



**HAL**  
open science

# Random Polynomials, Coulomb Gas and Random Matrices

Raphaël Butez

► **To cite this version:**

Raphaël Butez. Random Polynomials, Coulomb Gas and Random Matrices. General Mathematics [math.GM]. Université Paris sciences et lettres, 2017. English. NNT : 2017PSLED055 . tel-01827548

**HAL Id: tel-01827548**

**<https://theses.hal.science/tel-01827548>**

Submitted on 2 Jul 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE DE DOCTORAT

de l'Université de recherche Paris Sciences et Lettres  
PSL Research University

Préparée à Université Paris Dauphine

Polynômes aléatoires, gaz de Coulomb, et matrices aléatoires.

**École doctorale n°543**

ÉCOLE DOCTORALE DE DAUPHINE

**Spécialité** SCIENCES

Soutenue par **Raphaël BUTEZ**  
le 04 Décembre 2017

Dirigée par **Djalil CHAFAÏ**

## COMPOSITION DU JURY :

Mylène MAÏDA  
Université Lille 1, Présidente du jury

Catherine DONATI-MARTIN  
Université de Versailles, Rapporteuse

Sandrine PÉCHÉ  
Université Paris Diderot, Rapporteuse

Laure DUMAZ  
Université Paris Dauphine, Examinatrice

Adrien HARDY  
Université Lille 1, Examineur

Mathieu LEWIN  
Université Paris Dauphine, Examineur

Grégory SCHEHR  
Université Paris Saclay, Examineur

Djalil CHAFAÏ  
Université Paris Dauphine, Directeur de thèse



# Remerciements

Tout d'abord, je tiens à exprimer ma reconnaissance envers Djalil Chafaï qui a été un excellent directeur de thèse. Il a toujours été très disponible et m'a aidé sur tous les aspects de la recherche. Durant cette thèse, j'ai eu la chance de bénéficier de ses qualités humaines et scientifiques. Il m'a toujours poussé à assister à de nombreuses conférences, à donner des exposés et à élargir mon horizon de recherche. Je le remercie aussi pour m'avoir donné l'opportunité de rendre visite à Ofer Zeitouni, ce qui a conduit à ma première collaboration scientifique.

Je remercie Catherine Donati-Martin et Sandrine Péché d'avoir accepté la lourde tâche de rapporter cette thèse et votre intérêt pour mes travaux m'honore.

Je tiens aussi à exprimer toute ma gratitude envers Laure Dumaz, Adrien Hardy, Mathieu Lewin, Mylène Maïda et Grégory Schehr qui me font l'honneur d'être membres de ce jury.

\*  
\* \*

Merci à Ofer Zeitouni pour m'avoir invité à collaborer. Ce séjour à l'institut Weizmann est sans doute le moment le plus passionnant de ma thèse. J'ai été très touché par sa disponibilité et sa bienveillance à mon égard, et j'ai été impressionné par ses grandes qualités mathématiques.

Je souhaite remercier chaleureusement Jean-Yves Welschinger. Merci de m'avoir si bien guidé lorsque j'étais en stage de recherche, de m'avoir initié aux polynômes aléatoires et donné envie de faire une thèse.

Je tiens à remercier tout le CEREMADE pour ces trois belles années de thèse. Ce fut un plaisir de faire ma thèse aux côtés de chercheurs aussi ouverts et sympathiques. S'il est difficile de remercier toutes les personnes avec qui j'ai eu le plaisir d'interagir durant cette thèse, je tiens tout de même à remercier François Simenhaus grâce à qui j'ai pu étudier les processus déterminantaux. Un grand merci aussi à Jacques Féjóz, Jimmy Lamboley, Halim Doss, Pierre Cardaliaguet et Robin Rider pour lesquels j'ai eu le plaisir d'effectuer des enseignements et qui ont toujours été disponibles pour parler des cours et des élèves. J'en profite pour remercier Olivier Glass qui a toujours été attentif aux doctorants durant mes deux premières années de thèse. Je voudrais remercier aussi Daniela, Emeric, David, Amic, Cyril, Joseph, Alexandre et bien d'autres pour toutes les discussions en salle café qui rendent la vie à Dauphine si agréable.

Merci aussi aux doctorants, postdocs et ATER du CEREMADE, passés ou présents, qui ont contribué à cette thèse par leur amitié, et leur aide sur certains problèmes. Je remercie plus particulièrement Maxime, Isabelle, Thibaut, Lucas, Marco, Lénaïc, Quentin, Aude, Raphaël, Michael, Arnaud, David, Marie-Noémie, Jean, Jorge, Amine et bien d'autres que j'oublie sans doute... Merci à Jonas qui m'a si souvent aidé lors de ma première année de thèse. Merci aussi à David avec qui j'ai toujours pris énormément de

plaisir à travailler. J'espère que nous collaborerons à l'avenir et que nos projets se concrétiseront! Je tiens à adresser un remerciement spécial à Camille qui m'a accompagné durant toute ma thèse. Merci pour son aide permanente avec le LaTeX et les Beamer, sans lui cette thèse ne compilerait toujours pas. Mais surtout, merci pour ses imitations et son sens de l'humour "raffiné" qui m'ont toujours fait rire, même si je suis parfois le seul!

Durant cette thèse, j'ai eu le plaisir d'assister au séminaire mensuel MEGA et j'ai eu le bonheur d'organiser la séance du matin. Ce séminaire a été une énorme source de satisfaction durant toute cette thèse et j'y ai rencontré beaucoup de chercheurs qui m'ont épaulé et conseillé. Je remercie tout particulièrement Camille Male, qui a créé le MEGA et qui a toujours été d'une grande prévenance.

Un grand merci à Maxime Février, qui m'a conseillé et encouragé depuis le Master 2 jusqu'à la fin de la thèse. À chacune de nos discussions, je repartais avec l'envie de faire de la recherche et un peu plus confiance en moi. Je souhaite remercier de nouveau Adrien Hardy et Laure Dumaz parmi les chercheurs qui m'ont beaucoup apporté. Toutes les discussions avec eux m'ont fait du bien et j'espère avoir le plaisir de collaborer avec eux à l'avenir. J'ai eu le chance de faire la connaissance de nombreux chercheurs et doctorants qui m'ont beaucoup apporté. Merci à Sandrine Dallaporta, Jamal Najim, Jean Rochet, Florent Benaych-Georges, Nathan Noiry, Simon Coste, Alkéos Michail, Lucas Benigni, Fanny Augeri, Benjamin Groux... et toutes les personnes qui sont venues donner un exposé lors des séances du matin. Enfin, j'aimerais aussi remercier Thomas Leblé pour m'avoir si gentiment accueilli à New-York. J'espère que nous aurons l'occasion de refaire de la recherche ensemble à l'avenir!

\*  
\* \*

Je tiens à remercier trois des professeurs qui m'ont aiguillé lors de mes études en mathématiques. C'est grâce à eux que j'ai découvert la passion des mathématiques et la rigueur. Tout d'abord, je souhaite remercier Annelise Samain qui a su me faire digérer le choc de l'entrée en prépa et me faire découvrir les maths. Ensuite, je tiens à remercier Alain Juhel avec qui j'ai beaucoup appris sur la beauté et l'histoire des mathématiques. Enfin, merci à Jean Voedts de m'avoir aidé à mûrir et à prendre du recul en mathématiques, mais surtout pour m'avoir épaulé lors de cette fin d'année de 5/2 particulièrement difficile.

Une grand merci à mes amis dont la présence compte énormément à mes yeux. Ils ont contribué à cette thèse par leur joie de vivre et leur amitié. Merci à Florent, Nicolas, Mathieu, Véronique, Romain, Raphaël, Clément, Camille, Isabelle, Thibaut, Didier, Avelio, Loïc, Guillaume, Anne, Marc et Paul.

Ces remerciements sont aussi l'occasion de dire une fois de plus à ma famille combien je les aime. Merci à mes parents, ma soeur Lola, Rodrigo, et Brigitte. Je leur dois tout et je saisis cette occasion pour les remercier une fois de plus. Merci aussi à ma belle famille, Alain et Valérie, pour avoir été toujours aussi accueillants et prévenants.

Enfin, un immense merci à Mathilde. Elle m'a soutenu durant toute cette thèse et elle m'a toujours encouragé. Merci pour tout.

# Liste de publications

## Articles publiés

- Butez R, (2016). Large deviations for the empirical measure of random polynomials: revisit of the Zeitouni-Zelditch theorem. *Electronic Journal of Probability*, 21.
- Butez, R. and Zeitouni, O. (2017). Universal large deviations for Kac polynomials. *Electronic Communications in Probability*, 22.
- Butez, R. (2016). Large deviations principle for biorthogonal ensembles and variational formulation for the Dykema-Haagerup distribution. *Electronic Communications in Probability*, 22.

## Articles soumis, prépublications et travaux en cours

- Butez, R. (2017). The largest root of random Kac polynomials is heavy tailed. arXiv preprint arXiv:1704.02761 Submitted.
- Butez, R. (2017) Universal large deviations for Weyl polynomials.



# Contents

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
1	Résumé . . . . . 1
2	Motivations . . . . . 1
3	Modèles de polynômes aléatoires . . . . . 2
3.1	Polynômes de Kac . . . . . 2
3.2	Polynômes elliptiques ou de Kostlan-Shub-Smale . . . . . 6
3.3	Polynômes de Weyl . . . . . 8
3.4	Fonctions gaussiennes analytiques . . . . . 10
3.5	Polynômes orthogonaux et propriété de Bernstein-Markov . . . . . 12
4	Gaz de Coulomb et matrices aléatoires . . . . . 14
4.1	Quelques éléments de théorie du potentiel . . . . . 14
4.2	Gaz de Coulomb en dimension 1 ou 2 . . . . . 16
4.3	Matrices aléatoires et gaz de Coulomb . . . . . 17
4.4	Gaz de Coulomb sur la sphère $\mathcal{S}^2$ . . . . . 22
5	Gaz de Coulomb et polynômes aléatoires . . . . . 24
5.1	Loi des racines dans le cas général . . . . . 24
5.2	Polynômes de Kac et gaz de Coulomb . . . . . 26
5.3	Polynômes elliptiques et gaz de Coulomb . . . . . 26
5.4	Polynômes à coefficients réels . . . . . 28
6	Grandes déviations pour les gaz de Coulomb . . . . . 29
6.1	Principes de grandes déviations . . . . . 29
6.2	Grandes déviations pour les log-gaz associés aux matrices aléatoires . . . . . 30
6.3	Principes de grandes déviations de gaz de Coulomb . . . . . 32
7	Résultats obtenus dans cette thèse . . . . . 34
7.1	Chapitre 1: Grandes déviations pour les mesures empiriques de polynômes aléatoires à coefficients gaussiens . . . . . 34
7.2	Chapitre 2: Universalité des grandes déviations pour les polynômes aléatoires . . . . . 36
7.3	Chapitre 3: Plus grande racine de polynômes de Kac . . . . . 38
7.4	Chapitre 4: Grandes déviations pour les ensembles biorthogonaux . . . . . 39
7.5	Chapitre 5: Grandes déviations pour les polynômes de Weyl renormalisés . . . . . 41
8	Perspectives de recherche . . . . . 42
8.1	Grandes déviations pour les particules extrêmes de gaz de Coulomb . . . . . 42
8.2	Concentration pour les gaz de Coulomb sur des variétés . . . . . 43
8.3	Principes de grandes déviations locaux pour des gaz de Coulomb sur des variétés . . . . . 43
8.4	Principes de grandes déviations locaux pour les racines de polynômes aléatoires . . . . . 44



<b>1</b>	<b>Large deviations for orthogonal polynomials</b>	<b>45</b>
1.1	Introduction . . . . .	45
1.2	Definitions and notations . . . . .	52
1.3	Large deviations for Kac polynomials . . . . .	54
1.3.1	Step 1: Distribution of the roots . . . . .	54
1.3.2	Step 2: Large deviations on the unit sphere . . . . .	57
1.3.3	Step 3: Proof of the Large Deviations Principles . . . . .	59
1.3.4	Step 4: Going back on the plane . . . . .	73
1.4	Large deviations for Elliptic polynomials . . . . .	75
1.4.1	Step 1: Distribution of the roots . . . . .	75
1.4.2	Step 2: Large deviations on the sphere . . . . .	76
1.4.3	Step 3: Proof of the large deviation principles . . . . .	78
1.4.4	Step 4: Going back on the plane . . . . .	79
1.5	General result of Zeitouni and Zelditch . . . . .	79
1.5.1	Step 1: Distribution of the roots . . . . .	79
1.5.2	Step 2: Large deviations on the sphere . . . . .	80
1.5.3	Steps 3 and 4 . . . . .	81
<b>2</b>	<b>Universal Large deviations for Kac polynomials</b>	<b>83</b>
2.1	Introduction and statement of the main result . . . . .	83
2.2	Proof of Theorem 2.1 . . . . .	87
2.3	Concluding remarks and an open problem. . . . .	91
<b>3</b>	<b>The largest root of Kac polynomials is heavy tailed</b>	<b>93</b>
3.1	Introduction . . . . .	93
3.2	Proofs of the results . . . . .	97
3.3	Comments. . . . .	101
<b>4</b>	<b>Large deviations for biorthogonal ensembles</b>	<b>103</b>
4.1	Introduction and results . . . . .	103
4.2	Application to triangular matrices. . . . .	106
4.3	Proof of Theorem 4.2 and Corollary 4.4. . . . .	106
4.3.1	Study of the rate function. . . . .	108
4.3.2	Proof of the weak lower bound. . . . .	108
4.4	Perspectives and comments. . . . .	113
<b>5</b>	<b>Universal Large deviations for Weyl polynomials</b>	<b>115</b>
5.1	Weyl polynomials and rescaled Weyl polynomials . . . . .	115
5.2	Distribution of the roots and Bernstein-Markov Property . . . . .	118
5.3	Proof of Theorem 5.2. . . . .	119
5.4	Universality of the large deviations principles . . . . .	125
5.5	Real Case . . . . .	128

# Introduction

## 1 Résumé

L'objet principal de cette thèse est l'étude des racines de plusieurs modèles de polynômes aléatoires. Il s'agit de comprendre le comportement macroscopique des racines de polynômes aléatoires dont le degré tend vers l'infini. Nous explorons la connexion existant entre racines de polynômes aléatoires et gaz de Coulomb afin d'obtenir des principes de grandes déviations pour la mesure empirique de ces racines. Dans un premier temps, nous revisitons un article de Zeitouni et Zelditch qui établit les grandes déviations de la mesure empirique pour plusieurs modèles de polynômes aléatoires dont les coefficients sont gaussiens complexes et nous étendons leur résultat au cas des coefficients gaussiens réels. Ensuite, nous prouvons que ce résultat peut être étendu à une large classe de lois sur les coefficients, faisant des grandes déviations pour ces modèles un phénomène universel. Nous montrons que ces résultats s'appliquent aux trois modèles historiques de polynômes aléatoires: les modèles de Kac, elliptique, et de Weyl. En poursuivant l'analogie entre gaz de Coulomb, matrices aléatoires et polynômes aléatoires, nous étudions la plus grande racine en module de polynômes aléatoires. Nous prouvons que, contrairement aux phénomènes observés pour les gaz de Coulomb et les matrices aléatoires, la plus grande racine ne présente pas de fluctuations universelles mais est une variable aléatoire à queues lourdes dont la loi dépend de la loi des coefficients. En particulier, elle ne converge pas vers le support de la limite des mesures empiriques. La question des grandes déviations pour des systèmes de particules "presque" coulombiens est aussi abordée à travers l'étude des ensembles biorthogonaux. Nous prouvons un principe de grandes déviations similaire à ce qui était connu jusqu'alors pour la mesure empirique de log-gaz en dimension 1.

**Mots clés:** Polynômes aléatoires, gaz de Coulomb, matrices aléatoires, grandes déviations, universalité.

## 2 Motivations

Le but de cette thèse est d'étudier les racines de polynômes aléatoires ainsi que certains aspects des gaz de Coulomb. Les polynômes aléatoires sont étudiés depuis les années 1930 mais leur lien avec les gaz de Coulomb n'a été mis en avant que dans les années 1990. Alors que la connexion entre matrices aléatoires et gaz de Coulomb a donné lieu à de nombreux résultats nouveaux, celle entre polynômes aléatoires et gaz de Coulomb a été assez peu étudiée. Ainsi, les racines de polynômes aléatoires forment un gaz de Coulomb dont le terme de confinement n'avait jamais pu être analysé finement avant l'article de Zeitouni et Zelditch [ZZ10] où les auteurs ont montré un principe de grandes déviations pour la mesure empirique de polynômes aléatoires. Depuis l'article de Ben Arous et Guionnet [BAG97] démontrant un principe de grandes déviations pour les mesures empiriques de matrices du GUE, de nombreux auteurs se sont penchés sur l'étude de principes de grandes déviations

pour les gaz de Coulomb. Nous cherchons à nous inspirer de ces techniques pour obtenir des résultats similaires pour les racines de polynômes aléatoires.

### 3 Modèles de polynômes aléatoires

Dans cette section nous présentons les principaux modèles de polynômes aléatoires:

- Les polynômes de Kac:  $P_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$
- Les polynômes elliptiques:  $P_n(z) = \sum_{k=0}^n \sqrt{\binom{n}{k}} a_k z^k$
- Les polynômes de Weyl:  $P_n(z) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{k!}} a_k z^k$

Nous présentons succinctement les fonctions gaussiennes analytiques qui sont l'objet limite naturel des polynômes aléatoires. Enfin, nous introduisons les polynômes orthogonaux aléatoires qui joueront un rôle particulièrement important dans cette thèse. Il s'agit un modèle général de polynômes aléatoires qui couvre à la fois les trois modèles précédents.

Historiquement, l'étude des polynômes aléatoires s'est concentrée autour de l'étude du nombre de racines réelles de  $P_n$ . Pour chacun des modèles évoqués, nous donnons les propriétés les plus marquantes du nombre de racines réelles. Dans toute la suite, le nombre de racines réelles est noté  $N_n$ .

L'étude de la répartition dans  $\mathbb{C}$  des racines de  $P_n$  occupe la majeure partie de ce manuscrit. Les racines de  $P_n$  seront toujours notées  $\{z_1, \dots, z_n\}$  et nous introduisons la mesure empirique des racines

$$\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \delta_{z_k}.$$

Il s'agit d'une mesure de probabilité aléatoire qui encode le  $n$ -uplet des racines.

Pour chacun de ces modèles, nous faisons un bref historique des principaux résultats connus sur leurs racines.

#### 3.1 Polynômes de Kac

Les polynômes de Kac sont de la forme

$$P_n(z) = a_0 + \dots + a_n z^n = a_n \prod_{k=1}^n (z - z_k) \quad (1)$$

où les coefficients  $a_0, \dots, a_n$  sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées.

#### Nombre de racines réelles

Selon Todhunter [Tod14, p. 618], la plus ancienne référence à l'étude des racines de polynômes aléatoires remonte à Waring en 1782 dans *Mediationes Algebraicae*. En 1864, Sylvester a également cherché à contrôler le nombre de racines réelles de certains polynômes aléatoires. Il est difficile de préciser le contenu de leurs travaux, nous renvoyons à l'article [Hol86] pour plus de détails. Dans leur forme actuelle, les polynômes aléatoires semblent avoir été étudiés pour la première fois en 1923 par Bloch et Pólya [BP32] qui s'intéressaient à l'espérance du nombre de racines réelles. Bloch et Pólya ont prouvé que,

lorsque les coefficients sont uniformes sur  $\{-1, 0, 1\}$ , le nombre de racines réelles,  $N_n$ , vérifie

$$\mathbb{E}(N_n) = O(\sqrt{n}).$$

Ainsi le nombre de racines réelles est négligeable lorsque le degré du polynôme tend vers l'infini. Dans les années 1940, Littlewood et Offord [LO39], [LO43], [LO45], [LO48] ont montré que pour de nombreuses lois sur les coefficients, telles que la loi gaussienne, Bernoulli, Rademacher et uniforme sur  $[-1, 1]$ ,

$$\frac{\log n}{\log \log \log n} \ll N_n \ll \log^2 n$$

avec probabilité  $1 - o(1)$ . En 1943, Kac a obtenu le résultat le plus important sur le nombre de racines réelles. Dans [Kac43], il a montré que lorsque les coefficients sont des variables aléatoires de loi gaussienne centrée, alors

$$\mathbb{E}(N_n) \sim \frac{2}{\pi} \log n. \quad (2)$$

Cet article repose sur la formule de Kac-Rice<sup>1</sup> permettant des calculs d'espérance pour des champs gaussiens. Suite à cet article, de nombreux auteurs ont cherché à démontrer un résultat analogue à (2) pour d'autres distributions de coefficients. Erdős et Offord [EO56] ont prouvé (2) dans le cas de variables aléatoires de Rademacher. En 1969, Stevens [Ste69] a montré que cet équivalent était valable pour des coefficients indépendants mais non identiquement distribués, dont le quatrième moment est uniformément borné et dont les queues sont contrôlées. En 1971, Ibragimov et Maslova [IM71a] ont prouvé que si les coefficients sont centrés et dans le domaine d'attraction de la loi gaussienne, alors  $\mathbb{E}(N_n) \sim \frac{2}{\pi} \log n$ . Dans [IM71b], ils ont montré que lorsque les coefficients vérifient

$$\mathbb{E}(a_0) \neq 0, \mathbb{P}(a_0 = 0) = 0$$

et appartiennent au domaine d'attraction de la loi gaussienne, alors

$$\mathbb{E}(N_n) \sim \frac{1}{\pi} \log n.$$

Ainsi, le comportement du nombre moyen de racines réelles est universel. En dehors de cette classe d'universalité, d'autres comportements sont possibles. Logan et Shepp [LS68] ont montré que si les coefficients sont des variables aléatoires de loi de Cauchy alors

$$\mathbb{E}(N_n) \sim c \log n \text{ où } c = \frac{8}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{x e^{-x}}{x - 1 + 2e^{-x}} dx.$$

Le théorème d'Ibragimov et Maslova correspond à l'universalité du premier ordre dans le développement asymptotique de  $\mathbb{E}(N_n)$ . Notons que Maslova [Mas74b] [Mas74a] a montré que

$$\text{Var}(N_n) \sim \frac{4}{\pi} \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) \log n$$

et a prouvé que  $N_n$  satisfait un théorème de la limite centrale.

En 1988, Wilkins [Wil88] a donné un développement de  $\mathbb{E}(N_n) = \frac{2}{\pi} \log n + c + \dots$  dans le cas des coefficients gaussiens. Ce résultat a été affiné par Edelman et Kostlan [EK95]

<sup>1</sup>Cette formule a été évoquée par Rice en 1936, puis démontrée par Kac en 1943 et Rice en 1944.

en 1995 qui ont prouvé que l'espérance du nombre de racines de  $P_n$  est donnée par la longueur de la courbe  $(\tilde{\gamma}(t))_{t \in \mathbb{R}}$  où

$$\gamma(t) = (1, t, \dots, t^n) \quad \text{et} \quad \tilde{\gamma}(t) = \frac{\gamma(t)}{\|\gamma(t)\|}.$$

Grâce à cette formule, ils ont obtenu le développement asymptotique

$$\mathbb{E}(N_n) = \frac{2}{\pi} \log n + c + \frac{2}{\pi n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

En 2015, Do, Nguyen et Vu [DNV15] ont montré que, dès lors que les coefficients sont centrés et ont des moments d'ordre  $2 + \varepsilon$ ,  $\mathbb{E}(N_n) - \frac{2}{\pi} \log n$  est bornée et admet une limite qui dépend de la loi des coefficients. Ainsi, le développement dû à Edelman et Kostlan n'est pas universel.

La probabilité qu'un polynôme de Kac ait exactement  $k$  racines réelles a été calculée par Dembo, Poonen, Shao et Zeitouni dans [DPSZ02]. Majumdar et Schehr [SM08] ont étudié l'intensité du processus ponctuel des racines réelles des polynômes de Kac dont les coefficients sont gaussiens réels et ont analysé la probabilité qu'il n'y ait aucune racine dans un intervalle donné.

Le nombre de racines réelles pour le cas de coefficients gaussiens dépendants est traité dans le livre de Farahmand [Far98] ainsi que le nombre de solutions aux équations du type  $P_n(z) = K$ .

### Comportement des racines complexes

La question du comportement des racines complexes a été abordée pour la première fois par Hammersley [Ham56] qui a cherché à calculer la loi jointe du vecteur aléatoire  $(z_1, \dots, z_n)$ . Cependant, les formules obtenues sont trop complexes pour être utilisables. En 1962, Šparo et Šur [ŠŠ62] ont montré que pour tout  $\alpha, \beta$  dans  $[0, 2\pi]$  et tout  $\delta \leq 1$ ,

$$\int \mathbf{1}_{\text{Arg}z \in [\alpha, \beta]} d\mu_n(z) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\beta - \alpha}{2\pi} \quad \text{et} \quad \int \mathbf{1}_{1-\delta < |z| < 1+\delta} d\mu_n(z) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \quad (3)$$

en probabilité. Ce résultat est équivalent au fait que la mesure empirique converge vers la mesure uniforme sur le cercle unité de  $\mathbb{C}$ , notée  $\nu_S$  (voir figure 1). Malheureusement, le cadre exact de leur article n'est pas facile à déterminer. En 1965, Arnold [Arn66] a prouvé que si  $\int_0^\infty |\log x| dF(x) < \infty$ , où  $F$  est la fonction de répartition de la loi des coefficients, alors (3) est vraie. Ce n'est qu'en 2013 qu'Ibragimov et Zaporozhets [IZ13] ont prouvé l'équivalence

$$\mu_n \rightarrow \nu_S \quad \iff \quad \mathbb{E}(\log(1 + |a_0|)) < \infty \quad (4)$$

où la notation  $\mu_n \rightarrow \nu_S$  désigne la convergence

$$\forall f \in C_b^0, \quad \int f(x) d\mu_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int f(x) d\nu_S(x).$$

De plus, ils ont démontré que l'équirépartition des arguments de racines est valide quelle que soit la loi des coefficients. La paternité (4) n'est pas évidente. Il est donc difficile de déterminer ce qui est réellement prouvé dans les articles de Šparo et Šur et d'Arnold<sup>2</sup>. Il semble que l'implication directe soit prouvée dans un article ultérieur et on en trouve une preuve dans le livre de Bharucha-Reid et Sambandham [BRS86]. Pour avoir une intuition

<sup>2</sup>Le premier article est en russe et n'a jamais été traduit. Le second est en allemand et il semble qu'Arnold annonce des résultats qu'il démontrera dans un article ultérieur introuvable.

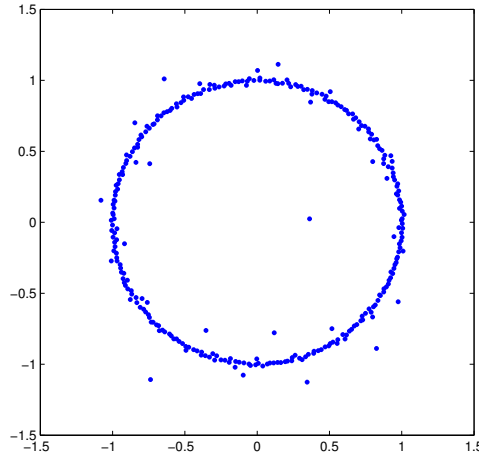


Figure 1: Racines de polynômes de Kac à coefficients gaussiens complexes.

de ce résultat, on peut d'abord remarquer que si la loi du vecteur aléatoire  $(a_0, \dots, a_n)$  est la même que celle de  $(a_n, \dots, a_0)$  alors la loi de  $\{z_1, \dots, z_n\}$  est invariante par l'inversion  $z \mapsto 1/z$ . Cela provient du fait que, dans ce cas,  $P_n(z)$  et  $z^n P_n(1/z)$  ont la même loi. De plus, la condition  $\mathbb{E}(\log(1 + |a_0|)) < \infty$  est équivalente au fait que la série entière

$$P_\infty(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

a un rayon de convergence presque sûrement égal à 1, où  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est une famille de variables aléatoires indépendantes de même loi. Ainsi, les zéros de  $P_n$  ne peuvent s'accumuler en aucun point du disque unité car les zéros de  $P_\infty$  ne peuvent avoir aucun point d'accumulation à l'intérieur du disque ouvert de convergence. Ce type d'argument est essentiel dans le chapitre 3 où nous étudions les plus grandes et plus petites racines de  $P_n$  en module. Ainsi, le fait que les racines de  $P_n$  doivent s'accumuler autour du cercle unité n'est pas étonnant, mais il reste à prouver qu'elles s'y concentrent uniformément en arguments. Un résultat déterministe d'Erdős et Turan [ET50] stipule que pour tout polynôme à coefficients complexes tel que  $a_0 a_n \neq 0$  alors pour tout  $\alpha, \beta$  dans  $[0, 2\pi]$

$$\left| \int 1_{\text{Arg}z \in [\alpha, \beta]} d\mu_n(z) - \frac{\beta - \alpha}{2\pi} \right| \leq \frac{16}{\sqrt{n}} \sqrt{\log \frac{\max_{|z|=1} |P_n(z)|}{\sqrt{|a_0 a_n|}}}. \quad (5)$$

Lorsque les coefficients sont majorés et minorés, on déduit facilement l'équirépartition angulaire des racines. Dans le cas général, il faut contrôler le membre de droite de (5). Lorsque la condition de moment  $\mathbb{E}(\log(1 + |a_0|)) < \infty$  n'est pas vérifiée, d'autres comportements sont possibles. Götze et Zaporozhets [GZ] ont montré que si  $\log(1 + \log(1 + |a_0|))$  a une queue de distribution à variations lentes, alors les zéros de  $P_n$  se concentrent sur 2 cercles dont les rayons tendent vers 0 et l'infini. Kabluchko et Zaporozhets [KZ13] ont étudié la transition entre localisation et délocalisation des racines en proposant un modèle interpolant entre le cas régulier ( $\mathbb{E}(\log(1 + |a_0|)) < \infty$ ) et le modèle de Götze et Zaporozhets. Pour ce modèle, ils ont montré que, lorsqu'on se rapproche des queues logarithmiques lourdes, les racines de  $P_n$  se concentrent sur plusieurs cercles qu'ils caractérisent.

Une fois le comportement macroscopique des racines établi, on peut alors se poser la question d'estimées plus fines sur cette concentration et de leur universalité. Ainsi, Shepp

et Vanderbei [SV95] ont montré que, lorsque les coefficients sont gaussiens, réels et centrés,

$$\mathbb{E} \left( \int 1_{e^{-\delta/n} < |z| < e^{\delta/n}} d\mu_n(z) \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{-2\delta}}{1 + e^{2\delta}} - \frac{1}{\delta}.$$

Ibragimov et Zeitouni [IZ97] ont étendu cette relation au cas où les coefficients sont dans le domaine d'attraction d'une loi  $\alpha$ -stable, où cette relation devient

$$\mathbb{E} \left( \int 1_{e^{-\delta/n} < |z| < e^{\delta/n}} d\mu_n(z) \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{-2\delta}}{1 + e^{2\delta}} - \frac{2}{\alpha\delta}.$$

Ces résultats montrent comment les racines de polynômes de Kac se concentrent autour du cercle unité.

L'universalité du comportement des racines de polynômes aléatoires est aussi valide au niveau microscopique, comme l'ont montré Tao et Vu [TV15]. Ils prouvent ainsi que les fonctions de corrélation sont localement universelles.

Zeitouni et Zelditch [ZZ10] ont montré un principe de grandes déviations pour la suite des mesures empiriques des polynômes de Kac lorsque les coefficients sont des variables aléatoires de lois gaussiennes complexes  $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, 1)$ <sup>3</sup>. Ghosh et Zeitouni [GZ16] ont prouvé un principe de grandes déviations similaire dans le cas de coefficients de loi exponentielle de paramètre 1.

Ces résultats sont détaillés dans la section 7.1 et font l'objet des deux premiers chapitres de cette thèse.

### 3.2 Polynômes elliptiques ou de Kostlan-Shub-Smale

Les polynômes elliptiques, parfois appelés polynômes de Kostlan-Shub-Smale ou polynômes  $SU(2)$  sont de la forme

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k \sqrt{\binom{n}{k}} z^k. \quad (6)$$

Ces polynômes semblent avoir été étudiés pour la première fois dans les années 1990 par les physiciens Bogomolny, Bohigas et Leboeuf [BBL92], [BBL96] comme modèle de système quantique chaotique. Ce genre de polynôme apparaît en mécanique quantique pour l'étude de systèmes de spin dont le module est conservé, les coefficients binomiaux proviennent du fait que l'espace des phases de ce système est une sphère.

Ces polynômes ont aussi été étudiés par Kostlan [Kos93], ainsi que par Shub et Smale [SS93], pour leurs propriétés mathématiques. Les polynômes elliptiques peuvent sembler au premier abord moins naturels que les polynômes de Kac, mais le grand nombre de symétries des zéros de  $P_n$  rend ce modèle particulièrement agréable. Kostlan défend l'idée que ces polynômes seraient le modèle le plus naturel de polynômes aléatoires.

#### Comportement des racines complexes

Le comportement global des racines des polynômes elliptiques se déduit facilement des symétries du modèle. En effet, lorsque les coefficients sont gaussiens complexes, la projection des racines sur la sphère a une loi invariante par l'action  $SU(2)$  (d'où leur nom).

<sup>3</sup>La loi gaussienne complexe, notée  $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, 1)$ , a pour densité sur  $\mathbb{C}$   $\frac{1}{\pi} e^{-|z|^2}$ . Cela revient à dire que les parties réelles et imaginaires sont indépendantes de loi  $\mathcal{N}_{\mathbb{R}}(0, 1/2)$ .

C'est ainsi que Bogomolny, Bohigas et Leboeuf [BBL92], [BBL96] ont montré que quel que soit  $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{E}(\mu_n) = \frac{1}{\pi} \frac{d\ell_{\mathbb{C}}(z)}{(1+|z|^2)^2} =: \omega_{FS} \quad (7)$$

où  $d\ell_{\mathbb{C}}$  est la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{C}$  (voir figure 2). La mesure  $\omega_{FS}$  est parfois appelée mesure de Fubini-Study, ou mesure de Cauchy complexe. C'est l'image par la projection stéréographique de la mesure uniforme sur la sphère unité de  $\mathbb{R}^3$ ,  $S^2$ . De plus, Kabluchko et Zaporozhets [KZ13] ont montré un résultat d'universalité pour la mesure empirique similaire à celui d'Ibragimov et Zaporozhets:

$$\mu_n \rightarrow \omega_{FS} \iff \mathbb{E}(\log(1 + |a_0|)) < \infty. \quad (8)$$

La différence majeure entre les polynômes de Kac et les polynômes elliptiques est que les zéros de  $P_n$  ne se concentrent pas sur le cercle unité mais "remplissent" l'espace. Si on compactifie par projection stéréographique inverse, les zéros des polynômes elliptiques se répartissent uniformément sur la sphère alors que les zéros des polynômes de Kac se concentrent sur l'équateur. Tout comme pour les polynômes de Kac, les fonctions de corrélation des zéros des polynômes elliptiques sont universelles d'après le résultat de Tao et Vu [TV15]. Zeitouni et Zelditch [ZZ10] ont montré que la suite des mesures empiriques satisfait un principe de grandes déviations, qui est détaillé à la fin de l'introduction et étendu dans le cadre de cette thèse.

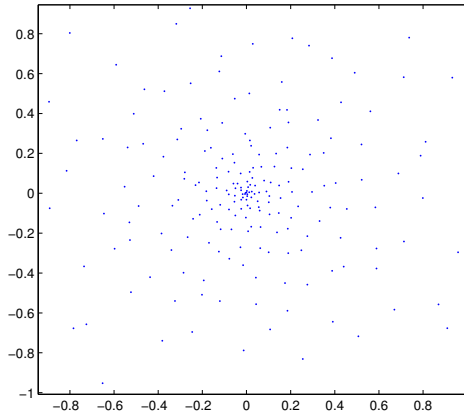


Figure 2: Racines de petit module d'un polynôme elliptique de degré 200.

### Nombre de racines réelles

Le nombre de racines réelles des polynômes elliptiques à coefficients gaussiens réels est très différent du cas des polynômes de Kac. Edelman et Kostlan [EK95] ont montré que l'intensité du processus ponctuel des racines est donnée par

$$\rho_1(x) = \frac{\sqrt{n}}{\pi(1+x^2)}$$

ce qui implique

$$\mathbb{E}(N_n) = \sqrt{n}.$$



Tao et Vu [TV15, théorème 5.6] ont montré que dès lors que la loi des coefficients est centrée, de variance unitaire et vérifiant

$$\mathbb{E}(|a_0|^{2+\varepsilon}) < C$$

alors

$$\mathbb{E}(N_n) = \sqrt{n} + o(n^{1/2-c})$$

où  $c$  est une constante qui dépend de  $\varepsilon$  et  $C$ . Dans le cas gaussien réel, Dalmao [Dal15] a démontré que

$$\text{Var}(N_n) = (K + o(1)) \sqrt{n}$$

où  $K$  est une constante explicite. Il a aussi prouvé un théorème limite central pour le nombre de racines réelles.

Les racines de ces polynômes sont réparties uniformément sur la sphère  $S^2$ . Cela en fait de meilleurs candidats à l'étude de systèmes d'équations polynômiales aléatoires. Shub et Smale ont étudié le nombre moyen de solutions d'un système d'équations algébriques aléatoires

$$P_1(z_1, \dots, z_d) = \dots = P_n(z_1, \dots, z_d) = 0$$

où les  $P_i$  sont des polynômes aléatoires homogènes en  $z_1, \dots, z_d$ , indépendants, de degré  $d_i$ , de la forme

$$P_i(z_1, \dots, z_d) = \sum_{\|j\| \leq d_i} a_j \sqrt{\binom{n}{j_1 \dots j_d}} z_1^{j_1} \dots z_d^{j_d}$$

où les  $a_j$  sont des coefficients gaussiens réels indépendants. Sous ces hypothèses, Shub et Smale [SS93] ont montré que le nombre moyen de solutions à ce système d'équations est exactement

$$\mathbb{E}(N_n^d) = \sqrt{d_1 \dots d_m}.$$

Cette estimée a été étendue à d'autres distributions par Azaïs et Wschebor [AW05], qui ont aussi obtenu la variance du nombre de solutions.

Ces polynômes de Kostlan homogènes permettent de définir une notion de variété algébrique aléatoire en examinant le lieu des zéros dans  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$  d'un polynôme de degré  $n$ , homogène de degré  $d$ . Ainsi, Kostlan a étudié le volume moyen de telles variétés algébriques réelles <sup>4</sup>. Dans une direction similaire, Gayet et Welschinger [GW15] (voir [Wel15] pour une introduction) ont étudié la topologie de ces variétés algébriques réelles aléatoires.

### 3.3 Polynômes de Weyl

Les polynômes de Weyl sont de la forme

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k \frac{1}{\sqrt{k!}} z^k$$

où les  $a_k$  sont des variables aléatoires indépendantes de loi  $\mathcal{N}_{\mathbb{R}}(0, 1)$  ou  $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, 1)$ . Ces polynômes correspondent aux fonctions d'ondes associées à des systèmes quantiques [FH99], [Leb00]. Les auteurs de [CHS<sup>+</sup>06] ont pu observer les racines des polynômes de Weyl

<sup>4</sup>Dans [Kos93], il annonce un résultat à paraître, mais le preprint n'est pas disponible et n'a jamais été publié.

expérimentalement en réalisant un gaz de Bose en rotation <sup>5</sup>. Ce système de particules converge vers les racines de la fonction analytique aléatoire

$$P_\infty(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{1}{\sqrt{k!}} z^k.$$

Les zéros de  $P_\infty$  sont invariants en loi par les isométries du plan complexe. En raison de cette symétrie, ces polynômes sont souvent désignés comme étant le modèle “plat” (flat polynomials). Ces considérations sont détaillées dans la prochaine sous-section concernant les fonctions analytiques aléatoires gaussiennes.

### Comportement des racines complexes

Lorsque les coefficients sont des variables aléatoires indépendantes de loi  $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, 1)$ , on peut calculer la loi jointe des zéros [FH99]. On peut également montrer que la densité est approximativement uniforme sur  $D(0, \sqrt{n})$  et tend très rapidement vers 0 en dehors. Cette propriété est aussi vérifiée par les valeurs propres de l'ensemble de Ginibre et c'est la raison principale pour laquelle ces polynômes ont été étudiés.

La suite des mesures empiriques des racines des polynômes de Weyl ne converge pas. Afin d'observer une convergence, il est nécessaire de renormaliser les racines, comme pour les matrices de Ginibre. On considère la mesure empirique renormalisée de  $P_n$

$$\tilde{\mu}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \delta_{z_k/\sqrt{n}}.$$

Cette mesure est la mesure empirique associée aux polynômes de Weyl renormalisés

$$Q_n(z) = P_n(\sqrt{n}z) = \sum_{k=0}^n a_k \frac{\sqrt{n^k}}{\sqrt{k!}} z^k.$$

Le résultat d'universalité de Kabluchko et Zaporozhets [KZ14] implique que

$$\tilde{\mu}_n \rightarrow \frac{1_{|z| \leq 1}}{\pi} \ell_{\mathbb{C}} \iff \mathbb{E}(\log(1 + |a_0|)) < \infty.$$

Les racines des polynômes de Weyl vérifient donc la “loi du cercle” des matrices aléatoires. Nous verrons dans le chapitre 5 que la suite des mesures empiriques des polynômes de Weyl renormalisés satisfait un principe de grandes déviations lorsque les coefficients sont des variables aléatoires de loi  $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, 1)$  ou  $\mathcal{N}_{\mathbb{R}}(0, 1)$  indépendantes <sup>6</sup>, et que ces deux principes de grandes déviations sont universels, l'un pour le cas des coefficients complexes à densité, l'autre pour les coefficients réels à densité.

### Nombre de racines réelles

Lorsque les coefficients sont des variables indépendantes de loi  $\mathcal{N}_{\mathbb{R}}(0, 1)$ , on peut montrer que

$$\mathbb{E}(N_n) = \left( \frac{2}{\pi} + o(1) \right) \sqrt{n}.$$

A l'aide des techniques développées dans [EK95], on peut aussi calculer l'intensité de racines réelles sur  $\mathbb{R}$ . Cette intensité est étudiée en détails dans l'article de Majumdar et

<sup>5</sup>Il s'agit d'atomes confinés dans un plan par des lasers, soumis à un potentiel harmonique et en rotation. Les auteurs montrent que les vortex qui se forment correspondent aux racines de polynômes de Weyl.

<sup>6</sup>Ce sont deux principes de grandes déviations distincts, avec des fonctions de taux différentes.

Schehr [SM08]. Tao et Vu [TV15, théorème 5.3] ont montré l'universalité du nombre de racines réelles pour ces polynômes. Ainsi, dès lors qu'il existe  $\varepsilon > 0$  et  $C$  tels que

$$\mathbb{E}(|a_0|^{2+\varepsilon}) \leq C,$$

le nombre de racines réelles des polynômes de Weyl vérifie

$$\mathbb{E}(N_n) = \frac{2}{\pi} \sqrt{n} + o(n^{1/2-c}).$$

Dans le cas gaussien, un théorème limite central pour le nombre de racines réelles a très récemment été démontré par Do et Vu [DV17]. Majumdar et Schehr [SM08], puis Do et Vu, ont par ailleurs montré que la variance du nombre de racines réelles vérifie

$$\text{Var}(N_n) = (2K' + o(1))\sqrt{n}$$

où  $K' = 0.1819\dots$  est une constante explicite.

On peut alors dresser un tableau récapitulatif des propriétés des racines des polynômes de Kac, des polynômes elliptiques et des polynômes de Weyl.

Modèle	$\mathbb{E}(N_n)$	$\text{Var}(N_n)$	Limite des mesures empiriques
Kac	$\frac{2}{\pi} \log n + o(1)$	$\frac{4}{\pi} \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) \log n$	$\mu_n \rightarrow \nu_S$
Elliptique	$\sqrt{n}(1 + o(1))$	$(K + o(1)) \sqrt{n}$	$\mu_n \rightarrow \frac{1}{\pi(1+ z ^2)^2} d\ell_{\mathbb{C}}(z)$
Weyl	$\frac{2}{\pi} \sqrt{n}(1 + o(1))$	$(2K' + o(1)) \sqrt{n}$	$\tilde{\mu}_n \rightarrow \frac{1_{ z <1}}{\pi} d\ell_{\mathbb{C}}(z)$

### 3.4 Fonctions gaussiennes analytiques

Cette section est une courte introduction au domaine des fonctions analytiques gaussiennes (GAF pour Gaussian Analytic Functions en anglais). Il s'agit de fonctions analytiques aléatoires de la forme

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k c_k z^k \quad (9)$$

où les  $a_k$  sont des variables aléatoires indépendantes de loi  $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, 1)$ .

Les zéros de ces fonctions ont été beaucoup étudiés et nous renvoyons vers le livre de Hough, Krishnapur, Peres et Virág [HKPV09]. Ici, nous présentons les trois modèles limites correspondant aux modèles de polynômes aléatoires introduits précédemment. On définit ainsi pour un entier  $L$  fixé

- La GAF hyperbolique:  $f_L(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{\sqrt{L(L+1)\dots(L+k-1)}}{\sqrt{k!}} z^k \quad (R = 1)$
- La GAF elliptique:  $f_L(z) = \sum_{k=0}^L a_k \sqrt{\binom{L}{k}} z^k \quad (R = \infty)$
- La GAF plate:  $f_L(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{\sqrt{L^k}}{\sqrt{k!}} z^k \quad (R = \infty).$

Pour  $L = 1$ , la GAF hyperbolique est la limite des polynômes de Kac et la GAF plate est la limite des polynômes de Weyl. Lorsque  $L = n$ , la GAF elliptique correspond exactement au  $n$ -ième polynôme elliptique. Les zéros de ces différentes fonctions sont invariants en loi par certaines transformations, comme détaillé dans le tableau ci-dessous.

Modèle	Domaine	Symétries	Mesure invariante
Hyperbolique	$\mathbb{D} = \{ z  < 1\}$	$\phi_{\alpha,\beta}(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\beta z + \bar{\alpha}},  \alpha ^2 -  \beta ^2 = 1$	$\frac{1_{ z <1} d\ell_{\mathbb{C}}}{(1- z ^2)^2}$
Elliptique	$\mathbb{C} \cup \{\infty\}$	$\phi_{\alpha,\beta}(z) = \frac{\alpha z + \beta}{-\beta z + \bar{\alpha}},  \alpha ^2 +  \beta ^2 = 1$	$\frac{d\ell_{\mathbb{C}}}{(1+ z ^2)^2}$
Plat	$\mathbb{C}$	$\phi_{\alpha,\beta}(z) = \alpha z + \beta,  \alpha  = 1$	$d\ell_{\mathbb{C}}$

Les preuves de ces résultats sont disponibles dans le livre [HKPV09, Section 2.2]. Ces trois GAF correspondent donc à une courbure négative (hyperbolique), une courbure positive (elliptique) et une courbure nulle (plate).

Les fonctions analytiques aléatoires (9) sont une généralisation des polynômes aléatoires. On peut considérer des suites de telles fonctions de la forme

$$f_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k c_{k,n} z^k$$

où les coefficients  $c_{k,n}$  dépendent de  $n$ . On peut définir la mesure empirique de  $f_n$  par

$$\mu_{f_n} = \sum_{z|f_n(z)=0} \delta_z.$$

Kabluchko et Zaporozhets [KZ14] ont démontré le théorème de convergence et d'universalité suivant pour la suite  $\mu_{f_n}$ .

**Théorème 1** (Théorème principal Kabluchko-Zaporozhets). *Soit  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées telles que*

$$\mathbb{E}(\log(1 + |a_0|)) < \infty.$$

*On considère la série entière aléatoire dépendant de  $n$*

$$f_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k c_{k,n} z^k$$

*où les  $c_{n,k} \in \mathbb{C}$  sont des coefficients déterministes. On suppose qu'il existe une fonction  $g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  et un nombre  $T_0 \in (0, \infty]$  tels que*

1.  $\forall t < T_0, g(t) > 0$  et  $\forall t > T_0, f(t) = 0$ ,
2.  $f$  est continue sur  $[0, T_0)$  et, si  $T_0 < \infty$ ,  $g$  est continue à gauche en  $T_0$ ,
3.  $\forall A > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \in [0, An]} |c_{n,k}|^{1/n} - g(\frac{k}{n}) = 0$ ,
4.  $R_0 := \liminf_{t \rightarrow \infty} g(t)^{-1/t} \in (0, \infty]$  et  $\liminf_{n,k/n \rightarrow \infty} c_{n,k}^{-1/k} \geq R_0$ .

*Sous ces conditions, la suite de mesures  $(\frac{1}{n} \mu_{f_n})_{n \in \mathbb{N}}$  converge en probabilité vers une mesure  $\mu_{\infty}$  de support inclus dans le disque de centre 0 et de rayon  $R_0$ . La mesure  $\mu_{\infty}$  est invariante par rotation et vérifie pour tout  $r \leq R_0$*

$$\mu_{\infty}(\{z \in \mathbb{C}, |z| \leq r\}) = I'(\log r)$$

*où  $I(s) = \sup_{t \geq 0} \{st + \log g(t)\}$  est la transformée de Fenchel-Legendre de  $-\log g$ .*

La suite  $(c_{n,k})$  est appelée “profil de variance”. Ce terme provient du fait que lorsque les coefficients  $a_k$  sont des variables aléatoires de loi gaussienne réelle ou complexe, on peut inclure les  $c_{n,k}$  dans la variance des  $a_k$ . Le théorème de Kabluchko et Zaporozhets identifie la limite des mesures empiriques uniquement à l’aide du profil de variance. Ainsi, l’universalité du comportement des mesures empiriques des racines des polynômes de Kac, elliptiques et de Weyl renormalisés peut se déduire de ce résultat général. À notre connaissance, l’universalité de la convergence des mesures empiriques des zéros des polynômes elliptiques et de Weyl renormalisés n’était pas connue avant ce résultat général.

Étudier le processus ponctuel des zéros de fonctions analytiques aléatoires est en général difficile. Le seul modèle pour lequel on dispose de toutes les informations sur ce processus est le celui de la GAF hyperbolique  $f_1$ , associée aux polynômes de Kac. Peres et Virag [PV05] (voir aussi [HKPV09, chapitre 5]) ont montré que le processus des zéros forme un processus déterminantal dans le disque de centre 0 et de rayon 1, et de noyau

$$K(z, w) = \frac{1}{\pi(1 + z\bar{w})^2}.$$

### 3.5 Polynômes orthogonaux et propriété de Bernstein-Markov

On considère un produit scalaire sur  $\mathbb{C}_n[X]$  de la forme

$$\langle P, Q \rangle = \int P(z)\overline{Q(z)}e^{-n\phi(z)}d\nu(z) \quad (10)$$

où  $\nu$  est une mesure de probabilité sur  $\mathbb{C}$  et  $\phi$  est un poids. On peut aussi considérer des produits scalaires de la même forme sur le plan projectif  $\mathbb{CP}^1$ . On étudie alors des polynômes de la forme

$$P_n(z) = a_0R_0(z) + \cdots + a_nR_n(z) \quad (11)$$

où la famille  $(R_0, \dots, R_n)$  est une base orthonormale de  $\mathbb{C}_n[X]$  à degrés étagés et où les  $a_k$  sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. Ces polynômes ont été introduits par Shiffman et Zelditch [SZ03], avec  $\phi = 0$ . Ils montrent que pour des coefficients gaussiens complexes, et dans le cas où le support de  $\nu$  est le bord d’un domaine simplement connexe analytique et borné, les mesures empiriques des zéros de  $P_n$  convergent vers la mesure d’équilibre de la courbe <sup>7</sup>. C’est une généralisation du résultat déjà connu pour les polynômes de Kac.

Les polynômes de Kac, les polynômes elliptiques (à un facteur  $\sqrt{n+1}$  près qui n’affecte pas les racines) et les polynômes de Weyl sont des cas particuliers de ce modèle général comme le montre le tableau ci dessous. Pour chacun des modèles, nous précisons si le couple  $(\phi, \nu)$  satisfait la propriété de Bernstein-Markov qui est présentée ci dessous.

---

<sup>7</sup>La notion de mesure d’équilibre d’un ensemble compact est issue de la théorie du potentiel. Elle est abordée dans la section 4.1.

Modèle	$\nu$	$\phi$
Kac	$\nu_S$ uniforme sur $S$	$\phi(z) = 0$
Elliptique	$\omega_{FS} = \frac{d\ell_{\mathbb{C}}}{\pi(1+ z ^2)^2}$	$\phi(z) = \log(1 +  z ^2)$
Weyl	$\frac{1}{\pi}e^{- z ^2} d\ell_{\mathbb{C}}(z)$	$\phi(z) = 0$
Weyl renormalisé	$\frac{1}{\pi}d\ell_{\mathbb{C}}(z)$	$\phi(z) =  z ^2$

Ces polynômes sont étudiés en détail dans l'article [ZZ10] qui fait l'objet du premier chapitre de cette thèse. On suppose toujours que le couple  $(\phi, \nu)$  satisfait la propriété de Bernstein-Markov ci-dessous.

**Définition 2** (Propriété de Bernstein-Markov). *Soit  $\nu$  une mesure et  $\phi$  une fonction continue. On dit que le couple  $(\phi, \nu)$  satisfait la propriété de Bernstein-Markov si, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une constante  $C_\varepsilon$  telle que pour tout  $P \in \mathbb{C}_n[X]$*

$$\sup_{z \in \text{supp}(\nu)} \left\{ |P(z)|^2 e^{-n\phi(z)} \right\} \leq C_\varepsilon e^{n\varepsilon} \|P\|_2^2 \quad (12)$$

où

$$\|P\|_2^2 = \int |P(z)|^2 e^{-n\phi(z)} d\nu(z).$$

Il s'agit d'une comparaison entre la norme euclidienne et la norme  $\mathcal{L}^\infty(\nu)$  pondérée par  $\phi$ . Ces normes sont équivalentes sur  $\mathbb{C}_n[X]$ , donc la propriété de Bernstein-Markov stipule que le ratio de ces normes doit avoir une croissance sous-exponentielle. Cette propriété a été introduite pour la première fois par Berman et Bouksom [BB10] et a de fortes connexions avec la théorie du pluripotentiel. Nous renvoyons aux travaux [Blo07], [Blo09], [BLPW15], [Pia16] pour plus d'informations au sujet de la théorie du pluripotentiel et de la propriété de Bernstein-Markov.

Nous verrons dans le chapitre 1 que les couples associés aux polynômes de Kac et aux polynômes elliptiques satisfont cette propriété avec une mesure de probabilité. Le couple  $(\phi, \nu)$  associé aux polynômes de Weyl ne satisfait pas la propriété de Bernstein-Markov. Cependant, nous verrons dans le chapitre 5 que le couple associé aux polynômes de Weyl renormalisé vérifie la propriété de Bernstein-Markov, mais  $\nu = \frac{1}{\pi}\ell_{\mathbb{C}}$  n'est pas une mesure finie<sup>8</sup>.

Zeitouni et Zelditch [ZZ10] ont démontré un principe de grandes déviations pour la suite des mesures empiriques dans  $\mathcal{M}_1(\mathbb{C}\mathbb{P}^1)$  lorsque les  $a_k$  sont des gaussiennes complexes  $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, 1)$ . Cela implique la convergence de la suite des mesures empiriques vers la mesure d'équilibre du support de  $\nu$ <sup>9</sup> avec potentiel  $\phi$ , sous réserve que le support de  $\nu$  ne soit fin en aucun point. Cette hypothèse de régularité du support est vérifiée pour les courbes de Jordan, pour les ensembles connexes ayant plus d'un point et leurs unions finies. La notion de finesse est liée à la topologie fine<sup>10</sup>.

L'article de Zeitouni et Zelditch fait l'objet du premier chapitre de cette thèse. Nous proposons une démonstration alternative de leur résultat et nous l'étendons au cas où les coefficients  $a_k$  sont des gaussiennes indépendantes  $\mathcal{N}_{\mathbb{R}}(0, 1)$ .

<sup>8</sup>Dans la littérature, il est toujours supposé que  $\nu$  est une mesure finie.

<sup>9</sup>Cette notion est liée à la théorie du potentiel, introduite dans la prochaine section.

<sup>10</sup>C'est la plus petite topologie rendant les fonctions sous-harmoniques continues.

Nous verrons dans le chapitre 5 qu'on peut modifier légèrement les démonstrations du chapitre 1 pour couvrir le cas des polynômes de Weyl renormalisés.

## 4 Gaz de Coulomb et matrices aléatoires

Dans cette section nous présentons quelques notions de théorie du potentiel qui servent à définir le modèle du gaz de Coulomb. Nous présentons aussi certains modèles de matrices aléatoires dont les valeurs propres forment des gaz de Coulomb dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

### 4.1 Quelques éléments de théorie du potentiel

On définit la fonction de Green de  $\mathbb{R}^d$  par

$$G_d(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } d = 1 \\ -\log |x| & \text{si } d = 2 \\ \frac{1}{\|x\|^{d-2}} & \text{si } d \geq 3. \end{cases}$$

Cette fonction est l'unique solution au sens des distributions de

$$-\Delta G_d = c_d \delta_0. \quad (13)$$

avec

$$c_d = \begin{cases} 2 & \text{si } d = 1 \\ 2\pi & \text{si } d = 2 \\ \frac{d(d-2)\pi^{d/2}}{\Gamma(1+d/2)} & \text{si } d \geq 3. \end{cases}$$

On définit l'interaction coulombienne entre deux particules placées aux positions  $x$  et  $y$  comme étant égale à  $G_d(x - y)$ . En dimension 3, on retrouve la formule habituelle de l'énergie d'interaction coulombienne, proportionnelle à l'inverse de la distance entre les particules. À part en dimension 1, l'énergie d'interaction entre deux particules tend vers l'infini lorsque les particules se rapprochent: c'est une interaction répulsive.

Lorsqu'on a une distribution de charges modélisée par une mesure  $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ , l'énergie potentielle générée par cette distribution de charges en un point  $x$  est définie par

$$U^\mu(x) := \int G_d(x - y) d\mu(y) = G_d * \mu(x). \quad (14)$$

La fonction  $U^\mu$  est aussi appelée potentiel de la mesure  $\mu$ . Cet objet caractérise la mesure  $\mu$  car, grâce à la relation (13), on a

$$\Delta U^\mu = \mu$$

au sens des distributions. On définit aussi l'énergie de Green d'une distribution de charges par

$$\mathcal{E}(\mu) := \iint G_d(x - y) d\mu(x) d\mu(y). \quad (15)$$

L'énergie de Green peut être infinie, par exemple si la mesure  $\mu$  possède un atome. En dimension 2, le logarithme n'étant pas de signe constant, la définition (15) peut donner lieu à une forme indéterminée. On lève cette ambiguïté en définissant l'énergie de Green par

$$\mathcal{E}(\mu) = \begin{cases} \iint -\log |x - y| d\mu(x) d\mu(y) & \text{si } \int \log(1 + |x|) d\mu(x) < \infty \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

On peut aussi définir cette fonction sur  $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ , elle est alors appelée entropie non commutative et a été introduite dans le cadre des probabilités libres par Voiculescu [Voi91].

Nous considérons toujours des distributions de charges normalisées, représentées par des mesures de probabilité. Bien qu’une grande partie des concepts présentés dans cette introduction soient valides en toute dimension, nous nous restreignons à présent au cas de la dimension 2. Ainsi, le potentiel de Green est aussi appelé potentiel logarithmique. L’énergie de Green et le potentiel sont à la base de la “théorie du potentiel” (voir [Hel09] ou [Ran95] pour une introduction plus complète). La question de base de cette théorie est: quels sont les ensembles qui peuvent recevoir une charge électrique? Quelle est la distribution d’énergie minimale? Mathématiquement, cela revient à considérer pour  $E \subset \mathbb{R}^d$  compact le problème de minimisation suivant:

$$\min_{\mu \in \mathcal{M}_1(E)} \mathcal{E}(\mu). \quad (16)$$

Physiquement, on cherche à déterminer la distribution de charge portée par l’ensemble  $E$  d’énergie minimale. S’il existe au moins une mesure  $\nu \in \mathcal{M}_1(E)$  d’énergie finie, Frostman [Fro35] a montré qu’il existe une unique mesure de probabilité réalisant (16), notée  $\nu_E$ . Cette mesure est appelée mesure d’équilibre de l’ensemble  $E$ . La capacité de l’ensemble  $E$  est définie par

$$\text{cap}(E) = e^{-\mathcal{E}(\nu_E)}.$$

Si  $\text{cap}(E) = 0$ , alors il n’existe aucune distribution de charges portée par  $E$  qui soit d’énergie finie. Il n’est alors pas possible physiquement de charger cet ensemble, il est “trop petit”. Par exemple, un ensemble fini est de capacité nulle. Notons qu’un ensemble de dimension  $d - 1$  dans  $\mathbb{R}^d$  est de capacité positive, à l’instar d’un cercle en dimension 2. Nous référons au livre de Landkof [Lan] pour une introduction à la théorie générale et au livre de Ransford [Ran95] pour le cas de la théorie du potentiel en dimension 2.

Il existe une connexion intéressante entre le mouvement brownien et la capacité d’un ensemble: les ensembles de capacité positive sont ceux que le mouvement brownien a une probabilité positive de visiter <sup>11</sup>. Cette connexion n’est pas exploitée dans cette thèse mais illustre bien la subtilité de la notion de capacité. La mesure d’équilibre  $\nu_E$  est particulièrement intéressante car elle correspond à la manière dont une densité de charges se répartirait dans le conducteur à l’équilibre. En général, la mesure d’équilibre est portée par la frontière extérieure de l’ensemble  $E$ . On peut ainsi montrer que la mesure d’équilibre d’un disque est la mesure uniforme sur sa frontière. Si on cherche à charger un disque métallique, à l’équilibre, les charges seront uniformément réparties sur un cercle correspondant au bord du disque. On peut aussi développer une théorie du potentiel dite “avec champ extérieur”, dont le livre de Saff et Totik est une référence [ST97]. Il s’agit d’un problème similaire à (16) où on cherche à calculer

$$\min_{\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^d)} \mathcal{E}(\mu) + \int V d\mu. \quad (17)$$

Dans ce problème, on n’impose plus aux charges d’être portées par un ensemble spécifique mais on observe la compétition entre la répulsion coulombienne et l’effet d’une énergie de confinement  $V$ . Il existe une unique mesure  $\nu_{eq}$  qui minimise (17), et elle est caractérisée par les équations de Frostman

$$U^{\nu_{eq}}(z) + \frac{1}{2}V(z) = C \text{ pour tout } z \text{ dans le support de } \nu_{eq} \quad (18)$$

$$U^{\nu_{eq}}(z) + \frac{1}{2}V(z) \geq C \text{ sauf sur un ensemble de capacité nulle.} \quad (19)$$

<sup>11</sup>Voir le livre de Mörters and Peres [MP10].



La fonction  $U^{\nu_{eq}} + \frac{1}{2}V$  est appelée potentiel effectif. On peut retrouver ces relations de manière intuitive en dérivant par rapport à la mesure  $\mu$  la forme quadratique sur  $\mathcal{M}_1(\mathbb{C})$

$$I(\mu) = \mathcal{E}(\mu) + \int V d\mu.$$

Le potentiel logarithmique intervient naturellement dans l'étude de la mesure empirique d'un polynôme grâce à la relation

$$U^{\mu_n}(z) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n -\log |z - z_k| = -\frac{1}{n} \log |P_n(z)|.$$

Cette relation peut être utilisée pour étudier le spectre de matrices aléatoires, sous réserve de savoir contrôler le polynôme caractéristique de ces matrices. Cette approche ne se révèle pas très fructueuse car les coefficients du polynôme caractéristique ne sont pas une fonction simple des coefficients de la matrice. En revanche, dans l'étude des polynômes aléatoires, la loi des coefficients est connue à l'avance et on peut se servir de cette relation pour étudier la mesure empirique des racines. Une illustration particulièrement élégante de cette technique est la preuve de Kabluchko et Zaporozhets [KZ14] de la convergence des mesures empiriques de nombreux modèles de fonctions analytiques aléatoires.

## 4.2 Gaz de Coulomb en dimension 1 ou 2

Un gaz de Coulomb, parfois appelé plasma à une composante (one component plasma ou OCP en anglais), est un modèle de particules en interaction issu de la physique statistique. Il s'agit d'étudier un système de  $n$  particules interagissant deux à deux. L'énergie d'interaction entre deux particules est donnée par la fonction de Green. L'énergie du système  $\{x_1, \dots, x_n\}$  est ainsi donnée par

$$H_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i \neq j} -\log |x_i - x_j| + n \sum_{i=1}^n V(x_i) \quad (20)$$

que l'on peut réécrire en fonction de la mesure empirique du système  $\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \delta_{x_k}$

$$H_n(x_1, \dots, x_n) = n^2 \mathcal{E}_{\neq}(\mu_n) + n^2 \int V(x) d\mu_n(x)$$

où  $\mathcal{E}_{\neq}$  est appelée énergie coulombienne hors diagonale et est définie par

$$\mathcal{E}_{\neq}(\mu) := \iint_{x \neq y} -\log |x - y| d\mu(x) d\mu(y). \quad (21)$$

À température  $T_n = 1/\beta_n$ , la physique statistique stipule que le comportement du système est caractérisée par la mesure de probabilité sur  $\mathbb{C}^n$

$$\frac{1}{Z_n} \exp -\beta_n (H_n(x_1, \dots, x_n)) d\ell_{\mathbb{C}^n}(x_1, \dots, x_n) \quad (22)$$

où  $Z_n$  est une constante de normalisation, ayant donc pour valeur

$$Z_n = \int_{\mathbb{C}^n} \exp -\beta_n (H_n(x_1, \dots, x_n)) d\ell_{\mathbb{C}^n}(x_1, \dots, x_n).$$

Cette mesure est appelée mesure de Boltzmann-Gibbs, ou modèle canonique, associée à l'énergie  $H_n$ , à température  $T_n$ . La probabilité d'observer deux particules très proches

étant exponentiellement petite, on retrouve le caractère répulsif de l'interaction. Pour que ce modèle soit bien défini, il faut que  $Z_n < \infty$  ce qui impose que  $V$  doit tendre vers l'infini à l'infini suffisamment rapidement.

En dimension 1, on appelle gaz logarithmique associé à (20) le système de particules  $\{x_1, \dots, x_n\}$  dont la loi jointe sur  $\mathbb{R}^n$  est

$$\frac{1}{Z_n} \exp -\beta_n (H_n(x_1, \dots, x_n)) d\ell_{\mathbb{R}^n}(x_1, \dots, x_n).$$

Ces gaz apparaissent dans la suite comme les valeurs propres de matrices aléatoires hermitiennes. Nous utilisons aussi le terme gaz de Coulomb en dimension 1. Cela constitue un abus de langage, l'interaction coulombienne en dimension 1 n'étant pas logarithmique. On peut cependant penser à ces systèmes comme des particules en dimension 2 contraintes à être sur l'axe réel.

Les gaz de Coulomb et les log-gaz ont été énormément étudiés et de nombreux livres leurs sont consacrés. Ils ont un lien très fort avec les matrices aléatoires [For10], [ABDF11], les statistiques [Wil62], la physique mathématique [BL15], [Ser15].

### 4.3 Matrices aléatoires et gaz de Coulomb

Historiquement, l'étude des matrices aléatoires a naturellement conduit à l'étude des gaz de Coulomb. Les travaux de Wigner sont à l'origine du lien entre matrices aléatoires et gaz de Coulomb, et ont été inspirés par la découverte accidentelle de la loi des valeurs propres de l'ensemble de Wishart dans le livre de statistique de Wilks [Wil62]<sup>12</sup>. Le gaz de Coulomb associé aux matrices de Wishart semble avoir été identifié dès les années 1930 par les statisticiens [Wil62]. Cependant, l'essor des gaz de Coulomb a eu lieu dans les années 1960.

#### Matrices de Wigner

L'étude des matrices aléatoires a été amorcée en physique nucléaire par Wigner [Wig58] qui cherchait à expliquer les niveaux d'énergie de noyaux d'atomes lourds. Ces niveaux d'énergie sont liés aux valeurs propres d'un opérateur hermitien. L'idée de Wigner a été de rendre cet opérateur aléatoire, afin d'étudier la répartition des valeurs propres d'un système typique. Afin de construire un opérateur aléatoire, il a considéré les spectres de matrices aléatoires hermitiennes dont la dimension tend vers l'infini. Ces matrices, dites de Wigner, sont de la forme

$$M_n = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ \overline{a_{1,2}} & a_{2,2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ \overline{a_{1,n}} & \dots & & a_{n,n} \end{pmatrix} \quad (23)$$

où les  $(a_{i,i})_{i \in \mathbb{N}}$  et  $(a_{j,k})_{j < k \in \mathbb{N}}$  sont des familles indépendantes de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. L'intuition de Wigner était que les écarts entre les valeurs propres ne dépendraient que très peu de la loi des coefficients et seraient donc universels. Nous ne présentons ici que les aspects des matrices aléatoires en lien direct avec les gaz de Coulomb et les polynômes aléatoires. Cependant, la théorie des matrices aléatoires présente des connexions avec les probabilités libres, les algèbres d'opérateurs,

<sup>12</sup>Voir le post de blog <http://djalil.chafai.net/blog/2014/09/26/wigner-about-level-spacing-and-wishart/>

la théorie des nombres, la théorie des graphes, la combinatoire, les statistiques... Les références les plus complètes sur le sujet sont [AGZ10] et [ABDF11]. Le spectre de  $M_n$  est réel et est noté  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ . Dyson [Dys62] a montré que les seuls groupes de symétrie possibles sont les groupes orthogonal  $O_n(\mathbb{R})$ , unitaire  $U_n(\mathbb{C})$  et symplectique  $Sp(2n)$ . Lorsque les coefficients diagonaux  $(a_{i,i})$  sont des variables aléatoires indépendantes de loi  $\mathcal{N}_{\mathbb{R}}(0, 1)$ , et que les autres coefficients  $(a_{i,j})_{i < j}$  sont des variables aléatoires indépendantes de loi  $\mathcal{N}_{\mathbb{R}}(0, 1)$ ,  $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, 1)$  ou  $\mathcal{N}_{\mathbb{H}}(0, 1)$ <sup>13</sup>, la loi de  $M_n$  est invariante par l'action par conjugaison de  $O_n(\mathbb{R})$  (respectivement l'action de  $U_n(\mathbb{C})$  ou du groupe symplectique). Ces ensembles sont appelés GOE, GUE et GSE.

Dyson a montré que, pour les ensembles GOE, GUE et GSE, la loi jointe des valeurs propres de  $\frac{1}{\sqrt{n}}M_n$  s'écrit

$$\frac{1}{Z_n} \exp -\frac{\beta}{2} \left( \sum_{i \neq j} -\log |\lambda_i - \lambda_j| + n \sum_{i=1}^n \frac{|\lambda_i|^2}{2} \right) d\ell_{\mathbb{R}^n}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \quad (24)$$

où  $\beta = 1, 2$  ou  $4$  reflète la dimension de l'espace sur lequel sont définies les lois gaussiennes des coefficients des matrices aléatoires considérées. Les valeurs propres des ensembles gaussiens GOE, GUE et GSE forment donc un gaz logarithmique en dimension 1. Pour les autres valeurs de  $\beta$ , il existe un modèle de matrices aléatoires tridiagonales à coefficients indépendants introduit par Dumitriu et Edelman [DE02], appelé  $\beta$ -ensemble, dont la loi jointe des valeurs propres est (24).

Le résultat le plus emblématique concernant les matrices de Wigner est la convergence des mesures empiriques de  $\frac{1}{\sqrt{n}}M_n$  vers la loi semi-circulaire

$$\sigma(dx) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{4 - x^2} 1_{|x| \leq 2} dx \quad (25)$$

dès que la loi des coefficients a un second moment fini. Il n'est pas nécessaire de supposer que les coefficients sont identiquement distribués, il suffit qu'ils soient indépendants de second moment uniformément borné. Cette convergence est illustrée par la figure 3. Nous

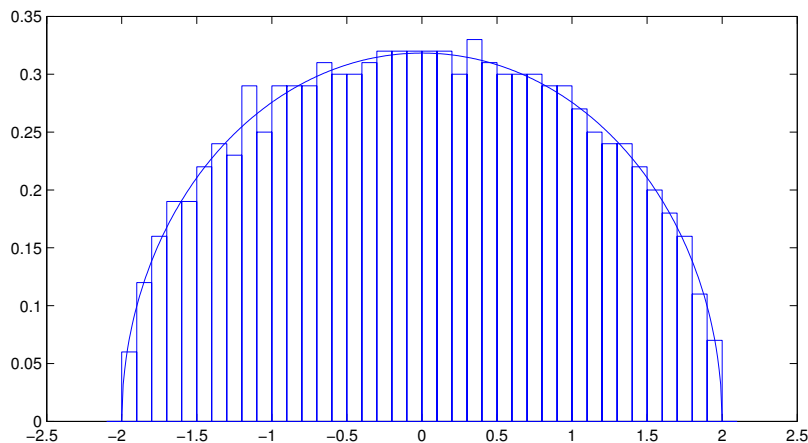


Figure 3: Histogramme des valeurs propres du GOE pour  $n = 1000$ .

<sup>13</sup>Il s'agit de la loi gaussienne symplectique, à valeurs dans le corps des quaternions. Les coordonnées dans la base  $(1, i, j, k)$  d'une variable aléatoire de loi  $\mathcal{N}_{\mathbb{H}}(0, 1)$  sont des variables aléatoires de loi  $\mathcal{N}_{\mathbb{R}}(0, 1/4)$  indépendantes.

verrons plus tard que cette mesure est celle qui minimise la fonction

$$I(\mu) = \mathcal{E}(\mu) + \int \frac{|x|^2}{2} d\mu(x).$$

### Matrices de Wishart

En 1928, Wishart [Wis28] a étudié les propriétés de matrices de covariance empirique

$$M_{m,n} = \frac{1}{n} T_{m,n} T_{m,n}^*$$

où  $T_{m,n}$  est une matrice à  $m$  lignes et  $n$  colonnes,  $m \geq n$ , dont les coefficients sont des variables aléatoires de loi  $\mathcal{N}_{\mathbb{R}}(0, 1)$  ( $\beta = 1$ ) ou  $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, 1)$  ( $\beta = 2$ ) indépendantes. Dans ce cas, la loi jointe des valeurs propres est donnée par

$$\frac{1}{Z_n} \exp -\frac{\beta}{2} \left( \sum_{i \neq j} -\log |\lambda_i - \lambda_j| + n \sum_{i=1}^n \lambda_i \right) \prod_{i=1}^n \lambda_i^{\frac{\beta}{2}(1+n-m)-1} d\ell_{\mathbb{R}_+^n}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Les valeurs propres des matrices de Wishart forment donc un gaz logarithmique sur  $\mathbb{R}_+$ . Notons que la loi jointe des valeurs propres de  $M_{n,m}$  ne diffère de celle de  $M_{m,n}$  que par la présence d'un atome en 0 de masse  $1 - n/m$ . Dans le cas où  $n > m$  et si le rapport  $m/n$  a une limite  $\lambda < 1$ , alors la suite des mesures empiriques converge vers la mesure de Marchenko-Pastur [MP67]

$$\nu_{\text{MP}}(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{((1 + \sqrt{\lambda})^2 - x)(x - (1 - \sqrt{\lambda})^2)}}{\lambda x} \mathbf{1}_{x \in [(1 - \sqrt{\lambda})^2, (1 + \sqrt{\lambda})^2]} dx.$$

Le comportement de la suite des mesures empiriques est universel: la convergence vers la distribution de Marchenko-Pastur a lieu dès que les coefficients de la matrice  $T_{m,n}$  sont i.i.d., centrés et de variance unitaire [BS10].

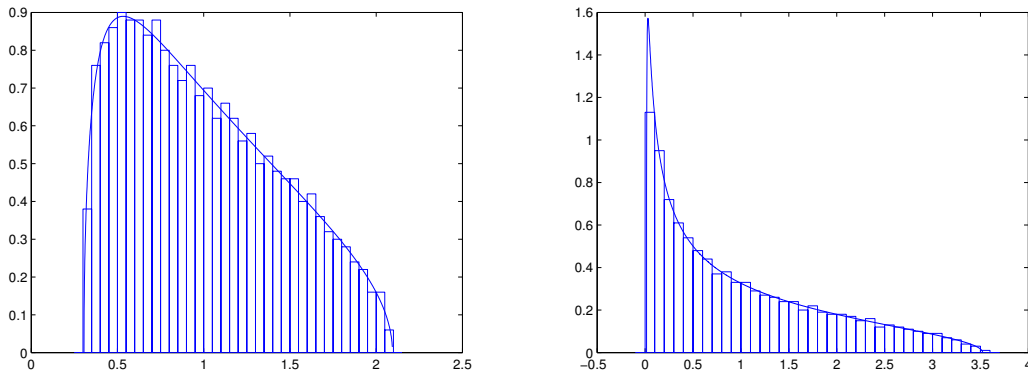


Figure 4: Histogramme des valeurs propres d'une matrice de Wishart,  $\lambda = 0.2$  et  $\lambda = 0.83$ .

### Matrices de Ginibre

En 1965, Ginibre [Gin65] a introduit un modèle de matrices non hermitiennes à coefficients indépendants dont les valeurs propres forment un gaz de Coulomb en dimension 2. Ainsi,

on définit la matrice

$$M_n = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n,1} & \dots & & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

dont les coefficients sont des variables aléatoires de loi gaussienne complexe  $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, 1)$ . Ginibre [Gin65] a montré que la loi jointe du spectre de  $\frac{1}{\sqrt{n}}M_n$  est

$$\frac{\pi^{-n}}{\prod_{k=1}^n k!} \exp - \left( \sum_{i \neq j} -\log |\lambda_i - \lambda_j| + n \sum_{i=k}^n |\lambda_k|^2 \right) d\ell_{\mathbb{C}^n}(\lambda_1, \dots, \lambda_n). \quad (26)$$

Les valeurs propres des matrices aléatoires de Ginibre forment donc un gaz de Coulomb. Pour ce modèle, on peut montrer que la suite de mesures empiriques converge vers la mesure uniforme sur le disque unité de  $\mathbb{C}$ . De plus, dès lors que les coefficients sont des variables i.i.d. de variance  $1/n$ , cette convergence reste vraie (voir figure 5 pour une illustration). De nombreux auteurs ont contribué à la preuve de ce résultat particulièrement difficile, et finalement obtenu en toute généralité par Tao et Vu [TV08]. Pour plus d'informations à propos de la loi du cercle, nous nous référons à l'article de Bordenave et Chafaï [BC12].

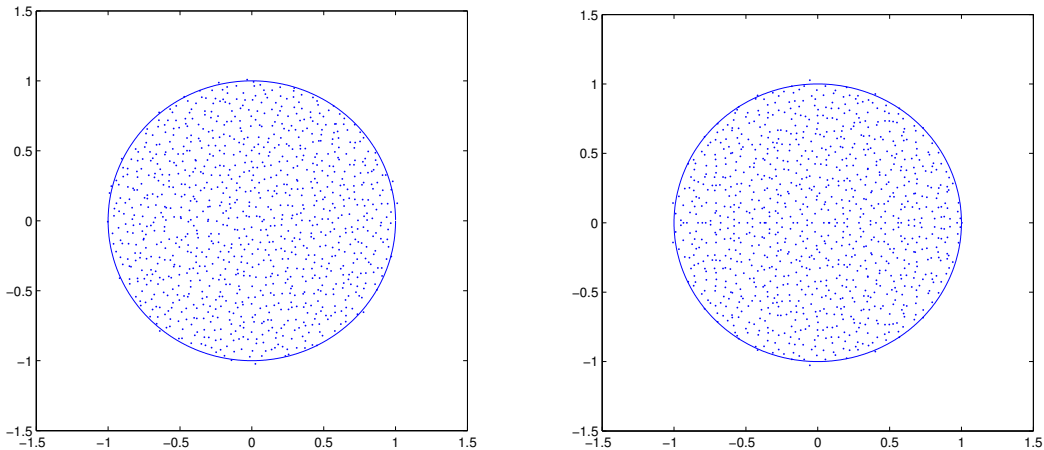


Figure 5: Valeurs propres d'une matrice de Ginibre complexe ou réelle pour  $n = 1000$ .

### Matrices de Ginibre réelles

Dans le cas où les coefficients de  $M_n$  sont des gaussiennes réelles  $\mathcal{N}_{\mathbb{R}}(0, 1)$ , Lehmann et Sommers [LS91] puis Edelman [Ede97] ont calculé la loi jointe des valeurs propres de  $\frac{1}{\sqrt{n}}M_n$ . Ils ont montré que la distribution des valeurs propres est un mélange de lois, chacune correspondant à un nombre fixé de valeurs propres réelles. En effet, la loi des valeurs propres de l'ensemble de Ginibre réel ne peut pas être absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{C}^n$  car le polynôme caractéristique de ces matrices est un polynôme à coefficients réels. Il peut avoir des racines réelles <sup>14</sup>. Cela implique aussi

<sup>14</sup>Si  $n$  est impair, le polynôme caractéristique de  $M_n$  a au moins une racine réelle.

que la loi du spectre est invariante par la conjugaison  $z \mapsto \bar{z}$ . On observe cette symétrie dans la figure 5. Ainsi, si on note

$$d\ell_{n,k}(z_1, \dots, z_n) = d\ell_{\mathbb{R}}(z_1) \dots d\ell_{\mathbb{R}}(z_{n-2k}) d\ell_{\mathbb{C}}(z_{n-k}) \dots d\ell_{\mathbb{C}}(z_n)$$

où les  $n - 2k$  premières variables sont réelles et les autres sont complexes, la loi jointe des valeurs propres de  $\frac{1}{\sqrt{n}}M_n$  s'écrit

$$C_n \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \sqrt{n}^n 2^{2k} \exp -\frac{1}{2} \left( \sum -\log |\lambda_i - \lambda_j| + n \sum_{k=1}^n \frac{|\lambda_k|^2}{2} \right) \quad (27)$$

$$\prod_{j=n-k}^n \sqrt{n} \Im(\lambda_k) \operatorname{erfc}(\sqrt{2n} \Im(\lambda_k) e^{2\Im(\lambda_k)^2 N}) d\ell_{n,k}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \quad (28)$$

où

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt \quad \text{et} \quad C_n = \frac{2^{-n(n+1)/4} n^{n(n-1)/4}}{\prod_{k=1}^n \Gamma(k/2)}.$$

Une preuve de cette formule est disponible dans le livre de Forrester [For10, Section 15.10].

### Matrices de Forrester-Krishnapur

Dans tous les modèles cités précédemment, la limite des mesures empiriques est une mesure à support compact. Cependant, ce n'est pas toujours le cas comme le prouve le modèle introduit par Krishnapur [Kri06], parfois appelé modèle de Forrester-Krishnapur <sup>15</sup>. Considérons la matrice

$$M_n = A_n B_n^{-1}$$

où  $A_n$  et  $B_n$  sont 2 matrices de Ginibre indépendantes. Krishnapur a montré que la loi jointe des valeurs propres de  $M_n$  a pour densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{C}^n$

$$\frac{1}{n!} \frac{n^n}{\pi^n} \prod_{k=1}^n \binom{n-1}{k} \exp - \left( \sum_{i \neq j} -\log |\lambda_i - \lambda_j| + (n+1) \sum_{k=1}^n \log(1 + |\lambda_k|^2) \right). \quad (29)$$

Cette densité est celle du Spherical Ensemble issu de la physique statistique et étudié par Caillol [Cai81], Forrester, Jancovici et Madore [FJM92]. En physique statistique, ce gaz de Coulomb est connu comme étant l'image du gaz libre sur la sphère <sup>16</sup> par projection stéréographique. On peut montrer que, quel que soit  $n$ , la loi jointe (29) est invariante par l'action de  $SU(2)$ , donc  $\mathbb{E}(\mu_n) = \omega_{FS}$ . De plus, la suite de mesures empiriques converge vers la mesure  $\omega_{FS}$ . Le fait que la mesure limite ne soit pas à support compact s'explique par le fait que le potentiel confinant  $\log(1 + |x|^2)$  croît lentement à l'infini, en comparaison avec le potentiel quadratique qui apparaît dans les matrices de Ginibre. On parle alors de potentiel faiblement confinant. Cette notion est précisée dans la section suivante.

Le tableau suivant résume les différents log-gaz et gaz de Coulomb associés aux matrices aléatoires présentés dans cette introduction.

<sup>15</sup>Il semble que Krishnapur ait introduit ce modèle matriciel mais que le gaz de Coulomb associé ait été étudié bien avant par Forrester.

<sup>16</sup>Le gaz libre sur la sphère est le gaz de Coulomb associé au potentiel  $V = 0$  sur la sphère  $\mathcal{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ .

Modèle	Espace	Potentiel	Mesure limite
GOE/GUE/GSE	$\mathbb{R}$	$V(x) = \frac{\beta}{2} x ^2$ , $\beta = 1, 2, 4$	$\sigma = \frac{1}{2\pi}\sqrt{4-x^2}1_{ x \leq 2}d\ell_{\mathbb{R}}(x)$
Wishart	$\mathbb{R}^+$	$V(x) = \frac{\beta}{2}x$ , $\beta = 1, 2$	$\nu_{\text{MP}} = \frac{1}{2\pi}\frac{\sqrt{(b-x)(x-a)}}{\lambda x}d\ell_{\mathbb{R}^+}(x)$
Ginibre	$\mathbb{C}$	$V(z) = \frac{\beta}{2} z ^2$ , $\beta = 1, 2$	$\frac{1}{\pi}1_{ z \leq 1}d\ell_{\mathbb{C}}(z)$
Krishnapur	$\mathbb{C}$	$V(z) = \log(1+ z ^2)$	$\omega_{FS} = \frac{1}{\pi(1+ z ^2)^2}d\ell_{\mathbb{C}}(z)$

#### 4.4 Gaz de Coulomb sur la sphère $\mathcal{S}^2$

Dans la section précédente nous avons évoqué l'ensemble sphérique (29) et sa relation avec les gaz de Coulomb sur la sphère. Nous définissons la sphère  $\mathcal{S}^2$  comme étant la sphère de  $\mathbb{R}^3$  de centre  $(0, 0, 1/2)$  et de rayon  $1/2$ . Cette convention est particulièrement agréable pour passer d'un gaz de Coulomb dans le plan  $\mathbb{C}$  à un gaz sur la sphère. Nous définissons la fonction

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\mathcal{S}^2} : \mathcal{M}_1(\mathcal{S}^2) &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ \mu &\longmapsto \iint -\log \|x - y\|_2 d\mu(x)d\mu(y) \end{aligned}$$

où  $\|\cdot\|_2$  est la norme euclidienne de  $\mathbb{R}^3$ . La notion de gaz de Coulomb existe aussi sur des variétés compactes sans bord, mais certains concepts diffèrent. Ainsi, la fonction de Green de  $\mathcal{S}^2$  au point  $x \in \mathcal{S}^2$  est l'unique solution de

$$-\Delta_y G(x, \cdot) = \delta_x - \pi$$

où  $\pi$  est la mesure uniforme sur  $\mathcal{S}^2$  et où  $\Delta_y$  désigne le laplacien de la sphère par rapport à la seconde variable de  $G$ . On peut montrer [For10, Section 15.6 p. 729] que la fonction de Green de la sphère est

$$G(x, y) = -\log \|x - y\|_2.$$

La mesure  $\pi$  est vue comme un arrière plan uniforme de protons. Sa présence est due au fait que l'équation (13) n'a pas de solution lorsque l'on se place sur une variété compacte sans bord. On peut donc définir un gaz de Coulomb sur la sphère comme étant un système de particules  $(x_1, \dots, x_n)$  dont la loi jointe est de la forme

$$\frac{1}{Z_n} \exp - \left( \sum_{i \neq j} \log \|x_i - x_j\|^2 + n \sum_{k=1}^n V(x_k) \right) d\pi^{\otimes n}(x_1, \dots, x_n). \quad (30)$$

L'interprétation est la même que dans  $\mathbb{R}^d$ : les particules se repoussent selon l'interaction coulombienne et subissent une énergie potentielle de position  $V(x)$ . Le facteur  $n$  peut être remplacé par  $n + 1$  dans certains modèles, sans que cela ait une influence importante sur les propriétés du gaz. Notre but dans cette section est de voir comment se comportent les gaz de Coulomb sur  $\mathbb{C}$  lorsqu'on les envoie sur la sphère par projection stéréographique inverse. La projection stéréographique inverse (voir figure 4.4), notée  $T$ , est définie pour tout  $z \in \mathbb{C}$  par

$$T(z) = \left( \frac{\Re(z)}{1+|z|^2}, \frac{\Im(z)}{1+|z|^2}, \frac{|z|^2}{1+|z|^2} \right).$$

Afin de pouvoir calculer la loi image d'un gaz de Coulomb par  $T$ , il faut comprendre

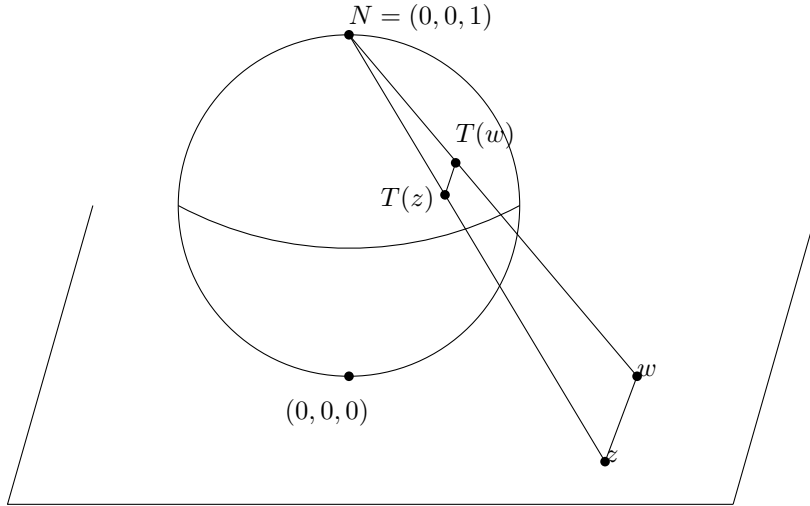


Figure 6: Projection stéréographique inverse.

comment sont transformées les distances par projection. D'après [AN07, lemma 3.4.2] on a la relation suivante

$$\forall z, w \in \mathbb{C}, \quad |z - w|^2 = \frac{\|T(z) - T(w)\|_2^2}{(1 - \|T(z)\|_2^2)(1 - \|T(w)\|_2^2)}. \quad (31)$$

De plus, on en déduit que pour tout  $z \in \mathbb{C}$

$$1 - \|T(z)\|_2^2 = \frac{1}{1 + |z|^2}. \quad (32)$$

Si on note  $(z_1, \dots, z_n)$  le gaz de Coulomb dans  $\mathbb{C}$  de loi jointe

$$\frac{1}{Z_n} \exp - \left( \sum_{i \neq j} -\log |z_i - z_j| + (n+1) \sum_{k=1}^n V(z_k) \right) d\ell_{\mathbb{C}^n}(z_1, \dots, z_n)$$

le vecteur  $(x_1, \dots, x_n) := (T(z_1), \dots, T(z_n))$  a pour loi

$$\frac{1}{Z_n} \exp - \left( \sum_{i \neq j} -\log \|z_i - z_j\|_2 + (n+1) \sum_{k=1}^n \tilde{V}(z_k) \right) d\pi^{\otimes n}(x_1, \dots, x_n) \quad (33)$$

où pour tout  $x \in \mathcal{S}^2$

$$\tilde{V}(x) = V(T^{-1}(x)) - \log(1 + \|T^{-1}(x)\|^2).$$

Ainsi, on a une correspondance entre les gaz de Coulomb dans  $\mathbb{C}$  et ceux sur la sphère  $\mathcal{S}^2$ . Nous présentons ici la correspondance pour les modèles de température  $\beta = 2$  et pour lesquels nous avons choisi une normalisation  $(n+1)$  au lieu de  $n$  afin de rendre les formules plus légères. Le cas général est traité dans [Har12].

L'ensemble sphérique (29) étant le gaz de Coulomb associé au potentiel

$$V(z) = \log(1 + |z|^2),$$

son image par projection stéréographique inverse est le gaz de Coulomb sur la sphère associé au potentiel  $V = 0$

$$\frac{1}{Z_n} \prod_{i \neq j} \|x_i - x_j\|_2 d\pi^{\otimes n}(x_1, \dots, x_n). \quad (34)$$



Sous cette forme, il devient facile de voir que, tout comme les racines des polynômes elliptiques à coefficients  $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0,1)$ , ce gaz de Coulomb est invariant par les isométries de la sphère. Cela implique que, quel que soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{E}(\mu_n) = \pi$ . Cette densité est très proche de la densité de l'image par projection stéréographique des racines de polynômes elliptiques, donnée dans la section 5.3.

## 5 Gaz de Coulomb et polynômes aléatoires

Dans cette section, nous présentons comment calculer la loi des racines de polynômes aléatoires, dans le cas où la loi des coefficients est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{C}$  ou  $\mathbb{R}$ . Nous verrons que dans le premier cas, la loi des racines est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{C}^n$  et forme un gaz proche des gaz de Coulomb.

Nous verrons aussi la forme de la loi image des racines de polynômes aléatoires par projection stéréographique inverse.

### 5.1 Loi des racines dans le cas général

Dès 1954, Hammersley [Ham56] a calculé la loi jointe des racines de polynômes aléatoires de Kac à coefficients gaussiens, mais le lien entre polynômes aléatoires et gaz de Coulomb n'a été fait que dans les années 1990 avec les travaux de Bogomolny, Bohigas et Leboeuf [BBL92], [BBL96]. Contrairement aux matrices aléatoires où le calcul de la loi jointe des valeurs propres n'est possible que pour certains modèles, le calcul de la loi jointe des racines de polynômes aléatoires est possible dès que les coefficients ont une loi absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Soit  $(R_0, \dots, R_n)$  une base à degrés étagés<sup>17</sup> de  $\mathbb{C}_n[X]$  et considérons

$$P_n(z) = a_0 R_0 + \dots + a_n R_n = a_n \prod_{k=1}^n (z - z_k).$$

L'application qui associe les racines aux coefficients dans la base canonique, donnés par les fonctions symétriques des racines,

$$\begin{aligned} G : \quad \mathbb{C}^{n+1} &\longrightarrow \mathbb{C}^{n+1} \\ (z_1, \dots, z_n, a_n) &\longmapsto (a_0, \dots, a_{n-1}, a_n) \end{aligned}$$

a pour déterminant jacobien<sup>18</sup> [HKPV09, Lemme 1.1.1]

$$|\det G|^2 = |a_n|^{2n} \prod_{i < j} |z_i - z_j|^2.$$

Si  $(R_k)_{0 \leq k \leq n}$  est une base de  $\mathbb{C}_n[X]$ , l'application  $\tilde{G}_n$

$$\begin{aligned} \tilde{G}_n : \quad \mathbb{C}^{n+1} &\longrightarrow \mathbb{C}^{n+1} \\ (z_1, \dots, z_n, a_n) &\longmapsto (a_0, \dots, a_{n-1}, a_n) \end{aligned}$$

qui associe aux racines de  $P_n$  ses coefficients dans la base  $(R_k)_{0 \leq k \leq n}$  a pour déterminant jacobien

$$\left| \det \tilde{G}_n \right|^2 = |A_n \det G|^2 = |A_n|^2 |a_n|^{2n} \prod_{i < j} |z_i - z_j|^2$$

<sup>17</sup>C'est-à-dire que, quel que soit  $k$ ,  $\deg R_k = k$ .

<sup>18</sup>On considère le jacobien entre espaces vectoriels réels de dimension  $2n+2$ , ce qui correspond au carré du module du déterminant jacobien.

où  $|A_n|^2$  est le jacobien du changement de base de la base canonique à la base  $(R_k)_{0 \leq k \leq n}$ . Cette application n'est pas inversible mais elle est surjective et, à un ensemble négligeable près, chaque vecteur  $(a_0, \dots, a_n)$  a exactement  $n!$  antécédents. On peut alors montrer que si le vecteur aléatoire  $(a_0, \dots, a_n)$  a une loi absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{C}^{n+1}$ , de densité  $p_n(a_0, \dots, a_n)$ , alors le vecteur  $(z_1, \dots, z_n)$  a une loi absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{C}^n$ , de densité

$$h_n(z_1, \dots, z_n) = \frac{|A_n|^2}{n!} \prod_{i < j} |z_i - z_j|^2 \int_{\mathbb{C}} |a_n|^{2n} p_n(a_0, \dots, a_n) d\ell_{\mathbb{C}}(a_n) \quad (35)$$

où les  $a_k$  les fonctions symétriques des racines. Ce changement de variables présente une réelle difficulté. Parler du vecteur aléatoire  $(z_1, \dots, z_n)$  est imprécis. Afin de le définir correctement, on devrait définir un ordre sur  $\mathbb{C}$ , définir un vecteur ordonné des racines et enfin considérer ce vecteur pris en ordre aléatoire uniforme afin d'aboutir à un objet bien défini. Les détails de ce calcul sont donnés dans le chapitre 1. Le  $n!$  au dénominateur provient de cet ordre aléatoire uniforme.

Cette formule n'est pas très exploitable, mais se simplifie lorsque la densité de la loi de  $a = (a_0, \dots, a_n)$  est de la forme

$$p_n(a_0, \dots, a_n) = F_n(\|a\|)$$

où  $\|\cdot\|$  est une semi-norme. En posant  $\tilde{a} = (a_0/a_n, \dots, a_{n-1}/a_n, 1)$ , la loi jointe de  $(z_1, \dots, z_n)$  devient

$$h_n(z_1, \dots, z_n) = \frac{|A_n|^2}{n!} \frac{\prod_{i < j} |z_i - z_j|^2}{\|\tilde{a}\|^{2n+2}} \int_0^\infty |u|^{2n+1} F_n(u) du.$$

Si les  $a_k$  sont des variables aléatoires indépendantes de loi  $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, 1)$ , la densité du vecteur des racines  $(z_1, \dots, z_n)$  devient

$$h_n(z_1, \dots, z_n) = \frac{|A_n|^2}{\pi^n} \frac{\prod_{i < j} |z_i - z_j|^2}{\|\tilde{a}\|_2^{2n+2}}. \quad (36)$$

La formule (36) est déjà présente sous cette forme (pour la base canonique) dans l'article de Bogomolny, Bohigas et Leboeuf [BBL92] et était sans doute connue avant. La formule (35) est mentionnée par plusieurs auteurs. Le déterminant de Vandermonde au carré  $\prod_{i < j} |z_i - z_j|^2$  est le même que le terme d'énergie d'interaction des gaz de Coulomb ou des matrices aléatoires. On peut donc penser aux racines de polynômes aléatoires comme à un gaz de Coulomb en dimension 2. Cependant, on ne peut pas définir de potentiel  $V$  comme c'est le cas pour les valeurs propres de matrices aléatoires. L'analogie du potentiel serait le terme  $2 \log \|\tilde{a}\|_2$  qui est une fonction symétrique des racines. Comme cette fonction n'est pas linéaire en la mesure empirique  $\mu_n$ , on parle de confinement non linéaire.

Dans [ZZ10], Zeitouni et Zelditch ont donné une réécriture de la loi jointe des racines de polynômes de Kac à coefficients gaussiens qui permet de comprendre plus précisément la loi de  $(z_1, \dots, z_n)$ .

Dans le cas de polynômes orthogonaux aléatoires, la base  $(R_k)_{0 \leq k \leq n}$  est orthonormale pour le produit scalaire sur  $\mathbb{C}_n[X]$

$$\langle P, Q \rangle = \int P(z) \overline{Q(z)} e^{-n\phi(z)} d\nu(z).$$

On peut alors exprimer  $\|\tilde{a}\|_2$  en fonction des racines

$$\|\tilde{a}\|_2^2 = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|a_k|^2}{|a_n|^2} = \int \prod_{k=1}^n |z - z_k|^2 d\nu_S(z). \quad (37)$$

Ainsi, la densité (36) devient

$$h_n = \frac{|A_n|^2}{\pi^n} \exp - \left( \sum_{i \neq j} -\log |z_i - z_j| + (n+1) \log \int \prod_{k=1}^n |z - z_k|^2 e^{-n\phi(z)} d\nu(z) \right). \quad (38)$$

## 5.2 Polynômes de Kac et gaz de Coulomb

La loi des racines des polynômes de Kac à coefficients  $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, 1)$  est un cas particulier de la formule (38). En choisissant  $\nu = \nu_S$  la mesure uniforme sur le cercle unité et  $\phi$  la fonction nulle on obtient le gaz de loi

$$\frac{1}{\pi^n} \exp - \left( \sum_{i \neq j} -\log |z_i - z_j| + (n+1) \log \int \prod_{k=1}^n |z - z_k|^2 d\nu_S(z) \right) d\ell_{\mathbb{C}^n}(z_1, \dots, z_n).$$

Le terme  $\log \int \prod_{k=1}^n |z - z_k|^2 d\nu_S(z)$  joue un rôle de confinement car il pénalise les configurations où les racines sont loin du cercle unité. Contrairement aux valeurs propres des matrices de Ginibre (5), ce terme induit aussi une répulsion angulaire entre les racines. Pour que ce terme soit petit, il ne suffit pas que les racines soient proches du cercle unité, il faut aussi qu'elles soient uniformément réparties pour minimiser l'intégrale. Pour s'en convaincre, on peut comparer  $\|X^n - 1\|_2^2 = 2$  et  $\|(X - 1)^n\|_2^2 \geq 4^n$ . Peut-on comparer le gaz (38) à un gaz de Coulomb? En linéarisant le confinement en utilisant l'inégalité de Jensen, on obtient

$$\log \int \prod_{k=1}^n |z - z_k|^2 d\nu_S(z) \geq \int \log \prod_{k=1}^n |z - z_k|^2 d\nu_S(z) = \sum_{k=1}^n \int 2 \log |z - z_k| d\nu_S(z).$$

Le terme  $\int \log |z - z_k| d\nu_S(z)$  est le potentiel généré au point  $z_k$  par une charge uniforme sur le cercle unité de  $\mathbb{C}$ . Comme il n'y a pas de signe moins apposé au logarithme, cette charge est attractive. Le hamiltonien

$$H_n^{\log+}(z_1, \dots, z_n) = \sum_{i \neq j} -\log |z_i - z_j| + (n+1) \sum_{k=1}^n \int 2 \log |z - z_k| d\nu_S(z) \quad (39)$$

$$= \sum_{i \neq j} -\log |z_i - z_j| + (n+1) \sum_{k=1}^n 2 \log_+ |z_k| \quad (40)$$

correspond donc à un système de  $n$  électrons de charge unitaire, se repoussant mutuellement, et étant attirés par une charge  $2n + 2$  uniformément répartie sur le cercle unité. Ainsi, il n'est pas étonnant que la mesure empirique de ce modèle converge vers la mesure uniforme sur le cercle unité de  $\mathbb{C}$ . Le lien entre polynômes de Kac à coefficients gaussiens et gaz de Coulomb est donc particulièrement fort. Dans les autres cas, le déterminant de Vandermonde qui apparaît dans le changement de variables a un rôle répulsif, mais l'analyse ne peut pas être menée plus loin.

## 5.3 Polynômes elliptiques et gaz de Coulomb

Nous avons vu précédemment que les polynômes elliptiques sont un cas particulier de polynômes orthogonaux. Dans le cas où les coefficients sont des variables aléatoires de loi  $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, 1)$ , la loi jointe des racines a pour densité sur  $\mathbb{C}^n$

$$\frac{1}{Z_n} \exp - \left( \sum_{i \neq j} -\log |z_i - z_j| + (n+1) \log \int \prod_{k=1}^n |z - z_k|^2 \frac{1}{(1 + |z|^2)^n} \frac{d\ell_{\mathbb{C}}}{\pi(1 + |z|^2)^2} \right).$$

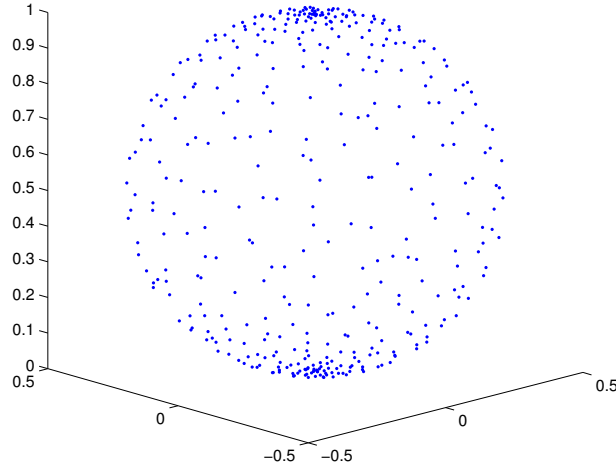


Figure 7: Racines de polynômes elliptiques à coefficients  $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, 1)$  sur la sphère  $\mathcal{S}^2$

L'écriture de cette loi jointe ne permet pas de deviner facilement le comportement asymptotique des zéros. Rappelons que pour ces polynômes, on sait que

$$\mu_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \omega_{FS} = \frac{1}{\pi(1 + |z|^2)^2} d\ell_{\mathbb{C}}(z).$$

La loi jointe du vecteur  $(T(z_1), \dots, T(z_n))$  est

$$\frac{1}{Z_n} \exp - \left( \sum_{i \neq j} -\log \|x_i - x_j\|_2 + (n+1) \log \int_{\mathcal{S}^2} \prod_{k=1}^n \|x - x_k\|_2^2 d\pi(x) \right) d\pi^{\otimes n}(x_1, \dots, x_n).$$

On retrouve sur cette loi jointe l'invariance en loi du vecteur  $(T(z_1), \dots, T(z_n))$  par les isométries de la sphère. On peut interpréter cette distribution comme un gaz de Coulomb sur la sphère soumis à un confinement

$$\log \int_{\mathcal{S}^2} \prod_{k=1}^n \|x - x_k\|_2^2 d\pi(x).$$

Intuitivement, ce terme ne confine pas les particules car il favorise les configurations les plus régulières sur la sphère (voir figure (7)). La répulsion coulombienne et le confinement ne rentrent pas en compétition, contrairement aux autres modèles de gaz de Coulomb. Les deux termes favorisent les configurations les plus proches de la mesure uniforme sur la sphère. Il n'est pas surprenant que la mesure empirique du vecteur  $(T(z_1), \dots, T(z_n))$  converge très rapidement vers la mesure uniforme sur  $\mathcal{S}^2$ . L'article d'Armentano, Beltrán et Shub [ABS11] montre que les zéros de polynômes aléatoires fournissent un excellent moyen de minimiser l'énergie logarithmique discrète sur la sphère. L'utilisation du procédé de compactification joue un rôle clé dans le premier chapitre de cette thèse.

## 5.4 Polynômes à coefficients réels

### Loi des racines dans le cas général

Lorsque la loi des coefficients est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}$ , la loi des racines ne peut pas être absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{C}^n$ . En effet, tout comme pour l'ensemble de Ginibre réel, cela impliquerait qu'il n'y ait presque sûrement aucune racine réelle <sup>19</sup>. Zaporozhets [Zap04] a calculé la loi jointe des racines de

$$P_n(z) = a_0 R_0(z) + \cdots + a_n R_n(z)$$

dans le cas où la famille  $(R_k)_{0 \leq k \leq n}$  est une base à degrés étagés de  $\mathbb{R}_n[X]$  et où le vecteur aléatoire  $(a_0, \dots, a_n)$  a une densité  $p_n(a_0, \dots, a_n)$  par rapport à la mesure de Lebesgue. Sous ces hypothèses, il a montré que la loi jointe des racines est

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{2^k |A_n|}{k!(n-2k)!} \prod_{i < j} |z_i - z_j| \left( \int_{\mathbb{R}} |a_n|^n p_n(a_0, \dots, a_n) d\ell_{\mathbb{R}}(a_n) \right) d\ell_{n,k}(z_1, \dots, z_n) \quad (41)$$

où  $|A_n|$  est le déterminant du changement de base de la base canonique à la base  $(R_k)_{0 \leq k \leq n}$ . De la même manière que lorsque la loi des coefficients est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{C}^n$ , lorsque la densité  $p_n$  est de la forme

$$p_n(a_0, \dots, a_n) = F_n(\|a\|)$$

avec  $\|\cdot\|$  semi-norme, cette loi jointe se simplifie en

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{2^k |A_n|}{k!(n-2k)!} \frac{\prod_{i < j} |z_i - z_j|}{\|\tilde{a}\|^{n+1}} \left( \int_{\mathbb{R}_+} |u|^n F_n(u) du \right) d\ell_{n,k}(z_1, \dots, z_n).$$

On peut, comme dans le cas complexe, simplifier une fois de plus cette loi si la base  $(R_k)_{0 \leq k \leq n}$  est orthonormale par rapport à un produit scalaire (10) et si  $\|\cdot\|$  est la norme euclidienne  $\|\cdot\|_2$ . On obtient une loi de la forme

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{1}{Z_{n,k}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \sum_{i \neq j} -\log |z_i - z_j| + (n+1) \log \int \prod_{k=1}^n |z - z_k| e^{-n\phi(z)} d\nu(z) \right) \right\} d\ell_{n,k}. \quad (42)$$

Comme pour les matrices de Ginibre réelles, on obtient un mélange de gaz de Coulomb, tous associés au même hamiltonien, mais avec un nombre différent de particules sur l'axe réel.

### Polynômes de Kac à coefficients exponentiels

Le dernier modèle pour lequel la loi jointe des racines a une forme particulièrement agréable est celui des polynômes de Kac dont les coefficients  $a_k$  sont des variables aléatoires de loi exponentielle de paramètre 1. La densité du vecteur  $(a_0, \dots, a_n)$  s'écrit alors

$$\exp \left\{ -\sum_{k=0}^n a_k \right\} \prod_{k=1}^n 1_{\mathbb{R}_+}(a_k) = \exp \{-\|a\|_1\} \prod_{k=1}^n 1_{\mathbb{R}_+}(a_k) = \exp \{-P_n(1)\} \prod_{k=1}^n 1_{\mathbb{R}_+}(a_k).$$

<sup>19</sup>Un polynôme de degré impair a au moins une racine réelle.

Ainsi, la loi jointe du vecteur  $(z_1, \dots, z_n)$  est de la forme

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{1}{Z_{n,k}} \exp - \left( \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} -\log |z_i - z_j| + (n+1) \sum_{k=1}^n \log |1 - z_k| \right) 1_{B_n} d\ell_{n,k}. \quad (43)$$

où  $B_n$  désigne l'ensemble des racines de polynômes à coefficients positifs. Ce calcul repose sur le fait que, les  $a_k$  étant positifs,

$$\|\tilde{a}\|_1 = \frac{1}{|a_n|} |P_n(1)| = \prod_{k=1}^n |1 - z_k|.$$

Ce modèle est remarquable car c'est le seul pour lequel la loi jointe des racines forme exactement un mélange de gaz de Coulomb. L'interprétation physique correspondante serait un nuage de  $n$  électrons, attirés par une charge positive  $(n+1)$  placée au point 1. Cependant, cette interprétation se heurte à la présence du terme  $1_{B_n}$  qui rend le système beaucoup plus complexe. Imposer aux racines de provenir d'un polynôme à coefficients positifs les empêche d'être trop près de l'axe réel positif car un polynôme à coefficients positifs n'a pas de racines positives. Pour ce modèle, Li [Li11] a calculé la probabilité que toutes les racines soient réelles. Ghosh et Zeitouni [GZ16] ont réussi à prouver un principe de grandes déviations pour la suite de mesures empiriques de ce modèle. Ce résultat est présenté plus en détails dans la section 7.2.

## 6 Grandes déviations pour les gaz de Coulomb

### 6.1 Principes de grandes déviations

Soit  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de mesures de probabilité sur un espace métrique  $\Omega$  muni de sa tribu borélienne  $\mathcal{B}$ . On dit que cette suite satisfait un principe de grandes déviations à vitesse  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et de fonction de taux  $I : \omega \mapsto [0, \infty]$  si  $I$  est semi-continue inférieurement et si

$$\text{Borne supérieure: } \forall B \in \mathcal{B}, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{v_n} \log \mu_n(B) \leq - \inf_{z \in \text{Clo}(B)} I(z)$$

$$\text{Borne inférieure: } \forall B \in \mathcal{B}, \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{v_n} \log \mu_n(B) \geq - \inf_{z \in \text{Int}(B)} I(z)$$

où  $\text{Int}$  et  $\text{Clo}$  désignent l'intérieur et l'adhérence d'un ensemble. Si les ensembles de niveaux de  $I$  sont compacts, on dit que  $I$  est une bonne fonction de taux. On peut voir de manière informelle un principe de grandes déviations comme l'équivalent

$$\mu_n(B) \approx e^{-v_n \inf_B I}.$$

La suite de mesures  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  charge exponentiellement peu les ensembles où la fonction de taux  $I$  est strictement positive. Par exemple, si on a  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de variables aléatoires dont les lois satisfont un principe de grandes déviations à vitesse  $n$ , de bonne fonction de taux  $I$  admettant un unique minimum, alors on peut montrer en utilisant le lemme de Borel-Cantelli que la suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge presque sûrement vers ce minimiseur. Par analogie avec les mesures de Gibbs, la fonction de taux  $I$  est vue comme le coût énergétique pour réaliser un événement rare. Nous renvoyons à [DZ09] pour plus d'informations concernant les grandes déviations.

On peut également définir la notion de principe de grandes déviations faible, où la borne supérieure n'est valide que pour les ensembles relativement compacts. Si l'espace  $\Omega$

est compact, les principes de grandes déviations forts et faibles sont équivalents. Dans le cas général, pour passer d'un principe de grandes déviations faible à un principe de grandes déviations fort, il suffit de montrer que la suite de mesures  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est exponentiellement tendue, c'est à dire qu'il existe une suite de compacts  $K_m$  telle que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{v_n} \log \mu_n(K_m^c) = -\infty.$$

Il est souvent plus simple de montrer un principe de grandes déviations faibles, car il suffit de montrer

$$\text{Borne supérieure faible: } \forall x \in \Omega, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{v_n} \log \mu_n(B(x, \delta)) \leq -I(x)$$

$$\text{Borne inférieure: } \forall x \in \Omega, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{v_n} \log \mu_n(B(x, \delta)) \geq -I(x).$$

Cette formulation nous est particulièrement utile dans les chapitres 1 et 3.

## 6.2 Grandes déviations pour les log-gaz associés aux matrices aléatoires

Le premier résultat de grandes déviations pour un gaz logarithmique a été obtenu par Ben Arous et Guionnet [BAG97]<sup>20</sup>. Ils ont montré que si  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est la suite des mesures empiriques des valeurs propres d'une famille de matrices  $M_n \in M_n(\mathbb{C})$  du GUE (24), alors la suite des lois de  $\mu_n$  satisfait un principe de grandes déviations dans  $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ , à vitesse  $n^2$  de bonne fonction de taux  $I_{\text{GUE}}$  définie sur  $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$  par

$$I_{\text{GUE}}(\mu) = \mathcal{E}(\mu) + \int \frac{x^2}{2} d\mu(x) - \frac{3}{8} - \frac{1}{4} \log 2.$$

Ainsi, pour tout ensemble borélien  $A \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ ,

$$-\inf_{\text{Int}A} I_{\text{GUE}} \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \log \mathbb{P}(\mu_n \in A) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \log \mathbb{P}(\mu_n \in A) \leq -\inf_{\text{Clo}A} I_{\text{GUE}}.$$

Pour que ce théorème soit complet, il faut préciser la topologie choisie sur  $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ . Nous équipons  $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$  de la topologie de la convergence en loi (topologie étroite). Celle-ci est métrisable par la distance de Fortet-Mourier [FM53]<sup>21</sup>

$$d(\mu, \nu) = \sup_{\max\{\|f\|_\infty, \|f\|_{\text{Lip}}\} \leq 1} \left\{ \int f d\mu - \int f d\nu \right\}.$$

Le principe de grandes déviations de Ben Arous et Guionnet a plusieurs conséquences. Tout d'abord, la fonction de taux étant strictement convexe, ce principe de grandes déviations donne une formulation variationnelle pour la mesure semi-circulaire (25)

$$\sigma = \text{Argmin} \left\{ \mathcal{E}(\mu) + \int \frac{x^2}{2} d\mu(x) \right\}.$$

Cette formulation variationnelle permet d'écrire que la mesure  $\sigma$  satisfait des relations de type (18). De plus, à l'aide du lemme de Borel Cantelli, on peut montrer que presque sûrement

$$d(\mu_n, \sigma) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

<sup>20</sup>Cet article est inspiré des heuristiques de Voiculescu [Voi93] et corrige l'article de Chan [Cha93].

<sup>21</sup>En anglais, cette distance s'appelle la distance Bounded Lipschitz.

Pour les autres valeurs de  $\beta$ , la suite des mesures empiriques satisfait un principe de grandes déviations similaire de fonction de taux  $\frac{\beta}{2}I_{\text{GUE}}$ .

De manière plus générale, si on considère le gaz logarithmique sur  $\mathbb{R}$  de loi jointe

$$\frac{1}{Z_n^V} \exp - \left( \beta \sum_{i \neq j} -\log |\lambda_i - \lambda_j| + n \sum_{k=1}^n V(\lambda_k) \right) d\ell_{\mathbb{R}^n}(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \quad (44)$$

où  $V$  est une fonction semi-continue inférieurement telle qu'il existe  $\beta' \geq \beta$  tel que

$$\liminf_{|x| \rightarrow \infty} \frac{V(x)}{\beta' \log |x|} > 1, \quad (45)$$

alors la suite de mesures empiriques associée à ce modèle satisfait un principe de grandes déviations dans  $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$  muni de la distance de Fortet-Mourier, à vitesse  $n^2$  et de bonne fonction de taux

$$I_\beta(\mu) = \beta \mathcal{E}(\mu) + \int V d\mu.$$

Ces résultats sont démontrés dans le livre [AGZ10, Section 2.6.1]. Comme pour le GUE, la fonction de taux  $I_\beta$  est strictement convexe sur son domaine, elle admet donc un unique minimum  $\nu_\beta$  caractérisé par les relations

$$\begin{aligned} \beta U^{\nu_\beta}(x) + \frac{1}{2}V(x) &= C \text{ pour tout } x \text{ dans le support de } \nu_{eq} \\ \beta U^{\nu_\beta}(x) + \frac{1}{2}V(x) &\geq C \text{ sauf sur un ensemble de capacité nulle.} \end{aligned}$$

Pour montrer le principe de grandes déviations, la preuve classique consiste à montrer un principe de grandes déviations faible en contrôlant la densité (44) sur de petites boules et de montrer la tension exponentielle. Hardy a montré que l'hypothèse de confinement (45) pouvait être remplacée par l'hypothèse plus faible

$$\exists \beta' > \beta, \quad \beta' > 1, \quad \liminf_{|x| \rightarrow \infty} V(x) - \beta' \log |x| > -\infty.$$

En utilisant les mêmes techniques, on peut prouver des principes de grandes déviations similaires pour le log-gaz associé aux matrices de Wishart, parfois appelé gaz de Laguerre. Pour de nombreux modèles matriciels gaussiens, les valeurs propres forment un log-gaz, ce qui implique un principe de grandes déviations pour la suite des mesures empiriques. Que se passe-t-il lorsque les coefficients des matrices ne sont plus gaussiens? La réponse à cette question a été partiellement apportée par Bordenave et Caputo [BC14] qui ont prouvé que pour des matrices de Wigner dont les coefficients ont des queues de distribution de type  $e^{-|x|^\alpha}$ ,  $\alpha \in (0, 2)$ , alors la suite des mesures empiriques de  $\frac{1}{\sqrt{n}}M_n$  satisfait un principe de grandes déviations dans  $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ , à vitesse  $n^{1+\alpha/2}$  et de bonne fonction de taux  $I_\alpha$  non explicite. Le principe de grandes déviations pour la mesure empirique dépend de la loi des coefficients et n'est donc pas universel. Pour les matrices de covariance empirique, Groux [Gro17] a montré un résultat similaire à celui de Bordenave et Caputo. Nous verrons que pour les polynômes aléatoires, les principes de grandes déviations sont, en un sens, universels.

### Valeurs propres extrémales de matrices aléatoires

On peut aussi s'intéresser au comportement des valeurs propres extrêmes des modèles de matrices aléatoires évoqués précédemment. Pour le gaz associé au GOE, Ben Arous,



Dembo et Guionnet [BADG01] ont établi un principe de grandes déviations pour la plus grande valeur propre qui a été étendu à tous les ensembles  $\beta$  (44) dans [AGZ10, théorème 2.6.6 p. 81]. Dean et Majumdar [DM06] ont aussi obtenu ces grandes déviations pour plusieurs modèles de matrices aléatoires.

**Théorème 3** (Grandes déviations pour la plus grande valeur propre des ensembles  $\beta$ ). *Supposons que la constante de normalisation  $Z_n^V$  satisfait*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \frac{Z_{n-1}^{nV/(n-1)}}{Z_n^V} = \inf I_\beta \quad (46)$$

et que le potentiel  $V$  est fortement confinant (45). Quel que soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note

$$\lambda_{(n)} = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} \lambda_i$$

On note  $\sigma$  l'unique mesure qui minimise  $I_\beta$ , son support est un compact de  $\mathbb{R}$  dont l'extrémité droite est notée  $b$ . La suite de variables aléatoires  $(\lambda_{(n)})_{n \in \mathbb{N}^*}$  satisfait un principe de grandes déviations dans  $\mathbb{R}$ , à vitesse  $n$  et de bonne fonction de taux

$$J_\beta(x) = \begin{cases} \beta \int -\log|x-y| d\sigma(y) + V(x) - \inf I_\beta & \text{si } x \geq b \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

On peut remarquer que  $J_\beta$  est le potentiel effectif. L'interprétation "physique" est la suivante: les particules se concentrent extrêmement rapidement sous la forme de la distribution  $\sigma$ . L'énergie de la plus grande particule en un point  $x$  est donc au premier ordre la somme du potentiel  $V(x)$  et du potentiel généré par la distribution de charges  $\sigma$ . Une version légèrement différente de ce résultat a été prouvée par Borot et Guionnet [BG13b], [BG13a] où la condition (46) n'est pas imposée.

Perret et Schehr [PS14] puis Donati-Martin et Rouault [DMR<sup>+</sup>16] se sont intéressés au comportement de la mesure empirique vue depuis la plus grande valeur propre.

### 6.3 Principes de grandes déviations de gaz de Coulomb

#### Gaz de Coulomb dans $\mathbb{C}$ et matrices aléatoires

Les principes de grandes déviations présentés dans la section précédente concernent des gaz logarithmiques sur  $\mathbb{R}$ . Hiai et Petz [HP00] ont montré un principe de grandes déviations pour les mesures empiriques du gaz associé aux matrices de Ginibre (26), à vitesse  $n^2$  et de bonne fonction de taux  $I_G$  définie sur  $\mathcal{M}_1(\mathbb{C})$  par

$$I(\mu) = \mathcal{E}(\mu) + \int \frac{|x|^2}{2} d\mu(x) - \inf_{\nu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{C})} \left\{ \mathcal{E}(\nu) + \int \frac{|x|^2}{2} d\nu(x) \right\}.$$

Ce résultat n'est pas très étonnant, la loi jointe (26) étant la mesure de Gibbs à température inverse  $n^2$  associée au hamiltonien

$$H_n(\mu_n) = \mathcal{E}_\neq(\mu_n) + \int \frac{|x|^2}{2} d\mu_n(x).$$

Nous avons vu que les grandes déviations pour les gaz logarithmiques en dimension 1 étaient valides pour une large classe de potentiels  $V$  confinants. Pour les gaz de Coulomb à température inverse  $n^2$  associés à un potentiel  $V$  semi continu inférieurement vérifiant

$$\exists \beta' > 2, \quad \liminf_{|x| \rightarrow \infty} V(x) - \beta' \log|x| > -\infty, \quad (47)$$

la suite des mesures empiriques satisfait un principe de grandes déviations dans  $\mathcal{M}_1(\mathbb{C})$  à vitesse  $n^2$  et de bonne fonction de taux

$$I_V(\mu) = \mathcal{E}(\mu) + \int V d\mu - \inf_{\nu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{C})} \left\{ \mathcal{E}(\nu) + \int V d\nu \right\}.$$

La condition de confinement faible a été énoncée pour la première fois par Hardy [Har12]. Une preuve possible de ce résultat consiste à compactifier le gaz de Coulomb en étudiant l'image du gaz par la projection stéréographique inverse. On prouve les grandes déviations sur la sphère et on en déduit le principe de grandes déviations dans  $\mathbb{C}$  par principe de contraction. La condition (47) ne couvre pas le modèle de Forrester-Krishnapur (29). Lorsque la normalisation devant le potentiel  $V$  est  $(n+1)$  au lieu de  $n$ , la condition de confinement peut être relaxée en

$$\tilde{V}((0, 0, 1)) = \lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) - \log(1 + |x|^2) > -\infty.$$

Cela provient du fait que la normalisation  $(n+1)$  permet d'écrire d'une manière particulièrement simple la loi du gaz compactifié (33).

En appliquant les mêmes techniques que pour l'ensemble de Ginibre, on peut montrer que les mesures empiriques de gaz de Coulomb sur la sphère satisfont un principe de grandes déviations.

### Gaz de Coulomb dans $\mathbb{R}^d$ et généralisations

Les techniques décrites ci-dessus pour traiter les grandes déviations de gaz de Coulomb dans  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$  ou même  $\mathcal{S}^2$  sont très robustes. Chafaï, Gozlan et Zitt [CGZ14] ont étudié les grandes déviations pour la suite des mesures empiriques de gaz dont la loi jointe sur  $(\mathbb{R}^d)^n$  est donnée par

$$\frac{1}{Z_n} \exp -\beta_n \left( \frac{1}{n^2} \sum_{i \neq j} W(x_i, x_j) + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n V(x_k) \right) d\ell_{(\mathbb{R}^d)^n}(x_1, \dots, x_n).$$

Ils ont montré que si  $W$  et  $V$  satisfont certaines hypothèses de régularité assez générales et si  $\beta_n \gg n \log n$ <sup>22</sup> alors la suite de mesures empiriques satisfait un principe de grandes déviations dans  $\mathcal{M}_1(\mathbb{R}^d)$  muni de la distance de Fortet-Mourier, à vitesse  $\beta_n$  et de bonne fonction de taux

$$I(\mu) = \iint W(x, y) d\mu^{\otimes 2}(x, y) + \int V(x) d\mu(x) - C$$

où

$$C = \inf_{\nu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^d)} \iint W(x, y) d\mu^{\otimes 2}(x, y) + \int V(x) d\mu(x).$$

Ce résultat englobe tous les principes de grandes déviations pour les matrices aléatoires et les gaz de Coulomb évoqués précédemment.

On peut aussi s'intéresser aux gaz de Coulomb et aux gaz logarithmiques sur une variété riemannienne. Dans ce cadre, Berman [Ber14], [Ber16] a prouvé des principes de grandes déviations pour les mesures empiriques de ces gaz. Indépendamment, Garcia

<sup>22</sup>Cette hypothèse peut être facilement affaiblie en  $\beta_n \gg n$  grâce à une astuce de symétrisation qui nous a été communiquée par Thomas Leblé et qui est développée dans le premier chapitre.

Zelada [Zel17] a étudié des principes de grandes déviations pour les mesures empiriques de systèmes de particules  $(x_1, \dots, x_n)$  sur un espace polonais  $E$  de loi jointe

$$\frac{1}{Z_n} \exp(-n\beta_n W_n(\mu_n)) d\pi_E^{\otimes n}(x_1, \dots, x_n)$$

où  $\pi_E$  est une mesure finie sur  $E$ . Garcia Zelada a ainsi montré que si la suite de fonctions  $W_n$  converge vers une fonction limite  $W$ , alors la suite de mesures aléatoires  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  satisfait un principe de grandes déviations de fonction de taux

$$I(\mu) = \begin{cases} W(\mu) & \text{si } \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \infty \\ \beta W(\mu) + D(\mu || \pi) & \text{si } \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \beta \end{cases}$$

et à vitesse  $n\beta_n$  ou  $n$  dans le second cas. Le terme d'entropie relative  $D(\mu || \pi)$  fait écho au théorème de Sanov. La démonstration de ce résultat repose sur une approche variationnelle, inspirée des travaux de Dupuis et Ellis [DE11]. Ce résultat général a de nombreuses applications. Tout d'abord, on obtient un principe de grandes déviations à vitesse  $n$  faisant intervenir l'entropie relative, comme le suggère le théorème de Sanov. De plus, l'article de Garcia Zelada [Zel17] étend l'analyse de Chafaï, Gozlan et Zitt [CGZ14] aux variétés riemanniennes.

## 7 Résultats obtenus dans cette thèse

Dans cette section, nous présentons les différents résultats obtenus lors de cette thèse.

1. Dans le premier chapitre, nous démontrons des principes de grandes déviations pour les mesures empiriques des racines de polynômes orthogonaux dont les coefficients sont des variables aléatoires indépendantes de loi  $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, 1)$  ou  $\mathcal{N}_{\mathbb{R}}(0, 1)$ . Nous détaillons ces résultats pour les cas particuliers que sont les polynômes de Kac et les polynômes elliptiques.
2. Dans le second chapitre, nous démontrons l'universalité des principes de grandes déviations obtenus dans le premier chapitre.
3. Dans le troisième chapitre, nous étudions la convergence en loi de la plus grande racine en module de polynômes de Kac. Nous y montrons que cette racine est en général une variable aléatoire à queues lourdes qui dépend fortement de la loi des coefficients.
4. Le quatrième chapitre porte sur les grandes déviations pour les mesures empiriques d'un modèle de log-gaz modifié: les ensembles biorthogonaux.
5. Dans le cinquième chapitre, nous vérifions que tous les principes de grandes déviations pour les mesures empiriques des polynôme orthogonaux s'étendent aux cas des polynômes de Weyl renormalisés. Pour cela, il nous faut adapter les preuves des deux premiers chapitres.

### 7.1 Chapitre 1: Grandes déviations pour les mesures empiriques de polynômes aléatoires à coefficients gaussiens

Le premier chapitre de cette thèse correspond à l'article [But16]. Son but est d'adapter la preuve de Zeitouni et Zelditch [ZZ10] des principes de grandes déviations pour la suite des

mesures empiriques de polynômes orthogonaux (11) aléatoires et de les étendre au cas où les coefficients gaussiens réels. Les coefficients sont des variables aléatoires i.i.d. de loi  $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, 1)$  ou  $\mathcal{N}_{\mathbb{R}}(0, 1)$ . On fixe une mesure  $\nu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{C})$  et une fonction  $\phi$  et on suppose que la base  $(R_k)_{0 \leq k \leq n}$  est orthonormale par rapport au produit scalaire sur  $\mathbb{C}_n[X]$

$$\langle P, Q \rangle = \int P(z) \overline{Q(z)} e^{-n\phi(z)} d\nu(z). \quad (48)$$

On suppose que le couple  $(\phi, \nu)$  satisfait l'inégalité de Bernstein-Markov (12) et que le support de  $\nu$  est un ensemble épais en chacun de ses points <sup>23</sup>.

**Definition 1** (Ensemble épais). *Soit  $S \subset \mathbb{C}$  et  $z \in \mathbb{C}$ . On dit que  $S$  est épais au point  $z$  si  $z \in \overline{S \setminus \{z\}}$  et si pour toute fonction sous-harmonique  $u$  définie sur un voisinage de  $z$ ,*

$$\limsup_{x \rightarrow z, x \in S \setminus \{z\}} u(x) = u(z).$$

*Dans le cas contraire, on dit que l'ensemble  $S$  est fin en  $z$ .*

Rappelons que lorsque les coefficients sont des variables aléatoires indépendantes de loi  $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, 1)$  ou  $\mathcal{N}_{\mathbb{R}}(0, 1)$ , la loi jointe des racines de  $P_n$  est donnée par (38) ou (42).

**Théorème 4** (Cas complexe). *Si les  $a_k$  sont des variables aléatoires indépendantes de loi  $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, 1)$ , alors la suite de variables aléatoires  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  satisfait un principe de grandes déviations dans  $\mathcal{M}_1(\mathbb{C})$  muni de la topologie étroite, à vitesse  $n^2$  et de bonne fonction de taux  $I_O - \inf I_O$  où  $I_O$  est définie sur  $\mathcal{M}_{\infty}(\mathbb{C})$  par*

$$I_O(\mu) = \iint -\log|z-w| + \frac{1}{2} \log(1+|z|^2) + \frac{1}{2} \log(1+|w|^2) d\mu(z) d\mu(w) \quad (49)$$

$$+ \sup_{z \in K} \left\{ \int \log|z-w|^2 - \log(1+|w|^2) d\mu(w) - \phi(z) \right\}. \quad (50)$$

*Lorsque  $\int \log(1+|z|^2) d\mu(z) < \infty$ , cette fonction peut s'écrire*

$$I_O(\mu) = \mathcal{E}(\mu) + \sup_{z \in K} \left\{ \int \log|z-w|^2 d\mu(w) - \phi(z) \right\}.$$

*Cela se traduit par le fait que pour tout ensemble borélien  $A \subset \mathcal{M}_1(\mathbb{C})$*

$$-\inf_{\text{Int}A} \{I_O - \inf I_O\} \leq \varliminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \log \mathbb{P}(\mu_n \in A),$$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \log \mathbb{P}(\mu_n \in A) \leq -\inf_{\text{Clo}A} \{I_O - \inf I_O\}.$$

Le théorème 4 est dû à Zeitouni et Zelditch qui ont montré ce principe de grandes déviations dans  $\mathcal{M}_1(\mathbb{CP}^1)$ . Nous donnons une preuve de ce résultat ne faisant appel à aucune notion de géométrie complexe, en utilisant le procédé de compactification introduit par Hardy [Har12] afin de réécrire sur  $\mathcal{S}^2$  la loi jointe (38). Nous suivrons ensuite les idées de l'article de Zeitouni et Zelditch pour prouver un principe de grandes déviations sur la sphère. Le principe de grandes déviations sur  $\mathbb{C}$  est obtenu par principe de contraction.

La démonstration du théorème 4 est très proche de la démonstration originale, mais elle présente l'avantage de s'étendre au cas des coefficients gaussiens réels. Ainsi, en suivant une stratégie semblable à celle de [BAZ98], on peut montrer le résultat suivant.

<sup>23</sup>En anglais: non thin at all its points. Cette notion est détaillée dans [Ran95, p. 79].

**Théorème 5** (Cas réel). *Si les  $a_k$  sont des variables aléatoires indépendantes de loi  $\mathcal{N}_{\mathbb{R}}(0, 1)$ , alors la suite des mesures empiriques  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  satisfait un principe de grandes déviations dans  $\mathcal{M}_1(\mathbb{C})$  muni de la topologie étroite, à vitesse  $n^2$  et de bonne fonction de taux  $\tilde{I}_0 - \inf \tilde{I}_0$  avec*

$$\tilde{I}_0(\mu) = \begin{cases} \frac{1}{2} I_0(\mu) & \text{si } \mu \text{ est invariante par } z \mapsto \bar{z} \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases} \quad (51)$$

Dans le chapitre 1, nous détaillons la démonstration dans le cas des polynômes de Kac et nous donnons une ébauche de démonstration pour les polynômes elliptiques et les polynômes orthogonaux aléatoires.

Pour les polynômes de Kac, la fonction de taux s'écrit sous sa forme simplifiée

$$I_{\mathbb{R}}(\mu) = \mathcal{E}(\mu) + 2 \sup_{z \in S} \int \log |z - w| d\mu(w) \quad (52)$$

où  $S$  désigne le cercle unité de  $\mathbb{C}$ . On peut deviner cette fonction de taux en analysant la densité (38). La méthode de Laplace indique que le terme

$$\frac{1}{n} \log \int \prod_{k=1}^n |z - z_k|^2 d\nu_S(z) = \frac{1}{n} \log \int e^{2n \int \log |z-w| d\mu_n(w)} d\nu_S(z)$$

est équivalent à  $2 \sup_{z \in S} \int \log |z - w| d\mu(w)$ . Bien que la méthode de Laplace ne soit pas utilisée dans la preuve du théorème 4, elle permet d'avoir une intuition de la fonction de taux. Le lien entre ces deux termes est aussi réalisé par la propriété de Bernstein-Markov (12). On déduit de cette propriété que les deux termes sont exponentiellement équivalents. Ce lien est détaillé dans le premier chapitre.

## 7.2 Chapitre 2: Universalité des grandes déviations pour les polynômes aléatoires

Le second chapitre de cette thèse correspond à l'article [BZ17], écrit avec Ofer Zeitouni. Il traite de l'universalité des principes de grandes déviations pour les mesures empiriques de polynômes aléatoires. L'objet de ce chapitre est de déterminer des classes d'universalité à l'intérieur desquelles un même principe de grandes déviations est valide.

### Principes de grandes déviations connus

Nous allons d'abord faire un court résumé des modèles pour lesquels un principe de grandes déviations est valide.

Nous avons vu dans la section précédente que pour des polynômes orthogonaux aléatoires dont les coefficients sont des variables aléatoires indépendantes de loi  $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, 1)$  ou  $\mathcal{N}_{\mathbb{R}}(0, 1)$ , la suite des mesures empiriques satisfait un principe de grandes déviations à vitesse  $n^2$ . Bien que très similaires, les fonctions de taux associées à ces principes de grandes déviations, (49) et (51), sont différentes. Dans cette section, nous les notons respectivement  $I_{O, \mathbb{C}}$  et  $I_{O, \mathbb{R}}$ . Dans le cas particulier des polynômes de Kac, nous utilisons les notations  $I_{\mathbb{C}}$  et  $I_{\mathbb{R}}$  pour désigner les fonctions de taux associées aux principes de grandes déviations précédents.

Le seul autre modèle pour lequel un principe de grandes déviations est connu pour la suite des mesures empiriques est celui des polynômes de Kac à coefficients indépendants de loi exponentielle de paramètre 1. La loi jointe des racines est alors donnée par (43).

Ghosh et Zeitouni [GZ16] ont prouvé que, pour ce modèle, la suite des mesures empiriques satisfait un principe de grandes déviations dans  $\mathcal{M}_1(\mathbb{C})$  muni de la topologie étroite, à vitesse  $n^2$  et de fonction de taux

$$I_{\mathbb{R}^+}(\mu) = \begin{cases} \frac{1}{2}\mathcal{E}(\mu) + \int \log|1-z|d\mu(z) & \text{si } \mu \in \mathcal{P} \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases} \quad (53)$$

où  $\mathcal{P}$  est l'adhérence dans la topologie faible pour l'ensemble des mesures empiriques de polynômes à coefficients positifs. La description de l'ensemble  $\mathcal{P}$  est une question délicate qui a été résolue par Bergweiler et Eremenko [BE15]. On peut remarquer que cette fonction de taux est la même que celle du principe de grandes déviations pour les polynômes de Kac à coefficients  $\mathcal{N}_{\mathbb{R}}(0,1)$  lorsqu'elle prend des valeurs finies (le supremum de (52) est atteint en  $z = 1$ ).

### Universalité des principes de grandes déviations

Le chapitre 2 porte sur le théorème d'universalité suivant.

**Théorème 6** (Universalité des grandes déviations). *Soit  $E = \mathbb{C}, \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{R}^+$  pour les polynômes de Kac, respectivement  $E = \mathbb{C}$  ou  $\mathbb{R}$  pour les polynômes orthogonaux. Si  $a_0, \dots, a_n$  sont des variables aléatoires i.i.d. dont la loi a pour densité  $g$  par rapport à la mesure de Lebesgue  $\ell_E$  sur  $E$ , et si*

1. *il existe  $\rho > 0, r > 0$  et  $R > 0$  tels que*

$$\forall z \in E, \quad g(z) \leq \exp(-r|z|^\rho + R), \quad (54)$$

2. *il existe  $\delta > 0$  tel que pour tout  $\lambda > 0$ :*

$$\int \mathbf{1}_{|x| \leq \delta} \frac{1}{g(x)^\lambda} d\ell_E(x) < \infty \quad (55)$$

*alors la suite de mesures empiriques  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  satisfait un principe de grandes déviations dans  $\mathcal{M}_1(\mathbb{C})$ , à la vitesse  $n^2$  et de bonne fonction de taux  $I_E$ , respectivement  $I_{O,E}$ .*

Ainsi, pour une même base  $(R_k)_{0 \leq k \leq n}$ , le principe de grandes déviations pour la suite des mesures empiriques dépend du type des coefficients, réels ou complexes. La première hypothèse consiste en une décroissance exponentielle de la densité à l'infini. La seconde hypothèse signifie que la densité  $g(x)$  est plus grande que  $x^\alpha$  au voisinage de 0, quel que soit  $\alpha > 0$ . En particulier, cette hypothèse est vérifiée dès que la densité  $g$  est continue et ne s'annule pas en 0.

Le théorème 6 repose sur le calcul explicite de la loi des racines et ne couvre donc que les lois absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue. Dès lors que la loi des coefficients est discrète, aucune des techniques utilisées n'est applicable.

L'universalité des grandes déviations est une propriété générale des polynômes aléatoires dont les coefficients ont une loi absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Ainsi, si on établit un principe de grandes déviations pour un nouveau modèle de polynômes aléatoires dont les coefficients sont gaussiens, on peut montrer que ce principe de grandes déviations est universel sous les mêmes hypothèses que dans le théorème 6. Une application de cette méthode est décrite dans le chapitre 5 où nous montrons des principes de grandes déviations pour les polynômes de Weyl ainsi que leur universalité.

Ce résultat marque une vraie différence entre matrices et polynômes aléatoires. Pour les matrices aléatoires [BC14], la vitesse du principe de grandes déviations dépend de la décroissance à l'infini de la densité des coefficients, ce qui n'est pas le cas pour les polynômes aléatoires.

### 7.3 Chapitre 3: Plus grande racine de polynômes de Kac

Le troisième chapitre de cette thèse porte sur l'article [But17b] où nous cherchons à comprendre le comportement de la plus grande racine en module de polynômes de Kac. Cette question est motivée par l'analogie entre polynômes aléatoires et matrices aléatoires. Pour les différents modèles de matrices aléatoires présentés dans cette thèse, on sait que la plus grande valeur propre en module converge vers le bord du support de la mesure empirique et que ce comportement est universel. Pour les  $\beta$ -ensembles, dont le GOE, GUE et GSE font partie, la suite des lois de la plus grande valeur propre satisfait un principe de grandes déviations [AGZ10], [BG13b], détaillé à la fin la section 6.2.

Les fluctuations de la plus grande valeur propre de matrices de Wigner <sup>24</sup> est décrite par la loi de Tracy-Widom [TW94]. Dans le cadre des matrices de Wishart, le théorème des quatre moments [BY88] assure que la plus grande valeur propre converge vers le bord droit du spectre dès que les entrées ont un moment d'ordre 4 fini. La convergence de la plus petite valeur propre vers le bord gauche du support de la mesure limite a été récemment établie par Tikhomirov [Tik15] dès que les entrées ont un moment d'ordre 2 fini.

Pour les gaz de Coulomb en dimension 2 dont le potentiel est fortement confinant, Chafaï et Pécché [CP14] ont montré que la plus grande particule converge vers le support de la mesure limite et que ses fluctuations correspondent à la loi de Gumbel.

Dans ce contexte, on peut se demander si la plus grande racine en module de polynômes de Kac converge vers le cercle unité  $S$ , si un principe de grandes déviations est valide dans le cas gaussien et si on peut identifier les fluctuations de cette racine.

Le théorème suivant répond à toutes ces questions par la négative. La plus grande racine des polynômes de Kac ne converge pas vers le cercle unité. Elle converge en loi vers une variable aléatoire, en général à queues lourdes, dont on contrôle le nombre de moments finis. Dans le cas où les coefficients sont des gaussiennes complexes  $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, 1)$ , cela implique qu'aucun principe de grandes déviations pour le zéro de plus grand module n'est valide. On rappelle que

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k = a_n \prod_{k=1}^n (z - z_k^{(n)})$$

et on note  $(z_k^{(\infty)})_{k \in \mathbb{N}}$  les zéros de la série entière aléatoire

$$P_{\infty}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k.$$

**Théorème 7.** *Soit  $a_0$  une variable aléatoire telle que  $\mathbb{E}(\log(1 + |a_0|)) < \infty$ ,  $|a_0|$  n'est pas déterministe et  $\mathbb{P}(a_0 = 0) = 0$ . Soit  $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  et*

$$x_1^{(n)} = \min_k |z_k^{(n)}| \text{ et si } n < \infty, x_n^{(n)} = \max_k |z_k^{(n)}|.$$

*On a alors:*

---

<sup>24</sup>C'est aussi valable pour le gaz associé aux matrices de Wishart et bien d'autres modèles en dimension 1.

1. Les variables aléatoires  $x_n^{(n)}$  et  $1/x_1^{(n)}$  ont la même loi.
2. Il existe trois constantes  $C_1 > 0$ ,  $r > 0$  et  $A > 0$  ne dépendant que de la loi de  $|a_0|$  telles que

$$\forall 0 < t < C_1, \quad \mathbb{P}\left(x_1^{(n)} \leq t\right) \geq \mathbb{P}\left(|a_0| \leq \frac{rt}{2}\right) A. \quad (56)$$

3. S'il existe  $k \geq 0$ ,  $a > 0$  et  $\delta > 0$  tels que

$$\forall t < \delta, \quad \mathbb{P}(|a_0| \leq t) \geq at^k \quad \text{alors} \quad \mathbb{E}((x_n^{(n)})^k) = \infty.$$

4. Presque sûrement, le processus ponctuel  $\chi_n = \{z_k^{(n)} \mid |z_k^{(n)}| < 1\}$  converge faiblement dans l'espace des mesures de Radon vers  $\chi_\infty = \{z_k^{(\infty)}\}$ . Cela signifie que pour toute fonction continue à support compact  $f$  définie dans le disque ouvert  $D(0, 1)$  on a

$$\sum_k f(z_k^{(n)}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{a.s.} \sum_k f(z_k^{(\infty)}).$$

5. La suite de variables aléatoires  $(x_1^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  converge presque sûrement vers  $x_1^{(\infty)}$  et  $(x_n^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  converge en loi vers  $x^{(\infty)} := 1/x_1^{(\infty)}$ .

Dans le cas où les coefficients sont des variables aléatoires indépendantes de loi  $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, 1)$ , le résultat de Peres et Virág [PV05] sur les zéros de la fonction gaussienne hyperbolique  $f_1$  (3.4) permet de montrer que la loi de  $x_1^{(\infty)}$  a pour fonction de répartition pour  $t \in [0, 1]$

$$F_{x_1^{(\infty)}}(t) = 1 - \prod_{k=1}^{\infty} (1 - t^{2k}).$$

La plus grande racine des polynômes de Kac se comporte donc très différemment de ce qui est connu pour les matrices aléatoires et les gaz de Coulomb. Il est surprenant de voir que l'universalité du comportement de la mesure empirique est plus forte pour les polynômes aléatoires que pour les matrices aléatoires, le principe de grandes déviations pour les mesures empiriques étant universel, mais que les propriétés fines semblent être moins robustes.

Ce résultat ne s'étend pas aux racines de polynômes orthogonaux et est évident dans le cas des polynômes elliptiques où (8) implique que presque sûrement  $x_n^{(n)} \rightarrow \infty$ .

Ainsi, le comportement de la racine de plus grand module des polynômes de Kac est très différent de ce qui est connu pour les gaz de Coulomb ou les matrices aléatoires.

#### 7.4 Chapitre 4: Grandes déviations pour les ensembles biorthogonaux

Le chapitre 4 correspond à l'article [But17a]. Nous étudions les grandes déviations pour les mesures empiriques de gaz sur  $(0, \infty)$  dont la loi jointe est

$$\frac{1}{Z_n} \prod_{i < j} |x_i - x_j| \prod_{i < j} |g(x_i) - g(x_j)| e^{-n \sum_{i=1}^n V(x_i)} \prod_{i=1}^n x_i^{b-1} d\ell_{(\mathbb{R}_+)^n}(x_1, \dots, x_n) \quad (57)$$

où  $g$  est une fonction  $C^1$  dont la dérivée est strictement positive en tout point de  $(0, \infty)$ . Ce modèle a été introduit par Muttalib [Mut95] en physique pour l'étude de la répartition des électrons dans un conducteur en présence d'impuretés, avec  $g(x) = \text{Argsh}^2(\sqrt{x})$ . Ces ensembles ont été étudiés par Borodin [Bor98] en mathématiques où  $g$  est une fonction



puissance. Forrester et Wang [FW17] ont étudié ces ensembles et donné plusieurs modèles qui les réalisent.

Ce modèle peut être vu comme la mesure de Gibbs à température inverse  $n^2$  associée au hamiltonien

$$H_n = \frac{1}{2}\mathcal{E}_{\neq}(\mu_n) + \frac{1}{2}\mathcal{E}_{\neq}(g_*\mu_n) + \int V(x)d\mu_n(x) + \frac{1}{n} \int (b-1) \log x d\mu_n(x)$$

où  $g_*\mu$  désigne la mesure image (ou pushforward) de  $\mu$  par  $g$ .

Les ensembles biorthogonaux sont liés aux valeurs propres de matrices aléatoires. Cheliotis [Che14] a considéré un modèle de matrices  $T_n \in M_n(\mathbb{C})$  à coefficients indépendants de lois

$$X_{i,j} \sim \begin{cases} \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, 1) & \text{si } i > j, \\ 0 & \text{si } i < j, \\ \frac{1}{\pi\Gamma(c_j)} e^{-|z|^2} |z|^{2(c_j-1)} d\ell_{\mathbb{C}}(z) & \text{si } i = j \end{cases}$$

où  $\theta \leq 0$  et  $b > 0$  et avec  $c_j = \theta(j-1) + b$ . La loi jointe des valeurs propres de  $\frac{1}{n}T_n T_n^*$  correspond à l'ensemble biorthogonal (57) où  $g(x) = x^\theta$  ou  $\log(x)$  si  $\theta > 0$  ou  $\theta = 0$  et  $V(x) = x$ .

Pour  $\theta = 0$  et  $b = 1$ , la matrice  $T_n$  est triangulaire à coefficients indépendants de loi  $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, 1)$ . Ce cas particulier a été étudié dans le cadre des probabilités libres par Dykema et Haagerup [DH04]. Ils ont montré que la suite des mesures empiriques de  $\frac{1}{n}T_n T_n^*$  converge vers une mesure déterministe à support dans  $[0, e]$ .

**Théorème 8** (Principe de grandes déviations pour les ensembles biorthogonaux). *Soit  $\mu_n$  la mesure empirique associée au gaz (57). Soit  $g$  une fonction  $C^1$  sur  $\mathbb{R}_+$  telle que  $g' > 0$ . Soit  $V$  une fonction continue sur  $\mathbb{R}_+$ , minorée, et telle qu'il existe  $\beta > \max(b, 1)$  tel que*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{V(x)}{\beta \log |x| + \beta \log |g(x)|} > 1. \quad (58)$$

Soit  $I : \mathcal{M}_1(\mathbb{R}_+) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  défini par

$$I(\mu) = \begin{cases} \frac{1}{2}\mathcal{E}(\mu) + \frac{1}{2}\mathcal{E}(g_*\mu) + \int V(x)d\mu(x) & \text{si } \int V(x)d\mu(x) < +\infty \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

La suite des mesures empiriques  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  satisfait un principe de grandes déviations dans  $\mathcal{M}_1(\mathbb{R}_+)$ , muni de la topologie étroite, à vitesse  $n^2$ , et de bonne fonction de taux

$$\tilde{I} = I - \inf I.$$

De plus, la fonction  $\tilde{I}$  est semi-continue inférieurement et strictement convexe.

Ce résultat était déjà connu dans le cas où  $g(x) = x^k$  avec  $k$  un entier [ESS11]. On peut très facilement adapter la preuve pour couvrir le cas des ensembles biorthogonaux sur  $\mathbb{R}$ . Le cas où  $V$  dépend de  $n$  peut aussi être traité (en modifiant la preuve de manière évidente) à condition que cette suite de fonctions converge uniformément vers une fonction  $V_\infty$ .

Une conséquence de ce théorème est une caractérisation variationnelle pour la distribution de Dykema-Haagerup. Ainsi, la mesure  $\mu_{\text{DH}}$  est l'unique minimiseur sur  $\mathcal{M}_1(\mathbb{R}_+)$  de la fonction

$$\mu \mapsto \frac{1}{2}\mathcal{E}(\mu) + \frac{1}{2}\mathcal{E}(\log_*\mu) + \int x d\mu(x).$$

## 7.5 Chapitre 5: Grandes déviations pour les polynômes de Weyl renormalisés

Le chapitre 5 de cette thèse porte sur les polynômes de Weyl renormalisés. Nous avons vu qu'il s'agissait d'un cas particulier de polynômes orthogonaux. Plus précisément, la famille  $(\sqrt{n} \frac{\sqrt{n^k}}{\sqrt{k!}} X^k)_{k \leq n}$  forme une base orthonormale de  $\mathbb{C}_n[X]$  pour le produit scalaire

$$\langle P, Q \rangle = \int P(z) \overline{Q(z)} e^{-n|z|^2} \frac{1}{\pi} d\ell_{\mathbb{C}}(z).$$

On peut omettre le facteur  $\sqrt{n}$  qui n'a aucune influence sur les zéros des polynômes et inclure les polynômes de Weyl renormalisés dans le modèle des polynômes orthogonaux. Lorsque les coefficients sont des variables aléatoires indépendantes de loi  $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, 1)$ , la loi des racines est alors donnée par

$$\frac{1}{Z_n} \exp - \left( \sum_{i \neq j} -\log |z_i - z_j| + (n+1) \log \prod_{k=1}^n |z - z_k|^2 e^{-n|z|^2} \frac{1}{\pi} d\ell_{\mathbb{C}}(z) \right) d\ell_{\mathbb{C}^n}$$

et lorsque les coefficients sont des variables aléatoires indépendantes de loi  $\mathcal{N}_{\mathbb{R}}(0, 1)$ , la loi des racines est

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{1}{Z_{n,k}} \exp - \left( \sum_{i \neq j} -\log |z_i - z_j| + (n+1) \log \prod_{k=1}^n |z - z_k|^2 e^{-n|z|^2} \frac{1}{\pi} d\ell_{\mathbb{C}}(z) \right) d\ell_{n,k}.$$

Ce modèle ne rentre pas exactement dans le cadre du chapitre 1. En effet, pour le modèle du chapitre 1, on se ramène à un gaz sur la sphère  $\mathcal{S}^2$  associé à un couple  $(\phi, \nu)$ , où  $\phi$  est une fonction continue et bornée sur la sphère et  $\nu$  une mesure de probabilité sur la sphère. En suivant une stratégie similaire, on est alors conduit à considérer la mesure  $T_* \ell_{\mathbb{C}}$  sur  $\mathcal{S}^2$  et la fonction sur  $\mathcal{S}^2$

$$\phi(x) = |T^{-1}(x)|^2 + \log(1 - |x|^2).$$

La fonction  $\phi$  tend vers l'infini au pôle nord, il faut alors reprendre la preuve en localisant dans des compacts où  $\phi$  est finie.

Ces modifications n'impliquent que des changements mineurs dans la preuve. Ainsi, la preuve donnée dans le chapitre 5 se concentre sur les éléments qui diffèrent de la preuve du chapitre 1.

**Théorème 9** (Grandes déviations pour les polynômes de Weyl renormalisés). *La suite des mesures empiriques associées aux polynômes de Weyl renormalisés à coefficients indépendants  $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, 1)$  satisfait un principe de grandes déviations dans  $\mathcal{M}_1(\mathbb{C})$ , à vitesse  $n^2$  et de bonne fonction de taux  $I_{W, \mathbb{C}} - \inf I_{W, \mathbb{C}}$  où*

$$I_{W, \mathbb{C}}(\mu) = \iint -\log |z - w| + \frac{1}{2} \log(1 + |z|^2) + \frac{1}{2} \log(1 + |w|^2) d\mu(z) d\mu(w) \quad (59)$$

$$+ \sup_{z \in \mathbb{C}} \left\{ \int \log |z - w|^2 - \log(1 + |w|^2) d\mu(w) - |z|^2 \right\}. \quad (60)$$

Si  $\int \log(1 + |z|^2) d\mu(z) < \infty$ , cette expression se simplifie en

$$I_{W, \mathbb{C}}(\mu) = \mathcal{E}(\mu) + \sup_{z \in \mathbb{C}} \left\{ \int \log |z - w|^2 d\mu(w) - |z|^2 \right\}.$$

Dans le cas où les coefficients sont des variables aléatoires indépendantes de loi  $\mathcal{N}_{\mathbb{R}}(0, 1)$ , on peut prouver un principe de grandes déviations analogue à celui du chapitre 1.

**Théorème 10** (Grandes déviations pour les polynômes de Weyl renormalisés réels). *Lorsque les coefficients sont des variables aléatoires indépendantes de loi  $\mathcal{N}_{\mathbb{R}}(0, 1)$ , la suite des mesures empiriques des polynômes de Weyl renormalisés satisfait un principe de grandes déviations dans  $\mathcal{M}_1(\mathbb{C})$  pour la topologie étroite, à vitesse  $n^2$  et de fonction de taux  $I_{W, \mathbb{R}} - \inf I_{W, \mathbb{R}}$  où*

$$I_{W, \mathbb{R}}(\mu) = \begin{cases} \frac{1}{2} I_{W, \mathbb{C}}(\mu) & \text{si } \mu \text{ est invariante par } z \mapsto \bar{z} \\ \infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ce théorème ne présente aucune difficulté supplémentaire par rapport au chapitre 1. Le passage du théorème 9 au théorème 10 est presque automatique.

Une fois ces principes de grandes déviations prouvés, on peut aussi obtenir immédiatement leur universalité en suivant la mécanique développée dans le chapitre 2.

**Théorème 11** (Universalité des grandes déviations pour les polynômes de Weyl renormalisés). *Soit  $E = \mathbb{C}$  ou  $\mathbb{R}$ . On suppose que  $a_0, \dots, a_n$  sont des variables i.i.d. dont la loi  $a$  pour densité  $g$  par rapport à la mesure de Lebesgue  $\ell_E$  sur  $E$ . On suppose que*

1. *il existe  $\rho > 0$ ,  $r > 0$  et  $R > 0$  tels que*

$$\forall z \in E, \quad g(z) \leq \exp(-r|z|^\rho + R), \quad (61)$$

2. *il existe  $\delta > 0$  tel que pour tout  $\lambda > 0$ :*

$$\int 1_{|x| \leq \delta} \frac{1}{g(x)^\lambda} d\ell_E(x) < \infty \quad (62)$$

*Alors la suite de mesures empiriques  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  satisfait un principe de grandes déviations dans  $\mathcal{M}_1(\mathbb{C})$ , à la vitesse  $n^2$  et de bonne fonction de taux  $I_{W, E}$ .*

Ce chapitre nous permet de montrer des principes de grandes déviations pour le troisième modèle “canonique” de polynômes aléatoires. C’est également une illustration de la mécanique permettant de prouver l’universalité de principes de grandes déviations pour les mesures empiriques de polynômes aléatoires. Notons que toutes les techniques employées reposent sur le calcul explicite de la loi des racines et qu’aucun résultat ne persiste dans le cas discret.

## 8 Perspectives de recherche

Dans cette section nous présentons les différents axes de recherche qui sont envisagés après cette thèse.

### 8.1 Grandes déviations pour les particules extrêmes de gaz de Coulomb.

Nous avons vu qu’en dimension 1, la plus grande particule d’un log-gaz satisfait un principe de grandes déviations à vitesse  $n$  dont la fonction de taux est le potentiel effectif [AGZ10, théorème 2.6.6 p 81]. Un résultat analogue a été annoncé en dimension 2 par [CMV16]. Ces résultats reposent en partie sur l’existence d’un principe de grandes déviations pour la suite des mesures empiriques associées à ce modèle. On peut alors se poser la question de

l'existence d'un principe de grandes déviations pour les particules "extrêmes" du modèle de gaz de Coulomb généralisé introduit par Chafaï, Gozlan et Zitt dans [CGZ14]. On s'attend à un principe de grandes déviations dont la fonction de taux serait donnée par le potentiel effectif et dont la vitesse serait  $\beta_n/n$  où  $\beta_n$  est la vitesse du principe de grandes déviations pour les mesures empiriques. Ce décalage en vitesse entre les deux principes de grandes déviations apparaît dans tous les modèles de matrices aléatoires pour lesquels ce genre de résultat est connu [DM06], [Aug16].

La preuve du principe de grandes déviations pour la plus grande valeur propre des ensembles  $\beta$  donnée dans les articles de Borot et Guionnet [BG13b], [BG13a] semble assez robuste pour avoir une chance de s'adapter à d'autres modèles.

Une autre approche consisterait à essayer d'adapter les techniques utilisées dans [Zel17] pour obtenir ce principe de grandes déviations.

## 8.2 Concentration pour les gaz de Coulomb sur des variétés

Ce projet, en collaboration avec Adrien Hardy et David Garcia Zelada, consiste à prouver des inégalités de concentration pour la mesure empirique de gaz de Coulomb définis sur des variétés compactes, telles que la sphère  $\mathcal{S}^2$ . Garcia Zelada [Zel17] a montré que la suite de mesures empiriques associée aux gaz de Coulomb sur une variété riemannienne satisfait un principe de grandes déviations, analogue aux principes de grandes déviations évoqués dans cette thèse. Pour ce modèle, la fonction de taux  $I_M$  admet un unique minimiseur  $\nu_{eq}$  et on sait que la suite de mesures  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge presque sûrement vers  $\nu_{eq}$ . Nous cherchons à prouver des inégalités du type

$$\mathbb{P}(d(\mu_n, \nu_{eq}) > t) \leq \exp(-at^2n^2 + \dots)$$

où  $a$  est une constante explicite et où les points de suspension désignent des termes explicites d'ordre inférieur.

Ces inégalités de concentration sont une version non asymptotique des principes de grandes déviations. Ce travail est fortement inspiré de l'article de Chafaï, Hardy et Maïda [CHM16] qui prouvent des inégalités de concentration pour les mesures empiriques de gaz de Coulomb dans  $\mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 2$ . Une des difficultés majeures concerne la régularisation des mesures empiriques. Pour pouvoir adapter l'approche de [CHM16], il convient de trouver une régularisation des mesures empiriques pour laquelle on contrôle précisément l'écart d'énergie entre ces mesures.

## 8.3 Principes de grandes déviations locaux pour des gaz de Coulomb sur des variétés

Ce projet est l'adaptation des travaux de Leblé et Serfaty [LS15] sur des variétés. Il est mené en collaboration avec Adrien Hardy, David Garcia Zelada et Thomas Leblé.

Leblé et Serfaty ont montré un principe de grandes déviations à vitesse  $n$  au niveau microscopique pour les gaz de Coulomb et les gaz de Riesz. Ils ont introduit une énergie dite renormalisée qui intervient dans la fonction de taux du processus. Leur résultat est particulièrement intéressant car il permet de mieux comprendre les différents processus ponctuels qui apparaissent en matrices aléatoires. Ce résultat va au second ordre car il permet d'obtenir le développement asymptotique à l'ordre  $n$  de la fonction de partition du système et de comprendre son comportement microscopique.

## 8.4 Principes de grandes déviations locaux pour les racines de polynômes aléatoires

Le projet avec Thomas Leblé est sans doute le plus difficile des quatre. Il s'agit de comprendre le comportement microscopique des zéros de polynômes aléatoires, dans l'esprit de [LS15]. Cela permettrait d'identifier le processus limite des racines et de comprendre leur répartition locale. Pour les polynômes elliptiques à coefficients gaussiens complexes, on sait que les racines se répartissent uniformément sur la sphère  $\mathcal{S}^2$  et on peut espérer voir un processus limite sur le plan tangent qui soit invariant par translation.

La grande difficulté de ce problème est la compréhension du terme de confinement non linéaire

$$(n+1) \log \int \prod_{k=1}^n |z - z_k|^2 d\pi(z).$$

Si on tente de mener une analyse similaire à celle de Leblé et Serfaty, il faut comprendre la contribution de ce terme au niveau microscopique. Pour les gaz de Coulomb classiques, le potentiel a un effet local et ne joue qu'un rôle confinant. Il n'a aucune influence sur la répulsion entre les particules. Pour les polynômes aléatoires, le terme de confinement joue un rôle dans la répulsion entre les zéros et son analyse semble être une difficulté majeure. Ainsi, le terme de confinement semble ne pas être local et peut impliquer des interactions à grande distance entre les zéros.

# Chapter 1

## Large deviations for orthogonal polynomials

Ce chapitre correspond à l'article [But16], publié dans Electronic Journal of Probability. Nous y prouvons des principes de grandes déviations pour la suite des mesures empiriques associées à des polynômes orthogonaux aléatoires dont les coefficients sont gaussiens complexes ou réels. Cet article revisite celui de Zeitouni et Zelditch [ZZ10] et en étend les résultats.

<b>1.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>45</b>
<b>1.2</b>	<b>Definitions and notations</b>	<b>52</b>
<b>1.3</b>	<b>Large deviations for Kac polynomials</b>	<b>54</b>
1.3.1	Step 1: Distribution of the roots	54
1.3.2	Step 2: Large deviations on the unit sphere	57
1.3.3	Step 3: Proof of the Large Deviations Principles	59
1.3.4	Step 4: Going back on the plane	73
<b>1.4</b>	<b>Large deviations for Elliptic polynomials</b>	<b>75</b>
1.4.1	Step 1: Distribution of the roots	75
1.4.2	Step 2: Large deviations on the sphere	76
1.4.3	Step 3: Proof of the large deviation principles	78
1.4.4	Step 4: Going back on the plane	79
<b>1.5</b>	<b>General result of Zeitouni and Zelditch</b>	<b>79</b>
1.5.1	Step 1: Distribution of the roots	79
1.5.2	Step 2: Large deviations on the sphere	80
1.5.3	Steps 3 and 4	81

### 1.1 Introduction

We study three different models of random polynomials, orthogonal polynomials, Kac polynomials, and elliptic polynomial, the two last being examples of orthogonal polynomials. The coefficients are i.i.d. random variables which can be either:

Complex Gaussian coefficients	$a_k = b_k + ic_k$ where $\begin{pmatrix} b_k \\ c_k \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}(0, \frac{1}{2}I_2)$
Real Gaussian coefficients	$a_k \sim \mathcal{N}(0, \frac{1}{2})$ .

We will always refer to those two possibilities as the complex and real case. Given  $(R_0, \dots, R_n)$  a basis of  $\mathbb{C}_n[X]$  we consider the random polynomials:

$$P_n = a_0 R_0 + a_1 R_1 + \dots + a_n R_n. \quad (1.1)$$

In order to study the zeros  $z_1, \dots, z_n$  of the random polynomials  $P_n$  we introduce their empirical measure:

$$\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{z_i}. \quad (1.2)$$

We will focus on three classes of random polynomials corresponding to different choices of the polynomials  $R_j$ 's:

Orthogonal polynomials	$R_k$ orthonormal family in $L^2$
Kac polynomials	$R_k = X^k$
Elliptic polynomials	$R_k = \sqrt{\binom{n}{k}} X^k$

The study of the zeros of random polynomials started with articles by Kac [Kac43], Littlewood and Offord [LO45], Hammersley [Ham56] which focused on the number of real zeros. The literature about random polynomials is vast, we refer to the book by Bharucha-Reid and Sambandham [BRS86] and the article by Tao and Vu [TV15] for a nice account of the classical results. The study of the complex roots was initiated by Polya, Sparo and Sur. Recently, the minimal condition to obtain the convergence of  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  was given by Kabluchko and Zaporozhets [IZ13].

The purpose of this article is to revisit the article of Zeitouni and Zelditch [ZZ10]. They prove that the empirical measures of the zeros of random orthonormal polynomials with respect to a scalar product in  $L^2$  and complex Gaussian coefficients satisfy a large deviation principle in the projective space  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ . Here we revisit their proof of their theorem in an elementary way although the techniques used are mainly a reformulation of their work. Using a compactification technique based on inverse stereographic projection, we prove a large deviation principle for the push-forward problem on a sphere of  $\mathbb{R}^3$  and then obtain the result in  $\mathbb{C}$ . The proof adapts to the case of real coefficients, which allows us to extend the theorem. The compactification technique was first introduced by Hardy [Har12] in order to prove a large deviation principle for Coulomb gases with weakly confining potential. The compactification method was also used by Bloom in [BLW14] in a more general framework.

Large deviations for empirical measures of random polynomials are only known for Gaussian complex coefficients [ZZ10], which is the subject of the present work, and for exponential coefficients in the Kac case studied by Ghosh and Zeitouni in [GZ16]. We also mention the work [FZ11] where the author proves a large deviations principle for a modification of the model of Zeitouni and Zelditch. All these cases rely on the ability to compute the law of the roots of  $P_n$ . These results should be compared with their equivalent in random matrix theory: the Ginibre ensemble, real or complex. Many authors used the link between Coulomb gases and eigenvalues of random matrices to obtain large deviation principles as in Ben Arous and Guionnet [BAG97], Ben Arous and Zeitouni [BAZ98], Hiai and Petz [HP00]. In a more general setup, large deviation principle for empirical measures of a Coulomb gas are valid. See for example [CGZ14] for a similar result in any dimension with general repulsion, Hardy [Har12], or Bloom [BLW14].

## Orthogonal polynomials

Given a probability measure  $\nu$  and a continuous function  $\phi$ , we consider the scalar products on  $\mathbb{C}_n[X]$ :

$$\langle P, Q \rangle = \int P(z) \overline{Q(z)} e^{-n\phi(z)} d\nu(z). \quad (1.3)$$

Let  $R_0, \dots, R_n$  be an orthonormal basis for this scalar product, we define

$$P_n = \sum_{k=0}^n a_k R_k. \quad (1.4)$$

We call  $K$  the support of  $\nu$ . We assume that its compactification by inverse stereographic projection is non-thin at all the points of its closure. This notion comes from potential theory and is detailed in [Ran95, p. 78]. We can understand it as the requirement that the support of  $\nu$  is not too degenerated. For instance, if the support of  $\nu$  is connected and has more than one point, it is non-thin at all its points [Ran95, Theorem 3.8.3 p 79]. It also holds if it has a finite number of connected components with more than one point. On the other hand, a polar set is thin at every point. We define the Bernstein-Markov property, which will be one of the key elements in this article. For more information about this notion, see [BLPW15].

**Definition 1.1** (Bernstein-Markov property). *We say that the couple  $(\phi, \mu)$  satisfies the Bernstein-Markov property if, for every  $\varepsilon > 0$ , there exists a constant  $C_\varepsilon > 0$  such that, for any  $n \in \mathbb{N}$  and for any polynomial  $P \in \mathbb{C}_n[X]$  we have:*

$$\sup_{z \in K} \{|P(z)|^2 e^{-n\phi(z)}\} \leq C_\varepsilon e^{\varepsilon n} \|P\|_{L^2}^2$$

where  $K$  is the support of the measure  $\nu$ .

We define the Hamiltonian:

$$H_O(z_1, \dots, z_n) = -\frac{1}{n^2} \sum_{i \neq j} \log |z_i - z_j| + \frac{n+1}{n^2} \log \int \prod_{i=1}^n |z - z_i|^2 e^{-n\phi(z)} d\nu(z). \quad (1.5)$$

In the complex case, the distribution of the roots  $(z_1, \dots, z_n)$  of  $P_n$  is given by:

$$\frac{1}{Z_n} \exp(-\beta_n H_O(z_1, \dots, z_n)) d\ell_{\mathbb{C}^n}(z_1, \dots, z_n). \quad (1.6)$$

where  $\ell_{\mathbb{C}^n}$  is the Lebesgue measure on  $\mathbb{C}^n$ , and  $Z_n$  is a constant.  $\beta_n$  is the inverse of a temperature, so we can see  $1/\beta_n$  as a cooling scheme. In this article, we will always consider:

$$\beta_n = n^2$$

which corresponds to the distribution of the roots of random polynomials. We can see  $(z_1, \dots, z_n)$  as a system of particles in interaction. The term

$$-\frac{1}{n^2} \sum_{i \neq j} \log |z_i - z_j|$$

corresponds to a repulsion between the particles and is compensated by the confinement

$$\frac{n+1}{n^2} \log \int \prod_{i=1}^n |z - z_i|^2 e^{-n\phi(z)} d\nu(z).$$



This model is very close to the classical Coulomb gas model, where the confinement takes the simpler form  $\sum_{i=1}^n V(z_i)$ , which does not involve any interaction between the particles. This non-interaction property can be seen as linearity with respect to the empirical measure via the relation:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n V(z_i) = \int V(w) d\mu_n(w) = \langle V, \mu_n \rangle.$$

The confinement term associated to the Hamiltonian (1.5) is more complicated, but can still be compared to a classical potential thanks to the Jensen inequality.

The study of the real case is interesting only if the polynomials  $R_k$ 's are real. In the real case, the distribution of the roots is not absolutely continuous with respect to the Lebesgue measure of  $\mathbb{C}^n$  as the probability to have a real root is positive. This distribution is given by the following mixture:

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{1}{Z_{n,k}} \exp\left(-\beta_n \frac{1}{2} H_O(z_1, \dots, z_n)\right) d\ell_{n,k}(z_1, \dots, z_n). \quad (1.7)$$

where we defined,  $\ell_{\mathbb{R}}$  and  $\ell_{\mathbb{C}}$  being the Lebesgue measures on  $\mathbb{R}$  and  $\mathbb{C}$ ,

$$d\ell_{n,k}(z_1, \dots, z_n) = d\ell_{\mathbb{R}}(z_1) \dots d\ell_{\mathbb{R}}(z_{n-2k}) d\ell_{\mathbb{C}}(z_{n-k}) \dots d\ell_{\mathbb{C}}(z_n) \quad (1.8)$$

and where  $Z_{n,k}$  are constants. The first  $n - 2k$  particles are on the real line and with  $k$  pairs of complex numbers and their conjugates. In the complex case, all the results of this article are valid for any sequence  $\beta_n \gg n$ . In the real case, additional assumptions are needed, they are given in (1.43), (1.50) and (1.55).

In this article, the term weak topology corresponds to the topology of convergence in distribution, which is the weak topology associated to continuous and bounded test functions. This topology is associated to the Bounded Lipschitz metric  $d$  defined as:

$$\forall \mu, \nu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{C}), \quad d(\mu, \nu) = \sup_f \left| \int f d\mu - \int f d\nu \right|$$

where the supremum is taken over functions bounded by 1 and 1-Lipschitz.

**Theorem 1.2** (Large deviation principle for complex orthogonal polynomials). *Let  $\mu_n$  be the empirical measure of the gas (1.6). Let us define  $I_O : \mathcal{M}_1(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ :*

$$I_O(\mu) = - \iint \left( \log |z - w| - \frac{1}{2} \log(1 + |z|^2) - \frac{1}{2} \log(1 + |w|^2) \right) d\mu(z) d\mu(w) \\ + \sup_{z \in K} \left[ \int \log |z - w|^2 - \log(1 + |w|^2) d\mu(w) - \phi(z) \right].$$

When  $\int \log(1 + |w|^2) d\mu(w) < \infty$  then we have:

$$I_O(\mu) = - \iint \log |z - w| d\mu(z) d\mu(w) + \sup_{z \in K} \left[ \int \log |z - w|^2 d\mu(w) - \phi(z) \right]$$

If the couple  $(\phi, \nu)$  satisfies the Bernstein-Markov property (1.1) then  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  satisfies a large deviation principle in  $\mathcal{M}_1(\mathbb{C})$  with the weak topology, speed  $\beta_n$  and good rate function  $I_O - \inf I_O$ . This means that for any Borel set  $A \subset \mathcal{M}_1(\mathbb{C})$  we have:

$$- \inf_{\text{Int} A} (I_O - \inf I_O) \leq \varliminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta_n} \log \mathbb{P}(\mu_n \in A) \leq \overline{\varliminf}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta_n} \log \mathbb{P}(\mu_n \in A) \leq - \inf_{\text{Clo} A} (I_O - \inf I_O).$$

**Theorem 1.3** (Large deviation principle for real orthogonal polynomials). *Let  $\mu_n$  be the empirical measure of the gas (1.7). If the couple  $(\phi, \nu)$  satisfies the Bernstein-Markov property, then  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  satisfies a large deviation principle in  $\mathcal{M}_1(\mathbb{C})$  with the weak topology, speed  $\beta_n$  and good rate function:*

$$\tilde{I}_O(\mu) = \begin{cases} \frac{1}{2}(I_O(\mu) - \inf I_O) & \text{if } \mu \text{ is invariant under the map } z \mapsto \bar{z} \\ \infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$

This means that for any Borel set  $A \subset \mathcal{M}_1(\mathbb{C})$  we have:

$$-\inf_{A \text{ Int}} \tilde{I}_O \leq \varliminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta_n} \log \mathbb{P}(\mu_n \in A) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta_n} \log \mathbb{P}(\mu_n \in A) \leq -\inf_{\text{Clo}A} \tilde{I}_O.$$

Those last two theorems imply that, in both cases, almost surely:

$$d(\mu_n, \text{Argmin}(I_O)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \tag{1.9}$$

where  $\text{Argmin}(I_O)$  is the unique minimizer of function  $I_O$ . This is a consequence of the Borel-Cantelli Lemma used with the sets  $\{\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{C}) \mid d(\mu, \text{Argmin}(I_O)) > \varepsilon\}$ . The minimizer is the equilibrium measure of the support of  $\nu$ , see [ZZ10, Lemma 30].

## Kac polynomials

The most important example of orthonormal polynomials are Kac polynomials:

$$P_n = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n. \tag{1.10}$$

The canonical basis is orthonormal with respect to the scalar product on  $\mathbb{C}_n[X]$ :

$$\langle P, Q \rangle = \int P(z) \overline{Q(z)} d\nu_S(z) \tag{1.11}$$

where  $\nu_S$  is the uniform measure on  $S$ , the unit circle of  $\mathbb{C}$ . The sequence  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converges almost surely weakly towards the measure  $\nu_S$ . Although this result is quite ancient, we can deduce it from (1.9). We define the Hamiltonian:

$$H(z_1, \dots, z_n) = -\frac{1}{n^2} \sum_{i \neq j} \log |z_i - z_j| + \frac{n+1}{n^2} \log \int \prod_{i=1}^n |z - z_i|^2 d\nu_S(z) \tag{1.12}$$

In the complex case, the distribution of the roots is given by the Gibbs measure:

$$\frac{1}{Z_n} \exp(-\beta_n H(z_1, \dots, z_n)) d\ell_{\mathbb{C}^n}(z_1, \dots, z_n) \tag{1.13}$$

In the real case, the distribution of the roots is the mixture:

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{1}{Z_{n,k}} \exp\left(-\beta_n \frac{1}{2} H(z_1, \dots, z_n)\right) d\ell_{n,k}(z_1, \dots, z_n) \tag{1.14}$$

where the  $Z_{n,k}$  are constants.

**Theorem 1.4** (Large deviations for complex Kac polynomials). *Let  $\mu_n$  be the empirical measure of the gas (1.13). Let us define  $I : \mathcal{M}_1(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ :*

$$I(\mu) = - \iint \left( \log |z - w| - \frac{1}{2} \log(1 + |z|^2) - \frac{1}{2} \log(1 + |w|^2) \right) d\mu(z) d\mu(w) \\ + \sup_{z \in S} \int \left( \log |z - w|^2 - \log(1 + |w|^2) \right) d\mu(w).$$

When  $\int \log(1 + |z|^2) d\mu(z)$  is finite, this function can be simplified to:

$$I(\mu) = - \iint \log |z - w| d\mu(z) d\mu(w) + \sup_{z \in S} \int \log |z - w|^2 d\mu(w).$$

The random sequence  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  satisfies a large deviation principle in  $\mathcal{M}_1(\mathbb{C})$  with the weak topology and with speed  $\beta_n$  and good rate function  $I$ . For any Borel set  $A \subset \mathcal{M}_1(\mathbb{C})$  we have:

$$- \inf_{\text{Int} A} I \leq \varliminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta_n} \log \mathbb{P}(\mu_n \in A) \leq \overline{\varliminf}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta_n} \log \mathbb{P}(\mu_n \in A) \leq - \inf_{\text{Clo} A} I. \quad (1.15)$$

**Theorem 1.5** (Large deviations for real Kac polynomials). *Let  $\mu_n$  be the empirical measure of the gas (1.14), then the random sequence  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  satisfies a large deviation principle in  $\mathcal{M}_1(\mathbb{C})$  for the weak topology with speed  $\beta_n$  and good rate function  $\tilde{I}$  where:*

$$\tilde{I}(\mu) = \begin{cases} \frac{1}{2} I(\mu) & \text{if } \mu \text{ is invariant under the map } z \mapsto \bar{z} \\ \infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$

This means that for any Borel set  $A \subset \mathcal{M}_1(\mathbb{C})$  we have:

$$- \inf_{\text{Int} A} \tilde{I} \leq \varliminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta_n} \log \mathbb{P}(\mu_n \in A) \leq \overline{\varliminf}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta_n} \log \mathbb{P}(\mu_n \in A) \leq - \inf_{\text{Clo} A} \tilde{I}.$$

## Elliptic polynomials

We will see how the study of Kac polynomials can be adapted to prove a large deviation principle for the empirical measure associated to the roots of polynomials of the form

$$P_n = \sum_{k=0}^n a_k \binom{n}{k}^{1/2} X^k.$$

The polynomials  $\sqrt{n+1} \binom{n}{k}^{1/2} X^k$  are orthonormal for the scalar product on  $\mathbb{C}_n[X]$ :

$$\langle P, Q \rangle = \int P(z) \overline{Q(z)} \frac{1}{(1 + |z|^2)^n} \frac{d\ell_{\mathbb{C}}(z)}{\pi(1 + |z|^2)^2}.$$

As multiplying a polynomial by a constant does not change the zeros, the factor  $\sqrt{n+1}$  is omitted. It is known that the random sequence  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converges almost surely weakly towards

$$\frac{d\ell_{\mathbb{C}}(z)}{\pi(1 + |z|^2)^2}$$

which is called the complex Cauchy measure<sup>1</sup>. It can be seen as a consequence of (1.9). We define the Hamiltonian:

$$H_E(z_1, \dots, z_n) = -\frac{1}{n^2} \sum_{i \neq j} \log |z_i - z_j| + \frac{n+1}{n^2} \log \int \frac{\prod_{i=1}^n |z - z_i|^2}{(1 + |z|^2)^n} \frac{d\ell_{\mathbb{C}}(z)}{\pi(1 + |z|^2)^2} \quad (1.16)$$

and the Gibbs measure associated to the distribution of the roots in the complex case:

$$\frac{1}{Z_n} \exp(-\beta_n H_E(z_1, \dots, z_n)) d\ell_{\mathbb{C}^n}(z_1, \dots, z_n). \quad (1.17)$$

In the real case, the roots form a mixture of Coulomb gases distributed with respect to:

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{1}{Z_{n,k}} \exp\left(-\beta_n \frac{1}{2} H_E(z_1, \dots, z_n)\right) d\ell_{n,k}(z_1, \dots, z_n) \quad (1.18)$$

where the  $Z_{n,k}$  are constants.

**Theorem 1.6** (Large deviation principle for complex elliptic polynomials). *Let  $\mu_n$  be the empirical measure of the gas (1.17). Let us define  $I_E : \mathcal{M}_1(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ :*

$$I_E(\mu) = - \iint \left( \log |z - w| - \frac{1}{2} \log(1 + |z|^2) - \frac{1}{2} \log(1 + |w|^2) \right) d\mu(z) d\mu(w) \\ + \sup_{z \in \mathbb{C}} \left[ \int \left( \log |z - w|^2 - \log(1 + |w|^2) \right) d\mu(w) - \log(1 + |z|^2) \right].$$

When  $\int \log(1 + |z|^2) d\mu(z) < \infty$ , we can write:

$$I_E(\mu) = - \iint \log |z - w| d\mu(z) d\mu(w) + \sup_{z \in \mathbb{C}} \left[ \int \log |z - w|^2 d\mu(w) - \log(1 + |z|^2) \right].$$

$(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  satisfies a large deviation principle in  $\mathcal{M}_1(\mathbb{C})$  with the weak topology and with speed  $\beta_n$  and good rate function  $I_E - \inf I_E$ . This means that for any Borel set  $A \subset \mathcal{M}_1(\mathbb{C})$  we have:

$$- \inf_{\text{Int} A} (I_E - \inf I_E) \leq \varliminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta_n} \log \mathbb{P}(\mu_n \in A) \leq \overline{\varliminf}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta_n} \log \mathbb{P}(\mu_n \in A) \leq - \inf_{\text{Clo} A} (I_E - \inf I_E).$$

**Theorem 1.7** (Large deviation principle for real elliptic polynomials). *Let  $\mu_n$  be the empirical measure of the gas (1.18).  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  satisfies a large deviation principle in  $\mathcal{M}_1(\mathbb{C})$  with the weak topology, speed  $\beta_n$  and good rate function:*

$$\tilde{I}_E(\mu) = \begin{cases} \frac{1}{2}(I_E(\mu) - \inf I_E) & \text{if } \mu \text{ is invariant under the map } z \mapsto \bar{z} \\ \infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$

This means that for any Borel set  $A \subset \mathcal{M}_1(\mathbb{C})$  we have:

$$- \inf_{\text{Int} A} \tilde{I}_E \leq \varliminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta_n} \log \mathbb{P}(\mu_n \in A) \leq \overline{\varliminf}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta_n} \log \mathbb{P}(\mu_n \in A) \leq - \inf_{\text{Clo} A} \tilde{I}_E.$$

---

<sup>1</sup>or Fubini-Study measure

## Outline of the article

We will give a full proof of the results for Kac polynomials, and then we will show how to adapt the proof for elliptic and orthogonal polynomials. The proofs of the previous theorems are similar, and will follow these steps:

- 1) Compute the distribution of the roots on  $\mathbb{C}^n$ ;
- 2) Use of inverse stereographic projection to push-forward every object on  $\mathcal{S}^2$ , the sphere in  $\mathbb{R}^3$  centered on  $(0, 0, \frac{1}{2})$  and of radius  $1/2$ ;
- 3) Prove a large deviation principle in  $\mathcal{M}_1(\mathcal{S}^2)$ ;
- 4) Use of contraction principle to obtain the large deviation principle in  $\mathcal{M}_1(\mathbb{C})$ .

We use inverse stereographic projection because, as  $\mathcal{M}_1(\mathcal{S}^2)$  is compact, a weak large deviation principle is equivalent to a full large deviation principle, without proving exponential tightness. [DZ09, Lemma 1.2.18]

In Section 2 we introduce the objects that will be studied in the article. In Section 3 we give a detailed proof of the result for Kac polynomials following the steps given above. Section 4 is about elliptic polynomials. As the proof is nearly the same, we focus on what should be changed to import the proof from the previous section. In Section 5 we prove the general result that was originally proved by Zeitouni and Zelditch in [ZZ10] and we extend it for real Gaussian coefficients.

In contrast, the article [ZZ10] has a more geometric and intrinsic approach. The scalar product (1.3) is related to a notion of curvature on  $\mathbb{CP}^1$ . The zeros are seen as elements of  $\mathbb{CP}^1$  and the rate function is expressed in terms of Green function and Green energy associated to this geometric setup.

## 1.2 Definitions and notations

We give some definitions that will be useful in the article.

**Definition 1.8** (Logarithmic potential, logarithmic energy). *We call the logarithmic potential of a measure  $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{C})$  the function:*

$$U^\mu : z \mapsto \int -\log |z - w| d\mu(w).$$

We also define the logarithmic energy of a measure  $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{C})$ :

$$\mathcal{E}(\mu) = \begin{cases} \iint -\log |z - w| d\mu(z) d\mu(w) & \text{if } \int \log(1 + |z|) d\mu(z) < \infty \\ \infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$

and  $J : \mathcal{M}_1(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  defined by

$$J(\mu) = \sup_{z \in S} \int \log |z - w| d\mu(w)$$

where  $S$  is the unit circle of  $\mathbb{C}$ .

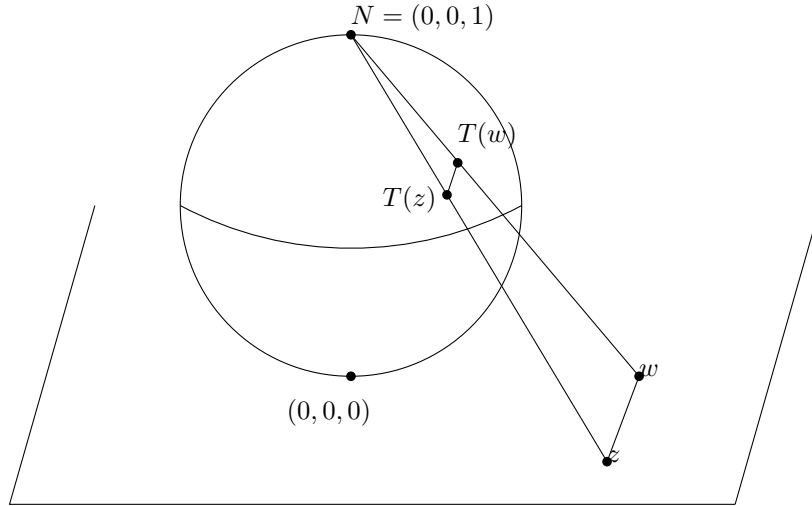


Figure 1.1: Inverse stereographic projection.

**Definition 1.9** (Discrete logarithmic energy.). Let  $\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{z_i}$  then we write:

$$\mathcal{E}_{\neq}(\mu_n) = -\frac{1}{n^2} \sum_{i \neq j} \log |z_i - z_j| = -\iint_{\neq} \log |z - w| d\mu_n(z) d\mu_n(w) \quad (1.19)$$

where  $\int_{\neq}$  stands for the off-diagonal integral.

We will use the same notation for measures on  $\mathbb{C}$  or on  $\mathcal{S}^2$ .

Let us define now the inverse stereographic projection that will be the key tool in this article.

**Definition 1.10** (Inverse stereographic projection). Let  $\mathcal{S}^2$  be the sphere in  $\mathbb{R}^3$  of center  $(0, 0, 1/2)$  and radius  $1/2$ . We call the point  $N = (0, 0, 1)$  the north pole. Let  $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{S}^2$  be the inverse stereographic projection

$$T(z) = \left( \frac{\Re(z)}{1 + |z|^2}, \frac{\Im(z)}{1 + |z|^2}, \frac{|z|^2}{1 + |z|^2} \right).$$

We have the following relations, valid for any  $z$  and  $w$  in  $\mathbb{C}$ :

$$|z - w|^2 = \frac{|T(z) - T(w)|^2}{(1 - |T(z)|^2)(1 - |T(w)|^2)} \quad (1.20)$$

$$1 - |T(z)|^2 = \frac{1}{1 + |z|^2} \quad (1.21)$$

where if  $x \in \mathbb{R}^3$ ,  $|x|$  is its Euclidean norm and when  $z$  is a complex number,  $|z|$  is its modulus. The same notation holds for the norm in  $\mathbb{C}$  and the norm in  $\mathbb{R}^3$ .

The first relation can be found in [AN07, Lemma 3.4.2], and the second relation is obtained from the first one by squaring, taking the limit as  $w$  tends to infinity and using the Pythagorean theorem.

To avoid confusions between what lies in  $\mathbb{C}$  and what lies in  $\mathbb{R}$ , we will only use the letters  $z, w$  for complex numbers and the letters  $x, y$  for vectors in  $\mathbb{R}^3$ .

**Definition 1.11** (Push-forward of the objects on the sphere). *We define the push-forward by  $T$  of the empirical measure:*

$$\bar{\mu}_n = T^* \mu_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{T(z_i)}.$$

Let  $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathcal{S}^2)$ , we call its logarithmic potential on the sphere the function:

$$U_{\mathcal{S}^2}^\mu(x) = \int -\log|x-y|d\mu(y).$$

$U_{\mathcal{S}^2}^\mu$  takes its values in  $[-\infty, \infty)$ . We define on  $\mathcal{M}_1(\mathcal{S}^2)$  the function:

$$\mathcal{E}_{\mathcal{S}^2}(\nu) = - \iint \log|x-y|d\nu(x)d\nu(y).$$

The function  $U_{\mathcal{S}^2}^\mu$  is called logarithmic potential. It inherits its name from  $U^\mu$  as it is the analog formula on the sphere. The name logarithmic potential is not really appropriate as this notion is already defined on the sphere in potential theory, but it is convenient as the formulas are the same.

### 1.3 Large deviations for Kac polynomials

This section deals with the Coulomb gases (1.13) and (1.14). We prove Theorems 1.4 and 1.5.

#### 1.3.1 Step 1: Distribution of the roots

**Theorem 1.12** (Distribution of the roots in the complex case). *Let  $P_n = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ , the law of  $(z_1, \dots, z_n)$  taken in uniform random order is absolutely continuous with respect to the Lebesgue measure on  $\mathbb{C}^n$  with density:*

$$\frac{1}{Z_n} \frac{\prod_{i<j} |z_i - z_j|^2}{\left(\int \prod_{i=1}^n |z - z_i|^2 d\nu_S\right)^{n+1}} = \frac{1}{Z_n} \exp\left(-\beta_n \left[\mathcal{E}_{\neq}(\mu_n) + \frac{n+1}{n^2} \log \int \prod_{i=1}^n |z - z_i|^2 d\nu(z)\right]\right)$$

where  $Z_n$  is a normalizing constant.

*Proof.* Let  $p(z) = z^n + b_{n-1}z^{n-1} + \dots + b_0 = \prod_{i=1}^n (z - z_i)$ . Then the transformation

$$F : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^n & \longrightarrow & \mathbb{C}^n \\ (z_1, \dots, z_n) & \longmapsto & (b_0, \dots, b_{n-1}) \end{array}$$

has Jacobian determinant  $\prod_{i<j} |z_i - z_j|^2$  [HKPV09, Lemma 1.1.1]. We compute the law of the random vector  $(z_1, \dots, z_n, a_n)$ . The density of the law of  $(a_0, \dots, a_n)$  is

$$\frac{1}{(\pi)^{n+1}} e^{-\sum_{k=0}^n |a_k|^2}$$

We consider now the function:

$$G : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{n+1} & \longrightarrow & \mathbb{C}^{n+1} \\ (z_1, \dots, z_n, a_n) & \longmapsto & (a_0, \dots, a_{n-1}, a_n) \end{array}$$

whose Jacobian determinant is  $|a_n|^{2n} \prod_{i < j} |z_i - z_j|^2$ , as  $b_i = a_i/a_n$ .  $G$  is not a change of variables as it is not one-to-one. In order to overpass this problem we define a total order on  $\mathbb{C}$  by:

$$z < w \iff \begin{cases} |z| < |w| \\ \arg(z) < \arg(w) \text{ if } |z| = |w| \end{cases} \quad (1.22)$$

We want to compute the distribution of the ordered set of roots. We need to show that, almost surely, 2 roots cannot have the same modulus as soon as the distribution of the coefficients is absolutely continuous with respect to the Lebesgue measure on  $\mathbb{C}$ . First, we show that almost surely,  $P_n$  does not have double roots. The set  $N_0$  of polynomials of  $\mathbb{C}_n[X]$  with at least a double root can be written

$$N_0 = \{P \in \mathbb{C}_n[X] \mid \text{Res}(P, P') = 0\}$$

where Res is the resultant. This set is a submanifold of  $\mathbb{C}_n[X]$  of real codimension 2, hence it is negligible. We define the subset of  $(0, 2\pi) \times \mathbb{C}_n[X]$

$$\begin{aligned} M &= \left\{ (\theta, P) \in (0, 2\pi) \times \mathbb{C}_n[X] \mid \exists z, w \text{ such that } P(z) = P(w) = 0 \text{ and } z = e^{i\theta}w \right\} \\ &= \left\{ (\theta, P) \in (0, 2\pi) \times \mathbb{C}_n[X] \mid \text{Res}(P(X), P(Xe^{-i\theta})) = 0 \right\}. \end{aligned}$$

This set is a submanifold of codimension 2 of  $(0, 2\pi) \times \mathbb{C}_n[X]$ . Thanks to Sard's theorem [Mil97], the projection of  $M$  onto  $\mathbb{C}_n[X]$  is a negligible subset. This implies that

$$N = \{P \in \mathbb{C}_n[X] \mid P_n \text{ has 2 roots of same modulus.}\}$$

is a negligible set. Hence,  $G$  is a change of variables from

$$\left\{ (z_1, \dots, z_n, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid |z_1| < \dots < |z_n| \text{ and } a_n \neq 0 \right\}$$

to  $(\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^*) \setminus N$ .

Hence, the law of the ordered vector  $(z_1, \dots, z_n, a_n)$  is absolutely continuous with respect to the Lebesgue measure on  $\mathbb{C}^{n+1}$ . We want to rewrite the density of the random vector  $(a_0, \dots, a_n)$  with the new variables  $(z_1, \dots, z_n, a_n)$ . We notice that if  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$  then:

$$\sum_{k=0}^n |a_k|^2 = \int |P(z)|^2 d\nu_S(z) = \int |a_n|^2 \prod_{k=1}^n |z - z_k|^2 d\nu_S(z) \quad (1.23)$$

where  $\nu_S$  is the uniform probability measure on the unit circle of  $\mathbb{C}$ . This relation comes from the fact that the canonical basis of  $\mathbb{C}[X]$  is orthonormal for the scalar product (1.11). The density of the distribution of  $(z_1, \dots, z_n, a_n)$  is:

$$\frac{|a_n|^{2n} \prod_{i < j} |z_i - z_j|^2}{(\pi)^{n+1}} \exp\left(-|a_n|^2 \int \prod_{k=1}^n |z - z_k|^2 d\nu_S(z)\right) \mathbf{1}_{z_1 < \dots < z_n} \mathbf{1}_{a_n \neq 0}.$$

We integrate with respect to the variable  $a_n$  and use the linear change of variables  $u = a_n \lambda$  with  $\lambda = \prod_{k=1}^n |z - z_k|^2 d\nu_S(z)$  to obtain the law of the ordered vector  $(z_1, \dots, z_n)$ :

$$\frac{n!}{\pi^n} \frac{\prod_{i < j} |z_i - z_j|^2}{\left(\int \prod_{i=1}^n |z - z_i|^2 d\nu_S\right)^{n+1}} \mathbf{1}_{z_1 < \dots < z_n}.$$

The distribution of  $(z_1, \dots, z_n)$  taken in random uniform order is absolutely continuous with respect to the Lebesgue measure on  $\mathbb{C}^n$  with density:

$$\frac{1}{\pi^n} \frac{\prod_{i < j} |z_i - z_j|^2}{\left(\int \prod_{i=1}^n |z - z_i|^2 d\nu_S\right)^{n+1}}$$

□



**Theorem 1.13** (Distribution of the roots in the real case.). *The distribution of the random vector  $(z_1, \dots, z_n)$  of the roots of  $P_n$  in the real case is given by:*

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{2^k \Gamma(\frac{n+1}{2})}{k!(n-2k)! \pi^{(n-1)/2}} \frac{\prod_{i<j} |z_i - z_j|}{(\int \prod_{i=1}^n |z - z_i|^2 d\nu_S)^{(n+1)/2}} d\ell_{n,k}(z_1, \dots, z_n).$$

This law can be re-written as:

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{1}{Z_{n,k}} \exp(-\beta_n H(z_1, \dots, z_n)) d\ell_{n,k}(z_1, \dots, z_n).$$

The density in the real case is nearly the same as in the complex case, except for the factor 1/2 in the exponent. In the complex case, the vector of the zeros is an element of  $\mathbb{R}^{2n}$  while in the real case, we can see the zeros as an element of  $\mathbb{R}^n$ .

*Proof.* As the random vector  $(a_0, \dots, a_n)$  has a joint distribution:

$$\frac{1}{(\pi)^{\frac{n+1}{2}}} \exp\left(-\sum_{k=0}^n |a_k|^2\right) da_0 \dots da_n.$$

we can use Zaporozhets' computation [Zap04] in order to express the distribution of  $(z_1, \dots, z_n, a_n)$ . We use again the relation (1.23) in order to simplify the expression of the distribution of the roots and we obtain:

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{2^k}{k!(n-2k)! \pi^{\frac{n+1}{2}}} |a_n|^n \prod_{i<j} |z_i - z_j| e^{-\int |a_n|^2 \prod_{i=1}^n |z - z_i|^2 d\nu_S(z)} d\ell_{n,k}(z_1, \dots, z_n) d\ell_{\mathbb{C}}(a_n).$$

We integrate with respect to  $a_n$ , which ends the proof.  $\square$

**Remark 1.14** (Symmetries of the problem). *It is easy to check that the law of the zeros is invariant under  $z \mapsto e^{i\theta} z$  as a Gaussian vector is invariant by rotation. The distribution of the zeros is also invariant under the mapping  $z \mapsto 1/z$ . This comes from the fact that  $(a_0, \dots, a_n)$  has the same distribution as  $(a_n, \dots, a_0)$ , but if we call  $z_1, \dots, z_n$  the zeros of  $\sum_{k=0}^n a_k X^k$ , then the zeros of  $\sum_{k=0}^n a_{n-k} X^k$  are  $1/z_1, \dots, 1/z_n$ .*

**Remark 1.15** (Limits of the normalizing constants  $Z_n$  and  $Z_{n,k}$ ). *The distribution of the vector  $(z_1, \dots, z_n)$  has been obtained thanks to a change of variables from a probability measure. Hence, we know exact formulas for the normalizing constants. We have:*

$$Z_n = 2(2\pi)^n \quad \text{and} \quad Z_{n,k} = \frac{k!(n-2k)! \pi^{\frac{n+1}{2}}}{2^k \Gamma(\frac{n+1}{2})}. \quad (1.24)$$

Notice that:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta_n} \log Z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta_n} \log \max Z_{n,k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta_n} \log \min Z_{n,k} = 0.$$

This remark explains why the normalizing constants do not contribute to the rate function for Kac polynomials. For elliptic or orthogonal polynomials, the limit of the normalizing constant is non-trivial. This phenomenon is common in large deviations for Coulomb gases, see [BAG97], [CGZ14], [HP00] or [ZZ10].

### 1.3.2 Step 2: Large deviations on the unit sphere

In order to prove the large deviation principles, we are going to use a compactification method introduced in [Har12]. When the potential does not grow faster than a logarithm at infinity, the standard proofs of large deviations principles do not hold. More precisely, exponential tightness of the sequence of measures cannot be proved using the standard techniques presented in [BAG97], [BAZ98], [HP00]. The gas we are studying is also weakly confining as the confinement term grows at infinity like  $\log(1 + |z|^2)$  in each variable.

Using the inverse stereographic projection  $T$  (1.10) we will push the problem on the sphere  $\mathcal{S}^2$  in  $\mathbb{R}^3$ . As the sphere is a compact set, it is sufficient to prove a weak large deviation principle instead of a full one.

**Remark 1.16** (Push Forward). *In this article, we will use the notation  $T^*\mu$  for the push-forward of the measure  $\mu$  by the function  $T$ .*

**Definition 1.17** (Measure on  $\mathcal{S}^2$ ). *We call  $L_{\mathbb{C}}$  the push-forward of the Lebesgue measure of  $\mathbb{C}$  on  $\mathcal{S}^2$  by  $T$  and  $L_{\mathbb{R}}$  the push-forward of the Lebesgue measure on  $\mathbb{R}$  by  $T$ , where  $\mathbb{R}$  is seen as a subspace of  $\mathbb{C}$ . We will use the notation:*

$$dL_{n,k}(x_1, \dots, x_n) = dL_{\mathbb{R}}(x_1) \dots dL_{\mathbb{R}}(x_{n-2k}) dL_{\mathbb{C}}(x_{n-k}) \dots dL_{\mathbb{C}}(x_n).$$

**Proposition 1.18** (Pushing the complex case on the sphere). *Let  $(z_1, \dots, z_n)$  be the zeros of  $P_n$  in the complex case, then the law of  $(T(z_1), \dots, T(z_n))$  is absolutely continuous with respect to the pushforward by  $T$  of the Lebesgue measure on  $\mathbb{C}$  with density:*

$$\frac{\prod_{i < j} |x_i - x_j|^2}{\left(\int \prod_{j=1}^n |x - x_j|^2 2^n dT^*\nu_S(x)\right)^{n+1}} \times \prod_{i=1}^n (1 - |x_i|^2)^2.$$

We call  $\kappa_n$  the finite measure:

$$\kappa_n = \prod_{i=1}^n (1 - |x_i|^2)^2 dL_{\mathbb{C}}(x_1) \dots dL_{\mathbb{C}}(x_n).$$

This law can be written in the form:

$$\frac{1}{Z_n} \exp \left( -\beta_n \left[ \mathcal{E}_{\neq}(\bar{\mu}_n) + \frac{n+1}{n^2} \log \int \prod_{j=1}^n |x - x_j|^2 2^n dT^*\nu_S(x) \right] \right) d\kappa_n. \quad (1.25)$$

**Remark 1.19** (Identification of the uniform measure on  $\mathcal{S}^2$ ). *We observe that the measure  $(1 - |x|^2)^2 dL_{\mathbb{R}}(x)$  on  $\mathcal{S}^2$  is proportional to the uniform measure on the sphere. Indeed if we pushforward this measure by the stereographic projection  $T^{-1}$  we obtain the measure  $\frac{1}{(1+|z|^2)^2} dL_{\mathbb{C}}(z)$  which is proportional to the complex Cauchy measure, which is known to be the projection of the uniform measure on the sphere.*

*Proof of proposition 1.18.* We will now push the zeros of  $P_n$  on the sphere  $\mathcal{S}^2$ . We compute the law of the vector  $(T(z_1), \dots, T(z_n))$ . We use the relations (1.20) to obtain:

$$\prod_{i < j} |z_i - z_j|^2 = \prod_{i < j} \frac{|T(z_i) - T(z_j)|^2}{(1 - |T(z_i)|^2)(1 - |T(z_j)|^2)}$$

and that:

$$\left( \int \prod_{i=1}^n |z - z_i|^2 d\nu_S(z) \right)^{n+1} = \left( \frac{\prod_{i=1}^n (1 - |T(z_i)|^2)}{\int \prod_{i=1}^n |T(z) - T(z_i)|^2 (1 - |T(z)|^2)^{-n} d\nu_S(z)} \right)^{n+1}.$$

We notice that on the unit circle of  $\mathbb{C}$ , the function  $z \mapsto |T(z)|^2$  is constant equal to  $1/2$ , so we can write:

$$\frac{\prod_{i<j} |z_i - z_j|^2}{(\int \prod_{i=1}^N |z - z_i|^2 d\nu_S(z))^{n+1}} = \frac{\prod_{i<j} |T(z_i) - T(z_j)|^2}{(\int \prod_{i=1}^n |T(z) - T(z_i)|^2 2^n d\nu_S(z))^{n+1}} \times \prod_{i=1}^n (1 - |T(z_i)|^2)^2. \quad (1.26)$$

□

**Proposition 1.20** (Pushing the real case on the sphere). *Let  $(z_1, \dots, z_n)$  be the zeros of  $P_n$  in the real case, then the law of  $(T(z_1), \dots, T(z_n))$  is:*

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{1}{Z_{n,k}} \frac{\prod_{i<j} |x_i - x_j| \times \prod_{i=1}^n (1 - |x_i|^2)}{(\int \prod_{i=1}^N |x - x_i|^2 2^n dT^* \nu_S)^{(n+1)/2}} dL_{n,k}(x_1, \dots, x_n)$$

We call  $\rho_{n,k}$  the finite measure:

$$d\rho_{n,k} = \prod_{i=1}^n (1 - |x_i|^2) dL_{n,k}(x_1, \dots, x_n).$$

This law can be written:

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{1}{Z_{n,k}} \exp \left( -\beta_n \left[ \frac{1}{2} \mathcal{E}_{\neq}(\mu_n) - \frac{n+1}{2n^2} \log \int \prod_{i=1}^N |x - x_i|^2 2^n dT^* \nu_S(x) \right] \right) d\rho_{n,k}. \quad (1.27)$$

The proof of this proposition is exactly the same as the one of Proposition 1.18.

The measure  $T^* \nu_S$  is the uniform measure on the equator of the sphere  $\mathcal{S}^2$ . Seeing those measures on the sphere emphasizes the symmetries of the problem as the invariance with respect to inversion corresponds to the exchange of north and south pole of the sphere.

$\rho_{n,k}$  are finite measure. As  $\rho_{n,k}$  is a product measure, we only have to see that every measure is finite. There are two types of measures in this product:

$$(1 - |x|^2) dL_{\mathbb{R}}(x) = \frac{1}{1 + |x|^2} dx$$

which is finite on  $\mathbb{R}$  and

$$(1 - |x|^2)(1 - |y|^2) dL_{\mathbb{C}}(x) = \frac{1}{(1 + |z|^2)(1 + |\bar{z}|^2)} d\ell_{\mathbb{C}}(z)$$

where  $x$  and  $y$  are the inverse stereographic projection of  $z$  and  $\bar{z}$ .

We now state the large deviation principle on the sphere  $\mathcal{S}^2$ .

**Definition 1.21** (Rate function in  $\mathcal{M}_1(\mathcal{S}^2)$ ). *For any measure  $\nu \in \mathcal{M}_1(\mathcal{S}^2)$  we define:*

$$J_{\mathcal{S}^2}(\nu) = \sup_{x \in T(\mathcal{S})} \int \log |x - y|^2 d\nu(y) + \log 2 \quad (1.28)$$

$$I_{\mathcal{S}^2}(\nu) = \mathcal{E}(\nu) + J_{\mathcal{S}^2}(\nu) \quad (1.29)$$

**Proposition 1.22** (Complex Kac case on the sphere). *Let  $\bar{\mu}_n$  be the empirical measure of the gas (1.25), then  $(\bar{\mu}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  satisfies a large deviation principle in  $\mathcal{M}_1(\mathcal{S}^2)$  with the weak topology, speed  $\beta_n$  and good rate function  $I_{\mathcal{S}^2}$ . This means that for any Borel set  $A$  in  $\mathcal{M}_1(\mathcal{S}^2)$*

$$-\inf_{\text{Int} A} I_{\mathcal{S}^2} \leq \varliminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta_n} \log \mathbb{P}(\bar{\mu}_n \in A) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta_n} \log \mathbb{P}(\bar{\mu}_n \in A) \leq -\inf_{\text{Clo} A} I_{\mathcal{S}^2}.$$

**Proposition 1.23** (Real Kac case on the sphere). *Let  $\bar{\mu}_n$  be the empirical measure of the gas (1.27), then  $(\bar{\mu}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  satisfies a large deviation principle in  $\mathcal{M}_1(\mathcal{S}^2)$  with the weak topology, speed  $\beta_n$  and good rate function  $\tilde{I}_{\mathcal{S}^2}$  where:*

$$\tilde{I}_{\mathcal{S}^2}(\mu) = \begin{cases} \frac{1}{2} I_{\mathcal{S}^2}(\mu) & \text{if } T^{-1*} \mu \text{ is invariant under } z \mapsto \bar{z} \\ \infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$

This means that for any Borel set  $A$  in  $\mathcal{M}_1(\mathcal{S}^2)$

$$-\inf_{\text{Int} A} \tilde{I}_{\mathcal{S}^2} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta_n} \log \mathbb{P}(\bar{\mu}_n \in A) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta_n} \log \mathbb{P}(\bar{\mu}_n \in A) \leq -\inf_{\text{Clo} A} \tilde{I}_{\mathcal{S}^2}.$$

### 1.3.3 Step 3: Proof of the Large Deviations Principles

We now prove the Proposition 1.22 and Proposition 1.23. We start by studying the rate function, then we prove the lower and upper bound for the gas without the normalizing constants  $Z_n$  and  $Z_{n,k}$ . Finally, we obtain the full large deviation principle.

#### Study of the rate function on the sphere

Next proposition is the key of all the rest of the work and comes from [ZZ10, Lemma 26].

**Proposition 1.24** (Rate function  $I_{\mathcal{S}^2}$ ).

- 1)  $J_{\mathcal{S}^2}$  is continuous for the weak topology of  $\mathcal{M}_1(\mathcal{S}^2)$  and is bounded.
- 2)  $I_{\mathcal{S}^2}^2$  is well defined on  $\mathcal{M}_1(\mathcal{S}^2)$ , takes its values in  $[0, \infty]$ .
- 3)  $I_{\mathcal{S}^2}$  is lower semi-continuous.
- 4)  $I_{\mathcal{S}^2}$  is strictly convex.

*Proof of Proposition 1.24.* First, we notice that since  $\mathcal{S}^2$  is a compact set in  $\mathbb{R}$ , the function  $(x, y) \mapsto \log |x - y|$  is bounded above on  $\mathcal{S}^2 \times \mathcal{S}^2$ . Hence, the function  $\mathcal{E}_{\mathcal{S}^2}$  is bounded from below and  $J_{\mathcal{S}^2}$  is bounded from above. We cannot conclude yet that the function  $I_{\mathcal{S}^2}$  is well defined. We will see that since  $J_{\mathcal{S}^2}$  is continuous on the compact  $\mathcal{M}_1(\mathcal{S}^2)$ , it is bounded and  $I_{\mathcal{S}^2}$  is well defined and takes its values in  $(-\infty, \infty]$ .

Fix  $M \in \mathbb{R}$  and define  $\log_M(x) = \log(x) \vee (-M)$ . The function  $(x, y) \mapsto \log_M |x - y|$  is continuous on  $\mathcal{S}^2 \times \mathcal{S}^2$ . We define:

$$\begin{aligned} U_M^\nu(x) &= \int -\log_M |x - y| d\nu(y) \\ \mathcal{E}_{\mathcal{S}^2}^M(\nu) &= \iint -\log_M |x - y| d\nu(x) d\nu(y) \\ J_{\mathcal{S}^2}^M(\nu) &= \sup_{x \in T(\mathcal{S})} \int \log_M |x - y|^2 d\nu(y) + \log 2 \\ I_{\mathcal{S}^2}^M(\nu) &= \mathcal{E}_{\mathcal{S}^2}^M(\nu) + J_{\mathcal{S}^2}(\nu). \end{aligned}$$

We will now prove the upper semi-continuity and lower semi-continuity of the function  $J_{\mathcal{S}^2}$ .

- **Upper semi-continuity**

The map  $W : (x, \mu) \mapsto U_M^\mu(x)$  is continuous because the function  $(x, y) \mapsto \log_M |x - y|$  is uniformly continuous. As  $T(S)$  is compact,  $J_{\mathcal{S}^2}^M$  is also continuous. Indeed, if  $\mu_n \rightarrow \mu$  weakly, then there exist a sequence  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  such that for any  $n$ ,  $W(x_n, \mu_n) = J_{\mathcal{S}^2}^M(\mu_n)$ . Let  $c$  be an accumulation point of the sequence  $(J_{\mathcal{S}^2}^M(\mu_n))_{n \in \mathbb{N}}$ . One can extract a converging subsequence of  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  and call  $x_\infty$  its limit. Taking the limit of the inequality

$$W(x_n, \mu_n) \geq W(x, \mu_n)$$

for any fixed  $x$  shows that  $c = J_{\mathcal{S}^2}^M(\mu)$ . Hence,  $J_{\mathcal{S}^2}^M$  is continuous. Now let  $\mu_n \rightarrow \mu$  weakly in  $\mathcal{M}_1(\mathcal{S}^2)$ , we have:

$$J_{\mathcal{S}^2}(\mu_n) \leq J_{\mathcal{S}^2}^M(\mu_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} J_{\mathcal{S}^2}^M(\mu)$$

If we take the limit superior of the last inequality we obtain:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} J_{\mathcal{S}^2}(\mu_n) \leq J_{\mathcal{S}^2}^M(\mu)$$

To conclude, we want to let  $M$  go to infinity, but we have to justify the exchange between the limit and the supremum. In order to do that, we use a short lemma given below:

**Lemma 1.25.** *Let  $(f_M)_{M \in \mathbb{R}^+}$  be a decreasing sequence of continuous functions defined on a compact set  $K$ , converging point-wise towards a function  $f$ . Then we have:*

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \sup_{z \in K} f_M(z) = \sup_{z \in K} f(z).$$

*Proof.* It is easy to show that the function  $M \mapsto \sup_{z \in K} f_M(z)$  is decreasing and is bounded below by  $\sup_{z \in K} f(z)$ . Hence we obtain  $\lim_{M \rightarrow \infty} \sup_{z \in K} f_M(z) \geq \sup_{z \in K} f(z)$ . To prove the other inequality, fix  $\varepsilon > 0$ , then, as  $f_M(x)$  decreases towards  $f(x)$ , we have:

$$\forall x \in K, \exists M_x > 0 \text{ such that } \forall M \geq M_x, f(x) \geq f_M(x) \geq f(x) + \varepsilon.$$

As  $f_{M_x}$  is continuous at  $x$ , there is an  $\delta_x$  such that for all  $y \in B(x, \delta_x) : f(x) - \varepsilon \leq f_{M_x}(y) \leq f(x) + 2\varepsilon$ . As the sequence  $f_M$  is decreasing, this relation is also satisfied for all  $M \geq M_x$ . As  $K$  is compact, we can extract a finite family  $\{x_1, \dots, x_p\}$  such that  $K \subset \cup B(x_i, \delta_i)$ . We set  $M_\infty = \max_{i=1 \dots p} M_{x_i}$  so we have:

$$\forall M \geq M_\infty, \forall y \in K, \exists i \in \{1, \dots, p\} \mid f(x_i) - \varepsilon \leq f_M(y) \leq f(x_i) + 2\varepsilon.$$

This last statement implies that  $\sup_K f_M(z) \leq \sup_K f(z) + 2\varepsilon$  and ends the proof.  $\square$

We apply the lemma and we end the proof of the upper semi-continuity:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} J_{\mathcal{S}^2}(\mu_n) \leq J_{\mathcal{S}^2}(\mu).$$

### • Lower semi-continuity

This is where the notion of non-thinness is involved. We will use the fact that the support of  $T^* \nu_S$  is non thin at all its points. Suppose that  $\mu_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu$ . We want to show that  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} J_{\mathcal{S}^2}(\mu_n) \geq J_{\mathcal{S}^2}(\mu)$ . We know that  $J_{\mathcal{S}^2}(\mu) < \infty$ . If  $J_{\mathcal{S}^2}(\mu) = -\infty$  then there is nothing to prove. For any  $\varepsilon > 0$  we introduce the set:

$$A_\varepsilon = \{x \in \mathcal{S}^2 \mid -2U^\mu(x) + \log 2 \geq J_{\mathcal{S}^2}(\mu) - \varepsilon\}.$$

For any  $\varepsilon$ ,  $A_\varepsilon$  is closed by upper semi-continuity of  $-U^\mu$ . Let  $x_0$  be a point where  $-U^\mu$  reaches its maximum on the equator  $T(S)$ . We want to find a measure of positive and finite mass  $\nu$  supported on  $A_\varepsilon \cap T(S)$  such that  $U^\nu$  is a continuous function, for any  $\varepsilon$ . We can find such a measure as soon as the capacity of  $A_\varepsilon \cap T(S)$  is positive [ST97, Chapter 1, Corollary 6.11]. If for some  $\varepsilon_0 > 0$  the set  $A_{\varepsilon_0} \cap T(S)$  had zero capacity, it would be thin at any point [Ran95, Theorem 3.8.2 p. 79]. By the definition of the set  $A_{\varepsilon_0}$ , the complement of  $A_{\varepsilon_0} \cap T(S)$  in  $T(S)$  is thin at  $x_0$ . Then, as the union of two thin sets at  $x_0$  is thin at  $x_0$ ,  $T(S)$  is thin at  $x_0$ . This is absurd as the equator is non-thin at all its points (as connected set, [Ran95, Theorem 3.8.3]).

Now that we obtained the existence of  $\nu$ , we can end the proof. Thanks to Fubini's theorem, we have:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int -U^{\mu_n}(x) d\nu(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int -U^\nu(x) d\mu_n(x) \\ &= \int -U^\nu(x) d\mu(x) \\ &= \int -U^\mu(x) d\nu(x). \end{aligned}$$

Since the support of  $\nu$  is included in  $A_\varepsilon$ , we have:

$$\int \lim_{n \rightarrow \infty} J_{\mathcal{S}^2}(\mu_n) d\nu(x) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \int -2U^{\mu_n}(x) d\nu(x) + \log 2 \geq \int (J_{\mathcal{S}^2}(\mu) - \varepsilon) d\nu(x).$$

We end the proof by noticing that  $\nu$  has positive mass and that  $\varepsilon$  is arbitrary.

### • Conclusion

As  $J_{\mathcal{S}^2}$  is continuous on the compact  $\mathcal{M}_1(\mathcal{S}^2)$ , it is bounded and the function  $I_{\mathcal{S}^2}$  is well defined.

For each fixed  $x$ , the functions  $\mu \mapsto U_M^\mu(x)$  and  $\mu \mapsto \mathcal{E}_{\mathcal{S}^2}^M(\mu)$  are continuous on  $\mathcal{M}_1(\mathcal{S}^2)$ . Since  $\mathcal{E}_{\mathcal{S}^2} = \inf_M \mathcal{E}_{\mathcal{S}^2}^M$ ,  $\mathcal{E}_{\mathcal{S}^2}$  is a lower semi-continuous function.  $I_{\mathcal{S}^2}$  is lower semi-continuous as the sum of a continuous and lower semi-continuous functions.

It is well known that the classical interaction energy  $\mathcal{E}$  is a convex function [HP00, Proposition 5.3.2], [Dei00]. For an measure with finite energy, we can write:

$$\mathcal{E}_{\mathcal{S}^2}(\mu) = \mathcal{E}((T^{-1})^*\mu) + \int \log(1 + |z|^2) d(T^{-1})^*\mu.$$

Since the function  $\nu \mapsto \int \log|1 + |z|^2| d\nu$  is linear we have the convexity of  $\mathcal{E}_{\mathcal{S}^2}$ . On the other hand,  $J_{\mathcal{S}^2}$  is the supremum of linear functions so is convex. □

## Large deviations upper bound

We will prove the upper bound for the non-normalized measures, the normalizing constant will be treated once we have both upper and lower bound.

### • Bernstein-Markov inequality

We need to prove a Bernstein-Markov inequality for the measures  $\nu_S$  and  $T^*\nu_S$ .

**Theorem 1.26** (Bernstein-Markov for  $\nu_S$ ). *Let  $N \in \mathbb{N}$ , then for all  $P \in \mathbb{C}_N[X]$  we have:*

$$\sup_{z \in S^1} |P(z)| \leq \sqrt{N} \|P\|_{L^2}$$

where  $\|P\|_{L^2}^2 = \int |P(z)|^2 d\nu_S(z)$ . *In particular, for all  $\varepsilon > 0$ , there is a constant  $C_\varepsilon$  such that for all  $P \in \mathbb{C}_N[X]$  we have:*

$$\sup_{z \in S^1} |P(z)| \leq C_\varepsilon e^{\varepsilon N} \|P\|_{L^2}.$$

*Proof.* We start from the following identity:

$$P_n(z) = \int P_n(w) \sum_{k=0}^n z^k \bar{w}^k d\nu_S(w).$$

Then by the Schwarz inequality we obtain:

$$\sup_{z \in S} |P_n(z)| \leq \sup_{z \in S} \sqrt{\sum_{k=0}^n |z|^{2k}} \|P_n\|_{L^2(\nu_S)} \leq \sqrt{n} \|P_n\|_{L^2(\nu_S)}.$$

□

**Lemma 1.27.** *For all  $\varepsilon > 0$ , there exists an integer  $N_0$  such that for all  $n > N_0$  we have:*

$$\frac{1}{n} \log \int e^{2n \int_{\mathbb{C}} \log |z-w| d\mu_n(w)} d\nu_S(z) \geq 2 \sup_{z \in S} \int_{\mathbb{C}} \log |z-w| d\mu_n(w) - \varepsilon.$$

*Proof of Lemma 1.27.*

$$\int e^{2n \int_{\mathbb{C}} \log |z-w| d\mu_n(w)} d\nu_S(z) = \int \prod_{i=1}^n |z - z_i|^2 d\nu_S(z).$$

Thanks to the Bernstein-Markov inequality, we have:

$$\left( \int \prod_{i=1}^n |z - z_i|^2 d\nu_S(z) \right)^{1/n} \geq \left( \frac{\sup_{z \in S} \prod_{i=1}^n |z - z_i|^2}{C_{\varepsilon/2} e^{-n\varepsilon/2}} \right)^{1/n}.$$

We take the logarithm of this expression to obtain:

$$\frac{1}{n} \log \int e^{2n \int_{\mathbb{C}} \log |z-w| d\mu_n(w)} d\nu_S(z) \geq 2 \sup_{z \in S} \int_{\mathbb{C}} \log |z-w| d\mu_n(w) - \varepsilon/2 + \frac{\log C_{\varepsilon/2}}{n}$$

taking  $n > N_0$  sufficiently large ends the proof of the lemma. □

In fact, this inequality is used to prove the large deviations upper bound on  $\mathbb{C}$ . To prove the large deviations upper bound on  $\mathcal{S}^2$ , we need an analog of this inequality.

**Lemma 1.28.** *For all  $\varepsilon > 0$ , there exists an integer  $N_0$  such that for all  $n > N_0$  we have:*

$$\frac{1}{n} \log \int e^{2n \int_{\mathbb{C}} \log |x-y| dT^* \mu_n(y)} dT^* \nu_S(x) \geq 2 \sup_{x \in T(S)} \int \log |x-y| dT^* \mu_n(y) - \varepsilon.$$

*Proof.* We start from Lemma 1.27 and lift it up on the sphere:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \log \int \prod_{i=1}^n \frac{|T(z) - T(z_i)|^2}{(1 - |T(z)|^2)(1 - |T(z_i)|^2)} d\nu_S(z) \geq \\ \sup_{z \in \mathcal{S}} \int_{\mathbb{C}} \log \frac{|T(z) - T(w)|^2}{(1 - |T(z)|^2)(1 - |T(w)|^2)} d\mu_n(w) - \varepsilon + \frac{\log C_\varepsilon}{n}. \end{aligned}$$

In terms of push-forward measures we obtain:

$$\frac{1}{n} \log \int \prod_{i=1}^n |x - x_i| dT^* \nu_S(z) \geq \sup_{x \in T(\mathcal{S})} \int_{\mathbb{C}} \log |x - x_i| dT^* \mu_n(w) - \varepsilon + \frac{\log C_\varepsilon}{n}.$$

□

### • Large deviations upper bound in the complex case

We prove the upper bound part of the large deviation principle in the complex case. Let  $\sigma \in \mathcal{M}_1(\mathcal{S}^2)$ , we prove that:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta_n} \log \mathbb{P}(\bar{\mu}_n \in B(\sigma, \delta)) \leq -I_{\mathcal{S}^2}(\sigma).$$

Proving this inequality is sufficient to obtain the upper bound as  $\mathcal{S}^2$  is a compact set. Indeed, a weak large deviation principle implies a full large deviation principle when we have exponential tightness, which is automatic on a compact set.

If we write

$$A_1 = Z_n \mathbb{P}(\bar{\mu}_n \in B(\sigma, \delta))$$

then we have for any  $M > 0$  and for any  $\delta > 0$ , using Lemma 1.28:

$$\begin{aligned} A_1 &= \int 1_{\bar{\mu}_n \in B(\sigma, \delta)} \exp \left( -\beta_n \left[ \mathcal{E}_{\neq}(\bar{\mu}_n) + \frac{n+1}{n^2} \log \int \prod_{i=1}^n |x - x_j|^2 2^n dT^* \nu_S(x) \right] \right) d\kappa_n \\ &\leq \int 1_{\bar{\mu}_n \in B(\sigma, \delta)} \exp \left( -\beta_n \left[ -\frac{1}{n^2} \sum_{i \neq j} \log_M |x_i - x_j| + \frac{n+1}{n} (J_{\mathcal{S}^2}(\mu_n) + \varepsilon) \right] \right) d\kappa_n \\ &\leq \int 1_{\bar{\mu}_n \in B(\sigma, \delta)} \exp \left( -\beta_n \left[ \iint_{\neq} -\log_M |x - y| d\bar{\mu}_n(x) d\bar{\mu}_n(y) + \frac{n+1}{n} (J_{\mathcal{S}^2}(\mu_n) + \varepsilon) \right] \right) d\kappa_n. \end{aligned}$$

We now observe the following:

$$\frac{1}{n^2} \sum_{i \neq j} \log_M |x_i - x_j| = \iint_{\neq} \log_M |x - y| d\bar{\mu}_n(x) d\bar{\mu}_n(y) - \frac{M}{n} = \mathcal{E}_{\mathcal{S}^2}^M(\bar{\mu}_n). \quad (1.30)$$

We also notice that:

$$\frac{1}{\beta_n} \log \int 1 d\kappa_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (1.31)$$

Indeed, as  $\kappa_n$  is a product of finite measures, we have  $\frac{1}{n} \log \int 1 d\kappa_n = \log \int 1 d\kappa_1$ . Then, by taking the logarithm and the superior limit we obtain:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta_n} \log Z_n \mathbb{P}(\bar{\mu}_n \in B(\sigma, \delta)) \leq \sup_{B(\sigma, \delta)} -I_{\mathcal{S}^2}^M + \varepsilon$$



As  $I_{\mathcal{S}^2}^M$  is a continuous function, we have when  $\delta$  converges towards 0:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta_n} \log Z_n \mathbb{P}(\bar{\mu}_n \in B(\sigma, \delta)) \leq -I_{\mathcal{S}^2}^M(\sigma) + \varepsilon.$$

We end the proof of the upper bound by letting  $M \rightarrow \infty$  (and using the monotone convergence theorem) and then letting  $\varepsilon \rightarrow 0$ . We will get rid of the normalizing constant once we have proved the lower bound.

• **Large deviations upper bound in the real case**

We prove the same bound as previously in the real case. The proof is nearly the same and we will omit what is exactly the same in the two cases. The only difference is that the law of the roots of  $P_n$  in the real case is not absolutely continuous with respect to a product measure, but is a mix between such measures.

As in the complex case, we want to prove that:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta_n} \log \mathbb{P}(\bar{\mu}_n \in B(\sigma, \delta)) \leq -\frac{1}{2} I_{\mathcal{S}^2}(\sigma).$$

We begin with

$$\mathbb{P}(\bar{\mu}_n \in B(\sigma, \delta)) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{1}{Z_{n,k}} I_{n,k,\delta}$$

where

$$I_{n,k,\delta} = \int 1_{\bar{\mu}_n \in B(\sigma, \delta)} \frac{\prod_{i < j} |x_i - x_j|}{\left( \int \prod_{i=1}^n |x - x_i|^2 2^n dT^* \nu_{\mathcal{S}} \right)^{(n+1)/2}} d\rho_{n,k}. \quad (1.32)$$

We will prove the upper-bound for each of the  $I_{n,k,\delta}$  uniformly in  $k$  which will be sufficient to prove the upper bound for the non-normalized measure. The constants will be treated once we will have the full large deviation principle.

The estimates used in the complex case do not rely on the complex structures but only on “algebraic” inequalities so the same computations on the  $I_{n,k,\delta}$  can be done. As the formulas are the same, we obtain the same bounds.

$$\begin{aligned} I_{n,k,\delta} &= \int 1_{\bar{\mu}_n \in B(\sigma, \delta)} \exp \left( -\beta_n \left[ \frac{1}{2} \mathcal{E}_{\neq}(\bar{\mu}_n) + \frac{n+1}{2n^2} \log \int \prod_{i=1}^n |x - x_i|^2 2^n dT^* \nu_{\mathcal{S}}(x) \right] \right) d\rho_{n,k} \\ &\leq \int 1_{\bar{\mu}_n \in B(\sigma, \delta)} \exp \left( -\beta_n \left[ -\frac{1}{2n^2} \sum_{i \neq j} \log_M |x_i - x_j| + \frac{n+1}{2n} (J_{\mathcal{S}^2}(\bar{\mu}_n) + \varepsilon) \right] \right) d\rho_{n,k} \\ &\leq \int 1_{\bar{\mu}_n \in B(\sigma, \delta)} \exp \left( -\beta_n \left[ -\frac{1}{2} \mathcal{E}_{\mathcal{S}^2}^M(\bar{\mu}_n) + \frac{n+1}{2n} (J_{\mathcal{S}^2}(\bar{\mu}_n) + \varepsilon) \right] \right) d\rho_{n,k} \\ &\leq \exp \left( -\beta_n \frac{n+1}{n} \left[ \sup_{B(\sigma, \delta)} -\tilde{I}_{\mathcal{S}^2}^M + \varepsilon \right] \right) \int 1 d\rho_{n,k}. \end{aligned}$$

We need to check that

$$\frac{1}{\beta_n} \log \int \rho_{n,k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Just like in the complex case, this is only a consequence of the fact that  $\rho_n$  is a product measure.

Using again (1.31), we apply logarithm to both sides of the inequality, divide by  $\beta_n$  to find:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta_n} \log(I_{n,k,\delta}) \leq \sup_{B(\sigma, \delta)} -\tilde{I}_{\mathcal{S}^2}^M + \varepsilon.$$

By the monotone convergence theorem, we let  $M \rightarrow \infty$  and then  $\varepsilon \rightarrow 0$  which ends the proof of the inequality. As the upper bound is uniform in  $k$ , it ends the proof of the lower bound.

### Large deviations lower bound

In this section we prove the lower bound of the large deviation principle. We notice that the rate function is the sum of a lower semi-continuous function  $\mathcal{E}_{\mathcal{S}^2}$  and of the continuous function  $J_{\mathcal{S}^2}$ . The continuity of  $J_{\mathcal{S}^2}$  allows us to treat only the logarithmic energy, which is well known in potential theory.

#### • Large deviations lower bound in the complex case

Let  $\sigma \in \mathcal{M}_1(\mathcal{S}^2)$ , we prove that:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta_n} \log Z_n \mathbb{P}(\bar{\mu}_n \in B(\sigma, \delta)) \geq -I_{\mathcal{S}^2}(\sigma).$$

We can assume that the measure  $\sigma$  satisfies  $I_{\mathcal{S}^2}(\sigma) < \infty$  as if the rate function is infinite this bound holds clearly. We notice that it is equivalent to have  $\mathcal{E}_{\mathcal{S}^2} < \infty$ . In particular, such a measure  $\sigma$  has no atom (and  $\sigma(\{N\}) = 0$ ). For any  $(x_1, \dots, x_n)$ , we have:

$$\frac{1}{n} \log \int \prod_{i=1}^n |x - x_j|^2 2^n dT^* \nu_{\mathcal{S}}(x) \leq J_{\mathcal{S}^2}(\bar{\mu}_n). \quad (1.33)$$

If we write:

$$A_1 = Z_n \mathbb{P}(\bar{\mu}_n \in B(\sigma, \delta))$$

then we have, for any  $\varepsilon > 0$ , if  $\delta$  is small enough, using (1.33):

$$\begin{aligned} A_1 &= \int 1_{\bar{\mu}_n \in B(\sigma, \delta)} \exp \left( -\beta_n \left[ \mathcal{E}_{\neq}(\bar{\mu}_n) + \frac{n+1}{n^2} \log \int \prod_{i=1}^n |x - x_j|^2 2^n dT^* \nu_{\mathcal{S}}(x) \right] \right) d\kappa_n \\ &\geq \int 1_{\bar{\mu}_n \in B(\sigma, \delta)} \exp \left( -\beta_n \left[ \mathcal{E}_{\neq}(\bar{\mu}_n) + \frac{n+1}{n} J_{\mathcal{S}^2}(\bar{\mu}_n) \right] \right) d\kappa_n \\ &\geq \exp \left( -\beta_n \left[ \frac{n+1}{n} (J_{\mathcal{S}^2}(\sigma) + \varepsilon) \right] \right) \int 1_{\bar{\mu}_n \in B(\sigma, \delta)} \exp(-\beta_n \mathcal{E}_{\neq}(\bar{\mu}_n)) d\kappa_n. \end{aligned}$$

The last inequality comes from the continuity of  $J_{\mathcal{S}^2}$ . To study the right integral, we will use the stereographic projection  $T^{-1}$ . Thanks to the relation (1.20) we obtain:

$$\sum_{i \neq j} \log |x_i - x_j| = \sum_{i \neq j} \log |T^{-1}(x_i) - T^{-1}(x_j)| - (n-1) \sum_{i=1}^n \log(1 + |T^{-1}(x_i)|^2).$$

Pushing back the measure  $\kappa_n$  leads to:

$$\begin{aligned} &\int 1_{\bar{\mu}_n \in B(\sigma, \delta)} \exp(-\beta_n \mathcal{E}_{\neq}(\bar{\mu}_n)) d\kappa_n \\ &= \int 1_{\mu_n \in T^{-1}B(\sigma, \delta)} \exp \left( -\beta_n \left[ \mathcal{E}_{\neq}(\mu_n) - \frac{n+1}{n^2} \sum_{i=1}^n \log(1 + |z_i|^2) \right] \right) d\ell_{\mathbb{C}^n}(z_1, \dots, z_n). \end{aligned}$$

We reduced the problem to prove the large deviations lower bound for a Coulomb gas in  $\mathbb{C}$  with potential  $V(z) = \log(1 + |z|^2)$  and temperature  $\beta_n$ . We will prove in Proposition

1.29 that  $T^*$  is an homeomorphism from  $\mathcal{M}_1(\mathbb{C})$  to  $\mathcal{M}_1(\mathcal{S}^2) \mid \mu(\{N\}) = 0\}$  so the set  $T^{-1*}B(\sigma, \delta)$  is a neighborhood of  $T^{-1*}\sigma$ .

The proof of the lower bound can be found in [HP00, Chapter 5 p.220]. We give a proof for the sake of completeness.

First, we explain why it is sufficient to prove the lower bound for "nice" measures  $\sigma$ . Let  $\mathbb{Q}$  the law of the empirical measure of the gas:

$$\frac{1}{Z_n} \exp \left( -\beta_n \left[ \mathcal{E}_\neq(\mu_n) + \frac{n+1}{n^2} \sum_{i=1}^n \log(1 + |z_i|^2) \right] \right) d\ell_{\mathbb{C}}(z_1, \dots, z_n).$$

where  $Z_n$  is a normalizing constant. We will prove that for any sufficiently regular measure  $\sigma$ , we have:

$$\inf_G \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \log Z_n \mathbb{Q}(\mu_n \in G) \geq -\mathcal{E}(\sigma) - \int \log(1 + |z|^2) d\sigma(z) \quad (1.34)$$

where the infimum is take over  $G$  neighborhood of  $\sigma$ . In order to prove that this bound is sufficient to obtain the lower bound of the large deviations principle, we prove that the function  $\phi : \mathcal{M}_1(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R}$  given by:

$$\phi(\sigma) = \inf \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \log Z_n \mathbb{Q}(\mu_n \in G), G \text{ neighborhood of } \sigma \right\}$$

is upper semi-continuous. Let  $\sigma_k \rightarrow \sigma$  in  $\mathcal{M}_1(\mathbb{C})$ . Let  $G$  be a neighborhood of  $\sigma$ , then there exists an integer  $K$  such that for all  $k \geq K$ ,  $\sigma_k \in G$ . This implies that for any  $k \geq K$ :

$$\inf_{G_k} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \log \mathbb{Q}(\mu_n \in G_k) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \log \mathbb{Q}(\mu_n \in G)$$

where  $G_k$  are neighborhoods of  $\sigma_k$ . Then if we take the limit superior of this inequality and the infimum over  $G$  neighborhood of  $\sigma$  we obtain the upper semi-continuity of  $\phi$ . If we prove (1.34) for a dense set of measures, then for any measure  $\sigma \in \mathcal{M}_1(\mathbb{C})$ , there exist measures  $\sigma_k$  such that (1.34) holds and  $\sigma_k \rightarrow \sigma$  we get:

$$\phi(\sigma) \geq \limsup_k \phi(\sigma_k) \geq \limsup_k -I(\sigma_k).$$

We will consider a specific sequence of measures  $\sigma_k$  such that for any  $k$ ,  $\sigma_k$  is absolutely continuous with respect to the Lebesgue measure on  $\mathbb{C}$ , with compact support and density bounded from above and below by positive constants and such that:

$$\begin{aligned} -\mathcal{E}(\sigma_k) &\geq -\mathcal{E}(\sigma) \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \int \log(1 + |z|^2) d\sigma_k(z) &= \int \log(1 + |z|^2) d\sigma(z). \end{aligned}$$

Once we obtain this sequence, we will only have to prove the lower bound for the measures satisfying the regularity conditions given above.

Let  $\sigma_k = \frac{1_{z \in [-k, k]^2}}{\sigma([-k, k]^2)} \sigma$ , and

$$f(z, w) = -\log |z - w|^2 + \frac{1}{2} \log(1 + |z|^2) + \frac{1}{2} \log(1 + |w|^2)$$

then, as  $f$  is bounded from below, by the monotone convergence theorem we get:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \iint f(z, w) d\sigma_k(z) d\sigma_k(w) = \iint f(z, w) d\sigma(z) d\sigma(w)$$

so we can assume that  $\sigma$  has compact support in  $\mathbb{C}$ . Now let  $\phi_\varepsilon$  be a  $\mathcal{C}^\infty$  probability density with support in  $[-\varepsilon, \varepsilon]^2$ , then we set  $\sigma_\varepsilon = \phi_\varepsilon * \sigma$ . The measures  $\sigma_\varepsilon$  have compact support, continuous density and converge towards  $\sigma$  as  $\varepsilon$  goes to zero.

Since it is easy to check that  $\int \log(1 + |z|^2) d\sigma_\varepsilon(z) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int \log(1 + |z|^2) d\sigma(z)$ , we only have to prove that for any  $\varepsilon$

$$-\mathcal{E}(\phi_\varepsilon * \sigma) \geq -\mathcal{E}(\sigma).$$

Recall that the function  $-\mathcal{E}$  is concave, so if we notice that

$$\phi_\varepsilon * \sigma = \int \phi_\varepsilon(y) \sigma(\cdot - y) dy$$

then, thanks to the Jensen inequality and the invariance by translation of the logarithmic energy, we obtained the desired inequality. The last thing we want for our "nice" measures is that the density is bounded from above and from below. As the density of the measures  $\sigma_\varepsilon$  are continuous with compact support, those densities are already bounded from above. Changing  $\sigma_\varepsilon$  to  $\delta m + (1 - \delta)\sigma_\varepsilon$  where  $m$  is the uniform measure on the support of  $\sigma_\varepsilon$  allows us to deal with measures with continuous density bounded from above and from below.

We can now assume that the measure  $\sigma$  is supported in a rectangle  $[a, b] \times [c, d]$  with a density  $h$  with respect to the Lebesgue measure on  $\mathbb{C}$  satisfying for all  $z \in [a, b] \times [c, d]$ :

$$\frac{1}{C} \leq h(z) \leq C$$

for some constant  $C > 0$ . For each  $n \in \mathbb{N}$ , let  $m = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ . Let  $x_0 = a < x_1 < \dots < x_m = b$  such that for each  $j \in \{0, \dots, n-1\}$

$$\sigma([x_j, x_{j+1}] \times [c, d]) = \frac{1}{m}.$$

We have cut the support in vertical slides of equal mass. We divide each slide in rectangles of equal mass (see Figure 1.2) and we adjust their number in order to have a total of  $n$  parts. As  $m^2 \leq n \leq m(m+2)$ , we can find  $l_1, \dots, l_m$  satisfying  $\sum_{k=1}^m l_k = n$  and for each  $j \in \{0, n-1\}$  a set of points  $y_{j,0} = c < y_{j,1} < \dots < y_{j,l_j} = d$  such that for every  $i \in \{0, \dots, n-1\}$  and every  $j \in \{0, l_i-1\}$  we have:

$$\sigma([x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]) = \frac{1}{ml_i}.$$

This construction gives us a set of rectangles. For each one of them, we consider the smaller rectangle with same center as the original one but homothetic with ratio  $\frac{1}{2}$  (see Figure 1.2 for an illustration). We call them  $R_{i,j} = [x'_{i-1}, x'_i] \times [y'_{j-1}, y'_j]$ . As the density  $h$  is bounded from above and from below we see that the diameter of the rectangles uniformly tends towards 0 as  $n$  goes to infinity. More precisely we have:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{i,j} \text{diam}(R_{i,j}) \rightarrow 0.$$

We will need to control the area of each rectangle, we want this area not to go to zero too fast such that the product of the areas of the rectangles is negligible compared to  $\exp(-\beta_n)$ . One can easily check that for each  $i, j$  we have, for some constant  $C_1$  depending only of  $h$ :

$$\int_{R_{i,j}} d\sigma(z) \geq \frac{C_1}{n}.$$

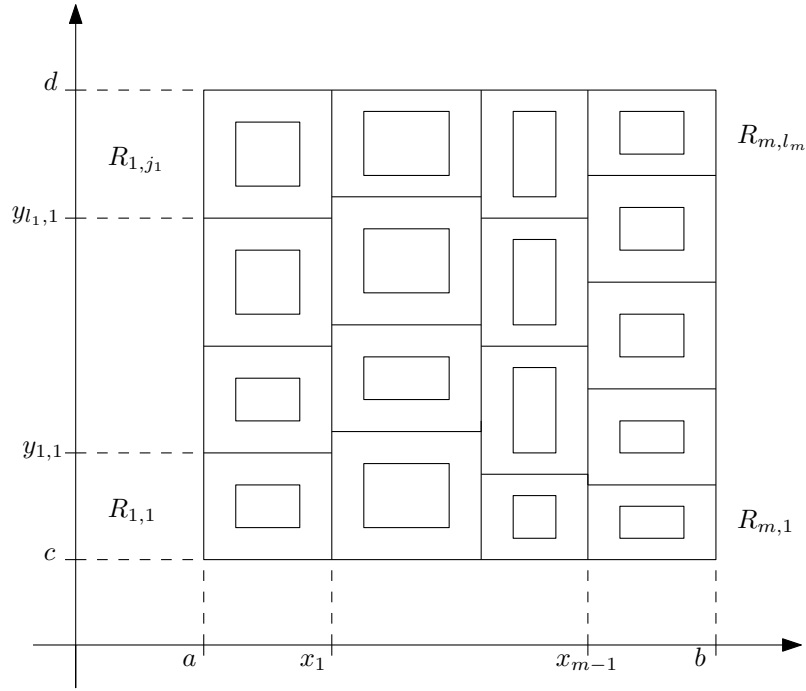


Figure 1.2: Division of the support in rectangles with  $n = 17$ . So we divide the support in 4 columns which we divide in 4 or 5 rectangles to obtain the total number of 17 pieces.

We label the  $n$  rectangles  $R_1, \dots, R_n$  (and  $R'_1, \dots, R'_n$ ) and we define:

$$\Delta_n = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid \forall 1 \leq i \leq n, z_i \in R'_i\}.$$

Let  $f$  be a bounded 1-Lipschitz function. For any  $n$  and any  $(z_1, \dots, z_n) \in \Delta_n$  we have:

$$\begin{aligned} \left| \int f(z) d\sigma(z) - \sum_{i,j} \frac{1}{ml_i} f(z_{i,j}) \right| &\leq \sum_{i,j} \int_{R_{i,j}} |f(z) - f(z_{i,j})| d\sigma(z) \\ &\leq \sum_i \int_{R_{i,j}} |z - z_i| d\sigma(z) \\ &\leq \max_{i,j} (\text{diam} R_{i,j}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \end{aligned}$$

and for any bounded function  $f$ :

$$\frac{1}{n} \sum_{i,j} f(z_{i,j}) - \sum_{i,j} \frac{1}{ml_i} f(z_{i,j}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

Hence, for any fixed  $\delta$ , if  $n$  is large enough, for any  $(z_1, \dots, z_n) \in \Delta_n$ :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{z_i} \in B(\sigma, \delta).$$

We define

$$\Delta^n = \bigcup_{p \in \sigma_n} \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid (z_{p(1)}, \dots, z_{p(n)}) \in \Delta_n\}.$$

We only made the definition of  $\Delta_n$  symmetric, as there was no reason for  $z_1$  to be at the top left corner of the support. It is clear that we still have, for any  $\delta$  and  $n$  large enough,

and for any  $(z_1, \dots, z_n) \in \Delta^n$ ,  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \delta_{z_k} \in B(\sigma, \delta)$ . Notice that:

$$\text{Vol}(\Delta^n) = n! \text{Vol}(\Delta_n) \geq n! \left( \frac{C_1}{n} \right)^n$$

which implies, as  $\beta_n \gg n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta_n} \log \text{Vol}(\Delta^n) = 0.$$

Then we have, for  $n$  large enough:

$$\begin{aligned} & \int \mathbf{1}_{\mu_n \in T^{-1}B(\sigma, \delta)} \exp \left( -\beta_n \left[ \mathcal{E}_{\neq}(\mu_n) + \frac{n+1}{n^2} \sum_{i=1}^n \log(1 + |z_i|^2) \right] \right) d\ell_{\mathbb{C}^n}(z_1, \dots, z_n) \\ & \geq \int \mathbf{1}_{\Delta^n} \exp \left( -\beta_n \left[ \mathcal{E}_{\neq}(\mu_n) + \frac{n+1}{n^2} \sum_{i=1}^n \log(1 + |z_i|^2) \right] \right) d\ell_{\mathbb{C}^n}(z_1, \dots, z_n) \\ & \geq \exp \left( -\beta_n \left[ \frac{n+1}{n^2} \sum_{k=1}^n \max_{z \in R'_k} \log(1 + |z|^2) - \frac{1}{n^2} \sum_{i \neq j} \min_{z \in R'_i, w \in R'_j} \log |z - w| \right] \right) \text{Vol}(\Delta^n). \end{aligned}$$

To obtain the lower bound, it is sufficient to prove that we have:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \max_{z \in R'_k} \log(1 + |z|^2) = \int \log(1 + |z|^2) d\sigma(z) \quad (1.35)$$

and that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i \neq j} \min_{z \in R'_i, w \in R'_j} \log |z - w| \geq \iint \log |z - w| d\sigma(z) d\sigma(w) = \mathcal{E}(\sigma). \quad (1.36)$$

The first limit is easy to prove as  $z \mapsto \log(1 + |z|^2)$  is uniformly continuous on the support of  $\sigma$  (which is a rectangle) and is deduced from the definition of the Riemann integral.

As  $d_n = \max_{i,j} \text{diam}(R_{i,j})$  is of order  $\frac{1}{\sqrt{n}}$  and  $\min_{R'_i, R'_j} |z - w|$  is also of order  $\frac{1}{\sqrt{n}}$ , then, thanks to the bound:

$$\max_{R_i, R_j} |z - w| \leq 2d_n + \min_{R'_i, R'_j} |z - w| \quad (1.37)$$

there exists a constant  $A > 0$  such that

$$A \min_{z \in R'_i, w \in R'_j} |z - w| \geq \max_{z \in R_i, w \in R_j} |z - w|. \quad (1.38)$$

This relation is the reason why we reduced the sizes of the rectangles in the construction so that we can control the distance between the rectangles. To end the proof we notice that, for any  $\varepsilon > 0$ , we have:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \#\{i \neq j \mid \frac{\max_{z \in R_i, w \in R_j} |z - w|}{\min_{z \in R'_i, w \in R'_j} |z - w|} \leq 1 + \varepsilon\} = 1. \quad (1.39)$$

Indeed, for any fixed  $\varepsilon > 0$ , the cardinal of the complement of the set considered above is  $O(n)$  as this condition is verified as soon as the rectangles are not too close.

We call

$$B = \mathcal{E}(\sigma) - \sum_{i \neq j} \log \left( \min_{z \in R'_i, w \in R'_j} |z - w| \right) \frac{1}{m l_i \times m l_j}.$$

Since

$$\iint \log |z - w| d\sigma(z) d\sigma(w) \leq \sum_{i \neq j} \log \max_{z \in R_i, w \in R_j} |z - w| \frac{1}{ml_i \times ml_j} \quad (1.40)$$

then for every  $i$ ,  $n \leq ml_i$  then, for every  $\varepsilon > 0$ , then we have :

$$\begin{aligned} B &\leq \sum_{i \neq j} \log \left( \max_{z \in R_i, w \in R_j} |z - w| \right) \frac{1}{ml_i \times ml_j} - \sum_{i \neq j} \log \left( \min_{z \in R'_i, w \in R'_j} |z - w| \right) \frac{1}{ml_i \times ml_j} \\ &\leq \sum_{i \neq j} \log \left( \frac{\max_{z \in R_i, w \in R_j} |z - w|}{\min_{z \in R'_i, w \in R'_j} |z - w|} \right) \frac{1}{ml_i \times ml_j} \\ &\leq \frac{1}{n^2} \sum_{i \neq j} \log \left( \frac{\max_{z \in R_i, w \in R_j} |z - w|}{\min_{z \in R'_i, w \in R'_j} |z - w|} \right) \\ &\leq \frac{1}{n^2} \# \{i \neq j \mid \frac{\max_{z \in R_i, w \in R_j} |z - w|}{\min_{z \in R'_i, w \in R'_j} |z - w|} \leq 1 + \varepsilon\} \log(1 + \varepsilon) \\ &\quad + \frac{1}{n^2} \left[ 1 - \# \{i \neq j \mid \frac{\max_{z \in R_i, w \in R_j} |z - w|}{\min_{z \in R'_i, w \in R'_j} |z - w|} \leq 1 + \varepsilon\} \right] \log A. \end{aligned}$$

Then we take the limit superior in both sides, and the limit when  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\sigma) - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i \neq j} \log \left( \min_{z \in R'_i, w \in R'_j} |z - w| \right) \frac{1}{ml_i \times ml_j} \\ \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i \neq j} \log \left( \frac{\max_{z \in R_i, w \in R_j} |z - w|}{\min_{z \in R'_i, w \in R'_j} |z - w|} \right) = 0 \end{aligned}$$

which ends the proof of the lower bound in the complex case.

### • Large deviations lower bound in the real case

In this section, we prove the lower bound of the large deviation principle of Proposition 1.23. We define:

$$\mathbb{P}_{n,k}(x_1, \dots, x_n) = \exp \left( -\beta_n \frac{1}{2} H(x_1, \dots, x_n) \right) dL_{n,k}(x_1, \dots, x_n)$$

and

$$\tilde{\mathbb{P}} = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \mathbb{P}_{n,k}.$$

We prove that for any  $\sigma \in \mathcal{M}_1(\mathcal{S}^2)$ :

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta_n} \tilde{\mathbb{P}}(\bar{\mu}_n \in B(\sigma, \delta)) \geq -I_{\mathcal{S}^2}(\sigma).$$

We can assume that the measure  $\sigma$  satisfies  $\tilde{I}_{\mathcal{S}^2}(\sigma) < \infty$  as if the rate function is infinite this bound holds clearly. We notice that it is equivalent to have  $\mathcal{E}_{\mathcal{S}^2}(\sigma) < \infty$  and the push-forward of  $\sigma$  by the inverse stereographic projection is invariant under conjugation.

The strategy adopted here is very similar to what was done in [BAZ98] for the real Ginibre ensemble. The distribution of  $(z_1, \dots, z_n)$  is a mixture between several distributions, each distribution being related to the number of real zeros. For any  $\varepsilon > 0$ , if  $\delta$  is

small enough, using (1.33) and as  $J_{\mathcal{S}^2}$  is continuous:

$$\begin{aligned}
& \tilde{\mathbb{P}}(\bar{\mu}_n \in B(\sigma, \delta)) \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \int \exp \left( -\beta_n \left[ \frac{1}{2} \mathcal{E}_{\neq}(\bar{\mu}_n) - \frac{n+1}{2n^2} \log \int \prod_{i=1}^N |x - x_i|^2 2^n dT^* \nu_{\mathcal{S}}(x) \right] \right) 1_{\bar{\mu}_n \in B(\sigma, \delta)} d\rho_{n,k} \\
&\geq \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \int \exp \left( -\beta_n \left[ \frac{1}{2} \mathcal{E}_{\neq}(\bar{\mu}_n) - \frac{n+1}{2n} J_{\mathcal{S}^2}(\bar{\mu}_n) \right] \right) 1_{\bar{\mu}_n \in B(\sigma, \delta)} d\rho_{n,k} \\
&\geq \exp \left( -\beta_n \left[ \frac{n+1}{n} (J_{\mathcal{S}^2}(\sigma) + \varepsilon) \right] \right) \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \int \exp \left( -\beta_n \frac{1}{2} \mathcal{E}_{\neq}(\bar{\mu}_n) \right) 1_{\bar{\mu}_n \in B(\sigma, \delta)} d\rho_{n,k} \\
&\geq \exp \left( -\beta_n \left[ \frac{n+1}{n} (J_{\mathcal{S}^2}(\sigma) + \varepsilon) \right] \right) \int \exp \left( -\beta_n \frac{1}{2} \mathcal{E}_{\neq}(\bar{\mu}_n) \right) 1_{\bar{\mu}_n \in B(\sigma, \delta)} d\rho_{n, \lfloor n/2 \rfloor}.
\end{aligned}$$

As we deal with a lower bound, we can only consider the last term of the sum, corresponding to zero or one real root (if  $n$  is even or odd). Like in the complex case, we use the inverse stereographic projection to express the last integral:

$$\begin{aligned}
& \int 1_{\bar{\mu}_n \in B(\sigma, \delta)} \exp \left( -\beta_n \frac{1}{2} \mathcal{E}_{\neq}(\bar{\mu}_n) \right) d\rho_{n, \lfloor n/2 \rfloor} \\
&= \int 1_{\mu_n \in T^{-1}B(\sigma, \delta)} \exp \left( -\beta_n \left[ \frac{1}{2} \mathcal{E}_{\neq}(\mu_n) - \frac{n+1}{2n^2} \sum_{i=1}^n \log(1 + |z_i|^2) \right] \right) d\ell_{n, \lfloor n/2 \rfloor}(z_1, \dots, z_n).
\end{aligned}$$

Notice that when  $n$  is odd, the first coordinate is always real. Like in the complex case, we reduced the proof of the lower bound to the proof of the lower bound for a Coulomb gas in the plane with potential  $\log(1 + |z|^2)$ , except that this gas must have at most one particle on the real axis (depending on  $n$ ). Strategy of the proof is exactly the same as previously: for regular measures (supported in a rectangle with density with respect to the Lebesgue measure bounded from above and from below), we prove the lower bound by approximating the measure with an atomic measure whose atoms can be anywhere in well chosen rectangles. To perform the approximation, we have to show that we can still make this construction respecting the invariance under conjugation and the fact that we must have at most one real root.

When  $n$  is even, we cut the upper half of the support in boxes of mass  $\frac{1}{2\lfloor \sqrt{n} \rfloor}$  and take the half-sized sub-boxes (the  $R_i$ 's and the  $R'_i$ 's), illustrated in Figure 1.3. Then we describe the lower part of the support by considering the conjugates of the rectangles  $\bar{R}_i$  and  $\bar{R}'_i$ . We define

$$\Delta_n = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid \forall 1 \leq i \leq n, z_i \in R'_i\}$$

and the rest of the construction is exactly the same.

When  $n$  is odd, the construction is nearly the same, except that we must place one point on the real line. We divide the upper half of the support into columns of equal mass  $\frac{1}{2\lfloor \sqrt{n} \rfloor}$ , then we divide each column in rectangles of equal mass such that the total number of rectangles is  $\frac{n+1}{2}$ . We consider the conjugates of the rectangles so that we have cut the support of  $\sigma$  in rectangles of known mass respecting the symmetry by conjugation (Figure 1.4). Finally, on the 1st column, we consider the union of the two rectangles touching the real axis. Hence, we have a partition of the support in  $n$  rectangles. Now we can consider the smaller rectangles like we used to do, except for the one crossing the real axis for which



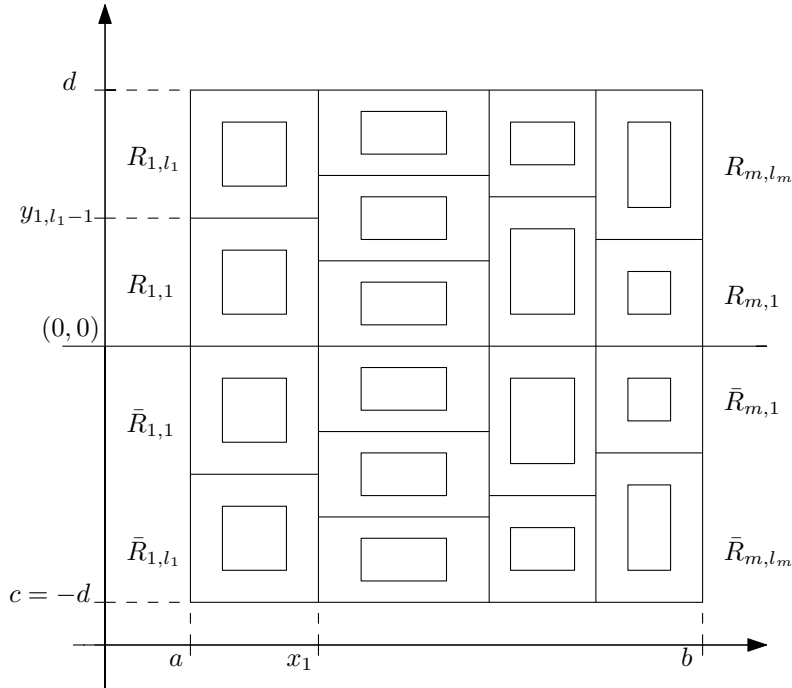


Figure 1.3: Division of the support in rectangles,  $n$  even. Here  $n = 18$ , we divide the support in 4 columns. Then we divide the columns in order to obtain a total number of 18 rectangles.

we only keep the intersection of the smaller rectangle with  $\mathbb{R}$ , represented by a thicker line in Figure 4.

We can also define  $\Delta_n = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}^{n-1} \mid \forall 1 \leq i \leq n, z_i \in R'_i\}$  which differs from the previous construction only by the fact that the first variable is real, and

$$\Delta^n = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}^{n-1} \mid \exists p \in \sigma\{2, \dots, n\}, (z_1, z_{p(2)}, \dots, z_{p(n)}) \in \Delta_n\}.$$

The rest of the inequalities are valid for this construction and it allows us to end the proof of the lower bound in the real case.

### Large deviation principle for normalized measures

In this subsection we obtain the full large deviation principle on the sphere by treating the normalizing constants. Here we have an explicit formula for the constants  $Z_n$  and  $Z_{n,k}$  in Remark 1.15.

As  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta_n} \log Z_n = 0$ , the large deviation principle holds for the normalized measures. For any open  $O$  set in  $\mathcal{M}_1(\mathcal{S}^2)$ , we have:

$$-\inf_O I_{\mathcal{S}^2} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta_n} \log Z_n \mathbb{P}(\bar{\mu}_n \in O) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta_n} \log Z_n \mathbb{P}(\bar{\mu}_n \in O) \leq -\inf_{\text{clo}(O)} I_{\mathcal{S}^2}. \quad (1.41)$$

By taking  $O = \mathcal{M}_1(\mathcal{S}^2)$  we get:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta_n} \log Z_n = -\inf_{\nu \in \mathcal{M}_1(\mathcal{S}^2)} I_{\mathcal{S}^2}(\nu) = 0. \quad (1.42)$$

In this case, we know that the rate function  $I$  reaches its minimum for the uniform measure on the equator as we know that the random sequence  $\mu_n$  converges almost surely weakly

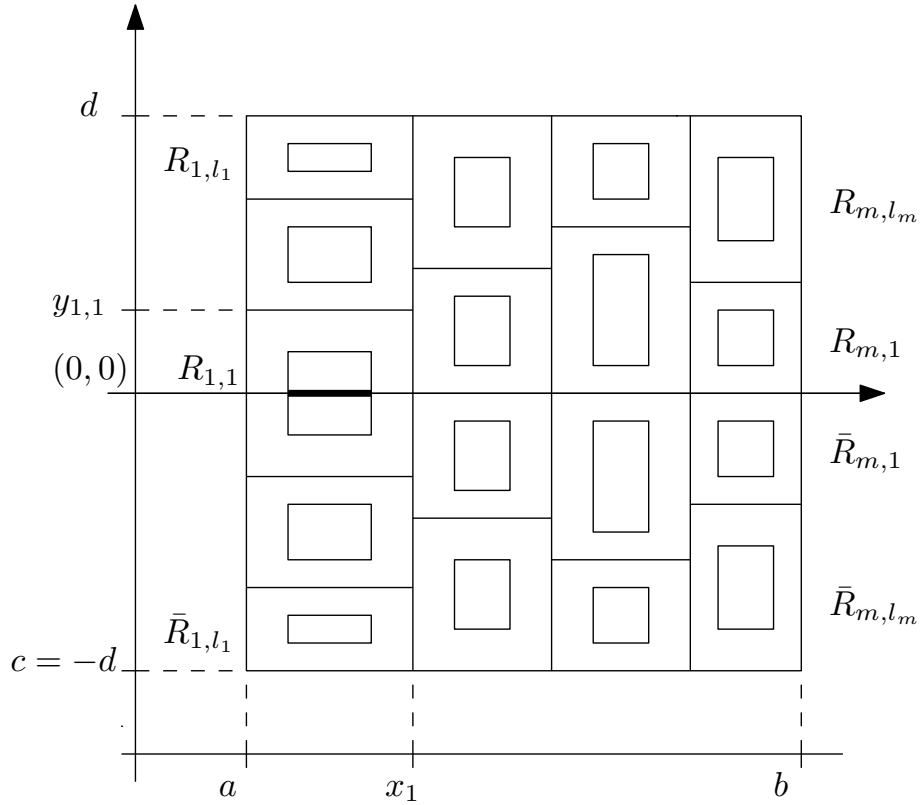


Figure 1.4: Division of the support in rectangles,  $n$  odd. Here  $n = 17$  we divide the support in 4 columns. The thick line corresponds to the first rectangle, which is flat.

towards the uniform measure on the unit circle. As  $I_{\mathcal{S}^2}(T^*\nu_S) = I(\nu_S) = 0$  it will imply the (already known) almost sure weak convergence of  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  towards  $\nu_S$ . This ends the proof of Proposition 1.22.

In the real case, we have to check that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \min Z_{n,k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \max Z_{n,k} = -\inf \tilde{I}_{\mathcal{S}^2} = 0. \quad (1.43)$$

This is true when  $\beta_n = n^2$  (see Remark 1.15). For general  $\beta_n$ , we have to assume that (1.43) is true. Then for any set  $A \in \mathcal{M}_1(\mathcal{S}^2)$  we have:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta_n} \log \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{1}{Z_{n,k}} \mathbb{P}_{n,k}(A) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{\beta_n} \log \min Z_{n,k} - \inf_{\text{clo} A} I_{\mathcal{S}^2} \quad (1.44)$$

and

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta_n} \log \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{1}{Z_{n,k}} \mathbb{P}_{n,k}(A) \geq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{\beta_n} \log Z_{n,k} - \inf_{\text{int}(A)} I_{\mathcal{S}^2} \quad (1.45)$$

which proves the full large deviation principle in  $\mathcal{M}_1(\mathcal{S}^2)$ .

#### 1.3.4 Step 4: Going back on the plane

We have proved large deviation principles for the real and complex case on the sphere. The next proposition is taken from [Har12, Lemma 2.1]. We recall that the point  $N = (0, 0, 1)$  is the north pole of the sphere.

**Proposition 1.29** (Correspondence between  $\mathbb{C}$  and  $\mathcal{S}^2 \setminus \{N\}$ ).  *$T^*$  is an homeomorphism from  $\mathcal{M}_1(\mathbb{C})$  to  $\{\mu \in \mathcal{M}_1(\mathcal{S}^2) \mid \mu(\{N\}) = 0\}$ .*

*Proof.* As  $T$  is a continuous function,  $\mu \mapsto T^*\mu$  is continuous for the weak topology. As  $T$  is a bijection from  $\mathbb{C}$  to  $\mathcal{S}^2 \setminus \{N\}$ , it follows that  $T^*$  is a bijection with inverse  $(T^{-1})^*$ . We only have to prove the continuity of  $(T^{-1})^*$ . Let  $(\nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  be a sequence of measures in  $\{\nu \in \mathcal{M}_1(\mathcal{S}^2) \mid \nu(\{N\}) = 0\}$  that converges in  $\{\nu \in \mathcal{M}_1(\mathcal{S}^2) \mid \nu(\{N\}) = 0\}$ . Let  $\nu_\infty$  the limit of this sequence. By outer regularity of  $\nu_\infty$  and the Portmanteau theorem, for any  $\varepsilon$ , there is an open set  $B$  such that:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mu_n(B) \leq \mu(B) \leq \varepsilon.$$

The last inequality shows that the sequence  $((T^{-1})^*\nu_n)_n$  is tight. It is easy to see that  $((T^{-1})^*\mu_n)_n$  converges vaguely towards  $(T^{-1})^*\nu_\infty$  hence weakly.  $\square$

**Proposition 1.30** (Rate functions). *For any measure  $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{C})$ ,  $I_{\mathcal{S}^2}(T^*\mu) = I(\mu)$ .*

*Proof of Proposition 1.30.*

$$\begin{aligned} & - \iint \log |z - w| d\mu(z) d\mu(w) + 2 \sup_{z \in \mathcal{S}^1} \int \log |z - w| d\mu(w) \\ &= - \iint \left( \log |T(z) - T(w)| - \frac{1}{2} (\log(1 - |T(z)|^2) + \log(1 - |T(w)|^2)) \right) d\mu(z) d\mu(w) \\ & \quad + 2 \sup_{z \in \mathcal{S}^1} \int \left( \log |T(z) - T(w)| - \frac{1}{2} (\log(1 - |T(z)|^2) + \log(1 - |T(w)|^2)) \right) d\mu(w). \end{aligned}$$

Hence we obtain:

$$\begin{aligned} I(\mu) &= - \iint \log |T(z) - T(w)| d\mu(z) d\mu(w) + 2 \sup_{z \in \mathcal{S}} \int \log |T(z) - T(w)| d\mu(w) + \log 2 \\ &= I_{\mathcal{S}^2}(T^*\mu). \end{aligned}$$

$\square$

From the large deviation principles proved on the sphere, we can now deduce the large deviation principles on the plane for the complex case.

*Proof of Theorem 1.4.* Thanks to the inclusion principle [DZ09, Lemma 4.1.5], the random sequence  $(T^*\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  satisfies a large deviation principle in

$$\{\mu \in \mathcal{M}_1(\mathcal{S}^2) \mid \mu(\{N\}) = 0\}$$

with speed  $\beta_n$  and good rate function  $I_{\mathcal{S}^2}$ . We can apply this theorem because, as soon as a measure  $\mu$  has an atom at  $N$  (or at any other point),  $I_{\mathcal{S}^2}(\mu)$  is equal to  $+\infty$ . Then, using the contraction principle [DZ09, Theorem 4.2.1] along  $(T^{-1})^*$ , we deduce that the sequence  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  satisfies a large deviation principle with the same speed and good rate function  $I$  thanks to Proposition 1.30. The function  $I$  is a good rate function as we have already proved that  $I_{\mathcal{S}^2}$  is a good rate function.  $\square$

*Proof of Theorem 1.5.* In the real case, the proof is exactly the same. We use the inclusion principle and the contraction principle to obtain a large deviation principle with speed  $\beta_n$  and good rate function  $\tilde{I}$  (using Proposition 1.30 again).  $\square$

## 1.4 Large deviations for Elliptic polynomials

In the last section we saw a large deviation principle for the empirical measures of zeros of random Kac polynomials. In this section, we study the gases (1.17) and (1.18). We prove Theorems 1.6 and 1.7 following the same steps as previously.

### 1.4.1 Step 1: Distribution of the roots

**Theorem 1.31** (Elliptic polynomials are orthogonal polynomials). *The family of polynomials  $\sqrt{n+1} \binom{n}{k}^{1/2} X^k$  are an orthonormal basis in  $\mathbb{C}_n[X]$  for the scalar product:*

$$\langle P, Q \rangle = \int P(z) \overline{Q(z)} \frac{1}{(1+|z|^2)^n} \frac{d\ell_{\mathbb{C}}(z)}{\pi(1+|z|^2)^2}.$$

*In the complex case the distribution of the roots of  $P_n = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k}^{1/2} a_k X^k$ , taken in random uniform order, is given by:*

$$\frac{1}{Z_n} \frac{\prod_{i<j} |z_i - z_j|^2}{\left( \int \prod_{k=1}^n |z - z_k|^2 \frac{1}{(1+|z|^2)^n} \frac{d\ell_{\mathbb{C}}(z)}{\pi(1+|z|^2)^2} \right)^{n+1}} d\ell_{\mathbb{C}^n}(z_1, \dots, z_n)$$

where  $Z_n$  is a normalizing constant. This distribution can be written:

$$\frac{1}{Z_n} \exp(-\beta_n H_E(z_1, \dots, z_n)) d\ell_{\mathbb{C}^n}(z_1, \dots, z_n).$$

*In the real case, the distribution of the roots is given by:*

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{1}{Z_{n,k}} \frac{\prod_{i<j} |z_i - z_j|}{\left( \int \prod_{k=1}^n |z - z_k|^2 \frac{1}{(1+|z|^2)^n} \frac{d\ell_{\mathbb{C}}(z)}{\pi(1+|z|^2)^2} \right)^{(n+1)/2}} d\ell_{n,k}(z_1, \dots, z_n)$$

where the  $Z_{n,k}$  are constants. It can also be written

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{1}{Z_{n,k}} \exp\left(-\beta_n \frac{1}{2} H_E(z_1, \dots, z_n)\right) d\ell_{n,k}(z_1, \dots, z_n).$$

These polynomials are handled by the article of Zeitouni and Zelditch [ZZ10] with the complex Cauchy (Fubini-Study) measure and the weight  $\phi(z) = \log(1+|z|^2)$ .

*Proof of Theorem 1.31.* First we prove that the polynomials  $\sqrt{n+1} \binom{n}{k}^{1/2} X^k$  are an orthonormal basis in  $\mathbb{C}_n[X]$ . As the weight and the measure are radial, it is clear that this family is orthogonal. We only have to compute the norm of each polynomial:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{C}} \frac{|z|^{2k}}{(1+|z|^2)^{n+2}} d\ell_{\mathbb{C}}(z) &= 2\pi \int_{\mathbb{R}^+} \frac{r^{2k+1}}{(1+r^2)^{n+2}} dr \\ &= \pi \int_{\mathbb{R}^+} \frac{u^k}{(1+u)^{n+2}} du \\ &= \pi \frac{k}{n+1} \int_{\mathbb{R}^+} \frac{u^{k-1}}{(1+u)^{n+1}} du \\ &= \pi(n+1) \binom{n}{k}^{-1}. \end{aligned}$$

The computation of the distribution of the roots of random elliptic polynomials with complex coefficients is very similar to the Kac case, except that we add a change of basis. One should first consider the distribution of the ordered vector  $z_1 < \dots < z_n$ , where  $<$  is the order defined in equation (1.22) and then deduce the distribution of  $(z_1, \dots, z_n)$  taken in uniform random order.

Let  $(z_1, \dots, z_n)$  be the zeros of  $P_n = \sum_{k=0}^n a_k \binom{n}{k}^{1/2} X^k$ , then we consider

$$G(z_1, \dots, z_n, a_n) = (a_0, \dots, a_n).$$

To compute the Jacobian determinant of  $G$ , we use the following decomposition:

$$\begin{array}{ccc} (z_1, \dots, z_n, a_n) & \xrightarrow{G} & (a_0, \dots, a_n) \\ & \searrow U \quad \nearrow V & \\ & (b_0, \dots, b_n) & \end{array}$$

where  $U$  is the function giving the coefficients in the canonical basis of  $P_n$  from its roots and leading coefficient and  $V$  is the change of basis from the canonical basis to the basis  $\binom{n}{k}^{1/2} X^k$ . We have already seen that  $\text{Jac}(U) = |a_n|^{2n} \prod_{i < j} |z_i - z_j|^2$ . We could compute the Jacobian determinant of  $V$ , but we will just call this quantity  $|A_n|^2$ . Hence, the real Jacobian determinant of  $G$  is:

$$|\text{Jac}(G)|^2 = |A_n|^2 |a_n|^{2n} \prod_{i < j} |z_i - z_j|^2.$$

The end of the proof is the same as for Kac polynomials, the density of the random vector  $(a_0, \dots, a_n)$  being  $\frac{e^{-\|P\|^2}}{\pi^{n+1}}$ , we only have to integrate the distribution of  $(z_1, \dots, z_n, a_n)$  to obtain the announced distribution for the complex case.

In the real case, we use Zaporozhets' computation [Zap04] to obtain the distribution of  $(z_0, \dots, z_n, a_n)$  in function of the distribution of the coefficients in the canonical basis  $(b_0, \dots, b_n)$  and we use the additional change of variables from the canonical basis to the basis  $\sqrt{n+1} \binom{n}{k}^{1/2} X^k$ . The real Jacobian determinant of this change of variables is  $|A_n|$ , so we obtain the distribution of  $(z_1, \dots, z_n, a_n)$ :

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{|A_n| 2^k}{k! (n-2k)! \pi^{\frac{n+1}{2}}} |a_n|^n \prod_{i < j} |z_i - z_j| \\ & \times \exp \left( - \int |a_n|^2 \frac{\prod_{j=1}^n |z - z_j|^2}{(1 + |z|^2)^n} \frac{d\ell_{\mathbb{C}}(z)}{\pi(1 + |z|^2)^2} \right) d\ell_{n,k}(z_1, \dots, z_n) d\ell_{\mathbb{C}}(a_n). \end{aligned}$$

and we integrate with respect the variable  $a_n$ . □

### 1.4.2 Step 2: Large deviations on the sphere

**Proposition 1.32** (Pushing elliptic polynomials on the sphere). *Let  $(z_1, \dots, z_n)$  be the zeros of  $P_n$  in the complex case, then the law of  $(T(z_1), \dots, T(z_n))$  is absolutely continuous with respect to the pushforward by  $T$  (1.10) of the Lebesgue measure on  $\mathbb{C}$  with density:*

$$\frac{\prod_{i < j} |x_i - x_j|^2}{(\int \prod_{j=1}^n |x - x_j|^2 d\nu_{S^2}(x))^{n+1}} \times \prod_{i=1}^n (1 - |x_i|^2)^2$$

where  $\nu_{\mathcal{S}^2}$  is the uniform measure on  $\mathcal{S}^2$ . Recall that  $\kappa_n$  is defined in Proposition 1.18. This law can be written in the form:

$$\frac{1}{Z_n} \exp \left( -\beta_n \left[ -\frac{1}{n^2} \sum_{i \neq j} \log |x_i - x_j| + \frac{n+1}{n^2} \log \int \prod_{j=1}^n |x - x_j|^2 d\nu_{\mathcal{S}^2}(x) \right] \right) d\kappa_n.$$

*Proof.* The proof is nearly the same as the proof of Proposition 1.18. We use the relations (1.20) and (1.21):

$$\prod_{i < j} |z_i - z_j|^2 = \prod_{i < j} \frac{|T(z_i) - T(z_j)|^2}{(1 - |T(z_i)|^2)(1 - |T(z_j)|^2)}$$

and

$$\int \prod_{k=1}^n |z - z_k|^2 \frac{1}{(1 + |z|^2)^n} \frac{d\ell_{\mathbb{C}}(z)}{\pi(1 + |z|^2)^2} = \frac{\int \prod_{i=1}^n |T(z) - T(z_i)|^2 \frac{(1 - |T(z)|^2)^2 d\ell_{\mathbb{C}}(z)}{\pi}}{\prod_{i=1}^n (1 - |T(z_i)|^2)}$$

to obtain the density:

$$\frac{\prod_{i < j} |T(z_i) - T(z_j)|^2}{(\int \prod_{i=1}^n |T(z) - T(z_i)|^2 d\nu_{\mathcal{S}^2})^{n+1}} \prod_{i=1}^n (1 - |T(z_i)|^2)^2.$$

□

**Proposition 1.33** (Pushing the real case on the sphere). *Let  $(z_1, \dots, z_n)$  be the zeros of  $P_n$  in the real case, then the law of  $(T(z_1), \dots, T(z_n))$  is:*

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{1}{Z_{n,k}} \frac{\prod_{i < j} |x_i - x_j| \times \prod_{i=1}^n (1 - |x_i|^2)}{(\int \prod_{i=1}^N |x - x_i|^2 d\nu_{\mathcal{S}^2}(x))^{(n+1)/2}} dL_{n,k}(x_1, \dots, x_n).$$

Where  $\rho_{n,k}$  is like in Proposition 1.20. This law can be written:

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{1}{Z_{n,k}} \exp \left( -\beta_n \left[ \frac{1}{2} \mathcal{E}_{\neq}(\mu_n) - \frac{n+1}{2n^2} \log \int \prod_{i=1}^N |x - x_i|^2 d\nu_{\mathcal{S}^2}(x) \right] \right) d\rho_{n,k}.$$

The proof of this proposition is the same as Proposition 1.33. We can now state theorem on the sphere.

**Proposition 1.34** (Large deviation principle in  $\mathcal{M}_1(\mathcal{S}^2)$ ). *In the complex case, the sequence of empirical measures satisfy a large deviation principle with speed  $n^2$  in  $\mathcal{M}_1(\mathcal{S}^2)$  with good rate function  $I_{E, \mathcal{S}^2} - \inf I_{E, \mathcal{S}^2}$  where*

$$I_{E, \mathcal{S}^2}(\mu) = - \iint \log |x - y| d\mu(x) d\mu(y) + \sup_{x \in \mathcal{S}^2} \int \log |x - y|^2 d\mu(y).$$

*In the real case, the sequence of empirical measures also satisfies a large deviation principle with speed  $n^2$  and good rate function:*

$$\tilde{I}_{E, \mathcal{S}^2}(\mu) = \begin{cases} \frac{1}{2}(I_{E, \mathcal{S}^2}(\mu) - \inf I_{E, \mathcal{S}^2}) & \text{if } \mu \text{ is invariant under the map } z \mapsto \bar{z} \\ \infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$

**Definition 1.35.** We define  $J_E : \mathcal{M}_1(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R}$  by:

$$J_E(\mu) = \sup_{z \in \mathbb{C}} \left\{ \int \log |z - w|^2 d\mu(w) - \log(1 + |z|^2) \right\} \quad (1.46)$$

and  $J_{E, \mathcal{S}^2} : \mathcal{M}_1(\mathcal{S}^2) \rightarrow \mathbb{R}$  by:

$$J_{E, \mathcal{S}^2}(\mu) = \sup_{x \in \mathcal{S}^2} \int \log |x - y|^2 d\mu(y). \quad (1.47)$$

### 1.4.3 Step 3: Proof of the large deviation principles

**Proposition 1.36** (Rate function  $I_{E, \mathcal{S}^2}$ ).

- 1) The function  $J_{E, \mathcal{S}^2}$  is a continuous function for the weak topology of  $\mathcal{M}_1(\mathcal{S}^2)$  and is bounded.
- 2) The function  $I_{E, \mathcal{S}^2}$  is well defined on  $\mathcal{M}_1(\mathcal{S}^2)$ , takes its values in  $[0, \infty]$  and is finite as soon as the logarithmic energy is finite.
- 3)  $I_{E, \mathcal{S}^2}$  is lower semi-continuous.
- 4)  $I_{E, \mathcal{S}^2}$  is strictly convex.

*Proof of Proposition 1.36.* The proof is exactly the same as the proof of Proposition 1.24. We only have to check that  $\mathcal{S}^2$  is a compact set in  $\mathcal{S}^2$ , which is non-thin at all his points, which is true.  $\square$

### Large deviations upper bound

The only thing we need to import the proof of the large deviation principle for non-normalized measures in the Kac case is the Bernstein-Markov inequality that was crucial to prove the upper bound.

**Lemma 1.37** (Bernstein-Markov for elliptic polynomials). *Let  $n \in \mathbb{N}$ , then for all  $P \in \mathbb{C}_n[X]$  we have:*

$$\sup_{\mathbb{C}} \frac{|P(z)|^2}{(1 + |z|^2)^n} \leq (n + 1) \|P\|_{L^2}^2$$

where  $\|P\|_{L^2}^2 = \int |P(z)|^2 \frac{1}{(1 + |z|^2)^n} \frac{d\ell_{\mathbb{C}}(z)}{\pi(1 + |z|^2)^2}$ .

*proof of Lemma 1.37.* Let  $K_n(z, w) = \sum_{k=0}^n (n + 1) \binom{n}{k} z^k \bar{w}^k$ . Then we have:

$$\forall P \in \mathbb{C}_n[X], P(z) = \int P(w) K(z, w) \frac{1}{(1 + |w|^2)^n} \frac{dw}{\pi(1 + |w|^2)^2} = \langle P, K(\cdot, w) \rangle$$

Then by the Cauchy-Schwarz inequality we get, for all  $z \in \mathbb{C}$ :

$$|P(z)|^2 \leq \|P\|_{L^2}^2 \int |K_n(z, w)|^2 \frac{1}{(1 + |w|^2)^n} \frac{dw}{\pi(1 + |w|^2)^2} = \|P\|_{L^2}^2 (n + 1) K_n(z, z).$$

Considering that  $\|K_n(z, \cdot)\|_{L^2}^2 = (n + 1) K_n(z, z) = (n + 1)(1 + |z|^2)^n$  we get:

$$\sup_{\mathbb{C}} \frac{|P(z)|^2}{(1 + |z|^2)^n} \leq (n + 1) \|P\|_{L^2}^2.$$

$\square$

From this Bernstein-Markov inequality, we deduce the analogue for this model of Lemma 1.27 and Lemma 1.28 and we can easily prove the upper bound for non-normalized measures for elliptic polynomials in both real and complex cases.

### Large deviations lower bound

As we know that  $J_{E, \mathcal{S}^2}$  is a continuous function in  $\mathcal{M}_1(\mathcal{S}^2)$ , the proof of the lower bound is exactly the same. The same inequalities hold and we can reduce the problem to the classical lower bound for a Coulomb gas with confining potential  $\log(1 + |z|^2)$ .

### Large deviation principles for normalized measures

In the complex case, we use the same trick of using the inequalities for the whole space (see (1.42)) to obtain:

$$\varliminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta_n} \log Z_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta_n} \log Z_n = -\inf I_{E, \mathcal{S}^2} \quad (1.48)$$

so we obtain the full large deviation principle for normalized measures in  $\mathcal{M}_1(\mathcal{S}^2)$ . We also notice that this implies that:

$$\varliminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta_n} \log |A_n|^2 = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta_n} \log |A_n|^2 = -\inf I_{E, \mathcal{S}^2}. \quad (1.49)$$

In the real case, we notice that equation (1.49) implies that:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta_n} \min Z_{n,k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta_n} \max Z_{n,k} = -\frac{1}{2} \inf I_{E, \mathcal{S}^2} \quad (1.50)$$

and this allows us to prove the large deviation principle in the real case for normalized measures like in (1.44). For general  $\beta_n$  we need to assume that (1.50) is true.

#### 1.4.4 Step 4: Going back on the plane

The only thing to check is that the rate function given by the contraction principle is the rate function that was announced in the theorem. Using the relations (1.20) and (1.21) in the definition of the rate function  $I_{E, \mathcal{S}^2}$  easily ends the proof.

## 1.5 General result of Zeitouni and Zelditch

In this section, we give the general statement of the result obtained by Zeitouni and Zelditch in [ZZ10] and we extend it to the case of real coefficients. We deal with the gases (1.6) and (1.7) associated to the orthogonal polynomials (1.4).

### 1.5.1 Step 1: Distribution of the roots

**Theorem 1.38** (Distribution of the roots of  $P_n$ ). *In the complex case, the distribution of the random vector  $(z_1, \dots, z_n)$ , taken in uniform random order, is:*

$$\frac{1}{Z_n} \exp \left( -\beta_n \left[ \mathcal{E}_{\neq}(\mu_n) + \frac{n+1}{n^2} \log \int \prod_{i=1}^n |z - z_i|^2 e^{-n\phi(z)} d\nu(z) \right] \right) d\ell_{\mathbb{C}^n}(z_1, \dots, z_n)$$

*When the polynomials  $R_0, \dots, R_n$  have real coefficients, in the real case, the distribution of  $(z_1, \dots, z_n)$  is given by:*

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{1}{Z_{n,k}} \exp \left( -\beta_n \frac{1}{2} H_O(z_1, \dots, z_n) \right) d\ell_{n,k}(z_1, \dots, z_n).$$



*Proof of Theorem 1.38.* The proof is the same as the proof of Theorem 1.31. We consider  $G(z_1, \dots, z_n, a_n) = (a_0, \dots, a_n)$  where the  $a_i$  are the coefficients in the orthonormal basis. Then we use the same decomposition:

$$\begin{array}{ccc} (z_1, \dots, z_n, a_n) & \xrightarrow{G} & (a_0, \dots, a_n) \\ & \searrow U & \nearrow V \\ & (b_0, \dots, b_n) & \end{array}$$

and the same calculation holds to obtain:

$$|\text{Jac}(G)|^2 = |A_n|^2 |a_n|^{2n} \prod_{i < j} |z_i - z_j|^2$$

where  $|A_n|^2$  is the real Jacobian determinant of the change of basis of  $\mathbb{C}_n[X]$ . In the real case, when the  $R_k$ 's are real polynomials, we can also do the same calculations, using [Zap04].  $\square$

### 1.5.2 Step 2: Large deviations on the sphere

**Proposition 1.39** (Pushing orthogonal polynomials on the sphere). *Let  $(z_1, \dots, z_n)$  be the zeros of  $P_n$  in the complex case, then the law of  $(T(z_1), \dots, T(z_n))$  is absolutely continuous with respect to the pushforward by  $T$  (1.10) of the Lebesgue measure on  $\mathbb{C}$  with density:*

$$\frac{\prod_{i < j} |x_i - x_j|^2}{(\int \prod_{j=1}^n |x - x_j|^2 e^{-n\tilde{\phi}(x)} dT^*\nu(x))^{n+1}} \times \prod_{i=1}^n (1 - |x_i|^2)^2.$$

where  $\tilde{\phi}(x) = \phi(T^{-1}(x)) + \log(1 - |x|^2)$ . If  $\kappa_n$  is defined as in Proposition 1.18 then we can write this law in the form:

$$\frac{1}{Z_n} \exp \left( -\beta_n \left[ \mathcal{E}_{\neq}(\bar{\mu}_n) + \frac{n+1}{n^2} \log \int \prod_{j=1}^n |x - x_j|^2 e^{-n\tilde{\phi}(x)} dT^*\nu(x) \right] \right) d\kappa_n.$$

**Proposition 1.40** (Pushing the real case on the sphere). *Let  $(z_1, \dots, z_n)$  be the zeros of  $P_n$  in the real case, then the law of  $(T(z_1), \dots, T(z_n))$  is:*

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{1}{Z_{n,k}} \frac{\prod_{i < j} |x_i - x_j| \times \prod_{i=1}^n (1 - |x_i|^2)}{(\int \prod_{j=1}^n |x - x_j|^2 e^{-n\tilde{\phi}(x)} dT^*\nu(x))^{(n+1)/2}} dL_{n,k}(x_1, \dots, x_n).$$

If we define  $\rho_{n,k}$  as in Proposition 1.20, this distribution can be written:

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{1}{Z_{n,k}} \exp \left( -\beta_n \left[ \frac{1}{2} \mathcal{E}_{\neq}(\bar{\mu}_n) - \frac{n+1}{2n^2} \log \int \prod_{j=1}^n |x - x_j|^2 e^{-n\tilde{\phi}(x)} dT^*\nu(x) \right] \right) d\rho_{n,k}.$$

**Definition 1.41.** We define  $J_O : \mathcal{M}_1(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R}$  by:

$$J_O(\mu) = \sup_{z \in \mathbb{C}} \left\{ \int \log |z - w|^2 d\mu(w) - \phi(z) \right\} \quad (1.51)$$

and  $J_{O,S^2} : \mathcal{M}_1(S^2) \rightarrow \mathbb{R}$  by:

$$J_{O,S^2}(\mu) = \sup_{x \in S^2} \left\{ \int \log |x - y|^2 d\mu(y) - \tilde{\phi}(x) \right\}. \quad (1.52)$$

### 1.5.3 Steps 3 and 4

- *Rate function.* If we look at the proof of the large deviation principles for Kac polynomials and elliptic polynomials on the sphere, we see that the good definition of the rate function relies on the continuity of the function  $J_{O, \mathcal{S}^2}$ . The proof of the continuity of this function is the same as in the previous cases under the assumptions that the support of  $T^*\nu$  non-thin at all its points, which is one of our hypothesis. We replace the function  $-U^\mu$  by the function  $-U^\mu + \bar{\phi}$ . Note that the set  $A_\varepsilon$  would be replaced in general by the set:

$$A_\varepsilon = \{x \in \mathcal{S}^2 \mid -2U^\mu(x) + \bar{\phi} \geq J_{O, \mathcal{S}^2}(\mu) - \varepsilon\}.$$

- *Upper Bound.* The proof of the large deviations upper bound relies on the Bernstein-Markov property (1.1), which is assumed to be true.
- *Lower Bound.* As  $J_{O, \mathcal{S}^2}$  is continuous, we can reproduce exactly the proof of the lower bound for Kac polynomials.

In order to prove the large deviation principle for the normalized measures, we use the same technique as in (1.42) and (1.49). We get:

$$\varliminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta_n} \log Z_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta_n} \log Z_n = -\inf I_{O, \mathcal{S}^2} \quad (1.53)$$

so we obtain the full large deviation principle for normalized measures in  $\mathcal{M}_1(\mathcal{S}^2)$ . We also notice that:

$$\varliminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta_n} \log |A_n|^2 = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta_n} \log |A_n|^2 = -\inf I_{O, \mathcal{S}^2}. \quad (1.54)$$

We deduce from (1.54) that we have:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta_n} \min Z_{n,k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta_n} \max Z_{n,k} = -\frac{1}{2} \inf I_{O, \mathcal{S}^2}. \quad (1.55)$$

This allows us to prove the large deviation principle for normalized measures as in (1.44). For general  $\beta_n$  we need to assume (1.55).

*Proof of Theorem 1.2.* Thanks to the inclusion principle [DZ09, Lemma 4.1.5], the random sequence  $(T^*\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  satisfies a large deviation principle in

$$\{\mu \in \mathcal{M}_1(\mathcal{S}^2) \mid \mu(\{N\}) = 0\}$$

with speed  $\beta_n$  and good rate function  $I_{O, \mathcal{S}^2}$ . Then by the contraction principle [DZ09, Theorem 4.2.1] along  $T^{-1}$ , the sequence  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  satisfies a large deviation principle with the same speed and good rate function  $I_O$  thanks to Proposition 1.30. The contraction principle ensures that the function  $I_O$  is a good rate function as  $I_{O, \mathcal{S}^2}$  is a good rate function.  $\square$

*Proof of Theorem 1.3.* In the real case, the proof is exactly the same. We use the inclusion principle and the contraction principle to obtain a large deviation principle with speed  $\beta_n$  and good rate function  $\tilde{I}_O$  (using again Proposition 1.30).  $\square$



## Chapter 2

# Universal Large deviations for Kac polynomials

Ce chapitre correspond à la note [BZ17], écrite en collaboration avec Ofer Zeitouni, et publiée dans *Electronic Communications in Probability*. Nous y prouvons que les principes de grandes déviations connus pour les polynômes de Kac sont universels. Les techniques employées s'étendent immédiatement aux autres modèles de polynômes aléatoires.

<b>2.1</b>	<b>Introduction and statement of the main result . . . . .</b>	<b>83</b>
<b>2.2</b>	<b>Proof of Theorem 2.1 . . . . .</b>	<b>87</b>
<b>2.3</b>	<b>Concluding remarks and an open problem. . . . .</b>	<b>91</b>

## 2.1 Introduction and statement of the main result

Consider random polynomials of the form:

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k = a_n \prod_{i=1}^n (z - z_i) \quad (2.1)$$

where  $a_0, \dots, a_n$  are i.i.d. random variables and  $z_1, \dots, z_n$  are the complex zeros of  $P_n$ . (Such random polynomials are often referred to as *Kac polynomials*.) There is a rich literature about the behavior of the zeros of  $P_n$  and we refer to [TV15] for a nice recent review of the subject. An important aspect of the theory is universality. For example, introduce the empirical measure of zeros:

$$\mu_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \delta_{z_k}.$$

Then, Ibragimov and Zaporozhets in [IZ13] showed that  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converges weakly to the  $\nu_{S^1}$ , the uniform measure on the unit circle, if and only if  $\mathbb{E}(\log(1 + |a_0|)) < \infty$ ; that is, the limit  $\mu_n$  is (modulo technical conditions) universal. Other universal properties include rescaled limits for  $\mu_n$ , see [IZ97], correlation functions for the point process of zeros [TV15], and more.

Our interest in this note is in large deviations for the sequence  $\mu_n$  in the space  $\mathcal{M}_1(\mathbb{C})$  equipped with the topology of weak convergence, which makes it into a Polish space. In case the coefficients  $(a_i)$  are i.i.d. standard complex Gaussian random variables, Zeitouni

and Zelditch<sup>1</sup> proved in [ZZ10] that the sequence of empirical measures of zeros (which we denote by  $\mu_n^{\mathbb{C}}$  for this model) satisfies the large deviations principle (LDP) in  $\mathcal{M}_1(\mathbb{C})$  with speed  $n^2$  and good rate function  $I_{\mathbb{C}}$  defined by

$$I_{\mathbb{C}}(\mu) = - \iint \left( \log |z - w| - \frac{1}{2} \log(1 + |z|^2) - \frac{1}{2} \log(1 + |w|^2) \right) d\mu(z) d\mu(w) \\ + \sup_{z \in S^1} \int \left( \log |z - w|^2 - \log(1 + |w|^2) \right) d\mu(w).$$

When  $\int \log(1 + |z|^2) d\mu(z)$  is finite, it simplifies to:

$$I_{\mathbb{C}}(\mu) = - \iint \log |z - w| d\mu(z) d\mu(w) + \sup_{z \in S^1} \int \log |z - w|^2 d\mu(w).$$

This has been extended by Butez [But16] to the case of real-valued i.i.d. standard Gaussians ( $a_i$ ): the empirical measure of zeros, denoted  $\mu_n^{\mathbb{R}}$  for that model, satisfies the LDP in  $\mathcal{M}_1(\mathbb{C})$  with speed  $n^2$  and good rate function  $I_{\mathbb{R}}$  defined by

$$I_{\mathbb{R}}(\mu) = \begin{cases} \frac{1}{2} I_{\mathbb{C}}(\mu) & \text{if } \mu \text{ is invariant under } z \mapsto \bar{z} \\ \infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Finally, when the coefficients ( $a_i$ ) are i.i.d. standard exponential random variables, Ghosh and Zeitouni proved in [GZ16] that the sequence of empirical measures of zeros, denoted by  $\mu_n^{\mathbb{R}^+}$ , satisfies the LDP in  $\mathcal{M}_1(\mathbb{C})$  with speed  $n^2$  and good rate function  $I_{\mathbb{R}^+}$  defined by:

$$I_{\mathbb{R}^+}(\mu) = \begin{cases} \frac{1}{2} I_{\mathbb{C}}(\mu) & \text{if } \mu \in \bar{\mathcal{P}} \\ \infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$

where  $\mathcal{P}$  is the set of empirical measures of zeros of polynomials with positive coefficients and  $\bar{\mathcal{P}}$  is its closure for the weak topology. (An explicit description of  $\mathcal{P}$  is provided in [BE15].)

Apart for the models described above, to our knowledge no other LDPs for the empirical measure of zeros of Kac polynomials appear in the literature. (In a different direction, Zelditch [Zel13] extended the results of [ZZ10] to the case of Riemann surfaces, and Feng and Zelditch [FZ11] studied some cases of non-i.i.d. coefficients in the context of more general  $P(\phi)_2$  random polynomials.)

Our main result concerns the universality of the above large deviation principles, under mild technical conditions.

**Theorem 2.1.** *Let  $E$  be  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{R}$  or  $\mathbb{R}^+$ . Let  $a_0, \dots, a_n$  be i.i.d. random variables with a density  $g$  with respect to the Lebesgue measure  $\ell_E$  on  $E$ . Assume that:*

1. *There exist  $\rho > 0$ ,  $r > 0$  and  $R > 0$  such that*

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad g(z) \leq \exp(-r|z|^\rho + R), \quad (2.2)$$

2. *There exists  $\delta > 0$  such that for all  $\lambda > 0$ :*

$$\int 1_{|x| \leq \delta} \frac{1}{g(x)^\lambda} d\ell_E(x) < \infty \quad (2.3)$$

---

<sup>1</sup>In fact, [ZZ10] work in  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$  and consider more general ensembles of holomorphic polynomial with Gaussian coefficients, but it is not hard to check that their result, when specialized to Kac polynomials with complex Gaussian coefficients, is equivalent to the one here; this is implicitly stated in [ZZ10] and explicitly checked in [But16].

Then the sequence of empirical measures  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  satisfies a large deviations principle in  $\mathcal{M}_1(\mathbb{C})$  with speed  $n^2$  and rate function  $I_E$ .

The second assumption in Theorem 2.1 means that either the density  $g$  does not vanish around zero or, if it vanishes,  $g$  is greater than any  $|x|^a$  in a neighborhood of zero.

Before describing the (simple) ideas behind the proof of Theorem 2.1, we explain some of the background and why we find the theorem somewhat surprising. The proof of the LDPs in the Gaussian and Exponential cases is based on an explicit expression for the joint distributions of zeros, that we review below. Given that expression, the proofs of the LDP follow (with some detours) a track well explored in the case of the empirical measure of eigenvalues of random matrices. For the latter, large deviations have been extensively studied, initially by Ben Arous and Guionnet [BAG97], Ben Arous and Zeitouni [BAZ98] and Hiai and Petz [HP00]. Recently, the large deviations for the empirical measure were proved for Wigner matrices with entries possessing heavier-than-Gaussian tails by Bordenave and Caputo [BC14], with a rate function depending on the tail of the entries. Very similar results were obtained by Groux [Gro17] for Wishart matrices. In particular, it follows from these results that in the random matrix setup, the rate function is known to be not universal; this is in sharp contrast with Theorem 2.1.

As mentioned above, the LDP for Kac polynomials in the Gaussian and exponential coefficients cases begin with an explicit expression for the density of zeros, which we now explain. We concentrate first on the case of complex Gaussian coefficients. Note that the second equality in (2.1) gives an  $n!$ -to-1 map between  $(a_n, z_1, \dots, z_n)$  and  $(a_0, \dots, a_n)$ . A classical computation of the Jacobian followed by integration over  $a_n$ , see e.g. [BBL92], [But16], [For10], [ZZ10], shows that the distribution of  $(z_1, \dots, z_n)$  possesses a density with respect to the Lebesgue measure  $d\ell_{\mathbb{C}^n}$  on  $\mathbb{C}^n$  given by:

$$\frac{1}{\pi^n} \frac{\prod_{i < j} |z_i - z_j|^2}{\left( \int \prod_{k=1}^n |z - z_k|^2 d\nu_{S^1}(z) \right)^{n+1}} = \frac{1}{\pi^n} \frac{\prod_{i < j} |z_i - z_j|^2}{\|\tilde{a}\|_2^{2n+2}} \quad (2.4)$$

where  $\tilde{a} = (a_0/a_n, \dots, a_{n-1}/a_n, 1)$  is a continuous function of  $(z_1, \dots, z_n)$  given explicitly by Viète's formula.

In the case of real Gaussian coefficients, the probability of having  $k$  real zeros is positive for  $k$  having the same parity of  $n$ . Following a computation of Zaporozhet in [Zap04], one obtains that the distribution of the roots of  $P_n$  is given by:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{2^k \Gamma(\frac{n+1}{2})}{k!(n-2k)! \pi^{(n-1)/2}} \frac{\prod_{i < j} |z_i - z_j|}{\left( \int \prod_{i=1}^n |z - z_i|^2 d\nu_{S^1} \right)^{(n+1)/2}} d\ell_{n,k}(z_1, \dots, z_n) \\ = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{2^k \Gamma(\frac{n+1}{2})}{k!(n-2k)! \pi^{(n-1)/2}} \frac{\prod_{i < j} |z_i - z_j|}{\|\tilde{a}\|_2^{n+1}} d\ell_{n,k}(z_1, \dots, z_n) \end{aligned}$$

where

$$d\ell_{n,k}(z_1, \dots, z_n) = d\ell_{\mathbb{R}}(z_1) \dots d\ell_{\mathbb{R}}(z_{n-2k}) d\ell_{\mathbb{C}}(z_{n-k+1}) \dots d\ell_{\mathbb{C}}(z_n). \quad (2.5)$$

Note that the  $k$ -th term of the mixture corresponds to the case where  $P_n$  has  $n - 2k$  real roots.

Finally, in the case of positive exponential real coefficients, the distribution of the

vector of the zeros is given by:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{2^k n!}{k!(n-2k)!} \frac{\prod_{i<j} |z_i - z_j|}{(\prod_{i=1}^n |1 - z_i|)^{(n+1)}} d\ell_{n,k}(z_1, \dots, z_n) \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{2^k n!}{k!(n-2k)!} \frac{\prod_{i<j} |z_i - z_j|}{\|\tilde{a}\|_1^{n+1}} d\ell_{n,k}(z_1, \dots, z_n). \end{aligned}$$

**Main idea of the proof of Theorem 2.1.** We will prove the universality of the LDP by comparing the distributions of the vectors of the zeros in the different models. Assume that the joint density of the zeros  $(z_1, \dots, z_n)$  is  $h$  and  $\mu_n$  is the empirical measure associated to this model. Assume one could find two sequences  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  and  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  satisfying

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \log b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \log c_n = 0 \quad (2.6)$$

and two probability densities on  $\mathbb{C}^n$ ,  $F_n$  and  $G_n$  satisfying:

$$\forall (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \quad b_n F_n(z_1, \dots, z_n) \leq h(z_1, \dots, z_n) \leq c_n G_n(z_1, \dots, z_n) \quad (2.7)$$

such that, under the distribution given by  $F_n$  or  $G_n$ , the sequence of empirical measures  $(\mu_n^{F_n})_{n \in \mathbb{N}}$  and  $(\mu_n^{G_n})_{n \in \mathbb{N}}$  satisfies a LDP in  $\mathcal{M}_1(\mathbb{C})$ , with speed  $n^2$  and the same rate function  $I$ . Then, the sequence  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  satisfies a LDP in  $\mathcal{M}_1(\mathbb{C})$  with speed  $n^2$  and rate function  $I$ , since for any set  $A$ ,  $\mathbb{P}(\mu_n \in A)$  is an integral with respect to the distribution of the zeros and therefore one can use the bounds (2.7) to obtain the LDP.

In practice, we will obtain (2.7) by noting that if the joint distribution of the coefficients is a function of a norm  $\|\cdot\|$  of the vector of the coefficients, the distribution of the zeros is roughly of the form:

$$\frac{\prod_{i<j} |z_i - z_j|^2}{\|\tilde{a}\|^{2n+2}}.$$

If  $\|\cdot\|$  can be compared with  $\|\cdot\|_2$  with nice constants, then we can relate the density of zeros to the Gaussian cases in the spirit of (2.7). For i.i.d. variables, the first hypothesis of the theorem is used to replace the joint distribution of the coefficients by a function of  $\|a\|_\rho$  and then we prove the upper bound for the latter distribution. The second hypothesis means that, for the lower bound, we can replace the joint distribution of  $a$  by a  $1_{\|a\|_\infty \leq \delta}$  which is also a function of a norm.

We conclude this introduction by stating and proving a technical lemma that will be used in the proof of the LDP lower bound.

**Lemma 2.2.** *Let  $E$  be  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{R}$  or  $\mathbb{R}^+$ . Assume that there exists  $\delta > 0$  such that for all  $\lambda > 0$ ,*

$$c(\lambda) := \int 1_{|x| \leq \delta} \frac{1}{g(x)^\lambda} d\ell_E(x) < \infty. \quad (2.8)$$

*Then, for any  $K > 0$  and  $\varepsilon > 0$  there exists  $n_0 = n_0(K, \delta, \varepsilon)$  such that for all  $n > n_0$ ,*

$$\int 1_{\{\prod_{k=0}^n g(a_k) \leq e^{-\varepsilon n^2}\}} 1_{\|a\|_\infty < \delta} d\ell_E^{\otimes n}(a_0, \dots, a_n) \leq e^{-Kn^2}. \quad (2.9)$$

*Proof of Lemma 2.2.* Fix  $K > 0$ , mimicking the proof of Chernoff's inequality, we have:

$$\begin{aligned}
& \int 1_{\{\prod_{k=0}^n g(a_k) \leq e^{-\varepsilon n^2}\}} 1_{\|a\|_\infty < \delta} d\ell_{E^{n+1}}(a_0, \dots, a_n) \\
&= \int 1_{\{\prod_{k=0}^n g(a_k)^{-\lambda} \geq e^{\lambda \varepsilon n^2}\}} 1_{\|a\|_\infty < \delta} d\ell_{E^{n+1}}(a_0, \dots, a_n) \\
&\leq e^{-\lambda \varepsilon n^2} \int \prod_{k=0}^n [g(a_k)^{-\lambda} 1_{|a_k| < \delta}] d\ell_{E^{n+1}}(a_0, \dots, a_n) \\
&\leq e^{-\lambda \varepsilon n^2} e^{(n+1)c(\lambda)}.
\end{aligned}$$

The proof is completed by taking  $\lambda$  large enough so that  $\lambda \varepsilon > K$  and then taking  $n_0$  large enough so that  $e^{-\lambda \varepsilon n^2} e^{(n+1)c(\lambda)} \leq e^{-Kn^2}$  for all  $n > n_0$ .  $\square$

## 2.2 Proof of Theorem 2.1

The proof of the main theorem is made in two steps: we start by proving the theorem when the coefficients are complex, and then we treat the real and the positive case. The proof of the three cases are very similar, the arguments and ideas are exactly the same.

*Proof of Theorem 2.1. Complex coefficients.*

Recall that the density of the distribution of the random vector of zeros  $(z_1, \dots, z_n)$  (taken at random uniform order) with respect to  $\ell_{\mathbb{C}^n}$  is given by

$$p(z_1, \dots, z_n) = \frac{1}{n!} \int \prod_{i < j} |z_i - z_j|^2 |a_n|^{2n} g(a_0) \dots g(a_n) d\ell_{\mathbb{C}}(a_n)$$

where the  $a_j$ 's are seen as functions of  $z_1, \dots, z_n$  and  $a_n$  using Vieta's formula. See e.g. [HKPV09, Lemma 1.1.1] for a proof of this classical result.

**Upper Bound.** Using the inequality (2.2), we obtain:

$$p(z_1, \dots, z_n) \leq \frac{1}{n!} \int \prod_{i < j} |z_i - z_j|^2 |a_n|^{2n} \exp\left(-r \sum_{k=0}^n |a_k|^\rho\right) e^{(n+1)R} d\ell_{\mathbb{C}}(a_n)$$

For a vector  $b = (b_0, \dots, b_n)$  and  $\rho > 0$ , set  $\|b\|_\rho = (\sum_{i=0}^n |b_i|^\rho)^{1/\rho}$ . Then,

$$\int \prod_{i < j} |z_i - z_j|^2 |a_n|^{2n} e^{-r \sum_{k=0}^n |a_k|^\rho} d\ell_{\mathbb{C}}(a_n) = \int \prod_{i < j} |z_i - z_j|^2 |a_n|^{2n} e^{-r \|a_n\|_\rho^\rho} d\ell_{\mathbb{C}}(a_n)$$

where  $\tilde{a} = (a_0/a_n, \dots, a_{n-1}/a_n, 1)$ . We note that  $\tilde{a}$  only depends on the zeros and not on  $a_n$ , so we can compute the last integral using the change of variables  $u = a_n \|\tilde{a}\|_\rho$  to obtain:

$$p(z_1, \dots, z_n) \leq \frac{1}{n!} e^{(n+1)R} \frac{\prod_{i < j} |z_i - z_j|^2}{\|\tilde{a}\|_\rho^{2n+2}} \int |u|^{2n} e^{-r|u|^\rho} d\ell_{\mathbb{C}}(u).$$

Finally, using the classical inequalities on  $\mathbb{C}^{n+1}$ , which are a consequence of the Holder inequality:

$$\begin{aligned}
& \text{if } \rho > 2, \quad \|\cdot\|_\rho \geq \frac{1}{n^{1/2-1/\rho}} \|\cdot\|_2 \\
& \text{if } \rho \leq 2, \quad \|\cdot\|_\rho \geq \|\cdot\|_2
\end{aligned}$$



we obtain that there exists a sequence  $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$  such that, for any fixed  $\rho > 0$ ,

$$\|\cdot\|_\rho \geq \gamma_n \|\cdot\|_2 \quad \text{and} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \gamma_n = 0. \quad (2.10)$$

Using this inequality we get

$$\begin{aligned} p(z_1, \dots, z_n) &\leq \frac{1}{n!} e^{(n+1)R} \frac{\prod_{i < j} |z_i - z_j|^2}{\|\tilde{a}\|_2^{2n+2}} \frac{1}{\gamma_n^{2n+2}} \int |u|^{2n} e^{-r|u|^\rho} d\ell_{\mathbb{C}}(u) \\ &\leq \frac{1}{n!} e^{(n+1)R} \frac{1}{\pi^n} \frac{\prod_{i < j} |z_i - z_j|^2}{\|\tilde{a}\|_2^{2n+2}} \times \frac{\pi^n}{\gamma_n^{2n+2}} \int |u|^{2n} e^{-r|u|^\rho} d\ell_{\mathbb{C}}(u). \end{aligned}$$

The first term of the product is the distribution  $\mu_n^{\mathbb{C}}$ , see (2.4), and thanks to (2.10) we have

$$c_n := e^{(n+1)R} \frac{\pi^n}{n! \gamma_n^{2n+2}} \int |u|^{2n} e^{-r|u|^\rho} d\ell_{\mathbb{C}}(u) = e^{O(n \log n)}.$$

Let  $A \subset \mathcal{M}_1(\mathbb{C})$  be a Borel set. Then,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^2} \log \mathbb{P}(\mu_n \in A) &= \frac{1}{n^2} \log \int \mathbf{1}_{\mu_n \in A} p(z_1, \dots, z_n) d\ell_{\mathbb{C}^n}(z_1, \dots, z_n) \\ &\leq \frac{1}{n^2} \log \int \frac{1}{\pi^n} \frac{\mathbf{1}_{\mu_n \in A} \prod_{i < j} |z_i - z_j|^2}{(\int \prod_{k=1}^n |z - z_k|^2 d\nu_{S^1}(z))^{n+1}} d\ell_{\mathbb{C}^n}(z_1, \dots, z_n) + \frac{\log c_n}{n^2} \\ &= \frac{1}{n^2} \log \mathbb{P}(\mu_n^{\mathbb{C}} \in A) + \frac{\log c_n}{n^2}. \end{aligned}$$

Therefore, using the LDP upper bound for  $\mu_n^{\mathbb{C}}$ , we complete the proof of the upper bound by noting that

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \log \mathbb{P}(\mu_n \in A) \leq - \inf_{\text{clo} A} I_{\mathbb{C}}.$$

**Lower Bound.** First, we show that the technical lemma allows us to reduce the problem to the proof of the lower bound for i.i.d.  $(a_i)$ , with uniform distribution on the disk  $D(0, \delta)$ . Let  $A \subset \mathcal{M}_1(\mathbb{C})$  be a Borel set with  $\inf_{\text{int} A} I_{\mathbb{C}} < \infty$ , fix  $K > \inf_{\text{int} A} I_{\mathbb{C}}$  and  $\varepsilon > 0$  then, thanks to Lemma 2.2 there exists  $n_0$  such that for any  $n > n_0$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\mu_n \in A) &= \int \mathbf{1}_{\mu_n \in A} \prod_{k=0}^n g(a_k) d\ell_{\mathbb{C}}(a_0) \dots d\ell_{\mathbb{C}}(a_n) \\ &\geq \int \mathbf{1}_{\{\prod_{k=0}^n g(a_i) \geq e^{-\varepsilon n^2}\}} \mathbf{1}_{\mu_n \in A} \mathbf{1}_{\|a\|_\infty < \delta} \prod_{k=0}^n g(a_k) d\ell_{\mathbb{C}}(a_0) \dots d\ell_{\mathbb{C}}(a_n) \\ &\geq e^{-\varepsilon n^2} \int \mathbf{1}_{\{\prod_{k=0}^n g(a_i) \geq e^{-\varepsilon n^2}\}} \mathbf{1}_{\mu_n \in A} \mathbf{1}_{\|a\|_\infty < \delta} d\ell_{\mathbb{C}}(a_0) \dots d\ell_{\mathbb{C}}(a_n) \\ &\geq e^{-\varepsilon n^2} \int \mathbf{1}_{\mu_n \in A} \mathbf{1}_{\|a\|_\infty < \delta} d\ell_{\mathbb{C}}(a_0) \dots d\ell_{\mathbb{C}}(a_n) - e^{-(K+\varepsilon)n^2}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

The integral  $\int \mathbf{1}_{\mu_n \in A} \mathbf{1}_{\|a\|_\infty < \delta} d\ell_{\mathbb{C}}(a_0) \dots d\ell_{\mathbb{C}}(a_n)$  is, up to a normalizing factor  $(\pi\delta^2)^{n+1}$  which is of order  $e^{O(n)}$ , the probability that the empirical measure of the zeros of a random polynomial with i.i.d. uniform coefficients on the disk  $D(0, \delta)$  belongs to  $A$ .

Now we deal with this integral using the same techniques used for the upper bound:

$$\begin{aligned}
& \int 1_{\mu_n \in A} 1_{\|\tilde{a}\|_\infty < \delta} d\ell_{\mathbb{C}}(a_0) \dots d\ell_{\mathbb{C}}(a_n) \\
&= \int 1_{\mu_n \in A} \frac{1}{n!} \prod_{i < j} |z_i - z_j|^2 \int 1_{|a_n| \|\tilde{a}\|_\infty < \delta} |a_n|^{2n} d\ell_{\mathbb{C}}(a_n) d\ell_{\mathbb{C}^n}(z_1, \dots, z_n) \\
&= \int 1_{\mu_n \in A} \frac{1}{n!} \frac{\prod_{i < j} |z_i - z_j|^2}{\|\tilde{a}\|_\infty^{2n+2}} d\ell_{\mathbb{C}^n}(z_1, \dots, z_n) \int |u|^{2n} 1_{|u| < \delta} d\ell_{\mathbb{C}}(u) \\
&= \frac{1}{\pi^n} \int 1_{\mu_n \in A} \frac{\prod_{i < j} |z_i - z_j|^2}{\|\tilde{a}\|_2^{2n+2}} d\ell_{\mathbb{C}^n}(z_1, \dots, z_n) \frac{\pi^n}{n!} \int |u|^{2n} 1_{|u| < \delta} d\ell_{\mathbb{C}}(u) \\
&= \mathbb{P}(\mu_n^{\mathbb{C}} \in A) \frac{\pi^n}{n!} \int |u|^{2n} 1_{|u| < \delta} d\ell_{\mathbb{C}}(u).
\end{aligned}$$

Here we used the change of variables  $u = \|\tilde{a}\|_\infty a_n$ , using the fact that  $\|\tilde{a}\|_\infty$  does not depend on  $a_n$  and the inequality  $\|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_2$  in  $\mathbb{C}^{n+1}$ . Since

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \log \left( \frac{\pi^n}{n!} \int |u|^{2n} 1_{|u| < \delta} d\ell_{\mathbb{C}}(u) \right) = 0,$$

we obtain

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \log \int 1_{\mu_n \in A} \frac{\prod_{i < j} |z_i - z_j|^2}{n!} \int 1_{|a_n| \|\tilde{a}\|_\infty < \delta} |a_n|^{2n} d\ell_{\mathbb{C}}(a_n) d\ell_{\mathbb{C}^n}(z_1, \dots, z_n) \geq - \inf_{\text{int} A} I_{\mathbb{C}}.$$

Combined with (2.11) we obtain

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \log \mathbb{P}(\mu_n \in A) \geq -\varepsilon - \inf_{\text{int} A} I_{\mathbb{C}}.$$

Taking the limit as  $\varepsilon$  goes to zero completes the proof of the lower bound.

**Real coefficients.** Let  $E$  be  $\mathbb{R}$  or  $\mathbb{R}^+$ . The proof for real coefficients is essentially the same as for complex coefficients, except that the distribution of the roots is a mixture of measures instead of an absolutely continuous measure. We will apply the same ideas to each term of the mixture to obtain the upper and lower bound. If the coefficients  $a_k$ 's are i.i.d. random variables with density  $g$  with respect to the Lebesgue measure on  $E$ , then the distribution of the vector  $(z_1, \dots, z_n, a_n)$  is given by:

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{2^k}{k!(n-2k)!} |a_n|^n \prod_{i < j} |z_i - z_j| \prod_{k=0}^n g(a_i) d\ell_E(a_n) d\ell_{n,k}(z_1, \dots, z_n) \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{2^k}{k!(n-2k)!} p_{n,k}(z_1, \dots, z_n, a_n) d\ell_E(a_n) d\ell_{n,k}(z_1, \dots, z_n).
\end{aligned}$$

Using exactly the same reasoning as in the complex case, we define  $\theta_n^E$  as:

$$\theta_n^E = \begin{cases} \frac{\pi^{(n-1)/2}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})} & \text{if } E = \mathbb{R} \\ \frac{1}{n!} & \text{if } E = \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

and we notice that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \log \theta_n^E = 0.$$

We obtain that for any  $k$ :

$$\int p_{n,k}(z_1, \dots, z_n) d\ell_E(a_n) \leq \frac{1}{\theta_n^E} \frac{\prod_{i<j} |z_i - z_j|}{(\int \prod_{i=1}^n |z - z_i|^2 d\nu_{S^1})^{(n+1)/2}} \frac{\theta_n^E}{\gamma_n^{n+1}} e^{(n+1)R} \int_E |u|^n e^{-r|u|^\rho} du.$$

This inequality implies that, for any Borel set  $A \in \mathcal{M}_1(\mathbb{C})$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\mu_n \in A) &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{2^k}{k!(n-2k)!} \int 1_{\mu_n \in A} \int p_{n,k}(z_1, \dots, z_n) d\ell_E(a_n) d\ell_{n,k}(z_1, \dots, z_n) \\ &\leq \frac{\theta_n^E}{\gamma_n^{n+1}} e^{(n+1)R} \int_E |u|^n e^{-r|u|^\rho} du \mathbb{P}(\mu_n^E \in A). \end{aligned}$$

Using the fact that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \log \left( \frac{\theta_n^E}{\gamma_n^{n+1}} e^{(n+1)R} \int_E |u|^n e^{-r|u|^\rho} du \right) = 0$$

and the large deviations principle for  $(\mu_n^E)_{n \in \mathbb{N}}$  ends the proof of the upper bound.

The proof of the lower bound is very similar to the complex case, we use the technical lemma to deal with i.i.d. uniform random variables on the disk  $D(0, \delta)$ .

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\mu_n \in A) &= \int 1_{\mu_n \in A} \prod_{k=0}^n g(a_k) d\ell_E(a_0) \dots d\ell_E(a_n) \\ &\geq \int 1_{\{\prod_{k=0}^n g(a_k) \geq e^{-\varepsilon n^2}\}} 1_{\mu_n \in A} 1_{\|a\|_\infty < \delta} \prod_{k=0}^n g(a_k) d\ell_E(a_0) \dots d\ell_E(a_n) \\ &\geq e^{-\varepsilon n^2} \int 1_{\mu_n \in A} 1_{\|a\|_\infty < \delta} d\ell_E(a_0) \dots d\ell_E(a_n) - e^{-(K+\varepsilon)n^2}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

We transform this integral in order to compare it to one of the known cases.

$$\begin{aligned} &\int 1_{\mu_n \in A} 1_{\|a\|_\infty < \delta} d\ell_E(a_0) \dots d\ell_E(a_n) \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{2^k}{k!(n-2k)!} \int 1_{\mu_n \in A} 1_{\|a\|_\infty < \delta} |a_n|^n \prod_{i<j} |z_i - z_j| d\ell_E(a_n) d\ell_{n,k}(z_1, \dots, z_n) \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{2^k}{k!(n-2k)!} \int |u|^{n+1} 1_{|u| < \delta} d\ell_E(u) \int 1_{\mu_n \in A} \frac{\prod_{i<j} |z_i - z_j|}{\|\tilde{a}\|_\infty^{n+1}} d\ell_{n,k}(z_1, \dots, z_n). \end{aligned}$$

If  $E = \mathbb{R}$ , we use the inequality  $\|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_2$  on  $\mathbb{R}^{n+1}$  to obtain

$$\begin{aligned} &\int 1_{\mu_n \in A} 1_{\|a\|_\infty < \delta} d\ell_{\mathbb{R}}(a_0) \dots d\ell_{\mathbb{R}}(a_n) \\ &\geq \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{2^k}{k!(n-2k)!} \int |u|^{n+1} 1_{|u| < \delta} d\ell_{\mathbb{R}}(u) \int 1_{\mu_n \in A} \frac{\prod_{i<j} |z_i - z_j|}{\|\tilde{a}\|_2^{n+1}} d\ell_{n,k}(z_1, \dots, z_n). \end{aligned}$$

If  $E = \mathbb{R}^+$ , we use the inequality  $\|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_1$  on  $\mathbb{R}^{n+1}$  to obtain

$$\begin{aligned} &\int 1_{\mu_n \in A} 1_{\|a\|_\infty < \delta} d\ell_{\mathbb{R}^+}(a_0) \dots d\ell_{\mathbb{R}^+}(a_n) \\ &\geq \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{2^k}{k!(n-2k)!} \int |u|^{n+1} 1_{|u| < \delta} d\ell_{\mathbb{R}^+}(u) \int 1_{\mu_n \in A} \frac{\prod_{i<j} |z_i - z_j|}{\|\tilde{a}\|_1^{n+1}} d\ell_{n,k}(z_1, \dots, z_n). \end{aligned}$$

Note that the only difference between the case  $\mathbb{R}$  and the case  $\mathbb{R}^+$  is the reference norm employed. Using (2.12) with the last two inequalities, we obtain that for any  $\varepsilon > 0$  fixed, we have:

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \log \mathbb{P}(\mu_n \in A) &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \log \mathbb{P}(\mu_n^E \in A) + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \log \theta_n^E - \varepsilon \\ &\geq - \inf_{\text{int}A} I_E - \varepsilon. \end{aligned}$$

Taking the limit as  $\varepsilon$  goes to zero ends the proof of the large deviations lower bound for the real and positive cases.  $\square$

## 2.3 Concluding remarks and an open problem.

We focused in this note on Kac polynomials but we could as well study the universality of the large deviations for the zeros of

$$P_n = \sum_{k=0}^n a_k R_k$$

where the  $R_k$ 's are orthogonal polynomials satisfying the assumptions of regularity given in [ZZ10] and [But16]. In this case, the distribution of the zeros can be computed ([But16, Theorem 5.1]) and, under the same hypotheses as in Theorem 2.1, the same large deviations principle as for Gaussian coefficients holds. Similar ideas apply to certain non i.i.d. models such as the  $P(\phi)_2$  model of [FZ11].

A significant limitation of our approach is the use of the assumption (2.3) in Theorem 2.1. While it is possible that it can be relaxed, we note that some assumption of this type is necessary for the universality result. Indeed, if the support of the distribution of the coefficients is inside an annulus, it follows from Jensen's formula, see [HN08], that  $\mu_n$  converges deterministically towards  $\nu_{S^1}$ . Hence, no non-trivial LDP can hold in this case. An interesting test case is the case where the i.i.d. coefficients possess the density  $|z|^\alpha 1_{|z| < \delta}$  for some  $\alpha > 0$  and  $\delta > 0$ . In that case, the distribution of the zeros  $(z_1, \dots, z_n)$  is absolutely continuous with respect to the Lebesgue measure on  $\mathbb{C}^n$  with density proportional to:

$$\prod_{i < j} |z_i - z_j|^2 \int |a_n|^{2n} \prod |a_i|^\alpha 1_{\|a\|_\infty < \delta} d\ell_{\mathbb{C}}(a_n) = \frac{\prod_{i < j} |z_i - z_j|^2}{\|\tilde{a}\|_\infty^{2n+2+n\alpha}} \prod_{k=0}^n \frac{|a_k|}{|a_n|}.$$

If we are able to prove that the term  $\prod_{k=0}^n \frac{|a_k|}{|a_n|}$  does not contribute to the large deviations, then a LDP at speed  $n^2$  would hold with rate function

$$I_\alpha(\mu) = - \iint \log |z - w| d\mu(z) d\mu(w) + (2 + \alpha) \sup_{z \in S^1} \int \log |z - w| d\mu(w).$$

In particular, we do not expect universality in that case. We have not been able to carry out the analysis of this setup.



## Chapter 3

# The largest root of Kac polynomials is heavy tailed

Ce chapitre correspond à la pré-publication arXiv [But17b]. Nous démontrons que la plus petite et la plus grande racine en module de polynômes de Kac ont un comportement non universel. Elles ne convergent pas vers le support de la limite des mesures empiriques et leur loi dépend fortement de la loi des coefficients. Nous montrons que la plus grande racine en module est généralement une variable aléatoire à queues lourdes dont le nombre de moments finis est contrôlé par le comportement à l'origine de la loi des coefficients.

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>93</b>
<b>3.2</b>	<b>Proofs of the results</b>	<b>97</b>
<b>3.3</b>	<b>Comments.</b>	<b>101</b>

We prove that the largest and smallest root in modulus of random Kac polynomials have a non-universal behavior. They do not converge towards the edge of the support of the limiting distribution of the zeros. This non-universality is surprising as the large deviations principle for the empirical measure is universal. This is in sharp contrast with random matrix theory where the large deviations principle is non-universal but the fluctuations of the largest eigenvalue are universal. We show that the modulus of the largest zero is heavy tailed, with a number of finite moments bounded from above by the behavior at the origin of the distribution of the coefficients. We also prove that the random process of the roots of modulus smaller than one converges towards a limit point process. Finally, in the case of complex Gaussian coefficients, we use the work of Peres and Virág [PV05] to obtain explicit formulas for the limiting objects.

### 3.1 Introduction

Consider a random polynomial of the form

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k = a_n \prod_{k=1}^n (z - z_k^{(n)})$$

where  $a_0, \dots, a_n$  are i.i.d. random variables and  $z_1^{(n)}, \dots, z_n^{(n)}$  are the complex zeros of  $P_n$ . These polynomials are often called Kac polynomials. The zeros of these polynomials are known to concentrate on the unit circle of  $\mathbb{C}$  as their degree tends to infinity under some moment condition on the coefficients. This universal behavior has been studied by many

authors since the work of Sparo and Shur [ŠŠ62] and we refer to the book [BRS86] for more precise information on the history of the topic. The most precise result about this convergence was given by Ibragimov and Zaporozhets in [IZ13], where they prove that for any bounded and continuous function  $f$  and any  $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P} \left( \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(z_k^{(n)}) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) d\theta \right| > \varepsilon \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

if and only if  $\mathbb{E}(\log(1 + |a_0|)) < \infty$  and  $\mathbb{P}(a_0 = 0) < 1$ .

This result means that a proportion going to one of the zeros clusters uniformly on the unit circle. It does not prevent a negligible part of the zeros to be real or to be away from the unit circle. In this situation, it is natural to ask if  $\max_k |z_k^{(n)}|$  and  $\min_k |z_k^{(n)}|$  converge towards 1 as  $n$  goes to infinity. In this note, we prove that the behavior of the extremal zeros of  $P_n$  is not universal and that the random variable  $\max |z_k^{(n)}|$  is usually a heavy tailed random variable. We give an upper bound on the number of finite moments, depending on the cumulative distribution function of the coefficients at 0.

To study the zeros of  $P_n$  for large  $n$ , we may want to see  $P_n$  as the partial sum of a random entire series. If we assume that the random variable  $|a_0|$  is non-deterministic and satisfies  $\mathbb{E}(\log(1 + |a_0|)) < \infty$ , then the entire series  $P_\infty(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$  has almost surely a radius of convergence equal to 1 and  $P_\infty$  is a random non-constant holomorphic function on the unit disk. Hence  $P_\infty$  has a countable set of zeros  $\{z_k^{(\infty)}\}$  which are counted with multiplicity. As  $P_\infty$  is almost surely a non-constant analytic function, its zeros are isolated and have no accumulation point inside the open unit disk. This ensures that there is a finite number of zeros inside any compact set in the disk.

**Theorem 3.1** (Main result). *Assume that the random variable  $a_0$  satisfies  $\mathbb{E}(\log(1 + |a_0|)) < \infty$ , that  $|a_0|$  is not deterministic and that  $\mathbb{P}(a_0 = 0) = 0$ . Let  $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  and*

$$x_1^{(n)} = \min_k |z_k^{(n)}| \text{ and if } n < \infty, x_n^{(n)} = \max_k |z_k^{(n)}|.$$

1. *The random variable  $x_n^{(n)}$  has the same distribution as  $1/x_1^{(n)}$ .*
2. *There exists three constants  $C_1 > 0$ ,  $r > 0$  and  $A > 0$  depending only on the distribution of  $|a_0|$  such that*

$$\forall 0 < t < C_1, \quad \mathbb{P} \left( x_1^{(n)} \leq t \right) \geq \mathbb{P} \left( |a_0| \leq \frac{rt}{2} \right) A. \quad (3.1)$$

3. *If there exists  $k \geq 0$ ,  $a > 0$  and  $\delta > 0$  such that*

$$\forall t < \delta, \quad \mathbb{P}(|a_0| \leq t) \geq at^k \quad \text{then} \quad \mathbb{E}((x_n^{(n)})^k) = \infty.$$

4. *Almost surely, the point process  $\chi_n = \{z_k^{(n)} \text{ such that } |z_k^{(n)}| < 1\}$  converges weakly in the space of Radon measures towards  $\chi_\infty = \{z_k^{(\infty)}\}$ . More precisely, for any continuous and compactly supported function  $f$  defined on the open unit disk  $D(0, 1)$ , we have*

$$\sum_k f(z_k^{(n)}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{a.s.} \sum_k f(z_k^{(\infty)}).$$

5. *The random variable  $x_1^{(n)}$  converges almost surely towards  $x_1^{(\infty)}$  and  $x_n^{(n)}$  converges in distribution towards  $x^{(\infty)} := 1/x_1^{(\infty)}$ .*

The condition  $\mathbb{P}(a_0 = 0) = 0$  ensures that the degree of  $P_n$  is  $n$ . Hence the zero set  $\{z_k^{(n)}\}$  is well defined. If we remove this condition, the theorem is still true if we take the convention that, for a polynomial of degree  $k < n$ ,  $z_{k+1}^{(n)} = \dots = z_n^{(n)} = \infty$ .

In the case of real Gaussian coefficients, Majumdar and Schehr proved a similar result to the point 3 for the largest real root in [SM08]. They use a Taylor expansion of the first intensity function of the real zeros at 0 to prove that the density of  $x_n^{(n)}$  decays at infinity like  $1/t^2$ .

Notice that the first three points of Theorem 3.1 are valid for any fixed  $n$ . The heavy tail behavior of the largest root is not asymptotic. The points (4) and (5) imply that the heavy tail phenomena do not vanish at infinity, namely that  $x^{(\infty)}$  does not have more finite moments than  $x_n^{(n)}$ . The point (4) is a deterministic statement and is a direct application of Hurwitz's theorem in complex analysis. It will allow us to obtain Corollary 3.2 which gives the limit of the point process  $\chi_n$  for complex Gaussian coefficients.

What does this theorem say for some classical distribution of the coefficients? If the distribution of  $|a_0|$  is absolutely continuous with respect to the Lebesgue measure on  $\mathbb{R}_+$  with density  $g$ , then the point (3) can be linked to the density  $g$  at zero:

1. if  $g$  is continuous at 0 and  $g(0) > 0$  then the largest root in modulus has infinite mean;
2. if  $g(t) \sim \alpha t$  at zero, then  $x_n^{(n)}$  has an infinite second moment.

These two situations cover most of the classical examples of random variables. Real Gaussian random variables, exponential random variables, Cauchy random variables and many others are covered by the first part of the remark. Radial complex random variables such as complex Gaussian random variables are covered by the second point. This is a consequence of the polar change of coordinates which adds a factor  $2\pi r$  to the density. This phenomenon is illustrated in Figure 3.1: when the coefficients are complex, the density of  $x_1^{(n)}$  vanishes at zero.

If the distribution of the  $a_k$ 's is supported in an annulus bounded away from zero, then all the roots lie in an annulus. This can be seen as a consequence of the Gershgorin circle theorem of localization of the eigenvalues of matrices, applied to the companion matrix of the polynomial  $P_n$ . In this setting, we also know that the empirical measure of  $P_n$  converges deterministically towards the uniform measure on the unit circle [HN08].

This theorem can be surprising if we compare it to similar results in random matrix theory. There is a strong analogy of results and techniques between random polynomials and random matrices. For Ginibre random matrices or Kac random polynomials, the empirical measures converge towards a deterministic measure and the explicit distribution of the eigenvalues (or zeros) can be computed when the coefficients are Gaussian (real or complex). Large deviation principles for the empirical measures were obtained with the same speed and very similar rate functions ([HP00], [BAZ98] for Ginibre, [ZZ10] and [But16] for Kac polynomials). For random matrices, the large deviations principle for the empirical measure is known not to be universal [BC14] and to depend on the tail of the coefficients of the matrix. For random polynomials, the large deviations principle is universal [BZ17]. For random matrices, the fluctuations of the largest eigenvalue at the edge of the limiting distribution have been studied by many authors since [TW94] and have proven to be universal.

When the  $a_k$ 's are i.i.d. standard complex Gaussian random variables, the zeros of  $P_n$



form a Coulomb gas in  $\mathbb{C}^n$  (see [ZZ10]) with density of the form

$$(z_1^{(n)}, \dots, z_n^{(n)}) \sim \frac{1}{Z_n} \exp \left( \sum_{i \neq j} \log |z_i^{(n)} - z_j^{(n)}| - (n+1) \log \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \prod_{k=1}^n |e^{i\theta} - z_k^{(n)}|^2 d\theta \right).$$

This is similar to the eigenvalues of complex Ginibre random matrices where the density of the eigenvalues on  $\mathbb{C}^n$  is of the form (see [Gin65])

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \sim \frac{1}{Z'_n} \exp \left( \sum_{i \neq j} \log |\lambda_i - \lambda_j| - n \sum_{k=1}^n \frac{|\lambda_k|^2}{2} \right).$$

They have in common the same interaction between the particles, but the confining term is different. Why does the largest particle have such a different behavior for polynomials and matrices? If we look at the behavior of the confining term in each variable for random polynomials, we see that it grows at infinity like  $\log(|z|)$  while the confining term for Ginibre is  $V(z) = |z|^2/2$ . We believe that it is a general fact for Coulomb gases: when the confining term is of order  $\log|z|$  at infinity, the largest particle has a heavy tail and when the confining term is stronger than logarithm, the largest particle should converge towards the edge of the limiting distribution. The potential energy of the largest particle is approximatively  $\int -\log|z-w|d\mu_\infty(w) + V(z)$ , where  $\mu_\infty$  is the limiting distribution of the particles. Hence, if  $V$  grows faster than logarithm, the cost of having a particle far from the support of  $\mu_\infty$  grows at infinity. On the other hand, if  $V$  and  $\int -\log|z-w|d\mu_\infty(w)$  are of same order, the cost of having a particle far from the support of  $\mu_\infty$  is finite. To our knowledge, this phenomenon is not treated in the literature. The heuristic above only relies on “energetic” considerations and has not been proved so far. The same phenomenon should appear for real Gaussian coefficients, as the distribution of the zeros of  $P_n$  [But16] is also very similar to the distribution of the eigenvalues of the real Ginibre ensemble [Ede97]: both form a mixture of Coulomb gases, each gas having a fixed number of particles on the real line.

If we compare the hypotheses of Theorem 3.1 with the one of the main theorem from [BZ17], we see that both rely on the behavior of the distribution of the coefficients at zero. Within the universality class of random Kac polynomials with Gaussian coefficients, the number of finite moments for the largest root is constant.

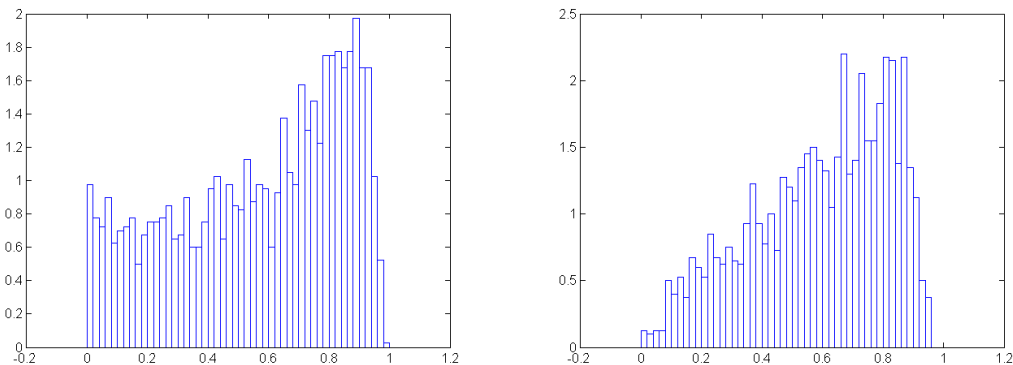


Figure 3.1: Histogram of the  $x_1^{(500)}$  for exponential coefficients with mean 1 (left) and  $d\mu = 1/2\pi e^{-|z|} dz$  on  $\mathbb{C}$  (right).

### Complex Gaussian coefficients.

Theorem 3.1 states that  $x_1^{(n)}$  and  $x_n^{(n)}$  converge in distribution but does not give any precise information on the limit. In the case of complex Gaussian coefficients, we can give a more precise result on this limiting distribution, as the zeros of  $P_\infty$  have been studied in the case of Gaussian Analytic Functions (GAF) by Peres and Virág in [PV05]

$$P_\infty(z) = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k z^k.$$

The corollary below is just a combination of Theorem 3.1 along with [HKPV09, Theorem 5.1.1 and Corollary 5.1.7].

**Corollary 3.2** (Gaussian case). *Let  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  be a sequence of i.i.d. standard complex Gaussian random variables.*

1. *The point process  $\{z_k^{(n)} \text{ such that } |z_k^{(n)}| < 1\}$  converges towards the determinantal point process in the open unit disk  $D(0, 1)$  with the Bergman Kernel*

$$\forall z, w \in D(0, 1), \quad K(z, w) = \frac{1}{\pi(1 - z\bar{w})^2}.$$

*As a consequence, the set  $\{|z_k^{(\infty)}|\}_{k \geq 1}$  has the same law as the set  $\{U_k^{1/2k}\}_{k \geq 1}$ , where  $(U_k)_{k \geq 1}$  is a sequence of i.i.d. uniform random variables on  $[0, 1]$ .*

2. *The smallest root in modulus of  $P_\infty$ ,  $z_1$ , has a rotationally invariant distribution and its modulus,  $x_1^{(\infty)}$ , has a cumulative distribution function defined on  $(0, 1)$  given by:*

$$F_{x_1^{(\infty)}}(t) = 1 - \prod_{k=1}^{\infty} (1 - t^{2k}).$$

This theorem is no more than the combination of the work of Peres and Virág [PV05] with Theorem 3.1. This allows us to compute the exact limit distribution of the smallest modulus of the zeros of  $P_n$ . Notice that the cumulative distribution function  $F_{x_1^{(\infty)}}$  is of order  $t^2$  around zeros, which implies that  $1/x_1^{(\infty)}$  has an infinite variance.

Figure 3.2 is an illustration of the point (2) of Corollary 3.2. The histogram of  $x_1^{(500)}$  is very similar to the graph of the density of  $x_1^\infty$ .

## 3.2 Proofs of the results

We start with a lemma that will be essential in the proof of Theorem 3.1.

**Lemma 3.3** (Lemma 4.1 in [KZ14]). *Let  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  be i.i.d. random variables. Fix  $\varepsilon > 0$ . Then*

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \frac{|a_k|}{e^{\varepsilon k}} < \infty \text{ a.s.} \Leftrightarrow \mathbb{E}(\log(1 + a_0)) < \infty.$$

*Proof of the lemma.* For every non negative random variable  $X$  we have:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq k) \leq \mathbb{E}(X) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq k).$$

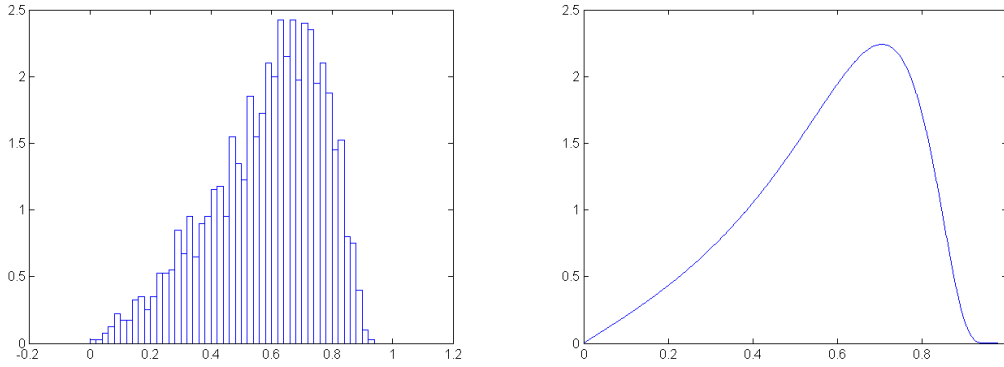


Figure 3.2: Histogram of  $x_1^{(500)}$  for complex Gaussian coefficients and density of  $x_1^{(\infty)}$ .

Those inequalities come from the relation:  $\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}^+} \mathbb{P}(X \geq x) dx$ . Now we use them with the non negative variable

$$X = \frac{1}{\varepsilon} \log(1 + |a_0|).$$

We deduce that

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(\frac{|a_k|}{e^{\varepsilon k}} > 1\right) < \infty$$

and so we have, thanks to the Borel-Cantelli lemma,

$$\limsup \frac{|a_k|}{e^{\varepsilon k}} \leq 1,$$

which implies  $\sup_{k \in \mathbb{N}} \frac{|a_k|}{e^{\varepsilon k}} < \infty$ .

The reverse implication relies on a similar reasoning, and will not be used in the proof of the theorem.  $\square$

*Proof of Theorem 3.1. Proof of 1.* Let  $P_n(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$  and

$$Q_n(z) = z^n P_n(1/z) = a_n + a_{n-1} z + \dots + a_0 z^n.$$

As the  $a_k$  are i.i.d. random variables, the distribution of the random polynomials  $P_n$  and  $Q_n$  are the same. If  $\{z_k^{(n)}\}$  is the set of zeros of  $P_n$  then the set of zeros of  $Q_n$  is  $\{1/z_k^{(n)}\}$ . This implies that  $x_n^{(n)}$  and  $1/x_1^{(n)}$  have the same distribution.

**Proof of 2.** Fix  $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ . The random variable  $M := \sup_{k \geq 2} |a_k|/e^k$  is almost surely finite. This is obvious for  $n < \infty$  and this is a consequence of lemma 3.3 for  $n = \infty$ . There exists  $K$  such that  $\mathbb{P}(M < K) > 0$ . Let us define  $C_2 = \mathbb{P}(M < K) > 0$ . The key idea of this proof is to use Rouché's theorem [Lan13, p. 181] to show that  $P_n$  and  $P_1(z) = a_0 + a_1 z$  have the same number of roots in a neighborhood of the origin. Rouché's theorem is the following: if  $\gamma$  is a closed path homologous to 0 in some open set  $\mathcal{U}$  such that  $\gamma$  has an interior and  $f$  and  $g$  are two analytic functions on  $\mathcal{U}$  such that for any  $z \in \gamma$

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)|$$

then  $f$  and  $g$  have the same number of zeros in the interior of  $\gamma$ .

To bound from below the probability that  $x_1^{(n)}$  is smaller than  $t$ , we compare it to the modulus of the root of  $P_1$ .

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(x_1^{(n)} \leq t) &\geq \mathbb{P}\left(x_1^{(n)} \leq 2\frac{|a_0|}{|a_1|} \text{ and } 2\frac{|a_0|}{|a_1|} \leq t\right) \\ &\geq \mathbb{P}\left(P_n \text{ has exactly one zero in } D\left(0, 2\frac{|a_0|}{|a_1|}\right) \text{ and } 2\frac{|a_0|}{|a_1|} \leq t\right) \\ &\geq \mathbb{P}\left(P_n \text{ has the same number of zeros in } D\left(0, \frac{2|a_0|}{|a_1|}\right) \text{ as } P_1 \text{ and } \frac{2|a_0|}{|a_1|} \leq t\right) \\ &\geq \mathbb{P}\left(\sup_{|z|=2|a_0|/|a_1|} |P_n(z) - P_1(z)| < \inf_{|z|=2|a_0|/|a_1|} |P_1(z)| \text{ and } 2\frac{|a_0|}{|a_1|} \leq t\right). \end{aligned}$$

We notice that the triangle inequality implies that

$$\inf_{|z|=2|a_0|/|a_1|} |P_1(z)| = \inf_{|z|=2|a_0|/|a_1|} |a_0 + a_1 z| \geq \inf_{|z|=2|a_0|/|a_1|} |a_1||z| - |a_0| = |a_0|$$

and that

$$\sup_{|z|=2|a_0|/|a_1|} |P_n(z) - P_1(z)| \leq \sum_{k \geq 2} |a_k| \left(\frac{2|a_0|}{|a_1|}\right)^k \leq M \sum_{k \geq 2} e^k \left(\frac{2|a_0|}{|a_1|}\right)^k \leq M \frac{4e^2|a_0|^2/|a_1|^2}{1 - 2e|a_0|/|a_1|}.$$

Let  $r$  be a constant such that  $C_3 = \mathbb{P}(|a_1| > r) > 0$ , then we obtain

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(x_1^{(n)} \leq t) &\geq \mathbb{P}\left(M \frac{4e^2|a_0|^2/|a_1|^2}{1 - 2e|a_0|/|a_1|} < |a_0| \text{ and } 2\frac{|a_0|}{|a_1|} \leq t\right) \\ &\geq \mathbb{P}\left(K \frac{4e^2|a_0|^2/|a_1|^2}{1 - 2e|a_0|/|a_1|} < \frac{r|a_0|}{|a_1|} \text{ and } |a_1| > r \text{ and } 2\frac{|a_0|}{|a_1|} \leq t \text{ and } M < K\right) \end{aligned}$$

As  $t < 1/(A + 1)$  then  $A\frac{t^2}{1-t} < t$ , we obtain that the event  $\left\{2\frac{|a_0|}{|a_1|} \leq t \text{ and } |a_1| > r\right\}$  is included in the event  $\left\{K \frac{4e^2|a_0|^2/|a_1|^2}{1 - 2e|a_0|/|a_1|} < r\frac{|a_0|}{|a_1|}\right\}$  if  $t \leq \frac{e^{-1}}{K/r + 1}$ .

For  $t \leq \frac{e^{-1}}{K/r + 1} = C_1$ , we get, using the independence of the  $a_k$ 's,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(x_1^{(n)} \leq t) &\geq \mathbb{P}\left(2\frac{|a_0|}{|a_1|} \leq t \text{ and } |a_1| > r \text{ and } M < K\right) \\ &\geq \mathbb{P}\left(|a_0| < \frac{rt}{2}\right) \mathbb{P}(|a_1| > r) \mathbb{P}(M < K) \\ &\geq C_2 C_3 \mathbb{P}\left(|a_0| < \frac{rt}{2}\right). \end{aligned}$$

**Proof of 3.** Assume that there exist  $k \geq 0$ ,  $a > 0$  and  $\delta > 0$  such that

$$\forall t < \delta, \quad \mathbb{P}(|a_0| < t) \geq at^k.$$

Let  $X$  be a non-negative random variable. Then the Fubini theorem implies that

$$\frac{1}{k+1} \mathbb{E}(X^{k+1}) = \int_0^\infty t^k \mathbb{P}(X \geq t) dt.$$

Using this along with the point (1), we get

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} \mathbb{E}((x_n^{(n)})^k) &= \int_0^\infty t^{k-1} \mathbb{P}(x_n^{(n)} \geq t) dt \\ &= \int_0^\infty t^{k-1} \mathbb{P}(x_1^{(n)} \leq 1/t) dt \\ &\geq A \int_{1/C_1}^\infty t^{k-1} \mathbb{P}(|a_0| \leq \frac{2}{rt}) dt \\ &\geq A \frac{2^k}{r^k} \int_{1/C_1}^\infty at^{k-1} t^{-k} dt. \end{aligned}$$

This implies that

$$\mathbb{E} \left( \left( x_n^{(n)} \right)^k \right) = \infty.$$

**Proof of 4.** Thanks to Lemma 3.3, we obtain that the radius of convergence of the random entire function  $P_\infty$  is almost surely 1. This implies that, almost surely,  $P_n$  converges uniformly towards  $P_\infty$  on any closed disk  $\overline{D}(0, \rho)$  with radius  $\rho < 1$ . In this setting, the almost sure convergence of the zeros of  $P_n$  inside  $\overline{D}(0, \rho)$  is exactly Hurwitz's theorem [Con78, p. 152] in complex analysis. Hurwitz's theorem is a consequence of Rouché's theorem, which is a consequence of the argument principle. We give a proof of the convergence of the point processes using directly Rouché's theorem.

Let  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  be a probability space on which the  $a_k$ 's are defined. Let  $\mathcal{N}$  be a negligible set such that, for any  $\omega \in \Omega \setminus \mathcal{N}$ ,  $P_\infty$  is a non-constant entire series with radius of convergence one.

The rest of the proof is a deterministic result which is valid for any  $\omega \in \Omega \setminus \mathcal{N}$ . Let  $z^{(\infty)}$  be a zero of  $P_\infty$ , with multiplicity  $\beta$ . As the zeros of  $P_\infty$  are isolated, for any  $\varepsilon$  small enough,  $P_\infty$  has no other zero than  $z^{(\infty)}$  in the closed disk  $\overline{D}(z^{(\infty)}, \varepsilon)$ . Thanks to Rouché's theorem, we know that if

$$\sup_{|z-z^{(\infty)}|=\varepsilon} |P_n(z) - P_\infty(z)| < \inf_{|z-z^{(\infty)}|=\varepsilon} |P_\infty(z)| \quad (3.2)$$

then  $P_n$  and  $P_\infty$  have the same number of zeros inside  $\overline{D}(z^{(\infty)}, \varepsilon)$ . The inequality (3.2) is automatically satisfied for  $n$  large enough, as we fixed  $\varepsilon$  such that  $P_\infty$  does not have a zero on the boundary of the disk  $\overline{D}(z^{(\infty)}, \varepsilon)$ .

Here we proved that for any zero of multiplicity  $\beta$  of  $P_\infty$ , for any  $\varepsilon > 0$  sufficiently small, one can find  $\beta$  zeros of  $P_n$  at a distance at most  $\varepsilon$  of  $z^{(\infty)}$ . This implies that any fixed finite number of zeros of  $P_n$  converges almost surely towards zeros of  $P_\infty$ .

**Proof of 5.** The fact that  $x_1^{(n)}$  converges almost surely toward  $x_1^{(\infty)}$  is a consequence of the point 4). As we know that  $x_n^{(\infty)}$  has the same distribution as  $1/x_1^{(n)}$ , then we obtain the converge in distribution of  $x_n^{(\infty)}$  towards  $1/x_1^{(\infty)}$  for free.  $\square$

*Proof of the Corollary.* The first point of the Corollary is nothing more than the combination of the item (5) of 3.1 along with [PV05, Theorem 1] and [PV05, Theorem 2].

The cumulative distribution function of  $x_1^{(\infty)}$  is computed thanks to the knowledge of the distribution of the modulus of the zeros of the hyperbolic GAF [PV05, Theorem 2]. Let  $(U_k)_{k \geq 1}$  be a sequence of i.i.d. uniform random variables on  $(0, 1)$ , then

$$\mathbb{P}\left(x_1^{(\infty)} > t\right) = \mathbb{P}\left(\forall k \geq 1, \quad |z_k^{(\infty)}| > t\right) = \mathbb{P}\left(\forall k \geq 1, \quad U_k^{1/2k} > t\right) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - t^{2k})$$

which ends the proof of the Corollary.  $\square$

### 3.3 Comments.

Notice that the proof of points (1), (2) and (3) of Theorem 3.1 for finite  $n$  does not use the assumption  $\mathbb{E}(\log(1 + |a_0|)) < \infty$ . These three points are always valid. This assumption is only needed to make sure that, almost surely, the  $a_k$ 's do not grow faster than  $e^k$ .

An alternative proof of Theorem 3.1 uses Jensen's formula [Lan13, p.341] for analytic functions. We chose to use an approach based on Rouché's Theorem as it also implies the convergence of the point process of the small roots.



# Chapter 4

## Large deviations for biorthogonal ensembles

Ce chapitre correspond à la note [But17a], publiée dans *Electronic Communications in Probability*. Nous y prouvons un principe de grandes déviations pour la suite des mesures empiriques associée aux ensembles biorthogonaux.

<b>4.1</b>	<b>Introduction and results</b>	<b>103</b>
<b>4.2</b>	<b>Application to triangular matrices.</b>	<b>106</b>
<b>4.3</b>	<b>Proof of Theorem 4.2 and Corollary 4.4.</b>	<b>106</b>
4.3.1	Study of the rate function.	108
4.3.2	Proof of the weak lower bound.	108
<b>4.4</b>	<b>Perspectives and comments.</b>	<b>113</b>

### 4.1 Introduction and results

The aim of this note is to study the limiting distribution of the  $n$ -particles system on  $\mathbb{R}_+ := (0, +\infty)$  with joint distribution

$$\frac{1}{Z_n} \prod_{i < j} |x_i - x_j| \prod_{i < j} |g(x_i) - g(x_j)| e^{-n \sum_{i=1}^n V(x_i)} \prod_{i=1}^n x_i^{b-1} d\ell_{\mathbb{R}_+}(x_1) \dots d\ell_{\mathbb{R}_+}(x_n) \quad (4.1)$$

where  $g$  is a  $C^1$  function such that  $g' > 0$  on  $\mathbb{R}_+$ ,  $b \geq 1$ ,  $V$  is a continuous function satisfying (4.3),  $\ell_{\mathbb{R}_+}$  is the Lebesgue measure on  $\mathbb{R}_+$ , and  $Z_n$  is a normalizing constant. This is a generalization of the biorthogonal ensembles introduced by Muttalib [Mut95] in physics in the context of disordered systems and by Borodin [Bor98] in mathematics. This model covers the classical random matrix ensembles, biorthogonal Laguerre ensembles or the matrix model of Lueck, Sommers and Zirnbauer [LSZ06] for disordered bosons. In equation (4.1), the two first products are interpreted as a repulsion between the particles while the exponential term represents a confining potential preventing the particles from going to infinity. The last product term pushes the particles away from 0, which appears in some model such a Wishart matrices. The main focus of our study will be the empirical measure of the system of points  $\{x_1, \dots, x_n\}$  defined by

$$\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{x_i}.$$



In this note, the weak topology is associated to the bounded Lipschitz metric  $d$ . It is defined on  $\mathcal{M}_1(\mathbb{R}_+)$ , the set of probability measures on  $\mathbb{R}_+$ , by

$$\forall \mu, \nu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}_+) \quad d(\mu, \nu) = \sup_f \left| \int f d\mu - \int f d\nu \right|$$

where the supremum runs over all functions  $f$  satisfying  $\|f\|_\infty \leq 1$  and which are 1-Lipschitz. This metric makes  $\mathcal{M}_1(\mathbb{R}_+)$  a complete space, see [Bog07, Section 8.3].

**Definition 4.1** (Logarithmic energy). *The logarithmic energy is the functional*

$$\begin{aligned} \mathcal{E} : \mathcal{M}_1(\mathbb{R}_+) &\longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ \mu &\longmapsto \begin{cases} \iint -\log|x-y| d\mu(x) d\mu(y) & \text{if } \int \log(1+|x|) d\mu(x) < +\infty, \\ +\infty & \text{otherwise.} \end{cases} \end{aligned}$$

We also define the off-diagonal logarithmic energy

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\neq : \mathcal{M}_1(\mathbb{R}_+) &\longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ \mu &\longmapsto \begin{cases} \iint_{\neq} -\log|x-y| d\mu(x) d\mu(y) & \text{if } \int \log(1+|x|) d\mu(x) < +\infty, \\ +\infty & \text{otherwise.} \end{cases} \end{aligned}$$

where we integrate over the complement of the diagonal of  $\mathbb{R}_+^2$ .

The distribution (4.1) can be written in the form:

$$\frac{1}{Z_n} \exp \left[ -n^2 \left( \frac{1}{2} \mathcal{E}_\neq(\mu_n) + \frac{1}{2} \mathcal{E}_\neq(g_*\mu_n) + \int V(x) d\mu_n(x) \right) \right] \prod_{j=1}^n x_j^{b-1} d\ell_{\mathbb{R}_+}(x_1) \dots d\ell_{\mathbb{R}_+}(x_n) \quad (4.2)$$

where  $g_*\mu$  is the push-forward of the measure  $\mu$  by the function  $g$ .

**Theorem 4.2** (Large deviations principle for  $\mu_n$ ). *Let  $\mu_n$  be the empirical measure of (4.1). Let  $g$  be a  $C^1$  function on  $\mathbb{R}_+$ , such that its derivative is positive. Let  $V$  be a continuous function on  $\mathbb{R}_+$ , bounded from below, such that there exists a constant  $\beta > \max(b, 1)$  such that*

$$\underline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{V(x)}{\beta \log|x| + \beta \log|g(x)|} > 1. \quad (4.3)$$

Let  $I : \mathcal{M}_1(\mathbb{R}_+) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  as

$$I(\mu) = \begin{cases} \frac{1}{2} \mathcal{E}(\mu) + \frac{1}{2} \mathcal{E}(g_*\mu) + \int V(x) d\mu(x) & \text{if } \int V(x) d\mu(x) < +\infty, \\ +\infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$

The random sequence  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  satisfies a large deviations principle in  $\mathcal{M}_1(\mathbb{R}_+)$ , for the weak topology, with speed  $n^2$ , and good rate function  $\tilde{I} = I - \inf I$ . In other words, for any Borel set  $A \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}_+)$ , we have

$$\text{Lower Bound:} \quad - \inf_{\text{Int}A} \tilde{I} \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \log \mathbb{P}(\mu_n \in A) \quad (4.4)$$

$$\text{Upper Bound:} \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \log \mathbb{P}(\mu_n \in A) \leq - \inf_{\text{Clo}A} \tilde{I} \quad (4.5)$$

Moreover, the rate function  $\tilde{I}$  is lower semi-continuous and strictly convex on the set of measures on which it is finite.

This theorem is proved in Section 3.

**Remark 4.3** (Assumptions on  $g$  and  $V$ ). *The assumptions on  $V$  are standard in large deviations for Coulomb gases. They ensure that the distribution (4.1) is well defined and that the particles cannot escape to infinity. The assumptions on  $g$  mean that the two interaction terms have the same short-range repulsion effect.*

**Corollary 4.4** (Almost sure convergence towards the minimizer). *Under the assumptions of Theorem 4.2,  $\tilde{I}$  has a unique minimizer  $\nu$ , and almost surely*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(\mu_n, \nu) = 0.$$

This corollary is proved at the end of Section 3.

Large deviations for Coulomb gases and random matrices started with the article of Ben Arous and Guionnet [BAG97] for GUE matrices, Ben Arous and Zeitouni [BAZ98] for real Ginibre matrices and Hiai and Petz [HP00] for Ginibre and Wishart random matrices. In [ESS11], Eichelsbacher, Sommerauer and Stolz proved a large deviations principle for biorthogonal ensembles with  $g(x) = x^\theta$ ,  $\theta$  being a positive integer. Their proof of the large deviations lower bound cannot be adapted to cover the case considered in this note.

The article [CGZ14] from Chafaï, Gozlan and Zitt provides a general framework to establish a large deviations principle for particles systems with two points interaction in any dimension. Surprisingly, their model covers the biorthogonal ensembles we consider. Using the results from [CGZ14] requires to verify that the technical assumptions are fulfilled. In the case we consider, it is equally difficult to prove the large deviations directly or to prove that these hypotheses are satisfied, so we decided not to refer to their result.

Theorem 4.2 allows us to study large deviations for models such as the original model of Muttalib from [Mut95] with  $g(x) = \operatorname{Argsh}^2(\sqrt{x})$  or the model from [CW14] with  $g(x) = \exp(x)$ . Finally, the matrix model introduced by Cheliotis in [Che14] corresponds to  $g(x) = x^\theta$  or  $\log x$ ,  $\theta > 0$ . We will give more details about the consequences of our theorem on Cheliotis's model in the Application section. The key point of this article is how we deal with the lower bound. Instead of following the proof of the lower bound originally given by Ben Arous and Guionnet in [BAG97], we adapt the proof of Hiai and Petz from [HP00].

In [BLTW15], a similar model to (4.1) is studied, where  $g$  is holomorphic but the density is integrated with respect to general measure on compact sets  $K \subset \mathbb{C}$ .

**Remark 4.5** (Large deviations for the largest particle). *Let  $(x_1, \dots, x_n)$  be distributed according to (4.1) and let  $x_n^* = \max_{1 \leq i \leq n} x_i$ . Suppose that the assumptions of Theorem 4.2 are satisfied. Let  $\nu$  be the limit measure of  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  and let  $M$  be the right endpoint of its support. Assume that*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \frac{Z_{n-1}^*}{Z_n} = \inf I$$

where  $Z_{n-1}^*$  is the normalizing constant of the gas (4.1) with  $n-1$  particles and confining potential  $\frac{n}{n-1}V$ . It follows from the proof of the equivalent result in [AGZ10, Theorem 2.6.6] that  $(x_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$  satisfies a large deviations principle in  $\mathbb{R}_+$  with speed  $n$  and good rate function

$$J(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} \int \log|x-y| + \log|g(x)-g(y)| d\nu(y) + V(x) - \inf I & \text{if } x \geq M \\ +\infty & \text{if } x < M. \end{cases}$$

This is an adaptation of the work of Credner and Eichelsbacher [CE15], who proved the same result for the model from [ESS11].

The rest of the note is organized as follows: in Section 2, we apply Theorem 4.2 to a model of triangular random matrices introduced by Cheliotis in [Che14] and obtain results about the Dykema–Haagerup distribution. In Section 3, we prove Theorem 4.2 and Corollary 4.4. In Section 4, we suggest some extensions to the results presented in this note.

## 4.2 Application to triangular matrices.

In this section, we show that Theorem 4.2 can be used to obtain new results for a recent model of random triangular matrices. Cheliotis in [Che14] considers the setting where  $T_n$  is a lower triangular matrix with independent entries with distribution:

$$X_{i,j} \sim \begin{cases} \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, 1) & \text{if } i > j, \\ \frac{1}{\pi\Gamma(c_j)} e^{-|z|^2} |z|^{2(c_j-1)} d\ell_{\mathbb{C}}(z) & \text{if } i = j \end{cases}$$

where  $c_j = \theta(j-1) + b$  and  $d\ell_{\mathbb{C}}$  is the Lebesgue measure on the complex plane. The distribution of the eigenvalues of  $\frac{1}{n}T_n T_n^*$  is given by (4.1), with  $g(x) = x^\theta$  or  $\log(x)$  if  $\theta > 0$  or  $\theta = 0$  and  $V(x) = x$ . Notice that for good choices of  $\theta$  and  $b$ , we can obtain many classical ensembles, such as the Laguerre ensembles.

The special case where  $\theta = 0$  and  $b = 1$  corresponds to the case where all the coefficients  $X_{i,j}$  are independent complex Gaussian variables with variance 1. This particular case was studied using free probability theory by Dykema and Haagerup in [DH04]. They proved that the random sequence  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converges almost surely in probability towards a deterministic measure  $\mu_{DH}$ , known as the Dykema-Haagerup distribution. In [Che14], the same result is proved using the moments method and path counting. The distribution  $\mu_{DH}$  is supported on  $[0, e]$  and is absolutely continuous with respect to the Lebesgue measure on  $\mathbb{R}_+$  with density

$$f_{DH}(x) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left[ -\frac{1}{xW_0(x)} \right] \mathbf{1}_{[0,e]}$$

where  $W_0$  is the Lambert function, see figure 4.1.

As a corollary of our Theorem 4.2, we get the following result on the Dykema-Haagerup distribution in the setting of [Che14]:

**Corollary 4.6** (Variational formulation for the Dykema-Haagerup distribution). *The empirical measure of  $\frac{1}{n}T_n T_n^*$  converges almost surely for the bounded-Lipschitz metric towards the Dykema-Haagerup distribution  $\mu_{DH}$ . In addition, the Dykema-Haagerup distribution is the unique minimizer on  $\mathcal{M}_1(\mathbb{R}_+)$  of*

$$\mu \mapsto \frac{1}{2}\mathcal{E}(\mu) + \frac{1}{2}\mathcal{E}(\log_* \mu) + \int x d\mu(x).$$

Cheliotis proved that the spectral radius of  $\frac{1}{n}T_n T_n^*$  converges to the right end point of the support of  $\mu_{DH}$ . Like in Remark 4.5, a large deviations principle holds for the maximal eigenvalue of  $\frac{1}{n}T_n T_n^*$  which is a consequence of [AGZ10, Theorem 2.6.6].

## 4.3 Proof of Theorem 4.2 and Corollary 4.4.

The proof of Theorem 4.2 follows the classical pattern for large deviations for log-gases in  $\mathbb{R}$ , which can be found in [AGZ10, p. 71-80] or [CGZ14]. We will focus on what differs

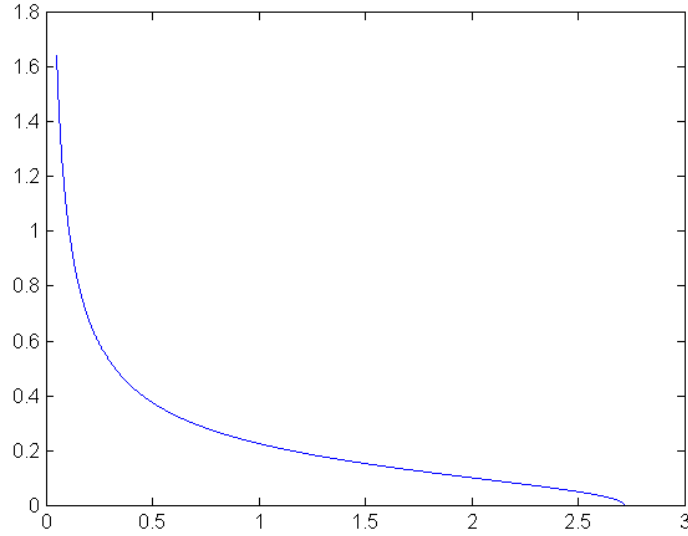


Figure 4.1: Density of the Dykema-Haagerup distribution.

from the usual proofs, as some steps are just a reformulation of the classical proofs. We start by giving the counterpart of inequality (2.6.13) from [AGZ10, p. 73]. This inequality is the key to prove that  $\tilde{I}$  is well defined, has compact level sets and that  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  is exponentially tight. Knowing the properties of the logarithmic energy (see [AGZ10]), we prove that the rate function is strictly convex.

The last steps of the proof of Theorem 4.2 is to prove the following inequalities for any  $\sigma \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}_+)$ :

$$\text{Weak Upper Bound: } \lim_{\delta \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \log Z_n \mathbb{P}(\mu_n \in B(\sigma, \delta)) \leq -I(\sigma)$$

and

$$\text{Weak Lower Bound: } \lim_{\delta \rightarrow 0} \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \log Z_n \mathbb{P}(\mu_n \in B(\sigma, \delta)) \geq -I(\sigma).$$

These inequalities combined with the exponential tightness of the sequence of measures  $Z_n \mathbb{P}(\mu_n \in \cdot)$  imply that for any Borel set  $A$  in  $\mathcal{M}_1(\mathbb{R}_+)$ :

$$-\inf_{\text{int} A} I \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \log Z_n \mathbb{P}(\mu_n \in A) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \log Z_n \mathbb{P}(\mu_n \in A) \leq -\inf_{\text{clo} A} I. \quad (4.6)$$

This is not exactly the large deviations principle we want to prove. To obtain the bounds (4.4) and (4.5), it is sufficient to prove that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \log Z_n = \inf_{\mathcal{M}_1(\mathbb{R}_+)} I.$$

Fortunately, this is an immediate consequence of (4.6) using  $A = \mathcal{M}_1(\mathbb{R}_+)$ .

The rest of the proof is organized as follows: first, we briefly explain how to obtain the properties of the rate function. Then we focus on the proof of (4.6). We only deal with the lower bound because the proof for the upper-bound is exactly the classical one. The proof of the weak lower bound relies on the approach of Hiai and Petz [HP00].

### 4.3.1 Study of the rate function.

**Definition 4.7.** We set, for any  $x$  and  $y$  in  $\mathbb{R}_+$ ,

$$f(x, y) = -\frac{1}{2} \log |x - y| - \frac{1}{2} \log |g(x) - g(y)| + \frac{1}{2} (V(x) + V(y)).$$

As, for any  $x$  and  $y$  in  $\mathbb{R}$ ,

$$\log |x - y| \leq \log(1 + |x|) + \log(1 + |y|)$$

we obtain

$$f(x, y) \geq \left( -\frac{1}{2} \log(1 + |x|) - \frac{1}{2} \log(1 + |g(x)|) + \frac{1}{2} V(x) \right) \quad (4.7)$$

$$+ \left( -\frac{1}{2} \log(1 + |y|) - \frac{1}{2} \log(1 + |g(y)|) + \frac{1}{2} V(y) \right). \quad (4.8)$$

This inequality implies that  $f$  is bounded from below. Hence the function  $I$  is well defined and takes its values in  $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ . This inequality is the key to prove that  $I$  is a good rate function. All the details are given in the reference book [AGZ10, Lemma 2.6.2 p. 72].

To prove that the rate function  $I$  is strictly convex where it is finite, we observe that the logarithmic energy  $\mu \mapsto \mathcal{E}(\mu)$  is known to be a strictly convex function where it is finite, see [AGZ10, Lemma 2.6.2 p. 72]. As the function  $\mu \mapsto g_*\mu$  is linear, the function  $\mu \mapsto \mathcal{E}(g_*\mu)$  is strictly convex where it is finite. The rate function  $I$  is the sum of two strictly convex functions and a linear function, hence it is strictly convex where it is finite.

### 4.3.2 Proof of the weak lower bound.

We want to prove that we have, for any  $\sigma \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}_+)$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \log Z_n \mathbb{P}(\mu_n \in B(\sigma, \delta)) \geq -I(\sigma). \quad (4.9)$$

#### First Step: Reduction to “nice” measures.

First, we show that it is sufficient to prove the weak lower bound with additional assumptions on  $\sigma$ . Notice that we can assume that  $I(\sigma) < +\infty$ , as (4.9) is trivial if  $I(\sigma) = +\infty$ . We introduce the function  $\phi : \mathcal{M}_1(\mathbb{R}_+) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  given by:

$$\phi(\sigma) = \inf \left\{ \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \log Z_n \mathbb{P}(\mu_n \in G), G \text{ neighborhood of } \sigma \right\}.$$

Using this notation, the weak lower bound becomes

$$\phi(\sigma) \geq -I(\sigma). \quad (4.10)$$

We claim that  $\phi$  is upper semicontinuous. Let  $(\sigma_k)_{k \in \mathbb{N}}$  be a sequence of measures such that  $\sigma_k \rightarrow \sigma$  in  $\mathcal{M}_1(\mathbb{R}_+)$ . Let  $G$  be a neighborhood of  $\sigma$ , then there exists an integer  $K$  such that for all  $k \geq K$ ,  $\sigma_k \in G$ . As  $G$  is a neighborhood of  $\sigma_k$ , this implies that for any  $k \geq K$

$$\phi(\sigma_k) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \log Z_n \mathbb{P}(\mu_n \in G)$$

Then if we take the limit superior in  $k$  of this inequality and the infimum over all neighborhoods  $G$  of  $\sigma$ , we obtain the upper semi-continuity of  $\phi$ . If we prove (4.10) for a dense

set of measures, then for any measure  $\sigma \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}_+)$ , there exist measures  $\sigma_k$  such that (4.10) holds and  $\sigma_k \rightarrow \sigma$ , we get

$$\phi(\sigma) \geq \limsup_k \phi(\sigma_k) \geq \limsup_k -I(\sigma_k).$$

We consider a specific sequence of measures  $\sigma_k$  such that for any  $k$ ,  $\sigma_k$  is absolutely continuous with respect to the Lebesgue measure on  $\mathbb{R}_+$ , with compact support and density bounded from above and below by positive constants and such that

$$\sigma_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \sigma \text{ and } \lim_{k \rightarrow \infty} I(\sigma_k) = I(\sigma). \quad (4.11)$$

Once we have obtained this sequence, we only have to prove the lower bound for the measures satisfying the regularity conditions given above.

We can assume that  $\sigma$  has compact support in  $\mathbb{R}_+$  because if we set

$$\sigma_k = \frac{1_{1/k \leq x \leq k}}{\sigma([1/k, k])} \sigma,$$

then, as  $f$  is bounded from below, by the monotone convergence theorem

$$\lim_{k \rightarrow \infty} I(\sigma_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \iint f(x, y) d\sigma_k(x) d\sigma_k(y) = \iint f(x, y) d\sigma(x) d\sigma(y) = I(\sigma).$$

To show that we can assume that  $\sigma$  has a continuous density with respect to the Lebesgue measure, we find a sequence  $\sigma_k$  converging to  $\sigma$  such that

$$-\mathcal{E}(\sigma_k) \geq -\mathcal{E}(\sigma) \quad (4.12)$$

$$-\mathcal{E}(g_*\sigma_k) \geq -\mathcal{E}(g_*\sigma) \quad (4.13)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int V(x) d\sigma_k(x) = \int V(x) d\sigma(x). \quad (4.14)$$

The inequalities above, along with the lower semicontinuity of  $I$ , imply that  $I(\sigma_k)$  converges to  $I(\sigma)$ . Now let  $\phi_\varepsilon$  be a  $\mathcal{C}^\infty$  probability density with support in  $[0, \varepsilon]$ , then we set  $\sigma_\varepsilon = \phi_\varepsilon * \sigma$ . The measures  $\sigma_\varepsilon$  have compact support in  $\mathbb{R}_+$  with continuous density and converge towards  $\sigma$  as  $\varepsilon$  goes to zero.

Since it is easy to check that  $\int V(x) d\sigma_\varepsilon(x) \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{} \int V(x) d\sigma(x)$ , we only have to prove that for any  $\varepsilon$

$$-\mathcal{E}(\phi_\varepsilon * \sigma) \geq -\mathcal{E}(\sigma) \text{ and } -\mathcal{E}(g_*\phi_\varepsilon * \sigma) \geq -\mathcal{E}(g_*\sigma).$$

Recall that the functions  $-\mathcal{E}$  and  $-\mathcal{E}(g_*.)$  are concave, so if we notice that

$$\phi_\varepsilon * \sigma = \int \phi_\varepsilon(y) \sigma(\cdot - y) dy$$

then, thanks to Jensen's inequality and the fact that the logarithmic energy is invariant under translation, we obtained the desired inequalities.

The last thing we want for our "nice" measures is that the density is bounded from above and from below. As the densities of the measures  $\sigma_\varepsilon$  are continuous with compact support, those densities are already bounded from above. Changing  $\sigma_\varepsilon$  to  $\delta m + (1 - \delta)\sigma_\varepsilon$ , where  $m$  is the uniform measure on the support of  $\sigma_\varepsilon$ , allows us to deal with measures with continuous density bounded from above and from below.

**Second step: weak lower bound for “nice” measures.**

From now on,  $\sigma$  will be a measure with compact support  $[a, A] \subset \mathbb{R}_+$ , with density  $h$  with respect to the Lebesgue measure on  $\mathbb{R}_+$  for which there exists a constant  $C > 0$  such that

$$\forall x \in [a, A] \quad , \quad \frac{1}{C} \leq h(x) \leq C.$$

Let  $a_0, \dots, a_n$  be the  $\frac{1}{n}$ -quantiles of  $\sigma$ , with  $a_0 = a$  and  $a_n = A$ . For each  $k$ , we have

$$\frac{1}{Cn} \leq a_{k+1} - a_k \leq \frac{C}{n}. \quad (4.15)$$

Now divide each interval  $[a_{k-1}, a_k]$  in 3 equal parts and let  $[c_k, d_k]$  be the central interval. If we set  $\Delta_n = \prod_{i=1}^n [c_i, d_i]$ , then for any  $(z_1, \dots, z_n) \in \Delta_n$ , we have:

$$d\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{z_i}, \sigma\right) \leq \max_k |a_{k+1} - a_k| \leq \frac{C}{n}$$

where  $d$  is the bounded-Lipschitz distance. We are now ready to prove the lower bound. Let  $\rho_1$  be the finite measure on  $\mathbb{R}_+$   $x^{b-1}e^{-V(x)}dx$  and  $\rho_n = \rho_1 \otimes \dots \otimes \rho_1$  the finite  $n$ -th product measure on  $\mathbb{R}_+^n$ . Recalling (4.2), we have

$$\begin{aligned} & Z_n \mathbb{P}(\mu_n \in B(\sigma, \delta)) \\ &= \int 1_{\mu_n \in B(\sigma, \delta)} \exp\left[-n^2 \left(\frac{1}{2} \mathcal{E}_{\neq}(\mu_n) + \frac{1}{2} \mathcal{E}_{\neq}(g_*\mu_n) + \frac{n-1}{n} \int V(x) d\mu_n(x)\right)\right] d\rho_n(x) \\ &\geq \int 1_{\Delta_n} \exp\left[-n^2 \left(\frac{1}{2} \mathcal{E}_{\neq}(\mu_n) + \frac{1}{2} \mathcal{E}_{\neq}(g_*\mu_n) + \frac{n-1}{n} \int V(x) d\mu_n(x)\right)\right] d\rho_n(x) \\ &\geq \exp\left(-n^2 \left[\frac{n-1}{n^2} \sum_{i=1}^n \max_{[c_i, d_i]} V(x)\right]\right) \times \exp\left(-n^2 \left[-\frac{1}{n^2} \sum_{i < j} \min_{[c_i, d_i] \times [c_j, d_j]} \log|x-y|\right]\right) \\ &\quad \times \exp\left(-n^2 \left[-\frac{1}{n^2} \sum_{i < j} \min_{[c_i, d_i] \times [c_j, d_j]} \log|g(x)-g(y)|\right]\right) \int 1_{\Delta_n} d\rho_n(x). \end{aligned}$$

We notice that:

$$\frac{1}{n^2} \log \int 1_{\Delta_n} d\rho_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Hence, to obtain the lower bound, it is sufficient to prove that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \max_{[c_i, d_i]} V = \int V(x) d\sigma(x) \quad (4.16)$$

and, using the fact that  $g$  and the logarithm are increasing functions,

$$\varliminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i < j} -\log(d_j - c_i) \geq \frac{1}{2} \iint -\log|x-y| d\sigma(x) d\sigma(y) = \frac{1}{2} \mathcal{E}(\sigma) \quad (4.17)$$

and also

$$\varliminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i < j} \log(g(d_j) - g(c_i)) \geq \frac{1}{2} \iint \log|g(x) - g(y)| d\sigma(x) d\sigma(y) = \frac{1}{2} \mathcal{E}(g_*\sigma). \quad (4.18)$$

If (4.16), (4.17) and (4.18) hold then the proof of the lower bound for regular measures is completed. The last step will consist in proving that these three inequalities indeed hold.

**Last step: Proof of the inequalities.**

First, (4.16) is easy to check as we approximate a continuous integrable function on  $[a, A]$  by simple functions.

We now prove (4.17) following the proof of [HP00]. For the moment, let's assume that there exists a constant  $A_1 > 0$  such that for  $i < j$

$$A_1(d_j - c_i) \geq (a_j - a_{i-1}) \quad (4.19)$$

and also that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^2} \# \left\{ (i, j) : i < j \mid \frac{(a_j - a_{i-1})}{(d_j - c_i)} \leq 1 + \varepsilon \right\} = 1. \quad (4.20)$$

We postpone the proof of the inequalities (4.19) and (4.20) to prove (4.17). We call

$$B_n = \mathcal{E}(\sigma) - \frac{2}{n^2} \sum_{i \neq j} \min_{[c_i, d_i] \times [c_j, d_j]} \log |x - y|$$

and we want to prove that

$$\varliminf_{n \rightarrow \infty} B_n \leq 0.$$

Since

$$\iint \log |z - w| d\sigma(z) d\sigma(w) \leq \frac{2}{n^2} \sum_{i < j} \log |a_j - a_{i-1}| + \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \log |a_i - a_{i-1}|$$

then, for every  $\varepsilon > 0$ , we get

$$\begin{aligned} B_n &\leq \frac{2}{n^2} \sum_{i < j} \log |a_j - a_{i-1}| - \frac{2}{n^2} \sum_{i < j} \log |d_j - c_i| + \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \log |a_i - a_{i-1}| \\ &\leq \frac{2}{n^2} \sum_{i < j} \log \frac{(a_j - a_{i-1})}{(d_j - c_i)} + \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \log |a_i - a_{i-1}| \\ &\leq \frac{2}{n^2} \# \left\{ i < j \mid \frac{(a_j - a_{i-1})}{(d_j - c_i)} \leq 1 + \varepsilon \right\} \log(1 + \varepsilon) \\ &\quad + \frac{1}{n^2} \left[ n(n-1) - 2 \# \left\{ i < j \mid \frac{(a_j - a_{i-1})}{(d_j - c_i)} \leq 1 + \varepsilon \right\} \right] \log A_1 + \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \log |a_i - a_{i-1}|. \end{aligned}$$

Then we take the limit superior of both sides, and the limit when  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\mathcal{E}(\sigma) - \varliminf_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^2} \sum_{i < j} \log |d_j - c_i| \leq 0$$

which proves (4.17).

We prove now inequality (4.19). From inequality (4.15), we get for any  $k > 0$

$$\frac{a_{i+k} - a_{i-1}}{d_{i+k} - c_i} \leq \frac{(k+1)C/n}{(k+2/3)/Cn} \leq \frac{(k+1)C^2}{k+2/3} \leq \frac{3C^2}{2}$$

We deduce from this inequality that its left hand side is bounded by a constant independent of  $k$  and  $n$ , which proves (4.19). In order to prove (4.20), we start from

$$\frac{a_{i+k} - a_{i-1}}{d_{i+k} - c_i} = 1 + \frac{a_{i+k} - d_{i+k}}{d_{i+k} - c_i} + \frac{c_i - a_{i-1}}{d_{i+k} - c_i}.$$



Using (4.15), we get

$$\frac{a_{i+k} - d_{i+k}}{d_{i+k} - c_{i-1}} \leq \frac{C/3n}{k/Cn} \leq \frac{C^2}{3k}$$

and

$$\frac{c_i - a_{i-1}}{d_{i+k} - c_i} \leq \frac{C/3n}{k/Cn} \leq \frac{C^2}{3k}.$$

Those two terms can be made as small as desired if  $k$  is sufficiently large, independently of  $n$ , which proves (4.20).

The proof of the inequality (4.18) mimics the proof of inequality (4.17). Like in the previous case, it is sufficient to find a constant  $A'$  such that for any  $i < j$

$$A'(g(d_j) - g(c_{i-1})) \geq g(a_j) - g(a_{i-1}) \quad (4.21)$$

and to prove that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^2} \# \left\{ i < j \mid \frac{g(a_j) - g(a_{i-1})}{g(d_j) - g(c_i)} \leq 1 + \varepsilon \right\} = 1. \quad (4.22)$$

As the support of  $\sigma$  is a compact subset of  $\mathbb{R}_+$ , there exist two constants  $m$  and  $M$  such that for all  $x \in [a, A]$

$$m \leq g'(x) \leq M.$$

The inequality (4.21) is a consequence of (4.19), using the mean value theorem for  $g$  and the fact that its derivative is bounded from above and from below

$$\frac{g(a_{i+k}) - g(a_{i-1})}{g(d_{i+k}) - g(c_i)} \leq \frac{M}{m} \frac{a_{i+k} - a_{i-1}}{d_{i+k} - c_i} \leq \frac{3MC^2}{2m}.$$

To prove (4.22), it is sufficient to prove that the quantities

$$\frac{g(a_{i+k}) - g(d_{i+k})}{g(d_{i+k}) - g(c_i)} \quad \text{and} \quad \frac{g(c_i) - g(a_i)}{g(d_{i+k}) - g(c_i)}$$

can be made as small as desired when  $k$  is sufficiently large. Using the mean value theorem, we get

$$\frac{g(a_{i+k}) - g(d_{i+k})}{g(d_{i+k}) - g(c_i)} \leq \frac{M}{m} \frac{a_{i+k} - d_{i+k}}{d_{i+k} - c_i} \leq \frac{M}{m} \frac{C^2}{3k}.$$

The other term is treated in the same way. Now that we have proved (4.21) and (4.22), the proof of (4.18) is the exactly the same as the proof of (4.17).

*Proof of Corollary 4.4.* As the function  $I$  is lower semi-continuous and strictly convex, it has a unique minimizer  $\nu$ . Consider the sets

$$A_\varepsilon = \mathcal{M}_1(\mathbb{R}_+) \setminus B(\nu, \varepsilon).$$

As  $I$  is lower semi-continuous,  $\inf\{\tilde{I}(\mu), \mu \in A_\varepsilon\} > 0$ . We use the large deviations upper bound with the set  $A_\varepsilon$  to prove that  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(\mu_n \in A_\varepsilon)$  converges. The Borel-Cantelli lemma ensures that, for any fixed  $\varepsilon > 0$ , for sufficiently large  $n$ ,  $\mu_n$  almost surely belongs to  $B(\nu, \varepsilon)$ . Restricting this result to rational  $\varepsilon$  implies that, almost surely,

$$d(\mu_n, \nu) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

□

## 4.4 Perspectives and comments.

Theorem 4.2 can easily be extended in several directions. The first direction would be to consider not only two interactions but any finite number of them, with different exponents:

$$\prod_{i<j} |f_1(x_i) - f_1(x_j)|^{\beta_1} \prod_{i<j} |f_2(x_i) - f_2(x_j)|^{\beta_2} \cdots \prod_{i<j} |f_p(x_i) - f_p(x_j)|^{\beta_p}$$

where each of the  $f_k$  is locally a  $C^1$  diffeomorphism and the  $\beta_k$ 's are positive numbers. Large deviations will be valid if the confining potential  $V$  dominates all the functions  $\log f_k$  at infinity. One could prove the same theorem as we stated on  $\mathbb{R}$  with the same assumptions. We stated the theorem on  $\mathbb{R}_+$  because biorthogonal ensembles were originally defined on the positive axis.

The result of this note can be proved to hold in any dimension, considering the Lebesgue measure on  $\mathbb{R}^d$ , but it would require stronger assumptions on the function  $g$  and stronger behavior at infinity for  $V$ . One could assume that  $g$  is continuously differentiable and that on any compact  $K \subset \mathbb{R}^d$ , there exist two constants  $m_K$  and  $M_K$  such that for any  $x, y \in K$

$$m_K \|x - y\| \leq \|g(x) - g(y)\| \leq M_K \|x - y\|.$$

The model studied by Götze and Venker in [GV14] is not covered by this note, as they deal with a double interaction term of the type  $\prod_{i<j} |x_i - x_j|^2 \phi(x_i - x_j)$ . This is really the combination of two different interactions whereas our model deals with the usual logarithmic interaction at two different scales. As this model is covered by the study [CGZ14], one could try to find the optimal conditions of  $\phi$  so that a large deviations principle is valid.



# Chapter 5

## Universal Large deviations for Weyl polynomials

Ce chapitre fera l'objet d'une pré-publication à l'avenir. Il n'est pour l'instant ni pré-publié ni soumis. Le but de ce chapitre est d'adapter les démonstrations des principes de grandes déviations pour la suite des mesures empiriques des polynômes orthogonaux issus du chapitre 1 aux polynômes de Weyl renormalisés dont les coefficients sont des variables aléatoires de loi  $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, 1)$  ou  $\mathcal{N}_{\mathbb{R}}(0, 1)$ . Nous démontrons l'universalité de ces principes de grandes déviations de manière similaire à ce que nous avons présenté dans le chapitre 2.

<b>5.1</b>	<b>Weyl polynomials and rescaled Weyl polynomials . . . . .</b>	<b>115</b>
<b>5.2</b>	<b>Distribution of the roots and Bernstein-Markov Property . .</b>	<b>118</b>
<b>5.3</b>	<b>Proof of Theorem 5.2. . . . .</b>	<b>119</b>
<b>5.4</b>	<b>Universality of the large deviations principles . . . . .</b>	<b>125</b>
<b>5.5</b>	<b>Real Case . . . . .</b>	<b>128</b>

### 5.1 Weyl polynomials and rescaled Weyl polynomials

Weyl polynomials are random polynomials of the form

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k \frac{1}{\sqrt{k!}} z^k \tag{5.1}$$

where the coefficients  $a_k$  are i.i.d. random variables. Weyl polynomials were first introduced in the physics literature by Leboeuf [Leb00], Forrester and Honner [FH99] as the random polynomial counterpart to Ginibre random matrices. They computed the joint distribution of the roots of those polynomials in the case where the coefficients are independent  $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, 1)$  random variables and showed that the intensity of the zeros is nearly constant on the disk  $D(0, \sqrt{n})$  and decays very fast outside this disk. We refer to the introduction of this thesis for a more complete introduction on the properties of Weyl polynomials.

We define the rescaled Weyl polynomials by

$$Q_n(z) = P_n(\sqrt{n}z) = \sum_{k=0}^n a_k \frac{\sqrt{n^k}}{\sqrt{k!}} z^k = \frac{a_n \sqrt{n^n}}{\sqrt{n!}} \prod_{k=1}^n (z - z_k). \tag{5.2}$$

The zeros of these polynomials are known to concentrate uniformly on the unit disk. To study the repartition in the complex plane of the zeros, we introduce the empirical measure of the zeros of  $Q_n$ :

$$\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \delta_{z_k}.$$

When the coefficients are independent  $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, 1)$  random variables, the joint distribution of the roots of  $Q_n$  taken in random uniform order is given by

$$\frac{1}{Z_n} \exp - \left( \mathcal{E}_{\neq}(\mu_n) + (n+1) \log \int \prod_{k=1}^n |z - z_k|^2 e^{-n|z|^2} \frac{1}{\pi} d\ell_{\mathbb{C}}(z) \right) d\ell_{\mathbb{C}^n}(z_1, \dots, z_n) \quad (5.3)$$

where

$$\mathcal{E}_{\neq}(\mu_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{i \neq j} -\log |z_i - z_j| = \iint_{\neq} -\log |z - w| d\mu_n(z) d\mu_n(w).$$

We will detail in Section 5.2 how to compute this distribution. When the coefficients  $a_k$  are independent  $\mathcal{N}_{\mathbb{R}}(0, 1)$  random variables, the distribution of the random vector  $(z_1, \dots, z_n)$  taken in random uniform order is given by the mixture

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{1}{Z_{n,k}} \exp - \left( n^2 \mathcal{E}_{\neq}(\mu_n) + (n+1) \log \int \prod_{k=1}^n |z - z_k|^2 e^{-n|z|^2} \frac{1}{\pi} d\ell_{\mathbb{C}}(z) \right) d\ell_{n,k} \quad (5.4)$$

where

$$d\ell_{n,k}(z_1, \dots, z_n) = d\ell_{\mathbb{R}}(z_1) \dots d\ell_{\mathbb{R}}(z_{n-2k}) d\ell_{\mathbb{C}}(z_{n-k}) \dots d\ell_{\mathbb{C}}(z_n).$$

We mentioned in the introduction that the rescaled Weyl polynomials are a special case of orthogonal polynomials with the couple  $(\phi, \nu)$  equal to  $(z \mapsto |z|^2, \frac{1}{\pi} d\ell_{\mathbb{C}})$ . This statement is equivalent to Theorem 5.5.

The rescaled Weyl polynomials do not fit perfectly in the model of orthogonal polynomials introduced by Zeitouni and Zelditch [ZZ10], as the measure  $\nu$  from the couple  $(\phi, \nu)$  defining the scalar product should be a probability measure and  $\phi$  the image of a continuous function on the sphere. Nevertheless, one can prove a Bernstein-Markov property in this setting.

**Lemma 5.1** (Bernstein-Markov Property). *The couple  $(z \mapsto |z|^2, \frac{1}{\pi} d\ell_{\mathbb{C}}(z))$  satisfies the Bernstein-Markov property. More precisely, for any  $n \in \mathbb{N}$  and any polynomial  $P \in \mathbb{C}_n[X]$ , we have*

$$\sup_{z \in \mathbb{C}} \left\{ |P(z)|^2 e^{-n|z|^2} \right\} \leq n \|P\|_2^2 = n \int |P(z)|^2 e^{-n|z|^2} \frac{1}{\pi} d\ell_{\mathbb{C}}(z).$$

The following theorems are very close to the results obtained in Chapter 1.

**Theorem 5.2** (Large deviations principle for rescaled Weyl polynomials). *The sequence of empirical measures associated to rescaled Weyl polynomials satisfies a large deviations principle in  $\mathcal{M}_1(\mathbb{C})$ , with speed  $n^2$  and good rate function  $I - \inf I$  where*

$$I_{W, \mathbb{C}}(\mu) = \iint -\log |z - w| + \frac{1}{2} \log(1 + |z|^2) + \frac{1}{2} \log(1 + |w|^2) d\mu(z) d\mu(w) \quad (5.5)$$

$$+ \sup_{z \in \mathbb{C}} \left\{ \int \log |z - w|^2 - \log(1 + |w|^2) d\mu(w) - |z|^2 \right\}. \quad (5.6)$$

When  $\int \log(1 + |z|^2) d\mu(z) < \infty$ , this expression becomes

$$I_{W, \mathbb{C}}(\mu) = \mathcal{E}(\mu) + \sup_{z \in \mathbb{C}} \left\{ \int \log |z - w|^2 d\mu(w) - |z|^2 \right\}.$$

This result looks very close to the theorem of Zeitouni and Zelditch. One has to check that the fact that  $\frac{1}{\pi}d\ell_{\mathbb{C}}(z)$  is not a probability measure and  $z \mapsto |z|^2$  is not bounded is not a problem in the proof. This is equivalent to say that we consider a scalar product

$$\langle P, Q \rangle = \int P(z)\overline{Q(z)}e^{-(n-1)|z|^2}\frac{e^{-|z|^2}}{\pi}d\ell_{\mathbb{C}}(z).$$

With this way of writing the scalar product, we deal with a probability measure, but with a factor  $n - 1$ .

**Theorem 5.3** (Large deviations principle for real rescaled Weyl polynomials). *Assume that the coefficients  $a_k$  are independent  $\mathcal{N}_{\mathbb{R}}(0, 1)$  random variables. The sequence of empirical measures of the zeros of rescaled Weyl polynomials satisfies a large deviations principle in  $\mathcal{M}_1(\mathbb{C})$  with speed  $n^2$  and good rate function  $I_{W, \mathbb{R}} - \inf I_{W, \mathbb{R}}$  where*

$$I_{W, \mathbb{R}}(\mu) = \begin{cases} \frac{1}{2}I_{W, \mathbb{C}}(\mu) & \text{if } \mu \text{ is invariant with respect to } z \mapsto \bar{z} \\ \infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$

We saw in Chapter 1 that the proof of Theorem 5.3 is very close from the proof of Theorem 5.2. All the measures involved in the mixture (5.4) behave like the measure (5.3). We can deal with the constants  $Z_{n,k}$  because

$$Z_{n,k} = \frac{k!(n-2k)!}{2^k|A_n|\Gamma(n/2+1)} \text{ and } Z_n = \frac{\pi^n}{|A_n|^2}$$

where  $|A_n|$  is the determinant of the change of variables from the basis  $(X^k)_{k \leq n}$  to the basis  $(\sqrt{n}\frac{\sqrt{n^k}}{\sqrt{k!}}X^k)_{k \leq n}$ . This implies that uniformly in  $k$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \log Z_{n,k} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n^2} \log |A_n|^2 = \frac{1}{2} \inf I_{W, \mathbb{C}}.$$

This comes from the fact that the constants  $Z_{n,k}$  are explicitly related to  $Z_n$ . These ideas are not new and were introduced for the first time by Ben Arous and Zeitouni in [BAZ98] to prove the large deviations for the empirical measures of the real Ginibre ensemble. We will not give the details of the proof of Theorem 5.3 as it is nearly the same as the one of Theorem 5.2 and can be easily adapted from Chapter 1.

Once we have established the theorems 5.2 and 5.3, we obtain immediately the following universality result.

**Theorem 5.4** (Universality of the large deviations). *Let be  $E = \mathbb{C}$  or  $\mathbb{R}$ . Assume that  $a_0, \dots, a_n$  are i.i.d. random variables whose distribution has a density  $g$  with respect to the Lebesgue measure  $\ell_E$  on  $E$ . Assume that*

1. *there exist  $\rho > 0$ ,  $r > 0$  and  $R > 0$  such that*

$$\forall z \in E, \quad g(z) \leq \exp(-r|z|^\rho + R), \quad (5.7)$$

2. *there exists  $\delta > 0$  such that  $\forall \lambda > 0$ :*

$$\int 1_{|x| \leq \delta} \frac{1}{g(x)^\lambda} d\ell_E(x) < \infty \quad (5.8)$$

*then  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  satisfies a large deviations principle in  $\mathcal{M}_1(\mathbb{C})$ , with speed  $n^2$  and good rate function  $I_{W, E}$ .*

The proof of this result is exactly the same as the one we gave for the corresponding result for Kac polynomials in Chapter 2. We recall the key elements of the proof in the complex case.

The rest of this chapter is organized as follows: in section 2 we prove that the distribution of the roots is given by 5.3 and 5.4 and that the couple  $(z \mapsto |z|^2, \frac{1}{\pi} d\ell_{\mathbb{C}})$  satisfies the Bernstein-Markov property. In section 3 we show how to adapt the proofs of the large deviations principles from Chapter 1 to the model of rescaled Weyl polynomials. In section 4 we recall briefly how to prove the universality for the large deviations principle.

## 5.2 Distribution of the roots and Bernstein-Markov Property

In this section, we compute the distribution of the roots of rescaled Weyl polynomials with  $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, 1)$  or  $\mathcal{N}_{\mathbb{R}}(0, 1)$  independent coefficients. We also prove a Bernstein-Markov property for this model.

**Theorem 5.5** (Distribution of the roots of rescaled Weyl polynomials). *When the coefficients  $a_k$  are independent  $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, 1)$  random variables, the distribution of the random vector  $(z_1, \dots, z_n)$  taken in random uniform order is given by*

$$\frac{1}{Z_n} \exp - \left( n^2 \mathcal{E}_{\neq}(\mu_n) + (n+1) \log \int \prod_{k=1}^n |z - z_k|^2 e^{-n|z|^2} \frac{1}{\pi} d\ell_{\mathbb{C}}(z) \right) d\ell_{\mathbb{C}^n}(z_1, \dots, z_n).$$

*When the coefficients  $a_k$  are independent  $\mathcal{N}_{\mathbb{R}}(0, 1)$  random variables, the distribution of the random vector  $(z_1, \dots, z_n)$  taken in random uniform order is given by the mixture*

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{1}{Z_{n,k}} \exp - \left( n^2 \mathcal{E}_{\neq}(\mu_n) + (n+1) \log \int \prod_{k=1}^n |z - z_k|^2 e^{-n|z|^2} \frac{1}{\pi} d\ell_{\mathbb{C}}(z) \right) d\ell_{n,k}$$

where

$$d\ell_{n,k}(z_1, \dots, z_n) = d\ell_{\mathbb{R}}(z_1) \dots d\ell_{\mathbb{R}}(z_{n-2k}) d\ell_{\mathbb{C}}(z_{n-k}) \dots d\ell_{\mathbb{C}}(z_n).$$

*Proof.* We saw in the introduction that the distribution of  $(z_1, \dots, z_n)$  takes the form

$$\frac{1}{Z_n} \frac{\prod_{i \neq j} |z_i - z_j|}{\|\tilde{a}\|_2^{2n+2}} d\ell_{\mathbb{C}^n}(z_1, \dots, z_n)$$

where

$$\|\tilde{a}\|_2^2 = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|a_k|^2}{|a_n|^2}.$$

The family  $(\sqrt{n} \frac{\sqrt{n^k}}{\sqrt{k!}} X^k)_{k \leq n}$  is an orthonormal basis of  $\mathbb{C}_n[X]$  for the scalar product

$$\langle P, Q \rangle = \int P(z) \overline{Q(z)} e^{-n|z|^2} \frac{1}{\pi} d\ell_{\mathbb{C}}(z).$$

Indeed, this family is orthogonal due to rotational invariance of the gaussian measure and

$$\|X^k\| = \int |z|^{2k} e^{-n|z|^2} \frac{1}{\pi} d\ell_{\mathbb{C}}(z) = 2 \int_0^{\infty} r^{2k+1} e^{-nr^2} dr = \int_0^{\infty} u^k e^{-nu} du = \frac{k!}{n^{k+1}}.$$

Using the orthonormality, we obtain

$$\|\tilde{a}\| = \int \prod_{k=1}^n |z - z_k|^2 e^{-n|z|} \frac{1}{\pi} d\ell_{\mathbb{C}}(z) \quad (5.9)$$

which implies the result.

The distribution of the roots when the  $a_k$  are independent  $\mathcal{N}_{\mathbb{R}}(0, 1)$  random variables is obtained in a similar way, combining (5.9) and Zaporozhet's general formula [Zap04] given in the introduction.  $\square$

*Proof of the Bernstein-Markov property 5.1.* The strategy of this proof is similar to the one of the Bernstein-Markov property for elliptic polynomials in Chapter 1. We start by noticing that for any  $P \in \mathbb{C}_n[X]$  and  $z \in \mathbb{C}$

$$P(z) = \int P(w) K_n(z, w) e^{-n|z|^2} \frac{1}{\pi} d\ell_{\mathbb{C}}(z) = \langle P, K(z, \cdot) \rangle$$

where  $K_n$  is the reproducing kernel

$$K_n(z, w) = \sum_{k=0}^n n \frac{n^k}{k!} z^k \bar{w}^k.$$

Thanks to the Cauchy-Schwarz inequality, we obtain

$$|P(z)|^2 \leq \|P\|_2^2 \|K_n(z, \cdot)\|_2^2. \quad (5.10)$$

Using the orthogonality of the basis, we compute

$$\|K_n(z, \cdot)\|_2^2 = K_n(z, z) = n \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} |z|^{2k} \leq n e^{n|z|^2}.$$

We divide (5.10) by  $e^{n|z|^2}$  and take the supremum on both sides to obtain the Bernstein-Markov property.  $\square$

### 5.3 Proof of Theorem 5.2.

We use exactly the same strategy of proof as in Chapter 1. First, we use the inverse stereographic projection to state a large deviations principle for the empirical measures associated to the vector  $(T(z_1), \dots, T(z_n))$  in  $\mathcal{M}_1(\mathcal{S}^2)$ . We prove a weak large deviations principle for these measures in  $\mathcal{M}_1(\mathcal{S}^2)$ . As  $\mathcal{M}_1(\mathcal{S}^2)$  is a compact set, the weak large deviations principle implies a full large deviations principle. Finally, we obtain Theorem 5.2 using the contraction principle along with the stereographic projection.

#### Compactification of the system.

Let  $T : \mathbb{C} \mapsto \mathcal{S}^2$  be the inverse stereographic projection presented in the introduction and Chapter 1. We recall the useful equalities

$$\forall z, w \in \mathbb{C}, \quad |z - w|^2 = \frac{\|T(z) - T(w)\|_2^2}{(1 - \|T(z)\|_2^2)(1 - \|T(w)\|_2^2)}. \quad (5.11)$$

and

$$1 - \|T(z)\|_2^2 = \frac{1}{1 + |z|^2} \quad (5.12)$$

where  $\|\cdot\|_2$  is the Euclidean norm of  $\mathbb{R}^3$ .



**Proposition 5.6.** *The distribution of the random vector  $(x_1, \dots, x_n) = (T(z_1), \dots, T(z_n))$  is absolutely continuous with respect to the product measure  $\pi^{\otimes n}(x_1, \dots, x_n)$  with density*

$$\frac{1}{Z_n} \exp - \left( \sum_{i \neq j} \|x_i - x_j\| + (n+1) \log \int \prod_{k=1}^n \|x - x_k\|^2 e^{-n\phi(x)} \frac{1}{\pi} dT_* \ell_{\mathbb{C}}(x) \right) \quad (5.13)$$

where  $T_* \ell_{\mathbb{C}}(x)$  is the pushforward of the Lebesgue measure of  $\mathbb{C}$  by  $T$ ,  $d\pi$  is the uniform measure on the sphere  $\mathcal{S}^2$  and

$$\phi(x) = |T^{-1}(x)|^2 + \log(1 - \|x\|^2).$$

We use the notation

$$\bar{\mu}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \delta_{T(z_k)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \delta_{x_k}$$

for the empirical measure associated to the vector  $(x_1, \dots, x_n) = (T(z_1), \dots, T(z_n))$ .

*Proof of Proposition 5.6.* First notice that

$$\prod_{i \neq j} \|z_i - z_j\| = \prod_{i \neq j} \|T(z_i) - T(z_j)\| \left( \frac{1}{\prod_{k=1}^n (1 - \|T(z_k)\|^2)} \right)^{n(n-1)}$$

and also

$$\int \prod_{k=1}^n |z - z_k|^2 e^{-n|z|^2} \frac{1}{\pi} d\ell_{\mathbb{C}}(z) = \left( \frac{1}{\prod_{k=1}^n (1 - \|T(z_k)\|^2)} \right)^{n(n+1)} \int \frac{\prod_{k=1}^n \|T(z) - T(z_k)\|^2}{(1 - \|T(z)\|^2)^n} e^{-n|z|^2} \frac{1}{\pi} d\ell_{\mathbb{C}}(z).$$

Those two formulas imply the proposition.  $\square$

In order to adapt the proofs from chapter 1, we define  $J_W$  on  $\mathcal{M}_1(\mathcal{S}^2)$  by

$$J_W(\mu) = \sup_{x \in \mathcal{S}^2} \left\{ \int \log \|x - y\| d\mu(y) - \phi(x) \right\}$$

and

$$\mathcal{E}_{\mathcal{S}^2}(\mu) = \iint -\log \|x - y\| d\mu(x) d\mu(y).$$

We also use the notation

$$\mathcal{E}_{\neq, \mathcal{S}^2}(\bar{\mu}_n) = \iint_{\neq} -\log \|x - y\| d\bar{\mu}_n(x) d\bar{\mu}_n(y) = \frac{1}{n^2} \sum_{i \neq j} -\log \|x_i - x_j\|$$

which is useful to express the distribution of  $(T(z_1), \dots, T(z_n))$ .

In order to prove Theorem 5.2, we need to prove a large deviations principle for the gas (5.13), which is stated in the next proposition.

**Proposition 5.7** (Large Deviations principle for the compactified gas.). *The sequence of empirical measures of the gas (5.13) satisfies a large deviations principle in  $\mathcal{M}_1(\mathcal{S}^2)$  with the weak topology, with speed  $n^2$  and good rate function  $I_W^{\mathcal{S}^2} - \inf I_W^{\mathcal{S}^2}$  where*

$$I_W^{\mathcal{S}^2}(\mu) = \mathcal{E}_{\mathcal{S}^2}(\mu) + J_W(\mu).$$

We use the notation  $\overline{\mu}_n$  for the empirical measure of (5.13).

This is not an immediate consequence of Chapter 1 where we assumed that the function  $\phi$  was continuous and bounded. Here the function  $\phi$  tends to infinity at the north pole of the sphere.

The steps of the proof are the following:

1. Prove that  $J_W$  is a continuous function on  $\mathcal{M}_1(\mathcal{S}^2)$  and deduce that  $\mathcal{I}_W^{\mathcal{S}^2}$  is a good rate function.
2. Prove the weak upper bound

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \log Z_n \mathbb{P}(\overline{\mu}_n \in B(\sigma, \varepsilon)) \leq -I_W^{\mathcal{S}^2}(\sigma)$$

3. Prove the weak lower bound

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \log Z_n \mathbb{P}(\overline{\mu}_n \in B(\sigma, \varepsilon)) \geq -I_W^{\mathcal{S}^2}(\sigma).$$

We detail the proof of the first step which is the most important part of the proof. The second point is exactly the same as what we did for Kac polynomials and relies only on the Bernstein-Markov property. To prove the third point, we will use the same strategy as for Kac polynomials in Chapter 1. We reduce the problem of establishing the lower bound to the proof of a lower bound for the gas on the sphere with no confinement. This be a consequence of the continuity of  $J_W$ . We saw in Chapter 1 that these two inequality on the sphere imply the full large deviations principle and that  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \log Z_n = \inf I_W^{\mathcal{S}^2}$ .

### Step 1: study of the rate function

The Coulomb energy  $\mathcal{E}_{\mathcal{S}^2}$  is known to be lower-semicontinuous and strictly convex. The function  $J_W$  is a supremum of linear functions, hence it is also convex. We prove that the function  $J_W$  is continuous, which is enough to ensure that the function  $I_W^{\mathcal{S}^2}$  is a good rate function. The continuity of  $J_W$  is also helpful in the proof of the large deviations lower bound.

#### Upper semicontinuity

For any  $M > 0$ , we define on  $\mathcal{M}_1(\mathcal{S}^2)$  by

$$J_W^M(\mu) = \sup_{x \in \mathcal{S}^2} \int (\log \|x - y\| \vee -M) d\mu(y) - \phi(x)$$

and

$$W^M(x, \mu) = \int (\log \|x - y\| \vee -M) d\mu(y) - \phi(x).$$

The function  $W^M$  is continuous on  $\mathcal{S}^2 \setminus \{N\} \times \mathcal{M}_1(\mathcal{S}^2)$  where  $N = (0, 0, 1)$  is the north pole of  $\mathcal{S}^2$ . Notice that for any measure  $\nu$ , as  $\log \|x - y\| \leq 0$ , the function

$$x \mapsto \int (\log \|x - y\| \vee -M) d\mu(y) - \phi(x)$$

tends to  $-\infty$  at the north pole of the sphere. This implies that for any measure  $\mu$ , there exists  $x \in \mathcal{S}^2 \setminus \{N\}$  such that

$$W^M(x, \mu) = J_W^M(\mu)$$

as we can restrict the supremum to  $\mathcal{S}^2$  minus a small ball around the north pole. To show that  $J_W^M$  is continuous, we show that for any sequence  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converging weakly to some measure  $\mu$ , the sequence  $(J_W^M(\mu_n))_{n \in \mathbb{N}}$  has a unique accumulation point which is  $J_W^M(\mu)$ .

Let  $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathcal{S}^2)$  and let  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  a sequence converging weakly towards  $\mu$ . For any  $n$ , there exists  $x_n \in \mathcal{S}^2$  such that

$$W^M(x_n, \mu_n) = J_W^M(\mu_n).$$

The sequence  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  has a converging subsequence (with limit  $x_\infty$ ) in  $\mathcal{S}^2 \setminus \{N\}$  because, if we consider  $w$  such that  $\int \log \|w - y\| d\mu(y) > -\infty$ , then, for  $n$  large enough, all the  $x_k$ 's belong to the compact set  $\{x \in \mathcal{S}^2, -\phi(x) \geq \int \log \|w - y\| d\mu(y) - 1\}$ . For any fixed  $x \in \mathcal{S}^2$ , we have

$$J_W^M(\mu_n) = W^M(x_n, \mu_n) \geq W(x, \mu_n).$$

Taking the limit of this inequality implies that for any  $x \in \mathcal{S}^2$

$$c \geq W(x, \mu)$$

which is the definition of  $c = J_W^M(\mu)$ . Hence, the function  $J_W^M$  is continuous.

To prove that the function  $J_W$  is upper-semicontinuous, we consider  $\mu_n \rightarrow \mu$  and start from

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} J_W(\mu_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} J_W^M(\mu_n) = J_W^M(\mu)$$

and we want to the limit as  $M \rightarrow \infty$ . To prove that we can exchange the limit and the supremum, we want to use the Lemma 1.25 from Chapter 1. All we have to do is to ensure that we can restrict to a compact set to apply the Lemma. Consider  $w$  such that  $\int \log \|w - y\| d\mu(y) > -\infty$  then for  $M$  large enough, one can restrict the supremum to the compact set  $\{x \in \mathcal{S}^2, -\phi(x) \geq \int \log \|w - y\| d\mu(y) - 1\}$  (recalling that  $\phi \geq 0$ ).

### Lower semicontinuity

This part of the proof is very close to the general case from chapter 1. We reproduce the proof for completeness.

We want to show that for any measure  $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathcal{S}^2)$  and for any sequence  $\mu_n \rightarrow \mu$

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} J_W(\mu_n) \geq J_W(\mu).$$

We assume that  $J_W(\mu) > -\infty$ , otherwise the inequality is trivial. We fix such a measure  $\mu$  and for any  $\varepsilon > 0$ , we introduce the set

$$A_\varepsilon = \left\{ x \in \mathcal{S}^2, \int \log \|x - y\| d\mu(y) - \phi(x) \geq J_W(\mu) - \varepsilon \right\}.$$

Notice that this set is bounded away from the north pole of the sphere for any  $\varepsilon$ . The set  $A_\varepsilon$  has positive capacity. Otherwise it would be thin where  $J_W$  reaches its maximum, and its complement would also be thin at the same point. This would imply that  $\mathcal{S}^2$  is thin at one point which is absurd (see [Ran95, p. 79]). Then, thanks to [ST97, Chapter 1, Corollary 6.11], there exists a probability measure  $\nu$  supported on  $A_\varepsilon$  such that  $x \mapsto \int \log \|x - y\| d\nu(y)$  is a continuous function. Hence we get

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int \int \log \|x - y\| - \phi(x) d\mu_n(x) d\nu(y) &= \int \int \log \|x - y\| - \phi(x) d\nu(y) d\mu_n(x) \\ &= \int \left( \int \log \|x - y\| d\nu(y) - \phi(x) \right) d\mu(x). \end{aligned}$$

Using the fact that the support of  $\nu$  is included in  $A_\varepsilon$ , we finally get

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} J_W(\mu_n) = \int \liminf_{n \rightarrow \infty} J_W(\mu_n) d\nu \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int (\log \|x - y\| d\mu_n(y) - \phi(x)) d\nu(x) \geq J_W(\mu) - \varepsilon.$$

Taking the limit as  $\varepsilon$  goes to zero ends the proof of the lower semicontinuity. Hence,  $J_W$  is a continuous function and  $I_W^{\mathcal{S}^2}$  is well defined and lower semicontinuous.

### Step 2: large deviations weak upper bound

We want to prove that for any  $\sigma \in \mathcal{M}_1(\mathcal{S}^2)$  we have

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \log Z_n \mathbb{P}(\overline{\mu}_n \in B(\sigma, \delta)) \leq -I_W^{\mathcal{S}^2}(\sigma) \quad (5.14)$$

**Lemma 5.8** (Bernstein-Markov property for  $(\phi, \frac{1}{\pi} dT_* \ell_{\mathbb{C}})$ ). *For all  $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{S}^2 \setminus \{N\}$*

$$\sup_{x \in \mathcal{S}^2} \left\{ \prod_{i=1}^n \|x - x_i\|^2 e^{-n(\phi(x))} \right\} \leq n \int \prod_{i=1}^n \|x - x_i\|^2 e^{-n(\phi(x))} \frac{1}{\pi} dT_* \ell_{\mathbb{C}}(x).$$

*Proof of the Lemma.* The key of this proof will be the Bernstein-Markov property on the sphere for the couple  $(\phi(x), \frac{1}{\pi} dT_* \ell_{\mathbb{C}})$ . It is easy to prove that if  $(z \mapsto |z|^2, \frac{1}{\pi} d\ell_{\mathbb{C}})$  satisfies the Bernstein-Markov property, then so does the couple  $(\phi(x), \frac{1}{\pi} dT_* \ell_{\mathbb{C}})$ . We start from

$$\sup_{z \in \mathbb{C}} \left\{ |P(z)|^2 e^{-n|z|^2} \right\} \leq n \|P\|_2^2 = n \int |P(z)|^2 e^{-n|z|^2} \frac{1}{\pi} d\ell_{\mathbb{C}}(z)$$

and we apply the (5.11) to both sides of the inequality. The left side gives

$$\begin{aligned} \sup_{z \in \mathbb{C}} |P(z)|^2 e^{-n|z|^2} &= \sup_{z \in \mathbb{C}} \prod_{i=1}^n |z - z_i|^2 e^{-n|z|^2} \\ &= \sup_{z \in \mathbb{C}} \left\{ \prod_{i=1}^n \|T(z) - T(z_i)\|^2 \prod_{i=1}^n \frac{1}{(1 - \|T(z_i)\|^2)} \frac{1}{(1 - \|T(z)\|^2)^n} e^{-n|z|^2} \right\} \\ &= \sup_{z \in \mathbb{C}} \left\{ \prod_{i=1}^n \|T(z) - T(z_i)\|^2 e^{-n(|z|^2 + \log(1 - \|T(z)\|^2))} \right\} \prod_{i=1}^n \frac{1}{(1 - \|T(z_i)\|^2)} \\ &= \sup_{x \in \mathcal{S}^2} \left\{ \prod_{i=1}^n \|x - x_i\|^2 e^{-n(\phi(x))} \right\} \prod_{i=1}^n \frac{1}{(1 - \|x_i\|^2)}. \end{aligned}$$

and the right side gives

$$\begin{aligned} \int |P(z)|^2 e^{-n|z|^2} \frac{1}{\pi} d\ell_{\mathbb{C}}(z) &= \int \prod_{i=1}^n |z - z_i|^2 e^{-n|z|^2} \frac{1}{\pi} d\ell_{\mathbb{C}}(z) \\ &= \int \prod_{i=1}^n \|x - x_i\|^2 e^{-n(\phi(x))} \frac{1}{\pi} dT_* \ell_{\mathbb{C}}(x) \prod_{i=1}^n \frac{1}{(1 - \|x_i\|^2)} \end{aligned}$$

hence we obtain for all  $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{S}^2 \setminus \{N\}$

$$\sup_{x \in \mathcal{S}^2} \left\{ \prod_{i=1}^n \|x - x_i\|^2 e^{-n(\phi(x))} \right\} \leq \int \prod_{i=1}^n \|x - x_i\|^2 e^{-n(\phi(x))} \frac{1}{\pi} dT_* \ell_{\mathbb{C}}(x).$$

□

We are ready to prove the weak upper bound. Fix  $\sigma \in \mathcal{M}_1(\mathcal{S}^2)$  and  $\delta > 0$ , then let

$$A = Z_n \mathbb{P}(\overline{\mu}_n \in B(\sigma, \delta)).$$

We use the Lemma 5.8 and the continuity of  $J_W$  at  $\sigma$

$$\begin{aligned} A &= \int 1_{B(\sigma, \delta)} \exp - \left( n^2 \mathcal{E}_{\neq, \mathcal{S}^2}(\overline{\mu}_n) + (n+1) \log \int \prod_{k=1}^n \|x - x_k\|^2 e^{-(n)\phi(x)} \frac{1}{\pi} dT_* \ell_{\mathbb{C}}(x) \right) d\pi^{\otimes n} \\ &\leq \int e^{-(n+1) \log \sup_{x \in \mathcal{S}^2} \{ \prod_{i=1}^n \|x - x_i\|^2 e^{-n(\phi(x))} \}} 1_{B(\sigma, \delta)} \exp - \left( n^2 \mathcal{E}_{\neq, \mathcal{S}^2}(\overline{\mu}_n) \right) d\pi^{\otimes n} \\ &\leq \int e^{-n(n+1)J_W(\overline{\mu}_n)} 1_{B(\sigma, \delta)} \exp - \left( n^2 \mathcal{E}_{\neq, \mathcal{S}^2}(\overline{\mu}_n) \right) d\pi^{\otimes n}(x_1, \dots, x_n) \\ &\leq e^{-n(n+1)(J_W(\sigma) + \varepsilon)} \int 1_{B(\sigma, \delta)} \exp - \left( n^2 \mathcal{E}_{\neq, \mathcal{S}^2}(\overline{\mu}_n) \right) d\pi^{\otimes n}(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

where  $\varepsilon$  goes to zero as  $\delta \rightarrow 0$ . The end of the proof of the upper bound is the classical proof of the large deviations upper bound for a Coulomb gas. We consider the cut-off of the logarithm at 0,  $\log_M = \log \vee - M$  to obtain

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\neq, \mathcal{S}^2}(\overline{\mu}_n) &= \frac{1}{n^2} \sum_{i \neq j} -\log \|x_i - x_j\| \geq \frac{1}{n^2} \sum_{i \neq j} -\log_M \|x_i - x_j\| \\ &\geq \iint -\log_M \|x - y\| d\overline{\mu}_n(x) d\overline{\mu}_n(y) - \frac{M}{n}. \end{aligned}$$

Using this inequality and defining  $\mathcal{E}_{\mathcal{S}^2}^M(\mu) = \iint -\log_M \|x - y\| d\mu(x) d\mu(y)$ , we obtain

$$\frac{1}{n^2} \log Z_n \mathbb{P}(\overline{\mu}_n \in B(\sigma, \delta)) \leq \frac{n(n+1)}{n^2} (J_W(\sigma) + \varepsilon) + \inf_{\mu \in B(\sigma, \delta)} \mathcal{E}_{\mathcal{S}^2}^M(\mu) + \frac{M}{n}.$$

Taking the limit in  $n$ , taking the limit as  $\delta \rightarrow 0$  and letting  $M$  go to infinity gives

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \log Z_n \mathbb{P}(\overline{\mu}_n \in B(\sigma, \delta)) \leq -I_W^{\mathcal{S}^2}(\sigma).$$

This completes the proof of the weak upper bound.

### Step 3: large deviations weak lower bound

We give a sketch of proof of the large deviations lower bound for the empirical measures of the gas on  $\mathcal{S}^2$ . We want to prove that for any  $\sigma \in \mathcal{M}_1(\mathcal{S}^2)$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \log Z_n \mathbb{P}(\overline{\mu}_n \in B(\sigma, \varepsilon)) \geq -I_W^{\mathcal{S}^2}(\sigma).$$

We use the notation

$$\mathcal{E}_{\neq, \mathcal{S}^2}(\overline{\mu}_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{i \neq j} -\log \|x_i - x_j\|$$

and we define the finite measure on  $\mathcal{S}^2$

$$d\gamma(x) = e^{-\phi(x)} dT_* \ell_{\mathbb{C}}(x).$$

$$Z_n \mathbb{P}(\overline{\mu}_n \in B(\sigma, \varepsilon))$$

$$\begin{aligned} &= \int 1_{B(\sigma, \varepsilon)} \exp - \left( n^2 \mathcal{E}_{\neq, \mathcal{S}^2}(\overline{\mu}_n) + (n+1) \log \int \prod_{k=1}^n \|x - x_k\|^2 e^{-(n-1)\phi(x)} d\gamma(x) \right) d\pi^{\otimes n} \\ &\geq e^{-(n+1) \sup_{x \in \mathcal{S}^2} \{ n \int \log \|x - y\|^2 d\overline{\mu}_n(y) - (n-1)\phi(x) \}} \int 1_{B(\sigma, \varepsilon)} e^{-(n^2 \mathcal{E}_{\neq, \mathcal{S}^2}(\overline{\mu}_n))} \int 1 d\gamma(x) d\pi^{\otimes n}. \end{aligned}$$

We define the function on  $\mathcal{M}_1(\mathcal{S}^2)$

$$J_n(\mu) = \sup_{x \in \mathcal{S}^2} \left\{ \int \log \|x - y\| d\mu(y) - \frac{n-1}{n} \phi(x) \right\}.$$

This function is continuous on  $\mathcal{M}_1(\mathcal{S}^2)$ . This implies that for any  $\delta > 0$ , if  $\varepsilon$  is small enough,

$$Z_n \mathbb{P}(\bar{\mu}_n \in B(\sigma, \varepsilon)) \geq e^{-(n+1)n(J_n(\sigma) - \delta)} \int e^{-(n^2 \mathcal{E}_{\neq, \mathcal{S}^2}(\bar{\mu}_n))} \left( \int 1 d\gamma(x) \right) d\pi^{\otimes n}.$$

To prove the weak large deviations lower bound, we only have to prove that, for any measure  $\sigma \in \mathcal{M}_1(\mathcal{S}^2)$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_n(\sigma) \leq J_W(\sigma). \quad (5.15)$$

The rest of the proof is exactly the same as in Chapter 1.

To prove (5.15), we fix  $\varepsilon > 0$  and we consider a sequence  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  such that for any  $n$

$$J_n(\sigma) \leq \int \log \|x_n - y\| d\sigma(y) + \frac{n-1}{n} \phi(x_n) + \varepsilon.$$

As  $\mathcal{S}^2$  is compact, we assume that the sequence  $x_n$  converges towards  $x_\infty$ . We apply Fatou's Lemma (for negative functions) to obtain

$$\begin{aligned} J_n(\sigma) &\leq \int \log \|x_n - y\| d\sigma(y) + \frac{n-1}{n} \phi(x_n) + \varepsilon \\ &\leq \int \log \|x_\infty - y\| d\sigma(y) + \phi(x_\infty) + \varepsilon \\ &\leq J_W(\sigma) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Letting  $\varepsilon$  go to zero ends the proof of (5.15) and the proof of the large deviations lower bound.

This finishes the proof of Proposition 5.7. To deduce Theorem 5.2 from Proposition 5.7, we check easily that for all  $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{C})$

$$I_W(\mu) = I_W^{\mathcal{S}^2}(T_*\mu).$$

As  $\mu \mapsto T_*^{-1}\mu$  is a bijection from  $\{\mu \in \mathcal{M}_1(\mathcal{S}^2) \mid \mu(\{N\}) = 0\}$  to  $\mathcal{M}_1(\mathbb{C})$ , and  $I_W^{\mathcal{S}^2}$  is infinite on the set  $\{\mu \in \mathcal{M}_1(\mathcal{S}^2) \mid \mu(\{N\}) > 0\}$ , one can use the contraction principle to obtain Theorem 5.2.

## 5.4 Universality of the large deviations principles

In this section, we briefly discuss the proof of Theorem 5.4. The proof is exactly the same as the equivalent result for Kac polynomials in Chapter 2. We give some details about the complex case. Let  $a_0, \dots, a_n$  be i.i.d. random variables whose distribution is absolutely continuous with respect to the Lebesgue measure on  $\mathbb{C}$  with density  $g$  satisfying the assumptions of Theorem 5.4. For this model, we write  $\mathbb{P}_{n,g}$  the distribution of the empirical measures associated to rescaled Weyl polynomials with those coefficients. This means that for any Borel set  $A \in \mathcal{M}_1(\mathbb{C})$

$$\mathbb{P}_{n,g}(A) = \int \left( \int 1_{\mu_n \in A} \frac{|A_n|^2}{n!} |a_n|^{2n} \prod_{i < j} |z_i - z_j|^2 \prod_{k=0}^n g(a_k) d\ell_{\mathbb{C}}(a_n) \right) d\ell_{\mathbb{C}^n}(z_1, \dots, z_n)$$

where  $|A_n|^2$  is the complex Jacobian of the change of variables from the basis  $(X^k)_{k \leq n}$  to the basis  $(\sqrt{n} \frac{\sqrt{n^k}}{\sqrt{k!}} X^k)_{k \leq n}$ .

When the coefficients are independent  $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, 1)$  random variables, we write  $\mathbb{P}_{n, \mathcal{N}_{\mathbb{C}}}$  the distribution of the empirical measures of the zeros of rescaled Weyl polynomials. This means that for any Borel set  $A \in \mathcal{M}_1(\mathbb{C})$

$$\mathbb{P}_{n, \mathcal{N}_{\mathbb{C}}}(A) = \int 1_{\mu_n \in A} \frac{|A_n|^2}{\pi^n} \frac{\prod_{i < j} |z_i - z_j|^2}{\|\tilde{a}\|^{2n+2}} d\ell_{\mathbb{C}^n}(z_1, \dots, z_n).$$

The idea of the proof is the following: if we can find two constants  $c_n$  and  $C_n$  such that for all Borel set  $A \in \mathcal{M}_1(\mathbb{C})$

$$c_n \mathbb{P}_{n, \mathcal{N}_{\mathbb{C}}}(A) \leq \mathbb{P}_{n, g}(A) \leq C_n \mathbb{P}_{n, \mathcal{N}_{\mathbb{C}}}(A)$$

with

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \log c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \log C_n = 0$$

then this would imply that the large deviations principle for the sequence of measures  $(P_{n, \mathcal{N}_{\mathbb{C}}})_{n \in \mathbb{N}}$  is also valid for the sequence of measures  $(P_{n, g})_{n \in \mathbb{N}}$ .

In fact, to get the optimal condition on  $g$ , this approach only works for the upper bound. If we replace the second hypothesis of Theorem 5.4 by the stronger assumption:

$$\exists \varepsilon, \delta > 0 \quad \text{such that} \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad g(z) \geq \varepsilon 1_{|z| \leq \delta}$$

then the announced strategy works also for the lower bound.

We only give the proof of the upper bound to illustrate the techniques involved, as the proof of Theorem 5.4 is the same as the one we gave in Chapter 2.

## Upper bound

We start from the hypothesis: there exist  $\rho > 0$ ,  $r > 0$  and  $R > 0$  such that

$$\forall z \in E, \quad g(z) \leq \exp(-r|z|^\rho + R). \quad (5.16)$$

This implies that for any Borel set  $A \in \mathcal{M}_1(\mathbb{C})$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{n, g}(A) &= \int \left( \int 1_{\mu_n \in A} \frac{|A_n|^2}{n!} |a_n|^{2n} \prod_{i < j} |z_i - z_j|^2 \prod_{k=0}^n g(a_k) d\ell_{\mathbb{C}}(a_n) \right) d\ell_{\mathbb{C}^n}(z_1, \dots, z_n) \\ &\leq \int \left( \int 1_{\mu_n \in A} \frac{|A_n|^2}{n!} |a_n|^{2n} \prod_{i < j} |z_i - z_j|^2 \prod_{k=0}^n e^{-r|a_k|^\rho + R} d\ell_{\mathbb{C}}(a_n) \right) d\ell_{\mathbb{C}^n} \\ &\leq \int \left( \int 1_{\mu_n \in A} \frac{|A_n|^2}{n!} |a_n|^{2n} \prod_{i < j} |z_i - z_j|^2 \exp(-r\|a\|_\rho^\rho) e^{(n+1)R} d\ell_{\mathbb{C}}(a_n) \right) d\ell_{\mathbb{C}^n} \end{aligned}$$

where  $\|a\|_\rho^\rho = \sum_{k=1}^n |a_k|^\rho$ . We are in a similar situation as when we computed the distribution of the roots of a polynomial when the joint distribution of the coefficients was a function of a semi-norm. We compute the right hand-side integral and we obtain for all  $A \in \mathcal{M}_1(\mathbb{C})$

$$\mathbb{P}_{n, g}(A) \leq \int 1_{\mu_n \in A} \frac{|A_n|^2 e^{(n+1)R}}{n!} \frac{\prod_{i < j} |z_i - z_j|^2}{\|\tilde{a}\|_\rho^{2n+2}} \left( \int_0^\infty |u|^{2n+1} e^{-r|u|^\rho} du \right) d\ell_{\mathbb{C}^n}$$

where  $\tilde{a} = (a_0/a_n, \dots, 1)$ . Finally, using the classical inequalities on  $\mathbb{C}^{n+1}$ , which are a consequence of the Holder inequality:

$$\begin{aligned} \text{if } \rho > 2, \quad \|\cdot\|_\rho &\geq \frac{1}{n^{1/2-1/\rho}} \|\cdot\|_2 \\ \text{if } \rho \leq 2, \quad \|\cdot\|_\rho &\geq \|\cdot\|_2 \end{aligned}$$

we obtain that there exists a sequence  $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$  such that, for any  $\rho > 0$ ,

$$\|\cdot\|_\rho \geq \gamma_n \|\cdot\|_2 \quad \text{and} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \gamma_n = 0. \quad (5.17)$$

This implies that for any Borel set  $A \in \mathcal{M}_1(\mathbb{C})$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{n,g}(A) &\leq \frac{\pi^n e^{(n+1)R}}{n!} \left( \int_0^\infty |u|^{2n+1} e^{-r|u|^\rho} du \right) \gamma_n^{2n+2} \int 1_{\mu_n \in A} \frac{|A_n|^2 \prod_{i < j} |z_i - z_j|^2}{\|\tilde{a}\|_2^{2n+2}} d\ell_{\mathbb{C}^n} \\ &\leq \frac{\pi^n e^{(n+1)R}}{n!} \left( \int_0^\infty |u|^{2n+1} e^{-r|u|^\rho} du \right) \gamma_n^{2n+2} \mathbb{P}_{n, \mathcal{N}_{\mathbb{C}}}(A). \end{aligned}$$

To conclude the proof of the upper bound, we set

$$C_n = \frac{\pi^n e^{(n+1)R}}{n!} \left( \int_0^\infty |u|^{2n+1} e^{-r|u|^\rho} du \right) \gamma_n^{2n+2}$$

and we check that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \log C_n = 0.$$

### Lower Bound

If we replace the second hypothesis of Theorem 5.4 by the stronger assumption

$$\exists \varepsilon, \delta > 0 \quad \text{such that} \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad g(z) \geq \varepsilon 1_{|z| \leq \delta}$$

then one can follow the proof of the upper bound, reversing the inequalities and using

$$\prod_{k=0}^n g(a_k) \geq \varepsilon^{n+1} \prod_{k=0}^n 1_{|a_k| \leq \delta} = \varepsilon^{n+1} 1_{\|a\|_\infty \leq \delta}.$$

This implies that for any Borel set  $A \in \mathcal{M}_1(\mathbb{C})$

$$\mathbb{P}_{n,g}(A) \geq \varepsilon^{n+1} \int 1_{\mu_n \in A} \frac{|A_n|^2 \prod_{i < j} |z_i - z_j|^2}{n! \|\tilde{a}\|_\infty^{2n+2}} \int |u|^{2n} 1_{|u| < \delta} d\ell_{\mathbb{C}}(u) d\ell_{\mathbb{C}^n}(z_1, \dots, z_n).$$

Using the fact that  $\|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_2$  in  $\mathbb{C}^{n+1}$ , we obtain

$$\mathbb{P}_{n,g}(A) \geq \frac{\pi^n}{n!} \int |u|^{2n} 1_{|u| < \delta} d\ell_{\mathbb{C}}(u) \mathbb{P}_{n, \mathcal{N}_{\mathbb{C}}}(A).$$

To end the proof of this (easier) case, we only have to set

$$c_n = \frac{\pi^n}{n!} \int |u|^{2n} 1_{|u| < \delta} d\ell_{\mathbb{C}}(u)$$

and to verify that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \log c_n = 0.$$

The proof of the lower bound in the general case relies on the following Lemma.



**Lemma 5.9.** *Let  $E$  be  $\mathbb{C}$  or  $\mathbb{R}$ . Let  $X_0, \dots, X_n$  be i.i.d. random variables, uniformly distributed on the disk in  $E$  of center 0 and radius  $\delta$ . Assume that there exists  $\delta > 0$  such that for all  $\lambda > 0$ ,*

$$c(\lambda) := \int 1_{|x| \leq \delta} \frac{1}{g(x)^\lambda} d\ell_E(x) < \infty. \quad (5.18)$$

*Then, for any  $K > 0$  and  $\varepsilon > 0$  there exists  $n_0 = n_0(K, \delta, \varepsilon)$  such that for all  $n > n_0$ ,*

$$\int 1_{\{\prod_{k=0}^n g(a_k) \leq e^{-\varepsilon n^2}\}} 1_{\|a\|_\infty < \delta} d\ell_E^{\otimes n}(a_0, \dots, a_n) \leq e^{-Kn^2}. \quad (5.19)$$

*Proof of Lemma 5.9.* Fix  $K > 0$ , mimicking the proof of Chernoff's inequality, we have:

$$\begin{aligned} & \int 1_{\{\prod_{k=0}^n g(a_k) \leq e^{-\varepsilon n^2}\}} 1_{\|a\|_\infty < \delta} d\ell_{E^{n+1}}(a_0, \dots, a_n) \\ &= \int 1_{\{\prod_{k=0}^n g(a_k)^{-\lambda} \geq e^{\lambda \varepsilon n^2}\}} 1_{\|a\|_\infty < \delta} d\ell_{E^{n+1}}(a_0, \dots, a_n) \\ &\leq e^{-\lambda \varepsilon n^2} \int \prod_{k=0}^n [g(a_k)^{-\lambda} 1_{|a_k| < \delta}] d\ell_{E^{n+1}}(a_0, \dots, a_n) \\ &\leq e^{-\lambda \varepsilon n^2} e^{(n+1)c(\lambda)}. \end{aligned}$$

The proof is completed by taking  $\lambda$  large enough so that  $\lambda \varepsilon > K$  and then taking  $n_0$  large enough so that  $e^{-\lambda \varepsilon n^2} e^{(n+1)c(\lambda)} \leq e^{-Kn^2}$  for all  $n > n_0$ .  $\square$

This lemma implies that we can restrict all the integrals in the lower bound to the set  $\{\prod_{k=0}^n g(a_k)^{-\lambda} > e^{\lambda \varepsilon n^2}\}$  for any  $\varepsilon$ . This lemma allows us to reduce the general proof to the case of  $g(a) = 1_{|a| \leq \delta}$  which has been studied.

## 5.5 Real Case

The proof of Theorem 5.4 when the coefficients are real random variables relies on the same ideas. We use the same strategy on each of the terms of the mixture giving the distribution of zeros. All the details are given for Kac polynomials in Chapter 2.

# Bibliography

- [ABDF11] Gernot Akemann, Jinho Baik, and Philippe Di Francesco. *The Oxford handbook of random matrix theory*. Oxford University Press, 2011.
- [ABS11] Diego Armentano, Carlos Beltrán, and Michael Shub. Minimizing the discrete logarithmic energy on the sphere: The role of random polynomials. *Transactions of the American Mathematical Society*, 363(6):2955–2965, 2011.
- [AGZ10] Greg Anderson, Alice Guionnet, and Ofer Zeitouni. *An introduction to random matrices*. Number 118. Cambridge University Press, 2010.
- [AN07] Robert Ash and Phil Novinger. *Complex Variables*. Dover Publications, 2007.
- [Arn66] Ludwig Arnold. Über die nullstellenverteilung zufälliger polynome. *Mathematische Zeitschrift*, 92(1):12–18, 1966.
- [Aug16] Fanny Augeri. Large deviations principle for the largest eigenvalue of wigner matrices without gaussian tails. *Electronic Journal of Probability*, 21, 2016.
- [AW05] Jean-Marc Azaïs and Mario Wschebor. On the roots of a random system of equations. the theorem of shub and smale and some extensions. *Foundations of Computational Mathematics*, 5(2):125–144, 2005.
- [BADG01] Gérard Ben Arous, Amir Dembo, and Alice Guionnet. Aging of spherical spin glasses. *Probability theory and related fields*, 120(1):1–67, 2001.
- [BAG97] Gérard Ben Arous and Alice Guionnet. Large deviations for wigner’s law and voiculescu’s non-commutative entropy. *Probab. Theory Related Fields*, 108(4):517–542, 1997.
- [BAZ98] Gérard Ben Arous and Ofer Zeitouni. Large deviations from the circular law. *ESAIM: Probability and Statistics*, 2:123–134, 1998.
- [BB10] Robert Berman and Sébastien Boucksom. Growth of balls of holomorphic sections and energy at equilibrium. *Inventiones mathematicae*, 181(2):337–394, 2010.
- [BBL92] Eugène Bogomolny, Oriol Bohigas, and Patricio Leboeuf. Distribution of roots of random polynomials. *Phys. Rev. Lett.*, 68:2726–2729, May 1992.
- [BBL96] Eugène Bogomolny, Oriol Bohigas, and Patricio Leboeuf. Quantum chaotic dynamics and random polynomials. *Journal of Statistical Physics*, 85(5):639–679, 1996.
- [BC12] Charles Bordenave and Djalil Chafaï. Around the circular law. *Probability surveys*, 9, 2012.

- [BC14] Charles Bordenave and Pietro Caputo. A large deviation principle for wigner matrices without gaussian tails. *The Annals of Probability*, 42(6):2454–2496, 2014.
- [BE15] Walter Bergweiler and Alexandre Eremenko. Distribution of zeros of polynomials with positive coefficients. In *Annales Academiae Scientiarum Fennicae*, volume 40, pages 375–83, 2015.
- [Ber14] Robert Berman. Determinantal point processes and fermions on complex manifolds: large deviations and bosonization. *Communications in Mathematical Physics*, 327(1):1–47, 2014.
- [Ber16] Robert Berman. On large deviations for gibbs measures, mean energy and gamma-convergence. *arXiv preprint arXiv:1610.08219*, 2016.
- [BG13a] Gaëtan Borot and Alice Guionnet. All-order asymptotic expansion of beta matrix models in the multi-cut regime. arxiv preprint. *arXiv preprint arXiv:1303.1045*, 2013.
- [BG13b] Gaëtan Borot and Alice Guionnet. Asymptotic expansion of  $\beta$  matrix models in the one-cut regime. *Communications in Mathematical Physics*, pages 1–37, 2013.
- [BL15] Xavier Blanc and Mathieu Lewin. The crystallization conjecture: a review. *EMS Surv. Math. Sci.* 2, 255–306., 2015.
- [Blo07] Thomas Bloom. Random polynomials and (pluri) potential theory. In *Annales Polonici Mathematici*, volume 91, pages 131–141. Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, 2007.
- [Blo09] Thomas Bloom. Weighted polynomials and weighted pluripotential theory. *Transactions of the American Mathematical Society*, 361(4):2163–2179, 2009.
- [BLPW15] Thomas Bloom, Norman Levenberg, Federico Piazzon, and Franck Wielonsky. Bernstein-markov: a survey. *Dolomites Research Notes on Approximation*, 8(Special Issue), 2015.
- [BLTW15] Thomas Bloom, Norman Levenberg, Vilmos Totik, and Franck Wielonsky. Modified logarithmic potential theory and applications. *arXiv preprint arXiv:1502.06925*, 2015.
- [BLW14] Thomas Bloom, Norman Levenberg, and Franck Wielonsky. Logarithmic potential theory and large deviation. *arXiv preprint arXiv:1407.7481*, 2014.
- [Bog07] Vladimir Bogachev. *Measure theory, vol. 2*. Springer, 2007.
- [Bor98] Alexei Borodin. Biorthogonal ensembles. *Nuclear Physics B*, 536(3):704–732, 1998.
- [BP32] André Bloch and György Pólya. On the roots of certain algebraic equations. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 2(1):102–114, 1932.
- [BRS86] Albert Bharucha-Reid and Masilamani Sambandham. *Random Polynomials: Probability and Mathematical Statistics: a Series of Monographs and Textbooks*. Academic Press, 1986.

- [BS10] Zhidong Bai and Jack Silverstein. *Spectral analysis of large dimensional random matrices*, volume 20. Springer, 2010.
- [But16] Raphaël Butez. Large deviations for the empirical measure of random polynomials: revisit of the zeitouni-zelditch theorem. *Electronic Journal of Probability*, 21, 2016.
- [But17a] Raphaël Butez. Large deviations for biorthogonal ensembles and variational formulation for the dykema-haagerup distribution. *Electronic Communications in Probability*, 22, 2017.
- [But17b] Raphaël Butez. The largest root of random kac polynomials is heavy tailed. *arXiv preprint arXiv:1704.02761*, 2017.
- [BY88] Zhi-Dong Bai and Yong-Qua Yin. Necessary and sufficient conditions for almost sure convergence of the largest eigenvalue of a wigner matrix. *The Annals of Probability*, 16(4):1729–1741, 1988.
- [BZ17] Raphaël Butez and Ofer Zeitouni. Universal large deviations for kac polynomials. *Electronic Communications in Probability*, 22, 2017.
- [Cai81] Jean-Michel Caillol. Exact results for a two-dimensional one-component plasma on a sphere. *Journal de Physique Lettres*, 42(12):245–247, 1981.
- [CE15] Katrin Credner and Peter Eichelsbacher. Large deviations for the largest eigenvalue of disordered bosons and disordered fermionic systems. *arXiv preprint arXiv:1503.00984*, 2015.
- [CGZ14] Djalil Chafaï, Nathael Gozlan, and Pierre-André Zitt. First-order global asymptotics for confined particles with singular pair repulsion. *Ann. Appl. Probab.*, 24(6):2371–2413, 2014.
- [Cha93] Terence Chan. Large deviations for empirical measures with degenerate limiting distribution. *Probability theory and related fields*, 97(1):179–193, 1993.
- [Che14] Dimitris Cheliotis. Triangular random matrices and biorthogonal ensembles. *arXiv preprint arXiv:1404.4730*, 2014.
- [CHM16] Djalil Chafaï, Adrien Hardy, and Mylène Maïda. Concentration for coulomb gases and coulomb transport inequalities. *arXiv preprint arXiv:1610.00980*, 2016.
- [CHS<sup>+</sup>06] Yvan Castin, Zoran Hadzibabic, Sabine Stock, Jean Dalibard, and Sandro Stringari. Quantized vortices in the ideal bose gas: A physical realization of random polynomials. *Physical review letters*, 96(4):040405, 2006.
- [CMV16] Fabio Deelan Cunden, Francesco Mezzadri, and Pierpaolo Vivo. Large deviations of radial statistics in the two-dimensional one-component plasma. *Journal of Statistical Physics*, 164(5):1062–1081, 2016.
- [Con78] John Conway. *Functions of one complex variable*, volume 11 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York-Berlin, second edition, 1978.
- [CP14] Djalil Chafaï and Sandrine Péché. A note on the second order universality at the edge of coulomb gases on the plane. *Journal of Statistical Physics*, 156(2):368–383, 2014.

- [CW14] Tom Claeys and Dong Wang. Random matrices with equispaced external source. *Communications in Mathematical Physics*, 328(3):1023–1077, 2014.
- [Dal15] Federico Dalmao. Asymptotic variance and clt for the number of zeros of Kostlan-Shub-Smale random polynomials. *Comptes Rendus Mathématique*, 353(12):1141–1145, 2015.
- [DE02] Ioana Dumitriu and Alan Edelman. Matrix models for beta ensembles. *Journal of Mathematical Physics*, 43(11):5830–5847, 2002.
- [DE11] Paul Dupuis and Richard Ellis. *A weak convergence approach to the theory of large deviations*, volume 902. John Wiley & Sons, 2011.
- [Dei00] Percy Deift. *Orthogonal polynomials and random matrices: a Riemann-Hilbert approach*, volume 3. American Mathematical Soc., 2000.
- [DH04] Ken Dykema and Uffe Haagerup. Dt-operators and decomposability of Voiculescu’s circular operator. *American journal of mathematics*, 126(1):121–189, 2004.
- [DM06] David Dean and Satya Majumdar. Large deviations of extreme eigenvalues of random matrices. *Physical review letters*, 97(16):160201, 2006.
- [DMR<sup>+</sup>16] Catherine Donati-Martin, Alain Rouault, et al. Near-extreme eigenvalues in the beta-ensembles. *Electronic Journal of Probability*, 21, 2016.
- [DNV15] Yen Do, Hoi Nguyen, and Van Vu. Real roots of random polynomials: expectation and repulsion. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 111(6):1231–1260, 2015.
- [DPSZ02] Amir Dembo, Bjorn Poonen, Qi-Man Shao, and Ofer Zeitouni. Random polynomials having few or no real zeros. *Journal of the American Mathematical Society*, 15(4):857–892, 2002.
- [DV17] Yen Do and Van Vu. Central limit theorems for the real zeros of Weyl polynomials. *arXiv preprint arXiv:1707.09276*, 2017.
- [Dys62] Freeman Dyson. Statistical theory of the energy levels of complex systems. i. *Journal of Mathematical Physics*, 3(1):140–156, 1962.
- [DZ09] Amir Dembo and Ofer Zeitouni. *Large deviations techniques and applications*, volume 38. Springer Science & Business Media, 2009.
- [Ede97] Alan Edelman. The probability that a random real gaussian matrix has real eigenvalues, related distributions, and the circular law. *Journal of Multivariate Analysis*, 60(2):203–232, 1997.
- [EK95] Alan Edelman and Eric Kostlan. How many zeros of a random polynomial are real? *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 32(1):1–37, 1995.
- [EO56] Paul Erdős and AC Offord. On the number of real roots of a random algebraic equation. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 3(1):139–160, 1956.
- [ESS11] Peter Eichelsbacher, Jens Sommerauer, and Michael Stolz. Large deviations for disordered bosons and multiple orthogonal polynomial ensembles. *Journal of Mathematical Physics*, 52(7):073510, 2011.

- [ET50] Paul Erdős and Pál Turán. On the distribution of roots of polynomials. *Annals of mathematics*, pages 105–119, 1950.
- [Far98] Kambiz Farahmand. *Topics in random polynomials*, volume 393. CRC Press, 1998.
- [FH99] Peter Forrester and Graeme Honner. Exact statistical properties of the zeros of complex random polynomials. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 32(16):2961, 1999.
- [FJM92] Peter Forrester, Bernard Jancovici, and John Madore. The two-dimensional coulomb gas on a sphere: exact results. *Journal of statistical physics*, 69(1):179–192, 1992.
- [FM53] Robert Fortet and Edith Mourier. Convergence de la répartition empirique vers la répartition théorique. In *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, volume 70, pages 267–285. Elsevier, 1953.
- [For10] Peter Forrester. *Log-gases and random matrices (LMS-34)*. Princeton University Press, 2010.
- [Fro35] Otto Frostman. *Potentiel d'équilibre et capacité des ensembles*. PhD thesis, Glerup, 1935.
- [FW17] Peter Forrester and Dong Wang. Muttalib–borodin ensembles in random matrix theory. realisations and correlation functions. *Electronic Journal of Probability*, 22, 2017.
- [FZ11] Renjie Feng and Steve Zelditch. Large deviations for zeros of  $p(\phi)$  2 random polynomials. *Journal of Statistical Physics*, 143(4):619–635, 2011.
- [Gin65] Jean Ginibre. Statistical ensembles of complex, quaternion, and real matrices. *Journal of Mathematical Physics*, 6(3):440–449, 1965.
- [Gro17] Benjamin Groux. Asymptotic freeness for rectangular random matrices and large deviations for sample covariance matrices with sub-gaussian tails. *Electronic Journal of Probability*, 22, 2017.
- [GV14] Friedrich Götze and Martin Venker. Local universality of repulsive particle systems and random matrices. *The Annals of Probability*, 42(6):2207–2242, 2014.
- [GW15] Damien Gayet and Jean-Yves Welschinger. Expected topology of random real algebraic submanifolds. *Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu*, 14(4):673–702, 2015.
- [GZ] Friedrich Götze and Dmitry Zaporozhets. On the distribution of complex roots of random polynomials with heavy-tailed coefficients.
- [GZ16] Subhroshekhar Ghosh and Ofer Zeitouni. Large deviations for zeros of random polynomials with iid exponential coefficients. *Int. Math. Res. Not.*, 26:1308–1347, 2016.
- [Ham56] John Michael Hammersley. The zeros of a random polynomial. In *Proc. Third Berkeley Symposium on Probability and Statistics*, volume 2, pages 89–111, 1956.

- [Har12] Adrien Hardy. A note on large deviations for 2D Coulomb gas with weakly confining potential. *Electron. Commun. Probab.*, 17:no. 19, 12, 2012.
- [Hel09] Lester La Verne Helms. *Potential theory*. Springer, 2009.
- [HKPV09] J. Ben Hough, Manjunath Krishnapur, Yuval Peres, and Bálint Virág. *Zeros of Gaussian analytic functions and determinantal point processes*, volume 51 of *University Lecture Series*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2009.
- [HN08] Christopher Hughes and Ashkan Nikeghbali. The zeros of random polynomials cluster uniformly near the unit circle. *Compositio Mathematica*, 144(03):734–746, 2008.
- [Hol86] Philip Holgate. Studies in the history of probability and statistics xli waring and sylvester on random algebraic equations. *Biometrika*, pages 228–231, 1986.
- [HP00] Fumio Hiai and Dénes Petz. *The semicircle law, free random variables and entropy*, volume 77. American Mathematical Society Providence, 2000.
- [IM71a] Ildar Ibragimov and Nina Maslova. On the expected number of real zeros of random polynomials i. coefficients with zero means. *Theory of Probability & Its Applications*, 16(2):228–248, 1971.
- [IM71b] Ildar Ibragimov and Nina Maslova. On the expected number of real zeros of random polynomials. ii. coefficients with non-zero means. *Theory of Probability & Its Applications*, 16(3):485–493, 1971.
- [IZ97] Ildar Ibragimov and Ofer Zeitouni. On roots of random polynomials. *Trans. American Math. Soc.*, 349:2427–2441, 1997.
- [IZ13] Ildar Ibragimov and Dmitry Zaporozhets. On distribution of zeros of random polynomials in complex plane. In *Prokhorov and contemporary probability theory*, pages 303–323. Springer, 2013.
- [Kac43] Mark Kac. On the average number of real roots of a random algebraic equation. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 49:314–320, 1943.
- [Kos93] Eric Kostlan. On the distribution of roots of random polynomials. In *From Topology to Computation: Proceedings of the Smalefest*, pages 419–431. Springer, 1993.
- [Kri06] Manjunath Krishnapur. *Zeros of random analytic functions*. PhD thesis, Berkeley, 2006.
- [KZ13] Zakhar Kabluchko and Dmitry Zaporozhets. Roots of random polynomials whose coefficients have logarithmic tails. *The Annals of Probability*, 41(5):3542–3581, 2013.
- [KZ14] Zakhar Kabluchko and Dmitry Zaporozhets. Asymptotic distribution of complex zeros of random analytic functions. *The Annals of Probability*, 42(4):1374–1395, 2014.
- [Lan] Naum Samoï Landkof. *Foundations of modern potential theory*.

- [Lan13] Serge Lang. *Complex analysis*, volume 103. Springer Science & Business Media, 2013.
- [Leb00] Patricio Leboeuf. Random matrices, random polynomials and coulomb systems. *Le Journal de Physique IV*, 10(PR5):Pr5–45, 2000.
- [Li11] Wembo Li. Probability of all real zeros for random polynomial with the exponential ensemble. *Preprint*, <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.221.6122&rep=rep1&type=pdf>, 2011.
- [LO39] John Edensor Littlewood and Cyril Offord. On the number of real roots of a random algebraic equation. ii. In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, volume 35, pages 133–148. Cambridge Univ Press, 1939.
- [LO43] John Edensor Littlewood and Albert Cyril Offord. On the number of real roots of a random algebraic equation (iii). *12(3):277–286*, 1943.
- [LO45] John Edensor Littlewood and Cyril Offord. On the distribution of the zeros and  $\alpha$ -values of a random integral function (i). *Journal of the London Mathematical Society*, 1(3):130–136, 1945.
- [LO48] John Edensor Littlewood and Cyril Offord. On the distribution of zeros and  $\alpha$ -values of a random integral function (ii). *Annals of Mathematics*, pages 885–952, 1948.
- [LS68] Benjamin Logan and Lawrence Shepp. Real zeros of random polynomials. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 3(1):29–35, 1968.
- [LS91] Nils Lehmann and Hans-Jürgen Sommers. Eigenvalue statistics of random real matrices. *Physical review letters*, 67(8):941, 1991.
- [LS15] Thomas Leblé and Sylvia Serfaty. Large deviation principle for empirical fields of log and riesz gases. *Inventiones mathematicae*, pages 1–113, 2015.
- [LSZ06] Tobias Lueck, Hans-Jürgen Sommers, and Martin Zirnbauer. Energy correlations for a random matrix model of disordered bosons. *Journal of mathematical physics*, 47(10):103304, 2006.
- [Mas74a] Nina Maslova. On the distribution of the number of real roots of random polynomials. *Teoriya Veroyatnostei i ee Primeneniya*, 19(3):488–500, 1974.
- [Mas74b] Nina Maslova. On the variance of the number of real roots of random polynomials. *Theory of Probability & Its Applications*, 19(1):35–52, 1974.
- [Mil97] John Willard Milnor. *Topology from the differentiable viewpoint*. Princeton University Press, 1997.
- [MP67] Vladimir Alexandrovich Marchenko and Leonid Andreevich Pastur. Distribution of eigenvalues for some sets of random matrices. *Matematicheskii Sbornik*, 114(4):507–536, 1967.
- [MP10] Peter Mörters and Yuval Peres. *Brownian motion*, volume 30. Cambridge University Press, 2010.
- [Mut95] Khandker Abdul Muttalib. Random matrix models with additional interactions. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 28(5):L159, 1995.



- [Pia16] Federico Piazzon. *Bernstein Markov properties and applications*. PhD thesis, 2016.
- [PS14] Anthony Perret and Grégory Schehr. Near-extreme eigenvalues and the first gap of hermitian random matrices. *Journal of Statistical Physics*, 156(5):843–876, 2014.
- [PV05] Yuval Peres and Bálint Virág. Zeros of the iid gaussian power series: a conformally invariant determinantal process. *Acta Mathematica*, 194(1):1–35, 2005.
- [Ran95] Thomas Ransford. *Potential theory in the complex plane*, volume 28. Cambridge University Press, 1995.
- [Ser15] Sylvia Serfaty. *Coulomb gases and Ginzburg–Landau vortices*. 2015.
- [SM08] Grégory Schehr and Satya Majumdar. Real roots of random polynomials and zero crossing properties of diffusion equation. *Journal of Statistical Physics*, 132(2):235, 2008.
- [ŠŠ62] Dmitri Šparo and Mikhail Šur. On the distribution of roots of random polynomials. *Vestn. Mosk. Univ. Ser.*, 1:40–43, 1962.
- [SS93] Stephen Smale and Michael Shub. Complexity of bezout’s theorem. ii. volumes and probabilities. *Computational algebraic geometry (Nice, 1992)*, *Progr. Math*, 109:267–285, 1993.
- [ST97] Edward Saff and Vilmos Totik. *Logarithmic potentials with external fields*, volume 316. Springer Science & Business Media, 1997.
- [Ste69] Donald Stevens. The average number of real zeros of a random polynomial. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 22(4):457–477, 1969.
- [SV95] Larry Shepp and Robert Vanderbei. The complex zeros of random polynomials. *Transactions of the American Mathematical Society*, pages 4365–4384, 1995.
- [SZ03] Bernard Shiffman and Steve Zelditch. Equilibrium distribution of zeros of random polynomials. *International Mathematics Research Notices*, 2003(1):25–49, 2003.
- [Tik15] Konstantin Tikhomirov. The limit of the smallest singular value of random matrices with iid entries. *Advances in Mathematics*, 284:1–20, 2015.
- [Tod14] Isaac Todhunter. *A history of the mathematical theory of probability*. Cambridge University Press, 2014.
- [TV08] Terence Tao and Van Vu. Random matrices: the circular law. *Communications in Contemporary Mathematics*, 10(02):261–307, 2008.
- [TV15] Terence Tao and Van Vu. Local universality of zeroes of random polynomials. *International Mathematics Research Notices*, 25:5053–5139, 2015.
- [TW94] Craig Tracy and Harold Widom. Level-spacing distributions and the airy kernel. *Communications in Mathematical Physics*, 159(1):151–174, 1994.
- [Voi91] Dan Voiculescu. Limit laws for random matrices and free products. *Inventiones mathematicae*, 104(1):201–220, 1991.

- [Voi93] Dan Voiculescu. The analogues of entropy and of fisher's information measure in free probability theory, i. *Communications in mathematical physics*, 155(1):71–92, 1993.
- [Wel15] Jean-Yves Welschinger. Topology of random real hypersurfaces. *Revista Colombiana de Matemáticas*, 49(1):139–160, 2015.
- [Wig58] Eugene Wigner. On the distribution of the roots of certain symmetric matrices. *Annals of Mathematics*, pages 325–327, 1958.
- [Wil62] Samuel Wilks. *Mathematical statistics*. A Wiley Publication in Mathematical Statistics. John Wiley & Sons, Inc., New York-London, 1962.
- [Wil88] Ernest Wilkins. An asymptotic expansion for the expected number of real zeros of a random polynomial. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 103(4):1249–1258, 1988.
- [Wis28] John Wishart. The generalised product moment distribution in samples from a normal multivariate population. *Biometrika*, pages 32–52, 1928.
- [Zap04] Dmitry Zaporozhets. On the distribution of the number of real roots of a random polynomial. *Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI)*, 320(Veroyatn. i Stat. 8):69–79, 227, 2004.
- [Zel13] Steve Zelditch. Large deviations of empirical measures of zeros on Riemann surfaces. *Int. Math. Res. Not.*, 23:592–664, 2013.
- [Zel17] David García Zelada. A large deviation principle for empirical measures on polish spaces: Application to singular gibbs measures on manifolds. *arXiv preprint arXiv:1703.02680*, 2017.
- [ZZ10] Ofer Zeitouni and Steve Zelditch. Large deviations of empirical measures of zeros of random polynomials. *International Mathematics Research Notices*, 2010(20):3935–3992, 2010.





## Résumé

L'objet principal de cette thèse est l'étude des racines de plusieurs modèles de polynômes aléatoires. Il s'agit de comprendre le comportement macroscopique des racines de polynômes aléatoires dont le degré tend vers l'infini. Nous explorons la connexion existant entre racines de polynômes aléatoires et gaz de Coulomb afin d'obtenir des principes de grandes déviations pour les mesures empiriques des racines. Nous revisitons l'article de Zeitouni et Zelditch qui établit un principe de grandes déviations pour un modèle général de polynômes aléatoires à coefficients gaussiens complexes. Nous étendons ce résultat au cas des coefficients gaussiens réels. Ensuite, nous démontrons que ces résultats restent valides pour une large classe de lois sur les coefficients, faisant des grandes déviations un phénomène universel pour ces modèles. De plus, nous démontrons tous les résultats précédents pour le modèle des polynômes de Weyl renormalisés. Nous nous intéressons aussi au comportement de la racine de plus grand module des polynômes de Kac. Celle-ci a un comportement non-universel et est en général une variable aléatoire à queues lourdes. Enfin, nous démontrons un principe de grandes déviations pour la mesure empirique des ensembles biorthogonaux.

## Mots Clés

Polynômes aléatoires, gaz de Coulomb, grandes déviations, matrices aléatoires.

## Abstract

The main topic of this thesis is the study of the roots of random polynomials from several models. We seek to understand the behavior of the roots as the degree of the polynomial tends to infinity. We explore the connexion between the roots of random polynomials and Coulomb gases to obtain large deviations principles for the empirical measures of the roots of random polynomials. We revisit the article of Zeitouni and Zelditch which establishes the large deviations for a rather general model of random polynomials with independent complex Gaussian coefficients. We extend this result to the case of real Gaussian coefficients. Then, we prove that those results are also valid for a wide class of distributions on the coefficients, which means that those large deviations principles are a universal property. We also prove all of those results for renormalized Weyl polynomials. We study the largest root in modulus of Kac polynomials. We show that this random variable has a non-universal behavior and has heavy tails. Finally, we establish a large deviations principle for the empirical measures of biorthogonal ensembles.

## Keywords

Random polynomials, Coulomb gas, large deviations, random matrices.