est connexe et ouvert dans $[p, x]$. Considérons à présent une suite strictement croissante $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}}$, elle converge vers un certain $y_\infty \in [p, x]$. Prenons alors un diamant compact $J_{\mathcal{T}}(p, p')$ contenant $]p, y_\infty[$. On peut prendre $p' \in \partial J^+(y_\infty)$ tel que $p' \in M_0 \cap \mathcal{T}$. Le diamant $\phi(J(p, p'))$ de M_2 est relativement compact on peut donc extraire une sous-suite convergente $\phi(y_n)$ de limite un certain $y'_\infty \in M_2$. Par suite $\pi(y'_\infty)$ et $\pi(y_\infty)$ sont non séparés et $y_\infty \in M$. On en déduit que $M \cap [p, x]$ est fermé et $I = [p, x]$.

Finalement, $x \in M$, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a donc une sous-suite convergente dans $J_M^+(p) \cap J_M^-(q)$.

- $(M_1 \wedge M_2) \cup C$ est donc une sous-extension BTZ de $M_0 \rightarrow M_1$ munie d'un plongement BTZ dans M_2 . C'est donc une partie de $M_1 \wedge M_2$. Finalement, $C = \emptyset$ et donc $M_1 \vee M_2$ est séparé.

□

Preuve du théorème 19. On pose $\overline{M} := \varinjlim N$ où N parcourt les extensions BTZ de M dans la catégorie des variétés topologiques séparées. Cette limite injective existe puisque, d'après la proposition 4.1.20, la famille des extensions BTZ de M est filtrante à droite. On munit $\overline{M}$ de la $\mathbb{E}_{\geq 0}^{1,2}$ -structure induite par les membres N de la famille des extensions BTZ de M .

- Montrons que la topologie de $\overline{M}$ est à base dénombrable. On commence par remarquer que l'application γ du lemme 4.1.13 est bien définie de $\text{Sing}_0(\overline{M})$ dans $\pi_1(\text{Reg}(\overline{M})) = \pi_1(\text{Reg}(M_0))$ et qu'elle est d'ordre au plus 2. En effet, si elle était d'ordre plus grand, on aurait M_1, M_2, M_3 trois extensions BTZ de M_0 et $M_4 := M_1 \vee M_2 \vee M_3$; avec trois points $p_i \in \text{Sing}_0(M_i)$ dans des composantes connexes par arcs distinctes de $\text{Sing}_0(M_4)$ avec $\gamma(p_1) = \gamma(p_2) = \gamma(p_3)$. Cela contredit le lemme 4.1.13. Enfin, comme $\pi_1(\text{Reg}(M_0))$ est dénombrable, $\text{Sing}_0(\overline{M})$ admet un nombre dénombrable de composantes connexes par arc.

Une base de la topologie de $\overline{M}$ s'obtient alors en ajoutant aux ouverts de M une famille dénombrable de voisinages de carte autour des points de $\text{Sing}_0(\overline{M})$ induisant sur $\text{Sing}_0(\overline{M})$ une base de voisinage. La topologie de $\overline{M}$ est donc à base dénombrable et $\overline{M}$ est une $\mathbb{E}_{\geq 0}^{1,2}$ -variété et une extension BTZ de M_0 .

- Montrons que $\overline{M}$ est globalement hyperbolique. Tout d'abord, d'après la proposition 4.1.5, $\overline{M}$ est causal. Ensuite, soient $p, q \in \overline{M}$, on se donne M_1 une extension BTZ globalement hyperbolique de M_0 contenant p et q . D'après le lemme 4.1.8, pour tout M_2 extension BTZ globalement hyperbolique de M_1 , le futur de p est dans M_2 est inclus dans M_1 . De plus, il est aisé de montrer avec le lemme 3.2.4 que le passé causal de q dans une extension BTZ globalement hyperbolique M de M_1 se décompose en l'union du passé de causal de q dans M_1 et d'une famille de rayons BTZ passés. Parmi ces rayons, au plus un intersecte le futur de p et comme M est causal, l'intersection de du rayon BTZ futur partant de p et le passé de q est un segment BTZ $[p, p^*]$ dans le futur de p . De nouveau d'après le lemme 4.1.8, le segment $[p, p^*]$ est dans M_1 et donc

$$J_{\overline{M}}(p, q) = J_{M_1}(p, q),$$

ce dernier est compact donc le diamant complet de p à q dans $\overline{M}$ est compact.

$\overline{M}$ est donc globalement hyperbolique.

□

4.1.4 Une remarque sur les extensions de Cauchy et BTZ successives

Exemple 4.1.21. Soit $M_0 = \{\tau < 0, r > 0\}$ le demi-tube passé dans les coordonnées $(\tau, \mathfrak{r}, \theta)$ de $\mathbb{E}_0^{1,2}$ et soit $p = (\tau = 0, r = 0)$. L'espace-temps M_0 est régulier et globalement hyperbolique. Soit M_1 son extension de Cauchy maximale, M_2 l'extension BTZ maximale de M_1 et M_3 l'extension de Cauchy maximale de M_2 (voir figure II.1).

- $M_0 = \text{Reg}(\mathbb{E}_0^{1,2}) \setminus J^+(\{\tau = 0\})$
- $M_1 = \text{Reg}(\mathbb{E}_0^{1,2}) \setminus J^+(p)$.
- $M_2 = \mathbb{E}_0^{1,2} \setminus J^+(p)$
- $M_3 = \mathbb{E}_0^{1,2}$

Question ouverte 4.1.22. Soient M_0 un espace-temps globalement hyperbolique plat singulier, M_1 son extension de Cauchy maximale, M_2 l'extension BTZ maximale de M_1 et M_3 l'extension de Cauchy maximale de M_2 .

M_3 est-il à la fois Cauchy-maximal et BTZ-maximal ?

4.2 Cauchy-complétude et extension BTZ

Considérons $\mathbb{E}_0^{1,2}$ munie de ses coordonnées cylindriques $(\tau, \mathfrak{r}, \theta)$ et de la surface de Cauchy $\Sigma := \{\tau = 1\}$. La partie régulière de Σ , $\Sigma^* := \text{Reg}(\Sigma)$, n'est pas une surface de Cauchy de la partie

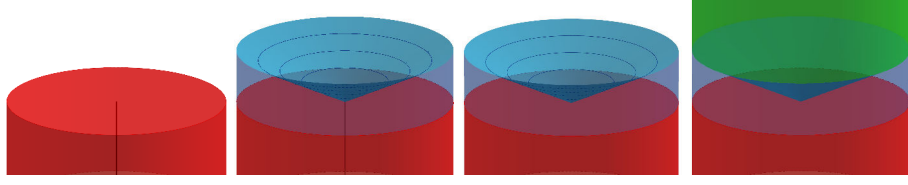


FIGURE II.1 – Extensions de Cauchy et BTZ successives d'un demi $\mathbb{E}_0^{1,2}$ passé. En rouge le demi espace $M_0 := \{\tau < 0, \mathfrak{r} > 0\}$, en noir le rayon BTZ passé $\{\mathfrak{r} = 0, \tau < 0\}$. En bleu le complémentaire de M_0 dans son extension de Cauchy maximale M_1 . Ensuite, le rayon BTZ passé est attrapé par l'extension BTZ pour donner M_2 . Enfin, en vert le complémentaire de M_2 dans son extension de Cauchy maximale M_3 .

régulière de $\mathbb{E}_0^{1,2}$; en effet son développement de Cauchy est $\text{Reg}(\mathbb{E}_0^{1,2}) \setminus J^+(\{\tau = 1, r = 0\})$. Le problème provient du fait qu'une courbe telle que $\{\tau = 2r + \tau_0, \theta = \theta_0\}$ est causale, inextensible dans $\text{Reg}(\mathbb{E}_0^{1,2})$ et n'intersecte pas Σ^* pour $\tau_0 > 0$. Une solution consiste à remarquer que Σ^* coïncide avec $\mathbb{H}_0^2 := \left\{ \tau = \frac{1+r^2}{2r} \right\}$ sur $\{r = 1, \tau = 1\}$ de sorte que nous pouvons coller la partie de $\mathbb{H}_0^2$ à l'intérieur du tube de rayon 1 avec le plan $\{\tau = 1\}$ à l'extérieur du tube de rayon 1 pour obtenir une surface de Cauchy complète Σ_1 de la partie régulière de $\mathbb{E}_0^{1,2}$. Voir figure II.2. Cette procédure

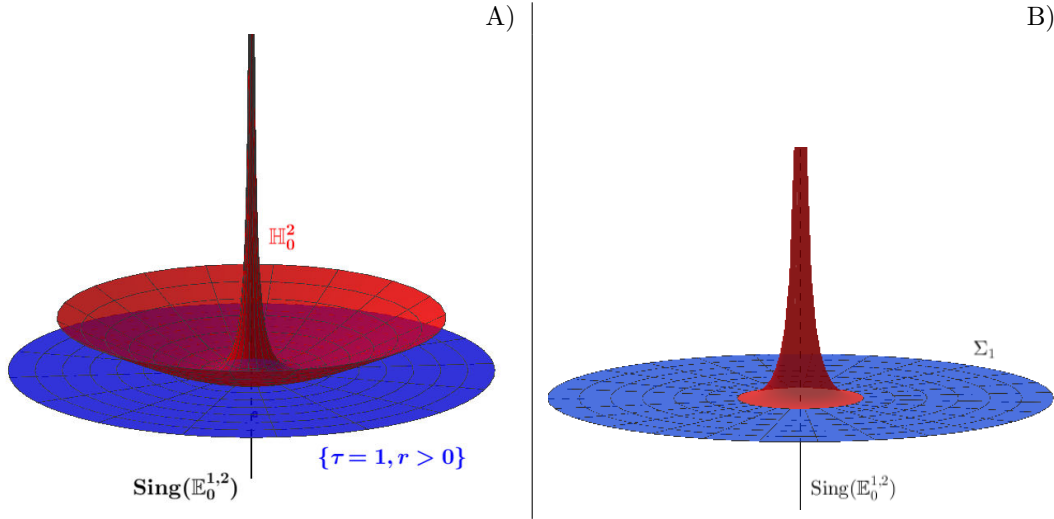


FIGURE II.2 – Deux surfaces acausales et un collage.

- A) Le plan bleu représente la surface $\Sigma^* = \{\tau = 1, r > 0\}$ et le plan rouge la surface $\mathbb{H}_0^2$.
 B) Le collage Σ_1 de $\mathbb{H}_0^2 \cap \{r \leq 1\}$ avec $\Sigma^* \cap \{r \geq 1\}$. C'est une surface de Cauchy de $\mathbb{E}_0^{1,2}$.

suggère le théorème suivant qui est l'objectif de cette section.

Théorème 20 (Extension BTZ Cauchy-complète). *Soit M un espace-temps plat singulier globalement hyperbolique les points suivants sont équivalents.*

- (i) $\text{Reg}_{>0}(M)$ est Cauchy-complet et Cauchy-maximal.
- (ii) Il existe une extension BTZ de M qui est Cauchy-complète et Cauchy-maximale.
- (iii) $\text{Ext}_{\text{BTZ}}(M)$ est Cauchy-complet et Cauchy-maximal.

La première étape est de généraliser la méthode de prolongement décrite précédemment. En effet, L'intersection d'une surface de Cauchy avec le bord d'un tube de rayon R dans $\mathbb{E}_0^{1,2}$ n'a aucune raison d'être aussi simple qu'un cercle $\{\mathbf{r} = R, \tau = \tau_0\}$: en général, ce sera un lacet $\mathcal{C}^1$ de type espace de la forme $\{(\tau(\theta), R, \theta) : \theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\}$. Nous commençons donc par démontrer des résultats de « chirurgie » qui nous permettent de prolonger une telle courbe en une surface lisse de type espace à l'intérieur du tube de Rayon R .

La deuxième étape, utilise les résultats de chirurgie obtenue pour démontrer l'implication (ii) $\Rightarrow$ (i). Il s'agit d'une simple analyse causale vérifiant que les surfaces construites sont bien des surfaces de Cauchy ainsi qu'une application du lemme de recollement 4.1.11 permettant d'assurer la préservation de la Cauchy-maximalité. La troisième étape utilise ces même résultats de chirurgie pour démontrer l'implication (i) $\Rightarrow$ (iii).

Enfin, la quatrième section conclura la preuve du théorème 20.

4.2.1 Chirurgie de surfaces de Cauchy autour de BTZ

L'objectif de cette section est de démontrer la proposition suivante.

Proposition 4.2.1. *Soit $\mathcal{T}$ un demi-tube futur fermé de rayon R dans $\mathbb{E}_0^{1,2}$, soit $\mathbb{D}_R$ le disque $\{r \leq 0, \tau = 0\}$ dans $\mathbb{E}_0^{1,2}$ et soit $\tau_\Sigma^R : \partial\mathbb{D}_R \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction lisse ; on a les deux faits suivants.*

- (a) *Il existe une fonction lisse par morceaux $\tau_\Sigma : \mathbb{D}_R \rightarrow \mathbb{R}_+$ prolongeant τ_Σ^R et dont le graphe est acausal, de type espace et complet.*
- (b) *Il existe une fonction lisse $\tau_\Sigma : \mathbb{D}_R^* \rightarrow \mathbb{R}_+$ prolongeant τ_Σ^R et donc le graphe est acausal, de type espace et complet.*

Nous commençons par une analyse locale des surfaces acausales de type espace dans un tube de $\mathbb{E}_0^{1,2}$.

Lemme 4.2.2. *Soit $R > 0$ et soit $\mathcal{T} := \{\tau > 0, r \leq R\}$ un demi-tube fermé dans $\mathbb{E}_0^{1,2}$ de rayon R . Soit $\tau_\Sigma \in \mathcal{C}^1([0, R] \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, \mathbb{R}_+^*)$ et $\Sigma = \text{Graph}(\tau_\Sigma) = \{(\tau_\Sigma(r, \theta), r, \theta) : (r, \theta) \in \mathbb{D}^*\}$, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i) Σ est de type espace et acausal,
- (ii) Σ est de type espace,
- (iii) $1 - 2 \frac{\partial \tau_\Sigma}{\partial \mathbf{r}} - \left(\frac{1}{\mathbf{r}} \frac{\partial \tau_\Sigma}{\partial \theta} \right)^2 > 0$.

Démonstration. L'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) est triviale.

Un calcul direct donne

$$ds_\Sigma^2 = \delta dt^2 + \left(\frac{1}{\mathbf{r}} \frac{\partial \tau_\Sigma}{\partial \theta} d\mathbf{r} - \mathbf{r} d\theta \right)^2$$

avec

$$\delta := 1 - 2 \frac{\partial \tau_\Sigma}{\partial \mathbf{r}} - \left(\frac{1}{\mathbf{r}} \frac{\partial \tau_\Sigma}{\partial \theta} \right)^2.$$

Σ est de type espace si et seulement si la métrique semi-riemannienne induite sur Σ est définie positive. Or cette métrique semi-riemannienne est définie positive si et seulement si $\delta > 0$ et donc (ii) $\Leftrightarrow$ (iii).

Pour démontrer (iii) $\Rightarrow$ (i) considérons une courbe future causale $c = (\tau, r, \theta)$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $c(0)$ est dans Σ , i.e. $\tau_\Sigma(r(0), \theta(0)) = \tau(0)$. D'après le lemme 3.2.14 τ' est strictement croissante, quitte à reparamétriser c , on peut supposer $\tau' > 0$. Soit $f : s \mapsto \tau(s) - \tau_\Sigma(r(s), \theta(s))$ de sorte que $f(s) = 0$ si et seulement si $c(s) \in \Sigma$, remarquons que $f(0) = 0$. D'une part, comme c est causal, on a

$$r' \geq 0 \quad \text{and} \quad 2\tau'(s)r'(s) \geq (r')^2 + r^2(\theta')^2.$$

D'autre part, en utilisant $\delta > 0$, si $r' > 0$

$$\begin{aligned}
 2 \left(\frac{d}{ds} \tau_\Sigma(r, \theta) \right) r' &= 2 \left(\frac{\partial \tau_\Sigma}{\partial \theta} \theta' + \frac{\partial \tau_\Sigma}{\partial r} r' \right) r' \\
 &< 2 \frac{\partial \tau_\Sigma}{\partial \theta} \theta' r' + (r')^2 - \left(\frac{r'}{r} \frac{\partial \tau_\Sigma}{\partial \theta} \right)^2 \\
 &\leq - \frac{(2\theta' r')^2 - 4 \left(-\frac{(r')^2}{r^2} \right) (r')^2}{-4 \frac{(r')^2}{r^2}} \\
 &= r^2 (\theta')^2 + (r')^2.
 \end{aligned}$$

Soit $s \in \mathbb{R}$, si $r'(s) > 0$ alors le calcul ci-dessus montre que $f'(s) > 0$. Si $r'(s) = 0$ alors $\theta'(s) = 0$ donc $f'(s) = \tau'(s) > 0$. Ainsi, f est strictement croissante, donc injective. Finalement f ne peut s'annuler deux fois et c n'intersecte donc pas Σ deux fois : Σ est acausale. $\square$

Lemme 4.2.3 (Critère de complétude). *En utilisant les mêmes notations que dans le lemme 4.2.2, on a :*

1. Σ est de type espace et complète si

$$\exists C > 0, \quad \forall (r, \theta) \in \mathbb{D}_R^*,$$

$$1 - 2 \frac{\partial \tau_\Sigma}{\partial r} - \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \tau_\Sigma}{\partial \theta} \right)^2 \geq \frac{C^2}{r^2}$$

Dans ce cas, le domaine de dépendance de Σ dans $\mathcal{T}$ est $\mathcal{T} \setminus \Delta$.

2. Si Σ est de type espace et complète alors,

$$\lim_{(r, \theta) \rightarrow 0} \tau_\Sigma(r, \theta) = +\infty$$

Démonstration. Commençons par insister sur le fait que $\mathcal{T}$ est **fermé** ce qui implique en particulier que Σ a une frontière paramétrée par $\partial \mathbb{D}_R$. Cela implique également qu'une courbe d'extrémités sur $\partial \mathcal{T}$ peut être prolongée.

1. Soit $C > 0$ tel que $\delta(\mathbf{r}, \theta) > \frac{C^2}{r^2}$ pour tout $(\mathbf{r}, \theta) \in \mathbb{D}_R^*$. Il suffit de montrer qu'une courbe de longueur finie dans Σ est prolongeable. Soit $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \Sigma$ une courbe lisse par morceaux de longueur finie. Notons $\gamma(s) = (\tau_\Sigma(r(s), \theta(s)), r(s), \theta(s))$ pour $s \in \mathbb{R}$ et $l(\gamma)$ sa longueur. Comme $l(\gamma) \geq \int_{\mathbb{R}} |r'(s)| \frac{C}{R} ds$ et comme $l(\gamma) < +\infty$, on a $r' \in L^1(\mathbb{R})$ et donc r converge lorsque $s \rightarrow +\infty$; soit alors $r_\infty := \lim_{s \rightarrow +\infty} r(s)$.

Pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$l(\gamma) \geq \left| \int_0^a \frac{C|r'(s)|}{r(s)} ds \right| \geq C \left| \ln \left(\frac{r(0)}{r(a)} \right) \right|$$

donc pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$r(a) \geq r(0) \min \left(e^{-\frac{1}{C} l(\gamma)}, 1 \right) > 0$$

et donc $r_\infty > 0$.

Prenons $A > 0$ tel que pour tout $s \geq A$, on ait $r(s)$ dans l'intervalle $[r_*, r^*]$ avec $r_* = r_\infty/2$ et $r^* = (r_\infty + R)/2$; alors pour tout $b \geq a \geq A$:

$$\begin{aligned}
 l(\gamma) &\geq \int_{[a, b]} r \left| \frac{\partial \tau}{\partial \theta} \frac{r'}{r^2} - \theta' \right| \\
 &\geq \int_{[a, b]} r_* \left| \frac{\partial \tau}{\partial \theta} \frac{r'}{r^2} - \theta' \right| \\
 &\geq \int_{[a, b]} r_* \left(|\theta'| - \left| \frac{\partial \tau}{\partial \theta} \frac{r'}{r^2} \right| \right) \\
 &\geq r_* \left\{ \int_{[a, b]} |\theta'| - \left(\max_{(\mathbf{r}, \theta) \in [r_*, r^*] \times \frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}} \left| \frac{\partial \tau}{\partial \theta} \right| \right) \int_{[a, b]} \left| \frac{r'}{r^2} \right| \right\}.
 \end{aligned}$$

En intégrant par partie et en notant F une primitive de $|r'|$, il existe une constante $C' > 0$ telle que :

$$l(\gamma) \geq r_* \int_{[a,b]} |\theta'| - C' \left(\left[\frac{F}{r^2} \right]_a^b + 2 \int_a^b \frac{F r'}{r^3} \right).$$

Comme $\int_{\mathbb{R}} |r'| < +\infty$, la primitive F est bornée et peut être choisie positive. Posons $B = \sup_{s \in \mathbb{R}} R(s)$, il existe des constantes $C'', C''' > 0$, telle que pour tout $b > A$,

$$l(\gamma) + C'' \geq C''' \int_{[a,b]} |\theta'|.$$

Cela montre que $\int_{[a,+\infty[} |\theta'| ds < +\infty$ et donc que $\theta(s)$ converge lorsque $s \rightarrow +\infty$. Par suite, $\tau(\mathbf{r}, \theta)$ converge dans Σ et comme $\mathcal{T}$ est fermé, la courbe γ est extensible. Finalement, Σ est complet.

Soit $c = (\tau_c, r_c, \theta_c) : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{T} \setminus \Delta$ une courbe causale future inextensible.

Nous devons démontrer que c intersecte Σ . Comme c est futur, τ_c est strictement croissante et r_c est croissante. Ces deux fonctions ont une limite en $\pm\infty$. Soit $r^* = \lim_{s \rightarrow +\infty} r_c(s)$, $r_* = \lim_{s \rightarrow -\infty} r_c(s)$, $\tau_* = \lim_{s \rightarrow -\infty} \tau_c(s)$ et $\tau^* = \lim_{s \rightarrow +\infty} \tau_c(s)$. Comme r_c est croissante, $r^* > 0$ et comme τ_c est strictement croissante, $\tau'_c > 0$. Supposons $\tau^* < \infty$, alors $\tau'_c \in L^1([0, \infty[)$ et on a sur $[0, +\infty[$:

$$\begin{aligned} (r'_c)^2 + r_c^2 (\theta')^2 - 2r'_c \tau'_c &\leq 0 \\ (\theta')^2 &\leq \frac{(\tau'_c)^2 - (\tau'_c - r'_c)^2}{r_c^2} \\ |\theta'| &\leq \frac{1}{r_c(0)} \tau'_c. \end{aligned}$$

Ainsi, $\theta' \in L^1([0, +\infty[)$ et θ a une limite en $+\infty$. De la même manière, on a :

$$|r'_c - \tau'_c| \leq \tau'_c,$$

donc $(r'_c - \tau'_c) \in L^1([0, \infty[)$ et donc $r'_c \in L^1([0, \infty[)$. Comme r une limite non nulle en $+\infty$ et comme $\mathcal{T}$ est fermé, c est extensible ; finalement $\tau^* = +\infty$. Comme $r^* \in]0, R]$ et comme $\tau^* = +\infty$,

$$\exists s_0 \in \mathbb{R}, \forall s > s_0, \quad \tau_c(s) > \left(\max_{[r^*/2, r^*] \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}} \tau_\Sigma \right) \geq \tau_\Sigma(r_c(s), \theta_c(s))$$

Une argumentation similaire peut être employée pour démontrer que si $\tau_* \neq 0$ alors $r_* = 0$. Par suite, l'hypothèse implique donc

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left(\min_{\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}} \tau_\Sigma(r, \theta) \right) = +\infty,$$

et donc en particulier $\min \tau_\Sigma > 0$.

Supposons $\tau_* = 0$, comme $\min \tau_\Sigma > 0$, on a :

$$\exists s_0 \in \mathbb{R}, \forall s < s_0, \quad \tau_c(s) < \min \tau_\Sigma \leq \tau_\Sigma(r_c(s), \theta_c(s))$$

Si au contraire on suppose $\tau_* > 0$ et $r_* = 0$ alors

$$\exists r \in \mathbb{R}_+^*, \min_{]0, r] \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}} \tau_\Sigma > \tau_*$$

Un tel $r \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\exists s_0 \in \mathbb{R}, \forall s < s_0, \quad \tau_c(s) < \tau_\Sigma(r_c(s), \theta_c(s))$$

Dans tous les cas, par continuité, il existe $s \in \mathbb{R}$ tel que $\tau_c(s) = \tau(r_c(s), \theta_c(s))$ et donc tel que $c(s) \in \Sigma$.

2. Comme Σ est de type espace, le point (ii) du lemme 4.2.2 assure que

$$1 - 2 \frac{\partial \tau_\Sigma}{\partial r} - \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \tau_\Sigma}{\partial \theta} \right)^2 \geq 0$$

sur $]0, R] \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Considérons une suite $(r_n, \theta_n) \rightarrow 0$ telle que $r_{n+1} < \frac{1}{2}r_n$, on peut construire une courbe $\mathcal{C}_{pm}^1$ inextensible $c = (\tau_c, r_c, \theta_c) :]0, R] \rightarrow \Sigma$ telle que

- $\forall s \in]0, R], r_c(s) = s$
- $\forall n \in \mathbb{N}, \theta_c(r_n) = \theta_n$
- $\forall r \in]0, R], |\theta'_c(r)| \leq \frac{2}{r_n}$

En notant $l(c)$ la longueur de c , on a :

$$\begin{aligned} l(c) &= \int_0^R \sqrt{1 + r^2 \theta'_c(r)^2 - 2\tau'_c(r)} \\ &\leq \int_0^R \sqrt{5 - 2\tau'_c(r)} \end{aligned}$$

L'intégrande est bien définie car $1 + r^2 \theta'_c(r)^2 - 2\tau'_c(r) > 0$. On déduit en particulier que $\tau'_c \leq 5/2$ et donc que $-\tau'_c \geq |\tau'_c| - 5$. Par complétude de Σ , la longueur $l(c)$ de c est infinie donc $\int_0^R \sqrt{|\tau'_c|} = +\infty$ et donc $\int_0^{+\infty} |\tau'_c| = +\infty$. Finalement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \tau_\Sigma(r_n, \theta_n) = \int_0^R (-\tau'_c) + \tau(R) \geq \int_0^R (|\tau'_c| - 5) + \tau(R) = +\infty$$

□

Démonstration de la proposition 4.2.1.

1. Posons $\tau_\Sigma(r, \theta) = \tau_\Sigma^R(\theta) + M \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right)$ avec $M = 1 + \max_{\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}} \left| \frac{\partial \tau_\Sigma^R}{\partial \theta} \right|^2$.

on a alors : $\frac{\partial \tau_\Sigma}{\partial \theta} = \frac{\partial \tau_\Sigma^R}{\partial \theta}$ et $\frac{\partial \tau_\Sigma}{\partial r} = -\frac{M}{r^2}$ de sorte que :

$$\begin{aligned} \delta &= 1 - \left(-\frac{M}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \tau_\Sigma^R}{\partial \theta} \right)^2 \\ &= 1 + \frac{M - \left(\frac{\partial \tau_\Sigma^R}{\partial \theta} \right)^2}{r^2} \\ &= 1 + \frac{1 + \max_{\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}} \left| \frac{\partial \tau_\Sigma^R}{\partial \theta} \right|^2 - \left(\frac{\partial \tau_\Sigma^R}{\partial \theta} \right)^2}{r^2} \\ &> \frac{1}{r^2}. \end{aligned}$$

Par suite, la surface $\Sigma := \text{Graph}(\tau_\Sigma)$ est de type espace et complète.

2. Posons

$$\tau_\Sigma(r, \theta) = \begin{cases} \left(\frac{2r-R}{R} \right)^2 \tau_\Sigma^R(\theta) + M \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right) & \text{Si } r \in [R/2, R] \\ \frac{M}{R} & \text{Si } r \in [0, R/2] \end{cases}$$

avec M assez grand de sorte que la condition de causalité est vérifiée sur $[R/2, R] \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Le graphe de τ_Σ est de type espace et compact donc complet.

□

4.2.2 Cauchy-complétude sans BTZ

Nous avons à présent comme objectif de démontrer l'implication (ii) $\Rightarrow$ (i) du théorème 20.

Proposition 4.2.4. *Soit M un espace-temps Cauchy-complet et Cauchy-maximal. Si M est Cauchy-complet et Cauchy-maximal alors $\text{Reg}_{>0}(M)$ est Cauchy-complet et Cauchy-maximal.*

Commençons par une remarque.

Remarque 4.2.5. *Soit M un espace-temps plat singulier globalement hyperbolique, alors le complémentaire $\text{Reg}_{>0}(M)$ des points BTZ dans M est globalement hyperbolique.*

La démonstration est divisée en deux propositions 4.2.6 et 4.2.7. En partant d'un espace-temps plat singulier M Cauchy-complet et Cauchy-maximal, la méthode consiste à découper une surface de Cauchy donnée autour de chaque ligne BTZ puis d'appliquer la proposition 4.2.1 pour remplacer le disque que l'on a enlevé par une surface qui évite les lignes BTZ. On vérifie alors que la nouvelle surface construite est une surface de Cauchy et on démontre que $\text{Reg}_{>0}$ est Cauchy-maximal.

On se donne M Cauchy-complet et Cauchy-maximal et on pose Σ une surface de Cauchy de M essentiellement lisse et de type espace.

Proposition 4.2.6. *$M \setminus \text{Sing}_0(M)$ est Cauchy-complet.*

Démonstration. Soient $M' = M \setminus \text{Sing}_0(M)$ et Δ une ligne BTZ de M . On construit une surface de Cauchy complète Σ_2 dans le complémentaire de Δ . L'ensemble des composantes connexes de $\text{Sing}_0(M)$ étant discret, cette construction s'étend aisément à un nombre arbitraire de lignes singulières.

- D'après la proposition 4.1.10 il existe un voisinage de $\Sigma \cap \Delta$ isomorphe à un demi tube $\mathcal{T} = \{\tau > 0, r \leq R\}$ de rayon $R \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\Sigma \cap \partial\mathcal{T}$ est un cercle plongé. Soit $\mathcal{T} \cap \Sigma = \text{Graph}(\tau_\Sigma)$ avec $\tau_\Sigma : [0, R] \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$. D'après la proposition 4.2.1, il existe $\tau_{\Sigma_2} : \mathbb{D}_R^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ telle que $\tau_{\Sigma_2} = \tau_\Sigma$ sur $\partial\mathbb{D}_R$ et $\text{Graph}(\tau_{\Sigma_2})$ est acausal, de type espace et complet et de plus, son développement de Cauchy est $D(\text{Graph}(\tau_{\Sigma_2})) = \text{Reg}(\mathcal{T})$. Soit Σ_2 la surface obtenue en collant $\Sigma \setminus \mathcal{T}$ et $\text{Graph}(\tau_{\Sigma_2})$ le long de $\Sigma \cap \partial\mathcal{T}$. Comme Σ et $\text{Graph}(\tau_{\Sigma_2})$ sont de type espace et complète, Σ_2 est donc de type espace et complète.
- On démontre à présent que Σ_2 est une surface de Cauchy de $M \setminus \text{Sing}_0(M)$. Soit c une courbe causale inextensible dans M' , si $\inf(c) \in \text{Sing}_0(M)$ alors on peut l'étendre en ajoutant le rayon singulier dans son passé pour obtenir une courbe causale inextensible $\bar{c}$ dans M . La courbe $\bar{c}$ intersecte Σ exactement une fois en un certain $p \in \Sigma$.

- Supposons $p \notin \mathcal{T}$, alors $p \in \Sigma \setminus \mathcal{T} = \Sigma_2 \setminus \mathcal{T}$ et c intersecte Σ_2 . Considérons c_1 la composante connexe de $\bar{c} \cap \mathcal{T}$. Remarquons que $D(\Sigma \cap \mathcal{T}) = \mathcal{T}$, donc c_1 n'est pas inextensible dans $\mathcal{T}$ et donc c_1 sort de $\mathcal{T}$ pour un certain paramètre s_1 . Par suite, c_1 se prolonge en

$$c_2 = c_1 \cup \{\tau > \tau_0, r = R, \theta = \theta_0\}$$

pour $c_1(s_1) = (\tau_0, R, \theta_0)$, qui est inextensible dans $\mathcal{T}$. La courbe c_2 intersecte donc Σ , mais comme $c_1 \cap \Sigma = \emptyset$ alors c_2 intersecte Σ sur le rayon qui a été ajouté, et donc $\tau_{\Sigma_2}(R, \theta_0) > \tau_0$. La partie régulière de c_2 est inextensible dans $\text{Reg}(\mathcal{T})$ et donc intersecte Σ_2 exactement une fois et comme Σ et Σ_2 coïncident sur $\partial\mathcal{T}$ alors $\text{Reg}(c_2)$ intersecte Σ_2 sur la partie BTZ ajoutée, et donc $c_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$. Finalement, c intersecte Σ_2 exactement une fois.

- Supposons $p \in \mathcal{T}$, considérons c_1 la composante connexe de p dans $\bar{c} \cap \mathcal{T}$. Si c_1 est inextensible ou sort de $\mathcal{T}$ elle peut être prolongée en ajoutant un rayon $\{\tau > \tau_0, r = R, \theta = \theta_0\}$. Dans tous les cas, en notant c_2 le prolongement inextensible de c_1 dans $\mathcal{T}$. La partie régulière $\text{Reg}(c_2)$ est inextensible dans $\text{Reg}(\mathcal{T})$ et donc intersecte $\Sigma_2 \cap \mathcal{T}$ exactement une fois. Elle ne peut pas intersecter Σ_2 sur le rayon $\{\tau > \tau_0, r = R, \theta = \theta_0\}$ potentiellement ajouté car sinon c_2 intersecterait Σ deux fois. Ainsi, $\text{Reg}(c_2) \cap \Sigma_2 \in \text{Reg}(c_1) \subset c \cap \mathcal{T}$ et

donc c intersecte Σ_2 . La courbe c ne peut intersecter Σ_2 au dehors de $\mathcal{T}$ donc tout point de $c \cap \Sigma_2$ sont dans $\mathcal{T}$. Soit c_3 une autre composante connexe de $\bar{c} \cap \mathcal{T}$. Elle ne peut être inextensible sinon elle intersecterait Σ , donc elle quitte $\mathcal{T}$ et peut être prolongée en ajoutant un rayon $\{\tau > \tau_0, r = R, \theta = \theta_0\}$, on obtien une courbe inextensible c_4 . Cette dernière courbe intersecte Σ et Σ_2 exactement une fois. Comme $p \in c_1$ et $\bar{c} \cap \Sigma = \{p\}$, on a $c_3 \cap \Sigma = \emptyset$ et $c_4 \cap \Sigma \in \{\tau > \tau_0, r = R, \theta = \theta_0\}$. Enfin, $c_4 \cap \Sigma = c_4 \cap \Sigma_2 \neq \emptyset$ et c_3 n'intersecte pas Σ_2 .

Finalement, c intersecte Σ_2 exactement une fois.

Σ_2 est donc une surface de Cauchy de $M \setminus \text{Sing}_0(M)$.

□

Proposition 4.2.7. $\text{Reg}_{>0}(M)$ est Cauchy-maximal.

Démonstration. Posons $M_1 := M$, $M_0 := \text{Reg}_{>0}(M)$ et M_2 une extension de Cauchy de M_0 . Comme $\text{Sing}_0(M_0) = \emptyset$ et que M_2 est une extension de Cauchy de M_0 , on a $\text{Sing}(M_2) = \emptyset$. D'après le lemme 4.1.11, $M_3 := (M \amalg M_2)/M_0$ est séparé; M_3 est donc une $\mathbb{E}_A^{1,2}$ -variété. Pour montrer que c'est une extension de Cauchy de M il suffit de considérer une surface de Cauchy Σ_1 de M_1 , de la couper le long de voisinages tubulaires des lignes BTZ de M_1 et de la prolonger avec la proposition 4.2.1 à l'intérieur de ces voisinages en une surface de Cauchy Σ_0 de M_0 . Une simple analyse causale utilisant Σ_0 et Σ_1 montre que Σ_1 est une surface de Cauchy de M_3 . Or M est Cauchy-maximal, donc le plongement naturel $M_1 \rightarrow M_3$ est surjectif. Comme M_0 n'a pas de points de type $\mathbb{E}_0^{1,2}$, M_2 n'en a pas non plus et donc M_2 se plonge naturellement dans $\text{Reg}_{>0}(M)$ c'est-à-dire M_0 . Le morphisme de Cauchy $M_0 \rightarrow M_2$ est donc surjectif.

□

Démonstration de la proposition 4.2.4. Les propositions 4.2.7 et 4.2.6 donnent respectivement la Cauchy-maximalité et la Cauchy-complétude de $M \setminus \text{Sing}_0(M)$.

□

4.2.3 Cauchy-complétude et extensions BTZ

Nous souhaitons à présent démontrer l'implication $(i) \Rightarrow (iii)$ du théorème 20. On se donne M_0 un espace-temps plat singulier sans BTZ globalement hyperbolique Cauchy-complet et Cauchy-maximal. On pose M_1 l'extension BTZ-extension maximale de M_0 et M_2 l'extension de Cauchy maximale de M_1 . On suppose $M_0 \subset M_1 \subset M_2$ et on prend Σ_0 une surface de Cauchy de M_0 . On souhaite donc démontrer.

Proposition 4.2.8. M_1 est Cauchy-complet et Cauchy-maximal.

Il y a une difficulté supplémentaire par rapport à l'étape précédente, avant de pouvoir appliquer un lemme de chirurgie, nous avons besoin de démontrer que les lignes BTZ sont complètes dans le futur. En effet, lorsque l'on souhaite prolonger une courbe $c := \{(\tau_c(\theta), R, \theta) : \theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\}$ en une surface de Cauchy à l'intérieur du tube de rayon R , si la fonction τ_c est α -lipschitzienne, notre méthode ne nous permet pas de construire des surfaces incluses avec certitude dans une tranche de tube $\{(\tau, \mathbf{r}, \theta) : \theta \in \mathbb{R}/2\pi, \tau \in [\tau_*, \tau^*]\mathbb{Z}\}$ pour τ^* arbitrairement proche de $\max(\tau_c)$. La proposition 4.1.10 donne la complétion future d'un rayon BTZ uniquement pour un espace-temps globalement Cauchy-maximal, c'est vrai par hypothèse dans la preuve $(iii) \Rightarrow (i)$, c'est justement ce que l'on cherche à démontrer dans l'étape $(i) \Rightarrow (iii)$. Le lemme suivant nous permettra de surmonter cette difficulté.

Lemme 4.2.9. Soit Δ une composante connexe de $\text{Sing}_0(M_2)$. Pour $R > 0$, on pose $\mathbb{D}_R = \{\tau = 0, r \leq R\}$ dans $\mathbb{E}_0^{1,2}$.

Pour tout $p \in \Delta \cap (M_1 \setminus M_0)$, il existe $\mathcal{U}$ un voisinage de $]p, +\infty[$ tel que

- on a un isomorphisme $\mathcal{D} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{T} \subset \mathbb{E}_0^{1,2}$ avec $\mathcal{T} = \{\tau \geq 0, r \leq R\}$ pour un certain $R > 0$;

- on a une fonction lisse $\tau_{\Sigma_0} : \mathbb{D}_R^* \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que

$$\mathcal{D}(\Sigma_0 \cap \mathcal{U}) = \text{Graph}(\tau_{\Sigma_0})$$

et $\{\tau \leq \tau_{\Sigma_0}\} \subset M_0$.

Démonstration. D'après la proposition 4.1.10, la ligne Δ est complète dans le futur dans M_2 et il existe une carte tubulaire autour de $[p, +\infty[$ de rayon constant. Considérons une telle carte de rayon R autour de $[p, \infty[$ pour un certain $p \in \Delta \cap (M_1 \setminus M_0)$. On peut supposer que p a pour coordonnée $\tau = 0$, que $\mathcal{U} = \{-\tau^* < \tau < \tau^*, r \leq R\} \subset M_1$ pour un certain $\tau^* > 0$ et que $\mathcal{V} = \{-\tau^* < \tau, r \leq R\} \subset M_2$. Considérons les courbes causales futures géodésiques brisées définies sur $\mathbb{R}_+^*$ de la forme

$$c_{\theta_0}(s) = \begin{cases} (s/2, s, \theta_0) & \text{if } s \leq R \\ (s/2, R, \theta_0) & \text{if } s > R \end{cases}$$

avec $\theta_0 \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Ces courbes paramétrisent le bord de $J^+(p) \cap \mathcal{V}$. Ces courbes sont dans la partie régulière de M_2 et commencent dans M_0 . Chaque composante connexe de l'intersection de ces courbes avec M_0 est une courbe causale inextensible. Prenons la première composante connexe, elle intersecte Σ_0 exactement une fois. Soit B la composante connexe de p dans la frontière de $J^+(p) \cap \mathcal{V} \cap M_1$. Soit $b : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow \Sigma_0 \cap B$ la fonction $b : \theta \mapsto (\tau(\theta), r(\theta))$ qui paramétrise $\Sigma \cap B$. On remarque que B et Σ_0 sont transverses et comme B est laminé par des courbes causales et comme Σ_0 est de type espace, $B \cap \Sigma_0$ est une 1-sous-variété et b est continue et bijective. Par suite b est un homéomorphisme et la coordonnée r sur $B \cap \Sigma_0$ atteint un minimum en un certain $R' > 0$. Dans le tube $\{r \leq R', \tau > -\tau^*\}$, considérons la courbe causale future définie sur $\mathbb{R}_+^*$,

$$c_{r_0, \theta_0}(s) = \begin{cases} (s/2, s, \theta_0) & \text{if } s \leq r_0 \\ (s/2, r_0, \theta_0) & \text{if } s > r_0 \end{cases}$$

pour $r_0 \in]0, R'[$ et $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Le point d'intersection avec Σ_0 ne peut être sur l'intervalle $s \in]0, r_0]$ car cet intervalle est sur la courbe causale c_{θ_0} et que $r_0 < R'$. Donc, Σ_0 intersecte toutes les courbes sur l'intervalle $s > r_0$ et la projection $\pi : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{D}^*$ restreinte à $\Sigma \cap \mathcal{V}$ est continue et bijective. On obtient une paramétrisation de Σ_0 comme le graphe d'une fonction $\tau_{\Sigma} : (r, \theta) \mapsto \tau_{\Sigma_0}$ dans la carte tubulaire de rayon R' .

$$\Sigma_0 = \text{Graph}(\tau_{\Sigma_0}) \quad \tau_{\Sigma_0}(r, \theta) > \frac{1}{2}r > 0$$

Comme π est la projection le long d'une direction de type lumière et comme Σ_0 est de type espace, τ_{Σ_0} est lisse. Enfin, par définition des courbes c_{r_0, θ_0} la portion de courbe avant l'intersection de Σ_0 est dans M_0 et donc on obtient un domaine

$$\{r \in]0, R'], \theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, \tau \in]-\tau^*, \tau_{\Sigma_0}(r, \theta)]\}$$

inclus dans M_0 .

□

Proposition 4.2.10. M_1 est Cauchy-complet et Cauchy-maximal.

Démonstration. La preuve est divisée en 3 étapes. Premièrement, on démontre que les lignes BTZ de M_1 sont complètes dans le futur et que les rayons BTZ futurs de M_1 sont contenus dans un voisinage tubulaire de rayon constant. Deuxièmement, nous modifions une surface de Cauchy essentiellement lisse de type espace Σ_0 de M_0 pour obtenir une surface de Cauchy essentiellement lisse de type espace et complète de M_1 . Troisièmement, on montre que $(M_2 \setminus \text{Sing}_0(M_2))$ est une extension de Cauchy de M_0 et nous concluons.

- Étape 1

Considérons une ligne BTZ Δ in M_2 . Considérons $\mathcal{T}$ un voisinage tubulaire de rayon $R > 0$ autour de $]p, +\infty[$ pour un certain $p \in \Delta \cap (M_1 \setminus M_0)$ donné par le lemme 4.2.9 et posons τ_{Σ_0}

la paramétrisation de Σ_0 par $\mathbb{D}_R$ et $\mathcal{T}' = \text{Reg}(\mathcal{T}) = \mathcal{T} \setminus \Delta$. Considérons le complémentaire de M_0 dans le demi-tube $\mathcal{T}'$, retirons son futur à M_0 et ajoutons le demi-tube pour obtenir M , c'est-à-dire :

$$M = \mathcal{T}' \cup (M_0 \setminus (J^+(\mathcal{T}' \setminus M_0))).$$

Comme $\Sigma_0 \cap \mathcal{T} = \text{Graph}(\tau_{\Sigma_0})$ et $J_{\mathcal{T}'}^-(\Sigma_0) \subset M_0$, alors $J^+(\mathcal{T}' \setminus M_0) \subset J^+(\Sigma_0)$ et donc $\Sigma_0 \subset M$. Soit c une courbe causale future inextensible dans M . On remarque que par construction de M , la courbe c ne peut s'échapper de $\mathcal{T}' \setminus M_0$. Ainsi, comme c est connexe, c se décompose en deux parties consécutives : une partie dans M_0 et une partie dans $\mathcal{T}' \setminus M_0$.

- Supposons $c \cap (\mathcal{T}' \setminus M_0) \neq \emptyset$. Comme Σ_0 est de type espace et complète d'après le lemme 4.2.3 $\lim_{(r,\theta) \rightarrow 0} \tau_{\Sigma_0}(t, \theta) = +\infty$. Par continuité; c intersecte $\Sigma_0 \cap \mathcal{T}'$. De plus, une fois dans $\mathcal{T}' \setminus M_0$, la courbe c reste dans $\mathcal{T}' \setminus M_0$ donc $c \cap M_0$ est une courbe causale inextensible de M_0 intersectant Σ_0 exactement une fois. Par suite, c intersecte Σ_0 exactement une fois.
- Supposons $c \cap (\mathcal{T}' \setminus M_0) = \emptyset$. La courbe c est alors dans M_0 et tout prolongement inextensible de c dans M_0 intersecte Σ_0 exactement une fois. Un tel prolongement inextensible ne peut quitter $J^+(\mathcal{T}' \setminus M_0)$ une fois entré dedans, par suite son intersection avec Σ_0 est sur c .

On en déduit donc que Σ_0 est une surface de Cauchy de M , que M est une extension de Cauchy d'un voisinage de Σ_0 dans M_0 et donc d'après le Théoreme 13, M est une partie de M_0 . Finalement, M_0 contient $\mathcal{T}'$ et donc M_1 contient $\mathcal{T}$.

• Étape 2

Considérons une ligne BTZ Δ de M_2 et un voisinage tubulaire $\mathcal{T}_\Delta$ de Δ donné par le lemme 4.2.9 et soit τ_{Σ_0} la paramétrisation de Σ_0 dans $\mathcal{T}_\Delta$. D'après la première étape, $\mathcal{T}_\Delta$ est dans M_1 donc d'après la proposition 4.2.1, on peut prolonger $\Sigma_0 \cap \partial \mathcal{T}_\Delta$ une surface de Cauchy complète essentiellement lisse et de type espace $\text{Graph}(\tau_\Delta)$ dans $\mathcal{T}_\Delta$ paramétrisée par $\mathbb{D}_R$ pour un certain R . Le nombre de ligne BTZ étant dénombrable, on peut choisir des voisinages $\mathcal{T}$ autour de chaque ligne BTZ de telle sorte qu'ils soient disjoints. Cette procédure peut donc être faite simultanément autour de toutes les lignes BTZ simultanément. Une discussion causale telle que dans la proposition 4.2.6 montre que la surface

$$\Sigma_1 := (\Sigma_0 \setminus \bigcup_{\Delta} \mathcal{T}_\Delta) \cup \bigcup_{\Delta} \text{Graph}(\tau_\Delta)$$

une surface de Cauchy de M_1 et donc que M_1 est **Cauchy-complet**.

• Étape 3

Considérons à présent $M = (M_2 \setminus \text{Sing}_0(M_2))$ et c une courbe causale future inextensible dans M . La courbe c peut être prolongée en une certaine courbe causale inextensible c' de M_2 . D'après le lemme 3.2.4, c' se décompose en deux parties connexes consécutives : Δ sa partie BTZ puis c^0 sa partie non-BTZ. Par définition de M , $\Delta = c' \setminus c$ et $c^0 = c$. Comme M_2 est une extension de Cauchy de M_1 , la courbe c' intersecte Σ_1 exactement une fois. D'une part, Σ_1 et Σ_0 coïncide en dehors des tubes $\mathcal{T}_\Delta$. D'autre part, on remarque qu'une courbe causale inextensible dans l'un des $\mathcal{T}_\Delta$ intersecte $\Sigma_0 \cap \mathcal{T}$ si et seulement si elle intersecte $\text{Graph}(\tau_\Delta)$. Donc c' intersecte Σ_0 exactement une fois et donc c intersecte Σ_0 exactement une fois. On en déduit que M est une extension de Cauchy de M_0 et, par Cauchy-maximalité de M_0 ; on a alors $M = M_0$. Finalement, $M_2 = M_1$ et M_1 est **Cauchy-maximal**.

□

4.2.4 Preuve du théorème de l'extension BTZ Cauchy-complète

Théorème 21 (Extension BTZ Cauchy-complète). *Soit M un espace-temps plat singulier globalement hyperbolique, les points suivants sont équivalents.*

(i) $\text{Reg}_{>0}(M)$ est Cauchy-complet et Cauchy-maximal.

(ii) Il existe une extension BTZ de M qui est Cauchy-complet et Cauchy-maximale.

(iii) $\text{Ext}_{\text{BTZ}}(M)$ est Cauchy-complet et Cauchy-maximal.

Démonstration. L'implication (iii) $\Rightarrow$ (ii) est triviale. L'implication (ii) $\Rightarrow$ (i) est donnée par la proposition 4.2.4. L'implication (i) $\Rightarrow$ (iii) est donnée par la proposition 4.2.10. $\square$

4.3 Extension BTZ explicite des espaces-temps plats Cauchy-complets

L'objectif de cette section est donner une construction explicite de l'extension BTZ maximale d'un espace-temps plat Cauchy-complet.

4.3.1 Exemple et domaine régulier augmenté

Rappelons que l'espace modèle des singularités BTZ, $\mathbb{E}_0^{1,2}$, est $\mathbb{R}^3$ muni d'une métrique semi-riemannienne $ds^2 = -2d\tau dt + dt^2 + r^2 d\theta$ en les coordonnées cylindriques. La droite $\{\mathfrak{r} = 0\}$ est le domaine singulier de $\mathbb{E}_0^{1,2}$ et noté $\text{Sing}(\mathbb{E}_0^{1,2})$. Le lieu régulier de $\mathbb{E}_0^{1,2}$, est $\text{Reg}(\mathbb{E}_0^{1,2}) := \{\mathfrak{r} > 0\}$, c'est une $\mathbb{E}^{1,2}$ -variété. Une application développante est donnée par l'application

$$\mathcal{D}: \begin{cases} \widetilde{\text{Reg}}(\mathbb{E}_0^{1,2}) & \longrightarrow & \mathbb{E}^{1,2} \\ \left(\tau, \mathfrak{r}, \frac{\theta}{2\pi} \right) & \longmapsto & \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau + \frac{1}{2}\mathfrak{r}\theta^2 \\ \tau + \frac{1}{2}\mathfrak{r}\theta^2 - r \\ -\mathfrak{r}\theta \end{pmatrix} \end{cases}.$$

L'image de cette application développante est le futur chronologique d'une droite Δ de type lumière. Le future $I^+(\Delta)$ est un demi-espace ouvert délimité par un plan de type lumière $\Delta^\perp$. L'holonomie est le morphisme

$$\rho: \begin{cases} \pi_1(\text{Reg}(\mathbb{E}_0^{1,2})) \simeq \mathbb{Z} & \longrightarrow & \text{Isom}(\mathbb{E}^{1,2}) \\ 1 & \longmapsto & \phi \end{cases}$$

pour un certain $\phi \neq 0$ fixant Δ point par point. $\mathcal{D}$ induit alors un isomorphisme de $\mathbb{E}^{1,2}$ -variétés

$$\overline{\mathcal{D}}: \text{Reg}(\mathbb{E}_0^{1,2}) \xrightarrow{\sim} I^+(\Delta)/\langle \gamma \rangle$$

Ces propriétés mènent à une construction naturelle de l'extension BTZ maximale de $\text{Reg}(\mathbb{E}_0^{1,2})$ qui n'est autre que l'espace $\mathbb{E}_0^{1,2}$ lui-même. Le quotient de $J^+(\Delta) = I^+(\Delta) \cup \Delta$ par $\langle \gamma \rangle$ est un candidat naturel et l'isomorphisme $\overline{\mathcal{D}}$ s'étend continûment en une application bijective $\overline{\mathcal{D}}: \mathbb{E}_0^{1,2} \rightarrow J^+(\Delta)/\langle \gamma \rangle$ en posant $\overline{\mathcal{D}}(\tau, 0, 0) = (\tau, \tau, 0)$.

Cependant **si $J^+(\Delta)$ est muni de la topologie usuelle, cette application n'est pas un homéomorphisme.** Une manière de s'en convaincre est de considérer un cercle C horizontal tangent à Δ . L'image par $\overline{\mathcal{D}}^{-1}$ d'une suite $(x_n) \in C^\mathbb{N}$ tendant vers $\Delta \cap C$ ne converge pas dans $\mathbb{E}_0^{1,2}$. Nous définissons donc une topologie plus fine sur $J^+(\Delta)$ telle que $\overline{\mathcal{D}}: \mathbb{E}_0^{1,2} \rightarrow J^+(\Delta)/\langle \phi \rangle$ est un homéomorphisme.

Définition 4.3.1 (Topologie BTZ). Soit Δ une droite de type lumière dans $\mathbb{E}^{1,2}$. La topologie BTZ sur $J^+(\Delta)$ est la topologie engendrée par la topologie induite par $\mathbb{E}^{1,2}$ celle des parties de la forme

$$\forall p, \quad I^+(p) \cup]p, +\infty[$$

avec $p \in \Delta$.

Proposition 4.3.2. Soit Δ une droite de type lumière dans $\mathbb{E}^{1,2}$ et soit $\gamma \in \text{Isom} \mathbb{E}^{1,2}$ une isométrie fixant Δ point par point. L'application $\overline{\mathcal{D}} : \mathbb{E}_0^{1,2} \rightarrow J^+(\Delta)/\langle \phi \rangle$ est un $\mathbb{E}^{1,2}$ -isomorphisme p.p.

Démonstration. Il suffit de démontrer que $\overline{\mathcal{D}}$ est un homéomorphisme.

La topologie de $\mathbb{E}_0^{1,2}$ est engendrée par les diamants $J(q, q')$ donc par les ouverts $\text{Int}(J^+(q))$ et $\text{Int}(J^-(q)) = I^-(q)$. Or, un calcul direct donne

$$\overline{\mathcal{D}}^{-1}(I^+(p) \cup]p, +\infty[) = \text{Int}(J^+(\overline{\mathcal{D}}^{-1}(p)))$$

de plus $\overline{\mathcal{D}}(I^-(q)) = \emptyset$ si $q \in \Delta$ et $\overline{\mathcal{D}}(I^-(q)) = I^-(\overline{\mathcal{D}}(q))$ et donc $\overline{\mathcal{D}}(\diamond_q^{q'})$ est ouvert pour tout q, q' . $\square$

Soit M un espace-temps globalement hyperbolique Cauchy-complet et soit $\Gamma := \pi_1(M)$ son groupe fondamental. Une construction naturelle de l'extension BTZ maximale de M serait alors de prendre son développement Ω dans $\mathbb{E}^{1,2}$ et son holonomie $\rho : \Gamma \rightarrow \text{Isom}(\mathbb{E}^{1,2})$. Et pour tout $\gamma \in \Gamma$ parabolique tel que $\text{Fix}(\rho(\gamma)) \cap \partial\Omega \neq \emptyset$, on ajoute à Ω une demi-droite ouverte de type lumière dans le fixateur de $\rho(\gamma)$ et on quotiente le domaine $\tilde{\Omega}$ obtenu par ρ .

Définition 4.3.3 (Ligne BTZ associée à une isométrie parabolique). Soit G un sous-groupe de $\text{Isom}(\mathbb{E}^{1,2})$ discret et sans-torsion et soit Ω un domaine régulier G -invariant.

Pour tout $\phi \in G$ parabolique, on définit la droite BTZ associée Δ_ϕ : l'intérieur relatif de $\text{Fix}(\phi) \cap \partial\Omega$.

Par convention, $\Delta_\phi = \emptyset$ si ϕ n'est pas parabolique.

Remarque 4.3.4. Une ligne BTZ associée peut être vide comme c'est le cas pour le développement de $M = \{r > 1\} \subset \mathbb{E}_0^{1,2}$.

Définition 4.3.5 (Domaine régulier augmenté). Soit G un sous-groupe de $\text{Isom}(\mathbb{E}^{1,2})$ discret et sans torsion et soit Ω un domaine régulier G -invariant. On définit

$$\widetilde{\text{Sing}}_0(\Omega, G) = \bigcup_{\phi \in G} \Delta_\phi \quad \text{et} \quad \tilde{\Omega}(G) = \Omega \cup \widetilde{\text{Sing}}_0(\Omega, G).$$

$\tilde{\Omega}(G)$ est le domaine régulier augmenté associé à (Ω, G) , il est muni de la topologie BTZ.

Remarque 4.3.6. $\tilde{\Omega} := \tilde{\Omega}(G)$ est un espace-temps topologique tarentin, c'est une (G, X) -variété singulière telle que $\text{Sing}(\tilde{\Omega}) = \widetilde{\text{Sing}}_0(\Omega)$ et

- $K^+(x) = I^+(x)$ pour tout $x \in \text{Reg}(\tilde{\Omega})$
- $K^-(x) = I^-(x)$ pour tout $x \in \text{Reg}(\tilde{\Omega})$
- $K^-(x) = J^-(x) \setminus \{x\}$ pour tout $x \in \text{Sing}(\tilde{\Omega})$

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, par abus de notation, on écrira simplement $\widetilde{\text{Sing}}_0$ et $\tilde{\Omega}$. Nous allons à présent démontrer le résultat suivant.

Théorème 22. Soit G un sous-groupe de $\text{Isom}(\mathbb{E}^{1,2})$ discret et sans torsion et soit Ω un domaine régulier G -invariant.

Alors $\tilde{\Omega}(G)/G$ admet une $\mathbb{E}_0^{1,2}$ -structure prolongeant la $\mathbb{E}^{1,2}$ -structure de Ω/G et isomorphe à $\text{Ext}_{\text{BTZ}}(\Omega/G)$.

Démonstration pour les espaces-temps de type (i – iii). Tout d'abord, l'holonomie d'un voisinage d'une singularité BTZ est parabolique donc l'extension BTZ maximale d'un espace-temps est triviale dans si son holonomie n'admet aucune isométrie parabolique. Dans ce cas, le domaine régulier augmenté associé est également trivial et le résultat est alors vrai. Cette situation correspond aux cas où le groupe G n'admet que des translation de type espace. Le type (i) est donc traité de même que les types (ii) et (iii) de groupes engendrés pas des translations de type espace.

On se place à présent dans le cas d'un espace-temps de type (iii) dont le groupe d'holonomie est engendré par une isométrie linéaire ϕ . Dans ce cas, Ω est de la forme $I^+(\Pi)$ pour un certain plan lumière Π et Ω/G est un anneau $\{(\tau, r, \theta) \mid r \in]R_0, +\infty[\} \subset \mathbb{E}_0^{1,2}$. Si $R_0 > 0$, alors Ω/G est BTZ-maximal et il n'y a pas de droite lumière dans Π fixée par ϕ . Donc $\tilde{\Omega} = \Omega$, et donc le théorème est démontré dans ce cas. Si $R_0 = 0$, on tombe sur la situation décrite en exemple.

Le cas des espaces-temps de type (ii) avec générateur parabolique est traité de la même manière. $\square$

4.3.2 Fonctions temps sur un domaine régulier augmenté

Soit G un sous-groupe de $\text{Isom}(\mathbb{E}^{1,2})$ discret et sans torsion et soit Ω un domaine régulier G -invariant. On note $\tilde{\Omega} = \tilde{\Omega}(G)$ le domaine régulier augmenté associé à (Ω, G) , $\widetilde{\text{Sing}}_0 = \widetilde{\text{Sing}}_0(\Omega, G)$ son lieu singulier et $\text{Sing}_0 := \widetilde{\text{Sing}}_0/G$. Soit $M := \Omega/G$ et $\overline{M} := \tilde{\Omega}/G$. **Dans cette section, on suppose que M est un espace-temps de type (iv).** Le but de cette section est de construire une fonction temps de $\overline{M}$.

Tout espace-temps lorentzien admet une fonction temps particulière appelée *fonction temps cosmologique*, celle-ci sera notre point de départ.

Définition 4.3.7 (Fonction temps cosmologique). *Soit M un espace-temps lorentzien, le temps cosmologique de M est l'application qui à un point x de M associe la longueur (positive possiblement infinie) de la plus longue géodésique passée partant de x .*

Théorème 23 ([AGH98] théorème 1.2). *Soit M un espace-temps lorentzien dont le temps cosmologique est fini et tend vers 0 en parcourant vers le passé les courbes causales inextensibles. Alors le temps cosmologique est une fonction temps continue.*

Corollaire 4.3.8. *Soit M un espace-temps plat globalement hyperbolique Cauchy-complet Cauchy-maximal de type (v) futur complet.*

Alors, le temps cosmologique est une fonction temps de Cauchy continue.

Démonstration. Il suffit de remarquer d'une part que le temps cosmologique satisfait les hypothèses du théorème dans ce cas et de remarquer que le temps cosmologique tend vers l'infini lorsque l'on parcourt une courbe causale future inextensible. $\square$

Soit alors $T : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ le relevé de la fonction temps cosmologique de M .

Lemme 4.3.9. *La fonction temps T se prolonge continûment à $\tilde{\Omega}$ en*

$$\tilde{T} : \begin{cases} \tilde{\Omega} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ p & \longmapsto & \begin{cases} T(p) & \text{if } p \in \Omega \\ 0 & \text{if } p \in \widetilde{\text{Sing}}_0 \end{cases} \end{cases}$$

Démonstration. Soit $p \in \widetilde{\text{Sing}}_0$ et soit Π_1 le plan d'appui lumière de Ω en p . Comme Ω/G est de type (iv), Ω est dans le futur d'un certain plan de type espace Π_2 . Pour tout $q \in \Omega$, $T(q)$ est la longueur de la plus longue géodésique causale passée partant de q . Lorsque q tends vers p , les segments géodésiques passés partant de q sont piégés dans le domaine $J^+(\Pi_1) \cap J^+(\Pi_2) \cap J^-(q)$ et convergent donc uniformément (pour la métrique euclidienne usuelle de $\mathbb{R}^3$) vers un segment géodésique lumière. $\square$

Problème. $\tilde{T}$ est croissante pour l'ordre causal de $\tilde{\Omega}$ mais pas strictement croissante sur les droites BTZ. $\tilde{T}$ n'est donc pas une fonction temps.

La solution à ce problème est suggérée par l'étude des passés/futurs continûment atteignables autours des singularités BTZ. En effet, celle-ci sont fortement tarentines dans le futur mais pas dans le passé : $K^+ = I^+$ mais pour p point BTZ, $K^-(p) = J^-(p) \setminus \{p\}$. Il faut donc « ajouter du poids » aux lignes BTZ.

Définition 4.3.10 (Fonction temps cosmologique tordue). Soit une mesure G -invariante α supportée par $\widetilde{\text{Sing}}_0$ et un nombre réel $a \in \mathbb{R}$, On pose :

$$T_{\alpha,a} : \begin{cases} \tilde{\Omega} & \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\} \\ p & \longmapsto \alpha(J^-(p)) + a\tilde{T}(p) \end{cases}$$

Pour une mesure α G -invariante, $T_{\alpha,a}$ est G -invariante et induit une fonction sur M . De plus si α est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\widetilde{\text{Sing}}_0$ et $T_{\alpha,a} < +\infty$ alors $T_{\alpha,a}$ est strictement croissante et est donc une fonction temps. Si de plus, $\alpha(\Delta) = +\infty$ sur toute ligne BTZ Δ alors $T_{\alpha,a}$ sera une fonction temps de Cauchy. On pourrait penser à prendre la mesure de Lebesgue sur une ligne BTZ Δ et ensuite sommer ses itérés par $G/\text{Stab}(\Delta)$, nous obtenons cependant une fonction $T_{\alpha,a}$ infinie en général. Nous considérons donc des mesures absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue mais coupées en deça d'un point donné de la ligne BTZ support puis nous sommions ses itérés. Les lemmes 4.3.15 et 4.3.12 assurent ce procédé induit une fonction $T_{\alpha,a}$ bien définie et finie.

Définition 4.3.11 (Stabilisateur d'une ligne BTZ). Soit Δ une ligne BTZ de $\mathbb{E}^{1,2}$, on pose G_Δ l'ensemble des éléments de G fixant Δ point par point.

$$G_\Delta := \bigcap_{p \in \Delta} \text{Stab}_G(p)$$

Lemme 4.3.12. Soit Δ une droite lumière telle que $G_\Delta \neq \{1\}$. Alors G_Δ ne contient que des isométries paraboliques et tout élément de G stabilisant Δ est dans G_Δ .

Démonstration. Pour commencer, comme Ω/G est type (iv), alors d'après le théorème 14, G et $L(G)$ sont discrets et $L|_G$ est injective. Une isométrie qui stabilise Δ point par point est conjuguée à une isométrie linéaire fixant point par point une droite de type lumière. Il est donc conjugué à une isométrie parabolique. Ainsi, G_Δ est un sous-groupe discret non trivial de $\bigcap_{p \in \Delta} \text{Stab}_{\text{Isom}(\mathbb{E}^{1,2})}(p) \simeq \mathbb{R}$, d'où G_Δ est monogène. Soit ϕ_Δ un générateur de G_Δ .

Soit $\phi \in G \setminus G_\Delta$ tel que $\phi \cdot \Delta = \Delta$. Soit $P \leq Q$ in Δ tel que $\phi P = Q$. Quitte à conjuguer par une translation, on peut supposer $P = O$ l'origine de $\mathbb{E}^{1,2}$ de sorte que $\phi_L P = P$, $\tau_\phi = \overrightarrow{PQ}$ et ϕ_Δ est linéaire. Comme $\phi \Delta = \Delta$, $\phi_L \vec{\Delta} = \vec{\Delta}$ et donc $\vec{\Delta}$ est un espace-propre de type lumière de ϕ_L . Donc ϕ est parabolique ou hyperbolique. Le groupe engendré par ϕ_L et ϕ_Δ est un sous-groupe discret de $\text{SO}_0(1,2)$ fixant un point du bord de $\mathbb{H}^2$, il est donc monogène et on se donne ψ un générateur. Il existe $p, q \in \mathbb{Z}$ tel que $\psi^p = \phi_\Delta$ et $\psi^q = \phi_L$. Comme ϕ_Δ est parabolique, il en est de même pour ψ et donc il en va de même pour ϕ_L . On a $\phi_\Delta^q \phi^p = \tau_\phi$ alors $\tau_\phi \in G$. Comme $L \circ \rho$ est fidèle et $L(\tau_\phi) = 0$ on a $\tau_\phi = 0$, alors $\phi = \phi_L$ et donc $\phi \in G_\Delta$. $\square$

Corollaire 4.3.13. Soit Δ une ligne BTZ de $\tilde{\Omega}$ et soit $\psi \in G$. S'il existe $p \in \Delta$ tel que $\psi p \in \Delta$ alors $\psi \in G_\Delta$.

Démonstration. Soit $q \in \Delta$, $\psi q = \psi(q - p + p) = \psi_L(q - p) + \psi p$. Comme ψp et ψq sont dans $\widetilde{\text{Sing}}_0$, ou bien $\psi p - \psi q$ est de type espace ou bien p, q appartiennent à la même composante connexe de Sing_0 . Le premier est impossible car $q - p$ est de type lumière, donc $\psi q \in \Delta$ et donc ψ stabilise Δ ; finalement d'après le lemme 4.3.12, $\psi \in G_\Delta$. $\square$

Lemme 4.3.14. Soit Δ une ligne BTZ de $\tilde{\Omega}$. Pour tout $p \in \Delta$, il existe $\lambda > 0$ tel que

$$\forall q \in \tilde{\Omega}, \quad \#(Gp \cap J^-(q)) \leq (1 + \lambda \tilde{T}(q))^2$$

Démonstration. Soit $q \in \widetilde{\Omega}$, si $q \in \widetilde{\text{Sing}}_0$ d'après le lemme 4.3.12, $\#(Gp \cap J^-(q)) \leq 1$.

Soit $p \in \Delta$, soit $p_* = \inf(\Delta)$ et soit $u = p - p_*$. Le vecteur u est futur de type lumière vecteur et $\Delta = p_* + \mathbb{R}_+^* u$. Pour v de type lumière, posons $h_v = J^+(v) \cap \mathbb{H}^2$. L'ensemble $\{h_{tv} : t > 0\}$ est exactement l'ensemble des horocycles centrés en v . Comme $L(G)$ est discret, $\mathbb{H}^2/L(G)$ est une $\mathbb{H}^2$ -variété complète et il existe un horocycle plongé autour de la pointe associée à u . Soit $\lambda > 0$ tel que $h_{\lambda u}$ est plongé. Soit $\vec{n}$ le vecteur unitaire futur de type temps. Soit $\phi \in G$

$$\begin{aligned} \phi p \in J^-(q) &\Leftrightarrow \phi p_* + \phi_L u \in J^-(q) \\ &\Leftrightarrow \phi_L u \in J^-(q - \phi p_*) \\ &\Rightarrow |\langle \phi_L u | \vec{n} \rangle| \leq |\langle q - \phi p_* | \vec{n} \rangle| \\ &\Rightarrow |\langle \phi_L u | \vec{n} \rangle| \leq T(q) \end{aligned}$$

D'une part, pour v de type lumière, la projection stéréographique de $\mathbb{H}^2$ sur le disque de Poincaré le long de $\vec{n}^\perp$ envoie un horocycle $J^+(v) \cap \mathbb{H}^2$ sur un cercle euclidien de rayon $(1 + |\langle v | \vec{n} \rangle|)^{-1}$. D'autre part, les horocycles $h_{\lambda \phi_L u}$ sont disjoints pour $\phi_L \in L(G)/L(G_\Delta)$. Si $\phi p \in J^-(q)$, alors le rayon de $h_{\lambda \phi_L u}$ est plus grand que $(1 + \lambda T(q))^{-1}$. Comme l'aire totale de l'union des horoboules disjointes est plus petite que π , il existe au plus $(1 + \lambda T(q))^2$ tels $\phi_L \in L(G)/L(G_\Delta)$. Comme Ω/G est type (iv), alors $L|_G$ est injective et le résultat s'ensuit. $\square$

Corollaire 4.3.15. *Soit $\phi \in G$ parabolique. Alors pour tout $p \in \Delta_\phi$, Gp est discret.*

Proposition 4.3.16. *Il existe a mesure α $\widetilde{\text{Sing}}_0$ telle que pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$,*

- $T_{\alpha,a}$ est $\mathcal{C}^1$ sur Ω et $\mathcal{C}^0$ sur $\widetilde{\Omega}$;
- $T_{\alpha,a}$ est G -invariant.
- $T_{\alpha,a}$ est une fonction temps de Cauchy sur $\widetilde{\Omega}$

Démonstration. Choisissons un ensemble de représentants $(\Delta_i)_{i \in I}$ des G -orbites de $\widetilde{\text{Sing}}_0$. L'ensemble I est dénombrable on peut donc supposer $I \subset \mathbb{N}$ et pour chaque $i \in I$, choisissons une suite décroissante $(p_n^{(i)})_{n \in \mathbb{N}} \in \Delta_i^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n^{(i)} = \min(\Delta_i)$. Soit $N(i, n)$ le nombre de triplet (j, k, ψ) avec $j \leq i$ et $k \leq n$ et $\psi \in G/G_{\Delta_j}$ tels que $\psi p_k^{(j)} \in J^-(p_n^{(i)})$. On peut choisir une famille $(\varphi_n^{(i)})_{n \in \mathbb{N}, i \in I}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $i \in I$,

1. $\varphi_n^{(i)}$ est $\mathcal{C}^1(\Delta_i, \mathbb{R}_+)$,
2. $\|\varphi_n^{(i)}\|_{\mathcal{C}^0} \leq 1$
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi_n^{(i)}(x) = 1$
4. $\forall x \in \Delta_i, \varphi_n^{(i)}(x) = 0 \Leftrightarrow x \leq p_n^{(i)}$

Choisissons une paramétrisation géodésique de Δ_i pour chaque $i \in I$, on pose alors λ_i l'image de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+^*$ par cette paramétrisation. D'après le lemme 4.3.14, pour $n \in \mathbb{N}$ et $i \in I$, on se donne $\mu_n^{(i)} \geq 1$ tel que

$$\forall q \in \Omega, \quad \# \{ \phi \in G/G_\Delta \mid \phi p_n^{(i)} \in J^-(q) \} \leq (1 + \mu_n^{(i)} T(q))^2$$

Soit

$$\alpha = \sum_{i \in I} \sum_{\psi \in G/G_{\Delta_i}} \sum_{n \in \mathbb{N}} \omega_n^{(i)} \psi \# (\varphi_n^{(i)} \lambda_i)$$

avec

$$\omega_n^{(i)} = \frac{2^{-i-n}}{\lambda_i \left(J^-(p_0^{(i)}) \right) \mu_n^{(i)}}.$$

Pour $i \in I$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\alpha_n^{(i)} : \begin{cases} \tilde{\Omega} & \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ p & \longmapsto \sum_{\psi \in G/G_\Delta} \varphi_n^{(i)} \lambda_i(J^-(\psi p)) \end{cases}$$

La somme est localement finie donc $\alpha_n^{(i)}$ est $\mathcal{C}^0$ et finie. De plus, pour tout $q \in \tilde{\Omega}$:

$$\|\alpha_n^{(i)}\|_{\mathcal{C}^1(J^-(q))} \leq \lambda_i\left(J^-\left(p_0^{(i)}\right)\right)\left(1 + \mu_n^{(i)}T(q)\right)^2.$$

donc, pour tout $q \in \tilde{\Omega}$:

$$\sum_{i \in I} \sum_{n \in \mathbb{N}} \|\omega_n^{(i)} \alpha_n^{(i)}\|_{\mathcal{C}^1(J^-(q))} \leq \sum_{i \in I} \sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{-i-n} (1 + T(q))^2 = 4(1 + T(q))^2.$$

Et donc, la série $\sum_{i \in I} \sum_{n \in \mathbb{N}} \omega_n^{(i)} \alpha_n^{(i)}$ est normalement convergente sur tout compact de $\tilde{\Omega}$ pour la norme $\mathcal{C}^0$.

Il reste à démontrer que $T_{\alpha,a}$ est de Cauchy, c'est-à-dire que $T_{\alpha,a}$ est surjective et strictement croissante sur les courbes futures causales inextensibles. Soit $c : \mathbb{R} \rightarrow \tilde{\Omega}$ une courbe causale future inextensible, posons $\Delta = c \cap \widetilde{\text{Sing}}_0$ et $c^0 = c \cap \Omega$. Les deux parties Δ et c^0 sont connexes et Δ est dans le passé de c^0 .

- La fonction T est strictement croissante sur c^0 , ainsi $T_{\alpha,a}$ est croissante sur c^0 . Comme α est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\widetilde{\text{Sing}}_0$, $T_{\alpha,a}$ est strictement croissante sur Δ .
- Quand $t \rightarrow -\infty$, $\tilde{T}(c(t))$ et $\alpha(J^-(c(t)))$ tendent vers 0 donc $T_{\alpha,a}(c(t))$ tend vers $-\infty$. Si $c^0 = \emptyset$, alors $\bigcup_{t>0} J^-(c(t))$ est la composante connexe de $\widetilde{\text{Sing}}_0$ et d'après la condition (iii), $\alpha(J^-(c(t)))$ tend vers $+\infty$. Si $c^0 \neq \emptyset$, alors pour c^0 est une courbe future causale inextensible de Ω et donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} T(c(t)) = +\infty$. Dans tous les cas, $\lim_{t \rightarrow +\infty} T_{\alpha,a}(c(t)) = +\infty$.

Finalement, $T_{\alpha,a}$ est une fonction temps de Cauchy sur $\tilde{\Omega}$. □

4.3.3 Construction de l'extension BTZ maximale d'un domaine régulier

On se donne un sous-groupe discret sans-torsion $G \subset \text{Isom}(\mathbb{E}^{1,2})$ et un domaine régulier G -invariant Ω . On suppose Ω/G de type (iv). On note (voir Définition 4.3.5) $\tilde{\Omega} = \tilde{\Omega}(G)$, $\widetilde{\text{Sing}}_0 = \widetilde{\text{Sing}}_0(\Omega, G)$. Soit $M := \Omega/G$, $\overline{M} := \tilde{\Omega}/G$ muni de la topologie quotient et soit $\pi : \tilde{\Omega} \rightarrow \overline{M}$ la projection naturelle.

Proposition 4.3.17. $\overline{M}$ est Hausdorff.

Démonstration. Soient α une mesure donnée par la proposition 4.3.16 et $a \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $p, q \in \tilde{\Omega}$ tel que $\pi(p) \neq \pi(q)$.

- Si p et q sont dans Ω , alors $\pi(p)$ et $\pi(q)$ sont dans M et comme M est séparé, alors $\pi(p)$ et $\pi(q)$ sont séparés dans M et donc $\pi(p)$ et $\pi(q)$ sont séparés dans $\overline{M}$.
- Si p et q sont dans $\widetilde{\text{Sing}}_0$, alors ou bien $T_{\alpha,a}$ sépare p et q ou bien p, q ne sont pas sur la même ligne BTZ. Dans ce dernier cas, on peut multiplier α par une fonction G -invariante égale à $1/2$ sur l'orbite de la ligne BTZ contenant de p et 1 sur les autres lignes BTZ pour obtenir $T_{\alpha',a}(p) \neq T_{\alpha',a}(q)$. Comme $T_{\alpha,a}$ est G -invariant et continue, $\pi(p)$ et $\pi(q)$ sont séparés.
- Si $p \in \Omega$ et $q \in \widetilde{\text{Sing}}$, alors on peut changer le paramètre a pour obtenir $T_{\alpha,a}(p) \neq T_{\alpha,a}(q)$ de sorte que $\pi(p)$ et $\pi(q)$ sont séparés.

□

Proposition 4.3.18. $\overline{M}$ est un $\mathbb{E}_0^{1,2}$ -espace-temps globalement hyperbolique.

Démonstration. $\overline{M}$ est le quotient d'une $\mathbb{E}^{1,2}$ -variété singulière $(\tilde{\Omega})$ sous l'action d'un groupe discret agissant proprement discontinûment sur un ouvert dense semi-localement connexe (Ω) . Par suite, $\overline{M}$ est une $\mathbb{E}^{1,2}$ -variété singulière séparée d'après la proposition 4.3.17 à base dénombrable car $\tilde{\Omega}$ est à base dénombrable. Il suffit donc de trouver pour chaque point singulier p un voisinage $\mathcal{U}$ de p et un $\mathbb{E}^{1,2}$ -isomorphisme p.p de $\mathcal{U}$ vers un ouvert de $\mathbb{E}_0^{1,2}$ pour démontrer que le $\mathbb{E}_0^{1,2}$ -brouillard maximal de $\overline{M}$ recouvre $\overline{M}$.

Il faut faire attention au fait que la topologie sur $\tilde{\Omega}$ est la topologie donnée dans la Définition 4.3.1. Soient Δ une composante connexe de Sing_0 (i.e. une ligne BTZ de $\tilde{\Omega}$) et $p \in \Delta$ un point. On pose $G^* := G \setminus G_\Delta$. On peut choisir l'application $\overline{\mathcal{D}}$ de la proposition 4.3.2 telle que $\Delta \subset \overline{\mathcal{D}}(\text{Sing}_0(\mathbb{E}_0^{1,2}))$. Posons $q = \overline{\mathcal{D}}^{-1}(p)$. On construit à présent un voisinage $\mathcal{W}$ de p qui est G_Δ -invariant, ouvert et disjoint de ses images par G^* . Ensuite $\overline{\mathcal{D}}$ induira un isomorphisme p.p entre un voisinage ouvert de $q = \overline{\mathcal{D}}^{-1}(p)$ et $\mathcal{W}/G_\Delta$.

Soit $q_* \in J^-(q)$, on pose $p_* = \overline{\mathcal{D}}(q)$ de sorte que $p_* \in J^-(p)$ et on pose

$$\mathcal{V} = \text{Int}(J^+(q_*) \cap \{r < R, \tau < \tau^*\}) \quad \text{and} \quad \mathcal{U} = \pi^{-1}(\overline{\mathcal{D}}(\mathcal{V}))$$

avec $(\tau, \mathbf{r}, \theta)$ les coordonnées de $\mathbb{E}_0^{1,2}$, $R > 0$ et $\tau^* > \frac{1}{2}R$.

On se donne $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$ un ouvert relativement compact tel que $G_\Delta \cdot \mathcal{U}_0 = \mathcal{U}$, on a alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{U} \setminus G^*\mathcal{U} &= \mathcal{U} \setminus (G^*\mathcal{U} \cap \mathcal{U}) \\ &= (G_\Delta \mathcal{U}_0) \setminus G_\Delta((G^*\mathcal{U}) \cap \mathcal{U}_0) \\ &= G_\Delta(\mathcal{U}_0 \setminus (G^*\mathcal{U}) \cap \mathcal{U}_0). \end{aligned}$$

Comme $\mathcal{U} \subset J^+(p_*)$, pour $\phi \in G$, si $(\phi\mathcal{U}) \cap \mathcal{U}_0 \neq \emptyset$ alors $\phi p_* \in J^-(\mathcal{U}_0) \subset J^-(\overline{\mathcal{U}_0})$. D'après le Corollaire 4.3.15, comme $J^-(\overline{\mathcal{U}_0})$ est compact, l'ensemble $Gp_* \cap J^-(\overline{\mathcal{U}_0})$ est fini et on peut l'écrire de la forme $\{\phi_0 p_*, \phi_1 p_*, \dots, \phi_n p_*\}$ avec $\phi_0 = 1$; par suite :

$$\begin{aligned} \mathcal{U} \setminus G^*\mathcal{U} &= G_\Delta \cdot (\mathcal{U}_0 \setminus (\mathcal{U}_0 \cap G^*\mathcal{U})) \\ &= G_\Delta \cdot \left(\mathcal{U}_0 \setminus \bigcup_{i=1}^n \phi_i \mathcal{U} \right) \\ &\supset G_\Delta \cdot \left(\mathcal{U}_0 \setminus \bigcup_{i=1}^n J^+(\phi_i p_*) \right). \end{aligned}$$

On remarque que d'après le lemme 4.3.12, pour tout $\phi \in G$ tel que $\phi p_* \in J^-(p_*)$, on a $\phi \in G_\Delta$; donc le seul ϕ_i tel que $\phi_i p_* \in J^-(\overline{\mathcal{U}_0})$ est $\phi_0 = 1$. On pose $\mathcal{W} := G_\Delta(\mathcal{U}_0 \setminus \bigcup_{i=1}^n J^+(\phi_i p_*))$ de sorte que $\mathcal{W}$ est un ouvert de $\mathcal{U}$, disjoint de $G^*\mathcal{W}$ et contenant dans p .

La fonction $T_{\alpha,a}$ de la proposition 4.3.16 est une fonction temps de Cauchy G -invariante sur $\tilde{\Omega}$. Elle induit une fonction temps de Cauchy sur $\overline{M}$ ce qui démontre que $\overline{M}$ est globalement hyperbolique. $\square$

Théorème 24. Soit G un sous-groupe discret sans torsion de $\text{Isom}(\mathbb{E}^{1,2})$ et soit Ω un domaine régulier G -invariant.

Alors $\tilde{\Omega}(G)/G$ est une $\mathbb{E}_0^{1,2}$ -variété isomorphe à $\text{Ext}_{\text{BTZ}}(\Omega/G)$.

Démonstration pour les espaces-temps de type (iv). Les propositions 4.3.17 et 4.3.18 montrent que $\Omega/G \rightarrow \tilde{\Omega}/G$ est un plongement BTZ. Il reste à démontrer que $\tilde{\Omega}/G$ est BTZ-maximal. Considérons $\tilde{\Omega}/G \xrightarrow{i} N$ le plongement BTZ avec N l'extension BTZ maximale de M . Soit $p \in \text{Sing}_0(N)$, soit $\mathcal{U}$ un diamant compact au voisinage de p inclus dans une carte autour de p et soit $c := \{r = R_0, \tau = \tau_0\}$ un lacet autour de la ligne BTZ $\text{Sing}_0(\mathcal{U})$. Soit $\mathcal{D}$ l'application développante de $\text{Reg}(N)$. L'image de l'holonomie de $\text{Reg}(\mathcal{U})$ est engendrée par une isométrie parabolique ϕ fixant a droite de type lumière Δ qui intersecte le bord de $\mathcal{D}(\text{Reg}(\mathcal{U}))$ d'un segment $[p_*, p^*]$. Soit $\mathcal{V} := \mathcal{D}(\text{Reg}(\mathcal{U}))$, on peut supposer que $(G \setminus G_\Delta)\mathcal{V} \cap \mathcal{V} = \emptyset$. D'après la proposition 4.3.2, $\mathcal{D}$ induit un homéomorphisme $\overline{\mathcal{D}} : \mathcal{U} \rightarrow (\mathcal{V} \cup [p_*, p^*])/G_\Delta$ et $i|_{\mathcal{V}/G_\Delta}$ est une section continue de $\overline{\mathcal{D}}$ sur $\mathcal{V}/G_\Delta$. Par suite, par continuité, $\overline{\mathcal{D}}^{-1} = i|_{(\mathcal{V} \cup [p_*, p^*])/G_\Delta}$ et p est dans l'image de i . Finalement, i est surjective. $\square$

4.3.4 Extension BTZ maximale des espaces-temps plats Cauchy-complets absolument maximaux

Soit Ω un domaine régulier invariant sous l'action d'un sous-groupe discret sans torsion $G \subset \text{Isom}(\mathbb{E}^{1,2})$. Dans le théorème 22, les lignes BTZ Δ_ϕ sont potentiellement vides : nous ne savons pas à priori quelles isométries paraboliques de G donnent lieu à une ligne BTZ. Dans cette sous-section, nous montrons que si Ω/G est $\mathbb{E}^{1,2}$ -maximal, alors toutes les isométries paraboliques de G donnent une ligne BTZ non vide. Nous démontrons ainsi la proposition suivante.

Proposition 4.3.19. *Soit Ω un domaine régulier sous l'action d'un sous-groupe discret sans torsion $G \subset \text{Isom}(\mathbb{E}^{1,2})$.*

Si Ω/G est absolument maximal (Cf définition 3.4.10), alors pour tout $\psi \in G$ parabolique, Δ_ψ est non vide en utilisant les notations de la Définition 4.3.3

Le cas des espaces-temps de type (i – iii) est élémentaire, seul le cas des espaces-temps de type (iv) méritent d'être traités. Dans ce cas, $L|_G$ est injective et $L(G)$ est discret avec $L : \text{Isom}(\mathbb{E}^{1,2}) \rightarrow \text{SO}_0(1, 2)$ la projection sur la partie linéaire. On se donne alors Ω un domaine régulier invariant sous l'action d'un sous-groupe discret sans torsion $G \subset \text{Isom}(\mathbb{E}^{1,2})$ et on suppose Ω/G de type (iv).

Soient $\psi \in G$, $\Delta = \text{Fix}(\psi)$ et $G_\Delta := \text{Stab}(\Delta)$. On peut supposer que Δ passe par l'origine O de $\mathbb{E}^{1,2}$ et prendre $u \in J^+(O) \setminus \{O\}$ sur Δ . Pour $R \in \mathbb{R}$, posons

$$\Pi_R := \{x \in \mathbb{E}^{1,2} \mid \langle x|u \rangle = -R\}$$

le plan de type lumière parallèle à $\Delta^\perp$ de « hauteur » R ; on a

$$\forall R \in \mathbb{R}, \quad I^-(\Pi_R) = \{x \in \mathbb{E}^{1,2} \mid \langle x|u \rangle > -R\}.$$

Comme G agit sans torsion sur Ω , $\Delta \cap \Omega = \emptyset$; de plus $\forall x \in \Omega$, $J^+(x) \subset \Omega$ donc $\Omega \subset I^+(\Delta) = I^+(\Pi_0)$. Soit

$$R_0 := \max\{R \in \mathbb{R} \mid \Pi_R \cap \Omega = \emptyset\} \quad \text{et} \quad \mathcal{U}_{\lambda,R} := I^+(\lambda u) \cap I^-(\Pi_R)$$

pour $R > 0$ et $\lambda > 0$. Soit $\mathcal{C}$ le cône des vecteurs de type lumière futurs en O . Quitte à translater l'origine le long de Δ , on peut supposer que $\mathcal{C} \cap \Pi_{R_0+1} \subset \Omega$.

Ou souhaite à présent trouver $\lambda > 1$ et $R > R_0$ tels que $\mathcal{U}_{\lambda,R}$ est disjoint de ses itérés par $G \setminus G_\Delta$.

Lemme 4.3.20. *Soient $\lambda > 1$ et $R > R_0$. Soit $\phi \in G$ tel que $\phi\mathcal{U}_{\lambda,R} \cap \mathcal{U}_{\lambda,R} \neq \emptyset$, alors*

$$0 \geq \langle \phi_L u | u \rangle \geq \frac{R_0 - 2R}{\lambda}$$

Démonstration. On utilise les notations ϕ_L et τ_ϕ pour désigner les parties linéaires et de translation d'une isométrie ϕ . On remarque avant toute chose que $\langle \phi_L u | u \rangle$ est négatif car $\phi_L u$ et u sont tous deux futurs.

Si $\phi \in G_\Delta$, alors $\phi_L u = \phi u = u$, donc $\langle \phi_L u | u \rangle = 0$ et donc la propriété est vérifiée.

Si au contraire $\phi \notin G_\Delta$, alors en particulier $I^+(\phi \cdot (\lambda u)) \cap I^-(\Pi_R) \neq \emptyset$ et donc $\phi \cdot (\lambda u) \in I^-(\Pi_R)$; on a ainsi

$$\lambda \langle \phi_L u | u \rangle + \langle \tau_\phi | u \rangle > -R.$$

De plus, il existe $v \in \mathcal{C}$ tel que $\phi_L v = \alpha v$ avec $0 < \alpha \leq 1$. Comme $L|_G$ est injective et $\phi \notin G_\Delta$, un tel vecteur v n'est pas parallèle à u ; ainsi on peut choisir $v \in \Pi_R \cap \mathcal{C} \subset \Omega$. Comme G stabilise Ω , $\phi v \in \Omega$ et $\langle \phi v | u \rangle < -R_0$; on a alors

$$-R_0 \geq \langle \phi v | u \rangle = \alpha \langle v | u \rangle + \langle \tau_\phi | u \rangle \geq -R + \langle \tau_\phi | u \rangle$$

et donc :

$$R - R_0 \geq \langle \tau_\phi | u \rangle.$$

On a donc :

$$\langle \phi_L u | u \rangle \geq \frac{-R - (R - R_0)}{\lambda} = \frac{R_0 - 2R}{\lambda}.$$

□

Lemme 4.3.21. *Soit $R > R_0$.*

Alors, il existe $\phi_0 = 1, \phi_1, \dots, \phi_n \in G$ tels que pour tout $\phi \in G$ et tout $\lambda \geq 2$,

$$\phi \mathcal{U}_{\lambda,R} \cap \mathcal{U}_{\lambda,R} \neq \emptyset \Rightarrow \phi \in \bigcup_{i=0}^n G_{\Delta} \phi_i G_{\Delta}$$

Démonstration. Prenons $p^* \in \mathbb{E}^{1,2}$ tel que $J^+(O) \cap \Pi_R \cap J^-(p^*)$ contienne un domaine fondamental de l'action de G_{Δ} sur $\mathcal{C} \cap \Pi_R$. Alors, $J(O, p^*)$ contient un domaine fondamental de l'action de G_{Δ} sur $(\mathcal{C} \setminus \mathbb{R}_+^* u) \cap J^-(\Pi_R)$. Le diamant $J(O, p^*)$ est compact et d'après le Corollaire 4.3.15, $L(G)u$ est discret, de plus $L|_G$ est injective, donc il existe seulement un nombre fini de $[\phi'] \in G/G_{\Delta}$ tels que $L(\phi')u \in J(O, p^*)$. Soit $\{\phi_0 = 1, \phi_1, \dots, \phi_n\}$ un ensemble de représentant de ces $[\phi']$.

Soient à présent $\phi \in G$ et $\lambda \geq 2$, si $\phi \in G_{\Delta}$ alors trivialement $\phi \in \bigcup_{i=0}^n G_{\Delta} \phi_i G_{\Delta}$, on suppose alors $\phi \notin G_{\Delta}$ et $\phi \mathcal{U}_{\lambda,R} \cap \mathcal{U}_{\lambda,R} \neq \emptyset$. D'après le lemme 4.3.20, comme $\lambda \geq 2$ et $R_0, R > 0$, on a

$$\langle \phi_L u | u \rangle \geq \frac{R_0 - 2R}{\lambda} \geq -R,$$

donc $\phi_L u \in J^-(\Pi_R)$; de plus, $L(G)$ discret et $\phi \notin G_{\Delta}$ donc $\phi_L u \notin \mathbb{R}_+^* u$; ainsi $\phi_L u \in (\mathcal{C} \setminus \{\mathbb{R}_+^* u\}) \cap J^-(\Pi_R)$, il existe donc $\omega \in G_{\Delta}$, tel que $L(\omega \phi)u$ est dans le domaine fondamental choisi de l'action de G_{Δ} sur $(\mathcal{C} \setminus \mathbb{R}_+^* u) \cap J^-(\Pi_R)$ et donc dans $J(O, p^*)$.

Alors,

$$\omega \phi_L \in \bigcup_{i=1}^n \phi_i G_{\Delta}$$

d'où

$$\phi_L \in \bigcup_{i=1}^n G_{\Delta} L(\phi_i) G_{\Delta}$$

ce qui donne alors le résultat car $L|_G$ est injective et $L(G_{\Delta}) = G_{\Delta}$. □

Démonstration de la proposition 4.3.19. Prenons $R > R_0$

$$\text{et } \lambda = \max_{i \in [1, n]} \left(\frac{R_0 - 2R}{\langle L(\phi_i)u | u \rangle} \right) + 1$$

avec on obtient $\phi \mathcal{U}_{\lambda,R} \cap \mathcal{U}_{\lambda,R} = \emptyset$ pour $\phi \in G \setminus G_{\Delta}$.

Considérons le domaine

$$\Omega' := \Omega \cup \bigcup_{[\phi] \in G/G_{\Delta}} \phi \mathcal{U}_{\lambda,R}.$$

Ω' est globalement hyperbolique et G -invariant. Soit $\tilde{\Sigma}$ une surface de Cauchy G -invariante de Ω . Soit $p \in I^-(\Pi_R) \cap \Omega$, $I^+(p) \cap \Pi_R \subset \Omega$ est l'intérieur d'une parabole de Π_R donc toute droite de type lumière de Π_R intersecte Ω . La surface $\tilde{\Sigma}$ est une surface de Cauchy de Ω et donc intersecte toute droite de type lumière de Π_R . Considérons $\Omega'/G_{\Delta} \subset I^+(\Delta)/G_{\Delta} \simeq \mathbb{E}_0^{1,2}$, la surface $\tilde{\Sigma}/G_{\Delta}$ est une surface de Cauchy de Ω/G_{Δ} et intersecte toutes les lignes verticales $\{r = R, \theta = \theta_0\}$. On peut alors utiliser la propriété 4.2.1 pour prolonger $\tilde{\Sigma}/G_{\Delta} \setminus \{r < R\}$ en une surface de Cauchy complète de Ω'/G_{Δ} que l'on note Σ . Le relevé $\tilde{\Sigma}$ de Σ à Ω' est une surface de Cauchy complète de Ω' donc Ω'/G est Cauchy-complet et on a un morphisme injectif $\Omega/G \rightarrow \Omega'/G$. Comme Ω/G est absolument maximal, cette application est surjective et $\Omega' = \Omega$.

Finalement,

$$\text{Fix}(\psi) \cap \partial\Omega = \text{Fix}(\psi) \cap \partial\Omega' \neq \emptyset.$$

□

4.4 Application : Extension $\mathbb{E}_0^{1,2}$ -maximale et théorème de Mess pour les espaces-temps avec BTZ

A titre d'exemple d'application de la théorie développée dans ce chapitre, nous proposons un théorème de Mess pour les espaces-temps plats Cauchy-compacts avec BTZ. Nous commençons par étudier les conséquences des résultats obtenus dans la section précédente sur l'extension BTZ maximale d'un espace-temps plat globalement hyperbolique Cauchy-complet $\mathbb{E}^{1,2}$ -maximal et sur les propriétés la partie régulière d'un $\mathbb{E}_0^{1,2}$ -espace-temps globalement hyperbolique Cauchy-compact maximal.

4.4.1 Espaces-temps $\mathbb{E}_0^{1,2}$ -maximaux

Proposition 4.4.1. *Soit A une partie de $\mathbb{R}_+$ contenant 0, $A^* := A \setminus \{0\}$ et soit M un $\mathbb{E}_A^{1,2}$ -espace-temps globalement hyperbolique Cauchy-complet et Cauchy-maximal. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

- (i) $\text{Ext}_{\text{BTZ}}(M)$ est $\mathbb{E}_A^{1,2}$ -absolument maximal ;
- (ii) $\text{Reg}_{A^*}(M)$ est $\mathbb{E}_{A^*}^{1,2}$ -absolument maximal.

Démonstration.

- (ii) $\Rightarrow$ (i)

Supposons que $\text{Reg}_{A^*}(M)$ est $\mathbb{E}_{A^*}^{1,2}$ -absolument maximal et soit

$$\text{Ext}_{\text{BTZ}}(M) \xrightarrow{\phi} M'$$

un $\mathbb{E}_A^{1,2}$ -plongement avec M' globalement hyperbolique Cauchy-complet et Cauchy-maximal. D'après le théorème 20, $\text{Reg}_{A^*}(M)$ et $\text{Reg}(A^*)(M')$ sont globalement hyperboliques Cauchy-complets et Cauchy-maximaux. Comme Reg_{A^*} est un foncteur fidèle, ϕ induit un $\mathbb{E}_{A^*}^{1,2}$ -plongement

$$\text{Reg}_{A^*}(M) \xrightarrow{\text{Reg}_{A^*}(\phi)} \text{Reg}_{A^*}(M')$$

Comme $\text{Reg}_{A^*}(M)$ est $\mathbb{E}_{A^*}^{1,2}$ -maximal, $\text{Reg}_{A^*}(\phi)$ est surjectif donc bijectif, c'est donc un isomorphisme. Ainsi le complémentaire de l'image de ϕ ne contient que des points BTZ et donc ϕ est une extension BTZ ; or $\text{Ext}_{\text{BTZ}}(M)$ est BTZ-maximal donc ϕ est surjectif donc bijectif.

- (i) $\Rightarrow$ (ii)

Supposons que $\text{Ext}_{\text{BTZ}}(M)$ est $\mathbb{E}_A^{1,2}$ -maximal et considérons un $\mathbb{E}_{A^*}^{1,2}$ -plongement

$$\text{Reg}_{A^*}(M) \xrightarrow{\phi} M'.$$

D'après le lemme 4.1.11, on peut alors construire un $\mathbb{E}_A^{1,2}$ -plongement

$$\text{Ext}_{\text{BTZ}}(M) \longrightarrow M'' := (M' \coprod \text{Ext}_{\text{BTZ}}(M)) / \text{Reg}_{A^*}(M).$$

On peut vérifier que M'' est l'extension BTZ maximale de $\text{Reg}_{A^*}(M)$ qui d'après le théorème 20 est Cauchy-complète et Cauchy-maximale. Or $\text{Ext}_{\text{BTZ}}(M)$ est $\mathbb{E}_A^{1,2}$ -maximal donc le morphisme $\text{Ext}_{\text{BTZ}}(M) \longrightarrow M''$ est bijectif et donc ϕ est bijectif.

□

Proposition 4.4.2. *Soit M un $\mathbb{E}_0^{1,2}$ -espace-temps globalement hyperbolique Cauchy-complet, M admet une unique extension $\mathbb{E}_0^{1,2}$ -maximale à isomorphisme près.*

Démonstration. M admet une unique extension Cauchy maximale M_1 par le théorème 13, la partie régulière M_0 de M_1 est Cauchy-complète Cauchy-maximale. M_0 admet une unique extension $\mathbb{E}^{1,2}$ -maximale M_2 d'après la proposition 3.4.13 enfin M_2 admet une unique extension BTZ maximale M_3 qui est $\mathbb{E}_0^{1,2}$ -maximal d'après la proposition 4.4.1 avec $A = \{0\}$ et $A^* = \emptyset$. Le lemme 4.1.11 appliqué à

$$\begin{array}{ccc} M_0 & \longrightarrow & M_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ M_2 & \longrightarrow & M_4 := (M_1 \amalg M_2)/\sim \end{array}$$

montre que M_4 est un $\mathbb{E}_0^{1,2}$ -espace-temps qui est une extension BTZ de M_2 . Par suite, M_3 est l'extension BTZ maximale de M_4 . Enfin, M se plonge dans M_1 donc dans M_4 et donc dans M_3 , ainsi M admet une extension $\mathbb{E}_0^{1,2}$ -maximale.

Si M_5 est une autre extension $\mathbb{E}_0^{1,2}$ -maximale de M alors M_0 se plonge dans $\text{Reg}(M_5)$ qui est $\mathbb{E}^{1,2}$ -maximal d'après la proposition 4.4.1. Par suite $\text{Reg}(M_5)$ est isomorphe à M_2 or M_5 est isomorphe à l'extension BTZ maximale de $\text{Reg}(M_5) \simeq M_2$ donc isomorphe à M_3 . $\square$

4.4.2 Théorème de Mess pour les espaces-temps Cauchy-compact avec BTZ

On rappelle avoir construit section 3.4.4, une application

$$T\text{Teich}_{g,s} \xrightarrow{\text{dsusp}_{\mathbb{E}^{1,2}}} \mathcal{M}_{g,s}(\mathbb{E}^{1,2})$$

réciproque de l'application d'holonomie Hol .

Théorème 25. Soient $g, s \in \mathbb{N}$ avec $s > 0$ et $2g - 2 + s > 0$, les applications suivantes sont bijectives

$$\begin{array}{ccc} \text{Teich}_{g,s} & \xrightleftharpoons[\text{susp}_{\mathbb{H}^2}^{-1} \circ \text{Reg}]{\text{Ext}_{\text{BTZ}} \circ \text{dsusp}_{\mathbb{E}^{1,2}}} & \mathcal{M}_{g,s}^L(\mathbb{E}_0^{1,2}) \\ T\text{Teich}_{g,s} & \xrightleftharpoons[\text{Hol}]{\text{Ext}_{\text{BTZ}} \circ \text{dsusp}_{\mathbb{E}^{1,2}}} & \mathcal{M}_{g,s}(\mathbb{E}_0^{1,2}) \end{array}$$

Démonstration. On se donne Σ une surface de genre g et S une partie de Σ de cardinal s . Il nous faut démontrer d'une part que l'extension BTZ maximale d'un $\mathbb{E}^{1,2}$ -espace-temps globalement hyperbolique Cauchy-complet $\mathbb{E}^{1,2}$ -maximal homéomorphe à $(\Sigma \setminus S) \times \mathbb{R}$ et d'holonomie admissible est Cauchy-compact. D'autre part, il nous faut démontrer que si M est un $\mathbb{E}_0^{1,2}$ -espace-temps globalement Cauchy-compact Cauchy-maximal homéomorphe à $\Sigma \times \mathbb{R}$ alors $\text{Reg}(M)$ est $\mathbb{E}^{1,2}$ -maximal et d'holonomie admissible.

- Soit M un $\mathbb{E}^{1,2}$ -espace-temps globalement hyperbolique Cauchy-complet absolument maximal homéomorphe à $(\Sigma \setminus S) \times \mathbb{R}$ et d'holonomie ρ admissible.

Comme l'holonomie de M est admissible, à chaque point de S , correspond une classe de conjugaison d'isométries paraboliques de ρ . Comme M est $\mathbb{E}^{1,2}$ -maximal, le théorème 24 et la proposition 4.3.19 impliquent donc que pour chaque point de S correspond une composante connexe de Sing_0 dans l'extension BTZ maximale de M . Ainsi $\text{Ext}_{\text{BTZ}}(M)$ est homéomorphe à $\Sigma \times \mathbb{R}$ et est donc Cauchy-compact.

- Soit M un $\mathbb{E}_0^{1,2}$ -espace-temps globalement hyperbolique Cauchy-compact Cauchy-maximal et homéomorphe à $\Sigma \times \mathbb{R}$. On suppose que $\text{Sing}_0(M)$ comporte s composantes connexes et on note ρ son holonomie et $\Gamma := \rho(\pi_1(\text{Reg}(M)))$.

Comme M est Cauchy-compact et Cauchy-maximal, d'après le lemme 3.4.12, M est $\mathbb{E}_0^{1,2}$ -maximal; la proposition 4.4.1 et le théorème 20, $\text{Reg}(M)$ est Cauchy-complet et $\mathbb{E}_0^{1,2}$ -maximal. Par ailleurs, une surface de Cauchy de $\text{Reg}(M)$ est obtenue en prenant une surface de Cauchy de M qui est homéomorphe à Σ et en retirant s points, $\text{Reg}(M)$ admet donc une surface de Cauchy homéomorphe à $\Sigma \setminus S$. L'holonomie autour des lignes BTZ est parabolique donc l'holonomie d'un lacet simple périphérique d'une surface de Cauchy de $\text{Reg}(M)$ est parabolique. Supposons que l'holonomie d'un lacet a_i ou b_i intérieur de Σ n'est pas hyperbolique, comme Γ agit librement sur un domaine régulier, il ne peut contenir d'isométrie elliptique, c'est donc que $\rho(\gamma)$ est parabolique. Par suite, elle correspond à une ligne BTZ, le théorème 24 et la proposition 4.3.19 montrent que M comporterait alors au moins $s + 1$ lignes BTZ. C'est impossible, donc l'holonomie d'un lacet intérieur est hyperbolique et donc ρ_L est admissible et finalement ρ est admissible.

□

Troisième partie

Paramétrisations d'espaces-temps plats singuliers munis de surfaces polyédrales et théorème d'Alexandrov

Introduction

On peut comparer le monde à un bloc de cristal aux facettes innombrables. Selon sa structure et sa position, chacun de nous voit certaines facettes. Tout ce qui peut nous passionner, c'est de découvrir un nouveau tranchant, un nouvel espace.

Alberto Giacometti

Nous revenons à la problématique principale de ce travail.

Problème. *Quelles paramétrisations peut-on avoir des espaces-temps plats singuliers munis d'une surface de Cauchy polyédrale convexe.*

Le point de départ de notre réponse à ce problème est le théorème d'Alexandrov-Fillastre.

Théorème ([Fil11]). *Soit Σ une surface fermée de genre $g \geq 2$ localement euclidienne à singularités coniques d'angle supérieur à 2π , il existe un polyèdre convexe P dans $\mathbb{E}^{1,2}$ tel que ∂P est isométrique au revêtement universel $\tilde{\Sigma}$ de Σ et une représentation $\rho : \pi_1(\Sigma) \rightarrow \mathrm{SO}_0(1,2)$ fidèle d'image discrète sous l'action de laquelle P est invariant. De plus, si (P_1, ρ_1) et (P_2, ρ_2) sont deux tels couples polyèdre/représentation, alors il existe une isométrie ϕ de $\mathbb{E}^{1,2}$ telle que $\phi P_1 = P_2$ et $\rho_2 = \phi \rho_1 \phi^{-1}$.*

Nous pouvons l'interpréter comme une bijection entre l'espace de module des espaces-temps plats Cauchy-compacts $\mathbb{E}^{1,2}$ -maximaux d'holonomie linéaire munis d'une surface de Cauchy polyédrale convexe, d'une part, et d'autre part l'espace de module des $\mathbb{E}_{>2\pi}^2$ -surfaces.

Théorème. *Pour $g \geq 2$ et $s \in \mathbb{N}^*$, il existe des bijections naturelles :*

$$\widetilde{\mathcal{M}}_g^L(\mathbb{E}^{1,2}, s) \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} \mathcal{M}_{g,s}(\mathbb{E}_{>2\pi}^2)$$

avec

- $\widetilde{\mathcal{M}}_g^L(\mathbb{E}^{1,2}, s)$ l'espace des classes d'équivalence de $\mathbb{E}^{1,2}$ -espaces-temps Cauchy-compacts de genre g à holonomie linéaire munis d'une surface de Cauchy polyédrale convexe ayant exactement s sommets ;
- $\mathcal{M}_{g,s}(\mathbb{E}_{>2\pi}^2)$ l'espace des classes d'équivalence de $\mathbb{E}_{>2\pi}^2$ -surfaces de genre g ayant exactement s points singuliers.

Nous obtenons ainsi un premier exemple de paramétrisation répondant au problème posé. Par ailleurs, de manière surprenante, un travail de Penner [Pen87] sur une cellulation de l'espace de Teichmüller donne (après reformulation et quelques raffinements) un autre théorème du même genre.

Théorème 26 ([Pen87, Bru16b]). *Pour $g \in \mathbb{N}$ et $s \in \mathbb{N}^*$ tels que $2g - 2 + s > 0$, il existe des bijections naturelles :*

$$\widetilde{\mathcal{M}}_{g,s}^L(\mathbb{E}_0^{1,2}) \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} \mathcal{M}_{g,s}(\mathbb{E}_{>0}^2)$$

avec

- $\widetilde{\mathcal{M}}_{g,s}^L(\mathbb{E}_0^{1,2})$ l'espace des classes d'équivalence de $\mathbb{E}^{1,2}$ -espaces-temps Cauchy-compacts de genre g comportant exactement s lignes singulières BTZ, à holonomie linéaire munis d'une surface de Cauchy polyédrale convexe dont les sommets sont sur les lignes singulières;
- $\mathcal{M}_{g,s}(\mathbb{E}_{>0}^2)$ l'espace des classes d'équivalence de $\mathbb{E}_{>0}^2$ -surfaces de genre g ayant exactement s points singuliers.

On remarque que dans ce second théorème, les surfaces localement euclidiennes singulières ne sont plus contraintes à avoir des angles singuliers plus grands que 2π . Cela provient du fait que l'on peut aisément construire des cônes de révolution autour d'une singularité BTZ dont l'angle conique est arbitrairement faible voir la figure III.1. Plus important, la contrainte donnée par Gauss-Bonnet est affaiblie : nous ne pouvons pas plonger de sphère plate avec trois angles coniques dans $\mathbb{E}^{1,2}$ mais nous pouvons plonger une telle sphère dans un espace-temps BTZ. Plus généralement, un cône de révolution autour d'une particule massive aura un angle conique supérieur à l'angle de la particule massive III.2.

FIGURE III.1 – Cônes convexes autour d'une singularité BTZ.

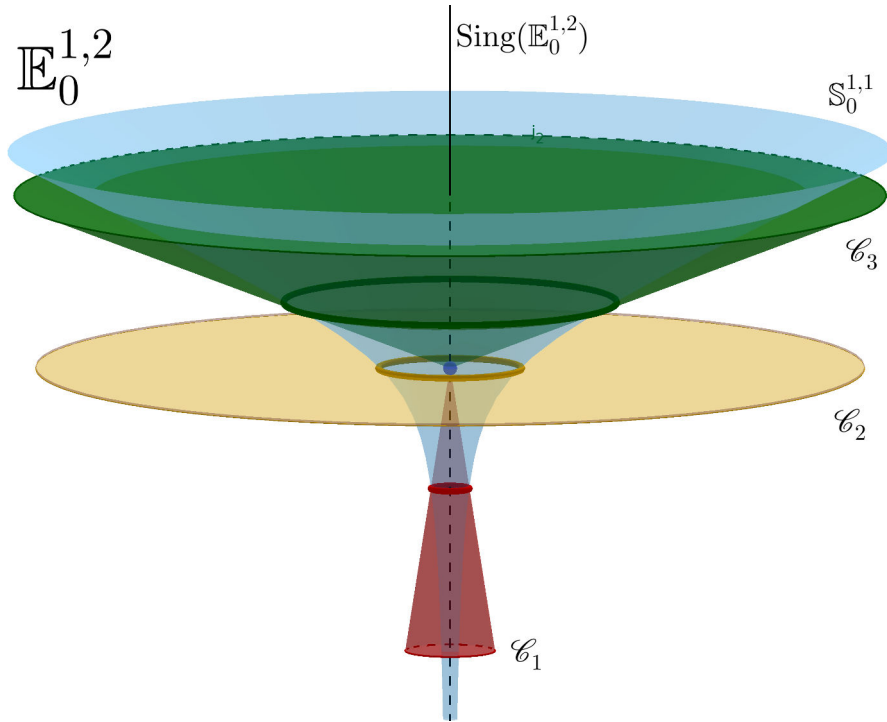
Dans les coordonnées cylindriques $(\tau, \mathfrak{r}, \theta)$, les cônes $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ respectivement d'angle conique θ_1, θ_2 et θ_3 sont de la forme

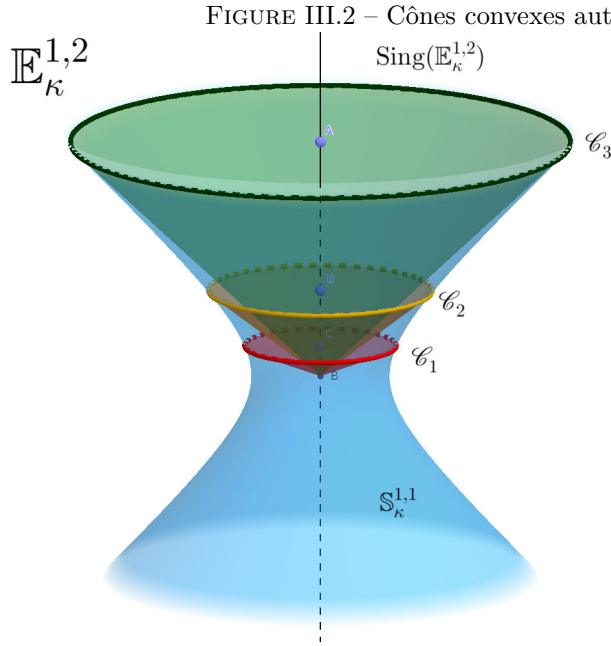
$$\begin{aligned}\mathcal{C}_i & : \quad \tau = \sinh(\alpha_i)r \\ \theta_i & = \quad 2\pi \exp(\alpha_i);\end{aligned}$$

de plus,

$$\lim_{\alpha_1 \rightarrow -\infty} \theta_1 = 0.$$

Les trois cônes de révolutions dans $\mathbb{E}_0^{1,2}$ sont représentés avec leur intersection avec la sphère unité $\mathbb{S}_0^{1,1}$. Le dessin est trompeur car **les trois cônes sont convexes y compris $\mathcal{C}_1$** . En effet, leur développement dans $\mathbb{E}^{1,2}$ est un cône dont la base est un horocycle.





Dans les coordonnées cylindriques (t, r, θ) , les cônes $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ respectivement d'angle conique θ_1, θ_2 et θ_3 sont de la forme

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_i &: t = \sinh(\alpha_i)r \\ \theta_i &= \cosh(\alpha_i)\kappa \end{aligned}$$

En particulier,

$$\lim_{\alpha_3 \rightarrow +\infty} \theta_3 = +\infty$$

Nous attirons l'attention sur le fait que les espaces de module $\widetilde{\mathcal{M}}_{g,s}^L(\mathbb{E}^{1,2})$ et $\widetilde{\mathcal{M}}_{g,s}^L(\mathbb{E}_0^{1,2})$ supposent l'existence d'une surface de Cauchy polyédrale convexe. Ce n'est donc pas clair a priori que les projections naturelles

$$\widetilde{\mathcal{M}}_g^L(\mathbb{E}^{1,2}, s) \longrightarrow \mathcal{M}_g^L(\mathbb{E}^{1,2}) \quad \widetilde{\mathcal{M}}_{g,s}^L(\mathbb{E}_0^{1,2}) \longrightarrow \mathcal{M}_{g,s}^L(\mathbb{E}_0^{1,2})$$

soient surjectives. Il est facile de démontrer que la projection de gauche est surjective. Nous démontrons dans la section 5.1 un résultat plus fort que la surjectivité de la projection de droite. En effet, nous démontrons que non seulement un $\mathbb{E}_0^{1,2}$ -espace-temps Cauchy-compact maximal M avec au moins une ligne singulière admet une surface de Cauchy polyédrale convexe mais également que l'intersection d'une telle surface de Cauchy avec les lignes singulières est arbitraire. La construction est étonnemment simple, étant donné un choix de points sur chacune des lignes BTZ de M , le bord de l'enveloppe convexe fermée est une surface de Cauchy polyédrale convexe intersectant les lignes BTZ aux points choisis, voir théorème 27.

L'objectif du chapitre 5 est de démontrer le théorème 26, cela sera fait à la fin de section 5.2. La construction de la surface de Penner par enveloppe convexe est l'objet de la section 5.1 et nous en profitons pour démontrer que celle-ci fonctionne même pour les $\mathbb{E}_0^{1,2}$ -espaces-temps Cauchy-compacts maximaux d'holonomie non linéaire.

L'objectif du chapitre 6 est de démontrer la généralisation suivante du théorème d'Alexandrov-Fillastre par une méthode effective.

Théorème. Soit (Σ, S) une $\mathbb{E}_{>2\pi}^2$ -surface marquée de genre g avec $\#S = s > 0$ points singuliers. Pour tout $\bar{\kappa} \in [0, 2\pi]^S$, il existe un $\mathbb{E}_{[0, 2\pi]}^{1,2}$ -espace-temps $(\Sigma \times \mathbb{R}, S \times \mathbb{R})$ -marqué M d'holonomie linéaire et un plongement polyédral $\iota : \Sigma \rightarrow M$ tels que :

- pour tout $\sigma \in S$, si $\kappa(\sigma) = 2\pi$, alors la ligne marquée associée à $\{\sigma\} \times \mathbb{R}$ est un rayon géodésique régulier ;
- pour tout $\sigma \in S$, si $\kappa(\sigma) < 2\pi$, alors la ligne marquée associée à $\{\sigma\} \times \mathbb{R}$ est une particule massive d'angle $\kappa(\sigma)$.

De plus, un tel couple (M, ι) est unique à équivalence près.

Nous espérons dans un futur proche généraliser ce dernier théorème pour et démontrer la conjecture suivante.

Conjecture 4.4.3. *Soit (Σ, S) une $\mathbb{E}_{>0}^2$ -surface marquée de genre g avec $\#S = s > 0$ points singuliers d'angles coniques $(\theta_\sigma)_{\sigma \in S}$.*

Pour tout

$$\bar{\kappa} \in \prod_{\sigma \in S} [0, \min(2\pi, \theta_\sigma)],$$

il existe un $\mathbb{E}_{[0, 2\pi]}^{1,2}$ -espace-temps $(\Sigma \times \mathbb{R}, S \times \mathbb{R})$ -marqué M d'holonomie linéaire et un plongement polyédral $\iota : \Sigma \rightarrow M$ tels que :

- *pour tout $\sigma \in S$, si $\kappa(\sigma) = 2\pi$, alors la ligne marquée associée à $\{\sigma\} \times \mathbb{R}$ est un rayon géodésique régulier ;*
- *pour tout $\sigma \in S$, si $\kappa(\sigma) < 2\pi$, alors la ligne marquée associée à $\{\sigma\} \times \mathbb{R}$ est une particule massive d'angle $\kappa(\sigma)$.*

De plus, un tel couple (M, ι) est unique à équivalence près.

Avant d'aller plus loin, il nous faut lever deux ambiguïtés : par cellulation nous entendons toujours cellulation adaptée et il nous faut préciser le sens de « plongement polyédral » .

Définition (Cellulation adaptée). *Soit (Σ, S) un marquage avec Σ une surface de genre g et $\#S = s > 0$ et soit $(\Sigma_1, \mathcal{F}_1, h_1)$ une $\mathbb{E}_{>0}^2$ -surface (Σ, S) -marquée.*

Une cellulation adaptée de Σ_1 est un couple $(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ tel que

- *$\mathcal{A}$ est un ensemble de segments géodésiques plongés dans Σ_1 d'extrémités dans $h_1(S)$*
- *$\mathcal{C}$ est un ensemble de polygones euclidiens plongés dans Σ_1 de sommets dans $h_1(S)$ dont le bord est une union d'éléments de $\mathcal{A}$.*
- *$\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C = \Sigma_1$.*

En particulier, l'ensemble des sommets d'une cellulation adaptée est exactement l'ensemble des points marqués.

Un segment géodésique dans $\mathcal{A}$ est appelé une arête de la cellulation et un polygone dans $\mathcal{C}$ est appelé une cellule de la cellulation.

Définition (Plongement polyédral). *Soit (Σ, S) un marquage avec Σ une surface de genre g et $\#S = s > 0$ et soit $(\Sigma_1, \mathcal{F}_1, h_1)$ une $\mathbb{E}_{>0}^2$ -surface (Σ, S) -marquée.*

Un plongement polyédral de Σ_1 est la donnée d'un $\mathbb{E}_{\geq 0}^{1,2}$ -espace-temps $(\Sigma \times \mathbb{R}, S \times \mathbb{R})$ -marquée $(M, \mathcal{F}_2, h_2)$ et d'un plongement $\iota : \Sigma_1 \rightarrow M$ tels que

- *$\forall \sigma \in S, \iota \circ h_1(\sigma) \in h_2(\{\sigma\} \times \mathbb{R})$;*
- *il existe une cellulation adaptée $(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ de Σ_1 telle que la restriction de ι à chaque cellule $C \in \mathcal{C}$ est totalement géodésique ;*
- *$\iota(\Sigma_1)$ est une surface de Cauchy.*

Toutes les cellulations et triangulations que nous considérons sont adaptées, nous ne le repréciserons donc pas systématiquement.

Chapitre 5

Surface de Penner-Epstein et espaces temps espaces-temps BTZ

Nous présentons une extension du théorème d’Alexandrov aux cas des espaces-temps plats avec singularités BTZ. Nous nous inspirons principalement de l’article de Penner [Pen87] sur l’espace de Teichmüller décoré. En effet dans ce travail, Penner décrit un espace de module de surfaces hyperboliques décorées par un choix d’horocycles (possiblement immergés) autour de chaque pointe. Il remarque que chacun de ces horocycles correspond à un point sur le bord du cône lumière de $\mathbb{E}^{1,2}$ en identifiant le plan hyperbolique au modèle de l’hyperboloïde. Il démontre alors que le bord de l’enveloppe convexe de ces points est une surface polyédrale dont les sommets sont sur le cône lumière. Étant donné le travail que nous avons effectué sur les extensions BTZ, en particulier le théorème 24, nous voyons alors qu’en quotientant le futur chronologique de l’origine avec les rayons lumières contenant les sommets de cette surface, on obtient un espace-temps singulier avec BTZ admettant une surface de Cauchy polyédrale convexe. C’est ce que nous démontrons rigoureusement dans la section 5.1.

Si à l’inverse, nous partons d’une surface localement euclidienne singulière fermée (Σ, S) , alors on peut réaliser le revêtement universel $\tilde{\Sigma}^*$ de sa partie régulière comme une surface polyédrale dans le cône futur de l’espace de Minkowski en la découpant le long de sa cellulation de Delaunay puis en plongeant les cellules une à une. La section 5.2 décrit cette construction de manière superficielle car elle ne comporte que des arguments soit classiques soit figurant dans de très larges détails dans le chapitre suivant ; puis elle se conclut sur une la preuve d’une généralisation du théorème 26 qui est une généralisation du théorème d’Alexandrov pour les espaces-temps BTZ. En corollaire, nous obtenons une paramétrisation de l’espace de Teichmüller décoré par les surfaces localement euclidiennes singulières d’angles quelconques ; ce corollaire n’est sans rappeler un résultat de Troyanov [Tro86].

Dans la section 5.1, nous considérons des espaces-temps plats singuliers d’holonomie quelconque, les espaces-temps considérés dans la la section 5.2 seront tous d’holonomie linéaire.

5.1 Surface de Penner-Epstein dans les espaces-temps BTZ

On souhaite démontrer le théorème suivant qui est une généralisation aux espaces-temps BTZ de la proposition 3.5 de [EP88].

Théorème 27. *Soit M un $\mathbb{E}_0^{1,2}$ -espace-temps globalement hyperbolique Cauchy-compact Cauchy-maximal, on note $\text{Sing}_0(M) = \sqcup_{i=1}^s \Delta_i$ la décomposition de $\text{Sing}_0(M)$ en composantes connexes.*

Pour toute famille $(\bar{p}_i)_{i \in [1,s]} \in \prod_{i=1}^s \Delta_i$, le bord de l’enveloppe convexe fermée des $(\bar{p}_i)_{i \in [1,s]}$ est une surface de Cauchy polyédrale compacte de M .

On se donne pour toute cette section $g \geq 0$ et $s > 0$ tels que $2g - 2 + s > 0$, Σ une surface fermée de genre g et M un $\mathbb{E}_0^{1,2}$ -espace-temps homéomorphe à $\Sigma \times \mathbb{R}$ tel que $\text{Sing}_0(M)$ comporte exactement

s composantes connexes. Soit $S := \{\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_s\}$ une famille de points de $\text{Sing}_0(M)$ appartenant chacun à une composante connexe de $\text{Sing}_0(M)$ différente.

On note Γ le groupe fondamental de $\text{Reg}(M)$ et $\rho : \Gamma \rightarrow \text{Isom}(\mathbb{E}^{1,2})$ la représentation d'holonomie de M . Comme précédemment, $L : \text{Isom}(\mathbb{E}^{1,2}) \rightarrow \text{SO}_0(1, 2)$ désigne la projection sur la partie linéaire. Comme $2g - 2 + s > 0$ et $s > 0$, le groupe Γ est un groupe libre à au moins 2 générateurs qui est donc non abélien, l'espace-temps $\text{Reg}(M)$ est donc de type (iv) (voir définition 3.4.5) et en particulier, la partie linéaire ρ_L de la représentation d'holonomie est fidèle et discrète. On note Ω le domaine régulier associé à l'holonomie ρ , $\tilde{\Omega}$ le domaine régulier augmenté (Cf définition 4.3.5). Ce dernier est doté de la topologie BTZ, (définition 4.3.1), obtenue en ajoutant à la topologie induite par celle de $\mathbb{E}^{1,2}$, les ouverts de la forme $]p, +\infty[\cup I^+(p)$ pour p parcourant $\tilde{\Omega} \setminus \Omega$. On a une projection naturelle $\pi : \tilde{\Omega} \rightarrow M$. On note alors

$$\tilde{S} := \pi^{-1}(S) = \{p \in \tilde{\Omega} \mid \pi(p) \in S\}$$

Les points $\bar{p}_i \in S$ sont appelés points marqués de M et les points $p \in \tilde{S}$ sont appelés points marqués de $\tilde{\Omega}$; on rappelle que d'après le corollaire 4.3.15, l'ensemble $\tilde{S}$ est discret. Un point noté $\bar{p}$ sera toujours dans M et un point noté p sera toujours dans $\tilde{\Omega}$ de sorte que « Soit p un point marqué » désignera toujours un point marqué de $\tilde{\Omega}$. Pour tout point marqué p , on note Γ_p le stabilisateur de p dans Γ , Δ_p la ligne de points fixes du groupe Γ_p et Π_p le plan lumière contenant Δ_p . On pose enfin K l'enveloppe convexe des points marqués de $\tilde{\Omega}$ et $\bar{K}$ la fermeture de K pour la topologie usuelle de $\mathbb{E}^{1,2}$. On notera également $\bar{\Omega}$, la fermeture de Ω dans $\mathbb{E}^{1,2}$ pour la topologie usuelle.

Lemme 5.1.1. *L'intersection de K avec le bord de $\bar{\Omega}$ ne contient que les points marqués, i.e. :*

$$K \cap \partial \bar{\Omega} = \tilde{S}.$$

Démonstration. Soit $q \in K \cap \partial \bar{\Omega}$.

- Supposons qu'il existe p, p' deux points marqués tels que $q \in [p, p']$ et montrons que q est un point marqué.

On rappelle que $J^+(\Delta_p) = I^+(\Pi_p) \cup \Delta_p$ où Π_p est le plan lumière contenant Δ_p , c'est donc l'union d'un demi-espace ouvert bordé par un plan de type lumière et d'une droite lumière dans ce bord. On a alors $q \in J^+(\Delta_p) \cap J^+(\Delta_{p'})$. Si $p = p'$, le résultat est évident; supposons à présent p et p' distincts. Les droites Δ_p et $\Delta_{p'}$ ne sont pas parallèles et les plans les supportant ne sont pas confondus; ainsi la ligne BTZ passant par p (resp. p') est l'intérieur relatif de $\Delta_p \cap \bar{\Omega}$ (resp. $\Delta_{p'} \cap \bar{\Omega}$) qui en particulier ne contient donc pas le point d'intersection de $\Delta_{p'}$ avec le plan lumière Π_p (resp. de Δ_p avec le plan lumière $\Pi_{p'}$). C'est à dire $p \in I^+(\Delta_{p'})$ et $p' \in I^+(\Delta_p)$, ainsi $]p, p'[\subset \Omega$ et donc $q = p$ ou $q = p'$.

- Traitons à présent le cas général.

Notons $\text{Bary}((x_0, \lambda_0), \dots, (x_n, \lambda_n))$ le barycentre de $x_0, \dots, x_n$ pondérés par $\lambda_0, \dots, \lambda_n$. On se donne $(p_i, \lambda_i)_{i \in [0, n]}$ une famille pondérée de points de $\tilde{S}$ telle que

$$q = \text{Bary}((p_0, \lambda_0), \dots, (p_n, \lambda_n)) \quad \lambda > 0.$$

Pour tout $k \in [0, n]$, on pose

$$q_k = \text{Bary}((p_1, \lambda_1), \dots, (p_k, \lambda_k)).$$

Comme $\lambda > 0$, pour tout $k \in [0, n - 1]$,

$$q_{k+1} \in]q_k, p_{k+1}[.$$

Par suite, Ω étant un ouvert convexe, si $q_k \in \Omega$, alors $q_{k+1} \in \Omega$. Or $q_n = q$ n'appartient pas à Ω , c'est donc qu'aucun des $(q_k)_{k \in [0, n]}$ n'est dans Ω . Supposons par l'absurde que $n \geq 1$. Dans ce cas on aurait $q_1 \notin \Omega$, donc $q_1 \in \partial \Omega$; on déduirait alors donc du premier point que $q_1 = q_0 = p_0$ ou $q_1 = p_1$ c'est-à-dire $\lambda_0 = 0$ ou $\lambda_1 = 0$. Or $\lambda > 0$, absurde. Finalement, $n = 0$ donc $q = p_0$ et donc $q \in \tilde{S}$.

□

Lemme 5.1.2. *Pour tout point marqué p , on a*

$$\Delta_p \cap \overline{K} \supset [p, +\infty[.$$

Démonstration. Soit p un point marqué et soit q un point marqué distinct de p . D'après le lemme 5.1.1, $p \in I^+(\Delta_p)$, il existe donc un unique $p' \in \Delta_p$ tel que $q \in \partial J^+(p')$. Or, $J^+(p) \cap \partial\Omega = [p, +\infty[$, en particulier, $J^+(p)$ ne contient pas q et donc p' est dans le passé de p et est différent de p . Comme Γ_p fixe point par point Δ_p , quitte à traduire l'origine de $\mathbb{E}^{1,2}$ on peut supposer $p' = O$ de sorte que Γ_p agit linéairement sur $J^+(p')$ et d'après le Corollaire 4.3.15, Γq est discret, donc $\Gamma_p q$ est discret. Soit $\gamma \in \Gamma_p \setminus \{1\}$, on a $\gamma^n q = \lambda_n u_n$ pour un certain $\lambda_n \rightarrow +\infty$ et $u_n \rightarrow p$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le segment $[p, \gamma^n q]$ est dans $\overline{K}$ et comme $\overline{K}$ est fermé, $[p, +\infty[\subset \overline{K} \cap \Delta_p$. □

Proposition 5.1.3. *Les plans d'appui de $\overline{K}$ sont de type espace ou lumière ; de plus, $\overline{K}$ est dans le futur de ses plans d'appui.*

Démonstration. Soit Π un plan d'appui de $\overline{K}$ et supposons le type temps, $\overline{K}$ est alors inclus dans un demi-espace H fermé bordé par un plan de type temps. Comme Γ est discret et non-abélien, l'orbite de d'un point dans le bord de $\mathbb{H}^2$ sous l'action de la partie linéaire de Γ est dense ; par suite il existe un point marqué p tel que le rayon BTZ futur $[p, +\infty[$ intersecte le plan Π et donc sorte du demi-espace H . Or d'après le lemme 5.1.2, un tel rayon est inclus dans $\overline{K}$, contradiction.

Supposons que $\overline{K}$ soit dans le passé d'un plan d'appui Π , le même argument permet de construire un rayon BTZ $[p, +\infty[$ sortant du passé de Π et donc quittant $\overline{K}$. Cela entre en contradiction avec le lemme 5.1.2. □

Corollaire 5.1.4. *$\overline{K}$ est futur complet, c'est-à-dire que $J^+(\overline{K}) = \overline{K}$.*

Démonstration. Comme $\overline{K}$ est un convexe fermé, d'après le lemme 5.1.3, $\overline{K}$ est l'intersection des futurs de ses plans d'appui et est donc futur complet. □

Corollaire 5.1.5. *$\partial\overline{K}$ est une surface fermée achronale sans bord.*

Démonstration. D'après le corollaire 1.2.32 de [alg10], il suffit de montrer que $\partial\overline{K}$ est une partie achronale sans bord. Or $\overline{K}$ est futur complet donc $\partial\overline{K}$ est achronale sans bord. □

Lemme 5.1.6. *L'intersection du bord de $\overline{K}$ avec le bord de Ω est l'union des rayons BTZ futurs partant des points marqués $p \in \tilde{S}$:*

$$\partial\overline{K} \cap \partial\overline{\Omega} = \bigcup_{p \in \tilde{S}} [p, +\infty[$$

Démonstration. Soit $q \in \partial\overline{K} \cap \partial\overline{\Omega}$ et soit $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points de K telle que $q_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} q$ et posons

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad q_n = \sum_{p \in \tilde{S}} \alpha_p^{(n)} p$$

avec $\alpha_i^{(p)}$ positifs ou nuls de somme 1. Nous souhaitons démontrer que q est dans le futur d'un point marqué, nous supposons alors que ce n'est pas le cas.

Commençons par montrer que Ω admet un unique plan d'appui en q et que celui-ci est de type lumière, nous le noterons alors Π_q .

- Supposons que Ω admette un plan d'appui Π de type espace en q et notons u une normale passée à Π .

On remarque que ce plan ne peut pas contenir de points marqués car sinon, il couperait une ligne BTZ et donc Ω . Comme $J^-(\Pi - u)$ contient q et seulement un nombre fini de points marqués,

$$\mu = \min_{p \in \tilde{S}} \langle u | p \rangle$$

est atteint et est strictement supérieur à $\langle u|q \rangle$. Le plan $\Pi - \frac{\mu}{2}u$ sépare donc q de $\tilde{S}$ et donc $q \notin \overline{K}$, absurde. On déduit de cette contradiction que les plans d'appui de Ω en q sont de type lumière.

- Supposons que q est dans l'intersection de deux plans d'appui de type lumière différents Π, Π' . Alors, tout plan de type espace contenant la droite $\Pi \cap \Pi'$ est également un plan d'appui de Ω en q , c'est impossible.

Soit u un vecteur de type lumière **passé** tel que le plan orthogonal à u est la direction du plan Π_q d'appui de Ω en q ; en particulier, $\Omega \subset I^+(\Pi_q)$ donc

$$\forall x \in \Omega, \quad \langle x|u \rangle > \langle q|u \rangle := r_0.$$

Posons pour $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_n = \sqrt{\langle q_n|u \rangle - r_0}$ de sorte que $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de réels strictement positifs tendant vers zéro; on pose également pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} A_n &= \{p \in \tilde{S} \mid \langle p|u \rangle \leq r_0 + \varepsilon_n\}, \\ B_n &= \{p \in \tilde{S} \mid \langle p|u \rangle > r_0 + \varepsilon_n\}. \end{aligned}$$

A_n (resp. B_n) est alors l'ensemble des points de $\tilde{S}$ situés dans le passé (resp. le futur) d'un translaté du plan Π_q dans le futur. Nous avons alors :

$$\begin{aligned} \langle q_n|u \rangle &= \sum_{p \in \tilde{S}} \alpha_p^{(n)} \langle p|u \rangle \\ &= \sum_{p \in A_n} \alpha_p^{(n)} \langle p|u \rangle + \sum_{p \in B_n} \alpha_p^{(n)} \langle p|u \rangle \\ &\geq \sum_{p \in A_n} \alpha_p^{(n)} r_0 + \sum_{p \in B_n} \alpha_p^{(n)} (r_0 + \varepsilon_n) \\ &= r_0 + \varepsilon_n \sum_{p \in B_n} \alpha_p^{(n)} \\ \frac{\langle q_n|u \rangle - r_0}{\varepsilon_n} &\geq \sum_{p \in B_n} \alpha_p^{(n)} \\ \sqrt{\langle q_n|u \rangle - r_0} &\geq \sum_{p \in B_n} \alpha_p^{(n)} \end{aligned}$$

de sorte que

$$\sum_{p \in B_n} \alpha_p^{(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Pour tout vecteur v de type temps passé, tout $R > 0$ et tout $\varepsilon > 0$, on pose

$$H_{R,\varepsilon,v} := \{x \in \overline{\Omega} \mid \langle x|v \rangle \leq R \text{ et } \langle x|u \rangle \leq r_0 + \varepsilon\}$$

de sorte que le domaine $H_{R,\varepsilon,v}$ est compact; comme $\tilde{S}$ est discret, pour tout $(R, \varepsilon) \in \mathbb{R}_+^2$ seulement un nombre fini de points de $\tilde{S}$ sont dans $H_{R,\varepsilon,v}$; enfin,

- Supposons qu'il existe un vecteur v de type temps passé, un réel $R > \langle q|v \rangle$ et un réel $\varepsilon > 0$ tels que $H_{R,\varepsilon,v} \cap \tilde{S} = \emptyset$; et prenons un tel couple (R, ε) .

Il existe un plan d'appui de Ω parallèle de direction $v^\perp$ et donc il existe $r_1 \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \Omega$, $\langle x|v \rangle \geq r_1$. On se donne un tel $r_1 \in \mathbb{R}$. Dans ce cas, pour $n \in \mathbb{N}$ tel que $\varepsilon_n \leq \varepsilon$:

$$\begin{aligned} \langle q_n|v \rangle &= \sum_{p \in A_n} \alpha_p^{(n)} \langle p|v \rangle + \sum_{p \in B_n} \alpha_p^{(n)} \langle p|v \rangle \\ &\geq \sum_{p \in A_n} \alpha_p^{(n)} R + \sum_{p \in B_n} \alpha_p^{(n)} r_1 \\ \langle q|v \rangle + o(1) &\geq R + o(1). \end{aligned}$$

Par suite, $\langle q|v \rangle \geq R > \langle q|v \rangle$; c'est absurde.

- Ainsi, pour tout vecteur v de type temps passé, pour tout $R > \langle q|v \rangle$ et tout $\varepsilon > 0$, $H_{R,\varepsilon,v} \cap \tilde{S} \neq \emptyset$.
- Soit v un vecteur de type temps passé. Considérons deux suites $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroissantes telles que $R_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \langle q|v \rangle$ et $\mu_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. La suite de parties finies non vides $(H_{R_n,\mu_n,v} \cap \tilde{S})_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, par suite :

$$\bigcap_{R > \langle q|v \rangle} \bigcap_{\varepsilon > 0} H_{R,\varepsilon,v} \cap \tilde{S} \neq \emptyset.$$

Or

$$\bigcap_{R > \langle q|v \rangle} \bigcap_{\varepsilon > 0} H_{R,\varepsilon,v} \subset \Pi_q,$$

il existe donc un plusieurs points marqués sur le plan Π_q .

- Montrons que $\tilde{S} \cap \Pi_q$ est un singleton.
Supposons qu'il ait deux points $p_1, p_2 \in \tilde{S} \cap \Pi_q$. Dans ce cas, on le segment $[p_1 p_2]$ serait dans Π_q et donc dans $K \cap \partial\Omega$ ce qui est impossible d'après le lemme 5.1.1. $\tilde{S} \cap \Pi_q$ est donc au plus un singleton et ce qui précède montre que $\tilde{S} \cap \Pi_q$ est non vide.
- Posons $\{p\} = \tilde{S} \cap \Pi_q$. D'après ce qui précède, $p \in H_{R,\varepsilon,v} \cap \tilde{S}$ pour tout $R > \langle q|v \rangle$, tout $\varepsilon > 0$ et tout v de type temps passé. Par suite, p appartient à l'intersection des passé des plans de type espaces dans le futur de q , c'est-à-dire $p \in J^-(q)$.

□

Définition 5.1.7. On définit $\tilde{\Sigma}$ le bord de $\overline{K}$ pour la topologie BTZ sur $\tilde{\Omega}$ et $\Sigma := \tilde{\Sigma}/\Gamma$.

Remarque 5.1.8. On aurait pu définir K' comme la fermeture de K pour la topologie BTZ et prendre le bord de K' pour définir $\tilde{\Sigma}$ de manière plus « naturelle ». Cependant, $K' = \overline{K}$, en effet, la topologie BTZ et la topologie usuelle coïncident sur Ω donc $\overline{K} \cap \Omega = K' \cap \Omega$, de plus $I^+(q)$ est dans Ω pour tout $q \in \tilde{\Omega}$ donc $\overline{K}$ et K' contiennent leurs futurs chronologiques, enfin la fermeture des $I^+(q)$ pour les deux topologies coïncident donc $K' = \overline{K}$.

Lemme 5.1.9. La surface $\tilde{\Sigma}$ est l'union du bord de $\overline{K}$ dans Ω et des points marqués :

$$\tilde{\Sigma} = (\Omega \cap \partial\overline{K}) \cup \tilde{S}$$

de plus, Σ est le bord du projeté de l'enveloppe convexe fermée $\overline{K}$:

$$\Sigma = \partial_M(\overline{K}/\Gamma).$$

Démonstration. Pour commencer, la topologie BTZ est plus fine que la topologie usuelle donc $\tilde{\Sigma} \subset \partial\overline{K}$. Comme la topologie BTZ coïncide avec la topologie usuelle sur Ω , on a $(\Omega \cap \partial\overline{K}) \subset \tilde{\Sigma}$.

Soit $q \in \partial\Omega \cap \partial\overline{K}$, d'après le lemme 5.1.6, on se donne un point marqué $p \in \tilde{S}$ tel que $q \in [p, +\infty[$. Si $q \in]p, +\infty[$ alors q est dans l'intérieur de $J^+(p)$ pour la topologie BTZ et donc $q \notin \tilde{\Sigma}$. Si $q = p$, alors q n'a aucun point de $\overline{K}$ dans son passé et donc dans aucun $J^+(p')$ pour $p' \in \overline{K}$, c'est donc un point du bord de $\tilde{\Sigma}$ pour la topologie BTZ.

Le second point se déduit du premier en se rappelant que la topologie de M est la topologie quotient induite par la topologie BTZ de $\tilde{\Omega}$. □

Lemme 5.1.10. Toute courbe causale de Ω intersecte $\partial\overline{K}$.

Démonstration. Posons Ω' l'intérieur du développement de Cauchy de $\partial\overline{K}$. On remarque que $\partial\overline{K}$ n'est pas un plan lumière, d'après le théorème 1.5.1 p115 de [alg10], Ω' est un domaine régulier non vide qui est futur-complet et/ou passé-complet ou bien entre plans de type lumière. Comme $\Omega' \subset \Omega$, Ω' est futur complet mais pas passé complet.

D'après le lemme 5.1.2, $\bigcup_{p \in \tilde{S}}]p, +\infty[\subset \partial \bar{K}$. Donc, les lignes de points paraboliques de Γ intersectent le bord de Ω' et donc, d'après le théorème 22, l'extension BTZ maximale de Ω'/Γ contient les rayons BTZ $] \bar{p}, +\infty[$ pour $\bar{p} \in S$. Or Ω'/Γ est homéomorphe à $(\Sigma \setminus S) \times \mathbb{R}$, son extension BTZ maximale est donc Cauchy-compacte. De plus, Ω'/Γ est Cauchy-complet et Cauchy-maximal, il en va donc de même pour son extension BTZ maximale (théorème 20) qui est alors $\mathbb{E}_0^{1,2}$ -maximale. Finalement, Ω'/Γ est $\mathbb{E}^{1,2}$ -maximal et inclus dans Ω/Γ , on en déduit que $\Omega = \Omega'$. $\square$

Lemme 5.1.11. *Pour tout $x \in \tilde{\Omega} \cap \bar{K}$, $J^+(x) \setminus \{x\}$ est dans l'intérieur de $\bar{K}$ pour la topologie BTZ.*

Démonstration.

- Soit $x \in \Omega \cap \bar{K}$, on se donne u un vecteur de type lumière et v la projection de u sur le plan horizontal. On se donne $\varepsilon > 0$ tel que $x + \varepsilon v \in \Omega$ et on considère le rayon lumière $x + \varepsilon v + \mathbb{R}u$. Ce dernier intersecte $\partial \bar{K}$ d'après le lemme 5.1.10 et donc il existe $\lambda > 0$ tel que $x + \varepsilon v + \lambda u \in \bar{K}$. On remarque alors pour tout point p dans le rayon $x + \mathbb{R}_+^* u$, on peut trouver $\lambda > 0$ assez grand tel que

$$p \in I^+([x, x + \varepsilon v + \lambda u]) \subset \bar{K},$$

donc p est dans l'intérieur de $\bar{K}$ pour la topologie BTZ.

- Soit $x \in \partial \Omega \cap \bar{K}$, d'après le lemme 5.1.6, il existe $p \in \tilde{S}$ tel que $x \in [p, +\infty[$; considérons un tel $p \in \tilde{S}$. Si $x > p$, c'est fini car $J^+(p)$ est alors un voisinage de x pour la topologie BTZ inclus dans $\bar{K}$. Supposons alors $x = p \in \tilde{S}$; d'une part, $J^+(x) \cap \Omega = J^+(x) \setminus [x, +\infty[$, on déduit alors du premier point que $J^+(x) \setminus [x, +\infty[$ est dans l'intérieur de $\bar{K}$ pour la topologie BTZ. D'autre part, $J^+(x)$ est un voisinage de $[x, +\infty[$ pour la topologie BTZ inclus dans $\bar{K}$ donc $]x, +\infty[$ est dans l'intérieur de $\bar{K}$ pour la topologie BTZ. Finalement $J^+(x) \setminus \{x\}$ est dans l'intérieur de $\bar{K}$ pour la topologie BTZ. $\square$

Proposition 5.1.12. *Σ est une surface de Cauchy de M . En particulier, Σ est compacte.*

Démonstration. Considérons une courbe causale future inextensible $\bar{c} : \mathbb{R} \rightarrow M$. D'après le lemme 3.2.4, $\bar{c}$ se décompose en une partie BTZ connexe Δ et une partie connexe régulière $\bar{c}^0$ telles que Δ est dans le passé de $\bar{c}^0$. Prenons $c : \mathbb{R} \rightarrow \tilde{\Omega}$ un relevé de $\bar{c}$ dans $\tilde{\Omega}$. On remarque que le relevé de Δ est un intervalle d'un rayon BTZ de $\tilde{\Omega}$. D'après le lemme 5.1.10, c intersecte $\partial \bar{K}$ en un point t_0 . Si $c(t_0) \in \Omega$, alors $c(t_0) \in \tilde{\Sigma}$ d'après le lemme 5.1.9. Si au contraire $c(t_0) \in \partial \Omega$ alors $c(t_0)$ est dans un rayon BTZ et donc pour tout $t < t_0$, $c(t)$ est dans ce même rayon BTZ. Or, $\partial \Omega \cap \partial \bar{K} = [p, +\infty[$ pour un certain $p \in \tilde{S}$ donc $c(t_0) \in [p, +\infty[$ et donc $c(t) = p$ pour un certain $t < t_0$. Dans tous les cas, c intersecte $\tilde{\Sigma}$.

Finalement, le lemme 5.1.11 assure que c n'intersecte pas $\tilde{\Sigma}$ une deuxième fois. Σ est donc une surface de Cauchy de M et comme M est Cauchy-compact, Σ est compacte. $\square$

On rappelle que d'après la définition 3.2.13, une surface dans un $\mathbb{E}_{>0}^{1,2}$ -espace-temps M est essentiellement lisse par morceaux si elle est lisse par morceaux sur le lieu régulier de M .

Proposition 5.1.13. *Σ est une surface polyédrale convexe ayant un nombre fini de faces et dont les sommets sont exactement $\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_s$. De plus, Σ est une surface essentiellement lisse par morceaux et de type espace.*

Démonstration. D'après le lemme 5.1.9, Σ intersecte $\text{Sing}_0(M)$ exactement en $\{\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_s\}$ et est le bord d'une partie convexe contenant son futur. Σ est donc une surface convexe.

Il nous faut à présent démontrer que pour tout point q de $\tilde{\Sigma} \setminus \tilde{S}$ il existe un plan d'appui de $\tilde{\Sigma}$ en q de type espace contenant au moins trois points distincts dans $\tilde{S}$. Soit donc $q \in \tilde{\Sigma} \cap \Omega$ et soit Π un plan d'appui de K en q .

- Montrons que Π est de type espace.

D'après la proposition 5.1.3, Π est de type espace ou de type lumière. D'après le Corollaire 5.1.11, un plan de type lumière ne peut intersecter $\Omega \cap K$ et d'après le lemme 5.1.10, il ne peut intersecter Ω . Ainsi Π n'est pas de type lumière. Par suite, Π est de type espace.

- On note $a_1, \dots, a_n$ les points de la famille $p \in \tilde{S}$ contenus dans Π et on souhaite démontrer que q est dans l'enveloppe convexe des $a_1, \dots, a_n$.

On remarque que comme $K \subset J^+(\Pi)$, aucun point de la famille $p \in \tilde{S}$ n'est dans le passé de Π .

Supposons que q n'est pas dans l'enveloppe convexe des $a_1, \dots, a_n$. La famille $\tilde{S}$ étant discrète et le passé de tout plan de type espace avec Ω étant borné, on peut translater légèrement Π vers le haut de sorte à obtenir un plan Π' tel que $J^-(\Pi) \cap \tilde{S} = \{a_1, \dots, a_n\}$. Puis on peut légèrement tourner le plan Π de sorte à obtenir un plan Π' tel que les points $a_1, \dots, a_n$ soient dans le futur de Π'' . Comme Ω est convexe, que Π et Π' sont parallèles et que $\Pi' \cap \Omega$ est borné, on peut choisir Π'' de sorte que $\Pi'' \cap \Omega \subset J^-(\Pi')$. Ainsi $q \in \Pi''$ mais tous les points de $\tilde{S}$ sont dans le futur de Π'' . En translatant légèrement Π'' vers le haut on obtient un plan de type espace qui sépare q des points de $\tilde{S}$. C'est donc que q n'est pas dans $\bar{K}$, ce qui est absurde.

- Si Π ne contient que deux points de la famille $p \in \tilde{S}$ a_1, a_2 , alors on peut faire tourner Π autour de la droite $(a_1 a_2)$. Comme K comporte plus de 3 points de la famille $p \in \tilde{S}$, Π finit par rencontrer un point de K et donc on construit ainsi un plan d'appui de K en q comportant un point q' de K qui n'est pas dans le segment $[a_1 a_2]$. Si q' est un point de la famille $p \in \tilde{S}$, c'est terminé; sinon $q' \in \Omega$ et donc q' est dans l'enveloppe convexe des points marqués contenus dans Π , c'est donc que Π contient un troisième point de la famille $p \in \tilde{S}$ distinct de a_1 et a_2 .

Ainsi Σ admet une cellulation dont les sommets sont parmi les points $\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_s$. D'après le lemme 5.1.9, Σ contient les points $\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_s$, or un point $p \in \tilde{S}$ n'est pas dans l'enveloppe convexe de $\tilde{S} \setminus \{p\}$ et donc les sommets de Σ sont exactement $\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_s$.

Enfin, Σ est une surface compacte de genre g d'après la proposition 5.1.12, de plus la cellulation a un nombre fini de sommets, elle admet donc un nombre fini de cellules. □

Démonstration du théorème 27. La proposition 5.1.12 montre que le bord de l'enveloppe convexe des $\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_s$ est une surface de Cauchy qui est en particulier compacte et la propriété 5.1.13 montre que c'est une surface polyédrale. □

5.2 Suspension linéaire des surfaces localement euclidiennes

Nous souhaitons à présent démontrer une réciproque partielle au théorème 27. Partant d'une $\mathbb{E}_{>0}^2$ -surface marquée (Σ, S) , nous souhaitons construire un espace-temps M et une famille de points singuliers $\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_s$ tels qu'elle se réalise comme le bord d'un polyèdre convexe de M intersectant les lignes singulières en $\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_s$. La construction proposée ne permet que d'obtenir des espaces-temps plats avec BTZ et à holonomie linéaire; Si nous travaillons à la généralisation de cette construction en vue d'obtenir un résultat incluant les espaces-temps à holonomie arbitraire, l'étude n'est pas suffisamment avancée pour qu'on puisse en discuter plus avant.

Étant donné un tel plongement ι de (Σ, S) dans un $\mathbb{E}_0^{1,2}$ -espace-temps M , $\iota(\Sigma)$ admet une cellulation naturelle donnée par les faces du polyèdre qu'elle borde. On peut tirer en arrière cette cellulation de sorte à obtenir une cellulation de Σ dont les sommets sont exactement les points de S . Une conséquence immédiate d'un lemme de Penner [Pen87] est que cette cellulation n'est autre que la cellulation de Delaunay de (Σ, S) si l'holonomie de M est linéaire.

Cette remarque nous permet alors de découper notre $\mathbb{E}_{>0}^2$ -surface Σ le long de ses cellules de Delaunay, de chercher à les plonger dans $\mathbb{E}^{1,2}$ de manière essentiellement unique, puis de recoller les cellules C avec les cônes issus de l'origine de $\mathbb{E}^{1,2}$ de base C de sorte à obtenir un $\mathbb{E}_0^{1,2}$ -espace-temps dont Σ est une surface de Cauchy. Les démonstrations précises de cette section étant redondantes avec celles de la section suivante, nous nous contentons d'énoncer les résultats et les définitions.

5.2.1 Cellulation de Delaunay

On se donne un marquage (Σ, S) et $(\Sigma_1, \mathcal{F}_1, h_1)$ une $\mathbb{E}_{>0}^2$ -surface (Σ, S) -marquée que nous identifierons à (Σ, S) pour simplifier les notations puisque le marquage est fixé. Nous ne considérons que des triangulations et cellulations géodésiques dont les sommets sont exactement les points marqués S , nous ne le précisons pas systématiquement. Une cellulation (resp. triangulation) de (Σ, S) sera noté $(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ (resp. $(\mathcal{T}, \mathcal{A})$) avec $\mathcal{C}$ l'ensemble de cellules (resp. $\mathcal{T}$ l'ensemble des triangles) et $\mathcal{A}$ l'ensemble des arêtes.

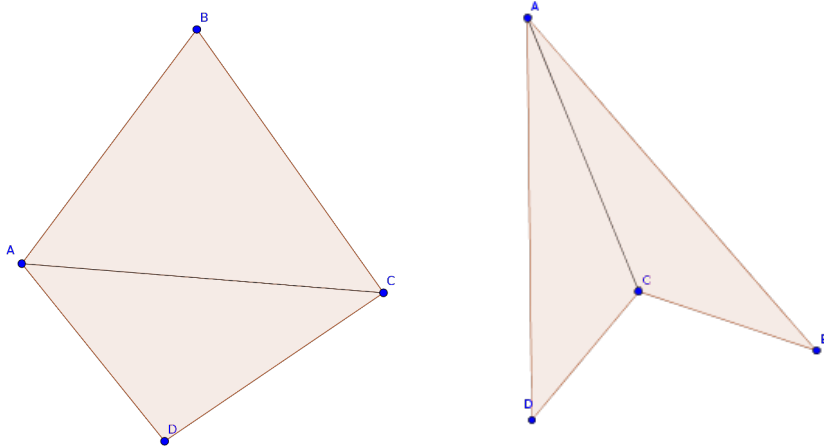
Charnières du plan euclidien et charnières immergées

Définition 5.2.1 (Charnière). *Une charnière est un quadrilatère du plan $\mathbb{E}^2$ muni d'une diagonale.*

La diagonale choisie est appelée l'axe de la charnière.

Définition 5.2.2 (Charnière immergée). *Une charnière immergée dans Σ est un couple (Q, ι) où $Q = ([ABCD], [AC])$ est une charnière de $\mathbb{E}^2$ et $\iota : Q \rightarrow \Sigma$ est une immersion isométrique telle que $\iota(\{A, B, C, D\}) \subset h_1(S)$.*

FIGURE III.1 – Deux charnières du plan euclidien



Définition 5.2.3 (Charnière légale). *Une charnière $([ABCD], [AC])$ est légale si le sommet D n'est pas dans l'intérieur du cercle circonscrit au triangle $[ABC]$ et si le sommet B n'est pas dans l'intérieur du cercle circonscrit au triangle $[ADC]$. Une charnière est critique si les points A, B, C et D sont cocycliques.*

Une charnière immergée (Q, ι) est légale (resp. critique) si la charnière Q est légale (resp. critique) et si ι est un plongement.

Charnières d'une triangulation

Définition 5.2.4 (Charnière d'axe e). Soit $(\mathcal{T}, \mathcal{A})$ une triangulation de (Σ, S) .

La charnière de $(\mathcal{T}, \mathcal{A})$ d'axe e est la charnière immergée (Q, ι) où Q est la charnière de $\mathbb{E}^2$ obtenue en collant les deux triangles adjacents à l'arête e (ou deux copies du même triangle si e correspond au collage d'un triangle sur lui-même) et ι est l'immersion induite par les plongements des deux triangles adjacents à e .

Nous insistons sur le fait que toute arête induit une charnière immergée même si celle-ci borde deux fois le même triangle. La charnière est alors plongée si et seulement si les deux triangles sont différents.

Définition 5.2.5 (Arête légale). Soit $(\mathcal{T}, \mathcal{A})$ une triangulation de (Σ, S) . Une arête e de $\mathcal{A}$ est légale (resp. critique) si la charnière de $(\mathcal{T}, \mathcal{A})$ d'axe e est légale (resp. critique).

Cellulation de Delaunay

Proposition 5.2.6 ([MS91] section 4). Il existe une unique cellulation $(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ de (Σ, S) telle que pour toute sous-triangulation $(\mathcal{T}, \mathcal{B})$ de $(\mathcal{C}, \mathcal{A})$, toute arête $e \in \mathcal{B}$ est légale. De plus celle-ci satisfait les propriétés suivantes :

- (a) toute cellule $C \in \mathcal{C}$ est isométrique à un polygone $[A_1 \cdots A_n]$ cocyclique de $\mathbb{E}^2$, c'est-à-dire tel que les points $A_1, \dots, A_n$ sont cocycliques.
- (b) pour toute sous-triangulation $(\mathcal{T}, \mathcal{B})$ de $(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ et tout arête $e \in \mathcal{A}$ de la cellulation de Delaunay, e n'est pas critique.

Définition 5.2.7 (Cellulation de Delaunay). La cellulation de Delaunay de (Σ, S) est l'unique cellulation donnée par la proposition 5.2.6

Le point de vue que nous avons choisi pour décrire la cellulation de Delaunay est celui présenté dans [ILTC01] par souci de cohérence avec la méthode de construction de surfaces polyédrales décrite dans le chapitre suivant. Bien sûr, cette cellulation n'est autre que la duale de la cellulation de Voronoï, c'est même ainsi qu'elle est construite dans [MS91]. La littérature sur la cellulation de Delaunay est particulièrement abondante avec de nombreux algorithmes et méthodes de construction. La plupart des constructions de la littérature imposent des conditions sur les angles de la $\mathbb{E}_{>0}^2$ -surface marquée considérée. La référence que nous donnons ne fait aucune telle hypothèse et propose une argumentation complète quoique dans une formulation légèrement différente, c'est ce qui motive notre choix.

5.2.2 Suspension BTZ d'une $\mathbb{E}_{>0}^2$ -surface compacte

Nous plongeons à présent chaque cellule de la cellulation de Delaunay d'une surface marquée dans $\mathbb{E}^{1,2}$.

Lemme 5.2.8 ([Pen87]). Soit C un polygone euclidien cocyclique, il existe un plongement isométrique totalement géodésique de C dans $\mathbb{E}^{1,2}$ tel que les sommets de C sont dans le cône lumière futur de l'origine $\partial J^+(O)$.

De plus, deux tels plongements diffèrent d'une isométrie linéaire $\gamma \in \text{SO}_0(1, 2)$.

Démonstration. On se donne un cercle contenant les sommets de C et on pose R son rayon. Le plan horizontal $\Pi := \{t = R\}$ de $\mathbb{E}^{1,2}$ intersecte le cône lumière le long d'un cercle de rayon R . On plonge alors le polygone C dans le plan Π de sorte à ce que les sommets soient tous sur l'intersection du cône lumière avec Π .

Inversement si ι est un autre tel plongement, on peut composer ι à gauche par une isométrie $\gamma \in \text{SO}_0(1, 2)$ telle que $\iota(C)$ est horizontal. Le rayon du cercle circonscrit à $\iota(C)$ détermine la

hauteur du plan d'appui du plongement, ce plongement est donc dans le plan $\Pi = \{t = R\}$. Nous avons deux polygones isométriques dans un plan isométrique à $\mathbb{E}^2$ inscrit dans un même cercle, ils diffèrent donc d'une rotation d'axe $\{x = y = 0\}$. $\square$

Définition 5.2.9 (Suspension BTZ d'une $\mathbb{E}_{>0}^2$ -surface compact). *Soient (Σ, S) un marquage, $(\Sigma_1, \mathcal{F}_1, h_1)$ une $\mathbb{E}_{>0}^2$ -surface (Σ, S) -marquée et $(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ la cellulation de Delaunay de Σ_1 . Pour $C \in \mathcal{C}$, on se donne $f_C : C \rightarrow \mathbb{E}^{1,2}$ un plongement donné par le lemme 5.2.8 et on pose K_C le cône de $\mathbb{E}^{1,2}$ issu de l'origine et de base $f_C(C)$:*

$$K_C := \{tu \mid t \in \mathbb{R}_+^*, u \in f_C(C)\}$$

On définit $\text{susp}_{BTZ}(\Sigma_1)$ comme étant la $\mathbb{E}^{1,2}$ -variété singulière obtenue par collage des K_C , où un bord $\mathbb{R}_+^ e$ est collé au bord $\mathbb{R}_+^* e'$ via l'unique isométrie linéaire de $\mathbb{E}^{1,2}$ envoyant le plongement de e sur le plongement de e' de sorte que K_C et $K_{C'}$ soient d'un côté et de l'autre du bord $\mathbb{R}_+^* e$.*

Proposition 5.2.10. *Soient (Σ, S) un marquage, $(\Sigma_1, \mathcal{F}_1, h_1)$ une $\mathbb{E}_{>0}^2$ -surface (Σ, S) -marquée et $(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ la cellulation de Delaunay de Σ_1 .*

$\text{susp}_{BTZ}(\Sigma_1)$ est un $\mathbb{E}_0^{1,2}$ -espace-temps globalement hyperbolique muni d'un plongement polyédral naturel $\Sigma_1 \rightarrow \text{susp}_{BTZ}(\Sigma_1)$.

5.2.3 Espaces de modules décorés

Dans [Pen87], Penner introduit la notion d'espace de Teichmüller décoré. Il s'agit d'un fibré au dessus de l'espace de Teichmüller habituel, dont les fibres au dessus d'une surface hyperbolique Σ_1 donnée est l'ensemble des choix possibles d'horocycles immergés autour des pointes de Σ_1 . Nous donnons une définition correspondante pour les $\mathbb{E}_0^{1,2}$ -espaces-temps Cauchy-compacts Cauchy-maximaux.

Définition 5.2.11 (Décoration d'une surface hyperbolique). *Soient (Σ, S) un marquage avec $\#S = s > 0$ et $(\Sigma_1, \mathcal{F}_1, h_1)$ une $\mathbb{H}_0^2$ -surface (Σ, S) -marquée avec $h_1(S) = \text{Sing}_0(\Sigma_1)$.*

Une décoration de Σ_1 est le choix de s horocycles $(H^{(1)}, \dots, H^{(s)})$, chacun autour d'un point singulier de Σ_1 .

Définition 5.2.12 (Équivalence de $\mathbb{H}_0^2$ -surfaces décorées). *Soient (Σ, S) un marquage avec $\#S = s > 0$, et $(\Sigma_1, \mathcal{F}_1, h_1, H_1)$ et $(\Sigma_2, \mathcal{F}_2, h_2, H_2)$ deux $\mathbb{H}_0^2$ -surface (Σ, S) -marquée décorées avec $h_i(S) = \text{Sing}_0(\Sigma_i)$.*

Une équivalence entre Σ_1 et Σ_2 est la donnée d'une équivalence φ de $\mathbb{H}_0^2$ -surfaces (Σ, S) -marquée entre $(\Sigma_1, \mathcal{F}_1, h_1)$ et $(\Sigma_2, \mathcal{F}_2, h_2)$ telle que pour tout $i \in \llbracket 1, s \rrbracket$, $\varphi(H_1^{(i)}) = H_2^{(i)}$.

Définition 5.2.13 (Espace de Teichmüller décoré de Penner). *Soit $g, s \in \mathbb{N}$ tels que $s > 0$ et $2g - 2 + s > 0$, on se donne (Σ, S) un marquage tel que Σ est une surface de genre g et $\#S = s$.*

L'espace de Teichmüller décoré de Penner de (Σ, S) , noté $\widehat{\text{Teich}}_{g,s}$, est l'espace des classes d'équivalences de $\mathbb{H}_0^2$ -surfaces (Σ, S) -marquées décorées.

Proposition 5.2.14. *Soit Δ un rayon futur de type lumière partant de l'origine O de $\mathbb{E}^{1,2}$ et soit $\mathbb{H}$ l'hyperboloïde de $\mathbb{E}^{1,2}$ dans le futur de O . On note $\mathcal{H}_\Delta$ l'ensemble des horocycles de $\mathbb{H}$ de centre Δ . Alors l'application de « décoration ».*

$$\text{dec} : \begin{array}{ccc} \Delta \setminus \{O\} & \longrightarrow & \mathcal{H}_\Delta \\ p & \longmapsto & \partial J^+(p) \cap \mathbb{H} \end{array}$$

est bien définie bijective.

Démonstration. Pour s'assurer de la bonne définition, on remarque que pour $p \in \Delta \setminus \{O\}$ l'intersection $H(p) = \partial J^+(p) \cap \mathbb{H}$ est une orbite de l'action du stabilisateur de G_Δ de Δ qui est un sous-groupe 1-paramètre de $\text{SO}_0(1, 2)$ composé d'isométries paraboliques. C'est donc un horocycle de $\mathbb{H}$ centré en Δ .

L'application est injective car si $p < q$ alors $I^+(p) \subset J^+(q) \cap I^+(O)$. Elle est également surjective car lorsque p tend vers O alors l'union des $J^+(p)$ recouvre $I^+(O)$, inversement lorsque $p \rightarrow +\infty$, l'intersection des $J^+(p)$ est l'ensemble vide. L'image de H couvre donc les horocycles de tout rayon. $\square$

Définition 5.2.15 (Décoration d'un $\mathbb{E}_0^{1,2}$ -espace-temps). *Soit M un $\mathbb{E}_0^{1,2}$ -espace-temps. une décoration de M un choix $(p^{(1)}, \dots, p^{(s)})$ de point sur chaque composante connexe de $\text{Sing}_0(M)$.*

Définition 5.2.16 (Équivalence de $\mathbb{E}_0^{1,2}$ -espaces-temps décorés). *Soient $g, s \in \mathbb{N}$ avec $s > 0$ et $2g - 2 + s > 0$ et soit (Σ, S) un marquage avec Σ de genre g et $\#S = s$.*

Une équivalence entre deux $\mathbb{E}_0^{1,2}$ -espaces-temps $(\Sigma \times \mathbb{R}, S \times \mathbb{R})$ -marqués décorés $(M_1, \mathcal{F}_1, h_1, p_1)$ et $(M_2, \mathcal{F}_2, h_2, p_2)$ est une équivalence φ entre les $\mathbb{E}_0^{1,2}$ -variétés $(\Sigma \times \mathbb{R}, S \times \mathbb{R})$ -marqués $(M_1, \mathcal{F}_1, h_1)$ et $(M_2, \mathcal{F}_2, h_2)$ telle que pour tout $i \in \llbracket 1, s \rrbracket$, $\varphi(p_1^{(i)}) = \varphi(p_2^{(i)})$.

Définition 5.2.17 (Espace de module des $\mathbb{E}_0^{1,2}$ -espaces-temps décorés). *Soient $g, s \in \mathbb{N}$ avec $s > 0$ et $2g - 2 + s > 0$ et soit (Σ, S) un marquage avec Σ de genre g et $\#S = s$.*

L'espace de module des $\mathbb{E}_0^{1,2}$ -espaces-temps décorés (resp. linéaire), noté $\widetilde{\mathcal{M}}_{g,s}(\mathbb{E}_0^{1,2})$ (resp. $\widetilde{\mathcal{M}}_{g,s}^L(\mathbb{E}_0^{1,2})$), est l'espace des classes d'équivalences de $\mathbb{E}_0^{1,2}$ -espaces-temps (Σ, S) -marqués décorés (resp. d'holonomie linéaire).

Définition 5.2.18 (Espace de module des $\mathbb{E}_{>0}^2$ -surfaces marquées). *Soient $g, s \in \mathbb{N}$ avec $s > 0$ et $2g - 2 + s > 0$ et soit (Σ, S) un marquage avec Σ de genre g et $\#S = s$.*

L'espace de module des $\mathbb{E}_{>0}^2$ -surfaces marquées, noté $\mathcal{M}_{g,s}(\mathbb{E}_{>0}^2)$, est l'espace des classes d'équivalences de $\mathbb{E}_{>0}^2$ -surfaces (Σ, S) -marquées $[\Sigma_1, \mathcal{F}_1, h_1]$ telles que $h_1(S) = \text{Sing}(\Sigma_1)$.

Théorème 28. *Les applications suivantes sont bijectives.*

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\text{Teich}}_{g,s} & \xrightleftharpoons[(\text{Hol} \circ \text{Reg}) \oplus \text{dec}]{(\text{Ext}_{\text{BTZ}} \circ \text{susp}_{\mathbb{E}^{1,2}}) \oplus \text{dec}^{-1}} & \widetilde{\mathcal{M}}_{g,s}^L(\mathbb{E}_0^{1,2}) \xrightleftharpoons[\text{susp}_{\text{BTZ}}]{\partial \text{Conv}} \mathcal{M}_{g,s}(\mathbb{E}_{>0}^2) \\ \\ T\widetilde{\text{Teich}}_{g,s} & \xrightleftharpoons[\text{Hol} \oplus \text{dec}]{(\text{Ext}_{\text{BTZ}} \circ \text{dsusp}_{\mathbb{E}^{1,2}}) \oplus \text{dec}^{-1}} & \widetilde{\mathcal{M}}_{g,s}(\mathbb{E}_0^{1,2}) \end{array}$$

Démonstration. C'est une conséquence directe des théorèmes 25 et 27 et des propositions 5.2.14 et 5.2.10. $\square$

Chapitre 6

Un théorème d’Alexandrov pour les espaces-temps plats singuliers radiants

Nous rappelons tout d’abord la définition d’espace-temps radiant.

Définition 6.0.1 (Espace-temps radiant). *Un $\mathbb{E}_{\geq 0}^{1,2}$ -espace-temps est radiant s’il est la suspension d’une $\mathbb{H}_{\geq 0}^2$ -surface compacte.*

$$M = (\Sigma \times \mathbb{R}_+^*, ds^2) \quad ds^2 = -dT^2 + T^2 ds_\Sigma^2$$

La coordonnée T d’un espace-temps radiant donne son temps cosmologique. On rappelle que le temps cosmologique du futur de l’origine dans $\mathbb{E}^{1,2}$ s’écrit :

$$T : \begin{cases} J^+(O) & \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (t, x, y) & \longmapsto \sqrt{t^2 - x^2 - y^2} \end{cases}$$

Les espaces-temps radiants sont exactement les collages de cônes de sommets O inclus dans $J^+(O)$.

L’objet de ce chapitre est de démontrer le théorème suivant

Théorème 29. *Soit (Σ, S) une $\mathbb{E}_{> 2\pi}^2$ -surface marquée de genre g avec $\#S = s > 0$ points singuliers. Pour tout $\bar{\kappa} \in [0, 2\pi]^S$, il existe un $\mathbb{E}_{[0, 2\pi]}^{1,2}$ -espace-temps $(\Sigma \times \mathbb{R}, S \times \mathbb{R})$ -marqué M radiant et un plongement polyédral $\iota : \Sigma \rightarrow M$ tels que :*

- pour tout $\sigma \in S$, si $\kappa(\sigma) = 2\pi$, alors la ligne marquée associée à $\{\sigma\} \times \mathbb{R}$ est un rayon géodésique régulier ;
- pour tout $\sigma \in S$, si $\kappa(\sigma) < 2\pi$, alors la ligne marquée associée à $\{\sigma\} \times \mathbb{R}$ est une particule massive d’angle $\kappa(\sigma)$.

De plus, un tel couple (M, ι) est unique à équivalence près.

La démonstration est une adaptation des travaux de Bobenko, Fillastre et Izestiev [BI08, Izm08, FI09] ; nous suivons ainsi les étapes I à V décrites dans l’introduction de cette partie sans nous restreindre aux variétés régulières.

- I. Se donner un couple (temps, triangulation) arbitraire. Les « temps » à ce stade n’étant qu’une famille de nombres réels positifs chacun attaché à un point marqué.
- II. Pour chaque triangle T , le plonger dans le cône futur $J^+(O)$ de l’espace modèle $\mathbb{E}^{1,2}$ de sorte que le temps cosmologique des sommets du triangle donné soit exactement les temps choisis. Chaque triangle donne ainsi un cône à semelle triangulaire.

- III. Coller les cônes de sorte à construire une $\mathbb{E}_{\geq 0}^{1,2}$ -variété M radiante ainsi qu'un plongement $\iota : \Sigma \rightarrow M$ envoyant chaque triangle sur la semelle d'un cône.
- IV. Étudier des critères sur le couple (temps, triangulation) permettant de vérifier que le collage de deux cônes est « convexe ». Étudier le domaine des hauteurs induisant un plongement convexe.
- V. Choisir un angle $\bar{\kappa} \in [0, 2\pi]$ pour chaque point marqué. Définir une fonctionnelle d'Einstein-Hilbert définie sur l'espace des temps induisant un plongement convexe dont les points critiques potentiels induisent la construction d'une $\mathbb{E}_{\geq 0}^{1,2}$ -variété avec des singularités d'angles $(\bar{\kappa}_\sigma)_{\sigma \in S}$. L'étudier et montrer qu'elle admet un unique point critique.

Les étapes I à III sont l'objet de la section 6.1, est également défini la notion de plongement convexe (définition 6.1.10). L'étape IV est l'objet des sections 6.2 et 6.4 ; la première étudiant l'intérieur du domaine des temps admissibles (définition 6.1.17) et la seconde en étudiant le bord. L'étape V est l'objet des sections 6.3 et 6.5 ; la première définit les fonctionnelles d'Einstein-Hilbert et en fait une étude locale, la seconde fait une synthèse de l'étude locale et de l'étude du domaine des temps admissibles pour conclure sur l'existence et l'unicité d'un point critique. L'inversion entre la fin de l'étape IV et le début de l'étape V est volontaire : ceci nous permet de guider notre recherche d'informations sur le bord du domaine des temps admissibles et de ne démontrer que ce dont nous avons besoin.

6.1 Préliminaires : τ -suspension d'une surface localement euclidienne marquée

Dans cette section nous définissons et étudions les propriétés élémentaires d'une généralisation de la suspension d'une surface localement euclidienne marquée décrite dans la section précédente : la τ -suspension ou suspension déformée. La suspension décrite précédemment s'obtenait pas collage de cônes à base triangulaires de l'espace de Minkowski de dimension 3. Soit (Σ, S) une surface localement euclidienne marquée, la suspension de (Σ, S) consistait d'une part à partir de la cellulation de Delaunay et de plonger les cellules de cette cellulation comme des polygones inscrits dans le cône lumière futur $\partial J^+(O)$ de $\mathbb{E}^{1,2}$. Enfin, chacun de ces polygones engendre un cône de sommet O et ces cônes sont collés bord à bord.

Dans cette construction, n'importe quelle cellulation pourrait convenir pour la suite de la construction mais le plongement de (Σ, S) dans l'espace-temps BTZ M obtenu n'est pas nécessairement convexe. Par ailleurs, au lieu d'inscrire les cellules dans le cône lumière futur, nous pourrions considérer un plongement isométrique totalement géodésique dans $J^+(O)$ arbitraire modulo des conditions de compatibilités. Considérons une arête $e = [AB]$ de la cellulation de (Σ, S) choisie et notons ι_1 et ι_2 les plongements respectifs du triangle à gauche de e et du triangle à droite de e . Pour pouvoir faire ces collages de cônes, il faut que les plongements $\iota_1(e)$ et $\iota_2(e)$ de l'arête $e = [AB]$ dans $J^+(O)$ soient liés par une isométrie dans $\text{SO}_0(1, 2)$. Cette condition est satisfaite si et seulement si $T^2 \circ i_1(A) = T^2 \circ i_2(A)$ et $T^2 \circ i_1(B) = T^2 \circ i_2(B)$.

Partons d'un couple $(\mathcal{T}, \tau)$ où $\mathcal{T}$ est une triangulation de (Σ, S) et $\tau : S \rightarrow \mathbb{R}_+$ un choix de temps aux points marqués. Il est aisé de démontrer que pour chaque triangle $[A_1 A_2 A_3]$ de $\mathcal{T}$, il existe un unique plongement isométrique $\iota : [A_1 A_2 A_3] \rightarrow \mathbb{E}^{1,2}$ à isométrie linéaire près de $\mathbb{E}^{1,2}$ tel que $\iota([A_1 A_2 A_3])$ est un triangle et $T^2 \circ \iota(A_i) = \tau(A_i)$. Nous pouvons alors coller les cônes ainsi obtenus et construire un espace-temps plat singulier M . Le cas décrit précédemment se retrouve en choisissant $\tau : \sigma \in S \mapsto 0$ et $\mathcal{T}$ une sous-triangulation de la cellulation de Delaunay de (Σ, S) . Si τ n'est pas identiquement nul, il est possible que le plongement $\iota : \Sigma \rightarrow M$ obtenu ne soit pas convexe en un sens que nous décrirons (Cf définition 6.1.10).

Soit (Σ, S) une surface localement euclidienne marquée, la section s'articule comme suit :

- Étant donnée une triangulation $\mathcal{T}$ et un choix de temps $\tau : S \rightarrow \mathbb{R}_+$, nous construisons un plongement naturel de chaque triangle de $\mathcal{T}$ dans $J^+(O)$: la τ -suspension d'un triangle.

- Nous caractérisons les fonctions $T^2 \circ \iota$ où ι est un plongement polyédral dans un espace-temps radiant M et T est la fonction temps cosmologique de M . Ces fonctions sont appelées « de type distance par morceaux » ; une fonction temps $\tau : S \rightarrow \mathbb{R}_+$ et une triangulation $\mathcal{T}$ étant donnée, nous construisons le prolongement de τ à Σ entier de type distance par morceaux de triangulation adaptée $\mathcal{T}$; nous les notons $\tilde{\tau}$. Ces fonctions sont en bijection avec les plongement polyédraux.
- Nous montrons que le plongement associé à une fonction distance par morceaux $\tilde{\tau}$ est convexe si et seulement si $\tilde{\tau}$ est Q-convexe. Nous introduisons un critère de Q-convexité sur les fonctions distance par morceaux et montrons, propositions 6.1.14 et 6.1.16, qu’étant donné $\tau : S \rightarrow \mathbb{R}_+$, il existe au plus une triangulation $\mathcal{T}$ à équivalence (Cf Définition 6.1.7) induisant un prolongement Q-convexe.
- Conclusion : un plongement polyédral convexe (M, ι) de (Σ, S) est complètement déterminé à équivalence près par $T_M^2 \circ \iota$ avec T_M la fonction temps cosmologique de M ; la fonction $T_M^2 \circ \iota$ est complètement déterminée par sa restriction à S . Les plongements polyédraux de (Σ, S) sont donc paramétrés par une partie de $\mathbb{R}_+^S$ que nous appellerons « espace des temps admissibles » .

6.1.1 τ -Suspension d’une surface localement euclidienne

τ -Suspension d’un triangle

Dans tout ce qui suit, nous prolongeons des fonctions τ définies sur une partie finie d’une surface Σ_1 en des fonctions $\tilde{\tau}$ définies sur Σ_1 entier. C’est à dire que $\tilde{\tau} = \tau$ partout où τ est défini.

Lemme 6.1.1. *Soit $T = [ABC]$ un triangle euclidien et soit $\tau : \{A, B, C\} \rightarrow \mathbb{R}$, il existe un unique couple $(\tau_0, \omega) \in \mathbb{R} \times \mathbb{E}^2$ tel que la fonction*

$$\tilde{\tau} : \begin{cases} \mathbb{E}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \tau_0 - d(x, \omega)^2 \end{cases}$$

est un prolongement de τ .

De plus, si $\tau \geq 0$ alors $\tau_0 > 0$ et $\tilde{\tau} \geq 0$ sur le triangle $[ABC]$.

Démonstration. On identifie $\mathbb{E}^2$ à $\mathbb{R}^2$ via des coordonnées cartésiennes (x, y) et on peut supposer $A = (0, 0)$ sans perte de généralité et on pose $B = (x_B, y_B)$ et $C = (x_C, y_C)$. Trouver $\tilde{\tau}$ correspond exactement à résoudre le système suivant en $\omega = (x_\omega, y_\omega)$ et τ_0

$$\begin{cases} \tau_A = \tau_0 - x_\omega^2 - y_\omega^2 \\ \tau_B = \tau_0 - (x_\omega - x_B)^2 - (y_\omega - y_B)^2 \\ \tau_C = \tau_0 - (x_\omega - x_C)^2 - (y_\omega - y_C)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_\omega^2 + y_\omega^2 + \tau_A = \tau_0 \\ \tau_B - \tau_A - x_B^2 - y_B^2 = 2x_\omega x_B + 2y_\omega y_B \\ \tau_C - \tau_A - x_C^2 - y_C^2 = 2x_\omega x_C + 2y_\omega y_C \end{cases}$$

Les deuxième et troisième lignes forment un système linéaire non singulier car les points A, B, C sont non alignés. La première ligne se résout trivialement. L’existence et l’unicité de $\tilde{\tau}$ sont assurées.

Supposons $\tau \geq 0$ et prenons $x \in [ABC]$, on remarque que la distance de x à ω est plus petite que la distance de x à l’un des trois points A, B, C . Prenons $P \in \{A, B, C\}$ tel que $d(P, \omega) \geq d(x, \omega)$, on a alors

$$\tilde{\tau}(x) = \tau_0 - d(x, \omega)^2 \geq \tau_0 - d(P, \omega) = \tilde{\tau}(P) = \tau(P) \geq 0.$$

Comme le triangle $[ABC]$ est d’intérieur non vide, on se donne $x \in [ABC] \setminus \{\omega\}$ de sorte que

$$\tau_0 = \tilde{\tau}(x) + d(x, \omega)^2 > 0.$$

□

Définition 6.1.2. On considère $\mathbb{E}^{1,2}$ muni de coordonnées cartésiennes x, y, t et on identifie $\mathbb{E}^2$ à $\{t = 0\} \subset \mathbb{E}^{1,2}$. On note $\mathcal{T}(X)$ l'ensemble des triangles de X .

$$\text{susp}_{\mathbb{E}^{1,2}} : \begin{cases} \mathcal{T}(\mathbb{E}^2) \times \mathbb{R}_+^{\{A,B,C\}} & \longrightarrow \mathcal{T}(\mathbb{E}^{1,2}) \\ [ABC], \tau & \longmapsto [ABC] + \vec{u} \end{cases}$$

avec $\vec{u}(\tau)$ le vecteur dont la coordonnée t est τ_0 et dont la projection sur le plan horizontal identifié à $\mathbb{E}^2$ est $\vec{O\omega}$ où τ_0 et ω donnés par le lemme 6.1.1.

Fonction de type distance par morceaux et τ -suspension

Définition 6.1.3 (Fonction de type distance par morceaux). Une fonction $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ est de type distance par morceaux s'il existe une triangulation $(\mathcal{T}, \mathcal{A})$ de Σ telle que pour tout $\Delta \in \mathcal{T}$ et tout plongement isométrique $\iota : \Delta \rightarrow \mathbb{E}^2$, il existe $\omega \in \mathbb{E}^2$ et $\tau_0 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in \Delta, f(x) = \tau_0 - d(\iota(x), \omega)^2$$

Nous insistons sur le fait que nos triangulations sont toujours de sommets S , de fait toutes les fonctions distance par morceaux que l'on considérera seront de type distance sur les triangles d'une triangulation de sommets S . Nous omettrons donc de le préciser par la suite.

Cette dernière définition est motivée par la remarque suivante :

Remarque 6.1.4. Soient M un $\mathbb{E}_{\geq 0}^{1,2}$ -espace-temps radiant $(\Sigma \times \mathbb{R}, S \times \mathbb{R})$ -marqué et soit $\Sigma \xrightarrow{\iota} \mathbb{E}^{1,2}$ un plongement polyédral. Alors :

$$T^2 \circ \iota : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$$

est de type distance par morceaux avec T la fonction temps cosmologique de M .

Proposition 6.1.5. Soit $(\mathcal{T}, \mathcal{A})$ une triangulation de (Σ, S) .

Pour tout $\tau : S \rightarrow \mathbb{R}$, il existe un unique prolongement $\tilde{\tau}$ distance par morceaux de τ de triangulation adaptée $\mathcal{T}$.

Démonstration. Il suffit d'appliquer le lemme 6.1.1 sur chaque triangle de la triangulation $\mathcal{T}$. $\square$

Définition 6.1.6. Pour toute triangulation $(\mathcal{T}, \mathcal{A})$ de (Σ, S) et tout $\tau : S \rightarrow \mathbb{R}_+$ on note $\tilde{\tau}_{\mathcal{T}, \tau}$ le prolongement de τ à Σ_1 induit par la triangulation $\mathcal{T}$.

Définition 6.1.7 (Triangulations équivalentes). Soit $\tau : S \rightarrow \mathbb{R}_+$, deux triangulations $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ de (Σ, S) sont τ -équivalentes si

$$\tilde{\tau}_{\tau, \mathcal{T}_1} = \tilde{\tau}_{\tau, \mathcal{T}_2}.$$

Définition 6.1.8 (τ -suspension). Soit $\tilde{\tau} : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ de type distance par morceaux de triangulation adaptée $(\mathcal{T}, \mathcal{C})$.

Pour $\Delta = [A_1 A_2 A_3] \in \mathcal{T}$, on pose P_Δ le cône issu de O et de base $\text{susp}_{\mathbb{E}^{1,2}}(\Delta)$ et $F_{\Delta, i}$ la face issue de $[A_i A_{i+1}]$, c'est-à-dire

$$P_\Delta := \mathbb{R}_+^* \text{susp}_{\mathbb{E}^{1,2}}(\Delta) \quad F_{\Delta, i} := \mathbb{R}_+^* \text{susp}_{\mathbb{E}^{1,2}}([A_i A_{i+1}])$$

La τ -suspension de Σ suivant $\tilde{\tau}$ est le $\mathbb{E}_{\geq 0}^{1,2}$ -espace-temps radiant obtenu en collant les $(P_\Delta)_{\Delta \in \mathcal{T}}$ le long des faces $(F_{\Delta, i})_{\Delta \in \mathcal{T}, i \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}}$ de l'unique manière telle que les origines $(O_\Delta)_{\Delta \in \mathcal{T}}$ des cônes P_Δ sont identifiées et que lorsque $[A_i A_{i+1}]$ est identifié à $[A'_j A'_{j+1}]$ dans Σ alors $\text{susp}_{\mathbb{E}^{1,2}}([A_i A_{i+1}])$ est identifié à $\text{susp}_{\mathbb{E}^{1,2}}([A'_j A'_{j+1}])$.

On note $M := M(\tilde{\tau})$ la τ -suspension de Σ suivant $\tilde{\tau}$, M est muni d'un unique plongement polyédral adapté $\iota : \Sigma \rightarrow M$ tel que $T^2 \circ \iota = \tilde{\tau}$ avec $T : M \rightarrow \mathbb{R}_+$ la fonction temps cosmologique de M .

Si $\tilde{\tau}$ provient d'une fonction τ sur les points marqués de Σ et d'une triangulation $\mathcal{T}$ on notera également $M(\tau, \mathcal{T}) := M(\tilde{\tau}_{\tau, \mathcal{T}})$.

Remarque 6.1.9. La τ -suspension d'une $\mathbb{E}_{>0}^2$ -surface (Σ, S) -marquée ne dépend pas de la triangulation adaptée à $\tilde{\tau}$ choisie. En effet, on si l'on considère une charnière $([ABCD], [AC])$ et $\tilde{\tau}$ distance par morceaux sur cette charnière on remarque que $\tilde{\tau}$ est $\mathcal{C}^1$ sur la charnière si et seulement si la suspension de la charnière induit un plongement coplanaire de charnière dans $\mathbb{E}^{1,2}$. Si l'on choisit **une** $\mathcal{T}'$ triangulation dont des sommets ne sont pas nécessairement les points marqués plus fine qu'une triangulation $\mathcal{T}$ adaptée à $\tilde{\tau}$, alors $M(\mathcal{T})$ et $M(\mathcal{T}')$ sont identiques de même que les plongements polyédraux correspondants. Si $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ sont deux triangulations adaptées à $\tilde{\tau}$, on peut toujours construire une triangulation $\mathcal{T}_3$ plus fine que $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ adaptée à $\tilde{\tau}$ quitte à ce que les sommets de $\mathcal{T}_3$ ne soient pas nécessairement des points marqués. On en déduit donc que la suspension ne dépend que de la fonction $\tilde{\tau}$. Ainsi, en notant T_M le temps cosmologique de M pour M un espace-temps radiant, l'application

$$\left| \begin{array}{l} \left\{ (M, \iota) : \begin{array}{l} \iota : \Sigma \rightarrow M \text{ plongement} \\ \text{polyédral avec} \\ M \text{ radiant} \end{array} \right\} \longrightarrow \left\{ \tilde{\tau} : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}_+ \begin{array}{l} \tilde{\tau} \text{ distance} \\ \text{par morceaux} \end{array} \right\} \\ (\iota, M) \longmapsto T_M^2 \circ \iota \end{array} \right|$$

est bijective de réciproque $\tilde{\tau} \mapsto M(\tilde{\tau})$.

6.1.2 Plongement convexe

Nous commençons cette section par préciser ce que nous entendons par plongement convexe, définition 6.1.10. Le corollaire 6.1.19 est le résultat le plus important de cette sous-section car il donne une paramétrisation des plongements convexes par un domaine de $\mathbb{R}^S$.

Définition 6.1.10 (Plongement polyédral convexe). Soient M un $\mathbb{E}_{>0}^{1,2}$ -espace-temps $(\Sigma \times \mathbb{R}, S \times \mathbb{R})$ -marqué et $\iota : \Sigma_1 \rightarrow M$ un plongement polyédral.

Le plongement ι est convexe si pour tout $p \in \Sigma_1 \setminus S$, il existe un voisinage $\mathcal{W}$ de p tel que pour toute carte $(\mathcal{U}, \mathbb{E}^{1,2}, \mathcal{V}, \phi)$ de M au voisinage de $\iota(p)$ incluse dans $\mathcal{W}$, le futur de $\phi(\mathcal{U} \cap \iota(\Sigma))$ dans $\mathbb{E}^{1,2}$ est convexe.

Définition 6.1.11 (Q-convexité sur $\mathbb{R}$). Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est Q-convexe (resp. Q-concave) f est continue, $\mathcal{C}^1$ par morceaux et si pour tout $t_0 \in I$,

$$\lim_{t_0^-} f' \leq \lim_{t_0^+} f' \quad \left(\text{resp.} \quad \lim_{t_0^-} f' \geq \lim_{t_0^+} f' \right).$$

Définition 6.1.12 (Q-convexité sur une $\mathbb{E}_{>0}^2$ -surface). Une fonction $\tilde{\tau} : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ est Q-convexe (resp. Q-concave) si pour toute géodésique $c : I \rightarrow \Sigma \setminus S$, la restriction de $\tilde{\tau}$ à c est Q-convexe (resp. Q-concave).

Lemme 6.1.13. On dote $\mathbb{E}^{1,2}$ de ses coordonnées cartésiennes (t, x, y) usuelles. Soient Π_1 et Π_2 deux demi-plans de type espace de $\mathbb{E}^{1,2}$ s'intersectant le long d'une droite Δ . Soit $p \in \Delta$ et soit $q \in I^-(p)$.

La fonction

$$T^2 : \left| \begin{array}{ll} \Pi_1 \cup \Pi_2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ p & \longmapsto (t_p - t_q)^2 - (x_p - x_q)^2 - (y_p - y_q)^2 \end{array} \right|$$

est Q-convexe si et seulement si $J^+(\Pi_1 \cup \Pi_2)$ est convexe.

Démonstration. Quitte à appliquer une isométrie de $\mathbb{E}^{1,2}$, on peut supposer $q = O$ l'origine de $\mathbb{E}^{1,2}$, $p = (t_0, 0, 0)$, $\Delta = \{(t_0, 0, s) : s \in \mathbb{R}\}$ et $\Pi_1 = \{(t_0, a, b) : a \in \mathbb{R}_-, b \in \mathbb{R}\}$. On pose $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\Pi_2 := \{t_0 + \sinh(\alpha)a, \cosh(\alpha)a, b \mid a \in \mathbb{R}_+, b \in \mathbb{R}\},$$

de sorte que $J^+(\Pi_1 \cup \Pi_2)$ est convexe si et seulement si $\alpha \geq 0$.

- Supposons que T^2 est Q-convexe et considérons la géodésique

$$c : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \Pi_1 \cup \Pi_2 \\ s \leq 0 & \longmapsto & (t_0, s, 0) \\ s \geq 0 & \longmapsto & (t_0 + \sinh(\alpha)s, \cosh(\alpha)s, 0) \end{cases},$$

on a alors

$$T^2 \circ c(s) = \begin{cases} t_0^2 - s^2 & \text{Si } s \leq 0 \\ t_0^2 - s^2 + 2t_0 \sinh(\alpha)s & \text{Si } s \geq 0 \end{cases}$$

donc

$$\lim_{0^-} (T^2 \circ c)' = 0 \leq \lim_{0^+} (T^2 \circ c)' = 2t_0 \sinh(\alpha)$$

et donc $\alpha \geq 0$ et donc $J^+(\Pi_1 \cup \Pi_2)$ est convexe.

- Supposons à présent $\alpha \geq 0$ et considérons une géodésique c de $\Pi_1 \cup \Pi_2$. Si elle ne traverse pas Δ , alors c est une géodésique de $\mathbb{E}^{1,2}$ et donc $T^2 \circ c$ est $\mathcal{C}^1$, il n'y a rien à vérifier. Si au contraire c traverse Δ , celle-ci peut être paramétrée de la manière suivante :

$$c : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \Pi_1 \cup \Pi_2 \\ s \leq 0 & \longmapsto & (t_0, \cos(\theta)s, \sin(\theta)s) \\ s \geq 0 & \longmapsto & (t_0 + \sinh(\alpha) \cos(\theta)s, \cosh(\alpha) \cos(\theta)s, \sin(\theta)s) \end{cases}$$

avec $\theta \in]-\pi/2, \pi/2[$ de sorte que

$$T^2 \circ c : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \Pi_1 \cup \Pi_2 \\ s \leq 0 & \longmapsto & t_0^2 - s^2 \\ s \geq 0 & \longmapsto & t_0^2 - s^2 + 2 \sinh(\alpha) \cos(\theta)s \end{cases}$$

et donc

$$\lim_{0^-} (T^2 \circ c)' = 0 \leq 2t_0 \cos(\theta) \sinh(\alpha) = \lim_{0^+} (T^2 \circ c)'.$$

Ainsi T^2 est Q-convexe.

□

Corollaire 6.1.14. Soient $\tau : S \rightarrow \mathbb{R}_+$ et $\mathcal{T}$ une triangulation de (Σ, S) . On pose $M := M(\tau, \mathcal{T})$, et ι le plongement polyédral associé de Σ dans M .

Le plongement ι est convexe si et seulement si $\tilde{\tau}_{\tau, \mathcal{T}}$ est Q-convexe.

Démonstration. Soit $p \in \Sigma \setminus S$, on reprend les notations de la définition 6.1.8.

- Si p est dans l'intérieur d'un triangle $\Delta \in \mathcal{T}$, $\iota(\Sigma)$ est un plan de $\mathbb{E}^{1,2}$ au voisinage de p donc toujours convexe et $\tilde{\tau}_{\tau, \mathcal{T}}$ est quadratique donc $\mathcal{C}^1$. La condition de convexité est donc vide.
- Si au contraire p est sur une arête e , on peut considérer comme voisinage de $\iota(p)$, l'union des $P_\Delta \cup P_{\Delta'}$ avec Δ et Δ' les deux triangles de $\mathcal{T}$ de part et d'autre de e de sorte que $\tilde{\tau}_{\tau, \mathcal{T}}$ s'identifie à $T^2 \circ \iota$ et de sorte que les triangles $\iota(\Delta)$ et $\iota(\Delta')$ sont inclus dans des plans Π_1 et Π_2 qui sont dans la même configuration que dans le lemme 6.1.13. Ainsi, la condition de convexité est celle donnée par le lemme et donc $\iota(\Sigma)$ est convexe au voisinage de p si et seulement si $\tilde{\tau}_{\tau, \mathcal{T}}$ est Q-convexe au voisinage de p .

□

Lemme 6.1.15. Soit $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de la forme $x \mapsto -x^2 + \alpha x + \beta$ par morceaux et Q-convexes telles que $f(a) \geq g(a)$ et $f(b) \geq g(b)$. Si f est $\mathcal{C}^1$ alors $g \leq f$.

Démonstration. $g - f$ est une fonction affine par morceaux. Comme f est $\mathcal{C}^1$ et g Q-convexe, $g - f$ est Q-convexe donc convexe. En particulier, $g - f$ est majoré sur $[a, b]$ par sa corde de a à b , or $g - f$ est négative en a et en b , elle est donc négative sur l'intervalle $[a, b]$. □

Proposition 6.1.16. *Pour tout $\tau \in \mathbb{R}_+^S$, il existe au plus une triangulation $(\mathcal{T}, \mathcal{A})$ à équivalence près telle que le prolongement $\tilde{\tau}_{\mathcal{T}, \tau} : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}_+$ soit Q -convexe.*

Démonstration. Soient $(\mathcal{T}_1, \mathcal{A}_1)$ et $(\mathcal{T}_2, \mathcal{A}_1)$ deux triangulations de Σ telles que $f_1 := \tilde{\tau}_{\tau, \mathcal{T}_1}$ et $f_2 := \tilde{\tau}_{\tau, \mathcal{T}_2}$ sont Q -convexes. Soit e une arête de $\mathcal{A}_1$, la fonction $f_1|_e$ est quadratique et $f_2|_e$ est quadratique par morceaux et Q -convexe. On déduit donc du lemme 6.1.15 que $f_2 \leq f_1$ sur e . Soit T un triangle de $\mathcal{T}_1$, on applique de nouveau le lemme 6.1.15 le long d'un segment quelconque allant d'un côté à l'autre du triangle T , on en déduit que $f_1 \geq f_2$ sur T et donc sur Σ_1 . On démontre de la même manière que $f_1 \leq f_2$ et donc que $f_1 = f_2$. Les triangulations $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ sont donc équivalentes. $\square$

Définition 6.1.17 (Temps admissibles). *On note $\mathcal{P}_\Sigma$ l'ensemble des $\tau \in \mathbb{R}_+^S$ tels qu'il existe une triangulation $\mathcal{T}$ de Σ induisant un prolongement distance par morceaux $\tilde{\tau}_{\tau, \mathcal{T}}$ Q -convexe. Les éléments de $\mathcal{P}_\Sigma$ sont appelés temps admissibles.*

Pour $\tau \in \mathcal{P}_\Sigma$, on note $\mathcal{T}_\tau$ l'unique triangulation de Σ (à équivalence près) induisant un prolongement distance par morceaux $\tilde{\tau}_{\tau, \mathcal{T}_\tau}$ Q -convexe.

Corollaire 6.1.18. *L'application*

$$\left| \begin{array}{ccc} \{\tilde{\tau} : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}_+ \text{ } Q\text{-convexe}\} & \longrightarrow & \mathcal{P}_\Sigma \\ \tilde{\tau} & \longmapsto & \tau = \tilde{\tau}|_S \end{array} \right.$$

est bijective.

Corollaire 6.1.19. *Pour M un espace-temps radiant, on note T_M le temps cosmologique de M . L'application*

$$\left| \begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{l} \iota : \Sigma \rightarrow M \text{ plongement} \\ (M, \iota) : \text{polyédral convexe avec} \\ \text{ } M \text{ radiant} \end{array} \right\} & \longrightarrow & \mathcal{P}_\Sigma \\ (\iota, M) & \longmapsto & (T_M^2 \circ \iota)|_S \end{array} \right.$$

est bijective.

6.2 Triangulation de Delaunay pondérée et domaine des temps admissibles

Le corollaire 6.1.19 nous donnant une paramétrisation des plongements polyédraux convexes par le domaine $\mathcal{P}_\Sigma$ de $\mathbb{R}^S$, nous souhaitons à présent avoir une description du domaine $\mathcal{P}_\Sigma$ avant d'étudier l'image de l'application

$$\tau \mapsto M(\tau, \mathcal{T}_\tau).$$

Plus précisément nous démontrons le théorème suivant.

Théorème 30. *Soit $\mathbf{1}$ la fonction caractéristique de S . Le domaine $\mathcal{P}_\Sigma$ de $\mathbb{R}_+^S$ est un polyèdre convexe d'intérieur contenant $\mathbb{R}_+ \mathbf{1}$ dans son intérieur et invariant sous l'action de $\mathbb{R}_+ \mathbf{1}$; de plus $\mathcal{P}_\Sigma$ est transversalement compact, c'est-à-dire que $\mathcal{P}_\Sigma / \mathbb{R}_+ \mathbf{1}$ est compact.*

Nous attirons l'attention sur le fait que la compacité transverse est plus forte que l'affirmation que l'intersection de $\mathcal{P}_\Sigma$ avec tout plan orthogonal à $\mathbb{R} \mathbf{1}$. En effet, le cône $\mathbb{R}_+^S$ n'est pas transversalement compact.

Commençons par deux définitions.

Définition 6.2.1 (Charnière pondérée). *Une charnière pondérée est la donnée d'une charnière $Q = ([ABCD], [AC])$ et d'une fonction $\tau : \{A, B, C, D\} \rightarrow \mathbb{R}$.*

On note alors $\tilde{\tau}_{Q, \tau} : Q \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction distance par morceaux donnée par la triangulation $\mathcal{T} = ([ABC], [ADC])$.

Une charnière Q est τ -légale si $\tilde{\tau}_{Q, \tau}$ est Q -convexe, elle est τ -critique si $\tilde{\tau}_{Q, \tau}$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Définition 6.2.2. Soient Σ_1 une $\mathbb{E}_{>0}^2$ -surface (Σ, S) -marquée, $\tau : h_1(S) \rightarrow \mathbb{R}_+$ et $\mathcal{T}$ une triangulation de Σ_1 .

La triangulation $\mathcal{T}$ est dite de Delaunay pour τ si les propriétés équivalentes suivantes sont vérifiées :

- (i) $\tilde{\tau}_{\tau, \mathcal{T}}$ est Q -convexe ;
- (ii) toutes les charnières de $\mathcal{T}$ sont τ -légalles.

Si nous partons d'une triangulation quelconque $\mathcal{T}$ de (Σ, S) , il existe un moyen simple de retrouver la cellulation de Delaunay : appliquer l'algorithme d'inversion de charnière. Partons de $\mathcal{T}$, si $\mathcal{T}$ n'est pas de Delaunay, alors l'une des charnières de $\mathcal{T}$ n'est pas légale, considérons la. Si le quadrilatère sous-jacent à cette charnière est convexe, alors on peut inverser la charnière, c'est-à-dire remplacer la diagonale choisie initialement par la deuxième diagonale du quadrilatère. Cette opération revient à remplacer une arête de la triangulation $\mathcal{T}$ par un autre segment géodésique allant de point marqué à point marqué : on obtient ainsi une nouvelle triangulation. Il est aisé de vérifier que la charnière inversée est alors légale. Par ailleurs, on peut vérifier que les charnières non convexes et dégénérées sont toujours légales. Ainsi, l'algorithme ne s'arrête que s'il tombe sur une sous-triangulation de la cellulation de Delaunay. On montre que cet algorithme s'arrête et on obtient alors la cellulation de Delaunay, pour les détails voir par exemple [ILTC01].

Cette méthode suggère une tactique équivalente pour notre situation. En partant d'une triangulation quelconque et d'une fonction $\tau : S \rightarrow \mathbb{R}_+$, on peut inverser des charnières tant que certaines sont τ -illégalles. Les critères locaux de Q -convexités étudiés dans la première sous-section nous permettront de montrer que la charnière inversée est alors τ -légale. On peut alors répéter l'opération jusqu'à ce qu'il n'y ait plus d'arête τ -illégale ou jusqu'à ce que les seules arêtes illégales soient impossibles à inverser. En effet, si la charnière est autour d'une arête qui correspond à un triangle collé sur lui-même ou si la charnière n'est pas convexe, l'inversion n'est pas bien définie. Il nous faut alors trouver des conditions nécessaires et suffisantes pour que l'algorithme s'arrête dans une situation où toutes les charnières sont τ -légalles.

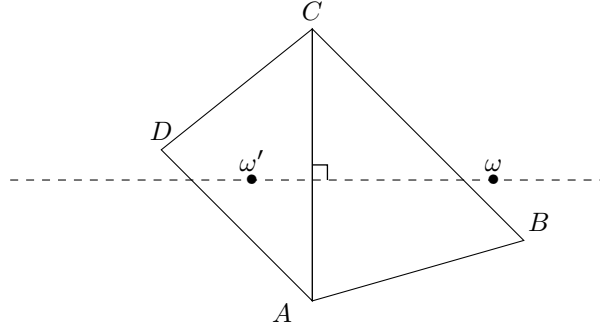
Nous commençons dans la première sous-section par étudier des critères de Q -convexité de charnières pour en tirer des premières conséquences élémentaires, notamment qu'elles sont invariantes sous l'addition d'une constante à τ : pour tout $C \in \mathbb{R}$, si $\tau \in \mathcal{P}_{\Sigma_1}$ et si $\tau + C \geq 0$ alors $\tau + C \in \mathcal{P}_{\Sigma}$. Puis nous définissons l'algorithme d'inversion et montrons que pour un voisinage du rayon $\tau = Cte \geq 0$ il existe une sous-triangulation de la cellulation de Delaunay dont toutes les charnières sont τ -légalles. Dans la sous-section suivante, nous montrons qu'une condition nécessaire et suffisante pour que $\tau : S \rightarrow \mathbb{R}_+$ soit dans $\mathcal{P}_{\Sigma}$ est que toutes les charnières immergées non-inversibles sont τ -légalles. Cette condition s'écrit comme l'intersection d'une infinité de conditions de la forme $\varphi \geq 0$ où φ est une fonction affine. Cela démontrera la convexité du domaine $\mathcal{P}_{\Sigma}$. Enfin, nous étudions plus précisément ces conditions affines de sorte à montrer que le domaine $\mathcal{P}_{\Sigma}$ est transversalement compact.

6.2.1 Caractérisation locale de Q -convexité

Avant toute chose, on remarque que le groupe $\text{Isom}(\mathbb{E}^2)$ agit naturellement sur les charnières pondérées et préserve la τ -légalité.

Dans la suite de cette sous-section, on se donne une charnière $Q = ([ABCD], [AC])$ munie d'une pondération τ . Pour simplifier, on suppose $A = O$ l'origine de $\mathbb{E}^2$ et que C est sur l'axe des ordonnées. On note ω et τ_0 (resp. ω' et τ'_0) les paramètres donnés par le lemme 6.1.1 pour le triangle $[ABC]$ (resp. $[ADC]$) muni de la pondération τ . On pose alors

$$\tau_{ABC} : \begin{array}{|l} \mathbb{E}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto t_0 - d(x, \omega)^2 \end{array} \quad \tau_{ADC} : \begin{array}{|l} \mathbb{E}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto t'_0 - d(x, \omega')^2 \end{array}$$



Remarque 6.2.3. L'ensemble des points $p \in \mathbb{E}^2$ tels que

$$d(p, A)^2 - d(p, C)^2 = Cte$$

est une droite orthogonale à (AC) . Par suite la droite $(\omega\omega')$ est orthogonale à la droite (AC) .

Proposition 6.2.4 (Critère de Q-convexité). *Sous les hypothèses de cette sous-section, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i) $\tilde{\tau}_{Q,\tau}$ est Q-convexe ;
- (ii) $\tau_{ABC}(D) \leq \tau_{ACD}(D)$;
- (iii) $\tau_{ABC}(B) \geq \tau_{ACD}(B)$.
- (iv) $x_\omega \geq x_{\omega'}$

(v)

$$\left(\frac{y_B}{|x_B|} + \frac{y_D}{|x_D|} \right) \tau_C + \left(\frac{AC - y_B}{|x_B|} + \frac{AC - y_D}{|x_D|} \right) \tau_A \leq \frac{AC}{|x_D|} \tau_D + \frac{AC}{|x_B|} \tau_B + K$$

avec

$$K = \frac{AC}{|x_B|} (AB^2 - ACy_B) + \frac{AC}{|x_D|} (AD^2 - ACy_D).$$

(vi) En notant $\vec{u} \wedge \vec{v}$ le déterminant $|\vec{u} \vec{v}|$:

$$(\vec{AB} \wedge \vec{AD}) \tau_C + (\vec{CD} \wedge \vec{CB}) \tau_A - (\vec{CA} \wedge \vec{CB}) \tau_D - (\vec{AC} \wedge \vec{AD}) \tau_B - K \leq 0$$

avec

$$K = \vec{AC} \wedge \vec{AD} (\vec{AB} \cdot \vec{CB}) + \vec{CA} \wedge \vec{CB} (\vec{AD} \cdot \vec{CD}).$$

Démonstration. On pose $T : \mathbb{E}^{1,2} \rightarrow \mathbb{R}, (t, x, y) \mapsto \sqrt{t^2 - x^2 - y^2}$ et on se donne $\iota_{ABC} : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^{1,2}$ (resp. $\iota_{ADC} : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^{1,2}$) un plongement totalement géodésique du plan $\mathbb{E}^2$ dans $\mathbb{E}^{1,2}$ tel que $T^2 \circ \iota_{ABC} = \tau_{ABC}$ (resp. $T^2 \circ \iota_{ADC} = \tau_{ADC}$). On suppose également que $\iota_{ABC}(A) = \iota_{ADC}(A)$, que $\iota_{ABC}(C) = \iota_{ADC}(C)$. On pose également

$$\iota : \begin{cases} Q & \longrightarrow \mathbb{E}^{1,2} \\ x \in [ABC] & \longmapsto \iota_{ABC}(x) \\ x \in [ADC] & \longmapsto \iota_{ADC}(x) \end{cases}$$

- $\tilde{\tau}_{Q,\tau}$ est Q-convexe si et seulement si ι est convexe d'après le Lemme 6.1.13.
- Le plongement ι est convexe si et seulement si $\iota(D) = \iota_{ADC}(D)$ est dans le futur du plan d'appui de $\iota_{ABC}([ABC])$, ainsi (i) $\Leftrightarrow$ (ii) et de la même manière (i) $\Leftrightarrow$ (iii).

- L'image par ι_{ABC} (resp. ι_{ADC}) de ω (resp. ω') est la projection de O sur le plan $\iota_{ABC}(\mathbb{E}^2)$ (resp. le plan $\iota_{ADC}(\mathbb{E}^2)$). Si l'on part de deux tels demi-plans Π_1, Π_2 s'intersectant le long d'une droite Δ , Les demi-plans sont coplanaires si et seulement les projections de O sur Π_1 et Π_2 sont confondues et lorsque l'un des plan est presque de type lumière, la projection de O sur le plan d'appui de Π_1 entre dans Π_1 puis tend vers l'infini. On en déduit le résultat.
- C'est un calcul immédiat en partant de la preuve du lemme 6.1.1 et en appliquant le critère (iv).
- Il suffit de partir du (v) et de réécrire les coefficients en utilisant les produits scalaires et vectoriels.

□

Remarque 6.2.5. Dans le chapitre précédent, nous avons donné une définition de charnière légale qui est différente de la définition de charnière τ -légale que l'on utilise ici. Lorsque $\tau = 0$, ω n'est autre que le centre de cercle circonscrit, la condition (iii) montre donc que la 0-légalité au sens présent équivaut à la légalité au sens du précédent chapitre.

Corollaire 6.2.6. Soit $\mathbf{1} := (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^S$. Pour tout $\tau \in \mathcal{P}_\Sigma$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $\tau + \lambda \mathbf{1} \in \mathcal{P}_\Sigma$

6.2.2 Algorithme d'inversion

Définition 6.2.7 (Charnière convexe). Soit $Q = ([ABCD], [AC])$ une charnière. Q est convexe si le quadrilatère $[ABCD]$ est convexe.

Définition 6.2.8 (Inversion d'une charnière). Soit $Q = ([ABCD], [AC])$ une charnière, on définit l'inversion Q' de Q par

$$Q' := ([ABCD], [BD]).$$

On remarque si $\mathcal{T}$ est une triangulation de (Σ, S) et (Q, ι) un charnière immergée de $\mathcal{T}$, alors l'inversion de Q' n'admet pas d'immersion naturelle si Q n'est pas convexe. En effet, dans ce cas l'axe de la charnière est dehors du quadrilatère sous-jacent à Q et donc hors du domaine de définition de ι . De plus si la charnière $Q = ([ABCD], [AC])$ est convexe mais que les points B, C, D sont alignés alors remplacer Q par Q' dans la triangulation $\mathcal{T}$ ne définit pas un triangulation $\mathcal{T}'$ puisque deux arêtes sont superposées. Enfin, si l'axe de (Q, ι) ne borde qu'un seul triangle, alors l'inversion ne permet pas de définir une triangulation Q' . En effet, si e' est l'axe de Q' alors $\iota(e')$ s'auto-intersecte (voir figure 6.2.2). Cela motive alors les définitions suivantes.

Définition 6.2.9 (Charnière immergée inversible). Une charnière immergée (Q, ι) de (Σ, S) est inversible si ι est un plongement et si Q est convexe en position générique (c'est-à-dire si aucun triplet de sommets n'est aligné).

Définition 6.2.10. Soient $\mathcal{T}$ une triangulation de (Σ, S) , e une arête de $\mathcal{T}$ et (Q, ι) la charnière immergée d'axe e .

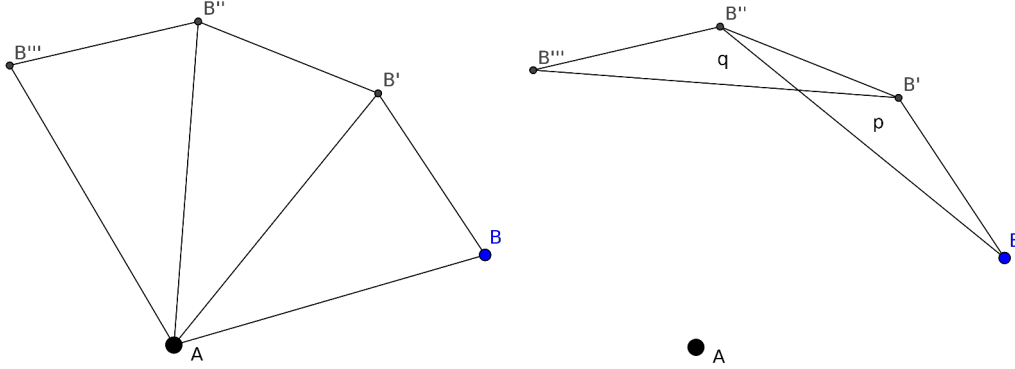
- (i) Q est dégénérée s'il n'existe qu'un seul triangle de $\mathcal{T}$ contenant l'arête e ;
- (ii) Q est inversible si elle est non dégénérée et si Q est convexe en position générique ;
- (iii) Q est périphérique si elle est non dégénérée et non inversible.

Définition 6.2.11 (Forme affine associée à une charnière).

Soit $Q = ([ABCD], [AC])$ une charnière, on pose la forme linéaire associée à Q :

$$Q^* : \begin{cases} \mathbb{R}_+^{\{A,B,C,D\}} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ \tau & \longmapsto \lambda_C \tau_C + \lambda_A \tau_A - \lambda_D \tau_D - \lambda_B \tau_B - K \end{cases}$$

FIGURE III.1 – Développement d'une charnière immergée convexe non plongée et de son inversion. On considère une charnière immergée $(([ABB'B''], [AB'], \iota)$ telle que sur la figure de gauche. Les points B, B', B'' et B''' et les trois triangles représentés à gauche ont la même image par ι dans la surface Σ . On remarque qu'après inversion, le point A est isolé et l'axe de la charnière s'auto-intersecte. Cela montre l'impossibilité de l'inversion d'une telle charnière non plongée.



avec

$$\begin{aligned} \lambda_C &= \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}, & \lambda_A &= \overrightarrow{CD} \wedge \overrightarrow{CB}, \\ \lambda_D &= \overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{CB}, & \lambda_B &= \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD}, \\ K &= \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD} (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB}) + \overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{CB} (\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CD}). \end{aligned}$$

Remarque 6.2.12. La forme linéaire Q^* est définie de telle sorte que $\tilde{\tau}_{Q,\tau}$ est Q -convexe si et seulement si $Q^*(\tau) \leq 0$.

Remarque 6.2.13. Si (Q, ι) est une charnière immergée dans (Σ, S) avec $Q = ([ABCD], [AC])$, alors on peut définir naturellement une forme affine correspondante $\mathbb{R}_+^S \rightarrow \mathbb{R}$ en posant

$$\begin{cases} \mathbb{R}_+^S & \rightarrow \mathbb{R} \\ \tau & \mapsto Q^*(\tau \circ \iota_{\{A,B,C,D\}}) \end{cases}.$$

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté on la notera également Q^* .

Remarque 6.2.14. Une charnière Q est τ -critique si et seulement si $Q^*(\tau) = 0$.

Lemme 6.2.15. Soit $Q = ([ABCD], [AC])$ une charnière inversible. Si Q' dénote l'inversion de Q alors

$$Q'^* = -Q^*$$

Démonstration. On reprend les notations $\lambda_A, \lambda_B, \lambda_C, \lambda_D$ et K de la Définition 6.2.11 et note λ'_* et K' les coefficients correspondants de Q'^* .

On a $\lambda_A = \overrightarrow{CD} \wedge \overrightarrow{CB}$ et $\lambda_B = \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD}$ ainsi :

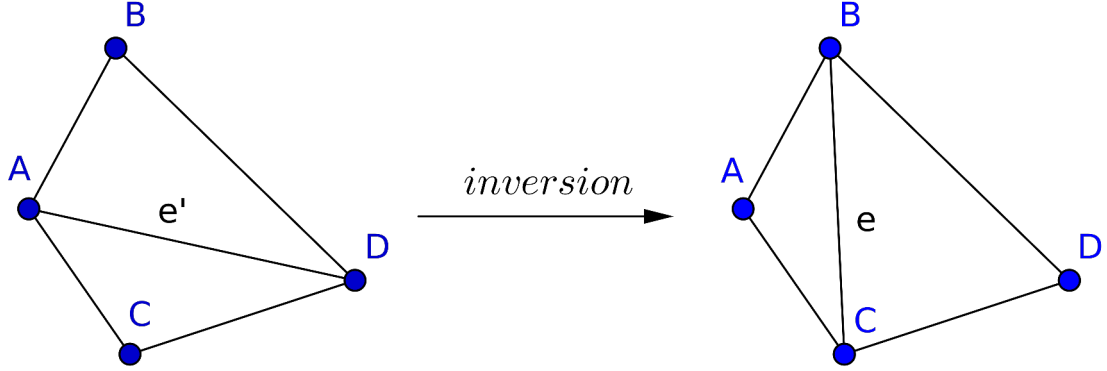
$$\lambda'_A = \overrightarrow{DA} \wedge \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DA} \wedge (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD} = \lambda_B$$

On montre de la même manière que $\lambda'_C = \lambda_D$. Pour vérifier que $K = -K'$, on peut par exemple exprimer K et K' dans un système de coordonnées puis simplifier et réduire $K + K'$. Ce calcul est fastidieux et d'un intérêt limité, nous ne le reproduisons pas ici. $\square$

Corollaire 6.2.16. Soit $Q := ([ABCD], [AC], \tau)$ une charnière pondérée inversible et soit $Q' := ([ABCD], [BD], \tau)$, son inversion.

Q est τ -critique si et seulement si Q' est τ -critique.

FIGURE III.2 – Inversion d'une charnière



Corollaire 6.2.17. Soit $Q := ([ABCD], [AC], \tau)$ une charnière pondérée inversible et soit $Q' := ([ABCD], [BD], \tau)$, son inversion. Si Q n'est pas τ -critique, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) Q est τ -légale ;
- (ii) Q' est τ -illégale.

Définition 6.2.18 (Algorithme d'inversion). Soient $\mathcal{T}$ une triangulation et $\tau : S \rightarrow \mathbb{R}_+$. L'algorithme d'inversion procède comme suit :

1. Faire la liste L des charnières Q inversibles τ -illégales de $\mathcal{T}$.
2. Si L est non vide,
 - (a) Choisir une charnière Q de L .
 - (b) Remplacer la charnière Q par son inversion Q' dans la triangulation $\mathcal{T}$ pour obtenir une triangulation $\mathcal{T}'$.
 - (c) Aller à l'étape 1.
3. Si L est vide : fin de l'algorithme

6.2.3 Convexité du domaine des temps admissibles

Arrêt de l'algorithme d'inversion

Nous commençons par démontrer que l'algorithme d'inversion s'arrête nécessairement.

Proposition 6.2.19. Soient $(\Sigma_1, \mathcal{F}_1, h_1)$ une $\mathbb{E}_{>0}^2$ -surface (Σ, S) -marquée, $\tau : S \rightarrow \mathbb{R}_+$ et $\mathcal{T}_0$ une triangulation. Soit $(\mathcal{T}_i)_{i \in I}$ la suite des triangulations considérées par l'algorithme d'inversion pour τ et en partant de $\mathcal{T}_0$ avec $I = \llbracket 0, n \rrbracket$ ou $\mathbb{N}$.

Alors, la suite de fonction $(\tilde{\tau}_{\tau, \mathcal{T}_i})_{i \in I}$ est décroissante strictement c'est-à-dire :

- pour tout $i, j \in I$, si $i \leq j$ alors $\tilde{\tau}_{\tau, \mathcal{T}_i} \geq \tilde{\tau}_{\tau, \mathcal{T}_j}$;
- pour tout $i, j \in I$, si $i < j$ alors il existe $x \in \Sigma_1$ tel que

$$\tilde{\tau}_{\tau, \mathcal{T}_i}(x) > \tilde{\tau}_{\tau, \mathcal{T}_j}(x).$$

En particulier, la suite $(\mathcal{T}_i)_{i \in I}$ est injective.

Démonstration. Soit $i \in I$ tel que $i + 1 \in I$. La triangulation $\mathcal{T}_{i+1}$ est obtenue à partir de la triangulation $\mathcal{T}_i$ en inversion une charnière Q de $\mathcal{T}_i$. On pose $\iota : Q \rightarrow \Sigma_1$ le plongement isométrique naturel de Q dans Σ_1 . On a alors :

- $\forall x \in \Sigma_1 \setminus \iota(Q)$, $\tilde{\tau}_{\tau, \mathcal{T}_i}(x) = \tilde{\tau}_{\tau, \mathcal{T}_{i+1}}(x)$. En effet, pour $x \notin \iota(Q)$, le triangle contenant x est le même pour $\mathcal{T}_i$ et pour $\mathcal{T}_{i+1}$.
- $\forall x \in \iota(Q)$, $\tilde{\tau}_{\tau, \mathcal{T}_i}(x) > \tilde{\tau}_{\tau, \mathcal{T}_{i+1}}(x)$. En effet, $\tilde{\tau}_{\tau, \mathcal{T}_i}(x)$ et $\tilde{\tau}_{\tau, \mathcal{T}_{i+1}}(x)$ sont égales sur les segments $[AB], [BC], [CD]$ et $[DA]$ mais d'après la propriété 6.2.17, Q est Q-concave et Q' est Q-convexe, en appliquant le lemme 6.1.15 à des segments géodésiques allant de côté à côté de $[ABCD]$ on montre que pour tout $x \in \dot{Q}$, $\tilde{\tau}_{\tau, \mathcal{T}_i}(\iota(x)) > \tilde{\tau}_{\tau, \mathcal{T}_{i+1}}(\iota(x))$.

L'injectivité est alors immédiate. □

En particulier, cette dernière proposition implique que les fonctions $\tilde{\tau}_{\tau, \mathcal{T}_i}$ sont toutes majorées par la première fonction $\tilde{\tau}_{\tau, \mathcal{T}_0}$.

Lemme 6.2.20. Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et soit

$$f : \begin{cases} [a, b] & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto -x^2 + \alpha x + \beta \end{cases}$$

pour certains $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et telle que $f(a) \geq 0$ et $f(b) \geq 0$. Alors,

$$\max_{[a, b]} f \geq \frac{(b-a)^2}{4}$$

Démonstration. On pose $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ l'unique fonction affine telle que $u(a) = f(a)$ et $u(b) = f(b)$. Comme $f(a)$ et $f(b)$ sont positifs, u est positive. Pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) = u(x) - (x-a)(x-b)$, or $\min_{x \in [a, b]} (x-a)(x-b) = -\frac{(b-a)^2}{4}$ donc

$$\max_{[a, b]} f \geq \frac{(b-a)^2}{4}.$$

□

Proposition 6.2.21. Soit $C \in \mathbb{R}_+^*$, l'ensemble des triangulations $\mathcal{T}$ de (Σ, S) telles qu'il existe $\tau : S \rightarrow \mathbb{R}_+$ avec $\tilde{\tau}_{\tau, \mathcal{T}} \leq C$ est fini.

Démonstration. Soit $(\mathcal{T}, \mathcal{A})$ une triangulation et soit $\tau : S \rightarrow \mathbb{R}_+$ tel que $\tilde{\tau}_{\tau, \mathcal{T}} \leq C$. Pour toute arête $e \in \mathcal{A}$, la restriction de $\tilde{\tau}_{\tau, \mathcal{T}}$ à e est une fonction de type distance et donc si $c : [0, L] \rightarrow e$ est une paramétrisation géodésique de e par longueur d'arc, alors $\tilde{\tau}_{\tau, \mathcal{T}} \circ c : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction positive de la forme $x \mapsto -x^2 + \alpha x + \beta$. D'après le lemme 6.2.20,

$$\frac{L^2}{4} \leq \max_{[a, b]} \tilde{\tau}_{\tau, \mathcal{T}} \leq C$$

donc $L \leq 2\sqrt{C}$. Par suite la triangulation $\mathcal{T}$ ne comporte que des arêtes de longueur plus petite que $2\sqrt{C}$. Or Σ est compact, il existe donc seulement un nombre fini d'arêtes géodésiques de longueur bornée allant d'un point de S à un point de S , et donc un nombre fini de triangulations composées uniquement d'arêtes de longueur plus petite que $2\sqrt{C}$. □

Proposition 6.2.22. Soit $\tau : S \rightarrow \mathbb{R}_+$. Quelque soit la triangulation $\mathcal{T}_0$ choisie, l'algorithme d'inversion pour τ partant de $\mathcal{T}_0$ s'arrête sur une triangulation $\mathcal{T}$ telle que l'une des propriétés suivantes est satisfaite :

- (A) toutes les charnières de $\mathcal{T}$ sont τ -légales

(B) toutes les charnières inversibles de $\mathcal{T}$ sont τ -légalles et il existe une charnière τ -illégalle de $\mathcal{T}$ qui n'est pas inversible.

Démonstration. On note $(\mathcal{T}_i)_{i \in I}$ la suite des triangulations considérées par l'algorithme d'inversion avec $I = \llbracket 0, n \rrbracket$ ou $I = \mathbb{N}$. D'après la proposition 6.2.19, la suite des fonctions $(\tilde{\tau}_{\tau, \mathcal{T}_i})_{i \in I}$ est strictement décroissante donc pour tout $i \in I$,

$$\tilde{\tau}_{\tau, \mathcal{T}_i} \leq \max_{\Sigma_1} \tilde{\tau}_{\tau, \mathcal{T}_0}.$$

Ainsi, d'après la proposition 6.2.21, il n'existe qu'un nombre fini de triangulations $\mathcal{T}$ satisfaisant cette propriété, la suite $(\mathcal{T}_i)_{i \in I}$ est donc à valeur dans un ensemble fini de triangulations. D'après la proposition 6.2.19, la suite $(\mathcal{T}_i)_{i \in I}$ est injective. Finalement, I est fini donc l'algorithme s'arrête.

Lorsque l'algorithme s'arrête disons au bout de n itérations, la liste des charnières inversibles illégales de $\mathcal{T}_n$ est vide. L'alternative est alors immédiate. $\square$

Convexité de $\mathcal{P}_\Sigma$

Soit $\tau : S \rightarrow \mathbb{R}_+$. Si l'on suppose que toute charnière immergée dans (Σ, S) non inversible est τ -légalle ; alors, quelque soit la triangulation de départ, l'algorithme d'inversion s'arrête sur une triangulation dont toutes les charnières sont légales. Nous avons donc là une condition suffisante pour que $\tau \in \mathcal{P}_\Sigma$. L'objectif du reste de cette sous-section est de démontrer que non seulement cette condition est également nécessaire si la surface ne comporte que des angles coniques plus grands que $\pi/2$, mais que ces conditions sont des inégalités affines sur $\mathbb{R}_+^S$ et donc que $\mathcal{P}_\Sigma$ est convexe.

Lemme 6.2.23. *Soit $Q = ([ABCD], [AC])$ une charnière non convexe ou convexe mais pas en position générique et soit τ une pondération sur Q . S'il existe une fonction distance par morceaux Q -convexe f sur $[ABCD]$ telle que $f|_{\{A,B,C,D\}} = \tau$ alors $\tilde{\tau}_{Q, \tau}$ est Q -convexe.*

Démonstration. Quitte à permuter A et C , on suppose que C est dans l'enveloppe convexe de $[ABCD]$. On pose g le prolongement distance par morceaux de τ induit par la charnière Q , et h le prolongement distance de $\tau|_{\{A,B,D\}}$ au triangle $[ABD]$. Les deux fonctions f et g sont définies sur $[ABCD] \subset [ABD]$ et la fonction h est définie sur $[ABD]$. Enfin, remarquons que, par définition, $g = \tilde{\tau}_{Q, \tau}$.

h est de type distance sur $[ABD]$ et f est de type distance par morceaux Q -convexe sur Q . En appliquant le Lemme 6.1.15 sur les arêtes $[AB]$, $[AC]$ et $[AD]$ puis sur des arêtes $[xy] \subset [ABCD]$ avec $x \in [AB]$ et $y \in [AD]$ on montre que $f \leq h$. De la même manière, on montre que l'on a les faits suivants pour g

- g est Q -convexe si et seulement si $g \leq h$;
- h est Q -concave si et seulement si $g \geq h$.

De plus, $g - h$ étant affine sur les triangles $[ACB]$ et $[ACD]$ et nulle aux trois points distincts A, B et D , alors $g - h$ est négative si et seulement si $g(C) - h(C) = 0$.

Or, $g(C) = f(C)$ et $f(C) \leq h(C)$, donc $g(C) \leq h(C)$. Ainsi, $g \leq h$ et g est Q -convexe. C'est-à-dire $\tilde{\tau}_{Q, \tau}$ est Q -convexe. $\square$

Proposition 6.2.24. *On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des charnières immergées dans (Σ, S) et on note $\mathcal{C}^*$ l'ensemble des charnières immergées (Q, ι) inversibles.*

Si (Σ, S) ne comporte que des singularités coniques d'angle plus grand que $\pi/2$, on a alors :

$$\mathcal{P}_\Sigma = \bigcap_{Q \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}^*} (Q^*)^{-1}(\mathbb{R}_-)$$

et donc en particulier, $\mathcal{P}_\Sigma$ est un domaine convexe de $\mathbb{R}_+^S$.

Par ailleurs, pour tout $\tau \in \mathcal{P}_\Sigma$, en notant $\tilde{\tau}$ l'unique prolongement distance par morceaux Q -convexe de τ on a :

$$\tilde{\tau} = \min_{\mathcal{T}'} \tilde{\tau}_{\mathcal{T}', \tau}$$

où $\mathcal{T}'$ parcourt toutes les triangulations de Σ .

Démonstration. Commençons par convenir que si $\mathcal{C} \setminus \mathcal{C}^* = \emptyset$ alors l'intersection est $\mathbb{R}_+^S$ entier.

- Montrons l'inclusion $\supset$. Soit $\tau \in \cap_{Q \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}^*} (Q^*)^{-1}(\mathbb{R}_-)$, d'après la remarque 6.2.12, τ est tel que toute charnière non inversible est τ -légale. Appliquons l'algorithme d'inversion pour τ en partant d'une triangulation quelconque $\mathcal{T}_0$, d'après la proposition 6.2.22, cet algorithme s'arrête sur une triangulation $\mathcal{T}$. Comme toutes les charnières non-inversibles de $\mathcal{T}$ sont τ -légales par hypothèses, $\mathcal{T}$ satisfait la propriété (A) de l'alternative donnée par la proposition 6.2.22 et donc toutes les charnières de $\mathcal{T}$ sont τ -légales ; ainsi, $\tau \in \mathcal{P}_\Sigma$.
- Montrons l'inclusion $\subset$. Soit $\tau \in \mathcal{P}_\Sigma$, il existe une triangulation $\mathcal{T}$ dont toutes les charnières sont τ -légales. On se donne une telle triangulation et on note $\tilde{\tau} := \tilde{\tau}_{\tau, \mathcal{T}}$. Soit $(Q, \iota) \in \mathcal{C}$ une charnière non inversible. Comme aucun angle conique de la surface Σ n'est plus petit que $\pi/2$, si la charnière Q est dégénérée, elle comporte un angle strictement plus grand que π et est donc non convexe ; par suite, dégénérée ou non, Q n'est pas convexe en position générique. Or $\tilde{\tau} \circ \iota$ est une fonction distance par morceaux et Q -convexe donc, d'après le lemme 6.2.23, $\tilde{\tau}_{\tau, Q}$ est Q -convexe. Par suite Q est τ -légale et donc $Q^*(\tau) \in \mathbb{R}_-$.

Finalement, $\tau \in \cap_{Q \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}^*} (Q^*)^{-1}(\mathbb{R}_-)$

□

Proposition 6.2.25. En notant $\mathbb{1}$ la fonction caractéristique de S , le rayon $\mathbb{R}_+\mathbb{1}$ est dans l'intérieur de $\mathcal{P}_\Sigma$.

Démonstration. Premièrement, la cellulation de Delaunay $(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ est 0-légale donc $\mathbb{R}_+\mathbb{1} \subset \mathcal{P}_\Sigma$. Deuxièmement, chaque cellule de la cellulation de Delaunay est un polygone cocyclique plongé et est maximale en ce sens que si $\mathcal{T}$ est une sous-triangulation de la cellulation de Delaunay et e une arête de la **cellulation** de Delaunay alors la charnière immergée de $\mathcal{T}$ d'axe e n'est pas 0-critique.

Pour toute sous-triangulation $\mathcal{T}$ de la cellulation de Delaunay et toute arête e de la cellulation de Delaunay, on pose $Q_{\mathcal{T}, e}^*$ la fonction Q^* associée à la charnière de $\mathcal{T}$ d'axe e . On pose alors

$$\mathcal{U} := \bigcap_{\mathcal{T}} \bigcap_e Q_{\mathcal{T}, e}^*(\mathbb{R}_+^*)$$

où $\mathcal{T}$ parcourt les sous-triangulations de la cellulation de Delaunay et e parcourt les arêtes de la cellulation de Delaunay. Comme aucune des charnières considérées n'est 0-critique mais qu'elles sont toutes 0-légales, $\mathbb{R}_+\mathbb{1}$ est dans chacun des $Q_{\mathcal{T}, e}^*(\mathbb{R}_+^*)$. De plus l'intersection est finie car il n'y a qu'un nombre fini de sous-triangulations de la cellulation de Delaunay. Ainsi $\mathcal{U}$ est un ouvert contenant $\mathbb{R}_+\mathbb{1}$.

Montrons à présent que $\mathcal{U}$ est inclus dans $\mathcal{P}_\Sigma$. Appliquons l'algorithme d'inversion à un τ dans $\mathcal{U}$ en partant d'une sous-triangulation de la triangulation de Delaunay. Les conditions $Q_{e, \mathcal{T}}^*(\tau) < 0$ assurent que les arêtes e bordant les cellules de la cellulation de Delaunay sont toujours τ -légales, ainsi l'algorithme d'inversion ne cherche jamais à les inverser et donc ne parcourt que des sous-triangulations de la cellulation de Delaunay. Celles-ci sont en nombre fini, l'algorithme s'arrête donc. D'après la proposition 6.2.22, ou bien l'algorithme s'arrête sur une triangulation τ -Delaunay, ou bien il existe une arête non inversible τ -illégal. Or les arêtes non inversibles de la cellulation de Delaunay ne sont pas 0-critiques et délimitent une cellule, par construction de $\mathcal{U}$, une telle arête est τ -légale. Cela montre que l'algorithme s'arrête bien sur une triangulation τ -Delaunay et donc que $\tau \in \mathcal{P}_\Sigma$.

Finalement $\mathcal{U}$ est un voisinage de $\mathbb{R}_+\mathbb{1}$ inclu dans $\mathcal{P}_\Sigma$, donc $\mathbb{R}_+\mathbb{1}$ est dans l'intérieur de $\mathcal{P}_\Sigma$

□

6.2.4 Compacité transverse du domaine des temps admissibles

La compacité transverse du domaine $\mathcal{P}_\Sigma$ repose sur l'existence de contraintes affines $Q^* \geq 0$ de la forme $\tau_A - \tau_C \leq \varepsilon(\tau_A + \tau_B + \tau_C + \tau_D) + K$ avec $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit et A, C quelconques dans S . Ces relations sont données par des charnières de type (x, L) , voir la définition 6.2.26 et le lemme 6.2.27. Il nous faut alors construire suffisamment de telles charnières immergées dans (Σ, S) , c'est l'objet du lemme 6.2.28.

Définition 6.2.26 (Charnière de type (x, L)). *Pour $x, L > 0$, une charnière $([ABCD], [AC])$ de $\mathbb{E}^2$ est dite de type (x, L) si elle non inversible avec $C \in [ABD]$ et si $d(B, (AC)) \leq x$, $d(D, (AC)) \leq x$, $AB > L$ et $AD > L$.*

Lemme 6.2.27. *Soient $l > 0$ et $x > 0$. Pour toute charnière Q , on pose*

$$Q^* : \tau \mapsto \alpha(Q)\tau_A + \beta(Q)\tau_B + \gamma(Q)\tau_C + \delta(Q)\tau_D + K$$

la forme affine associée à Q .

Alors, existe une fonction positive $f : Q \mapsto f(Q) \in \mathbb{R}_+^$ telle que pour toute suite de charnières $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, Q_n est de type (x, n) et dont la longueur de l'axe est l on ait :*

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha(Q_n)}{f(Q_n)} &= -1 & \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\beta(Q_n)}{f(Q_n)} &= 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\gamma(Q_n)}{f(Q_n)} &= 1 & \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\delta(Q_n)}{f(Q_n)} &= 0 \end{aligned}$$

Démonstration. Soit $L > 0$, on se donne une charnière $Q = ([ABCD], [AC])$ de type (x, L) telle que $AC = l$. Quitte à appliquer une isométrie de $\mathbb{E}^2$, on peut supposer la charnière dans la configuration $A = O$ l'origine de $\mathbb{E}^2$, $C = (0, l)$, $x_B > 0$ et $x_D < 0$.

Le critère (v) de Q-convexité de la proposition 6.2.4 donne alors :

$$\begin{aligned} \beta(Q) &= \frac{l}{|x_B|} & \alpha(Q) &= \frac{l - y_B}{|x_B|} + \frac{l - y_D}{|x_D|} \\ \delta(Q) &= \frac{l}{|x_D|} & \gamma(Q) &= \frac{y_B}{|x_B|} + \frac{y_D}{|x_D|} \end{aligned}$$

On pose $f(Q) = \gamma(Q)$ de sorte que $\gamma(Q)/f(Q) = 1$ et $f(Q) > 0$ car $y_B > 0$ et $y_D > 0$. On a $|x_B| \leq x$, $|x_D| \leq x$, $y_B \geq \sqrt{L^2 - x^2}$ et $y_D \geq \sqrt{L^2 - x^2}$; donc

$$\begin{aligned} -1 &\leq \frac{\alpha(Q)}{f(Q)} \leq -1 + \frac{l}{\sqrt{L^2 - x^2}} \\ 0 &\leq \frac{\beta(Q)}{f(Q)} \leq \frac{l}{\sqrt{L^2 - x^2}} \quad 0 \leq \frac{\delta(Q)}{f(Q)} \leq \frac{l}{\sqrt{L^2 - x^2}} \end{aligned}$$

D'où le résultat. $\square$

Lemme 6.2.28. *Soit e un segment géodésique non trivial de (Σ, S) allant d'un point $P_1 \in S$ à un point $P_2 \in S$.*

Il existe une constante $x_0 > 0$ telle que pour tout $L > 0$, il existe une charnière immergée $Q = ([ABCD], [AC], \iota)$ de type (x_0, L) avec $\iota(A) = P_1$ et $\iota(C) = P_2$.

Démonstration. La fonction $\Sigma \rightarrow \mathbb{R}_+, x \mapsto d(x, S)$ est 1-lipschitzienne donc bornée, on note M son maximum sur Σ . On note également m la plus petite distance séparant deux points distincts de S .

On commence par construire des immersions de secteurs angulaires arbitrairement longs dans Σ . On note $\vec{u}$ le vecteur tangent au segment géodésique e en P_1 et α l'angle conique en P_1 . Pour $\theta \in [0, \alpha/2[$, considérons c_θ l'unique rayon géodésique tel que $c_\theta(0) = P_1$, $\|c'_\theta(0)\| = 1$ et l'angle

entre $c'_\theta(0)$ et $\vec{u}$ est θ . Si c_θ ne rencontre jamais de point marqué alors il est défini sur $\mathbb{R}_+$, sinon il est défini sur un intervalle $[0, s_\theta]$. La géodésique c_0 est bien définie pour $s \in [0, s_0]$ avec $s_0 = l(e)$ la longueur du segment géodésique e . On peut la prolonger à gauche, c'est-à-dire en suivant le rayon géodésique sortant faisant un angle π avec le rayon géodésique rentrant du côté gauche. On prolonge de cette manière le rayon c_0 de sorte à le définir sur $[0, +\infty[$. On pose $\beta := \min(\alpha/2, \pi/6)$ et on définit :

$$\Phi : \begin{cases} D & \longrightarrow \Sigma \\ (\theta, r) & \longmapsto c_\theta(r) \end{cases} \quad \text{avec} \quad D := \{(\theta, r) : \theta \in [0, \beta[, r \in [0, s_\theta[\}.$$

Le domaine D est une partie de $\mathbb{R}_+ \times [0, \pi/6]/\sim$ et si on le munit de la métrique $dr^2 + r^2 d\theta^2$, l'application $(r, \theta) \mapsto (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$ est un plongement isométrique de D dans $\mathbb{E}^2$. On identifie alors D à son plongement dans $\mathbb{E}^2$. Enfin, pour $\theta_0 \in]0, \beta[$, on pose $R(\theta_0) = \min\{s_\theta : \theta \in]0, \theta_0]\}$; ce minimum est bien défini car l'ensemble des points marqués S est discret. On a alors les faits suivants :

- L'application Φ est une restriction de l'application exponentielle en P_1 , comme $\Sigma \setminus S$ est une surface riemannienne de courbure nulle, c'est donc une immersion isométrique de D dans Σ .
- $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} R(\theta) = +\infty$.

La fonction $\theta \mapsto R(\theta)$ est croissante par définition. Posons $L > 0$ et construisons θ tel que $R(\theta) \geq L$. Considérons une suite définie par récurrence comme suit :

- $\theta_0 \in]0, \beta]$ tel que $s_{\theta_0} = R(\theta_0)$ et $\sin(\theta_0) \leq \frac{m}{4L}$;
- $\theta_{n+1} \in]0, \theta_n/2]$ tel que $s_{\theta_{n+1}} = R(\theta_{n+1})$;

Prenons $n \in \mathbb{N}$ tel que $R = R(\theta_n) < L$, on considère le triangle isocèle de sommets $P_1, c_{\theta_n/2}(R)$ et $c_{\theta_n}(R)$. La longueur du côté allant de $c_{\theta_n/2}(R)$ à $c_{\theta_n}(R)$ est $2 \sin(\theta_n/2)R < m/2$; ainsi

$$\begin{aligned} d(c_{\theta_n}(R), S) &\leq d(c_{\theta_n}(R), c_{\theta_n/2}(R)) + d(c_{\theta_n/2}(R), c_{\theta_n/2}(s_{\theta_n/2})) \\ &\leq m/2 + s_{\theta_n/2} - R. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} s_{\theta_n/2} &\geq d(c_{\theta_n}(R), S) + R - m/2 \\ &\geq m + R - m/2 \\ &\geq R + m/2 \end{aligned}$$

et donc

$$R(\theta_{n+1}) > R(\theta_n) + m/2.$$

Finalement,

$$R(\theta_{\lfloor 2L/m \rfloor + 1}) > L.$$

- Pour tout $\theta \in]0, \beta[$, $R(\theta) \leq \frac{6M}{\theta}$.

En effet, le plongement du domaine $]0, \theta[\times [0, R(\theta)]$ de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{E}^2$ est un secteur d'angle θ et de rayon $R(\theta)$ du plan $\mathbb{E}^2$. Un tel secteur contient un triangle rectangle dont les longueurs des côtés sont $R(\theta) \cos(\theta)$, $R(\theta) \sin(\theta)$ et $R(\theta)$. Le rayon r du cercle inscrit à un tel triangle s'écrit alors :

$$r = \frac{R(\theta)(\cos(\theta) + \sin(\theta) - 1)}{2}$$

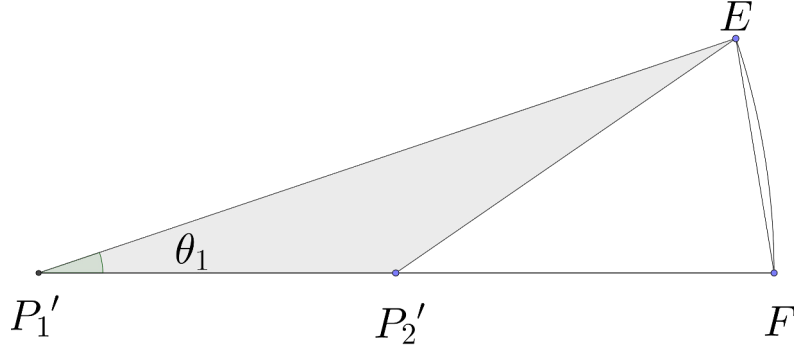
L'image de Φ ne contient pas de point singulier dans son intérieur donc l'image par Φ du centre du cercle inscrit est éloigné de S d'au moins r et donc $M \geq r$. On en déduit

$$R(\theta) \leq \frac{2M}{\cos(\theta) + \sin(\theta) - 1}$$

et le résultat en montrant l'inégalité

$$\forall \theta \in [0, 1], \quad \cos(\theta) + \sin(\theta) - 1 \geq \frac{\theta}{3}.$$

Montrons à présent le lemme à proprement parler, posons $x_0 = 6M$ et donnons nous un $L > 0$. On note $l = l(e)$ la longueur du segment géodésique e . Soit $\theta_0 > 0$ tel que $R(\theta_0) > L$; il existe $\theta_1 \in]0, \theta_0[$ tel que $R := s_{\theta_1} = R(\theta_0)$, soit donc un tel $\theta_1 \in]0, \theta_0[$. Le domaine $\{\theta \in [0, \theta_1] \mid r \in [0, R]\}$ est un secteur angulaire de $\mathbb{E}^2$ d'angle θ_1 et de rayon R , ce domaine est en particulier convexe. Pour fixer les idées, on pose $P'_1 : (0, 0)$ le centre du secteur, $E : (\theta, R)$ et $F : (0, R)$; enfin on pose $P'_2 : (0, l)$. De cette manière, $\Phi(P'_1) = P_1$ et $\Phi(P'_2) = P_2$. On considère le triangle $T = [P'_1 P'_2 E]$, la figure suivante résume la situation.



Ce triangle T est tel que $P'_1 E = R > L$, on majore à présent la distance de E à la droite $(P'_1 P'_2)$. On a donc :

$$\begin{aligned} d(E, (P'_1 P'_2)) &= \sin(\theta_1) R \\ &\leq \frac{6M \sin(\theta_1)}{\theta_1} \\ &\leq 6M \\ &= x_0 \end{aligned}$$

Le triangle T muni de son immersion Φ donne alors la moitié d'une charnière de type (x_0, L) d'axe e . En construisant de la même manière un triangle à droite du segment e , on obtient une charnière immergée de type (x_0, L) dans Σ d'axe e et dont les sommets sont dans S . $\square$

Proposition 6.2.29. *Si les angles coniques de la surface (Σ, S) sont tous plus grands que $\pi/2$ alors il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $A, B \in S$ et tout $\tau \in \mathcal{P}_\Sigma$,*

$$|\tau(A) - \tau(B)| \leq C.$$

Démonstration. D'après le corollaire 6.2.6, il suffit de démontrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que si $\tau \in \mathcal{P}_\Sigma$ est nul en l'un des $P \in S$ alors $\tau \leq C$.

- D'après les lemmes 6.2.27 et 6.2.28 et d'après la proposition 6.2.24, pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $A, B \in S$, il existe $K > 0$ telle que pour tout $\tau \in \mathcal{P}_\Sigma$,

$$|\tau_A - \tau_B| \leq \varepsilon |\tau| + K$$

avec $|\tau| := \max \tau$.

- Pour tout $A, B \in S$, on se donne $K_{A,B} > 0$ tel que pour tout $\tau \in \mathcal{P}_\Sigma$,

$$|\tau_A - \tau_B| \leq \frac{1}{2}|\tau| + K_{A,B}$$

et on pose $K = \max_{A,B \in S} K_{A,B}$.

- Soit $\tau \in \mathcal{P}_\Sigma$ et soit $A \in S$, on suppose que $\tau(A) = 0$. On se donne $B \in S$ tel que $\tau(B) = |\tau|$, on a alors :

$$|\tau| = |\tau(A) - \tau(B)| \leq \frac{1}{2}|\tau| + K$$

et donc

$$|\tau| \leq 2K$$

Ainsi, en posant $C = 2K$, on a le résultat. □

Corollaire 6.2.30. *Soit E l'ensemble des triangulations $\mathcal{T}$ telles qu'il existe $\tau \in \mathcal{P}_\Sigma$ de sorte que $\mathcal{T}$ est τ -Delaunay :*

$$E := \{ \mathcal{T} \mid \exists \tau \in \mathcal{P}_\Sigma, \mathcal{T} \text{ } \tau\text{-Delaunay} \}.$$

Si les angles coniques de la surface (Σ, S) sont tous plus grands que $\pi/2$ alors E est fini.

Démonstration. On pose

$$M := \max_{\tau_0, \mathcal{T}_0}$$

avec $\mathcal{T}_0$ une sous-triangulation de la cellulation de Delaunay. Cette constante M ne dépend que de la surface Σ .

Soit $\mathcal{T} \in E$ et prenons $\tau \in \mathcal{P}_\Sigma$ tel que $\mathcal{T}$ est τ -Delaunay. Quitte à appliquer le corollaire 6.2.6, on peut supposer qu'il existe $A \in S$ tel que $\tau(A) = 0$. Soit une constante $C > 0$ donnée par la proposition 6.2.29 de sorte que $\tau \leq C$. D'après la proposition 6.2.24, on a :

$$\tilde{\tau}_{\tau, \mathcal{T}} \leq \tilde{\tau}_{\tau, \mathcal{T}_0} \leq C + \tilde{\tau}_{0, \mathcal{T}_0} \leq M + C$$

l'inégalité $\tilde{\tau}_{\tau, \mathcal{T}_0} \leq C + \tilde{\tau}_{0, \mathcal{T}_0}$ s'obtenant en remarquant que $\tilde{\tau}_{\tau, \mathcal{T}_0} - \tilde{\tau}_{0, \mathcal{T}_0}$ est une fonction affine par morceau majorée par C sur S et donc sur Σ . On peut alors appliquer la proposition 6.2.21. □

Corollaire 6.2.31. *Si les angles coniques de la surface (Σ, S) sont tous plus grands que $\pi/2$ alors $\mathcal{P}_\Sigma$ est un polyèdre convexe.*

Démonstration. On reprend les notations du corollaire 6.2.30, et pour $\mathcal{T} \in E$ on pose $\mathcal{C}_\mathcal{T}$ l'ensemble des $\tau \in \mathcal{P}_\Sigma$ tels que $\mathcal{T}$ est τ -Delaunay.

- Pour tout $\mathcal{T} \in E$, $\mathcal{C}_\mathcal{T}$ est le domaine

$$\bigcap_Q Q^*(\mathbb{R}_-)$$

où Q parcourt les charnières de $\mathcal{T}$ or celles-ci sont en nombre fini, donc $\mathcal{C}_\mathcal{T}$ est un polyèdre convexe.

- On peut écrire $\mathcal{P}_\Sigma$ sous la forme :

$$\mathcal{P}_\Sigma = \bigcup_{\mathcal{T} \in E} \mathcal{C}_\mathcal{T}.$$

Or E est fini et chacun des $\mathcal{C}_\mathcal{T}$ est un polyèdre, donc $\mathcal{P}_\Sigma$ est une union finie de polyèdre et comme d'après la proposition 6.2.24 c'est un domaine convexe, c'est un polyèdre convexe. □

6.3 Fonctionnelles d'Einstein-Hilbert

Pour $\tau \in \mathbb{R}_+^S$ et $\mathcal{T}$ une triangulation de (Σ, S) , on rappelle que $M := M(\tau, \mathcal{T})$ est un $\mathbb{E}_{\geq 0}^{1,2}$ -espace-temps radiant tel qu'il existe un plongement polyédral $\iota : \Sigma \rightarrow M$ satisfaisant

$$T^2 \circ \iota = \tilde{\tau}_{\tau, \mathcal{T}} : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}_+$$

avec T le temps cosmologique de M . Dans cette section, nous considérons systématiquement $\tau \in \mathcal{P}_\Sigma$ et $\mathcal{T} = \mathcal{T}_\tau$ l'unique triangulation τ -Delaunay de Σ . On notera alors $M(\tau)$ à la place de $M(\tau, \mathcal{T}_\tau)$ et on notera $\iota_\tau : \Sigma \rightarrow M(\tau)$ le plongement polyédral associé. Par définition de $\mathcal{P}_\Sigma$, ce plongement est convexe.

Définition 6.3.1 (Fonction masse). *Pour $\tau \in \mathcal{P}_\Sigma$ et pour $\sigma \in S$, on pose $\kappa_\sigma(\tau)$ l'unique réel positif tel que $\iota_\tau(x) \in \text{Sing}_{\kappa_\sigma(\tau)}(M(\tau))$. C'est à dire la masse de la particule passant par σ dans $M(\tau)$.*

On note $\kappa : \mathcal{P}_\Sigma \rightarrow \mathbb{R}_+^S$ l'application qui à τ associe le vecteur $(\kappa_\sigma(\tau))_{\sigma \in S}$.

Remarque 6.3.2. *l'application $\tau \mapsto \kappa$ est continue et $\mathcal{C}^1$ sur chaque cellule $C_\mathcal{T} := \{\tau \in \mathcal{P}_\Sigma \mid \mathcal{T}_\tau = \mathcal{T}\}$. De plus, pour τ dans l'intersection de deux telles cellules $C_\mathcal{T}$ et $C_{\mathcal{T}'}$, les deux triangulations $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ sont τ -équivalentes donc la valeurs de κ calculée avec la triangulation $\mathcal{T}$ et celle calculée avec la triangulation $\mathcal{T}'$ sont égales. On en déduit donc que $\tau \mapsto \kappa$ est continue sur $\mathcal{P}_\Sigma$.*

Dans les deux sections suivantes, nous cherchons à déterminer l'image de κ .

Problème. *Soit $(\Sigma, \mathcal{F}_1, h_1)$ une $\mathbb{E}_{>\pi/2}^2$ -surface (Σ, S) -marquée et soit $\bar{\kappa} \in \mathbb{R}_+^S$, existe-t-il $\tau \in \mathcal{P}_\Sigma$ tel que $\kappa(\tau) = \bar{\kappa}$ et s'il existe, est-il unique ?*

La première étape est de définir, pour $\bar{\kappa}^0$ donné, une fonctionnelle sur l'espace $\mathcal{P}_\Sigma$ dont les points critiques sont des solutions du problème. Nous continuerons alors l'étude en étudiant la différentielle seconde de cette fonctionnelle pour démontrer que c'est une fonction de Morse dont les points critiques sont tous définis positifs.

La deuxième étape, est alors d'étudier le gradient de cette fonctionnelle au bord du domaine $\mathcal{P}_\Sigma$, de sorte à garantir que le gradient est toujours dirigé vers l'extérieur du domaine. Nous pourrons alors conclure sur l'existence et l'unicité des solutions au problème pour $\bar{\kappa}^0$.

6.3.1 Préliminaires : angles lorentziens et formule de Schläfli

Nous souhaitons énoncer la formule de Schläfli pour les polyèdres immergés dans $\mathbb{E}^{1,2}$. Nous définissons les notions d'angles lorentziens et de famille à 1-paramètre de polyèdres immergés. Nous suivons l'exposition et les notations de [Sou04] et nous nous y référons pour les détails.

Angles lorentziens

Pour commencer, le module $|u|$ d'un vecteur u de $\mathbb{E}^{1,2}$ est égal à

$$|u| = \sqrt{\langle u|u \rangle}$$

en convenant que si $\langle u|u \rangle < 0$ alors $|u|$ est la racine complexe de partie imaginaire positive. Soient u, v deux vecteurs de $\mathbb{E}^{1,2}$, nous définissons un angle $\angle uv$ satisfaisant les propriétés suivantes :

- (a) pour toute paire de vecteurs u, v de $\mathbb{E}^{1,2}$, $\angle uv \in \mathbb{R} + i\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$;
- (b) pour toute paire de vecteurs u, v de $\mathbb{E}^{1,2}$, $\langle u|v \rangle = |u||v| \cosh(\angle uv)$;
- (c) pour toute paire de vecteurs u, v, w de $\mathbb{E}^{1,2}$ coplanaires, $\angle uv + \angle vw = \angle uv'$.

Les angles ne sont bien définis que lorsque ni u ni v ne sont isotropes. Par ailleurs nous dirons que u, v sont de même type s'ils sont dans la même orbite de $\text{SO}_0(1, 2)$.

Définition 6.3.3 (Type d'un vecteur de $\mathbb{E}^{1,1}$). Soit u un vecteur de $\mathbb{E}^{1,1}$, on définit le type $k_u \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ de u de la manière suivante :

- $k_u = 0$ si u est de type temps futur ;
- $k_u = 1$ si u est de type espace d'abscisse négative,
- $k_u = 2$ si u est de type temps passé ;
- $k_u = 3$ si u est de type espace d'abscisse positive.

Définition 6.3.4. Soient u, v deux vecteurs normés de $\mathbb{E}^{1,2}$ non isotropes et soit Π le plan vectoriel contenant u et v .

- si Π est de type espace,

$$\angle uv = i\theta$$

avec θ le paramètre de l'unique isométrie elliptique envoyant u sur v ;

- si Π est de type temps et u, v de même type,

$$\angle uv = \alpha$$

avec α le paramètre de l'unique isométrie hyperbolique envoyant u sur v .

- si Π est de type temps et u, v de types différents,

$$\angle uv = \alpha + i(k_v - k_u)\frac{\pi}{2}$$

avec $\alpha := \angle u'v'$ où u' (resp. v') est l'unique vecteur de type temps futur dans Π qui est soit orthogonal soit positivement colinéaire à u (resp. v).

Définition 6.3.5 (Angles dièdre). Soient Π_1 et Π_2 deux demi-plans vectoriels s'intersectant le long de leur bord Δ . On suppose Π_1, Π_2 et Δ non isotropes et on pose $\nu_i = \Delta^\perp \cap \Pi_i, i \in \{1, 2\}$. On se donne $u \in \Delta$ et pour $i \in \{1, 2\}$, on pose n_i l'unique normale à Π_i telle que (u, ν_i, n_i) soit une base directe.

L'angle dièdre signé $\angle \Pi_1 \Pi_2$ entre les plans Π_1 et Π_2 est alors :

$$\angle \Pi_1 \Pi_2 := \angle n_1 n_2$$

Dans la définition de l'angle dièdre entre deux plans Π_1 et Π_2 , le choix de u est sans importance. En effet, si l'on remplace u par $-u$, alors n_1 et n_2 sont remplacés par $-n_1$ et $-n_2$ respectivement. Ainsi $\angle n_1 n_2$ reste inchangé.

Formule de Schläfli

Définition 6.3.6 (Famille à un paramètre de polyèdres localement $\mathbb{E}^{1,2}$).

Une famille à un paramètre de polyèdres localement $\mathbb{E}^{1,2}$ est la donnée d'un complexe simplicial $\mathcal{K}$ et d'une application $\psi : [0, 1] \times \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{E}^{1,2}$ tels que

- (a) pour tout simplexe P de $\mathcal{K}$, $\psi|_P$ est injectif et $\psi(P)$ est un polyèdre de $\mathbb{E}^{1,2}$;
- (b) pour tout $t \in [0, 1]$, l'application $\psi(t, \cdot)|_{\mathcal{K}}$ est un homéomorphisme local ;
- (c) pour tout $x \in \mathcal{K}$, l'application $\psi(\cdot, x)$ est $\mathcal{C}^1$.

Soit $(\mathcal{K}, \psi)$ une famille à un paramètre de polyèdres de Minkowski. Si e est une arête de $\mathcal{K}$, alors pour tout $t \in [0, 1]$, on note $l_{e,t} \geq 0$ la longueur du segment $\psi(e, t) \subset \mathbb{E}^{1,2}$ et $\theta_{e,t}$ la somme des angles dièdres entre les faces des simplexes de $\mathcal{K}$ d'arête e .

Théorème 31 (Formule de Schläfli dans $\mathbb{E}^{1,2}$ [Sou04]).

Soit $(\mathcal{K}, \psi)$ une famille à un paramètre de polyèdres de Minkowski dont aucune des faces ni arêtes n'est isotrope. En notant $\mathcal{A}$ l'ensemble des arêtes de $\mathcal{K}$, on a

$$\sum_{e \in \mathcal{A}} l_{e,t} \frac{d\theta_{e,t}}{dt} = 0.$$

6.3.2 Définition et différentielle des fonctionnelles d'Einstein-Hilbert

La fonctionnelle que nous définissons est plus naturelle sur le domaine des racines carrés des temps admissibles, nous posons donc

$$\mathcal{P}_\Sigma^{1/2} := \{(\sqrt{\tau_x})_{x \in S} : \tau \in \mathcal{P}_\Sigma\}.$$

Les éléments de $\mathcal{P}_\Sigma^{1/2}$ seront systématiquement notés h comme hauteur et les éléments de $\mathcal{P}_\Sigma$ seront toujours notés τ . Le passage de l'un à l'autre étant simples, nous étendons les définitions $M(\tau)$, $\mathcal{T}_\tau$ etc, à $h \in \mathcal{P}_\Sigma^{1/2}$ de sorte que $M(h)$ désignera $M(\tau)$ avec $\tau : x \mapsto h(x)^2$. On rappelle que l'on note $\kappa_\sigma : \mathcal{P}_\Sigma \rightarrow \mathbb{R}_+$ l'application qui à τ associe l'angle de la singularité de $M(\tau)$ passant par $\iota(\sigma)$.

Définition 6.3.7 (Fonctionnelle d'Einstein-Hilbert).

Soit $\bar{\kappa} \in \mathbb{R}_+^S$. Pour $h \in \mathcal{P}_\Sigma^{1/2}$, on note $(\mathcal{T}_h, \mathcal{A}_h)$ la triangulation τ -Delaunay avec $\tau = h^2$; pour $e \in \mathcal{A}_h$, on note alors l_e et θ_e la longueur de e et l'angle dièdre autour de e respectivement.

On définit alors la fonctionnelle d'Einstein-Hilbert de Σ comme suit :

$$\mathcal{H}_{\bar{\kappa}} : \begin{cases} \mathcal{P}_\Sigma & \longrightarrow \mathbb{R} \\ h & \longmapsto \sum_{\sigma \in S} h_\sigma (\kappa_\sigma - \bar{\kappa}_\sigma) + \sum_{e \in \mathcal{A}_\tau} l_e \theta_e \end{cases}.$$

Proposition 6.3.8. Supposons que les angles coniques de la surface (Σ, S) sont tous plus grand que $\pi/2$ et considérons $\bar{\kappa} \in \mathbb{R}_+^S$.

Alors, $\mathcal{H}_{\bar{\kappa}}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{P}_\Sigma^{1/2}$ et

$$d\mathcal{H}_{\bar{\kappa}} = \sum_{\sigma \in S} (\kappa_\sigma - \bar{\kappa}_\sigma) dh_\sigma$$

Démonstration. $\mathcal{P}_\Sigma$ peut être décomposé en une union finie de domaines convexes $(P_i)_{i \in [1, n]}$ tel que $\tau \mapsto (\mathcal{T}_\tau, \mathcal{A}_\tau)$ est constante sur P_i . On note $P_i^{1/2} := \{\sqrt{\tau} : \tau \in P_i\}$ pour $i \in [1, n]$ de sorte que

$$\mathcal{P}_\Sigma^{1/2} = \bigcup_{i=1}^n P_i^{1/2}.$$

Pour tout $i \in [1, n]$, les fonctions $h \mapsto \kappa$ et $h \mapsto \theta$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intérieur de $P_i^{1/2}$ et continues sur $P_i^{1/2}$, donc $\mathcal{H}_{\bar{\kappa}}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ intérieur de chacun de $P_i^{1/2}$ et continue sur chacun des $P_i^{1/2}$. De plus, si h est dans l'intersection de deux domaines $P_i^{1/2}$ et $P_j^{1/2}$, les arêtes e de la triangulation $(\mathcal{T}_i, \mathcal{A}_i)$ du domaine $P_i^{1/2}$ qui ne sont pas dans la triangulation $(\mathcal{T}_j, \mathcal{A}_j)$ de $P_j^{1/2}$ sont inversibles sans changer la valeur du prolongement distance par morceaux de h^2 à Σ , c'est donc que le plongement de la charnière d'axe e est coplanaire et donc que $\theta_e = 0$. Par suite $h \mapsto \sum_{e \in \mathcal{A}_h} l_e \theta_e$ est continue sur $\mathcal{P}_\Sigma^{1/2}$.

On considère la famille à paramètres $(Q_h)_{h \in \mathcal{P}_\Sigma^{1/2}}$ formée des polyèdres obtenus en prenant le passé de la surface de Cauchy $\iota(\Sigma) \subset M(h)$. C'est un polyèdre compact localement Minkowski et on note $\mathcal{K}_h$ le complexe simplicial sous-jacent à Q_h .

D'une part, comme la triangulation $\mathcal{T}_h$ ne dépend pas de h sur $\mathcal{P}_i^{1/2}$, le complexe simplicial $\mathcal{K}$ sous-jacent à Q_h est constant sur $\mathcal{P}_i$; d'autre part, sur l'intérieur de $P_i^{1/2}$, aucun des h_σ n'est nul et donc tous les faces et arêtes du complexe simplicial $\mathcal{K}$ sont non-dégénérées; on peut alors appliquer la formule de Schläfli. On remarque que les arêtes du complexe simplicial sous-jacent à Q_h sont de deux types : celles de type espaces sont paramétrées par $\mathcal{A}_h$ et celles de type temps par S . La formule de Schläfli donne donc sur l'intérieur des $P_i^{1/2}$:

$$\sum_{\sigma \in S} h_\sigma d\kappa_\sigma + \sum_{e \in \mathcal{A}_h} l_e d\theta_e = 0.$$

Par suite, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, sur l'intérieur de $P_i^{1/2}$, on a :

$$d\mathcal{H}_{\bar{\kappa}} = \sum_{\sigma \in S} (\kappa_{\sigma} - \bar{\kappa}_{\sigma}) dh_{\sigma} + \sum_{\sigma \in S} h_{\sigma} d\kappa_{\sigma} + \sum_{e \in \mathcal{A}_h} l_e d\theta_e \quad (6.1)$$

$$= \sum_{\sigma \in S} (\kappa_{\sigma} - \bar{\kappa}_{\sigma}) dh_{\sigma} \quad (6.2)$$

Le terme de droite se prolonge par continuité au bord des domaines $P_i^{1/2}$ même si certaines faces ou arêtes sont isotropes. De plus, $h \mapsto \kappa$ est continue sur le domaine $\mathcal{P}_{\Sigma}^{1/2}$, le terme de droite est donc défini et continu sur le domaine $\mathcal{P}_{\Sigma}^{1/2}$. Enfin, l'union des intérieurs des domaines $P_i^{1/2}$ est dense dans $\mathcal{P}_{\Sigma}^{1/2}$. On en déduit donc que la fonction $\mathcal{H}_{\bar{\kappa}}$ est donc continûment différentiable sur $\mathcal{P}_{\Sigma}^{1/2}$ et que

$$d\mathcal{H}_{\bar{\kappa}} = \sum_{\sigma \in S} (\kappa_{\sigma} - \bar{\kappa}_{\sigma}) dh_{\sigma}$$

sur le domaine $\mathcal{P}_{\Sigma}^{1/2}$.

□

6.3.3 Convexité des fonctionnelles d'Einstein-Hilbert

Nous étudions à présent la différentielle seconde de la fonctionnelle d'Einstein-Hilbert. L'objectif est de démontrer la proposition suivante

Proposition 6.3.9. *Notons $(\theta_{\sigma})_{\sigma \in S}$ les angles coniques de la $\mathbb{E}_{>0}^2$ -surface marquée (Σ, S) . Supposons que les angles coniques de la surface (Σ, S) sont tous plus grand que $\pi/2$ et considérons $\bar{\kappa} \in \mathbb{R}_+^S$.*

La fonctionnelle $\mathcal{H}_{\bar{\kappa}}$ est $\mathcal{C}^2$ et sa matrice hessienne est à diagonale dominante. Si de plus, pour tout $\sigma \in S$, $\bar{\kappa}_{\sigma} < \theta_{\sigma}$ alors en un point critique la hessienne de $\mathcal{H}_{\bar{\kappa}}$ est définie positive.

On se donne $\mathcal{T}$ une triangulation de (Σ, S) et on considère le domaine $C_{\mathcal{T}}$ des $h \in \mathcal{P}_{\Sigma}^{1/2}$ tels que $\mathcal{T}_h = \mathcal{T}$. Comme $\mathcal{P}_{\Sigma}^{1,2}$ est l'union d'un nombre fini de tels domaines et que $\mathcal{P}_{\Sigma}^{1/2}$ est d'intérieur non vide, on peut supposer $C_{\mathcal{T}}$ d'intérieur non vide.

Pour $h \in C_{\mathcal{T}}$, le passé du plongement de Σ dans $M(h)$ est un polyèdre localement Minkowski dont chaque simplexe est une pyramide de $\mathbb{E}^{1,2}$ telle que sur la figure III.3 dont on gardera les notations tout au long de cette sous-section. Si T est un triangle de $\mathcal{T}$ de sommets $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ et si $e = \overrightarrow{\sigma_1 \sigma_2}$ et $e' = \overrightarrow{\sigma_1 \sigma_3}$ sont deux arêtes bordant T , on note : ρ_e **la partie réelle** de l'angle de $\overrightarrow{\sigma_1 \sigma_2}$ à $\overrightarrow{\sigma_1 \sigma_3}$, $\theta_{ee'}$ **la partie réelle** de l'angle de $\overrightarrow{\sigma_1 \sigma_2}$ à $\overrightarrow{\sigma_1 \sigma_3}$ et α_e **la partie réelle** de l'angle du plan $(O\sigma_1\sigma_2)$ au plan $(\sigma_1\sigma_2\sigma_3)$. Dans cette sous-section, les arêtes sont orientées de sorte qu'il faut distinguer α_e et α_{-e} : l'angle α_e est toujours celui à gauche, celui à droite est donc celui désigné par α_{-e} .

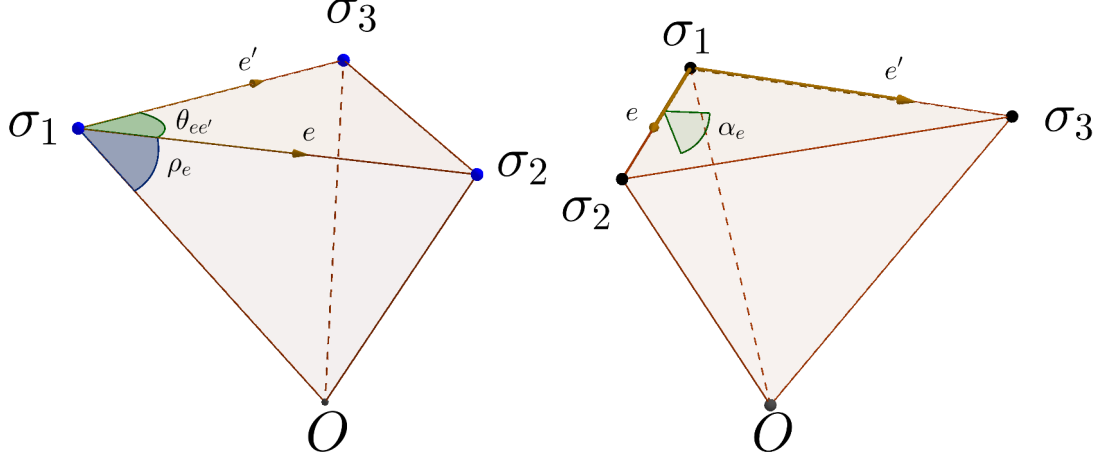
Nous cherchons à trouver des formules les dérivées partielles

$$\frac{\partial \kappa_{\sigma_1}}{\partial h_{\sigma_2}}, \quad \sigma_1, \sigma_2 \in S.$$

Il est clair que s'il n'existe pas d'arête reliant σ_1 à σ_2 , alors cette dérivée est nulle. S'il existe une arête e reliant σ_1 à σ_2 , dans chacune des deux pyramides P_+ et P_- à gauche et à droite de e , nous devons étudier les variations de l'angle dièdre sur l'arête $[O\sigma_1]$ par rapport à h_{σ_2} et h_{σ_1} . Considérons P_+ et reprenons les notations de la figure III.3, l'idée est alors de considérer le quadrilatère de $\mathbb{H}^2$ dont les côtés sont portés par les géodésiques correspondants aux plans $(O\sigma_1\sigma_2)$, $(O\sigma_1\sigma_3)$ d'une part et aux plans passant par O orthogonaux aux droites $(\sigma_1\sigma_2)$ et $(\sigma_1\sigma_3)$, voir figure 6.3.3. On remarque qu'il possède deux angles droits et que les longueurs des côtés correspondent aux des angles $\alpha_e, \alpha_{-e}, \rho_e$ et $\rho_{e'}$, de plus les deux angles non droits sont $\kappa_{ee'}$ et $\pi - \theta_{ee'}$.

Nous avons alors besoin d'utiliser le résultat de géométrie hyperbolique suivant :

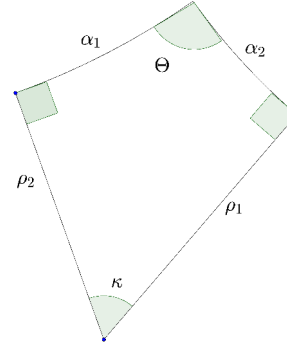
FIGURE III.3 – Simplexe composant le passé du plongement de Σ dans $M(h)$.
 Les angles suivants sont affichés : ρ_e l'angle de $\overrightarrow{\sigma_1 O}$ à $\overrightarrow{\sigma_1 \sigma_2}$, $\theta_{ee'}$ l'angle de $\overrightarrow{\sigma_1 \sigma_2}$ à $\overrightarrow{\sigma_1 \sigma_3}$ et α_e l'angle du plan $(0\sigma_1\sigma_1)$ au plan $(\sigma_1\sigma_2\sigma_3)$.



Proposition 6.3.10 ([Fen89] p90-91).

Soit un cerf-volant tel que sur la figure ci-contre, il est entièrement déterminé à isométrie près par 3 des 6 paramètres $\alpha_1, \alpha_2, \rho_1, \rho_2, \kappa, \Theta$ et :

$$\begin{aligned} \cos(\kappa) &= \frac{\sinh(\rho_1) \sinh(\rho_2) - \cos(\Theta)}{\cosh(\rho_1) \cosh(\rho_2)} \\ \sinh(\rho_2) &= \frac{\cos(\kappa) \sinh(\alpha_1) + \sinh(\alpha_2)}{\sin(\kappa) \cosh(\alpha_1)} \\ \frac{\sin(\kappa)}{\sin(\Theta)} &= \frac{\cosh(\alpha_2)}{\cosh(\rho_2)} = \frac{\cosh(\alpha_1)}{\cosh(\rho_1)}. \end{aligned}$$



Corollaire 6.3.11. Avec les mêmes notations que la proposition 6.3.10, en choisissant comme jeu de paramètre Θ, ρ_1, ρ_2 , on a :

$$\frac{\partial \kappa}{\partial \rho_1} = -\frac{\tanh(\alpha_2)}{\cosh(\rho_1)}.$$

Nous n'avons reproduit sur les figures que des cerfs-volants sans auto-intersection et on voit qu'il y a en fait 16 configurations possibles de cerfs-volants en fonction des signes de $\alpha_1, \alpha_2, \rho_1$ et ρ_2 . Cependant, les formules de la proposition 6.3.10 appliquées à $\alpha_{-e'}, \alpha_e, \rho_e, \rho_{e'}, \kappa_{ee'}$ et $\theta_{ee'}$ ne changent pas (en prenant garde à leur signe au fait que selon la configuration les angles sont κ ou $\pi - \kappa$, $\pi - \theta$ ou θ). Le calcul fait dans la configuration la plus simple est valable dans tous les cas.

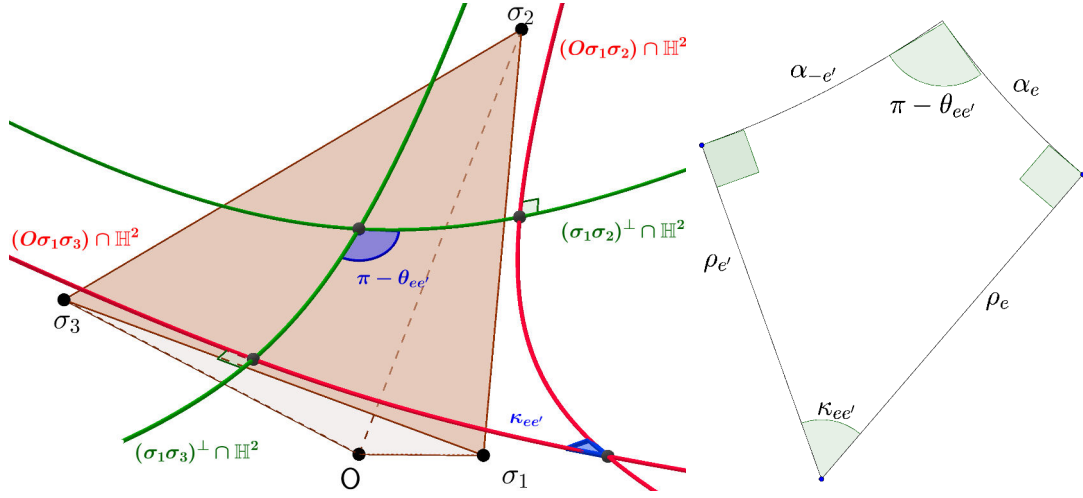
Nous avons également besoin de calculer la dérivée des angles ρ en fonction des hauteurs $(h_\sigma)_{\sigma \in S}$.

Lemme 6.3.12. On reprend les notations de la figure III.3 alors :

$$d\rho_e = -\frac{(h_{\sigma_1}^2 + h_{\sigma_2}^2 + l_e^2)dh_{\sigma_1} - 2h_{\sigma_1}h_{\sigma_2}dh_{\sigma_2}}{2l_e h_{\sigma_1}^2 \cosh(\rho_e)}$$

FIGURE III.4 – Cerf-volant associé à un secteur

On note e l'arête $\overrightarrow{\sigma_1\sigma_2}$ et e' l'arête $\overrightarrow{\sigma_1\sigma_3}$.



Démonstration. D'après la loi du cosinus dans $\mathbb{E}^{1,2}$:

$$\begin{aligned} -h_{\sigma_2}^2 &= -h_{\sigma_1}^2 + l_e^2 - 2l_e h_{\sigma_1} \sinh(\rho_e) \\ \cosh(\rho_e) d\rho_e &= \frac{h_{\sigma_1}(-2h_{\sigma_1}) - (h_{\sigma_2}^2 + l_e^2 - h_{\sigma_1}^2)}{2l_e h_{\sigma_1}^2} dh_{\sigma_1} + \frac{2h_{\sigma_2} h_{\sigma_1}}{2l_e h_{\sigma_1}^2} dh_{\sigma_2} \\ d\rho_e &= -\frac{(h_{\sigma_2}^2 + l_e^2 + h_{\sigma_1}^2) dh_{\sigma_1} - 2h_{\sigma_1} h_{\sigma_2} dh_{\sigma_2}}{2l_e h_{\sigma_1}^2 \cosh(\rho_e)} \end{aligned}$$

□

Proposition 6.3.13. Soient (Σ, S) une $\mathbb{E}_{>\pi/2}^2$ -surface marquée. La fonction κ est $\mathcal{C}^1$ sur le $\mathcal{P}_\Sigma^{1/2}$ et pour tout $h \in \mathcal{P}_\Sigma^{1/2}$ et tout $\sigma \in S$, on a

$$d_h \kappa_\sigma = \sum_{e \in \mathcal{A}_h, e: \sigma \leadsto \sigma'} \frac{\tanh(\alpha_e) + \tanh(\alpha_{-e})}{\cosh^2(\rho_e)} \frac{(h_{\sigma'}^2 + l_e^2 + h_\sigma^2) dh_\sigma - 2h_\sigma h_{\sigma'} dh_{\sigma'}}{2l_e h_\sigma^2}$$

Démonstration. On commence par remarquer que les mêmes arguments montrant la continuité de $\mathcal{H}_{\tilde{\kappa}}$ montrent la continuité du terme de droite sur $\mathcal{P}_\Sigma^{1/2}$. Il suffit donc de démontrer l'égalité sur l'intérieur des domaines $C_{\mathcal{T}} := \{h \in \mathcal{P}_\Sigma^{1/2} \mid \mathcal{T}_h = \mathcal{T}\}$.

Soit un tel domaine $C_{\mathcal{T}}$ d'intérieur non vide, on note $\mathcal{A}$ l'ensemble des arêtes de $\mathcal{T}$. Soient $\sigma \in S$ et $h \in C_{\mathcal{T}}$, on note $(e_i)_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$ la famille des arêtes sortantes de σ en suivant l'orientation de Σ . On pose $\sigma_i \in S$ l'extrémité finale de e_i de sorte que l'on ait :

$$\begin{aligned}
 d_h \kappa_\sigma &= \sum_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} d_h \kappa_{e_i e_{i+1}} \\
 &= \sum_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \left(-\frac{\tanh(\alpha_{e_i})}{\cosh(\rho_{e_i})} d\rho_{e_i} - \frac{\tanh(\alpha_{-e_{i+1}})}{\cosh(\rho_{e_{i+1}})} d\rho_{e_{i+1}} \right) \\
 &= - \sum_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \left(\frac{\tanh(\alpha_{e_i})}{\cosh(\rho_{e_i})} + \frac{\tanh(\alpha_{-e_i})}{\cosh(\rho_{e_i})} \right) d\rho_{e_i} \\
 &= - \sum_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \frac{\tanh(\alpha_{e_i}) + \tanh(\alpha_{-e_i})}{\cosh(\rho_{e_i})} d\rho_{e_i} \\
 &= \sum_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \frac{\tanh(\alpha_{e_i}) + \tanh(\alpha_{-e_i})}{\cosh(\rho_{e_i})} \frac{(h_\sigma^2 + h_{\sigma_i}^2 + l_e^2) dh_\sigma - 2h_\sigma h_{\sigma_i} dh_{\sigma_i}}{2l_e h_\sigma^2 \cosh(\rho_e)} \\
 &= \sum_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \frac{\tanh(\alpha_{e_i}) + \tanh(\alpha_{-e_i})}{\cosh^2(\rho_{e_i})} \frac{(h_\sigma^2 + h_{\sigma_i}^2 + l_e^2) dh_\sigma - 2h_\sigma h_{\sigma_i} dh_{\sigma_i}}{2l_e h_\sigma^2}
 \end{aligned}$$

□

Démonstration de la proposition 6.3.9. D'après les propositions 6.3.8 et 6.3.13, H est de classe $\mathcal{C}^2$ et la matrice Hessienne H de $\mathcal{H}_{\bar{\kappa}}$ s'écrit :

$$\begin{aligned}
 H_{\sigma, \tau} &= - \sum_{e: \sigma \leadsto \tau} \frac{\tanh(\alpha_e) + \tanh(\alpha_{-e})}{\cosh^2(\rho_e)} \frac{2h_\sigma h_\tau}{2l_e h_\sigma^2} \quad \forall \sigma, \tau \in S, \sigma \neq \tau \\
 H_{\sigma, \sigma} &= \sum_{\tau \in S} \sum_{e: \sigma \leadsto \tau} \frac{\tanh(\alpha_e) + \tanh(\alpha_{-e})}{\cosh^2(\rho_e)} \frac{h_\sigma^2 + h_\tau^2 + l_e^2}{2l_e h_\sigma^2} \quad \forall \sigma \in S \\
 &\quad - \sum_{e: \sigma \leadsto \sigma} \frac{\tanh(\alpha_e) + \tanh(\alpha_{-e})}{\cosh^2(\rho_e)} \frac{2h_\sigma h_\sigma}{2l_e h_\sigma^2}
 \end{aligned}$$

Comme le plongement de Σ dans $M(h)$ est convexe, $\tanh(\alpha_e) + \tanh(\alpha_{-e}) \geq 0$. Par suite, pour tout $\sigma \in S$:

$$\begin{aligned}
 H_{\sigma, \sigma} - \sum_{\tau \neq \sigma} |H_{\sigma, \tau}| &\geq \sum_{\tau \in S} \sum_{e: \sigma \leadsto \tau} \frac{\tanh(\alpha_e) + \tanh(\alpha_{-e})}{\cosh^2(\rho_e)} \frac{h_\tau^2 + l_e^2 + h_\sigma^2 - 2h_\sigma h_\tau}{2l_e h_\sigma^2} \\
 &= \sum_{\tau \in S} \sum_{e: \sigma \leadsto \tau} \frac{\tanh(\alpha_e) + \tanh(\alpha_{-e})}{\cosh^2(\rho_e)} \frac{(h_\tau - h_\sigma)^2 + l_e^2}{2l_e h_\sigma^2} \\
 &\geq 0.
 \end{aligned}$$

La hessienne de $\mathcal{H}_{\bar{\kappa}}$ est donc à diagonale dominante.

Supposons à présent $\forall \sigma \in S, \theta_\sigma > \bar{\kappa}_\sigma$. Soit $\sigma \in S$, le terme $H_{\sigma, \sigma} - \sum_{\tau \neq \sigma} |H_{\sigma, \tau}| = 0$ si et seulement si $\tanh(\alpha_e) + \tanh(\alpha_{-e}) = 0$ pour toutes les arêtes sortantes de σ . Notons $\iota : \Sigma \rightarrow M(h)$ le plongement induit par un h tel que $H_{\sigma, \sigma} - \sum_{\tau \neq \sigma} |H_{\sigma, \tau}| = 0$. Tous les angles dièdres autour de $\iota(\sigma)$ dans $\iota(\Sigma)$ sont nuls. C'est-à-dire que $\iota(\Sigma)$ est totalement géodésique autour de la particule massive de $M(h)$ passant par $\iota(\sigma)$. Le lemme 6.4.11 de la section suivante montre que cela n'est possible que si $\theta_\sigma = \kappa_\sigma$. En particulier

$$(\text{grad}_h \mathcal{H}_{\bar{\kappa}})_\sigma = \bar{\kappa}_\sigma - \kappa_\sigma \quad (6.3)$$

$$= \bar{\kappa}_\sigma - \theta_\sigma \quad (6.4)$$

$$< 0 \quad (6.5)$$

Ainsi, en un point critique de $\mathcal{H}_{\bar{\kappa}}$,

$$\forall \sigma \in S, \quad H_{\sigma, \sigma} - \sum_{\tau \neq \sigma} |H_{\sigma, \tau}| \neq 0.$$

Finalement, en un point critique de $\mathcal{H}_{\bar{\kappa}}$, la hessienne est à diagonale strictement dominante.

□

6.4 Bord du domaine des temps admissibles

6.4.1 Plans d'appui du domaine des temps admissibles

Dans cette section, on suppose systématiquement que les angles coniques de la surface (Σ, S) sont tous supérieurs à $\pi/2$.

Lemme 6.4.1. *Si $\tau \in \partial\mathcal{P}_\Sigma$ alors l'une des assertions suivantes est vérifiées :*

- (a) *il existe $\sigma \in S$ tel que $\tau(\sigma) = 0$;*
- (b) *il existe $\sigma \in S$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$, $\tau + \varepsilon \mathbb{1}_\sigma \notin \mathcal{P}_\Sigma$ avec $\mathbb{1}_\sigma$ la fonction caractéristique du singleton $\{\sigma\}$.*

Démonstration. Supposons $\tau > 0$ et supposons que pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $\sigma \in S$, $\tau + \varepsilon \mathbb{1}_\sigma \in \mathcal{P}_\Sigma$. On se donne alors pour tout $\sigma \in S$, $\varepsilon_\sigma > 0$ tel que $\tau + \varepsilon_\sigma \mathbb{1}_\sigma \in \mathcal{P}_\Sigma$ et posons $\varepsilon := \frac{1}{2} \min \tau > 0$. D'après le lemme 6.2.6, $\tau - \varepsilon \mathbb{1}_S \in \mathcal{P}_\Sigma$. On observe alors que τ est dans l'intérieur de l'enveloppe convexe de $\{\tau + \varepsilon_\sigma \mathbb{1}_\sigma : \sigma \in S\} \cup \{\tau - \varepsilon \mathbb{1}_S\}$, or $\mathcal{P}_\Sigma$ est convexe et donc τ est dans l'intérieur de $\mathcal{P}_\Sigma$. $\square$

Lemme 6.4.2. *Les plans d'appui de $\mathcal{P}_\Sigma$ qui ne sont pas de la forme $\Pi_\sigma : \tau_\sigma = 0$, sont de la forme $Q^* = 0$ avec (Q, ι) charnière immergée non-inversible.*

Démonstration. $\mathcal{P}_\Sigma$ est un polyèdre convexe de $\mathbb{R}_+^S$ qui est une union finie de polyèdre de la forme $C_{\mathcal{T}} := \cap_{Q \in \mathcal{T}} (Q^*)^{-1}(\mathbb{R}_-)$ où Q parcourt les charnières d'une triangulation donnée $\mathcal{T}$. Considérons une face de $\mathcal{P}_\Sigma$, prenons un $\tau \in \mathcal{P}_\Sigma$ à l'intérieur de cette face et une charnière immergée (Q, ι) de $\mathcal{T}$ telle que $Q^* = 0$ est l'unique plan d'appui à $\mathcal{P}_\Sigma$ en τ . Supposons (Q, ι) inversible, notons $Q = ([ABCD], [AC])$ et Q' sont inversion. Comme $Q^*(\tau) = 0$ on a également $Q'^*(\tau) = 0$ et donc $Q'^* = 0$ est un autre plan d'appui à $\mathcal{P}_\Sigma$ en τ . Par unicité du plan d'appui en τ , il existe donc $\lambda > 0$ tel que $Q^* = \lambda Q'^*$. Or, d'après le lemme 6.2.15, $Q'^* = -Q^*$, c'est absurde. $\square$

Lemme 6.4.3. *Soit $\tau \in \partial\mathcal{P}_\Sigma$. Si $\Pi : Q^* = 0$ est un plan d'appui en τ avec (Q, ι) une charnière immergée et $Q = ([ABCD], [AC])$, alors :*

- *si $C \in [ABD]$, alors la coordonnée $\iota(C)$ de la normale à Π sortant de $\mathcal{P}_\Sigma$ est strictement positive ;*
- *si Q est dégénéré, alors les coordonnées $\iota(A)$ et $\iota(C)$ de la normale à Π sortant de $\mathcal{P}_\Sigma$ sont positives.*

Démonstration. La normale au plan Π sortant de $\mathcal{P}_\Sigma$ est le vecteur dont les coordonnées sont les coefficients de Q^* qui sont donnés dans la définition 6.2.11. Les signes des coefficients sont clairement lié à la convexité du quadrilatère $[ABCD]$. $\square$

Proposition 6.4.4. *Soit $(\Sigma, \mathcal{F}_1, h_1)$ une $\mathbb{E}_{\geq 0}^2$ -surface (Σ, S) -marquée d'angles $\Theta : S \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, alors :*

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \kappa(\tau) = \Theta.$$

Démonstration. Lorsque τ tend vers l'infini, comme $\mathcal{P}_\Sigma$ est transversalement compact, il suffit de montrer cette limite le long des demi-droites $\tau_\lambda := \tau + \lambda \mathbb{1}$, $\lambda > 0$. Le long d'une telle demi-droite, la triangulation τ_λ -Delaunay est toujours la même, on considère alors $\mathcal{T}$ la triangulation de τ -Delaunay. Soit T un triangle de $\mathcal{T}$, la pyramide associée à T est de plus en plus allongée à mesure que λ tend vers l'infini et donc le cône issu de T se rapproche de l'espace-temps stationnaire $\mathbb{R} \times T$ muni de la métrique $-dt^2 + ds_T^2$. Les angles dièdres entre les faces de type temps tendent alors vers ceux de cet espace-temps stationnaire. Ceux-ci sont égaux aux angles de euclidiens du triangle T . Par suite κ tend vers Θ . $\square$

6.4.2 Germes de cônes lorentziens

L'étude menée dans la sous-section précédente est incomplète pour achever l'étude de la fonctionnelle d'Einstein-Hilbert. En effet, si nous avons une caractérisation du bord, celle-ci ne nous permet pas de conclure que le gradient de $\mathcal{H}_{\bar{\kappa}}$ pointe « vers l'extérieur » du domaine. Nous ne sommes pas capable de démontrer un résultat aussi fort mais nous démontrons la proposition suivante qui est un corollaire du théorème 32 et de la proposition 6.4.10 :

Proposition 6.4.5. *Soient $\Theta > 2\pi$ et $\kappa > 0$. S'il existe un cône convexe de $\mathbb{E}_{\kappa}^{1,2}$ d'angle conique Θ , de sommet sur la droite singulière de $\mathbb{E}_{\kappa}^{1,2}$ et admettant un secteur coplanaire d'angle au moins π alors $\kappa > 2\pi$.*

Corollaire 6.4.6. *Soit $(\Sigma, \mathcal{F}_1, h_1)$ une $\mathbb{E}_{>2\pi}^2$ -surface (Σ, S) -marquée et soit $h \in \partial \mathcal{P}_{\Sigma}^{1/2}$. Si $h > 0$ alors il existe $\sigma \in S$ tel que $\kappa_{\sigma}(h) > 2\pi$.*

Corollaire 6.4.7. *Soient $(\Sigma, \mathcal{F}_1, h_1)$ une $\mathbb{E}_{>2\pi}^2$ -surface (Σ, S) -marquée, $\bar{\kappa} \in [0, 2\pi]^S$ et $h \in \partial \mathcal{P}_{\Sigma}^{1/2}$. Si $h > 0$ alors $\overrightarrow{\text{grad}} \mathcal{H}_{\bar{\kappa}}$ a une coordonnée strictement positive.*

On rappelle (définition 2.2.1) que la métrique en coordonnées cylindriques (t, r, θ) autour d'une particule massive d'angle κ s'écrit :

$$-dt^2 + dr^2 + \left(\frac{\kappa}{2\pi}\right)^2 r^2 d\theta^2.$$

On rappelle également que la sphère unité de $\mathbb{E}_{\kappa}^{1,2}$ est la surface

$$\mathbb{S}_{\kappa}^{1,1} := \{r^2 - t^2 = 1\}.$$

Définition 6.4.8 (Germe d'un cône de $\mathbb{E}^{1,2}$). *Soient $\kappa > 0$, $\Theta > 0$ et $\mathcal{C}$ un cône de $\mathbb{E}_{\kappa}^{1,2}$ d'angle conique Θ de classe $\mathcal{C}_{pm}^2$. On suppose que le sommet de $\mathcal{C}$ est situé sur la droite singulière de $\mathbb{E}_{\kappa}^{1,2}$. Dans le système de coordonnées cylindriques (r, θ, t) , l'ensemble $\mathbb{S}_{\kappa}^{1,1} \cap \mathcal{C}$ peut être paramétré par longueur d'arc*

$$\mathcal{C} \cap \mathbb{S}_{\kappa}^{1,1} = \left\{ \begin{pmatrix} t(s) \\ r(s) \\ \theta(s) \end{pmatrix} : s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Le germe $\rho_{\mathcal{C}}$ de $\mathcal{C}$ est la coordonnée $t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de ce paramétrage.

Remarque 6.4.9. *Le germe ρ d'un cône est unique modulo composition à droite par une application de la forme $s \mapsto \pm s + c$ avec $c \in \mathbb{R}$.*

Proposition 6.4.10. *Soient $\kappa > 0$, $\Theta > 0$ et $\mathcal{C}$ un cône convexe polyédral de $\mathbb{E}_{\kappa}^{1,2}$ d'angle conique Θ et dont le sommet est dans $\text{Sing}(\mathbb{E}_{\kappa}^{1,2})$.*

Soit $\rho := \rho_{\mathcal{C}}$ le germe de $\mathcal{C}$, alors

- (i) $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est Θ -périodique continue et $\mathcal{C}_{pm}^{\infty}$;
- (ii) ρ est trigonométrique par morceaux c'est-à-dire de la forme $\theta \mapsto A \sin(\theta + \varphi)$ par morceau ;
- (iii) ρ est Q -convexe ;
- (iv) $\kappa = \int_0^{\Theta} \frac{\sqrt{1 + \rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2}}{1 + \rho(\theta)^2} d\theta$.

Démonstration. L'intersection du cône $\mathcal{C}$ avec $\mathbb{S}_{\kappa}^{1,1}$ est paramétré par longueur d'arc par $s \mapsto c(s) = (\rho(s), r(s), \theta(s))$ et, quitte à inverser le sens de parcours de $\mathcal{C} \cap \mathbb{S}_{\kappa}^{1,1}$, on peut supposer la fonction θ croissante.

$\mathcal{C} \cap \mathbb{S}_{\kappa}^{1,1}$ est un cercle topologique $\mathcal{C}_{pm}^{\infty}$ de longueur Θ et c en est un paramétrage par longueur d'arc. On en déduit le premier point.

Le second s'obtient en calculant le germe d'un plan dans $\mathbb{E}^{1,2}$ et le point (iii) s'obtient en comparant ρ à un plan tangent.

Enfin, pour obtenir le dernier point on commence par remarquer les relations suivantes :

$$2\pi = \int_0^\Theta \theta'(s) ds, \quad r^2 - \rho^2 = 1, \quad -(\rho')^2 + (r')^2 + \left(\frac{\kappa}{2\pi}\right)^2 r^2 (\theta')^2 = 1.$$

On en déduit $rr' = \rho\rho'$ et

$$\begin{aligned} (\theta')^2 &= \left(\frac{2\pi}{\kappa}\right)^2 \frac{1 + (\rho')^2 - (r')^2}{r^2} \\ &= \left(\frac{2\pi}{\kappa}\right)^2 \frac{1 + (\rho')^2 - \left(\frac{\rho\rho'}{r}\right)^2}{1 + \rho^2} \\ &= \left(\frac{2\pi}{\kappa}\right)^2 \frac{(1 + (\rho')^2)(1 + \rho^2) - \rho^2(\rho')^2}{(1 + \rho^2)^2} \\ (\theta')^2 &= \left(\frac{2\pi}{\kappa}\right)^2 \frac{1 + (\rho')^2 + \rho^2}{(1 + \rho^2)^2} \\ \theta' &= \frac{2\pi}{\kappa} \frac{\sqrt{1 + (\rho')^2 + \rho^2}}{1 + \rho^2}. \end{aligned}$$

En injectant la dernière ligne dans $2\pi = \int_0^\Theta \theta'$ on obtient le résultat. □

Lemme 6.4.11. Soient $\kappa > 0$, $\Theta > 0$ et $\mathcal{C}$ un cône polyédral de $\mathbb{E}_\kappa^{1,2}$ d'angle conique Θ .

Si le germe ρ de $\mathcal{C}$ est trigonométrique de classe $\mathcal{C}^1$ alors $\kappa = \Theta$.

Démonstration. Si $\rho = 0$, c'est une conséquence directe du point (iv) de la proposition 6.4.10. Sinon, comme ρ est trigonométrique non nul, la plus petite période de ρ est 2π . Or Θ est une période de ρ donc Θ est un multiple de 2π . De plus, en notant $\rho : \theta \mapsto \sinh(\alpha) \sin(\theta + \varphi)$ et $\Theta = 2k\pi$, on vérifie aisément que

$$\kappa = \int_0^\Theta \frac{\sqrt{1 + \rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2}}{1 + \rho(\theta)^2} d\theta = \int_0^{2k\pi} \frac{\cosh(\alpha)}{1 + \sinh(\alpha)^2 \sin^2(\theta)} d\theta = 2k\pi = \Theta.$$

□

Remarque 6.4.12. Soit $\rho : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue de classe $\mathcal{C}_{pm}^1$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) ρ est Q -convexe ;
- (ii) $s \mapsto \rho(-s)$ est Q -convexe.

Définition 6.4.13 (Angle hyperbolique associé à une courbe Q -convexe).

- Soit $\rho : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ trigonométrique par morceaux et Q -convexe, on pose

$$\kappa(\rho) := \int_a^b \frac{\sqrt{1 + \rho^2 + \rho'^2}}{1 + \rho^2}$$

- Soit $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ trigonométrique par morceaux, Q -convexe et Θ -périodique, on pose

$$\kappa(\rho) := \int_0^\Theta \frac{\sqrt{1 + \rho^2 + \rho'^2}}{1 + \rho^2}$$

Remarque 6.4.14. Toute fonction $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ trigonométrique par morceaux Q -convexe et Θ -périodique induit un plongement polyédral convexe de $\mathbb{E}_\Theta^2$ dans $\mathbb{E}_{\kappa(\rho)}^{1,2}$. De plus ce plongement est essentiellement unique : d'après le point (iv) de la proposition 6.4.10, l'angle κ est donné par la fonction ρ , on peut alors remarquer que deux cônes de $\mathbb{E}_{\kappa}^{1,2}$ donnant lieu à un même germe (modulo composition à droite par une application de la forme $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, s \mapsto \pm s + c$) diffèrent d'une rotation autour de la droite $\{r = 0\}$ de $\mathbb{E}_{\kappa}^{1,2}$.

Les deux lemmes suivants transcrivent l'intuition géométrique de la convexité des cônes en terme de leur germe.

Lemme 6.4.15. Soit $\rho : I \rightarrow \mathbb{R}$ trigonométrique par morceaux Q -convexe et soit $\theta_0 \in I$. Soient α et ϕ tels que

$$\begin{cases} \rho(\theta_0) &= \sinh(\alpha) \sin(\theta_0 - \phi) \\ \rho'(\theta_0^-) &= \sinh(\alpha) \cos(\theta_0 - \phi) \end{cases}$$

Alors pour tout $\theta \in I \cap [\theta_0, \theta_0 + \pi]$

$$\rho(\theta) \geq \sinh(\alpha) \sin(\theta - \phi)$$

Démonstration. Soit $(\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n = \theta_0 + \pi)$ une subdivision adaptées à ρ . Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on pose $\rho_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'unique fonction trigonométrique telle que $\rho_k|_{[\theta_{k-1}, \theta_k]} = \rho|_{[\theta_{k-1}, \theta_k]}$ et on pose $\rho_0 = \sinh(\alpha) \sin(\cdot - \phi)$.

Montrons $\rho_k(\theta_0) \leq \rho_{k+1}(\theta_0)$ sur les intervalles $[\theta_k, \theta_k + \pi]$. Soit $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on a $\rho_k(\theta_k) = \rho_{k+1}(\theta_k)$. Si $\rho'_k(\theta_k) = \rho'_{k+1}(\theta_k)$ alors $\rho_k = \rho_{k+1}$. Sinon, $\rho'_k(\theta_k) < \rho'_{k+1}(\theta_k)$ et donc $\rho_k < \rho_{k+1}$ sur un intervalle non trivial $[\theta_k, \theta_k + \varepsilon]$, ces deux fonctions trigonométriques sont en particulier différentes et s'intersectent sur l'ensemble $\theta_k + \pi\mathbb{Z}$. Ainsi $\rho_k - \rho_{k+1}$ est de signe constant sur l'intervalle $[\theta_k, \theta_k + \pi]$ et donc $\rho_k \leq \rho_{k+1}$ sur $[\theta_k, \theta_k + \pi]$.

Le lemme se déduit alors aisément. □

Corollaire 6.4.16. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $0 < \beta - \alpha \leq \pi$. Soit $\rho : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ trigonométrique par morceau Q -convexe. On pose $\bar{\rho} : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ l'unique fonction trigonométrique telle que $\bar{\rho}(\alpha) = \rho(\alpha)$ et $\bar{\rho}(\beta) = \rho(\beta)$. Alors, $\rho \leq \bar{\rho}$.

6.4.3 Une borne inférieure pour κ

On souhaite démontrer que pour un germe $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Θ -périodique Q -convexe trigonométrique sur un intervalle de longueur π ; si $\Theta > 2\pi$ alors $\kappa(\rho) > 2\pi$. La méthode employée consiste à définir une « distance » entre les optima locaux de ρ qui est liée à $\kappa(\rho)$ (voir définition 6.4.17). Nous montrons ensuite que cette distance donne une minoration pour les fonctions trigonométriques par morceaux Q -convexes strictement croissantes et nous en déduisons la minoration désirée.

Définition 6.4.17. Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $|x| \leq y$, on pose :

$$\kappa_{\min}(x, y) := \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{x\sqrt{1+y^2}}{\sqrt{y^2-x^2}}\right).$$

avec pour convention $\forall x \in \mathbb{R}_+, \kappa_{\min}(x, x) = 0$ et $\kappa_{\min}(-x, x) = \pi$.

Lemme 6.4.18. Pour tout x, y, z tels que $|x| \leq y \leq z$, on a

$$\kappa_{\min}(x, y) + \kappa_{\min}(y, z) \geq \kappa_{\min}(x, z)$$

avec égalité si et seulement si $y = z$ ou $x = y$; de plus,

$$\kappa_{\min}(x, z) + \kappa_{\min}(y, z) \geq \kappa_{\min}(x, y)$$

avec égalité si et seulement si $y = z$ ou $x = -y$.

Démonstration.

- Pour tout $|x| \leq y \leq z$, on pose $f(x, y, z) = \kappa_{\min}(x, y) + \kappa_{\min}(y, z)$.

Si $y = z$ ou $x = y$ on est clairement $f(x, y, z) = \kappa_{\min}(x, z)$; de plus, comme $|x| \leq y$, si $y = 0$ alors $x = 0$ et on retombe alors dans le cas d'égalité. Enfin, si $y = -x$, alors $\kappa_{\min}(x, y) = \pi$; or $\kappa_{\min} \leq \pi$ donc $f(x, y, z) \geq \kappa_{\min}(x, z)$ avec égalité si et seulement si $y = z$.

Supposons alors $|x| < y < z$, on a alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) &= \frac{y}{\sqrt{z^2 + y^2} \sqrt{z^2 + 1}} \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) &> 0 \quad \text{si } y > 0 \end{aligned}$$

Par suite, pour tout x, y, z tels que $|x| \leq y < z$ et $x < y$,

$$\kappa_{\min}(x, y) + \kappa_{\min}(z, y) = f(x, y, z) > f(x, z, z) = \kappa_{\min}(x, z).$$

- Pour tout $|x| \leq y \leq z$, on pose $g(x, y, z) = \kappa_{\min}(x, z) + \kappa_{\min}(y, z)$. On a alors pour $|x| \leq y < z$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) &= \frac{\sqrt{z^2 - y^2}x + \sqrt{z^2 - x^2}y}{\sqrt{y^2 - x^2} \sqrt{z^2 - y^2} \sqrt{z^2 + 1}} \\ \sqrt{z^2 - y^2}x + \sqrt{z^2 - x^2}z &= \frac{(y+x)(y-x)y^2}{\sqrt{z^2 - x^2}y - \sqrt{z^2 - y^2}x} \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout x, y, z tels que $|x| \leq y < z$,

- Si $x \geq 0$, $\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)$ est clairement positif;
- si $x < 0$, la factorisation donnée dans la deuxième ligne montre qu'à nouveau

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \geq 0.$$

Par suite, pour tout x, y, z tels que $|x| \leq y \leq z$,

$$\kappa_{\min}(x, z) + \kappa_{\min}(y, z) = f(x, y, z) \geq f(x, y, y) = \kappa_{\min}(x, y).$$

Le cas d'égalité se traite de la même manière que précédemment.

□

Lemme 6.4.19. Soient $h_0, h_1 \in \mathbb{R}$ avec $h_0 \leq h_1$ et soit $\rho : [\theta_0, \theta_1] \rightarrow [h_0, h_1]$ Q -convexe trigonométrique par morceaux strictement croissante telle que

1. $\rho(\theta_i) = h_i$ pour $i \in \{0, 1\}$
2. $\rho'(\theta_1) = 0$.

En posant $\psi := \rho' \circ \rho^{-1} : [h_0, h_1] \rightarrow \mathbb{R}$ on a

- (a) $\psi(h_1) = 0$
- (b) $\forall h \in [h_0, h_1], \psi(h)\psi'(h) \geq -h$ avec ψ' dérivée de ψ au sens des distributions.
- (c) $\kappa(\rho) = \int_{h_0}^{h_1} \frac{\sqrt{1 + h^2 + \psi(h)^2}}{(1 + h^2)\psi(h)} dh$

Démonstration. Le premier point découle des conditions $\rho'(\theta_1) = 0$ et $\rho(\theta_1) = h_1$. Le second point s'obtient en dérivant $\rho' \circ \rho^{-1}$ et en utilisant la condition de Q-convexité de ρ . Le troisième point s'obtient par le changement de variable $d\theta = \frac{d\rho}{\rho'}$. $\square$

Lemme 6.4.20. Soient $h_0, h_1 \in \mathbb{R}$ avec $|h_0| \leq h_1$.

Si $\rho : [\theta_0, \theta_1] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction trigonométrique par morceaux continue Q-convexe **strictement croissante** telle que

1. $\rho(\theta_i) = h_i$ pour $i \in \{0, 1\}$
2. $\rho'(\theta_1) = 0$;

alors

$$\kappa(\rho) \geq \kappa_{\min}(h_0, h_1)$$

avec égalité si et seulement si ρ est trigonométrique.

Démonstration.

- On commence par poser $\phi = \theta_0 - \arcsin(h_0/h_1)$ de sorte l'application $\theta \mapsto h_1 \sin(\theta - \phi)$ est trigonométrique, strictement croissante sur l'intervalle $[\theta_0, \phi + \pi/2]$ et a pour valeurs h_0 et h_1 aux bornes de cet intervalle. On pose alors :

$$\begin{aligned} \phi &= \theta_0 - \arcsin(h_0/h_1), \\ \tilde{\theta}_1 &= \phi + \pi/2, \end{aligned}$$

et

$$\tilde{\rho} : \begin{array}{l|l} [\theta_0, \tilde{\theta}_1] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ \theta & \longmapsto h_1 \sin(\theta - \phi) \end{array}$$

de sorte que

$$\kappa(\tilde{\rho}) = \kappa_{\min}(h_0, h_1) = \begin{cases} 0 & \text{Si } h_1 = h_0 \\ \pi & \text{Si } h_1 = -h_0 \\ \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{h_0 \sqrt{1+h_1^2}}{\sqrt{h_1^2 - h_0^2}}\right) & \text{Si } h_1 > |h_0| \end{cases}$$

- On pose $\psi = \rho' \circ \rho^{-1}$ telle que dans le lemme 6.4.19 et $\tilde{\psi} = (\tilde{\rho})' \circ (\tilde{\rho})^{-1}$, pour tout $h \in [h_0, h_1]$, on a :

$$\tilde{\psi}(h)(\tilde{\psi})'(h) = -h \leq \psi(h)\psi'(h).$$

Or $\psi(h_1) = \tilde{\psi}(h_1) = 0$, donc pour tout $h \in [h_0, h_1]$,

$$\psi^2(h) \leq (\tilde{\psi})^2(h)$$

avec égalité si et seulement si $\psi|_{[h_0, h]} = \tilde{\psi}|_{[h_0, h]}$.

Et donc :

$$\begin{aligned} \kappa(\rho) &= \int_{h_0}^{h_1} \frac{\sqrt{1+h^2+\psi^2(h)}}{(1+h^2)\psi(h)} dh \\ &= \int_{h_0}^{h_1} \frac{\sqrt{\frac{1+h^2}{\psi(h)^2} + 1}}{1+h^2} dh \\ &\geq \int_{h_0}^{h_1} \frac{\sqrt{\frac{1+h^2}{\tilde{\psi}(h)^2} + 1}}{1+h^2} dh \\ &= \kappa(\tilde{\rho}) \\ &= \kappa_{\min}(h_0, h_1) \end{aligned}$$

avec égalité si et seulement si $\psi = \tilde{\psi}$. Or $\rho(\theta_0) = \tilde{\rho}(\theta_0)$ donc $\psi = \tilde{\psi}$ si et seulement si $\rho = \tilde{\rho}$. Finalement,

$$\kappa(\rho) \geq \kappa_{\min}(h_0, h_1)$$

avec égalité si et seulement si ρ est trigonométrique.

□

Remarque 6.4.21. Nous aurions pu démontrer le lemme 6.4.20 sans utiliser le lemme 6.4.19 en découpant ρ sur des intervalles où elle est trigonométrique et en appliquant un calcul direct comparable à celui de la démonstration du lemme 6.4.18. Cela nous semble plus laborieux et moins élégant que la méthode présentée. Par ailleurs, la méthode choisie a l'avantage d'être plus facilement généralisable aux cônes convexes non nécessairement polyédraux.

Nous souhaitons éliminer l'hypothèse « technique » de stricte croissance du lemme 6.4.20. Nous avons besoin pour cela d'extraire des sous-fonctions Q-convexes.

Définition 6.4.22 (Extractrice). Soit $\rho : [\theta_0, \theta_1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction trigonométrique par morceaux continue Q-convexe.

Une extractrice pour ρ est une famille d'intervalles $(I_i)_{i \in \llbracket 1, N \rrbracket}$ chacun d'intérieur non vide et inclus dans $[\theta_0, \theta_1]$, tels que pour tout $i \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$, on ait

$$(i) \quad \theta_1^{(i)} \leq \theta_0^{(i+1)},$$

$$(ii) \quad \rho(\theta_1^{(i)}) = \rho(\theta_0^{(i+1)}),$$

$$(iii) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^-} \rho'(\theta_1^{(i)} + \varepsilon) \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \rho'(\theta_0^{(i+1)} + \varepsilon).$$

et où l'on a posé $\theta_0^{(i)} = \min I_i$ et $\theta_1^{(i)} = \max I_i$,

Définition 6.4.23 (Sous-fonction extraite). Soit $\rho : [\theta_0, \theta_1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction trigonométrique par morceaux continue Q-convexe et soit $(I_i)_{i \in \llbracket 0, N \rrbracket}$ une extractrice pour ρ . En posant

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_0 &= \theta_0^{(0)}, \\ \bar{\theta}_n &= \bar{\theta}_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (\theta_1^{(k)} - \theta_0^{(k)}) \quad \forall n \in \llbracket 1, N+1 \rrbracket; \end{aligned}$$

la sous-fonction de ρ induite par l'extractrice $(I_i)_{i \in \llbracket 0, N \rrbracket}$ est la fonction

$$\bar{\rho} : \begin{cases} [\bar{\theta}_0, \bar{\theta}_{N+1}] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ \theta & \longmapsto \rho(\theta - \bar{\theta}_k + \theta_0^{(k)}) \quad \text{si } \theta \in [\bar{\theta}_k, \bar{\theta}_{k+1}] \end{cases}.$$

Propriété 6.4.24. Soit $\rho : [\theta_0, \theta_1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction trigonométrique par morceaux continue Q-convexe et soit $(I_i)_{i \in \llbracket 0, N \rrbracket}$ une extractrice pour ρ .

La sous-fonction $\bar{\rho}$ de ρ induite par $(I_i)_{i \in \llbracket 1, N \rrbracket}$ est trigonométrique par morceaux continue et Q-convexe. De plus

$$\kappa(\rho) \geq \kappa(\bar{\rho})$$

avec égalité si et seulement si $\bar{\rho} = \rho$.

Démonstration. $\bar{\rho}$ est trigonométrique par morceaux car ρ est trigonométrique par morceaux, la continuité est assurée par la condition (ii) et la Q-convexité par la condition (iii).

La condition (i) assure que $\bar{\rho}$ ne contient pas deux copies d'un même morceau de ρ , d'où $\kappa(\rho) \geq \kappa(\bar{\rho})$. De plus, il y a égalité si et seulement si les intervalles I_i recouvrent $[\theta_0, \theta_1]$, c'est-à-dire si et seulement si $\bar{\rho} = \rho$. □

Proposition 6.4.25. Soient $h_0, h_1 \in \mathbb{R}$ avec $|h_0| \leq h_1$.

Si $\rho : [\theta_0, \theta_1] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction trigonométrique par morceaux continue Q -convexe et telle que

1. $\rho(\theta_i) = h_i$ pour $i \in \{0, 1\}$
2. $\rho'(\theta_1) = 0$

alors :

$$\kappa(\rho) \geq \kappa_{\min}(h_0, h_1)$$

avec égalité si et seulement si l'une des propriétés suivantes est vérifiée :

- (a) ρ est trigonométrique monotone ;
- (b) ρ est trigonométrique et $\theta_1 = \theta_0 + \pi$.

Démonstration. Le cas ρ strictement croissante fait l'objet du lemme 6.4.20 ; la remarque 6.4.12 permet de ramener le cas strictement décroissant au cas strictement croissant ; enfin le cas $h_0 = h_1$ est trivial car $\kappa_{\min}(h_1, h_1) = 0$. Supposons à présent que ρ **n'est pas** strictement croissante et que $h_0 < h_1$.

La méthode consiste à extraire (définition 6.4.23) une fonction

$$\bar{\rho} : [\bar{\theta}_0, \bar{\theta}_1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

de ρ telle que $\bar{\rho}$ est strictement croissante puis strictement décroissante, telle que $\max \bar{\rho} = \max \rho$ et telle que $\rho(\bar{\theta}_i) = \bar{\rho}(\bar{\theta}_i)$ pour $i \in \{0, 1\}$; puis d'appliquer le lemme 6.4.20 aux deux portions strictement monotones de $\bar{\rho}$.

On définit :

$$\begin{aligned} \theta_0^{(0)} &= \min \left\{ \theta \in [\theta_0, \theta_1] \mid \rho(\theta) = \rho(\theta_0) \text{ et } \exists \varepsilon > 0, \rho|_{[\theta, \theta+\varepsilon]} \text{ strictement croissante} \right\} \\ \theta_1^{(0)} &= \max \left\{ \theta > \theta_0^{(0)} \mid \rho|_{[\theta_0^{(0)}, \theta]} \text{ strictement croissante} \right\} \end{aligned}$$

puis par récurrence pour $n \geq 0$,

$$\begin{aligned} \theta_0^{(n+1)} &= \min \left\{ \theta \in [\theta_1^{(n)}, \theta_1] \mid \rho(\theta) = \rho(\theta_1^{(n)}) \text{ et } \rho'(\theta^+) > 0 \right\} \\ \theta_1^{(n+1)} &= \max \left\{ \theta > \theta_0^{(n+1)} \mid \rho|_{[\theta_0^{(n+1)}, \theta]} \text{ strictement croissante} \right\}. \end{aligned}$$

La construction s'arrête au bout d'un nombre fini d'étapes $N \geq 0$. On pose ensuite :

$$\begin{aligned} \alpha_1^{(0)} &= \max \left\{ \alpha \in [\theta_1^{(N)}, \theta_1] \mid \rho(\alpha) = \rho(\theta_1) \text{ et } \exists \varepsilon > 0, \rho|_{[\theta-\varepsilon, \theta]} \text{ strictement décroissante} \right\} \\ \alpha_0^{(0)} &= \min \left\{ \alpha < \alpha_1^{(0)} \mid \rho|_{[\alpha, \alpha_1^{(0)}]} \text{ strictement décroissante} \right\}. \end{aligned}$$

puis par récurrence pour $n \geq 0$,

$$\begin{aligned} \alpha_1^{(n+1)} &= \max \left\{ \alpha \in [\theta_1^{(N)}, \alpha_0^{(n)}] \mid \rho(\alpha) = \rho(\alpha_0^{(n)}) \text{ et } \rho'(\alpha^-) < 0 \right\} \\ \alpha_0^{(n+1)} &= \min \left\{ \alpha < \alpha_0^{(n+1)} \mid \rho|_{[\alpha, \alpha_1^{(n+1)}]} \text{ strictement décroissante} \right\}. \end{aligned}$$

La construction s'arrête au bout de M étapes. Il est possible que les suites $(\alpha_i^{(n)})_{n \leq M}, i \in \{0, 1\}$, soient vides (c'est le cas par exemple si $\max \rho = h_1$ ou encore si ρ croît jusqu'à un maximum local strictement plus petit que h_1 puis décroît et croît à nouveau jusqu'à atteindre $\max \rho = h_1$), dans ce cas on pose $M = -1$ par convention.

On pose alors

$$\begin{aligned} I_k &= [\theta_0^{(k)}, \theta_1^{(k)}] && \text{pour } k \leq N; \\ I_k &= [\alpha_0^{(N+M+1-k)}, \alpha_1^{(N+M+1-k)}] && \text{pour } N < k \leq N + M + 1. \end{aligned}$$

- Par construction, la conditions (i) de la définition 6.4.22 est clairement satisfaite.
- Pour $k \neq N$, la condition (ii) est satisfaite par construction.
- Soit $k \in \mathbb{N}$. Si $k \leq N$ par construction, ρ atteint un maximum local en chacun de $\theta_1^{(k)}$, or ρ est Q-convexe, la dérivée à gauche de ρ en $\theta_1^{(k)}$ est donc nulle. Par construction, si $k < N$, la dérivée à droite de ρ en $\theta_0^{(k+1)}$ est strictement positive ; cela montre que la condition (iii) est satisfaite pour $k < N$ et on montre de la même manière qu'elle est satisfaite pour $k > N$. La condition (iii) est donc satisfaite pour $k \neq N$.
- Pour vérifier les conditions (ii) et (iii) lorsque $k = N$, il suffit de remarquer que $\rho(\theta_1^{(N)}) = \rho(\alpha_0^{(M)}) = \max \rho$ et donc que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^-} \rho'(\theta_1^{(N)} + \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \rho'(\alpha_0^{(M)} + \varepsilon) = 0.$$

La famille $(I_k)_{k \in [0, N+M+1]}$ est donc une extractrice de ρ , on pose alors $\bar{\rho}$ l'extraction de ρ sur $(I_k)_{k \in [0, N+M+1]}$; d'après la propriété 6.4.24, $\bar{\rho}$ est trigonométrique par morceaux, continue et Q-convexe.

On reprend les notations de la définition 6.4.23. Comme $\bar{\rho}$ est strictement croissante sur l'intervalle $A := [\bar{\theta}_0, \bar{\theta}_{N+1}]$ et strictement décroissante sur l'intervalle $B := [\bar{\theta}_{N+2}, \bar{\theta}_{N+M+2}]$, en utilisant la remarque 6.4.12 et le lemme 6.4.20 on a

$$\begin{aligned} \kappa(\bar{\rho}) &= \kappa(\bar{\rho}|_A) + \kappa(\bar{\rho}|_B) \\ &\geq \kappa_{\min}(\rho(\theta_0), \max \rho) + \kappa_{\min}(\rho(\theta_1), \max \rho) \\ &= \kappa_{\min}(h_0, \max \rho) + \kappa_{\min}(h_1, \max \rho) \end{aligned}$$

avec égalité si et seulement si $\bar{\rho}$ est trigonométrique. De plus, on a $\kappa(\rho) \geq \kappa(\bar{\rho})$ avec égalité $\kappa(\rho) = \kappa(\bar{\rho})$ si et seulement si $\rho = \bar{\rho}$; ainsi

$$\kappa(\rho) \geq \kappa_{\min}(h_0, \max \rho) + \kappa_{\min}(h_1, \max \rho)$$

avec égalité si et seulement si ρ est trigonométrique et $\rho = \bar{\rho}$.

- Si $\max \rho = h_1$, $\bar{\rho}$ est strictement croissante alors que, par hypothèse, ρ ne l'est pas. Ainsi $\rho \neq \bar{\rho}$, l'inégalité est donc stricte et on a :

$$\begin{aligned} \kappa(\rho) &> \kappa_{\min}(h_0, h_1) + \kappa_{\min}(h_1, h_1) \\ &= \kappa_{\min}(h_0, h_1). \end{aligned}$$

- Si $\max \rho > h_1$, on applique le lemme 6.4.18 :

$$\begin{aligned} \kappa(\rho) &= \kappa_{\min}(h_0, \max \rho) + \kappa_{\min}(h_1, \max \rho) \\ &\geq \kappa_{\min}(h_0, h_1). \end{aligned}$$

En remarquant que le seul cas d'égalité possible du lemme 6.4.18 est $h_1 = -h_0$, on voit qu'il y a égalité si et seulement si ρ est trigonométrique $\theta_1 = \theta_0 + \pi$.

□

Théorème 32 (Masse minimale). *Soit $\Theta \geq 2\pi$ et soit $\mathcal{R}_\Theta$ l'ensemble des fonctions $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ trigonométriques par morceaux Q -convexes et Θ -périodiques telles qu'il existe un intervalle I de $\mathbb{R}$ de longueur π sur lequel $\rho|_I$ est trigonométrique.*

Alors

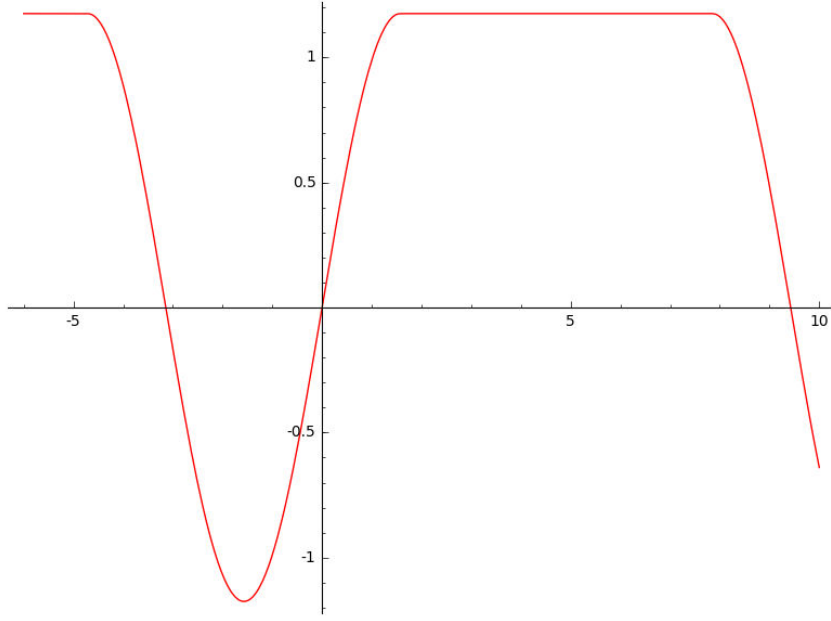
$$\inf_{\rho \in \mathcal{R}_\Theta} \kappa(\rho) = 2\pi$$

et cet infimum est un minimum si et seulement si $\Theta = 2\pi$ et ρ trigonométrique sur $\mathbb{R}$.

Démonstration.

- Soit $\varepsilon > 0$ on choisit un $\alpha > 0$ tel que $\cosh(\alpha) \geq \frac{\Theta - 2\pi}{\varepsilon}$. On pose

$$\rho : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ \theta & \mapsto \begin{cases} \sinh(\alpha) \sin(\theta - k\Theta) & \text{Si } \theta \in [-3\pi/2, \pi/2] + k\Theta \\ \sinh(\alpha) & \text{Sinon} \end{cases} \end{cases}$$



La fonction ρ dans l'adhérence de $\mathcal{R}_\Theta$ pour la norme $\mathcal{C}^1$ de plus

$$\kappa(\rho) = 2\pi + \int_{\pi/2}^{\Theta - 3\pi/2} \frac{1}{\cosh(\alpha)} \leq 2\pi + \varepsilon.$$

Donc $\inf_{\rho \in \mathcal{R}_\Theta} \kappa(\rho) \leq 2\pi$.

- Soit $\rho \in \mathcal{R}_\Theta$, soit $I = [\theta_0, \theta_0 + \pi]$ tel que $\rho|_I$ est trigonométrique.

On suppose dorénavant $\Theta \geq 2\pi$. On peut supposer $\theta_0 = 0$ et, quitte à changer ρ en $\theta \mapsto \rho(-\theta)$, on peut également supposer $\rho(\pi) = -\rho(\Theta) = -\rho(0) \leq 0$.

- Si $\Theta > 2\pi$, alors $2\pi < \Theta$ et $\rho(2\pi) \leq \rho(\Theta) \geq 0 \geq \rho(\pi)$ donc ρ atteint un maximum sur l'intervalle $] \pi, \Theta[$ en un certain θ_1 .

On applique la proposition 6.4.25 à $\rho_1 := \rho|_{[\pi, \theta_1]}$ et à $\rho_2 := \rho|_{[\theta_1, \Theta]}$:

$$\kappa(\rho_1) + \kappa(\rho_2) \geq \kappa_{\min}(-\rho(\pi), \rho(\theta_1)) + \kappa(-\rho(\pi), \rho(\theta_1)) = \pi$$

avec égalité si et seulement si ρ est trigonométrique sur l'intervalle $[\pi, \Theta]$ et $\Theta = 2\pi$ (ce qui est impossible). Ainsi $\kappa(\rho) > 2\pi$.

- Supposons $\Theta = 2\pi$. D'une part, d'après le lemme 6.4.15, ρ est minoré par le prolongement trigonométrique de $\rho|_{[0,\pi]}$ à $[0, 2\pi]$. D'autre part, d'après le corollaire 6.4.16, $\rho|_{[\pi, 2\pi]}$ est majoré par l'unique fonction trigonométrique $f : [\pi, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(\pi) = \rho(\pi)$ et $f(2\pi) = \rho(2\pi)$. Or ces deux fonctions sont égales donc ρ est trigonométrique et $\kappa(\rho) = 2\pi = \Theta$.

□

Remarque 6.4.26. *Le problème inverse est également intéressant.*

Soit $\Theta \in \mathbb{R}_+^*$ et soit $\mathcal{E}_\Theta$ l'ensemble des fonctions $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ trigonométriques par morceaux Q-convexes et Θ -périodiques.

Que vaut

$$\sup_{\rho \in \mathcal{E}_\Theta} \kappa(\rho) = ?$$

On peut démontrer les inégalités suivantes (mais ce n'est pas complètement évident) :

$$2 \left(\left\lfloor \frac{\Theta}{\pi} \right\rfloor - \frac{1}{2} \right) \pi \geq \sup_{\rho \in \mathcal{E}_\Theta} \kappa(\rho) \geq 2 \left(\left\lfloor \frac{\Theta}{\pi} \right\rfloor - 1 \right) \pi$$

Par ailleurs la minoration n'est pas optimale car il existe des angles Θ arbitrairement grands pour lesquelles le supremum est strictement plus grand.

6.5 Démonstration du théorème principal

Nous pouvons à présent nous attaquer à la démonstration du résultat principal.

Théorème 33. *Soit $\theta : S \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ la fonction qui à $\sigma \in S$ associe l'angle conique de (Σ, S) en σ et soit $\bar{\kappa} : S \rightarrow \mathbb{R}_+$.*

Si pour tout $\sigma \in S$, $\bar{\kappa}_\sigma \leq 2\pi$ et $\theta(\sigma) > 2\pi$, alors il existe un $\mathbb{E}_{\geq 0}^{1,2}$ -espace-temps radiant $(\Sigma \times \mathbb{R}, S \times \mathbb{R})$ -marqué $(M, \mathcal{F}_2, h_2)$ et un plongement polyédral convexe $\iota : \Sigma \rightarrow M$ tel que pour tout $\sigma \in S$,

$$\kappa(\iota(\sigma)) = \bar{\kappa}(\sigma).$$

De plus, un tel couple (M, ι) est unique à équivalence près.

Résumons d'abord les conclusions de l'étude effectuée au cours des précédentes sections, On pose $\theta : S \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ la fonction qui à $\sigma \in S$ associe l'angle conique de (Σ, S) en σ et on suppose $\theta > 2\pi$.

Premièrement, un plongement adapté convexe (M, ι) de (Σ, S) induit une fonction distance par morceaux Q-convexe sur (Σ, S) . Réciproquement, à toute fonction distance par morceaux Q-convexe sur Σ , nous avons associé un $\mathbb{E}_{\geq 0}^{1,2}$ -espace-temps $(\Sigma \times \mathbb{R}, S \times \mathbb{R})$ -marqué $(M, \mathcal{F}_2, h_2)$ et un plongement polyédral convexe $\iota : \Sigma \rightarrow M$. Ces deux constructions sont de plus inverses l'une de l'autre et établissent une bijection entre les classes d'équivalence de plongements adaptés et les fonctions distance par morceaux Q-convexes sur (Σ, S) .

Deuxièmement, nous avons montré que les fonctions distance par morceaux Q-convexes sur (Σ, S) sont complètement caractérisées par leur restriction à S . Le domaine $\mathcal{P}_\Sigma$ est par définition l'ensemble des $\tau : \mathbb{R}_+^S \rightarrow \mathbb{R}_+$ admettant un prolongement à (Σ, S) distance par morceaux Q-convexe ; ainsi, le théorème 33 est équivalent au théorème suivant :

Théorème 34. *Si pour tout $\sigma \in S$, $\theta(\sigma) > 2\pi$, alors pour tout $\bar{\kappa} \in [0, 2\pi]^S$, il existe un unique $h \in \mathcal{P}_\Sigma^{1/2}$ tel que $\kappa(h) = \bar{\kappa}$.*

Troisièmement, pour tout $\bar{\kappa} \in \mathbb{R}_+^S$ nous avons construit une fonctionnelle $\mathcal{H}_{\bar{\kappa}}$ définie sur le domaine $\mathcal{P}_\Sigma^{1/2}$ dont les points critiques sont exactement les solutions de l'équation $\kappa(h) = \bar{\kappa}$ d'inconnue $h \in \mathcal{P}_\Sigma^{1/2}$. Il s'agit donc de démontrer l'existence et l'unicité des solutions de ces équations.

Avant d'achever la démonstration du théorème 34, nous démontrons que $\mathcal{P}_\Sigma^{1/2}$ est étoilé.

Lemme 6.5.1. *Soit $Z \subset S$ un sous-ensemble strict de S , on note*

$$\mathcal{P}_{\Sigma, Z}^{1/2} := \left\{ h \in \mathcal{P}_{\Sigma}^{1/2} \mid \forall \sigma \in Z, \quad h(\sigma) = 0 \right\}$$

et $\mathbb{1}$ la fonction caractéristique de $S \setminus Z$.

Si pour tout $\sigma \in S$, $\theta(\sigma) > \pi/2$, alors $\mathcal{P}_{\Sigma, Z}^{1/2}$ est étoilé en $\varepsilon \mathbb{1}$ pour $\varepsilon > 0$ assez petit.

Démonstration. Nous démontrons le lemme dans le cas $Z = \emptyset$, les autres cas se démontrant de manières comparables. Notons $M := \max_{\tau \in \mathcal{P}_{\Sigma}} \max_{i, j \in S} (|\tau_i - \tau_j|)$ et $\omega : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ l'unique fonction continue telle que pour tout $u \geq 0$,

$$\sqrt{1+u} = 1 + \frac{u}{2} + u\omega(u) \quad \text{et} \quad \omega(0) = 0.$$

On remarque que $|\omega(u)| \leq 1$ pour tout $u \leq 1$.

Soient $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ un nombre fini de formes affines $\mathbb{R}_+^S \rightarrow \mathbb{R}$ non constantes telles que

$$\mathcal{P}_{\Sigma} = \bigcap_{k=1}^n \varphi_k^{-1}(\mathbb{R}_+).$$

Ainsi, pour tout $h \in \mathbb{R}_+^S$,

$$h \in \mathcal{P}_{\Sigma}^{1/2} \quad \Leftrightarrow \quad \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \varphi_k(h^2) \geq 0$$

avec $h^2 := (h_{\sigma}^2)_{\sigma \in S}$.

- Tout d'abord, remarquons que tout $h \in \mathcal{P}_{\Sigma}^{1/2}$ s'écrit $h = \sqrt{\tau + \lambda \mathbb{1}}$ pour un certain $\lambda \geq 0$ et un certain τ tel que pour tout $\sigma \in S$, $\tau_{\sigma} \in [0, M]$ et en appliquant la racine carré coefficient par coefficient.
- Montrons que pour tout $h \in \mathcal{P}_{\Sigma}^{1/2}$ et tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, si $\varepsilon h \in \mathcal{P}_{\Sigma}$, alors

$$\forall s \in [0, 1], \quad sh + (1-s)\varepsilon \mathbb{1} \in \mathcal{P}_{\Sigma}^{1/2}.$$

Soient $\varepsilon \geq 0$ et $h \in \mathcal{P}_{\Sigma}^{1/2}$. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et tout $s \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} \varphi_k((sh + (1-s)\varepsilon \mathbb{1})^2) &= \varphi_k((sh + (1-s)\varepsilon \mathbb{1})^2) \\ &= \varphi_k(s^2 h^2) + 2s(1-s)\varepsilon h + (1-s)^2 \varepsilon^2 \mathbb{1} \\ &= s^2 \varphi_k(h) + 2s(1-s)\varphi_k(\varepsilon h) + (1-s)^2 \varphi_k(0). \end{aligned}$$

D'une part, $\varphi_k(h) \geq 0$ car $h \in \mathcal{P}_{\Sigma}$; d'autre part, $\varphi_k(0) \geq 0$ car $\mathbb{1} \in \mathcal{P}_{\Sigma}$ (voir proposition 6.2.25); on en déduit que $\varphi_k((sh + (1-s)\varepsilon \mathbb{1})^2)$ est positif.

Ce raisonnement étant valable pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on en déduit que

$$\forall s \in [0, 1], \quad (sh + (1-s)\varepsilon \mathbb{1})^2 \in \mathcal{P}_{\Sigma}.$$

- Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Soient $\varepsilon, \lambda > 0$ et $\tau \in \mathcal{P}_{\Sigma}$ tel que pour tout $\sigma \in S$, $\tau_{\sigma} \in [0, M]$. Considérons $h := \sqrt{\tau + \lambda \mathbb{1}}$. Posons $\varphi_k = \langle \vec{a} \mid \cdot \rangle + b$ pour un certain vecteur $\vec{a}$ et un certain réel $b \geq 0$. D'après la proposition 6.2.25, $\varphi_k(0) > 0$ donc $b > 0$. On note $A := \|\vec{a}\|_1 > 0$. Montrons que si $\lambda \geq \max(1, M)$ et $\varepsilon \leq \frac{b}{2MA}$ alors $\varphi_k(\varepsilon h) \geq 0$.

Supposons $\lambda \geq \max(1, M)$ et $\varepsilon \leq \frac{b}{2MA}$.

$$\begin{aligned}
 \varphi_k(\varepsilon h) &= \varphi_k(\varepsilon \sqrt{\tau + \lambda \mathbb{1}}) \\
 &= \varphi_k\left(\varepsilon \sqrt{\lambda} \sqrt{\mathbb{1} + \frac{\tau}{\lambda}}\right) \\
 &= \varphi_k\left(\varepsilon \sqrt{\lambda} \mathbb{1} + \varepsilon \sqrt{\lambda} \frac{\tau}{\lambda} + \varepsilon \sqrt{\lambda} \omega(\tau/\lambda) \frac{\tau}{\lambda}\right) \\
 &= \varepsilon \sqrt{\lambda} \left\langle \vec{a} \mid \frac{\tau}{\lambda} \right\rangle + \varepsilon \left\langle \vec{a} \mid \omega(\tau/\lambda) \frac{\tau}{\sqrt{\lambda}} \right\rangle + b \\
 &\geq b - \frac{\varepsilon AM}{\sqrt{\lambda}} - \frac{\varepsilon AM}{\sqrt{\lambda}} \\
 &\geq 0.
 \end{aligned}$$

- D'après la proposition 6.2.25, il existe $\eta > 0$ tel que $\forall \tau \in \mathbb{R}_+$, si $\tau \leq \eta$, alors $h \in \mathcal{P}_\Sigma$; on se donne un tel $\eta > 0$.

Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Soient $\varepsilon, \lambda > 0$ et $\tau \in \mathcal{P}_\Sigma$ tel que pour tout $\sigma \in S$, $\tau_\sigma \in [0, M]$. Il est alors clair que si $\varepsilon \leq \frac{\eta}{2M+1}$ et $\lambda \leq \max(1, M)$ alors

$$\varphi_k\left(\varepsilon \sqrt{\tau + \lambda \mathbb{1}}\right) \geq 0.$$

- On déduit des deux points précédents que pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ fixé, si $\varepsilon > 0$ est assez petit, pour tout $h \in \mathcal{P}_\Sigma^{1/2}$,

$$\varphi_k(\varepsilon h) \geq 0.$$

Finalement, les formes affines $(\varphi_k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ étant en nombre fini, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$ et tout $h \in \mathcal{P}_\Sigma^{1/2}$, on a

$$\varepsilon h \in \mathcal{P}_\Sigma.$$

Le second point ci-avant permet de conclure. □

Démonstration du théorème 34. Pour simplifier, nous désignons ici $\mathcal{P}_\Sigma$ par $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}_\Sigma^{1/2}$ par $\mathcal{P}^{1/2}$; on note également $\mathbb{1}$ la fonction caractéristique de S . Enfin, on se donne $\bar{\kappa} \in]0, 2\pi]^S$. La preuve repose essentiellement sur le calcul du degré de $\overrightarrow{\text{grad}} \mathcal{H}_{\bar{\kappa}}$ sur la bord du domaine $\mathcal{P}^{1/2}$, une difficulté purement technique étant que ce bord n'est ni lisse ni compact. Nous construisons donc un champ de vecteur $\vec{X}$ homotope à $\overrightarrow{\text{grad}} \mathcal{H}_{\bar{\kappa}}$ sur un voisinage du bord puis nous coupons le domaine $\mathcal{P}^{1/2}$ en montrant qu'il n'y pas de points critiques pour h grand et enfin nous construisons une hypersurface lisse sur laquelle nous pouvons appliquer le théorème de Poincaré-Hopf. Voir par exemple [Bre97] pages 386 et 387.

- Supposons $\bar{\kappa} > 0$.

On pose $h_0 = \varepsilon \mathbb{1}$ pour $\varepsilon > 0$ assez petit de sorte que $\mathcal{P}^{1/2}$ est étoilé de centre $\varepsilon \mathbb{1}$ (voir lemme 6.5.1); on pose $\vec{X}$ le champs de vecteur de Gauss issu de h_0 :

$$\forall h \in \mathbb{R}^S, \vec{X}_h = h - h_0.$$

Montrons que $\overrightarrow{\text{grad}} \mathcal{H}_{\bar{\kappa}}$ et $\vec{X}$ ne sont jamais de même direction et de sens opposés sur $\partial \mathcal{P}^{1/2}$.

- Sur les bords $h_\sigma = 0$, les coordonnées en σ de $\vec{X}$ et de $\overrightarrow{\text{grad}} \mathcal{H}_{\bar{\kappa}}$ sont strictement négatives.

- Soit h dans le bord de $\mathcal{P}^{1/2}$ avec $h > 0$, on se donne une charnière immergée non inversible (Q, ι) telle qu'un plan d'appui à $\mathcal{P}$ en $\tau = h^2$ est $\Pi : Q^* = 0$. On pose $Q = ([ABCD], [AC])$ avec $C \in [ABD]$ et on pose $\sigma := \iota(C)$ de sorte que, d'après le théorème 32, $\kappa_\sigma(h) > 2\pi$, c'est-à-dire de sorte que $\kappa_\sigma(h) - \bar{\kappa}_\sigma > 0$. De plus, quitte à prendre ε plus petit, la coordonnée σ de $\vec{X}$ en h est strictement positive. Ainsi, $\overrightarrow{\text{grad}}\mathcal{H}_{\bar{\kappa}}$ et $\vec{X}$ ont une coordonnée en σ strictement positive et ne peuvent donc être de même direction et de sens opposés.

En particulier, $\overrightarrow{\text{grad}}\mathcal{H}_{\bar{\kappa}}$ ne s'annule pas sur le bord de $\mathcal{P}^{1/2}$.

D'après la proposition 6.4.4, la limite en $+\infty$ de κ est égal aux angles de Σ , or ceux-ci sont strictement plus grands que 2π ; on se donne alors M positif tel que pour tout $h \geq M$ et pour tout $\sigma \in S$, $\kappa_\sigma(h) > 2\pi$. On considère alors le domaine $D = \{h \in \mathcal{P}^{1/2} \mid h \leq M\}$; de la même manière que précédemment, le long du bord $h = M$, $\vec{X}$ et $\overrightarrow{\text{grad}}\mathcal{H}_{\bar{\kappa}}$ ne sont pas de même direction et de sens opposés. Le domaine D est compact, les champs de vecteur $\vec{X}$ et $\overrightarrow{\text{grad}}\mathcal{H}_{\bar{\kappa}}$ sont continus et la condition de ne pas être de même direction et de sens opposés est ouverte, on peut donc construire une hypersurface lisse $\mathcal{J}$ bordant un domaine compact homéomorphe à une boule, arbitrairement proche du bord du domaine $\mathcal{P}^{1/2}$ sur laquelle les champs de vecteurs $\overrightarrow{\text{grad}}\mathcal{H}_{\bar{\kappa}}$ et $\vec{X}$ ne sont jamais de même direction et opposés. Pour tout $s \in [0, 1]$, le champs de vecteur $s\vec{X} + (1-s)\overrightarrow{\text{grad}}\mathcal{H}_{\bar{\kappa}}$ ne s'annule alors jamais sur $\mathcal{J}$, les champs de vecteurs $\vec{X}$ et $\overrightarrow{\text{grad}}\mathcal{H}_{\bar{\kappa}}$ restreint à $\mathcal{J}$ sont donc homotopes et donc de même degré. La proposition 12.12 p386 de [Bre97] implique alors que la somme des indices des zéros de $\overrightarrow{\text{grad}}\mathcal{H}_{\bar{\kappa}}$ est égal à 1. Or, d'après la proposition 6.3.9, les points critiques de $\overrightarrow{\text{grad}}\mathcal{H}_{\bar{\kappa}}$ sont tous d'indice 1 et donc $\overrightarrow{\text{grad}}\mathcal{H}_{\bar{\kappa}}$ s'annule exactement une fois dans le domaine bordé par $\mathcal{J}$ et donc exactement une fois sur $\mathcal{P}^{1/2}$.

- Supposons à présent qu'il existe $\sigma \in S$ tel que $\bar{\kappa}_\sigma = 0$ et on pose $Z := \{\sigma \in S \mid \bar{\kappa}_\sigma = 0\}$. Comme $\kappa_\sigma(h) = 0$ si et seulement si $h_\sigma = 0$, d'une part le point critique putatif appartient au bord du domaine $\mathcal{P}^{1/2}$ et d'autre part les coordonnées $\sigma \in Z$ de ce point critique sont nulles. Nous considérons alors le domaine $\mathcal{P}_0^{1/2} := \{h \in \mathcal{P}^{1/2} \mid \forall \sigma \in Z, h_\sigma = 0\}$ et considérons la restriction de $\mathcal{H}_{\bar{\kappa}}$ à $\mathcal{P}_0^{1/2}$. Sur ce domaine, la fonctionnelle d'Einstein-Hilbert est convexe et n'admet pas de points critiques sur le bord relatif. La démonstration est alors la même que dans le cas $\bar{\kappa} > 0$ à ceci près que le domaine $\mathcal{P}_0^{1/2}$ est compact, il n'est donc pas nécessaire d'utiliser le lemme 6.4.4.

□

Remarque 6.5.2. *L'étude des espaces-temps BTZ n'est pas nécessaire pour obtenir le théorème 34 pour $\bar{\kappa} \in]0, 2\pi]^S$. En effet, nous aurions plus simplement prolonger par continuité la fonctionnelle au bord de $\mathcal{P}_\Sigma^{1/2}$ sans donner d'interprétation de ce à quoi correspondent les points du bord. L'étude des espaces-temps BTZ nous offre simplement plus d'aisance.*

Index

- Hol, 108
- Suspension, 56

- Absolument maximal, 106
- Affine admissible, 110
- Angle dièdre, 184
- $\angle uv$, 184
- Application développante, 28
- Arête légale, 161

- Cauchy
 - compact, 103
 - complet, 103
 - plongement, 94
 - Extension de Cauchy, 94
- Causal
 - Courbe causale, 12, 74
 - Courbe chronale, 74
 - Espace-temps causal, 78
 - Espace-temps fortement causal, 78
- Causalement
 - connexe par arc, 77
 - connexe par arc localement, 77
 - convexe, 78
 - ouvert, 78
- Causalité, 73
 - absolument minimale, 75
 - de $\mathbb{E}_0^{1,2}$, 60
 - de $\mathbb{E}_\kappa^{1,2}$, 59
 - ouverte, 78
- Cellulation
 - adaptée, 152
 - Delaunay, 161
 - τ -Delaunay, 171
- Champ de direction divergent, 111
- Charnière, 160
 - Axe, 161
 - convexe, 173
 - de type (x, L) , 179
 - dégénérée, 173
 - immergée, 160
 - immergée inversible, 173
 - inversion, 173
 - légale, 160
 - périphérique, 173
 - pondérée, 170
- Convexité causale, 78

- Décoration, 162
- Décoration, 163
- Délacable, 30
- Δ_ϕ , 137
- Diamant, 74
- Distance par morceaux, 167
- Domaine régulier, 105
 - augmenté, 137

- $\mathbb{E}_0^{1,2}$, voir Singularite BTZ
- $\mathbb{E}_A^{1,2}$ -espace-temps, voir Espace-temps plat singulier
- $\mathbb{E}_A^{1,2}$ -maximal, 106
- $\mathbb{E}_\kappa^{1,2}$, 59
- $\text{susp}_{\mathbb{E}^{1,2}}$, 62, 63
- $\mathbb{E}^n$, 34
- Équivalence de structures marquées, 107
- Espace modèle analytique, 51
- Espace modèle singulier, 47
- Espace-temps
 - causal, 78
 - de type (i)...(v), 104
 - fortement causal, 78
 - plat singulier, 86
 - topologique, 73
- Essentiellement lisse, 90
- Extension
 - BTZ, 116
 - cuspidale, 58
 - de Cauchy, 94
- Extractrice, 196

- Famille analytique, 51
- Fixateur, 110
- Fix, 110
- Fonction temps, 83
- Fonction temps cosmologique tordue, 139
- Fonction temps de Cauchy, 85
- Fonctionnelle d'Einstein-Hilbert, 185
- Fortement tarentin, 79

- Germe d'un cône, 191

- Globalement hyperbolique, 82
- (G, X) -atlas, 23
- (G, X) -morphisme, 25
- (G, X) -structure, 24
- (G, X) -variété, 24
- (G, X) -brouillard, 42
- (G, X) -brouillard, 43
- (G, X) -morphisme p.p., 44
- (G, X) -structure singulière, 44
- (G, X) -variété singulière, 44

- $\mathcal{H}_{\tilde{\kappa}}$, 185
- Holonomie, 28

- Incompatible, 50

- $J_M(p, q)$, 74

- $\kappa_{min}(\cdot, \cdot)$, 193
- κ_σ , 183
- $K_M^\pm$, 79
- $\mathcal{K}^*$, 65

- Linéaire admissible, 109
- Localement causalement connexe par arc, 77

- Mesure admissible, 83
- $\mathcal{M}_{g,s}(\mathbb{E}^{1,2})$, 110
- $\mathcal{M}_{g,s}(\mathbb{E}_0^{1,2})$, 110
- $\mathcal{M}_{g,s}(\mathbb{E}^2)$, 163
- $\mathcal{M}_{g,s}^L(\mathbb{E}^{1,2})$, 110
- $\mathcal{M}_{g,s}^L(\mathbb{E}_0^{1,2})$, 110
- $\widetilde{\mathcal{M}}_{g,s}(\mathbb{E}_0^{1,2})$, 163
- Morphisme d'espaces-temps, 74

- Nappe, 41

- $\tilde{\Omega}$, 137

- Particule massive, 59
- Partie régulière d'un atlas, 48
- Plongement
 - BTZ, 116
 - polyédral, 152
 - polyédral convexe, 168
- Polytope, 65
- Précausalité, 75
 - engendrée, 75

- Q-convexe, 168
- Q^* , 173

- Radiant, 164
- $\text{Reg}_B(M)$, 52
- ρ_L , 110

- Semi-localement connexe, 38
- Singularités hyperboliques, 57
- Singularité BTZ, 60
- Sous-fonction extraite, 196
- Structure analytique, 23
- Surface
 - de Cauchy, 82
 - de type espace, 89
 - hyperbolique singulière, 57
- susp_{BTZ} , 162
- Suspension
 - BTZ, 162
 - euclidienne, 56
 - hyperbolique, 56, 62, 63
 - τ -suspension, 167
 - topologique, 53

- Tangent, 110
- Tarentin, 78
 - Fortement tarentin, 79
- τ_ρ , 110
- $\tilde{\tau}_{\mathcal{G},k\tau}$, 167
- $\text{Teich}_{g,s}$, 108
- Teichmüller décoré, 162
- $\widehat{\text{Teich}}_{g,s}$, 162
- Temps admissibles, 170
- Théorème
 - de Choquet-Bruhat-Geroch, 94
 - de Geroch, 82, 85, 88
 - fondamental des (G, X) -variétés, 28
- Topologie
 - BTZ, 137
 - compacte ouverte, 29
 - d'Alexandrov, 78
- Triangulation
 - équivalentes, 167
 - idéale, 112

- Voisinage tubulaire, 59, 61

- X -surface marquée, 107
- X -variété marquée, 107
- X_A -atlas, 47
- X_A -atlas maximal, 47
- X_A -morphisme, 48
- X_A -structure, 48
- X_A -variété, 48
- X_A -variété marquée, 107

Bibliographie

- [ABB⁺07] Lars Andersson, Thierry Barbot, Riccardo Benedetti, Francesco Bonsante, William M. Goldman, François Labourie, Kevin P. Scannell, and Jean-Marc Schlenker. Notes on a paper of Mess. *Geometriae Dedicata*, 126(1) :47–70, 2007. 26 pages.
- [AGH98] Lars Andersson, Gregory J. Galloway, and Ralph Howard. The cosmological time function. *Classical Quantum Gravity*, 15(2) :309–322, 1998.
- [Ale42] A. Alexandrov. Existence of a convex polyhedron and of a convex surface with a given metric. *Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S.*, 11(53) :15–65, 1942.
- [Ale05] A. D. Alexandrov. *Convex polyhedra*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2005. Translated from the 1950 Russian edition by N. S. Dairbekov, S. S. Kutateladze and A. B. Sossinsky, With comments and bibliography by V. A. Zalgaller and appendices by L. A. Shor and Yu. A. Volkov.
- [alg10] *Algèbre, dynamique et analyse pour la géométrie : aspects récents*. Ellipses, 2010.
- [Bar05] Thierry Barbot. Globally hyperbolic flat spacetimes. *Journal of Geometry and Physics*, 53,no.2 :123–165, 2005.
- [BB09] Riccardo Benedetti and Francesco Bonsante. Canonical Wick rotations in 3-dimensional gravity. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 198(926) :viii+164, 2009.
- [BBS11] Thierry Barbot, Francesco Bonsante, and Jean-Marc Schlenker. Collisions of particles in locally AdS spacetimes I. Local description and global examples. *Comm. Math. Phys.*, 308(1) :147–200, 2011.
- [BBS14] Thierry Barbot, Francesco Bonsante, and Jean-Marc Schlenker. Collisions of particles in locally AdS spacetimes II. Moduli of globally hyperbolic spaces. *Comm. Math. Phys.*, 327(3) :691–735, 2014.
- [BEE96] John K. Beem, Paul E. Ehrlich, and Kevin L. Easley. *Global Lorentzian geometry*, volume 202 of *Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics*. Marcel Dekker, Inc., New York, second edition, 1996.
- [BH99] Martin R. Bridson and André Haefliger. *Metric spaces of non-positive curvature*, volume 319 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [BI08] Alexander I. Bobenko and Ivan Izmistiev. Alexandrov’s theorem, weighted Delaunay triangulations, and mixed volumes. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 58(2) :447–505, 2008.
- [BM] Thierry Barbot and Catherine Meusburger. Particles with spin in flat spacetimes in expansion. in preparation.
- [Bon03] Francesco Bonsante. Flat Spacetimes with Compact Hyperbolic Cauchy Surfaces. November 2003.

- [Bre97] Glen E. Bredon. *Topology and geometry*, volume 139 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1997. Corrected third printing of the 1993 original.
- [Bru16a] Léo Brunswic. BTZ extensions of globally hyperbolic singular flat spacetimes. working paper or preprint, May 2016.
- [Bru16b] Léo Brunswic. Cauchy-compact flat spacetimes with BTZ singularities. working paper or preprint, November 2016.
- [BS03] Antonio N. Bernal and Miguel Sánchez. On smooth Cauchy hypersurfaces and Geroch’s splitting theorem. *Comm. Math. Phys.*, 243(3) :461–470, 2003.
- [BS15] Francesco Bonsante and Andrea Seppi. On codazzi tensors on a hyperbolic surface and flat lorentzian geometry. *International Mathematics Research Notices*, 2015.
- [BS16] Francesco Bonsante and Andrea Seppi. On Codazzi tensors on a hyperbolic surface and flat Lorentzian geometry. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (2) :343–417, 2016.
- [Bus67] H. Busemann. Timelike spaces. *Dissertationes Math. Rozprawy Mat.*, 53 :52, 1967.
- [Car98] Steven Carlip. *Quantum Gravity in 2 + 1 Dimensions*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 1998.
- [CBG69] Yvonne Choquet-Bruhat and Robert Geroch. Global aspects of the Cauchy problem in general relativity. *Comm. Math. Phys.*, 14 :329–335, 1969.
- [CJS11] Erasmo Caponio, Miguel Angel Javaloyes, and Miguel Sánchez. On the interplay between Lorentzian causality and Finsler metrics of Randers type. *Rev. Mat. Iberoam.*, 27(3) :919–952, 2011.
- [Die88] J. Dieckmann. Volume functions in general relativity. *Gen. Relativity Gravitation*, 20(9) :859–867, 1988.
- [Dix81] Jacques Dixmier. *Topologie générale*. Presses Universitaires de France, Paris, 1981. Mathématiques. [Mathematics].
- [DJ84] S Deser and R Jackiw. Three-dimensional cosmological gravity : Dynamics of constant curvature. *Annals of Physics*, 153(2) :405 – 416, 1984.
- [DJ88] S. Deser and R. Jackiw. Classical and quantum scattering on a cone. *Comm. Math. Phys.*, 118(3) :495–509, 1988.
- [DJtH84] S Deser, R Jackiw, and G ’t Hooft. Three-dimensional einstein gravity : Dynamics of flat space. *Annals of Physics*, 152(1) :220 – 235, 1984.
- [Ehr83] Charles Ehresmann. Sur les espaces localement homogènes. In *Œuvres complètes et commentées. I-1,2. Topologie algébrique et géométrie différentielle*, Cahiers Topologie Géom. Différentielle, pages 87–103. Geom. Topol. Publ., Coventry, 1983.
- [EP88] D. B. A. Epstein and R. C. Penner. Euclidean decompositions of noncompact hyperbolic manifolds. *J. Differential Geom.*, 27(1) :67–80, 1988.
- [Eps84] D.B.A Epstein. Transversely hyperbolic 1-dimensional foliations. *Astérisque*, (116) :53–69, 1984. Transversal structure of foliations (Toulouse, 1982).
- [FB52] Y. Fourès-Bruhat. Théorème d’existence pour certains systèmes d’équations aux dérivées partielles non linéaires. *Acta Math.*, 88 :141–225, 1952.
- [Fen89] Werner Fenchel. *Elementary geometry in hyperbolic space*, volume 11 of *De Gruyter Studies in Mathematics*. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1989. With an editorial by Heinz Bauer.

- [FHS13] J. L. Flores, J. Herrera, and M. Sánchez. Gromov, Cauchy and causal boundaries for Riemannian, Finslerian and Lorentzian manifolds. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 226(1064) :vi+76, 2013.
- [FI09] François Fillastre and Ivan Izmetiev. Hyperbolic cusps with convex polyhedral boundary. *Geom. Topol.*, 13(1) :457–492, 2009.
- [FI11] François Fillastre and Ivan Izmetiev. Gauss images of hyperbolic cusps with convex polyhedral boundary. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 363(10) :5481–5536, 2011.
- [Fil07] François Fillastre. Polyhedral realisation of hyperbolic metrics with conical singularities on compact surfaces. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 57(1) :163–195, 2007.
- [Fil10] François Fillastre. Existence and uniqueness theorem for convex polyhedral metrics on compact surfaces. In Moscow State University, editor, *Conference on metric geometry of surfaces and polyhedra, Dedicated to the 100th anniversary of N. V. Efimov*, volume VI, pages 208–223, Moscou, Russia, August 2010. Survey paper. No proof. 10 pages.
- [Fil11] François Fillastre. Fuchsian polyhedra in Lorentzian space-forms. *Math. Ann.*, 350(2) :417–453, 2011.
- [Fox57] Ralph H. Fox. Covering spaces with singularities. In *A symposium in honor of S. Lefschetz*, pages 243–257. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1957.
- [FS12] Albert Fathi and Antonio Siconolfi. On smooth time functions. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 152(2) :303–339, 2012.
- [Ger68] Robert Geroch. Spinor structure of space-times in general relativity. I. *J. Mathematical Phys.*, 9 :1739–1744, 1968.
- [Ger70] Robert Geroch. Domain of dependence. *J. Mathematical Phys.*, 11 :437–449, 1970.
- [Gol84] William M. Goldman. The symplectic nature of fundamental groups of surfaces. *Adv. in Math.*, 54(2) :200–225, 1984.
- [HE73] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis. *The large scale structure of space-time*. Cambridge University Press, London-New York, 1973. Cambridge Monographs on Mathematical Physics, No. 1.
- [HR93] Craig D. Hodgson and Igor Rivin. A characterization of compact convex polyhedra in hyperbolic 3-space. *Inventiones mathematicae*, 111(1) :77–111, Dec 1993.
- [HS74] S. W. Hawking and R. K. Sachs. Causally continuous spacetimes. *Comm. Math. Phys.*, 35 :287–296, 1974.
- [ILTC01] C. Indermitte, Th. M. Liebling, M. Troyanov, and H. Cléménçon. Voronoi diagrams on piecewise flat surfaces and an application to biological growth. *Theoret. Comput. Sci.*, 263(1-2) :263–274, 2001. Combinatorics and computer science (Palaiseau, 1997).
- [Izm08] Ivan Izmetiev. A variational proof of Alexandrov’s convex cap theorem. *Discrete Comput. Geom.*, 40(4) :561–585, 2008.
- [JS14a] Miguel A. Javaloyes and Miguel Sánchez. Finsler metrics and relativistic spacetimes. *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.*, 11(9) :1460032, 15, 2014.
- [JS14b] Miguel Angel Javaloyes and Miguel Sánchez. On the definition and examples of Finsler metrics. *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)*, 13(3) :813–858, 2014.
- [Kat92] Svetlana Katok. *Fuchsian groups*. Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, IL, 1992.

- [Kui49] N. H. Kuiper. On conformally-flat spaces in the large. *Ann. of Math. (2)*, 50 :916–924, 1949.
- [Mes07] Geoffrey Mess. Lorentz spacetimes of constant curvature. *Geom. Dedicata*, 126 :3–45, 2007.
- [MS91] Howard Masur and John Smillie. Hausdorff dimension of sets of nonergodic measured foliations. *Ann. of Math. (2)*, 134(3) :455–543, 1991.
- [MS08] Ettore Minguzzi and Miguel Sánchez. The causal hierarchy of spacetimes. In *Recent developments in pseudo-Riemannian geometry*, ESI Lect. Math. Phys., pages 299–358. Eur. Math. Soc., Zürich, 2008.
- [O’N83] Barrett O’Neill. *Semi-Riemannian geometry*. Academic Press, 1983.
- [Pau10] Frédéric Paulin. Topologie algébrique élémentaire. Notes de cours, 2009-2010.
- [Pen87] R. C. Penner. The decorated Teichmüller space of punctured surfaces. *Comm. Math. Phys.*, 113(2) :299–339, 1987.
- [PY16] Athanase Papadopoulos and Sumio Yamada. Timelike Hilbert and Funk geometries. working paper or preprint, 2016.
- [Rat94] John G. Ratcliffe. *Foundations of hyperbolic manifolds*, volume 149 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1994.
- [Rin09] Hans Ringström. *The Cauchy problem in general relativity*. ESI Lectures in Mathematics and Physics. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2009.
- [RS12] Clara Rossi Salvemini. *Espace-temps globalement hyperboliques conformément plats*. PhD thesis, 2012. Thèse de doctorat dirigée par Thierry Barbot, Laboratoire de Mathématiques d’Avignon 2012.
- [S05] Miguel Sánchez. Causal hierarchy of spacetimes, temporal functions and smoothness of Geroch’s splitting. A revision. *Mat. Contemp.*, 29 :127–155, 2005.
- [Sbi15] Jan Sbierski. On the existence of a maximal cauchy development for the einstein equations : a dezornification. *Annales Henri Poincaré*, 2015.
- [Sch06] Jean-Marc Schlenker. Hyperbolic manifolds with convex boundary. *Invent. Math.*, 163(1) :109–169, 2006.
- [Sei77] Hans Jürgen Seifert. Smoothing and extending cosmic time functions. *General Relativity and Gravitation*, 8(10) :815–831, Oct 1977.
- [Sou04] Rabah Souam. The Schläfli formula for polyhedra and piecewise smooth hypersurfaces. *Differential Geom. Appl.*, 20(1) :31–45, 2004.
- [tH88] G. ’t Hooft. Non-perturbative 2 particle scattering amplitudes in 2+1 dimensional quantum gravity. *Communications in Mathematical Physics*, 117(4) :685–700, Dec 1988.
- [tH93] G. ’t Hooft. The evolution of gravitating point particles in 2+1 dimensions. *Classical and Quantum Gravity*, 10(5) :1023, 1993.
- [Thu98] William P. Thurston. Shapes of polyhedra and triangulations of the sphere. In *The Epstein birthday schrift*, volume 1 of *Geom. Topol. Monogr.*, pages 511–549. Geom. Topol. Publ., Coventry, 1998.
- [Thu02] William P. Thurston. *The geometry and topology of 3-manifolds (Electronic Edition)*. <http://www.msri.org/publications/books/gt3m/>, 2002.

- [Tro86] Marc Troyanov. Les surfaces euclidiennes à singularités coniques. *Enseign. Math. (2)*, 32(1-2) :79–94, 1986.
- [VP71] Ju. A. Volkov and E. G. Podgornova. Existence of a convex polyhedron with a given evolute. *Taškent. Gos. Ped. Inst. Učen. Zap.*, 85 :3–54, 83, 1971. Geometričeskii Sbornik.