



**HAL**  
open science

# Du transport de moment cinétique par les ondes internes de gravité à l'heure de la sismologie stellaire

Charly Pinçon

► **To cite this version:**

Charly Pinçon. Du transport de moment cinétique par les ondes internes de gravité à l'heure de la sismologie stellaire. Astrophysique [astro-ph]. Université Paris sciences et lettres, 2017. Français. NNT : 2017PSLEO009 . tel-01823950

**HAL Id: tel-01823950**

**<https://theses.hal.science/tel-01823950v1>**

Submitted on 26 Jun 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE DE DOCTORAT

de l'Université de recherche Paris Sciences et Lettres  
PSL Research University

Préparée au LESIA - Observatoire de Paris

Du transport de moment cinétique par les ondes internes de gravité  
à l'heure de la sismologie stellaire

**École doctorale n°127**

ASTRONOMIE ET ASTROPHYSIQUE D'ILE-DE-FRANCE

**Spécialité** ASTRONOMIE ET ASTROPHYSIQUE

Soutenue par **Charly Pinçon**  
le 28 Septembre 2017

Dirigée par **Marie-Jo Goupil**  
et par **Kévin Belkacem**

## COMPOSITION DU JURY :

Mme Marie-Christine Angonin  
SYRTE, Président

Mme Corinne Charbonnel  
Université de Genève, Rapporteur

M Andrea Miglio  
Université de Birmingham, Rapporteur

M Marc-Antoine Dupret  
Université de Liège, Examineur

M Stéphane Mathis  
CEA Saclay, Examineur

M Jérôme Bouvier  
IPAG, Examineur





ECOLE DOCTORALE N° 127  
ASTRONOMIE & ASTROPHYSIQUE D'ÎLE-DE-FRANCE

THÈSE DE DOCTORAT  
DE L'OBSERVATOIRE DE PARIS

*préparée au Laboratoire d'Etudes Spatiales et d'Instrumentation en Astrophysique*

Spécialité  
ASTRONOMIE & ASTROPHYSIQUE

---

DU TRANSPORT DE MOMENT CINÉTIQUE  
PAR LES ONDES INTERNES DE GRAVITÉ À  
L'HEURE DE LA SISMOLOGIE STELLAIRE

présentée par  
Charly PINÇON

---

soutenue publiquement le 28 Septembre 2017 devant un jury composé de :

Mme Marie-Christine ANGININ	<i>Président</i>
Mme Corinne CHARBONNEL	<i>Rapporteur</i>
Mr Andrea MIGLIO	<i>Rapporteur</i>
Mr Stéphane MATHIS	<i>Examineur</i>
Mr Jérôme BOUVIER	<i>Examineur</i>
Mr Marc-Antoine DUPRET	<i>Examineur</i>
Mme Marie-Jo GOUPIL	<i>Directeur</i>
Mr Kévin BELKACEM	<i>Directeur</i>



“Douter de tout ou tout croire,  
ce sont deux solutions également commodes,  
qui l’une ou l’autre nous dispensent de réfléchir.”

HENRI POINCARÉ, *La science et l’hypothèse* (1902)



# Remerciements

Je tiens d'abord à remercier Marie-Christine Angonin, Corinne Charbonnel, Andrea Miglio, Stéphane Mathis, Marc-Antoine Dupret et Jérôme Bouvier d'avoir accepté d'être membres de mon jury, pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail, et surtout de s'être plongé dans la lecture de ce mémoire finalement bien plus conséquent que je l'avais imaginé il y a quelques mois. Je les remercie pour leurs questions et leurs commentaires qui m'ont permis d'améliorer la version finale du manuscrit.

Ensuite, ma reconnaissance va évidemment à Marie-Jo et Kévin. Je les remercie de m'avoir donné l'opportunité de travailler sur ce sujet, de m'avoir fait confiance, ainsi que d'avoir toujours été disponibles pour répondre à mes questions. Je leur suis redevable de tout le temps qu'ils m'ont consacré durant ces trois ans. Ils ont su être de très bons conseillers tout en sachant me laisser de la liberté. Je n'oublierai pas nos discussions scientifiques durant ces trois années, que ce soit devant un café ou devant le tableau de Marie-Jo. Je n'oublierai pas non plus toutes les autres discussions et le plaisir que j'ai eu à les côtoyer au quotidien. J'espère avoir l'occasion de les recroiser et de collaborer avec eux encore de nombreuses fois dans le futur.

Je remercie aussi chaleureusement tous les membres du pôle étoile du LESIA pour leur accueil, leur convivialité et leur sympathie. Merci à Caroline, pour toutes les informations concernant l'enseignement ; à Éric, pour avoir pris soin des deux ou trois machines à café qui ont malgré tout rendu l'âme en trois ans ; à Réza, pour les nombreux services rendus, notamment en informatique ; à Benoît, pour toutes nos discussions sur les modes mixtes ; à Richard, pour avoir respecté des moments de calme dans le couloir du labo ; à Raphaël, pour ne les avoir pas respectés et pour les nombreuses pauses café ; à Mathieu, pour ses talents de photographe ; à Takafumi, pour sa discrétion à toute épreuve ; à Daniel, pour m'avoir renvoyé les boulettes de papier que je lui lançais ; à Mary, pour son rire communicatif ; à Charlotte (et "Cricri"), pour avoir partagé une omelette aux morilles avec moi ; à Steven, pour m'avoir fourni en café et aussi parfois en pintes, lorsque j'en avais besoin en fin de thèse ; à Victor, pour sa gentillesse et sa bonne humeur ; à Bram, pour son amitié malgré le fait que je suis, selon ces mots, un "théoricien" ; à Coralie, pour avoir toujours pensé à moi afin de faire disparaître les restes à la fin des pots ; à Morgane et Rhita pour avoir été d'éphémères mais d'agréables voisins de bureau. Je n'oublie pas bien sûr Yveline qui m'a fait découvrir l'astrophysique en licence à Rennes, qui a suscité en moi l'envie de continuer dans ce domaine et qui m'a fait connaître l'équipe.

Merci également à Constance, pour son aide avec les démarches administratives et son inébranlable bonne humeur, ainsi qu'à toute l'équipe d'ingénieur du bâtiment 14 pour les séances de mots fléchés post-déjeuner et les matches de foot enflammés lors des beaux jours.

J'ai naturellement une pensée amicale pour tous les copains rencontrés pendant le master 1 à Orsay, ainsi que pendant le master 2 et la thèse à l'Observatoire. Je n'oublie pas non plus la bande de stagiaires venus doubler la population de l'équipe pendant ces derniers mois de thèse. La liste de noms est longue, je préfère éviter une éprouvante énumération de peur d'en oublier certains. Merci à Antoine et Benjamin, mes colocataires durant ces trois ans, pour tous les bons moments passés ensemble, à Gaël, pour son amical *soutien* lors des conférences, ainsi qu'à Oza, pour m'avoir enseigné quelques pas de danse indienne.

Pour finir, je remercie du fond du cœur ma famille, mes parents, ma sœur et Maryline, ainsi que tous mes amis, pour leur soutien et pour tout ce qu'ils ont déjà pu m'apporter. Merci !





# Résumé

Les missions spatiales CoRoT (2006-2014) et *Kepler* (2009) ont procuré de nombreuses données sismiques pour des milliers d'étoiles évoluées de faible masse. Ces observations ont apporté de fortes contraintes sur l'intérieur de ces étoiles grâce notamment à la détection de modes mixtes, capables de sonder aussi bien leur enveloppe externe que leurs régions centrales. Ceux-ci ont montré en particulier que la rotation centrale augmente légèrement avec le temps dans les étoiles sous-géantes avant de diminuer sur la branche des géantes rouges. Ceci est en désaccord avec les prédictions des modèles stellaires et souligne la nécessité d'y inclure de nouveaux processus de transport.

Dans une première partie, j'ai donc étudié l'influence du transport de moment cinétique par les ondes internes de gravité dans les étoiles de faible masse. Ces ondes se propagent dans les zones radiatives stablement stratifiées et sont capables d'en modifier la vitesse de rotation. Or, l'efficacité du transport par les ondes dépend de leur amplitude et donc du mécanisme d'excitation. Alors que des modèles semi-analytiques considéraient seulement la pression turbulente dans la zone convective comme terme source, j'ai élaboré un modèle afin d'estimer la quantité d'énergie transférée sous forme d'ondes lors de la pénétration de panaches convectifs en haut de la zone radiative (Pinçon *et al.* 2016). Cela m'a d'abord permis d'établir que la pénétration convective génère des ondes plus efficacement que la pression turbulente, et ensuite que ces premières sont capables, par elles-mêmes, de s'opposer à l'accélération de la rotation des couches internes due à leur contraction, depuis la séquence principale jusqu'au début de la branche des géantes rouges. En particulier, il s'avère que les valeurs de la rotation interne observées dans les étoiles sous-géantes peuvent être interprétées comme le résultat d'un mécanisme de régulation contrôlé par les ondes générées par des panaches. Au contraire, dans les étoiles géantes rouges, les ondes échouent à expliquer par elles-mêmes les faibles taux de rotation observés; un autre processus doit être invoqué (Pinçon *et al.* 2017).

Dans une seconde partie, je me suis intéressé aux diagnostics sismiques par les modes mixtes, ceux-là même qui ont motivé le travail de la première partie. Les diagnostics sismiques font le lien entre les caractéristiques d'un spectre d'oscillation d'une étoile et ses propriétés internes. Mon attention s'est premièrement focalisée sur le facteur de couplage qui décrit le degré d'interaction entre les oscillations dans la cavité centrale et celles dans l'enveloppe. Ce paramètre n'a été, jusque là, que très peu étudié. Une première étude observationnelle sur un large échantillon d'étoiles par Mosser *et al.* (2017b) a démontré que ce facteur varie au cours de l'évolution. J'ai contribué à l'interprétation des résultats en montrant que ce facteur est sensible aux changements structuraux subis par les étoiles. Cette analyse a notamment démontré la nécessité d'aller au-delà de l'approximation d'un faible couplage habituellement adoptée et de considérer le cas d'un fort couplage, tel que récemment proposé par Takata (2016a). J'ai donc entrepris une validation de ce nouveau formalisme en comparant ses prédictions avec celles obtenues par un code d'oscillation pour des modèles d'étoiles adaptés, prédictions qui s'avèrent en meilleur accord que dans le cas d'un faible couplage. Enfin, je me suis intéressé au décalage en période des modes mixtes, lui aussi jusqu'ici peu étudié. J'ai montré par le biais d'un modèle simplifié que la détermination simultanée de ce paramètre et du facteur de couplage permettrait de contraindre sans ambiguïté les propriétés de la région située entre la couche d'hydrogène en fusion et le voisinage de la base de la zone convective.

**Mots clés :** astérosismologie – étoiles : oscillations – étoiles : rotation – étoiles : intérieurs – étoiles : évolution – ondes – hydrodynamique



# Abstract

The space-borne missions CoRoT (2006-2014) and *Kepler* (2009) provided a lot of seismic data for thousands of low-mass stars. Data analysis enabled us to study the interior of these stars during their evolution and brought stringent constraints on the physical processes at work under their surfaces. These observations notably revealed that their mean core rotation rate weakly increases on the subgiant branch before dropping on the red giant branch while their central layers are contracting. Subsequently, several works demonstrated the inability of the current stellar evolution codes to reproduce these observations and stressed out the need for an additional transport process of angular momentum to counteract the acceleration of the central rotation driven by the core contraction during the post-main sequence evolution.

Therefore, in a first part of my PhD thesis, I investigated the effect of the angular momentum transport by internal gravity waves on the evolution of the rotation of low-mass stars. These waves can propagate into stably stratified radiative zones, where they are able to modify the rotation. The efficiency of the angular momentum transport by waves depends on their amplitude and so on their generation mechanism. While several works had already theoretically studied the wave excitation by turbulent pressure in the convective zone, an estimate of the wave generation by penetrative convective plumes into the upper layers of the radiative zone was still missing. I thus developed a semi-analytical excitation model to estimate the part of the plumes kinetic energy transferred into waves at the base of the convective zone (Pinçon *et al.* 2016). I first found that penetrative convection generates waves more efficiently than turbulent pressure, and then that plume-induced waves are able to counteract the spin-up of the core driven by its contraction from the main-sequence to the beginning of the ascent of the red giant branch. Moreover, I showed that the radial-differential rotation observed in subgiant and early red giant stars can be explained by a regulation mechanism controlled by the influence of the plume-induced internal gravity waves (Pinçon *et al.* 2017).

In a second part, I worked on the elaboration and the improvement of the seismic diagnoses by mixed modes that have the ability to probe both the envelope and the core of stars. Seismic diagnoses aim at linking the features observed in oscillation spectra and the internal properties of stars. In a first step, I focused on the coupling factor of mixed modes that expresses the level of interaction between the central and the outer resonant cavities and that had still remained largely unexploited. The first large-scale analysis of this parameter by Mosser *et al.* (2017b) showed that this factor vary during the evolution. In this work, I contributed to the interpretation of the results via a simplified model in which the value of the coupling factor is directly sensitive to structural readjustments occurring during stellar evolution. This study notably revealed the necessity to consider the hypothesis of a strong coupling, as recently proposed by Takata (2016a). I then undertook to validate this formalism by comparing its predictions with an oscillation code for appropriate evolved models. Finally, I focused on the period offset of mixed modes that was also poorly studied until now. Using a simplified modeling, I showed that the simultaneous determination of this parameter with the coupling factor could constrain the properties of the region located between the hydrogen-burning shell and the neighborhood of the base of the convective zone.

**Key words :** asteroseismology – stars : oscillations – stars : rotation – stars : interiors – stars : evolution – waves – hydrodynamics



# Avant-propos

Les étoiles naissent de l'effondrement gravitationnel de nuages moléculaires géants dans les régions froides et denses du milieu interstellaire. Elles évoluent ensuite globalement proche de l'équilibre hydrostatique en rayonnant à leur surface l'énergie produite en leur intérieur. Leur longue vie, sur des échelles de temps pouvant atteindre plusieurs milliards d'années, est le résultat de l'importante quantité d'énergie dégagée par les réactions nucléaires dans leurs cœurs. La modélisation de la structure et de la dynamique de telles machines thermiques implique de nombreux processus physiques, aussi bien microscopiques que macroscopiques, associés à des échelles temporelles et spatiales très diverses. En outre, les conditions physiques extrêmes rencontrées en leur sein s'avèrent très éloignées de celles rencontrées sur la Terre. Les étoiles font donc figure de laboratoires géants donnant la possibilité de tester notre compréhension de la physique sous toutes ses formes. Les bases de la théorie de l'évolution et de la structure stellaire ont été posées il y a maintenant plus d'un siècle (e.g., Eddington 1926; Cox & Giuli 1968). Depuis, la modélisation des étoiles a pu profiter du développement du calcul numérique, d'observations de plus en plus nombreuses et précises, ainsi que de nombreuses avancées, aussi bien théoriques qu'expérimentales, sur la connaissance, par exemple, des propriétés de la matière ou des réactions nucléaires dans des conditions extrêmes.

De façon générale, la confrontation des prédictions théoriques aux observations permet de tester la pertinence des modèles et d'en améliorer rétrospectivement la description physique. Réciproquement, les prédictions faites par les modèles guident les observateurs vers des cibles adéquates et permettent d'ouvrir de nouveaux champs d'investigation. Néanmoins, le milieu stellaire est fortement opaque au rayonnement. La lumière des étoiles qui parvient jusqu'à nos yeux provient exclusivement de leurs couches superficielles. Ainsi, les observables standard telles que la luminosité intrinsèque, la température effective ou la composition chimique atmosphérique des étoiles fournissent un diagnostic direct sur les propriétés de leur surface. Elles ne peuvent néanmoins qu'indirectement nous renseigner sur les processus internes moyennant l'utilisation de modèles plus ou moins réalistes. En conséquence, l'information qu'elles fournissent sur la dynamique œuvrant sous la surface des étoiles reste pour le moins limitée. Les neutrinos produits par les réactions nucléaires peuvent aussi donner accès à des informations sur les régions internes. Ces particules interagissent très peu avec leur environnement et peuvent facilement s'échapper du manteau stellaire. En contrepartie, leur probabilité de détection reste extrêmement faible. Leur utilisation comme vecteur d'information nécessite donc des flux de particules importants et se limite en physique stellaire à l'étude du centre du Soleil, ou bien des phases explosives à la fin de vie des étoiles massives, les supernovae.

Dans ce contexte, l'avènement de l'héliosismologie à la fin du XX<sup>ème</sup> siècle d'abord, puis de l'astérosismologie ensuite, a apporté un nouveau souffle et ouvert de nouvelles perspectives dans l'étude de la structure interne et de l'évolution des étoiles. L'astérosismologie est définie littéralement comme l'étude sismique des intérieurs stellaires. Une étoile peut être considérée comme une énorme cavité résonante dans laquelle peuvent s'établir des ondes stationnaires. Les conditions aux limites imposées par la structure de l'étoile sélectionnent des fréquences d'oscillation bien précises : ce sont les modes propres. Ces modes propres globaux induisent des mouvements de matière périodiques à la surface des étoiles, qui se traduisent également sous forme de variations de luminosité. Des mesures de vitesses radiales (spectrométrie) ou d'intensité lumineuse (photométrie) sur le disque stellaire en fonction du temps permettent alors, par une analyse de Fourier, de déduire leur spectre d'oscillation. A la manière d'ondes sonores stationnaires piégées dans un tube de Kundt et dont

les fréquences de résonance sont reliées à la longueur du tube, les fréquences propres d'oscillation des étoiles peuvent nous renseigner sur les propriétés du milieu stellaire. Les pulsations stellaires offrent donc un diagnostic direct sur la structure interne des étoiles sans avoir à faire appel à des modèles. L'information apportée par l'astérosismologie est, de plus, indépendante de la distance de l'étoile par rapport à l'observateur. En effet, celle-ci repose sur des mesures temporelles, ce qui fait d'elle une méthode très précise. Cette technique observationnelle n'est pas nouvelle et a déjà fait ses preuves par le passé. On peut par exemple rappeler les travaux de Leavitt & Pickering (1912) qui ont découvert, il y a maintenant plus d'un siècle, une relation empirique entre la période de variation de l'éclat des Céphéides dans le petit Nuage de Magellan et leur luminosité intrinsèque. Cette relation a servi plus tard dans la détermination des distances galactiques et la mise en évidence observationnelle de l'expansion de l'Univers par Hubble (1929). Il existe plusieurs sortes de pulsateurs stellaires associés respectivement à différentes régions du diagramme Hertzsprung-Russell (représentant la luminosité en fonction de la température effective). Ces diverses classes de pulsateurs se distinguent notamment par la fréquence caractéristique et l'amplitude d'oscillation, ainsi que par le mécanisme d'excitation. Par exemple, les oscillations dans les pulsateurs classiques de type Céphéides, RR Lyrae ou encore  $\delta$ -Scuti sont caractérisées par de larges amplitudes (quelques km/s en vitesse radiale) avec des périodes pouvant aller d'une heure à plusieurs jours. Ce type d'oscillation est généré par des instabilités thermiques liées aux régions d'ionisation et au changement d'opacité associé (le  $\kappa$ -mécanisme, e.g., Samadi *et al.* 2015). Les pulsateurs dits de type solaire, eux, ont une place à part entière puisqu'ils présentent des caractéristiques sismiques semblables à celles de notre Soleil. Les oscillations de type solaire se distinguent par leur faible amplitude (de quelques cm/s au m/s pour les étoiles géantes, en vitesse radiale) et des périodes typiques d'oscillation allant de la minute à quelques heures (e.g., Aerts *et al.* 2010). Elles sont générées par les mouvements turbulents dans les régions convectives et se rencontrent donc dans toutes étoiles possédant une couche instable convectivement : on parle alors d'excitation stochastique (e.g., Samadi & Goupil 2001).

Le potentiel scientifique affiché actuellement par les oscillations de type solaire est des plus prometteurs. Il est le résultat d'un cheminement scientifique commencé il y a plus de 60 ans, à l'heure des débuts de l'étude des oscillations du Soleil, ou *héliosismologie*. La première détection fiable d'un signal périodique de l'ordre de 5 minutes lié à des mouvements verticaux à la surface du Soleil est attribuée à Leighton *et al.* (1962) et Evans & Michard (1962) par le biais d'observations en vitesse radiale depuis le sol. On pense alors qu'il s'agit d'une signature associée à la granulation de surface. Il faut attendre presque 10 ans pour avoir une première interprétation en terme de modes propres acoustiques globaux piégés sous la surface du Soleil (Stein & Leibacher 1969; Ulrich 1970; Deubner 1975). Successivement, Claverie *et al.* (1979) et Grec *et al.* (1980, 1983) ont confirmé la structure modale du spectre d'oscillation du Soleil. Leurs observations ont en effet mis en évidence une succession de pics discrets dans le spectre, uniformément espacés en fréquence, en accord avec les prédictions de la théorie asymptotique des oscillations stellaires pour les modes de pression (e.g., Tassoul 1980). Par la suite, la détection des oscillations du Soleil est devenue de plus en plus précise grâce, d'une part, à l'augmentation progressive de la durée d'observation et, d'autre part, à la limitation des interruptions liées à l'alternance jour/nuit. Cette évolution est notamment passée par le développement de plusieurs projets d'observation multi-sites au sol comme IRIS (e.g., Fossat 1991), BISON (e.g., Chaplin 1997) ou encore GONG (e.g., Leibacher & GONG Project Team 1998). Ces projets, basés sur des réseaux de télescopes observant en vitesse radiale et distribués le plus uniformément possible autour du globe, ont permis à la fois d'accroître la résolution spectrale en fréquence, de supprimer les alias spectraux causés par le cycle diurne et d'améliorer le rapport signal sur bruit. En conséquence, une estimation de plus en plus fine des paramètres individuels des modes propres est devenue possible (fréquence propre, amplitude, temps de vie). Une marche supplémentaire a encore été franchie avec le lancement en 1995 du télescope spatial SOHO dédié à l'étude de la surface du Soleil (e.g., Domingo *et al.* 1995). Celui-ci, toujours opérationnel en 2017, a permis d'observer la surface du Soleil de façon continue pendant une vingtaine d'années.

L’observation depuis l’espace donne la possibilité de se dégager des contraintes rencontrées lors d’observations depuis le sol, comme les aléas climatiques ou le bruit généré par la turbulence atmosphérique, et donc d’obtenir des courbes de lumière de meilleure qualité. Grâce à toutes ces observations, les propriétés des oscillations du Soleil sont aujourd’hui extrêmement bien connues avec des milliers de modes de pression identifiés. Ces données sismiques ont permis de sonder en profondeur la structure interne du Soleil. Elles ont notamment permis de contraindre le profil interne de la vitesse du son (e.g., Basu *et al.* 2000), la position de la base de la zone convective et l’extension de la zone d’overshoot sous-jacente (e.g., Christensen-Dalsgaard *et al.* 1991; Basu 1997), le contenu en hélium dans l’enveloppe convective (e.g. Basu & Antia 1995; Richard *et al.* 1998), le profil interne de rotation différentielle (e.g., Brown *et al.* 1989; García *et al.* 2007; Fossat *et al.* 2017) ou encore certaines propriétés de la convection solaire (e.g., Samadi *et al.* 2001). Ces observations ont montré que la physique de l’intérieur du Soleil est assez bien comprise dans l’ensemble ; elles ont aussi mis en exergue les limites du modèle solaire standard<sup>1</sup>. D’une part, elles ont mis en évidence la nécessité d’inclure des processus de transport des éléments chimiques ou du moment cinétique interne. D’autre part, elles ont montré le besoin d’utiliser un traitement plus réaliste de la convection, en particulier à la base de la zone convective (e.g., Christensen-Dalsgaard *et al.* 2011; Buldgen *et al.* 2017) et dans les régions proches de la surface où des points d’ombre persistent (e.g., Kjeldsen *et al.* 2008; Sonoi *et al.* 2017).

L’étude des oscillations de type solaire dans des étoiles autres que le Soleil est beaucoup plus récente. Après de nombreux essais infructueux, la première détection sérieuse d’oscillations de type solaire dans une autre étoile est attribuée à Martić *et al.* (1999) et Barban *et al.* (1999) sur Procyon. Ces observations consistaient en des mesures de vitesses radiales avec le spectrographe ELODIE à l’Observatoire de Haute-Provence. Les conclusions de ces travaux sont néanmoins restés sujet à discussion dans les années qui ont suivi (e.g., Matthews *et al.* 2004). Au début du XXI<sup>ème</sup> siècle, une véritable révolution a vu le jour en physique stellaire avec la conception et la réalisation de plusieurs missions spatiales dont l’un des objectifs était l’observation sismique des étoiles par photométrie. Les satellites WIRE (Buzasi *et al.* 2000) et MOST (Matthews *et al.* 2000) ont d’abord élargi l’échantillon d’étoiles connues pour exhiber sans ambiguïté un spectre de modes de pression de type solaire. L’expérience acquise pendant ces deux missions a ensuite grandement profité à la préparation et au succès des missions spatiales CoRoT (Baglin *et al.* 2006a,b), puis *Kepler* (Borucki *et al.* 2010). Grâce à des durées d’observation allant de 150 jours pour CoRoT à environ 4 ans pour *Kepler*, et un cycle utile proche de 100%, des milliers d’étoiles d’environ une à trois masses solaires, allant de la séquence principale jusqu’à l’ignition de la fusion de l’hélium, ont pu être étudiées avec une précision jusqu’ici inégalée d’un point de vue sismique. Les données sismiques recueillies par CoRoT et *Kepler* ont fourni de nombreuses contraintes observationnelles sur l’évolution et la structure interne des étoiles, et forment pour les années à venir une précieuse base de données à exploiter. Ces observations ont en particulier donné la possibilité d’étudier les propriétés sismiques d’un échantillon statistique important d’étoiles à différents stades d’évolution : c’est ce que l’on nomme l’astérosismologie d’ensemble. Pour toutes ces étoiles, les paramètres sismiques globaux, c’est-à-dire des caractéristiques remarquables des spectres d’oscillation, ont pu être extraits (e.g., Mosser *et al.* 2012a). Ces paramètres sismiques varient avec l’évolution ; ils apportent donc un premier diagnostic sur les propriétés et la structure interne des étoiles observées. Parmi ces indices sismiques, l’espacement en fréquence des modes de pression ou grande séparation,  $\Delta\nu$ , et la fréquence au maximum du spectre de puissance des oscillations,  $\nu_{\max}$ , sont directement reliés aux paramètres globaux de l’étoile (masse, rayon et température effective) par des relations d’échelle (e.g., Kjeldsen & Bedding 1995). L’origine physique de ces relations est dans l’ensemble bien comprise théoriquement (e.g., Belkacem *et al.* 2013). Elles permettent d’obtenir une estimation de la masse et du rayon des étoiles à partir seulement de l’analyse globale de leur spectre

---

1. Le modèle “standard” de l’évolution stellaire est un modèle simplifié dans lequel une étoile est supposée à symétrie sphérique, sans rotation et où aucun processus de transport n’est pris en compte, mis à part le mélange turbulent très rapide de la matière dans les régions convectives (qui sont donc supposées homogènes chimiquement).



d’oscillation et la connaissance de leur température effective (qui peut être obtenue via des mesures spectroscopiques). Antérieurement, l’estimation observationnelle des rayons stellaires passaient nécessairement par des mesures de parallaxe ou des mesures interférométriques (pour les étoiles les plus proches), et une estimation directe de la masse n’était possible que pour des systèmes binaires. Les relations d’échelle sismiques sont donc un puissant outil qui nous permet aujourd’hui d’obtenir de fortes contraintes sur les paramètres globaux de nombreuses étoiles. D’autres paramètres sismiques, comme l’amplitude moyenne du spectre ou la largeur des modes, permettent de sonder les mécanismes d’excitation et d’amortissement des oscillations (e.g., Mosser *et al.* 2012a; Appourchaux *et al.* 2012; Baudin *et al.* 2013; Appourchaux *et al.* 2014; Mosser *et al.* 2017a; Vrad *et al.* 2017), et l’analyse des courbes de lumière peut aussi donner accès aux propriétés de la granulation de surface (e.g., De Assis Peralta 2016; De Assis Peralta *et al.* 2017). Enfin, pour un plus petit nombre d’étoiles pour lesquelles le rapport signal sur bruit est suffisant, des analyses plus fines des spectres de modes de pression ont pu être réalisées. Celles-ci ont apportées des contraintes plus précises sur les intérieurs stellaires de la séquence principale jusqu’aux étoiles du *clump*, c’est-à-dire les étoiles pour lesquelles la fusion de l’hélium a démarré. On peut par exemple noter des travaux dédiés à l’estimation de la position de la base de la zone convective et de la zone d’ionisation de l’hélium (e.g., Vrad *et al.* 2015; Verma *et al.* 2017), de l’extension de la zone d’overshooting sous l’enveloppe convective (e.g., Lebreton & Goupil 2012), ou encore de l’extension des cœurs convectifs (e.g., Deheuvels *et al.* 2016).

En outre, parmi les nombreuses avancées apportées par les missions CoRoT et *Kepler*, la détection de modes mixtes dans les étoiles évoluées est sans aucun doute l’une des plus importantes (e.g., Bedding *et al.* 2010; Mosser *et al.* 2012c). Les modes mixtes sont des modes d’oscillation avec de l’amplitude aussi bien dans les couches centrales que dans l’enveloppe des étoiles. Leur manifestation en surface porte donc la signature des régions les plus profondes. Dans le Soleil et les étoiles de type solaire sur la séquence principale, les propriétés de l’excitation stochastique combinées à celles de la structure interne ne permettent pas d’observer de tels modes. Seule une détection fiable des modes de gravité dans ces étoiles permettrait de sonder sismiquement leurs régions centrales. Or, à cause de leur faible amplitude en surface, une telle détection fait depuis longtemps débat (e.g., Turck-Chièze *et al.* 2004; García *et al.* 2007; Belkacem *et al.* 2009; Appourchaux *et al.* 2010; García *et al.* 2011; Appourchaux & Pallé 2013). Le travail original récemment publié par Fossat *et al.* (2017) semble néanmoins confirmer avec un bon niveau de confiance la présence de leur signature dans le spectre d’oscillation du Soleil, signature à partir de laquelle ils ont notamment pu estimer la vitesse de rotation centrale. Dans les étoiles sous-géantes et géantes rouges au contraire, des modes mixtes peuvent être observés et nous donnent la possibilité de sonder simplement et de façon directe les régions centrales. Ces modes sont associés à un nouveau paramètre sismique global, noté  $\Delta\Pi$ , qui correspond à la séparation en période des modes de gravité. Celui-ci est directement sensible à la densité des cœurs radiatifs. Il a pu être mesuré dans un large échantillon d’étoiles et ajoute une nouvelle contrainte observationnelle sur les intérieurs stellaires (Vrad *et al.* 2015). Avec la grande séparation  $\Delta\nu$ , qui est elle sensible à l’épaisseur de l’enveloppe, ils forment un couple de traceurs évolutifs après la séquence principale. Alors que les étoiles de faible masse à la fin de la branche des géantes rouges et celles, plus âgées, ayant passé le flash de l’hélium sont indissociables dans le diagramme Hertzsprung-Russell, la connaissance de ces deux paramètres permet entre autre de distinguer ces deux stades évolutifs observationnellement et sans ambiguïté (e.g., Mosser *et al.* 2014). Un autre grand succès obtenu par l’observation des modes mixtes a été de poser de fortes contraintes sur l’évolution de la rotation du cœur des étoiles sous-géantes et géantes rouges. Ils ont notamment permis de montrer que la rotation moyenne des couches centrales diminue au cours de l’évolution sur la branche des géantes rouges alors même qu’elles sont en contraction à cette période de leur vie (Mosser *et al.* 2012b; Deheuvels *et al.* 2012, 2014). De la même manière que pour le Soleil, ces observations mettent en évidence l’existence d’un processus de transport efficace dans ces étoiles capables d’extraire du moment cinétique des couches internes. Ce mécanisme d’extraction pourrait être associé à l’effet d’ondes internes de gravité (e.g., Talon & Charbonnel

2005; Charbonnel & Talon 2008; Charbonnel *et al.* 2013; Mathis *et al.* 2013) ou encore de champs magnétiques (e.g., Eggenberger *et al.* 2005; Cantiello *et al.* 2014; Rüdiger *et al.* 2015). Néanmoins, aucun scénario ne parvient à l’heure actuelle à expliquer quantitativement les observations dans le Soleil et les étoiles évoluées. La modélisation de la redistribution du moment cinétique au cours de l’évolution stellaire reste actuellement une question ouverte.

Comme on l’a vu, l’astérosismologie est une technique observationnelle jeune, mais qui a déjà fait ses preuves. Elle apparaît aujourd’hui comme un outil indispensable à l’étude des propriétés stellaires. Par leur capacité à sonder en profondeur, les oscillations stellaires sont capables de mettre en exergue la nécessité de mieux décrire des processus internes existants déjà dans les modèles stellaires, voire même d’en inclure de nouveaux. De plus, les études sismiques fournissent de nouvelles contraintes observationnelles qui s’ajoutent aux observables classiques (e.g., luminosité, température effective, abondances de surface). Cela tend à réduire l’espace des paramètres pour lesquels les modèles, à physique donnée, s’ajustent le mieux aux données observationnelles disponibles. En conséquence, l’utilisation des contraintes sismiques nous ouvre la voie vers une estimation bien plus précise des âges stellaires, sorte de *graal* de la physique stellaire. En effet, une compréhension complète de la vie d’une étoile, mais aussi de beaucoup d’autres phénomènes astrophysiques, nécessite au moins de connaître la suite des différents événements dans le bon ordre temporel et de façon fiable (e.g., Soderblom 2010). L’âge des étoiles, qui représentent l’essentiel de la matière visible de l’Univers, peut fournir une telle information. Or, celui-ci ne peut être mesuré directement, il ne peut être qu’estimé. Ainsi, Lebreton *et al.* (2014b) ont montré que l’ajout des contraintes sismiques dans la recherche d’un modèle optimal permet de diminuer l’incertitude sur l’estimation de l’âge d’une étoile observée d’environ 100 % à moins de 10%, et donc d’augmenter la *précision* de cette estimation, à physique donnée. De plus, les études sismiques permettent d’améliorer la description physique des modèles stellaires et donc l’*exactitude* des âges obtenus. Dans ce contexte, l’astérosismologie est non seulement un atout pour l’étude de l’étoile *per se*, mais aussi pour l’étude de leur environnement, que ce soit à l’échelle galactique ou planétaire (e.g., Chaplin & Miglio 2013).

D’abord, l’étude de la galaxie et de sa formation, ou *archéologie galactique*, peut tirer profit de l’étude des oscillations stellaires de type solaire (e.g., Miglio *et al.* 2013; Lagarde *et al.* 2015; Noels *et al.* 2016). En effet, les mécanismes de formation des galaxies ont une signature dans la dynamique, la distribution spatiale, la composition chimique et l’âge des étoiles qu’elles contiennent. Une estimation à la fois précise et la plus exacte possible de la masse, du rayon et de l’âge d’un large échantillon d’étoiles permettrait de tester les modèles de formation galactique et de mieux comprendre la dynamique des amas globulaires ou des amas ouverts (évolution temporelle de la dispersion de vitesse, pertes de masses, alignement spin-orbite, etc...). La combinaison des données sismiques et des données de la mission Gaia, qui devrait délivrer la cartographie de plus d’un milliard d’objets dans la Voie Lactée avec leur vitesse de déplacement, laisse ainsi entrevoir d’intéressantes perspectives pour l’étude de la galaxie. Dans ce contexte, les géantes rouges apparaissent comme un objet d’étude idéal (e.g., Mosser & Miglio 2016; Hekker 2018). En effet, premièrement, elles sont très lumineuses; elles peuvent être observées de loin depuis la Terre et donc en plus grand nombre. Deuxièmement, elles se distinguent par leurs propriétés sismiques intéressantes liées à des amplitudes relativement plus grandes et à la présence de modes mixtes.

Ensuite, l’étude des oscillations de type solaire semble plus que jamais un outil incontournable pour améliorer notre compréhension de la formation et de l’évolution des systèmes exoplanétaires. En effet, la caractérisation des exoplanètes (rayon, masse, âge) n’est possible que si les caractéristiques de l’étoile hôte sont bien connues (e.g., Borucki *et al.* 2012; Huber 2017). La synergie entre les communautés sismologues et exoplanétologues se développe ainsi progressivement avec comme dessein la préparation de la future mission PLATO (Rauer *et al.* 2014). La mission PLATO a pour objectif l’étude et la caractérisation des systèmes exoplanétaires. Les exoplanètes seront détectées et étudiées par la méthode des transits, tandis les caractéristiques de l’étoile seront obtenues par le biais de l’astérosismologie. Les données récoltées au cours de cette mission serviront à contraindre les modèles de formation, les différentes configurations possibles et la stabilité des systèmes plané-

taires. Elles serviront par exemple à une définition plus précise de la zone habitable. Pour atteindre ces objectifs, la masse, le rayon et l'âge des étoiles doivent être connus à mieux que 5%, 2% et 10% respectivement. Avec l'astérosismologie, la précision requise est abordable, mais l'estimation de l'âge des étoiles nécessite toujours l'utilisation de modèles stellaires. L'exactitude de cette estimation passe encore par une modélisation correcte de la structure interne et de l'évolution stellaire, et donc par une meilleure compréhension des processus de transport (e.g., Noels *et al.* 2016).

Le travail de cette thèse s'inscrit à une époque où l'étude des oscillations de type solaire s'affirme comme un pilier majeur dans l'étude de l'évolution des étoiles, de la Galaxie et des systèmes planétaires, et où la nécessité d'améliorer la description des modèles stellaires est supportée par de fortes contraintes observationnelles. Dans mon travail de thèse, ma recherche s'est focalisée sur deux thèmes en particulier. Premièrement, je me suis intéressé au problème de la redistribution de moment cinétique dans les intérieurs radiatifs stellaires. Comme nous l'avons vu, les observations sismiques montrent l'existence d'un processus de transport de moment cinétique opérant efficacement tout au long de la vie des étoiles et dont la nature exacte reste à déterminer parmi différentes pistes existantes (e.g., champ magnétique, ondes internes de gravité,...). La modélisation de l'évolution de la rotation interne des étoiles reste donc pour le moins incertaine aujourd'hui. L'influence de la rotation sur la structure et la dynamique des étoiles étant significative (e.g., Maeder & Meynet 2000; Eggenberger 2015; Meynet *et al.* 2016), ces incertitudes se répercutent de façon critique sur notre compréhension de la vie des étoiles et ont par exemple de sérieuses conséquences sur la datation des âges stellaires (e.g., Lebreton *et al.* 2014a). Dans le contexte actuel, il est ici inutile de rappeler la nécessité d'améliorer la modélisation de la rotation stellaire et d'inclure de nouveaux processus de transport. Parmi les nombreuses hypothèses avancées, nous verrons plus loin que les ondes internes sont capables d'interagir avec la rotation des étoiles. Une partie de mon travail s'est donc focalisé sur l'effet des ondes internes de gravité sur l'évolution de la rotation. Deuxièmement, il a déjà été mentionné à plusieurs reprises que l'observation des modes mixtes permet de remonter directement aux propriétés des régions centrales des étoiles évoluées, dont leur rotation interne. L'information apportée par les modes mixtes est importante car elle permet à la fois d'améliorer les modèles stellaires et de valider leur description. De plus, les caractéristiques de leur spectre d'oscillation évoluent avec l'évolution et peuvent aussi servir d'estimateurs fiables du stade évolutif de ces étoiles (e.g., voir Hekker & Christensen-Dalsgaard 2017, pour une revue). Néanmoins, tout le potentiel de ces modes n'a pas été exploré, comme en particulier leur capacité à fournir des informations sur les couches intermédiaires situées entre le cœur d'hélium et le voisinage de la base de la zone convective. En effet, l'essentiel de l'information obtenue actuellement par l'étude des modes mixtes se concentre sur les couches profondes localisées à la périphérie du cœur d'hélium et sur l'enveloppe convective. Les couches intermédiaires, quant à elles, sont une région importante de la structure de ces étoiles. En effet, cette région inclue la couche d'hydrogène en fusion générant l'essentiel de l'énergie à ce stade évolutif; elle est de plus le siège de processus de mélange à l'interface entre les zones radiative et convective. Dans un deuxième temps, je m'intéresserai donc aussi aux diagnostics sismiques par les modes mixtes d'un point de vue théorique en cherchant quelles informations peuvent apporter ces modes sur les propriétés des couches intermédiaires et sur l'évolution de cette partie de l'étoile.

J'étudierai donc les oscillations internes sous deux aspects : soit comme un acteur, soit comme un vecteur d'information de la dynamique interne. Après avoir fait quelques rappels sur les rudiments de la modélisation stellaire et de l'astérosismologie dans une première partie, je m'intéresserai dans une seconde partie au problème de transport de moment cinétique et à l'effet des ondes internes de gravité sur l'évolution de la rotation dans les étoiles de faible masse. Dans une troisième partie, la discussion portera sur l'élaboration et l'amélioration des diagnostics sismiques par les modes mixtes dans les étoiles évoluées. Je me focaliserai sur deux paramètres sismiques peu exploités jusqu'à aujourd'hui, le facteur de couplage et le décalage en période des modes mixtes, tous deux sensibles aux propriétés de la région située entre le cœur d'hélium et le voisinage de la base de la zone convective. Enfin, les conclusions et les perspectives seront formulées dans la quatrième partie.





# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>i</b>
<b>Résumé</b>	<b>iii</b>
<b>Abstract</b>	<b>v</b>
<b>Avant-propos</b>	<b>vii</b>
<b>Table des matières</b>	<b>xvii</b>
<b>I Du contexte aux enjeux de la thèse</b>	<b>1</b>
<b>1 Quelques mots sur la modélisation de l'évolution et de la structure interne des étoiles</b>	<b>3</b>
1.1 Temps caractéristiques . . . . .	3
1.2 Équations de la structure interne dans le modèle standard . . . . .	4
1.3 Évolution et structure interne des étoiles . . . . .	9
1.4 Vers une modélisation plus réaliste : processus non-standard . . . . .	13
<b>2 Apports de l'astérosismologie à l'étude des intérieurs stellaires</b>	<b>17</b>
2.1 Théorie des oscillations linéaires adiabatiques dans les étoiles . . . . .	18
2.2 Modes propres d'oscillation dans les étoiles de type solaire . . . . .	24
2.3 Relations d'échelle : lien entre oscillation et paramètres stellaires . . . . .	32
2.4 Contraintes sur la structure interne : quelques exemples . . . . .	33
<b>3 Enjeux et axes de travail de la thèse</b>	<b>39</b>
3.1 Des succès pour les modèles actuels, mais aussi des insuffisances . . . . .	39
3.2 De fortes contraintes par les diagnostics sismiques . . . . .	42
3.3 Axes de travail . . . . .	42
<b>II Transport de moment cinétique par les ondes internes de gravité</b>	<b>45</b>
<b>4 Nécessité d'un processus de transport de moment cinétique additionnel</b>	<b>47</b>
4.1 Contraintes observationnelles . . . . .	47
4.2 Une modélisation actuellement insuffisante . . . . .	52
4.3 Solutions avancées et problématique de la partie II . . . . .	58
<b>5 Propriétés dynamiques des ondes internes de gravité</b>	<b>61</b>
5.1 Ondes internes de gravité dans l'approximation JWKB . . . . .	61
5.2 Propagation des ondes internes de gravité . . . . .	64
5.3 Conservation de l'énergie et du moment cinétique d'une onde dans un écoulement . . . . .	73

5.4	Amortissement radiatif et transport par les ondes de gravité . . . . .	79
<b>6</b>	<b>Mécanismes de génération des ondes internes de gravité</b>	<b>87</b>
6.1	Simulations numériques . . . . .	88
6.2	Modèles d'excitation par la pression turbulente dans la zone convective . . . . .	92
6.3	Modèle d'excitation par la pénétration de panaches convectifs . . . . .	98
6.4	Application au cas solaire . . . . .	107
<b>Article : <i>Generation of internal gravity waves by penetrative convection</i></b>		<b>115</b>
<b>7</b>	<b>Efficacité du transport de moment cinétique dans les étoiles de faible masse</b>	<b>137</b>
7.1	Équation de transport de moment cinétique . . . . .	137
7.2	Efficacité des ondes générées par la pression turbulente . . . . .	140
7.3	Impact des ondes générées par la pénétration convective sur l'évolution de la rotation	143
7.4	Remarques conclusives . . . . .	149
<b>Article : <i>Can plume-induced internal gravity waves regulate the core rotation of subgiant stars ?</i></b>		<b>153</b>
<b>Conclusions de la partie II</b>		<b>175</b>
<b>III Diagnostics sismiques par les modes mixtes</b>		<b>177</b>
<b>8</b>	<b>Modes mixtes, paramètres associés et le cas particulier dipolaire</b>	<b>179</b>
8.1	Relation de phase dans l'approximation asymptotique . . . . .	180
8.2	Informations sur le cœur et l'enveloppe des étoiles évoluées . . . . .	184
8.3	Cas particuliers des oscillations dipolaires $l = 1$ . . . . .	187
8.4	Problématique de la partie III . . . . .	193
<b>9</b>	<b>Le facteur de couplage comme moyen de sonder la zone évanescente</b>	<b>195</b>
9.1	Observations pour un large échantillon d'étoiles . . . . .	195
9.2	Modélisation de la zone évanescente et interprétation des observations . . . . .	196
9.3	Remarques conclusives . . . . .	207
<b>Article : <i>Period spacings in red giants III. Coupling factors of mixed modes</i></b>		<b>209</b>
<b>10</b>	<b>Modes mixtes dans l'hypothèse d'un fort couplage</b>	<b>219</b>
10.1	Relation de phase asymptotique avec fort couplage . . . . .	219
10.2	Comparaison avec les prédictions d'un code d'oscillation . . . . .	222
10.3	Conclusions préliminaires . . . . .	230
<b>11</b>	<b>Information portée par le décalage en période des modes mixtes <math>\epsilon_g</math></b>	<b>231</b>
11.1	Définitions et modélisation . . . . .	231
11.2	Signature sismique des points tournants . . . . .	234
11.3	Discussion des résultats et conclusions . . . . .	239
<b>Conclusions de la partie III</b>		<b>243</b>
<b>IV Synthèse et perspectives</b>		<b>245</b>
<b>A Dérivation de l'intégrale première pour les modes dipolaires</b>		<b>253</b>
<b>B Équations du second ordre pour les modes dipolaires</b>		<b>255</b>

<b>C Contribution sur les modes mixtes déprimés dans les géantes rouges</b>	<b>259</b>
<b>Article : <i>Dipole modes with depressed amplitudes in red giants are mixed modes</i></b>	<b>261</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>287</b>





## Première partie

# Du contexte aux enjeux de la thèse



# Chapitre 1

## Quelques mots sur la modélisation de l'évolution et de la structure interne des étoiles

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Temps caractéristiques</b>	<b>3</b>
<b>1.2</b>	<b>Équations de la structure interne dans le modèle standard</b>	<b>4</b>
1.2.1	Équilibre hydrostatique et transport de l'énergie	4
1.2.2	Équations d'état	7
1.2.3	Réactions nucléaires et évolution temporelle de la composition chimique	7
1.2.4	Conditions limites et conditions initiales	8
<b>1.3</b>	<b>Évolution et structure interne des étoiles</b>	<b>9</b>
1.3.1	Diagramme Hertzsprung-Russell	9
1.3.2	Étoiles de faible masse ( $0.5 M_{\odot} \lesssim M_{\star} \lesssim 1.8 M_{\odot}$ )	10
1.3.3	Étoiles de masse intermédiaire ( $1.8 M_{\odot} \lesssim M_{\star} \lesssim 8 M_{\odot}$ )	13
<b>1.4</b>	<b>Vers une modélisation plus réaliste : processus non-standard</b>	<b>13</b>

---

Il semble logique de débiter ce manuscrit avec quelques mots introductifs sur la structure interne et l'évolution des étoiles. Bien que la description des étoiles reste complexe, une modélisation simplifiée permet néanmoins de saisir les grandes lignes de leur évolution et de leur structure interne. Dans un premier temps, nous présenterons les équations du modèle standard constituant la description de base des intérieurs stellaires. Nous aborderons ensuite brièvement les différentes phases de la vie d'une étoile. Enfin, nous montrerons que des raffinements existent et mènent à une modélisation de plus en plus complexe, mais aussi de plus en plus réaliste. Mais d'abord, comme dans tout problème physique, intéressons-nous aux temps caractéristiques associés.

### 1.1 Temps caractéristiques

Dans toute la suite, nous supposons qu'une étoile est une sphère de rayon  $R_{\star}$  et de masse  $M_{\star}$ , structurée en couches concentriques et composée d'ions, d'électrons et de photons. Sa luminosité, c'est-à-dire l'énergie totale rayonnée à sa surface par unité de temps, est notée  $L_{\star}$ . Ainsi, trois échelles de temps différentes peuvent être définies.

**Le temps dynamique :** échelle de temps associée aux phénomènes dynamiques, du même ordre de grandeur, par exemple, que le temps nécessaire pour rétablir l'équilibre hydrostatique sous l'effet

d'une perturbation. Celui-ci doit être de l'ordre de grandeur du temps de chute libre, c'est-à-dire

$$\tau_{\text{dyn}} = \frac{1}{\sqrt{G\bar{\rho}}}, \quad (1.1)$$

où  $G$  est la constante gravitationnelle et  $\bar{\rho} = 3M_{\star}/4\pi R_{\star}^3$  est la densité moyenne de l'étoile. Le temps dynamique est estimé de l'ordre de quelques minutes dans le Soleil avec  $\bar{\rho} \approx 10^3 \text{ kg m}^{-3}$  à l'âge actuel (i.e., environ 4.57 milliards d'années), et atteindra des valeurs de l'ordre du mois lorsque le Soleil aura un âge plus avancé de l'ordre d'une dizaine de milliards d'années.

**Le temps de Kelvin-Helmholtz :** représente le temps de vie caractéristique d'une étoile si l'énergie qu'elle rayonnait ne provenait que de son réservoir gravitationnel d'énergie potentielle. Il est donné par le rapport de l'énergie potentielle de gravité totale sur la luminosité de l'étoile, c'est-à-dire en bonne approximation par

$$\tau_{\text{KH}} = \frac{GM_{\star}^2}{L_{\star}R_{\star}}. \quad (1.2)$$

Pour le Soleil actuel, avec  $R_{\odot} = 7 \cdot 10^5 \text{ km}$ ,  $M_{\odot} = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$  et  $L_{\odot} = 4 \cdot 10^{26} \text{ W}$ , le temps de Kelvin-Helmholtz est de l'ordre de  $\tau_{\text{KH},\odot} \sim 30$  millions d'années, c'est-à-dire presque onze ordres de grandeur plus grand que le temps dynamique. Il correspond environ à la durée de la phase initiale de contraction gravitationnelle, avant que les réactions nucléaires ne se mettent en place dans les couches profondes.

**Le temps nucléaire :** échelle de temps associée aux réactions nucléaires à l'intérieur de l'étoile. Durant la majeure partie de leur vie, les étoiles brûlent de l'hydrogène dans leurs régions centrales. Le temps caractéristique nucléaire est défini comme le temps de vie qu'une étoile aurait en brûlant environ 10% de son hydrogène, à luminosité donnée. Il est alors défini par

$$\tau_{\text{nuc}} = 0.1 \frac{\eta M_{\star} c_L^2}{L_{\star}}, \quad (1.3)$$

où  $c_L$  est la vitesse de la lumière et  $\eta$  est le rendement de la production d'énergie par les réactions nucléaires par rapport à l'énergie de masse disponible. Avec  $\eta = 0.7\%$  pour la fusion de l'hydrogène, le temps nucléaire est estimé à dix milliards d'années dans le cas du Soleil. Cela correspond à la durée que le Soleil passera sur la séquence principale à brûler son hydrogène central jusqu'à ce que celui-ci ne s'épuise totalement. Le temps nucléaire est donc environ treize ordres de grandeur plus grand que le temps dynamique.

Ainsi, le temps dynamique est très inférieur aux échelles de temps d'évolution des étoiles représentées par le temps nucléaire et le temps de Kelvin-Helmholtz. Dans une bonne approximation, une étoile peut donc être considérée en équilibre hydrostatique à chaque instant et évoluer dans le temps de façon quasi-statique.

## 1.2 Équations de la structure interne dans le modèle standard

Dans le modèle standard, une étoile est supposée en équilibre hydrostatique et sans rotation. Les équations de la structure interne, comme nous allons le voir, en sont grandement simplifiées. Cette section suit les livres de Maeder (2009) et Kippenhahn *et al.* (2012), ainsi que celui de Clayton (1983) pour les réactions nucléaires.

### 1.2.1 Équilibre hydrostatique et transport de l'énergie

**Équation de continuité.** On note  $m$  la masse comprise dans la sphère de rayon  $r$  et  $\rho(r)$  la densité volumique en  $r$ . L'équation de conservation de la masse est donc donnée à l'équilibre par

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho. \quad (1.4)$$

**Équilibre hydrostatique.** Soit  $p$  la pression au rayon  $r$ . L'équation de conservation de l'impulsion dans l'hypothèse de l'équilibre hydrostatique s'écrit

$$\frac{dp}{dr} = -\rho g \quad \text{avec} \quad g = \frac{Gm}{r^2}, \quad (1.5)$$

où  $g$  désigne l'accélération gravitationnelle qui a été déduite de l'équation de Poisson.

**Équation de conservation de l'énergie.** Soit  $\epsilon$  l'énergie produite par seconde et par unité de masse dans la coquille de rayon  $r$ . La production d'énergie dans l'intérieur des étoiles provient essentiellement des réactions nucléaires ou de la contraction (dilatation) gravitationnelle. Le taux de production total  $\epsilon$  peut donc s'écrire de façon à différentier ses deux sources d'énergie, soit  $\epsilon = \epsilon_{\text{nuc}} + \epsilon_{\text{g}}$ . L'équation de conservation de l'énergie peut donc s'écrire

$$\frac{dL}{dr} = 4\pi r^2 \rho \epsilon, \quad (1.6)$$

où  $L$  est la luminosité de l'étoile au rayon  $r$ . La fermeture du système d'équations de la structure interne nécessite de relier le flux d'énergie aux autres variables du problème. Nous verrons un peu plus loin que celui-ci est supposé être une fonction du gradient de température. Dans les intérieurs stellaires, on distingue trois types de transport de l'énergie : la conduction, la convection ou le rayonnement. Le transport conductif est majoritairement assuré par les électrons du fait de leur faible masse. Dans la plupart des cas, le flux d'énergie transporté par conduction électronique est très inférieur au flux radiatif, à l'exception des milieux dégénérés comme dans les naines blanches. Dans la suite, le transport par la conduction pourra donc être négligé par rapport aux deux autres processus de transport de l'énergie.

**Transport d'énergie par rayonnement.** Malgré leur vitesse de propagation très rapide, les photons mettent un certains temps avant de s'échapper de la surface des étoiles. En effet, le milieu stellaire est fortement opaque au rayonnement. Le degré d'interaction avec le gaz stellaire est déterminé par la donnée de l'opacité, qui est inversement proportionnelle au produit de la distance moyenne sur laquelle peut se déplacer un photon entre deux interactions avec la densité du milieu. L'opacité du milieu est le résultat de plusieurs processus physiques :

- l'absorption lié-lié : des photons sont absorbés par des électrons qui viennent occuper des niveaux d'énergie plus élevé.
- l'absorption lié-libre : cela correspond à l'ionisation d'un atome par un photon.
- l'absorption libre-libre : effet Bremsstrahlung inverse, un électron du continuum absorbe un photon au voisinage d'un ion et transite vers un état du continuum d'énergie plus élevée.
- la diffusion par les électrons libres ou diffusion de Compton.

L'opacité varie avec la fréquence des photons et les contributions des différents processus cités ci-dessus varient suivant les conditions physiques.

Dans les intérieurs stellaires, le libre parcours moyen des photons est de l'ordre de 1 cm, c'est-à-dire de plusieurs ordres de grandeur inférieur aux rayons stellaires. Les photons se propagent alors suivant une marche au hasard vers la surface, en allant de collision à collision. Ils peuvent mettre près de 100 000 ans à sortir du manteau stellaire, alors qu'ils ne mettraient que deux secondes si le milieu était transparent. Étant donnée la vitesse des photons, le temps moyen entre deux interactions est très court par rapport aux temps caractéristiques dynamiques dans les étoiles. Ceci justifie l'hypothèse d'équilibre thermodynamique local (ETL) dans laquelle chaque petit volume de matière peut être considéré comme ayant les mêmes propriétés qu'un corps noir. L'approximation d'ETL est importante car elle permet de définir en chaque point de l'étoile les variables d'état thermodynamiques usuelles telles que la pression  $p$  ou la température  $T$ , ainsi que les fonctions d'état telles que l'entropie  $S$ . L'hypothèse d'ETL nous permet aussi d'utiliser la loi de Planck d'émission d'un corps noir en chaque point de l'étoile. Néanmoins, ce rayonnement est par définition

isotrope et se caractérise donc par un flux radiatif total nul. Or, ce n'est manifestement pas le cas dans une étoile où l'énergie doit être transportée du cœur vers la surface. L'hypothèse la plus simple est de considérer que l'écart à la loi d'émission du corps noir est du premier ordre (i.e., linéaire) : ceci constitue l'approximation de diffusion. La luminosité d'énergie transportée par le rayonnement,  $L_{\text{rad}}$ , est alors donnée dans une bonne approximation par

$$L_{\text{rad}} = \frac{4\pi r^2 \sigma T^3}{3\kappa} \frac{\nabla}{H_p}, \quad (1.7)$$

où  $\sigma$  est la constante de Stefan-Boltzmann,  $\kappa$  est l'opacité de Rosseland, représentant une moyenne harmonique pondérée de l'opacité sur la fréquence des photons,  $\nabla = (d \ln T / d \ln p)$  est le gradient de température et  $H_p = -(d \ln p / dr)^{-1}$  est l'échelle de hauteur de pression

**Transport convectif.** D'après l'équation précédente, on voit qu'une forte luminosité, liée par exemple à une importante production d'énergie nucléaire, ou une opacité élevée, entraîne un gradient de température élevé dans le cas du transport par le rayonnement. Au-delà d'un certain point, le milieu devient instable convectivement. Le transport de l'énergie est alors assuré par des mouvements de matière convectifs, plus efficaces que le transport par le rayonnement. En effet, perturbons un élément fluide initialement à l'équilibre. Par contraste de densité avec le milieu extérieur, la poussée d'Archimède s'applique sur cet élément. Si sa densité change moins vite que son environnement, alors la poussée d'Archimède agit comme une force de rappel et ramène l'élément fluide vers sa position d'équilibre. Au contraire, si sa densité change moins vite que son environnement, alors l'élément est instable, il rentre en mouvement et la convection peut se développer. En négligeant la variation de la composition chimique, l'instabilité convective apparaît si le critère de Schwarzschild est vérifié, c'est-à-dire

$$\nabla > \nabla_{\text{int}}, \quad (1.8)$$

où  $\nabla_{\text{int}}$  est le gradient de température à l'intérieur l'élément fluide. Une variante prenant en compte le gradient chimique existe, c'est le critère de Ledoux. Des phénomènes de semi-convection, sous l'influence d'un gradient de composition chimique instable, peuvent alors avoir lieu, mais de tels processus sortent déjà du cadre du modèle standard (e.g. Garaud 2013).

Pour déterminer le gradient de température et le flux d'énergie dans la zone convective, le modèle standard utilise la théorie simplifiée de la longueur de mélange (MLT pour *Mixing-Length Theory*) proposée par Böhm-Vitense (1958). Dans cette phénoménologie, les tourbillons de matière convectifs ont une taille caractéristique  $\Lambda_{\text{MLT}}$  en chaque coquille de rayon  $r$ . Les éléments les plus chauds de cette coquille s'élèvent sur une distance de l'ordre de  $\Lambda_{\text{MLT}}$  avant de se mélanger avec la matière environnante, alors que les plus froids, eux, s'enfoncent en profondeur. Le formalisme de Böhm-Vitense (1958) relie la longueur de mélange à l'échelle de hauteur de pression  $H_p$  comme  $\Lambda_{\text{MLT}} = \alpha_{\text{MLT}} H_p$ , où  $\alpha_{\text{MLT}}$  est un paramètre. La valeur de ce dernier est calibrée en couple avec l'abondance initiale d'hélium à partir d'un modèle solaire à physique donnée, de façon à reproduire les observables (i.e., luminosité et rayon du Soleil actuel). La donnée de ce paramètre permet de déduire la valeur de  $\nabla_{\text{int}}$  et de la luminosité convective  $L_{\text{conv}}$  telle que

$$L = L_{\text{rad}} + L_{\text{conv}}. \quad (1.9)$$

L'expression analytique de  $L_{\text{conv}}$  peut être trouvée dans de nombreux ouvrages comme Maeder (2009) ou Kippenhahn *et al.* (2012). Pour finir, il est important de remarquer que le transport par la convection se fait sur des échelles de temps très courtes par rapport aux échelles de temps d'évolution des étoiles. Par exemple, la MLT permet d'estimer que le temps de vie des éléments convectifs turbulents va de l'ordre de quelques jours à l'ordre de la minute dans les enveloppes convectives. Le mélange des éléments chimiques est donc très efficace dans ces régions. Les zones convectives peuvent être supposées chimiquement homogènes dans une bonne approximation durant toute l'évolution des étoiles.

### 1.2.2 Équations d'état

Le système d'équations donné par Eqs. (1.4)-(1.9) doit être fermé par des équations d'état reliant les différentes variables thermodynamiques entre elles, ainsi que l'opacité et les taux de réactions nucléaires, du type

$$p(\rho, T, X_i) \quad , \quad S(\rho, T, X_i) \quad , \quad \kappa(\rho, T, X_i) \quad \text{et} \quad \epsilon_{\text{nuc}}(\rho, T, X_i) \quad , \quad (1.10)$$

où  $X_i$  est l'abondance massique de l' $i$ -ème élément chimique. Par exemple, pour un gaz parfait, l'équation d'état pour la pression est donnée par

$$p = \frac{\rho k_B T}{\mu} \quad , \quad (1.11)$$

où  $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ m}^2 \text{ kg s}^{-2} \text{ K}^{-1}$  est la constante de Boltzmann et  $\mu$  est la masse moyenne par particule. Des équations d'état plus sophistiquées prenant en compte des effets non-idéaux, comme par exemple l'effet des interactions Coulombiennes entre particules, sont implémentées dans les codes d'évolution stellaire (e.g. Rogers & Nayfonov 2002).

### 1.2.3 Réactions nucléaires et évolution temporelle de la composition chimique

Lorsque les conditions de température et de densité sont assez élevées, l'énergie cinétique des particules peut devenir assez importante pour que la barrière de répulsion Coulombienne entre deux noyaux chargés positivement puisse être franchie par effet tunnel. L'interaction forte entre alors en jeu et les noyaux peuvent fusionner pour former des éléments plus lourds. Le déficit d'énergie de masse des éléments produits par rapport à la somme des énergie de masse des réactifs est alors restitué au milieu sous forme d'énergie (dans la limite des éléments plus légers que le fer). Plus l'élément a un nombre atomique élevé, plus la température nécessaire pour franchir la barrière de répulsion Coulombienne est élevée. L'hydrogène est donc le premier élément à fusionner durant la vie de l'étoile.

Une quantité importante dans l'estimation de l'énergie produite par les réactions nucléaires est le taux de réaction  $r_{ij}$ , qui est défini comme le nombre de réactions par unité de volume et par unité de temps impliquant deux éléments chimiques  $i$  et  $j$  d'abondance  $N_i$  et  $N_j$  en nombre de particules par unité de volume. On définit aussi la section efficace de réaction  $\sigma_{ij}(v)$  pour une vitesse relative  $v$  entre deux particules  $i$  et  $j$  comme le rapport du nombre de réactions par noyaux par unité de temps sur le flux de particules incidentes par unité de surface et par unité de temps. Cette dernière est proportionnelle à la probabilité que la barrière de répulsion Coulombienne soit franchie par effet tunnel. Le taux d'une réaction nucléaire peut alors s'exprimer comme

$$r_{ij} = N_i N_j \langle v \sigma_{ij}(v) \rangle > \frac{1}{(1 + \delta_{ij})} \quad , \quad (1.12)$$

où le facteur  $\frac{1}{1+\delta_{ij}}$  est introduit dans le cas où les deux réactifs sont le même élément, et où la moyenne du produit de la vitesse avec la section efficace sur les vitesses vaut

$$\langle v \sigma_{ij}(v) \rangle = \lambda_{ij} = \int_0^\infty v \sigma_{ij}(v) \phi_{ij}(v) dv \quad , \quad (1.13)$$

avec  $\phi_{ij}(v)$  la distribution de Maxwell des vitesses relatives entre les éléments  $i$  et  $j$  pour un gaz supposé non-dégénéré et à température donnée. Qualitativement, la distribution de Maxwell décroît avec la vitesse tandis que la probabilité de franchir la barrière Coulombienne, et donc la section efficace, augmente avec la vitesse des particules. Le produit des deux termes forme ainsi une distribution piquée autour d'une valeur particulière de l'énergie : c'est le pic de Gamow. Il s'ensuit alors que le facteur  $\lambda_{ij}$  est maximal lorsque l'énergie thermique des particules est proche de l'énergie de Gamow, définie par

$$E_G = 2m_{ij}^{\text{r}} c_L^2 (\pi \alpha_{\text{SF}} Z_i Z_j)^2 \quad , \quad (1.14)$$



où  $m_{ij}^r$  est la masse réduite des deux éléments,  $\alpha_{\text{SF}}$  est la constante de structure fine environ égale à  $1/137$  et  $Z_i$  est la charge du  $i$ -ème élément. L'énergie thermique des particules étant de l'ordre de  $k_{\text{B}}T$ , on voit qu'il est nécessaire d'élever la température du milieu pour que la fusion d'éléments plus lourds que l'hydrogène soit probable.

A titre d'exemple, considérons la fusion de l'hydrogène ( $H$ ) en hélium ( $H_e$ ). Dans une étoile de type solaire, celle-ci peut passer par différentes chaînes de réactions, les chaînes proton-proton (I, II et III) ou le bi-cycle CNO (mettant en jeu les éléments C,N et O comme catalyseur), selon notamment la température du milieu. Comme illustration, le cycle I de la chaîne proton-proton suit le système de réactions suivant



où  $p^+$  est mis pour le proton  ${}^1H$ ,  $d$  pour le deutérium  ${}^2H$ ,  $\gamma$  pour un photon,  $e^+$  pour un positron,  $\nu_e$  pour un neutrino,  ${}^3H_e$  et  ${}^4H_e$  respectivement pour l'hélium 3 et 4. En bilan, l'énergie dégagée par cette réaction est émise sous forme de photons, de positrons et de neutrinos. Le taux de production d'énergie nucléaire,  $\epsilon_{\text{nuc},ij}$ , est donc obtenu en multipliant le taux de réaction avec l'énergie dégagée lors d'une réaction,  $Q_{ij}$ . Celui-ci peut prendre la forme d'une loi de puissance telle que

$$\epsilon_{\text{nuc},ij} = \epsilon_{\text{nuc},ij}^0 \rho T^\nu, \quad (1.18)$$

où l'exposant  $\nu$  dépend de la gamme de température et des réactions mises en jeu. Pour le cycle p-p,  $\nu \sim 4$  tandis que pour le cycle CNO,  $\nu \sim 15$ ; le taux de production nucléaire par le cycle CNO est donc beaucoup plus sensible à la température que par le cycle pp. Les équations différentielles en fonction du temps qui traduisent les équilibres Eqs. (1.15)-(1.17) sont données par

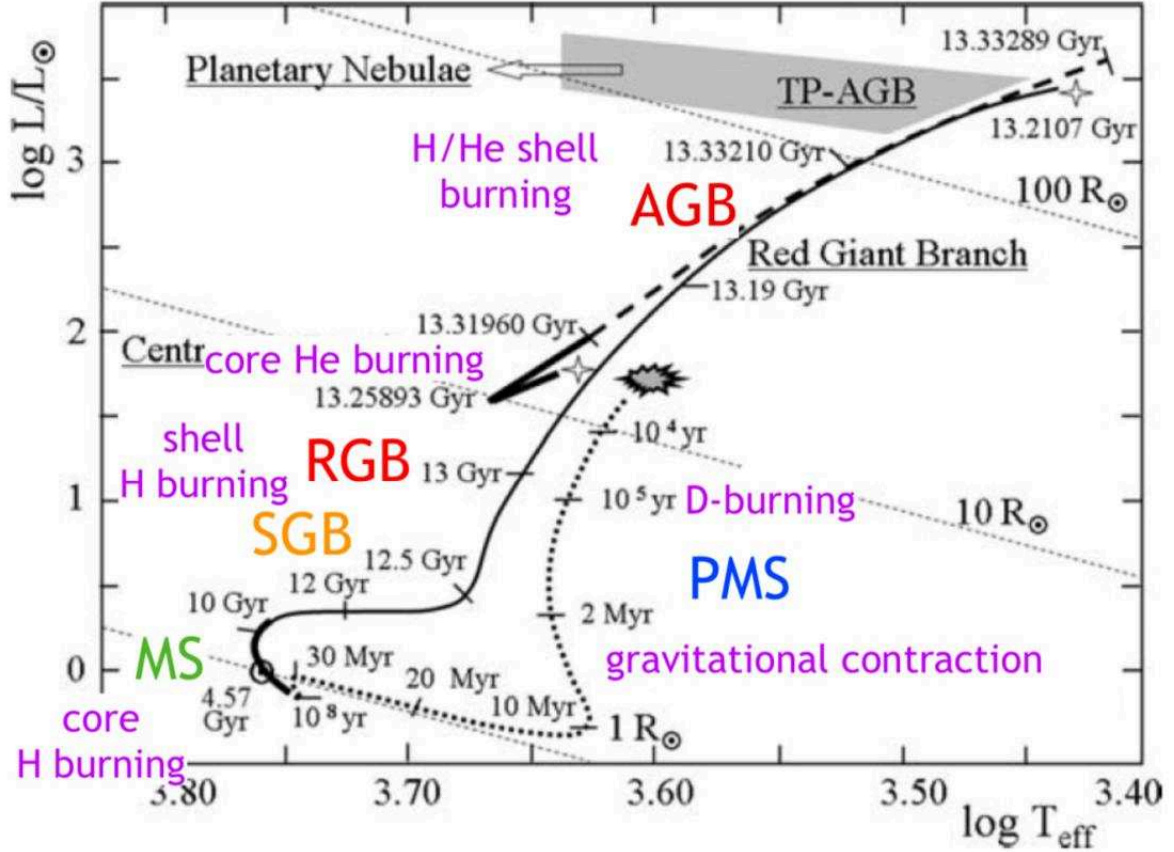
$$\begin{aligned} \frac{dN_d}{dt} &= \lambda_{pp} \frac{(N_p)^2}{2} - \lambda_{pd} N_d N_p \\ \frac{dN_p}{dt} &= 2\lambda_{33} \frac{(N_3)^2}{2} - \lambda_{pd} N_p N_d - \lambda_{pp} \frac{(N_p)^2}{2} \\ \frac{dN_3}{dt} &= \lambda_{pd} N_p N_d - 2\lambda_{33} \frac{(N_3)^2}{2} \\ \frac{dN_4}{dt} &= \lambda_{33} \frac{(N_3)^2}{2} \end{aligned}$$

où les indices 3 et 4 ont été mis pour les abondances de  ${}^3H_e$  et  ${}^4H_e$  respectivement. En prenant en compte les 3 chaînes proton-proton et le bi-cycle CNO, l'évolution stellaire doit résoudre un système de 15 équations différentielles couplées. Selon les conditions physiques, l'évolution de telle ou telle espèce est plus ou moins rapide. L'évolution des espèces chimiques peut présenter de multiples phases de mise en équilibre d'abondance concernant un ensemble particulier d'éléments. L'évolution temporelle de la structure des étoiles est donc dictée en grande partie par l'évolution de la composition chimique sous l'effet des réactions nucléaires.

#### 1.2.4 Conditions limites et conditions initiales

La résolution du système d'équations différentielles nécessite la donnée de conditions limites aux bords de l'étoile. Le plus simplement possible, les conditions au centre sont  $m \rightarrow 0$  et  $L \rightarrow 0$ . Les conditions à la surface sont généralement plus complexes. En effet, le milieu devient optiquement mince à la surface et l'équation de diffusion dans Eq. (1.7) n'est plus valide. Des modèles d'atmosphère sont donc utilisés et doivent être raccordés aux régions superficielles de la structure interne de l'étoile.

Pour finir, pour une valeur de  $\alpha_{\text{MLT}}$  donnée, l'évolution et la structure de l'étoile sont finalement entièrement déterminées par la donnée initiale de la masse et de la composition chimique. Ceci constitue le théorème de Vogt-Russell.



**FIGURE 1.1:** Tracé évolutif dans le diagramme Hertzsprung-Russell d'un modèle de  $1 M_{\odot}$  (d'après Lebreton *et al.* 2014a, adapté de Maeder 2009). Les isorayons obtenus suivant Eq. (1.19) sont indiqués par les traits fins pointillés. L'âge de l'étoile est indiqué à différents points du tracé évolutif. La phase de pré-séquence principale (PMS) est représentée par le trait épais pointillé, la séquence principale (MS) par le trait épais continu entre 0.1 et 10 milliards d'années, la phase de sous-géante (SG) et de géante rouge (RGB) en trait continu noir, le red clump où l'hélium fusionne en trait continu noir épais entre 13.25 et 13.32 milliards d'années, et la montée de la branche asymptotique des géantes rouges par les tirets épais noirs.

### 1.3 Évolution et structure interne des étoiles

Bien qu'il repose sur de nombreuses hypothèses simplificatrices, le modèle standard d'évolution stellaire permet de reproduire de façon globale les différentes étapes de la vie d'une étoile ainsi que sa structure interne. Dans la suite, on se focalise sur les étoiles de faible masse ( $0.5 M_{\odot} \lesssim M_{\star} \lesssim 1.8 M_{\odot}$ )<sup>1</sup> et de masse intermédiaire ( $1.8 M_{\odot} \lesssim M_{\star} \lesssim 8 M_{\odot}$ )<sup>2</sup>.

#### 1.3.1 Diagramme Hertzsprung-Russell

La vie d'une étoile est usuellement représentée dans le diagramme Hertzsprung-Russell. Ce diagramme reporte la luminosité (ou la magnitude observée) en fonction de la température effective de l'étoile (voir FIGURE 1.1 pour un exemple). La température effective,  $T_{\text{eff}}$ , est définie comme la température qu'aurait un corps noir avec la même luminosité et le même rayon que l'étoile. Celle-ci

1. La limite inférieure en masse est choisie ici de telle façon à être supérieure à la gamme de masse des étoiles dites de très faible masse complètement convectives, i.e. de masse proche ou inférieure à  $0.4 M_{\odot}$  (e.g., Siess *et al.* 2000), et donc des naines brunes de masse inférieure à environ  $0.08 M_{\odot}$ .

2. Les étoiles de masse initiale supérieure à environ  $8 M_{\odot}$  sont assez massives pour pouvoir démarrer la fusion du carbone dans leurs cœurs et finir leur vie, à masse croissante, sous forme de naines blanches composées de néon et d'oxygène, d'étoiles à neutrons ou encore de trous noirs (e.g., Kippenhahn *et al.* 2012).

vérifie donc la loi de Stefan-Boltzmann, soit

$$L_{\star} = 4\pi R_{\star}^2 \sigma T_{\text{eff}}^4 . \quad (1.19)$$

Le tracé évolutif d'une étoile dans le diagramme Hertzsprung-Russell permet de différencier les différentes phases de sa vie et de mettre en exergue les caractéristiques générales de sa structure interne. Ce type de diagramme a été inventé par Ejnar Hertzsprung et Henry Norris Russell au début du XX<sup>ème</sup> siècle pour l'étude des populations stellaires et de la théorie de l'évolution stellaire. Pour des raisons historiques, l'axe de la température effective pointe vers la gauche. Dans la suite, il va nous servir de support pour décrire brièvement et qualitativement les différents stades évolutifs de la vie des étoiles de masse comprise environ entre  $0.5 M_{\odot}$  et  $8 M_{\odot}$  (e.g., Kippenhahn *et al.* 2012, pour plus de détails).

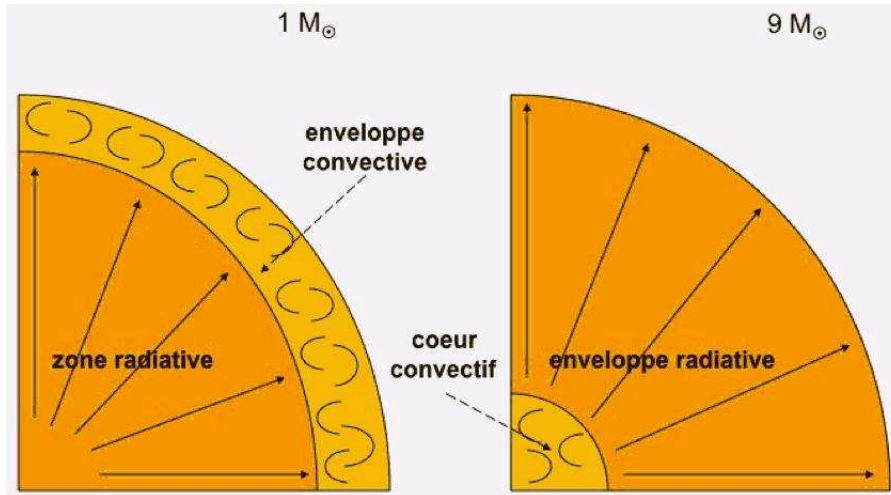
### 1.3.2 Étoiles de faible masse ( $0.5 M_{\odot} \lesssim M_{\star} \lesssim 1.8 M_{\odot}$ )

Les étoiles naissent de l'effondrement gravitationnel d'un nuage moléculaire géant qui se fragmente en plusieurs nuages plus petits. Durant cet effondrement, les nuages s'échauffent par compression et les poussières et molécules se vaporisent. Lorsque la température au cœur du nuage est assez élevée, le nuage n'est plus composé que d'atomes et un équilibre hydrostatique s'établit. Le nuage entre alors en contraction quasi-statique : il s'agit de l'âge zéro de l'étoile à partir duquel la théorie de l'évolution stellaire devient valide. Il s'ensuit une séquence de phases évolutives bien distinctes illustrées sur le diagramme H-R de la FIGURE 1.1 et sur le diagramme de Kippenhahn de la FIGURE 1.3.

**Pré-séquence principale.** À l'âge zéro, l'étoile est en contraction gravitationnelle. Sa température interne est encore assez faible et le milieu est fortement opaque au rayonnement du fait, entre autre, de la photo-ionisation de l'ion  $H^{-}$ . Le transport par rayonnement n'est pas assez efficace et la convection peut se développer. Au début de leur vie, les étoiles sont donc entièrement convectives et homogènes chimiquement. Elles se déplacent alors suivant une ligne quasi verticale à basse température effective dans le diagramme H-R : c'est le tracé d'Hayashi. À ce stade évolutif, le rayon de l'étoile diminue à température effective donnée : suivant Eq. (1.19), sa luminosité doit donc diminuer. D'après l'équilibre hydrostatique et l'équation de continuité, la température centrale est proportionnelle en ordre de grandeur au rapport  $M_{\star}/R_{\star}$ . Ainsi, à mesure que l'étoile se contracte, les couches centrales se réchauffent en vertu du théorème du viriel<sup>3</sup>. Ainsi, un cœur radiatif se développe petit à petit sous une enveloppe convective qui, au contraire, se réduit. Le développement d'un cœur radiatif est d'autant plus rapide que la masse de l'étoile est grande puisque la température centrale est proportionnelle à la masse en ordre de grandeur. Durant cette phase, la température centrale peut atteindre une valeur suffisante pour que des éléments légers (e.g., deutérium, lithium 6, lithium 7) en abondance mineure soient brûlés par des réactions nucléaires. Cette phase s'achève à la ZAMS (*Zero Age Main Sequence*) quand la fusion de l'hydrogène démarre dans le cœur, c'est-à-dire pour une température centrale d'environ  $1.5 \cdot 10^6$  K. Dans le Soleil, les modèles montrent que cette phase dure environ 30 millions d'années, c'est-à-dire de l'ordre de grandeur du temps de Kelvin-Helmholtz.

**Séquence principale.** La séquence principale correspond à la phase où l'hydrogène est transformé en hélium par la fusion nucléaire dans les régions centrales. La fusion de l'hydrogène fournit l'énergie nécessaire pour compenser les pertes radiatives à la surface de l'étoile. Sur la séquence principale, les réactions thermonucléaires sont stables. En effet, la production d'énergie nucléaire

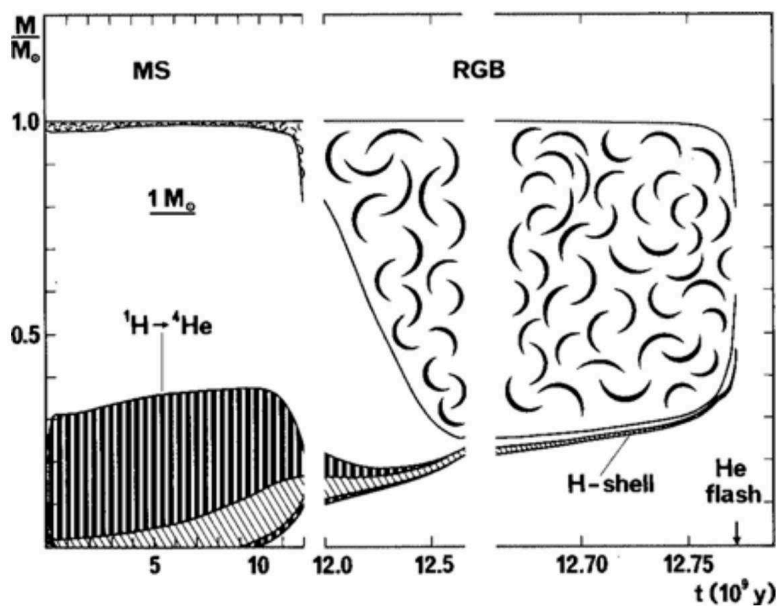
3. Une étoile en équilibre hydrostatique suit le théorème du viriel. Celui-ci stipule que l'énergie cinétique totale (macroscopique et microscopique) du système est égale à la moitié de l'opposé de l'énergie potentielle gravitationnelle. La contraction gravitationnelle diminue l'énergie potentielle : l'énergie cinétique des particules doit donc augmenter, ainsi que la température.



**FIGURE 1.2:** Comparaison de la structure interne d’une étoile de type solaire et d’une étoile plus massive sur la séquence principale (d’après S. Mathis & J.M. Bonnet-Bidaud, 2010. “Le magnétisme fossile des étoiles”. [Image en ligne] [http://irfu.cea.fr/Sap/Phocea/Vie\\_des\\_labos/Ast/ast.php?t=actu&id\\_ast=2932](http://irfu.cea.fr/Sap/Phocea/Vie_des_labos/Ast/ast.php?t=actu&id_ast=2932), consultée le 11/07/2017).

chauffe localement le milieu. Le taux de production d’énergie nucléaire étant proportionnel à  $\rho T^\nu$  avec  $\nu$  assez grand,  $\epsilon_{\text{nuc}}$  augmente. Néanmoins, dans le cas limite d’un gaz parfait, cette augmentation de température mène à une augmentation de pression. Le milieu se dilate et la température diminue :  $\epsilon_{\text{nuc}}$  diminue pour retrouver sa valeur initiale et les couches centrales s’auto-régulent. Les étoiles passent alors la majeure partie de leur vie sur la séquence principale, avec une durée de l’ordre du temps nucléaire. Comme illustré sur la FIGURE 1.2, la structure interne sur la séquence principale dépend de la masse de l’étoile. Les étoiles de masse  $M_\star \lesssim 1.3 M_\odot$  sont composées d’un cœur radiatif et d’une enveloppe convective. Au contraire, les étoiles de masse  $M_\star \gtrsim 1.3 M_\odot$ , elles, sont constituées d’une enveloppe globalement radiative avec un cœur convectif (en surface, une couche convective superficielle de faible masse existe néanmoins). Cette différence provient du cycle de réactions mis en jeu. En effet, pour les plus faibles masses, le fusion de l’hydrogène passe par le cycle pp. Pour les étoiles plus massives, la température est suffisante pour que le cycle CNO l’emporte sur le cycle pp avec des taux de production d’énergie beaucoup plus grands et plus sensibles à la température que le cycle pp. Le gradient de température devient donc plus fort dans le cœur des étoiles massives et le transfert d’énergie est alors assuré par la convection.

**Stades évolués.** Lorsque l’hydrogène central est épuisé, l’étoile quitte la séquence principale pour continuer son chemin sur la branche des sous-géantes. La structure interne est désormais similaire quelle que soit la masse dans l’intervalle considéré. A ce moment, la température centrale n’est pas assez élevée pour que la fusion de l’hélium démarre. La fusion de l’hydrogène en hélium prend alors place dans une fine couche avec une température suffisante, située juste au-dessus d’un cœur d’hélium inerte dont le rayon se contracte et la masse augmente avec le temps. En même temps, la base de la zone convective s’enfonce vers les couches centrales avant de remonter vers la surface (en terme de coordonnées de masse, voir FIGURE 1.3). Là, la base de la zone convective peut atteindre des régions où des réactions nucléaires ont déjà eu lieu. Les produits de ces réactions sont alors redistribués à travers toute la zone convective, changeant ainsi la composition chimique de surface : c’est le premier dragage convectif, plus connu sous le nom anglais *first dredge-up*. Lors de son retrait, la base de la zone convective laisse alors derrière elle un fort gradient de composition chimique dans la couche la plus profonde qu’elle a réussi à atteindre. Parallèlement, l’étoile commence l’ascension de la branche des géantes rouges. Dans cette phase, le cœur d’hélium se contracte alors que le rayon de l’étoile se dilate fortement, jusqu’à 100 fois sa valeur sur la



**FIGURE 1.3:** Diagramme de Kippenhahn pour une étoile de  $1 M_{\odot}$  (d'après Maeder 2009). La masse normalisée à la masse du Soleil est en ordonnée et l'âge en abscisse (en milliards d'années). Les régions nuageuses représentent les zones convectives. Les régions hachurées en diagonale symbolisent les zones où le taux de production d'énergie nucléaire a une valeur entre  $10^{-3}$  et  $10^{-2} \text{ W kg}^{-1}$ , celles hachurées verticalement symbolisent les régions où il est supérieur à  $10^{-2} \text{ W kg}^{-1}$ .

séquence principale; c'est l'effet miroir. En se contractant, la température et la densité du cœur augmentent. L'augmentation de la densité dans le cœur est telle que les électrons sont dégénérés lorsque la température de fusion de l'hélium ( $T = 10^8 \text{ K}$ ) est atteinte. Dans un tel milieu, la pression est indépendante de la température; quand la fusion de l'hélium commence, la production d'énergie fait monter la température. Le taux de production nucléaire étant proportionnel à  $T^{\nu}$  avec  $\nu \sim 17$  à ce stade évolutif, il augmente à son tour en élevant d'autant plus la température. La fusion de l'hélium s'emballe générant une forte hausse de luminosité très brève: c'est le flash de l'hélium. A ce moment précis, la masse du cœur d'hélium est identique quelle que soit la masse initiale de l'étoile dans l'intervalle considéré, du fait des propriétés du gaz dégénéré. Le cœur se dilate alors à cause du fort dégagement d'énergie et la dégénérescence est levée: l'étoile vient alors continuer sa vie en transformant l'hélium en carbone et en oxygène dans son cœur sur une région particulière du diagramme H-R, encore appelée *red clump* en anglais. Toutes les étoiles de masse inférieure à environ  $1.8 M_{\odot}$  avec une métallicité<sup>4</sup> pas trop éloignée de celle du Soleil se retrouvent dans cette même région du diagramme H-R, avec une température proche de  $5000 \text{ K}$  et une luminosité proche de  $50 L_{\odot}$ . En effet, comme il vient d'être dit ci-dessus, la masse du cœur d'hélium est très similaire pour toutes ces étoiles ayant passé le flash de l'hélium dans l'intervalle de masse considéré; elles partagent donc des caractéristiques similaires, dont la luminosité et la température effective. On peut encore noter que la masse limite supérieure des étoiles de faible masse passant le flash de l'hélium, ainsi que leurs caractéristiques sur le *red clump*, dépendent de la métallicité (e.g., voir Girardi 2016, pour plus de détails).

**Fin de vie.** Lorsque l'hélium est épuisé dans les régions centrales alors composées de carbone et d'oxygène, l'étoile évolue sur la branche asymptotique des géantes rouges (AGB) en brûlant l'hélium en couche au-dessus d'un cœur inerte en contraction. La luminosité augmente ainsi que le rayon de la même façon que sur la branche des géantes rouges. Néanmoins, pour les étoiles de masse inférieure à  $8 M_{\odot}$ , la température nécessaire à l'ignition de la fusion du carbone n'est

4. La métallicité est définie comme l'abondance massique de tous les éléments chimiques plus lourds que l'hélium.

jamais atteinte. L'augmentation de luminosité est telle que la pression de radiation pousse les couches externes vers l'extérieur. L'enveloppe est finalement éjectée autour du cœur de carbone et d'oxygène. L'étoile finit alors sa vie sous forme d'une nébuleuse planétaire composée d'une naine blanche centrale de carbone et d'oxygène en lent refroidissement, qui est englobée par un nuage de gaz composé d'hydrogène, d'hélium et d'oxygène ionisés, résidu de l'enveloppe stellaire.

### 1.3.3 Étoiles de masse intermédiaire ( $1.8 M_{\odot} \lesssim M_{\star} \lesssim 8 M_{\odot}$ )

A la différence des étoiles de faible masse, les étoiles de masse intermédiaire, en plus d'évoluer plus rapidement que les autres, démarrent la fusion de l'hélium dans un milieu non-dégénéré. En effet, les couches centrales de ces étoiles sont plus chaudes et moins denses, et la température des électrons peut rester supérieure à la température de Fermi. Ainsi, le flash de l'hélium n'a pas lieu pour ces étoiles et la fusion de l'hélium démarre de façon tempérée. Ces étoiles transitent donc directement de la RGB à une région un peu plus chaude que le *red clump*, et simplement appelée *secondary red clump*. Là, elles transforment leur hélium centrale en carbone et oxygène et finissent leur vie en naines blanches de carbone et d'oxygène, tout comme les étoiles de faible masse.

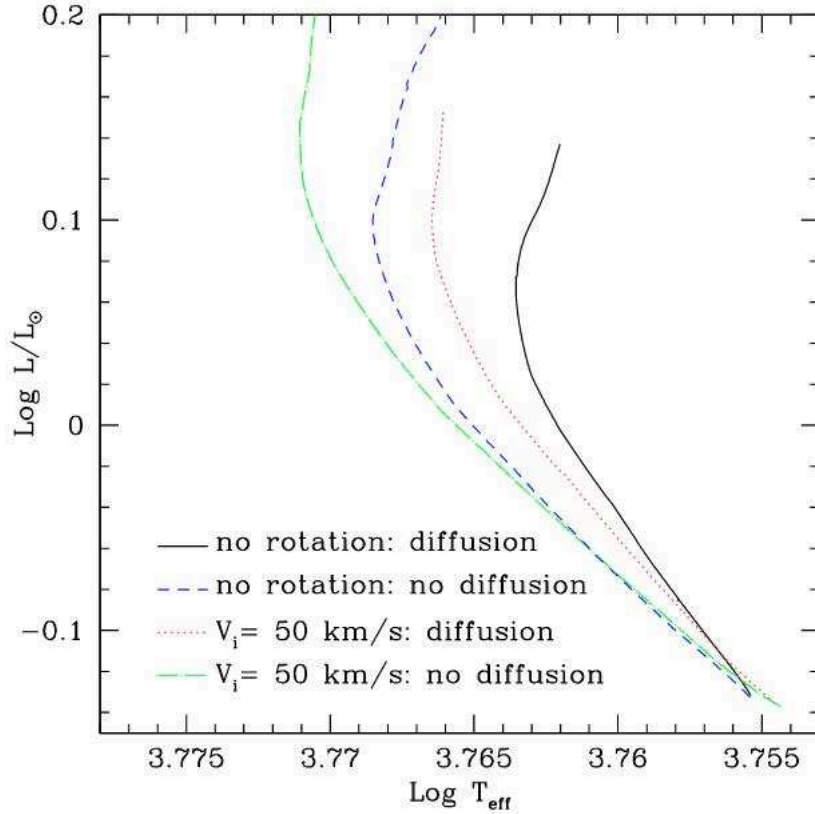
## 1.4 Vers une modélisation plus réaliste : processus non-standard

Le modèle standard donne une vision simplifiée de la vie des étoiles. Bien qu'il soit suffisant pour décrire de façon globale l'évolution stellaire, il est néanmoins limité lorsqu'il s'agit de quantifier avec précision les propriétés stellaires. En effet, différents processus physiques additionnels, dits non-standard, peuvent modifier de façon significative l'évolution et la structure interne des étoiles, et avoir de sérieuses conséquences sur la détermination de leurs propriétés, et notamment de leur âge (e.g., Lebreton *et al.* 2014a). Ceux-ci sont associés en général à des processus de transport. Parmi les plus importants, on peut noter la diffusion microscopique, le mélange turbulent dans les régions aux interfaces entre les zones convectives et radiatives, ainsi que les phénomènes induits par la rotation (e.g., Noels *et al.* 2016).

**Diffusion microscopique.** La diffusion microscopique correspond au transport des éléments chimiques les uns par rapport aux autres, sous l'effet de la gravitation (par différence de masse), du gradient de composition chimique ou de température (e.g., Vauclair & Vauclair 1982). Dans les étoiles assez massives pour que la pression de radiation soit importante, il ne faut pas non plus oublier l'effet des accélérations radiatives (e.g., Michaud 1970). L'évolution temporelle de l'abondance massique du  $i$ -ème élément peut alors s'écrire de façon générale (e.g., Lebreton *et al.* 2014a)

$$\frac{\partial X_i}{\partial t} = \left( \frac{\partial X_i}{\partial t} \right)_{\text{nuc}} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \rho X_i \vec{V}_i \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \rho D_i \frac{\partial X_i}{\partial r} \right), \quad (1.20)$$

où le premier terme du membre de droite provient des réactions nucléaires,  $\vec{V}_i$  est la vitesse microscopique par rapport à l'élément le plus abondant, et  $D_i$  est le coefficient de diffusion associé à d'autres processus turbulents (comme la convection) et/ou diffusifs. Par exemple, le triage gravitationnel, par effet de masse, aura tendance à faire diminuer l'abondance de l'hélium au profit de l'hydrogène dans l'enveloppe convective des étoiles de faible masse. Cela aura notamment des conséquences sur l'opacité de l'enveloppe convective et se répercutera sur la luminosité de l'étoile (e.g., voir FIGURE 1.4), sur la valeur du gradient de température et donc sur l'épaisseur de la zone convective (e.g., Bahcall & Pinsonneault 1992). Autre exemple, dans les étoiles plus massives, le jeu du triage gravitationnel (vers l'intérieur de l'étoile) et des accélérations radiatives (vers l'extérieur de l'étoile) peut provoquer une accumulation d'éléments chimiques tels que le fer dans certaines régions particulières. Là, l'augmentation de l'opacité induite peut donner naissance à une fine couche convective et donc un mélange turbulent efficace des éléments chimiques (e.g., Deal *et al.* 2016).



**FIGURE 1.4:** Tracé évolutif dans le diagramme HR pour des modèles de  $1 M_{\odot}$  (d'après Eggenberger *et al.* 2010). La ligne continue et les tirets correspondent respectivement à des modèles sans rotation calculés avec et sans diffusion microscopique. Les lignes pointillées et en tirets-pointillés indiquent des modèles en rotation, avec une vitesse de rotation initiale de  $50 \text{ km s}^{-1}$ , calculés avec et sans diffusion microscopique respectivement. Les tracés s'arrêtent à la fin de la séquence principale.

Ces exemples montrent la nécessité de considérer la diffusion microscopique dans les modèles pour pouvoir quantifier l'évolution de la composition chimique interne et son impact sur la structure de l'étoile.

**Interfaces convective-radiative.** Un des grands points faibles du modèle standard est lié à la description utilisée pour la convection. Le caractère local de la théorie de la longueur de mélange pose notamment un certain nombre de questions en ce qui concerne le traitement des régions convectives à la frontière avec une zone radiative. En effet, dans cette théorie, la vitesse des éléments convectifs et le gradient de température dépendent des quantités physiques définies dans une même couche. En conséquence, un élément fluide doit arrêter sa course au niveau de la limite donnée par le critère de Schwarzschild. Or, dans la réalité, il peut pénétrer par inertie sur une certaine distance dans les couches radiatives adjacentes stablement stratifiées : c'est ce que l'on nomme l'overshooting (e.g., Ditrans 2009). Ce phénomène a déjà été observé et étudié dans des simulations numériques (e.g., Brummell *et al.* 2002; Rogers *et al.* 2006; Pratt *et al.* 2017). Dans les modèles d'évolution stellaire 1D, ce processus est pris en compte en autorisant l'extension de la zone convective sur une certaine distance, notée  $d_{\text{ov}}$ , au-delà du niveau où le critère de Schwarzschild est vérifié. La distance caractéristique d'extension est supposée être de la forme

$$d_{\text{ov}} = \alpha_{\text{ov}} \min(H_p, r) , \quad (1.21)$$

où  $\alpha_{\text{ov}}$  est le paramètre d'overshooting. Différentes prescriptions analytiques existent. Certaines proposent par exemple une simple extension adiabatique de la zone convective (e.g., Zahn 1991)

ou encore une transition exponentielle associée à un coefficient de diffusion turbulent à prendre en compte dans Eq. (1.20) (e.g., Zhang & Li 2012). Ce processus est d'importance majeure sur la composition chimique des étoiles et leur évolution. Il permet par exemple de réalimenter les cœurs convectifs en combustible. Les réactions nucléaires dans les régions centrales peuvent donc être entretenues plus longtemps, résultant en un allongement du temps de vie sur la séquence principale pour les étoiles de masse supérieure à  $1.3 M_{\odot}$ .

**Rotation et processus associés.** Lors du processus de formation stellaire, les fragments du nuage moléculaire originel possèdent une vitesse de rotation initiale de très faible valeur, mais qui, par conservation du moment cinétique lors de la phase d'effondrement gravitationnel, peut résulter en de plus ou moins fortes vitesses de rotation au début de la vie des étoiles. Dans le cas des rotateurs rapides, la force centrifuge est assez forte pour aplatir de façon notable la forme de l'étoile et remettre en question l'hypothèse de symétrie sphérique (e.g., Maeder 2009; Reese 2015). De plus, même dans le cas des rotateurs faibles où la distorsion de la structure à l'équilibre par la force centrifuge peut être négligée, la rotation peut avoir un impact sur la vie de l'étoile et doit être prise en compte (e.g., Maeder & Meynet 2000; Eggenberger *et al.* 2010; Eggenberger 2015; Meynet *et al.* 2016). En effet, nous verrons plus loin que la rotation induit différents processus de transport internes. Ceux-ci vont influencer sur la composition chimique de surface ou la position dans le diagramme H-R à un âge donné (voir FIGURE 1.4). Ils peuvent aussi, de façon similaire à l'overshooting, réapprovisionner les cœurs convectifs en hydrogène, augmentant de ce fait le temps de vie sur la séquence principale de ces étoiles. En parallèle, la prise en compte de la rotation sur la structure interne nécessite aussi, dans un souci de cohérence, de suivre l'évolution du moment cinétique interne. Ceci doit encore faire appel à d'autres processus additionnels (voir Chapitre 4).

Tous ces processus non-standard ont une influence sur la structure interne des étoiles et sur leurs propriétés intrinsèques observables. Ils vont donc modifier le tracé évolutif des étoiles dans le diagramme H-R (e.g., voir FIGURE 1.4 pour la rotation et la diffusion microscopique). En particulier, la datation des étoiles basée sur les observables classiques (luminosité, température effective et abondances) en est significativement affectée avec une incertitude sur l'estimation de l'âge qui peut dépasser les 30%, et ce en ne considérant l'effet que d'un seul processus à la fois (e.g., Lebreton *et al.* 2014a; Meynet *et al.* 2016). Une meilleure compréhension de ces processus nécessite de nombreuses contraintes et un moyen efficace de sonder les régions internes. C'est ce que l'étude des oscillations stellaires a le potentiel de nous procurer.





## Chapitre 2

# Apports de l'astérosismologie à l'étude des intérieurs stellaires

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Théorie des oscillations linéaires adiabatiques dans les étoiles . . . . .</b>	<b>18</b>
2.1.1	Structure à l'équilibre . . . . .	18
2.1.2	Perturbations linéaires de l'état d'équilibre . . . . .	18
2.1.3	Équations d'oscillation linéaires adiabatiques . . . . .	19
2.1.3.a	Équations perturbées et approximation adiabatique . . . . .	19
2.1.3.b	Hypothèses simplificatrices . . . . .	20
2.1.3.c	Équation d'onde du second ordre . . . . .	20
<b>2.2</b>	<b>Modes propres d'oscillation dans les étoiles de type solaire . . . . .</b>	<b>24</b>
2.2.1	Diagramme de propagation . . . . .	24
2.2.2	Expression asymptotique des modes de pression et grande séparation . . .	27
2.2.3	Expression asymptotique des modes de gravité et espacement en période .	29
2.2.4	Spectre observé et fréquence au maximum de puissance . . . . .	30
<b>2.3</b>	<b>Relations d'échelle : lien entre oscillation et paramètres stellaires . .</b>	<b>32</b>
<b>2.4</b>	<b>Contraintes sur la structure interne : quelques exemples . . . . .</b>	<b>33</b>
2.4.1	Ensemble des fréquences individuelles . . . . .	33
2.4.2	Glitch et localisation de régions à fort gradient . . . . .	33
2.4.3	Splittings rotationnels . . . . .	37

---

A la suite d'une perturbation, une étoile peut osciller autour de son état d'équilibre. Les propriétés des oscillations dépendent des propriétés du milieu stellaire ; leur observation nous permet donc de sonder les couches profondes de l'étoile, inaccessibles en temps normal. Dans ce chapitre, la théorie des oscillations stellaires est introduite. Un certain nombre d'hypothèses simplificatrices sera utilisé pour rendre le problème soluble analytiquement. Dans un premier temps, les propriétés des modes d'oscillation seront analysées. Dans un deuxième temps, l'apport des observations sismiques à l'étude de intérieurs stellaires sera discuté. En se basant sur des arguments simples, on montrera que l'astérosismologie peut fournir de l'information sur les caractéristiques intrinsèques des étoiles, et que des diagnostics sismiques appropriés peuvent apporter des contraintes aussi bien sur les propriétés stellaires fondamentales (masse, rayon), que sur la structure interne (e.g., rotation, interface radiative-convective, etc.).

## 2.1 Théorie des oscillations linéaires adiabatiques dans les étoiles

### 2.1.1 Structure à l'équilibre

A la différence du Chapitre 1, l'existence possible d'un écoulement dans l'état d'équilibre caractérisé par un champ de vitesse  $\vec{V}_0(\vec{r})$  est prise en compte. Les équations de continuité, de l'équilibre hydrostatique et de Poisson sont alors données par

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho_0 \vec{V}_0) = 0 \quad (2.1)$$

$$\rho(\vec{V}_0 \cdot \vec{\nabla}) \vec{V}_0 = -\vec{\nabla} p_0 - \rho \vec{\nabla} \Psi_0 \quad (2.2)$$

$$\Delta \Psi_0 = 4\pi G \rho_0, \quad (2.3)$$

où  $\vec{\nabla}$  est l'opérateur nabla, et  $\rho_0$ ,  $\psi_0$  et  $p_0$  représentent la densité, le potentiel gravitationnel et la pression à l'équilibre. Pour être complet, ces deux équations doivent être complétées par l'équation de conservation de l'énergie et une équation d'état  $p(\rho, T, X_i)$ , comme rappelé dans le Chapitre 1.

### 2.1.2 Perturbations linéaires de l'état d'équilibre

Supposons qu'à un moment de son évolution, une étoile soit légèrement perturbée de sa position d'équilibre. Le temps de réponse à cette perturbation doit être de l'ordre de l'échelle de temps dynamique, c'est-à-dire très inférieur aux échelles de temps caractéristiques de l'évolution stellaire. L'étoile va donc osciller autour de son état d'équilibre. Sur un intervalle de temps de l'ordre de plusieurs périodes d'oscillation, la structure à l'équilibre peut de plus être supposée indépendante du temps.

Dans la suite, on note  $\vec{\xi}$  le vecteur déplacement d'un élément fluide par rapport à sa position d'équilibre, notée  $\vec{r}_0$ , tel que

$$\vec{\xi}(\vec{r}, t) = \vec{r} - \vec{r}_0. \quad (2.4)$$

La perturbation Eulérienne  $X'$  de toute quantité physique  $X$  est égale à

$$X'(\vec{r}, t) = X(\vec{r}, t) - X_0(\vec{r}), \quad (2.5)$$

où  $X_0$  est la valeur à l'équilibre. Dans l'approximation d'oscillations linéaires, la perturbation Lagrangienne est quant à elle donnée par

$$\begin{aligned} \delta X(\vec{r}, t) &= X(\vec{r} + \vec{\xi}, t) - X_0(\vec{r}, t) \\ &\approx X'(\vec{r}, t) + (\vec{\xi} \cdot \vec{\nabla}) X_0(\vec{r}). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Dans le cas général d'un état d'équilibre caractérisé par une vitesse d'écoulement  $\vec{V}_0$ , la vitesse totale  $\vec{V}_{\text{tot}} = \vec{V}_0 + \vec{v}$ , où  $\vec{v}$  est la perturbation Eulérienne du champ de vitesse, est égale à

$$\vec{V}_{\text{tot}} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad (2.7)$$

où  $d/dt$  est la dérivée Lagrangienne, de telle sorte que, pour toute quantité associée à l'onde  $X'$  (ou  $\delta X$ ), on obtienne au premier ordre

$$\frac{dX'}{dt} = \frac{\partial X'}{\partial t} + (\vec{V}_{\text{tot}} \cdot \vec{\nabla}) X' \approx \frac{\partial X'}{\partial t} + (\vec{V}_0 \cdot \vec{\nabla}) X'. \quad (2.8)$$

Il est aussi utile pour la suite de définir la perturbation Lagrangienne de vitesse  $\delta \vec{v}$  comme

$$\begin{aligned} \delta \vec{v} &= \vec{V}_{\text{tot}}(\vec{r}_0 + \vec{\xi}) - \vec{V}_0(\vec{r}_0) \\ &= \frac{d\vec{r}}{dt} - \frac{d\vec{r}_0}{dt} = \frac{d\vec{\xi}}{dt} \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\approx \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t} + (\vec{V}_0 \cdot \vec{\nabla}) \vec{\xi}. \quad (2.10)$$

Selon Eq. (2.6), la perturbation Eulérienne de vitesse est alors reliée au vecteur déplacement par

$$\vec{v} = \delta\vec{v} - \left( \vec{\xi} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{V}_0 . \quad (2.11)$$

### 2.1.3 Équations d'oscillation linéaires adiabatiques

#### 2.1.3.a Équations perturbées et approximation adiabatique

En ne gardant que les termes du premier ordre et en oubliant dans la suite l'indice 0 pour toutes les variables à l'équilibre exceptée la vitesse de l'écoulement, les équations perturbées de conservation de l'impulsion et de Poisson sont égales à

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left( \vec{V}_0 \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{v} + \left( \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{V}_0 = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p' - \frac{\rho'}{\rho^2} \vec{\nabla} p - \vec{\nabla} \Psi' \quad (2.12)$$

$$\Delta \Psi' = 4\pi G \rho' , \quad (2.13)$$

où Eqs. (2.2) et (2.3) ont été utilisées. Pour aller plus loin, il est intéressant de réécrire l'équation de continuité perturbée d'un point de vue Lagrangien. Au premier ordre, celle-ci peut s'écrire en utilisant Eq. (2.8) comme

$$\begin{aligned} \frac{d\delta\rho}{dt} + \delta\rho \vec{\nabla} \cdot \vec{V}_0 + \rho \vec{\nabla} \cdot \delta\vec{v} &= 0 \\ \frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + \vec{V}_0 \cdot \vec{\nabla} \delta\rho + \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\delta\rho}{\rho} \rho \vec{V}_0 \right) - \vec{V}_0 \cdot \vec{\nabla} \delta\rho + \rho \vec{\nabla} \cdot \delta\vec{v} &= 0 \\ \frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + \rho \vec{V}_0 \cdot \vec{\nabla} \left( \frac{\delta\rho}{\rho} \right) + \frac{\delta\rho}{\rho} \vec{\nabla} \cdot \left( \rho \vec{V}_0 \right) + \rho \vec{\nabla} \cdot \delta\vec{v} &= 0 . \end{aligned}$$

En divisant par  $\rho$  la dernière équation et en utilisant Eqs. (2.1) et (2.9), l'équation de continuité linéarisée peut alors s'écrire comme

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\delta\rho}{\rho} \right) + \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{d\vec{\xi}}{dt} \right) = 0 . \quad (2.14)$$

Enfin, les oscillations sont supposées adiabatiques. Cette hypothèse joue le rôle de conservation de l'énergie. En d'autres mots, les échanges de chaleur entre le milieu environnant et tout élément fluide déplacé de sa position d'équilibre sont nuls. Cela revient à faire l'hypothèse que la variation Lagrangienne d'entropie spécifique est nulle, soit  $\delta S = 0$ . Cela permet de relier les perturbations Lagrangiennes de pression et de densité par

$$\delta p = c^2 \delta\rho , \quad (2.15)$$

où  $c = (\Gamma_1 p / \rho)^{1/2}$  est la vitesse du son, avec  $\Gamma_1 = (\partial \ln p / \partial \rho)_{S,\mu}$  le premier indice adiabatique. En terme de variables Eulériennes, cela se traduit par la relation

$$\frac{p'}{p} = \Gamma_1 \left( \frac{\rho'}{\rho} + \vec{\xi} \cdot \vec{A} \right) , \quad (2.16)$$

où l'on a défini le discriminant de Schwarzschild

$$\vec{A} = \vec{\nabla} \ln \rho - \frac{1}{\Gamma_1} \vec{\nabla} \ln p . \quad (2.17)$$

En anticipant sur la suite, ce dernier nous permet de définir la fréquence caractéristique de Brunt-Väisälä,  $N$ , telle que son carré soit égal à

$$N^2 = \vec{g} \cdot \vec{A} . \quad (2.18)$$

### 2.1.3.b Hypothèses simplificatrices

Dans la suite, nous utiliserons les hypothèses suivantes pour pouvoir traiter le problème de façon analytique et de façon simple :

1. *Rotation axisymétrique radiale* : on considère une étoile en rotation axisymétrique, ne dépendant que de la coordonnée radiale et caractérisée par le vecteur rotation  $\vec{\Omega} = \Omega(r)\vec{e}_z$ , où  $\vec{e}_z$  est le vecteur unitaire suivant la direction  $z$  dans un système de coordonnées Cartésien dont l'origine correspond au centre de l'étoile. La vitesse de rotation est alors égale à (e.g., Unno *et al.* 1989)

$$\vec{V}_0 = \vec{r} \wedge \vec{\Omega} = r \sin \theta \Omega \vec{e}_\varphi, \quad (2.19)$$

où  $\vec{e}_\varphi$  est le vecteur unitaire suivant la direction azimutale dans un système de coordonnées sphériques.

2. *Limite des rotateurs lents*<sup>1</sup> : la rotation est supposée assez faible pour que l'effet de la force centrifuge sur la structure interne puisse être négligé. L'étoile à l'équilibre conserve donc la symétrie sphérique et les quantités physiques internes restent essentiellement radiales. L'équilibre hydrostatique est alors donné par la relation habituelle,  $dp/dr \approx -\rho g$ .
3. *Approximation de Cowling* : la perturbation du potentiel gravitationnel est négligée (i.e.,  $\Psi' \approx 0$ ). Cette hypothèse est notamment valide pour les oscillations dont la longueur d'onde horizontale ou radiale est très faible par rapport à l'échelle de variation de la structure à l'équilibre. Cette approximation simplifie grandement l'analyse des oscillations stellaires puisqu'elle permet de réduire le système d'équations du quatrième ordre représenté par Eqs. (2.12), (2.13), (2.14) et (2.15) à un système d'équation du second ordre. Cette hypothèse a été proposée en premier par Cowling (1941) puis vérifiée numériquement dans le cas des hauts ordres radiaux (e.g., Christensen-Dalsgaard 1991). Nous verrons plus loin qu'une résolution analytique des équations d'onde prenant en compte la perturbation du potentiel gravitationnel est néanmoins possible dans le cas des oscillations radiales et dipolaires.
4. *Entraînement des ondes par le fluide* : enfin, l'influence de la force de Coriolis et du gradient de rotation sur la dynamique des oscillations est négligée. Seul l'entraînement par la rotation est pris en compte, c'est-à-dire le changement de la fréquence intrinsèque de l'onde (c'est-à-dire la fréquence dans le référentiel local en co-rotation) par effet Doppler. Cette hypothèse est valable si la fréquence intrinsèque des oscillations est plus de deux fois supérieure au taux de rotation local.

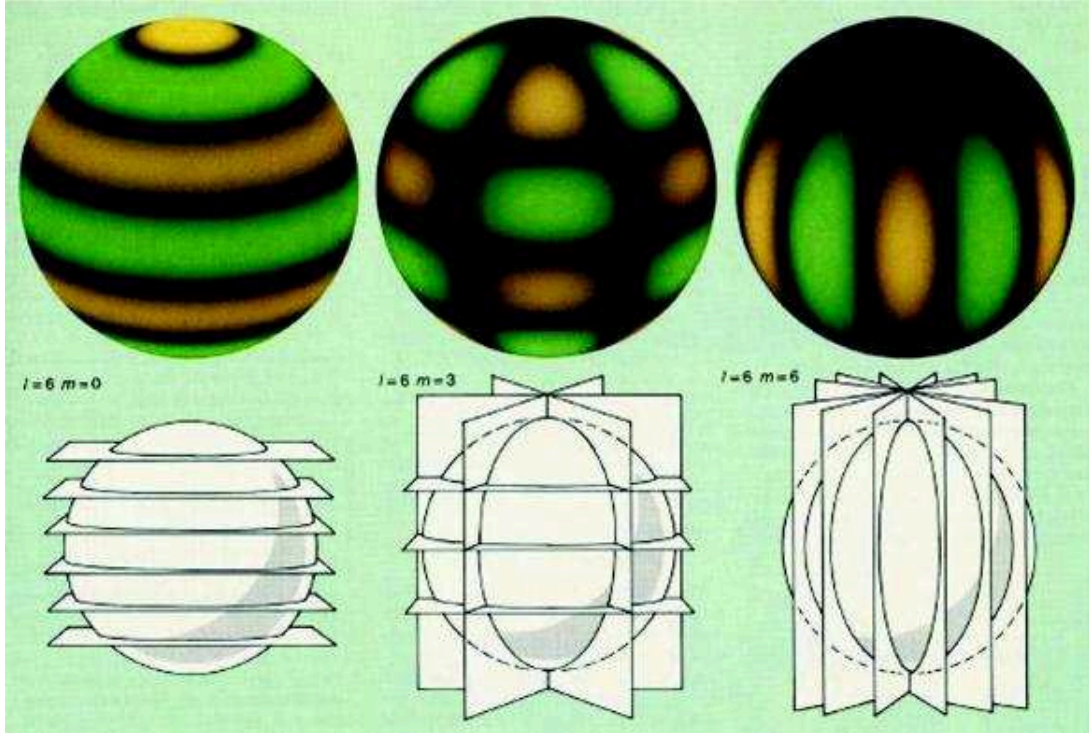
Ces différentes approximations vont nous permettre de résoudre analytiquement l'équation d'onde en suivant une méthode similaire à celle utilisée par Osaki (1975) et Unno *et al.* (1989), mais en prenant en compte la variation de la fréquence intrinsèque de l'onde par effet Doppler.

### 2.1.3.c Équation d'onde du second ordre

Sous les hypothèses précédentes, il est possible de mettre les équations d'oscillation linéarisées sous la forme d'une équation différentielle linéaire du second ordre pour laquelle de nombreuses méthodes de résolution analytiques existent. On suit ici le développement proposé par Osaki (1975) et Unno *et al.* (1989). D'abord, les approximations précédentes permettent de réduire le système

---

1. Au contraire, les rotateurs rapides sont des étoiles avec une vitesse de rotation proche de la vitesse critique, i.e. la vitesse de rotation nécessaire pour que la force centrifuge contrebalance l'attraction gravitationnelle (e.g., Maeder 2009). Par exemple, la vitesse de rotation du Soleil est d'environ  $1.9 \text{ km s}^{-1}$  en surface, i.e. environ 0.5% de sa vitesse critique (rotateur lent), tandis que la vitesse de rotation (projetée le long de la ligne de visée) à la surface de l'étoile Altaïr est proche de  $240 \text{ km s}^{-1}$  (e.g., Bouvier 2013, pour une revue sur la mesure de la rotation stellaire), i.e. estimée à plus de 80% de sa vitesse critique (rotateur rapide). La modélisation des rotateurs rapides et le calcul de leurs oscillations sont en général complexes et nécessitent de traiter le problème en 2D (e.g., Reese 2015).



**FIGURE 2.1:** Représentation des harmoniques sphériques  $Y_{l,m}$  pour  $l = 6$  et différentes valeurs de  $m$ . Les parties sombres représentent les zéros et les zones colorées symbolisent les zones positives ou négatives (Crédit : J. W. Leibacher, National Solar Observatory).

d'équations à résoudre à (e.g., Unno *et al.* 1989)

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{\nabla} p' - \rho' \vec{g} = 0 \quad (2.20)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\delta \rho}{\rho} \right) + \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{d\vec{\xi}}{dt} \right) = 0 \quad (2.21)$$

$$\delta p - c^2 \delta \rho = 0, \quad (2.22)$$

où  $d/dt = \partial/\partial t + \Omega \partial/\partial \varphi$  est la dérivée par rapport au temps dans un référentiel en co-rotation avec l'étoile, et  $\vec{g} = -\vec{\nabla} \Psi = -g \vec{e}_r$  est l'accélération gravitationnelle. Le vecteur déplacement associé à l'onde est développé sur la base généralisée des harmoniques sphériques (voir FIGURE 2.1 pour une illustration) tel que

$$\begin{aligned} \vec{\xi}(\vec{r}, t) = & \sum_{l,m} \xi_{r,l,m}(r, t) Y_l^m(\theta, \phi) \vec{e}_r + \xi_{P,l,m}(r, t) r \vec{\nabla} Y_l^m(\theta, \phi) \\ & + \xi_{T,l,m}(r, t) \vec{\nabla} \wedge [Y_l^m(\theta, \phi) r \vec{e}_r], \end{aligned} \quad (2.23)$$

où  $(r, \theta, \phi)$  sont les coordonnées sphériques,  $l$  est le degré angulaire,  $m$  est le nombre azimutal,  $\vec{e}_r$  est le vecteur radial unitaire, et  $\xi_{r,l,m}$ ,  $\xi_{P,l,m}$  et  $\xi_{T,l,m}$  sont respectivement les composantes radiale, poloïdale et toroïdale du champ de déplacement associé à l'onde. De la même façon, les perturbations Eulériennes de pression ou de densité sont décomposées sur la base des harmoniques sphériques, comme par exemple pour la perturbation de pression,

$$p'(\vec{r}, t) = \sum_{l,m} p'_{l,m}(r, t) Y_l^m(\theta, \phi). \quad (2.24)$$

En prenant la transformée de Fourier<sup>2</sup> de Eqs. (2.20)-(2.22) et en utilisant le fait que les dérivées par rapport aux coordonnées spatiales commutent avec la transformée de Fourier, on obtient

$$-\hat{\sigma}^2 \hat{\xi} + \frac{\vec{\nabla} \hat{p}'}{\rho} - \frac{\hat{\rho}'}{\rho} \vec{g} = 0 \quad (2.25)$$

$$\frac{\delta \hat{\rho}}{\rho} + \vec{\nabla} \cdot \hat{\xi} = 0 \quad (2.26)$$

$$\delta \hat{\rho} = \hat{\rho}' + \hat{\xi}_r \frac{d\rho}{dr} = \delta \hat{p}/c^2 = (\hat{p}' - \rho g \hat{\xi}_r)/c^2, \quad (2.27)$$

où  $\hat{\sigma} = \sigma - m\Omega$  est la fréquence intrinsèque de l'onde modifiée par l'effet Doppler relativement à un référentiel inertiel, c'est-à-dire telle que mesurée dans un référentiel local en co-rotation avec l'étoile, et  $\xi_r$  est la composante radiale du déplacement associé à l'onde. La partie horizontale de Eq. (2.25) permet de relier le champ de déplacement horizontal à la perturbation de pression  $\hat{p}'_{l,m}$  par

$$\hat{\xi}_h = \frac{1}{\rho \hat{\sigma}^2} \vec{\nabla}_\perp \hat{p}' = \sum_{l,m} \frac{p'_{l,m}(r,t)}{\rho \hat{\sigma}^2} \vec{\nabla}_\perp Y_l^m(\theta, \phi), \quad (2.28)$$

avec  $\vec{\nabla}_\perp$  l'opérateur nabla suivant la direction horizontale. Par identification avec Eq. (2.23), on en déduit que la composante toroïdale du déplacement est nulle quels que soient  $l$  et  $m$ , soit  $\xi_{T,l,m} = 0$ . Le déplacement horizontal est donc purement poloïdal et sa magnitude est notée pour tout  $l$  et  $m$

$$\xi_{h,l,m} \equiv \xi_{P,l,m} = \frac{p'_{l,m}(r,t)}{\rho r \hat{\sigma}^2}. \quad (2.29)$$

Pour aller plus loin, on procède de la même manière que Unno *et al.* (1989, voir Eq. 13.40). On prend la divergence horizontale de Eq. (2.25), on remplace la divergence horizontale du vecteur déplacement à l'aide de Eq. (2.26), puis on exprime  $\hat{\delta}\rho$  en fonction de  $p'$  suivant Eq. (2.27), de façon à obtenir

$$\frac{\hat{p}'}{\Gamma_1 p} - \frac{g}{c^2} \hat{\xi}_r + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \hat{\xi}_r) + \frac{1}{\rho \hat{\sigma}^2} \vec{\nabla}_\perp^2 \hat{p}' = 0. \quad (2.30)$$

De façon similaire, en utilisant Eq. (2.27) pour exprimer  $\hat{\rho}'$  en fonction de  $\hat{p}'$ , la composante radiale de Eq. (2.25) peut s'écrire

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{p}'}{\partial r} + \frac{g}{\rho c^2} \hat{p}' + g \left( \frac{1}{\Gamma_1} \frac{d \ln p}{dr} - \frac{d \ln \rho}{dr} - \frac{\hat{\sigma}^2}{g} \right) \hat{\xi}_r = 0. \quad (2.31)$$

Enfin, le système d'équations linéaire du premier ordre pour les variables  $\hat{\xi}_{r,l,m}(r, \omega)$  et  $\hat{p}'_{l,m}(r, \omega)$  est obtenu en utilisant la décomposition en harmoniques sphériques suivant Eq. (2.24) et en projetant sur  $Y_l^m(\theta, \phi)$  pour aboutir à

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \hat{\xi}_{r,l,m}) - \frac{g}{c^2} \hat{\xi}_{r,l,m} + \left( 1 - \frac{S_l^2}{\hat{\sigma}^2} \right) \frac{\hat{p}'_{l,m}}{\rho c^2} = 0 \quad (2.32)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{d \hat{p}'_{l,m}}{dr} + \frac{g}{\rho c^2} \hat{p}'_{l,m} + (N^2 - \hat{\sigma}^2) \hat{\xi}_{r,l,m} = 0, \quad (2.33)$$

2. La transformée de Fourier d'un champ vectoriel  $\vec{X}(\vec{r}, t)$  est définie par

$$\hat{X}(\vec{r}, \sigma) = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{X}(\vec{r}, t) e^{-i\sigma t} dt,$$

où  $i$  est le nombre imaginaire pur et  $\sigma$  est la pulsation de l'onde par rapport à un référentiel inertiel.

où  $S_l$  et  $N$  sont respectivement les fréquences de Lamb et de Brunt-Väisälä données par

$$S_l^2 = \frac{l(l+1)c^2}{r^2} \quad (2.34)$$

$$N^2 = g \left( \frac{1}{\Gamma_1} \frac{d \ln p}{dr} - \frac{d \ln \rho}{dr} \right). \quad (2.35)$$

Pour la suite, il peut être utile de réécrire la fréquence de Brunt-Väisälä comme

$$N^2 = \frac{g\delta}{H_p} (\nabla_{\text{ad}} - \nabla + \frac{\varphi}{\delta} \nabla_{\mu}), \quad (2.36)$$

où on a utilisé les quantités thermodynamiques suivantes (e.g. Maeder 2009; Kippenhahn *et al.* 2012)

$$\delta = - \left( \frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T} \right)_{p,\mu}, \quad \varphi = \left( \frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln \mu} \right)_{p,T} \quad \text{et} \quad \nabla_{\mu} = \left( \frac{d \ln \mu}{d \ln p} \right). \quad (2.37)$$

En suivant Unno *et al.* (1989, Section 15.1), le changement de variable suivant

$$y_1 = r^2 \hat{\xi}_{r,l,m} \exp \left( - \int_0^r \frac{g}{c^2} dr \right) \quad (2.38)$$

$$y_2 = \frac{\hat{p}'_{l,m}}{\rho} \exp \left( - \int_0^r \frac{N^2}{g} dr \right), \quad (2.39)$$

est utilisé pour transformer Eqs. (2.32) et (2.33) sous la forme canonique

$$\frac{dy_1}{dr} = q_1 y_2 \quad (2.40)$$

$$\frac{dy_2}{dr} = q_2 y_1, \quad (2.41)$$

avec

$$q_1 = h(r) \frac{r^2}{c^2} \left( \frac{S_l^2}{\hat{\sigma}^2} - 1 \right) \quad (2.42)$$

$$q_2 = \frac{\hat{\sigma}^2}{r^2 h(r)} \left( 1 - \frac{N^2}{\hat{\sigma}^2} \right) \quad (2.43)$$

$$h(r) = \exp \left[ \int_0^r \left( \frac{N^2}{g} - \frac{g}{c^2} \right) dr \right]. \quad (2.44)$$

Enfin, pour retrouver une équation d'onde du second ordre dans sa forme la plus usuelle, on dérive d'abord Eq. (2.40) par rapport à  $r$  puis on exprime  $y_2$  et sa dérivée en fonction de  $y_1$  et de sa dérivée par le biais de Eqs. (2.40)-(2.41). On procède d'une manière similaire à partir cette fois de Eq. (2.41). Pour finir, on procède au changement de variable

$$v_{l,m}(r) = |q_1|^{-1/2} y_1 = \left( \frac{\rho}{\rho_c} \right)^{1/2} r c \left| \frac{S_l^2}{\hat{\sigma}^2} - 1 \right|^{-1/2} \hat{\xi}_{r,l,m} \quad (2.45)$$

$$w_{l,m}(r) = |q_2|^{-1/2} y_2 = (\rho_c \rho)^{-1/2} r |N^2 - \hat{\sigma}^2|^{-1/2} \hat{p}'_{l,m}, \quad (2.46)$$

avec  $\rho_c$  la densité au centre de l'étoile, ce qui mène aux deux équations suivantes du second ordre pour  $v_{l,m}$  et pour  $w_{l,m}$

$$\frac{d^2 v_{l,m}}{dr^2} + [k_r^2 - f(q_1)] v_{l,m} = 0 \quad \text{si } q_1 \neq 0 \quad (2.47)$$

$$\frac{d^2 w_{l,m}}{dr^2} + [k_r^2 - f(q_2)] w_{l,m} = 0 \quad \text{si } q_2 \neq 0, \quad (2.48)$$



où  $k_r^2$  est donnée par

$$k_r^2 = -q_1 q_2 = \frac{\hat{\sigma}^2}{c^2} \left( \frac{S_l^2}{\hat{\sigma}^2} - 1 \right) \left( \frac{N^2}{\hat{\sigma}^2} - 1 \right), \quad (2.49)$$

et la fonction  $f$  est définie par

$$f(X) = |X|^{1/2} \frac{d^2 |X|^{-1/2}}{dr^2} = -\frac{1}{2X} \frac{d^2 X}{dr^2} + \frac{3}{4} \left( \frac{d \ln |X|}{dr} \right)^2. \quad (2.50)$$

Pour compléter Eqs. (2.47) et (2.48), les variables  $v_{l,m}$  et  $w_{l,m}$  sont reliées l'une à l'autre par Eqs. (2.40) et (2.41), c'est-à-dire

$$v_{l,m}(r) = \text{sgn}(\hat{\sigma}^2 - N^2) |k_r|^{-1} \left( \frac{dw_{l,m}}{dr} + \frac{1}{2} \frac{d \ln |q_2|}{dr} \right) \quad (2.51)$$

$$w_{l,m}(r) = \text{sgn}(S_l^2 - \hat{\sigma}^2) |k_r|^{-1} \left( \frac{dv_{l,m}}{dr} + \frac{1}{2} \frac{d \ln |q_1|}{dr} \right). \quad (2.52)$$

L'ensemble des équations (2.45)-(2.52) va nous permettre d'étudier les propriétés des oscillations stellaires dans les sections et chapitres suivants.

## 2.2 Modes propres d'oscillation dans les étoiles de type solaire

### 2.2.1 Diagramme de propagation

Dans la suite, on se place dans le cas où la longueur d'onde radiale des oscillations est beaucoup plus petite que la distance caractéristique de variation des quantités à l'équilibre qui doit être de l'ordre de  $H_p$ , l'échelle de hauteur de pression. Cela nous autorise donc en première approximation à négliger les fonctions  $f(q_1)$  et  $f(q_2)$  dans Eqs. (2.47) et (2.48), puisqu'en ordre de grandeur  $f(q_1) \sim 1/H_p^2 \sim f(q_2)$ . Localement, le nombre d'onde radial est ainsi égal à  $k_r^2$  donné par Eq. (2.49). Cela nous fait alors considérer deux types de régions :

- **Régions où  $k_r^2 < 0$**  : les solutions de l'équation d'onde dépendent exponentiellement du rayon. Néanmoins, seule la solution évanescente est considérée car sinon, la solution divergerait et l'approximation linéaire ne serait plus vérifiée. Cela est vrai dans les régions qui satisfont

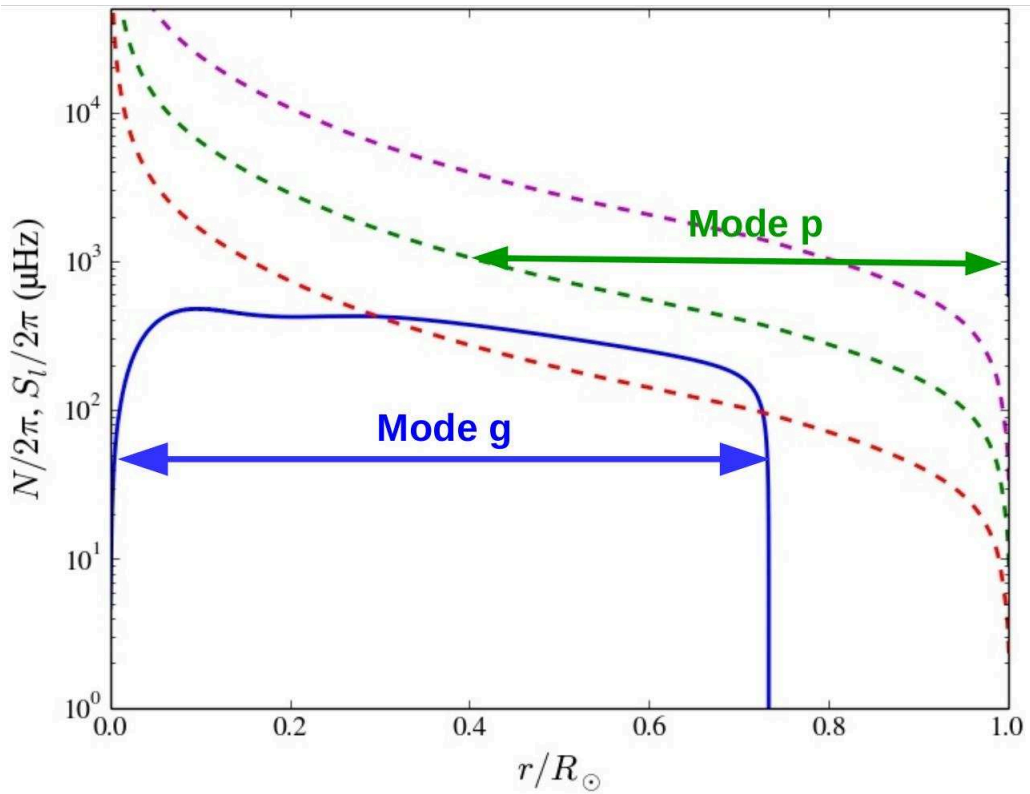
$$(\hat{\sigma}^2 > N^2 \quad \text{et} \quad \hat{\sigma}^2 < S_l^2) \quad \text{ou} \quad (\hat{\sigma}^2 < N^2 \quad \text{et} \quad \hat{\sigma}^2 > S_l^2). \quad (2.53)$$

- **Régions où  $k_r^2 > 0$**  : les solutions de l'équation d'onde sont oscillantes. Cela est vrai dans les régions qui satisfont

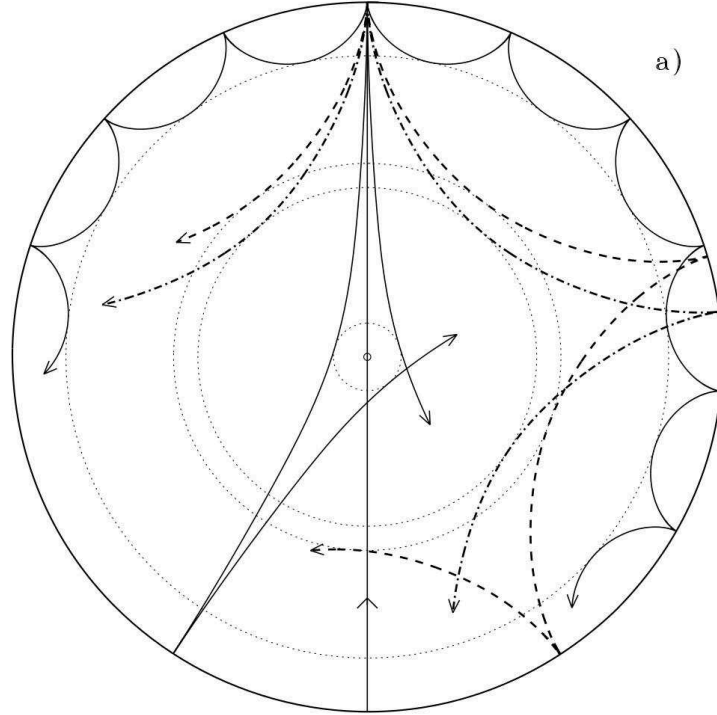
$$(\hat{\sigma}^2 > N^2 \quad \text{et} \quad \hat{\sigma}^2 > S_l^2) \quad \text{ou} \quad (\hat{\sigma}^2 < N^2 \quad \text{et} \quad \hat{\sigma}^2 < S_l^2), \quad (2.54)$$

et qui constituent les cavités résonantes.

Les cavités résonantes correspondent donc aux régions où peuvent se propager des ondes progressives ou s'établir des ondes stationnaires. Elles ne dépendent que des profils internes des fréquences de Brunt-Väisälä et de Lamb. Celles-ci sont représentées pour un modèle solaire sur la FIGURE 2.2. Dans une étoile de type solaire, les oscillations à basses fréquences peuvent exister dans la région radiative interne, en-dessous de la zone convective où la valeur du gradient de température est quasi-adiabatique (i.e.,  $N^2 \approx 0$ ) : elles correspondent à des ondes internes de gravité ayant comme force de rappel la poussée d'Archimède (voir le Chapitre 5). Les oscillations à hautes fréquences, elles, peuvent se propager en surface. Elles correspondent aux ondes ayant comme force de rappel



**FIGURE 2.2:** Diagramme de propagation dans un modèle solaire calculé avec le code d'évolution CESTAM (Marques *et al.* 2013). Les fréquences de Brunt-Väisälä (ligne continue bleue) et de Lamb (tirets) sont représentées. Les couleurs rouge, vert et magenta correspondent à  $l = 1, 5$  et  $20$  respectivement. Les flèches délimitent les cavités de propagation pour un mode de gravité de fréquence  $\nu = 50 \mu\text{Hz}$  (en bleu), et un mode de pression de fréquence  $\nu = 1000 \mu\text{Hz}$  et de degré angulaire  $l = 5$  (en vert).



**FIGURE 2.3:** Représentation de la propagation des ondes de pression dans un plan passant par le centre d'une étoile (d'après J. Christensen-Dalsgaard). Plus le degré angulaire est élevé, plus le nombre de réflexion subie à la surface est élevé, et moins l'onde peut se propager en profondeur.

la pression. Ces ondes longitudinales sont caractérisées par une relation de dispersion reliant le vecteur d'onde à la fréquence intrinsèque de l'onde qui vaut

$$k_r^2 \approx \frac{\hat{\sigma}^2}{c^2} - k_h^2, \quad (2.55)$$

où  $k_r$  est la composante radiale du nombre d'onde et  $k_h = \sqrt{l(l+1)}/r^2$  est la norme de la composante horizontale de vecteur d'onde (qui se déduit de l'équation aux valeurs propres des harmoniques sphériques, fonctions propres de l'opérateur Laplacien horizontal). Celle-ci peut être réécrite sous la forme plus connue  $\vec{k}^2 \approx \hat{\sigma}^2/c^2$ . Ces ondes sont donc non-dispersives, leur vitesse de propagation ne dépend pas de la fréquence et est égale à la vitesse du son. En surface, la décroissance rapide de la vitesse du son, due à la chute de la densité, provoque la réflexion des ondes de pression (où  $k_r^2 = 0$ ). Au contraire, à mesure qu'elles se propagent vers l'intérieur de l'étoile, l'augmentation progressive du rapport  $c/r$  provoque une diminution de la composante radiale du vecteur d'onde alors que sa composante horizontale augmente comme  $1/r$ ; l'énergie des ondes de pression est donc petit à petit réfractée vers la surface jusqu'à ce qu'elles atteignent leur point de réflexion intérieur où  $k_r^2 = 0$ , c'est-à-dire où  $S_l \approx \hat{\sigma}$  définissant le rayon de réflexion  $r_f = \sqrt{l(l+1)}c/\hat{\sigma}$ . En ce point, le nombre d'onde est essentiellement horizontal, l'énergie de l'onde change de sens de propagation et retourne vers la surface (voir FIGURE 2.3 pour une illustration). De plus, plus le degré angulaire est bas, plus les ondes de pression peuvent se propager en profondeur.

Dans l'approximation où les effets non-adiabatiques sont faibles, les ondes vont faire de multiples allers-retours dans les cavités résonantes. En imposant des conditions limites au centre et la surface de l'étoile, seules les ondes avec des fréquences particulières vont pouvoir interférer constructivement et entrer en résonance. Des ondes stationnaires peuvent alors s'établir : ce sont les modes propres. Nous allons voir dans les prochaines sections que les fréquences propres de ces modes d'oscillation portent la signature des propriétés stellaires et de la structure interne.

### 2.2.2 Expression asymptotique des modes de pression et grande séparation

Dans cette section, la dérivation de l'expression des fréquences propres pour les modes de pression proposée par Shibahashi (1979) et Unno *et al.* (1989) est reproduite. Les conditions limites aux bords de l'étoile pour les perturbations associées aux modes sont supposées être nulles. La démonstration suit la méthode JWKB (pour Jeffreys-Wentzel-Kramers-Brillouin) et suppose que la longueur d'onde radiale est beaucoup plus petite que l'échelle caractéristique de variation de la structure interne dans les régions loin des points tournants. Les points tournants correspondent aux régions où  $k_r^2 - f(q_1) = 0 = k_r^2 - f(q_2)$ . Cela revient donc à négliger  $f(q_1)$  et  $f(q_2)$  par rapport à  $k_r^2$  dans Eqs. (2.47) et (2.48) respectivement, ainsi que les dérivées de  $q_2$  et  $q_1$  dans Eqs. (2.51) et (2.52) respectivement. Dans les régions au voisinage des points tournants, quelques précautions sont à prendre néanmoins. Premièrement, les points où  $q_1$  ou  $q_2$  s'annulent sont respectivement singuliers pour Eqs. (2.47) et (2.48). Ainsi, dans une région où  $q_1$  possède un zéro (i.e., où  $S_l^2 = \hat{\sigma}^2$ ), l'équation (2.48) doit d'abord être considérée pour obtenir  $w_{l,m}$ , avant d'utiliser Eq. (2.51) pour obtenir  $v_{l,m}$ . De même, dans une région où  $q_2$  possède un zéro (i.e., où  $N^2 = \hat{\sigma}^2$ ), l'équation (2.47) doit d'abord être considérée pour obtenir  $v_{l,m}$ , avant d'utiliser Eq. (2.52) pour obtenir  $w_{l,m}$ . Deuxièmement, au voisinage de la région où  $q_2$  s'annule par exemple, la valeur de  $k_r^2$  tend vers 0 et  $f(q_1)$  ne peut plus être formellement négligé. Néanmoins, on peut s'attendre à ce que le gradient des quantités à l'équilibre dans le voisinage de ce point reste à peu près constant et de l'ordre de  $1/H_p$ , de telle façon que le terme  $f(q_1)$  ait pour unique conséquence un faible décalage du point tournant où  $k_r - f(q_1) = 0$  par rapport au point où  $k_r^2 = 0$ . Dans un souci de simplicité, l'impact de ce facteur peut donc être négligé en première approximation dans le cas des modes de pression et de gravité. Dans la suite, les termes  $f(q_i)$ , avec  $i = 1$  ou  $2$ , seront donc négligés et on fera correspondre les points tournants aux points où  $q_i = 0$ . Nous verrons dans la troisième partie qu'une telle hypothèse est cependant invalide lorsque deux points tournants sont proches l'un de l'autre, ce qui peut être le cas pour les modes mixtes dans les étoiles évoluées.

La méthode consiste donc à déterminer les fonctions propres autour de chaque point tournant vérifiant  $q_i = 0$  aux deux bords de la cavité, puis à relier asymptotiquement les deux solutions au centre de la cavité. Une solution globale approchée est alors obtenue et permet de dériver la condition de résonance, encore connue sous le nom de relation de phase, en imposant des conditions limites. La procédure de résolution peut être résumée en considérant le cas général d'une fonction  $y$  vérifiant une équation du type de Eqs. (2.47) et (2.48) et qui est définie autour d'un point tournant  $r_i$  tel que  $q_i(r_i) = 0$ . La méthode usuelle consiste à faire une transformation de Green-Liouville telle que

$$Y = \left| \frac{dr}{d\zeta} \right|^{-1/2} y \quad \text{avec} \quad \zeta = \left( \frac{dr}{d\zeta} \right)^2 [k_r^2 - f(q_{j \neq i})] , \quad (2.56)$$

ce qui permet d'obtenir une nouvelle équation pour la variable  $Y$  vérifiant

$$\frac{d^2 Y}{d\zeta^2} + \left[ \zeta - f \left( \frac{dr}{d\zeta} \right) \right] Y = 0 . \quad (2.57)$$

En négligeant pour les mêmes raisons que celles données dans la discussion précédente les termes associés à la fonction  $f$ , la solution de cette équation est donnée par

$$Y = a A_i(\zeta) + b B_i(\zeta) , \quad (2.58)$$

où  $A_i(\zeta)$  et  $B_i(\zeta)$  sont les fonctions d'Airy, et la variable  $\zeta$  est reliée à  $r$  par

$$\zeta = \text{sgn}(k_r^2) \left| \frac{3}{2} \int_{r_i}^r |k_r| dr \right|^{2/3} , \quad (2.59)$$

avec  $r_i$  le point tournant considéré où  $k_r^2$  s'annule. Les conditions limites nulles imposent  $b = 0$  puisque la fonction  $B_i(\zeta)$  diverge lorsque  $\zeta \rightarrow -\infty$ , ce qui correspond aux régions évanescences où

$k_r^2 < 0$ . En utilisant le développement asymptotique de  $A_i(\zeta)$  en  $+\infty$  et l'expression de  $\zeta$  donnée dans Eq. (2.59), le fonction propre  $y$  est alors donnée dans une région assez éloignée des points tournants où  $k_r^2 > 0$  par

$$y \sim \frac{a}{\sqrt{\pi}} |k_r|^{-1/2} \cos \left( \left| \int_{r_i}^r k_r dr \right| - \frac{\pi}{4} \right), \quad (2.60)$$

si bien que la variable associée  $z$  définie similairement à Eq. (2.52) est donnée par

$$z \approx \text{sgn}(q_{j \neq i}) |k_r|^{-1} \frac{dy}{dr} \sim -\text{sgn}(r - r_i) \text{sgn}(q_{j \neq i}) \frac{a}{\sqrt{\pi}} |k_r|^{-1/2} \sin \left( \left| \int_{r_i}^r k_r dr \right| - \frac{\pi}{4} \right). \quad (2.61)$$

Appliquons ces résultats au cas des modes de pression. Dans ce contexte, le point tournant interne noté  $r_{\text{int}}$  est tel que  $q_1 = 0$  et le point tournant externe noté  $r_{\text{ext}}$  est tel que  $q_2 = 0$ . Dans une région assez éloignée des deux points tournants, disons en  $r$ , on doit avoir l'égalité des fonctions  $w_{l,m}$  et  $v_{l,m}$  issues de  $r_{\text{int}}$  et  $r_{\text{ext}}$ , ce qui donne en appliquant Eqs. (2.60) et (2.61) où cela est possible

$$w_{l,m} \sim \frac{a}{\sqrt{\pi}} |k_r|^{-1/2} \cos \left( \int_{r_{\text{int}}}^r k_r dr - \frac{\pi}{4} \right) \sim -\frac{c}{\sqrt{\pi}} |k_r|^{-1/2} \sin \left( \int_r^{r_{\text{ext}}} k_r dr - \frac{\pi}{4} \right) \quad (2.62)$$

$$v_{l,m} \sim -\frac{a}{\sqrt{\pi}} |k_r|^{-1/2} \sin \left( \int_{r_{\text{int}}}^r k_r dr - \frac{\pi}{4} \right) \sim \frac{c}{\sqrt{\pi}} |k_r|^{-1/2} \cos \left( \int_r^{r_{\text{ext}}} k_r dr - \frac{\pi}{4} \right). \quad (2.63)$$

En multipliant Eqs. (2.62) et (2.63) avec  $\cos \left( \int_r^{r_{\text{ext}}} k_r dr - \frac{\pi}{4} \right)$  et  $\sin \left( \int_r^{r_{\text{ext}}} k_r dr - \frac{\pi}{4} \right)$  respectivement, puis en additionnant, on obtient comme condition

$$\sin \left( \int_{r_{\text{int}}}^{r_{\text{ext}}} k_r dr \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{r_{\text{int}}}^{r_{\text{ext}}} k_r dr = n\pi, \quad (2.64)$$

où  $n$  est un entier. La résonance apparaît donc lorsque l'épaisseur de la cavité est égale à un nombre semi-entier de longueur d'onde. Pour déterminer l'expression asymptotique des fréquences propres, Unno *et al.* (1989) ont calculé l'intégrale du nombre d'onde radial en supposant que  $r_{\text{ext}} \sim R_\star$  à la surface et qu'il existe un rayon  $r_\star$  entre  $r_{\text{int}}$  et la surface tel que

$$k_r \approx \begin{cases} \frac{\hat{\sigma}}{c} & \text{pour } r_\star \ll r \lesssim R_\star \\ \frac{\hat{\sigma}}{c} \left( 1 - \frac{S_l^2}{\sigma^2} \right)^{1/2} & \text{pour } r_{\text{int}} \leq r \lesssim r_\star \end{cases}, \quad (2.65)$$

et tel que la vitesse du son soit constante et égale à sa valeur au centre de l'étoile,  $c_0$ , pour  $r \lesssim r_\star$ . Ainsi, en négligeant la rotation (i.e.,  $\hat{\sigma} = \sigma$ ), l'intégrale du nombre d'onde est approximativement égale à

$$\begin{aligned} \int_{r_{\text{int}}}^{r_{\text{ext}}} k_r dr &\approx \int_{r_{\text{int}}}^{r_\star} \frac{\sigma}{c} \left( 1 - \frac{S_l^2}{\sigma^2} \right)^{1/2} dr + \int_{r_\star}^{R_\star} \frac{\sigma}{c} dr \\ &\approx \int_{r_{\text{int}}}^{r_\star} \frac{\sigma}{c_0} \left( 1 - \frac{\Lambda^2 c_0^2}{\sigma^2 r^2} \right)^{1/2} dr + \int_{r_\star}^{R_\star} \frac{\sigma}{c} dr, \end{aligned} \quad (2.66)$$

où  $\Lambda = \sqrt{l(l+1)}$ . La première intégrale du membre de droite de l'équation précédente peut alors être obtenue en faisant le changement de variable  $x = \Lambda c_0 / \sigma r$ , avec  $x$  allant de 1 à  $x_\star = r_{\text{int}} / r_\star$  puisque pour le point de réflexion interne  $r_{\text{int}} = c_0 \Lambda / \sigma$ . Cette intégrale donne alors

$$\begin{aligned} \Lambda \int_{r_{\text{int}}}^{r_\star} \frac{\sigma r}{\Lambda c_0} \left( 1 - \frac{\Lambda^2 c_0^2}{\sigma^2 r^2} \right)^{1/2} \frac{dr}{r} &= \Lambda \int_{x_\star}^1 (1 - x^2)^{1/2} \frac{dx}{x^2} \\ &= \Lambda \left[ -\frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{1 - x_\star^2}}{x_\star} + \arcsin(x_\star) \right] \\ &\approx \Lambda \left[ -\frac{\pi}{2} + \frac{r_\star}{r_{\text{int}}} \right], \end{aligned} \quad (2.67)$$

avec l'hypothèse  $x_\star \ll 1$ . En remarquant que, sous les hypothèses précédentes, on a  $r_\star/r_{\text{int}} = r_\star\sigma/\Lambda c_0 \approx \int_0^{r_\star} \sigma dr/\Lambda c$ , on obtient d'après Eqs. (2.64), (2.66) et (2.67)

$$\int_{r_{\text{int}}}^{r_{\text{ext}}} |k_r| dr \approx \sigma \int_0^{R_\star} \frac{dr}{c} - \Lambda \frac{\pi}{2} = n\pi . \quad (2.68)$$

En définissant alors la grande séparation telle que

$$\Delta\nu = \left( 2 \int_0^{R_\star} \frac{dr}{c} \right)^{-1} , \quad (2.69)$$

qui représente le temps de traversée de l'étoile par une onde sonore, l'expression asymptotique des fréquences propres des modes de pression de bas degrés angulaires  $l$  s'exprime alors sous la forme

$$\nu_{nlm} \approx \left( n + \frac{\sqrt{l(l+1)}}{2} \right) \Delta\nu \quad \text{avec} \quad n \in \mathbb{N} . \quad (2.70)$$

L'entier  $n$  est appelé l'ordre radial et correspond au nombre de nœuds dans la direction radiale. Les fréquences propres de même degré angulaire mais d'ordres radiaux différents sont donc espacées périodiquement de  $\Delta\nu$  (voir FIGURE 2.4 ou FIGURE 2.6 pour des exemples de spectres observés). De plus, les fréquences propres sont dégénérées avec le nombre azimutal  $m$ , conséquence de la symétrie sphérique (ici, la rotation a été supposée nulle). La dérivation de cette dernière expression n'est pas tout à fait valide pour les modes radiaux  $l = 0$  car le traitement au centre dans ce cas est un peu différent. Néanmoins, en utilisant le développement suivant valide pour  $l \gtrsim 1$

$$\sqrt{l(l+1)} \sim l + \frac{1}{2} - \frac{1}{8(l+1)} + O\left(\frac{1}{(l+1)^2}\right) , \quad (2.71)$$

l'expression asymptotique des modes de pression prend la forme plus connue donnée par Tassoul (1980)

$$\nu_{nlm} \approx \left( n + \frac{l}{2} + \frac{1}{4} + \alpha_{p,lm} \right) \Delta\nu , \quad (2.72)$$

qui s'avère être aussi valide pour les modes radiaux (Tassoul & Tassoul 1968). Le terme  $\alpha_{p,lm}$  regroupe les termes résiduels d'ordre plus élevé, ainsi que les incertitudes liées aux couches superficielles (e.g., Christensen-Dalsgaard & Perez Hernandez 1992; Kjeldsen *et al.* 2008). Sous cette forme, on voit que  $\nu_{n+1lm} \approx \nu_{nl+2m}$ ; l'égalité stricte n'est néanmoins pas valide puisque les termes d'ordre plus élevé dans  $\alpha_{p,lm}$  lèvent cette dégénérescence.

### 2.2.3 Expression asymptotique des modes de gravité et espacement en période

Les modes de gravité s'établissent dans la cavité formée par la fréquence de Brunt-Väisälä, entre deux points tournants  $r_a$  et  $r_b$  pour lesquels  $q_2 = 0$ . En procédant de la même manière que précédemment, on peut montrer que la condition de résonance est donnée par (e.g., Shibahashi 1979; Unno *et al.* 1989)

$$\cos\left(\int_{r_a}^{r_b} k_r dr\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{r_a}^{r_b} k_r dr = \left(s - \frac{1}{2}\right) \pi , \quad (2.73)$$

où  $s$  est un entier. L'expression asymptotique des modes de gravité d'ordre radial  $s$  élevé est alors donnée par (e.g., Tassoul 1980)

$$P_{n,l} \approx \Delta\Pi_l \left( s + \frac{l}{2} + \alpha_g \right) , \quad (2.74)$$

où  $\alpha_g$  est un terme de l'ordre de l'unité qui dépend des caractéristiques des points tournants, et  $\Delta\Pi_l$  est l'espacement en période, ou *period-spacing* en anglais, défini par

$$\Delta\Pi_l = \frac{2\pi^2}{\Lambda} \left( \int_{r_a}^{r_b} N \frac{dr}{r} \right)^{-1}, \quad (2.75)$$

où on rappelle que  $\Lambda = \sqrt{l(l+1)}$ . Les modes de gravité, eux, sont donc uniformément espacés en période à degré angulaire donné, et ce avec une périodicité égale à  $\Delta\Pi_l$  (si on néglige la dépendance des points tournants  $r_a$  et  $r_b$  avec la période d'oscillation du mode). De plus, alors que  $\Delta\nu$  dans le cas des modes de pression est principalement sensible d'après Eq. (2.69) aux propriétés des couches superficielles (i.e., là où la vitesse du son prend les valeurs les plus faibles dans l'étoile), on peut noter au contraire que  $\Delta\Pi_l$  est, lui, directement sensible aux propriétés de la cavité radiative.

## 2.2.4 Spectre observé et fréquence au maximum de puissance

Dans un spectre d'oscillation, tous les modes ne sont pas observés. Seuls ceux avec assez d'énergie et un temps de vie assez long par rapport à la période d'oscillation peuvent efficacement s'établir dans l'étoile. La forme du spectre de puissance doit donc résulter à la fois de l'excitation et de l'amortissement des modes. Dans le cas des étoiles de type solaire avec une enveloppe convective développée, les modes sont excités par le mouvement stochastique des tourbillons convectifs qui peuvent céder une part de leur énergie sous forme d'ondes. Paradoxalement, c'est aussi la convection turbulente qui amortit en partie les modes en créant des décalages de phase. Le spectre de modes propres résultant de l'excitation stochastique par la convection turbulente est donc la conséquence d'un équilibre entre forçage et amortissement. L'énergie contenue dans un mode d'oscillation de fréquence  $\nu = \sigma/2\pi$  peut en effet être écrite comme (e.g., Samadi *et al.* 2015),

$$E_{\text{osc}}(\nu) = \frac{\mathcal{P}(\nu)}{2\eta(\nu)}, \quad (2.76)$$

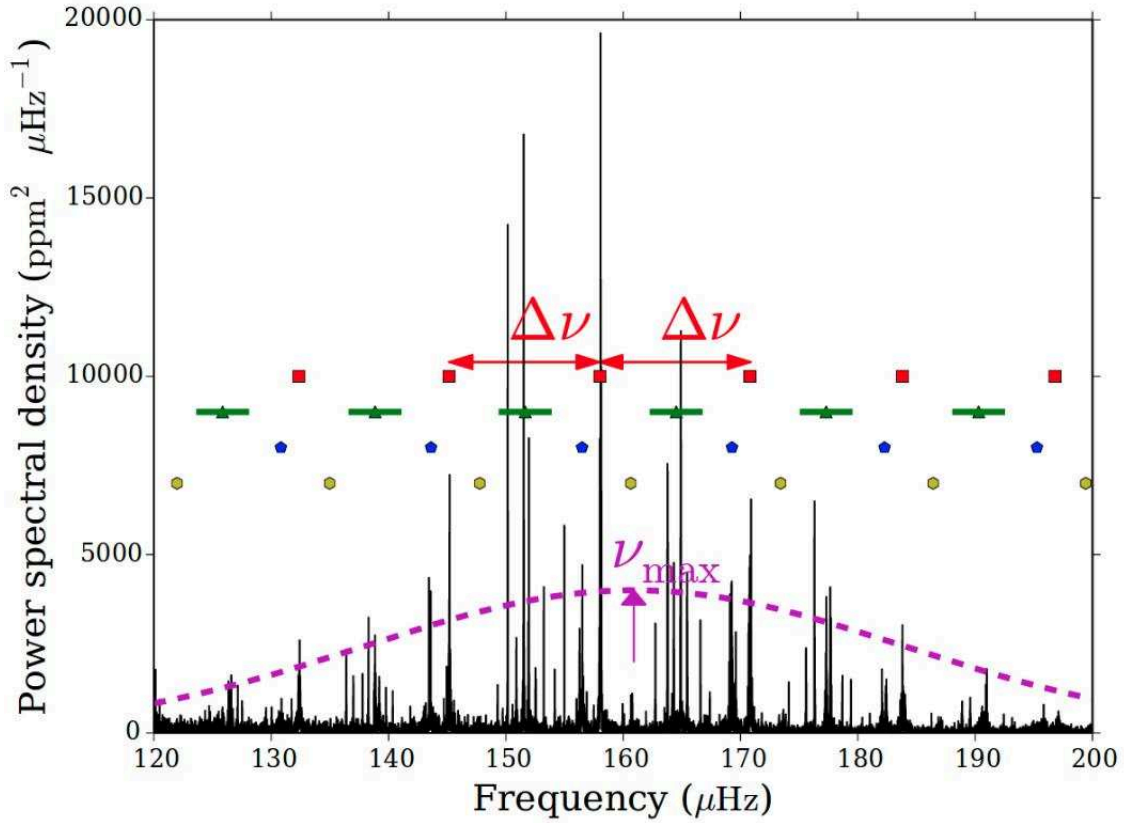
où  $\mathcal{P}$  représente la puissance injectée dans le mode d'oscillation et  $\eta$  représente le taux d'amortissement par unité de temps. Les prédictions théoriques et les observations dans le Soleil montrent que la puissance injectée augmente avec la fréquence des modes en tendant asymptotiquement vers une valeur constante à hautes fréquences (e.g., Belkacem *et al.* 2010). Le taux d'amortissement, lui, augmente aussi avec la fréquence, mais présente un plateau autour d'une certaine fréquence notée  $\nu_{\text{max}}$ . Ce dernier témoigne d'un effet de résonance entre le mode propre et la convection dans les couches super-adiabatiques à la surface des étoiles (e.g., Belkacem *et al.* 2012). L'effet combiné de  $\mathcal{P}$  et  $\eta$  résulte donc en un spectre de puissance d'oscillation concentré dans une enveloppe maximale autour de  $\nu_{\text{max}}$  (voir FIGURE 2.4). L'étude par Belkacem *et al.* (2011) a montré plus précisément que  $\nu_{\text{max}}$  est inversement proportionnelle au temps thermique  $\tau_{\text{th}}$  dans les couches superficielles, et doit de ce fait suivre la relation de proportionnalité

$$\nu_{\text{max}} \propto \frac{1}{\tau_{\text{th}}} \propto \left( \frac{\mathcal{M}_a}{\alpha_{\text{MLT}}} \right)^3 \nu_c, \quad (2.77)$$

où  $\mathcal{M}_a$  est le nombre de Mach convectif dans les couches superficielles super-adiabatiques,  $\alpha_{\text{MLT}}$  est le paramètre de la MLT et  $\nu_c$  est la fréquence de coupure acoustique à la surface de l'étoile. Cette dernière est définie par l'expression (e.g., Gough 1993)

$$\nu_c = \frac{c}{4\pi H_\rho} \sqrt{1 - 2 \frac{dH_\rho}{dr}} \approx \frac{c}{4\pi H_p}, \quad (2.78)$$

où on fait l'hypothèse que la variation de l'échelle de hauteur de densité,  $H_\rho$ , est négligeable et que celle-ci est environ égale  $H_p$ . Cela est en fait rigoureusement le cas dans une atmosphère isotherme uniquement. La fréquence de coupure acoustique représente la fréquence au-delà de laquelle une onde n'est plus réfléchiée à la surface de l'étoile et ne peut donc plus donner lieu à une onde stationnaire.



**FIGURE 2.4:** Spectre de puissance de l'étoile géante rouge KIC 12008916 observée par le satellite *Kepler* (d'après Davies & Miglio 2016). Les pics d'oscillation des modes propres ont été identifiés par leur degré angulaire. Les modes radiaux  $l = 0$  sont représentés par les carrés rouges, les modes dipolaires  $l = 1$  par les triangles verts avec une barre correspondant à l'étendue de la forêt de modes mixtes (voir Chapitre 8), les modes quadripolaires  $l = 2$  par des pentagones bleus et les modes  $l = 3$  par des hexagones jaunes. La grande séparation  $\Delta\nu$  est indiquée pour les modes radiaux, ainsi que l'enveloppe de puissance d'oscillation labellisée par la fréquence au maximum.



## 2.3 Relations d'échelle : lien entre oscillation et paramètres stellaires

Les régularités dans les spectres des modes d'oscillations, représentées par la grande séparation et l'espacement en période, forment des caractéristiques remarquables relativement faciles à identifier observationnellement. A cela peut être ajoutée la fréquence au maximum de puissance d'oscillation. La détermination de ces paramètres sismiques peut apporter des informations sur les paramètres globaux des étoiles. Dans le cas des modes de pression, la connaissance de  $\Delta\nu$  et  $\nu_{\max}$  permet par exemple d'estimer directement la masse et le rayon par le biais de relations d'échelle. Ces relations d'échelle sont la conséquence de la relation d'homologie suivie par la structure interne d'étoiles de masses différentes à un stade évolutif donné. Plus précisément, deux étoiles sont dites homologues si à valeur identique de la coordonnée de masse normalisée à la masse de l'étoile  $m/M_\star$  correspond une valeur identique du rayon normalisé au rayon de l'étoile  $r/R_\star$  (e.g., Kippenhahn *et al.* 2012). Les relations d'homologie nous permettent alors de réécrire les équations de continuité et de l'équilibre hydrostatique données par Eqs. (1.4) et (1.5) sous la forme de relations de proportionnalité, c'est-à-dire

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho \quad \Rightarrow \quad \rho \propto \frac{M_\star}{R_\star^3} \quad (2.79)$$

$$\frac{dp}{dr} = -\rho \frac{Gm}{r^2} \quad \Rightarrow \quad p \propto \frac{M_\star^2}{R_\star^4}. \quad (2.80)$$

En considérant ces deux relations, on obtient pour la grande séparation

$$\Delta\nu = \left( 2 \int_0^{R_\star} \frac{dr}{c} \right)^{-1} = \left( 2 \int_0^{R_\star} \sqrt{\frac{\Gamma_1 p}{\rho}} dr \right)^{-1} \quad \Rightarrow \quad \Delta\nu \propto \left( R_\star \sqrt{\frac{M_\star R_\star^4}{R_\star^3 M_\star^2}} \right)^{-1} \quad (2.81)$$

$$\Rightarrow \quad \Delta\nu \propto \sqrt{\frac{M_\star}{R_\star^3}} \propto \bar{\rho}_\star^{-1/2}, \quad (2.82)$$

où on a supposé dans une bonne approximation que  $\Gamma_1$  est constant et où  $\bar{\rho}_\star$  est la densité moyenne de l'étoile. La détermination observationnelle de  $\Delta\nu$  donne donc une information directe sur la densité moyenne de l'étoile. De même, en négligeant en première approximation la contribution du nombre Mach, la fréquence au maximum de puissance devient d'après Eqs. (2.77) et (2.78)

$$\nu_{\max} \propto \nu_c \propto \frac{c}{H_p} \propto \frac{\sqrt{T_{\text{eff}}}}{p} \frac{dp}{dr} \propto \frac{\sqrt{T_{\text{eff}}}}{\rho T_{\text{eff}}} \rho g \quad \Rightarrow \quad \nu_{\max} \propto \frac{g}{\sqrt{T_{\text{eff}}}}, \quad (2.83)$$

où on a utilisé la loi de l'équilibre hydrostatique et la loi des gaz parfaits avec un poids moléculaire moyen supposé constant. Les paramètres  $\Delta\nu$  et  $\nu_{\max}$  dépendent donc des quantités physiques globales caractérisant les étoiles et doivent donc évoluer au cours de leur vie, formant ainsi de potentiels traceurs de leur évolution. De plus, en combinant Eqs. (2.82) et (2.83), la masse et le rayon des étoiles peuvent être exprimées en fonction de  $\Delta\nu$ ,  $\nu_{\max}$  et  $T_{\text{eff}}$  suivant les relations d'échelle (e.g., Kjeldsen & Bedding 1995; Belkacem *et al.* 2013)

$$\left( \frac{R_\star}{R_{\text{ref}}} \right) \approx \left( \frac{\nu_{\max}}{\nu_{\max,\text{ref}}} \right) \left( \frac{\Delta\nu}{\Delta\nu_{\text{ref}}} \right)^{-2} \left( \frac{T_{\text{eff}}}{T_{\text{eff,ref}}} \right)^{1/2} \quad (2.84)$$

$$\left( \frac{M_\star}{M_{\text{ref}}} \right) \approx \left( \frac{\nu_{\max,\text{ref}}}{\nu_{\max}} \right)^3 \left( \frac{\Delta\nu}{\Delta\nu_{\text{ref}}} \right)^{-4} \left( \frac{T_{\text{eff}}}{T_{\text{eff,ref}}} \right)^{3/2}, \quad (2.85)$$

où  $\nu_{\max,\text{ref}}$  et  $T_{\text{eff,ref}}$  sont des valeurs de référence ( $\nu_{\max,\odot} \approx 3.1$  mHz et  $T_{\text{eff},\odot} = 5776$  K dans le cas du Soleil). L'étude du spectre d'oscillation d'une étoile combinée à l'estimation de sa température effective via des analyses spectroscopiques permet donc d'obtenir une estimation de sa masse et de

son rayon, et ce sans même avoir besoin de connaître la distance, la luminosité intrinsèque ou de se retreindre aux systèmes binaires. Ces relations d'échelle s'avèrent être précises malgré les fortes hypothèses utilisées dans leur dérivation (e.g., Kallinger *et al.* 2010), mais nécessitent néanmoins d'être calibrées (e.g., Huber *et al.* 2012; Gaulme *et al.* 2013).

## 2.4 Contraintes sur la structure interne : quelques exemples

En plus d'apporter des informations sur les propriétés globales des étoiles, les oscillations stellaires permettent aussi de sonder des processus dynamiques internes comme par exemple la rotation ou les zones de mélange aux interfaces des régions radiatives et convectives. Elles fournissent ainsi de nouvelles contraintes observationnelles qui s'ajoutent aux observables classiques.

### 2.4.1 Ensemble des fréquences individuelles

Pour caractériser une étoile, la méthode usuelle est de rechercher un modèle optimal, à physique donnée, de telle façon à ce qu'il s'ajuste au mieux aux données observationnelles disponibles, notée  $y_i^{\text{obs}}$ . Cela revient donc à minimiser une fonction, qui estime la distance entre les observables et les valeurs fournies par le modèle, notées  $y_i^{\text{mod}}(\vec{p})$ , où  $\vec{p}$  est l'ensemble des paramètres du modèle (âge, masse, composition initiale, ...). Par exemple, la méthode des moindres carrés vise à minimiser la fonction

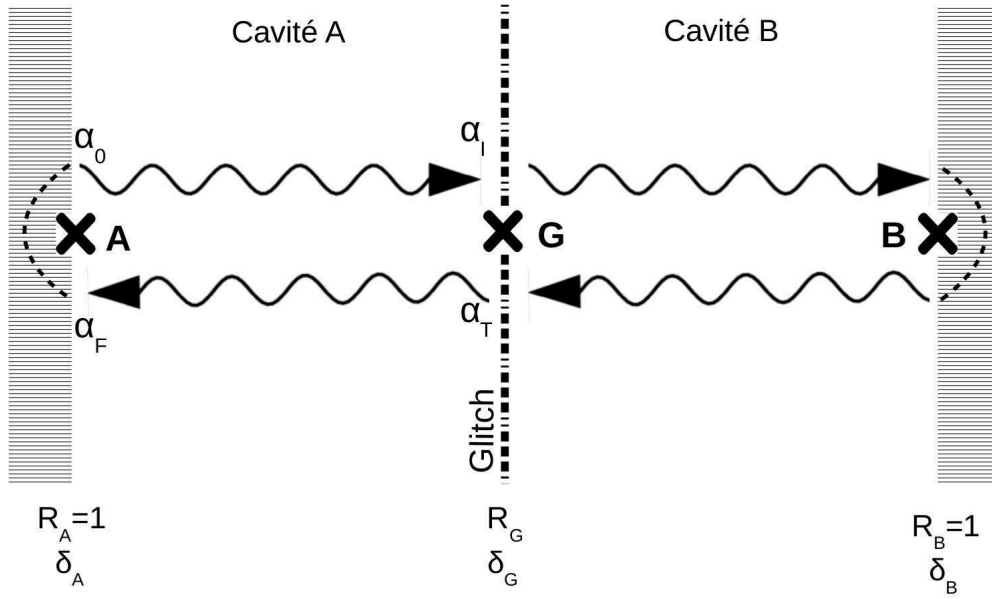
$$\chi^2 = \sum_i \left[ \frac{y_i^{\text{mod}}(\vec{p}) - y_i^{\text{obs}}}{\Delta_i} \right]^2, \quad (2.86)$$

où  $\Delta_i$  est la déviation standard de l'estimation de l'observable  $y_i^{\text{obs}}$ . Par le biais d'une méthode de minimisation, le but est alors de trouver le jeu de paramètres  $\vec{p}$  optimal tel que le modèle reproduise au mieux les observables. La méthode de minimisation peut se baser sur des grilles de modèles ou des algorithmes plus sophistiqués dont le but est de converger plus rapidement vers la solution. Alors que les observables classiques se réduisent le plus souvent à la luminosité, la température effective et la métallicité, l'astérosismologie fournit de nouvelles contraintes comme  $\Delta\nu$ ,  $\Delta\Pi$ ,  $\nu_{\text{max}}$  ou encore l'ensemble des fréquences d'oscillation détectées  $\{\nu_{nlm}\}$ . L'utilisation de différences entre ces fréquences peut aussi s'avérer pertinente. Avec ces nouvelles contraintes, l'astérosismologie permet donc d'améliorer la précision de la caractérisation des étoiles (e.g., Lebreton *et al.* 2014a). Nous allons voir qu'elle permet aussi d'améliorer son exactitude. En effet, les études sismiques permettent de sonder les processus internes, comme la rotation ou la limite des régions convectives, et donc d'améliorer les ingrédients physiques inclus dans les modèles.

### 2.4.2 Glitch et localisation de régions à fort gradient

On appelle *glitch* la signature spectrale d'une variation rapide de la structure interne dans une région très localisée de l'étoile. On entend par variation rapide une variation sur une échelle spatiale inférieure ou de l'ordre de la longueur d'onde. Dans une telle région, l'approximation JWKB n'est plus valide et l'expression asymptotique des fréquences propres est légèrement perturbée par cette zone à fort gradient. On propose dans la suite de le montrer de façon originale en s'inspirant du travail de Takata (2016b), associé à la formulation physique des modes mixtes.

L'étoile est modélisée comme un cavité résonante unidimensionnelle dans laquelle se propagent des ondes planes. En effet, dans l'approximation JWKB, il est toujours possible de choisir la variable dépendante de telle sorte qu'elle puisse s'exprimer comme le produit d'une amplitude complexe constante  $\alpha$  avec un terme  $\exp[iQ(M, N)]$ , où  $Q(M, N)$  correspond à l'intégrale du nombre d'onde radial sur le trajet de l'onde entre un point M et un point N. La situation est représentée sur la FIGURE 2.5. Les conditions aux bords de la cavité en A et en B sont choisies de telle façon à ce que l'énergie incidente soit totalement restituée à la réflexion (i.e., sans effet non-adiabatique ou



**FIGURE 2.5:** Représentation schématique de la propagation d'une onde dans la cavité résonante d'une étoile. La cavité principale est divisée en deux sous-cavités, notées  $A$  et  $B$ , par une région d'étendue négligeable où le milieu est supposé varier rapidement en un point noté  $G$ . Cette région est formellement décrite par un coefficient de réflexion de module  $R_G$  et de phase  $\delta_G$ . Les bords de la cavité aux points  $A$  et  $B$  sont supposés imperméables. La réflexion est donc totale. Les coefficients de réflexion en ces deux points sont donc caractérisés par des modules  $R_A$  et  $R_B$  valant l'unité, et des phases  $\delta_A$  et  $\delta_B$  respectivement.

de pertes par émission d'ondes). Les modules des coefficients de réflexion aux points  $A$  et  $B$ , notés respectivement  $R_A$  et  $R_B$ , sont donc égaux à l'unité. On admet néanmoins que la réflexion peut s'accompagner d'un déphasage de l'onde réfléchie par rapport à l'onde incidente valant respectivement  $\delta_A$  et  $\delta_B$ . La situation est donc équivalente en optique à un interféromètre de Fabry-Pérot isolé, sans gain ni perte d'énergie lumineuse.

On suppose de plus qu'à l'intérieur de la cavité, disons dans une région de faible extension (i.e., sur une échelle spatiale inférieure à longueur d'onde) localisée autour d'un point noté  $G$ , existe une forte variation d'une ou plusieurs quantités du milieu à l'équilibre qui peuvent influencer le comportement des oscillations (i.e., vitesse du son, gradient de température,...). Cette variation rapide va créer une réflexion partielle de l'onde. Le coefficient de réflexion en amplitude lié à cette région a pour module  $R_G$ , et est associé à un déphasage noté  $\delta_G$  pour une onde incidente venant de la cavité  $A$ , située à gauche de la zone du glitch (voir FIGURE 2.5). Le coefficient de transmission en amplitude, lui, a pour module  $T_G$ , et est associé à un déphasage qui est supposé être nul pour simplifier (en toute rigueur, un déphasage peut néanmoins exister et apparaître dans la phase totale de l'onde). A partir des hypothèses de base concernant les ondes linéaires, c'est-à-dire la symétrie par inversion de l'axe du temps, l'invariance par rapport à l'origine du temps, le principe de superposition, ainsi que de la conservation de l'énergie (i.e.,  $R_G^2 + T_G^2 = 1$ ), Takata (2016b) a démontré que le déphasage d'une onde réfléchie en  $G$  par rapport à une onde incidente provenant de la cavité  $B$ , située elle à droite de la zone du glitch, est égal à  $(\pi - \delta_G)$ . Le cadre étant fixé, on cherche à déterminer comment le glitch perturbe la relation de phase vérifiée par les modes stationnaires. La condition de résonance des modes propres, qui correspond à la condition pour générer des interférences constructives, est obtenue lorsque l'onde émise à un point  $A$  parcourt l'ensemble de la cavité pour revenir au même point  $A$  avec la même phase initiale. Puisque tout effet de perte d'énergie est négligé, la conservation de l'énergie doit aussi être vérifiée.

**Cavité simple sans variation rapide** ( $R_G = 0$ ,  $\delta_G = 0$ ). Dans un premier temps, on s'intéresse à la relation de phase vérifiée par les modes stationnaires dans le cas normal, sans glitch. Une onde est émise au point  $A$  avec une amplitude  $\alpha_0$  vers la cavité  $B$ . Elle parcourt les deux cavités entre  $A$  et  $B$  avant d'être réfléchiée en  $B$  avec un déphasage  $\delta_B$  par rapport à l'onde incidente. Elle parcourt ensuite les deux cavités de  $B$  à  $A$  où elle est réfléchiée et déphasée de  $\delta_A$  par rapport à l'onde incidente, et retrouve enfin son état initial. La condition de résonance postule l'égalité entre les fonctions d'onde initiale et finale, c'est-à-dire

$$\alpha_0 = \alpha_0 \exp [i(2\Theta_A + 2\Theta_B + \delta_A + \delta_B)] , \quad (2.87)$$

où  $\Theta_A = \mathcal{Q}(A, G)$  et  $\Theta_B = \mathcal{Q}(G, B)$  sont les intégrales du nombre d'onde radial entre les points  $A$  et  $G$ , et entre  $G$  et  $B$  respectivement. Les modes propres doivent alors vérifier

$$\left( \Theta_A + \Theta_B + \frac{\delta_A + \delta_B}{2} \right) = n\pi , \quad (2.88)$$

où  $n$  est un entier.

**Présence de fort gradients dans une région localisée** ( $R_G \neq 0$ ,  $\delta_G \neq 0$ ). Dans un deuxième temps, on prend en compte le glitch. De la même manière, on considère une onde émise au point  $A$  qui se propage vers le point  $G$ . L'onde incidente au point  $G$  est alors égale à  $\alpha_I = \alpha_0 e^{i\Theta_A}$ . On désire connaître l'expression de l'onde réfléchiée en  $G$ , notée  $\alpha_T$ . Pour ce faire procédons en plusieurs étapes. Une partie de l'onde incidente est directement réfléchiée et vaut après réflexion  $\alpha_I e^{i\delta_G}$ . L'autre partie est transmise, parcourt la cavité de  $G$  à  $B$  où elle est réfléchiée avant de revenir vers le point  $G$ . Ici, une partie égale à  $\alpha_I T_G^2 e^{i(\delta_A + 2\Theta_B)}$  est transmise. L'autre partie est réfléchiée et déphasée de  $\pi - \delta_G$  avant de se propager de nouveau vers le point  $B$ . Cette composante refait un aller-retour dans la cavité  $B$ , et ainsi de suite... Finalement, l'onde totale réfléchiée peut donc s'écrire en superposant toutes les contributions, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \alpha_T &= \alpha_I \left( R_G e^{i\delta_G} + T_G^2 e^{i(2\Theta_B + \delta_B)} \sum_{k=0}^{+\infty} \left( R_G e^{i(2\Theta_B + [\pi - \delta_G] + \delta_B)} \right)^k \right) \\ &= \alpha_I \left( R_G e^{i\delta_G} + \frac{T_G^2 e^{i(2\Theta_B + \delta_B)}}{1 + R_G e^{i(2\Theta_B - \delta_G + \delta_B)}} \right) = \alpha_I \left( \frac{R_G e^{i\delta_G} + (T_G^2 + R_G^2) e^{i\delta_B + 2i\Theta_B}}{1 + R_G e^{i(2\Theta_B - \delta_G + \delta_B)}} \right) \\ &= \alpha_I e^{i\delta_G} \left( \frac{e^{-i(\Phi_B - i\mu_G)} + e^{i(\Phi_B - i\mu_G)}}{e^{-i(\Phi_B + i\mu_G)} + e^{i(\Phi_B + i\mu_G)}} \right) = \alpha_I e^{i\delta_G} \left[ \frac{\cos(\Phi_B - i\mu_G)}{\cos(\Phi_B + i\mu_G)} \right] \\ &= \alpha_I e^{i\delta_G} \left( \frac{\cos(\Phi_B) \cosh(\mu_G) + i \sin(\Phi_B) \sinh(\mu_G)}{\cos(\Phi_B) \cosh(\mu_G) - i \sin(\Phi_B) \sinh(\mu_G)} \right) , \end{aligned} \quad (2.89)$$

où la condition  $T_G^2 + R_G^2 = 1$  a été utilisée et où on a défini

$$R_G = e^{-2\mu_G} \quad \text{et} \quad \Phi_B = \Theta_B + \frac{\delta_B}{2} - \frac{\delta_G}{2} . \quad (2.90)$$

Premièrement, on vérifie que  $|\alpha_I/\alpha_T| = 1$  et donc la conservation de l'énergie. Deuxièmement, le déphasage total en sortie au point  $G$  lié au passage de l'onde dans la cavité  $B$  est donné par

$$\Delta_G = \arg \left( \frac{\alpha_T}{\alpha_I} \right) = \delta_G + 2 \arg [\cos(\Phi_B) \cosh(\mu_G) + i \sin(\Phi_B) \sinh(\mu_G)] \quad (2.91)$$

$$= \delta_G + 2 \arctan (q_G \tan(\Phi_B)) , \quad (2.92)$$

où  $q_G$  représente le facteur de couplage entre la cavité  $A$  et  $B$  lié à la présence du glitch. Son expression est donnée par

$$q_G = \tanh(\mu_G) = \frac{1 - R_G}{1 + R_G} . \quad (2.93)$$

L'onde continue alors sa route de  $B$  vers  $A$  où elle est réfléchiée avant de retrouver sa position initiale. La fonction d'onde finale en  $A$  est donc égale à

$$\alpha_{A,\text{fin}} = e^{i\delta_A} \alpha_F = e^{i\delta_A} e^{i\Theta_A} \alpha_T = e^{i\delta_A} e^{i\Theta_A} e^{i\Delta_G} \alpha_I = e^{i\delta_A} e^{i\Theta_A} e^{i\Delta_G} e^{i\Theta_A} \alpha_0, \quad (2.94)$$

qui doit être égal à  $\alpha_0$  pour satisfaire la condition de résonance, ce qui mène à

$$\Phi_A + \arctan(q_G \tan(\Phi_B)) = m\pi, \quad (2.95)$$

avec  $m$  un entier et

$$\Phi_A = \Theta_A + \frac{\delta_A}{2} + \frac{\delta_G}{2}. \quad (2.96)$$

Finalement, la condition de résonance peut être réécrite

$$\cot\left(\Phi_A + \frac{\pi}{2}\right) \tan\left(\Phi_B + \frac{\pi}{2}\right) = -q_G \quad \Rightarrow \quad \sin(\Phi_A + \Phi_B) = R_G \cos(\Phi_A - \Phi_B). \quad (2.97)$$

L'effet du glitch modifie donc la relation de phase en introduisant un déphasage supplémentaire dans  $\Phi_A$  et  $\Phi_B$  ainsi qu'en faisant intervenir un facteur de couplage entre la cavité  $A$  et la cavité  $B$ . Cette écriture est similaire à la relation de phase des modes mixtes et sera plus amplement discutée dans la troisième partie (e.g., Unno *et al.* 1989; Takata 2016b). Regardons maintenant plus précisément la variation de la fréquence induite par le glitch dans le cas d'une faible perturbation pour les modes de pression.

**Faible perturbation dans les cas des modes de pression ( $R_G \ll 1$ ).** On suppose que la fréquence propre d'oscillation est légèrement perturbée par le glitch, soit  $\nu = \nu_0 + \delta\nu$ , où  $\nu_0$  est la fréquence d'oscillation dans le cas non perturbé vérifiant Eq. (2.88) et  $\delta\nu$  est la perturbation de fréquence. Sous ces hypothèses, on définit  $\Phi(\nu) = \Phi_A(\nu) + \Phi_B(\nu)$ . L'équation (2.88) peut alors se réécrire  $\Phi(\nu_0) = n\pi$ . En utilisant un développement limité au premier ordre avec  $R_G \ll 1$  et avec l'hypothèse que la perturbation de la phase de l'onde induite par le glitch est faible, c'est-à-dire  $(\partial\Phi/\partial\nu)_{\nu_0} \ll 1/\delta\nu$ , Eq. (2.97) peut se réécrire

$$\begin{aligned} \sin\left(\Phi(\nu_0) + \delta\nu \frac{\partial\Phi}{\partial\nu}(\nu_0)\right) &\approx R_G \cos(\Phi(\nu_0) - 2\Phi_B(\nu_0)) \\ \sin\left(n\pi + \delta\nu \frac{\partial\Phi}{\partial\nu}(\nu_0)\right) &\approx R_G \cos(n\pi - 2\Phi_B(\nu_0)) \\ \delta\nu \frac{\partial\Phi}{\partial\nu}(\nu_0) &\approx R_G \cos[2\Phi_B(\nu_0)]. \end{aligned} \quad (2.98)$$

Considérons alors le cas des modes de pression d'ordre radial élevé. Dans ce cas, la fonction  $\Phi$  est donnée à l'ordre dominant par

$$\Phi(\nu_0) \approx \frac{\pi\nu_0}{\Delta\nu} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial\Phi}{\partial\nu}(\nu_0) \approx \frac{\pi}{\Delta\nu}, \quad (2.99)$$

et  $\Phi_B(\nu_0)$  est donnée par

$$\Phi_B(\nu_0) = 2\pi\nu_0\tau_{a,G} + \frac{\delta_B - \delta_G}{2} \quad \text{avec} \quad \tau_{a,G} = \left(\int_G^B \frac{dr}{c}\right)^{-1}, \quad (2.100)$$

où  $\tau_{a,G}$  est la profondeur acoustique de la région où se localise le fort gradient. Finalement, la perturbation de la fréquence propre d'oscillation est égale à

$$\delta\nu \approx R_G \frac{\Delta\nu}{\pi} \cos(4\pi\nu_0\tau_{a,G} + \delta_B - \delta_G). \quad (2.101)$$

L'expression dérivée est similaire à la forme utilisée dans des travaux précédents (e.g., Monteiro & Thompson 2005; Vrad *et al.* 2015). On voit que la présence d'un fort gradient ou d'une discontinuité provoque une oscillation dans la différence entre deux fréquences propres de valeurs proches, avec une période de variation en fonction de la fréquence propre d'oscillation qui est égale à la profondeur acoustique de la région en question. L'amplitude de la variation est directement proportionnelle au coefficient de réflexion, qui doit dépendre à la fois de la fréquence d'oscillation et de la magnitude du gradient. La détermination d'un tel comportement peut nous permettre par exemple de sonder la position des limites des zones convectives où un fort gradient du poids moléculaire moyen peut exister et provoquer une variation rapide de la vitesse du son. Un phénomène identique peut être provoqué par les régions d'ionisation de l'hélium ou par un fort gradient dans la fréquence de Brunt-Väisälä dans le cas des modes de gravité (e.g., Miglio *et al.* 2008; Cunha *et al.* 2015; Vrad *et al.* 2015).

### 2.4.3 Splittings rotationnels

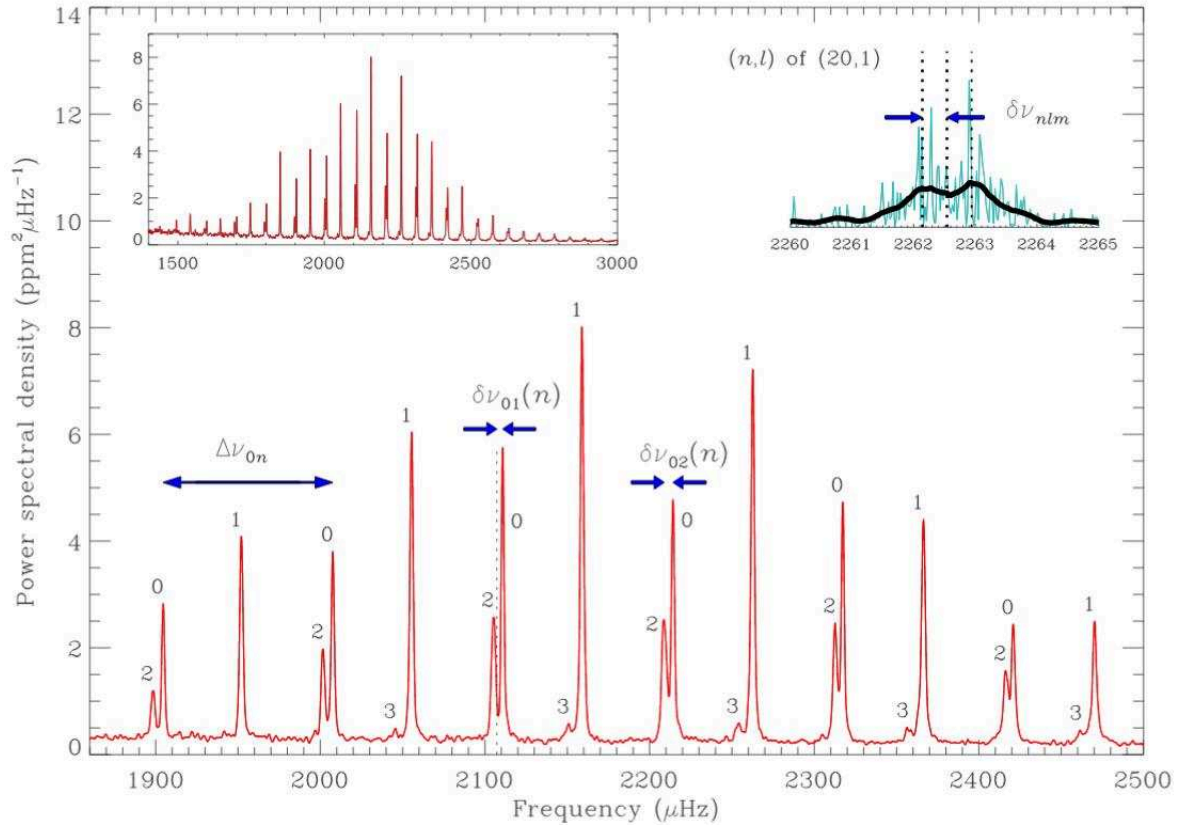
Prenons l'exemple des modes de pression en présence d'une faible rotation. On rappelle que dans cet exemple simple, la rotation est ne fonction du rayon, et que l'effet de la force de Coriolis et du gradient de rotation sur les oscillations est négligé. Seul l'effet Doppler sur la fréquence des oscillations est pris en compte. Dans ce cadre simplifié, la condition de résonance donnée dans Eq. (2.64) doit être modifiée en substituant la fréquence  $\sigma$  par la fréquence intrinsèque  $\hat{\sigma}$ . En séparant l'intégrale du nombre en deux parties (i.e., une première dépendant de  $\sigma$  et une seconde dépendant de  $\Omega$ ) et en suivant le même cheminement qui aboutit à Eq. (2.70), les fréquences propres peuvent maintenant être réécrites approximativement comme

$$\sigma_{nlm} \approx \sigma_{0,nl} + m \frac{\langle \Omega \rangle_p}{2\pi} , \quad (2.102)$$

où  $\sigma_{0,nl}$  est la fréquence propre d'oscillation dans le cas sans rotation et  $\langle \Omega \rangle_p$  est la valeur moyenne de la rotation sondée par les modes de pression et définie comme

$$\langle \Omega \rangle_p = 2\Delta\nu \int_{r_{\text{int}}}^{R_\star} \Omega(r) \frac{dr}{c} . \quad (2.103)$$

On voit donc que la rotation lève la dégénérescence des fréquences propres d'oscillation avec le nombre azimutal  $m$ . Cela est équivalent à l'effet Zeeman en mécanique quantique lorsqu'un atome est plongé dans un champ magnétique. En effet, dans le spectre, on voit l'apparition de multiplets d'oscillation, tous associés à un nombre azimutal  $m$ , et qui se disposent de façon symétrique autour de la fréquence propre obtenue dans le cas sans rotation (voir FIGURE 2.6 pour un exemple). L'observation de ce *splitting* rotationnel permet donc de remonter à une valeur moyenne de la rotation. Néanmoins, l'équation (2.103) montre que l'information apportée par les modes est localisée. En effet, on voit que les modes de pression sondent la rotation de préférence dans les couches superficielles de l'étoile où la vitesse du son chute fortement et où leur amplitude est maximale. Une inversion du profil de rotation nécessite donc l'observation de nombreux multiplets rotationnels associés à des modes plus ou moins sensibles à différentes régions de l'étoile.



**FIGURE 2.6:** Spectre d'oscillation de l'étoile de séquence principale 16CygniA obtenu grâce aux observations du satellite *Kepler* (d'après Chaplin & Miglio 2013). Le spectre principal a été lissé et représente les pics d'oscillation dominants qui sont annotés par leur degré angulaire. La grande séparation pour les modes radiaux et la petite séparation entre les modes  $l = 0$  et  $l = 2$  sont indiquées. L'encadré en haut à gauche montre l'ensemble de l'enveloppe de puissance d'oscillation. L'encadré en haut à droite est un zoom sur le pic d'un mode  $l = 1$  dont les composantes azimutales  $m = -1, 0, 1$  sont séparées par la rotation. Le spectre lissé est représenté en bleu et la valeur du splitting rotationnel est indiquée. L'axe de rotation de cette étoile est incliné par rapport à l'axe de visée de telle sorte que les composantes  $|m| = 1$  sont bien visibles, au contraire de la composante centrale  $m = 0$ .

# Chapitre 3

## Enjeux et axes de travail de la thèse

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Des succès pour les modèles actuels, mais aussi des insuffisances . . .</b>	<b>39</b>
3.1.1	Des prédictions en accord avec les observations du Soleil . . . . .	39
3.1.2	Des questions toujours ouvertes . . . . .	41
<b>3.2</b>	<b>De fortes contraintes par les diagnostics sismiques . . . . .</b>	<b>42</b>
<b>3.3</b>	<b>Axes de travail . . . . .</b>	<b>42</b>

---

Comme nous l'avons vu dans le Chapitre 1, le modèle standard permet de décrire les grandes phases de la vie d'une étoile. De plus, certains faits observationnels ont confirmé ses prédictions avec un bon niveau de confiance. D'autres observations montrent cependant que ce modèle est incomplet et doit être raffiné. Dans ce contexte, les observations sismiques tiennent une place importante. Elles permettent de tester les modèles et d'améliorer notre compréhension de la dynamique interne des étoiles. Le travail effectué durant ma thèse a été guidé en particulier par les résultats précédemment obtenus par l'astérosismologie. Alors que les codes d'évolution actuels incluent déjà un certain nombre de processus non-standard, des désaccords avec les études sismiques subsistent et montrent la nécessité de parfaire les modèles. De plus, une vision de plus en plus détaillée des intérieurs stellaires demande des contraintes observationnelles de plus en plus fortes, ce que le développement de nouveaux diagnostics sismiques pourrait procurer. Ceci constitue les deux axes de travail suivis durant ma thèse et qui sont brièvement introduits dans ce chapitre.

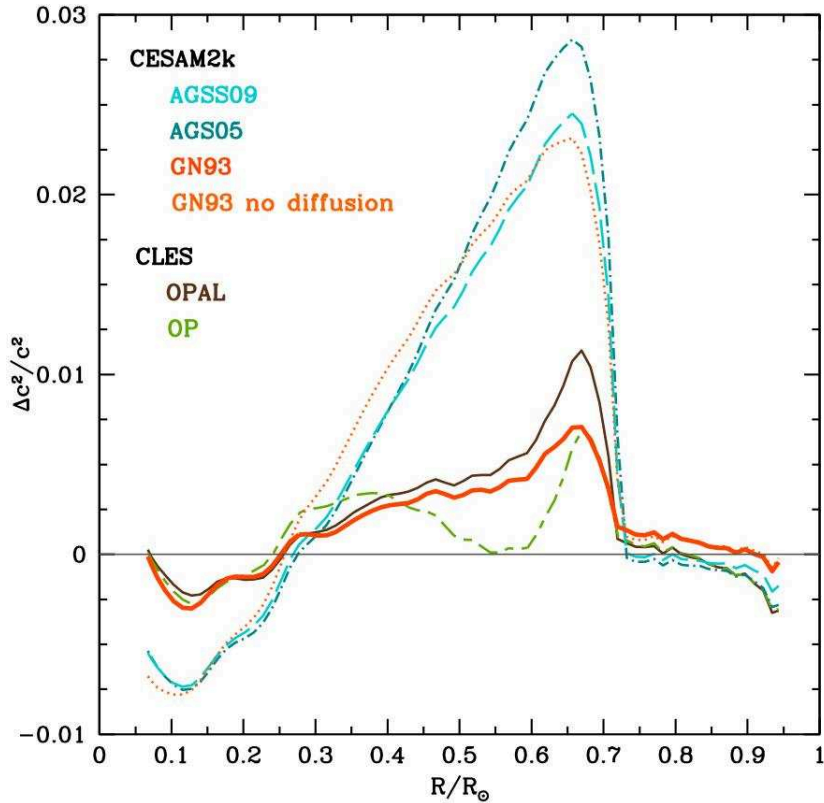
### 3.1 Des succès pour les modèles actuels, mais aussi des insuffisances

#### 3.1.1 Des prédictions en accord avec les observations du Soleil

Le modèle standard, malgré ses hypothèses simplificatrices, permet de rendre compte de certaines contraintes observationnelles obtenues dans le Soleil avec une bonne précision. Des désaccords avec les observations sismiques ont aussi d'ores et déjà été résolus par l'inclusion de nouveaux processus comme par exemple la diffusion microscopique. Ceci est illustré dans les exemples suivants.

**Profil interne de la vitesse du son.** L'héliosismologie a permis de tester le profil de la vitesse du son obtenu théoriquement. En effet, par le biais de méthodes d'inversion, l'écart entre la vitesse du son prédite par un modèle solaire et celle inférée via l'observation des modes acoustiques peut être estimé avec précision. La différence entre les modèles et les observations sismiques s'avère alors être inférieure à 3%, et ce quel que soit la physique considérée dans la modélisation (voir FIGURE 3.1). Ce résultat conforte ainsi avec un bon niveau de confiance les prédictions obtenues





**FIGURE 3.1:** Différence relative entre la vitesse du son obtenue par le biais d’une inversion sismique réalisée par Basu *et al.* (2000) et la vitesse du son obtenue par différents modèles solaires, qui ont été calculés avec différents codes d’évolution (CESAM2K, CLES)<sup>1</sup>, différentes compositions chimiques (AGS09, AGS05, GN93)<sup>2</sup> et différentes tables d’opacité (OPAL, OP)<sup>3</sup> en entrée (d’après Lebreton *et al.* 2014a).

par le modèle solaire standard.

**Problème des neutrinos solaires.** Ce problème est apparu à la fin des années 1960 consécutivement à l’expérience proposée par John N. Bahcall et Raymond Davies. L’expérience consistait à déterminer la quantité de neutrinos produits par les réactions nucléaires dans le cœur du Soleil. Le détecteur se composait d’un vaste réservoir de solution chlorée dans laquelle une faible mais significative quantité d’isotopes de l’argon pouvait être produite par interaction avec les neutrinos. Les deux physiciens ont alors pu montrer que la quantité de neutrinos détectés était inférieure d’environ un facteur trois par rapport aux prédictions des modèles solaires. Cette différence entre la théorie et les observations indiquait soit que le modèle solaire était mis à défaut, soit que la physique des neutrinos était incomplète. D’autres expériences d’envergure ont vu le jour dans les années qui suivirent et confirmèrent cet écart significatif (e.g., Bahcall & Davis 2000). Parallèlement, l’avènement de l’héliosismologie dans les années 1990 a conforté les prédictions du modèle solaire, renversant le problème du côté de la physique des particules. Et en effet, on sait aujourd’hui que le déficit de neutrinos par rapport à la valeur attendue s’explique par l’existence de trois saveurs de masses légèrement différentes (électronique, muonique et tauique). Durant leur trajet entre le Soleil et la Terre, les neutrinos peuvent ainsi osciller entre ces trois états, et ce de façon

1. CESAM2K correspond au code d’évolution stellaire français développé à l’Observatoire de Meudon (Morel & Lebreton 2008) et CLES correspond au Code Liégeois d’Évolution stellaire (Scuflaire *et al.* 2008).

2. Les abréviations AGS09, AGS05 et GN93 renvoient respectivement aux compositions chimiques solaires données par Asplund *et al.* (2009), Asplund *et al.* (2005) et Grevesse *et al.* (1993).

3. Les abréviations OPAL et OP correspondent respectivement aux tables d’opacité délivrées par les groupes OPAL (Iglesias & Rogers 1996) et OP (Badnell *et al.* 2005).

équiprobable. L'expérience proposée par John N. Bahcall et Raymond Davies ne permettait pas de détecter les états tauique et muonique, d'où le facteur trois par rapport aux prédictions du modèle solaire standard. La résolution de ce problème des neutrinos solaires fait sans aucun doute partie des succès du modèle standard, puisque ses prédictions ont participé de façon notable à faire avancer la connaissance dans le domaine de la physique des particules.

**Abondance d'hélium dans l'enveloppe du Soleil.** L'abondance d'hélium ne peut être directement mesurée dans l'atmosphère des étoiles à cause de l'absence de raies associées. L'abondance d'hélium est donc habituellement un paramètre dans les modèles qui nécessite d'être ajusté en couple avec le paramètre de la longueur de mélange  $\alpha_{MLT}$  pour reproduire au mieux les observables. L'héliosismologie a néanmoins permis pour la première fois d'obtenir une estimation fiable de l'abondance d'hélium dans l'enveloppe du Soleil actuel égale à  $Y_{E,\odot} \approx 0.2485 \pm 0.0034$  (e.g., Basu & Antia 1995; Richard *et al.* 1998; Basu & Antia 2004). Cela a notamment mis en exergue la nécessité de prendre en compte la diffusion microscopique et le triage gravitationnel pour reproduire la valeur de l'abondance d'hélium dérivée par l'héliosismologie (e.g., Richard *et al.* 1996).

Les précédents exemples montrent que les bases de la modélisation stellaire sont bien comprises. Néanmoins, les modèles sont encore loin d'être réalistes. Même si ces premiers succès sont encourageants, des efforts doivent encore être fournis pour améliorer la précision et l'exactitude de notre compréhension de l'évolution stellaire.

### 3.1.2 Des questions toujours ouvertes

De nombreux points d'interrogation subsistent à l'heure actuelle au sujet de la modélisation des intérieurs stellaires. D'abord, la description de la convection par la théorie simplifiée de la longueur de mélange est parmi les principales sources d'incertitude. En effet, celle-ci échoue à décrire les interfaces entre les régions convectives et les zones radiatives stablement stratifiées. Les simulations numériques pourraient aider à mieux décrire ces régions si elles parvenaient à atteindre des régimes à partir desquels l'extrapolation vers les conditions stellaires devenait possible (e.g., Brummell *et al.* 2002; Rempel 2004). L'astérosismologie permet bien de contraindre l'extension moyenne de la région de pénétration convective (e.g., Basu 1997; Lebreton & Goupil 2012), mais le profil de la transition du gradient de température, qui passe d'une valeur convective à une valeur radiative, reste toujours incertain (e.g., Rempel 2004; Christensen-Dalsgaard *et al.* 2011). La MLT échoue aussi à décrire les régions superficielles où l'on passe d'un milieu opaque à un milieu transparent à la lumière. Ces régions ont un impact sur les fréquences d'oscillation (e.g. Kjeldsen *et al.* 2008) et notre ignorance sur ces effets de surface se répercute sur la précision des études sismiques. Des progrès sont néanmoins en cours pour corriger ses effets et passent notamment par des simulations 3D réalistes de la surface des étoiles (e.g., Sonoi *et al.* 2015, 2017). Ensuite, on peut encore noter que des anomalies d'abondance observées en surface des étoiles sont incohérentes avec le seul dragage convectif des éléments chimiques, comme cela est supposé dans le modèle standard. De plus, la diffusion microscopique n'est pas suffisante, seule, pour expliquer l'ensemble de ces faits observationnels. D'autres processus de transport doivent être invoqués, tels que le mélange turbulent ou encore les processus induits par la rotation (e.g., Charbonnel & Talon 2008). Malheureusement, de nombreuses incertitudes demeurent sur l'évolution du moment cinétique interne des étoiles. Nous verrons plus en détail dans le Chapitre 4 que les modèles actuels les plus sophistiqués ne parviennent pas à reproduire les faibles valeurs des taux de rotation observés dans le Soleil et les étoiles évoluées de faibles masse dérivés par les observations sismiques. Un ou plusieurs processus de transport encore inconnus doivent agir efficacement pour ralentir la rotation des régions internes. La rotation est un ingrédient dynamique important de la vie des étoiles (voir Chapitre 1, et le problème de la redistribution de moment cinétique dans les intérieurs stellaires reste une question ouverte majeure, comme en témoignent les nombreuses études parues à ce sujet dans les dernières années (voir Chapitre 4).

## 3.2 De fortes contraintes par les diagnostics sismiques

Comme il a déjà été mentionné à maintes reprises, l'étude des oscillations stellaires permet de sonder l'intérieur des étoiles et de fortement contraindre les modèles. Cela passe notamment par l'utilisation de diagnostics sismiques qui font le lien entre les caractéristiques d'un spectre d'oscillation et les propriétés de l'étoile observée. Les développements du Chapitre 2 ont notamment montré leur capacité à renseigner sur les propriétés stellaires fondamentales (e.g., masse, rayon,...), sur le stade évolutif (e.g., taille du cœur radiatif, densité moyenne,...), localiser les zones à forts gradients via les *glitches* (e.g., limite des zones convectives, régions d'ionisation,...) et mesurer la rotation moyenne. L'information obtenue forme une mine d'or pour mieux comprendre l'ensemble des processus internes, et pour tendre progressivement vers des modèles d'évolution stellaire 1D de plus en plus réalistes et satisfaisants.

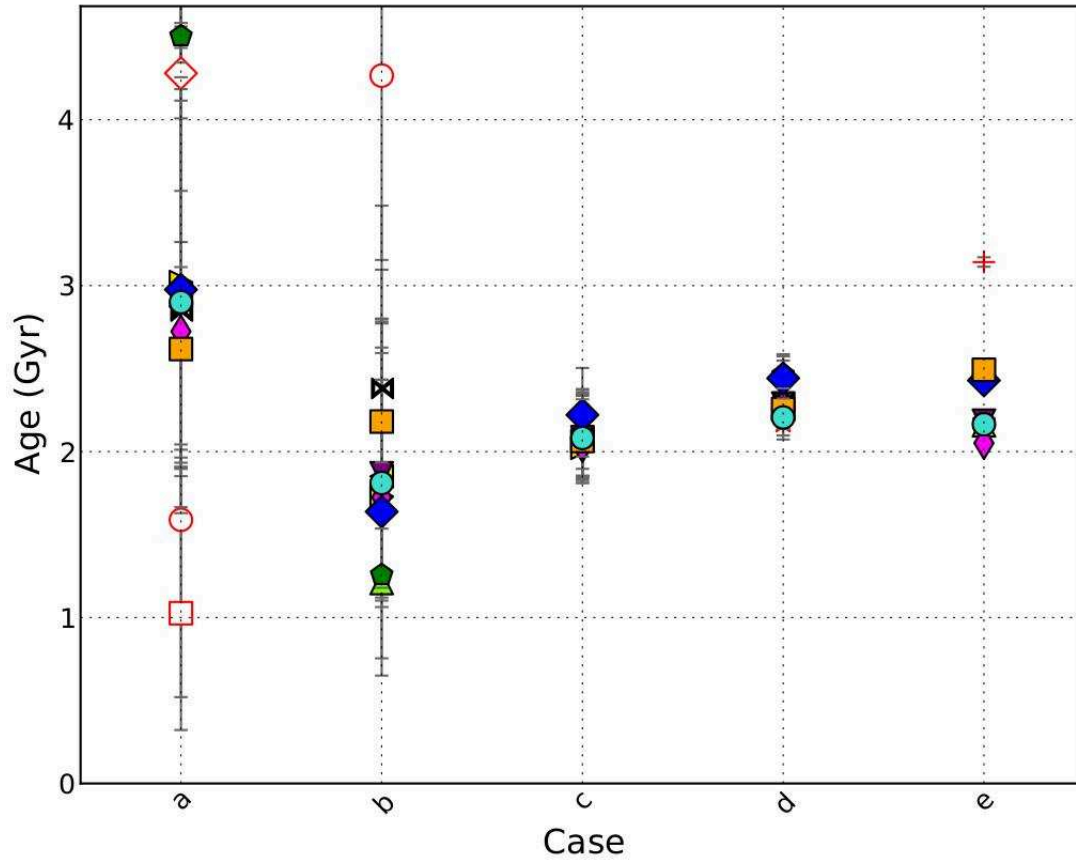
A physique donnée, les diagnostics sismiques fournissent aussi de nouvelles contraintes observationnelles qui donnent bien sûr la possibilité d'ajuster un nombre de paramètres plus grand, mais qui ouvrent aussi la porte vers une caractérisation des propriétés stellaires de plus en plus précise. Une bonne manière de s'en convaincre est de considérer l'impact qu'ont les observations sismiques sur l'estimation des âges stellaires. L'âge des étoiles ne peut être directement déduit des observations, et doit être estimé par la recherche d'un modèle optimal reproduisant au mieux les données disponibles. L'étude de Lebreton *et al.* (2014a) sur l'étoile de séquence principale HD 52265, observée par le satellite CoRoT, a en effet montré que la prise en compte des diagnostics sismiques (corrigés des effets de surface) en plus des observables classiques (température effective, luminosité et métallicité) permet de réduire l'incertitude sur l'estimation des âges stellaires de 100% à moins de 10%, et ce malgré la large gamme d'ingrédients physiques considérés dans les modèles (voir FIGURE 3.2). De plus, selon les auteures, le processus d'optimisation montre que différentes valeurs de la masse et de l'abondance d'hélium sont possibles, mais que cette dégénérescence n'affecte pas la précision de l'estimation de l'âge. Elle affecte néanmoins l'estimation de la masse avec une incertitude autour de 7%. Ceci montre sans équivoque le potentiel des diagnostics sismiques et la nécessité de les considérer dans l'étude des intérieurs stellaires.

## 3.3 Axes de travail

Mon travail de thèse s'est articulé autour de deux axes principaux : le transport de moment cinétique par les ondes internes de gravité et le développement des diagnostics sismiques par les modes mixtes dans les étoiles évoluées.

Premièrement, je me suis intéressé au problème de redistribution de moment cinétique dans les étoiles de faible masse. Les observations sismiques montrent l'existence de processus internes encore incompris capables de freiner l'augmentation de la vitesse de rotation centrale au cours de l'évolution et de la contraction graduelle des couches centrales. Dans le Chapitre 4, je rappellerai les résultats des différents travaux qui se sont déjà penchés sur la question, et montrerai que malgré ces nombreuses études, le problème est toujours d'actualité. Je me focaliserai alors sur le transport de moment cinétique par les ondes internes de gravité, qui sont connues depuis longtemps pour être capables d'affecter le profil de rotation interne des étoiles. Les propriétés de ces ondes ainsi que le bagage théorique nécessaire pour traiter du transport de moment cinétique par ces dernières seront introduits dans le Chapitre 5. L'efficacité du transport par les ondes dépend de leur amplitude, et donc du mécanisme d'excitation. J'explorerai alors la question de la génération des ondes internes de gravité dans le Chapitre 6. Je développerai un modèle semi-analytique d'excitation d'ondes par la pénétration de panaches convectifs dans le haut de la zone radiative, modèle qui jusqu'à maintenant restait manquant. Ce modèle me permettra alors d'estimer l'influence du transport par ces ondes sur l'évolution de la rotation interne dans les étoiles de la séquence principale jusqu'à la branche des géantes rouges dans le Chapitre 7.

Le deuxième axe suivi durant ma thèse concerne l'élaboration et l'amélioration des diagnostics



**FIGURE 3.2:** Intervalle d'âge estimé par le processus de recherche d'un modèle optimal pour l'étoile HD 52265 (d'après Lebreton *et al.* 2014b, voir Table 1 et 2 ainsi que Fig. 13 de cet article). Les symboles représentent les résultats obtenus avec différents ingrédients physiques d'entrée pour les modèles. En abscisse est représenté le degré de contraintes observationnelles utilisées. Cas *a* : observables classiques (luminosité, température effective, métallicité). Cas *b* : ajout de la grande séparation. Cas *c* et *d* : ajout de la petite séparation, et de son rapport avec la grande séparation. Cas *e* : utilisation de l'ensemble des fréquences individuelles observées, la croix rouge correspondant à un modèle où les effets de surface n'ont pas été corrigés.

sismiques par les modes mixtes dans les géantes rouges. Les modes mixtes sont des modes d'oscillation se comportant comme des modes de pression dans l'enveloppe des étoiles et comme des modes de gravité dans leur cœur radiatif. Ces modes ont donc de l'amplitude à la fois à la surface des étoiles et dans leurs cœurs. La détection de ces oscillations particulières à la surface des étoiles évoluées permet alors de sonder directement les propriétés de leurs couches les plus profondes. Dans le Chapitre 8, les propriétés des modes mixtes seront brièvement rappelées, tout en mettant l'accent sur l'information que les précédentes études observationnelles ont déjà permis d'apporter. Le cas des modes dipolaires sera particulièrement étudié. La première étude à grande échelle du facteur de couplage des modes mixtes sera présentée dans le Chapitre 9. Nous verrons que ce paramètre offre la possibilité de sonder la région intermédiaire entre le cœur d'hélium et le voisinage de la base de l'enveloppe convective. Les résultats seront interprétés à la lumière d'un modèle simple prenant en compte le formalisme théorique dans l'hypothèse d'un fort couplage proposé par Takata (2016b), qui s'avère nécessaire pour expliquer les observations. Dans le Chapitre 10, ce formalisme sera plus amplement testé en confrontant ses prédictions à un code d'oscillation dans le cas d'un modèle approprié. Enfin, le Chapitre 11 sera dédié à l'étude du paramètre de décalage en période des modes mixtes jusqu'ici très peu étudié, le but étant de mettre en lumière l'information portée par ce paramètre. Nous verrons que ce paramètre a notamment le potentiel de sonder la région intermédiaire entre le cœur d'hélium et le voisinage de la base de l'enveloppe convective, et ce de façon complémentaire avec le facteur de couplage.

## Deuxième partie

# Transport de moment cinétique par les ondes internes de gravité



# Chapitre 4

## Nécessité d'un processus de transport de moment cinétique additionnel

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Contraintes observationnelles</b>	<b>47</b>
4.1.1	Rotation interne des étoiles de type solaire sur la séquence principale	47
4.1.2	Évolution du moment cinétique interne après la séquence principale	49
<b>4.2</b>	<b>Une modélisation actuellement insuffisante</b>	<b>52</b>
4.2.1	Échec des processus de transport hydrodynamiques induits par la rotation	52
4.2.2	Inefficacité du transport par le champ magnétique généré par le mécanisme de Tayler-Spruit	55
4.2.3	Précédents travaux sur les ondes internes de gravité	57
4.2.4	Test d'hypothèses sur le couplage entre le cœur et l'enveloppe	57
<b>4.3</b>	<b>Solutions avancées et problématique de la partie II</b>	<b>58</b>
4.3.1	Champs magnétiques, turbulence, modes mixtes, ondes de gravité...?	58
4.3.2	Problématique	60

---

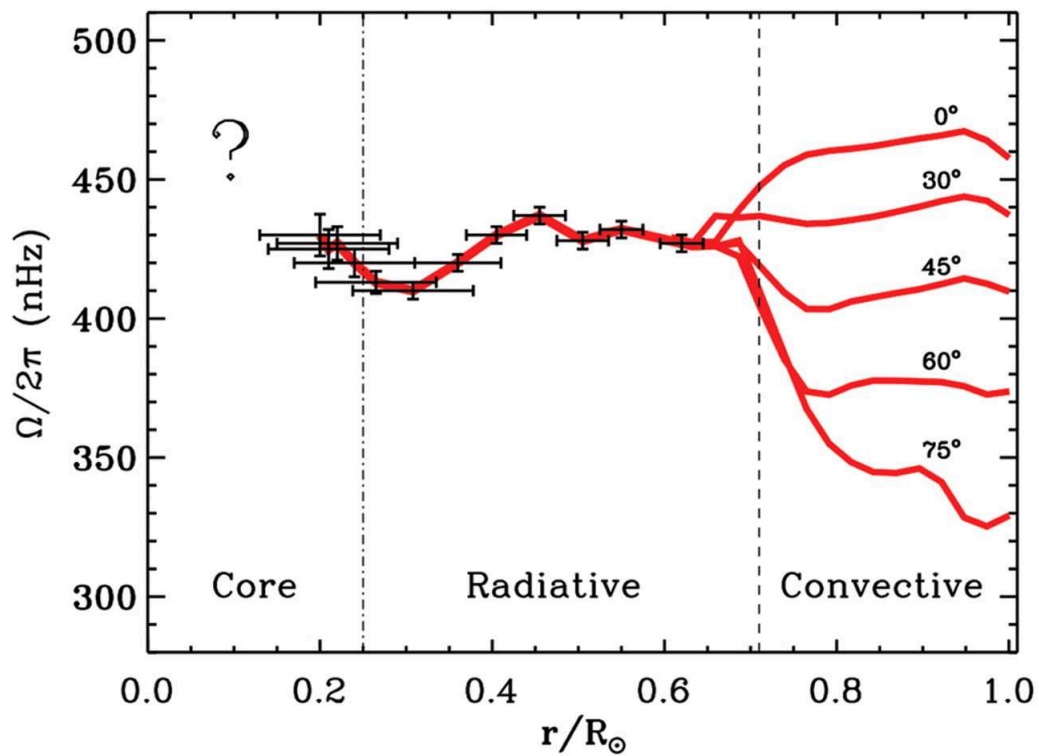
Dans ce chapitre, nous présentons les plus importantes contraintes apportées actuellement par l'astérosismologie sur l'évolution du moment cinétique interne des étoiles. Ces observations sont nombreuses et en désaccord sur plusieurs ordres de grandeur avec les modèles d'évolution stellaire actuels. Dans ces dernières années, de nombreux travaux théoriques ont essayé d'expliquer ces faits observationnels en invoquant de nouveaux processus de transport de moment cinétique. Les solutions avancées font appel à l'effet de champs magnétiques, d'ondes internes ou encore de processus turbulents. Néanmoins, le problème de la redistribution de moment cinétique dans les intérieurs stellaires radiatifs reste toujours aujourd'hui une question ouverte. Nous rappelons ici l'état d'avancement général apporté par ces différentes études. Enfin, dans ce contexte, nous introduisons la problématique qui s'est posée au début du travail de thèse sur le transport de moment cinétique par les ondes internes de gravité et qui fera l'objet de cette deuxième partie.

### 4.1 Contraintes observationnelles

#### 4.1.1 Rotation interne des étoiles de type solaire sur la séquence principale

Grâce aux nombreuses données sismiques fournies par le satellite SOHO, les splittings rotationnels des modes de pression du Soleil ont pu être mesurés avec une grande précision. Par le biais de techniques d'inversion, il a été possible de remonter au profil de rotation solaire et ainsi d'obtenir de précieuses informations sur sa structure interne. Un exemple pris à García *et al.* (2007) est donné en FIGURE 4.1.





**FIGURE 4.1:** Fréquence de rotation interne du Soleil en fonction du rayon normalisé au rayon solaire d'après García *et al.* (2007). Le profil a été déduit des données sismiques obtenues par les instruments MDI et GOLF sur le satellite SOHO. Dans la zone convective, la rotation différentielle est représentée en fonction du rayon et de la colatitude. Dans la zone radiative, la rotation différentielle est essentiellement radiale. Les barres d'erreur sur la fréquence de rotation et la localisation en rayon sont indiquées.

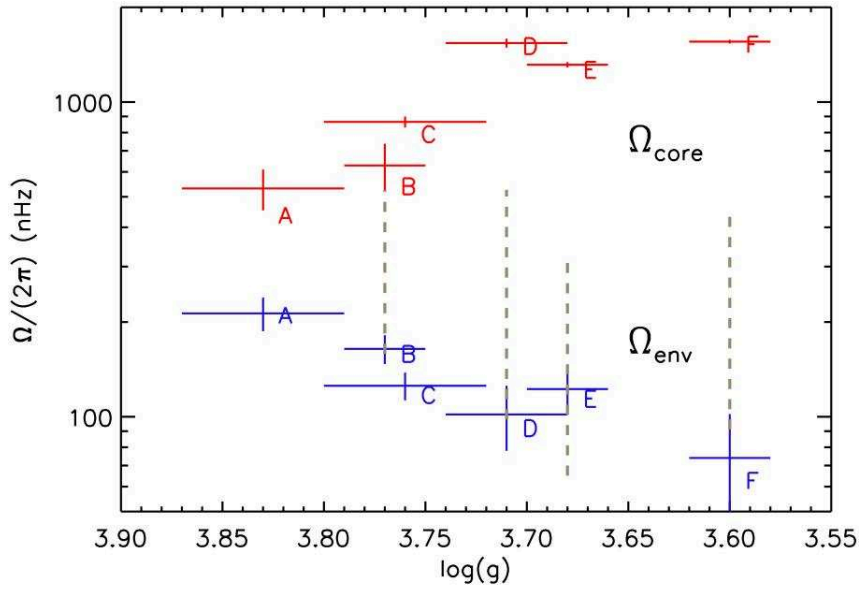
Dans la zone convective externe ( $r \gtrsim 0.7 R_{\odot}$ ), la fréquence de rotation dépend de la colatitude. Les valeurs observées sont en accord avec l’observation du mouvement des tâches solaires à la surface du Soleil. A colatitude donnée, elle reste néanmoins quasi uniforme radialement. Plus bas ( $r \sim 0.7 R_{\odot}$ ), la région de transition vers la zone radiative est le siège d’un fort cisaillement rotationnel. La faible épaisseur et la stabilité de cette zone, plus communément appelée *tachocline*, ne sont encore pas totalement comprises aujourd’hui depuis le travail fondateur de (Spiegel & Zahn 1992). Elle est pourtant connue pour être une région importante dans la dynamique du Soleil (génération du champ magnétique, excitation d’ondes internes ou encore mélange induit par pénétration convective) et fait actuellement l’objet de nombreuses études (e.g. Brun & Zahn 2006; Barnabé *et al.* 2017). Enfin, dans la zone radiative interne, la FIGURE 4.1 montre que la fréquence de rotation est quasi uniforme jusqu’à environ  $0.2 R_{\odot}$ . En-dessous de cette limite, les modes acoustiques sont incapables de nous renseigner sur le profil de rotation. En effet, les modes de pression sont sensibles aux propriétés de l’enveloppe et portent peu d’information sur les couches centrales (comme le montre l’augmentation des barres d’erreur avec la profondeur sur la FIGURE 4.1). L’observation des modes de gravité du Soleil permettrait de pallier ce problème puisque ces modes d’oscillation s’établissent dans les parties internes du Soleil. En contrepartie, leur amplitude est très faible en surface et la détection directe de leur signature dans les spectres d’oscillation du Soleil est depuis longtemps sujet à débat (e.g., Turck-Chièze *et al.* 2004; García *et al.* 2007; Belkacem *et al.* 2009; Appourchaux *et al.* 2010; García *et al.* 2011; Appourchaux & Pallé 2013). Récemment, Fossat *et al.* (2017) ont reporté la détection de centaines de modes de gravité dans le régime asymptotique à partir de l’étude de la variation temporelle de la grande séparation ( $\Delta\nu$ ) des modes de pression solaires. L’analyse des splittings rotationnels des modes de gravité leur a même permis d’estimer que la rotation centrale est environ quatre fois supérieure à la rotation moyenne de la zone convective.

Les observations actuelles du Soleil posent déjà de fortes contraintes sur les modèles d’évolution stellaire (e.g., Pinsonneault *et al.* 1989; Eggenberger *et al.* 2005; Turck-Chièze *et al.* 2010). Le profil de rotation observé montre l’existence d’un ou plusieurs processus de transport efficace capable d’extraire du moment cinétique du cœur vers l’enveloppe lors de la formation du Soleil. En effet, le Soleil naît de l’effondrement gravitationnel d’un nuage moléculaire géant. Il trouve sa stabilité sur la séquence principale grâce à la fusion de l’hydrogène dans son cœur dont l’allumage nécessite une forte contraction des couches centrales. S’il y avait conservation locale de moment cinétique, la rotation moyenne de la zone interne radiative serait beaucoup plus grande que la rotation moyenne de l’enveloppe convective (i.e., bien supérieure à un facteur quatre). La prise en compte de processus de freinage magnétique par des vents stellaires en surface (e.g., Schatzman 1962; Amard *et al.* 2016), en faisant l’expérience de pensée qu’aucun autre processus de transport n’existe, augmenteraient encore davantage le contraste entre les deux régions puisqu’ils diminueraient d’autant plus la rotation moyenne de l’enveloppe. L’observation d’un profil de rotation “plat” dans le Soleil nous indique donc qu’un processus de transport a été à l’œuvre dans la vie passée du Soleil.

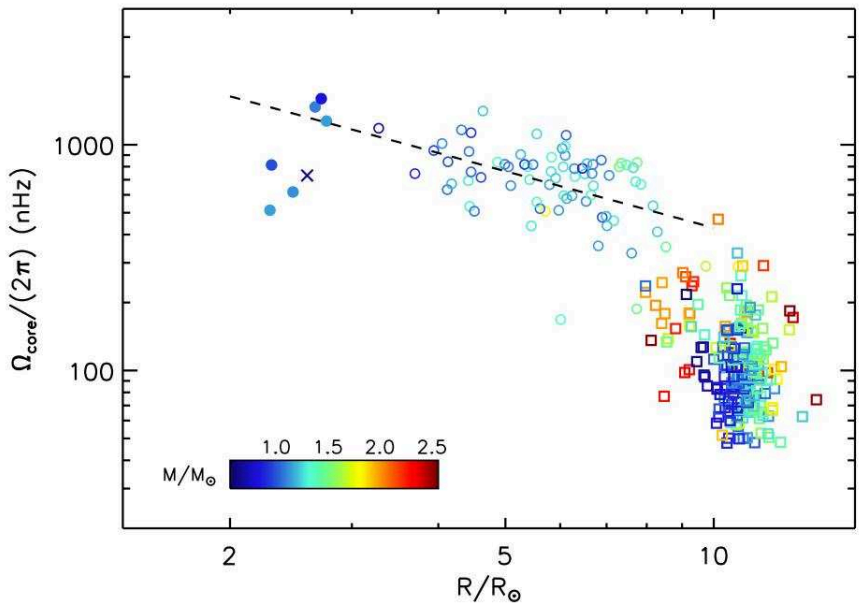
Le Soleil n’est pas un cas isolé sur la séquence principale. En effet, les observations des satellites CoRoT et *Kepler* ont permis d’élargir l’échantillon d’étoiles de la séquence principale pour lesquelles le contraste de rotation entre le cœur et l’enveloppe a pu être estimé. Benomar *et al.* (2015) (voir aussi Nielsen *et al.* 2014) ont montré que, pour une vingtaine d’étoiles de la séquence principale, le rapport de la rotation moyenne des couches internes sur la rotation moyenne de l’enveloppe obtenu par l’observation des splittings rotationnels des modes de pression de faible degré angulaire (i.e., sensibles à la rotation moyenne de la zone radiative) est proche de l’unité. Ce résultat indique une faible amplitude pour la rotation différentielle radiale et montre une fois de plus le désaccord avec l’hypothèse de conservation locale de moment cinétique de la naissance des étoiles de faible masse jusqu’à la fin de la séquence principale.

#### 4.1.2 Évolution du moment cinétique interne après la séquence principale

Grâce à la précision atteinte par le satellite *Kepler*, les perturbations induites par la rotation sur les fréquences propres des modes mixtes ont pu être détectées avec un bon niveau de confiance dans



**FIGURE 4.2:** Rotation moyenne du cœur (rouge) et de l'enveloppe (bleu) de six étoiles sur la branche des sous-géantes en fonction du  $\log g$  sismique, d'après Deheuvels *et al.* (2014). Les barres d'erreur sur la rotation et le  $\log g$  sont représentées.



**FIGURE 4.3:** Rotation moyenne du cœur de centaines d'étoiles de la branche des sous-géantes (cercles pleins et croix), de la branche des géantes rouges (cercles vides) et du clump (carrés) en fonction de leur rayon sismique obtenu par des relations d'échelle et normalisé par le rayon solaire, d'après Mosser *et al.* (2012b) et Deheuvels *et al.* (2012, 2014). La couleur indique la masse des étoiles obtenue aussi par le biais de relations d'échelle.

de nombreuses étoiles évoluées. Ceci a permis d’apporter de nouvelles contraintes sur l’évolution de la rotation interne après la séquence principale. Nous rappelons ici les principaux résultats.

Deheuvels *et al.* (2012, 2014) ont étudié la rotation interne de sept étoiles sous-géantes ou jeunes géantes rouges observées par le satellite *Kepler*, avec des masses allant d’environ 0.8 à 1.5  $M_{\odot}$ . Les auteurs ont analysé les courbes de lumière et ont pu déterminer un échantillon de splittings rotationnels pour chaque étoile. Cela leur a permis d’estimer les rotations moyennes du cœur et de l’enveloppe suivant deux méthodes : soit par un calcul direct sur les splittings en utilisant le formalisme asymptotique développé par Goupil *et al.* (2013), soit en utilisant une méthode d’inversion à partir d’un modèle optimal ajusté aux observables. Les résultats donnés par les deux méthodes sont similaires et sont représentés sur la FIGURE 4.2. Dans les étoiles sous-géantes, il s’avère que la rotation moyenne du cœur augmente avec le temps alors que la rotation de l’enveloppe diminue. Malgré l’inversion d’un profil de rotation pour ces étoiles, la qualité des données n’était néanmoins pas assez bonne pour pouvoir discriminer entre un profil de rotation décroissant quasi linéairement entre le centre et la base de la zone convective, et un profil quasi discontinu présentant un fort gradient au voisinage de la couche d’hydrogène en fusion, c’est-à-dire semblable à un profil obtenu en supposant la conservation locale de moment cinétique depuis la fin de la séquence principale, mais avec une plus faible amplitude. Les valeurs de l’amplitude observées posent de fortes contraintes sur l’évolution de la rotation interne entre la fin de la séquence principale et le début de la branche des géantes rouges que les processus de transport invoqués dans les modèles devront reproduire.

L’observation de modes mixtes dans les étoiles de la branche des géantes rouges et du clump a aussi permis d’obtenir un aperçu sans précédent sur l’évolution de la rotation dans les stades évolutifs avancés. L’étude à grande échelle par Mosser *et al.* (2012b) a fourni des vitesses de rotation moyennes des couches centrales pour des centaines d’étoiles allant du début de l’ascension de la branche des géantes rouges jusqu’au clump, avec des masses entre 1 et 2.5  $M_{\odot}$ . Ces vitesses de rotation moyenne ont été déduites des splittings rotationnels détectés dans le spectre des modes mixtes par la méthode asymptotique proposée par Goupil *et al.* (2013). Les résultats de cette étude sont représentés sur la FIGURE 4.3 sur laquelle figurent aussi les fréquences de rotation observées par Deheuvels *et al.* (2012, 2014). Dans ces stades évolutifs, les couches centrales sont en contraction tandis que l’enveloppe se dilate. La connaissance du rayon procure donc une information sur le stade évolutif et l’axe des abscisses sur la FIGURE 4.3 est équivalent à l’axe du temps. Sur la branche des géantes rouges, la fréquence de rotation moyenne du cœur tend à diminuer avec le temps. Par conséquent, il est clair qu’un processus de transport efficace est à l’œuvre dans l’intérieur des étoiles sur la branche des géantes rouges. Ce dernier doit être capable de contrer l’accélération due à la contraction des couches centrales, voire d’expliquer le ralentissement progressif de leur vitesse de rotation si confirmé (e.g., voir les récents résultats de Gehan *et al.* 2017). La transition de la branche des géantes rouges vers le clump et le clump secondaire (voir Chapitre 1 pour les définitions) s’accompagne d’une chute en moyenne d’un facteur 6 de la fréquence de rotation moyenne du cœur. D’après Mosser *et al.* (2012b), cette chute de la fréquence de rotation peut s’expliquer en partie par les changements structuraux subis par ces étoiles après l’allumage de la fusion de l’hélium, et notamment par l’augmentation du rayon du cœur, mais cet effet seul ne semble pas suffisant. Un autre processus de transport doit agir. Il est intéressant de noter que les faibles fréquences de rotation observées dans le cœur des étoiles du clump sont en accord avec les taux de rotation observés dans les naines blanches, résidus des cœurs stellaires (e.g. Kawaler *et al.* 1999; Greiss *et al.* 2014). Ces taux de rotation peuvent en effet être marginalement reproduits en laissant évoluer les couches centrales de l’étoile sous l’hypothèse de conservation locale de moment cinétique à partir du clump, avec des conditions initiales pour la rotation du cœur similaires aux observations à ce stade évolutif (voir la figure 5 de Cantiello *et al.* 2014). Cela suggère donc que l’effet induit par le(s) processus de transport additionnel(s) nécessaire(s) pour reproduire les observations dans les géantes rouges doit s’atténuer après la fin de la fusion de l’hélium pour être de l’ordre de grandeur de l’effet de la contraction sur la rotation des couches centrales.

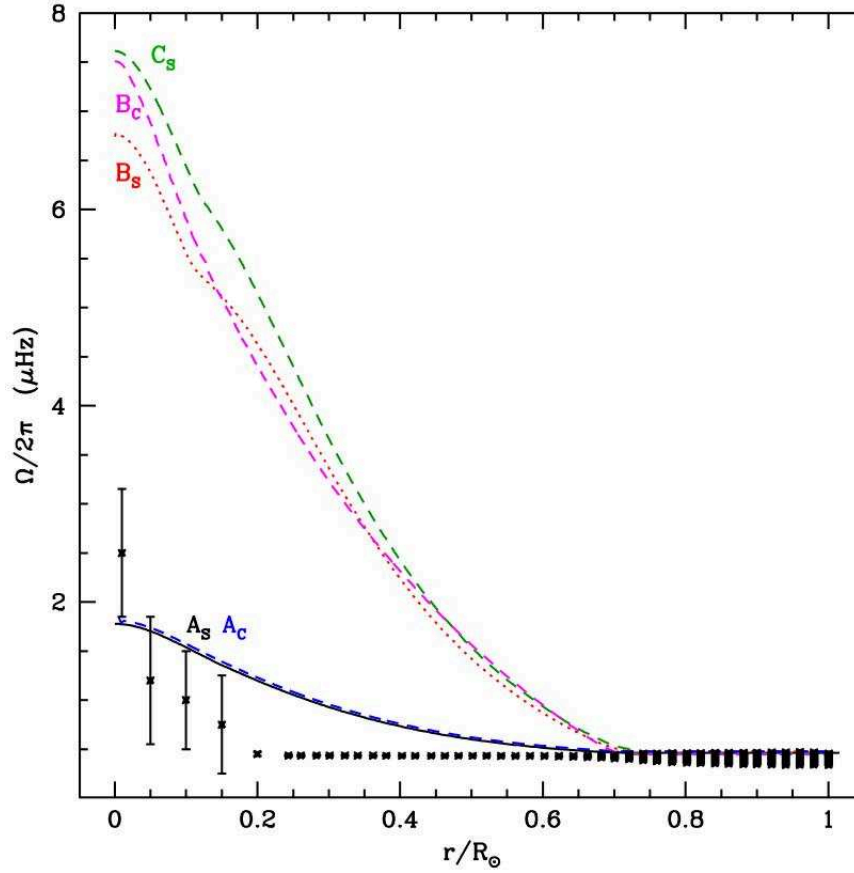
## 4.2 Une modélisation actuellement insuffisante

Consécutivement aux observations présentées dans la section précédente, la question fut de savoir si les processus de transport inclus dans les modèles d'évolution stellaire du moment étaient capables de reproduire ou non ces contraintes. On présente dans cette section les principaux travaux qui se sont penchés sur le problème. La plupart d'entre eux se sont particulièrement intéressés à l'impact de processus purement hydrodynamiques induits par la rotation, à l'effet d'un champ magnétique généré par le mécanisme de Tayler-Spruit ou encore à l'influence des ondes internes de gravité. D'autres études ont utilisé une approche différente et complémentaire qui consiste à tester différentes hypothèses sur le mécanisme de transport inconnu et à contraindre ses caractéristiques par un ajustement aux observations.

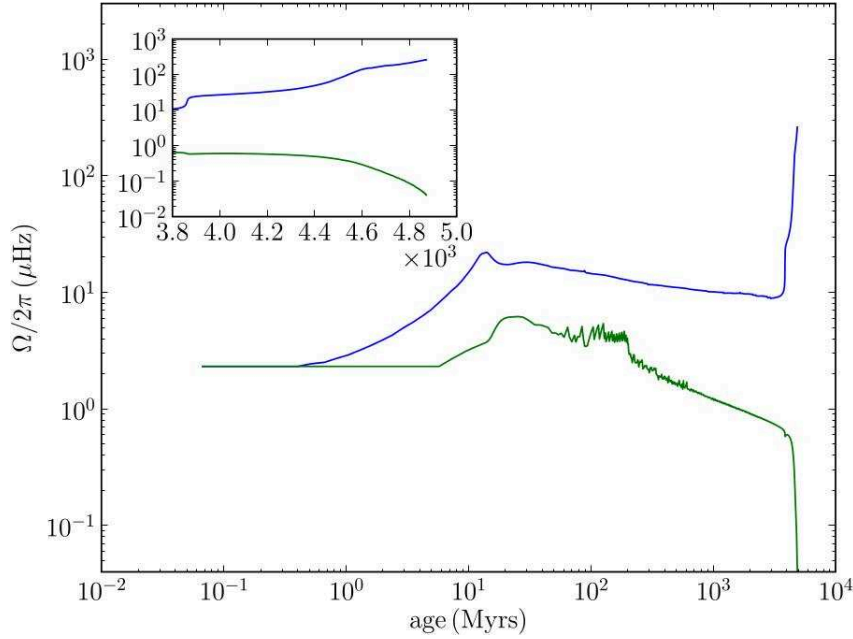
### 4.2.1 Échec des processus de transport hydrodynamiques induits par la rotation

Comme on l'a vu dans Section 4.1, les observations sont incompatibles avec l'hypothèse de conservation locale de moment cinétique et impliquent un ou plusieurs processus de transport efficaces dans les intérieurs radiatifs. Dans une étoile en rotation, le moment cinétique interne est advecté par des boucles de circulation méridienne, entretenues par les pertes de moment cinétique en surface (e.g., Decressin *et al.* 2009; Mathis *et al.* 2013), ou encore diffusé sous l'action de la turbulence générée par des instabilités de cisaillement. L'effet de ces processus est usuellement implémenté dans les codes d'évolution stellaire suivant le formalisme proposé par Zahn (1992) (voir aussi Maeder & Zahn 1998; Mathis & Zahn 2004). Différents travaux ont étudié l'évolution de la rotation dans les étoiles de faible masse en considérant ces deux processus. Dans le Soleil, ces deux mécanismes seuls ne parviennent pas à extraire suffisamment de moment cinétique des couches internes pour reproduire le profil de rotation observé par l'héliosismologie (e.g., Palacios *et al.* 2006; Turck-Chièze *et al.* 2010; Amard *et al.* 2016, voir FIGURE 4.4). Ceux-ci sont en effet incapables d'empêcher l'établissement d'un fort gradient de rotation entre le centre et la base de la zone convective, résultant de l'effet combiné de la contraction des couches centrales et du ralentissement de l'enveloppe convective par freinage magnétique (e.g., voir Fig. 8 dans Marques *et al.* 2013). De même, pour les étoiles entre la séquence principale et la branche des géantes rouges, les travaux de Eggenberger *et al.* (2012), Ceillier *et al.* (2013) et Marques *et al.* (2013) ont tous montré que ces processus de transport seuls restent insuffisants puisqu'ils prédisent des taux de rotation dans le cœur supérieurs de plusieurs ordres de grandeur aux observations sismiques (voir FIGURE 4.5). Même en imposant arbitrairement un couplage maximal entre la région radiative et l'enveloppe convective le long de la séquence principale, c'est-à-dire un profil de rotation uniforme comme suggéré par les observations (voir Section 4.1.1), la circulation méridienne et les instabilités de cisaillement échouent toujours à reproduire les contraintes sismiques sur la post-séquence principale (voir FIGURE 4.6). L'accélération de la vitesse de rotation due à la forte contraction des couches centrales en est principalement la cause (voir Figs. 7 et 8 dans Ceillier *et al.* 2013). Ces résultats montrent qu'un processus de transport efficace est nécessaire pour expliquer les faibles taux de rotation observés et contrer l'effet de la contraction des couches internes du début de la séquence principale jusqu'à la branche des géantes rouges. Eggenberger *et al.* (2012) a notamment estimé qu'un processus artificiel avec une diffusivité effective constante de l'ordre de  $10^4 - 10^5 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$  serait suffisant pour résoudre le problème sur la branche des sous-géantes et le début de l'ascension de la branche des géantes rouges.

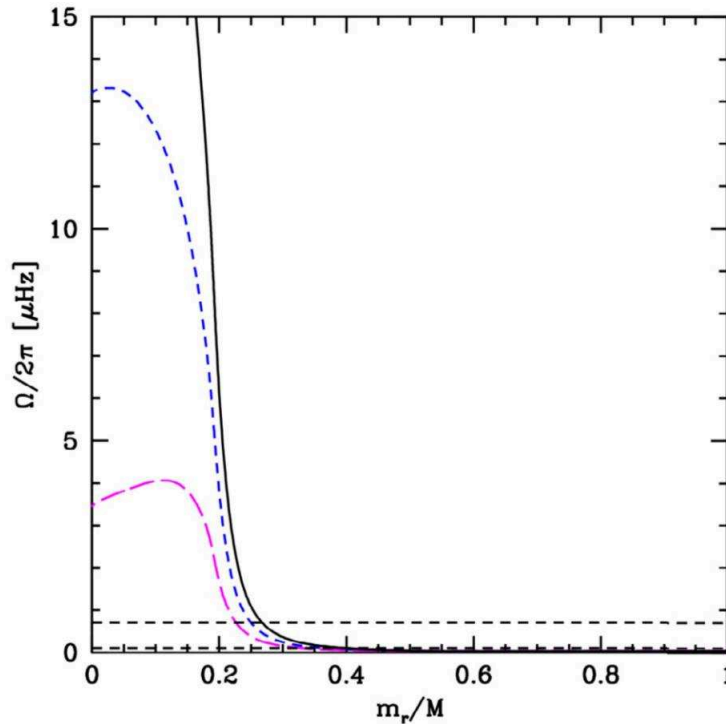
On rappelle ici que ces résultats sont valables malgré les incertitudes sur la vitesse de rotation initiale des étoiles. En effet, les étoiles de type solaire de faible masse arrivant au début de la séquence principale subissent de fortes pertes de moment cinétique par des vents stellaires magnétisés. Puisque les lois de freinage magnétique dépendent de la vitesse de rotation à la surface des étoiles suivant des lois de puissance à exposants positifs (e.g., Schatzman 1962; Kawaler 1988; Reiners & Mohanty 2012; Matt *et al.* 2012, 2015), les rotateurs rapides en surface sont freinés



**FIGURE 4.4:** Profil de rotation en fonction du rayon dans un modèle de  $1 M_{\odot}$  à l'âge actuel du Soleil, d'après le travail de Turck-Chièze *et al.* (2010). Il a été obtenu en prenant en compte le transport de moment cinétique par la circulation méridienne et la turbulence de cisaillement selon le formalisme de Mathis & Zahn (2004). Les profils A correspondent aux résultats d'expériences numériques non-réalistes dans lesquelles le freinage magnétique par des vents stellaires en surface est négligé, avec une vitesse équatoriale à la ZAMS égale à environ  $2 \text{ km s}^{-1}$ . Les profils B et C ont été obtenus en prenant en compte le freinage magnétique, avec des vitesses équatoriales à la ZAMS égale à environ  $20 \text{ km s}^{-1}$  et  $50 \text{ km s}^{-1}$ , respectivement, en accord avec les observations (e.g., Bouvier 2013). Les indices C ou S indiquent que le modèle a été calculé soit avec le code CESTAM (Marques *et al.* 2013), soit avec le code STAREVOL (e.g., Palacios *et al.* 2003), respectivement. Les points correspondent aux valeurs déduites des splittings rotationnels observés par les instruments GOLF, MDI et GONG. Entre  $0.2 R_{\odot}$  et la surface, les données sont tirées de l'analyse du spectre des modes acoustiques (d'après Eff-Darwich *et al.* 2008); en-dessous, le taux de rotation est déduit de l'observation des modes de gravité, observation restant toutefois à confirmer (e.g. Turck-Chièze *et al.* 2004; García *et al.* 2007).



**FIGURE 4.5:** Évolution de la rotation centrale (bleu) et de surface (vert) pour une séquence de modèles de  $1.3 M_{\odot}$  incluant le transport par la circulation méridienne et la turbulence induite par cisaillement, de la pré-séquence principale jusqu'à la branche des géantes rouges (encadré en haut à gauche), d'après le travail de Marques *et al.* (2013).



**FIGURE 4.6:** Profil de rotation de modèles de l'étoile KIC 7341231 d'après Ceillier *et al.* (2013) incluant le transport par la circulation méridienne et par la turbulence induite par cisaillement (noire). La ligne pointillée bleue (magenta) représente le résultat obtenu en supposant une rotation uniforme du début de l'évolution jusqu'à  $X_c = 0.1$  ( $X_c = 0$ ), où  $X_c$  est la fraction massique centrale d'hydrogène. Les deux lignes pointillées noires représentent les fréquences de rotation du cœur et de l'enveloppe observées dans cette étoile par Deheuvels *et al.* (2012).

plus efficacement que les rotateurs lents si bien qu’après quelques milliards d’années passées sur la séquence principale, l’évolution de la rotation des étoiles ne dépend plus des conditions initiales (e.g., Marques & Goupil 2013; Amard *et al.* 2016). Cela tient aussi bien pour la rotation en surface que la rotation au centre puisque les étoiles de faible masse sont entièrement convectives sur la pré-séquence principale, et donc en rotation uniforme en première approximation.

#### 4.2.2 Inefficacité du transport par le champ magnétique généré par le mécanisme de Tayler-Spruit

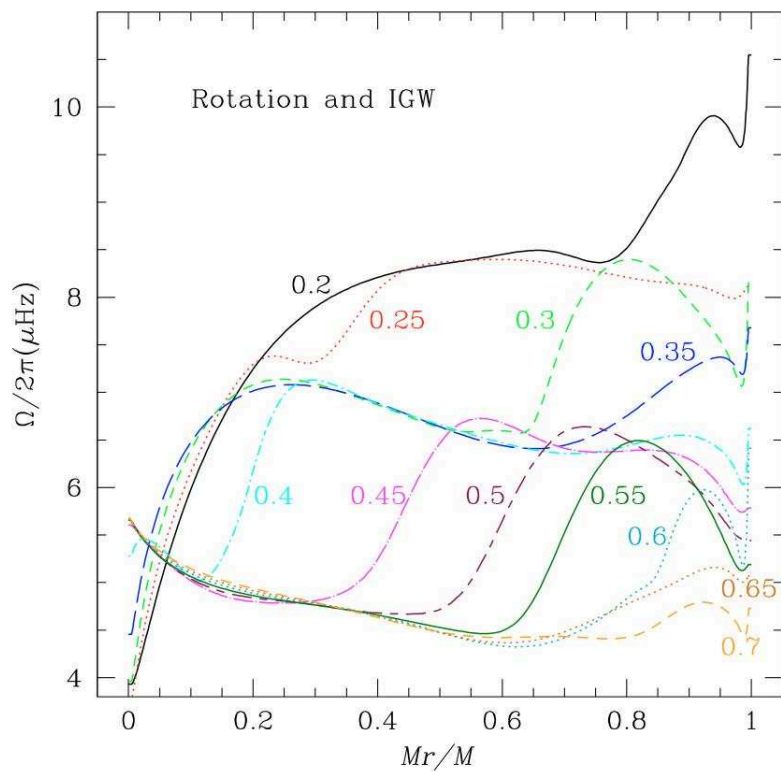
Deux origines sont habituellement invoquées pour un tel champ : il pourrait être le résidu du champ magnétique de la nébuleuse primordiale (champ fossile) ou le résultat d’un processus de génération tirant son énergie de processus dynamiques internes (convection, rotation...). Spruit (2002) a proposé un mécanisme de génération de champ magnétique par effet dynamo qui tire son énergie de la rotation différentielle dans la zone radiative des étoiles. Dans ce mécanisme, un champ purement toroïdal (azimuthal) de faible amplitude peut être sujet à l’instabilité de Tayler. Cette instabilité crée alors une composante du champ verticale qui va s’enrouler sous l’effet de la rotation différentielle et se superposer un champ azimuthal existant. L’amplitude du champ magnétique va donc augmenter sous l’effet de la rotation différentielle. Le couple magnétique ainsi généré peut à son tour modifier la vitesse de rotation des couches internes.

Eggenberger *et al.* (2005) a étudié l’effet du transport de moment cinétique par le champ magnétique dans le Soleil en suivant le formalisme de Spruit (2002). Il a trouvé que l’effet d’un tel champ magnétique parallèlement au transport induit par la rotation du début de la séquence principale jusqu’à l’âge du Soleil, peut jouer un rôle et permet en partie de retrouver un profil de rotation en accord avec l’héliosismologie. Les modèles incluant ce mécanisme de transport prédisent aussi des taux de rotation en bien meilleur accord avec les observations dans les pulsars et les naines blanches (Heger *et al.* 2005; Suijs *et al.* 2008). Qu’en est-il des prédictions de ces modèles dans les stades évolutifs intermédiaires, entre la séquence principale et les objets compacts de fin de vie ?

Cantiello *et al.* (2014) ont exploré plus en détail l’évolution du moment cinétique interne sous l’effet simultané de la circulation méridienne, de la turbulence liée aux instabilités de cisaillement et du champ magnétique généré par le mécanisme de Taylor-Spruit de la fin de la séquence principale jusqu’aux étoiles du clump. Ils ont montré que le mécanisme de Tayler-Spruit est insuffisant pour expliquer les taux de rotation du cœur observés dans les sous-géantes, les géantes rouges et les étoiles du clump, et cela même si la diffusivité effective liée au transport par le champ magnétique est artificiellement augmentée d’un facteur 100. Les auteurs ont confirmé qu’une diffusivité effective constante de l’ordre de  $10^4 - 10^5 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$  permettrait de reproduire les taux de rotation observés dans les sous-géantes et jeunes géantes rouges, en accord avec Eggenberger *et al.* (2005). Néanmoins, leurs travaux ont aussi montré que cette valeur artificielle pour la diffusivité additionnelle est trop faible pour expliquer les observations dans les étoiles du clump et les naines blanches.

Le transport par le champ magnétique généré par le mécanisme de Tayler-Spruit permet de reproduire les observations dans les étoiles de la séquence principale et dans les naines blanches, tout du moins en ordre de grandeur. Cependant, il n’apporte pas de réponse complète au problème de l’évolution du moment cinétique puisqu’il échoue sur plusieurs ordres de grandeur à reproduire les taux de rotation du cœur observés par l’astérosismologie dans les stades évolutifs intermédiaires. D’autres processus de transport doivent donc être invoqués. Pour finir, il semble important de noter que des doutes subsistent sur l’existence ou non d’un tel mécanisme de génération de champ magnétique dans le régime des intérieurs radiatifs stellaires (e.g., Braithwaite & Spruit 2017). En l’absence de confirmation observationnelle ou théorique, les résultats obtenus et présentés dans cette section sont à considérer avec prudence.





**FIGURE 4.7:** Évolution de la rotation interne en fonction de la masse normalisée par la masse de l'étoile, pour un modèle de  $1.2 M_{\odot}$  incluant le transport par la circulation méridienne, la turbulence induite par du cisaillement et les ondes internes de gravité excitées par la turbulence dans la zone convective (d'après le travail de Talon & Charbonnel 2005). Le calcul évolutif commence en début de séquence principale avec une vitesse initiale de  $50 \text{ km s}^{-1}$  en surface. L'âge est indiqué pour chaque courbe en milliard d'années.

### 4.2.3 Précédents travaux sur les ondes internes de gravité

Des ondes peuvent se propager dans les étoiles et sont capables d’interagir avec la rotation du milieu (e.g., Ando 1983; Unno *et al.* 1989). Parmi elles, les ondes internes de gravité, c’est-à-dire ayant comme force rappel la poussée d’Archimède, ont fait l’objet de nombreuses recherches dans le contexte astrophysique depuis le travail initial de Press (1981). Les ondes internes de gravité sont excitées par les mouvements de matière dans la zone convective ; elles sont transmises par effet tunnel dans la zone radiative où elles peuvent se propager et modifier la rotation. L’efficacité du transport par ces ondes a déjà fait ses preuves dans le cas solaire. Talon & Zahn (1998) et Talon *et al.* (2002) ont en effet montré que le transport par les ondes internes de gravité conjugué à la diffusion turbulente aurait pour effet d’aplatir efficacement le profil de rotation dans la zone radiative solaire. Plus tard, Talon & Charbonnel (2005) et Charbonnel & Talon (2005) ont confirmé ce résultat par un calcul plus complet de l’évolution de la rotation interne incluant le transport par la circulation méridienne, la turbulence induite par le cisaillement et les ondes internes de gravité (FIGURE 4.7). Les auteurs ont montré que ces ondes sont capables d’uniformiser le profil de rotation d’un modèle de  $1.2 M_{\odot}$  après moins d’un milliard d’années passées sur la séquence principale, en accord avec les résultats obtenus par l’héliosismologie (voir aussi Mathis *et al.* 2013). Le mélange induit par les ondes internes de gravité permet dans le même temps de rendre compte de la dépendance en masse de l’abondance de lithium observée dans les étoiles de faible masse de population I (i.e., de métallicité élevée proche de celle du Soleil), comme par exemple dans l’amas ouvert des Hyades (e.g., Talon & Charbonnel 1998, 2003, 2005). Ce processus apporte également une possible explication à la faible dispersion dans l’abondance de lithium dans les naines de population II (i.e., de plus faible métallicité), ainsi qu’aux vitesses de rotation élevées dans les étoiles de la branche horizontale de différents amas globulaires (Talon & Charbonnel 2004). Charbonnel *et al.* (2013) ont en outre démontré de la même manière que leur impact sur la rotation est significatif dans les étoiles de faible masse sur la pré-séquence principale. Dans les étoiles de masse intermédiaire (i.e., environ  $3 M_{\odot}$ ), Talon & Charbonnel (2008) sont arrivés à la conclusion que ces ondes peuvent avoir un impact sur le profil de rotation et le mélange des éléments chimiques lors de la phase de sous-géantes ainsi que sur le début de la branche asymptotique des géantes (AGB), et par conséquent sur les propriétés des stades plus évoluées. Comme mentionné dans Charbonnel & Talon (2008), les ondes internes de gravité pourraient ainsi jouer un rôle pour expliquer les faibles taux de rotation observées dans les naines blanches (e.g., Suijs *et al.* 2008) et les anomalies d’abondance pour les éléments transformés par le processus-s lors de la phase AGB (e.g., Siess *et al.* 2004). Dans les étoiles de faible masse plus évoluées, Fuller *et al.* (2014) sont néanmoins arrivés à la conclusion que le transport par ces ondes ne permet pas d’expliquer les observations sismiques (e.g., Deheuvels *et al.* 2014; Mosser *et al.* 2012b). Nous reviendrons plus en détail sur ce point dans la Section 7.2.

### 4.2.4 Test d’hypothèses sur le couplage entre le cœur et l’enveloppe

Tayar & Pinsonneault (2013) et Spada *et al.* (2016) se sont intéressés à l’évolution de la rotation dans les étoiles évoluées en se servant des observations données par l’astérosismologie pour contraindre les caractéristiques du processus de transport encore inconnu et tester différentes hypothèses sur le couplage entre le moment cinétique de la zone radiative et celui de l’enveloppe convective.

Tayar & Pinsonneault (2013) ont supposé un couplage maximal (i.e., rotation uniforme) le long de la séquence principale, comme les observations dans les étoiles de la séquence principale peuvent le suggérer. Ils ont ensuite considéré deux hypothèses pour le couplage. D’abord, ils ont montré qu’un couplage maximal le long de l’évolution des étoiles de masse intermédiaire autour de  $2.5 M_{\odot}$  permet de retrouver les faibles taux de rotation observés dans les étoiles du clump de masse supérieure à  $2 M_{\odot}$  par Mosser *et al.* (2012b), et ce indépendamment de la vitesse de rotation moyenne à la fin de la séquence principale. Cette hypothèse s’est avérée trop forte pour rendre compte de la rotation du cœur dans la jeune géante rouge KIC 7341231 de plus faible masse

(autour de  $1 M_{\odot}$ ) observée par Deheuvels *et al.* (2012). Dans un deuxième temps, ils ont donc considéré un couplage nul (i.e., hypothèse de conservation locale de moment cinétique) dès la fin de la séquence principale : cette hypothèse prédit cette fois-ci une trop forte amplitude de la rotation du cœur. Tayar & Pinsonneault (2013) ont alors montré qu'un prolongement de l'hypothèse d'un fort couplage (i.e., rotation uniforme) après la fin de séquence principale permet de retrouver une rotation du cœur en début de la branche des géantes rouges en accord avec les observations de Deheuvels *et al.* (2012). De façon assez intéressante, l'époque du découplage entre le cœur radiatif et l'enveloppe semble avoir lieu pendant le *first dedge-up*, quand la base de la zone convective, après avoir migré en profondeur, commence à remonter en surface, donnant naissance à un fort gradient de composition chimique dans la zone radiative. Selon les auteurs, cela pourrait indiquer que le processus de transport hypothétique, responsable d'un couplage maximal sur la séquence principale et le début de la branche des sous-géantes, est sensible à ce gradient de composition chimique ; ce gradient serait alors potentiellement assez fort pour être capable d'inhiber ce mécanisme au moment du découplage.

Spada *et al.* (2016) ont suivi une approche similaire à l'étude précédente, mais en supposant cette fois-ci que le couplage entre le cœur radiatif et l'enveloppe convective pendant la post-séquence principale est le résultat d'un processus de diffusion dont la diffusivité effective est proportionnelle au contraste de rotation entre les deux régions, c'est-à-dire la forme

$$D_{\text{eff}} = D_0 \left( \frac{\Omega_{\text{rad}}}{\Omega_{\text{env}}} \right)^{\alpha}, \quad (4.1)$$

où  $\Omega_{\text{rad}}$  et  $\Omega_{\text{env}}$  sont respectivement les taux de rotation moyens dans les zones radiatives et convectives, et  $D_0$  et  $\alpha$  sont des coefficients à déterminer par un ajustement aux observations. Encore une fois, les auteurs ont supposé que l'étoile est en rotation uniforme le long de la séquence principale, hypothèse supportée par différentes observations (voir Section 4.1.1). Une telle modélisation avec un exposant  $\alpha \approx 3 - 4$  permet de reproduire les observations sur la branche des géantes rouges. Cependant, elle échoue à prédire les rotations centrales observées dans les sous-géantes. Cela est notamment due au rapide découplage entre le cœur et l'enveloppe au début de la branche des sous-géantes quand le rayon de l'étoile commence à augmenter tandis que les couches centrales entrent en contraction. Les auteurs ont alors montré qu'un prolongement de l'hypothèse d'un fort couplage (i.e., rotation uniforme) au début de la branche des sous-géantes permet de remédier à ces différences, en accord avec l'étude de Tayar & Pinsonneault (2013).

De tels travaux ne donnent pas de réponse complète au problème de la redistribution de moment cinétique dans les intérieurs stellaires. Ils permettent néanmoins d'explorer les différents scénarii possibles. Ils ont notamment montré qu'un mécanisme capable d'induire un fort couplage entre les zones radiatives et convectives sur la séquence principale et au début de la branche des sous-géantes, et qui plus est, dépend du contraste de rotation moyenne entre le cœur et l'enveloppe, peut potentiellement expliquer les observations dans les étoiles évoluées. Il reste toujours néanmoins à comprendre la nature physique d'un tel processus de transport.

## 4.3 Solutions avancées et problématique de la partie II

### 4.3.1 Champs magnétiques, turbulence, modes mixtes, ondes de gravité... ?

Aujourd'hui, différents processus physiques sont invoqués pour résoudre le problème. Les principales solutions font appel à l'effet de champs magnétiques, à une diffusion turbulente plus efficace ou encore à l'influence d'ondes internes.

**Champs magnétiques.** En réponse au cisaillement, les champs magnétiques internes peuvent générer un couple capable de s'opposer à la rotation différentielle dans les intérieurs radiatifs. L'efficacité de ce couple dépend de l'amplitude et de la structure du champ magnétique. Comme il

a déjà été mentionné plus haut, ces champs magnétiques ont possiblement deux origines : ils peuvent soit être le reliquat d'un champ magnétique primordial, soit le résultat de processus dynamiques internes. Cependant, les champs magnétiques dans les intérieurs radiatifs sont peu connus dans les étoiles de type solaire et des incertitudes persistent sur leur interaction avec la rotation interne (e.g., Mathis *et al.* 2011; Braithwaite & Spruit 2017). Néanmoins, certains processus de génération par le biais d'instabilités magnétiques et d'effet dynamo ont déjà été étudiés théoriquement et numériquement. On a vu dans Section 4.2.2 que le mécanisme proposé par Tayler-Spruit seul n'est pas suffisant pour expliquer les observations. Toutefois, Rüdiger *et al.* (2015) ont récemment montré via des simulations numériques MHD que l'instabilité magnéto-rotationnelle du champ magnétique azimuthal (AMRI) peut induire une diffusivité effective de l'ordre de  $10^4 - 10^5 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ , suffisante pour contrebalancer l'accélération de la rotation des couches internes due à leur contraction dans les étoiles sous-géantes et jeunes géantes rouges selon Eggenberger *et al.* (2012) (voir Section 4.2). De plus, leurs travaux ont montré que la diffusivité effective liée à cette instabilité dépend du contraste de rotation entre le cœur et l'enveloppe par une loi de puissance. Un tel comportement est supporté par l'étude de Spada *et al.* (2016). Il est clair, par le biais de cet exemple, que l'effet d'un champ magnétique interne est un candidat sérieux pour réconcilier la théorie et les observations. Néanmoins, une estimation observationnelle des propriétés du champ magnétique dans le manteau stellaire est encore actuellement hors de portée et des incertitudes demeurent dans leur modélisation. Beaucoup de choses sont encore à découvrir à leur propos. Dans la suite, nous n'aborderons pas ce sujet qui sera, sans aucun doute, l'objet de nombreuses recherches dans les années à venir.

**Diffusion turbulente.** Les processus de transport turbulent qui sont induits par des instabilités de cisaillement sont décrits par des prescriptions simplifiées dans les codes d'évolution stellaire (e.g., Talon & Zahn 1997; Mathis & Zahn 2004). Les incertitudes sur les coefficients de diffusion vertical et horizontal correspondants, ainsi que leur rapport (i.e., l'anisotropie de la diffusion), restent actuellement importantes. Des travaux en cours visent à estimer proprement ces coefficients de diffusion. Une révision à la hausse de ces coefficients pourrait avoir de fortes conséquences sur l'évolution du moment cinétique interne et tendrait à réduire le contraste de rotation entre le cœur et l'enveloppe des étoiles.

**Modes mixtes.** Alors que les modes mixtes nous permettent de sonder la rotation du cœur des étoiles évoluées, ils sont aussi capables de la modifier. Belkacem *et al.* (2015a,b) ont exploré l'effet du transport par les modes mixtes sur la rotation des étoiles sous-géantes et géantes rouges. Pour cela, ils ont développé et utilisé une formulation théorique empruntée à la géophysique qui permet de traiter le problème de façon cohérente et semi-analytique. De plus, les auteurs ont utilisé les observations par CoRoT et *Kepler* pour déterminer l'amplitude des modes mixtes. Cela leur a permis d'obtenir une estimation quantitative de l'efficacité du transport par les modes mixtes au cours de l'évolution. Finalement, ils ont trouvé que ce processus de transport échoue à contrebalancer l'accélération de la rotation des couches internes dues à leur contraction dans les étoiles sous-géantes et jeunes géantes rouges. Dans les étoiles géantes rouges évoluées, ils ont montré au contraire que les modes mixtes peuvent localement ralentir la rotation aux alentours de la couche d'hydrogène en fusion au-dessus du cœur d'hélium. Des travaux sont actuellement en cours pour estimer l'impact des modes mixtes sur l'évolution globale de la rotation interne avec le temps en prenant en compte l'interaction avec les autres processus de transport (par exemple, la circulation méridienne et la turbulence induite par le cisaillement).

**Ondes internes de gravité.** Les résultats des travaux présentés dans Section 4.2.3 démontrent la capacité des ondes internes de gravité à uniformiser le profil de rotation interne sur la séquence principale. Ces travaux ont aussi montré que la prise en compte du transport par les ondes internes de gravité permet de reproduire la brèche dans les abondances de lithium à faible température effective telle qu'observée par exemple dans les étoiles de séquence principale de l'amas des Hyades,

ce que la circulation méridienne et la diffusion turbulente seules ne parvenaient pas à faire (e.g., voir Charbonnel & Talon 2008, pour une revue). Ce succès du transport par les ondes internes de gravité obtenu dans le cas solaire est en fort contraste avec leur faible efficacité estimée dans les étoiles évoluées de faible masse (Fuller *et al.* 2014). Néanmoins, un des points faibles actuels concerne la génération de ces ondes. En effet, l'efficacité du transport par les ondes dépend de leur amplitude et donc du processus d'excitation. Comme nous le verrons plus tard, les simulations numériques actuelles ne sont pas réalistes et ne permettent pas d'obtenir d'information quantitative sur l'excitation de ces ondes. Une estimation est aussi possible en passant par des modèles semi-analytiques, mais des incertitudes demeurent sur les prescriptions actuelles. Cela peut avoir des conséquences sur l'efficacité du transport de moment cinétique et mérite de plus amples investigations.

### 4.3.2 Problématique

Dans cette partie, nous nous focaliserons sur le transport de moment cinétique par les ondes internes de gravité. Après avoir fait de brefs rappels sur les propriétés dynamiques de ces ondes, nous nous intéresserons d'abord à la question de leur génération. Alors que les travaux précédents ont principalement considéré la pression turbulente dans la région convective comme terme source (Press 1981; Garcia Lopez & Spruit 1991; Zahn *et al.* 1997; Kumar *et al.* 1999; Lecoanet & Quataert 2013), l'excitation par la pénétration de panaches convectifs à l'interface entre les zones convectives et radiatives peut aussi générer des ondes internes de gravité. Ce processus d'excitation a notamment été observé dans des simulations numériques (e.g., Kiraga *et al.* 2003, 2005; Dintrans *et al.* 2005; Rogers & Glatzmaier 2005, 2006; Rogers *et al.* 2013; Alvan *et al.* 2014) ou en géophysique (e.g., Townsend 1966; Stull 1976; Fritts & Alexander 2003; Vadas & Liu 2013). Dans un premier temps, je développerai donc un modèle semi-analytique d'excitation d'ondes internes par la pénétration convective. Celui-ci me permettra d'estimer le spectre d'énergie des ondes générées à la base de la zone convective par ce mécanisme. Dans un second temps, je chercherai à répondre aux questions suivantes :

- Quel mécanisme d'excitation est le plus efficace : pression turbulente ou pénétration convective ?  
S'il s'avère que l'excitation par la pénétration convective est globalement plus efficace, les résultats des précédents travaux devront être révisés en prenant en compte ce mécanisme.
- Quel est l'impact des ondes internes de gravité ainsi générées sur l'évolution du profil de rotation du Soleil ?  
Comme nous le verrons plus loin, le transport de moment cinétique par les ondes dépend de l'amplitude (i.e., l'efficacité totale du mécanisme d'excitation) et de la forme du spectre d'énergie (i.e., l'efficacité d'excitation en fonction de la fréquence des ondes). Il convient alors de comparer l'efficacité du transport des ondes générées par la pression turbulente et celles générées par la pénétration convective. Si le transport par ces dernières s'avère plus efficace, alors ces ondes devront être prises en compte dans les codes d'évolution stellaire.
- Les ondes internes de gravité générées par la pénétration de panaches convectifs peuvent-elles expliquer les faibles taux de rotation observés dans les sous-géantes et les géantes rouges ?  
Fuller *et al.* (2014) ont estimé que le transport par les ondes internes de gravité était inefficace dans les étoiles évoluées. Ces auteurs n'ont cependant considéré que les ondes générées par la pression turbulente. Nous effectuerons donc une étude similaire en considérant cette fois-ci les ondes générées par la pénétration convective. Le résultat nous indiquera alors si les ondes internes de gravité seules peuvent être l'ingrédient manquant actuellement à la modélisation du moment cinétique interne des étoiles évoluées ou si un autre processus doit encore être invoqué.

# Chapitre 5

## Propriétés dynamiques des ondes internes de gravité

### Sommaire

---

<b>5.1 Ondes internes de gravité dans l'approximation JWKB</b>	<b>61</b>
5.1.1 Équation d'onde linéaire adiabatique et relation de dispersion	62
5.1.2 Perturbation du champ de vitesse et incompressibilité	62
<b>5.2 Propagation des ondes internes de gravité</b>	<b>64</b>
5.2.1 Notion générale de vitesse de groupe	65
5.2.1.a Première approche à deux ondes planes monochromatiques	65
5.2.1.b Spectre continu et transformée de Fourier	65
5.2.1.c Comportement asymptotique d'un paquet d'onde	66
5.2.2 Théorie du tracé de rayon	69
5.2.3 Cas des ondes internes de gravité	71
<b>5.3 Conservation de l'énergie et du moment cinétique d'une onde dans un écoulement</b>	<b>73</b>
5.3.1 Flux d'énergie d'une onde gravito-acoustique	74
5.3.2 Conservation du moment cinétique de l'onde	76
5.3.3 Lien avec la conservation de l'action de l'onde	78
<b>5.4 Amortissement radiatif et transport par les ondes de gravité</b>	<b>79</b>
5.4.1 Taux d'amortissement suivant la méthode de Press (1981)	80
5.4.2 Dérivation suivant la théorie des perturbations au premier ordre	80
5.4.3 Expression du flux radial de moment cinétique des ondes dans le cas non-adiabatique	85

---

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques propriétés des ondes internes de gravité. Ces ondes ont pour force de rappel la poussée d'Archimède ; elles sont donc évanescentes dans l'enveloppe convective des étoiles mais peuvent se propager dans leur intérieur radiatif stablement stratifié. Là, les ondes subissent des pertes radiatives ; elles sont donc amorties au cours de leur propagation dans la zone radiative et peuvent déposer de l'énergie dans le milieu stellaire. Ce chapitre a pour but d'amener au formalisme théorique qui nous sera utile dans les deux chapitres suivants, notamment pour décrire le transport de moment cinétique par les ondes internes de gravité.

### 5.1 Ondes internes de gravité dans l'approximation JWKB

Les ondes internes de gravité sont des ondes à très basses fréquences dont les perturbations associées suivent une équation linéaire du second ordre. Dans cette section, l'équation d'onde est résolue dans l'approximation JWKB et les fonctions propres sont exprimées en géométrie sphérique.

### 5.1.1 Équation d'onde linéaire adiabatique et relation de dispersion

Dans un souci de simplicité, on se place dans la suite de cette section sous les mêmes hypothèses que celles supposées dans le Chapitre 2. Autrement dit, l'effet de la force centrifuge sur la structure interne de l'étoile à l'équilibre est négligé. L'influence de la force de Coriolis et celle du gradient de la vitesse de rotation sur la dynamique des ondes sont aussi négligées, et l'approximation de Cowling est considérée. Seule l'advection par la rotation (équivalente à l'effet Doppler) est considérée. De plus, on considère ici le régime des ondes à très basses fréquences, c'est-à-dire  $\hat{\sigma}^2 \ll S_l^2$ , avec  $\hat{\sigma}$  la fréquence intrinsèque de l'onde.

Étant donné la nature des points tournants dans le cas où  $\hat{\sigma}^2 \ll S_l^2$ , c'est-à-dire là où  $\hat{\sigma}^2 = N^2$ , il est nécessaire de considérer l'équation d'onde sur la variable  $v_{l,m}$  définie dans Eq. (2.45) et donnée dans Eq. (2.47). L'équation d'oscillation linéaire adiabatique est donc donnée par

$$\frac{d^2 v_{l,m}}{dr^2} + \left( \frac{N^2}{\hat{\sigma}^2} - 1 \right) k_h^2 v_{l,m} = 0, \quad (5.1)$$

avec  $k_h = \sqrt{l(l+1)}/r$  la composante horizontale du nombre d'onde local. En écrivant Eq. (5.1), le terme  $f(q_1)$  a été négligé dans Eq. (2.47). Cela revient à supposer que la longueur d'onde est beaucoup plus petite que l'échelle caractéristique de variation de la structure interne à l'équilibre. En d'autres mots, suivant Eq. (5.1), cela correspond à considérer de très basses fréquences, telles que  $\hat{\sigma}^2 \ll N^2$ , ou de hauts degrés angulaires, tels que  $k_h r \gg 1$ . Dans la suite, on se place dans le cas particulier où  $\hat{\sigma}^2 \ll N^2$  à travers la majeure partie de la zone radiative, comme attendu d'après les modèles d'excitation d'ondes (voir Chapitre 6). Cela est équivalent à considérer la vitesse du son comme étant infinie. Ainsi, dans ce régime, on peut s'attendre à ce qu'une bulle de matière déplacée de son point d'équilibre s'ajuste quasi instantanément à la pression du milieu ambiant.

Cette approximation n'est cependant plus valide proche des points tournants (où  $\hat{\sigma}^2 = N^2$ ), (voir la discussion dans la Section 2.2.2). Néanmoins, on peut s'attendre à ce que le gradient des quantités à l'équilibre dans le voisinage des points tournants reste à peu près constant et de l'ordre de  $1/r$  (en supposant en première approximation que les quantités à l'équilibre suivent des lois de puissance avec le rayon). Cela doit donc être du même ordre de grandeur ou plus petit que  $k_h = \sqrt{l(l+1)}/r$ , de telle façon que le terme  $f(q_1)$  ait pour unique conséquence un faible décalage entre le point où  $k_r^2 - f(q_1) = 0$  et celui où  $k_r^2 = 0$ . En effet, dans une région localisée autour du point tournant (i.e., disons plus petite que  $1/k_h$ ),  $k_r^2$  possède une valeur plus grande que  $k_h^2$ , et donc  $1/r^2$ , dans l'approximation des très basses fréquences. En première approximation, l'impact de ce facteur peut donc être négligé et Eq. (5.1) peut être utilisée pour décrire les perturbations associées à l'onde dans toute l'étoile.

Par conséquent, d'après Eq. (5.1), la composante radiale du vecteur d'onde est donné localement par

$$k_r(r, \sigma, l) = \left( \frac{N^2}{\hat{\sigma}^2} - 1 \right)^{1/2} k_h. \quad (5.2)$$

L'équation (5.2) représente la relation de dispersion pour les ondes internes de gravité. Cette dernière associe localement à une onde de fréquence intrinsèque  $\hat{\sigma}$  et de nombre d'onde horizontal  $k_h$  donnés, un unique nombre d'onde vertical  $k_r$  (au signe près). Dans l'hypothèse où  $\hat{\sigma}^2 \ll N^2$ , le vecteur d'onde est presque essentiellement radial, avec  $k_r \gg k_h$ .

### 5.1.2 Perturbation du champ de vitesse et incompressibilité

L'équation d'onde peut être résolue de façon assez simple par la méthode JWKB dans une région assez éloignée des points tournants. A la place d'utiliser la méthode de dérivation présentée dans la Section 2.2.2 pour les modes de pression, on préfère ici reproduire la dérivation donnée dans Aerts *et al.* (2010) qui est moins technique et plus intuitive. La variable  $v_{l,m}$  peut être formellement écrite

comme le produit d'une amplitude et d'un terme de phase variant plus rapidement, c'est-à-dire de la forme

$$v_{l,m}(r) = a(r) \exp[i\psi(r)] , \quad (5.3)$$

avec comme condition  $d\psi/dr \gg d \ln a/dr$ . En insérant Eq. (5.3) dans Eq. (5.1), on obtient alors

$$\left[ \frac{d^2 a}{dr^2} + 2i \frac{d\psi}{dr} \frac{da}{dr} + ia \frac{d^2 \psi}{dr^2} - \left( \frac{d\psi}{dr} \right)^2 a \right] = -k_r^2 a . \quad (5.4)$$

En regroupant les différents termes par ordre de grandeur en  $d\psi/dr$ , on obtient

$$\left( \frac{d\psi}{dr} \right)^2 = k_r^2 \quad (5.5)$$

$$-2a^{-1} \frac{da}{dr} = \left( \frac{d\psi}{dr} \right)^{-1} \frac{d^2 \psi}{dr^2} , \quad (5.6)$$

où la dérivée seconde de l'amplitude a été négligée dans Eq. (5.4). Finalement, l'amplitude peut être approximée à une constante complexe près,  $C$ , par l'expression suivante

$$a(r) \approx C |k_r|^{-1/2} . \quad (5.7)$$

En utilisant Eqs. (2.45), (2.46) et (2.52) et en négligeant le terme lié au gradient des quantités à l'équilibre, il est possible de relier  $v_{l,m}$  au déplacement radial Lagrangien ainsi qu'à la perturbation de pression. L'amplitude de la vitesse radiale ainsi que celle de la perturbation Eulérienne de pression sont finalement égales à

$$\hat{v}_{r,l,m} \approx iC\rho^{-1/2}r^{-3/2}[l(l+1)]^{1/4} \left| \frac{N^2}{\hat{\sigma}^2} - 1 \right|^{-1/4} \exp\left(\pm i \int_r^{r_t} k_r dr\right) \quad (5.8)$$

$$\hat{p}'_{l,m} \approx \mp iC\rho^{1/2}r^{-1/2}\hat{\sigma}[l(l+1)]^{-1/4} \left| \frac{N^2}{\hat{\sigma}^2} - 1 \right|^{1/4} \exp\left(\pm i \int_r^{r_t} k_r dr\right) , \quad (5.9)$$

où  $r_t$  est le rayon du haut de la zone radiative. La perturbation de vitesse horizontale est alors donnée par

$$\begin{aligned} \hat{v}_{h,l,m}(r, \sigma) &= i \frac{\hat{p}'_{l,m}(r, \sigma)}{\rho r \hat{\sigma}} \\ &\approx \pm C\rho^{-1/2}r^{-3/2}[l(l+1)]^{-1/4} \left| \frac{N^2}{\hat{\sigma}^2} - 1 \right|^{1/4} \exp\left(\pm i \int_r^{r_t} k_r dr\right) . \end{aligned} \quad (5.10)$$

On voit que  $\hat{v}_{h,l,m}(r)$  est déphasé de  $\pi/2$  avec  $\hat{p}'_{l,m}(r)$  et  $\hat{v}_{r,l,m}(r)$ . Néanmoins, la composante radiale et horizontale de la perturbation de vitesse totale, ainsi que la perturbation de pression totale, sont bien en phase. En effet, il faut se souvenir que le champ de vitesse associé à l'onde peut être décomposé suivant une composante radiale et poloïdale sur la base des harmoniques sphériques (voir Section 2.1.3.c), c'est-à-dire tel que

$$\hat{v}_r(\vec{r}, \sigma) = \sum_{l,m} \hat{v}_{r,l,m}(r, \sigma) Y_l^m(\theta, \phi) \quad (5.11)$$

$$\hat{v}_h(\vec{r}, \sigma) = \sum_{l,m} \hat{v}_{h,l,m}(r, \sigma) r \vec{\nabla}_\perp Y_l^m(\theta, \phi) . \quad (5.12)$$

Ce déphasage de  $\pi/2$  est donc compensé par le déphasage horizontal entre  $Y_{l,m}$  et  $\vec{\nabla}_\perp Y_{l,m}$ . Les perturbations de vitesse et de pression associées aux ondes sont donc bien en phase (e.g., Muraschko *et al.* 2015, pour une démonstration rigoureuse).



La connaissance des fonctions propres va nous permettre de démontrer un premier résultat intéressant sur le caractère incompressible des ondes internes de gravité. Cette propriété est remarquable car elle permet de grandement simplifier les équations de la dynamique. En effet, la perturbation Eulérienne de pression peut être négligée par rapport à la variation Lagrangienne due au déplacement car, d'après Eqs. (5.8) et (5.9), on a

$$\left| \frac{\hat{p}_{l,m}}{\hat{\xi}_{r,l,m} \frac{dp}{dr}} \right| = \left| \frac{\hat{p}_{l,m}}{\rho g \hat{\xi}_{r,l,m}} \right| \approx \frac{r \hat{\sigma}^2}{\sqrt{l(l+1)}g} \left| \frac{N^2}{\hat{\sigma}^2} - 1 \right|^{1/2} \approx \frac{\hat{\sigma}}{N \sqrt{l(l+1)}} \ll 1, \quad (5.13)$$

où l'approximation  $N^2 \sim g/r$  a été utilisée. On retrouve donc bien que l'hypothèse d'ondes à basses fréquences impose un réajustement quasi instantané de la pression entre une bulle de matière déplacée de son point d'équilibre et le milieu ambiant. De plus, comme l'ont montré Dintrans & Rieutord (2001), cela implique aussi que les oscillations sont anélastiques, c'est-à-dire vérifiant dans une bonne approximation  $\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) \approx 0$ . Dans l'hypothèse où la variation du profil de densité peut être négligée sur une échelle spatiale de l'ordre de la longueur d'onde, les oscillations peuvent être considérées comme incompressibles. La condition d'incompressibilité s'écrit alors

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} \approx 0. \quad (5.14)$$

En injectant Eqs. (5.11) et (5.12) dans Eq. (5.14) et en utilisant les propriétés des harmoniques sphériques, on obtient quels que soient  $l$  et  $m$  l'égalité

$$|k_r v_{r,l,m}| \approx |k_h \sqrt{l(l+1)} v_{h,l,m}|. \quad (5.15)$$

Cette dernière égalité peut être retrouvée en calculant le rapport de la vitesse horizontale sur la vitesse radiale. En effet, d'après Eqs. (5.8) et (5.10), ce rapport vaut finalement

$$\left| \frac{\sqrt{l(l+1)} v_{h,lm}}{v_{r,l,m}} \right| \approx \left| \frac{N^2}{\hat{\sigma}^2} - 1 \right|^{1/2} \gg 1. \quad (5.16)$$

Contrairement au vecteur d'onde, la composante horizontale du vecteur vitesse associé aux ondes est beaucoup plus grande que la composante verticale étant donné que  $\sigma^2 \gg N^2$  par hypothèse dans la zone radiative. Ceci met en exergue le caractère transversal des ondes internes de gravité. Cela est équivalent dans l'approximation des ondes planes à écrire  $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{k} \cdot \vec{v} = 0$ . Cette propriété est une conséquence de l'incompressibilité des oscillations, qui est elle-même le résultat de l'hypothèse des très basses fréquences suivant Eq. (5.13).

Pour finir, il est important de noter que sous l'hypothèse d'anélasticité ou d'incompressibilité, l'approximation de Cowling est naturellement justifiée. En effet, Dintrans & Rieutord (2001) ont montré que dans ce cas, la détermination du champ de déplacement associé aux ondes est totalement découplée de l'équation de Poisson. L'effet de la perturbation du potentiel gravitationnel sur les ondes reste donc négligeable.

En résumé, les ondes internes de gravité sont des ondes dispersives, c'est-à-dire suivant une loi du type  $\sigma(\vec{k})$ , à très basses fréquences (i.e., telles que  $\hat{\sigma} \ll N^2$  et  $S_l^2$ ) se propageant dans les zones radiatives. Elles sont de plus incompressibles et transversales.

## 5.2 Propagation des ondes internes de gravité

L'analyse de la section précédente a permis de remonter à la relation de dispersion et de montrer le caractère transversal et incompressible des ondes internes de gravité. Néanmoins, il est difficile de se faire une idée de la façon dont se propagent ces ondes dans le milieu avec ces seules informations. Une manière simple de répondre à cette question passe par la détermination de la vitesse de groupe, correspondant à la vitesse de propagation de l'énergie d'une onde. Dans cette section, la notion de vitesse de groupe est d'abord introduite de façon générale en s'inspirant largement du travail de Lighthill (1978). Elle nous permettra ensuite de discuter la propagation des ondes internes de gravité dans les intérieurs stellaires.

## 5.2.1 Notion générale de vitesse de groupe

### 5.2.1.a Première approche à deux ondes planes monochromatiques

Considérons deux ondes sinusoïdales se propageant dans une direction suivant la coordonnée  $z$ , de même amplitude  $a$  et de nombres d'onde  $k_1$  et  $k_2$  assez proches. La superposition de ces deux composantes est égale à

$$a \cos(\sigma_1 t - k_1 z) + a \cos(\sigma_2 t - k_2 z) = \{2a \cos(\delta\sigma t - \delta k z)\} \cos(\bar{\sigma} t - \bar{k} z) , \quad (5.17)$$

avec  $\delta\sigma = (\sigma_1 - \sigma_2)/2$ ,  $\delta k = (k_1 - k_2)/2$ ,  $\bar{\sigma} = (\sigma_1 + \sigma_2)/2$  et  $\bar{k} = (k_1 + k_2)/2$ . La superposition prend alors la forme d'une oscillation rapide avec un nombre d'onde  $\bar{k} \approx k_1 \approx k_2$  et une fréquence  $\bar{\sigma} \approx \sigma_1 \approx \sigma_2$ , dont l'amplitude moyenne (terme entre accolade) varie sur des échelles spatiale et temporelle beaucoup plus grandes, c'est-à-dire  $1/\delta k \gg 1/\bar{k}$  et  $1/\delta\sigma \gg 1/\bar{\sigma}$  respectivement (voir FIGURE 5.1). L'enveloppe de ce paquet d'onde se propage à la vitesse

$$V_{\text{env}} = \frac{\delta\sigma}{\delta k} , \quad (5.18)$$

de telle façon qu'un point mobile vérifiant à chaque instant

$$\frac{z}{t} = V_{\text{env}} \quad (5.19)$$

voit une amplitude moyenne constante le long de son trajet et égale à  $2a$ . On peut donc en déduire que l'énergie du système constitué de la superposition des deux composantes sinusoïdales, qui est proportionnelle à la valeur moyenne de l'amplitude au carré sur une longueur d'onde, se propage à la vitesse  $V_{\text{env}}$ . De plus, un point tel que  $z/t = V_{\text{env}}$  voit les deux composantes monochromatiques en phase et interférer constructivement à tout instant. En effet, pour un tel point, on a

$$\sigma_1 t - k_1 z = \sigma_2 t - k_2 z = (k_1 \sigma_2 - \sigma_1 k_2) t / (k_1 - k_2) . \quad (5.20)$$

Cette simple analyse amène donc à l'idée que l'énergie d'un paquet d'onde se propage à la même vitesse qu'un point pour lequel la phase est stationnaire par rapport à la fréquence et au nombre d'onde. Cela donne alors une première définition pour la vitesse de groupe.

### 5.2.1.b Spectre continu et transformée de Fourier

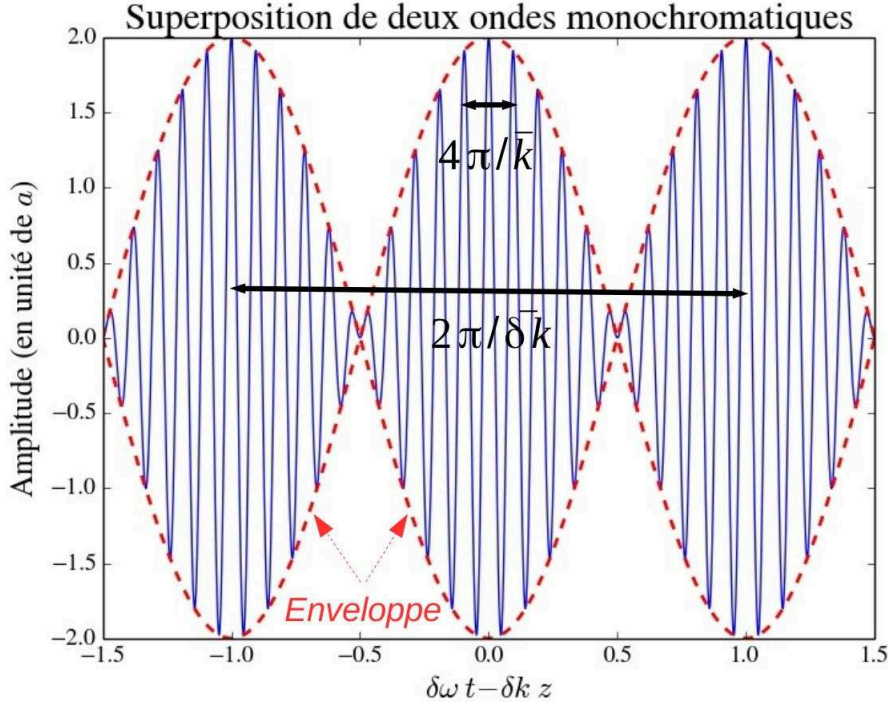
La généralisation du cas précédent à un paquet d'onde au spectre continu est possible en passant par une représentation sous forme d'intégrale de Fourier. Soit  $\vec{\zeta}$  le champ de vitesse associé à une onde. Celui-ci peut formellement s'exprimer sous la forme d'une intégrale de Fourier, c'est-à-dire

$$\vec{\zeta}(\vec{r}, t) = \iiint \hat{\zeta}(\vec{k}, \sigma) \exp \left[ i \left( \sigma t - \vec{k} \cdot \vec{r} \right) \right] d\sigma d^3 \vec{k} . \quad (5.21)$$

On suppose alors que la fréquence de l'onde et le vecteur d'onde sont reliés par une relation de dispersion,  $\sigma = \sigma(\vec{k})$ . On suppose aussi que pour toute valeur de  $\vec{k}$  ne corresponde qu'une seule valeur de la fréquence  $\sigma$ . L'équation (5.21) peut alors être réécrite comme

$$\begin{aligned} \vec{\zeta}(\vec{r}, t) &= \iiint d^3 \vec{k} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\zeta}(\vec{k}) \delta(\sigma - \sigma(\vec{k})) \exp \left[ i \left( \sigma(\vec{k}) t - \vec{k} \cdot \vec{r} \right) \right] d\sigma \right) \\ &= \iiint \hat{\zeta}(\vec{k}) \exp \left[ i \left( \sigma(\vec{k}) t - \vec{k} \cdot \vec{r} \right) \right] d^3 \vec{k} , \end{aligned} \quad (5.22)$$

où l'on a posé  $\hat{\zeta}(\vec{k}, \sigma) = \hat{\zeta}(\vec{k}) \delta(\sigma - \sigma(\vec{k}))$ , avec  $\delta$  la fonction de Dirac. Découpons alors l'espace des vecteurs d'onde en un ensemble de petits volumes  $\{\Delta \vec{k}_i\}$  autour de valeurs discrètes  $\{\vec{k}_i\}$  de telle



**FIGURE 5.1:** Paquet d'onde constitué d'une fonction oscillant rapidement dans une enveloppe variant plus lentement.

façon que  $\hat{\zeta}(\vec{k})$  soit à peu près constant et égal à  $\hat{\zeta}(\vec{k}_i)$  dans de tels cubes. Sous cette hypothèse, on obtient alors par un développement limité au premier ordre

$$\begin{aligned}
 \vec{\zeta}(\vec{r}, t) &\approx \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \iiint_{\Delta\vec{k}_i} \hat{\zeta}(\vec{k}_i) \exp \left[ i \left( \sigma(\vec{k}_i + \delta\vec{k})t - (\vec{k}_i + \delta\vec{k}) \cdot \vec{r} \right) \right] d^3(\delta\vec{k}) \\
 &\approx \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \hat{\zeta}(\vec{k}_i) \exp \left[ i \left( \sigma(\vec{k}_i)t - \vec{k}_i \cdot \vec{r} \right) \right] \iiint_{\Delta\vec{k}_i} \exp \left[ i\delta\vec{k} \cdot \left( t\vec{\nabla}\sigma(\vec{k}_i) - \vec{r} \right) \right] \left( 1 + o(\delta\vec{k}) \right) d^3(\delta\vec{k}) \\
 &\approx \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \underbrace{\hat{\zeta}(\vec{k}_i) \exp \left[ i \left( \sigma(\vec{k}_i)t - \vec{k}_i \cdot \vec{r} \right) \right]}_{\text{Onde monochromatique}} |\Delta\vec{k}_i| \times \underbrace{\mathcal{A} \left( \vec{V}_g(\vec{k}_i)t - \vec{r} \right)}_{\text{Modulation de l'amplitude}}, \quad (5.23)
 \end{aligned}$$

où  $\vec{V}_g = \vec{\nabla}_{\vec{k}}\sigma$  est la vitesse de groupe, avec  $\vec{\nabla}_{\vec{k}}$  l'opérateur nabla dans l'espace des vecteurs d'onde. Pour toutes composantes du nombre d'onde comprises dans un petit volume  $\{\Delta\vec{k}_i\}$  autour d'une valeur  $\vec{k}_i$ , leur superposition prend la forme d'un produit d'une onde monochromatique de nombre d'onde  $\vec{k}_i$  avec une enveloppe  $\mathcal{A}$  se propageant à la vitesse de groupe, de manière similaire à la superposition de deux ondes monochromatiques de nombres d'onde très proches. L'énergie contenue dans chaque petit volume de l'espace des vecteurs d'onde  $\{\Delta\vec{k}_i\}$  est proportionnelle à la moyenne du carré de l'amplitude et se propage donc à la vitesse de déplacement de l'enveloppe, c'est-à-dire à la vitesse de groupe.

### 5.2.1.c Comportement asymptotique d'un paquet d'onde

Les approches précédentes permettent de comprendre “avec les mains” la signification de la vitesse de groupe. Elle ne fournit pas néanmoins de démonstration rigoureuse. Une preuve mathématique est donnée par Lighthill (1978). Celle-ci fait principalement appel au théorème intégral de Cauchy. On propose ici de reproduire sa démonstration. Pour simplifier, on se place dans le cas d'une onde unidimensionnelle avec une relation de dispersion  $\sigma(k)$ , avec  $\sigma$  la fréquence et  $k$  le

nombre d'onde, se propageant dans un milieu homogène suivant la direction de la coordonnée  $x$ . Le résultat de cette analyse n'est pas restrictif à ce seul cas et est généralisable à une onde tridimensionnelle dans un milieu non-homogène (voir Lighthill 1978, pour les détails). Pour commencer, la vitesse de déplacement associée à une telle perturbation peut s'exprimer sous la forme d'une intégrale de Fourier

$$\zeta(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(k) \exp[i(\sigma(k)t - kx)] dk, \quad (5.24)$$

où  $F(k)$  est la transformée de Fourier de  $\zeta$ . On souhaite connaître le comportement énergétique de l'onde quand  $t$  devient très grand. Dans le cas général, l'énergie d'une onde en un point  $x$  et en un instant  $t$  peut s'écrire

$$\mathcal{E}_w(x, t) = \rho(x)\zeta(x, t)^2 = \rho(x) \left| \int_{-\infty}^{+\infty} F(k) \exp[it\psi(k; x, t)] dk \right|^2, \quad (5.25)$$

où  $\rho$  est la densité du milieu et  $\psi$  est un terme de phase défini par

$$\psi(k; x, t) = \sigma(k) - k \frac{x}{t}. \quad (5.26)$$

La démonstration fait alors l'hypothèse que la relation de dispersion  $\sigma(k)$  et la transformée de Fourier  $F(k)$  sont des fonctions analytiques (i.e., dérivables dans le plan complexe)<sup>1</sup>. Ainsi, l'intégrande dans Eq. (5.24) est aussi analytique et le théorème intégrale de Cauchy est applicable pour estimer l'intégrale. Ce théorème stipule que l'intégrale d'une fonction analytique sur tout chemin fermé dans son ensemble de définition est nulle. Comme de plus  $F(k)$  est par définition intégrable et donc tend vers 0 plus vite que  $1/|k|$  quand  $k$  tend vers  $\pm\infty$ , ce théorème nous autorise à changer le chemin d'intégration de l'axe des  $k$  réels à un axe translaté d'une petite partie imaginaire  $i\delta(k)$ , qui peut dépendre de la valeur de  $k$ . On obtient alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(k) \exp[it\psi(k)] dk = - \int_{-\infty}^{+\infty} F(k + i\delta) \exp[it\psi(k + i\delta)] d(k + i\delta) \quad (5.27)$$

$$\approx - \int_{-\infty}^{+\infty} F(k) \exp[it\psi(k) - t\psi'(k)\delta + O(t\delta^2)] \{1 + O(\delta)\} dk, \quad (5.28)$$

où la deuxième égalité a été obtenue par un développement limité au premier ordre en  $\delta$ . Nous allons voir qu'une telle écriture permet d'estimer Eq. (5.25) lorsque  $t \rightarrow +\infty$  à l'ordre dominant, en choisissant de façon astucieuse la valeur de  $\delta$ . Raisonnons à  $x/t$  donné. Considérons d'abord tout intervalle réel  $I = [k_1, k_2]$  tels que :

1.  $\psi(k)$  est monotone sur cet intervalle de telle sorte que tous points stationnaires, c'est-à-dire où  $\psi'(k) = 0$ , en sont exclus.
2.  $k_1$  et  $k_2$  sont assez éloignés des points stationnaires.

On veut  $\delta$  de telle sorte que  $\psi'(k)\delta(k) > 0$  et que l'intégrande devienne exponentiellement petite quand  $t$  tend vers l'infini. Pour chaque intervalle de ce type, on peut choisir  $\delta = \epsilon/\psi'(k)$  avec  $\epsilon$  une constante positive telle que  $\delta$  reste assez petit pour qu'un développement au premier ordre reste valide sur tout l'intervalle. On a alors sur ce type intervalle

$$\left| \int_I F(k) \exp[it\psi(k; x, t)] dk \right|^2 \leq \exp[-t\epsilon] \int_I |F(k)|^2 dk. \quad (5.29)$$

Asymptotiquement, quand  $t \rightarrow +\infty$ , la contribution des composantes de nombres d'onde  $k \in I$  à l'énergie de l'onde diminue de façon exponentielle à  $x/t$  constant. S'il n'y a pas de transfert

1. La deuxième condition est facilement réalisable en supposant que la perturbation initiale est localisée spatialement.

d'énergie d'une composante de l'onde à une autre au cours du temps, ce qui est le cas si l'onde suit une équation linéaire à coefficients constants par rapport au temps, cela s'applique quel que soit l'instant  $t$ . Les composantes de l'onde dans un tel intervalle interfèrent destructivement et ne contribuent donc pas à l'énergie de l'onde pour cette valeur de  $x/t$ .

Regardons maintenant la contribution à l'intégrale d'un intervalle au voisinage d'un point stationnaire  $k_0$ , c'est-à-dire tel que  $\psi'(k_0) = \sigma'(k_0) - x/t = 0$ . Celle-ci peut être obtenue en choisissant un chemin d'intégration  $\mathcal{L}$  de telle manière que

$$k - k_0 = s \exp \left[ i \frac{\pi}{4} \operatorname{sgn}(\psi''(k_0)) \right] , \quad (5.30)$$

où  $\operatorname{sgn}()$  est la fonction signe. On suppose de plus que  $s$  est un réel assez petit pour qu'un développement limité au second ordre sur ce chemin d'intégration soit valable, ce qui permet d'aboutir à

$$\exp[it\psi(k)] = \exp \left[ it\psi(k_0) - \frac{1}{2}ts^2|\psi''(k_0)| + O(its^3) \right] . \quad (5.31)$$

L'intégrale sur ce chemin devient alors

$$\int_{\mathcal{L}} (F(k_0) + O(s)) \exp \left[ it\psi(k_0) - \frac{1}{2}ts^2|\psi''(k_0)| + i \frac{\pi}{4} \operatorname{sgn}(\psi''(k_0)) \right] (1 + O(ts^3)) ds . \quad (5.32)$$

On estime cette intégrale en élargissant les bornes de  $-\infty$  à  $+\infty$ . L'erreur faite est négligeable puisque aux bornes du chemin  $\mathcal{L}$ , l'intégrale est déjà de l'ordre de  $\exp[-t\epsilon] \ll 1$  quand  $t \rightarrow +\infty$ . L'intégrale de Gauss donne alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[ -\frac{1}{2}ts^2|\psi''(k_0)| \right] ds = \left( \frac{2\pi}{t|\psi''(k_0)|} \right)^{1/2} . \quad (5.33)$$

De plus, les corrections d'ordre  $O(s)$  et  $O(ts^3)$  donnent respectivement des contributions à l'ordre  $t^{-1}$ . L'équation (5.32) est alors environ égale à l'ordre dominant quand  $t \rightarrow +\infty$  à

$$F(k_0) \left( \frac{2\pi}{t|\psi''(k_0)|} \right)^{1/2} \exp \left[ it\psi(k_0) + i \frac{\pi}{4} \operatorname{sgn}(\psi''(k_0)) \right] . \quad (5.34)$$

Chaque point stationnaire  $\{k_n\}$  tel que  $\sigma'(k_n) = x/t$  donne une telle contribution asymptotique à l'intégrale. L'énergie de l'onde Eq. (5.25) à  $x/t$  donné est donc égale à l'ordre dominant, en négligeant en moyenne les interférences entre ces différentes composantes, à

$$\mathcal{E}_w(x, t) \approx \rho(x) \sum_n |F(k_n)|^2 \left( \frac{2\pi}{t|\psi''(k_n)|} \right) , \quad (5.35)$$

et est donc dominée par la contribution des points stationnaires quand  $t \rightarrow +\infty$ . Ces points vérifient

$$\sigma'(k_n) = \frac{x}{t} = \frac{\partial \sigma}{\partial k}(k_n) = V_g(k_n) , \quad (5.36)$$

et se propagent donc à la vitesse de groupe.

Pour finir, il reste à se convaincre que le comportement asymptotique d'un tel paquet d'onde quand  $t \rightarrow +\infty$  est en fait valide à n'importe quel instant  $t$ . En effet, en supposant que l'équation d'onde est une équation différentielle linéaire à coefficients constants par rapport au temps, le système est invariant par changement de l'origine du temps et il n'y a pas d'échange d'énergie entre les différentes composantes spectrales de l'onde. Cela reste donc vrai quel que soit l'instant  $t$ . Le dernier facteur entre parenthèses dans le membre de droite de Eq. (5.35) correspond au facteur de dilution du paquet d'onde avec le temps. En effet, à cause du comportement dispersif de l'onde, l'énergie transportée par les différentes composantes monochromatiques dans un petit intervalle  $dk$  s'étale spatialement et progressivement lors de sa propagation.

Finalement, l'analyse proposée par Lighthill (1978) arrive à un résultat similaire à celui obtenu par les approches simplifiées décrites dans les sections 5.2.1.a et 5.2.1.b. L'énergie de l'onde se propage à la vitesse de groupe définie par  $\vec{V}_g = \vec{\nabla}_{\vec{k}}\sigma$ . Après s'être convaincu par différentes approches de la signification physique de la vitesse de groupe, cette notion va nous permettre d'étudier de façon simple la manière dont les ondes internes de gravité se propagent dans les intérieurs stellaires. Avant de discuter le cas des ondes internes de gravité, nous revenons brièvement sur le cas général de la propagation d'un paquet d'onde via la théorie du tracé de rayon.

### 5.2.2 Théorie du tracé de rayon

Dans cette théorie, le cas d'un paquet d'onde dispersif se propageant dans un milieu non-homogène et anisotrope est considéré. Les propriétés physiques sont supposées varier sur une échelle caractéristique spatiale beaucoup plus grande que la longueur d'onde caractéristique dominante du paquet d'onde. Cela est équivalent à se placer dans l'approximation JWKB. On considère de plus ici que les propriétés du milieu sont indépendantes du temps. Dans de telles hypothèses, l'onde peut prendre une forme standard

$$\zeta(x_1, x_2, x_3, t) = \mathcal{A}(x_1, x_2, x_3, t) \exp[i\alpha(x_1, x_2, x_3, t)] , \quad (5.37)$$

où  $\{x_i\}_{i=1,2,3}$  sont les coordonnées spatiales et  $\mathcal{A}$  est une amplitude qui varie lentement par rapport à la fonction de phase  $\alpha$ , c'est-à-dire

$$\frac{\partial \ln(\mathcal{A})}{\partial x_i} \ll \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} . \quad (5.38)$$

La fonction de phase est alors supposée vérifier

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x_i} = -k_i \quad \text{et} \quad \frac{\partial \alpha}{\partial t} = \sigma , \quad (5.39)$$

où  $k_i$  est le nombre d'onde suivant la coordonnée  $x_i$  et  $\sigma$  la pulsation dans un référentiel inertiel. Dans ce contexte,  $k_i$  et  $\sigma$  sont les caractéristiques spectrales dominantes du paquet d'onde. Ces derniers sont généralement reliés par une relation de dispersion de la forme

$$\begin{aligned} \sigma &= \tilde{\sigma}(x_1, x_2, x_3, k_1, k_2, k_3) \\ &= \tilde{\sigma}\left(x_1, x_2, x_3, -\frac{\partial \alpha}{\partial x_1}, -\frac{\partial \alpha}{\partial x_2}, -\frac{\partial \alpha}{\partial x_3}\right) . \end{aligned} \quad (5.40)$$

On reprend dans la suite une partie des développements proposés encore par Lighthill (1978) qui donne une introduction simple à ce formalisme. Le cas général dans un référentiel inertiel est d'abord étudié avant de se placer dans un référentiel local en mouvement avec un écoulement quelconque.

**Dans un référentiel inertiel.** En différentiant  $\sigma$  par rapport à  $x_i$ , il vient

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x_i} = \left( \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial x_i} \right)_{\vec{k}} + \left( \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial k_j} \right)_{\vec{x}} \frac{\partial k_j}{\partial x_i} . \quad (5.41)$$

dans laquelle la règle de sommation d'Einstein a été utilisée. En remplaçant  $\sigma$  par sa définition dans Eq. (5.39) et en utilisant le théorème de Schwarz sur les dérivées partielles, on obtient

$$\frac{\partial k_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial k_i}{\partial x_j} = - \left( \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial x_i} \right)_{\vec{k}} , \quad (5.42)$$

où  $\vec{U}$  est la vitesse de groupe dans le référentiel inertiel définie par  $U_i = (\partial \tilde{\sigma} / \partial k_i)_{\vec{x}}$ . Ainsi, un point voyageant à la vitesse de groupe et satisfaisant

$$\frac{dx_i}{dt} = U_i = \left( \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial k_i} \right)_{\vec{x}} , \quad (5.43)$$

voit le vecteur d'onde évoluer dans le temps selon l'équation

$$\frac{dk_i}{dt} = - \left( \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial x_i} \right)_{\vec{k}} . \quad (5.44)$$

Comme la vitesse de groupe est la vitesse de propagation de l'énergie, cette dernière relation spécifie la loi de réfraction de l'énergie de l'onde. Elle montre aussi que si la relation de dispersion  $\tilde{\sigma}(\vec{r}, \vec{k})$  est invariante dans un plan de l'espace Cartésien, alors l'énergie de l'onde se propage dans un plan perpendiculaire à ce dernier.

Enfin, il est intéressant de mettre en évidence l'analogie avec les systèmes dynamiques conservatifs Hamiltonien. Un tel système d'Hamiltonien  $\mathcal{H}(q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3)$ , où les  $\{q_i\}$  sont les coordonnées généralisées et les  $\{p_i\}$  sont les impulsions, suit les équations d'Hamilton, c'est-à-dire

$$\frac{dp_i}{dt} = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \quad \text{et} \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} . \quad (5.45)$$

Le système d'équations composé de Eqs. (5.43) et (5.44) a la même structure si on fait correspondre  $\{x_i\}$  avec  $\{q_i\}$ ,  $\{k_i\}$  avec  $\{p_i\}$  et  $\sigma$  avec  $\mathcal{H}$ . On retrouve le principe de correspondance de la mécanique quantique dans lequel une onde se comporte comme une particule dont l'impulsion et l'énergie s'obtiennent en multipliant respectivement le nombre d'onde et la fréquence par un facteur  $\hbar$ . De plus, la dérivée Lagrangienne de  $\sigma$  par rapport à un point voyageant à la vitesse de groupe est égale à

$$\frac{d\sigma}{dt} = \left( \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial x_i} \right)_{\vec{k}} \frac{dx_i}{dt} + \left( \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial k_i} \right)_{\vec{x}} \frac{dk_i}{dt} = 0 , \quad (5.46)$$

où on a utilisé Eqs. (5.43) et (5.44). La fréquence caractéristique du paquet d'onde vue par un point voyageant à la vitesse de groupe est donc une constante du mouvement, comme le serait l'Hamiltonien pour une particule dans un système conservatif.

**Dans un référentiel en mouvement avec un écoulement.** Un écoulement à trois dimensions de champ de vitesse  $\vec{V} = (V_1, V_2, V_3)$  est maintenant considéré. Dans un référentiel co-mobile avec le fluide, la fréquence intrinsèque de l'onde est modifiée par effet Doppler à cause de l'advection par l'écoulement. Celle-ci est donnée en fonction de la vitesse de l'écoulement par  $\hat{\sigma} = \sigma - k_j V_j = \tilde{\sigma}(\vec{x}, \vec{k}) - k_j V_j(\vec{x})$ . La vitesse de groupe dans le référentiel co-mobile à l'écoulement est donc reliée à celle dans le référentiel inertiel par

$$V_{g,i} = \left( \frac{\partial \hat{\sigma}}{\partial k_i} \right)_{\vec{x}} = U_i - V_i , \quad (5.47)$$

correspondant simplement à la loi de composition des vitesses entre les deux référentiels, avec  $U_i$  la vitesse de groupe dans le référentiel inertiel définie dans Eq. (5.43). En suivant la même méthode que celle utilisée pour dériver Eq. (5.46), la variation temporelle de la fréquence intrinsèque de l'onde vue par un point voyageant à la vitesse de groupe totale  $U_i$  dans un référentiel inertiel est égale à

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\sigma}}{dt} &= \left( \frac{\partial \hat{\sigma}}{\partial x_i} \right)_{\vec{k}} \frac{dx_i}{dt} + \left( \frac{\partial \hat{\sigma}}{\partial k_i} \right)_{\vec{x}} \frac{dk_i}{dt} \\ &= \left( \frac{\partial \hat{\sigma}}{\partial x_i} \right)_{\vec{k}} (V_i + V_{g,i}) - V_{g,i} \left( \frac{\partial (\hat{\sigma} + k_j V_j)}{\partial x_i} \right)_{\vec{k}} \\ &= V_i \left( \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial x_i} \right)_{\vec{k}} - U_i k_j \frac{\partial V_j}{\partial x_i} . \end{aligned} \quad (5.48)$$

La fréquence intrinsèque n'est bien sûr pas conservée sur la trajectoire considérée, contrairement à la fréquence dans le référentiel inertiel  $\sigma$ . Nous verrons dans la Section 5.3 que Eq. (5.48) possède

une forte analogie avec l'équation d'évolution de la densité d'énergie de l'onde. En effet, nous verrons que cette dernière quantité n'est pas conservée dans une particule fluide en mouvement dans un écoulement, même dans l'hypothèse adiabatique. L'équation (5.48) nous servira alors pour remonter à une autre quantité conservée lors de la propagation de l'onde, qui se nomme l'action de l'onde.

Dans la théorie du tracé de rayon, la vitesse de groupe apparaît donc naturellement comme une quantité importante de la dynamique ondulatoire. Les axiomes utilisés dans ce formalisme montrent de plus de façon évidente une différence de loi de conservation associée à l'onde suivant que l'on se situe dans un milieu au repos ou en présence d'un écoulement. Cette caractéristique sera plus amplement discutée dans la Section 5.3.

### 5.2.3 Cas des ondes internes de gravité

Connaissant la relation de dispersion des ondes internes de gravité, les équations de propagation et de réfraction données dans Eqs. (5.43) et (5.44) permettent de décrire le parcours des ondes au cours du temps. Ici, on se contente d'une approche plus descriptive. La vitesse de groupe dans le cas de ondes internes de gravité est obtenue en dérivant la relation de dispersion donnée dans Eq. (5.2). Dans un référentiel en co-rotation avec l'étoile, la vitesse de groupe radiale est donnée par

$$V_{g,r}(r, \sigma, l) = \frac{\partial \hat{\sigma}}{\partial k_r} = -\frac{N k_r k_h}{(k_r^2 + k_h^2)^{3/2}} = -\text{sgn}(k_r) \frac{\hat{\sigma}^2}{N^2} \frac{(N^2 - \hat{\sigma}^2)^{1/2}}{k_h}, \quad (5.49)$$

tandis que sa composante horizontale est égale à

$$\vec{V}_{gh}(r, \sigma, l) = \frac{\partial \hat{\sigma}}{\partial \vec{k}_h} = \frac{N k_r^2}{(k_r^2 + k_h^2)^{3/2}} \frac{\vec{k}_h}{k_h} = \frac{\hat{\sigma}}{N^2} \frac{|N^2 - \hat{\sigma}^2|}{k_h} \frac{\vec{k}_h}{k_h}, \quad (5.50)$$

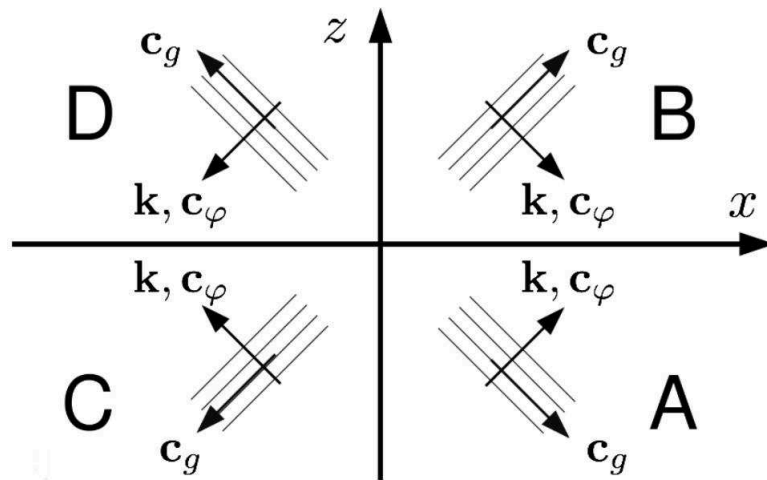
où on rappelle ici que  $\vec{k}_h$  est le vecteur d'onde horizontal et  $k_h$  sa norme. On voit que dans l'approximation des basses fréquences ( $N^2 \gg \hat{\sigma}^2$ ), la composante horizontale de la vitesse de groupe est très supérieure à la composante verticale. La vitesse de phase est quant à elle définie par  $\vec{V}_\varphi = (\sigma/|\vec{k}|^2)\vec{k}$  et est donc perpendiculaire à la vitesse de groupe. Les ondes internes de gravité sont donc dans un cas particulier où l'énergie est transportée perpendiculairement aux plans équiphasés. Parmi d'autres caractéristiques intéressantes, la vitesse de phase radiale est toujours de signe opposé à la vitesse de groupe radiale (voir FIGURE 5.2 pour une illustration). Ainsi, des ondes se propageant vers le centre de l'étoile à la vitesse de groupe ressemblent paradoxalement à des vagues concentriques qui semblent visuellement remonter vers la surface.

De plus, il est possible de montrer en utilisant la théorie de tracé de rayon développée dans Section 5.2.2 en géométrie sphérique que les ondes internes de gravité se propagent dans un plan passant par le centre de l'étoile puisque la relation de dispersion ne dépend que de la coordonnée radiale (e.g., Gough 1993; Alvan *et al.* 2015). On a déjà vu d'après Eq. (5.44) qu'un résultat analogue existe en géométrie Cartésienne. Dans un tel plan, les rayons de propagation de l'énergie des ondes forment un angle  $\theta_e$  avec la verticale, angle qui est égal à

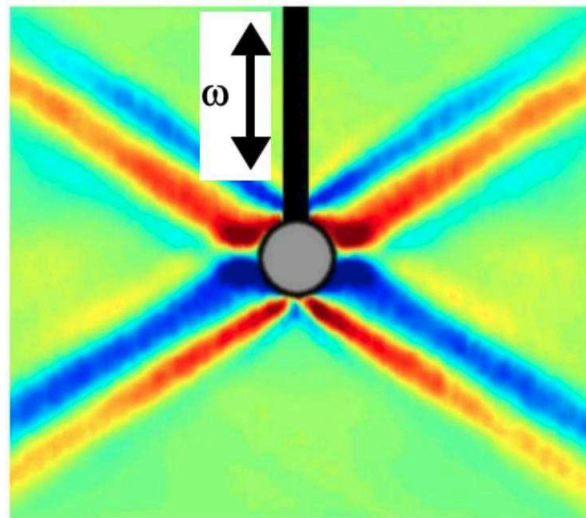
$$\theta_e = \arccos \left( \frac{|V_{g,r}|}{|\vec{V}_g|} \right) = \arccos \left( \frac{\hat{\sigma}}{N} \right). \quad (5.51)$$

Ainsi, l'excitation d'ondes internes de gravité par une source ponctuelle périodique dans un milieu stablement stratifié doit donc résulter en la formation d'un cône d'énergie vertical dont le centre est la zone d'excitation. Dans un plan contenant une génératrice du cône, cela prend la forme d'une croix de "Saint-Andrew" (voir FIGURE 5.3). Comme la composante horizontale de la vitesse de groupe est beaucoup plus grande que la composante radiale dans le cas des très basses fréquences, l'angle  $\theta_e$  est proche de  $\pi/2$ . L'énergie des ondes internes de gravité se propage donc majoritairement

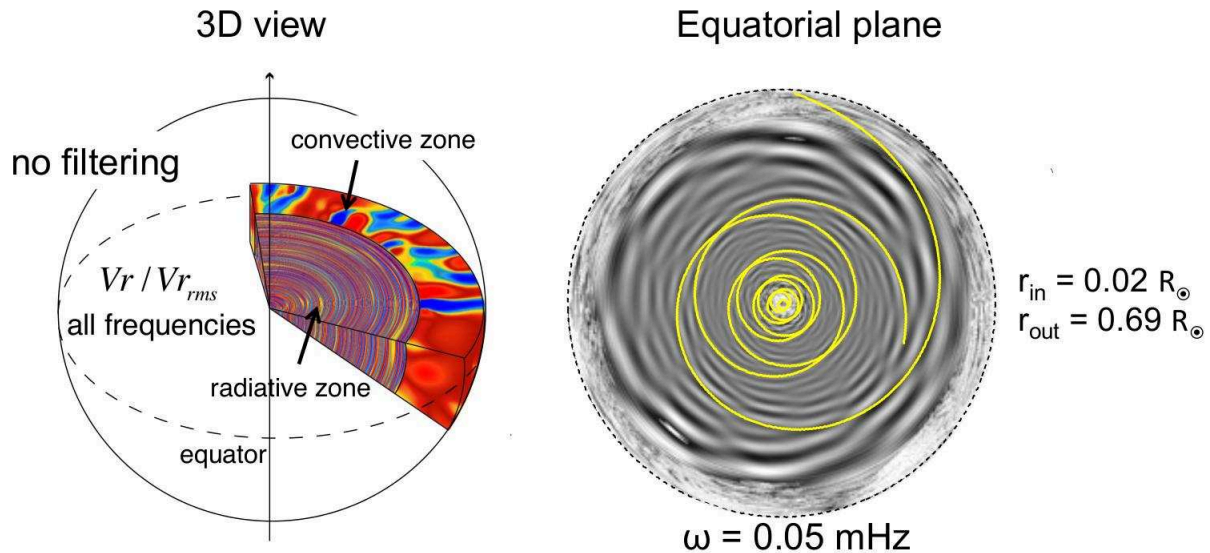




**FIGURE 5.2:** Représentation schématique de la propagation d’ondes internes de gravité dans un plan (d’après Iribarne 2015). La vitesse de phase  $c_\varphi$ , la vitesse de groupe  $c_g$  et le vecteur d’onde  $\mathbf{k}$  sont représentés dans les quatre cas possibles. Dans tous les cas, la vitesse de groupe (de phase) est perpendiculaire (parallèle et de même sens) au vecteur d’onde, et sa composante verticale (suivant la coordonnée  $z$ ) est opposée à celle de la vitesse de phase. Les traits fins obliques symbolisent les plans équiphasés.



**FIGURE 5.3:** Croix de Saint-Andrew observée avec un appareil de Schlieren (d’après Gostiaux *et al.* 2007). Les couleurs (échelle sismique allant du bleu au rouge) représentent l’intensité des perturbations de densité liées à la présence d’ondes internes de gravité dans une solution salée avec un gradient vertical de concentration. Les ondes sont excitées ici par un cylindre vertical oscillant à la fréquence  $\omega$ .



**FIGURE 5.4:** Vues 3D et 2D du plan équatorial d'une simulation de la zone radiative du Soleil d'après Alvan *et al.* (2015). Les résultats de la simulation dans le plan équatorial sont représentés en fond gris sur lequel sont superposées les trajectoires de l'énergie des ondes prédites par la théorie du tracé de rayon. La fréquence a pu être sélectionnée autour de 0.05 mHz grâce à une technique de filtrage. Cette fréquence est assez élevée pour que l'effet de la rotation solaire sur la propagation des ondes soit négligeable.

suivant la direction horizontale, en s'enfonçant malgré tout petit à petit vers le centre de l'étoile grâce à l'existence d'une faible composante verticale de la vitesse de groupe. L'énergie des ondes internes de gravité suit donc des cercles concentriques dans le plan de propagation. Une fois qu'elles se rapprochent du point central où  $N^2 = \hat{\sigma}^2$ , la vitesse de groupe verticale s'annule, les ondes sont réfléchies et reprennent un chemin vers le haut de la zone radiative (voir FIGURE 5.4). Toutes ces caractéristiques sont bien observées par des expériences en laboratoires (e.g., voir FIGURE 5.3) et des simulations numériques 3D (e.g., Alvan *et al.* 2015, voir FIGURE 6.3), confirmant ainsi la description donnée par la théorie linéaire des ondes de gravité.

En résumé, l'énergie des ondes est transportée de façon générale à la vitesse de groupe  $\vec{V}_g = \vec{\nabla}_{\vec{k}} \sigma$ . Dans le cas des ondes internes de gravité, l'énergie se propage dans des plans passant par le centre de l'étoile en suivant des trajectoires en forme de spirales concentriques et peut atteindre des couches très profondes.

### 5.3 Conservation de l'énergie et du moment cinétique d'une onde dans un écoulement

Dans la section précédente, une description qualitative de la propagation des ondes a été donnée. Il a été montré que les ondes peuvent se propager dans toute la zone radiative jusque dans les couches les plus profondes. L'étude du transport de moment cinétique par les ondes nécessite néanmoins une description énergétique et dynamique plus détaillée. Dans cette section, la loi de conservation de l'énergie et du moment cinétique des ondes gravito-acoustiques se propageant dans un écoulement de vitesse  $\vec{V}_h$  est étudiée. Pour simplifier les développements, l'écoulement est supposé perpendiculaire à la verticale et solénoïdale, c'est-à-dire telle que  $\vec{\nabla} \cdot \vec{V}_h = 0$  où  $\vec{\nabla}$  est l'opérateur nabla dans l'espace réel. L'écoulement est de plus supposé stationnaire. Cela est équivalent à supposer qu'il n'y a pas de transfert de quantité de mouvement entre le milieu et les ondes. En d'autres mots, les oscillations sont supposées adiabatiques. Cette analyse nous permettra de remonter à l'expression du flux d'énergie et de moment cinétique de l'onde dans le cas adiabatique. Ces résultats nous seront

utiles dans un deuxième temps pour traiter du cas non-adiabatique et modéliser les échanges de moment cinétique entre les ondes et le milieu stellaire dans la Section 5.4.

### 5.3.1 Flux d'énergie d'une onde gravito-acoustique

L'équation du mouvement linéarisée par rapport à l'équilibre s'écrit dans le cas général

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{V}_h \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V}_h \right) = -\vec{\nabla} p' + \rho' \vec{g} - \rho \vec{\nabla} \Psi' , \quad (5.52)$$

où l'on a négligé le terme  $\rho'(\vec{V}_h \cdot \vec{\nabla})\vec{V}_h$ , représentant l'effet de la force centrifuge. Sous les hypothèses d'étude, cela est équivalent à supposer que le milieu est barotrope (i.e., pour lequel les isobares sont parallèles aux isopycnes). Dans une étoile en rotation axisymétrique, cela revient à considérer que la force centrifuge est assez faible en première approximation pour que la structure à l'équilibre conserve la symétrie sphérique. En procédant au produit scalaire avec  $\vec{v}$ , l'équation devient

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho v^2 \right) + \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{1}{2} \rho v^2 \vec{V}_h + (p' + \rho \Psi') \vec{v} \right) = p' \vec{\nabla} \cdot \vec{v} + \rho' \vec{g} \cdot \vec{v} - \Psi' \frac{d\rho'}{d\tau} - \rho \vec{v} \cdot [(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V}_h] \quad (5.53)$$

où l'on a défini la dérivée particulaire dans un référentiel co-mobile à l'écoulement  $d/d\tau = (\partial/\partial t + (\vec{V}_h \cdot \vec{\nabla}))$ , et où l'on a utilisé le fait que  $\vec{\nabla} \cdot \vec{V}_h = 0$ , ainsi que l'équation de continuité linéarisée qui vaut

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \vec{V}_h \cdot \vec{\nabla} \rho' + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \rho \right) . \quad (5.54)$$

Si l'on suppose en plus que les oscillations sont adiabatiques, les perturbations Eulériennes de pression et de densité sont reliées au vecteur déplacement  $\xi$  par Eq. (2.16), c'est-à-dire

$$\frac{p'}{c^2} = \rho' + \rho \vec{\xi} \cdot \left( \vec{\nabla} \ln \rho - \frac{1}{\Gamma_1} \vec{\nabla} \ln p \right) = \rho' - \frac{\rho N^2}{g} \xi_v , \quad (5.55)$$

où on a pris en compte dans la deuxième égalité que la pression  $p$  et la densité  $\rho$  sont reliées par l'équilibre hydrostatique  $\vec{\nabla} p = \rho \vec{g} = -\rho g \vec{e}_v$  suivant la direction verticale de vecteur unitaire  $\vec{e}_v$ , avec  $\xi_v$  la composante verticale du déplacement associé à l'onde, et où on a introduit la fréquence de Brunt-Väisälä

$$N^2 = g \left( -\frac{g}{c^2} - \frac{d \ln \rho}{dr} \right) . \quad (5.56)$$

En prenant la dérivée Lagrangienne de Eq. (5.55), il vient alors

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + \vec{V}_h \cdot \vec{\nabla} p' + \frac{d \vec{\xi}}{dt} \cdot \vec{\nabla} p = c^2 \left( \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \vec{V}_h \cdot \vec{\nabla} \rho' + \frac{d \vec{\xi}}{dt} \cdot \vec{\nabla} \rho \right) . \quad (5.57)$$

En se rappelant que la vitesse associée à l'onde est reliée au vecteur déplacement par Eqs. (2.9) et (2.11), c'est-à-dire

$$\vec{v} = \frac{d \vec{\xi}}{dt} - (\vec{\xi} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V}_h = \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t} + (\vec{V}_h \cdot \vec{\nabla}) \vec{\xi} - (\vec{\xi} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V}_h , \quad (5.58)$$

l'Eq. (5.54) peut se réécrire à partir de Eq. (5.57), en utilisant le fait que les gradients de  $\rho$  et  $p$  sont verticaux, comme

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = -\frac{1}{\rho c^2} \left( \frac{\partial p'}{\partial t} + \vec{V}_h \cdot \vec{\nabla} p' + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} p \right) . \quad (5.59)$$

En insérant cette dernière équation dans Eq. (5.53), on aboutit alors à

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho \vec{v}^2 + \frac{1}{2} \frac{p'^2}{\rho c^2} \right) + \vec{\nabla} \cdot \left[ \frac{1}{2} \left( \rho \vec{v}^2 + \frac{p'^2}{\rho c^2} \right) \vec{V}_h + (p' + \rho \Psi') \vec{v} \right] = - \frac{p'}{\rho c^2} \vec{\nabla} p \cdot \vec{v} + \rho' \vec{g} \cdot \vec{v} - \Psi' \frac{d\rho'}{d\tau} - \rho \vec{v} \cdot \left[ (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V}_h \right]. \quad (5.60)$$

Ainsi, en utilisant l'équilibre hydrostatique dans la direction verticale, la deuxième égalité donnée dans Eq. (5.55), Eq. (5.58) et la condition  $\vec{\nabla} \cdot \vec{V}_h = 0$ , les deux premiers termes du membre de droite dans Eq. (5.60) mènent à

$$\begin{aligned} - \frac{p'}{\rho c^2} \vec{\nabla} p \cdot \vec{v} + \rho' \vec{g} \cdot \vec{v} &= \left( - \frac{p'}{c^2} + \rho' \right) \vec{g} \cdot \vec{v} = - \rho N^2 \xi_v \left( \frac{\partial \xi_v}{\partial t} + (\vec{V}_h \cdot \vec{\nabla}) \xi_v \right) \\ &= - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho N^2}{2} \xi_v^2 \right) - \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\rho N^2}{2} \xi_v^2 \vec{V}_h \right), \end{aligned} \quad (5.61)$$

ce qui, inséré dans Eq. (5.60), permet d'aboutir à l'équation de conservation de l'énergie de l'onde dans un écoulement horizontal et solénoïdal, c'est-à-dire

$$\frac{\partial E_w}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{F}}_{E,w} = - \rho \vec{v} \cdot \left[ (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V}_h \right] - \Psi' \frac{d\rho'}{d\tau}, \quad (5.62)$$

où

$$E_w = \frac{1}{2} \rho \vec{v}^2 + \frac{1}{2} \frac{p'^2}{\rho c^2} + \frac{1}{2} \rho N^2 \xi_v^2 \quad (5.63)$$

$$\vec{\mathcal{F}}_E = E_w \vec{V}_h + (p' + \rho \Psi') \vec{v} \quad (5.64)$$

sont respectivement la densité d'énergie de l'onde et le flux d'énergie. Ce dernier s'exprime simplement comme la somme d'un terme correspondant à l'advection horizontale de l'énergie de l'onde par l'écoulement avec le flux d'énergie de l'onde. Celui-ci vaut dans le cas général

$$\vec{\mathcal{F}}_w = (p' + \rho \Psi') \vec{v}. \quad (5.65)$$

Il est intéressant de noter que Eq. (5.62) est valable pour un fluide en rotation axisymétrique, à la condition que la rotation soit assez lente pour pouvoir négliger l'effet de la force centrifuge sur la structure à l'équilibre. En effet, si on considère un vecteur rotation de la forme  $\vec{\Omega} = \Omega(r, \theta) \vec{e}_z$  en coordonnées sphériques, la vitesse de rotation est perpendiculaire à la verticale et vérifie bien (e.g., Unno *et al.* 1989)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V}_h = \vec{\nabla} \cdot (\vec{r} \wedge \vec{\Omega}) = 0. \quad (5.66)$$

Le développement précédent peut donc s'appliquer au cas d'étoiles en rotation axisymétrique lente. Plusieurs enseignements intéressants sont à tirer de cette analyse dans les cas des ondes internes de gravité adiabatiques à basses fréquences :

1. **Equipartition de l'énergie** : le caractère incompressible des ondes internes de gravité permet de négliger le terme  $p'^2/\rho c^2$  dans Eq. (5.63), ce qui aboutit en moyenne (dans le temps et l'espace) à l'équipartition entre l'énergie cinétique des ondes et leur énergie potentielle liée à la Poussée d'Archimède. En effet, lorsque  $\vec{v}^2$  est nulle, le déplacement Lagrangien vertical est extremum car d'après Eq. (5.58),  $d\xi_v/dt = 0$ , et vice-versa ; il est alors raisonnable de penser que l'énergie totale des ondes se répartit équitablement entre ces deux composantes. Il est possible de le montrer rigoureusement en calculant la somme des deux contributions quadratiques à l'aide de la relation (dans l'espace de Fourier) donnée dans Eq. (5.16) et en moyennant sur l'angle solide (dans le cas sphérique).

2. **Flux d'énergie de l'onde dans l'approximation de Cowling** : pour les ondes incompressibles, l'approximation de Cowling (i.e.,  $\Psi' = 0$ ) est valide (Dintrans & Rieutord 2001). Le flux d'énergie de l'onde se réduit alors à l'expression simple

$$\vec{\mathcal{F}}_w \approx p' \vec{v}, \quad (5.67)$$

c'est-à-dire au produit de la perturbation Eulérienne de pression avec la vitesse associée à l'onde. Ce résultat est remarquable par sa simplicité et par son côté contre-intuitif. En effet, l'énergie potentielle liée à la force de pression est négligeable dans le cas des ondes internes de gravité, mais c'est pourtant la perturbation Eulérienne de pression qui contrôle en partie le flux d'énergie de l'onde.

3. **Interaction énergétique avec l'écoulement** : dans l'approximation de Cowling toujours, l'équation (5.62) montre que l'énergie de l'onde n'est pas conservée dans tout volume Lagrangien en mouvement avec le fluide et doit évoluer avec le temps. Cette affirmation est valable même dans le cas d'oscillations adiabatiques ! Cela est la conséquence de l'interaction entre le fluide et l'onde représentée par le premier terme du membre de droite de Eq. (5.62) ; ce dernier provient de la force inertielle exercée par le fluide sur l'onde et est non-nul si et seulement si  $\vec{V}_h$  varie spatialement.

Ce dernier point est contre-intuitif. Pour s'en convaincre, considérons le cas simple d'une onde progressive de pulsation unique  $\sigma$  dans une étoile en géométrie sphérique. D'abord, la moyenne sur l'angle solide de Eq. (5.62) en coordonnées sphériques vaut dans le cas adiabatique (i.e., sans perte ni gain d'énergie localement)

$$\frac{\partial \overline{E_w}}{\partial t} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \overline{\mathcal{F}_{r,w}}) - \overline{\rho \vec{v} \cdot [(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V}_h]} = 0 \quad (5.68)$$

où  $\overline{X} = \iint X \sin \theta d\theta d\varphi / 4\pi$  est la moyenne sur l'angle solide de la variable  $X$ . En décomposant les perturbations associées à l'onde sur la base des harmoniques sphériques comme dans Eqs. (5.11) et (5.12), le flux radial moyen d'énergie de l'onde, pour une pulsation  $\sigma$ , pour un degré angulaire  $l$  et un nombre azimutal  $m$ , est obtenu en calculant le produit de Eq. (5.8) par le complexe conjugué noté (\*) de Eq. (5.9), ce qui donne pour une onde se propageant vers le centre de l'étoile (i.e., avec un terme de phase en  $\exp[i\sigma t - i \int_r^{r_t} |k_r| dr]$  avec la convention choisie)

$$\overline{\mathcal{F}_{r,w}} = \frac{|C|^2}{4\pi r^2} \hat{\sigma}, \quad (5.69)$$

c'est-à-dire un flux montant, en accord avec la Section 5.2.3. A cause des échanges d'énergie avec le fluide en rotation, la divergence radiale du flux d'énergie de l'onde est non nulle. Entre parenthèses, il est intéressant de remarquer que le produit  $\hat{p}'_{l,m} \hat{v}_{r,l,m}$  dans cette dernière équation est équivalent au produit de la densité spectrale d'énergie de l'onde avec la vitesse de groupe radiale, ce qui peut être aisément démontré en reprenant un calcul similaire à Zahn *et al.* (1997). Ceci confirme, une fois de plus, que la vitesse de groupe correspond à la vitesse de propagation de l'énergie de l'onde. Finalement, cette dernière équation montre que la variation d'énergie de l'onde au cours de sa propagation est directement proportionnelle à la modification de sa fréquence intrinsèque par effet Doppler. Comme nous allons le voir dans la prochaine section, la variation du flux d'énergie de l'onde est en fait une condition nécessaire pour que le flux de moment cinétique de l'onde soit conservé.

### 5.3.2 Conservation du moment cinétique de l'onde

Contrairement au flux d'énergie, le flux de moment cinétique d'une onde est conservé dans un écoulement stationnaire. Cela a été montré dans le travail pionnier de Eliassen & Palm (1962) dans

un cas très simple. Dans leur démonstration, les auteurs supposent que les ondes se propagent dans un plan Cartésien à deux dimensions ( $Oxz$ ), avec  $Oz$  l'axe vertical. L'écoulement est supposé horizontal et ne dépendant que la coordonnée verticale  $z$ , c'est-à-dire de la forme  $\vec{V}_h = V_h(z)\vec{e}_x$ , avec  $(\vec{e}_x, \vec{e}_z)$  les vecteurs unitaires dans les directions des coordonnées  $x$  et  $z$  respectivement. Pour conserver les mêmes notations que les auteurs, la perturbation de vitesse associée à l'onde est notée  $\vec{v} = u\vec{e}_x + w\vec{e}_z$ . Le problème est supposé stationnaire. Cela implique que la moyenne d'une quantité liée à l'onde sur une longueur d'onde horizontale caractéristique, disons  $\lambda_x$ , autour de tout point de coordonnée horizontale  $x_0$ , est supposée constante dans le temps, c'est-à-dire que pour toute perturbation  $X$

$$\langle X \rangle(z, t; x_0) = \frac{1}{\lambda_x} \int_{x_0 - \lambda_x/2}^{x_0 + \lambda_x/2} X(x, z, t) dx \quad (5.70)$$

$$\frac{\partial \langle X \rangle}{\partial t}(z, t; x_0) = 0. \quad (5.71)$$

Le problème est de plus supposé invariant horizontalement, c'est-à-dire

$$\frac{\partial \langle X \rangle}{\partial x_0}(z, t; x_0) = 0, \quad (5.72)$$

si bien que la dépendance de tout  $X$  avec  $x_0$  peut être oubliée dans la suite. Premièrement, en moyennant horizontalement Eq. (5.62) dans l'approximation de Cowling et en utilisant le fait que  $\vec{V}_h$  est suivant  $\vec{e}_x$  et est une fonction de la coordonnée verticale seulement, l'équation de conservation du flux peut alors s'écrire comme

$$\frac{\partial}{\partial z} \langle pw \rangle(z, t) = -\rho \frac{\partial V_h}{\partial z} \langle uw \rangle(z, t), \quad (5.73)$$

où on a utilisé le fait que les termes liés aux dérivées par rapport au temps sont nuls en moyenne, ainsi que Eq. (5.72). Deuxièmement, suivant Eq. (5.52), la conservation de l'impulsion suivant la direction  $x$  est donnée par

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + V_h \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial V_h}{\partial z} w \right) + \frac{\partial p'}{\partial x} = 0. \quad (5.74)$$

Pour aller plus loin, cette dernière équation est multipliée par  $(\rho V_h u + p')$  de telle sorte qu'après plusieurs manipulations on obtienne

$$\rho p' \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho V_h p' u + \frac{p'^2}{2} + \rho V_h^2 \frac{u^2}{2} \right) + \rho \frac{\partial V_h}{\partial z} (p' w + \rho V_h u w) = 0. \quad (5.75)$$

De façon similaire à précédemment, on moyenne la dernière équation horizontalement sur l'échelle d'une longueur d'onde. On utilise de plus que  $\langle p \partial u / \partial t \rangle = 0$ . Cela revient à faire l'hypothèse que les perturbations de pression et de vitesse sont en phase, ce qui est valide dans l'approximation JWKB et l'hypothèse adiabatique (e.g., Muraschko *et al.* 2015, voir aussi la Section 5.1.2). On obtient alors l'égalité suivante pour le flux radial moyen d'énergie de l'onde

$$\langle p' w \rangle(z, t) = -\rho V_h \langle uw \rangle(z, t). \quad (5.76)$$

En dérivant la dernière équation par  $z$ , on obtient alors

$$\frac{\partial}{\partial z} \langle pw \rangle = -\rho \frac{\partial V_h}{\partial z} \langle uw \rangle - V_h \frac{\partial}{\partial z} (\rho \langle uw \rangle), \quad (5.77)$$

ce qui, par comparaison à Eq. (5.73), est valable si et seulement si  $\rho \langle uw \rangle(z, t)$  est conservé et ne dépend pas de l'altitude  $z$ . Cette dernière quantité représente le flux vertical total de quantité de

mouvement de l'onde. Comme celui-ci est conservé, le flux vertical total d'énergie de l'onde, c'est-à-dire  $\langle p'w \rangle(z, t)$  dans le membre de gauche de Eq. (5.76), doit varier en proportion de  $V_h(z)$  à mesure que l'onde se propage. De plus, le terme de droite dans Eq. (5.73), qui correspond au membre de droite de l'équation de conservation plus générale dans Eq. (5.62), agit comme une source d'énergie secondaire. Il ne dépend que du gradient de l'écoulement selon la verticale.

Dans cette situation simplifiée supposée stationnaire, le flux total vertical de quantité de mouvement de l'onde est conservé. La proposition contraposée affirme donc que **si le flux de quantité de mouvement des ondes n'est pas conservé, alors l'écoulement ne peut plus être considéré comme stationnaire et des échanges d'impulsion doivent avoir lieu entre le fluide et les ondes. Ainsi, en présence de processus de dissipation, les ondes internes peuvent déposer une part de leur quantité de mouvement dans le milieu et modifier la vitesse de l'écoulement.** Ce résultat obtenu ici dans un cas particulier est un résultat plus général du théorème de non-accélération énoncé par Andrews & McIntyre (1978a). L'étude du transport de moment cinétique par les ondes internes de gravité nécessite donc de prendre en compte les effets non-adiabatiques. Cela fait l'objet de la prochaine section.

Pour conclure cette section, la conservation du flux radial moyen de moment cinétique de l'onde,  $\overline{\mathcal{F}_{J,w}}$ , peut être facilement vérifiée dans le cas d'ondes internes de gravité adiabatiques de pulsation  $\sigma$ , de degré angulaire  $l$  et de nombre azimutal  $m$ , en géométrie sphérique et sous les hypothèses de la Section 5.1. Selon Zahn *et al.* (1997), le flux radial local de moment cinétique est donné par le produit  $\rho r \sin \theta v_r v_\varphi$ , où  $v_\varphi$  est la composante azimutale de la vitesse associée à l'onde. Suivant la décomposition en harmoniques sphériques et d'après Eq. (5.8) et le complexe conjugué de Eq. (5.10) (dans l'espace de Fourier) à laquelle on fait correspondre la partie azimutale du gradient des harmoniques sphériques, c'est-à-dire  $imY_l^m/r \sin \theta$ , on obtient pour une onde de pulsation  $\sigma$ , de degré angulaire  $l$  et de nombre azimutal  $m$ , se propageant vers le centre de l'étoile,

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{F}_{J,w}} &= \frac{1}{4\pi} \iint \rho r \sin \theta \hat{v}_{r,l,m}(r) Y_l^m \hat{v}_{h,l,m}^*(r) \left( \frac{-imY_l^{m*}}{r \sin \theta} \right) \sin \theta d\theta d\varphi \\ &= \frac{-im}{4\pi} \iint \rho \hat{v}_{r,l,m}(r) \hat{v}_{h,l,m}^*(r) |Y_l^m|^2 \sin \theta d\theta d\varphi \\ &= \frac{|C|^2 m}{4\pi r^2} = \frac{m}{\hat{\sigma}} \overline{\mathcal{F}_{E,w}}. \end{aligned} \quad (5.78)$$

La flux radial moyen de moment cinétique de l'onde est égal au produit du flux d'énergie de l'onde avec le facteur  $m/\hat{\sigma}$ , comme précédemment montré par Zahn *et al.* (1997). Ce flux est proportionnel à  $1/r^2$  et est donc à divergence nulle en coordonnée sphérique. Il est important de noter que ce résultat a été obtenu dans un cas simplifié, où par exemple la force de Coriolis a été négligée. Un traitement plus rigoureux de l'interaction entre une onde et un écoulement moyen est donné grâce au formalisme de la moyenne Eulérienne transformée (Transformed Eulerian Mean) (e.g., Andrews & McIntyre 1978b; Belkacem *et al.* 2015b). L'expression du flux de moment cinétique de l'onde est notamment modifiée par un terme lié à la présence de la force inertielle de Coriolis. Nous reviendrons brièvement sur ce point dans le Chapitre 7.

### 5.3.3 Lien avec la conservation de l'action de l'onde

La conservation du flux de quantité de mouvement des ondes est intrinsèquement liée à la conservation de l'action de l'onde, parfois appelée activité de l'onde par certains auteurs. Pour un paquet d'onde caractérisé par une fréquence et un nombre d'onde dominants, l'action est définie comme le rapport de la densité d'énergie,  $E_w$ , sur la fréquence intrinsèque,  $\hat{\sigma}$  (e.g., Lighthill 1978). La loi de conservation de l'action de l'onde peut être retrouvée dans un cadre simplifié similaire à celui utilisé par Eliassen & Palm (1962) et présenté dans la Section 5.3.2. Pour faire le lien avec la Section 5.2.2, il suffit de renommer la vitesse de l'écoulement horizontal  $V_h(z)$  par  $V_x(z)$ .

On considère donc un tel paquet d'onde, caractérisé par une fréquence et un nombre d'onde dominants. De façon générale, la densité d'énergie de l'onde se propage à la vitesse de groupe. La

loi de conservation de la densité d'énergie du paquet d'onde peut donc s'écrire d'après Eq. (5.62) suivant la forme suivante

$$\frac{\partial E_w}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (E_w \vec{U}) = -\rho u w \frac{\partial V_x}{\partial z}, \quad (5.79)$$

où les mêmes notations introduites dans Section 5.3.2 ont été utilisées et où  $\vec{U} = \vec{V}_x + \vec{V}_g$  est la vitesse de groupe totale dans un référentiel inertiel qui a été définie dans la Section 5.2.2. Le membre de droite correspond à une source d'énergie secondaire pour l'onde résultant de la force inertielle exercée par l'écoulement sur les oscillations. Pour estimer sa valeur dans un tel flot horizontal, on utilise l'équation de conservation de l'impulsion suivant la direction  $x$  qui vaut

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \vec{V}_h \frac{\partial u}{\partial x} \right) = -\frac{\partial p'}{\partial x}. \quad (5.80)$$

En se rappelant des définitions données dans Eq. (5.39) pour un paquet d'onde et en faisant correspondre  $p'w$  avec  $E_w V_{g,z}$ , la dernière équation multipliée par  $w$  mène à

$$\rho \hat{\sigma} u w = k_x w p' = k_x E_w V_{g,z}. \quad (5.81)$$

où  $k_x$  est le nombre d'onde horizontal. Ainsi, l'Eq. (5.79) peut être réécrite comme

$$\frac{\partial E_w}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (E_w \vec{U}) = -\frac{E_w}{\hat{\sigma}} U_i k_j \frac{\partial V_j}{\partial x_i}, \quad (5.82)$$

où la règle de sommation d'Einstein a été utilisée pour faire le lien avec Eq. (5.48), dans laquelle le premier terme du membre de droite est nul dans ce cas car  $\hat{\sigma}$  ne dépend que de la coordonnée verticale et la vitesse de l'écoulement est horizontal. Ainsi, le membre de droite dans Eq. (5.82) peut être exprimé par Eq. (5.48) dans laquelle  $d/dt = \partial/\partial t + \vec{U} \cdot \vec{\nabla}$ , de telle sorte à obtenir au final

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{E_w}{\hat{\sigma}} \right) + \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{E_w}{\hat{\sigma}} \vec{U} \right) = 0. \quad (5.83)$$

Le rapport de la densité d'énergie avec la fréquence intrinsèque du paquet d'onde est donc conservé dans tout volume arbitraire se déplaçant à la vitesse  $\vec{U}$ , c'est-à-dire la somme de la vitesse de l'écoulement et de la vitesse de groupe, qui est encore la vitesse de déplacement de l'énergie dans un référentiel inertiel. Cela définit l'action de l'onde, d'abord formalisée pour des trains d'onde et différents systèmes dynamiques conservatifs par Bretherton & Garrett (1968); Bretherton (1969), puis généralisé par Andrews & McIntyre (1978b) à tout type d'ondes se propageant dans un écoulement.

Dans cette section, nous avons vu que dans un écoulement stationnaire, le flux d'énergie d'une onde n'est pas conservé, et ce même dans le cas adiabatique. Ceci est la conséquence de l'interaction entre l'écoulement et l'onde. Au contraire, le flux de moment cinétique de l'onde, lui, est conservé dans l'approximation adiabatique. Par contraposée, on comprend que si le flux de moment cinétique d'une onde n'est pas conservé en présence d'effets non-adiabatiques, les ondes peuvent déposer une part de leur quantité de mouvement dans le milieu et ainsi affecter la rotation interne.

## 5.4 Amortissement radiatif et transport par les ondes de gravité

Il ressort de la section précédente que l'étude du transport de moment cinétique par les ondes nécessite de prendre en compte les effets non-adiabatiques. Dans ce chapitre, une expression analytique du taux d'amortissement des ondes de gravité par pertes radiatives est dérivée. Cela nous permettra à terme d'estimer la quantité de moment cinétique transmise dans le milieu radiatif et l'influence des ondes sur l'évolution de la rotation.



### 5.4.1 Taux d'amortissement suivant la méthode de Press (1981)

Press (1981) a dérivé une expression analytique du taux d'amortissement subi par les ondes internes de gravité lors de leur propagation dans la zone radiative. En se plaçant dans l'hypothèse anélastique (i.e.,  $\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0$ ) et l'approximation JWKB, Press (1981) a montré qu'il était possible de coupler l'équation de la conservation du moment avec l'équation de conservation de l'énergie. L'auteur a utilisé l'approximation de Cowling, ce qui est justifiée dans l'hypothèse anélastique (Dintrans & Rieutord 2001). Il a de plus négligé les perturbations Eulériennes de pression dans l'équation d'état. Zahn *et al.* (1997) a ajouté à cette description l'effet des gradients de composition chimique, tout en négligeant la diffusion des éléments lors de l'oscillation d'une bulle de matière. Le nombre d'onde radial dans le cas non-adiabatique,  $\mathcal{K}_r$ , peut alors être localement déterminé par la résolution d'une équation du second degré pour  $\mathcal{K}_r^2$  (e.g., Maeder 2009)

$$\mathcal{K}_r^2 - k_h^2 \left( \frac{N^2}{\sigma^2} - 1 \right) - i \frac{K}{\sigma} (\mathcal{K}_r^2 + k_h^2) \left[ \mathcal{K}_r^2 - k_h^2 \left( \frac{N_\mu^2}{\sigma^2} - 1 \right) \right] = 0, \quad (5.84)$$

avec  $K$  la diffusivité thermique radiative et  $N_\mu^2$  la partie de la fréquence de Brunt-Väisälä sensible au gradient de composition chimique, c'est-à-dire

$$K = \frac{16\sigma T^3}{3\rho\kappa C_p} \quad \text{et} \quad N_\mu^2 = \frac{g\varphi}{H_p} \nabla_\mu, \quad (5.85)$$

où  $\sigma$  est la constante de Stefan-Boltzmann,  $T$  est la température,  $\kappa$  est l'opacité,  $C_p$  est la capacité calorifique spécifique à pression constante,  $g$  l'accélération radiative,  $H_p$  l'échelle de hauteur de pression,  $\nabla_\mu$  le gradient de poids moléculaire moyen et  $\varphi$  le coefficient thermodynamique définis dans Eq. (2.37). Une solution analytique simple est habituellement donnée en supposant que le taux d'amortissement de l'amplitude est faible par rapport au taux de variation de la phase de l'onde. Elle est obtenue en développant le nombre d'onde radial au premier ordre en  $K$ , c'est-à-dire de la forme  $\mathcal{K}_r = A + BK + \dots$ , et en regroupant les termes d'ordre zéro et du premier ordre (voir encore Maeder 2009). Le terme d'ordre zéro correspond à la solution usuelle donnée dans Eq. (5.2) et le terme du premier ordre est un nombre imaginaire pure correspondant à des pertes d'énergie. La solution trouvée dans cette approximation vérifie donc à posteriori la validité des hypothèses utilisées par l'auteur. Cependant, la validité de Eq. (5.84) peut poser question lorsque l'amortissement devient très fort (e.g., à très basses fréquences) et l'amplitude de l'onde est localement très atténuée ; cela méritera d'être clarifiée dans de futurs travaux.

Dans la suite, on propose de dériver avec une méthode alternative l'expression de l'amortissement des ondes internes de gravité en utilisant la théorie des perturbations au premier ordre dans l'approximation quasi-adiabatique. Une comparaison à l'expression dérivée selon une méthode différente par Press (1981) sera alors possible. De plus, nous nous intéresserons dans la suite aux étoiles évoluées composées d'un cœur d'hélium recouvert d'une couche d'hydrogène en fusion. Dans cette couche, le gradient de luminosité peut être important. Contrairement à l'approche utilisée par Press (1981), nous prendrons en compte la variation rapide de la luminosité dans cette couche et estimerons son impact sur le taux d'amortissement.

### 5.4.2 Dérivation suivant la théorie des perturbations au premier ordre

Dans cette section, les effets non-adiabatiques sont considérés comme de faibles perturbations au cas adiabatique. Le taux d'amortissement est obtenu en injectant les fonctions d'ondes adiabatiques (non-perturbées) dans l'équation de conservation de l'énergie pour aboutir à l'expression de la variation Lagrangienne d'entropie. Ce formalisme, dit quasi-adiabatique, nous permet en plus de prendre facilement en compte la perturbation de la luminosité qui pourrait être importante dans les étoiles sous-géantes et géantes rouges.

**Quelques rappels et définitions.** Pour une onde émise à la base de la région convective et qui se propage vers le centre de l'étoile, la transformée de Fourier temporelle de la perturbation Lagrangienne de toute quantité  $X$  peut formellement être écrite comme

$$\delta\hat{X} = \tilde{X}(r, \sigma) \exp\left(-i \int_r^{r_t} \mathcal{K}_r dr\right), \quad (5.86)$$

avec  $r_t$  le rayon en haut de la zone radiative et  $\tilde{X}(r, \sigma)$  l'amplitude à valeur réelle, et où la dépendance angulaire suivant l'harmonique sphérique  $Y_l^m(\theta, \varphi)$ , de degré angulaire  $l$  et de nombre azimutal  $m$ , est implicite ici. Le nombre d'onde radial complexe,  $\mathcal{K}_r$ , est égal à sa valeur dans le cas adiabatique,  $k_r$ , plus une perturbation liée aux effets non-adiabatiques, c'est-à-dire  $\mathcal{K}_r = k_r - \gamma$ . Dans l'approximation quasi-adiabatique,  $|\gamma|$  est supposé petit par rapport à  $|k_r|$ . Toute perturbation Lagrangienne (dans l'espace de Fourier) peut alors s'écrire comme

$$\delta\hat{X} \approx \tilde{X}(r, \sigma) \exp\left(-i \int_r^{r_t} [k_r - \mathcal{R}_e(\gamma)] dr\right) \exp\left(-\int_r^{r_t} \eta dr\right), \quad (5.87)$$

où  $\eta = \mathcal{I}_m(\gamma)$ , et  $\mathcal{R}_e()$  et  $\mathcal{I}_m()$  représentent respectivement les parties réelle et imaginaire. Le dernier terme est lié aux pertes d'énergie de l'onde. Il est important de souligner que la signification de  $\eta$  ici est différente du taux d'amortissement usuellement défini pour les modes stationnaires. En effet,  $\eta$  représente le taux d'amortissement par unité de distance parcourue, tandis que le taux d'amortissement des modes donne la diminution globale de leur amplitude par unité de temps. Sa détermination fait l'objet des prochains paragraphes. La démonstration est équivalente à celle de Godart *et al.* (2009) pour les modes, mais adaptée aux ondes progressives au spectre de fréquence continu.

**Expression du taux d'amortissement  $\eta$ .** Pour la suite, il est pratique d'écrire les équations de conservation du moment et de continuité sous forme Lagrangienne, c'est-à-dire telles que

$$\sigma^2 \hat{\xi}_r = \frac{d\delta\hat{\Psi}}{dr} + \frac{1}{\rho} \frac{d\delta\hat{p}}{dr} + \frac{\delta\hat{p}}{\rho} g \quad (5.88)$$

$$\sigma^2 \hat{\xi}_h = \frac{1}{r} \left( \frac{\delta\hat{p}}{\rho} + \delta\hat{\Psi} \right) \quad (5.89)$$

$$\frac{\delta\hat{p}}{\rho} = -\frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 \hat{\xi}_r)}{dr} + \frac{\ell(\ell+1)}{\sigma^2 r^2} \left( \frac{\delta\hat{p}}{\rho} + \delta\hat{\Psi} \right), \quad (5.90)$$

où la projection sur l'harmonique sphérique  $Y_l^m(\theta, \varphi)$  a implicitement été effectuée ici (voir Section 2.1 pour les hypothèses utilisées et les détails de dérivation). En multipliant Eq. (5.88) par  $\hat{\xi}_r^*$  et en exprimant la dérivée de  $\hat{\xi}_r$  par le biais de Eq. (5.90), cette équation peut être réécrite comme

$$\sigma^2 \left( \left| \hat{\xi}_r \right|^2 + \ell(\ell+1) \left| \hat{\xi}_h \right|^2 \right) = \frac{d}{dr} \left( \hat{\xi}_r^* \delta\hat{\Psi} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{d}{dr} \left( \hat{\xi}_r^* \delta\hat{p} \right) + \frac{\delta\hat{p}^*}{\rho} \left( \frac{\delta\hat{p}}{\rho} + \Psi' \right) + 2\mathcal{R}_e \left\{ g \hat{\xi}_r^* \frac{\delta\hat{p}}{\rho} \right\}, \quad (5.91)$$

où  $\hat{\xi}_h$  provient de Eq. (5.89) et où l'approximation JWKB a été utilisée, c'est-à-dire où l'hypothèse  $\hat{\xi}_r/r \ll d\hat{\xi}_r/dr$  a été faite. Pour aller plus loin, les ondes sont supposées suivre une relation de dispersion  $\sigma(r, \mathcal{K}_r, k_h) = \sigma(r, k_r - \gamma, k_h)$ . En faisant un développement limité au premier ordre aux alentours du nombre d'onde radial obtenu dans le cas adiabatique  $k_r$ , il vient

$$\sigma(r, \mathcal{K}_r, k_h) \approx \sigma(r, k_r, k_h) - \frac{\partial \sigma}{\partial k_r}(r, k_r, k_h) \gamma = \sigma_{\text{ad}} - V_{g,r}(r, k_r, k_h) \gamma, \quad (5.92)$$

où  $V_{g,r}$  est la vitesse de groupe radiale et  $\sigma_{\text{ad}}$  est la fréquence de l'onde dans le cas d'oscillations adiabatiques. De plus, pour les ondes de basses fréquences, l'approximation de Cowling (i.e.,  $\Psi' = 0$ )

est justifiée, ainsi que l'approximation  $\delta\hat{p} \approx \hat{\xi}_r dp/dr$  (Dintrans & Rieutord 2001). Ainsi, en injectant Eq. (5.92) dans Eq. (5.91) et en prenant sa partie imaginaire, il vient

$$\eta = -\frac{\mathcal{I}_m \left\{ \frac{\delta\hat{p}^*}{\rho} \frac{\delta\hat{p}}{\rho} \right\}}{2V_{g,r}\sigma_{\text{ad}} \left( |\hat{\xi}_r|^2 + \ell(\ell+1) |\hat{\xi}_h|^2 \right)}. \quad (5.93)$$

Finalement, en utilisant la perturbation de la relation d'état

$$\frac{\delta\hat{p}}{p} = \Gamma_1 \frac{\delta\hat{\rho}}{\rho} + P_T \frac{\delta\hat{S}}{c_v}, \quad (5.94)$$

où  $\Gamma_1$  est le premier coefficient adiabatique, ainsi que l'identité  $P_T = \Gamma_1 \nabla_{\text{ad}} c_v \rho T / p$  (e.g., Unno *et al.* 1989), on obtient

$$\eta = \frac{\nabla_{\text{ad}} \mathcal{I}_m \left\{ \frac{\delta\hat{p}}{p} T \delta\hat{S}^* \right\}}{2V_{g,r}\sigma_{\text{ad}} \left( |\hat{\xi}_r|^2 + \ell(\ell+1) |\hat{\xi}_h|^2 \right)}. \quad (5.95)$$

**Expression de la perturbation d'entropie dans l'approximation quasi-adiabatique** En négligeant la perturbation de la partie horizontale de la divergence du flux radiatif, ce qui est justifié dans l'hypothèse où le nombre radial est plus grand que le nombre d'onde horizontal, l'équation de conservation de l'énergie dans l'approximation quasi-adiabatique est égale à (e.g., Dupret 2003)

$$i\sigma_{\text{ad}} T \delta\hat{S} = -\frac{1}{4\pi r^2 \rho} \frac{d\delta\hat{L}}{dr} + \epsilon \left( \frac{\delta\hat{\epsilon}}{\epsilon} + \frac{\delta\hat{\rho}}{\rho} + \frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 \hat{\xi}_r)}{dr} \right) \quad (5.96)$$

$$= -\frac{L}{4\pi r^2 \rho} \frac{d}{dr} \left( \frac{\delta\hat{L}}{L} \right) - \frac{1}{4\pi r^2 \rho} \frac{dL}{dr} \left( \frac{\delta\hat{L}}{L} \right) + \epsilon \left( \frac{\delta\hat{\epsilon}}{\epsilon} + \frac{\ell(\ell+1)}{r} \hat{\xi}_h \right), \quad (5.97)$$

où Eq. (5.90) a été utilisée. De plus, dans l'hypothèse quasi-adiabatique, la perturbation du taux de production d'énergie peut être reliée uniquement à la perturbation Lagrangienne de pression en négligeant les perturbations d'entropie par (e.g., Unno *et al.* 1989, pour les identités thermodynamiques)

$$\frac{\delta\hat{\epsilon}}{\epsilon} = \epsilon_T \frac{\delta T}{T} + \epsilon_\rho \frac{\delta\hat{\rho}}{\rho} \quad (5.98)$$

$$\approx \epsilon_T \nabla_{\text{ad}} \frac{\delta\hat{p}}{p} + \frac{\epsilon_\rho}{\Gamma_1} \frac{\delta\hat{p}}{p} \approx \left( \epsilon_T \nabla_{\text{ad}} + \frac{\epsilon_\rho}{\Gamma_1} \right) \frac{\delta\hat{p}}{p}. \quad (5.99)$$

De la même manière, la perturbation Lagrangienne de luminosité peut être reliée au déplacement vertical, en prenant aussi en compte la perturbation dans l'opacité qui peut varier rapidement près de la couche d'hydrogène en fusion, par (e.g., Godart *et al.* 2009)

$$\frac{\delta\hat{L}}{L} \approx \left( \frac{\nabla_{\text{ad}}}{\nabla} - 1 \right) \frac{d\hat{\xi}_r}{dr} - \left( \nabla_{\text{ad}} \kappa_T + \frac{\kappa_\rho}{\Gamma_1} \right) \frac{\delta\hat{p}}{p}, \quad (5.100)$$

et sa dérivée est donc égale à

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left( \frac{\delta\hat{L}}{L} \right) &\approx \left( \frac{\nabla_{\text{ad}}}{\nabla} - 1 \right) \frac{d^2 \hat{\xi}_r}{dr^2} - \left( \nabla_{\text{ad}} \kappa_T + \frac{\kappa_\rho}{\Gamma_1} \right) \frac{d \ln p}{dr} \frac{d\hat{\xi}_r}{dr} \\ &\approx - \left( \frac{\nabla_{\text{ad}}}{\nabla} - 1 \right) k_r^2 \hat{\xi}_r - \left( \nabla_{\text{ad}} \kappa_T + \frac{\kappa_\rho}{\Gamma_1} \right) \frac{d \ln p}{dr} \frac{d\hat{\xi}_r}{dr}, \end{aligned} \quad (5.101)$$

où on a négligé les variations des quantités à l'équilibre et on a utilisé l'approximation  $\delta\hat{p} \approx \hat{\xi}_r \frac{dp}{dr}$ . Finalement, la perturbation d'entropie donnée dans Eq. (5.97) peut s'écrire d'après les trois équations précédentes comme

$$\begin{aligned} T\delta\hat{S}^* &\approx \frac{iL}{4\pi r^2 \rho \sigma_{\text{ad}}} \left\{ \left( \frac{\nabla_{\text{ad}}}{\nabla} - 1 \right) k_r^2 \hat{\xi}_r^* + \left( \nabla_{\text{ad}} \kappa_T + \frac{\kappa_\rho}{\Gamma_1} \right) \frac{d \ln p}{dr} \frac{d \hat{\xi}_r^*}{dr} \right\} \\ &- \frac{i}{4\pi r^2 \rho \sigma_{\text{ad}}} \frac{dL}{dr} \left\{ \left( \frac{\nabla_{\text{ad}}}{\nabla} - 1 \right) \frac{d \hat{\xi}_r^*}{dr} - \left( \nabla_{\text{ad}} \kappa_T + \frac{\kappa_\rho}{\Gamma_1} \right) \frac{d \ln p}{dr} \hat{\xi}_r^* \right\} \\ &+ \frac{i\epsilon}{\sigma_{\text{ad}}} \left( \epsilon_T \nabla_{\text{ad}} + \frac{\epsilon_\rho}{\Gamma_1} \right) \frac{d \ln p}{dr} \hat{\xi}_r^* + i \frac{\ell(\ell+1)}{r \sigma_{\text{ad}}} \epsilon \hat{\xi}_h^* , \end{aligned} \quad (5.102)$$

d'où

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_m \left\{ \frac{\delta\hat{p}}{p} T\delta\hat{S}^* \right\} &\approx \frac{\ell(\ell+1)LN^2}{4\pi r^4 \rho \sigma_{\text{ad}}^3} \frac{d \ln p}{dr} \left( \frac{\nabla_{\text{ad}}}{\nabla} - 1 \right) \left| \hat{\xi}_r \right|^2 \\ &+ \frac{1}{4\pi r^2 \rho \sigma_{\text{ad}}} \frac{dL}{dr} \left( \frac{d \ln p}{dr} \right)^2 \left( \nabla_{\text{ad}} \kappa_T + \frac{\kappa_\rho}{\Gamma_1} \right) \left| \hat{\xi}_r \right|^2 \\ &+ \frac{\epsilon}{\sigma_{\text{ad}}} \left( \epsilon_T \nabla_{\text{ad}} + \frac{\epsilon_\rho}{\Gamma_1} \right) \left( \frac{d \ln p}{dr} \right)^2 \left| \hat{\xi}_r \right|^2 , \end{aligned} \quad (5.103)$$

où on a utilisé  $k_r \approx \sqrt{l(l+1)}N/r\sigma_{\text{ad}}$  et

$$\mathcal{I}_m \left\{ i \hat{\xi}_r \frac{d \hat{\xi}_r^*}{dr} \right\} = \mathcal{I}_m \left\{ -k_r |\hat{\xi}_r|^2 \right\} = 0 \quad (5.104)$$

$$\mathcal{I}_m \left\{ i \hat{\xi}_h^* \hat{\xi}_r \right\} \propto \mathcal{I}_m \left\{ i \frac{d \hat{\xi}_r^*}{dr} \hat{\xi}_r \right\} = 0 , \quad (5.105)$$

avec la dernière équation obtenue dans l'approximation d'incompressibilité pour les ondes à basses fréquences. En effet, l'incompressibilité (i.e.,  $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$ , voir Section 5.1.2) autorise à négliger la perturbation Lagrangienne de densité dans Eq. (5.90), ce qui donne

$$\frac{d \hat{\xi}_r}{dr} \approx \frac{\ell(\ell+1)}{r} \hat{\xi}_h . \quad (5.106)$$

De plus, en utilisant l'expression pour la vitesse de groupe radiale dans Eq. (5.49) (avec  $k_r > 0$  dans le cas d'une onde se propageant vers le centre de l'étoile) et le fait que  $dL/dm = \epsilon$ , on obtient finalement

$$\eta = - \frac{\nabla_{\text{ad}} \sqrt{\ell(\ell+1)}}{2\sigma_{\text{ad}}^2 r} \frac{\sigma_{\text{ad}}}{(N^2 - \sigma_{\text{ad}}^2)^{1/2}} \left( \mathcal{C}_{Z97} + \mathcal{C}_\epsilon \right) , \quad (5.107)$$

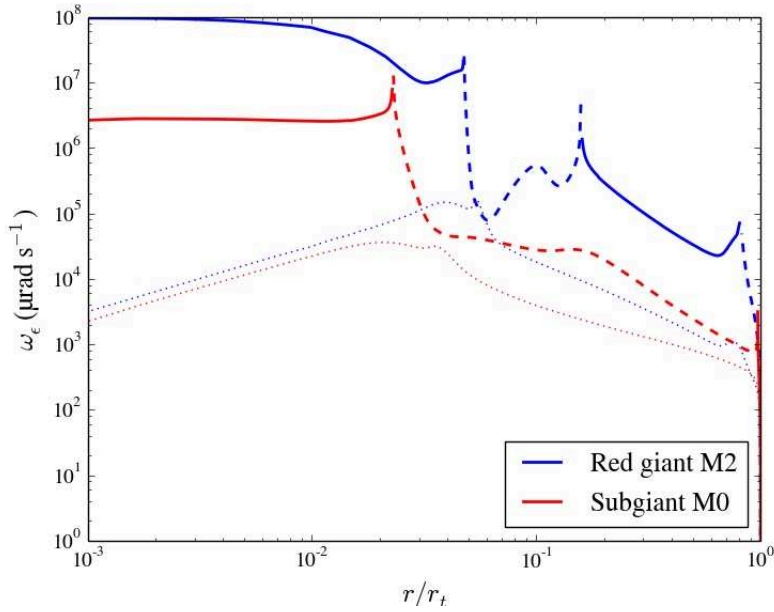
avec

$$\mathcal{C}_{Z97} = \frac{\ell(\ell+1)LN^2}{4\pi r^4 \rho \sigma_{\text{ad}}^3} \frac{d \ln p}{dr} \left( \frac{\nabla_{\text{ad}}}{\nabla} - 1 \right) \quad (5.108)$$

$$\mathcal{C}_\epsilon = \frac{\epsilon}{\sigma_{\text{ad}}} \left( (\epsilon_T + \kappa_T) \nabla_{\text{ad}} + \frac{\epsilon_\rho + \kappa_\rho}{\Gamma_1} \right) \left( \frac{d \ln p}{dr} \right)^2 , \quad (5.109)$$

où  $\mathcal{C}_{Z97}$  et  $\mathcal{C}_\epsilon$  correspondent respectivement au terme dérivé par Zahn *et al.* (1997) et au terme additionnel provenant de la perturbation du taux de production d'énergie nucléaire. Pour estimer l'effet du terme  $\mathcal{C}_\epsilon$ , il est pratique de définir la fréquence  $\sigma_{\epsilon,l}$  indépendante de  $\sigma_{\text{ad}}$ , telle que

$$\sqrt{\frac{\mathcal{C}_{Z97}}{\mathcal{C}_\epsilon}} = \frac{\sigma_{\epsilon,l}}{\sigma_{\text{ad}}} , \quad (5.110)$$



**FIGURE 5.5:** Pulsation caractéristique  $\sigma_{\epsilon,l}$  définie dans Eq. (5.110) pour  $l = 1$ , en fonction du rayon normalisé au rayon du haut de la zone radiative. Les modèles  $M_0$  (rouge) et  $M_2$  (bleue) de masse  $1.3 M_{\odot}$  utilisés dans Belkacem *et al.* (2015b), respectivement sur la branche des sous-géantes et des géantes rouges, sont considérés. Les portions en tirets correspondent à des valeurs négatives pour  $C_{\epsilon}$  qui a donc tendance à s’opposer à la diffusion radiative représentée par le terme  $C_{Z97}$ . Le profil de la fréquence de Brunt-Väisälä est représenté en pointillés.

et de telle sorte que pour  $\sigma_{\text{ad}} < \sigma_{\epsilon,l}$ , le terme  $C_{\epsilon}$  est négligeable par rapport à  $C_{Z97}$ . Cette dernière est représentée en fonction du rayon dans la zone radiative sur la FIGURE 5.5 pour deux modèles de masse  $1.3 M_{\odot}$ , respectivement sur la branche des sous-géantes et la branche des géantes rouges, correspondant au modèles  $M_0$  et  $M_2$  de Belkacem *et al.* (2015b). On voit que  $\sigma_{\epsilon,1}$  est partout supérieure à la fréquence de Brunt-Väisälä. Comme par hypothèse,  $\sigma_{\text{ad}} \ll N$  dans la zone radiative, on en conclut que le terme  $C_{\epsilon}$  est négligeable par rapport au terme  $C_{Z97}$  et peut être oublié dans la suite.

Dans ce contexte, pour retrouver la même forme que celle donnée par Zahn *et al.* (1997), il suffit d’utiliser dans Eq. (5.108) les identités suivantes (e.g., Unno *et al.* 1989; Maeder 2009)

$$L = -4\pi r^2 K \rho C_p \frac{dT}{dr} = 4\pi r^2 K \rho C_p T \frac{\nabla}{H_p} \quad (5.111)$$

$$N_T^2 = \frac{\delta g}{H_p} (\nabla_{\text{ad}} - \nabla) \quad (5.112)$$

$$\delta = \nabla_{\text{ad}} \frac{\rho T C_p}{p} = -\frac{\nabla_{\text{ad}} C_p T}{g} \frac{d \ln p}{dr} \quad (5.113)$$

$$N^2 = N_T^2 + N_{\mu}^2, \quad (5.114)$$

de telle sorte que le terme d’amortissement radiatif des ondes intégré depuis leur émission en haut de la zone radiative, en négligeant la perturbation du taux d’énergie nucléaire (i.e., du gradient de luminosité), s’exprime de la forme

$$\tau(r, \hat{\sigma}, l) = \frac{1}{2} [l(l+1)]^{3/2} \int_r^{r_t} K \frac{N N_T^2}{\hat{\sigma}^4} \left( \frac{N^2}{N^2 - \hat{\sigma}^2} \right)^{1/2} \frac{dr}{r^3}, \quad (5.115)$$

où la valeur de la fréquence “adiabatique”  $\sigma_{\text{ad}}$  a été remplacée par la fréquence intrinsèque de l’onde  $\hat{\sigma}$ . On voit donc que l’amortissement de l’onde est fortement sensible à la fréquence intrinsèque de

l'onde puisqu'il en dépend comme  $\hat{\sigma}^{-4}$ . Pour les basses fréquences, l'intégrande peut notamment devenir si grande que l'hypothèse quasi-adiabatique n'est plus valable. Cela est notamment vrai pour les ondes proches d'une couche critique, c'est-à-dire à un niveau où leur fréquence intrinsèque s'annule. Selon Lighthill (1978) ou Ringot (1998), la vitesse de groupe radiale tend vers zéro proche d'une telle couche et l'énergie de l'onde met un temps infini à atteindre la couche critique. En présence de n'importe quel processus dissipatif, cette énergie sera donc totalement absorbée par le milieu, ce qui est qualitativement en accord avec Eq. (5.115).

### 5.4.3 Expression du flux radial de moment cinétique des ondes dans le cas non-adiabatique

Pour conclure cette partie, il est maintenant envisageable, en vue des résultats précédents, d'exprimer le flux radial moyen de moment cinétique des ondes à travers la zone radiative. En effet, dans le cas adiabatique, la luminosité de moment cinétique de l'onde est conservée dans toute la zone radiative, et est donc égale à sa valeur en haut de la zone radiative. Dans le cas non-adiabatique, le flux radial de moment cinétique de l'onde peut être exprimé en fonction de l'expression du flux dans le cas adiabatique, avec une amplitude atténuée par un terme d'amortissement. En utilisant les Eqs. (5.78) et (5.115), le flux radial total de moment cinétique de l'onde, moyenné sur l'angle solide, peut être écrit comme

$$\mathcal{F}_{J,w}(r) = \sum_l \sum_{m=-l}^{m=l} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{m r_t^2}{\omega r^2} \mathcal{F}_{E,w}(r_t, \omega, l, m) e^{-2\tau(r, \hat{\omega}, l)} d\omega, \quad (5.116)$$

où  $r_t$  est le rayon en haut de la zone radiative,  $l$  et  $m$  sont le degré et le nombre azimutal des harmoniques sphériques, et  $\mathcal{F}_{E,w}(r_t, \omega, l, m)$  est le flux d'énergie par unité de fréquence pour un degré  $l$  et un nombre azimutal  $m$  en haut de la zone radiative. Le facteur deux devant l'amortissement est introduit puisque le flux d'énergie des ondes est proportionnel à leur amplitude au carré d'après Eq. (5.69). De plus, pour des raisons pratiques, on a choisi d'exprimer Eq. (5.116) en fonction de  $\omega$  qui est la fréquence intrinsèque de l'onde dans un référentiel en co-rotation avec le haut de la zone radiative et qui est reliée à la fréquence de l'onde dans un référentiel inertiel  $\sigma$  par  $\omega = \sigma - m\Omega(r_t)$ , avec  $\Omega(r_t)$  le taux de rotation en haut de la zone radiative. Ce changement de variable correspond donc juste à un décalage de l'origine des fréquences dans l'intégrale donnée par Eq. (5.116). En effet, nous allons voir que ces ondes sont générées à l'interface entre la zone convective et la zone radiative, et une telle écriture apparaît donc naturellement comme la plus simple. De plus, on a défini  $\hat{\omega}$  comme la fréquence intrinsèque de l'onde mesurée par rapport à un référentiel en co-rotation avec le haut de la zone radiative, c'est-à-dire  $\hat{\omega} = \omega - m\delta\Omega$ , où  $\delta\Omega = \Omega(r) - \Omega(r_t)$  est la rotation différentielle dans la zone radiative par rapport à la base de la zone convective. On peut notamment vérifier que  $\hat{\omega} = \omega - m\delta\Omega(r) = [\sigma - m\Omega(r_t)] - m[\Omega(r) - \Omega(r_t)] = \sigma - m\Omega(r) = \hat{\sigma}$ . L'équation (5.116) va nous permettre d'estimer l'effet du transport de moment cinétique par les ondes internes de gravité dans chaque couche de la zone radiative. Pour cela, il faut encore connaître la valeur de l'amplitude des ondes en haut de la zone radiative, c'est-à-dire la constante  $C$  dans Eq. (5.69), et donc comprendre le mécanisme d'excitation, ce qui fait l'objet du prochain chapitre.

En résumé, on a vu qu'en se propageant dans la zone radiative, les ondes subissent des pertes radiatives. Elles sont donc capables de déposer ou d'extraire du moment cinétique dans le milieu.

L'efficacité du transport de moment cinétique par les ondes va dépendre d'une part du taux d'amortissement. Celui-ci dépend de la structure à l'équilibre (via le rapport  $KN^3/r^2$ ), du degré angulaire ( $\tau \propto l^3$ ) et de la fréquence intrinsèque de l'onde ( $\tau \propto \hat{\omega}^{-4} = (\omega - m\delta\Omega)^{-4}$ ). L'efficacité du transport va dépendre d'autre part de l'amplitude de chaque composante de l'onde et donc de son spectre d'énergie.



## Chapitre 6

# Mécanismes de génération des ondes internes de gravité

### Sommaire

---

<b>6.1</b>	<b>Simulations numériques . . . . .</b>	<b>88</b>
6.1.1	Observations dans les expériences numériques à deux zones . . . . .	88
6.1.2	Des simulations encore trop éloignées des régimes stellaires . . . . .	89
<b>6.2</b>	<b>Modèles d'excitation par la pression turbulente dans la zone convective</b>	<b>92</b>
6.2.1	Travail pionnier de Press (1981) . . . . .	92
6.2.2	Modèles de Garcia Lopez & Spruit (1991) et Zahn <i>et al.</i> (1997) . . . . .	93
6.2.3	Modèle d'excitation stochastique par Kumar <i>et al.</i> (1999) . . . . .	96
6.2.4	Modèle d'excitation par overshooting suivant Lecoanet & Quataert (2013) . . . . .	97
<b>6.3</b>	<b>Modèle d'excitation par la pénétration de panaches convectifs . . . . .</b>	<b>98</b>
6.3.1	Définition de la densité spectrale d'énergie des ondes générées par un ensemble de panaches . . . . .	98
6.3.2	Équation d'onde avec terme source . . . . .	100
6.3.3	Une description simple des panaches convectifs . . . . .	101
6.3.3.a	Profil de vitesse du panache dans la région de pénétration . . . . .	101
6.3.3.b	Modèle de panaches convectifs de Rieutord & Zahn (1995) . . . . .	101
6.3.3.c	Profil de vitesse verticale dans la région de pénétration . . . . .	102
6.3.3.d	Temps de vie du panache . . . . .	103
6.3.4	Dérivation du flux d'énergie des ondes . . . . .	104
6.3.4.a	Modélisation de la région de pénétration et méthode de résolution . . . . .	104
6.3.4.b	Expression finale du flux d'énergie des ondes . . . . .	106
6.3.4.c	Expression simplifiée . . . . .	106
<b>6.4</b>	<b>Application au cas solaire . . . . .</b>	<b>107</b>
6.4.1	Flux d'énergie et influence des caractéristiques du panache . . . . .	107
6.4.2	Comparaison au modèle d'excitation par la pression turbulente . . . . .	111

---

Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, des ondes de gravité peuvent se propager dans les intérieurs radiatifs stellaires et modifier le moment cinétique interne. L'efficacité du transport de moment cinétique par ces ondes dépend de leur énergie et donc de leur amplitude. De plus, le transport n'est possible qu'en présence de processus dissipatifs qui permettent des échanges d'énergie et d'impulsion entre les ondes et le milieu stellaire. Dans le cas des ondes internes de gravité, le taux local d'amortissement par diffusion radiative dépend de la fréquence des ondes ainsi que de leur vecteur d'onde. L'efficacité du transport de moment cinétique dépend donc aussi de leur distribution spectrale en énergie. Or, l'amplitude et la forme du spectre sont toutes deux le résultat du mécanisme d'excitation mis en jeu.



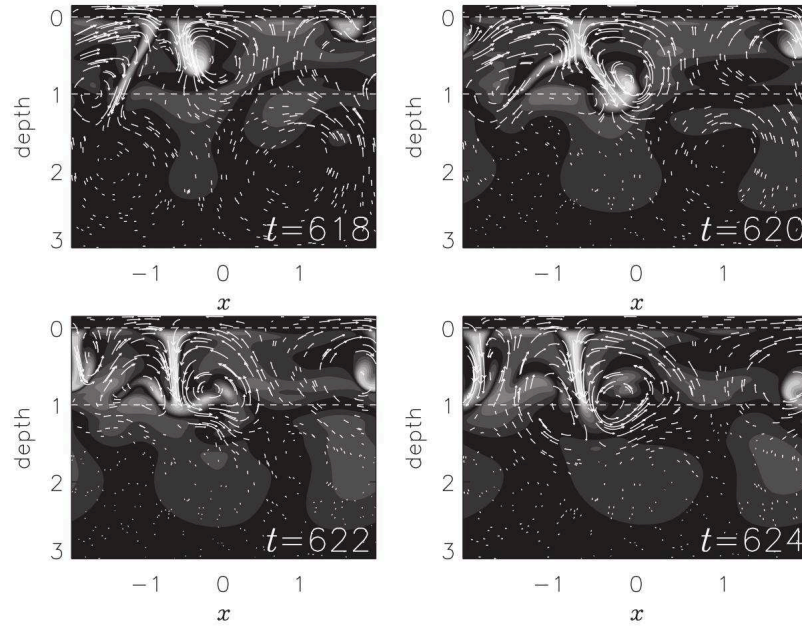
Dans ce chapitre, nous nous intéressons au processus d'excitation des ondes internes de gravité. De façon similaire aux modes d'oscillation de type solaire, ces ondes sont excitées par les mouvements de matière turbulents dans les zones convectives des étoiles. On distingue deux origines pour le terme de forçage : soit la pression turbulente (ou le stress de Reynolds) dans la zone convective, soit la pénétration de panaches convectifs dans les couches radiatives adjacentes. Alors que les simulations numériques de convection turbulente peuvent être de bons guides, nous verrons néanmoins qu'elles ne sont actuellement pas assez réalistes pour pouvoir nous fournir des informations quantitatives sur l'excitation des ondes internes de gravité. Une estimation de l'excitation des ondes par des modèles semi-analytiques est néanmoins possible et complémentaire. En effet, de tels modèles ont l'avantage de pouvoir mettre simplement en évidence les processus physiques responsables du transfert d'énergie sous forme d'ondes dans la zone radiative et de pouvoir facilement le quantifier. Plusieurs modèles d'excitation par la pression turbulente dans la zone convective existent à l'heure actuelle et ont déjà fait l'objet de nombreux travaux. Nous proposons dans la suite une présentation de ces différents modèles dans l'ordre chronologique d'apparition. Enfin, un modèle semi-analytique de génération d'ondes par la pénétration convective développé pendant ma thèse sera décrit avec plus de précisions. Le spectre émis à la base de la zone convective par ce mécanisme sera alors discuté et comparé aux modèles d'excitation par la pression turbulente. Ce travail a notamment donné lieu à une publication (*Pinçon et al., 2016*).

## 6.1 Simulations numériques

### 6.1.1 Observations dans les expériences numériques à deux zones

La génération d'ondes internes de gravité a depuis longtemps été observée dans des simulations numériques Cartésiennes à deux zones. Les premières études de ce type en 2D (e.g., Hurlburt *et al.* 1986; Andersen 1994) ou en 3D (e.g., Brummell *et al.* 2002) consistaient en deux régions polytropiques à l'équilibre hydrostatique, la région instable convectivement reposant sur la région radiative stratifiée stablement. Ces simulations se focalisaient en particulier sur l'étude de la distance de pénétration des courants convectifs descendants dans les couches stables sous-jacentes, ainsi que de la structure de cette région de transition. Une telle configuration résulte de plus naturellement à l'excitation d'ondes internes de gravité et à leur propagation dans la région radiative inférieure. Ces premiers travaux n'ont néanmoins proposé qu'une étude qualitative de ces oscillations. Plus récemment, des simulations numériques en boîtes Cartésiennes 2D (Kiraga *et al.* 2003; Dintrans *et al.* 2005) et 3D (Kiraga *et al.* 2005) se sont particulièrement intéressées à l'estimation du flux d'énergie transmis sous forme d'ondes à la base de la zone convective. Le degré de réalisme a de plus particulièrement été amélioré ces dernières années avec l'apparition de simulations numériques cherchant à reproduire au mieux la stratification verticale du Soleil, en géométrie polaire d'abord (Rogers & Glatzmaier 2005, 2006), puis en géométrie sphérique (Alvan *et al.* 2014). On peut aussi noter les travaux de Rogers *et al.* (2013) sur l'excitation d'ondes internes par les cœurs convectifs dans les étoiles massives via des simulations 2D avec une stratification réaliste.

Toutes ces simulations exhibent deux sortes de mouvements convectifs. La FIGURE 6.1 montre l'exemple d'une simulation en boîte Cartésienne 2D réalisée par Dintrans *et al.* (2005) dans lequel ces deux types de mouvements peuvent être observés simultanément. Autour de  $x = 2$  (ou de façon équivalente, autour de  $x = -2$  avec les conditions limites aux bords périodiques), l'agitation turbulente prend la forme de gros tourbillons convectifs s'étalant sur presque toute l'épaisseur de la région convective. A l'inverse, un fort courant descendant, de structure cohérente et de longue vie, se développe et traverse l'intégralité de la région convective autour de  $x = -0.5$ . Ces panaches convectifs prennent naissance à la surface des étoiles où le milieu est optiquement fin. Là, des granules convectives ascendantes se refroidissent par rayonnement et deviennent plus denses que leur environnement. Elles s'enfoncent alors en profondeur et amorcent la formation de panaches. Lors de leur traversée de la zone convective, les panaches se développent et grossissent latéralement par entraînement turbulent de matière jusqu'à atteindre la base de la zone convective.

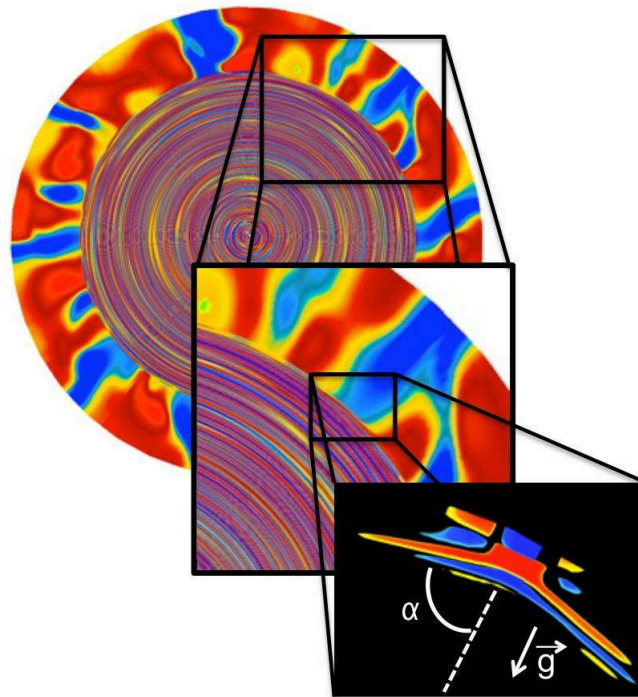


**FIGURE 6.1:** Exemple d’une simulation numérique de pénétration convective 2D en boîte Cartésienne d’après Ditrans *et al.* (2005). Pour chaque cliché pris à quatre temps différents, le champ de vitesse est représenté par des vecteurs superposés à une échelle de couleur grise correspondant aux fluctuations de température. Le trait discontinu blanc montre la frontière entre la zone convective supérieure et la zone radiative sous-jacente.

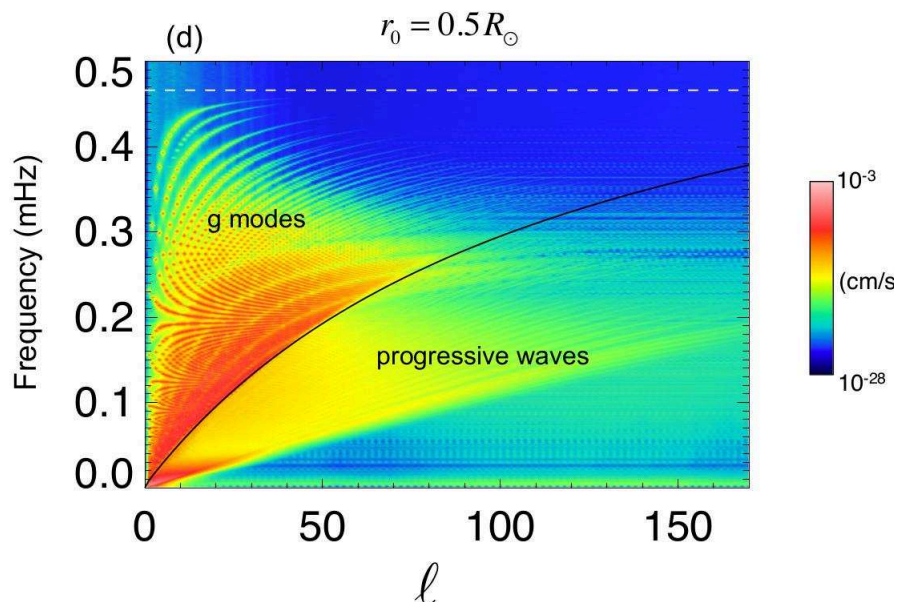
Tourbillons et panaches convectifs perturbent tous deux l’interface entre la zone convective et la zone radiative. Si le critère d’instabilité de Schwarzschild était rigoureusement respecté, ces courants de matière devraient instantanément s’arrêter à la base de la zone convective. Dans la réalité, ils peuvent pénétrer par inertie sur une certaine distance dans la zone radiative et libérer une part de leur énergie mécanique sous forme d’ondes internes. C’est ce que l’on peut observer par exemple sur la FIGURE 6.2. Cette figure représente une tranche équatoriale d’une simulation numérique 3D du Soleil réalisée par Alvan *et al.* (2014). Sur cette vue instantanée, on peut voir que la zone convective du Soleil est peuplée de nombreux panaches convectifs descendants (structures verticales bleues) séparés par un milieu plus calme au mouvement ascendant. Ces panaches viennent impacter le haut de la zone radiative en générant des ondes internes de gravité se propageant sous forme de cercles concentriques dans la zone radiative, bien visibles sur cette vue instantanée.

### 6.1.2 Des simulations encore trop éloignées des régimes stellaires

Une première étude quantitative de l’énergie des ondes émises à la base de la zone convective dans des simulations numériques a été entreprise par Kiraga *et al.* (2003). Dans ce travail, les auteurs ont artificiellement ajouté une couche fortement visqueuse en bas de leur domaine Cartésien 2D pour éviter l’établissement de modes propres résonants. Ils ont alors pu déterminer le spectre d’énergie des ondes progressives dans toute la région radiative stable et le comparer avec les modèles d’excitation semi-analytiques considérant le stress de Reynolds exercé par les tourbillons convectifs comme terme source (voir Section 6.2). Ils ont notamment montré que l’énergie des ondes observées dans leurs simulations était 10 à 100 fois supérieure aux estimations théoriques et qu’elle était distribuée sur une plus large bande de fréquence. Une étude similaire, cette fois-ci en 3D, par Kiraga *et al.* (2005) semble réduire le désaccord, du moins en ordre de grandeur, du fait d’une convection moins vigoureuse que dans les simulations 2D. Un exemple de spectre en fonction de la fréquence et du degré angulaire obtenu dans des simulations plus récentes du Soleil avec une stratification réaliste est donné sur la FIGURE 6.3 d’après les travaux de Alvan *et al.* (2015). Celui-ci a été mesuré à environ  $0.2 R_{\odot}$  en-dessous de la base de la zone convective du modèle solaire où ont été excitées



**FIGURE 6.2:** Aperçu d'une simulation numérique 3D du Soleil dans un plan équatorial d'après les travaux d'Alvan *et al.* (2014). L'échelle de couleur correspond aux fluctuations de vitesse radiale. Le bleu et le rouge correspondent respectivement à des vitesses négatives et positives. L'encadré montre un zoom sur la région d'excitation d'une onde par la pénétration d'un panache convectif dans la zone radiative (structure en tube bleu).



**FIGURE 6.3:** Spectre d'énergie à un rayon  $r = 0.5 R_{\odot}$  dans la zone radiative du Soleil, i.e. à environ  $0.2 R_{\odot}$  en-dessous de la zone d'excitation, tel qu'il est observé dans les simulations numériques 3D de Alvan *et al.* (2015). La ligne continue noire symbolise la transition entre les modes propres de gravité à hautes fréquences et les ondes progressives à basses fréquences.

les ondes. Deux parties sont à distinguer. D’abord, la partie du spectre correspondant aux modes propres à hautes fréquences, qui sont faiblement amortis et peuvent former une onde stationnaire par réflexions successives aux bords de la cavité de propagation. Puis la partie à basses fréquences correspondant aux ondes progressives rapidement amorties lors de leur premier voyage vers le centre de l’étoile. L’influence de cet amortissement est en fait directement visible sur la FIGURE 5.4 où l’énergie des ondes progressives chute fortement dans le domaine des basses fréquences et des degrés angulaires élevés. Cela s’explique notamment par l’expression du taux d’amortissement donnée dans Eq. (5.115) qui est proportionnel au rapport  $l^3/\omega^4$ . Dans ce travail, les auteurs trouvent qu’au total environ 0.4 % de la luminosité solaire est émise sous forme d’ondes à la base de la zone convective, c’est-à-dire de l’ordre de grandeur des estimations obtenues avec les modèles théoriques de génération par la pression turbulente dans la zone convective. Il montrent aussi que le spectre d’énergie des ondes progressives (i.e., à basses fréquences) émises à la base de la zone convective décroît avec la fréquence suivant un profil Gaussien ; la majeure partie de l’énergie des ondes est donc distribuée sur les très basses fréquences. De plus, le spectre est maximum autour d’un degré angulaire  $l \approx 30$  au-delà duquel il chute violemment. Ces caractéristiques spectrales, au contraire, ne sont pas reproduites par les modèles d’excitation par la pression turbulente. Il est intéressant de remarquer que ces différents résultats présentés dans Alvan *et al.* (2015) sont qualitativement en accord avec les simulations numériques 2D (en géométrie polaire et avec une stratification réaliste) à la limite des cœurs convectifs dans des étoiles plus massives selon les travaux de Rogers *et al.* (2013). Par comparaison, de telles simulations numériques 2D dans le cas du Soleil par Rogers & Glatzmaier (2005, 2006) montrent un fort désaccord avec ces deux précédents travaux et les modèles semi-analytiques d’excitation par la pression turbulente, tant sur l’amplitude que sur la forme du spectre d’énergie qui est quasi uniforme sur l’intervalle de fréquences d’intérêt. Cela peut peut-être s’expliquer par le régime très non-linéaire imposé dans ces simulations.

Ainsi, même si les simulations numériques restent un outil efficace pour étudier et visualiser la génération d’ondes internes de gravité dans les étoiles, des points d’ombre persistent, comme le montre le désaccord avec les estimations théoriques, et entre les différentes expériences numériques elles-mêmes. En outre, les contraintes numériques ne permettent pas aux simulations d’atteindre actuellement les régimes de convection attendus dans les intérieurs stellaires, et ce malgré une stratification réaliste. Par exemple, les simulations 2D de Rogers & Glatzmaier (2005, 2006) atteignent des nombres de Rayleigh de l’ordre de  $10^7$  tandis que celui-ci est estimé à  $10^{23}$  dans la zone convective de Soleil. De même, les simulations 3D de Alvan *et al.* (2014) n’atteignent que des nombres de Rayleigh de l’ordre de  $10^7$ . Cela provient notamment des valeurs de la diffusivité thermique artificiellement surélevées d’un facteur  $10^5$  par rapport à la réalité, mais nécessaires à la stabilité numérique. Cela résulte donc en des valeurs pour le flux convectif  $10^5$  fois plus élevées et donc des vitesses convectives plus grandes. Comme l’excitation des ondes dépend des propriétés du forçage, ces caractéristiques de la convection auront un impact sur le spectre des ondes générées. La structure de l’interface entre les régions convectives et radiatives, c’est-à-dire là où est excitée la majorité des ondes, dépend aussi fortement de ces propriétés. En effet, le modèle semi-analytique proposé par Rempel (2004) a montré que ces larges valeurs de la diffusivité thermique (menant à un nombre de Péclet faible de l’ordre de l’unité) peut expliquer la différence entre la transition douce du gradient de température d’une valeur adiabatique à une valeur radiative en haut de la zone radiative telle qu’observée dans les simulations numériques, et la transition plus brutale attendue théoriquement à cause de la valeur élevée du nombre de Péclet (de l’ordre de  $10^6$ ) dans le cas du Soleil (Zahn 1991; Dintrans *et al.* 2005).

Ces études montrent donc que les simulations numériques peuvent actuellement être de bons guides, mais que leurs résultats sont à considérer avec précaution. Elles ne permettent pas à l’heure actuelle d’obtenir des informations quantitatives sur la génération des ondes et sur la structure de la base de la zone convective. Une estimation du flux d’énergie des ondes émis à la base de la zone convective par des modèles semi-analytiques semble donc nécessaire et complémentaire.

## 6.2 Modèles d'excitation par la pression turbulente dans la zone convective

Dans cette section, différents modèles d'excitation d'ondes internes de gravité par la convection turbulente sont présentés. Pour tous ces modèles, le terme de forçage correspond à la pression turbulente induite par les tourbillons convectifs. La description des modèles est faite dans un ordre chronologique et suit un degré de sophistication croissant.

### 6.2.1 Travail pionnier de Press (1981)

Bien qu'il s'intéressait au mélange des éléments chimiques plutôt qu'à l'évolution de la rotation interne, Press (1981) a été l'un des premiers à considérer les ondes internes de gravité comme un potentiel processus de transport dans les intérieurs stellaires. Dans son modèle, les ondes sont supposées être excitées par les tourbillons convectifs en bas de la zone convective (voir FIGURE 6.4 pour une illustration). Le flux d'énergie généré sous forme d'ondes dans cette région est estimé en considérant que la perturbation Eulérienne de pression associée aux ondes s'a juste à la fluctuation de pression turbulente à l'interface entre les zones radiative et convective. On propose ici de reproduire brièvement sa dérivation.

Press (1981) se place d'abord dans l'approximation des ondes à très basses fréquences dans la zone radiative,  $\omega^2 \ll N^2$ , pour lesquelles l'hypothèse d'incompressibilité est valide (voir Section 5.1.2). D'après l'équation de continuité, on obtient alors dans l'hypothèse d'ondes planes

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \vec{k} \cdot \vec{u} = 0, \quad (6.1)$$

où  $\vec{u}$  et  $\vec{k}$  sont respectivement la perturbation du champ de vitesse et le vecteur d'onde. Les composantes radiale  $u_r$  et horizontale  $u_h$  sont donc reliées par la relation

$$\left| \frac{u_r}{u_h} \right| = \left| \frac{k_h}{k_r} \right| = \frac{\omega}{(N^2 - \omega^2)^{1/2}}, \quad (6.2)$$

où  $k_r$  et  $k_h$  sont les composantes radiale et horizontale du vecteur d'onde. En utilisant Eq. (6.2), la densité d'énergie de l'onde dans la région radiative, dans l'hypothèse d'oscillations adiabatiques, peut être réécrite comme (e.g., Unno *et al.* 1989, p. 236)

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{1}{2} \left( \rho \vec{u}^2 + \left( \frac{p'}{\rho c_s} \right)^2 + \frac{N^2}{\omega^2} u_r^2 \right) \\ &\approx \rho \left( \frac{N}{\omega} \right)^2 u_r^2 \approx \rho \vec{u}^2, \end{aligned} \quad (6.3)$$

où le terme  $p'/\rho c_s$  a pu être négligé dans l'hypothèse d'incompressibilité. L'équation 6.3 vérifie l'équipartition de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle de l'onde qui a été discutée dans la Section 5.3.1. Enfin, pour un paquet d'onde, la composante radiale de flux d'énergie entrant dans la zone radiative est obtenue en multipliant Eq. (6.3) par la vitesse de groupe verticale donnée dans Eq. (5.49), c'est-à-dire

$$\mathcal{F} = \rho \frac{(N^2 - \omega^2)^{1/2}}{k_h} u_r^2. \quad (6.4)$$

L'estimation du flux passe donc par la détermination de l'amplitude de la vitesse radiale de l'onde dans la région radiative. Pour cela, Press (1981) fait correspondre la perturbation de pression de l'onde,  $p'_c$ , à la fluctuation turbulente de pression,  $p_t$ , à l'interface entre les zones convective et radiative, soit

$$p'_c \sim p_t \sim \rho_c v_c^3 \sim \rho_c \frac{\omega_c^2}{k_c^2}, \quad (6.5)$$

avec  $\rho_c$  la densité à la base de la zone convective,  $v_c$  la vitesse de retournement des plus gros tourbillons convectifs,  $k_c = 2\pi/\Lambda_c$  où  $\Lambda_c$  est leur taille et  $\omega_c$  leur fréquence caractéristique de retournement dans cette région. La vitesse de l'onde  $u_r$  en haut de la zone radiative peut alors être obtenue par la donnée de l'impédance acoustique. L'impédance acoustique,  $Z$ , caractérise la résistance du milieu au passage d'une onde. Elle est définie comme le rapport de la perturbation de pression sur la vitesse de l'onde et est égale pour les ondes internes de gravité dans la direction radiale à

$$Z_r = \frac{p'}{u_r} = \rho \frac{N}{k_h} . \quad (6.6)$$

En haut de la zone radiative, cela mène, en utilisant Eq. (6.5), à

$$u_{r,c} = \frac{p'_c}{Z_{r,c}} \sim \frac{p_t k_h}{\rho_c N_c} \sim \frac{\omega_c^2 k_h}{k_c^2 N_c} , \quad (6.7)$$

où  $N_c$  est la valeur de la fréquence de Brunt-Väisälä juste sous la base de la zone convective. Le profil de Brunt-Väisälä à l'interface entre les deux zones est supposé très abrupt. Il passe rapidement de  $N \approx 0$  dans la zone convective à  $N_c$  en haut de la zone radiative et est tel que  $\omega \ll N_c$  et que l'onde peut se propager dès le haut de la zone radiative. Pour finir, l'auteur suppose que la longueur d'onde horizontale et la fréquence de l'onde qui est la plus efficacement excitée sont proches respectivement de la taille caractéristique des tourbillons convectifs  $\Lambda_c$  et de leur fréquence caractéristique de retournement  $\omega_c$ , soit

$$k_h \sim k_c \quad \text{et} \quad \omega_c \sim \omega . \quad (6.8)$$

L'amplitude de la composante verticale de vitesse de l'onde en haut de la zone radiative est donc égale, en utilisant Eq. (6.7), à

$$u_{r,c} \sim \frac{\omega_c^2}{k_c N} . \quad (6.9)$$

En insérant Eq. (6.9) dans Eq. (6.4) et en considérant toujours les hypothèses données par Eq. (6.8), l'auteur obtient l'expression suivante pour le flux radial d'énergie de l'onde juste en haut de la zone radiative

$$\mathcal{F}_c \sim \rho_c v_c^3 \frac{\omega}{N_c} . \quad (6.10)$$

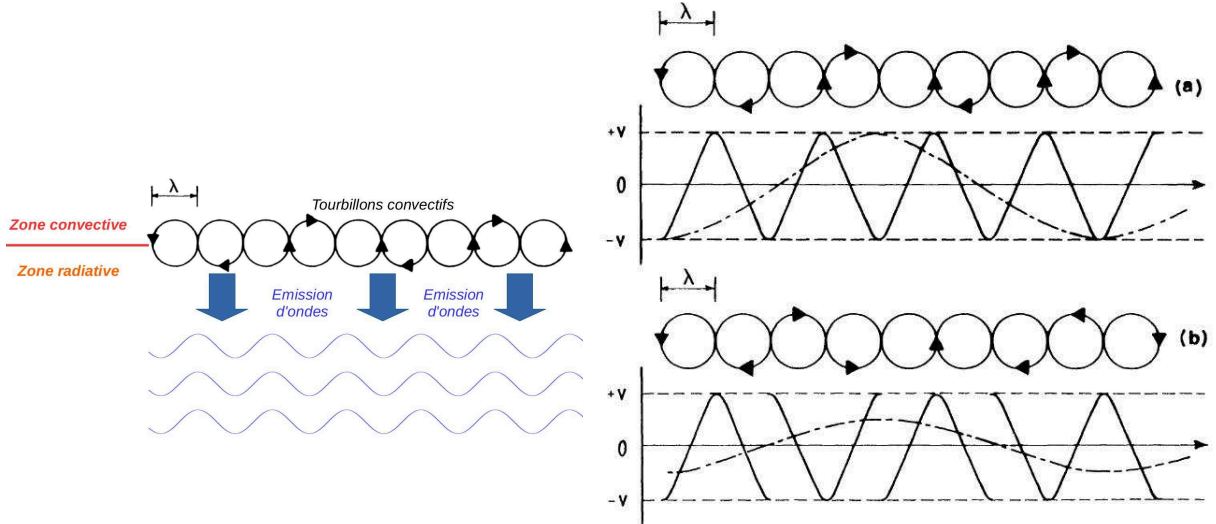
Ce dernier est égal au produit du flux d'énergie convectif à la base de la zone convective,  $\rho_c v_c^3$ , et du facteur  $\omega/N_c$ . Ce facteur correspond aussi au nombre de Froude à la base de la zone convective et qui quantifie ici l'efficacité du transfert d'énergie des tourbillons convectifs sous forme d'ondes internes de gravité dans la zone radiative.

Dans un modèle solaire, le rapport  $\omega_c/N_c$  est typiquement de l'ordre de  $10^{-3} - 10^{-2}$ . Les ondes générées par la pression turbulente selon le modèle de Press (1981) transportent donc environ entre 0.1 et 1% de la valeur du flux convectif à la base de la zone convective. Bien que la démonstration fait appel à des arguments simples, nous verrons plus loin que le modèle de Press (1981) donne une première estimation satisfaisante de la génération des ondes internes de gravité par la pression turbulente, en accord avec les estimations obtenues avec des modèles plus complexes.

### 6.2.2 Modèles de Garcia Lopez & Spruit (1991) et Zahn *et al.* (1997)

Comme Press (1981), Garcia Lopez & Spruit (1991) s'intéressaient au mélange d'éléments chimiques induit par les ondes internes de gravité dans les couches radiatives adjacentes à la zone convective. Leur approche pour estimer le flux d'énergie des ondes émises en haut de la zone radiative est néanmoins un peu différente de celle de Press (1981).

Premièrement, les tourbillons convectifs sont supposés pouvoir avoir des tailles différentes,  $\lambda$ , plus petites que l'échelle d'injection de l'énergie turbulente, soit  $\lambda \leq \Lambda_c$ . La distance  $\Lambda_c$  correspond



**FIGURE 6.4:** **Gauche :** Vue schématique de l'excitation d'ondes par la pression turbulente à l'interface entre les zones convective et radiative. Les tourbillons convectifs perturbent l'interface et une partie de cette énergie est émise sous forme d'ondes qui peuvent alors se propager vers le centre de l'étoile. **Droite :** Phénoménologie proposée par Garcia Lopez & Spruit (1991). Dans le cas de tourbillons cohérents entre eux (en haut), la vitesse résultante associée aux ondes est maximale. Dans le cas où ceux-ci sont incohérents (en bas), les déphasages entre les tourbillons génèrent des interférences destructives et la vitesse résultante associée aux ondes est réduite par rapport au cas précédent.

à la taille des plus gros tourbillons convectifs et peut être identifiée à la longueur de mélange. De plus, la vitesse  $v(\lambda)$  de chaque tourbillon est décrite par un spectre de Kolmogorov, soit

$$v(\lambda) = v_c \left( \frac{\lambda}{\Lambda_c} \right)^{1/3} \quad \text{avec} \quad v(\lambda) \leq v_c, \quad (6.11)$$

où  $v_c$  est la vitesse des plus gros tourbillons convectifs.

Deuxièmement, les auteurs déterminent l'amplitude de la vitesse de l'onde en haut de la zone radiative en faisant correspondre les fluctuations turbulentes de pression en bas de la zone convective,  $\rho v^2(\lambda)$ , à la densité d'énergie de l'onde,  $\rho \bar{u}^2$ . Comme le profil de densité est continu dans cette région avec  $\rho \approx \rho_c$ , cela revient à faire l'hypothèse de la continuité des vitesses à l'interface, soit

$$u(\lambda) \approx v(\lambda), \quad (6.12)$$

où  $u(\lambda) = (u_r^2 + u_h^2)^{1/2}$  représente le module de la vitesse associée à l'onde générée par un tourbillon de taille  $\lambda$ .

Enfin, dans leur phénoménologie, ils supposent que tout tourbillon de taille  $\lambda$  déforme l'interface entre la zone radiative et la zone convective pour générer une onde avec une fréquence égale à la fréquence de retournement du tourbillon  $\omega = \pi v(\lambda)/\lambda$  et une longueur d'onde horizontale  $\lambda_h$  telle que  $\lambda_h \geq \lambda(\omega)$ . Ici, ils considèrent donc, d'une part, que la corrélation entre un tourbillon de taille  $\lambda$  et une onde de longueur d'onde inférieure à  $\lambda$  est nulle. D'autre part, ils font l'hypothèse que le comportement aléatoire et incohérent de l'ensemble des tourbillons de taille  $\lambda$  au niveau de l'interface peut exciter des ondes de longueur d'onde supérieures à  $\lambda$ . Dans le cas de tourbillons cohérents entre eux, l'onde générée par l'ensemble des tourbillons serait caractérisée par une longueur d'onde horizontale  $\lambda_h \approx \lambda$  et une vitesse  $u_{\text{coherent}} \sim v(\lambda)$ . Dans le cas de tourbillons incohérents entre eux, chaque composante de l'onde générée par un tourbillon particulier est décalée en phase de façon aléatoire par rapport à une autre. Les auteurs estiment alors que la moyenne de la vitesse résultante au carré dans le cas de tourbillons incohérents est égale au rapport de sa valeur dans le cas où les

tourbillons sont cohérents sur le nombre de tourbillons (voir FIGURE 6.4 pour une illustration)

$$u_{incoherent}^2 \sim \frac{1}{n} u_{coherent}^2 \sim \frac{1}{n} v^2(\lambda). \quad (6.13)$$

Le nombre de tourbillons impliqués dans l'excitation est estimé par le rapport de l'aire occupée par un motif périodique horizontal de l'onde sur l'aire occupée par un tourbillon de taille  $\lambda$ , soit  $n \approx \lambda_h^2/\lambda^2$  dans le cas le moins favorable (voir discussion dans Garcia Lopez & Spruit 1991).

Pour conclure, en multipliant Eq. (6.3) par la vitesse de groupe radiale dans Eq. (5.49), le flux radial d'énergie des ondes en haut de la zone radiative peut être réécrit comme

$$\mathcal{F}_c = \frac{\rho_c}{2\pi} \frac{(N_c^2 - \omega^2)^{1/2}}{N_c^2} \lambda_h \omega^2 u^2. \quad (6.14)$$

En remplaçant  $u$  par Eq. (6.13), le flux radial d'énergie de l'onde, de fréquence  $\omega$  et de longueur d'onde horizontale  $\lambda_h$ , généré par des tourbillons incohérents entre eux de taille  $\lambda \leq \lambda_h$ , vaut en haut de la zone radiative

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_c &\sim \frac{\rho_c}{2\pi} \frac{(N_c^2 - \omega^2)^{1/2}}{N_c^2} \left(\frac{\lambda}{\lambda_h}\right)^2 \lambda_h \omega^2 v^2(\lambda) \\ &\sim \frac{1}{2} \rho_c v^3(\lambda) \left(\frac{\lambda}{\lambda_h}\right) \frac{\omega}{N_c}, \end{aligned} \quad (6.15)$$

où  $v = \omega\lambda/\pi$  et où on a utilisé  $\omega^2 \ll N^2$ . Au contraire, si  $\lambda_h \leq \lambda$ ,  $\mathcal{F}_c = 0$ .

L'expression dérivée par Garcia Lopez & Spruit (1991) a une forme similaire à l'expression obtenue par Press (1981) dans Eq. (6.10). Les auteurs ont trouvé que le flux d'énergie de l'onde en haut de la zone convective est égal au produit du flux d'énergie convectif associé à l'échelle  $\lambda$ , c'est-à-dire  $\rho v^3(\lambda)$ , avec le facteur de transmission de l'énergie de l'onde entre la zone convective et la zone radiative,  $\omega/N_c$ , et un nouveau facteur représentatif du comportement incohérent des tourbillons convectifs entre eux et égal à  $(\lambda/\lambda_h) \leq 1$ . Ce facteur a comme conséquence de diminuer l'émission d'ondes internes de gravité à la base de la zone convective.

Zahn *et al.* (1997) ont généralisé le modèle de Garcia Lopez & Spruit (1991) à tout le spectre continu en fréquences temporelle et spatiale. Comme dans le précédent modèle, le carré de la vitesse est supposé continu à l'interface et la fréquence de l'onde générée est égale à la fréquence de retournement du tourbillon exciteur. La turbulence est supposée suivre un spectre en énergie de Kolmogorov par unité de fréquence cyclique, c'est-à-dire pour lequel

$$E(\omega) = \frac{v_c^2}{\omega_c} \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{-2} \quad (6.16)$$

où  $v_c = \omega_c/k_c$  est la vitesse du plus gros tourbillon convectif, et pour lequel le nombre d'onde est relié à la fréquence cyclique par la relation d'échelle

$$\omega = \omega_c \left(\frac{k}{k_c}\right)^{2/3}. \quad (6.17)$$

De plus, les tourbillons sont supposés incohérents entre eux. Les tourbillons de nombre d'onde  $k(\omega)$  peuvent alors générer des ondes avec des nombres d'onde horizontaux inférieurs,  $k_h < k(\omega)$ . Au contraire, la transmission d'énergie vers des ondes avec un nombre d'onde horizontal plus grand est supposée inefficace.

En conséquence, le flux radial d'énergie des ondes en haut de la zone radiative par unité de nombre d'onde horizontal et par unité de pulsation peut s'écrire de façon générale comme

$$\mathcal{F}_c(\omega, k_h) = \rho_c E(\omega) g_\omega(k_h) \left(\frac{\omega^2}{N_c^2} \frac{(N_c^2 - \omega^2)^{1/2}}{k_h}\right), \quad (6.18)$$



où le terme entre parenthèses correspond à la vitesse de groupe radiale en haut de la zone radiative, et  $g_\omega(k_h)$  représente la fraction d'énergie des tourbillons de fréquence  $\omega$  qui est transmise aux composantes ondulatoires avec un nombre d'onde horizontal  $k_h < k(\omega)$  dans l'hypothèse où ces tourbillons sont incohérents entre eux. D'après Garcia Lopez & Spruit (1991),  $g_\omega(k_h)$  doit être proportionnel à  $k_h^2/k(\omega)^2$  à  $k_h$  fixé. De plus, ce terme doit vérifier la conservation de l'énergie quel que soit  $\omega$ , c'est-à-dire

$$\int_0^{k(\omega)} g_\omega(k_h) dk_h = 1 . \quad (6.19)$$

L'unique fonction satisfaisant ces deux conditions est donnée par

$$g_\omega(k_h) = \frac{2}{k_h} \left[ \frac{k_h}{k(\omega)} \right]^2 . \quad (6.20)$$

Enfin, selon Zahn *et al.* (1997), l'énergie spécifique calculée pour un degré angulaire  $l$  doit se répartir de façon uniforme sur les ordres azimutaux  $m$  tels que  $-l \leq m \leq +l$ , chacun ayant alors un poids de  $1/2l$ . Le degré angulaire est défini dans une bonne approximation comme  $l = r_c k_h$  et est considéré continu, avec  $r_c$  le rayon de la base de la zone convective. En utilisant Eqs. (6.16)-(6.18) et (6.20), le flux radial d'énergie des ondes dans un intervalle de fréquences compris entre  $\omega$  et  $\omega + d\omega$ , un intervalle de degrés angulaires compris entre  $l$  et  $l + dl$  et un intervalle d'ordres azimutaux compris entre  $m$  et  $m + dm$ , peut s'exprimer comme

$$d\mathcal{F}_c(\omega, l, m) = 2\rho_c v_c^3 \frac{\omega_c}{N_c} \frac{(N_c^2 - \omega^2)^{1/2}}{N_c} \left( \frac{\omega_c}{\omega} \right)^3 \frac{d\omega}{\omega_c} \frac{dl}{l_c} \frac{dm}{2l} , \quad (6.21)$$

où  $\omega \geq \omega_c$  et  $k_h < k(\omega)$ , qui équivaut à  $0 \leq l \leq l_u = l_c(\omega/\omega_c)^{3/2}$  avec  $l_c = r_c k_c$ . Selon le formalisme de Kolmogorov, seules les échelles spatiales inférieures à l'échelle d'injection de l'énergie  $\Lambda_c$  participent à la cascade énergétique. Le flux est donc laissé nul pour  $\omega < \omega_c$ . Il est également nul pour  $\omega > N_c$  puisque les ondes internes de gravité sont évanescentes et ne peuvent plus se propager dans la zone radiative.

En intégrant sur tout le spectre, le flux total d'énergie des ondes émises en bas de la zone convective est alors donné par

$$\mathcal{F}_c = 2\rho_c v_c^3 \frac{\omega_c}{N_c} \int_{\omega_c}^{N_c} \frac{d\omega}{\omega_c} \frac{(N_c^2 - \omega^2)^{1/2}}{N_c} \left( \frac{\omega_c}{\omega} \right)^3 \int_0^{l_u} \frac{dl}{l_c} \int_{-l}^{+l} \frac{dm}{2l} \quad (6.22)$$

$$= 4\rho_c v_c^3 \frac{\omega_c}{N_c} , \quad (6.23)$$

où on a utilisé le fait que  $\omega_c^2 \ll N_c$ . L'estimation du flux total par ce modèle est en accord avec l'estimation de Press (1981) donnée par Eq. (6.10) en ordre de grandeur seulement. En effet, selon le modèle de Zahn *et al.* (1997), la prise en compte de l'ensemble du spectre continu augmente le flux total d'énergie en haut de la zone radiative par un facteur quatre.

### 6.2.3 Modèle d'excitation stochastique par Kumar *et al.* (1999)

L'approche de Kumar *et al.* (1999) est différente des approches utilisées dans les précédents modèles. Elle s'inspire d'un modèle d'excitation des modes de pression par la turbulence dans la zone convective externe des étoiles qui avait été précédemment élaboré par Goldreich *et al.* (1994). Dans ce formalisme, l'équation d'onde linéaire adiabatique inhomogène est résolue avec pour terme de forçage le stress de Reynolds dû à la pression turbulente. Le comportement stochastique de la convection est pris en compte et l'analyse permet de remonter à la valeur statistique moyenne de l'amplitude des ondes générées. Le spectre de la turbulence est toujours supposé être celui de Kolmogorov.

L'expression du flux radial d'énergie des ondes juste sous la base de la zone convective vaut, suivant leurs travaux,

$$\mathcal{F}_c(\omega, l, m) = \frac{\omega^2}{4\pi} \int_{r_c}^{R_\star} dr \frac{\rho^2}{r^2} \left[ \left( \frac{\partial \xi_r}{\partial r} \right)^2 + l(l+1) \left( \frac{\partial \xi_h}{\partial r} \right)^2 \right] \exp \left[ -\frac{h_\omega^2 l(l+1)}{2r^2} \right] \frac{v^3 L^4}{1 + (\omega \tau_L)^{15/2}}, \quad (6.24)$$

où  $r_c$  et  $R_\star$  sont respectivement le rayon de la base convective et celui de l'étoile,  $\xi_r$  et  $\xi_h$  sont respectivement le déplacement horizontal et le déplacement vertical normalisés au flux d'énergie juste sous la zone convective,  $v$  et  $L$  sont la vitesse et la taille des plus grands tourbillons convectifs dans la couche de rayon  $r$ ,  $\tau_L = L/v$  est le temps convectif caractéristique de retournement, et  $h_\omega = L \min[1, 2(\omega \tau_L)^{-3/2}]$  est la taille du plus gros tourbillon convectif avec la fréquence  $\omega$  au rayon  $r$ . Le premier terme entre crochet dans l'intégrale représente la compressibilité de l'onde, le terme gaussien représente la corrélation spatiale horizontale entre l'onde et les tourbillons, tandis que le rapport final correspond à la corrélation temporelle entre les deux. Pour un modèle solaire, Kumar *et al.* (1999) ont estimé par ce formalisme que le flux total d'énergie des ondes émis en bas de la zone convective représente environ 0.1% du flux solaire total (qui est environ un ordre de grandeur supérieur au flux convectif à la base de la zone convective). Cette estimation est également du même ordre de grandeur que l'estimation de Press (1981).

#### 6.2.4 Modèle d'excitation par overshooting suivant Lecoanet & Quataert (2013)

Plus récemment, une nouvelle estimation de l'excitation d'ondes internes de gravité par la convection turbulente a été obtenue par Lecoanet & Quataert (2013). Dans ce travail, l'amplitude de l'onde est dérivée en considérant le stress de Reynolds comme terme source. L'équation d'onde inhomogène est alors résolue par le biais des fonctions de Green. Cependant, cette estimation se distingue de celle obtenue par Kumar *et al.* (1999) par deux principaux points. Premièrement, les auteurs se sont particulièrement focalisés sur l'excitation dans la zone d'overshoot. Deuxièmement, ils ont pris en compte l'effet du changement de gradient de température dans cette couche de l'étoile sur le transfert de l'énergie convective sous forme d'ondes en haut de la zone radiative. En d'autres mots, ils ont modélisé le profil de la fréquence de Brunt-Väisälä à l'interface radiative-convective. En effet, des incertitudes demeurent dans cette région sur le profil de transition du gradient de température, qui passe d'une valeur adiabatique à une valeur radiative. Les codes d'évolution stellaire prédisent un profil discontinu résultant d'une modélisation locale de la convection (e.g., MLT). Les simulations numériques, elles, montrent une transition douce entre les deux régimes à cause des forts flux convectifs non-réalistes imposés par les contraintes numériques (e.g. Brummell *et al.* 2002; Rogers & Glatzmaier 2005). Néanmoins, des modèles semi-analytiques de pénétration convective (Rempel 2004) ainsi que des observations sismiques sur le Soleil (Christensen-Dalsgaard *et al.* 2011) ont montré qu'un profil moins abrupt est tout aussi probable dans les régimes stellaires. Dans leur modèle, Lecoanet & Quataert (2013) ont donc considéré trois cas : soit une transition discontinue, soit un profil moins abrupt de forme linéaire ou un profil encore plus doux suivant une tangente hyperbolique. Ils ont montré que plus la transition est douce, plus le flux d'énergie total de l'onde généré en haut de la zone radiative est grand, et ce d'un facteur 2 (cas linéaire) à 5 (cas tangente hyperbolique) par rapport au cas discontinu.

Par exemple, le flux radial d'énergie des ondes en haut de la zone radiative dans le cas d'une transition thermique linéaire, dans l'intervalle de pulsation compris entre  $\omega$  et  $\omega + d\omega$  et l'intervalle de nombre d'onde horizontal compris entre  $k_h$  et  $k_h + dk_h$ , est donné dans Eq. (42) de leur papier, c'est-à-dire

$$d\mathcal{F}_c(\omega, k_h) \sim \rho v_c^3 \left( \frac{\omega_c}{N_c} \right)^{2/3} (k_h H_{l,\omega}^\star)^4 \left( \frac{\omega}{\omega_c} \right)^{-41/6} (k_h d)^{1/3} \frac{d\omega dk_h}{k_h \omega}, \quad (6.25)$$

qui peut encore être réécrit comme

$$d\mathcal{F}_c(\omega, k_h) \sim \rho v_c^3 \frac{v_c k_c}{N_c} \left(\frac{k_h}{k_c}\right)^{13/3} \left(\frac{H_{l,\omega}^*}{H}\right)^4 \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{-41/6} \left(\frac{k_c N_c d}{\omega_c}\right)^{1/3} \frac{d\omega dk_h}{k_h \omega}, \quad (6.26)$$

avec  $\omega \geq \omega_c$  et  $k_h \leq k_{h,\max}(\omega) = H^{-1}(\omega/\omega_c)^{3/2}$ , et où  $v_c = \omega_c/k_c$ ,  $k_c \sim 1/H$  et  $H$  est l'échelle spatiale typique des plus gros tourbillons convectifs donnée par la MLT ( $H \sim \alpha_{MLT} H_p$ ). Le paramètre  $H_{l,\omega}^*$  correspond à l'échelle spatiale d'injection de l'énergie dans la cascade turbulente à la frontière avec la zone radiative. En effet, les auteurs ont étudié le cas où  $H_{l,\omega}^*$  est du même ordre de grandeur que l'épaisseur de la région d'overshoot (c'est-à-dire, plus petite que la longueur de mélange habituellement utilisée) tout en conservant la même énergie turbulente (c'est-à-dire, avec la même vitesse convective). En d'autres mots, ils ont considéré un cas où la vitesse typique des tourbillons avec une taille  $h < H$  à la frontière avec la zone radiative est plus grande que dans le cas de la description de la turbulence par la MLT, comme supposé dans le modèle d'excitation de Kumar *et al.* (1999). Les auteurs ont montré que cela implique une modification du spectre de l'onde, notamment avec une augmentation de l'énergie distribuée vers les plus hautes fréquences.

### 6.3 Modèle d'excitation par la pénétration de panaches convectifs

Après la présentation de ce large éventail de modèles d'excitation d'ondes par la pression turbulente dans la zone convective, nous nous intéressons maintenant à leur génération lors de la pénétration de panaches convectifs dans la zone radiative stablement stratifiée adjacente. Ce mécanisme a déjà été bien observé dans des simulations numériques (voir Section 6.1) et en géophysique (e.g., Stull 1976; Fritts & Alexander 2003). Par exemple, Dintrans *et al.* (2005) ont analysé de façon isolée la génération d'ondes lors de la pénétration d'un unique panache convectif dans des simulations 2D. Ils ont ainsi pu montrer qu'une large partie de l'énergie cinétique du panache (jusqu'à 40%) peut être transmise sous forme d'ondes. Ce résultat peut nous laisser penser qu'un tel mécanisme puisse jouer un rôle important dans les étoiles. Pour répondre à cette question, un modèle d'excitation semi-analytique a été développé durant la thèse et est décrit dans la suite de cette section. Le but est d'estimer la part de l'énergie cinétique d'un ensemble de panaches convectifs qui est transmise sous forme d'ondes lors de leur impact sur l'interface avec la zone radiative adjacente (voir FIGURE 6.5 pour une illustration).

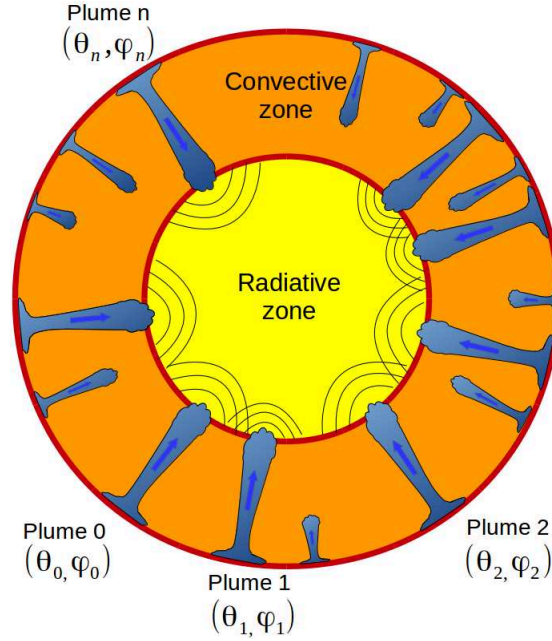
#### 6.3.1 Définition de la densité spectrale d'énergie des ondes générées par un ensemble de panaches

On cherche dans la suite à déterminer la distribution spectrale d'énergie des ondes émises par un ensemble de panaches pénétrant en haut de la zone radiative. Le processus d'excitation est supposé aléatoire, stationnaire et ergodique. Une approche statistique est alors nécessaire. L'énergie spécifique moyenne associée aux ondes est définie à un point particulier  $\vec{r}$  dans la zone radiative par

$$\langle E \rangle(\vec{r}) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(r) |\vec{v}_T(\vec{r}, t)|^2 dt, \quad (6.27)$$

où  $\vec{v}_T(\vec{r}, t)$  est égale à la troncature du champ de vitesse associé aux ondes dans l'intervalle de temps  $[-T/2, T/2]$  et est nulle en dehors de cet intervalle. Le théorème de Parseval-Plancherel nous autorise alors à écrire

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \langle |\vec{v}_T(\vec{r}, t)|^2 \rangle dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle |\hat{v}_T(\vec{r}, \omega)|^2 \rangle d\omega, \quad (6.28)$$



**FIGURE 6.5:** Vision schématique d'une étoile de type solaire avec une zone convective peuplée de panaches convectifs qui sont identifiés par leurs coordonnées  $(\theta_n, \varphi_n)$ . Ceux-ci sont créés à la surface de l'étoile avant de plonger vers son centre et de grossir par entraînement turbulent de matière sur leurs flancs. En bas de la zone convective, ils sont fortement freinés et peuvent libérer une partie de leur énergie cinétique sous forme d'ondes.

où  $\omega$  est la fréquence cyclique temporelle et le symbole  $(\hat{\cdot})$  indique la transformée Fourier<sup>1</sup>. Ainsi, en utilisant Eq. (6.28), Eq. (6.27) devient, puisque l'intégrale et la limite commutent,

$$\langle E \rangle(\vec{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon(\vec{r}, \omega) d\omega, \quad (6.29)$$

où la densité spectrale d'énergie des ondes a été définie par

$$\epsilon(\vec{r}, \omega) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{\rho(r)}{T} \frac{\langle |\hat{v}_T(\vec{r}, \omega)|^2 \rangle}{2\pi}. \quad (6.30)$$

Pour aller plus loin, les panaches sont supposés incohérents entre eux, uniformément répartis sur la sphère, et avec un temps de vie caractéristique dans la zone de pénétration égal à  $\tau_p$ . Sur un intervalle de temps équivalent à  $\tau_p$ , un nombre moyen  $\mathcal{N}$  de panaches génère alors des ondes. De plus, dans l'hypothèse ergodique, la moyenne temporelle est égale à la moyenne d'ensemble. En appliquant ces différentes propositions, la densité spectrale en énergie des ondes converge en moyenne vers (Pinçon *et al.* 2017)

$$\epsilon(\vec{r}, \omega) = \mathcal{N} \frac{\nu_p}{2\pi} \rho(r) \int_{\Omega_0} \left| \hat{v}_0(\vec{r}, \omega; \theta_0, \phi_0, t_0 = 0) \right|^2 \frac{\sin \theta_0 d\theta_0 d\phi_0}{4\pi}, \quad (6.31)$$

où  $\nu_p = 1/\tau_p$ ,  $\hat{v}_0(\vec{r}, \omega; \theta_0, \phi_0, t_0 = 0)$  est le champ de vitesse associé aux ondes en un point  $\vec{r}$  généré par un panache à l'instant  $t = 0$  et de coordonnées horizontales  $(\theta_0, \varphi_0)$ . Sous les hypothèses

1. La transformée de Fourier temporelle d'une fonction  $X(\vec{r}, t)$  par rapport à un référentiel en co-rotation avec la base de la zone convective, est définie comme

$$\mathcal{TF}[X] = \hat{X}(\vec{r}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\vec{r}, t) e^{-i\omega t} dt$$

où  $\omega$  est la pulsation de l'onde mesurée par rapport à la base de la zone convective, qui est aussi la zone d'excitation.

précédentes, il suffit donc en pratique de déterminer la perturbation de vitesse générée par un unique panache. La densité spectrale d'énergie des ondes générées par l'ensemble des panaches est alors obtenue à partir de celle obtenue dans le cas de l'excitation par un seul panache multipliée par le nombre moyen de panaches  $\mathcal{N}$ . De façon similaire au modèle de Garcia Lopez & Spruit (1991), cela résulte de l'incohérence des panaches entre eux. En effet, dans le cas cohérent, celle-ci serait proportionnelle à  $\mathcal{N}^2$ .

Pour finir, la perturbation du champ de vitesse  $\vec{v}_0$  est développée sur la bases des harmoniques sphériques

$$\begin{aligned} \vec{v}_0(\vec{r}, t) = & \sum_{l,m} v_{r,l,m}(r, t) Y_l^m(\theta, \phi) \vec{e}_r + v_{P,l,m}(r, t) r \vec{\nabla} Y_l^m(\theta, \phi) \\ & + v_{T,l,m}(r, t) \vec{\nabla} \wedge (Y_l^m(\theta, \phi) r \vec{e}_r) , \end{aligned} \quad (6.32)$$

où  $(r, \theta, \phi)$  sont les coordonnées sphériques,  $l$  est le degré angulaire,  $m$  le nombre azimutal,  $\vec{e}_r$  est le vecteur radial unitaire, et  $v_{r,l,m}$ ,  $v_{P,l,m}$  et  $v_{T,l,m}$  sont respectivement les composantes radiale, poloïdale et toroïdale du champ de vitesse associé aux ondes. Étant donnée la décomposition faite dans Eq. (6.32), la moyenne de Eq. (6.31) sur l'angle solide représente la distribution angulaire de l'énergie et s'écrit

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(r, \omega) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \epsilon(r, \theta, \phi, \omega) d\Omega \\ &= \sum_{l,m} \tilde{\mathcal{E}}_{l,m}(r, \omega) , \end{aligned} \quad (6.33)$$

dans laquelle a été défini

$$\tilde{\mathcal{E}}_{l,m}(r, \omega) = \mathcal{N} \frac{\nu_p}{8\pi^2} \rho(r) \int_{\Omega_0} \left( |\hat{v}_{r,l,m}|^2 + l(l+1) |\hat{v}_{h,l,m}|^2 \right) \frac{d\Omega_0}{4\pi} , \quad (6.34)$$

avec  $|\hat{v}_{h,l,m}|^2 = |\hat{v}_{P,l,m}|^2 + |\hat{v}_{T,l,m}|^2$ . Le flux radial d'énergie des ondes moyenné sur l'angle solide par unité de fréquence  $\omega$ , pour un degré angulaire  $l$  et un degré azimutal  $m$ , est alors obtenu en multipliant la contribution d'une paire  $(l, m)$  dans Eq. (6.34) avec la vitesse de propagation de l'énergie dans cette direction, c'est-à-dire la vitesse de groupe radiale (voir Section 5.2), afin d'obtenir

$$\mathcal{F}_r(r, \omega, l, m) = \tilde{\mathcal{E}}_{l,m}(r, \omega) V_{gr}(r, \omega, l) . \quad (6.35)$$

Cette définition du flux radial d'énergie des ondes fait appel à la notion de vitesse de groupe. On note qu'il est aussi possible de remonter à la même expression par une méthode similaire en utilisant directement l'expression du flux radial d'énergie de l'onde,  $p'v_r$ . En effet, il a été montré dans Section 5.3.1 que cette expression est équivalente au produit de la densité spectrale d'énergie d'une onde avec la vitesse de groupe.

### 6.3.2 Équation d'onde avec terme source

L'estimation du flux d'énergie des ondes en haut de la zone radiative nécessite de connaître leurs amplitudes, qui elles-mêmes dépendent du mécanisme de forçage. Quand les panaches convectifs pénètrent dans le haut de la zone radiative, ils perturbent l'état d'équilibre et une partie de leur énergie est transférée sous forme d'ondes. On suppose que le champ de vitesse peut être séparé en deux composantes : une composante associée aux ondes  $\vec{v}(\vec{r}, t)$ , et une autre associée aux panaches  $\vec{V}_p(\vec{r}, t)$ . Autrement dit, cela revient à négliger la turbulence dans la zone de pénétration. De plus, on suppose que les ondes n'ont aucun effet de rétroaction sur la dynamique des panaches. Cela suggère aussi qu'ils suivent leur propre équation de continuité indépendamment l'un de l'autre. Ceci est en fait une bonne approximation si la vitesse des ondes est beaucoup plus petite que celle des panaches, c'est-à-dire si  $|\vec{v}| \ll |\vec{V}_p|$ , ce qui sera vérifié à postériori.

Sous ces hypothèses, notre attention se focalise sur l'excitation des ondes par la pression dynamique exercée par les panaches dans la zone de pénétration, et représentée par le terme  $\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}_p \otimes \vec{V}_p)$  comme terme source dans l'équation d'onde, où  $(\otimes)$  est le produit tensoriel. Pour simplifier, l'effet de la rotation est négligé. De plus, l'approximation de Cowling est utilisée, ce qui est justifié dans l'hypothèse des basses fréquences (puisqu'elles sont incompressibles, voir Dintrans & Rieutord 2001). Ainsi, l'équation du moment et celle de continuité linéarisées par rapport à l'état d'équilibre s'écrivent

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\vec{\nabla} p'}{\rho} - \frac{\rho'}{\rho} \vec{g} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}_p \otimes \vec{V}_p) \quad (6.36)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\delta \rho}{\rho} \right) + \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0, \quad (6.37)$$

où toutes les quantités ont leur signification habituelle. Le système est alors fermé par l'hypothèse d'oscillations adiabatiques, c'est-à-dire sans échange de chaleur avec l'environnement, donnée par

$$\delta \rho = \delta p / c^2 = (p' - \rho g \xi_r) / c^2. \quad (6.38)$$

La dérivation de l'amplitude des ondes passe par la résolution du système formé des équations Eqs. (6.36)-(6.38) et nécessite donc de modéliser le terme source dans le membre de droite de Eq. (6.36).

### 6.3.3 Une description simple des panaches convectifs

#### 6.3.3.a Profil de vitesse du panache dans la région de pénétration

Le terme source dans Eq. (6.36) est maximal dans la région où les panaches sont rapidement décélérés, c'est-à-dire lors de leur pénétration dans la zone radiative. De plus, les ondes sont évanescentes dans la région convective; leur amplitude est donc maximale dans le bas de la zone convective. Il semble donc raisonnable de supposer que le forçage des ondes est maximal dans cette région. Il suffit donc pour la suite de modéliser le profil de vitesse des panaches dans la zone de pénétration.

Suivant Townsend (1966), on suppose que la vitesse d'un panache est verticale sur la majorité du volume qu'il occupe (ce qui est discutable près de ces flancs), qu'il suit un profil Gaussien avec une largeur caractéristique  $b$  et un temps de vie  $\tau_p$ , et que ce profil est maintenu dans la région de pénétration, c'est-à-dire de la forme

$$\vec{V}_p(\vec{r}) = -V_0(r) e^{-S_h^2/2b^2} e^{-t^2/\tau_p^2} \vec{e}_r, \quad (6.39)$$

avec

$$S_h(\vec{r}; \theta_0, \phi_0) = r \arccos [\sin \theta_0 \sin \theta \cos(\phi - \phi_0) + \cos \theta \cos \theta_0], \quad (6.40)$$

où  $(\theta_0, \phi_0)$  sont les coordonnées sphériques angulaires du centre de la plume et  $S_h$  correspond à la distance sur la sphère au centre de la plume.

#### 6.3.3.b Modèle de panaches convectifs de Rieutord & Zahn (1995)

Dans ce travail, le rayon  $b$  et la vitesse  $V_b$  des panaches à la base de la zone convective sont décrits par le modèle de panaches de Rieutord & Zahn (1995). Dans leur modèle, les panaches sont supposés stationnaires et axisymétriques. Ils se développent dans une atmosphère isentropique structurée en couches parallèles et à l'équilibre hydrostatique. Toutes les perturbations associées à la présence de panaches (vitesse, densité, enthalpie) sont supposées avoir le même profil horizontal que dans Eq. (6.39) à chaque altitude, sauf la perturbation de pression qui est supposée nulle en première approximation. De plus, les auteurs utilisent l'hypothèse d'entraînement turbulent de matière (Morton *et al.* 1956). Celle-ci postule que le flux horizontal de matière entraînée latéralement

sur les flancs du panache est proportionnelle à la vitesse verticale au centre du panache. Mathématiquement, celle-ci s'exprime en coordonnées sphériques, pour un panache centré en  $(\theta_0, \phi_0) = (0, 0)$  pour simplifier, par (Lo & Schatzman 1997)

$$2\pi r \theta_b V_{p,\theta}(r, \theta_b, \phi) = -2\pi b(r) \alpha_E |V_{p,r}(r, 0, 0)|, \quad (6.41)$$

où  $V_{p,\theta}$  et  $V_{p,r}$  sont les composantes latitudinale et radiale de la vitesse du panache considéré,  $\alpha_E$  est le coefficient d'entraînement et  $\theta_b \sim \sqrt{2}b(r)/r$  est la latitude du flanc du panache au niveau  $r$ .

Dans ce contexte simplifié, les solutions vérifiant les équations de la dynamique peuvent être exprimées asymptotiquement en profondeur dans la zone convective sous forme de lois de puissance. La recherche de solutions sous cette forme particulière permet d'obtenir des expressions analytiques des caractéristiques du panache en bas de la zone convective, et donc au début de la zone de pénétration. Ainsi, le rayon du panache peut être exprimé par

$$b = \frac{(R - r_t) 3\alpha_E (\Gamma_1 - 1)}{\sqrt{2} 2\Gamma_1 - 1}, \quad (6.42)$$

où  $(R - r_t)$  est égale à l'épaisseur de la zone convective et  $\Gamma_1$  est le coefficient adiabatique. Le coefficient d'entraînement  $\alpha_E$  a été étudié théoriquement et expérimentalement, notamment en géophysique, et dépend des propriétés du fluide. Sa valeur pour un gaz parfait est usuellement prise égale à 0.083 (Turner 1986). Pour un modèle solaire et un gaz monoatomique ( $\Gamma_1 = 5/3$ ), on trouve  $b \approx 10^4$  km, ce qui est environ cinq fois plus petit que la taille des plus gros tourbillons convectifs en bas de la zone convective selon la MLT. Sa vitesse en bas de la zone convective est quant à elle égale à

$$V_b = \left( \frac{8L_{1p}}{\pi\rho_b b^2} \right)^{1/3}, \quad (6.43)$$

où  $L_{1p}$  représente la luminosité totale (énergie cinétique + enthalpique) transportée par un seul panache et  $\rho_b$  est la densité moyenne à la base de la zone convective. Pour estimer  $L_{1p}$ , on peut supposer que chaque panache transporte une énergie qui est égale, en moyenne, à celle transportée par les tourbillons turbulents dans l'espace situé entre les panaches, soit

$$\mathcal{N}L_{1p} \approx L_* \mathcal{A}, \quad (6.44)$$

où  $L_*$  est la luminosité de l'étoile et  $\mathcal{A} = \mathcal{N}b^2/4r_b^2$  est le facteur de remplissage correspondant à la fraction de l'aire occupée par les panaches à la base de la zone convective. L'équation (6.43) peut alors être réécrite comme

$$V_b = \left( \frac{2L_*}{\pi\rho_b r_b^2} \right)^{1/3}, \quad (6.45)$$

qui donne  $V_b \approx 185 \text{ m s}^{-1}$  dans le cas du Soleil, c'est-à-dire presque sept fois plus grande que la vitesse convective des tourbillons prédite par la MLT dans cette région et égale à  $v_c \sim 25 \text{ m s}^{-1}$ .

### 6.3.3.c Profil de vitesse verticale dans la région de pénétration

A partir du moment où les panaches pénètrent dans le haut de la zone radiative, ils sont moins denses que le milieu ambiant. Comme le nombre de Péclet en bas de la zone convective est élevé ( $Pe \sim 10^5 - 10^7$ ), les panaches gardent leur identité thermique en pénétrant : ils sont alors fortement freinés par la poussée d'Archimède. Pour les mêmes raisons, ils imposent l'établissement d'un gradient de température adiabatique dans la zone de pénétration, c'est-à-dire un gradient identique à celui dans la zone convective. En supposant de plus un état stationnaire, le profil du champ de vitesse du panache dans la zone de pénétration résulte de l'équilibre entre l'advection et la poussée d'Archimède. Pour aller plus loin, Zahn (1991) a supposé que toutes les perturbations

de l'état d'équilibre par les panaches sont spatialement corrélées. Après avoir moyenné selon la coordonnée horizontale, l'équation du mouvement s'écrit alors

$$\frac{1}{2} \frac{dV_0^2}{dz} = -\frac{1}{c} g Q \frac{\delta T}{T}, \quad (6.46)$$

où  $z = r_b - r$  avec  $r_b$  le rayon de la base de la zone convective tel que donné par le critère de Schwarzschild,  $\delta T$  est la différence de température entre le panache et le milieu environnant,  $Q = -(\partial \log \rho / \partial \log T)_p$  et  $c$  est un paramètre représentant l'asymétrie horizontale de l'écoulement. Dans la région de pénétration supposée adiabatique, le flux convectif peut être écrit comme

$$F_{\text{conv}} = F_0 - F_{\text{rad}}, \quad (6.47)$$

où  $F_0$  est le flux total et  $F_{\text{rad}} = \chi \nabla_{\text{ad}}$  est le flux radiatif dans la région de pénétration, avec  $\chi$  la conductivité radiative et  $\nabla_{\text{ad}} = (\partial \log T / \partial \log p)_s$  le gradient adiabatique. Il est important de noter que, pour simplifier, le flux d'énergie cinétique a été négligé dans Eq. (6.47). En effet, Zahn (1991, voir Annexe) a montré que son impact sur le profil de vitesse dans la zone de pénétration est négligeable. Pour continuer, le flux convectif s'annule à la base de la zone convective avant de devenir négatif dans la zone de pénétration, donc on a  $F_0 = F_{\text{rad}}(r = r_b)$ . Au premier ordre autour de  $z = 0$ , le flux convectif est donc donné en différentiant Eq. (6.47) par

$$F_{\text{conv}} = -F_0 \chi_p \frac{z}{H_p}, \quad (6.48)$$

où  $\chi_p = (\partial \log \chi / \partial \log p)_s$ . Pour aller plus loin, on suppose que les panaches transportent tout le flux convectif (i.e., enthalpique) dans la zone de pénétration, soit

$$F_{\text{conv}} = -\mathcal{A} C_p \rho_b V_0 \delta T, \quad (6.49)$$

où  $C_p$  est la capacité calorifique spécifique à pression constante. Le profil de vitesse verticale peut alors être dérivé en intégrant Eq. (6.46) avec l'aide de Eqs. (6.48)-(6.49) ainsi que de l'identité thermodynamique  $gQ/C_p = T \nabla_{\text{ad}} / H_p$ , pour aboutir à

$$V_0^3(z) = -\left( \frac{3F_0 \chi_p \nabla_{\text{ad}}}{2\mathcal{A} c H_p^2 \rho_b} \right) z^2 + V_b^3 = V_b^3 \left( 1 - \frac{z^2}{L_p^2} \right). \quad (6.50)$$

C'est l'expression trouvée par Zahn (1991) avec laquelle il a pu estimer la longueur de pénétration  $L_p$ . Il a trouvé que celle-ci devrait être de l'ordre de grandeur de  $H_p$ . Des observations sismiques du Soleil ont montré que la distance de pénétration était surestimée par son modèle. Ayant peu de connaissance sur cette région, on considérera que la longueur de pénétration reste un paramètre du modèle. Dans le cas du Soleil, les observations sismiques donnent une valeur limite supérieure pour  $L_p$  égale à  $0.05 H_p$  (e.g., Basu 1997). Finalement, la vitesse verticale dans la zone de pénétration pour  $z \in [0, L_p]$  s'exprimera dans la suite comme

$$V_0(z) = V_b \left[ 1 - \left( \frac{z}{L_p} \right)^2 \right]^{1/3} \quad (6.51)$$

où  $V_b$  est donné par Eq. (6.45).

### 6.3.3.d Temps de vie du panache

Le temps de vie des panaches est assurément le paramètre le plus difficile à estimer. Après avoir atteint la base de la zone convective, un panache pénètre dans la zone radiative stablement stratifiée. Là, il est d'abord fortement freiné puis détruit après un temps caractéristique  $\tau_p$ . Pour simplifier, nous proposons de traiter la question en utilisant des ordres de grandeur et des échelles de temps. Nous identifions trois processus potentiellement responsables de la destruction du panache dans la zone de pénétration :



1. **Thermalisation par diffusion radiative** : Le temps caractéristique sur lequel un panache est thermalisé dans la zone de pénétration peut être estimé par

$$t_{\text{rad}} \equiv \frac{L_p^2}{K_b}, \quad (6.52)$$

où  $K_b$  est la diffusivité radiative en haut de la zone radiative. Pour un modèle solaire en utilisant  $L_p \sim 0.05 H_p$ , on trouve  $t_{\text{rad},\odot} \sim 10^{10}$  s, c'est-à-dire beaucoup plus long que le temps dynamique  $t_{\text{dyn},\odot} \sim L_p/V_b \sim 10^4$  s. En effet, comme déjà mentionné précédemment, le nombre de Péclet est très grand dans cette région et la diffusion radiative est inefficace.

2. **Turbulence à l'intérieur du panache** : Bien que les panaches sont décrits comme des courants descendants cohérents avec un profil bien défini, ils sont en fait turbulents à plus petite échelle. Des tourbillons, dont les plus gros ont une taille et une vitesse caractéristique légèrement plus faibles que celles des panaches, peuvent alors entraîner leur déstructuration et leur disparition. L'échelle de temps associée peut donc être estimée par

$$t_{\text{turb}} \equiv \frac{b}{V_b}. \quad (6.53)$$

Pour un modèle solaire, on trouve  $t_{\text{turb},\odot} \sim 10^5$  s, toujours un ordre de grandeur au-dessus de  $t_{\text{dyn},\odot}$ .

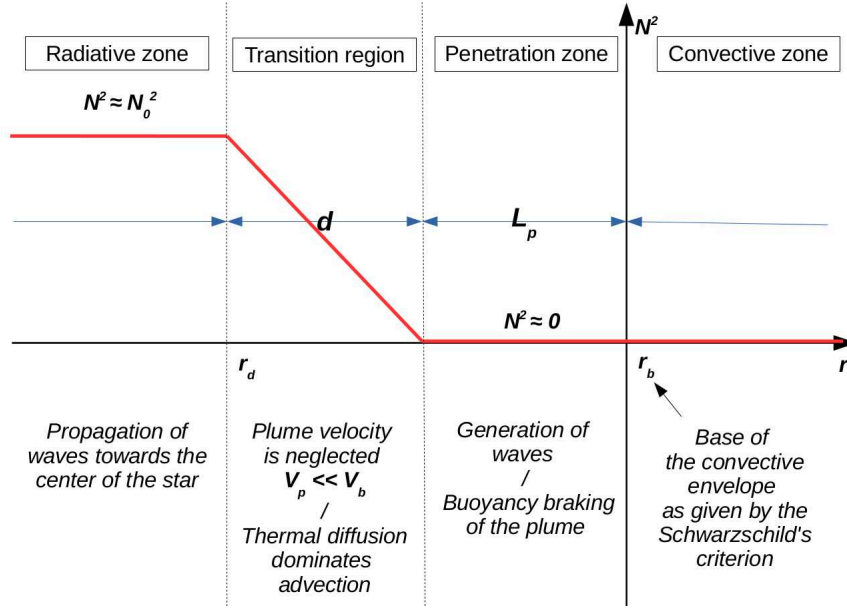
3. **Restratification par des instabilités barocliniques** : Enfin, ce travail nous a mené à nous intéresser au phénomène de restratification ayant lieu dans les océans terrestres (e.g., Jones & Marshall 1997). En effet, bien que les océans sont la plupart du temps stratifiés stablement, il arrive que certains endroits soient instables convectivement, comme par exemple sous l'effet d'un refroidissement en surface. Comme dans les étoiles, des panaches convectifs peuvent alors se développer. Quand l'instabilité convective s'arrête, la phase durant laquelle le panache est détruit est appelée restratification. Dans ce processus, le gradient de densité entre le panache et le milieu environnant génère un vent thermique qui peut être sujet à une instabilité baroclinique. Des tourbillons sont alors créés et peuvent homogénéiser la zone. En appliquant le modèle de Jones & Marshall (1997) au cas du Soleil, on trouve un temps de restratification égal à  $t_{\text{res},\odot} \sim 10^6 - 10^7$  s.

Le temps de vie du panache est sans doute la conséquence de plusieurs processus. Dans le cas solaire, les estimations donnent un temps de vie autour de  $10^5 - 10^7$  s, c'est-à-dire autour du temps de retournement des tourbillons convectifs prédit par la MLT qui est autour de  $10^6$  s. Le temps de vie du panache sera donc considéré comme un paramètre du modèle dont la valeur sera évaluée autour du temps de retournement des tourbillons convectifs comme donné par la MLT. Il est intéressant de noter que toutes les estimations faites au-dessus donnent des temps de vie caractéristiques de plus d'un ordre de grandeur au-dessus du temps dynamique, c'est-à-dire le temps caractéristique nécessaire pour qu'un élément fluide appartenant à un panache parcourt la région de pénétration. Ceci est en accord avec l'hypothèse de stationnarité de l'écoulement utilisée dans les sections (6.3.3.b) et (6.3.3.c).

### 6.3.4 Dérivation du flux d'énergie des ondes

#### 6.3.4.a Modélisation de la région de pénétration et méthode de résolution

Le système d'équations formé de Eqs. (6.36)-(6.38) dépend de la structure à l'équilibre de l'étoile. Pour bien décrire le processus d'excitation, il convient donc de modéliser convenablement la région de pénétration. Le scénario est supposé suivre en partie le modèle de pénétration convective de Zahn (1991), qui a déjà été présenté dans la Section 6.3.3.c. La situation est représentée en FIGURE 6.6. Lorsqu'un panache arrive à la base de la zone convective de rayon  $r_b$ , correspondant à la valeur donnée par le critère de Schwarzschild, il pénètre par inertie dans la région stablement stratifiée



**FIGURE 6.6:** Modélisation schématique du profil de la fréquence de Brunt-Väisälä à l'interface entre la zone convective et la zone radiative en fonction du rayon (voir Section 6.3.4.a).

sous-jacente sur une longueur  $L_p$ . Comme le nombre de Péclet est très élevé dans cette région, l'advection de matière par le panache est beaucoup plus efficace que la diffusion thermique. Le panache garde donc son identité dans la zone de pénétration et impose un gradient adiabatique, de telle façon que  $N^2 \approx 0$ . Une fois que le panache a été suffisamment freiné et que sa vitesse est devenue très inférieure à sa vitesse d'entrée dans la région de pénétration  $V_b$ , la diffusion radiative thermalise le panache ; le gradient de température passe d'une valeur adiabatique à une valeur radiative telle que  $N^2 = N_0^2$  à travers une région de transition d'épaisseur  $d$ . Zahn (1991) a estimé analytiquement  $d$  comme étant de l'ordre de quelques kilomètres. Cela correspond à une transition thermique quasi discontinue. Cependant, Christensen-Dalsgaard *et al.* (2011) ont montré qu'une transition moins abrupte permet de mieux reproduire les observations sismiques du Soleil. Une telle transition est notamment soutenue par des modèles semi-analytiques plus réalistes de pénétration convective comme celui proposé par Rempel (2004), qui prend en compte l'interaction entre les panaches et les courants montants dans la zone convective, ainsi qu'une distribution pour les vitesses de pénétration. Dans la suite, nous supposons donc que la fréquence de Brunt-Väisälä varie linéairement dans la région de transition, de façon similaire au travail de Lecoanet & Quataert (2013). Cela nous permettra de comprendre comment l'excitation par la pénétration convective dépend du gradient de la transition thermique entre les zones convective et radiative.

Tous les ingrédients sont maintenant réunis pour pouvoir déterminer l'amplitude des ondes. On résume ici brièvement la méthode de dérivation, mais les détails peuvent être trouvés dans l'annexe de Pinçon *et al.* (2016). Premièrement, on décompose les variables  $p'$ ,  $\rho'$  et  $v_r$  suivant la base des harmoniques sphériques comme dans Eq. (6.32), puis on calcule la transformée de Fourier temporelle de Eqs. (6.36)-(6.38). Cela permet d'aboutir au système différentiel suivant

$$\frac{d\vec{z}}{dr}(r, \omega) = \vec{A}(r, \omega)\vec{z}(r, \omega) + \vec{b}(r, \omega) \quad (6.54)$$

avec

$$\vec{z} = \begin{pmatrix} \hat{v}_{r,l,m} \\ \hat{v}_{h,l,m} \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ iF_2/r\omega \end{pmatrix}, \quad (6.55)$$

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 2/r - g/c^2 & (S_l^2 - \omega^2) r/c^2 \\ (\omega^2 - N^2)/r\omega^2 & -d_r \ln(\rho r) - g/c^2 \end{pmatrix}, \quad (6.56)$$

où  $d_r \equiv d/dr$  est la dérivée par rapport à  $r$  et  $F_2$  est un terme représentant le forçage par les panaches. On se place ensuite dans l'hypothèse des basses fréquences. L'équation d'onde homogène est d'abord résolue par la méthode JWKB dans la zone radiative pour  $r \leq r_d = r_b - L_p - d$ , puis dans la zone convective pour  $r \geq r_b$ . Dans la zone de transition, l'approximation JWKB n'est plus valide et les solutions de l'équation homogène doivent être exprimées en terme de fonction d'Airy. Dans la zone de pénétration, l'équation inhomogène est résolue par la méthode de variation de la constante. Pour continuer, la continuité du déplacement radial et du déplacement horizontal est imposée en  $r_d$  et  $r_b$ , de telle façon à relier les trois régions entre elles. Enfin, comme conditions limites, une onde régressive se propageant vers le centre dans la zone radiative et une onde évanescente s'annulant vers la surface ont été considérées.

### 6.3.4.b Expression finale du flux d'énergie des ondes

Après une longue série de développements détaillée dans l'annexe B de Pinçon *et al.* (2016), le flux radial moyen d'énergie des ondes générées par un ensemble de  $\mathcal{N}$  panaches, par unité de pulsation  $\omega$ , pour un degré angulaire  $l$  et un nombre azimutal  $m$ , s'écrit

$$\mathcal{F}_r(r, \omega, l, m) = f(\gamma_d) \frac{\mathcal{N}}{4} \frac{\sqrt{l(l+1)} (N_0^2 - \omega^2)^{1/2}}{4\pi r^2} \frac{e^{-\omega^2/4\nu_p^2}}{N_0^2} \frac{1}{\nu_p} \mathcal{B}_l \mathcal{H}_l^2, \quad (6.57)$$

avec

$$\mathcal{H}_l = \frac{1}{4\pi} \int_{r_b - L_p}^{r_b} \frac{1}{\rho} \frac{d}{dr} (\rho V_0^2) \rho^{-1/2} r^{-3/2} \left( \frac{r_b - L_p}{r} \right)^\Lambda dm \quad (6.58)$$

$$\mathcal{B}_l = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_0} |\beta_l^m|^2 d\Omega_0 \quad (6.59)$$

$$\beta_l^m(\theta_0, \phi_0) = \int_{\Omega} e^{-s_b^2/b^2} \overline{Y_l^m} d\Omega \quad (6.60)$$

$$\gamma_d = \left( \frac{k_h d N_0}{\omega} \right)^{2/3} \frac{N_0^2 - \omega^2}{N_0^2} \sim (k_r d)^{2/3} \quad (6.61)$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \lesssim 1 \\ D\sqrt{x} (1 - \omega^2/N_0^2)^{-1} & \text{si } x \gtrsim 1 \end{cases} \quad (6.62)$$

où  $\Lambda = \sqrt{l(l+1)}$ ,  $dm = 4\pi\rho r^2 dr$ ,  $D \approx 3.7$  est un facteur numérique,  $s_b = S_h(r_b, \theta, \phi; \theta_0, \phi_0)$  suivant Eq. (6.40) et  $d$  est la longueur de la région de transition (voir FIGURE 6.6). Ces différents termes seront discutés et estimés pour un modèle solaire dans la Section 6.4.

### 6.3.4.c Expression simplifiée

Il est possible d'approximer Eq. (6.57) en fonction des quantités physiques caractéristiques du problème. Cela permet entre autre une estimation simple du flux d'énergie des ondes générées par la pénétration convective, de telle façon à pouvoir par exemple facilement l'implémenter dans un code d'évolution stellaire 1D. Premièrement, le terme représenté par Eq. (6.59) peut être approché dans le cas où  $l \ll l_{crit} \sim 2\pi r_b/b$  par

$$\mathcal{B}_l \sim \frac{\pi}{4} \left( \frac{b}{r_b} \right)^4 e^{-l(l+1)b^2/2r_b^2} \quad \text{pour } l \ll l_{crit}, \quad (6.63)$$

qui, comme nous le verrons par la suite, est en bon accord avec des estimations numériques. De plus, dans le cas où la longueur de pénétration est beaucoup plus petite que la longueur caractéristique de décroissance de l'onde évanescente dans la zone convective, c'est-à-dire  $L_p \ll r_b/\Lambda$ , Eq. (6.58) peut être approchée par

$$\mathcal{H}_l^2 \sim r_b \rho_b V_b^4. \quad (6.64)$$

L'équation (6.57) est donc égale dans un bonne approximation à

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_r(r, \omega, l, m) &\sim \frac{\pi}{16} \frac{\mathcal{N} \rho_b V_b^4}{4\pi r^2} \frac{b^4}{r_b^4} \frac{r_b}{N_0} \frac{e^{-\omega^2/4\nu_p^2}}{\nu_p} \sqrt{l(l+1)} e^{-l(l+1)b^2/2r_b^2} \\ &\sim \frac{1}{4\pi r^2} \frac{\mathcal{A} \mathcal{S}_p}{2} \frac{\rho_b V_b^3}{2} F_{R,l} \frac{e^{-\omega^2/4\nu_p^2}}{\nu_p} e^{-l(l+1)b^2/2r_b^2}, \end{aligned} \quad (6.65)$$

où  $\mathcal{S}_p = \pi b^2$  est l'aire horizontale occupée par un seul panache,  $\rho_b V_b^3/2$  représente le flux d'énergie cinétique d'un panache et  $F_{R,l} = V_b k_{h,b}/N_0$  est le nombre de Froude en haut de la zone convective, avec  $k_{h,b} = \sqrt{l(l+1)}/r_b$  le nombre d'onde horizontal. Ce dernier représente le rapport de l'effet de l'advection par le panache sur la réponse du milieu par poussée d'Archimède en haut de la zone radiative. Il contrôle l'efficacité du transfert d'énergie du panache sous forme d'ondes, et est équivalent au rapport  $\omega_c/N_c$  dans le cas de la génération par la pression turbulente (voir Section 6.2). Dans le Soleil, on trouve  $F_{R,1} \sim 10^{-3}$  pour  $l = 1$ .

## 6.4 Application au cas solaire

Dans cette section, nous discutons les différents termes intervenant dans Eq. (6.57) et l'influence des paramètres du modèle ( $b$ ,  $\nu_p$  et  $L_p$ ) sur le spectre d'énergie des ondes. Enfin, nous comparons le modèle d'excitation par la pénétration convective avec l'excitation par la pression turbulente suivant le modèle de Kumar *et al.* (1999).

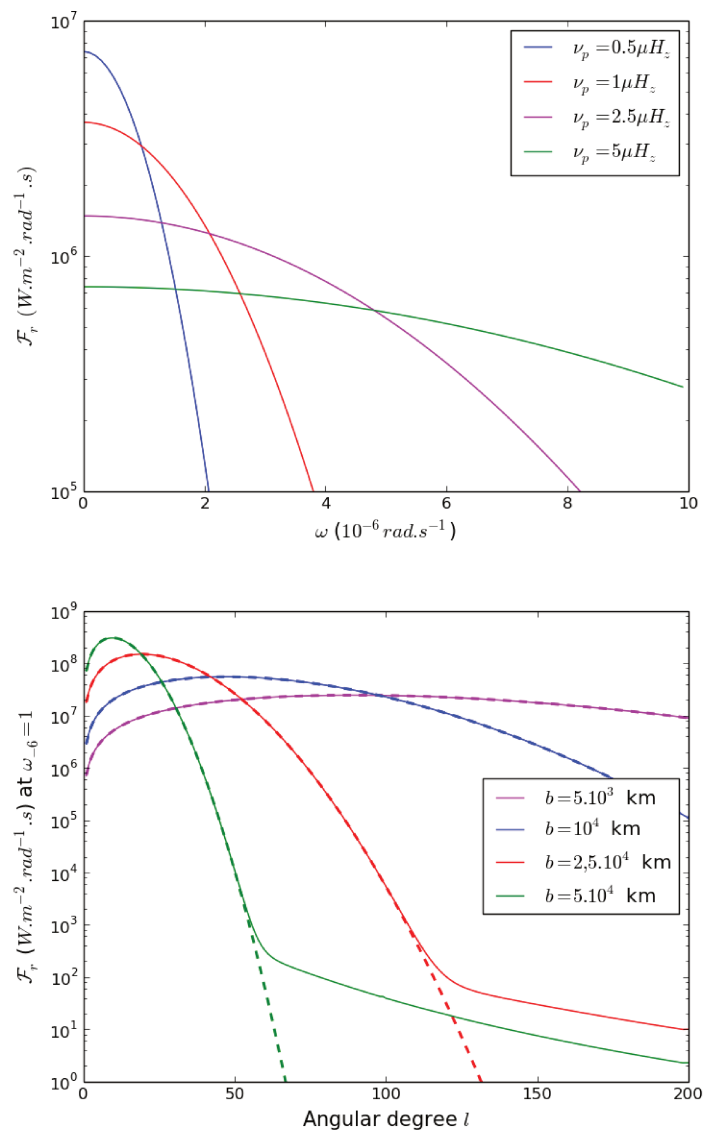
### 6.4.1 Flux d'énergie et influence des caractéristiques du panache

Une estimation du flux d'énergie des ondes a été obtenue pour un modèle solaire standard. Ce dernier a été calculé avec le code d'évolution stellaire CESTAM (Marques *et al.* 2013), pour une composition chimique solaire (voir Pinçon *et al.* 2017, pour plus de détails). Les paramètres décrivant les panaches ont été choisis par défaut comme étant égaux aux estimations obtenues dans la Section 6.3.3, c'est-à-dire  $b = 10^4$  km,  $\nu_p = 1 \mu\text{Hz}$ ,  $V_b = 185$  m s<sup>-1</sup> dans le cas du Soleil. La longueur de pénétration a été choisie égale à la limite supérieure obtenue par Basu (1997), soit  $L_p = 0.05 H_p$ . La valeur de Brunt-Väisälä en haut de la zone radiative a été estimée comme étant égale à  $N_0 \sim 300 \mu\text{Hz}$ . Enfin, le facteur de remplissage a été fixé à  $\mathcal{A} \sim 0.1$  en accord avec des simulations numériques de convection turbulente en boîte Cartésienne (e.g., Stein & Nordlund 1998; Brummell *et al.* 2002). Ceci correspond un ensemble d'environ 1000 panaches pénétrants à la base de la zone convective. Dans un premier temps, nous considérons par défaut une transition discontinue (i.e.,  $d = 0$ ).

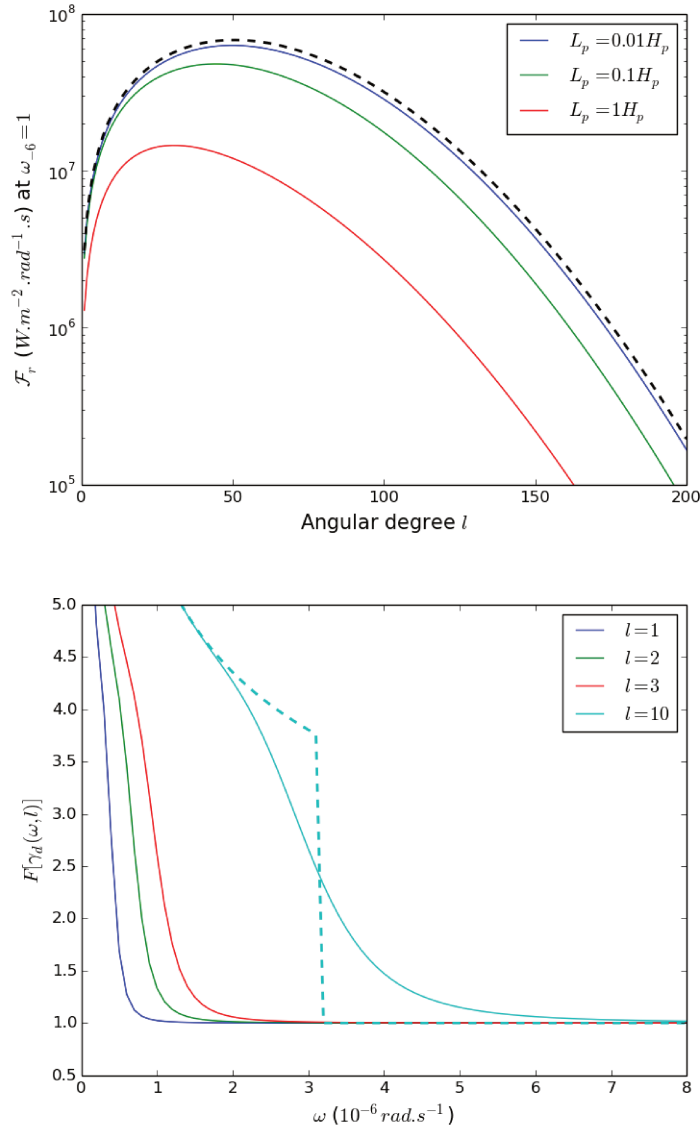
Avec ces valeurs par défaut pour les paramètres du modèle, le flux d'énergie total émis sous forme d'ondes à la base de la zone convective, obtenu en intégrant Eq. (6.57) pour  $\omega$  compris entre 0 et 25  $\mu\text{rad s}^{-1}$  et  $l$  compris entre 1 et 100, est estimé à  $\mathcal{F}_r \sim 3 \cdot 10^6$  W m<sup>-2</sup>. Cela représente environ 1% du flux d'énergie cinétique des panaches à la base de la zone convective, c'est-à-dire  $\mathcal{A} \rho_b V_b^3/2$ , qui correspond quant à lui à environ 40% du flux total d'énergie solaire. Ces résultats justifient a posteriori la conservation de l'énergie et l'hypothèse d'absence de rétroaction des ondes sur les panaches.

Pour continuer, nous discutons l'origine des différents termes apparaissant dans Eq. (6.57) et évaluons l'influence des paramètres du modèle sur le flux généré en les faisant varier autour de leur valeur par défaut.

1. *Corrélation temporelle entre les ondes et les panaches* : celle-ci est représentée par le terme  $e^{-\omega^2/4\nu_p^2}/\nu_p$ . Le profil Gaussien résulte du profil temporel qui a été supposé pour la vitesse des panaches. La largeur du spectre est de l'ordre de  $\nu_p = 1/\tau_p$  tandis que son amplitude est inversement proportionnelle à  $\nu_p$ . Une augmentation de la valeur de  $\nu_p$  résulte donc en une augmentation de l'énergie distribuée sur les fréquences qui sont supérieures à  $\nu_p$  aux



**FIGURE 6.7:** Haut : Flux radial moyen d'énergie des ondes par unité de pulsation en haut de la zone radiative en fonction de  $\omega$ , pour n'importe quel nombre azimutal  $m$  et un degré angulaire  $l = 1$ . Différentes valeurs sont considérées pour  $\nu_p$ . Bas : Flux radial moyen d'énergie des ondes par unité de pulsation en fonction du degré angulaire à la pulsation  $\omega = 10^{-6} \text{ rad s}^{-1}$ . Différentes valeurs pour  $b$  sont considérées. Le facteur de remplissage est supposé constant, de telle sorte qu'un changement dans le rayon du panache résulte en un changement dans le nombre de panaches pénétrants. Les résultats obtenus avec une intégration numérique de Eq. (6.59) (lignes continues) sont comparés à ceux obtenus en utilisant Eq. (6.63) (lignes pointillées).



**FIGURE 6.8:** **Haut :** Idem que pour la figure précédente avec  $b = 10^4$  km mais pour différentes valeurs de  $L_p$ . La ligne noire pointillée représente le résultat obtenu en utilisant l'expression approchée donnée dans Eq. (6.65). **Bas :** Facteur de transition en fonction de la pulsation de l'onde et pour différentes valeurs du degré angulaire. La ligne pointillée représente le résultat obtenu en considérant Eq. (6.62). Pour éviter, une discontinuité autour de  $x = 1$ , c'est-à-dire dans un régime intermédiaire entre une transition douce et une transition discontinue, une moyenne pondérée de Eq. (6.62) entre les deux régimes (de part et d'autre de  $\gamma_d = 1$ ) a été utilisée (ligne continue, voir Pinçon *et al.* (2016) pour les détails).

dépens des fréquences qui en sont inférieures. Néanmoins, le flux total d'énergie de l'onde est conservé puisqu'il ne dépend pas de  $\nu_p$ . Ceci est la conséquence du caractère stationnaire du processus d'excitation. Sur la FIGURE 6.7 (en haut), on peut constater que la valeur de  $\nu_p$  a un impact important sur la forme du spectre sur un intervalle de fréquences donné.

2. *Corrélation horizontale moyenne* : Celle-ci est représentée par le terme  $\mathcal{B}_l$ . Comme les panaches sont supposés être uniformément distribués sur la sphère, la symétrie sphérique est conservée en moyenne et ce terme ne dépend pas du nombre azimutal  $m$ . Cette fonction est décroissante avec le degré angulaire  $l$  puisque les harmoniques sphériques dans Eq. (6.60) possèdent de plus en plus de zéros sur la sphère quand  $l$  augmente. De plus, un changement de comportement est attendu quand la longueur d'onde horizontale devient plus petite que la largeur du panache, c'est-à-dire quand  $l \gtrsim 2\pi r_b/b$ . Cela correspond au degré critique,  $l_{\text{crit}}$ , en-dessous duquel l'approximation donnée dans Eq. (6.63) est valide. En utilisant Eq. (6.63) et en négligeant la dépendance de  $\mathcal{H}_l$  avec  $l$  dans Eq. (6.57), le flux d'énergie des ondes est proportionnel à  $\Lambda \mathcal{B}_l$ ; il est donc maximum, à  $\omega$  fixé, pour un degré  $l_{\text{max}} \sim r_b/b$ . Ces caractéristiques sont bien vérifiées sur la FIGURE 6.7 (en bas) où l'on a considéré quatre valeurs pour la largeur des panaches,  $b = 0.5, 1, 2.5$  et  $5 \cdot 10^4$  km, en laissant le facteur de remplissage fixe. Le flux total d'énergie des ondes généré en haut de la zone radiative dans un intervalle de fréquences  $\omega = 0 - 25 \cdot 10^{-6}$  rad s $^{-1}$  et de degrés angulaires  $l = 1 - 200$  représente alors respectivement 1.3%, 1%, 0.5% et 0.25% du flux total solaire. Cette diminution avec la largeur du panache provient majoritairement du fait que le nombre de panaches diminue à facteur de remplissage constant. En effet, pour ces quatre valeurs de  $b$ , on a respectivement  $\mathcal{N} = 4000, 1000, 160$  et  $40$  avec  $\mathcal{A} = 0.1$ .
3. *Terme de forçage* : celui-ci est représenté par le terme  $\mathcal{H}_l$  dans Eq. (6.57). Il est égal à la puissance instantanée injectée par un panache sous forme d'ondes dans la zone de pénétration. Selon Eq. (6.58), ce terme décroît avec le degré angulaire puisque la longueur caractéristique d'évanescence de l'onde dans la zone convective est proportionnelle à  $\Lambda^{-1}$ . C'est le seul terme qui dépend de la longueur de pénétration. Si  $L_p$  diminue, cela signifie que le panache est plus fortement freiné; l'excitation est alors plus efficace puisque le panache transfère son énergie dans une région où les ondes ont une amplitude plus grande. De façon équivalente, si  $L_p$  augmente, l'énergie du panache est transférée sur une région plus grande où l'amplitude des ondes décroît rapidement. Ce comportement est vérifié sur la FIGURE 6.8 (en haut). D'abord, la décroissance de  $\mathcal{H}_l$  avec  $l$  à  $L_p$  donné entraîne une légère diminution du degré angulaire au maximum du flux,  $l_{\text{max}}$ , par rapport à sa valeur  $r_b/b$  obtenue quand  $L_p \rightarrow 0$ , c'est-à-dire suivant Eq. (6.65). Ensuite, pour trois valeurs de  $L_p$  couvrant deux ordres de grandeur, soit  $L_p = 0.01, 0.1$  et  $1H_p$ , le flux total d'énergie des ondes intégré sur un intervalle de fréquences  $\omega = 0 - 25 \cdot 10^{-6}$  rad s $^{-1}$  et de degrés angulaires  $l = 1 - 200$  donne respectivement 1.3%, 0.8% et 0.2% du flux total solaire. On retrouve bien que plus la longueur de pénétration est petite, plus l'excitation est efficace.
4. *Facteur de transition* : celui-ci est représenté par le terme  $f(\gamma_d)$  donné dans Eq. (6.62). Ce facteur distingue le cas où le profil de la fréquence de Brunt-Väisälä est discontinu en bas de la zone convective ( $f(\gamma_d) \ll 1$ ) au cas où la transition est plus douce ( $f(\gamma_d) \gg 1$ ). Dans le cas d'une transition quasi discontinue, le flux généré est inversement proportionnel à  $N_0$  à travers le terme  $F_{R,l}$ . En effet, plus la valeur de  $N_0$  est grande, plus l'impédance des ondes en haut de la zone radiative est élevée (Press 1981) et plus l'énergie transférée sous forme d'ondes est petite. Le cas d'une transition plus douce concerne les composantes ondulatoires pour lesquelles la distance de transition est plus grande que la longueur d'onde radiale. Dans le cas d'une transition linéaire, le flux d'énergie généré est alors égal au produit de la valeur du flux obtenue dans la cas d'une transition discontinue avec un facteur égal à  $(k_r d)^{1/3} \gtrsim 1$ , en accord avec Lecoanet & Quataert (2013). Ainsi, dans ce cas, le flux généré dépend du

gradient de la fréquence de Brunt-Väisälä dans la zone de transition suivant

$$\mathcal{F}_r \propto \left( \frac{d}{N_0^2} \right)^{1/3} \approx \left| \frac{dN^2}{dr} \right|^{-1/3}, \quad (6.66)$$

si bien que plus la transition est douce, plus le transfert d'énergie des ondes vers la zone radiative est important. Le facteur de transition est représenté en fonction de la fréquence de l'onde sur la FIGURE 6.8 (en bas). La distance de transition a été choisie comme étant égale à  $d \sim 0.01H_p \sim 500$  km, en accord avec des estimations par des modèles semi-analytiques (Schmitt *et al.* 1984; Rempel 2004). On voit que l'augmentation du flux transmis due à l'effet de la transition est plus importante pour les basses fréquences et pour les hauts degrés. Ceci s'explique par le fait que la longueur d'onde radiale est proportionnelle à  $\omega/\Lambda$  pour les ondes internes de gravité. Avec cette valeur pour  $d$ , le flux total d'énergie des ondes intégré sur l'intervalle de fréquences  $\omega = 2 - 25 \cdot 10^{-6}$  rad s<sup>-1</sup> pour  $l = 1 - 200$  représente environ 1.2% du flux solaire total, ce qui est environ dix fois supérieur au cas où la transition est discontinue (en restant dans l'intervalle considéré). Pour  $\omega = 0 - 25 \cdot 10^{-6}$  rad s<sup>-1</sup> et  $l = 1 - 200$ , le flux total d'énergie des ondes est estimé à environ 11% du flux solaire total, soit environ un quart de l'énergie cinétique des panaches en bas de la zone convective. Néanmoins, ce résultat est vraisemblablement surestimé et doit être considéré avec précaution. En effet, de nombreux processus physiques à très basses fréquences n'ont pas été pris en compte dans cette estimation, comme par exemple les effets non-adiabatiques, la rotation ou encore des effets non-linéaires.

En conclusion, l'excitation par la pénétration convective génère des ondes transportant environ 1% du flux total solaire en haut de la zone radiative. La variation des paramètres  $\nu_p$ ,  $b$  et  $L_p$  dans de larges intervalles autour des valeurs par défaut a peu d'influence sur le flux total d'énergie généré. L'impact de ces paramètres s'avère néanmoins important sur la forme du spectre. Cela peut avoir d'importantes conséquences sur le transport de moment cinétique par les ondes et sera plus amplement discuté dans le Chapitre 7. De plus, l'analyse précédente valide l'utilisation de l'expression approchée pour le flux donnée dans Eq. (6.65). Enfin, on a vu que plus le gradient de la fréquence de Brunt-Väisälä est faible (en valeur absolue) à la base de la zone convective, plus le flux émis sous forme d'ondes est élevée. Malheureusement, les simulations numériques actuelles de pénétration convective sont incapables de quantifier l'extension de cette région dans les régimes stellaires pour, par exemple, les nombres de Reynolds ou de Prandtl (e.g. Brummell *et al.* 2002). Quelques modèles semi-analytiques peuvent actuellement nous aider à mieux comprendre cette région (e.g. Schmitt *et al.* 1984; Rempel 2004). Ce point mérite néanmoins de futures investigations.

#### 6.4.2 Comparaison au modèle d'excitation par la pression turbulente

Pour conclure ce chapitre, nous comparons le résultat obtenu avec le modèle d'excitation par la pénétration convective présenté juste avant avec celui obtenu en considérant la pression turbulente dans la zone convective comme terme de forçage. Pour cela, nous considérons le formalisme proposé par Kumar *et al.* (1999), ce dernier correspondant au modèle d'excitation le plus utilisé dans les précédents travaux (e.g. Talon *et al.* 2002; Talon & Charbonnel 2005; Charbonnel *et al.* 2013). Pour calculer l'expression du flux donné dans la Section 6.2.3,  $L$  et  $v$  sont déduits à partir de la MLT et le déplacement associé à l'onde est approché en utilisant les fonctions d'onde WKB normalisées, de façon similaire à l'Eq. (25) de Kumar *et al.* (1999). Dans notre modèle solaire, la fréquence de retournement convectif vaut  $\omega_c \approx 0.8 \cdot 10^{-6}$  rad s<sup>-1</sup> et la vitesse convective vaut  $v_c \approx 25$  m s<sup>-1</sup> à la base de la zone convective, ce qui correspond à un flux convectif à la base de la zone convectif environ égal à 5% du flux total solaire. Les spectres obtenus dans chacun des deux cas sont comparés sur la FIGURE 6.9 et la FIGURE 6.10.

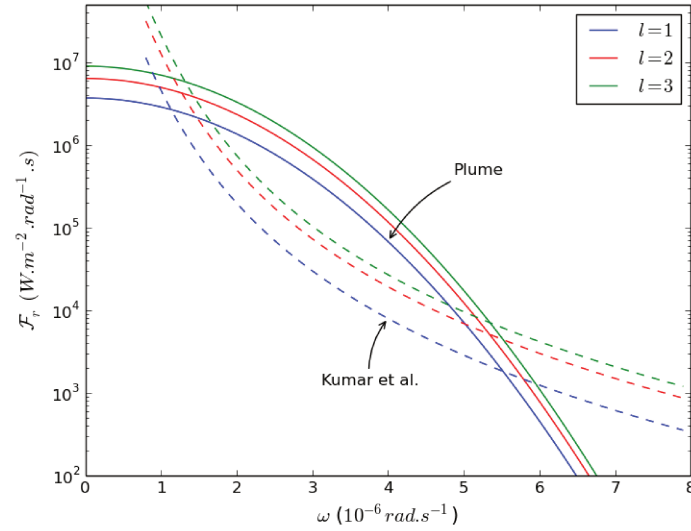
D'abord, nous trouvons que le flux radial total d'énergie des ondes générées par la pression turbulente, intégré sur l'intervalle de fréquences  $\omega = 0.8 - 25 \cdot 10^{-6}$  rad s<sup>-1</sup> et de degrés angulaires



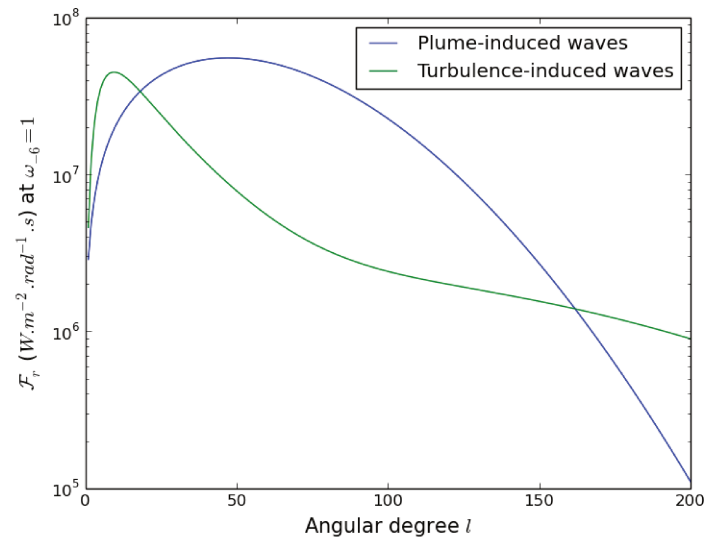
$l = 1 - 200$ , est égal à 0.1% du flux total solaire. Sur ce même intervalle, l'excitation par la pénétration convective est six fois plus efficace. Sur l'intervalle  $\omega = 1 - 25 \cdot 10^{-6} \text{ rad s}^{-1}$ , le flux généré par la pression turbulente chute à 0.02 % du flux solaire total, tandis que celui généré par la pénétration convective reste autour de 0.5%. Cela est notamment dû au fait que le flux d'énergie des ondes générées par la pression turbulente a une amplitude presque un ordre de grandeur en-dessous de celui des ondes générées par la pénétration convective sur l'intervalle de fréquences compris entre 2 et  $5 \cdot 10^{-6} \text{ rad s}^{-1}$ , comme on peut le voir sur la FIGURE 6.9. La distribution en énergie suivant le degré angulaire est aussi différente entre les deux modèles. Sur la FIGURE 6.10, on voit que le flux est maximal autour de  $l \sim 5$  dans le cas du modèle de génération de Kumar *et al.* (1999) ; cela correspond à l'échelle de taille des plus gros tourbillons convectifs prédite à partir de la MLT. Le flux d'énergie généré par la pénétration convective est quant à lui maximal autour de  $l \sim 50$  ; cela correspond à l'échelle de largeur des panaches à la base de la zone convective, plus petite de celle des tourbillons convectifs d'environ un facteur 5.

Sur les deux figures précédentes, on voit aussi que l'excitation par la pression turbulente devient prédominante à hautes fréquences et pour des hauts degrés angulaires, là où le flux d'énergie des ondes générées par la pénétration convective chute drastiquement. En effet, dans ce travail, nous avons supposé que les panaches sont des structures cohérentes avec une taille et un temps de vie bien défini. En d'autres mots, la turbulence à l'intérieur des panaches a été négligée. La corrélation entre les panaches et les ondes tend donc rapidement vers zéro pour des fréquences supérieures à environ  $\nu_p$  et des degrés supérieurs à environ  $r_b/b$ . Dans la réalité, la turbulence doit se développer à plus petite échelle dans les panaches et générer des ondes. Cela explique pourquoi le flux d'énergie des ondes générées par la pression turbulente dans la zone convective devient prédominant dans le domaine des hautes fréquences.

Pour conclure, l'excitation des ondes internes de gravité par la pénétration convective est cinq à dix fois plus efficace que par la pression turbulente telle que proposée dans le modèle de Kumar *et al.* (1999). Alors que les ondes générées par la pression turbulente ont la plupart de leur énergie dans les fréquences autour de  $\omega_c$ , celles excitées par la pénétration convective peuvent avoir de larges amplitudes sur une plus grande tranche de fréquences. Ceci dépend néanmoins de la valeur de  $\nu_p$  par rapport à  $\omega_c$ . Enfin, du fait d'une extension spatiale des panaches dans le plan horizontal plus faible que la taille des plus gros tourbillons convectifs à la base de la zone convective, les ondes générées par la pénétration convective sont efficacement excitées à des plus hauts degrés angulaires. Enfin, ces résultats restent valides malgré le large intervalle de valeurs considérées pour les paramètres du modèle d'excitation dans la Section 6.4.1. En effet, le flux d'énergie des ondes générées en haut de la zone radiative est, dans tous les cas, supérieur à 0.2 % du flux solaire total, c'est-à-dire supérieur au flux d'énergie des ondes générées par la pression turbulente.



**FIGURE 6.9:** Flux radial moyen d'énergie des ondes par unité de pulsation émis en haut de la zone radiative en fonction de la pulsation de l'onde, pour n'importe quel nombre azimutal et les degrés angulaires  $l = 1, 2$  et  $3$ . Les ondes générées par la pénétration convective (ligne continue) sont comparées aux ondes générées par la pression turbulente dans la zone convective selon le modèle de Kumar *et al.* (1999).



**FIGURE 6.10:** Flux radial moyen d'énergie des ondes par unité de pulsation émis en haut de la zone radiative en fonction du degré angulaire, pour une pulsation fixée à  $\omega = 10^{-6} \text{ rad s}^{-1}$ . Le modèle de génération par la pénétration convective (ligne bleue) est comparé au modèle de Kumar *et al.* (1999) (ligne verte).



# Generation of internal gravity waves by penetrative convection

C. Pinçon, K. Belkacem, and M. J. Goupil

LESIA, Observatoire de Paris, PSL Research University, CNRS, Université Pierre et Marie Curie, Université Paris Diderot, 92195 Meudon, France  
e-mail: charly.pincon@obspm.fr

Received 29 October 2015 / Accepted 13 December 2015

## ABSTRACT

**Context.** The rich harvest of seismic observations over the past decade provides evidence of angular momentum redistribution in stellar interiors that is not reproduced by current evolution codes. In this context, transport by internal gravity waves can play a role and could explain discrepancies between theory and observations.

**Aims.** The efficiency of the transport of angular momentum by waves depends on their driving mechanism. While excitation by turbulence throughout the convective zone has already been investigated, we know that penetrative convection into the stably stratified radiative zone can also generate internal gravity waves. Therefore, we aim at developing a semianalytical model to estimate the generation of IGW by penetrative plumes below an upper convective envelope. The formalism is developed with the purpose of being implemented in 1D stellar evolution codes.

**Methods.** We derive the wave amplitude considering the pressure exerted by an ensemble of plumes on the interface between the radiative and convective zones as source term in the equation of momentum. We consider the effect of a thermal transition from a convective gradient to a radiative one on the transmission of the wave into the radiative zone. The plume-induced wave energy flux at the top of the radiative zone is computed for a solar model and is compared to the turbulence-induced one.

**Results.** We show that, for the solar case, penetrative convection generates waves more efficiently than turbulence and that plume-induced waves can modify the internal rotation rate on shorter time scales. The result is solid since it holds despite a wide range of values considered for the parameters of the model. We also show that a smooth thermal transition significantly enhances the wave transmission compared to the case of a steep transition.

**Conclusions.** Driving by penetrative convection must be taken into account as much as turbulence-induced waves for the transport of internal angular momentum. We propose a simple prescription that has the advantage of being easily implementable into 1D stellar evolution codes. We expect this mechanism to work in evolved stars, which will be subject to future investigations.

**Key words.** hydrodynamics – stars: interiors – stars: rotation – waves – convection

## 1. Introduction

Rotation is a fundamental ingredient of stellar evolution. It induces transport of angular momentum and of chemical elements that modifies the internal structure of stars (e.g., Maeder 2009). For instance, rotationally induced mixing is able to refresh nuclear burning cores with hydrogen and thus to increase the star lifetime on the main sequence. Among other consequences, stellar age-dating is significantly affected by rotation (e.g., Lebreton et al. 2014) such that the rotational history of stars has to be fully understood to obtain a relevant and complete picture of their evolution.

This requirement is supported by an increasing number of observational facts. First, indirect constraints, such as anomalies in surface chemical abundances observed in stellar clusters, highlighted the importance of rotationally induced mixing (see Charbonnel & Talon 2008, for a review). Second, the development of asteroseismology made direct measurements of the internal rotation profile possible. In the Sun, seismic measurements showed that its internal radiative zone rotates almost as a solid body (e.g., Brown et al. 1989; García et al. 2007). More recently, seismic data provided by the space-borne missions CoRoT (Baglin et al. 2006a,b) and Kepler (Borucki et al. 2010) enabled us to extend the study from the main sequence up to the red giant evolutionary phase. Thanks to the detection of mixed-modes (e.g., Bedding et al. 2010; Mosser et al. 2012b),

it has been possible to estimate the core rotation rate of several subgiant stars observed by Kepler (Deheuvels et al. 2012, 2014) as well as the spinning down of the red giants core during their ascent of the vertical branch (Mosser et al. 2012a).

All these observational constraints emphasized the need for including transport of angular momentum as well as rotational mixing in stellar models. However, stellar evolution codes that take meridional circulation and shear-induced turbulence into account are unable to reproduce the observations by several orders of magnitude (Eggenberger et al. 2012; Marques et al. 2013; Ceillier et al. 2013). This suggests that other efficient transport processes must be included. Several mechanisms have already been investigated such as the effects of magnetic fields (Spruit 2002; Heger et al. 2005; Cantiello et al. 2014; Rüdiger et al. 2015) or mixed modes (Belkacem et al. 2015a,b). Internal gravity waves (hereafter IGW) can also play a role in the radiative zone of stars. They have been shown to be able to explain the nearly flat internal rotation profile observed in the Sun (Zahn 1997; Talon et al. 2002) and to be responsible for the cold side of the lithium dip observed in low-mass stars (Talon & Charbonnel 1998a,b, 2003, 2004, 2005).

The efficiency of the transport by IGW crucially depends on the excitation mechanism. IGW are preferentially generated at the boundary between the convective and radiative regions by convective motions. Press (1981) considered turbulent pressure at the base of the convective zone as driving process. He found

that the wave energy flux could be expressed as the product of the mechanical convective energy flux at the base of the convection region with the ratio of the wave impedances in both regions (i.e., in the convective and the radiative regions). [Garcia Lopez & Spruit \(1991\)](#) followed a similar approach but considered a distribution of convective eddies. They assumed the turbulence to follow a Kolmogorov spectrum and took into account the incoherent behavior of the eddies. Later, [Zahn \(1997\)](#) generalized this model to a continuous wave spectrum. Finally, [Kumar et al. \(1999\)](#) adapted the work of [Goldreich et al. \(1994\)](#) to the case of the excitation of IGW. In this model, IGW are generated by Reynold's stress throughout the convective zone and the approach has the advantage of clearly taking into account the spatial and temporal correlations between the turbulent stochastic source and the waves. Most of the estimates of the transport by IGW used the latter formulation to include the effects of IGW in stellar radiative zones (e.g., [Talon & Charbonnel 2005](#); [Charbonnel et al. 2013](#); [Mathis et al. 2013](#); [Fuller et al. 2014](#)).

However, penetration of convective plumes into stably stratified layers can also generate IGW. Indeed, in the penetration region, plumes are decelerated by buoyancy braking and can release a part of their kinetic energy into waves. In the geophysical context, this mechanism has already been observed in laboratory experiments and investigated theoretically for atmospheric flows ([Townsend 1966](#); [Stull 1976](#)). In astrophysics, excitation of internal waves by penetrative convection has been investigated by means of 2D numerical simulations ([Hurlburt et al. 1986](#); [Andersen 1994](#); [Dintrans et al. 2005](#); [Rogers & Glatzmaier 2006](#); [Rogers et al. 2013](#)) and more recently, in 3D, spherical numerical simulations for the Sun ([Brun et al. 2011](#); [Alvan et al. 2014, 2015](#)). Nevertheless, it is difficult today to extrapolate numerical results to stellar regimes. For instance, numerical constraints require higher thermal diffusivities than in stellar interiors, resulting in much more important convective energy flux ([Rempel 2004](#); [Dintrans et al. 2005](#)) and so an expected overestimated wave energy flux.

In this work, we propose a complementary approach and elaborate a semianalytical model of excitation of IGW by penetrative convection. We consider the impact of the plumes on the stably stratified layers as the driving mechanism. The effect of the thermal transition on the transmission of the wave into the radiative zone is taken into account at the interface between the radiative and convective regions (hereafter, radiative/convective interface). Our goal is to estimate how efficient is this mechanism compared to the excitation by turbulence as proposed by [Kumar et al. \(1999\)](#). If it is shown to be as efficient or more than the latter, such a simplified description will enable us to account for the transport of angular momentum by plume-induced waves in 1D stellar evolution codes.

The article is organized as follows. In Sect. 2, we introduce the theoretical formalism. Section 3 presents the characteristics of the plumes and describes buoyancy braking process in the penetration zone. In Sect. 4, we summarize the method used to derive the wave energy flux and the main results are given. The wave energy flux is computed for a solar model in Sect. 5. The results are discussed and compared to those obtained with the formalism of [Kumar et al. \(1999\)](#) in Sect. 6. Conclusions are formulated in Sect. 7.

## 2. Theoretical formalism

Our objective is to estimate the amount of plume kinetic energy transferred into wave energy in the penetration region. For

this purpose, we introduce the theoretical formalism and general concepts regarding IGW and spectral analysis. In the following, we will deal with a stationary random process of excitation by an ensemble of plumes and will use a statistical approach.

### 2.1. Wave equation and source term

The determination of the wave energy flux requires the calculation of the wave amplitude, which depends on the excitation mechanism. As convective plumes penetrate into the stably stratified medium, they perturbate the equilibrium state and generate waves by exerting pressure on the radiative/convective interface. We assume that the total velocity field can be split into two components: the wave velocity field  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ , and the plume velocity field  $\mathbf{V}_p(\mathbf{r}, t)$ . This actually corresponds to neglecting the dynamical effect of the turbulence inside the plumes. Moreover, we assume that the plumes evolve independently of the wave velocity and that there is no feedback from the waves on the plumes. This also suggests that the plumes and the waves follow their own continuity equation independently of each other. This is actually a good approximation if the wave velocity field is much smaller than the plume velocity field  $|\mathbf{v}| \ll |\mathbf{V}_p|$ , which will be verified a posteriori.

Under all this set of approximations, we will then focus our attention on the generation of waves by the stress exerted by the convective plumes, represented by  $\nabla \cdot (\rho \mathbf{V}_p \otimes \mathbf{V}_p)$  as the source term in the momentum equation, with  $\rho$  the density at the equilibrium,  $\nabla$  the nabla operator and  $\otimes$  the tensorial product. For sake's of simplicity, we neglect any effects of rotation and adopt the Cowling approximation. Therefore, the linearized equations of momentum and of continuity with respect to the equilibrium state for the wave perturbations read

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\nabla p'}{\rho} - \frac{\rho'}{\rho} \mathbf{g} = -\frac{1}{\rho} \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}_p \otimes \mathbf{V}_p) \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\delta \rho}{\rho} \right) + \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (2)$$

where  $p'$  and  $\rho'$  denotes Eulerian perturbations of pressure and density,  $\delta \rho$  is the Lagrangian perturbation of density and  $\mathbf{g}$  the gravitational acceleration at equilibrium.

### 2.2. Spectral density of the wave specific energy

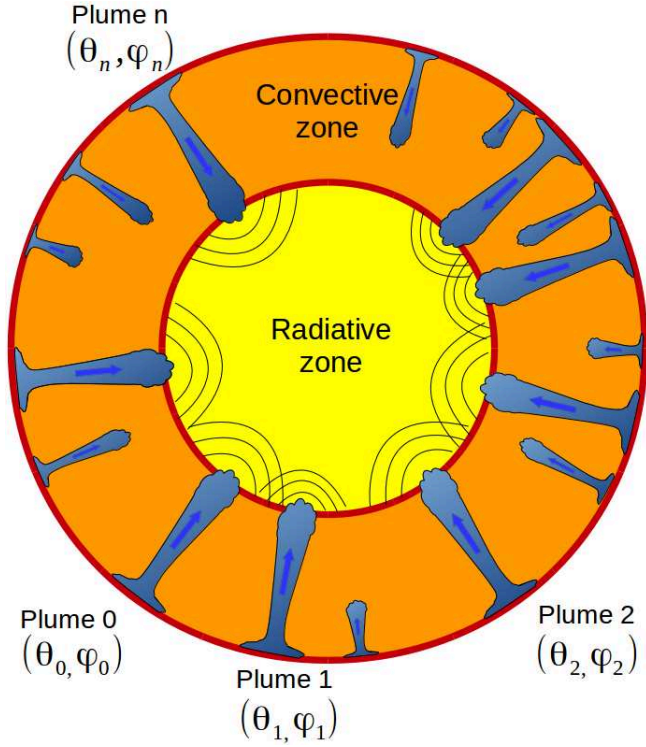
In the following, we want to determine the spectral distribution of the wave energy flux at each level in the star, generated by a population of penetrative plumes.

#### 2.2.1. Stationarity and ergodicity

We assume that at each time, an ensemble of several uniformly distributed incoherent plumes generate waves by penetrative convection (see Fig. 1, for a schematic representation). The process of excitation is then supposed to be random, stationary and ergodic, and a statistical approach is valid since the number of plumes is high enough. Hence, we can define the mean specific wave energy at a point  $\mathbf{r}$  as

$$\langle E \rangle(\mathbf{r}) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(r) |\mathbf{v}_T(\mathbf{r}, t)|^2 dt, \quad (3)$$

where  $\mathbf{v}_T(\mathbf{r}, t)$  is equal to the truncated part of the wave velocity field in the interval  $[-T/2, T/2]$  and is null outside. The



**Fig. 1.** Schematic view of the star. The convective plumes occur in the upper layers of the star and go deeper into the convective region. They grow by turbulent entrainment of matter at their edges and reach the top of the radiative zone. There, each of them, characterized by their angular position  $(\theta_i, \phi_i)$ , releases a part of their kinetic energy and generate internal waves which can propagate towards the center. In our work, we suppose that there are no reflected waves propagating from the center to the radiative/convective interface.

Parseval-Plancherel's theorem allows us to write

$$\int_{-\infty}^{\infty} \langle |v_T(\mathbf{r}, t)|^2 \rangle dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle |\hat{v}_T(\mathbf{r}, \omega)|^2 \rangle d\omega, \quad (4)$$

where  $\omega$  is the temporal radian frequency and the symbol  $\langle \hat{\cdot} \rangle$  denotes the time Fourier transform<sup>1</sup>. Then, using Eq. (4) and since the integral and the limit commute, Eq. (3) becomes

$$\langle E \rangle(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon(\mathbf{r}, \omega) d\omega, \quad (5)$$

where we have defined the spectral density of the wave specific energy

$$\epsilon(\mathbf{r}, \omega) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{\rho(r)}{T} \frac{\langle |\hat{v}_T(\mathbf{r}, \omega)|^2 \rangle}{2\pi}. \quad (6)$$

### 2.2.2. Ensemble of $N$ plumes

At each time, we assume that, on average,  $N$  identical plumes are penetrating into the stably stratified zone. We note  $(\theta_i, \phi_i)$  the angular position of the center of the plume  $i$ , that penetrates at the time  $t_i$  with a velocity field  $V_{p,i}(\mathbf{r}, t)$ . Since the plumes are spatially and temporally well separated with each other, the source term in Eq. (1) can be rewritten as

$$\nabla \cdot (\rho V_p \otimes V_p) = \sum_{i=1}^{+\infty} \nabla \cdot (\rho V_{p,i} \otimes V_{p,i}). \quad (7)$$

<sup>1</sup> The time Fourier transform of a function  $X(\mathbf{r}, t)$  is defined as  $\mathcal{F}[X] = \hat{X}(\mathbf{r}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\mathbf{r}, t) e^{-i\omega t} dt$ .

Each plume  $i$  generates a wave velocity field  $v_i(\mathbf{r}, t; \theta_i, \phi_i, \Delta t = t_i)$  where  $\Delta t$  denotes the time shift of the excitation event compared to the instant  $t = 0$ . Given the linearity of the wave equation, the total wave velocity field is the superposition of all the contributions. In a similar way, at a fixed position  $\mathbf{r}$ , the truncated wave velocity field,  $v_T$ , in the interval  $[-T/2, T/2]$ , must be the superposition of the wave velocity fields generated by a finite number  $N_T$  of plumes at different times<sup>2</sup>

$$v_T(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1}^{N_T} v_i(\mathbf{r}, t; \theta_i, \phi_i, \Delta t = t_i). \quad (8)$$

When writing Eq. (8), we assume that the plume-induced wave packet  $v_i$  at any point  $\mathbf{r}$  has a finite lifetime (otherwise, this would lead to an accumulation of wave energy in the radiative zone under the adiabatic hypothesis). Indeed, as suggested by the momentum equation Eq. (1), it must be close to the characteristic plume lifetime; this is the consequence of the temporal correlation with the plume and the fact that no reflected wave is considered, but only propagative ones towards the center of the star.

By the linearity and the time shift properties of Fourier transform, we then obtain<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} \langle |\hat{v}_T(\mathbf{r}, \omega)|^2 \rangle &= \sum_{i=1}^{N_T} \langle |\hat{v}_i(\Delta t = 0)|^2 \rangle \\ &+ \sum_{i=1, j \neq i}^{N_T} \langle e^{-i\omega(t_i - t_j)} \hat{v}_i(\Delta t = 0) \bar{\hat{v}}_j(\Delta t = 0) \rangle, \end{aligned} \quad (9)$$

where the bar denotes the complex conjugate. The statistical average covers the spatial and temporal distribution of the plumes. The plumes are incoherent with each other and so the phase lag between each component is randomly distributed. Note that the same assumptions were first used by Garcia Lopez & Spruit (1991). As a consequence, the second term in the right-hand side of Eq. (9) vanishes. Moreover, the plumes being uniformly distributed and independent with each other, the probability for the plumes  $1, 2, \dots, N_T$  to be located in the solid angles  $d\Omega_1, d\Omega_2, \dots, d\Omega_{N_T}$ , respectively, is equal to  $\prod_{i=1}^{N_T} d\Omega_i / (4\pi)^{N_T}$ . Thus, using Eq. (9), Eq. (6) becomes

$$\epsilon(\mathbf{r}, \omega) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \frac{\rho(r)}{2\pi} \sum_{i=1}^{N_T} \left\{ \frac{1}{(4\pi)^{N_T}} \int_{\Omega_j} |\hat{v}_i(\Delta t = 0)|^2 \prod_{j=1}^{N_T} d\Omega_j \right\}. \quad (10)$$

Since we suppose that the plumes are identical and differ from each other only by their angular position, Eq. (10) becomes

$$\epsilon(\mathbf{r}, \omega) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{N_T}{T} \frac{\rho(r)}{8\pi^2} \int_{\Omega_0} |\hat{v}_0(\mathbf{r}, \omega; \theta_0, \phi_0, \Delta t = 0)|^2 d\Omega_0, \quad (11)$$

where  $\hat{v}_0$  is the Fourier transform of the wave velocity field generated by one single plume with the angular position  $(\theta_0, \phi_0)$  at  $t_0 = 0$ .

To go further, the plume destruction rate must equal the plume emerging rate in order to ensure a constant number of penetrating plumes over time. If  $\tau_p$  denotes the characteristic plume lifetime and if it is supposed to be the same for all of them, this

<sup>2</sup> The choice of the plume ensemble depends on the position  $\mathbf{r}$  since we have to consider the travel time of each plume-induced wave packet from its excitation site to this point  $\mathbf{r}$ .

<sup>3</sup> We use the simplifying notation  $\hat{v}_i(\mathbf{r}, \omega; \theta_i, \phi_i, \Delta t) = \hat{v}_i(\Delta t)$ .

rate is equal to  $\mathcal{N}/\tau_p$ . In other words, over a time  $T \gg \tau_p$ , a total number of  $\mathcal{N}_T \sim \mathcal{N}T/\tau_p$  plumes occur and contribute to the wave energy in Eq. (11). Finally, the spectral density of specific wave energy converges on average to

$$\epsilon(\mathbf{r}, \omega) = \mathcal{N} \frac{\nu_p}{2\pi} \rho(r) \int_{\Omega_0} |\hat{v}_0(\mathbf{r}, \omega; \theta_0, \phi_0, t_0 = 0)|^2 \frac{d\Omega_0}{4\pi}, \quad (12)$$

where  $\nu_p = 1/\tau_p$ .

We first notice that the spectral density of wave specific energy is proportional to the number of plumes, which is the consequence of their incoherent behavior (in the case of coherent plumes, the wave specific energy would be proportional to  $\mathcal{N}^2$ ). Second, we see that the use of a statistical approach simplifies the calculation since the case of an ensemble of several plumes is reduced to the study of the excitation by one single plume.

### 2.3. Mean radial wave energy flux per unit of frequency

For convenience, the Eulerian wave velocity field  $\mathbf{v}_0$  is expanded onto the spherical harmonics

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_0(\mathbf{r}, t) = & \sum_{l,m} v_{r,l,m}(r, t) Y_l^m(\theta, \phi) \mathbf{e}_r + v_{p,l,m}(r, t) \nabla Y_l^m(\theta, \phi) \\ & + v_{T,l,m}(r, t) \nabla \wedge (Y_l^m(\theta, \phi) \mathbf{e}_r), \end{aligned} \quad (13)$$

where  $(r, \theta, \phi)$  are the spherical coordinates,  $l$  is the angular degree,  $m$  the azimuthal number,  $\mathbf{e}_r$  the radial unit vector, and where  $v_{r,l,m}$ ,  $v_{p,l,m}$  and  $v_{T,l,m}$  are the radial, poloidal and toroidal components of the wave velocity field, respectively. Given the decomposition in Eq. (13), Eq. (12) averaged over the solid angle represents the angular distribution of energy and reads

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(r, \omega) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \epsilon(r, \theta, \phi, \omega) d\Omega \\ &= \mathcal{N} \sum_{l,m} \tilde{\mathcal{E}}_{l,m}(r, \omega), \end{aligned} \quad (14)$$

where we have defined

$$\tilde{\mathcal{E}}_{l,m}(r, \omega) = \frac{\nu_p}{8\pi^2} \rho(r) \int_{\Omega_0} \left\{ |\hat{v}_{r,l,m}|^2 + l(l+1) |\hat{v}_{h,l,m}|^2 \right\} \frac{d\Omega_0}{4\pi}, \quad (15)$$

with  $|\hat{v}_{h,l,m}|^2 = |\hat{v}_{p,l,m}|^2 + |\hat{v}_{T,l,m}|^2$ . The mean radial wave energy flux by unit of frequency for an angular degree  $l$  and an azimuthal number  $m$  is thus obtained by multiplying the  $(l, m)$  contribution to the spectral density of the specific wave energy with the radial group velocity  $V_{gr}$  in a similar way to Zahn (1997)

$$\mathcal{F}_r(r, \omega, l, m) = \mathcal{N} \tilde{\mathcal{E}}_{l,m}(r, \omega) V_{gr}(r, \omega, l). \quad (16)$$

Indeed, IGW are dispersive waves and the energy carried in the radial direction by such a wave packet travels at first order with the radial group velocity (see Lighthill 1978) given by

$$V_{gr}(r, \omega, l) = \frac{\partial \omega}{\partial k_r} = \frac{\omega^2 (N^2 - \omega^2)^{1/2}}{N^2 k_h}, \quad (17)$$

where  $k_r$  is the local radial component of the wave vector (Press 1981)

$$k_r(r, \omega) = \left( \frac{N^2}{\omega^2} - 1 \right)^{1/2} k_h, \quad (18)$$

with  $k_h = \sqrt{l(l+1)}/r$  the horizontal component of the wave vector and  $N$  the Brunt-Väisälä frequency. The total mean radial wave energy flux per unit of frequency due to the penetration of several plumes is then obtained by summing all the  $(l, m)$  components given by Eq. (16).

## 3. A simple description of convective plumes

The computation of the wave energy flux requires the knowledge of the wave velocity field whose the amplitude directly depends on the excitation mechanism. We then need to model the driving process expressed by the plume-related term in Eq. (1). For this purpose, we present here a simple physical description of convective plumes and their velocity profile in the penetration zone.

### 3.1. Plume velocity field

The disturbance of the radiative/convective interface due to a single plume is localized in space and in time. Therefore, a plume is described by a characteristic radius  $b$  and a characteristic lifetime  $\tau_p$  in the penetration region. We assume that the plume velocity field follows the Gaussian form<sup>4</sup> proposed by Townsend (1966) and we also assume that the horizontal profile is maintained in the penetration region

$$\mathbf{V}_p(\mathbf{r}) = V_0(r) e^{-S_h^2/2b^2} e^{-t^2/\tau_p^2} \mathbf{e}_r, \quad (19)$$

with

$$S_h(\mathbf{r}; \theta_0, \phi_0) = r \arccos [\sin \theta_0 \sin \theta \cos(\phi - \phi_0) + \cos \theta \cos \theta_0], \quad (20)$$

where  $(\theta_0, \phi_0)$  are the angular coordinates of the center of the plume and  $S_h$  corresponds to the distance on the sphere from the center of the plume.

### 3.2. Plume radius

The plume radius at the bottom of the convective zone is estimated from the model of turbulent plumes by Rieutord & Zahn (1995) who derived the expression

$$b = \frac{z_0}{\sqrt{2}} \frac{3\alpha_E(\Gamma_1 - 1)}{2\Gamma_1 - 1}, \quad (21)$$

where  $z_0$  is the thickness of the convective zone,  $\Gamma_1$  the adiabatic coefficient and  $\alpha_E$  the entrainment coefficient whose value is usually taken as 0.083 (Turner 1986). In the solar case and for a monoatomic gas ( $\Gamma_1 = 5/3$ ), we find  $b \approx 10^4$  km, which is about five times smaller than the size of the biggest turbulent eddies at this radius as given by the MLT.

### 3.3. Vertical velocity profile in the penetration zone

Once the plume has penetrated into the stably stratified layers, it is less dense than the surrounding medium and is slowed down by buoyancy braking. We adopt the description of Zahn (1991) who considers a stationary flow in balance with buoyancy. Such an approach is justified by the high Péclet number at the base of the convective zone. Zahn (1991) could estimate the penetration length  $L_p$  and showed that it depends on a filling factor, the radiative diffusivity scale height, the total energy flux and the plume kinetic energy at the base of the convective envelope. In the solar case, he found  $L_p \sim 0.5H_p \sim 10^4$  km. Nevertheless, using helioseismology, Basu (1997) set an upper limit for the overshoot at  $0.05H_p$ , with  $H_p$  the pressure scale height. In the

<sup>4</sup> Under the assumption of a bell-shaped temporal profile,  $\tau_p$  is defined as the time during which the plume kinetic energy is higher than about 60% of its maximal value.

framework of the model proposed by Zahn (1991), Basu (1997) used stellar models with a simple adiabatic extent of the convective zone above a discontinuous thermal transition. In contrast, Christensen-Dalsgaard et al. (2011) demonstrated that smoother transitions were also possible to explain seismic observations of the Sun. Such a kind of transition is supported by more realistic models of penetrative convection taking into account interaction with the upflows and a distribution for the velocities of the plumes (e.g., Rempel 2004). Therefore, given the lack of knowledge and constraints about the penetration process, we will consider the penetration length as a parameter of the model whose value will be chosen around  $0.1H_p$ .

Following the work of Zahn (1991), the vertical plume velocity  $V_0$  in the penetration region is given by<sup>5</sup>

$$V_0(z) = V_b \left[ 1 - \left( \frac{z}{L_p} \right)^2 \right]^{1/3}, \quad (22)$$

where  $z = r_b - r$  with  $r_b$  the radius of the base of the convective zone as given by the Schwarzschild's criterion and  $V_b$  the initial vertical plume velocity in the penetration region, at the radius  $r_b$ . To go further, we use the model of Rieutord & Zahn (1995), so that

$$V_b = \left( \frac{8F_{1p}}{\pi\rho_b b^2} \right)^{1/3}, \quad (23)$$

where  $F_{1p}$  represents the total luminosity (kinetic + enthalpic) carried by one single plume and  $\rho_b$  is the mean density at the base of the convection zone. To estimate  $F_{1p}$ , we assume that each plume carries an energy that is equal, on average, to the one carried by turbulent eddies in the interplume medium such that

$$NF_{1p} \approx L_* \mathcal{A}, \quad (24)$$

where  $L_*$  is the star luminosity and  $\mathcal{A} = Nb^2/4r_b^2$  is the filling factor related to the fraction of the area occupied by the down-drafts at the base of the convective zone. Then, Eq. (23) becomes

$$V_b = \left( \frac{2L_*}{\pi\rho_b r_b^2} \right)^{1/3}, \quad (25)$$

which leads to  $V_b \approx 185 \text{ m s}^{-1}$  in the case of the Sun, i.e about 7 times higher than the convective velocity  $v_c \sim 25 \text{ m s}^{-1}$  as given by the MLT at the base of the convective zone.

### 3.4. Plume lifetime

The plume lifetime is certainly the more difficult plume characteristic to estimate. After having reached the base of the convective zone, the plume penetrates into the stably stratified zone. There, it is slowed down and destroyed after a characteristic time  $\tau_p$ . For sake's of simplicity, we prefer here to tackle the issue by using orders of magnitude. We identify three potential processes working on the destruction of the plume:

1. *Radiative thermalization*: in the penetration zone, the plume loses its identity due to radiative thermal diffusion on a time scale,  $t_{\text{rad}}$ . It can be estimated by

$$t_{\text{rad}} \sim \frac{L_p^2}{K_b}, \quad (26)$$

<sup>5</sup> We conserve the same velocity profile than in Zahn (1991), but we consider the penetration length  $L_p$  as a free parameter of the model.

where  $K_b$  is the radiative conductivity at the top of the stably stratified layer. In the Sun, we find  $t_{\text{rad},\odot} \sim 10^{10} \text{ s}$ , so it is much longer than the dynamical time scale  $t_{d,\odot} \sim L_p/V_b \sim 10^4 \text{ s}$ . As already mentioned, advection of adiabatic convective matter is faster than thermal exchange because of a high Péclet number at the base of the convective zone. Plume thermalization by radiative diffusion is thus inefficient, except in the transition region where the plume is slowed down enough for the dynamical time scale to be large enough.

2. *Turbulence inside the plume*: although the plume is described like a coherent flow with well-defined radius and vertical profile, it is in fact turbulent at small scales as explained in Montalbán & Schatzman (2000) who suppose that turbulence is generated by shear flow in the penetration zone. In this case, the plume lifetime should be equal to a few turnover time scales of the biggest turbulent eddies whose the velocity and the size are about the ones of the plume,  $V_b$  and  $b$ , respectively. The turbulent time scale,  $t_{\text{turb}}$ , can be then approximated by

$$t_{\text{turb}} \sim \frac{b}{V_b}. \quad (27)$$

For the Sun, we find  $t_{\text{turb},\odot} \sim 10^5 \text{ s}$ , which is much lower than the radiative time scale, but still one order of magnitude higher than dynamical time scale. Note that this value is close to the convective turnover time scale as predicted by the MLT, i.e.,  $t_c \sim 10^6 \text{ s}$  at the base of the solar convective envelope.

3. *Restratification by lateral baroclinic eddies*: finally, it is worth considering the restratification phenomenon observed in the terrestrial oceans (Jones & Marshall 1997) as a potential process operating in the stellar penetration region. In most locations in the oceans, the surface layers are stably stratified. However, convection driven by cooling at the sea-surface can occur in some particular region. Then, convective plumes develop by turbulent entrainment of matter while going deep in the sea. When convection stops, the phase during which the plume is destroyed and loses its identity is called restratification. At this point, the density gradient between the plume and the surrounding stable medium generates a thermal wind. This latter is subject to a baroclinic instability creating lateral eddies able to transfer density between both mediums and thus able to homogenize the region. By adopting the model of Jones & Marshall (1997) to the solar case (see Appendix A for details), the restratification time scale is about  $t_{\text{res}} \sim 10^6 - 10^7 \text{ s}$ , which is in the order of magnitude of the convective eddy turnover.

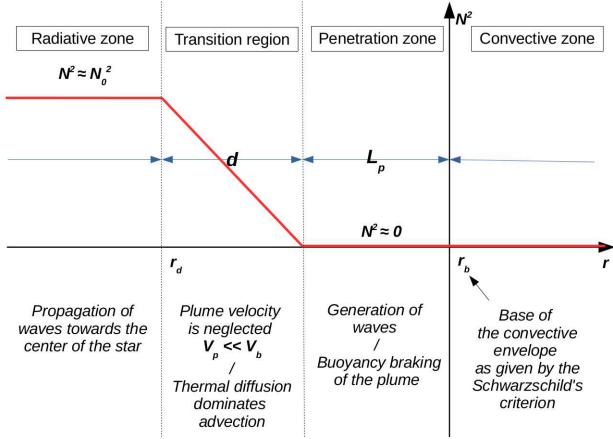
The plume lifetime is likely to be the consequence of all these potential processes. The simple abovementioned estimates give reasonable values in the range of  $10^5 - 10^7 \text{ s}$  for the Sun, i.e around the convective turnover time scale as given by the MLT. Thus, the plume lifetime will be considered as a parameter of the model whose the value will be chosen to be of the order of magnitude of the convective turnover time scale.

## 4. Generation of IGW by penetrative convection

### 4.1. Modeling the penetration zone

Penetrative convection generates IGW at the radiative/convective interface and modifies the stellar equilibrium





**Fig. 2.** Modeling of the interface between the radiative zone and the convective zone.  $r_b$  corresponds to the radius at the base of the convective envelope as given by the Schwarzschild's criterion,  $L_p$  is the penetration length over which the plume is decelerated and generates waves,  $d$  denotes the extent of the transition region (where the plume velocity is negligible compared to  $V_b$ , its value at the entry of the penetration region) and  $r_d$  is the radius at the top of the radiative zone.

stratification. Therefore, we need to model this region to properly describe the excitation process. The scenario we consider in this work follows in part the description given by Zahn (1991). The situation is illustrated in Fig. 2. The plume reaches the base of the convective zone located at the radius  $r_b$  as prescribed by the Schwarzschild's criterion. By inertia, the column of fluid penetrates into the stably stratified zone over a penetration length  $L_p$ . The density contrast between the plume and the surrounding medium causes buoyancy braking and the plume slows down, releasing a part of its kinetic energy into waves. Indeed, as explained by Zahn (1991), since the Péclet number at the bottom of the convective zone is very high ( $P_e \sim 10^5 - 10^6$ ), advection of convective matter is more efficient than thermal exchanges so that the plume keeps its identity. Then, it imposes a quasi-adiabatic stratification in the penetration zone, resulting in a nearby vanishing Brunt-Väisälä frequency  $N^2 \approx 0$ . Once its velocity is small enough (i.e., much smaller than its value at the entry of the penetration zone,  $V_b$ ), the Péclet number decreases and the thermalization of the plume's material occurs in a thermal transition region; there, the temperature gradient switches from quasi-adiabatic one to radiative one over a distance  $d$ . In a first approach, we merely suppose that the Brunt-Väisälä frequency  $N^2$  increases linearly to  $N_0^2$ , the value at the top of the radiative zone, as in the work of Lecoanet & Quataert (2013). By this way, we aim at investigating how the plume-induced wave energy depends on the steepness of the transition.

#### 4.2. Methodological approach

We now have to derive the time Fourier transform of the wave velocity field which leads to the spectral description of the wave energy flux through Eq. (6). For this purpose, we take the time Fourier transform of Eq. (1) and Eq. (2). We also assume that the oscillations are adiabatic so as to close the system. The first-order system of two differential equations obtained can be rewritten in the following form (see Appendix B.1 and B.2 for a detailed derivation)

$$\frac{dz}{dr}(r, \omega) = \mathbf{A}(r, \omega)z(r, \omega) + \mathbf{b}(r, \omega) \quad (28)$$

where we have defined

$$z = \begin{pmatrix} \hat{v}_{r,l,m} \\ \hat{v}_{h,l,m} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ iF_2/r\omega \end{pmatrix}, \quad (29)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2/r - g/c^2 & (S_l^2 - \omega^2)r/c^2 \\ (\omega^2 - N^2)/r\omega^2 & -d_r \ln(\rho r) - g/c^2 \end{pmatrix}, \quad (30)$$

where  $g$  is the gravitational acceleration,  $c$  is the sound speed,  $S_l$  is the Lamb frequency and  $d_r \equiv d/dr$  is the derivative with respect to  $r$ . The term  $F_2$  is defined by Eq. (B.12); it contains information on the spatial and temporal correlations between the wave and the plume, and we assume that it only exists in the penetration region where the wave driving is stronger. In this region, the inhomogeneous equations are solved using the method of variation of parameters and using the plume description presented in Sect. 3. In the convective and radiative zones, we use the WKB asymptotic solution for the homogeneous differential system, which is valid in these regions contrary to the transition region where Airy functions are considered.

To go further, we impose the continuity of the radial and horizontal displacements at the top of the radiative zone in  $r_d$  and at the beginning of the transition region in  $r_d + d$ . For boundary conditions, we first consider a pure regressive wave propagating towards the center in the radiative zone. That means we do not consider the possible reflection of the wave in the center of the star and so do not allow for standing waves to establish. Finally, in the convective zone, we consider a pure evanescent wave which is generated in the penetration zone and is damped towards the surface.

#### 4.3. Wave energy flux

In the following, we summarize the main results of the detailed calculation given in Appendix B. The mean radial wave energy flux per unit of frequency generated by  $\mathcal{N}$  plumes for an angular degree  $l$  and an azimuthal number  $m$  reads

$$\mathcal{F}_r(r, \omega, l, m) = f(\gamma_d) \frac{\mathcal{N}}{4} \frac{\sqrt{l(l+1)} (N_0^2 - \omega^2)^{1/2}}{4\pi r^2 N_0^2} \frac{e^{-\omega^2/4v_p^2}}{v_p} \mathcal{B}_l \mathcal{H}_l^2, \quad (31)$$

with

$$\mathcal{H}_l = \frac{1}{4\pi} \int_{r_b-L_p}^{r_b} \frac{1}{\rho} \frac{d}{dr} (\rho V_0^2) \rho^{-1/2} r^{-3/2} \left( \frac{r_b - L_p}{r} \right)^\Lambda dm \quad (32)$$

$$\mathcal{B}_l = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_0} |\beta_l^m|^2 d\Omega_0 \quad (33)$$

$$\beta_l^m(\theta_0, \phi_0) = \int_{\Omega} e^{-s_b^2/b^2} \overline{Y_l^m} d\Omega \quad (34)$$

$$\gamma_d = \left( \frac{k_h d N_0}{\omega} \right)^{2/3} \frac{N_0^2 - \omega^2}{N_0^2} \sim (k_r d)^{2/3} \quad (35)$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x < 1 \\ D \sqrt{x} (1 - \omega^2/N_0^2)^{-1} & \text{if } x > 1 \end{cases} \quad (36)$$

where  $\Lambda = \sqrt{l(l+1)}$ ,  $dm = 4\pi r^2 dr$ ,  $D \approx 3.7$  a numerical factor,  $s_b = S_h(r_b, \theta, \phi; \theta_0, \phi_0)$  following Eq. (20) and  $d$  is the length

of the transition region (see Fig. 2). We can first notice that the spectral density of wave luminosity,  $\mathcal{L} = 4\pi r^2 \mathcal{F}_r$ , is conserved at each level in the star, which is the consequence of the adiabatic hypothesis for the waves in a non-rotating star. Now, let us discuss the different terms:

1.  $\mathcal{H}_l$  corresponds to the wave driving term and it is representative of the instantaneous power injected into the wave in the whole penetration zone<sup>6</sup>. It decreases with the angular degree  $l$  since the decay length of an evanescent wave in the penetration zone scales as  $\Lambda^{-1}$ . In our model, it is also the only term which depends on the penetration length through the domain of integration and the plume velocity. If  $L_p$  decreases, the buoyancy braking is stronger and the excitation is more efficient since the plume deposits its energy where the evanescent wave has a higher amplitude. Inversely, if  $L_p$  increases, the plume energy is transferred into wave on a longer distance where the wave amplitude decreases rapidly.
2.  $e^{-\omega^2/4\nu_p^2}/\nu_p$  represents the temporal correlation term. The width of the spectral envelope is around  $\nu_p$ , which means that the transit time at a point  $r$  of a wave packet generated by one single plume is around  $1/\nu_p = \tau_p$ , so that the assumptions made in Sect. 2.2.2 are verified. An increase of the characteristic plume lifetime causes an increase of the spectrum amplitude but a decrease of the spectrum width. In other words, the plume energy is transferred into higher frequencies at the expense of the lower ones, but the total wave energy is conserved since the integration of the flux over  $\omega$  does not depend on  $\nu_p$ . This is the consequence of the hypothesis of stationarity for the driving mechanism.
3.  $\beta_l^m$  expresses the horizontal spatial correlation between the wave and the plume.
4.  $\mathcal{B}_l$  corresponds to the horizontal correlation term averaged over the angular position of the plume ( $\theta_0, \phi_0$ ). Since the plumes are supposed to be horizontally, uniformly distributed at each time, the spherical symmetry is conserved and  $\mathcal{B}_l$  does not depend on the azimuthal order  $m$ . This term decreases with  $l$  since the spherical harmonics presents more and more zeros with higher degrees. Moreover, a change of behavior is expected when the horizontal wavelength,  $\lambda_h = 2\pi r_b/\Lambda$ , becomes smaller than plume radius, i.e., for a degree  $l_{\text{crit}} \sim 2\pi r_b/b$ . In the case of small degrees  $l \ll l_{\text{crit}}$ , an approximated analytical expression in agreement with the numerical integration is given by

$$\mathcal{B}_l \sim \frac{\pi}{4} \left(\frac{b}{r_b}\right)^4 e^{-l(l+1)b^2/2r_b^2} \text{ for } l \ll l_{\text{crit}}. \quad (37)$$

Since the wave energy flux per unit of frequency is proportional to  $\Lambda \mathcal{B}_l$  (neglecting the dependence of  $\mathcal{H}_l$  with  $l$ ), Eq. (37) shows that the energy flux should be maximal for a degree  $l_{\text{max}} \sim r_b/b$ .

5.  $f(\gamma_d)$  is a transmission function. It discriminates between the limiting case of a very sharp, almost discontinuous transition for  $\gamma_d \ll 1$  and the one of a smoother transition for  $\gamma_d \gg 1$ . It physically corresponds to the ratio of the transmission coefficients in both cases. A very sharp transition has no effect on the wave dynamics. In this case, the flux is inversely proportional to the value of the Brunt-Väisälä frequency at the top of the radiative zone,  $N_0$ . That means that the higher is the

step, the higher is the wave impedance in the radiative zone (Press 1981) and the smaller is the wave energy transferred. The smoother case occurs when the distance of the transition,  $d$ , is in the same order of magnitude or larger than the radial wavelength, so that the transition has an impact on the waves and improves its transmission into the propagative zone. In the special case of a linear transition profile, the transmission of the wave energy flux is enhanced by a multiplying factor  $(k_r d)^{1/3}$  compared to the discontinuous case, in agreement with Lecoanet & Quataert (2013). We highlight here the effect of the steepness of the transition on the flux; this latter depends on the slope of the Brunt-Väisälä frequency in the transition zone which plays the role of a pseudo-impedance

$$\mathcal{F}_r \propto \left(\frac{d}{N_0^2}\right)^{1/3} \approx \left|\frac{dN^2}{dr}\right|^{-1/3}, \quad (38)$$

so that the smoother the transition, the higher the transmission of the wave energy.

#### 4.4. Simplified expression for the wave energy flux

Finally, it is possible to derive an approximate expression for Eq. (31) in the whole radiative zone. This gives the advantage of expressing the result in terms of the characteristic physical quantities of the problem and it permits to avoid the numerical calculations of integrals. By using Eq. (37) for  $l \ll l_{\text{crit}}$  and the assumption  $\mathcal{H}_l^2 \sim r_b \rho_b V_b^4$  (which is valid for a penetration length much smaller than the characteristic decay length of the evanescent wave, i.e.,  $L_p \ll r_b/\Lambda$ ), we find

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_r(r, \omega, l, m) &\sim \frac{\pi}{16} \frac{N \rho_b V_b^4}{4\pi r^2} \frac{b^4}{r_b^4} \frac{r_b}{N_0} \frac{e^{-\omega^2/4\nu_p^2}}{\nu_p} \sqrt{l(l+1)} e^{-l(l+1)b^2/2r_b^2} \\ &\sim \frac{1}{4\pi r^2} \frac{\mathcal{A} \mathcal{S}_p}{2} \frac{\rho_b V_b^3}{2} \frac{F_{R,l}}{\nu_p} e^{-l(l+1)b^2/2r_b^2}, \end{aligned} \quad (39)$$

where  $\mathcal{S}_p = \pi b^2$  is the area occupied by a single plume,  $\rho_b V_b^3/2$  represents the plume kinetic energy flux and  $F_{R,l} = V_b k_{h,b}/N_0$  is the Froude number at the top of the base of the convective zone, with  $k_{h,b} = \sqrt{l(l+1)}/r_b$  the horizontal wavenumber. This latter represents the ratio of the advection by the mean plume flow to the buoyancy force at the top of the radiative zone when the plume penetrates into. In the Sun, we find  $F_{R,1} \sim 10^{-3}$  for  $l = 1$ . In the following Sect. 5, we will demonstrate the validity of this expression (for a penetration length small enough) since the major part of the wave energy flux is distributed over angular degrees below the critical angular degree  $l_{\text{crit}}$ . Therefore, the implementation of angular momentum transport by plume-induced waves in a stellar evolution code will be easier using this simplified expression.

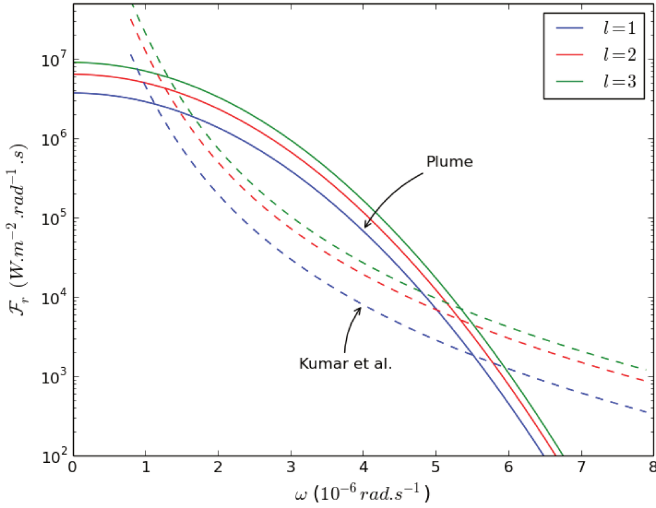
## 5. The solar case

In this section, we use a solar model to compute the wave energy flux given by Eq. (31). We analyze the effects of the plume characteristics on the excitation process and of the thermal transition length,  $d$ , on the wave transmission into the radiative zone (see Fig. 2).

### 5.1. Input physics

The calibrated solar model used here was obtained using the stellar evolution code CESTAM (Marques et al. 2013), with a

<sup>6</sup> Indeed, the integrand in Eq. (32) is the product of a first term related to the plume-induced vertical force per unit of mass with a second term proportional to the radial wave velocity field, solution of the homogeneous wave equation in the WKB approximation.

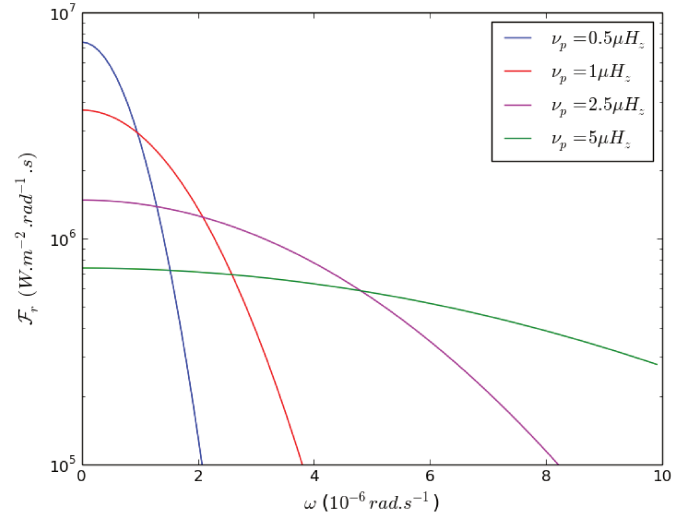


**Fig. 3.** Mean radial wave energy flux per unit of frequency at the top of the radiative zone as a function of the radian frequency, for any azimuthal number  $m$  and angular degrees  $l = 1, 2$  and  $3$ , in the case of the plume-induced waves (solid lines) and the one of turbulence-induced waves from the formalism of Kumar et al. (1999) (dashed lines).

mixing length parameter  $\alpha_{\text{MLT}} = 1.69$  and initial abundances  $Y_0 = 0.25$  and  $Z_0 = 0.013$ . It provides the radial profile of all the quantities at the equilibrium that we need to compute the wave energy flux. The parameters computed from the model are the plume radius  $b$ , the plume velocity  $V_b$  and the Brunt-Väisälä frequency  $N_0$  at the bottom of the transition region ( $r = r_d$ ). Thus, using Eq. (21) and Eq. (25) with  $\rho_b \approx 150 \text{ kg m}^{-3}$  the density at the base of the convective zone and  $r_b = 5,1 \times 10^5 \text{ km}$  the radius at the base of the convective zone, we find  $b = 10^4 \text{ km}$  and  $V_b \approx 185 \text{ m s}^{-1}$ . In most of stellar codes, standard mixing-length treatment of the convection is local. It produces a very sharp thermal transition at the radiative/convective interface and so a very sharp slope for the Brunt-Väisälä frequency which remains difficult to estimate in this region. For this reason, we consider the average of the Brunt-Väisälä frequency below the base of the convective zone (as prescribed by the Schwarzschild's criterion) over a distance chosen as equal to  $0.1H_p$  in the radiative zone (see Sect. 6.4 for a discussion). Such a procedure leads to the value  $N_0 = 282 \mu\text{Hz}$ . To finish, there is still to choose three additional parameters, the plume filling factor  $\mathcal{A}$ , the penetration length  $L_p$  and the characteristic plume turnover frequency  $\nu_p$ . For the filling factor, we use a reasonable value  $\mathcal{A} \approx 0.1$  which corresponds to the values observed in numerical simulations of penetrative convection (e.g., Brummell et al. 2002) and of the uppermost layers of the convective zone (Stein & Nordlund 1998). This leads to a number of plumes that is equal to  $\mathcal{N} \approx 1000$ . We also take  $L_p = 0.05H_p$ , the upper limits given by Basu (1997) for the Sun from seismic observations, and  $\nu_p = 1 \mu\text{Hz}$ , a frequency around the convective turnover frequency (see discussion in 3.4).

### 5.2. The case of a discontinuous transition ( $d = 0$ )

In a first approach, we set  $d = 0$ . The result of the numerical calculation of Eq. (31) at the top of the radiative zone is plotted in Fig. 3 (solid lines). The Gaussian profile of the spectrum comes from the term  $\exp(-\omega^2/4\nu_p^2)$ . For  $\omega \sim 10^{-6} \text{ rad s}^{-1}$  and  $l = 1$ , we read  $\mathcal{F}_r \approx 3 \times 10^6 \text{ W m}^{-2} \text{ rad}^{-1} \text{ s}$ . For comparison, using Eq. (39)

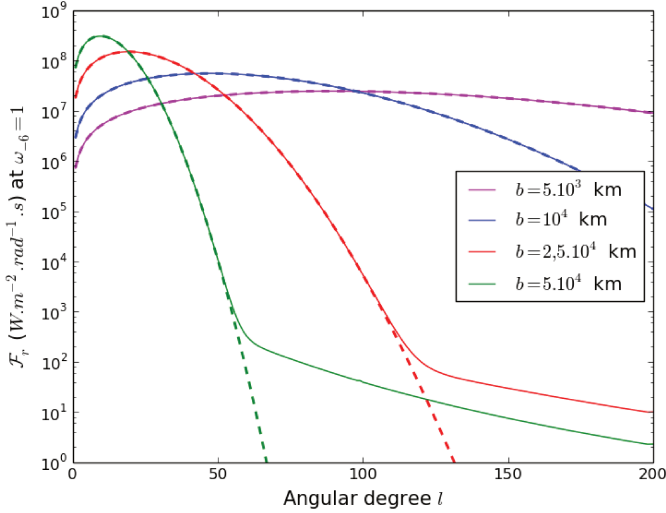


**Fig. 4.** Mean radial wave energy flux per unit of frequency at the top of the radiative zone as a function of the radian frequency, for any azimuthal number  $m$ , an angular degree  $l = 1$  and varying plume frequencies.

and the value of the physical quantities given in Sect. 5.1, we find  $\mathcal{F}_r \approx 3.2 \times 10^6 \text{ W m}^{-2} \text{ rad}^{-1} \text{ s}$ . As a check, we calculate the total wave energy flux integrated over a large frequency range, from  $0$  to  $25 \times 10^{-6} \text{ rad s}^{-1}$ , for all the  $(l, m)$  contributions, with  $l \in [1, 200]$  and  $-l \leq m \leq l$ . We find a low value amounting to about 1% of the solar flux while the mean plume kinetic energy flux at the base of the convective zone,  $\mathcal{A}\rho_b V_b^3/2$ , represents about 40% of the solar flux. These results justify a posteriori the assumption of no feedback from the waves on the plumes and verify the conservation of energy.

Hereafter, we specifically comment the effects of the different terms in Eq. (31) and the dependence of the spectrum on the plume characteristics  $\nu_p$ ,  $b$  and the penetration length  $L_p$ .

1. *Time correlation* (Fig. 4): we consider four values in range of one order of magnitude around  $1 \mu\text{Hz}$  for the plume turnover frequency,  $\nu_p = 0.5, 1, 2.5$  and  $5 \mu\text{Hz}$ . The result is plotted in Fig. 4 as a function of the cyclic frequency. As said above, an increase of  $\nu_p$  involves a redistribution of the wave energy over higher frequencies at the expense of the lower ones since the total wave energy does not depend on the plume lifetime (under the assumption of stationarity). Its influence on the shape of the wave energy flux is significant: an increase by a factor five transforms a bell-shaped spectrum into an nearly flat one in the considered frequency range.
2. *Horizontal correlation* (Fig. 5): we assume a constant filling factor,  $\mathcal{A} \approx 0.1$ , so that a change in the plume radius involves a change in the number of plumes. We consider four values in a range of one order of magnitude around  $10^4 \text{ km}$  for the plume radius,  $b = 0.5, 1, 2.5$  and  $5 \times 10^4 \text{ km}$ , leading to a number of plumes  $\mathcal{N} = 4000, 1000, 160$  and  $40$ , respectively. Although the last value seems unrealistic for the Sun, we use it to study the general behavior of the wave energy spectrum with respect to the plume radius. The wave energy flux is maximal for a degree that corresponds to the horizontal extension of the plume,  $l_{\text{max}} = r_b/b$ , independently of the frequency. We find  $l_{\text{max}} = 102, 51, 20$  and  $10$ , respectively. that agrees with the numerical results plotted in Fig. 5 as a function of the angular degree at the fixed frequency of  $10^{-6} \text{ rad s}^{-1}$ . As mentioned in Sect. 4.3, we can verify on

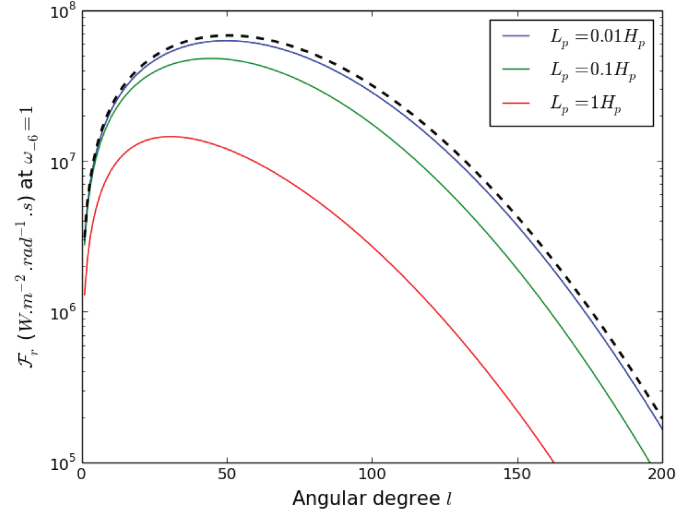


**Fig. 5.** Mean radial wave energy flux at the top of the radiative zone and at the frequency  $\omega = 10^{-6} \text{ rad s}^{-1}$ , as a function of the angular degree and for varying plume radii,  $b$ . The numerical results from Eq. (33) (solid lines) are compared to the results using Eq. (37) (dashed lines). The filling factor is supposed to be constant so that a change in the plume radius results in a change of the number of plumes.

the same figure that the use of Eq. (37) (dashed lines) instead of Eq. (33) (solid lines) for the term  $\mathcal{B}_l$  is valid below a critical degree  $l_{\text{crit}} = 2\pi r_b/b \approx 125$  and  $63$  for  $b = 2.5$  and  $5 \times 10^4$  km, respectively. Furthermore, a decrease in the plume radius induces an increase of the wave energy flux at low degrees at the expense of higher degrees. The total wave energy flux integrated over the frequency range  $\omega = 0-25 \times 10^{-6} \text{ rad s}^{-1}$  and for the degrees  $l = 1-200$  is equal to 1.3%, 1%, 0.5% and 0.25% of the solar flux for  $b = 0.5, 1, 2.5$  and  $5 \times 10^4$  km, respectively. Thus, the total wave energy flux decreases with larger plume radii, particularly because the number of penetrating plumes decreases in order to keep a constant filling factor.

- Driving term (Fig. 6):** we choose three values for the penetration length within a range of two orders of magnitude,  $L_p = 0.01, 0.1$  and  $1H_p$ . The wave energy spectrum depends on this parameter only through the term  $\mathcal{H}_l$  in Eq. (32). The result is plotted in Fig. 6 as a function of the angular degree at the fixed frequency of  $10^{-6} \text{ rad s}^{-1}$ . An increase of the penetration length induces a decrease of the transmission of power from the plume into the waves. The higher the angular degree, the higher the decrease. Although this effect is moderate for low degrees (decrease by a factor about two for  $L_p = H_p$  and  $l < 50$ ), it becomes critical for higher degrees (decrease of about one order of magnitude for  $L_p = H_p$  and  $l > 150$ ). Moreover, this effect results in a shift of the maximum of the wave energy spectrum to lower angular degrees with an increasing penetration length. It goes from  $l_{\text{max}} \approx 50$  for  $L_p = 0.01H_p$  to  $l_{\text{max}} \approx 30$  for  $L_p = 1H_p$ . The total wave energy flux integrated over the frequency range  $\omega = 0-25 \times 10^{-6} \text{ rad s}^{-1}$  for  $l = 1-200$  represents about 1.3%, 0.8% and 0.2% of the solar flux for  $L_p = 0.01, 0.1$  and  $1H_p$ , respectively. Finally, we check that the assumption made on  $\mathcal{H}_l$  to derive Eq. (39) (black dashed line) is valid if  $L_p \ll r_b/\Lambda$ , i.e.,  $l \ll r_b/L_p = 940, 94$  and  $9$  for the three considered cases.

In summary, Eq. (39) has been shown to be a good approximation of Eq. (31) provided that  $l \ll l_{\text{crit}}$  and  $L_p \ll r_b/\Lambda$ . We have



**Fig. 6.** Mean radial wave energy flux at the frequency  $\omega = 10^{-6} \text{ rad s}^{-1}$ , as a function of the angular degree  $l$  for different penetration lengths. The black dashed line represents the result obtained using Eq. (39).

seen that  $v_p$ ,  $b$  and  $L_p$  have a significant effect on the shape of the wave energy spectrum and the total energy transferred into the waves. This could have serious consequences especially for the issue of transport by IGW. Last, the set of values used here-above for  $v_p$ ,  $b$  and  $L_p$  will enable us to compare penetrative convection to driving by turbulent convection considering a wide domain for these parameters. This will be discussed in Sect. 6.

### 5.3. Effect of a thermal transition layer ( $d \neq 0$ )

We now consider the case of a thermal transition at the radiative/convective interface ( $d \neq 0$  in Fig. 2). We choose a transition length  $d = 500$  km, i.e.,  $d \approx 0.01H_p = L_p/5$  (see Sect. 6.4 for a discussion).

In the derivation of Eq. (36), we have considered the limiting cases of very sharp transition and of a very smooth one; the first one, corresponding to  $\gamma_d(\omega, l) \ll 1$  in Eq. (35), allows for using a first-order Taylor expansion of Airy functions at 0 in the transition layer, while the second one, corresponding to  $\gamma_d(\omega, l) \gg 1$ , enables us to use their asymptotic expansion at  $-\infty$  (see Appendix B.6 for details). To avoid a discontinuity between the two regimes at  $\gamma_d(\omega, l) = 1$  (as in Eq. (36), see the dashed line in Fig. 7) and to be more realistic, we assume that the switchover from the first case to the second one is realized on the range  $\gamma_d(\omega, l) \in [0.80, 1.20]$ . Instead of using Eq. (36), we define the transmission function,  $F$ , as a weighted average of the two limiting cases,

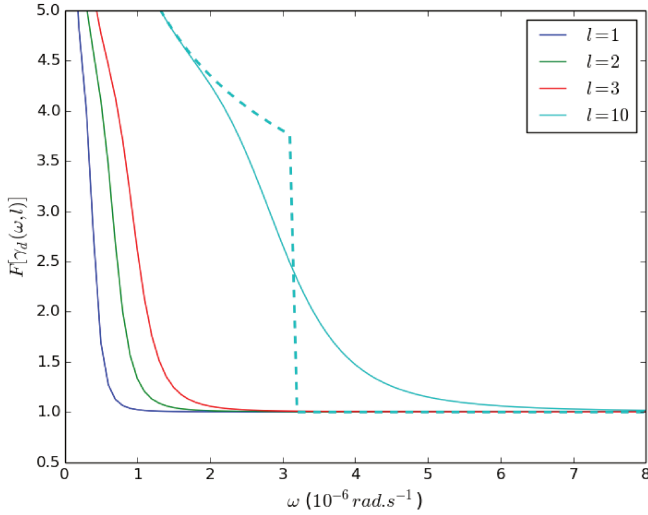
$$F(\gamma_d) = [1 - g(\gamma_d)] + g(\gamma_d)\tilde{f}(\gamma_d), \quad (40)$$

where

$$g(x) = \{\tanh[(x-1)/0.20] + 1\} / 2 \quad (41)$$

$$\tilde{f}(x) = D\sqrt{x}(1 - \omega^2/N_0^2)^{-1}, \quad (42)$$

with  $g$  the weighting function. The result is plotted in Fig. 7 as a function of the cyclic frequency for  $l = 1, 2, 3$  and  $10$ . Physically, it represents the ratio of the wave energy flux obtained in the case of a linear transition ( $d = 500$  km), to the flux in the case of a discontinuous transition ( $d = 0$ ). We see that the wave energy flux can be enhanced by factor two to five, depending on



**Fig. 7.** Transmission function defined in Eq. (40) for  $d = 0.01H_p$  (solid line), as a function of the radian frequency for  $l = 1, 2, 3$  and  $10$ . It is compared to the result obtained using Eq. (36) for  $l = 10$  (dashed line).

the ratio  $k_h d N_0 / \omega$ . Indeed, the higher is this ratio, the smaller is the radial wavelength (relatively to  $d$ ), and the smoother is the transition from the point of view of this component  $(\omega, l)$ . This result agrees with the work of [Lecoanet & Quataert \(2013\)](#) who took into account a smooth thermal transition in the case of wave driving by turbulent pressure.

The total wave energy flux at the top of the radiative zone integrated over the frequency range  $\omega = 2\text{--}25 \times 10^{-6} \text{ rad s}^{-1}$  for  $l = 1\text{--}200$  represents about 1.2% of the solar flux, which is about 10 times higher than in the case of a discontinuous transition. For  $\omega = 0\text{--}25 \times 10^{-6} \text{ rad s}^{-1}$  and  $l = 1\text{--}200$ , integration gives about 11% of the solar flux, i.e., about one fourth of the mean plume kinetic energy flux at the base of the convective zone. However, the latter result is likely to be overestimated because of unmodeled physical processes at very low frequencies (see Sect. 6.5 for a discussion).

Hence, a smooth thermal transition at the radiative/convective interface is able to significantly enhance the transmission of the wave energy flux into the radiative zone. It also has an impact on the shape of the wave energy spectrum at the top of the radiative zone since it does not affect in the same way the different wave components. Therefore, the length of the thermal adjustment layer,  $d$ , is a key parameter in the generation process of IGW. Unfortunately, numerical simulations of penetrative convective are not currently able to quantify the extent of this thermal adjustment layer in the solar parameters regime (e.g., [Brummell et al. 2002](#)). Nevertheless, several semianalytical models of penetrative convection can give us some hints to its value (see Sect. 6.4).

## 6. Discussion

In this section, we compare our results with those based on the excitation by turbulent pressure through the whole convective zone as formulated by [Kumar et al. \(1999\)](#). We also compare them with the studies of [Press \(1981\)](#) and [Lecoanet & Quataert \(2013\)](#) that focus on the excitation by convective eddies at the radiative/convective boundary. Lastly, we investigate the sensitivity of the present excitation model to the input physics and discuss its limits.

### 6.1. Comparison with turbulence-induced wave energy flux ([Kumar et al. 1999](#))

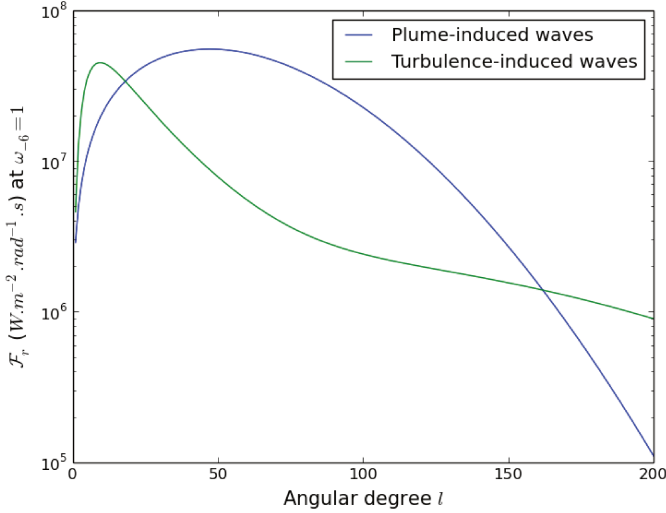
IGW can also be generated by turbulent pressure in the convective zone. [Kumar et al. \(1999\)](#) proposed a model of excitation by Reynold's stress due to turbulent motions in the convective zone. The energy cascade is supposed to follow the Kolmogorov's spectrum. The wave energy flux per unit of frequency at the base of the convective zone for an angular degree  $l$  and an azimuthal number  $m$  is given by

$$\mathcal{F}_E^c(\omega, l, m) = \frac{\omega^2}{4\pi} \int_{r_b}^{R_s} dr \rho^2 \left[ \left( \frac{\partial \xi_r}{\partial r} \right)^2 + l(l+1) \left( \frac{\partial \xi_h}{\partial r} \right)^2 \right] \times \exp \left[ -\frac{h_\omega^2 l(l+1)}{2r^2} \right] \frac{v^3 L^4}{1 + (\omega \tau_L)^{15/2}}, \quad (43)$$

where  $\xi_r$  and  $\xi_h$  are the radial and horizontal wave displacements normalized to unit IGW energy flux just below the convective zone,  $R_s$  is the outer radius of the convective zone,  $v$  is the velocity of the biggest convective eddies with a size  $L$  and a turnover time  $\tau_L = L/v$ , and  $h_\omega = L \min[1, 2(\omega \tau_L)^{-3/2}]$  is the size of the convective eddies with frequency  $\omega$  at radius  $r$ . The lower limit frequency for these waves is the convective turnover frequency at the base of the convective zone,  $\omega_c$ , such as  $\mathcal{F}_E^c(\omega < \omega_c, l, m) = 0$ . To compute this expression,  $L$  and  $v$  are deduced from the MLT and the wave displacement is approximated by the normalized WKB wave functions as in Eq. (25) of [Kumar et al. \(1999\)](#). In our solar model, we find a convective turnover frequency  $\omega_c \approx 0.8 \times 10^{-6} \text{ rad s}^{-1}$  and a convective velocity  $v_c \approx 25 \text{ m s}^{-1}$  at the base of the convective zone, which corresponds to a convective flux that is equal to about 5% of the solar flux. The result for the solar model is plotted in Fig. 3 (dashed lines) as a function of the cyclic frequency for  $l = 1, 2$  and  $3$ , and in Fig. 8 as a function of the angular degree at  $\omega = 10^{-6} \text{ rad s}^{-1}$ , since we consider that most of the wave energy is distributed around this frequency in both cases.

The total turbulence-induced wave energy flux integrated over  $\omega = 0.8\text{--}25 \times 10^{-6} \text{ rad s}^{-1}$  for angular degrees  $l = 1\text{--}200$  is equal to 0.1% of the solar flux. With 0.6% of the solar flux, the excitation by penetrative convection is 6 times more efficient in this frequency range. By integrating over the frequency range  $1\text{--}25 \times 10^{-6} \text{ rad s}^{-1}$ , the total turbulence-induced wave energy flux falls to 0.02% of the solar flux, mainly because most of the energy is contained at low frequencies and because the spectrum decreases rapidly around  $10^{-6} \text{ rad s}^{-1}$ . In turn, the plume-induced wave energy flux remains at 0.5% of the solar flux. Indeed, the turbulence-induced wave energy flux is about one order of magnitude smaller than the plume-induced one in the range  $2\text{--}5 \times 10^{-6} \text{ rad s}^{-1}$  (Fig. 3), but it dominates otherwise. In Fig. 8, we compare the wave energy flux for both driving processes as a function of the horizontal degree  $l$ . In the case of the turbulence-induced waves, the wave energy flux is maximal for  $l \sim 5$  which corresponds to the size of the biggest convective eddies as given by the MLT,  $L = \alpha_{\text{MLT}} H_p \sim 10^5 \text{ km}$ , while the plume-induced wave energy flux peaks at  $l \sim 50$  because of the smaller horizontal extent of the plumes.

In Fig. 3, the plume-induced wave energy flux drops drastically below the turbulence-induced one for frequencies higher than  $5 \times 10^{-6} \text{ rad s}^{-1}$ . In a similar way, in Fig. 8, the turbulence-induced wave energy flux overtakes the plume-induced one for degrees higher than a few characteristic widths of the plume-induced wave spectrum,  $r_b/b$ . In reality, the flow of the plume should become turbulent on higher temporal (and spatial) frequencies and should generate waves by Reynold's stress due



**Fig. 8.** Mean radial wave energy flux per unit of frequency, as a function of the angular degree  $l$  at the frequency  $\omega = 10^{-6}$  rad s $^{-1}$ , generated by penetrative convection (in blue) and by turbulent pressure in the convective zone (in green) from the formalism of Kumar et al. (1999).

to shear flow, as proposed by Montalbán & Schatzman (2000). Indeed, we assumed a coherent plume flow, with a spatial and a temporal characteristic extent, and neglect the turbulence inside the plume. As a consequence, the present model does not take into account plume-related perturbations in the high frequency domain. The power transmitted from the plume into the waves on temporal (spatial) frequencies higher than few  $\nu_p$  (few  $r_b/b$ ) vanishes rapidly and the excitation by convective turbulence then can become predominant.

Finally, wave driving by penetrative convection is five to ten times more efficient than the excitation by turbulence as formulated by Kumar et al. (1999). While turbulence excites preferentially at very low frequencies, penetrative convection efficiently produces waves on a larger frequency range (it nevertheless depends on the value of  $\nu_p$  relatively to  $\omega_c$ ). The plume-induced wave spectrum peaks at higher angular degrees than the turbulence-induced one because the plume radius is smaller than the size of the energy-bearing convective eddies. We emphasize that the same conclusions are reached with the wide set of values considered for  $\nu_p$ ,  $b$  and  $L_p$  in Sect. 5.2. All the differences observed between wave energy flux spectrum produced by both mechanisms will have consequences on the transport of angular momentum by IGW which are discussed in the following section.

## 6.2. Comparison with models of excitation by turbulent eddies at the radiative/convective boundary

The excitation model as proposed by Kumar et al. (1999) assumes that waves are generated by Reynold's stress in each layer of the whole convective region and tunnel towards the radiative zone where they can propagate. While this model is used in most of the actual computation of angular momentum transport by internal gravity waves, it is also interesting to compare our results with the excitation models of Press (1981) and Lecoanet & Quataert (2013). Indeed, their approaches are similar to the one used in the present model in the sense that they focus on the driving of waves in the confined overshoot region.

Press (1981) considered the convective motions of the biggest eddies above the boundary as the driving mechanism.

The eddies are characterized by a frequency  $\omega_c$ , a size  $\lambda = 2\pi/k_c$  and a velocity  $v_c = \omega_c/k_c$ . He assumed that the eddies generate waves with a frequency  $\omega \sim \omega_c$  and a horizontal wavenumber  $k_h \sim k_c$ , and he matched the turbulent pressure with the wave pressure perturbation, i.e.,  $p' \sim \rho v_c^2 \sim \rho (\omega/k_h)^2$ . Assuming a discontinuous thermal transition ( $d = 0$  in Fig. 2) and using the continuity of the Eulerian perturbation of pressure at the boundary, the amplitude of the vertical wave displacement just below the radiative/convective interface is deduced from the relation  $\xi_r = p'/Z_v$ , where  $Z_v = \rho N_0 \omega/k_h$  is the wave impedance at the top of the radiative zone. Using the Boussinesq's approximation, the specific wave energy just below the boundary equals  $\mathcal{E} \sim \rho N_0^2 \xi_r^2$ . The radial wave energy flux is then obtained by multiplying  $\mathcal{E}$  with the vertical group velocity given by Eq. (17) so that we obtain

$$\mathcal{F}_r^{P81} \sim \rho \frac{\omega^3}{k_h^3} \frac{\omega}{(N_0^2 - \omega^2)^{1/2}} \sim \rho v_c^3 \frac{v_c k_h}{(N_0^2 - \omega^2)^{1/2}}. \quad (44)$$

Equation (44) have some similarities and differences with our model and its simplified expression Eq. (39):

1. Equation (44) is equal to the product of the mechanical convective flux with the Froude number (or the convective Mach number) at the base of the convective zone, which also plays the role of a transmission factor. This is similar to the product of the plume kinetic energy flux  $\rho V_b^3$  with  $F_{R,l}$  in Eq. (39) with the substitution  $v_c \leftarrow V_b$ .
2. Equation (44) contains no equivalent of the exponential terms in Eq. (39) since Press (1981) assumed that waves are efficiently excited in a narrow frequency range around  $\omega_c$ .
3. Excitation by convective eddies occurs in each element of surface of the spherical shell at the radiative/convective boundary whereas convective penetration generates waves only in  $N$  localized regions of the spherical shell. As a result, Eq. (39) differs from Eq. (44) by an additional geometrical factor,  $\mathcal{A}S_p/4\pi r^2$ , which represents the fraction of the area occupied by the ensemble of plumes.

The excitation models proposed by Garcia Lopez & Spruit (1991) and Zahn (1997) are very similar to the one of Press (1981), except that they consider in addition a Kolmogorov's distribution of convective eddies with an incoherent behavior.

More recently, Lecoanet & Quataert (2013) investigated also the excitation of internal gravity waves by turbulent convection. In their model, the wave amplitude is derived by considering the turbulent Reynold's stress as the driving mechanism in a similar way to Kumar et al. (1999). However, their approach differs from the latter since they focused on the excitation of waves in the overshooting layer and took into account the thermal transition layer at the radiative/convective interface (see Fig. 2). Moreover, they assumed that the injection length scale of the turbulent cascade at the boundary is of the same order of magnitude as the thickness of the overshooting region (i.e., smaller than the usual mixing length of the order of  $H_p$ ) while conserving the same convective velocity as given by the MLT. In other words, the velocity of the eddies with a typical size  $h < H_p$  at the boundary is higher than in the case of the description of the turbulence by the MLT as used in Kumar et al. (1999). The spectral density of the wave energy flux in the case of a smooth linear thermal transition, Eq. (42) in Lecoanet & Quataert (2013), is given by

$$\mathcal{F}_r^{L13}(\omega, l) \sim \rho v_c^3 \left(\frac{\omega_c}{N_0}\right)^{2/3} (k_h H_{l,\omega}^*)^4 \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{-41/6} \frac{1}{\omega} (k_h d)^{1/3}, \quad (45)$$

which we can rewrite as

$$\mathcal{F}_r^{L13}(\omega, l) \sim \rho v_c^3 \frac{v_c k_c}{N_0} \left( \frac{k_h}{k_c} \right)^{17/3} \left( \frac{H_{l,\omega}^*}{H_p} \right)^4 \left( \frac{\omega}{\omega_c} \right)^{-41/6} \frac{1}{\omega} \left( \frac{k_c N_0 d}{\omega_c} \right)^{1/3}, \quad (46)$$

with  $\omega \geq \omega_c$  and  $k_h \leq k_{h,\max}(\omega)$ , where we have used  $v_c = \omega_c/k_c$  and  $k_c \sim 1/H_p$ , the typical convective scales as given by the MLT. We have also defined  $H_{l,\omega}^*$  which depends on the characteristic length scales of the turbulence that is considered in the excitation zone ( $H_{l,\omega}^* = \alpha_{\text{MLT}} H_p$  in the case of the MLT). [Lecoanet & Quataert \(2013\)](#) showed that such considerations may enhance the wave flux by a factor two to five. The excitation model of [Lecoanet & Quataert \(2013\)](#) differs from the present one by several points:

4. The points 1 and 3 mentioned hereabove are still valid in this case.
5. Equation (46) depends on  $\omega$  and  $k_h$  as power laws coming from the assumption of a Kolmogorov's spectrum for the turbulence, whereas Eq. (39) depends on them as exponential laws coming from the Gaussian profile used to model the plume velocity in the penetration region.
6. The last term in Eq. (46) is related to the effect of the thermal adjustment layer of length  $d$  on the wave transmission into the radiative zone. As a consequence, Eq. (46) is proportional to  $(d/N_0^2)^{1/3}$ , which is consistent with our model.

Finally, the expressions derived by [Press \(1981\)](#) and [Lecoanet & Quataert \(2013\)](#) for the wave energy flux at the top of the radiative zone scale as  $v_c^4$  whereas the plume-induced wave energy flux depends on the plume velocity as  $V_b^4$ . With a plume velocity one order of magnitude higher than the convective velocity in the solar case, we can conclude that the driving by penetrative plumes is more efficient than the excitation by turbulent eddies at the radiative/convective boundary as in the model proposed by [Press \(1981\)](#) and [Lecoanet & Quataert \(2013\)](#).

### 6.3. Efficiency of the angular momentum transport by plume-induced IGW

IGW are able to carry angular momentum in the radiative zone and to modify the mean rotation rate. The wave flux of angular momentum is deduced from the wave energy flux through the relation ([Zahn 1997](#))

$$\mathcal{F}_J(r, \omega, l, m) = \frac{m}{\omega} \mathcal{F}_E(r, \omega, l, m). \quad (47)$$

In the adiabatic case, the wave luminosity of angular momentum is conserved through the whole star and no exchange is possible with the mean flow. However, as they propagate towards the center of the star, IGW are radiatively damped from the top of the radiative zone. The total wave flux of angular momentum is deduced at each depth from the one at the top of the radiative zone, modulated by a damping term

$$\mathcal{F}_J^T(r) = \sum_{l,m} \int \mathcal{F}_J(r_d, \omega, l, m) e^{-\tau(r,\hat{\omega},l)} d\omega. \quad (48)$$

[Press \(1981\)](#) investigated the damping of IGW and found in the quasi-adiabatic approximation

$$\tau(r, \hat{\omega}, l) = [l(l+1)]^{3/2} \int_r^{r_d} K \frac{N^3}{\hat{\omega}^4} \left( \frac{N^2}{N^2 - \hat{\omega}^2} \right)^{1/2} \frac{dr}{r^3}, \quad (49)$$

where  $K$  is the radiative diffusion coefficient and

$$\hat{\omega}(r, \omega, m) = \omega - m\delta\Omega(r) \quad (50)$$

is the Doppler-shifted frequency in the corotating frame, with  $\delta\Omega$  the differential rotation with respect to rotation rate at the base of the convective zone. Hence, IGW can deposit angular momentum in presence of differential rotation since prograde waves ( $m > 0$ ) and retrograde waves ( $m < 0$ ) are asymmetrically damped.

The transport of angular momentum follows an advective-diffusive equation (e.g., [Maeder 2009](#)). Solving numerically the problem is out of scope here but a preliminary study can give some clues on the efficiency of the transport by waves. The characteristic time scale,  $T_L$ , on which IGW can affect the rotation mean-flow can be estimated through (e.g., [Belkacem et al. 2015a](#))

$$T_L(r) \sim \frac{\rho r^2 \delta\Omega}{j}, \quad (51)$$

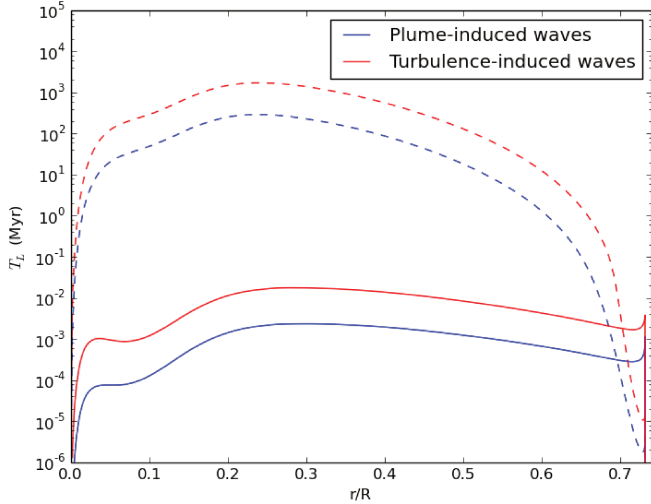
where  $j$  represents the divergence of the total mean radial wave flux of angular momentum

$$j = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \mathcal{F}_J^T(r)). \quad (52)$$

In order to get an order of magnitude and to simplify the calculation, we assume that the radiative zone rotates like a solid body, so that  $\delta\Omega$  is constant in the whole radiative zone. We consider the case of a low differential rotation with respect to the base of the convective zone,  $\delta\Omega = 0.15 \times 10^{-6} \text{ rad s}^{-1}$  (hereafter, case  $l$ ), and the case of a stronger differential rotation,  $\delta\Omega = 10^{-6} \text{ rad s}^{-1}$  (hereafter, case  $s$ ). The case  $l$  is almost similar to the initial rotation profile in [Talon et al. \(2002, Fig. 3\)](#). We assume also that the waves deposit all their angular momentum when they meet a critical layer (i.e.,  $\hat{\omega} = 0$ ) and that they only travel one-way towards the core of the star. We take into account only degrees from 1 to 50 since we consider it is representative of the wave spectrum in both processes of excitation. The frequency range of integration is taken between 1 and  $6 \times 10^{-6} \text{ rad s}^{-1}$ , since most of the wave energy is concentrated in this range and since theory is uncertain below. The result is plotted in [Fig. 9](#).

We find that transport by plume-induced waves is able to considerably affect the internal rotation rate in the Sun in less than 0.1 Gyr in the case  $l$  and in less than 0.01 Myr in the case  $s$ . Just below the convective envelope, characteristic time scale is of the order of the year; this is the result of the rapid damping of very high degree and low frequency prograde waves; this can generate a shear layer oscillation as obtained, for instance, in [Talon et al. \(2002\)](#). In the radiative interior, plume-induced waves can affect the rotation mean-flow on time scales about one order of magnitude shorter than turbulence-induced ones. Note that the core could be decelerated in less than 0.01 Gyr in the case  $l$  and in less than 1000 yrs in the case  $s$  whatever the excitation process is considered because the specific angular momentum becomes weaker and weaker in the innermost layers as it decreases as  $r^2$ . Moreover, the comparison between both cases  $l$  and  $s$  emphasizes the character of IGW which tends to work against strong rotation rate gradients. The stronger the differential rotation, the shorter the time scale on which IGW can affect the rotation profile.

Therefore, we conclude that penetrative convection can generate waves able to affect the rotation profile of solar-like stars over time scales much shorter than their lifetime on the main



**Fig. 9.** Characteristic time scale of evolution of the rotation rate in the case of a low differential rotation  $\delta\Omega = 0.15 \times 10^{-6} \text{ rad s}^{-1}$  (dashed lines) and a stronger one  $\delta\Omega = 10^{-6} \text{ rad s}^{-1}$  (solid lines). We compare the results obtained with a plume-induced wave spectrum (blue) and with a turbulence-induced wave spectrum (red) from the formalism of Kumar et al. (1999).

sequence (around 10 Gyr). Moreover, transport of angular momentum by plume-induced waves is more efficient than by turbulence-induced ones. A more quantitative study including all mechanisms of transport, as meridional circulation and shear-induced turbulence, have to be done to confirm this result.

#### 6.4. Sensitivity on input physics

The proposed wave excitation model depends on several physical quantities, like the plume characteristics  $b$ ,  $v_p$ ,  $V_b$ , and on other parameters such as  $N_0$ ,  $\mathcal{A}$ ,  $L_p$  and  $d$ . We discuss here the sensitivity of the model to these quantities.

The effect of  $b$  and  $v_p$  has already been investigated in Sect. 5. We have shown that the total wave energy flux does not depend on the value of  $v_p$  since we assume a stationary process of excitation and that it is almost inversely proportional with  $b$ . However, they have a real impact on the shape of the spectrum. From Eq. (39), the smaller  $b$  ( $v_p$ ), the larger (the smaller) the width of the spectrum in the spatial (temporal) frequency domain. Moreover, the amplitude of the spectrum depends on  $1/v_p$  and  $b^2$ . Multiplication by a factor 2 for  $v_p$  and  $b$  leads to a multiplication by a factor 0.5 and 4, respectively. Thus, the error made on the values of  $v_p$  and  $b$  is not negligible in the estimate of the wave energy spectrum. The plume velocity  $V_b$  at the entry of the penetration zone is another important plume characteristic which highly influences the wave energy flux. Indeed, following Eq. (39), the wave energy flux is proportional to  $V_b^4$ . This means that an increase of 10%, 20% and 30% in  $V_b$  leads to an increase of about 50%, 250% and 500% in the wave energy flux, respectively. Similarly, a decrease of 10%, 20% and 30% for  $V_b$  leads to a decline of about 35%, 60% and 75%. We think the model of turbulent plumes of (Rieutord & Zahn 1995) is reliable enough to give reasonable values for  $V_b$  and  $b$  which will not affect too much the wave energy flux, i.e., by a factor between 0.25 and 4. Note that the same issue arises in the excitation by turbulence since the wave power spectrum depends on the convective velocity to the power 3 and on the size of the energy-bearing to the power 4 in Eq. (43). Uncertainties linked to their determination

by the MLT have also a serious effect on the estimate of the wave energy flux in their model.

Among the free parameters, the filling factor represents the fraction of the area occupied by the ensemble of plumes at the base of the convective zone. In our model, the wave energy flux is proportional to  $\mathcal{A}$ . Conservation of matter imposes  $\mathcal{A} < 0.5$  since it exists upflows less dense and slower than the plume downflows. We use a reasonable value of about  $\mathcal{A} \approx 0.1$  and expect it not to vary too much around this value given what is observed in numerical simulations of the uppermost layers of the convective zone (Stein & Nordlund 1998). Given Sect. 6.1, a filling factor lower than 0.01 is required for penetrative convection to become negligible compared to the excitation by turbulent convection.

The penetration length,  $L_p$  (see Fig. 2), has been theoretically shown to be of the order of magnitude of  $H_p$  by Zahn (1991). Basu (1997) observationally found a lower limit valued at  $0.05H_p$  in the Sun, i.e., more than one order of magnitude below the theoretical prediction. The wide range of values for  $L_p$  considered in Sect. 5.2 reflects this discrepancy between theory and observations. From Fig. 6, we see that a change in  $L_p$  does not influence too much the wave energy spectrum for low angular degrees. A multiplication by 1000 of  $L_p$  leads to a division by about five of the wave energy flux for  $l < 50$ . However, the drop is drastically larger for higher degrees and can reach two orders of magnitude for  $l > 100$ . In the scope of the transport of angular momentum by IGW,  $L_p$  should highly influence high degrees and so the SLO below the convective zone (since the wave damping  $\tau \propto l^3$ ), while low degrees that are damped deeper in the star would not be affected.

Another difficulty is the determination of the Brunt-Väisälä frequency at the top of the radiative zone,  $N_0$ , since the radiative/convective transition is very sharp in stellar evolution codes. In this work, we arbitrarily propose to take the mean value of  $N$  over  $0.1H_p$ , i.e., 1% of the thickness of the solar radiative zone, just below the Schwarzschild's criterion. Its value influences more the wave energy spectrum in the case of sharp transition ( $\mathcal{F}_r \propto 1/N_0$ ) than in the case of a smooth transition ( $\mathcal{F}_r \propto 1/N_0^{2/3}$ ), but its influence remains significative. However, uncertainties on  $N_0$  does not change the comparison with the turbulence-induced wave energy spectrum since it plays the same role in both models. Indeed, it plays a role only in the transmission of the wave into the radiative zone and not in the excitation process.

The above remark about  $N_0$  is also valid for the length  $d$  of the thermal transition zone ( $r_d \leq r \leq r_b - L_p$ , see Fig. 2). In addition, we have shown the larger  $d$ , the better the transmission of the waves, so that the wave energy flux at the top of the radiative zone obtained in the case of a discontinuous transition ( $d = 0$ ) appears as a lower limit. Several estimates of the thickness of the thermal adjustment layer have theoretically been done in the solar case. Schmitt et al. (1984) found an upper limit at about 500 km, whereas Zahn (1991) evaluated  $d$  to be of the order of the kilometer. More recently, Rempel (2004), using a semi-analytical model of penetrative convection taking into account the interaction with the upflows and a distribution of the plume velocity, estimated  $d \approx 350$  km. Given these previous works, we have chosen  $d = 500$  km in Sect. 5.3 as an upper limit for the transition length. With such a value, the total plume-induced wave energy flux at the top of the radiative zone have been shown to represent about 10% of the solar flux. Hence, in the case of a linear profile for the Brunt-Väisälä frequency in the transition region, the plume-induced wave energy flux goes from 1% to 10% of the solar flux for the considered range  $d \in [0, 500]$  km.



Since  $d$  plays the same role in both excitation processes, the turbulence-induced wave energy flux is expected to be between 0.1% to 1% of the solar flux for the same range of values for  $d$ . In the case of a linear smooth transition ( $\gamma_d \gg 1$ ), we have seen that the wave energy flux is proportional to  $d^{1/3}$ , so that a decrease of one order of magnitude for  $d$  induces only a decrease by about a factor two for the wave energy flux. However, the sensitivity of the wave transmission to the parameter  $d$  depends on the profile of the transition. For instance, [Lecoanet & Quataert \(2013\)](#) showed that the wave energy flux is actually proportional to  $d$  in the case of a smooth hyperbolic tangent profile for the Brunt-Väisälä frequency at the base of the convective zone. It is thus more strongly sensitive to the value of  $d$  than for a linear transition profile. At last, these results could explain the very large wave energy flux observed in numerical simulations. For example, [Dintrans et al. \(2005\)](#) found that IGW could carry up to 40% of the total kinetic energy despite a very low Péclet number at the base of the convective zone (imposed by numerical constraints). As explained in [Dintrans et al. \(2005\)](#), a low Péclet number means a weak buoyancy braking of the plume (and so an inefficient excitation by penetrative convection), but it also means a very smooth transition (e.g., [Brummell et al. 2002](#)) which can considerably enhance the transmission of IGW into the radiative zone.

Finally, despite the wide range of values considered in Sect. 5.2 and in this section for the parameters of the excitation model, the same result holds true: excitation by penetrative convection remains more efficient than by turbulent pressure in the Sun and generates a total wave energy flux larger than 0.1% of the solar flux.

### 6.5. Limits of the model

It remains to discuss the limits of the model and the improvements to be done in the future. First, in Sect. 6.4, we have mentioned the dependence of the plume-induced wave energy spectrum on the parameters and the plume characteristics by assuming that they were independent. However, the reality is much more complex. For example, the penetration length has been shown to depend on the filling factor and the plume velocity at the base of the convective zone. [Schmitt et al. \(1984\)](#) and, later, [Zahn \(1991\)](#) demonstrated that  $L_p$  is in fact proportional to  $\mathcal{A}^{1/2} V_b^{3/2}$ . Besides, we can intuitively understand that the plume radius and the plume lifetime must be correlated. The larger the plume, the longer its lifetime. For instance, the characteristic destruction time of the plume by baroclinic eddies is proportional to the plume radius from the model of [Jones & Marshall \(1997\)](#) in Eq. (A.15).

Second, the plume characteristics are not unique and must be distributed around mean values. This is contradictory with the assumption that all the plumes are identical. For example, a distribution of plume velocities at the base of the convective zone could affect the penetration length and the steepness of the thermal transition ([Rempel 2004](#)). A distribution of the plume parameters could also have an impact on the shape of the wave energy spectrum at the top of the radiative zone. Numerical simulations of convection will be essential to answer these questions. Exhaustive studies could be done by varying parameters such as the Reynolds or the Péclet number of the simulations in order to find scaling relations and to extrapolate to stellar regimes.

Lastly, we have found that the total wave energy flux at the top of the radiative zone represents one fourth of the mean plume

kinetic energy flux in the case of a smooth thermal transition ( $d = 500$  km). However, this result has to be taken with caution since it accounts for very low frequencies at which the present description is not valid. For example, physical processes like non-adiabatic effects cannot be neglected for frequencies that are typically lower than  $10^{-6}$  rad s $^{-1}$ . In addition, the derived wave transmission coefficient diverges when  $\omega \rightarrow 0$  in the case of a very smooth transition (see Fig. 7). As a consequence, the amplitude of the transmitted low-frequency waves rises steeply and the linear approximation is no more valid as soon as  $k_r \xi_r \approx 1$  and non-linear processes like wave breaking can occur. Finally, while beyond the scope of this article, we note that the Coriolis acceleration is to be taken into account in the modeling of the driving processes for wave frequencies around (or lower) than twice the internal rotation rate. This is however a challenging task since it requires a full two-dimensional description of both the wave field and the plume dynamics.

## 7. Conclusion and perspectives

In this paper, we propose a semianalytical model of excitation of IGW by penetrative plumes. We consider the pressure exerted by an ensemble of plumes at the radiative/convective interface as the driving mechanism that is supposed to be random and stationary. The wave equation with source term is solved by taking into account the thermal transition from a convective to a radiative gradient at the base of the convective zone. We then determine the amplitude of the waves and investigate the effect of the steepness of the thermal adjustment layer on the wave transmission into the radiative zone. The description of the plumes at the base of the upper convective region follows the model of [Rieutord & Zahn \(1995\)](#). We thus obtain the expression of the wave energy flux per unit of frequency in the whole radiative zone in Eq. (31) as well as its approximated version in Eq. (39). Finally, the model depends on four free parameters: the filling factor, the plume lifetime, the length of penetration and the one of the thermal transition layer.

Numerical calculations for a solar model with reasonable values for the parameters show that the excitation by penetrative convection is five to ten times more efficient than the driving by turbulence in the convective zone as formulated by [Kumar et al. \(1999\)](#). Moreover, we demonstrate that plume-induced waves are able to modify the internal rotation profile of the Sun in about 0.1 Gyr, which is more than ten times faster than with turbulence-induced waves. Plume-induced waves are thus able to considerably affect the internal rotation rate of solar-like stars on times shorter than their lifetime on the main-sequence. Furthermore, we show that these results are conservative despite a wide range of values considered for the parameters of the model.

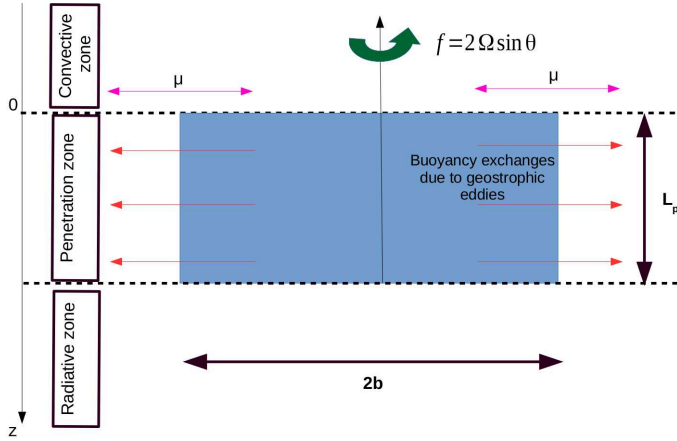
These preliminary results on the Sun will have to be numerically quantified including transport by meridional circulation and shear-induced turbulence with plume-induced waves, and turbulence-induced waves. The study will have to be extended to subgiant and red giant stars with appropriate values of the free parameters. The present excitation model enables an easy implementation in 1D stellar evolution codes, and could be used to investigate the redistribution of angular momentum all along the evolution of stars taking into account transport by plume-induced internal gravity waves as well as turbulence-induced ones, and other mechanisms.

At last, the effect of rotation on the wave dynamics will have to be included in order to get a more realistic view of the transport by internal waves in stars. Indeed, whatever the driving

process is, low frequency waves are affected by the Coriolis force. Thus, it cannot be neglected and it will have an impact on the transport by gravito-inertial waves in the radiative zone (Mathis & Zahn 2004; Mathis 2009) and on the excitation process (e.g., Mathis et al. 2014). Such a development represents a theoretical challenge for the future since we will have to go beyond the traditional approximation for sub-inertial waves (i.e.,  $\omega \leq 2\Omega$ ) and to tackle the problem in 2D, as a function of the radial and latitudinal variables.

## References

- Alvan, L., Brun, A. S., & Mathis, S. 2014, *A&A*, **565**, A42
- Alvan, L., Strugarek, A., Brun, A. S., Mathis, S., & García, R. A. 2015, *A&A*, **581**, A112
- Andersen, B. N. 1994, *Sol. Phys.*, **152**, 241
- Baglin, A., Auvergne, M., Barge, P., et al. 2006a, in ESA SP 1306, eds. M. Fridlund, A. Baglin, J. Lochard, & L. Conroy, 33
- Baglin, A., Auvergne, M., Boisnard, L., et al. 2006b, in COSPAR Meeting, 36th COSPAR Scientific Assembly, 36, 3749
- Basu, S. 1997, *MNRAS*, **288**, 572
- Bedding, T. R., Huber, D., Stello, D., et al. 2010, *ApJ*, **713**, L176
- Belkacem, K., Marques, J. P., Goupil, M. J., et al. 2015a, *A&A*, **579**, A31
- Belkacem, K., Marques, J. P., Goupil, M. J., et al. 2015b, *A&A*, **579**, A30
- Borucki, W. J., Koch, D., Basri, G., et al. 2010, *Science*, **327**, 977
- Brown, T. M., Christensen-Dalsgaard, J., Dziembowski, W. A., et al. 1989, *ApJ*, **343**, 526
- Brummell, N. H., Clune, T. L., & Toomre, J. 2002, *ApJ*, **570**, 825
- Brun, A. S., Miesch, M. S., & Toomre, J. 2011, *ApJ*, **742**, 79
- Cantiello, M., Mankovich, C., Bildsten, L., Christensen-Dalsgaard, J., & Paxton, B. 2014, *ApJ*, **788**, 93
- Ceillier, T., Eggenberger, P., García, R. A., & Mathis, S. 2013, *A&A*, **555**, A54
- Charbonnel, C., & Talon, S. 2008, in IAU Symp. 252, eds. L. Deng, & K. L. Chan, 163
- Charbonnel, C., Decressin, T., Amard, L., Palacios, A., & Talon, S. 2013, *A&A*, **554**, A40
- Christensen-Dalsgaard, J., Monteiro, M. J. P. F. G., Rempel, M., & Thompson, M. J. 2011, *MNRAS*, **414**, 1158
- Deheuvels, S., García, R. A., Chaplin, W. J., et al. 2012, *ApJ*, **756**, 19
- Deheuvels, S., Doğan, G., Goupil, M. J., et al. 2014, *A&A*, **564**, A27
- Dintrans, B., Brandenburg, A., Nordlund, Å., & Stein, R. F. 2005, *A&A*, **438**, 365
- Eggenberger, P., Montalbán, J., & Miglio, A. 2012, *A&A*, **544**, L4
- Fuller, J., Lecoanet, D., Cantiello, M., & Brown, B. 2014, *ApJ*, **796**, 17
- García, R. A., Turck-Chièze, S., Jiménez-Reyes, S. J., et al. 2007, *Science*, **316**, 1591
- García Lopez, R. J., & Spruit, H. C. 1991, *ApJ*, **377**, 268
- Goldreich, P., Murray, N., & Kumar, P. 1994, *ApJ*, **424**, 466
- Heger, A., Woosley, S. E., & Spruit, H. C. 2005, *ApJ*, **626**, 350
- Hurlburt, N. E., Toomre, J., & Massaguer, J. M. 1986, *ApJ*, **311**, 563
- Jones, H., & Marshall, J. 1997, *J. Phys. Oceanogr.*, **27**, 2276
- Kumar, P., Talon, S., & Zahn, J.-P. 1999, *ApJ*, **520**, 859
- Lebreton, Y., Goupil, M. J., & Montalbán, J. 2014, in *EAS Pub. Ser.*, **65**, 99
- Lecoanet, D., & Quataert, E. 2013, *MNRAS*, **430**, 2363
- Lighthill, J. 1978, *Waves in fluids* (CUP)
- Maeder, A. 2009, *Physics, Formation and Evolution of Rotating Stars* (Berlin, Heidelberg: Springer)
- Marques, J. P., Goupil, M. J., Lebreton, Y., et al. 2013, *A&A*, **549**, A74
- Mathis, S. 2009, *A&A*, **506**, 811
- Mathis, S., & Zahn, J.-P. 2004, *A&A*, **425**, 229
- Mathis, S., Decressin, T., Eggenberger, P., & Charbonnel, C. 2013, *A&A*, **558**, A11
- Mathis, S., Neiner, C., & Tran Minh, N. 2014, *A&A*, **565**, A47
- Montalbán, J., & Schatzman, E. 2000, *A&A*, **354**, 943
- Mosser, B., Goupil, M. J., Belkacem, K., et al. 2012a, *A&A*, **548**, A10
- Mosser, B., Goupil, M. J., Belkacem, K., et al. 2012b, *A&A*, **540**, A143
- Press, W. H. 1981, *ApJ*, **245**, 286
- Rempel, M. 2004, *ApJ*, **607**, 1046
- Rieutord, M., & Zahn, J.-P. 1995, *A&A*, **296**, 127
- Rogers, T. M., & Glatzmaier, G. A. 2006, *ApJ*, **653**, 756
- Rogers, T. M., Lin, D. N. C., McElwaine, J. N., & Lau, H. H. B. 2013, *ApJ*, **772**, 21
- Rüdiger, G., Gellert, M., Spada, F., & Tereshin, I. 2015, *A&A*, **573**, A80
- Schmitt, J. H. M. M., Rosner, R., & Bohn, H. U. 1984, *ApJ*, **282**, 316
- Spruit, H. C. 2002, *A&A*, **381**, 923
- Stein, R. F., & Nordlund, A. 1998, *ApJ*, **499**, 914
- Stull, R. B. 1976, *J. Atmos. Sci.*, **33**, 1279
- Talon, S., & Charbonnel, C. 1998a, in *Cool Stars, Stellar Systems, and the Sun*, eds. R. A. Donahue, & J. A. Bookbinder, *ASP Conf. Ser.*, **154**, 973
- Talon, S., & Charbonnel, C. 1998b, *A&A*, **335**, 959
- Talon, S., & Charbonnel, C. 2003, *A&A*, **405**, 1025
- Talon, S., & Charbonnel, C. 2004, *A&A*, **418**, 1051
- Talon, S., & Charbonnel, C. 2005, *A&A*, **440**, 981
- Talon, S., Kumar, P., & Zahn, J.-P. 2002, *ApJ*, **574**, L175
- Townsend, A. A. 1966, *J. Fluid Mech.*, **24**, 307
- Turner, J. S. 1986, *J. Fluid Mech.*, **173**, 431
- Unno, W., Osaki, Y., Ando, H., Saio, H., & Shibahashi, H. 1989, *Nonradial oscillations of stars*, 2nd edn. (Tokyo: University of Tokyo Press)
- Zahn, J.-P. 1991, *A&A*, **252**, 179
- Zahn, J.-P. 1997, in *SCORE'96: Solar Convection and Oscillations and their Relationship*, eds. F. P. Pijpers, J. Christensen-Dalsgaard, & C. S. Rosenthal, *Astrophys. Space Sci. Libr.*, **225**, 187



**Fig. A.1.** Schematic view of the plume (in blue) in the penetration region, surrounded by a stable stratified medium.  $\mu$  represents the horizontal length scale of the density contrast between the two distinct parts.

## Appendix A: Plume lifetime and restratification in the Sun

We adapt the model developed by Jones & Marshall (1997) in the penetration zone of the Sun where a lateral density contrast exists between the plume and the surroundings. We consider a fluid cylinder of height and radius equal to  $L_p$  and  $b$ , respectively (see Fig. A.1)

### A.1. Geostrophic wind in the solar penetration zone

Jones & Marshall (1997) investigated the restratification of convective patches in the oceans for which the geostrophic approximation is valid. Under these conditions, the flows follow the geostrophic wind equations resulting in a balance between the pressure gradient and the Coriolis force. In order to adopt their model to the Sun, we must first verify the validity of the geostrophic approximation in the solar penetration zone.

1. Acceleration in the corotating frame with the base of the convection zone must be negligible compared to the Coriolis force, so that the Rossby number

$$R_o = \frac{U}{2\Omega L} \quad (\text{A.1})$$

is smaller than unity, with  $\Omega$  the mean angular rotation rate,  $L$  the characteristic horizontal length scale and  $U$  the zonal velocity in the corotating frame. In the solar tachocline case, taking  $\Omega \approx 2.5 \times 10^{-6} \text{ rad s}^{-1}$ ,  $L \approx 2b \approx 2 \times 10^4 \text{ km}$ , we will verify a posteriori that  $R_o \ll 1$  provided that  $U \ll 100 \text{ m s}^{-1}$ .

2. Viscous stress can be neglected compared to the Coriolis term in the equation of motion, the Ekman number

$$E_k = \frac{\nu}{2\Omega L^2}, \quad (\text{A.2})$$

with  $\nu$  the viscosity, is much smaller than unity. Even with a turbulent viscosity due to local shear expected to be around  $\nu_t \sim 10^6 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ , the Ekman number stays very small.

3. Finally, the vertical length scale must be negligible compared to horizontal one. In the solar case, taking  $L_p \approx 0.1H_p$ ,  $H_p \approx 5 \times 10^4 \text{ km}$ , the pressure scale height at the base of the convective zone, and  $b \approx 10^4 \text{ km}$ , the ratio is equal to

$$\frac{L_p}{2b} \approx 10^{-1}. \quad (\text{A.3})$$

Thus, the geostrophic approximation in the solar penetration zone will be valid on condition that the zonal wind in the corotating frame is slow enough; this will be verified a posteriori.

### A.2. Plume destruction time scale by geostrophic eddies (Jones & Marshall 1997)

By assuming vertical hydrostatic balance (which is possible inside the plume if we consider an almost uniform and stationary flow), we can then use the thermal wind equation

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \frac{1}{f\rho} \mathbf{k} \times \nabla_h p \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} &= \frac{g}{f\rho} \mathbf{k} \times \nabla_h \rho, \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

where  $f = 2 \sin \theta \Omega$  is the Coriolis parameter,  $\rho$  the density,  $p$  the pressure and  $\mathbf{k}$  the unit vector perpendicular to the surface of the sphere. The density contrast  $\delta\rho$  between the plume and the surrounding medium creates a vertical shear, which obeys to

$$\frac{\partial u}{\partial z} \approx \frac{g}{f\mu} \frac{\delta\rho}{\rho} = -\frac{1}{f\mu} \delta b, \quad (\text{A.5})$$

where  $\mu$  is the horizontal length scale on which density exchanges take place and  $\delta b = -g\delta\rho/\rho$  represents buoyancy acceleration. To go further, we use a first order expansion at  $z \sim L_p$  of  $\delta b$ ,

$$\delta b \approx (\delta b)_{L_p} + \left( \frac{d\delta b}{dz} \right)_{L_p} (z - L_p) = -N_t^2 L_p \left( \frac{z}{L_p} - 1 \right), \quad (\text{A.6})$$

where we impose  $(\delta b)_{L_p} = 0$  and we note

$$\left( \frac{d\delta b}{dz} \right)_{L_p} = -N_t^2, \quad (\text{A.7})$$

with  $N_t^2$  the mean Brunt-Väisälä frequency in the penetration zone. By injecting Eq. (A.6) in Eq. (A.5), we obtain the zonal wind as a function of the altitude

$$u = \frac{N_t^2 L_p^2}{f\mu} \left( \frac{z^2}{2L_p^2} - \frac{z}{L_p} + \frac{1}{3} \right), \quad (\text{A.8})$$

where the constant of integration is chosen to satisfy  $\int_0^{L_p} u(z) dz = 0$ . Jones & Marshall (1997) showed that the thermal wind undergoes a baroclinic instability when the radius of the fluid column is longer than the Rossby length scale of deformation

$$L_D \approx \frac{N_t L_p}{f}. \quad (\text{A.9})$$

In the penetration zone, injection of convective material imposes a quasi-adiabatic gradient before reaching a radiative regime where the Brunt-Väisälä frequency reaches  $N_0 \approx 300 \mu H_z$ . Hence, we can estimate  $N_t \sim 1-10 \mu H_z$ . With  $L_p \sim 0.1H_p$ , we find  $L_D \approx 10^2-10^3 \text{ km} \leq b$  and the fluid column in the Sun undergoes a baroclinic instability. Moreover, at  $z = 0$ , we find

$$u(z=0) = \frac{N_t L_p}{3} \frac{L_D}{\mu}. \quad (\text{A.10})$$

We then assume that the density exchanges take place on a more expanded length scale than the Rossby radius of deformation, so  $\mu \geq L_D$ . Therefore,  $u(z=0) \leq 10 \text{ m s}^{-1}$ , the Rossby number

$R_o \ll 1$  and we verify a posteriori the thermal wind approximation (cf. paragraph on Rossby number Eq. (A.1)).

By conservation of potential buoyancy,  $\overline{\delta b}$  is conserved in the cylinder of fluid, where the bar denotes time average over a characteristic time scale. Let  $\mathbf{v}$  be the eddies-induced velocity field. The Reynolds transport theorem enables us to write

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \int_{\text{cylinder}} \overline{(\delta b)} dV \right) = 2\pi b \int_0^{L_p} \overline{(\delta b)} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dz, \quad (\text{A.11})$$

where  $\mathbf{n}$  is the unit vector perpendicular to the lateral surface and where we have neglected the contribution of the buoyancy fluxes through the top and the bottom of the cylinder. To go further, we suppose

$$\overline{(\delta b)} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = c_e (\delta b) u_{z=0}, \quad (\text{A.12})$$

with  $c_e$  representing the efficiency coefficient of the transport by geostrophic eddies. The right-hand side of Eq. (A.12) becomes after integration

$$2\pi b \int_0^{L_p} \overline{(\delta b)} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dz = 2\pi b \frac{c_e N_t^3 L_p^3 L_D}{6 \mu}. \quad (\text{A.13})$$

The left-hand side of Eq. (A.12) gives

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \int_{\text{cylinder}} \overline{(\delta b)} dV \right) \approx \frac{1}{\tau_{\text{res}}} \frac{\pi b^2 N_t^2 L_p^2}{2}, \quad (\text{A.14})$$

whence we can deduce the restratification time scale

$$\tau_{\text{res}} \approx \frac{3}{2} \frac{b}{c_e N_t L_p} \frac{\mu}{L_D}. \quad (\text{A.15})$$

From numerical experiments and observations, Jones & Marshall (1997) derived  $c_e = 0.027$  in the case of the oceans. Given the lack of knowledge about this process in the Sun, we use this value to estimate the plume lifetime in our case. We find  $t_{\text{res}} \sim 10^6 - 10^7$  s with  $\mu \sim L_D$ , i.e.  $v_p = 1/\tau_p \sim 0.1 - 1 \mu\text{H}_z$ . Note that this value is of the same order of magnitude than the turnover convective frequency,  $\omega_c = v_c/l_c$ , as given by the MLT in a standard model, with  $v_c$  the convective velocity and  $l_c$  the mixing length.

## Appendix B: Derivation of the wave energy flux

In the following, we detail the derivation of the wave power spectrum in the radiative zone. We will focus on the pressure due to convective plumes as driving mechanism in the penetration zone, and we will take into account the effect of the thermal transition on the transmission of the generated waves, as illustrated in Fig. 2.

### B.1. Adiabatic wave equation with source term

As explained in Sect. 2.1, the total velocity field is split into a wave component  $\mathbf{v}$  and a plume component  $\mathbf{V}_p$ . We neglect the non-linear wave term  $\nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v})$  and the plume-related coupling terms, like  $\nabla \cdot (\rho \mathbf{V}_p \otimes \mathbf{v})$ . We also assume that the time variation of the plume impulsion in the penetration zone,  $\partial_t (\rho \mathbf{V}_p)$ , does not participate into the excitation of the wave, and that the plume destruction is mainly due to instabilities and turbulent motions in

this region. The equations of dynamics are then given by Eq. (1) and Eq. (2).

To go further, we adapt the procedure used by Unno et al. (1989) in order to include the forcing term and the continuous frequency spectrum of the plume-induced wave packet. We introduce the Lagrangian wave displacement vector  $\xi(\mathbf{r}, t)$  related to the wave velocity field by  $\mathbf{v} = \partial_t \xi$ . The Eulerian perturbations are decomposed onto the spherical harmonics, like the wave velocity field in Eq. (13) or, for example, the radial Lagrangian displacement

$$\xi_r(\mathbf{r}, t) = \sum_{l,m} \xi_{r,l,m}(r, t) Y_l^m(\theta, \phi). \quad (\text{B.1})$$

Deriving the spectral density of the wave specific energy Eq. (12) requires the computation of the time Fourier transform of the wave velocity field. By taking the time Fourier transform of Eqs. (1) and (2) and using the fact that spatial differential operators commute with time Fourier transform, we obtain

$$-\omega^2 \hat{\xi} + \frac{\nabla \hat{p}'}{\rho} - \frac{\hat{p}'}{\rho} \mathbf{g} = -\mathcal{T}\mathcal{F} \left[ \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}_p \otimes \mathbf{V}_p) \right] \quad (\text{B.2})$$

$$\frac{\delta \hat{p}}{\rho} + \nabla \cdot \hat{\xi} = 0. \quad (\text{B.3})$$

The horizontal part of Eq. (B.2) enables to link the horizontal displacement vector  $\hat{\xi}_{h,l,m}$  to  $\hat{p}'_{l,m}$  and the horizontal part of the forcing term

$$\hat{\xi}_h = \frac{1}{\omega^2} \left\{ \nabla_{\perp} \left( \frac{\hat{p}'}{\rho} \right) + \mathcal{T}\mathcal{F} \left[ \frac{1}{\rho} \left( \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}_p \otimes \mathbf{V}_p) \right)_{\perp} \right] \right\}, \quad (\text{B.4})$$

with  $\nabla_{\perp}$  the horizontal nabla operator. To continue, we proceed in the same way than Unno et al. (1989, Eq. (13.40)). We compute the horizontal divergence of Eq. (B.2) and replace  $\nabla_{\perp} \cdot \hat{\xi}_h$  from Eq. (B.3) to find

$$\frac{\delta \hat{p}}{\rho} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \hat{\xi}_r \right) + \nabla_{\perp}^2 \left( \frac{\hat{p}'}{\rho \omega^2} \right) = -\frac{1}{\omega^2} \nabla_{\perp} \cdot \left\{ \mathcal{T}\mathcal{F} \left[ \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}_p \otimes \mathbf{V}_p) \right] \right\} \quad (\text{B.5})$$

Using the adiabatic closure hypothesis (in Fourier space),

$$\delta \hat{p} = \delta \hat{p}/c^2 = (\hat{p}' - \rho g \hat{\xi}_r)/c^2, \quad (\text{B.6})$$

and the decomposition onto spherical harmonics Eq. (B.1), Eq. (B.5) can be rewritten

$$\sum_{l,m} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \hat{\xi}_{r,l,m} \right) - \frac{g}{c^2} \hat{\xi}_{r,l,m} + \left( 1 - \frac{S_l^2}{\omega^2} \right) \frac{\hat{p}'_{l,m}}{\rho c^2} \right] Y_l^m(\theta, \phi) = -\frac{1}{\omega^2} \nabla_{\perp} \cdot \left\{ \mathcal{T}\mathcal{F} \left[ \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}_p \otimes \mathbf{V}_p) \right] \right\}. \quad (\text{B.7})$$

Similarly, using  $\hat{p}' = \delta \hat{p} - \xi_r \nabla \rho$  and Eq. (B.6), the radial part of Eq. (B.2) becomes

$$\sum_{l,m} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{d \hat{p}'_{l,m}}{dr} + \frac{g}{\rho c^2} \hat{p}'_{l,m} + (N^2 - \omega^2) \hat{\xi}_{r,l,m} \right] Y_l^m(\theta, \phi) = -e_r \cdot \mathcal{T}\mathcal{F} \left[ \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}_p \otimes \mathbf{V}_p) \right], \quad (\text{B.8})$$

with  $c$  the sound speed,  $S_l$  the Lamb frequency and  $N$  the Brunt-Väisälä frequency. After projecting onto  $Y_l^m(\theta, \phi)$ , we obtain a first-order linear system of two differential equations for  $\hat{\xi}_{r,l,m}(r, \omega)$  and  $\hat{p}'_{l,m}(r, \omega)$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \hat{\xi}_{r,l,m}) - \frac{g}{c^2} \hat{\xi}_{r,l,m} + \left(1 - \frac{S_l^2}{\omega^2}\right) \frac{\hat{p}'_{l,m}}{\rho c^2} = F_1 \quad (\text{B.9})$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\hat{p}'_{l,m}}{dr} + \frac{g}{\rho c^2} \hat{p}'_{l,m} + (N^2 - \omega^2) \hat{\xi}_{r,l,m} = F_2. \quad (\text{B.10})$$

The differential system is similar to Eq. (14.2) and (14.3) in [Unno et al. \(1989\)](#), with the additional right-hand side source terms  $F_1$  and  $F_2$ , given by

$$F_1 = - \int \frac{1}{\omega^2} \nabla_{\perp} \cdot \left\{ \mathcal{T} \mathcal{F} \left[ \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}_p \otimes \mathbf{V}_p) \right] \right\} \overline{Y_l^m} d\Omega \quad (\text{B.11})$$

$$F_2 = - \int \mathbf{e}_r \cdot \mathcal{T} \mathcal{F} \left[ \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}_p \otimes \mathbf{V}_p) \right] \overline{Y_l^m} d\Omega, \quad (\text{B.12})$$

with the solid angle given by  $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$ .

### B.2. Modeling of the source term in the wave equation

Considering the velocity profile in Eq. (19), the pressure gradient due to a single plume is given by

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{V}_p \otimes \mathbf{V}_p) = e^{-2\gamma_p^2 r^2} \left[ \frac{\partial}{\partial r} + \frac{2}{r} \right] (\rho V_0^2 e^{-S_h^2/b^2}) \mathbf{e}_r. \quad (\text{B.13})$$

We assume that the radius at the interface,  $r_b$ , is much larger than the penetration length,  $L_p \ll r_b$ . Hence, the operator  $2/r$  can be neglected compared to  $\partial_r$ , and the radius is taken constant in this region. Therefore, using Eq. (B.13), Eq. (B.12) can be written as

$$F_2 = - \frac{\alpha(\omega)}{\rho} \beta_l^m \frac{d}{dr} (\rho V_0^2), \quad (\text{B.14})$$

where we have defined

$$\alpha(\omega) = \mathcal{T} \mathcal{F} \left[ e^{-2\gamma_p^2 r^2} \right] = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-\omega^2/8\gamma_p^2}}{\gamma_p} \quad (\text{B.15})$$

$$\beta_l^m = \int e^{-S_h^2/b^2} \overline{Y_l^m} d\Omega = \beta_l^m(\theta_0, \phi_0), \quad (\text{B.16})$$

with  $s_b = S_h(r_b, \theta, \phi; \theta_0, \phi_0)$  following Eq. (20). We also find that Eq. (B.11) cancels,  $F_1 = 0$ , since Eq. (B.13) is collinear with the radial direction. For the same reason, using Eq. (B.13) in Eq. (B.4), we see that the toroidal part of the displacement vector is null,  $\hat{\xi}_{T,l,m} = 0$ , and that the poloidal part, renamed  $\hat{\xi}_{h,l,m}$ , is linked to the perturbation of pressure through the expression

$$\hat{\xi}_{P,l,m}(r, \omega) = \hat{\xi}_{h,l,m}(r, \omega) = \frac{\hat{p}'_{l,m}(r, \omega)}{\rho r \omega^2}. \quad (\text{B.17})$$

Finally, Eqs. (B.9) and (B.10) can be rewritten in the form of the following non-homogeneous first-order differential system

$$\frac{dz}{dr}(r, \omega) = \mathbf{A}(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{z}(\mathbf{r}, \omega) + \mathbf{b}(\mathbf{r}, \omega), \quad (\text{B.18})$$

where  $\mathbf{z}$ ,  $\mathbf{b}$  and  $\mathbf{A}$  are given by Eq. (29) and Eq. (30).

### B.3. Homogeneous equation

To solve the homogeneous differential system, i.e., Eq. (B.18) with  $\mathbf{b} = 0$ , we use the change of variables ([Unno et al. 1989](#))

$$v_{l,m}(r) = \rho^{1/2} r c \left| \frac{S_l^2}{\omega^2} - 1 \right|^{-1/2} \hat{\xi}_{r,l,m} \quad (\text{B.19})$$

$$w_{l,m}(r) = \rho^{-1/2} r |N^2 - \omega^2|^{-1/2} \hat{p}'_{l,m}. \quad (\text{B.20})$$

This leads to a more tractable second-order differential linear equation for  $v_{l,m}$

$$\frac{d^2 v_{l,m}}{dr^2} + k_r^2 v_{l,m} = 0, \quad (\text{B.21})$$

with  $k_r$  given by Eq. (18) and where we have neglected the term  $f(P)$  in Eq. (16.11) of [Unno et al. \(1989\)](#). Therefore,  $\hat{\xi}_{r,l,m}$  is obtained through Eq. (B.19) by solving Eq. (B.21), and  $\hat{\xi}_{h,l,m}$  is deduced from Eq. (B.17), Eq. (B.20) and the relation

$$w_{l,m}(r) \approx \text{sgn}(S_l^2 - \omega^2) |k_r|^{-1} \frac{dv_{l,m}}{dr} \quad (\text{B.22})$$

which comes from Eq. (B.7). This approach will be used in the following paragraphs to find the two linearly independent solutions (subscript 1 or 2) of the homogeneous differential system for each region: the quasi-adiabatic region, composed of the penetration zone and the convective zone, the transition region and the radiative interior (see Fig. 2).

#### B.3.1 Quasi-adiabatic region ( $r_b - L_p \leq r$ )

In the convective zone and the penetration zone, we assume that the temperature gradient is quasi-adiabatic,  $N^2 \sim 0$  and the waves are evanescent. In this region, the WKB solutions of Eq. (B.21) are a good approximation. The wave functions,  $z_{1,r}^a$  and  $z_{2,r}^a$ , in the quasi-adiabatic region (superscript  $a$ ) are then estimated up to a constant by

$$\begin{pmatrix} z_{1,r}^a \\ z_{1,h}^a \end{pmatrix} = i \rho^{-1/2} r^{-3/2} \left( \frac{r}{r_b - L_p} \right)^\Lambda \begin{pmatrix} \Lambda^{1/2} \\ \Lambda^{-1/2} \end{pmatrix} \quad (\text{B.23})$$

$$\begin{pmatrix} z_{2,r}^a \\ z_{2,h}^a \end{pmatrix} = i \rho^{-1/2} r^{-3/2} \left( \frac{r_b - L_p}{r} \right)^\Lambda \begin{pmatrix} \Lambda^{1/2} \\ -\Lambda^{-1/2} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.24})$$

where the subscripts  $r$  and  $h$  refer to the radial and horizontal components of the vectors,  $r_b$  is the radius of the base of the convective zone (as prescribed by the Schwarzschild's criterion),  $L_p$  is the penetration length and  $\Lambda = \sqrt{l(l+1)}$ .

#### B.3.2 Radiative interior ( $r \leq r_d$ )

In the same way, in the radiative zone (superscript  $r$ ), propagative waves are estimated with the WKB solutions of Eq. (B.21). The inward and outward wave functions,  $z_{1,r}^r$  and  $z_{2,r}^r$ , are respectively given up to a constant by

$$\begin{pmatrix} z_{1,r}^r \\ z_{1,h}^r \end{pmatrix} = i \rho^{-1/2} r^{-3/2} \exp \left( -i \int_r^{r_d} k_r dr \right) \begin{pmatrix} \Lambda^{1/2} \left( \frac{N^2}{\omega^2} - 1 \right)^{-1/4} \\ i \Lambda^{-1/2} \left( \frac{N^2}{\omega^2} - 1 \right)^{1/4} \end{pmatrix} \quad (\text{B.25})$$

$$\begin{pmatrix} z_{2,r}^r \\ z_{2,h}^r \end{pmatrix} = i \rho^{-1/2} r^{-3/2} \exp \left( +i \int_r^{r_d} k_r dr \right) \begin{pmatrix} \Lambda^{1/2} \left( \frac{N^2}{\omega^2} - 1 \right)^{-1/4} \\ -i \Lambda^{-1/2} \left( \frac{N^2}{\omega^2} - 1 \right)^{1/4} \end{pmatrix} \quad (\text{B.26})$$

where  $r_d$  represents the radius at the top of the radiative zone  $r_d = r_b - L_p - d$ .

### B.3.3 Thermal transition layer ( $r_d \leq r \leq r_b - L_p$ )

Once the plume is slowed down enough, radiative diffusion can operate efficiently. In this so-called thermal adjustment layer, the temperature gradient undergoes a transition from a quasi-adiabatic gradient to a radiative one. We follow here the work of [Lecoanet & Quataert \(2013\)](#) and assume that the Brunt-Väisälä frequency varies linearly in the layer (Fig. 2)

$$N^2 = -\frac{N_0^2}{d} \left( z' - \frac{d}{2} \right), \quad (\text{B.27})$$

with  $z' = r - (r_b - L_p) + d/2$ . By injecting Eq. (B.27) in the expression of the radial wavenumber Eq. (18), Eq. (B.21) becomes:

$$\frac{d^2 v_{l,m}}{dz'^2} + \left( -\frac{k_h^2 N_0^2}{\omega^2 d} z' + \frac{k_h^2 N_0^2}{\omega^2 d} \frac{d(N_0^2 - 2\omega^2)}{2N_0^2} \right) v_{l,m} = 0. \quad (\text{B.28})$$

As in [Lecoanet & Quataert \(2013\)](#), we define

$$K_1 = \frac{k_h^2 N_0^2}{d\omega^2} \quad (\text{B.29})$$

$$z_t = \frac{d(N_0^2 - 2\omega^2)}{2N_0^2}, \quad (\text{B.30})$$

with  $z_t$  the wave turning point (where  $N^2 = \omega^2$ ) and  $k_h \approx \Lambda/r_b$  the horizontal wavelength, supposed to be constant in the transition layer. Then, using the change of variable  $\chi = K_1^{1/3}(z' - z_t)$ , we find that Eq. (B.28) verifies the equation of Airy:

$$\frac{d^2 v_{l,m}}{d\chi^2} - \chi v_{l,m} = 0, \quad (\text{B.31})$$

whose the solution is a linear combination of the Airy functions  $A_i(\chi)$  and  $B_i(\chi)$ . To determine the horizontal part  $\hat{\xi}_{h,l,m}$ , we use Eq. (B.22) that can be written as a function of the variable  $\chi$

$$w_{l,m} = \frac{1}{K_1^{1/3} |\chi|^{1/2}} \frac{d\chi}{dr} \frac{dv_{l,m}}{d\chi} = \frac{1}{|\chi|^{1/2}} \frac{dv_{l,m}}{d\chi}. \quad (\text{B.32})$$

Therefore, the two linearly independent<sup>7</sup> solutions of the homogeneous wave equation,  $z_1^t$  and  $z_2^t$ , in the transition layer (super-script  $t$ ) read up to a constant

$$\begin{pmatrix} z_{1,r}^t \\ z_{1,h}^t \end{pmatrix} = i\rho^{-1/2} r^{-2} \begin{pmatrix} \sqrt{l(l+1)} A_i(\chi) \\ \frac{K_1^{1/3}}{k_h} \frac{dA_i}{d\chi}(\chi) \end{pmatrix} \quad (\text{B.33})$$

$$\begin{pmatrix} z_{2,r}^t \\ z_{2,h}^t \end{pmatrix} = i\rho^{-1/2} r^{-2} \begin{pmatrix} \sqrt{l(l+1)} B_i(\chi) \\ \frac{K_1^{1/3}}{k_h} \frac{dB_i}{d\chi}(\chi) \end{pmatrix}. \quad (\text{B.34})$$

<sup>7</sup> The Wronskian  $W$  of  $z_1^t$  and  $z_2^t$  is equal to

$$W = -\rho^{-1} r^{-3} K_1^{1/3} \left( A_i(\chi) \frac{dB_i}{d\chi}(\chi) - B_i(\chi) \frac{dA_i}{d\chi}(\chi) \right) = -\rho^{-1} r^{-3} K_1^{1/3} \frac{1}{\pi}$$

which is a non-zero value whatever the radius is, meaning that they are well linearly independent.

### B.4. Particular solution of the non-homogeneous system

We suppose that wave driving occurs exclusively in the penetration zone where buoyancy braking is the strongest (i.e.,  $\mathbf{b} \neq 0$  for  $r_b - L_p < r < r_b$ ). We derive a particular solution of the non-homogeneous system thanks to the method of variation of parameters. In the quasi-adiabatic region ( $r_b \leq r$ ), we search a solution in the form of

$$z_0^a(r) = \mu(r) z_1^a(r) + \lambda(r) z_2^a(r). \quad (\text{B.35})$$

By injecting Eq. (B.35) in Eq. (B.18), the functions  $\mu$  and  $\lambda$  must verify the linear system

$$\frac{d\mu}{dr} z_1^a + \frac{d\lambda}{dr} z_2^a = \mathbf{b} \quad (\text{B.36})$$

whose the solution is obtained by using the Cramer's rule

$$\frac{d\mu}{dr} = \frac{-z_{2,r}^a b}{z_{1,r}^a z_{2,h}^a - z_{2,r}^a z_{1,h}^a} \quad (\text{B.37})$$

$$\frac{d\lambda}{dr} = \frac{z_{1,r}^a b}{z_{1,r}^a z_{2,h}^a - z_{2,r}^a z_{1,h}^a}, \quad (\text{B.38})$$

where  $b = iF_2/r\omega$ . From Eqs. (B.14), (B.23) and (B.24), integration leads to

$$\mu(r) = \frac{\alpha(\omega)}{2\omega} \beta_{l,m} \Lambda^{1/2} \int_r^{r_b} \frac{d}{dr} (\rho V_0^2) \rho^{-1/2} r^{1/2} \left( \frac{r_b - L_p}{r} \right)^\Lambda dr \quad (\text{B.39})$$

$$\lambda(r) = -\frac{\alpha(\omega)}{2\omega} \beta_{l,m} \Lambda^{1/2} \int_r^{r_b} \frac{d}{dr} (\rho V_0^2) \rho^{-1/2} r^{1/2} \left( \frac{r}{r_b - L_p} \right)^\Lambda dr \quad (\text{B.40})$$

where  $\alpha(\omega)$  and  $\beta_{l,m}^m$  are given by Eq. (B.15) and Eq. (B.16), and where we have arbitrarily chosen  $\mu(r_b) = \lambda(r_b) = 0$ .

### B.5. General solution and boundary conditions

The general wave function is obtained by ensuring the continuity of the radial and the horizontal displacements at the limits between each region. We have also to consider two boundary conditions which are taken at surface and at the center of the star. In the quasi-adiabatic region ( $r_b - L_p \leq r$ ), the general solution  $z$  reads

$$z = A_1 z_1^a + A_2 z_2^a + z_0^a(r). \quad (\text{B.41})$$

We impose  $A_1 = 0$ , since we assume that there is no evanescent inward component coming from the surface of the star. In the transition layer ( $r_d \leq r \leq r_b - L_p$ ), the general solution reads

$$z = C_1 z_1^t + C_2 z_2^t, \quad (\text{B.42})$$

and in the radiative interior ( $r \leq r_d$ ),

$$z = B_1 z_1^r + B_2 z_2^r. \quad (\text{B.43})$$

We choose  $B_2 = 0$  because we only consider the inward component of the wave (travelling towards the center). In other words, we suppose that the waves will be damped before being reflected in the core, so that the emergence of modes is not allowed.

### B.6. Continuity of the wave function

To derive the wave energy flux at the top of the radiative zone ( $r = r_d$ ), we need to determine the modulus of the constant  $B_1$ . By imposing the continuity of the radial and the horizontal displacement (which is equivalent to continuity of the perturbation of pressure) at the points  $r_p = r_b - L_p$  and  $r_d$ , we get four linear equations linking  $B_1$  to  $A_2$ ,  $C_1$  and  $C_2$ , so that we close the system.

At the point  $r = r_p$ , corresponding to  $z' = d/2$  in Eq. (B.27), the argument of the Airy functions is equal to

$$\chi_p = \chi(r_p) = \left( \frac{k_h d \omega^2}{N_0^2} \right)^{2/3} \ll 1, \quad (\text{B.44})$$

since  $k_h d \leq 1$  and  $\omega/N_0 \ll 1$ . Therefore, we can use the first-order Taylor expansion at 0 of the functions  $A_i(\chi)$  et  $B_i(\chi)$  and their derivatives<sup>8</sup>

$$v_{l,m} = C'_1 + C'_2 \chi + O(\chi^3) \quad (\text{B.45})$$

$$\frac{dv_{l,m}}{d\chi} = C'_2 + O(\chi^2), \quad (\text{B.46})$$

where  $C'_1$  and  $C'_2$  are linked to  $C_1$  and  $C_2$  following the Taylor expansion of the Airy functions

$$C_1 = \frac{3^{2/3}}{2} \Gamma(2/3) \Gamma(1/3) \left( \frac{C'_1}{\Gamma(1/3)} - \frac{C'_2}{3^{1/3} \Gamma(2/3)} \right) \quad (\text{B.47})$$

$$C_2 = \frac{3^{1/6}}{2} \Gamma(2/3) \Gamma(1/3) \left( \frac{C'_1}{\Gamma(1/3)} + \frac{C'_2}{3^{1/3} \Gamma(2/3)} \right). \quad (\text{B.48})$$

The continuity at the radius  $r_p$  between the adiabatic region to the transition layer yields to

$$\mu_p z_1^a(r_p) + \lambda_p z_2^a(r_p) + A_2 z_2^a(r_p) = C_1 z_1^t(r_p) + C_2 z_2^t(r_p), \quad (\text{B.49})$$

where  $\mu_p = \mu(r_p)$  and  $\lambda_p = \lambda(r_p)$ . The second line of the system Eq. (B.49) gives

$$C'_2 = \frac{k_h^{1/2}}{K_1^{1/3}} \left[ \mu_p - (\lambda_p + A_2) \right]. \quad (\text{B.50})$$

Using Eq. (B.50) in the first line of Eq. (B.49), we obtain

$$C'_1 = k_h^{-1/2} \left[ \mu_p \left( 1 - \frac{k_h d \omega^2}{N_0^2} \right) + (\lambda_p + A_2) \left( 1 + \frac{k_h d \omega^2}{N_0^2} \right) \right] \quad (\text{B.51})$$

At the point  $r = r_d$  ( $z' = -d/2$ ), the argument of the Airy functions is equal to

$$\chi_d = \chi(r_d) = - \left( \frac{k_h d N_0}{\omega} \right)^{2/3} \frac{N_0^2 - \omega^2}{N_0^2}, \quad (\text{B.52})$$

and the continuity condition between the top of the radiative zone and the transition layer at  $r_d$  yields

$$B_1 z_1^r(r_d) = C_1 z_1^t(r_d) + C_2 z_2^t(r_d). \quad (\text{B.53})$$

<sup>8</sup> Note that  $A_i'(0) = B_i''(0) = 0$ , so that the first-order Taylor expansion of the derivatives of the Airy functions around 0 is equal to their zero-order Taylor expansion.

### B.6.1 Case of a sharp transition

In the case of a sharp transition, i.e.  $|\chi_d| \ll 1$ , we can use again the first order Taylor expansion of the Airy functions. The second line of the system Eq. (B.53) gives directly  $C'_2$  as a function of  $B_1$

$$C'_2 = i \frac{k_h^{1/2}}{K_1^{1/3}} \left( \frac{N_0^2}{\omega^2} - 1 \right)^{1/4} B_1. \quad (\text{B.54})$$

Then, using Eqs. (B.54) and (B.50), we can deduce  $A_2$

$$A_2 = -i B_1 \left( \frac{N_0^2}{\omega^2} - 1 \right)^{1/4} + \mu_p - \lambda_p. \quad (\text{B.55})$$

Now, Eq. (B.51) enables us to determine  $C'_1$  as a function of  $B_1$  by replacing  $A_2$  by Eq. (B.55)

$$C'_1 = k_h^{-1/2} \left[ 2\mu_p - i B_1 \left( \frac{N_0^2}{\omega^2} - 1 \right)^{1/4} \left( 1 + \frac{k_h d \omega^2}{N_0^2} \right) \right]. \quad (\text{B.56})$$

To go further,  $C'_1$  and  $C'_2$  are replaced by Eqs. (B.56) and (B.54) in the first line of the system Eq. (B.53) to obtain  $B_1$

$$B_1 = 2\mu_p \left( \frac{N_0^2}{\omega^2} - 1 \right)^{1/4} \left( 1 + i \left( \frac{N_0^2}{\omega^2} - 1 \right)^{1/2} (1 + k_h d) \right)^{-1}. \quad (\text{B.57})$$

In the case of a sharp transition, we have  $k_h d \ll 1$ , and the modulus square of  $B_1$  is finally given by

$$|B_1|^2 \approx 4|\mu_p|^2 \left( \frac{N_0^2}{\omega^2} - 1 \right)^{1/2} \frac{\omega^2}{N_0^2}. \quad (\text{B.58})$$

### B.6.2 Case of a smooth transition

We focus now on the case of a smooth transition, i.e.,  $|\chi_d| \gg 1$ , which is equivalent to  $k_r d \gg 1$ . We use the asymptotic expansion of the Airy functions and the one of their derivatives for  $x \rightarrow +\infty$

$$A_i(-x) \sim x^{-1/2} B_i'(-x) \sim \frac{x^{-1/4}}{\sqrt{\pi}} \sin \left( \frac{2}{3} x^{3/2} + \frac{\pi}{4} \right) \quad (\text{B.59})$$

$$B_i(-x) \sim -x^{-1/2} A_i'(-x) \sim \frac{x^{-1/4}}{\sqrt{\pi}} \cos \left( \frac{2}{3} x^{3/2} + \frac{\pi}{4} \right). \quad (\text{B.60})$$

Using Eq. (B.59), Eq. (B.60) and the relation  $|k_r| = K_1^{1/3} |\chi|^{1/2}$ , Eq. (B.53) can be rewritten as

$$B_1 = K_1^{1/6} |\chi_d|^{1/4} [C_1 A_i(\chi_d) + C_2 B_i(\chi_d)] \quad (\text{B.61})$$

$$i B_1 = K_1^{1/6} |\chi_d|^{1/4} [-C_1 B_i(\chi_d) + C_2 A_i(\chi_d)]. \quad (\text{B.62})$$

After some algebra, we find

$$B_1 = K_1^{1/6} |\chi_d|^{-1/4} \frac{C_2}{\pi} [B_i(\chi_d) + i A_i(\chi_d)]^{-1} \quad (\text{B.63})$$

$$B_1 = K_1^{1/6} |\chi_d|^{-1/4} \frac{C_1}{\pi} [A_i(\chi_d) - i B_i(\chi_d)]^{-1}. \quad (\text{B.64})$$

By computing the modulus of Eqs. (B.63) and (B.64), and dividing Eqs. (B.63) by (B.64), we obtain

$$|B_1|^2 = K_1^{1/3} |C_1|^2 = K_1^{1/3} |C_2|^2 \quad (\text{B.65})$$

$$\frac{C_2}{C_1} = +i. \quad (\text{B.66})$$

To go further, we inject Eqs. (B.51) and (B.50) into Eqs. (B.47) and (B.48), and we calculate<sup>9</sup>

$$\begin{aligned} -C_1 + \sqrt{3}C_2 &= -2C_1 e^{-i\pi/3} \\ &= \frac{2\pi}{3^{1/6}\Gamma(2/3)} \frac{k_h^{1/2}}{K_1^{1/3}} \left\{ \mu_p - (\lambda_p + A_2) \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.67})$$

$$\begin{aligned} C_1 + \sqrt{3}C_2 &= 2C_1 e^{+i\pi/3} \\ &= \frac{2\pi 3^{1/6}}{\Gamma(1/3)} k_h^{-1/2} \left\{ \mu_p \left( 1 - \frac{k_h d \omega^2}{N_0^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + (\lambda_p + A_2) \left( 1 + \frac{k_h d \omega^2}{N_0^2} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.68})$$

Using Eq. (B.67), we get  $A_2$  as a function of  $C_1$  that we reinject into Eq. (B.68) to find

$$\begin{aligned} C_1 e^{+i\pi/3} \left[ 1 - 3^{1/3} e^{-2i\pi/3} \frac{\Gamma(2/3)}{\Gamma(1/3)} \frac{K_1^{1/3}}{k_h} \left( 1 + \frac{k_h d \omega^2}{N_0^2} \right) \right] &= \\ \frac{2\pi 3^{1/6}}{\Gamma(1/3)} k_h^{-1/2} \mu_p. \end{aligned} \quad (\text{B.69})$$

Finally, we can assume

$$\frac{K_1^{1/3}}{k_h} = \left( \frac{N_0^2}{k_h d \omega^2} \right)^{1/3} \gg 1, \quad (\text{B.70})$$

and we compute the absolute square of Eq. (B.69) to obtain, using Eq. (B.65),

$$|B_1|^2 \approx \left( \frac{3^{-1/6}\pi}{\Gamma(2/3)} \right)^2 4|\mu_p|^2 \left( \frac{k_h d \omega^2}{N_0^2} \right)^{1/3}. \quad (\text{B.71})$$

Thus, we find a similar expression for  $|B_1|^2$  to what we obtained in the case of a sharp transition. They differ from each other according to a structural factor, corresponding to the ratio of the transmission coefficients in both cases,

$$\begin{aligned} (|B_1|^2)_{\text{smooth}} &= D \left( \frac{k_h d N_0}{\omega} \right)^{1/3} \left( \frac{N_0^2}{N_0^2 - \omega^2} \right)^{1/2} (|B_1|^2)_{\text{sharp}} \\ &\sim D (k_r d)^{1/3} (|B_1|^2)_{\text{sharp}}, \end{aligned} \quad (\text{B.72})$$

where  $D$  is a numerical factor

$$D = \left( \frac{3^{-1/6}\pi}{\Gamma(2/3)} \right)^2 \sim 3.7. \quad (\text{B.73})$$

### B.7. Final expression for the wave energy flux

In the radiative zone, the wave function is equal to  $B_1 z_1'$ . Then, using Eq. (B.25), Eq. (15) becomes

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{E}}_{l,m}(r, \omega) &= \frac{\nu_p}{8\pi^2} \rho \int_{\Omega_0} \left\{ |\hat{v}_{r,l,m}|^2 + l(l+1) |\hat{v}_{h,l,m}|^2 \right\} \frac{d\Omega_0}{4\pi}, \\ &= \frac{\nu_p}{8\pi^2} \frac{\sqrt{l(l+1)} N^2}{r^3} \left( \frac{N^2}{\omega^2} - 1 \right)^{-1/2} \int_{\Omega_0} |B_1|^2 \frac{d\Omega_0}{4\pi}. \end{aligned} \quad (\text{B.74})$$

Given Eqs. (16) and (17), the mean radial wave energy flux reads

$$\mathcal{F}_r(r, \omega, l, m) = \mathcal{N} \frac{\nu_p}{8\pi^2} \frac{\omega}{r^2} \int_{\Omega_0} |B_1|^2 \frac{d\Omega_0}{4\pi}. \quad (\text{B.76})$$

In the case of a sharp transition, using Eqs. (B.58), (B.39), (B.15) and (B.16), (B.76) becomes

$$\mathcal{F}_r(r, \omega, l, m) = \frac{\mathcal{N}}{4} \frac{\sqrt{l(l+1)} (N_0^2 - \omega^2)^{1/2}}{4\pi r^2} \frac{e^{-\omega^2/4\nu_p^2}}{N_0^2} \frac{\nu_p}{\nu_p} \mathcal{B}_l^m \mathcal{H}_l^2, \quad (\text{B.77})$$

where we have defined

$$\mathcal{B}_l^m = \frac{1}{4\pi} \int |\beta_l^m|^2 \sin \theta_0 d\theta_0 d\phi_0 \quad (\text{B.78})$$

$$\mathcal{H}_l = \int_{r_b-L_p}^{r_b} \frac{d}{dr} (\rho V_0^2) \rho^{-1/2} r^{1/2} \left( \frac{r_b - L_p}{r} \right)^\Lambda dr. \quad (\text{B.79})$$

In the case of a smoother transition, the derivation is similar and simple if we use Eq. (B.72), so that we obtain

$$\mathcal{F}_{r,\text{smooth}} = D \left( \frac{k_h d N_0}{\omega} \right)^{1/3} \left( \frac{N_0^2}{N_0^2 - \omega^2} \right)^{1/2} \mathcal{F}_{r,\text{sharp}}. \quad (\text{B.80})$$

<sup>9</sup> We used the equality  $\Gamma(1/3)\Gamma(2/3) = 2\pi/\sqrt{3}$ .





# Chapitre 7

## Efficacité du transport de moment cinétique dans les étoiles de faible masse

### Sommaire

---

<b>7.1</b>	<b>Équation de transport de moment cinétique</b>	<b>137</b>
7.1.1	Approximation d'un profil de rotation de type shellular	137
7.1.2	Échelles de temps caractéristiques associées au transport	138
7.1.3	Diagnostic simple de l'efficacité du transport par les ondes	139
<b>7.2</b>	<b>Efficacité des ondes générées par la pression turbulente</b>	<b>140</b>
7.2.1	Description de l'approche utilisée par Fuller <i>et al.</i> (2014)	140
7.2.2	Principaux enseignements appris de cette étude	141
<b>7.3</b>	<b>Impact des ondes générées par la pénétration convective sur l'évolution de la rotation</b>	<b>143</b>
7.3.1	Choix du profil de rotation	144
7.3.2	Cas du Soleil et des étoiles de la séquence principale	145
7.3.3	Efficacité dans les étoiles sous-géantes et géantes rouges	146
7.3.4	Mécanisme de régulation de la rotation du coeur des sous-géantes?	148
<b>7.4</b>	<b>Remarques conclusives</b>	<b>149</b>

---

Pour conclure cette partie, le formalisme développé dans le chapitre précédent est appliqué au problème de transport de moment cinétique dans les étoiles de faible masse allant de la séquence principale jusqu'à la branche des géantes rouges. Les observations sismiques ont en effet montré qu'un processus de transport agit efficacement au cours de la vie de ces étoiles, en particulier dans les étoiles évoluées. Les ondes internes de gravité restent aujourd'hui un candidat possible pour expliquer les faibles taux de rotation observés. Dans ce chapitre, l'effet des ondes internes de gravité générées par la pénétration de panaches convectifs sur la rotation interne de ces étoiles est estimé de façon simple. Une telle étude fournit les premiers indices sur leur rôle dans le problème de la redistribution de moment cinétique dans les intérieurs stellaires. Ce travail a fait l'objet d'une publication dont le contenu est résumé dans ce chapitre.

### 7.1 Équation de transport de moment cinétique

#### 7.1.1 Approximation d'un profil de rotation de type shellular

La loi de conservation de moment cinétique dans les intérieurs radiatifs stellaires suit une équation de type advection-diffusion. Dans les codes d'évolution stellaire 1D, le traitement du transport de moment cinétique est grandement simplifié par l'hypothèse d'un profil de rotation de type *shellular* (Zahn 1992; Maeder & Zahn 1998; Mathis & Zahn 2004). Sous cette approximation, la

turbulence est supposée fortement anisotrope avec une valeur du coefficient de diffusion beaucoup plus forte dans la direction horizontale que dans la direction verticale. Dans ce contexte, toute inhomogénéité qui est potentiellement créée dans le plan horizontal par les courants méridiens sont rapidement effacées sous l'effet de la turbulence. Le profil de rotation peut donc être supposé à l'ordre dominant ne dépendre que de la coordonnée radiale. Cette hypothèse est notamment soutenue par les observations sismiques du profil de rotation du Soleil et la mise en évidence d'une région de transition de faible épaisseur à la base de la zone convective appelée *tachocline*, qui fait le lien entre un profil de rotation uniforme dans l'intérieur radiatif et une rotation différentielle dépendant de la latitude dans l'enveloppe convective. Les travaux de Spiegel & Zahn (1992) ont montré qu'une forte valeur du coefficient de diffusion turbulente suivant la direction horizontale est une solution envisageable pour expliquer le fort confinement de la *tachocline* et empêcher cette région de s'étaler spatialement avec l'évolution.

En plus de cette simplification, un traitement correct de l'interaction entre la rotation moyenne et les ondes est possible par le formalisme Eulérien en moyenne zonale ou azimutale (ou *TEM* pour *Transform Eulerian Mean*) introduit dans le contexte géophysique par Andrews & McIntyre (1976, 1978a). Ce formalisme a notamment l'avantage de prendre rigoureusement en compte le couplage entre l'évolution du moment cinétique et l'équation de conservation de l'énergie. Récemment, Belkacem *et al.* (2015b,a) ont repris ce formalisme pour étudier le transport de moment cinétique par les modes mixtes dans les étoiles évoluées sous l'hypothèse d'un profil de rotation de type shellular. Dans ce contexte, l'équation d'évolution de la rotation moyenne, notée  $\Omega(r, t)$ , est donnée à l'ordre dominant, en négligeant l'influence de tout champ magnétique, par

$$\rho \frac{d}{dt} (r^2 \Omega) = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 [\mathcal{F}_{\text{circ}} + \mathcal{F}_{\text{turb}} + \mathcal{F}_{J,w}] \right) + \dot{J}_{\text{ext}} , \quad (7.1)$$

où  $d/dt = \partial/\partial t + \dot{r}\partial/\partial r$  est la dérivée particulière Lagrangienne,  $\dot{r}$  est la vitesse de contraction ou d'expansion,  $\mathcal{F}_{\text{circ}}$  est un terme d'advection par la circulation méridienne,  $\mathcal{F}_{\text{turb}}$  est un terme de diffusion turbulente,  $\dot{J}_{\text{ext}}$  correspond aux termes de perte ou de gain de moment cinétique en surface (vents stellaires, accréation,...), et  $\mathcal{F}_{J,w}$  est le flux moyen de moment cinétique des ondes dont l'expression complète est donnée par

$$\mathcal{F}_{J,w} = \left\langle \rho r \sin \theta \left( v_\phi v_r + 2 \cos \theta \Omega v_\theta s' \left[ \frac{d\langle s \rangle}{dr} \right]^{-1} \right) \right\rangle , \quad (7.2)$$

avec  $\langle \rangle$  représentant la moyenne sur l'angle solide définie pour toute quantité  $X$  par

$$\langle X \rangle(r) = \frac{1}{4\pi} \iint X(r, \theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi . \quad (7.3)$$

Dans Eq. (7.2), le premier terme du membre de droite correspond au stress de Reynolds exercé par les ondes, équivalent à l'expression trouvée dans l'analyse de la Section 5.3.2 en coordonnées Cartésiennes. A celui-ci s'ajoute un terme provenant de la force inertielle de Coriolis dans un référentiel tournant et qui sera négligé pour simplifier dans toute la suite du chapitre.

### 7.1.2 Échelles de temps caractéristiques associées au transport

Pour estimer le poids de chaque terme dans le membre de droite de Eq. (7.1), il est pratique de définir l'échelle de temps caractéristique associée au transport par chacun de ces processus. Deux d'entre eux seront particulièrement utiles pour la suite de ce chapitre. D'abord, on peut localement définir le temps caractéristique de contraction (ou d'expansion) dans l'étoile. Il correspond au temps d'évolution caractéristique de la rotation interne sous l'hypothèse de conservation locale de moment cinétique. Il est représenté par l'effet de la contraction (ou de l'expansion) dans Eq. (7.1) et est donc donné, en négligeant le gradient de rotation, par

$$t_{\text{cont}}(r) = \left| \frac{r}{2\dot{r}} \right| . \quad (7.4)$$

Ensuite, le temps caractéristique local associé au transport par les ondes peut être estimé par

$$t_w(r) = \left| \frac{\rho r^2 \Omega(r)}{\dot{J}_w(r)} \right|, \quad (7.5)$$

où l'on a défini

$$\dot{J}_w = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \mathcal{F}_{J,w} \right). \quad (7.6)$$

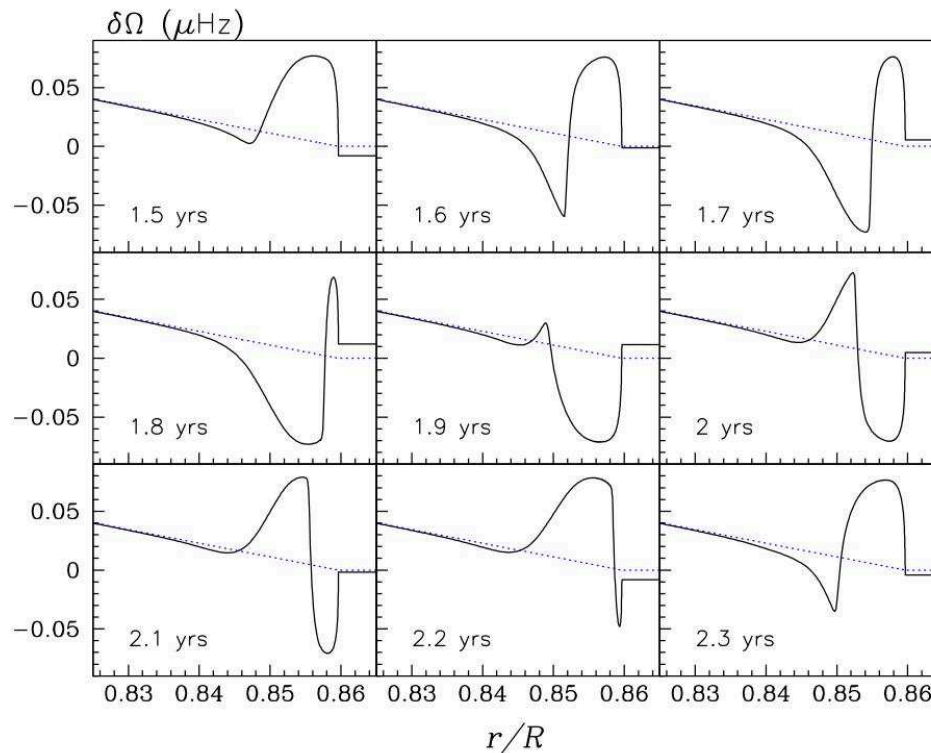
Si  $\dot{J}_w < 0$ , les ondes ont tendance à augmenter localement la vitesse de rotation dans l'étoile. Autrement, elles tendent à la ralentir. Ainsi, l'efficacité du transport par les ondes relativement à l'effet de la contraction ou expansion dans l'étoile peut être estimée localement par le rapport  $\varepsilon(r) = t_{\text{cont}}/t_w$ . Si  $\varepsilon > 1$ , l'influence du transport induit par les ondes est prédominante, et si de plus  $\dot{J}_w$  et  $\dot{r}$  sont de signes opposés (avec  $\Omega$  supposé positif), leur effet s'oppose à l'accélération des couches internes due à la contraction ou expansion dans l'étoile. Nous verrons dans la suite que la comparaison de ces deux temps caractéristiques est pertinente dans l'estimation de l'efficacité du transport de moment cinétique induit par les ondes.

### 7.1.3 Diagnostic simple de l'efficacité du transport par les ondes

Résoudre l'équation de transport du moment cinétique interne le long de l'évolution des étoiles en incluant l'effet des ondes est difficile numériquement. En effet, le transport par les ondes implique des échelles de temps caractéristiques qui diffèrent de plusieurs ordres de grandeur, d'une part, avec les échelles de temps de l'évolution stellaire, et d'autre part, selon l'endroit où l'on se place dans la zone radiative de l'étoile. On peut en particulier noter les très faibles temps caractéristiques à la base de la zone convective (e.g., Kumar *et al.* 1999). Dans cette région, le transport induit par les ondes combiné à la diffusion turbulente provoque localement une oscillation du profil de rotation de période de l'ordre de quelques années. Cette oscillation de courte période est plus connue sous le nom de *Shear Layer Oscillation* (ou SLO Kumar *et al.* 1999; Talon *et al.* 2002; Talon & Charbonnel 2004, voir FIGURE 7.1).

Cette couche oscillante est le résultat de l'amortissement rapide des ondes internes de gravité avec de hauts degrés angulaires  $l$  et de basses fréquences juste après leur émission à la base de la zone convective. En effet, d'après Eq. (5.115), l'amortissement est proportionnel à  $l^3/\hat{\omega}^4$ , où  $\hat{\omega} = \omega - m\delta\Omega(r)$  est la fréquence locale intrinsèque de l'onde par rapport au référentiel en co-rotation avec la base de la zone convective, c'est-à-dire le lieu d'émission des ondes, et  $\delta\Omega = \Omega(r) - \Omega(r_t)$  est la rotation différentielle dans la zone radiative par rapport à la base de la zone convective, avec  $\Omega(r_t)$  la taux de rotation à la base de la zone convective. Initialement, si  $\delta\Omega > 0$ , les ondes progrades ( $m > 0$ ) sont plus rapidement amorties que les ondes rétrogrades ( $m < 0$ ). Les premières déposent du moment cinétique positif et provoquent ainsi une augmentation de la rotation juste sous la base de la zone convective, à l'inverse des secondes absorbées un peu plus en profondeur : un fort cisaillement se forme alors jusqu'à ce que le profil de rotation devienne instable et que la région considérée diffuse vers la zone convective externe sous l'effet de la diffusion turbulente. La situation s'inverse alors. Les ondes progrades sont amorties plus en profondeur que les rétrogrades. Les instabilités de cisaillement se développent et le cycle recommence. La SLO va jouer le rôle de filtre et favoriser la transmission dans les régions profondes des ondes rétrogrades qui peuvent sur des temps longs ralentir la vitesse rotation (Talon *et al.* 2002). Talon & Charbonnel (2005) ont proposé de traiter l'effet des ondes sur cette couche comme étant équivalent à un processus de diffusion dont le coefficient est estimé en moyenne sur plusieurs cycles d'oscillation. Cette façon de procéder reste néanmoins simplifiée et un traitement plus rigoureux devra être envisagé dans le futur.

Par conséquent, afin d'éviter dans une première étape de faire face aux difficultés rencontrées dans un calcul numérique, il est possible de procéder à une étude préliminaire qui consiste à estimer et à comparer l'efficacité du transport par les ondes aux autres processus de transport, pour un



**FIGURE 7.1:** Oscillation du profil de rotation juste sous la base de la zone convective sous l'effet combiné des ondes et de la turbulence dans un modèle de  $1.2 M_{\odot}$ . La ligne en pointillés montre le profil de rotation initial. Le temps écoulé depuis le début de la simulation est indiqué dans chaque encadré (d'après Talon & Charbonnel 2004).

modèle donné et à un stade évolutif particulier. Cela revient à comparer les différentes échelles de temps associées à chacun de ces processus. Une telle étude fournit une première idée sur l'efficacité du transport par les ondes. Comme il a déjà été discuté dans Chapitre 4, la contraction des couches internes est le principal responsable des forts taux de rotation prédits par les codes d'évolution stellaire (Ceillier *et al.* 2013; Marques *et al.* 2013). La comparaison entre le temps caractéristique associé au transport par les ondes et le temps de contraction local dans la zone radiative des étoiles constitue donc un diagnostic pertinent pour estimer l'efficacité du transport par les ondes. Ce critère a déjà été utilisé dans des travaux précédents dans le cas solaire et pour les ondes internes de gravité excitées par la pression turbulente dans la zone convective (Zahn *et al.* 1997; Kumar *et al.* 1999; Fuller *et al.* 2014). Ces travaux ont démontré la capacité de ces ondes à modifier le profil de rotation du Soleil sur des temps caractéristiques inférieurs au milliard d'année, en accord avec les résultats obtenus via un calcul complet par Talon & Charbonnel (2005, voir Chapitre 4). Dans la suite de ce chapitre, ce diagnostic est étendu au cas des étoiles plus évoluées d'une façon similaire à Fuller *et al.* (2014), mais en considérant cette fois-ci l'excitation des ondes par la pénétration convective.

## 7.2 Efficacité des ondes générées par la pression turbulente

### 7.2.1 Description de l'approche utilisée par Fuller *et al.* (2014)

Récemment, Fuller *et al.* (2014) ont exploré l'influence du transport de moment cinétique par les ondes internes de gravité générées par la pression turbulente au cours de la vie des étoiles de faible masse. Dans ce travail, les auteurs ont considéré un spectre d'énergie d'ondes similaire à celui obtenu par le modèle d'excitation de Lecoanet & Quataert (2013, voir Section 6), c'est-à-dire de la forme d'une loi de puissance décroissante avec la fréquence de l'onde et paramétrée par un exposant

(dont la valeur est choisie entre 3 et 7.5). Le flux d'énergie total des ondes émises a été choisi comme étant égal à  $\eta\mathcal{M}$  fois le flux convectif de l'étoile à la base de la zone convective par les auteurs, où  $\mathcal{M}$  est le nombre de Mach convectif dans la région d'excitation et  $\eta$  est un facteur d'efficacité, dont la valeur dépend de la partie du spectre angulaire considéré. En effet, seules les ondes de bas degrés angulaires  $l \sim 1$  et  $|m| \sim 1$  ont été considérées par Fuller *et al.* (2014), qui ont alors estimé  $\eta$  proche de 0.1. Les auteurs ont justifié ce choix en rappelant que la majorité de l'énergie des ondes est contenue dans les bas degrés angulaires. En effet, ceux-ci sont, d'une part, efficacement excités par les plus gros tourbillons convectifs et la superposition incohérente d'un ensemble de plus petits tourbillons. D'autre part, les bas degrés angulaires sont susceptibles de pénétrer le plus profondément dans les couches centrales de l'étoile puisque le taux d'amortissement des ondes est proportionnel à  $l^3$ .

Sous ces hypothèses, les auteurs ont alors pu calculer une échelle de temps caractéristique moyenne associée au transport par ces ondes et la comparer au temps de contraction dans différents modèles d'étoiles. Le temps caractéristique moyen associé au transport par les ondes à l'intérieur d'une sphère de rayon  $r$  est défini dans leur papier par

$$T_{\star}(r) = \frac{\Omega_s I(r)}{4\pi r^2 \mathcal{F}_{J,w}}, \quad (7.7)$$

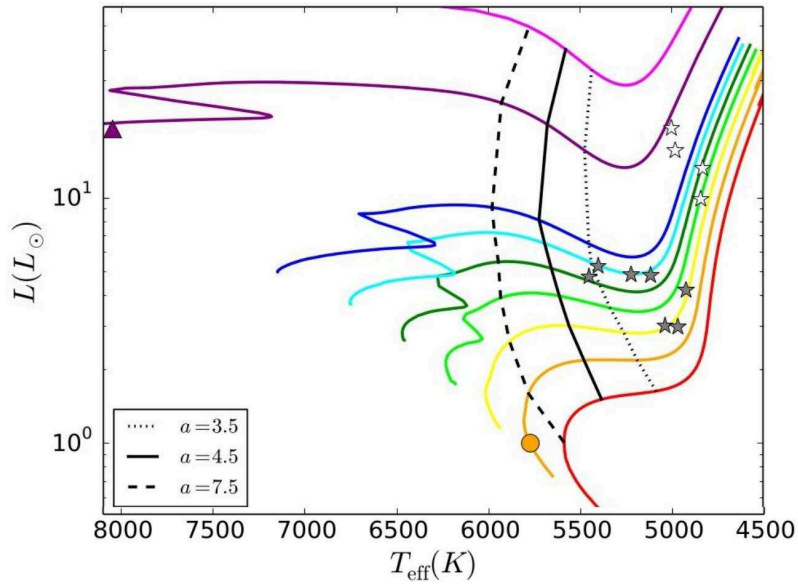
où  $\Omega_s$  est le taux de rotation en  $r$  et  $I(r)$  est l'inertie de la boule de rayon  $r$ . Cette définition diffère de Eq. (7.6). En effet, Eq. (7.7) est représentative de l'effet moyen du transport induit par les ondes à l'intérieur d'une sphère de rayon  $r$  tandis que Eq. (7.6) estime localement l'efficacité du transport par les ondes. Les auteurs plaident en faveur de cette première définition puisqu'elle ne dépend pas du profil de rotation existant sous la coquille de rayon  $r$ , qui n'est généralement pas connu. Nous verrons cependant dans la section suivante que le profil de rotation ainsi que son amplitude entre la base de la zone convective et la couche de l'étoile considérée a un rôle important à jouer dans le transport de moment cinétique par les ondes et que l'utilisation de Eq. (7.6) à la place de Eq. (7.7) apparaît pertinente et complémentaire.

### 7.2.2 Principaux enseignements appris de cette étude

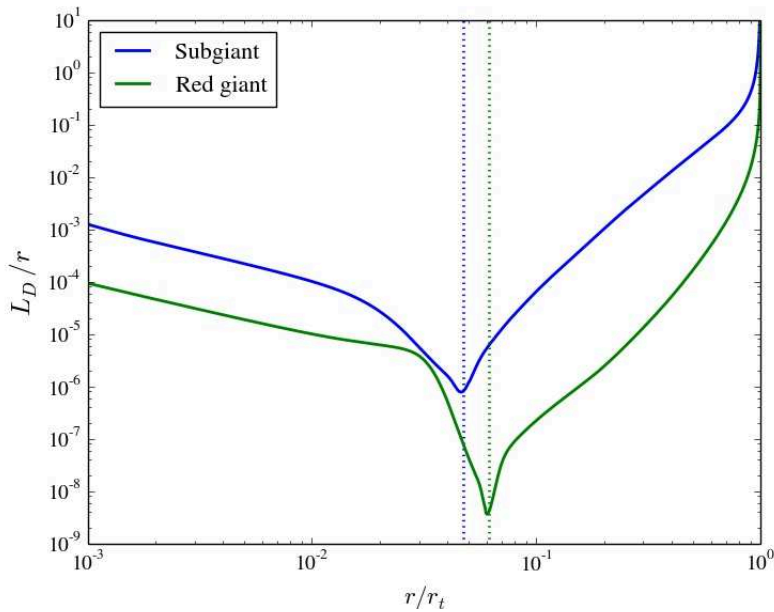
En suivant cette approche, Fuller *et al.* (2014) ont néanmoins pu estimer l'efficacité du transport par les ondes internes de gravité générées par la pression turbulente dans plusieurs modèles de 0.9 à 2.5  $M_{\odot}$ , allant de la séquence principale jusqu'au stade de géantes rouges. Leur principale conclusion est que l'efficacité du transport par les ondes évolue avec l'âge de l'étoile. Ceci est bien résumé par la FIGURE 7.2. Sur cette figure, on voit que les ondes générées par la pression turbulente dans la zone convective sont capables de redistribuer efficacement le moment cinétique interne durant toute la séquence principale jusqu'à en moyenne le milieu de la branche des sous-géantes. Ensuite, l'évolution de la rotation des couches internes se découple de l'influence du transport par les ondes qui ne sont alors plus capables d'empêcher qu'un fort gradient de rotation s'établisse entre les régions centrales en contraction et l'enveloppe en expansion. Cette transition est principalement due à l'augmentation de l'intensité de l'amortissement des ondes avec l'évolution qui les empêche d'atteindre les couches profondes de l'étoile et donc d'en modifier la rotation. Pour le voir, il est pratique de définir la longueur caractéristique radiale d'amortissement de l'énergie des ondes, notée  $L_D$ . Celle-ci est égale à l'inverse de l'intégrande dans Eq. (5.115) et est donc donnée par

$$L_D(r, \hat{\omega}, l) \approx \frac{\hat{\omega}^4 r^3}{[l(l+1)]^{3/2} K N^2 N_T}. \quad (7.8)$$

Elle est représentée sur la FIGURE 7.3 en fonction du rayon dans la zone radiative de deux modèles de 1  $M_{\odot}$ , l'un au milieu de la branche des sous-géantes avec  $\log T_{\text{eff}} = 3.70$  et  $\log L/L_{\odot} = 0.35$ , et l'autre sur la branche des géantes rouges avec  $\log T_{\text{eff}} = 3.16$  et  $\log L/L_{\odot} = 0.92$  (voir Pinçon *et al.* 2017, pour les détails). Sur cette figure, le degré angulaire et la fréquence intrinsèque ont été fixés à



**FIGURE 7.2:** Diagramme Hertzsprung-Russell représentant les tracés évolutifs des différents modèles utilisés par Fuller *et al.* (2014). Les lignes noires symbolisent le moment où le cœur radiatif se découple de l'influence des ondes émises par la pression turbulente à la base de la zone convective. Le flux d'énergie en fonction de la fréquence de l'onde suit le modèle en loi de puissance décroissante de Lecoanet & Quataert (2013) et est paramétré par différentes valeurs pour l'exposant  $a = 3.5, 4.5$  et  $7.5$ , correspondant respectivement aux lignes pointillée, continue et en tirets. Les symboles étoilés représentent des étoiles connues pour lesquelles la rotation du cœur a été déterminée par de précédents travaux (d'après Fuller *et al.* 2014).



**FIGURE 7.3:** Rapport de la longueur caractéristique radiale d'amortissement de l'énergie des ondes donnée par Eq. (7.3) sur le rayon, pour deux modèles de  $1 M_{\odot}$  considérés dans Section 7.3.3. Il est représenté en fonction du rayon normalisé par le rayon du haut de la zone radiative,  $r_t$ , pour un degré angulaire  $l = 1$  et une fréquence intrinsèque de l'onde égale à  $\hat{\omega} = 1 \mu\text{rad s}^{-1}$ . Les lignes verticales en pointillés localisent la couche d'hydrogène en fusion dans les deux modèles (d'après Pinçon *et al.* 2017).

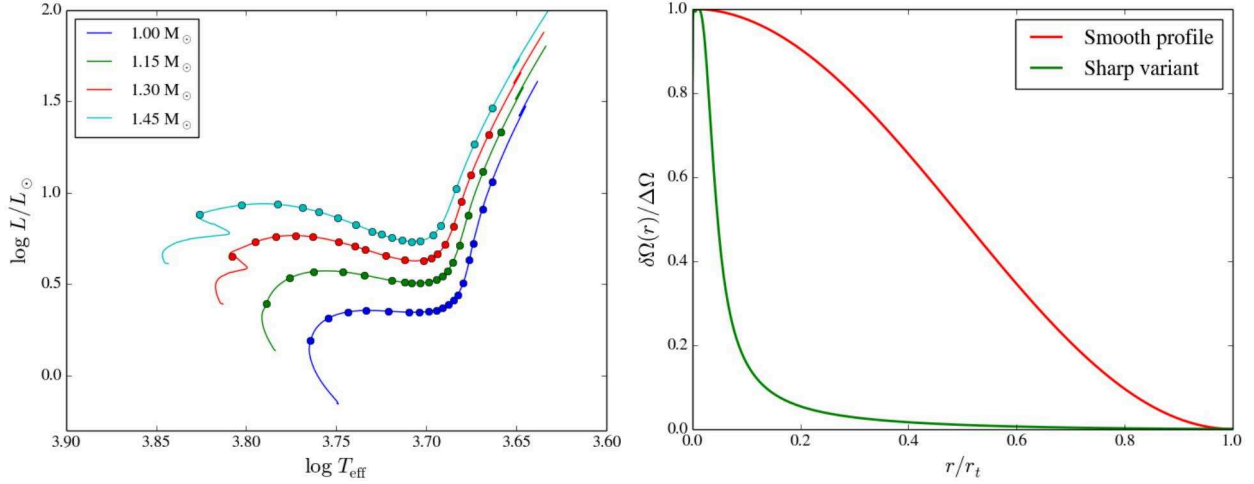
$l = 1$  et  $\hat{\omega} = 1 \mu\text{rad s}^{-1}$ . Deux choses ressortent clairement de ce graphe. Premièrement, on voit que pour un modèle donné, à  $l$  et  $\hat{\omega}$  fixés, l'amortissement est maximal autour de la couche d'hydrogène en fusion et est plus intense de près de quatre ordres de grandeur que dans la région en haut de la zone convective. De plus, la magnitude de l'amortissement augmente de plus de deux ordres de grandeur entre la branche des sous-géantes et celle des géantes rouges. En effet, entre ces deux instants, les couches centrales se sont fortement contractées gravitationnellement et le contraste de densité entre le cœur et l'enveloppe a augmenté. Cela a pour conséquence une diminution du rayon d'une couche donnée et l'augmentation locale de la fréquence de Brunt-Väisälä, ce qui aboutit à une diminution de  $L_D$  d'après Eq.(7.8). Les ondes sont donc de plus en plus amorties avec l'évolution jusqu'au moment où l'intensité de l'amortissement devient si forte autour de la couche où l'hydrogène brûle que les ondes ne sont plus capables d'atteindre le cœur d'hélium et d'y déposer leur moment cinétique. Fuller *et al.* (2014) ont aussi montré que l'instant de découplage entre le cœur et l'enveloppe dépend du taux de décroissance du flux d'énergie en fonction de la fréquence de l'onde. Plus la décroissance du spectre en énergie est rapide avec la fréquence de l'onde, plus le découplage arrive tôt sur la branche des sous-géantes. En effet, plus le taux de décroissance du spectre d'énergie avec la fréquence est faible, plus la part d'énergie distribuée sur les hautes fréquences augmente aux dépens des basses fréquences à énergie totale donnée. Comme  $L_D$  est proportionnel à  $\hat{\omega}^4$ , les hautes fréquences sont capables d'atteindre des couches plus profondes que les basses fréquences. Ainsi, un taux de décroissance plus faible permet de contrer l'augmentation de l'intensité de l'amortissement radiatif jusqu'à un stade évolutif plus avancé. Le découplage entre les ondes et le cœur d'hélium arrive donc plus tardivement dans la vie de l'étoile. Ce résultat marque ainsi l'importance de la forme du spectre d'énergie des ondes générées à la base de zone convective sur la redistribution du moment cinétique interne par ces dernières.

En conclusion, Fuller *et al.* (2014) ont montré que les ondes internes de gravité générées par la pression turbulente dans la zone convective peuvent empêcher le développement d'une forte rotation différentielle entre le cœur et l'enveloppe depuis la séquence principale jusqu'à environ la moitié de la branche des sous-géantes. Ce type d'ondes semble néanmoins incapable d'expliquer les faibles taux de rotation observés dans le cœur des géantes rouges par Mosser *et al.* (2012a) puisque l'évolution de la rotation du cœur peut se découpler de l'influence des ondes environ au milieu de la branche des sous-géantes. Comme noté par Spada *et al.* (2016), la relaxation de l'hypothèse d'un couplage maximal entre l'enveloppe et le cœur (i.e., une rotation uniforme) nécessaire pour que leur modèle s'ajuste aux observations dans les étoiles sous-géantes et géantes rouges intervient à peu près au même moment que le découplage entre les ondes et le cœur dérivé par Fuller *et al.* (2014). Les ondes internes de gravité générées par la pression turbulente pourraient donc être responsables du couplage maximal nécessaire dans le modèle de Spada *et al.* (2016). Néanmoins, leur modèle repose sur l'hypothèse d'un transport diffusif sur la branche des géantes rouges et de plus amples investigations sont nécessaires pour définitivement conclure.

### 7.3 Impact des ondes générées par la pénétration convective sur l'évolution de la rotation

Dans cette section, nous explorons l'efficacité du transport par les ondes internes de gravité générées par la pénétration de panaches convectifs. Le flux d'énergie des ondes émis à la base de la zone convective est supposé suivre l'expression obtenue grâce au modèle semi-analytique présenté dans le Chapitre 6. Après avoir traité le cas solaire, l'étude se focalisera sur des étoiles de faibles masses comprises entre 1 et  $1.45 M_{\odot}$ , c'est-à-dire dans un intervalle de masses représentatif des étoiles sous-géantes et jeunes géantes rouges observées (e.g., Mosser *et al.* 2012a; Deheuvels *et al.* 2014). L'ensemble des modèles considérés dans la suite couvre la branche des sous-géantes et le début de l'ascension de la branche des géantes rouges. Il est représenté sur le diagramme Hertzsprung-Russell en FIGURE 7.4. De plus, l'influence de la forme et de l'amplitude du profil de rotation différentielle sera prise en compte.





**FIGURE 7.4: Gauche :** Location dans le diagramme Hertzsprung-Russell des modèles considérés dans ce travail (cercles pleins). Les tracés évolutifs depuis le début de la séquence principale jusqu’en haut de la branche des géantes rouges sont représentés par les lignes continues. Les modèles ont été calculés avec le code d’évolution stellaire CESTAM (Marques *et al.* 2013) avec des valeurs pour les paramètres  $(\alpha_{MLT}, Y_0)$  calibrées sur le Soleil. **Droite :** Profil de rotation différentielle normalisé en fonction du rayon normalisé par le rayon en haut de la zone radiative,  $r_t$ , pour un modèle d’étoile sous-géante de  $1 M_\odot$  caractérisé par  $\log T_{\text{eff}} = 3.70$  et  $\log L/L_\odot = 0.35$ . Le profil de rotation lisse utilisé par défaut (ligne rouge) est comparé au profil de rotation raide obtenu sous l’hypothèse de conservation locale de moment cinétique (ligne verte)

### 7.3.1 Choix du profil de rotation

Pour calculer Eq. (7.6), nous supposons dans la suite un profil de rotation pour chaque modèle considéré. Nous nous placerons dans l’approximation des faibles rotateurs de telle sorte à pouvoir négliger l’effet de la force centrifuge sur la structure interne de ces étoiles. Néanmoins, à l’exception du Soleil où la précision des observations est assez bonne pour inverser la quasi totalité du profil de rotation dans l’intérieur radiatif (voir Chapitre 4), peu de choses sont connues sur sa forme dans les étoiles plus évoluées. Alors que les observations sismiques permettent d’obtenir une estimation de la rotation moyenne du cœur et de l’enveloppe des étoiles sous-géantes et géantes rouges, des difficultés demeurent pour discriminer observationnellement entre un profil de rotation plutôt doux et un autre plus abrupt (Deheuvels *et al.* 2014). Pour pallier à ce manque de connaissance, nous considérerons donc dans la suite deux cas limites. Premièrement, puisque les observations sismiques mettent en évidence l’existence d’un processus efficace capable de contrer l’établissement d’une forte rotation différentielle due à la contraction des couches centrales pendant la vie des étoiles, il paraît raisonnable de considérer un profil de rotation lisse. Par défaut, nous choisirons un profil de telle façon à assurer un gradient du taux de rotation nul au centre et à la base de la zone convective, c’est-à-dire de la forme

$$\delta\Omega(r) = \Delta\Omega \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \frac{r}{r_t}\right) \quad \text{pour } r \leq r_t, \quad (7.9)$$

avec  $\Delta\Omega$  l’amplitude maximum de la rotation différentielle. Deuxièmement, nous étudierons l’effet d’un profil plus abrupt sur l’efficacité du transport par les ondes. Celui-ci sera choisi comme ayant la forme d’un profil de rotation obtenu sous l’hypothèse de conservation locale de moment cinétique depuis la fin de la séquence principale, mais avec une amplitude différente. Un tel profil est obtenu par la résolution de Eq. (7.1) en ne considérant uniquement que le premier terme du membre de droite et en supposant un profil de rotation uniforme comme condition initiale à la fin de la séquence

principale, ce qui donne

$$\delta\Omega(r) = \Delta\Omega \frac{\mathcal{C}^2(m_r) - \mathcal{C}^2(m_{r,t})}{\max[\mathcal{C}^2(m_r) - \mathcal{C}^2(m_{r,t})]} \quad \text{pour } r < r_t, \quad (7.10)$$

avec

$$\mathcal{C}(m_r) = \frac{r_0(m_r)}{r(m_r)}, \quad (7.11)$$

où  $r_0(m_r)$  est le rayon de la coquille de masse  $m_r$  à la fin de la séquence principale et  $m_{r,t}$  est la coordonnée Lagrangienne du haut de la zone radiative. Les deux types de profil de rotation sont représentés sur la FIGURE 7.4 dans un modèle d'étoiles sous-géantes de  $1 M_\odot$ . Choisir arbitrairement de tels profils est discutable mais cela permet d'obtenir une première estimation de l'efficacité du transport par les ondes dans les étoiles évoluées, tout en prenant en compte l'influence de l'amplitude de la rotation différentielle sur le transport par les ondes. Une comparaison de l'amplitude  $\Delta\Omega$  telle que supposée dans ce travail aux taux de rotation observés grâce à l'astérosismologie nécessite aussi de prendre en compte les propriétés des modes mixtes dans les étoiles évoluées. En effet, les modes mixtes sondent la rotation de certaines régions particulières des étoiles. Les valeurs observées ne correspondent donc pas nécessairement à la rotation centrale et à la rotation à la base de la zone convective suivant la forme du profil de rotation. En suivant Goupil *et al.* (2013), l'amplitude moyenne de la rotation différentielle mesurée par les modes mixtes est donnée par

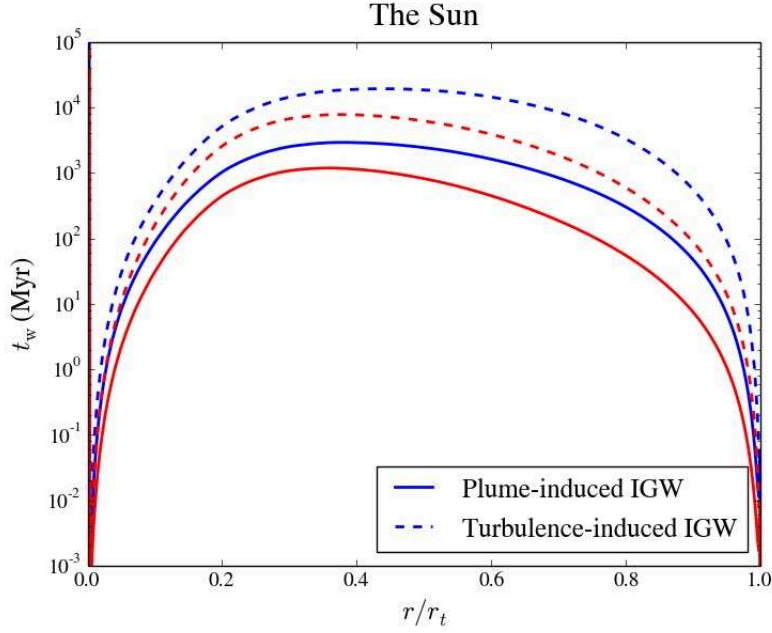
$$\overline{\Delta\Omega} \approx \frac{1}{\gamma} \int_0^{r_t} \delta\Omega \frac{N}{r} dr \quad \text{with} \quad \gamma = \int_0^{r_t} \frac{N}{r} dr, \quad (7.12)$$

qui a été dérivée en supposant que la rotation est uniforme dans l'enveloppe convective. L'équation (7.12) montre que les modes mixtes sondent la valeur du taux de rotation dans une région confinée autour du pic de la fréquence de Brunt-Väisälä. Pour que cela ait un sens, les valeurs sismiques observées grâce à l'astérosismologie devront donc être comparées à  $\overline{\Delta\Omega}$ , calculée via Eq. (7.12).

### 7.3.2 Cas du Soleil et des étoiles de la séquence principale

Dans un premier temps, l'échelle de temps locale associée au transport par les ondes et donnée par Eq. (7.6) a été calculée pour un modèle solaire (voir Pinçon *et al.* 2016, pour les détails). Le profil de rotation considéré correspond à Eq. (7.9). Le résultat est donné sur la FIGURE 7.5. L'efficacité du transport par les ondes générées par la pénétration convective suivant Pinçon *et al.* (2016) est comparée aux ondes générées par la convection turbulente suivant le modèle de Kumar *et al.* (1999). Les paramètres du modèle d'excitation ont été choisis de la même manière que dans la Section 6.4.1. Le flux de moment cinétique des ondes a été obtenu dans toute la région radiative en prenant en compte l'amortissement radiatif d'après l'expression Eq. (5.116). Deux valeurs pour l'amplitude de la rotation différentielle ont été choisies : une faible telle que  $\Delta\Omega = 0.15 \mu\text{rad s}^{-1}$ , et une forte telle que  $\Delta\Omega = 1 \mu\text{rad s}^{-1}$ .

La FIGURE 7.5 montre d'une part que les ondes internes de gravité sont capables de ralentir la rotation interne sur des échelles de temps inférieures à dix milliards d'années, c'est-à-dire des temps plus courts que le temps que passe le Soleil sur la séquence principale. D'autre part, quelle que soit l'amplitude de la rotation différentielle, les ondes internes de gravité générées par la pénétration convective sont plus efficaces que celles générées par la pression turbulente. En effet, les premières sont capables de modifier la rotation interne du Soleil dix fois plus rapidement que les deuxièmes. Enfin, la figure montre que plus la rotation différentielle est forte, plus le transport de moment cinétique par les ondes internes de gravité est efficace. Comme l'ont déjà montré Talon & Charbonnel (2005) (voir Fig. 7 de leur papier), les ondes internes de gravité tendent ainsi à s'opposer à l'établissement d'une rotation différentielle de forte amplitude entre le cœur de l'étoile et la base



**FIGURE 7.5:** Échelle de temps caractéristique donnée par Eq. (7.6) en fonction du rayon dans la zone radiative d'un modèle solaire. Le résultat obtenu avec les ondes générées par la pénétration convective suivant le modèle de Pinçon *et al.* (2016) (ligne continue) est comparé à celui obtenu par les ondes générées par la pression turbulente suivant le modèle de Kumar *et al.* (1999) (ligne pointillée). La couleur bleu correspond au cas d'une faible rotation différentielle, i.e. avec  $\Delta\Omega = 0.15 \mu\text{rad s}^{-1}$ , et la couleur rouge au cas d'une plus forte rotation différentielle, i.e. avec  $\Delta\Omega = 1 \mu\text{rad s}^{-1}$ .

de la zone convective. On peut aussi noter qu'un profil de rotation lisse comme dans Eq. (7.9) est beaucoup plus stable qu'un profil de rotation tel que la rotation différentielle entre le centre et la base de la zone convective soit constante, comme utilisé dans Pinçon *et al.* (2016) (voir la Fig. 9 de leur papier).

En conclusion, les ondes internes de gravité générées par la pénétration convective sont capables de modifier le profil de rotation des étoiles de faible masse sur la séquence principale, et ce plus efficacement que les ondes générées par la pression turbulente suivant le modèle de Kumar *et al.* (1999). On peut alors se demander quel peut être l'impact de telles ondes sur la rotation des étoiles sous-géantes et géantes rouges et si les conclusions données par Fuller *et al.* (2014) dans le cas des ondes générées par la pression turbulente sont généralisables à leur cas.

### 7.3.3 Efficacité dans les étoiles sous-géantes et géantes rouges

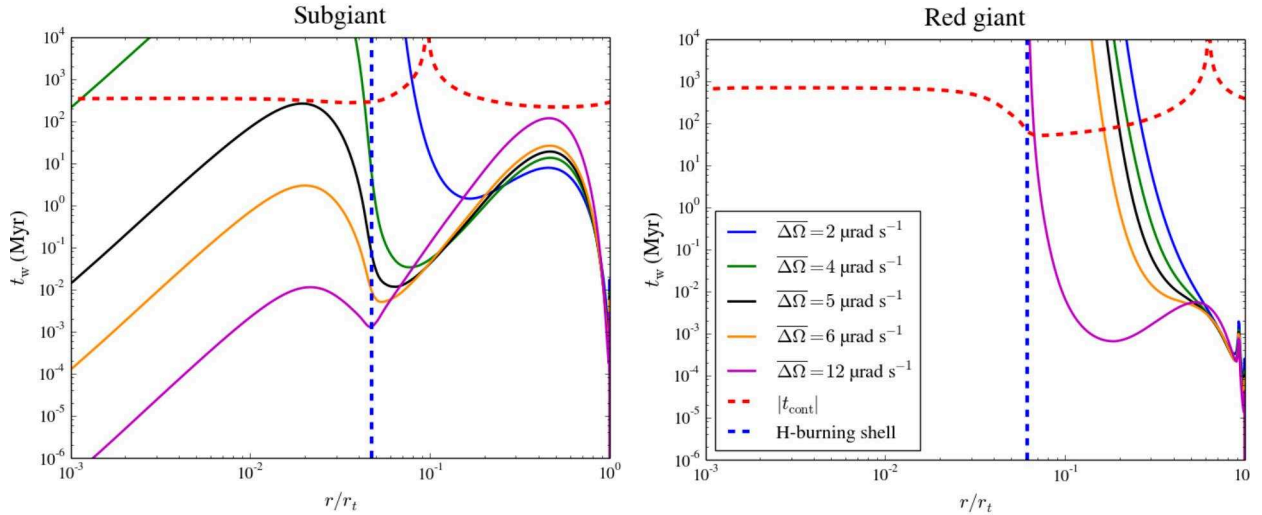
L'échelle de temps caractéristique associée au transport par les ondes et donnée par Eq. (7.6) est maintenant comparée au temps caractéristique de contraction à travers la zone radiative d'étoiles sous-géantes et géantes rouges. Le profil de rotation par défaut suit Eq. (7.9). Pour tous les modèles considérés, le flux d'énergie des ondes a été estimé à partir de l'expression simplifiée donnée par Eq. (6.65). Les paramètres du modèle d'excitation ont été choisis de façon similaire à Section 6.4.1. La valeur du facteur de remplissage a été gardée constante et égale à  $\mathcal{A} = 0.1$  dans ces étoiles (e.g., Ludwig & Kučinskas 2012), et la valeur de Brunt-Väisälä en haut de la zone radiative a pu être estimée pour chaque modèle. Enfin, l'amplitude de la rotation différentielle a été choisie entre 0 et  $12 \mu\text{rad s}^{-1}$ , c'est-à-dire dans un intervalle en accord avec les observations dans les étoiles sous-géantes et géantes rouges, avec une limite supérieure légèrement plus élevée (Deheuvels *et al.* 2012, 2014; Mosser *et al.* 2012a).

**Cas des étoiles géantes rouges évoluées ( $\log g \lesssim 3,55$ ).** Prenons l'exemple d'un modèle d'étoile géantes rouges de  $1 M_{\odot}$  avec  $\log T_{\text{eff}} = 3.16$  et  $\log L/L_{\odot} = 0.92$ . Le résultat est représenté sur la FIGURE 7.6 (à droite). On voit sur cette figure que  $t_w$  augmente drastiquement depuis la base de la zone convective en allant vers le centre de l'étoile. Il devient même très supérieur au temps de contraction sous la couche d'hydrogène en fusion pour n'importe quelle valeur de  $\overline{\Delta\Omega}$  en accord avec les observations. Contrairement aux étoiles de la séquence principale, les ondes internes de gravité générées par la pénétration convective sont donc incapables par elles-mêmes de contrebalancer l'effet de la contraction sur la rotation du cœur d'hélium dans les étoiles géantes rouges. Comme Fuller *et al.* (2014) l'avait déjà fait remarquer, cela est principalement dû au fort amortissement radiatif subi par les ondes avant d'atteindre les couches centrales. Les ondes déposent donc leur moment cinétique bien avant de franchir la couche d'hydrogène brûlant en couche. En fait, une valeur de l'amplitude de la rotation différentielle proche de  $20 \mu\text{rad s}^{-1}$  est nécessaire pour contrebalancer l'amortissement des ondes et leur permettre de modifier la rotation du cœur, ce qui est bien supérieure aux valeurs observées. Nous reviendrons plus précisément sur ce comportement dans le paragraphe suivant.

**Cas des étoiles sous-géantes et jeunes géantes rouges ( $\log g \gtrsim 3,55$ ).** Pour illustrer ce cas, nous considérons l'exemple d'un modèle de  $1 M_{\odot}$  caractérisé par  $\log T_{\text{eff}} = 3.70$  et  $\log L/L_{\odot} = 0.35$ . Le résultat est représenté sur la FIGURE 7.6. Pour de faibles amplitudes de  $\overline{\Delta\Omega}$ , la situation est similaire à celle observée dans les étoiles géantes rouges. Les ondes sont trop fortement amorties pour pouvoir atteindre le cœur d'hélium. Néanmoins, à partir du moment où la rotation différentielle dépasse un certain seuil, noté dans la suite  $\overline{\Delta\Omega}_{\text{th}}$ , on observe que  $t_w$  devient plus petit que  $t_{\text{cont}}$  à travers la région en-dessous de la couche d'hydrogène en fusion. Pour le modèle considéré, cela se passe quand  $\overline{\Delta\Omega}_{\text{th}} \sim 5 \mu\text{rad s}^{-1}$ . Cette valeur est du même ordre de grandeur que les observations dans les sous-géantes par Deheuvels *et al.* (2014). On conclut donc que dans ce type d'étoiles, les ondes internes de gravité générées par la pénétration convective sont capables de contrebalancer l'augmentation du taux de rotation des couches internes due à leur contraction. Ces ondes semblent donc avoir un rôle à jouer dans l'évolution du moment cinétique interne dans les étoiles sous-géantes.

En fait, ce résultat peut être étendu à toutes les étoiles sous-géantes et jeunes géantes rouges (ici définies telles que  $\log g \gtrsim 3,55$ ). La valeur seuil théorique pour l'amplitude de la rotation différentielle,  $\overline{\Delta\Omega}_{\text{th}}$ , est formellement définie comme l'amplitude au-dessus de laquelle  $t_w$  devient plus petit que  $t_{\text{cont}}$  dans tout le cœur d'hélium. En effet, à mesure que  $\overline{\Delta\Omega}$  augmente, l'asymétrie de l'amortissement entre les ondes progrades ( $m > 0$ ) et rétrogrades ( $m < 0$ ) augmente. Les ondes progrades sont amorties plus rapidement que les ondes rétrogrades lors de leur propagation vers le centre de l'étoile. De plus, une augmentation de  $\overline{\Delta\Omega}$  résulte en une augmentation de la fréquence intrinsèque des ondes rétrogrades. Dans une couche donnée, les ondes rétrogrades qui déposent leur moment cinétique (négatif) ont donc des fréquences ( $\omega$ ) de plus en plus petites. Comme le spectre d'excitation des ondes est décroissant avec la fréquence, celles-ci ont des amplitudes de plus en plus grandes et leur impact sur la rotation interne est donc de plus en plus fort. En définitif, l'influence de l'amplitude de la rotation différentielle sur le transport par les ondes internes de gravité est primordiale et doit être prise en compte. En vue de la forte sensibilité de  $t_w$  à  $\overline{\Delta\Omega}$  à travers le cœur d'hélium observée dans la FIGURE 7.6, il est important de noter que la définition du critère de sélection du seuil au-delà de laquelle les ondes sont plus efficaces que l'influence de la contraction interne (i.e., si l'on compare  $t_w$  à  $t_{\text{cont}}$  à travers le cœur d'hélium en entier comme ici, ou si on l'on regarde dans une couche précise, comme par exemple la couche d'hydrogène en fusion) a peu d'influence sur la valeur de  $\overline{\Delta\Omega}_{\text{th}}$ .

**Impact des incertitudes sur les paramètres du modèle et du profil de rotation.** Les incertitudes sur les paramètres du modèle d'excitation (temps de vie, largeur et vitesse des panaches,...) ont peu d'impact sur le résultat. Cela est encore dû à la forte sensibilité de  $t_w$  avec  $\overline{\Delta\Omega}$ . Ainsi, l'effet de la variation des paramètres du modèle d'excitation dans un large intervalle ne



**FIGURE 7.6:** **Gauche :** Échelle de temps caractéristique associée au transport par les ondes (ligne continue), calculé en utilisant Eq. (7.6), en fonction du rayon normalisé dans la zone radiative d’un modèle d’étoile géante rouge de  $1 M_{\odot}$ , avec  $\log T_{\text{eff}} = 3.16$  et  $\log L/L_{\odot} = 0.92$ . Les couleurs correspondent à différentes valeurs de l’amplitude de la rotation différentielle,  $\overline{\Delta\Omega}$ . Les lignes en tirets rouge et bleue représentent respectivement le temps caractéristique de contraction (ou de dilatation) et la localisation de la couche d’hydrogène en fusion. **Droite :** Même légende que le panneau de gauche, mais pour un modèle d’étoile sous-géante de  $1 M_{\odot}$ , avec  $\log T_{\text{eff}} = 3.70$  et  $\log L/L_{\odot} = 0.35$ .

résulte qu’en une faible variation de la valeur seuil théorique  $\overline{\Delta\Omega}_{\text{th}}$ . Les conclusions faites dans les paragraphes précédents n’en sont donc pas modifiées. De plus, une étude similaire a été réalisée avec le profil de rotation défini par Eq. (7.10). Un tel profil de rotation est semblable à un profil à deux zones séparées par un fort gradient autour de la couche d’hydrogène en fusion (voir FIGURE 7.4). Pour tous les modèles considérés, nous avons trouvé qu’un tel profil inhibe l’influence des ondes internes de gravité dans le cœur à moins que l’amplitude de la rotation différentielle soit supérieure de plus d’un ordre de grandeur aux observations. En effet, un tel profil diminue l’asymétrie entre les ondes progrades et rétrogrades lors de leur propagation au-dessus de la couche d’hydrogène en fusion. Dans ce cas, les ondes progrades sont moins amorties tandis les rétrogrades sont plus amorties que dans le cas d’un profil lisse comme dans Eq. (7.9). Le flux de moment cinétique des ondes est donc déjà totalement amorti avant que les ondes ne puissent atteindre la périphérie du cœur d’hélium, à moins d’avoir une amplitude très élevée de la rotation différentielle.

### 7.3.4 Mécanisme de régulation de la rotation du coeur des sous-géantes ?

Les valeurs seuils théoriques  $\overline{\Delta\Omega}_{\text{th}}$  ont pu être déterminées pour tous les modèles d’étoiles de  $1, 1.15, 1.3$  et  $1.45 M_{\odot}$  représentés sur la FIGURE 7.4. Elles ont été obtenues avec des valeurs standard pour les paramètres du modèle d’excitation et en considérant un profil de rotation donné dans Eq. (7.9). Elles sont représentées sur la FIGURE 7.7 et comparées aux observations dans les six sous-géantes et jeunes géantes rouges observées par Deheuvels *et al.* (2012, 2014), ainsi qu’à la valeur supérieure observée dans les géantes rouges par Mosser *et al.* (2012a).

**Dépendance avec l’évolution et la masse.** La FIGURE 7.7 montre que  $\overline{\Delta\Omega}_{\text{th}}$  dépend du stade évolutif et de la masse. D’abord, on voit que la valeur seuil théorique pour l’amplitude augmente avec l’évolution. En effet, comme nous l’avons vu dans Section 7.2, l’intensité de l’amortissement radiatif des ondes augmente avec l’âge de l’étoile. D’après Eq. (7.8), cette augmentation peut être contrebalancée par une augmentation de la fréquence intrinsèque de l’onde. Des valeurs de plus en plus élevées de l’amplitude de la rotation différentielle sont donc nécessaires pour permettre aux

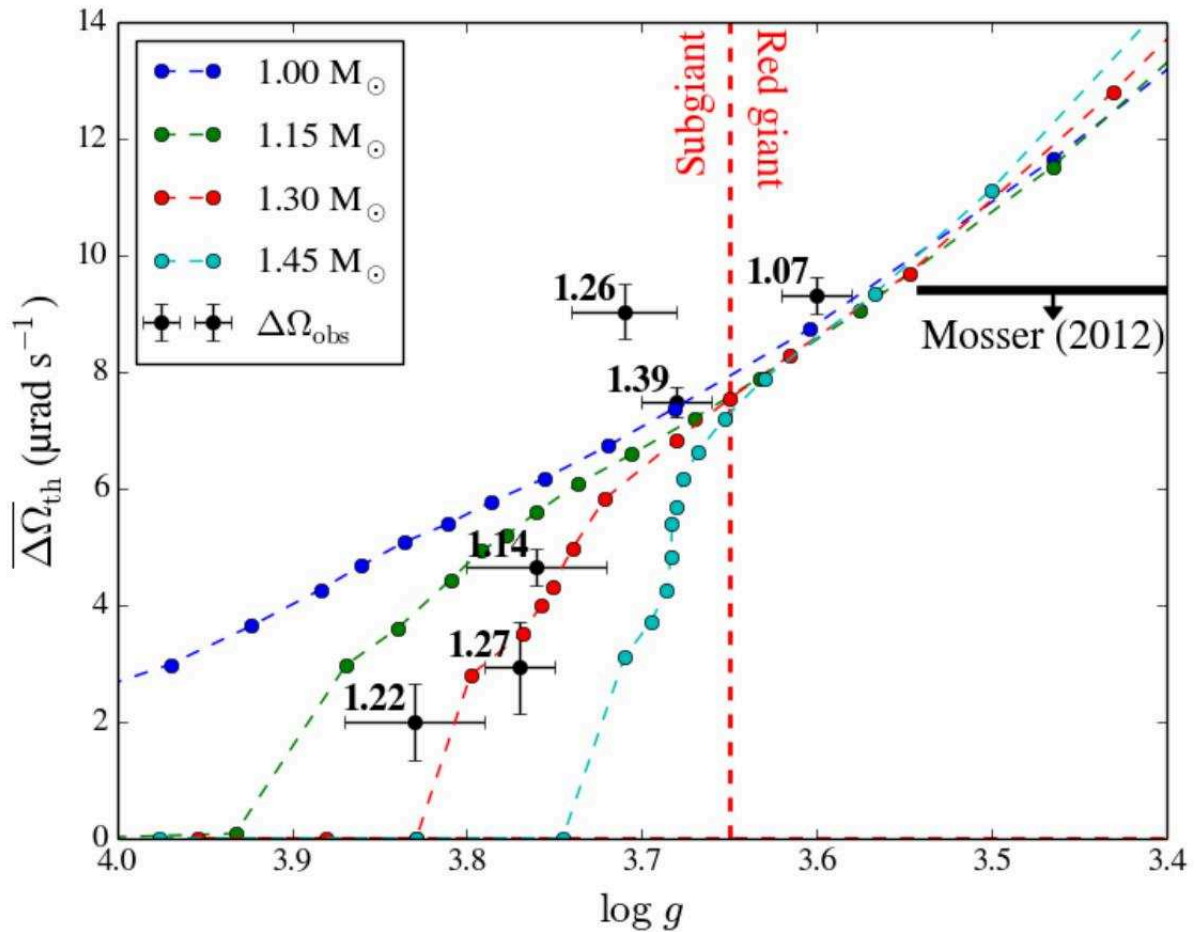
ondes d’atteindre les couches centrales le long de l’évolution post-séquence principale. Deuxièmement, on voit que  $\overline{\Delta\Omega_{\text{th}}}$  dépend de la masse sur la branche des sous-géantes. Cette dépendance peut s’expliquer par le fait que plus l’étoile est massive sur la branche des sous-géantes, plus elle est lumineuse, et donc plus les flux convectifs sont importants. Les ondes internes de gravité sont donc plus efficacement excitées et leur efficacité de transport en est que meilleure, d’où des valeurs plus faibles pour l’amplitude de la rotation différentielle qui est nécessaire pour leur permettre d’atteindre les couches centrales (voir Pinçon *et al.* 2017, pour une discussion plus détaillée). Enfin, sur la branche des géantes rouges,  $\overline{\Delta\Omega_{\text{th}}}$  converge vers une même valeur quelle que soit la masse de l’étoile à  $\log g$  donné. En effet, à ce stade évolutif, les étoiles remontent le tracé d’Hayashi dans le diagramme Hertzsprung-Russell (voir FIGURE 7.4). Elles se localisent donc dans la même partie du diagramme H-R quelle que soit la masse et ont donc des propriétés similaires, notamment en ce qui concerne les paramètres du modèle d’excitation et l’intensité de l’amortissement radiatif. La valeur seuil pour l’amplitude de la rotation différentielle qui est nécessaire pour permettre aux ondes d’atteindre les couches centrales est donc identique quelle que soit la masse.

**Comparaison avec les observations : une régulation de la rotation par les ondes sur la branche des sous-géantes ?** Sur la branche des géantes rouges, il déjà été mentionné plus tôt que les amplitudes de la rotation différentielle nécessaires pour permettre aux ondes d’atteindre le cœur d’hélium sont bien supérieures aux observations par Mosser *et al.* (2012a). Au contraire, la FIGURE 7.7 montre une frappante similitude entre les taux de rotation différentielle dans les six sous-géantes et jeunes géantes rouges observées par Deheuvels *et al.* (2012, 2014). Seule l’étoile de  $1.26 M_{\odot}$  montre un écart par rapport aux courbes théoriques ; elle n’est cependant pas assez éloignée pour mettre en défaut le bon accord global étant donné les incertitudes concernant la détermination théorique de  $\overline{\Delta\Omega_{\text{th}}}$  ou les observations. Cela nous a donc mené à émettre l’idée que l’amplitude de la rotation différentielle observée dans les sous-géantes peut être le résultat d’un mécanisme de régulation contrôlé par les ondes générées via la pénétration convective.

Le scénario peut se présenter comme ceci. Considérons une étoile à la fin de la séquence principale avec une amplitude de la rotation différentielle  $\overline{\Delta\Omega_0}$ . Le système peut alors évoluer suivant deux voies. Si  $\overline{\Delta\Omega_0} \lesssim \overline{\Delta\Omega_{\text{th}}}$ , alors la contraction des couches centrales l’emporte et l’amplitude de la rotation différentielle augmente sur une échelle de temps de l’ordre du temps de contraction. Sinon, si  $\overline{\Delta\Omega_0} \gtrsim \overline{\Delta\Omega_{\text{th}}}$ , alors le transport induit par les ondes l’emporte et l’amplitude de la rotation différentielle cette fois-ci diminue sur une échelle de temps inférieure au temps de contraction. Les étoiles considérées ici sont des rotateurs tels que l’évolution du profil de rotation n’a que peu d’influence sur leur structure interne et donc sur la valeur de  $\overline{\Delta\Omega_{\text{th}}}$  à un instant donné. Ainsi, puisque  $\overline{\Delta\Omega_{\text{th}}}$  évolue sur des échelles de temps beaucoup plus faibles que le temps de contraction,  $\overline{\Delta\Omega}$  va se rapprocher de plus en plus de  $\overline{\Delta\Omega_{\text{th}}}$  dans une première phase transitoire. Après un certain laps de temps, un état stationnaire est alors atteint pour lequel  $\overline{\Delta\Omega} \sim \overline{\Delta\Omega_{\text{th}}}$ . La stabilité de cet équilibre est le résultat de l’effet combiné de la contraction et du transport par les ondes qui agissent tous deux de façon à contrer tout écart à cet équilibre. De plus, comme le temps caractéristique de contraction est bien plus faible que le temps d’évolution sur la branche des sous-géantes, l’équilibre est atteint bien avant le début de la branche des géantes rouges, d’où l’accord avec les observations.

## 7.4 Remarques conclusives

Dans ce chapitre, un certain nombre de conclusions ont été obtenues. D’abord, j’ai montré que les ondes internes de gravité générées par la pénétration convective sont incapables, par elles-mêmes, d’expliquer les observations dans les étoiles géantes rouges évoluées à cause d’un amortissement radiatif trop important. Cela rejoint le résultat de Fuller *et al.* (2014). Un autre processus de transport efficace doit être invoqué pour ces étoiles. Néanmoins, les ondes générées par la pénétration convective sont capables de jouer un rôle dans la redistribution du moment cinétique dans les étoiles de faible masse sur la séquence principale et la branche des sous-géantes. Ces ondes sont plus efficaces



**FIGURE 7.7:** Valeur seuil théorique pour l'amplitude de la rotation différentielle radiale en fonction du  $\log g$  pour les différents modèles considérés. Celle-ci a été déterminée en utilisant les valeurs par défaut pour les paramètres du modèle et en supposant un profil de rotation lisse tel que défini dans Eq. (7.9). Les observations dans les étoiles sous-géantes,  $\Delta\Omega_{\text{obs}}$ , sont représentées avec leurs barres d'erreur et la masse en unité solaire (Deheuvels *et al.* 2014). La ligne en tirets verticale rouge symbolise la transition entre la phase de sous-géante et le début de la branche des géantes rouges. L'amplitude maximale de la rotation différentielle sur la branche des géantes rouges obtenue par les observations de Mosser *et al.* (2012a) est indiquée par la ligne noire horizontale.

que celles générées par la pression turbulente suivant le formalisme de Kumar *et al.* (1999). En effet, un calcul identique a été effectué pour des étoiles sous-géantes dans le même intervalle de masse mais en considérant le modèle d'excitation proposé par Kumar *et al.* (1999). Il s'avère que pour ce type d'ondes, les valeurs seuils théoriques pour l'amplitude de la rotation différentielle sont près de deux fois supérieures aux valeurs trouvées avec les ondes excitées par les panaches convectifs. Les ondes générées par la pression turbulente sont donc moins efficaces que celles générées par la pénétration convective et ne peuvent donc pas expliquer les observations dans les sous-géantes. Cela rejoint encore le résultat de Fuller *et al.* (2014). Au contraire, les valeurs seuils théoriques pour la rotation différentielle au-dessus desquelles les ondes générées par les panaches convectifs peuvent contrebalancer l'accélération des couches sous l'effet de leur contraction sont remarquablement proches des valeurs observées par Deheuvels *et al.* (2014) dans six sous-géantes et jeunes géantes rouges. De telles similitudes peuvent être interprétées comme le résultat d'un processus de régulation contrôlé par les ondes. Dans ce scénario, l'effet de la contraction du cœur, induisant une augmentation du taux de rotation, combiné à l'effet du transport par les ondes générées par les panaches, induisant une diminution du taux de rotation, mène à un état stationnaire dans lequel l'amplitude de la rotation différentielle reste proche de cette valeur seuil. Ce résultat souligne le rôle majeur que le transport par les ondes peut avoir sur l'évolution de la rotation interne, notamment sur la branche des sous-géantes, et appelle à des études plus sophistiquées pour le futur.





# Can plume-induced internal gravity waves regulate the core rotation of subgiant stars?

C. Pinçon<sup>1</sup>, K. Belkacem<sup>1</sup>, M. J. Goupil<sup>1</sup>, and J. P. Marques<sup>2</sup>

<sup>1</sup> LESIA, Observatoire de Paris, PSL Research University, CNRS, Université Pierre et Marie Curie, Université Paris Diderot, 92195 Meudon, France  
e-mail: [charly.pincon@obspm.fr](mailto:charly.pincon@obspm.fr)

<sup>2</sup> Institut d'Astrophysique Spatiale, UMR 8617, CNRS, Université Paris XI, Bâtiment 121, 91405 Orsay Cedex, France

Received 18 April 2017 / Accepted 10 May 2017

## ABSTRACT

**Context.** The seismic data provided by the space-borne missions CoRoT and *Kepler* enabled us to probe the internal rotation of thousands of evolved low-mass stars. Subsequently, several studies showed that current stellar evolution codes are unable to reproduce the low core rotation rates observed in these stars. These results indicate that an additional angular momentum transport process is necessary to counteract the spin up due to the core contraction during the post-main sequence evolution. For several candidates, the transport induced by internal gravity waves (IGW) could play a non-negligible role.

**Aims.** We aim to investigate the effect of IGW generated by penetrative convection on the internal rotation of low-mass stars from the subgiant branch to the beginning of the red giant branch.

**Methods.** A semi-analytical excitation model was used to estimate the angular momentum wave flux. The characteristic timescale associated with the angular momentum transport by IGW was computed and compared to the contraction timescale throughout the radiative region of stellar models at different evolutionary stages.

**Results.** We show that IGW can efficiently counteract the contraction-driven spin up of the core of subgiant stars if the amplitude of the radial-differential rotation (between the center of the star and the top of the radiative zone) is higher than a threshold value. This threshold depends on the evolutionary stage and is comparable to the differential rotation rates inferred for a sample of subgiant stars observed by the satellite *Kepler*. Such an agreement can therefore be interpreted as the consequence of a regulation mechanism driven by IGW. This result is obtained under the assumption of a smooth rotation profile in the radiative region and holds true even if a wide range of values is considered for the parameters of the generation model. In contrast, on the red giant branch, we find that IGW remain insufficient, on their own, to explain the observations because of an excessive radiative damping.

**Conclusions.** IGW generated by penetrative convection are able to efficiently extract angular momentum from the core of stars on the subgiant branch and accordingly have to be taken into account. Moreover, agreements with the observations reinforce the idea that their effect is essential to regulate the amplitude of the radial-differential rotation in subgiant stars. On the red giant branch, another transport mechanism must likely be invoked.

**Key words.** stars: rotation – stars: evolution – stars: interiors – waves – hydrodynamics

## 1. Introduction

The detection of mixed modes in thousands of stars (e.g., Mosser et al. 2012b) observed by the satellites CoRoT and *Kepler* have provided insights into the internal rotation of evolved stars. Ensemble asteroseismology notably revealed that the mean core rotation weakly increases with time on the subgiant branch (Deheuvels et al. 2012, 2014) before dropping sharply along the evolution on the red giant branch (Mosser et al. 2012a). These observations have had a major impact since they question our knowledge about the angular momentum evolution and redistribution in stellar interiors. Indeed, the current stellar evolution codes taking transport of angular momentum by shear-induced turbulence and meridional circulation into account are not able to reproduce the low rotation rates observed in evolved stars (Eggenberger et al. 2012; Ceillier et al. 2013; Marques et al. 2013). These processes are also insufficient to explain the quasi solid-body rotation observed in the solar radiative zone (e.g., Brown et al. 1989; García et al. 2007). These discrepancies stress out the need for considering additional transport mechanisms to efficiently extract angular momentum from the stellar cores. Among the hypotheses advanced to explain the spin

down of the core, several works investigated the effect of magnetic fields (e.g., Spruit 2002; Heger et al. 2005; Cantiello et al. 2014; Rüdiger et al. 2015; Spada et al. 2016) or the influence of mixed modes (Belkacem et al. 2015a,b). In addition, it has been known for decades that a possible solution may also come from internal gravity waves (e.g., Schatzman 1996).

The restoring force of internal gravity waves (IGW) is buoyancy so that they can propagate in radiative zones of stars. In these regions, they are damped by radiative diffusion and can deposit (or extract) momentum. They are thus able to transport angular momentum in presence of differential rotation. The efficiency of this mechanism depends on the wave energy spectrum whose amplitude and shape results, on the one hand, from the excitation process, and on the other hand, from the wave damping. Two processes have been proposed to generate IGW: turbulent pressure in the convective bulk (Press 1981; Garcia Lopez & Spruit 1991; Zahn 1997; Kumar et al. 1999; Lecoanet & Quataert 2013) or penetrative convection at the interface between the convective and the radiative zones (Townsend 1966; Pinçon et al. 2016). For both mechanisms, excitation models are available to estimate the wave energy flux

emitted at the base of the convective zone. These models have already demonstrated the ability of IGW to efficiently affect the evolution of the internal rotation in the solar case (Zahn 1997; Talon et al. 2002; Talon & Charbonnel 2005; Fuller et al. 2014; Pinçon et al. 2016). This reinforces the idea that IGW could be one important missing ingredient in the modeling of the angular momentum evolution of stars.

Solving the transport of angular momentum equations including the effects of IGW is numerically difficult. Indeed, it involves very small timescales differing from the stellar evolution timescale by several orders of magnitude. A first step in the investigation thus consists in estimating and comparing the efficiency of the angular momentum transport by IGW with the other transport processes, for a given stellar equilibrium structure and at a peculiar evolutionary stage. Since the core contraction drives the increase of the inner rotation in current stellar modeling, this is equivalent to compare the characteristic timescale associated with the transport by IGW to the contraction timescale. This has already been done in the solar case by previous works (Zahn 1997; Kumar et al. 1999; Fuller et al. 2014; Pinçon et al. 2016). Such a comparison provides a first indication on the efficiency of the angular momentum transport by IGW in stars at different evolutionary stages.

Fuller et al. (2014) followed such an approach in the case of evolved low-mass stars. Considering only *turbulent pressure in the convective zone* as the excitation mechanism, they showed that the inner radiative interior may decouple from the effect of incoming IGW when stars reach about the middle of the sub-giant branch. This mainly results from the wave radiative damping that crucially increases as stars evolve. As a consequence, it prevents IGW from reaching the innermost layers and therefore, from modifying their rotation.

However, as shown in Pinçon et al. (2016) in the solar case, the result of such a study depends both on the wave excitation mechanism and on the amplitude of the radial-differential rotation in the radiative zone. Here, we consider the effect of IGW generated by *penetrative convection* and investigate whether they can counteract the core contraction and brake the development of a strong differential rotation in subgiant and red giant stars. The influence of both amplitude and shape of the radial-differential rotation on the transport by IGW toward the central regions is considered.

The article is organized as follows. Section 2 introduces the theoretical background. An analytical description of the angular momentum transport by plume-induced IGW is developed. Section 3 briefly presents the input physics and stellar models used in this work. The efficiency of the transport by plume-induced IGW is investigated in Sect. 4. The study is based on timescales comparison for  $1 M_{\odot}$  stellar models covering the subgiant branch and the beginning of the ascent of the red giant branch. The influence of the uncertainties on the excitation model parameters and of the shape of the rotation profile on the results is widely explored. In Sect. 5, the effect of stellar mass is analyzed and a comparison with observations is performed. Section 6 is devoted to discussions. Conclusions are finally formulated in Sect. 7.

## 2. Characteristic timescales and wave flux generated by penetrative convection

### 2.1. Transport timescales

The contraction of the central layers during the post-main sequence turns out to be mostly responsible for the strong rotation

contrast between the core and the envelope observed in stellar evolution codes (e.g., Ceillier et al. 2013; Marques et al. 2013). To estimate the efficiency of the angular momentum transport by IGW in stellar interiors, we can thus compare the influence of IGW versus the contraction or expansion in stars on the evolution of the internal rotation. The angular momentum transport in stellar interiors obeys an advection-diffusion equation. Within the shellular rotation approximation (Zahn 1992) and considering only the effect of both the contraction or expansion and the transport by waves, the Lagrangian evolution of the mean rotation rate,  $\Omega(r)$ , in a spherical mass shell, can be written such as (e.g., Belkacem et al. 2015b)

$$\frac{d\Omega}{dt} = -2\frac{\dot{r}}{r}\Omega - \frac{J_w}{\rho r^2}, \quad (1)$$

with

$$J_w = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \mathcal{F}_{J,w}), \quad (2)$$

where  $r$  is the radius,  $\dot{r}$  is the contraction or expansion velocity,  $\rho$  is the density of the equilibrium structure and  $\mathcal{F}_{J,w}$  is the mean radial wave flux of angular momentum.

Following Eq. (1), the local contraction or expansion timescale at a radius  $r$  is given by

$$t_{\text{cont}} \sim \left| \frac{r}{2\dot{r}} \right|. \quad (3)$$

It corresponds to the evolution timescale of the rotation rate under the hypothesis of local conservation of angular momentum. Similarly, the wave-related timescale, or the timescale associated with the transport of angular momentum by IGW, given a rotation profile  $\Omega(r)$ , can be estimated by

$$t_w \sim \left| \frac{\rho r^2 \Omega}{J_w} \right|. \quad (4)$$

It corresponds to the ratio of the density of angular momentum to the divergence of the radial angular momentum wave flux. If  $J_w(r) < 0$ , waves tend to increase the rotation rate following Eq. (1), otherwise, they tend to decrease it. The effect of the angular momentum transport induced by IGW on the rotation is said to be locally more efficient than the influence of the contraction or the dilatation in the star if  $\epsilon(r) = t_{\text{cont}}/t_w > 1$ . Therefore, the comparison between Eqs. (3) and (4) provides us with an estimate of the efficiency of the angular momentum redistribution by IGW throughout the radiative zone of the stars.

### 2.2. Plume-induced wave flux of angular momentum

The computation of Eq. (4) requires the knowledge of the angular momentum wave flux, and hence the wave excitation rate. In this work, we consider only the penetration of convective plumes as the generation mechanism. Convective plumes are strong, coherent, downwards flows that originate from matter cooled at the surface of stars. They grow by turbulent entrainment of matter at their edges when descending through the convective zone (Morton et al. 1956). Once they reach the base of the convective zone, they penetrate by inertia into the underlying stably stratified layers at the top of the radiative region where they are slowed down by buoyancy braking. This is the so-called penetration zone. There, a part of their kinetic energy

is converted into waves that can then propagate toward the center of the star (e.g., Brummell et al. 2002; Dintrans et al. 2005; Rogers & Glatzmaier 2005; Alvan et al. 2015). To model this process, Pinçon et al. (2016) considered the ram pressure exerted by an ensemble of convective plumes in the penetration region as the source term in the wave equation. In the solar case, they found that this mechanism can generate a wave energy flux representing about 1% of the solar convective flux at the top of the radiative zone. In the following, the mean radial wave energy flux at the top of the radiative zone, per unit of cyclic frequency  $\omega$ , for an angular degree  $l$ , and for an azimuthal number  $m$ , is estimated by Eq. (39) of their paper, that is

$$\mathcal{F}_{E,w}(r_t, \omega, l, m) \sim \mathcal{F}_0 \frac{e^{-\omega^2/4\nu_p^2}}{\nu_p} \sqrt{l(l+1)} e^{-l(l+1)b^2/2r_t^2}, \quad (5)$$

with

$$\mathcal{F}_0 = -\frac{1}{2\pi} \frac{\mathcal{A}}{4\pi r_t^2} \frac{\rho_t V_p^3 \mathcal{S}_p}{2} F_R, \quad (6)$$

where  $r_t$  is the radius at the top of the radiative zone,  $\nu_p$  is the plume occurrence frequency,  $b$  is the plume radius,  $\mathcal{A}$  is the plumes filling factor, and  $\mathcal{S}_p = \pi b^2$  is the horizontal area occupied by one single plume, in the excitation region.  $\rho_t$  and  $V_p$  are respectively the density and the velocity of the plumes at the base of the convective zone. The dimensionless quantity  $F_R$  is equivalent to the Froude number at the top of the radiative region. It is equal to  $F_R = \pi V_p / r_t N_t$ , with  $N_t$  the Brunt-Väisälä frequency at the top of the radiative zone (see Sect. 3.2 for details on its estimate). It controls the efficiency of the energy transfer from the convective plumes into waves inside the penetration region (as it also does in the case of IGW generated by turbulent pressure). By writing Eq. (5), we have assumed that the Péclet number at the base of the convective zone is very high, such that the plumes suffer a strong buoyancy braking leading to a very small penetration length. Indeed, using various stellar models on the subgiant and red giant branches, we have estimated the Péclet number by  $P_e \sim V_p H_t / K_t$ , where  $V_p$  was computed following Sect. 3.2,  $K_t$  is the radiative diffusion coefficient (see below) and  $H_t$  the pressure scale height in this region. We have found  $P_e \sim 10^6 - 10^7$  for all the models, which justifies the latter assumption (see also the discussion by Dintrans et al. 2005). Moreover, we have assumed a quasi discontinuous profile for the Brunt-Väisälä frequency in this region. Since the smoother the transition of the temperature gradient from an adiabatic to a radiative value at the base of the convective zone, the higher the wave transmission into the radiative zone, this corresponds to consider a lower limit of the wave energy flux regarding the transition length.

In the adiabatic limit, the angular momentum luminosity of each wave component,  $\mathcal{L}_w$ , is conserved when propagating into the stellar interior (e.g., Bretherton 1969; Zahn 1997; Ringot 1998), that is

$$\mathcal{L}_w = 4\pi r^2 \frac{m}{\hat{\omega}} \mathcal{F}_{E,w}(r, \hat{\omega}, l, m) = \text{const.}, \quad (7)$$

where

$$\hat{\omega}(r, \omega, m) = \omega - m\delta\Omega(r) \quad (8)$$

is the Doppler-shifted intrinsic wave frequency<sup>1</sup> with respect to the excitation site and  $\delta\Omega = \Omega(r) - \Omega(r_t)$  is the radial-differential

<sup>1</sup> As a convention, we adopt a plane-wave description in the form of  $e^{i(\sigma t - m\varphi)}$ , with  $\sigma$  and  $\varphi$  as the wave frequency and the longitudinal coordinate in an inertial frame, respectively. The intrinsic wave frequency in a frame co-rotating with the excitation zone is then given by  $\omega = \sigma - m\Omega(r_t)$ . Therefore, prograde waves are such as  $m\delta\Omega > 0$ , while retrograde waves are such as  $m\delta\Omega < 0$ .

rotation between the radius  $r$  and the top of the radiative zone. Therefore, using Eq. (7), the wave flux of angular momentum can be written in each layer of the radiative zone such as

$$\frac{m}{\hat{\omega}} \mathcal{F}_{E,w}(r, \hat{\omega}, l, m) = \frac{m}{\omega} \frac{r_t^2}{r^2} \mathcal{F}_{E,w}(r_t, \omega, l, m). \quad (9)$$

Without any dissipative process, we thus recover that  $J_w = 0$  in Eq. (1) and that the angular momentum transport by waves is null.

In the non-adiabatic case, each spectral component of the total wave energy flux emitted from the top of the radiative zone undergoes a radiative damping as it propagates toward the center of the star and so contributes to the transport of angular momentum in presence of differential rotation. The wave flux of angular momentum as a function of the depth in the radiative zone can then be derived from the wave energy flux, generated in the excitation region, and modulated by a damping term<sup>2</sup> (e.g., Press 1981; Zahn 1997), that is

$$\mathcal{F}_{J,w}(r) = \sum_l \sum_{m=-l}^{m=l} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{m}{\omega} \frac{r_t^2}{r^2} \mathcal{F}_{E,w}(r_t, \omega, l, m) e^{-\tau(r, \hat{\omega}, l)} d\omega, \quad (10)$$

with

$$\tau(r, \hat{\omega}, l) = [l(l+1)]^{3/2} \int_r^{r_t} K \frac{NN_T^2}{\hat{\omega}^4} \left( \frac{N^2}{N^2 - \hat{\omega}^2} \right)^{1/2} \frac{dr}{r^3}, \quad (11)$$

where  $N$  is the Brunt-Väisälä frequency, with  $N_T$  its thermal part that does not take the gradient in the chemical composition into account, and  $K$  (in units of  $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$ ) is the radiative diffusion coefficient (e.g. Maeder 2009). We note that the wave flux of angular momentum depends on the Doppler-shifted frequency  $\hat{\omega}(r)$  only through the wave damping. We also emphasize, following Eq. (11), that IGW deposit all the angular momentum they carry just above their critical layers (i.e. where  $\hat{\omega} = 0$ ) and cannot propagate further downwards.

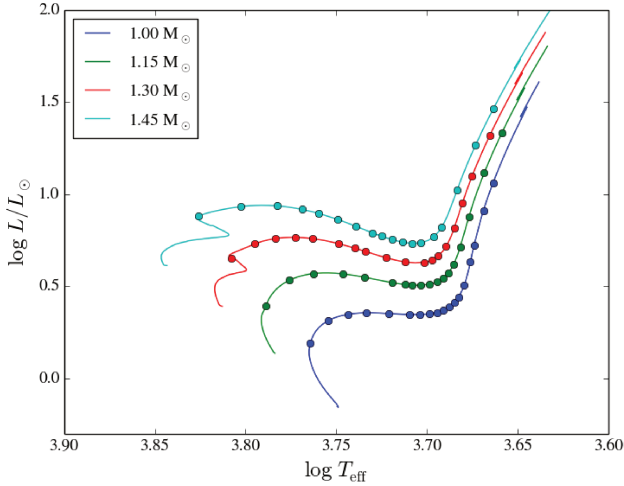
In the following, we will neglect wave reflection and will assume that each wave component is lost the first time it reaches a reflection point near the center (i.e. where  $N^2 = \hat{\omega}^2$ ). In other words, it is supposed either to be absorbed into the medium before or to be so weakly damped in its propagation cavity that it does not quantitatively contribute to the transport. Moreover, we stress that the modeling of the transport by IGW represented by Eqs. (5), (10) and (11) neglects the Coriolis force and the wave heat flux. The implications of these hypotheses on the results are discussed a posteriori in Sect. 6.4.

## 3. Input physics

### 3.1. Stellar models

We considered evolutionary sequences of 1, 1.15, 1.3 and 1.45  $M_\odot$  models computed with the stellar evolution code CESTAM (Marques et al. 2013). The sequences cover the subgiant branch and the beginning of the ascent of the red giant branch. The mass range was chosen to be representative of observed low-mass subgiant and red giant stars (Mosser et al. 2012a; Deheuvels et al. 2014). Their location in the Hertzsprung-Russell diagram is displayed in Fig. 1. Their chemical composition is similar to the solar mixture as given in Asplund et al. (2009),

<sup>2</sup> The right-hand side of Eq. (48) in Pinçon et al. (2016) contains a typo and must be corrected by a factor  $r_d^2/r^2$  (here,  $r_d = r_t$ ). We note that the numerical computations properly took this factor into account.



**Fig. 1.** Location in the Hertzsprung–Russell diagram of the stellar models considered in this work (filled circles, see Sect. 3.1 for details). The evolutionary tracks from the zero-age main sequence to the top of the red giant branch are represented by the solid lines.

with initial helium and metals abundances  $Y_0 = 0.25$  and  $Z_0 = 0.013$ . We used the OPAL 2005 equation of states and opacity tables. Microscopic diffusion, overshooting and rotation were neglected. The stellar atmosphere was constructed following an Eddington gray approximation and the nuclear reaction rates were deduced from the NACRE compilation, except for the  $^{14}\text{N}(p, \gamma)^{15}\text{O}$  reaction that follows Imbriani et al. (2004). Finally, convection was modeled using the mixing-length theory (Böhm-Vitense 1958) with  $\alpha_{\text{MLT}} = 1.65$ .

### 3.2. Excitation model parameters

The plume radius  $b$  and velocity  $V_p$  were estimated using the semi-analytical model of turbulent plumes by Rieutord & Zahn (1995), as detailed in Pinçon et al. (2016). The value of the Brunt-Väisälä frequency at the top of the radiative zone,  $N_t$ , remains difficult to estimate in current stellar models. Since  $N$  approximately follows a power law with respect to the radius between the hydrogen-burning shell and the outer edge of the radiative zone (e.g., Mosser et al. 2017), we considered the value given by the extrapolation of this power law at the base of the convective zone (i.e., at  $r = r_t$ ). The filling factor  $\mathcal{A}$  is a proxy for the number of penetrating convective plumes, with an upper limit fixed at 0.5 by mass conservation. Realistic 3D Cartesian numerical simulations of the uppermost convective layers of evolved red giant stars show values around  $\mathcal{A} \sim 0.1$  (Ludwig & Kučinskás 2012), which is very close to the values obtained for the Sun (e.g., Stein & Nordlund 1998). This qualitatively agrees with numerical simulations of the extended convective envelope of RGB stars (e.g., Brun & Palacios 2009; Palacios 2012) in which the energy transport by strong cooler downwards convective plumes is well developed and predominant. We then chose  $\mathcal{A} \sim 0.1$  as the default value. Finally, given the lack of knowledge about the plume lifetime, the default value will be taken around the convective turnover timescale as given by the MLT,  $\nu_p \sim \omega_c$  (see Fig. 7). The effect of variations in the model parameters on the transport by IGW is studied in Sect. 4.2. We emphasize that Eq. (10) was computed in a frequency range between 0 and  $\min(N_t, 10 \nu_p)$  and for angular degrees between  $l = 1$  and  $l = 150$ . These choices were checked a posteriori to be sufficient for all the considered models.

### 3.3. Assumptions for the rotation profile

As we can see in Eqs. (1), (2), (10) and (11), the evolution of the internal rotation and the action of IGW are intricately related. In particular, the differential rotation,  $\delta\Omega(r)$ , plays a major role in determining the wave flux via the radiative damping term. On the one hand, it causes the asymmetry between prograde ( $m > 0$ ) and retrograde ( $m < 0$ ) waves that is essential for the extraction of angular momentum (indeed, if  $\delta\Omega = 0$ , transport of angular momentum by prograde and retrograde waves cancel each other out so that  $\dot{J}_w = 0$ ). In the other hand, it controls the magnitude of the wave damping through the dependence on  $\hat{\omega}^{-4}$  and hence, the local deposit of angular momentum into the medium. As a consequence, it has been shown in the solar case that its amplitude can have a large impact on the transport by IGW (Pinçon et al. 2016). Therefore, we will assume a given rotation profile for each stellar model. We thus implicitly consider that the effect of the centrifugal forces on the equilibrium structure is negligible. While seismic studies can provide stringent constraints on the mean core rotation rate in subgiant and red giant stars, little is known about the shape of the rotation profile in these stars and difficulties remain, in some cases, to discriminate between a sharp rotation profile and a smoother one (Deheuvels et al. 2014). We thus consider two limiting cases for the rotation profile: a smooth profile and a sharp one.

**Smooth profile:** seismic observations show evidence that a mechanism is able to prevent the core contraction from developing a large differential rotation in the radiative zone and to efficiently redistribute angular momentum from the core to the envelope all along the star lifetime. As a consequence, it seems reasonable to expect the rotation profile to be smoother than the one obtained by assuming local conservation of angular momentum. A linearly decreasing profile in the radiative zone is the simplest form we could assume. However, to enforce a null derivative at the center and at the top of the radiative zone, we prefer considering a profile with the shape

$$\delta\Omega(r) = \Delta\Omega \cos^2\left(\frac{\pi r}{2 r_t}\right) \quad \text{for } r \leq r_t, \quad (12)$$

with  $\Delta\Omega$  the maximum amplitude of the differential rotation. Equation (12) will be considered as the default profile.

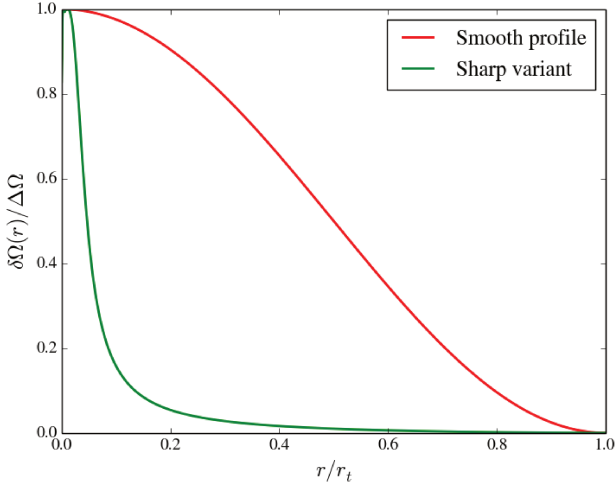
**Sharp profile:** in a second step, we will investigate the effect of a sharp rotation profile. It will be supposed to be similar to the one obtained by assuming local conservation of angular momentum from the beginning of the subgiant branch, but rescaled with a different amplitude. For initial conditions, we will assume that the rotation is uniform throughout the radiative zone at the terminal-age main sequence (TAMS), as supported by observations in main-sequence stars (e.g., Benomar et al. 2015). The resolution of Eq. (1) with  $\dot{J}_w = 0$  thus gives

$$\delta\Omega(r) = \Delta\Omega \frac{C^2(m_r) - C^2(m_{r_t})}{\max[C^2(m_r) - C^2(m_{r_t})]} \quad \text{for } r < r_t, \quad (13)$$

with

$$C(m_r) = \frac{r_0(m_r)}{r(m_r)}, \quad (14)$$

where  $r_0(m_r)$  is the radius of the mass element  $m_r$  at the TAMS and  $m_{r_t}$  is the mass coordinate at the top of the radiative zone.



**Fig. 2.** Normalized differential rotation profile according to the radius normalized by the radius at the top of the radiative zone,  $r_t$ , for a  $1 M_\odot$  subgiant model with  $\log T_{\text{eff}} = 3.70$  and  $\log L/L_\odot = 0.35$ . We compare the smooth profile given in Eq. (12) (red solid line) with the sharp variant given in Eq. (13) (green solid line).

Both kind of rotation profiles are represented in Fig. 2 for a  $1 M_\odot$  model in the middle of the subgiant branch. Considering such arbitrary shapes for the differential rotation, although questionable, will give us first hints about the efficiency of the transport by IGW in subgiant and red giant stars while considering different values for the amplitude  $\Delta\Omega$ . A comparison with the differential rotation amplitude inferred by seismic observations requires accounting for the properties of the gravity-dominated mixed modes. Following Goupil et al. (2013), the mean seismic amplitude of the differential rotation, that is its amplitude as probed by mixed modes, is given by

$$\overline{\Delta\Omega} \approx \frac{1}{\gamma} \int_0^{r_t} \delta\Omega \frac{N}{r} dr \quad \text{with} \quad \gamma = \int_0^{r_t} \frac{N}{r} dr, \quad (15)$$

which have been derived by assuming that the rotation rate is uniform throughout the convective envelope. Equation (15) shows that mixed modes probe the mean value of the rotation in a region confined around the peak of the Brunt-Väisälä frequency, as also noted by Deheuvels et al. (2014). Therefore, a comparison between the values of the differential rotation as observed by mixed modes and the ones as assumed in this work will make sense if we consider the mean seismic amplitude,  $\overline{\Delta\Omega}$ , computed via Eq. (15).

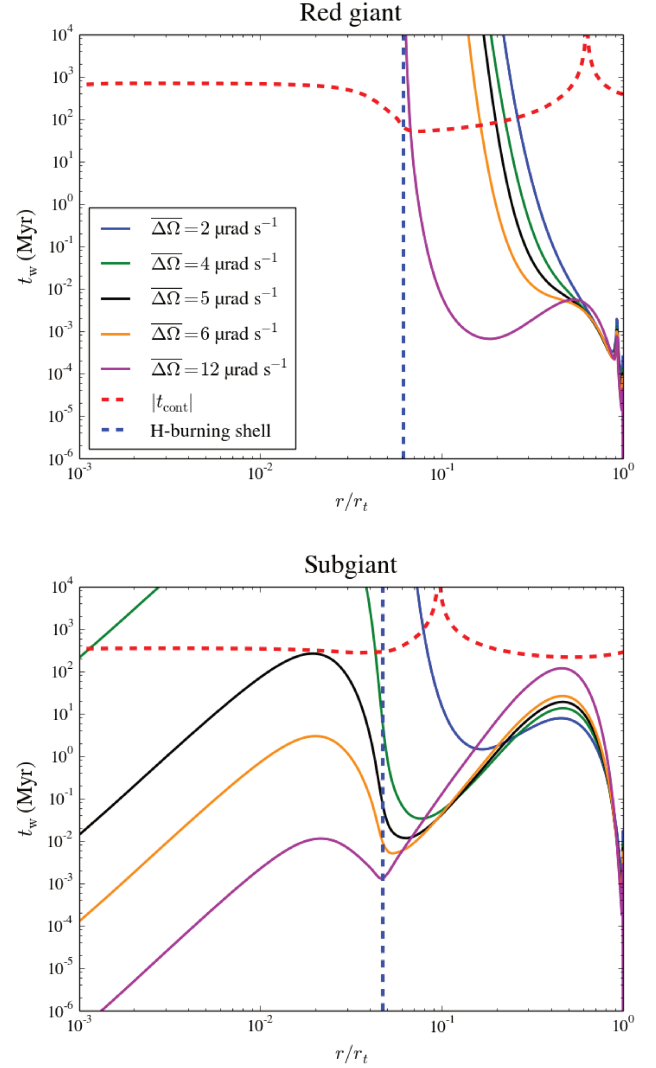
## 4. Efficiency of the angular momentum transport by IGW in subgiant and red giant stars

### 4.1. Comparison of timescales

#### 4.1.1. Stars at the beginning of the ascent of the RGB

As an illustration, we consider the case of a  $1 M_\odot$  model characterized by  $\log L/L_\odot = 0.92$ ,  $\log g = 3.16$ ,  $\log T_{\text{eff}} = 3.67$  and located at the beginning of the ascent of the red giant branch. The wave-related timescale is compared to the contraction timescale throughout the radiative zone of the star in Fig. 3. The values for  $\overline{\Delta\Omega}$  are chosen between 0 and  $12 \mu\text{rad s}^{-1}$ , that is in a range with an upper limit slightly above the maximum value inferred from asteroseismology (Mosser et al. 2012a; Deheuvels et al. 2014).

At the very top of the radiative zone, Fig. 3 shows that  $t_w$  takes very small values of the order of years. This is due to the



**Fig. 3.** *Top:* characteristic wave-related timescale (solid lines), computed using Eq. (4), as a function of the normalized radius in the radiative zone of a  $1 M_\odot$  red giant model, with  $\log T_{\text{eff}} = 3.16$  and  $\log L/L_\odot = 0.92$ . Colors correspond to different values for the amplitude of the differential rotation,  $\overline{\Delta\Omega}$ . The red and the blue dashed lines represent the contraction or dilatation timescale and the location of the hydrogen-burning shell, respectively. *Bottom:* same caption and legend as the top panel, but for a  $1 M_\odot$  subgiant model, with  $\log T_{\text{eff}} = 3.70$  and  $\log L/L_\odot = 0.35$ .

damping of high-angular degree low-frequency prograde waves ( $m > 0$ ,  $\dot{J}_w < 0$ ) that rapidly reach their critical layers. Just below this region, high-angular degree low-frequency retrograde waves ( $m < 0$ ,  $\dot{J}_w > 0$ ) are in turn efficiently damped. Combined with shear-induced turbulence, this may give rise to a short-period oscillation of the rotation profile in a region confined around the top of the radiative zone, the so-called *Shear Layer Oscillation* (e.g., Kumar et al. 1999; Talon et al. 2002).

Deeper in the star (i.e.,  $r/r_t \lesssim 0.8$ ),  $t_w$  drastically increases as  $r$  decreases. It even gets much larger than the contraction timescale throughout the helium core, below the hydrogen-burning shell. Despite the significant influence of the differential rotation amplitude on  $t_w$  above the helium core, the result remains valid for values of  $\overline{\Delta\Omega}$  consistent with observations. Unlike main-sequence stars (see Pinçon et al. 2016, for the solar case), IGW generated by penetrative convection are thus not

**Table 1.** Characteristics of the six subgiant and early red giant stars studied by Deheuvels et al. (2014).

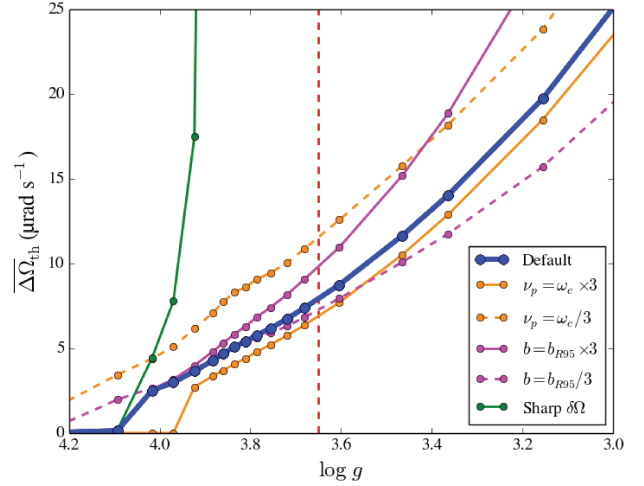
$M/M_{\odot}$	$\log g$	$\Delta\Omega_{\text{obs}} (\mu\text{rad s}^{-1})$
1.22	$3.83 \pm 0.04$	$2.00 \pm 0.66$
1.27	$3.77 \pm 0.02$	$2.92 \pm 0.79$
1.14	$3.76 \pm 0.04$	$4.65 \pm 0.30$
1.26	$3.71 \pm 0.03$	$9.04 \pm 0.46$
1.39	$3.68 \pm 0.02$	$7.48 \pm 0.26$
1.07	$3.60 \pm 0.02$	$9.31 \pm 0.31$

**Notes.** The mass were obtained with a fitting procedure using the evolution code CESTAM,  $\log g$  was determined by seismic scaling relations and the amplitude of the radial-differential rotation between the center of the star and the base of the convective zone was inferred from the OLA method.

efficient enough to affect the innermost rotation of red giant stars. Indeed, as pointed out by Fuller et al. (2014), the wave radiative damping increases when stars evolve during the post-main sequence. As shown in Appendix A.1, the local characteristic radial damping lengthscale of the wave energy decreases all over the radiative zone as the innermost layers contract. This decrease is so important at the beginning of the RGB that waves are severely damped before reaching the hydrogen-burning shell for values of  $\Delta\Omega \lesssim 12 \mu\text{rad s}^{-1}$ . Actually, we find that a value of  $\Delta\Omega$  around  $20 \mu\text{rad s}^{-1}$  is needed to enable retrograde IGW to reach the helium core in this model, that is a value much higher than observations. We find similar conclusions for all the red giant models considered in Fig. 1. Such a trend is further discussed in Sect. 4.1.2. We then conclude that IGW generated by penetrative convection cannot counteract, on their own, the acceleration due to the core contraction in RGB stars and therefore, are unable to spin down their innermost layers. Another mechanism must operate in the core of these stars.

#### 4.1.2. Subgiant stars

As an illustration, we consider the case of  $1 M_{\odot}$  subgiant model characterized by  $\log L/L_{\odot} = 0.35$ ,  $\log g = 3.86$  and  $\log T_{\text{eff}} = 3.70$ . The wave-related timescale is plotted in Fig. 3 as a function of radius in the radiative zone. For low values of  $\Delta\Omega$ , the situation is similar as for RGB stars. IGW are considerably damped and deposit their angular momentum well above the hydrogen-burning shell. However, unlike RGB stars, as the amplitude of the differential rotation increases and becomes larger than a threshold value, denoted  $\Delta\Omega_{\text{th}}$ ,  $t_w$  becomes smaller than the contraction timescale throughout the radiative zone. Indeed, as  $\Delta\Omega$  increases, the asymmetry between prograde ( $m > 0$ ) and retrograde waves ( $m < 0$ ) gets more and more pronounced. First, prograde components reach more rapidly their critical layers where they are dissipated. Second, an increase in  $\Delta\Omega$  results in an increase in the frequency Doppler-shift of retrograde IGW ( $m < 0$ ,  $J_w > 0$ ) so that their damping in Eq. (11) decreases. They can thus go deeper into the star. In other words, when  $\Delta\Omega$  increases, retrograde components with lower frequencies are absorbed into the helium core. Since the excitation wave spectrum decreases as the wave frequency  $\omega$  increases, they have higher amplitudes and thus deposit more negative angular momentum. We refer to the toy model presented in Appendix B for a more detailed analysis. In the example plotted in Fig. 3,  $\Delta\Omega_{\text{th}} \sim 5 \mu\text{rad s}^{-1}$ . This value is consistent with the mean core



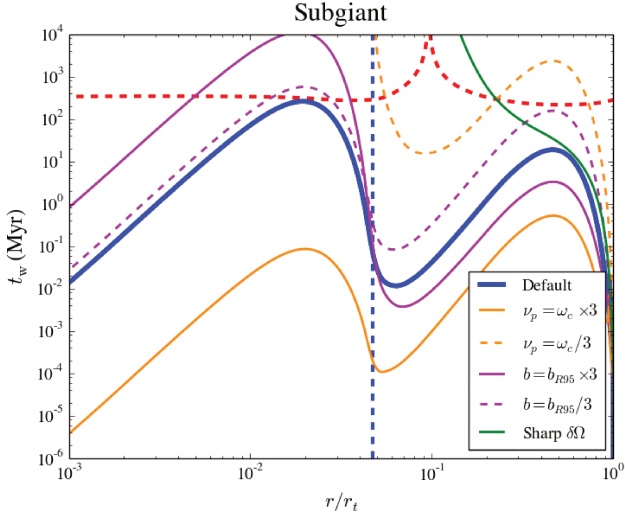
**Fig. 4.** Theoretical threshold value for the differential rotation amplitude, above which  $t_w < t_{\text{cont}}$  throughout the region below the hydrogen-burning shell, as a function of  $\log g$ . The curve obtained with the default set of plume parameters,  $v_p = \omega_c$  and  $b = b_{R95}$  (see Sect. 3.2), and a smooth rotation profile is represented by the blue thick solid line. The effect of variations in  $v_p$  and  $b$  is also displayed, as well as the results obtained with a sharp rotation profile. For each curve, the value of only one single parameter is changed while keeping the others at their default values. The vertical red dashed line symbolizes the transition between the subgiant phase to the beginning of the RGB.

rotation rates observed in subgiant stars (see Table 1). Therefore, we conclude that IGW generated by penetrative convection are able to counteract, on their own, the acceleration due to the core contraction in subgiant stars and therefore, can play a role in the redistribution of angular momentum along the subgiant branch.

Actually, this result can be extended to the whole subgiant branch where the same trend can be observed. The theoretical threshold value,  $\Delta\Omega_{\text{th}}$ , is formally defined as the amplitude of the radial-differential rotation above which IGW can counteract the acceleration due to the core contraction ( $t_w \leq t_{\text{cont}}$ ) throughout the region below the hydrogen-burning shell. It was determined for the  $1 M_{\odot}$  evolutionary sequence represented in Fig. 1. We found that  $\Delta\Omega_{\text{th}}$  increases as the star evolves (see Fig. 4). Indeed, as shown in Appendix A.1, the intensity of the radiative damping increases by more than two orders of magnitude along the evolution from the subgiant branch to the beginning of the RGB. Considering this effect is the predominant one during the star evolution, it would result in a decrease in the efficiency of the transport by IGW in the innermost layers of the radiative zone if  $\Delta\Omega$  remained unchanged (i.e.,  $t_w > t_{\text{cont}}$ ) since waves would be dissipated into upper layers. Therefore, an increase in the frequency Doppler-shift, and so in  $\Delta\Omega_{\text{th}}$ , is necessary to balance the increase in the magnitude of the radiative damping over time and enable retrograde IGW to reach the helium core and efficiently counteract the acceleration due to its contraction (i.e.,  $t_w \leq t_{\text{cont}}$ , see also Appendix 2.4.7 for a more detailed discussion).

#### 4.2. Impact of the parameter uncertainties and of the shape of the rotation profile

Uncertainties remain in the determination of the plume characteristics. First, their estimation relies on simplified analytical models. Second, they have been supposed to be unique for all the plumes at a given evolutionary stage while, in reality, they should be distributed around mean values. In this section, we vary the parameters of the excitation model around the default values



**Fig. 5.** Effect of variations in the plume parameters and of a sharp rotation profile as given in Eq. (13) on the wave-related timescale in the radiative zone of the subgiant model considered in Sect. 4.1.2. For each curve, the value of only one single parameter is changed while keeping the others at their default values. The value of the differential rotation amplitude is maintained constant at  $\overline{\Delta\Omega}_{\text{th}}$ . The red and the blue dashed lines have the same meaning as in Fig. 3.

used in the previous sections and investigate their influence on the efficiency of the angular momentum transport by IGW. We also explore the effect of a sharp rotation profile on the results.

**Wave flux amplitude  $\mathcal{F}_0$ .** As shown by Eqs. (2), (4) and (5), a decrease in  $\mathcal{F}_0$  by any factor results in an increase in  $t_w$  by the same factor. This parameter depends on the plume velocity at the base of the convective zone  $V_p$ , the plume radius via the term  $S_p$ , the filling factor (or the number of penetrating plumes), and the efficiency of the energy transfer from the plumes to the waves via the parameter  $N_t$ . Given that  $\mathcal{F}_0$  depends on  $V_p$  to the power four, the uncertainty on  $V_p$  can result in a large uncertainty in the efficiency of the transport by IGW for a given value of  $\overline{\Delta\Omega}$ . However, as shown in Fig. 3,  $t_w$  is very sensitive to the amplitude of the differential rotation below the hydrogen-burning shell (see Appendix 2.4.8 for an explanation). Therefore, a major variation in  $\mathcal{F}_0$  leads only to a moderate variation in the threshold  $\overline{\Delta\Omega}_{\text{th}}$ . For instance, in the subgiant case in Fig. 3, if  $V_p$  is decreased by a factor of three,  $t_w$  increases by about a factor of hundred, but  $\overline{\Delta\Omega}_{\text{th}}$  increases from  $5 \mu\text{rad s}^{-1}$  to only about  $6 \mu\text{rad s}^{-1}$ . However, near the top of the radiative zone (i.e.,  $r/r_t \gtrsim 0.5$ ), the efficiency of the transport by IGW is more affected. Indeed, an increase in  $\overline{\Delta\Omega}_{\text{th}}$  leads to an increase in  $t_w$  in this region. Nevertheless, the main conclusions remain unmodified since this region is in expansion ( $\dot{r} > 0$  in Eq. (1)) and so spins down. Therefore, the conclusions made in Sect. 4.1.2 for the subgiant stars hold despite strong variations in  $\mathcal{F}_0$ . For the red giant case in Fig. 3,  $t_w$  varies so sharply that the conclusions made in Sect. 4.1.1 also do not change even if  $\mathcal{F}_0$  is multiplied by a factor of hundred. We conclude that, although its effect is quantitatively not negligible, variations in  $\mathcal{F}_0$  does not qualitatively modify the results obtained in both subgiant and red giant cases.

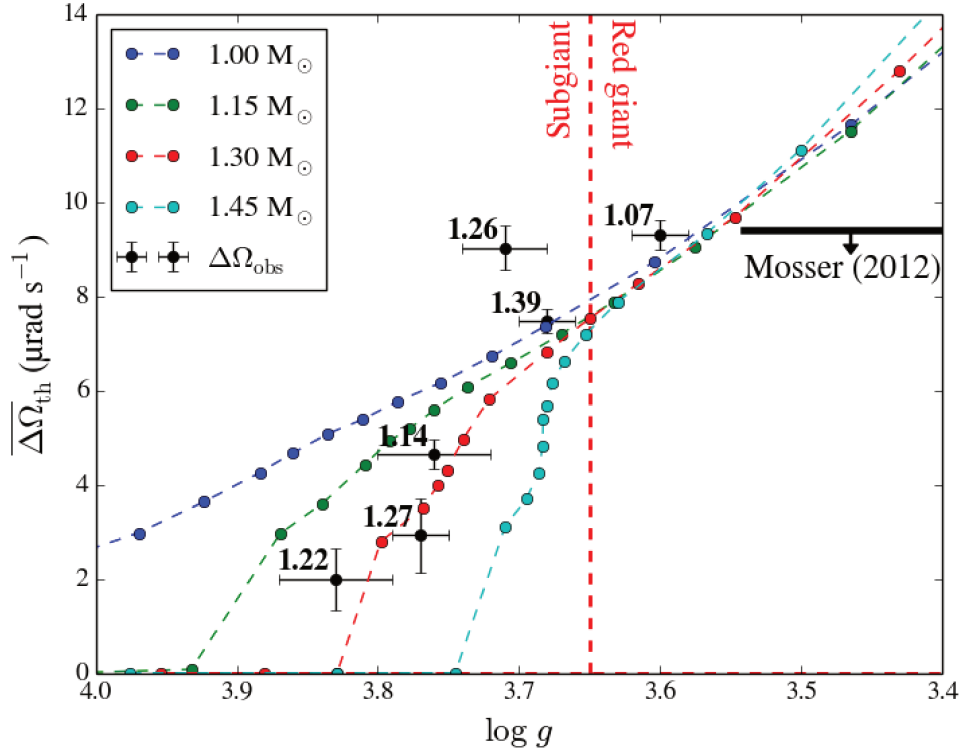
**Plume width,  $b$ .** We modify the plume radius by factors of a third and three. The result is plotted in Figs. 4 and 5. As we can see in

Fig. 5, the sensitivity of  $t_w$  to the value of  $b$  is moderate throughout the radiative zone. Above the hydrogen-burning shell,  $t_w$  is multiplied by about factors of nine and a ninth, respectively. This trend directly comes from the change in the area occupied by one single plume,  $S_p$  in Eq. (6). Below the hydrogen-burning shell, the situation is more complex. Indeed, the wave energy flux, Eq. (5), is maximum for an angular degree  $l_{\text{max}} \sim r_t/b$  (Pinçon et al. 2016). A smaller value of  $b$  then favors the excitation of high-angular degrees and results in a larger width of the wave spectrum with respect to the angular degree. Nevertheless, this must compete with a larger damping at the very top of the radiative zone and a decrease in  $S_p$ . Without going more into details, Fig. 4 shows that  $b$  has only a small influence on  $\overline{\Delta\Omega}_{\text{th}}$ .

**Plume occurrence frequency,  $\nu_p$ .** In a similar way to the plume radius, we modify the plume lifetime by factors of a third and three. Figure 5 shows that variations in  $\nu_p$  have important consequences on the value of  $t_w$ . In the subgiant case, increasing (decreasing)  $\nu_p$  by a factor of three, while keeping the value of  $\overline{\Delta\Omega}$  constant, leads to decrease (increase)  $t_w$  by more than two orders of magnitude throughout the radiative zone. However, given the abovementioned sensitivity of  $t_w$  to  $\overline{\Delta\Omega}$  below the hydrogen-burning shell, the induced variation in the threshold value  $\overline{\Delta\Omega}_{\text{th}}$  is much more limited than for  $t_w$ . Figure 4 indicates that it is lower than a factor of two. Hence, the conclusions made in Sect. 4.1 again qualitatively hold. Figure 4 also shows that the higher  $\nu_p$ , the lower  $\overline{\Delta\Omega}_{\text{th}}$ , whatever the value of  $\log g$ . Indeed, following Eq. (5), an increase in  $\nu_p$  enhances the amplitude of the waves whose frequencies are higher than  $\nu_p$  at the expense of the ones whose frequencies are lower than  $\nu_p$ . The part of the wave spectrum with high enough energy to efficiently modify the innermost rotation is thus extended toward higher frequencies. Therefore, a lower value of the frequency Doppler-shift and so of  $\overline{\Delta\Omega}_{\text{th}}$  is needed for these waves to counteract the radiative damping, reach the innermost layers and efficiently extract angular momentum from them.

**Effect of a sharp rotation profile.** We also tested the impact of a sharp rotation profile as defined by Eq. (13). As shown in Figs. 4 and 5, such a profile strongly prevents IGW from reaching the helium core, unless the amplitude of the differential rotation is very large. Compared to a smooth rotation profile (see Fig. 2), retrograde IGW are more importantly damped above the hydrogen-burning shell because of a lower frequency Doppler-shift, unlike the prograde ones that can go deeper into the star. At a given value of  $\overline{\Delta\Omega}$ , the asymmetry between prograde and retrograde components is thus reduced compared to the case of a smooth profile. Therefore, once IGW reach the hydrogen burning-shell, the retrograde waves that more efficiently deposit angular momentum into the medium are shifted toward higher frequencies. Since the wave spectrum is a decreasing function of frequency, they deposit much less momentum than in the smooth case. Figure 4 shows that  $\overline{\Delta\Omega}_{\text{th}}$  must be in general very large to enable IGW to decelerate the core rotation, with values much higher than the observations on both subgiant and red giant branches. We can see that  $\overline{\Delta\Omega}_{\text{th}}$  is very small only at the very beginning of the subgiant branch where a strong rotation gradient has not developed yet. Therefore, we conclude that a sharp rotation profile, with a large gradient in the vicinity of the hydrogen-burning shell, prevents IGW from reaching the innermost layers and to modify the inner rotation rate as soon as the beginning of the post-main sequence (i.e., in both subgiant and red giant stars).





**Fig. 6.** Theoretical threshold for the amplitude of the radial-differential rotation as a function of the  $\log g$  for the considered evolutionary sequences. It is computed using the default values of the parameters given in Sect. 3.2 and assuming a smooth rotation profile as defined in Eq. (12). The observations in subgiant stars,  $\Delta\Omega_{\text{obs}}$ , are represented with error bars and masses in units of solar mass (Deheuvels et al. 2014, see Table 1). The vertical red dashed line symbolizes the transition between the subgiant phase to the beginning of the RGB. The maximum amplitude of the differential amplitude on the RGB as expected from the observations by Mosser et al. (2012a) is indicated by the horizontal thick black line.

In summary, variations in the plume parameters  $\mathcal{F}_0$ ,  $b$  and especially  $\nu_p$  have quantitative impacts on the transport by IGW throughout the radiative zone of stars. Nevertheless, they do not qualitatively modify the conclusions made in Sect. 4.1 for subgiant stars, as well as for red giant stars. Indeed, given the strong sensitivity of  $t_w$  on  $\Delta\Omega$  below the hydrogen-burning shell (see Appendix 2.4.8 for an explanation), large variations in the parameters have only moderate effects on  $\Delta\Omega_{\text{th}}$  that remains within an order of magnitude from the observations in subgiants. We have also demonstrated that a sharp rotation profile, with a large rotation gradient near the hydrogen-burning shell, prevents IGW from spinning down, on their own, the helium core in the post-main sequence.

## 5. Observational evidence for a wave-driven regulation mechanism in subgiant stars?

### 5.1. Influence of the stellar mass

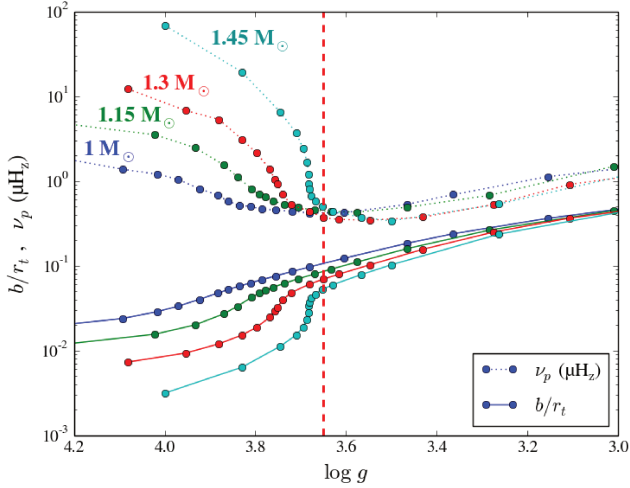
We also investigated the influence of the stellar mass on the results provided in Sect. 4. To do so, we considered the 1, 1.15, 1.3 and 1.45  $M_{\odot}$  models represented in Fig. 1. This mass range is typical of subgiant stars observed with *Kepler*. For all the considered models, the wave-related timescale was computed assuming a smooth rotation profile, Eq. (12), and using the default values for the plume parameters as described in Sect. 3.2. In all cases, we find a similar qualitative behavior to the one depicted in Fig. 3. Whatever the mass, IGW can efficiently spin down all the region below the hydrogen-burning shell if the amplitude of the differential rotation is higher than a given threshold. This theoretical threshold  $\Delta\Omega_{\text{th}}$  is displayed in Fig. 6 as a function of  $\log g$  and the mass.

### 5.2. Comparison with the observations

The theoretical thresholds are compared to the amplitude of the differential rotation observed in six *Kepler* subgiant and early red giant stars studied by Deheuvels et al. (2014, see Table 1) and the upper value of the core rotation observed in more evolved red giant stars by Mosser et al. (2012b). The influence of the mass on the threshold value, as well as the comparison with the observations, differ according to the evolutionary status.

**Red giant stars ( $\log g \gtrsim 3.55$ ).** Figure 6 shows that  $\Delta\Omega_{\text{th}}$  is larger than about  $10 \mu\text{rad s}^{-1}$  in this mass range, which is well above the core rotation rates observed in red giants. We conclude that IGW are unable to affect, on their own, the internal rotation of these stars whatever the mass. Again, a large magnitude of the radiative damping is the cause. Moreover, Fig. 6 shows that, at a given  $\log g$ ,  $\Delta\Omega_{\text{th}}$  converges toward the same value for all masses. Indeed, stars on the RGB are ascending the Hayashi line in the Hertzsprung-Russel diagram (see Fig. 1) and therefore, share similar properties at a given value of  $\log g$ . Their internal structures are comparable, and so are the magnitude of the radiative damping, the contraction timescale and the convective plumes parameters  $V_p$ ,  $b/r_t$  and  $\nu_p \sim \omega_c$ . This is illustrated in Fig. 7. Therefore, angular momentum transport by IGW must have a similar influence on the internal rotation of these stars, so that  $\Delta\Omega_{\text{th}}$  takes very close values whatever the mass for a given  $\log g$ .

**Subgiant and early red giant stars ( $\log g \lesssim 3.55$ ).** Figure 6 shows that the theoretical threshold for the differential rotation amplitude,  $\Delta\Omega_{\text{th}}$ , is in good agreement with the observed



**Fig. 7.** Occurrence frequency (dotted lines) and width of the convective plumes normalized by the radius at the top of the radiative zone (solid lines), estimated at the base of the convective zone and plotted as a function of  $\log g$ . The plume occurrence frequency,  $\nu_p$ , is assumed to be equal to the convective turnover frequency,  $\omega_c$ , which was estimated via the mixing-length theory. Each color is associated with a mass.

amplitude of the differential amplitude in subgiant and early red giant stars. We find that  $\Delta\Omega_{\text{th}} \lesssim 10 \mu\text{rad s}^{-1}$  for these stars. Therefore, the conclusions made in Sect. 4.1.2 hold for the considered mass range. Figure 6 also shows that the higher the mass, the lower the theoretical threshold in these stars. Indeed, as shown in Fig. 7, the higher the mass, the higher the turnover convective frequency (and also  $\nu_p$ ) and the ratio  $r_t/b$ , so that, as demonstrated in Sect. 4.2, the more efficient the angular momentum transport by IGW. Therefore, the mass dependence of  $\Delta\Omega_{\text{th}}$  at given  $\log g$  on the subgiant branch can be explained simultaneously by the increase in  $\nu_p$  and  $r_t/b$  as the mass increases.

### 5.3. IGW-driven regulation of the core rotation in subgiant stars

More than comparable orders of magnitude, the theoretical threshold values closely match the observations. Although the  $1.26 M_{\odot}$  star slightly deviates from the theoretical curve, it is however not far enough to hinder the global agreement. Indeed, such a mismatch can be simultaneously explained by a small error in the estimate of the  $\log g$ , a moderate decrease in  $\nu_p$  or in  $r_t/b$  (see Sect. 4.2), as well as uncertainties on stellar modeling. Thus, this agreement supports the idea that angular momentum transport by plume-induced IGW could operate as a regulating actor of the core rotation evolution in subgiant and early red giant stars.

The scenario can be presented as follows. During the evolution on the subgiant branch, the internal structure of stars (or the magnitude of the radiative damping) and the characteristics of the convective plumes (i.e.,  $\mathcal{F}_0$ ,  $\nu_p$  and  $b$ ) imposes a threshold value for the differential rotation,  $\Delta\Omega_{\text{th}}$ , above which plume-induced IGW can counteract the spin up of the innermost layers due to their contraction. As the core contracts, the wave radiative damping increases throughout the radiative zone, resulting in an increase in the value of the threshold over time (see Sect. 4.1.2 and Appendix 2.4.7). Since the amplitude of the differential rotation obtained considering only local conservation of angular momentum is much higher than the observations (e.g., Ceillier et al. 2013, see Fig. 8), we deduce that the increase in  $\Delta\Omega_{\text{th}}$  occurs on a characteristic timescale much longer than the contraction

timescale. Furthermore, in the limit of slow rotators, we can assume that rotation does not modify the equilibrium structure, so that variations in the instantaneous amplitude of the differential rotation  $\Delta\Omega$  have no consequences on  $\Delta\Omega_{\text{th}}$  at a given evolutionary stage. In this framework, let us consider a star initially at the end of the main sequence with an amplitude of the differential rotation  $\Delta\Omega_0$ . At this stage, the system can evolve following two ways. If  $\Delta\Omega_0 \leq \Delta\Omega_{\text{th}}$ , then the core contraction dominates and  $\Delta\Omega$  increases with a timescale of  $t_{\text{cont}}$ . Otherwise, IGW spin down the core of the star and  $\Delta\Omega$  decreases on characteristic timescales lower than the contraction timescale. Therefore, since the threshold value evolves on much larger timescales in both cases,  $\Delta\Omega$  becomes closer and closer to  $\Delta\Omega_{\text{th}}$  in a first transient phase. After a reasonable time span, a stable steady state is reached in which the amplitude of the differential rotation is close to the threshold (i.e.,  $\Delta\Omega \sim \Delta\Omega_{\text{th}}$ ), independently of the initial conditions  $\Delta\Omega_0$ . The stability of the steady state is the consequence of the combined effects of the core contraction and of the angular momentum transport by IGW, which will counter any departure from this equilibrium. Finally, since the contraction timescale is much smaller than evolution timescale on the subgiant branch, the steady state is reached well before the beginning of the red giant branch. Therefore, the dynamical equilibrium between the core contraction and the transport by IGW holds over time so that  $\Delta\Omega$  follows  $\Delta\Omega_{\text{th}}$  during the subgiant evolution, whence the observational agreement.

## 6. Discussion

### 6.1. Comparison with the transport by turbulence-induced IGW

Fuller et al. (2014) followed a similar approach as we used in this work, but considering angular momentum transport by turbulence-induced IGW. They assumed that IGW are generated by convective motions in the overshooting region and used the excitation model proposed by Lecoanet & Quataert (2013). As a result, they showed that the evolution of the helium core rotation should decouple from the influence of convectively-excited IGW when stars reach about the middle of the subgiant branch. As explained in their paper and discussed in Appendix A, this is the consequence of the increase in the wave radiative damping as the innermost layers contract. However, our conclusions differ from their results since we observe that the decoupling happens later, at the beginning of the ascent of the RGB. This difference can be explained by the two main following points.

Firstly, the amplitude and the shape of the wave excitation spectrum considered in both studies are different. The turbulence-induced wave spectrum is a decreasing power law with respect to frequency whereas the plume-induced one has a Gaussian profile. Moreover, turbulence-induced IGW have most of their energy in low angular degrees following the model of Lecoanet & Quataert (2013). Since the wave radiative damping is in addition proportional to  $l^3$ , Fuller et al. (2014) considered  $l \sim 1$ ,  $|m| = 1$  wave components only. Conversely, plume-induced IGW are preferentially excited at higher angular degrees. Indeed, the size of the plumes is three to ten times smaller than the size of the biggest convective eddies as described by the MLT along the evolutionary tracks that we have considered. Therefore, the effect of angular degrees  $l \gtrsim 2$  must be taken into account in this case.

Secondly, Fuller et al's diagnosis is based on the comparison of the contraction timescale with the characteristic timescale on which IGW can modify the total angular momentum inside

a sphere of radius  $r$ . It is therefore representative of the mean effect induced by the transport by IGW on each mass shell over this region and does not account for local effects. The authors argued in favor of this timescale because it does not depend on the rotation profile below the radius  $r$ , which is generally unknown. However, we stress that it depends on the rotation profile above the radius  $r$ . Indeed, the differential rotation creates the asymmetry between prograde and retrograde waves and operates like a wave filter via the wave damping in Eq. (11) (see the difference between the results obtained considering either a smooth or a sharp rotation profile in Fig. 5). Furthermore, we have seen in Sects. 4 and 5 that its influence on the transport by IGW is predominant in the innermost layers of stars. Therefore, we preferred to use the local wave-related timescale, as defined in Eq. (4), and assumed a given rotation profile. To compensate our lack of knowledge about the rotation profile, we considered a smooth and a sharp shape for the profile. Although both approaches are complementary, the one used in this work has the advantage of taking into account the amplitude of the differential rotation whose value can be constrained by seismic observations.

In this framework, it is worth investigating the efficiency of the angular momentum transport by turbulent-induced IGW using the comparison between the contraction timescale and the local wave-related timescale as given in Eq. (4). We considered four models on the subgiant branch with  $\log g \sim 3.75$  and masses of 1, 1.15, 1.3 and 1.45  $M_{\odot}$ . We used the generation model by turbulent pressure as described in Kumar et al. (1999), with wavefunctions estimated in the WKB approximations, and considered a smooth rotation profile as given in Eq. (12). Finally, we found that turbulence-induced IGW can counteract the spin up of the region below the hydrogen-burning shell if the amplitude of the differential rotation is higher than 12, 10, 8 and 6  $\mu\text{rad s}^{-1}$  for 1, 1.15, 1.3 and 1.45  $M_{\odot}$ , respectively. These values are well above observations at this value of  $\log g$ . This result is in agreement with the conclusions of Fuller et al. (2014). They are also higher than the threshold amplitudes obtained by considering IGW generated by penetrative convection. Therefore, we can conclude that plume-induced IGW are more efficient than turbulence-induced ones on the subgiant branch. Unlike plume-induced IGW, turbulence-induced IGW seem unable, on their own, to explain the observations in subgiant stars.

## 6.2. Extraction mechanism and influence of the differential rotation amplitude in the inner radiative region

In the theoretical framework used in this work, IGW and rotation are intricately related. The role of the amplitude of the differential rotation on the transport by IGW has been shown to be essential. Nevertheless, the interpretation of the behavior of  $t_w$  with  $\Delta\Omega$  in Sect. 4.1.2 is not straightforward. Indeed, following Eq. (10), the angular momentum transport by IGW is the consequence of the competition between three main physical ingredients: the magnitude of the radiative diffusion, the excitation wave spectrum and the oscillation frequency Doppler-shift. In order to grasp the extraction mechanism by IGW, a semi-analytical toy model has been developed and is described in Appendix B. Hereafter, we summarize the main points learned from the toy model.

The efficiency of the angular momentum transport induced by IGW in Eq. (1) is represented by the divergence of the wave flux,  $\dot{J}_w$ . This latter can be approximated by  $\dot{J}_w(r) \approx \tau(r)\mathcal{F}_{r,w}(r_1)e^{-\tau(r)}/r$ , with  $\mathcal{F}_{r,w}$  given by Eq. (10),  $\tau(r) \sim r/L_D(r)$  and  $L_D$  the local radial wave damping length-scale (see Appendix A for details). Therefore, the radiative

damping must be neither too high nor too low for  $\dot{J}_w$  to be high enough. Consequently, the balance is reached and IGW are efficiently absorbed into the medium if the wave radiative damping in Eq. (11), or the acoustic damping depth, is close to unity (i.e.,  $\tau \sim 1$ ). From this statement, we can deduce several features of the transport by IGW whittled down to the four following points:

1. Since the wave frequency Doppler-shift is quasi null at the top of the radiative zone (i.e.,  $\delta\Omega(r_1) \approx 0$ ), very low-frequency high-degree IGW rapidly satisfy  $\tau \sim 1$  as they travel downwards. They are then absorbed just below the base of the convective zone. As mentioned in Sect. 4.1.1, the wave-related timescale is very low in this region. IGW are thus able to modify the rotation rate on very short timescales.
2. Deeper in the star, the retrograde IGW ( $m < 0$ ) satisfying  $\tau \sim 1$  have lower frequencies  $\omega$  than prograde ones ( $m > 0$ ) at given  $|m|$  and  $l$ . Since the excitation wave spectrum is a decreasing function of  $\omega$ , retrograde IGW deposit more angular momentum than prograde ones. As a result, the net wave flux of angular momentum is negative,  $\dot{J}_w > 0$  in Eq. (1) and IGW can therefore counteract the spin up due to the core contraction.
3. At given  $l$ ,  $|m|$  and  $\omega$ , an increase in  $\Delta\Omega$  leads to a decrease in the wave radiative damping in Eq. (11) for the retrograde IGW that can therefore go deeper into the star. In other words, in a given layer, the higher  $\Delta\Omega$ , the lower the wave frequencies absorbed into the medium and thus the higher the momentum transferred into the mean flow. As a consequence, an increase in the amplitude of the differential rotation results in an increase in the efficiency of the transport by IGW, and so a decrease in the wave-related timescale in deep layers of the radiative zone.
4. The absorption condition  $\tau \sim 1$  in the helium core can be satisfied by IGW with high angular degrees on the condition that the Doppler-shift  $|m|\Delta\Omega$  is large enough and that their frequencies  $\omega$  are high enough to overcome the damping at the top of the radiative zone (where  $\delta\Omega(r) \approx 0$ ). Moreover, since the wave excitation spectrum Eq. (5) is maximum for  $l_{\max} \sim r_1/b \gg 1$ , high- $l$  high- $|m|$  retrograde IGW can be responsible for the larger deposit of angular momentum in the helium core. This is what is observed in the subgiant models considered in this work when the amplitude of the differential rotation is of the order of magnitude of the threshold value (see also discussions in Sect. 6.4 and Appendix 2.4.6). This statement goes against the commonly adopted view in which only low-degrees IGW can affect the rotation of the inner layers because of the wave damping depending on  $l^3$ .

Therefore, simple arguments based on the condition of absorption given by  $\tau \sim 1$  enable us to understand the influence of the differential rotation amplitude on the efficiency of the transport by IGW. It is also worth mentioning the high sensitivity of the wave-related timescale in the helium core to the value of the differential rotation amplitude. An explanation is given in Appendix 2.4.8. Such features are consistent with the behavior observed in Sect. 4. We refer to Appendix B for a more thorough and technical analysis.

## 6.3. Uncertainties related to the generation of IGW in evolved stars

The modeling of the transfer of energy from convective plumes into waves relies on simplifying assumptions. Here, we briefly address the main issues concerning the generation model and refer to Pinçon et al. (2016) for a more detailed discussion.

As a first check, we found that the estimate of the wave energy flux induced by penetrative convection at the base of the convective zone is lower than 1% of the stellar energy flux for all the considered models, that is well lower than the plume kinetic energy flux. The assumption of no feedback from the waves on the plumes in the penetration region is thus verified, as well as the conservation of energy.

Following Eq. (5), the model also depends on several parameters. Considering a wide range of values for the model parameters, we have shown in Sect. 4.2 that the uncertainties related to their estimate do not qualitatively modify the conclusions made from the timescales comparison in Sect. 4.1.

Lastly, the generation model neglects the effect of the Coriolis force on the waves in the excitation region. This hypothesis is valid for wave frequencies verifying  $\omega \gtrsim 2\Omega(r_i)$ , with  $\Omega(r_i)$  the rotation rate at the top of the radiative zone. Near the top of the radiative zone, Deheuvels et al. (2014) found rotation rates going from about 1 to  $0.5 \mu\text{rad s}^{-1}$  for values of  $\log g$  going from 3.85 to 3.6 on the subgiant branch. This is in the same order of magnitude as the convective turnover frequency, and so, by assumption, as the plume occurrence frequency  $\nu_p$  (see Fig. 7). Therefore, a non-negligible part of the wave excitation spectrum at low frequencies, say for  $\omega$  below more or less  $1 \mu\text{rad s}^{-1}$  for all the considered models, is affected by rotation. However, the low-frequency waves such as  $\omega \lesssim 2\Omega(r_i)$  are expected to be absorbed just below the base of the convective zone, so that only the uppermost layers of the radiative zone are concerned by the uncertainties related to this point. Indeed, as discussed in Sect. 6.4, this range of low frequencies is not responsible for the deposit of angular momentum below the hydrogen-burning shell and, therefore, has no effect on the results obtained in this region.

#### 6.4. Influence of the Coriolis force on the propagation of IGW

For the sake of simplicity, the modeling of the angular momentum transport by IGW and the derivation of Eq. (10) also neglect the effect of the Coriolis force on the propagation of the waves (e.g., Mathis 2009), as well as the wave heat flux (e.g., Belkacem et al. 2015a,b). Such approximations remain valid if the wave intrinsic frequency with respect to the co-rotating frame is higher than twice the rotation rate, or in other words,  $\omega - m\delta\Omega(r) \gtrsim 2\Omega(r)$ . While this is justified in the case of mixed modes with high oscillation frequencies, this is verified neither for waves near their critical layers (i.e., where  $\omega = m\delta\Omega$ ), nor for low-frequency waves. However, it turns out a posteriori that the retrograde IGW ( $m < 0$ ) that efficiently deposit angular momentum into the medium below the hydrogen-burning shell, when the differential rotation amplitude is equal to about the threshold  $\overline{\Delta\Omega}_{\text{th}}$ , respect the condition  $\omega + |m|\delta\Omega(r) \gtrsim 2\Omega(r)$  throughout the radiative zone, or equivalently  $\omega + (|m| - 2)\delta\Omega(r) \gtrsim 2\Omega(r_i)$  whatever  $r$ . Indeed, at the very beginning of the subgiant branch where  $\overline{\Delta\Omega}_{\text{th}} \lesssim \nu_p$ , we find that retrograde IGW such as  $\omega \gtrsim 7 \mu\text{rad s}^{-1}$  and  $l \sim |m| \sim 1$  are mainly responsible for the deposit of angular momentum below the hydrogen-burning shell. Later on the subgiant branch where  $\overline{\Delta\Omega}_{\text{th}} \gtrsim \nu_p$ , we find this time that retrograde IGW such as  $2 \lesssim \omega \lesssim 6 \mu\text{rad s}^{-1}$  and  $l \sim |m| \gtrsim 20$  efficiently transport angular momentum into the helium core. Such high azimuthal numbers are possible because the wave energy flux generated at the base of the convective zone, Eq. (5), is maximum for  $l_{\text{max}} \sim r_i/b \gg 1$  (see Fig. 7). Such types of behavior are confirmed and discussed through the toy model in Appendix B.4. Moreover, since the rotation rate at the top of the radiative zone,  $\Omega(r_i)$ , is about or lower than  $1 \mu\text{rad s}^{-1}$  over the subgiant branch from the observations by Deheuvels et al. (2014; see discussion in Sect. 6.3), we checked in all the considered cases that these

wave components satisfy  $\omega + (|m| - 2)\delta\Omega(r) \gtrsim 2\Omega(r_i)$  whatever  $r$ . This suggests that the results of the timescales comparison in the helium core of the considered models is only slightly impacted by the effect of the Coriolis force. Therefore, although further work is needed to properly tackle the issue, neglecting the Coriolis force seems reasonable for a first estimate.

## 7. Conclusions and perspectives

In this work, we explored the efficiency of the angular momentum transport induced by IGW from the subgiant branch to the beginning of the red giant branch of low-mass stars. We considered several models chosen at different evolutionary stages and assumed a given internal rotation profile for each of them. The wave flux of angular momentum was estimated using the semi-analytical generation model by penetrative convection as proposed in Pinçon et al. (2016). As a result, the local timescale associated with the transport induced by IGW,  $t_w$ , was computed and compared to the contraction timescale,  $t_{\text{cont}}$ , throughout the radiative zone of the considered models.

We found that IGW can counteract the spin up due to the contraction of the layers throughout the helium core (i.e.,  $t_w < t_{\text{cont}}$ ) when the amplitude of the radial-differential rotation between the center of the star and the top of the radiative zone is higher than a threshold value. Indeed, an increase in the differential rotation amplitude lowers the radiative damping of retrograde IGW that can thus reach deeper layers and extract more angular momentum from the helium core. In subgiant stars, we obtained theoretical thresholds for the radial-differential rotation amplitude that are consistent with the values of the differential rotation observed by Deheuvels et al. (2014). We also found that the angular momentum transport by plume-induced IGW is more efficient than the one by turbulence-induced IGW. We then conclude that plume-induced IGW are able to hinder, on their own, the establishment of a strong differential rotation driven by the core contraction along the evolution on the subgiant branch. Unlike subgiant stars, the theoretical thresholds obtained in red giant stars turned out to be well above the core rotation rates inferred by Mosser et al. (2012b). This mainly results from an excessive magnitude of the radiative damping in these stars (see also Fuller et al. 2014, for turbulence-induced IGW). This discrepancy leads to the conclusion that IGW are unable, on their own, to affect the innermost rotation of red giant stars. An additional mechanism must be found to efficiently spin down their core. In both cases, the results remain valid under the assumption of a smooth rotation profile between the base of the convective zone and the center of the star. We also checked that these conclusions qualitatively hold for a wide range of values considered for the excitation model parameters.

The theoretical thresholds for the radial-differential rotation amplitude were shown to match in a noteworthy way the observations in the six *Kepler* subgiant and early red giant stars studied by Deheuvels et al. (2014). Such similarities are interpreted as the result of a regulation process driven by plume-induced IGW during the subgiant stage. In this scenario, the combined effects of the core contraction (inducing a spin up of the core) and of the transport by IGW (inducing a spin down of the core) lead to a stable steady state in which the radial-differential rotation amplitude remains close to the threshold values (see Sect. 5 and Fig. 6). If such a wave-driven process is further confirmed, it will have several consequences. First, the existence of a sharp rotation profile, with a strong gradient in the vicinity of the hydrogen-burning shell, will be excluded since it prevents IGW from reaching the innermost layers of stars. Second, the increase in the number of observations in subgiant stars will provide a

diagnosis to constrain the parameters of the generation model by penetrative convection. Indeed, the matching between the observed amplitudes of the differential rotation and the theoretical thresholds will bring information on the plume parameters and will give us the interesting opportunity to indirectly probe the convective plumes at the base of the convective zone along the subgiant branch. Even though this interpretation is based on a comparison with only six observed subgiant stars, such a regulation mechanism is promising and stresses out the major role that IGW can play in the rotation history of stars. Additional observational constraints, as well as more exhaustive computations are needed in future to assess the relevance of this process.

The study performed in this work demonstrates that the angular momentum transport by plume-induced IGW in subgiant and early red giant stars is efficient and calls for more sophisticated investigations. The next step is to properly implement the transport by IGW generated by penetrative convection with the other transport mechanisms in a 1D stellar evolution code. While the timescales comparison as it is used in this work gives a hint about the global influence of IGW on the innermost layers of stars, the resulting conclusions ignore effects induced by IGW in very localized regions of the radiative zone, as well as the coupling between the various transport processes. For instance, we do not exclude that IGW that are responsible for the large deposit of angular momentum above the hydrogen-burning shell in red giant stars ( $t_w/t_{\text{cont}} \ll 1$  in Fig. 3) could interact with another transport process, for instance the meridional circulation, and could indirectly boost the extraction of angular momentum from the core. As another example, we have shown that IGW can efficiently slow down the rotation mean flow in the vicinity of the center in the subgiant stars ( $t_w/t_{\text{cont}} \ll 1$  in Fig. 3, see also Appendix A.3 for explanations). This trend has already been observed in previous numerical computations (e.g., Talon & Charbonnel 2005; Charbonnel et al. 2013; Mathis et al. 2013). We can thus wonder how this could influence the global evolution over time of the rotation profile throughout the radiative zone of subgiant stars. Modeling the dynamical evolution of the rotation profile with the interactions between all the transport processes along stellar lifetimes is needed to answer such questions and is a necessary step toward a full and complete understanding of the rotation history of stars.

On a long term, investigations will have to go beyond the simplifying assumptions used for the description of the convective plumes and the propagation of internal waves. The influence of the interaction with the upflow and of the sphericity in evolved stars will have to be included in the estimate of the plume parameters. Further theoretical efforts are also necessary to describe the plume destruction process, which remains still poorly known. In this framework, 3D numerical simulations of extended convective envelopes with more realistic Prandtl and Reynolds numbers (or in a regime from which we can scale to the realistic dimensionless numbers in stars) would help to constrain the plume parameters. Moreover, the coupling between IGW and shear-induced turbulence near the critical layers (see Alvan et al. 2013, for an exhaustive description) and the effect of the over-transmission or reflection processes on the transport by IGW will have to be investigated. Also, the contribution of the wave heat flux to the angular momentum transport equation (e.g., Belkacem et al. 2015b), as well as the effect of the Coriolis force and of the rotation gradient on the propagation of the waves (e.g., Mathis 2009), will have to be properly taken into account. Undertaking a global study of the transport by internal waves in stellar radiative interiors that tackles with the abovementioned issues is challenging since it requires a 2D description of the

internal waves and of the plume dynamics throughout an extended convective envelope.

*Acknowledgements.* We acknowledge Yveline Lebreton for the fruitful discussions about modeling with the evolution code CESTAM and the computation of the models used in this work. C.P. is especially grateful for her friendship and her support since the undergraduate level.

## References

- Alvan, L., Mathis, S., & Decressin, T. 2013, *A&A*, 553, A86
- Alvan, L., Strugarek, A., Brun, A. S., Mathis, S., & Garcia, R. A. 2015, *A&A*, 581, A112
- Asplund, M., Grevesse, N., Sauval, A. J., & Scott, P. 2009, *ARA&A*, 47, 481
- Belkacem, K., Marques, J. P., Goupil, M. J., et al. 2015a, *A&A*, 579, A31
- Belkacem, K., Marques, J. P., Goupil, M. J., et al. 2015b, *A&A*, 579, A30
- Benomar, O., Takata, M., Shibahashi, H., Ceillier, T., & García, R. A. 2015, *MNRAS*, 452, 2654
- Böhm-Vitense, E. 1958, *ZAp*, 46, 108
- Bretherton, F. P. 1969, *Quarterly J. Roy. Meteorol. Soc.*, 95, 213
- Brown, T. M., Christensen-Dalsgaard, J., Dziembowski, W. A., et al. 1989, *ApJ*, 343, 526
- Brummell, N. H., Clune, T. L., & Toomre, J. 2002, *ApJ*, 570, 825
- Brun, A. S., & Palacios, A. 2009, *ApJ*, 702, 1078
- Cantiello, M., Mankovich, C., Bildsten, L., Christensen-Dalsgaard, J., & Paxton, B. 2014, *ApJ*, 788, 93
- Ceillier, T., Eggenberger, P., García, R. A., & Mathis, S. 2013, *A&A*, 555, A54
- Charbonnel, C., Decressin, T., Amard, L., Palacios, A., & Talon, S. 2013, *A&A*, 554, A40
- Deheuvels, S., García, R. A., Chaplin, W. J., et al. 2012, *ApJ*, 756, 19
- Deheuvels, S., Doğan, G., Goupil, M. J., et al. 2014, *A&A*, 564, A27
- Dintrans, B., Brandenburg, A., Nordlund, Å., & Stein, R. F. 2005, *A&A*, 438, 365
- Eggenberger, P., Montalbán, J., & Miglio, A. 2012, *A&A*, 544, L4
- Fuller, J., Lecoanet, D., Cantiello, M., & Brown, B. 2014, *ApJ*, 796, 17
- García, R. A., Turck-Chièze, S., Jiménez-Reyes, S. J., et al. 2007, *Science*, 316, 1591
- García Lopez, R. J., & Spruit, H. C. 1991, *ApJ*, 377, 268
- Goupil, M. J., Mosser, B., Marques, J. P., et al. 2013, *A&A*, 549, A75
- Gradshteyn, I. S., Ryzhik, I. M., Jeffrey, A., & Zwillinger, D. 2007, *Table of Integrals, Series, and Products* (Elsevier Academic Press)
- Heger, A., Woosley, S. E., & Spruit, H. C. 2005, *ApJ*, 626, 350
- Imbriani, G., Costantini, H., Formicola, A., et al. 2004, *A&A*, 420, 625
- Kumar, P., Talon, S., & Zahn, J.-P. 1999, *ApJ*, 520, 859
- Lecoanet, D., & Quataert, E. 2013, *MNRAS*, 430, 2363
- Ludwig, H.-G., & Kučinskas, A. 2012, *A&A*, 547, A118
- Maeder, A. 2009, *Physics, Formation and Evolution of Rotating Stars* (Berlin, Heidelberg: Springer)
- Marques, J. P., Goupil, M. J., Lebreton, Y., et al. 2013, *A&A*, 549, A74
- Mathis, S. 2009, *A&A*, 506, 811
- Mathis, S., Decressin, T., Eggenberger, P., & Charbonnel, C. 2013, *A&A*, 558, A11
- Morton, B. R., Taylor, G., & Turner, J. S. 1956, *Roy. Soc. London Proc. Ser. A*, 234, 1
- Mosser, B., Goupil, M. J., Belkacem, K., et al. 2012a, *A&A*, 548, A10
- Mosser, B., Goupil, M. J., Belkacem, K., et al. 2012b, *A&A*, 540, A143
- Mosser, B., Pinçon, C., Belkacem, K., Takata, M., & Vrad, M. 2017, *A&A*, 600, A1
- Palacios, A. 2012, *Astrophys. Space Sci. Proc.*, 26, 105
- Pinçon, C., Belkacem, K., & Goupil, M. J. 2016, *A&A*, 588, A122
- Press, W. H. 1981, *ApJ*, 245, 286
- Rieutord, M., & Zahn, J.-P. 1995, *A&A*, 296, 127
- Ringot, O. 1998, *A&A*, 335, L89
- Rogers, T. M., & Glatzmaier, G. A. 2005, *MNRAS*, 364, 1135
- Rüdiger, G., Gellert, M., Spada, F., & Tereshin, I. 2015, *A&A*, 573, A80
- Schatzman, E. 1996, *Sol. Phys.*, 169, 245
- Spada, F., Gellert, M., Arlt, R., & Deheuvels, S. 2016, *A&A*, 589, A23
- Spruit, H. C. 2002, *A&A*, 381, 923
- Stein, R. F., & Nordlund, A. 1998, *ApJ*, 499, 914
- Talon, S., & Charbonnel, C. 2005, *A&A*, 440, 981
- Talon, S., Kumar, P., & Zahn, J.-P. 2002, *ApJ*, 574, L175
- Townsend, A. A. 1966, *J. Fluid Mech.*, 24, 307
- Zahn, J.-P. 1992, *A&A*, 265, 115
- Zahn, J.-P. 1997, in *SCORE'96: Solar Convection and Oscillations and their Relationship*, eds. F. P. Jijpers, J. Christensen-Dalsgaard, & C. S. Rosenthal, *Astrophys. Space Sci. Libr.*, 225, 187

## Appendix A: Wave radiative damping

In the following, we describe the behavior of the wave damping throughout the radiative zone of stars as well as its evolution over time. Guided by stellar models, we propose a simple modeling that enables us to investigate the angular momentum transport by IGW in a tractable way. This model will be used in Appendix B.

### A.1. Spatial behavior and time evolution

To discuss the behavior of the wave damping, it is convenient to define the local radial damping lengthscale of the wave energy,  $L_D$ . It is defined by

$$L_D(r, \hat{\omega}, l) \approx \frac{\hat{\omega}^4 r^3}{[l(l+1)]^{3/2} K N^2 N_T}, \quad (\text{A.1})$$

so that Eq. (11), or the damping acoustic depth, can be rewritten

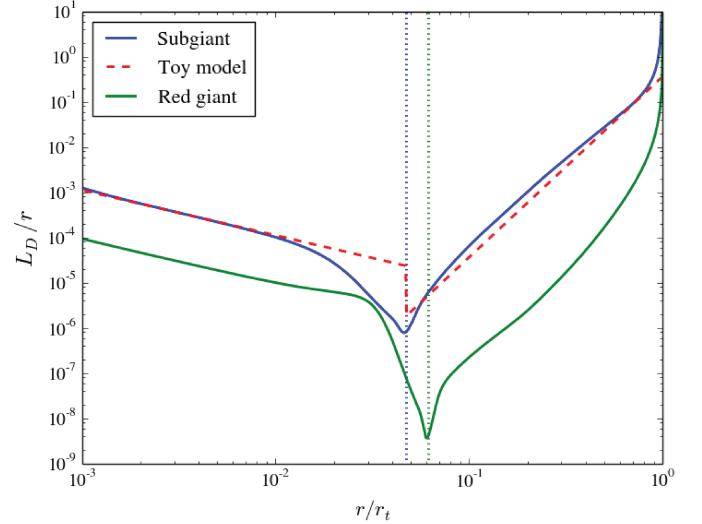
$$\tau(r, \hat{\omega}, l) = \int_r^{r_t} \frac{dr'}{L_D(r', \hat{\omega}, l)}, \quad (\text{A.2})$$

with  $\hat{\omega}$  the wave intrinsic frequency defined in Eq. (8),  $r$  the radius,  $l$  the wave angular degree,  $K$  the radiative diffusivity,  $N$  ( $N_T$ ) the Brunt-Väisälä frequency with (without) the gradient of the chemical composition, and  $r_t$  the radius at the top of the radiative zone.  $L_D$  is plotted in Fig. A.1 for the subgiant and the red giant  $1 M_\odot$  models that are considered as examples in Sect. 4.1. For both models, the radial damping lengthscale decreases by more than five orders of magnitude from the top of the radiative zone to the hydrogen-burning shell where it is minimum. A value of the ratio  $L_D/r$  much lower than unity indicates that  $\tau \gg 1$ . This means that the wave is locally absorbed into the medium and cannot reach deeper layers. In both examples displayed in Fig. A.1, the considered wave component, characterized by  $l = 1$  and  $\hat{\omega} = 1 \mu\text{rad s}^{-1}$ , is considerably dissipated immediately after the top of the radiative zone. Nevertheless, following Eq. (A.1), an increase in the intrinsic wave frequency (i.e., following Eq. (8), an increase in  $\omega$  or in  $-m\delta\Omega$ ) leads to an increase in  $L_D$  such that the wave can go deeper into the star. In turn, a value of  $L_D/r$  much higher than unity means that the wave will not be damped enough to locally deposit momentum into the medium. Figure A.1 also shows that  $L_D$  is more than two orders of magnitude lower for a red giant than for a subgiant star. Indeed, as the core starts contracting at the end of the main sequence, the Brunt-Väisälä frequency increases in the radiative zone and the radius of a given mass shell decreases, resulting in an important decrease in Eq. (A.1). Incoming waves are therefore more rapidly damped in red giant than in subgiant stars for a given value of the wave intrinsic frequency. We refer the reader to the discussion in Appendix 2.4.7 for more details about the impact of the radiative damping on the transport by IGW.

To derive Eq. (A.1), we note that we have supposed that the factor  $N/(N^2 - \hat{\omega}^2)^{1/2}$  in the integrand of Eq. (11) is always close to unity. This is true far away from a reflexion point (i.e., where  $N^2 = \hat{\omega}^2$ ). When  $\omega^2 \sim N^2$ , we can show by a first-order expansion that the integral Eq. (11) does not diverge and that the contribution near this point to the total integral remains small. Therefore, waves are not dissipated into the medium near a reflexion point, unlike at critical layers (i.e., where  $\hat{\omega} = 0$ ).

### A.2. An approximate for $L_D$

Estimates of  $L_D$  for stellar models show that it is possible to approximate Eq. (A.1) with the help of power laws. We can then



**Fig. A.1.** Ratio of the characteristic radial damping lengthscale of the wave energy as given in Eq. (A.1) to the radius for both  $1 M_\odot$  models considered in Sect. 4.1. It is plotted as a function of the radius normalized by its value at the top of the radiative zone,  $r_t$ , for a degree  $l = 1$  and an intrinsic wave frequency  $\hat{\omega} = 1 \mu\text{rad s}^{-1}$ . The vertical dotted lines localize the hydrogen-burning shell in both models. The profile assumed in Appendix A.2 is represented by the red dashed line for the subgiant model.

assume that

$$L_D \approx \begin{cases} \frac{\hat{\omega}^4 r_t^3}{[l(l+1)]^{3/2} K_t N_t^3} \left(\frac{r}{r_t}\right)^\beta & \text{if } r_{\text{HS}} < r < r_t, \\ \frac{\mathcal{R}}{[l(l+1)]^{3/2}} \left(\frac{\hat{\omega}}{1 \mu\text{rad s}^{-1}}\right)^4 & \text{if } r < r_{\text{HS}}, \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

where the subscript  $t$  refers to quantities evaluated at the top of the radiative zone,  $\beta$  is a rational number,  $r_{\text{HS}}$  is the radius at the hydrogen-burning shell and  $\mathcal{R}$  is a constant so that  $L_D(r_{\text{HS}}^-) \geq L_D(r_{\text{HS}}^+)$ . We note that Eq. (A.3) does not take the gradient in the chemical composition into account, so that  $N = N_T$ . All these quantities can be provided by a stellar model. A comparison with the  $1 M_\odot$  subgiant model, considered in Sect. 4.1, is plotted in Fig. A.1. For our purpose, the discontinuity in the modeling at the hydrogen-burning shell does not matter. Indeed, since  $L_D$  sharply increases below the hydrogen burning-shell, the contribution of this region to the total wave damping integral is negligible at first approximation compared to the one of the region around the hydrogen-burning shell. The useful physical quantities extracted from the model are listed in Table A.1. This set of parameters will be used as inputs for the toy model presented in Appendix B.

### A.3. Transport by IGW near the center ( $r \lesssim r_{\text{HS}}$ )

Without going in more details, it is already possible to deduce from the description given in Sect. A.2 how the transport by IGW behaves in the vicinity of stellar centers. Indeed, since  $r_{\text{HS}} \ll r_t$  in evolved stars, we can assume that  $\delta\Omega$  has already reached its maximum amplitude  $\Delta\Omega$  when  $r \lesssim r_{\text{HS}}$ , so that  $\hat{\omega} \approx \omega - m\Delta\Omega$ . Therefore, following Eq. (A.3),  $L_D$  can be supposed to be constant for  $r \lesssim r_{\text{HS}}$ . As a result, Eq. (A.2) can be rewritten as

$$\tau(r, \hat{\omega}, l) \approx \frac{[l(l+1)]^{3/2} (r_{\text{HS}} - r)}{\hat{\omega}^4 \mathcal{R}} + \int_{r_{\text{HS}}}^{r_t} \frac{dr'}{L_D(r', \hat{\omega}, l)}, \quad (\text{A.4})$$

**Table A.1.** Parameters extracted from the 1  $M_{\odot}$  subgiant model considered in Sect. 4.1, with  $\log g = 3.86$  and  $\log L/L_{\odot} = 0.35$ .

1 $M_{\odot}$ subgiant model parameters			
$N_t/2\pi$	85 $\mu\text{Hz}$	$\beta$	5
$r_t$	$6.6 \times 10^8$ m	$r_t/b$	19.2
$r_{\text{HS}}$	$3.1 \times 10^7$ m	$\overline{\Delta\Omega}_{\text{th}}/2\pi$	780 nHz
$K_t$	$2.8 \times 10^3$ m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup>	$v_p \sim \omega_c$	0.6 $\mu\text{Hz}$
$\mathcal{R}$	$2.1 \times 10^3$ m	$V_p$	174 m s <sup>-1</sup>
$A_{l=1}$	$3.4 \times 10^{-11}$	$N_t/\overline{\Delta\Omega}_{\text{th}}$	109

provided that  $\hat{\omega} > 0$ . Using Eq. (10), we thus find that Eq. (2) is almost proportional to  $1/r^2$  when  $r \lesssim r_{\text{HS}}$ . Therefore, taking  $\rho \approx \rho(r=0)$  and  $\Omega \sim \Omega(r=0)$  in this region, the wave-related timescale, Eq. (4), becomes proportional to  $r^4$ . As a consequence, the influence of the transport by IGW on the rotation increases as  $r \lesssim r_{\text{HS}}$  and  $r$  tends to zero, and the wave-related timescale can become much lower than the contraction timescale in the vicinity of the center. Such a trend is well reproduced by numerical computations (see Fig. 3). It results from the fact that the moment of inertia of a mass shell behaves as  $r^2$  as  $r$  decreases, and that the wave flux increases as  $1/r^2$  as it focuses toward the center. This result holds true on the condition that  $\delta\Omega$  is constant in the vicinity of the center.

To go further, a more detailed analysis of the wave spectrum and the amplitude wave flux requires accounting for the wave damping from the base of the convective zone to the hydrogen-burning shell and modeling the rotation profile. This will be subject to the next section.

## Appendix B: Angular momentum transport by IGW in a semi-analytical toy model

In this section, we present simplified analytical expressions of the wave damping integral (or the damping acoustic depth),  $\tau$ , and of the divergence of the angular momentum wave flux,  $J_w$ , between the hydrogen-burning shell and the base of the convective envelope. The following developments rely on two basic assumptions. Firstly, the differential rotation is supposed to linearly vary throughout the radiative zone of the star,

$$\delta\Omega(r) = \Delta\Omega \left(1 - \frac{r}{r_t}\right) \quad \text{for } r \leq r_t, \quad (\text{B.1})$$

where  $\Delta\Omega > 0$  is the maximum amplitude and  $r_t$  is the radius at the top of the radiative zone. Secondly, the radial damping lengthscale of the wave energy is approximated by power laws as given by Eq. (A.3). Such a toy model enables us to easily identify the important parameters of the transport by IGW and to investigate their influence on its efficiency. In particular, it highlights the role of the amplitude of the differential rotation and facilitates the interpretation of the results delivered in the main text.

### B.1. Wave damping integral above the hydrogen-burning shell ( $r_{\text{HS}} \lesssim r \leq r_t$ )

The above assumptions make the computation of the wave damping integral possible in a semi-analytical way. Using

Eqs. (B.1) and (A.3) for  $r_{\text{HS}} < r < r_t$ , Eq. (A.2) can be expressed as

$$\tau(r, \hat{\omega}, l) = A_l \chi_{|m|}^4 I^\beta \left( \frac{r}{r_t}, \frac{\omega}{m\Delta\Omega} \right), \quad (\text{B.2})$$

provided that  $\omega > m\delta\Omega(r)$  and where we have defined

$$A_l = \frac{[l(l+1)]^{3/2} K_t}{r_t^2 N_t} \quad (\text{B.3})$$

$$\chi_{|m|} = \frac{N_t}{|m|\Delta\Omega} \quad (\text{B.4})$$

$$I^\beta(z, X) = \int_z^1 \frac{y^{-\beta}}{[X - (1-y)]^4} dy. \quad (\text{B.5})$$

If  $\omega < m\delta\Omega(r)$ , the waves have already been dissipated in upper layers (cf. critical layers). The damping process is thus controlled by two main parameters,  $A_l$  and  $\chi_{|m|}$ . The first one is representative of the intensity of the radiative diffusion whereas the second one measures the frequency Doppler-shift.

#### B.1.1. Exact solution for $I^\beta(z, X)$

The solutions of Eq. (B.5) can be expressed in different ways depending on the exponent  $\beta$  and the quantity  $a = X - 1$ .

**Case when  $\beta \in \mathbb{N}$ :**  $I^\beta$  is directly deduced by a recurrence relation. We found, following Gradshteyn et al. (2007),

$$I^\beta(z, X) = \frac{1}{1-\beta} \left( \left[ \frac{y^{1-\beta}}{a(a+y)^3} \right]_z^1 + \frac{\beta+2}{a} I^{\beta-1}(z, X) \right), \quad (\text{B.6})$$

with the initial condition for  $\beta = 1$  given by

$$I^1(z, X) = \left[ \frac{11a^2 + 15ay + 6y^2}{6a^3(a+y)^3} - \frac{\ln|a+y| - \ln y}{a^4} \right]_z^1. \quad (\text{B.7})$$

**Case when  $\beta \notin \mathbb{N}$ :** then, if  $a \geq -1$ ,

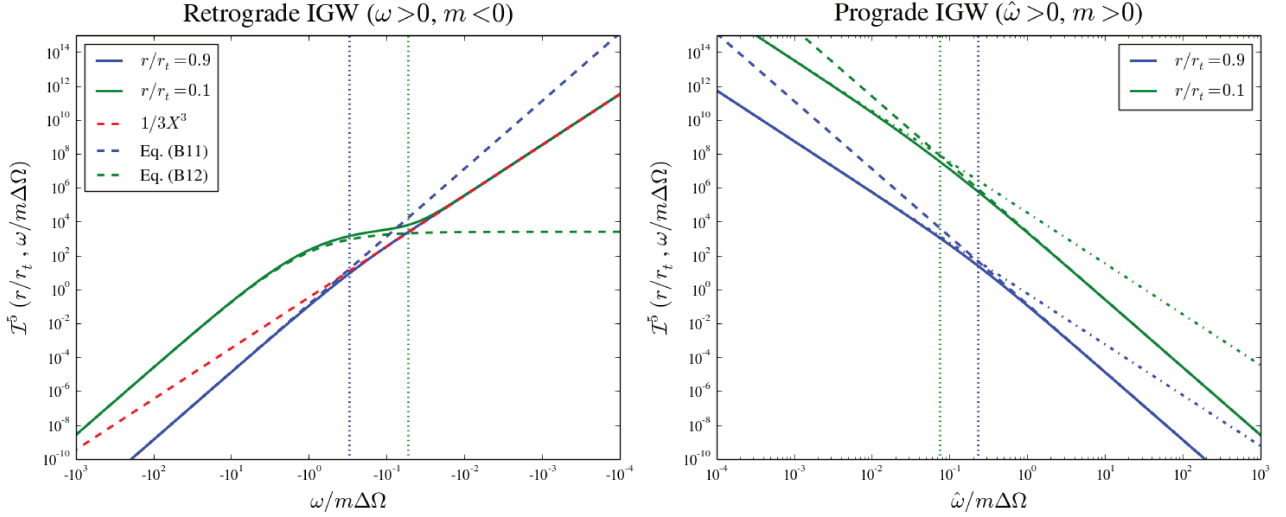
$$I^\beta(z, X) = \left[ -\frac{{}_2F_1(\beta, \beta+3, \beta+4; \frac{a}{y+a})}{(\beta+3)(y+a)^{\beta+3}} \right]_z^1, \quad (\text{B.8})$$

which is also valid when  $\beta$  is an integer, or otherwise

$$I^\beta(z, X) = \left[ -y^{1-\beta} \frac{{}_2F_1(4, 1-\beta, 2-\beta; -\frac{y}{a})}{a^4(\beta-1)} \right]_z^1, \quad (\text{B.9})$$

where  ${}_2F_1$  is the hypergeometric function.

As an illustration, the integral is displayed in Fig. B.1 for  $\beta = 5$  with  $z = r/r_t$  and  $X = \omega/m\Delta\Omega$ . Two values of  $z$  are considered. Negative values of  $X$  correspond to retrograde IGW ( $m < 0$ ) and positive values of  $X$  correspond to prograde IGW ( $m > 0$ ), on the condition that they have not been dissipated near their critical layers yet (i.e., such as  $X > 1 - r/r_t$  or, similarly,  $\hat{\omega}/m\Delta\Omega > 0$ ).



**Fig. B.1.** *Left:* damping integral  $\mathcal{I}^5(z, X)$  as defined in Eq. (B.5) for retrograde IGW ( $m < 0$ ) and as a function of  $X = \omega/m\Delta\Omega$  (solid lines). The dashed lines represent the approximate expressions given in Eqs. (B.10) and (B.11). *Right:* damping integral  $\mathcal{I}^5(z, X)$  for prograde IGW ( $m > 0$ ) as a function of  $X - 1 + r/r_t = \hat{\omega}/m\Delta\Omega$  (solid lines). The dashed and the dashed-dotted lines respectively represent the approximate expressions at high and low values for  $\hat{\omega}/m\Delta\Omega$  as given in Eq. (B.12). *Both panels:* two values of  $z = r/r_t$  are considered,  $r/r_t = 0.9$  (blue color) and  $r/r_t = 0.1$  (green color). The vertical dotted lines indicate the values at the transition of regime,  $X_t$ , as defined in Appendix B.1.2.

### B.1.2. Approximate solutions for $\mathcal{I}^\beta$

We now search for approximate expressions of the wave damping integral. Considering different assumptions on the values of  $z$  and  $X$  leads us to distinguish three cases:

1. Retrograde IGW ( $m < 0$ ,  $X < 0$ ) for  $z \sim 1$ :

$$\mathcal{I}^\beta(z, X) \approx \begin{cases} \frac{1}{\beta-1} \frac{z^{-\beta+1} - 1}{|X|^4} & \text{if } |X| \gtrsim X_t = 3(1-z) \\ \frac{1}{3|X|^3} & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (\text{B.10})$$

2. Retrograde IGW ( $m < 0$ ,  $X < 0$ ) for  $z \ll 1$ :

$$\mathcal{I}^\beta(z, X) \approx \begin{cases} \frac{1}{\beta-1} \frac{z^{-\beta+1} - 1}{(|X|+1)^4} & \text{if } |X| \gtrsim X_t = \left(\frac{\beta-1}{3}\right)^{1/3} \\ \frac{1}{3|X|^3} & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (\text{B.11})$$

3. Prograde IGW ( $m > 0$ ,  $X > 1 - z$ ) for  $0 < z < 1$ :

$$\mathcal{I}^\beta(z, X) \approx \begin{cases} \frac{1}{\beta-1} \frac{z^{-\beta+1} - 1}{(X-1+z)^4} & \text{if } X \gtrsim X_t = \frac{3(z-z^\beta)}{\beta-1} + 1 - z \\ \frac{1}{3(X-1+z)^3} & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (\text{B.12})$$

In all cases, the values of transition,  $X_t$ , were obtained by equating both approximate expressions at small and large  $|X|$  values. These approximations are validated in Fig. B.1 by a comparison with the exact solution.

### B.1.3. Two regimes controlled by the Doppler-shift

In the three abovementioned cases, Fig. B.1 as well as Eqs. (B.10)–(B.12) show that the wave damping integral is composed of two regimes depending on whether the value of

$|X| = \omega/|m|\Delta\Omega$  is greater than a transition value, denoted  $X_t$ , or not. This transition value depends on the radius in the star, and so on the distance already traveled by IGW. Above the transition  $|X| > X_t$ , the wave damping integral is dominated by the damping that IGW suffer in the vicinity of the layer at radius  $r$ , which is far enough of their critical layers for prograde IGW. Below the transition  $|X| < X_t$ , the wave damping integral is dominated either by the damping they have suffered in the layers at the top of the radiative zone for retrograde IGW (i.e., where  $r \sim r_t$ ), or by the one they suffer near their critical layers for prograde IGW (i.e., where  $r \sim r_t[1 - \omega/m\Delta\Omega]$ ).

Therefore, at a given radius in the star, the magnitude of the oscillation frequency Doppler-shift,  $m\Delta\Omega$ , selects the wave frequency at the transition between the two regimes. Figure B.1 and Eqs. (B.10)–(B.12) also show that a decrease in the radius  $r$ , leading to an increase in the distance traveled by the waves, results in a decrease in the frequency at the transition. Indeed, the contribution of the local damping becomes dominant for a larger range of wave frequencies. We note that it also leads to a global increase in the damping integral for all frequencies, since the distance covered by the waves increases.

### B.2. Divergence of the wave flux $\dot{J}_w$

It remains to express the divergence of the angular momentum wave flux. To do so, we assume that IGW are excited in a frequency range between 0 and  $N_t$ , with  $N_t$  the value of the Brunt-Väisälä frequency at the top of the radiative zone. Using Eqs. (5)–(11), the change of variable  $\sigma = \omega/N_t$ , and assuming a monotonously decreasing rotation profile, Eq. (2) can be rewritten in the following general form

$$\dot{J}_w(r) = \sum_{l=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+l} \left( \frac{\mathcal{F}_{l|m}(r)}{r} \int_0^1 \mathcal{S}(\sigma; B) \mathcal{D}_{l|m}(\sigma, r) d \ln \sigma \right), \quad (\text{B.13})$$



with

$$\mathcal{F}_{l,|m|}(r) = \frac{|m|}{v_p} \frac{r_t^2}{r^2} 2\mathcal{F}_0 \sqrt{l(l+1)} e^{-\sqrt{l(l+1)}b^2/2r_t^2} \quad (\text{B.14})$$

$$\mathcal{S}(\sigma; B) = e^{-\sigma^2/4B^2}, \quad B = \frac{v_p}{N_t} \quad (\text{B.15})$$

$$\mathcal{D}_{l,|m|}(\sigma, r) = \tilde{\mathcal{D}}_{l,+|m|}(\sigma, r) - \tilde{\mathcal{D}}_{l,-|m|}(\sigma, r), \quad (\text{B.16})$$

where we have separated in Eq. (B.16) the retrograde ( $-|m|$ ) and prograde ( $+|m|$ ) parts and defined

$$\tilde{\mathcal{D}}_{l,m}(\sigma, r) = H(\hat{\sigma}_m) \frac{r}{L_D} e^{-\tau} \quad (\text{B.17})$$

$$\hat{\sigma}_m(r) = \frac{\hat{\omega}}{N_t} = \frac{\omega}{N_t} - m \frac{\delta\Omega(r)}{N_t}, \quad (\text{B.18})$$

and where  $L_D$  is given by Eq. (A.1). The Heaviside function,  $H$ , has been introduced to take into account that the prograde IGW that have already reached their critical layers (i.e. such as  $\hat{\omega} < 0$ ) have been totally dissipated.

Using the assumptions made in the toy model, Eqs. (A.3), (B.3) and (B.4) for  $r_{\text{HS}} \leq r \leq r_t$ , Eq. (B.17) can be formulated such as

$$\tilde{\mathcal{D}}_{l,m}(\sigma, r) = A_l \chi_{|m|}^4 \left(\frac{r_t}{r}\right)^{\beta-1} \frac{e^{-\tau}}{[\sigma \chi_{|m|} - \text{sgn}(m)(1-r/r_t)]^4}, \quad (\text{B.19})$$

with  $\tau$  given by Eq. (B.2)

$$\tau = A_l \chi_{|m|}^4 \mathcal{I}^\beta \left( \frac{r}{r_t}, \text{sgn}(m) \sigma \chi_{|m|} \right), \quad (\text{B.20})$$

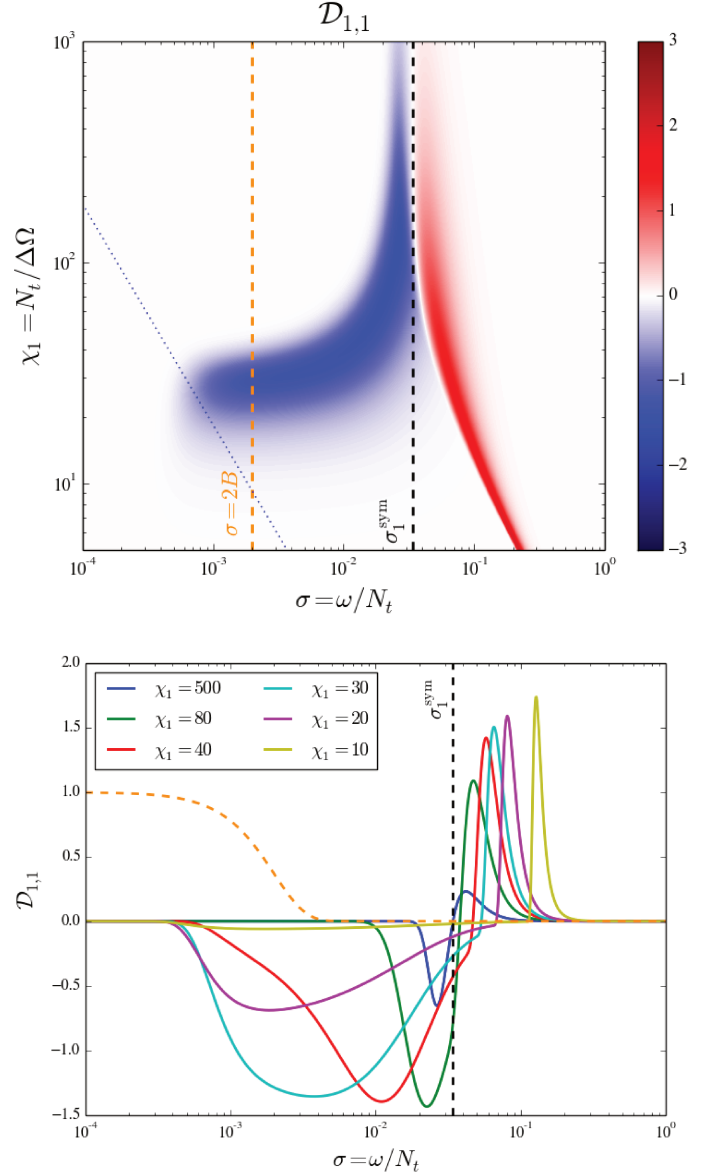
provided that  $\sigma \chi_{|m|} > \text{sgn}(m)(1-r/r_t)$  and where (sgn) is the sign function. At this stage, the set of equations Eqs. (A.4), (B.2)–(B.9) and (B.13)–(B.20) enables us to study in a tractable way the transport of angular momentum induced by IGW throughout the radiative zone of stars, as well as the role of the oscillation frequency Doppler-shift. As shown by Eq. (B.13), the transport induced by IGW is the consequence of a balance between wave driving, through the  $\mathcal{S}$  and  $\mathcal{F}_{l,|m|}$  functions, and wave damping, through the damping term  $\mathcal{D}_{l,|m|}$ . While  $\mathcal{S}$  and  $\mathcal{F}_{l,|m|}$  are described in simple forms by the generation model, the behavior of the damping term  $\mathcal{D}_{l,|m|}$  is much less easy to grasp. Moreover,  $\dot{J}_w$  depends on  $\Delta\Omega$  through  $\mathcal{D}_{l,|m|}$  only, so that a more detailed analysis of this term is necessary. For our purpose, we will focus in the following on the case  $r/r_t \sim r_{\text{HS}}/r_t \ll 1$ . In other words, we will restrain the study to a region located around the hydrogen-burning shell, at the surroundings of the helium core.

### B.3. Damping term $\mathcal{D}_{l,|m|}$ near the H-burning shell

#### B.3.1. Example with $l = |m| = 1$

As a first illustration, we focus on the damping term  $\mathcal{D}_{1,1}$  as defined in Eq. (B.16) with  $l = |m| = 1$ . Using the values of the physical quantities as given in Table A.1 and a radius such as  $r/r_t = 0.05$ , that is near the hydrogen-burning shell, it is plotted as a function of the normalized frequency  $\sigma$  and  $\chi_1$  in Fig. B.2. For indication purposes, the frequency wave spectrum given in Eq. (B.15) is represented in the same figure with  $B = v_p/N_t \sim 0.001$ , as expected from Table A.1.

Figure B.2 shows that the wave damping is efficient for only two ranges of frequencies. Indeed,  $\mathcal{D}_{1,1}$  is composed, on the one hand, of a negative extremum associated with retrograde IGW ( $m = -1$ ), and in the other hand, of a positive one associated



**Fig. B.2.** *Top:* dimensionless damping term defined in Eq. (B.16) with  $l = |m| = 1$ , as a function of  $\sigma$  and  $\chi_1$ . It is plotted for the subgiant model parameters given in Table A.1 at a radius  $r/r_t = 0.05$ , i.e., near the hydrogen-burning shell. The vertical orange dashed line corresponds to  $\sigma = 2B$  as given in Eq. (B.15). The vertical dark dashed line indicates the frequency at the separation between the retrograde and prograde parts of the damping term,  $\sigma_1^{\text{sym}}$ , which was estimated using Eq. (B.25). The dotted line represents the retrograde transition frequency as defined in Eq. (B.21). *Bottom:* cut sections for different values of  $\chi_1$ . The orange dashed line represents the Gaussian wave frequency spectrum defined in Eq. (B.15). The vertical dark dashed line has the same significance as in the top panel.

with prograde IGW ( $m = 1$ ) located at higher frequencies. The locations and amplitudes of both extrema depend on  $\chi_1$ . Whatever  $\chi_1$ , they are positioned on both sides of a characteristic frequency, denoted  $\sigma_1^{\text{sym}}$ . It corresponds to the frequency at the extremum of both retrograde and prograde damping terms defined in Eq. (B.19) when  $\Delta\Omega$  tends to zero (i.e., when retrograde and prograde IGW are symmetrically damped; see Eq. (B.38) for a definition).

We note that the effects of a change in the angular degree  $l$  or in the value of  $A_{l=1}$  can be easily deduced from  $\mathcal{D}_{1,1}$  as

displayed in Fig. B.2. Indeed, following Eqs. (B.16), (B.19) and (B.20), a map of the  $\mathcal{D}_{l,|m|}$  function in the  $(\sigma, \chi_{|m|})$  plane associated with a parameter  $A'_l$  is deduced from the one associated with the parameter  $A_l$ , such as  $A_l < A'_l$ , through a horizontal dilatation of the  $\sigma$ -axis by a factor  $\alpha = (A'_l/A_l)^{1/4}$  and a vertical contraction of the  $\chi_{|m|}$ -axis by a factor  $1/\alpha$  (i.e., ensuring  $A_l \chi_{|m|}^4 = \text{cst.}$ ). In logarithmic scales, it corresponds to a translation  $[0.25 \log \alpha, -0.25 \log \alpha]$  (see Fig. 3 for an illustration). This explains our choice to first consider  $l = |m| = 1$  as example and to represent the effect of the variation in  $\chi_1$  only.

In the following, we use the approximate expressions given in Sect. B.1.2 to discuss the dependence of the damping term  $\mathcal{D}_{l,|m|}$  on both parameters  $A_l$  and  $\chi_{|m|}$ . The case  $l = 1$  displayed in Fig. B.2 is used as an illustration. Retrograde and prograde IGW are treated separately.

### B.3.2. Retrograde IGW ( $m < 0$ )

Near the hydrogen-burning shell,  $z = r/r_t \ll 1$  and the retrograde part of Eq. (B.16) can thus be estimated with the help of Eq. (B.11). Recalling that  $|X| = \omega/|m|\Delta\Omega$  in Eq. (B.11), the transition frequency between the two regimes given in Eq. (B.11) can be rewritten

$$\sigma_t^R \sim \left( \frac{A_l \chi_{|m|}^4 / 3}{A_l \chi_{|m|}^4 (r_t/r)^{\beta-1} / (\beta-1)} \right)^{1/3}. \quad (\text{B.21})$$

Therefore, this makes us to consider the two following cases.

**Case 1:** Wave frequencies such as  $\sigma > \sigma_t^R$ . As discussed in Sect. B.1.3, this range of frequencies corresponds to the wave frequencies for which the wave damping integral is dominated by the local damping. Using Eq. (B.11) with  $\sigma > \sigma_t^R$  in Eq. (B.20), the wave radiative damping can be approximated by

$$\tau \approx \frac{A_l \chi_{|m|}^4}{(\beta-1)} \frac{(r_t/r)^{\beta-1}}{(\sigma \chi_{|m|} + 1)^4}, \quad (\text{B.22})$$

and Eq. (B.19) for retrograde IGW ( $m < 0$ ) can be rewritten

$$\tilde{\mathcal{D}}_{l,m} \approx (\beta-1)\tau e^{-\tau}, \quad (\text{B.23})$$

where we have neglected  $r/r_t$  compared to  $\sigma \chi_{|m|} + 1$  in the denominator. Therefore,  $\mathcal{D}_{l,m}$  is minimum for  $\tau \approx 1$ . Its peak amplitude is thus equal to  $(\beta-1)/e$ . Following Eq. (B.22), the frequency of retrograde IGW at maximum damping satisfying  $\tau \approx 1$  is given by

$$\sigma_{\max}^R \approx \sigma_l^{\text{sym}} - \frac{1}{\chi_{|m|}}, \quad (\text{B.24})$$

provided that  $\sigma_{\max}^R > \sigma_t^R$  and where we have defined

$$\sigma_l^{\text{sym}} = \left( \frac{A_l}{\beta-1} \left( \frac{r_t}{r} \right)^{\beta-1} \right)^{1/4}. \quad (\text{B.25})$$

This latter frequency corresponds to the frequency satisfying  $\tau = 1$  when  $\chi_{|m|} \rightarrow +\infty$  (i.e., when the prograde and retrograde IGW suffered a symmetrical damping). We note that we can show that the full width at half maximum of the retrograde peak is about  $0.6 \sigma_l^{\text{sym}}$  around  $\sigma_{\max}^R$ . Equations (B.24) and (B.25) show that an increase either in  $A_l$  (i.e., in the magnitude of the radiative diffusion) or in  $r_t/r$  (i.e., in the distance covered by the waves) results in a shift of  $\sigma_l^{\text{sym}}$  and  $\sigma_{\max}^R$  toward higher values. Equation (B.24) also tells us that a decrease in  $\chi_{|m|}$  (i.e.,

an increase in the Doppler-shift) results in a shift of the retrograde damping peak toward lower frequencies. More precisely, Eq. (B.24) makes us to distinguish three qualitative regimes:

1. Case  $\sigma_l^{\text{sym}} \gg 1/\chi_{|m|}$ : the retrograde damping peak is closely located near  $\sigma_l^{\text{sym}}$ , or in other words,  $\sigma_{\max}^R \sim \sigma_l^{\text{sym}}$ . Using the values in Table A.1 and  $l = 1$ , we found  $\omega_{l=1}^{\text{sym}}/N_t \sim 0.034$ , in agreement with Fig. B.2.
2. Case  $\sigma_l^{\text{sym}} \sim 1/\chi_{|m|}$ :  $\sigma_{\max}^R$  migrates toward lower frequencies as  $\chi_{|m|}$  decreases (or  $|m|\Delta\Omega$  increases).
3. Case  $\sigma_l^{\text{sym}} \ll 1/\chi_{|m|}$ :  $\sigma_{\max}^R$  becomes lower than  $\sigma_t^R$ . The wave frequencies such as  $\sigma \gtrsim \sigma_t^R$  have not suffered an efficient damping yet since  $\tau \approx (\sigma_l^{\text{sym}} \chi_{|m|})^4 \ll 1$  from Eq. (B.22). Therefore, following Eq. (B.23), the retrograde damping term  $\mathcal{D}_{l,m}$  rapidly vanishes as  $\chi_{|m|}$  decreases.

These three regimes are well observed in Fig. B.2.

**Case 2:** wave frequencies such as  $\sigma < \sigma_t^R$ . This range of frequencies corresponds to the wave frequencies for which the wave damping integral is dominated by the contribution of the top of the radiative zone. Using Eq. (B.11) with  $\sigma < \sigma_t^R$  in Eq. (B.20), we obtain

$$\tau \approx \left( \frac{\sigma_{\text{top}}}{\sigma} \right)^3, \quad (\text{B.26})$$

with

$$\sigma_{\text{top}} \approx \left( \frac{A_l \chi_{|m|}^4}{3} \right)^{1/3} = \left( \frac{[l(l+1)]^{3/2} K_t}{3r_t^3} \frac{r_t}{m\Delta\Omega} \right)^{1/3}. \quad (\text{B.27})$$

This latter is representative of the magnitude of the wave damping at the top of the radiative zone and of the competing effect between the radiative diffusion and the Doppler-shift in this region. The larger the radiative diffusion (i.e.,  $K_t$ ) at the top of the radiative zone, the larger  $\sigma_{\text{top}}$  and  $\tau$ . Conversely, the larger the gradient in the wave intrinsic frequency (i.e.,  $m\Delta\Omega/r_t$ ), the lower  $\sigma_{\text{top}}$  and  $\tau$  since  $\hat{\omega}$  increases more rapidly as retrograde IGW propagate downwards.

If  $\sigma < \sigma_t^R$ , we can assume  $\sigma \chi_{|m|} < \sigma_t^R \chi_{|m|} \ll 1$  using Eq. (B.21) with  $r/r_t \ll 1$ . Then, by approximating the denominator of Eq. (B.19) by unity, we obtain

$$\tilde{\mathcal{D}}_{l,m} \approx A_l \chi_{|m|}^4 \left( \frac{r_t}{r} \right)^{\beta-1} \exp \left( -\frac{\sigma_{\text{top}}^3}{\sigma^3} \right). \quad (\text{B.28})$$

Therefore, using Eqs. (B.21), (B.24), (B.25) and (B.27), we can notice that

$$\sigma_t^R = \frac{\sigma_{\text{top}}}{(\chi_{|m|} \sigma_l^{\text{sym}})^{4/3}} = \frac{\sigma_{\text{top}}}{(\chi_{|m|} \sigma_{\max}^R + 1)^{4/3}}, \quad (\text{B.29})$$

and we find using again Eq. (B.25) that Eq. (B.28) is approximately equal to

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{D}}_{l,m}(\sigma < \sigma_t^R, r) &\approx (\beta-1) \left( \frac{\sigma_{\text{top}}}{\sigma_t^R} \right)^3 \exp \left( -\frac{\sigma_{\text{top}}^3}{\sigma^3} \right) \\ &\lesssim (\beta-1) \left( \frac{\sigma_{\text{top}}}{\sigma} \right)^3 \exp \left( -\frac{\sigma_{\text{top}}^3}{\sigma^3} \right). \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

Equation (B.30) is thus a decreasing function of  $\sigma$  that drastically vanishes as  $\sigma$  becomes smaller than  $\sigma_{\text{top}}$ . Indeed, following Eq. (B.26), the wave damping integral is much higher than

unity for frequencies such that  $\sigma \lesssim \sigma_{\text{top}}$  (i.e.,  $\tau \gg 1$ ). Thus, this range of low frequencies have already been significantly absorbed into the layers at the top of the radiative zone. We note that if  $\sigma_l^{\text{sym}} \geq 1/\chi_{|m|}$ , or equivalently  $\sigma_{\text{max}}^R \geq 0$ , Eq. (B.29) shows that  $\sigma_l^R \leq \sigma_{\text{top}}$ . As a result, Eq. (B.30) tends rapidly to zero as soon as  $\sigma \leq \sigma_l^R$ . Otherwise, in the case  $\sigma_l^{\text{sym}} \leq 1/\chi_{|m|}$ , or equivalently  $\sigma_{\text{max}}^R \leq 0$ , retrograde IGW such as  $\sigma_{\text{top}} \leq \sigma \leq \sigma_l^R$  have not suffered an efficient damping yet since they verify  $\tau \leq 1$ . We note also that if  $\sigma_l^{\text{sym}} \geq 1/\chi_{|m|}$ , we always have  $\sigma_l^{\text{sym}} \geq \sigma_l^R$  following Eq. (B.21) with  $r/r_t \ll 1$ . With the parameters of subgiant model given in Table A.1, we find  $\sigma_{\text{top}} \approx 8 \times 10^{-4}$  and  $\sigma_l^R \approx 7 \times 10^{-4}$  for  $\chi_{|m|} = 30$ , in agreement with Fig. B.2.

In summary, retrograde IGW deposit momentum into the deep layers of the radiative zone where their damping acoustic depth satisfy  $\tau \approx 1$  provided that  $\sigma \gtrsim \sigma_l^R$ . This also implies that  $\sigma_l^{\text{sym}} \chi_{|m|} \gtrsim 1$ . IGW such as  $\sigma_l^R \gtrsim \sigma$  or  $\sigma_l^{\text{sym}} \chi_{|m|} \ll 1$  either have already been absorbed at the top of the radiative zone or are not damped enough to locally deposit momentum.

### B.3.3. Prograde IGW ( $m > 0$ )

The prograde part of Eq. (B.16),  $\tilde{\mathcal{D}}_{l,m}$ , can be estimated using Eq. (B.12). In the case  $r/r_t \ll 1$ , the transition frequency between the two regimes for prograde waves,  $\sigma_t^P$ , can be defined by

$$\sigma_t^P \chi_{|m|} - 1 + r/r_t \sim \frac{3}{\beta - 1} \frac{r}{r_t}. \quad (\text{B.31})$$

Then, injecting Eq. (B.12) into Eq. (B.20), we obtain for  $\sigma > \sigma_t^P$ ,

$$\tau \approx \frac{A_l \chi_{|m|}^4}{\beta - 1} \frac{(r_t/r)^{\beta-1}}{(\sigma \chi_{|m|} - 1 + r/r_t)^4}, \quad (\text{B.32})$$

and for  $\sigma < \sigma_t^P$ ,

$$\tau \approx \frac{A_l \chi_{|m|}^4}{3} \frac{(r_t/r)^\beta}{(\sigma \chi_{|m|} - 1 + r/r_t)^3}, \quad (\text{B.33})$$

on the condition that  $\sigma \chi_{|m|} > 1 - r/r_t$  (which is imposed by the presence of critical layers). For our purpose, it is convenient to remark that  $\sigma_t^P \sim 1/\chi_{|m|}$  with  $r/r_t \ll 1$ , so that the transition frequency is very close to the frequency of the waves at their critical layers. In this framework, it is sufficient to consider only the case  $\sigma_t^P \lesssim \sigma$  and the expression Eq. (B.32). In this case, Eq. (B.19) for prograde IGW ( $m > 0$ ) can be rewritten such as

$$\tilde{\mathcal{D}}_{l,m} \approx (\beta - 1) \tau e^{-\tau}. \quad (\text{B.34})$$

Therefore, we conclude that the prograde part of the damping,  $\tilde{\mathcal{D}}_{l,m}$ , is maximum when  $\tau \approx 1$  and that its peak amplitude is equal to  $(\beta - 1)/e$ . The frequency at the maximum is thus equal to

$$\sigma_{\text{max}}^P \approx \sigma_l^{\text{sym}} + \frac{(1 - r/r_t)}{\chi_{|m|}}, \quad (\text{B.35})$$

with  $\sigma_l^{\text{sym}}$  given by Eq. (B.25). Equation (B.35) shows that an increase in  $A_l$  or  $r_t/r$  leads to an increase in the frequency at the maximum. Similarly, the prograde peak migrates toward higher frequencies as  $\chi_{|m|}$  decreases (i.e.,  $m\Delta\Omega$  increases), unlike the retrograde peak according to Eq. (B.24). Moreover, for  $\chi_{|m|} \sigma_l^{\text{sym}} \gg 1$ , Eqs. (B.24) and (B.35) show that the prograde and retrograde peaks overlap around  $\sigma_l^{\text{sym}}$ . Since they have identical values, both terms in Eq. (B.16) progressively cancel each other

out as  $\chi_{|m|}$  tends to infinity. Finally, for  $\chi_{|m|} \sigma_l^{\text{sym}} \ll 1$ , the prograde damping peak is associated with the waves that are dispersed close to their critical layers such as  $\sigma_{\text{max}}^P \sim \sigma_t^P \sim 1/\chi_{|m|}$ . All these features can be observed in Fig. B.2.

In summary, prograde IGW are absorbed into the deep layers of the radiative zone where they satisfy  $\tau \approx 1$ , that is either at frequencies around  $\sigma_l^{\text{sym}}$  if  $\chi_{|m|} \sigma_l^{\text{sym}} \gg 1$  or at frequencies near their critical layers if  $\chi_{|m|} \sigma_l^{\text{sym}} \ll 1$ .

### B.4. Key points for the transport by IGW near the hydrogen-burning shell

The analysis of the previous sections enables us to discuss in simple words the behavior of the transport by IGW in the vicinity of the hydrogen-burning shell. We summarize here the key points learned from the toy model.

To begin with, we remind that the rotation profile is supposed to linearly decrease with respect to the radius and that the radius of the hydrogen-burning shell,  $r_{\text{HS}}$ , is assumed to be much smaller than the radius at the top of the radiative zone,  $r_t$ , so that the differential rotation is nearly maximum in this region (i.e.,  $\delta\Omega(r \lesssim r_{\text{HS}}) \approx \Delta\Omega$ ).

#### B.4.1. Divergence of the wave flux

The angular momentum transport induced by IGW in Eq. (1) is carried out by the divergence of the wave flux of angular momentum,  $\dot{J}_w$ . Following Eq. (B.13), this latter results from the correlation between the wave excitation spectrum, represented by  $\mathcal{S}$  and  $\mathcal{F}_{l,m}$ , and the wave radiative damping, represented by  $\mathcal{D}_{l,m}$ . Following Eqs. (1)–(2), (5)–(6) and (10) and the convention adopted in the footnote 1 with  $\delta\Omega(r) > 0$ , retrograde IGW ( $m < 0$ ) carrying negative angular momentum downwards tend to slow down the rotation since  $\dot{J}_w(m < 0) > 0$ , while prograde IGW ( $m > 0$ ) carrying positive angular momentum downwards tend to increase the rotation rate since  $\dot{J}_w(m > 0) < 0$ .

#### B.4.2. Damping efficiency and absorption criterion.

To modify the rotation in a mass shell of radius  $r \ll r_t$ , IGW must be sufficiently damped to locally deposit angular momentum into the medium while having conserved enough energy during its travel from the top of the radiative zone to be efficient. Following Eqs. (B.24) and (B.35), the damping is efficient at a depth  $r \ll r_t$  for the wave components whose the damping acoustic depth is close to unity

$$\tau \approx \int_r^{r_t} \frac{[l(l+1)]^{3/2} K N^3 dr}{(\omega - m\Delta\Omega)^4 r^3} \sim 1, \quad (\text{B.36})$$

with  $-l \leq m \leq +l$ . At fixed  $l$  and  $|m|\Delta\Omega$ , lower frequencies such as  $\tau \gg 1$  have already been partly absorbed into upper layers whereas higher frequencies such as  $\tau \ll 1$  have not suffered an efficient damping yet during their travel. Moreover, since the rotation profile is assumed to decrease with the radius ( $\Delta\Omega > 0$ ), the prograde IGW ( $m > 0$ ) that are efficiently absorbed have always higher frequencies than the retrograde ones ( $m < 0$ ). For a given value of  $\Delta\Omega$ , since retrograde (prograde) IGW carry negative (positive) angular momentum, the damping term,  $\mathcal{D}_{l,m}$  is therefore composed of a negative extremum associated with retrograde IGW and a positive one associated with prograde IGW located at a higher frequency. This is illustrated in Fig. B.2 for  $l = 1$  and  $|m| = 1$ .

To summarize, the prograde and retrograde IGW that are efficiently absorbed near the hydrogen burning shell satisfy  $\tau \sim 1$ .

#### B.4.3. Low cut-off frequency for retrograde IGW

For retrograde IGW, the condition of absorption represented by Eq. (B.36) applies if the wave frequency is higher than a cut-off frequency, denoted  $\omega_m^{\text{inf}}$  in the following. In the framework of the toy model and Eq. (B.21), it is found to be equal to

$$\omega_m^{\text{inf}}(r) \approx \alpha(r)|m|\Delta\Omega \quad \text{with} \quad \alpha(r) = \left[ \frac{(\beta-1)}{3} \left( \frac{r}{r_t} \right)^{\beta-1} \right]^{1/3}. \quad (\text{B.37})$$

It is defined as the wave frequency below which  $\tau$  is dominated by the damping near the top of the radiative zone, and above which  $\tau$  is dominated by the local damping. Therefore, if  $\omega \lesssim \omega_m^{\text{inf}}$ , either IGW have already been absorbed by the medium at the top of the radiative zone, or they are not damped enough to efficiently deposit momentum into the local medium. Therefore, the damping function  $\mathcal{D}_{l,|m|}$  drastically vanishes for the frequencies lower than  $\omega_m^{\text{inf}}$  (see Fig. B.2 for an illustration).

Retrograde IGW meeting the condition  $\tau \sim 1$  must also satisfy  $\omega \gtrsim \omega_m^{\text{inf}}$  to be efficiently absorbed near the hydrogen-burning shell. This defines the conditions of absorption for retrograde IGW. Conversely, prograde IGW are efficiently damped provided only that  $\tau \sim 1$ .

#### B.4.4. Effect of the frequency Doppler-shift on the wave damping

To describe the role of the differential rotation amplitude in the wave damping process, it is convenient to define the characteristic frequency,  $\omega_l^{\text{sym}}$ , for which  $\tau = 1$  is satisfied with  $|m|\Delta\Omega = 0$ , that is

$$\omega_l^{\text{sym}}(r) \equiv \left( \int_r^{r_t} [l(l+1)]^{3/2} K N^3 \frac{dr}{r^3} \right)^{1/4}. \quad (\text{B.38})$$

The condition  $\tau \sim 1$  can then be rewritten as  $\omega_l^{\text{sym}} \sim (\omega - m\Delta\Omega)$ , which makes us to consider four cases (see Fig. B.2 for an example):

1. Case  $\Delta\Omega = 0$ : In this limiting case, both prograde and retrograde damping peaks (i.e., where  $\tau \sim 1$ ) of the  $\mathcal{D}_{l,|m|}$  function overlap at  $\omega = \omega_l^{\text{sym}}$ . Since retrograde and prograde IGW are supposed to be symmetrically generated, they transport an opposite amount of angular momentum. Hence, the components cancel each other out such as  $\mathcal{D}_{l,|m|} = 0$  whatever  $l$  and  $|m|$ ; therefore,  $\dot{J}_w = 0$  and the angular momentum transport by IGW vanishes, as expected (see also discussion in Sect. 2.2).
2. Case  $|m|\Delta\Omega \ll \omega_l^{\text{sym}}$ : as  $\Delta\Omega$  slightly increases, both peaks of the  $\mathcal{D}_{l,|m|}$  function gradually separate but remain closely located on both sides of  $\omega_l^{\text{sym}}$  in this regime.
3. Case  $|m|\Delta\Omega \gg \omega_l^{\text{sym}}$ : in this regime, the Doppler-shift is so important that the wave damping is not efficient and Eq. (B.36) cannot be satisfied for retrograde IGW ( $\tau \ll 1$ ). Only prograde IGW near their critical layers, such as  $\omega \sim |m|\Delta\Omega$ , are locally absorbed.
4. Case  $|m|\Delta\Omega \sim \omega_l^{\text{sym}}$ : when  $|m|\Delta\Omega$  is of the order of  $\omega_l^{\text{sym}}$  and gradually increases, the asymmetry between the prograde and retrograde damping peaks becomes more and more pronounced, as illustrated in Fig. B.2. Indeed, the retrograde

IGW satisfying  $\tau \approx 1$  at given  $|m|$  and  $l$  are shifted toward lower frequencies than  $\omega_l^{\text{sym}}$ , while the prograde ones migrate toward higher frequencies. In other words, at fixed  $\omega$ ,  $l$  and  $|m|$ , an increase in  $\Delta\Omega$  leads to a decrease in the damping of retrograde IGW; they are thus absorbed into deeper layers of the star. In this regime, retrograde IGW are absorbed in the frequency range  $\omega_m^{\text{inf}} \lesssim \omega \lesssim \omega_l^{\text{sym}}$ . We note that for  $|m|\Delta\Omega \lesssim \omega_l^{\text{sym}}$ , we always have  $\omega_m^{\text{inf}} \ll \omega_l^{\text{sym}}$  with  $r \ll r_t$  in Eq. (B.37), so that both conditions  $\tau \approx 1$  and  $\omega_m^{\text{inf}} \lesssim \omega \lesssim \omega_l^{\text{sym}}$  can always be simultaneously satisfied in this regime. Conversely, an increase in  $\Delta\Omega$  results in an increase in the damping of prograde IGW; they are thus absorbed into upper layers at frequencies  $\omega \gtrsim \omega_l^{\text{sym}}$ .

The condition of absorption  $\tau \sim 1$  for retrograde IGW implies  $|m|\Delta\Omega \lesssim \omega_l^{\text{sym}}$ . When  $|m|\Delta\Omega \gg \omega_l^{\text{sym}}$ , only prograde IGW near their critical layers are absorbed. An increase in  $\Delta\Omega$  leads to a shift of the retrograde (prograde) IGW that are absorbed toward lower (higher) frequencies; the asymmetry between prograde and retrograde IGW is thus accentuated.

#### B.4.5. Transport by IGW resulting from a balance between damping and driving

In the following, we will assume that  $\nu_p \ll \omega_{l=1}^{\text{sym}} \leq \omega_l^{\text{sym}}$  whatever  $l$ . Since  $\nu_p$  is chosen around  $\omega_c$ , this is verified in almost all the models considered in the main text, except maybe at the very beginning of the subgiant branch (see Figs. 1 and 7).

Sign of  $\dot{J}_w$ . Following Eq. (B.13), the angular momentum transport by IGW and its efficiency depends on the correlation between the wave excitation spectrum and the wave damping. Excitation models show that the wave spectrum at the top of the radiative zone,  $\mathcal{S}$  in Eq. (B.13), is decreasing with the wave frequency, whatever the generation mechanism (turbulent pressure or penetrative convection). When  $|m|\Delta\Omega \lesssim \omega_l^{\text{sym}}$  at given  $l$  and  $|m|$ , the retrograde IGW that are absorbed into a given layer of the helium core have lower frequencies than the prograde ones whose frequencies are always higher than  $\omega_l^{\text{sym}}$ . Given that  $\mathcal{S}$  is a decreasing function of  $\omega$ , they have higher amplitudes compared to prograde IGW. Since they carry negative angular momentum, the total deposit of angular momentum is negative. Moreover, even if  $|m|\Delta\Omega \ll \omega_l^{\text{sym}}$  and both opposite absorption peaks are in the vicinity of  $\omega_l^{\text{sym}}$ , the amplitude of the retrograde IGW that are absorbed remains much higher than the amplitude of the prograde ones. Indeed, the full width at half maximum of the absorption peaks is about  $0.6 \omega_l^{\text{sym}}$  (see Appendix B.3.2). Therefore, the separation in frequency between both prograde and retrograde peaks is large enough for the difference of amplitudes to remain important since the  $\mathcal{S}$  function sharply decreases in this range of frequency with  $\nu_p \ll \omega_l^{\text{sym}}$ . Finally, when  $|m|\Delta\Omega \gg \omega_l^{\text{sym}}$ , only the prograde IGW near their critical layers are absorbed into the medium. However, since these waves are such that  $\omega \sim |m|\Delta\Omega \gg \nu_p$  in this regime, the  $\mathcal{S}$  function drastically vanishes and their amplitude is quasi null, and so does their transport efficiency.

The transport of angular momentum near the hydrogen-burning shell is ensured only by retrograde wave components. Therefore, the net wave flux of angular momentum directed downwards is negative,  $\dot{J}_w \gtrsim 0$  in Eq. (1) and retrograde IGW tend to counter the contraction-driven spin up of the helium core, as expected.

Influence of  $\Delta\Omega$  on the transport by one wave component. At given  $l$  and  $|m|$ , the higher  $\Delta\Omega$ , the lower the frequencies of the retrograde IGW that efficiently deposit momentum provided that  $\omega_l^{\text{sym}} \gtrsim |m|\Delta\Omega$ , and the higher the frequencies of the prograde ones. Since the excitation wave spectrum is a decreasing function of frequency, an increase in  $\Delta\Omega$  leads to an increase in the amount of negative angular momentum absorbed into the medium. The effect on the rotation is thus more important.

At given  $l$  and  $|m|$ , the efficiency of the transport by retrograde IGW increases as the amplitude of the Doppler-shift increases while remaining lower than about  $\omega_l^{\text{sym}}$ .

Influence of  $\Delta\Omega$  on the whole spectrum. The previous scenario holds true if  $|m|\Delta\Omega$  remains lower than  $\omega_l^{\text{sym}}$ . Actually, to properly understand the influence of the differential rotation amplitude on the transport by IGW, we need to take the collective effect of the whole wave angular degrees  $l$  and azimuthal numbers such as  $1 \leq |m| \leq l$  into account, as well as their energy distribution represented by  $\mathcal{F}_{l,|m|}$ . We remind that the angular degree at the maximum of the  $\mathcal{F}_{l,|m|}$  function can be estimated by  $l_{\text{max}} \sim r_t/b$ . Following Table A.1,  $l_{\text{max}} \sim 20$  in the subgiant model used as example in this appendix. As an illustration, it is instructive to represent the sum of the damping terms over a few distinct values of  $l$ . Here, we consider only four angular degrees  $l = 1, 25, 100$  and  $400$ . The result is displayed in Fig. 3 as a function of  $\sigma$  and  $\chi_{|m|}$ . As already discussed in Appendix B.3.1, we retrieve that an increase in  $l$  results in a shift of the related damping pattern toward lower  $\chi_{|m|}$  values and higher frequencies. In the following discussion, we assume that  $v_p \ll \omega_{l=1}^{\text{sym}}$  and that the deposit of angular momentum is ensured only by retrograde IGW satisfying the absorption conditions, such as  $\tau \sim 1$  (which implies  $|m|\Delta\Omega \lesssim \omega_l^{\text{sym}}$ ) and  $\omega \gtrsim \omega_m^{\text{inf}}$ . As a result, following Eqs. (B.13) and (B.16), and using Eq. (B.23) with  $\tau \sim 1$ , the contribution of each of these components to the divergence of the wave flux is about proportional to the product  $\mathcal{F}_{l,m}\mathcal{S}(\omega)$ . Therefore, Fig. 3 makes us to consider three regimes classified by ascending value of  $\Delta\Omega$ :

1. *Very low- $\Delta\Omega$  regime:* The case  $|m|\Delta\Omega \sim \omega_l^{\text{sym}} \sim l^{3/4}\omega_{l=1}^{\text{sym}}$ , as described in Appendix B.4.4, can be satisfied (with  $|m| \leq l$ ) by angular degrees and azimuthal numbers such as  $l \geq |m| \gtrsim (\omega_{l=1}^{\text{sym}}/\Delta\Omega)^4$ . This also implies  $\omega_m^{\text{inf}} \approx \alpha|m|\Delta\Omega \sim \alpha l^{3/4}\omega_{l=1}^{\text{sym}}$ . Therefore, in this first regime, we assume that the amplitude of the differential rotation is so low that  $|m|\Delta\Omega \sim \omega_l^{\text{sym}}$  is only satisfied for very high values of  $l$  such as  $l \gg l_{\text{max}}$  and  $\omega_m^{\text{inf}} \gg \omega_{l=1}^{\text{sym}}$  (see for example  $l = 400$  in Fig. 3), that is

$$\Delta\Omega \ll \omega_{l=1}^{\text{sym}} \min\left(l_{\text{max}}^{-1/4}, \alpha^{1/3}\right). \quad (\text{B.39})$$

In turn, angular degrees such as  $l \lesssim (\omega_{l=1}^{\text{sym}}/\Delta\Omega)^4$  can satisfy only the case  $|m|\Delta\Omega \ll \omega_l^{\text{sym}}$  with a peak of absorption around the frequency  $\omega_l^{\text{sym}}$ .

On the one hand, since  $\mathcal{F}_{l,|m|}$  and  $\mathcal{S}$  sharply decrease beyond  $l_{\text{max}}$  and  $v_p$  respectively, the amplitude of the wave components satisfying  $|m|\Delta\Omega \sim \omega_l^{\text{sym}}$ , such as  $l \gg l_{\text{max}}$  and  $\omega_m^{\text{inf}} \gtrsim \omega_{l=1}^{\text{sym}} \gg v_p$  in this regime, as well as the conditions of absorption  $\tau \sim 1$  and  $\omega \gtrsim \omega_m^{\text{inf}}$ , is negligible compared to the low degrees  $l \sim 1$  satisfying  $|m|\Delta\Omega \ll \omega_l^{\text{sym}}$ ,  $\tau \sim 1$  and so  $\omega \sim \omega_{l=1}^{\text{sym}}$ .

On the other hand, among the other wave components satisfying  $|m|\Delta\Omega \ll \omega_l^{\text{sym}}$ , as well as  $\tau \sim 1$  with  $\omega \sim \omega_l^{\text{sym}}$ , the deposit of angular momentum into the medium is again mainly ensured by retrograde IGW with low angular degrees  $l \sim 1$

such as  $\omega \sim \omega_{l=1}^{\text{sym}}$  since the product  $\mathcal{F}_{l,|m|}\mathcal{S}(\omega_l^{\text{sym}})$  sharply increases as  $l$  decreases. Indeed, given that  $v_p \ll \omega_{l=1}^{\text{sym}} \leq \omega_l^{\text{sym}}$ , we can show for  $l \lesssim l_{\text{max}}$  that the decrease in  $\mathcal{F}_{l,|m|}$  as  $l$  decreases can be largely outweighed by the increase in  $\mathcal{S}$  evaluated at  $\omega \sim \omega_l^{\text{sym}}$ .

Therefore, low angular degrees  $l \sim 1$  with frequencies around  $\omega \sim \omega_{l=1}^{\text{sym}}$  provide, in this regime, the main contribution to the total divergence of the wave flux,  $J_w$ .

2. *Moderate- $\Delta\Omega$  regime:* As  $\Delta\Omega$  increases,  $|m|\Delta\Omega \sim \omega_l^{\text{sym}} \sim l^{3/4}\omega_{l=1}^{\text{sym}}$  with  $|m| \leq l$  can be satisfied by lower and lower azimuthal numbers at a given  $l$ , as well as by lower and lower angular degrees with lower and lower cut-off frequencies since  $\omega_m^{\text{inf}} \approx \alpha|m|\Delta\Omega \sim \alpha l^{3/4}\omega_{l=1}^{\text{sym}}$  in this case.

In a first step, we consider only the wave components such as  $\omega \gtrsim v_p$  or  $l \gtrsim l_{\text{max}}$ . Among these wave components satisfying  $|m|\Delta\Omega \sim \omega_l^{\text{sym}}$ ,  $\tau \sim 1$  and  $\omega_m^{\text{inf}} \lesssim \omega$ , the lowest angular degrees with  $|m| \sim l$  and  $\omega \sim \omega_l^{\text{inf}}$  have the highest amplitude. Indeed, on the one hand,  $\mathcal{S}$  decreases with frequency, so that the waves with frequencies  $\omega \sim \omega_m^{\text{inf}}$  have the largest amplitude at given  $l$  and  $|m|$ . On the other hand, the product  $\mathcal{F}_{l,|m|}\mathcal{S}(\omega_m^{\text{inf}})$  with  $\omega_m^{\text{inf}} \sim \alpha l^{3/4}\omega_{l=1}^{\text{sym}}$  sharply increases as  $l$  decreases if  $\omega \gtrsim v_p$  or  $l \gtrsim l_{\text{max}}$ , since the variations in the Gaussian terms of  $\mathcal{F}_{l,|m|}$  or  $\mathcal{S}$  predominate. Hence, the lowest degrees among the components satisfying  $|m|\Delta\Omega \sim \omega_l^{\text{sym}}$ , so with  $|m| \sim l$ , have the highest amplitude. Therefore, when  $\Delta\Omega$  becomes large enough, the conditions  $l\Delta\Omega \sim \omega_l^{\text{sym}}$ ,  $\tau \sim 1$  and  $\omega \sim \omega_l^{\text{inf}}$  can be satisfied by angular degrees such as the product  $\mathcal{F}_{l,l}\mathcal{S}(\omega_l^{\text{inf}}) \gtrsim \mathcal{F}_{1,1}\mathcal{S}(\omega_{l=1}^{\text{sym}})$ , so that they have a higher amplitude than the components  $l \sim 1$  with  $\omega \sim \omega_{l=1}^{\text{sym}}$ . These components thus start giving the most effective contribution to the angular momentum transport: this corresponds to the transition from the very low- $\Delta\Omega$  to the moderate- $\Delta\Omega$  regime. Using the inequality  $\mathcal{F}_{l,l}\mathcal{S}(\omega_l^{\text{inf}}) \gtrsim \mathcal{F}_{1,1}\mathcal{S}(\omega_{l=1}^{\text{sym}})$  with  $v_p \ll \omega_{l=1}^{\text{inf}}$ , we find that this regime corresponds to values of  $\Delta\Omega$  such as<sup>3</sup>

$$\omega_{l=1}^{\text{sym}} \max\left[\left(\frac{v_p}{\omega_{l=1}^{\text{sym}} l_{\text{max}}}\right)^{1/4}, \alpha^{1/3}\right] \lesssim \Delta\Omega \lesssim \omega_{l=1}^{\text{sym}}, \quad (\text{B.40})$$

with the upper limit obtained in the limiting case where the conditions  $l\Delta\Omega \sim \omega_l^{\text{sym}}$  is satisfied for  $l = 1$ . In this regime, with in addition the condition  $\omega \gtrsim v_p$  or  $l \gtrsim l_{\text{max}}$ , the transport of angular momentum is thus ensured by retrograde IGW such as

$$|m| \sim l, \quad \omega \sim \omega_l^{\text{inf}} \sim \alpha l^{3/4}\omega_{l=1}^{\text{sym}}, \quad l \sim \left(\frac{\omega_{l=1}^{\text{sym}}}{\Delta\Omega}\right)^4.$$

In this case, a gradual increase in  $\Delta\Omega$  extends the domain of the  $(l, \omega)$  plan satisfying the conditions of absorption toward lower and lower angular degrees and wave frequencies. Therefore, the sum in Eq. (B.13) as well as the total amount of angular momentum deposited into the medium increases since the product  $\mathcal{F}_{l,l}\mathcal{S}(\omega_l^{\text{inf}})$  increases as  $l$  decreases in this case.

In a second step, we consider only the wave components such as  $\omega \lesssim v_p$  and  $l \lesssim l_{\text{max}}$  (see for example  $l = 1$  in Fig. 3). These components can satisfy the case  $|m|\Delta\Omega \sim \omega_l^{\text{sym}}$  as soon as<sup>4</sup>

$$\omega_{l=1}^{\text{sym}} \max\left[l_{\text{max}}^{-1/4}, \left(\frac{\omega_{l=1}^{\text{sym}} \alpha}{v_p}\right)^{1/3}\right] \lesssim \Delta\Omega. \quad (\text{B.41})$$

<sup>3</sup> We also used the relations  $\omega \sim \alpha l^{3/4}\omega_{l=1}^{\text{sym}}$  and  $l \sim (\omega_{l=1}^{\text{sym}}/\Delta\Omega)^4$  (obtained with  $|m| \sim l$ ).

<sup>4</sup> We note that since  $v_p \ll \omega_{l=1}^{\text{sym}}$ , Eq. (B.41) is included in Eq. (B.40).

When  $l \lesssim l_{\max}$  and  $\omega \lesssim v_p$ , the product  $\mathcal{F}_{l,m}\mathcal{S}(\omega_m^{\text{inf}})$  decreases as  $l$  decreases since the decrease in the quadratic term of  $\mathcal{F}_{l,m}$  predominates. Therefore, this time, the wave components with the highest  $l$  satisfying  $\tau \sim 1$ ,  $|m|\Delta\Omega \sim \omega_l^{\text{sym}}$  and  $\omega \sim \omega_m^{\text{inf}} \sim \alpha l^{3/4} \omega_{l=1}^{\text{sym}}$ , with  $|m| \leq l$ , are expected to keep the highest amplitude as  $\Delta\Omega$  decreases. Under the condition  $l \lesssim l_{\max}$  and  $\omega \lesssim v_p$ , the angular momentum transport is then ensured by wave components such as

$$\omega \sim \min \left[ v_p, \alpha l_{\max}^{3/4} \omega_{l=1}^{\text{sym}} \right] \text{ and } l \sim \min \left[ (v_p / \alpha \omega_{l=1}^{\text{sym}})^{4/3}, l_{\max} \right].$$

In this case, the amount of angular momentum deposited into the medium must remain almost constant as  $\Delta\Omega$  decreases. In summary, the transition from the very low- $\Delta\Omega$  to the moderate- $\Delta\Omega$  regime is associated with an increase in the angular degrees of IGW that mostly contribute to the transport. Their angular degrees are such as

$$l \sim \max \left\{ \min \left[ \left( \frac{v_p}{\alpha \omega_{l=1}^{\text{sym}}} \right)^{4/3}, l_{\max} \right], \left( \frac{\omega_{l=1}^{\text{sym}}}{\Delta\Omega} \right)^4 \right\}, \quad (\text{B.42})$$

and their frequencies are such as

$$\omega \sim \max \left\{ \min \left[ v_p, \alpha l_{\max}^{3/4} \omega_{l=1}^{\text{sym}} \right], \alpha \omega_{l=1}^{\text{sym}} \left( \frac{\omega_{l=1}^{\text{sym}}}{\Delta\Omega} \right)^3 \right\}. \quad (\text{B.43})$$

In this regime, an increase in  $\Delta\Omega$  results in an increase in the transport efficiency through the contribution of wave components with lower and lower frequencies and angular degrees.

### 3. Very high- $\Delta\Omega$ regime: As $\Delta\Omega$ becomes such as

$$\omega_{l=1}^{\text{sym}} \gg \Delta\Omega \quad (\text{B.44})$$

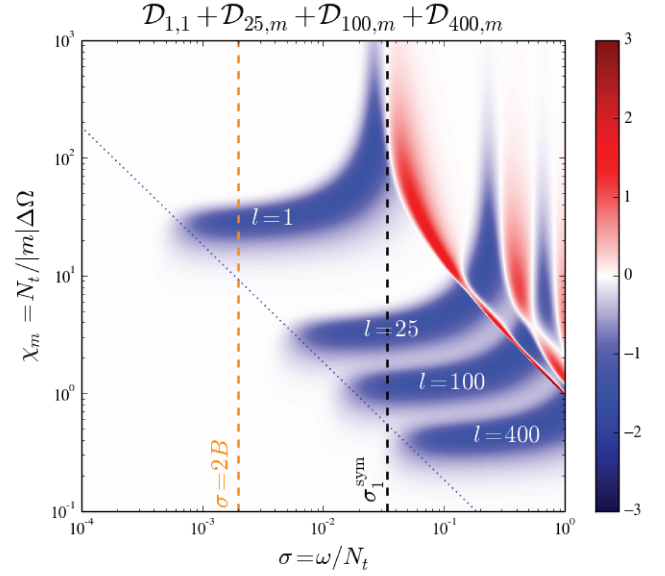
and keeps on increasing, more and more wave components start satisfying the case  $|m|\Delta\Omega \gg \omega_l^{\text{sym}}$  and thus cannot be absorbed anymore into the medium. The conditions of absorption are thus satisfied in a smaller and smaller domain in the  $(l, \omega)$  plan reduced to higher and higher degrees and higher and higher frequencies, with  $|m| \lesssim l$  since  $l\Delta\Omega \sim \omega_l^{\text{sym}}$  has already been satisfied for a lower value of  $\Delta\Omega$ .

Therefore, as  $\Delta\Omega$  becomes such as  $\Delta\Omega \gg \omega_{l=1}^{\text{sym}}$  and keeps on increasing,  $J_w$  and the efficiency of the transport by IGW gradually decreases.

The previous analysis is sufficient to qualitatively understand the influence of  $\Delta\Omega$  on the efficiency of the angular momentum transport by IGW as well as the features of the most efficient wave components. A quantitative estimate taking the whole spectrum over the frequency, the angular degrees, as well as the sum over azimuthal numbers into account requires a numerical computation, as done in the main text. For all the considered models and values of the differential rotation amplitude, we found that only the low- $\Delta\Omega$  and moderate- $\Delta\Omega$  regimes were reached in this work and that their above qualitative description agrees with numerical results. In both regimes, an increase in  $\Delta\Omega$  leads to an increase in the efficiency of the transport by IGW in the helium core, as observed in Sect. 4.1.

#### 2.4.6. Absorbed wave components for a differential rotation amplitude close to the threshold

Using the value of the threshold amplitude for the differential rotation obtained with a numerical computation, we can crudely



**Fig. 3.** Sum of the dimensionless damping terms defined by Eq. (B.16) over  $l = 1, 25, 100$  and  $400$ , as a function of  $\chi_{|m|}$  and  $\sigma = \omega/N_t$ . The legend is the same as in the top panel of Fig. B.2. The dotted line represents  $\omega_m^{\text{inf}}/N_t$  as defined in Eq. (B.37). The angular degree associated with each pattern is indicated.

estimate the characteristics of the wave components that participate the most efficiently to the angular momentum transport into the helium core. As an example, we consider again the subgiant model whose parameters are provided by Table A.1. For this model, computations presented in the main text give  $\Delta\Omega_{\text{th}} \approx 5 \mu\text{rad s}^{-1}$ . We supposed that this model is in the moderate- $\Delta\Omega$  regime (see Appendix B.4.5) and that the absorbed waves have frequencies such as  $\omega \gtrsim v_p$ . Therefore, we can first estimate the angular degrees of IGW that deposit angular momentum near the hydrogen burning shell. In this regime (with  $\omega \gtrsim v_p$ ), the most efficiently absorbed wave components must satisfy  $\tau \sim 1$ ,  $|m| \sim l$  and  $\omega \sim \omega_l^{\text{inf}}$ . Given that  $\omega_l^{\text{inf}} \ll \omega_l^{\text{sym}}$  following the point 4 in Appendix B.4.4, we must have  $\omega \ll l\Delta\Omega$  to satisfy  $\tau \sim 1$ . Thus, we obtain using the condition  $\tau \sim 1$

$$l \sim \int_r^{r_t} \frac{KN^3}{\Delta\Omega_{\text{th}}^4} \frac{dr}{r^3} \sim \frac{K_t N_t^3}{4r_t^2 \Delta\Omega_{\text{th}}^4} \left( \frac{r_t}{r_{\text{HS}}} \right)^4 \sim 60. \quad (\text{B.45})$$

Using this value, the low cut-off frequency defined by Eq. (B.37) is then equal to about  $\omega_l^{\text{inf}} = 6 \mu\text{rad s}^{-1} \gg v_p$  and so is representative of the wave frequency  $\omega$  that deposits the more angular momentum into the medium. To conclude, we verify a posteriori the validity of the assumptions of the moderate- $\Delta\Omega$  regime given in Eq. (B.40) and  $\omega \gtrsim v_p$  for  $\Delta\Omega = \Delta\Omega_{\text{th}}$  since  $\omega_{l=1}^{\text{sym}} \sim 18 \mu\text{rad s}^{-1}$  and  $\alpha^{1/3} \sim v_p / l_{\max} \omega_{l=1}^{\text{sym}} \sim 0.2$  (using Table 1). We checked that these values of  $l$  and  $\omega$  are in good agreement with the numerical computation for the considered subgiant model.

This emphasizes that high- $l$ , high- $|m|$  retrograde IGW with  $\omega \gg v_p$  can be responsible for the deposit of angular momentum into the helium core of the low-mass stars on the subgiant and early red giant branch.

#### 2.4.7. Influence of the damping magnitude

The magnitude of the damping is represented by the ratio  $[l(l+1)]^{3/2} KN^3 / r^3$  (see Appendix A). If this latter increases

at a given value of  $|m|\Delta\Omega$ , the wave frequencies satisfying the absorption conditions will increase for both retrograde and prograde IGW. The part of the wave spectrum that is susceptible to locally affect the rotation in a given mass shell will be thus shifted toward higher frequencies. Since the wave excitation spectrum is a decreasing function of  $\omega$ , the amplitude of the wave components absorbed into the medium and the transport efficiency ( $J_w$ ) will decrease. Nevertheless, we have shown in Appendix B.4.4 that, for retrograde IGW at given  $l$ ,  $|m|$  and  $\omega$ , an increase in the magnitude of the damping can be counterbalanced by an increase in the amplitude of the differential rotation (provided also that  $|m|\Delta\Omega \lesssim \omega_l^{\text{sym}}$  and  $\omega \gtrsim \omega_m^{\text{inf}}$ ). Thus, for similar wave excitation spectra  $\mathcal{F}_{l,|m|}$  and  $\mathcal{S}$  in Eq. (B.13) (i.e., similar plume parameters), the higher the magnitude of the damping, the higher the value of  $\Delta\Omega$  required to conserve the same value of  $J_w$  and thus of  $t_w$  in Eq. (4) near the hydrogen-burning shell. For the  $1 M_\odot$  evolutionary sequence considered in this work,  $t_{\text{cont}}$  remains quasi constant around 0.5 Gyr and the radius of the hydrogen-burning shell only slightly changes from the subgiant to the early red giant branch (see Fig. 3). Nevertheless, Fig. 7 show that  $\nu_p$  increases by about a factor of two and that  $l_{\text{max}}$  decreases by about a factor of ten. If we assume that the magnitude of the radiative damping does not change over time, the results obtained in Sect. 4.2 show that such variations in  $\nu_p$  and  $l_{\text{max}}$  cannot explain the increase in the value of  $\Delta\Omega$  by about a factor of five that is required to conserve  $t_w \sim t_{\text{cont}}$  in the helium core during this time span (see Figs. 4 and 6). Therefore, we conclude that an increase in the magnitude of the radiative damping is needed to explain such a trend. This increase is well observed in stellar models (see Appendix A).

The increase in the threshold value for the differential rotation amplitude over time, as observed in Fig. 6, mainly results from the increase in the magnitude of the radiative damping along the evolution.

#### 2.4.8. Sensitivity of $J_w$ to the differential rotation amplitude

The high sensitivity of the wave-related timescale to  $\Delta\Omega$  observed in Sect. 4 can be explained by two main points. First,

since the wave radiative damping depends on the wave intrinsic frequency to the power minus four, the full width at half maximum of the absorption peaks for given values of  $l$  and  $|m|$  is quite low so that they remain confined around the wave frequency satisfying  $\tau = 1$ . Second, a small change in  $\Delta\Omega$  can lead to a huge variation in the wave spectrum functions evaluated at the maximum of absorption. Indeed, guided by numerical computations and the analysis in Appendix 2.4.6, we can assume to be in the moderate- $\Delta\Omega$  regime and that the absorbed wave components are such as  $\omega \gtrsim \nu_p$  or  $l \gtrsim l_{\text{max}}$ . In this regime, IGW that the most efficiently participate to the transport in a given layer of radius  $r$  satisfy  $\tau \sim 1$ ,  $|m| \sim l$  and  $\omega \sim \omega_l^{\text{inf}} \sim \alpha l \Delta\Omega$  (see Appendix B.4.5). This also implies  $l \Delta\Omega \sim \omega_l^{\text{sym}}$  or equivalently,  $l^{1/4} \Delta\Omega \sim \omega_{l=1}^{\text{sym}}$ . Hence, it is possible to express  $\omega$  and  $l$  of the absorbed wave components as a function of  $\Delta\Omega$  only to obtain

$$\omega \sim \alpha \omega_{l=1}^{\text{sym}} \left( \frac{\omega_{l=1}^{\text{sym}}}{\Delta\Omega} \right)^3 \quad (\text{B.46})$$

$$l \sim \left( \frac{\omega_{l=1}^{\text{sym}}}{\Delta\Omega} \right)^4. \quad (\text{B.47})$$

Therefore, the frequency  $\omega$  and the degree  $l$  of the most efficiently absorbed components are quite sensitive to the value of  $\Delta\Omega$ . A small relative variation in  $\Delta\Omega$  thus can lead to a huge variation in the  $\mathcal{S}$  (or  $\mathcal{F}_{l,|m|}$ ) function at the maximum of absorption if  $\omega \gtrsim \nu_p$  (or  $l \gtrsim l_{\text{max}}$ ) since it depends on  $\exp[-\omega^2/4\nu_p^2]$  (or  $\exp[-l^2/2l_{\text{max}}^2]$ ). Equivalently, since the sensitivity of  $t_w$  is linked to  $\mathcal{S}$  and  $\mathcal{F}_{l,|m|}$ , we deduce that a small variation in  $\nu_p$  or  $b$  at fixed  $\Delta\Omega$  must result in a huge variation in  $t_w$ . This is confirmed in Fig. 5. For this model, we observe that the effect of a variation in  $\nu_p$  is much larger than the one induced by a variation in  $b$ . This is expected since  $\omega \gg \nu_p$  and  $l \sim l_{\text{max}}$  for the most efficient wave components (see Appendix 2.4.6) so that the variation in  $\mathcal{S}$  is larger.

Therefore, a small increase in  $\Delta\Omega$  can result in a huge increase in  $J_w$  and so in the efficiency of the angular momentum transport by IGW in the helium core.

## Conclusions de la partie II

Les observations sismiques montrent qu'un processus de transport de moment cinétique doit être invoqué pour freiner l'augmentation du taux de rotation du cœur en contraction dans les étoiles de faible masse, et ce de la séquence principale jusqu'au clump. Les ondes internes de gravité sont connues depuis longtemps pour être capables de transporter du moment cinétique dans les intérieurs radiatifs. Mon travail a consisté à étudier l'efficacité du transport de moment cinétique par ces ondes dans ces étoiles.

L'efficacité du transport de moment cinétique dépend de l'amplitude des ondes. Dans une première étape, je me suis donc intéressé aux processus d'excitation des ondes internes de gravité. Alors que les mécanismes de forçage habituellement considérés font appel à la pression turbulente dans la zone convective, des simulations numériques et des études géophysiques montrent que les ondes de gravité peuvent aussi être générées par la pénétration de panaches convectifs à l'interface entre la région radiative et la région convective. J'ai donc développé un modèle d'excitation en considérant la pression dynamique exercée par un ensemble de panaches incohérents entre eux à la base de la zone convective comme terme source dans l'équation d'onde. Ceci m'a permis de remonter à une expression analytique pour la densité spectrale du flux d'énergie des ondes à la base de la zone convective. L'effet de la transition du gradient de température d'une valeur adiabatique à une valeur radiative dans cette région a été pris en compte en considérant la distance de la transition comme un paramètre du modèle. Dans le cas du Soleil, j'ai montré que l'excitation des ondes internes de gravité par la pénétration de panaches convectifs est plus de 5 fois supérieure à l'excitation par la pression turbulente. Ceci est en partie dû au fait que la vitesse des panaches à la base de la zone convective est près de dix fois supérieure à la vitesse des tourbillons convectifs donnée par la MLT. Ce résultat démontre la nécessité de prendre en compte ce processus. De plus, le spectre d'énergie des ondes ainsi généré a des caractéristiques différentes du spectre généré par les tourbillons convectifs. En particulier, l'excitation par ce mécanisme est maximale pour des hauts degrés angulaires, bien plus élevés que pour l'excitation par les tourbillons convectifs. Cela vient du fait que la taille des panaches est beaucoup plus petite que celle des plus gros tourbillons convectifs à la base de la zone convective. Enfin, j'ai montré qu'une transition douce pour le gradient de température à la base de la zone convective augmente significativement l'énergie des ondes émises à la base de la zone convective. Toutes ces propriétés peuvent notamment avoir des conséquences sur le transport de moment cinétique par les ondes.

Ainsi, dans une seconde étape, j'ai été amené à estimer l'efficacité du transport de moment cinétique par ces ondes au cours de l'évolution, de la séquence principale jusqu'au début de l'ascension de la branche des géantes rouges. L'étude a consisté à comparer l'échelle de temps associée au transport par les ondes au temps caractéristique d'évolution stellaire à travers la zone radiative pour différents modèles. Une telle étude représente une première étape dans l'estimation de l'efficacité du transport par les ondes. Dans le cas du Soleil, il ressort de cette étude que les ondes générées par la pénétration convective sont capables de modifier le profil de rotation interne, et ce plus efficacement que les ondes générées par la pression turbulente. De plus, le degré de rotation différentielle entre la base de la zone convective et le centre s'avère avoir un effet important sur l'efficacité des ondes. En effet, plus la rotation différentielle est forte, plus les échelles de temps sur lesquelles les ondes peuvent ralentir la rotation interne sont courtes. Dans les étoiles géantes rouges évoluées, ces ondes sont incapables de contrebalancer l'augmentation de la rotation interne sous l'effet de la contrac-



tion du cœur pour des valeurs du taux de rotation différentielle inférieures à la limite supérieure donnée par les observations. En effet, dans ces étoiles, l'amortissement radiatif est trop fort pour permettre à ces ondes d'atteindre le cœur d'hélium et d'y extraire du moment cinétique, en accord avec les conclusions de Fuller *et al.* (2014) dans le cas des ondes générées par la pression turbulente. Dans ces étoiles, les ondes internes de gravité sont donc incapables, par elles-mêmes, d'expliquer les faibles taux de rotation observés. Au contraire, dans les étoiles sous-géantes et jeunes géantes rouges, le transport de moment cinétique par les ondes générées via la pénétration convective est capable de contrer l'accélération de la rotation due à la contraction des couches centrales, et ce plus efficacement que les ondes générées par la pression turbulente. Ceci est possible lorsque la valeur du taux de rotation différentielle est supérieure à un seuil. La valeur seuil dépend du stade évolutif et est en bon accord avec les observations par Deheuvels *et al.* (2014). De telles similitudes peuvent être interprétées comme résultantes d'un mécanisme de régulation contrôlé par les ondes internes de gravité. Dans ce scénario, la contraction des couches centrales, induisant une augmentation de la vitesse de rotation, et le transport de moment cinétique associé aux ondes, qui tend à freiner la rotation, mène à un état stationnaire dans lequel la rotation différentielle doit rester proche de la valeur seuil au cours de l'évolution sur la branche des sous-géantes. De tels résultats soulignent le rôle important que les ondes internes de gravité générées par la pénétration convective peuvent jouer dans le problème de la redistribution du moment cinétique et démontrent qu'elles doivent être prises en compte de la séquence principale jusqu'au début de la branche des géantes rouges.

L'étude réalisée dans cette première partie de ma thèse appelle à des travaux à un degré de complexité supérieur. La prochaine étape consiste à implémenter le transport de moment cinétique par ces ondes dans un code d'évolution stellaire. Ceci permettra de calculer l'évolution de la rotation interne sous l'effet du transport par les ondes en prenant en compte l'interaction avec les autres processus de transport (circulation méridienne, diffusion turbulente, ...) et ainsi d'évaluer la pertinence du mécanisme de régulation par les ondes qui a été proposé. A plus long terme, la modélisation du transport de moment cinétique devra aussi être améliorée en allant au-delà des hypothèses simplificatrices utilisées dans cette étude. La description des panaches convectifs et du processus de pénétration à la base de la zone convective nécessite de plus une meilleure modélisation. On peut par exemple noter l'effet de la sphéricité de l'enveloppe convective étendue des étoiles évoluées ou l'influence du flot montant sur la vitesse des panaches à l'entrée de la zone de pénétration, leur taille et leur distribution. Des simulations numériques de convection dans des régimes à partir desquels une extrapolation vers les régimes stellaires serait possible pourraient aider à répondre à ces questions et permettraient de plus à contraindre les paramètres du modèle, comme la valeur du temps de vie du panache dans la zone de pénétration pour laquelle de fortes incertitudes demeurent. Enfin, des efforts devront être faits pour améliorer la description de la propagation des ondes dans les zones radiatives. L'effet de la force centrifuge et du gradient de rotation devra être considéré (e.g. Mathis 2009), et l'influence des couches critiques devra être étudiée (e.g., Alvan *et al.* 2013). Nous reviendrons plus précisément sur ces points lors des perspectives générales données dans la partie IV.

Troisième partie

Diagnostics sismiques par les modes  
mixtes



## Chapitre 8

# Modes mixtes, paramètres associés et le cas particulier dipolaire

### Sommaire

---

<b>8.1</b>	<b>Relation de phase dans l'approximation asymptotique . . . . .</b>	<b>180</b>
8.1.1	Diagramme de propagation . . . . .	180
8.1.2	Relation de phase et structure modale . . . . .	180
<b>8.2</b>	<b>Informations sur le cœur et l'enveloppe des étoiles évoluées . . . . .</b>	<b>184</b>
8.2.1	Indication sur le stade évolutif . . . . .	184
8.2.2	Estimation de la rotation moyenne . . . . .	186
<b>8.3</b>	<b>Cas particuliers des oscillations dipolaires <math>l = 1</math> . . . . .</b>	<b>187</b>
8.3.1	Structure Hamiltonienne des oscillations linéaires adiabatiques . . . . .	187
8.3.2	Intégrale première pour les modes dipolaires . . . . .	188
8.3.3	Forme canonique et équation d'oscillation du second ordre . . . . .	190
8.3.4	Influence de la perturbation du potentiel gravitationnel sur les modes . . .	190
<b>8.4</b>	<b>Problématique de la partie III . . . . .</b>	<b>193</b>

---

Dans cette partie, nous nous intéressons aux diagnostics sismiques par les modes mixtes. La détection de modes mixtes dans de nombreuses étoiles évoluées grâce aux données recueillies par les missions spatiales CoRoT et *Kepler* s'est avérée riche en enseignements (e.g., Chaplin & Miglio 2013). Ces modes d'oscillation s'établissent dans deux cavités résonantes distinctes (i.e., l'enveloppe convective et le cœur radiatif), couplées par une zone intermédiaire. Les caractéristiques de leur spectre portent donc à la fois la signature de l'enveloppe externe et celle des régions centrales. Les diagnostics sismiques servent alors à faire le lien entre les fréquences propres observées et les propriétés internes des étoiles. L'observation de modes mixtes a permis, entre autres, de déterminer sans ambiguïté le stade évolutif des étoiles sur la branche des géantes rouges et le clump (e.g., Bedding *et al.* 2011; Mosser *et al.* 2012c), et de sonder la rotation moyenne de leur cœur radiatif (e.g., Mosser *et al.* 2012b; Deheuvels *et al.* 2012, 2014; Gehan *et al.* 2017). Ces informations sont non seulement importantes pour l'étude des étoiles géantes rouges en particulier, mais aussi pour l'étude de l'évolution des étoiles de faible masse en général. En effet, la structure interne de ces étoiles témoigne d'une part de leur passé, et d'autre part, ces observations servent de contraintes sur les configurations initiales dans la modélisation des stades évolutifs plus avancés (e.g., Montalbán *et al.* 2013; Cantiello *et al.* 2014). Dans ce chapitre, les propriétés des modes mixtes seront présentées. La relation de phase asymptotique usuelle, c'est-à-dire la condition de résonance vérifiée par les modes propres et imposée par les conditions aux limites, sera introduite. La structure de leur spectre sera brièvement décrite et le potentiel des modes mixtes à sonder les couches profondes des étoiles sera souligné à travers deux exemples précis. Ensuite, le cas particulier des modes mixtes dipolaires ( $l = 1$ ) sera abordé. Les modes mixtes dipolaires correspondent aux modes d'oscillation, parmi les

modes qui sont les plus sensibles aux propriétés des couches profondes, avec la plus grande amplitude dans le spectre (Dupret *et al.* 2009). Néanmoins, ils nécessitent d’aller au-delà de l’approximation de Cowling. Ils méritent donc une attention et un traitement théorique particulier. Les travaux de Takata (2005, 2006a,b) fournissent un formalisme qui permet de prendre en compte la perturbation du potentiel gravitationnel dans les équations d’oscillation tout en laissant le problème soluble analytiquement. Ce formalisme sera présenté en détail dans l’avant-dernière section de ce chapitre. Enfin, la problématique de cette partie sera posée dans la dernière section.

## 8.1 Relation de phase dans l’approximation asymptotique

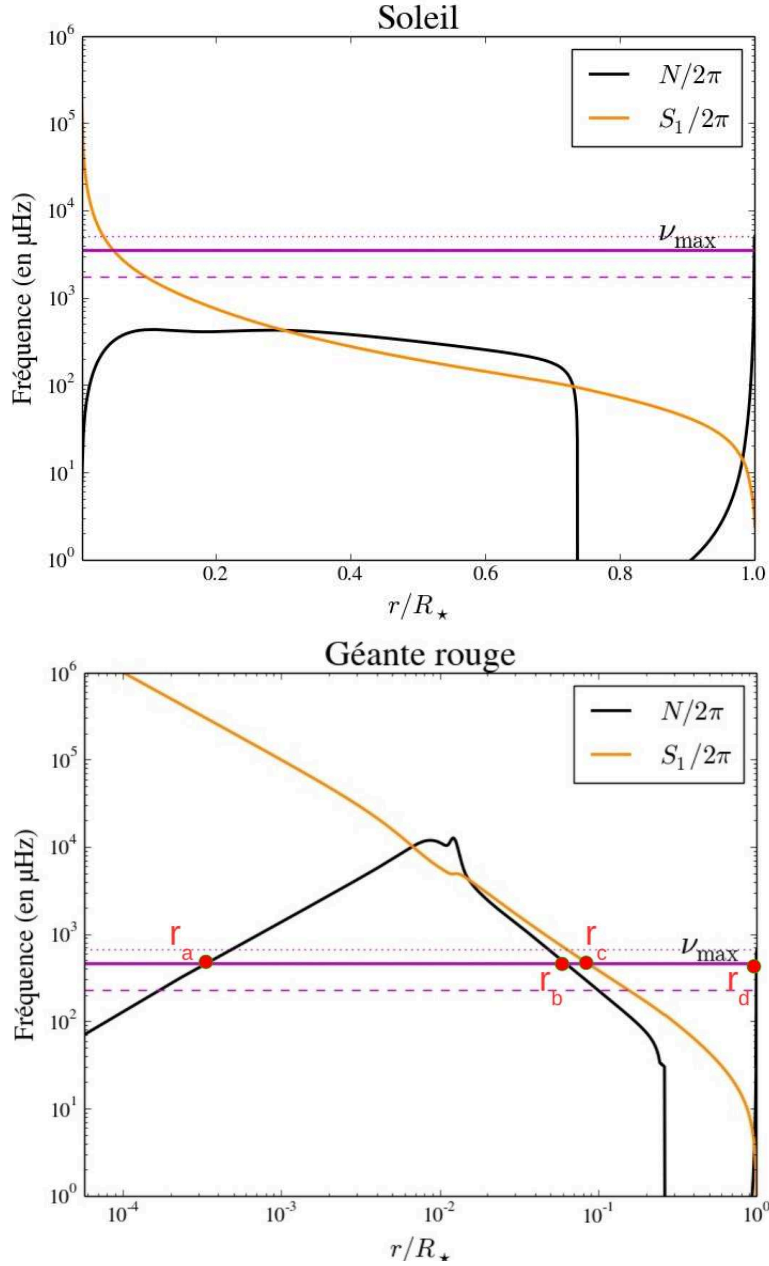
### 8.1.1 Diagramme de propagation

Les modes mixtes exhibent par définition deux types d’oscillation : ils possèdent un caractère de modes de gravité dans la cavité interne, c’est-à-dire où  $\sigma \leq S_l, N$ , et un caractère de mode de pression dans l’enveloppe externe de l’étoile, c’est-à-dire où  $\sigma \geq S_l, N$ <sup>1</sup>. Un mode est donc mixte si et seulement si sa fréquence d’oscillation et la structure de l’étoile le permettent. Entre ces deux régions, les modes ne sont plus oscillants et se comportent comme la somme de deux fonctions exponentielles, respectivement croissantes et décroissantes avec la profondeur. De façon similaire à l’effet tunnel en physique quantique, une onde incidente sur cette zone intermédiaire est à la fois réfléchi vers sa cavité d’origine et transmise vers l’autre cavité. Cette zone assure donc le couplage des ondes entre la région interne et l’enveloppe externe. Un tel couplage entre les deux cavités est structurellement possible aussi bien dans une étoile de la séquence principale que dans une étoile géante rouge (voir FIGURE 8.1). Néanmoins, une autre condition pour que ces modes soient observables est qu’ils soient efficacement excités. Sur la FIGURE 8.1, on voit que l’intervalle de fréquences efficacement excité par la convection turbulente (autour de  $\nu_{\max}$ ) ne permet pas de coupler les deux cavités entre elles dans le Soleil actuel. Les modes observés dans le cas solaire sont donc des modes de pression purs. Dans les géantes rouges, la situation est différente. En effet, durant l’évolution sur la post-séquence principale, l’enveloppe des étoiles se dilate, leur température effective diminue et leur luminosité augmente. D’après la loi de Stefan-Boltzmann donnée dans Eq. (1.19), cela signifie que la température effective diminue moins vite que  $1/\sqrt{R_\star}$ . En conséquence, la fréquence au maximum de puissance d’oscillation,  $\nu_{\max} \propto M_\star/R_\star^2\sqrt{T_{\text{eff}}}$ , diminue au cours de l’évolution sur la post-séquence principale. En parallèle, la valeur maximale de la fréquence de Brunt-Väisälä augmente puisque le cœur d’hélium se contracte tout en gagnant en masse. La combinaison de ces changements structuraux et des caractéristiques de l’excitation stochastique autorise l’établissement de modes mixtes dans les étoiles évoluées. Dans la suite, les propriétés asymptotiques des modes mixtes sont présentées, et on note  $r_a$  et  $r_b$  les deux points tournants internes, et  $r_c$  et  $r_d$  les deux points tournants externes (voir FIGURE 8.1).

### 8.1.2 Relation de phase et structure modale

**Cas général.** Dans le cas général, la situation est similaire à la représentation schématique donnée sur la FIGURE 2.5 en substituant la zone où existe un fort gradient des quantités à l’équilibre (ou *glitch*) par la zone évanescente. La cavité de résonance des modes mixtes est donc équivalente dans l’approximation asymptotique à deux cavités résonantes  $P$  et  $G$  dans lesquelles les solutions peuvent s’exprimer sous forme d’ondes planes, séparées entre elles par une zone évanescente caractérisée par un coefficient de réflexion de module  $R$  et de phase  $\delta$ , et par un coefficient de transmission de module  $T$  et de phase  $\gamma$ . La relation de phase, ou condition de résonance, est alors donnée par une relation

1. Le décalage de la fréquence intrinsèque d’une onde sous l’effet de la rotation est négligé dans cette partie (i.e.,  $\hat{\sigma} \approx \sigma$ ). Cela est justifié puisque les fréquences d’oscillation des modes sont très supérieures aux fréquences de rotation interne des étoiles qui sont considérées ici.



**FIGURE 8.1:** Profil des fréquences de Brunt-Väisälä et de Lamb pour  $l = 1$  dans deux modèles de  $1M_{\odot}$  représentant respectivement le Soleil actuel et le Soleil lors du début de son ascension de la branche des géantes rouges (avec  $\log T_{\text{eff}} = 3.68$  et  $\log L/L_{\odot} = 0.575$ ). Les lignes horizontales magenta représentent l'intervalle de fréquences dans lequel les modes sont efficacement excités par la convection. La ligne continue symbolise la valeur de la fréquence au maximum de puissance d'oscillation,  $\nu_{\text{max}}$ , qui a été déterminée à l'aide de la relation d'échelle donnée dans Eq. (2.83), redimensionnée par les valeurs solaires. La ligne discontinue représente la moitié de la valeur de  $\nu_{\text{max}}$ . La ligne pointillée indique la valeur de la fréquence de coupure en surface. Noter la différence d'échelle en abscisse entre les deux modèles. Pour le modèle de géante rouge, les points rouges symbolisent les quatre points tournants d'un mode mixte de fréquence proche de  $\nu_{\text{max}}$ .

similaire à Eq. (2.97), en accord avec les travaux de Takata (2016b), c'est-à-dire

$$\cot(\Xi_G) \tan(\Xi_P) = q, \quad (8.1)$$

où l'expression du facteur de couplage dans le cas général est donnée par (Takata 2016b)

$$q = \frac{1 - R}{1 + R}, \quad (8.2)$$

et où  $\Xi_G$  et  $\Xi_P$  sont des termes de phases qui dépendent de l'intégrale du nombre d'onde dans les cavités  $G$  et  $P$  respectivement, et des déphasages introduits aux quatre points tournants.

**Hypothèse d'un faible couplage.** Initialement, Shibahashi (1979) a dérivé une expression asymptotique pour la relation de phase des modes mixtes dans le cas où le couplage entre les deux cavités est faible. En d'autres mots, la zone évanescente est supposée assez large pour que les deux points tournants intermédiaires  $r_b$  et  $r_c$  puissent être traités individuellement. La méthode utilisée par les auteurs est similaire à celle présentée dans la Section 2.2.2. Les conditions limites au centre et à la surface sont supposées être nulles. La solution issue de  $r_a$  est reliée asymptotiquement à la solution issue de  $r_b$  au milieu de la cavité  $G$ . La solution issue de  $r_b$  est reliée asymptotiquement à celle issue de  $r_c$  au milieu de la zone évanescente; et enfin la solution issue de  $r_c$  est reliée asymptotiquement à celle issue de  $r_d$  au milieu de la cavité  $P$ . L'unique différence vient du fait que les solutions issues de  $r_b$  et  $r_c$  s'expriment cette fois-ci sous la forme d'une somme d'une fonction d'Airy de première espèce  $A_i$  et d'une de seconde espèce  $B_i$ . En utilisant les trois égalités vérifiant d'une part, le raccord des solutions issues des quatre points tournants et d'autre part, les conditions aux limites, Shibahashi (1979) a abouti à la condition de résonance

$$\cot\left(\int_{r_a}^{r_b} k_r dr\right) \tan\left(\int_{r_c}^{r_d} k_r dr\right) = \frac{1}{4} \exp\left(-2 \int_{r_b}^{r_c} k_r dr\right), \quad (8.3)$$

où  $k_r$  est le module du nombre d'onde radial donné par Eq. (2.49) qui dépend de la fréquence d'oscillation. Cette solution est en accord avec la solution générale donnée dans Eq. (8.1). En effet, dans le cas d'un faible couplage, le facteur de transmission à travers la zone évanescente peut être supposé faible, soit  $T \ll 1$ , et le facteur de couplage peut s'exprimer à partir de la relation de conservation de l'énergie (i.e.,  $R^2 + T^2 = 1$ ) comme

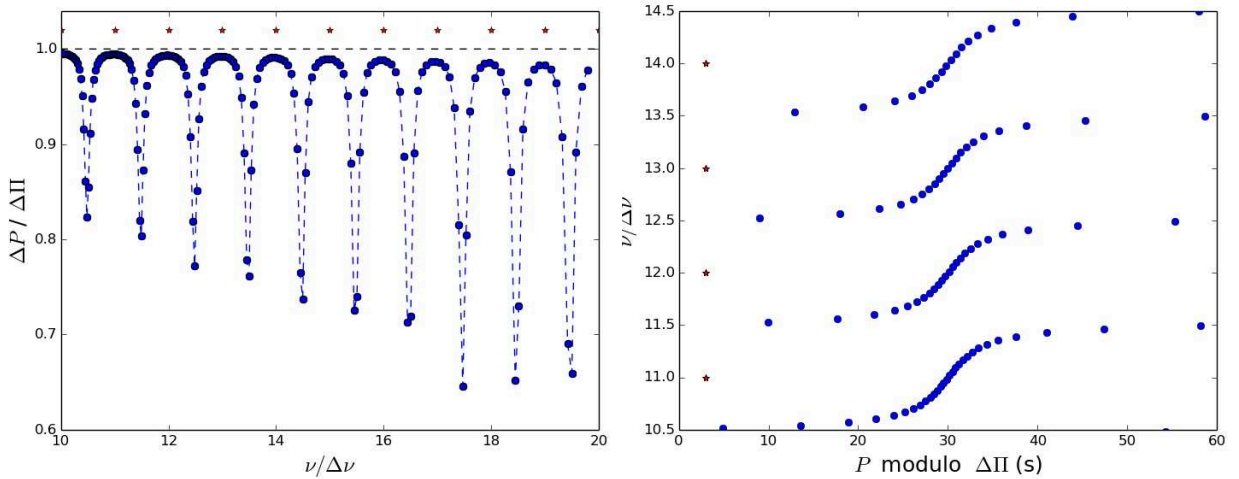
$$q = \frac{1 - \sqrt{1 - T^2}}{1 + \sqrt{1 - T^2}} \approx \frac{T^2}{4}. \quad (8.4)$$

Dans l'approximation JWKB et l'hypothèse d'une large zone évanescente, le facteur de transmission est donné en reliant asymptotiquement les deux fonctions d'Airy issues des deux points tournants  $r_b$  et  $r_c$  au milieu de la barrière évanescente, c'est-à-dire (e.g., Phinney 1970; Unno *et al.* 1989)

$$T = \exp\left(-\int_{r_b}^{r_c} |k_r| dr\right), \quad (8.5)$$

ce qui inséré dans Eq. (8.4) reste en accord avec le membre de droite de Eq. (8.3).

**Exemple de spectre d'oscillation.** Un exemple de spectre d'oscillation observé dans une étoile géante rouge est donné dans la FIGURE 2.4. Sur ce spectre, on peut voir une forêt de modes autour de la fréquence théorique attendue pour un mode de pression pur dipolaire avec  $l = 1$ . Ce type de motif est caractéristique des modes mixtes et en accord avec les fréquences propres prédites par la relation de phase asymptotique. Pour déterminer les fréquences propres des modes mixtes, il suffit de résoudre l'équation implicite donnée dans Eq. (8.1) dans le cas général ou Eq. (8.3) dans le cas d'un faible couplage. Étant données les expressions asymptotiques obtenues pour les modes de



**FIGURE 8.2:** **Gauche :** Espacement en période entre deux modes dipolaires  $l = 1$  consécutifs en fonction de la fréquence (ronds bleus). Les fréquences propres ont été obtenues par la résolution de Eq. (8.1) et en considérant les expressions données dans Eq. (8.6) avec  $\epsilon_p = 0$  et  $\epsilon_g = 0$ . Les paramètres utilisés sont représentatifs d'une étoile géante rouge évoluée avec  $\Delta\Pi = 60$  s,  $\Delta\nu = 5$   $\mu\text{Hz}$  et  $q = 0.15$ . Les fréquences des modes radiaux  $l = 0$  sont indiquées par des étoiles. **Droite :** Diagramme échelle en période pour les mêmes paramètres sismiques.

pression et de gravité purs dans Eqs. (2.72) et (2.74), il est possible au premier ordre d'exprimer les termes de phase  $\Xi_G$  et  $\Xi_P$  comme (e.g., Mosser *et al.* 2015)

$$\begin{aligned}\Xi_G &= \pi \left( \frac{1}{\nu\Delta\Pi} - \epsilon_g \right) \\ \Xi_P &= \pi \left( \frac{\nu}{\Delta\nu} - \frac{l}{2} - \epsilon_p \right),\end{aligned}\quad (8.6)$$

où  $\epsilon_g$  et  $\epsilon_p$  sont respectivement des termes de décalage en période et en fréquence de l'ordre de l'unité. Ces termes dépendent des propriétés des points tournants ainsi que des déphasages associés à la réflexion ou à la transmission au niveau de ces régions. On note aussi dans la suite  $\Delta\Pi \equiv \Delta\Pi_1$ , l'espacement en période des modes dipolaires, en oubliant l'indice 1 pour simplifier. Les fréquences propres obtenues en considérant des paramètres sismiques avec des valeurs typiques des géantes rouges évoluées, c'est-à-dire  $\Delta\Pi = 60$  s,  $\Delta\nu = 5$   $\mu\text{Hz}$  et  $q = 0.15$  (e.g., Mosser *et al.* 2017b), sont représentées sur la FIGURE 8.2. Sur cette figure, la différence de période entre deux modes consécutifs,  $\Delta P_i(\nu_i) = P_i - P_{i-1}$ , est tracée en fonction de la fréquence, ainsi que le diagramme échelle en période, c'est-à-dire la fréquence en fonction de la période modulo  $\Delta\Pi$ . Deux types de modes peuvent être distingués sur ces graphes. D'une part, on voit des modes pour lesquels la valeur de  $\Delta P$  est très proche de  $\Delta\Pi$ . Sur le diagramme échelle en période, ces modes se répartissent quasi verticalement autour de 30 s (modulo  $\Delta\Pi$ ). Le spectre de ces modes est proche de celui qu'auraient des modes de gravité purs pour lesquels  $\Delta P/\Delta\Pi = 1$  : on dit que ces modes mixtes sont à dominance de gravité. Au contraire, certains modes décalés en fréquence d'environ la moitié de la valeur de la grande séparation par rapport aux modes radiaux montrent des valeurs de  $\Delta P$  plus petite que  $\Delta\Pi$ . La période de ces modes dévient très largement de la valeur de 30 s module  $\Delta\Pi$  dans le diagramme échelle en période. Ces modes ont donc un spectre plus proche de celui qu'auraient des modes de pression purs : on dit que ces modes mixtes sont à dominance de pression. En effet, Mosser *et al.* (2015) ont montré que le rapport  $\Delta P/\Delta\Pi$  est relié à l'inertie du mode dans la cavité centrale,  $I_G$ , ou plus précisément

$$\frac{\Delta P}{\Delta\Pi} = \zeta(\nu) = \frac{I_G}{I_\star}, \quad (8.7)$$



où l'on a défini l'inertie totale du mode et l'inertie partielle dans la cavité  $G$  respectivement comme

$$I_{\star} = \int_0^{R_{\star}} |\vec{\xi}|^2 dm \quad \text{et} \quad I_G = \int_0^{r_{\text{coeur}}} |\vec{\xi}|^2 dm, \quad (8.8)$$

avec  $\vec{\xi}$  le vecteur déplacement associé à l'onde, et  $r_{\text{coeur}}$  le rayon délimitant la cavité centrale et au-dessus duquel le mode mixte se comporte comme un mode de pression. D'après ces définitions,  $I_{\star}$  est représentatif de l'énergie totale du mode et  $I_G$  est représentatif de l'énergie du mode piégée dans la cavité centrale. La fonction  $\zeta$  donne donc la proportion de l'énergie totale du mode qui est piégée dans la cavité  $G$ . Ainsi, pour les modes tels que  $\Delta P/\Delta \Pi \sim 1$  sur la FIGURE 8.2, on a  $\zeta \sim 1$  d'après Eq. (8.7), ce qui confirme que ces modes sont bien à dominance de gravité. En supposant dans une bonne approximation que l'intervalle de fréquences entre un mode à dominance de gravité et le mode à dominance de pression le plus proche en fréquence est assez faible pour que la puissance injectée dans les deux puisse être considérée comme identique, on comprend alors que l'amplitude des premiers en surface est plus faible que celle des seconds (e.g., Dupret *et al.* 2009; Grosjean *et al.* 2014, voir aussi la FIGURE 2.4). Enfin, on peut encore noter que pour une étoile caractérisée par de tels paramètres sismiques, les modes à dominance de gravité sont bien plus nombreux dans le spectre que les modes à dominance de pression. En effet, le nombre de modes à dominance de gravité répartis autour d'un mode à dominance de pression de fréquence  $\nu$  et dans un intervalle de fréquences  $\Delta\nu$  peut être estimé en ordre de grandeur assez simplement. Étant donné que par hypothèse les modes considérés ont des ordres radiaux élevés, on peut écrire la différence de période entre deux modes consécutifs comme  $\Delta P_n = 1/\nu_n - 1/\nu_{n-1} \sim |\delta\nu_n|/\nu_n^2$ , où  $\delta\nu_n$  est la différence de fréquence entre deux modes consécutifs. En supposant maintenant que  $\nu_n \sim \nu$ ,  $\Delta P_n \sim \Delta \Pi$  et  $\mathcal{N}_g \delta\nu_n \sim \Delta\nu$ , avec  $\mathcal{N}_g$  le nombre de modes mixtes à dominance de gravité dans un intervalle de fréquences de largeur  $\Delta\nu$ , on obtient

$$\mathcal{N}_g(\nu) \sim \frac{\Delta\nu}{\Delta \Pi \nu^2}. \quad (8.9)$$

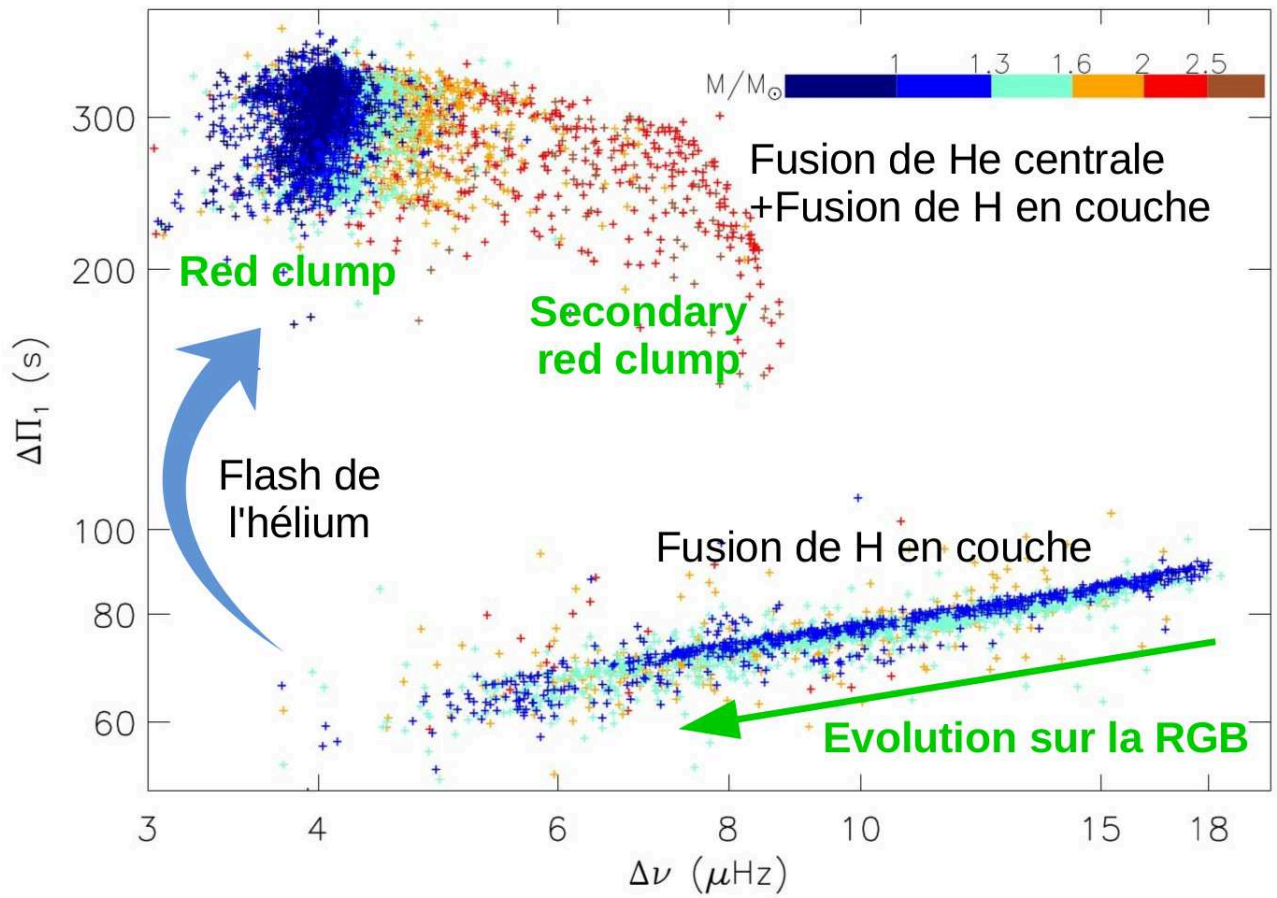
En considérant une valeur typique pour  $\nu_{\text{max}}$  correspondant à un ordre radial proche de 10 (i.e.,  $\nu_{\text{max}} \sim 10\Delta\nu$ ), on obtient avec les indices sismiques précédents  $\mathcal{N}_g(\nu_{\text{max}}) \sim 30$ , en accord avec la FIGURE 8.2. Pour finir, on peut noter que la densité de modes mixtes à dominance de gravité augmente sur la branches des sous-géantes et des géantes rouges principalement à cause de la diminution de  $\nu_{\text{max}}$  au cours de l'évolution. Ainsi, à la fin de la branche des sous-géantes, on peut montrer que  $\mathcal{N}_g(\nu_{\text{max}})$  prend une valeur bien plus faible de l'ordre de l'unité, résultant en un spectre moins régulier que sur la FIGURE 8.2 et donc plus complexe à analyser (voir aussi la discussion dans le Section 10.2.1).

## 8.2 Informations sur le cœur et l'enveloppe des étoiles évoluées

Alors que les modes radiaux ( $l = 0$ ) sont sensibles aux propriétés globales de l'enveloppe, les modes mixtes permettent de sonder les couches internes. Nous présentons ici deux exemples importants d'avancées observationnelles rendues possibles par l'étude des modes mixtes sur un vaste échantillon d'étoiles.

### 8.2.1 Indication sur le stade évolutif

D'après la section précédente, l'analyse du spectre des modes mixtes permet de remonter aux deux indices sismiques  $\Delta\nu$  et  $\Delta \Pi$ . Comme nous l'avons vu dans la Section 2.3,  $\Delta\nu$  est directement proportionnel à la racine carrée de la densité moyenne de l'étoile. L'espacement en période,  $\Delta \Pi$ , dont la définition est donnée dans Eq. (2.75), est proportionnel à l'inverse de la valeur maximale de la fréquence de Brunt-Väisälä dans la zone radiative, notée  $N_M$ . Ceci peut être aisément montré en considérant que la fréquence de Brunt-Väisälä varie comme des lois de puissance de part et d'autre



**FIGURE 8.3:** Diagramme  $\Delta\nu - \Delta\Pi$  obtenu pour 6100 étoiles observées par le satellite *Kepler* (adapté de Vrad *et al.* 2016). Le code couleur représente la masse obtenue par le biais des relations d'échelle sismiques.

de son maximum (voir FIGURE 8.1 et le Chapitre 11). La région où la fréquence de Brunt-Väisälä est maximale correspond à la frontière extérieure du cœur d'hélium, au voisinage de la couche où l'hydrogène brûle. En utilisant l'approximation  $N^2 \sim g/r$ , sa valeur maximale vaut en ordre de grandeur  $N_M^2 \sim GM_{H_e}/r_{H_e}^3$ , où  $M_{H_e}$  est la masse du cœur d'hélium et  $r_{H_e}$  est son rayon extérieur. L'espacement en période  $\Delta\Pi$  nous renseigne donc sur la densité moyenne du cœur d'hélium,  $\rho_{H_e}$  (plus précisément,  $\Delta\Pi \propto 1/N_M \propto \rho_{H_e}^{-1/2}$ ). Lors de l'évolution sur la branche des géantes rouges, le rayon de l'étoile se dilate alors que le cœur d'hélium se contracte. On peut donc s'attendre à ce que  $\Delta\nu$  et  $\Delta\Pi$  diminuent. Plus tard, la transition de la branche des géantes rouges vers le clump s'accompagne d'un réajustement structurel lié à l'allumage de la fusion de l'hélium dans le cœur. Le dégagement d'énergie nucléaire dans les couches centrales résulte en une dilatation du cœur d'hélium. La transition entre les deux stades évolutifs doit donc s'accompagner d'une augmentation de  $\Delta\Pi$ . Ces prévisions théoriques ont en effet été confirmées par des observations dans des milliers d'étoiles. Ceci est résumé sur la FIGURE 8.3 qui représente le diagramme  $\Delta\nu - \Delta\Pi$  adapté du travail de Vrad *et al.* (2016). Ce type de diagramme permet donc de suivre l'évolution sur la branche des géantes rouges jusqu'au début de la fusion de l'hélium. La paire d'indices sismiques ( $\Delta\nu, \Delta\Pi$ ) fait donc office de traceur évolutif et la détermination de ces indices apporte une information précieuse pour estimer le stade évolutif d'une étoile. En particulier, ils permettent de distinguer sans ambiguïté la phase géante rouge (où l'hydrogène brûle en couche) et la phase de fusion de l'hélium, ce qui reste difficile à partir du diagramme H-R classique.

### 8.2.2 Estimation de la rotation moyenne

De manière similaire aux modes de pression (voir Section 2.4.3), les modes mixtes ont le potentiel de sonder la rotation interne. Mais contrairement à ces premiers, ces derniers peuvent aussi bien nous renseigner sur la rotation de l'enveloppe que sur la rotation des couches très profondes. En effet, Goupil *et al.* (2013) (voir aussi Deheuvels *et al.* 2014) ont montré que les splittings rotationnels des modes mixtes peuvent être réécrits de la forme suivante

$$\delta\nu(\nu) = \zeta(\nu) \left( \frac{\bar{\Omega}_g}{4\pi} - \frac{\bar{\Omega}_p}{2\pi} \right) + \frac{\bar{\Omega}_p}{2\pi}, \quad (8.10)$$

où la fonction  $\zeta$  est définie dans Eq. (8.7). Dans l'hypothèse où les modes mixtes ont un grand nombre de nœuds à la fois dans la cavité  $G$  et dans la cavité  $P$ , les valeurs moyennes de la rotation du cœur et de l'enveloppe telles qu'elles sont sondées par les modes mixtes s'expriment respectivement comme

$$\bar{\Omega}_g \approx \frac{1}{\gamma_g} \int_0^{r_{\text{cœur}}} \Omega N \frac{dr}{r} \quad \text{avec} \quad \gamma_g = \int_0^{r_{\text{cœur}}} N \frac{dr}{r} \quad (8.11)$$

$$\bar{\Omega}_p \approx \frac{1}{\gamma_p} \int_{r_{\text{cœur}}}^{R_\star} \Omega \frac{dr}{c} \quad \text{avec} \quad \gamma_p = \int_{r_{\text{cœur}}}^{R_\star} \frac{dr}{c}. \quad (8.12)$$

Les modes mixtes sont donc sensibles à la rotation de certaines zones localisées de l'étoile, qui correspondent aux régions où leur amplitude est maximale. Par exemple,  $\bar{\Omega}_g$  correspond à la valeur moyenne de la rotation interne au voisinage de la couche d'hydrogène en fusion, où la fréquence de Brunt-Väisälä est maximale. Néanmoins, les modes mixtes donnent en plus la possibilité d'estimer le taux de rotation différentielle entre le centre et l'enveloppe. D'une part, les modes mixtes à dominance de gravité sont plutôt sensibles à la rotation moyenne du cœur. En effet, pour les modes à dominance de gravité,  $\zeta \sim 1$  d'après Eq. (8.7), et les splittings rotationnels valent  $\delta\nu \approx \bar{\Omega}_g/4\pi$  suivant Eq. (8.10). D'autre part, les modes mixtes à dominance de pression sont plutôt sensibles à la rotation moyenne de l'enveloppe. Pour obtenir  $\bar{\Omega}_p$ , il suffit alors de connaître simultanément  $\delta\nu(\nu)$  ainsi que la fonction  $\zeta(\nu)$  dans un intervalle de fréquences regroupant à la fois des modes à dominance de pression et de gravité (pour que  $\zeta$  prenne des valeurs dans un intervalle le plus large possible entre 0 et 1). Premièrement, les splittings  $\delta\nu(\nu)$  peuvent être obtenus observationnellement.

Deuxièmement, la fonction  $\zeta(\nu)$  peut être estimée à partir d'un modèle optimal de l'étoile considérée ou de la différence de période entre deux modes consécutifs d'après Eq. (8.7). De telles mesures ont déjà été réalisées dans des milliers d'étoiles géantes rouges par Mosser *et al.* (2012b, voir FIGURE 4.3) et pour une poignée d'étoiles sous-géantes et jeunes géantes rouges observées par Deheuvels *et al.* (2014, voir FIGURE 4.2). Toutes ces observations ont montré la nécessité d'invoquer de nouveaux processus de transport de moment cinétique dans les modèles stellaires et posent actuellement de sérieuses contraintes sur leur efficacité (voir Chapitre 4).

### 8.3 Cas particuliers des oscillations dipolaires $l = 1$

Les modes mixtes à dominance de gravité ont le potentiel de nous apporter de précieuses informations sur l'intérieur radiatif des étoiles. Néanmoins, l'énergie de ces modes est majoritairement piégée dans la cavité interne ; leur amplitude en surface est donc plus faible que celle des modes à dominance de pression. De plus, parmi les modes à dominance de gravité, plus le degré angulaire est élevé, plus l'amplitude en surface est faible d'une part, à cause d'un couplage plus faible (zone évanescente plus large), et d'autre part, à cause d'une inertie dans le cœur plus élevée. Les modes mixtes à dominance de gravité les plus facilement observés sont donc dipolaires  $l = 1$  (e.g., Dupret *et al.* 2009). Cependant, pour ces modes de bas degrés angulaires, l'approximation de Cowling qui consiste à négliger la perturbation du potentiel gravitationnel n'est plus valide dans les couches profondes des étoiles. En effet, l'approximation de Cowling est valide dans les couches concentriques à l'intérieur desquelles les modes d'oscillation possèdent un nombre de nœuds suffisamment élevé à la fois dans la direction radiale et dans la direction horizontale. Par effet de moyenne sur l'ensemble de son volume, la perturbation du potentiel gravitationnel devient donc négligeable au niveau de cette couche. Ce n'est néanmoins plus le cas pour les modes mixtes dipolaires, d'une part, parce que ces modes sont antisymétriques par rapport à un plan et ne possèdent donc qu'une seule ligne de nœuds sur la sphère, et d'autre part, parce qu'ils s'établissent dans des couches très profondes de l'étoile. L'approximation de Cowling qui permet de réduire les équations différentielles d'oscillation adiabatiques du quatrième ordre à un problème du second ordre, soluble analytiquement, n'est donc plus justifiée dans le cas des modes mixtes dipolaires. Néanmoins, Takata (2005, 2006b,a) a montré qu'il est possible de conserver un système d'équations différentielles du second ordre pour décrire les oscillations dipolaires adiabatiques tout en prenant en compte la perturbation du potentiel gravitationnel. Nous présentons ici brièvement ce formalisme et les conséquences directes de la perturbation du potentiel gravitationnel sur les fréquences propres.

#### 8.3.1 Structure Hamiltonienne des oscillations linéaires adiabatiques

Les oscillations adiabatiques sont décrites physiquement par un système d'équations différentielles du quatrième ordre pour les variables  $\rho'$ ,  $\xi_r$ ,  $\xi_h$ ,  $p'$  et  $d\Psi'/dr$ . Celui-ci se compose de l'équation de continuité, de l'équation de conservation de l'impulsion suivant la direction radiale et la direction horizontale (en symétrie sphérique), et de l'équation de Poisson. Le système est fermé par l'hypothèse d'oscillations adiabatiques qui permet de relier les variables  $p'$  et  $\rho'$ . L'approximation de Cowling (i.e.,  $\Psi' \approx 0$ ) permet alors réduire le problème à un système d'équations différentielles du second ordre pour les variables  $\xi_r$  et  $p'$ , composé de l'équation de continuité et de l'équation de conservation de l'impulsion suivant la direction radiale. En effet, sous cette hypothèse, la variable  $\xi_h$  est reliée à  $p'$  grâce à la composante horizontale de l'équation de l'impulsion qui mène à Eq. (2.29).

Néanmoins, on sait depuis longtemps que les oscillations radiales (i.e.,  $l = 0$ ) sont décrites par une équation différentielle d'ordre deux même en considérant la perturbation du potentiel gravitationnel (e.g., Unno *et al.* 1989). En effet, dans le cas des modes radiaux, les équations linéarisées de Poisson et de continuité combinées permettent de relier  $d\Psi'/dr$  directement à  $\xi_r$ . En

effet, on peut écrire dans le cas de modes radiaux

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \Psi'}{\partial r} \right) = 4\pi G \rho' = -4\pi G \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho \xi_r) , \quad (8.13)$$

ce qui, après intégration entre 0 et  $r$ , en supposant  $d\Psi'/dr = 0$  au centre, donne

$$\frac{\partial \Psi'}{\partial r} + 4\pi G \rho \xi_r = 0 . \quad (8.14)$$

Avec une telle relation entre deux variables, tout problème différentiel ordinaire du quatrième ordre se réduit au moins à un système différentiel du troisième ordre. Dans le cas des oscillations adiabatiques, le problème se réduit à un système du second ordre. Comme l'a montré Takata (2006b), cette propriété vient du fait que les équations d'oscillation linéaire adiabatique dans les étoiles peuvent être formulées suivant un système différentiel Hamiltonien. Dans un tel système, un changement de variable canonique qui conserve la structure Hamiltonienne et dont l'une des nouvelles variables dépendantes correspond à une intégrale première (i.e., à une constante) permet de réduire le système différentiel d'au moins deux ordres. Dans le cas des modes radiaux, Eq. (8.14) correspond à l'intégrale première en question. Ainsi, s'il est possible de trouver une intégrale première dans le cas des modes dipolaires, alors la même opération sera permise et permettra de retrouver un système d'équations différentielles du second ordre prenant en compte la perturbation du potentiel gravitationnel, soluble par les méthodes de résolution habituelles.

### 8.3.2 Intégrale première pour les modes dipolaires

Avant d'avoir montré que les équations d'oscillation linéaire adiabatique peuvent se formuler suivant une structure Hamiltonienne, Takata (2005) avait en fait déjà dérivé une intégrale première pour les modes dipolaires. On se propose ici de reproduire sa dérivation en utilisant une écriture vectorielle, qui peut sembler plus familière qu'une notation tensorielle. L'intégrale première provient en fait directement de la conservation de l'impulsion d'une coquille de masse et de volume donnés. Le but dans les prochains paragraphes est donc d'écrire cette loi de conservation de deux façons différentes.

**Réécriture de l'équation de conservation de l'impulsion.** La démarche consiste à repartir des équations linéarisées de conservation de l'impulsion et de continuité, c'est-à-dire

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \rho \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t} \right) = -\vec{\nabla} p' - \rho' \vec{\nabla} \Psi - \rho \vec{\nabla} \Psi' \quad (8.15)$$

$$\rho' + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{\xi}) = 0 . \quad (8.16)$$

En remplaçant  $\rho'$  et  $\rho$  par l'équation de Poisson linéarisée et à l'équilibre dans Eqs. (8.15) et (8.16), c'est-à-dire  $\rho' = \Delta \Psi' / 4\pi G$  et  $\rho = \Delta \Psi / 4\pi G$ , on obtient

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \rho \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t} \right) + \vec{\nabla} p' = -\frac{1}{4\pi G} \left( \Delta \Psi' \vec{\nabla} \Psi + \Delta \Psi \vec{\nabla} \Psi' \right) \quad (8.17)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \left( \rho \vec{\xi} + \frac{\vec{\nabla} \Psi'}{4\pi G} \right) = 0 . \quad (8.18)$$

En utilisant les identités vectorielles suivantes

$$\Delta \Psi' \vec{\nabla} \Psi = (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \Psi') \vec{\nabla} \Psi = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \Psi \otimes \vec{\nabla} \Psi') - (\vec{\nabla} \Psi' \cdot \vec{\nabla}) \vec{\nabla} \Psi \quad (8.19)$$

$$(\vec{\nabla} \Psi' \cdot \vec{\nabla}) \vec{\nabla} \Psi + (\vec{\nabla} \Psi \cdot \vec{\nabla}) \vec{\nabla} \Psi' = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \Psi \cdot \vec{\nabla} \Psi') , \quad (8.20)$$

où  $(\otimes)$  est le produit tensoriel, Eq. (8.17) peut être réécrite comme

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \rho \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t} \right) + \vec{\nabla} \cdot \bar{\bar{\Pi}} = 0 \quad (8.21)$$

avec

$$\bar{\bar{\Pi}} = p' \bar{\bar{I}} + \frac{1}{4\pi G} \left( \vec{\nabla} \Psi' \otimes \vec{\nabla} \Psi + \vec{\nabla} \Psi \otimes \vec{\nabla} \Psi' - \vec{\nabla} \Psi' \cdot \vec{\nabla} \Psi \bar{\bar{I}} \right), \quad (8.22)$$

et  $(\bar{\bar{I}})$  la matrice identité. On considère dans la suite (sans perte de généralité) le cas d'un mode dipolaire avec un degré angulaire  $l = 1$  et un nombre azimutal  $m = 0$ , c'est-à-dire avec un axe de symétrie confondu avec l'axe  $O\vec{e}_z$  de vecteur directionnel unitaire  $\vec{e}_z$  dans un référentiel Cartésien. En effet, puisque la structure à l'équilibre est supposée à symétrie sphérique, la même configuration pour  $m \neq 0$  peut être retrouvée via un changement de repère par une rotation de  $\pi/2$  autour de l'axe  $O\vec{x}$  ou  $O\vec{y}$ . La dépendance latitudinale des fonctions propres est donc représentée par l'harmonique sphérique  $Y_1^0(\theta)$  donnée par

$$Y_1^0(\theta) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta. \quad (8.23)$$

Pour des raisons de symétrie, le vecteur quantité de mouvement ainsi que le vecteur déplacement du centre de masse de la sphère concentrique de rayon  $r$ , de masse  $M_r$  et de volume  $V_r$  sont suivant l'axe  $O\vec{e}_z$ . La composante du vecteur quantité de mouvement suivant cet axe peut être exprimée comme

$$P_r = \int_{V_r} \rho \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t} \cdot \vec{e}_z dV. \quad (8.24)$$

En dérivant l'équation précédente par rapport au temps, en utilisant Eq. (8.21) et le théorème de Green-Ostrogradski, on obtient alors

$$\frac{\partial P_r}{\partial t} = -\vec{e}_z \cdot \left( \int_{S_r} \bar{\bar{\Pi}} d\vec{S} \right). \quad (8.25)$$

Une autre expression peut être obtenue en imposant une dépendance des fonctions propres en  $\exp(i\sigma t)$  telles que  $\partial \vec{\xi} / \partial t = i\sigma \vec{\xi}$ . On aboutit alors à

$$\frac{\partial P_r}{\partial t} = -\sigma^2 D_r, \quad (8.26)$$

avec

$$D_r = \vec{e}_z \cdot \left( \int_{V_r} \rho \vec{\xi} dV \right), \quad (8.27)$$

qui, divisé par  $M_r$ , correspond au déplacement du centre de masse suivant la direction  $\vec{e}_z$  de la sphère de volume  $V_r$ .

**Intégrale première.** L'intégrale première est alors obtenue en exprimant  $\partial P_r / \partial t$  de deux façons différentes. La première provient de l'intégrale du membre droite de Eq. (8.25) calculée à l'aide de Eq. (8.22). La deuxième est obtenue en exprimant Eq. (8.27) via l'intégration de l'équation de continuité donnée dans Eq. (8.16). Les détails de la dérivation sont donnés dans l'Annexe A. Finalement, l'intégrale première pour les modes dipolaires relie la perturbation de pression, le déplacement radial et la perturbation du potentiel gravitationnel par l'égalité (Takata 2005)

$$\tilde{p} + \frac{g}{4\pi} \left( \frac{d\tilde{\Psi}}{dr} + \frac{2}{r} \tilde{\Psi} \right) = \sigma^2 r \left[ \rho \tilde{\xi}_r + \frac{1}{4\pi G} \left( \frac{d\tilde{\Psi}}{dr} - \frac{\tilde{\Psi}}{r} \right) \right], \quad (8.28)$$

dans laquelle toute perturbation Eulérienne  $X'$  a été exprimée sous la forme  $X' = \tilde{X}(r)Y_1^0(\theta)$ .

### 8.3.3 Forme canonique et équation d'oscillation du second ordre

Takata (2006b) a rigoureusement démontré que l'utilisation de l'intégrale première donnée dans Eq. (8.28) permet de réduire le système différentiel du quatrième ordre composé des équations d'oscillation adiabatique à système différentiel du second ordre. Le système d'équations différentielles décrivant les oscillations dipolaires peut alors être écrit sous une forme canonique similaire à Eqs. (2.40) et (2.41) telle que (voir Annexe B)

$$\frac{d\mathcal{Y}_1}{dr} = \mathcal{Q}_1 \mathcal{Y}_2 \quad (8.29)$$

$$\frac{d\mathcal{Y}_2}{dr} = \mathcal{Q}_2 \mathcal{Y}_1 , \quad (8.30)$$

où  $\mathcal{Y}_1$  et  $\mathcal{Y}_2$  sont les nouvelles variables dépendantes et où l'on a défini

$$\mathcal{Q}_1 = \frac{r^2 \mathcal{H}^2}{c^2} \left( \frac{\tilde{S}_1^2}{\sigma^2} - 1 \right) \quad (8.31)$$

$$\mathcal{Q}_2 = \frac{1}{r^2 \mathcal{H}^2} \left( \sigma^2 - \tilde{N}^2 \right) , \quad (8.32)$$

avec  $\mathcal{H}$  une fonction des quantités à l'équilibre strictement positive qui est définie dans Eq. (B.23),  $\tilde{S}_1$  et  $\tilde{N}$  les fréquences de Lamb et de Brunt-Väisälä modifiées par la perturbation du potentiel gravitationnel telles que

$$\tilde{S}_1 = S_1 J \quad (8.33)$$

$$\tilde{N} = \frac{N}{J} , \quad (8.34)$$

et le facteur  $J$  donné par

$$J = 1 - \frac{4\pi\rho r^3}{3m} = 1 - \frac{1}{3} \frac{d \ln m}{d \ln r} . \quad (8.35)$$

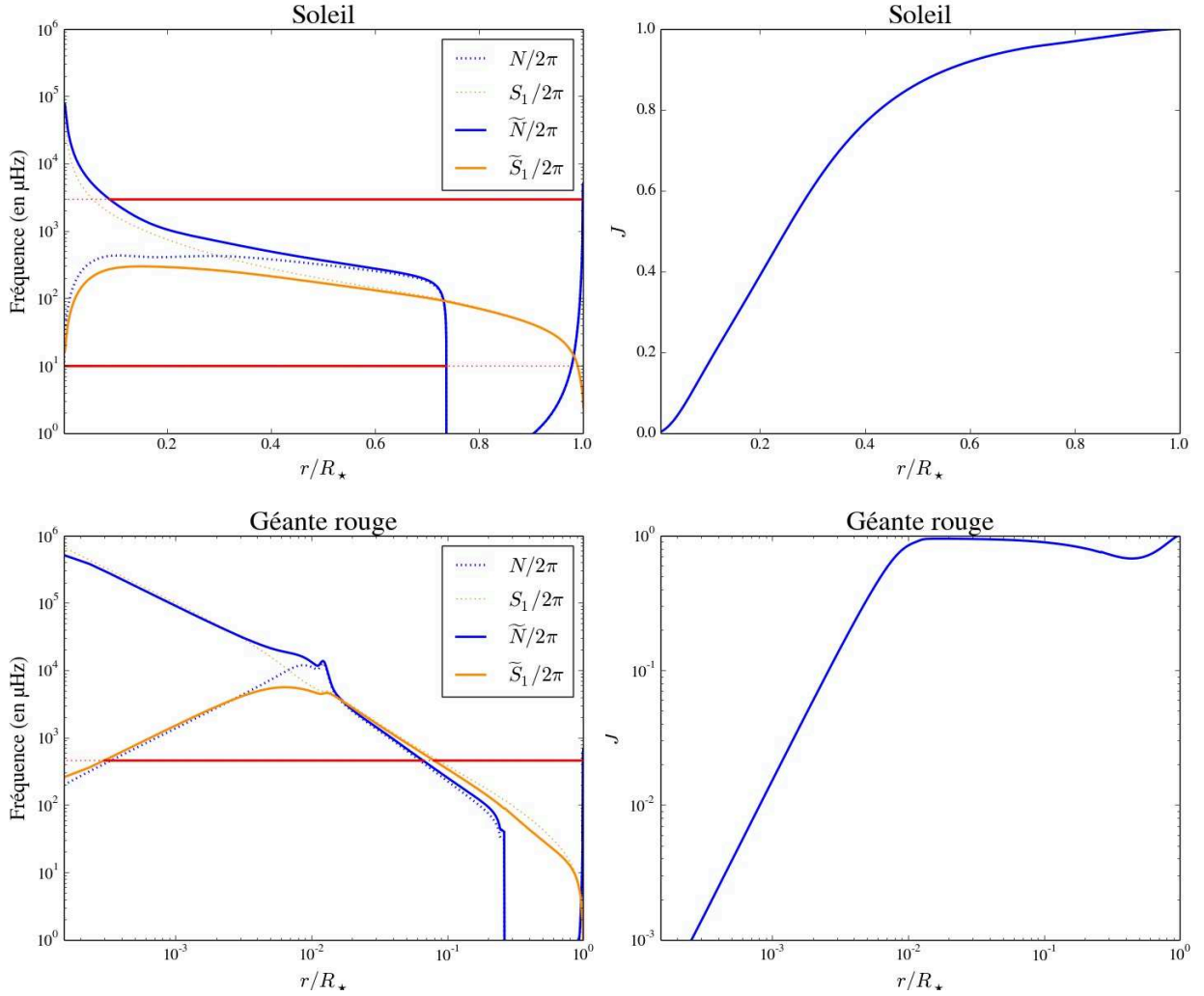
Takata (2006b) a montré que les variables  $\mathcal{Y}_1$  et  $\mathcal{Y}_2$  sont proportionnelles respectivement aux déplacements vertical et horizontal par rapport au centre de masse de la coquille concentrique de masse  $m(r)$ . De façon remarquable, le système d'équations différentielles a une structure identique au système obtenu dans l'approximation de Cowling et donné dans Eqs. (2.40)-(2.44). La seule différence réside dans le fait que les fréquences de Brunt-Väisälä et de Lamb sont modifiées par le facteur  $J$ . La technique de résolution habituelle des systèmes différentiels linéaires du second ordre est donc applicable pour résoudre ce système. Le changement de variable donné dans Eqs. (2.45)-(2.46) peut notamment être utilisé pour retrouver des équations de second ordre similaires aux Eqs. (2.47)-(2.52) (voir Annexe B pour les détails).

### 8.3.4 Influence de la perturbation du potentiel gravitationnel sur les modes

**Diagramme de propagation.** Dans l'hypothèse où la structure à l'équilibre varie sur des échelles spatiales beaucoup plus grandes que la longueur d'onde radiale, le nombre d'onde radial local est donné par (voir Annexe B)

$$\tilde{k}_r^2 = -\mathcal{Q}_1 \mathcal{Q}_2 = \frac{\sigma^2}{c^2} \left( \frac{\tilde{N}^2}{\sigma^2} - 1 \right) \left( \frac{\tilde{S}_1^2}{\sigma^2} - 1 \right) . \quad (8.36)$$

Les points tournants sont donc situés en première approximation là où  $\sigma^2 = \tilde{N}^2$  et  $\sigma^2 = \tilde{S}_1^2$ . Les profils des fréquences de Brunt-Väisälä et de Lamb, ainsi que le facteur  $J$ , sont représentés sur



**FIGURE 8.4:** **Gauche :** Profils des fréquences modifiées de Brunt-Väisälä et de Lamb (pour  $l = 1$ ) définies dans Eqs. (8.33) et (8.34). Deux modèles de  $1M_\odot$  correspondant respectivement au Soleil actuel et à une étoile au début de l’ascension de la branche des géantes rouges (avec  $\log T_{\text{eff}} = 3.68$  et  $\log L/L_\odot = 0.575$ ) ont été considérés. Les fréquences obtenues par la définition habituelle de  $N$  et  $S_1$  sont tracées en pointillés. Les lignes continues rouges symbolisent les cavités résonantes des modes d’oscillation (pression, gravité et mixtes). **Droite :** Facteur  $J$  défini dans Eq. (8.35) en fonction du rayon pour les deux modèles.



la FIGURE 8.4 pour deux modèles de  $1 M_{\odot}$  sur la séquence principale et au début de l'ascension de la branche des géantes rouges. D'abord, on voit que le facteur  $J$  est proche de l'unité dans l'enveloppe externe et tend vers zéro dans les couches profondes. La perturbation du potentiel gravitationnel a donc peu d'impact sur les oscillations en surface mais joue au contraire un rôle important dans les régions internes. Néanmoins, de façon surprenante, on peut voir sur cette figure que la structure des cavités résonantes est peu modifiée par la prise en compte de la perturbation du potentiel gravitationnel. En effet, dans l'enveloppe externe, le facteur  $J$  est proche de l'unité si bien que  $\tilde{S}_1 \approx S_1$  et  $\tilde{N} \approx N$ . Dans les régions profondes, le facteur  $J$  tend vers 0, mais on constate en fait que la fréquence de Lamb (Brunt-Väisälä) modifiée égale à peu près la fréquence de Brunt-Väisälä (Lamb) habituelle, c'est-à-dire  $\tilde{S}_1 \approx N$  ( $\tilde{N} \approx S_1$ ). Il est possible de le montrer par un développement limité en  $r = 0$ . D'après Eq. (8.36), cette substitution ne modifie donc pas en première approximation la valeur du nombre d'onde radiale dans la cavité (voir aussi paragraphe suivant). Seule la nature du point tournant le plus interne change, et ce quel que soit la nature du mode d'oscillation (pression, gravité ou mixte). Par exemple pour un mode de gravité dans le Soleil, au lieu d'avoir un point tournant interne tel que  $q_2 = 0$  dans l'approximation de Cowling, le point tournant interne ici est tel que  $\mathcal{Q}_1 = 0$ . Étant donné la structure similaire du système différentiel dans les deux cas, on peut en déduire que **ce changement de nature du point tournant interne aura pour conséquence un déphasage additionnel à la réflexion**. C'est ce que nous allons pouvoir constater dans quelques lignes. Enfin, pour être complet, on peut noter qu'il peut exister une légère déviation entre la valeur de  $\tilde{N}$  et celle de  $S_1$ , ou entre la valeur de  $\tilde{S}_1$  et celle de  $N$ , dans les régions profondes. La prise en compte de la perturbation du potentiel gravitationnel peut donc mener à un léger décalage du point tournant le plus interne par rapport au cas où elle est négligée (voir l'exemple du mode de pression dans le Soleil sur la FIGURE 8.4). Cela résulte de l'existence d'un gradient de composition chimique dans les couches internes qui modifie légèrement la valeur de la fréquence de Brunt-Väisälä. Il serait intéressant d'étudier l'impact de ce décalage sur les fréquences propres et de savoir si cela pourrait nous renseigner sur le gradient du poids moléculaire moyen proche du centre.

**Cas particuliers des très basses fréquences.** Dans le cas des ondes à très basses fréquences se propageant dans une région de la zone radiative assez éloignée des points tournants (i.e., où  $\sigma^2 \ll \tilde{N}, \tilde{S}_1^2$ ), le nombre d'onde radial vaut

$$\tilde{k}_r^2 = \frac{\sigma^2}{c^2} \left( \frac{N^2}{J^2 \sigma^2} - 1 \right) \left( \frac{2c^2 J^2}{r^2 \sigma^2} - 1 \right) \approx \frac{2N^2}{r^2 \sigma^2}. \quad (8.37)$$

Cette dernière expression est identique à celle obtenue dans l'approximation de Cowling et donnée par Eq. (2.49) avec  $l = 1$ . En effet, comme il a déjà été mentionné dans la Section 5.1.2, le caractère incompressible des ondes à très basses fréquences implique que l'équation de Poisson et l'équation de conservation de l'impulsion sont découplées (Dintrans *et al.* 2005), justifiant ainsi l'utilisation de l'approximation de Cowling. Cette dernière équation vérifie donc cette proposition. Cela reste valable aussi bien pour les modes propres stationnaires que pour les ondes progressives.

**Conditions de résonance des modes de pression et de gravité.** La condition de résonance pour les modes propres de pression et de gravité (dans le cas du Soleil sur la FIGURE 8.4) peut être obtenue par la méthode proposée par Shibahashi (1979) et présentée dans la Section 2.2.2, mais en considérant cette fois-ci la perturbation du potentiel gravitationnel (en utilisant les équations de l'Annexe B). Comme nous l'avons dit tout à l'heure, la principale différence avec l'approximation de Cowling réside dans le changement de nature du point tournant interne. En utilisant de façon similaire la méthode présentée dans la Section 2.2.2, j'ai obtenu pour les modes de pression,

$$\cos \left( \int_{r_{\text{int}}}^{r_{\text{ext}}} \tilde{k}_r dr \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{r_{\text{int}}}^{r_{\text{ext}}} \tilde{k}_r dr = \left( n + \frac{1}{2} \right) \pi, \quad (8.38)$$

et pour les modes de gravité

$$\sin\left(\int_{r_a}^{r_b} \tilde{k}_r dr\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{r_a}^{r_b} \tilde{k}_r dr = s\pi. \quad (8.39)$$

Loin du point tournant interne, on peut supposer d'après Eq. (8.37) et la FIGURE 8.4 dans le cas du Soleil que  $\tilde{k}_r \approx k_r$ , avec  $k_r$  la valeur de la composante radiale du nombre d'onde sous l'approximation de Cowling. Près du point tournant interne, on a dans la plupart des cas  $\tilde{S}_1 \approx N$  et  $\tilde{N} \approx S_1$ , donc d'après Eq. (8.36), on a là encore  $\tilde{k}_r \approx k_r$  (i.e., en négligeant les termes  $f(q_i)$  et  $f(Q_i)$ ). Les intégrales dans Eqs. (8.38) et (8.39) peuvent donc dans une bonne approximation être considérées comme inchangées par la prise en compte de la perturbation du potentiel gravitationnel (pour s'en convaincre, voir les résultats du Chapitre 11). De façon remarquable, l'impact de la perturbation du potentiel gravitationnel sur la relation de phase des modes de pression et de gravité se résume donc à un décalage de phase de  $\pi/2$  par rapport au cas où on utilise l'approximation de Cowling, c'est-à-dire par rapport aux Eqs. (2.64) et (2.73) (toujours en négligeant les termes  $f(q_i)$  et  $f(Q_i)$ ).

**Relation de phase des modes mixtes dans le cas d'un faible couplage.** De même, pour les modes mixtes dans une étoile géante rouge telle que représentée sur la FIGURE 8.4, j'ai redérivé le relation de phase de la même manière que Unno *et al.* (1989) dans le cas d'une large zone évanescente, en négligeant toujours les termes  $f(Q_i)$ , mais en prenant en compte la perturbation du potentiel gravitationnel. On aboutit alors à

$$\cot\left(\int_{r_a}^{r_b} \tilde{k}_r dr - \frac{\pi}{2}\right) \tan\left(\int_{r_c}^{r_d} \tilde{k}_r dr\right) = \frac{1}{4} \exp\left(-2 \int_{r_b}^{r_c} |\tilde{k}_r| dr\right). \quad (8.40)$$

Le terme de phase lié à la cavité interne est une fois de plus déphasé de  $\pi/2$  par rapport au cas où on utilise l'approximation de Cowling, et ce toujours à cause du changement de nature du point tournant interne. Néanmoins, dans ce type d'étoiles, la perturbation du potentiel gravitationnel semble aussi pouvoir avoir une influence sur la zone évanescente et les régions autour des points tournants associés (i.e.,  $r_b$  et  $r_c$ ). En effet, la FIGURE 8.4 dans le cas de l'étoile géante rouge montre que la prise en compte du potentiel gravitationnel peut modifier la largeur de la zone évanescente et donc avoir un impact sur la valeur du facteur de couplage.

## 8.4 Problématique de la partie III

Dans cette courte introduction, le potentiel des modes mixtes pour sonder les intérieurs stellaires a été mis en exergue, et notamment leur capacité à fournir de l'information sur les couches profondes des étoiles. Ils nous ont d'ores-et-déjà apporté de fortes contraintes sur la rotation interne des étoiles évoluées, ce qui a en particulier motivé le travail présenté dans la partie II au sujet du transport de moment cinétique par les ondes internes de gravité. Les observations sur des milliers d'étoiles ont aussi démontré que les diagnostics sismiques par les modes mixtes sont un puissant outil pour contraindre le stade évolutif, notamment grâce à la détermination à grande échelle des indices sismiques  $\Delta\Pi$  et  $\Delta\nu$ , qui sont sensibles respectivement à la taille du cœur radiatif et au rayon de l'enveloppe externe. Néanmoins, d'autres paramètres sismiques qui ont été jusque-là que très peu étudiés pourraient apporter de nouvelles contraintes sur la structure interne et sonder de nouvelles régions. Dans la suite, nous nous focaliserons notamment sur le facteur de couplage des modes mixtes, noté  $q$ , et le décalage en période des modes à dominance de gravité, noté  $\epsilon_g$ , à la lumière des avancées théoriques sur les modes mixtes dipolaires apportées par les travaux de Takata (2005, 2006b,a) qui permettent de prendre en compte la perturbation du potentiel gravitationnel. Je chercherai alors à répondre aux questions suivantes :

- Le facteur de couplage peut-il nous donner des informations sur la zone intermédiaire évanescente ? L'approximation d'un faible couplage est-elle valide pour toutes les étoiles ?

La zone évanescente se situe dans la région intermédiaire entre le cœur d'hélium et la zone inférieure de l'enveloppe convective. Alors que  $\Delta\Pi$  et  $\Delta\nu$  peuvent nous renseigner sur ces deux dernières régions, on peut se demander si le facteur de couplage a le potentiel de sonder la première. En effet, cette partie de l'étoile est une région importante puisqu'elle inclue la couche d'hydrogène en fusion et qu'elle est le siège de processus de mélange à l'interface entre les zones radiative et convective. Comme souvent, une partie de la réponse sera d'abord donnée grâce aux observations et la détermination du facteur de couplage pour des milliers d'étoiles par Mosser, Pinçon *et al.* (2017). Dans ce travail, j'ai participé à l'interprétation des résultats par le biais d'un modèle simplifié qui permet de faire le lien entre la valeur de  $q$  et les propriétés structurales de la région évanescente. Les principaux points de cette étude seront discutés dans le Chapitre 9.

- Quel est l'impact du fort couplage sur les fréquences propres ? Le formalisme existant permet-il d'obtenir des prédictions assez précises ?  
Simultanément au travail précédent, Takata (2016a) a proposé une relation de phase asymptotique dans le cas d'une fine zone évanescente. Un tel formalisme permet de prédire des valeurs de  $q$  en accord avec de précédentes observations malgré tout peu nombreuses (e.g., Mosser *et al.* 2012c; Vrad *et al.* 2016; Buysschaert *et al.* 2016). Je présenterai d'abord brièvement ce formalisme et puis je comparerai ces prédictions théoriques dans un cas où l'hypothèse d'un fort couplage est nécessaire avec les fréquences propres obtenues par un code d'oscillation et celle obtenues dans l'approximation d'un faible couplage. Les résultats préliminaires de ce travail seront présentés dans le Chapitre 10.
- Le décalage en période des modes mixtes,  $\epsilon_g$ , peut-il nous apporter de l'information sur les régions autour des points tournants ?  
Enfin, je m'intéresserai au terme  $\epsilon_g$  intervenant dans l'expression asymptotique des modes mixtes et des modes de gravité. Ce terme est souvent introduit par défaut pour représenter les termes de l'ordre de l'unité provenant de la contribution des points tournants dans la relation de phase. Dans le Chapitre 11, je dériverai son expression théorique en modélisant la forme de la cavité interne. Il sera alors possible de savoir si ce terme peut nous apporter de l'information sur les régions aux limites de la cavité ou non.

# Chapitre 9

## Le facteur de couplage comme moyen de sonder la zone évanescente

### Sommaire

---

<b>9.1</b>	<b>Observations pour un large échantillon d'étoiles . . . . .</b>	<b>195</b>
<b>9.2</b>	<b>Modélisation de la zone évanescente et interprétation des observations</b>	<b>196</b>
9.2.1	Hypothèse sur les profils des fréquences de Brunt-Väisälä et de Lamb . . .	196
9.2.2	Relation entre $q$ et les propriétés physiques de la zone évanescente . . . .	199
9.2.3	Discussion des résultats. . . . .	206
<b>9.3</b>	<b>Remarques conclusives . . . . .</b>	<b>207</b>

---

Dans ce chapitre, nous nous intéressons au facteur de couplage des modes mixtes dipolaires. D'après Eqs. (8.2), ce facteur dépend du coefficient de transmission d'une onde à travers la zone évanescente et par conséquent des propriétés de cette région de l'étoile (Takata 2016b). Alors que  $\Delta\Pi$  et  $\Delta\nu$  nous renseignent respectivement sur les cavités résonantes interne et externe, le facteur  $q$  a le potentiel de nous apporter des informations sur la région intermédiaire, située entre le profil de la fréquence de Brunt-Väisälä et celui de la fréquence de Lamb. Jusqu'à récemment, ce paramètre avait été peu étudié et avait pu être déterminé pour une poignée d'étoiles seulement (e.g., Mosser *et al.* 2012c; Vrad *et al.* 2016; Buysschaert *et al.* 2016). Ces observations ont notamment mis en exergue des valeurs de  $q$  supérieures à un quart, c'est-à-dire plus grande que la limite théorique supérieure prédite par la relation de phase des modes mixtes dans l'approximation d'un faible couplage donnée par Eq. (8.3). Dans la suite, le couplage est défini comme étant faible lorsque le facteur de transmission d'une onde incidente à travers la zone évanescente est faible par rapport à l'unité, c'est-à-dire lorsque la largeur de cette région est grande. Au contraire, le couplage est défini comme étant fort lorsque le facteur de transmission est de l'ordre de l'unité, ce qui correspond à une faible largeur de la zone évanescente. Plus récemment, Mosser *et al.* (2017b) ont proposé une nouvelle méthode automatique autorisant une estimation de la valeur de  $q$  sur un large échantillon d'étoiles. Avec cette méthode, ils ont pu déterminer la valeur du facteur de couplage dans 5200 étoiles observées par le satellite *Kepler*. Durant ma thèse, j'ai participé à l'interprétation des résultats via un modèle simple permettant de relier la valeur de  $q$  aux propriétés de cette région. Je résume ici les principaux enseignements dérivés de cette étude qui a donné lieu à une publication (Mosser, Pinçon, Belkacem *et al.*, 2017b).

### 9.1 Observations pour un large échantillon d'étoiles

La méthode proposée par Mosser *et al.* (2017b) a permis pour la première fois une étude à grande échelle du facteur de couplage pour des étoiles allant de la branche des sous-géantes jusqu'au red

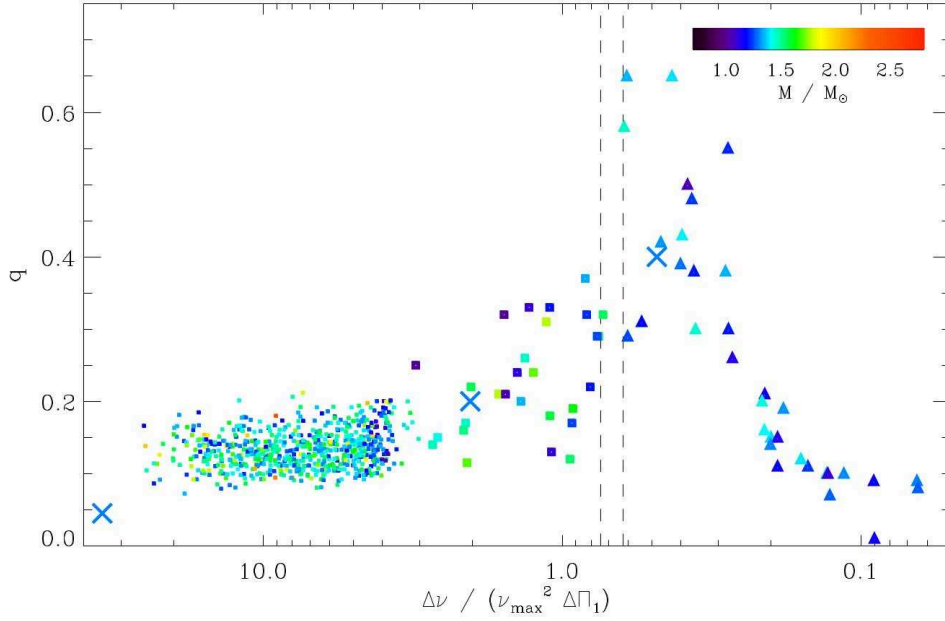
clump et secondary red clump. Cette méthode repose sur un processus d’optimisation. En quelques mots, le spectre de puissance d’oscillation,  $P(\nu)$ , est représenté en fonction d’une nouvelle variable,  $\tau$ , choisie de telle façon à retrouver un espacement régulier entre les différents pics d’oscillation. La relation asymptotique des modes mixtes permet de définir une telle variable qui dépend du facteur  $q$  Mosser *et al.* (2015). L’idée est alors de déterminer la valeur de  $q$  de telle façon à ce que la régularité de  $P(\tau)$  soit optimale. Le résultat obtenu est représenté sur les FIGURES 9.1 et 9.2 en fonction respectivement de la densité de modes mixtes à dominance de gravité et de la grande séparation. Ces deux paramètres sismiques diminuent au cours de l’évolution sur la branche des sous géantes et la branche des géantes rouges et servent donc ici d’indicateur évolutif. La FIGURE 9.2 montre que le facteur de couplage possède une signature similaire à  $\Delta\Pi$  en fonction de  $\Delta\nu$  qui marque la transition entre les étoiles de la branche des géantes rouges qui brûlent leur hydrogène en couche et les étoiles du clump qui ont commencé la fusion de l’hélium dans leur cœur (à comparer avec la FIGURE 8.3). Les valeurs de  $q$  mesurées dans les étoiles de la branche des géantes rouges sont situées entre 0.12 et 0.18 ; ces valeurs sont donc compatibles avec la relation de phase des modes mixtes dans l’approximation d’un faible couplage dérivée par Shibahashi (1979) et donnée dans Eq. (8.3). Les étoiles du clump, elles, présentent des valeurs de  $q$  situées entre 0.2 et 0.45, avec une valeur moyenne à égale à 0.32. Plus de 70% des valeurs de  $q$  mesurées dans les étoiles du clump sont supérieures à un quart, confirmant ainsi les précédentes observations (e.g., Mosser *et al.* 2012c; Vrad *et al.* 2016; Buyschaert *et al.* 2016). Ces faits observationnels sont donc incompatibles avec l’approximation d’un faible couplage. En outre, sur la FIGURE 9.1, on peut voir que la transition entre la branche des sous-géantes et la branche des géantes s’accompagnent d’un pic dans la valeur du facteur de couplage. Avec des valeurs entre 0.2 et 0.65, cela correspond aux valeurs de  $q$  les plus élevées sur tout l’échantillon d’étoiles. Pour ces étoiles, l’approximation d’un faible couplage demeure donc encore insuffisante. Cela a notamment motivé le travail théorique de Takata (2016a) qui, parallèlement à cette étude, a dérivé une expression du facteur de transmission à travers la barrière évanescente dans le cas où le couplage est fort, c’est-à-dire lorsque la zone évanescente a une largeur très faible. Dans la suite, ces observations seront interprétées en terme de structure interne via un modèle simple. Le cas d’un couplage faible tel que dérivé par Shibahashi (1979) et celui d’un couplage fort tel que dérivé par Takata (2016a) seront tous deux considérés et comparés.

## 9.2 Modélisation de la zone évanescente et interprétation des observations

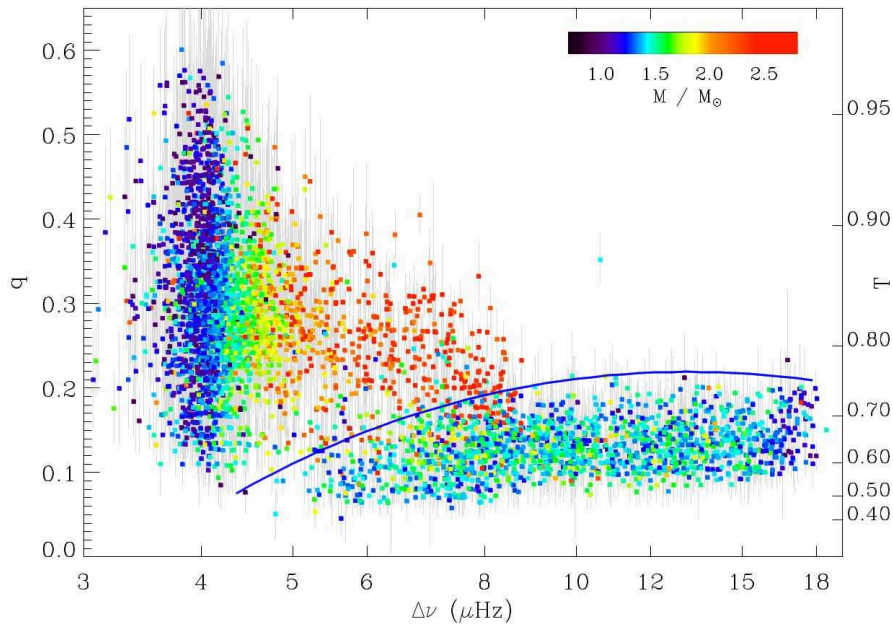
Dans cette section, on cherche à comprendre le lien entre le facteur de couplage des modes mixtes et la région évanescente de manière simple. Une première approche consiste à modéliser les profils des fréquences de Brunt-Väisälä et de Lamb dans cette région en s’appuyant sur les modèles stellaires. Ceci nous permettra d’obtenir une expression analytique de  $q$  qui dépendent des caractéristiques globales de cette zone et de discuter les observations présentées dans la section précédente.

### 9.2.1 Hypothèse sur les profils des fréquences de Brunt-Väisälä et de Lamb

La FIGURE 9.3 montre les fréquences modifiées de Brunt-Väisälä et de Lamb,  $\tilde{N}$  et  $\tilde{S}_1$ , dans trois modèles de  $1.3 M_\odot$  respectivement sur la branche des sous-géantes  $M_0$  (ci-après, *SG*), au début de l’ascension de la branche des géantes rouges  $M_1$  (ci-après, *Base RGB*) et plus haut sur la branche des géantes rouges juste avant le bump de luminosité  $M_2$  (ci-après, *Bump* ; i.e., la variation rapide de luminosité quand la couche d’hydrogène en fusion atteint la discontinuité de poids moléculaire moyen formé par le first dredge-up, voir le tracé évolutif autour de  $\log T_{\text{eff}} = 3.66$  sur le diagramme H-R de la FIGURE 9.4). Sur la FIGURE 9.3, l’évolution de la structure des cavités résonantes entre la fin de la séquence principale et le flash de l’hélium est mise en évidence. Du fait de l’augmentation du rayon stellaire durant cette phase, la valeur du rayon moyen de la cavité interne normalisé par le



**FIGURE 9.1:** Facteur de couplage en fonction de la densité de modes mixtes à dominance de gravité définie dans Eq. (8.9), d'après Mosser *et al.* (2017b). Le code couleur représente la masse estimée via les relations d'échelle sismiques. La ligne verticale discontinue indique la transition entre la branche des sous-géantes et celle des géantes rouges. Les triangles symbolisent les étoiles sous-géantes ; les carrés représentent les étoiles sur la branche des géantes rouges. Selon les auteurs, les barres d'erreur sur ces valeurs sont inférieures à 20%. Trois valeurs de  $q$  obtenues dans trois modèles de  $1.3 M_{\odot}$  en suivant le formalisme proposé par Takata (2016a) sont indiquées par des croix.



**FIGURE 9.2:** Facteur de couplage en fonction de la grande séparation (d'après Mosser *et al.* 2017b). Le code couleur représente la masse estimée via les relations d'échelle sismiques. L'axe vertical à droite fournit la valeur correspondante du facteur de transmission suivant Eq. (8.2). La ligne continue bleue marque la séparation entre les étoiles de la branche des géantes rouges, situées en-dessous, et celles faisant partie du red clump et du secondary red clump, situées au-dessus. Les barres d'erreur sont représentées en gris clair.

rayon de l'étoile est de plus en plus faible. D'autre part, le cœur d'hélium, dont la limite extérieure se situe dans le voisinage de la couche d'hydrogène en fusion, se contracte et la température centrale augmente ; par conséquent, les valeurs des fréquences de Brunt-Väisälä et de Lamb augmentent dans la cavité interne. Au contraire, en surface, la densité et la température effective diminuent, résultant en une baisse de la valeur de la fréquence de Lamb près de la surface, en accord avec la figure. De plus, on a vu dans le Chapitre 8 que la fréquence au maximum de puissance diminue au cours de l'évolution. L'évolution inverse des deux fréquences  $\tilde{N}$  et  $\tilde{S}_1$  dans la cavité interne par rapport à  $\nu_{\max}$  mènent à deux configurations de couplage possibles. En effet, sur la branche des sous-géantes et au début de l'ascension de la branche des géantes rouges (e.g., modèles  $M_0$  et  $M_1$ ), la valeur de  $\nu_{\max}$  est assez élevée pour que le point tournant interne associé à la zone évanescente (i.e., le point  $r_b$  sur la FIGURE 8.1) soit plus faible que le rayon de la base de la zone convective,  $r_{\text{BCZ}}$ , au-dessus duquel la fréquence de Brunt-Väisälä devient quasi nulle (puisque le gradient de température prend une valeur adiabatique). La configuration est identique pour les étoiles du clump (e.g., voir Fig. 33 dans Hekker & Christensen-Dalsgaard 2017). D'après les modèles stellaires, on peut donc supposer en première approximation que  $\tilde{N}$  et  $\tilde{S}_1$  suivent des lois de puissance en fonction du rayon dans la région évanescente de ces étoiles. Dans ce cas, un fort couplage est possible. Dans les étoiles évoluées de la branche des géantes rouges (e.g., modèle  $M_2$ ), la valeur de  $\nu_{\max}$  est si faible que le point tournant interne associé à la zone évanescente est environ égal au rayon de la base de la zone convective. On peut alors supposer que  $\tilde{N} \approx 0$  et que seule  $\tilde{S}_1$  suit une loi de puissance avec le rayon dans la région évanescente. Dans ce cas, la zone évanescente est généralement large et seule l'hypothèse d'un faible couplage est justifiée. Pour résumer, deux cas seront considérés en première approximation :

1. *Cas des étoiles sous-géantes, jeunes géantes rouges et du clump, où  $r_b \lesssim r_{\text{BCZ}}$*  : les fréquences modifiées de Brunt-Väisälä et de Lamb sont supposées suivre des lois de puissance dans la région évanescente avec un exposant constant et égal à  $\beta$ , c'est-à-dire

$$\tilde{N}(r) \approx \tilde{N}(r_b) \left(\frac{r_b}{r}\right)^\beta \quad \text{et} \quad \tilde{S}_1(r) \approx \tilde{S}_1(r_c) \left(\frac{r_c}{r}\right)^\beta . \quad (9.1)$$

Dans ce cas, l'approximation d'un faible ou celle d'un fort couplage sont toutes les deux possibles.

2. *Cas des étoiles évoluées sur la branche des géantes rouges, où  $r_b \sim r_{\text{BCZ}}$*  : la fréquence modifiée de Lamb est supposée suivre une loi de puissance de façon similaire à Eq. (9.1), mais la fréquence de Brunt-Väisälä est supposée nulle dans la région évanescente. Dans ce cas, la zone évanescente est généralement large et l'hypothèse d'un faible couplage est justifiée.

Le comportement approché de  $\tilde{N}$  et  $\tilde{S}_1$  selon une même loi de puissance est en fait équivalent à supposer que les trois quantités  $J$  (i.e.,  $d \ln m / d \ln r$ ),  $d \ln p / d \ln r$  et  $d \ln \rho / d \ln r$  varient très peu entre la limite supérieure du cœur d'hélium et le voisinage de la base de la zone convective. En effet, il est possible de montrer que les dérivées logarithmiques de  $\tilde{N}$  et  $\tilde{S}_1$  par rapport à  $r$  ne dépendent que des ces trois quantités. Ainsi, si  $\tilde{N}$  et  $\tilde{S}_1$  suivent approximativement des lois de puissance, alors dans le cas général, cela implique que  $J$ ,  $d \ln p / d \ln r$  et  $d \ln \rho / d \ln r$  sont quasi constants. Réciproquement, en supposant en première approximation que  $J$ ,  $d \ln p / d \ln r$  et  $d \ln \rho / d \ln r$  sont à peu près constants entre la limite supérieure du cœur d'hélium et la base de la zone convective, on a alors, d'après la définition des fréquences de Lamb et de Brunt-Väisälä données dans Eqs. (2.34) et (2.35),

$$\tilde{N}^2 \propto \frac{g}{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{d \ln \tilde{N}}{d \ln r} = \frac{1}{2} \left( -3 + \frac{d \ln m}{d \ln r} \right) = -\frac{3J}{2} \quad (9.2)$$

$$\tilde{S}_1^2 \propto \frac{c^2}{r^2} \propto \frac{p}{\rho r^2} \propto \frac{\left(\frac{dp}{dr}\right)}{\rho r \left(\frac{d \ln p}{d \ln r}\right)} \propto \frac{g}{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{d \ln \tilde{S}_1}{d \ln r} = -\frac{3J}{2} , \quad (9.3)$$

où l'on a utilisé dans la seconde implication la définition de la vitesse du son (tout en considérant  $\Gamma_1$  constant) et l'équation de l'équilibre hydrostatique. On retrouve donc bien que  $\tilde{N}$  et  $\tilde{S}_1$  suivent des lois de puissance, avec un exposant identique pour les deux. Ce comportement similaire pour  $\tilde{N}$  et  $\tilde{S}_1$  entre le cœur d'hélium et la base de la zone convective provient en particulier de leur dépendance en  $g/r$ . De plus, on trouve que dans ce cas, un lien existe entre l'exposant  $\beta$  et le facteur  $J$  défini dans Eq. (8.35), tel que  $\beta = 3J/2$  (Takata 2016a). Cette relation va nous permettre de simplifier le calcul du facteur de couplage dans les prochains paragraphes.

### 9.2.2 Relation entre $q$ et les propriétés physiques de la zone évanescente

Sous les hypothèses précédentes, il est possible d'exprimer analytiquement le facteur de couplage en fonction de la largeur de la région évanescente et de l'exposant  $\beta$ . D'après Eqs. (8.3)-(8.5) et Eq. (8.40) dans le cas d'un faible couplage, le facteur  $q$  dépend de l'intégrale du nombre d'onde entre les deux points tournants  $r_b$  et  $r_c$  délimitant la zone évanescente. Nous allons voir que c'est aussi le cas dans l'hypothèse d'un fort couplage. Avant d'aller plus loin, il est donc nécessaire d'estimer cette intégrale .

**Intégrale du nombre d'onde.** Dans le cas des étoiles sous-géantes et jeunes géantes rouges où  $r_b \lesssim r_{\text{BCZ}}$  (cas 1 précédent), l'intégrale du nombre d'onde,  $\mathcal{I}_1$ , est égale d'après Eq. (8.36) à

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1 &= \int_{r_b}^{r_c} |\tilde{k}_r| dr = \int_{r_b}^{r_c} \frac{\sigma}{c} \left(1 - \frac{\tilde{N}^2}{\sigma^2}\right)^{1/2} \left(\frac{\tilde{S}_1^2}{\sigma^2} - 1\right)^{1/2} dr \\ &= \int_{r_b}^{r_c} \sqrt{2}J \frac{\sigma r}{\sqrt{2}Jc} \left(1 - \frac{\tilde{N}^2}{\tilde{S}_1^2} \frac{\tilde{S}_1^2}{\sigma^2}\right)^{1/2} \left(\frac{\tilde{S}_1^2}{\sigma^2} - 1\right)^{1/2} \frac{dr}{r} \\ &= \int_{r_b}^{r_c} \sqrt{2}J \frac{\sigma}{\tilde{S}_1} \left(1 - \alpha_1^2 \frac{\tilde{S}_1^2}{\sigma^2}\right)^{1/2} \left(\frac{\tilde{S}_1^2}{\sigma^2} - 1\right)^{1/2} \frac{dr}{r}, \end{aligned} \quad (9.4)$$

où l'on a défini le rapport  $\alpha_1 = \tilde{N}/\tilde{S}_1$  qui doit rester constant quel que soit le rayon entre la limite supérieure du cœur d'hélium et la base de la zone convective d'après Eq. (9.1). En procédant au changement de variable  $x = \sigma/\tilde{S}_1$ , en se souvenant qu'aux points tournants  $\sigma = \tilde{N}(r_b) = \tilde{S}_1(r_c)$  dans les bornes de l'intégrale, et en utilisant la relation  $\beta = 3J/2$ , on aboutit alors à

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1(\alpha_1) &= \int_{\alpha_1}^1 \frac{\sqrt{2}J}{\beta} \sqrt{1-x^2} \sqrt{x^2 - \alpha_1^2} \frac{dx}{x^2} \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3} [(\alpha_1^2 + 1)K(1 - \alpha_1^2) - 2E(1 - \alpha_1^2)], \end{aligned} \quad (9.5)$$

où  $K$  et  $E$  sont respectivement les intégrales elliptiques complètes de première et de deuxième sorte (e.g., Abramowitz & Stegun 1972).

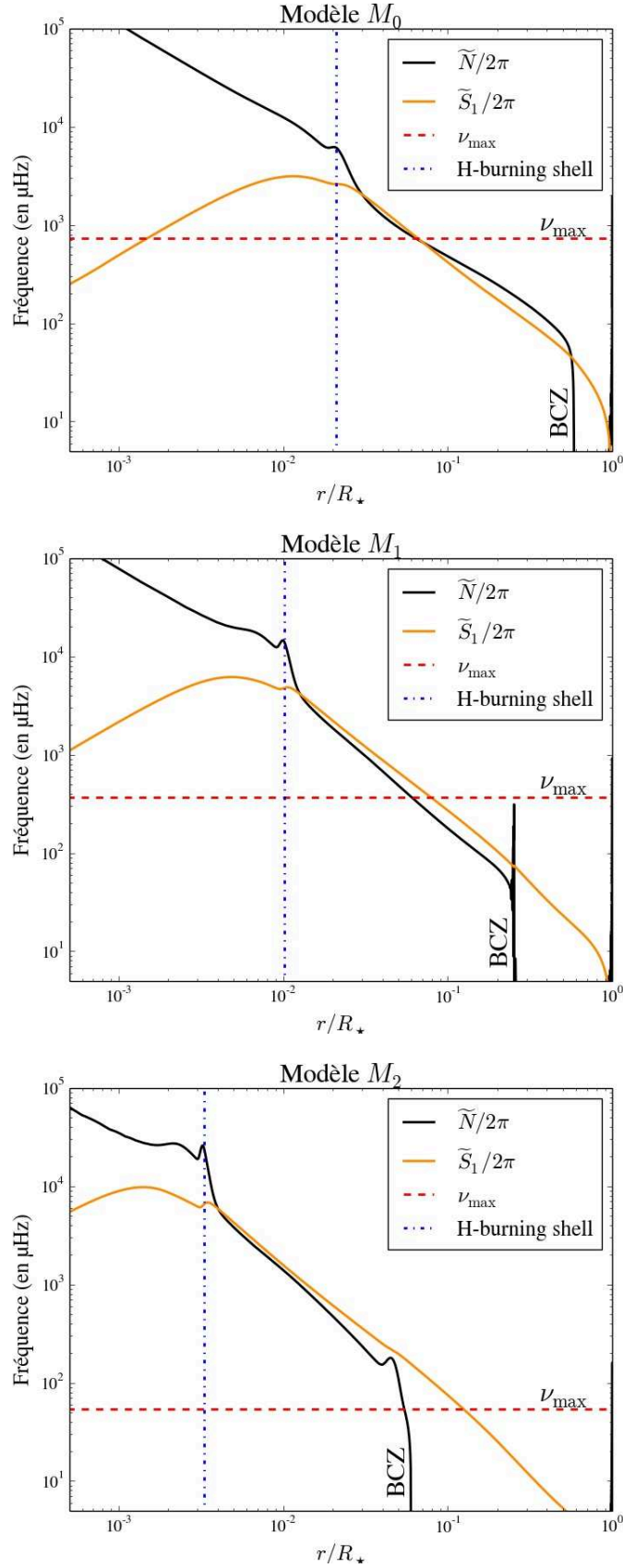
Dans le cas des étoiles géantes rouges évoluées où  $r_b \sim r_{\text{BCZ}}$  (cas 2 précédent), l'intégrale du nombre d'onde,  $\mathcal{I}_2$ , est égale avec  $\tilde{N} \approx 0$  dans Eq. (8.36) à

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_2 &= \int_{r_b}^{r_c} 2J \left(1 - \frac{\sigma^2}{\tilde{S}_1^2}\right)^{1/2} \frac{dr}{r} = \int_{\alpha_2}^1 \frac{\sqrt{2}J}{\beta} (1-x^2)^{1/2} \frac{dx}{x} \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3} \int_{\alpha_2}^1 (1-x^2)^{1/2} \frac{dx}{x}, \end{aligned} \quad (9.6)$$

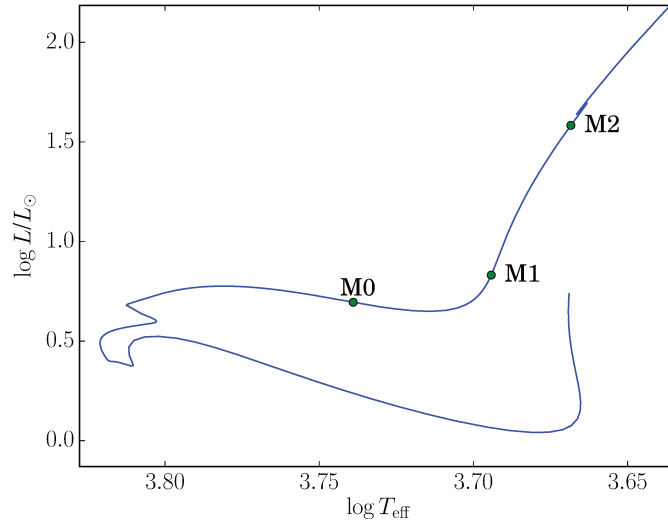
où l'on a utilisé le changement de variable précédent et la relation  $\beta = 3J/2$ , et où l'on a défini  $\alpha_2 = \tilde{S}_1(r_c)/\tilde{S}_1(r_b)$ . On obtient finalement

$$\mathcal{I}_2(\alpha_2) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \left[ \ln \left( \sqrt{1 - \alpha_2^2} + 1 \right) - \ln \alpha_2 - \sqrt{1 - \alpha_2^2} \right]. \quad (9.7)$$





**FIGURE 9.3:** Profil des fréquences modifiées de Brunt-Väisälä,  $\tilde{N}/2\pi$  (ligne continue noire), et de Lamb,  $\tilde{S}_1/2\pi$  (ligne continue orange), dans les trois modèles de  $1.3 M_\odot$  considérés dans Belkacem *et al.* (2015a,b). Les tirets rouges représentent  $\nu_{\max}$  dans les trois cas. La base de la zone convective est indiquée par “BCZ” et les lignes verticales discontinues symbolisent la couche d’hydrogène en fusion.



**FIGURE 9.4:** Position dans le diagramme H-R des trois modèles de  $1.3 M_{\odot}$  considérés dans ce chapitre (d'après Belkacem *et al.* 2015a,b). La ligne continue représente le tracé évolutif depuis la pré-séquence principale jusqu'en haut de la branche des géantes rouges.

En supposant que  $\alpha_2 \ll 1$ , l'intégrale dans le cas 2 vaut alors

$$\mathcal{I}_2(\alpha_2) \approx -\frac{2\sqrt{2}}{3} \left[ \ln\left(\frac{\alpha_2}{2}\right) + 1 + \mathcal{O}(\alpha_2^2) \right]. \quad (9.8)$$

Dans les deux cas considérés, l'intégrale du nombre d'onde dépend respectivement des rapports  $\alpha_1 = \tilde{N}/\tilde{S}$  et  $\alpha_2 = \tilde{S}_1(r_c)/\tilde{S}_1(r_b)$ . D'après Eq. (9.1) et le fait que  $\tilde{N}(r_b) = \tilde{S}_1(r_c) = \sigma$ , ces paramètres sont reliés aux points tournants  $r_b$  et  $r_c$  par la même expression, c'est-à-dire  $\alpha_1 = (r_b/r_c)^\beta$  et  $\alpha_2 = (r_b/r_c)^\beta$ . Pour la suite, il est donc pratique de définir la variable  $\alpha$  telle que

$$\alpha \equiv \left(\frac{r_b}{r_c}\right)^\beta = \left(\frac{1 - \Delta r/2r_{\text{ev}}}{1 + \Delta r/2r_{\text{ev}}}\right)^\beta, \quad (9.9)$$

qui représente aussi bien le paramètre  $\alpha_1$  dans le cas 1 que  $\alpha_2$  dans le cas 2. La variable  $\alpha$  s'exprime en fonction de la largeur physique de la zone évanescente,  $\Delta r = r_c - r_b$ , et du rayon du milieu de la zone évanescente,  $r_{\text{ev}} = (r_c + r_b)/2$ . De façon équivalente, on peut aussi écrire

$$\frac{\Delta r}{r_{\text{ev}}} = 2 \left( \frac{1 - \alpha^{1/\beta}}{1 + \alpha^{1/\beta}} \right). \quad (9.10)$$

**Approximation d'un faible couplage.** D'après Shibahashi (1979) et Eq. (8.40), le facteur de couplage est donné, sous cette hypothèse, par

$$q = \frac{1}{4} \exp\left(-2 \int_{r_b}^{r_c} |\tilde{k}_r| dr\right). \quad (9.11)$$

Dans le modèle où les fréquences de Brunt-Väisälä et de Lamb suivent des lois de puissance, celui-ci vaut alors

$$q = \frac{1}{4} \exp[-2\mathcal{I}_i(\alpha)], \quad (9.12)$$

où  $\mathcal{I}_i(\alpha)$  est donnée par Eqs. (9.5) et (9.7), avec  $i = 1$  dans le cas 1 défini précédemment (e.g., dans les étoiles sous-géantes, jeunes géantes rouges et du clump), et  $i = 2$  dans le cas 2 (e.g., dans les

étoiles évoluées sur la branche des géantes rouges). Dans ce dernier cas, on trouve d'après Eq. (9.8) dans le cas d'un très faible couplage

$$q \approx \frac{1}{4} \exp \left\{ \frac{4\sqrt{2}}{3} \left[ \ln \left( \frac{\alpha}{2} \right) + 1 \right] \right\} \approx \frac{e^{4\sqrt{2}(1-\ln 2)/3}}{4} \alpha^{4\sqrt{2}/3} \approx 0.45 \alpha^{4\sqrt{2}/3}. \quad (9.13)$$

D'après la définition de  $\alpha$  dans Eq. (9.9), **le facteur de couplage dépend donc de la largeur relative de la zone évanescente**, représentée par  $\Delta r/r_{\text{ev}}$ , **et du contraste de densité entre le cœur d'hélium et la base de l'enveloppe convective**, représenté par  $\beta$ . En effet, sous l'hypothèse que  $\tilde{N}$  et  $\tilde{S}_1$  suivent des lois de puissance, la relation entre  $\beta$  et le facteur  $J$  entre la limite supérieure du cœur d'hélium et la base de la zone convective implique que  $m = M_c(r/r_{H_e})^{(3-2\beta)}$ , où  $m$  est la masse d'une sphère concentrique, et  $M_{H_e}$  et  $r_{H_e}$  sont la masse et le rayon du cœur d'hélium. Étant donné que la masse est très concentrée dans le cœur sur la post-séquence principale, on en déduit que la valeur de  $\beta$  doit être proche de  $3/2$ , c'est-à-dire sa limite supérieure, pour assurer que  $m$  croît peu avec le rayon. Dans la suite, on choisira donc la valeur de  $\beta$  entre 1.3 et 1.5. Puisque la variation locale de la masse d'une sphère concentrique avec le rayon est directement liée à la densité par l'équation de continuité,  $\beta$  nous fournit donc bien une information sur le contraste de densité entre le cœur et la base de l'enveloppe. On note aussi que le facteur de couplage ne dépend pas de la fréquence d'oscillation des modes dans le cas 1, puisque l'intégrale dans Eq. (9.5) et  $\alpha_1 = \alpha$  n'en dépendent pas dans cette configuration. Au contraire, dans le cas 2,  $q$  dépend de la fréquence à travers le point tournant  $r_c$  (puisque  $r_b \sim r_{\text{BCZ}}$  et est donc à peu près constant).

**Hypothèse d'un fort couplage.** Quand l'épaisseur de la zone évanescente est très faible, le développement asymptotique des fonctions propres dans la région évanescente est incorrecte et l'approche utilisée par Shibahashi (1979) est invalide. Takata (2016a) a proposé un formalisme différent dans lequel la taille de la région évanescente est supposée très faible. Dans ce cas, il a alors montré que le coefficient de transmission de l'amplitude d'une onde à travers la zone évanescente peut s'écrire sous la forme

$$T = \exp \left( - \int_{r_b}^{r_c} |\tilde{k}_r| dr + X_R \right), \quad (9.14)$$

où  $X_R$  est un terme provenant du gradient de la fréquence de Brunt-Väisälä et de Lamb dans la zone évanescente. En effet, même pour une zone évanescente de largeur nulle (i.e.,  $r_c = r_b$ ), une onde incidente subit une réflexion au point où  $\tilde{k}_r = 0$ . Par exemple, dans le cas le plus simple où la barrière évanescente prend la forme d'un potentiel parabolique symétrique par rapport au point tournant unique central (i.e., de la forme  $k_r^2 \propto [r - r_{\text{ev}}]^2$ ), une moitié de l'énergie de l'onde est transmise et l'autre moitié est réfléchi (e.g., Heim *et al.* 2013). De plus, dans les cas des ondes gravito-acoustiques, la variation de la structure interne dans cette fine région ne peut plus être négligée, d'où l'apparition du terme  $X_R$ . Dans l'hypothèse où les fréquences de Lamb et de Brunt-Väisälä suivent une loi de puissance similaire, ce terme est donné par (Takata 2016a, Eq. (A78))

$$X_R(\beta) = \frac{\pi\sqrt{2}}{48} \left( \frac{5}{2} - \sqrt{\frac{81}{4\beta^2} - 8} \right)^2. \quad (9.15)$$

Il est important de noter que cette dernière expression a été obtenue en supposant que la largeur de la région évanescente est nulle, c'est-à-dire en accord avec les hypothèses utilisées dans le formalisme développé par Takata (2016a). On supposera donc dans la suite, pour simplifier, que ce terme ne dépend pas de la largeur évanescente et reste égal à cette valeur. Le facteur de couplage est alors obtenu en considérant l'expression générale donnée dans Eq. (8.2) avec la relation  $R^2 = 1 - T^2$  (i.e., conservation de l'énergie), c'est-à-dire

$$q = \frac{1 - \sqrt{1 - T^2}}{1 + \sqrt{1 - T^2}} = \frac{1 - \sqrt{1 - e^{-2\bar{X}}}}{1 + \sqrt{1 - e^{-2\bar{X}}}}, \quad (9.16)$$

où  $\tilde{X}$  vaut d'après Eqs. (9.5) et (9.15) dans le cas 1

$$\tilde{X} = \mathcal{I}_1(\alpha) + X_R(\beta) . \quad (9.17)$$

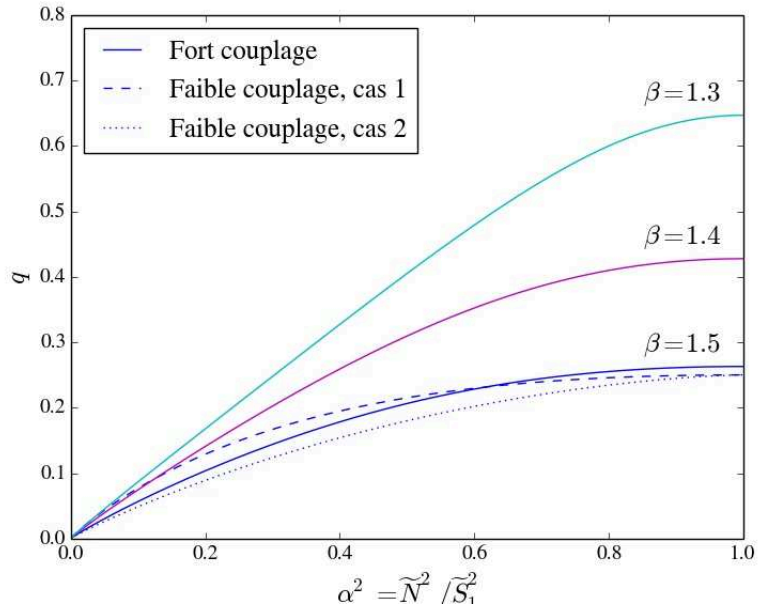
De même, dans l'hypothèse d'un fort couplage,  $q$  dépend de la largeur de la zone évanescente et du contraste de densité entre le cœur d'hélium et la base de l'enveloppe, et reste indépendant de la fréquence d'oscillation.

**Comparaison des formalismes.** Les différentes expressions du facteur de couplage sont représentées sur les FIGURES 9.5 et 9.6 en fonction des paramètres  $\alpha^2$ ,  $\beta$  et  $\Delta r/r_{\text{ev}}$ . La valeur pour  $\beta$  est comprise entre 1.3 et 1.5, c'est-à-dire entre sa limite supérieure théorique et une valeur représentative des modèles stellaires allant de la branche des sous-géantes au clump. Deux types de comparaison sont alors possibles : une première entre le cas 1 et le cas 2 dans l'approximation d'un faible couplage, une deuxième entre l'expression obtenue sous l'hypothèse d'un faible couplage par Shibahashi (1979) et celle obtenue en supposant un fort couplage par Takata (2016a).

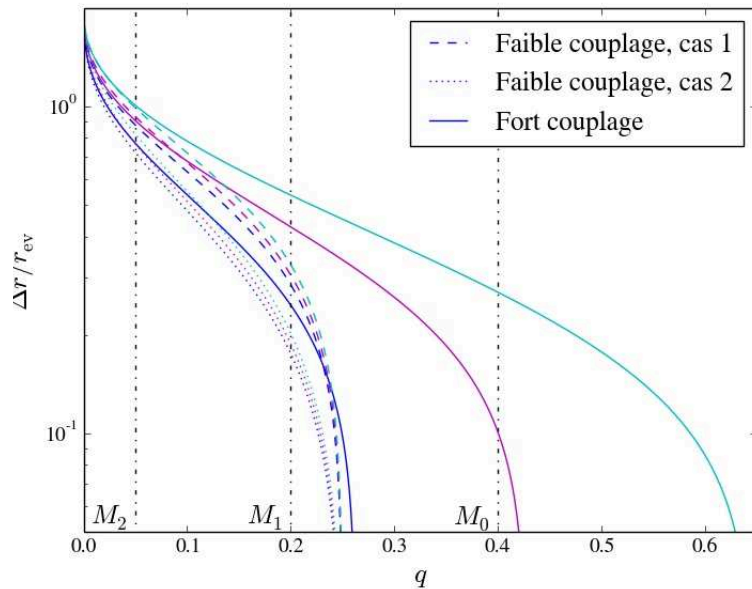
1. *Comparaison entre les cas 1 et 2 sous l'approximation d'un faible couplage* : Cela revient à comparer le lien qu'il existe, sous l'hypothèse d'un faible couplage (i.e., disons pour  $q \lesssim 0.2$ ), entre le facteur de couplage et l'épaisseur de la zone évanescente dans les étoiles sous-géantes, jeunes géantes rouges et du clump pour lesquelles  $r_b \lesssim r_{\text{BCZ}}$ , avec celui dans les étoiles évoluées de la branche des géantes rouges pour lesquelles  $r_b \sim r_{\text{BCZ}}$ . On peut voir sur la FIGURE 9.5 que le comportement global de  $q$  dans ces deux cas est similaire. A valeur de  $\alpha$  donnée, la valeur de  $q$  dans le cas 2 est toujours inférieure à celle obtenue dans le cas 1. Cet écart résulte de la différence de configuration près du point tournant  $r_b$  (i.e.,  $\tilde{N} \approx 0$  dans le cas 2). De plus, alors que le lien entre  $q$  et  $\alpha$  est indépendant de la valeur de  $\beta$ , la FIGURE 9.6 montre que la valeur de  $q$  est dégénérée en fonction de  $\beta$  et  $\Delta r/r_{\text{ev}}$ . A valeurs de  $\beta$  et de  $q$  données, la différence relative entre la valeur de  $\Delta r/r_{\text{ev}}$  obtenue dans le cas 1 et celle obtenue dans le cas 2 atteint environ 50% pour  $q \sim 0.1$ , et est inférieure d'environ 10% pour  $q \lesssim 0.05$ . La différence entre ces deux configurations est significative et doit donc être prise en compte pour faire un lien précis entre une valeur de  $q$  observée et la largeur de la zone évanescente. La FIGURE 9.6 montre de plus que dans chacun des cas, à valeur de  $q$  donnée, l'écart entre la valeur de  $\Delta r/r_{\text{ev}}$  obtenue avec  $\beta = 1.3$  et celle obtenue avec  $\beta = 1.5$  peut atteindre 20%. L'influence de  $\beta$  sur la détermination de  $\Delta r/r_{\text{ev}}$  ne peut donc pas être négligée également.
2. *Comparaison entre l'hypothèse d'un faible couplage et celle d'un fort couplage* : Plus généralement, les FIGURES 9.5 et 9.6 permettent de comparer l'expression obtenue par Shibahashi (1979) et celle dérivée par Takata (2016a). D'abord, ces deux expressions convergent quand le couplage devient faible, c'est-à-dire quand  $\alpha \rightarrow 0$  ou  $\Delta r/r_{\text{ev}} \rightarrow 2$ . En effet, comme démontré par Takata (2016a), lorsque la zone évanescente s'élargit, le terme  $X_R$  dans Eq. (9.17) devient négligeable par rapport à l'intégrale du nombre d'onde et le coefficient de transmission à travers la barrière évanescente devient faible ; l'expression trouvée par Takata (2016a) converge donc vers celle dérivée par Shibahashi (1979). Ensuite, les FIGURES 9.5 et 9.6 montrent que plus le couplage est fort, c'est-à-dire plus  $\alpha \rightarrow 1$  ou  $\Delta r/r_{\text{ev}} \rightarrow 0$ , plus la différence entre l'hypothèse d'un fort couplage et l'approximation d'un faible couplage devient importante. L'hypothèse d'un fort couplage autorise des valeurs supérieures à un quart, en accord avec les observations. L'utilisation d'un tel formalisme est donc obligatoire pour expliquer les observations. Comme dans le cas de l'approximation d'un faible couplage, la valeur de  $q$  dans l'hypothèse d'un fort couplage est dégénérée en fonction du couple de paramètres  $\beta$  et  $\Delta r/r_{\text{ev}}$ , mais aussi en fonction du couple de paramètres  $\alpha$  et  $\beta$ . La valeur maximale de  $q$  est atteinte quand la largeur de la zone évanescente est nulle et augmente lorsque  $\beta$  diminue. Par conséquent, plus  $\beta$  est petit, plus l'erreur faite dans l'approximation d'un faible couplage est importante. Deux situations peuvent alors se présenter à valeur de  $q$  donnée. Soit  $q$  est supérieur à 1/4 et alors l'hypothèse de fort couplage est obligatoire. La dégénérescence de  $q$

avec  $\beta$  dans ce cas mène alors à une incertitude sur la détermination de  $\Delta r/r_{\text{ev}}$  plus forte que dans l'approximation d'un faible couplage. Par exemple, pour  $q = 0.40$ , la valeur de  $\Delta r/r_{\text{ev}}$  obtenue avec  $\beta = 1.3$  est plus grande que celle obtenue avec  $\beta = 1.5$  environ d'un facteur deux. Soit la valeur de  $q$  est inférieure à  $1/4$ , et les deux formalismes donnent un résultat différent. Par exemple, pour  $q = 0.20$  et en prenant  $\beta \approx 1.3$ , la valeur de  $\Delta r/r_{\text{ev}}$  obtenue par le formalisme de Takata (2016a) est trois fois supérieure à celle obtenue avec l'expression de Shibahashi (1979) dans le cas 1. Dans ce cas de couplage de force intermédiaire, il est difficile de dire laquelle des deux valeurs est la plus réaliste puisque les hypothèses d'un fort et d'un faible couplage sont toutes les deux discutables. En effet, bien que le formalisme de Takata (2016a) converge vers celui de Shibahashi (1979) quand on fait tendre artificiellement la largeur de la zone évanescente vers l'infini, Takata (2016a) fait explicitement l'hypothèse que cette dernière est très faible (voir Chapitre 10 pour plus de détails). Cette incohérence dans les hypothèses du formalisme peut laisser quelques doutes sur la pertinence du résultat dans un cas de couplage intermédiaire. Ce point mérite de futures investigations, hors du cadre de cette étude. Néanmoins, on voit que pour  $\beta = 1.5$ , les valeurs de  $q$  résultantes de l'une ou l'autre des expressions sont très similaires. Il n'y a pas de raisons physiques évidentes à cette similitude provenant plus vraisemblablement d'une coïncidence. Une valeur de  $\beta \approx 1.5$  correspond à une valeur de  $J \approx 1$ , telle que  $d \ln m / d \ln r \approx 0$ , c'est-à-dire avec un taux de variation de la masse entre le cœur d'hélium et la base de l'enveloppe très faible, et donc un contraste de densité très élevé. La valeur de 1.5 correspond donc à une valeur limite supérieure pour  $\beta$ . Cette situation peut notamment se rencontrer dans les étoiles de la branche des géantes rouges (e.g., le modèle  $M_1$  sur la FIGURE 9.3).

La nécessité d'une formulation théorique considérant un fort couplage est donc nécessaire pour rendre compte des observations. Une estimation du facteur de couplage autour de  $\nu_{\text{max}}$  dans les trois modèles de  $1.3 M_{\odot}$  positionnés dans le diagramme H-R de la FIGURE 9.4 a été obtenue en utilisant la formulation donnée par Takata (2016a) pour le modèle  $M_0$  (*SG*) et  $M_1$  (*Base RGB*), et la formulation donnée par Shibahashi (1979) pour le modèle  $M_2$  (*Bump*). On note que dans ces trois modèles, le facteur de couplage s'avère varier légèrement avec la fréquence d'oscillation. Cela vient du fait que les fréquences de Brunt-Väisälä et de Lamb ne suivent pas rigoureusement la même loi de puissance (e.g., voir FIGURE 9.3). Leurs valeurs moyennées sur un intervalle de fréquences autour de  $\nu_{\text{max}}$  sont représentées par des croix bleues et comparées aux observations dans les étoiles sous-géantes et géantes rouges sur la FIGURE 9.1. Pour le modèle  $M_0$  (*SG*), le couplage est fort et le formalisme de Takata (2016a) donne une estimation en accord avec les valeurs observées. Pour le modèle  $M_1$  (*Base RGB*), la FIGURE 9.3 montre que  $\beta \approx 1.5$ . Comme il a été mentionné plus haut, le formalisme de Takata (2016a) et Shibahashi (1979) prédisent des valeurs de  $q$  similaires. Bien que l'utilisation de ces deux formalismes soient formellement discutables dans le cas d'un couplage de force intermédiaire, la valeur de  $q$  est encore une fois en accord avec les observations. Pour le modèle  $M_2$  (*Bump*), la valeur estimée est plus faible que la valeur moyenne observée sur la branche des géantes rouges (voir FIGURE 9.1). Ce modèle est néanmoins légèrement plus évolué que l'ensemble des étoiles de la branche des géantes rouges pour lesquelles le facteur de couplage a pu être mesuré, i.e. avec une plus faible valeur de  $\Delta\nu$ . Puisqu'une faible valeur du facteur de couplage résulte en une valeur élevée de l'inertie du mode dans le cœur, et donc en une faible amplitude en surface (e.g., Dupret *et al.* 2009; Grosjean *et al.* 2014), on en déduit que les modes mixtes à dominance de gravité sont aussi plus difficilement détectables à une telle valeur de  $q$ . La différence entre la valeur de  $q$  estimée dans  $M_2$  (*Bump*) et la valeur moyenne observée sur la branche des géantes rouges pourrait donc simplement être due à un biais observationnel associé à de trop faibles valeurs de  $q$  dans cette gamme de valeurs de  $\Delta\nu$ . Ce point mérite néanmoins de plus amples investigations dans le futur.



**FIGURE 9.5:** Facteur de couplage en fonction du rapport  $\alpha^2$ . Les différentes expressions de  $q$  sont comparées : celle obtenue dans l'approximation d'un faible couplage définie dans Eq. (9.12), où l'intégrale du nombre d'onde est donnée par Eq. (9.5) dans le cas 1 (ligne discontinue) et donnée par Eq. (9.7) dans le cas 2 (ligne pointillée) ; celle obtenue dans l'hypothèse d'un fort couplage définie par Eqs. (9.16) et (9.17) (ligne continue). Pour ce dernier cas, trois valeurs de  $\beta$  ont été considérées.



**FIGURE 9.6:** Largeur de la zone évanescente normalisée par son rayon central,  $\Delta r/r_{\text{ev}}$ , en fonction du facteur de couplage. Le lien entre les deux a été obtenu à l'aide de la relation donnée dans Eq. (9.10). Les couleurs cyan, magenta et bleu correspondent à  $\beta = 1.3, 1.4$  et  $1.5$  respectivement. Les lignes verticales pointillées représentent les valeurs des facteurs de couplage déterminées dans les trois modèles du diagramme H-R de la FIGURE 9.4. On rappelle que pour les modèles  $M_0$  (*SG*) et  $M_1$  (*Base RGB*), l'hypothèse d'un fort couplage doit être considérée. Le modèle  $M_2$  (*Bump*), lui, correspond au cas 2 dans l'approximation d'un faible couplage.

### 9.2.3 Discussion des résultats.

La modélisation simplifiée des fréquences de Brunt-Väisälä et de Lamb montre clairement que la détermination du facteur de couplage permet d’obtenir des indices sur l’évolution de la structure de la zone évanescente, comme peuvent le faire  $\Delta\Pi$  et  $\Delta\nu$  pour le cœur d’hélium et l’enveloppe. Dans la suite, les valeurs observées par Mosser *et al.* (2017b) et représentées sur les FIGURES 9.1 et 9.2 sont discutées à la lumière de ce modèle.

**Transition entre les phases de sous-géantes et de géantes rouges.** Mosser *et al.* (2014) ont montré que la transition entre la branche des sous-géantes et celle des géantes rouges s’accompagne d’une signature caractéristique dans le diagramme  $\Delta\Pi - \Delta\nu$ . Alors que ces deux paramètres se répartissent dans un intervalle de valeurs resserré sur la branche des géantes rouges, ils montrent au contraire une large dispersion sur la branche des sous-géantes. Le facteur de couplage montre un comportement similaire au cours de l’évolution. A la fin de la branche des sous-géantes, le facteur de couplage présente un maximum. De façon assez intéressante, cela se passe quasi simultanément au first dredge-up, le moment où la base de la zone convective atteint son niveau le plus profond. Une valeur élevée de  $q$  indique que les profils des fréquences de Brunt-Väisälä et de Lamb sont tous les deux très proches à cet instant de l’évolution (voir par exemple le modèle  $M_0$  ( $SG$ ) sur la FIGURE 9.3 ou le modèle de jeune géante rouge sur la FIGURE 8.4). L’observation de valeurs de  $q$  dans l’intervalle  $[0.40, 0.65]$  aux alentours de la phase de transition correspond, selon la modélisation précédente et la FIGURE 9.5, à une valeur de  $\beta$  inférieure à 1.4 et une valeur pour  $\alpha^2$  supérieure à 0.5. La dégénérescence de la valeur du facteur de couplage avec les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  ne nous permet pas de conclure plus précisément ici.

**Étoiles sur la branche des géantes rouges.** Durant cette phase, l’enveloppe se dilate tandis que la cavité radiative se contracte. Le contraste de densité entre le cœur et l’enveloppe augmente en conséquence durant cette période dans la zone évanescente. La dérivée  $d \ln m / d \ln r$  tend vers 0, le facteur  $J$  tend vers 1 et l’exposant  $\beta$  augmente vers sa limite supérieure  $3/2$  (puisque dans une première approximation,  $\beta \approx 3J/2$ ). La diminution de  $q$  observée sur la branche des géantes rouges peut donc s’expliquer soit par un élargissement de la région située entre le profil de la fréquence de Brunt-Väisälä et celui de la fréquence de Lamb, soit par l’augmentation de la valeur de  $\beta$ , ou soit par la contribution simultanée des deux processus. Pour les étoiles les plus évoluées sur la branche des géantes rouges, la valeur de  $\nu_{\max}$  peut devenir si faible que le point tournant interne associé à la région évanescente des modes observés corresponde au rayon de la base de la zone convective. Dans cette configuration, il semble préférable d’utiliser l’approximation d’un faible couplage dans le cas 2 défini dans la Section 9.2.1 et représenté par la ligne pointillée sur la FIGURE 9.5. La diminution de la valeur de  $q$  observée correspond dans ce cas à un élargissement de la zone évanescente. Néanmoins, la raison physique sous-jacente à cet élargissement n’est pas unique. En effet, il peut résulter soit de l’expansion de la région située entre le profil de  $\tilde{N}$  et celui de  $\tilde{S}_1$ , soit de la diminution de  $\nu_{\max}$ , ou soit de la contribution des deux phénomènes. De plus amples investigations, par le biais, par exemple, de modèles stellaires, sont nécessaires pour conclure définitivement. Enfin, on peut encore noter que Mosser *et al.* (2017b) ont observé une dépendance de  $q$  avec la masse sur la branche des géantes rouges. De façon assez intéressante,  $q$  diminue avec la masse pour les étoiles de masse inférieure à environ  $1.8 M_{\odot}$ . A l’inverse, pour des masses supérieures, plus la masse est grande, plus la valeur du facteur de couplage est élevée. Ce changement apparaît près de la masse limite de transition entre les étoiles du red clump (i.e., pour lesquelles la fusion de l’hélium démarre dans des conditions dégénérées) et celles du secondary red clump (i.e., pour lesquelles la fusion de l’hélium démarre dans des conditions non-dégénérées). Cette constatation observationnelle reste à être confirmée dans les modèles stellaires.

**Étoiles du clump.** Lors de l’ignition de la fusion de l’hélium dans le cœur, l’étoile subit un réajustement structurel. En effet, le dégagement d’énergie libérée par la fusion de l’hélium fait

se dilater le cœur qui devient moins dense, résultant en une valeur plus élevée de  $\Delta\Pi$  (e.g., voir FIGURE 8.3). De façon similaire, la valeur du facteur de couplage augmente significativement lors de la transition entre les deux stades évolutifs. Cela est probablement la conséquence d’une variation simultanée de  $\beta$  et de  $\alpha$ . En effet, puisque la cavité radiative se dilate lors de la transition de la branche des géantes rouges vers le clump, on peut donc s’attendre d’une part à ce que le contraste de densité entre la cavité radiative et l’enveloppe, et donc  $\beta$ , diminue, et d’autre part à ce que la largeur de la zone évanescence diminue. La dégénérescence de la valeur du facteur de couplage avec cette paire de paramètres ne permet donc pas de remonter directement à leurs valeurs dans ces étoiles.

### 9.3 Remarques conclusives

La nouvelle méthode proposée par Mosser *et al.* (2017b) a permis de mesurer le facteur de couplage des modes mixtes pour des milliers d’étoiles observées par le satellite *Kepler*. Environ 5200 valeurs ont été obtenues de la branche des sous-géantes jusqu’au clump. Alors que les paramètres sismiques usuels  $\Delta\nu$  et  $\Delta\Pi$  donnent de l’information respectivement sur l’enveloppe et sur la cavité radiative, les résultats obtenus dans ce chapitre montrent que le facteur de couplage est capable de sonder la région intermédiaire située entre le profil de la fréquence de Brunt-Väisälä et celui de la fréquence de Lamb. Ce paramètre est notamment sensible à la largeur de cette région (mesurée par  $\alpha$ ) et au contraste de densité entre le cœur d’hélium et la base de l’enveloppe (mesuré par  $\beta$ ). Les observations montrent que le facteur de couplage des modes mixtes varie avec l’évolution et qu’il possède une signature particulière au moment du first dredge-up, ainsi qu’à la transition entre la branche des géantes rouges et le red clump. Sa détermination fournit donc de nouvelles contraintes sur l’évolution stellaire. Néanmoins, il n’est pas toujours possible d’obtenir des informations précises sur la zone évanescence à partir seulement de la mesure du facteur de couplage. En effet, le modèle simplifié présenté dans ce chapitre montre que la valeur de  $q$  est dégénérée avec la paire de paramètres  $(\alpha, \beta)$  caractérisant la zone évanescence. Une étude de l’évolution du facteur de couplage par le biais de modèles stellaires est donc nécessaire pour faire un lien précis entre sa valeur mesurée et la structure de la région intermédiaire, ce qui fera l’objet de futurs travaux. Enfin, les observations montrent la nécessité d’aller au-delà de l’approximation d’un faible couplage dans l’analyse asymptotique des modes mixtes. Le formalisme proposé par Takata (2016a), qui considère une zone évanescence très fine, autorise un couplage fort, avec des valeurs de  $q$  supérieures à un quart, en accord avec les observations. Alors que ce formalisme explique qualitativement les observations, on peut néanmoins se demander jusqu’à quel degré il est capable de prédire les fréquences propres d’oscillation des modes mixtes. Ce point fera l’objet du prochain chapitre.

En résumé, les observations montrent que le facteur de couplage varie avec l’évolution. Dans ce chapitre, j’ai montré par un modèle simple que la valeur du facteur de couplage est une fonction de la largeur de la zone évanescence et du taux de variation de la masse dans cette région, c’est-à-dire du contraste de densité entre le cœur d’hélium et la base de l’enveloppe convective. De plus, en prenant en compte l’évolution de la structure interne sur la post-séquence principale, j’ai aussi mis en exergue que la relation entre  $q$  et les propriétés de la zone évanescence n’est pas unique et dépend du stade évolutif (i.e.,  $\Delta\nu$  ou  $\nu_{\max}$ ). Ce modèle simple permet d’interpréter globalement la variation de  $q$  observée avec l’évolution. Néanmoins, cette étude a montré que la détermination précise des propriétés de la zone évanescence à partir seulement de la mesure de  $q$  reste incertaine à cause de sa dégénérescence en fonction de ces deux paramètres. L’établissement d’un lien direct entre une valeur de  $q$  observée et les caractéristiques de la zone évanescence nécessite donc de trouver un nouveau diagnostic sismique.





# Period spacings in red giants

## III. Coupling factors of mixed modes

B. Mosser<sup>1</sup>, C. Pinçon<sup>1</sup>, K. Belkacem<sup>1</sup>, M. Takata<sup>2</sup>, and M. Vradar<sup>3</sup>

<sup>1</sup> LESIA, Observatoire de Paris, PSL Research University, CNRS, Université Pierre et Marie Curie, Université Paris Diderot, 92195 Meudon Cedex, France

e-mail: benoit.mosser@obspm.fr

<sup>2</sup> Department of Astronomy, School of Science, The University of Tokyo, 7-3-1 Hongo, Bunkyo-ku, 113-0033 Tokyo, Japan

<sup>3</sup> Instituto de Astrofísica e Ciências do Espaço, Universidade do Porto, CAUP, Rua das Estrelas, 4150-762 Porto, Portugal

Received 14 November 2016 / Accepted 23 December 2016

### ABSTRACT

*Context.* The power of asteroseismology relies on the capability of global oscillations to infer the stellar structure. For evolved stars, we benefit from unique information directly carried out by mixed modes that probe their radiative cores. This third article of the series devoted to mixed modes in red giants focuses on their coupling factors, which have remained largely unexploited up to now.

*Aims.* With the measurement of coupling factors, we intend to give physical constraints on the regions surrounding the radiative core and the hydrogen-burning shell of subgiants and red giants.

*Methods.* A new method for measuring the coupling factor of mixed modes was implemented, which was derived from the method recently implemented for measuring period spacings. This new method was automated so that it could be applied to a large sample of stars.

*Results.* Coupling factors of mixed modes were measured for thousands of red giants. They show specific variation with mass and evolutionary stage. Weak coupling is observed for the most evolved stars on the red giant branch only; large coupling factors are measured at the transition between subgiants and red giants as well as in the red clump.

*Conclusions.* The measurement of coupling factors in dipole mixed modes provides a new insight into the inner interior structure of evolved stars. While the large frequency separation and the asymptotic period spacings probe the envelope and core, respectively, the coupling factor is directly sensitive to the intermediate region in between and helps determine its extent. Observationally, the determination of the coupling factor is a priori to precise fits of the mixed-mode pattern and can now be used to address further properties of the mixed-mode pattern, such as the signature of buoyancy glitches and core rotation.

**Key words.** stars: oscillations – stars: interiors – stars: evolution

## 1. Introduction

The seismic observations of large sets of stars with the CoRoT and *Kepler* missions, from the main sequence (Chaplin et al. 2011) up to the red giant branch (De Ridder et al. 2009), has motivated intense work in stellar physics, which includes ensemble asteroseismology (e.g., Kallinger et al. 2010; Mosser et al. 2010; Huber et al. 2011; Silva Aguirre et al. 2011; Kallinger et al. 2014). Ensemble asteroseismology is efficient for evolved stars because they host mixed modes that behave as gravity modes in the core and pressure modes in the envelope. These modes directly probe the stellar core and, therefore, reveal unique information.

Contrary to pressure modes, evenly spaced in frequency, and to gravity modes, evenly spaced in period, mixed modes show a more complicated frequency pattern. Since, for red giants, the density of gravity modes is large compared to the density of pressure modes, the mixed-mode pattern resembles a pure gravity-mode pattern perturbed by the pressure-mode pattern. The period spacings are close to the asymptotic value for gravity-dominated mixed modes, but are significantly smaller near expected pure pressure modes (e.g., Mosser et al. 2015). Pressure-dominated mixed modes have lower inertia than gravity-dominated mixed

modes; hence, the former show larger amplitudes (Dupret et al. 2009; Grosjean et al. 2014). Even with period spacings far from the asymptotic values, mixed modes allowed us in a first step to distinguish stars with hydrogen-burning shell from stars with core helium-burning (Bedding et al. 2011; Mosser et al. 2011a). In a second step, the asymptotic analysis of the mixed-mode pattern allowed us to derive precise information on the Brunt-Väisälä frequency profile in the radiative core (Mosser et al. 2012b). Indeed, the asymptotic expansion (Shibahashi 1979; Unno et al. 1989; Mosser et al. 2012b; Takata 2016) is a powerful tool for investigating mixed modes in red giants observed by the space missions CoRoT and *Kepler*, despite the fact that observations are not conducted in an asymptotic regime. Observed radial pressure orders are small; in fact, they are too small to lie in the asymptotic regime, as shown by CoRoT observations (e.g., De Ridder et al. 2009; Mosser et al. 2010). However, Mosser et al. (2013b) have demonstrated that the second-order asymptotic expansion provides a coherent view on the pressure mode pattern, even for the most evolved red giants (Mosser et al. 2013a). Conversely, high radial gravity orders are observed in mixed modes, except in subgiants, so that considering a first-order expansion for the gravity contribution is relevant (Mosser et al. 2014).

This work allowed us to measure asymptotic period spacings and to derive unique information on stellar evolution. The contraction of the helium core of hydrogen-shell-burning red giants is marked by the decrease of the asymptotic period spacing. Moreover, stars with a degenerate helium core (with a mass inferior to about  $1.8 M_{\odot}$ ) on the red giant branch (RGB) show a close relationship between the large separation and period spacing, which is the seismic signature of the mirror effect between the core and envelope structures. In the red clump, contrary to more massive stars, core-helium burning stars with a mass lower than about  $1.8 M_{\odot}$  show a tight mass-dependent relation between the asymptotic large separation and period spacing.

The use of the mixed modes for assessing the inner interior structure of red giants is, however, still in its infancy. Up to now, only the period spacings have benefitted from large-scale measurements (Vrard et al. 2016). Another important parameter, the coupling factor  $q$ , was precisely determined for just a handful of stars (Buyschaert et al. 2016). This parameter benefitted from a recent breakthrough since Takata (2016) could derive an asymptotic expression for dipole modes using the JWKB method (Jeffreys, Wentzel, Kramers, and Brillouin), taking the perturbation of the gravitational potential into account; but this investigation did not use the weak-coupling approximation, contrary to the previous work by Unno et al. (1989).

Here, we use the method developed by Mosser et al. (2015, Paper I of the series) to complete the large-scale analysis of Vrard et al. (2016, Paper II of the series). We specifically address the measurement of the coupling factor  $q$  of mixed modes. This parameter plays an important role in the asymptotic expansion: it expresses the link between the pressure and gravity contributions to the mixed mode, which is expressed by their phases  $\theta_p$  and  $\theta_g$ , respectively. Following Unno et al. (1989), the asymptotic expansion is written

$$\tan \theta_p = q \tan \theta_g, \quad (1)$$

with the phases defined as

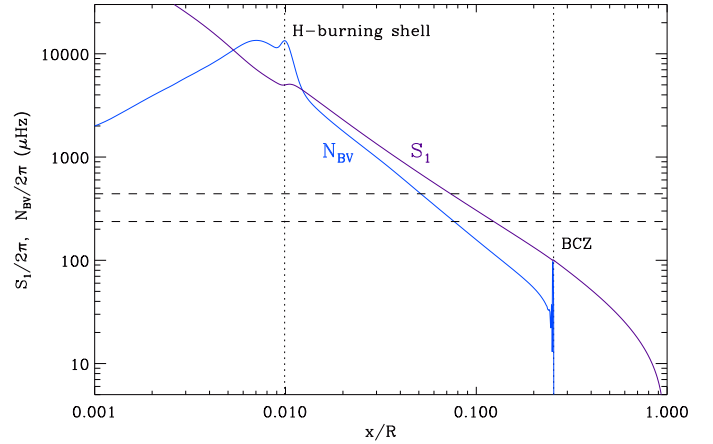
$$\theta_g = \pi \frac{1}{\Delta\Pi_1} \left( \frac{1}{v} - \frac{1}{v_g} \right), \quad (2)$$

$$\theta_p = \pi \frac{v - v_p}{\Delta v_p}, \quad (3)$$

where  $v_p$  and  $v_g$  are the asymptotic frequencies of pure pressure and gravity modes, respectively, and  $\Delta v_p$  is the frequency difference between the consecutive pure pressure radial modes with radial orders  $n_p$  and  $n_p + 1$ , as defined by Mosser et al. (2015).

While  $\theta_p$  and  $\theta_g$  account for the propagation of the wave in the envelope and core, respectively, the coupling factor comes from the contribution of the region between the Brunt-Väisälä cavity and the Lamb profile  $S_{\ell} = \sqrt{\ell(\ell+1)}c/r$ , where the oscillation is evanescent. Hence, studying the coupling factor  $q$  provides a direct way to examine the evanescent region, namely the physical regions surrounding the hydrogen-burning shell, where most of the stellar luminosity is produced. This parameter also plays a crucial role in examining rotational splittings (Goupil et al. 2013; Deheuvels et al. 2015) and mode visibilities (Mosser et al. 2017), so that its thorough examination becomes crucial in red giant seismology.

The article is organized as follows. Section 2 presents the framework of our analysis. We use the weak-coupling cases to illustrate and emphasize how  $q$  is linked to stellar interior properties. We also introduce the strong-coupling case, which is necessary at various evolutionary stages. In Sect. 3, we develop a



**Fig. 1.** Brunt-Väisälä and Lamb frequency profiles for a  $1.3 M_{\odot}$  stellar model on the RGB, corresponding to model M1 of Belkacem et al. (2015, see also Table 3). The horizontal dashed lines delimit the frequency range in which oscillations are expected, around  $\nu_{\max}$ ; the vertical dotted lines indicate the locations of the hydrogen-burning shell and base of the convection zone (BCZ), respectively.

specific method for measuring the coupling factors in an automated way. Section 4 presents the results derived from the set of *Kepler* red giants analyzed by Vrard et al. (2016). The results are discussed in Sect. 5.

## 2. Coupling factor of mixed modes

In this section, we show how the coupling factor of mixed modes can be used to probe the stellar interior. We restrain the analysis to dipole mixed modes ( $\ell = 1$ ).

### 2.1. Evanescent region

The coupling factor in Eq. (1) measures the decay of the wave in the region between the cavities delimited by the Brunt-Väisälä frequency  $N_{BV}$  and the Lamb frequency  $S_1$  (Fig. 1). This intermediate zone is called the evanescent region. In the JWKB approximation, thus assuming that the wavelength of the oscillations is much shorter than the scale height of the equilibrium stellar structure, the radial component of the wave vector  $\kappa$  in the evanescent region can be written

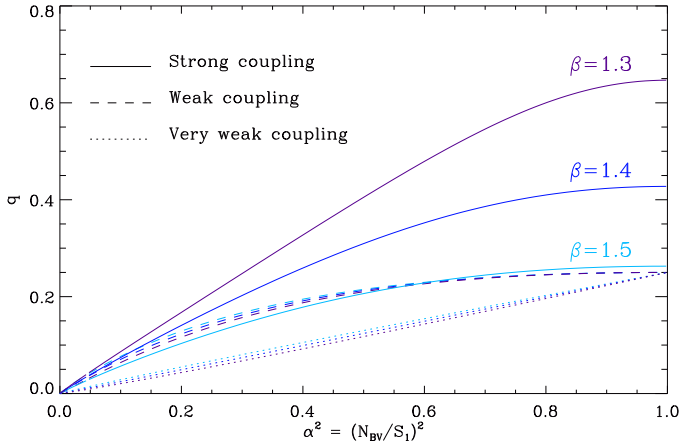
$$\kappa = \frac{\sqrt{(S_1^2 - \omega^2)(\omega^2 - N_{BV}^2)}}{c \omega}, \quad (4)$$

where  $c$  is the sound speed and  $\omega$  is the angular frequency.

We assume in the following that the evanescent zone is located between the hydrogen-burning shell and the base of the convective envelope. The Brunt-Väisälä and Lamb frequencies show similar radial variations in this region probed by the mixed modes (Fig. 1 and, e.g., Fig. 2 of Montalbán et al. 2012). Both can be approximated with a power law with similar exponent,

$$-\frac{d \ln N_{BV}}{d \ln r} = \beta_N \approx \beta \approx \beta_S = -\frac{d \ln S_1}{d \ln r}. \quad (5)$$

In fact, the exponent  $\beta$  measures the density contrast between the core and the envelope: the higher the contrast, the higher  $\beta$ . We expect  $\beta$  to increase with the evolution and contraction of the core. In evolved red giants, where the density contrast between the envelope and the core is high enough to ensure that the local



**Fig. 2.** Relationship between the coupling factor  $q$  and the ratio  $\alpha^2 = (N_{\text{BV}}/S_1)^2$  defined under the assumption that both frequencies have the same slope varying as  $r^{-\beta}$  in the region surrounding the hydrogen-burning shell;  $q$  is computed for three different values of  $\beta$  (1.3, 1.4, and 1.5) in three cases: very weak (dotted lines, Eqs. (10), (11)), weak (dashed lines, Eqs. (7)–(9)), or strong coupling (full lines, Eqs. (12)–(14)). The very weak and weak coupling values hardly depend on  $\beta$ , unlike the strong-coupling case.

gravity varies as  $r^{-2}$  in the evanescent region,  $\beta$  is expected to be close to the upper limit of  $3/2$  (Takata 2016).

As a consequence of the parallel variations of  $N_{\text{BV}}$  and  $S_1$ , the ratio

$$\alpha = N_{\text{BV}}/S_1 \quad (6)$$

can be considered as nearly uniform in the region above the hydrogen-burning shell where the oscillation is evanescent. A very thin evanescent zone means  $\alpha$  is close to unity, whereas a wide one has a small  $\alpha$ . In the following, we use this ratio  $\alpha$  as a measure of the extent of the evanescent region and aim at linking  $\alpha$  and  $\beta$  with  $q$ .

## 2.2. Weak coupling

In the case of weak coupling, the decay of the wave amplitude in the evanescent region  $\mathcal{E}$  is expressed by the transmission factor defined as

$$T \equiv \exp\left(-\int_{\mathcal{E}} \kappa dr\right), \quad (7)$$

which is linked to the coupling factor  $q$  of the asymptotic expansion (Eq. (1)) by

$$q = \frac{T^2}{4}, \quad (8)$$

as computed by Shibahashi (1979) and Unno et al. (1989).

Weak coupling is ensured if the transition region between  $S_1$  and  $N_{\text{BV}}$  is wide enough. Indeed, as shown by Eqs. (7) and (8), the value of  $q$  in the case of weak coupling is necessarily below  $1/4$ . Conversely, a value of  $q$  above  $1/4$  implies that the weak-coupling approach is insufficient.

With the assumptions made in Sect. 2.1, so with the definitions of  $\alpha$  (Eq. (6)) and  $\beta$  (Eq. (5)), the integral term in Eq. (7) can be rewritten

$$\int_{\mathcal{E}} \kappa dr = \frac{\sqrt{2}}{\beta} \int_{\alpha}^1 \sqrt{1-x^2} \sqrt{x^2-\alpha^2} \frac{dx}{x^2}, \quad (9)$$

where  $x$  is the normalized frequency  $\omega/S_1$ . Consequently, the coupling factor only depends on  $\alpha$  and  $\beta$ , but does not vary in the frequency range in which modes are observed. Although the evanescent region is probed at different depths by the different mixed modes, the wave transmissions through the barrier, hence  $q$ , are the same for each frequency because of the parallel variations of  $N_{\text{BV}}$  and  $S_1$ . This result confirms that  $q$  is directly related to the interior structure properties (Fig. 2).

In the case of very weak coupling, the influence of the turning points can be neglected in Eq. (7). In practice, we consider that  $S_1 \gg \omega \gg N_{\text{BV}}$  almost everywhere between the boundaries of the evanescent region  $r_1$  and  $r_2$ , so that  $q$  reduces to a simple function of these boundaries

$$q \simeq \frac{1}{4} \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{2\sqrt{2}}. \quad (10)$$

Combined with the assumption on the variations of  $N_{\text{BV}}$  and  $S_1$ , it can be rewritten in terms of the coefficients  $\alpha$  and  $\beta$  as follows:

$$q \simeq \frac{1}{4} \alpha^{2\sqrt{2}/\beta}. \quad (11)$$

This simplified relation shows again that  $q$  does not vary in the frequency range in which mixed modes are observed. It also proves that  $q$  provides another diagnostic parameter of red giants, complementary to the period spacing  $\Delta\Pi_1$  that probes the Brunt-Väisälä cavity.

## 2.3. Strong coupling

In the strong coupling case studied by Takata (2016), the expression of the transmission  $T$  is not as simple as Eq. (7) and must be replaced by a more precise expression. The relation between  $q$  and  $T$  becomes

$$T^2 = \frac{4q}{(1+q)^2}. \quad (12)$$

The factor  $q$  is connected to interior structure properties in the general case

$$q = \frac{1 - \sqrt{1 - \exp(-2\pi X)}}{1 + \sqrt{1 - \exp(-2\pi X)}}, \quad (13)$$

following Eq. (133) of Takata (2016). The new variable  $X$  defined by Eq. (61) of this paper expresses

$$X \propto \int_{\mathcal{E}} \kappa dr + X_{\text{R}}, \quad (14)$$

where the additional term  $X_{\text{R}}$  is only important when the frequencies  $N_{\text{BV}}$  and  $S_1$  are very close to each other. This term comes from the gradient of  $N_{\text{BV}}$  and  $S_1$  in the evanescent region. In practice,  $X_{\text{R}}$  takes the reflection of the wave at the boundaries into account and thereby explains that the transmission cannot be equal to unity even when  $N_{\text{BV}}$  and  $S_1$  have very close values. As a result, a very narrow evanescent region characterized by  $\alpha \simeq 1$  is not associated with a coupling factor close to one.

The variation of  $X$  and the relation between  $X$  and  $q$  make it possible to have values of  $q$  significantly above the limit of  $1/4$  fixed by the weak-coupling case (Eq. (8)). Under the assumption that  $N_{\text{BV}}$  and  $S_1$  show similar radial variations, the computation of  $X$ , hence  $q$ , depends only on  $\alpha$  and  $\beta$ . The variations of  $q$  with  $\alpha^2$  are shown in Fig. 2, computed with Eq. (A80) of Takata

(2016). This equation takes into account the perturbation of the gravitational potential that modifies the values of  $N_{\text{BV}}$  and  $S_1$ . The comparison of the weak and strong coupling also shows that the use of the weak-coupling case is relevant for very low values of  $q$  only.

We note that, the lower the  $\beta$ , the larger the correction on  $q$  in the strong-coupling case. Moreover, the observations of  $q$  values larger than  $1/4$  are associated with  $\beta$  values of less than 1.5. Also, the correction increases when  $\alpha$  increases.

As in the weak-coupling case,  $q$  does not show variation in the frequency range in which modes are observed. This is the consequence of parallel variations of  $N_{\text{BV}}$  and  $S_1$ . In the following, we consider that the variation of  $q$  with frequency is small enough, so that fitting the whole mixed-mode spectrum with a fixed coupling factor makes sense.

### 3. Method

In previous work (Mosser et al. 2012b, 2014), coupling factors in red giants were derived from the fit of the oscillation pattern. This fitting method, even if made precise and easy with the new view exposed in Mosser et al. (2015), cannot be automated and, therefore, we have to provide a new method for dealing with the amount of *Kepler* data.

#### 3.1. Correlations between mixed-mode parameters

The method of Vrad et al. (2016) developed for measuring the period spacing  $\Delta\Pi_1$  offers an efficient basis for obtaining a relevant measure of  $q$ . According to Eq. (1), the measurements of the mixed-mode parameters  $q$  and  $\Delta\Pi_1$  are a priori independent:  $\Delta\Pi_1$  measures the period spacings between the mixed modes whereas  $q$  measures the deformation of these spacings close to the pure pressure modes (see, e.g., Fig. 2 of Vrad et al. 2016). When buoyancy glitches, rotational splittings, or simply noise, locally modify the frequency interval between two consecutive mixed modes; this independence is however not ensured. In fact, buoyancy glitches introduce a crosstalk between the determination of  $q$  and  $\Delta\Pi_1$ , which induces spurious fluctuations of  $q$  when computing  $\Delta\Pi_1$ . Vrad et al. (2016), who considered  $q$  a free parameter when measuring period spacings  $\Delta\Pi_1$ , obtained  $q$  with large uncertainties. In order to get  $q$  in a robust manner, we first had to circumvent this crosstalk. To do so, we chose to measure  $q$  and  $\Delta\Pi_1$  in an independent manner. For measuring  $q$ , we considered first  $\Delta\Pi_1$  as a fixed parameter, adopting the values of Vrad et al. (2016).

#### 3.2. Measuring $q$

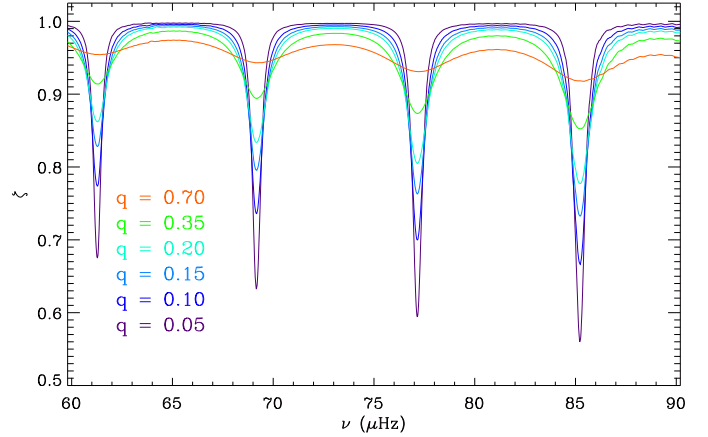
In practice, the first step of the method consists in a stretching of the power spectrum  $P(\nu)$  by using the change of variable introduced by Mosser et al. (2015). The frequency  $\nu$  is replaced by the stretched period  $\tau$  according to

$$d\tau = \frac{1}{\zeta} \frac{d\nu}{\nu^2}, \quad (15)$$

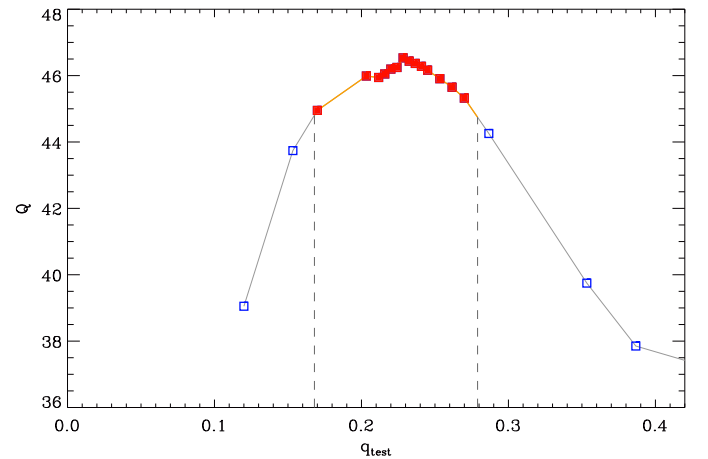
where the function  $\zeta$  is obtained from the interpolation of the values obtained for the dipole mixed-mode frequencies  $\nu_m$ ,

$$\zeta(\nu_m) = \left[ 1 + \frac{1}{q} \frac{\nu_m^2 \Delta\Pi_1 \cos^2 \theta_g}{\Delta\nu_p \cos^2 \theta_p} \right]^{-1}. \quad (16)$$

The way to obtain a precise continuous function of  $\zeta$  is explained by Mosser et al. (2015). It importantly depends on the



**Fig. 3.** Variation of the stretching function  $\zeta$  with  $q$ . The locations of the local minima of  $\zeta$ , which correspond to the expected pure pressure modes, do not depend on the value of  $q$ .



**Fig. 4.** Variation of the signal  $Q$  with the coupling factor  $q_{\text{test}}$  used in the stretching function  $\zeta$  considered as a free parameter, for a typical clump star (KIC 1717994). The region with maximum  $Q$  values (full symbols) is used to define the optimum value of  $q$  and the associated uncertainty  $\delta q$ . The dotted lines delimit the range  $q \pm \delta q$ .

correct location of the pure dipole modes, which is carried out by the use of the red giant universal pattern (Mosser et al. 2011b; Corsaro et al. 2012).

The power spectrum  $P(\tau)$  expressed as a function of the stretched period  $\tau$  is composed of  $M$  blended comb-like patterns, where  $M$  is the number of visible azimuthal orders. For a star seen equator-on,  $M = 2$ , only 1 when the star is seen pole-on, and 3 in the intermediate case.

The regularity of the  $M$  comb(s) is optimized when the value of  $\zeta$  used for stretching the spectrum matches the correct coupling (Fig. 3). So, we varied the coupling factor  $q_{\text{test}}$  to obtain a varying correction  $\zeta$  and searched to optimize the regularity of the comb. The optimum signal is inferred from the maximum of the Fourier transform of  $P(\tau)$ , noted  $Q$  (Fig. 4). As is clear from Fig. 3, the regularization is only slightly affected by  $q$ , so that the measurement is only possible for high signal-to-noise spectra.

#### 3.3. Individual check and limitations

The robustness of the method was verified with individual checks based on typical red giant oscillation spectra observed

at various evolutionary stages. This check first allowed us to verify that more than 96% of the prior values of  $\Delta\Pi_1$  automatically measured by Vrad et al. (2016) are safe. Wrong initial values of  $\Delta\Pi_1$  were identified by spurious measures of  $q$ . For oscillation spectra with a low signal-to-noise ratio, measuring the period spacing  $\Delta\Pi_1$  still remains possible, but identifying the small variations due to the coupling is demanding. For high signal-to-noise ratio oscillation spectra, we identified three major cases providing us with incorrect measurements for  $q$ : pressure glitches, buoyancy glitches, and rotation. All these effects perturb the regularity of the function  $\zeta$ .

### 3.3.1. Pressure glitches

Pressure glitches occur when rapid variations of the sound speed modify the regularity of pressure modes. They contribute by adding a small modulation to the pressure mode pattern. The shift remains less than 2% of  $\Delta\nu$ , as measured in the radial modes of a large set of red giants by Vrad et al. (2015). The modulation of the pure dipole pressure modes is similar to that of radial modes, so that the location of pressure-dominated mixed modes are shifted. As a result, the local minima of the stretching function  $\zeta$  are shifted (Fig. 7 of Mosser et al. 2015). This change may induce a spurious variation of  $Q$ , so that the method fails. More importantly, the method often produced very low or very large spurious values of  $q$  in that case.

### 3.3.2. Buoyancy glitches

Buoyancy glitches occur when rapid variations of the Brunt-Väisälä frequency modify the regularity of the gravity-mode pattern. This effect was theoretically investigated by Cunha et al. (2015); it affects mixed modes since it locally modifies the period of the stretched spectrum, with a clear signature on the function  $\zeta$  (Figs. 8 and 10 of Mosser et al. 2015). Measuring a mean period spacing in the presence of buoyancy glitches is often possible, but measuring its optimization for deriving  $q$  is more challenging, since variations of the period spacings due to the buoyancy glitch mimic variations because of an inadequate value of  $q$ . This situation most often occurs for red clump stars and may explain part of the large spread of  $q$  observed for these stars.

### 3.3.3. Rotational splittings

Rotational splittings also perturb the measurements of  $q$ . In the case of low rotation (Mosser et al. 2012a), each family of stretched peaks associated with a given azimuthal order  $m$  provides a comb spectrum with a period close to  $\Delta\Pi_1$  (Fig. 6 of Mosser et al. 2015), so that the identification of  $\Delta\Pi_1$  and of  $q$  is clearly derived from the optimization of the Fourier analysis of  $P(\tau)$ . However, the signature of the period spacings between the different peaks with different azimuthal orders sometimes dominates and hampers the measurement of  $q$ . This most often appears on the RGB, when the rotational splittings of the largest peaks near  $\nu_{\max}$  are comparable to a simple fraction of the frequency differences between two consecutive mixed modes.

Individual checks based on the fit of the mixed-mode pattern and on échelle diagrams were performed on 5% of the target to correct spurious values.

## 3.4. Threshold and uncertainties

The examination of various stars at different evolutionary stages allowed us to define a relevant threshold value  $Q \geq 25$ , characterizing a reliable measurement of  $q$ . Since we noticed that very low or very high values of  $q$  are artefacts, we introduced a penalty function for those values. Uncertainties were empirically derived from the examination of the power spectrum  $Q$  of the stretched spectrum  $P(\tau)$  and by comparison with individual fittings. Variations of  $Q$  less than 4% of the maximum value were used to derive an estimate of the uncertainties  $\delta q$  (Fig. 4). This is a conservative value.

We are aware that a more sophisticated statistical analysis is desirable for deriving stronger estimates of the uncertainties on  $q$ , as recently carried out by Buyschaert et al. (2016). These authors chose three bright stars seen pole-on, so with a high signal-to-noise ratio oscillation pattern free of any rotational splitting. Despite these favorable conditions, their analysis was computationally very demanding (Buyschaert, priv. comm.). An analysis aiming at measuring precise uncertainties for a large set of stars is beyond the scope of our work, which is mainly intended to provide a coherent view of a large set of stars.

## 4. Results

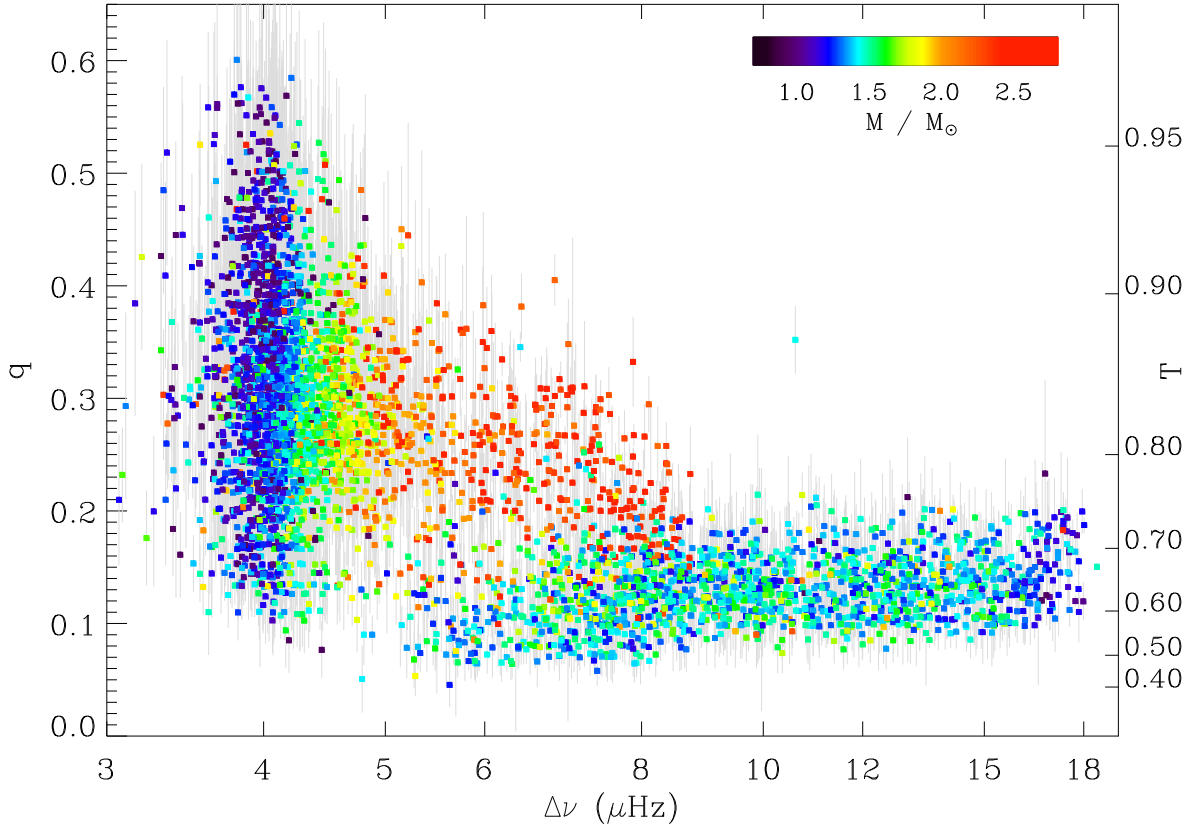
### 4.1. Data set

We used the data of Vrad et al. (2016), namely a catalog of about 6100 red giants with measured period spacings and duly identified evolutionary stages. We also considered 33 subgiants, defined as subgiants according to the seismic criterion  $(\Delta\nu/36.5 \mu\text{Hz})(\Delta\Pi_1/126 \text{ s}) > 1$  introduced by Mosser et al. (2014). This latter work also provided us with the criteria necessary to identify the other evolutionary stages (RGB and clump stars). Stellar masses were estimated with the method of Mosser et al. (2013b), which uses the homology of red giant oscillation spectra to lower the uncertainties induced by pressure glitches that are present at all evolutionary stages (Vrad et al. 2015). This procedure benefits from a calibration on a large set of stars and has proved to be less biased than similar methods only calibrated on the Sun. The calibration does not depend on the evolutionary stage, which can lower its precision (Miglio et al. 2012). Recent studies all converge to state that seismic masses are slightly overestimated by about 5–15% (e.g., Epstein et al. 2014; Lagarde et al. 2015; Gaulme et al. 2016); such a result does not invalidate the relevance of the seismic estimate.

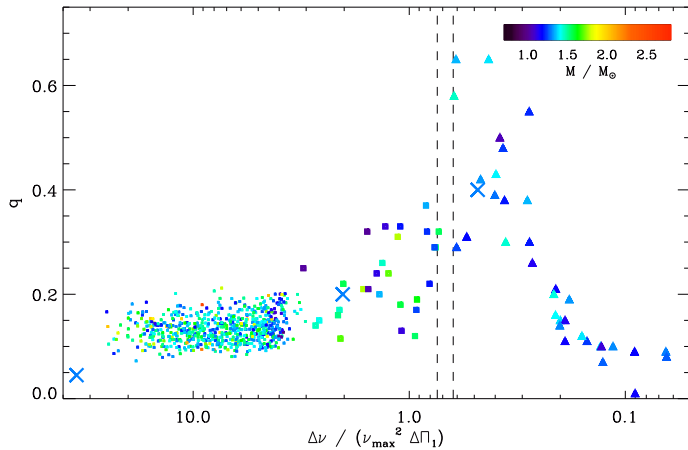
### 4.2. Iterations for the RGB and the red clump

An iteration process allowed us to correct values of  $q$  affected by an initial incorrect estimate of  $\Delta\Pi_1$ . Finally, we obtained 5200 values of  $q$ , corresponding to a maximum  $Q$  value that is higher than 25. High-quality values characterized by  $Q \geq 50$  were obtained for about 3700 stars. The results are shown in Fig. 5, where the RGB and clump stars can be easily identified since they show different variations with stellar evolution. The mass dependence visible in Fig. 5 is a consequence of the evolution dependence, so that its study requires some attention (see Sect. 5).

The mean value of  $q$  on the RGB decreases with stellar evolution from 0.18 to 0.12. Coupling factors in the red clump are most often in the range [0.2–0.45], with a mean value of about 0.32; more than 70% of the red-clump values are above 1/4. This indicates that weak coupling (Eq. (8)) does not hold at this



**Fig. 5.** Coupling factor  $q$  as a function of the large separation  $\Delta\nu$ . Asymptotic values of  $\Delta\nu$  and  $\Delta\Pi_1$  come from [Vrad et al. \(2016\)](#). The color codes the mass, which is determined with seismic scaling relations. The right vertical axis provides the corresponding values of the transmission factor  $T$ .



**Fig. 6.** Coupling factor  $q$  as a function of the mixed-mode density  $\mathcal{N} = \Delta\nu / (\Delta\Pi_1^2 \nu_{\max}^2)$ . The vertical dashed lines indicate the transition from subgiants to red giants defined by [Mosser et al. \(2014\)](#). Triangles indicate subgiants; squares indicate stars on the RGB (small squares for long-cadence *Kepler* data and big squares for short-cadence data). Three values of  $q$  obtained for a synthetic 1.3- $M_\odot$  evolutionary sequence are also shown with  $\times$  (see Sect. 5.3 and Table 3).

evolutionary stage. For interpreting observed coupling factors of clump stars, a theoretical study of strong coupling must be considered ([Takata 2016](#)).

When the threshold level of the detection is increased, the spread in  $q$  decreases for clump stars. We observed that low  $Q$  values are often associated with unevenly spaced period spectra,

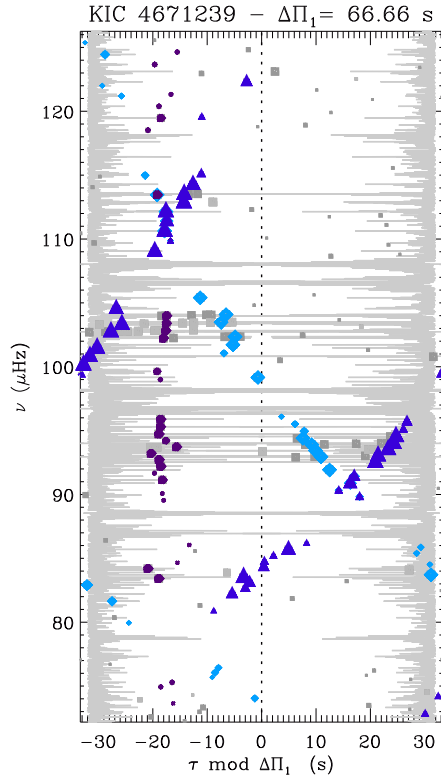
regardless of the signal-to-noise ratio of photometric time series. As a result, low or high  $q$  values are most often related to buoyancy glitches, as observed in [Mosser et al. \(2015\)](#).

#### 4.3. Subgiants

Subgiants were also considered. In that case, coupling factors were not measured with the aforementioned method, but were directly determined from the fit of the mixed-mode pattern. The validity of the asymptotic expression is questionable for mixed modes with low-radial gravity orders observed in red giants. It however provides period spacings that fully agree with modeled values ([Benomar et al. 2013, 2014](#); [Deheuvels et al. 2014](#)). In fact, even if the density of gravity modes expressed by the number  $\mathcal{N} = \Delta\nu / (\nu_{\max}^2 \Delta\Pi_1)$  is small, the distribution of the period spacings is well reproduced by the asymptotic expression and is sensitive to  $q$ . From the quality of the fit of the mixed mode, we could measure this parameter and estimate relative uncertainties that are smaller than 20%. The identification of high  $q$  values is especially clear: in such cases, the period spacings hardly depend on the nature of the mixed mode (Fig. 3). In Fig. 6,  $q$  is plotted as a function of the mixed-mode density  $\mathcal{N}$  instead of  $\Delta\nu$  to emphasize the change of physics when a subgiant evolves into a red giant. The strongest values of  $q$ , close to unity, are obtained at the transition from subgiants to red giants.

#### 4.4. Outliers

A limited number of stars have coupling factors significantly different from the mean behavior. We stress that their identification



**Fig. 7.** Échelle diagram of the very low metallicity RGB star KIC 4671239, with the stretched period  $\tau$  modulo  $\Delta\Pi_1$  on the  $x$ -axis and frequency on the  $y$ -axis. All dark symbols indicate dipole modes with a height above 5 times the local stellar background; their sizes depend on the mode height. When the azimuthal order can be automatically identified, triangles correspond to  $m = -1$ , squares to  $m = 0$ , diamonds to  $m = +1$ . Light gray symbols correspond to unidentified modes; most of these are located in the region of pressure-dominated mixed modes; a few unidentified modes may also be  $\ell = 3$  modes. All components of the rotational multiplets intersect at  $112\ \mu\text{Hz}$ ; the  $m = \pm 1$  components intersect at  $91\ \mu\text{Hz}$ . The oscillation spectrum is plotted in gray top to bottom in the background of the figure to link the stretched periods and the mixed-mode frequency.

in this work dedicated to ensemble asteroseismology is certainly incomplete; outliers are however rare. The stars we identified deserve future attention.

#### 4.4.1. KIC 4671239

KIC 4671239 has been identified by [Thygesen et al. \(2012\)](#) as one of the less metallic red giants observed by *Kepler*, with  $[\text{Fe}/\text{H}] = -2.45$  and  $T_{\text{eff}} = 4900\ \text{K}$ . The seismic parameters of this star are highly atypical. Apart from the high coupling value for an RGB star at a similar evolutionary stage ( $q \approx 0.25$  instead of less than 0.15), the analysis of its mixed-mode pattern has revealed a period spacing  $\Delta\Pi_1 \approx 66.6\ \text{s}$ , which is much smaller than for RGB stars with similar  $\Delta\nu$  ([Mosser et al. 2014](#); [Vrard et al. 2016](#)), and a much higher core rotation ([Mosser et al. 2012a](#)) with  $\delta\nu_{\text{rot}} \approx 830\ \text{nHz}$ . These parameters translate in a complex mixed-mode pattern, in which the different azimuthal orders show intricate structures. Disentangling this pattern is only possible with an échelle diagram constructed with stretched periods (Fig. 7), following [Mosser et al. \(2015\)](#) and [Gehan et al. \(2016\)](#).

#### 4.4.2. KIC 6975038

KIC 6975038 also shows atypical seismic parameters, with  $\Delta\Pi_1 \approx 57.9\ \text{s}$ , which is much smaller than comparable stars with  $\Delta\nu = 10.61\ \mu\text{Hz}$ , and  $q \approx 0.35$ , which is much above the values observed on the RGB. The low value of  $\Delta\Pi_1$  and the high value of  $q$  may both indicate a larger radiative cavity, hence a smaller region where modes are evanescent, than in other stars with similar  $\Delta\nu$ .

#### 4.4.3. Massive stars

Stars in the secondary clump, more massive than  $1.8\ M_{\odot}$ , show lower  $q$  compared to less massive stars burning their core helium. The difficulty of fitting their mixed-mode spectrum does not resemble the difficulty met in presence of buoyancy glitches ([Mosser et al. 2015](#)). A better fit of the data can be obtained with a gradient in  $q$  as a function of frequency. According to the study conducted in Sect. 2, this gradient may result from the fact that the  $N_{\text{BV}}$  and  $S_1$  profiles are not parallel in the evanescent region of such stars.

This effect appears for stars as KIC 4372082 or 6878041, which are more massive than the secondary-clump stars studied by [Deheuvels et al. \(2015\)](#). Such objects are rare and, despite low-quality spectra, certainly deserve detailed study and modeling.

## 5. Discussion

The variation of the coupling factor with the large separation  $\Delta\nu$  can be used to derive direct information concerning the extent of the evanescent region between the  $N_{\text{BV}}$  and  $S_1$  profiles, with the formalism introduced in Sect. 2. Even if mixed modes probe these functions in a limited frequency range around  $\nu_{\text{max}}$ , the hypothesis that the  $N_{\text{BV}}$  and  $S_1$  profiles are parallel in the considered region helps us to derive precise information on stellar interior properties; regardless of the consequence of the decrease of  $\nu_{\text{max}}$  with evolution. The hypothesis is finally discussed in Sect. 5.4.

### 5.1. Variation with the evolutionary stage

#### 5.1.1. Subgiant – red giant transition

[Mosser et al. \(2014\)](#) have shown that the transition between subgiants and redgiants has a clear signature in the  $\Delta\Pi_1 - \Delta\nu$  diagram. In the subgiant phase, the relation between these asymptotic period and frequency spacings shows a large spread with a significant mass dependence, whereas the parameters are tightly bound on the RGB. The coupling factor  $q$  is similarly impacted by the evolution and shows a significant increase at the end of the subgiant phase (Fig. 6). This increase occurs in parallel with the first dredge-up, when the base of the convection zone goes deeper in the envelope. A high value of  $q$  indicates that not only the  $N_{\text{BV}}$  profile, but also the  $S_1$  profile, is deep in the stellar interior. Observing high values in the range  $[0.40-0.65]$  near the transition region from subgiants to red giants argues, using Fig. 2, for a slope  $\beta$  slightly higher than or close to 1.3 with a ratio  $\alpha^2$  larger than about 0.5.

#### 5.1.2. On the RGB

At the beginning of the ascent on the RGB, the stellar core contracts and the envelope expands. The decrease of  $q$  means either



**Table 1.** Mass dependence of  $q$  on the RGB.

$M/M_{\odot}$	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
$q_M$	0.144	0.128	0.126	0.123	0.134	0.134
$\sigma_q$	0.021	0.025	0.026	0.022	0.023	0.027

**Notes.** The variation of  $q$  with  $\Delta\nu$  is modeled as  $q = q_M(\Delta\nu/10)^{0.096}$ , with  $\Delta\nu$  in  $\mu\text{Hz}$ .

**Table 2.** Mass dependence of  $q$  in the red clump.

$M/M_{\odot}$	0.9	1.1	1.3	1.5	1.7	2.0
$q_b$		0.301	0.287	0.274	0.272	
$\bar{q}$	0.363	0.324	0.299	0.289	0.283	0.270
$q_e$		0.339	0.313	0.303	0.290	
$\sigma_q$	0.024	0.016	0.011	0.010	0.012	0.022

**Notes.** The values  $q_b$ ,  $\bar{q}$ , and  $q_e$  measure, respectively, the coupling for the early, middle, and late stages in the clump, defined in Mosser et al. (2014); these values are defined by 25% of the stars lying on the first, middle, and late portion of the mass-dependent evolutionary track, respectively;  $\sigma_q$  measures the spread of the values; the fits were derived from high-quality spectra with  $Q \geq 50$ .

that the region between  $N_{\text{BV}}$  and  $S_1$  expands too, inducing a decrease of  $\alpha$ , or that the coefficient  $\beta$  increases toward the value  $3/2$ . A simultaneous variation of both terms  $\alpha$  and  $\beta$  is possible too.

For evolved models on the RGB,  $\nu_{\text{max}}$  becomes smaller than the value of  $N_{\text{BV}}$  at the base of the convective zone, so that the hypothesis of parallel variations of  $N_{\text{BV}}$  and  $S_1$  is no longer valid for evolved stars on the RGB (e.g., Montalbán et al. 2013). In fact, the decrease of  $q$  with stellar evolution can result either from the decrease of  $\nu_{\text{max}}$  or from the expansion of the region between  $N_{\text{BV}}$  and  $S_1$ , so that it is impossible to derive any firm conclusion in terms of interior structure evolution.

The decrease of  $q$  on the RGB plays a non-negligible role in the difficulty to observe mixed modes at small  $\Delta\nu$  predicted for high- and low-mass stars (Dupret et al. 2009; Grosjean et al. 2014). In fact, mixed modes that are not in the close vicinity of the pressure-dominated modes are poorly coupled, so that they show an important gravity character, hence a high inertia and tiny amplitude. In practice, measuring low values of  $q$  is hard.

In order to estimate the mass dependence of  $q$  observed on the RGB, we first fitted the slope of  $q(\Delta\nu)$  as a power law under the assumption that the exponent does not depend on the stellar mass. In a second step, we quantified the mass dependence in the relation  $q(\Delta\nu)$ . For low-mass stars with a degenerate helium core, the higher  $M$ , the lower  $q$ ; for stars more massive than  $1.8 M_{\odot}$ , the situation is inverted (Table 1). This change occurs near the limit in mass between the red and secondary clumps, so is likely related to the degeneracy of helium in the core.

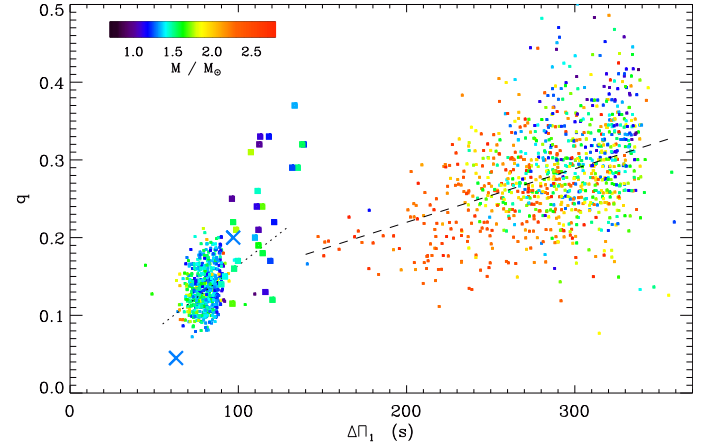
### 5.1.3. In the red clump

In the red clump, the mass dependence of  $q$  is coupled to the large separation dependence: the lower the mass, the higher the coupling. This behavior is discussed in the next paragraph, since it obeys to a general trend in the relationship between  $q$  and  $\Delta\Pi_1$ .

Mean values of the coupling for red clump stars are given in Table 2. Using the seismic evolutionary tracks depicted in Mosser et al. (2014), we could measure the evolution of  $q$  in the red clump, at fixed mass. Values at the early, middle, and

**Table 3.** Seismic properties of  $1.3 M_{\odot}$  models.

Model	Evol. stage	Age (Gyr)	$\nu_{\text{max}}$ ( $\mu\text{Hz}$ )	$\Delta\nu$ ( $\mu\text{Hz}$ )	$\Delta\Pi_1$ (s)	$q$
M0	subgiant	4.40	670	39.5	182	0.40
M1	RGB	4.59	341	22.9	97	0.20
M2	RGB	4.79	49.0	5.24	63	0.045



**Fig. 8.** Coupling factor  $q$  as a function of the period spacing  $\Delta\Pi_1$  for RGB and clump stars. Same symbols as in Fig. 6. A threshold at  $Q = 100$  reduces the number of stars compared to Fig. 5. The dotted and dashed lines correspond to the fits for RGB and clump stars, respectively.

late stages in the clump are shown in Table 2. As shown by Mosser et al. (2015), the evolution of stars in the red clump show non-monotonous variation of both  $\Delta\nu$  and  $\Delta\Pi_1$ . Conversely, the monotonous increase of  $q$  indicates either that the ratio  $\alpha$  increases along the evolution of low-mass stars in the red clump, resulting from a small shrinking of the evanescent region, or that the exponent  $\beta$  decreases. Both effects may simultaneously contribute to the variations.

### 5.2. Variation with the period spacing

The variations of  $q$  with the period spacing  $\Delta\Pi_1$  depend on the evolutionary stage. Whether on the RGB or in the clump, the global variations of  $q(\Delta\Pi_1)$  indicate that the larger  $\Delta\Pi_1$ , the larger  $q$  (Fig. 8). A large value of  $\Delta\Pi_1$  is representative of a small dense core with high  $N_{\text{BV}}$  values. So, we come to the conclusion that high values of  $N_{\text{BV}}$  and  $S_1$  occur in similar situations, and that they get close to each other when they increase together. At fixed  $\beta$ , the ratio  $\alpha = N_{\text{BV}}/S_1$  is then correlated with  $\Delta\Pi_1$  for both RGB and clump stars (but not for subgiants).

Since the variations of  $q$  are nearly linear in both domains, the following simple fits can be used as proxies for  $q$  (Fig. 8):

$$q_{\text{RGB}} = -0.0034 + \frac{\Delta\Pi_1}{597}, \quad (17)$$

$$q_{\text{clump}} = 0.082 + \frac{\Delta\Pi_1}{1450}, \quad (18)$$

where  $\Delta\Pi_1$  is measured in seconds. The fit of  $q_{\text{RGB}}$  is however not efficient for early RGB stars; the fit of  $q_{\text{clump}}$  is valid for both primary and secondary clumps. Such fits are intended to facilitate the identification of the mixed-mode pattern, rather than for explaining the physics of the coupling.

### 5.3. Modeling and computation of $q$

We used stellar models to match the observed coupling factor. We considered  $1.3-M_{\odot}$  models at three evolutionary stages (Table 3) without overshoot or diffusion; their full description is given in Belkacem et al. (2015). In the strong coupling case (model M0), we computed  $q$  from Eqs. (12)–(14) using the asymptotic formalism of Takata (2016) and taking the perturbation of the gravitational potential into account. In the intermediate case (model M1), using a similar analysis is questionable since hypotheses in the calculation of  $X_R$  are valid when the evanescent region is very thin. Nevertheless, the strong-coupling analysis matches the weak-coupling case when the evanescent region becomes very large, so that we computed  $q$  in a similar way as for the model M0. In the weak coupling case (model M2), we used the same expression, but with  $X_R = 0$  and, finally, compare these three factors with observations. The factor  $q$  shows in fact small variations with frequency, so that we had to consider the mean value, defined in a  $4\text{-}\Delta\nu$  broad frequency range centered on  $\nu_{\max}$ . We checked that the term  $X_R$  introduced by Eq. (14) significantly reduces the value of  $q$  and also contributes to the relative stability of  $q$  with frequency. We also noticed that the perturbation of the gravitational potential plays a non-negligible role not only in the core but also in the evanescent zone and in the inner region of the convective envelope. This provides evidence that the Cowling approximation is not appropriate for computing  $q$ .

Modeling quantitatively agrees with observations, except for the most evolved model. The subgiant model M0 close to the transition to red giants shows a high  $q$ ; the next model M1 is on the RGB and has a much lower  $q$ . Both agree with the observed values. The coupling factor for model M2, higher on the RGB, shows however a value that is significantly smaller than observed. In M2, the evanescent region is in fact above the base of the convective envelope (e.g., Fig. 2 of Montalbán et al. 2013). This point deserves further work, which is beyond the scope of this paper.

Modeling red clump stars requires special attention in the prescription of convection and mixing in the core (Lagarde et al. 2012; Bossini et al. 2015). We could not compare our results with modeling but used the calculations exposed in Sect. 2. The high values observed for  $q$  in the clump imposes the exponent  $\beta$  (Eq. (5)) to be less than  $3/2$  (Fig. 2).

### 5.4. Variation of $q$ with frequency

For a limited number of stars examined by Vradar et al. (2016), the asymptotic expansion does not provide a satisfying fit of the mixed-mode pattern without a direct explanation in terms of buoyancy glitch. For these stars, a better fit is obtained when varying  $q$  with frequency. Modeling derives similar conclusion, with different slopes  $\beta_N$  and  $\beta_S$  (Eq. (5)) or more complicated variations (e.g., Montalbán et al. 2013).

Since the independence of  $q$  with frequency derives from the hypothesis of parallel variations of  $N_{BV}$  and  $S_1$ , we have to conclude that this hypothesis is not fully correct. The observational study of the variations of  $q$  with frequency appears to be highly challenging for the same reasons as those explaining the difficulties in measuring  $q$  (rotation, glitches, and finite mode lifetimes). The individual study of bright stars with a high signal-to-noise ratio is necessary to investigate the frequency dependence of  $q$  in detail. Combined with modeling, this study will help assess to which extent the mean value of  $q$  is a global seismic parameter,

which is as informative for the evanescent region as  $\Delta\nu$  and  $\Delta\Pi_1$  for the pressure and radiative cavities, respectively.

## 6. Conclusions

The new method setup for measuring the coupling factor of mixed modes in evolved stars has provided the first analysis of this parameter over a large set of stars. We could determine 5200 values of  $q$ , from subgiants to clump stars. Three main results can be inferred:

- Coupling factors test the region between the Brunt-Väisälä cavity and the  $S_1$  profile, dominated by the radiative core and the hydrogen-burning shell. Indeed, while  $\Delta\nu$  is mainly sensitive to the envelope and  $\Delta\Pi_1$  provides the signature for the core, we can directly access the intermediate region with  $q$ .
- The variation of  $q$  with stellar evolution provides us with new constraints on stellar modeling. We note that, for both RGB and clump stars, the coupling factors show simple global variations with the period spacing. The characterization of outliers can be used to constrain physical processes inside stars.
- Strong coupling is observed in stars at the transition subgiant/red giant and in the red clump. In fact, the weak-coupling formalism of Unno et al. (1989) fails for a quantitative use of the observed coupling factors, except for the most evolved stars on the RGB. In all other cases, the use of the new formalism proposed by Takata (2016) for strong coupling is mandatory.

These measurements also open the way to more precise fits of the mixed-mode pattern to analyze in detail extra features, such as the rotational splittings and buoyancy glitches.

*Acknowledgements.* We acknowledge the entire *Kepler* team, whose efforts made these results possible. B.M., C.P., and K.B. acknowledge financial support from the Programme National de Physique Stellaire (CNRS/INSU), from the French space agency CNES, and from the ANR program IDEE Interaction Des Étoiles et des Exoplanètes. M.T. is partially supported by JSPS KAKENHI Grant Number 26400219. M.V. acknowledges funding by Fundação para a Ciência e a Tecnologia (FCT) through the grant CIAAUP-03/2016-BPD, in the context of the project UID/FIS/04434/2013, co-funded by FEDER through the program COMPETE2020 (POCI-01-0145-FEDER-007672).

## References

- Bedding, T. R., Mosser, B., Huber, D., et al. 2011, *Nature*, 471, 608  
 Belkacem, K., Marques, J. P., Goupil, M. J., et al. 2015, *A&A*, 579, A31  
 Benomar, O., Bedding, T. R., Mosser, B., et al. 2013, *ApJ*, 767, 158  
 Benomar, O., Belkacem, K., Bedding, T. R., et al. 2014, *ApJ*, 781, L29  
 Bossini, D., Miglio, A., Salaris, M., et al. 2015, *MNRAS*, 453, 2290  
 Buysschaert, B., Beck, P. G., Corsaro, E., et al. 2016, *A&A*, 588, A82  
 Chaplin, W. J., Kjeldsen, H., Christensen-Dalsgaard, J., et al. 2011, *Science*, 332, 213  
 Corsaro, E., Stello, D., Huber, D., et al. 2012, *ApJ*, 757, 190  
 Cunha, M. S., Stello, D., Avelino, P. P., Christensen-Dalsgaard, J., & Townsend, R. H. D. 2015, *ApJ*, 805, 127  
 Deheuvels, S., Doğan, G., Goupil, M. J., et al. 2014, *A&A*, 564, A27  
 Deheuvels, S., Ballot, J., Beck, P. G., et al. 2015, *A&A*, 580, A96  
 De Ridder, J., Barban, C., Baudin, F., et al. 2009, *Nature*, 459, 398  
 Dupret, M., Belkacem, K., Samadi, R., et al. 2009, *A&A*, 506, 57  
 Epstein, C. R., Elsworth, Y. P., Johnson, J. A., et al. 2014, *ApJ*, 785, L28  
 Gaulme, P., McKeever, J., Jackiewicz, J., et al. 2016, *ApJ*, 832, 121  
 Gehan, C., Mosser, B., & Michel, E. 2016, *Astro Fluid 2016 Conf. Proc.*, submitted [[arXiv:1611.00540](https://arxiv.org/abs/1611.00540)]  
 Goupil, M. J., Mosser, B., Marques, J. P., et al. 2013, *A&A*, 549, A75  
 Grosjean, M., Dupret, M.-A., Belkacem, K., et al. 2014, *A&A*, 572, A11  
 Huber, D., Bedding, T. R., Stello, D., et al. 2011, *ApJ*, 743, 143  
 Kallinger, T., Mosser, B., Hekker, S., et al. 2010, *A&A*, 522, A1

- Kallinger, T., De Ridder, J., Hekker, S., et al. 2014, *A&A*, 570, A41
- Lagarde, N., Decressin, T., Charbonnel, C., et al. 2012, *A&A*, 543, A108
- Lagarde, N., Miglio, A., Eggenberger, P., et al. 2015, *A&A*, 580, A141
- Miglio, A., Brogaard, K., Stello, D., et al. 2012, *MNRAS*, 419, 2077
- Montalbán, J., Miglio, A., Noels, A., et al. 2012, *Astrophys. Space Sci. Proc.*, 26, 23
- Montalbán, J., Miglio, A., Noels, A., et al. 2013, *ApJ*, 766, 118
- Mosser, B., Belkacem, K., Goupil, M., et al. 2010, *A&A*, 517, A22
- Mosser, B., Barban, C., Montalbán, J., et al. 2011a, *A&A*, 532, A86
- Mosser, B., Belkacem, K., Goupil, M., et al. 2011b, *A&A*, 525, L9
- Mosser, B., Goupil, M. J., Belkacem, K., et al. 2012a, *A&A*, 548, A10
- Mosser, B., Goupil, M. J., Belkacem, K., et al. 2012b, *A&A*, 540, A143
- Mosser, B., Dziembowski, W. A., Belkacem, K., et al. 2013a, *A&A*, 559, A137
- Mosser, B., Michel, E., Belkacem, K., et al. 2013b, *A&A*, 550, A126
- Mosser, B., Benomar, O., Belkacem, K., et al. 2014, *A&A*, 572, L5
- Mosser, B., Vrad, M., Belkacem, K., Deheuvels, S., & Goupil, M. J. 2015, *A&A*, 584, A50
- Mosser, B., Belkacem, K., Pincon, C., et al. 2017, *A&A*, 598, A62
- Shibahashi, H. 1979, *PASJ*, 31, 87
- Silva Aguirre, V., Chaplin, W. J., Ballot, J., et al. 2011, *ApJ*, 740, L2
- Takata, M. 2016, *PASJ*, 68, 109
- Thygesen, A. O., Frandsen, S., Bruntt, H., et al. 2012, *A&A*, 543, A160
- Unno, W., Osaki, Y., Ando, H., Saio, H., & Shibahashi, H. 1989, Nonradial oscillations of stars, eds. W. Unno, Y. Osaki, H. Ando, H. Saio, & H. Shibahashi
- Vrad, M., Mosser, B., Barban, C., et al. 2015, *A&A*, 579, A84
- Vrad, M., Mosser, B., & Samadi, R. 2016, *A&A*, 588, A87

# Chapitre 10

## Modes mixtes dans l’hypothèse d’un fort couplage

### Sommaire

---

<b>10.1 Relation de phase asymptotique avec fort couplage . . . . .</b>	<b>219</b>
10.1.1 Méthode et hypothèses utilisées par Takata (2016a) . . . . .	219
10.1.2 Relation de phase . . . . .	221
<b>10.2 Comparaison avec les prédictions d’un code d’oscillation . . . . .</b>	<b>222</b>
10.2.1 Choix du modèle de structure interne et de l’intervalle de fréquences . . .	222
10.2.2 Description de la méthode . . . . .	224
10.2.3 Résultats . . . . .	226
<b>10.3 Conclusions préliminaires . . . . .</b>	<b>230</b>

---

Les observations à grande échelle par Mosser *et al.* (2017b) montrent la nécessité de considérer l’hypothèse d’un fort couplage pour les modes mixtes dans les étoiles à la transition entre la branche des sous-géantes et celle des géantes rouges, ainsi que dans les étoiles ayant déjà commencé à brûler leur hélium central. Cependant, dans le cas d’une zone évanescence peu étendue, l’analyse asymptotique est rendue plus complexe par la proximité des points tournants. Récemment, Takata (2016a) a proposé un nouveau formalisme permettant de surmonter cette difficulté. Cela lui a permis de démontrer une relation de phase pour les modes mixtes dipolaires dans le cas limite où la zone évanescence est très fine. Dans ce chapitre, nous décrirons succinctement les hypothèses et la méthode utilisées dans son analyse avant de discuter la relation de phase obtenue dans ce cas limite. Ensuite, nous comparerons plus précisément les fréquences d’oscillation prédites par cette formulation théorique avec les fréquences obtenues par un code d’oscillation. Pour tester cette relation de phase, nous nous placerons dans un cas idéal qui, bien que non-réaliste, respecte l’hypothèse d’un fort couplage et la limite asymptotique au premier ordre qui ont été utilisées dans sa dérivation. Les résultats préliminaires de cette étude toujours en cours seront alors brièvement discutés.

### 10.1 Relation de phase asymptotique avec fort couplage

#### 10.1.1 Méthode et hypothèses utilisées par Takata (2016a)

L’analyse asymptotique développée par Takata (2016a) considère que la zone évanescence des modes mixtes est très fine spatialement. Dans une telle situation, une analyse asymptotique similaire à celle proposée par Shibahashi (1979) ou Unno *et al.* (1989), qui a été présentée en détail dans la Section 2.2.2, devient invalide pour deux principales raisons. Premièrement, la largeur de la zone évanescence est trop faible pour qu’un développement asymptotique des fonctions d’onde issues des

deux points tournants associés (i.e.,  $r_b$  et  $r_c$ ) soit justifié à l'intérieur de cette région. Deuxièmement, la méthode consistant à résoudre l'équation d'onde autour de chacun des deux points tournants en négligeant les variations des quantités à l'équilibre puis de relier les solutions au milieu de la zone évanescence n'est plus valide. En effet, il n'est plus possible de résoudre Eq. (2.47) en négligeant  $f(q_1)$  au voisinage de  $r_b$  ainsi que Eq. (2.48) en négligeant  $f(q_2)$  au voisinage de  $r_c$  puisque les deux points tournants centraux sont très proches et les termes  $f(q_i)$  sont grands (en effet,  $|f(q_i)| \rightarrow +\infty$  quand  $q_i \rightarrow 0$ ). Takata (2016a) a pu surmonter ces difficultés en développant un formalisme qui permet de traiter simultanément les deux points tournants de la zone évanescence. L'auteur a considéré le cas particulier des modes dipolaires en prenant en compte la perturbation du potentiel gravitationnel, mais il est important de noter que le même formalisme peut s'appliquer aux modes mixtes de n'importe quel degré angulaire dans l'approximation de Cowling et dans l'hypothèse d'un couplage fort. On résume ici brièvement les points essentiels de son analyse dans la région centrale au voisinage de la zone évanescence :

1. *Un changement de variable astucieux* : la singularité de la fonction  $f(q_i)$  aux points tournants n'a pas d'origine physique. Elle a été introduite artificiellement par la combinaison de deux changements de variables. Le premier correspond au changement de variable donné par Eqs. (2.38) et (2.39) qui permet de retrouver un système d'équations différentielles du premier ordre sous une forme canonique tel que donné dans Eqs (2.40) et (2.41), c'est-à-dire du type  $\vec{y}' = \mathbf{M}\vec{y}$ , où  $\mathbf{M}$  est une matrice anti-diagonale dont les éléments s'annulent aux points tournants. Le deuxième correspond au changement de variable usuel donné dans Eqs. (2.47) et (2.48) qui permet de retrouver une équation du second ordre pour chacune des variables  $y_i$  ( $i = 1, 2$ ) du type  $y_i'' + K_r^2 y_i = 0$ , c'est-à-dire sans la présence de dérivée première  $y_i'$ , mais avec une singularité de  $K_r^2$  au point tournant où  $q_i = 0$ . L'idée de Takata (2016a, voir sa Section 3.2.1) est alors d'utiliser un changement de variable différent pour éviter une telle singularité. En réécrivant la matrice  $\mathbf{M}$  comme la somme de deux matrices et en diagonalisant une des matrices de telle sorte que les termes antidiagonaux soient non nuls, l'auteur propose un nouveau changement de variable  $\vec{y} = (y_1, y_2) \rightarrow \vec{z} = (z_1, z_2)$  dans le plan complexe. Ce changement de variable permet alors d'éviter l'introduction d'une singularité lors du deuxième changement de variable usuel visant à supprimer la dérivée première de  $z_i$  et à retrouver une équation du second ordre du type  $z_i'' + \tilde{K}_r^2 z_i = 0$  (où  $\tilde{K}_r$  est cette fois-ci toujours bien défini). Cette opération donne alors la possibilité de traiter les deux points tournants  $r_b$  et  $r_c$  simultanément.
2. *Une solution sous la forme de fonctions de Weber* : l'équation d'onde du second ordre est alors résolue en conservant les termes d'ordre dominant et en utilisant une transformation de Liouville. La nouvelle variable indépendante,  $\zeta$ , est définie de telle façon à prendre en compte l'existence des deux points tournants. A la place de l'équation d'Airy dans le cas d'un point tournant simple, l'équation d'onde prend ainsi la forme de l'équation de Weber pour la nouvelle variable dépendante notée  $Z$ , c'est-à-dire

$$\frac{d^2 Z}{d\zeta^2} + (\zeta^2 - \zeta_0^2) Z = 0, \quad (10.1)$$

où  $\zeta_0$  est une constante choisie de telle manière que  $\zeta^2 - \zeta_0^2 = 0$  là où  $\tilde{K}_r = 0$ . Les fonctions d'onde s'expriment alors sous la forme des fonctions de Weber complexes dans toute la région autour de la zone évanescence.

3. *Cas limite d'une zone évanescence d'épaisseur quasi nulle* : pour finir, Takata (2016a) se place dans le cas limite où la largeur de la zone évanescence est très fine. En effet, il suppose explicitement dans les Eqs. (50) et (51) de son papier que  $\ln(r_c/r_b) \sim K^{-1/2}$ , où  $K$  est paramètre très grand par rapport à l'unité. Sous cette hypothèse, l'auteur a pu simplifier les calculs en exprimant la variation des quantités à l'équilibre dans la zone évanescence sous forme de développements limités au premier ordre.

Takata (2016b) a alors pu relier asymptotiquement au milieu des cavités interne et externe la solution écrite sous forme de fonctions de Weber et issue des deux points tournants  $r_b$  et  $r_c$  avec les solutions écrites sous forme de fonctions d'Airy et issues des points tournants  $r_a$  (au centre) et  $r_d$  (en surface). De plus, son analyse au voisinage du point tournant  $r_a$  prend en compte la présence de la singularité en  $r = 0$ . Concrètement, près du centre, l'expression habituelle du nombre d'onde radial  $\tilde{k}_r$  donnée dans Eq. (8.36) tend vers  $\sqrt{2}/r$  dans le cas des modes dipolaires. Ainsi, l'échelle de variation de certaines quantités physiques, comme par exemple la fréquence de Lamb qui varie comme  $1/r$ , qui est habituellement considérée comme beaucoup plus grande que la longueur d'onde radiale dans le reste de l'étoile, est au contraire du même ordre de grandeur que cette dernière près du centre. La dérivée de telles quantités à l'équilibre, qui sont singulières au centre, doit donc être prise en compte dans l'analyse asymptotique au voisinage du point tournant  $r_a$ . Cela a pour principale conséquence d'introduire un terme de déphasage additionnel dans la relation de phase qui provient de la réflexion des ondes près du centre (Takata 2016a, voir sa Section 3.3).

### 10.1.2 Relation de phase

En prenant en compte tous les points précédemment mentionnés, l'auteur a dérivé une relation de phase asymptotique du premier ordre vérifiée par les modes mixtes dipolaires  $l = 1$  dans l'hypothèse d'un fort couplage. Celle-ci s'exprime suivant une forme classique, c'est-à-dire

$$\cot [\Theta_g(X)] \tan [\Theta_p(X)] = q(X) , \quad (10.2)$$

avec

$$\Theta_g(X) = \sqrt{2} \int_0^{r_\star} \frac{N}{r} dr + \int_{r_\star}^{r_b} \tilde{k}_r dr - \Phi(X) \quad (10.3)$$

$$\Theta_p(X) = \int_{r_c}^{r_d} \tilde{k}_r dr - \Phi(X) + \alpha_p - \frac{\pi}{4} \quad (10.4)$$

$$X = \frac{1}{\pi} \int_{r_b}^{r_c} \tilde{k}_r dr + \frac{1}{2\kappa(r_0)} \left( \frac{d \ln c}{d \ln r} \right)_{r_0}^2 \quad (10.5)$$

$$\Phi(X) = -\frac{1}{2} \arg [\Gamma(1 + iX)] - \frac{X}{2} (1 - \ln X) + \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \arg [D(r_0)] - \frac{\pi}{4} \quad (10.6)$$

$$c = \left( \frac{S}{T} \right)^{1/4} \quad (10.7)$$

$$S = \frac{1}{\ln(r_c/r)} \frac{2J}{F^2} \left( 1 - \frac{\sigma^2}{\tilde{S}_1^2} \right) > 0 \quad (10.8)$$

$$T = \frac{JF^2}{\ln(r/r_b)} \left( 1 - \frac{\tilde{N}^2}{\sigma^2} \right) > 0 \quad (10.9)$$

$$F = \exp \left[ \frac{1}{2} \int^r \left( \frac{g}{Jc^2} - \frac{J\tilde{N}^2}{g} - \frac{J}{r} \right) dr \right] \quad (10.10)$$

$$\kappa = \sqrt{ST} \quad (10.11)$$

$$D = \ln \left( \frac{r_c}{r_b} \right) + \frac{i}{\kappa} \left( \frac{d \ln c}{d \ln r} \right) , \quad (10.12)$$

où  $r_0 = \sqrt{r_b r_c}$  est le rayon d'une couche située entre  $r_b$  et  $r_c$  dans la région évanescence,  $r_\star$  est le rayon d'une couche au milieu de la cavité interne qui est assez éloignée des points tournants  $r_a$  et  $r_b$  pour que l'approximation asymptotique soit valide, et  $\alpha_p$  est un terme résiduel qui englobe toutes nos incertitudes sur l'influence des couches superficielles. L'expression de  $q$  est donnée par Eq. (8.2)

avec un coefficient de transmission à travers la zone évanescente égal à  $T = e^{-\pi X}$ , c'est-à-dire

$$q(X) = \frac{1 - \sqrt{1 - e^{-2\pi X}}}{1 + \sqrt{1 - e^{-2\pi X}}} . \quad (10.13)$$

Le terme de phase  $\Phi$ , lui, provient du déphasage induit par la réflexion en  $r_b$  ou en  $r_c$ , et les termes associés à la dérivée  $(d \ln c / d \ln r)_{r_0}$  traduisent l'effet de la variation de la structure à l'équilibre sur la transmission des ondes à travers la zone évanescente.

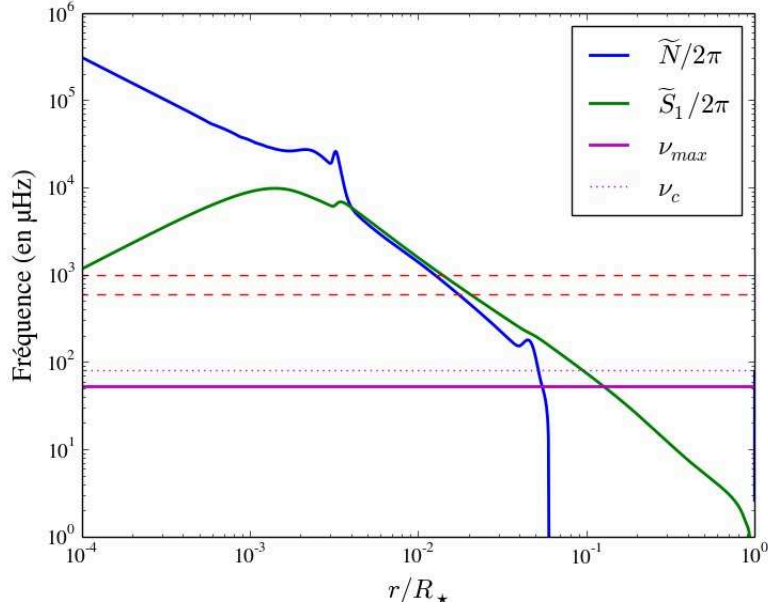
## 10.2 Comparaison avec les prédictions d'un code d'oscillation

Alors que la formulation théorique de Takata (2016a) permet de rendre compte des observations du facteur de couplage des modes mixtes dipolaires par Mosser *et al.* (2017b, voir FIGURE 9.1), on peut se demander jusqu'à quel degré la relation de phase asymptotique du premier ordre donnée par Eqs. (10.2)-(10.12) est capable de prédire leurs fréquences propres d'oscillation. J'ai donc entrepris une comparaison de ses prédictions théoriques avec les fréquences propres calculées par un code d'oscillation. Ces prédictions sont aussi comparées aux fréquences propres dérivées par le formalisme de Shibahashi (1979) dans le but de tester l'apport du nouveau formalisme par rapport à ce dernier. L'étude se restreint aux modes dipolaires  $l = 1$  et prend en compte la perturbation du potentiel gravitationnel. Je présente ici les résultats préliminaires d'un travail toujours en cours.

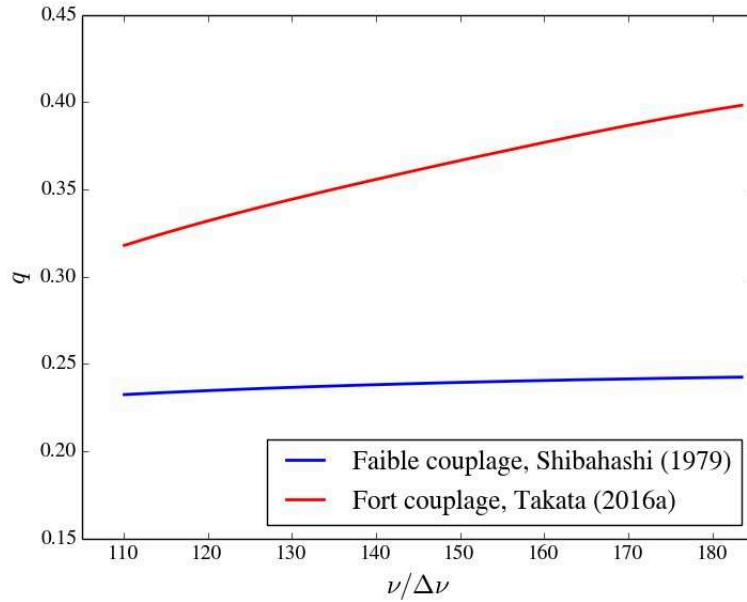
### 10.2.1 Choix du modèle de structure interne et de l'intervalle de fréquences

Dans une première étape, la relation de phase doit être testée dans un cas où les hypothèses qui ont été utilisées pour sa dérivation sont respectées. Il est donc nécessaire de choisir un modèle de structure interne et un intervalle de fréquences pour lesquels à la fois l'hypothèse d'un fort couplage et l'approximation asymptotique au premier ordre (e.g., sous la condition d'un grand nombre de nœuds dans la cavités  $G$  et dans la cavité  $P$ ) sont vérifiées. Dans un cas réaliste où les fréquences propres d'oscillation appartiennent à un intervalle de fréquences autour de  $\nu_{\max}$ , les observations et les modèles montrent que le couplage est fort dans les étoiles à la fin de la branche des sous-géantes et les étoiles du clump. Cependant, dans ces étoiles, l'approximation asymptotique au premier ordre est insuffisante pour décrire avec précision les fréquences propres d'oscillation (e.g., Mosser *et al.* 2013a, 2014). En effet, alors que l'analyse asymptotique de Takata (2016a) a été effectuée au premier ordre, le nombre de nœuds à la fois dans la cavité  $G$  et dans la cavité  $P$  n'est pas assez élevé pour pouvoir négliger les contributions du second ordre. Par exemple, dans les étoiles jeunes géantes rouges telles que celle représentée sur la FIGURE 8.4,  $\nu_{\max}$  est inférieure seulement d'environ un facteur 10 par rapport au maximum de  $N/2\pi$  dans la cavité interne. Le nombre de nœuds dans la cavité  $G$  pour les modes mixtes observés est donc de l'ordre d'une dizaine pour ce type d'étoiles et l'écart à l'approximation asymptotique du premier ordre peut être important. De même, dans les étoiles géantes rouges et du red clump, les observations montrent qu'une analyse asymptotique du second ordre est nécessaire pour rendre compte du spectre des modes radiaux. En effet, ceux-ci possèdent des ordres radiaux inférieurs à la dizaine et la différence de fréquences entre deux modes consécutifs n'est pas tout à fait régulier (e.g., Mosser *et al.* 2013a,b). Cela est en désaccord avec l'analyse asymptotique du premier ordre pour les modes de pression qui prédit en espacement régulier entre les fréquences propres. Une telle approche échoue donc à décrire correctement les oscillations dans la cavité  $P$ .

En vue de ces difficultés, j'ai donc fait le choix de considérer un cas idéal non-réaliste dans cette étude, le but étant ici de tester la relation de phase des modes mixtes dans les meilleures conditions possibles. La comparaison s'effectuera donc à partir du modèle  $M_2$  (*Bump*) sur la branche des géantes rouges qui a été considéré dans le Chapitre 9. Sa localisation dans le diagramme H-R est représentée sur la FIGURE 9.4 et la physique utilisée pour son calcul est donnée dans Belkacem *et al.* (2015a,b). Les paramètres sismiques de cette étoile sont  $\Delta\Pi = 63$  s et  $\Delta\nu = 5.2$   $\mu\text{Hz}$ . L'intervalle



**FIGURE 10.1:** Fréquences modifiées de Brunt-Väisälä et de Lamb dans le modèle  $M_2$  d'une étoile juste avant le *bump* sur la branche des géantes (voir Chapitre 9). La fréquence au maximum de puissance d'oscillation,  $\nu_{\max}$ , qui a été estimée par la relation d'échelle calibrée sur le Soleil, et la fréquence de coupure en surface,  $\nu_c$ , sont représentées respectivement par les lignes magentas continue et pointillée. L'intervalle de fréquences considéré dans cette étude est délimité par les tirets rouges.



**FIGURE 10.2:** Facteur de couplage des modes mixtes dipolaires dans le modèle  $M_2$  (*Bump*) en fonction de la fréquence normalisée par la grande séparation. Il a été calculé suivant Eq. (10.13), i.e. d'après le formalisme de Takata (2016a) dans l'hypothèse d'un fort couplage (ligne rouge), et suivant Eqs. (8.4)-(8.5), i.e. d'après le formalisme de Shibahashi (1979) dans l'approximation d'un faible couplage.



de fréquences considéré se situe entre 0.6 mHz et 1 mHz, c'est-à-dire bien au-delà de la valeur de la fréquence au maximum de puissance d'oscillation,  $\nu_{\max}$ , et de la fréquence de coupure en surface,  $\nu_c$ . Celui-ci est représenté dans le diagramme de propagation sur la FIGURE 10.1. Dans une telle configuration, l'ordre radial dans la cavité  $G$  (i.e.,  $n_g \sim P/\Delta\Pi$ ) se situe entre 15 et 25, et l'ordre radial dans la cavité  $P$  (i.e.,  $n_p \sim \nu/\Delta\nu$ ) se situe entre 100 et 200. De plus, la zone évanescente est très fine avec, comme nous allons le voir un peu plus loin, des valeurs du facteur de couplage supérieures à 0.4. L'hypothèse d'un fort couplage et l'approximation asymptotique sont donc toutes les deux vérifiées.

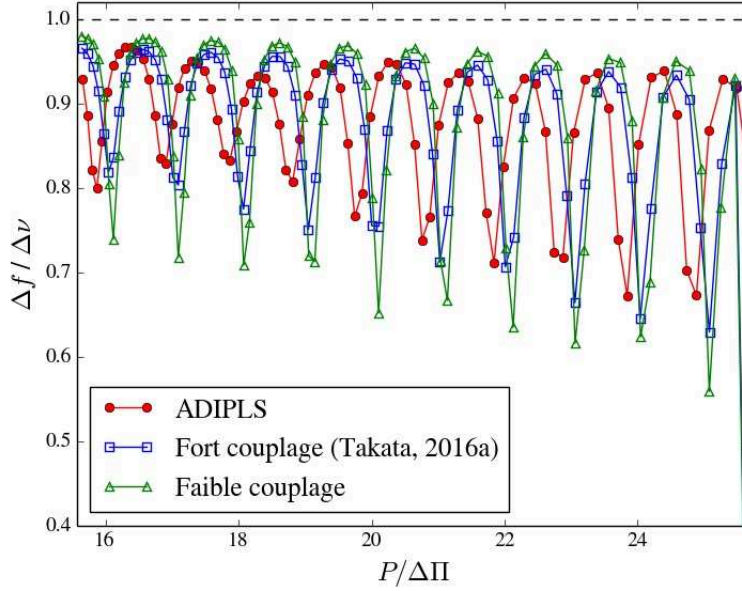
Cette situation non-réaliste entraîne quelques particularités. D'abord, le fait que la fréquence d'oscillation  $\nu$  soit supérieure à  $\nu_c$  dans une vraie étoile impliquerait l'absence de réflexion en surface et donc l'impossibilité pour les modes mixtes de s'établir. Pour éviter un tel phénomène de se produire, le code d'oscillation impose artificiellement comme condition limite en  $r = R_\star$  que la perturbation Lagrangienne de pression soit nulle, c'est-à-dire  $\delta p(R_\star) = 0$ . Nous discuterons un peu plus loin l'implication d'une telle hypothèse sur la relation de phase théorique, qui se résume finalement à un léger déphasage dans le terme  $\Theta_p$  de Eq. (10.2). Ensuite, alors que dans les géantes rouges observées la densité de modes mixtes à dominance de gravité est supérieure à celle des modes mixtes à dominance de pression, c'est en fait le contraire qui se produit dans l'intervalle de fréquences considéré ici. En effet, le nombre de modes mixtes à dominance de pression entre deux modes mixtes à dominance de gravité peut être estimé en suivant le même raisonnement que celui présenté dans la Section 8.1.2 pour le nombre de modes mixtes à dominance de gravité entre deux modes à dominance de pression,  $\mathcal{N}_g$ , donné dans Eq. (8.9). La différence de période entre deux modes mixtes consécutifs d'ordre radial  $n$  et  $n - 1$  est reliée à la différence de fréquence par  $\Delta P_n = |\delta\nu_n|/\nu_n^2$ . En supposant cette fois-ci que  $\mathcal{N}_p\Delta P_n = \Delta\Pi$  et  $\delta\nu_n = \Delta\nu$ , où  $\mathcal{N}_p$  est le nombre de modes mixtes à dominance de pression entre deux modes mixtes à dominance de gravité de fréquence  $\nu_n \sim \nu$ , on obtient

$$\mathcal{N}_p(\nu) \sim \frac{\Delta\Pi\nu^2}{\Delta\nu} \sim \frac{1}{\mathcal{N}_g(\nu)}. \quad (10.14)$$

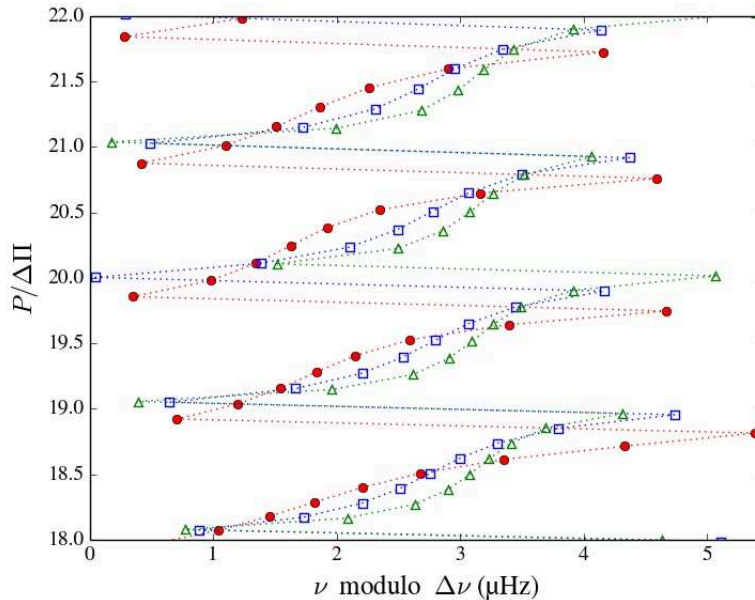
On trouve assez logiquement, étant donnée la définition de  $\mathcal{N}_g$  et  $\mathcal{N}_p$ , que les deux sont reliés par la relation  $\mathcal{N}_p\mathcal{N}_g = 1$ . Avec les paramètres sismiques du modèle  $M_2$  (*Bump*) et l'intervalle de fréquences considéré, le nombre de modes mixtes à dominance de pression entre deux modes mixtes à dominance de gravité vaut  $\mathcal{N}_p \sim 4 - 12$ . Dans la suite, au lieu de tracer les diagrammes usuels  $\Delta P/\Delta\Pi$  en fonction de  $\nu/\Delta\nu$  et  $\nu/\Delta\nu$  en fonction de la période  $P$  modulo  $\Delta\Pi$  comme dans la Section 8.1.2, il sera donc plus approprié de tracer  $\Delta f/\Delta\nu$  en fonction de la période  $P/\Delta\Pi$  et  $P/\Delta\Pi$  en fonction de  $\nu$  modulo  $\Delta\nu$ , où l'on note  $\Delta f(\nu_n) = \nu_n - \nu_{n-1}$  la différence de fréquence entre deux modes consécutifs (qui est à distinguer de la grande séparation  $\Delta\nu$ ).

## 10.2.2 Description de la méthode

Les fréquences propres des modes dipolaires ont été calculées par une méthode de tir avec le code d'oscillation adiabatique ADIPLS (Christensen-Dalsgaard 2008, 2011). Les conditions limites imposées suivent les relations habituelles données dans Unno *et al.* (1989), avec en surface la condition  $\delta p(R_\star) = 0$ . Les fréquences asymptotiques, notées  $\nu_{\text{as}}$ , ont été obtenues en résolvant les équations implicites données soit par Eqs. (10.2)-(10.12) dans l'hypothèse d'un fort couplage suivant Takata (2016a), soit par Eq. (8.40) dans l'approximation d'un faible couplage suivant Shibahashi (1979). Cette dernière prend en compte la perturbation du potentiel gravitationnel représentée par le terme de phase  $-\pi/2$  dans l'argument de la fonction cotangente. Avant tout, une telle résolution nécessite d'exprimer tous les termes intervenant dans ces équations en fonction de la fréquence d'oscillation. Pour ce faire, j'ai interpolé linéairement les quantités à l'équilibre et les fréquences de Brunt-Väisälä et de Lamb en fonction du rayon (ou leur logarithme en fonction de  $\ln r$  selon la région dans l'étoile). Les points tournants ont alors été déterminés en fonction de la fréquence dans l'intervalle considéré, ainsi que les intégrales du nombre d'onde dans la cavité  $G$ , dans la région



**FIGURE 10.3:** Différence de fréquence entre deux modes mixtes dipolaires consécutifs normalisée par  $\Delta\nu$ , en fonction de la période normalisée par  $\Delta\Pi$ . Le résultat obtenu avec le code d'oscillation ADIPLS (ronds rouges) est comparé au résultat obtenu avec la relation de phase asymptotique dérivée par Takata (2016a) dans l'hypothèse d'un fort couplage suivant Eqs. (10.2)-(10.12) (carrés bleus) et celle donnée par Eq. (8.40) dans l'approximation d'un faible couplage (triangles verts).



**FIGURE 10.4:** Période normalisée par  $\Delta\Pi$  en fonction de la fréquence modulo  $\Delta\nu$  pour les trois mêmes cas considérés dans la FIGURE 10.3.

évanescence et dans la cavité  $P$ . Une attention particulière s'est portée sur l'intégration au voisinage des points tournants. En effet, nous montrerons dans le Chapitre 11 que l'intégrale du nombre d'onde au voisinage des points tournants joue un rôle critique sur la détermination des fréquences propres. Enfin, ayant connaissance de tous les termes en fonction de la fréquence intervenant dans Eqs. (10.2)-(10.12), les fréquences propres asymptotiques ont été calculées en résolvant l'équation implicite donnée dans Eq. (10.2) (ou Eq. (8.40) dans l'approximation d'un faible couplage) sous la forme

$$\cos [\Theta_g(\nu)] \sin [\Theta_p(\nu)] - q(\nu) \sin [\Theta_g(\nu)] \cos [\Theta_p(\nu)] = 0 , \quad (10.15)$$

où  $q$  est donné par Eq. (10.13) (ou Eqs. (8.4)-(8.5) dans l'approximation d'un faible couplage). Une telle écriture est préférable puisqu'elle permet d'éviter les discontinuités des fonctions tangente et cotangente. Les zéros de la fonction précédente peuvent alors être déterminés avec une bonne précision en appliquant la méthode de la dichotomie sur chaque intervalle de fréquences où la fonction change de signe. Cette méthode a été validée par différents tests.

### 10.2.3 Résultats

**Comparaison directe.** Pour commencer, il semble logique de s'intéresser à la valeur du facteur de couplage. Celui-ci est représenté sur la FIGURE 10.2 en fonction de la fréquence d'oscillation. D'abord, il est clair que l'hypothèse d'un fort couplage est bel et bien vérifiée. Les valeurs estimées en suivant l'expression donnée par Shibahashi (1979) sont supérieures à 0.23, c'est-à-dire très proches de la limite supérieure fixée à 0.25 dans l'approximation d'un faible couplage. En effet, sur la FIGURE 10.1, la différence relative entre  $r_b$  et  $r_c$  est très faible et comprise environ entre 5 et 10%. Cela est confirmé par la valeur du facteur de couplage calculée par l'expression obtenue dans l'hypothèse d'un fort couplage, qui donne donc dans ce cas l'estimation la plus réaliste. La valeur de  $q$  augmente de façon non-négligeable dans l'intervalle de fréquences considéré en passant de 0.32 à 0.40. Cette augmentation provient du fait que  $r_b$  et  $r_c$  se rapprochent l'un par rapport à l'autre à mesure que la fréquence augmente, résultant en une diminution de l'intégrale du nombre d'onde dans la région évanescente (voir FIGURE 10.1). Si les profils des fréquences de Brunt-Väisälä et de Lamb étaient rigoureusement parallèles dans cette région,  $q$  serait indépendant de la fréquence d'oscillation (voir Chapitre 9). La variation de  $q$  avec la fréquence dans les modèles montre donc qu'il est préférable de considérer dans un degré d'approximation moindre que  $\tilde{N}$  et  $\tilde{S}_1$  suivent des lois de puissance avec des exposants qui peuvent être légèrement différents l'un par rapport à l'autre.

En gardant en tête la différence notable entre les valeurs de  $q$  obtenues par chacun des formalismes, on peut maintenant comparer les fréquences propres obtenues avec le code d'oscillation ADIPLS et les fréquences asymptotiques obtenues suivant la méthode présentée dans la Section 10.2.2. Le résultat est représenté sur les FIGURES 10.3 et 10.4.

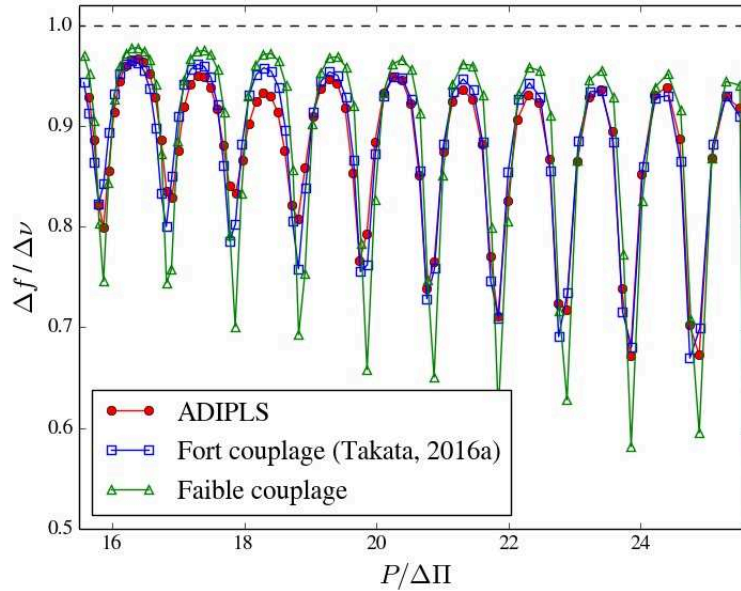
Sur la FIGURE 10.3, la différence de fréquence entre deux modes consécutifs,  $\Delta f/\Delta\nu$ , est représentée en fonction de la période. Sur ce diagramme, les modes mixtes à dominance de pression sont les modes avec une valeur de  $\Delta f/\Delta\nu$  proche de l'unité, c'est-à-dire espacés quasi régulièrement d'un intervalle  $\Delta\nu$  en fréquence. Les modes mixtes à dominance de gravité, eux, ne suivent pas une telle règle et correspondent aux minima locaux de  $\Delta f/\Delta\nu$ . La situation est donc inversée par rapport à la FIGURE 8.2. Premièrement, on peut voir que les périodes asymptotiques des modes à dominance de gravité (i.e., minima locaux de  $\Delta f/\Delta\nu$ ) obtenues par les deux formalismes sont décalées d'environ un quart de  $\Delta\Pi$  par rapport aux périodes prédites par ADIPLS. Deuxièmement, on observe que les valeurs de  $\Delta f/\Delta\nu$  dérivées dans l'approximation d'un faible couplage sont supérieures (inférieures) à celles obtenues avec ADIPLS et celles obtenues asymptotiquement dans l'hypothèse d'un fort couplage dans le cas des modes à dominance de pression (dans le cas des modes à dominance de gravité). Nous verrons plus loin que cette caractéristique provient de la différence de valeur pour  $q$  entre les deux formalismes.

Sur la FIGURE 10.4, la période est représentée en fonction de la fréquence modulo  $\Delta\nu$ . Sur ce diagramme, les modes mixtes à dominance de pression ont plutôt tendance à s'aligner verticalement autour de  $2.5 \mu\text{Hz}$  (modulo  $\Delta\nu$ ), à l'inverse des modes à dominance de gravité qui ont tendance à dévier de cet alignement. Encore une fois, c'est exactement l'inverse que sur la FIGURE 8.2 puisque les modes à dominance de pression sont plus denses dans le spectre que ceux à dominance de gravité. De plus, on voit que le motif en forme de "S" est plus aplati que sur la FIGURE 8.2. En effet, la pente du motif dépend de la valeur de  $q$ . Avec des valeurs de  $q$  supérieures à 0.25, la pente est moins marquée. Il est en outre clair que la pente est plus élevée dans le cas des fréquences obtenues dans l'approximation d'un faible couplage que pour celles obtenues avec ADIPLS ou dans l'hypothèse d'un fort couplage. Enfin, on peut remarquer que les motifs en "S" formés par les fréquences asymptotiques sont décalés d'environ un quart de  $\Delta\nu$  vers la droite (à relier à la condition limite en surface, voir prochain paragraphe), en plus du décalage précédemment mentionné d'environ un quart de  $\Delta\Pi$  vers le haut.

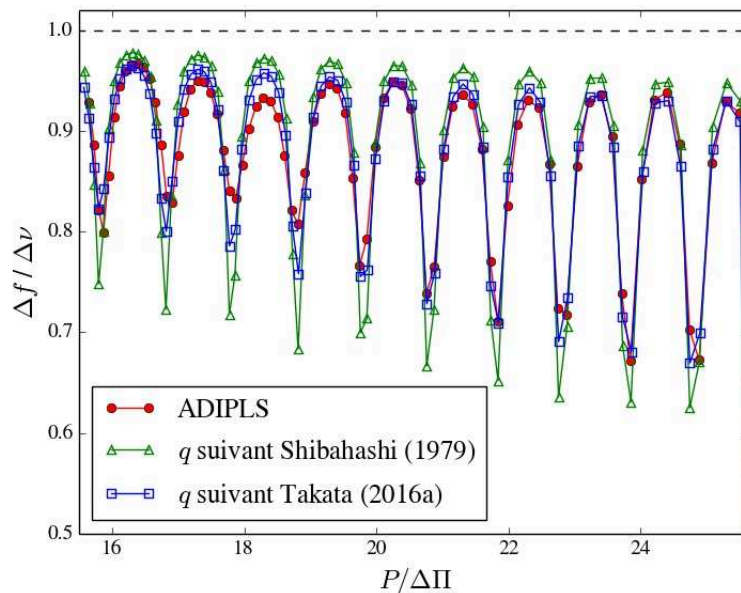
**Pour résumer, la comparaison directe entre les trois jeux de fréquences montrent que les fréquences asymptotiques à dominance de pression sont décalées d'un quart de  $\Delta\nu$  et celles à dominance de gravité d'un quart de  $\Delta\Pi$  par rapport aux fréquences obtenues avec le code d'oscillation ADIPLS. Il en ressort néanmoins que les valeurs de  $q$  supérieures à 0.25 obtenues suivant le formalisme de Takata (2016a) semblent en meilleur accord avec les fréquences obtenues avec ADIPLS (i.e., extrema de  $\Delta f/\Delta\nu$  pour les modes à dominance de gravité ou pente du motif dans le diagramme échelle  $P$  en fonction de  $\nu$  modulo  $\Delta\nu$ ). Pour améliorer la comparaison, on propose dans la suite de corriger les décalages en période et en fréquence observés entre les fréquences asymptotiques et les fréquences données par ADIPLS.**

**Comparaison après correction.** Le décalage en période des modes à dominance de gravité d'environ un quart de  $\Delta\Pi$  se traduit par un terme de phase additionnel d'une valeur de  $\pi/4$  dans le terme  $\Theta_g$  de Eq. (10.2) (qui correspond à l'argument de la fonction cotangente dans Eq. (8.40) pour la relation de phase dans l'approximation d'un faible couplage). Le décalage est donc corrigé en faisant la substitution  $\Theta_g(\nu) \leftarrow \Theta_g(\nu) + \pi/4$ . L'origine de ce déphasage reste une question ouverte et mérite de futures investigations en dehors du cadre de ce chapitre. De façon similaire, le décalage en fréquence d'environ un quart de  $\Delta\nu$  peut être corrigé en ajoutant  $\pi/4$  au terme de phase  $\Theta_p(\nu) \leftarrow \Theta_p(\nu) + \pi/4$  dans Eq. (10.2) (qui correspond à l'argument de la fonction tangente dans Eq. (8.40) pour la relation de phase dans l'approximation d'un faible couplage). L'origine de ce déphasage, ici, est néanmoins purement artificiel et provient de la condition limite imposée à la surface en  $r = R_\star$ . En effet, dans les analyses asymptotiques considérées, la fréquence d'oscillation est toujours supposée inférieure à la fréquence de coupure en surface. Dans ce cas, un point tournant existe proche de la surface (i.e.,  $r_d$ ) et la fonction d'onde issue de ce point se comporte comme une fonction d'Airy. Le raccord asymptotique de cette solution au milieu de la cavité  $P$  à la solution issue du point tournant  $r_c$  a pour conséquence l'ajout d'un terme de phase de valeur  $-\pi/4$  dans  $\Theta_p$ . Dans le cas non-réaliste considéré ici pour le calcul avec ADIPLS, il n'y a pas de point tournant en surface. La solution issue du point  $r_c$  doit donc seulement vérifier la condition  $\delta p = 0$  en  $r = R_\star$ , d'où le retrait du déphasage  $-\pi/4$  introduit par le point tournant en surface dans une analyse asymptotique classique similaire à celle de Shibahashi (1979) ou celle de Takata (2016a).

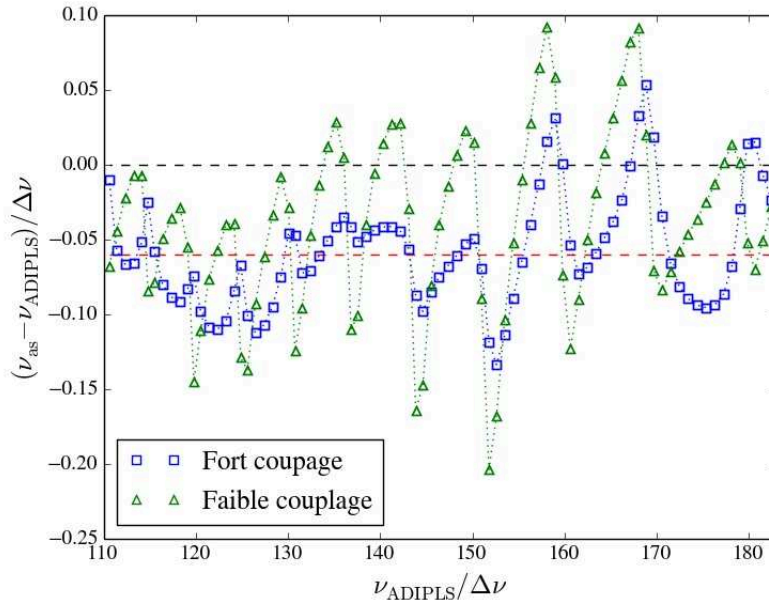
Le résultat obtenu en corrigeant ces deux déphasages est représenté sur la FIGURE 10.5 où la différence de fréquence entre deux modes dipolaires consécutifs est tracée en fonction de la période. Il est clair sur cette figure que les fréquences obtenues avec ADIPLS sont en bien meilleur accord avec celles estimées via le formalisme asymptotique de Takata (2016a) que celles estimées dans l'approximation d'un faible couplage suivant Shibahashi (1979) (avec néanmoins la correction du décalage de phase sur  $\Theta_g$ ). Comme mentionné plus tôt, l'approximation d'un faible couplage prédit des valeurs de  $\Delta f/\Delta\nu$  plus élevées pour les modes à dominance de pression et bien plus faibles pour les modes à dominance de gravité par rapport à ADIPLS. Ceci est dû principalement



**FIGURE 10.5:** Idem que pour la FIGURE 10.3, à l'exception qu'un déphasage d'une valeur de  $\pi/4$  a été inclus empiriquement dans les termes de phase associés à l'enveloppe et au cœur radiatif, i.e.  $\Theta_p$  et  $\Theta_g$  dans Eq. (10.2) et les équivalents dans Eq. (8.40).



**FIGURE 10.6:** Idem que pour la FIGURE 10.5 à l'exception des triangles verts qui ont été calculées d'après le formalisme de Takata (2016a) suivant Eqs. (10.2)-(10.12), mais avec une valeur de  $q$  estimée dans l'approximation d'un faible couplage d'après Shibahashi (1979) suivant Eqs. (8.4)-(8.5).



**FIGURE 10.7:** Différence entre les fréquences propres obtenues par une des deux relations de phase asymptotiques et les fréquences obtenues avec le code d'oscillation ADIPLS, en fonction de la fréquence et normalisée par  $\Delta\nu$ . La ligne continue rouge représente la valeur moyenne de la différence.

à une trop faible valeur de  $q$  dans ce cas. Pour s'en convaincre, on peut calculer les fréquences propres asymptotiques suivant le formalisme proposé par Takata (2016a), mais en imposant que la valeur de  $q$  suive l'expression donnée dans un faible couplage. Le résultat est représenté sur la FIGURE 10.6 et démontre bien que la différence dans la valeur de  $q$  est le principal responsable de la différence dans les prédictions des fréquences propres par chacun des formalismes. En conclusion, la relation de phase asymptotique proposée par Takata (2016a) améliore globalement la précision sur la détermination des fréquences propres, notamment grâce à une estimation plus réaliste du facteur de couplage. Néanmoins, on peut noter que l'accord entre l'analyse asymptotique et le code d'oscillation n'est plus aussi bon pour les valeurs de  $P/\Delta\Pi$  situées environ entre 17 et 19, correspondant à des valeurs de la fréquence entre 0.83 mHz et 0.93 mHz. De façon assez intéressante, cela correspond à l'intervalle de fréquences pour lequel la valeur de  $d \ln \tilde{N}/d \ln r$  varie significativement (voir FIGURE 10.1). Une mauvaise estimation du facteur de couplage en est sans doute la cause. Ce point méritera lui aussi d'être mieux compris dans le futur.

**Estimation de l'erreur sur les fréquences individuelles corrigées.** Enfin, pour finir, la différence entre les fréquences obtenues avec ADIPLS et les fréquences corrigées obtenues avec la relation de phase asymptotique suivant Takata (2016a) ou Shibahashi (1979) est représentée sur la FIGURE 10.7. Cette figure montre que les fréquences asymptotiques sont systématiquement décalées en moyenne d'une valeur de  $-0.05\Delta\nu$  environ. Il est possible que cette erreur systématique provienne de l'estimation numérique des quantités entrant en jeu dans la relation de phase, mais celle-ci est assez faible pour rester acceptable. Toutefois, en prenant en compte ce décalage, on voit que la relation asymptotique dans l'hypothèse d'un fort couplage reste plus précise que celle dans l'approximation d'un faible couplage avec une erreur inférieure à 10% de  $\Delta\nu$ , à l'exception de l'intervalle entre 160-180 en abscisse, correspondant aux fréquences entre 0.8 mHz et 0.9 mHz déjà mentionnées à la fin du paragraphe précédent.

### 10.3 Conclusions préliminaires

Dans ce chapitre, je me suis intéressé à la relation de phase asymptotique dans l'hypothèse d'un fort couplage proposée par Takata (2016a). En utilisant une comparaison avec les fréquences calculées avec le code d'oscillation ADIPLS et les fréquences asymptotiques obtenues avec la relation de phase dans l'approximation d'un faible couplage, il est possible de mettre en exergue l'apport ou les insuffisances de ce nouveau formalisme pour la prédiction théorique du spectre des modes mixtes. Deux enseignements majeurs ressortent de ce travail préliminaire. D'abord, la relation de phase dans l'hypothèse d'un fort couplage est globalement en bien meilleur accord avec le spectre calculé par ADIPLS que dans l'approximation d'un faible couplage, grâce en particulier à une estimation plus réaliste de la valeur du facteur de couplage. Comme pour les observations, cette étude démontre notamment que des valeurs de  $q$  bien supérieures à 0.25, la limite supérieure autorisée dans l'approximation d'un faible couplage, sont nécessaires pour rendre compte des fréquences propres calculées avec ADIPLS. Cependant, la comparaison montre aussi qu'un déphasage additionnel d'environ  $\pi/4$  dans le terme de phase associée à la cavité  $G$ , c'est-à-dire  $\Theta_g$  dans Eq. (10.2), est nécessaire pour que la différence avec les fréquences calculées par ADIPLS reste acceptable. En effet, avec cette correction, la relation de phase asymptotique est capable de prédire les fréquences propres individuelles avec une erreur inférieure à environ 10% de  $\Delta\nu$  par rapport aux fréquences calculées avec ADIPLS. L'origine de ce déphasage est pour l'instant inconnue. Il pourrait provenir d'un traitement insuffisant près des points tournants de la cavité  $G$  soit de la part de l'analyse asymptotique, soit du code d'oscillation. Ces résultats préliminaires devront être confirmés par la suite sur d'autres modèles. Cela permettra notamment de savoir si l'erreur de phase de  $\pi/4$  sur  $\Theta_g$  est systématique, et si oui, de comprendre son origine. Dans une seconde étape, le même type d'étude devra être effectuée sur des cas réalistes, c'est-à-dire dans une étoile avec un intervalle de fréquences en accord avec les spectres observés. La comparaison permettra de savoir si la relation de phase asymptotique au premier ordre dans l'hypothèse d'un fort couplage est capable de prédire la structure globale du spectre des modes mixtes, ainsi que sa structure fine, ou si une analyse du second ordre est nécessaire.

En résumé, l'analyse asymptotique des modes mixtes dans l'hypothèse d'un fort couplage d'après Takata (2016a) prédit des valeurs plus réalistes pour le facteur de couplage. Cela permet d'améliorer la détermination des fréquences propres d'oscillation par rapport aux formulations théoriques précédentes dans l'approximation d'un faible couplage. Néanmoins, les calculs ont montré que la phase des modes associée à la cavité  $G$ , i.e.  $\Theta_g$ , doit être corrigée d'une constante pour reproduire avec une bonne précision les fréquences obtenues avec un code d'oscillation. Après correction, la relation de phase permet alors de déterminer les fréquences propres à mieux de 10% de  $\Delta\nu$ . De futures travaux devront trouver l'origine de ce déphasage. Ces résultats ont été obtenus dans un cas idéal non-réaliste respectant au mieux les hypothèses utilisées dans la dérivation de la relation de phase. Dans la suite, l'étude sera étendue à des cas réels.

# Chapitre 11

## Information portée par le décalage en période des modes mixtes $\epsilon_g$

### Sommaire

---

<b>11.1 Définitions et modélisation . . . . .</b>	<b>231</b>
11.1.1 Rôle de $\epsilon_g$ dans la relation de phase . . . . .	231
11.1.2 Modélisation des cavités résonantes . . . . .	232
11.1.3 Comportement au centre de l'étoile . . . . .	234
<b>11.2 Signature sismique des points tournants . . . . .</b>	<b>234</b>
11.2.1 Calcul de $I_1$ près du centre . . . . .	235
11.2.2 Calcul de $I_2$ au voisinage de la zone évanescente . . . . .	236
11.2.3 Expression finale pour $\epsilon_{g,l}$ . . . . .	238
<b>11.3 Discussion des résultats et conclusions . . . . .</b>	<b>239</b>

---

Pour finir cette troisième partie sur les diagnostics sismiques par les modes mixtes, nous nous intéressons à un paramètre jusqu'ici peu étudié. Il s'agit du décalage en période des modes à dominance de gravité, noté  $\epsilon_g$ , qui a précédemment été introduit dans Eq. (8.6) et qui est souvent dénommé par abus de langage par son nom anglais *offset*. En utilisant un modèle simple et similaire à celui utilisé dans le Chapitre 9 pour le facteur de couplage, nous montrons dans ce chapitre que ce paramètre est sensible aux propriétés des régions au voisinage des points tournants de la cavité centrale (i.e.,  $r_a$  et  $r_b$  sur la FIGURE 8.1). Ce paramètre sismique doit donc varier au cours de l'évolution stellaire et sa détermination observationnelle permettrait à terme de contraindre les propriétés des régions aux limites de la cavité centrale, c'est-à-dire le centre de l'étoile et la région intermédiaire entre le cœur d'hélium et la base de l'enveloppe convective. Pour commencer, présentons brièvement le cadre dans lequel s'inscrit cette étude.

### 11.1 Définitions et modélisation

#### 11.1.1 Rôle de $\epsilon_g$ dans la relation de phase

Dans le cas général, la relation de phase asymptotique des modes mixtes s'exprime suivant Eq. (8.1), c'est-à-dire

$$\cot(\Xi_G) \tan(\Xi_P) = q, \quad (11.1)$$

où  $\Xi_G$  et  $\Xi_P$  sont les termes de phase associés respectivement à la cavité interne des modes de gravité et à la cavité externe des modes de pression. Dans ce chapitre, nous nous intéressons au



terme  $\Xi_G$ , qui dépend notamment de l'intégrale de la composante radiale du nombre d'onde entre  $r_a$  et  $r_b$ . L'offset  $\epsilon_{g,l}$  est alors défini par la relation

$$\Xi_G = \pi \left( \frac{1}{\nu \Delta \Pi_l^0} - \epsilon_{g,l} \right), \quad (11.2)$$

où  $\Delta \Pi_l^0$  est formellement égal au *period-spacing* d'un mode de gravité pur de degré  $l$  pour lequel  $\nu \rightarrow 0$  (en effet, d'après Eq. (2.75),  $\Delta \Pi_l$  dépend de la fréquence d'oscillation à travers les points tournants et les bornes de l'intégrale). Alors que le premier terme du membre de droite de Eq. (11.2) représente le terme d'ordre dominant de l'intégrale du nombre d'onde entre  $r_a$  et  $r_b$  quand le nombre de nœuds dans la cavité  $G$  est grand (i.e.,  $n_g \sim P/\Delta \Pi_l^0 \gg 1$ , voir Section 11.2),  $\epsilon_{g,l}$  regroupe les termes de l'ordre de l'unité ou d'ordre supérieur, ainsi que les termes de déphasage provenant de la réflexion des ondes au voisinage de  $r_a$  et  $r_b$ . Ces termes, bien que négligeables par rapport à  $P/\Delta \Pi_l^0 \gg 1$  dans l'approximation asymptotique, jouent un rôle important dans la relation de phase. En effet, ils interviennent en argument de la fonction cotangente qui est  $\pi$ -périodique et qui varie de  $+\infty$  à  $-\infty$  sur l'intervalle  $[0, \pi]$ . Ainsi, une variation de l'ordre de l'unité pour  $\Xi_G$  provenant du terme  $\epsilon_{g,l}$  peut résulter en un décalage non-négligeable des fréquences propres des modes mixtes à dominance de gravité. Réciproquement, l'influence de  $\epsilon_{g,l}$  sur les fréquences propres est assez importante pour qu'il puisse être mesuré dans un spectre d'oscillation. Le but de ce chapitre est de démontrer que la détermination de ce terme peut nous renseigner sur les propriétés de la structure interne des étoiles évoluées. Pour ce faire, le profil des fréquences de Brunt-Väisälä et de Lamb sera modélisé afin de rendre les calculs solubles analytiquement. Le cas des modes mixtes dipolaires sera considéré en prenant en compte la perturbation du potentiel gravitationnel. Dans la suite, la notation  $l$  pour le degré angulaire sera néanmoins explicitement conservée puisque nous verrons plus tard que le résultat pour les degrés angulaires  $l \geq 2$  dans l'approximation de Cowling peut-être facilement retrouvé à partir du résultat pour  $l = 1$  sans l'approximation de Cowling.

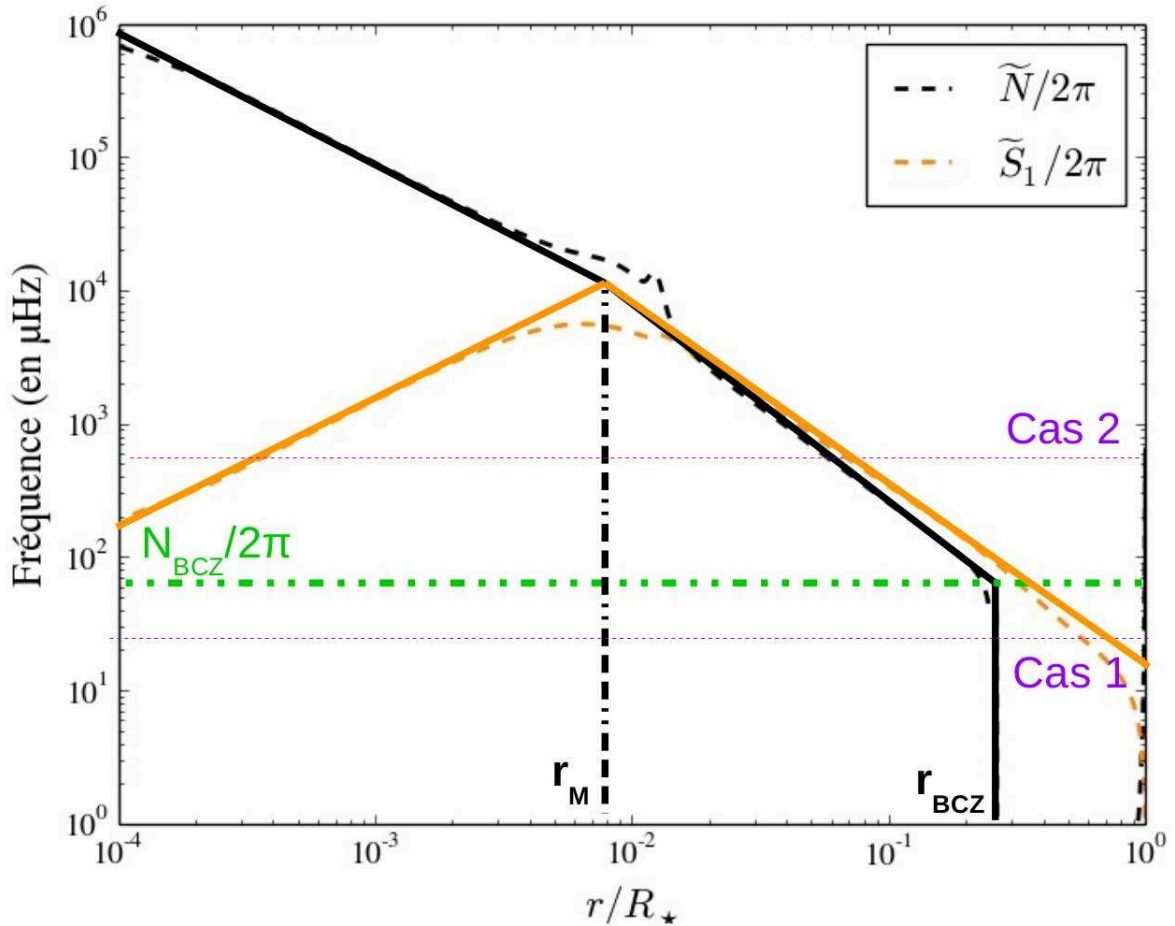
### 11.1.2 Modélisation des cavités résonantes

Les modèles stellaires montrent qu'il est possible en première approximation d'exprimer les fréquences modifiées de Brunt-Väisälä et de Lamb par des lois de puissance en fonction du rayon de part et d'autre du maximum de  $\tilde{S}_1$  (e.g., voir FIGURE 9.3). Néanmoins, contrairement au modèle présenté dans le Chapitre 9, les exposants associés à  $\tilde{N}$  et à  $\tilde{S}_1$  ne sont pas supposés être égaux, comme cela est suggéré par la dépendance du facteur de couplage avec la fréquence d'oscillation observée dans le Chapitre 10 (voir FIGURE 10.2). On suppose donc dans la suite que

$$\frac{d \ln \tilde{S}_1}{d \ln r} = \text{cst.} = \beta_a \quad \text{et} \quad \frac{d \ln \tilde{N}}{d \ln r} = \text{cst.} = \gamma_a \quad \text{pour } r \leq r_M \quad (11.3)$$

$$\frac{d \ln \tilde{S}_1}{d \ln r} = \text{cst.} = \beta_b \quad \text{et} \quad \frac{d \ln \tilde{N}}{d \ln r} = \text{cst.} = \gamma_b \quad \text{pour } r_M \leq r \leq r_{\text{BCZ}}, \quad (11.4)$$

où  $r_{\text{BCZ}}$  est le rayon à la base de la zone convective et  $r_M$  est le rayon au maximum de la fréquence modifiée de Lamb. La situation est représentée de façon schématique sur la FIGURE 11.1. Comme dans le Chapitre 9 pour le facteur de couplage, deux cas seront considérés. Le cas 1 correspond au cas où la fréquence cyclique d'oscillation des modes mixtes est inférieure à la valeur de la fréquence de Brunt-Väisälä juste sous la base de la zone convective, notée  $N_{\text{BCZ}}$  (e.g., dans les étoiles évoluées sur la branche des géantes rouges). Le cas 2 correspond au cas où la fréquence cyclique d'oscillation est supérieure à  $N_{\text{BCZ}}$  (e.g., dans les étoiles sous-géantes ou du red clump). Il est important de noter ici que cette modélisation ne prend pas en compte la présence d'un cœur convectif dans les étoiles du red clump. En effet, celui-ci rendrait les calculs bien plus complexes. Par souci de simplicité, on oublie donc son influence dans une première étape et reporte son étude détaillée à de futurs travaux.



**FIGURE 11.1:** Représentation schématique des fréquences modifiées de Brunt-Väisälä (ligne continue noire) et de Lamb (ligne continue orange) en fonction du rayon dans une étoile évoluée (en échelle logarithmique). Pour comparaison, les profils obtenus dans un modèle solaire à la transition entre la branche des sous-géantes et des géantes rouges sont représentés par des tirets. La ligne verticale pointillée représente la rayon au maximum de la fréquence modifiée de Lamb,  $r_M$ , qui se trouve aux alentours de la couche d'hydrogène en fusion. La ligne horizontale pointillée verte correspond à la valeur de la fréquence de Brunt-Väisälä,  $N_{BCZ}$ , juste sous la base de la zone convective de rayon  $r_{BCZ}$ . Les lignes pointillées violettes symbolisent les cavités de propagation dans les cas d'un mode mixte pour lequel la fréquence d'oscillation est inférieure à  $N_{BCZ}/2\pi$  (cas 1), et de celui pour lequel la fréquence d'oscillation est supérieure à  $N_{BCZ}/2\pi$  (cas 2).

### 11.1.3 Comportement au centre de l'étoile

Les valeurs des exposants  $\beta_a$  et  $\gamma_a$  dans Eq. (11.3) sont en fait déjà déterminées par les conditions au centre, c'est-à-dire sous le rayon  $r_M$ . En effet, au centre, les dérivées de la pression et de la densité par rapport au rayon sont nulles. Par un développement limité au second ordre au voisinage de  $r = 0$ , la pression et la densité peuvent alors s'exprimer comme

$$p \approx p_c + p_c'' r^2 / 2 \quad (11.5)$$

$$\rho \approx \rho_c + \rho_c'' r^2 / 2, \quad (11.6)$$

où l'indice  $c$  indique les valeurs estimées au centre et  $(\prime\prime)$  signifie la dérivée seconde par rapport à  $r$ . Ainsi, le facteur  $J$  et la masse d'une sphère de rayon  $r$  sont donnés par

$$m = \int_0^r 4\pi\rho r^2 dr \approx \frac{4\pi}{3}\rho_c r^3 \left(1 + \frac{3\rho_c''}{10\rho_c} r^2\right) \quad (11.7)$$

$$J = 1 - \frac{4\pi r^3 \rho}{m} \approx -\frac{7\rho_c''}{10\rho_c} r^2. \quad (11.8)$$

D'après les définitions des fréquences de Lamb et de Brunt-Väisälä données dans Eqs. (2.34)-(2.35), on a alors près du centre en utilisant les deux dernières expressions

$$S_l^2 \approx \frac{\Lambda^2 c_c^2}{r^2} \quad (11.9)$$

$$N^2 \approx \frac{4\pi G \rho_c}{3} r^2 \left( \frac{p_c''}{\Gamma_{1,c} p_c} - \frac{\rho_c''}{\rho_c} \right), \quad (11.10)$$

où  $\Lambda = \sqrt{l(l+1)}$ . D'après Eqs. (11.8)-(11.10), on aboutit alors pour  $r \leq r_M$  à

$$\beta_a = \frac{d \ln \tilde{S}_1}{d \ln r} = \frac{d \ln(S_1 J)}{d \ln r} = 1 \quad (11.11)$$

$$\gamma_a = \frac{d \ln \tilde{N}}{d \ln r} = \frac{d \ln(N/J)}{d \ln r} = -1. \quad (11.12)$$

De plus, on déduit les relations suivantes

$$\frac{N}{\tilde{S}_1} = \text{cst.} \quad \text{et} \quad \tilde{S}_1 \tilde{N} = \text{cst.} \quad \text{pour } r \leq r_M. \quad (11.13)$$

Ces égalités vont nous être utiles pour le calcul de  $\epsilon_{g,l}$ .

## 11.2 Signature sismique des points tournants

Pour simplifier, on se place dans l'approximation d'un faible couplage. L'effet d'un fort couplage sur l'offset  $\epsilon_{g,l}$  sera discuté plus tard dans la Section 11.3. Dans cette approximation, le terme de phase  $\Xi_G$  est donné, d'après Eq. (8.40), par

$$\Xi_G = \int_{r_a}^{r_b} \tilde{k}_r dr - \frac{\pi}{2}, \quad (11.14)$$

où  $\tilde{k}_r$  est donnée par Eq. (8.36), c'est-à-dire

$$\tilde{k}_r^2 = \frac{\sigma^2}{c^2} \left( \frac{\tilde{N}^2}{\sigma^2} - 1 \right) \left( \frac{\tilde{S}_1^2}{\sigma^2} - 1 \right). \quad (11.15)$$

La détermination de  $\epsilon_{g,l}$  passe donc par le calcul de l'intégrale du nombre d'onde à travers la cavité  $G$ . Celle-ci sera estimée sous les hypothèses du modèle présenté précédemment. On note dans la suite  $I_1$  et  $I_2$  respectivement la contribution à l'intégrale près du centre et celle au voisinage de la zone évanescente, telle que

$$I = \int_{r_a}^{r_b} \tilde{k}_r dr = \underbrace{\int_{r_a}^{r_M} \tilde{k}_r dr}_{I_1} + \underbrace{\int_{r_M}^{r_b} \tilde{k}_r dr}_{I_2} . \quad (11.16)$$

### 11.2.1 Calcul de $I_1$ près du centre

D'après la FIGURE 11.1 et dans l'approximation JWKB,  $\sigma^2 \ll \tilde{N}^2$  dans la région où  $r_a < r < r_M$ . En utilisant un développement limité au premier ordre de  $\tilde{k}_r$  pour  $\sigma/\tilde{N}$  au voisinage 0 (qui demeure une bonne approximation dès que  $\sigma/\tilde{N} \lesssim 0.5$ , ce qui est largement vérifié ici), on obtient

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{r_a}^{r_M} \frac{\tilde{N}}{c_s} \left[ 1 - \frac{\sigma^2}{2\tilde{N}^2} + \mathcal{O}\left(\frac{\sigma^4}{\tilde{N}^4}\right) \right] \left( \frac{\tilde{S}_1^2}{\sigma^2} - 1 \right)^{1/2} dr \\ &= \int_{r_a}^{r_M} \frac{\Lambda N}{\sigma} \frac{dr}{r} + \underbrace{\int_{r_a}^{r_M} \frac{\tilde{N}}{c_s} \left[ \left( \frac{\tilde{S}_1^2}{\sigma^2} - 1 \right)^{1/2} - \frac{\tilde{S}_1}{\sigma} \right] dr}_A \end{aligned} \quad (11.17)$$

$$+ \underbrace{\int_{r_a}^{r_M} \frac{\tilde{N}}{c_s} \left[ -\frac{\sigma^2}{2\tilde{N}^2} + \mathcal{O}\left(\frac{\sigma^4}{\tilde{N}^4}\right) \right] \left( \frac{\tilde{S}_1^2}{\sigma^2} - 1 \right)^{1/2} dr}_B . \quad (11.18)$$

Le terme  $A$  peut être réécrit en fonction de  $N$  et  $\tilde{S}_1$  seulement, c'est-à-dire

$$A = \Lambda \int_{r_a}^{r_M} \frac{N}{\tilde{S}_1} \left[ \left( \frac{\tilde{S}_1^2}{\sigma^2} - 1 \right)^{1/2} - \frac{\tilde{S}_1}{\sigma} \right] \frac{dr}{r} \quad (11.19)$$

$$= \Lambda \left( \frac{N}{\tilde{S}_1} \right)_0 \int_{r_a}^{r_M} \left[ \left( \frac{\tilde{S}_1^2}{\sigma^2} - 1 \right)^{1/2} - \frac{\tilde{S}_1}{\sigma} \right] \frac{dr}{r} , \quad (11.20)$$

où on a utilisé le fait que  $(N/\tilde{S}_1) = \text{cst.} = (N/\tilde{S}_1)_0$  dans cette région. En procédant au changement de variable  $x = \tilde{S}_1/\sigma$  et en utilisant le fait qu'au point tournant  $\tilde{S}_1(r_a) = \sigma$ , on aboutit à

$$A = \Lambda \left( \frac{N}{\tilde{S}_1} \right)_0 \int_1^{x_M} \left[ \sqrt{x^2 - 1} - x \right] \frac{dx}{\beta_a x} \quad (11.21)$$

$$= \Lambda \left( \frac{N}{\tilde{S}_1} \right)_0 \left[ \sqrt{x^2 - 1} + \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}\right) - 1 \right]_1^{x_M} \quad (11.22)$$

$$= \Lambda \left( \frac{N}{\tilde{S}_1} \right)_0 \left\{ 1 - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sigma}{\tilde{S}_{1,M}} + \mathcal{O}\left(\frac{\sigma^3}{\tilde{S}_{1,M}^3}\right) \right\} , \quad (11.23)$$

où l'on a utilisé l'hypothèse  $x_M = \tilde{S}_{1,M}/\sigma \gg 1$  et défini  $\tilde{S}_{1,M} = \tilde{S}_1(r_M)$ . Le terme  $B$ , lui, peut être réécrit en fonction de  $N$ ,  $\tilde{N}$  et  $\tilde{S}_1$ , c'est-à-dire

$$B = -\Lambda \int_{r_a}^{r_M} \frac{N}{\tilde{S}_1} \frac{\sigma^4}{2\tilde{N}^2 \tilde{S}_1^2} \frac{\tilde{S}_1^2}{\sigma^2} \left[ \frac{\tilde{S}_1^2}{\sigma^2} - 1 \right]^{1/2} \left[ 1 + \mathcal{O}\left(\frac{\sigma^2}{\tilde{N}^2}\right) \right] \frac{dr}{r} \quad (11.24)$$

$$= -\Lambda \left( \frac{N}{\tilde{S}_1} \frac{\sigma^4}{2\tilde{N}^2 \tilde{S}_1^2} \right)_{r_M} \int_{r_a}^{r_M} \frac{\tilde{S}_1^2}{\sigma^2} \left[ \frac{\tilde{S}_1^2}{\sigma^2} - 1 \right]^{1/2} \left[ 1 + \mathcal{O}\left(\frac{\sigma^2}{\tilde{N}^2}\right) \right] \frac{dr}{r} , \quad (11.25)$$

où l'on a utilisé le fait que  $N/\tilde{S}_1 \approx \text{cst.}$  et  $\tilde{N}\tilde{S}_1 \approx \text{cst.}$  pour  $r \leq r_M$ . En procédant au même changement de variable que précédemment et en utilisant l'hypothèse  $x_M \gg 1$ , il vient

$$B \approx -\Lambda \left( \frac{N}{\tilde{S}_1} \frac{\sigma^4}{2\tilde{N}^2\tilde{S}_1^2} \right)_{r_M} \frac{\tilde{S}_{1,M}^3}{3\sigma^3} \left[ 1 + \mathcal{O} \left( \frac{\sigma^2}{\tilde{S}_{1,M}^2} \right) \right] \quad (11.26)$$

$$\approx -\frac{\Lambda\sigma}{6N_M} \left[ 1 + \mathcal{O} \left( \frac{\sigma^2}{\tilde{S}_{1,M}^2} \right) \right], \quad (11.27)$$

où l'on a défini  $N_M = N(r_M)$  et supposé  $\tilde{N}_M \sim N_M$ . Le terme  $B$  est donc inférieur à l'unité puisque par hypothèse,  $\sigma \ll N_M$ . Pour finir, il est possible de réécrire le premier terme du membre de droite dans Eq. (11.18) comme

$$\int_{r_a}^{r_M} \frac{\Lambda N}{\sigma} \frac{dr}{r} = \int_0^{r_M} \frac{\Lambda N}{\sigma} \frac{dr}{r} - \int_0^{r_a} \frac{\Lambda N}{\tilde{S}_1} \frac{\tilde{S}_1}{\sigma} \frac{dr}{r} \quad (11.28)$$

$$= \int_0^{r_M} \frac{\Lambda N}{\sigma} \frac{dr}{r} - \Lambda \left( \frac{N}{\tilde{S}_1} \right)_0 \int_0^1 dx \quad (11.29)$$

$$= \int_0^{r_M} \frac{\Lambda N}{\sigma} \frac{dr}{r} - \Lambda \left( \frac{N}{\tilde{S}_1} \right)_0, \quad (11.30)$$

où l'on a fait le changement de variable  $x = \tilde{S}_1/\sigma$  dans la deuxième intégrale du membre de droite et où l'on a utilisé le fait que  $N/\tilde{S}_1 = \text{cst.}$  pour  $r \leq r_M$ . Finalement, en ne gardant que les termes d'ordre dominant et de l'ordre de l'unité dans  $A$  et  $B$ , et en utilisant Eq. (11.30), l'intégrale  $I_1$  est égale à

$$I_1 = \int_0^{r_M} \frac{\Lambda N}{\sigma} \frac{dr}{r} - \Lambda \left( \frac{N}{\tilde{S}_1} \right)_0 \frac{\pi}{2} + \mathcal{O} \left( \frac{\sigma}{\tilde{S}_{1,M}} \right), \quad (11.31)$$

où le terme en rouge provient de l'intégration près du point tournant  $r_a$ .

### 11.2.2 Calcul de $I_2$ au voisinage de la zone évanescente

**Cas 1 d'une étoile évoluée sur la branche des géantes rouges ( $r_b \approx r_{BCZ}$ ) :** dans ce type d'étoile, le point tournant est situé au niveau de la base la zone convective de rayon  $r_{BCZ}$ , où la fréquence de Brunt-Väisälä varie très rapidement. Autrement dit, la fréquence cyclique d'oscillation est inférieure à la valeur de la fréquence de Brunt-Väisälä juste sous la base de la zone convective, notée  $N_{BCZ}$ . En utilisant un développement limité au premier ordre au voisinage de 0 pour  $\sigma/\tilde{N}$  et  $\sigma/\tilde{S}_1$  dans Eq. (11.15) (ce qui est une bonne approximation pour  $\sigma \lesssim 0.5 \tilde{S}_1, \tilde{N}$ ), l'intégrale du nombre d'onde dans la partie supérieure de la cavité  $G$  devient

$$I_2 = \int_{r_M}^{r_{BCZ}} \frac{\Lambda N}{\sigma r} \left[ 1 - \frac{\sigma^2}{2\tilde{N}^2} + \mathcal{O} \left( \frac{\sigma^4}{\tilde{N}^4} \right) \right] \left[ 1 - \frac{\sigma^2}{2\tilde{S}_1^2} + \mathcal{O} \left( \frac{\sigma^4}{\tilde{S}_1^4} \right) \right] dr \quad (11.32)$$

$$\approx \int_{r_M}^{r_{BCZ}} \frac{\Lambda N}{\sigma} \frac{dr}{r} - \underbrace{\frac{\Lambda}{2} \int_{r_M}^{r_{BCZ}} \frac{N\sigma}{\tilde{N}^2} \frac{dr}{r}}_C - \underbrace{\frac{\Lambda}{2} \int_{r_M}^{r_{BCZ}} \frac{N\sigma}{\tilde{S}_1^2} \frac{dr}{r}}_D. \quad (11.33)$$

Pour aller plus loin, on suppose de plus que  $N$  varie suivant la même loi de puissance que  $\tilde{N}$  près de  $r_{BCZ}$ . Cela revient à négliger la variation du facteur  $J$  avec le rayon dans cette région. L'erreur faite sur les intégrales  $C$  et  $D$  est négligeable car les intégrandes dans l'équation précédente sont maximales autour de  $r_{BCZ}$ . On obtient alors, en exprimant  $N$ ,  $\tilde{N}$  et  $\tilde{S}_1$  sous forme de lois de puissance,

$$C \approx -\frac{1}{\gamma_b} \frac{N_{BCZ}\sigma}{\tilde{N}_{BCZ}^2} \quad \text{et} \quad D \approx -\frac{1}{(2\beta_b - \gamma_b)} \frac{N_{BCZ}\sigma}{\tilde{S}_{1,BCZ}^2}. \quad (11.34)$$

L'intégrale  $I_2$  peut donc s'écrire dans le cas 1 comme

$$I_2 \approx \int_{r_M}^{r_{\text{BCZ}}} \frac{\Lambda N}{\sigma} \frac{dr}{r} + \frac{\Lambda}{2\gamma_b} \frac{\sigma}{N_{\text{BCZ}}} \left( \frac{N_{\text{BCZ}}^2}{\tilde{N}_{\text{BCZ}}^2} + \frac{\gamma_b}{2\beta_b - \gamma_b} \frac{N_{\text{BCZ}}^2}{\tilde{S}_{1,\text{BCZ}}^2} \right), \quad (11.35)$$

où le terme en rouge provient de l'intégration au voisinage du point tournant  $r_b$ .

**Cas 2 d'une étoile sous-géante ou du red clump** ( $r_M \leq r_b \leq r_{\text{BCZ}}$ ) : dans ces étoiles, le point tournant est situé entre la couche d'hydrogène en fusion et la base de la zone convective. On ne peut pas supposer dans ce cas que  $\sigma \ll \tilde{N}, \tilde{S}_1$  puisque cela est non valide proche de  $r_b$ . L'intégrale  $I_2$  peut alors s'exprimer comme

$$I_2 = \int_{r_M}^{r_b} \frac{\Lambda N}{\sigma} \left(1 - \frac{\sigma^2}{\tilde{N}^2}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{\sigma^2}{\tilde{S}_1^2}\right)^{1/2} \frac{dr}{r} \quad (11.36)$$

$$= \int_{r_M}^{r_b} \frac{\Lambda N}{\sigma} \frac{dr}{r} + \int_{r_M}^{r_b} \frac{\Lambda N}{\sigma} \left[ \left(1 - \frac{\sigma^2}{\tilde{N}^2}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{\sigma^2}{\tilde{S}_1^2}\right)^{1/2} - 1 \right] \frac{dr}{r} \quad (11.37)$$

$$= \underbrace{\int_{r_M}^{r_b} \frac{\Lambda N}{\sigma} \frac{dr}{r}}_G + \underbrace{\int_{r_M}^{r_b} \Lambda J \left[ \left(1 - \frac{\sigma^2}{\tilde{N}^2}\right)^{1/2} \left(\frac{\tilde{N}^2}{\sigma^2} - \frac{\tilde{N}^2}{\tilde{S}_1^2}\right)^{1/2} - \frac{\tilde{N}}{\sigma} \right] \frac{dr}{r}}_H. \quad (11.38)$$

Dans une première étape, on s'intéresse à l'intégrale  $G$ . On désire rendre explicite la dépendance de ce terme avec la fréquence d'oscillation. En effet, celui-ci dépend de  $\sigma$  à travers le facteur  $1/\sigma$  et le point tournant  $r_b(\sigma)$ . Pour cela, on suppose que  $N$  suit une loi de puissance entre  $r_b$  et  $r_{\text{BCZ}}$  avec un exposant  $\gamma_b^*$ , qui peut être choisi avec une valeur légèrement différente de l'exposant de  $\tilde{N}$  (i.e.,  $\gamma_b$ ). On peut alors écrire

$$\int_{r_M}^{r_b} \frac{\Lambda N}{\sigma} \frac{dr}{r} = \int_{r_M}^{r_{\text{BCZ}}} \frac{\Lambda N}{\sigma} \frac{dr}{r} - \int_{r_b}^{r_{\text{BCZ}}} \frac{\Lambda N}{\sigma} \frac{dr}{r} = \int_{r_M}^{r_{\text{BCZ}}} \frac{\Lambda N}{\sigma} \frac{dr}{r} + \frac{\Lambda}{\gamma_b^*} \left(1 - \frac{N_{\text{BCZ}}}{\sigma}\right). \quad (11.39)$$

Dans une seconde étape, on se focalise sur le terme  $H$ . Le terme entre crochet dans cette intégrale est maximum dans le voisinage de  $r_b$ . La majeure contribution à cette intégrale provient donc de cette région. On suppose donc dans une bonne approximation que  $J$  est une constante avec une valeur égale à celle en  $r_b$ , notée  $J_b$ . Pour aller plus loin et réécrire simplement  $H$ , il faut se rappeler que

$$\tilde{N} = \tilde{N}_b \left(\frac{r}{r_b}\right)^{\gamma_b} \quad (11.40)$$

$$\tilde{S}_1 = \tilde{S}_{1,b} \left(\frac{r}{r_b}\right)^{\beta_b}, \quad (11.41)$$

avec  $\tilde{N}_b = \tilde{N}(r_b)$  et  $\tilde{S}_{1,b} = \tilde{S}_1(r_b)$ , de telle façon à avoir

$$\frac{\tilde{N}}{\tilde{S}_1} = \frac{\tilde{N}_b}{\tilde{S}_{1,b}} \left(\frac{\sigma}{\tilde{N}}\right)^{-1+\beta_b/\gamma_b}, \quad (11.42)$$

où on a utilisé la condition au point tournant  $\sigma = \tilde{N}_b$ . En procédant au changement de variable  $u = \sigma/\tilde{N}$  et en utilisant Eq. (11.42) dans le terme  $H$ , on trouve alors

$$H \approx -\frac{\Lambda J_b}{\gamma_b} \int_0^1 \left[ (1-u^2)^{1/2} \left(\frac{1-\alpha_b^2 u^{2\beta_b/\gamma_b}}{u^2}\right)^{1/2} - \frac{1}{u} \right] \frac{du}{u} + \mathcal{O}(u_M), \quad (11.43)$$

où l'on a supposé que  $u_M = \sigma/\tilde{N}_M \ll 1$  et l'on a défini  $\alpha_b = \tilde{N}_b/\tilde{S}_{1,b}$ . Dans le cas particulier où  $\beta_b = \gamma_b$ ,  $H$  peut s'exprimer simplement en fonction des intégrales elliptiques de manière quasi similaire à Eq. (9.5) dans le Chapitre 9 en supposant toujours  $u_M \ll 1$ , c'est-à-dire

$$H = -\frac{\Lambda J_b}{\gamma_b} \left[ (1 - \alpha_b^2)K(\alpha_b^2) - 2E(\alpha_b^2) + 1 + \mathcal{O}\left(\frac{\sigma}{\tilde{N}_M}\right) \right], \quad (11.44)$$

où  $K$  et  $E$  sont respectivement les intégrales elliptiques complètes de première et de deuxième sorte (e.g., Abramowitz & Stegun 1972).

Finalement, l'intégrale  $I_2$  est donnée au premier ordre d'après Eqs. (11.39) et (11.43) par

$$I_2 = \int_{r_M}^{r_{\text{BCZ}}} \frac{\Lambda N}{\sigma} \frac{dr}{r} + \frac{\Lambda}{\gamma_b^*} \left( 1 - \frac{N_{\text{BCZ}}}{\sigma} \right) + H(\alpha_b, \gamma_b, \beta_b), \quad (11.45)$$

où le terme en rouge provient de la région au voisinage du point tournant, avec  $H$  est donnée dans Eqs. (11.43) ou (11.44).

### 11.2.3 Expression finale pour $\epsilon_{g,l}$

D'après la définition initiale donnée dans Eq. (11.2), la détermination de  $\epsilon_{g,l}$  passe par l'identification de  $\Delta\Pi_l^0$ , qui représente la valeur du *period-spacing* asymptotique classique d'un mode de gravité pur de très basse fréquence (i.e.,  $\sigma \rightarrow 0$ ). Celui-ci s'exprime comme

$$\Delta\Pi_l^0 = \frac{2\pi^2}{\Lambda} \left( \int_0^{r_{\text{BCZ}}} \frac{N}{r} dr \right)^{-1}. \quad (11.46)$$

En effet, avec cette définition, la phase  $\Xi_G$  dans Eq. (11.2) peut s'exprimer d'après Eqs. (11.31), (11.35) et (11.45) comme

$$\Xi_G = I_1 + I_2 - \frac{\pi}{2} = \pi \left( \frac{1}{\nu\Delta\Pi_l^0} - \epsilon_{g,l} \right), \quad (11.47)$$

où  $\epsilon_{g,l}$  est donné par

$$\epsilon_{g,l} = \frac{1}{2} \left[ 1 + \Lambda \left( \frac{N}{\tilde{S}_1} \right)_0 \right] - \frac{1}{\pi} \mathcal{F}, \quad (11.48)$$

avec l'unité en rouge dans le premier terme du membre de droite provenant de la perturbation du potentiel gravitationnel, et avec la fonction  $\mathcal{F}$  qui dépend du stade évolutif telle que :

- dans le **cas 1** des étoiles évoluées sur la branche des géantes rouges où  $\sigma \lesssim N_{\text{BCZ}}$ , avec  $N_{\text{BCZ}}$  la valeur de la fréquence de Brunt-Väisälä juste sous la base de la zone convective, on obtient d'après Eq. (11.35)

$$\mathcal{F}_1 = \frac{\Lambda}{2\gamma_b} \frac{\sigma}{N_{\text{BCZ}}} \left( \frac{N_{\text{BCZ}}^2}{\tilde{N}_{\text{BCZ}}^2} + \frac{\gamma_b}{2\beta_b - \gamma_b} \frac{N_{\text{BCZ}}^2}{\tilde{S}_{1,\text{BCZ}}^2} \right), \quad (11.49)$$

où  $\Lambda = \sqrt{l(l+1)}$ ,  $\gamma_b$  et  $\beta_b$  sont les exposants de lois de puissance en fonction du rayon suivies respectivement par  $\tilde{N}$  et  $\tilde{S}_1$  entre le cœur d'hélium et la base de la zone convective.

- dans le **cas 2** des étoiles sous-géantes, jeunes géantes rouges ou du red clump pour lesquelles  $N_{\text{BCZ}} \leq \sigma \ll \tilde{S}_{1,M}$ , avec  $\tilde{S}_{1,M}$  la valeur maximale de la fréquence modifiée de Lamb, on obtient d'après Eq. (11.45)

$$\mathcal{F}_2 = \frac{\Lambda}{\gamma_b^*} \left( 1 - \frac{N_{\text{BCZ}}}{\sigma} \right) + H(\alpha_b, \gamma_b, \beta_b), \quad (11.50)$$

avec  $H$  donnée dans Eq. (11.43),  $\alpha_b = \tilde{N}_b/\tilde{S}_{1,b}$  le rapport de la fréquence modifiée de Brunt-Väisälä sur celle de Lamb en  $r_b$  et  $\gamma_b^*$  le taux de variation de  $N$  avec le rayon en  $r_b$ .

La phase  $\Xi_G$  d'un mode tel que  $\sigma \rightarrow 0$ , c'est-à-dire dans le cas 1, vérifie bien à posteriori la définition du *period-spacing* donnée dans Eq. (11.46). On peut aussi noter que le cas de modes mixtes de degré angulaire quelconque  $l$  dans l'approximation de Cowling peut être retrouvé en faisant les substitutions  $J_b = 1$ ,  $\tilde{N}_{\text{BCZ}} = N_{\text{BCZ}}$ ,  $\tilde{S}_{1,\text{BCZ}} = S_{1,\text{BCZ}}$ ,  $(N/\tilde{S}_1)_0 = 1$  et en supprimant l'unité en rouge dans le premier terme du membre de droite de Eq. (11.48) qui provient de la perturbation du potentiel gravitationnel.

### 11.3 Discussion des résultats et conclusions

Dans cette section, nous discutons les résultats précédents en se focalisant sur la relation qui existe entre  $\epsilon_{g,l}$  et les propriétés de la région au voisinage des points tournants  $r_a$  et  $r_b$ . Nous allons notamment voir que  $\epsilon_{g,l}$  offre la possibilité, de façon similaire au facteur de couplage, de sonder la région entre le cœur d'hélium et la base de la zone convective. Sa valeur doit donc varier au cours de l'évolution.

**Information sur le centre.** Autour du point tournant  $r_a$ , les propriétés sont assez bien connues du fait des conditions aux limites centrales (voir Section 11.1.3). La contribution de ce point à  $\epsilon_{g,l}$  vaut  $[1 + \Lambda(N/\tilde{S}_1)_0]/2$ . Le premier terme  $1/2$  provient du changement de nature du point tournant  $r_a$  lorsque la perturbation du potentiel gravitationnel est prise en compte. Le facteur  $(N/\tilde{S}_1)_0/2$  dans le deuxième terme provient du décalage du point tournant  $r_a$  dans le cas où la perturbation du potentiel gravitationnel est prise en compte par rapport au cas où l'approximation de Cowling est utilisée. De plus amples investigations sont nécessaires pour savoir si ce terme a le potentiel de nous apporter des informations sur les propriétés du centre de l'étoile. Guidé par les modèles d'étoiles évoluées de faible masse, on suppose dans la suite que  $(N/\tilde{S}_1)_0 = 1$ . On note que le traitement au centre proposé par Takata (2016a, voir sa Section 3.3) n'a pas été pris en compte ici (voir discussion dans la Section 10.1.1). Celui-ci résulterait notamment en un déphasage additionnel de  $-\pi/4$  sur  $\epsilon_{g,l}$ .

**Cas des étoiles géantes rouges évoluées (cas 1).** On parle ici des étoiles géantes rouges assez évoluées pour que la fréquence au maximum de puissance d'oscillation soit inférieure à  $N_{\text{BCZ}}$  (voir FIGURE 11.1 pour une illustration). C'est le cas du modèle  $M_2$  sur la FIGURE 9.3. Pour simplifier, on suppose en première approximation que  $N_{\text{BCZ}} \approx \tilde{N}_{\text{BCZ}} \ll \tilde{S}_{1,\text{BCZ}}$  dans Eq. (11.49) et que  $(N/\tilde{S}_1)_0 \approx 1$  dans Eq. (11.48). L'offset est alors donné par la relation

$$\epsilon_{g,l} \approx \frac{(1 + \Lambda)}{2} - \frac{\Lambda}{2\pi\gamma_b} \frac{\sigma}{N_{\text{BCZ}}} . \quad (11.51)$$

L'offset dépend donc dans ce cas à la fois du taux de variation de  $\tilde{N}$ , représenté par  $\gamma_b$ , et de la valeur de la fréquence de Brunt-Väisälä juste sous la base de la zone convective,  $N_{\text{BCZ}}$ , via le deuxième terme du membre de droite de l'équation précédente. Néanmoins, ce terme a une faible valeur par rapport à l'unité pour les modes mixtes dipolaires. En effet, avec  $\gamma_b \sim 1.5$  (voir Chapitre 9) et  $\sigma/N_{\text{BCZ}} \sim 0.5$  dans le meilleur des cas, on a  $|\epsilon_{g,1} - (1 + \sqrt{2})/2| \sim 0.08 \ll 1$ . Une détermination observationnelle précise de ce terme dans ce cas nécessite donc une précision sur l'estimation de  $\Delta\Pi$  meilleure que 10%, ce qui semble accessible pour certaines étoiles de la branche des géantes rouges d'après Vrad *et al.* (2015). Néanmoins, cela doit aussi concorder avec les étoiles pour lesquelles  $2\pi\nu_{\text{max}}/N_{\text{BCZ}}$  n'est pas trop faible, c'est-à-dire avec les étoiles les moins évoluées parmi celles dans le cas 1 telles que  $2\pi\nu_{\text{max}} \leq N_{\text{BCZ}}$ . Une telle détermination s'avère donc délicate dans la pratique.

**Cas des étoiles sous-géantes, jeunes géantes rouges ou du red clump (cas 2).** On considère ici les étoiles telles que  $2\pi\nu_{\text{max}} \geq N_{\text{BCZ}}$ , c'est-à-dire dans le cas 2 (voir FIGURE 11.1 pour



une illustration). En supposant en première approximation que  $(N/\tilde{S}_1)_0 = 1$  et  $\sigma \gg N_{\text{BCZ}}$ , l'offset  $\epsilon_{g,l}$  est donné dans ce cas par Eqs. (11.48) et (11.50), c'est-à-dire

$$\epsilon_{g,l} = \frac{(1 + \Lambda)}{2} - \frac{\Lambda}{\pi\gamma_b^*} - \frac{H(\alpha_b, \gamma_b, \beta_b)}{\pi}, \quad (11.52)$$

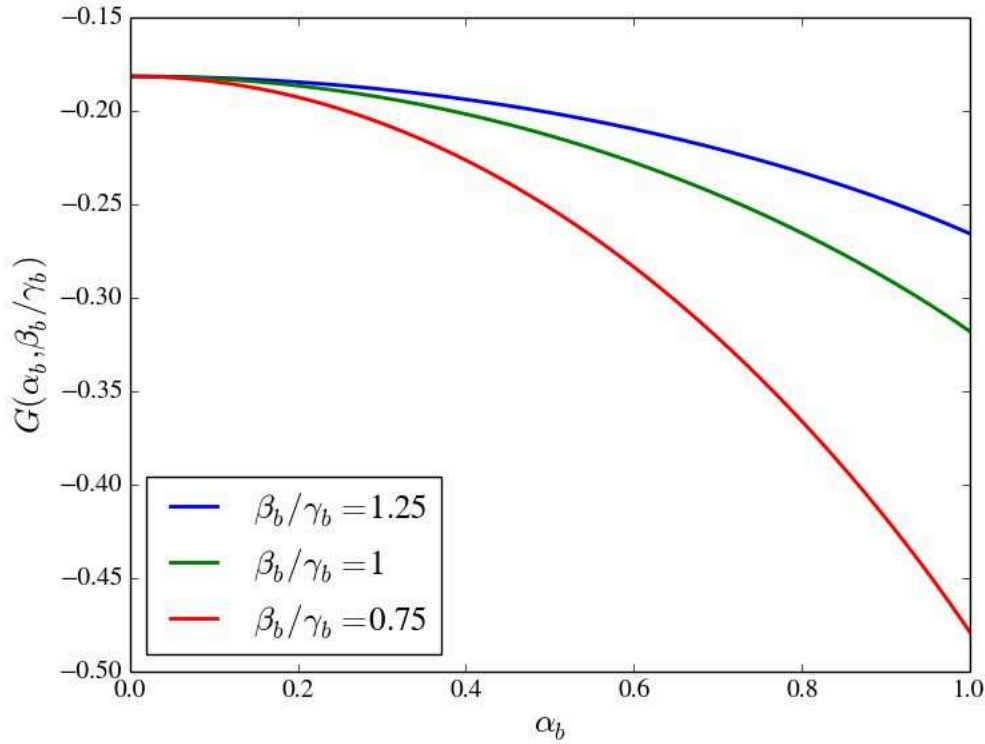
où la fonction  $H$  est donnée par Eq (11.43) ou par Eq. (11.44) dans le cas où  $\beta_b = \gamma_b$ . Il est alors clair que  $\epsilon_{g,l}$  dépend à la fois de la largeur de la zone évanescente (à travers le terme  $\alpha_b$ ) et du contraste de densité entre le cœur et l'enveloppe (à travers les termes  $\beta_b$  et  $\gamma_b$ ). En effet, le paramètre  $\alpha_b$  peut s'écrire, dans l'hypothèse où  $\tilde{N}$  et  $\tilde{S}_1$  suivent deux lois de puissance, sous la forme

$$\alpha_b = \frac{\tilde{N}(r_b)}{\tilde{S}_1(r_b)} = \frac{\tilde{N}(r_c)}{\tilde{S}_1(r_c)(r_b/r_c)^{\beta_b}} = \left(\frac{r_b}{r_c}\right)^{-\beta_b} = \left(\frac{1 - (\Delta r/2r_{\text{ev}})_b}{1 + (\Delta r/2r_{\text{ev}})_b}\right)^{-\beta_b}, \quad (11.53)$$

où l'on a utilisé le fait que  $\tilde{N}(r_b) = \tilde{S}_1(r_c) = \sigma$  et où l'on a défini  $\Delta r_b = r_c - r_b$  et  $r_{\text{ev},b} = (r_b + r_c)/2$ . Cette expression est similaire à la relation donnée par Eq. (9.9) dans le modèle pour le facteur de couplage présenté dans le Chapitre 9, à l'exception qu'ici  $\Delta r/2r_{\text{ev}}$  n'est pas constant et varie avec  $r_b$  et donc avec la fréquence d'oscillation. Cela vient du fait que  $\tilde{N}$  et  $\tilde{S}_1$  ne suivent pas nécessairement la même loi de puissance en fonction du rayon. Pour se représenter la manière dont varie  $\epsilon_{g,l}$  avec  $\alpha_b$ ,  $\gamma_b$  et  $\beta_b$ , il est pratique de définir la quantité  $G(\alpha_b, \beta_b/\gamma_b) = -\gamma_b H/\pi\Lambda J_b$  puisqu'il ne dépend que de deux paramètres, c'est-à-dire  $\alpha_b$  et le rapport  $\beta_b/\gamma_b$ . Celle-ci est représentée sur la FIGURE 11.2 pour différentes valeurs du rapport  $\beta_b/\gamma_b$ . Cette figure montre que ce terme tend vers une constante égale à  $1/\pi - 1/2 \approx -0.18$  et indépendante de  $\beta_b/\gamma_b$  dans le cas d'un faible couplage, c'est-à-dire quand  $\alpha_b \rightarrow 0$ . Au contraire, dans le cas d'un fort couplage, c'est-à-dire quand  $\alpha_b \gtrsim 0.5$ , la valeur de ce terme est sensible à la valeur de  $\beta_b/\gamma_b$ . A valeur de  $\alpha_b$  donnée, plus ce rapport est petit, plus  $|G(\alpha_b, \beta_b/\gamma_b)|$  est proche de l'unité. La sensibilité de  $G$  à  $\beta_b/\gamma_b$  n'est donc pas négligeable puisque ce terme peut générer des déphasages de l'ordre de  $\pi$  dans  $\Xi_G$ . A la manière du facteur de couplage, la détermination de l'offset  $\epsilon_{g,l}$  dans ce type d'étoiles peut donc fournir des informations sur les propriétés de la zone évanescente, c'est-à-dire sa largeur et le taux de variation de  $\tilde{N}$  et  $\tilde{S}_1$  entre le cœur d'hélium et la base de la zone convective. Nous avons vu dans le Chapitre 9 que le facteur de couplage varie au cours de l'évolution. On en déduit donc que  $\epsilon_{g,l}$  doit aussi varier puisqu'il dépend des mêmes paramètres que  $q$ . Reste à savoir si ce paramètre montre une signature caractéristique au cours de l'évolution stellaire comme le fait  $q$  qui pourrait être utilisée pour contraindre le stade évolutif ; ce point mérite d'être étudié plus en détails.

**Cas d'un fort couplage.** Dans l'hypothèse d'un fort couplage, l'offset  $\epsilon_{g,l}$  va en plus dépendre de déphasages additionnels introduits par la réflexion et la transmission à travers la barrière évanescente et représentés par la fonction  $\Phi(X)$  dans Eq. (10.6). La variable  $X$  dépend de l'intégrale du nombre d'onde dans la zone évanescente et du gradient des fréquences de Brunt-Väisälä et de Lamb dans cette région. Il va donc dépendre, comme la fonction  $H$ , de la largeur de la région évanescente, de  $\beta_b$  et de  $\gamma_b$  (voir plus de détails dans le Chapitre 9 dans le cas où la zone évanescente très fine). Les deux fonctions  $H$  et  $\Phi$  doivent donc être prises en compte simultanément pour relier correctement la valeur de  $\epsilon_{g,l}$  aux propriétés de la région au voisinage du point tournant  $r_b$ .

**Levée de dégénérescence avec le facteur de couplage.** Dans le cas des étoiles jeunes géantes rouges ou du red clump, l'offset  $\epsilon_{g,l}$  dépend de la largeur de la zone évanescente et du contraste de densité entre le cœur et l'enveloppe, d'une manière similaire au facteur de couplage (voir Chapitre 9). En effet, dans le cas simplifié où  $\beta_b = \gamma_b = -\beta$  avec  $\beta$  un réel positif, et donc  $\alpha_b = \alpha = \text{cst.}$ ,  $\epsilon_{g,l}$  dépend à la fois de  $\alpha$  et de  $\beta$ , comme le montre la FIGURE 11.2. Néanmoins, à une valeur de  $\epsilon_{g,l}$  donnée correspond différentes paires de paramètres  $(\alpha_b, \beta)$  possibles. La détermination observationnelle de  $\epsilon_{g,l}$  seule ne permet donc pas de faire un lien direct avec la largeur de la zone évanescente



**FIGURE 11.2:** Fonction  $G(\alpha_b, \beta_b/\gamma_b) = -\gamma_b H/\pi \Lambda J_b$  en fonction de  $\alpha_b$  pour différentes valeurs de  $\beta_b/\gamma_b$ , suivant Eq. (11.43).

et  $\beta$ . Cela est aussi le cas pour le facteur de couplage (e.g., voir Chapitre 9 et l'étude de Mosser *et al.* 2017b). Ce fait mène donc à l'idée de combiner la détermination de  $q$  et de  $\epsilon_{g,l}$  pour lever la dégénérescence sur  $\alpha$  et  $\beta$ . Ces deux paramètres sismiques forment donc un couple complémentaire qui pourrait permettre de contraindre de façon non ambiguë les propriétés de la zone évanescente ( $\alpha$  et  $\beta$ ). Cette perspective intéressante fera l'objet d'une future étude.

Dans ce dernier chapitre, je me suis intéressé au décalage en période des modes mixtes à dominance de gravité, noté  $\epsilon_{g,l}$ . J'ai montré en modélisant simplement la variation des fréquences de Brunt-Väisälä et de Lamb dans la cavité interne que ce paramètre est sensible aux propriétés de la structure dans les régions au voisinage des points tournants. Alors que le point tournant au centre n'introduit que des termes de phase constants (imposés par les conditions limites au centre), le point tournant associé à la région évanescente est sensible à la structure de cette zone et au stade évolutif. Ce terme dépend notamment de la largeur de la zone évanescente et du contraste de densité entre le cœur d'hélium et la base de la zone convective, de manière similaire au facteur de couplage. On peut donc s'attendre à ce que l'offset varie avec les changements structuraux subis par l'étoile durant la post-séquence principale. L'observation simultanée de ce paramètre avec le facteur de couplage pourrait donc permettre de contraindre sans ambiguïté les propriétés de la région intermédiaire entre l'enveloppe et le cœur. Des travaux en cours visent à démontrer la possibilité d'une telle perspective.



# Conclusions de la partie III

Dans cette troisième partie, les travaux effectués durant ma thèse au sujet des diagnostics sismiques par les modes mixtes ont été présentés. L’observation des modes mixtes dans les étoiles évoluées a fourni de nombreuses informations sur leur structure interne et leur évolution. Ils ont par exemple permis de sonder directement la rotation moyenne du cœur de ces étoiles et ont ainsi posé de sérieuses contraintes sur la redistribution du moment cinétique dans les intérieurs radiatifs. Ils ont aussi donné la possibilité de suivre le stade évolutif de milliers d’étoiles grâce à la détermination de la paire d’indices sismiques  $\Delta\Pi$  et  $\Delta\nu$ , respectivement sensibles à la densité moyenne du cœur d’hélium et à celle de l’enveloppe. Dans ce deuxième volet de ma thèse, j’ai donc entrepris d’élaborer et de développer de nouveaux diagnostics sismiques par les modes mixtes dans le but de sonder de nouvelles régions et de nouvelles propriétés de la structure interne.

Dans un premier temps, je me suis intéressé au facteur de couplage  $q$  des modes mixtes. Ce paramètre mesure l’interaction entre les oscillations dans la cavité interne et celles dans la cavité externe. Il est physiquement relié au facteur de transmission d’une onde à travers la région évanescente, c’est-à-dire la zone intermédiaire située entre les deux cavités résonantes. Sa détermination permet donc de sonder les propriétés de cette région. La première mesure à grande échelle du facteur de couplage dans quelques milliers d’étoiles évoluées a été réalisée par Mosser, Pinçon, Belkacem *et al.* (2017b). Ces observations montrent que  $q$  varie au cours de l’évolution stellaire et que sa valeur possède une signature claire de la transition entre la branche des sous-géantes et la branche des géantes rouges, ainsi que du début de la fusion de l’hélium dans les couches centrales des étoiles. En effet, ces stades évolutifs sont associés à des valeurs de  $q$  supérieures à  $1/4$ , c’est-à-dire plus élevées que la limite supérieure autorisée dans l’approximation d’un faible couplage. Les observations démontrent donc qu’il est nécessaire de considérer l’hypothèse d’un fort couplage afin de correctement décrire le spectre des modes mixtes. Dans ce travail, j’ai participé à l’interprétation des résultats en utilisant un modèle simple dans lequel la valeur du facteur de couplage est directement reliée à la largeur de la région évanescente et au contraste de densité entre le cœur d’hélium et le voisinage de la base de la zone convective. La relation prend notamment en compte le cas d’un fort couplage suivant la formalisme proposé parallèlement à cette étude par Takata (2016a). Cette relation n’est pas unique et dépend du stade évolutif (i.e., de la valeur de  $\nu_{\max}$ ). La variation observée de  $q$  avec l’évolution a ainsi pu être discutée à la lumière de ce modèle en terme de changement structurel. Il s’avère notamment que les valeurs de  $q$  prédites par l’analyse asymptotique de Takata (2016a) dans l’hypothèse d’un fort couplage sont en bon accord avec les valeurs observées. Néanmoins, la détermination du facteur de couplage ne peut pas à elle seule contraindre avec exactitude les propriétés de la zone évanescente. En effet, la valeur de  $q$  est dégénérée avec la largeur de la zone évanescente et la valeur du contraste de densité entre le cœur d’hélium et le voisinage de la base de la zone convective. Un nouveau diagnostic sismique est donc nécessaire ici pour lever cette dégénérescence. Dans le futur, une étude du facteur de couplage le long de séquences évolutives de modèles stellaires serait intéressante afin de comparer les valeurs estimées numériquement avec les observations, de comprendre en détail l’origine des variations de  $q$  et de les confronter aux prédictions du modèle simplifié présenté dans le Chapitre 9.

Deuxièmement, mon attention s’est portée sur l’analyse asymptotique au premier ordre proposée par Takata (2016a) dans l’hypothèse d’un fort couplage. Alors que ce formalisme permet d’expliquer l’observation de valeurs élevées pour le facteur de couplage, je me suis demandé jusqu’à quel degré

celui-ci est-il capable de prédire les fréquences propres d'oscillation des modes mixtes. J'ai donc entrepris une comparaison de ses prédictions avec celles obtenues avec un code d'oscillation et avec celles obtenues avec la relation de phase dans l'approximation d'un faible couplage suivant Shibahashi (1979). Le but ici étant de tester la relation de phase, j'ai considéré un cas idéal, bien que non réaliste, qui vérifie au mieux les hypothèses utilisées dans sa dérivation. Dans ce cas, j'ai montré que la relation de phase suivant Takata (2016a) doit être corrigée d'un terme de phase constant pour que les fréquences asymptotiques coïncident avec les prédictions du code d'oscillation. Après correction, les fréquences asymptotiques obtenues dans l'hypothèse d'un fort couplage suivant Takata (2016a) s'avèrent en meilleur accord avec les fréquences calculées via le code d'oscillation que ne le sont les fréquences obtenues par le formalisme dans l'approximation d'un faible couplage suivant Shibahashi (1979). Cela s'explique en majeure partie grâce à des valeurs du facteur de couplage plus réalistes dans ce premier cas. La relation de phase permet alors de prédire des fréquences d'oscillation en accord avec le code d'oscillation à mieux que 10% de la valeur de  $\Delta\nu$ . De futures investigations sont nécessaires pour comprendre l'origine du décalage de phase constant existant entre l'analyse asymptotique et le code d'oscillation, ainsi que pour étendre l'étude à des modèles d'étoiles pris dans des conditions d'observation réalistes.

Enfin, je me suis intéressé à un dernier paramètre sismique, le décalage en période des modes mixtes à dominance de gravité, encore appelé *offset* et noté  $\epsilon_g$ . En modélisant la cavité interne de façon simple, j'ai pu relier ce terme aux propriétés des régions au voisinage des points tournants. Dans ce modèle, alors que la contribution à  $\epsilon_g$  du point tournant central se résume à une simple constante, la contribution à  $\epsilon_g$  du point tournant supérieur de la cavité  $G$  dépend du stade évolutif. Dans les étoiles géantes rouges les plus évoluées pour lesquelles le facteur de couplage est faible, cette contribution est négligeable. Au contraire, dans les jeunes géantes rouges et les étoiles du clump, cette contribution dépend principalement de la largeur de la zone évanescente et du contraste de densité entre le cœur d'hélium et la base de la zone convective. De façon similaire au facteur de couplage, on peut donc s'attendre à ce que  $\epsilon_g$  varie au cours de l'évolution stellaire. Néanmoins, sa valeur reste dégénérée avec les propriétés globales de la zone évanescente. L'observation de ce paramètre sismique apparaît donc comme complémentaire de l'observation du facteur de couplage. En effet, la détermination simultanée de ces deux paramètres pourrait permettre de lever la dégénérescence et de contraindre à la fois la largeur de la région évanescente et le contraste de densité entre le cœur et le voisinage de la base de l'enveloppe convective. Ce point devra donc être considéré dans de futurs travaux pour savoir si cette perspective intéressante est possible dans des conditions d'observation réalistes.

Quatrième partie

Synthèse et perspectives



Au cours de ma thèse, j'ai suivi deux principaux axes de travail. Dans un premier volet, je me suis intéressé au problème de l'évolution du moment cinétique dans les étoiles de faible masse, allant de la séquence principale jusqu'au début de la fusion de l'hélium en leur centre. En effet, des observations sismiques ont montré qu'un processus jusque-là toujours inconnu est à l'œuvre sous la surface de ces étoiles et est capable de freiner la rotation de leur cœur radiatif. La rotation est un ingrédient physique important de la structure interne et les incertitudes concernant son évolution se répercutent irrémédiablement sur notre compréhension globale de la vie des étoiles. Dans ce contexte, je me suis focalisé sur le transport de moment cinétique par les ondes internes de gravité, qui font partie des candidats possibles pour expliquer l'écart entre les prédictions théoriques actuelles et les observations. Dans un deuxième volet, je me suis intéressé aux diagnostics sismiques par les modes mixtes. Cette fois-ci, au lieu de considérer les oscillations internes comme un acteur de la dynamique des étoiles, je les ai étudiées comme un vecteur potentiel d'information des intérieurs stellaires. En effet, grâce à l'observation de modes mixtes dans les étoiles évoluées, on est aujourd'hui en mesure de remonter aux propriétés de leurs régions centrales. Ces observations ont notamment fourni de précieuses contraintes sur l'évolution de la rotation moyenne du cœur des étoiles géantes rouges. Ce sont en particulier ces contraintes qui ont motivé le travail de la première partie sur le transport par les ondes internes de gravité. Dans une deuxième partie, j'ai donc entrepris d'élaborer et de développer de nouveaux diagnostics sismiques capables de sonder de nouvelles régions de ces étoiles, comme la zone évanescence, et de toujours mieux contraindre leurs propriétés internes.

## 1 - Transport de moment cinétique par les ondes internes de gravité

Dans une première partie, mes études ont porté sur le transport de moment cinétique par les ondes internes de gravité. Ces ondes se propagent dans les intérieurs radiatifs des étoiles et sont amorties par pertes radiatives. Elles sont donc capables de déposer du moment cinétique dans le milieu ambiant ou d'en extraire, et ainsi de modifier le taux de rotation interne. Néanmoins, l'efficacité du transport par les ondes internes de gravité dépend de l'amplitude de ces dernières.

**Synthèse.** Dans une première étape, j'ai donc été amené à m'intéresser aux mécanismes d'excitation de ces ondes. Celles-ci sont générées par les mouvements convectifs dans les régions à la frontière entre la zone radiative stablement stratifiée et la zone convective. Les simulations numériques de telles régions peuvent être de bons guides mais elles ne permettent pas actuellement d'estimer quantitativement l'énergie transmise sous forme d'ondes à travers la zone radiative. Une approche complémentaire consiste donc à estimer la génération de ces ondes par des modèles semi-analytiques. Les modèles pré-existants considéraient la pression turbulente dans la zone convective comme terme source. Néanmoins, ces ondes peuvent aussi être générées par la pénétration de panaches convectifs à l'interface entre les deux régions. J'ai donc élaboré un modèle d'excitation en considérant cette fois-ci comme terme source la pression dynamique exercée par un ensemble de panaches convectifs incohérents sur le haut de la zone radiative (Pinçon *et al.* 2016). Le profil de vitesse des panaches à la base de la zone convective a été supposé suivre les modèles de Zahn (1991) et Rieutord & Zahn (1995). Le temps de vie ainsi que la longueur de pénétration des panaches sont des paramètres libres du modèle et ont été choisis dans un intervalle de valeurs raisonnables. La région de pénétration a été modélisée et l'influence de la longueur de transition du gradient de température d'une valeur radiative à une valeur adiabatique à la base de la zone convective a aussi été prise en compte sur la transmission des ondes vers la zone radiative. Des calculs dans le cas solaire ont alors démontré que le flux total d'énergie d'ondes généré par la pénétration convective est cinq à dix fois supérieur à celui généré par la pression turbulente selon le formalisme de Kumar *et al.* (1999). De plus, la forme du spectre d'énergie est différente selon le mécanisme d'excitation considéré. Les ondes sont en particulier préférentiellement excitées à des plus hauts degrés angulaires par la pénétration convective que par la pression turbulente, du fait d'une lar-



geur des panaches plus petite que la taille caractéristique des tourbillons convectifs à la base de la zone convective. Enfin, il a été mis en évidence que plus la transition du gradient de température est douce à la base de la zone convective, plus le flux d'énergie total émis sous forme d'ondes est important.

Dans une deuxième étape, j'ai alors été en mesure d'estimer l'efficacité du transport de moment cinétique par les ondes internes de gravité en prenant en compte l'excitation par la pénétration convective (Pinçon *et al.* 2017). L'étude effectuée s'est basée sur la comparaison du temps caractéristique associé aux transport par les ondes avec l'échelle de temps d'évolution dans des modèles d'étoiles de type solaire à un stade évolutif donné. Une telle approche m'a alors permis d'obtenir une première estimation de l'efficacité du transport par ces ondes depuis la séquence principale jusqu'à la branche des géantes rouges. D'abord, dans le Soleil, les ondes générées par la pénétration convective sont capables, par elles-mêmes, de modifier le profil de rotation dans la zone radiative sur un temps caractéristique inférieur à la fois à celui associé au transport par les ondes générées par la pression turbulente et au temps de vie de l'étoile sur la séquence principale. Ce processus d'excitation est efficace et doit donc être considéré dans les étoiles de la séquence principale. Dans les étoiles sous-géantes et jeunes géantes rouges, l'étude montre que les ondes internes de gravité générées par la pénétration convective sont aussi capables de contrebalancer l'accélération des couches centrales due à leur contraction, et ce plus efficacement que les ondes générées par la pression turbulente selon le formalisme de Kumar *et al.* (1999). En effet, ces ondes deviennent assez efficaces pour ralentir la rotation interne lorsque le taux de rotation différentielle entre le centre et la base de la zone convective dépasse une certaine valeur seuil. Cette valeur seuil théorique est en bon accord avec les observations sismiques dans les étoiles sous-géantes et jeunes géantes rouges. Ces similitudes m'ont alors mené à l'idée que les observations peuvent résulter d'un processus de régulation de la rotation interne contrôlé par les ondes internes de gravité qui sont induites par la pénétration convective. Dans ce mécanisme, l'effet de la contraction des couches internes (menant à une augmentation de la rotation) et celui du transport par les ondes (menant à un ralentissement de la rotation) restent en équilibre de telle façon que la rotation différentielle conserve une valeur autour du seuil, d'où l'accord avec les observations. Au contraire, il s'avère que les ondes internes de gravité dans les étoiles géantes rouges évoluées sont incapables, par elles-mêmes, de ralentir l'augmentation de la rotation de leurs régions centrales sous l'effet de leur contraction et donc d'expliquer les observations sismiques. Cela est vrai quel que soit le mécanisme d'excitation et est en accord avec le travail de Fuller *et al.* (2014) concernant les ondes induites par la pression turbulente. Un autre processus d'extraction de moment cinétique doit donc être invoqué dans ces étoiles. L'efficacité du transport par les ondes internes de gravité dans les couches centrales diminue donc avec le temps. Cela est lié à l'évolution de la structure interne et particulièrement à l'augmentation de l'amortissement radiatif avec l'âge des étoiles. Tous les résultats obtenus restent valables malgré le large intervalle de valeurs considéré pour les paramètres du modèle.

**Perspectives.** Les résultats obtenus durant ma thèse montrent donc que les ondes internes de gravité générées par la pénétration convective sont un ingrédient important capables de profondément modifier le profil de rotation interne des étoiles de faible masse. Ils appellent donc à de futures investigations. La première étape consistera à implémenter le modèle d'excitation par la pénétration convective ainsi que le transport par ces ondes dans un code d'évolution stellaire. Cela permettra de suivre l'évolution de la rotation interne le long de la vie des étoiles sous l'effet des ondes internes de gravité, des autres processus de transport (e.g., circulation méridienne, turbulence) et de leur interaction mutuelle. Cela nécessitera notamment d'utiliser une méthode de résolution numérique adaptée, comme par exemple un intégrateur "multi-temps", permettant de prendre proprement en compte à la fois le transport de moment cinétique, qui est associé à des échelles de temps pouvant descendre localement jusqu'à des valeurs de l'ordre de quelques dizaines d'années (e.g., la *SLO* à la base de la zone convective), et l'évolution stellaire, qui, elle, est associée à des échelles de temps beaucoup plus grandes et supérieures à la dizaine de millions d'années. Une telle étude donnera

notamment la possibilité d'évaluer la pertinence du mécanisme de régulation qui a été proposé pour les étoiles sous-géantes et jeunes géantes rouges.

A plus long terme, il sera nécessaire d'améliorer la description de l'excitation des ondes par les panaches convectifs, ainsi que de leur propagation dans la zone radiative des étoiles. D'une part, le modèle de panaches convectifs devra aller plus loin que la description proposée par Rieutord & Zahn (1995). L'hypothèse plan-parallèle n'est par exemple plus justifiée dans les étoiles évoluées pour lesquelles la zone convective est très étendue. L'effet de la sphéricité sur les caractéristiques des panaches devra donc être quantifié en s'inspirant par exemple du travail de Lo & Schatzman (1997) dans le cas des cœurs convectifs. L'influence du flot montant sur les propriétés des panaches devra aussi être prise en compte. En effet, alors que les panaches forment de forts courants structurés descendant à travers la zone convective, des courants ascendants à vitesse plus faible peuplent le milieu intermédiaire (par conservation de la matière). Ceux-ci peuvent interagir avec les panaches en échangeant de la quantité de mouvement. Ces échanges ont un impact sur la vitesse et la largeur des panaches à la base de la zone convective, ainsi que sur la structure de la région de pénétration (extension, forme de la transition thermique). Des modèles semi-analytiques plus sophistiqués, tels que le modèle proposé par Rempel (2004), permettraient donc de traiter simultanément le développement des panaches à travers la zone convective et le processus de pénétration convective. Les caractéristiques des panaches à la base de la zone convective et celles de la zone de pénétration sont dépendantes les-unes des autres et pourraient ainsi être obtenues de façon auto-cohérente. Le profil de la fréquence de Brunt-Väisälä à la base de la zone convective serait aussi fourni par un tel modèle et éviterait l'introduction d'un paramètre libre associé à son gradient dans cette région. Enfin, parmi les autres caractéristiques associées au mécanisme d'excitation, le temps de vie des panaches semble le plus difficile à contraindre et reste à l'heure actuelle peu étudié. Son impact s'avère cependant important sur le transport de moment cinétique par les ondes internes de gravité. Les mécanismes œuvrant à la déstructuration des panaches sont à ma connaissance toujours inconnus (instabilités, turbulence, déstructuration du lieu de formation d'un panache à la surface de l'étoile...?). L'élaboration de modèles semi-analytiques simples traitant du problème serait donc utile. La tâche semble néanmoins complexe puisqu'il s'agirait de considérer l'évolution d'un panache depuis sa formation dans les régions superficielles très turbulentes où les pertes par rayonnement dominant jusqu'à sa pénétration dans les couches sous-jacentes à la base de la zone convective. Dans ce contexte, des simulations numériques avec des nombres caractéristiques sans dimension à partir desquels il serait possible d'extrapoler vers des régimes stellaires pourraient aider à contraindre les propriétés des panaches et de la région de pénétration. A partir de lois d'échelle, les résultats des simulations numériques seraient facilement applicables dans un code d'évolution stellaire. La complémentarité entre simulations numériques et modèles semi-analytiques représente donc pour le futur un moyen d'étude intéressant de l'excitation des ondes par la pénétration convective.

D'autre part, la modélisation de la propagation des ondes à travers la zone radiative nécessitera elle aussi d'aller au-delà des simplifications utilisées dans le travail effectué durant cette thèse. Le traitement des régions autour des couches critiques (i.e., où la fréquence intrinsèque de l'onde tend vers zéro) devra être amélioré. Dans ces régions, des instabilités de cisaillement peuvent générer de la turbulence. Le couplage entre les ondes et la turbulence peut alors résulter en des phénomènes de sur-transmission ou sur-réflexion des ondes incidentes près de la couche critique considérée. Le travail exhaustif de Alvan *et al.* (2013) pourra dans le futur être utilisé pour prendre proprement en compte l'effet de ces couches critiques le long de l'évolution stellaire et comprendre leur impact sur le transport de moment cinétique. De plus, près de ces couches critiques, la période d'oscillation devient du même ordre de grandeur ou plus grande que l'échelle de temps caractéristique d'amortissement radiatif des ondes. L'approximation quasi-adiabatique utilisée pour dériver les expressions usuelles données par Press (1981) et Zahn *et al.* (1997) n'est donc plus valide. De plus amples investigations sont donc nécessaires pour comprendre comment est modifiée l'expression du taux d'amortissement dans ce cas et quelles sont les conséquences sur le transport de moment cinétique. Par exemple, on pourrait reprendre l'analyse locale donnée par Press (1981) en relaxant

l’hypothèse quasi-adiabatique, c’est-à-dire en résolvant numériquement l’équation du second degré donnée dans Eq. (5.84). Enfin, la modélisation de la propagation des ondes à travers la zone radiative devra prendre en compte l’effet de la rotation et de son gradient (e.g., Pantillon *et al.* 2007; Mathis 2009). La rotation peut notamment modifier la cavité de propagation des ondes internes, leur amortissement, voire même leur excitation à la base de la zone convective. De futurs efforts sont nécessaires pour adapter le formalisme utilisé dans mon travail de thèse au cas où la rotation ne peut plus être négligée, c’est-à-dire pour les ondes dont la fréquence intrinsèque est inférieure à deux fois la valeur du taux de rotation local, et comprendre ses conséquences sur les résultats obtenus. L’effet de la rotation sur l’amortissement ou l’excitation des ondes pourrait localement être inclus en s’aidant par exemple des travaux de Mathis *et al.* (2014). Son impact sur la propagation des ondes dans la zone radiative pourrait aussi être pris en compte en invoquant l’approximation traditionnelle (e.g., Lee & Saio 1997).

## 2 - Diagnostics sismiques par les modes mixtes

Dans une deuxième partie, je me suis intéressé aux diagnostics sismiques par les modes mixtes. Les modes mixtes sont des ondes stationnaires qui s’établissent dans deux cavités résonantes, l’une située dans le cœur des étoiles, l’autre dans l’enveloppe, et qui sont reliées par une zone intermédiaire dite *évanescence*. L’observation de ces modes en surface des étoiles géantes rouges a permis de remonter aux propriétés des régions centrales, comme leur rotation moyenne ou la densité moyenne du cœur d’hélium, qui restent inaccessibles en temps normal avec les observables classiques. Parmi les paramètres sismiques caractérisant les modes mixtes, le facteur de couplage  $q$  et le décalage en période  $\epsilon_g$  n’ont jusqu’ici été que peu étudiés. Dans ce deuxième volet de ma thèse, je me suis donc intéressé à ces deux paramètres en cherchant à comprendre le lien entre leur valeur et les propriétés des régions internes qu’ils sondent.

**Synthèse.** Alors que les paramètres sismiques usuels  $\Delta\nu$  et  $\Delta\Pi$  sont respectivement sensibles à la densité moyenne de l’enveloppe et celle du cœur d’hélium, la valeur du facteur de couplage est sensible aux propriétés de la région évanescence. Les observations à grande échelle par Mosser, Pinçon, Belkacem *et al.* (2017) montrent que la valeur de  $q$  varie au cours de l’évolution entre la branche des étoiles sous-géantes et le red clump. Les observations montrent de plus sans ambiguïté la nécessité d’aller au-delà de l’approximation d’un faible couplage utilisée dans le formalisme de Shibahashi (1979) avec des valeurs de  $q$  élevées dans les étoiles à la transition entre les branches des sous-géantes et des géantes rouges, et les étoiles ayant commencé la fusion de l’hélium dans leur cœur. Dans une première étape, j’ai participé à l’interprétation de ces observations en utilisant une modélisation simplifiée de la zone évanescence et en prenant en compte le cas d’un fort couplage suivant le formalisme de Takata (2016a). Ce modèle montre que  $q$  est à la fois sensible à la largeur de la zone évanescence (représentée par le paramètre  $\alpha$ ) et au contraste de densité entre le cœur d’hélium et la base de la zone convective (représenté par le paramètre  $\beta$ ). Les variations du facteur de couplage au cours de l’évolution peuvent donc s’interpréter en terme de changements structurels associés à cette région. Il ressort de cette étude que la valeur de  $q$  est dégénérée avec la paire de paramètres  $(\alpha, \beta)$ . Il n’est donc pas possible de remonter directement à la structure de la zone évanescence avec la seule donnée du facteur de couplage. D’autres contraintes observationnelles sont nécessaires pour définitivement conclure. Néanmoins, les valeurs de  $q$  observées et celles estimées dans quelques modèles stellaires en utilisant le formalisme proposé par Takata (2016a) dans le cas d’un fort couplage s’avèrent en bon accord. Dans une deuxième étape, je me suis donc demandé jusqu’à quel degré ce formalisme permet de prédire les fréquences propres d’oscillation des modes mixtes. J’ai donc entrepris une comparaison de ses prédictions avec celles obtenues via un code d’oscillation. En me plaçant dans un cas idéal où les hypothèses utilisées pour dériver l’expression asymptotique des modes mixtes dans le cas d’un fort couplage sont respectées, j’ai mis en évidence

l'existence un décalage constant entre les deux jeux de fréquences sans avoir pu encore trouver son origine (traitement au centre, défaut de la méthode utilisée, problème dans le code d'oscillation). Après correction de ce décalage, le formalisme de Takata (2016a) prédit dans le cas idéal des fréquences propres avec un écart inférieur à 10% de la valeur de la grande séparation par rapport au code d'oscillation. Ses prédictions sont notamment meilleures que celles obtenues avec le formalisme proposé par Shibahashi (1979), en particulier grâce à une estimation plus réaliste du facteur de couplage. Ces résultats sont encourageants et appellent à une nouvelle étude dans un cas réaliste qui respecte les conditions d'observation. Pour finir, je me suis intéressé au décalage en période des modes mixtes  $\epsilon_g$ . Ce paramètre sismique de l'ordre de l'unité dépend des propriétés des points tournants de la cavité interne. En utilisant une modélisation simple similaire à celle invoquée dans l'étude sur le facteur de couplage, j'ai montré que ce paramètre est sensible à la largeur de la zone évanescente et au contraste de densité entre le cœur d'hélium et la base de la zone convective (i.e., les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  précédents). Comme le facteur de couplage, ce paramètre doit donc varier au cours de l'évolution, mais sa valeur reste dégénérée avec le couple de paramètres  $(\alpha, \beta)$ . Ce résultat théorique nous laisse ainsi envisager la possibilité d'utiliser la détermination simultanée de  $q$  et de  $\epsilon_g$  pour remonter sans ambiguïté aux propriétés de la zone évanescente (i.e.,  $\alpha$  et  $\beta$ ).

**Perspectives.** Les paramètres  $q$  et  $\epsilon_g$  ont donc le potentiel de nous apporter des contraintes sur la région évanescente intermédiaire. La plupart des résultats obtenus sont néanmoins préliminaires et le fruit de travaux toujours en cours. Dans un futur proche, l'étude observationnelle du facteur de couplage par Mosser *et al.* (2017b) appelle à une étude théorique plus détaillée par le biais de séquences de modèles d'étoiles évoluées. Le suivi de  $q$  sur ces séquences permettra de comprendre l'origine physique des variations de sa valeur au cours de l'évolution, de confronter la théorie aux observations et de mettre en évidence le lien entre la valeur de  $q$  et les propriétés internes des étoiles, voire pourquoi pas l'existence de nouvelles relations d'échelle. On pourrait aussi par exemple utiliser les valeurs obtenues avec les modèles stellaires pour faire des mesures à grand échelle de  $\epsilon_g$  en ne considérant plus  $q$  comme un paramètre libre. Concernant la comparaison entre le formalisme asymptotique dans l'hypothèse d'un fort couplage de Takata (2016a) et les fréquences obtenues avec un code d'oscillation, la suite de l'étude devra confirmer ou non les résultats obtenus dans un cas idéal non-réaliste et chercher à comprendre les différences observées entre les deux, avec en particulier le décalage systématique de la période des modes à dominance de gravité. La comparaison devra aussi être étendue à des conditions d'observation réalistes afin d'évaluer l'applicabilité de cette formulation théorique dans la pratique. Enfin, la possibilité d'utiliser la détermination simultanée de  $q$  et  $\epsilon_g$  pour contraindre directement les propriétés de la zone évanescente sera étudiée plus en détails. Cela pourra passer soit par l'utilisation de modèles simplifiés semi-analytiques, soit via l'utilisation de séquences évolutives couplées à un code d'oscillation. A plus long terme, il serait aussi intéressant de dériver une expression de la relation de phase des modes mixtes sans imposer d'hypothèses particulières sur la force du couplage, comme par exemple avec un modèle simplifié permettant de résoudre les équations d'oscillation de façon analytique. Cela permettrait entre autre de tester les prédictions obtenues dans l'hypothèse d'un faible ou d'un fort couplage (Shibahashi 1979; Takata 2016a) et de comprendre le comportement du facteur  $q$  à la transition entre les deux régimes (i.e., dans le cas d'un couplage intermédiaire). En outre, des questions peuvent aussi se poser sur la validité de l'analyse asymptotique dans la région évanescente pour des modes de bas degrés angulaires. En effet, la longueur caractéristique d'évanescence est localement égale à environ  $r/\sqrt{l(l+1)}$ , avec  $l$  le degré angulaire, et ne peut plus être considérée comme très petite par rapport aux échelles caractéristiques de variation des quantités à l'équilibre (de l'ordre de  $r$  ou inférieure). Ce point mérite donc à mon avis de futures investigations, qui pourraient encore passées par exemple par l'utilisation d'une modélisation simple de la zone évanescente et/ou d'un code d'oscillation. Pour finir, mes futurs travaux sur les diagnostics sismiques pourront encore s'étendre sur l'étude des glitches ou des visibilités des modes mixtes (i.e., leur amplitude) dans les étoiles géantes rouges. D'abord, la formulation physique des glitches donnée dans la Section 2.4.2 pourrait être utile pour

prédire la signature des localités à fort gradient dans le spectre des modes mixtes. Il suffirait alors de généraliser l'expression obtenue dans le cas de deux cavités résonantes au cas de plusieurs cavités résonantes couplées entre elles (au moins trois, dont deux séparées par la zone évanescente) en suivant une méthode similaire à la Section 2.4.2. Cette expression serait alors facilement applicable à différentes situations, comme par exemple dans le cas d'une variation rapide de la fréquence de Brunt-Väisälä due à un fort gradient de composition chimique (e.g., Miglio *et al.* 2008; Cunha *et al.* 2015). L'apport d'une telle formulation par rapport aux expressions habituelles pourra entre autre être testé. Enfin, la mesure observationnelle des visibilitées des modes mixtes autorise aussi à sonder les processus d'excitation ou d'amortissement des oscillations. Les visibilitées observées dans des milliers de géantes rouges présentent notamment des caractéristiques toujours inexplicables théoriquement (e.g., Mosser *et al.* 2012a, 2017b). Premièrement, les observations montrent que la visibilité totale de l'ensemble des modes mixtes autour d'un mode à dominance de pression se répartit en moyenne autour de l'unité avec une certaine dispersion supérieure aux barres d'erreur. Cette dispersion reste à comprendre et pourrait éventuellement fournir des informations supplémentaires sur l'établissement des modes d'oscillation. Deuxièmement, un certain type d'étoiles moins nombreuses possèdent des modes d'oscillation dipolaires avec des amplitudes anormalement basses par rapport à la moyenne, et plus communément dits *déprimés*. Fuller *et al.* (2015) ont proposé une tentative d'explication qui attribue l'origine des modes *déprimés* à la présence de forts champs magnétiques dans le cœur de ces étoiles. Mosser, Belkacem, Pinçon *et al.* (2017b) ont consécutivement démontré que le mécanisme proposé est en désaccord avec les observations dans ces étoiles (voir l'Annexe C pour les détails). L'origine de la *dépression* des modes mixtes reste donc toujours actuellement une question ouverte. Des études devront être menées afin de comprendre si ces caractéristiques particulières proviennent d'une différence d'excitation, d'amortissement ou de structure. Cela devra passer par l'élaboration de diagnostics sismiques appropriés qui permettront de tester différentes hypothèses.

### 3 - Une étape parmi d'autres vers de futures projets...

Le travail effectué durant ma thèse s'inscrit à la fois dans l'étude des étoiles *per se*, mais aussi dans des projets en cours d'élaboration autour de l'étude des systèmes exoplanétaires et de l'archéologie galactique. En effet, que ce soit dans un système planétaire ou dans une galaxie, les étoiles possèdent une place importante. Une bonne caractérisation du système étudié nécessite donc de bien connaître les propriétés des étoiles qui en sont membres. La synergie entre l'un ou l'autre de ces domaines de recherche et l'astérosismologie permettra un tel accomplissement. Cette synergie est notamment portée par la mission spatiale en cours d'opération GAIA et la future mission spatiale récemment sélectionnée PLATO. Une bonne caractérisation à la fois précise et pertinente des étoiles observées (masse, rayon, âge...) passe à la fois par le développement de diagnostics sismiques nombreux et robustes ainsi que par une modélisation réaliste de la vie des étoiles et de leur rotation. Les études menées durant ma thèse ont été motivées par de tels besoins et pourront à terme, j'espère, participer à atteindre ces objectifs.

## Annexe A

# Dérivation de l'intégrale première pour les modes dipolaires

D'après Eqs. (8.22), (8.25), (8.26) et (8.27), les modes dipolaires vérifient l'égalité

$$\mathcal{I} = -\vec{e}_z \cdot \left( \int_{S_r} \bar{\bar{\Pi}} d\vec{S} \right) = -\sigma^2 \vec{e}_z \cdot \left( \int_{V_r} \rho \vec{\xi} dV \right), \quad (\text{A.1})$$

où

$$\bar{\bar{\Pi}} = p' \bar{I} + \frac{1}{4\pi G} \left( \vec{\nabla} \Psi' \otimes \vec{\nabla} \Psi + \vec{\nabla} \Psi \otimes \vec{\nabla} \Psi' - \vec{\nabla} \Psi' \cdot \vec{\nabla} \Psi \bar{I} \right), \quad (\text{A.2})$$

et  $\mathcal{I}$  est la dérivée par rapport au temps de la quantité de mouvement d'une sphère concentrique de volume  $V_r$  et de surface  $S_r$ . Les prochains calculs consistent donc à d'exprimer les deux membres de cette équation.

**Membre de gauche.** En utilisant Eq. (A.2),  $d\vec{S} = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \vec{e}_r$  et le fait que le champ gravitationnel à l'équilibre  $\vec{g} = \vec{\nabla} \Psi$  est radial et dépend uniquement du rayon, le membre de gauche de Eq. (A.1) est égal à

$$\mathcal{I} = -\vec{e}_z \cdot \int_{S_r} \left( \left[ p' + \frac{g}{4\pi} \frac{d\Psi'}{dr} \right] \vec{e}_r + \frac{g}{4\pi r} \frac{d\Psi'}{d\theta} \vec{e}_\theta \right) r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \quad (\text{A.3})$$

$$= \int_{S_r} \left( - \left[ p' + \frac{g}{4\pi} \frac{d\Psi'}{dr} \right] \cos \theta + \frac{g}{4\pi r} \frac{d\Psi'}{d\theta} \sin \theta \right) r^2 \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (\text{A.4})$$

Dans le cas d'un mode de degré angulaire  $l = 1$  et de nombre azimutal  $m = 0$ , les perturbations Eulériennes prennent la forme suivante

$$p' = \tilde{p}(r) Y_1^0(\theta) \quad ; \quad \Psi' = \tilde{\Psi}(r) Y_1^0(\theta) \quad ; \quad \xi_r = \tilde{\xi}_r(r) Y_1^0(\theta). \quad (\text{A.5})$$

L'intégrale Eq. (A.4) aboutit alors

$$\mathcal{I} = -\sqrt{\frac{4\pi}{3}} r^2 \left[ \tilde{p} + \frac{g}{4\pi} \left( \frac{d\tilde{\Psi}}{dr} + \frac{2}{r} \tilde{\Psi} \right) \right]. \quad (\text{A.6})$$

**Membre de droite.** Le calcul du membre de droite nécessite de connaître une expression du vecteur déplacement  $\vec{\xi}$ . Il est utile de remarquer d'après l'équation de continuité donnée par Eq. (8.18) que l'on peut écrire

$$\rho \vec{\xi} + \frac{\vec{\nabla} \Psi'}{4\pi G} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}, \quad (\text{A.7})$$

où  $\vec{A}$  est un potentiel vecteur à choisir tel que Eq. (A.7) soit satisfaite. Takata (2005) propose alors

$$\vec{A} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{4\pi}} r \sin \theta \left( \rho \tilde{\xi}_r + \frac{1}{4\pi G} \frac{d\tilde{\Psi}}{dr} \right) \vec{e}_\varphi = A_\varphi \vec{e}_\varphi , \quad (\text{A.8})$$

qui vérifie bien

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \left( \rho \tilde{\xi}_r + \frac{1}{4\pi G} \frac{d\tilde{\Psi}}{dr} \right) \times \begin{pmatrix} \cos \theta \\ -\sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} . \quad (\text{A.9})$$

Suivant la coordonnée latitudinale, l'égalité Eq. (A.7) est assurée en se rappelant de la décomposition de la composante horizontale du déplacement sur la base poloïdale des harmoniques sphériques. On trouve identiquement 0 suivant la coordonnée longitudinale car par symétrie autour de l'axe  $O\vec{e}_z$  avec  $m = 0$ , on a bien  $\xi_\varphi = 0$ . Le membre de droite de Eq. (A.1) peut alors écrire

$$\mathcal{I} = -\sigma^2 \int_{V_r} \vec{e}_z \cdot \left( \vec{\nabla} \wedge \vec{A} - \frac{\vec{\nabla} \Psi'}{4\pi G} \right) dV . \quad (\text{A.10})$$

Pour aller plus loin, il suffit d'utiliser la relation

$$(\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) \cdot \vec{e}_z = \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{e}_z) + \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{e}_z) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{e}_z) , \quad (\text{A.11})$$

telle que Eq. (A.10) devienne par le théorème de Green-Ostrogradski

$$\mathcal{I} = -\sigma^2 \int_{V_r} \vec{\nabla} \cdot \left( \vec{A} \wedge \vec{e}_z - \frac{\Psi'}{4\pi G} \vec{e}_z \right) dV \quad (\text{A.12})$$

$$= -\sigma^2 \int_{S_r} \left( \vec{A} \cdot [\vec{e}_z \wedge \vec{e}_r] - \frac{\Psi'}{4\pi G} \vec{e}_z \cdot \vec{e}_r \right) r^2 \sin \theta d\theta d\Psi \quad (\text{A.13})$$

$$= -\sigma^2 \int_{S_r} \left( A_\varphi \sin \theta - \frac{\Psi'}{4\pi G} \cos \theta \right) r^2 \sin \theta d\theta d\Psi . \quad (\text{A.14})$$

Après intégration, on trouve donc finalement

$$\mathcal{I} = -\sigma^2 \sqrt{\frac{4\pi}{3}} r^3 \left[ \rho \tilde{\xi}_r + \frac{1}{4\pi G} \left( \frac{d\tilde{\Psi}}{dr} - \frac{\tilde{\Psi}}{r} \right) \right] \quad (\text{A.15})$$

**Finalement...** En utilisant Eq. (A.1), Eq. (A.6) et Eq. (A.15), on obtient une intégrale première pour les modes dipolaires qui relie la perturbation de pression, le déplacement radial et la perturbation du potentiel gravitationnel par l'égalité

$$\tilde{p} + \frac{g}{4\pi} \left( \frac{d\tilde{\Psi}}{dr} + \frac{2}{r} \tilde{\Psi} \right) = \sigma^2 r \left[ \rho \tilde{\xi}_r + \frac{1}{4\pi G} \left( \frac{d\tilde{\Psi}}{dr} - \frac{\tilde{\Psi}}{r} \right) \right] . \quad (\text{A.16})$$

## Annexe B

# Équations du second ordre pour les modes dipolaires

Les équations d'oscillation linéaire adiabatique sont usuellement écrites en fonction des quatre variables dépendantes sans dimension  $y_1$ ,  $y_2$ ,  $y_3$  and  $y_4$ , définies dans Unno *et al.* (1989) par

$$y_1 = \frac{\tilde{\xi}_r}{r} \tag{B.1}$$

$$y_2 = \frac{1}{gr} \left( \frac{\tilde{p}}{\rho} + \tilde{\Psi} \right) \tag{B.2}$$

$$y_3 = \frac{1}{gr} \tilde{\Psi} \tag{B.3}$$

$$y_4 = \frac{1}{g} \frac{d\tilde{\Psi}}{dr} . \tag{B.4}$$

Takata (2006a) a alors pu réduire le système d'équations différentielles d'ordre quatre prenant en compte la perturbation du potentiel gravitationnel à un système différentiel d'ordre deux en réécrivant les équations en fonction des deux nouvelles variables dépendantes  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$  telles que

$$\mathcal{P} = \tilde{u}P_1 = \frac{\tilde{u}}{3} \left( Up_1 + (3 - U)q_1 + q_2 \right) \tag{B.5}$$

$$= \frac{\tilde{u}f}{3} \left( (3 - U)y_1 + y_3 - y_4 \right) \tag{B.6}$$

$$\mathcal{Q} = \frac{Q_1}{\tilde{u}} = \frac{1}{\tilde{u}} \left( -p_1 - \frac{U}{3 - U}p_2 + \frac{2 - U}{3 - U}q_2 \right) \tag{B.7}$$

$$= -\frac{f}{\tilde{u}} \left( y_2 - y_3 + \frac{1}{3 - U}(y_3 - y_4) \right) , \tag{B.8}$$



avec

$$q_1 = f y_1 ; p_1 = f y_2 ; q_2 = f y_3 ; p_2 = -\frac{f}{U} y_4 \quad (\text{B.9})$$

$$x = r/R_\star \quad (\text{B.10})$$

$$f = \frac{\sqrt{x^5 U}}{c_1} \quad (\text{B.11})$$

$$U = \frac{4\pi\rho r^3}{m} \quad (\text{B.12})$$

$$c_1 = \frac{x^3}{m/M_\star} \quad (\text{B.13})$$

$$\tilde{u}(x) = \sqrt{\frac{x^3}{U}} c_1^{2/3} \exp\left(-\int_{x_0}^x \frac{3V_g}{3-U} \frac{ds}{s}\right) \quad (\text{B.14})$$

$$V_g = \frac{gr}{c^2} , \quad (\text{B.15})$$

où  $x_0$  est une constante prise entre 0 et 1. Suivant toujours Takata (2006a, Eqs. A40 - A41),  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$  sont donc solutions du système du second ordre

$$\frac{d\mathcal{P}}{dx} = \frac{R_\star g \tilde{u}^2}{c^2} \left(1 - \frac{S_l^2 J^2}{\sigma^2}\right) \mathcal{Q} \quad (\text{B.16})$$

$$\frac{d\mathcal{Q}}{dx} = -\frac{R_\star}{g \tilde{u}^2} \left(\sigma^2 - \frac{N^2}{J^2}\right) \mathcal{P} , \quad (\text{B.17})$$

avec  $\sigma$  la pulsation d'oscillation et le facteur  $J$  défini comme

$$J = 1 - \frac{U}{3} . \quad (\text{B.18})$$

En définissant les nouvelles variables dépendantes telles que  $\mathcal{Y}_1 = \mathcal{P}$  and  $\mathcal{Y}_2 = -\mathcal{Q}$ , Eqs. (B.16) et (B.17) deviennent

$$\frac{d\mathcal{Y}_1}{dr} = \mathcal{Q}_1 \mathcal{Y}_2 \quad (\text{B.19})$$

$$\frac{d\mathcal{Y}_2}{dr} = \mathcal{Q}_2 \mathcal{Y}_1 , \quad (\text{B.20})$$

avec

$$\mathcal{Q}_1 = \frac{r^2 \mathcal{H}^2}{c^2} \left(\frac{S_l^2 J^2}{\sigma^2} - 1\right) \quad (\text{B.21})$$

$$\mathcal{Q}_2 = \frac{1}{r^2 \mathcal{H}^2} \left(\sigma^2 - \frac{N^2}{J^2}\right) \quad (\text{B.22})$$

$$\mathcal{H} = \frac{g^{1/2}}{r} \tilde{u} = \sqrt{\frac{GM_\star}{R_\star^4}} \sqrt{\frac{M_\star}{4\pi\rho R_\star^3}} \left(\frac{m}{M_\star}\right)^{-1/6} \exp\left(-\int_{r_0}^r \frac{g}{Jc^2} dr\right) , \quad (\text{B.23})$$

c'est-à-dire avec une forme similaire à Eqs. (2.40)-(2.44) dans l'approximation de Cowling. Pour continuer, on procède de la même manière que Unno *et al.* (1989). On définit  $\mathcal{W}$  et  $\mathcal{V}$  telles que

$$\mathcal{Y}_1 = |\mathcal{Q}_1|^{1/2} \mathcal{V} \quad ; \quad \mathcal{Y}_2 = |\mathcal{Q}_2|^{1/2} \mathcal{W} , \quad (\text{B.24})$$

de telle façon que Eqs. (B.19) et (B.20) puissent se réécrire

$$\frac{d^2 \mathcal{V}}{dr^2} + \left[\tilde{k}_r^2 - f(\mathcal{Q}_1)\right] \mathcal{V} = 0 \quad \text{si } \mathcal{Q}_1 \neq 0 \quad (\text{B.25})$$

$$\frac{d^2 \mathcal{W}}{dr^2} + \left[\tilde{k}_r^2 - f(\mathcal{Q}_2)\right] \mathcal{W} = 0 \quad \text{si } \mathcal{Q}_2 \neq 0 , \quad (\text{B.26})$$

où

$$\tilde{k}_r^2 = -\mathcal{Q}_1 \mathcal{Q}_2 = \frac{\sigma^2}{c^2} \left( \frac{N^2}{J^2 \sigma^2} - 1 \right) \left( \frac{S_l^2 J^2}{\sigma^2} - 1 \right) \quad (\text{B.27})$$

$$f(\mathcal{Q}) = |\mathcal{Q}|^{1/2} \frac{d^2 |\mathcal{Q}|^{-1/2}}{dr^2} , \quad (\text{B.28})$$

c'est-à-dire une forme toujours similaire à Eqs. (2.47)-(2.50).



## Annexe C

# Contribution sur les modes mixtes déprimés dans les géantes rouges

Les modes d'oscillation dipolaires sont dits *déprimés* si le rapport de leur amplitude (en déplacement ou en vitesse) sur celle du mode radial le plus proche est anormalement bas. Ce type de modes a été observé dans environ un millier d'étoiles géantes rouges parmi la dizaine de milliers observée au total par le satellite *Kepler* (e.g., Mosser *et al.* 2012a, 2017a). L'amplitude moyenne d'un mode excité par la convection stochastique résulte d'un équilibre entre la puissance injectée dans les oscillations et leur amortissement dans les couches superficielles des étoiles (Samadi *et al.* 2015). Dans le cas des modes de pression purs, les fonctions propres des modes radiaux et des modes dipolaires avec des fréquences proches sont similaires dans cette région. Les deux sont donc excités et amortis de manière identique dans les couches superficielles. Ainsi, dans le cas *normal*, le rapport de leurs amplitudes demeure proche de l'unité (e.g., Belkacem *et al.* 2008). En contrepartie, les amplitudes *anormales* observées dans les géantes rouges doivent trouver leur origine dans une différence d'excitation ou d'amortissement entre les modes radiaux et dipolaires. Dans le cas d'un ensemble de modes mixtes localisés autour d'un mode radial donné, les conclusions restent similaires en prenant garde à prendre aussi en compte le rapport des inerties (e.g., Grosjean *et al.* 2014; Mosser *et al.* 2017a).

Une explication possible à la *dépression* des modes dipolaires peut donc provenir d'un processus d'amortissement additionnel à l'œuvre dans le cœur radiatif de ces étoiles. Encore faut-il trouver un mécanisme physique qui en est capable. Dans ce contexte, Fuller *et al.* (2015) ont supposé que la perte d'énergie des modes déprimés est due à la présence d'un fort champ magnétique dans les régions centrales des étoiles évoluées. Le scénario est le suivant. Des ondes acoustiques sont excitées par la turbulence dans l'enveloppe convective. Une partie de leur énergie est piégée dans l'enveloppe, c'est-à-dire entre le profil de la fréquence de Lamb et la surface, tandis qu'une autre partie de leur énergie est transmise à travers la zone évanescente vers la cavité radiative sous forme d'ondes de gravité. Fuller *et al.* (2015) ont alors fait l'hypothèse qu'un champ magnétique non-symétrique et assez fort dans la zone radiative est capable de modifier le comportement des ondes incidentes et de disperser leur énergie vers des degrés angulaires  $l$  plus élevés. Ainsi, seule une infime partie de cette énergie peut retourner dans l'enveloppe (après réflexion dans le cœur) puisque le coefficient de transmission à travers la zone évanescente diminue rapidement avec le degré angulaire. L'énergie des ondes internes initialement générée dans l'enveloppe convective se retrouve donc piégée dans la région radiative : les auteurs ont nommé ce mécanisme *l'effet de serre magnétique* (ou *magnetic greenhouse effect*). Le mode de pression qui s'établit en surface subit donc une perte d'énergie (i.e., un amortissement de son amplitude) par émission d'ondes dans la cavité interne. Par des arguments énergétiques simples et en supposant que la zone évanescente est large, les auteurs ont dérivé une expression approchée du taux d'amortissement associé, en accord avec la dérivation asymptotique donnée plus tôt par Shibahashi (1979). Dans ce cas, la valeur du taux d'amortissement ne dépend que du coefficient de transmission des ondes à travers la zone évanescente. En estimant la valeur du

coefficient de transmission par le biais de modèles stellaires, Fuller *et al.* (2015) ont alors trouvé que l'amplitude des modes dipolaires prédite par ce mécanisme est en accord avec les observations des modes déprimés. Si ce mécanisme était effectivement à l'œuvre dans les étoiles exhibant des modes déprimés, les auteurs ont de plus montré que la valeur minimale du champ magnétique interne requise pour piéger l'énergie des ondes incidentes dans le cœur de ces étoiles et donc provoquer la *dépression* des modes devrait être très élevée (i.e., supérieure à quelques  $10^6$  G). Néanmoins, à ce stade, il n'est pas possible de conclure sur la présence ou non de forts champs magnétiques dans l'intérieur ces étoiles. En effet, l'accord avec les observations, si confirmé, ne prouve seulement ici que les modes dipolaires subissent des pertes additionnelles par émission d'ondes dans la cavité interne, et ne donne aucune information sur le mécanisme responsable du piégeage de l'énergie dans le cœur stellaire. Conclure sur la prédominance de forts champs magnétiques dans la zone radiative des étoiles géantes rouges est donc, à ce stade, prématuré.

Suite à ce travail, Mosser, Belkacem, Pinçon *et al.* (2017a) ont entrepris une caractérisation observationnelle des étoiles présentant des modes dipolaires déprimés. Premièrement, les auteurs ont montré que les modes déprimés sont en fait des modes mixtes. Cela est en désaccord avec le mécanisme de perte d'énergie par émission d'ondes vers la cavité interne proposé par Fuller *et al.* (2015). En effet, dans ce mécanisme, les modes observés ne peuvent être que des modes de pression purs. De plus, Mosser *et al.* (2017a) ont montré que la valeur du period-spacing  $\Delta\Pi$  dans ces étoiles est en accord avec les valeurs typiques observées dans les étoiles normales (sans modes déprimés). Cela suggère donc que la structure de la cavité interne reste inchangée. Cette observation va à l'encontre de la présence d'un très fort champ magnétique dans l'intérieur radiatif puisque celui-ci modifierait la structure de la cavité centrale et donc la valeur du  $\Delta\Pi$ . De plus, pour une poignée d'étoiles présentant des modes mixtes déprimés avec un rapport signal sur bruit assez fort (au nombre de 71), le period-spacing  $\Delta\Pi$ , le facteur de couplage  $q$  ainsi que la largeur à mi-hauteur des pics d'oscillation ont pu être déterminés avec précision. Ces paramètres s'avèrent aussi en accord avec les valeurs obtenues dans les étoiles normales. La structure globale des étoiles *anormales* semble donc ne posséder aucune particularité structurelle globale. Pour aller plus loin, les auteurs ont aussi pu tester la valeur des amplitudes prédites suivant le mécanisme de perte par émission d'ondes proposé par Fuller *et al.* (2015) (voir aussi Shibahashi 1979). Pour ce faire, Mosser *et al.* (2017a) ont dérivé la valeur du coefficient de transmission à travers la zone évanescente à partir cette fois-ci de l'observation du facteur de couplage et l'utilisation des Eqs. (8.2) et (8.4). Cela revient donc à tester observationnellement les valeurs des coefficients de transmission dérivées à partir de modèles stellaires par Fuller *et al.* (2015). Les résultats de Mosser *et al.* (2017a) montrent alors sans ambiguïté que les valeurs théoriques des visibilité dérivées par Fuller *et al.* (2015) sont surestimées et doivent être corrigées.

En conclusion, les modes dipolaires déprimés sont des modes mixtes. Le mécanisme de perte d'énergie par émission d'ondes à la base de la zone convective proposé par Fuller *et al.* (2015) ne donne donc pas d'explication physique aux modes déprimés. De plus, la cavité interne des étoiles présentant des modes mixtes déprimés est similaire aux étoiles normales. Ces faits observationnels sont en désaccord avec l'effet de serre magnétique tel qu'il a été proposé par Fuller *et al.* (2015). Un nouveau mécanisme d'amortissement respectant ces observations doit donc être trouvé (e.g., Loi & Papaloizou 2017; Rieutord 2017). Le problème reste actuellement une question ouverte.

# Dipole modes with depressed amplitudes in red giants are mixed modes

B. Mosser<sup>1</sup>, K. Belkacem<sup>1</sup>, C. Pinçon<sup>1</sup>, M. Takata<sup>2</sup>, M. Vradar<sup>3</sup>, C. Barban<sup>1</sup>, M.-J. Goupil<sup>1</sup>,  
T. Kallinger<sup>4</sup>, and R. Samadi<sup>1</sup>

<sup>1</sup> LESIA, Observatoire de Paris, PSL Research University, CNRS, Université Pierre et Marie Curie, Université Paris Diderot, 92195 Meudon, France

e-mail: benoit.mosser@obspm.fr

<sup>2</sup> Department of Astronomy, School of Science, The University of Tokyo, 7-3-1 Hongo, Bunkyo-ku, Tokyo 113-0033, Japan

<sup>3</sup> Instituto de Astrofísica e Ciências do Espaço, Universidade do Porto, CAUP, Rua das Estrelas, 4150-762 Porto, Portugal

<sup>4</sup> Institute of Astrophysics, University of Vienna, Türkenschanzstrasse 17, 1180 Vienna, Austria

Received 5 August 2016 / Accepted 11 October 2016

## ABSTRACT

**Context.** Seismic observations with the space-borne *Kepler* mission have shown that a number of evolved stars exhibit low-amplitude dipole modes, which is referred to as depressed modes. Recently, these low amplitudes have been attributed to the presence of a strong magnetic field in the stellar core of those stars. Subsequently, and based on this scenario, the prevalence of high magnetic fields in evolved stars has been inferred. It should be noted, however, that this conclusion remains indirect.

**Aims.** We intend to study the properties of mode depression in evolved stars, which is a necessary condition before reaching conclusions about the physical nature of the mechanism responsible for the reduction of the dipole mode amplitudes.

**Methods.** We perform a thorough characterization of the global seismic parameters of depressed dipole modes and show that these modes have a mixed character. The observation of stars showing dipole mixed modes that are depressed is especially useful for deriving model-independent conclusions on the dipole mode damping. We use a simple model to explain how mode visibilities are connected to the extra damping seen in depressed modes.

**Results.** Observations prove that depressed dipole modes in red giants are not pure pressure modes but mixed modes. This result, observed in more than 90% of the bright stars ( $m_V \leq 11$ ), invalidates the hypothesis that depressed dipole modes result from the suppression of the oscillation in the radiative core of the stars. Observations also show that, except for visibility, seismic properties of the stars with depressed modes are equivalent to those of normal stars. The measurement of the extra damping that is responsible for the reduction of mode amplitudes, without any prior on its physical nature, potentially provides an efficient tool for elucidating the mechanism responsible for the mode depression.

**Conclusions.** The mixed nature of the depressed modes in red giants and their unperturbed global seismic parameters carry strong constraints on the physical mechanism responsible for the damping of the oscillation in the core. This mechanism is able to damp the oscillation in the core but cannot fully suppress it. Moreover, it cannot modify the radiative cavity probed by the gravity component of the mixed modes. The recent mechanism involving high magnetic fields proposed for explaining depressed modes is not compliant with the observations and cannot be used to infer the strength and prevalence of high magnetic fields in red giants.

**Key words.** stars: oscillations – stars: evolution – stars: magnetic field – stars: interiors

## 1. Introduction

Asteroseismic observations by the CoRoT and *Kepler* space-borne missions have provided new insights in stellar and Galactic physics (e.g., Michel et al. 2008; Miglio et al. 2009; Chaplin et al. 2011). The ability to derive fundamental stellar parameters, such as masses and radii, over a wide range of stellar evolutionary states from the main sequence to the asymptotic giant branch is certainly one of the strongest impacts of such measurements (e.g., Kallinger et al. 2010). The rich nature of the red giant oscillation spectrum was largely unexpected (De Ridder et al. 2009; Mosser & Miglio 2016). Red giant asteroseismology has been boosted by the observation of dipole modes that, because of their mixed nature, probe the stellar core. They behave as gravity modes in the core and as pressure modes in the envelope. The pressure components carry information on the mass and radius of stars (e.g., Mosser et al. 2013), while the gravity components of these mixed modes

are directly sensitive to the size and mass of the helium core (Montalbán & Noels 2013; Lagarde et al. 2016); to the evolutionary stage, which differs according to the nuclear reaction at work (Bedding et al. 2011; Mosser et al. 2011); and to the mean core rotation (Beck et al. 2012; Mosser et al. 2012b; Deheuvels et al. 2012, 2014).

Because of the homology of the red giant interior structure, red giant seismology is characterized by the many scaling relations between global seismic parameters along stellar evolution (e.g., Stello et al. 2009; Mosser et al. 2010; Mathur et al. 2011; Kallinger et al. 2012). Exceptions to these relations are rare and most often explained by specific features, such as for instance the damping of the oscillation in close binaries (Gaulme et al. 2014) or very low metallicity (Epstein et al. 2014). However, observations have revealed that a family of red giants exhibit peculiar dipole modes with low amplitudes (Mosser et al. 2012a). In some extreme cases, dipole modes are not even detectable.

Consequently, these dipole modes have been called depressed modes<sup>1</sup>.

The first in-depth study of a star with depressed modes could not explain this phenomenon (García et al. 2014). Then, Fuller et al. (2015) addressed this issue by using a twofold approach. First, the authors expressed the dipole mode visibilities in the limit of full suppression of the oscillation in the red giant core. In other words, they assumed that the mode energy that leaks in the radiative interior of red giants is totally lost. As a consequence, dipole modes are no longer mixed modes but only lie in the upper (acoustic) cavity of red giants. This assumption is validated by the authors by means of a comparison between observed and computed mode visibilities. Second, it is conjectured that the extra loss of the mode energy is caused by a strong magnetic field, which scatters waves leaking in the core. This prevents these waves from constructing a standing wave in the inner resonant cavity of those stars. This has been named the magnetic greenhouse effect. The angular degree dependence of the energy leakage has been verified with the quadrupole modes (Stello et al. 2016a). This appealing scenario has then been taken for granted by Stello et al. (2016b) and Cantiello et al. (2016) to infer the prevalence of magnetic fields in the core of oscillating red giant stars observed by *Kepler*.

However, before firmly concluding about the presence of a magnetic field in the core of red giants with depressed modes, the hypothesis of the suppression of the oscillation in the core has to be validated. In fact, the nature of the physical mechanism responsible for the reduction of dipole mode visibilities is not directly inferred by the observation of low mode visibilities. Therefore, the identification of a magnetic field as the physical mechanism responsible for the suppression of the oscillation in the core of those stars demands further direct observational confirmation. A strong magnetic field is a possible solution, but it is not the only solution. Fuller et al. (2015) note that rapid core rotation should have the same effect, but would require much larger rotation rates than observed in red giants (Mosser et al. 2012b; Deheuvels et al. 2014). Indeed, any strong damping in the core, such as radiative damping or gravity wave reflection that is caused, for instance, by a steep composition gradient above the hydrogen burning shell, could also explain the depressed modes (Dziembowski 2012).

In this work, we aim to provide a complete characterization of the population of red giants with depressed modes using *Kepler* observations. This study is motivated by the observation of stars showing dipole modes that are both mixed and depressed. We argue that the full characterization of stars with depressed visibilities can provide strong constraints on the physical mechanism responsible for the damping of the oscillation.

The article is organized as follows. Section 2 presents the theoretical background of mode visibility with an emphasis on the distinction between full and partial mode damping in the core of red giants. In Sect. 3, we undertake the characterization of depressed modes with a mixed character, hereafter named depressed mixed modes. We first explain how they were identified, then exploit their observations with the determination of their

<sup>1</sup> In the following, we use the term depressed for modes exhibiting diminished visibilities and keep the term suppressed for the suppression of the oscillation in the stellar core. As shown in Sect. 2.3, the full suppression of the oscillation in the core induces the mode depression. In contrast, normal modes have normal visibilities. Suppression implicitly means full suppression, so that we introduce the term partial suppression when we have to stress that the supposed suppression is not total. We do not use the term mode suppression, since it can only correspond to a null visibility.

global seismic properties. We also consider stars where, owing to the too low visibility of dipole modes, the gravity-dominated mixed modes are apparently absent. Global properties of stars are then used to test the depressed visibilities predicted when the oscillation is suppressed in the stellar core (Sect. 4). Section 5 is devoted to discussion with particular attention to the nature of the mechanism responsible for the extra damping of depressed modes. Finally, Sect. 6 is dedicated to conclusions.

## 2. Dipole mode visibilities

### 2.1. General case

The mode visibility is a way to express the mean value of the squared amplitude of modes with a given degree compared to radial modes. For a dipole mode, we define

$$V_1^2 = \frac{A_1^2}{A_0^2} \tilde{V}_1^2, \quad (1)$$

where  $\tilde{V}_1^2$  includes the contributions of several physical effects: a geometrical factor that depends on the angular degree, limb darkening, and bolometric correction. The values  $A_0$  and  $A_1$  are the intrinsic amplitudes of the radial and dipole modes, respectively. For stars exhibiting stochastically excited pure acoustic modes, these amplitudes are supposed to be equal (Belkacem et al. 2008). In such a case, the visibility  $V_1^2$  reduces to  $\tilde{V}_1^2$ .

A simple way to address the depressed modes consists in normalizing the dipole visibility with respect to the nominal expected value. We therefore use the same definition as Fuller et al. (2015) for expressing the relative visibility of depressed modes. In a first step, we consider the individual visibilities of the mixed modes,

$$v_{n_m} = \frac{V_{1 \text{ depressed}}^2}{\tilde{V}_1^2}, \quad (2)$$

where the mixed order  $n_m$  labels the mixed mode (Eqs. (4.60)–(4.63) of Mosser 2015). Strictly speaking,  $v_{n_m}$  should be referred to as a ratio of the squared amplitudes of dipole modes compared to radial modes, since the contribution of the different visibility terms (aspect ratio of the spherical harmonics and limb-darkening coefficients) is removed by the ratio to  $\tilde{V}_1^2$ . However, we keep the term visibility for the sake of simplicity.

For red giants, Ballot et al. (2011) computed  $\tilde{V}_1^2 \simeq 1.54$ , assuming that only acoustic modes are present. In evolved stars, the situation is in fact complicated by mixed modes. The contribution of all mixed modes associated with a given pressure radial order  $n_p$  can be expressed as

$$v = \sum_{n_m \in \{N\}} v_{n_m}. \quad (3)$$

The sum is made in the ensemble  $\{N\}$  of the  $N$  mixed modes associated with a given pressure radial order. They lie in the  $\Delta\nu$ -wide frequency range between two radial modes: for the pressure radial order around  $\nu_{\max}$ ,  $N = \Delta\nu\Delta\Pi_1^{-1}\nu_{\max}^{-2}$ , where  $\Delta\nu$  is the mean large separation of pressure modes,  $\Delta\Pi_1$  is the period spacing of gravity modes, and  $\nu_{\max}$  is the frequency of maximum oscillation signal.

The mixed-mode visibility  $v_{n_m}$  introduced by Eq. (2) has been investigated in previous work (Dupret et al. 2009; Benomar et al. 2014; Grosjean et al. 2014), which shows

$$v_{n_m} \simeq \left(\frac{\Gamma_0}{\Gamma_{n_m}}\right) \left(\frac{I_0}{I_{n_m}}\right)^2, \quad (4)$$

where  $\Gamma_0, \Gamma_{n_m}$  ( $I_0, I_{n_m}$ ) are the line widths (inertia) of the radial and dipole modes, respectively. This equation is valid whether the dipole mode is resolved or not, but assumes that the driving is the same for radial and dipole modes. To go further, we have to examine two cases, depending on the assumption on the dipole modes.

## 2.2. Normal dipole mixed modes

Following [Belkacem et al. \(2015\)](#), we may consider that the work performed by the gas during one oscillation cycle, associated with surface damping, is the same for all modes, so that Eq. (4) is simplified into

$$v_{n_m} \simeq \frac{I_0}{I_{n_m}} \simeq \frac{\Gamma_{n_m}}{\Gamma_0}, \quad (5)$$

from which we retrieve that the individual visibilities of mixed modes are small with smaller mode widths and larger inertia than radial modes.

From observations, [Mosser et al. \(2012a\)](#) have shown that the contribution of all mixed modes associated with a given pressure radial order  $n_p$  ensures  $v = 1$ . Here, we can demonstrate this, using the relation between inertia and the function  $\zeta$  that governs the mixed-mode spacings and the rotational splittings ([Goupil et al. 2013](#); [Deheuvels et al. 2015](#); [Mosser et al. 2015](#)). From  $I_0/I_{n_m} = 1 - \zeta$ , we have

$$v = \sum_{n_m \in \{\mathcal{N}\}} (1 - \zeta). \quad (6)$$

The  $\mathcal{N}$  mixed modes in the ensemble  $\{\mathcal{N}\}$  between two consecutive radial modes correspond to 1 pure pressure dipole mode and  $(\mathcal{N} - 1)$  pure gravity dipole modes. The period difference between the two radial modes can be estimated in two ways as follows: either considering the sum  $(\mathcal{N} - 1) \Delta \Pi_1$  for the pure gravity modes or considering the sum of the mixed-mode period spacings,  $\sum_{n_m \in \{\mathcal{N}\}} \Delta P = (\sum_{n_m \in \{\mathcal{N}\}} \zeta) \Delta \Pi_1$ , according to [Mosser et al. \(2015\)](#). Hence, we get

$$v = \sum_{n_m \in \{\mathcal{N}\}} (1 - \zeta) = \mathcal{N} - (\mathcal{N} - 1) = 1. \quad (7)$$

This result proves that, despite the mixed nature of the dipole modes, their total visibility matches the expected visibility of the corresponding pure pressure mode. So, energy equipartition is preserved for the normal mixed modes.

## 2.3. A particular case: suppression of the oscillation in the core

The possibility of suppression of the oscillation in the core was first investigated by [Unno et al. \(1989\)](#). Their Eqs. (16.62)–(16.65) consider the effect of a wave leakage in the core of an acoustic mode trapped in the convective envelope. The limit of oscillation suppression in the core implies that only pressure dipole modes are present since mixed modes are necessarily canceled out. In that case,  $I_1 \simeq I_0$ , so that Eq. (4) is rewritten as

$$v = \frac{\Gamma_0}{\Gamma_1}. \quad (8)$$

The damping in the core, whatever it is, can be written

$$v = \frac{\Gamma_0}{\Gamma_1^{\text{env}} + \Gamma_1^{\text{core}}} \simeq \frac{\Gamma_0}{\Gamma_0 + \Gamma_1^{\text{core}}}, \quad (9)$$

where  $\Gamma_1^{\text{env}} \simeq \Gamma_0$  and  $\Gamma_1^{\text{core}}$  are the damping contributions in the envelope and in the core, respectively.

### 2.3.1. Damping and transmission

Equation (9) can be rewritten

$$v = \frac{1}{1+x} \quad \text{with} \quad x = \frac{\Gamma_1^{\text{core}}}{\Gamma_0}. \quad (10)$$

When all energy transmitted in the core is absorbed or damped, following [Unno et al. \(1989\)](#) we get

$$x = \omega \tau_a \left( \int_{\mathcal{A}} k_r dr \right)^{-1} \frac{1}{4} \exp \left( -2 \int_{\mathcal{E}} \kappa dr \right), \quad (11)$$

where  $\mathcal{A}$  denotes integration in the acoustic cavity and  $\mathcal{E}$  in the evanescent region,  $k_r$  is the radial wave number,  $\kappa^2 = -k_r^2$ ,  $\omega$  is the mode frequency, and  $\tau_a$  is the e-folding damping time of the radial mode amplitude. At first order, the first integral of Eq. (11) equals  $\omega/2\Delta v$ , where  $\Delta v$  is the large separation. Thus, Eq. (11) becomes

$$x = \frac{\Delta v \tau_a}{2} \exp \left( -2 \int_{\mathcal{E}} \kappa dr \right). \quad (12)$$

We then introduce the e-folding damping time of the mode energy,  $\tau_0 = \tau_a/2$  and get

$$v = \left( 1 + \Delta v \tau_0 T^2 \right)^{-1}, \quad (13)$$

where the transmission in the evanescent region is defined by

$$T = \exp \left( - \int_{\mathcal{E}} \kappa dr \right). \quad (14)$$

Equation (13), derived from the relative visibility of depressed dipole modes with respect to radial modes, is similar to Eq. (2) of [Fuller et al. \(2015\)](#), which is derived from the ratio between the depressed and normal dipole modes.

### 2.3.2. Link with observable parameters

We can match the value of  $T^2$  with the coupling factor  $q$  of mixed modes ([Unno et al. 1989](#)),

$$T^2 = 4q. \quad (15)$$

The visibility can thus be expressed as a function of the seismic observables  $q$  and  $\Gamma_0$

$$v = \left( 1 + 2q \frac{\Delta v}{\pi \Gamma_0} \right)^{-1}. \quad (16)$$

The coupling factor  $q$  is obtained from the asymptotic expansion of mixed modes

$$\tan \theta_p = q \tan \theta_g, \quad (17)$$

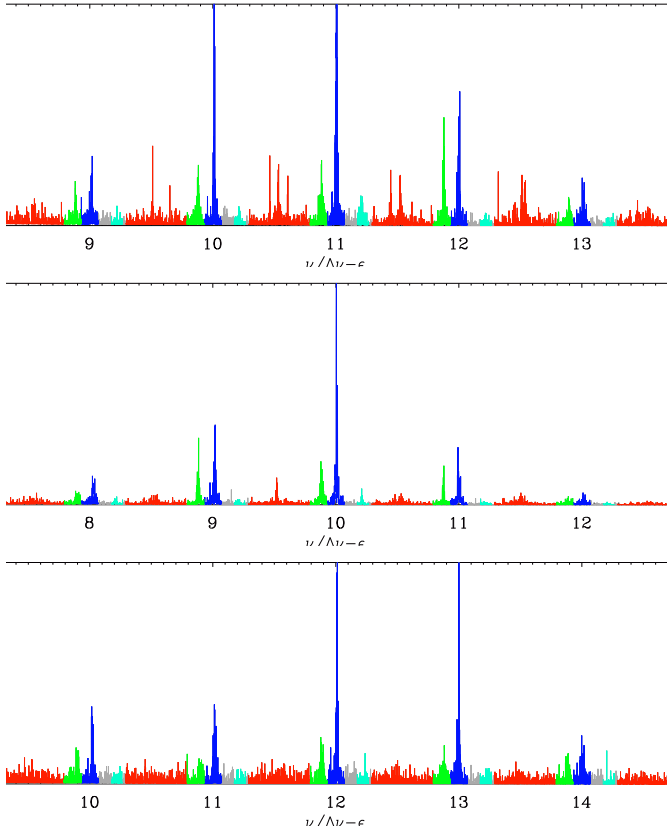
where the phases  $\theta_p$  and  $\theta_g$  refer, respectively, to the pressure- and gravity-wave contributions ([Mosser et al. 2015](#)). The radial mode width  $\Gamma_0$ , which is measured as the full width at half maximum in the power density spectrum, is related to the radial mode lifetime by (see [Samadi et al. 2015](#))

$$\Gamma_0 = \frac{1}{2\pi\tau_0}. \quad (18)$$

In fact, Eqs. (15) and (16) are no longer valid when the extent of the evanescent region is limited, so that strong coupling occurs. In that case (see [Takata 2016a](#)),

$$T^2 = \frac{4q}{(1+q)^2}. \quad (19)$$





**Fig. 1.** Examples of red giant branch stars with low dipole-mode amplitudes. Spectra are plotted as a function of the reduced frequency  $\nu/\Delta\nu - \varepsilon$ , so that radial modes (shown in blue) are close to integer values; quadrupole modes are plotted in green, octupole modes in cyan; and mixed modes can be found everywhere but their contribution is measured in the frequency range plotted in red only. The mean background component was subtracted. *Top*: the mixed mode pattern of KIC 9279486 can be fitted to extract seismic global parameters; *middle*: the mixed modes in KIC 6026983 are evidenced but their pattern cannot be fit; and *bottom*: the dipole modes of KIC 5810513 have very small amplitudes but can be unambiguously detected and identified as mixed modes with the method discussed in Sect. 3.3.

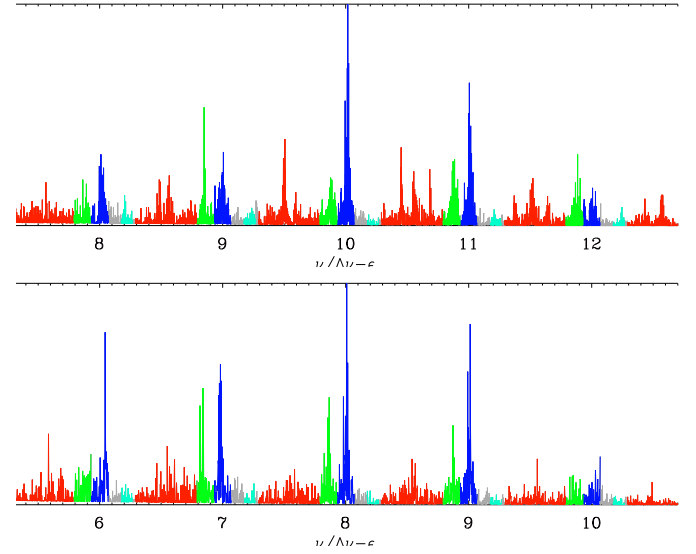
Following Eq. (71) of Takata (2016b), we also have to replace  $T^2$  by  $-\ln(1 - T^2)$  in case of full suppression of the oscillation in the core. So, Eq. (13) becomes

$$v = \left( 1 - \ln \left[ 1 - \frac{4q}{(1+q)^2} \right] \frac{\Delta\nu}{2\pi\Gamma_0} \right)^{-1}. \quad (20)$$

Contrary to Eq. (13), this expression ensures a null visibility in case of total transmission ( $T = q = 1$ ).

### 3. Seismic observables

Previous observations have reported that the depressed modes in the red giant KIC 8561221 are mixed (García et al. 2014). Such observations question the hypothesis of oscillation suppression: if the low visibility derives from the suppression of the oscillation in the radiative core, mixed modes cannot be established. Therefore, we first aim to identify the prevalence of red giants with depressed mixed modes. Then, we also use different observations to assess the properties of depressed dipole modes to determine whether they are mixed or not. Figure 1 illustrates the different types of stars we intend to work with: either



**Fig. 2.** Same as Fig. 1 but for core-helium burning stars. *Top*: the mixed mode pattern of the secondary-clump star KIC 8522050 can be fitted to extract seismic global parameters; and *bottom*: the depressed mixed modes in the clump star KIC 2693261 are apparent but their pattern cannot be fit.

with depressed mixed modes that can be identified, depressed mixed modes that cannot be fitted, or without clear evidence of mixed modes. Figure 2 provides examples for core-helium burning stars.

#### 3.1. Identification of low visibilities

The first step for the search of stars with dipole mixed modes consists in the measurement of reduced visibilities, as defined by Eq. (3), with the method of Mosser et al. (2012a). In short, squared amplitudes are estimated from the integration of the power spectrum density over the frequency range covering the different modes, after subtraction of background. We obtained the total dipole visibilities,  $V_1^2$ , for about 12 500 red giants of the *Kepler* public data (Fig. 3a), from which we could identify the population of stars on the red giant branch (RGB) with normal visibilities and the family of stars with low visibility, in agreement with Mosser et al. (2012a) and Stello et al. (2016a). Red giants with normal amplitudes have a total dipole visibility of close to  $\langle \tilde{V}_1^2 \rangle \simeq 1.54$  with a very weak dependence on  $T_{\text{eff}}$ ,  $\log g$ , and  $Z$ . Using effective temperatures of Huber et al. (2014), we found that the normal (not depressed) visibilities of red giants, integrated for one pressure radial order, follow the mean trend

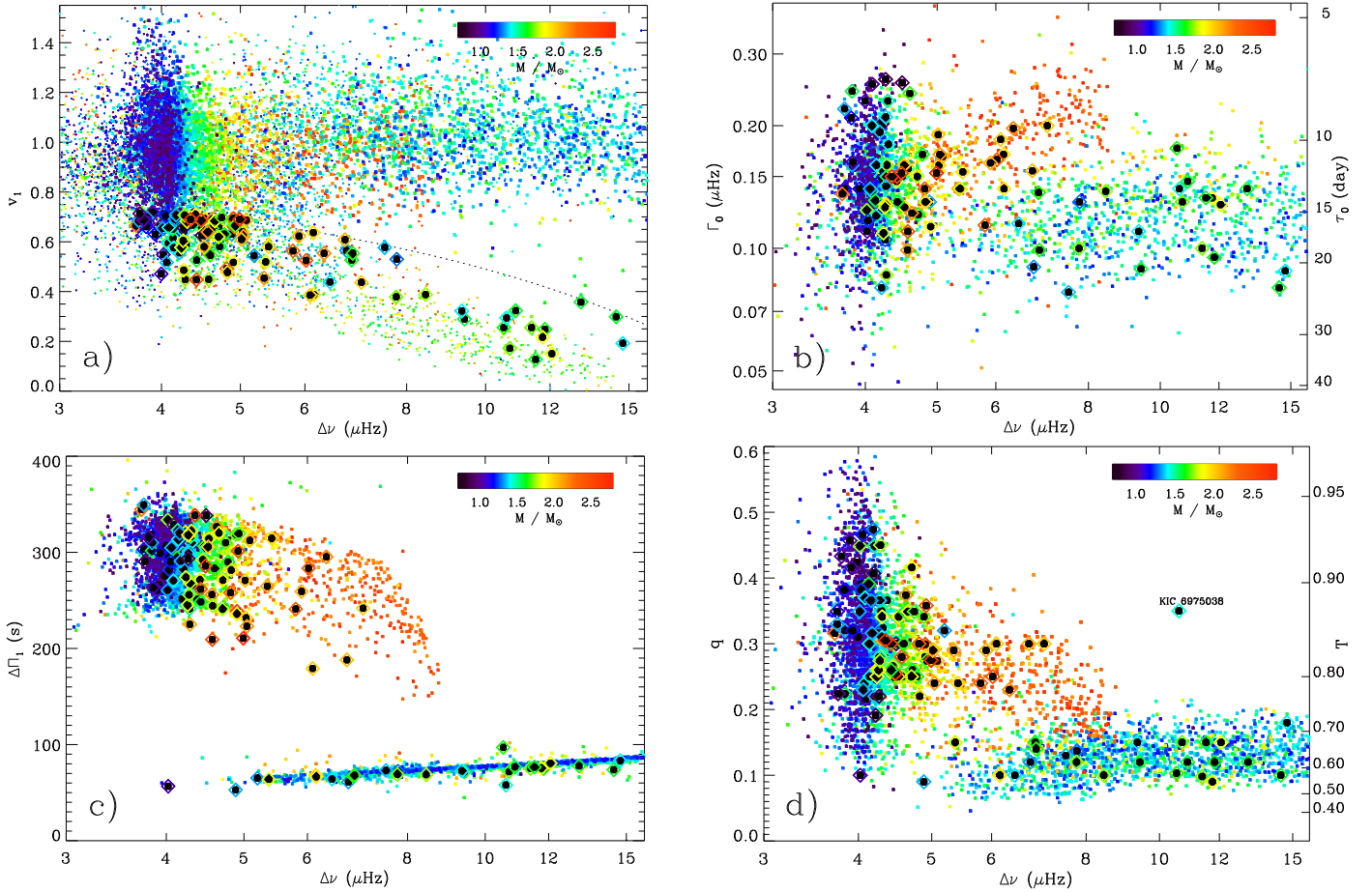
$$\langle \tilde{V}_1^2 \rangle \simeq 1.54 - \frac{T_{\text{eff}} - 4850}{4100}, \quad (21)$$

where the brackets indicate the average value derived from a linear fit with the effective temperature  $T_{\text{eff}}$  expressed in kelvin. This result is very close to the predictions of Ballot et al. (2011).

The mean value of the normal visibility was then used to derive reduced integrated observed visibilities,

$$v_1 = \frac{\overline{\sum V_1^2}}{\langle \tilde{V}_1^2 \rangle}, \quad (22)$$

where, for the numerator, the sum matches all dipole modes associated with a given pressure radial order and the overbar represents the mean value for the different radial orders where dipole



**Fig. 3.** **a)** Dipole mode visibility  $v_1$  as a function of the large separation  $\Delta\nu$ . The color codes the mass determined with seismic scaling relations. Small symbols represent *Kepler* stars of the public data set; and larger symbols represent stars of the data set studied by Vrad et al. (2016). Diamonds with a dark center are stars showing depressed mixed modes. The dashed line represents the limit defining low visibilities. **b)** Radial mode width  $\Gamma_0$  as a function of the large separation  $\Delta\nu$  of the data set studied by Vrad et al. (2016). The right  $y$ -axis provides the radial mode lifetime. **c)** Same as **b)** for the period spacings  $\Delta\Pi_1$ ; and **d)** same as **b)** for the coupling factor  $q$ . The outlying value of  $q$  for KIC 6975038 is discussed in Sect. 5.4.

modes are observed. Now,  $v_1$  can be compared to  $v$  (Eq. (3)). As stated by previous work, the limit between normal and low visibility is clear on the RGB, despite the presence of a few stars lying in the no man’s land between normal and reduced visibilities; in the red clump, we chose to define low-visibility stars by  $v_1 \leq 0.85 - 0.04 \Delta\nu$  (with  $\Delta\nu$  expressed in  $\mu\text{Hz}$ ). We tested that changing the threshold value does not significantly change the conclusions of the work.

### 3.2. Fit of the mixed-mode pattern

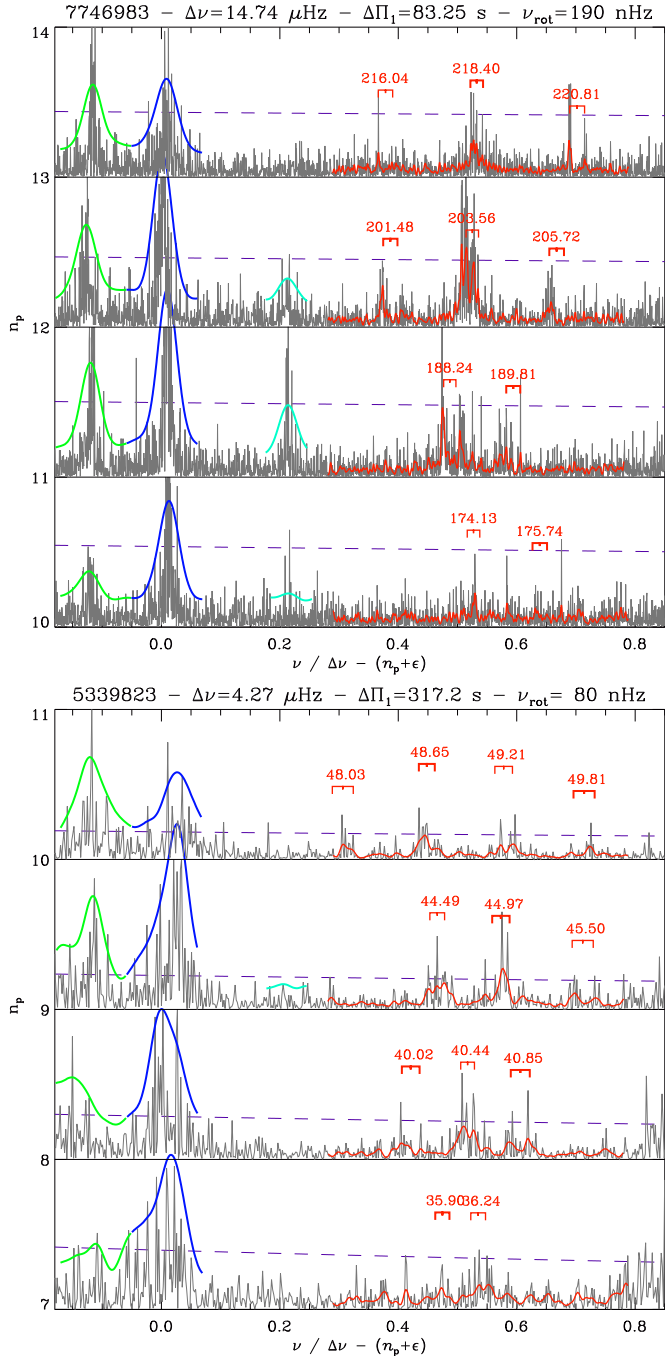
The systematic search for stars with depressed mixed modes was derived from the recent work of Vrad et al. (2016), who have measured the asymptotic period spacing of mixed modes for about 6100 red giants. We then fitted the asymptotic mixed-mode pattern in stars with reduced dipole visibilities.

The fit of mixed mode frequencies in red giants is usually made easy by the use of asymptotic expansion (Unno et al. 1989; Mosser et al. 2012b), but is more difficult in stars with depressed mixed modes because of the lower signal-to-noise ratio induced by low visibilities. However, we managed to optimize this fitting process to obtain complete sets of seismic parameters, including rotational splittings  $\delta\nu_{\text{rot}}$  (Mosser et al. 2012b). Recent methods and results based on four years of *Kepler* observation

were used to update previous measurements (Mosser et al. 2014, 2015; Vrad et al. 2016). Stellar masses were estimated from the seismic scaling relation with the method of Mosser et al. (2013) to have a better calibration than the solar calibration and to lower the non-negligible noise induced by pressure glitches (Vrad et al. 2015). Scaling relations have been used with the effective temperature of Huber et al. (2014).

We were able to fit the asymptotic mixed-mode pattern, including the rotational splittings, for 71 red giants (Table A.1, Fig. 4). This number represents a small fraction of the 1109 stars with low amplitudes since fitting all parameters of the asymptotic mixed-mode pattern is highly demanding when amplitudes are depressed. Unsurprisingly, owing to the aforementioned observational bias, our data set with mixed modes on the RGB is biased toward high visibilities (Fig. 3a). Conversely, as low visibilities of clump stars are not as low as they are on the RGB, fitting their mixed modes is easier. With this analysis, we can establish the properties of stars with depressed mixed modes.

**Mass.** Stars in our data set with depressed mixed modes present larger masses than the typical mass distribution of CoRoT or *Kepler* red giants showing solar-like oscillations. Their median mass is  $1.6 M_{\odot}$ , which is above the median mass of the red



**Fig. 4.** Examples of complete fits of the asymptotic mixed-mode pattern of red giants with low dipole-mode amplitudes. Échelle diagrams are plotted as a function of the reduced frequency  $\nu/\Delta\nu - (n_p + \varepsilon)$ , so that radial modes are close to integer values. The smoothed profile of mixed modes are plotted in red, quadrupole modes in green, and octupole modes in cyan. The dashed gray line corresponds to 8 times the granulation background. Dipole triplets are identified by the asymptotic cyclic frequency, in  $\mu\text{Hz}$ , of the  $m = 0$  component. *Top*: RGB star, KIC 7746983; *bottom*: Clump star, KIC 5339823.

giants observed with *Kepler* ( $1.4 M_{\odot}$ ). This agrees with the mass distribution found by Stello et al. (2016b) for stars with low-amplitude dipole modes.

**Evolutionary stage.** Mosser et al. (2012a) have reported the identification of low visibilities for stars on the RGB. Here, we

report that stars with depressed mixed modes appear at any evolutionary stages. We identified depressed modes in secondary-clump stars, located on the same low-visibility branch as RGB stars (Fig. 3a). Owing to the mass dependence of the low-visibility stars, depressed modes are in fact over-represented in the secondary red clump. The situation is less clear for clump stars, since the low-visibility branch joins the group of normal visibility stars when  $\Delta\nu \leq 4.5 \mu\text{Hz}$ . We however notice an overabundance of red-clump stars with low visibilities; such stars are much more abundant than stars with visibilities above the normal value. An example of such a star is given in Fig. 2 (bottom panel).

**Radial mode widths.** Radial mode widths  $\Gamma_0$ , defined as full widths as half maximum, were measured following the method used by Vrad et al. (2015). Results are shown in Fig. 3b and summarized in Table 1. They are fully consistent with previous work obtained with CoRoT and *Kepler* (Baudin et al. 2011; Corsaro et al. 2012, 2015) and show a clear dependence with the evolutionary stage and stellar mass, as will be discussed in a forthcoming paper. In the clumps,  $\Gamma_0$  of stars with depressed mixed modes behave as for the other stars. On the RGB, these stars appear to have slightly larger  $\Gamma_0$  than the mean trend. This is however a mass effect only;  $\Gamma_0$  increases with increasing masses and low visibility stars show higher mass (Stello et al. 2016b).

**Asymptotic period spacing.** Asymptotic period spacings follow the typical distribution identified in previous works (Mosser et al. 2012c, 2014; Vrad et al. 2016). We could not identify any departure to the distribution of the  $\Delta\nu - \Delta\Pi_1$  relation (Fig. 3c). On the RGB, stars with depressed mixed modes show slightly lower values of  $\Delta\Pi_1$  than the mean case, in agreement with their mass distribution (Vrad et al. 2016). Values are normal in the red clump. The large mass range and the non-degenerate conditions for helium ignition of secondary red clump stars explains the spread in the distribution of their seismic parameters, so that the spread for stars with depressed modes does not allow us to draw any conclusions.

**Coupling factors.** Coupling factors  $q$  were measured by Mosser et al. (in prep.) for about 4000 stars among the data set analyzed by Vrad et al. (2016). These factors are derived from the optimization of the method introduced by Mosser et al. (2015) for analyzing mixed modes. Results are shown in Fig. 3d, where stars with a low dipole-mode visibility are identified. Mosser et al. (in prep.) provide a discussion of the general trends observed in  $q$  as a function of the evolutionary stage. Here, we note that stars with depressed modes behave as the other stars. This suggests that the extent of the evanescent region between the pressure and gravity components is not impacted by the mechanism responsible for the amplitude mitigation, so that it is very similar as for normal stars (Unno et al. 1989; Takata 2016a).

**Rotation.** Fitting rotation requires a high signal-to-noise ratio in the oscillation spectrum, so that the difficulty of this measurement explains the limited number of stars with a complete fit. It is evidently a bias due to low visibilities. For the same reason, more fits than expected are obtained for the mixed-mode patterns of stars nearly seen pole-on, which are simpler than the general case since the rotational multiplets are reduced to the zonal modes (with an azimuthal order  $m = 0$ ). In such cases,

**Table 1.** Mean mode width and lifetime (defined as the e-folding time of the mode energy), depending on the evolutionary, for red giants.

Evolutionary status	$\Delta\nu$ ( $\mu\text{Hz}$ )	$\Gamma_0$ (nHz)	$\tau_0$ (day)
RGB	15	$118 \pm 25$	$15.5 \pm 3.3$
RGB	10	$121 \pm 23$	$15.1 \pm 3.0$
RGB	6	$118 \pm 30$	$15.6 \pm 3.9$
Red clump	4	$145 \pm 37$	$12.6 \pm 3.2$
Secondary clump	7	$178 \pm 45$	$10.3 \pm 2.6$

the core rotation remains undetermined. When measured, rotational splittings show the typical distributions defined for red giants (Mosser et al. 2012b; Deheuvels et al. 2014, 2015).

### 3.3. Prevalence of depressed mixed modes

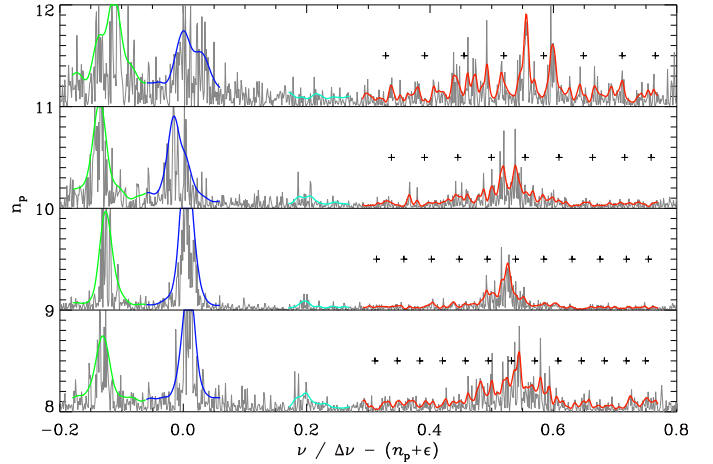
As the number of stars where the mixed-mode pattern can be fitted is limited, we checked whether the properties they display are verified by other stars.

#### 3.3.1. Depressed modes versus pure pressure modes

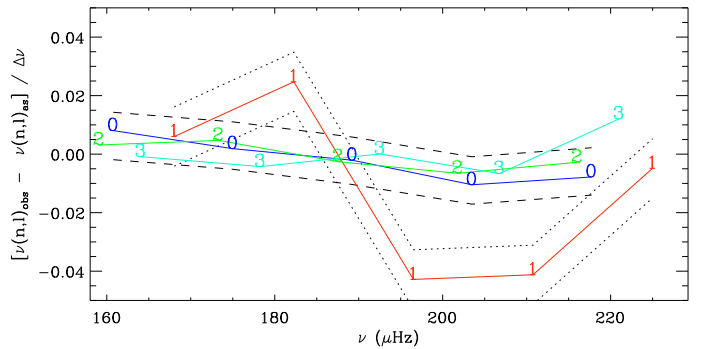
A large number of oscillation spectra show peaks with a height much above eight times the background levels. Even in the case of low signal-to-noise ratio oscillation spectra, such peaks cannot all be created by noise. When their identification with radial, quadrupole, or octupole modes is excluded, we must conclude that depressed dipole mixed modes are obviously present in the whole spectrum. An example of such a star is given in Fig. 1b. When smoothed, oscillation spectra of such stars exhibit the typical mixed-mode pattern (Fig. 5).

In other cases, mixed modes are not apparent or cannot be distinguished from the noise (Fig. 1c). The identification of dipole mixed modes then requires different tools than those used earlier in this paper. In principle, the energy of the dipole modes peaks at the expected position of pressure dominated modes if modes are not mixed, but can be shifted by mode coupling. Hence, measuring this shift provides a way to identify whether modes are mixed or not. The measurement of the position of the dipole modes has to fight against the acoustic glitch (Vrard et al. 2015), the noise induced by background contribution, and the intrinsic shift due to finite lifetimes. We identified bright stars with high quality spectra on the low RGB, where the conditions of measurement are made easier (Fig. 1c). The shift of the actual position of the dipole modes with respect to the asymptotic expansion is shown in Fig. 6, together with the position shifts of radial, quadrupole, and octupole modes. The curves for these modes are remarkably close to each other, even for  $\ell = 3$  modes, whereas dipole modes show a modulation as large as  $\pm 0.04 \Delta\nu$ .

Synthetic tests were performed to evaluate the noise contribution. We reproduced typical conditions of observation and measured the location of pure pressure dipole modes. In the conservative case of a dipole mode width that is five times larger than the radial mode width, which is, in turn, much larger than the dipole width observed in other stars, shifts were less than  $0.01 \Delta\nu$  away of their expected position. The example shown in Fig. 6 is representative of any spectrum with a high enough signal-to-noise ratio. From this study, we conclude that depressed dipole mixed modes are not an exception, but evidently the rule. Very low visibilities cannot be associated exclusively with the full suppression of the oscillation in the core.



**Fig. 5.** Échelle spectrum of the RGB star KIC 9711269. Colored lines, with the same color code as in Fig. 1, emphasize the structure of the modes. Plus symbols approximately indicate the period spacings derived from the asymptotic expansion; the fit of the mixed modes, which would imply the fit of the rotational splittings, is however not possible.



**Fig. 6.** Evidence of dipole mixed modes provided by the position of low-degree modes, with respect to the second-order asymptotic expansion of pure pressure modes, for the red giant 5810513 observed by *Kepler* (Fig. 1 bottom). The shifts are expressed in  $\Delta\nu$  units. The dashed lines indicate the region where pure pressure low-degree modes are expected; the dotted lines provide uncertainties for the positions of the dipole modes.

#### 3.3.2. Asymptotic period spacings

Asymptotic period spacings can be measured independent of the identification of the mixed-mode pattern (Vrard et al. 2016). Since measurements are difficult when dipole modes are depressed, we focused this study on all RGB stars with a magnitude brighter than  $m_V = 11$ , and performed an individual analysis of each oscillation spectra. These individual studies provided us with the measurement of the asymptotic period spacings in more than 90% of the cases. As a by-product, this study also confirmed that the structure of the excess power near the pressure-dominated mixed modes cannot result from the simple broadening of a single dipole pressure mode. This study fully confirmed that asymptotic period spacings of stars with depressed mixed modes are normal.

### 3.4. Summary of the observations: depressed modes are mixed

From the observations, we have derived that depressed modes are mixed and that their seismic properties, including their asymptotic period spacings, are normal.

- This information was directly obtained for the 71 red giants where the signal-to-noise ratio is high enough to fit the mixed-mode spectrum.
- For 96 stars, we measured the individual values of the coupling factors and of the period spacings. Again, these seismic values are normal. These 96 stars are considered in Sect. 4.
- At very low visibility, estimating the asymptotic period spacing is impossible. However, we showed that the dipole modes are shifted with respect to the expected position of pure pressure modes.
- The previous cases represent a small fraction of the 1109 stars with low amplitudes, but we showed that more than 90% of the stars with depressed modes brighter than  $m_V = 11$  on the RGB have a mixed-mode pattern with a normal period spacing. This prevalence can be extrapolated to fainter stars since we do not expect any bias with magnitude. The situation for clump stars is comparable.

## 4. Observed versus predicted visibilities

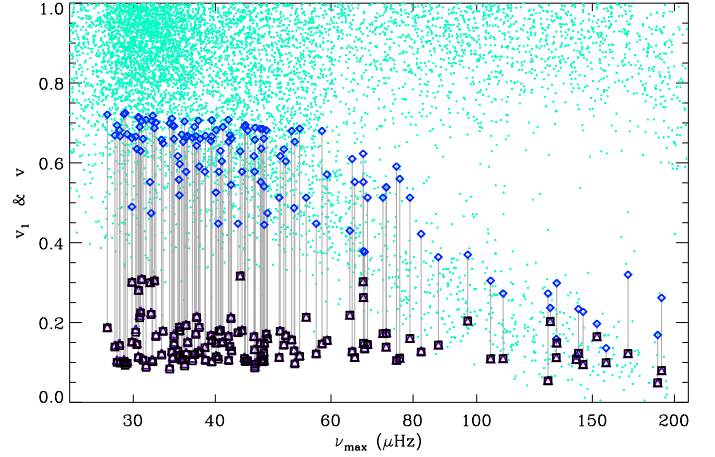
As shown above, the observation of many red giants with depressed mixed modes invalidates the hypothesis of full suppression of the oscillation in the core for explaining low visibilities. This opens questions on the validity of Eq. (13) to explain the low visibility. Hence, we need to check whether the prediction of Eq. (13) is sustained. As our analysis is based on observations, we aim to check Eq. (13) through Eq. (20). Therefore, we first justify the validity of using Eq. (20), then test various hypotheses introduced by Fuller et al. (2015) to explain low visibilities.

### 4.1. Global seismic parameters

Using Eq. (20) for testing the observed visibilities requires information on the coupling factors  $q$  and on the radial mode widths  $\Gamma_0$ . The set of red giants with a low visibility, and for which all parameters of Eq. (20) are measured, is composed of 96 stars. We assumed that the mechanism responsible for the extra damping does not modify the stellar interior structure, so that  $q$  is representative of the transmission  $T$ . This assumption is theoretically justified by the analysis that is presented in Takata (2016b) and is observationally verified: as seen above, all stars have similar  $q$  and similar  $\Gamma_0$ , regardless of their visibility (Figs. 3b and d). In that respect, the stars with depressed mixed modes provide us indirectly with relevant tests and Eq. (20) can be used to test Eq. (13).

### 4.2. A significant disagreement

Assuming that  $q$  measured from mixed modes can replace the  $T$  value (Eq. (19)) and using observed  $\Gamma_0$ , we were able to compare the relation between the reduced observed visibilities  $v_1$  and the calculated depressed visibility  $v$  predicted by Eq. (20). Contrary to previous work, the estimated visibilities do not match the observed visibilities, where modeled values are significantly smaller than the observed values (Fig. 7). We stress that the discrepancy is not due to the use of the formalism correct for strong coupling introduced by Takata (2016a,b). In fact, the difference



**Fig. 7.** Observed visibilities  $v_1$  for the *Kepler* public data set of red giants, as a function of  $\nu_{\max}$ . Values for stars showing depressed mixed modes are emphasized with large diamonds and compared to the computed visibilities: large dark triangles for the low-coupling case (Eq. (16), as in Unno et al. 1989; Fuller et al. 2015) are very close to black squares for the strong-coupling case (Eq. (20)). Gray lines connect the observed and modeled values.

is as high as a factor of 4 for the term  $\tau_0 T^2$  of Eq. (13). Relative uncertainties on  $q$  and  $\Gamma_0$  cannot explain such a high difference. However, the disagreement is consistent with partial suppression of the oscillation in the core since observed visibilities are larger than modeled values. This evidence is ascertained by the fact that, as made clear by Fig. 7, not only stars with depressed mixed modes have observed visibilities that are much larger than predicted by the model. The discrepancy certainly indicates that previous analysis were based on inappropriate estimates of  $T$ .

## 5. Discussion

### 5.1. Depressed modes are mixed

Important facts were inferred from the observations presented in the previous sections: first, depressed modes are identified as mixed modes for all stars observed with a sufficient signal-to-noise ratio; second, period spacings of stars with depressed modes resemble normal period spacings; and third, core rotation rates also follow the normal distribution. We consider these three pieces of information next.

#### 5.1.1. Depressed mixed modes

Mixed modes were directly or indirectly observed in many stars showing low visibilities. As already stated, the hypothesis of full suppression of the oscillation in the core is invalidated, since mixed modes result from the coupling of pressure waves in the envelope and gravity waves in the core. This observational result breaks the statement that the observation of low visibilities implies the suppression of the oscillation in the core. A mechanism able to damp the oscillation only partially is needed for explaining the low visibilities.

As a result, the mechanism proposed by Fuller et al. (2015) is not fully adequate since it relies on the total suppression of the dipole modes in the core. Furthermore, the equivalence between low visibility and magnetic greenhouse effect accepted

in follow-up papers (Cantiello et al. 2016; Stello et al. 2016b) is questionable.

### 5.1.2. Period spacings of depressed mixed modes

The measurement of normal period spacings in stars with depressed modes allows us to derive further information, since such spacings imply that the resonant cavity of gravity modes is not perturbed by the suppression mechanism. The mechanism responsible for the damping cannot modify the Brunt-Väisälä cavity at the high level of precision reached with seismology.

In that respect, the scattering process associated with the magnetic greenhouse effect is invalidated since it would modify the resonance condition of dipole modes with a smaller resonant cavity for the gravity waves (Fig. 1 of Fuller et al. 2015) and, hence, larger period spacings. Larger period spacings are not observed for depressed mixed modes. This proves that the magnetic greenhouse effect cannot explain the many cases where depressed mixed modes are observed. This mechanism may work in some other cases, but proving it then requires more information than simply having the visibilities of dipole modes. In any case, at this stage, the magnetic greenhouse effect cannot be a general solution for explaining depressed modes, and it is impossible to conclude the identity of the mechanism able to lower the dipole mode amplitude.

### 5.1.3. Rotational splittings of depressed mixed modes

The identification of the normal rotational splittings in stars with depressed modes provides us with similar conclusions. If there were a strong magnetic field in the cores of the stars with depressed modes, then Cantiello et al. (2016) predict that an extra magnetic splitting, which is comparable to the gravity mode period spacing in RGB stars, would be observed. As the core rotation rates inferred from the mixed-mode pattern follow a similar distribution to the reference set of stars, we can rule out the presence of the extra, magnetic splitting.

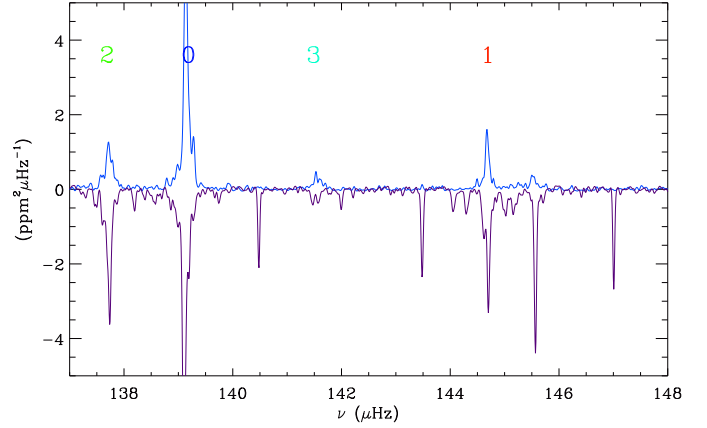
## 5.2. From individual visibilities to extra damping

The study of the widths of dipole mixed modes can provide promising information on the way amplitude are distributed in mixed modes. We illustrate this potential with the comparison of two twin stars with very close  $\Delta\nu$  and  $\Delta\Pi_1$ . The star with normal visibility is used as a reference for the other with depressed modes. The resemblance of their mixed-mode pattern allowed us to compare their individual visibilities  $v_{n_m}$  (Fig. 8). The simplifications introduced either for normal stars (Sect. 2.2) or in the extreme case of full suppression of the oscillation in the core (Sect. 2.3) do not hold any more for the star with depressed modes. We have to rewrite Eq. (4) in case of an extra damping. For radial modes, we have

$$\Gamma_0 I_0 = -\frac{1}{\omega_0} \oint \delta W_0, \quad (23)$$

where  $\omega_0$  is the radial frequency and the cyclic integral represents the work during one radial oscillation. For a mixed mode, we have an extra damping, so that

$$\Gamma_{n_m} I_{n_m} = -\frac{1}{\omega_{n_m}} \oint \delta W_{n_m} \simeq -\frac{1}{\omega_{n_m}} \oint (\delta W_0 + \delta W_{\text{extra}}), \quad (24)$$



**Fig. 8.** Comparison of the smoothed spectra of two stellar twins, KIC 5295898 (with depressed modes; blue curve) and KIC 2157650 (with normal modes, nearly seen pole on; purple curve printed upside down). The width of the smoothing filter is  $0.05 \mu\text{Hz}$ , which is much smaller than the expected width of dipole modes if not mixed. A small shift in frequency is needed to superimpose the peaks.

assuming that the normal dipole work is similar to the radial work, except for the extra damping (e.g., Dupret et al. 2009; Benomar et al. 2014; Grosjean et al. 2014). Since radial and non-radial frequencies are close to each other, we have

$$\Gamma_{n_m} I_{n_m} = \Gamma_0 I_0 (1 + x), \quad (25)$$

with a similar definition for  $x$  as in Eq. (10);  $x$  represents the relative contribution of the extra damping.

From Eq. (4), we obtain a new expression for the mixed mode visibility,

$$v_{n_m} \simeq \frac{I_0}{(1+x)I_{n_m}} \simeq \frac{\Gamma_{n_m}}{(1+x)^2 \Gamma_0}, \quad (26)$$

which demonstrates the capability of mixed modes to measure the relative extra damping  $x$ .

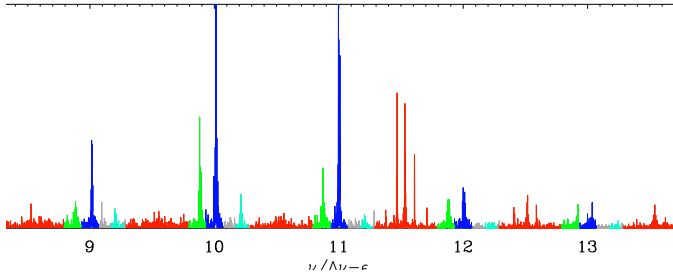
If we simply assume that  $x$  has limited variation in frequency, the total contribution  $v$  of the individual visibilities provides an estimate of the extra damping,

$$x \simeq \frac{1-v}{v}. \quad (27)$$

According to this relation, the magnitude of this relative extra-damping significantly decreases with stellar evolution. Very low visibilities observed for stars on the low RGB are due to a large absorption ( $x \simeq 9$  when  $v_1 = 0.1$ ), but  $x \simeq 0.7$  only when  $v_1 = 0.6$ . For KIC 5295898 shown in Fig. 8,  $x \simeq 2.6$ .

### 5.3. No man's land

For completeness, we fitted the stars in the no man's land between normal and low-visibility stars (Figs. 3a and 7). We checked that these stars behave as other stars with similar seismic parameters. The presence of such stars is crucial for at least two reasons. First, they show that intermediate values between normal and low visibilities are possible. Second, those stars represent the intermediate case between normal and low visibility. This reinforces the fact that stars in which depressed mixed modes could be fully characterized are representative of all stars with low-amplitude dipole modes.



**Fig. 9.** Spectrum of the RGB star KIC 6975038 showing a strong gradient of the dipole mode amplitudes. Dipole modes have very low amplitudes below the radial order 11 and normal amplitudes above.

#### 5.4. Visibility gradient

Three stars of our data set exhibit a clear visibility gradient: KIC 6975038 (Fig. 9), 7746983, and 8561221.

- The case of KIC 6975038 is investigated in Mosser et al. (in prep.). This star shows atypical seismic parameters:  $\Delta\Pi_1$  is very low and  $q$  is unusually large compared to the general trend on the RGB (Mosser et al. 2015; Vrad et al. 2016). This star deserves a precise modeling beyond the scope of this work.
- KIC 8561221 was identified by García et al. (2014) as the least evolved observed star with depressed dipole modes among red giants observed with *Kepler*. It shows a very low dipole-mode visibility (Table A.1). However, mixed modes can be firmly identified. The asymptotic period spacing  $\Delta\Pi_1 \approx 114.8$  s is typical for  $\Delta\nu \approx 29.8 \mu\text{Hz}$ , but the core rotation of this star seems very high. We measure a core rotation rate of about  $2.6 \mu\text{Hz}$  in contradiction with the values extracted from  $\ell = 2$  and  $\ell = 3$  modes by García et al. (2014).
- Compared to the two previous stars, the seismic parameters of KIC 7746983 are close to the values obtained on the RGB; only the dipole mode visibility is atypical. This gradient appears to be helpful for characterizing the mixed mode pattern; after KIC 8561221, this star is the second least evolved in our data set with low-dipole visibility.

The change of visibility with frequency was used by Fuller et al. (2015) as a further argument in favor of a large magnetic field for explaining the suppression of the oscillation, since the variation of the visibility with frequency matches their prediction. A more conservative analysis consists in remarking that the physics of oscillation damping has to be frequency dependent. Red giants showing a gradient of dipole visibility are certainly useful benchmark stars for understanding the nature and physics of the extra damping of the oscillation.

## 6. Conclusion

We performed a thorough study of red giants showing low dipole-mode visibility, based on the identification of their dipole mode pattern and the characterization of their global seismic properties. We have shown that these stars share the same global seismic parameters as other stars, regardless of the value of the dipole mode visibilities. This analysis sustains the fact that the mechanism responsible for the damping does not significantly impact the stellar structure and does not change the property of the cavity where gravity waves propagate.

We were able to determine that dipole depressed modes are mixed, even at very low visibilities. The existence of these depressed mixed modes implies that oscillations cannot be fully suppressed in the radiative core. Also, the observed visibilities are significantly higher than predicted from the modeling assuming full suppression in the core, which is consistent with partial suppression of the core oscillation only. Furthermore, the observations of normal period spacings in stars with depressed mixed modes indicate that the radiative core of these stars is not affected by the suppression mechanism.

These precise seismic signatures indicate that the magnetic greenhouse effect cannot explain the observed low visibilities of dipole modes (Fuller et al. 2015). This effect supposes the full suppression of the oscillation, which is discarded by the fact that depressed modes are mixed. Even if the mechanism could work with partial suppression only, the scattering process induced by the magnetic field in the radiative core is dismissed by the observation of the period spacings. As a result, inferring high magnetic fields in red giant from low visibilities (Stello et al. 2016b; Cantiello et al. 2016) is at least premature. This conclusion applies in the vast majority of stars that show low visibilities.

The low integrated visibilities reflect an extra mode damping but, at this stage, carry no direct information on the nature of this damping. Another damping mechanism must be found. This mechanism, which partially damps the dipole mixed modes, could be characterized by the measurement of the mixed mode widths.

*Acknowledgements.* We acknowledge the entire *Kepler* team, whose efforts made these results possible. B.M. thanks Jim Fuller for interesting discussions. B.M., K.B., C.P., C.B., M.J.G., and R.S. acknowledge financial support from the Programme National de Physique Stellaire (CNRS/INSU), from the French space agency CNES, and from the ANR program IDEE Interaction Des Étoiles et des Exoplanètes. M.T. is partially supported by JSPS KAKENHI Grant Number 26400219. M.V. acknowledges funding by the Portuguese Science foundation through the grant CIAAUP-03/2016-BPD, in the context of the project FIS/04434, co-funded by FEDER through the program COMPETE.

## References

- Ballot, J., Barban, C., & van't Veer-Menneret, C. 2011, *A&A*, 531, A124  
 Baudin, F., Barban, C., Belkacem, K., et al. 2011, *A&A*, 529, A84  
 Beck, P. G., Montalbán, J., Kallinger, T., et al. 2012, *Nature*, 481, 55  
 Bedding, T. R., Mosser, B., Huber, D., et al. 2011, *Nature*, 471, 608  
 Belkacem, K., Samadi, R., Goupil, M.-J., & Dupret, M.-A. 2008, *A&A*, 478, 163  
 Belkacem, K., Marques, J. P., Goupil, M. J., et al. 2015, *A&A*, 579, A31  
 Benomar, O., Belkacem, K., Bedding, T. R., et al. 2014, *ApJ*, 781, L29  
 Cantiello, M., Fuller, J., & Bildsten, L. 2016, *ApJ*, 824, 14  
 Chaplin, W. J., Kjeldsen, H., Christensen-Dalsgaard, J., et al. 2011, *Science*, 332, 213  
 Corsaro, E., Stello, D., Huber, D., et al. 2012, *ApJ*, 757, 190  
 Corsaro, E., De Ridder, J., & García, R. A. 2015, *A&A*, 579, A83  
 Deheuvels, S., García, R. A., Chaplin, W. J., et al. 2012, *ApJ*, 756, 19  
 Deheuvels, S., Doğan, G., Goupil, M. J., et al. 2014, *A&A*, 564, A27  
 Deheuvels, S., Ballot, J., Beck, P. G., et al. 2015, *A&A*, 580, A96  
 De Ridder, J., Barban, C., Baudin, F., et al. 2009, *Nature*, 459, 398  
 Dupret, M., Belkacem, K., Samadi, R., et al. 2009, *A&A*, 506, 57  
 Dziembowski, W. A. 2012, *A&A*, 539, A83  
 Epstein, C. R., Elsworth, Y. P., Johnson, J. A., et al. 2014, *ApJ*, 785, L28  
 Fuller, J., Cantiello, M., Stello, D., Garcia, R. A., & Bildsten, L. 2015, *Science*, 350, 423  
 García, R. A., Pérez Hernández, F., Benomar, O., et al. 2014, *A&A*, 563, A84  
 Gaulme, P., Jackiewicz, J., Appourchaux, T., & Mosser, B. 2014, *ApJ*, 785, 5  
 Goupil, M. J., Mosser, B., Marques, J. P., et al. 2013, *A&A*, 549, A75  
 Grosjean, M., Dupret, M.-A., Belkacem, K., et al. 2014, *A&A*, 572, A11  
 Huber, D., Silva Aguirre, V., Matthews, J. M., et al. 2014, *ApJS*, 211, 2  
 Kallinger, T., Mosser, B., Hekker, S., et al. 2010, *A&A*, 522, A1

- Kallinger, T., Hekker, S., Mosser, B., et al. 2012, [A&A](#), **541**, [A51](#)
- Lagarde, N., Bossini, D., Miglio, A., Vradar, M., & Mosser, B. 2016, [MNRAS](#), **457**, [L59](#)
- Mathur, S., Hekker, S., Trampedach, R., et al. 2011, [ApJ](#), **741**, [119](#)
- Michel, E., Baglin, A., Auvergne, M., et al. 2008, [Science](#), **322**, [558](#)
- Miglio, A., Montalbán, J., Baudin, F., et al. 2009, [A&A](#), **503**, [L21](#)
- Montalbán, J., & Noels, A. 2013, in [Eur. Phys. J. Web of Conf.](#), **43**, [3002](#)
- Mosser, B. 2015, [EAS Pub. Ser.](#), **73**, [3](#)
- Mosser, B., & Miglio, A. 2016, in the CoRoT Legacy Book, ed. the CoRoT Team, Coordination A. Baglin (France: EDP Sciences), 197
- Mosser, B., Belkacem, K., Goupil, M., et al. 2010, [A&A](#), **517**, [A22](#)
- Mosser, B., Barban, C., Montalbán, J., et al. 2011, [A&A](#), **532**, [A86](#)
- Mosser, B., Elsworth, Y., Hekker, S., et al. 2012a, [A&A](#), **537**, [A30](#)
- Mosser, B., Goupil, M. J., Belkacem, K., et al. 2012b, [A&A](#), **548**, [A10](#)
- Mosser, B., Goupil, M. J., Belkacem, K., et al. 2012c, [A&A](#), **540**, [A143](#)
- Mosser, B., Michel, E., Belkacem, K., et al. 2013, [A&A](#), **550**, [A126](#)
- Mosser, B., Benomar, O., Belkacem, K., et al. 2014, [A&A](#), **572**, [L5](#)
- Mosser, B., Vradar, M., Belkacem, K., Deheuvels, S., & Goupil, M. J. 2015, [A&A](#), **584**, [A50](#)
- Samadi, R., Belkacem, K., & Sonoi, T. 2015, in [EAS Publ. Ser.](#), **73**, [111](#)
- Stello, D., Chaplin, W. J., Basu, S., Elsworth, Y., & Bedding, T. R. 2009, [MNRAS](#), **400**, [L80](#)
- Stello, D., Cantiello, M., Fuller, J., Garcia, R. A., & Huber, D. 2016a, [PASA](#), **33**, [e011](#)
- Stello, D., Cantiello, M., Fuller, J., et al. 2016b, [Nature](#), **529**, [364](#)
- Takata, M. 2016a, [PASJ](#), **68**, [109](#)
- Takata, M. 2016b, [PASJ](#), **68**, [91](#)
- Unno, W., Osaki, Y., Ando, H., Saio, H., & Shibahashi, H. 1989, in *Nonradial oscillations of stars*, eds. W., Unno, Y., Osaki, H., Ando, H., Saio, & H., Shibahashi
- Vradar, M., Mosser, B., Barban, C., et al. 2015, [A&A](#), **579**, [A84](#)
- Vradar, M., Mosser, B., & Samadi, R. 2016, [A&A](#), **588**, [A87](#)



## Appendix A: Additional table

Table A.1. Seismic properties of 71 stars showing depressed mixed modes.

KIC	Evolutionary stage (1)	$\nu_{\max}$ ( $\mu\text{Hz}$ )	$\Delta\nu$ ( $\mu\text{Hz}$ )	$\Delta\Pi_1$ (s)	$q$ (2)	$M$ ( $M_{\odot}$ )	$\Gamma_0$ ( $\mu\text{Hz}$ ) (3)	$\delta\nu_{\text{rot}}$ (nHz) (4)	$\nu_1$	$\nu$ Low	$\nu$ Strong
2573092	RC	35.3	4.08	293.8	0.24	1.48	0.14	35	0.60	0.181	0.178
2858129	RC2	40.5	4.22	320.9	0.26	1.93	0.16	80	0.58	0.181	0.178
2992350	RC	45.9	4.72	242.8	0.26	1.59	0.12	35	0.58	0.134	0.132
3443483	RGB	132.2	10.71	71.8	0.15	1.71	0.13	230	0.16	0.113	0.112
3532734	RGB	145.2	11.83	75.3	0.12	1.63	0.09	0	0.23	0.095	0.095
3660245	RC	33.3	4.22	297.0	0.25	1.19	0.15	35	0.65	0.181	0.178
3758505	RGB	157.4	12.06	80.6	0.15	1.84	0.13	500	0.14	0.100	0.099
4180939	RC2	65.2	5.80	241.0	0.24	2.29	0.11	50	0.55	0.114	0.112
4587050	RGB	191.2	14.47	73.8	0.10	1.60	0.08	530	0.26	0.080	0.080
4761301	RC	30.8	4.49	338.3	0.30	0.76	0.25	65	0.63	0.229	0.224
4772722	RC	37.3	4.30	310.0	0.31	1.42	0.18	38	0.67	0.175	0.170
5007332	RGB	96.9	8.44	68.7	0.10	1.76	0.14	310	0.37	0.204	0.204
5179471	RC2	47.0	4.56	256.0	0.28	2.17	0.10	110	0.64	0.109	0.106
5295898	RGB	142.9	11.39	75.3	0.10	1.72	0.10	210	0.23	0.123	0.123
5306667	RC	39.5	4.28	268.0	0.28	1.77	0.14	25	0.67	0.158	0.154
5339823	RC	40.4	4.28	317.2	0.45	1.76	0.16	80	0.45	0.115	0.108
5620720	RC2	57.0	5.35	264.7	0.29	2.14	0.14	45	0.45	0.124	0.121
5881079	RGB	67.2	6.14	68.3	0.10	1.96	0.17	0	0.62	0.303	0.302
5949964	RC	37.8	4.29	316.3	0.35	1.50	0.23	40	0.59	0.194	0.187
6037858	RC	43.3	4.57	244.4	0.25	1.76	0.16	50	0.45	0.178	0.174
6130770	RC	35.1	4.13	322.9	0.30	1.48	0.12	40	0.62	0.132	0.128
6210264	RC	40.7	4.78	290.0	0.25	1.60	0.17	60	0.63	0.183	0.180
6232858	RC2	50.0	4.90	235.8	0.28	1.87	0.11	55	0.51	0.115	0.112
6610354	RC2	46.9	4.57	209.3	0.28	2.44	0.11	65	0.55	0.119	0.116
6975038	RGB	128.4	10.61	57.9	0.35	1.44	0.14	280	0.27	0.056	0.054
7512378	RC	32.5	3.84	310.0	0.32	1.34	0.16	45	0.70	0.170	0.165
7515137	RGB	67.2	6.75	61.1	0.12	1.32	0.09	0	0.55	0.149	0.148
7693833	RGB	31.8	4.02	56.6	0.10	1.05	0.11	0	0.55	0.301	0.300
7746983	RGB	188.6	14.74	83.3	0.18	1.40	0.09	190	0.17	0.050	0.049
8009582	RC	35.2	4.21	282.4	0.22	1.36	0.08	30	0.56	0.120	0.118
8025383	RC	36.1	4.14	313.5	0.25	1.41	0.16	25	0.58	0.195	0.192
8283646	RGB	67.2	6.15	66.5	0.10	1.93	0.14	100	0.38	0.263	0.263
8391175	RGB	87.4	7.77	69.0	0.12	1.72	0.10	0	0.36	0.144	0.144
8396782	RC2	82.3	7.04	241.8	0.30	2.00	0.20	200	0.42	0.129	0.126
8432219	RC	42.3	4.59	283.2	0.30	1.66	0.24	45	0.55	0.215	0.210
8476202	RGB	109.7	9.42	71.7	0.12	1.57	0.09	0	0.27	0.110	0.110
8522050	RC2	75.5	6.72	188.1	0.30	2.06	0.16	60	0.59	0.108	0.105
8564277	RC	31.9	4.00	307.0	0.31	1.09	0.23	25	0.47	0.226	0.220
8564559	RC	45.8	4.70	240.9	0.25	1.79	0.15	40	0.62	0.167	0.164
8636174	RC2	43.9	4.51	305.7	0.25	2.00	0.16	35	0.58	0.182	0.179
8687248	RGB	170.0	13.10	77.8	0.12	1.59	0.14	0	0.32	0.123	0.122
8689599	RC	30.4	3.93	299.3	0.32	1.17	0.14	35	0.63	0.149	0.144
8771414	RC	38.6	4.23	274.0	0.25	1.82	0.11	28	0.58	0.139	0.137
8827934	RGB	55.0	5.37	63.8	0.15	1.80	0.14	0	0.51	0.214	0.213
9115334	RC2	67.5	6.09	179.2	0.30	2.00	0.19	220	0.38	0.137	0.134
9176207	RC2	59.2	5.41	314.6	0.24	1.96	0.15	100	0.57	0.157	0.154
9229592	RGB	72.0	6.85	67.2	0.15	1.62	0.14	230	0.51	0.173	0.172
9279486	RGB	132.4	10.89	76.8	0.12	1.59	0.15	200	0.30	0.149	0.149
9291830	RC2	47.5	4.41	261.8	0.30	2.50	0.15	70	0.44	0.151	0.147
9581849	RC	34.6	4.08	270.5	0.37	1.43	0.20	30	0.66	0.172	0.165
9650046	RC2	68.2	6.02	283.5	0.25	2.42	0.17	90	0.51	0.147	0.144
9711269	RGB	64.1	6.44	64.2	0.10	1.39	0.12	0	0.43	0.219	0.218
9719858	RC2	47.8	4.48	285.8	0.25	2.62	0.15	90	0.68	0.174	0.171
9947511	RC	30.7	3.75	349.5	0.33	1.35	0.22	30	0.69	0.218	0.212
10029821	RC2	64.6	5.90	259.3	0.29	2.08	0.16	50	0.61	0.129	0.126
10091729	RC2	72.8	6.34	295.3	0.23	2.18	0.20	60	0.54	0.175	0.173
10420655	RC	37.5	4.26	298.6	0.28	1.39	0.21	50	0.64	0.217	0.212
10422589	RC2	50.2	5.04	223.1	0.24	2.15	0.17	60	0.62	0.181	0.178
10469976	RC2	52.7	4.81	258.0	0.30	2.35	0.14	30	0.49	0.132	0.129
10528917	RGB	76.4	7.52	73.1	0.13	1.36	0.08	220	0.56	0.111	0.111
10653383	RC	40.1	4.42	248.5	0.26	1.60	0.13	30	0.53	0.151	0.148
10854564	RC	29.9	4.26	293.5	0.22	0.69	0.26	30	0.66	0.304	0.300
11413158	RC2	58.1	4.99	210.6	0.28	2.86	0.15	80	0.68	0.149	0.146
11462972	RC2	29.9	4.26	318.0	0.26	1.89	0.13	30	0.49	0.154	0.151
11519450	RGB	72.8	6.87	68.1	0.14	1.65	0.10	180	0.54	0.139	0.138
11598312	RC2	48.0	4.82	281.5	0.22	1.96	0.13	50	0.47	0.161	0.159
12058556	RGB	105.0	9.35	72.7	0.15	1.40	0.11	0	0.31	0.110	0.109
12070510	RC	35.3	4.06	304.9	0.23	1.36	0.14	50	0.52	0.191	0.188
12109388	RC	40.9	4.25	245.3	0.26	1.82	0.13	50	0.60	0.152	0.149
12453551	RC2	51.2	5.02	270.8	0.29	2.04	0.19	70	0.60	0.170	0.166
12691734	RC2	46.8	4.34	338.5	0.31	2.73	0.15	50	0.69	0.151	0.147

**Notes.** (1) RGB: red giant branch; RC: red clump; RC2: secondary red clump. (2) Uncertainties on  $q$  are of about  $\pm 0.027$  for stars on the RGB and  $\pm 0.057$  in the red clump. (3) Uncertainties on  $\Gamma_0$  are of about 30%. (4) A null value for  $\delta\nu_{\text{rot}}$  indicates that the rotational splitting could not be measured because the star is seen pole-on.

# Bibliographie

- Abramowitz, M. & Stegun, I.A. (1972). *Handbook of Mathematical Functions*.
- Aerts, C., Christensen-Dalsgaard, J. & Kurtz, D.W. (2010). *Asteroseismology*.
- Alvan, L., Brun, A.S. & Mathis, S. (2014). Theoretical seismology in 3D : nonlinear simulations of internal gravity waves in solar-like stars. *A&A*, 565:A42.
- Alvan, L., Mathis, S. & Decressin, T. (2013). Coupling between internal waves and shear-induced turbulence in stellar radiation zones : the critical layers. *A&A*, 553:A86.
- Alvan, L., Strugarek, A., Brun, A.S., Mathis, S. & Garcia, R.A. (2015). Characterizing the propagation of gravity waves in 3D nonlinear simulations of solar-like stars. *ArXiv e-prints*.
- Amard, L., Palacios, A., Charbonnel, C., Gallet, F. & Bouvier, J. (2016). Rotating models of young solar-type stars. Exploring braking laws and angular momentum transport processes. *A&A*, 587:A105.
- Andersen, B.N. (1994). Excitation of solar gravity waves. *Solar Physics*, 152:241–246.
- Ando, H. (1983). Wave-rotation interaction in stars. *PASJ*, 35:343–353.
- Andrews, D.G. & McIntyre, M.E. (1976). Planetary Waves in Horizontal and Vertical Shear : The Generalized Eliassen-Palm Relation and the Mean Zonal Acceleration. *Journal of Atmospheric Sciences*, 33:2031–2048.
- Andrews, D.G. & McIntyre, M.E. (1978a). Generalized Eliassen-Palm and Charney-Drazin Theorems for Waves on Axisymmetric Mean Flows in Compressible Atmospheres. *Journal of Atmospheric Sciences*, 35:175–185.
- Andrews, D.G. & McIntyre, M.E. (1978b). On wave-action and its relatives. *Journal of Fluid Mechanics*, 89:647–664.
- Appourchaux, T., Antia, H.M., Benomar, O., Campante, T.L., Davies, G.R., Handberg, R., Howe, R., Régulo, C. et al. (2014). Oscillation mode linewidths and heights of 23 main-sequence stars observed by Kepler. *A&A*, 566:A20.
- Appourchaux, T., Belkacem, K., Broomhall, A.M., Chaplin, W.J., Gough, D.O., Houdek, G., Provost, J., Baudin, F. et al. (2010). The quest for the solar g modes. *A&A Rev.*, 18:197–277.
- Appourchaux, T., Benomar, O., Gruberbauer, M., Chaplin, W.J., García, R.A., Handberg, R., Verner, G.A., Antia, H.M. et al. (2012). Oscillation mode linewidths of main-sequence and subgiant stars observed by Kepler. *A&A*, 537:A134.
- Appourchaux, T. & Pallé, P.L. (2013). The History of the g-mode Quest. In Jain, K., Tripathy, S.C., Hill, F., Leibacher, J.W. & Pevtsov, A.A., éditeurs : *Fifty Years of Seismology of the Sun and Stars*, volume 478 de *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, page 125.

- Asplund, M., Grevesse, N. & Sauval, A.J. (2005). The Solar Chemical Composition. *In* Barnes, III, T.G. & Bash, F.N., éditeurs : *Cosmic Abundances as Records of Stellar Evolution and Nucleosynthesis*, volume 336 de *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, page 25.
- Asplund, M., Grevesse, N., Sauval, A.J. & Scott, P. (2009). The Chemical Composition of the Sun. *ARA&A*, 47:481–522.
- Badnell, N.R., Bautista, M.A., Butler, K., Delahaye, F., Mendoza, C., Palmeri, P., Zeippen, C.J. & Seaton, M.J. (2005). Updated opacities from the Opacity Project. *MNRAS*, 360:458–464.
- Baglin, A., Auvergne, M., Barge, P., Deleuil, M., Catala, C., Michel, E., Weiss, W. & COROT Team (2006a). Scientific Objectives for a Minisat : CoRoT. *In* Fridlund, M., Baglin, A., Lochard, J. & Conroy, L., éditeurs : *ESA Special Publication*, volume 1306 de *ESA Special Publication*, page 33.
- Baglin, A., Auvergne, M., Boisnard, L., Lam-Trong, T., Barge, P., Catala, C., Deleuil, M., Michel, E. et al. (2006b). CoRoT : a high precision photometer for stellar evolution and exoplanet finding. *In* 36th COSPAR Scientific Assembly, volume 36 de *COSPAR Meeting*, page 3749.
- Bahcall, J.N. & Davis, Jr., R. (2000). The Evolution of Neutrino Astronomy. *PASP*, 112:429–433.
- Bahcall, J.N. & Pinsonneault, M.H. (1992). Helium diffusion in the sun. *ApJ*, 395:L119–L122.
- Barban, C., Michel, E., Martić, M., Schmitt, J., Lebrun, J.C., Baglin, A. & Bertaux, J.L. (1999). Solar-like oscillations of Procyon A : stellar models and time series simulations versus observations. *A&A*, 350:617–625.
- Barnabé, R., Strugarek, A., Charbonneau, P., Brun, A.S. & Zahn, J.P. (2017). Confinement of the solar tachocline by a cyclic dynamo magnetic field. *A&A*, 601:A47.
- Basu, S. (1997). Seismology of the base of the solar convection zone. *MNRAS*, 288:572–584.
- Basu, S. & Antia, H.M. (1995). Helium Abundance in the Solar Envelope. *In* *Helioseismology*, volume 376 de *ESA Special Publication*, page 35.
- Basu, S. & Antia, H.M. (2004). Constraining Solar Abundances Using Helioseismology. *ApJ*, 606:L85–L88.
- Basu, S., Pinsonneault, M.H. & Bahcall, J.N. (2000). How Much Do Helioseismological Inferences Depend on the Assumed Reference Model? *ApJ*, 529:1084–1100.
- Baudin, F., Elsworth, Y., Hekker, S., Kallinger, T., Stello, D., Mosser, B., Appourchaux, T., Belkacem, K. et al. (2013). Mode Line Widths in Red-Giant Stars. *In* Shibahashi, H. & Lynas-Gray, A.E., éditeurs : *Progress in Physics of the Sun and Stars : A New Era in Helio- and Asteroseismology*, volume 479 de *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, page 179.
- Bedding, T.R., Huber, D., Stello, D., Elsworth, Y.P., Hekker, S., Kallinger, T., Mathur, S., Mosser, B. et al. (2010). Solar-like Oscillations in Low-luminosity Red Giants : First Results from Kepler. *ApJ*, 713:L176–L181.
- Bedding, T.R., Mosser, B., Huber, D., Montalbán, J., Beck, P., Christensen-Dalsgaard, J., Elsworth, Y.P., García, R.A. et al. (2011). Gravity modes as a way to distinguish between hydrogen- and helium-burning red giant stars. *Nature*, 471:608–611.
- Belkacem, K., Dupret, M.A., Baudin, F., Appourchaux, T., Marques, J.P. & Samadi, R. (2012). Damping rates of solar-like oscillations across the HR diagram. Theoretical calculations confronted to CoRoT and Kepler observations. *A&A*, 540:L7.

- Belkacem, K., Goupil, M.J., Dupret, M.A., Samadi, R., Baudin, F., Noels, A. & Mosser, B. (2011). The underlying physical meaning of the  $\nu_{max} - \nu_c$  relation. *A&A*, 530:A142.
- Belkacem, K., Marques, J.P., Goupil, M.J., Mosser, B., Sonoi, T., Ouazzani, R.M., Dupret, M.A., Mathis, S. et al. (2015a). Angular momentum redistribution by mixed modes in evolved low-mass stars. II. Spin-down of the core of red giants induced by mixed modes. *A&A*, 579:A31.
- Belkacem, K., Marques, J.P., Goupil, M.J., Sonoi, T., Ouazzani, R.M., Dupret, M.A., Mathis, S., Mosser, B. et al. (2015b). Angular momentum redistribution by mixed modes in evolved low-mass stars. I. Theoretical formalism. *A&A*, 579:A30.
- Belkacem, K., Samadi, R., Goupil, M.J., Baudin, F., Salabert, D. & Appourchaux, T. (2010). Turbulent eddy-time-correlation in the solar convective zone. *A&A*, 522:L2.
- Belkacem, K., Samadi, R., Goupil, M.J. & Dupret, M.A. (2008). Stochastic excitation of non-radial modes. I. High-angular-degree p modes. *A&A*, 478:163–174.
- Belkacem, K., Samadi, R., Goupil, M.J., Dupret, M.A., Brun, A.S. & Baudin, F. (2009). Stochastic excitation of nonradial modes. II. Are solar asymptotic gravity modes detectable? *A&A*, 494:191–204.
- Belkacem, K., Samadi, R., Mosser, B., Goupil, M.J. & Ludwig, H.G. (2013). On the seismic scaling relations  $\Delta\nu - \rho$  and  $\nu_{max} - \nu_c$ . In Shibahashi, H. & Lynas-Gray, A.E., éditeurs : *Progress in Physics of the Sun and Stars : A New Era in Helio- and Asteroseismology*, volume 479 de *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, page 61.
- Benomar, O., Takata, M., Shibahashi, H., Ceillier, T. & García, R.A. (2015). Nearly uniform internal rotation of solar-like main-sequence stars revealed by space-based asteroseismology and spectroscopic measurements. *MNRAS*, 452:2654–2674.
- Böhm-Vitense, E. (1958). Über die Wasserstoffkonvektionszone in Sternen verschiedener Effektivtemperaturen und Leuchtkräfte. Mit 5 Textabbildungen. *Zeitschrift für Astrophysik*, 46:108.
- Borucki, W.J., Koch, D., Basri, G., Batalha, N., Brown, T., Caldwell, D., Caldwell, J., Christensen-Dalsgaard, J. et al. (2010). Kepler Planet-Detection Mission : Introduction and First Results. *Science*, 327:977–.
- Borucki, W.J., Koch, D.G., Batalha, N., Bryson, S.T., Rowe, J., Fressin, F., Torres, G., Caldwell, D.A. et al. (2012). Kepler-22b : A 2.4 Earth-radius Planet in the Habitable Zone of a Sun-like Star. *ApJ*, 745:120.
- Bouvier, J. (2013). Observational studies of stellar rotation. In Hennebelle, P. & Charbonnel, C., éditeurs : *EAS Publications Series*, volume 62 de *EAS Publications Series*, pages 143–168.
- Braithwaite, J. & Spruit, H.C. (2017). Magnetic fields in non-convective regions of stars. *Royal Society Open Science*, 4:160271.
- Bretherton, F.P. (1969). Momentum transport by gravity waves. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 95:213–243.
- Bretherton, F.P. & Garrett, C.J.R. (1968). Wavetrains in Inhomogeneous Moving Media. *Proceedings of the Royal Society of London Series A*, 302:529–554.
- Brown, T.M., Christensen-Dalsgaard, J., Dziembowski, W.A., Goode, P., Gough, D.O. & Morrow, C.A. (1989). Inferring the sun’s internal angular velocity from observed p-mode frequency splittings. *ApJ*, 343:526–546.

- Brummell, N.H., Clune, T.L. & Toomre, J. (2002). Penetration and Overshooting in Turbulent Compressible Convection. *ApJ*, 570:825–854.
- Brun, A.S. & Zahn, J.P. (2006). Magnetic confinement of the solar tachocline. *A&A*, 457:665–674.
- Buldgen, G., Salmon, S.J.A.J., Godart, M., Noels, A., Scuflaire, R., Dupret, M.A., Reese, D.R., Colgan, J. et al. (2017). Inversions of the Ledoux discriminant : a closer look at the tachocline. *MNRAS*, 472:L70–L74.
- Buysschaert, B., Beck, P.G., Corsaro, E., Christensen-Dalsgaard, J., Aerts, C., Arentoft, T., Kjeldsen, H., García, R.A. et al. (2016). Testing the asymptotic relation for period spacings from mixed modes of red giants observed with the Kepler mission. *A&A*, 588:A82.
- Buzasi, D., Catanzarite, J., Laher, R., Conrow, T., Shupe, D., Gautier, III, T.N., Kreidl, T. & Everett, D. (2000). The Detection of Multimodal Oscillations on  $\alpha$  Ursae Majoris. *ApJ*, 532:L133–L136.
- Cantiello, M., Mankovich, C., Bildsten, L., Christensen-Dalsgaard, J. & Paxton, B. (2014). Angular Momentum Transport within Evolved Low-mass Stars. *ApJ*, 788:93.
- Ceillier, T., Eggenberger, P., García, R.A. & Mathis, S. (2013). Understanding angular momentum transport in red giants : the case of KIC 7341231. *A&A*, 555:A54.
- Chaplin, W.J. (1997). A Key to Understanding the Sun and Stars : The Birmingham Solar-Oscillations Network (BiSON). *Irish Astronomical Journal*, 24.
- Chaplin, W.J. & Miglio, A. (2013). Asteroseismology of Solar-Type and Red-Giant Stars. *ARA&A*, 51:353–392.
- Charbonnel, C., Decressin, T., Amard, L., Palacios, A. & Talon, S. (2013). Impact of internal gravity waves on the rotation profile inside pre-main sequence low-mass stars. *A&A*, 554:A40.
- Charbonnel, C. & Talon, S. (2005). Influence of Gravity Waves on the Internal Rotation and Li Abundance of Solar-Type Stars. *Science*, 309:2189–2191.
- Charbonnel, C. & Talon, S. (2008). Deep inside low-mass stars. *In* Deng, L. & Chan, K.L., éditeurs : *IAU Symposium*, volume 252 de *IAU Symposium*, pages 163–174.
- Christensen-Dalsgaard, J. (1991). Some aspects of the theory of solar oscillations. *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics*, 62:123–152.
- Christensen-Dalsgaard, J. (2008). ADIPLS — the Aarhus adiabatic oscillation package. *Ap&SS*, 316:113–120.
- Christensen-Dalsgaard, J. (2011). ADIPLS : Aarhus Adiabatic Oscillation Package (ADIPACK). Astrophysics Source Code Library.
- Christensen-Dalsgaard, J., Gough, D.O. & Thompson, M.J. (1991). The depth of the solar convection zone. *ApJ*, 378:413–437.
- Christensen-Dalsgaard, J., Monteiro, M.J.P.F.G., Rempel, M. & Thompson, M.J. (2011). A more realistic representation of overshoot at the base of the solar convective envelope as seen by helioseismology. *MNRAS*, 414:1158–1174.
- Christensen-Dalsgaard, J. & Perez Hernandez, F. (1992). The phase function for stellar acoustic oscillations. I - Theory. *MNRAS*, 257:62–88.

- Claverie, A., Isaak, G.R., McLeod, C.P., van der Raay, H.B. & Cortes, T.R. (1979). Solar structure from global studies of the 5-minute oscillation. *Nature*, 282:591–594.
- Clayton, D.D. (1983). *Principles of stellar evolution and nucleosynthesis*.
- Cowling, T.G. (1941). The non-radial oscillations of polytropic stars. *MNRAS*, 101:367.
- Cox, J.P. & Giuli, R.T. (1968). *Principles of stellar structure*.
- Cunha, M.S., Stello, D., Avelino, P.P., Christensen-Dalsgaard, J. & Townsend, R.H.D. (2015). Structural Glitches near the Cores of Red Giants Revealed by Oscillations in g-mode Period Spacings from Stellar Models. *ApJ*, 805:127.
- Davies, G.R. & Miglio, A. (2016). Asteroseismology of red giants : From analysing light curves to estimating ages. *Astronomische Nachrichten*, 337:774.
- De Assis Peralta, R. (2016). *Caractériser les populations stellaires à l'aide d'indices sismiques*. Thèse de doctorat, LESIA - Laboratoire d'études spatiales et d'instrumentation en astrophysique <EMAIL>raphael.peralta@obspm.fr</EMAIL>.
- De Assis Peralta, R., Samadi, R. & Michel, É. (2017). Extraction of seismic indices and stellar granulation parameters for CoRoT and Kepler red giants using the MLEUP method. Main results and perspectives. In *European Physical Journal Web of Conferences*, volume 160 de *European Physical Journal Web of Conferences*, page 01012.
- Deal, M., Richard, O. & Vauclair, S. (2016). Hydrodynamical instabilities induced by atomic diffusion in A stars and their consequences. *A&A*, 589:A140.
- Decressin, T., Mathis, S., Palacios, A., Siess, L., Talon, S., Charbonnel, C. & Zahn, J.P. (2009). Diagnoses to unravel secular hydrodynamical processes in rotating main sequence stars. *A&A*, 495:271–286.
- Deheuvels, S., Brandão, I., Silva Aguirre, V., Ballot, J., Michel, E., Cunha, M.S., Lebreton, Y. & Appourchaux, T. (2016). Measuring the extent of convective cores in low-mass stars using Kepler data : toward a calibration of core overshooting. *A&A*, 589:A93.
- Deheuvels, S., Doğan, G., Goupil, M.J., Appourchaux, T., Benomar, O., Bruntt, H., Campante, T.L., Casagrande, L. et al. (2014). Seismic constraints on the radial dependence of the internal rotation profiles of six Kepler subgiants and young red giants. *A&A*, 564:A27.
- Deheuvels, S., García, R.A., Chaplin, W.J., Basu, S., Antia, H.M., Appourchaux, T., Benomar, O., Davies, G.R. et al. (2012). Seismic Evidence for a Rapidly Rotating Core in a Lower-giant-branch Star Observed with Kepler. *ApJ*, 756:19.
- Deubner, F.L. (1975). Observations of low wavenumber nonradial eigenmodes of the sun. *A&A*, 44:371–375.
- Dintrans, B. (2009). Overshooting. *Communications in Asteroseismology*, 158:45.
- Dintrans, B., Brandenburg, A., Nordlund, Å. & Stein, R.F. (2005). Spectrum and amplitudes of internal gravity waves excited by penetrative convection in solar-type stars. *A&A*, 438:365–376.
- Dintrans, B. & Rieutord, M. (2001). A comparison of the anelastic and subseismic approximations for low-frequency gravity modes in stars. *MNRAS*, 324:635–642.
- Domingo, V., Fleck, B. & Poland, A.I. (1995). The SOHO Mission : an Overview. *Solar Physics*, 162:1–37.

- Dupret, M.A. (2003). *Non-radial non-adiabatic oscillations of near main sequence variable stars*. Thèse de doctorat, Université de Liège.
- Dupret, M.A., Belkacem, K., Samadi, R., Montalbán, J., Moreira, O., Miglio, A., Godart, M., Ventura, P. et al. (2009). Theoretical amplitudes and lifetimes of non-radial solar-like oscillations in red giants. *A&A*, 506:57–67.
- Eddington, A.S. (1926). *The Internal Constitution of the Stars*.
- Eff-Darwich, A., Korzennik, S.G., Jiménez-Reyes, S.J. & García, R.A. (2008). Analysis of the Sensitivity of Solar Rotation to Helioseismic Data from GONG, GOLF, and MDI Observations. *ApJ*, 679:1636–1643.
- Eggenberger, P. (2015). Effects of Rotation on Stellar Evolution and Asteroseismology of Red Giants. In Miglio, A., Eggenberger, P., Girardi, L. & Montalbán, J., éditeurs : *Asteroseismology of Stellar Populations in the Milky Way*, volume 39 de *Astrophysics and Space Science Proceedings*, page 33.
- Eggenberger, P., Maeder, A. & Meynet, G. (2005). Stellar evolution with rotation and magnetic fields. IV. The solar rotation profile. *A&A*, 440:L9–L12.
- Eggenberger, P., Meynet, G., Maeder, A., Miglio, A., Montalbán, J., Carrier, F., Mathis, S., Charbonnel, C. et al. (2010). Effects of rotational mixing on the asteroseismic properties of solar-type stars. *A&A*, 519:A116.
- Eggenberger, P., Montalbán, J. & Miglio, A. (2012). Angular momentum transport in stellar interiors constrained by rotational splittings of mixed modes in red giants. *A&A*, 544:L4.
- Eliassen, A. & Palm, E. (1962). On the transfer of energy in stationary mountain waves. *Geof. Publ. Oslo.*, 22:1–23.
- Evans, J.W. & Michard, R. (1962). Observational Study of Macroscopic Inhomogeneities in the Solar Atmosphere. III. Vertical Oscillatory Motions in the Solar Photosphere. *ApJ*, 136:493.
- Fossat, E. (1991). The IRIS network for full disk helioseismology - Present status of the programme. *Solar Physics*, 133:1–12.
- Fossat, E., Boumier, P., Corbard, T., Provost, J., Salabert, D., Schmider, F.X., Gabriel, A.H., Grec, G. et al. (2017). Asymptotic g modes : Evidence for a rapid rotation of the solar core. *A&A*, 604:A40.
- Fritts, D.C. & Alexander, M.J. (2003). Gravity wave dynamics and effects in the middle atmosphere. *Reviews of Geophysics*, 41:3–1.
- Fuller, J., Cantiello, M., Stello, D., Garcia, R.A. & Bildsten, L. (2015). Asteroseismology can reveal strong internal magnetic fields in red giant stars. *Science*, 350:423–426.
- Fuller, J., Lecoanet, D., Cantiello, M. & Brown, B. (2014). Angular Momentum Transport via Internal Gravity Waves in Evolving Stars. *ApJ*, 796:17.
- Garaud, P. (2013). Double-diffusive convection. In Alecian, G., Lebreton, Y., Richard, O. & Vauclair, G., éditeurs : *EAS Publications Series*, volume 63 de *EAS Publications Series*, pages 285–295.
- García, R.A., Salabert, D., Ballot, J., Eff-Darwich, A., Garrido, R., Jiménez, A., Mathis, S., Mathur, S. et al. (2011). New insights on the solar core. In *Journal of Physics Conference Series*, volume 271 de *Journal of Physics Conference Series*, page 012046.

- García, R.A., Turck-Chièze, S., Jiménez-Reyes, S.J., Ballot, J., Pallé, P.L., Eff-Darwich, A., Mathur, S. & Provost, J. (2007). Tracking Solar Gravity Modes : The Dynamics of the Solar Core. *Science*, 316:1591–.
- Garcia Lopez, R.J. & Spruit, H.C. (1991). Li depletion in F stars by internal gravity waves. *ApJ*, 377:268–277.
- Gaulme, P., McKeever, J., Rawls, M.L., Jackiewicz, J., Mosser, B. & Guzik, J.A. (2013). Red Giants in Eclipsing Binary and Multiple-star Systems : Modeling and Asteroseismic Analysis of 70 Candidates from Kepler Data. *ApJ*, 767:82.
- Gehan, C., Mosser, B. & Michel, E. (2017). Large-scale measurements of the red giant core rotation through asteroseismology. *ArXiv e-prints*.
- Girardi, L. (2016). Red Clump Stars. *ARA&A*, 54:95–133.
- Godart, M., Noels, A., Dupret, M.A. & Lebreton, Y. (2009). Can mass loss and overshooting prevent the excitation of g-modes in blue supergiants? *MNRAS*, 396:1833–1841.
- Goldreich, P., Murray, N. & Kumar, P. (1994). Excitation of solar p-modes. *ApJ*, 424:466–479.
- Gostiaux, L., Didelle, H., Mercier, S. & Dauxois, T. (2007). A novel internal waves generator. *Experiments in Fluids*, 42:123–130.
- Gough, D.O. (1993). Linear adiabatic stellar pulsation. In Zahn, J.P. & Zinn-Justin, J., éditeurs : *Astrophysical Fluid Dynamics - Les Houches 1987*, pages 399–560.
- Goupil, M.J., Mosser, B., Marques, J.P., Ouazzani, R.M., Belkacem, K., Lebreton, Y. & Samadi, R. (2013). Seismic diagnostics for transport of angular momentum in stars. II. Interpreting observed rotational splittings of slowly rotating red giant stars. *A&A*, 549:A75.
- Grec, G., Fossat, E. & Pomerantz, M. (1980). Solar oscillations - Full disk observations from the geographic South Pole. *Nature*, 288:541–544.
- Grec, G., Fossat, E. & Pomerantz, M.A. (1983). Full-disk observations of solar oscillations from the geographic South Pole - Latest results. *Solar Physics*, 82:55–66.
- Greiss, S., Gänsicke, B.T., Hermes, J.J., Steeghs, D., Koester, D., Ramsay, G., Barclay, T. & Townsley, D.M. (2014). KIC 11911480 : the second ZZ Ceti in the Kepler field. *MNRAS*, 438:3086–3092.
- Grevesse, N., Noels, A. & Sauval, A.J. (1993). A revision of the solar abundance of dysprosium. *A&A*, 271:587.
- Grosjean, M., Dupret, M.A., Belkacem, K., Montalban, J., Samadi, R. & Mosser, B. (2014). Theoretical power spectra of mixed modes in low-mass red giant stars. *A&A*, 572:A11.
- Heger, A., Woosley, S.E. & Spruit, H.C. (2005). Presupernova Evolution of Differentially Rotating Massive Stars Including Magnetic Fields. *ApJ*, 626:350–363.
- Heim, D.M., Schleich, W.P., Alsing, P.M., Dahl, J.P. & Varro, S. (2013). Tunneling of an energy eigenstate through a parabolic barrier viewed from Wigner phase space. *Physics Letters A*, 377:1822–1825.
- Hekker, S. (2018). Asteroseismology of Red Giants and Galactic Archaeology. *Asteroseismology and Exoplanets : Listening to the Stars and Searching for New Worlds*, 49:95.
- Hekker, S. & Christensen-Dalsgaard, J. (2017). Giant star seismology. *A&A Rev.*, 25:1.



- Hubble, E. (1929). A Relation between Distance and Radial Velocity among Extra-Galactic Nebulae. *Proceedings of the National Academy of Science*, 15:168–173.
- Huber, D. (2017). Synergies between Asteroseismology and Exoplanetary Science. *ArXiv e-prints*.
- Huber, D., Ireland, M.J., Bedding, T.R., Brandão, I.M., Piau, L., Maestro, V., White, T.R., Bruntt, H. et al. (2012). Fundamental Properties of Stars Using Asteroseismology from Kepler and CoRoT and Interferometry from the CHARA Array. *ApJ*, 760:32.
- Hurlburt, N.E., Toomre, J. & Massaguer, J.M. (1986). Nonlinear compressible convection penetrating into stable layers and producing internal gravity waves. *ApJ*, 311:563–577.
- Iglesias, C.A. & Rogers, F.J. (1996). Updated Opal Opacities. *ApJ*, 464:943.
- Iribarne, E.O. (2015). *Transport properties of internal gravity waves*. Thèse de doctorat, Ecole normale supérieure de Lyon - ENS LYON. Atmospheric and Oceanic Physics [physics.ao-ph].
- Jones, H. & Marshall, J. (1997). Restratification after Deep Convection. *Journal of Physical Oceanography*, 27:2276–2287.
- Kallinger, T., Weiss, W.W., Barban, C., Baudin, F., Cameron, C., Carrier, F., De Ridder, J., Goupil, M.J. et al. (2010). Oscillating red giants in the CoRoT exofield : asteroseismic mass and radius determination. *A&A*, 509:A77.
- Kawaler, S.D. (1988). Angular momentum loss in low-mass stars. *ApJ*, 333:236–247.
- Kawaler, S.D., Sekii, T. & Gough, D. (1999). Prospects for Measuring Differential Rotation in White Dwarfs through Asteroseismology. *ApJ*, 516:349–365.
- Kippenhahn, R., Weigert, A. & Weiss, A. (2012). *Stellar Structure and Evolution*.
- Kiraga, M., Jahn, K., Stepień, K. & Zahn, J.P. (2003). Direct Numerical Simulations of Penetrative Convection and Generation of Internal Gravity Waves. *Acta Astron.*, 53:321–339.
- Kiraga, M., Stepień, K. & Jahn, K. (2005). Generation and Propagation of Internal Gravity Waves : Comparison between Two- and Three-Dimensional Models at Low Resolution. *Acta Astron.*, 55:205–217.
- Kjeldsen, H. & Bedding, T.R. (1995). Amplitudes of stellar oscillations : the implications for asteroseismology. *A&A*, 293:87–106.
- Kjeldsen, H., Bedding, T.R. & Christensen-Dalsgaard, J. (2008). Correcting Stellar Oscillation Frequencies for Near-Surface Effects. *ApJ*, 683:L175.
- Kumar, P., Talon, S. & Zahn, J.P. (1999). Angular Momentum Redistribution by Waves in the Sun. *ApJ*, 520:859–870.
- Lagarde, N., Miglio, A., Eggenberger, P., Morel, T., Montalbán, J., Mosser, B., Rodrigues, T.S., Girardi, L. et al. (2015). Models of red giants in the CoRoT asteroseismology fields combining asteroseismic and spectroscopic constraints. *A&A*, 580:A141.
- Leavitt, H.S. & Pickering, E.C. (1912). Periods of 25 Variable Stars in the Small Magellanic Cloud. *Harvard College Observatory Circular*, 173:1–3.
- Lebreton, Y. & Goupil, M.J. (2012). Seismic signature of envelope penetrative convection : the CoRoT star HD 52265. *A&A*, 544:L13.

- Lebreton, Y., Goupil, M.J. & Montalbán, J. (2014a). How accurate are stellar ages based on stellar models?. I. The impact of stellar models uncertainties. *In EAS Publications Series*, volume 65 de *EAS Publications Series*, pages 99–176.
- Lebreton, Y., Goupil, M.J. & Montalbán, J. (2014b). How accurate are stellar ages based on stellar models?. II. The impact of asteroseismology. *In EAS Publications Series*, volume 65 de *EAS Publications Series*, pages 177–223.
- Lecoanet, D. & Quataert, E. (2013). Internal gravity wave excitation by turbulent convection. *MNRAS*, 430:2363–2376.
- Lee, U. & Saio, H. (1997). Low-Frequency Nonradial Oscillations in Rotating Stars. I. Angular Dependence. *ApJ*, 491:839–845.
- Leibacher, J.W. & GONG Project Team (1998). The Global Oscillation Network Group (GONG) Project. *In* Korzennik, S., éditeur : *Structure and Dynamics of the Interior of the Sun and Sun-like Stars*, volume 418 de *ESA Special Publication*, page 3.
- Leighton, R.B., Noyes, R.W. & Simon, G.W. (1962). Velocity Fields in the Solar Atmosphere. I. Preliminary Report. *ApJ*, 135:474.
- Lighthill, J. (1978). *Waves in fluids*.
- Lo, Y.C. & Schatzman, E. (1997). Dynamical model of convection in stellar cores. *A&A*, 322:545–553.
- Loi, S.T. & Papaloizou, J.C.B. (2017). Torsional Alfvén resonances as an efficient damping mechanism for non-radial oscillations in red giant stars. *MNRAS*, 467:3212–3225.
- Ludwig, H.G. & Kučinskas, A. (2012). Three-dimensional hydrodynamical CO<sup>5</sup>BOLD model atmospheres of red giant stars. I. Atmospheric structure of a giant located near the RGB tip. *A&A*, 547:A118.
- Maeder, A. (2009). *Physics, Formation and Evolution of Rotating Stars*.
- Maeder, A. & Meynet, G. (2000). The Evolution of Rotating Stars. *ARA&A*, 38:143–190.
- Maeder, A. & Zahn, J.P. (1998). Stellar evolution with rotation. III. Meridional circulation with MU -gradients and non-stationarity. *A&A*, 334:1000–1006.
- Marques, J.P. & Goupil, M.J. (2013). The Influence of Initial Conditions on Stellar Rotation History. *In* Goupil, M., Belkacem, K., Neiner, C., Lignières, F. & Green, J.J., éditeurs : *Lecture Notes in Physics, Berlin Springer Verlag*, volume 865 de *Lecture Notes in Physics, Berlin Springer Verlag*, page 75.
- Marques, J.P., Goupil, M.J., Lebreton, Y., Talon, S., Palacios, A., Belkacem, K., Ouazzani, R.M., Mosser, B. et al. (2013). Seismic diagnostics for transport of angular momentum in stars. I. Rotational splittings from the pre-main sequence to the red-giant branch. *A&A*, 549:A74.
- Martić, M., Schmitt, J., Lebrun, J.C., Barban, C., Connes, P., Bouchy, F., Michel, E., Baglin, A. et al. (1999). Evidence for global pressure oscillations on Procyon. *A&A*, 351:993–1002.
- Mathis, S. (2009). Transport by gravito-inertial waves in differentially rotating stellar radiation zones. I - Theoretical formulation. *A&A*, 506:811–828.
- Mathis, S., Decressin, T., Eggenberger, P. & Charbonnel, C. (2013). Diagnoses to unravel secular hydrodynamical processes in rotating main sequence stars. II. The actions of internal gravity waves. *A&A*, 558:A11.

- Mathis, S., Duez, V. & Braithwaite, J. (2011). MHD relaxation of fossil magnetic fields in stellar interiors. *In* Brummell, N.H., Brun, A.S., Miesch, M.S. & Ponty, Y., éditeurs : *Astrophysical Dynamics : From Stars to Galaxies*, volume 271 de *IAU Symposium*, pages 270–278.
- Mathis, S., Neiner, C. & Tran Minh, N. (2014). Impact of rotation on stochastic excitation of gravity and gravito-inertial waves in stars. *A&A*, 565:A47.
- Mathis, S. & Zahn, J.P. (2004). Transport and mixing in the radiation zones of rotating stars. I. Hydrodynamical processes. *A&A*, 425:229–242.
- Matt, S.P., Brun, A.S., Baraffe, I., Bouvier, J. & Chabrier, G. (2015). The Mass-dependence of Angular Momentum Evolution in Sun-like Stars. *ApJ*, 799:L23.
- Matt, S.P., MacGregor, K.B., Pinsonneault, M.H. & Greene, T.P. (2012). Magnetic Braking Formulation for Sun-like Stars : Dependence on Dipole Field Strength and Rotation Rate. *ApJ*, 754:L26.
- Matthews, J.M., Kuschnig, R., Guenther, D.B., Walker, G.A.H., Moffat, A.F.J., Rucinski, S.M., Sasselov, D. & Weiss, W.W. (2004). No stellar p-mode oscillations in space-based photometry of Procyon. *Nature*, 430:51–53.
- Matthews, J.M., Kuschnig, R., Walker, G.A.H., Pazder, J., Johnson, R., Skaret, K., Shkolnik, E., Lanting, T. et al. (2000). Ultraprecise Photometry from Space : The MOST Microsat Mission. *In* Szabados, L. & Kurtz, D., éditeurs : *IAU Colloq. 176 : The Impact of Large-Scale Surveys on Pulsating Star Research*, volume 203 de *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, pages 74–75.
- Meynet, G., Maeder, A., Eggenberger, P., Ekstrom, S., Georgy, C., Chiappini, C., Privitera, G. & Choupin, A. (2016). Impact of rotation on stellar models. *Astronomische Nachrichten*, 337:827.
- Michaud, G. (1970). Diffusion Processes in Peculiar a Stars. *ApJ*, 160:641.
- Miglio, A., Chiappini, C., Morel, T., Barbieri, M., Chaplin, W.J., Girardi, L., Montalbán, J., Valentini, M. et al. (2013). Galactic archaeology : mapping and dating stellar populations with asteroseismology of red-giant stars. *MNRAS*, 429:423–428.
- Miglio, A., Montalbán, J., Noels, A. & Eggenberger, P. (2008). Probing the properties of convective cores through g modes : high-order g modes in SPB and  $\gamma$  Doradus stars. *MNRAS*, 386:1487–1502.
- Montalbán, J., Miglio, A., Noels, A., Dupret, M.A., Scuflaire, R. & Ventura, P. (2013). Testing Convective-core Overshooting Using Period Spacings of Dipole Modes in Red Giants. *ApJ*, 766:118.
- Monteiro, M.J.P.F.G. & Thompson, M.J. (2005). Seismic analysis of the second ionization region of helium in the Sun - I. Sensitivity study and methodology. *MNRAS*, 361:1187–1196.
- Morel, P. & Lebreton, Y. (2008). CESAM : a free code for stellar evolution calculations. *Ap&SS*, 316:61–73.
- Morton, B.R., Taylor, G. & Turner, J.S. (1956). Turbulent Gravitational Convection from Maintained and Instantaneous Sources. *Royal Society of London Proceedings Series A*, 234:1–23.
- Mosser, B., Belkacem, K., Pinçon, C., Takata, M., Vrad, M., Barban, C., Goupil, M.J., Kallinger, T. et al. (2017a). Dipole modes with depressed amplitudes in red giants are mixed modes. *A&A*, 598:A62.

- Mosser, B., Benomar, O., Belkacem, K., Goupil, M.J., Lagarde, N., Michel, E., Lebreton, Y., Stello, D. et al. (2014). Mixed modes in red giants : a window on stellar evolution. *A&A*, 572:L5.
- Mosser, B., Dziembowski, W.A., Belkacem, K., Goupil, M.J., Michel, E., Samadi, R., Soszyński, I., Vrad, M. et al. (2013a). Period-luminosity relations in evolved red giants explained by solar-like oscillations. *A&A*, 559:A137.
- Mosser, B., Elsworth, Y., Hekker, S., Huber, D., Kallinger, T., Mathur, S., Belkacem, K., Goupil, M.J. et al. (2012a). Characterization of the power excess of solar-like oscillations in red giants with Kepler. *A&A*, 537:A30.
- Mosser, B., Goupil, M.J., Belkacem, K., Marques, J.P., Beck, P.G., Bloemen, S., De Ridder, J., Barban, C. et al. (2012b). Spin down of the core rotation in red giants. *A&A*, 548:A10.
- Mosser, B., Goupil, M.J., Belkacem, K., Michel, E., Stello, D., Marques, J.P., Elsworth, Y., Barban, C. et al. (2012c). Probing the core structure and evolution of red giants using gravity-dominated mixed modes observed with Kepler. *A&A*, 540:A143.
- Mosser, B., Michel, E., Belkacem, K., Goupil, M.J., Baglin, A., Barban, C., Provost, J., Samadi, R. et al. (2013b). Asymptotic and measured large frequency separations. *A&A*, 550:A126.
- Mosser, B. & Miglio, A. (2016). *IV.2 Pulsating red giant stars*, page 197.
- Mosser, B., Pinçon, C., Belkacem, K., Takata, M. & Vrad, M. (2017b). Period spacings in red giants. III. Coupling factors of mixed modes. *A&A*, 600:A1.
- Mosser, B., Vrad, M., Belkacem, K., Deheuvels, S. & Goupil, M.J. (2015). Period spacings in red giants. I. Disentangling rotation and revealing core structure discontinuities. *A&A*, 584:A50.
- Muraschko, J., Fruman, M.D., Achatz, U., Hinkel, S. & Toledo, Y. (2015). On the application of Wentzel-Kramer-Brillouin theory for the simulation of the weakly nonlinear dynamics of gravity waves. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 141:676–697.
- Nielsen, M.B., Gizon, L., Schunker, H. & Schou, J. (2014). Rotational splitting as a function of mode frequency for six Sun-like stars. *A&A*, 568:L12.
- Noels, A., Montalbán, J. & Chiappini, C. (2016). Asteroseismology’s new constraints on stellar models and Galactic Archaeology : Where are we now and where are we going? *Astronomische Nachrichten*, 337:982.
- Osaki, J. (1975). Nonradial oscillations of a 10 solar mass star in the main-sequence stage. *PASJ*, 27:237–258.
- Palacios, A., Talon, S., Charbonnel, C. & Forestini, M. (2003). Rotational mixing in low-mass stars. I Effect of the mu-gradients in main sequence and subgiant Pop I stars. *A&A*, 399:603–616.
- Palacios, A., Talon, S., Turck-Chièze, S. & Charbonnel, C. (2006). Dynamical processes in the solar radiative interior. In *Proceedings of SOHO 18/GONG 2006/HELAS I, Beyond the spherical Sun*, volume 624 de *ESA Special Publication*, page 38.1.
- Pantillon, F.P., Talon, S. & Charbonnel, C. (2007). Angular momentum transport by internal gravity waves. III. Wave excitation by core convection and the Coriolis effect. *A&A*, 474:155–163.
- Phinney, R.A. (1970). Reflection of Acoustic Waves from a Continuously Varying Interfacial Region. *Reviews of Geophysics and Space Physics*, 8:517.

- Pinçon, C., Belkacem, K. & Goupil, M.J. (2016). Generation of internal gravity waves by penetrative convection. *A&A*, 588:A122.
- Pinçon, C., Belkacem, K., Goupil, M.J. & Marques, J.P. (2017). Can plume-induced internal gravity waves regulate the core rotation of subgiant stars? *A&A*, 605:A31.
- Pinsonneault, M.H., Kawaler, S.D., Sofia, S. & Demarque, P. (1989). Evolutionary models of the rotating sun. *ApJ*, 338:424–452.
- Pratt, J., Baraffe, I., Goffrey, T., Constantino, T., Viallet, M., Popov, M.V., Walder, R. & Folini, D. (2017). Extreme value statistics for two-dimensional convective penetration in a pre-main sequence star. *A&A*, 604:A125.
- Press, W.H. (1981). Radiative and other effects from internal waves in solar and stellar interiors. *ApJ*, 245:286–303.
- Rauer, H., Catala, C., Aerts, C., Appourchaux, T., Benz, W., Brandeker, A., Christensen-Dalsgaard, J., Deleuil, M. et al. (2014). The PLATO 2.0 mission. *Experimental Astronomy*, 38:249–330.
- Reese, D.R. (2015). Internal rapid rotation and its implications for stellar structure and pulsations. In *European Physical Journal Web of Conferences*, volume 101 de *European Physical Journal Web of Conferences*, page 05007.
- Reiners, A. & Mohanty, S. (2012). Radius-dependent Angular Momentum Evolution in Low-mass Stars. I. *ApJ*, 746:43.
- Rempel, M. (2004). Overshoot at the Base of the Solar Convection Zone : A Semianalytical Approach. *ApJ*, 607:1046–1064.
- Richard, O., Dziembowski, W.A., Sienkiewicz, R. & Goode, P.R. (1998). On the accuracy of helioseismic determination of solar helium abundance. *A&A*, 338:756–760.
- Richard, O., Vauclair, S., Charbonnel, C. & Dziembowski, W.A. (1996). New solar models including helioseismological constraints and light-element depletion. *A&A*, 312:1000–1011.
- Rieutord, M. (2017). On the oscillation spectrum of a magnetized core in a giant star. In *European Physical Journal Web of Conferences*, volume 160 de *European Physical Journal Web of Conferences*, page 02011.
- Rieutord, M. & Zahn, J.P. (1995). Turbulent plumes in stellar convective envelopes. *A&A*, 296:127.
- Ringot, O. (1998). *Influence des ondes de gravité sur la structure stellaire*. Thèse de doctorat, Observatoire de Paris.
- Rogers, F.J. & Nayfonov, A. (2002). Updated and Expanded OPAL Equation-of-State Tables : Implications for Helioseismology. *ApJ*, 576:1064–1074.
- Rogers, T.M. & Glatzmaier, G.A. (2005). Gravity waves in the Sun. *MNRAS*, 364:1135–1146.
- Rogers, T.M. & Glatzmaier, G.A. (2006). Angular Momentum Transport by Gravity Waves in the Solar Interior. *ApJ*, 653:756–764.
- Rogers, T.M., Glatzmaier, G.A. & Jones, C.A. (2006). Numerical Simulations of Penetration and Overshoot in the Sun. *ApJ*, 653:765–773.
- Rogers, T.M., Lin, D.N.C., McElwaine, J.N. & Lau, H.H.B. (2013). Internal Gravity Waves in Massive Stars : Angular Momentum Transport. *ApJ*, 772:21.

- Rüdiger, G., Gellert, M., Spada, F. & Tereshin, I. (2015). The angular momentum transport by unstable toroidal magnetic fields. *A&A*, 573:A80.
- Samadi, R., Belkacem, K. & Sonoi, T. (2015). Stellar oscillations - II - The non-adiabatic case. In *EAS Publications Series*, volume 73 de *EAS Publications Series*, pages 111–191.
- Samadi, R. & Goupil, M.J. (2001). Excitation of stellar p-modes by turbulent convection. I. Theoretical formulation. *A&A*, 370:136–146.
- Samadi, R., Goupil, M.J. & Lebreton, Y. (2001). Excitation of stellar p-modes by turbulent convection. II. The Sun. *A&A*, 370:147–156.
- Schatzman, E. (1962). L'accélération des particules et les réactions nucléaires à la surface des étoiles. *L'Astronomie*, 76:371.
- Schmitt, J.H.M.M., Rosner, R. & Bohn, H.U. (1984). The overshoot region at the bottom of the solar convection zone. *ApJ*, 282:316–329.
- Scuflaire, R., Théado, S., Montalbán, J., Miglio, A., Bourge, P.O., Godart, M., Thoul, A. & Noels, A. (2008). CLÉS, Code Liégeois d'Évolution Stellaire. *Ap&SS*, 316:83–91.
- Shibahashi, H. (1979). Modal Analysis of Stellar Nonradial Oscillations by an Asymptotic Method. *PASJ*, 31:87–104.
- Siess, L., Dufour, E. & Forestini, M. (2000). An internet server for pre-main sequence tracks of low- and intermediate-mass stars. *A&A*, 358:593–599.
- Siess, L., Goriely, S. & Langer, N. (2004). Nucleosynthesis of s-elements in rotating AGB stars. *A&A*, 415:1089–1097.
- Soderblom, D.R. (2010). The Ages of Stars. *ARA&A*, 48:581–629.
- Sonoi, T., Belkacem, K., Dupret, M.A., Samadi, R., Ludwig, H.G., Caffau, E. & Mosser, B. (2017). Computation of eigenfrequencies for equilibrium models including turbulent pressure. *A&A*, 600:A31.
- Sonoi, T., Samadi, R., Belkacem, K., Ludwig, H.G., Caffau, E. & Mosser, B. (2015). Surface-effect corrections for solar-like oscillations using 3D hydrodynamical simulations. I. Adiabatic oscillations. *A&A*, 583:A112.
- Spada, F., Gellert, M., Arlt, R. & Deheuvels, S. (2016). Angular momentum transport efficiency in post-main sequence low-mass stars. *A&A*, 589:A23.
- Spiegel, E.A. & Zahn, J.P. (1992). The solar tachocline. *A&A*, 265:106–114.
- Spruit, H.C. (2002). Dynamo action by differential rotation in a stably stratified stellar interior. *A&A*, 381:923–932.
- Stein, R.F. & Leibacher, J.W. (1969). On the Five-Minute Oscillation of the Solar Atmosphere. *Astrophys. Lett.*, 3:95.
- Stein, R.F. & Nordlund, A. (1998). Simulations of solar granulation. i. general properties. *ApJ*, 499:914.
- Stull, R.B. (1976). Internal Gravity Waves Generated by Penetrative Convection. *Journal of Atmospheric Sciences*, 33:1279–1286.
- Suijs, M.P.L., Langer, N., Poelarends, A.J., Yoon, S.C., Heger, A. & Herwig, F. (2008). White dwarf spins from low-mass stellar evolution models. *A&A*, 481:L87–L90.

- Takata, M. (2005). Momentum Conservation and Mode Classification of the Dipolar Oscillations of Stars. *PASJ*, 57:375–389.
- Takata, M. (2006a). Analysis of Adiabatic Dipolar Oscillations of Stars. *PASJ*, 58:893–908.
- Takata, M. (2006b). First Integrals of Adiabatic Stellar Oscillations. *PASJ*, 58:759–775.
- Takata, M. (2016a). Asymptotic analysis of dipolar mixed modes of oscillations in red giant stars. *PASJ*, 68:109.
- Takata, M. (2016b). Physical formulation of mixed modes of stellar oscillations. *PASJ*, 68:91.
- Talon, S. & Charbonnel, C. (1998). The Li dip : a probe of angular momentum transport in low mass stars. *A&A*, 335:959–968.
- Talon, S. & Charbonnel, C. (2003). Angular momentum transport by internal gravity waves. I - Pop I main sequence stars. *A&A*, 405:1025–1032.
- Talon, S. & Charbonnel, C. (2004). Angular momentum transport by internal gravity waves. II. Pop II stars from the Li plateau to the horizontal branch. *A&A*, 418:1051–1060.
- Talon, S. & Charbonnel, C. (2005). Hydrodynamical stellar models including rotation, internal gravity waves, and atomic diffusion. I. Formalism and tests on Pop I dwarfs. *A&A*, 440:981–994.
- Talon, S. & Charbonnel, C. (2008). Angular momentum transport by internal gravity waves. IV. Wave generation by surface convection zone, from the pre-main sequence to the early-AGB in intermediate mass stars. *A&A*, 482:597–605.
- Talon, S., Kumar, P. & Zahn, J.P. (2002). Angular Momentum Extraction by Gravity Waves in the Sun. *ApJ*, 574:L175–L178.
- Talon, S. & Zahn, J.P. (1997). Anisotropic diffusion and shear instabilities. *A&A*, 317:749–751.
- Talon, S. & Zahn, J.P. (1998). Towards a hydrodynamical model predicting the observed solar rotation profile. *A&A*, 329:315–318.
- Tassoul, M. (1980). Asymptotic approximations for stellar nonradial pulsations. *ApJ*, 43:469–490.
- Tassoul, M. & Tassoul, J.L. (1968). Asymptotic Approximations for Stellar Pulsations. *ApJ*, 153:127.
- Tayar, J. & Pinsonneault, M.H. (2013). Implications of Rapid Core Rotation in Red Giants for Internal Angular Momentum Transport in Stars. *ApJ*, 775:L1.
- Townsend, A.A. (1966). Internal waves produced by a convective layer. *Journal of Fluid Mechanics*, 24:307–319.
- Turck-Chièze, S., García, R.A., Couvidat, S., Ulrich, R.K., Bertello, L., Varadi, F., Kosovichev, A.G., Gabriel, A.H. et al. (2004). Looking for Gravity-Mode Multiplets with the GOLF Experiment aboard SOHO. *ApJ*, 604:455–468.
- Turck-Chièze, S., Palacios, A., Marques, J.P. & Nghiem, P.A.P. (2010). Seismic and Dynamical Solar Models. I. The Impact of the Solar Rotation History on Neutrinos and Seismic Indicators. *ApJ*, 715:1539–1555.
- Turner, J.S. (1986). Turbulent entrainment - The development of the entrainment assumption, and its application to geophysical flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 173:431–471.
- Ulrich, R.K. (1970). The five-minute oscillations on the solar surface. *ApJ*, 162:993.

- Unno, W., Osaki, Y., Ando, H., Saio, H. & Shibahashi, H. (1989). *Nonradial oscillations of stars*.
- Vadas, S.L. & Liu, H.L. (2013). Numerical modeling of the large-scale neutral and plasma responses to the body forces created by the dissipation of gravity waves from 6 h of deep convection in Brazil. *Journal of Geophysical Research (Space Physics)*, 118:2593–2617.
- Vauclair, S. & Vauclair, G. (1982). Element segregation in stellar outer layers. *ARA&A*, 20:37–60.
- Verma, K., Raodeo, K., Antia, H.M., Mazumdar, A., Basu, S., Lund, M.N. & Silva Aguirre, V. (2017). Seismic Measurement of the Locations of the Base of Convection Zone and Helium Ionization Zone for Stars in the Kepler Seismic LEGACY Sample. *ApJ*, 837:47.
- Vrard, M., Mosser, B. & Barban, C. (2017). Radial mode widths in red giant stars spectra observed by Kepler. In *European Physical Journal Web of Conferences*, volume 160 de *European Physical Journal Web of Conferences*, page 04012.
- Vrard, M., Mosser, B., Barban, C., Belkacem, K., Elsworth, Y., Kallinger, T., Hekker, S., Samadi, R. et al. (2015). Helium signature in red giant oscillation patterns observed by Kepler. *A&A*, 579:A84.
- Vrard, M., Mosser, B. & Samadi, R. (2016). Period spacings in red giants. II. Automated measurement. *A&A*, 588:A87.
- Zahn, J.P. (1991). Convective penetration in stellar interiors. *A&A*, 252:179–188.
- Zahn, J.P. (1992). Circulation and turbulence in rotating stars. *A&A*, 265:115–132.
- Zahn, J.P., Talon, S. & Matias, J. (1997). Angular momentum transport by internal waves in the solar interior. *A&A*, 322:320–328.
- Zhang, Q.S. & Li, Y. (2012). Turbulent Convection Model in the Overshooting Region. II. Theoretical Analysis. *ApJ*, 750:11.







## Résumé

Les satellites CoRoT (2006-2014) et Kepler (2009) ont fourni de nombreuses données sismiques qui ont permis pour la première fois de sonder l'intérieur profond des étoiles évoluées. En plus d'apporter de fortes contraintes sur les propriétés globales de ces étoiles, ces observations ont aussi démontré l'existence d'un processus toujours inconnu capable de contrer l'augmentation de la rotation des couches centrales sous l'effet de leur contraction. Un premier volet de cette thèse s'intéressera à l'influence du transport de moment cinétique par les ondes internes de gravité, qui font partie des candidats potentiels pour expliquer le désaccord entre la théorie et ces faits observationnels. L'étude effectuée portera à la fois sur l'excitation de ces ondes par la pénétration convective et sur leur efficacité de transport dans l'intérieur radiatif de ces étoiles. Le deuxième volet de ma thèse aura pour sujet les diagnostics sismiques par les modes mixtes, ces oscillations détectables à la surface des étoiles évoluées et portant de l'information sur leurs régions centrales. Les diagnostics sismiques permettent de faire le lien entre les caractéristiques du spectre d'oscillation d'une étoile et ses propriétés internes. Ils ont en particulier fourni les contraintes sur la rotation interne qui ont motivé le travail de la première partie. L'étude se focalisera sur des paramètres sismiques peu étudiés jusqu'ici et qui ont le potentiel de sonder les régions situées entre le cœur d'hélium et le voisinage de la base de la zone convective de ces étoiles .

## Mots Clés

astérosismologie – étoiles: oscillations, rotation, intérieurs, évolution – ondes – hydrodynamique

## Abstract

The space-borne missions CoRoT (2006-2014) and Kepler (2009) provided us with a lot of seismic data. These observations enabled us to probe for the first time the central regions of evolved stars and brought stringent constraints on their internal structure. They showed in particular that an unknown process is able to counteract the contraction-induced spin-up of their core during the post-main sequence. The first part of this PhD thesis will focus on the influence of the angular momentum transport by internal gravity waves, which are a possible candidate to explain the disagreement between theory and observations. The study will deal with both excitation of these waves by penetrative convection and their transport efficiency in radiative interiors. The second part of this PhD will focus on the seismic diagnosis by mixed modes, which are oscillations detectable at the surface of evolved stars and bringing information on their central regions. Seismic diagnosis make the link between the characteristics of the oscillation spectrum of a star and the properties of its internal structure. In particular, they provided the constraints on the internal rotation that have motivated the work presented in the first part of this PhD. I will study mixed modes parameters that have been little studied until now (coupling factor and period offset) and that can enable us to probe the regions located between the helium-burning shell and the neighborhood of the base of the convective zone in post-main sequence stars.

## Keywords

asteroseismology – stars: oscillations, rotation, interiors, evolution – waves – hydrodynamics