



**HAL**  
open science

# Représentations linéaires des groupes d'Artin

Olivier Geneste

► **To cite this version:**

Olivier Geneste. Représentations linéaires des groupes d'Artin. Topologie algébrique [math.AT]. Université de Bourgogne, 2016. Français. NNT : 2016DIJOS052 . tel-01820634

**HAL Id: tel-01820634**

**<https://theses.hal.science/tel-01820634v1>**

Submitted on 22 Jun 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Université de Bourgogne , U.F.R. Sciences et Techniques  
Institut de Mathématiques de Bourgogne  
École doctorale Carnot-Pasteur

## THÈSE

pour l'obtention du grade de

### **Docteur de l'Université de Bourgogne en Mathématiques**

*présentée et soutenue publiquement par*

**Olivier Geneste**

le 27 octobre 2016

## **Représentations linéaires des groupes d'Artin**

Directeur de thèse : **Luis Paris**

### **Jury composé de**

Eddy Godelle  
Jean-Yves Hée  
Ivan Marin  
Luis Paris  
Gioia Maria Vago  
Emmanuel Wagner

Université de Caen  
Université de Picardie Jules Verne  
Université de Picardie Jules Verne  
Université de Bourgogne  
Université de Bourgogne  
Université de Bourgogne

Rapporteur  
Rapporteur  
Examineur  
Directeur  
Examineur  
Examineur



*À Jean, mon fils.*



# Remerciements

Je tiens avant tout à remercier chaleureusement Luis Paris de m'avoir accompagné tout au long de ce doctorat. C'est avec beaucoup d'intérêt et d'enthousiasme que j'ai suivi ses réflexions durant ces quatre années. Des rêves lointains aux idées flamboyantes, les enseignements qu'il m'a offerts dépassent allègrement le cadre des mathématiques.

Je remercie Aziz Essalami de m'avoir permis, chaque jour, de travailler dans des conditions honorables. Lors de nos rencontres avant l'aube, ses encouragements me sont allés droit au cœur.

Je remercie également Eddy Godelle et Jean-Yves Hée d'avoir accepté de rapporter ce manuscrit, ainsi que Ivan Marin, Gioia Maria Vago et Emmanuel Wagner qui m'ont fait l'honneur de participer à mon jury de thèse.

Je n'aurais jamais eu l'audace d'entreprendre de telles études si je n'avais pas rencontré des professeurs qui, par leurs enseignements et leurs paroles, m'ont inspiré à tel point que pas un jour ne passe sans qu'une de mes pensées ne se dirige vers eux. Je remercie ainsi Stéphane Baseilhac, Bruno Harington, Étienne Mann, Ludovic Menneteau, Louise Nyssen, Roger Ramonatxo, Jean-Marc Reverdy et Ahmed Yahiatène d'avoir croisé mon chemin aux moments cruciaux et de m'avoir inspiré le choix de bonnes directions.

Je remercie mon ami Pierre Launay d'avoir toujours cru en moi et d'avoir suivi mes pérégrinations mathématiques avec sérénité et curiosité. Je remercie mon ami Ben-Michael Kohli de bien avoir voulu discuter avec moi ces dernières années. Je remercie mes parents de m'avoir fait confiance et de m'avoir, selon les cas, encouragé ou laissé développer des compétences non scolaires sans lesquelles ma vie, aujourd'hui, serait atrocement creuse. Je remercie ma petite sœur, Mélodie, d'avoir achevé, ces dernières années, de me convaincre qu'un mental d'acier pouvait venir à bout de toutes les difficultés. Je tâche, chaque jour, de suivre son exemple.

Enfin, je remercie ma femme, Pauline, de la joie qu'elle m'apporte au quotidien et de la compréhension dont elle fait preuve à mon égard qui, j'aime à le croire, excède la mienne. Puissent nos jours être longs et heureux !



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Préliminaires</b>	<b>5</b>
1.1 Les groupes de tresses . . . . .	5
1.1.1 Différents points de vue sur les groupes de tresses . . . . .	5
1.1.2 Représentations des groupes de tresses . . . . .	14
1.2 Les groupes d'Artin . . . . .	16
1.2.1 Généralités . . . . .	16
1.2.2 Les groupes de Coxeter . . . . .	17
1.2.3 Les monoïdes d'Artin . . . . .	25
1.2.4 Représentations linéaires des groupes d'Artin . . . . .	27
1.2.5 Automorphismes d'un graphe de Coxeter . . . . .	29
<b>2 Représentations enracinées des systèmes de Coxeter et automorphismes</b>	<b>33</b>
2.1 Une représentation linéaire fidèle de $W^G$ . . . . .	33
2.2 Démonstration du théorème 2.1.2 . . . . .	35
2.2.1 Orbites de type $I$ et $II_m$ . . . . .	36
2.2.2 Produit scalaire entre deux racines simples . . . . .	36
2.2.3 Démonstration du résultat principal . . . . .	39
<b>3 Représentations de Paris des systèmes d'Artin et automorphismes</b>	<b>41</b>
3.1 Une représentation linéaire fidèle de $A^{+G}$ . . . . .	41
3.1.1 Représentations de Paris . . . . .	41
3.1.2 Résultat principal . . . . .	42
3.2 Démonstration du théorème 3.1.2 . . . . .	43
3.2.1 L'élément $L(a)$ . . . . .	43
3.2.2 Ensembles fermés de racines . . . . .	43
3.2.3 Séries formelles et fidélité . . . . .	45
<b>4 Représentations de Paris, automorphismes et bases</b>	<b>49</b>
4.1 Nouvelles représentations des systèmes d'Artin . . . . .	49
4.1.1 Problématique . . . . .	49
4.1.2 Un premier résultat . . . . .	50
4.1.3 Résultat principal . . . . .	50
4.2 Démonstration du théorème 4.1.3 . . . . .	55



<b>5</b>	<b>Quelques résultats sur les groupes de type <math>B</math></b>	<b>69</b>
5.1	Tentative d'extension des représentations de Paris . . . . .	69
5.2	Comparaison de deux représentations de $A(B_3)$ . . . . .	71

# Introduction

Bien que les tresses soient connues comme objets de la vie courante depuis des millénaires, l'étude des tresses d'un point de vue mathématique n'est vieille que d'à peine un siècle. Aujourd'hui, la « théorie des tresses » désigne l'étude des tresses ainsi que celle de plusieurs généralisations provenant de différentes branches des mathématiques.

La communauté mathématique s'accorde à dire que l'étude des tresses a véritablement débuté dans un article d'Artin en 1925 [4]. Dans cet article, Artin introduit non seulement les tresses d'un point de vue géométrique, ce qui est conforme à l'intuition, mais aussi grâce à des présentations par générateurs et relations, comme groupes d'automorphismes de groupes libres ou encore comme groupes d'homéomorphismes de disques épointés.

À partir des années 1930, de fortes relations sont établies entre l'étude des tresses et celle des nœuds et des entrelacs, notamment par Alexander et Markov [8]. Ce sont ces relations qui sont à l'origine d'un vif regain d'intérêt pour la théorie des nœuds dans les années 1980, en particulier grâce aux travaux de Jones et de son invariant d'entrelacs défini à partir de la théorie des tresses [30, 35, 36].

Les groupes d'Artin sont introduits par Tits en 1966 [54] sous le nom de groupes de tresses généralisés. Quelques années plus tard, leur étude débute réellement avec les travaux de Brieskorn [10, 12], Saito [13] et Deligne [26] dans lesquels plusieurs aspects de ces groupes sont abordés, notamment leur combinatoire ainsi que leurs liens avec les arrangements d'hyperplans et les singularités. Ces travaux, principalement orientés sur les groupes d'Artin de type sphérique, se fondent sur des liens entre les groupes de tresses, les groupes finis engendrés par des réflexions et la géométrie algébrique exploités par Arnol'd [1, 2, 3] et Brieskorn [11, 12] quelques années auparavant.

La question de la linéarité des groupes de tresses est restée sans réponse pendant plus de cinquante ans. La représentation de Burau, introduite dès 1935 dans [15], est longtemps considérée comme une potentielle représentation fidèle des groupes de tresses. Il faut attendre les travaux de Moody [49], Long et Paton [44], ainsi que Bigelow [6] dans les années 1990 pour démontrer que cette représentation n'est pas fidèle dans la plupart des cas. Durant cette même période, c'est une autre représentation introduite par Lawrence [42] qui s'avère être fidèle pour tous les groupes de tresses. Ce résultat est démontré indépendamment par Krammer [39, 40] et par Bigelow [7].

Les représentations de Lawrence sont ensuite étendues en des représentations fidèles pour tous les groupes d'Artin de type sphérique en s'inspirant des techniques de Krammer, indépendamment par Digne [28] et par Cohen et Wales [19]. Enfin, ces représentations sont étendues à tous les groupes d'Artin par Paris en conservant la fidélité sur les monoïdes [51].

**Chapitre 1.** Le premier chapitre de cette thèse rassemble l'essentiel des notions et des résultats utilisés dans les chapitres qui le succèdent.

Tout d'abord, on présente des résultats sur les groupes de tresses provenant de leurs interprétations géométriques, algébriques ou encore topologiques. Cette partie permet de mettre en relief et d'illustrer certains résultats dont on dispose sur les groupes d'Artin. En particulier, on donne une description algébrique de la représentation de Lawrence-Krammer-Bigelow dont sont inspirées les représentations de Paris.

Cette partie sur les groupes de tresses est suivie d'une partie conséquente sur les groupes de Coxeter. En effet, bien que cette thèse ait les groupes d'Artin pour objet d'étude annoncé, la plupart des techniques employées pour obtenir nos résultats s'appuient sur les groupes de Coxeter qui y sont associés. Pour commencer, on énonce des résultats combinatoires connus tels que le lemme d'échange et la solution au problème du mot de Tits. Par la suite, on introduit les bases de racines telles qu'elles sont définies dans la thèse de Krammer [38, 41] ainsi que les représentations enracinées qui y sont associées. Ces représentations généralisent les représentations canoniques exposées dans [9] et sont essentielles pour démontrer le théorème 2.1.2, résultat principal du chapitre 2. On définit ensuite la notion de système de racines selon Deodhar [27], qui est aussi celle que l'on retrouve dans l'ouvrage de Humphreys [34]. Il est intéressant de remarquer qu'elle est une extension de la notion de système de racines réduit dans Bourbaki [9], qu'elle est généralisée par celle de Krammer [38, 41] et qu'elle est tout à fait différente de celle proposée par Hée dans [31]. Dans cette thèse, on utilise la définition de Deodhar ou celle, plus générale, de Krammer selon le contexte. Puis, on donne la classification des groupes de Coxeter de type sphérique et affine que l'on utilise pour démontrer le théorème 4.1.3, résultat principal du chapitre 4. Enfin, on traite de la divisibilité dans les groupes de Coxeter, ce qui permet d'établir un lien fort entre groupes de Coxeter et monoïdes d'Artin et d'introduire la notion d'élément le plus long que l'on utilise régulièrement par la suite.

La partie suivante est consacrée aux monoïdes d'Artin. L'étude de la divisibilité dans les monoïdes d'Artin est basée sur les éléments simples, eux-mêmes définis grâce à la solution du problème du mot de Tits dans les groupes de Coxeter. La simplifiabilité des groupes d'Artin que l'on décrit ensuite est un argument essentiel dans la démonstration de la fidélité des représentations du théorème 3.1.2, de même que dans [51] pour la fidélité des représentations de Paris. Enfin, on introduit les éléments de Garside, qui sont aux monoïdes d'Artin ce que les éléments les plus longs sont aux groupes de Coxeter.

Dès lors, tous les ingrédients sont réunis pour définir les représentations de Paris, ce que l'on fait dans la partie dédiée aux représentations linéaires des groupes d'Artin. Dans [51], ces représentations fidèles sont définies de manière directe pour les monoïdes d'Artin dont les graphes de Coxeter sont simplement lacés et sans triangles. Pour les autres monoïdes d'Artin, les représentations sont obtenues par éclatement, ce qui consiste en substance à injecter un monoïde d'Artin quelconque dans un monoïde

d'Artin dont le graphe de Coxeter est simplement lacé et sans triangles. L'inconvénient majeur est l'augmentation significative de la taille de la représentation obtenue. Dans cette thèse, on parvient à obtenir des représentations fidèles de certains monoïdes et groupes d'Artin sans passer par de tels éclatements, ce qui est l'objet du corollaire 4.1.5.

La dernière partie concerne les automorphismes d'un graphe de Coxeter. C'est l'ingrédient principal pour définir les représentations sans éclatement dont nous venons de parler. Un groupe d'automorphismes  $G$  d'un graphe de Coxeter agit naturellement sur le groupe de Coxeter, le monoïde d'Artin et le groupe d'Artin associés à ce graphe. Les éléments laissés fixes par cette action forment respectivement un groupe de Coxeter, un monoïde d'Artin et un groupe d'Artin parfaitement identifiés, cf. théorème 1.2.38. Dans le reste de l'introduction, on désignera ces ensembles par  $W^G$ ,  $A^{+G}$  et  $A^G$ . La suite de cette thèse est exclusivement consacrée à l'étude des représentations linéaires de ces trois objets.

**Chapitre 2.** Le deuxième chapitre est consacré aux représentations enracinées des groupes de Coxeter de la forme  $W^G$ . Si l'on dispose d'une base de racines d'un groupe de Coxeter  $W$ , la représentation enracinée qui y est associée induit sous certaines conditions une représentation linéaire de  $W^G$ . Le résultat principal consiste à démontrer que la représentation de  $W^G$  ainsi obtenue n'est rien d'autre que la représentation enracinée associée à une base de racines que l'on peut précisément décrire. En particulier, puisque toute représentation enracinée est fidèle d'après les travaux de Krammer [38, 41], on obtient comme cela une représentation fidèle de  $W^G$ .

L'ingrédient central qui intervient dans la démonstration de ce résultat est la distinction de deux types d'orbites de l'ensemble des sommets du graphe de Coxeter sous l'action du groupe d'automorphismes  $G$ , appelées orbites de type  $I$  et  $II_m$ . Le reste de la démonstration s'appuie essentiellement sur la description précise du graphe de Coxeter associé au groupe de Coxeter  $W^G$  donnée par le théorème 1.2.38.

**Chapitre 3.** Le troisième chapitre est consacré aux représentations de Paris des monoïdes d'Artin et des groupes d'Artin de la forme  $A^{+G}$  et  $A^G$ . On démontre dans ce chapitre que la représentation de Paris d'un monoïde d'Artin  $A^+$  induit une représentation fidèle de  $A^{+G}$  et que la représentation de Paris d'un groupe d'Artin de type sphérique  $A$  induit une représentation fidèle de  $A^G$ .

La démonstration de ce résultat possède essentiellement la même structure que la démonstration de la fidélité des représentations de Paris dans [51]. Il s'agit de remarquer que la plupart des arguments présentés possèdent un analogue « invariant par  $G$  » et que l'on peut donc obtenir la fidélité des représentations par des procédés similaires.

**Chapitre 4.** Les représentations de Paris sont définies naturellement pour les graphes de Coxeter simplement lacés et sans triangles. Précisément, les monoïdes d'Artin as-

sociés à de tels graphes admettent une représentation linéaire fidèle dans un espace vectoriel ayant une base en bijection avec leur système de racines positif. Dans le quatrième chapitre, on présente un moyen d'obtenir des représentations possédant la même propriété dans le cas de certains graphes de Coxeter qui ne sont pas simplement lacés et sans triangles. Ce résultat utilise directement les représentations obtenues dans le chapitre précédent. De cette manière, on obtient des représentations fidèles des groupes d'Artin associés aux graphes de Coxeter de type  $B_m$ ,  $G_2$  et  $F_4$ . On obtient aussi des représentations fidèles des monoïdes d'Artin associés aux graphes de Coxeter de type  $\tilde{B}_m$ ,  $\tilde{C}_m$ ,  $\tilde{G}_2$  et  $\tilde{F}_4$ .

La démonstration du résultat principal est de loin la plus délicate. La première étape, matérialisée par le lemme 4.2.7, permet de poser la question de l'existence de certaines représentations linéaires uniquement en termes de groupes de Coxeter et de systèmes de racines. Ce lemme est succédé d'une suite de résultats élémentaires permettant de réduire la recherche aux seuls graphes de Coxeter de type sphérique ou de type affine. Enfin, un examen exhaustif et technique de tous les graphes de Coxeter de cette liste permet de démontrer finalement le résultat.

**Chapitre 5.** Le dernier chapitre est consacré aux groupes de type  $B$ . La première partie concerne les tentatives d'extension des représentations de Paris pour des graphes de Coxeter qui ne sont pas simplement lacés. D'une part, construire une déformation de l'application  $\varphi$  à la manière de [51] ne semble pas possible. D'autre part, même si l'on réussissait à définir correctement ces représentations, l'argument principal permettant de démontrer leur fidélité n'est plus valable pour les groupes de type  $B$ . Enfin, on démontre dans la deuxième partie que les deux représentations de  $A(B_3)$  obtenues grâce au résultat principal du chapitre 4 ne sont pas équivalentes.

# Préliminaires

## Sommaire

<b>1.1</b>	<b>Les groupes de tresses</b>	<b>5</b>
1.1.1	Différents points de vue sur les groupes de tresses	5
1.1.2	Représentations des groupes de tresses	14
<b>1.2</b>	<b>Les groupes d'Artin</b>	<b>16</b>
1.2.1	Généralités	16
1.2.2	Les groupes de Coxeter	17
1.2.3	Les monoïdes d'Artin	25
1.2.4	Représentations linéaires des groupes d'Artin	27
1.2.5	Automorphismes d'un graphe de Coxeter	29

Ce chapitre est consacré à l'introduction de la plupart des objets utilisés dans cette thèse. Sans entrer systématiquement dans les détails, on tâche de donner une vue d'ensemble des concepts abordés en présentant les aspects historiques, les définitions et les théorèmes essentiels à la compréhension du travail présenté ici.

## 1.1 Les groupes de tresses

L'étude des représentations linéaires des groupes d'Artin, qui est l'objet principal de cette thèse, s'inspire des techniques utilisées dans l'étude des groupes de tresses et de leurs représentations. On expose donc ici plusieurs aspects des groupes de tresses dont la plupart sont abordés par Artin dans [4, 5]. Chacune des différentes approches possède un intérêt, en témoigne par exemple la représentation de Lawrence-Krammer-Bigelow des groupes de tresses dont la fidélité a été démontrée par Krammer [39, 40] avec des techniques algébriques et par Bigelow [7] avec des outils topologiques.

### 1.1.1 Différents points de vue sur les groupes de tresses

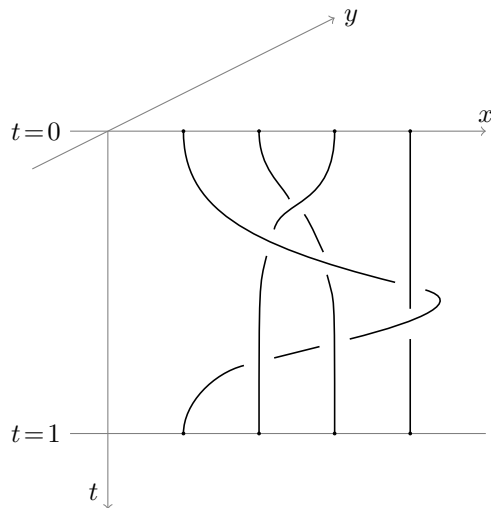
#### Les tresses géométriques

Soit  $I$  l'intervalle fermé  $[0, 1]$  dans l'ensemble des nombres réels  $\mathbb{R}$ . On appelle *intervalle topologique* tout espace topologique homéomorphe à l'intervalle  $I$ . Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Une *tresse géométrique à  $n$  brins* est un ensemble  $\mathfrak{b} \subset \mathbb{R}^2 \times I$  constitué de  $n$

intervalles topologiques disjoints, appelés *brins* de  $\mathfrak{b}$ , de telle sorte que la projection  $\mathbb{R}^2 \times I \rightarrow I$  est un homéomorphisme de chaque brin sur  $I$  et que

$$\begin{aligned}\mathfrak{b} \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\}) &= \{(1, 0, 0), (2, 0, 0), \dots, (n, 0, 0)\}, \\ \mathfrak{b} \cap (\mathbb{R}^2 \times \{1\}) &= \{(1, 0, 1), (2, 0, 1), \dots, (n, 0, 1)\}.\end{aligned}$$

Ainsi, chaque brin de  $\mathfrak{b}$  relie un point  $(i, 0, 0)$  à un point  $(\sigma(i), 0, 0)$ , où  $i, \sigma(i) \in \{1, 2, \dots, n\}$ , de telle sorte que  $(\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n))$  est une permutation de l'ensemble  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Cette permutation est appelée *permutation associée* à  $\mathfrak{b}$ , que l'on note  $\theta(\mathfrak{b})$ . Par exemple, la permutation associée à la tresse géométrique de la figure 1.1.1 est la transposition  $(2, 3) \in \mathfrak{S}_4$ .



**Figure 1.1.1.** Une tresse géométrique à quatre brins

On dit que deux tresses à  $n$  brins  $\mathfrak{b}$  et  $\mathfrak{b}'$  sont *isotopes* s'il existe une application continue  $F : \mathfrak{b} \times I \rightarrow \mathbb{R}^2 \times I$  telle que pour tout  $t \in I$ , l'application  $F_t : \mathfrak{b} \rightarrow \mathbb{R}^2 \times I$  qui envoie  $x \in \mathfrak{b}$  sur  $F(x, t)$  est un plongement dont l'image est une tresse géométrique à  $n$  brins,  $F_0$  est l'application identité de  $\mathfrak{b}$  dans  $\mathfrak{b}$  et  $F_1(\mathfrak{b}) = \mathfrak{b}'$ . La relation d'isotopie est une relation d'équivalence sur l'ensemble des tresses géométriques à  $n$  brins. Les classes d'équivalence pour cette relation sont appelées *tresses à  $n$  brins*. On note  $\mathcal{B}_n$  l'ensemble des tresses à  $n$  brins.

Soient  $\mathfrak{b}_1$  et  $\mathfrak{b}_2$  deux tresses géométriques à  $n$  brins. On définit le produit  $\mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2$  comme l'ensemble des points  $(x, y, t) \in \mathbb{R}^2 \times I$  tels que

$$\begin{cases} (x, y, 2t) \in \mathfrak{b}_1 & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2, \\ (x, y, 2t - 1) \in \mathfrak{b}_2 & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Ainsi,  $\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2$  est une tresse géométrique à  $n$  brins. De plus, si  $\mathbf{b}_1$  et  $\mathbf{b}_2$  sont isotopes à des tresses géométriques  $\mathbf{b}'_1$  et  $\mathbf{b}'_2$ , alors  $\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2$  est isotope à  $\mathbf{b}'_1\mathbf{b}'_2$ . Par conséquent,  $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) \mapsto \mathbf{b}_1\mathbf{b}_2$  permet de définir une multiplication sur l'ensemble des tresses à  $n$  brins. L'élément neutre pour cette multiplication est la *tresse triviale* représentée par la tresse géométrique

$$\{1, 2, \dots, n\} \times \{0\} \times I \subset \mathbb{R}^2 \times I.$$

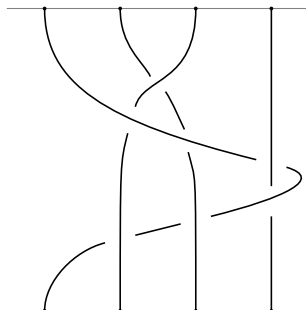
On a alors le résultat suivant :

**Proposition 1.1.1.** *L'ensemble  $\mathcal{B}_n$  muni de cette multiplication est un groupe.*

Il est pratique de représenter les tresses géométriques dans le plan. Pour cela, si  $\mathbf{b}$  est une tresse géométrique, on considère l'image de  $\mathbf{b}$  par la projection sur la deuxième coordonnée  $p : \mathbb{R}^2 \times I \rightarrow \mathbb{R} \times \{0\} \times I$  en indiquant quel brin passe au-dessus de l'autre à chaque point d'intersection. Afin d'éviter d'avoir des points triples et autres complications, on introduit la notion de diagrammes de tresses.

Un *diagramme de tresse à  $n$  brins* est un ensemble  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times I$  qui s'écrit comme union de  $n$  intervalles topologiques, appelés *brins* de  $\mathcal{D}$ , de telle manière que les conditions suivantes sont vérifiées :

- (i) La projection  $\mathbb{R} \times I \rightarrow I$  est un homéomorphisme de chaque brin sur  $I$ .
- (ii) Chaque point de  $\{1, 2, \dots, n\} \times \{0, 1\}$  est l'extrémité d'un unique brin.
- (iii) Chaque point de  $\mathbb{R} \times I$  appartient au plus à deux brins. A chaque point d'intersection entre deux brins, appelé *croisement*, les brins se rencontrent transversalement et l'on distingue un brin qui passe *au-dessus* tandis que l'autre passe *en-dessous*.

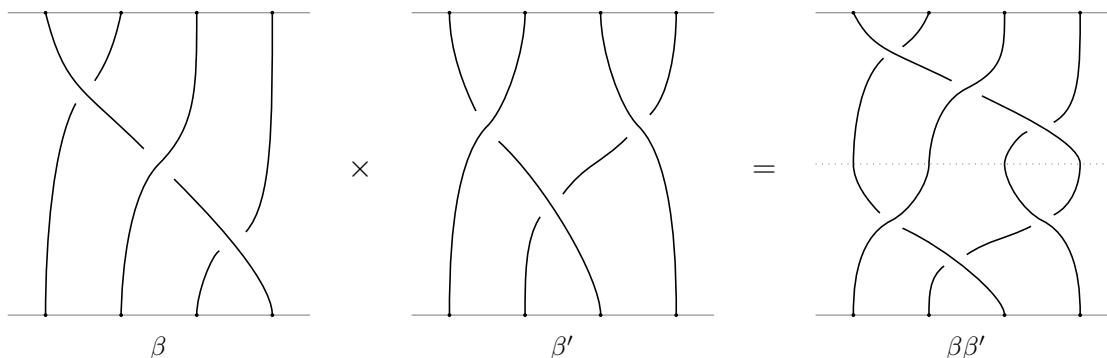


**Figure 1.1.2.** Un diagramme de tresse à quatre brins

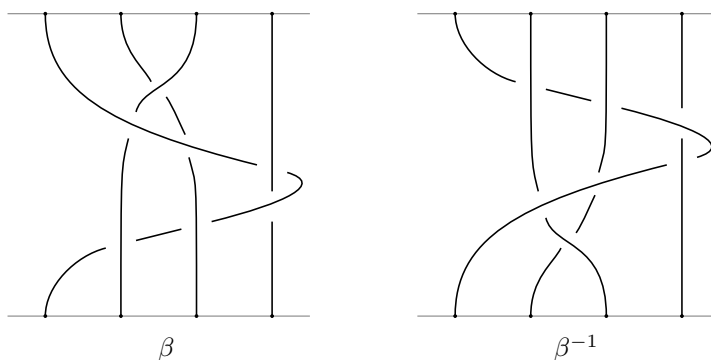
On observe que chaque diagramme de tresse  $\mathcal{D}$  représente une classe d'isotopie de tresses géométriques. Réciproquement, toute tresse de  $\mathcal{B}_n$  peut être représentée par un diagramme de tresses. On illustre la structure de groupe de  $\mathcal{B}_n$  par des diagrammes de tresses dans les figures 1.1.3 et 1.1.4. La multiplication de deux tresses  $\beta$  et  $\beta'$  consiste



principalement à mettre  $\beta$  au-dessus de  $\beta'$  puis à relier les extrémités de ces tresses. L'inverse d'une tresse  $\beta$  est obtenu en prenant le symétrique de  $\beta$  par rapport au plan d'équation  $t = 1/2$ .



**Figure 1.1.3.** Le produit de deux tresses dans  $\mathcal{B}_n$

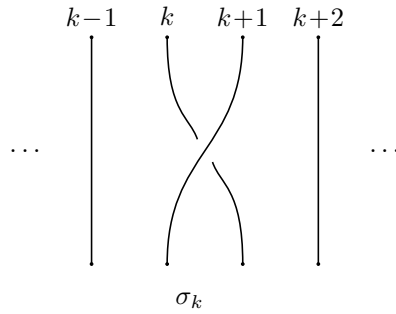


**Figure 1.1.4.** L'inverse d'une tresse de  $\mathcal{B}_n$

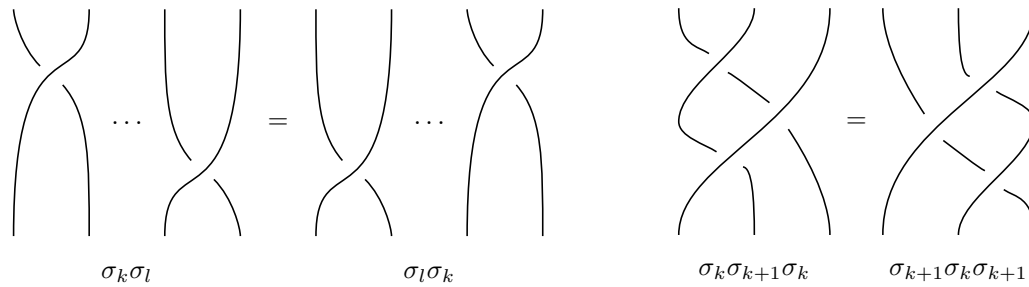
Si  $\mathfrak{b}$  et  $\mathfrak{b}'$  sont deux tresses géométriques isotopes, alors leurs permutations associées  $\theta(\mathfrak{b})$  et  $\theta(\mathfrak{b}')$  sont égales. Par conséquent, on peut définir une application  $\theta$  de  $\mathcal{B}_n$  dans le groupe symétrique  $\mathfrak{S}_n$  qui envoie une tresse  $\beta \in \mathcal{B}_n$  sur la permutation associée à n'importe quelle tresse géométrique qui la représente. Cette application est un homomorphisme de groupes surjectif. Son noyau est appelé *groupe de tresses pures à  $n$  brins*, que l'on note  $\mathcal{P}_n$ .

Pour tout  $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ , on définit la *tresse élémentaire*  $\sigma_k$  représentée par le diagramme de tresse de la figure 1.1.5. On remarque que  $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$  engendrent le groupe de tresses  $\mathcal{B}_n$  et vérifient les relations

$$\begin{aligned} \sigma_k \sigma_l &= \sigma_l \sigma_k & \text{si } |k - l| \geq 2, \\ \sigma_k \sigma_l \sigma_k &= \sigma_l \sigma_k \sigma_l & \text{si } |k - l| = 1. \end{aligned}$$



**Figure 1.1.5.** La tresse élémentaire  $\sigma_k$



**Figure 1.1.6.** Des relations dans  $\mathcal{B}_n$

En fait, ces relations suffisent à définir le groupe de tresses  $\mathcal{B}_n$ . Précisément, on a le résultat suivant :

**Théorème 1.1.2** (Artin [4, 5], Magnus [45]).

$$\mathcal{B}_n = \left\langle \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1} \left| \begin{array}{ll} \sigma_k \sigma_l = \sigma_l \sigma_k & \text{si } |k - l| \geq 2 \\ \sigma_k \sigma_l \sigma_k = \sigma_l \sigma_k \sigma_l & \text{si } |k - l| = 1 \end{array} \right. \right\rangle.$$

### Espaces de configurations

On identifie  $\mathbb{R}^2$  à  $\mathbb{C}$  et pour tout  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ , le point  $(k, 0) \in \mathbb{R}^2$  au nombre complexe  $k \in \mathbb{C}$ . Pour tous  $k, l \in \{1, 2, \dots, n\}$  tels que  $k < l$ , on note  $H_{kl}$  l'hyperplan de  $\mathbb{C}^n$  d'équation  $z_k = z_l$ . La *grande diagonale* de  $\mathbb{C}^n$  est définie comme

$$\mathcal{D}_n = \bigcup_{1 \leq k < l \leq n} H_{kl}.$$

On définit *l'espace de configurations de  $n$  points ordonnés de  $\mathbb{C}$*  comme le complémentaire de  $\mathcal{D}_n$  dans  $\mathbb{C}^n$ , que l'on note  $M_n$ . On observe que le groupe symétrique  $\mathfrak{S}_n$  agit librement sur  $M_n$ . Le quotient  $M_n/\mathfrak{S}_n$  est appelé *espace de configurations de  $n$  points de  $\mathbb{C}$* , que l'on note  $N_n$ . Les deux propositions suivantes établissent le lien entre les espaces de configurations et les groupes de tresses.

**Proposition 1.1.3.** *Soit  $q_0 = (1, 2, \dots, n) \in M_n$ . Alors  $\pi_1(M_n, q_0) = \mathcal{P}_n$ .*

**Démonstration.** Soit  $\mathbf{b} \in \mathbb{C} \times I$  une tresse géométrique. Pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  et pour tout  $t \in I$ , on note  $(u_i(t), t)$  l'unique point d'intersection entre le  $i$ -ème brin de  $\mathbf{b}$  et  $\mathbb{C} \times \{t\}$ . On considère l'application  $\eta$  qui à une tresse géométrique  $\mathbf{b}$  associe le chemin  $\eta(\mathbf{b}) = (u_1, u_2, \dots, u_n) : I \rightarrow M_n$ . Si  $\mathbf{b}$  est une tresse géométrique pure, alors  $\eta(\mathbf{b})$  est un lacet basé en  $q_0$ . Réciproquement, la donnée d'un lacet  $(u_1, u_2, \dots, u_n) : I \rightarrow M_n$  permet d'obtenir la tresse géométrique pure

$$\mathbf{b} = \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{t \in I} (u_i(t), t).$$

Ces deux constructions sont inverses l'une de l'autre, donc  $\eta$  est une bijection entre les tresses géométriques pures et les lacets de  $M_n$  basés en  $q_0$ . De plus, on observe que deux tresses géométriques pures  $\mathbf{b}$  et  $\mathbf{b}'$  sont isotopes si et seulement si leurs lacets correspondants sont homotopes. Par conséquent, l'application  $\eta$  induit une bijection  $\eta_*$  entre  $\mathcal{P}_n$  et  $\pi_1(M_n, q_0)$  qui est en fait un isomorphisme de groupes.  $\square$

Pour tout  $\mathbf{z} \in M_n$ , on note  $[\mathbf{z}]$  l'élément de  $N_n$  représenté par  $\mathbf{z}$ .

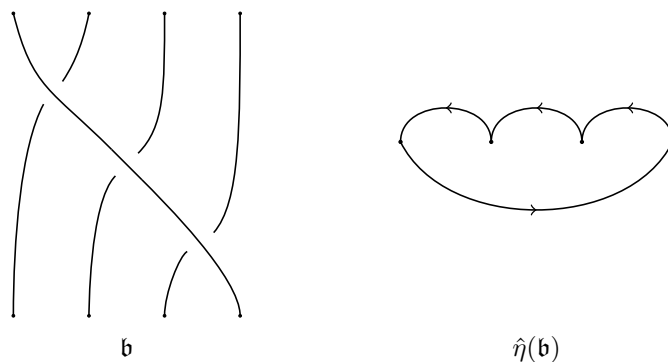
**Proposition 1.1.4.** *On a  $\pi_1(N_n, [q_0]) = \mathcal{B}_n$ .*

**Démonstration.** On considère l'application  $\hat{\eta}$  qui à toute tresse géométrique  $\mathbf{b} \in \mathbb{C} \times I$  associe le chemin  $[\eta(\mathbf{b})]$ , où  $\eta$  est l'application introduite dans la démonstration de la proposition 1.1.3. Pour toute tresse géométrique  $\mathbf{b}$ ,  $\hat{\eta}(\mathbf{b})$  est un lacet de  $N_n$  basé en  $[q_0]$ . On vérifie aisément que  $\hat{\eta}$  induit un homomorphisme de groupes  $\hat{\eta}_*$  de  $\mathcal{B}_n$  dans  $\pi_1(N_n, [q_0])$  et que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & \mathcal{P}_n & \longrightarrow & \mathcal{B}_n & \longrightarrow & \mathfrak{S}_n \longrightarrow 1 \\ & & \downarrow \eta_* & & \downarrow \hat{\eta}_* & & \downarrow \text{Id} \\ 1 & \longrightarrow & \pi_1(M_n, q_0) & \longrightarrow & \pi_1(N_n, [q_0]) & \longrightarrow & \mathfrak{S}_n \longrightarrow 1 \end{array}$$

La première ligne est exacte par définition de  $\mathcal{P}_n$ . La deuxième ligne est exacte parce qu'elle est associée au revêtement régulier  $M_n \rightarrow N_n = M_n/\mathfrak{S}_n$ . Enfin, on rappelle que  $\eta_*$  est un isomorphisme. Par conséquent, l'application  $\hat{\eta}_*$  est aussi un isomorphisme d'après le lemme des cinq.  $\square$

On illustre les isomorphismes construits dans les démonstrations des propositions 1.1.3 et 1.1.4 grâce à la figure 1.1.7. À partir d'une tresse géométrique  $\mathbf{b}$ , le lacet  $\hat{\eta}(\mathbf{b})$



**Figure 1.1.7.** Une tresse géométrique  $\mathfrak{b}$  et son lacet  $\hat{\eta}(\mathfrak{b})$  dans  $N_4$

correspond à la « vue de dessus » du trajet des points  $1, 2, \dots, n$  lorsqu'on descend le long de la tresse.

Enfin, on mentionne ici que l'une des principales conséquences de l'interprétation des groupes de tresses en termes d'espaces de configurations est la suivante :

**Théorème 1.1.5.** *Le groupe de tresses  $\mathcal{B}_n$  est sans torsion.*

L'argument principal de la démonstration est développé dans [29], où l'on démontre que  $M_n$  et  $N_n$  possèdent des revêtements universels contractiles. Les groupes fondamentaux de tels espaces sont forcément sans torsion, voir par exemple [37, Chap. I, § 4, n° 3].

### Automorphismes de groupes libres

Soit  $F_n$  le groupe libre de rang  $n$  et  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ses générateurs. On dit qu'un automorphisme  $\kappa$  de  $F_n$  est un *automorphisme de tresses* s'il satisfait les conditions suivantes :

- (i) Il existe une permutation  $\sigma$  de l'ensemble  $\{1, 2, \dots, n\}$  telle que  $\kappa(x_i)$  est conjugué à  $x_{\sigma(i)}$  pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .
- (ii) On a  $\kappa(x_1 x_2 \cdots x_n) = x_1 x_2 \cdots x_n$ .

Pour tout  $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ , on note  $\tilde{\sigma}_k$  l'automorphisme de tresses de  $F_n$  défini sur les générateurs  $x_1, x_2, \dots, x_n$  comme suit :

$$\tilde{\sigma}_k(x_i) = \begin{cases} x_{i+1} & \text{si } i = k, \\ x_i^{-1} x_{i-1} x_i & \text{si } i = k+1, \\ x_i & \text{sinon.} \end{cases}$$

On note  $\tilde{\mathcal{B}}_n$  l'ensemble des automorphismes de tresses de  $F_n$ . On observe que  $\tilde{\mathcal{B}}_n$  est un groupe et que l'application de  $\mathcal{B}_n$  dans  $\tilde{\mathcal{B}}_n$  qui à  $\sigma_k$  associe  $\tilde{\sigma}_k$  pour tout  $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$  est une représentation appelée *représentation d'Artin*.

**Théorème 1.1.6** (Artin [4,5]). *La représentation d'Artin est un isomorphisme de  $\mathcal{B}_n$  sur  $\tilde{\mathcal{B}}_n$ .*

Le fait que  $\mathcal{B}_n$  puisse être vu comme un sous-groupe d'automorphismes de  $F_n$  entraîne par exemple les deux conséquences ci-après. On dit qu'un groupe est *résiduellement fini* si, pour tout élément  $g \in G \setminus \{1\}$ , il existe un groupe fini  $H$  et un homomorphisme de groupes  $\varphi : G \rightarrow H$  tel que  $\varphi(g) \neq 1$ . On dit qu'un groupe  $G$  est *Hopfien* si tout homomorphisme de groupes surjectif  $\varphi : G \rightarrow G$  est un isomorphisme. Tout sous-groupe d'automorphismes de  $F_n$  possède ces deux propriétés [46, Chap. VI, § 5]. Par conséquent, le corollaire suivant est une conséquence du théorème 1.1.6.

**Corollaire 1.1.7.** *Le groupe de tresses  $\mathcal{B}_n$  est Hopfien et résiduellement fini.*

### Groupes d'homéotopies

Soit  $Q_n = \{(1, 0), (2, 0), \dots, (n, 0)\}$  et soit  $D$  un disque fermé de  $\mathbb{R}^2$  contenant  $Q_n$  dans son intérieur. On munit  $D$  de l'orientation trigonométrique. On appelle *auto-homéomorphisme* de la paire  $(D, Q_n)$  tout homéomorphisme  $f : D \rightarrow D$  qui préserve l'orientation de  $D$ , qui fixe  $\partial D$ , le bord de  $D$ , point par point, et tel que  $f(Q_n) = Q_n$ . On dit que deux auto-homéomorphismes  $f_0, f_1$  de  $(D, Q_n)$  sont *isotopes* s'ils peuvent être inclus dans une famille  $\{f_t\}_{t \in I}$  d'auto-homéomorphismes de  $(D, Q_n)$  telle que l'application  $D \times I \rightarrow D$  qui envoie  $(x, t) \in D \times I$  sur  $f_t(x)$  est continue. On vérifie que la relation d'isotopie est une relation d'équivalence. On définit le *groupe d'homéotopies*  $\mathfrak{M}(D, Q_n)$  de  $(D, Q_n)$  comme le groupe constitué des classes d'isotopie d'auto-homéomorphismes de  $(D, Q_n)$ .

On dit qu'un sous-ensemble  $\gamma$  de  $D$  est un *arc essentiel* sur  $(D, Q_n)$  s'il est homéomorphe à  $I$ , disjoint de  $Q_n \cup \partial D$  excepté de ses deux extrémités qui sont dans  $Q_n$ , et qu'il ne s'auto-intersecte pas. Soit  $\gamma$  un arc essentiel sur  $(D, Q_n)$ . On identifie un voisinage  $U$  de  $\gamma$  avec le disque unité ouvert  $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$  de telle manière que  $\gamma = [-1/2, 1/2]$  et que l'orientation de  $D$  correspond à l'orientation trigonométrique de  $\mathbb{C}$ . Le *demi-tour*  $\tau_\gamma : D \rightarrow D$  est alors défini comme l'identité en dehors de  $\mathbb{D}$ , et par

$$\forall z \in \mathbb{D}, \quad \tau_\gamma(z) = \exp(-2i\pi |z|)z.$$

On observe que pour tout arc essentiel  $\gamma$ ,  $\tau_\gamma$  est un auto-homéomorphisme de la paire  $(D, Q_n)$ . Pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ , on considère l'arc  $\gamma_i = [i, i+1] \times \{0\} \subset D$ . Ces arcs sont des arcs essentiels de la paire  $(D, Q_n)$ . On peut démontrer que les demi-tours qu'ils engendrent vérifient les relations de tresses. Par conséquent, l'application qui envoie  $\sigma_i \in \mathcal{B}_n$  sur  $\tau_{\gamma_i}$  pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$  se prolonge en un homomorphisme de groupes

$$\zeta : \mathcal{B}_n \rightarrow \mathfrak{M}(D, Q_n).$$

**Théorème 1.1.8** (Artin [4,5]). *L'application  $\zeta$  est un isomorphisme de  $\mathcal{B}_n$  sur  $\mathfrak{M}(D, Q_n)$ .*

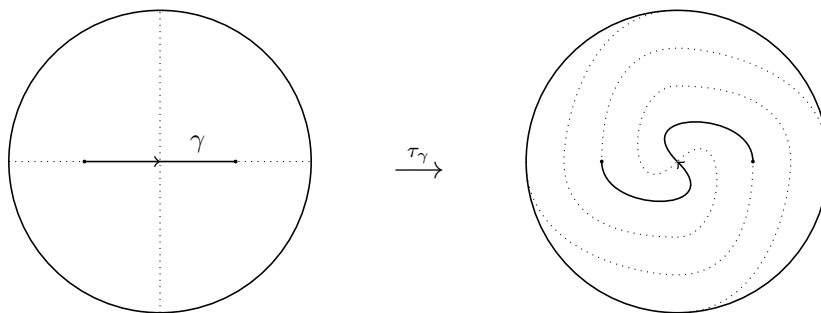
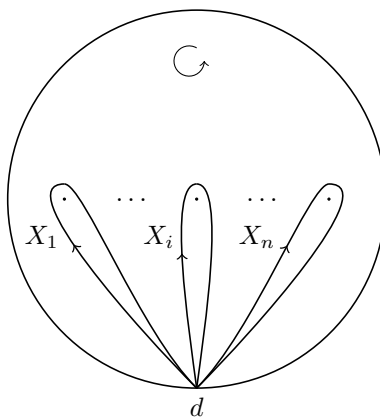


Figure 1.1.8. Un demi-tour

### Un théorème d'isomorphisme

La représentation d'Artin de  $\mathcal{B}_n$  via les automorphismes de groupes libres est directement reliée aux groupes d'homéotopies de disques époinetés. On explique dans cette partie le lien entre ces différents aspects des groupes de tresses par le théorème 1.1.9.

Pour cela, on construit ici un homomorphisme de groupes  $\iota : \mathfrak{M}(D, Q_n) \rightarrow \tilde{\mathcal{B}}_n$ . Soit  $d \in \partial D$  un point base. Le groupe fondamental  $\pi_1(D \setminus Q_n, d)$  est un groupe libre  $F_n$  de rang  $n$  dont les générateurs  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sont représentés par les lacets  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sur la figure 1.1.9.

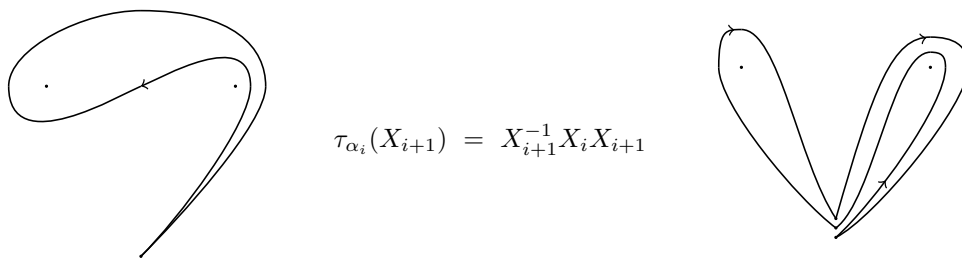
Figure 1.1.9. Les lacets  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sur  $D \setminus Q_n$ 

Par restriction à  $D \setminus Q_n$ , tout auto-homéomorphisme de  $(D, Q_n)$  induit un automorphisme de groupes, noté  $\iota(f)$  de  $F_n = \pi_1(D \setminus Q_n, d)$ . Cet automorphisme ne dépend que de la classe d'isotopie de  $f$ . On vérifie que cet automorphisme est un automorphisme de tresse de  $F_n$ . Par conséquent, la formule  $f \mapsto \iota(f)$  définit une application de  $\mathfrak{M}(D, Q_n)$  dans  $\tilde{\mathcal{B}}_n$  qui est en fait un homomorphisme de groupes. On a alors le résultat suivant :

**Théorème 1.1.9** (Artin [4,5]). *Le diagramme suivant est commutatif et chaque flèche est un isomorphisme :*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}_n & & \\ \downarrow \zeta & \searrow \beta \mapsto \tilde{\beta} & \\ \mathfrak{M}(D, Q_n) & \xrightarrow{\iota} & \tilde{\mathcal{B}}_n \end{array}$$

Par exemple, la formule  $\tilde{\sigma}_i(x_{i+1}) = x_{i+1}^{-1}x_i x_{i+1}$  qui définit la valeur de l'automorphisme de tresse  $\tilde{\sigma}_i$  sur le générateur  $x_{i+1}$  s'explique géométriquement par la figure 1.1.10.



**Figure 1.1.10.** Les lacets  $\tau_{\alpha_i}(X_{i+1})$  et  $X_{i+1}^{-1}X_i X_{i+1}$  sur  $D \setminus Q_n$

## 1.1.2 Représentations des groupes de tresses

L'homomorphisme de groupe surjectif  $\theta : \mathcal{B}_n \rightarrow \mathfrak{S}_n$  qui à une tresse élémentaire  $\sigma_k$  associe la transposition  $(k, k+1)$  est à l'origine du lien entre les représentations des groupes symétriques et les représentations des groupes de tresses. On explique par la suite la manière dont les représentations de Burau et de Lawrence-Krammer-Bigelow peuvent être interprétées comme des « déformations » de représentations des groupes symétriques.

### La représentation de Burau

Soit  $I_k$  la matrice identité de taille  $k \times k$ . On considère la représentation  $\mathfrak{S}_n \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{Z})$  qui à la transposition  $(k, k+1) \in \mathfrak{S}_n$  associe la matrice suivante :

$$I_{k-1} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus I_{n-k-1}.$$

Cette représentation est appelée *représentation standard* de  $\mathfrak{S}_n$ .

D'autre part, soit  $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$  l'anneau des polynômes de Laurent en la variable  $t$ . On définit la *représentation de Burau* de  $\mathcal{B}_n$  dans  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}[t, t^{-1}])$  qui à une tresse élémentaire  $\sigma_k$  associe la matrice

$$I_{k-1} \oplus \begin{pmatrix} 1-t & t \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus I_{n-k-1}.$$

On observe que si l'on remplace la variable  $t$  par 1, on retrouve la représentation standard du groupe symétrique  $\mathfrak{S}_n$ . Pour cette raison, on peut considérer que la représentation de Burau est une déformation de cette représentation. La fidélité de la représentation de Burau pour  $n \leq 3$  est connue depuis longtemps, voir par exemple [8, Chap. III, § 3, thm. 3.15]. Le résultat principal est le suivant :

**Théorème 1.1.10** (Moody [49], Long, Paton [44], Bigelow [6]). *La représentation de Burau n'est pas fidèle pour  $n \geq 5$ .*

Enfin, le cas  $n = 4$  reste encore une question ouverte aujourd'hui.

### La représentation de Lawrence-Krammer-Bigelow

Soit  $\mathcal{E} = \{x_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq n\}$ . Le groupe symétrique  $\mathfrak{S}_n$  agit sur  $\mathcal{E}$  de la manière suivante :

$$\sigma \cdot x_{ij} = \begin{cases} x_{\sigma(i)\sigma(j)} & \text{si } \sigma(i) < \sigma(j), \\ x_{\sigma(j)\sigma(i)} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si l'on note  $E$  le  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel de base  $\mathcal{E}$ , cette action détermine une représentation du groupe symétrique  $\mathfrak{S}_n$  dans  $\mathrm{GL}(E)$ , que l'on note  $v$ .

D'autre part, soit  $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(q, z)$  le corps des fractions rationnelles en deux variables  $q$  et  $z$  sur  $\mathbb{Q}$  et soit  $V$  le  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel ayant  $\mathcal{E}$  pour base. On considère l'action des tresses élémentaires  $\sigma_k$  de  $\mathcal{B}_n$  sur  $\mathcal{E}$  comme suit :

$$\sigma_k \cdot x_{ij} = \begin{cases} zq^2 x_{k,k+1} & \text{si } i = k, j = k+1, \\ (1-q)x_{ik} + qx_{i,k+1} & \text{si } i < k, j = k, \\ x_{ik} + zq^{k-i+1}(q-1)x_{k,k+1} & \text{si } i < k, j = k+1, \\ zq(q-1)x_{k,k+1} + qx_{k+1,j} & \text{si } i = k, j > k+1, \\ x_{kj} + (1-q)x_{k+1,j} & \text{si } i = k+1, j > k+1, \\ x_{ij} & \text{si } i < j < k \text{ ou } j > i > k+1, \\ x_{ij} + zq^{k-1}(q-1)^2 x_{k,k+1} & \text{si } i < k < k+1 < j. \end{cases}$$

On vérifie que ces formules définissent une représentation appelée *représentation de Lawrence-Krammer-Bigelow*, que l'on note  $\Lambda : \mathcal{B}_n \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ . On observe que si l'on remplace les variables  $q$  et  $z$  par 1, on retrouve la représentation  $v$  du groupe symétrique  $\mathfrak{S}_n$ . De plus, on a le résultat suivant :



**Théorème 1.1.11** (Bigelow [7], Krammer [40]). *La représentation  $\Lambda : \mathcal{B}_n \rightarrow \text{GL}(V)$  est fidèle. Par conséquent, les groupes de tresses sont linéaires.*

## 1.2 Les groupes d'Artin

Dans cette partie, on introduit l'essentiel des outils utilisés pour l'étude des groupes d'Artin. Dès que l'on peut, on utilise les groupes de tresses comme exemple afin d'illustrer les définitions et les résultats exposés. Enfin, on accorde une attention particulière aux groupes de Coxeter qui jouent un rôle prépondérant dans les démonstrations des résultats présentés dans cette thèse.

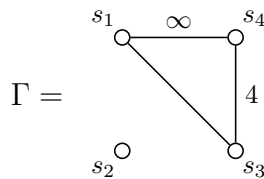
### 1.2.1 Généralités

Soit  $S$  un ensemble fini. On appelle *matrice de Coxeter* toute matrice symétrique  $M = (m_{s,t})_{s,t \in S}$  à coefficients dans  $\mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$  telle que  $m_{s,t} = 1$  si et seulement si  $s = t$ . Une matrice de Coxeter peut être représentée par un graphe pondéré  $\Gamma$  appelé *graphe de Coxeter* que l'on définit comme suit.

- (i) L'ensemble des sommets de  $\Gamma$  est  $S$ .
- (ii) Deux sommets  $s, t \in S$  sont reliés par une arête si  $m_{s,t} \geq 3$ , et cette arête est pondérée par  $m_{s,t}$  si  $m_{s,t} \geq 4$ .

Désormais, on représente systématiquement une matrice de Coxeter  $M$  par le graphe de Coxeter  $\Gamma$  qui lui correspond.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \infty \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ \infty & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$



**Figure 1.2.11.** Une matrice de Coxeter et son graphe de Coxeter associé

Soit  $\Gamma$  un graphe de Coxeter. Le *système de Coxeter* associé à  $\Gamma$  est la paire  $(W, S)$ , où  $W$  est le groupe

$$W = \left\langle S \left| \begin{array}{l} s^2 = 1 \\ (st)^{m_{s,t}} = 1 \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{pour tout } s \in S \\ \text{pour tous } s, t \in S, s \neq t \text{ et } m_{s,t} \neq \infty \end{array} \right\rangle.$$

Soient  $a$  et  $b$  deux lettres et  $m \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ . On pose  $(a \cdot b)^{\boxtimes m} = (ab)^{\frac{m}{2}}$  si  $m$  est pair et  $(a \cdot b)^{\boxtimes m} = (ab)^{\frac{m-1}{2}}a$  si  $m$  est impair. En d'autres termes,  $(a \cdot b)^{\boxtimes m}$  désigne le mot

$aba \cdots$  de longueur  $m$ . Le système d'Artin associé à  $\Gamma$  est la paire  $(A, S)$ , où  $A$  est le groupe

$$A = \langle S \mid (s \cdot t)^{\boxtimes m_{s,t}} = (t \cdot s)^{\boxtimes m_{s,t}} \text{ pour tous } s, t \in S, s \neq t \text{ et } m_{s,t} \neq \infty \rangle.$$

Ainsi, le groupe  $W$  est le quotient de  $A$  par les relations  $s^2 = 1$ , où  $s \in S$ . Par conséquent, on dispose d'un homomorphisme de groupes surjectif canonique  $\theta : A \rightarrow W$ . Le noyau de  $\theta$  est appelé *groupe d'Artin coloré* associé à  $\Gamma$ , que l'on note  $CA$ . Enfin, le *monoïde d'Artin*  $A^+$  associé à  $\Gamma$  est donné par la présentation suivante :

$$A^+ = \langle S \mid (s \cdot t)^{\boxtimes m_{s,t}} = (t \cdot s)^{\boxtimes m_{s,t}} \text{ pour tous } s, t \in S, s \neq t \text{ et } m_{s,t} \neq \infty \rangle^+.$$

**Exemple 1.2.12.** D'après le théorème 1.1.2, le groupe de tresses  $\mathcal{B}_n$  est un groupe d'Artin dont le graphe de Coxeter  $\Gamma$  est le suivant.

$$\Gamma = \begin{array}{ccccccc} & s_1 & s_2 & & & & s_{n-1} \\ & \circ & \circ & \cdots & \cdots & \cdots & \circ \\ & \circ & \circ & \cdots & \cdots & \cdots & \circ \end{array}$$

**Figure 1.2.12.** Le graphe de Coxeter du groupe de tresses  $\mathcal{B}_n$

Le système de Coxeter associé à  $\Gamma$  est la paire  $(W, S)$ , où  $W = \mathfrak{S}_n$  est le groupe symétrique d'ordre  $n!$  et où  $S$  est l'ensemble des transpositions simples  $s_k = (k, k+1)$ ,  $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ . Pour une tresse  $\mathbf{b} \in \mathcal{B}_n$ ,  $\theta(\mathbf{b})$  est la permutation associée à  $\beta$  introduite dans la partie 1.1.1. De plus, le groupe d'Artin coloré associé à  $\Gamma$  est le groupe des tresses pures  $\mathcal{P}_n$ .

Enfin, pour  $X \subset S$ , on note  $\Gamma_X$  le sous-graphe plein de  $\Gamma$  engendré par  $X$ . On note aussi  $W_X$  le sous-groupe de  $W$  engendré par  $X$ ,  $A_X^+$  le sous-monoïde de  $A^+$  engendré par  $X$  et  $A_X$  le sous-groupe de  $A$  engendré par  $X$ . Le sous-groupe  $W_X$  s'appelle *sous-groupe parabolique standard* de  $W$ . D'après le théorème 1.2.16,  $(W_X, X)$  est le système de Coxeter associé à  $\Gamma_X$ . De même,  $A_X$  s'appelle *sous-groupe parabolique standard* de  $A$  et  $(A_X, X)$  est le système d'Artin associé à  $\Gamma_X$  par [43, Chap. 2, thm. 4.13].

Dans toute la suite du chapitre,  $\Gamma$  désigne un graphe de Coxeter,  $(W, S)$  son système de Coxeter associé,  $(A, S)$  son système d'Artin associé et  $A^+$  le monoïde d'Artin correspondant.

## 1.2.2 Les groupes de Coxeter

Dans cette partie, on donne des résultats fondamentaux sur les groupes de Coxeter tels que le lemme d'échange et la solution au problème du mot de Tits [55]. Par la suite, on introduit la notion de base de racines dans un cadre général provenant des travaux de Krammer [38, 41]. Les représentations enracinées qui y sont associées sont l'objet du résultat principal du chapitre 2. Puis, on parle de systèmes de racines, principalement

dans le cas où l'on considère la base de racines classique d'un graphe de Coxeter, ce qui est un cadre suffisant pour démontrer les résultats du chapitre 3. On donne ensuite une classification des graphes de Coxeter connexes de type sphérique et de type affine. Ces classifications sont utilisées en particulier dans la démonstration du résultat principal du chapitre 4. Enfin, on parle de divisibilité dans les groupes de Coxeter et d'éléments fondamentaux, notions qui sont utilisées tout au long de la thèse et qui ont un lien fort avec les monoïdes d'Artin.

### Lemme d'échange et problème du mot

Soit  $w \in W$ . On appelle *longueur* de  $w$  le plus petit entier  $\ell \geq 0$  tel que  $w$  est le produit d'une suite de  $\ell$  éléments de  $S$ , et l'on note cet entier  $\text{lg}_S(w)$  ou  $\text{lg}(w)$ . On appelle *décomposition* de  $w$  toute suite  $\omega = (s_1, s_2, \dots, s_\ell)$  telle que  $w = s_1 s_2 \dots s_\ell$ . Si  $\ell = \text{lg}(w)$ , on dit que  $\omega$  est *décomposition réduite* de  $w$ .

La proposition 1.2.13 est appelée lemme d'échange. Elle est l'un des outils essentiels dans la combinatoire des groupes de Coxeter et sert notamment à démontrer la solution du problème du mot énoncée dans le théorème 1.2.14.

**Proposition 1.2.13** (Matsumoto [47]). *Si  $s \in S, w \in W$  et  $(s_1, s_2, \dots, s_\ell)$  est une décomposition réduite de  $w$ , alors on a l'une des deux alternatives suivantes.*

- (1) *On a  $\text{lg}(sw) = \text{lg}(w) + 1$  et  $(s, s_1, s_2, \dots, s_\ell)$  est une décomposition réduite de  $sw$ .*
- (2) *On a  $\text{lg}(sw) = \text{lg}(w) - 1$  et il existe  $i \in \{1, \dots, \ell\}$  tel que  $(s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_\ell)$  est une décomposition réduite de  $sw$  et que la suite  $(s, s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_\ell)$  est une décomposition réduite de  $w$ .*

Soit  $S^*$  le monoïde constitué des suites finies d'éléments de  $S$  muni de la concaténation, dont les éléments sont appelés *mots*. Soient  $\omega, \omega' \in S^*$ . On définit deux transformations, appelées *M-opérations*, de la manière suivante :

$$\omega \xrightarrow{M_I} \omega' \Leftrightarrow \exists \omega_1, \omega_2 \in S^*, \exists s \in S, \begin{cases} \omega = \omega_1 \cdot (s, s) \cdot \omega_2, \\ \omega' = \omega_1 \cdot \omega_2. \end{cases}$$

$$\omega \xrightarrow{M_{II}} \omega' \Leftrightarrow \exists \omega_1, \omega_2 \in S^*, \exists s, t \in S, s \neq t, m_{s,t} \neq \infty, \begin{cases} \omega = \omega_1 \cdot (s \cdot t)^{\boxtimes m_{s,t}} \cdot \omega_2, \\ \omega' = \omega_1 \cdot (t \cdot s)^{\boxtimes m_{s,t}} \cdot \omega_2. \end{cases}$$

On dit qu'un mot  $\omega$  est *M-réduit* si sa longueur ne peut pas être diminuée en utilisant des *M-opérations*. On remarque que deux mots obtenus l'un de l'autre par une suite finie de *M-opérations* représentent le même élément de  $W$ . La réciproque, énoncée ci-après, donne une solution au problème du mot dans les groupes de Coxeter.

**Théorème 1.2.14** (Tits [55]).

- (1) *Un mot  $w \in S^*$  est une décomposition réduite si et seulement s'il est M-réduit.*

- (2) Soient  $\omega, \omega' \in S^*$  deux mots réduits. Les éléments de  $W$  qu'ils représentent sont égaux si et seulement si on peut obtenir  $\omega$  à partir de  $\omega'$  en utilisant une suite finie d'opérations de type  $M_{II}$ .

### Sous-groupes paraboliques

Les résultats présentés dans cette partie sont principalement utilisés dans le chapitre 4. Les énoncés suivants décrivent les propriétés des sous-groupes paraboliques standard. Soit  $X \subset S$  et  $W_X$  le sous-groupe parabolique standard correspondant.

**Proposition 1.2.15** (Bourbaki [9, Chap. IV, § 1, n° 8]).

- (1) Soit  $w \in W$ . Il existe une partie  $S_w$  de  $S$  telle que l'on ait  $S_w = \{s_1, s_2, \dots, s_\ell\}$  pour toute décomposition réduite  $(s_1, s_2, \dots, s_\ell)$  de  $w$ .
- (2) On a  $W_X = \{w \in W \mid S_w \subset X\}$ .
- (3) Pour tout  $w \in W_X$ ,  $\lg_X(w) = \lg_S(w)$ .

**Théorème 1.2.16** (Bourbaki [9, Chap. IV, § 1, n° 8]). Le couple  $(W_X, X)$  est le système de Coxeter de  $\Gamma_X$ .

On appelle *sous-groupe parabolique* de  $W$  tout sous-groupe de  $W$  conjugué à un sous-groupe parabolique standard. D'après [53, Lem. 2], l'intersection de deux sous-groupes paraboliques est un sous-groupe parabolique. Pour  $w \in W$ , on appelle *clôture parabolique* de  $w$  le plus petit sous-groupe parabolique contenant  $w$ , que l'on note  $\text{Pc}(w)$ . On dit que  $w$  est *essentiel* si  $\text{Pc}(w) = W$ . Enfin, si  $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ , alors on dit que  $c = s_1 s_2 \cdots s_n$  est un *élément de Coxeter* de  $W$ . Cet élément dépend de l'ordre choisi sur  $S$ . Par [52, Thm. 3.1], tout élément de Coxeter est essentiel.

### Représentations enracinées, bases de racines

On appelle *base de racines* de  $\Gamma$  tout triplet  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle, \Pi)$ , où  $V$  est un espace vectoriel réel,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est une forme bilinéaire symétrique sur  $V$  et où  $\Pi = \{\epsilon_s \mid s \in S\}$  est un ensemble de vecteurs de  $V$  en bijection avec  $S$  qui vérifie les propriétés suivantes :

- (i) Pour tout  $s \in S$ ,  $\langle \epsilon_s, \epsilon_s \rangle = 1$ .
- (ii) Pour tous  $s, t \in S$ ,  $s \neq t$ , on a  $\langle \epsilon_s, \epsilon_t \rangle = -\cos(\pi/m_{s,t})$  si  $m_{s,t} \neq \infty$ ,  
 $\langle \epsilon_s, \epsilon_t \rangle \in ]-\infty, -1]$  si  $m_{s,t} = \infty$ .
- (iii) Il existe  $\chi \in V^*$  tel que  $\chi(\epsilon_s) > 0$  pour tout  $s \in S$ .

Cette définition provient de la thèse de Krammer [38, 41, § 1, n° 2]. C'est à la fois une extension de la théorie des représentations canoniques développée dans [9] et un point de vue nouveau sur les groupes de réflexions développés par Vinberg dans [56].

**Exemple 1.2.17.** Dans le cas où  $\Pi$  est une base de  $V$  et où  $\langle \epsilon_s, \epsilon_t \rangle = -1$  si  $m_{s,t} = \infty$ , on retrouve la base de racines définie dans [27], que l'on appelle *base de racines classique* de  $\Gamma$ . Le point (iii) est alors vérifié par la forme linéaire  $\chi$  définie par  $\chi(\epsilon_s) = 1$  pour tout  $s \in S$ .

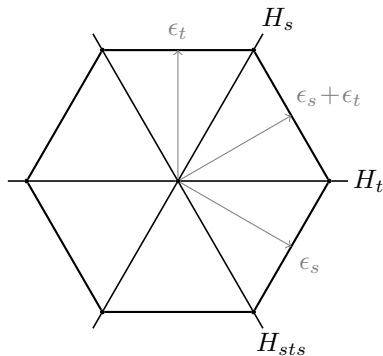
Soit  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle, \Pi)$  une base de racines de  $\Gamma$ . Pour tout  $s \in S$ , on définit l'application linéaire  $f_s : V \rightarrow V$  par la formule suivante :

$$\forall x \in V, \quad f_s(x) = x - 2\langle x, \epsilon_s \rangle \epsilon_s.$$

**Théorème 1.2.18** (Krammer [38,41, Thm. 1.2.2]). *L'application de  $S$  dans  $GL(V)$  qui à  $s \in S$  associe  $f_s \in GL(V)$  induit une représentation linéaire fidèle  $f : W \rightarrow GL(V)$ .*

La représentation  $f : W \rightarrow GL(V)$  du théorème 1.2.18 est appelée *représentation enracinée* de  $W$  associée à la base de racines  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle, \Pi)$ . Dans le cas où  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle, \Pi)$  est la base de racines classique de  $\Gamma$ , on appelle  $f$  la *représentation canonique* de  $W$ . Dans la suite de cette thèse, on écrira systématiquement  $wx$  à la place de  $f(w)(x)$  pour tout  $w \in W$  et  $x \in V$  dès que l'on aura fixé  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle, \Pi)$  une base de racines de  $W$ , où  $f$  est la représentation enracinée qui lui est associée.

**Exemple 1.2.19.** On considère le groupe symétrique  $\mathfrak{S}_3$  et l'ensemble  $S = \{s, t\}$  constitué des deux transpositions simples  $s = (1, 2)$  et  $t = (2, 3)$ . Les images de  $s$ ,  $t$  et  $sts$  par la représentation canonique sont les réflexions orthogonales par rapport aux droites vectorielles  $H_s$ ,  $H_t$  et  $H_{sts}$  dessinées sur la figure 1.2.13. De plus,  $st$  et  $ts$  sont représentées par des rotations vectorielles d'angle  $-2\pi/3$  et  $2\pi/3$ . Enfin, l'élément neutre de  $W$  est représenté par l'application identité de  $\mathbb{R}^2$ .



**Figure 1.2.13.** La représentation canonique du groupe symétrique  $\mathfrak{S}_3$

### Systèmes de racines

Soit  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle, \Pi)$  la base de racines classique de  $\Gamma$ . On appelle *système de racines* de  $W$  l'orbite de  $\Pi$  sous l'action de  $W$ , que l'on note  $\Phi$ . Autrement dit,

$$\Phi = \{w\epsilon_s \mid s \in S, w \in W\}.$$

Les éléments de  $\Pi$  sont appelés *racines simples*, les éléments de  $\Phi$  sont appelés *racines*. Pour toute racine  $\rho \in \Phi$ , il existe une unique famille de réels  $\{\lambda_s\}_{s \in S}$  telle que  $\rho = \sum_{s \in S} \lambda_s \epsilon_s$ . On dit que  $\rho$  est une *racine positive* si  $\lambda_s \geq 0$  pour tout  $s \in S$ , et l'on note  $\Phi^+$  l'ensemble des racines positives. De même, on note  $\Phi^- = -\Phi^+$  l'ensemble des *racines négatives*. Le résultat suivant est démontré dans [27, Prop. 2.1], ou encore dans [34, Chap. 5, § 4].

**Proposition 1.2.20.** *On a l'union disjointe  $\Phi = \Phi^+ \sqcup \Phi^-$ .*

**Remarque 1.2.21.** On peut étendre les définitions données précédemment dans le cas où  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle, \Pi)$  une base de racines de  $\Gamma$  et où  $\Pi$  est une famille libre. Dans ce cadre plus général, la proposition 1.2.20 reste vraie [38, 41, Thm. 1.2.2]. De plus, on vérifie que l'application  $\zeta$  qui à une racine  $\rho = w\epsilon_s \in \Phi^+$  associe  $\zeta(\rho) = wsw^{-1} \in W$  est bien définie et réalise une bijection entre l'ensemble  $\Phi^+$  des racines positives associé à la base de racines  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle, \Pi)$  et l'ensemble des réflexions de  $W$  que l'on note  $R = \{wsw^{-1} \mid s \in S, w \in W\}$ . Par conséquent, le système de racines positives  $\Phi^+$  est en bijection « naturelle » avec le système de racines positives associé à la base de racines classique de  $\Gamma$ .

Pour tout  $w \in W$ , on pose  $\Phi_w = \{\rho \in \Phi^+ \mid w^{-1}\rho \in \Phi^-\}$ . La proposition suivante donne une interprétation géométrique de la fonction longueur  $\lg : W \rightarrow \mathbb{N}$  en termes de racines positives de  $W$ .

**Proposition 1.2.22** (Deodhar [27, Prop. 2.2]). *On a  $|\Phi_w| = \lg(w)$  pour tout  $w \in W$ .*

Soit  $\rho \in \Phi^+$ . On définit la *profondeur* de  $\rho$  par

$$\text{dp}(\rho) = \min\{\ell \in \mathbb{N} \mid \exists w \in W, w\rho \in \Phi^-, \lg(w) = \ell\}.$$

On utilise la notion de profondeur pour définir la représentation de Paris présentée dans la partie 1.2.4. La proposition 1.2.23 est essentielle pour définir cette représentation.

**Proposition 1.2.23** (Brink, Howlett [14, Lem. 1.7]). *Soient  $s \in S$  et  $\rho \in \Phi^+ \setminus \{\epsilon_s\}$ . Alors*

$$\text{dp}(s\rho) = \begin{cases} \text{dp}(\rho) - 1 & \text{si } \langle \epsilon_s, \rho \rangle > 0, \\ \text{dp}(\rho) & \text{si } \langle \epsilon_s, \rho \rangle = 0, \\ \text{dp}(\rho) + 1 & \text{si } \langle \epsilon_s, \rho \rangle < 0. \end{cases}$$

**Exemple 1.2.24.** On considère le groupe de Coxeter

$$\mathfrak{S}_4 = \langle s, t, u \mid s^2 = t^2 = u^2 = 1, sts = tst, utu = tut, su = us \rangle.$$

L'ensemble des racines positives de  $\mathfrak{S}_4$  est  $\Phi^+ = \{\epsilon_s, \epsilon_t, \epsilon_u, \epsilon_s + \epsilon_t, \epsilon_t + \epsilon_u, \epsilon_s + \epsilon_t + \epsilon_u\}$ . On démontre par exemple que si  $w = stusts$ , alors  $\Phi_w = \Phi^+$ . Ainsi,  $\lg(w) = 6$  et  $(s, t, u, s, t, s)$  est une décomposition réduite de  $w$ . Enfin, on vérifie par exemple que la profondeur de  $\epsilon_s + \epsilon_t + \epsilon_u$  vaut 3 et qu'il n'y a pas de racines de plus grande profondeur.

### Classification des groupes de Coxeter de type sphérique et affine

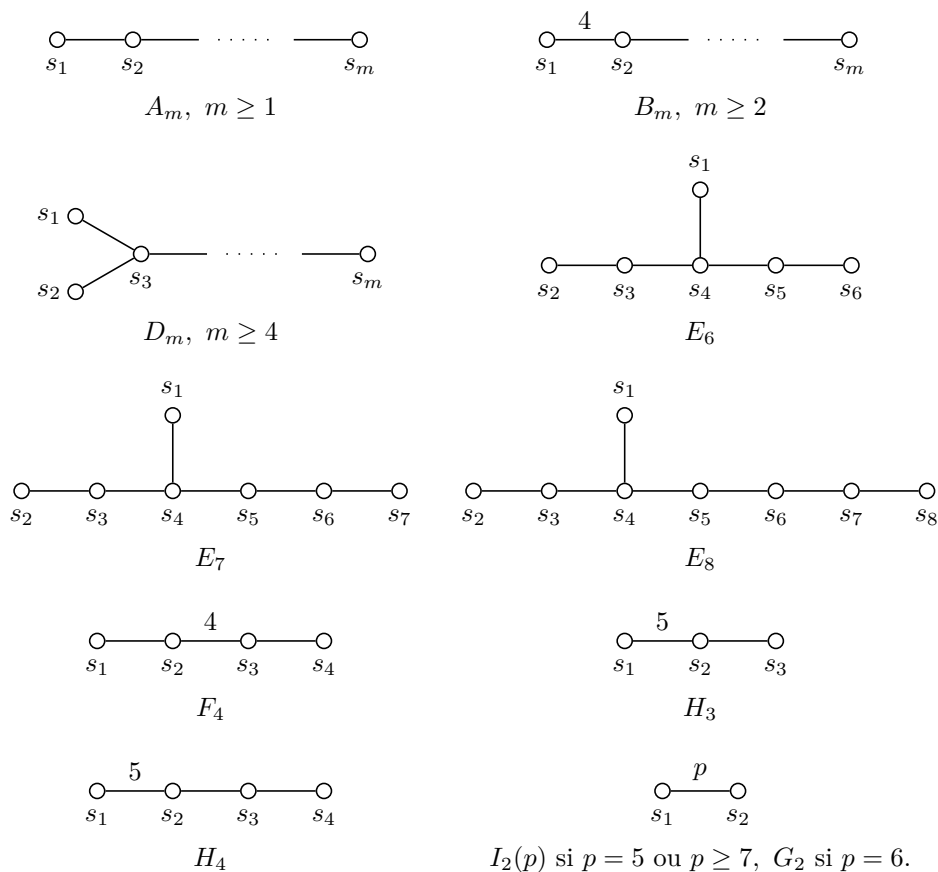
On dit que  $(W, S)$  est *irréductible* si son graphe de Coxeter associé est connexe. On dit que son graphe de Coxeter  $\Gamma$  est de *type sphérique* si le groupe  $W$  est fini. Si l'on note  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$  les composantes connexes d'un graphe de Coxeter  $\Gamma$ , alors on a

$$W(\Gamma) = W(\Gamma_1) \times W(\Gamma_2) \times \dots \times W(\Gamma_n).$$

Par conséquent,  $\Gamma$  est de type sphérique si et seulement si toutes ses composantes connexes le sont. Ainsi, il suffit de classifier les graphes de Coxeter connexes de type sphérique.

**Théorème 1.2.25** (Coxeter [20, 21]).

- (1)  $\Gamma$  est un graphe connexe de type sphérique si et seulement si la forme bilinéaire canonique  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est définie positive.
- (2) Les seuls graphes de Coxeter connexes de type sphérique sont ceux de la figure 1.2.14.



**Figure 1.2.14.** Les graphes de Coxeter connexes de type sphérique

On dit que  $\Gamma$  est de *type affine* si la forme bilinéaire canonique  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est positive non définie.

**Théorème 1.2.26** (Bourbaki [9, Chap. VI, § 4, n° 3, thm. 4]). *Les seuls graphes de Coxeter connexes de type affine sont ceux de la figure 1.2.15.*

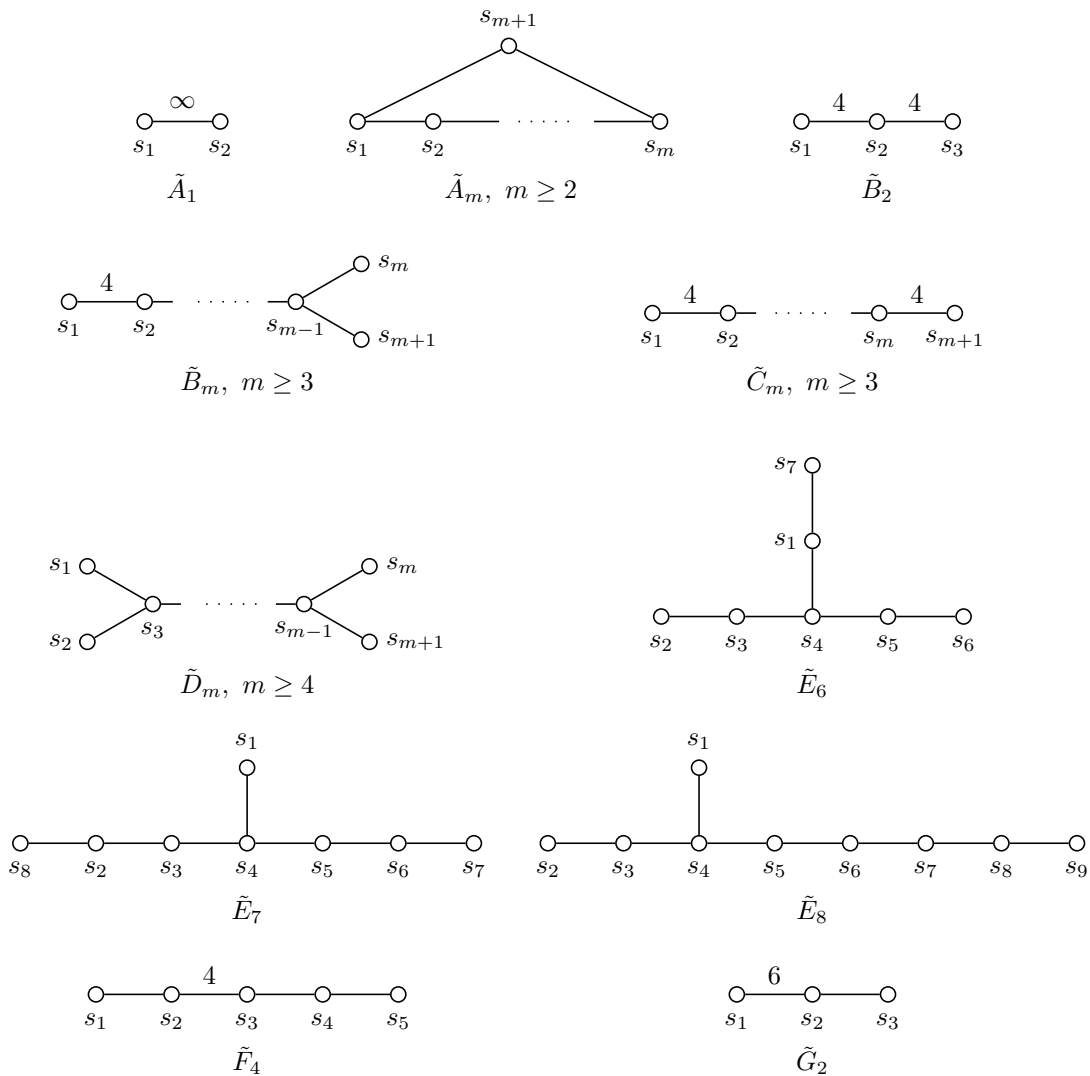


Figure 1.2.15. Les graphes de Coxeter connexes de type affine

### Divisibilité dans les groupes de Coxeter

Soient  $u, v \in W$ . On écrit  $u <_L v$ , et on dit que  $u$  est un *diviseur à gauche*, ou *diviseur* de  $v$  s'il existe  $w \in W$  tel que  $v = uw$  et  $\text{lg}(v) = \text{lg}(u) + \text{lg}(w)$ . La relation



binaire  $<_L$  est une relation d'ordre partiel sur  $W$  qui joue un rôle important dans l'étude du monoïde et du groupe d'Artin associés. Soit  $E$  un ensemble fini d'éléments de  $W$ . On dit que les éléments de  $E$  admettent un *plus petit multiple commun* si l'ensemble des majorants de  $E$  possède un unique élément minimal pour  $<_L$ . De même, on dit que les éléments de  $E$  admettent un *plus grand diviseur commun* si l'ensemble des minorants de  $E$  possède un unique élément maximal pour  $<_L$ .

Par la suite, si  $s, t \in S$  sont tels que  $m_{s,t} \neq +\infty$ , on note  $w_{\{s,t\}}$  l'élément de  $W$  dont une décomposition est  $(s \cdot t)^{\boxtimes m_{s,t}}$ . D'après la solution au problème du mot de Tits,  $w_{\{s,t\}}$  est le plus petit multiple commun de  $s$  et  $t$ . Le résultat suivant reprend essentiellement les idées de [48].

**Proposition 1.2.27.** *Soit  $E$  un sous-ensemble non vide, fini de  $W$  tel que les deux conditions suivantes soient vérifiées.*

- (1) *Si  $u, v \in W$  vérifient  $u <_L v$  et  $v \in E$ , alors  $u \in E$ .*
- (2) *Si  $v \in W$  et  $s, t \in S$  sont tels que  $\lg(vs) = \lg(vt) = \lg(v) + 1$  et  $vs, vt \in E$ , alors  $m_{s,t} \neq +\infty$  et  $vw_{\{s,t\}} \in E$ .*

*Alors, il existe un unique  $w_0 \in E$  tel que  $E = \{v \in W \mid v <_L w_0\}$ .*

**Démonstration.** Soit  $w_0$  un élément de longueur maximale dans  $E$ . On raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe un élément de  $E$  qui ne divise pas  $w_0$  à gauche. Dans ce cas, on choisit  $u \in E$  de longueur maximale tel que

$$\begin{cases} u <_L w_0, \\ \exists s \in S, us \in E \text{ et } us \not<_L w_0. \end{cases} \quad (P)$$

D'après la proposition 1.2.13,  $\lg(u) < \lg(us)$ , sinon on aurait  $us <_L w_0$ , donc en particulier,  $\lg(u) < \lg(w_0)$  puisque  $w_0$  est de longueur maximale dans  $E$ . Il existe donc  $t \in S \setminus \{s\}$  tel que  $ut <_L w_0$ . D'après (1), l'élément  $ut$  appartient à  $E$ . Par (2), on a donc  $uw_{\{s,t\}} \in E$ . Or  $us \not<_L w_0$ , donc  $uw_{\{s,t\}} \not<_L w_0$ . Ainsi, il existe  $v \in W$  tel que  $v <_L w_{\{s,t\}}$  et qui vérifie  $ut <_L uv <_L w_0$ . Par conséquent, il existe  $r \in \{s, t\}$  tel que  $uvr <_L uw_{\{s,t\}}$  et  $uvr \not<_L w_0$ . Ainsi, l'élément  $uv$  vérifie la propriété (P) et  $\lg(uv) > \lg(u)$ , ce qui contredit le choix de  $u$  de longueur maximale vérifiant (P).  $\square$

Le résultat suivant est connu des spécialistes, mais nous n'en trouvons aucune démonstration dans la littérature. Par conséquent, nous en fournissons une démonstration.

**Proposition 1.2.28.** *Les éléments d'un sous-ensemble fini de  $W$*

- (1) *possèdent toujours un unique plus grand diviseur commun,*
- (2) *soit possèdent un unique plus petit multiple commun, soit ne possèdent aucun multiple commun.*

**Démonstration.** Par récurrence, on se ramène au cas où le sous-ensemble fini de  $W$  dont il est question contient deux éléments, notés  $u, v \in W$ . On considère l'ensemble

$$E = \{w \in W \mid w <_L u, w <_L v\}.$$

Cet ensemble vérifie la première condition de la proposition 1.2.27 par transitivité de la relation  $<_L$ . Soient  $w \in E$  et  $t, s \in S$  tels que  $\lg(ws) = \lg(wt) = \lg(w) + 1$  et  $ws, wt \in E$ . Ainsi,  $s$  et  $t$  admettent  $w^{-1}u$  et  $w^{-1}v$  comme multiples communs. Par [24, Chap. 4, § 7, lem. 4.7.2], on a alors  $m_{s,t} \neq +\infty$ . On a donc  $w_{\{s,t\}} <_L w^{-1}u$  et  $w_{\{s,t\}} <_L w^{-1}v$ . On vérifie qu'alors,  $ww_{\{s,t\}} <_L u$  et  $ww_{\{s,t\}} <_L v$ , donc  $w_{\{s,t\}} \in E$ . La deuxième condition de la proposition 1.2.27 est donc satisfaite. L'unique élément  $w_0$  tel que  $E = \{w \in W \mid w <_L w_0\}$  est alors le plus grand multiple commun de  $u$  et  $v$ , ce qui démontre le premier point.

Maintenant, on suppose que  $u, v \in W$  ont un multiple commun et on choisit  $w_0 \in W$  l'un de ces multiples. On considère l'ensemble

$$F = \{w \in W \mid u <_L w, v <_L w, w <_L w_0\}.$$

L'ensemble  $F$  est fini puisque tout élément  $w \in F$  vérifie  $\lg(w) \leq \lg(w_0)$  et qu'il n'y a qu'un nombre fini d'éléments d'une longueur donnée. Soit  $w_1 \in W$  le plus grand diviseur commun des éléments de  $F$ . On observe aisément que  $w_1$  appartient à  $F$ . Maintenant, si  $w \in W$  est un multiple commun de  $u$  et  $v$ , alors le plus grand diviseur commun de  $w$  et  $w_0$  appartient à  $F$ , donc  $w_1$  le divise, donc en particulier  $w_1 <_L w$ . Ainsi,  $w_1$  est le plus petit multiple commun de  $u$  et  $v$ .  $\square$

Soit  $X \subset S$ . Le plus petit multiple commun des éléments de  $X$  existe si et seulement si le sous-graphe  $\Gamma_X$  est de type sphérique. On l'appelle alors *élément le plus long* de  $W_X$ , et on le note  $w_X$ . C'est une involution, dans le sens où  $w_X^2 = 1$ , et il vérifie l'égalité  $w_X X w_X = X$  [24, Chap. 4, § 7, lem. 4.6].

### 1.2.3 Les monoïdes d'Artin

#### Éléments simples et divisibilité

On rappelle que  $\theta$  désigne l'homomorphisme quotient de  $A$  sur  $W$ . L'application  $\tau$  qui à un élément  $w \in W$  associe l'élément  $s_1 s_2 \dots s_\ell \in A^+$ , où  $(s_1, s_2, \dots, s_\ell)$  est une décomposition réduite de  $w$ , est bien définie grâce à la solution du problème du mot de Tits énoncée dans le théorème 1.2.14. Cette application  $\tau$  est, par construction, une section ensembliste de  $\theta$ , dans le sens où  $\theta \circ \tau = \text{Id}_W$ . Les éléments de son image sont appelés *éléments simples* de  $A^+$ . Ces éléments sont essentiels dans l'étude de la divisibilité dans les monoïdes d'Artin.

Par ailleurs, les relations qui définissent le monoïde d'Artin  $A^+$  sont homogènes. Ainsi, l'application  $\lg$  qui à un élément  $s_1 s_2 \dots s_\ell \in A^+$  associe  $\ell \in \mathbb{N}$ , que l'on appelle

longueur, est bien définie. On remarque que les éléments simples sont les éléments  $a \in A^+$  tels que  $\text{lg}(a) = \text{lg}(\tau(a))$ .

On dit que  $a$  est un *diviseur à gauche* de  $b$  et l'on écrit  $a <_L b$  s'il existe  $c \in A^+$  tel que  $ac = b$ . On vérifie que la relation binaire  $<_L$  est un ordre partiel sur  $A^+$ . Le lemme suivant est une conséquence directe du théorème 1.2.14 et donne un lien direct entre les éléments des monoïdes d'Artin et ceux des groupes de Coxeter.

**Lemme 1.2.29.** *Soient  $u, v \in W$ . On a  $u <_L v$  si et seulement si  $\tau(u) <_L \tau(v)$ .*

### Simplifiabilité

Pour  $s, t \in S$  tels que  $m_{s,t} \neq +\infty$ , on note  $\Delta_{\{s,t\}}$  l'élément simple  $\tau(w_{\{s,t\}})$  de  $A^+$ . Les deux résultats qui suivent sont utilisés dans [48] pour démontrer que tout monoïde d'Artin est *simplifiable*, dans le sens où

$$\forall a, b_1, b_2, c \in A^+, \quad ab_1c = ab_2c \Rightarrow b_1 = b_2.$$

**Proposition 1.2.30** (Michel [48, Lem. 1.4]). *Soit  $E$  un sous-ensemble non vide, fini de  $A^+$  tel que les deux conditions suivantes soient vérifiées.*

(1) *Si  $a, b \in A^+$  vérifient  $a <_L b$  et  $b \in E$ , alors  $a \in E$ .*

(2) *Si  $a \in A^+$  et  $s, t \in S$  sont tels que  $as, at \in E$ , alors  $m_{s,t} \neq +\infty$  et  $v\Delta_{\{s,t\}} \in E$ .*

*Alors, il existe un unique  $a_0 \in E$  tel que  $E = \{a \in A^+ \mid a <_L a_0\}$ .*

La proposition 1.2.30 est l'équivalent pour les monoïdes d'Artin de la proposition 1.2.27 pour les groupes de Coxeter, et se démontre de la même manière. La proposition suivante en est une conséquence.

**Proposition 1.2.31** (Michel [48, Prop. 2.1]). *Soit  $a \in A^+$ .*

(1) *L'ensemble des éléments simples qui divisent  $a$  à gauche possède un unique plus grand élément pour  $<_L$ , que l'on note  $\delta(a)$ .*

(2) *Pour tous  $a, b \in A^+$ ,  $\delta(ab) = \delta(a\delta(b))$ .*

Dans [13], la démonstration de la simplifiabilité des monoïdes d'Artin est élémentaire et provient d'un examen attentif des systèmes de Coxeter  $(W, S)$  tels que  $S$  compte trois éléments.

**Théorème 1.2.32** (Michel [48, Prop. 2.4], Brieskorn, Saito [13, Prop. 2.3]). *Le monoïde d'Artin  $A^+$  est simplifiable.*

Enfin, la proposition suivante traite d'éléments qui sont aux monoïdes d'Artin ce que les éléments les plus longs sont aux groupes de Coxeter.

**Proposition 1.2.33** (Brieskorn, Saito [13]). *Les éléments d'un sous-ensemble fini non vide de  $A^+$*

- (1) [13, Prop. 4.1] *possèdent toujours un unique plus grand diviseur commun,*
- (2) [13, Prop. 4.2] *soit possèdent un unique plus petit multiple commun, soit ne possèdent aucun multiple commun.*

Soit  $X \subset S$ . Le plus petit multiple commun des éléments de  $X$  existe si et seulement si le sous-graphe  $\Gamma_X$  est de type sphérique [13, Thm. 5.6]. Cet élément est noté  $\Delta_X \in A^+$ . Le lemme 1.2.29 permet de démontrer rapidement que  $\Delta_X = \tau(w_X)$ . Ainsi,  $\Delta_X$  est un élément simple de  $A^+$ .

**Exemple 1.2.34.** Soit  $\mathcal{B}_4^+$  le sous-monoïde du groupe de tresses  $\mathcal{B}_4$  positivement engendré par les tresses élémentaires  $\sigma_1, \sigma_2$  et  $\sigma_3$ . Alors, on a  $\Delta_S = \sigma_1(\sigma_2\sigma_1\sigma_3\sigma_2\sigma_1) = \sigma_2(\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_2\sigma_1) = \sigma_3(\sigma_2\sigma_3\sigma_1\sigma_2\sigma_3)$ .

## 1.2.4 Représentations linéaires des groupes d'Artin

### Cas où $\Gamma$ est simplement lacé, sans triangles

On dit que  $\Gamma$  est *simplement lacé* si  $m_{s,t} \in \{2, 3\}$  pour tous  $s, t \in S$  tels que  $s \neq t$ . On dit que  $\Gamma$  est *sans triangles* s'il n'existe pas de triplet  $(s, t, r) \in S^3$  tel que  $m_{s,t} = m_{t,r} = m_{r,s} = 3$ . Dans cette partie, on suppose que  $\Gamma$  est simplement lacé, sans triangles, et on considère  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle, \Pi)$  la base de racines classique de  $\Gamma$ .

Soit  $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(q, z)$  le corps des fractions rationnelles en deux variables,  $q$  et  $z$ . On se donne un ensemble abstrait  $\mathcal{B} = \{e_\rho \mid \rho \in \Phi^+\}$  en bijection avec  $\Phi^+$  et on note  $E$  le  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel ayant  $\mathcal{B}$  pour base. Pour tout  $s \in S$ , on définit  $\varphi_s : E \rightarrow E$  par

$$\varphi_s(e_\rho) = \begin{cases} 0 & \text{si } \rho = \epsilon_s, \\ e_\rho & \text{si } \langle \rho, \epsilon_s \rangle = 0, \\ q e_{s\rho} & \text{si } \langle \rho, \epsilon_s \rangle > 0 \text{ et } \rho \neq \epsilon_s, \\ (1 - q) e_\rho + e_{s\rho} & \text{si } \langle \rho, \epsilon_s \rangle < 0. \end{cases}$$

On vérifie facilement que

$$\begin{aligned} \varphi_s \varphi_t &= \varphi_t \varphi_s & \text{si } m_{s,t} = 2, \\ \varphi_s \varphi_t \varphi_s &= \varphi_t \varphi_s \varphi_t & \text{si } m_{s,t} = 3. \end{aligned}$$

**Remarque 1.2.35.** Les applications linéaires  $\varphi_s$  ne sont pas inversibles. L'application qui à  $s$  associe  $\varphi_s$  ne définit donc pas une représentation linéaire de  $A$  sur  $\text{GL}(E)$ . Pour obtenir une telle représentation, il est nécessaire de déformer chaque  $\varphi_s$ , ce qui est fait ci-après au moyen d'une famille de polynômes de  $\mathbb{Z}[q]$ .

Pour  $s \in S$  et  $\rho \in \Phi^+$  on définit un polynôme  $T(s, \rho) \in \mathbb{Z}[q]$  par récurrence sur  $\text{dp}(\rho)$  comme suit. Si  $\text{dp}(\rho) = 1$ , il existe  $t \in S$  tel que  $\rho = \epsilon_t$ . Alors, on pose

- $T(s, \epsilon_t) = q^2$  si  $t = s$ ,
- $T(s, \epsilon_t) = 0$  si  $t \neq s$ .

Si  $\text{dp}(\rho) \geq 2$ , on choisit  $t \in S$  tel que  $\text{dp}(t\rho) < \text{dp}(\rho)$ . On a  $\langle \rho, \epsilon_t \rangle = b > 0$  d'après la proposition 1.2.23. Si  $\langle \rho, \epsilon_s \rangle = a > 0$ , on pose

$$- T(s, \rho) = q^{\text{dp}(\rho)}(q - 1).$$

Si  $\langle \rho, \epsilon_s \rangle = 0$ , on pose

- $T(s, \rho) = qT(s, t\rho)$  si  $m_{s,t} = 2$ ,
- $T(s, \rho) = (q - 1)T(s, t\rho) + qT(t, st\rho)$  si  $m_{s,t} = 3$ .

Si  $\langle \epsilon_s, \rho \rangle = -a < 0$ , on pose

- $T(s, \rho) = qT(s, t\rho)$  si  $m_{s,t} = 2$ ,
- $T(s, \rho) = (q - 1)T(s, t\rho) + qT(t, st\rho)$  si  $m_{s,t} = 3$  et  $b > a$ ,
- $T(s, \rho) = T(t, t\rho) + (q - 1)T(s, t\rho)$  si  $m_{s,t} = 3$  et  $b = a$ ,
- $T(s, \rho) = qT(s, t\rho) + T(t, t\rho) + q^{\text{dp}(\rho)-1}(1 - q)$  si  $m_{s,t} = 3$  et  $b < a$ .

Un examen exhaustif permet de démontrer que dans chaque cas, le polynôme  $T(s, \rho)$  est bien défini [51]. Autrement dit, il ne dépend pas du choix du  $t \in S$  tel que  $\text{dp}(t\rho) < \text{dp}(\rho)$ . Pour  $s \in S$  on définit donc une transformation linéaire  $\psi_s : E \rightarrow E$  par

$$\psi_s(e_\rho) = \varphi_s(e_\rho) + zT(s, \rho)e_{\epsilon_s}.$$

**Théorème 1.2.36** (Cohen, Wales [19], Digne [28], Paris [51]).

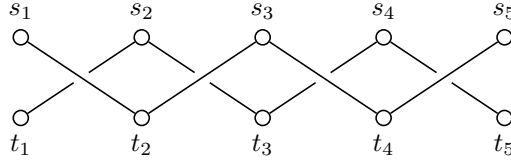
- (1) Pour tout  $s \in S$ ,  $\psi_s \in \text{GL}(E)$ , et l'application de  $S$  dans  $\text{GL}(E)$  qui à  $s$  associe  $\psi_s$  induit une représentation linéaire fidèle  $\psi^+ : A^+ \rightarrow \text{GL}(E)$ .
- (2) Si  $\Gamma$  est de type sphérique, alors  $\psi_s \in \text{GL}(E)$  pour tout  $s \in S$  et l'application de  $S$  dans  $\text{GL}(E)$  qui à  $s$  associe  $\psi_s$  induit une représentation linéaire fidèle  $\psi : A \rightarrow \text{GL}(E)$ .

**Notes historiques.** Les méthodes utilisées par Krammer [39, 40] pour démontrer la fidélité des représentations de Lawrence ont dans un premier temps été étendues, de manière indépendante, par Cohen-Wales [19] ainsi que par Digne [28] dans le cas des groupes de Coxeter de type sphérique simplement lacés. Par la suite, Paris [51] a généralisé les définitions et les démonstrations de Krammer pour tous les groupes de Coxeter simplement lacés et sans triangles, dans un article démontrant que tout monoïde d'Artin peut se plonger dans un groupe. Enfin, Castella [18] a étendu cette représentation selon deux directions, d'une part à tous les graphes de Coxeter simplement lacés et, d'autre part, avec plus de paramètres que ceux donnés dans Paris [51]. On ne sait pas si la représentation  $\psi : A \rightarrow \text{GL}(E)$  est fidèle lorsque  $\Gamma$  n'est pas de type sphérique. On ne sait pas non plus comment définir  $\psi$  dans le cas où  $\Gamma$  n'est pas simplement lacé.

### Cas où $\Gamma$ est un graphe de Coxeter quelconque

Soit  $\Gamma$  un graphe de Coxeter quelconque. D'après [51, Thm. 5.1], il existe un homomorphisme injectif de  $A^+(\Gamma)$  sur un monoïde d'Artin  $A^+(\Gamma_0)$  associé à un graphe de Coxeter  $\Gamma_0$  simplement lacé et sans triangles. Ainsi, en composant un tel homomorphisme avec la représentation linéaire de  $A^+(\Gamma_0)$  du théorème 1.2.36, on obtient une représentation linéaire fidèle de  $A^+(\Gamma)$  dans un groupe linéaire, et cette représentation linéaire s'étend en une représentation linéaire fidèle de  $A(\Gamma)$  si le graphe de Coxeter  $\Gamma$  est de type sphérique.

**Exemple 1.2.37.** Dans la construction de Paris [51], le monoïde d'Artin associé au graphe de Coxeter  $G_2$  s'injecte dans monoïde d'Artin associé au graphe de Coxeter  $\Gamma_0$  obtenu comme union disjointe de deux copies du graphe  $A_5$ , cf. figure 1.2.16.



**Figure 1.2.16.** Le graphe  $\Gamma_0$

Le fait est que  $W(G_2)$  compte 6 racines positives tandis que  $W(\Gamma_0)$ , produit cartésien de deux groupes symétriques  $\mathfrak{S}_6$ , en compte 30. Suite à cet éclatement, les éléments de  $W(G_2)$  sont donc représentés fidèlement par des matrices de taille 30. À titre de comparaison, le corollaire 4.1.5 permet de représenter fidèlement les éléments de  $W(G_2)$  par des matrices de taille 6.

### 1.2.5 Automorphismes d'un graphe de Coxeter

Soit  $G$  un groupe d'automorphismes de  $\Gamma$ . On remarque que  $G$  est forcément fini et que  $G$  agit naturellement sur  $W$ ,  $A^+$  et  $A$ . On pose alors

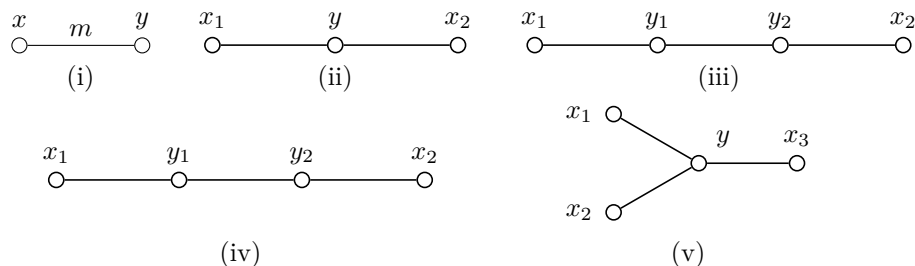
$$\begin{aligned} W^G &= \{w \in W \mid g(w) = w \text{ pour tout } g \in G\}, \\ A^{+G} &= \{a \in A^+ \mid g(a) = a \text{ pour tout } g \in G\}, \\ A^G &= \{\alpha \in A \mid g(\alpha) = \alpha \text{ pour tout } g \in G\}. \end{aligned}$$

Soit  $\mathcal{O}$  l'ensemble des orbites de  $G$  dans  $S$  et soit

$$\mathcal{S} = \{X \in \mathcal{O} \mid W_X \text{ est fini}\}.$$

On définit ci-après une matrice de Coxeter  $\tilde{M}^G = (\tilde{m}_{X,Y})_{X,Y \in \mathcal{S}}$  et on note  $\tilde{\Gamma}^G$  son graphe de Coxeter associé. Soient  $X, Y \in \mathcal{S}$ .

- (0) Si  $m_{s,t} = 2$  pour tous  $s \in X$  et  $t \in Y$ , alors on pose  $\tilde{m}_{X,Y} = 2$ .
- (1) Soit  $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ,  $m \geq 3$ . Si  $\Gamma_{X \cup Y}$  est une réunion disjointe de copies de graphes isomorphes au graphe (i) de la figure 1.2.17, où le sommet correspondant à  $x$  appartient à  $X$  et le sommet correspondant à  $y$  appartient à  $Y$ , alors on pose  $\tilde{m}_{X,Y} = m$ . Dans ce cas, on dit que  $(X, Y)$  est une *bi-orbite de type 1*.
- (2) Si  $\Gamma_{X \cup Y}$  est une réunion disjointe de copies de graphes isomorphes au graphe (ii) de la figure 1.2.17, où les sommets correspondant à  $x_1$  et  $x_2$  appartiennent à  $X$  et le sommet correspondant à  $y$  appartient à  $Y$ , alors on pose  $\tilde{m}_{X,Y} = 4$ . Dans ce cas, on dit que  $(X, Y)$  est une *bi-orbite de type 2*.
- (3) Si  $\Gamma_{X \cup Y}$  est une réunion disjointe de copies de graphes isomorphes au graphe (iii) de la figure 1.2.17, où les sommets correspondant à  $x_1$  et  $x_2$  appartiennent à  $X$  et les sommets correspondant à  $y_1$  et  $y_2$  appartiennent à  $Y$ , alors on pose  $\tilde{m}_{X,Y} = 4$ . Dans ce cas, on dit que  $(X, Y)$  est une *bi-orbite de type 3*.
- (4) Si  $\Gamma_{X \cup Y}$  est une réunion disjointe de copies de graphes isomorphes au graphe (iv) de la figure 1.2.17, où les sommets correspondant à  $x_1$  et  $x_2$  appartiennent à  $X$  et les sommets correspondant à  $y_1$  et  $y_2$  appartiennent à  $Y$ , alors on pose  $\tilde{m}_{X,Y} = 8$ . Dans ce cas, on dit que  $(X, Y)$  est une *bi-orbite de type 4*.
- (5) Si  $\Gamma_{X \cup Y}$  est une réunion disjointe de copies de graphes isomorphes au graphe (v) de la figure 1.2.17, où les sommets correspondant à  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$  appartiennent à  $X$  et le sommet correspondant à  $y$  appartient à  $Y$ , alors on pose  $\tilde{m}_{X,Y} = 6$ . Dans ce cas, on dit que  $(X, Y)$  est une *bi-orbite de type 5*.
- ( $\infty$ ) Dans les autres cas, on pose  $\tilde{m}_{X,Y} = \infty$ .



**Figure 1.2.17.** Bi-orbites

**Théorème 1.2.38** (Mühlherr [50], Hée [31], Michel [48], Crisp [22, 23], Dehornoy, Paris [25]).

- (1) L'ensemble  $\mathcal{S}_W = \{w_X \mid X \in \mathcal{S}\}$  engendre  $W^G$ . De plus,  $(W^G, \mathcal{S}_W)$  est un système de Coxeter associé au graphe de Coxeter  $\tilde{\Gamma}^G$ .

- (2) L'ensemble  $\mathcal{S}_A = \{\Delta_X \mid X \in \mathcal{S}\}$  engendre  $A^{+G}$ . De plus,  $A^{+G}$  est un monoïde d'Artin associé à  $\tilde{\Gamma}^G$ .
- (3) Si  $\Gamma$  est de type sphérique, alors l'ensemble  $\mathcal{S}_A = \{\Delta_X \mid X \in \mathcal{S}\}$  engendre  $A^G$  et  $(A^G, \mathcal{S}_A)$  est un système d'Artin associé à  $\tilde{\Gamma}^G$ .

**Notes historiques.** Mühlherr [50] et Hée [31] ont démontré indépendamment l'un de l'autre que  $(W^G, \mathcal{S}_W)$  est un système de Coxeter, mais ne donnent pas explicitement le graphe  $\tilde{\Gamma}^G$ . En s'appuyant sur les travaux de Mühlherr [50] et Hée [31], Michel [48] a démontré que  $A^{+G}$  est toujours un monoïde d'Artin et que  $(A^G, \mathcal{S}_A)$  est un système d'Artin lorsque  $\Gamma$  est de type sphérique, sans non plus donner explicitement le graphe  $\tilde{\Gamma}^G$ . Le théorème 1.2.38 a été entièrement démontré par Crisp dans [22, 23] avec une démonstration indépendante des autres. En fait, il a démontré un résultat plus fort que le théorème 1.2.38, à savoir que  $(A^G, \mathcal{S}_A)$  est un système d'Artin associé au graphe de Coxeter  $\tilde{\Gamma}^G$  pour plusieurs familles de graphes de Coxeter non sphériques dont les graphes de Coxeter de type FC. Dans cette thèse, nous ne considérons le groupe  $A^G$  que dans le cas où  $\Gamma$  est de type sphérique. En effet, nous ne connaissons aucun moyen d'étudier la fidélité de la représentation  $\psi$  et de la représentation induite  $\psi^G$  si  $\Gamma$  n'est pas de type sphérique. Enfin, le point (3) du théorème est aussi démontré dans [25], avec une description explicite du graphe de Coxeter  $\tilde{\Gamma}^G$ .





# Représentations enracinées des systèmes de Coxeter et automorphismes

## Sommaire

<b>2.1</b>	<b>Une représentation linéaire fidèle de <math>W^G</math></b>	<b>33</b>
<b>2.2</b>	<b>Démonstration du théorème 2.1.2</b>	<b>35</b>
2.2.1	Orbites de type $I$ et $II_m$	36
2.2.2	Produit scalaire entre deux racines simples	36
2.2.3	Démonstration du résultat principal	39

Ce chapitre est dédié à l'étude des représentations enracinées des groupes de Coxeter de la forme  $W^G$ . Étant donnée une base de racines d'un groupe de Coxeter  $W$ , la représentation enracinée qui y est associée induit, sous certaines conditions, une représentation linéaire de  $W^G$ . On démontre ici que la représentation de  $W^G$  ainsi obtenue n'est autre que la représentation enracinée associée à une base de racines que l'on décrit explicitement dans la première partie. En particulier, on obtient comme cela une représentation fidèle de  $W^G$  puisque toute représentation enracinée est fidèle, résultat démontré par Krammer [38, 41].

## 2.1 Une représentation linéaire fidèle de $W^G$

On présente dans cette partie les objets mathématiques permettant d'obtenir une représentation enracinée de  $W^G$  à partir d'une représentation enracinée de  $W$ . En premier lieu, on démontre le lemme 2.1.1 permettant de construire la base de racines à laquelle cette représentation enracinée de  $W^G$  est associée.

Soit  $\Gamma$  un graphe de Coxeter et  $(W, S)$  le système de Coxeter associé à  $\Gamma$ . Dans ce chapitre, on considère  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle, \Pi)$  une base de racines de  $\Gamma$ . Le lemme suivant est connu des spécialistes, mais nous n'en connaissons aucune démonstration dans la littérature. Il est important pour notre construction, aussi nous en fournissons une démonstration.

**Lemme 2.1.1.** *Si  $\Gamma$  est de type sphérique et si  $\Pi$  engendre  $V$ , alors  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est un produit scalaire et  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle, \Pi)$  est la base de racines classique de  $\Gamma$ .*

**Démonstration.** Soit  $(V^c, \langle \cdot, \cdot \rangle^c, \Pi^c)$  la base de racines classique de  $\Gamma$ , où  $\Pi^c = \{\epsilon_s^c \mid s \in S\}$ . Soit  $f^c : W \rightarrow \text{GL}(V^c)$  la représentation enracinée associée à cette base de racines. Soit  $f : W \rightarrow \text{GL}(V)$  la représentation enracinée associée à  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle, \Pi)$  et  $\pi : V^c \rightarrow V$  la projection linéaire qui à  $\epsilon_s^c$  associe  $\epsilon_s$  pour tout  $s \in S$ . Pour tous  $s, t \in S$ , on a  $m_{s,t} \neq \infty$  puisque  $\Gamma$  est de type sphérique, donc  $\langle \epsilon_s^c, \epsilon_t^c \rangle^c = \langle \epsilon_s, \epsilon_t \rangle$ . Il s'ensuit que  $\pi \circ f^c(w) = f(w) \circ \pi$  pour tout  $w \in W$ . Par conséquent,  $\text{Ker } \pi$  est invariant sous l'action de  $W$ .

Soient  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$  les composantes connexes de  $\Gamma$ . Pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , on considère  $S_i$  l'ensemble des sommets de  $\Gamma_i$ , on pose  $\Pi_i^c = \{\epsilon_s^c \mid s \in S_i\}$  et on note  $V_i^c$  le sous-espace vectoriel de  $V^c$  engendré par  $\Pi_i^c$ . On a  $V^c = \bigoplus_{i=1}^n V_i^c$ . Par le théorème 1.2.25 et par [9, Chap. V, § 4, n° 8],  $\langle \cdot, \cdot \rangle^c$  est un produit scalaire et, si  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $V^c$  invariant sous l'action de  $W$ , alors il existe  $J \subset \{1, 2, \dots, n\}$  tel que  $F = \bigoplus_{i \in J} V_i^c$ . Comme  $\text{Ker } \pi$  est invariant sous l'action de  $W$ , il existe donc  $J \subset \{1, 2, \dots, n\}$  tel que

$$\text{Ker } \pi = \bigoplus_{i \in J} V_i^c.$$

On suppose que l'ensemble  $J$  ne soit pas vide. Soient  $i \in J$  et  $s \in S_i$ . On a  $\epsilon_s^c \in \text{Ker } \pi$ , c'est-à-dire  $\pi(\epsilon_s^c) = 0$ . Or  $\pi(\epsilon_s^c) = \epsilon_s \neq 0$  puisque  $\|\epsilon_s\| = 1$  : contradiction. Ainsi,  $J$  est vide et  $\pi$  est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Par conséquent, en identifiant  $V$  et  $V^c$  via  $\pi$ , on a de façon évidente  $\langle \cdot, \cdot \rangle = \langle \cdot, \cdot \rangle^c$  et  $\Pi = \Pi^c$ , donc  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle, \Pi)$  est la base de racines classique de  $\Gamma$ .  $\square$

Soit  $G$  un groupe d'automorphismes de  $\Gamma$ . On suppose que  $G$  se plonge dans  $\text{GL}(V)$  et vérifie  $g(\epsilon_s) = \epsilon_{g(s)}$  pour tous  $g \in G$  et  $s \in S$ . On remarque qu'un tel plongement existe de façon naturelle si  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle, \Pi)$  est la base de racines classique de  $\Gamma$ . La représentation enracinée  $f : W \rightarrow \text{GL}(V)$  est alors équivariante dans le sens où

$$\forall g \in G, \forall w \in W, f(gw) = g \circ f(w) \circ g^{-1}.$$

Il en résulte que  $f$  induit une représentation linéaire  $f^G : W^G \rightarrow \text{GL}(V^G)$ , où  $V^G = \{x \in V \mid g(x) = x \text{ pour tout } g \in G\}$ .

Soit  $X \in \mathcal{S}$  une orbite de  $G$  dans  $S$  telle que  $W_X$  est fini. On pose  $\Pi_X = \{\epsilon_s \mid s \in X\}$ , on note  $V_X$  le sous-espace vectoriel engendré par  $\Pi_X$  et  $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$  la restriction de  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  à  $V_X \times V_X$ . Par le lemme 2.1.1,  $\Pi_X$  est une base de  $V_X$  et  $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$  est un produit scalaire. Soit  $a_X = \sum_{s \in X} \epsilon_s$ . On remarque que  $a_X \in V^G$ . De plus, par ce qui précède,  $a_X \neq 0$  et  $\|a_X\| > 0$ . On pose alors

$$\tilde{\epsilon}_X = \frac{a_X}{\|a_X\|}$$

pour tout  $X \in \mathcal{S}$ , et on note  $\tilde{\Pi}^G = \{\tilde{\epsilon}_X \mid X \in \mathcal{S}\}$ . Le but de ce chapitre est de démontrer le résultat suivant.

**Théorème 2.1.2.** *Le triplet  $(V^G, \langle \cdot, \cdot \rangle, \tilde{\Pi}^G)$  est une base de racines pour  $\tilde{\Gamma}^G$  et  $f^G : W^G \rightarrow \text{GL}(V^G)$  est la représentation enracinée associée à  $(V^G, \langle \cdot, \cdot \rangle, \tilde{\Pi}^G)$ .*

Le théorème 1.2.18 donne immédiatement le résultat suivant.

**Corollaire 2.1.3.** *La représentation  $f^G : W^G \rightarrow \text{GL}(V^G)$  est fidèle.*

**Remarques 2.1.4.**

- (1) Soient  $V$  un espace vectoriel quelconque et  $G, W$  deux sous-groupes de  $\text{GL}(V)$ . Le groupe  $G$  agit sur  $W$  par conjugaison et le plongement  $W \hookrightarrow \text{GL}(V)$  est équivariant sous les actions de  $G$ . Il induit donc une représentation  $f^G : W^G \rightarrow \text{GL}(V^G)$  comme ci-dessus. Cette représentation n'est pas fidèle en général. En fait, l'espace  $V^G$  a même tendance à être trivial.
- (2) On peut utiliser la démonstration du théorème 2.1.2 pour donner une nouvelle démonstration du théorème 1.2.38 (1). Aux lemmes 2.2.6 et 2.2.7 il faudrait ajouter les deux points suivants qui ne sont pas très difficiles à démontrer.
  - (i) Le groupe  $W^G$  est engendré par  $\mathcal{S}_W$ .
  - (ii) On a  $(w_X w_Y)^{\tilde{m}_{X,Y}} = 1$  pour tous  $X, Y \in \mathcal{S}$  tels que  $\tilde{m}_{X,Y} \neq \infty$ .
- (3) Une approche similaire est adoptée par Hée [31, Chap. 3], mais avec des définitions différentes. On peut démontrer aisément que les systèmes de racines obtenus à partir des bases de racines définies dans cette thèse sont des systèmes de racines au sens de Hée, et qu'une partie des résultats de ce chapitre peuvent être obtenus à partir de ceux de [31]. En particulier, le fait que  $(V^G, \langle \cdot, \cdot \rangle, \tilde{\Pi}^G)$  est une base de racines est démontré par Hée [33] dans une note écrite en 1990 et publiée dans sa thèse d'état en 1993. Par contre, l'obtention du graphe de Coxeter  $\tilde{\Gamma}$  de  $(W^G, \mathcal{S}_W)$  nécessite des arguments supplémentaires qui peuvent être une réécriture du lemme 2.2.6 ci-après, ou bien une adaptation de la démonstration de Crisp [22, 23].

## 2.2 Démonstration du théorème 2.1.2

La démonstration se déroule selon trois étapes. Dans un premier temps, on identifie les orbites de  $G$  dont les sommets correspondent à un sous-groupe parabolique fini de  $W$ . Puis, on calcule le produit scalaire entre  $\tilde{\epsilon}_X$  et  $\tilde{\epsilon}_Y$  pour tous  $X, Y \in \mathcal{S}$ , afin de démontrer que  $(V^G, \langle \cdot, \cdot \rangle, \tilde{\Pi}^G)$  est une base de racines pour  $\tilde{\Gamma}^G$ . Enfin, on calcule l'action de  $W^G$  sur  $V^G$  et l'on constate qu'elle correspond à l'action de  $W^G$  via la représentation enracinée  $f^G$  associée à la base de racines  $(V^G, \langle \cdot, \cdot \rangle, \tilde{\Pi}^G)$ .

### 2.2.1 Orbites de type $I$ et $II_m$

**Lemme 2.2.5.** *Soit  $X \in \mathcal{S}$  une orbite de  $G$  telle que  $W_X$  est fini. Alors, on a l'une des deux alternatives suivantes.*

- (I) *Le graphe  $\Gamma_X$  est réunion disjointe de sommets (c.-à-d. que  $\Gamma_X$  n'a pas d'arête).*
- (II) *Il existe un entier naturel  $m \geq 3$  tel que  $\Gamma_X$  est réunion disjointe de copies de graphes isomorphes au graphe de la figure 1.2.17 (i).*

**Démonstration.** Pour tout  $s \in X$ , on pose  $v_s(X) = |\{t \in X \mid m_{s,t} \geq 3\}|$ . Comme  $\Gamma_X$  est de type sphérique, les composantes connexes de  $\Gamma_X$  sont des arbres par le théorème 1.2.25. Il existe donc  $s \in X$  tel que  $v_s(X) \leq 1$ . Par ailleurs, comme  $G$  agit transitivement sur  $X$ , on a  $v_s(X) = v_t(X)$  pour tous  $s, t \in X$ . Ainsi, soit  $v_s(X) = 0$  pour tout  $s \in X$  et l'on est dans l'alternative (I), soit  $v_s(X) = 1$  pour tout  $s \in X$  et l'on est dans l'alternative (II).  $\square$

Soit  $X \in \mathcal{S}$ . On dit que  $X$  est de *type  $I$*  si  $\Gamma_X$  vérifie la condition (I) du lemme 2.2.5 et que  $X$  est de *type  $II_m$*  si  $\Gamma_X$  vérifie la condition (II) du lemme 2.2.5.

### 2.2.2 Produit scalaire entre deux racines simples

**Lemme 2.2.6.** *Soient  $X, Y \in \mathcal{S}$ ,  $X \neq Y$ . Alors*

- (1)  $\langle \tilde{\epsilon}_X, \tilde{\epsilon}_Y \rangle = -\cos(\pi/\tilde{m}_{X,Y})$  si  $\tilde{m}_{X,Y} \neq \infty$ ,
- (2)  $\langle \tilde{\epsilon}_X, \tilde{\epsilon}_Y \rangle \in ]-\infty, -1]$  si  $\tilde{m}_{X,Y} = \infty$ .

**Démonstration.** On remarque que si  $m_{s,t} = 2$  pour tous  $s \in X$  et  $t \in Y$ , alors on a  $\langle \tilde{\epsilon}_X, \tilde{\epsilon}_Y \rangle = 0$  et  $\tilde{m}_{X,Y} = 2$ . Désormais, on suppose donc qu'il existe  $s \in X$  et  $t \in Y$  tels que  $m_{s,t} \geq 3$ . Comme  $G$  agit transitivement sur  $X$  et laisse invariant  $Y$ , il s'ensuit que pour tout  $s \in X$ , il existe  $t \in Y$  tel que  $m_{s,t} \geq 3$ . De même, pour tout  $t \in Y$ , il existe  $s \in X$  tel que  $m_{s,t} \geq 3$ .

On rappelle les notations introduites dans la partie précédente :

$$a_X = \sum_{s \in X} \epsilon_s, \quad a_Y = \sum_{t \in Y} \epsilon_t, \quad \tilde{\epsilon}_X = \frac{a_X}{\|a_X\|}, \quad \tilde{\epsilon}_Y = \frac{a_Y}{\|a_Y\|}.$$

On choisit  $s \in X$  et on pose

$$v_X = |\{t \in Y \mid m_{s,t} \geq 3\}|, \quad p_X = \sum_{t \in Y} \langle \epsilon_s, \epsilon_t \rangle = \langle \epsilon_s, a_Y \rangle.$$

Comme  $G$  agit transitivement sur  $X$  et laisse invariant  $Y$ , ces définitions ne dépendent pas du choix de  $s$ . De même, on choisit  $t \in Y$  et on pose

$$v_Y = |\{s \in X \mid m_{s,t} \geq 3\}|, \quad p_Y = \sum_{s \in X} \langle \epsilon_t, \epsilon_s \rangle = \langle \epsilon_t, a_X \rangle.$$

Par hypothèse, il existe  $s \in X$  et  $t \in Y$  tels que  $m_{s,t} \geq 3$ . Ainsi, on a  $v_X \geq 1$  et  $v_Y \geq 1$ .

Soient  $s \in X$  et  $t \in Y$ . Si  $m_{s,t} \geq 3$ , alors  $\langle \epsilon_s, \epsilon_t \rangle \leq -1/2$ , et si  $m_{s,t} = 2$ , alors  $\langle \epsilon_s, \epsilon_t \rangle = 0$ . Il en résulte que

$$p_X \leq -\frac{v_X}{2}. \quad (2.2.1)$$

Par ailleurs, on a

$$|X| v_X = |Y| v_Y. \quad (2.2.2)$$

Ce nombre est le nombre d'arêtes dans  $\Gamma$  reliant un élément de  $X$  à un élément de  $Y$ . Un calcul direct démontre que

$$\|a_X\| = \begin{cases} \sqrt{|X|} & \text{si } X \text{ est de type } I, \\ \sqrt{|X|(1 - \cos(\pi/m))} & \text{si } X \text{ est de type } II_m. \end{cases} \quad (2.2.3)$$

Enfin, par définition de  $p_X$ , on a

$$\langle a_X, a_Y \rangle = |X| p_X. \quad (2.2.4)$$

*Cas 1 :  $X$  et  $Y$  sont de type  $I$ .* Les égalités (2.2.2), (2.2.3) et (2.2.4) donnent alors

$$\langle \tilde{\epsilon}_X, \tilde{\epsilon}_Y \rangle = \frac{p_X \sqrt{v_Y}}{\sqrt{v_X}}. \quad (2.2.5)$$

En appliquant (2.2.1) à cette égalité, on obtient

$$\langle \tilde{\epsilon}_X, \tilde{\epsilon}_Y \rangle \leq -\frac{\sqrt{v_X v_Y}}{2}. \quad (2.2.6)$$

On distingue maintenant plusieurs cas.

- (1) Si  $v_X \geq 4$ , ou si  $v_Y \geq 4$ , ou si  $v_X, v_Y \geq 2$ , alors  $\langle \tilde{\epsilon}_X, \tilde{\epsilon}_Y \rangle \leq -1$  par (2.2.6).
- (2) Si  $v_X = 1$ ,  $v_Y \geq 2$  et  $p_X \leq -\cos(\pi/4) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ , alors  $\langle \tilde{\epsilon}_X, \tilde{\epsilon}_Y \rangle \leq -1$  par (2.2.5).
- (3) Si  $v_X = 1$ ,  $v_Y = 3$  et  $p_X = -\cos(\pi/3) = -\frac{1}{2}$ , alors  $\langle \tilde{\epsilon}_X, \tilde{\epsilon}_Y \rangle = -\frac{\sqrt{3}}{2} = -\cos(\pi/6)$  par (2.2.5). Dans ce cas  $(Y, X)$  est une bi-orbite de type 5 et  $\tilde{m}_{X,Y} = 6$ .
- (4) Si  $v_X = 1$ ,  $v_Y = 2$  et  $p_X = -\cos(\pi/3) = -\frac{1}{2}$ , alors  $\langle \tilde{\epsilon}_X, \tilde{\epsilon}_Y \rangle = -\frac{\sqrt{2}}{2} = -\cos(\pi/4)$  par (2.2.5). Dans ce cas  $(Y, X)$  est une bi-orbite de type 2 et  $\tilde{m}_{X,Y} = 4$ .
- (5) Si  $v_X = 1$ ,  $v_Y = 1$  et  $p_X = -\cos(\pi/m)$  avec  $m \neq \infty$ , alors  $\langle \tilde{\epsilon}_X, \tilde{\epsilon}_Y \rangle = -\cos(\pi/m)$  par (2.2.5). Dans ce cas  $(Y, X)$  est une bi-orbite de type 1 et  $\tilde{m}_{X,Y} = m$ .
- (6) Si  $v_X = 1$ ,  $v_Y = 1$  et  $p_X \leq -1$ , alors  $\langle \tilde{\epsilon}_X, \tilde{\epsilon}_Y \rangle = p_X \leq -1$  par (2.2.5).

*Cas 2 :  $X$  est de type  $II_m$  et  $Y$  est de type  $I$ .* Les égalités (2.2.2), (2.2.3) et (2.2.4) donnent alors

$$\langle \tilde{\epsilon}_X, \tilde{\epsilon}_Y \rangle = \frac{p_X \sqrt{v_Y}}{\sqrt{v_X(1 - \cos(\pi/m))}}. \quad (2.2.7)$$

En appliquant (2.2.1) à cette égalité, on obtient

$$\langle \tilde{\epsilon}_X, \tilde{\epsilon}_Y \rangle \leq -\frac{\sqrt{v_X v_Y}}{2\sqrt{(1 - \cos(\pi/m))}}. \quad (2.2.8)$$

Si  $m \geq 5$ , alors  $\sqrt{1 - \cos(\pi/m)} < \frac{1}{2}$ , donc, par (2.2.8),

$$\langle \tilde{\epsilon}_X, \tilde{\epsilon}_Y \rangle \leq -\sqrt{v_X v_Y} \leq -1.$$

On suppose désormais que  $m \in \{3, 4\}$ . On a alors  $\sqrt{1 - \cos(\pi/m)} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$  et, par (2.2.8),

$$\langle \tilde{\epsilon}_X, \tilde{\epsilon}_Y \rangle \leq -\frac{\sqrt{v_X v_Y}}{\sqrt{2}}. \quad (2.2.9)$$

On distingue maintenant plusieurs cas.

- (1) Si  $v_X \geq 2$ , ou si  $v_Y \geq 2$ , alors  $\langle \tilde{\epsilon}_X, \tilde{\epsilon}_Y \rangle \leq -1$  par (2.2.9).
- (2) Si  $v_X = 1$ ,  $v_Y = 1$  et  $p_X \leq -\cos(\pi/4) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ , alors  $\langle \tilde{\epsilon}_X, \tilde{\epsilon}_Y \rangle \leq -1$  par (2.2.7).
- (3) Si  $v_X = 1$ ,  $v_Y = 1$ ,  $p_X = -\cos(\pi/3) = -\frac{1}{2}$  et  $m = 4$ , alors

$$\langle \tilde{\epsilon}_X, \tilde{\epsilon}_Y \rangle = -\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} = -\cos(\pi/8)$$

par (2.2.7). Dans ce cas  $(Y, X)$  est une bi-orbite de type 4 et  $\tilde{m}_{X,Y} = 8$ .

- (4) Si  $v_X = 1$ ,  $v_Y = 1$ ,  $p_X = -\cos(\pi/3) = -\frac{1}{2}$  et  $m = 3$ , alors  $\langle \tilde{\epsilon}_X, \tilde{\epsilon}_Y \rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\cos(\pi/4)$  par (2.2.7). Dans ce cas  $(Y, X)$  est une bi-orbite de type 3 et  $\tilde{m}_{X,Y} = 4$ .

*Cas 3* :  $X$  est de type  $II_m$  et  $Y$  est de type  $II_{m'}$ . Les égalités (2.2.2), (2.2.3) et (2.2.4) donnent alors

$$\langle \tilde{\epsilon}_X, \tilde{\epsilon}_Y \rangle = \frac{p_X \sqrt{v_Y}}{\sqrt{v_X(1 - \cos(\pi/m))(1 - \cos(\pi/m'))}}.$$

En appliquant (2.2.1) à cette égalité, on obtient

$$\langle \tilde{\epsilon}_X, \tilde{\epsilon}_Y \rangle \leq -\frac{\sqrt{v_X v_Y}}{2\sqrt{(1 - \cos(\pi/m))(1 - \cos(\pi/m'))}}.$$

Comme  $\sqrt{(1 - \cos(\pi/m))} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$  et  $\sqrt{(1 - \cos(\pi/m'))} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ , il s'ensuit que

$$\langle \tilde{\epsilon}_X, \tilde{\epsilon}_Y \rangle \leq -\sqrt{v_X v_Y} \leq -1. \quad \square$$

### 2.2.3 Démonstration du résultat principal

**Lemme 2.2.7.** *Soient  $X \in \mathcal{S}$  et  $x \in V^G$ . On a  $w_X x = x - 2\langle x, \tilde{\epsilon}_X \rangle \tilde{\epsilon}_X$ .*

**Démonstration.** Soient  $\Gamma'$  un graphe de Coxeter de type sphérique,  $(W', S')$  le système de Coxeter associé,  $w'_{S'}$  l'élément le plus long de  $W'$ , et  $(V', \langle \cdot, \cdot \rangle', \Pi')$  la base de racines classique de  $\Gamma'$ . Alors, par [27, Prop. 4.1], on a  $w'_{S'} \Pi' = -\Pi'$ .

Soit  $X \in \mathcal{S}$ . On rappelle que  $\Pi_X = \{\epsilon_s \mid s \in X\}$ . Par le lemme 2.1.1 et ce qui précède, on a  $w_X \Pi_X = -\Pi_X$ , donc  $w_X a_X = -a_X$  et donc  $w_X \tilde{\epsilon}_X = -\tilde{\epsilon}_X$ .

On rappelle que  $V_X$  désigne le sous-espace vectoriel de  $V$  engendré par  $\Pi_X$ . Pour tous  $x \in V$  et  $u \in W_X$ , il existe  $y \in V_X$  tel que  $ux = x + y$ . En effet, cette propriété est vraie pour tout  $s \in X$  par définition, donc reste vraie pour tout  $u \in W_X$ . Soit  $x \in V^G$ . Soit  $y \in V_X$  tel que  $w_X x = x + y$ . Soit  $y = \sum_{s \in X} \lambda_s \epsilon_s$  l'écriture de  $y$  dans la base  $\Pi_X$ . Pour tout  $g \in G$ , on a

$$x + \sum_{s \in X} \lambda_s \epsilon_s = w_X x = g(w_X)g(x) = g(w_X x) = g(x) + \sum_{s \in X} \lambda_s g(\epsilon_s) = x + \sum_{s \in X} \lambda_s \epsilon_{g(s)},$$

donc  $\lambda_s = \lambda_{g^{-1}(s)}$  pour tout  $s \in X$ . Comme  $G$  agit transitivement sur  $X$ , il s'ensuit que  $\lambda_s = \lambda_t$  pour tous  $s, t \in X$ . On en déduit qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $w_X x = x + \lambda a_X = x + \lambda \|a_X\| \tilde{\epsilon}_X$ . On calcule alors

$$\langle x, \tilde{\epsilon}_X \rangle = \langle w_X x, w_X \tilde{\epsilon}_X \rangle = \langle x + \lambda \|a_X\| \tilde{\epsilon}_X, -\tilde{\epsilon}_X \rangle = -\langle x, \tilde{\epsilon}_X \rangle - \lambda \|a_X\|,$$

donc  $\lambda \|a_X\| = -2\langle x, \tilde{\epsilon}_X \rangle$ . Ainsi,  $w_X x = x - 2\langle x, \tilde{\epsilon}_X \rangle \tilde{\epsilon}_X$ . □

**Démonstration du théorème 2.1.2.** Pour tout  $X \in \mathcal{S}$ , on a  $\langle \tilde{\epsilon}_X, \tilde{\epsilon}_X \rangle = 1$  par construction. De plus, on a

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\epsilon}_X, \tilde{\epsilon}_Y \rangle &= -\cos(\pi/\tilde{m}_{X,Y}) & \text{si } \tilde{m}_{X,Y} \neq \infty, \\ \langle \tilde{\epsilon}_X, \tilde{\epsilon}_Y \rangle &\in ]-\infty, -1] & \text{si } \tilde{m}_{X,Y} = \infty, \end{aligned}$$

d'après le lemme 2.2.6. Soit  $\chi \in V^*$  tel que  $\chi(\epsilon_s) > 0$  pour tout  $s \in S$ . On note  $\tilde{\chi} : V^G \rightarrow \mathbb{R}$  la restriction de  $\chi$  à  $V^G$ . Alors, pour tout  $X \in \mathcal{S}$ ,

$$\chi(\tilde{\epsilon}_X) = \frac{1}{\|a_X\|} \sum_{s \in X} \chi(\epsilon_s) > 0.$$

On en déduit que  $(V^G, \langle \cdot, \cdot \rangle, \tilde{\Pi}^G)$  est une base de racines pour  $\tilde{\Gamma}^G$ . Enfin, l'application  $f^G : W^G \rightarrow \text{GL}(V^G)$  est la représentation enracinée associée à  $(V^G, \langle \cdot, \cdot \rangle, \tilde{\Pi}^G)$  par le lemme 2.2.7. □





# Représentations de Paris des systèmes d'Artin et automorphismes

## Sommaire

<b>3.1 Une représentation linéaire fidèle de <math>A^{+G}</math></b> . . . . .	41
3.1.1 Représentations de Paris . . . . .	41
3.1.2 Résultat principal . . . . .	42
<b>3.2 Démonstration du théorème 3.1.2</b> . . . . .	43
3.2.1 L'élément $L(a)$ . . . . .	43
3.2.2 Ensembles fermés de racines . . . . .	43
3.2.3 Séries formelles et fidélité . . . . .	45

## 3.1 Une représentation linéaire fidèle de $A^{+G}$

### 3.1.1 Représentations de Paris

Soit  $\Gamma$  un graphe de Coxeter et  $(W, S)$  le système de Coxeter associé à  $\Gamma$ . Dans ce chapitre, on considère  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle, \Pi)$  la base de racines classique de  $\Gamma$ , où  $\Pi = \{\epsilon_s \mid s \in S\}$  est un ensemble abstrait en bijection avec  $S$  et où  $V$  est l'espace vectoriel réel ayant  $\Pi$  pour base. On rappelle que le système de racines de  $W$  est alors défini comme l'orbite de  $\Pi$  sous l'action de  $W$ , que l'on note  $\Phi = \{w\epsilon_s \mid s \in S, w \in W\}$  et que l'ensemble des racines positives, noté  $\Phi^+$ , est constitué des racines de  $\Phi$  dont les coordonnées dans la base  $\Pi$  sont toutes positives.

De plus, on rappelle que  $\Gamma$  est *simplement lacé* si  $m_{s,t} \in \{2, 3\}$  pour tous  $s, t \in S$ . Le système de racines de  $W(\Gamma)$  possède les propriétés suivantes, dont la démonstration est laissée au lecteur. Ces propriétés seront utilisées à de multiples reprises par la suite.

**Lemme 3.1.1.** *Soit  $\Gamma$  un graphe de Coxeter simplement lacé.*

- (1) *Pour tous  $\rho_1, \rho_2 \in \Phi$ , on a  $2\langle \rho_1, \rho_2 \rangle \in \mathbb{Z}$ .*
- (2) *Soit  $\rho \in \Phi$ . Les coordonnées de  $\rho$  dans la base  $\Pi$  sont des entiers relatifs.*
- (3) *Soit  $s \in S$ . Pour tout  $\rho \in \Phi$ , il existe  $w \in W$  tel que  $w(\epsilon_s) = \rho$ .*

Enfin, on rappelle que  $\Gamma$  est sans triangles s'il n'existe aucun triplet  $(s, t, r) \in S^3$  tel que  $m_{s,t} = m_{t,r} = m_{r,s} = 3$ . Dans ce chapitre, on suppose désormais que  $\Gamma$  est simplement lacé et sans triangles. On rappelle brièvement la construction des représentations de Paris détaillée dans la partie 1.2.4. Soit  $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(q, z)$ , soit  $\mathcal{B} = \{e_\rho \mid \rho \in \Phi^+\}$  et soit  $E$  le  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel ayant  $\mathcal{B}$  pour base. Pour tout  $s \in S$ , on a construit une application linéaire  $\psi_s : E \rightarrow E$  définie sur tout élément de  $\mathcal{B}$  par

$$\psi_s(e_\rho) = \varphi_s(e_\rho) + zT(s, \rho)e_{\epsilon_s},$$

où  $\varphi_s : E \rightarrow E$  est une application linéaire et où  $T(s, \rho)$  est un polynôme en la variable  $q$  défini par récurrence sur la profondeur de la racine  $\rho$ . D'après le théorème 1.2.36,  $\psi_s \in \text{GL}(E)$  pour tout  $s \in S$  et l'application qui à  $s \in S$  associe  $\psi_s$  induit des représentations linéaires  $\psi^+ : A^+ \rightarrow \text{GL}(E)$  et  $\psi : A \rightarrow \text{GL}(E)$ . De plus, la représentation  $\psi^+$  est une représentation fidèle de  $A^+$ , et si  $\Gamma$  est de type sphérique, alors  $\psi$  est une représentation fidèle de  $A$ .

### 3.1.2 Résultat principal

On se donne à présent un groupe  $G$  d'automorphismes de  $\Gamma$ . L'action de  $G$  sur  $\Pi$  définie par  $g(\epsilon_s) = \epsilon_{g(s)}$  pour tout  $s \in S$  induit un plongement  $G \hookrightarrow \text{GL}(V)$ . De plus, on observe que  $g(\Phi) = \Phi$  et  $g(\Phi^+) = \Phi^+$  pour tout  $g \in G$ . On a alors un plongement  $G \hookrightarrow \text{GL}(E)$  défini par  $g(e_\rho) = e_{g(\rho)}$  pour tous  $g \in G$  et  $\rho \in \Phi^+$ . On vérifie facilement que l'on a  $T(g(s), g(\rho)) = T(s, \rho)$  pour tous  $s \in S$ ,  $\rho \in \Phi^+$  et  $g \in G$ . Il en résulte que  $\psi^+$  et  $\psi$  sont équivariants sous les actions de  $G$ , dans le sens où

$$\begin{aligned} \psi^+(g(a)) &= g \circ \psi^+(a) \circ g^{-1} \quad \text{pour tous } g \in G \text{ et } a \in A^+, \\ \psi(g(\alpha)) &= g \circ \psi(\alpha) \circ g^{-1} \quad \text{pour tous } g \in G \text{ et } \alpha \in A. \end{aligned}$$

On pose  $E^G = \{x \in E \mid g(x) = x \text{ pour tout } g \in G\}$ . Alors, comme pour les représentations enracinées des groupes de Coxeter,  $\psi^+$  et  $\psi$  induisent des représentations linéaires  $\psi^{+G} : A^{+G} \rightarrow \text{GL}(E^G)$  et  $\psi^G : A^G \rightarrow \text{GL}(E^G)$ . Le but de ce chapitre est de démontrer le résultat suivant.

#### **Théorème 3.1.2.**

- (1) *La représentation  $\psi^{+G} : A^{+G} \rightarrow \text{GL}(E^G)$  est fidèle.*
- (2) *Si  $\Gamma$  est de type sphérique, alors la représentation  $\psi^G : A^G \rightarrow \text{GL}(E^G)$  est fidèle.*

La partie (2) du théorème 3.1.2 a été précédemment démontrée par Digne [28] dans trois cas particuliers, donnant lieu à des représentations fidèles des groupes d'Artin de type  $B_m$ ,  $G_2$  et  $F_4$ . Après la rédaction de ce texte, l'auteur a appris que Castella a déjà démontré le théorème 3.1.2. Il apparaît d'abord à la fin de sa thèse [16], puis dans sa prépublication [17], mais pas dans la version publiée [18] de [17]. La version que l'on trouve dans [17] est plus générale que celle donnée ci-dessus et sa démonstration repose sur des critères de fidélité démontrés par Hée [32].

## 3.2 Démonstration du théorème 3.1.2

La démonstration est essentiellement une version invariante de la démonstration du théorème 1.2.36 dans [51] et est donc constituée des mêmes grandes étapes, décrites sommairement ci-après.

À partir de la représentation  $\psi^+$ , on construit une application linéaire  $\psi_\infty^+$  de  $A^+$  dans l'espace de transformations linéaires de  $\mathcal{H}$ , où  $\mathcal{H}$  est l'espace des séries formelles  $\sum_{\rho \in \Phi^+} \lambda_\rho e_\rho$ . L'application  $\psi_\infty^+$  agit de manière remarquable sur certains sous-ensembles de  $\mathcal{H}$ , ce qui est l'objet des trois lemmes de la partie 3.2.3. Cette action est suffisamment précise pour entraîner la fidélité de  $\psi^{+G}$ .

### 3.2.1 L'élément $L(a)$

Soit  $a \in A^+$ . La proposition 1.2.31 permet de démontrer que l'ensemble  $\{w \in W \mid \tau(w) <_L a\}$  vérifie les hypothèses de la proposition 1.2.27, ce qui est aussi une conséquence directe du lemme de réduction [13, Lem. 2.1] et de la simplifiabilité des monoïdes d'Artin énoncée dans le théorème 1.2.32. Par conséquent, il existe un unique élément, que l'on note  $L(a) \in W$ , tel que

$$\{w \in W \mid \tau(w) <_L a\} = \{w \in W \mid w <_L L(a)\}.$$

Le résultat suivant est utilisé implicitement au cours de la démonstration du théorème 3.1.2. C'est aussi une conséquence de la proposition 1.2.31.

**Proposition 3.2.3.** *Soient  $a, b \in A^+$ . Alors  $L(ab) = L(a(\tau \circ L)(b))$ .*

**Lemme 3.2.4.** *Soit  $a \in A^{+G}$ . Alors  $L(a) \in W^G$ .*

**Démonstration.** Soit  $g \in G$ . On calcule alors

$$\begin{aligned} \{w \in W \mid w <_L L(a)\} &= \{w \in W \mid \tau(w) <_L a\} \\ &= \{w \in W \mid g^{-1}(\tau(w)) = \tau(g^{-1}(w)) <_L a = g^{-1}(a)\} \\ &= \{w \in W \mid g^{-1}(w) <_L L(a)\} \\ &= \{w \in W \mid w <_L g(L(a))\}. \end{aligned}$$

Par unicité de  $L(a)$ , on a  $L(a) = g(L(a))$  pour tout  $g \in G$ , d'où  $L(a) \in W^G$ .  $\square$

### 3.2.2 Ensembles fermés de racines

On rappelle que pour tout  $w \in W$ ,  $\Phi_w$  désigne l'ensemble  $\{\rho \in \Phi^+ \mid w^{-1}\rho \in \Phi^-\}$ .

**Lemme 3.2.5.** *Soit  $w \in W$ .*

- (1) Pour tout  $g \in G$ , on a  $g(\Phi_w) = \Phi_{g(w)}$ .  
 (2) Si  $w \in W^G$ , alors l'ensemble  $\Phi_w$  est  $G$ -invariant.

**Démonstration.** Soient  $g \in G$  et  $w \in W$ . On a

$$\rho \in g(\Phi_w) \Leftrightarrow \begin{cases} \rho \in g(\Phi^+), \\ w^{-1}g^{-1}(\rho) \in \Phi^-. \end{cases}$$

On a  $w^{-1}g^{-1}(\rho) = g^{-1}(g(w)^{-1}\rho)$ , donc la condition  $w^{-1}g^{-1}(\rho) \in \Phi^-$  est équivalente à  $g(w)^{-1}\rho \in g(\Phi^-)$ . Comme  $g(\Phi^+) = \Phi^+$  et  $g(\Phi^-) = \Phi^-$ , il en résulte que

$$\rho \in g(\Phi_w) \Leftrightarrow \begin{cases} \rho \in \Phi^+ \\ g(w)^{-1}\rho \in \Phi^- \end{cases} \Leftrightarrow \rho \in \Phi_{g(w)},$$

d'où  $g(\Phi_w) = \Phi_{g(w)}$ . Ainsi, si  $w \in W^G$ , on a  $g(\Phi_w) = \Phi_w$  pour tout  $g \in G$ , d'où le résultat.  $\square$

On dit qu'un sous-ensemble  $R \subset \Phi^+$  est *fermé* si :

- (i)  $R$  est fini,
- (ii) si  $\rho, \rho' \in R$ , alors  $\langle \rho, \rho' \rangle \geq -1/2$ ,
- (iii) si  $\rho, \rho' \in R$  et  $\langle \rho, \rho' \rangle = -1/2$ , alors  $\rho + \rho' \in R$ .

Soit  $R$  un sous-ensemble fermé de  $\Phi^+$ . L'ensemble  $\{w \in W \mid \Phi_w \subset R\}$  vérifie les hypothèses de la proposition 1.2.27 d'après [51, Prop. 2.8]. Par conséquent, il existe un unique élément, que l'on note  $C(R) \in W$ , tel que

$$\{w \in W \mid \Phi_w \subset R\} = \{w \in W \mid w <_L C(R)\}.$$

On remarque que si  $w \in W$ , alors  $\Phi_w$  est un ensemble fermé [51, Lem. 2.7]. On remarque aussi que  $C(\Phi_w) = w$  pour tout  $w \in W$ .

**Lemme 3.2.6.** *Soit  $R$  un sous-ensemble fermé de  $\Phi^+$   $G$ -invariant. Alors  $C(R) \in W^G$ .*

**Démonstration.** Soit  $g \in G$ . On calcule

$$\begin{aligned} \{w \in W \mid w <_L C(R)\} &= \{w \in W \mid \Phi_w \subset R\} \\ &= \{w \in W \mid g^{-1}(\Phi_w) = \Phi_{g^{-1}(w)} \subset R = g^{-1}(R)\} \\ &= \{w \in W \mid g^{-1}(w) <_L C(R)\} \\ &= \{w \in W \mid w <_L g(C(R))\}. \end{aligned}$$

Par unicité de  $C(R)$ , on a  $C(R) = g(C(R))$  pour tout  $g \in G$ , d'où  $C(R) \in W^G$ .  $\square$

### 3.2.3 Séries formelles et fidélité

Soit  $E_+ = \bigoplus_{\rho \in \Phi^+} \mathbb{Q}[q, z]e_\rho$  le  $\mathbb{Q}[q, z]$ -module libre ayant  $\mathcal{B} = \{e_\rho \mid \rho \in \Phi^+\}$  pour base. Pour tout  $a \in A^+$ , les coefficients de  $\psi^+(a)$  appartiennent à  $\mathbb{Q}[q, z]$ , donc  $E_+$  est invariant sous l'action de  $A^+$ . On note  $\psi_+^+ : A^+ \rightarrow \text{End}(E_+)$  la restriction de  $\psi^+$  à  $E_+$ .

Soit  $E_0 = \bigoplus_{\rho \in \Phi^+} \mathbb{R}e_\rho$  l'espace vectoriel réel ayant  $\mathcal{B}$  pour base. En remplaçant  $z$  par 0 et  $q$  par une valeur  $q_0 \in ]0, 1[$ , l'homomorphisme  $\psi_+^+$  induit un homomorphisme  $\psi_0^+ : A^+ \rightarrow \text{End}(E_0)$ .

Soit  $\mathcal{H}$  l'espace des séries formelles  $\sum_{\rho \in \Phi^+} \lambda_\rho e_\rho$  et  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$  l'espace des transformations linéaires de  $\mathcal{H}$ . On remarque que, pour tout  $s \in S$ ,  $\psi_0^+(s)$  induit une transformation linéaire  $\psi_\infty^+(s)$  de  $\mathcal{H}$ , puisque chaque ligne possède un nombre fini d'entrées non nulles. Par conséquent,  $\psi_0^+ : A^+ \rightarrow \text{End}(E_0)$  induit un homomorphisme

$$\psi_\infty^+ : A^+ \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}).$$

Soit  $R$  un sous-ensemble de  $\Phi^+$ . On définit  $U_R$  comme l'ensemble des séries formelles  $\sum_{\rho \in \Phi^+} \lambda_\rho e_\rho \in \mathcal{H}$  qui vérifient

- (i)  $\lambda_\rho \geq 0$  pour tout  $\rho \in \Phi^+$ ,
- (ii)  $\lambda_\rho = 0$  si et seulement si  $\rho \in R$ .

On définit l'ensemble  $\tilde{U}_R$  comme le sous-ensemble de  $U_R$  constitué des séries formelles  $\sum_{\rho \in \Phi^+} \lambda_\rho e_\rho \in U_R$  telles que

- (iii)  $\lambda_\rho = \lambda_{g(\rho)}$  pour tout  $\rho \in \Phi^+$  et  $g \in G$ .

D'une part, si  $R$  est  $G$ -invariant, alors  $\tilde{U}_R$  est non vide puisqu'il contient la série  $\sum_{\rho \in \Phi^+ \setminus R} e_\rho$ . D'autre part, si  $R$  n'est pas  $G$ -invariant, alors  $\tilde{U}_R$  est vide. En effet, il existe alors  $\rho \in R$  et  $g \in G$  tels que  $g(\rho) \notin R$ . S'il existe une série  $\sum \lambda_\rho e_\rho$  dans  $\tilde{U}_R$ , alors la condition (ii) donne  $\lambda_\rho = 0$ , puis (iii) donne  $\lambda_\rho = \lambda_{g(\rho)} = 0$  et enfin (ii) donne  $g(\rho) \in R$  : contradiction. Ainsi,

$$R \text{ est } G\text{-invariant} \Leftrightarrow \tilde{U}_R \neq \emptyset.$$

Soient  $R \subset \Phi^+$  et  $a \in A^+$ . On définit  $a \star R$  comme l'unique sous-ensemble  $R' \subset \Phi^+$  tel que  $\psi_\infty^+(a) \cdot U_R \subset U_{R'}$ . L'existence et l'unicité de ce sous-ensemble est démontrée dans [51, Lem. 4.3]. De plus, si  $R$  est un ensemble fermé, alors  $a \star R$  est aussi un ensemble fermé [51, Cor. 4.6].

**Lemme 3.2.7.** *Soit  $R$  un sous-ensemble  $G$ -invariant de  $\Phi^+$  et  $a \in A^{+G}$ . Alors  $a \star R$  est  $G$ -invariant et l'on a  $\psi_\infty^+(a) \cdot \tilde{U}_R \subset \tilde{U}_{a \star R}$ .*

**Démonstration.** Soit  $g \in G$ . On démontre dans un premier temps que

$$g(\psi_\infty^+(a) \cdot U_R) \subset \psi_\infty^+(a) \cdot U_R. \quad (3.2.1)$$

Soit  $\sum_{\rho \in \Phi^+} \mu_\rho e_\rho \in U_R$ . On calcule, par équivariance de  $\psi_\infty^+$  sous l'action de  $G$ ,

$$g \left( \psi_\infty^+(a) \cdot \sum_{\rho \in \Phi^+} \mu_\rho e_\rho \right) = \psi_\infty^+(g(a)) \circ g \left( \sum_{\rho \in \Phi^+} \mu_\rho e_\rho \right) = \psi_\infty^+(a) \cdot \sum_{\rho \in \Phi^+} \mu_\rho e_{g(\rho)} \in \psi_\infty^+(a) \cdot U_R$$

d'où l'inclusion (3.2.1).

Soient  $\rho_0 \in a \star R$  et  $\sum_{\rho \in \Phi^+} \lambda_\rho e_\rho \in \psi_\infty^+(a) \cdot U_R \subset U_{a \star R}$ . On a alors  $\lambda_{\rho_0} = 0$ . Or, par (3.2.1),  $\sum_{\rho \in \Phi^+} \lambda_{g(\rho)} e_\rho = g^{-1}(\sum_{\rho \in \Phi^+} \lambda_\rho e_\rho) \in \psi_\infty^+(a) \cdot U_R$ , d'où  $\lambda_{g(\rho_0)} = 0$ , donc  $g(\rho_0) \in a \star R$ . Ainsi,  $a \star R$  est  $G$ -invariant.

Soit  $\sum_{\rho \in \Phi^+} \lambda_\rho e_\rho \in \psi_\infty^+(a) \cdot \tilde{U}_R$ . L'inclusion  $\tilde{U}_R \subset U_R$  implique  $\psi_\infty^+(a) \cdot \tilde{U}_R \subset U_{a \star R}$ . Pour terminer la démonstration, il suffit donc de démontrer que pour tout  $\rho_0 \in \Phi^+$ ,  $\lambda_{\rho_0}$  ne dépend que de l'orbite de  $\rho_0$  sous l'action de  $G$ .

Pour tout  $\rho_0 \in \Phi^+$ , on considère  $(\nu_{\rho, \rho_0})_{\rho \in \Phi^+}$  l'unique famille de nombres réels telle que  $\psi_\infty^+(a) \cdot e_{\rho_0} = \sum_{\rho \in \Phi^+} \nu_{\rho, \rho_0} e_\rho$ . On considère une série  $\sum_{\rho \in \Phi^+} \mu_\rho e_\rho \in \tilde{U}_R$  telle que  $\sum_{\rho \in \Phi^+} \lambda_\rho e_\rho = \psi_\infty^+(a) \cdot \sum_{\rho \in \Phi^+} \mu_\rho e_\rho$ .

On calcule tout d'abord, pour tout  $g \in G$  et pour tout  $\rho_0 \in \Phi^+$ ,

$$\psi_\infty^+(a) \cdot e_{g(\rho_0)} = \psi_\infty^+(g(a)) \cdot g(e_{\rho_0}) = g(\psi_\infty^+(a) \cdot e_{\rho_0}) = \sum_{\rho \in \Phi^+} \nu_{\rho, \rho_0} e_{g(\rho)}. \quad (3.2.2)$$

Soit  $\mathcal{R}$  l'ensemble des orbites de  $\Phi^+$  sous l'action de  $G$ . Soit  $\{\rho_k\}_{k \in \mathcal{R}}$  un système de représentants des orbites de  $\Phi^+$  sous l'action de  $G$ . Pour tout  $k \in \mathcal{R}$ , on note  $G_k = \{g \in G \mid g(\rho_k) = \rho_k\}$  le stabilisateur de  $\rho_k$  dans  $G$ . On a alors, d'après (3.2.2),

$$\begin{aligned} \psi_\infty^+(a) \cdot \sum_{\rho \in \Phi^+} \mu_\rho e_\rho &= \psi_\infty^+(a) \cdot \sum_{k \in \mathcal{R}} \frac{\mu_{\rho_k}}{|G_k|} \left( \sum_{g \in G} e_{g(\rho_k)} \right) \\ &= \sum_{k \in \mathcal{R}} \frac{\mu_{\rho_k}}{|G_k|} \left( \sum_{g \in G} \psi_\infty^+(a) \cdot e_{g(\rho_k)} \right) \\ &= \sum_{k \in \mathcal{R}} \frac{\mu_{\rho_k}}{|G_k|} \left( \sum_{g \in G} \left( \sum_{\rho \in \Phi^+} \nu_{\rho, \rho_k} e_{g(\rho)} \right) \right) \\ &= \sum_{k \in \mathcal{R}} \frac{\mu_{\rho_k}}{|G_k|} \left( \sum_{g \in G} \left( \sum_{\rho \in \Phi^+} \nu_{g^{-1}(\rho), \rho_k} e_\rho \right) \right) \\ &= \sum_{\rho \in \Phi^+} \left( \sum_{k \in \mathcal{R}} \frac{\mu_{\rho_k}}{|G_k|} \left( \sum_{g \in G} \nu_{g^{-1}(\rho), \rho_k} \right) \right) e_\rho. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout  $\rho_0 \in \Phi^+$ , on a

$$\lambda_{\rho_0} = \sum_{k \in \mathcal{R}} \frac{\mu_{\rho_k}}{|G_k|} \left( \sum_{g \in G} \nu_{g(\rho_0), \rho_k} \right),$$

et ce coefficient ne dépend que de l'orbite de  $\rho_0$  sous l'action de  $G$ , d'où le résultat.  $\square$

Soit  $\mathcal{C}$  l'ensemble des sous-ensembles fermés de  $\Phi^+$ . Soit  $\tilde{\mathcal{C}}$  l'ensemble des éléments de  $\mathcal{C}$  qui sont  $G$ -invariants. Pour tout  $w \in W$ , on pose

$$\mathcal{U}_w = \bigcup_{R \in \mathcal{C} \mid C(R)=w} U_R, \quad \tilde{\mathcal{U}}_w = \bigcup_{R \in \tilde{\mathcal{C}} \mid C(R)=w} \tilde{U}_R.$$

On remarque que pour tout  $w \in W$ , on a  $\tilde{\mathcal{U}}_w \subset \mathcal{U}_w$ , et que  $\mathcal{U}_w \cap \mathcal{U}_v$  est vide dès que  $v$  et  $w$  sont deux éléments distincts de  $W$ . De plus, si  $w \in W^G$ , alors  $\tilde{\mathcal{U}}_w \neq \emptyset$ . En effet,  $\Phi_w$  est un ensemble  $G$ -invariant d'après le lemme 3.2.5 et  $C(\Phi_w) = w$ , donc  $\emptyset \neq \tilde{U}_{\Phi_w} \subset \tilde{\mathcal{U}}_w$ . D'autre part, si  $w \notin W^G$ , alors  $\tilde{\mathcal{U}}_w = \emptyset$ . En effet,  $C(R) \in W^G$  pour tout  $R \in \tilde{\mathcal{C}}$  d'après le lemme 3.2.6 donc  $\{R \in \tilde{\mathcal{C}} \mid C(R) = w\}$  est vide. Par conséquent,

$$w \in W^G \Leftrightarrow \tilde{\mathcal{U}}_w \neq \emptyset.$$

**Lemme 3.2.8.** *Soient  $a \in A^{+G}$  et  $w \in W^G$ . Alors*

$$\psi_\infty^+(a) \cdot \tilde{\mathcal{U}}_w \subset \tilde{\mathcal{U}}_{L(a\tau(w))}.$$

**Démonstration.** Soit  $R \in \tilde{\mathcal{C}}$  tel que  $C(R) = w$ . On a  $\psi_\infty^+(a) \cdot \tilde{U}_R \subset \tilde{U}_{a \star R}$  et  $a \star R \in \tilde{\mathcal{C}}$  d'après le lemme 3.2.7. De plus,  $C(a \star R) = L(a\tau(w))$  d'après [51, Lem. 4.9]. Ainsi,  $\psi_\infty^+(a) \cdot \tilde{U}_R \subset \tilde{\mathcal{U}}_{L(a\tau(w))}$ , d'où le résultat.  $\square$

**Lemme 3.2.9.** *Pour tout sous-ensemble  $G$ -invariant  $R \subset \Phi^+$  et pour tout  $a \in A^{+G}$ , l'ensemble  $\psi_\infty^+(a) \cdot \tilde{U}_R$  ne dépend que de  $\psi^{+G}(a)$  et de  $\tilde{U}_R$ .*

**Démonstration.** Soit  $\sum_{\rho \in \Phi^+} \lambda_\rho e_\rho \in \tilde{U}_R$ . On rappelle ici que  $\mathcal{R}$  désigne l'ensemble des orbites de  $\Phi^+$  sous l'action de  $G$ . Soit  $\{\rho_k\}_{k \in \mathcal{R}}$  un système de représentants des orbites de  $\Phi^+$  sous l'action de  $G$  et, pour tout  $k \in \mathcal{R}$ ,  $G_k$  le stabilisateur de  $\rho_k$  dans  $G$ . On calcule alors

$$\begin{aligned} \psi_\infty^+(a) \cdot \sum_{\rho \in \Phi^+} \lambda_\rho e_\rho &= \psi_\infty^+(a) \cdot \sum_{k \in \mathcal{R}} \frac{\lambda_{\rho_k}}{|G_k|} \left( \sum_{g \in G} e_{g(\rho_k)} \right) \\ &= \sum_{k \in \mathcal{R}} \frac{\lambda_{\rho_k}}{|G_k|} \left( \psi_\infty^+(a) \cdot \sum_{g \in G} e_{g(\rho_k)} \right) \\ &= \sum_{k \in \mathcal{R}} \frac{\lambda_{\rho_k}}{|G_k|} \left( \psi^+(a) \cdot \sum_{g \in G} e_{g(\rho_k)} \right) \begin{cases} z = 0 \\ q = q_0 \in ]0, 1[ \end{cases} \\ &= \sum_{k \in \mathcal{R}} \frac{\lambda_{\rho_k}}{|G_k|} \left( \psi^{+G}(a) \cdot \sum_{g \in G} e_{g(\rho_k)} \right) \begin{cases} z = 0 \\ q = q_0 \in ]0, 1[ \end{cases} \end{aligned}$$



puisque  $a \in A^{+G}$  et  $\sum_{g \in G} e_{g(\rho_k)} \in E^G$ . □

On peut désormais démontrer le théorème 3.1.2.

**Démonstration du théorème 3.1.2.** Soient  $a, b \in A^{+G}$  tels que  $\psi^{+G}(a) = \psi^{+G}(b)$ . On écrit  $a = \tau(u)a_1$  et  $b = \tau(v)b_1$  où  $u = L(a)$ ,  $v = L(b)$  et  $a_1, b_1 \in A^+$ . D'après le lemme 3.2.4,  $u, v \in W^G$ . Par construction de  $\tau$ ,  $\tau(u), \tau(v) \in A^{+G}$ . Ainsi, on a aussi  $a_1, b_1 \in A^{+G}$  puisque le monoïde  $A^+$  est simplifiable. Le lemme 3.2.8 donne alors  $\psi_\infty^+(a) \cdot \tilde{\mathcal{U}}_1 \subset \tilde{\mathcal{U}}_u$  et  $\psi_\infty^+(b) \cdot \tilde{\mathcal{U}}_1 \subset \tilde{\mathcal{U}}_v$ . Or  $\psi^{+G}(a) = \psi^{+G}(b)$ , donc  $\psi_\infty^+(a) \cdot \tilde{\mathcal{U}}_1 = \psi_\infty^+(b) \cdot \tilde{\mathcal{U}}_1$  par le lemme 3.2.9, donc  $\tilde{\mathcal{U}}_u \cap \tilde{\mathcal{U}}_v \neq \emptyset$ , donc  $u = v$ .

On démontre maintenant que  $a = b$  par récurrence sur  $\lg(a)$ . Si  $\lg(a) = 0$ , alors  $a = 1$ , donc  $u = v = 1$ , donc  $b = 1$ . On suppose  $\lg(a) > 0$  ainsi que l'hypothèse de récurrence. Alors  $\lg(a_1) < \lg(a)$ , et

$$\psi^{+G}(a_1) = \psi^G(\tau(u))^{-1} \psi^G(a) = \psi^G(\tau(v))^{-1} \psi^G(b) = \psi^{+G}(b_1).$$

Par hypothèse de récurrence, on obtient  $a_1 = b_1$ , donc  $a = b$ . Ainsi, la représentation  $\psi^{+G}$  est fidèle.

On suppose maintenant que  $\Gamma$  est de type sphérique. Soit  $\alpha \in A^G$  tel que  $\psi^G(\alpha) = \text{Id}_{E^G}$ . Par le théorème 1.2.38,  $A^{+G}$  est le monoïde d'Artin associé à  $A^G$ , et  $A^G$  est de type sphérique, puisque  $W^G$  est un sous-groupe fini de  $W$ . Ainsi, il existe  $a, b \in A^{+G}$  tels que  $\alpha = ab^{-1}$  d'après [13, Prop. 5.5], d'où  $\psi^G(a) = \psi^{+G}(a) = \psi^G(b) = \psi^{+G}(b)$ , donc  $a = b$  par fidélité de  $\psi^{+G}$  et donc  $\alpha = 1$ , d'où la fidélité de la représentation  $\psi^G$  dans ce cas. □

# Représentations de Paris, automorphismes et bases

## Sommaire

<b>4.1</b>	<b>Nouvelles représentations des systèmes d'Artin . . . . .</b>	<b>49</b>
4.1.1	Problématique . . . . .	49
4.1.2	Un premier résultat . . . . .	50
4.1.3	Résultat principal . . . . .	50
<b>4.2</b>	<b>Démonstration du théorème 4.1.3 . . . . .</b>	<b>55</b>

## 4.1 Nouvelles représentations des systèmes d'Artin

### 4.1.1 Problématique

Soient  $\Gamma$  un graphe de Coxeter quelconque et  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle, \Pi)$  la base de racines classique de  $\Gamma$ . On rappelle que  $\Phi = \{w\epsilon_s \mid s \in S, w \in W\}$  désigne le système de racines de  $\Gamma$  et que  $\Phi^+ = \{\sum_{s \in S} \lambda_s \epsilon_s \in \Phi \mid \lambda_s \geq 0 \text{ pour tout } s \in S\}$  désigne l'ensemble des racines positives. On se donne un ensemble  $\mathcal{B} = \{e_\rho \mid \rho \in \Phi^+\}$  en bijection avec  $\Phi^+$  et on note  $E$  l'espace vectoriel sur  $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(q, z)$  ayant  $\mathcal{B}$  pour base. On rappelle que, si  $\Gamma$  est simplement lacé et sans triangles, alors, par théorème 1.2.36, on a une représentation fidèle  $\psi^+ : A^+ \rightarrow \text{GL}(E)$ . De plus, si  $\Gamma$  est de type sphérique, cette représentation s'étend en une représentation fidèle  $\psi : A \rightarrow \text{GL}(E)$ . Une question importante du sujet est d'étendre une telle construction à tous les graphes de Coxeter ou, du moins, à certains graphes de Coxeter qui ne sont pas simplement lacés.

Une première approche, à notre avis peu prometteuse, consiste à étendre directement la construction de [51] aux autres graphes de Coxeter. Cette approche est l'objet de la première partie du chapitre 5. Ici, nous adoptons une autre stratégie afin de construire de telles représentations pour certains graphes de Coxeter non simplement lacés en utilisant les représentations  $\psi^{+G} : A^{+G} \rightarrow \text{GL}(E^G)$  et  $\psi^G : A^G \rightarrow \text{GL}(E^G)$  du chapitre 3. Soit  $\Gamma$  un graphe de Coxeter simplement lacé, sans triangles. Soit  $G$  un groupe d'automorphismes de  $\Gamma$ . Soit  $\tilde{\Phi}$  le système de racines de  $\tilde{\Gamma} = \tilde{\Gamma}^G$  et soit  $\tilde{\Phi}^+$  l'ensemble des racines positives de  $\tilde{\Phi}$ . Dans ce chapitre, on construit un sous-ensemble  $\tilde{\mathcal{B}} \subset E^G$  naturellement en bijection avec  $\tilde{\Phi}^+$ , puis on donne une condition nécessaire et suffisante pour que  $\tilde{\mathcal{B}}$  soit une base de  $E^G$ , ce qui est l'objet du théorème 4.1.3.

### 4.1.2 Un premier résultat

On se donne un graphe de Coxeter quelconque  $\Gamma$  et  $G$  un groupe d'automorphismes de  $\Gamma$ . Soit  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle, \Pi)$  la base de racines classique de  $\Gamma$ . On rappelle que, si  $X$  est une orbite de  $G$  dans  $S$  tel que  $W_X$  est fini, on note

$$a_X = \sum_{s \in X} \epsilon_s, \quad \tilde{\epsilon}_X = \frac{a_X}{\|a_X\|}.$$

On rappelle aussi que  $\tilde{\Pi} = \{\tilde{\epsilon}_X \mid X \in \mathcal{S}\}$ , et que, par le théorème 2.1.2,  $(V^G, \langle \cdot, \cdot \rangle, \tilde{\Pi})$  est une base de racines de  $\tilde{\Gamma} = \tilde{\Gamma}^G$ . En guise de préambule, on énonce et démontre le résultat suivant qui devra être comparé au théorème 4.1.3.

**Proposition 4.1.1.** *On suppose que  $\Pi$  est une base de  $V$ . Alors  $\tilde{\Pi}^G$  est une base de  $V^G$  si et seulement si  $\mathcal{S} = \mathcal{O}$ , c'est-à-dire si et seulement si  $W_X$  est fini pour toute orbite  $X$  de  $G$  dans  $S$ .*

**Démonstration.** Pour tout  $s \in S$ , on note  $G_s = \{g \in G \mid g(s) = s\}$  le stabilisateur de  $s$  dans  $G$ . Pour tout  $X \in \mathcal{O}$ , on choisit  $s \in X$  et on pose

$$\epsilon'_X = \frac{|G_s|}{|G|} \sum_{t \in X} \epsilon_t.$$

On remarque que cette définition ne dépend pas du choix de  $s \in X$ . Soient  $\Pi' = \{\epsilon'_X \mid X \in \mathcal{O}\}$  et  $\Pi'_S = \{\epsilon'_X \mid X \in \mathcal{S}\}$ . On considère la projection  $p : V \rightarrow V^G$  définie par

$$\forall x \in V, \quad p(x) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g(x).$$

Pour tout  $s \in S$ , on a  $p(\epsilon_s) = \epsilon'_X$ , où  $X$  est l'orbite contenant  $s$ . Il s'ensuit que  $\Pi'$  engendre  $V^G$ . Comme  $\Pi'$  est clairement une famille libre,  $\Pi'$  est une base de  $V^G$ . Pour tout  $X \in \mathcal{S}$ , on a

$$\tilde{\epsilon}_X = \frac{|G|}{|G_s| \|a_X\|} \epsilon'_X,$$

où  $s$  est n'importe quel élément de  $X$ , donc  $\tilde{\Pi}^G$  est une base de  $V^G$  si et seulement si  $\Pi'_S$  est une base de  $V^G$ . Or  $\Pi'_S \subset \Pi'$ , donc  $\Pi'_S$  est une base de  $V^G$  si et seulement si  $\Pi'_S = \Pi'$ , c'est-à-dire si et seulement si  $\mathcal{S} = \mathcal{O}$ .  $\square$

### 4.1.3 Résultat principal

Dans cette partie, on suppose que  $\Gamma$  est un graphe de Coxeter simplement lacé et sans triangles. Soit  $G$  un groupe d'automorphismes de  $\Gamma$  et  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle, \Pi)$  la base de racines classique de  $\Gamma$ . On note  $\tilde{\Phi}$  le système de racines de  $\tilde{\Gamma} = \tilde{\Gamma}^G$  et  $\tilde{\Phi}^+$  le système de racines positives associé à  $(V^G, \langle \cdot, \cdot \rangle, \tilde{\Pi})$ . Par la remarque 1.2.21,  $\tilde{\Phi}^+$  est en bijection naturelle avec le système de racines positives associé à la base de racines classique de  $\tilde{\Gamma}$ .

**Lemme 4.1.2.** Soit  $\tilde{\rho} \in \tilde{\Phi}$ .

- (1) Soient  $\tilde{w} \in W^G$  et  $X \in \mathcal{S}$  tels que  $\tilde{w}\tilde{\epsilon}_X = \tilde{\rho}$ . Soient  $s \in X$  et  $\rho = \tilde{w}\epsilon_s$ . Alors  $\tilde{\rho} \in \tilde{\Phi}^+$  si et seulement si  $\rho \in \Phi^+$ .
- (2) Soient  $\tilde{w}, \tilde{w}' \in W^G$  et  $X, X' \in \mathcal{S}$  tels que  $\tilde{\rho} = \tilde{w}\epsilon_X = \tilde{w}'\tilde{\epsilon}_{X'}$ . Alors  $\tilde{w}\Pi_X = \{\tilde{w}\epsilon_s \mid s \in X\} = \tilde{w}'\Pi_{X'} = \{\tilde{w}'\epsilon_t \mid t \in X'\}$ .

**Démonstration.** Soient  $\tilde{w} \in W^G$  et  $X \in \mathcal{S}$  tels que  $\tilde{\rho} = \tilde{w}\tilde{\epsilon}_X$ . Soient  $s \in X$  et  $\rho = \tilde{w}\epsilon_s$ . Soit  $\{\mu_t\}_{t \in S}$  l'unique famille de réels telle que  $\tilde{\rho} = \sum_{t \in S} \mu_t \epsilon_t$ . On suppose que  $\rho \in \Phi^+$  (resp.  $\rho \in \Phi^-$ ). Alors  $\rho$  s'écrit  $\rho = \sum_{t \in S} \lambda_t \epsilon_t$  avec  $\lambda_t \geq 0$  (resp.  $\lambda_t \leq 0$ ) pour tout  $t \in S$ . Soit  $s' \in X$ . Comme  $X$  est une orbite de  $G$ , il existe  $g \in G$  tel que  $s' = g(s)$ . On a

$$\tilde{w}\epsilon_{s'} = g(\tilde{w})\epsilon_{g(s)} = g(\tilde{w}\epsilon_s) = \sum_{t \in S} \lambda_t \epsilon_{g(t)} = \sum_{t \in S} \lambda_{g^{-1}(t)} \epsilon_t.$$

Or, par définition de  $\tilde{\epsilon}_X$ , on a

$$\tilde{\rho} = \frac{1}{\|a_X\|} \sum_{s' \in X} \tilde{w}\epsilon_{s'}.$$

Par conséquent,  $\rho \in \Phi^+$  (resp.  $\rho \in \Phi^-$ ) si et seulement si  $\mu_t \geq 0$  (resp.  $\mu_t \leq 0$ ) pour tout  $t \in S$ .

On suppose que  $\tilde{\rho} \in \tilde{\Phi}^+$  (resp.  $\tilde{\rho} \in \tilde{\Phi}^-$ ). Alors  $\tilde{\rho}$  s'écrit  $\tilde{\rho} = \sum_{Y \in \mathcal{S}} \tilde{\lambda}_Y \tilde{\epsilon}_Y$  avec  $\tilde{\lambda}_Y \geq 0$  (resp.  $\tilde{\lambda}_Y \leq 0$ ) pour tout  $Y \in \mathcal{S}$ . Comme

$$\tilde{\epsilon}_Y = \frac{1}{\|a_Y\|} \sum_{t \in Y} \epsilon_t$$

pour tout  $Y \in \mathcal{S}$ , on en conclut que  $\tilde{\rho} \in \tilde{\Phi}^+$  (resp.  $\tilde{\rho} \in \tilde{\Phi}^-$ ) si et seulement si  $\mu_t \geq 0$  (resp.  $\mu_t \leq 0$ ) pour tout  $t \in S$ . Par conséquent,  $\tilde{\rho} \in \tilde{\Phi}^+$  (resp.  $\tilde{\rho} \in \tilde{\Phi}^-$ ) si et seulement si  $\rho \in \Phi^+$  (resp.  $\rho \in \Phi^-$ ), ce qui démontre le point (1).

Soit  $X \in \mathcal{S}$ . On choisit  $s \in X$ , on pose  $G_s = \{g \in G \mid g(s) = s\}$  et  $k_X = |G_s| \|a_X\|$ . On remarque aisément que la définition de  $k_X$  ne dépend pas du choix de  $s$ . Le point (2) est alors une conséquence directe de l'assertion suivante.

*Assertion 1.* Soient  $\tilde{v} \in W^G$  et  $X, X' \in \mathcal{S}$  tels que  $k_{X'} \geq k_X$  et  $\tilde{v}\tilde{\epsilon}_X = \tilde{\epsilon}_{X'}$ . Alors  $\tilde{v}\Pi_X = \Pi_{X'}$ .

*Démonstration de l'assertion 1.* Soit  $s_0 \in X$  fixé. Par le point (1) du lemme 4.1.2 que l'on vient de démontrer, on a  $\tilde{v}\epsilon_{s_0} \in \Phi^+$ , donc  $\tilde{v}\epsilon_{s_0}$  s'écrit  $\tilde{v}\epsilon_{s_0} = \sum_{t \in S} \lambda_t \epsilon_t$  avec  $\lambda_t \geq 0$  pour tout  $t \in S$ . De plus, comme  $\Gamma$  est simplement lacé, on a  $\lambda_t \in \mathbb{Z}$  pour tout  $t \in S$  d'après le lemme 3.1.1 (2). Soit  $x = \sum_{g \in G} g(\tilde{v}\epsilon_{s_0})$ . D'une part, on a

$$x = \sum_{g \in G} \tilde{v}\epsilon_{g(s_0)} = |G_{s_0}| \tilde{v} \sum_{s \in X} \epsilon_s = |G_{s_0}| \|a_X\| \tilde{v}\tilde{\epsilon}_X = k_X \tilde{\epsilon}_{X'}.$$

D'autre part, soit  $t_0 \in X'$  fixé. On a

$$\begin{aligned}
x &= \sum_{g \in G} \sum_{t \in X'} \lambda_t \epsilon_{g(t)} + \sum_{g \in G} \sum_{r \in S \setminus X'} \lambda_r \epsilon_{g(r)} \\
&= \sum_{t \in X'} \left( \sum_{g \in G} \lambda_{g^{-1}(t)} \right) \epsilon_t + \sum_{r \in S \setminus X'} \left( \sum_{g \in G} \lambda_{g^{-1}(r)} \right) \epsilon_r \\
&= |G_{t_0}| \left( \sum_{t \in X'} \lambda_t \right) \left( \sum_{t \in X'} \epsilon_t \right) + \sum_{r \in S \setminus X'} \left( \sum_{g \in G} \lambda_{g^{-1}(r)} \right) \epsilon_r \\
&= |G_{t_0}| \|a_{X'}\| \left( \sum_{t \in X'} \lambda_t \right) \tilde{\epsilon}_{X'} + \sum_{r \in S \setminus X'} \left( \sum_{g \in G} \lambda_{g^{-1}(r)} \right) \epsilon_r \\
&= k_{X'} \left( \sum_{t \in X'} \lambda_t \right) \tilde{\epsilon}_{X'} + \sum_{r \in S \setminus X'} \left( \sum_{g \in G} \lambda_{g^{-1}(r)} \right) \epsilon_r.
\end{aligned}$$

En comparant ces deux expressions de  $x$ , il suit que  $k_X = k_{X'}$  puisque  $k_{X'} \geq k_X$ . De plus,  $\lambda_r = 0$  pour tout  $r \in S \setminus X'$  et il existe un unique élément de  $X'$ , que l'on note  $\tau(s_0)$ , tel que  $\lambda_{\tau(s_0)} = 1$  et  $\lambda_t = 0$  pour  $t \in X' \setminus \{\tau(s_0)\}$ . En d'autres termes, on a  $\tilde{v}\epsilon_{s_0} = \epsilon_{\tau(s_0)}$ .

L'application  $\tau : X \rightarrow X'$  est injective puisque  $\tilde{v}$  est inversible. Par ailleurs, comme

$$\frac{1}{\|a_X\|} \sum_{s \in X} \epsilon_{\tau(s)} = \tilde{v}\tilde{\epsilon}_X = \tilde{\epsilon}_{X'} = \frac{1}{\|a_{X'}\|} \sum_{t \in X'} \epsilon_t,$$

l'application  $\tau$  est surjective. Ainsi,  $\tilde{v}\Pi_X = \Pi_{X'}$ , d'où l'assertion 1.

Maintenant, on se donne  $\tilde{w}, \tilde{w}' \in W^G$  et  $X, X' \in \mathcal{S}$  tels que  $\tilde{\rho} = \tilde{w}\tilde{\epsilon}_X = \tilde{w}'\tilde{\epsilon}_{X'}$ . On suppose sans perte de généralité que  $k_{X'} \geq k_X$ . On a  $(\tilde{w}')^{-1}\tilde{w}\tilde{\epsilon}_X = \tilde{\epsilon}_{X'}$ , donc, par l'assertion 1,  $(\tilde{w}')^{-1}\tilde{w}\Pi_X = \Pi_{X'}$ , donc  $\tilde{w}\Pi_X = \tilde{w}'\Pi_{X'}$ .  $\square$

On définit une application  $\tilde{e} : \tilde{\Phi}^+ \rightarrow E^G$ ,  $\tilde{\rho} \mapsto \tilde{e}_{\tilde{\rho}}$  comme suit. Soit  $\tilde{\rho} \in \tilde{\Phi}^+$ . Soient  $\tilde{w} \in W^G$  et  $X \in \mathcal{S}$  tels que  $\tilde{\rho} = \tilde{w}\tilde{\epsilon}_X$ . Alors

$$\tilde{e}_{\tilde{\rho}} = \frac{1}{\|a_X\|} \sum_{s \in X} e_{\tilde{w}\epsilon_s}.$$

Cette application est bien définie par le lemme 4.1.2. On pose  $\tilde{\mathcal{B}} = \{\tilde{e}_{\tilde{\rho}} \mid \tilde{\rho} \in \tilde{\Phi}^+\}$ . L'ensemble  $\tilde{\mathcal{B}}$  est alors une partie libre de  $E^G$  en bijection naturelle avec  $\tilde{\Phi}^+$ . Le but de ce chapitre est de démontrer le résultat suivant.

**Théorème 4.1.3.** *Soient  $\Gamma$  un graphe de Coxeter connexe simplement lacé et sans triangles. Soit  $G$  un groupe d'automorphismes non trivial de  $\Gamma$ . Alors  $\tilde{\mathcal{B}}$  est une base de  $E^G$  si et seulement si  $(\Gamma, G)$  est l'une des huit paires suivantes à isomorphisme près.*

- (1)  $\Gamma = A_{2m+1}$  et  $G = \langle g \rangle$ , où  $g$  est l'automorphisme de  $\Gamma$  d'ordre 2 défini par  $g(s_i) = s_{2m+2-i}$  pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, 2m+1\}$  (voir la figure 4.1.1 (i)).
- (2)  $\Gamma = \tilde{A}_{2m+1}$  et  $G = \langle g \rangle$ , où  $g$  est l'automorphisme de  $\Gamma$  d'ordre 2 défini par  $g(s_i) = s_{2m+2-i}$  pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, 2m+1\}$  et  $g(s_{2m+2}) = s_{2m+2}$  (voir la figure 4.1.1 (ii)).
- (3)  $\Gamma = D_m$  et  $G = \langle g \rangle$ , où  $g$  est l'automorphisme de  $\Gamma$  d'ordre 2 défini par  $g(s_1) = s_2$ ,  $g(s_2) = s_1$ , et  $g(s_i) = s_i$  pour tout  $i \in \{3, 4, \dots, m\}$  (voir la figure 4.1.1 (iii)).
- (4)  $\Gamma = \tilde{D}_m$  et  $G = \langle g \rangle$ , où  $g$  est l'automorphisme de  $\Gamma$  d'ordre 2 défini par  $g(s_1) = s_2$ ,  $g(s_2) = s_1$ , et  $g(s_i) = s_i$  pour tout  $i \in \{3, 4, \dots, m+1\}$  (voir la figure 4.1.1 (iv)).
- (5)  $\Gamma = D_4$  et  $G$  est un sous-groupe de  $\langle g_1, g_2 \rangle$ , où  $g_1, g_2$  sont définis par

$$\begin{aligned} g_1(s_1) &= s_2, & g_1(s_2) &= s_4, & g_1(s_3) &= s_3, & g_1(s_4) &= s_1, \\ g_2(s_1) &= s_2, & g_2(s_2) &= s_1, & g_2(s_3) &= s_3, & g_2(s_4) &= s_4 \end{aligned}$$

(voir la figure 4.1.1 (v)).

- (6)  $\Gamma = \tilde{D}_4$  et  $G$  est un sous-groupe de  $\langle g_1, g_2 \rangle$ , où  $g_1, g_2$  sont définis par

$$\begin{aligned} g_1(s_1) &= s_2, & g_1(s_2) &= s_4, & g_1(s_3) &= s_3, & g_1(s_4) &= s_1, & g_1(s_5) &= s_5 \\ g_2(s_1) &= s_2, & g_2(s_2) &= s_1, & g_2(s_3) &= s_3, & g_2(s_4) &= s_4, & g_2(s_5) &= s_5 \end{aligned}$$

(voir la figure 4.1.1 (vi)).

- (7)  $\Gamma = E_6$  et  $G = \langle g \rangle$ , où  $g$  est l'automorphisme de  $\Gamma$  d'ordre 2 défini par

$$g(s_1) = s_4, \quad g(s_2) = s_5, \quad g(s_3) = s_3, \quad g(s_4) = s_1, \quad g(s_5) = s_2, \quad g(s_6) = s_6$$

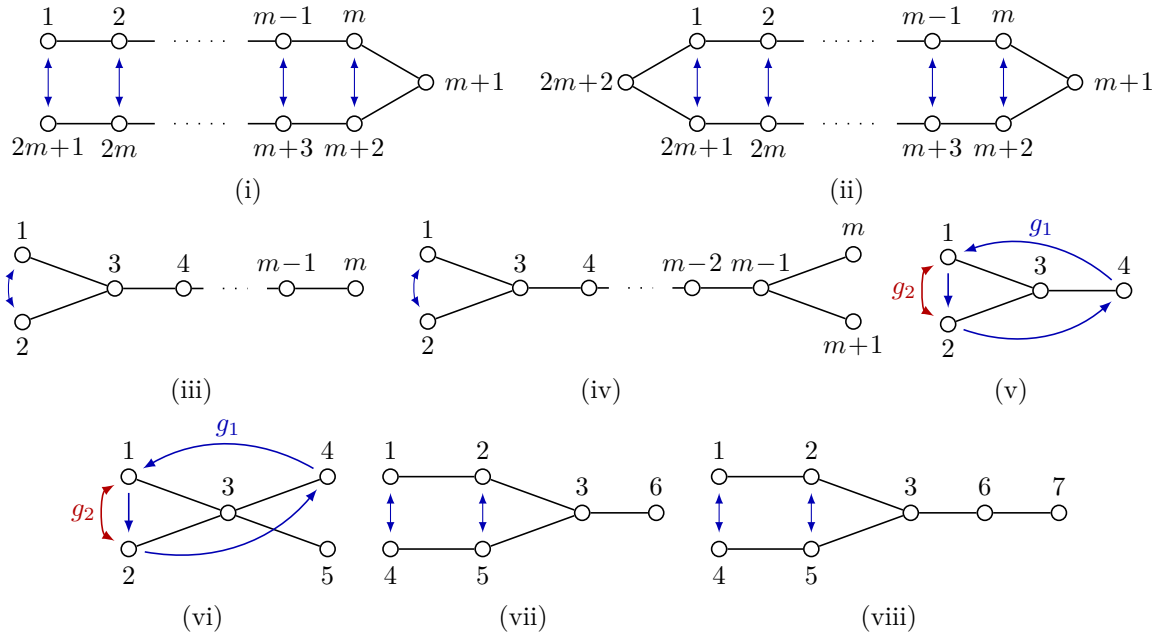
(voir la figure 4.1.1 (vii)).

- (8)  $\Gamma = \tilde{E}_6$  et  $G = \langle g \rangle$ , où  $g$  est l'automorphisme de  $\Gamma$  d'ordre 2 défini par

$$\begin{aligned} g(s_1) &= s_4, & g(s_2) &= s_5, & g(s_3) &= s_3, & g(s_4) &= s_1, \\ g(s_5) &= s_2, & g(s_6) &= s_6, & g(s_7) &= s_7 \end{aligned}$$

(voir la figure 4.1.1 (viii)).

**Remarque 4.1.4.** Soient  $\Gamma$  un graphe de Coxeter connexe, simplement lacé, sans triangles, et  $G$  un groupe d'automorphismes non trivial de  $\Gamma$ . On observe dans le théorème 4.1.3 que, si  $\tilde{\mathcal{B}}$  est une base de  $E^G$ , alors  $\Gamma$  est de type sphérique ou de type affine. Ceci n'est pas un hasard et sera une étape importante de notre démonstration, cf. lemme 4.2.11.



**Figure 4.1.1.** Graphes de Coxeter et automorphismes

En combinant les théorèmes 1.2.38, 3.1.2 et 4.1.3, on obtient le résultat suivant.

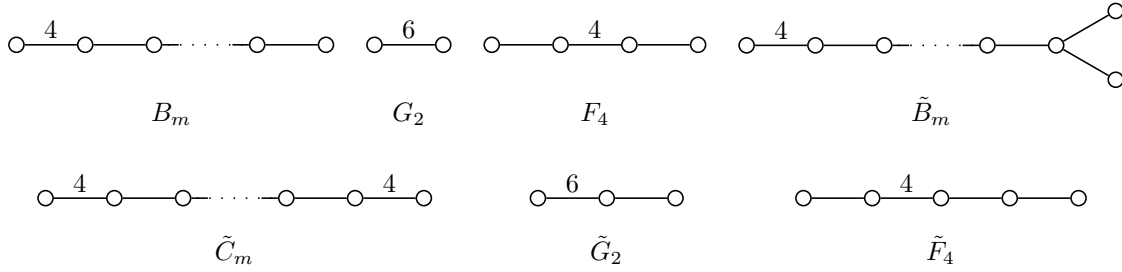
**Corollaire 4.1.5.**

- (1) Soit  $\Gamma$  un graphe de type sphérique appartenant à l'ensemble  $\{B_m \mid m \geq 2\} \cup \{G_2, F_4\}$  (voir la figure 4.1.2). Il existe une représentation fidèle  $\psi : A_\Gamma \rightarrow \text{GL}(E)$ , où  $E$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(q, z)$  ayant une base  $\mathcal{B}$  en bijection naturelle avec  $\Phi^+$ .
- (2) Soit  $\Gamma$  un graphe de type affine appartenant à l'ensemble  $\{\tilde{B}_m, \tilde{C}_m \mid m \geq 2\} \cup \{\tilde{G}_2, \tilde{F}_4\}$  (voir la figure 4.1.2). Il existe une représentation fidèle  $\psi^+ : A_\Gamma^+ \rightarrow \text{GL}(E)$ , où  $E$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(q, z)$  ayant une base  $\mathcal{B}$  en bijection naturelle avec  $\Phi^+$ .

**Démonstration.** Le cas  $B_m$  provient du cas (1) ou du cas (3) du théorème 4.1.3. Le cas  $G_2$  provient du cas (5), et le cas  $F_4$  provient du cas (7). Le cas  $\tilde{B}_m$  provient du cas (4) du théorème 4.1.3. Le cas  $\tilde{C}_m$  provient du cas (2), le cas  $\tilde{G}_2$  provient du cas (6), et le cas  $\tilde{F}_4$  provient du cas (8).  $\square$

**Remarques 4.1.6.**

- (1) La partie (1) du corollaire 4.1.5 est énoncée et démontrée dans Digne [28].
- (2) Soient  $\Gamma$  le graphe de Coxeter de type  $B_m$  et  $E$  l'espace vectoriel sur  $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(q, z)$  ayant pour base un ensemble  $\mathcal{B} = \{e_\rho \mid \rho \in \Phi^+\}$  en bijection avec  $\Phi^+$ . Le



**Figure 4.1.2.** Graphes dont le groupe ou le monoïde d'Artin associé admet une représentation linéaire fidèle dans un espace vectoriel ayant une base en bijection avec  $\Phi^+$

théorème 4.1.3 fournit deux représentations fidèles  $A \rightarrow \text{GL}(E)$  via les cas (1) et (3). La proposition 5.2.4 démontre que dans le cas où  $m = 3$ , les représentations obtenues ne sont pas équivalentes, quel que soit le sens raisonnable que l'on accorde à la notion d'équivalence. Après la rédaction de ce texte, l'auteur a appris que Castella [16] a démontré cela reste vrai pour  $m \geq 4$ .

## 4.2 Démonstration du théorème 4.1.3

Cette partie est dédiée à la démonstration du théorème 4.1.3. À partir de maintenant, on suppose que  $\Gamma$  est un graphe de Coxeter connexe, simplement lacé, sans triangles, et que  $G$  est un groupe d'automorphismes non trivial de  $\Gamma$ .

**Lemme 4.2.7.** *L'ensemble  $\tilde{\mathcal{B}}$  est une base de  $E^G$  si et seulement si  $\Phi = W^G\Pi = \{\tilde{w}\epsilon_s \mid s \in S \text{ et } \tilde{w} \in W^G\}$ .*

**Démonstration.** On rappelle que  $\mathcal{O}$  désigne l'ensemble constitué de toutes les orbites de  $G$  dans  $S$  et que  $\mathcal{S}$  désigne l'ensemble des orbites  $X \in \mathcal{O}$  telles que  $W_X$  est fini. On commence par démontrer l'assertion suivante qui sera utilisée dans la démonstration du lemme 4.2.9.

*Assertion 1.* Si  $\Phi = W^G\Pi$ , alors  $\mathcal{S} = \mathcal{O}$ .

*Démonstration de l'assertion 1.* On suppose que  $\Phi = W^G\Pi$  et que  $\mathcal{O} \neq \mathcal{S}$ . Soit  $X_0 \in \mathcal{O} \setminus \mathcal{S}$ . On choisit  $s_0, t_0 \in X_0$  tels que  $m_{s_0, t_0} \neq 2$ , c'est-à-dire  $m_{s_0, t_0} = 3$ . Soit  $\rho = s_0\epsilon_{t_0} = t_0\epsilon_{s_0} = \epsilon_{s_0} + \epsilon_{t_0}$ . On pose  $T = \cup_{X \in \mathcal{S}} X$ . Comme  $\Phi = W^G\Pi$ , il existe  $\tilde{w} \in W^G$  et  $s \in S$  tels que  $\rho = \tilde{w}\epsilon_s$ . Comme  $W^G$  est engendré par  $\{w_X \mid X \in \mathcal{S}\}$  d'après le théorème 1.2.38 (1), il existe une collection  $\{\lambda_t \mid t \in T\}$  d'éléments de  $\mathbb{Z}$  telle que  $\rho = \epsilon_{s_0} + \epsilon_{t_0} = \epsilon_s + \sum_{t \in T} \lambda_t \epsilon_t$ . Ceci n'est pas possible car  $s_0, t_0 \notin T$ . On en conclut que l'on a forcément  $\mathcal{O} = \mathcal{S}$ .



On note  $\mathcal{R}$  l'ensemble des orbites de  $G$  dans  $\Phi^+$ . Pour tout  $k \in \mathcal{R}$ , on pose  $\hat{f}_k = \sum_{\rho \in k} e_\rho$ . L'assertion suivante sera utilisée à nouveau dans la démonstration du lemme 4.2.14.

*Assertion 2.* L'ensemble  $\hat{\mathcal{B}} = \{\hat{f}_k \mid k \in \mathcal{R}\}$  est une base de  $E^G$ .

*Démonstration de l'assertion 2.* On considère la projection  $p : E \rightarrow E^G$  définie par

$$p(x) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g(x).$$

Soit  $\rho \in \Phi^+$ . Soit  $k \in \mathcal{R}$  l'orbite contenant  $\rho$ . On pose  $G_\rho = \{g \in G \mid g(\rho) = \rho\}$ . Alors

$$p(e_\rho) = \frac{|G_\rho|}{|G|} \hat{f}_k.$$

Comme  $\mathcal{B}$  engendre  $E$ ,  $p(\mathcal{B})$  engendre  $p(E) = E^G$ , donc, par ce qui précède,  $\hat{\mathcal{B}}$  engendre  $E^G$ . De plus, on remarque aisément que  $\hat{\mathcal{B}}$  est une famille libre.

Soit  $\tilde{\rho} \in \tilde{\Phi}^+$ . Soient  $\tilde{w} \in W^G$  et  $X \in \mathcal{S}$  tels que  $\tilde{\rho} = \tilde{w}\tilde{\epsilon}_X$ . Par le lemme 4.1.2, l'ensemble  $R(\tilde{\rho}) = \tilde{w}\Pi_X$  est bien défini. De plus, on a  $R(\tilde{\rho}) \in \mathcal{R}$  et  $\hat{f}_{R(\tilde{\rho})} = \|a_X\| \tilde{\epsilon}_{\tilde{\rho}}$ . Soit  $\tilde{\mathcal{B}}' = \{\hat{f}_{R(\tilde{\rho})} \mid \tilde{\rho} \in \tilde{\Phi}^+\}$ . Ainsi, l'ensemble  $\tilde{\mathcal{B}}$  est une base de  $E^G$  si et seulement si  $\tilde{\mathcal{B}}'$  est une base de  $E^G$ , or  $\tilde{\mathcal{B}}' \subset \hat{\mathcal{B}}$ , donc  $\tilde{\mathcal{B}}'$  est une base de  $E^G$  si et seulement si  $\tilde{\mathcal{B}}' = \hat{\mathcal{B}}$ .

On suppose que  $\Phi = W^G\Pi$ . Soit  $k \in \mathcal{R}$ . Soit  $\rho \in k$ . Soient  $\tilde{w} \in W^G$  et  $s \in S$  tels que  $\rho = \tilde{w}\epsilon_s$ . Soit  $X$  l'orbite de  $G$  dans  $S$  contenant  $s$ . On a  $X \in \mathcal{S}$  par l'assertion 1. On pose  $\tilde{\rho} = \tilde{w}\tilde{\epsilon}_X$ . D'après le lemme 4.1.2 (1), on a  $\tilde{\rho} \in \tilde{\Phi}^+$ . De plus,  $k = R(\tilde{\rho})$ , donc  $\hat{f}_k = \hat{f}_{R(\tilde{\rho})}$ . Ceci démontre que  $\tilde{\mathcal{B}}' = \hat{\mathcal{B}}$ , donc, par ce qui précède, que  $\tilde{\mathcal{B}}$  est une base de  $E^G$ .

On suppose que  $\tilde{\mathcal{B}}$  est une base de  $E^G$ , c'est-à-dire que  $\tilde{\mathcal{B}}' = \hat{\mathcal{B}}$ . Soit  $\rho \in \Phi^+$ . Soit  $k$  l'orbite de  $G$  dans  $\Phi^+$  contenant  $\rho$ . Il existe une racine  $\tilde{\rho} \in \tilde{\Phi}^+$  telle que  $\hat{f}_k = \hat{f}_{R(\tilde{\rho})}$ , c'est-à-dire telle que  $k = R(\tilde{\rho})$ . Soient  $\tilde{w} \in W^G$  et  $X \in \mathcal{S}$  tels que  $\tilde{\rho} = \tilde{w}\tilde{\epsilon}_X$ . Par définition, on a  $R(\tilde{\rho}) = \tilde{w}\Pi_X$ , donc il existe  $s \in X$  tel que  $\rho = \tilde{w}\epsilon_s \in W^G\Pi$ . Par ailleurs, on rappelle que  $w_X\Pi_X = -\Pi_X$  d'après [27, Prop. 4.1]. Il en résulte qu'il existe  $s' \in X$  tel que  $w_X\epsilon_{s'} = -\epsilon_s$ , donc  $-\rho = \tilde{w}w_X\epsilon_{s'} \in W^G\Pi$ . Ceci démontre que  $\Phi \subset W^G\Pi$ , donc que  $\Phi = W^G\Pi$ .  $\square$

On rappelle que d'après le lemme 2.2.5, une orbite  $X \in \mathcal{S}$  est soit de type  $I$ , soit de type  $II_3$ .

**Lemme 4.2.8.** *Soient  $X, Y \in \mathcal{S}$ . S'il existe  $\tilde{w} \in W^G$  tel que  $\tilde{w}\tilde{\epsilon}_X = \tilde{\epsilon}_Y$ , alors  $X$  et  $Y$  sont de même type.*

**Démonstration.** Par la proposition [27, Prop. 5.5] appliquée au graphe  $\tilde{\Gamma}$ , il existe des éléments  $X_0, X_1, \dots, X_m$  et  $Z_1, Z_2, \dots, Z_m$  de  $\mathcal{S}$  vérifiant les propriétés suivantes.

- (i)  $X_0 = X$  et  $X_m = Y$ .
- (ii)  $X_{i-1} \neq Z_i$  et  $\tilde{m}_{X_{i-1}, Z_i} \neq \infty$  pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ .
- (iii)  $X_i = Z_i$  si  $\tilde{m}_{X_{i-1}, Z_i}$  est impair, et  $X_i = X_{i-1}$  si  $\tilde{m}_{X_{i-1}, Z_i}$  est pair.

On observe que, par la construction du graphe de Coxeter  $\tilde{\Gamma}$  exposée dans la partie 1.2.5, si  $\tilde{m}_{X_{i-1}, Z_i}$  est fini et impair, alors  $X_{i-1}$  et  $Z_i$  ont le même type. Ainsi, dans tous les cas,  $X_{i-1}$  et  $X_i$  ont le même type. On en conclut que  $X = X_0$  et  $Y = X_m$  ont le même type.  $\square$

**Lemme 4.2.9.** *On suppose que  $\tilde{\mathcal{B}}$  est une base de  $E^G$ .*

- (1) *On a  $\mathcal{O} = \mathcal{S}$  et tout élément de  $\mathcal{S}$  est de type I.*
- (2) *Soient  $\rho \in \Phi$  et  $g \in G$ . Alors  $g(\rho) = \rho$  ou  $\langle g(\rho), \rho \rangle = 0$ .*

**Démonstration.** D'après le lemme 4.2.7, on a  $\Phi = W^G\Pi$ , donc on a aussi  $\mathcal{O} = \mathcal{S}$  par l'assertion 1 de la démonstration du même lemme.

On suppose que  $\mathcal{S}$  contient un élément  $Z$  de type  $II_3$ . Soient  $x, y \in Z$  tels que  $m_{x,y} = 3$ . On a  $\epsilon_x + \epsilon_y = x\epsilon_y = y\epsilon_x \in \Phi$ , donc il existe  $\tilde{w} \in W^G$  et  $s \in S$  tels que  $\epsilon_x + \epsilon_y = \tilde{w}\epsilon_s$ . On note  $X$  l'orbite de  $G$  dans  $S$  contenant  $s$ . Soit  $g \in G$ . Par définition d'une orbite de type  $II_3$ , on a soit  $g(\epsilon_x + \epsilon_y) = \epsilon_x + \epsilon_y$ , soit  $\langle g(\epsilon_x + \epsilon_y), \epsilon_x + \epsilon_y \rangle = \langle \epsilon_{g(x)} + \epsilon_{g(y)}, \epsilon_x + \epsilon_y \rangle = 0$ . Si  $g(\epsilon_x + \epsilon_y) = \epsilon_x + \epsilon_y$ , alors

$$g(\epsilon_s) = \tilde{w}^{-1}g(\epsilon_x + \epsilon_y) = \tilde{w}^{-1}(\epsilon_x + \epsilon_y) = \epsilon_s.$$

Si  $\langle g(\epsilon_x + \epsilon_y), \epsilon_x + \epsilon_y \rangle = 0$ , alors

$$\langle g(\epsilon_s), \epsilon_s \rangle = \langle \tilde{w}^{-1}g(\epsilon_x + \epsilon_y), \tilde{w}^{-1}(\epsilon_x + \epsilon_y) \rangle = \langle g(\epsilon_x + \epsilon_y), \epsilon_x + \epsilon_y \rangle = 0.$$

On en déduit que  $X$  est de type I.

Pour tout  $t \in S$ , on note  $G_t = \{g \in G \mid g(t) = t\}$  le stabilisateur de  $t$  dans  $G$ . Alors

$$\begin{aligned} \tilde{w}\tilde{\epsilon}_X &= \tilde{w} \left( \frac{1}{\|a_x\| |G_s|} \sum_{g \in G} \epsilon_{g(s)} \right) = \frac{1}{\|a_x\| |G_s|} \sum_{g \in G} g(\tilde{w}\epsilon_s) \\ &= \frac{1}{\|a_x\| |G_s|} \sum_{g \in G} g(\epsilon_x + \epsilon_y) = \frac{1}{\|a_x\| |G_s|} \left( \sum_{g \in G} \epsilon_{g(x)} + \sum_{g \in G} \epsilon_{g(y)} \right) = \frac{2\|a_z\| |G_x|}{\|a_x\| |G_s|} \tilde{\epsilon}_Z. \end{aligned}$$

Puisque  $\tilde{w}$  préserve la forme bilinéaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  et que  $\|\tilde{\epsilon}_X\| = \|\tilde{\epsilon}_Z\| = 1$ , il s'ensuit que  $\tilde{w}\tilde{\epsilon}_X = \tilde{\epsilon}_Z$ . Or ceci contredit le lemme 4.2.8, donc  $\mathcal{S}$  ne contient aucune orbite de type  $II_3$ , c'est-à-dire qu'il ne contient que des orbites de type I.

Soient  $\rho \in \Phi$  et  $g \in G$ . On rappelle que  $\Phi = W^G\Pi$  par le lemme 4.2.7. Soient  $\tilde{w} \in W^G$  et  $s \in S$  tels que  $\rho = \tilde{w}\epsilon_s$ . Soit  $X$  l'orbite de  $G$  dans  $S$  contenant  $s$ . Par ce

qui précède,  $X \in \mathcal{S}$  et  $X$  est de type  $I$ . Comme  $g(s) \in X$ , on a soit  $g(\epsilon_s) = \epsilon_s$ , soit  $\langle g(\epsilon_s), \epsilon_s \rangle = 0$ . Si  $g(\epsilon_s) = \epsilon_s$ , alors  $g(\rho) = \tilde{w}g(\epsilon_s) = \tilde{w}\epsilon_s = \rho$ . Si  $\langle g(\epsilon_s), \epsilon_s \rangle = 0$ , alors

$$\langle g(\rho), \rho \rangle = \langle \tilde{w}g(\epsilon_s), \tilde{w}\epsilon_s \rangle = \langle g(\epsilon_s), \epsilon_s \rangle = 0,$$

ce qui achève la démonstration du lemme.  $\square$

**Lemme 4.2.10.** *On suppose que  $\tilde{\mathcal{B}}$  est une base de  $E^G$ . Alors, pour tout  $g \in G$ , il existe  $s \in S$  tel que  $g(s) = s$ .*

**Démonstration.** On dit qu'un vecteur  $x \in V$  est un *vecteur positif* s'il existe une famille  $\{\lambda_s\}_{s \in S}$  de réels positifs telle que  $x = \sum_{s \in S} \lambda_s \epsilon_s$ . On appelle *support* d'un vecteur  $x = \sum_{s \in S} \lambda_s \epsilon_s$  l'ensemble  $\text{Supp}(x) = \{s \in S \mid \lambda_s \neq 0\}$ . On observe que, si  $x, y$  sont deux vecteurs positifs tels que  $\text{Supp}(x) \cap \text{Supp}(y) = \emptyset$ , alors  $\langle x, y \rangle \leq 0$ . De plus, s'il existe  $s \in \text{Supp}(x)$  et  $t \in \text{Supp}(y)$  tels que  $m_{s,t} = 3$ , alors  $\langle x, y \rangle < 0$ .

Soient  $s, t \in S$ . Un *chemin* dans  $\Gamma$  de *longueur*  $\ell$  de  $s$  à  $t$  est un  $(\ell + 1)$ -uplet  $(s_0, s_1, \dots, s_\ell)$  dans  $S$  tel que  $s_0 = s$ ,  $s_\ell = t$  et  $m_{s_{i-1}, s_i} = 3$  pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, \ell\}$ . Une *géodésique* de  $s$  à  $t$  est un chemin de  $s$  à  $t$  de longueur minimale. La *distance* de  $s$  à  $t$  est la longueur de n'importe quelle géodésique de  $s$  à  $t$ , que l'on note  $d(s, t)$ .

On suppose qu'il existe  $g \in G$  tel que  $g(s) \neq s$  pour tout  $s \in S$ . Soit  $\ell = \min\{d(s, g(s)) \mid s \in S\}$ . Par le lemme 4.2.9 (1),  $\mathcal{O} = \mathcal{S}$  et tout élément de  $\mathcal{S}$  est de type  $I$ . En particulier,  $m_{s, g(s)} = 2$  pour tout  $s \in S$ , donc  $\ell \geq 2$ . On choisit  $s_0 \in S$  tel que  $d(s_0, g(s_0)) = \ell$  et une géodésique  $(s_0, s_1, \dots, s_\ell = g(s_0))$  de  $s_0$  à  $g(s_0)$ .

Soit  $\rho = s_{\ell-1} \cdots s_2 s_1(\epsilon_{s_0})$ . Comme  $(s_0, s_1, \dots, s_\ell)$  est une géodésique, pour tout  $j \in \{2, 3, \dots, \ell\}$  et tout  $i \in \{0, 1, \dots, j-2\}$ , on a  $m_{s_i, s_j} = 2$ . On en déduit que  $\rho = \epsilon_{s_0} + \epsilon_{s_1} + \cdots + \epsilon_{s_{\ell-1}}$ . On remarque que  $g(\rho) = \epsilon_{g(s_0)} + \epsilon_{g(s_1)} + \cdots + \epsilon_{g(s_{\ell-1})}$ . S'il existait  $i \in \{0, 1, \dots, \ell-1\}$  tel que  $g(s_i) \in \{s_0, s_1, \dots, s_{\ell-1}\}$ , alors on aurait  $d(s_i, g(s_i)) < \ell$ , ce qui contredirait la définition de  $\ell$ . On a donc

$$\text{Supp}(\rho) \cap \text{Supp}(g(\rho)) = \{s_0, s_1, \dots, s_{\ell-1}\} \cap \{g(s_0), g(s_1), \dots, g(s_{\ell-1})\} = \emptyset.$$

De plus,  $m_{s_{\ell-1}, g(s_0)} = m_{s_{\ell-1}, s_\ell} = 3$ , donc, par ce qui précède,  $\langle \rho, g(\rho) \rangle < 0$ . Ceci contredit le lemme 4.2.9 (2).  $\square$

**Lemme 4.2.11.** *On suppose que  $\tilde{\mathcal{B}}$  est une base de  $E^G$ . Alors  $\Gamma$  est de type sphérique ou de type affine.*

On commence par énoncer quelques résultats provenant de [38, 41], cf. proposition 4.2.12, sur lesquels sont basés notre démonstration du lemme 4.2.11.

On dit qu'une racine  $\rho \in \Phi$  *sépare* deux éléments  $u$  et  $v \in W$  s'il existe  $\varepsilon \in \{\pm 1\}$  tel que  $u\rho \in \Phi^\varepsilon$  et  $v\rho \in \Phi^{-\varepsilon}$ . Soit  $w \in W$ . On dit qu'une racine  $\rho \in \Phi$  est *w-impair* si l'ensemble

$$\{n \in \mathbb{Z} \mid \rho \text{ sépare } w^n \text{ et } w^{n+1}\}$$

est fini et impair. On note  $\Phi_{\text{odd}}(w)$  l'ensemble des racines  $w$ -impaires.

On rappelle que  $R = \{ws w^{-1} \mid s \in S \text{ et } w \in W\}$  désigne l'ensemble des réflexions dans  $W$ . On dispose d'une application  $\zeta : \Phi \rightarrow R$  définie comme suit. Soit  $\rho \in \Phi$ . Soient  $w \in W$  et  $s \in S$  tels que  $\rho = w\epsilon_s$ . Alors l'élément  $\zeta(\rho) = w s w^{-1} \in W$  est bien défini. L'application  $\zeta$  est surjective et on a  $\zeta(\rho) = \zeta(\rho')$  si et seulement si  $\rho' = \pm\rho$ .

Enfin, on rappelle qu'un élément  $w \in W$  est essentiel si  $\text{Pc}(w) = W$ , où  $\text{Pc}(w)$ , la clôture parabolique de  $w$ , est définie comme l'intersection de tous les sous-groupes paraboliques de  $W$  contenant  $w$ . On se réfère à la partie 1.2.2 pour plus de détails.

**Proposition 4.2.12** (Krammer [38, 41]). *On suppose que  $\Gamma$  est connexe et qu'il n'est ni de type sphérique, ni de type affine. Soit  $w$  un élément essentiel de  $W$ .*

(1) [41, Prop. 5.2.2] *Soit  $\rho \in \Phi_{\text{odd}}(w)$ . Alors, pour tout  $u \in W$ , l'ensemble*

$$\{n \in \mathbb{Z} \mid \rho \text{ sépare } uw^n \text{ et } uw^{n+1}\}$$

*est fini et de cardinal impair.*

(2) [41, Corl. 5.8.7] *Le groupe  $W$  est engendré par*

$$\zeta(\Phi_{\text{odd}}(w)) = \{\zeta(\rho) \mid \rho \in \Phi_{\text{odd}}(w)\}.$$

(3) [41, Corl. 6.3.8] *Pour tous  $\rho, \rho' \in \Phi_{\text{odd}}(w)$  on a*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\langle \rho', w^n \rho \rangle| = +\infty.$$

**Démonstration du lemme 4.2.11.** On raisonne par l'absurde. On suppose qu'il existe un graphe  $\Gamma$  simplement lacé, connexe, sans triangles, ni sphérique ni affine tel que  $\tilde{\mathcal{B}}$  est une base de  $E^G$ . D'après le lemme 4.2.7, on a alors  $W^G \Pi = \Phi$ . On fixe  $g \in G$ ,  $g \neq 1$ . La point clé de la démonstration du lemme 4.2.11 est le suivant.

*Assertion 1.* Il existe  $\rho_1, \rho_2 \in \Phi$  tels que  $g(\rho_1) = \rho_1$ ,  $g(\rho_2) \neq \rho_2$  et  $|\langle \rho_1, \rho_2 \rangle| \geq 1$ .

*Démonstration de l'assertion 1.* Par le lemme 4.2.10, on choisit  $s \in S$  tel que  $g(s) = s$ . On choisit aussi  $w$  un élément essentiel de  $W$ , par exemple un élément de Coxeter. Soit  $\rho' \in \Phi_{\text{odd}}(w)$ . Le lemme 3.1.1 (3) permet de choisir  $u \in W$  tel que  $\rho' = u\epsilon_s$ . D'après la proposition 4.2.12 (1), l'ensemble

$$\{n \in \mathbb{Z} \mid \rho' \text{ sépare } u^{-1}w^n \text{ et } u^{-1}w^{n+1}\} = \{n \in \mathbb{Z} \mid \epsilon_s \text{ sépare } (u^{-1}wu)^n \text{ et } (u^{-1}wu)^{n+1}\}$$

est fini et de cardinal impair, donc  $\epsilon_s \in \Phi_{\text{odd}}(u^{-1}wu)$ . De plus,  $u^{-1}wu$  est essentiel puisque  $\text{Pc}(u^{-1}wu) = u^{-1}\text{Pc}(w)u = W$ . Ainsi, quitte à remplacer  $w$  par  $u^{-1}wu$ , on suppose que  $\epsilon_s \in \Phi_{\text{odd}}(w)$ . Par ailleurs, si l'on avait  $g(\rho) = \rho$  pour tout  $\rho \in \Phi_{\text{odd}}(w)$ , alors on aurait  $g(r) = r$  pour tout  $r \in \zeta(\Phi_{\text{odd}}(w))$ , donc  $g$  agirait trivialement sur  $W$

puisque  $\zeta(\Phi_{\text{odd}}(w))$  engendre  $W$  d'après la proposition 4.2.12 (2). Comme  $g$  n'agit pas trivialement sur  $W$ , il existe  $\rho_0 \in \Phi_{\text{odd}}$  tel que  $g(\rho_0) \neq \rho_0$ . Par la proposition 4.2.12 (3), il existe  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $|\langle \epsilon_s, w^n \epsilon_s \rangle| \geq 1$  et  $|\langle \rho_0, w^n \epsilon_s \rangle| \geq 1$ . Si  $g(w^n \epsilon_s) = w^n \epsilon_s$ , alors on pose  $\rho_1 = w^n \epsilon_s$  et  $\rho_2 = \rho_0$ . Si  $g(w^n \epsilon_s) \neq w^n \epsilon_s$ , alors on pose  $\rho_1 = \epsilon_s$  et  $\rho_2 = w^n \epsilon_s$ .

*Fin de la démonstration du lemme 4.2.11.* Par l'assertion 1, on peut choisir  $\rho_1, \rho_2 \in \Phi$  tels que  $g(\rho_1) = \rho_1$ ,  $g(\rho_2) \neq \rho_2$  et  $|\langle \rho_1, \rho_2 \rangle| \geq 1$ . Par le lemme 4.2.9, on a  $\langle \rho_2, g(\rho_2) \rangle = 0$ . Soient  $r_2 = \zeta(\rho_2)$  et  $\rho_3 = r_2(\rho_1) = \rho_1 - 2\langle \rho_1, \rho_2 \rangle \rho_2$ . On a alors  $g(\rho_3) \neq \rho_3$  et

$$\langle \rho_3, g(\rho_3) \rangle = 1 - 2\langle \rho_1, \rho_2 \rangle^2 \neq 0.$$

Ceci contredit le lemme 4.2.9 et achève la démonstration du lemme 4.2.11.  $\square$

**Lemme 4.2.13.** *On suppose que  $\tilde{\mathcal{B}}$  est une base de  $E^G$ . Alors  $(\Gamma, G)$  est à isomorphisme près l'une des huit paires données dans l'énoncé du théorème 4.1.3.*

**Démonstration.** Par le lemme 4.2.9, on sait que  $\mathcal{O} = \mathcal{S}$  et que tout élément de  $\mathcal{S}$  est de type I. Par le lemme 4.2.10, on sait aussi que, pour tout  $g \in G$ , il existe  $s \in S$  tel que  $g(s) = s$ . Enfin, par le lemme 4.2.11, on sait que  $\Gamma$  est de type sphérique ou de type affine. Par ailleurs, si  $\Gamma = \tilde{A}_{2m+1}$  et  $g_1, g_2$  sont deux automorphismes de  $\Gamma$  conjugués à l'automorphisme décrit dans le cas (2) du théorème 4.1.3, alors  $g = g_1 g_2$  ne fixe aucun élément de  $S$ . Par le lemme 4.2.10, il est impossible qu'un tel élément appartienne à  $G$ . Finalement, grâce à la classification des graphes sphériques et affines exposée dans les théorèmes 1.2.25 et 1.2.26, il suffit donc de démontrer que  $(\Gamma, G)$  ne peut pas être l'une des cinq paires suivantes.

- (1)  $\Gamma = \tilde{D}_m$  et  $G$  contient un élément  $g$  d'ordre 2 tel que  $g(s_1) = s_2$ ,  $g(s_2) = s_1$ ,  $g(s_i) = s_i$  pour tout  $i \in \{3, 4, \dots, m-1\}$ ,  $g(s_m) = s_{m+1}$  et  $g(s_{m+1}) = s_m$  (voir la figure 4.2.3 (i)).
- (2)  $\Gamma = \tilde{D}_{2m}$  et  $G$  contient un élément  $g$  d'ordre 2 tel que  $g(s_i) = s_{2m+2-i}$  pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, 2m+1\}$  (voir la figure 4.2.3 (ii)).
- (3)  $\Gamma = \tilde{D}_4$  et  $G$  contient un élément  $g$  d'ordre 4 tel que

$$g(s_1) = s_2, \quad g(s_2) = s_5, \quad g(s_3) = s_3, \quad g(s_4) = s_1, \quad g(s_5) = s_4$$

(voir la figure 4.2.3 (iii)).

- (4)  $\Gamma = \tilde{E}_6$  et  $G$  contient un élément  $g$  d'ordre 3 tel que

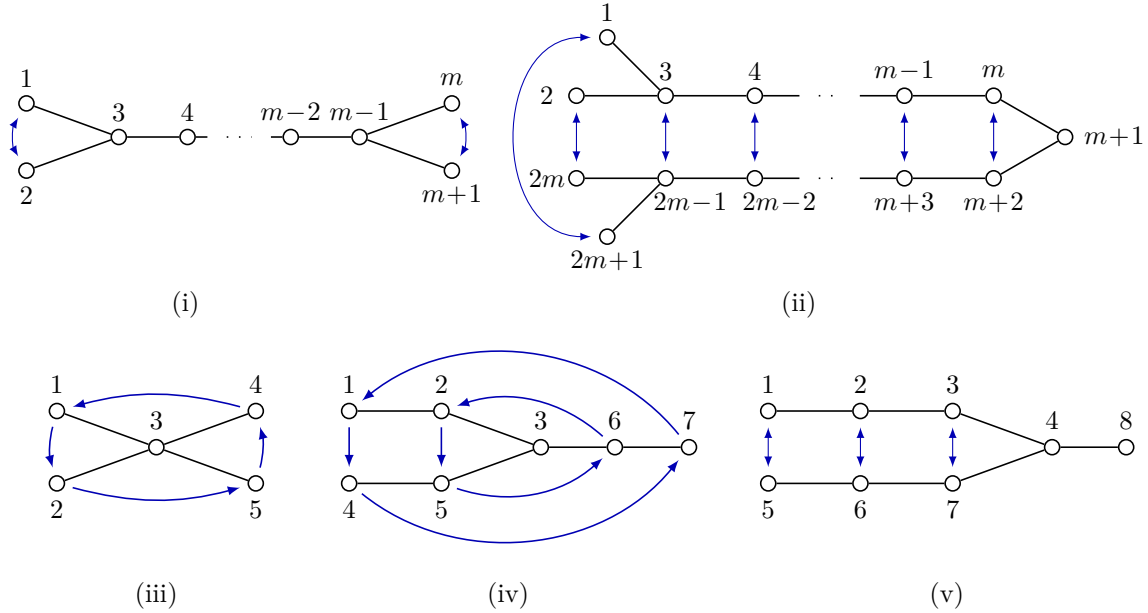
$$\begin{aligned} g(s_1) &= s_4, \quad g(s_2) = s_5, \quad g(s_3) = s_3, \quad g(s_4) = s_7, \\ g(s_5) &= s_6, \quad g(s_6) = s_2, \quad g(s_7) = s_1 \end{aligned}$$

(voir la figure 4.2.3 (iv)).

(5)  $\Gamma = \tilde{E}_7$  et  $G$  contient un élément  $g$  d'ordre 2 tel que

$$\begin{aligned} g(s_1) &= s_5, & g(s_2) &= s_6, & g(s_3) &= s_7, & g(s_4) &= s_4, \\ g(s_5) &= s_1, & g(s_6) &= s_2, & g(s_7) &= s_7, & g(s_8) &= s_8 \end{aligned}$$

(voir la figure 4.2.3 (v)).



**Figure 4.2.3.** Graphes de Coxeter et automorphismes

Dans chaque cas, on exhibe une racine  $\rho \in \Phi$  vérifiant  $g(\rho) \neq \rho$  et  $\langle \rho, g(\rho) \rangle \neq 0$ . Par le lemme 4.2.9, cela implique que  $\tilde{\mathcal{B}}$  n'est pas une base de  $E^G$ .

- (1) Dans le cas (1), on prend  $\rho = \epsilon_1 + \epsilon_3 + \dots + \epsilon_{m-1} + \epsilon_m$ . Alors  $g(\rho) = \epsilon_2 + \epsilon_3 + \dots + \epsilon_{m-1} + \epsilon_{m+1} \neq \rho$  et  $\langle \rho, g(\rho) \rangle = -1 \neq 0$ .
- (2) Dans le cas (2), on prend  $\rho = \epsilon_1 + \epsilon_2 + 2\epsilon_3 + \dots + 2\epsilon_m + \epsilon_{m+1}$ . Alors  $g(\rho) = \epsilon_{m+1} + 2\epsilon_{m+2} + \dots + 2\epsilon_{2m-1} + \epsilon_{2m} + \epsilon_{2m+1} \neq \rho$  et  $\langle \rho, g(\rho) \rangle = -1 \neq 0$ .
- (3) Dans le cas (3), on prend  $\rho = \epsilon_1 + \epsilon_3 + \epsilon_5$ . Alors  $g(\rho) = \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 \neq \rho$  et  $\langle \rho, g(\rho) \rangle = -1 \neq 0$ .
- (4) Dans le cas (4), on prend  $\rho = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_5$ . Alors  $g(\rho) = \epsilon_3 + \epsilon_4 + \epsilon_5 + \epsilon_6 \neq \rho$  et  $\langle \rho, g(\rho) \rangle = -1/2 \neq 0$ .
- (5) Dans le cas (5), on prend  $\rho = \epsilon_1 + \epsilon_2 + 2\epsilon_3 + 2\epsilon_4 + \epsilon_6 + \epsilon_7 + \epsilon_8$ . Alors  $g(\rho) = \epsilon_2 + \epsilon_3 + 2\epsilon_4 + \epsilon_5 + \epsilon_6 + 2\epsilon_7 + \epsilon_8 \neq \rho$  et  $\langle \rho, g(\rho) \rangle = -1 \neq 0$ .

□

**Lemme 4.2.14.** *L'ensemble  $\tilde{\mathcal{B}}$  est une base de  $E^G$  si  $(\Gamma, G)$  est une des quatre paires suivantes.*

- (1)  $\Gamma = A_{2m+1}$  et  $G = \langle g \rangle$ , où  $g$  est l'automorphisme de  $\Gamma$  d'ordre 2 défini par  $g(s_i) = s_{2m+2-i}$  pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, 2m+1\}$  (voir la figure 4.1.1 (i)).
- (2)  $\Gamma = D_m$  et  $G = \langle g \rangle$ , où  $g$  est l'automorphisme de  $\Gamma$  d'ordre 2 défini par  $g(s_1) = s_2$ ,  $g(s_2) = s_1$ , et  $g(s_i) = s_i$  pour tout  $i \in \{3, 4, \dots, m\}$  (voir la figure 4.1.1 (iii)).
- (3)  $\Gamma = D_4$  et  $G$  est un sous-groupe de  $\langle g_1, g_2 \rangle$ , où  $g_1, g_2$  sont définis par

$$\begin{aligned} g_1(s_1) &= s_2, & g_1(s_2) &= s_4, & g_1(s_3) &= s_3, & g_1(s_4) &= s_1, \\ g_2(s_1) &= s_2, & g_2(s_2) &= s_1, & g_2(s_3) &= s_3, & g_2(s_4) &= s_4 \end{aligned}$$

(voir la figure 4.1.1 (v)).

- (4)  $\Gamma = E_6$  et  $G = \langle g \rangle$ , où  $g$  est l'automorphisme de  $\Gamma$  d'ordre 2 défini par

$$g(s_1) = s_4, \quad g(s_2) = s_5, \quad g(s_3) = s_3, \quad g(s_4) = s_1, \quad g(s_5) = s_2, \quad g(s_6) = s_6$$

(voir la figure 4.1.1 (vii)).

**Démonstration.** On note  $\mathcal{R}$  l'ensemble des orbites de  $G$  dans  $\Phi^+$ . Pour  $k \in \mathcal{R}$  on pose  $\hat{f}_k = \sum_{\rho \in k} e_\rho$ . L'ensemble  $\hat{\mathcal{B}} = \{\hat{f}_k \mid k \in \mathcal{R}\}$  est une base de  $E^G$  par l'assertion 2 de la démonstration du lemme 4.2.7, donc  $\dim(E^G) = |\mathcal{R}|$ . Soit  $\tilde{\Phi}^+$  le système de racines positives de  $\tilde{\Gamma}$ . Alors, par construction,  $|\hat{\mathcal{B}}| = |\tilde{\Phi}^+|$ . Donc, par le lemme 4.2.7, pour démontrer que  $\Phi = W^G \Pi$ , il suffit de démontrer que  $|\mathcal{R}| = |\tilde{\Phi}^+|$ .

On suppose que  $\Gamma = A_{2m+1}$  et que  $G = \langle g \rangle$ , où  $g$  est l'automorphisme de  $\Gamma$  décrit dans le (1) de ce lemme. On a  $\tilde{\Gamma} = B_{m+1}$  donc, par [9, Chap. VI, § 4, n° 5],  $|\tilde{\Phi}^+| = (m+1)^2$ . Soit  $\{b_1, b_2, \dots, b_{2m+2}\}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^{2m+2}$ . Pour  $1 \leq i < j \leq 2m+2$  on pose  $\rho_{i,j} = \frac{1}{\sqrt{2}}(b_j - b_i)$ . Alors, par [9, Chap. VI, § 4, n° 7], on peut supposer que  $V$  est l'hyperplan de  $\mathbb{R}^{2m+2}$  d'équation  $\sum_{i=1}^{2m+2} x_i = 0$  et que  $\Phi^+ = \{\rho_{i,j} \mid 1 \leq i < j \leq 2m+2\}$ . Un calcul direct démontre que  $g(\rho_{i,j}) = \rho_{2m+3-j, 2m+3-i}$ . En particulier, on a  $g(\rho_{i,j}) = \rho_{i,j}$  si et seulement si  $j = 2m+3-i$ . Il y a donc  $m+1$  orbites de cardinal 1 dans  $\Phi^+$ ,  $\{\rho_{i, 2m+3-i}\}$ ,  $1 \leq i \leq m+1$ , ainsi que  $\frac{1}{2}(|\Phi^+| - (m+1)) = m(m+1)$  orbites de cardinal 2. Il s'ensuit que

$$|\mathcal{R}| = (m+1) + m(m+1) = (m+1)^2 = |\tilde{\Phi}^+|.$$

On suppose que  $\Gamma = D_m$  et que  $G = \langle g \rangle$ , où  $g$  est l'automorphisme de  $\Gamma$  décrit dans le (2) de ce lemme. On a  $\tilde{\Gamma} = B_{m-1}$  donc, par [9, Chap. VI, § 4, n° 5],  $|\tilde{\Phi}^+| = (m-1)^2$ . Soit  $\{b_1, b_2, \dots, b_m\}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^m$ . Pour  $1 \leq i < j \leq m$  on pose  $\rho_{i,j}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(b_j + b_i)$  et  $\rho_{i,j}^- = \frac{1}{\sqrt{2}}(b_j - b_i)$ . Par [9, Chap. VI, § 4, n° 8], on peut supposer que  $V = \mathbb{R}^m$  et  $\Phi^+ = \{\rho_{i,j}^+, \rho_{i,j}^- \mid 1 \leq i < j \leq m\}$ . Un calcul direct démontre que

$$\begin{aligned} g(\rho_{1,j}^+) &= \rho_{1,j}^-, & g(\rho_{1,j}^-) &= \rho_{1,j}^+, & \text{si } 2 \leq j \leq m, \\ g(\rho_{i,j}^+) &= \rho_{i,j}^+, & g(\rho_{i,j}^-) &= \rho_{i,j}^-, & \text{si } 2 \leq i < j \leq m. \end{aligned}$$

Par conséquent, il y a  $(m - 1)$  orbites de cardinal 2 et  $(m - 1)(m - 2)$  orbites de cardinal 1 dans  $\Phi^+$ , donc  $|\mathcal{R}| = (m - 1) + (m - 1)(m - 2) = (m - 1)^2 = |\tilde{\Phi}^+|$ .

On suppose que  $\Gamma = D_4$  et que  $G$  est un sous-groupe non trivial de  $\langle g_1, g_2 \rangle$ , où  $g_1, g_2$  sont les automorphismes de  $\Gamma$  décrits dans le (3) de ce lemme. On a trois possibilités à automorphisme intérieur près :  $G = \langle g_2 \rangle$ ,  $G = \langle g_1 \rangle$ , ou  $G = \langle g_1, g_2 \rangle$ . Le cas  $G = \langle g_2 \rangle$  est contenu dans le cas (2) du lemme. Par ailleurs, la description de  $W^G$  donnée dans le théorème 1.2.38 permet d'affirmer que  $W^{\langle g_1 \rangle} = W^{\langle g_1, g_2 \rangle}$ , puisque  $\langle g_1 \rangle$  et  $\langle g_1, g_2 \rangle$  ont les mêmes orbites dans  $S$ . Un calcul direct démontre alors que, dans les deux cas,  $|\Phi| = |W^G\Pi| = 24$ , donc  $\Phi = W^G\Pi$ . Par le lemme 4.2.7, cela implique que  $\tilde{\mathcal{B}}$  est une base de  $E^G$ .

On suppose que  $\Gamma = E_6$  et  $G = \langle g \rangle$ , où  $g$  est l'automorphisme de  $\Gamma$  décrit dans le (4) de ce lemme. Un calcul direct démontre que  $|\Phi| = |W^G\Pi| = 72$ , donc  $\Phi = W^G\Pi$ . Par le lemme 4.2.7,  $\tilde{\mathcal{B}}$  est alors une base de  $E^G$ .  $\square$

**Lemme 4.2.15.** *L'ensemble  $\tilde{\mathcal{B}}$  est une base de  $E^G$  si  $(\Gamma, G)$  est l'une des quatre paires suivantes.*

(1)  $\Gamma = \tilde{A}_{2m+1}$  et  $G = \langle g \rangle$ , où  $g$  est l'automorphisme de  $\Gamma$  d'ordre 2 défini par  $g(s_i) = s_{2m+2-i}$  pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, 2m+1\}$  et  $g(s_{2m+2}) = s_{2m+2}$  (voir la figure 4.1.1 (ii)).

(2)  $\Gamma = \tilde{D}_m$  et  $G = \langle g \rangle$ , où  $g$  est l'automorphisme de  $\Gamma$  d'ordre 2 défini par  $g(s_1) = s_2$ ,  $g(s_2) = s_1$ , et  $g(s_i) = s_i$  pour tout  $i \in \{3, 4, \dots, m+1\}$  (voir la figure 4.1.1 (iv)).

(3)  $\Gamma = \tilde{D}_4$  et  $G$  est un sous-groupe de  $\langle g_1, g_2 \rangle$ , où  $g_1, g_2$  sont définis par

$$\begin{aligned} g_1(s_1) &= s_2, & g_1(s_2) &= s_4, & g_1(s_3) &= s_3, & g_1(s_4) &= s_1, & g_1(s_5) &= s_5 \\ g_2(s_1) &= s_2, & g_2(s_2) &= s_1, & g_2(s_3) &= s_3, & g_2(s_4) &= s_4, & g_2(s_5) &= s_5 \end{aligned}$$

(voir la figure 4.1.1 (vi)).

(4)  $\Gamma = \tilde{E}_6$  et  $G = \langle g \rangle$ , où  $g$  est l'automorphisme de  $\Gamma$  d'ordre 2 défini par

$$\begin{aligned} g(s_1) &= s_4, & g(s_2) &= s_5, & g(s_3) &= s_3, & g(s_4) &= s_1, \\ g(s_5) &= s_2, & g(s_6) &= s_6, & g(s_7) &= s_7 \end{aligned}$$

(voir la figure 4.1.1 (viii)).

**Démonstration.** Dans chacun des cas suivants, on démontre que  $\Phi = W^G\Pi$ . D'après le lemme 4.2.7, cela démontre le lemme 4.2.15. On pose

$$S_0 = \begin{cases} \{s_1, s_2, \dots, s_{2m+1}\} & \text{si } \Gamma = \tilde{A}_{2m+1}, \\ \{s_1, s_2, \dots, s_m\} & \text{si } \Gamma = \tilde{D}_m, \\ \{s_1, s_2, \dots, s_6\} & \text{si } \Gamma = \tilde{E}_6. \end{cases}$$



Soit  $\Gamma_0 = \Gamma_{S_0}$ . On a  $\Gamma_0 \simeq A_{2m+1}$  si  $\Gamma = \tilde{A}_{2m+1}$ ,  $\Gamma_0 \simeq D_m$  si  $\Gamma = \tilde{D}_m$ , et  $\Gamma_0 \simeq E_6$  si  $\Gamma = \tilde{E}_6$ .

Il est bien connu que  $W$  s'écrit comme un produit semi-direct  $W = H \rtimes W_{S_0}$ , où  $H$  est un groupe abélien libre [34, Chap. 4]. Dans cette démonstration, on utilise une description explicite de  $H$  ainsi que de son action sur  $V$ . Bien que cette description soit connue des spécialistes, nous la détaillons ici à l'intention de ceux pour qui les groupes de Coxeter sont moins familiers.

Soit

$$z_0 = \begin{cases} \epsilon_1 + \epsilon_2 + \dots + \epsilon_{2m+1} + \epsilon_{2m+2} & \text{si } \Gamma = \tilde{A}_{2m+1}, \\ \epsilon_1 + \epsilon_2 + 2\epsilon_3 + \dots + 2\epsilon_{m-1} + \epsilon_m + \epsilon_{m+1} & \text{si } \Gamma = \tilde{D}_m, \\ \epsilon_1 + 2\epsilon_2 + 3\epsilon_3 + \epsilon_4 + 2\epsilon_5 + 2\epsilon_6 + \epsilon_7 & \text{si } \Gamma = \tilde{E}_6. \end{cases}$$

Un calcul direct démontre que  $\langle z_0, \epsilon_s \rangle = 0$  pour tout  $s \in S$ , donc que  $\langle z_0, x \rangle = 0$  pour tout  $x \in V$ . Ainsi,  $w(z_0) = z_0$  pour tout  $w \in W$ .

*Assertion 1.* On a  $z_0 + \epsilon_s \in \Phi$  pour tout  $s \in S$ .

*Démonstration de l'assertion 1.* Il suffit de démontrer l'existence de  $s \in S$  tel que  $z_0 + \epsilon_s \in \Phi$ . En effet, si  $t$  est un autre élément de  $S$ , alors le lemme 3.1.1 (3) permet d'affirmer qu'il existe  $w \in W$  tel que  $\epsilon_t = w\epsilon_s$  et dans ce cas,  $z_0 + \epsilon_t = wz_0 + w\epsilon_s = w(z_0 + \epsilon_s) \in \Phi$ . Soit

$$w_0 = \begin{cases} s_{2m+1}s_{2m} \cdots s_2 & \text{si } \Gamma = \tilde{A}_{2m+1}, \\ s_{m-1}s_{m-2} \cdots s_2s_ms_{m-1} \cdots s_3 & \text{si } \Gamma = \tilde{D}_m, \\ s_6s_3s_5s_4s_2s_3s_6s_5s_3s_2 & \text{si } \Gamma = \tilde{E}_6. \end{cases}$$

On pose  $n = 2m + 2$  si  $\Gamma = \tilde{A}_{2m+1}$ ,  $n = m + 1$  si  $\Gamma = \tilde{D}_m$  et  $n = 7$  si  $\Gamma = \tilde{E}_6$ . Un calcul direct démontre que

$$z_0 + \epsilon_n = (s_n w_0) \epsilon_1 \in \Phi, \quad (4.2.1)$$

ce qui démontre l'assertion 1.

On rappelle que l'application  $\zeta : \Phi \rightarrow W$  est définie par  $\zeta(\rho) = wsw^{-1}$  si  $\rho \in \Phi$  s'écrit  $w\epsilon_s$ , où  $w \in W$  et  $s \in S$ . De plus, pour tout  $\rho \in \Phi$ , l'action de  $\zeta(\rho)$  sur  $V$  est donnée par

$$\forall x \in V, \quad \zeta(\rho)(x) = x - 2\langle x, \rho \rangle \rho.$$

Pour tout  $s \in S$ , on pose  $T_s = \zeta(\epsilon_s)\zeta(z_0 + \epsilon_s)$  et on note  $H$  le sous-groupe de  $W$  engendré par l'ensemble  $\{T_s \mid s \in S\}$ .

*Assertion 2.*

- (1) On a  $T_s(x) = x - 2\langle x, \epsilon_s \rangle z_0$  pour tous  $s \in S$  et  $x \in V$ .
- (2) Le sous-groupe  $H$  est abélien et est un sous-groupe distingué de  $W$ .
- (3) On a  $W = HW_{S_0} = \{hw \mid h \in H, w \in W_{S_0}\}$ .

*Démonstration de l'assertion 2.* Le point (1) se démontre aisément en utilisant le fait que  $\langle z_0, x \rangle = 0$  pour tout  $x \in V$ . Par conséquent, le point (1) permet de calculer

$$T_s T_t = T_t T_s, \quad {}_t T_s t = T_s T_t^{-2\langle \epsilon_s, \epsilon_t \rangle},$$

pour tous  $s, t \in S$ . Par conséquent,  $H$  est abélien et est un sous-groupe distingué de  $W$ .

Enfin, l'ensemble  $HW_{S_0}$  est un sous-groupe de  $W$  puisque  $H$  est un sous-groupe distingué de  $W$ . De plus, cet ensemble contient  $S_0$ . Ainsi, pour démontrer que  $W = HW_{S_0}$ , il suffit de démontrer que  $s_n \in HW_{S_0}$ . Or l'équation 4.2.1 donne  $s_n = T_n^{-1} w_0 s_1 w_0^{-1} \in HW_{S_0}$ , ce qui achève la démonstration de l'assertion 2.

L'assertion suivante est une conséquence directe du fait que  $g(z_0) = z_0$  pour tout  $g \in G$ .

*Assertion 3.* On a  $g(T_s) = T_{g(s)}$  pour tout  $s \in S$  et  $g \in G$ .

On pose  $\Phi_0 = W_{S_0} \Pi_{S_0}$ . D'après le lemme 3.1.1 (3), on a

$$\Phi = W \Pi_{S_0} = HW_{S_0} \Pi_{S_0} = H \Phi_0.$$

L'assertion 2 (1) permet d'affirmer que toute racine  $\rho \in \Phi$  est de la forme  $\rho = \rho_0 + a z_0$ , où  $\rho_0 \in \Phi_0$  et  $a \in \mathbb{Z}$ .

Soit  $\Phi_0^G = \{\rho \in \Phi_0 \mid g(\rho) = \rho \text{ pour tout } g \in G\}$ . L'assertion suivante est notre critère essentiel pour démontrer qu'une racine donnée  $\rho$  appartient à  $W^G \Pi$ .

*Assertion 4.* Soit  $\rho \in \Phi$ . On écrit  $\rho = \rho_0 + a z_0$  avec  $\rho_0 \in \Phi_0$  et  $a \in \mathbb{Z}$ . S'il existe  $\rho_1 \in \Phi_0^G$  tel que  $\langle \rho_0, \rho_1 \rangle \in \{\pm 1/2\}$ , alors  $\rho \in W^G \Pi$ .

*Démonstration de l'assertion 4.* Soit  $\rho_1 \in \Phi_0^G$ . Soit  $\{\lambda_s\}_{s \in S_0}$  l'unique famille de réels telle que  $\rho_1 = \sum_{s \in S_0} \lambda_s \epsilon_s$ . Comme  $\Gamma_0$  est simplement lacé, on a  $\lambda_s \in \mathbb{Z}$  pour tout  $s \in S_0$  d'après le lemme 3.1.1 (2). On pose alors

$$T_{\rho_1} = \prod_{s \in S_0} T_s^{\lambda_s}.$$

L'assertion 2 implique

$$T_{\rho_1}(x) = x - 2\langle x, \rho_1 \rangle z_0 \tag{4.2.2}$$

pour tout  $x \in V$ . De plus,  $T_{\rho_1} \in H^G$  si  $\rho_1 \in \Phi_0^G$ .

On suppose qu'il existe  $\rho_1 \in \Phi_0^G$  tel que  $\langle \rho_0, \rho_1 \rangle = \frac{\varepsilon}{2}$ , où  $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ . Soit  $u_0 = T_{\rho_1}^{-\varepsilon a}$ . Alors  $u_0 \in H^G$  et, par l'équation (4.2.2),  $u_0(\rho_0) = \rho$ . Par ailleurs, d'après le lemme 4.2.14, il existe  $\tilde{w} \in W(\Gamma_0)^G$  et  $s \in S_0$  tels que  $\rho_0 = \tilde{w}\epsilon_s$ , d'où  $\rho = (u_0\tilde{w})\epsilon_s \in W^G\Pi$ .

*Cas (1).* On suppose que  $\Gamma = \tilde{A}_{2m+1}$  et que  $G = \langle g \rangle$ , où  $g$  est l'automorphisme de  $\Gamma$  décrit dans le point (1) de ce lemme. Pour tous  $i, j \in \{1, 2, \dots, 2m+2\}$  tels que  $i < j$ , on pose  $\rho_{i,j} = \sum_{k=i}^{j-1} \epsilon_k$ . Alors, par [9, Chap. VI, § 4, n° 7],  $\Phi_0 = \{\pm\rho_{i,j} \mid 1 \leq i < j \leq 2m+2\}$ . Un calcul direct démontre que  $g(\rho_{i,j}) = \rho_{2m+3-j, 2m+3-i}$ . En particulier, on a  $g(\rho_{i,j}) = \rho_{i,j}$  si et seulement si  $j = 2m+3-i$  et  $\Phi_0^G = \{\pm\rho_{i, 2m+3-i} \mid 1 \leq i \leq m+1\}$ . Soit  $\rho \in \Phi$ . On écrit  $\rho = \rho_0 + az_0$ , avec  $\rho_0 \in \Phi_0$  et  $a \in \mathbb{Z}$ . Soient  $i, j \in \{1, 2, \dots, 2m+2\}$  tels que  $i < j$  et  $\varepsilon \in \{\pm 1\}$  tels que  $\rho_0 = \varepsilon\rho_{i,j}$ . On suppose que  $\rho_0$  n'est pas symétrique (c.-à-d.  $j \neq 2m+3-i$ ) et on pose  $\rho_1 = \rho_{i, 2m+3-i}$  si  $i \leq m+1$ ,  $\rho_1 = \rho_{2m+3-i, i}$  si  $i \geq m+2$ . Alors  $\rho_1 \in \Phi_0^G$  et  $\langle \rho_0, \rho_1 \rangle \in \{\pm 1/2\}$ . D'après l'assertion 4, il s'ensuit que  $\rho \in W^G\Pi$ .

Avant de traiter le cas où  $\rho_0$  est symétrique, on liste ici quelques observations sur une autre copie de  $W(A_{2m+1})$  incluse dans  $W$ . Soit

$$S_1 = \{s_1, s_2, \dots, s_m, s_{m+2}, \dots, s_{2m+1}, s_{2m+2}\}.$$

Le groupe  $W_{S_1}$  est un sous-groupe parabolique naturellement isomorphe à  $W(A_{2m+1})$  et  $g(W_{S_1}) = W_{S_1}$ . Soit  $\Phi_1 = W_{S_1}\Pi_{S_1}$ . Par le lemme 4.2.7 ainsi que par le lemme 4.2.14 (1), si  $\rho' \in \Phi_1$ , alors il existe  $\tilde{w} \in W_{S_1}^G$  et  $\epsilon_s \in \Pi_{S_1}$  tels que  $\rho' = \tilde{w}\epsilon_s$ .

On suppose que  $\rho_0$  est symétrique. Il existe alors  $i \in \{1, 2, \dots, m+1\}$  et  $\varepsilon \in \{\pm 1\}$  tel que  $\rho_0 = \varepsilon\rho_{i, 2m+3-i}$ . On suppose dans un premier temps que  $a$  est pair. Soit  $b \in \mathbb{Z}$  tel que  $a = 2b$  et soit  $u_0 = T_{\rho_0}^{-b}$ . On a  $u_0 \in H^G$  et, par l'équation 4.2.2, on a  $u_0\rho_0 = \rho$ . Par ailleurs, d'après le lemme 4.2.14 (1), il existe  $\tilde{w} \in W_{S_0}^G$  et  $\epsilon_s \in \Pi_{S_0}$  tels que  $\rho_0 = \tilde{w}\epsilon_s$ . Ainsi,  $\rho = (u_0\tilde{w})\epsilon_s \in W^G\Pi$ . On suppose maintenant que  $a$  est impair. Soit  $b \in \mathbb{Z}$  tel que  $a = 2b - \varepsilon$  et soit  $u_0 = T_{\rho_0}^{-b}$ . On a  $u_0 \in H^G$  et, par l'équation 4.2.2, on a  $u_0(\rho_0 - \varepsilon z_0) = \rho$ . Par ailleurs,

$$\rho_0 - \varepsilon z_0 = -\varepsilon(\epsilon_1 + \dots + \epsilon_{i-1} + \epsilon_{2m+3-i} + \dots + \epsilon_{2m+1} + \epsilon_{2m+2}) \in \Phi_1.$$

Par ce qui précède, il existe  $\tilde{w} \in W_{S_1}^G$  et  $\epsilon_s \in \Pi_{S_1}$  tels que  $\rho_0 - \varepsilon z_0 = \tilde{w}\epsilon_s$ . Ainsi,  $\rho = (u_0\tilde{w})\epsilon_s \in W^G\Pi$ .

*Cas (2).* On suppose que  $\Gamma = \tilde{D}_m$  et que  $G = \langle g \rangle$ , où  $g$  est l'automorphisme de  $\Gamma$  décrit dans le point (2) de ce lemme. Soit  $\{b_1, b_2, \dots, b_m\}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^m$ . Pour  $1 \leq i < j \leq m$  on pose  $\rho_{i,j}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(b_j + b_i)$  et  $\rho_{i,j}^- = \frac{1}{\sqrt{2}}(b_j - b_i)$ . Soit  $V_0$  le sous-espace vectoriel de  $V$  engendré par l'ensemble  $\Pi_{S_0}$ . Par [9, Chap. VI, § 4, n° 8], on peut supposer que  $V_0 = \mathbb{R}^m$  et  $\Phi(\Gamma_0) = \{\pm\rho_{i,j}^+, \pm\rho_{i,j}^- \mid 1 \leq i < j \leq m\}$ . On a

$$\begin{aligned} g(\rho_{1,j}^+) &= \rho_{1,j}^-, & g(\rho_{1,j}^-) &= \rho_{1,j}^+, & \text{si } 2 \leq j \leq m, \\ g(\rho_{i,j}^+) &= \rho_{i,j}^+, & g(\rho_{i,j}^-) &= \rho_{i,j}^-, & \text{si } 2 \leq i < j \leq m. \end{aligned}$$

En particulier,  $\Phi_0^G = \{\pm\rho_{i,j}^+, \pm\rho_{i,j}^- \mid 2 \leq i < j \leq m\}$ . Un examen au cas par cas permet alors de démontrer aisément que pour tout  $\rho_0 \in \Phi_0$ , il existe  $\rho_1 \in \Phi_0^G$  tel que  $\langle \rho_0, \rho_1 \rangle \in \{\pm 1/2\}$ . L'assertion 4 permet de conclure que  $\Phi = W^G\Pi$ .

*Cas (3).* On suppose que  $\Gamma = \tilde{D}_4$  et que  $G$  est un sous-groupe non trivial de  $\langle g_1, g_2 \rangle$ , où  $g_1, g_2$  sont les automorphismes de  $\Gamma$  décrits dans le point (3) de ce lemme. On a trois possibilités à automorphisme intérieur près :  $G = \langle g_2 \rangle$ ,  $G = \langle g_1 \rangle$ , ou  $G = \langle g_1, g_2 \rangle$ . Le cas  $G = \langle g_2 \rangle$  est contenu dans le cas (2) du lemme. Par ailleurs, d'après la description de  $W^G$  donnée dans le théorème 1.2.38, on a  $W^{\langle g_1 \rangle} = W^{\langle g_1, g_2 \rangle}$ , car  $\langle g_1 \rangle$  et  $\langle g_1, g_2 \rangle$  ont les mêmes orbites dans  $S$ . On peut donc supposer que  $G = \langle g_1 \rangle$ . Un calcul direct facilement réalisable par ordinateur permet de démontrer que  $|\Phi_0| = 24$ ,  $|\Phi_0^G| = 6$  et que, pour tout  $\rho_0 \in \Phi_0$ , il existe  $\rho_1 \in \Phi_0^G$  tel que  $\langle \rho_0, \rho_1 \rangle \in \{\pm 1/2\}$ . L'assertion 4 permet de conclure que  $\Phi = W^G\Pi$ .

*Cas (4).* On suppose que  $\Gamma = \tilde{E}_6$  et que  $G = \langle g \rangle$ , où  $g$  est l'automorphisme de  $\Gamma$  décrit dans le point (4) de ce lemme. Un calcul direct facilement réalisable par ordinateur permet de démontrer que  $|\Phi_0| = 72$ ,  $|\Phi_0^G| = 24$ , et, pour tout  $\rho_0 \in \Phi_0$ , il existe  $\rho_1 \in \Phi_0^G$  tel que  $\langle \rho_0, \rho_1 \rangle \in \{\pm 1/2\}$ . L'assertion 4 permet de conclure que  $\Phi = W^G\Pi$ .  $\square$



# Quelques résultats sur les groupes de type $B$

## Sommaire

5.1	Tentative d'extension des représentations de Paris . . . .	69
5.2	Comparaison de deux représentations de $A(B_3)$ . . . . .	71

## 5.1 Tentative d'extension des représentations de Paris

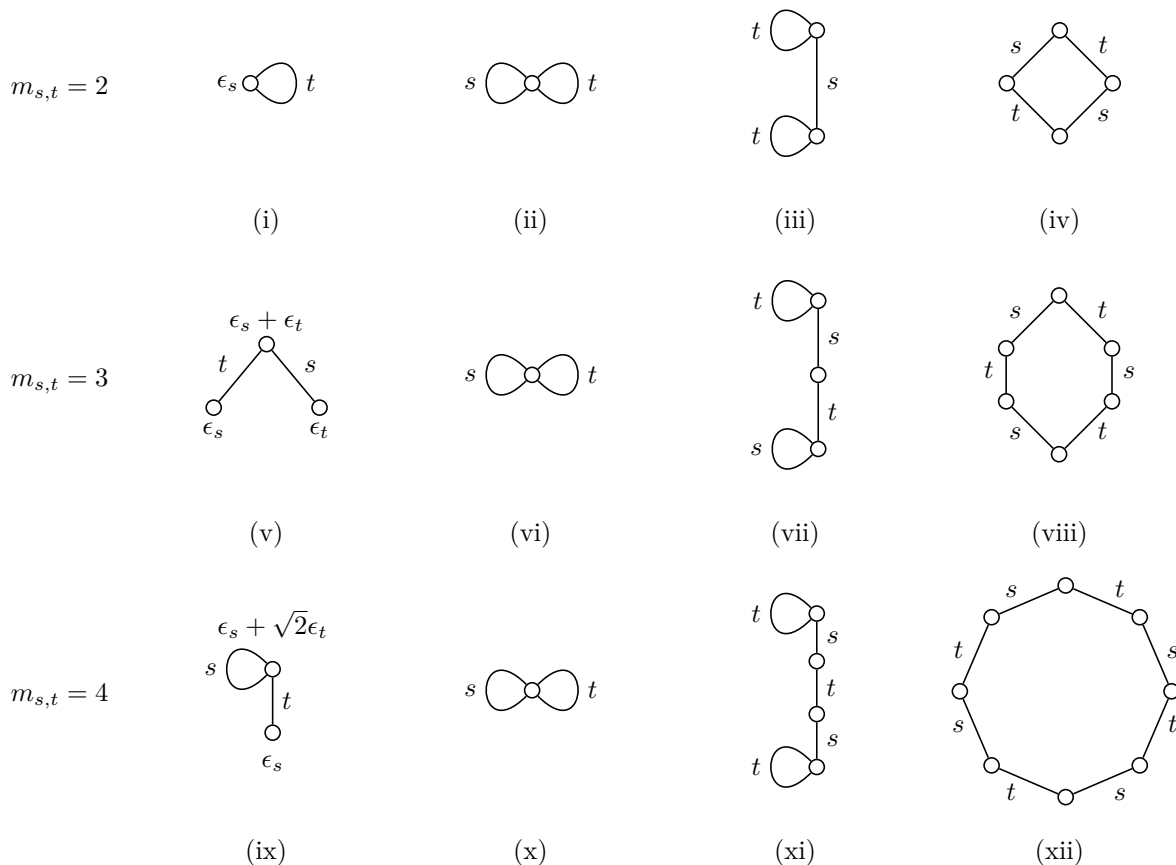
Soit  $\Gamma$  un graphe de Coxeter de type  $B$ . On examine ici la possibilité d'étendre directement les méthodes de construction d'une représentation fidèle de  $A^+$  présentées dans [51]. Pour tout  $s \in S$ , on définit  $\varphi_s : E \rightarrow E$  par

$$\varphi_s(e_\rho) = \begin{cases} 0 & \text{si } \rho = \epsilon_s, \\ e_\rho & \text{si } \langle \rho, \epsilon_s \rangle = 0, \\ q e_{s\rho} & \text{si } \langle \rho, \epsilon_s \rangle > 0 \text{ et } \rho \neq \epsilon_s, \\ (1 - q) e_\rho + e_{s\rho} & \text{si } \langle \rho, \epsilon_s \rangle < 0. \end{cases}$$

On représente un sous-ensemble  $\Psi \subset \Phi^+$  par un graphe dont l'ensemble des sommets sont les éléments de  $\Psi$  et où deux sommets  $\rho$  et  $\rho'$  sont reliés par une arête indexée par  $s \in S$  si  $\rho' = s(\rho)$ . Un tel graphe est naturellement gradué par  $\mathbb{N}$  via l'application profondeur. Ainsi, on placera  $\rho'$  au-dessus de  $\rho$  si  $\text{dp}(\rho') = \text{dp}(\rho) + 1$ .

**Lemme 5.1.1.** *Il existe une représentation  $\varphi : A^+ \rightarrow \text{End}(E)$  telle que pour tout  $s \in S$ ,  $\varphi(s) = \varphi_s$ .*

**Démonstration.** Soient  $s, t \in S$ . Soit  $\rho_0 \in \Phi^+$ . On note  $[\rho_0]_{\{s,t\}} = \{w\rho_0 \mid w \in W_{\{s,t\}}\} \cap \Phi^+$ . Quitte à échanger  $s$  et  $t$ ,  $[\rho_0]_{\{s,t\}}$  peut-être représenté par l'un des graphes de la figure 5.1.1. On observe que le sous-espace vectoriel  $F$  de  $E$  engendré par les éléments de  $\{e_\rho \mid \rho \in [\rho_0]_{\{s,t\}}\}$  est stable par  $\varphi_s$  et  $\varphi_t$  par construction de ces applications. Un simple calcul matriciel démontre alors que les restrictions des applications  $(\varphi_s \cdot \varphi_t)^{\boxtimes m_{s,t}}$  et  $(\varphi_t \cdot \varphi_s)^{\boxtimes m_{s,t}}$  sont égales sur  $F$  dans chacun des cas présentés sur la figure 5.1.1, ce qui donne le résultat souhaité.  $\square$



**Figure 5.1.1.** Représentations graphiques des ensembles de racines  $[\rho_0]_{\{s,t\}}$

Ce lemme est la première et la seule étape de la construction de la représentation  $\varphi$  de [51] qui fonctionne sur les graphes de type  $B_m$ . L'étape suivante qui consiste à construire une déformation de l'application  $\varphi$  à l'aide de polynômes  $T(s, \rho)$  ne semble pas se généraliser ; nous ne sommes pas parvenus à déterminer une famille de polynômes  $T(s, \rho)$  bien définie permettant d'obtenir un équivalent du théorème 1.2.36. Supposons toutefois que l'on puisse trouver une telle déformation et que l'on obtienne une représentation linéaire grâce aux transformations linéaires  $\psi_s$  définies par la formule

$$\psi_s(e_\rho) = \varphi_s(e_\rho) + zT(s, \rho) e_{\epsilon_s}.$$

La fidélité de la représentation obtenue dans [51] pour des graphes de Coxeter simplement lacés et sans triangles repose entièrement sur le lemme suivant :

**Proposition 5.1.2** (Paris [51]). *Soit  $\Gamma$  un graphe de Coxeter simplement lacé et sans triangles. Soient  $a, b \in A^+(\Gamma)$  tels que  $\varphi(a) = \varphi(b)$ . Alors  $L(a) = L(b)$ , où  $L$  est l'application de  $A^+$  dans  $W$  définie dans la partie 3.2.1.*

Le problème est que dans le cas simple où  $\Gamma = B_2$ , ce même résultat n'est pas vrai. L'approche consistant à étendre directement les représentations de Paris nous paraît donc peu prometteuse.

**Lemme 5.1.3.** *Soit  $\Gamma = B_2$ . Il existe  $a, b \in A^+(\Gamma)$  tels que  $\varphi(a) = \varphi(b)$  et  $L(a) \neq L(b)$ .*

**Démonstration.** Soient  $a = stst$  et  $b = stsstst$ . On calcule d'une part  $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ , d'autre part  $L(a) = stst$  et  $L(b) = s$ .  $\square$

## 5.2 Comparaison de deux représentations de $A(B_3)$

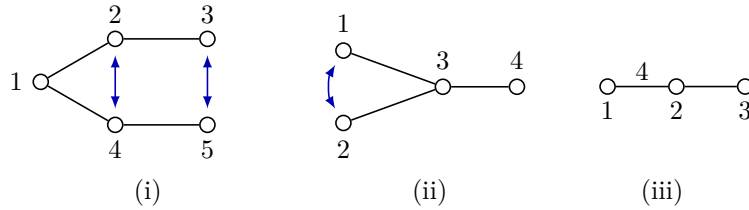
Soit  $\Gamma_1 = A_5$  et  $G = \langle g \rangle$ , où  $g$  est l'automorphisme de  $\Gamma_1$  d'ordre 2 défini par  $g(s_1) = s_1, g(s_2) = s_4, g(s_3) = s_5, g(s_4) = s_2$  et  $g(s_5) = s_3$ , cf. figure 5.2.2. D'une part, d'après le théorème 1.2.38, l'application  $\eta_1 : A(B_3) \rightarrow A^G(A_5)$  définie sur les générateurs de  $A(B_3)$  par  $\eta_1(s_1) = s_1, \eta_1(s_2) = s_2s_4$  et  $\eta_1(s_3) = s_3s_5$  est un isomorphisme de groupes.

D'autre part, soit  $(V_1, \langle \cdot, \cdot \rangle, \Pi_1)$  la base de racines classique de  $A_5$ . On pose

$$\tilde{\epsilon}_1 = \epsilon_1, \quad \tilde{\epsilon}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\epsilon_2 + \epsilon_4), \quad \tilde{\epsilon}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\epsilon_3 + \epsilon_5).$$

On considère l'ensemble  $\tilde{\Pi}_1 = \{\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2, \tilde{\epsilon}_3\}$ . Le triplet  $(V_1^G, \langle \cdot, \cdot \rangle, \tilde{\Pi}_1)$  est une base de racines de  $B_3$  par le théorème 2.1.2. Soit  $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(q, z)$ , soit  $\mathcal{B}_1 = \{e_\rho \mid \rho \in \Phi_{A_5}^+\}$  et soit  $E$  le  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel ayant  $\mathcal{B}_1$  pour base. D'après le théorème 4.1.3, l'ensemble  $\tilde{\mathcal{B}}_1 = \{\tilde{e}_{\tilde{\rho}} \mid \tilde{\rho} \in \tilde{\Phi}_{A_5}^+\}$  est une base de  $E^G$  et la représentation  $\psi_1^G : A^G(A_5) \rightarrow \text{GL}(E^G)$  obtenue à partir de la représentation de Paris  $\psi_1 : A(A_5) \rightarrow \text{GL}(E)$  est fidèle d'après le théorème 3.1.2.

On pose alors  $v_1 = \psi_1^G \circ \eta_1$ . Par ce qui précède, l'application  $v_1$  est une représentation linéaire fidèle de  $A(B_3)$  dans  $\text{GL}(E^G)$ .



**Figure 5.2.2.** Les graphes  $A_5, D_4$  et  $B_3$

Soit  $\Gamma_2 = D_4$  et  $H = \langle h \rangle$ , où  $h$  est l'automorphisme de  $\Gamma_2$  d'ordre 2 défini par  $h(s_1) = s_2, h(s_2) = s_1$  et  $h(s_i) = s_i$  pour tout  $i \in \{3, 4\}$ , cf. figure 5.2.2. D'une part, d'après le théorème 1.2.38, l'application  $\eta_2 : A(B_3) \rightarrow A^H(D_4)$  définie sur les générateurs de  $A(B_3)$  par  $\eta_2(s_1) = s_1s_2, \eta_2(s_2) = s_3$  et  $\eta_2(s_3) = s_4$  est un isomorphisme de groupes.



D'autre part, soit  $(V_2, \langle \cdot, \cdot \rangle, \Pi_2)$  la base de racines classique de  $D_4$ . On pose

$$\tilde{\alpha}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\epsilon_1 + \epsilon_2), \quad \tilde{\alpha}_2 = \epsilon_3, \quad \tilde{\alpha}_3 = \epsilon_4.$$

On considère l'ensemble  $\tilde{\Pi}_2 = \{\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \tilde{\alpha}_3\}$ . Le triplet  $(V_2^H, \langle \cdot, \cdot \rangle, \tilde{\Pi}_2)$  est une base de racines de  $B_3$  par le théorème 2.1.2. Soit  $\mathcal{B}_2 = \{e_\rho \mid \rho \in \Phi_{D_4}^+\}$  et soit  $F$  le  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel ayant  $\mathcal{B}_2$  pour base. D'après le théorème 4.1.3, l'ensemble  $\tilde{\mathcal{B}}_2 = \{\tilde{e}_{\tilde{\rho}} \mid \tilde{\rho} \in \tilde{\Phi}_{D_4}^+\}$  est une base de  $F^H$  et la représentation  $\psi_2^H : A^G(A_5) \rightarrow \text{GL}(F^H)$  obtenue à partir de la représentation de Paris  $\psi_2 : A(D_4) \rightarrow \text{GL}(F)$  est fidèle d'après le théorème 3.1.2.

On pose alors  $v_2 = \psi_2^H \circ \eta_2$ . Par ce qui précède, l'application  $v_2$  est une représentation linéaire fidèle de  $A(B_3)$  dans  $\text{GL}(F^H)$ .

**Proposition 5.2.4.** *La représentation  $v_1 : A(B_3) \rightarrow \text{GL}(E^G)$  obtenue à partir de  $A_5$  et la représentation  $v_2 : A(B_3) \rightarrow \text{GL}(F^H)$  obtenue à partir de  $D_4$  ne sont pas équivalentes.*

**Démonstration.** Les dimensions des sous-espaces propres associés aux valeurs propres de  $v_1(s_1)$ ,  $v_1(s_2s_4)$  et  $v_1(s_3s_5)$  sont rassemblées dans le tableau 5.2.1. De même, les dimensions des sous-espaces propres associés aux valeurs propres de  $v_2(s_1s_2)$ ,  $v_2(s_3)$  et  $v_2(s_4)$  sont rassemblées dans le tableau 5.2.2.

Élément de $A^G$	Générateur de $B_3$ correspondant	Dimension des sous-espaces propres			
		$zq^2$	1	$-q$	$q^2$
$s_1$	$s_1$	1	4	2	2
$s_2s_4$	$s_2$	1	5	3	0
$s_3s_5$	$s_3$	1	5	3	0

**Table 5.2.1.** Dimensions des sous-espaces propres correspondant à l'image des générateurs de  $B_3$  par la représentation  $v_1 : A(B_3) \rightarrow \text{GL}(E^G)$

Élément de $A^G$	Générateur de $B_3$ correspondant	Dimension des sous-espaces propres			
		$zq^2$	1	$-q$	$q^2$
$s_1s_2$	$s_1$	1	4	3	1
$s_3$	$s_2$	1	4	3	1
$s_4$	$s_3$	1	6	2	0

**Table 5.2.2.** Dimensions des sous-espaces propres correspondant à l'image des générateurs de  $B_3$  par la représentation  $v_2 : A(B_3) \rightarrow \text{GL}(F^H)$

---

Ainsi, les deux représentations fidèles de  $B_3$  ainsi obtenues ne sont pas équivalentes.  $\square$

Après la rédaction de ce texte, l'auteur a appris que Castella [16] a démontré que les représentations de  $B_m$  obtenues respectivement à partir de celles de  $A_{2m+1}$  et  $D_m$  ne sont pas équivalentes pour tout  $m \in \mathbb{N}^*$ .



# Bibliographie

- [1] V.I. Arnol'd, The cohomology classes of algebraic functions that are preserved under Tschirnhausen transformations, *Funkcional. Anal. i Priložen* 4 (1970), n° 1, 84–85. Translation in *Functional Anal. Appl.* 4 (1970), 74–75.
- [2] V.I. Arnol'd, Topological invariants of algebraic functions. II, *Funkcional. Anal. i Priložen* 4 (1970), n° 2, 1–9. Translation in *Functional Anal. Appl.* 4 (1970), 91–98.
- [3] V.I. Arnol'd, On matrices depending on parameters, *Uspehi Mat. Nauk* 26 (1971), n° 2, 101–114. Translation in *Russian Math. Surveys* 26 (1971), n° 2, 29–43.
- [4] E. Artin, Theorie der Zöpfe, *Abhandlungen Hamburg* 4 (1925), 47–72.
- [5] E. Artin, Theory of braids, *Ann. of Math. (2)* 48 (1947), 101–126.
- [6] S.J. Bigelow, The Burau representation is not faithful for  $n = 5$ , *Geom. Topol.* 3 (1999), 397–404.
- [7] S.J. Bigelow, Braid groups are linear, *J. Amer. Math. Soc.* 14 (2001), n° 2, 471–486.
- [8] J.S. Birman, *Braids, links, and mapping class groups*, Annals of Mathematics Studies, n° 82, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1974.
- [9] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie. Chapitres IV, V et VI*, Hermann, Paris, 1968.
- [10] E. Brieskorn, Die Fundamentalgruppe des Raumes der regulären Orbits einer endlichen komplexen Spiegelungsgruppe, *Invent. Math.* 12 (1971), 57–61.
- [11] E. Brieskorn, Singular elements of semi-simple algebraic groups, dans *Actes du Congrès International des Mathématiciens (Nice, 1970), Tome 2*, Gauthier-Villars, Paris, 1971, p. 279–284.
- [12] E. Brieskorn, Sur les groupes de tresses (d'après V.I. Arnol'd), dans *Séminaire Bourbaki, 24ème année (1971/1972), exp. n° 401*, p. 21–44, Lecture Notes in Math., vol. 317, Springer, Berlin, 1973.
- [13] E. Brieskorn, K. Saito, Artin-Gruppen und Coxeter-Gruppen, *Invent. Math.* 17 (1972), 245–271.
- [14] B. Brink, R.B. Howlett, A finiteness property and an automatic structure for Coxeter groups, *Math. Ann.* 296 (1993), 179–190.
- [15] W. Burau, Über Zopfgruppen und gleichsinnig verdrillte Verkettungen, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* 11 (1935), n° 1, 179–186.
- [16] A. Castella, *Automorphismes et admissibilité dans les groupes de Coxeter et les monoïdes d'Artin-Tits*, Ph.D. Thesis, Université Paris-Sud, 2006.

- 
- [17] A. Castella, On (twisted) Lawrence-Krammer representations, *prepublication, arXiv :0803.1115* (2008).
- [18] A. Castella, On Lawrence-Krammer representations, *J. Algebra* 322 (2009), n° 10, 3614–3639.
- [19] A.M. Cohen, D.B. Wales, Linearity of Artin groups of finite type, *Israel J. Math.* 131 (2002), 101–123.
- [20] H.S.M. Coxeter, Discrete groups generated by reflections, *Ann. of Math. (2)* 35 (1934), n° 3, 588–621.
- [21] H.S.M. Coxeter, The complete enumeration of finite groups of the form  $R_i^2 = (R_i R_j)^{k_{ij}} = 1$ , *J. London Math. Soc.* 10 (1935), 21–25.
- [22] J. Crisp, Symmetrical subgroups of Artin groups, *Adv. Math.* 152 (2000), n° 1, 159–177.
- [23] J. Crisp, Erratum to : « Symmetrical subgroups of Artin groups », *Adv. Math.* 179 (2003), n° 2, 318–320.
- [24] M.W. Davis, *The geometry and topology of Coxeter groups*, London Mathematical Society Monographs Series, n° 32, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2008.
- [25] P. Dehornoy, L. Paris, Gaussian groups and Garside groups, two generalisations of Artin groups, *Proc. London Math. Soc. (3)* 79 (1999), n° 3, 569–604.
- [26] P. Deligne, Les immeubles des groupes de tresses généralisés, *Invent. Math.* 17 (1972), 273–302.
- [27] V.V. Deodhar, On the root system of a Coxeter group, *Commun. Algebra* 10 (1982), n° 6, 611–630.
- [28] F. Digne, On the linearity of Artin braid groups, *J. Algebra* 268 (2003), n° 1, 39–57.
- [29] E. Fadell, L. Neuwirth, Configuration spaces, *Math. Scand.* 10 (1962), 111–118.
- [30] P. Freyd, D. Yetter, J. Hoste, W.B.R. Lickorish, K. Millett, A. Ocneanu, A new polynomial invariant of knots and links, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S)* 12 (1985), n° 2, 239–246.
- [31] J.-Y. Hée, Système de racines sur un anneau commutatif totalement ordonné, *Geom. Dedicata* 37 (1991), n° 1, 65–102.
- [32] J.-Y. Hée, Une démonstration simple de la fidélité de la représentation de Lawrence-Krammer-Paris, *J. Algebra* 321 (2009), n° 3, 1039–1048.
- [33] J.-Y. Hée, Générateurs de racines; sous-systèmes, *Notes non publiées* (octobre 1990).
- [34] J.E. Humphreys, *Reflection groups and Coxeter groups*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, n° 29, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

- 
- [35] V.F.R. Jones, A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* 12 (1985), n° 1, 103–111.
- [36] V.F.R. Jones, Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials, *Ann. of Math.* 126 (1987), n° 2, 335–388.
- [37] C. Kassel, V. Turaev, *Braid groups*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 247, Springer, New York, 2008.
- [38] D. Krammer, *The conjugacy problem for Coxeter groups*, Ph.D. Thesis, Utrecht, 1994.
- [39] D. Krammer, The braid group  $B_4$  is linear, *Invent. Math.* 142 (2000), n° 3, 451–486.
- [40] D. Krammer, Braid groups are linear, *Ann. of Math. (2)* 155 (2002), n° 1, 131–156.
- [41] D. Krammer, The conjugacy problem for Coxeter groups, *Groups Geom. Dyn.* 3 (2009), n° 1, 71–171.
- [42] R.J. Lawrence, Homological representations of the Hecke algebra, *Comm. Math. Phys.* 135 (1990), n° 1, 141–191.
- [43] H. van der Lek, *The homotopy type of complex hyperplane complements*, Ph.D. Thesis, Nijmegen, 1983.
- [44] D.D. Long, M. Paton, The Burau representation is not faithful for  $n \geq 6$ , *Topology* 32 (1993), n° 2, 439–447.
- [45] W. Magnus, Über Automorphismen von Fundamentalgruppen berandeter Flächen, *Math. Ann.* 109 (1934), 617–646.
- [46] W. Magnus, A. Karrass, D. Solitar, *Combinatorial group theory. Presentations of groups in terms of generators and relations*, Reprint of the 1976 edition, Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2004.
- [47] H. Matsumoto, Générateurs et relations des groupes de Weyl généralisés, *C. R. Acad. Sci. Paris* 258 (1964), 3419–3422.
- [48] J. Michel, A note on words in braid monoids, *J. Algebra* 215 (1999), n° 1, 366–377.
- [49] J.A. Moody, The Burau representation of the braid group  $B_n$  is unfaithful for large  $n$ , *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* 25 (1991), n° 2, 379–384.
- [50] B. Mühlherr, Coxeter groups in Coxeter groups, dans *Finite geometry and combinatorics (Deinze, 1992)*, p. 277–287, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 191, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993.
- [51] L. Paris, Artin monoids inject in their groups, *Comment. Math. Helv.* 77 (2002), n° 3, 609–637.
- [52] L. Paris, Irreducible Coxeter groups, *Internat. J. Algebra Comput.* 17 (2007), n° 3, 427–447.

- 
- [53] L. Solomon, A Mackey formula in the group ring of a Coxeter group, *J. Algebra* 41 (1976), n° 2, 255–264.
- [54] J. Tits, Normalisateurs de tores. I. Groupes de Coxeter étendus, *J. Algebra* 4 (1966), 96–116.
- [55] J. Tits, Le problème des mots dans les groupes de Coxeter, dans *Symposia Mathematica (INDAM, Rome, 1967/1968)*, vol. 1, p. 175–185, Lecture Notes in Math., Academic Press, London, 1969.
- [56] È.B. Vinberg, Discrete linear groups that are generated by reflexions, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* 35 (1971), 1072–1112.