



HAL
open science

Mécanismes de synchronisation dans les oscillateurs à transfert de spin

Jérôme Hem

► **To cite this version:**

Jérôme Hem. Mécanismes de synchronisation dans les oscillateurs à transfert de spin. Science des matériaux [cond-mat.mtrl-sci]. Université Grenoble Alpes, 2018. Français. NNT : 2018GREAY005 . tel-01827703

HAL Id: tel-01827703

<https://theses.hal.science/tel-01827703>

Submitted on 2 Jul 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE LA COMMUNAUTE UNIVERSITE GRENOBLE ALPES

Spécialité : **Nanophysique**

Arrêté ministériel : 25 mai 2016

Présentée par

Jérôme Hem

Thèse dirigée par **Ursula EBELS**
et codirigée par **Liliana BUDA-PREJBEANU**

préparée au sein du **Laboratoire SPINTEC**
et de **l'Ecole Doctorale de physique de Grenoble**

Mécanismes de synchronisation dans les oscillateurs à transfert de spin

Thèse soutenue publiquement le **8 février 2018**,
devant le jury composé de :

Monsieur, Olivier, FRUCHART

Chercheur au CNRS, Président

Madame, Julie, GROLLIER

Chercheur à l'Unité Mixte de Physique CNRS/Thales, Rapporteur

Monsieur, Nicolas, VUKADINOVIC

Ingénieur à Dassault Aviation, Rapporteur

Monsieur, Grégoire, DE LOUBENS

Chercheur au CEA Saclay, Examineur

Madame, Ursula, EBELS

Chercheur au CEA Grenoble, Directrice de thèse

Madame, Liliana, BUDA-PREJBEANU

Chercheur à Grenoble INP, Co-directrice de thèse



Remerciements

La thèse a pu être menée à bien grâce à la participation de nombreuses personnes, auxquelles j'adresse ici tous mes remerciements.

Je commence par remercier les membres du jury pour leurs présences, leurs commentaires positifs et encouragements : Julie Grollier et Nicolas Vukadinovic en tant que rapporteurs, Grégoire de Loubens et Olivier Fruchart en tant qu'examineurs.

Je salue et remercie tous les collègues, post - doctorants, doctorants et stagiaires que j'ai eu la chance de rencontrer au cours de ma thèse. En particulier, mes remerciements à Vincent D., Jérémie B-P., Arthur M. pour les bons moments passés à l'époque du stage. Salutations à tous mes collègues doctorants ou non, avec qui j'ai partagé entre autre les pauses midis : Pierre-Yves, Cécile I. et N., Léa C., Mohamed-Ali, Paulo, Jude et Guillaume, Guillaume C., Andrei T., Thomas B., Antoine (souvenirs de Poznan ...), Safeer (le maître photographe), Jérémie (randonnée autour de Grenoble), les doctorants de mon année : Claire, Alexandre T., Than (team winner INAC days). Un grand merci à Alexandre M. pour avoir organisé toutes sortes de soirées et en partie les week-end Spintec. Je salue aussi Olivier K., Guillaume P., Mihai M. et Franck B.

Un grand merci à tous les collègues du projet européen Mosaic, notamment à Rui et Martin (je ne perds pas espoir d'aller vous voir à Dresde un jour !).

Par ailleurs, je voudrais remercier les membres du groupe RF avec qui j'ai fait un bon bout de chemin. Quand je suis arrivé, vous finissiez vos thèses et post-doc : merci à Christophe D., Elmer M., Marina T. et Miguel R. pour m'avoir aidé à démarrer dans cette thématique. Merci à Karla, Erika, Chandra pour tous vos efforts et résultats en salle blanche, qui ont permis d'améliorer la qualité de ces oscillateurs. Chaleureux remerciements à tous les post-doc, doc et pré-doc du groupe : Hiteshika, Eslam, Fengjiang, Ana R-C, Mathieu (bonne soutenance à toi), Michael de Gênes (molte grazie per il buon umore) et Anike ma voisine de bureau pendant toutes ces années. Enfin, je tiens à exprimer ma reconnaissance et ma gratitude à toute l'équipe encadrante. D'abord à Rose-Marie pour le suivi bienveillant du côté de la DGA. Merci à Ursula pour m'avoir fait confiance pour ce projet et de l'aide apportée pour la partie expérience. Je remercie Liliana pour l'aide apportée sur la partie théorique, la rédaction et le soutien manifesté tout au long de la thèse.

Je termine par remercier ma famille qui est venue m'encourager pendant la soutenance et bien sûr Julie, sans qui ce travail n'aurait pas aboutit.

Table des matières

Remerciements	3
Table des matières	5
Table de symboles	9
Introduction générale	13

Partie I : Introductions

Chapitre 1. Introduction à l'auto-oscillateur à transfert de spin	19
1.1. Notions de spintronique	20
1.1.1. Configurations magnétiques	20
1.1.2. Phénomènes de transport	23
1.1.3. Dynamique de l'aimantation	28
1.2. Introductions aux auto-oscillateurs	32
1.2.1. Equation d'amplitude universelle	32
1.2.2. Bruits dans les oscillateurs	34
1.2.3. Oscillateurs uniformes planaires	36
1.3. Notions de synchronisation	40
1.3.1. Synchronisation sans formules	41
1.3.2. Synchronisation avec formules	45
1.3.3. Revue d'études : synchronisation d'oscillateurs spintroniques	47
1.4. Conclusion	51
Chapitre 2. Le formalisme ondes de spin	53
2.1. Présentation de l'oscillateur	54
2.1.1. Description de l'oscillateur	54
2.1.2. Notations du formalisme ondes de spin	56
2.2. Formalisme en ondes de spin	57
2.2.1. Transformation (a)	58
2.2.2. Transformation (b)	61
2.2.3. Transformation (c)	63
2.3. Orbites du système	64
2.3.1. Faible puissance	64
2.3.2. Puissance quelconque	67
2.4. Modèle universel	71
2.4.1. Termes résonants / non résonants	72

2.4.2.	Etude des solutions stationnaires _____	74
2.4.3.	Etude des solutions transitoires _____	78
2.5.	Conclusion _____	81
2.6.	Annexes _____	83
2.6.1.	Compléments sur la transformation (a) _____	83
2.6.2.	Compléments sur la transformation (b) _____	86
2.6.3.	Tableau de synthèse des transformations _____	90
2.6.4.	Expressions des couples transformés _____	91
Partie II : Etude du régime synchronisé		
Chapitre 3.	<i>Régime synchronisé avec faible variation de la puissance</i> _____	97
3.1.	Concepts préliminaires _____	98
3.1.1.	Modèle d'étude _____	98
3.1.2.	Concepts de forçage _____	99
3.1.3.	Equations de synchronisation _____	105
3.2.	Etude des solutions stationnaires _____	109
3.2.1.	Système dynamique centrée sur p_0 _____	109
3.2.2.	Solutions stationnaires _____	112
3.2.3.	Discussions _____	114
3.2.4.	Forçages circulaires _____	118
3.3.	Etude générale des forçages _____	120
3.3.1.	Sensibilités de couplage intrinsèques _____	121
3.3.2.	Déphasage additionnel ψ_0 _____	126
3.3.3.	Déphasage de puissance ψ_p _____	127
3.3.4.	Le rapport de sensibilité _____	128
3.4.	Etude des forçages rectilignes _____	130
3.4.1.	Forçages à sensibilités extrêmes _____	131
3.4.2.	Propriétés de la puissance synchronisée _____	135
3.4.3.	Approximation des forçages à valeurs réelles _____	138
3.5.	Conclusion _____	141
3.6.	Annexes _____	142
3.6.1.	Expression de $\mathcal{Re}(F)$, $\mathcal{Im}(F)$ _____	142
3.6.2.	Expression de ψ_p _____	143
3.6.3.	Etude de $\text{Num}(g, \sigma, \nu)$ et $\text{Den}(g, \sigma, \nu)$ _____	144
3.6.4.	Sensibilités intrinsèques des forçages rectilignes _____	147
Chapitre 4.	<i>Etude des forçages canoniques</i> _____	149
4.1.	Méthode de décomposition _____	150
4.1.1.	Définitions _____	150
4.1.2.	Transformations _____	154

4.2. Etude géométrique	158
4.2.1. Forçages d'ordre 1	158
4.2.2. Forçages d'ordres supérieurs	164
4.3. Synchronisation à un forçage canonique	166
4.4. Conclusion	168
4.5. Annexes	169
4.5.1. Expressions des couples canoniques	169
4.5.2. Expressions des forçages canoniques	171
4.5.3. Ordre de grandeur des amplitudes	173
Chapitre 5. Simulations des forçages canoniques	177
5.1. Méthodes numériques	178
5.1.1. Descriptions du simulateur	178
5.1.2. Conditions d'opération du simulateur	178
5.1.3. Méthode d'extraction des données	181
5.2. Etude du régime libre	183
5.2.1. Etats stationnaires	183
5.2.2. Comparaison mesures des paramètres transitoires	186
5.3. Synchronisation à un forçage canonique	188
5.3.1. Conditions de validité du modèle	188
5.3.2. Propriétés à faible puissance libre	191
5.3.3. Propriétés en fonction de la puissance libre	194
5.3.4. Etudes complémentaires	197
5.4. Conclusion	202
Partie III : Etude du régime synchronisé avec les forçages à valeurs réelles	
Chapitre 6. Combinaisons à deux forçages canoniques	205
6.1. Combinaisons générales	206
6.1.1. Définitions	206
6.1.2. Formules de combinaison	207
6.2. Combinaisons à $\Sigma = 0 + m\pi$	209
6.2.1. Expressions de $r_{\alpha\beta}$ et $\theta_{\alpha\beta}$	209
6.2.2. Etude de cas	210
6.2.3. Discussions	213
6.3. Combinaisons à $\Sigma = \pi/2 + m\pi$	215
6.3.1. Formules de combinaison	215
6.3.2. Etude de cas	217
6.3.3. Discussions	223

6.4. Conclusion	224
6.5. Annexes	225
6.5.1. Ordre de grandeur des ratios d'amplitudes	225
6.5.2. Tables de combinaison	226
Chapitre 7. Etude du régime transitoire	229
7.1. Etude du régime transitoire	230
7.1.1. Modélisation	230
7.1.2. Simulation	233
7.2. Régime stochastique	236
7.2.1. Modélisation	236
7.2.2. Simulation	240
7.3. Conclusion	243
Chapitre 8. Régime synchronisé avec forte variation de puissance	245
8.1. Etude des solutions stationnaires	246
8.1.1. Système dynamique centré sur p_0	246
8.1.2. Solutions stationnaires	247
8.1.3. Condition de signal faible	252
8.2. Application aux forçages canoniques à valeurs réelles	253
8.2.1. Expressions de C_a	254
8.2.2. Modèle vs simulation	256
8.3. Conclusion	261
Partie IV : Etudes expérimentales	
Chapitre 9. Expériences d'injection de courant	265
9.1. Techniques expérimentales	266
9.1.1. Concepts RF	266
9.1.2. Description du banc de mesure	269
9.1.3. Transmission de puissance	271
9.1.4. Présentation des échantillons	276
9.2. Expériences	277
9.2.1. Echantillon n°1	277
9.2.2. Echantillon n°2	284
9.3. Conclusion	291
Conclusion générale	293
Bibliographie	295

Table de symboles

Paramètres généraux :

$\mathbf{m} = (m_x, m_y, m_z), \mathbf{m}_p = (\rho_x, \rho_y, \rho_z)$	Aimantations normalisées de la couche libre et du polariseur
$(\mathbf{u}_\zeta, \mathbf{u}_\xi, \mathbf{u}_\eta)$	Base vectorielle locale attachée à \mathbf{m} . \mathbf{u}_ζ est l'axe d'équilibre de \mathbf{m} .
$(\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z)$	Base vectorielle attachée à la structure. Pour l'oscillateur planaire ici : $(\mathbf{u}_\zeta, \mathbf{u}_\xi, \mathbf{u}_\eta) = (\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z)$.
$\mathbf{H}_{dc}, \mathbf{H}_g(t),$ $\mathbf{H}_{app}(t) = \mathbf{H}_{dc} + \mathbf{H}_g(t)$	Champ magnétique appliqué statique, alternatif RF et total
$J_{dc}, J_g(t),$ $J_{app}(t) = J_{dc} + J_g(t)$	Densité de courant statique, alternatif RF et totale (pour souligner la polarisation en spin, notation vectorielle : $\mathbf{J}_x = J_x \cdot \mathbf{m}_p$)
$\varepsilon = J_g / J_{dc}$	Ratio de densité de courant injectée
M_s	Aimantation spontanée
V, S, t_k	Volume, surface et épaisseur de la couche libre
N_{xx}, N_{yy}, N_{zz}	Coefficient du tenseur démagnétisant
$\mathbf{H}_{dem}, \mathbf{H}_u$	Champ démagnétisant, champ d'anisotropie cristalline
$\mathbf{H}_{int} = \mathbf{H}_{dem} + \mathbf{H}_u$	Champ interne de la structure
$\mathbf{H}_{eff} = \mathbf{H}_{app} + \mathbf{H}_{int}$	Champ effectif
$\mathbf{H}_{eff} = -\nabla_{\mathbf{m}} W(\mathbf{m})$	Energie interne (quasi-hamiltonien)
$W(\mathbf{m})$	Couples de précession et d'amortissement en variables \mathbf{m}
$(\dot{\mathbf{m}})_p, (\dot{\mathbf{m}})_G$	Couples de Slonczewski et d'effet de champ de spin en variables \mathbf{m}
$(\dot{\mathbf{m}})_{FL}, (\dot{\mathbf{m}})_{SL}$	Facteur d'amortissement de Gilbert
α	Facteur gyromagnétique de l'électron libre et modifié
$\gamma_0, \gamma'_0 = \gamma_0 / (1 + \alpha^2)$	Efficacité des couples de transfert de spin (couple de Slonczewski et couple d'effet champ de spin)
a_{j0}, b_{j0}	Résistance dans l'état parallèle, anti parallèle
R_p, R_{ap}	Produit RA. Mesure de la qualité de la barrière isolante
$RA = R_p \times S$	Ratio magnétorésistif
$TMR = (R_{ap} - R_p) / R_p$	Impédance de l'oscillateur, des instrument et caractéristique de la ligne
Z_{osc}, Z_{ins}, Z_c	Ratio de désadaptation
$\beta = Z_{osc} / Z_c$	Puissances moyennes délivrées par l'oscillateur à la chaîne de mesure et aux instruments
P_{ch}, P_{elec}	Puissances moyennes délivrées par le générateur à la chaîne de mesure et à l'oscillateur
P_{Gen}, P_g	Tension de dégradation de la barrière isolante.
V_d	Pas d'intégration du simulateur
Δt	Température
T	

Régime libre et formalisme ondes de spin:

$a, b, c = \sqrt{p}e^{j\phi}$	Variables dynamiques complexes du formalisme ondes de spin
$\mathcal{H}(a, \bar{a}), \mathcal{H}(b, \bar{b}), \mathcal{H}(c, \bar{c})$	Hamiltonien en variables : a, b, c
$\mathcal{L}_{ma}, \mathcal{L}_{ab}, \mathcal{L}_{bc}, \mathcal{L}_{mc}$	Opérateur de transformation : m vers a , a vers b , b vers c , m vers c
$p, p(t)$	Puissance de l'orbite conservative ($\mathcal{H}(c, \bar{c}) = cste$), puissance instantanée
ϕ	Phase de l'oscillateur
$\mathcal{B}/\mathcal{A}, g_t(\mathcal{B}/\mathcal{A})$	Paramètres d'ellipticité de l'orbite
ω_{FMR}, f_{FMR}	Pulsation, fréquence de résonance ferromagnétique
$u(\mathcal{B}/\mathcal{A}, \omega_{FMR}), v(\mathcal{B}/\mathcal{A}, \omega_{FMR})$	Facteurs de rectification de la transformation b
$(\dot{a})_p, (\dot{b})_p, (\dot{c})_p = \mathcal{T}_p(c)$	Couples de précession en variables a, b, c
$(\dot{a})_G, (\dot{b})_G, (\dot{c})_G = \mathcal{T}_G(c)$	Couples d'amortissement en variables a, b, c
$(\dot{a})_{SL}, (\dot{b})_{SL}, (\dot{c})_{SL} = \mathcal{T}_{SL}(c)$	Couples de Slonczewski en variables a, b, c
$(\dot{a})_{FL}, (\dot{b})_{FL}, (\dot{c})_{FL} = \mathcal{T}_{FL}(c)$	Couples d'effet champ de spin en variables a, b, c
$\Gamma_-(p) = \mathcal{T}_G(c)c^{-1}$	Taux d'amortissement
$\Gamma_+(p) = \mathcal{T}_{SL}(c)c^{-1}$	Taux de transfert de spin
J_{cr}, I_{cr}, V_{cr}	Densité de courant, courant et tension critique
$\zeta = J_{cr}/J_{dc}$	Super-criticité
$\omega(p), f(p)$	Pulsation et fréquence de l'oscillateur
N, Γ_{gr}, σ	Coefficient statique de non linéarité, d'amortissement et de transfert de spin
Q_1, Q_2	Coefficients non linéaires d'ordre supérieurs d'amortissement
R_1, R_2	Coefficients non linéaires d'ordre supérieurs de transfert de spin
$\Gamma_p, f_p = \Gamma_p/\pi, t_p$	Fréquences d'amortissement dynamique et temps de relaxation
v	Non linéarité dynamique
ρ_{opp}	Puissance de transition du mode OPP
$\rho_{norm} = p/\rho_{opp}$	Puissance normalisée des oscillations ($0 < \rho_{norm} < 1$)
$\rho_{XY_{mx=0}}$	Puissance au croisement entre les points extrêmes x-y de l'orbite avec le plan $(\mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z)$
$\rho_{XZ_{mx=0}}$	Puissance au croisement entre les points extrêmes x-z de l'orbite avec le plan $(\mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z)$
$\rho_0, \rho_{0, norm}$	Puissances normalisées ou non dans l'état stationnaire libre (parfois confondus avec p, ρ_{norm} s'il n'y a pas d'ambiguïté)
ω_0, f_0	Pulsation et fréquence dans l'état stationnaire libre (parfois confondus avec ω, f s'il n'y a pas d'ambiguïté)

Régime synchronisé :

$s(t)$	Signal générateur
$\mathbf{u}_g = (\rho_x, \rho_y, \rho_z)$	Orientation du signal générateur dans la base $(\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z)$
$a_g, \phi_g, \omega_g, f_g$	Amplitude, phase, pulsation et fréquence du générateur
n	Ordre de la synchronisation
$\psi = \phi n - \phi_g$	Déphasage par rapport au générateur
$\psi_{osc} = \phi - \phi_g/n$	Déphasage par rapport par rapport à l'oscillateur
$\delta = \omega_g - n \cdot \omega$	Désaccord de fréquence
$p_s = p - p_0$	Puissance synchronisée
$d = \sqrt{p} e^{j\psi_{osc}}$	Variable complexe d
$(\dot{\mathbf{m}})_F, (\dot{a})_F, (\dot{b})_F, (\dot{c})_F = \mathcal{J}_F(c)$	Couples de forçage en variable : \mathbf{m}, a, b, c
$(\dot{\mathbf{m}})_R, (\dot{a})_R, (\dot{b})_R, (\dot{c})_R = \mathcal{J}_R(c)$	Couples de résonance en variable : \mathbf{m}, a, b, c
$\mathcal{E}_y(\mathbf{m}) = \mathbf{m} \times \mathbf{u}_y, \mathcal{E}_z(\mathbf{m}) = \mathbf{m} \times \mathbf{u}_z,$ $\mathcal{E}_x(\mathbf{m}) = \mathbf{m} \times \mathbf{u}_x$	Couples canoniques conservatifs en variable \mathbf{m}
$\mathcal{D}_y(\mathbf{m}) = \mathbf{m} \times \mathbf{m} \times \mathbf{u}_y, \mathcal{D}_z(\mathbf{m}) = \mathbf{m} \times \mathbf{m} \times \mathbf{u}_z,$ $\mathcal{D}_x(\mathbf{m}) = \mathbf{m} \times \mathbf{m} \times \mathbf{u}_x$	Couples canoniques dissipatifs en variable \mathbf{m}
$\mathcal{F}(c) = \mathcal{J}_F(c) \cdot c^{-1}$	Fonction de forçage en variable c (ou simplement forçage)
$\mathcal{R}(c) = \mathcal{J}_R(c) \cdot c^{-1}$	Fonction de résonance en variable c
$\mathcal{F}(p, \psi) = \langle \mathcal{F}(c) \rangle_{T_0}$	Fonction de forçage en variable d (ou simplement forçage)
$\mathcal{J}_F(p, \psi) = \mathcal{F}(p, \psi) d$	Couple de forçage en variable d
$\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2$	Facteur multiplicatif, demi-axe réel et imaginaire du forçage
r, g	Amplitude et ellipticité du forçage
σ, θ	Circulation et orientation du forçage
$k = k_e$ ou $k_{\mathcal{D}}, k_e = -\gamma' \cdot 0, k_{\mathcal{D}} = -\gamma' \cdot 0 \cdot a_{j0} \cdot j_{dc}$	Facteurs d'échelle des forçages conservatifs et dissipatifs
$z_v = a_v e^{j\psi_v}$	Nombre complexe de non linéarité
$a_v = \sqrt{1 + v^2}$	Amplitude non linéaire
$\psi_v = \arctan(v)$	Déphasage non linéaire
$\mathcal{F}_v(p, \psi) = z_v \cdot \mathcal{F}(p, \psi)$	Forçage associé à $\mathcal{F}(p, \psi)$ rectifié par la non linéarité
$\mathcal{F}_a(p, \psi) = \Re\ell(\mathcal{F}(p, \psi))$	Forçage associé à $\mathcal{F}(p, \psi)$ à valeurs réelles
$\mathcal{X}_{i,n}(p, \psi)$	Forçage canonique d'axe \mathbf{u}_i d'ordre n
$C_{y,1}(p, \psi), C_{z,1}(p, \psi), C_{x,2}(p, \psi)$	Forçages canoniques conservatifs
$C_{y,3}(p, \psi), C_{z,3}(p, \psi)$	
$\mathcal{D}_{y,1}(p, \psi), \mathcal{D}_{z,1}(p, \psi), \mathcal{D}_{x,2}(p, \psi)$	Forçages canoniques dissipatifs
$\mathcal{D}_{y,3}(p, \psi), \mathcal{D}_{z,3}(p, \psi)$	
$p_r, \mathcal{D}_y, p_r, \mathcal{D}_z$	Puissances à transition d'ellipticité rectiligne des forçages dissipatifs
p_r, e_y, p_r, e_z	Puissances à transition d'ellipticité rectiligne des forçages conservatifs

$X_{a_{i,n}}(\rho, \psi) = \Re(X_{i,n}(\rho, \psi))$	Forçage canonique à valeurs réelles d'axe u_i d'ordre n
$Ca_{y,1}(\rho, \psi), Ca_{z,1}(\rho, \psi), Ca_{x,2}(\rho, \psi)$	Forçages canoniques à valeurs réelles conservatifs
$Ca_{y,3}(\rho, \psi), Ca_{z,3}(\rho, \psi)$	
$Da_{y,1}(\rho, \psi), Da_{z,1}(\rho, \psi), Da_{x,2}(\rho, \psi), Da_{y,3}(\rho, \psi), Da_{z,3}(\rho, \psi)$	Forçages canoniques à valeurs réelles dissipatifs
$\mathcal{RW}_-(p, \psi) \propto e^{j\psi v} \cdot \cos(\psi)$	Forçages à synchronisation nulle
$\mathcal{RW}_+(p, \psi) \propto j \cdot e^{j\psi v} \cdot \cos(\psi)$	Forçages à synchronisation maximale
$\mathcal{RP}_+(p, \psi) \propto \cos(\psi)$	Forçages à puissance maximale ou forçages à valeurs réelles
$\mathcal{RP}_-(p, \psi) \propto j \cdot \cos(\psi)$	Forçages à puissance minimale ou forçages à valeurs imaginaires
$(X_{a_\alpha}(\rho, \psi), X_{a_\beta}(\rho, \psi - \tau))$	Combinaison de deux forçages canoniques à valeurs réelles $X_{a_\alpha}(\rho, \psi)$ et $X_{a_\beta}(\rho, \psi - \tau)$, déphasées du retard τ
$\rho'_\alpha, \rho'_\beta$	Composantes générales de la combinaison $(X_{a_\alpha}(\rho, \psi), X_{a_\beta}(\rho, \psi - \tau))$
$(\rho'_\beta / \rho'_\alpha)_{criti}$	Ratio de composantes critiques de la combinaison $(X_{a_\alpha}(\rho, \psi), X_{a_\beta}(\rho, \psi - \tau))$
$\Delta\Omega, \Delta\Pi$	Gammes de synchronisation, de puissance
ψ_0	Déphasage additionnel
ψ_p	Déphasage de puissance
$C_{\Omega} = \Delta\Omega/a_g, C_{\Pi} = \Delta\Pi/a_g$	Sensibilités de fréquence, de puissance
$C_{\Omega,\rho} = C_{\Omega}/\rho_v, C_{\Pi,\rho} = C_{\Pi}/\rho_i$	Sensibilités de fréquence, de puissance, normalisées par la composante spatiale ρ_i
$Cn_{\Omega} = 2 \cdot C_{\Omega}/k \cdot \rho_i, Cn_{\Pi} = 2 \cdot C_{\Pi}/k \cdot \rho_i$	Sensibilités normalisées de fréquence, de puissance
Cl_{Ω}, Cl_{Π}	Sensibilités intrinsèques de fréquence, de puissance
$\Delta\Omega_{\pm}, \Delta\Pi_{\pm}$	Gammes de synchronisation, de puissance asymétrique
$\Delta\Omega_0, \Delta\Pi_0$	Gamme de synchronisation, de puissance symétrique (confondues avec $\Delta\Omega, \Delta\Pi$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté)
$t_a, C_a = t_a/a_g$	Taux, sensibilité d'asymétrie
$a_{sat}, a_{sat,0}$	Amplitudes de générateur à saturation dans le cas d'un régime de synchronisation asymétrique/symétrique
a_{cr}	Amplitude de générateur critique de relaxation sous-critique
λ_{\pm}	Valeurs propres du système synchronisé transitoire
Régime stochastique :	
$\delta p(t), \delta a(t), \delta \psi(t), \delta \phi(t) = \delta \psi_{osc}(t)$	Fluctuations de puissance, d'amplitude, de déphasage et de phase de l'oscillateur
$S_{\delta p}, S_{\delta \psi}$	Densité spectrale de $\delta p(t)$ et de $\delta \psi(t)$
$S_{\delta a}, S_{\delta \phi}$	Densité spectrale de $\delta a(t)$ (bruit d'amplitude) et de $\delta \phi(t)$ (bruit de phase)
$\Delta f, \Delta f_0$	Largeur spectrale et largeur spectrale en régime libre
	Chap7 : HWMH / Chap 9 : FMWH

Introduction générale

La spintronique est une nanoscience née à la fin des années 1980 qui a pour but d'étudier les interactions entre les spins des électrons avec l'aimantation locale des matériaux [1]. Les phénomènes étudiés ont lieu dans des empilements successifs de couches magnétiques (FM) et non magnétiques (NM), structures notées (FM/NM), dont les épaisseurs sont de seulement quelques nanomètres. Les empilements sont réalisés principalement par la technique d'épitaxie par jet moléculaire, inventée dans les années 70 par A. Cho et J. Arthur [2]. De façon générale, la spintronique repose sur deux effets fondamentaux : la magnétorésistance et le couple de transfert de spin.

Vers la fin des années 1980, les équipes de A. Fert [3] et P. Grunberg en 1989 [4] (prix Nobel 2007), découvrent l'effet de magnétorésistance géante (GMR) dans des empilements de Fe/Cr. Typiquement, l'effet se manifeste par la variation de la résistance en fonction de la direction du champ magnétique appliqué. Jusqu'alors, l'effet le plus connu était l'effet de magnétorésistance anisotrope (effet AMR [5]), par exemple produit dans des alliages de NiFe ou NiCo. La découverte de la GMR montre que les nanostructures peuvent avoir des changements de résistance supérieurs à tous ce qui est connu, permettant d'avoir des structures à la fois plus petites et plus sensibles au champ.

L'autre effet fondamental est l'effet de transfert de spin (STT), prédit par L. Berger [6] et J. Slonczewski [7] en 1996, puis découvert plus tard dans des empilements de Co/Cu [8]. Jusqu'alors, le moyen traditionnel pour manipuler l'aimantation était l'emploi d'un champ, traduit par la courbe d'hystérésis bien connue $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$. L'effet STT montre que le courant électrique peut être un autre moyen de contrôle de l'aimantation. Ce phénomène permet de manipuler l'aimantation de façon intégrée, en jouant uniquement sur la nature et les propriétés des couches. Combinés ensemble, ces deux effets permettent la manipulation/détection de nano objet magnétique (configuration uniforme, paroi de domaine, vortex, skyrmion ...), ouvrant la voie à un nouveau type d'électronique, complémentaire à l'électronique conventionnelle.

Ces découvertes génèrent de nouvelles technologies. Par exemple, la découverte de l'effet GMR a permis la miniaturisation des têtes de lectures des disques durs magnétiques, conduisant à l'augmentation de la densité de stockage de l'information. Les disques durs à haute capacité ont eu un impact considérable sur la société, notamment en marquant l'entrée dans l'ère du « big data ». La spintronique sera aussi source de nouvelles technologies dans le futur, comme avec les MRAM, les systèmes hybrides/CMOS ou bien les auto-oscillateurs [9]. Pour ces raisons, la spintronique est devenue depuis les années 1990 l'un des domaines de recherche les plus actifs en physique des matériaux.

Parmi les systèmes à fort potentiel technologique, il y a l'auto-oscillateur spintronique (ou à transfert de spin), découvert au début des années 2000 [10] [11]. Ce nano système est le plus petit oscillateur connu à ce jour. En plus de sa taille, il possède plusieurs autres avantages : 1) sa fréquence d'émission

appartenant à la gamme RF (200 MHz – 20 GHz) et 2) est accordable, c'est-à-dire qu'un courant peut changer la fréquence. Pour cela, c'est un générateur RF idéal, utilisable par exemple pour les communications sans fil. Cependant comme toute nano technologie, la puissance émise est faible et la cohérence spectrale est fortement perturbée par les bruits ambiants, surtout le bruit thermique. Il faut donc chercher des solutions pour palier à ses points faibles et pouvoir accéder à d'éventuels marchés.

Une solution prometteuse est la synchronisation d'oscillateurs. La synchronisation est un phénomène dynamique non linéaire qui couple les autos oscillateurs entre eux [12]. Les avantages sont de pouvoir à la fois augmenter l'amplitude de la réponse (augmentation de puissance et de la cohérence) tout en conservant les fonctionnalités individuelles de chaque auto-oscillateur. Depuis les premières expériences [13] [14], de nombreux progrès théoriques et expérimentaux ont été réalisés. En particulier pour les oscillateurs à aimantation en vortex, [14] ont montré récemment la synchronisation mutuelle de deux oscillateurs par couplage électrique. En revanche les progrès sont plus lents pour les oscillateurs à aimantation uniforme, notamment en raison d'une plus forte instabilité thermique. Pour ceux - la, il faut résoudre encore de nombreuses questions pour parvenir à la synchronisation électrique d'un réseau entier d'oscillateurs.

Dans ce manuscrit, nous nous sommes intéressés aux différentes façons de synchroniser l'oscillateur à aimantation uniforme avec un signal externe (synchronisation par injection). L'oscillateur offre en effet de nombreuses possibilités de synchronisation. Par exemple, une première est de jouer sur la nature du signal externe injecté : un champ RF [15] ou un courant RF [16]. Une deuxième est d'injecter le signal dans différentes directions de l'espace, par exemple colinéaire à \mathbf{u}_x , \mathbf{u}_y ou \mathbf{u}_z Une troisième est de synchroniser à une harmonique $n \times f_0$ de la fréquence fondamentale f_0 de l'oscillateur [17]. La question qui va nous guider est principalement d'ordre théorique :

- *Quelles sont les différences entre toutes ces possibilités d'injections ?*

Sur le plan théorique, la littérature a surtout abordé les mécanismes de synchronisation : 1) synchronisation par injection, 2) auto-synchronisation, 3) synchronisation mutuelle de deux ou d'une assemblée d'oscillateurs. Ici, c'est la diversité des forçages qui nous intéresse. La méthode va consister en la confrontation du modèle analytique avec la simulation macrospin.

Le manuscrit est divisé en quatre parties :

Partie 1 : Introductions. Les notions de base à la compréhension de la synchronisation des auto-oscillateurs spintroniques sont revues. Le chapitre 1 introduit l'équation du mouvement (Landau-Lifshitz-Gilbert- Slonczewski, LLGS) qui gouverne la dynamique des oscillateurs à aimantation uniforme. Puis au chapitre 2, nous la transformons en une équation dynamique plus simple à résoudre, appelée équation d'amplitude universelle (en variable c), à l'aide du formalisme ondes de spin [18] [19]. Ce modèle simplifié décrit la dynamique de tout auto-oscillateur au voisinage de la bifurcation de Hopf (aux faibles puissances). Il est couramment utilisé dans le contexte des oscillateurs spintroniques depuis sa première introduction par [18] et il sera utilisé ici pour traiter le problème de synchronisation.

Partie 2 : Etude du régime synchronisé. Grâce au modèle universel, on va pouvoir étudier les états stationnaires de l'oscillateur synchronisé, dans la limite où la variation de puissance synchronisée est faible. Contrairement à [20], le problème est abordé dans le chapitre 3 plus généralement, en tenant compte de toutes les formes de forçages possibles. En particulier, les notions de forçages rectilignes, circulaires et quelconques sont introduites. Une propriété essentielle est que la plupart des forçages se simplifient en des forçages à valeurs réelles dont l'expression est plus simple, seulement à la limite où la non linéarité v est forte ($|v| \gg 1$). Le chapitre 4 applique les résultats généraux au cas de l'oscillateur uniforme. Globalement, les forçages sont générés par un nombre restreint de forçages canoniques, issus de la résonance entre le signal externe et les couples élémentaires de type $\mathbf{m} \times \mathbf{u}_i$ ou $\mathbf{m} \times \mathbf{m} \times \mathbf{u}_i$. Le chapitre calcule l'expression de ces forçages dans le modèle universel puis aborde leurs propriétés de synchronisation. Dans le chapitre 5, toutes les prédictions que nous avons faites avec le modèle sont comparées avec le simulateur macrospin. On commence par l'étude du régime libre, puis le régime synchronisé. En particulier, on vérifie les propriétés des forçages canoniques à faible puissance et à forte puissance.

Partie 3 : Etude du régime synchronisé avec les forçages à valeurs réelles. En utilisant les forçages à valeurs réelles, on va pouvoir traiter différents problèmes dont la résolution aurait été plus difficile dans un cadre exact. Le point important est que cela ne restreint pas pour autant la généralité des résultats, tant que $|v| \gg 1$ comme dans l'oscillateur uniforme. Le chapitre 6 commence par l'étude des combinaisons à deux forçages canoniques. L'étude montre qu'en les sélectionnant astucieusement, on peut créer deux types de combinaisons très utiles en pratique. D'abord, la première combinaison permet d'augmenter la sensibilité de synchronisation jusqu'à la somme de celles des forçages canoniques tandis que la deuxième permet de faire varier le déphasage additionnel ψ_0 rien qu'avec les composantes des forçages. Le chapitre 7 aborde le régime transitoire. En particulier, on discute la réponse à un bruit thermique, ce qui va nous aider pour discuter les spectres obtenus en expériences. Enfin, le chapitre 8 revient à l'étude théorique des états stationnaires. Cette fois, on décrit les effets de la synchronisation soumis à de fortes variations de la puissance synchronisée. A l'aide des forçages réels, un nouveau système dynamique est dérivé, ce qui conduit à une gamme de synchronisation asymétrique avec le désaccord de fréquence δ . On étudie notamment les conséquences que cela implique sur les forçages canoniques.

Partie 4 : Etudes expérimentales. Ce dernier chapitre commente une série d'expériences sur la synchronisation de l'oscillateur avec un courant RF. On y présente une caractérisation expérimentale et temporelle du phénomène. En particulier, l'analyse de la phase révèle des sauts de phase caractéristiques de la forte instabilité des oscillateurs uniformes face à la température.

Partie I :
Introductions

Chapitre 1. Introduction à l'auto-oscillateur à transfert de spin

Les auto-oscillateurs spintroniques sont des nano-systèmes à fort potentiel technologique, découverts au début des années 2000 [10] [11]. Ce chapitre donne les bases nécessaires à leur compréhension. La partie 1.1 introduit brièvement le domaine de la spintronique. La partie 1.2 décrit le fonctionnement d'un auto-oscillateur et donne, en particulier, les traits principaux des oscillateurs à aimantation uniforme. Comme toute nano technologie, l'oscillateur est très sensible au bruit thermique, ce qui limite fortement son potentiel applicatif, par exemple en tant que source RF intégrée pour l'électronique. Pour y remédier, la synchronisation d'un ensemble d'oscillateurs semble la voie la plus prometteuse. La partie 1.3 introduit le concept de synchronisation et passe en revue les avancées actuelles.

1.1. Notions de spintronique

La spintronique est un domaine de la physique du solide, qui regroupe au moins trois activités : l'étude des configurations des couches magnétiques (ou nano magnétisme), le phénomène de transport dépendant de spin et la dynamique de l'aimantation.

1.1.1. Configurations magnétiques

On commence par rappeler quelques notions de magnétisme.

1.1.1.1. Echelle atomique

L'électron possède un moment magnétique intrinsèque μ_s , définit par :

$$\mu_s = -g \frac{\mu_B}{\hbar} \mathbf{s} \quad (1.1)$$

$\mu_B \approx 0.927 \cdot 10^{-23}$ A·m² le magnéton de Bohr, $\hbar \approx 1.0545 \cdot 10^{-34}$ J·s/rad la constante de Planck, g le facteur gyromagnétique de l'électron libre voisin de 2.

La grandeur \mathbf{s} est le moment cinétique de l'électron (ou spin). C'est un opérateur quantique qui a deux valeurs propres $|s| = \pm \hbar/2$ [21]. Par conséquent, μ_s est aussi un opérateur qui admet uniquement deux valeurs propres $|\mu_s| = \mp \mu_B$. En particulier, \mathbf{s} et μ_s sont toujours colinéaires et de sens opposés.

Dans les matériaux, la direction des moments magnétiques (ou les spins) des électrons est déterminée par différentes interactions à l'échelle atomique. On cite ici les quatre principales [22] :

- **Interaction d'échange.** C'est une interaction d'origine électrostatique, forte mais de courte portée, limitée aux seuls sites atomiques voisins. Elle favorise l'alignement spontané des spins. De façon générale, elle est à l'origine des ordres magnétiques observés dans les matériaux : le ferromagnétisme (même sens des spins), l'antiferromagnétisme (sens opposé) et le ferrimagnétisme (sens opposé mais les moments ne se compensent pas). En particulier, les matériaux ferro et ferrimagnétique présentent un moment macroscopique non nul, appelé aimantation spontanée \mathbf{M}^1 . Seuls certains métaux comme les métaux de transition (Co, Fe, Ni ...), possèdent un ordre suffisamment fort pour résister à la température ambiante.
- **Interaction spin-orbite.** Elle est causée par l'interaction entre le spin et le moment orbital de l'électron. L'interaction est aussi de courte portée mais l'intensité peut varier fortement selon les matériaux et leurs structures cristallines. Elle peut se manifester selon différentes formes, comme générer une direction privilégiée d'aimantation, appelée axe facile d'aimantation.

¹ Densité volumique de moment magnétique

- **Interaction dipolaire (ou magnétostatique).** Elle traduit l'interaction magnétostatique entre chacun des spins des électrons du matériau. A l'opposé des précédentes, l'interaction est plus faible (même à courte portée) mais elle peut devenir importante lorsque qu'elle cumule les effets d'un grand nombre d'électrons. Celle-ci tend à l'alignement des spins dans des sens contraires.
- **Interaction de Zeeman.** Enfin, le moment magnétique de l'électron interagit avec le champ magnétique externe (e.g, produit par un électroaimant). Elle tend à aligner les spins dans la même direction que celle du champ appliqué.

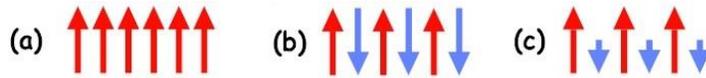


Figure 1.1. Ordres magnétiques les plus communs. (a) Ferromagnétisme (par ex : Co, Fe, Ni). (b) Antiferromagnétisme (par ex : PtMn, IrMn, FeMn). (c) Ferrimagnétisme (par ex : YIG).

1.1.1.2. Echelle mésoscopique

L'aimantation des matériaux magnétiques peut se décrire en adoptant une description mésoscopique du milieu (appelée aussi micromagnétique ou approximation continue), à mi-chemin entre une description atomique et macroscopique [23]. Le solide est alors divisé en cellules de dimensions nanométriques dans lesquelles l'aimantation est uniforme, à cause de l'interaction d'échange.

Le vecteur aimantation $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ au point \mathbf{r} peut être écrit comme :

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}) = M_s \mathbf{m}(\mathbf{r}) \quad (1.2)$$

M_s est l'aimantation spontanée et \mathbf{m} le vecteur unitaire de l'aimantation.

Dans les couches minces magnétiques (quelques nm d'épaisseur), la distribution de l'aimantation peut prendre des formes diverses, selon les énergies mises en jeu. La Figure 1.2 montre quelques configurations résultantes de la compétition entre les interactions d'échange, dipolaires et magnétocristallines².

² Il existe aussi dans les couches minces magnétiques d'autres types d'interaction. Par exemple il y a l'interaction RKKY [127] [128], l'interaction de champ d'échange avec une couche antiferromagnétique [129], ou encore l'effet dit « peau d'orange » [130]. Il existe encore l'interaction d'échange antisymétrique entre les spins. C'est le cas de l'interaction Dzyaloshinsky-Moriya [131], provoquée par l'interface entre une couche magnétique avec une couche de métal lourd (Pt, Ta...).

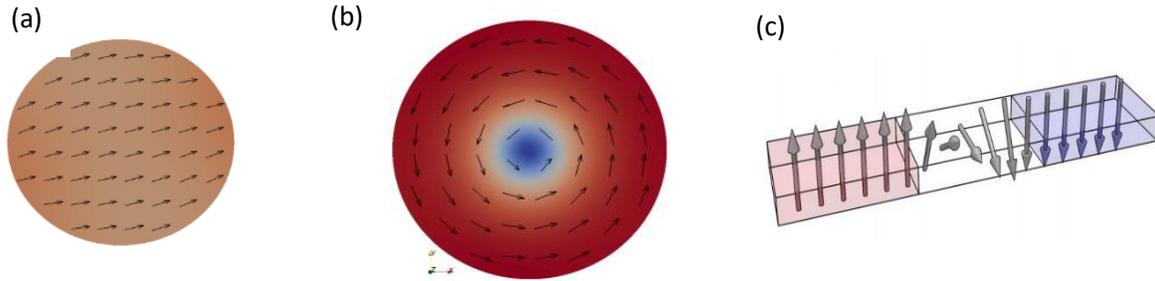


Figure 1.2. Configurations d'aimantation dans un nanodisque : (a) uniforme ou (b) vortex. Aimantation dans un film de longueur infini avec (c) une paroi de domaine de type Bloch. Les configurations (a-b) résultent de la compétition entre l'énergie d'échange et l'énergie dipolaire. En (a) l'énergie d'échange remporte mais pas en (b) où l'énergie dipolaire fait tourner l'aimantation à cause par exemple d'un rayon de disque plus grand. La configuration (c) résulte de la compétition entre l'énergie d'échange, dipolaire et magnétocristalline d'axe facile perpendiculaire à la couche.

Pour caractériser la compétition entre l'énergie d'échange et l'énergie dipolaire, on définit la longueur d'échange L_E , défini par :

$$L_E = \sqrt{\frac{2A}{\mu_0 M_S^2}} \quad (1.3)$$

A est la constante d'échange du milieu (de l'ordre de 10 pJ/m pour le NiFe).

Par exemple pour les matériaux magnétiques doux (à faible anisotropie magnétocristalline), L_E est compris entre 1 à 10 nm. La grandeur est notamment utile pour caractériser l'état magnétique de nanodisques [24], voir Figure 1.3.

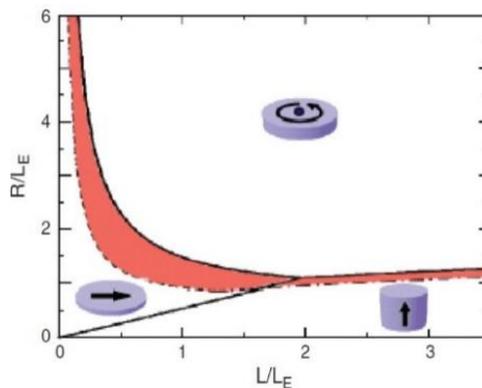


Figure 1.3. Diagramme d'état d'un nano-cylindre magnétique de rayon R et d'épaisseur L obtenue par simulation micromagnétique. La zone rouge marque la zone de bistabilité où deux états sont potentiellement possibles. L_E est la longueur d'échange du matériaux. L'anisotropie magnétocristalline est négligée. Extrait de [24]

Selon le rayon R ou l'épaisseur L , l'aimantation d'un disque cylindrique peut être à aimantation uniforme dans le plan de la couche pour les faibles épaisseurs $L/L_E \lesssim 1$, ou bien à aimantation hors du plan pour les faibles rayons $R/R_E \lesssim 1$, ou enfin à aimantation vortex pour des valeurs plus larges de R et de L . Dans cet état, l'énergie dipolaire est suffisamment forte pour faire tourner l'aimantation de façon à minimiser les charges magnétostatiques de surfaces. A la frontière d'existence des vortex, l'état est bistable et peut devenir soit l'une ou l'autre des configurations. Par exemple, un courant traversant la couche favoriserait la création d'un vortex à cause de son champ d'Oersted tandis qu'un champ externe appliqué favoriserait l'aimantation uniforme.

Dans la suite, on s'intéressera aux *nanodisques d'aimantation uniforme*. Dans ce cas, l'aimantation de la couche entière vérifie l'approximation macrospin. C'est-à-dire, toute l'aimantation de la couche est spécifiée uniquement par le vecteur \mathbf{M} , de norme constante. Nous n'emploierons donc plus que le vecteur normalisé \mathbf{m} .

1.1.2. Phénomènes de transport

Les métaux de transition utilisés comme couches magnétiques, ne présentent pas seulement une aimantation spontanée mais aussi des propriétés de conduction différentes. Le phénomène clé est la possibilité d'un transport électronique polarisé en spin.

1.1.2.1. Transport de spin

Du fait de l'interaction d'échange, les électrons de spin \uparrow (« haut » même sens que l'aimantation) sont favorisés énergétiquement tandis que les électrons de spin \downarrow (« bas ») sont défavorisés. Cela produit le décalage des bandes $3d\uparrow$ et $3d\downarrow$ au sein du réseau cristallin, voir Figure 1.4.

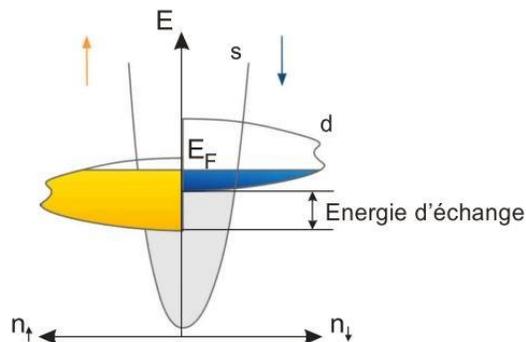


Figure 1.4. Décalage de la bande $3d$ des métaux de transitions (Par ex : Co, Fe, Ni) en deux sous bandes $3d\uparrow$ et $3d\downarrow$ à cause de l'interaction d'échange. Les densités d'états au voisinage de E_F ne sont plus les mêmes ce qui va entraîner un transport électronique polarisé en spin [25].

Ce décalage de bandes va entraîner l'émergence d'un transport électronique polarisé en spin, phénomène fondamental de la spintronique. Cette conduction atypique peut s'expliquer à l'aide du modèle à deux canaux de Mott [26].

Dans ce modèle, la conduction vient des électrons de la couche s tandis que l'aimantation est produite par ceux de la couche d . Au sein de la couche s , on peut considérer que les électrons de spin différent n'interagissent pas, c'est comme s'ils appartenaient à deux canaux indépendants. Or la résistivité des canaux dépend de la probabilité de transition interbande des électrons (couche s vers la couche d). A cause du décalage des bandes $3d$, la densité d'état au niveau de Fermi est différente ce qui va donc entraîner des résistivités différentes selon le spin. Or dans les métaux de transitions, la densité d'état de $3d \downarrow$ est plus forte que celle de $3d \uparrow$. Ainsi, les électrons \downarrow subissent une résistivité ρ_{\downarrow} plus forte que celle ρ_{\uparrow} des électrons \uparrow .

Cette asymétrie est caractérisée par le facteur de polarisation : $\rho_{\downarrow}/\rho_{\uparrow}$. Le courant électrique transporte plus d'électrons d'un certain spin que d'un autre à mesure que α tend vers 0. Cela crée à la fois un débit de moments magnétiques en plus d'un débit de charges.

1.1.2.2. Effet GMR/TMR

○ Principe de l'effet GMR

Cette différence de résistivité entre les électrons de spin différents peut être exploitée dans les multicouches magnétiques de type FM/NM/FM pour produire une variation de la résistance selon le sens d'aimantation des couches magnétiques, voir Figure 1.5. C'est l'effet de magnétorésistance géante (ou effet GMR). On commence par expliquer son fonctionnement.

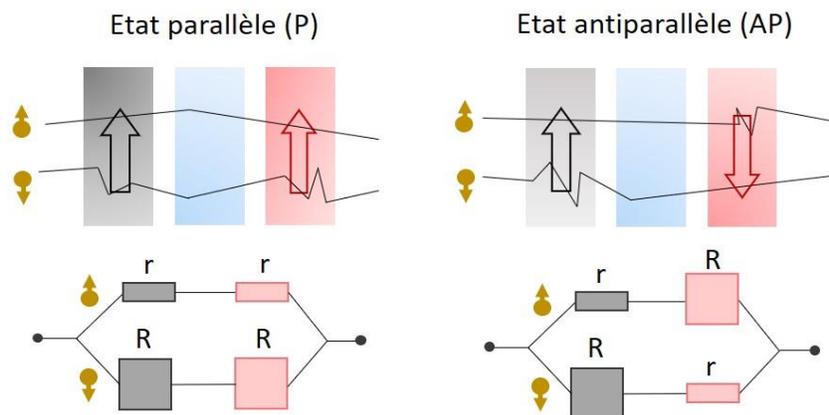


Figure 1.5 Mécanisme de l'effet GMR dans une structure multicouche FM/NM/FM. (a) Etat parallèle : les aimantations sont de même sens. (b) Etat antiparallèle : les aimantations sont de sens contraire [25].

Deux cas se présentent selon la direction des aimantations des couches. L'état est dit parallèle si les aimantations sont colinéaires et de même sens. Dans ce cas, les électrons de spin \uparrow de la première couche le sont aussi dans la seconde. La résistance qui leur est opposée est faible. A l'inverse, les électrons de spin \downarrow voient une plus forte résistance. La résistance totale de la structure vaut $r_p = rR/(r + R)$. En particulier, si r est très faible devant R alors la résistance parallèle chute fortement laissant passer le courant. En revanche, l'état est dit antiparallèle lorsque les aimantations sont colinéaires mais de sens opposés. Dans ce cas, la structure oppose la même résistance à tous les types d'électrons quelque soient leurs spins. Cela a pour effet d'augmenter la résistance totale : $r_{ap} = (r + R)/4$, qui est en général supérieure à r_p .

Cette capacité de changement de résistance de la structure est caractérisée par le ratio :

$$GMR = \frac{r_{ap} - r_p}{r_p} = \frac{(R - r)^2}{4rR} \quad (1.4)$$

L'ennui est que le modèle ne fonctionne que si la couche NM est suffisamment fine de façon à ce que le courant reste polarisé pendant sa traversée. En effet, dans un milieu non magnétique, la polarisation tend à s'annuler, traduction normale du retour à l'équilibre des spins. La longueur caractéristique est la longueur de diffusion de spin l_{sf} . Or elle ne vaut que quelques nm, donc l'épaisseur de la couche NM doit être aussi de cet ordre.

Il a fallu attendre les techniques récentes de déposition pour pouvoir réaliser de telles structures. Vers la fin des années 1980, les équipes de A. Fert [3] et P. Grunberg en 1989 [4] découvrent l'effet de magnétorésistance géante (GMR) dans des empilements de Fe/Cr, Figure 1.6.

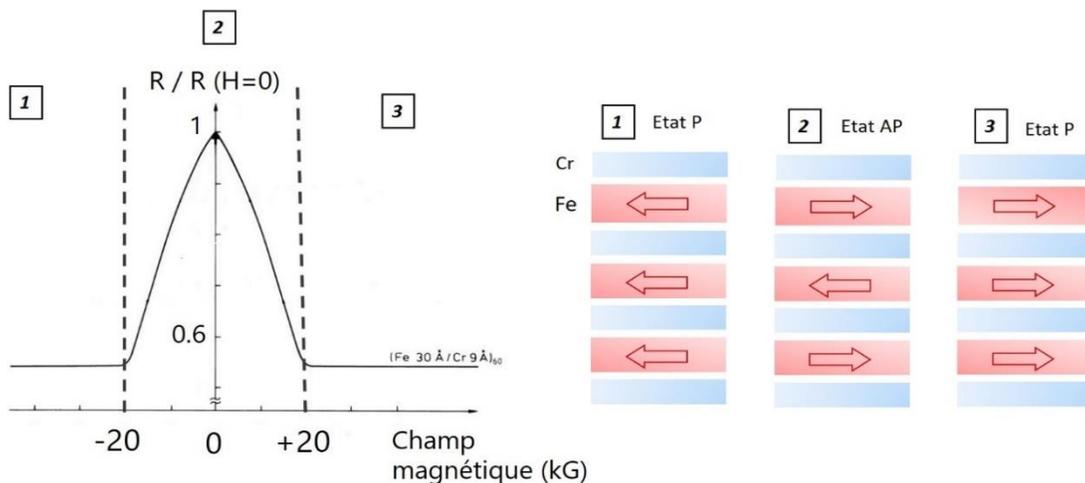


Figure 1.6. Evolution de la résistance dans des multicouches Fe/Cr. Le champ est appliqué dans le plan de la structure. Figure adaptée de [3].

A champ nul, la structure est en état antiparallèle car les aimantations des couches sont couplées antiferromagnétiquement par interaction RKKY. Lorsqu'un champ fort est appliqué pour saturer les couches (env. 20 kG), la structure passe en état parallèle et la résistance diminue. Ils observent un ratio GMR de 80% à basse température ce qui incomparablement plus grand que les effets de magnétorésistance traditionnel (l'effet AMR varie entre 1 et 5 %). C'est en quelque sorte un « super » effet capteur de la direction des aimantations.

○ *Structure vanne de spin*

Certainement, la structure multicouche la plus utilisée est la vanne de spin, proposée par [27], Figure 1.7.

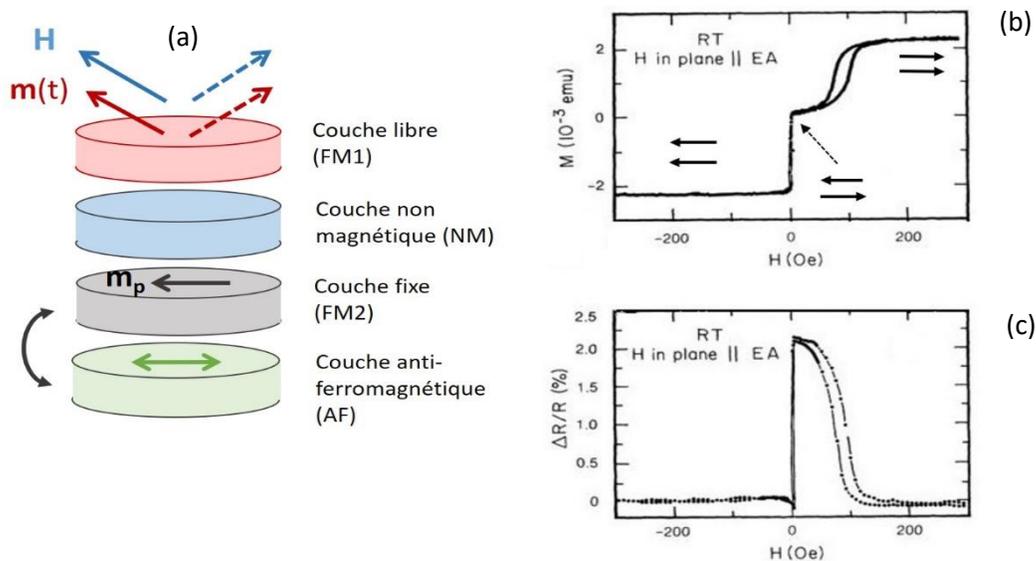


Figure 1.7. (a) Structure de type vanne de spin. Les couches AF et FM2 sont couplées par champ d'échange. (b,c) Résultats obtenus par [27] dans la structure AF/FM2/NM/FM1 = FeMn(7)/NiFe(4.5)/Cu(2)/NiFe(6). GMR = 5% à température ambiante. (b) Courbe d'aimantation et (c) courbe de magnétorésistance. Grâce au couplage AF/FM2, l'état anti parallèle est maintenue sur quelque 10 Oe.

Dans cette structure, les deux couches magnétiques FM1 et FM2 sont découplées et jouent un rôle différent. D'abord, la couche FM2 est la couche fixe (ou polariseur). L'aimantation m_p est fixée dans une direction par champ d'échange avec une couche antiferromagnétique AF (FeMn). A l'inverse, FM1 est la couche libre. Son aimantation m est par exemple libre de suivre la direction d'un champ appliqué. La structure est donc très fonctionnelle. Elle peut servir, entre autres, de capteur de champ magnétique car il est possible d'atteindre l'état parallèle ou anti parallèle rien qu'en changeant la direction du champ. C'est notamment avec cette structure qu'ont été réalisées les premières têtes de lecture de disques durs à effet GMR. Avec une couche libre en NiFe, la structure peut être sensible à des champs aussi faibles que 10 Oe (1mT).

○ *Principe de l'effet TMR*

Depuis, une des activités de la spintronique consiste à augmenter le ratio GMR. Un nouveau cap a été franchi avec les structures à effet tunnel composées de couches magnétiques espacées par une barrière isolante. L'effet de magnétorésistance tunnel ou effet TMR³ repose là encore sur les décalages des bandes de valences entre les électrodes magnétiques de part et d'autre de la barrière. Sauf qu'ici le passage des électrons est un effet tunnel entièrement contrôlé par les propriétés de la barrière. La barrière agit en quelque sorte comme un filtre de spin.

Ces structures sont connues depuis [28] mais à l'époque, les faibles TMR (env 15%) obtenues à basse température n'ont pas eu d'impact applicatif. Plus récemment, les études théoriques [29] [30] et expérimentales [31] [32] ont montré que des TMR pouvaient atteindre 200% dans des structures à barrières cristallines, à température ambiante. Chez [31], la structure utilisée est IrMn(25)/CoFe(11)/MgO(3)/CoFe(15) structurée en [100] (« vanne de spin à effet tunnel »). Enfin en combinant les propriétés de la barrière avec des électrodes demies métalliques ($\alpha \approx 0$), il est possible d'obtenir des TMR record. Par exemple [33] ont obtenu une TMR de 1800% à basse température. Cependant le phénomène n'est pas thermiquement stable, c'est pourquoi des études supplémentaires doivent encore être menées.

1.1.2.3. Transfert de spin

Le dernier effet qui va nous intéresser est l'effet transfert de spin, prédit originalement par [6][7]. Par exemple, cela peut se produire dans la vanne de spin, Figure 1.7 (a). D'abord, le courant traversant la structure se polarise en spin au contact du polariseur dans la direction \mathbf{m}_p . Puis, les spins des électrons se réorientent par interaction d'échange au contact de la couche libre. Par conservation du moment cinétique, cela entraîne un couple sur l'aimantation \mathbf{m} de la couche libre qui peut s'exprimer de façon générale par :

$$(\dot{\mathbf{m}})_{STT} = (\dot{\mathbf{m}})_{SL} + (\dot{\mathbf{m}})_{FL} = -\gamma_0 a_J (\mathbf{m} \times \mathbf{m} \times \mathbf{m}_p) - \gamma_0 b_J (\mathbf{m} \times \mathbf{m}_p) \quad (1.5)$$

\mathbf{m} est l'aimantation de la couche libre, \mathbf{m}_p est l'aimantation du polariseur et la direction de polarisation en spin du courant. Les coefficients sont :

$$a_J = a_{J0} J_{app} = \frac{\hbar}{2e\mu_0 M_s t_k} g(\eta) J_{app}, \quad b_J = b_{J0} J_{app} \quad (1.6)$$

e est la charge élémentaire, t_k l'épaisseur de la couche libre et $g(\eta)$ une fonction dépendante de l'efficacité de polarisation η du courant.

³ Même définition pour les ratios TMR et GMR.

Le point le plus important est que ce couple a une composante dissipative, c'est-à-dire qu'il change l'énergie du système. Par exemple, il peut renverser l'aimantation d'un sens à un autre, ce qui est un grand intérêt pour réaliser des mémoires « spintroniques » entièrement intégrées (lecture et écriture). La première preuve du renversement fut donnée dans des vannes de spins Co/Cu/Co par [8], puis plus tard dans des jonctions tunnels CoFe/Al₂O₃/CoFe par [34] [35].

La partie dissipative peut se comprendre comme l'absorption par l'aimantation d'un débit de moment magnétique, orienté transverse à elle. Le facteur a_{J0} est proportionnel au courant appliqué pondéré par $g(\eta)$ une fonction dépendant de η (lié à α). Or la polarisation définit aussi la magnétorésistance, de sorte que les deux phénomènes sont en réalité liés. C'est pourquoi en général, toute théorie décrivant l'un doit servir à décrire l'autre [36]. En revanche, l'expression de la partie conservative b_{J0} est encore sujet à débat. Dans les systèmes à jonction tunnel, des expériences menées par technique de résonance STT-FMR semblent indiquer des valeurs de b_{J0} comparables à a_{J0} [37].

1.1.3. Dynamique de l'aimantation

1.1.3.1. Equations LLGS

La dynamique de l'aimantation d'une couche magnétique est régie par l'équation dynamique LLGS (initiales pour : L – Landau, L – Lifshitz [38] G – Gilbert [39], S – Slonczewski [7]) donnée par :

Equation LLGS, forme de Gilbert :

$$\dot{\mathbf{m}} = (\dot{\mathbf{m}})_p + (\dot{\mathbf{m}})_G + (\dot{\mathbf{m}})_{SL} + (\dot{\mathbf{m}})_{FL}$$

Avec les couples :

- $(\dot{\mathbf{m}})_p = -\gamma_0(\mathbf{m} \times \mathbf{H}_{eff})$ (1.7)
- $(\dot{\mathbf{m}})_G = \alpha(\mathbf{m} \times \dot{\mathbf{m}})$
- $(\dot{\mathbf{m}})_{SL} = -\gamma_0 a_J(\mathbf{m} \times \mathbf{m} \times \mathbf{m}_p)$
- $(\dot{\mathbf{m}})_{FL} = -\gamma_0 b_J(\mathbf{m} \times \mathbf{m}_p)$

$\gamma_0 = g \mu_0 \frac{\mu_B}{\hbar}$ est le facteur gyromagnétique, α la constante d'amortissement, a_J et b_J les amplitudes des couples de transfert de spin.

\mathbf{H}_{eff} est le champ effectif résultant de l'interaction entre l'aimantation avec toutes les sources de champ, internes ou externes à la couche :

$$\mu_0 \mathbf{H}_{eff} = -\nabla_{\mathbf{m}} \varepsilon(\mathbf{m}) \quad (1.8)$$

ε est la densité de l'énergie libre (totale) du système.

L'équation (1.7) donne la variation de l'aimantation, causée par l'interaction avec un champ ou un courant de spin. Elle traduit simplement le bilan classique des couples exercés sur le moment cinétique des électrons. Dans l'approximation macrospin, elle se résume simplement à la détermination de la direction de l'aimantation.

Les trois couples sont détaillés ci-dessous :

- $(\dot{\mathbf{m}})_P$ est le couple de précession. Lorsque l'aimantation est désalignée avec \mathbf{H}_{eff} , elle précesse par conservation du moment cinétique des électrons. On peut faire l'analogie avec le mouvement de la toupie. Une fois lancée, son axe de rotation dévie de l'axe de la verticale à cause de la pesanteur, ce qui entraîne la rotation ou précession que l'on connaît bien. Cependant ici, la fréquence de précession est beaucoup plus rapide. Le facteur γ_0 vaut environ 28 MHz/mT. Ainsi, pour \mathbf{m} quasiment alignée avec \mathbf{H}_{eff} , la fréquence de précession ω_{FMR} vaut $\gamma_0 H_{eff} = 280$ MHz avec des valeurs usuelles de champ $H_{eff} = 100$ Oe (10 mT). Il faut donc s'attendre à des fréquences dans le domaine RF. Par ailleurs, le couple de précession est un couple conservatif, c'est-à-dire qu'il ne change pas l'énergie du système ε . Il guide l'aimantation le long d'orbite d'égale énergie dont la forme est déterminée par ε .
- $(\dot{\mathbf{m}})_G$ est le couple d'amortissement (dit aussi couple de Gilbert). Comme tous les couples de frottement, il est dissipatif. Autrement dit, il fait diminuer l'énergie du système au profit de l'environnement, à un rythme contrôlé par le facteur α ($\alpha \ll 1$). La diminution entraîne la relaxation de l'aimantation vers sa direction d'équilibre. Une fois atteint, l'aimantation reste immobile dans le temps (en l'absence de température). Le transfert d'énergie peut, par exemple, être dû au couplage de l'aimantation avec le milieu acoustique de la couche, favorisé par des défauts cristallins, ou bien avec les électrons mobiles. L'expression du couple est phénoménologique. La dissipation est d'autant plus forte que la vitesse de \mathbf{m} est forte, ce qui semble naturel si l'on considère l'analogie mécanique d'un frottement fluide sur un solide.
- $(\dot{\mathbf{m}})_{SL}$ est le couple de transfert de spin (dit couple de Slonczewski). C'est un couple dissipatif qui traduit l'influence du courant de spin sur l'aimantation. L'amplitude du couple est proportionnelle au courant J , ce qui rend possible de manipuler dynamiquement l'aimantation en contrant l'amortissement. La grandeur utile est la densité de courant critique J_{cr} qui détermine l'ordre de grandeur du courant nécessaire pour vaincre l'amortissement à l'équilibre. Suivant le type de la jonction, $(\dot{\mathbf{m}})_{SL}$ est accompagné plus ou moins fortement d'un couple conservatif $(\dot{\mathbf{m}})_{FL}$.

Dans l'équation (1.7), la dérivée n'est pas explicitée ce qui n'est pas pratique pour la résolution. C'est pourquoi l'équation est remaniée pour la mettre sous la forme plus commode suivante :

Equation LLGS, forme de Landau :

$$\dot{\mathbf{m}} = (\dot{\mathbf{m}})_P + (\dot{\mathbf{m}})_G + (\dot{\mathbf{m}})_{SL} + (\dot{\mathbf{m}})_{FL}$$

Avec les couples :

$$\begin{aligned} - (\dot{\mathbf{m}})_P &= -\gamma'_0 (\mathbf{m} \times \mathbf{H}_{eff}) \\ - (\dot{\mathbf{m}})_G &= -\gamma'_0 \alpha (\mathbf{m} \times \mathbf{m} \times \mathbf{H}_{eff}) \\ - (\dot{\mathbf{m}})_{SL} &= -\gamma'_0 [a_J + \alpha b_J] (\mathbf{m} \times \mathbf{m} \times \mathbf{m}_p) \\ - (\dot{\mathbf{m}})_{FL} &= +\gamma'_0 [\alpha a_J - b_J] (\mathbf{m} \times \mathbf{m}_p) \end{aligned} \quad (1.9)$$

En particulier, γ_0 est changé en $\gamma_0' = \gamma_0/(1+\alpha^2)$. On note que les deux formes sont équivalentes lorsque α tend vers 0. Les coefficients a_j et b_j se retrouvent mélangés dans chacun des couples de transfert de spin. Dans la suite, on appelle le terme $(\dot{\mathbf{m}})_{FL}$ tel que $b_j = 0$, le couple de pseudo-champ.

1.1.3.2. Direction des couples

Sous cette dernière forme, la direction des couples apparaît plus clairement, Figure 1.8.

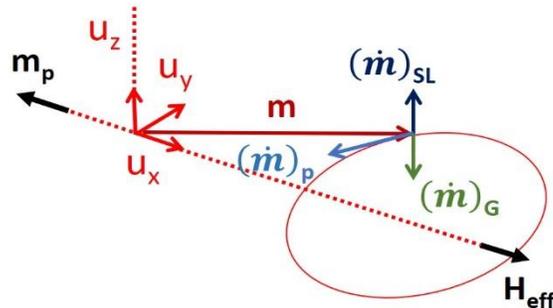


Figure 1.8. Direction des couples de l'équation LLGS. Le couple $(\dot{\mathbf{m}})_G$ cherche toujours à ramener \mathbf{m} dans la direction de \mathbf{H}_{eff} . Avec le couple de transfert de spin $(\dot{\mathbf{m}})_{SL}$, il existe un moyen de contrer l'amortissement. Les vecteurs \mathbf{p} et \mathbf{H}_{eff} doivent être de sens contraire pour maximiser le transfert de spin mais pas strictement colinéaire car sinon $(\dot{\mathbf{m}})_{SL} = 0$.

Dans ce cas de figure, les vecteurs \mathbf{p} et \mathbf{H}_{eff} sont quasiment colinéaires, ce qui entraîne aussi la colinéarité des couples $(\dot{\mathbf{m}})_{SL}$ et $(\dot{\mathbf{m}})_G$. Suivant le sens du courant, $(\dot{\mathbf{m}})_{SL}$ peut soit renforcer l'amortissement ou soit le contrer.

Il existe un moyen simple de visualiser la direction des couples. Par exemple, le couple $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{w}$ est toujours dirigé orthogonalement au plan formé par les vecteurs $(\mathbf{v}_1, \mathbf{w})$. Pour cela, ces couples sont qualifiés de OOP (out of plane). Par contre, le couple $\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 \times (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{w})$ est toujours contenu dans le plan $(\mathbf{v}_1, \mathbf{w})$. Ces couples sont appelés IP (in plane). Par conséquent, la base $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ est toujours orthogonale.

Ramené à l'aimantation, cela veut dire que les couples $\mathbf{m} \times \mathbf{y}$ ou $\mathbf{m} \times (\mathbf{m} \times \mathbf{y})$ font toujours bouger \mathbf{m} dans la direction de son plan tangent, quelque soit le vecteur \mathbf{y} . Cela est cohérent car l'amplitude de \mathbf{m} ne change jamais (approximation macrospin, mouvement sur une sphère unité). Avec ce moyen mémotechnique, on peut visualiser la direction d'autres couples moins intuitifs, tel que : $\mathbf{m} \times \mathbf{u}_y$, $\mathbf{m} \times \mathbf{u}_z$, ou $\mathbf{m} \times \mathbf{m} \times \mathbf{u}_y \dots$.

1.1.3.3. L'auto-oscillateur à transfert de spin

Déjà avec les couples de précession et d'amortissement, l'équation LLG conduit à de nombreux phénomènes physiques, comme la résonance FMR ou la propagation d'ondes de spin [40]. Avec l'arrivée des couples à transfert de spin et de l'effet GMR, la dynamique s'enrichit de nombreux autres phénomènes, qui peuvent apporter de nouvelles fonctionnalités à l'électronique [41].

Par exemple, la vanne de spin peut servir à créer un nouveau type de mémoire, la MRAM (magnetic random access memory). Le principe consiste à encoder l'information dans plusieurs directions stables de l'aimantation, voir la revue [42]. Elles combinent les avantages d'un temps de renversement rapide ($t < 10$ ns) et la non volatilité. On peut aussi créer des auto-oscillateurs stochastiques. Dans ce cas, l'aimantation se renverse de façon stochastique, et non plus déterministe comme pour les mémoires [43] [44]. Le courant déstabilise l'aimantation, de sa position la plus stable à la moins stable, tandis que l'activation thermique provoque le mouvement inverse. Ces oscillateurs stochastiques peuvent servir entre autres de générateurs de nombres aléatoires.

Enfin il y a l'*auto-oscillateur harmonique*, le dispositif qui va nous intéresser dans la suite. Le principe consiste à permettre la précession de l'aimantation, en appliquant un courant qui vient contrer l'amortissement [10] [45] (dit régime entretenu ou oscillatoire). Suivant la valeur du courant, la fréquence change. Ainsi le système créé est un auto-oscillateur contrôlable en courant (CCO) de taille nanométrique (≈ 100 nm), qui peut intéresser l'électronique RF en tant que source RF intégrée.

Depuis sa preuve de concept, différentes configurations ont été étudiées suivant le type de mode magnétique excité. Le tableau 1.1 présente les principales.

$$c(t) = \sqrt{p(t)} e^{j\phi(t)} \quad (1.10)$$

$p(t)$ est la puissance instantanée des oscillations, $a(t) = \sqrt{p(t)}$ l'amplitude et $\phi(t)$ la phase.

Un résultat fondamental dû à E.F.F Hopf [50][48], affirme que tout oscillateur dans la limite des faibles puissances (au voisinage de la bifurcation de Hopf), peut être décrit par l'équation simplifiée :

$$\dot{c}(t) = (\alpha + j\beta) c - (\gamma + j\delta) p c \quad (1.11)$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ sont trois paramètres caractéristiques du système.

En raison de son caractère général, l'équation est appelée équation d'amplitude universelle (ou équation de Landau-Stuart).

En injectant (1.10) dans (1.11) avec $\alpha = \gamma = 1$, on obtient le système réel associé :

$$\begin{cases} \dot{p}(t) = 2p(1 - p) \\ \dot{\phi}(t) = \beta - \delta p \end{cases} \quad (1.12)$$

Le seul point d'équilibre⁴ stable de l'équation de puissance est $p = 1$. A partir d'un point initial quelconque, le système finit toujours par se stabiliser à cette même puissance, avec la fréquence $\omega = \beta - \delta p$. La trajectoire asymptotique vaut :

$$c(t \rightarrow +\infty) = e^{\phi_0 + \omega t} \quad (1.13)$$

Elle porte plusieurs noms : le cercle limite ou l'attracteur de la dynamique, voir Figure 1.10 .

Par contre, la phase de l'oscillateur est libre. Cette propriété est notamment responsable du bruit de phase en $1/f^2$ des oscillateurs , car la phase « accumule » les perturbations du bruit thermique [51].

Plusieurs cas se présentent suivant la valeur de δ (1.12) :

- **Si $\delta \neq 0$** : l'oscillateur est non linéaire (non isochrone) car la fréquence dépend de la puissance. En particulier, les oscillateurs à transfert de spin le sont fortement. Quand la puissance augmente, la trajectoire décrite par l'aimantation s'ouvre ce qui génère le changement du champ effectif et donc de la fréquence. Grâce à ce mécanisme, un courant peut changer la fréquence (système appelé CCO)

⁴ En mécanique non linéaire, les points d'équilibres d'une équation $x' = f(x)$ sont les points x_0 tels que $f(x_0) = 0$. Si $f'(x_0) < 0$ ce sont des points d'équilibres stables, sinon des points instables.

sur une large gamme de l'ordre du GHz. C'est ce phénomène qui donne à l'oscillateur spintronique tout son intérêt tant sur le point de vue fondamental que sur le point de vue des applications.

- Si $\delta = 0$: l'oscillateur est simplement linéaire (isochrone). La fréquence est indépendante de la puissance. C'est le cas de la plupart des oscillateurs électroniques, comme les oscillateurs à rétroaction d'un résonateur LC. Dans ce cas, la fréquence se règle en changeant la capacité ou l'induction du résonateur. En réalité, ils ne sont linéaires que dans un certain domaine restreint de puissance.

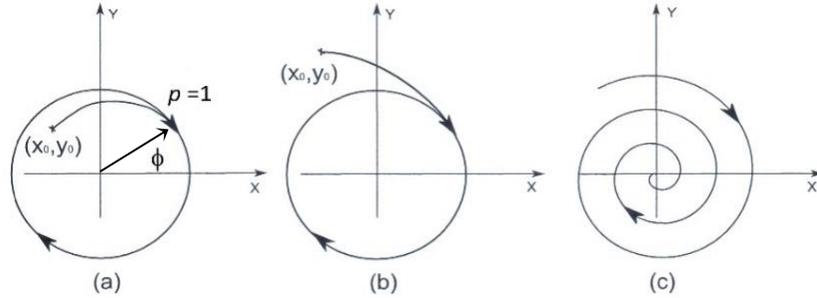


Figure 1.10. Exemples de trajectoires dans l'espace de configuration ($x = \sqrt{p} \cos(\phi)$, $y = \sqrt{p} \sin(\phi)$). (a,b) Système auto-oscillant avec son cercle limite $p = 1$, pour différentes conditions initiales. (c) Système avec un seul point stable, comme par exemple les systèmes linéaires bien connus du 2nd ordre. La réponse est ici sous critique.

Pour pouvoir appliquer ce modèle à l'oscillateur à transfert de spin, il faut trouver les paramètres α , β , γ à partir de l'équation LLGS. Les premiers à l'avoir fait sont [18] pour les oscillateurs à aimantation uniforme. Ils sont parvenus à changer la variable \mathbf{m} en une variable circulaire complexe c , en utilisant une série de transformations, basées sur le formalisme ondes de spin [52]. Plus récemment, [19] ont travaillé sur la modélisation de l'oscillateur uniforme planaire et [53] sur les oscillateurs vortex. L'avantage majeur du modèle universel réside dans sa capacité à formuler de façon simple et élégante les différents régimes de fonctionnement de l'oscillateur [20] (stochastique, modulation et synchronisation).

1.2.2. Bruits dans les oscillateurs

En condition expérimentale, les variables de l'oscillateur fluctuent à cause de l'agitation thermique. Dans ce cas, la trajectoire se modélise par un processus aléatoire complexe $\tilde{c}(t)$ défini par :

$$\tilde{c}(t) = \sqrt{p_0 + \delta p(t)} e^{j(2\pi f_0 t + \delta\phi(t))} \quad \text{ou} \quad \tilde{c}(t) = a_0(1 + \delta a(t)) e^{j(2\pi f_0 t + \delta\phi(t))} \quad (1.14)$$

Où p_0 , a_0 et f_0 sont la puissance, l'amplitude et la fréquence de l'état stationnaire non-perturbé. Les quantités $\delta p(t)$, $\delta a(t)$ et $\delta \phi(t)$ sont des processus aléatoires réels qui sont appelés ici : fluctuations de puissance, fluctuations normalisées d'amplitude et fluctuations de phase⁵.

En particulier, $\delta a(t)$ et $\delta p(t)$ sont reliées par :

$$\delta a(t) = \frac{\delta p(t)}{2p_0} \quad (1.15)$$

Les fluctuations de l'oscillateur peuvent être déterminées au choix par la paire $(\delta p(t), \delta \phi(t))$ ou bien par la paire $(\delta a(t), \delta \phi(t))$.

Il n'est pas possible de connaître la valeur d'un signal aléatoire $X(t, \omega)$ à un temps donné, car la valeur dépend aussi de l'évènement ω issu de l'ensemble des réalisations possibles du signal. L'information est contenue dans tous les moments à N-temps pris à chaque instant t . Les moments les plus connus sont la moyenne statistique $\langle X(t) \rangle$ à l'instant t qui est un moment à 1-temps, ou bien la moyenne statistique $\langle X(t_1) X(t_2) \rangle$ aux instants t_1 et t_2 , un exemple d'un moment à 2-temps.

Heureusement, la description des processus aléatoires est simplifiée car ils vérifient en général les propriétés suivantes :

- **Stationnarité** : Les moments à 1-temps et à 2-temps sont des invariants temporels.

- **Ergodicité** : La moyenne statistique peut être remplacée par la moyenne temporelle prise sur une unique réalisation du signal.

Sous ces conditions, il est possible de définir la densité spectrale de puissance (d.s.p) $S_{xx}(f)$ du processus $X(t, \omega)$ par :

$$S_{xx}(f) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \left\langle \left| \int_{-T/2}^{+T/2} X(t) e^{-2i\pi f \tau} d\tau \right|^2 \right\rangle, \quad -\infty < f < +\infty \quad (1.16)$$

$S_{xx}(f)$ est une grandeur fondamentale qui reflète les composantes harmoniques du signal aléatoire, ce qui est souvent plus utile à savoir qu'une représentation temporelle. Dans le cas des fluctuations $\delta a(t)$, $\delta \phi(t)$, les d.s.p. associées $S_{\delta a}(f)$, $S_{\delta \phi}(f)$ sont couramment appelées bruit d'amplitude et bruit de phase⁶, spécifiées en dBc/Hz à la fréquence décalée f de la porteuse f_0 .

L'enjeu pour tout oscillateur est d'avoir les d.s.p. $S_{\delta a}(f)$, $S_{\delta p}(f)$ et $S_{\delta \phi}(f)$ les plus faibles possibles, de sorte que les fluctuations soient les plus faibles. Hélas à cause de sa taille nanométrique, les oscillateurs à

⁵ On peut aussi définir les fluctuations normalisées de fréquence : $y(t) = \frac{\delta \phi(t)}{2\pi f_0}$ à partir de celle de la phase.

⁶ La convention correcte est de définir $S_{\delta a}(f)$, $S_{\delta \phi}(f)$ comme des densités spectrales unilatérales ($0 < f < +\infty$). Dans ce cas, les bruits de phase et d'amplitudes valent $\mathcal{L}_{\delta a}(f) = S_{\delta a}(f)/2$ et $\mathcal{L}_{\phi}(f) = S_{\delta \phi}(f)/2$. Ici, on fait l'abus de langage de définir $S_{\delta a}(f)$, $S_{\delta \phi}(f)$ comme des densités spectrales bilatérales.

transfert de spin sont très sensibles aux bruits, surtout le bruit thermique. Cela conduit à dégrader fortement la cohérence spectrale, comme la section suivante le montre.

1.2.3. Oscillateurs uniformes planaires

Les oscillateurs étudiés, dans la suite de la thèse, sont ceux à nano-pilier avec aimantation uniforme dans le plan. Ce sont notamment eux qui ont été découverts les premiers. On donne leurs principales caractéristiques.

1.2.3.1. Digramme d'état

La première observation du régime oscillatoire est réalisée par [45] dans des vannes de spin Co/Cu/Co à aimantation planaire, voir les digrammes d'état à la Figure 1.11. Le régime dépend des conditions de champ \mathbf{H} et de courant I appliqués.

Le diagramme d'état théorique montre que la vanne de spin suit différents régimes de fonctionnement, Figure 1.11 (a). Lorsque le champ appliqué est inférieur au champ coercitif ($\mathbf{H} < \mathbf{H}_c$), l'aimantation de la couche libre est bistable et peut être soit renversée dans l'état parallèle ou antiparallèle, suivant le sens du courant. C'est le régime de renversement déterministe, dans lequel le système agit comme une mémoire. Le régime d'oscillation se produit lorsqu'à la fois $\mathbf{H} > \mathbf{H}_c$ et $I > I_c$. Deux modes d'oscillations sont possibles suivant la valeur du courant. Si I est juste supérieur à I_c , l'oscillation suit le mode IPP (« in plane precession »). L'aimantation oscille autour de l'axe d'équilibre, contenu dans le plan de la couche. Plus le courant augmente et plus l'angle de précession augmente. Si $I \gg I_c$, le mode bifurque en un mode de plus haute énergie appelé OPP (« out of plane precession »), dans lequel l'oscillation se produit dans le plan quasiment orthogonal à la couche.

Dans le cadran montré où $I > 0$ et $\mathbf{H} > 0$, le mécanisme des excitations est le suivant. Comme $I > 0$, les électrons circulent de la couche libre à la couche fixe. Une partie des électrons de spin contraire à la couche fixe, se réfléchit à l'interface pour venir déstabiliser l'état parallèle, générant ainsi des excitations. En fait, le même type de dynamique se produit dans le cadran inverse où $I < 0$ et $\mathbf{H} < 0$. Comme $I < 0$, les électrons vont cette fois de la couche fixe à la couche libre. Ils se polarisent en traversant la couche fixe pour communiquer leurs spins à la couche libre. Il en résulte une déstabilisation de l'état antiparallèle et la génération là encore d'excitations. Il y a donc deux possibilités pour le régime oscillatoire : $I > 0, \mathbf{H} > 0$ et $I < 0, \mathbf{H} < 0$.

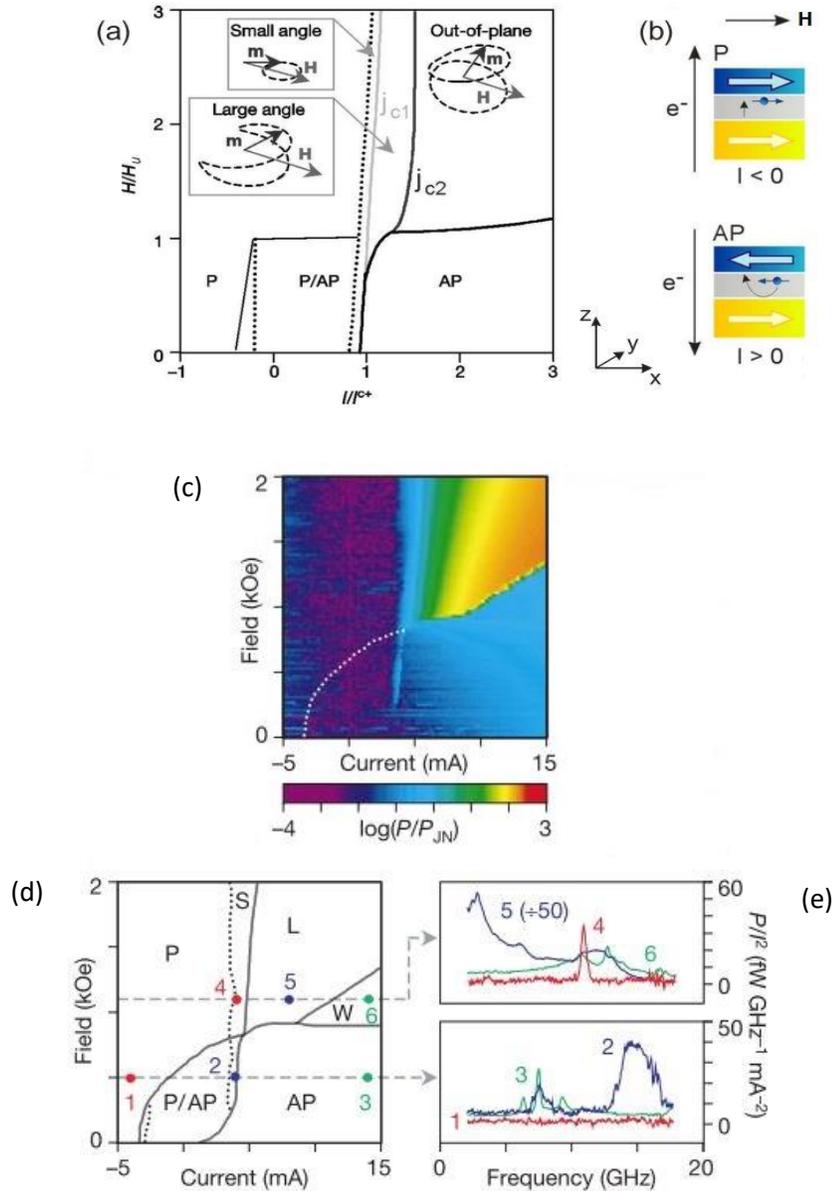


Figure 1.11 Phénomènes d'auto-oscillation dans les vannes de spin Co/Cu/Co (70×130 nm²), extrait de [45]. (a) Diagramme d'état obtenu par simulation macrospin à $T = 0$ K avec : H le champ appliqué, $H_u = 500$ Oe le champ coercitif (ou champ d'anisotropie) et $I_c = 2.8$ mA le courant critique de la couche libre. P = état parallèle, AP = état anti parallèle. (b) Convention pour le courant et le champ. (c-d-e) Mesures expérimentales. La puissance est mesurée avec une diode de détection. (c) Puissance totale en fonction de H et I . (d) Diagramme d'état. S = Régime de précession de faible amplitude, L = " " à forte amplitude et W = état d'oscillation intermédiaire. Probablement des excitations non uniformes de la couche libre. (e) Spectres mesurés.

Le fait marquant est que les mesures expérimentales concordent bien avec le modèle à température ambiante, Figure 1.11 (c,d,e). La région d'oscillation se manifeste par une augmentation de la puissance totale, Figure 1.11 (e). Le digramme d'état est schématisé à la Figure 1.11 (e). Le mode IPP est associé à une zone d'émission de puissance faible (au point N°4) tandis que le mode OPP génère une puissance plus grande (point N°5). Cette différence est liée à la valeur plus grande de $\mathbf{m} \cdot \mathbf{m}_p$ dans le cas du mode OPP. Enfin, il est possible d'observer d'autres types d'excitations (point N°6) à plus fort courant, certainement dûs à des excitations non uniformes de la couche libre.

1.2.3.2. Caractéristiques fréquentielles

La fréquence de l'oscillateur peut être réglée de deux façons différentes : par le champ et surtout par le courant appliqué. Un exemple est donné dans le cas d'un oscillateur planaire à effet TMR CoFeB/MgO/CoFe [54], voir Figure 1.12.

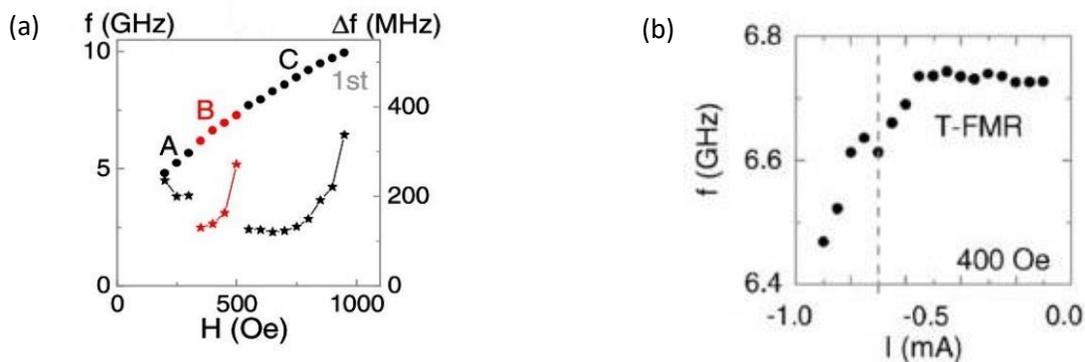


Figure 1.12. Variation de la fréquence du 1^{er} harmonique du mode uniforme dans des nano piliers CoFeB/MgO/CoFeB ($65 \times 130 \text{ nm}^2$) : (a) avec le champ ($I = -0.75 \text{ mA}$) et (b) avec le courant ($H = 400 \text{ Oe}$). Extrait de [54].

Que cela soit en régime amorti ou en régime entretenu, la fréquence de la couche libre suit la loi de Kittel [55]. En particulier, la fréquence augmente avec le champ tel que $f \sim \sqrt{H}$, Figure 1.12 (a). Par ailleurs, la largeur spectrale Δf dépend du champ. Elle décrit des « vallées » plus ou moins profondes qui traduisent les interactions non linéaires entre le mode uniforme (ici mode IPP) avec d'autres modes de la couche libre ou voisine [56]. Ces vallées sont des défauts car elles limitent le domaine d'utilisation des oscillateurs, et font aujourd'hui encore l'objet de recherches intenses [57][58].

La fréquence peut être aussi changée par le courant, Figure 1.12 (b). Précisément, le courant change la puissance qui change la fréquence, à cause de la non linéarité de l'oscillateur. Dans l'expérience, l'augmentation progressive du courant fait basculer le système du mode T-FMR (résonance FMR thermiquement activée) au régime entretenu (mode IPP), qui se traduit par le changement de fréquence jusqu'à 500 MHz. Comme c'est le cas ici, la fréquence doit diminuer pour le mode IPP, tandis qu'elle doit

augmenter pour le mode OPP [11]. Cette capacité de réglage confère à l'oscillateur son intérêt applicatif car il n'existe pas de VCO à large bande d'accordabilité dans le GHz.

En contrepartie de ses qualités (taille nanométrique et forte accordabilité), l'oscillateur possède les désavantages récurrents d'un nano système. Ils sont discutés à la section suivante.

1.2.3.3. Limitations

L'oscillateur possède deux points faibles. D'une part, il est fortement sensible au bruit thermique (largeur spectrale $\Delta f > 10$ MHz) et d'autre part possède une faible puissance d'émission (< 100 nW). La cohérence spectrale est spécifiée par le bruit de phase, dont un exemple est donné à la Figure 1.13 [59].

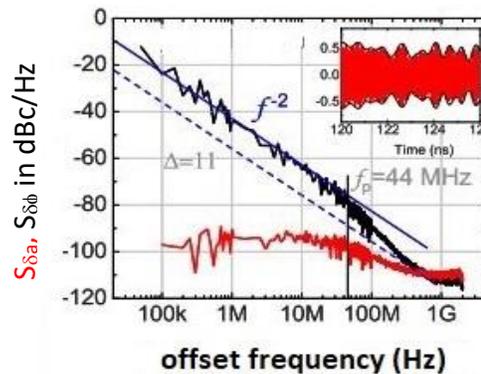


Figure 1.13. Mesures des bruits de phase et d'amplitude dans des nano piliers ($85 \times 85 \text{ nm}^2$) CoFeB/MgO/CoFeB. Fréquence porteuse : $f = 9.37$ GHz, $I = 1.2$ mA, $H = 700$ Oe. Le bruit de phase traduit la puissance des fluctuations de la phase en fonction de l'écart de fréquence à la porteuse. Pour les oscillateurs spintroniques, le bruit de phase augmente dans la gamme $f_{\text{offset}} < f_p$ à cause de la non linéarité. f_p est la fréquence de coupure introduite à la section 2.4.3.2. Extrait de [59].

En général, les oscillateurs uniformes exhibent des performances allant de -40 à -60 dBc/Hz @ 1 MHz pour des porteuses entre : $4 < f < 10$ GHz [59]. En particulier, l'exemple de la figure montre -40 dBc/Hz @ 1 MHz pour $f = 9.37$ GHz. Malheureusement, c'est loin des valeurs requises pour les applications télécoms. Par exemple pour être utilisé en téléphonie mobile (type GSM), il faut atteindre -100 dBc/Hz @ 1 MHz. Certains VCO basés sur des résonateurs LC atteignent -130 dBc/Hz @ 1 MHz pour $f = 4$ GHz en régime libre [60]. Seulement, leurs tailles d'au moins $20 \times 20 \text{ mm}^2$ sont incomparablement plus grandes que celles des oscillateurs spintroniques.

Pour réduire le bruit de phase, il existe plusieurs pistes. Une première possibilité est de jouer sur les paramètres de la couche. Par exemple, on peut essayer de diminuer la non linéarité pour ne pas augmenter le bruit de phase [61]. La seconde possibilité peut être d'utiliser le couplage de plusieurs couches pour exciter des modes plus stables thermiquement [62]. Une dernière est de contraindre la phase pour l'immuniser des fluctuations. La phase peut être verrouillée par une boucle à verrouillage de phase [63] [64] ou bien par le phénomène de synchronisation. En particulier, cette dernière solution est

intéressante car la synchronisation d'un ensemble entier d'oscillateurs pourrait à la fois réduire le bruit de phase et augmenter la puissance [65]. C'est ce phénomène de synchronisation qui est étudié plus en détail dans la partie suivante.

1.3. Notions de synchronisation

Les oscillateurs spintroniques permettent d'étudier à l'échelle nanométrique une variété de phénomènes non linéaires comme la modulation [66] ou la synchronisation [13] [14]. De façon générale, la synchronisation est un phénomène dynamique, qui peut se produire entre tous types d'oscillateurs couplés entre eux. La première description connue remonte au physicien hollandais Huygens (1629-1695), voir Figure 1.14.

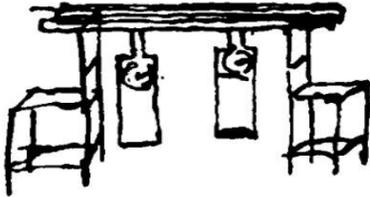


Figure 1.14. Dessin de Huygens sur ses expériences de synchronisation entre deux horloges. Le couplage des horloges est transmis par la barre en bois qui les suspend [12].

Les observations de Huygens sont encore remarquablement d'actualité pour décrire les caractéristiques principales de la synchronisation :

- 1) Un ensemble d'états dynamiques de N oscillateurs dont les fréquences sont identiques et les écarts de phase constants entre chaque.
- 2) Cela se déclenche lorsque les oscillateurs sont couplés entre eux et que leurs fréquences sont voisines les unes des autres.

Depuis, la synchronisation a été étudiée dans de nombreux oscillateurs de natures très diverses [12], comme par exemple les oscillateurs électroniques par B. Van der Pol [67]. L'effet le plus spectaculaire dans ce phénomène est lorsqu'une population entière d'oscillateurs se synchronise [68] [69]. Dans ce cas, des réponses individuelles d'ordre microscopique s'ajoutent pour former une réponse d'ordre macroscopique. De nombreux systèmes biologiques complexes sont organisés autour de cet effet, comme le cœur ou le cerveau. La synchronisation n'est donc pas seulement un phénomène naturel général, mais aussi un phénomène crucial qui peut expliquer la formation d'organismes complexes, voire vivants.

La partie introduit les concepts de bases, nécessaires à l'étude. Une revue de la littérature sur la synchronisation des oscillateurs spintroniques est donnée à la fin.

Rmq : Les figures sont extraites de [12]. A voir aussi les présentations de [48], ou de [49] (en français).

1.3.1. Synchronisation sans formules

1.3.1.1. Configurations

Les deux principales configurations de synchronisation sont la synchronisation mutuelle et la synchronisation par injection (dite aussi verrouillage par injection, « injection locking » en anglais), voir Figure 1.15.



Figure 1.15. Configurations de synchronisation. (a) Synchronisation mutuelle. Les oscillateurs N°1 et N°2 s'influencent mutuellement. (b) Synchronisation unidirectionnelle. L'oscillateur N°1 contrôle l'oscillateur N°2.

Dans le premier cas, le couplage est réciproque, autrement dit chaque oscillateur peut influencer ou être influencé par les autres oscillateurs ; comme les horloges de Huygens. Dans le second cas, un unique oscillateur « maître » influence tous les autres oscillateurs « esclaves » mais n'est pas influencé en retour. Seule la fréquence de l'oscillateur « esclave » s'ajuste à la celle de l'oscillateur maître.

Dans la suite, nous nous restreignons au cas de *la synchronisation par injection*. L'oscillateur maître est un générateur de signal électrique RF tandis que l'oscillateur esclave est l'oscillateur spintronique. Le signal émis par le générateur est le signal générateur. Le couplage peut être de nature variée, par exemple un champ magnétique ou un courant électrique.

Dans le cas où la fréquence du signal générateur est harmonique à la fréquence libre de l'oscillateur, la synchronisation est dite harmonique d'ordre n . L'ordre est défini par :

$$n = \frac{\omega_g}{\omega_0} \quad (1.17)$$

ω_0 la fréquence libre de l'oscillateur et ω_g la fréquence du signal générateur.

n peut être un entier, pair ou impair (synchronisation entière), voire même une fraction (synchronisation fractionnaire). En électronique RF, si $n > 1$ on parle de synchronisation super-harmonique tandis que si $n < 1$, la synchronisation est dite subharmonique.

1.3.1.2. Descriptions sans température

La synchronisation est un processus complexe qui s'appréhende en étudiant la fréquence et la phase des oscillateurs couplés. Soit un oscillateur possédant la fréquence libre ω_0 et la fréquence instantanée ω . Il

est couplé à un signal générateur de fréquence ω_g dont la valeur balaie un intervalle centré autour de ω_0 (cas $n = 1$). La Figure 1.16 résume les caractéristiques importantes.

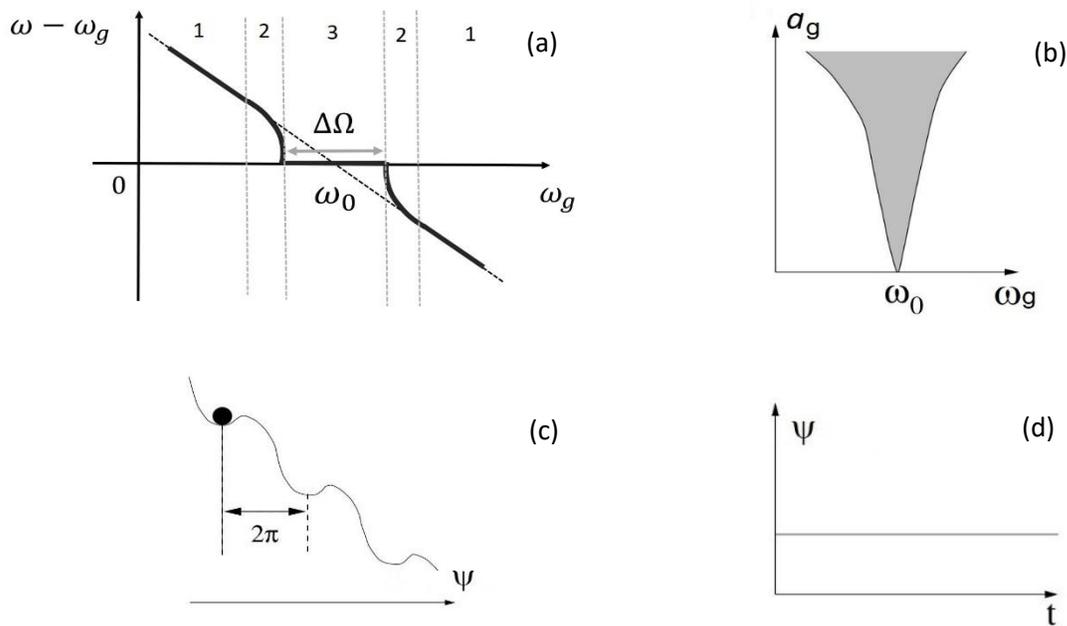


Figure 1.16. Caractéristiques de la synchronisation en l'absence de température. (a) Diagramme fréquentiel. La gamme de synchronisation $\Delta\Omega$ est l'intervalle des fréquences ω_g pour lesquels $\omega = \omega_g$. Les régimes N°1,2,3 sont indiqués. (b) Région de synchronisation ou langue d'Arnold. Evolution de $\Delta\Omega$ avec l'amplitude du signal générateur a_g . (c) Allure de l'énergie $E(\psi)$. (d) Evolution du déphasage $\psi(t) = \phi - \phi_g$ à l'intérieur du palier de synchronisation.

La dépendance typique de ω avec ω_g est montrée à la Figure 1.16 (a). On distingue trois régimes de fonctionnement :

- *Régime N°1* : Lorsque ω_g est loin de ω_0 , l'oscillateur oscille à sa fréquence libre $\omega = \omega_0$ car il n'est pas perturbé par le générateur.
- *Régime N°2* : Si ω_g se rapproche de ω_0 , la fréquence de l'oscillateur ω est attirée par ω_g , phénomène appelé tirage (ou « pulling » en anglais). La phase de l'oscillateur avance à la fréquence moyenne ω , intermédiaire entre ω_g et ω_0 , car elle subit des accélérations et des ralentissements successifs dûs à l'influence du générateur. Pour cela, le mouvement dans ce régime est aussi qualifié de quasi-périodique.
- *Régime N°3* : Enfin si ω_g et ω_0 sont suffisamment voisins, la synchronisation se déclenche. Dans ce cas, $\omega = \omega_g$ et l'écart de phase entre l'oscillateur et le signal générateur est constant.

Le phénomène de synchronisation se manifeste toujours de cette façon, pour tous les oscillateurs et quelle que soit leur nature.

On définit les trois quantités essentielles suivantes :

- *Le désaccord de fréquence δ (ou « mismatch frequency » en anglais) définit par :*

$$\delta = \omega_g - n \omega_0 \quad (1.18)$$

C'est le paramètre essentiel qui déclenche la synchronisation. Il représente l'écart de fréquence entre ω_g et ω_0 .

- *La gamme de synchronisation $\Delta\Omega$ (ou « locking range ») :* Elle caractérise en quelque sorte l'efficacité de la synchronisation. Elle est définie comme la largeur du palier où ω et ω_g sont identiques. De façon générale, la gamme augmente avec l'amplitude du signal générateur a_g , Figure 1.16 (b). Dans la plupart des cas, cette croissance de $\Delta\Omega$ avec a est symétrique et linéaire quand a est faible. Pour cela, il est commode de définir la sensibilité $C_\Omega = \Delta\Omega / a$ pour mettre en avant, systématiquement, les différentes aptitudes des oscillateurs à la synchronisation. La sensibilité C_Ω dépend de chaque oscillateur et de l'ordre n de la synchronisation.

- *Le déphasage par rapport au générateur ψ définit par :*

$$\psi = n \phi - \phi_g \quad (1.19)$$

La force synchronisante produite par le couplage génère un puit d'énergie qui retient le déphasage ψ , Figure 1.16 (c). Autrement dit, ψ est constant dans le temps à une valeur précise, Figure 1.16 (d). ψ est appelé ici le déphasage par rapport au générateur car ϕ est élevé à l'harmonique n . De façon similaire, on peut définir le *déphasage par rapport à l'oscillateur ψ_{osc}* :

$$\psi_{osc} = \phi - \phi_g/n \quad (1.20)$$

Au ratio $n = 1$, les deux déphasages sont confondus mais pas aux ordres supérieurs. D'un point de vue expérimental, c'est le signal émis par l'oscillateur qui intéresse et non le signal du générateur car il peut avoir une fréquence harmonique à celle de l'oscillateur. Dans ce cas, ψ_{osc} est plus naturel à utiliser. Cependant d'un point de vue de la dynamique, la synchronisation crée n points stables sur $\psi_{osc} \in [0, 2\pi]$ mais toujours un seul sur $\psi \in [0, 2\pi]$. En raison de cette simplicité, ψ est de préférence utilisé dans la partie théorique de ce rapport et on réservera ψ_{osc} pour la partie expérimentale.

En résumé, la synchronisation se manifeste en l'absence de température par : 1) Un déphasage ψ de valeur déterminée et 2) par l'égalité des fréquences entre l'oscillateur et le générateur. Ce régime est dit

de synchronisation de phase et de fréquence [12]. Cependant, tout oscillateur réel subit l'influence de la température. Dans ces conditions, le déphasage ψ n'est plus rigoureusement constant car ψ bouge à l'intérieur du puit d'énergie, constamment agité de façon aléatoire par le bruit thermique. Il faut donc préciser la notion de synchronisation en présence de la température.

1.3.1.3. Descriptions avec température

En présence de la température, la synchronisation n'est pas aussi nette qu'auparavant. La Figure 1.17 illustre les changements observés dans l'évolution de la fréquence et du déphasage de l'oscillateur.

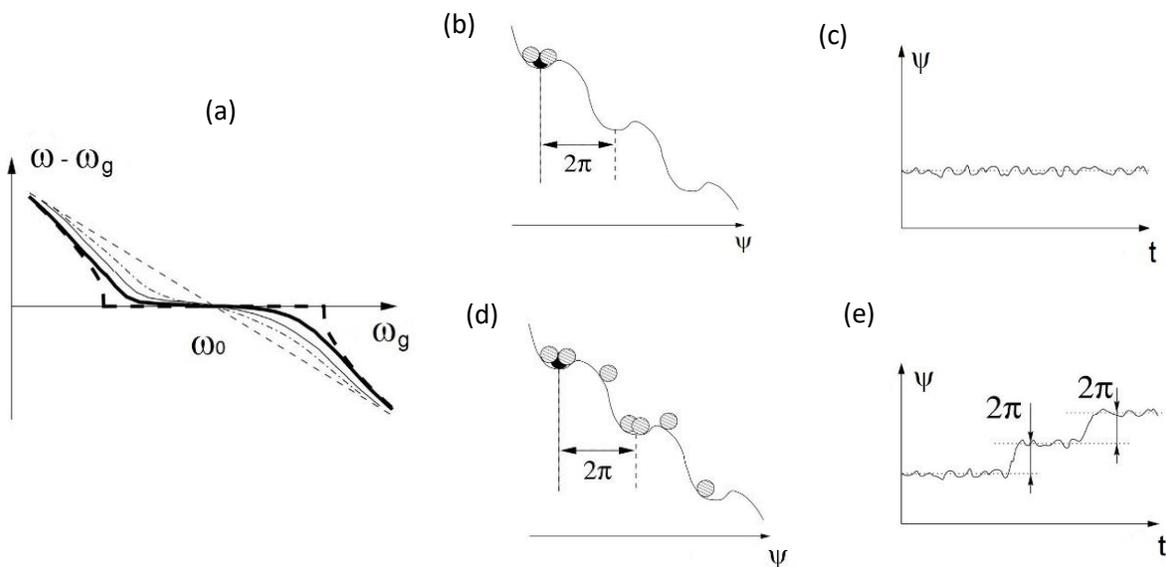


Figure 1.17. Caractéristiques de la synchronisation avec température. (a) Diagramme fréquentielle, montré à différentes températures. Plus la température augmente, plus la gamme de synchronisation diminue. (b,c) Allure de l'énergie $E(\psi)$ et de l'évolution temporelle $\psi(t)$, dans le cas d'un faible bruit thermique. (d,e) Pareil dans le cas d'un fort bruit thermique.

D'abord, le diagramme de fréquence montre que plus la température augmente, plus la gamme de synchronisation diminue, Figure 1.17 (a). En particulier, la température déstabilise plus fortement les états en bordures de palier pris à $T = 0$ K qu'au centre.

Avec la température, on distingue deux nouveaux régimes suivant le comportement de ψ . Dans le cas d'un faible bruit thermique, ψ s'agite autour de sa position d'équilibre mais ne change pas d'un puit à l'autre, Figure 1.17 (b,c). Dans ce cas, le régime est appelé synchronisation de fréquence car la fréquence moyenne de l'oscillateur reste identique à la fréquence du générateur (Pikovsky et al., 2001). Par contre, cela ne peut être un régime de synchronisation de phase car ψ n'est pas rigoureusement constant. Ce type de comportement se vérifie le plus souvent au centre de $\Delta\Omega$, là où ω est voisin de ω_g .

A l'opposé, il se peut que le bruit thermique soit suffisamment fort pour faire changer la phase de puit, engendrant des sauts de phase de 2π . L'allure de ψ en fonction du temps devient une succession de palier où l'oscillateur est synchronisé, séparée par des sauts de phases. Ce régime peut être qualifié de synchronisation « intermittente », dans le sens où ce n'est ni la synchronisation de fréquence, ni le régime de tirage, ni la désynchronisation. Ce comportement se produit souvent en bordure de $\Delta\Omega$, là où ω s'écarte de ω_g .

1.3.2. Synchronisation avec formules

L'équation couramment utilisée pour décrire la synchronisation d'un oscillateur à un signal générateur est l'équation d'Adler⁷ [70] :

$$\dot{\psi} = F(\psi) = -\delta + \Delta\Omega \sin(\psi) \quad (1.21)$$

Où F est la fonction dynamique, ψ le déphasage définit en (1.19), δ le désaccord de fréquence définit en (1.18) et $\Delta\Omega$ la gamme de synchronisation.

L'équation est du premier ordre en ψ et non linéaire à cause du terme trigonométrique. Ce dernier traduit l'influence du signal externe sur le système. Les états stationnaires sont les points d'équilibres stables de l'équation, c'est-à-dire :

$$\psi = \arcsin\left(-\frac{\delta}{\Delta\Omega}\right) + \psi_0 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (1.22)$$

Où ψ_0 est le déphasage additionnel.

Les états sont caractérisés par un déphasage constant, paramétré par δ , exactement comme les états de synchronisation cherchés. La solution existe lorsque $|\delta/\Delta\Omega| < 1$, c'est-à-dire lorsque $|\delta| < \Delta\Omega$. La gamme de synchronisation est donc donnée précisément par le facteur du terme trigonométrique. Le déphasage ψ varie typiquement en $\arcsin(\delta/\Delta\Omega)$ à l'intérieur de la gamme.

La Figure 1.18 illustre l'allure de $\psi(\delta)$ et $F(\psi)$ dans le cas simple où $\psi_0 = \pi$ et $\Delta\Omega = 1$.

⁷ L'ordre n est inclus implicitement dans les paramètres.

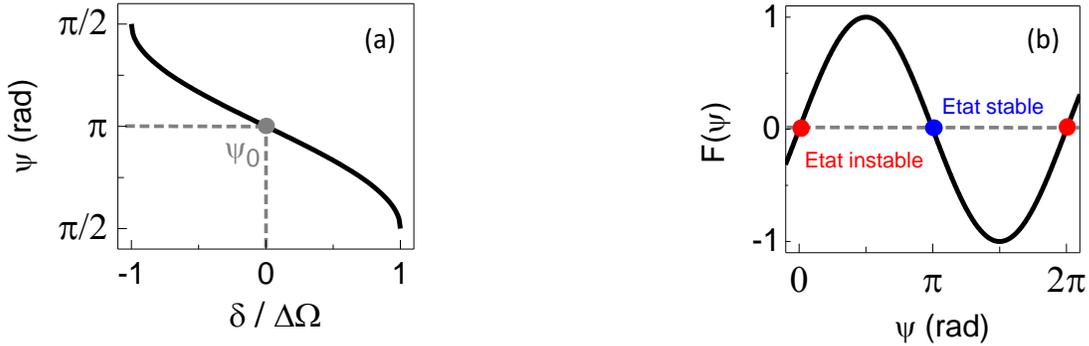


Figure 1.18. Description des états stationnaires de l'équation d'Adler avec $\psi_0 = \pi$ et $\Delta\Omega = 1$. (a) Evolution de ψ en fonction du rapport normalisé $\delta/\Delta\Omega$. (b) Représentation de la fonction dynamique $F(\psi)$ tel que $\delta = 0$. Les états d'équilibre stables sont ceux pour lesquels $d_\psi F(\psi) < 0$.

D'après le modèle, ψ balaie toujours un intervalle de largeur π , Figure 1.18 (a). En particulier, le déphasage additionnel ψ_0 est le déphasage en $\delta = 0$ (ici $\psi_0 = \pi$). Nous verrons dans la suite que cette quantité joue un rôle important dans la synchronisation des oscillateurs spintroniques et plus généralement de tout oscillateur non linéaire. La raison pour laquelle $\psi_0 = +\pi$ ici vient de la fonction $F(\psi)$, Figure 1.18 (b). Lorsque $\delta = 0$, les états d'équilibre stables sont les déphasages $\pi + 2k\pi$ tandis que les états instables sont les déphasages $0 + 2k\pi$. Il faudra donc toujours ajouter π pour obtenir la solution de phase complète si l'équation (1.21) est prise comme point de départ.

Dans l'article original d'Adler, le modèle a été utilisé pour décrire la synchronisation d'oscillateurs linéaires électriques. Dans ce cas, la puissance ne varie pas avec la fréquence. En revanche dans le cas où les oscillateurs sont non linéaires, l'influence du signal externe sur la puissance est transmise aussi à la phase via un terme supplémentaire en : $\Delta\Omega \cdot v \cdot \cos(\psi)$. Ainsi, les nouvelles propriétés deviennent, voir p198 [12] :

$$\Delta\Omega' \propto \Delta\Omega \sqrt{1 + v^2} \quad \text{et} \quad \psi'_0 = \psi_0 - \psi_v \quad (1.23)$$

Où $\psi_v = \arctan(v)$ et v un paramètre reflétant la non linéarité du système, voir (2.69).

La conséquence importante est que la non linéarité augmente la gamme de synchronisation. Or les oscillateurs spintroniques sont fortement non linéaires $|v| \gg 1$, comme cela a été montré par [20]. Ils possèdent donc une aptitude supplémentaire à la synchronisation. Dans la suite, nous utiliserons le système dynamique établi par [20], pour traiter à la fois l'évolution de la puissance et de la phase. Ce système sera alors plus général dans le sens où il tend à la limite vers l'équation d'Adler, lorsque $v \rightarrow 0$.

1.3.3. Revue d'études : synchronisation d'oscillateurs spintroniques

Les oscillateurs à transferts de spin ont le désavantage d'avoir une faible puissance d'émission (1 nW-100 nW) et une forte largeur spectrale (1MHz -100 MHz). Un des moyens les plus étudiés pour améliorer ces performances est de recourir à la synchronisation d'un ensemble d'oscillateurs. Les premières preuves du concept sont données par [13] et [14]. Deux oscillateurs à contact à point CoFe/Cu/NiFe sont synchronisés mutuellement, Figure 1.19. Cela se voit par l'augmentation de la puissance émise en état synchronisé, produite par l'interférence constructive des deux oscillateurs et la diminution de la largeur spectrale.

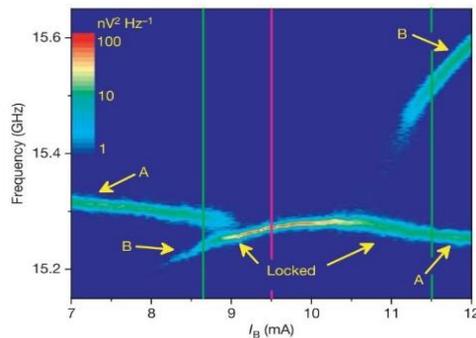


Figure 1.19. Diagramme spectral des deux oscillateurs A et B en fonction du courant statique I_B traversant l'oscillateur B, extrait de [13]. Les oscillateurs sont connectés en parallèle et l'analyseur de spectre est placé en sortie. Lorsque : $9 \text{ mA} < I_B < 11 \text{ mA}$, les fréquences libres sont suffisamment voisines pour qu'il y ait synchronisation, générant une augmentation de la puissance et une diminution de la largeur spectrale. Ici, le coulage est de nature onde de spin et dipolaire à la fois.

La première expérience de synchronisation par injection est menée par [71] avec un courant RF. Au niveau théorique, le modèle souvent invoqué pour décrire les expériences est le modèle universel (ou modèle ondes de spin) de Slavin & Tiberkevitch [72] [73]. Depuis ces premiers travaux, de nombreuses études ont permis de mieux comprendre ou d'améliorer l'effet de synchronisation. Nous résumons les différents progrès accomplis, en commençant par les études de synchronisation par injection puis en terminant par celles de synchronisation mutuelle.

1.3.3.1. Synchronisation par injection

Ce type de synchronisation constitue une première étape car cela permet de remonter aux caractéristiques de synchronisation individuelles d'un oscillateur. En ce qui concerne les nano piliers à aimantation uniforme, la première expérience d'injection est faite par [74] sur des vannes de spin Py/Cu/Py avec un courant RF. Depuis, des expériences d'injection de champ sur le même type d'oscillateur ont été faites par [17] [15]. Des expériences d'injection de courant ont été faites sur des MTJ CoFeB/Mgo/CoFe par [16].

Un point important est que l'injection d'un champ ou d'un courant peut être harmonique, d'ordre entier ou fractionnaire [17] [16], Figure 1.20. La sensibilité de couplage de chaque ordre dépend en premier de la forme de la trajectoire. Par exemple, une trajectoire circulaire réduit les sensibilités des ordres supérieurs tandis qu'une trajectoire elliptique, comme l'oscillateur planaire, les renforce. La sensibilité dépend aussi de l'angle d'application du signal générateur avec l'axe d'équilibre de l'aimantation. Un champ RF appliqué dans l'axe d'équilibre augmente la sensibilité des ordres pairs alors qu'appliqué orthogonalement, ce sont celles des ordres impairs.

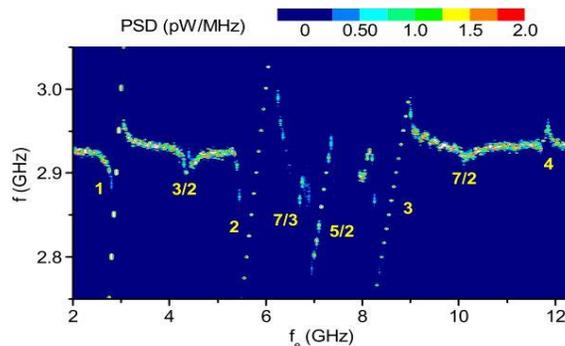


Figure 1.20. Première mise en évidence de la synchronisation fractionnaire dans les vannes de spin Py/Cu/Py (100 x 50 nm). Ici, la fréquence du générateur f_g balaie le système entre 2 GHz et environ 12 GHz. Les spectres de puissances aux bornes de l'oscillateur sont enregistrés par un analyseur de spectre par chaque pas f_g . Extrait de [17].

De façon générale, la sensibilité de synchronisation dépend aussi de la symétrie du couplage entre le signal générateur et le mode uniforme, voir les mesures MRFM de [75]. Un champ RF uniforme peut coupler symétriquement le mode uniforme mais pas un courant RF à cause du champ d'Oersted. La bonne symétrie rend la sensibilité de synchronisation plus forte, ce qui rend ces types de couplages préférables. Un point commun entre toutes ces expériences est qu'aucune ne montre, en état synchronisé, la réduction totale de la largeur spectrale ($\Delta f_{\text{sync}} < 1$ Hz) ou l'absence de saut de phase. Par exemple à température ambiante, [16] montre une réduction d'un facteur 8 ($\Delta f_{\text{sync}} \approx 4$ MHz). Un enjeu important est de savoir dans quelle mesure la configuration d'oscillation (uniforme planaire) ou le type d'injection limite l'efficacité de la synchronisation.

Pour modéliser le phénomène, la simulation macrospin est une première approche. En étudiant la dynamique de l'oscillateur avec injection d'un champ RF, [76] montre que dans une large gamme de J_{dc} , le seul phénomène observable est la synchronisation excepté au voisinage de la transition IPP/OPP ou la dynamique est chaotique. En régime synchronisé, [77] montre l'existence d'un déphasage additionnel liée à la non linéarité. Par ailleurs, le déphasage peut être aussi réglé en changeant la direction du signal générateur, voir [78].

Parmi les modèles analytiques, celui le plus utilisé est certainement le modèle universel ou dit aussi ondes de spin [20]. Néanmoins, il existe aussi une autre approche qui consiste à travailler directement

avec l'équation LLGS [79]. Les deux modèles offrent des performances et des limitations comparables. Par exemple, le calcul des paramètres (non linéarité, fonction d'amortissement etc...) n'est valable qu'aux faibles puissances d'oscillation. Toutes les principales caractéristiques peuvent être décrites avec l'un ou avec l'autre. Par exemple, la variation de la puissance en régime synchronisé peut être étudiée avec le modèle LLGS [79] ou bien avec le modèle ondes de spin, voir [19] pour le cas d'un forçage de type courant RF. De même, le régime transitoire peut être étudié avec l'un ou l'autre [80] [81], [82]. En particulier, une étude sur le régime transitoire des oscillateurs vortex ont été interprétés avec le modèle ondes de spin [83]. Enfin de la même façon, la nature hystérétique de la synchronisation peut être discutée avec les deux modèles [80], [15].

De façon générale, le modèle ondes de spin a l'avantage d'être universel au sens où la dynamique est discutée avec le même vocabulaire pour tous les oscillateurs, quelle que soit leur nature (animation uniforme, vortex ...), au contraire du modèle LLGS qui est restreint aux oscillateurs uniformes. Cependant, le modèle ondes de spin nécessite un travail supplémentaire de transformation qui est souvent fastidieux.

De nombreuses expériences d'injection ont été conduites sur les oscillateurs vortex. Nous les passons en revue. En particulier, il est possible tout comme pour les oscillateurs uniformes de les synchroniser avec un courant RF [84], voire harmoniquement à des ordres entiers ou fractionnaires [85]. Il est possible notamment de les synchroniser jusqu'au 4^{ième} ordre [86]. Par ailleurs, certains types d'oscillateurs vortex possèdent une largeur spectrale très faible en régime libre ($\Delta f \approx 100$ kHz), par exemple ceux à couches couplées. Une fois l'oscillateur synchronisé avec un champ RF, la largeur spectrale diminue remarquablement, à température ambiante, jusqu'à prendre les caractéristiques spectrales du générateur ($\Delta f \approx 1$ Hz) [87], voir Figure 1.21. Par ailleurs, les oscillateurs vortex exhibent, comme leur homologue uniforme, une synchronisation hystérétique si le sens du générateur est contrôlé attentivement [88].

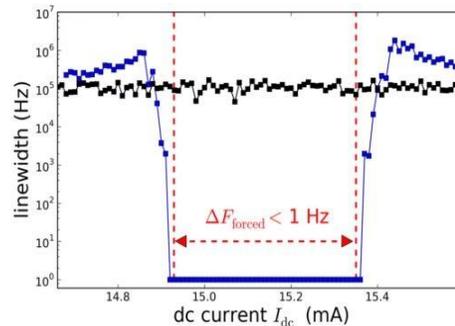


Figure 1.21. Mise en évidence de la réduction totale de la largeur spectrale pour les vortex à couches couplées. Extrait de [87].

Les performances des oscillateurs vortex en régime synchronisé sont globalement les meilleures pour deux raisons : 1) Leurs fortes stabilités thermiques et 2) leurs fortes sensibilités de synchronisation. Pour cela, ce sont pour l'instant les dispositifs les plus en vue pour étudier la synchronisation. Ce sont

notamment eux qui montrent les résultats les plus significatifs lors d'expériences de synchronisation mutuelle.

1.3.3.2. Synchronisation mutuelle

Depuis ces dix dernières années, la réalisation d'oscillateurs mutuellement synchronisés fait l'objet de nombreuses études théoriques et expérimentales. Très vite, l'intérêt se porte sur les oscillateurs vortex. Les stratégies de synchronisation peuvent être groupées en deux catégories suivant la nature des couplages.

En premier, il y a les couplages locaux, qui nécessitent la proximité des oscillateurs les uns des autres. Par exemple, le couplage peut être par ondes de spin, voir l'étude numérique de [89]. Le couplage peut être de nature mixte : ondes de spin / dipolaire (couplage vortex-anti-vortex), comme dans l'expérience de [90]. Enfin, la dernière possibilité est le couplage dipolaire. En particulier, [91][92][93] discutent la faisabilité de la synchronisation mutuelle de deux vortex et des moyens de l'améliorer. La preuve expérimentale est faite par [94]. En particulier, les auteurs montrent que la synchronisation s'améliore lorsque la polarité des vortex est opposée. Cependant, aucune réduction de la largeur spectrale n'est observée. Dans toutes ces situations de couplages, il n'est pas possible de régler individuellement chaque oscillateur. Cela peut être un inconvénient si l'on souhaite pouvoir contrôler finement la synchronisation.

La solution est d'utiliser des couplages non locaux, comme le couplage électrique. Dans cette situation, les oscillateurs sont connectés entre eux dans un réseau électrique, suffisamment éloignés les uns des autres, pour que le couplage soit seulement produit par le courant résultant. [95] étudie théoriquement la faisabilité d'un réseau électrique à N oscillateurs, avec le modèle de Kumamoto. En particulier si l'impédance des N oscillateurs vérifie certaines conditions, les auteurs prédisent l'augmentation de la puissance en N^2 . Cependant avant la réalisation, de nombreux problèmes doivent être levés. Le premier est de savoir si la sensibilité de synchronisation avec le courant est assez forte. La réponse est oui. [83] montre que l'injection d'un courant à l'ordre 1 peut réduire au minimum la largeur spectrale, sans aucun saut de phase dans la trace temporelle. Ensuite, il faut savoir si la puissance émise par l'oscillateur est suffisante pour synchroniser un autre. [96] montre que l'oscillateur vortex peut s'auto synchroniser sans l'aide d'un amplificateur, seulement grâce à la puissance émise par la magnétorésistance tunnel. Cela montre qu'en principe cela doit être possible. Enfin, [65] montre la synchronisation mutuelle de deux vortex reliés électriquement. Dans cette expérience où les deux vortex ont des performances semblables, la largeur spectrale diminue d'un facteur 2 et la puissance augmente d'un facteur 4, conformément à ce qui est attendu d'un régime synchronisé. Cette avancée majeure prouve que ces oscillateurs ont toutes les caractéristiques requises pour se synchroniser ensemble dans un vaste réseau.

En parallèle, de nombreuses études se sont penchées sur les oscillateurs uniformes. Depuis les expériences de [13] [14], [97] sont parvenus à synchroniser jusqu'à cinq oscillateurs nano-contact par ondes de spin. Différents modèles théoriques existent pour traiter les couplages locaux : par exemple

voir les modèles analytiques [73] [98] ou les simulations de [99]. En particulier, les auteurs de cet article discutent la faisabilité d'un réseau d'oscillateurs couplés par champ dipolaire. Par ailleurs, ils montrent que si les dispositifs sont des vannes de spins, il est impossible de les coupler électriquement. Enfin récemment, différentes études discutent la faisabilité de réseau basé sur des oscillateurs à effet Hall de spin. L'avantage de ces schémas est leur simplicité car les oscillateurs ne sont connectés entre eux que par une ligne de courant [100][101]. La synchronisation mutuelle de tels oscillateurs est validée par [102] [103] avec un couplage ondes de spin. Cependant, il n'existe pas à notre connaissance d'expérience de synchronisation par couplage électrique. Pour y arriver, nous pensons qu'il reste encore à comprendre et à approfondir les mécanismes individuels de synchronisation.

1.4. Conclusion

L'oscillateur à transfert de spin est une technologie prometteuse, notamment grâce à la taille, la fréquence ou l'accordabilité. Cependant, il possède deux verrous technologiques à surmonter, la faible puissance et le fort bruit de phase. La solution qui permettrait de palier aux deux problèmes à la fois est la synchronisation mutuelle d'un ensemble d'oscillateurs. Même si des avancées notables ont eu lieu du côté des oscillateurs vortex, il reste encore à étudier et prouver la synchronisation mutuelle d'oscillateurs uniformes par couplage électrique.

Nous avons remarqué qu'il n'y avait pas dans la littérature d'étude globale sur les différents mécanismes d'injection des oscillateurs uniformes. Or, savoir quelles sont les performances de chacun est un enjeu crucial, par exemple pour concevoir les meilleurs schémas de synchronisation. Pour cela, la piste choisie est l'étude principalement théorique des différents mécanismes d'injection des oscillateurs uniformes. Le chapitre suivant introduit plus en détail les outils analytiques, qui vont nous servir de base pour l'étude du régime synchronisé.

Chapitre 2. Le formalisme ondes de spin

A l'origine, le formalisme ondes de spin est un formalisme hamiltonien utilisé pour décrire l'état magnétique des milieux continus [52] [104].

Le formalisme repose sur une série de transformations qui changent la représentation naturelle du système, en variable \mathbf{m} , en une représentation plus adaptée à des approximations, en variables complexes. Après la découverte des phénomènes de transfert de spin, le formalisme a été étendu avec succès à la modélisation des oscillateurs spintroniques [18]. En particulier, il fournit un modèle simple (appelé ondes de spin ou universel), qui repose sur une équation d'amplitude universelle. L'équation est capable de décrire différents régimes de fonctionnement comme le régime libre, stochastique ou forcé [20]. Elle est universelle au sens où elle décrit la dynamique commune à tous les oscillateurs [12] [49], limitée aux faibles puissances d'oscillation (c.à.d. voisinage de la bifurcation de Hopf).

En suivant les travaux de [18][19], nous allons appliquer le formalisme ondes de spin à l'étude de l'oscillateur spintronique à aimantation uniforme planaire. La partie 2.1 présente l'oscillateur qui sera étudié. La partie 2.2 se consacre à la transformation de l'équation LLGS, via les trois transformations (a), (b) et (c) du formalisme. La partie 2.3 étudie l'impact des transformations sur les orbites du système. Enfin, la partie 2.4 dérive l'équation d'amplitude universelle, qui permet de décrire la dynamique approchée du système en régime libre. La partie introduit les grandeurs pertinentes (Q_{\perp} , N , Γ_p et ν) à la compréhension de la dynamique. En particulier, la non linéarité dynamique ν jouera un rôle important lors de l'étude de la synchronisation.

2.1. Présentation de l'oscillateur

On commence par décrire les paramètres de l'oscillateur, qui sont retenus pour l'étude. La première section décrit les conventions choisies et les paramètres internes de la couche libre. La deuxième partie introduit des notations plus adaptées au formalisme ondes de spin.

2.1.1. Description de l'oscillateur

2.1.1.1. Conventions et notations

L'oscillateur étudié est un nano pilier de forme elliptique (taille : $l_x=90$, $l_y=80$, $l_z=3.9$ nm) qui se compose de deux couches magnétiques, séparées par une couche non magnétique. Les aimantations des couches sont uniformes (approximation macrospin), décrites par des vecteurs normalisés : \mathbf{m} pour la couche libre et \mathbf{m}_p pour la couche fixe, voir Figure 2.1.

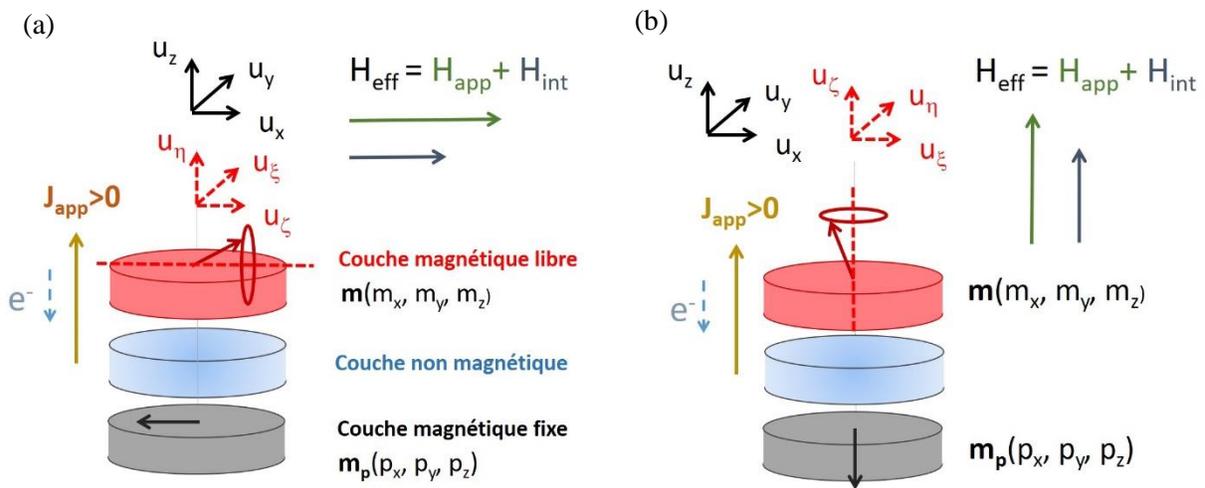


Figure 2.1. Schéma de principe et notations de l'oscillateur étudié. Lorsque le courant est positif, les électrons transitent de haut en bas, le régime entretenu se produit quand le courant est négatif : (a) en configuration planaire et (b) en configuration hors du plan. La configuration planaire (a) sera retenue pour la suite de l'étude mais le modèle présenté peut aussi s'appliquer à la configuration hors du plan (b).

Dans la suite, seule la dynamique de l'aimantation de la couche libre \mathbf{m} est étudiée. Les paramètres importants de l'oscillateur sont la densité de courant polarisé en spin \mathbf{J}_{app} et le champ effectif \mathbf{H}_{eff} . La densité de courant \mathbf{J}_{app} est polarisée en spin avec la direction \mathbf{m}_p donnée par l'orientation de l'aimantation de la couche fixe. Le courant est statique et traverse verticalement la structure. Il communique son excès de spin à l'aimantation \mathbf{m} , à travers les couples de transfert de spin. Le champ effectif \mathbf{H}_{eff} est la résultante de toutes les sources de champ magnétique qui influence \mathbf{m} . En particulier, il est composé d'un champ appliqué \mathbf{H}_{app} et d'un champ interne \mathbf{H}_{int} produit par la couche elle-même.

Toutes les interactions magnétiques avec le polariseur sont négligées. En régime libre, la densité de courant et le champ appliqué sont statiques ($\mathbf{H}_{app} = \mathbf{H}_{dc}$, $\mathbf{J}_{app} = \mathbf{J}_{dc}$) mais en régime synchronisé ils peuvent dépendre du temps ($\mathbf{H}_{app}(t) = \mathbf{H}_{dc} + \mathbf{H}_g(t)$, ou/et $\mathbf{J}_{app}(t) = \mathbf{J}_{dc} + \mathbf{J}_g(t)$).

Le champ effectif décide de l'axe d'équilibre de l'aimantation (en pointillé rouge). Selon sa valeur, les oscillations peuvent se produire dans le plan, hors du plan ou dans une direction quelconque. Le modèle présenté peut être utilisé pour n'importe laquelle de ces directions d'équilibre, pourvu que l'aimantation soit uniforme. Pour être clair, nous définissons la base orientée (\mathbf{u}_ζ , \mathbf{u}_ξ , \mathbf{u}_η) locale à l'aimantation, de sorte que la direction \mathbf{u}_ζ soit toujours dans l'axe de l'aimantation à l'équilibre, c'est-à-dire dans l'axe des oscillations. La base (\mathbf{u}_ζ , \mathbf{u}_ξ , \mathbf{u}_η) n'est à priori pas liée à la base de l'espace (\mathbf{u}_x , \mathbf{u}_y , \mathbf{u}_z), qui elle est fixe et attachée à la structure.

Dans la plupart des cas, les deux bases (\mathbf{u}_x , \mathbf{u}_y , \mathbf{u}_z) et (\mathbf{u}_ζ , \mathbf{u}_ξ , \mathbf{u}_η) ne sont pas nécessairement confondues ce qui crée une difficulté supplémentaire. En effet, l'application du formalisme ondes de spin, nécessite que toutes les grandeurs (en particulier le champ effectif) soient exprimées dans la base locale (\mathbf{u}_ζ , \mathbf{u}_ξ , \mathbf{u}_η) car les approximations sont effectuées au voisinage de l'axe d'équilibre. Si le champ effectif est connu dans la base (\mathbf{u}_x , \mathbf{u}_y , \mathbf{u}_z), il faut alors le transformer dans la base locale (\mathbf{u}_ζ , \mathbf{u}_ξ , \mathbf{u}_η). Dans ce cas, la méthode générale est d'abord de trouver l'axe d'équilibre à partir du champ effectif puis de définir la base locale associée. Il faut ensuite transformer l'équation de Landau-Lifshitz dans cette nouvelle base. Après seulement, il est possible d'effectuer les transformations du formalisme ondes de spin, voir [18].

Pour simplifier les calculs à venir, les bases (\mathbf{u}_x , \mathbf{u}_y , \mathbf{u}_z) et (\mathbf{u}_ζ , \mathbf{u}_ξ , \mathbf{u}_η) sont choisies de façon à être confondues, voir Figure 2.1 (a). Dans la suite, la configuration étudiée est la configuration planaire car elle se rapproche le plus de nos dispositifs expérimentaux. La section suivante présente le champ effectif de la couche libre.

2.1.1.2. Champ effectif

Le champ effectif \mathbf{H}_{eff} de la couche est composé des trois contributions suivantes :

$$\mathbf{H}_{eff} = \mathbf{H}_{dem} + \mathbf{H}_u + \mathbf{H}_{app} \quad (2.1)$$

\mathbf{H}_{dem} est le champ démagnétisant, \mathbf{H}_u , le champ d'anisotropie cristalline et \mathbf{H}_{app} , le champ magnétique appliqué.

Soit de façon explicite :

$$\mathbf{H}_{eff} = \begin{pmatrix} H_{dc} + H_u m_x - M_s N_{xx} m_x \\ -M_s N_{yy} m_y \\ -M_s N_{zz} m_z \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

En particulier, $H_u = 2K/(\mu_0 M_s)$. N_{xx} , N_{yy} , N_{zz} sont les coefficients du tenseur démagnétisant, pris diagonaux dans la base (\mathbf{u}_x , \mathbf{u}_y , \mathbf{u}_z). Avec les conventions de la Figure 2.1 (a), $N_{zz} > N_{yy} \approx N_{xx}$ car le champ démagnétisant retient fortement l'aimantation dans le plan de la couche.

2.1.1.3. Paramètres

Dans la suite (sauf indication contraire), les paramètres choisis pour l'oscillateur valent :

Paramètres	Valeurs	Paramètres du modèle ($H_{dc} = 400$ Oe)	Valeurs
γ_0 ($m \cdot A^{-1} \cdot s^{-1}$)	$2,210173 \times 10^5$	Γ_G	$2,00162 \cdot 10^9$
N_{xx}	0,052553	Q_1	-0,349983
N_{yy}	0,059408	Q_2	0,1277
N_{zz}	0,888038	σ	-0,00533
M_s ($A \cdot m^{-1}$)	10^6 (12 566 Oe)	R_1	-1
α	0,02	ω_0 (rad)	$4,04686 \cdot 10^{10}$ 6,44078 (GHz)
H_u (Oe)	0	N (rad)	$-3,16064 \cdot 10^{10}$ -5,0303 (GHz)
η	0,3	J_{cr} ($A \cdot m^{-2}$)	-375×10^9
a_{j0} (m)	$-2,50083 \times 10^{-8}$	* f_p (MHz)	42
$(\widehat{\mathbf{m}_p}, \mathbf{u}_x)$ ($^\circ$)	165	* ν	-22

Tableau 2.1. 1^{ère} colonne : Paramètres de structure de la couche libre. Les coefficients N_{xx} , N_{yy} , N_{zz} du tenseur démagnétisant sont calculés pour un pavé magnétique de dimension $l_x=90$, $l_y=80$, $l_z=3,9$ nm. 2nd colonne : Paramètres du modèle universel, voir la définition des grandeurs à la partie 2.4. *Valeurs prises pour $J_{dc} = -400 \times 10^9$ A/m².

2.1.2. Notations du formalisme ondes de spin

L'équation à transformer est l'équation LLGS (forme de Landau (1.9)). Pour faciliter les calculs, on adopte les quantités suivantes :

$$\begin{aligned}
 \omega_H &= \gamma_0' H_{app}, & \omega_{Ax} &= \gamma_0' (H_u - M_s N_{xx}), & \omega_{Ay} &= \gamma_0' M_s N_{yy} \\
 \omega_{Az} &= \gamma_0' M_s N_{zz}, & \omega_{J,SL} &= \gamma_0' (\alpha b_{j0} + a_{j0}) J_{DC}, & \omega_{J,FL} &= \gamma_0' (\alpha a_{j0} - b_{j0}) J_{DC}
 \end{aligned}
 \tag{2.3}$$

Le champ effectif se réécrit en :

$$\mathbf{H}_{eff} = \frac{1}{\gamma_0} \begin{pmatrix} \omega_H + \omega_{Ax} m_x \\ -\omega_{Ay} m_y \\ -\omega_{Az} m_z \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

et les couples de l'équation renotés en :

Couples	Notations vectorielles	Notations développées	
$(\dot{\mathbf{m}})_P$	$-\gamma_0'(\mathbf{m} \times \mathbf{H}_{eff})$	$-\begin{pmatrix} m_y m_z \omega_{Ay} - m_y m_z \omega_{Az} \\ m_x m_z \omega_{Ax} + m_x m_z \omega_{Az} + m_z \omega_H \\ -m_x m_y \omega_{Ax} - m_x m_y \omega_{Ay} - m_y \omega_H \end{pmatrix}$	(2.5)
$(\dot{\mathbf{m}})_G$	$-\alpha \gamma_0'(\mathbf{m} \times \mathbf{m} \times \mathbf{H}_{eff})$	$-\alpha \begin{pmatrix} -(m_x m_y^2 + m_x m_z^2) \omega_{Ax} - m_x m_y^2 \omega_{Ay} - m_x m_z^2 \omega_{Az} - (m_y^2 + m_z^2) \omega_H \\ m_x^2 m_y \omega_{Ax} + (m_x^2 m_y + m_y m_z^2) \omega_{Ay} - m_y m_z^2 \omega_{Az} + m_x m_y \omega_H \\ m_x^2 m_z \omega_{Ax} - m_y^2 m_z \omega_{Ay} + (m_x^2 m_z + m_y^2 m_z) \omega_{Az} + m_x m_z \omega_H \end{pmatrix}$	(2.6)
$(\dot{\mathbf{m}})_{SL}$	$-\omega_{J,SL}(\mathbf{m} \times \mathbf{m} \times \mathbf{m}_p)$	$-\omega_{J,SL} \begin{pmatrix} -m_y^2 p_x - m_z^2 p_x + m_x m_y p_y + m_x m_z p_z \\ m_x m_y p_x - m_x^2 p_y - m_z^2 p_y + m_y m_z p_z \\ m_x m_z p_x + m_y m_z p_y - m_x^2 p_z - m_y^2 p_z \end{pmatrix}$	(2.7)
$(\dot{\mathbf{m}})_{FL}$	$+\omega_{J,FL}(\mathbf{m} \times \mathbf{m}_p)$	$+\omega_{J,FL} \begin{pmatrix} -m_z p_y + m_y p_z \\ m_z p_x - m_x p_z \\ -m_y p_x + m_x p_y \end{pmatrix}$	(2.8)

Tableau 2.2. Expressions des couples de l'équation LLGS.

En réalité, nous ne sommes jamais confrontés à l'équation LLGS entière. Les transformations du formalisme ondes de spin (a), (b) et (c) conservent la structure de l'équation de sorte qu'il suffit de raisonner à l'échelle des couples, de les transformer un à un, puis de les additionner au moment voulu pour obtenir l'équation dynamique dans les nouvelles variables.

A présent que l'oscillateur est défini, on va chercher à transformer l'équation LLGS en une équation plus simple à résoudre.

2.2. Formalisme en ondes de spin

De façon générale, le formalisme ondes de spin est un ensemble de transformations utilisé pour décrire les ondes de spin dans les milieux magnétiques, voir [52] ou [104] pour une introduction

complète. La méthode s'est révélée notamment efficace pour décrire le comportement des oscillateurs spintroniques uniformes [18], [20] [19]. Dans cette partie, l'équation LLGS est transformée à l'aide de trois transformations successives en variables complexes, appelées simplement : transformation (a), (b) et (c). Dans cette partie, toutes les transformations sont exactes et ne génèrent donc pas d'approximation.

La méthode est la même dans tous les cas : d'abord la transformation est définie puis, en faisant usage de la distributivité et de la linéarité, les couples de l'équation LLGS sont transformés, un à un, en leurs couples transformés. Pour des raisons de clarté, les expressions complètes des couples transformés sont déplacées à l'annexe 2.6.4 en fin de ce chapitre.

2.2.1. Transformation (a)

La transformation (a) ou la transformation de Holstein-Primakoff, du nom de son analogue quantique [105], est à la base de la théorie classique des ondes de spin ce que la transformation de Holstein-Primakoff est à la théorie quantique des magnons. Elle change les variables naturelles (m_x, m_y, m_z) en deux variables complexes (a, \bar{a}). Son but est de rendre canonique l'équation LLGS mais la transformation n'est pas en soi canonique. Dans la littérature, cette procédure est qualifiée de quasi-hamiltonienne dans la mesure où le système n'est pas au départ canonique mais le devient après transformation.

L'avantage est de découpler l'hamiltonien du système $\mathcal{H}(a, \bar{a})$ de ses variables naturelles. Ainsi, les discussions sur la forme de l'hamiltonien sont fondamentales car des structures similaires peuvent, en fait, décrire des phénomènes d'ondes de nature très différentes. Il existe d'autres transformations (a) suivant la nature du milieu, par exemple la transformation de Clebsh pour les fluides turbulents [106], la transformation de Zakharov et Filonenko pour les ondes de surfaces liquides [107] Toutes ces transformations (a) font entrer la dynamique dans un même formalisme hamiltonien. On définit d'abord la transformation, puis on explique la méthode pour obtenir les couples transformés en variable a .

2.2.1.1. Définition

Considérons l'énergie libre du système W , reliée au champ effectif \mathbf{H}_{eff} telle que :

$$\mathbf{H}_{eff} = -\nabla_m W \quad (2.9)$$

L'énergie libre détermine les orbites du système. Ce sont les trajectoires fermées de l'espace qui conservent l'énergie. L'équation peut se réécrire en une somme d'une partie conservative et d'une perturbation notée \mathcal{J}_d :

$$\dot{\mathbf{m}} = -\gamma_0' \nabla_m W \times \mathbf{m} + \mathcal{J}_d \quad (2.10)$$

Le terme \mathcal{F}_d regroupe des contributions hétéroclites. Nécessairement, il y a les couples dissipatifs (couples de Gilbert ou de Slonczewski) qui donnent lieu aux auto-oscillations, mais il peut y avoir aussi des termes de forçage comme celui de la synchronisation \mathcal{F}_s ou de la modulation \mathcal{F}_m , un terme stochastique \mathcal{F}_T et même des couples pseudo-conservatifs comme le couple d'effet champ de spin. En pratique, la seule condition imposée est que les couples conservatifs de \mathcal{F}_d soient relativement faibles comparés aux couples conservatifs pour être traités comme une perturbation.

Le but est de trouver une transformation complexe capable de rendre canonique la partie conservative de l'équation LLGS, c'est à dire de la mettre sous forme :

$$\begin{cases} \dot{a} = j\partial_{\bar{a}}\mathcal{H} + \mathcal{J}_d \\ \dot{\bar{a}} = -j\partial_a\mathcal{H} + \overline{\mathcal{J}_d} \end{cases} \quad (2.11)$$

où l'hamiltonien du système est donné par :

$$\mathcal{H}(a, \bar{a}) = \gamma_0' W(a, \bar{a})/2 \quad (2.12)$$

Une possibilité est la transformation de Holstein-Primakoff classique, voir la résolution détaillée à l'annexe 2.6.1, donnée par :

Définition 2.1 : Soit la transformation (a) :

$$\begin{cases} a = \frac{m_y + jm_z}{\sqrt{2(1+m_x)}} \\ \bar{a} = \frac{m_y - jm_z}{\sqrt{2(1+m_x)}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_x = 1 - 2a\bar{a} \\ m_y = (a + \bar{a})\sqrt{1 - a\bar{a}} \\ m_z = -j(a - \bar{a})\sqrt{1 - a\bar{a}} \end{cases} \quad (2.13)$$

avec \mathbf{u}_x l'axe d'équilibre de l'aimantation.

En premier, la définition montre que la transformation est orientée. Elle ne fait pas jouer les mêmes rôles à l'axe d'équilibre \mathbf{u}_x et à son plan orthogonal $(\mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z)$ dans lequel se déroule les oscillations à faible angle de précession. Par ailleurs, la transformation a de nombreux avantages. D'une part, l'équation dynamique est simplifiée car toute la dynamique est regroupée en une seule équation complexe $\dot{a} = f(a, \bar{a})$, puisque l'équation conjuguée est par nature redondante. D'autre part, la fonction dynamique $f(a, \bar{a})$ a une structure mathématique simple sous forme d'un polynôme en $a^l \bar{a}^m$.

Comme la variable dynamique est un nombre complexe, la transformation révèle alors que le système n'a que deux degrés de liberté. En effet, elle tient compte implicitement de la contrainte de conservation de l'aimantation :

$$m_x^2 + m_y^2 + m_z^2 = 1 \quad (2.14)$$

Le facteur $\sqrt{1 - a\bar{a}}$ qui se retrouve dans la transformation est équivalent à $\sqrt{(1 + m_x)/2}$. Ce facteur est important parce que c'est lui qui est responsable de la non-linéarité de la transformation. Lorsque la composante longitudinale est maximale, c'est-à-dire lorsque $m_x \rightarrow 1$ alors $\sqrt{1 - a\bar{a}} \rightarrow 1$. Le facteur peut donc être négligé et la transformation est linéaire. Par contre, lorsque $m_x \neq 1$, $\sqrt{1 - a\bar{a}} \neq 1$ et le facteur doit être pris en compte (par exemple : quand $m_x \rightarrow 0$, $\sqrt{1 - a\bar{a}} \rightarrow \sqrt{2}/2$). Le facteur représente en quelque sorte la variation de m_x , causée par le mouvement de \mathbf{m} sur la sphère unité.

2.2.1.2. Application

La procédure pour obtenir l'équation dynamique $\dot{a} = f(a, \bar{a})$ en variable complexe est simple⁸. D'abord, la dérivée \dot{a} vaut en fonction de \mathbf{m} :

$$\dot{a} = \nabla_{\mathbf{m}} a \cdot \dot{\mathbf{m}} = \mathcal{L}_{ma}(\dot{\mathbf{m}}) \quad (2.15)$$

où \mathcal{L}_{ma} est l'opérateur de la transformation.

D'une part, on connaît le couple $\dot{\mathbf{m}}$, grâce à l'équation LLGS et d'autre part on connaît l'expression du gradient, défini par la transformation (2.13) :

$$\nabla_{\mathbf{m}} a = \left(\frac{-a}{4(1 - a\bar{a})}, \frac{1}{\sqrt{4(1 - a\bar{a})}}, \frac{j}{\sqrt{4(1 - a\bar{a})}} \right) \quad (2.16)$$

Ainsi, il est possible d'exprimer \dot{a} en fonction de a et \bar{a} .

Par ailleurs, le produit scalaire étant distributif et linéaire alors il est clair que l'opérateur \mathcal{L}_{ma} l'est aussi. En conséquence, une somme de couples donnée $\dot{\mathbf{m}} = \sum (\dot{\mathbf{m}})_i$ donnera aussi une somme de couples transformés en variable a , autrement dit :

$$\dot{a} = \mathcal{L}_{ma}(\dot{\mathbf{m}}) = \mathcal{L}_{ma}(\sum (\dot{\mathbf{m}})_i) = \sum \mathcal{L}_{ma}((\dot{\mathbf{m}})_i) \quad (2.17)$$

Où chaque $\dot{\mathbf{m}}_i$ a son correspondant $(\dot{a})_i = \mathcal{L}_{ma}((\dot{\mathbf{m}})_i) = \nabla_{\mathbf{m}} a \cdot \dot{\mathbf{m}}_i$.

Cette propriété est aussi vérifiée par les deux autres transformations suivantes, de sorte qu'en réalité le but des transformations est de trouver chacun des correspondants $(\dot{\mathbf{m}})_x$ de l'équation LLGS, dans chaque représentation $(\dot{a})_x$, $(\dot{b})_x$, $(\dot{c})_x$ puis de sommer les contributions pour avoir l'équation dynamique complète.

⁸ L'expression de $\dot{\bar{a}}$ s'obtient de la même façon en échangeant le rôle de a et \bar{a} .

A l'aide de la méthode décrite, la transformée du couple de précession vaut :

$$(\dot{a})_P = -j \begin{cases} -\left[\omega_{Ax} + \omega_H + \frac{\omega_{Ay} + \omega_{Az}}{2}\right] a + \left[\frac{\omega_{Az} - \omega_{Ay}}{2}\right] \bar{a} \\ -\frac{3}{4}[\omega_{Az} - \omega_{Ay}] a \bar{a}^2 + [2\omega_{Ax} + \omega_{Ay} + \omega_{Az}] a^2 \bar{a} \\ -\frac{1}{4}[\omega_{Az} - \omega_{Ay}] a^3 \end{cases} \quad (2.18)$$

Comme $(\dot{a})_P$ vérifie (2.11), l'hamiltonien en variable a vaut alors⁹ :

$$\mathcal{H}(a, \bar{a}) = \begin{cases} \left[\omega_{Ax} + \omega_H + \frac{\omega_{Ay} + \omega_{Az}}{2}\right] a \bar{a} + \left[\frac{\omega_{Ay} - \omega_{Az}}{4}\right] (a^2 + \bar{a}^2) \\ -\frac{1}{2}[2\omega_{Ax} + \omega_{Ay} + \omega_{Az}] a^2 \bar{a}^2 \\ +\frac{1}{4}[\omega_{Az} - \omega_{Ay}](a \bar{a}^3 + a^3 \bar{a}) \end{cases} \quad (2.19)$$

Le couple de précession (2.18) et l'hamiltonien (2.19) du système ont la forme reconnaissable d'un polynôme $k_{l,m} a^l \bar{a}^m$ avec les coefficients $k_{l,m}$ complexes, comme tous les autres couples transformés. En particulier, le polynôme de l'hamiltonien est du type¹⁰ $a^l \bar{a}^{l+2p}$. Cette caractéristique vient de la forme particulière du champ effectif prise ici très symétrique car dans la plupart des cas l'hamiltonien est quelconque.

2.2.2. Transformation (b)

La seconde transformation est l'analogue classique de la transformation quantique de Bogoliubov, utilisée à l'origine pour décrire les milieux superfluides [108]. La transformation permet de diagonaliser la partie quadratique de l'hamiltonien $\mathcal{H}(a, \bar{a}) = \mathcal{A}a\bar{a} + \mathcal{B}/2(a^2 + \bar{a}^2)$ en un type $\mathcal{H}(b, \bar{b}) = \omega_{FMR} b\bar{b}$. Dans cette nouvelle forme, l'équation dynamique peut être résolue moyennant certaines approximations, expliquées en 2.4. La méthode ressemble à celle utilisée pour transformer un système de deux oscillateurs couplés dans la base de ses modes normaux.

2.2.2.1. Définition

Le problème consiste à trouver une transformation canonique qui simplifie la partie quadratique de l'hamiltonien $\mathcal{H}(a, \bar{a}) = \mathcal{A}a\bar{a} + \frac{\mathcal{B}}{2}(a^2 + \bar{a}^2)$ en un hamiltonien découplé $\mathcal{H}(b, \bar{b}) = \omega_{FMR} b\bar{b}$, où \mathcal{A} , \mathcal{B} sont deux coefficients réels connus :

⁹ L'hamiltonien $\mathcal{H}(a, \bar{a})$ est symétrique car a et \bar{a} sont conjugués au sens dynamique et mathématique du terme.

¹⁰ Le couple de précession est donc du type $a^l \bar{a}^{l+2p+1}$ car c' est la dérivée de l'hamiltonien selon \bar{a} .

$$\begin{cases} \mathcal{A} = \omega_{Ax} + \omega_H + \frac{\omega_{Ay} + \omega_{Az}}{2} \\ \mathcal{B} = \frac{\omega_{Ay} - \omega_{Az}}{2} \end{cases} \quad (2.20)$$

La résolution du problème est détaillée à l'annexe 2.6.2. Le résultat donne :

Définition 2.2 : Soit la transformation (b) :

$$\begin{cases} b = ua + v\bar{a} \\ \bar{b} = va + u\bar{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = ub - v\bar{b} \\ \bar{a} = -vb + u\bar{b} \end{cases} \text{ avec } \omega_{FMR} = \pm\sqrt{\mathcal{A}^2 - \mathcal{B}^2} \text{ et } \begin{cases} u = \sqrt{\frac{\mathcal{A} + \omega_{FMR}}{2\omega_{FMR}}} \\ v = \text{sign}(\mathcal{B}) \sqrt{\frac{\mathcal{A} - \omega_{FMR}}{2\omega_{FMR}}} \end{cases} \quad (2.21)$$

Toute l'information de la transformation (b) est contenue dans les paramètres \mathcal{B}, \mathcal{A} . En particulier, le rapport \mathcal{B}/\mathcal{A} sera amené à jouer un rôle important dans la dynamique du système. Déjà, il apparaît que les quantités u, v sont fonction uniquement de \mathcal{B}/\mathcal{A} , voir le formulaire de l'annexe 2.6.2.

2.2.2.2. Application

De la même façon que précédemment, le passage de a vers b fait intervenir un opérateur distributif et linéaire \mathcal{L}_{ab} tel que la transformation des couples vérifie :

$$\dot{b} = \nabla_a b \cdot \dot{a} = \mathcal{L}_{ab}(\dot{a}) \quad (2.22)$$

Avec : $\mathbf{a} = (a, \bar{a})$ et $\nabla_a b = (u, v)$

En particulier, le couple de précession (2.18) devient en variable b :

$$(\dot{b})_p = -j \begin{cases} -\omega_{FMR} b \\ -\frac{3}{4} [4uv(u^2 + v^2)(2\omega_{Ax} + \omega_{Ay} + \omega_{Az}) + (u^4 + v^4 + 6u^2v^2)(\omega_{Az} - \omega_{Ay})] b \bar{b}^2 \\ + [3uv(u^2 + v^2)(\omega_{Az} - \omega_{Ay}) + (u^4 + v^4 + 4u^2v^2)(2\omega_{Ax} + \omega_{Ay} + \omega_{Az})] b^2 \bar{b} \\ -\frac{1}{4} [4uv(u^2 + v^2)(2\omega_{Ax} + \omega_{Ay} + \omega_{Az}) + (u^4 + v^4 + 6u^2v^2)(\omega_{Az} - \omega_{Ay})] b^3 \\ [2u^2v^2(2\omega_{Ax} + \omega_{Ay} + \omega_{Az}) + uv(u^2 + v^2)(\omega_{Az} - \omega_{Ay})] \bar{b}^3 \end{cases} \quad (2.23)$$

Et l'hamiltonien (2.19) :

$$\mathcal{H}(b, \bar{b}) = \frac{1}{4} \begin{cases} +4\omega_{FMR} b \bar{b} \\ +[uv(u^2 + v^2)(\omega_{Ay} - \omega_{Az}) - 2u^2v^2(2\omega_{Ax} + \omega_{Ay} + \omega_{Az})]b^4 \\ +[(u^4 + v^4 + 6u^2v^2)(\omega_{Az} - \omega_{Ay}) + 4uv(u^2 + v^2)(2\omega_{Ax} + \omega_{Ay} + \omega_{Az})]b^3\bar{b} \\ -2[(3uv(u^2 + v^2)(\omega_{Az} - \omega_{Ay}) + (u^4 + v^4 + 4u^2v^2)(2\omega_{Ax} + \omega_{Ay} + \omega_{Az}))b^2\bar{b}^2 \\ +[(u^4 + v^4 + 6u^2v^2)(\omega_{Az} - \omega_{Ay}) + 4uv(u^2 + v^2)(2\omega_{Ax} + \omega_{Ay} + \omega_{Az})]b\bar{b}^3 \\ -[uv(u^2 + v^2)(\omega_{Az} - \omega_{Ay}) + 2u^2v^2(2\omega_{Ax} + \omega_{Ay} + \omega_{Az})]\bar{b}^4 \end{cases} \quad (2.24)$$

L'expression de l'hamiltonien montre que la transformation supprime la dépendance des termes en b^2, \bar{b}^2 comme souhaité. Cela provoque ainsi la disparition du terme \bar{b} dans l'expression du couple de précession. Les couples transformés en variable b possèdent plus de termes qu'en variable a . Par exemple, le couple dissipatif $\mathbf{m} \times (\mathbf{m} \times \mathbf{H}_{eff})$ a 10 termes en variable b contre 8 en variable a .

2.2.3. Transformation (c)

La troisième et dernière transformation n'est pas essentielle à la différence des deux autres. Nous l'utilisons pour normaliser la trajectoire des orbites de façon à ce que $|c|^2 = p \sim 1$. Néanmoins, il existe des situations où une transformation (c) plus raffinée peut être utile. Par exemple, dans le cas de l'oscillateur de [18] ou plus généralement dans les milieux magnétiques [52]. Dans ce cas, l'hamiltonien comporte des termes de 3ème ordre : $b^l \bar{b}^m$ avec $l+m=3$ qui peuvent être supprimés avec une transformation de type $b = f(c, c^2, \bar{c}^2)$. De même, il est possible de simplifier les termes du 4ème ordre, voire du 5ème ordre, etc. Dans notre cas, l'hamiltonien comporte des termes jusqu'au 4ème ordre mais nous ne voyons pas d'avantages à le simplifier une nouvelle fois.

2.2.3.1. Définition

La dernière transformation est une simple transformation homothétique :

Définition 2.3 : Soit La transformation (c) :

$$b = \sqrt{\frac{\omega_{FMR}}{\mathcal{A}}} c \Leftrightarrow c = \sqrt{\frac{\mathcal{A}}{\omega_{FMR}}} b \text{ avec } c(t) = \sqrt{p(t)} e^{j\phi(t)} \quad (2.25)$$

$p(t) = |c(t)|^2$ est la puissance des oscillations (ou du système) et $\phi(t) = \text{Arg}(c(t))$ sa phase.

La transformation n'est pas canonique car le nouvel hamiltonien est le dilaté du précédent : $\mathcal{H}(c, \bar{c}) = \frac{\mathcal{A}}{\omega_{FMR}} \mathcal{H}(b, \bar{b})$. Les nouveaux couples transformés s'obtiennent à partir des anciens à un facteur multiplicatif près.

2.2.3.2. Application

Le passage de b à c fait intervenir l'opérateur \mathcal{L}_{bc} tel que :

$$\dot{c} = \nabla_b c \cdot \dot{b} = \mathcal{L}_{bc}(\dot{b}) \quad (2.26)$$

Avec : $\mathbf{b} = (b, \bar{b})$ et $\nabla_b c = \sqrt{\frac{\mathcal{A}}{\omega_{FMR}}}$.

L'équation dynamique complète s'obtient en rassemblant tous les couples transformés, c'est-à-dire :

$$\dot{c} = (\dot{c})_P(c, \bar{c}) + (\dot{c})_G(c, \bar{c}) + (\dot{c})_{SL}(c, \bar{c}) + (\dot{c})_{FL}(c, \bar{c}) \quad (2.27)$$

Avec les expressions des couples données à l'annexe 2.6.4.

Cette dernière équation est la transformée exacte de l'équation LLGS. Le membre de droite compte 18 termes $c^l \bar{c}^m$ à coefficients complexes, dont l'ordre maximum est 5 ($l+m=5$). Ces termes étant trigonométriques, l'équation n'est pas encore solvable analytiquement. Pour cela, il faut sélectionner les termes qui sont les plus pertinents pour décrire la dynamique de l'oscillateur. La partie 2.4 explique la procédure de simplification. Enfin, l'annexe 2.6.3 propose un tableau qui résume les points importants des trois transformations du formalisme.

2.3. Orbites du système

Les orbites sont les trajectoires fermées qui conservent l'énergie du système. L'énergie en question peut être l'énergie libre $W(\mathbf{m})$ ou les hamiltoniens $\mathcal{H}(a)$, $\mathcal{H}(b)$ ou $\mathcal{H}(c)$ exprimés dans les différentes variables complexes. En particulier, un des avantages des variables b ou c est que ces orbites sont décrites au premier ordre par la condition $p(t) = cst$ (équivalent à $\mathcal{H}(b)$ ou $\mathcal{H}(c) = cst$). Ainsi, ce sont de simples cercles du plan complexe. Cette partie montre en quoi les transformations du formalisme ondes de spin modifient la forme de l'orbite. La première section étudie les orbites à faible puissance, puis la deuxième aborde le cas des puissances quelconques. En particulier, la correspondance précise entre la forme de l'orbite en variable \mathbf{m} avec la puissance p du système est explicitée.

2.3.1. Faible puissance

Lorsque les puissances d'oscillation sont faibles, les orbites sont quasiment contenues dans le plan transversal $(\mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z)$ de sorte que $m_x \approx 1$. Dans ce cas, l'action des transformations peut se comprendre de façon intuitive.

La Figure 2.2 montre les orbites du système dans toutes les variables \mathbf{m} , a , b et c de l'oscillateur planaire.

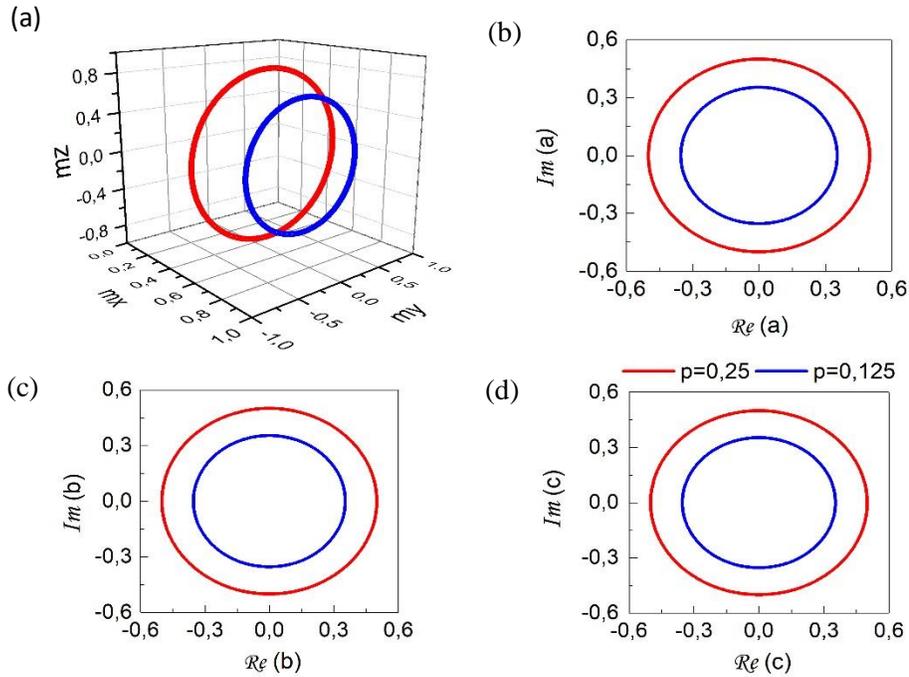


Figure 2.2. Représentation des orbites de l'oscillateur planaire pour deux valeurs de puissance. (a) Représentation dans la base $(\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z)$, (b) plan complexe a, (c) plan complexe b, (d) plan complexe c avec pour rappel $|c|=\sqrt{p}$.

Le passage d'une représentation à l'autre est discuté en détails ci-dessous.

2.3.1.1. Représentation dans le plan complexe a

La Figure 2.2 (a) montre qu'en variable \mathbf{m} , la trajectoire est parcourue dans l'espace, fortement contenue dans le plan de la couche $(\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y)$. L'aplatissement est causé par la présence du champ démagnétisant dans l'axe \mathbf{u}_z . Après transformation, la trajectoire est projetée dans le plan complexe, voir Figure 2.2 (b) tout en gardant sa forte ellipticité.

Lorsque $m_x \approx 1$, il y a une correspondance claire entre les coordonnées m_y, m_z et la variable a . En utilisant la définition 2.1, il vient :

$$\begin{cases} m_x(t) \approx 1 \\ m_y(t) \approx 2\text{Re}(a(t)) \\ m_z(t) \approx 2\Im(a(t)) \end{cases} \quad (2.28)$$

Les coordonnées m_y, m_z sont respectivement les parties réelles et imaginaires de a à un facteur multiplicatif près. Par conséquent, si le champ \mathbf{H}_{app} est dirigé suivant $+\mathbf{u}_x$ dans la base orientée $(\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z)$,

l'aimantation tourne dans le sens trigonométrique du plan ($\mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z$) et aussi dans le sens trigonométrique dans le plan complexe. Dans ce cas, la lecture de la trajectoire peut se faire instinctivement à partir de la représentation en variable a .

2.3.1.2. Représentation dans le plan complexe b

Le but de la transformation (b) est de rendre l'orbite approximativement circulaire, voir Figure 2.2 (c). Pour une aimantation quasi longitudinale, le lien entre les coordonnées m_y , m_z et la variable b se fait immédiatement en remplaçant a dans (2.28) par son expression en fonction de b :

$$\begin{cases} m_y(t) \approx 2\text{Re}(b(t))(u-v) \\ m_z(t) \approx 2\text{Im}(b(t))(u+v) \end{cases} \quad (2.29)$$

Le système d'équation est la représentation paramétrique d'une ellipse. La transformation rend circulaire l'orbite en pondérant m_y , m_z par les facteurs $(u-v)$ et $(u+v)$. Pour cela, il est possible d'introduire l'ellipticité g_t de la trajectoire définie par :

$$g_t = \frac{(-u-v) - (u-v)}{(u-v) + (-u-v)} = \frac{1 - \sqrt{1 - (\mathcal{B}/\mathcal{A})^2}}{\mathcal{B}/\mathcal{A}} \quad (2.30)$$

Avec le rapport \mathcal{B}/\mathcal{A} égal à :

$$\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}} = \frac{\omega_{Ay} - \omega_{Az}}{2\omega_{Ax} + 2\omega_H + \omega_{Ay} + \omega_{Az}} \quad (2.31)$$

L'ellipticité g_t ne dépend que de \mathcal{B}/\mathcal{A} . Elle est comprise entre -1 et 1 car \mathcal{B}/\mathcal{A} l'est aussi. Toute l'information elliptique de la trajectoire est contenue donc dans \mathcal{B}/\mathcal{A} .

Deux cas extrêmes se présentent suivant la valeur de \mathcal{B}/\mathcal{A} . Quand \mathcal{B}/\mathcal{A} tend vers 0 alors g_t vaut 0, l'orbite est proche d'un cercle. Dans ce cas, la transformation (b) est peu déformante car les facteurs $(u+v)$ et $(u-v)$ sont équivalents. Le système (2.29) se simplifie en :

$$\begin{cases} m_y(t) \approx 2 \sqrt{\frac{\mathcal{A}}{\omega_{FMR}}} \text{Re}(b(t)) \\ m_z(t) \approx 2 \sqrt{\frac{\mathcal{A}}{\omega_{FMR}}} \text{Im}(b(t)) \end{cases} \quad (2.32)$$

La transformation (b) tend vers une simple homothétie de facteur $\sqrt{(\mathcal{A}/\omega_{FMR})}$. Dans cette configuration de champ effectif extrême, la transformation (b) n'est pas utile. Les variables $m_y(t)$, $m_z(t)$ se lisent directement dans le plan complexe b à un facteur multiplicatif près. A titre d'exemple, une configuration d'oscillateur qui ne nécessite pas de transformation (b) est l'oscillateur perpendiculaire de [20].

A l'opposé quand $|\mathcal{B}/\mathcal{A}|$ tend vers 1, alors g_t aussi. Cela veut dire que l'orbite est très elliptique et la transformation (b) joue son rôle à son plein, Figure 2.2 (c). La transformation rectifie l'ellipse dans la variable a en un cercle dans la variable b , avec des facteurs $(u+v)$ et $(u-v)$ très inégaux. C'est le cas notamment de notre oscillateur planaire avec $\mathcal{B}/\mathcal{A} = -0.91^{11}$. La transformation (b) devient :

$$\begin{cases} m_y \approx 2 \sqrt{\frac{\omega_{FMR}}{2\mathcal{A}}} \mathcal{R}e(b) \\ m_z \approx 2 \sqrt{\frac{2\mathcal{A}}{\omega_{FMR}}} \mathfrak{I}m(b) \end{cases} \quad (2.33)$$

La transformation est très rectifiante. Les variables m_y , m_z ne se lisent donc plus aussi facilement à partir de b .

2.3.1.3. Représentation du plan complexe c

D'après la Figure 2.2 (d), l'orbite en variable c est simplement la dilatée de celle en variable b , la forme circulaire étant conservée. En reprenant (2.32) dans le cas $\mathcal{B}/\mathcal{A} \approx 0$ et $m_x \approx 1$, la correspondance entre les variables \mathbf{m} et c devient :

$$\begin{cases} m_y \approx 2\mathcal{R}e(c) \\ m_z \approx 2\mathfrak{I}m(c) \end{cases} \quad (2.34)$$

Ainsi pour les faibles ellipticités, la transformation (c) supprime le facteur $\sqrt{(\mathcal{A}/\omega_{FMR})}$ introduit par la transformation (b). Le lien entre les variables \mathbf{m} et c se fait exactement de la même façon qu'entre les variables \mathbf{m} et a . En ce sens, nous considérons que la transformation normalise la trajectoire.

2.3.2. Puissance quelconque

La section précédente a permis de comprendre l'effet de chaque transformation sur la géométrie de l'orbite. A présent, nous cherchons à établir une correspondance plus précise entre les deux représentations \mathbf{m} et c . Cela va permettre d'associer à la puissance des oscillations $p = |c|^2$ une signification précise en termes de géométrie d'orbite.

¹¹ Le signe – signifie que l'ellipse est allongée dans l'axe u_y ce qui est cohérent avec $g_t = -0,64 < 0$.

2.3.2.1. Liens entre les variables m et c

Il est possible d'obtenir la correspondance exacte entre la variable \mathbf{m} et les coordonnées (p, ϕ) de la variable $c = \sqrt{p}e^{j\phi}$. En introduisant la définition 2.3 dans la définition 2.2 puis le résultat dans la définition 2.1 alors l'expression de la variable \mathbf{m} devient :

$$\begin{cases} m_x = 1 + 2p \left(\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}} \cos(2\phi) - 1 \right) \\ m_y = \cos(\phi) \sqrt{2p \left(1 - p + \frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}} p \cos(2\phi) \right)} \left(\sqrt{1 + \mathcal{G} \left(\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}} \right)} - \text{Sign} \left(\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}} \right) \sqrt{1 + \mathcal{G} \left(\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}} \right)} \right) \\ m_z = -\sin(\phi) \sqrt{2p \left(1 - p + \frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}} p \cos(2\phi) \right)} \left(\sqrt{1 + \mathcal{G} \left(\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}} \right)} + \text{Sign} \left(\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}} \right) \sqrt{1 + \mathcal{G} \left(\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}} \right)} \right) \end{cases} \quad (2.35)$$

Avec la fonction $\mathcal{G}(x) = \sqrt{1 - x^2}$ et ϕ balayant $[0, 2\pi]$.

Le système d'équations (2.35) montre que les orbites en variable \mathbf{m} ne dépendent que du paramètre \mathcal{B}/\mathcal{A} et des coordonnées p, ϕ . Par conséquent, il est possible d'avoir une vue globale de l'ensemble des orbites.

A titre d'exemple, la Figure 2.3 montre des exemples d'orbites en variable \mathbf{m} pour différentes valeurs de p et de $\mathcal{B}/\mathcal{A} < 0$.

Si la puissance augmente alors l'angle de précession augmente aussi. Cependant, suivant la valeur de \mathcal{B}/\mathcal{A} les orbites ne s'ouvrent pas de la même façon. Par exemple, quand $\mathcal{B}/\mathcal{A} = 0$, les orbites sont circulaires avec m_x constant ($m_x = 1 - 2p$). Par contre quand $\mathcal{B}/\mathcal{A} \neq 0$, les orbites s'ouvrent de façon asymétrique : le long du plan $(\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_z)$ si $\mathcal{B}/\mathcal{A} > 0$ ou le long de $(\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y)$ si $\mathcal{B}/\mathcal{A} < 0$, Figure 2.3 (b,c,d). En particulier, la coordonnée m_x de l'aimantation varie pendant le parcours de l'orbite. Par exemple quand $\mathcal{B}/\mathcal{A} < 0$, les deux points d'orbites contenues dans le plan $(\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y)$ (appelés points « extrêmes x-y ») ont une coordonnée m_x minimale tandis que les points d'orbites contenues dans le plan $(\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_z)$ (appelé points « extrêmes x-z ») ont une coordonnée m_x maximale¹².

Aux fortes puissances, il arrive que les points extrêmes se rejoignent en $m_x = -1$ (extrêmes x-y si $\mathcal{B}/\mathcal{A} < 0$, extrêmes x-z si $\mathcal{B}/\mathcal{A} > 0$). Dans ce cas, les orbites dirigées par l'axe \mathbf{u}_x (orbite planaire ou mode IPP) s'orientent perpendiculairement au plan de la couche (orbite hors du plan ou mode OPP) avec une double dégénérescence (modes $\text{OPP}\pm$). Cette transition est connue sous le nom de transition IPP - OPP [109]. Cependant, elle n'existe pas pour tout \mathcal{B}/\mathcal{A} car dans le cas $\mathcal{B}/\mathcal{A} = 0$, les orbites de plus hautes énergies se confondent en un point, Figure 2.3 (a). Dans la suite, la puissance de l'orbite de transition est notée p_{opp} .

¹² La situation est inversée si $\mathcal{B}/\mathcal{A} > 0$.

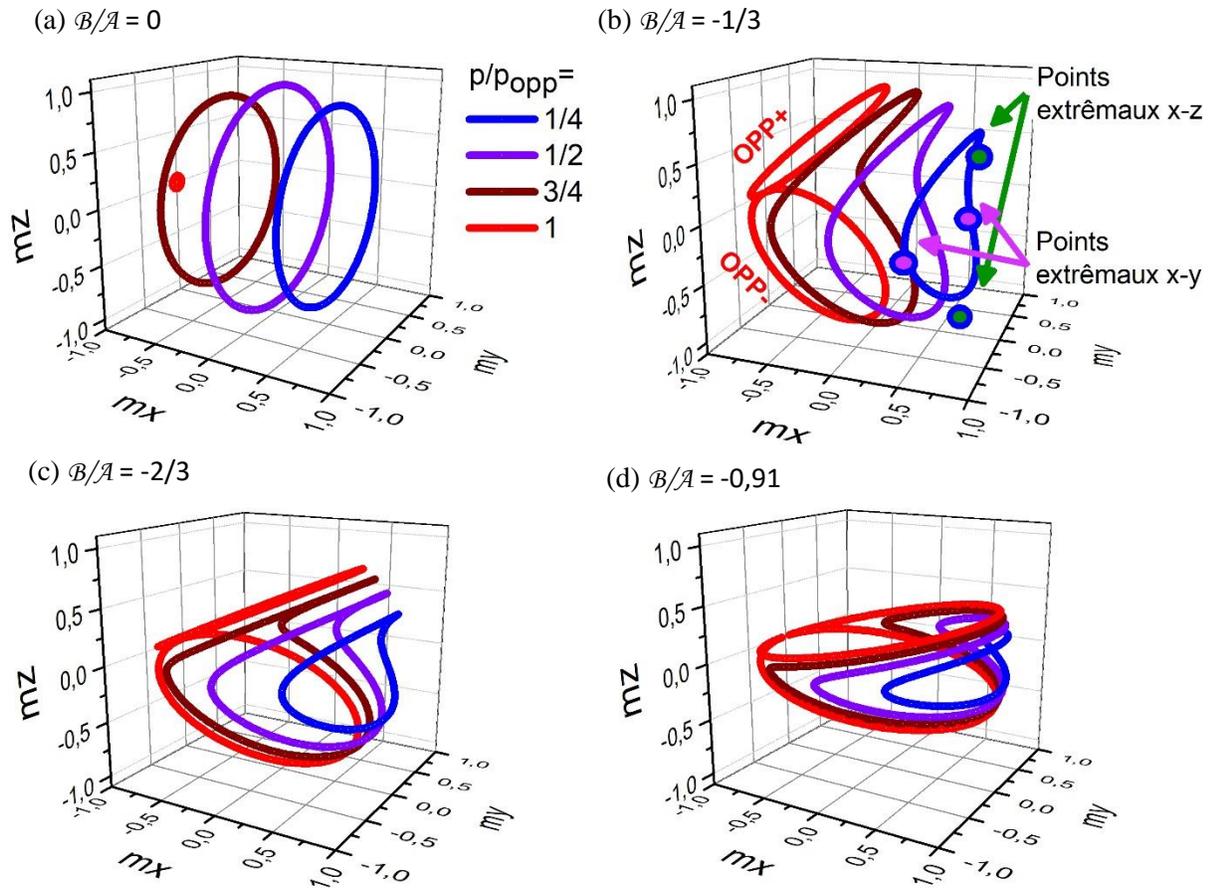


Figure 2.3. Représentation des orbites dans l'espace (u_x, u_y, u_z) pour différentes valeurs de B/A avec $p = p_{opp}/4, p_{opp}/2, 3 p_{opp}/4$ et $p_{opp}/4$. (a) $B/A = 0$, (b) $B/A = -1/3$ (c) $B/A = -2/3$ et (d) $B/A = -0,91$. En particulier lorsque $B/A < 0$, comme dans les cas b,c,d, l'orbite s'écrase dans le plan (u_x, u_y) avec u_y la direction du grand axe de l'ellipse. La puissance est normalisée selon p_{opp} , discutée ci-dessous.

2.3.2.2. Puissances caractéristiques

Nous allons donner une valeur précise de la puissance limite p_{opp} . Si $\mathcal{B}/\mathcal{A} < 0$, la puissance limite correspond à l'orbite dont les points extrémaux x-y vérifient $m_x = -1$, soit en utilisant (2.35) avec $\phi = 0 + k\pi$:

$$p_{opp} = \frac{1}{1 - \mathcal{B}/\mathcal{A}} \quad (2.36)$$

Par symétrie, la puissance limite p_{opp} vaut sur $-1 < \mathcal{B}/\mathcal{A} < 1$:

$$p_{opp} = \frac{1}{1 + |\mathcal{B}/\mathcal{A}|} \quad (2.37)$$

De la même façon, il est possible de trouver la puissance de l'orbite $p_{xy_{m_x=0}}$ ($p_{xz_{m_x=0}}$) dont les points extrémaux x-y (extrémaux x-z) croisent juste le plan $(\mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z)$. En faisant $m_x = 0$ et $\phi = 0 + k\pi$ dans (2.35), $p_{xy_{m_x=0}}$ vaut sur $-1 < \mathcal{B}/\mathcal{A} < 2/3$:

$$p_{xy_{m_x=0}} = \frac{1/2}{1 - \mathcal{B}/\mathcal{A}} \quad (2.38)$$

En particulier lorsque $\mathcal{B}/\mathcal{A} < 0$, $p_{xy_{m_x=0}}$ vaut exactement la moitié de p_{opp} , ce qui est pratique à retenir. Pour des raisons de symétrie, la puissance $p_{xz_{m_x=0}}$ s'obtient simplement en inversant le signe de \mathcal{B}/\mathcal{A} dans (2.38).

On résume les résultats dans la propriété suivante :

Propriété 2.1 : Les puissances caractéristiques $p_{xy_{m_x=0}}(\mathcal{B}/\mathcal{A})$ définies sur $\mathcal{B}/\mathcal{A} \in [-1, 2/3]$, $p_{xz_{m_x=0}}(\mathcal{B}/\mathcal{A})$ sur $\mathcal{B}/\mathcal{A} \in [-1, 2/3]$ et $p_{opp}(\mathcal{B}/\mathcal{A})$ sur $\mathcal{B}/\mathcal{A} \in [-1, 1]$ valent respectivement :

$$p_{xy_{m_x=0}} = \frac{1/2}{1 - \mathcal{B}/\mathcal{A}}, \quad p_{xz_{m_x=0}} = \frac{1/2}{1 + \mathcal{B}/\mathcal{A}}, \quad p_{opp} = \frac{1}{1 + |\mathcal{B}/\mathcal{A}|} \quad (2.39)$$

La Figure 2.4 illustre ces puissances.

La Figure 2.4 montre que p_{opp} varie avec \mathcal{B}/\mathcal{A} . Par exemple quand $\mathcal{B}/\mathcal{A} = 0$, p_{opp} est maximale avec $p_{opp} = 1$. Dans ce cas, l'orbite circulaire s'ouvre uniformément dans l'espace lorsque la puissance augmente, Figure 2.3 (a). Les deux puissances $p_{xy_{m_x=0}}$ et $p_{xz_{m_x=0}}$ sont les mêmes ($p_{xy_{m_x=0}} = p_{xz_{m_x=0}} = 0,5$) car en ce point toute l'orbite est contenue dans le plan $(\mathbf{u}_z, \mathbf{u}_z)$. A l'opposé, quand $|\mathcal{B}/\mathcal{A}| = 1$, p_{opp} est minimale avec $p_{opp} = 0,5$. L'orbite est très elliptique et ne s'agrandit que de façon comprimée dans un plan, Figure 2.3 (d). Dans ce cas, seule une des deux puissances $p_{xi_{m_x=0}}$ est atteignable. Dans l'intervalle $|\mathcal{B}/\mathcal{A}| < 2/3$, les deux puissances $p_{xi_{m_x=0}}$ sont observables. Pour cela, l'égalité $|\mathcal{B}/\mathcal{A}| = 2/3$ peut être servir de limite

pratique à partir de laquelle l'ellipticité de la trajectoire devient trop forte pour que la trajectoire s'étende dans un sens, Figure 2.3 (b).

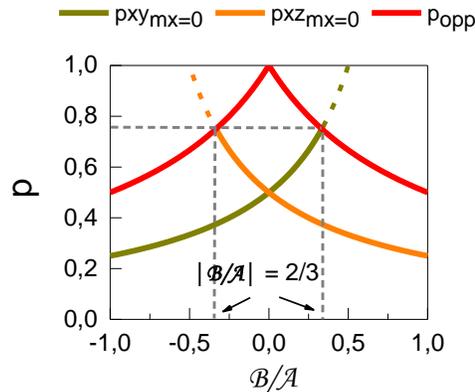


Figure 2.4. Représentation des puissances $p_{xy_{m_x=0}}$, $p_{xz_{m_x=0}}$ et p_{opp} en fonction de B/A . En particulier, la puissance $p_{xy_{m_x=0}}$ marque le croisement des points extrêmes x-y avec le plan $(\mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z)$, c'est-à-dire lorsque leurs coordonnées vérifient $m_x = 0$. La puissance p_{opp} marque la jonction des points extrêmes (x-y ou x-z suivant le signe de B/A) entre eux, c'est-à-dire lorsque leurs coordonnées vérifient $m_x = -1$.

○ *En résumé :*

Un lien a été trouvé entre la puissance p et la géométrie de l'orbite en variable \mathbf{m} . Cela a permis de définir plusieurs puissances caractéristiques $p_{xy_{m_x=0}}$, $p_{xz_{m_x=0}}$ et p_{opp} qui repèrent des orbites spéciales selon leurs formes. En particulier, la puissance p_{opp} peut servir à normaliser la variable p pour lui donner un sens plus concret. Enfin, ces puissances ont l'avantage de ne dépendre que de B/A ce qui leur donne une existence et une signification générales.

2.4. Modèle universel

L'équation exacte (2.27) en variable c est encore trop compliquée pour pouvoir être résolue, c'est pourquoi il faut la simplifier. La méthode consiste à ne garder que les termes résonants, c'est-à-dire ceux qui contribuent en moyenne à la dynamique de l'oscillateur, section 2.4.1. L'équation obtenue après simplification est appelée équation d'amplitude universelle. Elle fournit un système dynamique qui permet d'accéder aux états stationnaires, section 2.4.2 et transitoires, section 2.4.3. Le but de cette partie est de donner une vue générale des possibilités offertes par le modèle. Nous renvoyons à l'article [20] pour une présentation complète.

2.4.1. Termes résonants / non résonants

Le point de départ est l'équation dynamique exacte (2.27) exprimée en variable c . De façon générale, elle s'écrit :

$$\dot{c} = \sum_{l,m} k_{l,m} c^l \bar{c}^m \quad (2.40)$$

Avec : $(l,m) \in \mathbb{N}^2$, $k_{l,m} \in \mathbb{C}$ et pour rappel $c(t) = \sqrt{p} e^{j\phi(t)}$.

Au lieu de repérer les termes selon (l,m) , nous introduisons les indices $(r,s) \in (\mathbb{N}, \mathbb{Z})$ tels que :

$$\begin{cases} r = l + m - 1 \\ s = l - m - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} l = \frac{r + s + 2}{2} \\ m = \frac{r - s}{2} \end{cases} \quad (2.41)$$

L'indice r est lié à l'ordre de la puissance p du terme, tandis que s représente l'harmonique auquel il contribue.

Avec les nouveaux indices, l'équation (2.40) se réécrit en :

$$\dot{c} = \sum_{|s|} \mathcal{R}_{|s|}(p, \phi) c \quad (2.42)$$

Avec : $\mathcal{R}_{|s|}(p, \phi) = \left(\sum_{r \geq s} k_{\frac{r+s+2}{2}, \frac{r-s}{2}} p^{r/2} \right) e^{js\phi} + \left(\sum_{r \geq |s|-2} k_{\frac{r-s+2}{2}, \frac{r+s}{2}} p^{r/2} \right) e^{-js\phi}$

Le système dynamique associé, s'obtient d'une part en dérivant c :

$$\dot{c}(t) = \left(\frac{\dot{p}}{2\sqrt{p}} + j\sqrt{p}\dot{\phi} \right) e^{j\phi} \quad (2.43)$$

Puis, en égalant respectivement la partie réelle et imaginaire des équations (2.42) (2.43) :

$$\begin{cases} \dot{p} = 2 \sum_{|s|} \Re[\mathcal{R}_{|s|}(p, \phi)] p \\ \dot{\phi} = \sum_{|s|} \Im[\mathcal{R}_{|s|}(p, \phi)] \end{cases} \quad (2.44)$$

Le système (2.44) montre que les fonctions $\mathcal{R}_{|s|}(p, \phi)$ sont les contributions à l'harmonique s . En particulier à l'ordre $s = 0$, $\mathcal{R}_{|s|}$ ne dépend que de p tandis qu'aux ordres supérieurs $|s| > 0$, $\mathcal{R}_{|s|}$ est constituée de termes trigonométriques ($e^{js\phi}$, $e^{-js\phi}$) qui contribuent ensemble à la variation de la puissance et de la phase instantanée. Surtout à cause de ces termes, le système est hautement non linéaire et difficile à résoudre analytiquement.

Pour cela, une simplification bien admise [12] ou [49] consiste à moyenner les fonctions $\mathcal{R}_{|s|}(p, \phi)$ sur une période d'oscillation pour ne garder que les termes résonants, c'est-à-dire ceux qui contribuent en moyenne à la dynamique :

$$\langle \sum_{|s|} \mathcal{R}_{|s|}(p, \phi) c \rangle \approx \mathcal{R}_{|s|=0}(p) \tag{2.45}$$

Avec : l'opérateur « moyenne » $\langle f \rangle = \frac{1}{T_0} \int f dt$ et T_0 la période de l'oscillateur en régime entretenu.

Les termes résonants $\mathcal{R}_{|s|=0}(p)$ sont les plus intéressants car ils apportent une contribution constante à la dynamique. A l'opposé, les termes non résonants $\mathcal{R}_{|s|\neq 0}(p, s\phi)$ sont en moyenne nuls et sont négligés. La simplification n'est pas en soi évidente car, contrairement à une équation linéaire, des termes de moyennes nulles peuvent éventuellement donner une contribution moyenne à la solution. On suppose que cette contribution est négligeable.

L'équation complexe (2.42) devient alors :

$$\dot{c} \approx \mathcal{R}_{|s|=0}(p)c \tag{2.46}$$

Avec pour système associé :

$$\begin{cases} \dot{p} \approx 2\text{Re}[\mathcal{R}_{|s|=0}(p)]p \\ \dot{\phi} \approx \text{Im}[\mathcal{R}_{|s|=0}(p)] \end{cases} \tag{2.47}$$

L'équation simplifiée (2.46) et son système (2.47) décrit la dynamique en régime libre de l'oscillateur, avec une résolution temporelle limitée à une période d'oscillation T_0 . Ainsi, tous les détails subharmoniques sont négligés. Pour obtenir l'équation, il faut choisir parmi l'ensemble des termes des couples transformés ceux dont les indices vérifient $s = 0$, voir les expressions de l'annexe 2.6.4.

Le tableau 2.3 illustre la sélection des termes :

m↓	l→	0	1	2	3	4
0	r= -1 s = 1	0	0	1	-1	-3
1		2	1	2	0	-2
2		3	2	3	1	-1
3		4	3	4	2	0
4		5	4	5	3	1

Tableau 2.3 Valeurs des indices (r,s) des termes c^{lm} définis en (2.41). Les termes $s = 0$ sont marqués en rouge.

Les termes de même harmonique sont placés dans une diagonale de même couleur. Les termes résonants du régime libre sont ceux qui vérifient $s = 0$ et les termes non résonants $|s| \neq 0$. Bien que ces derniers ne jouent pas de rôle en régime libre, ils vont devenir importants lors de la synchronisation, voir chapitre III. Par ailleurs, le tableau montre que les termes d'harmoniques élevés sont associés à des ordres en puissance élevés. Autrement dit, la contribution à la dynamique est de plus en plus forte à mesure que la puissance augmente. C'est pourquoi cette simplification ne fonctionne vraiment qu'aux faibles puissances.

2.4.2. Etude des solutions stationnaires

L'équation simplifiée (2.46) n'est pas autre chose que l'équation d'amplitude universelle introduite en (1.11). Les premiers à avoir établi son lien avec l'équation LLGS sont [18] en se servant du formalisme ondes de spin. Depuis, l'équation constitue un outil simple et efficace pour modéliser la dynamique des oscillateurs spintroniques. On commence par l'introduire puis on résout ses états stationnaires.

2.4.2.1. Equation d'amplitude universelle

L'équation (2.46) est réécrite avec les notations bien établies de [20]¹³ :

Equation de Slavin et Tiberkevitch (ou équation d'amplitude universelle) :

$$\dot{c} = \mathcal{T}_p(c) + \mathcal{T}_G(c) + \mathcal{T}_{SL}(c) = (j\omega(p) - \Gamma_+(p) + \Gamma_-(p))c \quad (2.48)$$

Avec : \mathcal{T}_p le couple de précession, \mathcal{T}_G le couple d'amortissement, \mathcal{T}_{SL} le couple de Slonczewski, $\omega(p)$ la fréquence de l'oscillateur, Γ_+ le taux d'amortissement et Γ_- le taux de transfert de spin

Le système réel associé est :

$$\begin{cases} \dot{p} = -2p(\Gamma_+(p) - \Gamma_-(p)) \\ \dot{\phi} = \omega(p) \end{cases} \quad (2.49)$$

Où les fonctions $\omega(p)$, $\Gamma_-(p)$, $\Gamma_+(p)$ sont exprimées par les paramètres :

¹³ Le couple champ de spin \mathcal{T}_{FL} est ici négligé. Pour en tenir compte, deux solutions existent : la première est de le traiter comme perturbation à l'hamiltonien. Dans ce cas, \mathcal{T}_{FL} apparaîtra dans l'équation finale. La seconde est de l'inclure dans l'hamiltonien avant transformation. Dans ce cas, il fait partie de \mathcal{A} et \mathcal{B} qui dépendent alors de J_{dc} . Tout dépend de sa valeur relative comparée au champ effectif du système.

$$\begin{aligned}\Gamma_+ &= \Gamma_G(1 + Q_1 p + Q_2 p^2) \\ \Gamma_- &= \sigma J_{DC}(1 + R_1 p) \\ \omega(p) &= \omega_{FMR} + Np\end{aligned}\tag{2.50}$$

Dans le cas de notre oscillateur de référence, on a de façon explicite :

Notation	Expressions	
Γ_G	$\alpha \mathcal{A}$	(2.51)
Q_1	$-\left(\frac{\omega_{FMR}}{\mathcal{A}^2}\right) \left[3uv(-\omega_{Ay} + \omega_{Az}) + (u^2 + v^2) \left(3\omega_{Ax} + \frac{3}{2}(\omega_{Ay} + \omega_{Az}) + \omega_H \right) \right]$	(2.52)
Q_2	$\left(\frac{1}{\mathcal{A}}\right) \left(\frac{\omega_{FMR}}{\mathcal{A}}\right)^2 \left[3uv(u^2 + v^2)(\omega_{Az} - \omega_{Ay}) + (u^4 + v^4 + 4u^2v^2)(2\omega_{Ax} + \omega_{Ay} + \omega_{Az}) \right]$	(2.53)
σ	$-\omega_{As1} p_x$	(2.54)
R_1	-1	(2.55)
ω_{FMR}	$\sqrt{\mathcal{A}^2 - \mathcal{B}^2}$	(2.56)
N	$-\left(\frac{\omega_{FMR}}{\mathcal{A}}\right) \left[3uv(u^2 + v^2)(\omega_{Az} - \omega_{Ay}) + (u^4 + v^4 + 4u^2v^2)(2\omega_{Ax} + \omega_{Ay} + \omega_{Az}) \right]$	(2.57)

Tableau 2.4. Paramètres de l'équation de Slavin et Tiberkevitch. Notation tirées de [20]

Les expressions des paramètres s'obtiennent à partir des couples exacts $(\dot{c})_p, (\dot{c})_G, (\dot{c})_{SL}$. Par exemple, le paramètre ω_{FMR} est le coefficient imaginaire du terme d'indice $(r, s) = (0, 0)$ du couple $(\dot{c})_p$, c'est-à-dire c . Tandis que, le paramètre N , d'ordre 1 en p , est le coefficient imaginaire du terme d'indice $(r, s) = (1, 0)$ du même couple, soit $c^2 \bar{c}$.

Ici, l'appellation « couple » est à prendre avec prudence. Les couples $\mathcal{F}_p, \mathcal{F}_G, \mathcal{F}_{SL}$ ne sont, en quelque sorte, que les parties « résonantes » des couples transformés exacts $(\dot{c})_p, (\dot{c})_G, (\dot{c})_{SL}$, c'est-à-dire une version simplifiée. Par exemple, le couple de précession \mathcal{F}_p ne rassemble que les termes $s = 0$ du couple $(\dot{c})_p$. Leurs actions sont représentées à la Figure 2.5.

Les rôles de chacun apparaissent clairement dans la Figure 2.5. Tout comme en variable \mathbf{m} , le couple de transfert de spin \mathcal{F}_{SL} contrebalance le couple d'amortissement \mathcal{F}_G . Ces deux couples sont tous les deux de direction radiale mais de sens contraire. Lorsqu'ils s'équilibrent, ils permettent au système d'accéder à des états stationnaires auto-oscillants, caractérisés par : - $\omega(p)$, une fréquence déterminée par le couple orthoradial \mathcal{F}_p . - p , une puissance déterminée par $\mathcal{F}_{SL}, \mathcal{F}_G$ et qui dépend en général du courant injecté J_{dc} .

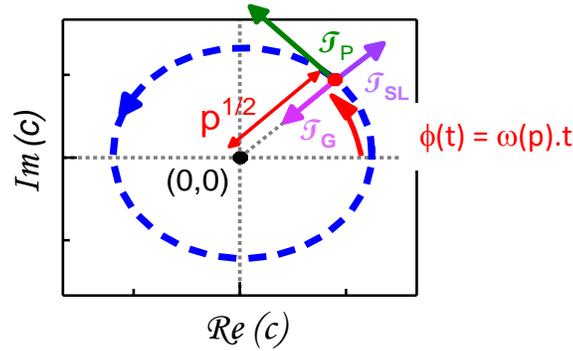


Figure 2.5. Représentation des couples $\mathcal{J}_P, \mathcal{J}_G, \mathcal{J}_{SL}$ sur le système, dans le plan complexe c . Le cercle limite des auto-oscillations est tracé en bleu.

Ces quantités sont calculées à la section suivante.

Dans la suite, on utilisera plutôt les fonctions polaires $\omega(p), \Gamma_+(p), \Gamma_-(p)$ à la place des couples car elles interviennent plus directement dans la résolution du système.

2.4.2.2. Etats stationnaires

On cherche à calculer la puissance p_0 et la fréquence ω_0 des états stationnaires de (2.49). Pour cela, on reprend l'équation de puissance (2.49) et on exprime la stationnarité par $\dot{p}_0 = 0$, soit :

$$\Gamma_+(p_0) - \Gamma_-(p_0) = 0 \quad (2.58)$$

D'abord lorsque $p_0 \rightarrow 0$, l'équation (2.58) fournit la densité de courant critique. C'est la densité de courant juste nécessaire pour compenser l'amortissement :

$$J_{cr} = \frac{\Gamma_G}{\sigma} \quad (2.59)$$

En utilisant les expressions (2.50) de $\Gamma_+(p), \Gamma_-(p)$ au premier ordre en p , la puissance stationnaire vaut :

$$p_0 = \frac{\zeta - 1}{Q_1 - \zeta R_1} \Leftrightarrow \zeta = \frac{1 + p_0 Q_1}{1 + p_0 R_1} \quad (2.60)$$

Avec la super-criticité $\zeta = J_{DC}/J_{cr}$.

Dans la suite, on utilisera aussi la puissance normalisée p_{norm} telle que $p_{norm} = p/p_{opp}$. De cette façon, p_{norm} varie simplement entre 0 et 1.

En reportant (2.60) dans l'équation de phase (2.49), la fréquence du système devient :

$$\omega_0 = \omega_{FMR} + Np_0 \quad (2.61)$$

Pour que le système devienne auto-oscillant, il faut d'une part que la densité de courant soit assez forte pour vaincre l'amortissement ($J_{dc} > J_{cr}$) et d'autre part que p_0 soit un point d'équilibre stable ($\Gamma_p > 0$ c.à.d $Q_1 > R_1 = -1$). L'état stationnaire est alors un cercle limite confondu avec l'orbite à puissance constante p_0 (2.60), parcouru à la fréquence ω_0 (2.61).

La Figure 2.6 montre l'évolution de $f_0 = \omega_0/2\pi$, Γ_+ , Γ_- et ζ en fonction de p_0 .

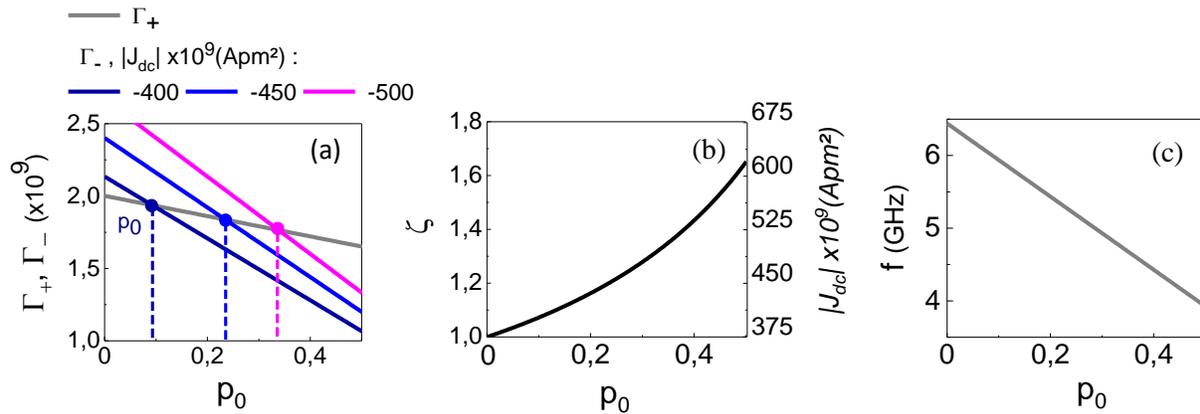


Figure 2.6. Solutions stationnaires de l'oscillateur planaire. Paramètres du modèle : $J_{cr} = -375 \times 10^9$ A/m², $Q_1 = -0,34$, $R_1 = -1$, $N = -5,0303$ GHz, $f_0 = 6,441$ GHz. (a) Fonctions Γ_+ , Γ_- selon la puissance p_0 ($\beta/\mathcal{A} = -0,91$, $p_{opp} = 0,52$). (b) Solution $\zeta(p_0)$ (2.60) et (c) Solution $f(p_0)$ (2.61).

La figure (a) illustre l'équilibre que doit vérifier Γ_- avec Γ_+ pour déterminer la valeur de la puissance stationnaire. Lorsque la densité de courant J_{dc} augmente, une plus forte puissance d'équilibre, vérifiant la condition $\Gamma_+ = \Gamma_-$, est trouvée par le système. Cela n'est possible qu'à cause de la non linéarité de l'amortissement ($Q_1 \neq 0$). Ensuite, la figure (b) montre l'allure de $\zeta(p_0)$ contrôlée uniquement par Q_1 (car $R_1 = -1$). Enfin, la figure (c) montre la diminution de la fréquence lorsque la puissance augmente. La non linéarité est non négative (appelé aussi « redshift »). Ce comportement est spécifique des oscillateurs planaires dont l'aimantation oscille dans le plan de la couche.

Le modèle universel prévoit donc que les cercles limites de l'oscillateur ne peuvent être que des orbites de puissances constantes. Cette simplification majeure, qui repose sur la suppression des termes non résonants, est la clé du modèle. En réalité, ces derniers termes contribuent aussi en moyenne à la dynamique du système à mesure que la puissance augmente et il faut s'attendre alors à ce que le modèle soit plus juste aux faibles puissances et moins juste aux fortes puissances.

2.4.3. Etude des solutions transitoires

Le système dynamique (2.49) permet aussi de connaître la réponse transitoire de l'oscillateur au voisinage d'un état stationnaire de puissance p_0 . On commence par dériver le système linéarisé associé, puis on décrit brièvement des cas typiques de réponses.

2.4.3.1. Système linéarisé

Soit la variation infinitésimale δp telle que : $p = p_0 + \delta p$, l'équation de puissance devient alors¹⁴ :

$$(p_0 + \delta p) = -2(\Gamma_+(p_0 + \delta p) - \Gamma_-(p_0 + \delta p))(p_0 + \delta p) \quad (2.62)$$

C'est-à-dire :

$$(p_0 + \delta p) \approx -2(\Gamma_+(p_0) - \Gamma_-(p_0))p_0 - 2(G_+(p_0) - G_-(p_0))p_0\delta p - 2(\Gamma_+(p_0) - \Gamma_-(p_0))\delta p \quad (2.63)$$

Avec : $G_+(p_0) = \partial_p \Gamma_+(p_0)$ et $G_-(p_0) = \partial_p \Gamma_-(p_0)$

Or p_0 est la puissance stationnaire du système, donc $\dot{p}_0 = 0$ et $\Gamma_+(p_0) - \Gamma_-(p_0) = 0$ à cause (2.49). Donc l'équation se simplifie en :

$$\delta p \approx -2 \Gamma_p \delta p \quad (2.64)$$

Avec Γ_p (rad/s) l'amortissement dynamique donné par :

$$\Gamma_p = (G_+(p_0) - G_-(p_0))p_0 \quad (2.65)$$

Une procédure similaire pour l'équation de phase donne au final :

Système linéarisé : Le système (2.49) se linéarise, au voisinage de p_0 , en :

$$\begin{cases} \delta p = -2\Gamma_p \delta p \\ \delta \dot{\phi} = N\delta p \end{cases} \quad (2.66)$$

Avec : δp la variation infinitésimale de puissance autour de p_0 et Γ_p l'amortissement dynamique (2.65).

¹⁴ Le système dynamique $\dot{x} = f(x)$ se linéarise autour du point x_0 en $\delta \dot{x} \approx f(x_0) + \partial_x f(x_0)\delta x$ avec δx une variation infinitésimale [48]. Le point x_0 est un point d'équilibre tel que : $f(x_0) = 0$. On procède ici de la même façon avec $f(p) = -2(\Gamma_+(p) - \Gamma_-(p))p$.

Le système linéarisé permet de comprendre les différentes réponses transitoires de l'oscillateur, lorsqu'il est soumis à toutes sortes d'excitations [20]. La section suivante aborde quelques cas de réponses.

2.4.3.2. Etats transitoires

On commence d'abord par les réponses du système aux impulsions de puissance et de phase. Elles sont fondamentales car elles permettent d'intuire celles provoquées par d'autres signaux plus compliqués.

○ Réponse impulsionnelle de la puissance :

Soit le système (2.66) soumis à l'impulsion de puissance $\delta p_0 \delta(t)$ tel que $\delta p_0 \ll p_0$ et $\delta(t)$ la fonction de Dirac :

$$\begin{cases} \dot{\delta p}(t) = -2\Gamma_p \delta p(t) + \delta p_0 \delta(t) \\ \dot{\delta \phi}(t) = N \delta p(t) \end{cases} \quad (2.67)$$

Le système étant du 1^{er} ordre, il se résout simplement en :

$$\begin{cases} \delta p(t) = \delta p_0 e^{-2\Gamma_p t} \\ \delta \phi(t) = -\frac{\nu \delta p_0}{2 p_0} (1 - e^{-2\Gamma_p t}) \end{cases} \quad (2.68)$$

Où ν est le facteur de non linéarité dynamique donné par :

$$\nu = \frac{N p_0}{\Gamma_p} \quad (2.69)$$

La solution (2.68) montre que toute impulsion de puissance, causée par exemple par une impulsion de courant via le couple de Slonczewski, est amortie exponentiellement en $\delta p \sim e^{-2t/t_p}$ avec un temps de relaxation¹⁵ de $t_p = 1/2\Gamma_p$. Cette solution $\delta p(t)$ est typique de celle d'un filtre passe-bas de 1^{er} ordre, dont la fréquence de coupure f_p (Hz) vaut :

$$f_p = \frac{\Gamma_p}{\pi} \quad (2.70)$$

A cause de la non linéarité, la phase est aussi perturbée par l'impulsion. Elle relaxe avec le même temps caractéristique t_p mais à partir d'une amplitude proportionnelle à ν . En particulier, quand $t \rightarrow +\infty$ le saut de phase global vaut $\delta \phi_\infty = -\nu/2p_0$. Cela peut être utilisé par exemple pour mesurer le ν des oscillateurs

¹⁵ En particulier, t_p est toujours positif comme Γ_p parce que le point d'équilibre p_0 est stable. Avec la super-criticité, l'amortissement dynamique peut se réécrire en $\Gamma_p = \Gamma_G(\zeta - 1)$

spintroniques en simulation numérique. Ainsi, le paramètre ν contrôle d'une certaine façon le déphasage total parcouru par $\phi(t)$ pendant la relaxation du système.

- *Réponse impulsionnelle sur la phase :*

Une autre possibilité est que le système soit soumis à l'impulsion de phase $\delta\phi_0\delta(t)$ telle que :

$$\begin{cases} \dot{\delta p}(t) = -2\Gamma_p\delta p(t) \\ \delta\dot{\phi}(t) = N\delta p(t) + \delta\phi_0\delta(t) \end{cases} \quad (2.71)$$

Ce qui donne la réponse :

$$\begin{cases} \delta p(t) = 0 \\ \delta\phi(t) = \delta\phi_0 U(t) \end{cases} \quad (2.72)$$

Avec $U(t)$ l'échelon d'Heaviside valant 1 si $t > 0$ et 0 sinon.

A l'inverse, la phase réagit ici instantanément à la perturbation de phase. Cela est possible d'un point de vue physique car d'une part l'équation de Landau-Lifshitz n'attribue pas de masse à l'aimantation (système différentiel de premier ordre sur l'aimantation) et d'autre part n'oppose aucun frottement dans la direction de la précession (ou la direction ortho-radiale ϕ). En pratique, une impulsion de champ dans l'axe¹⁶ \mathbf{u}_x peut réaliser approximativement une telle impulsion si $\alpha \ll 1$, de sorte que seul le couple de précession soit actionné. Ainsi, le comportement contraste avec celui de la réponse précédente qui s'amortit avec un certain temps.

Ces réponses impulsionnelles permettent de mieux comprendre la réaction du système à d'autres excitations comme le bruit blanc ou la sinusoïde :

- *Régime stochastique / réponse à un bruit blanc :*

Le bruit blanc permet de modéliser l'influence de la température sur le système, voir la théorie du régime stochastique « KTS » [61], et les expériences sur les oscillateurs uniformes de [110], [59]. Lorsque la température est présente, le système subit un bruit blanc thermique agissant dans toutes les directions, en particulier sur la puissance (ou l'amplitude). A cause de la non linéarité, tout le bruit d'amplitude est converti en bruit de phase ce qui augmente sensiblement le bruit total de l'oscillateur. En particulier dans la bande de fréquence $0 < f < f_p$, le bruit d'amplitude contribue fortement au bruit de phase mais pas aux fréquences supérieures $f > f_p$ parce qu'il est atténué à cause de l'effet « passe - bas ». Cela explique donc les formes des bruits d'amplitude et de phase de l'oscillateur, vues à la Figure 1.13.

¹⁶ Plus généralement, cela marche pour toute impulsion agissant via le couple $\mathbf{m} \times \mathbf{u}_x$. C'est le seul couple dont la transformé en c ne contribue que sur l'équation de phase, voir couples transformés à l'annexe II.5.4.

- Régime modulé / réponse à un signal de type $\cos(2\pi f_m t)$ avec $f_m \ll f_0(p)$:

Le régime modulé se produit lorsque l'oscillateur subit un signal externe de fréquence f_m très inférieur à sa fréquence libre $f_0(p)$, voir [66]. Lorsque le signal modulant agit sur la puissance p , l'oscillateur est modulé en amplitude et en fréquence, voir le cas d'un courant [111]. Dans ce cas, le mécanisme de relaxation pose un problème car il limite le débit maximal de la modulation. En effet pour tous les signaux modulants tels que $f_p < f_m < f_0(p)$, le mécanisme atténue la modulation de puissance à cause de l'effet passe-bas, ce qui atténue en retour la modulation de fréquence. Cependant, il est possible de court-circuiter ce mécanisme si le signal est directement injecté sur l'équation de phase, par exemple en modulant l'oscillateur par un champ RF aligné dans l'axe \mathbf{u}_x [112]. Dans ce cas le signal module instantanément la phase, comme le montre la réponse à une impulsion de phase (2.72). Cela permet d'augmenter la bande de modulation d'un oscillateur spintronique jusqu'à son maximum théorique, c'est-à-dire la fréquence $f_0(p)$ elle-même.

- Régime synchronisé / réponse à un signal de type $\cos(2\pi f_m t)$ avec $f_m \approx f_0(p)$:

Enfin, il y a le régime synchronisé, qui est l'objet de ce manuscrit. Cela se produit lorsque la fréquence du signal externe est, cette fois, voisine de la fréquence libre de l'oscillateur ou l'un de ses harmoniques. Dans ce cas, le système subit une sorte de résonance paramétrique qui génère de nouveaux états stationnaires.

Ces différents exemples montrent comment le modèle peut expliquer simplement le comportement transitoire de l'oscillateur, avec seulement deux paramètres : Γ_p et v .

2.5. Conclusion

Le formalisme onde spin a permis de transformer l'équation LLGS en un jeu de variables complexes. La méthode consiste à transformer, séparément, les couples conservatifs $(\dot{\mathbf{m}})_P$, $(\dot{\mathbf{m}})_{FL}$ et dissipatifs $(\dot{\mathbf{m}})_G$, $(\dot{\mathbf{m}})_{SL}$, pour obtenir leurs équivalents en variable a , b puis c . Le résultat de la méthode est l'équation dynamique (2.27), transformée exacte de l'équation LLGS en variable c . Cependant, elle reste encore trop compliquée pour être résolue « à la main ». En simplifiant de façon adéquate, nous obtenons l'équation d'amplitude universelle (2.48). Elle décrit le comportement du système moyenné sur une période d'oscillation et dans la limite des faibles puissances d'oscillation p . L'avantage majeur du modèle est de décrire simplement les différents régimes de l'oscillateur (régime stationnaire, transitoire, stochastique, synchronisé ...), en contrepartie d'une forte simplification de la description de la dynamique.

Nous avons aussi étudié les effets des transformations sur les orbites. Par exemple, le but de la transformation (b) est de rendre circulaire l'orbite de précession dans le plan complexe. Cela permet de les paramétrer simplement par p . La rectification géométrique se fait uniquement par le rapport B/A . Nous avons obtenu aussi des valeurs p précises pour certaines orbites remarquables, comme l'orbite de

transition IPP-OPP associée à la valeur p_{opp} . En particulier, connaître la puissance de cette orbite limite est utile pour normaliser adéquatement p .

Enfin, le chapitre a permis de se familiariser avec le modèle universel et de présenter ses principaux résultats. Les concepts introduits dans ce chapitre seront repris dans les chapitres suivants pour étudier en détail le régime synchronisé.

2.6. Annexes

2.6.1. Compléments sur la transformation (a)

Le but est d'établir la transformation (a). Nous considérons uniquement la partie conservative de l'équation Landau-Lifshitz,(2.10) :

$$\dot{\mathbf{m}} = -\gamma'_0 \nabla_{\mathbf{m}} W \times \mathbf{m} \quad (2.73)$$

L'équation décrit la précession de l'aimantation \mathbf{m} dans le champ effectif \mathbf{H}_{eff} et d'énergie libre W . La valeur \mathbf{m} est constante telle que $|\mathbf{m}| = m_0$ avec $m_0^2 = m_\xi^2 + m_\eta^2$. A cause de cette contrainte, l'équation n'a en réalité que 2 degrés de liberté. Ainsi, l'énergie libre peut se mettre sous la forme $W(m_\xi, m_\eta)$.

Nous cherchons à rendre l'équation (2.73) canonique avec une transformation complexe des coordonnées¹⁷ :

$$\begin{cases} \dot{a} = -j\partial_{\bar{a}}\mathcal{H} \\ \dot{\bar{a}} = j\partial_a\mathcal{H} \end{cases} \quad (2.74)$$

Soit l'axe d'équilibre de l'aimantation \mathbf{u}_ζ , on introduit les variables suivantes :

$$\begin{cases} m_+ = m_\xi - jm_\eta \\ m_- = m_\xi + jm_\eta \end{cases} \quad (2.75)$$

En utilisant (2.73) et $\partial_{m_\zeta}(W) = 0$, il vient :

$$j \dot{m}_+ = j(\dot{m}_\xi - j\dot{m}_\eta) = 2\gamma'_0 m_\zeta \partial_{m_-} W \quad (2.76)$$

Au voisinage de l'équilibre, la composante m_ζ tend vers m_0 . En introduisant l'hamiltonien du système $\mathcal{H} = \gamma'_0 W/2m_0$, l'équation (2.76) devient :

$$\dot{m}_+ = -4m_0^2 j \partial_{m_-} \mathcal{H}(m_+, m_-) \quad (2.77)$$

¹⁷ Dans (2.13), le rôle de a et \bar{a} est échangé pour que la rotation du système se produise dans le sens trigonométrique des plans complexes a, b, c , d'où la différence de signe $-$. Cela ne change pas le principe de recherche de la transformation.

Les variables (a, \bar{a}) sont donc :

$$\begin{cases} m_+ = \frac{a}{2m_0} \\ m_- = \frac{\bar{a}}{2m_0} \end{cases} \quad (2.78)$$

Et l'équation (2.77) devient comme souhaité :

$$\dot{a} = -j\partial_{\bar{a}}\mathcal{H} \quad (2.79)$$

De façon similaire :

$$\dot{\bar{a}} = j\partial_a\mathcal{H} \quad (2.80)$$

La transformation (2.78) est une première possibilité. Elle rend canonique l'équation (2.73) mais elle est valide seulement pour des faibles angles de précession et donc ne peut rendre compte que de phénomènes linéaires. Pour tenir compte des effets non linéaires de l'angle de précession, il faudrait trouver une transformation plus raffinée. Par exemple, cela permettrait de mieux décrire la dynamique d'aimantation aux forts angles de précession.

Les conditions imposées à la nouvelle transformation sont : 1) de dépendre de la composante m_ζ autrement dit de $a\bar{a}$ car $m_\zeta \sim a\bar{a}$ et 2) de tendre vers la transformation linéaire (2.78) quand $a\bar{a}$ tend vers 0. Par conséquent, il faut rechercher une transformation de type :

$$\begin{cases} m_+ = \frac{af(a\bar{a})}{2m_0} \\ m_- = \frac{\bar{a}f(a\bar{a})}{2m_0} \end{cases} \quad (2.81)$$

La fonction f étant l'inconnue à trouver telle que $\lim_{a\bar{a} \rightarrow 0} f(a\bar{a}) = 1$.

La transformation permettra de passer du système :

$$\begin{cases} \dot{m}_+ = -4m_0m_\zeta j\partial_{m_-}\mathcal{H} \\ \dot{m}_- = +4m_0m_\zeta j\partial_{m_+}\mathcal{H} \end{cases} \quad (2.82)$$

au système canonique (2.74).

La recherche porte donc sur la fonction f . D'une part, \dot{m}_+ s'exprime par :

$$\dot{m}_+ = \partial_a m_+ \partial_t a + \partial_{\bar{a}} m_+ \partial_t \bar{a} \quad (2.83)$$

Puis en utilisant la contrainte (2.74), il vient :

$$\dot{m}_+ = -j\partial_a m_+ \partial_{\bar{a}} \mathcal{H} + j\partial_{\bar{a}} m_+ \partial_a \mathcal{H} \quad (2.84)$$

Autrement dit :

$$\begin{aligned} \dot{m}_+ &= -j\partial_a m_+ (\partial_{m_+} \mathcal{H} \partial_{\bar{a}} m_+ + \partial_{m_-} \mathcal{H} \partial_{\bar{a}} m_-) + j\partial_{\bar{a}} m_+ (\partial_{m_+} \mathcal{H} \partial_a m_+ + \partial_{m_-} \mathcal{H} \partial_a m_-) \\ \dot{m}_+ &= -j\partial_{m_-} \mathcal{H} (\partial_{\bar{a}} m_- \partial_a m_+ - \partial_a m_- \partial_{\bar{a}} m_+) + j\partial_{m_+} \mathcal{H} (\partial_{\bar{a}} m_+ \partial_a m_+ - \partial_{\bar{a}} m_+ \partial_a m_+) \end{aligned} \quad (2.85)$$

Et enfin le résultat bien connu en mécanique classique [113] :

$$\dot{m}_+ = -j\{m_+, m_-\}_{a,\bar{a}} \partial_{m_-} \mathcal{H} \quad (2.86)$$

Où l'opérateur $\{x, y\}_{a,\bar{a}}$ est le crochet de poisson de x avec y dans les variables (a, \bar{a}) . D'autre part \dot{m}_+ doit satisfaire (2.82), ce qui conduit à :

$$\dot{m}_+ = -j\{m_+, m_-\}_{a,\bar{a}} \partial_{m_-} \mathcal{H} = -4m_0 m_z j \partial_{m_-} \mathcal{H} \quad (2.87)$$

Or les deux composantes de l'équation doivent être égales. Pour cela la fonction $f(x)$, avec $x = a\bar{a}$, doit vérifier l'équation différentielle :

$$m_0 (f^2(x) + 2xf(x)\partial_x f(x)) = \sqrt{m_0^2 - 4m_0^2 x f^2(x)} \quad (2.88)$$

Où l'identité : $m_z^2 = m_0^2 - 4m_0^2 a\bar{a} f^2(a\bar{a})$ a été utilisée.

A présent, il faut résoudre l'équation (2.88). Le membre de gauche se réécrit plus simplement en :

$$m_0 \partial_x (x f^2(x)) = \sqrt{m_0^2 - 4m_0^2 x f^2(x)} \quad (2.89)$$

Puis, avec le changement de variable $u(x) = 1 - 4x f^2(x) \Leftrightarrow x f^2(x) = \frac{1-u(x)}{4}$, il vient :

$$\frac{1}{2} u(x)^{-\frac{1}{2}} \partial_x (u(x)) = -2u(x) \quad (2.90)$$

Cette équation de Bernoulli se résout en :

$$u(x) = (-2x + K)^2 \quad (2.91)$$

Avec K une constante à déterminer.

Par conséquent, $f(x)$ devient :

$$f(x) = \sqrt{\frac{1}{4x}(1 - K^2 + 4xK - 4x^2)} \quad (2.92)$$

En choisissant $K = 1$, $f(x)$ prend la forme simple suivante :

$$f(x) = \sqrt{1 - x} \quad (2.93)$$

L'expression (2.93) vérifie bien la condition $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$. En conséquence, la transformation qui rend canonique l'équation (2.73) est :

$$\begin{cases} a = \frac{m_\xi - jm_\eta}{\sqrt{2m_0(m_0 + m_\zeta)}} \\ \bar{a} = \frac{m_y + jm_z}{\sqrt{2m_0(m_0 + m_\zeta)}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_\zeta = m_0(1 - 2a\bar{a}) \\ m_\xi = m_0(a + \bar{a})\sqrt{1 - a\bar{a}} \\ m_\eta = m_0j(a - \bar{a})\sqrt{1 - a\bar{a}} \end{cases} \quad (2.94)$$

Cette transformation n'est pas l'unique transformation canonique possible. D'autres peuvent être utilisées avec profit dans différents contextes, voir [52]. Pour retrouver la définition 2.1, il faut faire $m_0 = 1$ et échanger le rôle de a avec \bar{a} dans la transformation finale (2.94).

2.6.2. Compléments sur la transformation (b)

2.6.2.1. Dérivation

Supposons que l'hamiltonien de l'oscillateur en variable (a, \bar{a}) soit de la forme générale suivante :

$$\mathcal{H}(a, \bar{a}) = \mathcal{A}a\bar{a} + \frac{\mathcal{B}}{2}(a^2 + \bar{a}^2) + \sigma(|a|^2) \quad (2.95)$$

Le problème posé est de trouver une nouvelle transformation dans laquelle l'hamiltonien $\mathcal{H}(b, \bar{b})$ ne dépend que du terme $b\bar{b}$ à l'ordre 2 :

$$\mathcal{H}(b, \bar{b}) = \omega b\bar{b} + \sigma(|b|^2) = \begin{pmatrix} \bar{b} & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega/2 & 0 \\ 0 & \omega/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ \bar{b} \end{pmatrix} + \sigma(|b|^2) \quad (2.96)$$

Avec $\omega > 0$.

La transformation cherchée est canonique linéaire de type :

$$\begin{cases} b = ua + v\bar{a} \\ \bar{b} = \bar{v}a + \bar{u}\bar{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \bar{u}b - v\bar{b} \\ \bar{a} = -\bar{v}b + \bar{u}\bar{b} \end{cases} \quad (2.97)$$

Où les paramètres u et v sont à trouver.

Comme la transformation est canonique, il existe une première contrainte sur u, v car le crochet de Poisson doit vérifier :

$$\{b, \bar{b}\}_{a, \bar{a}} = |u|^2 - |v|^2 = 1 \quad (2.98)$$

Il est possible d'avoir une autre contrainte sur u, v en observant que :

$$\omega b = \partial_{\bar{b}} \mathcal{H} = \partial_a \mathcal{H} \partial_{\bar{b}} a + \partial_{\bar{a}} \mathcal{H} \partial_{\bar{b}} \bar{a} \quad (2.99)$$

Soit en utilisant (2.95) :

$$\omega u a + \omega v \bar{a} = (-\mathcal{B}v + \mathcal{A}u)a + (-\mathcal{A}v + u\mathcal{B})\bar{a} \quad (2.100)$$

Mais comme a, \bar{a} sont indépendants, la recherche se résume alors à résolution de :

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A} & -\mathcal{B} \\ \mathcal{B} & -\mathcal{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (2.101)$$

D'abord, les valeurs propres du système se trouvent facilement : $\omega_{\pm} = \pm \sqrt{\mathcal{A}^2 - \mathcal{B}^2}$

Les vecteurs propres de ω_+ doivent vérifier :

$$\begin{cases} (\mathcal{A} - \omega)u - \mathcal{B}v = 0 \\ \mathcal{B}u - (\mathcal{A} + \omega)v = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{(\mathcal{A} - \omega)(\mathcal{A} + \omega)}{\mathcal{B}} - \mathcal{B} \right) v = 0 \\ u = \frac{(\mathcal{A} + \omega)}{\mathcal{B}} v \end{cases} \quad (2.102)$$

En procédant de même pour ω_- , les sous espaces propres associés sont :

$$E_{\omega_+} = \text{vec} \left\{ \begin{pmatrix} \frac{(\mathcal{A} + \omega)}{\mathcal{B}} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad E_{\omega_-} = \text{vec} \left\{ \begin{pmatrix} \frac{(\mathcal{A} - \omega)}{\mathcal{B}} \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad (2.103)$$

En réalité, la fréquence ne peut être que positive de sorte que seuls les coefficients u, v associés à ω_+ sont considérés (dans la suite $\omega_+ = \omega$). Par ailleurs, les coefficients doivent aussi vérifier la contrainte (2.98). D'abord en utilisant E_{ω_+} , u s'exprime par :

$$u = \frac{(\mathcal{A} + \omega)}{\mathcal{B}} v = \frac{(\mathcal{A} + \omega)}{\text{sign}(\mathcal{B}) \sqrt{(\mathcal{A} + \omega)(\mathcal{A} - \omega)}} v = \frac{\sqrt{\mathcal{A} + \omega}}{\text{sign}(\mathcal{B}) \sqrt{\mathcal{A} - \omega}} v \quad (2.104)$$

Puis en utilisant (2.98) et (2.102), v est égale à :

$$u^2 - v^2 = 1 \Rightarrow v^2 \left(\frac{2\omega}{\mathcal{A} - \omega} \right) = 1 \Rightarrow v = \pm \sqrt{\frac{\mathcal{A} - \omega}{2\omega}} \quad (2.105)$$

Et donc u vaut :

$$u = \pm \text{sign}(\mathcal{B}) \sqrt{\frac{\mathcal{A} + \omega}{2\omega}} \quad (2.106)$$

En particulier comme $\mathcal{A} \geq \omega$, les coefficients u , v existent bien. Par ailleurs, il faut toujours qu'ils soient différents entre eux de $\text{sign}(\mathcal{B})$. La convention choisie ici est :

$$\omega = \sqrt{\mathcal{A}^2 - \mathcal{B}^2} \text{ et } \begin{cases} u = \sqrt{\frac{\mathcal{A} + \omega}{2\omega}} \\ v = \text{sign}(\mathcal{B}) \sqrt{\frac{\mathcal{A} - \omega}{2\omega}} \end{cases} \quad (2.107)$$

Avec $\omega > 0$.

Ainsi, tous les paramètres de la transformation sont déterminés.

2.6.2.2. Identités entre $u, v, \omega_{\text{FMR}}, \mathcal{B}/\mathcal{A}$

On donne ci-dessous quelques identités remarquables entre $u, v, \omega_{\text{FMR}}$ en fonction de du rapport \mathcal{B}/\mathcal{A} . Les expressions seront utilisées au chapitre 4.

$$u = \sqrt{\frac{1 + \mathcal{G}(\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}})}{2\mathcal{G}(\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}})}} , \quad v = \text{Sign}(\mathcal{B}) \sqrt{\frac{1 - \mathcal{G}(\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}})}{2\mathcal{G}(\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}})}}$$

$$\frac{\omega}{\mathcal{A}}(u^2 + v^2) = 1 , \quad u^2 - v^2 = 1 \text{ (canonicité)}$$

$$\frac{\omega}{\mathcal{A}} = \mathcal{G}\left(\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}}\right) , \quad 2uv\frac{\omega}{\mathcal{A}} = \frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}}$$

$$\frac{v}{u} = \frac{1 - \mathcal{G}\left(\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}}\right)}{\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}}} \text{ (ellipticité de trajectoire)}$$

$$u + v = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{1 + \mathcal{G}\left(\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}}\right)} + \text{Sign}(\mathcal{B})\sqrt{1 - \mathcal{G}\left(\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}}\right)}}{\sqrt{\mathcal{G}\left(\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}}\right)}}$$

$$u - v = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{1 + \mathcal{G}\left(\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}}\right)} - \text{Sign}(\mathcal{B})\sqrt{1 - \mathcal{G}\left(\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}}\right)}}{\sqrt{\mathcal{G}\left(\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}}\right)}}$$

$$\sqrt{\frac{\omega}{\mathcal{A}}} uv(u + v) = \frac{\mathcal{B}}{2\sqrt{2}\mathcal{A}} \frac{\sqrt{1 + \mathcal{G}\left(\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}}\right)} + \text{Sign}(\mathcal{B})\sqrt{1 - \mathcal{G}\left(\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}}\right)}}{\mathcal{G}\left(\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}}\right)}$$

$$\sqrt{\frac{\omega}{\mathcal{A}}} uv(u - v) = \frac{\mathcal{B}}{2\sqrt{2}\mathcal{A}} \frac{\sqrt{1 + \mathcal{G}\left(\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}}\right)} - \text{Sign}(\mathcal{B})\sqrt{1 - \mathcal{G}\left(\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}}\right)}}{\mathcal{G}\left(\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}}\right)}$$

$$\frac{\omega}{\mathcal{A}}(u^2 + v^2 - uv) = 1 - \frac{\mathcal{B}}{2\mathcal{A}} , \quad \frac{\omega}{\mathcal{A}}(u^2 + v^2 + 2uv) = 1 + \frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}}$$

$$\left(\frac{\omega}{\mathcal{A}}\right)^2 (u - v)^2(u^2 + v^2 - uv) = \left(1 - \frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}}\right)\left(1 - \frac{\mathcal{B}}{2\mathcal{A}}\right)$$

$$\left(\frac{\omega}{\mathcal{A}}\right)^2 (u + v)^2(u^2 + v^2 + uv) = \left(1 + \frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}}\right)\left(1 + \frac{\mathcal{B}}{2\mathcal{A}}\right)$$

Avec : $\mathcal{G}(x) = \sqrt{1 - x^2}$ et $\omega = \omega_{\text{FMR}}$.

2.6.3. Tableau de synthèse des transformations

Propriétés des transformations	Transformation (a, \bar{a}) (Holstein-Primakof)	Transformation (b, \bar{b}) (Bogoliubov)	Transformation (c, \bar{c})
Sens direct	$a = \frac{m_y + jm_z}{\sqrt{2(1+m_x)}}$ $\bar{a} = \frac{m_y - jm_z}{\sqrt{2(1+m_x)}}$	$b = ua + v\bar{a}$ $\bar{b} = va + u\bar{a}$	$b = \sqrt{\frac{\omega_{FMR}}{\mathcal{A}}} c$
Sens inverse	$m_x = 1 - 2a\bar{a}$ $m_y = (a + \bar{a})\sqrt{1 - a\bar{a}}$ $m_z = -j(a - \bar{a})\sqrt{1 - a\bar{a}}$	$a = ub - v\bar{b}$ $\bar{a} = -vb + u\bar{b}$	$c = \sqrt{\frac{\mathcal{A}}{\omega_{FMR}}} b$
Matrice jacobienne (J)	$\begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{m}} a \\ \nabla_{\mathbf{m}} \bar{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & 1 & j \\ 4(1-a\bar{a}) & \sqrt{4(1-a\bar{a})} & \sqrt{4(1-a\bar{a})} \\ -\bar{a} & 1 & -j \\ 4(1-a\bar{a}) & \sqrt{4(1-a\bar{a})} & \sqrt{4(1-a\bar{a})} \end{pmatrix}$ $\mathbf{m} = (m_x, m_y, m_z)$ $u_x \text{ est l'axe d'équilibre}$	$\begin{pmatrix} \nabla_a b \\ \nabla_a \bar{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & v \\ v & u \end{pmatrix}$ $\mathbf{a} = (a, \bar{a})$	$\begin{pmatrix} \nabla_b c \\ \nabla_b \bar{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\mathcal{A}}{\omega_{FMR}}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{\mathcal{A}}{\omega_{FMR}}} \end{pmatrix}$ $\mathbf{b} = (b, \bar{b})$
Hamiltonien	$\mathcal{H}(a, \bar{a}) = \frac{\gamma}{2} W(a, \bar{a})$ $W : \text{énergie libre du système}$	$\mathcal{H}(b, \bar{b}) = \mathcal{H}(a, \bar{a})$	$\mathcal{H}(c, \bar{c}) = \frac{\mathcal{A}}{\omega_{FMR}} \mathcal{H}(b, \bar{b})$
Canonicité	non	Oui $ J = u^2 - v^2 = 1$	non
Objectifs	Passage en variables complexes Rend le système canonique Détermine les caractéristiques des couples élémentaires	Passage en mode normal du système	Normalisation de la trajectoire

2.6.4. Expressions des couples transformés

Les expressions des couples transformés des couples de champ effectif $(\dot{\mathbf{m}})_p, (\dot{\mathbf{m}})_G$ et des couples de transfert de spin $(\dot{\mathbf{m}})_{SL}, (\dot{\mathbf{m}})_{DL}$, voir tableau 2.2, sont listées dans les tableaux suivants. Les calculs ont été assistés par le logiciel Mathematica.

$(\dot{a})_p =$	$-j \left\{ \begin{aligned} & - \left[\omega_{Ax} + \omega_H + \frac{\omega_{Ay} + \omega_{Az}}{2} \right] a + \left[\frac{\omega_{Az} - \omega_{Ay}}{2} \right] \bar{a} \\ & + \frac{3}{4} [\omega_{Ay} - \omega_{Az}] a \bar{a}^2 + [2\omega_{Ax} + \omega_{Ay} + \omega_{Az}] a^2 \bar{a} \\ & + \frac{1}{4} [\omega_{Ay} - \omega_{Az}] a^3 \end{aligned} \right.$
$(\dot{a})_G =$	$-\alpha \left\{ \begin{aligned} & + \left[\omega_{Ax} + \omega_H + \frac{\omega_{Ay} + \omega_{Az}}{2} \right] a - \left[\frac{\omega_{Az} - \omega_{Ay}}{2} \right] \bar{a} \\ & \frac{3}{4} [\omega_{Az} - \omega_{Ay}] a \bar{a}^2 - \left[3\omega_{Ax} + \omega_H + \frac{3}{2} (\omega_{Ay} + \omega_{Az}) \right] a^2 \bar{a} \\ & + \frac{3}{4} [\omega_{Az} - \omega_{Ay}] a^3 + \\ & + [2\omega_{Ax} + \omega_{Ay} + \omega_{Az}] a^3 \bar{a}^2 - \frac{1}{2} [\omega_{Az} - \omega_{Ay}] a^4 \bar{a} + \\ & - \frac{1}{2} [\omega_{Az} - \omega_{Ay}] a^2 \bar{a}^3 \end{aligned} \right.$
$(\dot{a})_{FL} =$	$-j\omega_{J,FL} p_x a + \frac{j\omega_{J,FL}}{4\sqrt{1-a\bar{a}}} \left\{ \begin{aligned} & + 2 [p_y + jp_z] \\ & - [p_y - jp_z] a^2 - 3 [p_y + jp_z] a \bar{a} \end{aligned} \right.$
$(\dot{a})_{SL} =$	$-\omega_{J,SL} (p_x a - p_x a^2 \bar{a}) - \frac{\omega_{J,SL}}{4\sqrt{1-a\bar{a}}} \left\{ \begin{aligned} & - 2 [p_y + jp_z] \\ & + 3 [p_y - jp_z] a^2 + 3 [p_y + jp_z] a \bar{a} \\ & - 2 [p_y + jp_z] a^2 \bar{a}^2 - 2 [p_y - jp_z] a^3 \bar{a} \end{aligned} \right.$

Tableau 2.5. Expression des couples en variable a.

$(\dot{b})_P =$	$-j \begin{cases} -\left[uv(\omega_{Az} - \omega_{Ay}) + (u^2 + v^2)\left(\omega_{Ax} + \omega_H + \frac{\omega_{Az} + \omega_{Ay}}{2}\right)\right]b \\ \frac{1}{2}\left[(u^2 + v^2)(\omega_{Az} - \omega_{Ay}) + 2uv(2\omega_{Ax} + 2\omega_H + \omega_{Ay} + \omega_{Az})\right]\bar{b} \quad (=0) \\ -\frac{3}{4}\left[4uv(u^2 + v^2)(2\omega_{Ax} + \omega_{Ay} + \omega_{Az}) + (u^4 + v^4 + 6u^2v^2)(\omega_{Az} - \omega_{Ay})\right]b\bar{b}^2 \\ +\left[3uv(u^2 + v^2)(\omega_{Az} - \omega_{Ay}) + (u^4 + v^4 + 4u^2v^2)(2\omega_{Ax} + \omega_{Ay} + \omega_{Az})\right]b^2\bar{b} \\ -\frac{1}{4}\left[4uv(u^2 + v^2)(2\omega_{Ax} + \omega_{Ay} + \omega_{Az}) + (u^4 + v^4 + 6u^2v^2)(\omega_{Az} - \omega_{Ay})\right]b^3 \\ uv\left[2uv(2\omega_{Ax} + \omega_{Ay} + \omega_{Az}) + (u^2 + v^2)(\omega_{Az} - \omega_{Ay})\right]\bar{b}^3 \end{cases}$
$(\dot{b})_G =$	$-\alpha \begin{cases} +\frac{1}{2}\left[2\omega_{Ax} + 2\omega_H + \omega_{Ay} + \omega_{Az}\right]b - \frac{1}{2}\left[\omega_{Az} - \omega_{Ay}\right]\bar{b} \\ +\frac{1}{4}\left[3(u^2 + v^2)(\omega_{Az} - \omega_{Ay}) + 2uv(6\omega_{Ax} + 2\omega_H + 3\omega_{Ay} + 3\omega_{Az})\right]b\bar{b}^2 \\ -\frac{1}{2}\left[6uv(\omega_{Az} - \omega_{Ay}) + (u^2 + v^2)(6\omega_{Ax} + 2\omega_H + 3\omega_{Ay} + 3\omega_{Az})\right]b^2\bar{b} \\ +\frac{1}{2}\left[2u^2v^2(2\omega_{Ax} + \omega_{Ay} + \omega_{Az}) + uv(u^2 + v^2)(\omega_{Az} - \omega_{Ay})\right]b\bar{b}^4 \\ -\frac{1}{2}\left[4uv(u^2 + v^2)(2\omega_{Ax} + \omega_{Ay} + \omega_{Az}) + (u^4 + v^4 + 6u^2v^2)(\omega_{Az} - \omega_{Ay})\right]b^2\bar{b}^3 \\ +\frac{1}{4}\left[3(u^2 + v^2)(\omega_{Az} - \omega_{Ay}) + 2uv(6\omega_{Ax} + 2\omega_H + 3\omega_{Ay} + 3\omega_{Az})\right]b^3 \\ +\left[(u^4 + v^4 + 4u^2v^2)(2\omega_{Ax} + \omega_{Ay} + \omega_{Az}) + 3uv(u^2 + v^2)(\omega_{Az} - \omega_{Ay})\right]b^3\bar{b}^2 \\ -\frac{1}{2}\left[4(u^3v + uv^3)(2\omega_{Ax} + \omega_{Ay} + \omega_{Az}) + (u^4 + v^4 + 6u^2v^2)(\omega_{Az} - \omega_{Ay})\right]b^4\bar{b} \\ +\frac{uv}{2}\left[2uv(2\omega_{Ax} + \omega_{Ay} + \omega_{Az}) + (u^2 + v^2)(\omega_{Az} - \omega_{Ay})\right]b^5 \end{cases}$
$(\dot{b})_{FL} =$	$+j\omega_{J,FL}p_x \begin{cases} -(u^2 + v^2)b \\ +2uv\bar{b} \end{cases}$ $+\frac{j\omega_{J,FL}}{4\sqrt{1 - (u\bar{b} - vb)(v\bar{b} - ub)}} \begin{cases} 2\left[p_y(u - v) + jp_z(u + v)\right] \\ 4uv\left[p_y(u - v) + jp_z(u + v)\right]\bar{b}^2 \\ -\left[p_y(u - v)^3 - jp_z(u + v)^3\right]b^2 \\ -\left[p_y(u - v)(3u^2 - 2uv + 3v^2) + jp_z(u + v)(3u^2 + 2uv + 3v^2)\right]b\bar{b} \end{cases}$
$(\dot{b})_{SL} =$	$-\omega_{J,SL}p_x \begin{cases} b + uv\bar{b}^2 \\ -[u^2 + v^2]b^2\bar{b} \\ +uvb^3 \end{cases}$ $-\frac{\omega_{J,SL}}{4\sqrt{1 - (u\bar{b} - vb)(v\bar{b} - ub)}} \begin{cases} -2\left[p_y(u + v) + jp_z(u - v)\right] \\ 3\left[p_y(u - v) + jp_z(u + v)\right]b\bar{b} \\ +3\left[p_y(u - v) - jp_z(u + v)\right]b^2 + 2uv\left[p_y(u - v) + jp_z(u + v)\right]b\bar{b}^3 \\ -2\left[p_y(u - v)(u^2 + 2uv + 3v^2) + jp_z(u + v)(u^2 + uv + v^2)\right]b^2\bar{b}^2 \\ -2\left[p_y(u - v)(u^2 + 2uv + 3v^2) - jp_z(u + v)(u^2 + uv + v^2)\right]b^3\bar{b} \\ 2uv\left[p_y(u - v) - jp_z(u + v)\right]b^4 \end{cases}$

Tableau 2.6. Expression des couples en variable b.

$(\dot{c})_P =$	$-j \left\{ \begin{array}{l} - \left[uv(\omega_{Az} - \omega_{Ay}) + (u^2 + v^2) \left(\omega_{Ax} + \omega_H + \frac{\omega_{Az} + \omega_{Ay}}{2} \right) \right] c \\ \frac{1}{2} [(u^2 + v^2)(\omega_{Az} - \omega_{Ay}) + 2uv(2\omega_{Ax} + 2\omega_H + \omega_{Ay} + \omega_{Az})] \bar{c} \quad (= 0) \\ - \frac{3}{4} \left(\frac{\omega}{\mathcal{A}} \right) [4uv(u^2 + v^2)(2\omega_{Ax} + \omega_{Ay} + \omega_{Az}) + (u^4 + v^4 + 6u^2v^2)(\omega_{Az} - \omega_{Ay})] c \bar{c}^2 \\ + \left(\frac{\omega}{\mathcal{A}} \right) [3uv(u^2 + v^2)(\omega_{Az} - \omega_{Ay}) + (u^4 + v^4 + 4u^2v^2)(2\omega_{Ax} + \omega_{Ay} + \omega_{Az})] c^2 \bar{c} \\ - \frac{1}{4} \left(\frac{\omega}{\mathcal{A}} \right) [4uv(u^2 + v^2)(2\omega_{Ax} + \omega_{Ay} + \omega_{Az}) + (u^4 + v^4 + 6u^2v^2)(\omega_{Az} - \omega_{Ay})] c^3 \\ uv \left(\frac{\omega}{\mathcal{A}} \right) [2uv(2\omega_{Ax} + \omega_{Ay} + \omega_{Az}) + (u^2 + v^2)(\omega_{Az} - \omega_{Ay})] \bar{c}^3 \end{array} \right.$
$(\dot{c})_G =$	$-\alpha \left\{ \begin{array}{l} + \frac{1}{2} [2\omega_{Ax} + 2\omega_H + \omega_{Ay} + \omega_{Az}] c - \frac{1}{2} [\omega_{Az} - \omega_{Ay}] \bar{c} \\ + \frac{1}{4} \left(\frac{\omega}{\mathcal{A}} \right) [3(u^2 + v^2)(\omega_{Az} - \omega_{Ay}) + 2uv(6\omega_{Ax} + 2\omega_H + 3\omega_{Ay} + 3\omega_{Az})] c \bar{c}^2 \\ - \frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{\mathcal{A}} \right) [6uv(\omega_{Az} - \omega_{Ay}) + (u^2 + v^2)(6\omega_{Ax} + 2\omega_H + 3\omega_{Ay} + 3\omega_{Az})] c^2 \bar{c} \\ + \frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{\mathcal{A}} \right)^2 [2u^2v^2(2\omega_{Ax} + \omega_{Ay} + \omega_{Az}) + uv(u^2 + v^2)(\omega_{Az} - \omega_{Ay})] c \bar{c}^4 \\ - \frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{\mathcal{A}} \right)^2 [4uv(u^2 + v^2)(2\omega_{Ax} + \omega_{Ay} + \omega_{Az}) + (u^4 + v^4 + 6u^2v^2)(\omega_{Az} - \omega_{Ay})] c^2 \bar{c}^3 \\ + \frac{1}{4} \left(\frac{\omega}{\mathcal{A}} \right) [3(u^2 + v^2)(\omega_{Az} - \omega_{Ay}) + 2uv(6\omega_{Ax} + 2\omega_H + 3\omega_{Ay} + 3\omega_{Az})] c^3 \\ + \left(\frac{\omega}{\mathcal{A}} \right)^2 [(u^4 + v^4 + 4u^2v^2)(2\omega_{Ax} + \omega_{Ay} + \omega_{Az}) + 3uv(u^2 + v^2)(\omega_{Az} - \omega_{Ay})] c^3 c^2 \\ - \frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{\mathcal{A}} \right)^2 [4(u^3v + uv^3)(2\omega_{Ax} + \omega_{Ay} + \omega_{Az}) + (u^4 + v^4 + 6u^2v^2)(\omega_{Az} - \omega_{Ay})] c^4 \bar{c} \\ + \frac{uv}{2} \left(\frac{\omega}{\mathcal{A}} \right)^2 [2uv(2\omega_{Ax} + \omega_{Ay} + \omega_{Az}) + (u^2 + v^2)(\omega_{Az} - \omega_{Ay})] c^5 \end{array} \right.$
$(\dot{c})_{FL} =$	$+ j\omega_{J,FL} p_x \left\{ \begin{array}{l} -(u^2 + v^2)c \\ + 2uv\bar{c} \end{array} \right.$ $+ \frac{j\omega_{J,FL}}{4 \sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\mathcal{A}} \right)}} (u\bar{c} - vc)(v\bar{c} - uc) \left\{ \begin{array}{l} 2 \sqrt{\frac{\mathcal{A}}{\omega}} [p_y(u - v) + jp_z(u + v)] \\ 4uv \sqrt{\frac{\omega}{\mathcal{A}}} [p_y(u - v) + jp_z(u + v)] \bar{c}^2 \\ - \sqrt{\frac{\omega}{\mathcal{A}}} [p_y(u - v)^3 - jp_z(u + v)^3] c^2 \\ - \sqrt{\frac{\omega}{\mathcal{A}}} [p_y(u - v)(3u^2 - 2uv + 3v^2) + jp_z(u + v)(3u^2 + 2uv + 3v^2)] c \bar{c} \end{array} \right.$

$(\dot{c})_{SL} =$	$-\omega_{J,SL} p_x \begin{cases} b + uv \left(\frac{\omega}{\mathcal{A}}\right) c \bar{c}^2 \\ -[u^2 + v^2] \left(\frac{\omega}{\mathcal{A}}\right) c^2 \bar{c} \\ + uv \left(\frac{\omega}{\mathcal{A}}\right) c^3 \end{cases}$ $-\frac{\omega_{J,SL}}{4\sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\mathcal{A}}\right)(u\bar{c} - vc)(v\bar{c} - uc)}} \begin{cases} -2\sqrt{\frac{\mathcal{A}}{\omega}} [p_y(u+v) + jp_z(u-v)] \\ 3\sqrt{\frac{\omega}{\mathcal{A}}} [p_y(u-v) + jp_z(u+v)] c \bar{c} \\ +3\left(\frac{\omega}{\mathcal{A}}\right) \sqrt{\frac{\omega}{\mathcal{A}}} [p_y(u-v) - jp_z(u+v)] c^2 + 2uv [p_y(u-v) + jp_z(u+v)] c \bar{c}^3 \\ -2\left(\frac{\omega}{\mathcal{A}}\right) \sqrt{\frac{\omega}{\mathcal{A}}} [p_y(u-v)(u^2 + 2uv + 3v^2) + jp_z(u+v)(u^2 + uv + v^2)] c^2 \bar{c}^2 \\ -2\left(\frac{\omega}{\mathcal{A}}\right) \sqrt{\frac{\omega}{\mathcal{A}}} [p_y(u-v)(u^2 + 2uv + 3v^2) - jp_z(u+v)(u^2 + uv + v^2)] c^3 \bar{c} \\ 2uv \left(\frac{\omega}{\mathcal{A}}\right) \sqrt{\frac{\omega}{\mathcal{A}}} [p_y(u-v) - jp_z(u+v)] c^4 \end{cases}$
--------------------	--

Tableau 2.7. Expression des couples en variable c avec $\omega = \omega_{FMR}$.

Partie II :
Etude du régime synchronisé

Chapitre 3. Régime synchronisé avec faible variation de la puissance

Un signal externe peut synchroniser l'oscillateur car il produit sur lui un couple de forçage. En réalité pour les oscillateurs spintroniques, les forçages peuvent être très nombreux avec des expressions différentes [20][19]. C'est pourquoi ici, nous allons chercher à exprimer les solutions stationnaires du régime synchronisé le plus généralement possible. En 3.1, les concepts fondamentaux sont introduits : le couple et la fonction de forçage associée (appelée simplement forçage) puis l'équation de synchronisation. Les forçages sont aussi divers qu'il y a d'ellipses différentes. Si le forçage est exprimé sous forme d'une ellipse, il devient possible d'accéder à toutes les propriétés de synchronisations possibles.

Muni d'un forçage plus étendu, les solutions stationnaires sont obtenues en 3.2 sous condition que la puissance synchronisée varie faiblement [20]. Les solutions dépendent de quatre fonctions essentielles, appelées ici les propriétés de synchronisation : la gamme de synchronisation $\Delta\Omega$, la gamme d'amplitude de puissance ΔI , le déphasage additionnel de phase ψ_0 et de puissance ψ_p . En particulier, les fonctions ΔI et ψ_p sont des concepts nouveaux qui traduisent l'allure de la puissance synchronisée. La partie 3.3 étudie la valeur de ces propriétés en fonction des caractéristiques géométriques du forçage et de la non-linéarité ν du système. Pour cela, on introduit les sensibilités intrinsèques Cl_Ω , Cl_I , (fonctions normalisées de $\Delta\Omega$, ΔI), plus adaptées à l'étude générale. Enfin, la partie 3.4 aborde en détail les forçages rectilignes.

La nouveauté de ce chapitre réside dans l'obtention de solutions générales. Nous donnons une vision globale du modèle, sans chercher à savoir si tel ou tel forçage est réalisable. Ce sera la tâche du chapitre suivant de trouver quelles sont les conditions (forçage et non linéarité) réellement accessibles par notre oscillateur spintronique.

3.1. Concepts préliminaires

On introduit ici tous les concepts de bases qui serviront à l'étude du régime synchronisé. La section 3.1.1 introduit le modèle d'étude et définit le signal générateur. La section 3.1.2 décrit en détail la notion de forçage et la dernière section 3.1.3 introduit l'équation de synchronisation.

3.1.1. Modèle d'étude

La synchronisation par verrouillage (« injection locking » en anglais) est la synchronisation d'un auto-oscillateur avec un signal alternatif émis par un générateur externe, appelé ici le signal générateur. Dans le contexte des oscillateurs spintroniques, la fréquence du signal doit appartenir au domaine RF ($200 \text{ MHz} < f < 20 \text{ GHz}$) pour être voisin de la fréquence libre ou l'un de ses harmoniques. Le signal générateur est un signal vectoriel de différentes natures qui interagit avec l'aimantation de la couche libre. Par exemple, le signal peut être un champ \mathbf{H}_g , créé par une ligne de courant, placée proche de la couche libre, ou bien un courant polarisé en spin \mathbf{J}_g créé par une couche ferromagnétique polarisante.

Plus précisément, le signal générateur vu par l'oscillateur est noté de la façon suivante :

Définition 3.1 : Soit le signal générateur défini par :

$$\mathbf{s}(t) = a_g \mathbf{u}_g \cos(\phi_g(t)) \quad (3.1)$$

a_g est l'amplitude du signal¹⁸, $\phi_g(t) = \omega_g t$ la phase instantanée et $\mathbf{u}_g = (\rho_x, \rho_y, \rho_z)$ le vecteur unitaire qui détermine l'orientation du signal, exprimé dans la base $(\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z)$. ω_g est la fréquence.

Pour étudier la synchronisation, on adopte les conventions de la Figure 3.1.

Le modèle a l'avantage de donner accès à de nombreuses possibilités de synchronisation. Le signal générateur injecté $\mathbf{s}(t)$ peut être de différentes natures : un champ $\mathbf{H}_g(t)$, un courant de spin $\mathbf{J}_g(t)$ ou éventuellement les deux. La position relative de la ligne de champ avec l'oscillateur détermine l'orientation du champ $\mathbf{H}_g(t)$. L'orientation peut être ainsi quelconque dans l'espace. En revanche, l'orientation du courant de spin $\mathbf{J}_g(t)$ est plus difficile à modifier car elle est identique à celle du polariseur qui détermine le courant statique. La composante $\rho_x = (\mathbf{u}_g \cdot \mathbf{u}_x) = (\mathbf{m}_p \cdot \mathbf{u}_x) = \cos(165^\circ)$ est constante ce qui restreint les orientations possibles. Néanmoins, comme les composantes ρ_y, ρ_z sont libres, l'orientation peut au moins, si l'on veut, appartenir aux plans $(\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y)$ ou $(\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_z)$ ce qui est suffisant pour l'étude qui va

¹⁸ Par convention, l'amplitude du signal est strictement positive. Par contre, les composantes (ρ_x, ρ_y, ρ_z) peuvent être positives ou négatives.

suivre. En conclusion, le modèle est assez versatile pour permettre l'exploration de différents cas de synchronisation¹⁹.

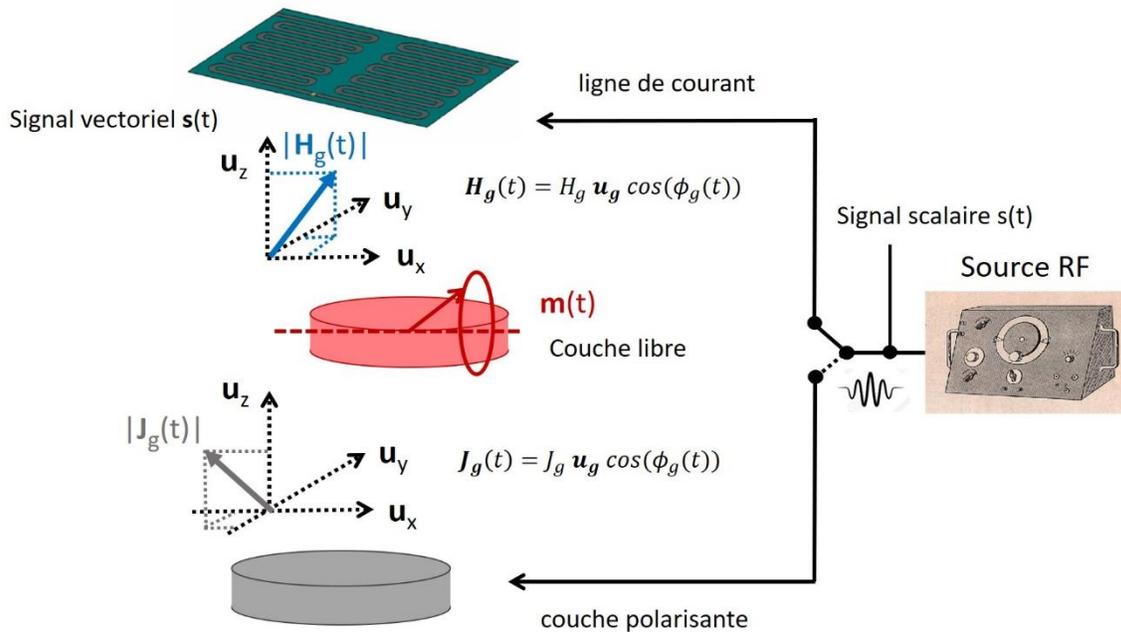


Figure 3.1. Modèle utilisé pour l'étude de la synchronisation. Un générateur génère un signal électrique RF de type scalaire qui est converti en un signal vectoriel $\mathbf{H}_g(t)$ ou $\mathbf{J}_g(t)$ pour interagir avec l'oscillateur. Dans ce modèle, le polariseur génère à la fois le courant de spin statique J_{dc} et alternatif $J_g(t)$. Les grandeurs statiques H_{dc} et J_{dc} ne sont pas représentées.

3.1.2. Concepts de forçage

La notion centrale de la thèse est celle de forçage. Globalement, c'est le terme supplémentaire à l'équation dynamique qui est responsable de la synchronisation. Le problème est qu'il peut avoir une expression compliquée dans nos systèmes, car il dépend à la fois du signal générateur mais aussi de l'état du système via $\mathbf{m}(t)$. Le but de cette section est : d'une part de le définir le plus rigoureusement possible et d'autre part de l'exprimer en toute généralité.

¹⁹ En mettant de côté la faisabilité pratique (par ex : réaliser la composante ρ_z du polariseur).

3.1.2.1. Couples résonants / de forçages

○ Définitions

On se restreint à l'étude de la synchronisation à un unique signal générateur, non retardé. Dans ce cas, le signal génère un nouveau couple $(\dot{\mathbf{m}})_F$ dans l'équation LLGS (1.9), appelé couple de forçage.

Il peut s'écrire en général par :

Définition 3.2 : Soit le couple de forçage²⁰ $(\dot{\mathbf{m}})_F$:

$$(\dot{\mathbf{m}})_F = a_g \cos(\phi_g) (\dot{\mathbf{m}})_R \quad (3.2)$$

Avec $(\dot{\mathbf{m}})_R$, le couple résonant.

Et sa transformée en variable c :

$$\mathcal{T}_F(c) = a_g \cos(\phi_g) \mathcal{T}_R(c) \quad (3.3)$$

Avec : $\mathcal{T}_F = \mathcal{L}_{mc}[\dot{\mathbf{m}}_F]$, $\mathcal{T}_R = \mathcal{L}_{mc}[\dot{\mathbf{m}}_R]$, les couples de forçages et résonants transformés de $\dot{\mathbf{m}}_F$, $\dot{\mathbf{m}}_R$. \mathcal{L}_{mc} est l'opérateur de transformation tel que : $\mathcal{L}_{mc} = \mathcal{L}_{bc} \mathcal{O} \mathcal{L}_{ab} \mathcal{O} \mathcal{L}_{ma}$.

La définition fait apparaître $(\dot{\mathbf{m}})_F$ comme un produit entre le signal générateur et un couple $(\dot{\mathbf{m}})_R$, qui dépend à la fois de l'aimantation \mathbf{m} et de l'orientation \mathbf{u}_g . On donne deux exemples concrets.

○ Exemples

Lors d'une synchronisation sous champ, $\mathbf{s}(t)$ est un champ $\mathbf{H}_g(t)$ qui contribue au champ appliqué tel que $\mathbf{H}_{app}(t) = \mathbf{H}_{dc} + \mathbf{H}_g(t)$. Le champ $\mathbf{H}_g(t)$ agit simultanément sur les couples $(\dot{\mathbf{m}})_p$ et $(\dot{\mathbf{m}})_g$ ce qui crée le couple $(\dot{\mathbf{m}})_F$ suivant :

$$(\dot{\mathbf{m}})_F = -\gamma'_0 \mathbf{m} \times \mathbf{H}_g(t) - \gamma'_0 \alpha \mathbf{m} \times \mathbf{m} \times \mathbf{H}_g(t) \quad (3.4)$$

Et le couple $(\dot{\mathbf{m}})_R$:

$$(\dot{\mathbf{m}})_R = -\gamma'_0 (\mathbf{m} \times \mathbf{u}_g - \alpha \mathbf{m} \times \mathbf{m} \times \mathbf{u}_g) \quad (3.5)$$

²⁰ La définition est volontairement simplifiée car le couple $(\dot{\mathbf{m}})_F$ peut avoir beaucoup d'autres contributions. De façon générale, $(\dot{\mathbf{m}})_F$ peut s'écrire : $(\dot{\mathbf{m}})_F(t) = \sum_i |s_i(t - \tau_i)| (\dot{\mathbf{m}})_{R,i}$ où $s_i(t - \tau_i)$ peuvent être des signaux générateurs de natures différentes avec des retards τ_i différents ou/et le même signal mais retardée plusieurs fois. Le problème réside dans les différents retards que peuvent avoir les signaux entre eux. En réalité, le modèle peut s'appliquer dans n'importe quelle situation.

De façon similaire lors d'une synchronisation sous courant, le signal $\mathbf{J}_g(t)$ agit sur $(\dot{\mathbf{m}})_{FL}$ et $(\dot{\mathbf{m}})_{SL}$ via le même polariseur que \mathbf{J}_{dc} , ce qui donne le couple $(\dot{\mathbf{m}})_F$:

$$(\dot{\mathbf{m}})_F = \gamma'_0(\alpha a_{J0} - b_{J0}) \mathbf{m} \times \mathbf{J}_g(t) - \gamma'_0(a_{J0} + \alpha b_{J0}) \mathbf{m} \times \mathbf{m} \times \mathbf{J}_g(t) \quad (3.6)$$

Et le couple $(\dot{\mathbf{m}})_R$:

$$(\dot{\mathbf{m}})_R = \gamma'_0 \left((\alpha a_{J0} - b_{J0}) \mathbf{m} \times \mathbf{u}_g - (a_{J0} + \alpha b_{J0}) \mathbf{m} \times \mathbf{m} \times \mathbf{u}_g \right) \quad (3.7)$$

Quelque soit l'exemple, on voit que le couple de forçage $(\dot{\mathbf{m}})_F$ fait toujours intervenir le couple résonant $(\dot{\mathbf{m}})_R$. Ce dernier apparaît car l'équation LLGS est une équation de conservation de moment cinétique, qui fait intervenir les grandeurs $\mathbf{H}_g(t)$, $\mathbf{J}_g(t)$ à travers un produit vectoriel de l'aimantation \mathbf{m} . En général, tous les forçages de l'équation LLGS peuvent être considérés comme des forçages paramétriques, dans le sens où le signal générateur multiplie en toute circonstance la variable \mathbf{m} , voir définition des forçages paramétriques chez [49], chap 7. Le couple de forçage doit donc être, toujours, spécifié par le couple résonant qu'il force.

3.1.2.2. Fonctions résonantes / de forçage

○ Définitions

En pratique, on utilisera plutôt les fonctions associées \mathcal{F} et \mathcal{R} à la place des couples \mathcal{T}_F et \mathcal{T}_R . Dans la variable complexe c , elles sont définies par :

Définition 3.3 : Soient les fonctions de forçage $\mathcal{F}(p, \phi)$ (ou simplement forçage) et résonante $\mathcal{R}(p, \phi)$:

$$\mathcal{F}(p, \phi) = \mathcal{T}_F(c) \cdot c^{-1}, \quad \mathcal{R}(p, \phi) = \mathcal{T}_R(c) \cdot c^{-1} \quad (3.8)$$

L'expression (3.3) se réécrit alors en :

$$\mathcal{F}(p, \phi) = a_g \cos(\phi_g) \mathcal{R}(p, \phi) \quad (3.9)$$

$\mathcal{F}(p, \phi)$ représente le couple \mathcal{T}_F dans le référentiel tournant à la fréquence libre $\omega(p)$ du système. $\Re(\mathcal{F})$ est la composante radiale de \mathcal{T}_F en un point de l'orbite alors que $\Im(\mathcal{F})$ est sa composante tangentielle. En réalité, le modèle fait jouer à $\mathcal{F}(p, \phi)$ un rôle plus important que \mathcal{T}_F car les propriétés dynamiques en dépendent directement.

L'expression (3.9) n'est pas pour autant fonctionnelle. Lors d'une synchronisation à l'ordre n , le signal générateur résonne avec les termes d'ordre n de la fonction résonante \mathcal{R} [12]. Cette résonance de terme simplifie l'expression du forçage $\mathcal{F}(p, \phi)$, comme nous allons le voir.

○ Expression du forçage à l'ordre n

En général, \mathcal{R} est une somme de termes complexes $c^l \bar{c}^m$ où $l, m \in \mathbb{Z}$, qui peut s'écrire :

$$\mathcal{R}(p, \phi) = \sum_{|s| \in \mathbb{N}} \mathcal{R}_{|s|}(p, \phi) \quad (3.10)$$

Où $\mathcal{R}_{|s|}(c)$ est la fonction résonante d'harmonique s , c'est à dire l'ensemble des termes de $\mathcal{R}(c)$ (2.42) d'ordre $|s| = |l-m|$ avec $s \in \mathbb{Z}$:

$$\mathcal{R}_{|s|}(p, \phi) = \alpha_1(p) e^{js\phi} + \alpha_2(p) e^{-js\phi} \quad (3.11)$$

$\alpha_1(p), \alpha_2(p) \in \mathbb{C}$, ϕ est la phase et p la puissance de l'oscillateur.

En injectant (3.10) dans (3.9) :

$$\mathcal{F}(p, \phi) = a_g \cos(\phi_g) \sum_{|s| \in \mathbb{N}} (\alpha_1(p) e^{js\phi} + \alpha_2(p) e^{-js\phi}) \quad (3.12)$$

Puis en développant le produit :

$$\mathcal{F}(p, \phi) = \frac{a_g}{2} \left(\sum_{|s| \in \mathbb{N}} (\alpha_1(p) e^{j(s\phi - \phi_g)} + \alpha_2(p) e^{-j(s\phi - \phi_g)}) + \sum_{|s| \in \mathbb{N}} (\alpha_1(p) e^{j(s\phi + \phi_g)} + \alpha_2(p) e^{-j(s\phi + \phi_g)}) \right) \quad (3.13)$$

Lorsque $\phi_g \approx n\phi^{21}$, les termes exponentiels tel que $|s| \neq n$ sont non résonants. Autrement dit, ils sont nuls en moyenne sur une période d'oscillation T_0 , ce qui simplifie le forçage en :

$$\langle \mathcal{F}(p, \phi) \rangle_{T_0} = \frac{a_g}{2} \left((\alpha_1(p) e^{j(n\phi - \phi_g)} + \alpha_2(p) e^{-j(n\phi - \phi_g)}) + (\alpha_1(p) e^{j(n\phi + \phi_g)} + \alpha_2(p) e^{-j(n\phi + \phi_g)}) \right) \quad (3.14)$$

Elle se scinde en deux parties parcourues à des fréquences différentes. Là encore, les termes avec le déphasage $\psi = n\phi + \phi_g$ sont non résonants, donc ils peuvent être négligés en moyenne. En revanche, les termes avec le déphasage $\psi = n\phi - \phi_g$ résonnent, c'est-à-dire qu'ils contribuent en moyenne sur une période (condition de résonance de [12]). Ce sont ces derniers termes qui vont compter.

On peut alors exprimer le forçage \mathcal{F} en fonction de p et ψ :

²¹ $\phi_g(t) = \omega_g t \approx n \omega t$ et $\phi(t) = \omega t$ avec $\omega, \omega_g > 0$

Propriété 3.1 : Lorsque $\phi_g \approx n\phi$, le forçage $\mathcal{F}(p, \psi)$ vérifie :

$$\mathcal{F}(p, \psi) = \langle \mathcal{F}(p, \phi) \rangle_{T_0} = \frac{a_g}{2} \mathcal{R}_n(p, \psi) \quad (3.15)$$

Dans la suite, le terme « forçage » désignera toujours la fonction $\mathcal{F}(p, \psi)$.

D'après la propriété, le forçage $\mathcal{F}(p, \psi)$ dépend de l'amplitude a_g du signal générateur et de l'état interne du système, via la dépendance en p de la fonction résonante \mathcal{R}_n . On voit que le calcul de \mathcal{F} passe simplement par la recherche de cette fonction résonante. Par conséquent, la diversité des forçages est reliée à celle des fonctions résonantes qui sont forcées par le signal. On va alors chercher l'expression la plus générale possible du forçage \mathcal{F} , indépendamment de sa faisabilité.

3.1.2.3. Formes elliptiques de \mathcal{F}

○ Définitions

Puisque $\mathcal{R}_n(p, \phi)$ n'est pas autre chose qu'une ellipse de paramètre ϕ ((3.11) avec $n = |s|$), $\mathcal{F}(p, \psi)$ est aussi une ellipse, définie par :

$$\mathcal{F}(p, \psi) = \frac{\varepsilon_0(p)e^{i\sigma}}{2} \left((\varepsilon_1(p) + \varepsilon_2(p)) e^{j(\psi-\theta)} + (\varepsilon_1(p) - \varepsilon_2(p)) e^{-j(\psi-\theta)} \right) \quad (3.16)$$

Avec : $\varepsilon_1 \in \mathbb{R}$ le demi grand axe tel que $\varepsilon_1 \geq 0$, $\varepsilon_2 \in \mathbb{R}$ le demi petit axe tel que $|\varepsilon_2| \leq \varepsilon_1$, $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}$ un facteur commun tel que $\varepsilon_0 \geq 0$, $\sigma \in [0, \pi[$ la circulation et $\theta \in [0, 2\pi]$ l'orientation de l'ellipse. En particulier, le sens de parcours de l'ellipse est déterminé par le signe de ε_2 .

L'ellipse est spécifiée de façon unique par les paramètres : $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \sigma$ et θ . Néanmoins, il peut être utile de la caractériser par d'autres façons : comme avec l'amplitude r et l'ellipticité g à la place de $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2$:

$$\mathcal{F}(p, \psi) = r(p)e^{i\sigma} \left(\frac{1}{\sqrt{1+g^2}} e^{j(\psi-\theta)} + \frac{g}{\sqrt{1+g^2}} e^{-j(\psi-\theta)} \right) \quad (3.17)$$

Avec : $r = \frac{\sqrt{2}}{2} |\varepsilon_0| \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}$ tel que $r \geq 0$ et $g = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) / (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$ tel que $g \geq 0$. En particulier si $\varepsilon_2 \geq 0$, $g \in [0, 1]$ tandis que si $\varepsilon_2 \leq 0$, $g \geq 1$.

L'ellipticité g a l'avantage de classer simplement les forçages dans les trois catégories suivantes :

Définition 3.4 : \mathcal{F} peut être de type :

- rectiligne si $g = 1$: $\mathcal{F}(p, \psi) \propto e^{j\sigma} \cos(\psi - \theta)$ (3.18)

- circulaire si $g = 0$: $\mathcal{F}(p, \psi) \propto e^{\pm j(\psi + \sigma - \theta)}$ (3.19)

- quelconque sinon, voir expressions (3.16) ou (3.17).

En particulier, le forçage circulaire a l'expression la plus simple de tous, car seulement dans ce cas, l'orientation θ et la circularité σ jouent le même rôle.

Les forçages \mathcal{F} peuvent être représentés de deux manières différentes : soit de façon paramétrique, voir section suivante ou soit par la représentation de leurs couples \mathcal{J}_F associés, voir section 3.1.3.3.

o Représentation paramétrique de \mathcal{F}

La fonction $\mathcal{F}(p, \psi)$ à valeurs complexes est paramétrée par ψ . La Figure 3.2 illustre quelques exemples « brut » de forçages rectilignes, circulaires et quelconques. L'axe $\text{Re}(\mathcal{F})$ correspond à la composante radiale du couple $\mathcal{J}_F(p, \psi)$ au point (p, ψ) de l'orbite, alors que l'axe $\text{Im}(\mathcal{F})$ correspond à la composante tangentielle.

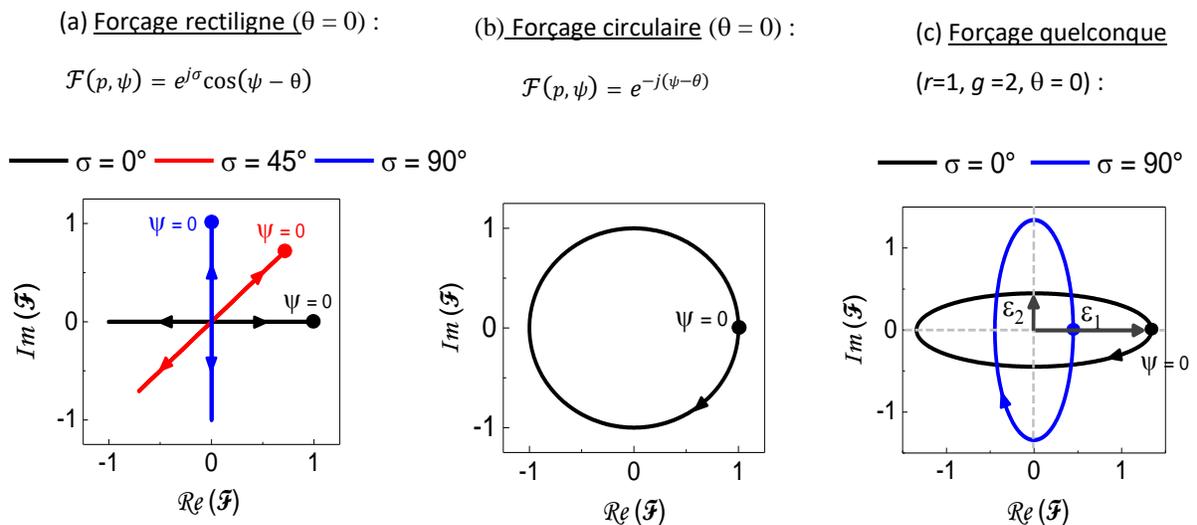


Figure 3.2. Représentation paramétrique de $\mathcal{F}(p, \psi)$ avec le paramètre $0 < \psi < 2\pi$. (a) forçage rectiligne (b) forçage circulaire (c) forçage quelconque. La valeur en $\psi = 0$ est marquée par un point.

D'après les figures, \mathcal{F} peut décrire : soit une droite (figure (a) - forme rectiligne), un cercle (figure (b) - forme circulaire) ou soit une ellipse quelconque (figure (c)). En particulier, la circulation σ correspond à

une rotation de \mathcal{F} dans le plan complexe. Par contre, comme l'orientation θ est une simple translation du paramètre ψ , son action n'est pas visible. C'est pourquoi θ est laissé nul dans l'exemple.

3.1.3. Equations de synchronisation

L'équation LLGS avec le couple de forçage forme l'équation de synchronisation à résoudre. Elle est présentée dans cette section dans différentes variables : \mathbf{m} , c , et $d = \sqrt{p} \exp(j\psi(t)/n)$. En particulier, la dernière représentation est commode pour formuler le problème de synchronisation car les états stationnaires sont immobiles dans ce plan complexe.

3.1.3.1. En variable \mathbf{m} et c

Avec le couple additionnel $(\dot{\mathbf{m}})_F$, l'équation LLGS (1.9) devient :

$$\dot{\mathbf{m}} = (\dot{\mathbf{m}})_P + (\dot{\mathbf{m}})_G + (\dot{\mathbf{m}})_{SL} + (\dot{\mathbf{m}})_{FL} + (\dot{\mathbf{m}})_F \quad (3.20)$$

Soit en variable c , avec la définition 3.2 :

Equation de synchronisation de 1^{ère} forme :

$$\dot{c} = \mathcal{T}_P(c) + \mathcal{T}_G(c) + \mathcal{T}_{SL}(c) + \mathcal{T}_F(c, t) = (j\omega(p) - \Gamma_+(p) + \Gamma_-(p) + \mathcal{F}(c, t))c \quad (3.21)$$

Avec les couples : $\mathcal{T}_P(c) = j\omega(p)c$, $\mathcal{T}_G(c) = -\Gamma_+(p)c$, $\mathcal{T}_{SL}(c) = \Gamma_-(p)c$, et $\mathcal{T}_F(c) = \mathcal{F}(c, t)c$

Le phénomène de synchronisation peut être modélisé au choix par l'équation (3.20) ou bien par (3.21). Le formalisme le plus utilisé est certainement celui en variable c [72][114][74]. Il a l'avantage de simplifier la description de la dynamique et de donner une forme universelle à l'équation. Néanmoins, il nécessite de transformer $(\dot{\mathbf{m}})_F$ en variable c , pour trouver \mathcal{F}_F ou \mathcal{F} . A l'inverse, on peut travailler avec le formalisme en variable \mathbf{m} et obtenir une équation simplifiée comme en [79]. En terme de résolution, les deux méthodes donnent des résultats assez similaires car elles sont limitées toutes les deux par la puissance des oscillations et l'amplitude du signal générateur.

On va s'intéresser ici à l'équation (3.21). On introduit une dernière représentation qui convient plus particulièrement à la modélisation du phénomène de synchronisation.

3.1.3.2. En variable d

En introduisant le déphasage par rapport au générateur (1.19) : $\psi = n\phi - \phi_g$, l'équation dynamique (3.21) devient :

$$\left(\sqrt{p} e^{j\left(\frac{\psi + \phi_g}{n}\right)} \right) = (j\omega(p) - \Gamma_+(p) + \Gamma_-(p) + \mathcal{F}(p, \psi)) \sqrt{p} e^{j\left(\frac{\psi + \phi_g}{n}\right)} \quad (3.22)$$

Puis en divisant les deux membres par le facteur $e^{j\phi_g/n}$:

$$\left(\frac{\dot{p}}{2\sqrt{p}} + j\sqrt{p} \frac{\dot{\psi}}{n} \right) e^{j\frac{\psi}{n}} = \left(j \left(\omega(p) - \frac{\omega_g}{n} \right) - \Gamma_+(p) + \Gamma_-(p) + \mathcal{F}(p, \psi) \right) \sqrt{p} e^{j\frac{\psi}{n}} \quad (3.23)$$

On introduit la puissance synchronisée : $p_s = p - p_0$ et le désaccord de fréquence : $\delta = \omega_g - n\omega_0$, où $\omega_0 = \omega_{\text{FMR}} + Np_0$ est la fréquence libre de l'oscillateur à la puissance p_0 . Comme $\omega(p) = \omega_0 + Np_s$, l'équation (3.23) devient :

$$\left(\frac{\dot{p}}{2\sqrt{p}} + j\sqrt{p} \frac{\dot{\psi}}{n} \right) e^{j\frac{\psi}{n}} = \left(j \left(-\frac{\delta}{n} + Np_s \right) - \Gamma_+(p) + \Gamma_-(p) + \mathcal{F}(p, \psi) \right) \sqrt{p} e^{j\frac{\psi}{n}} \quad (3.24)$$

L'équation peut se réécrire plus simplement avec la nouvelle variable²² $d = \sqrt{p} e^{j\psi(t)/n}$:

Equations de synchronisation de 2^{ième} forme :

$$\dot{d} = \mathcal{T}_\delta(d) + \mathcal{T}_G(d) + \mathcal{T}_{SL}(d) + \mathcal{T}_F(d, t) = \left(j \left(-\frac{\delta}{n} + Np_s \right) - \Gamma_+(p) + \Gamma_-(p) + \mathcal{F}(p, \psi) \right) d \quad (3.25)$$

Avec les couples : $\mathcal{T}_\delta(d) = j \left(-\frac{\delta}{n} + Np_s \right) d$, $\mathcal{T}_G(d) = -\Gamma_+(p)d$, $\mathcal{T}_{SL}(d) = \Gamma_-(p)d$ et $\mathcal{T}_F(d, t) = \mathcal{F}(p, \psi)d$

Et son système réel associé :

$$\begin{cases} \dot{p} = 2p \left(-\Gamma_+(p) + \Gamma_-(p) + \mathcal{R}e(\mathcal{F}(p, \psi)) \right) \\ \dot{\psi} = -\delta + nNp_s + n \mathcal{I}m(\mathcal{F}(p, \psi)) \end{cases} \quad (3.26)$$

Avec : $\psi = n\phi - \phi_g$, $p_s = p - p_0$ la puissance synchronisée et $\delta = \omega_g - n\omega_0$ le désaccord de fréquence.

L'équation de synchronisation (3.25) présente la dynamique de l'oscillateur en variable d , obtenue après passage dans le référentiel tournant à la fréquence ω_g/n . Le changement de référentiel est une procédure courante dans les théories de synchronisation [70] [12][49]. L'avantage est que les états d'équilibre du régime synchronisé sont immobiles dans cette représentation. En particulier, le système

²² L'argument de d est le déphasage par rapport à l'oscillateur : $\psi_{\text{osc}} = \psi/n$, définit en (1.20).

associé (3.26) montre l'importance du forçage \mathcal{F} , qui intervient simultanément dans les deux degrés de liberté : 1) dans l'équation de puissance avec sa partie réelle et 2) dans l'équation de phase avec sa partie imaginaire. Il faut donc s'attendre à ce que ψ et p varie à l'intérieur de la gamme de synchronisation.

Par ailleurs, on voit que la non linéarité du système fait intervenir le terme Np_s dans l'équation de phase. Dans le cas où la non linéarité est forte $N \gg 1$, ce terme induit une force supplémentaire qui augmente remarquablement la gamme de synchronisation. A l'opposé, lorsque $N \ll 1$, l'équation de phase devient indépendante de p_s et tend vers celle bien connue d'Adler [70]²³. Le système est donc capable de décrire aussi bien les cas linéaires que non linéaires, ce qui fait sa généralité.

3.1.3.3. Représentation des couples de forçage

Le plan complexe d permet de représenter le forçage \mathcal{F} par l'action de son couple $\mathcal{F}_F(d,t) = \mathcal{F}(p,\psi)d$ associé, voir (3.25). Par exemple, la Figure 3.3 illustre les couples de plusieurs forçages remarquables à $n = 1$ sur l'orbite²⁴ $\sqrt{p} = 0,1$.

La Figure 3.3 (a,b,c) montre des couples rectilignes. En particulier, on voit clairement les différences entre σ et l'orientation θ . Si $\sigma = 0$, les couples rectilignes agissent radialement à l'orbite tandis que si $\sigma = \pi/2$, les couples agissent tangentiellement. En quelque sorte, la circulation change la composante tangentielle du couple sur l'orbite.

Les couples de forçages circulaires ont, à $n = 1$, la particularité d'avoir une action constante (même direction et même amplitude) quelle que soit la position dans l'orbite, Figure 3.3 (d,e,f). Dans ce cas il n'y pas de différence entre les angles σ et θ . Enfin, les couples de forçage quelconques se situent en terme d'ellipticité entre les couples rectilignes et circulaires, Figure 3.3 (d,e,f). C'est la forme la plus générale possible.

Sous certaines conditions, cette représentation donne intuitivement la solution stationnaire de phase du système. Par exemple lorsque $\nu = 0$ (c.a.d $N = 0$) et $\delta = 0$, les points d'équilibre du système sont donnés par les conditions de stabilité : $\dot{p} = 0$, $Im(\mathcal{F}(p,\psi)) = 0$ et $\partial_\psi Im(\mathcal{F}(p,\psi)) < 0$ pour les points stables, $\dot{p} = 0$, $Im(\mathcal{F}(p,\psi)) = 0$ et $\partial_\psi Im(\mathcal{F}(p,\psi)) > 0$ pour les points instables. Dans le cas des Figure 3.3 (a,b), les couples de forçage ne possèdent pas de points d'équilibre, car ils ont une direction constamment radiale à l'orbite. Par contre dans tous les autres cas de figure, les couples de forçage possèdent une composante tangentielle qui en génère (points et croix noires). Lorsque $\nu \neq 0$, la lecture n'est plus aussi simple car les points d'équilibre dépendent à la fois de $Im(\mathcal{F}(p,\psi))$ et de $Re(\mathcal{F}(p,\psi))$ à cause du terme Np_s de l'éq (3.26). Dans ce cas, il faut apporter une correction au couple pour pouvoir lire de nouveau graphiquement les points d'équilibre de phase. Ce point est abordé à la section 3.2.3.1.

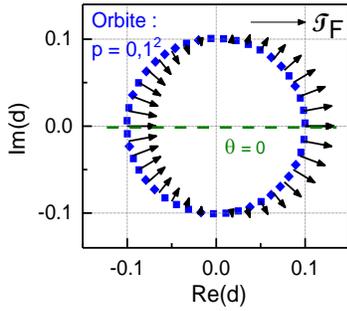
²³ Le terme trigonométrique en $\sin(\psi)$ de l'équation d'Adler est donnée ici par $Im(\mathcal{F}(p,\psi))$.

²⁴ Les orbites en variable d sont aussi des cercles du plan complexe.

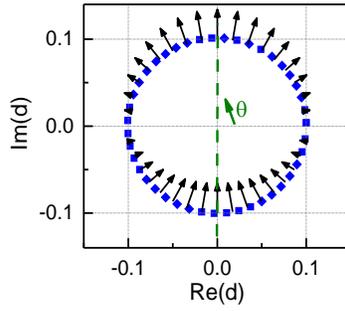
○ Représentation des couples de forçage

- Rectiligne :

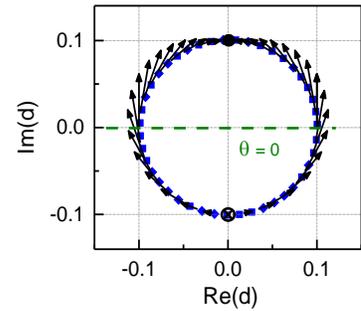
(a) $\sigma = 0, \theta = 0$



(b) $\sigma = 0, \theta = \pi/2$

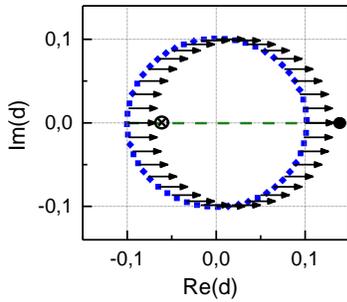


(c) $\sigma = \pi/2, \theta = 0$

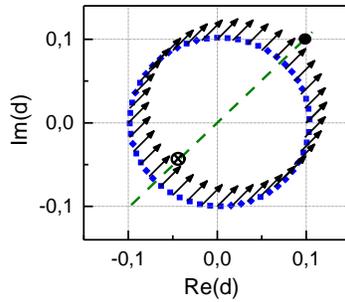


- Circulaire :

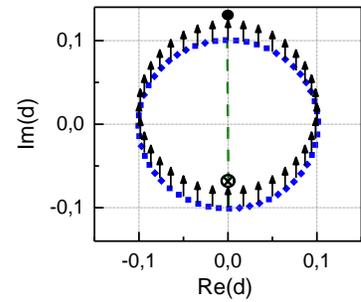
(d) $\theta = 0$



(e) $\theta = \pi/4$

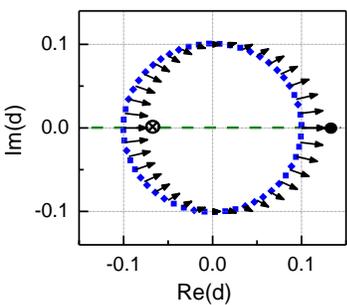


(f) $\theta = \pi/2$

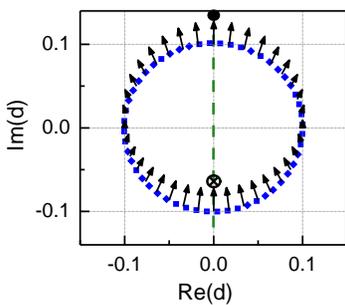


- Quelconque ($r=1, g = 1/0.5$) :

(g) $\sigma = 0, \theta = 0$



(h) $\sigma = 0, \theta = \pi/2$



(i) $\sigma = \pi/2, \theta = 0$

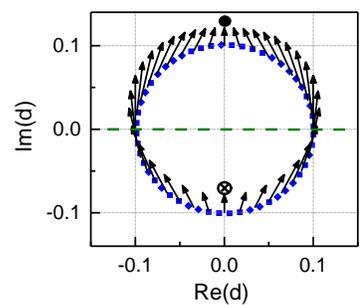


Figure 3.3. Représentation de quelques couples de forçage \mathcal{F}_F à l'harmonique $n = 1$. Couples de forçages rectilignes avec $\mathcal{F}(p, \psi) = \exp(j\sigma)\cos(\psi - \theta)$ tel que : (a) $\sigma = 0, \theta = 0$, (b) $\sigma = 0, \theta = \pi/2$ et (c) $\sigma = \pi/2, \theta = 0$. Couples de forçages circulaires avec $\mathcal{F}(p, \psi) = \exp(-j(\psi - \theta))$ tel que : (d) $\theta = 0$, (e) $\theta = \pi/4$ et (f) $\theta = \pi/2$. Couples de forçages quelconques avec : $r = 1, g = 1/0,5$, (g) $\sigma = 0, \theta = 0$, (h) $\sigma = 0, \theta = \pi/2$ et (i) $\sigma = \pi/2, \theta = 0$. Pour être lisible, les couples sont montrés seulement sur l'orbite $\sqrt{p} = 0,1$ (cercle pointillé bleu). L'orientation est indiquée par le trait vert. Les points d'équilibre stables et instables du système, quand $v = 0$ et $\delta = 0$, sont schématiquement marqués par le point et la croix noire.

○ *En résumé :*

Les forçages sont limités dans leurs diversités car tous peuvent être décrits comme une ellipse caractérisée par différents paramètres géométriques : les demi axes ε_1 , ε_2 , l'orientation θ et la circulation σ . Ces paramètres viennent de la fonction résonante forcée par le signal générateur, qui dépend des caractéristiques du système. A présent, nous voulons savoir comment ces paramètres influencent les propriétés de synchronisation.

3.2. Etude des solutions stationnaires

L'objectif est d'obtenir les états stationnaires synchronisés dans le cas général d'un forçage quelconque. Pour cela, nous allons suivre la méthode de [20] qui consiste à simplifier le système dynamique (3.26), au plus bas ordre possible autour de la puissance libre p_0 . En particulier, cette procédure est valable si la variation de la puissance synchronisée p_s est faible devant p_0 .

3.2.1. Système dynamique centrée sur p_0

Le système (3.26) peut se réécrire au voisinage de $p_0 \neq 0$, en fonction de p_s .

3.2.1.1. Système approché

A l'aide de l'équation de puissance (3.26), la dérivée \dot{p}_s vérifie :

$$\dot{p}_s = 2(p_0 + p_s) \left(-\Gamma_+(p_0 + p_s) + \Gamma_-(p_0 + p_s) + \mathcal{R}e(\mathcal{F}(p_0 + p_s, \psi)) \right) \quad (3.27)$$

On suppose alors que $p_s \ll p_0$, ce qui génère les approximations suivantes : $\Gamma_{\pm}(p) \approx \Gamma_{\pm}(p_0) + p_s G_{\pm}(p)$ et $\mathcal{F}(p) = \mathcal{F}(p_0)$. En particulier, l'approximation sur le forçage $\mathcal{F}(p) = \mathcal{F}(p_0)$ est cruciale car elle signifie que le forçage ne dépend plus que de la puissance p_0 et non des variations de la puissance à l'intérieur de la gamme de synchronisation.

Dans ce cas, l'équation se simplifie en :

$$\dot{p}_s = -2(p_0 + p_s) \left(\Gamma_+(p_0) - \Gamma_-(p_0) + (G_+(p_0) - G_-(p_0))p_s - \mathcal{R}e(\mathcal{F}(p_0, \psi)) \right) \quad (3.28)$$

Comme p_0 vérifie $\Gamma_+(p_0) = \Gamma_-(p_0)$ (2.58), alors :

$$\dot{p}_s = -2(p_0 + p_s) \left((G_+(p_0) - G_-(p_0))p_s - \mathcal{R}e(\mathcal{F}(p_0, \psi)) \right) \quad (3.29)$$

En ne gardant que les termes de plus bas ordre, l'équation (3.29) devient :

$$\dot{p}_s = -2\Gamma_p(p_0)p_s + 2 p_0 \mathcal{R}e(\mathcal{F}(p_0, \psi)) \quad (3.30)$$

Par ailleurs, l'équation de phase devient :

$$\dot{\psi} = -\delta + nNp_s + n \mathcal{I}m(\mathcal{F}(p_0, \psi)) \quad (3.31)$$

Ce qui donne le système approché suivant :

Equations de synchronisation de 3^{ième} forme :

$$\begin{cases} \dot{p}_s = -2\Gamma_p(p_0)p_s + 2 p_0 \mathcal{R}e(\mathcal{F}(p_0, \psi)) \\ \dot{\psi} = -\delta + nNp_s + n \mathcal{I}m(\mathcal{F}(p_0, \psi)) \end{cases} \quad (3.32)$$

Le système dynamique (3.32) modélise la synchronisation de l'oscillateur spintronique au voisinage de la puissance p_0 . Le système a été obtenu pour la première fois par [20], avec un forçage de type circulaire, voir système (49a)(49b). Cependant, nous avons conservé ici l'expression générale du forçage \mathcal{F} .

3.2.1.2. Equations stationnaires

La stationnarité impose : $\dot{p}_s = \dot{\psi} = 0$. Dans ce cas, la résolution de l'équation de puissance donne immédiatement :

$$p_s = \frac{\mathcal{R}e(\mathcal{F})p_0}{\Gamma_p} \quad (3.33)$$

Puis, en reportant p_s dans l'équation de phase :

$$0 = -\delta + n (\mathcal{R}e(\nu\mathcal{F}) + \mathcal{I}m(\mathcal{F})) \quad (3.34)$$

Soit :

$$\mathcal{I}m(z_\nu \mathcal{F}) - \frac{\delta}{n} = 0 \quad (3.35)$$

La dernière équation fait apparaître le nombre complexe z_ν , défini de la façon suivante :

Définition 3.5 : Soit $z_v \in \mathbb{C}$ défini par :

$$z_v = 1 + vj$$

$$\text{Avec : } |z_v| = a_v = \sqrt{1 + v^2}, \text{ l'amplitude non linéaire} \quad (3.36)$$

$$\text{et } \text{Arg}(z_v) = \psi_v = \arctan(v), \text{ le déphasage non linéaire}$$

Le complexe z_v résume à lui seul, l'effet de la non linéarité du système sur la dynamique. Grâce à l'équation (3.35), on voit que l'effet de la non linéarité se résume simplement à la multiplication de \mathcal{F} par z_v .

A présent, il faut choisir \mathcal{F} pour expliciter $\Re(\mathcal{F})$, $\text{Im}(\mathcal{F})$ dans les expressions (3.33) et (3.35). Ce passage est crucial car jusqu'à maintenant les études antérieures prenaient des forçages précis, guidés par la situation de synchronisation à décrire. Par exemple, chez [20] le forçage est circulaire (p 1890 « driving term » $\mathcal{F} = f_e e^{-j\psi}$) alors que chez [19] le forçage du couple $\mathbf{m} \times \mathbf{m} \times \mathbf{u}_x$ à l'ordre 2 est rectiligne avec $\sigma = 0$ (p 81 II.57 $\mathcal{F} = -P_x \sigma J_{DC} p \varepsilon \cos(\psi)/2$).

Ici, le forçage \mathcal{F} est pris quelconque :

$$\mathcal{F}(p, \psi) = a_g \varepsilon_0(p) e^{j\sigma} \left(\left(\frac{\varepsilon_1(p) + \varepsilon_2(p)}{2} \right) e^{j(\psi - \theta)} + \left(\frac{\varepsilon_1(p) - \varepsilon_2(p)}{2} \right) e^{-j(\psi - \theta)} \right) \quad (3.37)$$

a_g est l'amplitude du signal générateur et les paramètres géométriques définis selon (3.16).

Les calculs des parties réelles et imaginaires d'un forçage quelconque sont donnés à l'annexe 3.6.1. En appliquant la formule (3.114) au forçage \mathcal{F} défini en (3.37), la puissance compatible (3.33) devient :

$$p_s = \frac{\alpha \varepsilon_0 p_0}{\Gamma_p} \sqrt{(\varepsilon_1 \cos(\sigma))^2 + (\varepsilon_2 \sin(\sigma))^2} \cos(\psi + \psi_R - \theta) \quad (3.38)$$

De la même façon, en appliquant la formule (3.115) à $z_v \mathcal{F}$, l'équation (3.35) devient l'équation d'Adler suivante :

$$0 = -\frac{\delta}{n \alpha \varepsilon_0 a_v} + \sqrt{(\varepsilon_2 \cos(\sigma + \psi_v))^2 + (\varepsilon_1 \sin(\sigma + \psi_v))^2} \sin(\psi + \psi_I - \theta) \quad (3.39)$$

Pour obtenir les solutions recherchées, il faut résoudre d'abord (3.39) qui fournit la solution de phase, puis injecter le résultat dans (3.38) pour avoir la solution de puissance.

Les solutions sont discutées en détail à la section suivante.

3.2.2. Solutions stationnaires

3.2.2.1. Solution de phase

La résolution de (3.39) donne²⁵ :

Propriété 3.2 : Soit la solution stationnaire de phase $\psi(\delta)$:

$$\psi = \arcsin\left(-\frac{\delta}{\Delta\Omega}\right) + \psi_0 + 2m\pi, \quad m \in \mathbb{Z} \quad (3.40)$$

Avec :

$$- \text{la gamme de synchronisation} : \Delta\Omega = n a_g \varepsilon_0 a_v \sqrt{(\varepsilon_2 \cos(\sigma + \psi_v))^2 + (\varepsilon_1 \sin(\sigma + \psi_v))^2} \quad (3.41)$$

$$- \text{le déphasage additionnel} : \psi_0 = -\psi_I + \theta + \pi \\ = -\arctan\left(\tan(\sigma + \psi_v) \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right) + \theta + \begin{cases} \pi, & \text{si } \varepsilon_2 \cos(\sigma + \psi_v) > 0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.42)$$

La solution (3.40) possède les caractéristiques typiques d'une solution d'Adler [70], [12]. D'abord, elle se caractérise par deux fonctions fondamentales : la gamme de synchronisation $\Delta\Omega$ et le déphasage additionnel ψ_0 . $\psi(\delta)$ varie toujours en arcsin sur un intervalle de longueur π , quel que soit le forçage impliqué. La gamme $\Delta\Omega > 0$ dépend linéairement de l'amplitude du signal générateur. Pour cela, il est commode d'introduire la sensibilité de synchronisation $C_\Omega = \Delta\Omega/a_g$ pour s'affranchir de l'amplitude.

Comme dans la solution de [[20] éq (56)], la gamme $\Delta\Omega$ est amplifiée de a_v à cause de la non linéarité, mais dépend aussi de ψ_v , ce qui est une caractéristique nouvelle. Plus généralement, les expressions ici de $\Delta\Omega$ et ψ_0 sont plus compliquées car elles dépendent à la fois de v et des paramètres du forçage, ε_1 , ε_2 , σ et θ . Par exemple, le déphasage ψ_0 dépend ici du terme $\arctan(\tan(\sigma + \psi_v)\varepsilon_1/\varepsilon_2)$ ce qui contraste avec l'expression plus simple en $\psi_0 = -\psi_v$ de [20], ou l'expression en $\psi_0 = \arctan(vf(p))$ de [19], obtenue pour l'étude du forçage du couple $\mathbf{m} \times \mathbf{m} \times \mathbf{u}_v$ à l'ordre 1.

3.2.2.2. Solution de puissance

Pour discuter la solution de puissance p_s , il est plus commode de l'exprimer en fonction du désaccord de fréquence δ . En introduisant la solution de phase (3.40) dans l'équation (3.38), il vient :

²⁵ voir la méthode de résolution de l'équation d'Adler à la section 1.3.2

$$p_s = \frac{a_g \varepsilon_0 p_0}{\Gamma_p} \sqrt{(\varepsilon_1 \cos(\sigma))^2 + (\varepsilon_2 \sin(\sigma))^2} \cos\left(\arcsin\left(-\frac{\delta}{|\Delta\Omega|}\right) + \psi_0 + \psi_R - \theta\right) \quad (3.43)$$

Dans la suite, la quantité : $\psi_p = \psi_0 + \psi_R - \theta$ est appelée le déphasage de puissance. Le calcul de son expression est reporté à l'annexe 3.6.2. En développant le cosinus, la puissance p_s devient :

$$p_s = \frac{a_g \varepsilon_0 p_0}{\Gamma_p} \sqrt{((\varepsilon_1 \cos(\sigma))^2 + (\varepsilon_2 \sin(\sigma))^2) \left(1 - \left(\frac{\delta}{|\Delta\Omega|}\right)^2\right)} \left(\cos(\psi_p) + \frac{\frac{\delta}{|\Delta\Omega|}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\delta}{|\Delta\Omega|}\right)^2}} \sin(\psi_p) \right) \quad (3.44)$$

Soit :

$$p_s = \frac{a_g \varepsilon_0 p_0}{\Gamma_p} \sqrt{(\varepsilon_1 \cos(\sigma))^2 + (\varepsilon_2 \sin(\sigma))^2} \cos\left(\psi_p - \arctan\left(\frac{\delta}{\sqrt{\Delta\Omega^2 - \delta^2}}\right)\right) \quad (3.45)$$

Ce qui donne :

Propriété 3.3 : Soit la solution stationnaire de puissance $p_s(\delta)$:

$$p_s = \Delta\Pi \cos\left(\psi_p - \arctan\left(\delta/\sqrt{\Delta\Omega^2 - \delta^2}\right)\right) \quad (3.46)$$

Avec :

$$\text{– la gamme de puissance : } \Delta\Pi = \frac{a_g \varepsilon_0 p_0}{\Gamma_p} \sqrt{(\varepsilon_1 \cos(\sigma))^2 + (\varepsilon_2 \sin(\sigma))^2} \quad (3.47)$$

$$\text{– le déphasage de puissance : } \psi_p = \psi_0 + \psi_R - \theta \\ = \arctan\left(\frac{\tan(\sigma) \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right) - v \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \tan^2(\sigma)\right)}{1 + \tan^2(\sigma)}\right) + \begin{cases} \pi & \text{si } \varepsilon_2 > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.48)$$

Le premier constat de la solution (3.46) est que la puissance varie dans la gamme de synchronisation. Nous avons introduit deux quantités nouvelles : la gamme de puissance $\Delta\Pi$ et le déphasage de puissance ψ_p , par analogie aux quantités $\Delta\Omega$ et ψ_0 de la solution de phase. En premier, $\Delta\Pi$ traduit les variations d'amplitude de puissance dans la gamme de synchronisation et dépend tout comme $\Delta\Omega$ de l'amplitude du signal générateur. Pour cela, il est commode de travailler avec la sensibilité $C_{\Pi} = \Delta\Pi/a_g$. Par contre, $\Delta\Pi$ ne dépend pas de v mais du facteur $p_0/\Gamma_p(p_0)$ et des paramètres du forçage. A l'inverse, le déphasage ψ_p n'est pas comparable à ψ_0 . Par sa position dans l'expression (3.46), ψ_p peut modifier l'allure de la solution de puissance. En particulier, la solution peut être linéaire ou courbée suivant sa valeur. Ceci constitue une caractéristique nouvelle des solutions.

Dans la littérature, la solution de puissance a été moins étudiée que celle de la phase. Des exemples d'études peuvent être trouvés chez [82], voir équation 4b, ou chez [19]. Néanmoins, les solutions de puissance ont été exprimées dans un contexte restreint (cas de forçages particuliers), ce qui n'est pas le cas ici.

Les propriétés de synchronisation sont donc quatre fonctions essentielles :

- $\Delta\Omega$, la gamme de synchronisation
- ψ_0 , le déphasage additionnel
- $\Delta\Pi$, la gamme d'amplitude
- ψ_p , le déphasage de puissance

Elles dépendent, de façon combinée, des paramètres de forçage et des paramètres dynamiques transitoires comme ν et Γ_p . Ce sont ces paramètres qui définissent l'ensemble des propriétés de synchronisation possibles.

3.2.3. Discussions

On cherche ici à comprendre davantage les solutions (3.40) et (3.46). D'abord, les sections 3.2.3.1 et 3.2.3.2 leurs donnent une signification graphique et intuitive. La section 3.2.3.3 se consacre à la quantité ψ_p et enfin on termine par détailler les solutions des forçages circulaires.

3.2.3.1. Représentation du couple \mathcal{T}_F

Les solutions stationnaires sont données essentiellement par les équations (3.33), (3.35), c'est-à-dire :

$$\delta p = \frac{\mathcal{R}e(\mathcal{F})p_0}{\Gamma_p} \quad \text{et} \quad \mathcal{I}m(\mathcal{F}_\nu) = \frac{\delta}{n} \quad \text{avec} \quad \mathcal{F}_\nu = z_\nu \mathcal{F} \quad (3.49)$$

Les équations montrent qu'il y a deux types de forçages \mathcal{F} et \mathcal{F}_ν à l'œuvre dans la détermination de la solution. \mathcal{F}_ν est le forçage rectifié par le complexe z_ν . En effet, la puissance est donnée par $\mathcal{R}e(\mathcal{F})$, tandis que le déphasage est donné par $\mathcal{I}m(\mathcal{F}_\nu)$. En particulier, z_ν a pour effet d'augmenter l'amplitude de \mathcal{F} de a_ν et de faire tourner la circulation σ de l'angle ψ_ν . La non linéarité n'agit que sur l'équation de phase.

La Figure 3.4 illustre l'action de la non linéarité sur les couples $\mathcal{T}_F = \mathcal{F}.d$ et $\mathcal{T}_{F_\nu} = \mathcal{F}_\nu.d$. En particulier, elle montre comment déterminer graphiquement la solution lorsque $\delta = 0$.

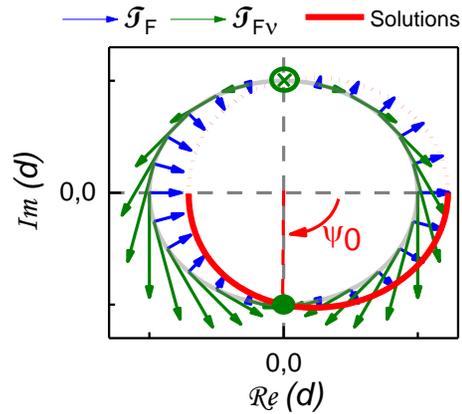


Figure 3.4. Représentation schématique des couples des forçages $\mathcal{F}_F(p, \psi)$ et $\mathcal{F}_{Fv}(p, \psi)$, avec $\mathcal{F}(p, \psi) = \cos(\psi)$ ($g = 1$, $\sigma = 0$, $\theta = 0$ à l'ordre 1). La solution stationnaire est en trait rouge. Les points d'équilibres stables et instables lorsque $\delta = 0$ sont marqués par le point et la croix verte. La variation de p_s est volontairement exagérée pour être lisible, car il faut tenir compte, en général du facteur p_0/Γ_p .

Dans l'exemple, \mathcal{F}_F est un couple de forçage rectiligne (flèches bleues) avec $\sigma = 0$. Si par exemple $\nu \approx -22$ comme dans l'oscillateur planaire ($\nu \ll 0$), les paramètres de non linéarité valent : $a_\nu \approx 22$ et $\psi_\nu \approx -\pi/2$. Comparé à \mathcal{F}_F , le couple \mathcal{F}_{Fv} (flèches vertes) est dilaté d'un facteur 22 et se trouve à présent tangent à l'orbite. En particulier si $\delta = 0$, la valeur ψ_0 du point d'équilibre stable est donnée par la condition de stabilité : $Im(\mathcal{F}_v(p, \psi)) = 0$ et $\partial_\psi Im(\mathcal{F}_v(p, \psi)) < 0$ (point vert indiqué par les flèches vertes). La solution est alors centrée sur ψ_0 , balayant le secteur $[\psi_0 - \pi/2, \psi_0 + \pi/2]$, comme le dit la solution (3.40).

Pour trouver les variations de p_s dans $\Delta\Omega$, il suffit d'utiliser la solution (3.33) qui montre que p_s suit l'orbite $p_s(\psi) = p_0 + \Re(\mathcal{F}) p_0/\Gamma_p = p_0 + \cos(\psi) p_0/\Gamma_p$ (orbite de la solution de puissance - pointillé rouge). Il est possible ainsi d'obtenir la solution stationnaire complète (trait rouge). La méthode vaut pour n'importe quel forçage qu'il soit rectiligne ou non.

Dans ce cas particulier, la non linéarité change radicalement les propriétés de synchronisation du système. Le couple \mathcal{F}_F étant radial à l'orbite, il n'y donc pas de point stable si $\nu = 0$ et donc pas de synchronisation. En modifiant le forçage, la non linéarité crée un point stable qui permet la synchronisation. Voilà un exemple où la non linéarité joue un rôle essentiel.

3.2.3.2. Représentation paramétrique

Alternativement, l'action de la non linéarité ainsi que les valeurs des gammes $\Delta\Pi$, $\Delta\Omega$ se comprennent intuitivement dans la représentation paramétrique. Par exemple, la Figure 3.5 (a) montre la situation dans le cas d'un forçage quelconque.

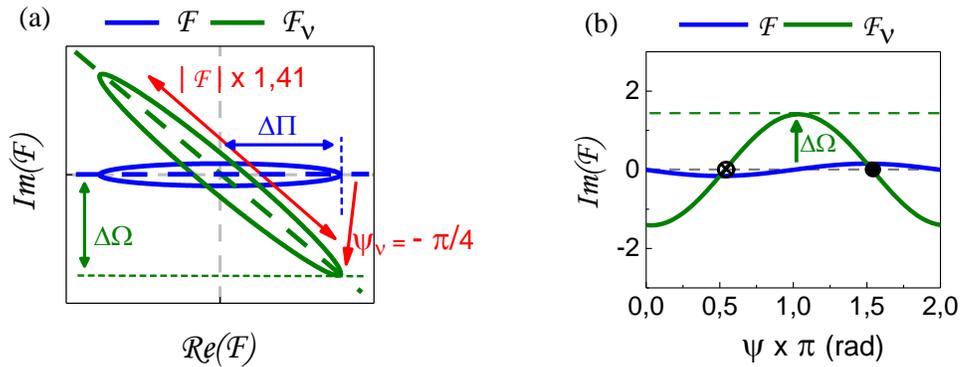


Figure 3.5. Effet de la non linéarité sur le forçage \mathcal{F} quelconque de paramètre $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 \approx -0.11$, g (ellipticité) = $1/0,8$ et $\sigma = 0$. La non linéarité vaut $\nu = -1$ avec $a_\nu = \sqrt{2}$, $\psi_\nu = -\pi/4$. (a) Représentation paramétrique de \mathcal{F} et \mathcal{F}_ν . (b) Partie imaginaire de \mathcal{F} et \mathcal{F}_ν en fonction de ψ .

Les gammes $\Delta\Pi$, $\Delta\Omega$ se lisent immédiatement à partir de la Figure 3.5 (a), en se souvenant que $\Delta\Pi \propto \mathcal{R}e(\mathcal{F})$ et $\Delta\Omega \propto \mathcal{I}m(\mathcal{F}_\nu)$. Dans ce cas où $\nu = -1$, la non linéarité transforme \mathcal{F} en \mathcal{F}_ν , à la fois, par une dilatation d'un facteur $a_\nu = \sqrt{2}$ et par une rotation de $\psi_\nu = -\pi/4$. Cela a pour conséquence l'augmentation de $\mathcal{I}m(\mathcal{F}_\nu)$ ainsi que de la gamme de synchronisation, Figure 3.5 (b). En réalité, cet effet « amplificateur » se produit dans la plupart des cas où $|\nu| \gg 1$, c'est-à-dire dans le contexte des oscillateurs spintroniques. A l'inverse, il se peut que le forçage combiné à la non linéarité génère un effet « atténuateur ». Ce cas se produit essentiellement quand la non linéarité est faible $|\nu| \approx 1$, ce qui est plutôt rare dans nos situations.

On voit donc comment une analyse géométrique simple dans le plan complexe, permet de comprendre l'action de la non linéarité sur le forçage.

3.2.3.3. Le déphasage de puissance

Le déphasage de puissance ψ_p est une fonction aussi importante que $\Delta\Omega$, $\Delta\Pi$ ou ψ_0 . A cause de sa position dans la solution de puissance (3.46), il peut changer l'allure de p_s à l'intérieur de la gamme de synchronisation. A titre d'exemple la Figure 3.6 montre la solution p_s en fonction de δ pour quelques valeurs remarquables de ψ_p .

On voit deux cas extrêmes de fonctions. Quand $\psi_p = 0 + [\pi]$, la puissance p_s varie en demi-cercle. Elle vaut $\Delta\Pi$ en $\delta = 0$ et s'annule aux extrémités quand $\delta = \Delta\Omega$. Par contre, quand $\psi_p = \pi/2 + [\pi]$, la dépendance est exactement linéaire. Entre ces valeurs extrêmes, la dépendance est plus ou moins courbée, voir le cas où $\psi_p = \pi/4 + [\pi/2]$. Dans ce cas, la solution p_s n'est plus symétrique en δ .

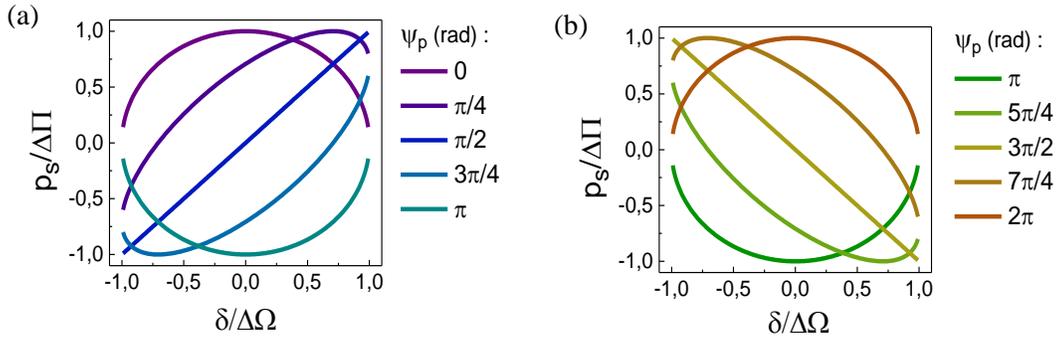


Figure 3.6. Solution normalisée $p_s(\delta)$ pour différentes valeurs de ψ_p . (a) de 0 à π , (b) de π à 2π .

Le tableau 3.1 donne les expressions de p_s dans plusieurs cas de ψ_p tel que : $0 \leq \psi_p < \pi$. Les formules sont multipliées simplement par -1 dans le cas où $\pi \leq \psi_p < 2\pi$.

Déphasage de puissance ψ_p	Solutions $p_s = f(\delta)$:	
0	$\Delta\Pi \sqrt{1 - \frac{\delta^2}{\Delta\Omega^2}}$	(3.50)
$\pi/2$	$\frac{\Delta\Pi}{\Delta\Omega} \delta$	(3.51)
Forme générale : $\psi_p = \text{Arctan}(\mu)$ avec $\mu \in \mathbb{R}$	$\Delta\Pi \frac{\sqrt{1 - \frac{\delta^2}{\Delta\Omega^2} + \mu \frac{\delta}{\Delta\Omega}}}{\sqrt{1 + \mu^2}}$	(3.52)

Tableau 3.1. Expressions développées de p_s selon différentes valeurs remarquables de ψ_p .

Le tableau montre que la valeur p_s en $\delta = 0$ n'est pas forcément nulle. Plus précisément, la formule (3.46) donne :

$$p_s(\delta = 0) = \Delta\Pi \cos(\psi_p) \quad (3.53)$$

Précisément p_s est exactement nulle en $\delta = 0$, seulement lorsque $\psi_p = \pi/2 + [\pi]$. Dans ce cas, p_s est linéaire avec δ de pente $\Delta\Pi/\Delta\Omega$, voir (3.51). Pour que cette condition soit réalisée, il faut que le forçage soit strictement rectiligne avec $\sigma = 0$ ou bien que la non linéarité soit très forte $|v| \gg 1$, comme on le verra à la section 3.4.3. En réalité, dans le contexte des oscillateurs spintroniques, la condition est souvent vérifiée car $|v| \gg 1$.

La signification de ψ_p est illustrée à la Figure 3.7, dans le cas du forçage rectiligne tel que $\sigma = 0$. Avec ce forçage, on a $\psi_r = 0$ d'après (3.115), ce qui entraîne $\psi_p = \psi_0$, d'après (3.48).

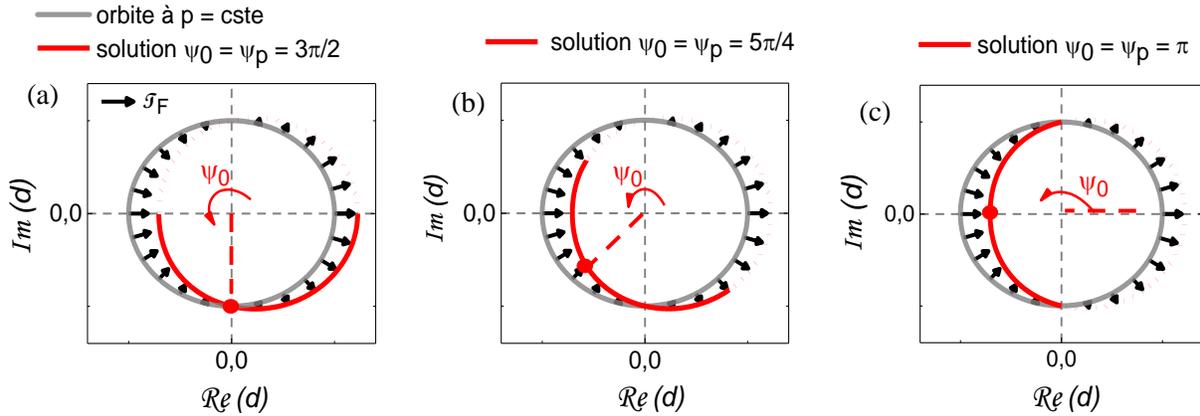


Figure 3.7 Représentation du couple de forçage rectiligne \vec{F}_F tel que $\mathcal{F}(p, \psi) = \cos(\psi)$ ($g = 1$, $\sigma = 0$, $\theta = 0$ à l'ordre 1). Les solutions sont centrées selon différents ψ_0 . (a) cas $\psi_0 = \psi_p = 3\pi/2$, (b) cas $\psi_0 = \psi_p = 5\pi/4$ et (c) cas $\psi_0 = \psi_p = \pi$. En réalité, le forçage rectiligne ne permet que les valeurs $\psi_0 = \pi/2 + k\pi$. Le but est d'illustrer simplement ici la grandeur ψ_p avec des valeurs hypothétiques ψ_0 .

Grâce à la figure, on comprend le lien entre les différentes valeurs du déphasage ψ_p avec la position des solutions. Selon les valeurs ψ_p , la solution de puissance (pointillé rouge) n'occupe pas la même portion d'orbite. En particulier lorsque $\psi_p = +3\pi/2$, p_s est exactement linéaire dans $\Delta\Omega$ (Figure 3.7 (a)) tandis que lorsque $\psi_p = +\pi$, p_s est inférieur à p_0 (Figure 3.7 (c)).

3.2.4. Forçages circulaires

Pour illustrer les résultats, nous allons résoudre le cas du forçage circulaire défini par :

$$\mathcal{F}(p, \psi) = a_g r(p) e^{-j(\psi - \theta(p))} \quad (3.54)$$

$a_g > 0$ est l'amplitude du signal générateur, $r(p) > 0$ et $\theta(p) \in [0, 2\pi]$ l'amplitude et l'orientation du forçage.

Ce type de forçage se retrouve souvent comme cas « d'école » dans la littérature [20][82]. Nous allons montrer que les solutions générales (3.40) et (3.46) appliquées au forçage (3.54) conduisent bien aux formules déjà établies dans la littérature.

3.2.4.1. Calcul des solutions

Les propriétés de synchronisation s'obtiennent en injectant (3.54) dans les définitions (3.41), (3.42), (3.47) et (3.48) avec les demi-axes : $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$, c'est-à-dire :

Propriétés :	Expressions :	
$\Delta\Omega$	$n a_g a_v r$	(3.55)
ψ_0	$\psi_v + \theta$	(3.56)
$\Delta\Pi$	$\frac{a_g r p_0}{\Gamma_p}$	(3.57)
ψ_p	ψ_v	(3.58)

Tableau 3.2. Propriétés de synchronisation du forçage circulaire.

Soit au final :

Propriété 3.4 : Les solutions stationnaires du forçage circulaire : $\mathcal{F}(p, \psi) = a_g r(p) e^{-j(\psi - \theta(p))}$ sont :

$$\begin{cases} \psi = \arcsin\left(-\frac{\delta}{\Delta\Omega}\right) + \psi_v + \theta + 2m\pi, \quad m \in \mathbb{Z} \\ p_s = \Delta\Pi \frac{\sqrt{1 - \frac{\delta^2}{\Delta\Omega^2} + v \frac{\delta}{\Delta\Omega}}}{\sqrt{1 + v^2}} \end{cases} \quad (3.59)$$

Avec : $\Delta\Omega$ et $\Delta\Pi$ donnée par (3.55) et (3.57).

La solution de phase est en tout point conforme avec celle de [20], voir éq (53 et 56). En particulier à cause de la non linéarité du système, $\Delta\Omega$ est bien amplifiée du facteur a_v . ψ_0 dépend, lui, simplement de ψ_v (cas avec $\theta = 0$). En ce qui concerne la solution de puissance, on retrouve effectivement la solution (43b) de [82], si on développe $\Delta\Omega$ et $\Delta\Pi$ dans notre solution. Par conséquent, les formules développées (3.40) et (3.46), dans le cas des forçages circulaires, concordent avec la littérature.

3.2.4.2. Représentations graphiques des solutions

Les solutions peuvent être représentées en fonction de δ ou dans le plan complexe d . La Figure 3.8 montre la solution analytique (3.59) d'un forçage circulaire, réalisée dans le cas de l'oscillateur planaire ($v(p_0) \approx -22$) en forçant le couple $\mathbf{m} \times \mathbf{u}_x$ par un champ RF à l'ordre 2.

Les Figure 3.8 (a,b) montrent les solutions de puissance et de phase, données par les formules (3.59). Comme ici $|v| \gg 1$, la variation de puissance se simplifie en : $p_s \approx N \cdot \delta$ et donc l'allure est quasiment linéaire. La solution de phase présente l'allure symétrique, en arcsin, bien connue de l'équation d'Adler. Au contraire de la solution de puissance, l'allure du déphasage est indépendante des paramètres de synchronisation. Que cela soit en expérience ou en simulation numérique, la vérification de l'allure en arcsin est un bon indicateur pour savoir si le système approché (3.32) s'applique bien. Suite à notre

définition de δ ($\delta = \omega_g - n\omega_0$), la pente doit toujours être négative car d'une part la condition de stabilité impose une dérivée négative au point d'équilibre et d'autre part l'augmentation de δ correspond à une diminution de ψ .

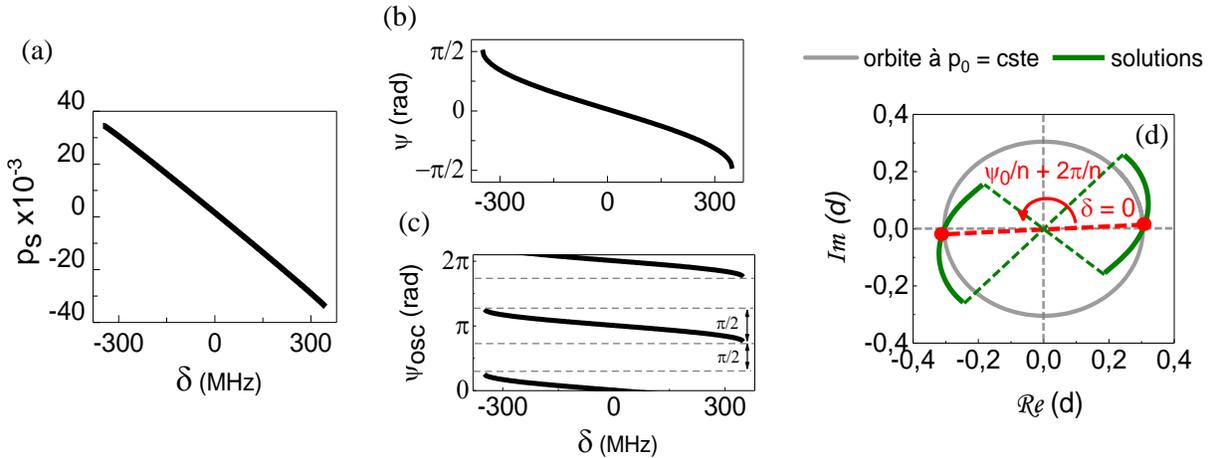


Figure 3.8. Solutions stationnaires données par (3.59) dans le cas du forçage à l'ordre 2 du couple $\mathbf{m} \times \mathbf{u}_x$ par un champ RF : (a) $p_s(\delta)$, (b) $\psi(\delta)$ et (c) $\psi_{osc}(\delta) = \psi(\delta)/2$. Expression du forçage en variable \mathbf{m} : $\mathcal{F}(\mathbf{m}, t) = -(\frac{10^3}{4\pi})\gamma'_0 \rho_x \mathbf{m} \times \mathbf{H}_g(t)$ avec $\mathbf{H}_g(t) = H_g \mathbf{u}_x \cos(\phi_g(t))$. Conditions d'opération : $p_0 = 0,093$ ($J_{dc} = -400 \times 10^9$ A/m²), $H_g = 2,5$ Oe, $\rho_x = 1$. Propriétés de synchronisation : $\Delta\Omega = 349$ MHz, $\Delta\Pi = 0,0347$, $\psi_0 = 2,6^\circ$ et $\psi_p = 272,6^\circ$. (d) Solutions stationnaires représentées dans le plan complexe d . Même conditions d'opération.

La Figure 3.8 (c) montre le déphasage par rapport à l'oscillateur ψ_{osc} . La phase est définie sur deux segments de longueur et d'espacement $\pi/n = \pi/2$ rad. Le nombre de segments est donné par le ratio de synchronisation. Ainsi à l'ordre 1, les déphasages ψ et ψ_{osc} sont confondus mais pas aux ordres supérieurs. Cette différence est essentielle à comprendre car, expérimentalement, c'est le déphasage ψ_{osc} qui est étudié et non ψ .

Alternativement, la Figure 3.8 (d) montre la même solution analytique, représentée cette fois dans le plan complexe $d(t) = \sqrt{p} e^{j\psi_{osc}(t)}$. A l'ordre 1, la solution est un unique segment d'ouverture π , tandis qu'à l'ordre 2, la solution est découpée en deux segments d'ouverture $\pi/2$. Un inconvénient immédiat de la synchronisation harmonique, par exemple pour la conception de système déphaseur, est d'avoir des solutions ψ_{osc} morcelées dans $[0, 2\pi]$, ce qui limite la gamme de continuité du déphasage à π/n .

3.3. Etude générale des forçages

Le but est de décrire le plus généralement les propriétés des solutions (3.40) et (3.46). D'abord, les gammes $\Delta\Omega$, $\Delta\Pi$ sont normalisées en des sensibilités intrinsèques Cl_Ω , Cl_Π , plus adaptées à l'étude. Ensuite, les propriétés : Cl_Ω , Cl_Π , ψ_0 , ψ_p sont successivement étudiées en fonction des paramètres : g , σ et v . L'étude montre que selon les conditions, le comportement de la synchronisation est plus ou moins

dominé par la non linéarité ($|v| \gg 1$) ou le forçage ($|v| \approx 1$). Enfin grâce à ses sensibilités intrinsèques, l'étude montre qu'il existe des conditions (forçage + non linéarité) qui conduisent à des propriétés remarquables tel que simultanément $Cl_{\Pi} = 0$, $Cl_{\Omega} \neq 0$ ou bien $Cl_{\Pi} \neq 0$, $Cl_{\Omega} = 0$. Ces résultats spécifiques seront approfondis dans la partie 3.4 suivante.

Remarque : Pour l'étude, les paramètres de forçages vérifient : $g \in [0, 1]$, $\sigma \in [0, \pi[$, $\theta = 0$ et $r=1$ (c.a.d. $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$). La non linéarité v peut être quelconque.

3.3.1. Sensibilités de couplage intrinsèques

Nous cherchons à décrire la capacité de synchronisation du système (c.à.d. les gammes $\Delta\Omega$, $\Delta\Pi$) avec le minimum de paramètres utiles. Tout d'abord, l'angle θ n'intervient pas, donc il peut être ignoré (dans la suite $\theta = 0$). Par ailleurs, les gammes $\Delta\Omega$ $\Delta\Pi$ dépendent linéairement des amplitudes du signal générateur a_g et du forçage r , donc ces dépendances peuvent être normalisées. En revanche, les gammes dépendent irréductiblement de fonctions plus compliquées dépendant seulement de g , σ et v . Ces fonctions sont appelées les sensibilités intrinsèques. Nous allons les étudier et montrer qu'elles offrent de nouvelles possibilités de synchronisation.

3.3.1.1. Définitions

La première étape consiste à exprimer les gammes de synchronisation $\Delta\Omega$ et de puissance $\Delta\Pi$ en fonction des paramètres : r , g , σ et v .

D'abord, nous commençons par $\Delta\Omega$. L'expression (3.41) peut se réécrire :

$$\Delta\Omega = \frac{(\sqrt{2}/2) n a_g a_v \varepsilon_0 \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}}{\sqrt{2}/2} \sqrt{\frac{(\varepsilon_2 \cos(\sigma + \psi_v))^2 + (\varepsilon_1 \sin(\sigma + \psi_v))^2}{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}} \quad (3.60)$$

Soit :

$$\Delta\Omega = \frac{(\sqrt{2}/2) n a_g a_v \varepsilon_0 \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}}{\sqrt{2}/2} \sqrt{\frac{\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \cos(\sigma + \psi_v)\right)^2 + \sin^2(\sigma + \psi_v)}{1 + \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)^2}} \quad (3.61)$$

En introduisant l'amplitude r du forçage définit en (3.17), l'expression devient :

$$\Delta\Omega = \sqrt{2} n a_g r a_v \sqrt{\frac{\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \cos(\sigma + \psi_v)\right)^2 + \sin^2(\sigma + \psi_v)}{1 + \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)^2}} \quad (3.62)$$

Puis en remplaçant le ratio $\varepsilon_2/\varepsilon_1$ par $(1-g)/(1+g)$, on obtient l'expression finale :

$$\Delta\Omega = \sqrt{2} n a_g r a_v \sqrt{\frac{(1-g)^2 \cos^2(\sigma + \psi_v) + (1+g)^2 \sin^2(\sigma + \psi_v)}{2(1+g^2)}} \quad (3.63)$$

La gamme $\Delta\Pi$ (3.47) se transforme de la même façon, ce qui donne dans ce cas :

$$\Delta\Pi = \frac{\sqrt{2} a_g r p_0}{\Gamma_p} \sqrt{\frac{(1+g)^2 \cos^2(\sigma) + (1-g)^2 \sin^2(\sigma)}{2(1+g^2)}} \quad (3.64)$$

D'après les expressions (3.63) et (3.64), les gammes sont avant tout linéaires avec les amplitudes du signal générateur et du forçage. Ces dépendances sont intuitives, notamment la dernière, car un forçage plus fort conduit forcément à une synchronisation plus forte. Par ailleurs, elles dépendent aussi de facteurs d'expressions plus compliquées, déterminées seulement par g et σ pour $\Delta\Pi$ et g , σ et v pour $\Delta\Omega$. Ces facteurs traduisent, en quelque sorte, une dépendance plus fondamentale liée à la forme du forçage, indépendamment de tout facteur d'échelle. Nous les définissons de la façon suivante :

Définition 3.6 : Soient la sensibilité de couplage intrinsèque en fréquence définie par :

$$CI_\Omega = a_v \sqrt{\frac{(1-g)^2 \cos^2(\sigma + \psi_v) + (1+g)^2 \sin^2(\sigma + \psi_v)}{2(1+g^2)}} \quad (3.65)$$

Et de puissance²⁶ par :

$$CI_\Pi = \sqrt{\frac{(1+g)^2 \cos^2(\sigma) + (1-g)^2 \sin^2(\sigma)}{2(1+g^2)}} \quad (3.66)$$

Dans certains cas de forçage, ces sensibilités peuvent prendre des expressions très simples. Par exemple dans le cas du forçage circulaire, CI_Ω vaut a_v tandis que CI_Π vaut simplement $\sqrt{2}/2$. De façon générale, elles présentent un grand intérêt car elles offrent des degrés de liberté supplémentaires aux gammes $\Delta\Omega$ et $\Delta\Pi$. Par exemple, il devient possible de concevoir des forçages, autre que le forçage nul (absence de forçage $a_g = 0$), qui produisent une synchronisation nulle. Dans ce cas, ce forçage hypothétique est défini par une contrainte sur g , σ et v . Autre exemple, il devient possible de concevoir des forçages dont la

²⁶ Le facteur linéaire Γ_p/p_0 vaut +1 pour faciliter les calculs.

variation de la puissance synchronisée est nulle tout en ayant une synchronisation non nulle (c.a.d. $Cl_{\Pi} \neq 0$ et $Cl_{\Omega} = 0$). Cela pourrait avoir des applications pratiques car la variation de la puissance en état synchronisé est un problème pour la conception de systèmes électroniques.

De telles situations sont en revanche totalement impossibles à faire si l'on se restreint à des forçages trop simples, comme le forçage circulaire. En particulier, la seule possibilité qu'il offre est $\Delta\Omega = \Delta\Pi = 0$ en l'absence de forçage ($a_g = 0$), ce qui n'est pas très intéressant. Par conséquent, l'existence de ces sensibilités permet de créer des situations de synchronisation inédites, en jouant avec les paramètres g , σ et ν de forçages quelconques. C'est pourquoi ces sensibilités vont désormais focaliser l'attention.

On peut étudier les symétries des sensibilités intrinsèques. D'abord, comme Cl_{Ω} est la translatée de Cl_{Π} de $\sigma = \pi/2 + \psi_{\nu}$, à un facteur multiplicatif près, les symétries de Cl_{Ω} et Cl_{Π} peuvent être étudiées ensemble. En premier, les fonctions sont 2π -périodiques avec σ , ce qui exprime la symétrie avec une rotation complète du forçage. Plus encore, les fonctions sont π -périodiques, exprimant la symétrie plus forte d'un simple retournement. Enfin, si $\mathcal{F}+$ et $\mathcal{F}-$ sont deux forçages de sens de rotation contraires alors leurs ellipticités vérifient $g_{+}=1/g_{-}$, or les expressions sont aussi symétriques par le changement de rotation car $Cl(1/g, \sigma) = Cl(g, \sigma)$. Par conséquent, les sensibilités intrinsèques Cl_{Ω} et Cl_{Π} peuvent être étudiées sur $g \in [0, 1]$ et $\sigma \in [0, \pi]$, sans perte d'information. La section suivante étudie leurs variations.

3.3.1.2. Etude graphique de Cl_{Ω}

La Figure 3.9 représente Cl_{Ω} pour différentes valeurs de ν sur les intervalles $g \in [0, 1]$ et $\sigma \in [0, \pi]$.

Les différentes sensibilités Cl_{Ω} à $\nu \neq 0$ s'obtiennent à partir de Cl_{Ω} à $\nu = 0$ en translatant σ de ψ_{ν} puis en l'amplifiant de a_{ν} , voir expression (3.65). A ν fixée, il y a deux régions distinctes à étudier selon la valeur de g . D'abord, lorsque le forçage est circulaire ($g = 0$), Cl_{Ω} est constant avec σ car aucune direction n'est privilégiée. La constante vaut alors $Cl_{\Omega} = \sqrt{2(1 + \nu^2)}/2$. En revanche lorsque $g \neq 0$, Cl_{Ω} est π -périodique avec σ .

Lorsque $\nu \neq 0$, voir Figure 3.9 (a,b,d,e), il existe des circulations pour lesquelles la non linéarité affaiblit le forçage original, en $\sigma = -\psi_{\nu} + [\pi]$ (zone bleue), voire annule complètement la synchronisation à la limite d'un forçage rectiligne ($|g| = 1$). Cela montre au passage que la non linéarité n'augmente pas toujours la gamme de synchronisation. A l'opposé, il existe des circulations pour lesquelles la non linéarité augmente le forçage, comme en $\sigma = \pi/2 - \psi_{\nu} + [\pi]$ (zone rouge) de valeur $Cl_{\Pi} = \sqrt{(1 + \nu^2)}$. Dans le cas particulier où $\nu = 0$, voir Figure 3.9 (c,f), les variations de Cl_{Ω} ne sont dues qu'à la variation de la partie imaginaire du forçage. Les circulations à Cl_{Ω} minimum sont celles en $\sigma = 0 + [\pi]$, tandis que les circulations à Cl_{Ω} maximum sont celles en $\sigma = \pi/2 + [\pi]$. Dans ce cas précis, l'amplitude de Cl_{Ω} n'est due qu'au forçage.

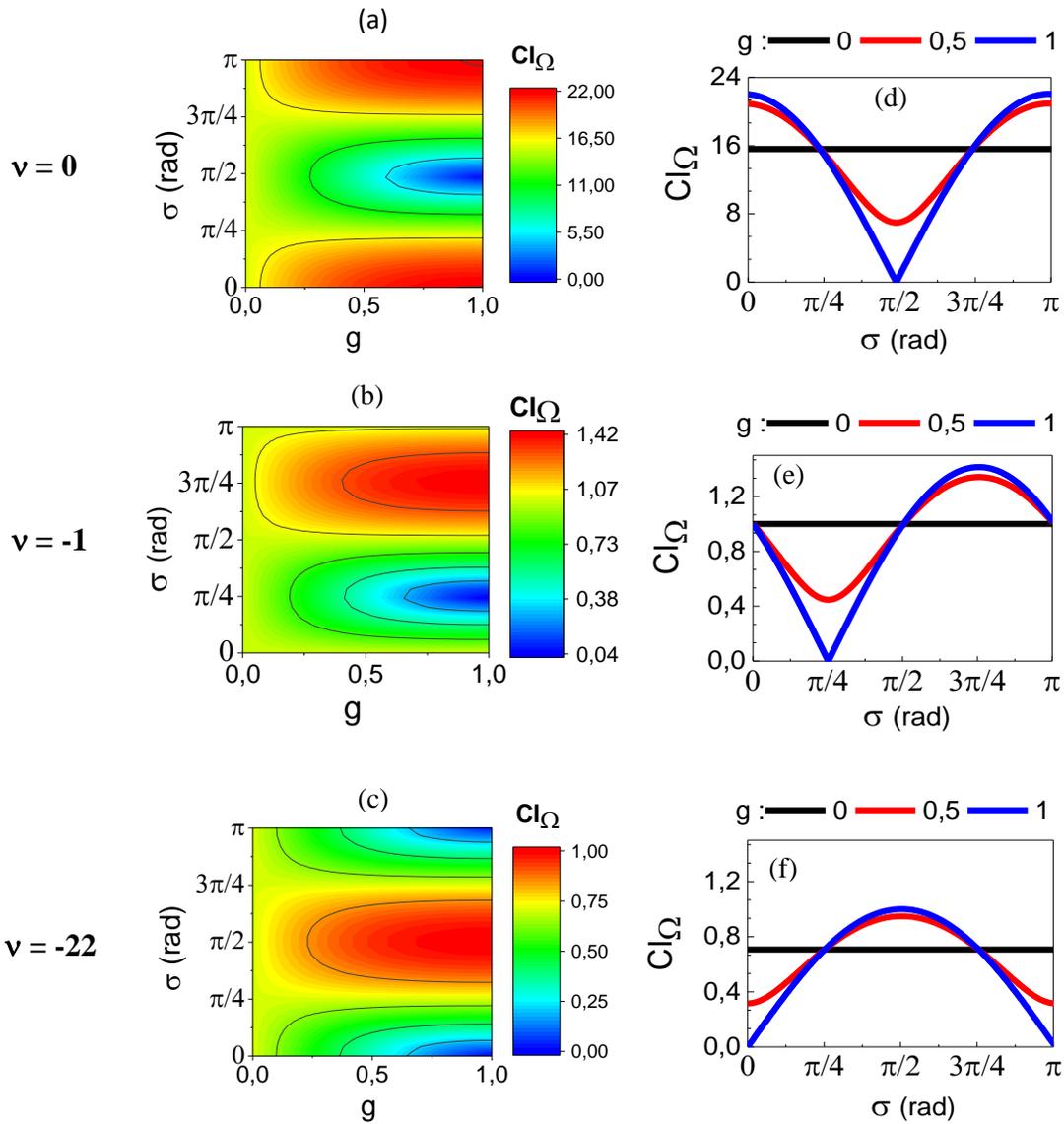


Figure 3.9. Représentation de $Cl_{\Omega}(\sigma, g)$ pour : (a) $\nu \approx -22$ (cas de l'oscillateur planaire avec $p_0 = 0,092$, $J_{dc} = -400.10^9$ A/m², $\xi = 1,06$), (b) $\nu = -1$, (c) $\nu = 0$ Courbes $Cl_{\Omega}(\sigma)$ avec trois valeurs de $g = 0; 0,5; 1$ pour : (d) $\nu \approx -22$, (e) $\nu = -1$, (f) $\nu = 0$.

Toutes ces variations de Cl_Ω s'interprètent intuitivement grâce à l'analogie géométrique de la section 3.2.3.2. En effet lorsque σ change, le forçage \mathcal{F} « tourne » dans le plan complexe ce qui modifie la partie imaginaire de $z_v \mathcal{F}$ et donc de Cl_Ω .

3.3.1.3. Etude graphique de Cl_Π

La Figure 3.10 suivante montre Cl_Π en fonction de g et σ .

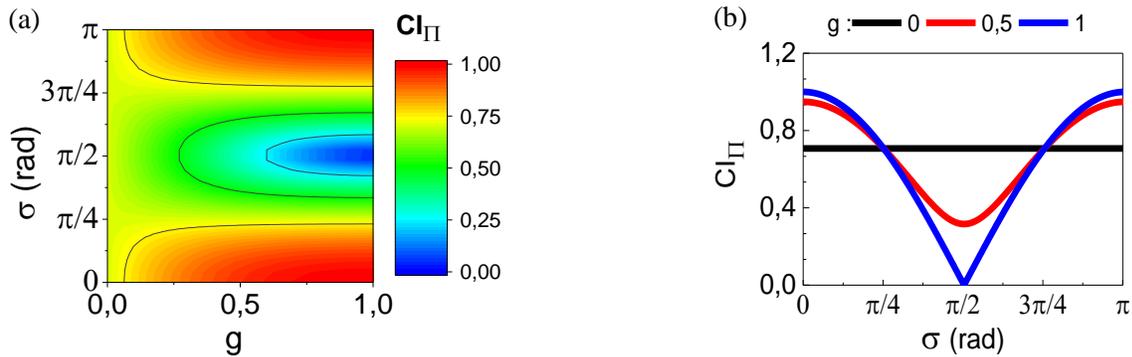


Figure 3.10. (a) Représentation de $Cl_\Pi(\sigma, g)$. (b) Courbes de $Cl_\Pi(\sigma)$ avec trois valeurs de $g = 0 ; 0,5 ; 1$.

L'étude de la fonction Cl_Π est plus simple que celle de Cl_Ω car elle ne dépend pas de v , Figure 3.10. La fonction traduit les variations de la partie réelle du forçage \mathcal{F} avec g et σ . Si $g = 0$, alors la fonction est constante car, encore une fois, aucune orientation n'est privilégiée. La constante vaut ici $Cl_\Pi = \sqrt{2}/2$. Si $g \neq 0$, Cl_Π varie π -périodiquement avec σ . En particulier, le minimum est atteint quand la circulation vaut $\sigma = \pi/2 + [\pi]$ et le maximum lorsque $\sigma = 0 + [\pi]$. On peut voir aussi que les fonctions Cl_Π et Cl_Ω ont une allure similaire quand $v \gg 1$. En effet $\psi_v \approx -\pi/2$ et les deux expressions se rejoignent, voir (3.65) et (3.66).

En réalité, les fonctions Cl_Ω et Cl_Π sont translatées l'une de l'autre d'un facteur $\sigma = \pi/2 + \psi_v$, qui est en général différent de 0. Cela implique que les zéros des sensibilités ne sont pas confondus, voir par exemple Figure 3.10 (b) et Figure 3.9 (d,e,f). Cette différence est essentielle car elle est à l'origine de forçages particuliers à la limite rectiligne. Par exemple, le forçage rectiligne tel que $(g, \sigma) = (+1, \pi/2)$ possède la propriété $Cl_\Pi = 0$ et $Cl_\Omega \neq 0$. A l'inverse, le forçage rectiligne tel que $(g, \sigma) = (+1, -\psi_v)$ possède la propriété $Cl_\Pi \neq 0$ et $Cl_\Omega = 0$. Autrement dit, il génère une synchronisation nulle tout en étant non nul. Ce phénomène est caractéristique du système dynamique (3.26) et se produit de façon générale quelque soit v (même si $v = 0$).

3.3.2. Déphasage additionnel ψ_0

3.3.2.1. Expressions en fonction de g , σ et ν

Parmi les propriétés de synchronisation, ψ_0 est la seule à dépendre de θ , en plus de g , σ et ν . Cependant comme l'angle θ est un simple facteur additif, il est tout aussi intéressant d'étudier la fonction partielle $\psi_0(g, \sigma, \nu)$ à $\theta = 0$. Son expression s'obtient à partir de (3.42) :

$$\psi_0 = -\arctan\left(\frac{(1+g)(\nu + \tan(\sigma))}{(1-g)(1-\nu \tan(\sigma))}\right) + \begin{cases} \pi & \text{si } \cos(\sigma + \psi_\nu) > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.67)$$

Au niveau des symétries, la fonction est 2π -périodique selon σ mais pas π -périodique à cause de la dépendance avec le signe de $\cos(\sigma + \psi_\nu)$.

3.3.2.2. Etude graphique

Le déphasage ψ_0 est représenté à la Figure 3.11 dans le cas de l'oscillateur planaire $\nu = -22$, sur les intervalles $g \in [0, 1]$ et $\sigma \in [0, 2\pi]$.

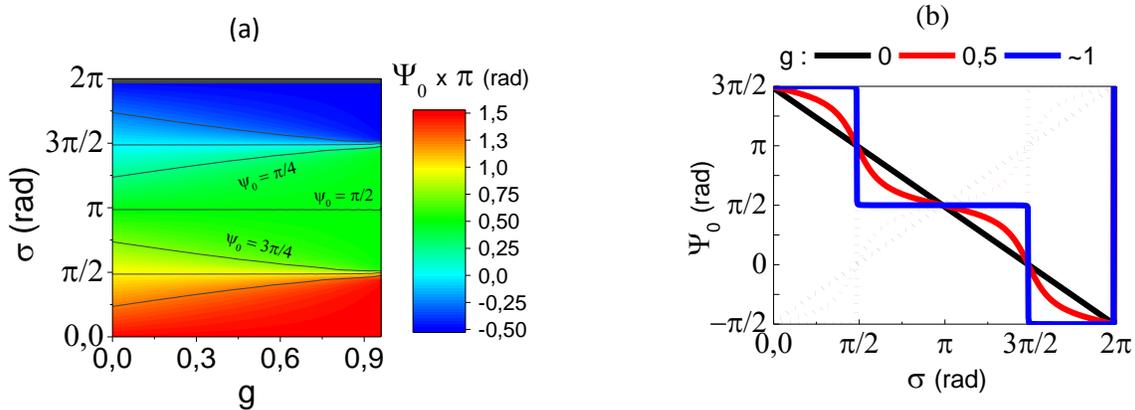


Figure 3.11. Représentation de $\psi_0(\sigma, g)$. La non linéarité est fixée à $\nu(p_0) \approx -22$ avec $p_0 = 0,092$ ($J_{dc} = -400 \cdot 10^9$ A/m², $\xi = 1,06$). (a) fonction $\psi_0(\sigma, g)$ (b) Courbes de $\psi_0(\sigma)$ pour trois valeurs de $g = 0; 0,5; 1$, en pointillé mêmes courbes pour un forçage de sens contraire.

La fonction ψ_0 se comporte différemment selon la valeur de g . Quand le forçage est circulaire ($g = 0$), le déphasage varie linéairement, de pente -1, selon la circulation σ , Figure 3.11 (b). Par contre, lorsque $|g|$ augmente, le déphasage, toujours décroissant, se met à onduler selon σ à une fréquence de π . Les ondulations deviennent de plus en plus fortes, jusqu'à la limite d'un forçage rectiligne $|g| = 1$ où la fonction tend vers des « marches d'escalier ».

Les Figure 3.11 (a,b) montrent que ψ_0 parcourt un angle de 2π quand σ parcourt aussi 2π . Cela est utile à savoir, par exemple dans le cas où l'oscillateur se synchronise à un champ RF dont la direction balaie le plan $(\mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z)$. Dans ce cas, les paramètres du forçage (r, g, σ et θ) deviennent paramétrés par la direction du champ RF. Si la direction change de 2π alors σ change aussi de 2π et donc ψ_0 aussi.

3.3.3. Déphasage de puissance ψ_p

3.3.3.1. Expressions en fonction de g, σ et ν

Le déphasage de puissance $\psi_p(g, \sigma, \nu)$ s'obtient aussi à partir de son expression (3.48), voir annexe 3.6.2 pour le détail du calcul :

$$\psi_p = \arctan\left(\frac{2g \sin(2\sigma) + \nu((1+g)^2 \cos^2(\sigma) + (1-g)^2 \sin^2(\sigma))}{(1-g^2)}\right) \quad (3.68)$$

En particulier, les fonctions $\sin(2x)$, $\cos^2(x)$ et $\sin^2(x)$ sont π -périodiques avec σ , donc ψ_p l'est aussi. L'étude précise des signes et des zéros de la fonction est donnée à l'annexe 3.6.3.

Le comportement du déphasage ψ_p est illustré à la Figure 3.12, dans le cas où $\nu = -1$ sur les intervalles $g \in [0, 1]$ et $\sigma \in [0, \pi]$.

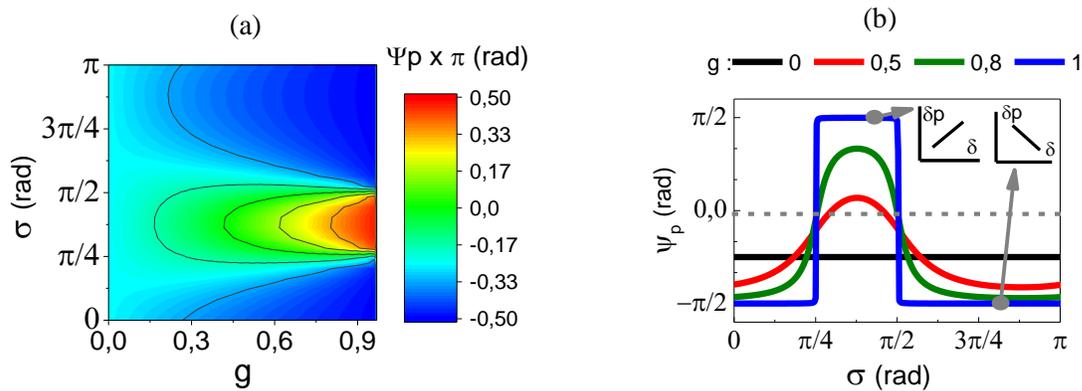


Figure 3.12. Représentation de ψ_p à $\nu = -1$. (a) fonction $\psi_p(\sigma, g)$, (b) Courbes de $\psi_p(\sigma)$ pour $g = 0; 0,5; 0,8$ et 1 . En encart, allure de δp pour $g = 0,8$.

Dans le cas circulaire, ψ_p est constant avec σ , par exemple si $\nu = -1$, $\psi_p = \arctan(\nu) = -\pi/4$, voir Figure 3.12 (b). En revanche, le comportement change radicalement lorsque le forçage ne l'est pas. La Figure 3.12 (b) montre que la fonction augmente fortement dans l'intervalle $\sigma =]\pi/4, \pi/2[$. Si g est suffisamment fort, comme $|g| = +0,5, +0,8$ ou $+1$, ψ_p peut même changer de signe²⁷. Ce changement

²⁷ Les zéros de ψ_p sont donnés par les zéros de N .

provoque une inversion du signe de la pente de la puissance synchronisée p_s à l'intérieur de la gamme de synchronisation, voir l'encart à la Figure 3.12 (b). Comme ν est négatif, on s'attend à ce que la pente de p_s soit négative aussi, or dans cet intervalle, p_s varie positivement car $\psi_p > 0$. Cela montre que certaines combinaisons de ν, g, σ génèrent des changements inattendus dans p_s .

3.3.3.2. Etude graphique à forte non linéarité

En revanche lorsque $|\nu| \gg 1$, l'étude est plus simple car l'expression ψ_p se simplifie en :

$$\psi_p \approx \arctan\left(\nu \left(\frac{(1+g)^2 \cos^2(\sigma) + (1-g)^2 \sin^2(\sigma)}{1-g^2}\right)\right) \tag{3.69}$$

La Figure 3.13 montre ψ_p dans le cas où $\nu = -22$.

De façon générale, ψ_p est approximativement constant de valeur $-\pi/2$, dans une vaste région du plan (g, σ) , voir Figure 3.13 (a). Cependant quand le forçage est rectiligne tel que $\sigma = \pi/2$, ψ_p augmente fortement jusqu'à même changer de signe, voir Figure 3.13 (b). Sauf que contrairement à la Figure 3.12 (b) où $\nu = -1$, l'intervalle est ici très réduit. Il est donc plus difficile d'observer le phénomène de retournement de la variation de δp . Ailleurs, ψ_p se prolonge naturellement en $+\pi/2$ si $\nu \gg 1$ et $-\pi/2$ si $\nu \ll -1$. Cela veut dire donc que p_s est principalement linéaire si $|\nu| \gg 1$.

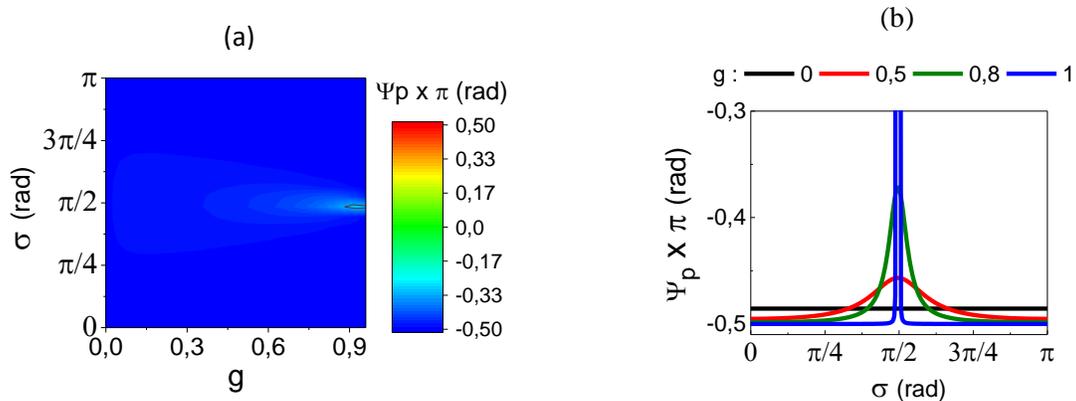


Figure 3.13. Représentation de ψ_p à $\nu = -22$. (a) fonction $\psi_p(\sigma, g)$, (b) Courbes de $\psi_p(\sigma)$ pour $g = 0; 0,5; 0,8$ et 1 .

La dernière section est consacrée au rapport de sensibilité défini comme le ratio de Cl_Ω par Cl_Π .

3.3.4. Le rapport de sensibilité

En régime libre, la non linéarité de l'oscillateur induit la variation de la puissance lorsque la fréquence change. En régime synchronisé, la puissance peut aussi varier à l'intérieur de la gamme de synchronisation, cependant l'origine n'est pas la même car elle est causée à la fois par la nature du

forçage et par la non linéarité. Par exemple, il existe des situations spéciales de forçage où la puissance est indépendante de la fréquence. Néanmoins, par analogie avec le régime libre, il est possible de bâtir une fonction R , appelé rapport de sensibilité, qui jouera le même rôle que la non linéarité statique N mais dans le régime synchronisé. Par ailleurs, la valeur N peut servir d'étalon pour ce rapport. C'est pourquoi nous définissons aussi un rapport normalisé R/N plus significatif.

Définition 3.7 : Les rapports de sensibilité R et normalisé R_n sont définis par :

$$R = \frac{\Delta\Omega}{\Delta\Pi} = \left(\frac{\Gamma_p}{p_0}\right) \frac{CI_\Omega}{CI_\Pi} \text{ et } R_n = \frac{R}{|N|} \quad (3.70)$$

R et R_n sont toujours positifs.

R_n peut s'exprimer en fonction de g , σ et ν à partir des expressions de CI_Ω (3.65) et CI_Π (3.66), c'est-à-dire :

$$R_n = \frac{\sqrt{1+\nu^2}}{\nu} \sqrt{\frac{(1-g)^2 \cos^2(\theta + \psi_\nu) + (1+g)^2 \sin^2(\theta + \psi_\nu)}{(1+g)^2 \cos^2(\theta) + (1-g)^2 \sin^2(\theta)}} \quad (3.71)$$

Ce qui se réécrit en :

$$R_n = \sqrt{1 + \frac{4g \sin(2\theta)}{\nu (1+g)^2 \cos^2(\theta) + (1-g)^2 \sin^2(\theta)} + \frac{1}{\nu^2} \frac{(1-g)^2 \cos^2(\theta) + (1+g)^2 \sin^2(\theta)}{(1+g)^2 \cos^2(\theta) + (1-g)^2 \sin^2(\theta)}} \quad (3.72)$$

Les symétries de R_n sont les mêmes que celles des sensibilités CI_Ω et CI_Π .

Cependant, R_n n'est pas interprétable en toutes conditions comme peut l'être CI_Ω ou CI_Π . Par exemple quand $|\nu| \approx 1$, ψ_p n'est pas voisin de $\pm\pi/2$. Par conséquent, la puissance synchronisée n'est pas linéaire avec la fréquence et donc R_n ne traduit pas un taux de croissance. En revanche lorsque $|\nu| \gg 1$, ψ_p vaut approximativement $\pm\pi/2$. Dans ce cas, p_s est quasi linéaire avec la fréquence et R_n peut être interprété. En faisant $|\nu| \gg 1$ dans l'expression (3.72), $R_n \rightarrow 1$. Ainsi, le taux de variation en régime synchronisé est voisin de celui du régime libre.

○ *En résumé :*

Dans cette partie, l'ensemble des propriétés de synchronisation données par les solutions stationnaires (3.40) et (3.46) ont été balayées. Le comportement de la synchronisation est un équilibre entre la non linéarité et le forçage, qui se peut se résumer en deux points :

1) Dans le cas où la non linéarité est faible ($|\nu| \approx 1$), la synchronisation est dominée par le forçage. En général, les sensibilités intrinsèques CI_Ω , CI_Π , sont plus faibles, de l'ordre de 1, tandis que la

puissance synchronisée $\delta p(\delta)$ change de façon inattendue (signe de pente contraire à la non linéarité).

- 2) A l'inverse quand $|v| \gg 1$, la synchronisation est dominée la non linéarité. Les sensibilités sont de l'ordre de v et la puissance $p_s(\delta)$ devient quasi-linéaire avec la fréquence ($\psi_p \approx \pi/2 + k\pi$, $R_n \approx 1$), quel que soit le forçage.

Enfin, l'étude montre que certains forçages rectilignes génèrent des propriétés remarquables telles que simultanément $Cl_{\Pi} = 0$, $Cl_{\Omega} \neq 0$ ou bien $Cl_{\Pi} \neq 0$, $Cl_{\Omega} = 0$, sans que le forçage soit nul. Ces propriétés justifient l'importance des sensibilités intrinsèques, comme contributions fondamentales aux gammes $\Delta\Omega$ et $\Delta\Pi$. En particulier, le cas $Cl_{\Pi} = 0$ peut être intéressant à utiliser pour des applications électroniques car la synchronisation ne produit pas de changement de puissance. Ces forçages spécifiques sont étudiés plus en détail dans la partie suivante.

3.4. Etude des forçages rectilignes

Cette dernière partie est consacrée à l'étude des forçages rectilignes (notés \mathcal{R}). Ces forçages vérifient $g = 1$ et s'expriment en toute généralité par : $\mathcal{R} \propto e^{j\sigma} \cos(\psi + \theta)$. En 3.4.1, on commence par discuter les forçages spécifiques qui annulent l'une de leurs sensibilités Cl_{Ω} ou Cl_{Π} . Ensuite en 3.4.2, on expose les propriétés générales de la puissance synchronisée et enfin en 3.4.3, on développe une technique d'approximation des forçages lorsque $|v| \gg 1$.

Les forçages qui vont jouer un rôle important dans l'étude sont définis ci-dessous :

Définition 3.8 :		
Nom des forçages	Expressions	
à synchronisation nulle	$\mathcal{RW}_- = \pm e^{j\psi} \cos(\psi)$	(3.73)
à synchronisation maximale	$\mathcal{RW}_+ = \pm j e^{j\psi} \cos(\psi)$	(3.74)
à valeurs imaginaires (ou à puissance nulle)	$\mathcal{RP}_- = \pm j \cos(\psi)$	(3.75)
à valeurs réelles (ou à puissance maximale)	$\mathcal{RP}_+ = \pm \cos(\psi)$	(3.76)

Ces forçages diffèrent par la valeur de la circularité. Leurs propriétés sont détaillées dans les sections suivantes.

3.4.1. Forçages à sensibilités extrêmes

L'étude des sensibilités menée à la section 3.3.1 a montré que la synchronisation des forçages rectilignes peut conduire à des propriétés extrêmes. En particulier, certains peuvent annuler $Cl_{\Omega} = 0$ tandis que d'autres annulent $Cl_{\Pi} = 0$. De telles situations sont possibles parce que le système dynamique (3.32) a deux degrés de libertés, le déphasage et la puissance, ce qui laisse plus de choix pour définir les forçages.

3.4.1.1. Forçages \mathcal{RW}_- , \mathcal{RW}_+

On reprend l'analogie géométrique présentée à la section 3.2.3.2. La sensibilité Cl_{Ω} est déterminée par la partie imaginaire du forçage rectifié $F_v = z_v F$. Il se peut alors que F compense exactement z_v de sorte que Cl_{Ω} s'annule. C'est précisément le cas du forçage \mathcal{RW}_- à synchronisation nulle (définition 3.8).

En effet, si on reprend la définition 3.6 avec $g = 1$ et $\sigma = \psi_v$, il vient :

$$Cl_{\Omega}[\mathcal{RW}_-] = a_v \frac{0}{2} = 0 \quad (3.77)$$

On peut le voir aussi en faisant :

$$\mathcal{I}m(\mathcal{RW}_- e^{j\psi_v}) = \mathcal{I}m(\cos(\psi) e^{-j\psi_v} e^{j\psi_v}) = 0 \quad (3.78)$$

Dans ce cas, la gamme de synchronisation est nulle. Cela fonctionne pour ce forçage et plus généralement pour tous ceux qui lui sont proportionnels. Ce phénomène n'est pas lié à v car il se produit même si $v = 0$ ou $|v| \gg 1$. Cela se produit parce que le forçage peut être défini sur les deux degrés de liberté offerts par le système dynamique.

A l'inverse, il y a les forçages \mathcal{RW}_+ , qui maximisent leurs sensibilités intrinsèques Cl_{Ω} . Cependant, cette propriété a moins d'intérêts pratiques que celle de la minimisation. La raison est la suivante : comme la gamme de synchronisation $\Delta\Omega$ dépend aussi des amplitudes du forçage et du signal générateur, il suffit alors d'augmenter les amplitudes sans changer la sensibilité Cl_{Ω} pour pouvoir augmenter $\Delta\Omega$. Par conséquent maximiser la sensibilité Cl_{Ω} n'est pas significatif pour déterminer les valeurs de $\Delta\Omega$, $\Delta\Pi$. Pour cela, le forçage \mathcal{RW}_+ peut jouer plus un rôle de « repère »²⁸.

²⁸ La même remarque générale s'applique pour les forçages \mathcal{RP}_- et \mathcal{RP}_+ . Excepté que le forçage \mathcal{RP}_+ va être intéressant à étudier pour d'autres raisons, en lien avec ses propriétés de synchronisation de puissance.

3.4.1.2. Forçage \mathcal{RP}_-

Les forçages tels que $CI_{\Pi} = 0$ sont plus simples à définir que leurs homologues à $CI_{\Omega} = 0$, car CI_{Π} ne dépend que de la partie réelle de \mathcal{F} et non de v . Pour que $CI_{\Pi} = 0$, il faut que $\Re(\mathcal{F}) = 0$, c'est-à-dire que \mathcal{F} soit le forçage à valeurs imaginaires \mathcal{RP}_- (définition 3.8).

En effet, la définition 3.6 avec $g = 1$ et $\sigma = \pi/2$ donne effectivement :

$$CI_{\Pi}[\mathcal{RP}_-] = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{0}{\sqrt{1+g^2}} = 0 \tag{3.79}$$

Ou de façon plus simple :

$$\Re(\mathcal{RP}_-) = 0 \tag{3.80}$$

Le forçage à valeurs imaginaires \mathcal{RP}_- ne peut agir que sur l'équation de phase du système dynamique (3.32). Ainsi, cela ne génère aucune influence sur la puissance synchronisée. Il est donc possible, en théorie, de synchroniser tout auto-oscillateur qu'il soit linéaire ou non sans faire varier la puissance. La seule condition est de pouvoir générer ce type de forçage.

Ses propriétés et solutions stationnaires sont calculées ci-dessous. Soit le forçage \mathcal{RP}_- défini par :

$$\mathcal{F}(p, \psi) = a_g j r(p) \cos(\psi - \theta(p)) \tag{3.81}$$

$a_g > 0$ est l'amplitude du signal générateur, $r(p) > 0$ et $\theta(p) \in [0, 2\pi]$ l'amplitude et l'orientation du forçage. Les demi-axes du forçage valent : $\varepsilon_1 = 0$ et $\varepsilon_2 = 1$.

Dans ce cas, les propriétés valent :

Propriétés :	Expressions :	
$\Delta\Omega$	$n a_g r$	(3.82)
ψ_0	$\theta + \frac{\pi}{2}$	(3.83)
$\Delta\Pi$	0	(3.84)
ψ_p	0	(3.85)

Tableau 3.3. Propriétés de synchronisation du forçage à valeurs imaginaires.

Et les solutions stationnaires :

Propriété 3.5 : Les solutions stationnaires du forçage \mathcal{RP}_- : $\mathcal{F}(p, \psi) = a_g j r(p) \cos(\psi - \theta(p))$ sont :

$$\begin{cases} \psi = \arcsin\left(-\frac{\delta}{\Delta\Omega}\right) + \frac{\pi}{2} + \theta + 2m\pi, & m \in \mathbb{Z} \\ p_s = 0 \end{cases} \quad (3.86)$$

Avec : $\Delta\Omega$ donnée par (3.82).

D'un point de vue applicatif, la variation nulle de p_s ($CI_{\Pi} = 0$) est intéressante car elle peut être une source de problèmes pour les systèmes électroniques. Néanmoins, un désavantage est qu'aux fortes non linéarités, la gamme de synchronisation est fortement réduite car le terme Np_s ne contribue plus à la synchronisation. Cela se voit dans l'expression de $\Delta\Omega$ (3.82) qui est indépendante de v .

3.4.1.3. Forçage \mathcal{RP}_+

Enfin, il y a le forçage \mathcal{RP}_+ , celui qui maximise la sensibilité intrinsèque de puissance CI_{Π} . A l'inverse du forçage \mathcal{RP}_- , il est à valeurs réelles et donc ne contribue que sur l'équation de puissance du système dynamique (3.32). Ce forçage possède des caractéristiques de puissance synchronisée remarquables. Pour le voir, nous développons ses propriétés et solutions stationnaires, comme au cas précédent.

Soit alors le forçage définit par :

$$\mathcal{F}(p, \psi) = a_g r(p) \cos(\psi - \theta(p)) \quad (3.87)$$

Mêmes notations que précédemment. Ici les demi-axes du forçage valent : $\varepsilon_1 = 1$ et $\varepsilon_2 = 0$.

On obtient d'abord les propriétés :

Propriétés :	Expressions :	
$\Delta\Omega$	$n a_g r v $	(3.88)
ψ_0	$\text{sgn}(N) \frac{\pi}{2} + \theta$	(3.89)
$\Delta\Pi$	$\frac{a_g r p_0 CI_{\Pi}}{\Gamma_p} = \frac{a_g r p_0}{\Gamma_p}$	(3.90)
ψ_p	$\text{sgn}(N) \frac{\pi}{2}$	(3.91)

Tableau 3.4. Propriétés de synchronisation du forçage à valeurs réelles.

Puis les solutions stationnaires :

Propriété 3.6 : Les solutions stationnaires du forçage $\mathcal{RP}_+ : \mathbb{F}(p, \psi) = a_g r(p) \cos(\psi - \theta(p))$ sont :

$$\begin{cases} \psi = \arcsin\left(-\frac{\delta}{\Delta\Omega}\right) + \operatorname{sgn}(N)\frac{\pi}{2} + \theta + 2m\pi, & m \in \mathbb{Z} \\ p_s = \frac{\delta}{nN} \end{cases} \quad (3.92)$$

Avec : $\Delta\Omega$ donnée par (3.91).

On remarque que les gammes $\Delta\Omega$ et $\Delta\Pi$ se simplifient considérablement. $\Delta\Omega$ dépend linéairement de $|v|$ tandis que p_s varie linéairement avec δ avec une pente de même signe que N . De façon surprenante, la pente vaut $1/nN$ ($R_n = 1$), autrement dit la puissance en régime synchronisé varie dans le même rapport que celle en régime libre. Ces caractéristiques générales ont aussi été remarquées par [19], lors de l'étude du forçage sous courant à l'ordre 2 du couple $\mathbf{m} \times \mathbf{m} \times \mathbf{u}_x$ qui se trouve être rectiligne réel, lui aussi. Les solutions de l'auteur (voir éq II.61, p83 et II.65, p84) coïncident avec les solutions obtenues ici (avec : $a = |J_g|$, $r(p) = -\gamma'_{0a_{10}} \rho_x |B/A| p$, $\sigma = \theta = 0$) ce qui conforte les calculs développés dans ce chapitre.

3.4.1.4. Limites selon $|v|$

Pour terminer, on regarde le comportement de ces quatre forçages aux limites $|v| = 0$ et $|v| \gg 1$.

D'abord lorsque $|v| = 0$, on obtient :

$$\lim_{v \rightarrow 0} \mathcal{RW}_-(v) = \mathcal{RP}_+ \quad \text{et} \quad \lim_{v \rightarrow 0} \mathcal{RW}_+(v) = \mathcal{RP}_- \quad (3.93)$$

La plus intéressante est la première égalité. Pour les oscillateurs linéaires, le forçage \mathcal{RP}_+ est le forçage nul du système dynamique. Cela se comprend car \mathcal{RP}_+ n'agit que sur l'équation de puissance, or comme N (ou v) = 0 alors $N.p_s$ est nul dans l'équation de phase. Il ne peut y avoir de synchronisation. Cette situation a été aussi évoquée à la section 3.2.3.1, voir Figure 3.4.

A l'inverse quand $|v| \gg 1$:

$$\lim_{v \rightarrow +\infty} \mathcal{RW}_-(v) = \mathcal{RP}_- \quad \text{et} \quad \lim_{v \rightarrow +\infty} \mathcal{RW}_+(v) = \mathcal{RP}_+ \quad (3.94)$$

Les deux forçages \mathcal{RW} et \mathcal{RP} convergent l'un vers l'autre²⁹. La convergence est cependant très rapide car elle dépend de $\psi_v = \arctan(v)$. Par exemple dès que $|v| > 5$, ψ_v vaut environ $\pm\pi/2$. C'est pourquoi la limite est très souvent vérifiée dans le cas des oscillateurs spintroniques (en général $|v| > 10$). Cela montre qu'il est difficile de les réaliser en pratique. En effet comme ils sont quasiment confondus, il faut pouvoir contrôler la circularité σ avec une très grande précision. Le seul moyen de les séparer est d'écartier leurs σ en diminuant v .

La Figure 3.14 illustre les comportements dont nous venons de parler.

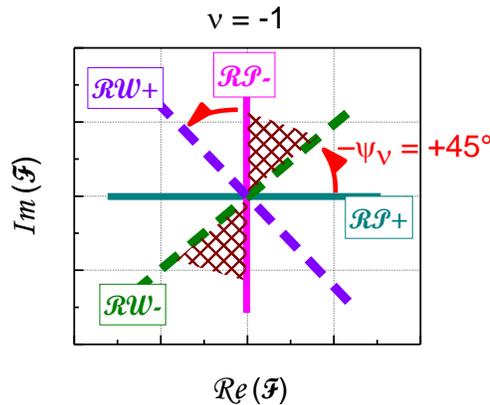


Figure 3.14. Représentation paramétrique des forçages rectilignes \mathcal{RW}_{\pm} et \mathcal{RP}_{\pm} dans le cas où $v = -1$. Lorsque v varie, les forçages \mathcal{RW}_{\pm} pivotent par rapport aux forçages \mathcal{RP}_{\pm} , qui eux restent fixes. Les zones hachurées indiquent les forçages dont la circularité conduit à $\psi_p = -\text{signe}(N)\pi/2$. Ailleurs, $\psi_p = \text{signe}(N)\pi/2$, voir section suivante.

3.4.2. Propriétés de la puissance synchronisée

De façon générale, la puissance synchronisée des forçages rectilignes possède des propriétés remarquables. On étudie le déphasage ψ_p et le rapport R_n .

3.4.2.1. Etude de ψ_p

La première question posée est quelle est la valeur du déphasage ψ_p des forçages rectilignes. Pour cela, il faut étudier le numérateur $\text{Num}(g, \sigma, v)$ et le dénominateur $\text{Den}(g)$ de la fonction arctan de ψ_p (3.69), défini par :

²⁹ La convergence des forçages rectilignes \mathcal{RW}_{-} vers \mathcal{RP}_{-} est en fait plus subtile car $\text{Cl}_{\Omega}[\mathcal{RW}_{-}] = 0$ alors que $\text{Cl}_{\Omega}[\mathcal{RP}_{-}] = 1$. La fonction $\text{Cl}_{\Omega}(g, \theta, v)$ n'est pas prolongeable par continuité en $g = 1$ et $\sigma = \pi/2 + k\pi$ à la limite $v \gg 1$.

$$\text{Num}(g, \sigma, \nu) = 2g \sin(2\sigma) + \nu((1+g)^2 \cos^2(\sigma) + (1-g)^2 \sin^2(\sigma)) \text{ et } \text{Den}(g) = (1-g^2) \quad (3.95)$$

A la limite rectiligne où $g = \pm 1$, $\text{Den}(g)$ est nulle, donc il faut chercher les zéros de $\text{Num}(g, \sigma, \nu)$.

D'après l'annexe 3.6.3.1, les zéros de $\text{Num}(g, \sigma, \nu)$ sont les circularités :

$$\sigma_1 = -\psi_\nu + k\pi \text{ et } \sigma_2 = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (3.96)$$

Ce qui est précisément la définition des forçages \mathcal{RW}_- et \mathcal{RP}_- , rencontrés précédemment. Dans ce cas une étude à la limite montre que $\text{Num}/\text{Den} \rightarrow 0$ et qu'en ces points $\psi_p = 0$, voir annexe 3.6.3.3.

Ailleurs, la fonction Num n'est pas nulle ce qui entraîne $\text{Num}/\text{Den} \rightarrow \pm\infty$ et $\psi_p = \pm\pi/2$. Le signe de ψ_p dépend du signe de Num . La réciproque fonctionne aussi car $\psi_p = \pm\pi/2$ ne l'est que sous ces conditions.

Pour résumer, on a la propriété suivante :

Propriété 3.7 : Les forçages rectilignes tels que $\sigma \in]0, \min(\sigma_1, \sigma_2)[\cup]\max(\sigma_1, \sigma_2), \pi[$ vérifient :

$$\psi_p = \text{sgn}(\nu) \frac{\pi}{2} \quad (3.97)$$

Tandis que ceux tels que $\sigma \in]\min(\sigma_1, \sigma_2), \max(\sigma_1, \sigma_2)[$ vérifient :

$$\psi_p = -\text{sgn}(\nu) \frac{\pi}{2} \quad (3.98)$$

Ce sont les seuls forçages à posséder une solution de puissance exactement linéaire.

Ainsi, tous les forçages rectilignes exceptés \mathcal{RW}_- et \mathcal{RP}_- sont à variation de puissance synchronisée linéaire. Plus encore, la propriété montre que l'on peut les diviser en deux catégories : les forçages dont la pente de la puissance synchronisée est du signe de N (variations appelés « normales ») ou de signe contraire (variations « anormales »). Notamment, les forçages dont la circularité se trouve entre les solutions σ_1, σ_2 sont ceux qui ont une variation anormale. Cependant aux fortes non linéarités, comme σ_1 converge vers σ_2 ($\mathcal{RW}_-(\nu) \rightarrow \mathcal{RP}_-$), l'intervalle de définition de ces forçages est fortement réduit. Nous pensons donc qu'il est très difficile dans le contexte des oscillateurs spintronique de les observer en pratique.

Un avantage des forçages à variation linéaire est d'avoir leur rapport de sensibilité R_n correctement définis. La section suivante étudie leur taux R_n .

3.4.2.2. Etude du rapport de sensibilité R_n

En faisant $g = +1$ dans l'expression (3.72), le rapport R_n devient :

$$R_n = \sqrt{1 + \frac{2}{v} \tan(\sigma) + \frac{1}{v^2} \tan^2(\sigma)} \quad (3.99)$$

On va chercher les circulations qui vérifient³⁰ $R_n(\sigma) = 1$.

Ces circulations vérifient :

$$1 = 1 + \frac{2}{v} \tan(\sigma) + \frac{1}{v^2} \tan^2(\sigma) \quad (3.100)$$

Ce qui donne :

$$\sigma = 0 + k\pi \quad \text{et} \quad \sigma = -\psi_{2v} + k\pi \quad (3.101)$$

Avec : $\psi_{2v} = \arctan(2v)$

Les solutions sont le forçage à puissance maximale \mathcal{R}_{P+} (définition 3.8) et le forçage $\mathcal{R}_{\psi_{2v}}$ tel que la circularité vérifie $\sigma = -\psi_{2v} + k\pi$:

Propriété 3.8 : Seuls les forçages \mathcal{R}_{P+} et $\mathcal{R}_{\psi_{2v}}$ ont un rapport de sensibilité $R_n = 1$.

La Figure 3.15 montre $R_n(\sigma)$ (3.99) pour une valeur de v faible ($v \approx -1$) et une valeur de v forte ($v \approx -22$).

En particulier selon la circulation σ , la figure montre que R_n peut être plus grand ou plus petit que 1. Plus précisément :

$$\begin{aligned} R_n &< 1 \text{ si } \sigma \in]0, -\psi_{2v}[+ k\pi \\ R_n &> 1 \text{ si } \sigma \in]-\psi_{2v}, \pi[+ k\pi \end{aligned} \quad (3.102)$$

En réalité lorsque $|v| \gg 1$, la gamme des valeurs accessibles de R_n est assez restreinte. En effet, R_n tend vers une fonction constante très proche de 1. Pour accéder à des ratios vraiment différents de 1, la seule

³⁰ Pour rappel, ce sont les forçages dont la puissance synchronisée varie avec la fréquence δ dans le même rapport que celui du régime libre.

solution est de diminuer fortement v ($v \sim -1$). Ainsi sous certaines conditions de non linéarité, les forçages à variation linéaire peuvent offrir un rapport R_n variable avec le changement de la circulation.

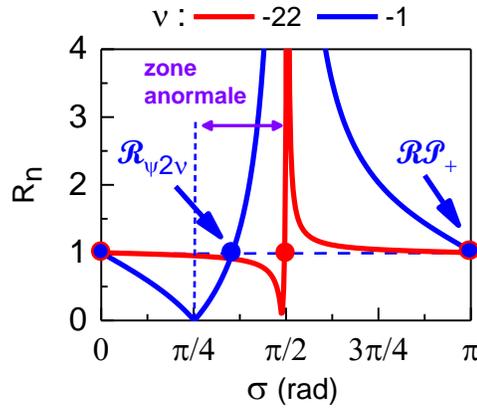


Figure 3.15. Représentation de $R_n(\sigma)$ pour différentes valeurs de v . Les points montrent les solutions $R_n = 1$. D'après l'étude de signe 3.6.3.2, la pente de p_s n'a pas le même signe suivant le forçage $\mathcal{R}_{\mathcal{P}^+}$ ou $\mathcal{R}_{\psi 2v}$. Le sens est normal pour $\mathcal{R}_{\mathcal{P}^+}$ mais anormal pour $\mathcal{R}_{\psi 2v}$.

3.4.3. Approximation des forçages à valeurs réelles

Dans le cas où la non linéarité est forte $|v| \gg 1$, l'expression complète du forçage \mathcal{F} n'est pas nécessaire pour déterminer les propriétés. Par exemple, la contribution de certains termes de \mathcal{F} peut être exagérée, tandis que celle d'autres peut être négligée. Dans ce cas, il doit exister un forçage d'expression plus simple, qui produit les mêmes propriétés de synchronisation que l'original. En particulier, cette simplification a déjà suggéré par l'étude de ψ_p et R_n car aux fortes non linéarités tous les forçages vérifient $\psi_p \approx \pm\pi/2$ et $R_n \approx 1$ (Par ex : Figure 3.13 cas $v = -22$). Or ce sont précisément les propriétés des forçages à valeurs réelles. Il semblerait donc qu'ils jouent aussi le rôle de forçages limites vers lesquels tous les forçages tendent. Nous cherchons à préciser le résultat.

3.4.3.1. Méthode de simplification

En explicitant $\mathcal{F} = \text{Re}(\mathcal{F}) + j\text{Im}(\mathcal{F})$, l'équation stationnaire de phase (3.35) s'écrit :

$$\frac{\delta}{n} = \text{Im}(\mathcal{F}) + v \text{Re}(\mathcal{F}) \tag{3.103}$$

Or l'expression se simplifie dans le cas où $|v \text{Re}(\mathcal{F}) / \text{Im}(\mathcal{F})| \gg 1$:

$$\frac{\delta}{n} \simeq v \text{Re}(\mathcal{F}) \tag{3.104}$$

Les solutions stationnaires vérifient donc le système :

$$\begin{cases} p_s = \frac{\mathcal{R}e(\mathcal{F})p_0}{\Gamma_p} \\ \frac{\delta}{n} \approx v \mathcal{R}e(\mathcal{F}) \end{cases} \quad (3.105)$$

Si ensemble forçage et non linéarité vérifient la condition $|v\mathcal{R}e(\mathcal{F})/Im(\mathcal{F})| \gg 1$, alors seule la partie réelle du forçage compte vraiment pour la synchronisation. Or $\mathcal{R}e(\mathcal{F})$ est une fonction de type $\cos(\psi-\theta)$, soit simplement un forçage à valeur réelle $\mathcal{R}\mathcal{P}_+$:

Propriété 3.9 : Lorsque $|v\mathcal{R}e(\mathcal{F})/Im(\mathcal{F})| \gg 1$, les forçages \mathcal{F} sont équivalents à des forçages \mathcal{F}_a de type $\mathcal{R}\mathcal{P}_+$ tel que : $\mathcal{F}_a = \mathcal{R}e(\mathcal{F})$.

Les forçages \mathcal{F} et \mathcal{F}_a produisent approximativement les mêmes propriétés de synchronisation. Par exemple, \mathcal{F} vérifie $\psi_p \approx \pm\pi/2$ alors que \mathcal{F}_a vérifie exactement $\psi_p = \pm\pi/2$. \mathcal{F} vérifie $R_n \approx 1$ alors que \mathcal{F}_a vérifie $R_n = 1$. On peut aussi vérifier la propriété dans le cas simple du forçage circulaire, vu à la section 3.2.4. En effet quand $v \rightarrow +\infty$, on retrouve bien : $\Delta\Omega \rightarrow |v|$, $\psi_p \rightarrow \pm\pi/2$ et $R_n \rightarrow 1$, soit les propriétés des forçages à valeurs réelles.

Précisément, la condition tient compte à la fois de v et des valeurs relatives entre $\mathcal{R}e(\mathcal{F})$ et $Im(\mathcal{F})$. Cela a son importance car il existe des cas extrêmes où le forçage n'admet pas de simplification. Par exemple, si $\mathcal{F} = \mathcal{R}\mathcal{P}_-$ alors $\mathcal{R}e(\mathcal{F}) = 0$ et $Im(\mathcal{F}) \neq 0$, donc la condition n'est jamais vérifiée quelle que soit la valeur de v . Cependant dès lors que $\mathcal{R}e(\mathcal{F}) \neq 0$ et $Im(\mathcal{F}) \neq 0$, on voit bien que lorsque v augmente, le nombre de forçages respectant la condition augmente aussi. Dans ce cas, on peut dire de façon simplifiée que la condition équivaut à $|v| \gg 1$.

3.4.3.2. Exemple

A titre d'exemple, prenons le forçage quelconque tel que $\varepsilon_0(p) = 1$, $\sigma = 0$:

$$\mathcal{F}(p, \psi) = \left(\frac{\varepsilon_1(p) + \varepsilon_2(p)}{2} \right) e^{j(\psi - \theta(p))} + \left(\frac{\varepsilon_1(p) - \varepsilon_2(p)}{2} \right) e^{-j(\psi - \theta(p))} \quad (3.106)$$

La partie réelle vaut :

$$\mathcal{R}e(\mathcal{F}) = \varepsilon_1 \cos(\psi - \theta) \quad (3.107)$$

Et la partie imaginaire :

$$\text{Im}(\mathcal{F}) = \varepsilon_2 \sin(\psi - \theta) \tag{3.108}$$

La condition à respecter devient simplement : $|\nu \varepsilon_1 / \varepsilon_2| \gg 1$. Si c'est le cas, le forçage \mathcal{F} se simplifie en :

$$\mathcal{F}a = \text{Re}(\mathcal{F}) = \varepsilon_1 \cos(\psi - \theta) \tag{3.109}$$

Ainsi, le forçage quelconque (3.106) est équivalent au forçage réel (3.109) dont l'amplitude ne dépend que du demi-axe ε_1 de l'ellipse. Même dans le cas général où $\sigma \neq 0$, le forçage simplifié est toujours réel, à la différence près que l'amplitude dépend à la fois ε_1 et ε_2 .

La Figure 3.16 résume le processus de simplification dans le cas de l'exemple :

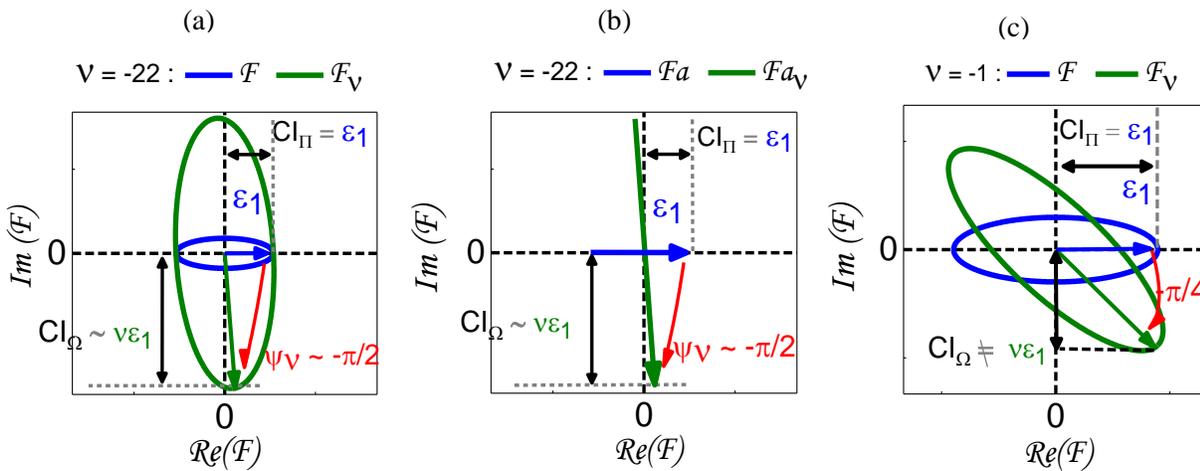


Figure 3.16. Illustration de la méthode de simplification avec des forçages quelconques tels que $\sigma = 0$. (a) Représentation paramétrique des forçages \mathcal{F} , \mathcal{F}_ν pour une forte non linéarité ($\nu = -22$), (b) Forçages réels associés, (c) \mathcal{F} , \mathcal{F}_ν pour une faible non linéarité ($\nu = -1$).

Aux fortes non linéarités, Cl_Ω (ou $\Delta\Omega$) est linéaire en $\nu\varepsilon_1$ tout comme ce qu'aurait donné le forçage réel (3.109), voir Figure 3.16 (a,b). Par contre aux faibles non linéarités, Cl_Ω ne dépend plus de $\nu\varepsilon_1$ mais d'une combinaison compliquée de ε_2 , ε_1 et ν , voir Figure 3.16 (c). Dans ce cas, il n'existe pas de forçage rectiligne qui fournirait simultanément les valeurs des sensibilités Cl_Π et Cl_Ω .

○ En résumé :

Les forçages rectilignes sont très intéressants à étudier à cause de leurs propriétés de synchronisation spécifiques. Parmi eux, il y a les forçages \mathcal{RP}_- et \mathcal{RW}_- qui génèrent des sensibilités extrêmes. Exceptés ceux-là, tous produisent une variation de p_s linéaire avec δ . En particulier, certains forçages spécifiques comme $\mathcal{R}_{\psi 2\nu}$ et surtout \mathcal{RP}_+ , ont une pente de puissance $p_s(\delta)$ égale à celle du régime libre. Enfin, le forçage le plus important du modèle est certainement le forçage \mathcal{RP}_+ . Aux fortes non linéarités, tous les

forçages peuvent se simplifier en des forçages à valeurs réelles. Cette technique permet de simplifier efficacement les forçages, tout en conservant les caractéristiques essentielles de la synchronisation.

3.5. Conclusion

Le point clé de l'étude a été de placer au centre de l'attention le forçage \mathcal{F} . De façon générale, il peut s'exprimer comme une ellipse définie par ses paramètres géométriques (ε_0 , ε_1 , θ et σ). Muni d'une définition plus étendue, nous avons obtenu le système approché (3.32) dans la limite des faibles variations de la puissance synchronisée. Le système fournit alors deux solutions stationnaires, de puissance et de phase, déterminées par quatre fonctions : $\Delta\Omega$, $\Delta\Pi$, ψ_0 et ψ_p (propriétés de synchronisation) qui dépendent globalement du forçage et de la non linéarité (conditions de synchronisation). En particulier, les gammes $\Delta\Omega$ et $\Delta\Pi$ vérifient simplement : $\Delta\Pi \propto \Re(\mathcal{F})$ et $\Delta\Omega \propto \text{Im}(z_v \mathcal{F})$, où le complexe z_v résume à lui seul l'action de la non linéarité. L'avantage des solutions présentées est qu'elles sont valables pour tous les forçages, ce qui généralise les solutions circulaires de [20] [82] et rectilignes de [19].

Ensuite, les propriétés de synchronisation (Cl_Ω , Cl_Π , ψ_p , ψ_0) du système ont été étudiées en fonction de trois paramètres essentiels : g , σ et v . L'étude peut être résumée en deux points : Lorsque v est faible, les propriétés sont gouvernées par le forçage, ce qui conduit à des propriétés remarquables, comme le renversement de la variation de p_s dans la gamme de synchronisation. A l'inverse lorsque v est fort, les propriétés se régularisent et les différences entre forçages s'atténuent. Parmi tous les forçages, les forçages rectilignes sont les plus remarquables. Par exemple, certains d'entre eux conduisent à : $Cl_\Omega = 0$ ou $Cl_\Pi = 0$. Les autres ont la puissance variant linéairement en régime synchronisé. Enfin, dans le cas d'une forte non linéarité (cas principal de l'oscillateur spintronique), tout se passe comme si les forçages étaient équivalents à des forçages à valeurs réelles, ce qui simplifie les calculs.

L'étude n'aurait pas d'intérêt, autre que mathématique, s'il n'existait pas dans la nature un système capable de réaliser toutes ces conditions. Il se trouve que l'oscillateur spintronique gouverné par l'équation LLGS le peut. Le chapitre suivant montre que l'oscillateur peut être forcé suivant certains forçages remarquables décrits dans ce chapitre.

3.6. Annexes

3.6.1. Expression de $\mathcal{Re}(\mathcal{F})$, $\mathcal{Im}(\mathcal{F})$

Soit le forçage quelconque $\mathcal{F}(p, \psi)$:

$$\mathcal{F}(p, \psi) = e^{j\sigma} \left(\left(\frac{\varepsilon_1(p) + \varepsilon_2(p)}{2} \right) e^{j(\psi - \theta)} + \left(\frac{\varepsilon_1(p) - \varepsilon_2(p)}{2} \right) e^{-j(\psi - \theta)} \right) \quad (3.110)$$

En développant le produit, il vient :

$$\begin{cases} \mathcal{Re}(\mathcal{F}) = \varepsilon_1 \cos(\psi - \theta) \cos(\sigma) - \varepsilon_2 \sin(\psi - \theta) \sin(\sigma) \\ \mathcal{Im}(\mathcal{F}) = \varepsilon_1 \cos(\psi - \theta) \sin(\sigma) - \varepsilon_2 \sin(\psi - \theta) \cos(\sigma) \end{cases} \quad (3.111)$$

On cherche à réécrire $\mathcal{Re}(\mathcal{F})$ et $\mathcal{Im}(\mathcal{F})$ en isolant la contribution de ψ . D'abord, pour la partie réelle, nous avons :

$$\mathcal{Re}(\mathcal{F}) = \varepsilon_1 \cos(\sigma) \left(\cos(\psi - \theta) - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \sin(\psi - \theta) \tan(\sigma) \right) \quad (3.112)$$

Ce qui se transforme en :

$$\mathcal{Re}(\mathcal{F}) = \varepsilon_1 \cos(\sigma) \sqrt{1 + \left(\tan(\sigma) \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right)^2} \cos(\psi - \theta + \arctan(\tan(\sigma) \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1})) \quad (3.113)$$

$\mathcal{Re}(\mathcal{F})$ devient :

$$\begin{aligned} \mathcal{Re}(\mathcal{F}) &= \sqrt{(\varepsilon_1 \cos(\sigma))^2 + (\varepsilon_2 \sin(\sigma))^2} \cos(\psi - \theta + \psi_R) \\ \text{Avec } \psi_R &= \begin{cases} \arctan\left(\tan(\sigma) \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right), \text{ si } \varepsilon_1 \cos(\sigma) > 0 \\ \arctan\left(\tan(\sigma) \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right) + \pi, \text{ si } \varepsilon_1 \cos(\sigma) < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.114)$$

En procédant de même pour la partie imaginaire :

$$\text{Im}(\mathcal{F}) = \sqrt{(\varepsilon_2 \cos(\sigma))^2 + (\varepsilon_1 \sin(\sigma))^2} \sin(\psi - \theta + \psi_I)$$

$$\text{Avec } \psi_I = \begin{cases} \arctan\left(\tan(\sigma) \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right), & \text{si } \varepsilon_2 \cos(\sigma) > 0 \\ \arctan\left(\tan(\sigma) \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right) + \pi, & \text{si } \varepsilon_2 \cos(\sigma) < 0 \end{cases} \quad (3.115)$$

Les fonctions ε_1 et ε_2 jouent des rôles inverses entre les parties réelles et imaginaires.

3.6.2. Expression de ψ_p

Comme la fonction ψ_p est donnée par $\psi_p = \psi_0 + \psi_r - \theta = \psi_r - \psi_I + \pi$ alors $\tan(\psi_p)$ vaut :

$$\tan(\psi_p) = \frac{\tan(\psi_r) - \tan(\psi_I)}{1 + \tan(\psi_r) \tan(\psi_I)} \quad (3.116)$$

La méthode de calcul de ψ_p est d'exprimer $\tan(\psi_p)$ via $\tan(\psi_r)$ et $\tan(\psi_I)$ puis de revenir à ψ_p par arctan. En particulier il faut tenir compte que si $\varepsilon_2 > 0$, $\psi_r - \psi_I \in [-\pi/2, \pi/2]$ donc $\arctan(\tan(\psi_r - \psi_I)) = \psi_r - \psi_I$ tandis qu'à l'inverse si $\varepsilon_2 < 0$ $\arctan(\tan(\psi_r - \psi_I)) = \psi_r - \psi_I - \pi$.

D'abord, les expressions de $\tan(\psi_r)$ et de $\tan(\psi_I)$ sont :

$$\tan(\psi_r) = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \tan(\sigma), \quad \tan(\psi_I) = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \frac{\tan(\sigma) + v}{1 - v \tan(\sigma)} \quad (3.117)$$

A partir de ces deux expressions, nous obtenons le numérateur de (3.116) :

$$\tan(\psi_r) - \tan(\psi_I) = \frac{\tan(\sigma) \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \right) - v \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \tan^2(\sigma) \right)}{1 - v \tan(\sigma)} \quad (3.118)$$

Puis le dénominateur :

$$1 + \tan(\psi_r) \tan(\psi_I) = \frac{1 + \tan^2(\sigma)}{1 - v \tan(\sigma)} \quad (3.119)$$

Et enfin le ratio :

$$\tan(\psi_p) = \frac{\tan(\sigma) \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \right) - v \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \tan^2(\sigma) \right)}{1 + \tan^2(\sigma)} \quad (3.120)$$

Au final, en revenant à ψ_p avec arctan, l'expression recherchée en fonction de ε_1 , ε_2 , σ et v devient :

$$\psi_p = \arctan \left(\frac{\tan(\sigma) \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \right) - \nu \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \tan^2(\sigma) \right)}{1 + \tan^2(\sigma)} \right) + \begin{cases} \pi & \text{si } \varepsilon_2 > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.121)$$

Ainsi ψ_p ne dépend que de $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ à travers seulement le ratio $\varepsilon_1/\varepsilon_2$. Par conséquent, il est possible de réduire le nombre de variables en introduisant l'ellipticité g du forçage définie par $g = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) / (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$. D'abord, nous avons :

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{-4g}{1 - g^2} \quad (3.122)$$

Puis (3.121) se réécrit en :

$$\psi_p = -\arctan \left(\frac{4g \tan(\sigma) + \nu((1 + g)^2 + (1 - g)^2 \tan^2(\sigma))}{(1 - g)^2(1 + \tan^2(\sigma))} \right) + \begin{cases} \pi & \text{si } g < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.123)$$

Ou bien de façon plus équilibrée :

$$\psi_p = -\arctan \left(\frac{2g \sin(2\sigma) + \nu((1 + g)^2 \cos^2(\sigma) + (1 - g)^2 \sin^2(\sigma))}{(1 - g^2)} \right) + \begin{cases} \pi & \text{si } g < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.124)$$

La dernière expression est le point de départ de l'étude de ψ_p présentée à la section 3.3.3.

3.6.3. Etude de Num(g, σ, ν) et Den(g, σ, ν)

On définit le numérateur Num(g, σ, ν) et le dénominateur Den(g, σ, ν) de la fonction arctan dans l'expression ψ_p (3.124) par :

$$\text{Num}(g, \sigma, \nu) = 2g \sin(2\sigma) + \nu((1 + g)^2 \cos^2(\sigma) + (1 - g)^2 \sin^2(\sigma)) \quad \text{et} \quad \text{Den}(g) = (1 - g^2) \quad (3.125)$$

L'étude de ces fonctions « secondaires » est primordiale pour comprendre le comportement de ψ_p . On commence par chercher les zéros des fonctions.

3.6.3.1. Etude des zéros

D'abord pour Den(g), il vient immédiatement :

$$\text{Den}(g) = 0 \Leftrightarrow g = \pm 1 \quad (3.126)$$

Les zéros sont donc les forçages de type exclusivement rectiligne.

En revanche, les zéros de $\text{Num}(g, \sigma, v)$ nécessitent plus de travail. D'abord, l'équation $\text{Num}(g, \sigma, v) = 0$ est équivalent à :

$$2g \sin(2\sigma) + \frac{v}{2} \left((1+g)^2 (1 + \cos(2\sigma)) + (1-g)^2 (1 - \cos(2\sigma)) \right) = 0 \quad (3.127)$$

Puis en arrangeant les termes :

$$\sin(2\sigma) + v \cos(2\sigma) = -\frac{v}{2g} (1 + g^2) \quad (3.128)$$

Soit :

$$\sin(2\sigma + \arctan(v)) = -\frac{\sin(\psi_v)}{\sin(2 \arctan(g))} \quad (3.129)$$

L'équation a une forme trigonométrique qui peut se résoudre en σ tel que :

$$\begin{cases} \sigma_1 = -\frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{\sin(\psi_v)}{\sin(2 \arctan(g))}\right) - \frac{1}{2} \psi_v + k\pi \\ \sigma_2 = \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{\sin(\psi_v)}{\sin(2 \arctan(g))}\right) - \frac{1}{2} \psi_v + \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \quad (3.130)$$

Les solutions σ_1, σ_2 obtenues dépendent en général de g et v . Les deux n'existent que si la fonction arcsin est bien définie, c'est-à-dire si :

$$\left| \frac{\sin(\psi_v)}{\sin(2 \arctan(g))} \right| < 1 \quad (3.131)$$

Soit :

$$|v| < |v_{lim}| = \frac{2g}{1-g^2} \quad (3.132)$$

Cependant dans le cas rectiligne où $g = 1$, $|v_{lim}| \rightarrow \infty$ et alors les deux solutions σ_1, σ_2 sont toujours définies quelle que soit la valeur de $|v|$:

$$\sigma_1 = -\psi_v + k\pi \quad \text{et} \quad \sigma_2 = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (3.133)$$

Dans ce cas, l'écart $\Delta\sigma = \sigma_2 - \sigma_1$ entre les circulations vaut simplement :

$$\Delta\sigma = \psi_v + \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (3.134)$$

Lorsque $|v| \rightarrow \infty$, la dernière expression montre que la différence $\Delta\sigma$ tend vers 0 et les deux solutions se confondent.

3.6.3.2. Etude du signe de $\text{Num}(g, \sigma, v)$

Globalement, la fonction $\text{Num}(g, \sigma, v)$ est continue sur $(g, \sigma, v) \in \mathbb{R}^3$ et π -périodique en σ . Or les zéros de $\text{Num}(g, \sigma, v)$ sont σ_1 et σ_2 , voir (3.133). Par continuité, la fonction $\text{Num}(g, \sigma, v)$ ne peut être que de même signe sur les intervalles $\sigma \in [0, \min(\sigma_1, \sigma_2)] \cup [\max(\sigma_1, \sigma_2), \pi]$ et de signe contraire sur $\sigma \in [\min(\sigma_1, \sigma_2), \max(\sigma_1, \sigma_2)]$.

En particulier sur $\sigma \in [0, \min(\sigma_1, \sigma_2)] \cup [\max(\sigma_1, \sigma_2), \pi]$:

$$\text{sgn}(\text{Num}(g, \sigma, v)) = \text{sgn}(v) \quad (3.135)$$

car $\text{Num}(g, 0, v)$ vaut en particulier :

$$\text{Num}(g, 0, v) = v((1 + g)^2) \quad (3.136)$$

Ainsi sur $\sigma \in [\min(\sigma_1, \sigma_2), \max(\sigma_1, \sigma_2)]$ on a :

$$\text{sgn}(\text{Num}(g, \sigma, v)) = -\text{sgn}(v) \quad (3.137)$$

De façon simplifiée, cela montre que $\text{Num}(g, \sigma, v)$ est du signe contraire à la non linéarité seulement entre ses zéros, σ_1 et σ_2 .

3.6.3.3. Formes indéterminées $\text{Num}(g, \sigma, v)/\text{Den}(g)$ à la limite rectiligne

A la limite rectiligne, on sait que $\text{Den}(\pm 1) = 0$ or la fonction $\text{Num}(\pm 1, \sigma, v)$ vaut aussi 0 pour les deux circulations σ_1, σ_2 . La question est de savoir qui l'emporte à la limite.

Soit $g = 1 + h$ avec $h \ll 1$, $\text{Den}(g)$ se développe en :

$$\text{Den}(g) = -2h - h^2 \approx -2h + o(h) \quad (3.138)$$

Aux points $\sigma_2 = \pi/2 + k\pi$, $\text{Num}(g, \sigma_2, v)$ se simplifie en :

$$\text{Num}(g, \sigma_2, v) \approx vh^2 + o(h^2) \quad (3.139)$$

Ainsi quand $g \rightarrow 0$, $\text{Num}/\text{Den} \rightarrow 0$ car $\text{Den}(g)$ varie à l'ordre 1 et $\text{Num}(g, \sigma_2, v)$ à l'ordre 2 en h .

De la même façon aux points $\sigma_1 = -\psi_v + k\pi$, $Num(g, \sigma_1, \nu)$ devient :

$$Num(g, \sigma_1, \nu) \approx -4(1+h) \frac{\nu}{1+\nu^2} + \frac{\nu}{1+\nu^2} ((4+4h+h^2) + (\nu h)^2) + o(h^2) \quad (3.140)$$

C'est-à-dire, après simplification :

$$Num(g, \sigma_1, \nu) \approx h^2 \frac{\nu + \nu^2 + \nu^4}{1 + \nu^2} + o(h^2) \quad (3.141)$$

Là encore, le rapport vaut 0.

Pour résumer, à la limite rectiligne, la fonction ψ_p prend les valeurs $0 + k\pi$ aux points σ_1 et σ_2 .

3.6.4. Sensibilités intrinsèques des forçages rectilignes

<i>Sensibilités</i> <i>Forçages</i>	CI_{Ω}	CI_{Π}
\mathcal{R}	$\sqrt{1 + \nu^2} \sin(\sigma + \psi_{\nu}) $	$ \cos(\sigma) $
\mathcal{RW}_{-}	0	$ \cos(\psi_{\nu}) $
\mathcal{RW}_{+}	α_{ν}	$ \sin(\psi_{\nu}) $
\mathcal{RP}_{-}	1	0
\mathcal{RP}_{+}	$ \nu $	1

Tableau 3.5. Synthèse des sensibilités intrinsèques des forçages spécifiques \mathcal{RW}_{\pm} , \mathcal{RP}_{\pm}

Chapitre 4. Etude des forçages canoniques

Il existe différentes façons d'injecter un signal générateur dans l'oscillateur uniforme, ce qui conduit à différentes expressions de forçages. Le système constitue donc l'occasion unique d'appliquer les résultats généraux du chapitre 3. En premier, la partie 4.1 décrit une méthode de calcul plus simple du forçage transformé. En utilisant la linéarité des transformations, nous calculons une bonne fois pour toutes les forçages « canoniques » du système, qui par combinaison linéaire reconstituent n'importe quels autres forçages. Dès lors, ces forçages canoniques vont focaliser l'attention. La partie 4.2 étudie les paramètres géométriques et montrent qu'ils peuvent changer fortement avec \mathcal{B}/\mathcal{A} et surtout avec la puissance p . Par exemple, les variations sont si fortes que certains forçages deviennent à valeurs réelles ou à valeurs imaginaires. Pour terminer, la partie 4.3 décrit les propriétés de synchronisation des forçages canoniques. Tous les résultats seront vérifiés par la simulation au chapitre suivant.

4.1. Méthode de décomposition

Dans cette partie, on commence par introduire la notion de forçages canoniques de l'équation LLGS. Puis, ces forçages sont calculés en variable a, b, c à l'aide des transformations du formalisme onde de spin et enfin mis sous la forme elliptique, présentée au chapitre 3. L'étude montre que les paramètres géométriques des forçages ne dépendent que des paramètres p et \mathcal{B}/\mathcal{A} du système, ce qui va permettre d'étudier leurs évolutions en toute généralité dans la partie suivante.

4.1.1. Définitions

4.1.1.1. Couples et fonctions résonantes canoniques

La section 3.1.2 a montré que le couple de forçage $(\dot{\mathbf{m}})_F$ est le produit du signal générateur par le couple résonant $(\dot{\mathbf{m}})_R$ dépendant de \mathbf{m} et \mathbf{u}_g :

$$(\dot{\mathbf{m}})_F(t) = a_g \cos(\phi_g) (\dot{\mathbf{m}})_R \quad (4.1)$$

On porte l'attention sur le couple résonant $(\dot{\mathbf{m}})_R$.

Dans le contexte des oscillateurs uniformes, $(\dot{\mathbf{m}})_R$ est un composé de couples conservatifs et dissipatifs, que le signal générateur soit un champ (3.5), ou un courant alternatif (3.7). Par conséquent, $(\dot{\mathbf{m}})_R$ peut s'écrire en général :

$$(\dot{\mathbf{m}})_R = k_c \mathbf{m} \times \mathbf{u}_g + k_D \mathbf{m} \times \mathbf{m} \times \mathbf{u}_g \quad (4.2)$$

k_c, k_D sont deux constantes réelles dépendantes du couple et de la nature du signal.

Ou de façon développée :

$$(\dot{\mathbf{m}})_R = k_c \sum_{i=\{x,y,z\}} \rho_i \mathbf{m} \times \mathbf{u}_i + k_D \sum_{i=\{x,y,z\}} \rho_i \mathbf{m} \times \mathbf{m} \times \mathbf{u}_i \quad (4.3)$$

ρ_i sont les composantes spatiales du vecteur unitaire \mathbf{u}_g dans la base $(\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z)$.

Cette dernière expression montre que le couple résonant $(\dot{\mathbf{m}})_R$ est une combinaison linéaire de couples canoniques $\{\mathbf{m} \times \mathbf{u}_i, \mathbf{m} \times \mathbf{m} \times \mathbf{u}_i\}_{i=x,y,z}$ pondérée par k_c, k_D et les composantes ρ_i . Dans la suite, ces couples sont notés plus simplement :

Définition 4.1 : Soient les couples canoniques³¹ :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_x(\mathbf{m}) &= \mathbf{m} \times \mathbf{u}_x, & \mathcal{C}_y(\mathbf{m}) &= \mathbf{m} \times \mathbf{u}_y, & \mathcal{C}_z(\mathbf{m}) &= \mathbf{m} \times \mathbf{u}_z \\ \mathcal{D}_x(\mathbf{m}) &= \mathbf{m} \times \mathbf{m} \times \mathbf{u}_x, & \mathcal{D}_y(\mathbf{m}) &= \mathbf{m} \times \mathbf{m} \times \mathbf{u}_y, & \mathcal{D}_z(\mathbf{m}) &= \mathbf{m} \times \mathbf{m} \times \mathbf{u}_z \end{aligned} \quad (4.4)$$

Les fonctions résonantes en variable c sont notées $X_i(c)$ avec $X = \{C, D\}$ et $i = \{x, y, z\}$ avec les couples résonants associés $\mathcal{F}_R[X_i(c)] = X_i(c) \cdot c$.

Le but va consister à utiliser la transformée de ces couples canoniques en variable c , pour trouver plus rapidement la transformée des forçages. La méthode est décrite dans la section suivante.

4.1.1.2. Couples et forçages canoniques

Que devient le couple résonant $\mathcal{F}_R(c)$ transformé en variable c de $(\dot{\mathbf{m}})_R$? Il reste encore une combinaison linéaire de couples canoniques parce que les transformations sont distributives et linéaires. Il est possible d'accélérer le calcul du forçage en transformant chaque couple canonique individuellement, pour pouvoir former après n'importe quels couples résonants par combinaisons linéaires. Si le couple résonant est connu, sa fonction résonante d'ordre n l'est aussi, ce qui permet d'obtenir le forçage grâce à la propriété 3.1. La procédure est semblable à la décomposition d'un vecteur dans une base, excepté qu'ici, les couples canoniques ne forment pas une base au sens strict du terme³².

L'avantage de cette méthode de décomposition est d'éviter la (re)transformation de chaque forçage dès que la configuration de synchronisation change. Jusqu'à maintenant, les calculs de transformation génèrent souvent des approximations qui simplifient beaucoup le forçage et donc les propriétés de synchronisation [20] [19]. Avec cette méthode, les calculs se trouvent facilités. Par exemple, les forçages peuvent être calculés de façon exacte, tenir compte de plus de termes ou être approchés avec des approximations mieux maîtrisées.

La méthode est décrite formellement avec les notations de la définition 4.1.

Le couple de forçage $(\dot{\mathbf{m}})_F$ s'écrit, en injectant (4.3) dans (4.1) :

$$(\dot{\mathbf{m}})_F = a_g \cos(\phi_g) \left(k_C \sum_{i=\{x,y,z\}} \rho_i \mathcal{C}_i(\mathbf{m}) + k_D \sum_{i=\{x,y,z\}} \rho_i \mathcal{D}_i(\mathbf{m}) \right) \quad (4.5)$$

A l'aide des transformations, le couple de forçage en variable c devient :

³¹ \mathcal{C} pour couple conservatif et \mathcal{D} pour couple dissipatif.

³² $\text{Card}(\{\mathbf{m} \times \mathbf{u}_i, \mathbf{m} \times \mathbf{m} \times \mathbf{u}_i\}_{i=x,y,z}) = 6 > \text{Card}(\mathcal{R}^3) = 3$

$$\mathcal{T}_F(c) = a_g \cos(\phi_g) \left(k_C \sum_{i=\{x,y,z\}} \rho_i \mathcal{C}_i(c) + k_D \sum_{i=\{x,y,z\}} \rho_i \mathcal{D}_i(c) \right) \quad (4.6)$$

Et le forçage :

$$\mathcal{F}(c) = a_g \cos(\phi_g(t)) \left(k_C \sum_{i=\{x,y,z\}} \rho_i \sum_{m \in \mathbb{N}} \mathcal{C}_{i,m}(c) + k_D \sum_{i=\{x,y,z\}} \rho_i \sum_{m \in \mathbb{N}} \mathcal{D}_{i,m}(c) \right) \quad (4.7)$$

Avec $\mathcal{X}_{i,m}(c)$ la fonction résonnante à l'ordre m du couple canoniques $\mathcal{X}_i(c)$.

La propriété de résonance (propriété 3.1) donne à l'ordre n :

Propriété 4.1 : Les forçages à l'ordre n de l'oscillateur uniforme se décompose en :

$$\mathcal{F}(p, \psi) = \frac{a_g}{2} \left(k_C \sum_{i=\{x,y,z\}} \rho_i \mathcal{C}_{i,n}(p, \psi) + k_D \sum_{i=\{x,y,z\}} \rho_i \mathcal{D}_{i,n}(p, \psi) \right) \quad (4.8)$$

a_g, ρ_i sont l'amplitude et les composantes spatiales du signal générateur. k_C, k_D deux constantes d'échelles (préfacteurs des couples) et $\mathcal{X}_{i,n}(p, \psi)$ les forçages canoniques à l'ordre n du couple \mathcal{X}_i où $\mathcal{X} = \{C, D\}$ et $i = \{x, y, z\}$.

Par conséquent, on voit que tous les forçages sont une combinaison linéaire de forçages canoniques, extraits des couples canoniques associés. Il ne reste plus qu'à calculer séparément les expressions de ces forçages, pour pouvoir former n'importe lequel souhaité. Avant d'aborder les calculs, quelques exemples sont donnés afin d'illustrer la méthode.

4.1.1.3. Exemples

Une première configuration possible est le forçage du système avec un champ $\mathbf{H}_g(t)$, d'orientation $\mathbf{u}_g = (\mathbf{u}_y + \mathbf{u}_z)/\sqrt{2}$, voir Figure 4.1 (a).

Le couple de forçage $(\mathbf{m})_F$ s'écrit :

$$(\mathbf{m})_F = \frac{-\gamma'_0 H_g}{\sqrt{2}} \cos(\phi_g(t)) \left(\sum_{i=\{y,z\}} \mathcal{C}_i(\mathbf{m}) + \sum_{i=\{y,z\}} \alpha \mathcal{D}_i(\mathbf{m}) \right) \quad (4.9)$$

Et le forçage transformé à l'ordre 1 :

$$\mathcal{F}(p, \psi) = \frac{-\gamma'_0 H_g}{2\sqrt{2}} \left(\sum_{i=\{y,z\}} C_{i,1}(p, \psi) + \sum_{i=\{y,z\}} \alpha \mathcal{D}_{i,1}(p, \psi) \right) \quad (4.10)$$

Où $C_{i,1}(p, \psi)$, $\mathcal{D}_{i,1}(p, \psi)$ sont les forçages canoniques à l'ordre 1 des couples $\mathcal{C}_i(\mathbf{m})$, $\mathcal{D}_i(\mathbf{m})$.

Dans ce cas, \mathcal{F} comporte quatre forçages canoniques car le champ agit simultanément à travers les couples de précession et d'amortissement sur les axes \mathbf{u}_y et \mathbf{u}_z .

Une seconde configuration possible est d'utiliser un courant de spin $\mathbf{J}_g(t)$, d'orientation : $\mathbf{u}_g = \rho_x \mathbf{u}_x + \rho_y \mathbf{u}_y$ avec $\rho_x = \cos(165^\circ)$, $\rho_y = \sin(165^\circ)$, voir Figure 4.1 (b). Ce qui donne :

$$(\dot{\mathbf{m}})_F = \gamma'_0 J_g \cos(\phi_g(t)) \left(\sum_{i=\{x,y\}} \rho_i (\alpha a_{j0} - b_{j0}) \mathcal{C}_i(\mathbf{m}) - \sum_{i=\{x,y\}} \rho_i (a_{j0} + \alpha b_{j0}) \mathcal{D}_i(\mathbf{m}) \right) \quad (4.11)$$

Et le forçage associé à l'ordre 2 :

$$\mathcal{F}(p, \psi) = \frac{\gamma'_0 J_g \rho_x}{2} \left((\alpha a_{j0} - b_{j0}) \mathcal{C}_{x,2}(p, \psi) - (a_{j0} + \alpha b_{j0}) \mathcal{D}_{x,2}(p, \psi) \right) \quad (4.12)$$

Où $\mathcal{C}_{x,2}(p, \psi)$, $\mathcal{D}_{x,2}(p, \psi)$ désigne les forçages canoniques à l'ordre 2 des couples $\mathcal{C}_x(\mathbf{m})$, $\mathcal{D}_x(\mathbf{m})$.

Dans ce nouveau cas, le courant agit à travers le couple de Slonczewski, le couple d'effet de champ et sur les axes \mathbf{u}_x , \mathbf{u}_y . En particulier, \mathcal{F} ne dépend ici que des deux forçages canoniques $\mathcal{C}_{x,2}(p, \psi)$, $\mathcal{D}_{x,2}(p, \psi)$ car les forçages $\mathcal{C}_{y,2}(p, \psi)$, $\mathcal{D}_{y,2}(p, \psi)$ sont nuls, comme nous le verrons à la section 4.1.2.2.

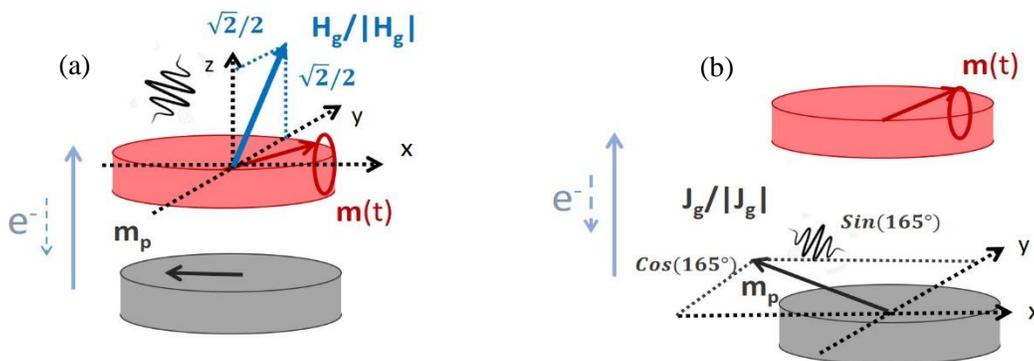


Figure 4.1. Deux exemples de forçage pour illustrer la méthode décomposition. (a) Synchronisation sous champ \mathbf{H}_g dans le plan $(\mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z)$ (b) Synchronisation sous courant \mathbf{J}_g dans le plan $(\mathbf{u}_y, \mathbf{u}_x)$.

4.1.2. Transformations

Il faut appliquer cette fois les transformations du formalisme onde de spin aux couples canoniques. La section commence par discuter les expressions des couples en variable a , puis donne directement les expressions des forçages canoniques. Les expressions intermédiaires sont reléguées à l'annexe 4.5.1.

4.1.2.1. Transformation (a)

Les couples canoniques (4.4) en variable a sont listés dans le tableau 4.1 suivant :

$C_x(a)$	$-ja$	(4.13)	$D_x(a)$	$a - a^2\bar{a}$	(4.14)
$C_y(a)$	$j \frac{2 - a^2 - 3a\bar{a}}{4\sqrt{1 - a\bar{a}}}$	(4.15)	$D_y(a)$	$\frac{-2 + 3a^2 + 3a\bar{a} - 2a^3\bar{a} - 2a^2\bar{a}^2}{4\sqrt{1 - a\bar{a}}}$	(4.16)
$C_z(a)$	$\frac{-2 - a^2 + 3a\bar{a}}{4\sqrt{1 - a\bar{a}}}$	(4.17)	$D_z(a)$	$j \frac{-2 - 3a^2 + 3a\bar{a} + 2a^3\bar{a} - 2a^2\bar{a}^2}{4\sqrt{1 - a\bar{a}}}$	(4.18)

Tableau 4.1. Expressions des couples canoniques en variable a .

Les expressions sont intéressantes à plus d'un titre. La structure des termes permet de ranger les couples en deux groupes : $\{C, D\}_{i=x}$ d'une part et $\{C, D\}_{i=y,z}$ d'autre part. Le premier groupe est composé de termes en $a^l \bar{a}^{l+2p+1}$, $p \in \mathbb{Z}$ tandis que le second est composé de termes en $a^l \bar{a}^{l+2p}$, $p \in \mathbb{Z}$ et du facteur de non linéarité $1/\sqrt{1 - a\bar{a}}$. En réalité, les puissances déterminent la parité des harmoniques avec lesquels les termes agissent dans la dynamique. Par exemple, les termes $a^l \bar{a}^{l+2p+1}$ produisent des harmoniques pairs (0,2,4 ...) tandis que les termes $a^l \bar{a}^{l+2p}$ produisent des harmoniques impairs (1,3,5 ...). Or l'harmonique donnant l'ordre de synchronisation, ces termes sont aussi responsables de la synchronisation à l'harmonique concerné. Ces différences de termes reflètent des symétries de couplage différentes entre les couples d'axes u_x , u_y ou u_z .

Par ailleurs, le tableau montre une autre caractéristique fondamentale : les couples C_x , C_y , D_z sont factorisés par j alors que les couples C_z , D_x , D_y ne le sont pas. Cette différence de facteur traduit des différences d'orientation vectorielle dans l'espace. Nous verrons que le facteur j induit les différences de circulation σ et d'orientation θ dans les expressions des forçages canoniques, ce qui modifie les propriétés de synchronisation, tel que le déphasage additionnel ψ_0 .

Ces caractéristiques générées par la transformation (a) sont fondamentales car elles sont conservées par les autres transformations (b) et (c). Par exemple, les transformations suivantes ne créent pas de termes à de nouvelles harmoniques. Elles conservent aussi le facteur j par linéarité.

4.1.2.2. Forçages canoniques d'ordre n

A présent, on formule les forçages canoniques d'ordre n (notés $X_{i,n}(d) = X_{i,n}(p, \psi)$). Les tableau 4.2, tableau 4.3, tableau 4.4 listent les expressions, normalisées selon (3.16).

○ *Remarques :*

1) \mathcal{G} est la fonction définie par $\mathcal{G}(B/A) = (1 - (B/A)^2)^{1/2}$, $B/A \in [-1, 1]$ et $p \in [0, p_{\text{opp}}]$.

2) A l'ordre 1, le facteur de non linéarité $\sqrt{1 - a\bar{a}} = \sqrt{1 + \frac{\omega}{\mathcal{A}}(u\bar{c} - v\bar{c})(-uc + v\bar{c})}$ n'est pas pris en compte dans les expressions. Les forçages de cet ordre ne sont donc pas exacts, ce qui engendre un moins bon accord lorsque p augmente.

3) Les fonctions r , ε_0 , ε_1 , ε_2 vérifient : $r > 0$, $\varepsilon_0 > 0$, $\varepsilon_1 > 0$ et $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$. Le demi-axe ε_2 peut être positif ou négatif, ce qui traduit un changement de sens de parcours de l'ellipse.

4) Les expressions sont normalisées selon (3.16). Toutes les expressions intermédiaires de calculs sont données à l'annexe 4.5.2. Le passage entre les paramètres u , v et ω/\mathcal{A} aux paramètres B/A se fait à l'aide des identités de l'annexe 2.6.2.2.

D'abord, on voit que les forçages canoniques conservent toutes les propriétés acquises par la transformation (a). Les forçages d'ordre pair proviennent uniquement de couples d'axe \mathbf{u}_x tandis que ceux d'ordre impair proviennent des couples d'axes \mathbf{u}_y et \mathbf{u}_z . Le fait important est que toutes les fonctions dépendent de la puissance des oscillations, p et du ratio B/A . En particulier, la dépendance en p des forçages a déjà été remarquée par [20] mais pas la dépendance avec B/A , qui est une information nouvelle. Ainsi, ces formules sont générales car elles fonctionnent pour tous les oscillateurs uniformes quel que soit le paramètre B/A . Par exemple, l'oscillateur peut être aussi bien planaire avec une trajectoire $\mathbf{m}(t)$ elliptique ($B/A \approx -1$) que hors du plan avec une trajectoire circulaire ($B/A \approx 0$). La dépendance des forçages canoniques avec les paramètres p , B/A traduit la dépendance essentielle des forçages avec la géométrie des orbites du système.

Plus précisément, les tableaux montrent que les forçages peuvent avoir des ellipticités très différentes les unes des autres. Par exemple, les forçages canoniques d'ordres supérieurs ($n > 1$) peuvent être soit : circulaires ($g = 0$) si les couples sont conservatifs ($C_{i,n}$ avec $i = \{x, y, z\}$, $n = \{2, 3\}$) ou soit rectilignes ($g = 1$) si les couples sont dissipatifs ($D_{i,n}$ avec $i = \{x, y, z\}$, $n = \{2, 3\}$). Les forçages d'ordre supérieur ont une caractéristique commune : l'amplitude peut changer mais pas leur ellipticité, qui reste fixe avec p , B/A . A l'inverse, les forçages d'ordre 1 sont à ellipticité quelconque. Ensemble, l'amplitude et l'ellipticité changent avec p , B/A . Tout cela montre que les forçages canoniques peuvent avoir des géométries très variées (amplitudes, ellipticités, circulation ou orientation), selon l'ordre ou la nature conservatif/dissipatif des couples. Cette dépendance de l'ellipticité est une caractéristique nouvelle qui n'a jamais été vue auparavant.

○ Forçages canoniques

Forçages	Expressions : $\mathcal{X}_{i,n}(p, \psi) = r(p)e^{-j(\psi-\theta)}$	
$\mathcal{C}_{x,2}$	$r = \frac{ B/\mathcal{A} }{g(B/\mathcal{A})}$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ ($+\pi \operatorname{si} B/\mathcal{A} < 0$)	(4.19)
$\mathcal{C}_{y,3}$	$r(p) = \left(\frac{\sqrt{1+g(B/\mathcal{A})} - \operatorname{Sign}(B/\mathcal{A})\sqrt{1-g(B/\mathcal{A})}}{g(B/\mathcal{A})} \right) \frac{ B/\mathcal{A} }{2\sqrt{2}} \sqrt{p}$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ ($+\pi \operatorname{si} B/\mathcal{A} < 0$)	(4.20)
$\mathcal{C}_{z,3}$	$r(p) = \left(\frac{\sqrt{1+g(B/\mathcal{A})} + \operatorname{Sign}(B/\mathcal{A})\sqrt{1-g(B/\mathcal{A})}}{g(B/\mathcal{A})} \right) \frac{ B/\mathcal{A} }{2\sqrt{2}} \sqrt{p}$, $\theta = \pi$ ($+\pi \operatorname{si} B/\mathcal{A} < 0$)	(4.21)

Tableau 4.2. Forçages circulaires

Forçages	Expressions : $\mathcal{X}_{i,n}(p, \psi) = r(p)e^{j\sigma} \cos(\psi - \theta)$	
$D_{x,2}$	$r(p) = B/\mathcal{A} p$, $\sigma = 0$, $\theta = 0$ ($+\pi \operatorname{si} B/\mathcal{A} < 0$)	(4.22)
$D_{y,3}$	$r(p) = \left(\sqrt{\left(1+g\left(\frac{B}{\mathcal{A}}\right)\right)} - \operatorname{Sign}\left(\frac{B}{\mathcal{A}}\right) \sqrt{\left(1-g\left(\frac{B}{\mathcal{A}}\right)\right)} \right) \frac{ B/\mathcal{A} }{2\sqrt{2}} p\sqrt{p}$, $\sigma = 0$, $\theta = 0$ ($+\pi \operatorname{si} \frac{B}{\mathcal{A}} < 0$)	(4.23)
$D_{z,3}$	$r(p) = \left(\sqrt{\left(1+g\left(\frac{B}{\mathcal{A}}\right)\right)} + \operatorname{Sign}\left(\frac{B}{\mathcal{A}}\right) \sqrt{\left(1-g\left(\frac{B}{\mathcal{A}}\right)\right)} \right) \frac{ B/\mathcal{A} }{2\sqrt{2}} p\sqrt{p}$, $\sigma = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ ($+\pi \operatorname{si} \frac{B}{\mathcal{A}} < 0$)	(4.24)

Tableau 4.3. Forçages à valeurs réelles.

Forçages	Expressions : $\mathcal{X}_{i,n}(p, \psi) = \frac{\varepsilon_0(p)}{2} e^{j\sigma} \left((\varepsilon_1(p) + \varepsilon_2(p))e^{+j(\psi-\theta)} + (\varepsilon_1(p) - \varepsilon_2(p))e^{-j(\psi-\theta)} \right)$	
$\mathcal{C}_{y,1}$	$\varepsilon_0(p) = \left(\frac{\sqrt{1+g(B/\mathcal{A})} - \operatorname{Sign}(B/\mathcal{A})\sqrt{1-g(B/\mathcal{A})}}{g(B/\mathcal{A})} \right) \frac{1}{2\sqrt{2}p}$ $\varepsilon_1(p) = 1 - p$, $\varepsilon_2(p) = -\left(1 - \left(2 - \frac{B}{\mathcal{A}}\right)p\right)$, $\sigma = 0$, $\theta = \pi/2$	(4.25)
$\mathcal{C}_{z,1}$	$\varepsilon_0(p) = \left(\frac{\sqrt{1+g(B/\mathcal{A})} + \operatorname{Sign}(B/\mathcal{A})\sqrt{1-g(B/\mathcal{A})}}{g(B/\mathcal{A})} \right) \frac{1}{2\sqrt{2}p}$ $\varepsilon_1(p) = 1 - p$, $\varepsilon_2(p) = -\left(1 - \left(2 + \frac{B}{\mathcal{A}}\right)p\right)$, $\sigma = 0$, $\theta = \pi$	(4.26)
$D_{y,1}$	$\varepsilon_0(p) = \left(\frac{\sqrt{1+g(B/\mathcal{A})} + \operatorname{Sign}(B/\mathcal{A})\sqrt{1-g(B/\mathcal{A})}}{g(B/\mathcal{A})} \right) \frac{1}{2\sqrt{2}p}$ $\varepsilon_1(p) = 1$, $\varepsilon_2(p) = -\left(1 - 3\left(1 - \frac{B}{\mathcal{A}}\right)p + \left(1 - \frac{B}{\mathcal{A}}\right)\left(2 - \frac{B}{\mathcal{A}}\right)p^2\right)$, $\sigma = \frac{\pi}{2}$, $\theta = \frac{\pi}{2}$	(4.27)
$D_{z,1}$	$\varepsilon_0(p) = \left(\frac{\sqrt{1+g(B/\mathcal{A})} - \operatorname{Sign}(B/\mathcal{A})\sqrt{1-g(B/\mathcal{A})}}{g(B/\mathcal{A})} \right) \frac{1}{2\sqrt{2}p}$ $\varepsilon_1(p) = 1$, $\varepsilon_2(p) = -\left(1 - 3\left(1 + \frac{B}{\mathcal{A}}\right)p + \left(1 + \frac{B}{\mathcal{A}}\right)\left(2 + \frac{B}{\mathcal{A}}\right)p^2\right)$, $\sigma = \frac{\pi}{2}$, $\theta = \pi$	(4.28)

Tableau 4.4. Forçages quelconques.

4.1.2.3. Forçages canoniques à valeurs réelles d'ordre n

D'après la section 3.4.3, il est possible aussi de créer les forçages canoniques à valeurs réelles (notés $\mathcal{X}a_{i,n}$), en prenant la partie réelle des forçages canoniques à valeurs exactes. En particulier, la simplification convient bien pour l'oscillateur uniforme car en général $|v| \gg 1$, voir propriété 3.9. Le tableau 4.5 liste leurs expressions à tous les ordres.

○ Forçages canoniques à valeurs réelles

Forçages	Expressions : $\mathcal{X}a_{i,n}(p, \psi) = r(p) \cos(\psi - \theta)$	
$\mathcal{C}a_{y,1}$	$r(p) = \varepsilon_0(p)\varepsilon_1(p) = \left(\frac{\sqrt{1 + \mathcal{G}(\frac{B}{\mathcal{A}})} - \text{Sign}(\frac{B}{\mathcal{A}})\sqrt{1 - \mathcal{G}(\frac{B}{\mathcal{A}})}}{\mathcal{G}(\frac{B}{\mathcal{A}})} \right) \frac{(1-p)}{2\sqrt{2p}}, \quad \theta = \frac{\pi}{2}$	(4.29)
$\mathcal{C}a_{z,1}$	$r(p) = \varepsilon_0(p)\varepsilon_1(p) = \left(\frac{\sqrt{1 + \mathcal{G}(\frac{B}{\mathcal{A}})} + \text{Sign}(\frac{B}{\mathcal{A}})\sqrt{1 - \mathcal{G}(\frac{B}{\mathcal{A}})}}{\mathcal{G}(\frac{B}{\mathcal{A}})} \right) \frac{(1-p)}{2\sqrt{2p}}, \quad \theta = \pi$	(4.30)
$\mathcal{C}a_{x,2}$	$r(p) = \frac{ B/\mathcal{A} }{\mathcal{G}(B/\mathcal{A})}, \quad \theta = \frac{\pi}{2} \quad (+ \pi \text{ si } B/\mathcal{A} < 0)$	(4.31)
$\mathcal{C}a_{y,3}$	$r(p) = \left(\frac{\sqrt{1 + \mathcal{G}(B/\mathcal{A})} - \text{Sign}(B/\mathcal{A})\sqrt{1 - \mathcal{G}(B/\mathcal{A})}}{\mathcal{G}(B/\mathcal{A})} \right) \frac{ B/\mathcal{A} }{2\sqrt{2}} \sqrt{p}, \quad \theta = \frac{\pi}{2} \quad (+ \pi \text{ si } B/\mathcal{A} < 0)$	(4.32)
$\mathcal{C}a_{z,3}$	$r(p) = \left(\frac{\sqrt{1 + \mathcal{G}(B/\mathcal{A})} + \text{Sign}(B/\mathcal{A})\sqrt{1 - \mathcal{G}(B/\mathcal{A})}}{\mathcal{G}(B/\mathcal{A})} \right) \frac{ B/\mathcal{A} }{2\sqrt{2}} \sqrt{p}, \quad \theta = \pi \quad (+ \pi \text{ si } B/\mathcal{A} < 0)$	(4.33)
$\mathcal{D}a_{y,1}$	$r(p) = \varepsilon_0(p)\varepsilon_2(p) = \left(\frac{\sqrt{1 + \mathcal{G}(\frac{B}{\mathcal{A}})} + \text{Sign}(\frac{B}{\mathcal{A}})\sqrt{1 - \mathcal{G}(\frac{B}{\mathcal{A}})}}{\mathcal{G}(\frac{B}{\mathcal{A}})} \right) \frac{(1 - 3(1 - \frac{B}{\mathcal{A}})p + (1 - \frac{B}{\mathcal{A}})(2 - \frac{B}{\mathcal{A}})p^2)}{2\sqrt{2p}}$ $\theta = \begin{cases} \pi \text{ si } 0 < p < p_{r,D,y} \\ 0 \text{ si } p_{r,D,y} \leq p < p_{opp} \end{cases}$	(4.34)
$\mathcal{D}a_{z,1}$	$r(p) = \varepsilon_0(p)\varepsilon_2(p) = \left(\frac{\sqrt{1 + \mathcal{G}(\frac{B}{\mathcal{A}})} - \text{Sign}(\frac{B}{\mathcal{A}})\sqrt{1 - \mathcal{G}(\frac{B}{\mathcal{A}})}}{\mathcal{G}(\frac{B}{\mathcal{A}})} \right) \frac{(1 - 3(1 + \frac{B}{\mathcal{A}})p + (1 + \frac{B}{\mathcal{A}})(2 + \frac{B}{\mathcal{A}})p^2)}{2\sqrt{2p}},$ $\theta = \frac{3\pi}{2}$	(4.35)

Tableau 4.5. Forçages canoniques à valeurs réelles. Les forçages $\mathcal{D}_{x,2}$, $\mathcal{D}_{y,3}$, $\mathcal{D}_{z,3}$ n'en n'ont pas car ils le sont déjà.

La simplification des forçages appelle plusieurs remarques. En premier, il faut choisir le bon demi-axe à garder, suivant la valeur de la circularité σ . Par exemple dans les cas $Ca_{y,1}$ et $Ca_{z,1}$, la circularité vaut 0 donc c'est le demi-axe ε_1 qu'il faut garder. En revanche pour $Da_{y,1}$ et $Da_{z,1}$, la circularité vaut $\pi/2$ donc c'est cette fois le demi-axe ε_2 , qu'il faut garder. Par ailleurs, l'orientation du forçage à valeurs réelles n'est pas toujours égale à celle du cas exact. La valeur est exactement la somme de l'orientation θ et de la circulation σ . D'où les orientations différentes de $Da_{y,1}$ et $Da_{z,1}$ comparées à $D_{y,1}$ et $D_{z,1}$.

○ *En résumé :*

Les transformations du formalisme onde de spin permettent de calculer les forçages canoniques de l'équation LLGS. Ces forçages possèdent plusieurs particularités : 1) d'avoir des géométries différentes les unes des autres, 2) de ne dépendre que des variables p et \mathcal{B}/\mathcal{A} , les mêmes qui gouvernent les orbites conservatives du système. A partir de leurs expressions, nous avons ensuite obtenu les forçages à valeurs réelles associés, d'expressions plus simples, qui donnent les mêmes propriétés de synchronisation lorsque la propriété 3.9 est vérifiée. L'avantage des forçages canoniques est de permettre d'obtenir n'importe quels autres forçages par combinaison, ce qui un gain de temps appréciable. La partie suivante étudie plus en détail leur évolution selon p et \mathcal{B}/\mathcal{A} .

4.2. Etude géométrique

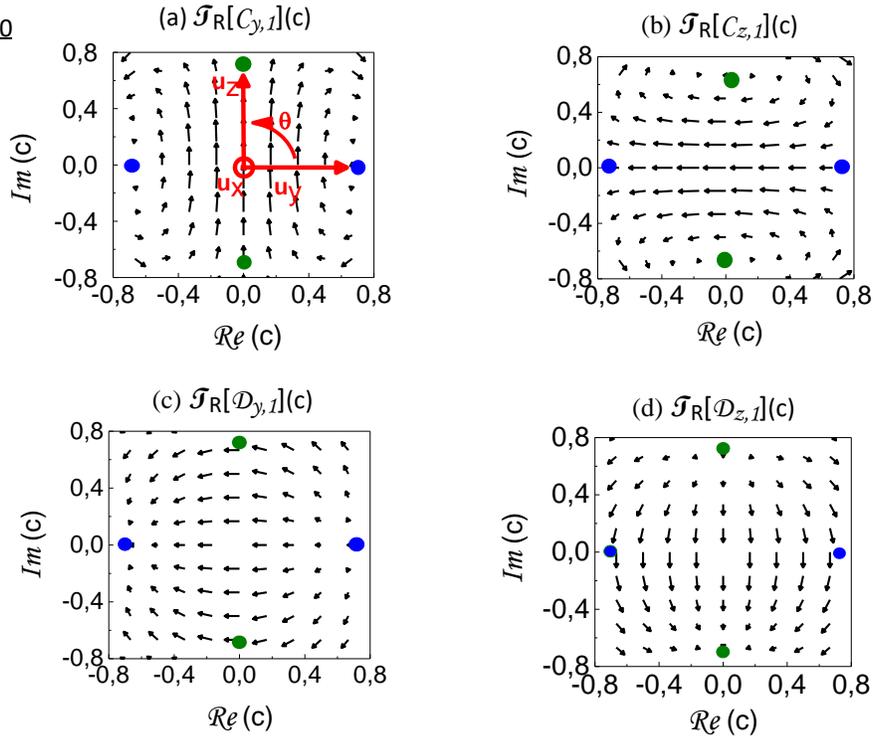
Nous cherchons à étudier l'évolution des paramètres géométriques (r , g , σ et θ) des forçages à valeurs exactes canoniques (Tableau 4.2, Tableau 4.3, Tableau 4.4), en fonction des paramètres d'orbites. On commence par les forçages d'ordre 1. Ce sont certainement les plus intéressants car l'amplitude et surtout l'ellipticité varient. Plus encore, certaines conditions $p = f(\mathcal{B}/\mathcal{A})$ génèrent des ellipticités remarquables : rectilignes ou circulaires qui ont des conséquences visibles dans le régime synchronisé. Ensuite, on traite le cas des forçages d'ordre supérieur, plus simple à étudier car seule l'amplitude change.

4.2.1. Forçages d'ordre 1

4.2.1.1. Représentation des couples résonants

Pour comprendre l'origine des variations géométriques, on s'intéresse d'abord à l'évolution du couple résonant : $\mathcal{T}_R[X_{i,1}](c) = X_{i,1}(p, \phi)$. c associé à la fonction résonante $X_{i,1}(p, \phi)$. La Figure 4.2 montre l'évolution des couples dans le plan complexe c , dans deux cas : $\mathcal{B}/\mathcal{A} = 0$ et $\mathcal{B}/\mathcal{A} \approx -1$ ($\mathcal{B}/\mathcal{A} = -0,91$).

Cas : $\mathcal{B}/\mathcal{A} = 0$



Cas : $\mathcal{B}/\mathcal{A} \approx -1$

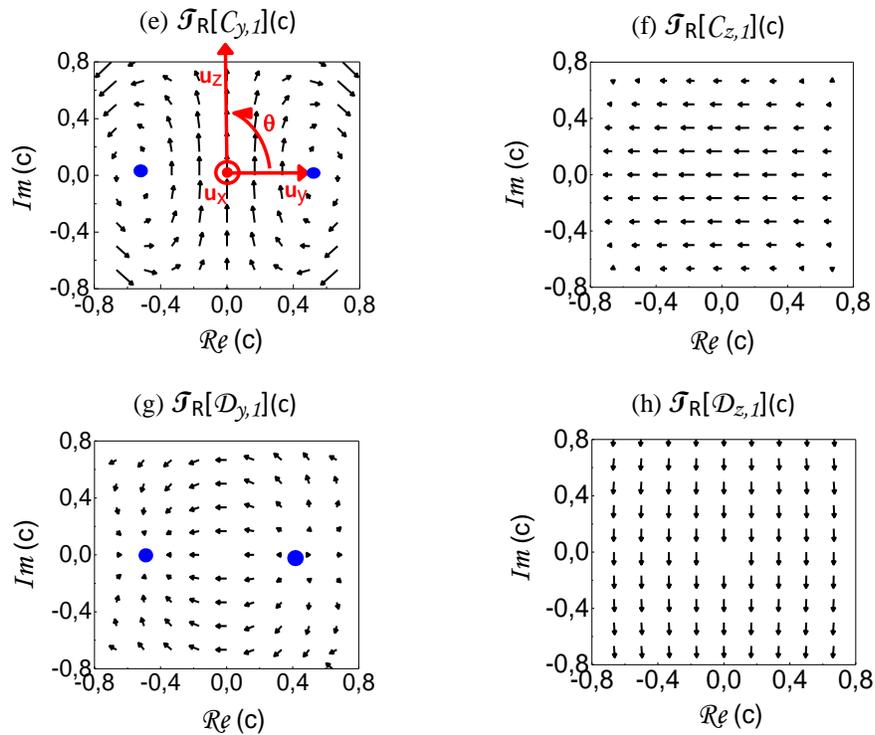


Figure 4.2. Couples résonants \mathcal{F}_R associés aux fonctions résonantes canoniques d'ordre 1 représentés dans le plan complexe c : (a,b,c,d) Cas : $\mathcal{B}/\mathcal{A} = 0$ et (e,f,g,h) Cas : $\mathcal{B}/\mathcal{A} = -0,91$. Le plan est délimité par : $|\Re(c)| < 0,8$, $|\Im(c)| < 0,8$, tel que $|c| = \sqrt{p} = 0,8$, $p = 0,64$. Si $\mathcal{B}/\mathcal{A} = 0$, $\sqrt{p_{opp}} = 1$ et si $\mathcal{B}/\mathcal{A} = -0,91$, $\sqrt{p_{opp}} = 0,72$. Les coordonnées $\mathbf{m} = \pm \mathbf{u}_y$ et $\mathbf{m} = \pm \mathbf{u}_z$ de l'espace sont marquées par les points bleus et les points verts.

Premier cas : $\mathcal{B}/\mathcal{A} = 0$ (cas de l'oscillateur hors du plan). Ce cas est très intuitif car les orbites sont circulaires, quelles que soient les représentations \mathbf{m} , a , b ou c . Lorsque $p \rightarrow 0$, les axes $\Re(c)$, $\Im(c)$ peuvent être considérés comme les axes \mathbf{u}_y et \mathbf{u}_z de l'espace³³, sans déformation du plan complexe par la transformation (b). Il existe alors un lien entre les deux représentations, voir aussi section 2.3.1 avec $\mathcal{B}/\mathcal{A} \rightarrow 0$ et $p \rightarrow 0$. Par ailleurs comme les couples d'ordres 3 sont nuls, les couples d'ordre 1 $\{\mathcal{J}_R[C_{i,1}](c)\}_{i=x,y,z}$, $\{\mathcal{J}_R[\mathcal{D}_{i,1}](c)\}_{i=x,y,z}$ sont strictement égaux aux couples canoniques.

Aux faibles puissances (c.à.d. au centre du plan), les couples ont une amplitude quasi-constante avec une orientation fixe, voir Figure 4.2 (a,b,c,d). Cela est intuitif si l'on considère leurs actions en variable \mathbf{m} . Lorsque l'ouverture de l'orbite est faible, la trajectoire est voisine de \mathbf{u}_x . Dans ce cas, les couples canoniques deviennent constants quelle que soit la position de l'aimantation dans l'orbite, par exemple : $C_y(\mathbf{m}) \approx \mathbf{u}_z$, $C_z(\mathbf{m}) \approx \mathcal{D}_y(\mathbf{m}) \approx -\mathbf{u}_y$ et $\mathcal{D}_z(\mathbf{m}) \approx -\mathbf{u}_z$. On peut retrouver intuitivement l'amplitude et l'orientation des couples dans le plan complexe si l'on se rappelle que $\Re(c) \Leftrightarrow \mathbf{u}_y$ et $\Im(c) \Leftrightarrow \mathbf{u}_z$. L'orientation complexe apparait donc, aux faibles puissances, directement liée à l'orientation vectorielle des couples dans l'espace.

Aux fortes puissances, les couples d'axe \mathbf{u}_i se déforment en amplitude et en direction lorsque l'aimantation se rapproche des coordonnées $\mathbf{m} = \pm\mathbf{u}_i$ (points bleus pour $\mathbf{m} = \pm\mathbf{u}_y$, $c = \pm\sqrt{2}/2$ et points verts pour $\mathbf{m} = \pm\mathbf{u}_z$, $c = \sqrt{2}/2 \exp(\pm j \pi/2)$). Précisément, ils s'annulent en ces points parce que le produit vectoriel de vecteurs colinéaires est nul, ce qui entraîne une forte modification au voisinage. En particulier comme $\mathcal{B}/\mathcal{A} = 0$, l'orbite rencontre ces quatre points simultanément à la même puissance $p = 0.5$. Sa position dans l'espace est montrée à la Figure 2.3.

Second cas : $\mathcal{B}/\mathcal{A} = -0,91$ (cas de l'oscillateur planaire). Les orbites du système en variable \mathbf{m} sont fortement comprimées dans le plan $(\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y)$, à cause du champ démagnétisant de la couche libre dirigé selon \mathbf{u}_z . Dû à la forte valeur de \mathcal{B}/\mathcal{A} , la transformation (b) génère des plans complexes b et c déformés par rapport à l'espace, ce qui produit des couples différents du cas précédent, voir Figure 4.2 (e,f,g,h). La déformation du plan complexe a pour effet de comprimer les directions \mathbf{u}_y et de dilater \mathbf{u}_z . Cette dissymétrie entraîne un rapprochement des points $\mathbf{m} = \pm\mathbf{u}_y$, $c \approx \pm 0.51$ vers le centre du plan et l'expulsion des points $\mathbf{m} = \pm\mathbf{u}_z$, $c \approx 2.3 \exp(\pm j \pi/2)$, hors de la figure. En particulier, ces derniers sont inatteignables par le système car ils se trouvent hors de la région d'accessibilité : $|c| < \sqrt{p_{opp}} = 0,72 < 2,3$. Il faut donc s'attendre, dans cette configuration, à ce que les couples de $C_{y,1}$, $\mathcal{D}_{y,1}$ soient moins réguliers que ceux de $C_{z,1}$, $\mathcal{D}_{z,1}$, étant perturbés par la proximité de la trajectoire vis-à-vis des points $\mathbf{m} = \pm\mathbf{u}_y$.

La représentation des couples résonants montre que le voisinage des points $\mathbf{m} = \pm\mathbf{u}_i$ z génère de fortes modifications des couples d'axe \mathbf{u}_i . On comprend ainsi pourquoi les forçages associés modifient leurs amplitudes et leurs ellipticités en fonction de p et \mathcal{B}/\mathcal{A} . Plus quantitativement, la section suivante présente l'évolution des paramètres géométriques en fonction de p quand $\mathcal{B}/\mathcal{A} = -0,91$.

³³ Rappel : l'oscillateur tourne dans le sens trigonométrique, quelle que soit la valeur de \mathcal{B}/\mathcal{A} .

4.2.1.2. Evolution avec p à $\mathcal{B}/\mathcal{A} \approx -1$

Comme les forçages sont à valeurs quelconques, la caractérisation nécessite tous les paramètres géométriques (r , g , σ et θ). La Figure 4.3 montre leurs évolutions en fonction de la puissance, quand $\mathcal{B}/\mathcal{A} = -0,91$.

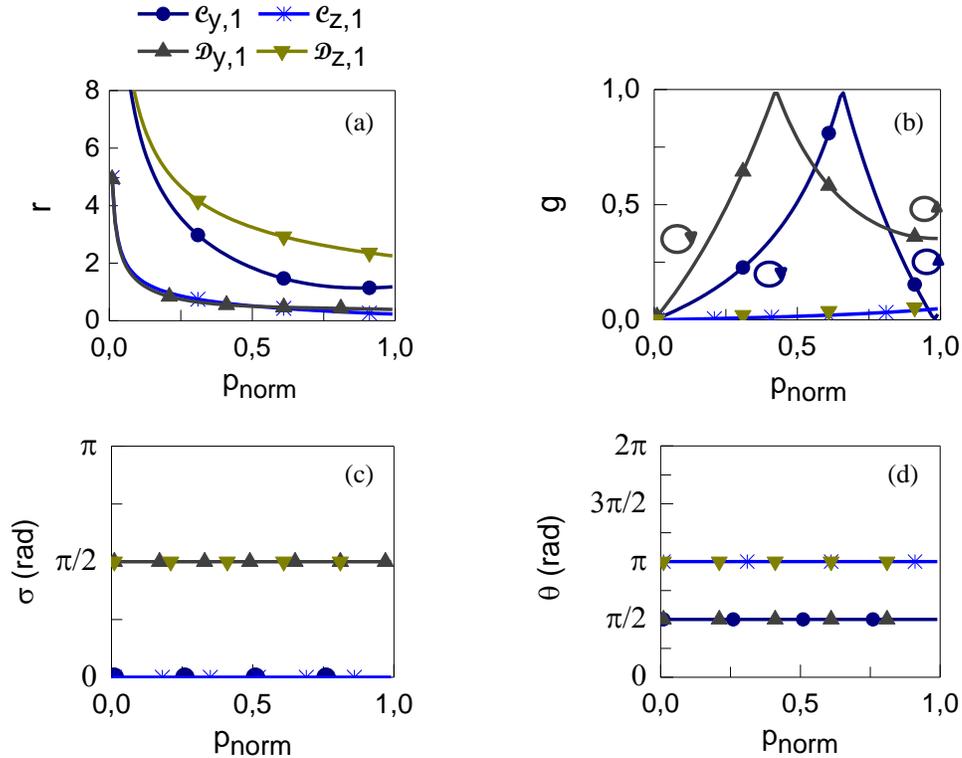


Figure 4.3. Evolution des paramètres géométriques des forçages d'ordre 1 en fonction de la puissance normalisée $p_{norm} = p/p_{opp}$ à $\mathcal{B}/\mathcal{A} = -0,91$ ($p_{opp} = 0,52$). (a) Amplitude. (b) Ellipticité ramenée entre : $0 < g < 1$ (c) circularité et (d) orientation. Noter le changement de sens de parcours de l'ellipse après la transition rectiligne de $C_{y,1}$ ou $\mathcal{D}_{y,1}$.

En premier, l'amplitude de tous les forçages diminue avec la puissance, voir Figure 4.3 (a). En particulier lorsque $p \rightarrow 0$, alors $r(p) \rightarrow +\infty$, ce qui peut être étonnant car la gamme de synchronisation $\Delta\Omega$ est infiniment grande. En pratique l'extension de $\Delta\Omega$ est limitée : 1) D'une part, comme δp doit vérifier $\delta p > -p_0$, un côté de $\Delta\Omega$ est limité par le seuil minimal de puissance. 2) D'autre part, l'autre côté ne peut augmenter à l'infini car il faut prendre en compte l'affaiblissement de $r(p)$. Par conséquent, $\Delta\Omega$ n'est pas en réalité infini.

Par ailleurs, on voit un autre phénomène intéressant concernant les amplitudes. Il existe une asymétrie, car celles de $C_{y,1}$, $\mathcal{D}_{z,1}$ sont plus grandes que celles de $C_{z,1}$, $\mathcal{D}_{y,1}$. Cela est en réalité causé par l'asymétrie de trajectoire de l'aimantation ($\mathcal{B}/\mathcal{A} \approx -1$). Comme la trajectoire est fortement comprimée dans le plan $(\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y)$, les couples $C_y(\mathbf{m})$, $\mathcal{D}_z(\mathbf{m})$ varient beaucoup plus fortement que les couples $C_z(\mathbf{m})$, $\mathcal{D}_y(\mathbf{m})$. Résultat,

les premiers auront une meilleure efficacité de synchronisation. Cela est intéressant à savoir pour notamment connaître les meilleures façons d'injecter le signal générateur dans le système.

L'ellipticité se comporte différemment, voir Figure 4.3 (b). D'abord, l'ellipticité de $C_{z,1}$, $D_{z,1}$ reste quasiment circulaire quel que soit p . Au contraire, celle de $C_{y,1}$, $D_{y,1}$ varie fortement. Par exemple dans le cas de $C_{y,1}$, l'ellipticité est circulaire quand la puissance est faible, puis devient rectiligne et de nouveau circulaire aux fortes puissances. En particulier, l'ellipticité est rectiligne à la puissance $p_{r,D,y} = 0,22$ ($p_{r,D,y} / p_{opp} = 0,42$) pour $D_{y,1}$ et $p_{r,e,y} = 0,34$ ($p_{r,e,y} / p_{opp} = 0,66$) pour $C_{y,1}$. Ces changements extrêmes se produisent à cause des modifications des couples vues précédemment. Lorsque $B/A \approx -1$, les couples résonants $\mathcal{I}_R[C_{z,1}]$, $\mathcal{I}_R[D_{z,1}]$ sont quasi constants ce qui explique la régularité de l'ellipticité. En revanche, les couples $\mathcal{I}_R[C_{y,1}]$, $\mathcal{I}_R[D_{y,1}]$ varient fortement autour de $\mathbf{m} = \pm \mathbf{u}_y$ ce qui entraîne la modification de l'ellipticité. Par symétrie si B/A avait été positif dans l'exemple de la figure, cela aurait été l'inverse. Les forçages $C_{z,1}$, $D_{z,1}$ auraient effectué la transition rectiligne de leurs ellipticités. Le calcul des puissances à la transition est donné à la section suivante.

Autre phénomène intéressant, les forçages $C_{y,1}$, $D_{y,1}$ ne deviennent pas rectilignes avec la même circularité σ , voir Figure 4.3 (c). D'une part, $C_{y,1}$ devient réel ($\sigma = 0$) tandis que $D_{y,1}$ est imaginaire ($\sigma = \pi/2$). Cette dernière configuration possède des propriétés de synchronisation particulières comme une forte réduction de $\Delta\Omega$ et de $\Delta\Pi$, voir section 3.4.1.2. Cela montre que sous certaines conditions de p et de B/A , il est possible d'atteindre théoriquement des forçages originaux rien qu'avec les forçages canoniques. Néanmoins, la forte puissance requise pour y accéder rend moins juste l'accord de la théorie avec les simulations.

La Figure 4.4 illustre la transition rectiligne particulière du forçage $D_{y,1}$:

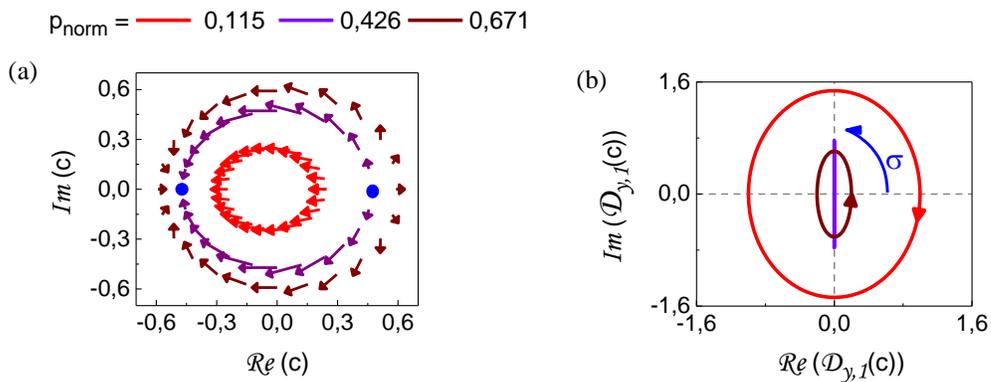


Figure 4.4. (a) Couple résonant $\mathcal{I}_R[D_{y,1}](c)$ dans le plan complexe c montré seulement aux orbites : $p_{norm} = 0,115$ ($p = 0,06$, $\xi=1,05$), $p_{norm} = 0,426$ ($p_{r,D,y} = 0,222$, $\xi=1,18$), $p_{norm} = 0,671$ ($p = 0,350$, $\xi=1,35$). (b) Représentation paramétrique aux mêmes puissances.

La représentation du couple $\mathcal{F}_R[\mathcal{D}_{y,1}]$ souligne l'importance des points $\mathbf{m} = \pm \mathbf{u}_y$ dans ce changement d'ellipticité, Figure 4.4 (a). De façon équivalente, la représentation paramétrique montre l'allure de l'ellipse au cours de la transition, Figure 4.4 (b). Cette transition rectiligne de type imaginaire est particulièrement rare car c'est le seul forçage, parmi tous les forçages canoniques, qui possède cette propriété.

4.2.1.3. Conditions d'ellipticité rectiligne

Grâce aux formules du tableau 4.4, il est possible de calculer précisément les conditions qui produisent la transition d'ellipticité rectiligne³⁴.

○ *Condition de rectilinéarité*

Le forçage devient rectiligne si l'un des demi axes ε_1 ou ε_2 s'annule, c'est-à-dire si :

$$\varepsilon_1(p, \mathcal{B}/\mathcal{A}) = 0 \quad \text{ou} \quad \varepsilon_2(p, \mathcal{B}/\mathcal{A}) = 0 \quad (4.36)$$

Par exemple, dans le cas de $C_{y,1}$, la condition devient :

$$\varepsilon_1(p, \mathcal{B}/\mathcal{A}) = 1 - \left(2 - \frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}}\right)p \quad \text{ou} \quad \varepsilon_2(p, \mathcal{B}/\mathcal{A}) = -(1 - p) \quad (4.37)$$

Ce qui donne les deux puissances :

$$p_{r,c,y} = \frac{1}{2 - \mathcal{B}/\mathcal{A}} \quad \text{ou} \quad p_{r,e,y} = 1 \quad (4.38)$$

La solution de $\mathcal{D}_{y,1}$ s'obtient avec la même méthode. Au final, cela donne :

Propriété 4.2 : Conditions rectilinéaires des forçage $C_{y,1}$:

$$p_{r,c,y} = \left\{ p_{opp} \text{ en } \mathcal{B}/\mathcal{A} = 0, \quad \frac{1}{2 - \mathcal{B}/\mathcal{A}} \text{ sur } \mathcal{B}/\mathcal{A} \in \left[-1, \frac{1}{2}\right] \right\} \quad (4.39)$$

Et des forçage $\mathcal{D}_{y,1}$:

$$p_{r,d,y} = \left\{ \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2 - \mathcal{B}/\mathcal{A}} \right) \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4}{9} \left(\frac{2 - \mathcal{B}/\mathcal{A}}{1 - \mathcal{B}/\mathcal{A}} \right)} \right) \text{ sur } \mathcal{B}/\mathcal{A} \in \left[-1, \frac{1}{5}\right] \right\} \quad (4.40)$$

Pour des raisons de symétrie, les solutions de puissances $p_{r,e,z}$ et $p_{r,d,z}$ des forçages $C_{z,1}$, $\mathcal{D}_{z,1}$ s'obtiennent simplement en substituant \mathcal{B}/\mathcal{A} par $-\mathcal{B}/\mathcal{A}$ dans (4.39).

³⁴ Il existe aussi une condition de transition circulaire. Seulement, elle se produit à trop forte puissance pour que le modèle soit encore valable.

○ Représentation graphique

La Figure 4.5 représente les différentes solutions.

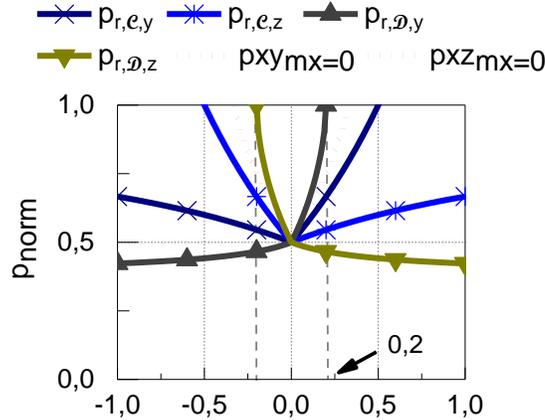


Figure 4.5. Transitions rectilignes des ellipticités à l'ordre 1 en fonction de la puissance normalisée p_{norm} et \mathcal{B}/\mathcal{A} (la solution $p = 1$ n'est pas représentée). Les puissances d'orbites dont les extrémités appartiennent à l'axe \mathbf{u}_y ($p_{xy_{mx=0}}$) et à l'axe \mathbf{u}_z ($p_{xz_{mx=0}}$) sont indiquées en pointillé vert et rouge.

La Figure 4.5 (a) montre que les changements d'ellipticités sont corrélés à la position de l'orbite dans l'espace. Par exemple, la puissance requise pour les transitions rectilignes de $C_{y,1}$, $\mathcal{D}_{y,1}$ est proche de la puissance de l'orbite à moitié ouverte ($p_{xy_{mx=0}}$). En particulier lorsque $\mathcal{B}/\mathcal{A} > 0.5$, ces transitions cessent de se produire, tout comme le croisement de l'orbite avec \mathbf{u}_y . De façon réciproque, il existe la même similarité entre la puissance des transitions rectilignes de $C_{z,1}$, $\mathcal{D}_{z,1}$ avec la puissance $p_{xz_{mx=0}}$. Par conséquent, cela montre que ces transitions sont effectivement liées aux modifications des couples vu à Figure 4.2.

4.2.2. Forçages d'ordres supérieurs

L'étude des forçages aux ordres supérieurs est plus simple qu'à l'ordre 1 car seule l'amplitude varie. La Figure 4.6 montre l'évolution de l'amplitude des forçages d'ordre 2 et 3 en fonction de la puissance, quand $\mathcal{B}/\mathcal{A} = -0,91$.

D'après les Figure 4.6 (a,b), l'amplitude de $C_{x,2}$ est différente de celles des autres forçages. Par exemple, l'amplitude de $C_{x,2}$ est constante avec la puissance tandis que toutes celles des autres sont nulles en $p = 0$, et augmentent avec la puissance.

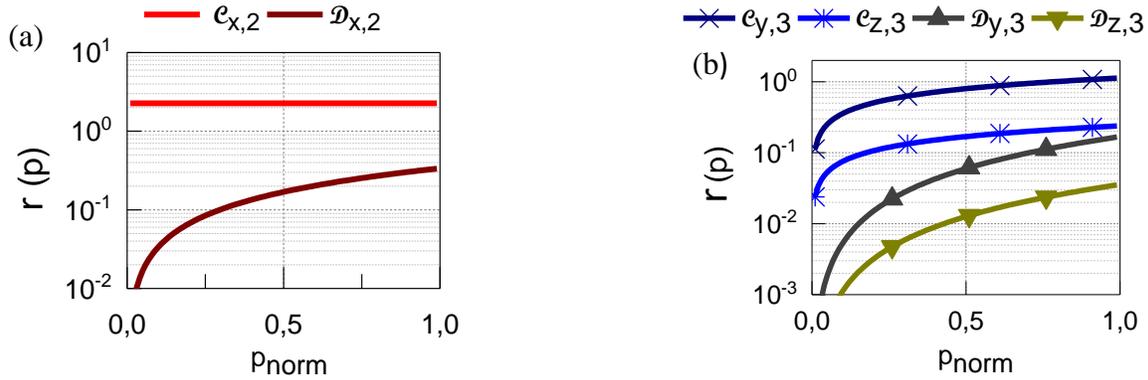


Figure 4.6. Evolution des amplitudes des forçages d'ordre 2 et 3 selon la puissance normalisée p_{norm} , dans le cas de l'oscillateur planaire $B/A = -0,91$.

De façon générale, les amplitudes des forçages conservatifs sont toujours supérieures d'un ou deux ordres de grandeurs comparés à celles des forçages dissipatifs. L'écart est surtout le plus grand à l'ordre 2 aux faibles puissances, car l'amplitude de $D_{x,2}$ tend vers 0 tandis que celle de $C_{x,2}$ reste constante. En plus de la différence conservatif/dissipatif, il existe à l'ordre 3 une différence entre les forçages d'axe u_y et u_z , causé par la forte dissymétrie des orbites. Dans notre cas où $B/A \approx -1$, les forçages d'axe u_y ($C_{y,3}$, $D_{y,3}$) sont plus forts. Il n'y a cependant pas de ressemblance avec l'ordre 1, où la même dissymétrie renforce préférentiellement $D_{z,1}$, un couple d'axe u_z .

Pour terminer, on peut discuter brièvement la dépendance avec B/A , en observant les formules des tableau 4.2 et tableau 4.3. La première caractéristique essentielle est que les amplitudes de tous les forçages d'ordres supérieurs deviennent nulles que lorsque $B/A = 0$. Dans ce cas, seule la synchronisation à l'ordre 1 est possible. De façon générale à l'ordre 2, l'augmentation de $|B/A|$ entraîne l'augmentation de l'amplitude et avec, la sensibilité de synchronisation. Ce phénomène remarquable est bien connu de l'expérience [16] ou de la théorie [19] des oscillateurs planaires. C'est pourquoi, la synchronisation à l'ordre 2 est de préférence étudiée dans ces systèmes.

○ *En résumé :*

La géométrie de tous les forçages canoniques dépend seulement des deux paramètres d'orbites : la puissance des oscillations p et le ratio B/A . Les changements les plus spectaculaires se produisent chez les forçages d'ordre 1, car l'amplitude et l'ellipticité peuvent changer simultanément. En particulier, certains forçages comme $D_{y,1}$ ou $C_{y,1}$ (si $B/A < 0$, $D_{z,1}$, $C_{z,1}$ sinon) deviennent respectivement à valeurs imaginaires et réelles pour certaines puissances. Cela s'explique en raison de la modification des couples résonants au voisinage des points extrêmes $\mathbf{m} = \pm \mathbf{u}_i$. L'oscillateur est donc capable de générer des forçages spéciaux, comme ceux étudiés au chapitre 3. Les conséquences de ces variations géométriques sur les propriétés de synchronisation sont présentées dans la partie suivante.

4.3. Synchronisation à un forçage canonique

Les expressions des forçages canoniques (sections 4.1.2.2/4.1.2.3) peuvent directement fournir les propriétés de synchronisation à un unique forçage, grâce aux solutions (3.41), (3.47).

D'abord, le forçage qui agit sur le système est (voir propriété 4.1):

$$\mathcal{F}(p, \psi) = \frac{a_g}{2} k \rho_i \mathcal{X}_{i,n}(p, \psi) \quad (4.41)$$

La constante k dépend de la nature du forçage et du signal injecté : Par exemple, si le forçage est conservatif et réalisé par un champ RF, alors : $k = k_e = -\gamma'_0$. En revanche, si le forçage est dissipatif et réalisé par un courant RF, alors : $k = k_{\mathcal{D}} = -\gamma'_0 a_{j0} J_{dc}$. L'effet champ de spin est négligé et le signal injecté est le ratio $a_g = \varepsilon = J_g / J_{dc}$ (discussion à la section 5.3.1.2).

Si la propriété 3.9 le permet, on peut utiliser à la place les forçages à valeurs réelles associés :

$$\mathcal{F}a(p, \psi) = \frac{a_g}{2} k \rho_i \mathcal{X}a_{i,n}(p, \psi) = \frac{a_g}{2} k \rho_i r(p) \cos(\psi - \theta) \quad (4.42)$$

La Figure 4.7 montre les propriétés de synchronisation des forçages exacts / réels à l'ordre 1 et 2.

Pour expliquer l'allure des sensibilités, il faut faire appel à la fois aux paramètres géométriques du forçage et à la non linéarité, Figure 4.7 (a,b,e,f). La dépendance principale est la linéarité de la sensibilité avec l'amplitude des forçages $r(p)$. Par exemple à l'ordre 1, on retrouve le fait que les sensibilités $C_{y,1}$ et $\mathcal{D}_{z,1}$ sont un ordre de grandeur au-dessus de celles de $C_{z,1}$ et $\mathcal{D}_{y,1}$, tout comme l'amplitude parce que $\mathcal{B}/\mathcal{A} \approx -1$. Il faut donc s'attendre à ce que la synchronisation soit meilleure pour ces premiers forçages. De même, la diminution monotone des sensibilités de $C_{y,1}$, $C_{z,1}$ s'explique par la décroissance de l'amplitude. En revanche, celles de $\mathcal{D}_{y,1}$ varient de façon plus compliquée car elles reflètent à la fois les variations de l'amplitude et la variation d'ellipticité. En particulier, le minimum des sensibilités en p_{r,\mathcal{D}_y} ne peut s'expliquer par l'amplitude seule, car elle est monotone, Figure 4.3 (a). Il s'explique par la transition d'ellipticité qui modifie les sensibilités à travers les sensibilités intrinsèques Cl_{Ω} ou Cl_{Π} . En ce point de transition, le forçage devient à valeurs imaginaires, ce qui provoque l'annulation C_{Π} et réduit fortement C_{Ω} car la non linéarité ne renforce pas la synchronisation. La présence de ce minimum est une preuve que le forçage $\mathcal{D}_{y,1}$ est bien de nature elliptique.

A l'ordre 2, les sensibilités $C_{x,2}$ varient à cause des paramètres transitoires du système $v(p)$, $\Gamma_p(p)/p_0$ car l'amplitude est constante. Enfin, celles de $\mathcal{D}_{x,2}$ augmentent ce qui reflète l'augmentation de l'amplitude.

Pour résumer, cela montre qu'il faut beaucoup d'informations pour comprendre les variations des sensibilités. Cela passe par la connaissance des paramètres de forçages et de ceux du régime transitoire.

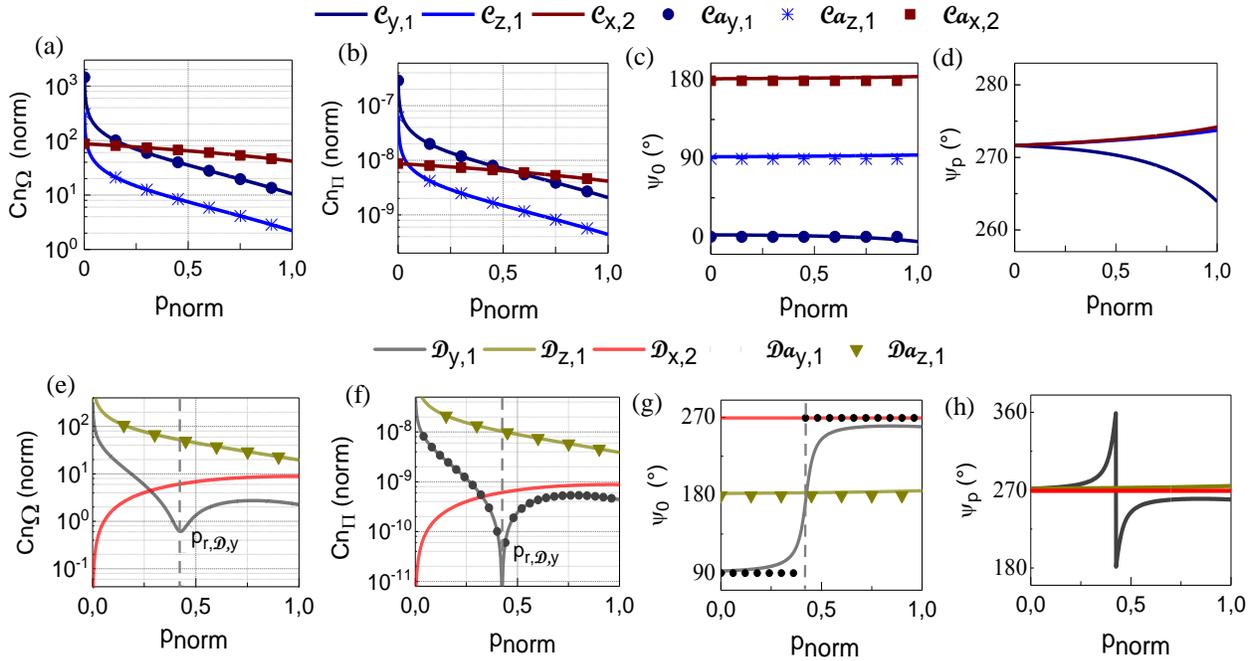


Figure 4.7 Propriétés des forçages canoniques, exacts et réels, d'ordres 1 et 2, appliquées à l'oscillateur planaire de référence. (a,b,c,d) Propriétés des forçages conservatifs. (e,f,g,h) Propriétés des forçages dissipatifs. (a,e) Sensibilités normalisées de fréquence $Cn_{\Omega} = 2.C_{\Omega}/k.\rho_i$, voir (3.41) et (4.41) (b,f) Sensibilités normalisées de puissance $Cn_{\Pi} = 2.C_{\Pi}/k.\rho_i$. (c,g) Déphasage additionnel ψ_0 (3.42). (d,h) Déphasage de puissance ψ_p (3.48). Celui des forçages réels vaut simplement $3\pi/2$. La puissance d'ellipticité rectiligne de $\mathcal{D}_{y,1}$ vaut : $p_{r,d,y} / p_{opp} = 0,42$ ($p_{r,d,y} = 0,22$).

En ce qui concerne les déphasages ψ_0 et ψ_p , les variations sont plus simples à décrire. Dans tous les cas exceptés celui de $\mathcal{D}_{y,1}$, les déphasages additionnels ψ_0 sont constants à l'image des orientations des forçages. Par ailleurs comme le système vérifie globalement la propriété 3.9, les déphasages ψ_p sont eux aussi quasi-constants, voisins de $3\pi/2$ rad. En revanche, ce n'est pas le cas de $\mathcal{D}_{y,1}$, car la transition d'ellipticité génère des évolutions plus variées. Au voisinage de $p_{r,d,y}$, ψ_0 bascule de $\pi/2$ à $3\pi/2$, tandis que ψ_p s'écartent fortement de $3\pi/2$. Cela veut dire qu'il faut s'attendre à des fortes variations d'allure de la puissance synchronisée. Ces changements ne se produisent que pour $\mathcal{D}_{y,1}$ (si $\mathcal{B}/\mathcal{A} < 0$, $\mathcal{D}_{z,1}$ sinon), ce qui en fait sa spécificité.

Pour terminer, les figures montrent que les propriétés des forçages à valeurs réelles estiment très bien celles des forçages exacts, dans tous les cas exceptés celui de $\mathcal{D}_{y,1}$. Le bon accord s'explique par la forte valeur de non linéarité du système qui renforce l'approximation. En revanche, l'approximation ne fonctionne pas avec la même efficacité pour $\mathcal{D}_{y,1}$. Hors du voisinage de la transition d'ellipticité, la simplification fonctionne encore très bien, voir par exemple Figure 4.7 (e). Néanmoins au voisinage, les prédictions divergent car la propriété 3.9 n'est plus respectée. Par exemple au point de la transition, le forçage à valeurs réelles prédit l'annulation des deux sensibilités ($C_{\Omega} = C_{\Pi} = 0$), alors que le comportement exact est l'annulation de C_{Π} mais pas de C_{Ω} . Par ailleurs, il prédit de façon très simplifiée

l'évolution de ψ_0 et rend ψ_p égale à $3\pi/2$. On retrouve là toutes les caractéristiques attendues des forçages réels. Ainsi dans cette situation, le forçage réel n'est pas adapté.

Ces résultats montrent qu'il est possible d'utiliser les deux versions : simplifiées ou exactes d'un même forçage, pour prédire les résultats de simulations ou d'expériences. Cependant pour la description de situations plus fines, le forçage à valeurs réelles montre des limites et il faut revenir dans ce cas au forçage exact.

○ *En résumé :*

Nous avons étudié de façon générale les propriétés de synchronisation du système aux forçages canoniques. En général comme la propriété 3.9 est vérifiée, les forçages exacts peuvent être remplacés par les forçages réels associés, donnant tout aussi bien les propriétés de synchronisation. En revanche, le cas du forçage $\mathcal{D}_{y,1}$ est plus mouvementé. A la transition d'ellipticité, il devient à valeurs imaginaires, ce qui se traduit par une sensibilité C_{Π} (ou Cl_{Π}) nulle. Il n'est alors plus possible de le remplacer par son forçage réel associé. C'est à cet endroit précisément que la nature elliptique des forçages se révèle. Cela constitue aussi une occasion unique de comparer le modèle avec la simulation.

4.4. Conclusion

Ce chapitre a permis d'étudier les forçages réellement accessibles de l'oscillateur uniforme. Pour cela, la méthode a consisté en l'étude des forçages canoniques, c'est-à-dire ceux qui dérivent des couples résonants élémentaires $\{\mathbf{m} \times \mathbf{u}_i, \mathbf{m} \times \mathbf{m} \times \mathbf{u}_i\}_{i=x,y,z}$. Nous avons obtenu deux résultats importants : 1) l'obtention des paramètres elliptiques des forçages en fonction de \mathcal{B}/\mathcal{A} et p et 2) l'expression des forçages à valeurs réelles associés. Au niveau des propriétés de synchronisation, la plupart des forçages exacts peut être remplacés par leurs forçages réels associés car la propriété 3.9 est vérifiée globalement pour notre oscillateur. En revanche, ce n'est pas le cas du forçage $\mathcal{D}_{y,1}$. Ses paramètres elliptiques sont extrêmement variables en fonction de \mathcal{B}/\mathcal{A} et p , de sorte qu'en des valeurs précises, le forçage devient à valeurs imaginaires. Ce phénomène peut constituer un bon test pour vérifier la nature vraiment elliptique des forçages. Naturellement, il reste à savoir si toutes ces prédictions sont effectivement réalisées par le simulateur macrosin. Ce sera la tâche du chapitre suivant de valider le modèle.

4.5. Annexes

4.5.1. Expressions des couples canoniques

4.5.1.1. Variable a

$C_x(a)$	$-ja$	$D_x(a)$	$a - a^2\bar{a}$
$C_y(a)$	$j \frac{2 - a^2 - 3a\bar{a}}{4\sqrt{1 - a\bar{a}}}$	$D_y(a)$	$\frac{-2 + 3a^2 + 3a\bar{a} - 2a^3\bar{a} - 2a^2\bar{a}^2}{4\sqrt{1 - a\bar{a}}}$
$C_z(a)$	$\frac{-2 - a^2 + 3a\bar{a}}{4\sqrt{1 - a\bar{a}}}$	$D_z(a)$	$j \frac{-2 - 3a^2 + 3a\bar{a} + 2a^3\bar{a} - 2a^2\bar{a}^2}{4\sqrt{1 - a\bar{a}}}$

Tableau 4.6. Expressions des couples canoniques en variable a .

4.5.1.2. Variable b

$C_x(b)$	$j(2uv\bar{b} - (u^2 + v^2)b)$		
$C_y(b)$	$\frac{j(u-v)}{4\sqrt{1+(u\bar{b}-vb)(-ub+v\bar{b})}} \left\{ \begin{array}{l} 2 - (u-v)^2b^2 \\ +4uv\bar{b}^2 \\ -(3u^2 - 2uv + 3v^2)b\bar{b} \end{array} \right.$		
$C_z(b)$	$\frac{(u+v)}{4\sqrt{1+(u\bar{b}-vb)(-ub+v\bar{b})}} \left\{ \begin{array}{l} -2 - 4uv\bar{b}^2 \\ -(u+v)^2b^2 \\ +(3u^2 + 2uv + 3v^2)b\bar{b} \end{array} \right.$		
$D_x(b)$	$(u^2 - v^2)(b + uvb^3 + uvb\bar{b}^2 - (u^2 + v^2)b^2\bar{b})$		
$D_y(b)$	$\frac{(u+v)}{4\sqrt{1+(u\bar{b}-vb)(-ub+v\bar{b})}} \left\{ \begin{array}{l} -2 + 3(u-v)^2b^2 + 3(u-v)^2b\bar{b} \\ +2uv(u-v)^2b^4 \\ +2uv(u-v)^2b\bar{b}^3 \\ -2(u-v)^2(u^2 - uv + v^2)b^3\bar{b} \\ -2(u-v)^2(u^2 - uv + v^2)b^2\bar{b}^2 \end{array} \right.$		
$D_z(b)$	$\frac{j(u-v)}{4\sqrt{1+(u\bar{b}-vb)(-ub+v\bar{b})}} \left\{ \begin{array}{l} -2 - 3(u+v)^2b^2 + 3(u+v)^2b\bar{b} \\ -2uv(u+v)^2b^4 \\ +2uv(u+v)^2b\bar{b}^3 \\ 2(u+v)^2(u^2 + uv + v^2)b^3\bar{b} \\ -2(u+v)^2(u^2 + uv + v^2)b^2\bar{b}^2 \end{array} \right.$		

Tableau 4.7. Expressions de couples canoniques en variable b .

4.5.1.3. Variable c

$\mathcal{C}_x(c)$	$j(2uv\bar{c} - (u^2 + v^2)c)$
$\mathcal{C}_y(c)$	$\frac{j(u-v)}{4\sqrt{1 + \frac{\omega}{\mathcal{A}}(u\bar{c} - vc)(-uc + v\bar{c})}} \left\{ \begin{array}{l} 2\sqrt{\frac{\mathcal{A}}{\omega}} - \sqrt{\frac{\omega}{\mathcal{A}}}(u-v)^2c^2 \\ + 4\sqrt{\frac{\omega}{\mathcal{A}}}uv\bar{c}^2 \\ -\sqrt{\frac{\omega}{\mathcal{A}}}(3u^2 - 2uv + 3v^2)c\bar{c} \end{array} \right.$
$\mathcal{C}_z(c)$	$\frac{(u+v)}{4\sqrt{1 + \frac{\omega}{\mathcal{A}}(u\bar{c} - vc)(-uc + v\bar{c})}} \left\{ \begin{array}{l} -2\sqrt{\frac{\mathcal{A}}{\omega}} - 4\sqrt{\frac{\omega}{\mathcal{A}}}uv\bar{c}^2 \\ -\sqrt{\frac{\omega}{\mathcal{A}}}(u+v)^2c^2 \\ +\sqrt{\frac{\omega}{\mathcal{A}}}(3u^2 + 2uv + 3v^2)c\bar{c} \end{array} \right.$
$\mathcal{D}_x(c)$	$(u^2 - v^2)(c + uv\frac{\omega}{\mathcal{A}}c^3 + uv\frac{\omega}{\mathcal{A}}c\bar{c}^2 - (u^2 + v^2)\frac{\omega}{\mathcal{A}}c^2\bar{c})$
$\mathcal{D}_y(c)$	$\frac{(u+v)}{4\sqrt{1 + \frac{\omega}{\mathcal{A}}(u\bar{c} - vc)(-uc + v\bar{c})}} \left\{ \begin{array}{l} -2\sqrt{\frac{\mathcal{A}}{\omega}} + 3\sqrt{\frac{\omega}{\mathcal{A}}}(u-v)^2c^2 + 3\sqrt{\frac{\omega}{\mathcal{A}}}(u-v)^2c\bar{c} \\ + 2\frac{\omega}{\mathcal{A}}\sqrt{\frac{\omega}{\mathcal{A}}}uv(u-v)^2c^4 \\ + 2\frac{\omega}{\mathcal{A}}\sqrt{\frac{\omega}{\mathcal{A}}}uv(u-v)^2c\bar{c}^3 \\ - 2\frac{\omega}{\mathcal{A}}\sqrt{\frac{\omega}{\mathcal{A}}}(u-v)^2(u^2 - uv + v^2)c^3\bar{c} \\ - 2\frac{\omega}{\mathcal{A}}\sqrt{\frac{\omega}{\mathcal{A}}}(u-v)^2(u^2 - uv + v^2)c^2\bar{c}^2 \end{array} \right.$
$\mathcal{D}_z(c)$	$\frac{j(u-v)}{4\sqrt{1 + \frac{\omega}{\mathcal{A}}(u\bar{c} - vc)(-uc + v\bar{c})}} \left\{ \begin{array}{l} -2\sqrt{\frac{\mathcal{A}}{\omega}} - 3\sqrt{\frac{\omega}{\mathcal{A}}}(u+v)^2c^2 + 3\sqrt{\frac{\omega}{\mathcal{A}}}(u+v)^2c\bar{c} \\ - 2\frac{\omega}{\mathcal{A}}\sqrt{\frac{\omega}{\mathcal{A}}}uv(u+v)^2c^4 \\ + 2\frac{\omega}{\mathcal{A}}\sqrt{\frac{\omega}{\mathcal{A}}}uv(u+v)^2c\bar{c}^3 \\ 2\frac{\omega}{\mathcal{A}}\sqrt{\frac{\omega}{\mathcal{A}}}(u+v)^2(u^2 + uv + v^2)c^3\bar{c} \\ - 2\frac{\omega}{\mathcal{A}}\sqrt{\frac{\omega}{\mathcal{A}}}(u+v)^2(u^2 + uv + v^2)c^2\bar{c}^2 \end{array} \right.$

Tableau 4.8. Expression des couples canoniques en variable c avec $\omega = \omega_{\text{FMR}}$.

4.5.2. Expressions des forçages canoniques

4.5.2.1. Forme u, v (non normalisé)

	$X_{i,n}(p, \psi) = \underline{r}(p)e^{-j\psi}$
$\mathcal{C}_{x,2}$	$r(p) = j2uv$
$\mathcal{C}_{y,3}$	$\underline{r}(p) = j(u - v)uv \sqrt{\frac{\omega}{\mathcal{A}}} \sqrt{p}$
$\mathcal{C}_{z,3}$	$\underline{r}(p) = -(u + v)uv \sqrt{\frac{\omega}{\mathcal{A}}} \sqrt{p}$

Tableau 4.9 Forçages circulaires

	$\mathcal{D}_{x,2}, \mathcal{D}_{y,3} : X_{i,n}(p, \psi) = r(p) \cos(\psi), \mathcal{D}_{z,3} : X_{i,n}(p, \psi) = r(p) \sin(\psi)$
$\mathcal{D}_{x,2}$	$r(p) = 2uv \frac{\omega}{\mathcal{A}} p$
$\mathcal{D}_{y,3}$	$r(p) = (u - v)uv \frac{\omega}{\mathcal{A}} \sqrt{\frac{\omega}{\mathcal{A}}} p \sqrt{p}$
$\mathcal{D}_{z,3}$	$r(p) = (u + v)uv \frac{\omega}{\mathcal{A}} \sqrt{\frac{\omega}{\mathcal{A}}} p \sqrt{p}$

Tableau 4.10 Forçages réels.

	$X_{i,n} = \frac{\varepsilon_0(p)}{2} \left((\varepsilon_1(p) + \varepsilon_2(p))e^{+j\psi} + (\varepsilon_1(p) - \varepsilon_2(p))e^{-j\psi} \right)$
$\mathcal{C}_{y,1}$	$\underline{\varepsilon}_0(p) = \frac{j(u - v)}{2\sqrt{p}} \sqrt{\frac{\mathcal{A}}{\omega}} \quad \varepsilon_1(p) = 1 - 2(u^2 + v^2 - uv) \frac{\omega}{\mathcal{A}} p \quad \varepsilon_2(p) = - \left(1 - (u^2 + v^2) \frac{\omega}{\mathcal{A}} p \right)$
$\mathcal{C}_{z,1}$	$\underline{\varepsilon}_0(p) = \frac{(u + v)}{2\sqrt{p}} \sqrt{\frac{\mathcal{A}}{\omega}} \quad \varepsilon_1(p) = - \left(1 - (u^2 + v^2) \frac{\omega}{\mathcal{A}} p \right) \quad \varepsilon_2(p) = 1 - 2(u^2 + v^2 + uv) \frac{\omega}{\mathcal{A}} p$
$\mathcal{D}_{y,1}$	$\underline{\varepsilon}_0(p) = \frac{(u + v)}{2\sqrt{p}} \sqrt{\frac{\mathcal{A}}{\omega}} \quad \varepsilon_1(p) = - \left(1 - 3(u - v)^2 \frac{\omega}{\mathcal{A}} p + 2(u - v)^2 (u^2 + v^2 - uv) \left(\frac{\omega}{\mathcal{A}} \right)^2 p^2 \right) \quad \varepsilon_2(p) = 1$
$\mathcal{D}_{z,1}$	$\underline{\varepsilon}_0(p) = \frac{j(u - v)}{2\sqrt{p}} \sqrt{\frac{\mathcal{A}}{\omega}} \quad \varepsilon_1(p) = -1 \quad \varepsilon_2(p) = 1 - 3(u + v)^2 \frac{\omega}{\mathcal{A}} p + 2(u + v)^2 (u^2 + v^2 + uv) \left(\frac{\omega}{\mathcal{A}} \right)^2 p^2$

Tableau 4.11 Forçages quelconques

4.5.2.2. Forme \mathcal{B}/\mathcal{A} (non normalisé)

Avec : \mathcal{G} , la fonction définit par $\mathcal{G}_i(\mathcal{B}/\mathcal{A}) = (1 - (\mathcal{B}/\mathcal{A})^2)^{1/2}$

Forme : Circulaire	$X_{i,n}(p, \psi) = \underline{r}(p)e^{-j\psi}$
$C_{x,2}$	$\underline{r} = j \frac{\mathcal{B}/\mathcal{A}}{\mathcal{G}(\mathcal{B}/\mathcal{A})}$
$C_{y,3}$	$\underline{r}(p) = \frac{j\mathcal{B}/\mathcal{A}}{2\sqrt{2}} \sqrt{p} \left(\frac{\sqrt{1 + \mathcal{G}(\mathcal{B}/\mathcal{A})} - \text{Sign}(\mathcal{B}/\mathcal{A})\sqrt{1 - \mathcal{G}(\mathcal{B}/\mathcal{A})}}{\mathcal{G}(\mathcal{B}/\mathcal{A})} \right)$
$C_{z,3}$	$\underline{r}(p) = -\frac{\mathcal{B}/\mathcal{A}}{2\sqrt{2}} \sqrt{p} \left(\frac{\sqrt{1 + \mathcal{G}(\mathcal{B}/\mathcal{A})} + \text{Sign}(\mathcal{B}/\mathcal{A})\sqrt{1 - \mathcal{G}(\mathcal{B}/\mathcal{A})}}{\mathcal{G}(\mathcal{B}/\mathcal{A})} \right)$

Tableau 4.12. Forçages circulaires

Forme : Rectiligne	$D_{x,2}, D_{y,3} : X_{i,n}(p, \psi) = r(p) \cos(\psi), D_{z,3} : X_{i,n}(p, \psi) = r(p) \sin(\psi)$
$D_{x,2}$	$r(p) = (\mathcal{B}/\mathcal{A})p$
$D_{y,3}$	$r(p) = \frac{\mathcal{B}/\mathcal{A}}{2\sqrt{2}} p \sqrt{p} \left(\sqrt{(1 + \mathcal{G}(\mathcal{B}/\mathcal{A})) - \text{Sign}(\mathcal{B}/\mathcal{A})\sqrt{(1 - \mathcal{G}(\mathcal{B}/\mathcal{A}))}} \right)$
$D_{z,3}$	$r = \frac{\mathcal{B}/\mathcal{A}}{2\sqrt{2}} p \sqrt{p} \left(\sqrt{(1 + \mathcal{G}(\mathcal{B}/\mathcal{A})) + \text{Sign}(\mathcal{B}/\mathcal{A})\sqrt{(1 - \mathcal{G}(\mathcal{B}/\mathcal{A}))}} \right)$

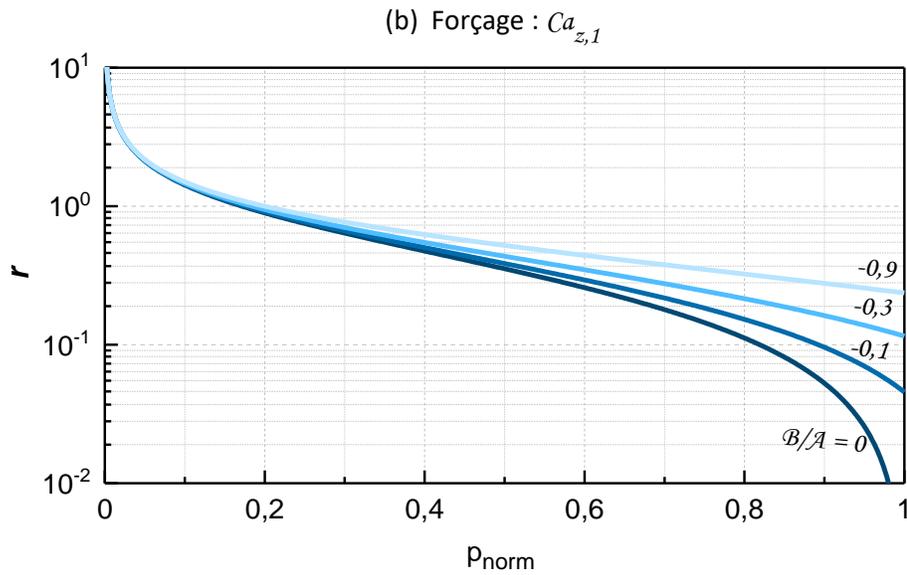
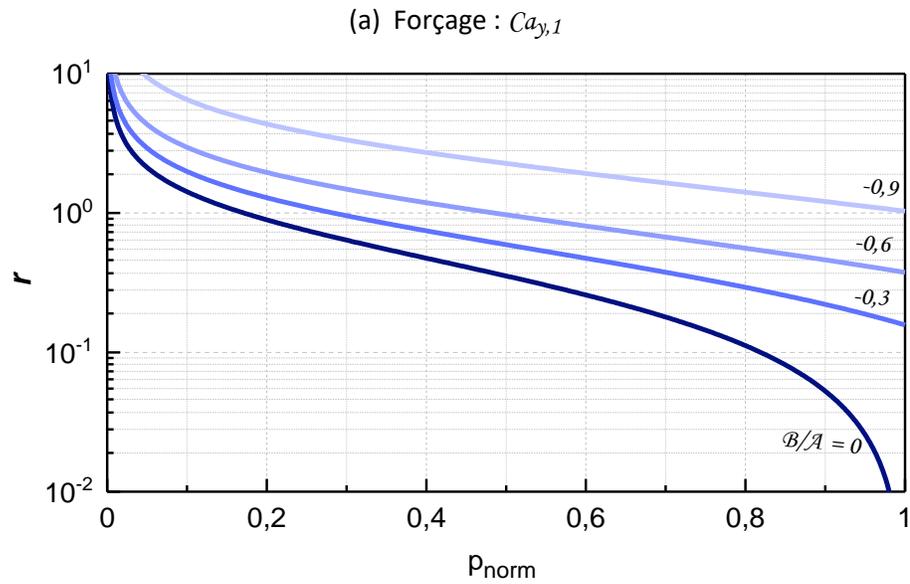
Tableau 4.13. Forçages réels.

Forme : Quelconque	$X_{i,n}(p, \psi) = \underline{\varepsilon}_0(p) \left(\left(\frac{\varepsilon_1(p) + \varepsilon_2(p)}{2} \right) e^{+j\psi} + \left(\frac{\varepsilon_1(p) - \varepsilon_2(p)}{2} \right) e^{-j\psi} \right)$
$C_{y,1}$	$\underline{\varepsilon}_0(p) = \frac{j}{2\sqrt{2}p} \left(\frac{\sqrt{1 + \mathcal{G}(\mathcal{B}/\mathcal{A})} - \text{Sign}(\mathcal{B}/\mathcal{A})\sqrt{1 - \mathcal{G}(\mathcal{B}/\mathcal{A})}}{\mathcal{G}(\mathcal{B}/\mathcal{A})} \right)$ $\varepsilon_1(p) = 1 - (2 - \mathcal{B}/\mathcal{A})p, \quad \varepsilon_2(p) = -(1 - p)$
$C_{z,1}$	$\underline{\varepsilon}_0(p) = \frac{1}{2\sqrt{2}p} \left(\frac{\sqrt{1 + \mathcal{G}(\mathcal{B}/\mathcal{A})} + \text{Sign}(\mathcal{B}/\mathcal{A})\sqrt{1 - \mathcal{G}(\mathcal{B}/\mathcal{A})}}{\mathcal{G}(\mathcal{B}/\mathcal{A})} \right)$ $\varepsilon_1(p) = -(1 - p), \quad \varepsilon_2(p) = 1 - (2 + \mathcal{B}/\mathcal{A})p$
$D_{y,1}$	$\underline{\varepsilon}_0(p) = \frac{1}{2\sqrt{2}p} \left(\frac{\sqrt{1 + \mathcal{G}(\mathcal{B}/\mathcal{A})} + \text{Sign}(\mathcal{B}/\mathcal{A})\sqrt{1 - \mathcal{G}(\mathcal{B}/\mathcal{A})}}{\mathcal{G}(\mathcal{B}/\mathcal{A})} \right)$ $\varepsilon_1(p) = -(1 - 3(1 - \mathcal{B}/\mathcal{A})p + (1 - \mathcal{B}/\mathcal{A})(2 - \mathcal{B}/\mathcal{A})p^2), \quad \varepsilon_2(p) = 1$
$D_{z,1}$	$\underline{\varepsilon}_0(p) = \frac{j}{2\sqrt{2}p} \left(\frac{\sqrt{1 + \mathcal{G}(\mathcal{B}/\mathcal{A})} - \text{Sign}(\mathcal{B}/\mathcal{A})\sqrt{1 - \mathcal{G}(\mathcal{B}/\mathcal{A})}}{\mathcal{G}(\mathcal{B}/\mathcal{A})} \right)$ $\varepsilon_1(p) = -1, \quad \varepsilon_2(p) = 1 - 3(1 + \mathcal{B}/\mathcal{A})p + (1 + \mathcal{B}/\mathcal{A})(2 + \mathcal{B}/\mathcal{A})p^2$

Tableau 4.14. Forçages quelconques.

4.5.3. Ordre de grandeur des amplitudes

4.5.3.1. Forçages conservatifs à valeurs réelles



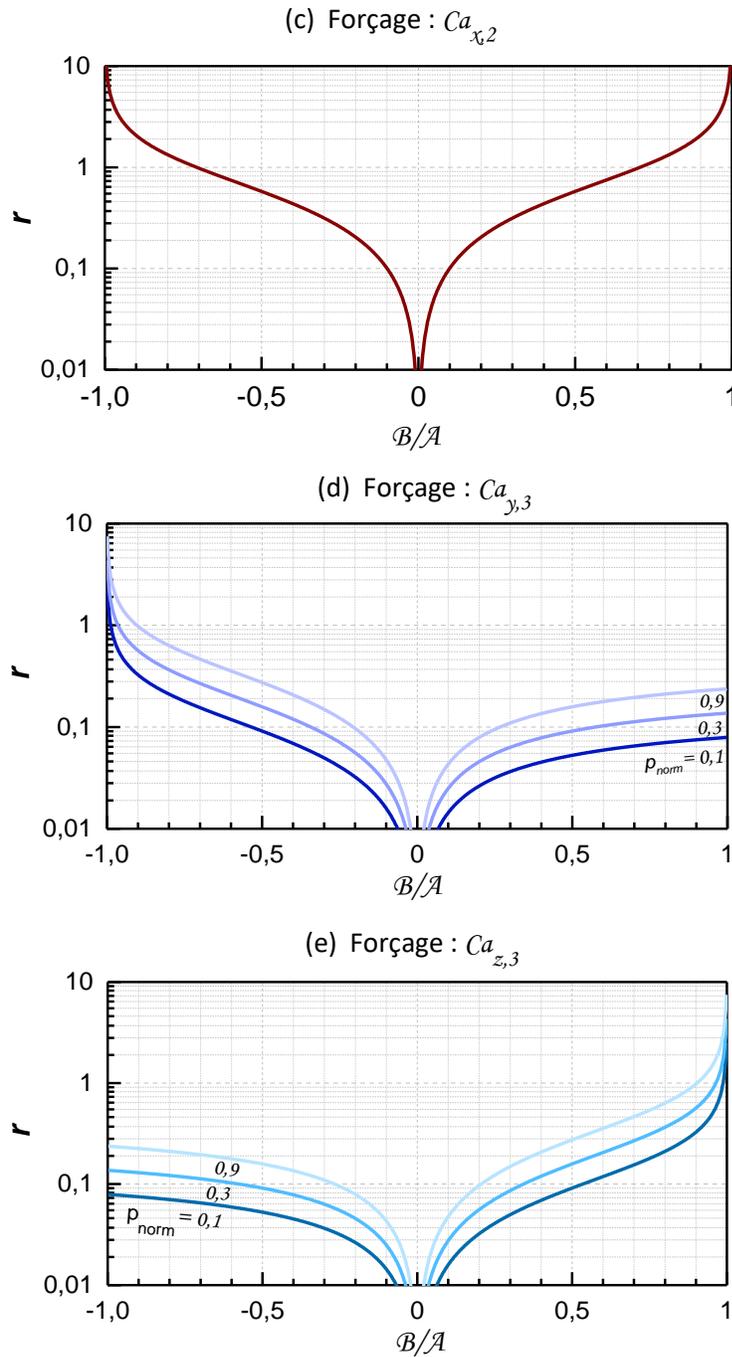
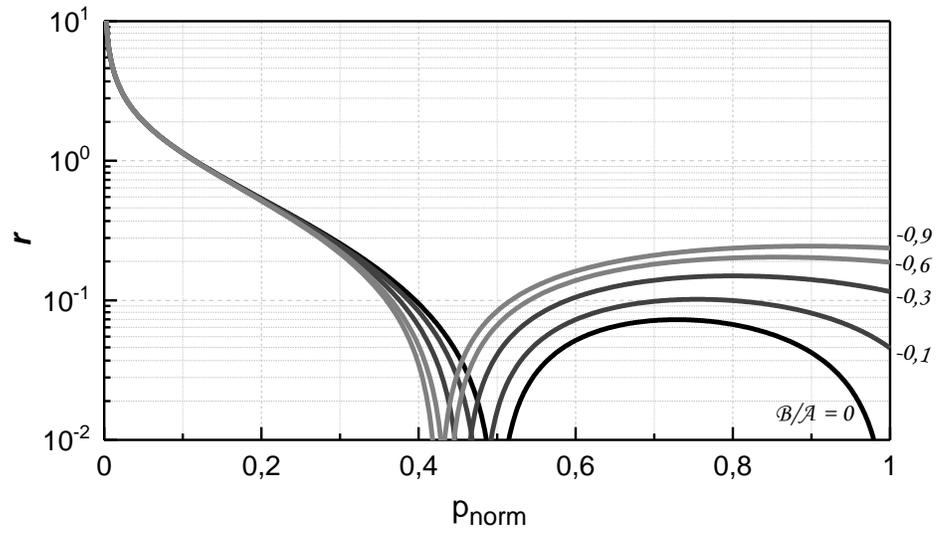


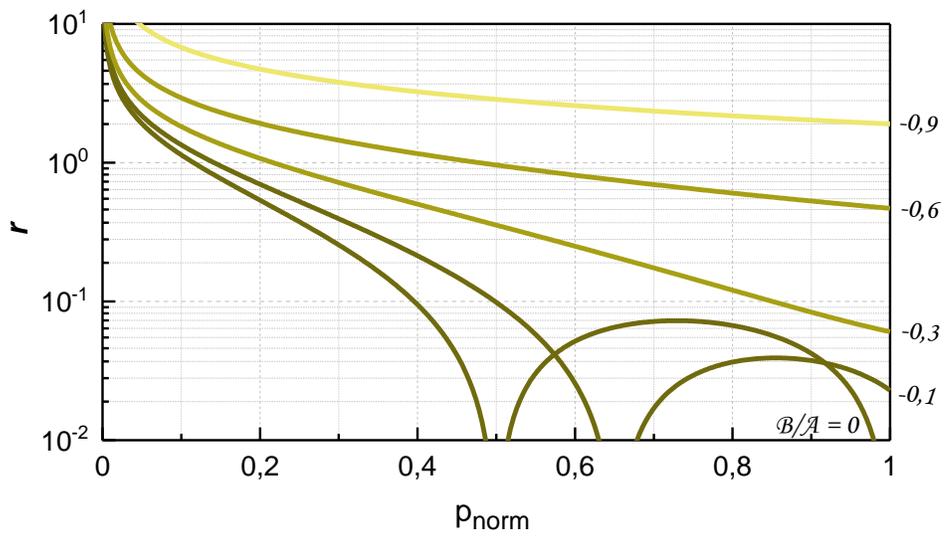
Figure 4.8. Amplitudes des forçages conservatifs à valeurs réelles du tableau 4.5. (a,b) Evolution de r avec ρ_{norm} à B/A fixé. Forçages d'ordre 1 : $Ca_{y,1}$, $Ca_{z,1}$. (c,d,e) Evolution de r avec B/A à ρ_{norm} fixée. Forçages d'ordre 2 et 3 : $Ca_{x,2}$, $Ca_{y,3}$, $Ca_{z,3}$. Estimation de la gamme de synchronisation par : $\Delta\Omega$ (Hz) = $|n \cdot \sigma_g \cdot k_e \cdot \rho_i \cdot v \cdot r| / (2.2 \cdot \pi)$ avec $k_e = -\gamma'_0$. Ex : $n = 2$, $H_g = 2,5$ Oe ≈ 199 A/m, $\gamma'_0 = 2,20929 \times 10^5$ m/A.s, $B/A \approx -0,91$, $\rho_{norm} = 0,17$, $\rho_i = 1$, $v \approx -22$, $r \approx 2,2$ (grâce à fig 4.8.c) donne : $\Delta\Omega \approx 340$ MHz.

4.5.3.2. Forçages dissipatifs à valeurs réelles

(a) Forçage : $\mathcal{D}a_{y,1}$



(b) Forçage : $\mathcal{D}a_{z,1}$



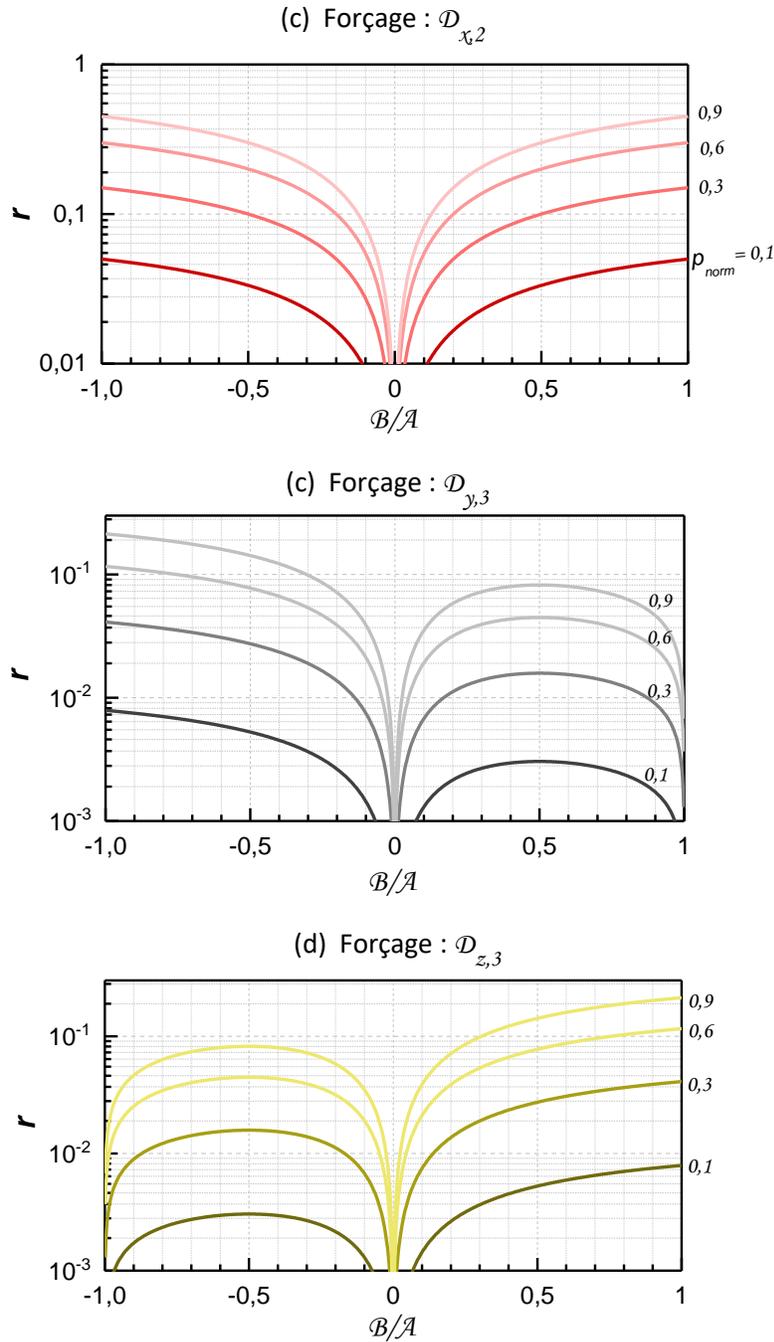


Figure 4.9. Amplitudes des forçages dissipatifs à valeurs réelles du tableau 4.5. (a,b) Evolution de r avec ρ_{norm} à B/A fixé. Forçages d'ordre 1 : $\mathcal{D}_{a_y,1}$, $\mathcal{D}_{a_z,1}$. (c,d,e) Evolution de r avec B/A à ρ_{norm} fixée. Forçages d'ordre 2 et 3 : $\mathcal{D}_{x,2}$, $\mathcal{D}_{y,3}$, $\mathcal{D}_{z,3}$. Estimation de la gamme de synchronisation par : $\Delta\Omega$ (Hz) = $|n \cdot a_g \cdot k_{\mathcal{D}} \cdot \rho_i \cdot v \cdot r| / (2.2 \cdot \pi)$ avec $k_{\mathcal{D}} = -\gamma'_0 \cdot a_{j0} \cdot J_{dc}$. Ex : $n = 2$, $\varepsilon = 1,37 \times 10^{-2}$, $\gamma'_0 = 2,20929 \times 10^5$ m/A.s, $a_{j0} = -2,500 \times 10^{-8}$, $J_{dc} = -400 \times 10^9$ A/m², $B/A \approx -0,91$, $\rho_{norm} = 0,17$, $\rho_i = \cos(165^\circ)$, $v \approx -22$, $0,04 < r < 0,15$ (grâce à fig 4.8.c) donne : 4 MHz $< \Delta\Omega < 15$ MHz.

Chapitre 5. Simulations des forçages canoniques

L'objectif de ce chapitre est de savoir dans quelle mesure le modèle développé, ainsi que toutes ses prédictions, correspondent bien à la réalité de l'équation LLGS. Pour cela, nous allons comparer les résultats avec ceux donnés par le simulateur macrosplin.

La partie 5.1 commence par introduire brièvement le simulateur utilisé. Nous abordons les conditions d'opération et l'ensemble des traitements informatiques nécessaires, pour observer le phénomène de synchronisation. En particulier, la synchronisation est hystérétique, ce qui nécessite une méthode particulière. Ensuite, la partie 5.2 confronte les résultats dans le régime libre. Le but est d'appréhender le domaine de validité du modèle ainsi que ses limites. Enfin, la partie 5.3 aborde la synchronisation des forçages canoniques. Globalement, les résultats de simulation concordent remarquablement bien avec le modèle. Néanmoins lorsque la puissance augmente, l'accord devient moins bon. En particulier, le forçage $\mathcal{D}_{y,1}$ ne réalise qu'approximativement les propriétés prévues à la transition elliptique.

5.1. Méthodes numériques

On introduit les méthodes nécessaires au bon déroulement des simulations. La section 5.1.1 décrit le simulateur utilisé. Puis la section 5.1.2 explique comment injecter le signal générateur et les signaux DC, pour observer complètement le phénomène de synchronisation. Ensuite, la section 5.1.3 détaille le second traitement qui utilise les données fournies par le simulateur pour extraire les propriétés de synchronisation : $\Delta\Omega$, $\Delta\Pi$, ψ_0 et ψ_p . Seulement après, il est possible de comparer les résultats de simulation avec ceux du modèle.

5.1.1. Descriptions du simulateur

Le simulateur a été développé en C++ par L.Buda-Prejbeanu. Il résout l'équation LLGS (1.9) par une méthode de « prédiction – correction » [115], dont le principe est le suivant :

Soit l'aimantation \mathbf{m}_n au pas n et le temps d'intégration Δt , la valeur \mathbf{m}_{n+1} au pas suivant $n+1$ se calcule en deux étapes. D'abord, on calcule la valeur « d'essai » :

$$\tilde{\mathbf{m}}_{n+1} = \mathbf{m}_n + f(\mathbf{m}_n)\Delta t \quad (5.1)$$

La fonction dynamique f est la dérivée de l'aimantation $\mathbf{m}'(t)$, c'est-à-dire l'ensemble du membre à droite de l'équation (1.9).

Ensuite, on calcule la vraie valeur :

$$\mathbf{m}_{n+1} = \mathbf{m}_n + \frac{1}{2}(f(\tilde{\mathbf{m}}_{n+1}) + f(\mathbf{m}_n))\Delta t \quad (5.2)$$

La méthode « prédiction – correction » permet d'estimer la dérivée $f(\mathbf{m}_n)$ moyennée dans l'intervalle Δt , contrairement à la méthode d'Euler qui ne l'estime qu'en bordure de palier. La méthode est un bon compromis entre justesse et temps de calcul rapide, avec $\Delta t = 10^{-15}$ s.

5.1.2. Conditions d'opération du simulateur

Le problème est que la synchronisation est hystérétique [80]. Or le modèle ne prédit que la gamme de synchronisation complète, donc il faut s'assurer de pouvoir l'obtenir dans chaque configuration étudiée. On commence par présenter la bonne méthode d'opération des signaux. On regarde ensuite ce qui se passe dans le cas contraire.

5.1.2.1. Méthode correcte

Pour synchroniser le système à l'ordre n , la fréquence du générateur balaie un intervalle centré sur $n \times f_0$ avec f_0 la fréquence libre, par pas de fréquence successifs (par ex : 100 kHz, 1 MHz ou 10 MHz suivant les cas). A chaque pas, le simulateur calcule l'évolution de $\mathbf{m}(t)$ sur un temps T (typiquement $T = 400$ ns), qui doit être suffisamment long pour attendre la stabilisation de la synchronisation mais pas trop pour écourter le temps de calcul. En règle générale, la stabilisation du système est d'autant plus rapide que l'amplitude du signal générateur est fort, voir [82] pour l'étude de la réponse transitoire du régime synchronisé.

Dans la plupart des cas de forçage (en particulier dans le cas conservatif), la synchronisation est hystérétique [15][80]. Pour accéder à la gamme de synchronisation entière $\Delta\Omega$, seule quantité accessible à la théorie, il faut balayer la fréquence externe, à la fois, dans le sens croissant et décroissant. En particulier, le passage entre chaque pas de fréquence doit se faire le plus continu possible, de façon à ce que le système ne décroche pas lorsqu'il se trouve dans le régime hystérétique. Plus précisément, notre simulateur respecte les conditions suivantes :

Conditions de raccordement entre chaque pas de fréquences :

1) Les grandeurs statiques J_{dc} , \mathbf{H}_{dc} sont activées pendant toute la durée de balayage de la fréquence du générateur.

2) La valeur $\mathbf{m}(t = 0)$ du pas de fréquence $N^\circ k$ est égale à $\mathbf{m}(t = T)$ du pas $N^\circ k - 1$ (raccordement de l'aimantation).

3) La valeur du signal générateur $s(t = 0)$ du pas $N^\circ k$ est égale à $s(t = T)$ du pas $N^\circ k - 1$ (raccordement du signal générateur).

La Figure 5.1 résume la méthode présentée.

Ces trois conditions se révèlent nécessaires car si l'une des trois n'est pas respectée, la gamme $\Delta\Omega$ ne se réalise pas entièrement. A titre d'exemple, la gamme mesurée dans le cas de la Figure 5.1 (a) (forçage $C_{x,2}$) vaut $\Delta\Omega = 337 \pm 12$ MHz ce qui est en accord avec la gamme prédite $\Delta\Omega = 349$ MHz. Désormais, ces conditions seront appliquées à toutes les simulations de synchronisation discutées dans la suite.

5.1.2.2. Méthodes incorrectes

Dans le cas où les conditions précédentes ne sont pas respectées, le simulateur ne fournit pas la gamme de synchronisation complète. Par exemple la Figure 5.2 montre le diagramme de synchronisation, dans le cas extrême où toutes les grandeurs sont réinitialisées entre chaque pas de fréquence. En particulier, l'aimantation et le signal générateur ne sont pas raccordés et les grandeurs J_{dc} , \mathbf{H}_{dc} sont remises à 0.

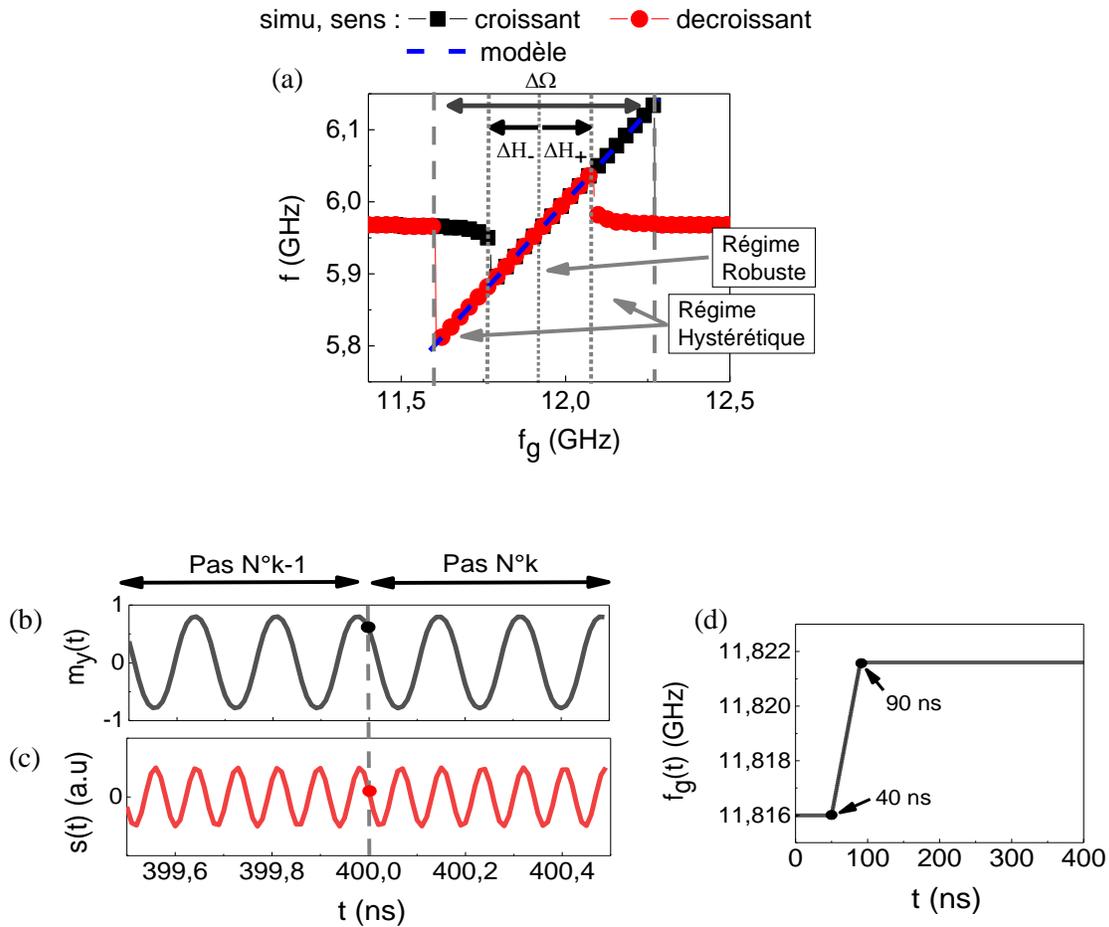


Figure 5.1. Méthode correcte pour observer la totalité de la synchronisation. (a) Exemple de synchronisation hystérique dans le cas de l'oscillateur planaire avec le forçage $C_{X,2}$ ($J_{dc} = -400 \times 10^9 \text{ A/m}^2$, $H_{dc} = 400 \text{ Oe}$, $H_g = 2,5 \text{ Oe}$). La fréquence de l'oscillateur f est mesurée par FFT sur $m_y(t)$. ΔH_{\pm} délimitent le régime robuste. (b,c) Illustration du raccordement de l'aimantation $m_y(t)$ et du signal générateur $s(t)$ entre les deux paliers : N°k-1 et N°k (fréquences générateurs : $f_{k-1} = 11,816 \text{ GHz}$, $f_k = 11,822 \text{ GHz}$). (d) Profil de la fréquence du générateur $f_g(t)$ à l'intérieur du palier N°k de durée $T = 400 \text{ ns}$, pendant un balayage de sens croissant ($f_k > f_{k-1}$). Ici, le profil est de type « rampe » mais le choix d'un autre profil aurait aussi bien marché, dès lors que la condition de raccordement N°3 est respectée.

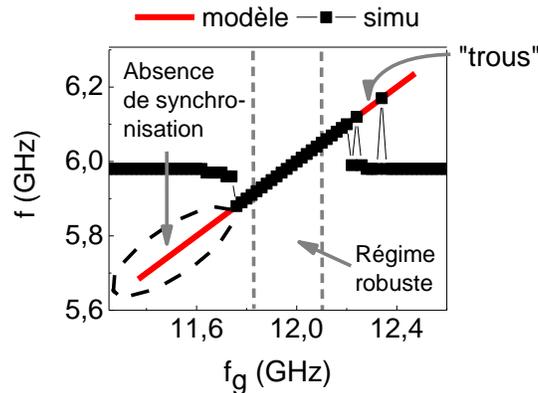


Figure 5.2. Diagramme de synchronisation lorsque la méthode n'est pas conforme. Cas du forçage $C_{X,2}$ avec $J_{dc} = -400 \times 10^9 \text{ A/m}^2$, $H_{dc} = 400 \text{ Oe}$, $H_g = 4 \text{ Oe}$.

Dans ce cas, les bords de la gamme de synchronisation ne sont pas correctement définis. La Figure 5.2 montre que la borne inférieure de la gamme simulée ($f_- = 11,752 \text{ GHz}$) est largement réduite comparée à la borne prédite par le modèle ($f_- = 11,367 \text{ GHz}$). De l'autre côté, la borne supérieure est aussi mal estimée. Plus encore, le système peut être synchronisé au palier $N^{\circ}k$, désynchronisé au palier $N^{\circ}k+1$ mais de nouveau synchronisé à celui $N^{\circ}k+2$. La gamme de synchronisation est donc totalement imprévisible, ce qui empêche la comparaison avec le modèle développé. Une étude plus précise montre que la présence de ces « trous » est caractéristique du régime hystérétique car ils ne se produisent que lorsque le système est dans ce régime et non dans son régime robuste de synchronisation. Cela peut se comprendre car dans le régime hystérétique, seules certaines conditions initiales en début de palier permettent l'accès à la synchronisation. Si elles ne sont pas respectées, le système se désynchronise. C'est pourquoi il faut veiller à respecter les conditions de raccordement, surtout dans ce régime hystérétique.

5.1.3. Méthode d'extraction des données

Une fois les évolutions $\mathbf{m}(t)$ obtenues par le simulateur, un second traitement se charge d'extraire les propriétés de synchronisation. Il a pour objectif de : 1) transformer les traces temporelles $\mathbf{m}(t)$ en variable complexe c , 2) détecter les états synchronisés et enfin 3) extraire les propriétés.

5.1.3.1. Extraction de $p(t)$ et $\psi(t)$

La première étape consiste à calculer la variable $c(t)$ en appliquant numériquement³⁵ les transformations du formalisme onde de spin à la trace temporelle. Cela permet d'obtenir la puissance $p(t) = |c(t)|^2$ et la

³⁵ Les transformations sont donc exactes.

phase de l'oscillateur $\varphi(t) = \arg(c(t))$, puis le déphasage $\psi(t)$ en utilisant la phase $\phi_g(t)$ du signal générateur. La Figure 5.3 suivante montre l'allure de $p(t)$ et $\psi(t)$ dans un état synchronisé.

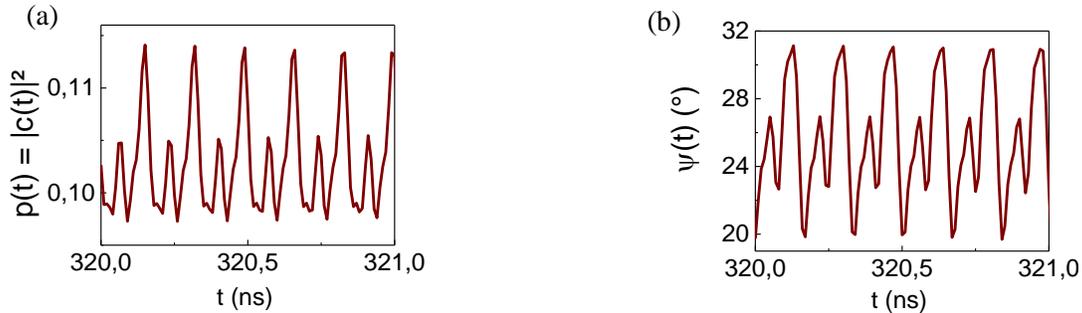


Figure 5.3. Zoom sur l'évolution temporelle des variables transformées du système, dans un état synchronisé de la Figure 5.1 ($f_g = 11,820$ GHz). (a) puissance instantanée $p(t)$ et (b) déphasage $\psi(t)$.

En état synchronisé, les quantités $p(t)$ et $\psi(t)$ présentent des oscillations subharmoniques, de la même façon que $p(t)$, et $\varphi(t)$ dans le régime libre, voir Figure 5.5. C'est un inconvénient car la théorie prédit au contraire des valeurs constantes. Pour cela, les valeurs comparées avec le modèle sont des moyennes de $p(t)$, $\psi(t)$ prises sur une portion de la trace temporelle. Par exemple, une durée typique est 100 ns (entre 300 ns à 400 pour $T = 400$ ns). En règle générale, l'approximation fonctionne bien lorsque p_0 est faible car les écarts types des fluctuations restent faibles (ici $\sigma(p(t)) = 0,005$, $\sigma(\psi(t)) = 3^\circ$ pour $p_0 = 0,0905$). Ces fluctuations sont inhérentes aux transformations et ne peuvent être supprimées.

5.1.3.2. Détection de la synchronisation

Ensuite, il faut détecter la gamme de synchronisation. Un moyen simple est de suivre l'évolution de l'écart type σ_ψ de $\psi(t)$ avec la fréquence du générateur [19]. En état libre, $\psi(t)$ croît continuellement car les fréquences de l'oscillateur et du générateur sont différentes. Il s'en suit que σ_ψ est très grand. En revanche en état synchronisé, $\psi(t)$ devient approximativement constant (aux fluctuations près) ce qui fait diminuer fortement σ_ψ . La diminution de σ_ψ peut donc servir de repère à la détection de la synchronisation.

La Figure 5.4 montre l'évolution de σ_ψ pendant le balayage de la fréquence du générateur.

La Figure 5.4 montre que la diminution de σ_ψ est d'au moins de deux ordres de grandeur, ce qui facilite la détection. Par exemple, le seuil de détection $\sigma_\psi < 1$ convient. Une fois les états de synchronisation connus, il suffit de collecter les résultats $\langle p \rangle$ et $\langle \psi \rangle$ des deux mesures, sens croissant et décroissant, pour obtenir enfin les solutions stationnaires complètes du système.

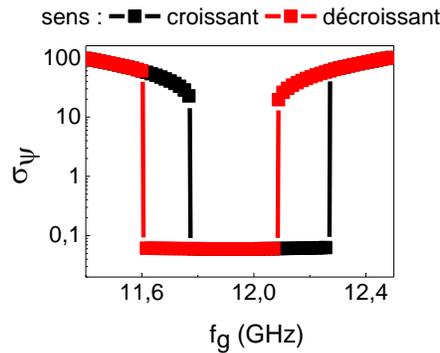


Figure 5.4. Evolution de σ_ψ en fonction de la fréquence du générateur, dans le cas de la synchronisation de la Figure 5.1. L'écart type σ_ψ est mesuré sur une portion de 100 ns pour chaque palier de fréquence.

Dans la suite, on travaillera plutôt avec les solutions $p_s(\delta)$ et $\psi(\delta)$ où p_s est la puissance synchronisée et δ le désaccord de fréquence. Cela nécessite de connaître en plus la puissance p_0 et la fréquence libre f_0 , qui peuvent s'obtenir, à part, en l'absence de signal générateur. Une fois les solutions obtenues, on peut appliquer les formules (3.40) et (3.46) pour extraire les propriétés de synchronisation ($\Delta\Omega$, $\Delta\Pi$, ψ_p , ψ_o), puis comparer le résultat final avec le modèle.

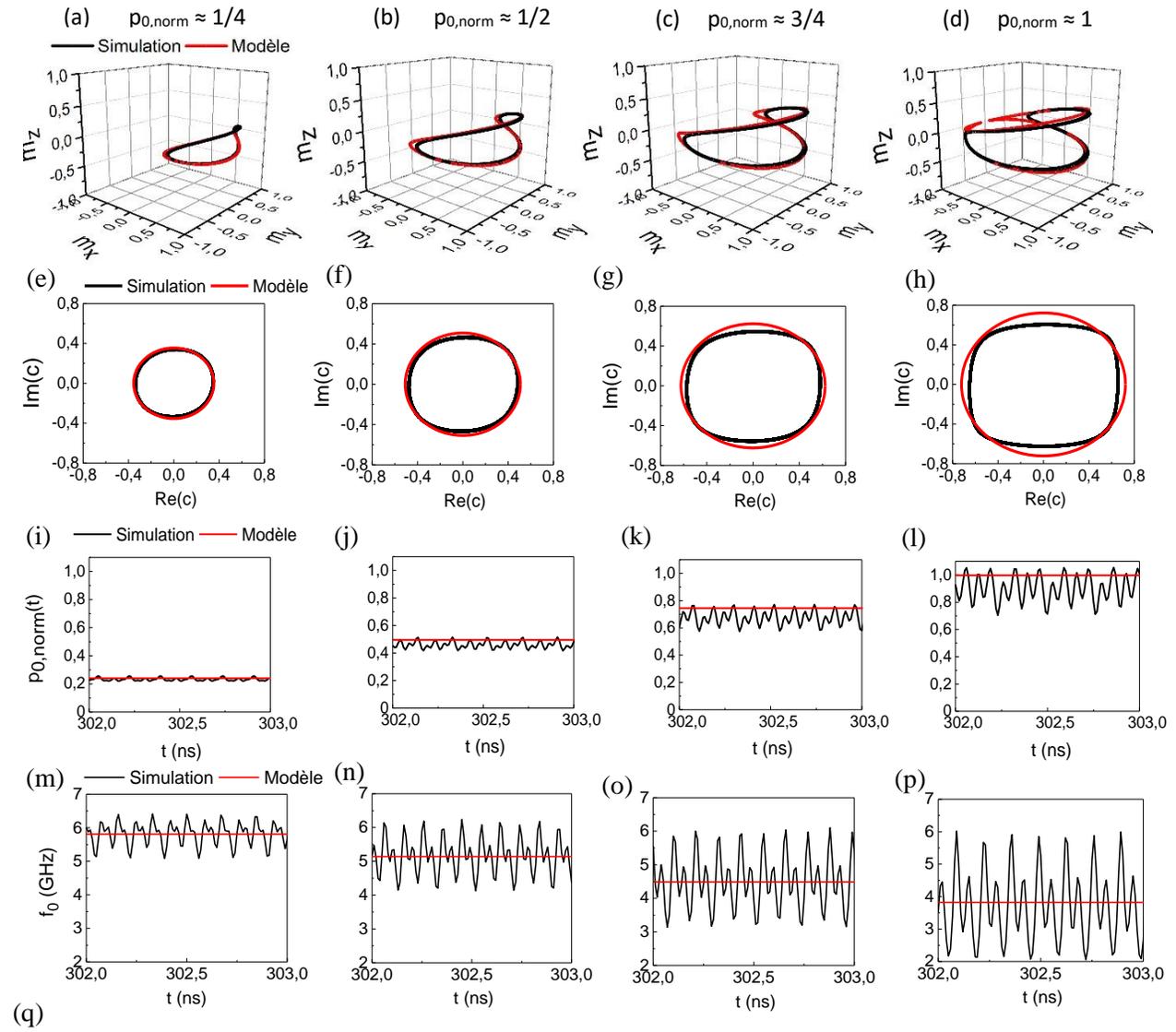
5.2. Etude du régime libre

La première étape consiste à étudier le régime libre de l'oscillateur. La section 5.2.1 commence par l'étude des états stationnaires puis la section 5.2.2 termine par les états transitoires.

5.2.1. Etats stationnaires

Lorsque le courant $|J_{dc}| > |J_{cr}|$, les états stationnaires de l'oscillateur sont des états entretenus (régime d'auto oscillation) dans lesquels l'aimantation précesse autour de l'axe d'équilibre. La Figure 5.5 montre les trajectoires et l'évolution instantanée des variables dynamiques du système.

Aux faibles puissances libres $p_{0,norm} = \frac{1}{4}$, le modèle correspond bien avec la simulation, voir Figure 5.5 (a,e,i,m). Le cercle limite simulé est confondu avec l'orbite conservative du système, voir Figure 5.5 (a,e), ce qui se traduit par sa quasi-circularité dans le plan complexe c . Une observation précise montre cependant que la puissance et la fréquence possèdent toutes les deux de faibles oscillations subharmoniques (ou fluctuations « mécaniques »), caractéristiques de la contribution des termes non résonants dans la dynamique, voir Figure 5.5 (i,m) et aussi [49] dans un contexte plus large. A faible puissance, ces oscillations restent néanmoins faibles et les valeurs moyennes sont correctement prédites, voir tableau (q).



Puissance théorique : $p_{0,norm}$	0,24	0,49	0,74	0,99
$J_{dc} (\times 10^9 \text{ A/m}^2) - (\zeta)$	-410 (1,09)	-460 (1,23)	-530 (1,41)	-640 (1,71)
puissance moyenne simulée : $p_{0,norm}$	0,23	0,46	0,68	0,90
écart type des fluctuations : $\sigma_{p_{norm}}$	0,01	0,03	0,05	0,1
fréquence théorique : f_0 (GHz)	5,810	5,141	4,486	3,821
fréquence moyenne simulée : f_0 (GHz)	5,824	5,173	4,501	3,742
écart type des fluctuations : σ_f (GHz)	0,341	0,553	0,802	1,097

Figure 5.5. Comparaison modèle v.s simulation dans le cas de l'oscillateur planaire, à $H_{dc} = 400$ Oe. (a-d) Cercles limites en variable m selon différentes puissances libres normalisées $p_{0,norm}$. (a) $p_{0,norm} = 0,24$, (b) $p_{0,norm} = 0,49$, (c) $p_{0,norm} = 0,74$, (d) $p_{0,norm} = 0,99$. (e-h) Cercles limites dans le plan complexe c pour ces mêmes puissances. (i-l) Traces temporelles de la puissance normalisée $p_{0,norm}(t)$ pendant 1 ns. (m-p) Traces temporelles de la fréquence instantanée $f_0(t)$. (q) Valeurs mesurées.

Aux plus fortes puissances libres, les cercles limites réels s'écartent des orbites prédites, voir Figure 5.5 (b-d,f-h,j-l,n-p). En particulier en variable m , les points extrémaux x-y de la trajectoire simulée sont moins profonds que ce que prédit le modèle, tandis que c'est l'inverse pour les points extrémaux x-z³⁶. Plus encore dans le cas limite $p_{0,norm} = 1$ (c.à.d. $p = p_{opp}$), voir Figure 5.5 (d), les points extrémaux x-y de l'orbite prédite se recourent, marquant la transition IPP-OPP, alors qu'en réalité ils ne le font pas. Par conséquent, le courant nécessaire à la transition IPP-OPP est plus fort que prévu.

En ce qui concerne les variables $p_{0,norm}(t)$, $f_0(t)$, l'augmentation de la puissance génère à la fois un décalage des valeurs moyennes et une augmentation notable des oscillations subharmoniques, voir Figure 5.5 (j-l,n-p). Cela se produit car les termes non résonants contribuent plus fortement à la dynamique à mesure que la puissance augmente. Dans le cas de $p_{0,norm}(t)$, les oscillations correspondent à la déformation du cercle limite réel. Ce n'est plus un cercle du plan complexe mais plutôt un carré. En particulier à la limite $p_{0,norm} = 1$, les écarts types deviennent trop grands (fluctuations de puissance : $\sigma_{p_{norm}} = 0,1$ et de fréquence $\sigma_f = 1$ GHz) comparés aux valeurs moyennes ($f_0 \approx 3,74$ GHz) pour que ces dernières continuent à avoir du sens.

La Figure 5.6 suivante compare de façon plus précise la puissance et la fréquence moyenne. En particulier le modèle prévoit des états auto-oscillants dans une gamme plus restreinte de courant ($|J_{dc}| \in [375,640] \times 10^9$ A/m²) que la simulation ($|J_{dc}| \in [375,900] \times 10^9$ A/m²). En effet, La gamme réelle (ou de même la gamme de super-criticité) augmente de 140%, comparée à la gamme prédite. Ainsi, le courant de transition réel IPP-OPP vaut $J_{dc} = -900 \times 10^9$ A/m² contre $J_{dc} = -640 \times 10^9$ A/m² en théorie.

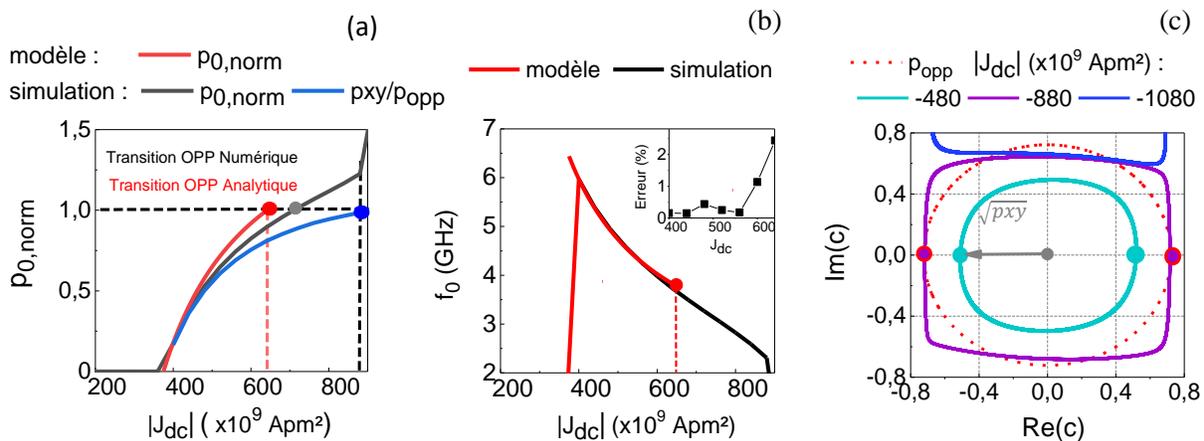


Figure 5.6. (a) Comparaison de $p_{0,norm}$ puissance normalisée libre moyenne (prédite et simulée), p_{xy}/p_{opp} puissance des points extrémaux x-y (simulée). (b) Comparaison de f_0 la fréquence moyenne (prédite et simulée). (c) Cercle limites pour différents courants J_{dc} . Les valeurs moyennes sont prises sur un intervalle de 50 ns, soit env 100 périodes.

D'après la Figure 5.6 (a), la comparaison entre la puissance prédite et la puissance moyenne simulée p_{norm} est à prendre avec prudence. En effet, dans l'intervalle $|J_{dc}| \in [640,900] \times 10^9$ A/m², la puissance moyenne est supérieure à 1 car le cercle limite réel s'écarte d'un cercle du plan complexe, voir Figure 5.6

³⁶ Voir définition des points extrémaux à la section 2.3.2.2

(c). La trajectoire prend même une forme carrée. Il apparaît alors plus intéressant de relever la puissance p_{xy} des points extrêmes $x-y$, c'est à dire la puissance prise par l'orbite au point $\varphi = 0$. Dans ce cas, p_{xy}/p_{opp} tend bien vers 1 à la transition IPP-OPP car tout comme en théorie, l'oscillateur simulé opère sa transition lorsque ses points extrêmes $x-y$ se rejoignent (si $B/A < 0$). Avec p_{xy}/p_{opp} à la place de $p_{0,norm}$, la Figure 5.6 (a) montre en réalité un désaccord plus grand avec le modèle, avec le courant. En ce qui concerne la fréquence, l'estimation du modèle est plutôt correcte avec une erreur relative ne dépassant pas 3%, voir Figure 5.6 (b).

Pour conclure, le modèle correspond comme prévu avec la simulation dans la limite des faibles courants J_{dc} ou faibles puissances. Quand le courant augmente, le modèle perd sa validité ce qui se traduit par des fluctuations accrues des variables dynamiques. L'augmentation de ces fluctuations est inhérente à la dynamique de tout auto-oscillateur et constitue la limite fondamentale du modèle universel.

5.2.2. Comparaison mesures des paramètres transitoires

Pour mesurer les paramètres Γ_p et ν donnés par la simulation, une façon pratique est d'étudier la relaxation de l'oscillateur à une impulsion de puissance au voisinage de la puissance libre p_0 , voir (2.67). En effet, le temps caractéristique est fonction de Γ_p tandis que le déphasage ajouté après relaxation est contrôlé par ν . L'impulsion doit être à la fois suffisamment forte pour distinguer la relaxation mais assez faible pour ne sonder que le voisinage de p_0 . Par exemple, une possibilité est d'envoyer une impulsion de courant, reliée à la puissance par :

$$\Delta\zeta = \frac{(\zeta_0 + Q_1)^2}{1 + Q_1} \Delta p \quad (5.3)$$

La relation s'obtient en différenciant (2.60) au voisinage de ζ_0 .

La Figure 5.7 compare les mesures des paramètres simulés avec les prédictions du modèle.

Globalement, les paramètres Γ_p , ν sont correctement estimés, voir Figure 5.7 (c,d). L'amortissement Γ_p augmente avec J_{dc} , ce qui fait diminuer $|\nu|$, conformément à l'expression (2.65). L'estimation de la non linéarité est cependant un peu moins juste à toutes les puissances, ce qui peut s'expliquer par la mesure plus sensible de $\delta\varphi_\infty$.

La méthode présentée reste néanmoins limitée à la simulation. En effet, il n'est pas possible, en expérience, d'envoyer une impulsion purement sur la puissance ou de mesurer précisément le déphasage à cause du bruit. Dans ce cas, il est préférable d'exploiter les bruits d'amplitude et de phase pour extraire les paramètres [59]. A l'inverse, cette méthode par le bruit convient moins à la simulation car elle nécessite de longues traces temporelles ($>10 \mu s$) pour fiabiliser les mesures.

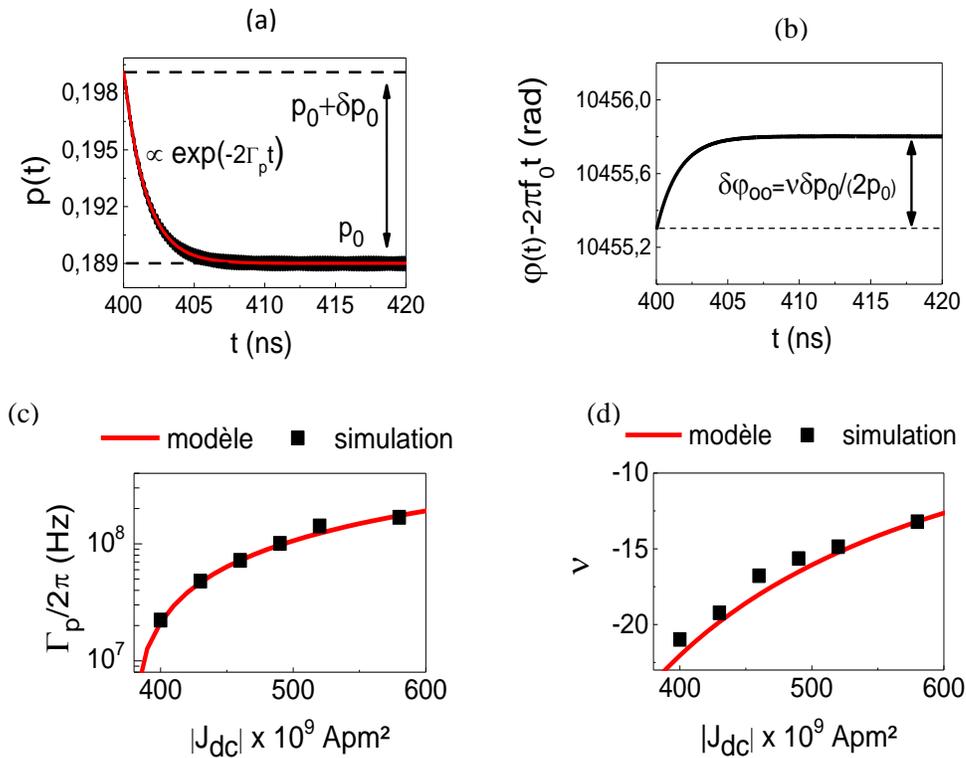


Figure 5.7. Mesure des paramètres transitoires. L'oscillateur en état auto-oscillant subit une impulsion de courant (équivalent à une impulsion de puissance) de largeur suffisante pour qu'il se stabilise. Lorsque l'impulsion s'arrête, les relaxations de la puissance et de la phase sont mesurées pour extraire les paramètres, selon (2.67). (a,b) Illustration de la méthode de mesure. L'amplitude de l'impulsion vérifie $0.05 < \delta p_0 < 0.1$ soit $\delta p_0 \ll p_0$. (c,d) Comparaison des paramètres Γ_p , ν prédits et simulés : $375 \cdot 10^9 \text{ A/m}^2 < |J_{dc}| < 600 \cdot 10^9 \text{ A/m}^2$ équivaut à : $0 < p_{0, \text{norm}} < 0.9$.

5.3. Synchronisation à un forçage canonique

L'objectif est de comparer les résultats du modèle avec ceux de la simulation dans différents cas de synchronisation à un forçage canonique. La section 5.3.1 explique comment opérer le simulateur dans le régime d'approximation du modèle. La section 5.3.2 vérifie à faible puissance libre toutes les propriétés des forçages canoniques d'ordre 1 et 2. Après en 5.3.3, on les aborde lorsque la puissance libre augmente. La comparaison porte sur la sensibilité C_Ω des forçages, puis s'attarde sur la vérification des propriétés de $\mathcal{D}_{y,l}$. Ces dernières sont les plus intéressantes à cause des fortes variations prédites par le modèle. Enfin en 5.3.4, le modèle est testé dans plusieurs cas spéciaux de simulation.

5.3.1. Conditions de validité du modèle

Le modèle a été développé en respectant plusieurs conditions. On discute ici la façon de les réaliser en simulation.

5.3.1.1. Condition de signal faible

Le système approché (3.32) et en particulier l'équation d'Adler (3.39), symétriques en δ , ont été développés à condition que : $p_s \ll p_0$. Cependant, le ratio p_s/p_0 n'est pas très intuitif à utiliser, c'est pourquoi nous voudrions le remplacer par une autre quantité plus significative. Dans le cas des forçages à valeurs réelles, l'extension de p_s est proportionnelle à l'amplitude a_g du signal générateur. Il semble donc pratique de lier la condition à celle d'une faible valeur a_g , dont il faut maintenant trouver un critère de définition.

Par exemple, une première possibilité est de comparer J_g à J_{dc} , comme pour la synchronisation sous courant. Dans ce cas, l'amplitude est considérée faible lorsque le ratio $\varepsilon = J_g/J_{DC}$ vérifie $\varepsilon \ll 1$. Il existe néanmoins plusieurs inconvénients : 1) le ratio ne s'applique pas au cas de la synchronisation sous champ. En particulier, faut-il définir dans ce cas le ratio ε par $\varepsilon = h_g/h_{dc}$ ou bien par $\varepsilon = h_g/(h_{dc}+h_{int})$? 2) Le ratio ne s'applique pas, non plus, à tous les cas de synchronisation sous courant, car la faiblesse du signal peut changer suivant les forçages utilisés. Par exemple, il se peut que les couples de transfert de spin soient différents pour J_{dc} et J_g ce qui empêche de comparer les ratios ε entre eux (par ex : utilisation de couples de spin orbite). Pour ces raisons, le critère sur l'amplitude tel que $\varepsilon \ll 1$ n'est pas assez générique pour remplacer le critère $p_s \ll p_0$. Il faut en trouver un autre.

En réalité d'après les simulations [19] figure III.8 p106, la synchronisation devient de plus en plus asymétrique à mesure que l'amplitude du signal augmente. Cela se comprend intuitivement car une forte amplitude provoque une forte variation de la puissance synchronisée, ce qui invalide la condition $p_s \ll p_0$. Or comme les forçages dépendent généralement de p , la force de synchronisation varie aussi, ce qui peut générer l'asymétrie de la synchronisation. Dans ce cas le modèle perd sa validité. Le caractère

symétrique / asymétrique de la synchronisation peut servir de critère pratique à la notion de signal d'amplitude faible.

Par exemple, la Figure 5.8 suivante montre une solution asymétrique de la phase, obtenue par simulation, lors d'une synchronisation par le forçage $\mathcal{D}_{\chi,2}$.

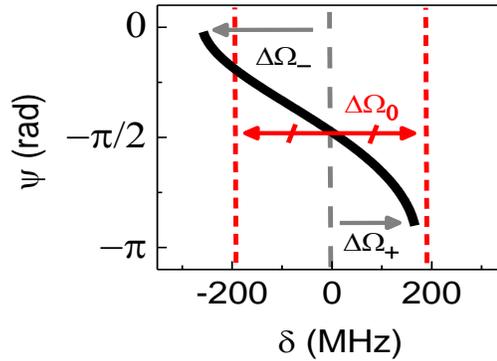


Figure 5.8. Exemple de synchronisation asymétrique avec le forçage $\mathcal{D}_{\chi,2}$ via courant. Conditions du régime libre : $H_{dc} = 400$ Oe, $J_{dc} = -400 \times 10^9$ A/m² ($\zeta \approx 1,07$, $p_0 = 0,0905$, $p_{0,norm} = 0,173$), $f_0 = 5,968$ GHz, $\nu(p) = -22$. Paramètres du générateur : $\varepsilon = 0,3$ ($J_g = 120 \times 10^9$ A/m²). Valeurs mesurées : $\Delta\Omega_+ = 166$ MHz, $\Delta\Omega_- = -258$ MHz et $\Delta\Omega_0 = 212$ MHz. Ces quantités sont définies ci-dessus.

Dans le cas de la Figure 5.8, la synchronisation est asymétrique car les limites de la gamme de synchronisation ne sont pas égales en valeurs absolues. Par ailleurs, la solution de phase balaie bien un intervalle de largeur π , ce qui montre que c'est la gamme complète qui est asymétrique. En particulier, l'asymétrie vue par [19] figure III.8 p106, ne vient pas d'un hypothétique effet d'hystérésis asymétrique qui se produirait à l'intérieur d'une gamme symétrique.

Pour caractériser ce comportement, nous définissons le taux d'asymétrie expérimental $t_{a,exp}$ par :

$$t_{a,exp} = \frac{\Delta\Omega_0 - |\Delta\Omega_+|}{\Delta\Omega_0} = \frac{\Delta\Omega_0 - |\Delta\Omega_-|}{\Delta\Omega_0} \quad (5.4)$$

Avec : $\Delta\Omega_+$ la limite de la gamme de synchronisation du côté des fréquences positives ($\delta > 0$), $\Delta\Omega_-$ la limite du côté des fréquences négatives ($\delta < 0$) et $\Delta\Omega_0$ la gamme symétrique donnée par la moyenne des deux.

En particulier, le taux $t_{a,exp}$ est signé, c'est-à-dire qu'il peut être positif ou négatif. Il est positif si l'asymétrie renforce le côté $\delta > 0$ ou négatif dans le cas contraire. Par exemple pour la Figure 5.8, le taux $t_{a,exp}$ vaut $t_{a,exp} = -21\%$ pour une amplitude de signal valant $\varepsilon = 0,3$. On ne considère ici que la situation simple où l'écart $|\Delta\Omega_0 - \Delta\Omega_{\pm}|$ est le même des deux côtés, mais c'est n'est pas nécessairement le cas.

Comme l'asymétrie augmente avec l'amplitude du signal, le taux peut aussi bien servir de critère à la définition d'un signal de faible amplitude.

Propriété 5.1 : L'amplitude a_g du signal générateur est faible si elle vérifie : $|t_{a,exp}| \ll 1$

Ce critère est à la fois équivalent et tout aussi général que la condition $p_s \ll p_0$ car il s'applique à tous les forçages, quelle que soit la nature du signal. Cependant, il est plus pratique à utiliser car il se voit directement sur la gamme de synchronisation. Dans toutes les études de ce chapitre, les prédictions du modèle sont comparées avec les simulations vérifiant un taux voisin $t_{a,exp}$ de 3 à 4 %.

5.3.1.2. Réalisation des forçages canoniques

Comme le montrent les deux exemples 4.1.1.3, la plupart des forçages dépendent de plusieurs forçages canoniques à la fois. Une première raison est d'ordre théorique. Le signal générateur, qu'il soit un courant ou un champ, agit souvent à travers les couples conservatifs et dissipatifs à la fois. Une autre raison est qu'il est difficile en pratique d'aligner parfaitement le signal générateur sur un seul des axes.

La question qui se pose alors est : comment réaliser individuellement les forçages canoniques à partir du modèle d'oscillateur présenté en 3.1.1 ? En simulation numérique, la réalisation de l'alignement parfait n'est pas un problème par contre la présence simultanée de couples conservatifs et dissipatifs en est un. Réaliser ces forçages numériquement est crucial pour vérifier les prédictions théoriques.

Le modèle n'autorise que deux types de signaux : un champ ou un courant. Dans ce cas, la seule possibilité est de respecter les hypothèses suivantes. Le forçage des couples conservatifs $\{C_{ij}\}_{i=\{x,y,z\}}$ peut se faire avec un champ, à condition que $\alpha \ll 1$ (c'est le cas ici).

Si la synchronisation est d'ordre n selon l'axe u_i , le forçage donne alors :

$$\mathcal{F}(p, \psi) \approx \frac{k_c H_g}{2} \sum_{i=\{x,y,z\}} \rho_i C_{i,n}(p, \psi) \quad (5.5)$$

Avec : $k_c = -\gamma'_0$.

Par contre, le forçage des couples dissipatifs $\{D_{ij}\}_{i=\{x,y,z\}}$ n'est possible que si le signal est un courant et si tous les effets de champ sont supprimés ($b_j = 0$ et effet de pseudo-champ négligé $\alpha a_{j0} = 0$) :

$$\mathcal{F}(p, \psi) \approx \frac{k_D \varepsilon}{2} \sum_{i=\{x,y,z\}} \rho_i D_{i,n}(p, \psi) \quad (5.6)$$

Avec : $k_D = -\gamma'_0 a_{j0} J_{dc}$ et $\varepsilon = J_g / J_{dc}$.

Ce sont ces conditions qui seront à vérifier pour réaliser tous les forçages canoniques.

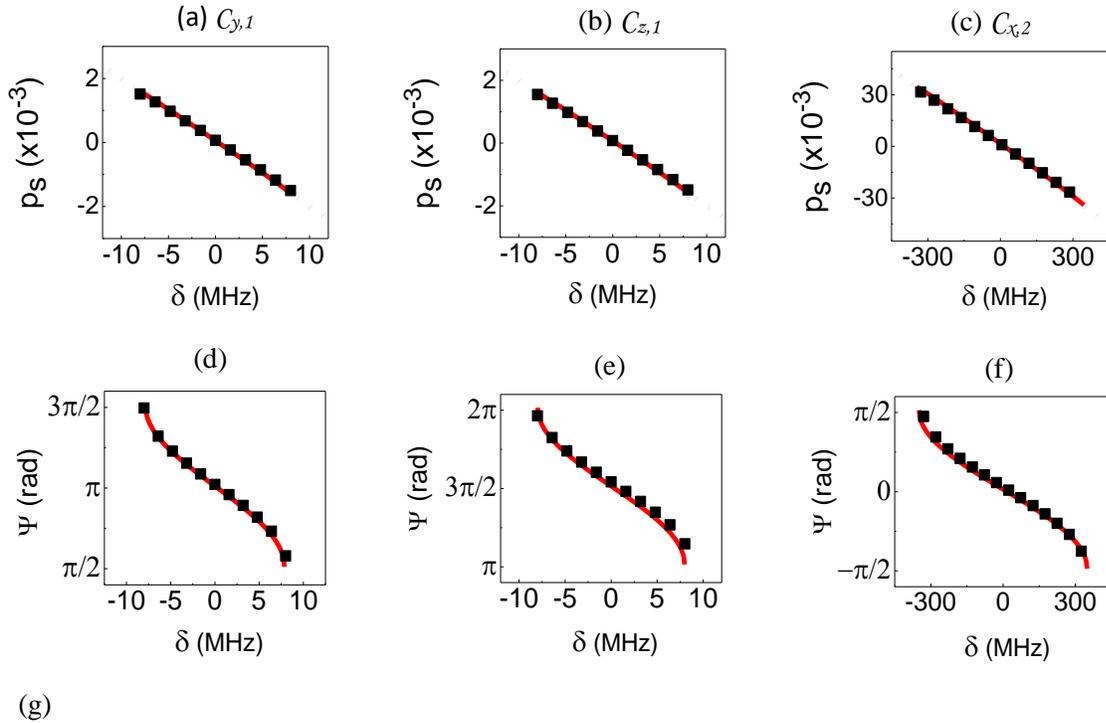
5.3.2. Propriétés à faible puissance libre

Pour commencer, nous vérifions les propriétés des forçages canoniques à faible puissance libre, à l'ordre 1 et 2. Les solutions stationnaires sont montrées à la Figure 5.9 (cas conservatif) et Figure 5.10 (cas dissipatif). Les tableaux (g) comparent les valeurs des propriétés mesurées et prédites. Le modèle est comparé pour une puissance libre de $p_{0,norm} \approx 0.17$ et des amplitudes de signaux générateurs tel que $t_{a,exp} \approx 3 - 4\%$. En pratique, cela signifie que la gamme $\Delta\Omega$ est symétrique à la limite de la résolution de $\Delta\Omega$ (entre 25 pts à 40 pts).

Dans l'ensemble, les gammes $\Delta\Omega$ et $\Delta\Pi$ sont correctement estimées avec quelques disparités entre les forçages, voir tableaux (g). Par exemple pour $C_{y,1}$ l'erreur peut être aussi petite que 1% tandis que pour $\mathcal{D}_{y,1}$ l'erreur atteint 10%. Cela montre qu'à $t_{a,exp}$ fixé, le modèle prévoit de façon inégale les propriétés suivant les forçages utilisés. Par ailleurs, la valeur de l'amplitude du signal générateur, nécessaire pour atteindre le même taux $t_{a,exp}$, est en réalité relative entre chaque forçage. Par exemple pour $C_{y,1}$ l'amplitude du champ H_g doit être aussi basse que $H_g = 0,05$ Oe tandis que dans le cas $C_{x,2}$, $H_g = 2,5$ Oe suffit. En fait, ce dernier est le seul forçage canonique à ne pas avoir d'asymétrie d'où la valeur relativement élevée possible de l'amplitude du champ. Dans le cas $\mathcal{D}_{y,1}$, il faut descendre jusqu'à à $\varepsilon = 1,4 \cdot 10^{-3}$. Ainsi pour que la théorie soit valable, les amplitudes requises peuvent être très différentes entre les forçages.

Le déphasage de puissance ψ_p est lui aussi correctement estimé. Comme le système vérifie approximativement la propriété 3.9, le ψ_p des forçages canoniques est voisin de $3\pi/2$. En revanche, le ψ_p de $\mathcal{D}_{x,2}$ est strictement égal, comme prédit par la théorie. Cela confirme que ψ_p est un paramètre essentiel à la description du régime synchronisé, au même titre que $\Delta\Omega$, $\Delta\Pi$ et ψ_0 . En ce qui concerne le déphasage additionnel ψ_0 , l'accord est globalement bon, malgré un biais de 3° à 6° entre théorie et simulation. Les causes de l'erreur peuvent être multiples. Par exemple, il y a l'erreur commise sur l'estimation de la fréquence libre f_0 qui génère une erreur sur le calcul de désaccord de fréquence δ . D'autre part, le déphasage ψ est soumis à des fluctuations subharmoniques dont l'écart type est d'au moins 3° , ce qui entache la mesure d'une imprécision intrinsèque. Enfin, une dernière possibilité est l'erreur causée sur $\Delta\Omega$. En particulier, les gammes $\Delta\Omega$ des forçages $\mathcal{D}_{y,1}$, $\mathcal{D}_{x,2}$ et $C_{z,1}$ sont les moins bien estimées, tout comme leurs ψ_0 . Dans ce cas, l'erreur provient des limitations du modèle qui, pour une raison que nous ignorons fonctionne un peu moins bien pour ces forçages. Pour toutes ces raisons, la mesure précise de ψ_0 reste délicate.

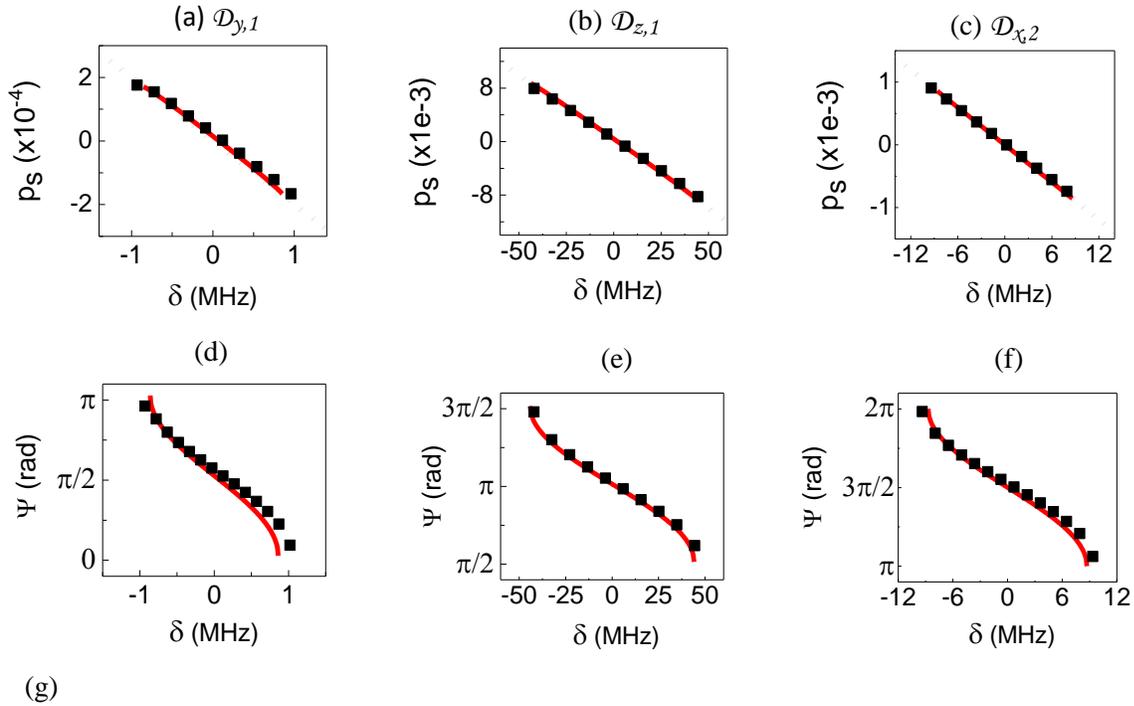
○ Forçages conservatifs :



	Forçages	$C_{y,1}$	$C_{z,1}$	$C_{x,2}$
	$H_g(Oe)$	0,05	0,24	2,5
Modèle	$\Delta\Omega(MHz)$	7,86	7,97	349,0
	$\Delta\Omega(MHz)$ (for. réel)	7,85	7,96	348,7
	$\Delta IT(x10^{-3})$	1,5	1,6	34,7
	$\psi_0(^{\circ})$	182	272	3
	$\psi_p(^{\circ})$	272	272	272
Simulation	$\Delta\Omega(MHz)$	$7,90 \pm 0,8$	$8,25 \pm 0,8$	$337,8 \pm 12$
	$\Delta IT(x10^{-3})$	$1,5 \pm 0,1$	$1,6 \pm 0,1$	$32,2 \pm 1$
	$\psi_0(^{\circ})$	184	277	6
	$\psi_p(^{\circ})$	273	273	272

Figure 5.9. Solutions stationnaires p_s (1^{ère} ligne (a,b,c)) et ψ (2nd ligne (d,e,f)) des forçages canoniques conservatifs pour l'oscillateur de référence. Conditions du régime libre : $J_{dc} = -400 \times 10^9 \text{ A/m}^2$, $H_{dc} = 400 \text{ Oe}$ ($\zeta \approx 1,07$, $p_0 = 0,0905$, $p_{0,norm} = 0,173$), $f_0 = 5,968 \text{ GHz}$, $v(p) = -22$. Le signal générateur est un champ de composantes respectives $p_y = p_x = 1$. La pente $1/nN$ est indiquée en pointillé gris avec les solutions p_s . (g) Propriétés de synchronisation prédites et simulés des forçages.

○ Forçages dissipatifs :



	Forçages	$\mathcal{D}_{y,1}$	$\mathcal{D}_{z,1}$	$\mathcal{D}_{x,2}$
	$\varepsilon = J_g/J_{dc} (J_g - A/m^2)$	-0,0014 (-0,56 x10 ⁹)	-0,008 (-3,2 x10 ⁹)	-0,0137 (-5,48 x10 ⁹)
Modèle	$\Delta\Omega$ (MHz)	0,86	44,08	8,71
	$\Delta\Omega$ (MHz) (for. réel)	0,92	44,04	XX
	$\Delta\Gamma$ (x10 ⁻³)	0,17	8,75	0,86
	ψ_0 (°)	95	183	270
	ψ_p (°)	275	273	270
Simulation	$\Delta\Omega$ (MHz)	0,94 ± 0,08	42,6 ± 2,4	9,44 ± 0,8
	$\Delta\Gamma$ (x10 ⁻³)	0,18 ± 0,1	8,00 ± 0,3	0,91 ± 0,1
	ψ_0 (°)	101	184	275
	ψ_p (°)	277	273	271

Figure 5.10. Solutions stationnaires p_s (1^{ère} ligne (a,b,c)) et ψ (2nd ligne (d,e,f)) des forçages canoniques dissipatifs. Même conditions de régime libre que précédemment. Le signal générateur est un courant polarisé avec les composantes $\rho_y = \sin(165^\circ)$, $\rho_z = \sin(165^\circ)$, $\rho_x = \cos(165^\circ)$. La pente $1/nN$ est indiquée en pointillé gris avec les solutions p_s . (g) Propriétés de synchronisation prédites et simulées des forçages.

Par ailleurs aux fortes non linéarités, la théorie prévoit que tous les forçages se simplifient en des forçages à valeurs réelles, donnant les mêmes propriétés de synchronisation. Effectivement, c'est ce que les résultats de simulation confirment. L'approximation rectiligne se voit par l'allure quasi linéaire de la solution $p_s(\delta)$ (c.à.d. $\psi_p \approx 3\pi/2$), avec une pente voisine de $1/nN$ à l'ordre n , voir les Figure 5.9, Figure 5.10 (a,b,c). Par ailleurs, la gamme $\Delta\Omega$ prédite avec les forçages simplifiés correspond bien à la valeur prédite par les forçages exacts et donc aussi à la valeur simulée, voir tableaux (g). Par conséquent, l'approximation fonctionne correctement.

Dans l'ensemble, l'accord entre le modèle et la simulation est globalement bon ou très bon, malgré des légères différences de prédiction entre les forçages. A notre connaissance, il n'y a pas d'étude comparative montrant un accord aussi bon du modèle universel avec l'équation LLGS. En particulier à $p_{0,norm} \approx 0.17$ et $t_{a,exp} \approx 3 - 4\%$, la prédiction atteint, pour certains forçages, 1% sur les gammes et $\pm 3^\circ$ sur ψ_0 . Cela est un argument en faveur du modèle et valide au passage les calculs des chapitres précédents.

5.3.3. Propriétés en fonction de la puissance libre

Le modèle fournit aussi des prédictions lorsque la puissance des oscillations varie. En premier, nous comparons les sensibilités C_Ω prédites et simulées, pour tous les forçages canoniques. Ensuite, l'attention porte sur le forçage $\mathcal{D}_{y,1}$, dont les propriétés changent fortement avec la puissance. Cependant, comme le modèle perd sa validité quand la puissance libre augmente, l'effet de la transition d'ellipticité n'est pas aussi franc qu'attendu. Le modèle permet, toutefois, de comprendre dans les grandes lignes le phénomène.

5.3.3.1. Evolutions de la sensibilité C_Ω

Le premier objectif est de comparer les sensibilités de fréquences C_Ω prédites et simulées. La Figure 5.11 montre les résultats obtenus pour tous les forçages canoniques du système.

D'après la figure, le modèle donne correctement l'ordre de grandeur de la sensibilité et sa tendance avec la puissance, dans tous les cas de forçage. En particulier, les différences entre les sensibilités correspondent bien aux différences d'amplitudes des forçages, liées à la dissymétrie de la trajectoire de l'oscillateur ($\mathcal{B}/\mathcal{A} \approx -1$), voir section 4.3. Par exemple, on a effectivement d'une part : $C_\Omega(C_{y,1}) \gg C_\Omega(C_{z,1})$ et d'autre part : $C_\Omega(\mathcal{D}_{z,1}) \gg C_\Omega(\mathcal{D}_{y,1})$.

En revanche, le modèle concorde de moins en moins avec la simulation à mesure que J_{dc} (c.à.d. p_0) augmente. Cela se manifeste par une sensibilité plus grande que prévue. C'est notamment le cas de tous les forçages d'ordre 1, ce qui peut s'expliquer par la négligence du facteur racinaire, voir tableau 4.4 rmq N^2 . En revanche à l'ordre 2, les prédictions du modèle sont plus consistantes avec la simulation, que la puissance soit faible ou forte. Pour cela, ces forçages peuvent très bien convenir comme « cas d'école »,

à chaque fois qu'il faut vérifier rigoureusement une des propriétés du modèle. En particulier, [19] avait déjà obtenu la courbe $C_{\Omega}(\mathcal{D}_{x,2})$, voir Figure 5.11 (f).

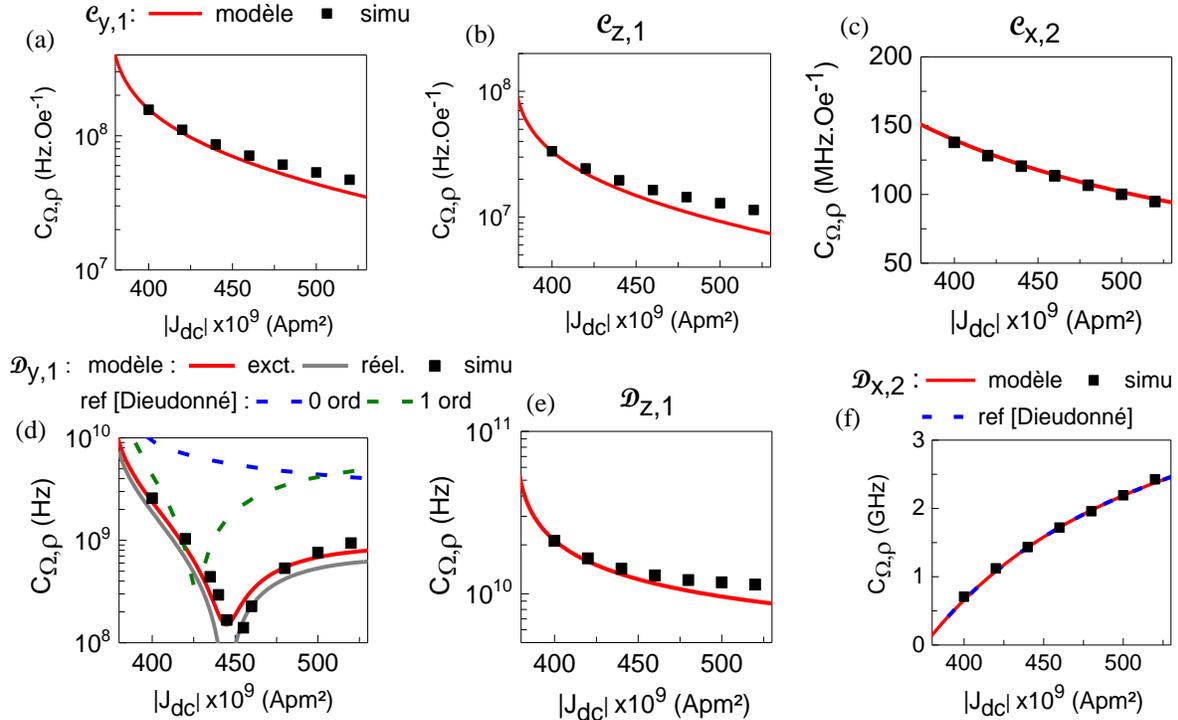


Figure 5.11. Comparaison des sensibilités normalisées $C_{\Omega,p} = C_{\Omega} / \rho_i$ prédites et simulées. Paramètres statiques : $380 \times 10^9 \text{ A/m}^2 < |J_{dc}| < 530 \times 10^9 \text{ A/m}^2$ ($0 < p_{0,norm} < 3/4$), $H_{dc} = 400 \text{ Oe}$. (a) Forçage $C_{y,1}$ pris à $H_g = 0,1 \text{ Oe}$. (b) $C_{z,1}$, $H_g = 0,5 \text{ Oe}$. (c) $C_{x,2}$, $H_g = 0,1 \text{ Oe}$. (d) $\mathcal{D}_{y,1}$, $\epsilon = 3 \times 10^{-3}$. (e) $\mathcal{D}_{z,1}$, $\epsilon = 1,6 \times 10^{-3}$. (f) $\mathcal{D}_{x,2}$, $\epsilon = 13 \times 10^{-3}$.

La Figure 5.11 (d) du cas $\mathcal{D}_{y,1}$ est très intéressante à étudier pour comprendre les progrès dans la compréhension du modèle. D'abord, le modèle appliqué au forçage exact concorde plutôt bien avec la simulation. Notamment, la simulation confirme la présence d'un minimum dans la sensibilité. D'après le modèle, cette variation s'explique par la transition d'ellipticité g du forçage $\mathcal{D}_{y,1}$, qui modifie la sensibilité C_{Ω} à travers la sensibilité intrinsèque Cl_{Ω} . Cependant, l'accord n'est pas parfait car le minimum réel se produit à plus forte puissance que prévu.

Par ailleurs, la figure montre que le forçage à valeurs réelles $\mathcal{D}_{a,y,1}$ est une bonne alternative au forçage exact $\mathcal{D}_{y,1}$. La sensibilité prédite concorde encore bien avec la simulation que la puissance soit faible ou forte. Par contre autour de la transition, l'accord devient moins bon car la sensibilité s'annule, ce qui n'est pas le cas en réalité. A l'inverse, toutes les sensibilités obtenues par simplification de l'ordre en puissance s'accordent beaucoup moins bien avec la simulation. Par exemple chez [19], le forçage utilisé à la place de $\mathcal{D}_{y,1}$ était à valeur réel simplifié à l'ordre 1. Lorsque la puissance est faible, la sensibilité surestime légèrement la valeur réelle mais reste plutôt correcte. Par contre aux fortes puissances, la

sensibilité diffère d'au moins un ordre de grandeur comparé aux valeurs simulées, avec un minimum mal estimé. Ainsi, on voit qu'il est nécessaire de connaître exactement la dépendance des forçages en p pour comprendre plus finement les propriétés de synchronisation. Toutes tentatives de simplification doivent être prises avec prudence.

5.3.3.2. Evolution des propriétés de $\mathcal{D}_{y,1}$

On s'intéresse plus spécifiquement aux propriétés de $\mathcal{D}_{y,1}$, au voisinage de la transition d'ellipticité. Les Figure 5.12 (a-d) montrent l'évolution des solutions stationnaires tandis que les Figure 5.12 (e-f) montrent l'évolution globale de $C_{\Pi, \rho}$, ψ_0 et ψ_p avec le courant J_{dc} .

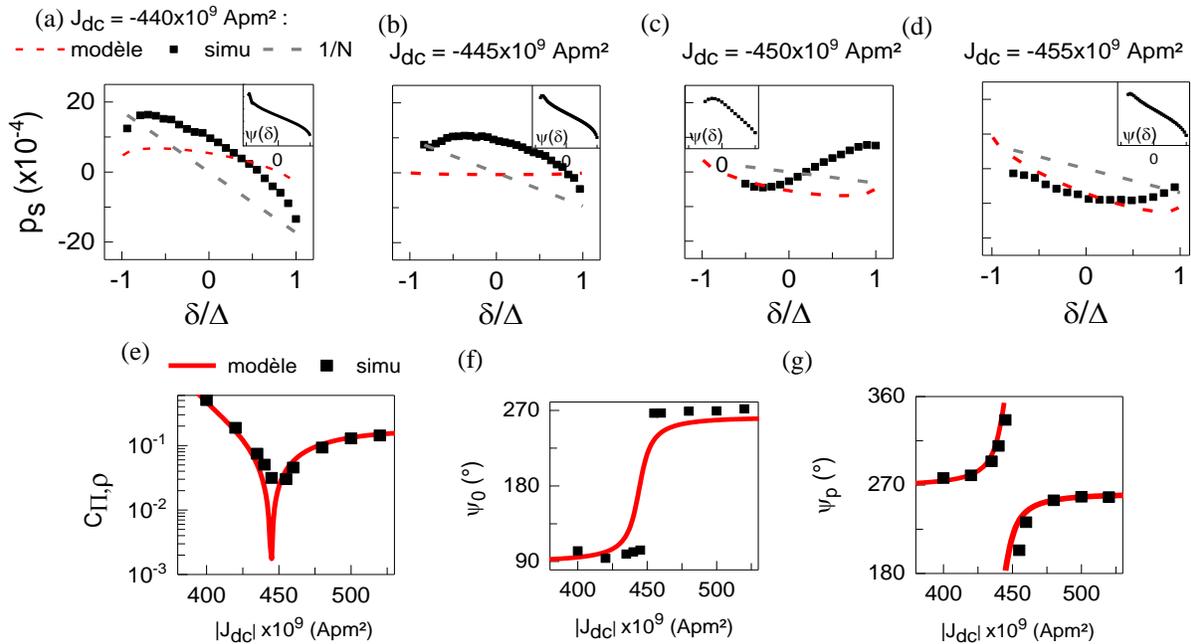


Figure 5.12. Propriétés à la transition d'ellipticité $\mathcal{D}_{y,1}$. Paramètres statiques : $H_{dc} = 400$ Oe. Amplitude du signal générateur : $\varepsilon = -0,003$. Le temps de stabilisation a été augmenté jusqu'à 700 ns. (a-d) Evolution de la solution de puissance $p_s(\delta)$ (et $\psi(\delta)$ en encart), au voisinage de la transition. (e-g) Evolution des propriétés de synchronisation : $C_{\Pi, \rho} = C_{\Pi}/\rho_i$, ψ_0 et ψ_p sur la gamme : 380×10^9 A/m² < J_{dc} < 530×10^9 A/m² ($0 < \rho_{0, norm} < 3/4$). Le point à $J_{dc} = -450 \times 10^9$ A/m² a été enlevé car il donne des valeurs aberrantes. Voir Figure 5.11 (d) pour l'étude de $C_{\Omega, \rho}$.

On regarde d'abord les solutions stationnaires, voir Figure 5.12 (a-d). A mesure que la puissance augmente, les solutions de puissances se courbent de plus en plus, jusqu'à changer de concavité après $J_{dc} = -450 \times 10^9$ A/m². C'est effectivement ce que prédit le modèle à travers la variation de ψ_p . Par contre, la transition réelle se produit plus tard que la transition prédite ($J_{dc} = -444 \times 10^9$ A/m², $p_{r, \mathcal{D}_{y,1}} = 0,22$), ce qui avait déjà été souligné lors de l'étude de $C_{\Omega, \rho}$, voir Figure 5.11 (d). Une façon de voir ce décalage est que la puissance simulée à $J_{dc} = -455 \times 10^9$ A/m² concorde mieux avec celle prédite à $J_{dc} = -450 \times 10^9$ A/m², la puissance simulée à $J_{dc} = -450 \times 10^9$ A/m² avec celle prédite à $J_{dc} = -445 \times 10^9$ A/m² et ainsi de suite ...

Dans tous les cas exceptés $J_{dc} = -450 \times 10^9 \text{ A/m}^2$, les variations des allures de la puissance s'expliquent seulement par les valeurs différentes du déphasage ψ_p , prévues par le modèle. En effet, le modèle s'applique toujours car la phase $\psi(\delta)$ présente l'allure bien symétrique en arcsin, voir encarts. En revanche en $J_{dc} = -450 \times 10^9 \text{ A/m}^2$, comme $\psi(\delta)$ n'a pas une allure correcte, le modèle ne s'applique pas. La puissance aurait dû être nulle comme pour les forçages à valeurs imaginaires et non ondulée comme on le voit. Pour ces raisons, le modèle ne peut expliquer les résultats observés en ce point précis.

L'étude des propriétés permet de voir les points d'accord et de désaccord entre le modèle et la simulation, voir Figure 5.12 (e-f). Globalement, l'ordre de grandeur de $C_{II,p}$ simulée reste correctement prédit par le modèle. Cependant, elle ne s'annule pas à la transition, comme ce qui était annoncé. Par ailleurs, l'évolution de ψ_0 est plus abrupte qu'attendue. Le déphasage change rapidement de $\pi/2$ à $3\pi/2$ sans exhiber d'états intermédiaires.

Nous voyons à l'évidence que le modèle ne décrit pas précisément les propriétés de la transition. En particulier, ce point de synchronisation à puissance nulle ne se réalise pas, ce qui veut dire que le forçage $\mathcal{D}_{y,1}$ ne devient pas imaginaire. La raison vient de la perte de validité du modèle à mesure que la puissance augmente. Les trajectoires des plans complexes b,c,d du système sont de moins en moins circulaires et donc les forçages ne sont plus exactement ceux prédits. Or cela ne peut convenir au forçage à valeurs imaginaires qui nécessite une forte exactitude pour se réaliser. Cependant, le bilan n'est pas négatif car le modèle décrit l'évolution des propriétés dans ses grandes lignes. Notamment, il explique les diminutions des sensibilités $C_{\Omega,p}$ et $C_{II,p}$ ainsi que le changement de ψ_0 . Surtout, il donne une explication satisfaisante des changements d'allures de la solution de puissance, grâce à la fonction ψ_p . Ces résultats constituent des arguments solides en faveur du modèle et de la nature elliptique des forçages.

5.3.4. Etudes complémentaires

Pour finir, on montre que le modèle développé peut aussi expliquer d'autres situations de synchronisation. En particulier, la première étude s'intéresse à la synchronisation produite par un champ, qui est orientable dans le plan de la couche ($\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y$). Ce cas a l'avantage de se décrire encore avec un forçage canonique, ce qui est très pratique. La seconde étude présente brièvement les solutions stationnaires lorsque le système vérifie $|v| \approx 1$. Dans ce cas, le ψ_p de certains forçages diffère plus visiblement de $\pi/2 + k\pi$, ce qui produit une légère courbure sur la puissance.

5.3.4.1. Synchronisation à un champ orientable dans le plan ($\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y$)

Il existe certains cas de synchronisation, en apparence plus compliqués, qui peuvent encore se traiter par l'utilisation d'un seul forçage canonique. C'est le cas notamment de la synchronisation à un champ dont l'orientation \mathbf{u}_g pivote dans le plan de la couche ($\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y$). La Figure 5.13 illustre la situation.

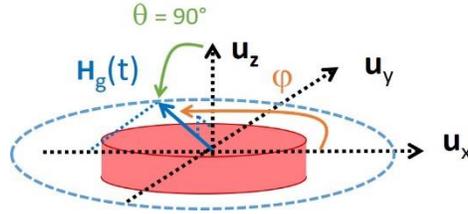


Figure 5.13 Schéma de l'expérience. Le champ $\mathbf{H}_g(t)$ est à polarisation rectiligne, d'orientation \mathbf{u}_g pivotable dans le plan de la couche ($\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y$). L'angle longitudinal φ peut varier entre : $-90^\circ < \varphi < 90^\circ$ ce qui fait varier les composantes spatiales ρ_x, ρ_y entre -1 et +1.

○ *Modélisation*

La synchronisation est provoquée par un forçage $\mathcal{F}(p, \psi)$ résultant d'un seul et unique forçage canonique. Celui activé va dépendre en général de la géométrie et de l'ordre n considéré.

Par exemple, si $n = 1$:

$$\mathcal{F}(p, \psi) = \frac{-\gamma'_0 H_g}{2} \rho_y C_{y,1}(p, \psi) \quad (5.7)$$

Tandis que si $n = 2$:

$$\mathcal{F}(p, \psi) = \frac{-\gamma'_0 H_g}{2} \rho_x C_{x,2}(p, \psi) \quad (5.8)$$

Dans ces cas, il y a bien un seul forçage canonique car il n'existe pas de forçage $C_{y,2}$ ou $C_{x,1}$.

Comme la description est simplifiée, on peut immédiatement deviner quelles vont être les propriétés de synchronisation. Prenons $n = 1$, l'amplitude de \mathcal{F} est linéaire avec la composante ρ_y , donc les sensibilités C_Ω, C_Γ de \mathcal{F} doivent varier en sinus de l'angle φ (c.à.d. linéairement avec ρ_y). Elles sont maximales quand $\varphi = \pi/2 + k\pi$ ($\rho_y = 1$), et s'annulent quand $\varphi = 0 + k\pi$ ($\rho_y = 0$). En particulier au point d'annulation, le déphasage ψ_0 effectue un saut de π car le changement de signe de la composante ρ_y ajoute π à l'orientation θ et donc d'après la formule (3.42), ajoute π aussi à ψ_0 . Comme ψ_p ne dépend pas de l'orientation, on ne s'attend pas à ce que l'allure de la puissance change. La Figure 5.14 illustre les variations attendues.

Plus généralement, ce comportement en fonction de la composante ρ_i est celui attendu pour n'importe quel forçage \mathcal{F} à un seul forçage canonique \mathcal{X}_i . Dans ce cas précis, c'est donc aussi le comportement attendu du forçage à l'ordre 2 en fonction de ρ_x (via le forçage $C_{x,2}$), ou à l'ordre 3 en fonction de ρ_y (via le forçage $C_{y,3}$). Un cas analogue se produit enfin lorsque le champ pivote dans le plan ($\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_z$).

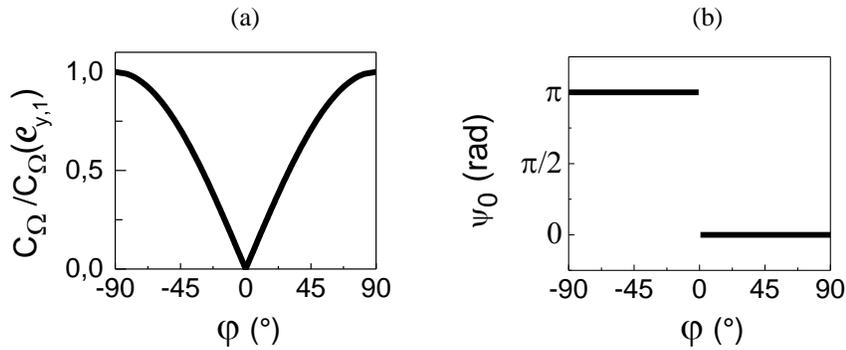


Figure 5.14 Evolution prédite des propriétés C_Ω et ψ_0 en fonction de l'angle φ à l'ordre $n = 1$. (a) Evolution du ratio $C_\Omega / C_\Omega(C_{y,1})$. La sensibilité C_Ω est maximale lorsque $\varphi = 90^\circ$ ($\rho_y = 1$) et vaut $C_\Omega = C_\Omega(C_{y,1})$. (b) Evolution de ψ_0

○ Simulation

On confronte les prédictions du modèle avec le simulateur. La Figure 5.15 résume les résultats obtenus aux ordres 1 et 2.

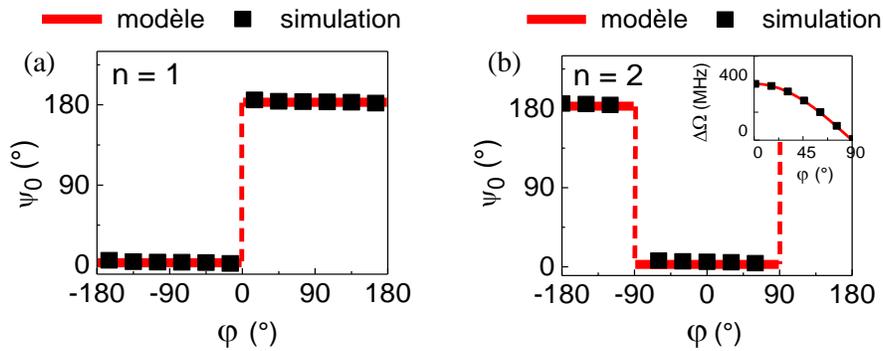


Figure 5.15. Evolution des propriétés en fonction de l'angle φ avec $H_g = 3$ Oe. Conditions du régime libre : $J_{dc} = -400 \times 10^9$ A/m², $H_{dc} = 400$ Oe ($\zeta \approx 1,07$, $p_0 = 0,0905$, $p_{0,norm} = 0,173$), $f_0 = 5,968$ GHz, $v(p) = -22$. (a) $n = 1$: $\psi_0(\varphi)$. (b) $n = 2$: $\psi_0(\varphi)$. Encart : $\Delta\Omega(\varphi)$.

Les figures montrent qu'aux ordres 1 et 2, le déphasage $\psi_0(\varphi)$ est une fonction à deux niveaux. Le déphasage change brusquement de valeur, tous les 180°, lorsque le signe de la composante ρ_i change : ρ_y pour $n = 1$ et $\rho_x = 2$. En particulier, cette variation brusque a été vue aussi par [78], dans une expérience numérique similaire. Quant à la gamme de synchronisation $\Delta\Omega$, elle varie en $\cos(\rho_i)$ dans le palier. Elle est maximale au centre, puis diminue au bord et enfin s'annule aux points de bascule de ψ_0 , voir le cas $n = 2$ à l'encart Figure 5.15 (c). Cela confirme donc que la synchronisation est produite par un seul forçage canonique, pendant toute la durée de la rotation : $C_{y,1}$ pour $n = 1$ et $C_{x,2}$ pour $n = 2$. Dans ce cas, les variations observées de ψ_0 et $\Delta\Omega$ viennent seulement des modifications des composantes ρ_x ou ρ_y .

En fait, ce type de synchronisation n'offre qu'un intérêt pratique limité pour deux raisons : 1) Pendant la rotation du signal, la synchronisation s'annule pour certains angles φ , ce qui n'est pas très intéressant. 2)

Un changement de π de ψ_0 correspond à une inversion donc facile à réaliser électroniquement (un inverseur). Une fonction plus utile serait de pouvoir déphaser ψ_0 continûment de 2π . Nous verrons au chapitre 6 que cela est possible que si on arrive à combiner deux forçages canoniques à la fois.

5.3.4.2. Solutions stationnaires dans le cas : $|\nu| \approx 1$

Dans cette seconde étude, on va chercher à modifier les paramètres de l'oscillateur de façon à obtenir le plus faible ν possible. L'objectif est de vérifier que les forçages circulaires (section 3.2.4.1) ont des angles ψ_p et ψ_v qui ne dépendent que de ν . D'abord, nous cherchons les paramètres d'oscillateur adéquats et discutons ensuite de la synchronisation.

○ Régime libre

La non linéarité dynamique ν dépend de N/Γ_p , voir (2.65). Ainsi pour diminuer ν , il faut diminuer N ou/et augmenter Γ_p . Soit le premier cas : La non linéarité statique N traduit la modification de la fréquence avec la puissance, causée par la variation du champ interne. Un moyen simple de la diminuer est d'affaiblir les champs d'origine dynamique comme les champs d'anisotropies. Pour cela, on remplace la couche libre de forme elliptique par une couche de forme circulaire de taille $100 \times 100 \times 1,5$ nm. Ainsi N est divisé environ par 2, ce qui change ν de -22 à -11 à la même puissance $p_{0,norm} = 0,2$. Maintenant le second cas : on peut augmenter Γ_p en augmentant le facteur d'amortissement α car $\Gamma_p \propto \alpha/(1+\alpha^2)$, voir (2.69). Cela entraîne la diminution de ν car alors $\nu \propto 1/\alpha$. La diminution peut être encore plus forte que celle provoquée par N car par exemple si $\alpha = 0,02$, $\nu \approx -22$ et si $\alpha = 0,06$, $\nu \approx -7$. Pour résumer, la diminution de ν passe par la diminution des champs dynamiques internes et l'augmentation de α .

Cependant, il y a des limites à respecter. L'augmentation de α accroît l'amplitude de certains termes non résonants. Notamment, il y a d'une part les termes issus du couple $\mathbf{m} \times \mathbf{m} \times \mathbf{H}_{eff}$ car ils sont proportionnels en α et d'autre part les termes du couple $\mathbf{m} \times \mathbf{m} \times \mathbf{m}_p$ à cause de l'augmentation du courant J_{dc} lié à J_{cr} . Par ailleurs, les champs internes restants (champ appliqué et champ démagnétisant de la couche) ne peuvent être diminués sans limite car le modèle ne fonctionne que si les termes résonants sont toujours largement supérieurs aux termes non résonants. Il faut donc jouer avec N et α de façon prudente, pour que le modèle soit encore valable.

En se servant de la discussion, nous avons modifié les paramètres de l'oscillateur de référence de façon à avoir le plus faible ν , voir Figure 5.16.

Le modèle perd ici plus rapidement sa validité à mesure que la puissance augmente. Par exemple, à $p_{0,norm} = 1/4$, l'erreur sur la fréquence prédite f_0 est de 2 % tandis que l'erreur était de 0,2 % dans le cas de référence. C'est pourquoi, la puissance libre de synchronisation doit être la plus faible possible ($p_{0,norm} = 0,1$). En contrepartie, on atteint l'objectif voulu en baissant la non linéarité à $|\nu| \approx 3-4$ contre $|\nu| \approx 20-15$ précédemment. C'était l'effet recherché.

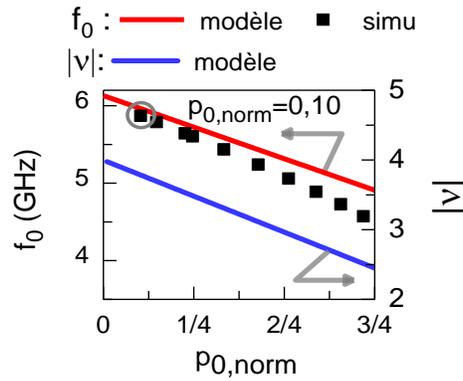


Figure 5.16. Caractéristiques libres de l'oscillateur planaire modifié. Paramètres de la structure : taille de la couche : $100 \times 100 \times 1,5$ nm ($N_{xx} = N_{yy} = 0,0235$, $N_{zz} = 0,9529$), $(\mathbf{p}, \mathbf{u}_x) = 175^\circ$, $H_{dc} = 400$ Oe, $\alpha = 0,06$, $J_{cr} = -459 \times 10^9$ A/m². Axe à gauche : fréquences prédites et simulés en fonction de $p_{0,norm}$. Axe à droite : non linéarité prédite. Le point retenu pour la synchronisation est : $p_{0,norm} = 0,1$ avec $f_0 = 5,880$ MHz, $v \approx -3,78$.

○ Régime synchronisé

Muni de cette nouvelle configuration, nous synchronisons le système à $p_{0,norm} = 0,1$, successivement avec les forçages : $C_{x,2}$ et $C_{x,2}$. La Figure 5.17 montre les solutions stationnaires obtenues.

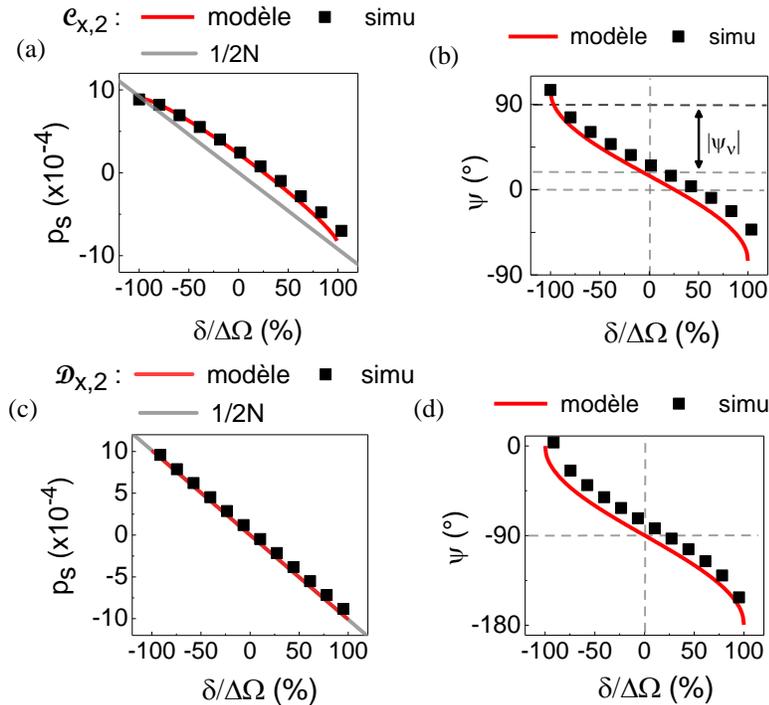


Figure 5.17. Solutions stationnaires sous faible v . Conditions du régime libre : $J_{dc} = -478,6 \times 10^9$ A/m², $H_{dc} = 400$ Oe, $p_0 = 0,0516$ ($\xi \approx 1,04$, $p_{0,norm} = 0,1$), $f_0 = 5,968$ GHz, $v = -3,78$. (a,b) Cas $C_{x,2}$ avec un champ RF : $H_g = 0,2$ Oe, $\Delta\Omega = 5,81$ MHz (simu : 6,02 MHz), $\Delta\Pi = 8,9 \times 10^{-4}$ ($8,8 \times 10^{-4}$), $\psi_p = 284^\circ$ (286°), $\psi_0 = 15^\circ$ (26°). (c,d) Cas $D_{x,2}$ avec un courant RF : $\varepsilon = 0,032$, $\Delta\Omega = 6,37$ MHz (simu : 5,92 MHz), $\Delta\Pi = 10,1 \times 10^{-4}$ ($9,5 \times 10^{-4}$), $\psi_p = 270^\circ$ (272°), $\psi_0 = 270^\circ$ (282°).

Comme le forçage $C_{x,2}$ est circulaire, les déphasages ψ_p , ψ_0 dépendent de v . Effectivement, les Figure 5.17 (a,b) montrent que c'est le cas. Le déphasage ψ_p tel que $\psi_p = \psi_v$ vaut à présent 284° , ce qui génère cette forme légèrement courbée de la solution de puissance, voir Figure 5.17 (a). Ainsi, l'allure de la puissance n'est pas toujours linéaire. De même, le déphasage ψ_0 tel que $\psi_0 = \pi/2 + \psi_v$ change aussi et vaut maintenant 12° de plus qu'au cas précédent ($\psi_0 = 3^\circ$), voir Figure 5.17 (b). Cela confirme de façon claire le lien existant entre les déphasages ψ_p , ψ_0 et v , dans le cas des forçages circulaires.

A l'opposé, comme le forçage $\mathcal{D}_{x,2}$ est rectiligne réel, les déphasages ψ_p , ψ_0 sont indépendants de v , voir section 3.4.1.3. En effet, la Figure 5.17 (c) montre que ψ_p reste égal à 270° , d'où l'allure linéaire de la puissance. De même, la Figure 5.17 (d) montre que ψ_0 reste lui aussi égal (ou voisin) de 270° . Ainsi, v n'influence pas les déphasages de la même façon, suivant le type de forçage considéré. En particulier, on voit que l'analyse de la puissance synchronisée permet de remonter au type de forçage impliqué dans la synchronisation.

Néanmoins, ces conditions restent difficiles à atteindre car diminuer v rend moins valable le modèle. C'est ce qui cause, notamment, les écarts commis entre les valeurs de ψ_0 prédites et simulées. De façon générale, nous pensons qu'il est difficile, voire impossible, d'observer des cas extrêmes de ψ_p ($\psi_p = 0 + k\pi$) en jouant uniquement sur la valeur v des oscillateurs uniformes.

5.4. Conclusion

La modèle se compare très favorablement à la simulation dans de nombreux cas de synchronisation étudiés. On peut résumer les résultats en deux points :

1) C'est aux faibles puissances libres que l'accord est le meilleur. On a pu vérifier toutes les propriétés de synchronisation de tous les forçages canoniques d'ordre 1 et 2. En particulier pour certains forçages, l'erreur peut être aussi petite que $\pm 3^\circ$ sur les déphasages ψ_0 et ψ_p , ce qui n'avait jamais été discuté dans la littérature. Cela confirme, au passage, l'existence de ψ_p comme autres propriétés de synchronisation, analogue à $\Delta\Omega$, $\Delta\Pi$ ou ψ_0 . La simulation valide aussi l'approximation des forçages à valeurs réelles.

2) Aux plus fortes puissances libres ($0 < p_{0,norm} < \frac{3}{4}$), la comparaison reste encore globalement bonne. On retrouve les bons ordres de grandeurs des sensibilités C_Ω à l'ordre 1, voire plus précisément celles de l'ordre 2. Cependant il existe des situations particulières où il fait défaut, comme au point de transition d'ellipticité rectiligne de $\mathcal{D}_{y,1}$. Dans ce cas, la simulation ne réalise pas le forçage à valeurs imaginaires et la synchronisation à puissance nulle qui en découle. C'est pourtant une prédiction importante de la théorie. Néanmoins, il permet de comprendre dans les grandes lignes l'évolution des propriétés. D'abord, les sensibilités possèdent un minimum comme attendu et ψ_0 bascule effectivement de $\pi/2$ à $3\pi/2$. Enfin, le modèle prédit correctement les variations de ψ_p au voisinage de la transition. Tous ces résultats constituent la preuve de la validité du modèle et de la nature elliptique des forçages.

Partie III :

Etude du régime synchronisé avec les
forçages à valeurs réelles

Chapitre 6. Combinaisons à deux forçages canoniques

Dans cette partie, l'idée est d'utiliser les forçages à valeurs réelles, pour aborder des sujets théoriques dont le traitement serait plus difficile dans un cadre exact. Dans ce chapitre, nous commençons par étudier le problème des combinaisons de forçages. L'intérêt des forçages canoniques est de pouvoir les combiner entre eux pour former de nouveaux forçages, sans avoir à les recalculer via le formalisme onde de spin. Nous cherchons ici une méthode systématique pour nous guider dans les possibilités de combinaisons.

La partie 6.1 expose la méthode générale pour traiter les combinaisons à deux forçages. L'introduction du déphasage global Σ des forçages va permettre de classer les combinaisons en deux catégories. La partie 6.2 présente d'abord les combinaisons telles que $\Sigma=0$ ou π . Ces forçages ont la propriété d'avoir une amplitude égale à la somme de celles des forçages combinés, ce qui est un avantage pour renforcer la synchronisation. Ensuite, la partie 6.3 présente les combinaisons telles que $\Sigma = \pi/2$ ou $3\pi/2$. Dans ce cas, l'avantage réside dans la possibilité de modifier ψ_0 à travers les composantes des forçages combinés.

Un des points forts de la méthode est de pouvoir rassembler, dans une même approche, différentes études existantes [78][83]. Elle donne de façon simple toutes les propriétés de synchronisation de n'importe quelles combinaisons et peut être étendue sans problème à 3, 4 ou N forçages. Les résultats présentés pourront servir d'aide pour la recherche des meilleurs schémas de synchronisation pour les oscillateurs uniformes.

6.1. Combinaisons générales

Le but est d'expliciter les différentes combinaisons qu'il est possible de faire à partir de deux forçages canoniques. En 6.1.1, on définit les termes employés dans ce chapitre. Ensuite en 6.1.2, on établit l'expression du forçage résultant et de ses propriétés de synchronisation.

6.1.1. Définitions

Soit l'oscillateur soumis au forçage \mathcal{F} , résultant de deux forçages canoniques $\{\mathcal{X}_{i,n}\}_{i=\{\alpha,\beta\}}$ d'ordre n , vérifiant :

$$\mathcal{F} = \rho'_\alpha \mathcal{X}_{\alpha,n}(p, \psi) + \rho'_\beta \mathcal{X}_{\beta,n}(p, \psi - \tau) \quad (6.1)$$

La clé ici est que les forçages combinés sont de même ordre. S'ils ne le sont pas, on retourne au cas d'un seul forçage canonique, comme par exemple à la section 5.3.4.1. Les paramètres τ et $\{\rho'_i\}_{i=\{\alpha,\beta\}}$ sont des paramètres de contrôle accessibles, dynamiquement, par l'expérimentateur. τ est le déphasage entre les forçages combinés et $\{\rho'_i\}_{i=\{\alpha,\beta\}}$ des composantes globales telles que :

$$\rho'_i = \frac{a_{g,i}}{2} k_i \rho_i \quad (6.2)$$

$a_{g,i}$ est l'amplitude du signal générateur, k_i la constante d'échelle et ρ_i la composante intrinsèque du forçage canonique \mathcal{X}_i . Dans la suite, on notera plus simplement la combinaison par : $(\mathcal{X}_\alpha(p, \psi), \mathcal{X}_\beta(p, \psi - \tau))$.

L'expression du forçage \mathcal{F} (6.1) peut modéliser toutes sortes de combinaisons. Une première possibilité est que le signal générateur synchronise l'oscillateur simultanément via les deux forçages ($\tau = 0$). Par exemple à la section 4.1.1.3, une densité de courant $\mathbf{J}_g(t)$ force le système simultanément à l'ordre $n = 2$ via les forçages canoniques $(C_{x,2}(p, \psi), \mathcal{D}_{x,2}(p, \psi))$, du fait de la nature conservative et dissipative de l'effet transfert de spin. Une autre possibilité est d'appliquer le même signal mais de sorte que les forçages soient retardés entre eux ($\tau \neq 0$). Un cas possible est celui d'un champ $\mathbf{H}_g(t)$ appliqué sur \mathbf{u}_y et \mathbf{u}_z à l'ordre $n = 1$ via les forçages $(C_{y,1}(p, \psi), C_{z,1}(p, \psi - \tau))$. Le retard τ peut être causé entre autre par des distances inégales entre le générateur et les lignes de champs. La possibilité la plus générale serait d'appliquer à l'oscillateur deux signaux de natures différentes issus d'un ou de deux générateurs.

En particulier, la nature des composantes globales ρ'_i est sans importance. Elles dépendent notamment des amplitudes des signaux $a_{g,i}$ et des composantes intrinsèques ρ_i . Ces dernières peuvent être de nature vectorielle, comme ρ_y ou ρ_z ou de tout autre nature comme les facteurs a_{j0} et b_{j0} des couples de transfert de spin. La seule chose demandée aux composantes globales ρ'_i est d'être différentes entre elles, peu importe ce qu'elles contiennent.

Dans la suite, on qualifiera les combinaisons de :

- « vectorielles » : si les deux forçages sont de même nature (conservatifs ou dissipatifs) mais n'agissent pas sur le même axe. Par ex : $(Ca_{y,1}(p,\psi), Ca_{z,1}(p,\psi)), (Ca_{y,1}(p,\psi), Ca_{z,1}(p,\psi \pm \pi/2))$ ou bien encore $(Da_{y,1}(p,\psi), Da_{z,1}(p,\psi))$.
- « mixtes » : si les deux forçages sont au contraire de nature différente (conservatifs et dissipatifs). Par ex : $(Ca_{y,1}(p,\psi), Da_{z,1}(p,\psi))$ ou bien $(Ca_{x,2}(p,\psi), D_{x,2}(p,\psi))$.

Le but est d'exprimer les paramètres géométriques du forçage résultant \mathcal{F} en fonction de ceux des forçages combinés. Une fois les paramètres obtenus, les propriétés de synchronisation s'expriment directement à partir des résultats du chapitre 3. Cependant, le calcul avec les forçages d'expressions générales est un peu long et en réalité inutile. Comme l'oscillateur uniforme vérifie $|v| \gg 1$, il est possible de simplifier le calcul en utilisant les forçages à valeurs réelles associés. Nous détaillons uniquement ce cas.

6.1.2. Formules de combinaison

6.1.2.1. Expression du forçage résultant

Le forçage à valeurs réelles \mathcal{F}_a associé à \mathcal{F} s'exprime par :

$$\mathcal{F}_a = \text{Re}(\mathcal{F}) = \rho'_\alpha \mathcal{X}_{a_{\alpha,n}}(p, \psi) + \rho'_\beta \mathcal{X}_{a_{\beta,n}}(p, \psi - \tau) \quad (6.3)$$

Où $\{\mathcal{X}_{a_{i,n}}\}_{i=\{\alpha, \beta\}}$ sont les forçages canoniques à valeurs réelles de $\{\mathcal{X}_{i,n}\}_{i=\{\alpha, \beta\}}$.

Or \mathcal{X}_a vaut simplement :

$$\mathcal{X}_a(p, \psi) = \text{Re}(\mathcal{X}(p, \psi)) = r(p) \cos(\psi - \theta(p)) \quad (6.4)$$

Avec $r(p) > 0$ l'amplitude et $\theta(p)$ l'orientation des forçages canoniques réels données au tableau 4.5. En particulier d'après le tableau, θ ne peut valoir que $0 + m\pi$ ou $\pi/2 + m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$.

\mathcal{F}_a se simplifie en :

$$\mathcal{F}_a = \rho'_\alpha r_\alpha \cos(\psi - \theta_\alpha) + \rho'_\beta r_\beta \cos(\psi - \theta_\beta - \Sigma) \quad (6.5)$$

Il apparaît alors Σ le déphasage total entre les deux forçages combinés égal à :

$$\Sigma = \theta_\alpha - \theta_\beta - \tau \quad (6.6)$$

L'expression devient :

Propriété 6.1 : Expression du forçage résultant : $\mathcal{F}a = r_{\alpha\beta} \cos(\psi - \theta_{\alpha\beta})$

Avec :

$$L'amplitude : r_{\alpha\beta} = \left((\rho'_{\alpha} r_{\alpha})^2 + (\rho'_{\beta} r_{\beta})^2 + 2\rho'_{\alpha} \rho'_{\beta} r_{\alpha} r_{\beta} \cos(\Sigma) \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6.7)$$

$$L'orientation : \theta_{\alpha\beta} = \frac{\theta_{\alpha} + \theta_{\beta} + \tau}{2} - \Delta\theta$$

$$Et : \Delta\theta = \arctan \left(\left(\frac{\rho'_{\beta} r_{\beta} - \rho'_{\alpha} r_{\alpha}}{\rho'_{\beta} r_{\beta} + \rho'_{\alpha} r_{\alpha}} \right) \tan \left(\frac{\Sigma}{2} \right) \right) (+\pi \text{ si } \rho'_{\beta} r_{\beta} + \rho'_{\alpha} r_{\alpha} < 0)$$

Ainsi dans le cas où les forçages à valeurs réelles s'appliquent, la somme de deux forçages se simplifie au forçage résultant (6.7). Il possède une amplitude $r_{\alpha\beta}$ et une orientation $\theta_{\alpha\beta}$ qui dépendent des paramètres des forçages combinés. Il y en a deux sortes : 1) les paramètres de contrôle de la combinaison : ρ'_i et τ , qui peuvent être changés dynamiquement par l'expérimentateur. 2) Les paramètres structurels : r_i et θ_i des forçages canoniques. Ils sont fixés par l'équation LLGS et dépendent généralement de p et \mathcal{B}/\mathcal{A} .

Le fait important est que $r_{\alpha\beta}$ et $\theta_{\alpha\beta}$ sont maintenant des fonctions plus élaborées que le cas à un unique forçage canonique, vu au chapitre 4. Cela va donc offrir de nouvelles possibilités de réglage des propriétés de synchronisation.

6.1.2.2. Propriétés de synchronisation

Les propriétés de $\mathcal{F}a$ (propriété 6.1) sont d'après la section 3.4.1.3 :

Propriété 6.2 : Propriétés de synchronisation du forçage $\mathcal{F}a$:

$$\Delta\Omega = n r_{\alpha\beta} |v|, \quad \Delta\Pi = \frac{r_{\alpha\beta} p_0}{\Gamma_p}, \quad \psi_0 = \text{sgn}(N) \frac{\pi}{2} + \theta_{\alpha\beta}, \quad \psi_p = \text{sgn}(N) \frac{\pi}{2} \quad (6.8)$$

Ainsi, $\Delta\Omega$, $\Delta\Pi$ et ψ_0 sont dictées à la fois par les paramètres structurels liés aux forçages combinés mais aussi et surtout par les paramètres de contrôle à travers $r_{\alpha\beta}$ et $\theta_{\alpha\beta}$. En particulier puisque les forçages étudiés sont restreints aux forçages à valeurs réelles, le déphasage ψ_p ne peut valoir que $\pm\pi/2$, indépendamment de $r_{\alpha\beta}$ ou $\theta_{\alpha\beta}$. En réalité, le traitement des combinaisons avec les forçages exacts aurait aussi rendu dépendant ψ_p mais les calculs deviennent plus compliqués. Nous verrons ici que l'approximation est largement suffisante pour décrire toutes les combinaisons de notre oscillateur uniforme.

Les formules (propriété 6.1 et propriété 6.2) possèdent au moins deux intérêts pratiques : En premier, il devient possible de changer dynamiquement les gammes $\Delta\Omega$, $\Delta\Pi$ à travers les composantes ρ'_i des

forçages. Plus encore suivant la valeur du déphasage total Σ (c.à.d. τ), les gammes $\Delta\Omega$, $\Delta\Pi$ peuvent être supérieures ou inférieures à la gamme maximale des deux forçages combinés. L'effet est maximal si Σ vérifie $\Sigma = 0 + m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$. En particulier, l'effet amplificateur est très intéressant pour renforcer significativement la valeur des gammes. Ensuite, le second intérêt est de pouvoir modifier dynamiquement le déphasage ψ_0 . En effet suivant les valeurs des composantes ρ'_i , ψ_0 peut varier continûment entre 0 et 2π . Néanmoins suivant la valeur de Σ , la dépendance avec les paramètres dynamiques peut être plus ou moins compliquée. On voit que la dépendance est la plus simple seulement pour les combinaisons de type : $\Sigma = \pi/2 + m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$. En raison de leurs fonctionnalités, nous allons nous intéresser plus en détail à ces deux types de combinaisons.

6.2. Combinaisons à $\Sigma = 0 + m\pi$

L'intérêt de cette combinaison est de pouvoir renforcer ou diminuer à l'extrême l'amplitude du forçage résultant. En 6.2.1, on commence par expliciter les paramètres $r_{\alpha\beta}$ et $\theta_{\alpha\beta}$. En 6.2.2, on applique les résultats à la combinaison vectorielle ($Ca_{y,1}(p, \psi)$, $Ca_{z,1}(p, \psi \pm \pi/2)$). La section 6.2.3 termine par discuter d'autres cas possibles et d'éventuelles applications.

6.2.1. Expressions de $r_{\alpha\beta}$ et $\theta_{\alpha\beta}$

Lorsque $\Sigma = 0 + m\pi$, l'amplitude $r_{\alpha\beta}$ du forçage résultant devient :

$$r_{\alpha\beta} = \left| \rho'_\alpha r_\alpha + s \rho'_\beta r_\beta \right|, \quad s = \begin{cases} +1 & \text{si } \Sigma = 0 \\ -1 & \text{si } \Sigma = \pi \end{cases} \quad (6.9)$$

$r_{\alpha\beta}$ dépend toujours ici des composantes ρ'_i et du déphasage Σ mais de façon plus simple. Par exemple, si les composantes ρ'_i sont égales, $r_{\alpha\beta}$ atteint son extremum qui peut être : la somme des amplitudes des forçages combinés ou la soustraction. Il en va donc de même pour les gammes $\Delta\Omega$, $\Delta\Pi$ en vertu de la propriété 6.2. L'emploi de telles combinaisons peut être un moyen simple pour augmenter la sensibilité de synchronisation du système à peu de frais.

En revanche, l'orientation $\theta_{\alpha\beta}$ est constante :

$$\theta_{\alpha\beta} = \frac{\theta_\alpha + \theta_\beta + \tau}{2} - \Delta\theta, \quad \Delta\theta = \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} \quad (6.10)$$

Où la valeur de $\Delta\theta$ dépend de la limite $\pm\infty$ de l'argument de arctan de la propriété 6.1.

Dans ce cas, ces combinaisons rendent impossible la modification ou le contrôle du déphasage additionnel ψ_0 . Cette perte de fonctionnalité sur ψ_0 est le compromis à faire pour obtenir la flexibilité sur l'amplitude.

6.2.2. Etude de cas

6.2.2.1. Propriétés de synchronisation

Pour la réaliser, un moyen concret est de synchroniser l'oscillateur à l'ordre $n = 1$, à un champ générateur $\mathbf{H}_g(t)$ rotatif dans le plan $(\mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z)$, voir Figure 6.1.

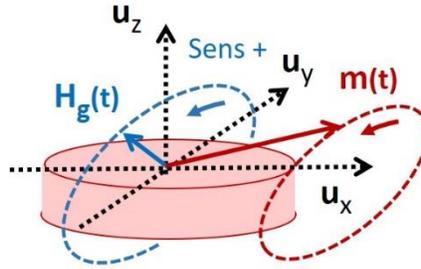


Figure 6.1. Exemple d'une combinaison à $\Sigma = 0 + \pi$. L'oscillateur est synchronisé à un champ $\mathbf{H}_g(t)$ polarisé circulairement dans le plan $(\mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z)$. $\mathbf{H}_g(t)$ peut tourner dans le même sens que l'aimantation (sens +) ou dans le sens contraire (sens -).

Dans cette situation, l'amplitude du champ H_g est constante dans le temps mais pas ses composantes spatiales. Il y a deux sens possibles de rotation : Le sens est dit positif (grandeurs notées +) si le champ tourne dans le même sens que l'aimantation. Les composantes valent dans ce cas : $\rho_y = \cos(t)$, $\rho_z = \sin(t)$ et $\tau = -\pi/2$. Le forçage résultant est noté $\mathcal{F}a^+$. A l'inverse, le sens est dit négatif (grandeurs notées -) si le champ tourne dans le sens contraire. Dans ce cas : $\rho_y = \cos(t)$, $\rho_z = -\sin(t)$, $\tau = +\pi/2$ et le forçage est noté $\mathcal{F}a^-$.

On cherche à exprimer les deux forçages $\mathcal{F}a^+$, $\mathcal{F}a^-$. En appliquant la formule (6.3) aux forçages canoniques $\mathcal{C}a_{y,1}$ et $\mathcal{C}a_{z,1}$, il vient :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}a^+ &= -\frac{\gamma'_0 H_g}{2} \left(\mathcal{C}a_{y,1}(p, \psi) + \mathcal{C}a_{z,1}(p, \psi + \pi/2) \right) \\ \mathcal{F}a^- &= -\frac{\gamma'_0 H_g}{2} \left(\mathcal{C}a_{y,1}(p, \psi) + \mathcal{C}a_{z,1}(p, \psi - \pi/2) \right) \end{aligned} \quad (6.11)$$

Soit les déphasages totaux :

$$\Sigma^+ = \theta_{cay1} - \theta_{caz1} - \tau = 0, \quad \Sigma^- = -\pi \quad (6.12)$$

Ainsi grâce à la propriété 6.1, les paramètres des forçages résultants valent :

$$\begin{aligned} r^+ &= +\frac{\gamma'_0 H_g}{2} |r_{cay1} + r_{caz1}|, \quad \theta^+ = \frac{\theta_{cay1} + \theta_{caz1} + \tau}{2} + \pi = \frac{3\pi}{2} \\ r^- &= +\frac{\gamma'_0 H_g}{2} |r_{cay1} - r_{caz1}|, \quad \theta^- = \frac{3\pi}{2} \end{aligned} \quad (6.13)$$

Avec r_{cay1} , θ_{caz1} données en (4.29) et r_{caz1} , θ_{caz1} en (4.30).

Puis grâce à la propriété 6.2, les propriétés de synchronisation deviennent :

$$\begin{aligned} \Delta\Omega^+ &= r^+|v| = \Delta\Omega_{cay1} + \Delta\Omega_{caz1}, \quad \Delta\Pi^+ = r^+ \frac{p_0}{\Gamma_p} = \Delta\Pi_{cay1} + \Delta\Pi_{caz1}, \quad \psi_0^+ = \pi \\ \Delta\Omega^- &= r^-|v| = \Delta\Omega_{cay1} - \Delta\Omega_{caz1}, \quad \Delta\Pi^- = r^- \frac{p_0}{\Gamma_p} = \Delta\Pi_{cay1} - \Delta\Pi_{caz1}, \quad \psi_0^- = \pi \end{aligned} \quad (6.14)$$

Le modèle prédit que les gammes résultantes $\Delta\Omega^\pm$, $\Delta\Pi^\pm$ sont les sommes ou différences des gammes combinées $\Delta\Omega_{cay1}$, $\Delta\Omega_{caz1}$ et $\Delta\Pi_{cay1}$, $\Delta\Pi_{caz1}$ suivant le sens de rotation du champ.

La Figure 6.2 compare les résultats du modèle avec la simulation, dans le cas de l'oscillateur planaire.

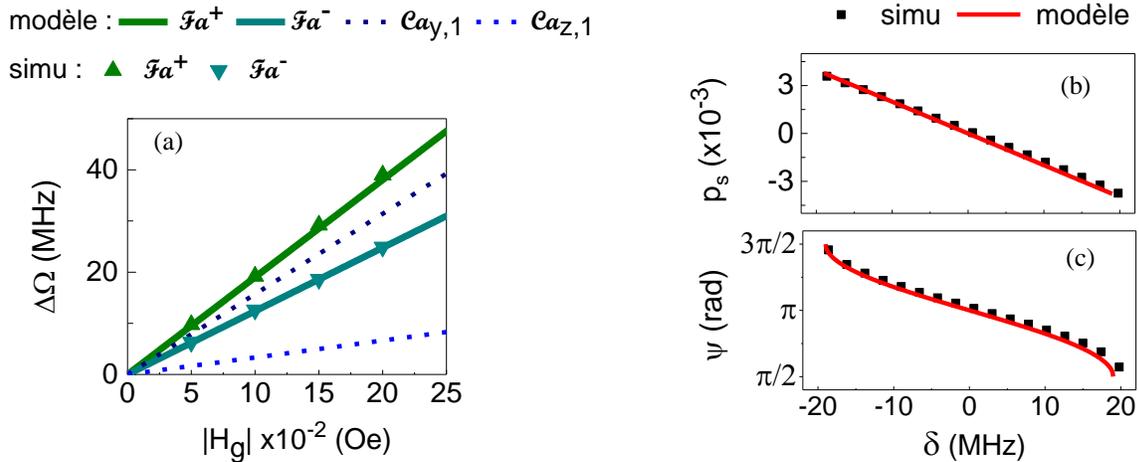


Figure 6.2. Propriétés de synchronisations des forçages Fa^+ , Fa^- appliquées à l'oscillateur de référence ($B/A = -0,91$). Conditions du régime libre : $J_{dc} = -400 \times 10^9$ A/m² ($p_0 \approx 0,093$, $p_{0, norm} \approx 0,178$, $\zeta \approx 1,07$), $H_{dc} = 400$ Oe, $f_0 = 5,968$ GHz. (a) Evolution de $\Delta\Omega$ en fonction de l'amplitude champ H_g . $C_{\Omega^+} = 190$ MHz/Oe, $C_{\Omega^-} = 124$ MHz/Oe, $C_{\Omega, cay1} = 157$ MHz/Oe, $C_{\Omega, caz1} = 33$ MHz/Oe. (b) Solutions stationnaires de Fa^+ pour $H_g = 0,1$ Oe.

Pour toutes les figures (a,b,c), les prédictions du modèle concordent bien avec la simulation. D'abord, la figure (a) montre que la sensibilité de synchronisation $C_{\Omega^+} = \Delta\Omega^+/H_g$ du forçage Fa^+ est bien supérieure à la sensibilité maximale $C_{\Omega, cay1} = \max(C_{\Omega, cay1}, C_{\Omega, caz1})$ des deux forçages combinés pris séparément. A l'inverse, la sensibilité C_{Ω^-} de Fa^- est comme prévu inférieure à $C_{\Omega, cay1}$ mais reste supérieure à $C_{\Omega, caz1}$. A côté, les figures (b,c) montrent les solutions stationnaires de Fa^+ . Le bon accord signifie que toutes les propriétés de synchronisation sont correctement prédites. En particulier, la puissance synchronisée est linéaire avec δ , ce qui justifie le choix des forçages à valeurs réelles dans notre étude. Ce bon accord observé vient de la faible valeur du champ injecté ($H_g = 0,1$ Oe), qui peut se vérifier en remarquant la symétrie de la gamme de synchronisation.

6.2.2.2. Evolution des propriétés avec \mathcal{B}/\mathcal{A}

On peut introduire le taux d'augmentation relative ΔC_{Ω}^+ , de C_{Ω}^+ par rapport à $C_{\Omega, \text{cay1}} = \max(C_{\Omega, \text{cay1}}, C_{\Omega, \text{caz1}})$:

$$\Delta C_{\Omega}^+ = \frac{C_{\Omega}^+ - C_{\Omega, \text{cay1}}}{C_{\Omega, \text{cay1}}} \quad (6.15)$$

Dans le cas où $\mathcal{B}/\mathcal{A} \leq 0$, les amplitudes vérifient $r_{\text{caz1}} \leq r_{\text{cay1}}$ et ΔC_{Ω}^+ peut s'exprimer par :

$$\Delta C_{\Omega}^+ \left(\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}} \right) = \frac{r_{\text{caz1}} \left(\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}} \right)}{r_{\text{cay1}} \left(\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}} \right)} = \frac{\sqrt{1 + g \left(\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}} \right)} + \text{Sign} \left(\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}} \right) \sqrt{1 - g \left(\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}} \right)}}{\sqrt{1 + g \left(\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}} \right)} - \text{Sign} \left(\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}} \right) \sqrt{1 - g \left(\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}} \right)}} \quad (6.16)$$

ΔC_{Ω}^+ a l'avantage de ne dépendre que de \mathcal{B}/\mathcal{A} . Ici en $\mathcal{B}/\mathcal{A} = -0,91$, l'augmentation vaut $\Delta C_{\Omega}^+ \approx 21\%$.

Les fonctions importantes sont les amplitudes $r_{\text{caz1}}(p, \mathcal{B}/\mathcal{A})$ et $r_{\text{cay1}}(p, \mathcal{B}/\mathcal{A})$ car elles donnent les gammes résultantes $\Delta\Omega^{\pm}$, $\Delta\Pi^{\pm}$ et le taux ΔC_{Ω}^+ . Or on connaît leurs expressions analytiques, donc on peut les étudier en fonction de \mathcal{B}/\mathcal{A} , voir Figure 6.3.

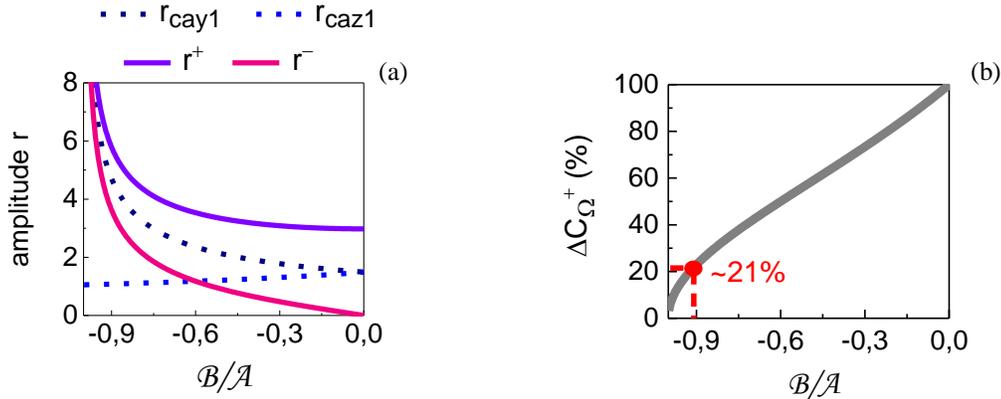


Figure 6.3. (a) Evolution théorique des amplitudes canoniques r_{cay1} , r_{caz1} , de la somme $r^+ = r_{\text{caz1}} + r_{\text{cay1}}$ et la différence $r^- = r_{\text{caz1}} - r_{\text{cay1}}$ en fonction de $\mathcal{B}/\mathcal{A} \in [-1,0]$ à $J_{\text{dc}} = -400 \times 10^9 \text{ A/m}^2$ ($p_0 \approx 0,093$, $p_{0, \text{norm}} \approx 0,178$). (b) Evolution du taux ΔC_{Ω}^+ . Le point d'opération $\mathcal{B}/\mathcal{A} = -0,91$ de la figure précédente est noté par le point rouge. Pour des raisons de symétrie, toutes les fonctions sont paires sur $\mathcal{B}/\mathcal{A} \in [-1,+1]$.

D'après la figure (a), les amplitudes r_{cay1} , r_{caz1} sont égales en $\mathcal{B}/\mathcal{A} = 0$ (oscillateur à trajectoire circulaire), car la symétrie des oscillations ne génère pas de préférence entre l'axe \mathbf{u}_y ou \mathbf{u}_z . Par contre lorsque $\mathcal{B}/\mathcal{A} \rightarrow -1$ (oscillateur à trajectoire planaire), r_{cay1} diverge à l'infini tandis que r_{caz1} tend vers une constante. Ainsi la somme r^+ diverge aussi, ce qui est intéressant car elle représente l'amplitude théorique maximale de la combinaison. Ainsi, si l'on cherche à maximiser la synchronisation, le modèle dit qu'il faut plutôt opérer cette combinaison vers $\mathcal{B}/\mathcal{A} \approx -1$ comme pour les oscillateurs planaires.

A côté, la figure (b) montre l'évolution du taux ΔC_{Ω}^+ . Son évolution se comprend bien si l'on reprend les évolutions de $r_{\text{cay}1}$, $r_{\text{caz}1}$ de la figure (a). D'abord quand $\mathcal{B}/\mathcal{A} \rightarrow 0$, le taux ΔC_{Ω}^+ est maximal ($\Delta C_{\Omega}^+ = 100\%$), car les amplitudes $r_{\text{cay}1}$ et $r_{\text{caz}1}$ sont égales. Ainsi l'amplitude somme r^+ est deux fois plus grande que $r_{\text{cay}1}$ ou $r_{\text{caz}1}$, ce qui donne ce taux de 100%. En particulier, c'est en $\mathcal{B}/\mathcal{A} = 0$ que l'augmentation de la synchronisation est la plus significative. A l'inverse quand $\mathcal{B}/\mathcal{A} \rightarrow -1$, ΔC_{Ω}^+ diminue, voire s'annule à la limite. Comme l'amplitude $r_{\text{cay}1}$ diverge, l'amplitude r^+ diverge aussi. Dans ce cas, l'augmentation est faible, voire nulle. En $\mathcal{B}/\mathcal{A} = -0,91$, l'effet d'augmentation est réduit car \mathcal{B}/\mathcal{A} est proche de -1 ($\Delta C_{\Omega}^+ \approx 21\%$).

Le cas du champ rotatif dans le plan (\mathbf{u}_y , \mathbf{u}_z) à l'ordre 1 n'est pas le seul et unique cas à réaliser la combinaison $\Sigma = 0 + m\pi$. La section suivante discute plus largement les autres cas possibles et de leurs potentielles applications.

6.2.3. Discussions

6.2.3.1. Autres cas possibles

L'avantage principal de la combinaison $\Sigma = 0 + m\pi$ est celui de pouvoir renforcer la synchronisation. La solution a l'avantage de ne pas modifier l'oscillateur et ses paramètres mais simplement la manière d'injecter le signal. Grâce aux expressions des forçages canoniques tableau 4.5, on peut envisager beaucoup d'autres cas d'applications, autre que celui du champ rotatif du plan (\mathbf{u}_y , \mathbf{u}_z) à l'ordre 1 (cas : $Ca_{y,1}(\mathbf{p}, \psi)$, $Ca_{z,1}(\mathbf{p}, \psi \pm \pi/2)$). Par exemple, le même champ rotatif peut aussi synchroniser à l'ordre 3 (cas : $Ca_{y,3}(\mathbf{p}, \psi)$, $Ca_{z,3}(\mathbf{p}, \psi \pm \pi/2)$). On peut aussi envisager l'injection d'un signal de type courant uniquement par les forçages dissipatifs d'ordre 1 (cas : $Da_{y,1}(\mathbf{p}, \psi)$, $Da_{z,1}(\mathbf{p}, \psi \pm \pi/2)$) ou d'ordre 3 (cas : $Da_{y,3}(\mathbf{p}, \psi)$, $Da_{z,3}(\mathbf{p}, \psi \pm \pi/2)$). C'est comme si c'était le polariseur qui tournait dans le plan (\mathbf{u}_y , \mathbf{u}_z), bien que ces dernières soient plus théoriques que pratiques.

Il faut rappeler cependant que tous les champs rotatifs de l'espace ne génèrent pas nécessairement la combinaison $\Sigma = 0 + m\pi$. En effet, il faut veiller à ce que les forçages combinés soient aussi du même ordre. Par exemple, le champ rotatif dans le plan (\mathbf{u}_x , \mathbf{u}_y) ou (\mathbf{u}_x , \mathbf{u}_z) à l'ordre 1 n'est pas un cas de combinaison à deux forçages car l'axe \mathbf{u}_x ne génère pas de forçage à l'ordre 1. Ces cas retournent donc dans la catégorie des forçages résultants d'un seul forçage canonique comme par exemple à la section 5.3.4.1. En l'occurrence dans ces deux cas, les forçages activés auraient été $Ca_{y,1}(\mathbf{p}, \psi)$ ou $Ca_{z,1}(\mathbf{p}, \psi)$. A l'ordre 2, le champ rotatif aurait activé à l'inverse le forçage canonique $Ca_{x,2}(\mathbf{p}, \psi)$ car les axes \mathbf{u}_y , \mathbf{u}_z n'en génèrent pas à cet ordre. La situation peut se résumer de la façon suivante : Aux ordres impairs, il faut plutôt prendre en compte la projection du champ sur le plan (\mathbf{u}_y , \mathbf{u}_z) tandis qu'à l'ordre pair c'est la projection sur l'axe \mathbf{u}_x qui compte. Un raisonnement similaire s'applique de la même façon aux forçages dissipatifs.

Enfin, il est possible de réaliser la combinaison $\Sigma = 0 + m\pi$ aussi avec des cas mixtes, c'est-à-dire des forçages combinés conservatifs et dissipatifs. Dans ce cas comme dans les autres, la gamme de synchronisation peut être la somme ou la différence des gammes combinées. C'est cependant moins intuitif à imaginer qu'un champ ou un polariseur rotatif. Par exemple pour l'oscillateur planaire ($\mathcal{B}/\mathcal{A} = -0,91$), ce sont les forçages $\mathcal{C}a_{y,1}(\rho, \psi)$ et $\mathcal{D}a_{y,1}(\rho, \psi)$ qui ont les meilleures amplitudes r_{cay1} , r_{dz1} , pour des raisons de symétrie de la trajectoire de l'oscillateur, voir section 4.2.1.2. Cette combinaison ($\mathcal{C}a_{y,1}(\rho, \psi)$, $\mathcal{D}a_{z,1}(\rho, \psi)$) peut donc offrir la meilleure synchronisation possible. Par ailleurs, l'utilisation de ces cas mixtes pourrait permettre de vérifier expérimentalement, plus simplement, le modèle. Par exemple, on considère la synchronisation d'ordre 1 par les forçages suivants ($\mathcal{C}a_{y,1}(\rho, \psi)$, $\mathcal{D}a_{y,1}(\rho, \psi)$). La réalisation se fait en injectant le signal générateur simultanément dans le système : 1) via $\mathbf{H}_g(t)$ sur \mathbf{u}_y avec une ligne de champ et 2) via $\mathbf{J}_g(t)$ à travers le polariseur orienté dans $(\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y)$. Si l'expérimentateur contrôle le déphasage τ sur l'une des voies, il devrait voir une augmentation ou une diminution de Δf lors du balayage de τ sur 2π . Le maximum se produirait lorsque $\Sigma = \pi$ et le minimum lorsque $\Sigma = 0$. Cette expérience a l'avantage d'être un peu plus simple à réaliser que celle du champ rotatif, car cette dernière nécessite la réalisation de deux lignes de champ : une pour réaliser le champ sur \mathbf{u}_y et l'autre pour le champ sur \mathbf{u}_z .

6.2.3.2. Application à la synchronisation mutuelle

Le cas du champ rotatif est intéressant pour d'autres raisons. En effet, c'est précisément le type de champ qui est émis par le rayonnement dipolaire d'un oscillateur voisin. On voit donc qu'il faut faire attention au placement des oscillateurs entre eux, car le sens de rotation des champ émis peut soit renforcer ou diminuer la synchronisation. Cette dépendance de la synchronisation avec l'état magnétique des oscillateurs est connue aussi dans le cas des oscillateurs vortex [94]. Dans cet article, les auteurs montrent, expérimentalement et analytiquement, que la synchronisation de deux oscillateurs vortex par leur champ dipolaire dépend de la direction relative de la polarité des cœurs. S'ils sont parallèles, la synchronisation est atténuée tandis que s'ils sont antiparallèles, elle est renforcée.

○ En résumé

Les combinaisons de forçage $\Sigma = 0 + m\pi$ sont intéressantes car elles permettent de renforcer la synchronisation. Le cas typique, étudié, est celui du champ rotatif dans le plan $(\mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z)$ à l'ordre $n = 1$. Dans ce cas, l'amplitude résultante du forçage r et les gammes $\Delta\Omega$, $\Delta\Pi$ prennent deux valeurs distinctes suivant que $\Sigma = 0$ ou π , c'est à dire suivant le sens de rotation du champ. En particulier, l'efficacité de la synchronisation est maximale si le champ tourne dans le même sens que l'aimantation, c'est-à-dire qu'il « l'accompagne » pendant sa rotation. Les calculs développés pourront servir de guide aux choix des meilleurs schémas d'injection ou de synchronisations mutuelles entre oscillateurs.

6.3. Combinaisons à $\Sigma = \pi/2 + m\pi$

Le second type de combinaison présente l'avantage de faire dépendre, de façon simple, $\theta_{\alpha\beta}$ (et donc ψ_0) avec les composantes ρ'_i des forçages. Ici, les cas qui vont nous intéresser sont ceux où un signal générateur unique s'applique simultanément aux forçages ($\tau = 0$). En 6.3.1, on commence par étudier les propriétés de synchronisation. En 6.3.3, on examine deux cas concrets et enfin en 6.3.3, on discute les éventuelles applications.

6.3.1. Formules de combinaison

6.3.1.1. Expressions de $r_{\alpha\beta}$ et de $\theta_{\alpha\beta}$

Lorsque $\Sigma = \pi/2 + m\pi$, l'amplitude $r_{\alpha\beta}$ devient la moyenne quadratique des $\rho'_i r_i$:

$$r_{\alpha\beta} = \sqrt{(\rho'_\alpha r_\alpha)^2 + (\rho'_\beta r_\beta)^2} \quad (6.17)$$

Dans ce cas, $r_{\alpha\beta}$ dépend de ρ'_i mais plus de Σ .

L'orientation $\theta_{\alpha\beta}$ change aussi à travers l'expression de $\Delta\theta$:

$$\Delta\theta = s \left(\frac{\pi}{4} - \arctan\left(\frac{\rho'_\alpha r_\alpha}{\rho'_\beta r_\beta}\right) + (\pi \text{ si } \rho'_\beta r_\beta < 0) \right), \quad s = \begin{cases} +1 & \text{si } \Sigma = \frac{\pi}{2} \\ -1 & \text{si } \Sigma = \frac{3\pi}{2} \end{cases} \quad (6.18)$$

$\theta_{\alpha\beta}$ peut donc être modifiée entre 0 et 2π , en modifiant les composantes ρ'_i à déphasage Σ fixé. En réalité, cette fonctionnalité existe dans tous les cas où $\Sigma \neq 0 + m\pi$. Seulement ici, la situation est préférable parce que $\theta_{\alpha\beta}$ et $r_{\alpha\beta}$ ont une dépendance plus simple avec Σ .

6.3.1.2. Propriétés de synchronisation

Les propriétés de synchronisation s'obtiennent grâce à la propriété 6.2. Néanmoins pour n'étudier que l'influence de ρ'_i sur les propriétés, on va introduire la fonction normalisée D ($0 < D < 1$) et le déphasage supplémentaire $\Delta\psi$ ($0 < \Delta\psi < 2\pi$) tel que :

$$D = \frac{|\rho'_\beta \Delta\Omega_\beta|}{\max(\Delta\Omega_\alpha, \Delta\Omega_\beta)} \sqrt{1 + \frac{(\rho'_\alpha r_\alpha)^2}{(\rho'_\beta r_\beta)^2}}, \quad \Delta\psi = \arctan\left(\frac{\rho'_\alpha r_\alpha}{\rho'_\beta r_\beta}\right) + (\pi \text{ si } \rho'_\beta r_\beta < 0) \quad (6.19)$$

Où $\Delta\Omega_{\alpha,\beta}$ sont les gammes de synchronisation des forçages $\chi_{\alpha,\beta}$. En particulier, le ratio r_α/r_β peut s'exprimer aussi comme : $\frac{r_\alpha}{r_\beta} = \frac{\Delta\Omega_\alpha}{\Delta\Omega_\beta} = \frac{\Delta\Pi_\alpha}{\Delta\Pi_\beta}$ (propriétés des forçages à valeurs réelles).

Avec ces fonctions, les propriétés : $\Delta\Omega$, $\Delta\Pi$ et ψ_0 s'expriment simplement par :

$$\begin{aligned} \Delta\Omega &= m a x(\Delta\Omega_\alpha, \Delta\Omega_\beta) D, & \Delta\Pi &= m a x(\Delta\Pi_\alpha, \Delta\Pi_\beta) D, \\ \psi_0 &= \frac{1}{2}(\text{sgn}(N)\pi + \theta_\alpha + \theta_\beta) \pm \left(\frac{\pi}{4} - \Delta\psi\right) \end{aligned} \quad (6.20)$$

Globalement, on voit qu'elles sont reliées au ratio fondamental $\rho'_\alpha r_\alpha / \rho'_\beta r_\beta$ à travers les fonctions D et $\Delta\psi$. Ainsi, il est possible de régler ψ_0 entre 0 et 2π , en ajustant les composantes ρ'_i . En réalité, la variation des propriétés avec les composantes est plus ou moins régulière suivant la valeur du ratio r_α/r_β . A titre d'exemple, la section suivante montre les différentes allures possibles des fonctions normalisées D , $\Delta\psi$ suivant r_α/r_β .

6.3.1.3. Evolutions de D et $\Delta\psi$

La Figure 6.4 montre les évolutions de D et $\Delta\psi$ en fonction des composantes ρ'_α , ρ'_β , selon plusieurs ratios r_α/r_β fixés. Pour l'étude, on a introduit l'angle : $\kappa = \arctan(\rho'_\beta/\rho'_\alpha)$.

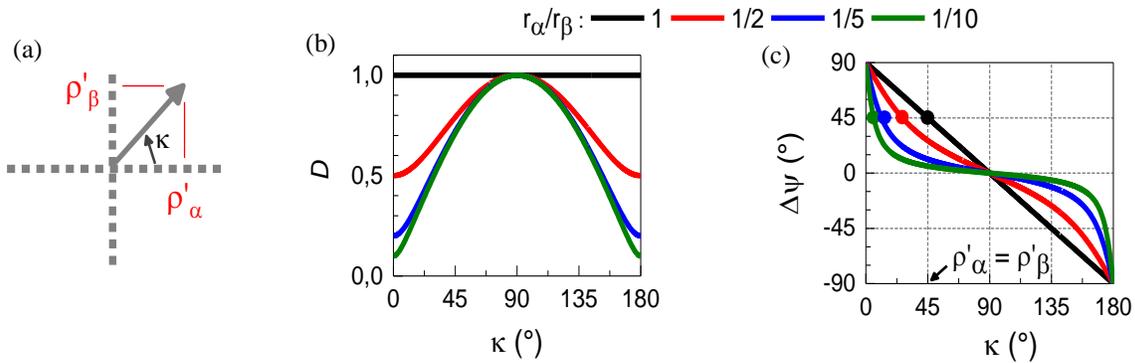


Figure 6.4. Evolution des propriétés de synchronisation à r_α/r_β fixés en fonction de κ . (a) Schéma de convention avec $\kappa = \arctan(\rho'_\beta/\rho'_\alpha)$, $\rho'_\alpha = \cos(\kappa)$, $\rho'_\beta = \sin(\kappa)$ et $r_\beta \geq r_\alpha$. (b) Fonction normalisée $D(\kappa)$. (c) Fonction $\Delta\psi(\kappa)$.

Le cas le plus simple est lorsque le ratio $r_\alpha/r_\beta = 1$. Dans ce cas, la fonction D est indépendante des composantes ρ'_α , ρ'_β des forçages, tout comme les gammes $\Delta\Omega$ et $\Delta\Pi$, voir Figure 6.4 (a). Le déphasage $\Delta\psi$ varie linéairement avec κ de pente -1, voir Figure 6.4 (b). En revanche dans le cas où $r_\alpha/r_\beta \neq 1$, les fonctions D et $\Delta\psi$ se mettent à osciller à mesure que le ratio r_α/r_β diffère de 1. Les gammes $\Delta\Omega$ et $\Delta\Pi$ varient dans le même rapport que D , bornées par leurs valeurs extrêmes : $\Delta\Omega_\alpha$ à $\kappa = 0^\circ$ ($\rho_\alpha = 1$, $\rho_\beta = 0$) et $\Delta\Omega_\beta$ à $\kappa = 90^\circ$ ($\rho_\alpha = 0$, $\rho_\beta = 1$). Quant au déphasage $\Delta\psi$, il n'est plus linéaire. Il alterne des variations rapides au voisinage de $\kappa = 0^\circ$, là où $D(\kappa)$ est minimale et des variations lentes au voisinage de $\kappa = 90^\circ$, là

où $D(\kappa)$ est maximale. Ainsi pour les ratios r_α/r_β très différents de 1, les propriétés de synchronisation varient fortement.

La dépendance des propriétés avec ρ'_a, ρ'_b est résumée dans le ratio r_α/r_β . Ce ratio indique la variation d'amplitude maximale que subit D et les gammes $\Delta\Omega$ et $\Delta\Pi$. Par exemple si $r_\alpha/r_\beta = 1/10$, cela veut dire que l'amplitude maximale de D entre les deux extrêmes vaut 10. On peut, à partir de r_α/r_β , définir le ratio critique des composantes $(\rho'_\beta/\rho'_\alpha)_{crit}$ pour lequel la variation du déphasage vaut juste $\Delta\psi = \pm\pi/4$:

$$\left(\frac{\rho'_\beta}{\rho'_\alpha}\right)_{crit} = \frac{r_\alpha}{r_\beta} \quad (6.21)$$

Autrement dit si $r_\alpha/r_\beta = 1/10$, $(\rho'_\beta/\rho'_\alpha)_{crit} = 1/10$ (équivalent à $\kappa \approx 6^\circ$) et pour ces valeurs de composantes³⁷ $\Delta\psi = \pm\pi/4$. En pratique, le ratio r_α/r_β est utile pour avoir rapidement l'ordre de grandeur de ρ'_a/ρ'_b qui fait varier sensiblement $\Delta\psi$. En quelque sorte, il permet d'intuiter les variations des propriétés en fonction des composantes.

Enfin, le modèle fournit plusieurs moyens d'accéder à la valeur des ratios ρ'_a/ρ'_b ou r_α/r_β . Par exemple si la configuration expérimentale le permet, on voit qu'il suffit de mesurer $\Delta\Omega_\alpha$ et $\Delta\Omega_\beta$ (c.à.d. $\Delta\Omega$ dans les deux cas extrêmes de composantes) pour accéder à r_α/r_β car les forçages à valeurs réelles vérifient $r_\alpha/r_\beta = \Delta\Omega_\alpha/\Delta\Omega_\beta$. Cependant, cela peut être difficile en pratique car la température ou le régime hystérique de la synchronisation empêchent la mesure exacte de $\Delta\Omega$. Pour cela, il est préférable d'utiliser la mesure de ψ_0 qui, elle, est toujours possible car le déphasage additionnel est par définition l'endroit où la synchronisation est la plus forte ($\delta = 0$). Ainsi grâce à ψ_0 , le modèle donne accès à ρ_α/ρ_β si r_α/r_β est connu ou l'inverse r_α/r_β si ρ_α/ρ_β est connu. ψ_0 peut donc donner accès aux propriétés internes du système.

6.3.2. Etude de cas

On illustre le modèle en étudiant deux cas de synchronisation de l'oscillateur planaire. La section 6.3.2.1 commence par une combinaison vectorielle $(Ca_{y,1}(\rho,\psi), Ca_{z,1}(\rho,\psi))$ (forçages de même nature mais pas de même axe). Le signal injecté est un champ, polarisé rectilignement, avec une orientation réglable dans le plan $(\mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z)$. En particulier, cette combinaison est intéressante pour régler précisément ψ_0 en changeant les composantes de l'orientation du signal. Ensuite, la section 6.3.2.2 adresse un cas de combinaison mixte $(Ca_{x,2}(\rho,\psi), \mathcal{D}_{x,2}(\rho,\psi))$ (forçages de nature différente). Le signal est alors un courant qui synchronise l'oscillateur à l'ordre 2. L'étude peut être utile, notamment, pour mieux comprendre la nature des couples de transfert de spin qui sont à l'œuvre dans l'oscillateur.

³⁷ Si $r_\alpha/r_\beta = 10$, alors $(\rho'_\beta/\rho'_\alpha)_{crit} = 10$ soit $\kappa \approx 84^\circ$.

6.3.2.1. Cas $(Ca_{y,1}, Ca_{z,1})$

On synchronise l'oscillateur à un champ $\mathbf{H}_g(t)$, dont la polarisation est rectiligne d'axe \mathbf{u}_g et pivote dans le plan $(\mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z)$, voir Figure 6.5 (a). En pratique, un tel champ peut être réalisé par l'emploi de deux lignes de courants : une première au-dessus de la couche pour créer un champ de direction \mathbf{u}_y et une seconde dans le plan de la couche pour la direction \mathbf{u}_z . Pour simplifier, on introduit l'angle κ entre l'axe \mathbf{u}_g et l'axe \mathbf{u}_z tel que : $\rho_y = \sin(\kappa)$, $\rho_z = \cos(\kappa)$ avec : $0 < \kappa < 2\pi$.

Dans ce cas, le forçage résultant vaut :

$$\mathcal{F}a(p, \psi) = -\frac{\gamma'_0 H_g}{2} \left(\sin(\kappa) \mathcal{C}a_{y,1}(p, \psi) + \cos(\kappa) \mathcal{C}a_{z,1}(p, \psi) \right) \quad (6.22)$$

Si $\tau = 0$, le déphasage total Σ a effectivement la valeur recherchée :

$$\Sigma = \theta_{caz1} - \theta_{cay1} - \tau = \frac{\pi}{2} \quad (6.23)$$

Pour connaître les propriétés de synchronisation pendant la rotation de l'axe \mathbf{u}_g , il faut connaître le ratio d'amplitude r_{caz1}/r_{cay1} , qui s'exprime par³⁸ :

$$\frac{r_{caz1}}{r_{cay1}} \left(\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}} \right) = \frac{\sqrt{1 + \mathcal{G} \left(\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}} \right) + \text{Sign} \left(\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}} \right) \sqrt{1 - \mathcal{G} \left(\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}} \right)}}}{\sqrt{1 + \mathcal{G} \left(\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}} \right) - \text{Sign} \left(\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}} \right) \sqrt{1 - \mathcal{G} \left(\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}} \right)}}} \quad (6.24)$$

Le ratio r_{caz1}/r_{cay1} est contrôlé simplement par le paramètre \mathcal{B}/\mathcal{A} . Par conséquent, c'est \mathcal{B}/\mathcal{A} qui contrôle les fonctions D , $\Delta\psi$ et ainsi les variations des propriétés de synchronisation. En particulier si $\mathcal{B}/\mathcal{A} = 0$, le ratio r_{caz1}/r_{cay1} vaut 1 tandis que si $|\mathcal{B}/\mathcal{A}| \approx 1$, r_{caz1}/r_{cay1} vaut 0 ou l'infini. Il faut donc s'attendre à ce que les variations des propriétés se régularisent avec κ à mesure que la trajectoire de l'oscillateur devient circulaire ($|\mathcal{B}/\mathcal{A}| \approx 0$). Par exemple, les Figure 6.5 (b,c) donnent l'évolution de $D(\kappa)$ et $\Delta\psi(\kappa)$ pour différentes valeurs de \mathcal{B}/\mathcal{A} .

Comme attendu, les Figure 6.5 (b,c) montrent que les variations de $D(\kappa)$ et $\Delta\psi(\kappa)$ se régularisent à mesure que \mathcal{B}/\mathcal{A} tend vers 0. Pour les fortes valeurs de \mathcal{B}/\mathcal{A} , la fonction D présente des oscillations car les amplitudes des forçages canoniques sont différentes. Par exemple, le ratio r_{caz1}/r_{cay1} vaut 0.21, c'est-à-dire que r_{cay1} est environ 5 fois plus forte que r_{caz1} . Au niveau de la synchronisation, cela se traduit par une variation des gammes $\Delta\Omega$ et $\Delta\Pi$ d'un facteur 5 pendant la rotation de l'orientation du champ. En ce qui concerne le déphasage, $\Delta\psi$ balaie effectivement 2π pendant la rotation, Figure 6.5 (c). L'évolution possède, comme la fonction $D(\kappa)$, des oscillations dues à cette différence d'amplitude entre les forçages.

³⁸ C'est aussi la définition de ΔC_{Ω^+} , voir (6.16).

A l'inverse lorsque $\mathcal{B}/\mathcal{A} = 0$, le ratio r_{caz1}/r_{cay1} vaut 1. La fonction D devient indépendante de l'angle κ et $\Delta\psi_0$ devient linéaire. C'est pour cette valeur de \mathcal{B}/\mathcal{A} , que les variations des propriétés sont les plus simples.

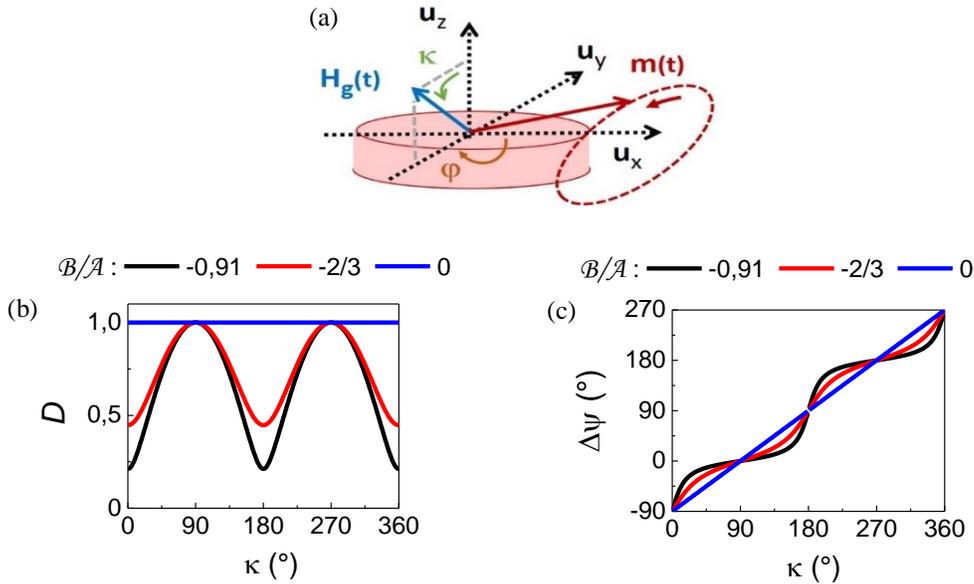


Figure 6.5. Propriétés de synchronisation théoriques de l'oscillateur pour différents \mathcal{B}/\mathcal{A} en fonction de κ . (a) Schéma de convention avec : $0 < \kappa < 2\pi$, $\phi = \pi/2$ (équivalent à : $-1 < \rho_y < 1$, $-1 < \rho_z < 1$, $\rho_x = 0$). (b) Evolution de $D(\kappa)$ avec $r_{cay1} \geq r_{caz1}$. Valeurs des ratios : r_{caz1}/r_{cay1} ($\mathcal{B}/\mathcal{A} = -0,91$) $\approx 0,21$, r_{caz1}/r_{cay1} ($-2/3$) $\approx 0,45$, r_{caz1}/r_{cay1} (0) = 1. (c) Evolution de $\Delta\psi$ (κ). Ici, peu importe la puissance des oscillations ou l'amplitude du champ $\mathbf{H}_g(t)$ car les fonctions n'en dépendent pas.

Le modèle est comparé avec la simulation dans le cas de l'oscillateur planaire ($\mathcal{B}/\mathcal{A} = -0,91$), Figure 6.6.

Les Figure 6.6 (a,b,c) montrent que le modèle concorde bien avec les propriétés simulées : D , C_Ω , C_Π et ψ_0 . En particulier, les Figure 6.6 (a,b) montrent que les sensibilités C_Ω , C_Π varient pendant le balayage angulaire. Cela s'explique par la forte valeur de \mathcal{B}/\mathcal{A} ($\mathcal{B}/\mathcal{A} = -0,91$), qui génère une différence d'un facteur 5 entre les amplitudes des forçages $Ca_{y,1}$ et $Ca_{z,1}$. En ce qui concerne ψ_0 , il varie de 180° , continûment, pendant le balayage de κ sur l'intervalle : $0^\circ < \kappa < 180^\circ$. En particulier, ψ_0 effectue un tour complet si κ le fait aussi. L'influence de \mathcal{B}/\mathcal{A} se voit aussi sur ψ_0 , à travers ses variations.

Il existe dans la littérature une étude numérique comparable à ce que nous avons étudié ici [78]. Dans l'article, les auteurs montrent, par simulation, qu'un champ d'orientation réglable peut déphaser ψ_0 . La configuration choisie est cependant plus compliquée. L'axe \mathbf{u}_g du champ pivote dans le plan de la couche (\mathbf{u}_x , \mathbf{u}_y). L'oscillateur est planaire mais oscille dans un mode OPP après avoir bifurqué de IPP à OPP. L'ennui est que les modes OPP de l'oscillateur planaire se situent loin de la bifurcation d'auto-oscillation (Hopf) et il n'existe pas de modèle analytique (régime libre et synchronisé) assez fiable pour prévoir toutes les quantités voulues. Notre modèle peut donner une idée, au moins qualitative, de ce comportement. Si on le transpose à leur configuration, l'axe d'équilibre serait voisin de \mathbf{u}_z et le plan orthogonal similaire à (\mathbf{u}_x , \mathbf{u}_y). Or le point important est que cette combinaison fonctionne si l'axe \mathbf{u}_g

balaise le plan orthogonal à l'axe d'équilibre. On comprend donc intuitivement que ψ_0 doit changer avec \mathbf{u}_g , que cela soit dans le cas de l'article ou le cas de cette section.

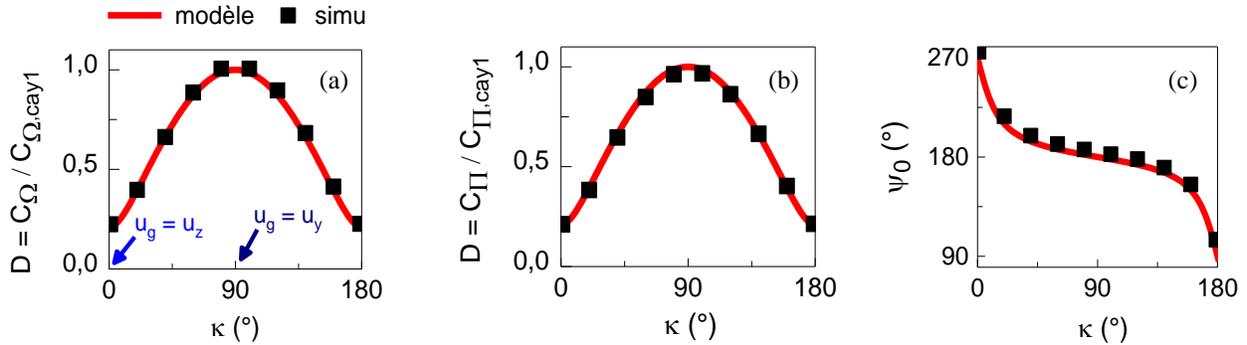


Figure 6.6. Comparaisons des propriétés de synchronisation entre le modèle et la simulation avec $H_g = 0,05$ Oe en fonction de κ . Conditions du régime libre : $J_{dc} = -400 \times 10^9$ A/m², ($p_0 \approx 0,093$, $p_{0, \text{norm}} \approx 0,178$, $\zeta \approx 1,07$), $H_{dc} = 400$ Oe, $f_0 = 5,968$ GHz. (a,b) Fonction normalisée $D(\kappa)$ calculée de deux façons différentes : via le ratio des sensibilités $C_{\Omega}(\kappa)/C_{\Omega, \text{cay}1}$ avec $C_{\Omega, \text{cay}1} = C_{\Omega}(\kappa = 90^\circ) = 157$ MHz.Oe⁻¹ et via le ratio de $C_{\Pi}(\kappa)/C_{\Pi, \text{cay}1}$ avec $C_{\Pi, \text{cay}1} = C_{\Pi}(\kappa = 90^\circ) = 312 \times 10^{-4}$ Oe⁻¹. (d) Déphasage additionnel $\psi_0(\kappa)$.

Dans la section suivante, on étudie le cas ($\mathcal{C}a_{x,2}(p, \psi)$, $\mathcal{D}_{x,2}(p, \psi)$). Il se révèle utile notamment pour la compréhension des couples de transferts de spin.

6.3.2.2. Cas ($\mathcal{C}a_{x,2}$, $\mathcal{D}_{x,2}$)

Ce cas se réalise en synchronisant l'oscillateur à un courant $\mathbf{J}_g(t)$ à l'ordre 2. Le courant agit simultanément à travers le couple de Slonczewski (\mathbf{m}_{SL}) et le couple à effet de champ (\mathbf{m}_{FL}). Dans ce cas, le forçage s'exprime par :

$$\mathcal{F}a(p, \psi) = -\frac{J_g \gamma'_0}{2} \left(a'_{J_0} \mathcal{D}_{x,2}(p, \psi) + b'_{J_0} \mathcal{C}a_{x,2}(p, \psi) \right) \quad (6.25)$$

Les composantes des forçages canoniques sont ici les coefficients (simplifiés) a'_{J_0} et b'_{J_0} .

Comme précédemment, on forme le ratio d'amplitude r_{dx2}/r_{cax2} :

$$\frac{r_{dx2}}{r_{cax2}} \left(p, \frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}} \right) = \mathcal{G}(\mathcal{B}/\mathcal{A}) p \quad (6.26)$$

Le ratio dépend cette fois de \mathcal{B}/\mathcal{A} et p . En particulier lorsque $\mathcal{B}/\mathcal{A} \approx -1$, $\mathcal{G}(\mathcal{B}/\mathcal{A}) \ll 1$, or la puissance vérifie aussi $p \ll 1$, donc $r_{dx2}/r_{cax2} \ll 1$. En conséquence, les variations de D , $\Delta\psi$, en fonction des composantes a'_{J_0} , b'_{J_0} , sont beaucoup plus fortes que celles observées au cas précédent. Elles seront d'autant plus fortes que p diminue ou que $|\mathcal{B}/\mathcal{A}|$ se rapproche de 1.

Pour comparer avec la simulation, on synchronise l'oscillateur à un courant $J_g(t)$. On suit l'évolution des propriétés en fonction du ratio b'_{J0} / a'_{J0} , à a'_{J0} fixé. La Figure 6.7 montre les résultats obtenus.

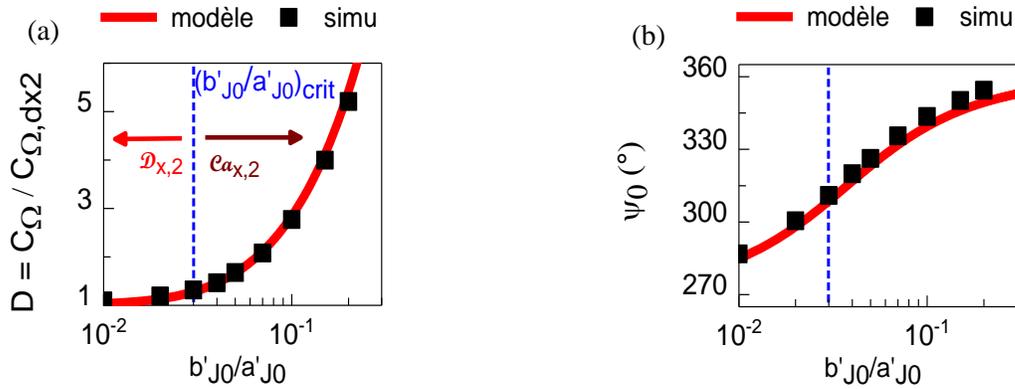


Figure 6.7 Propriétés de synchronisation de la combinaison $(\mathcal{D}_{X,2}(p,\psi), Ca_{X,2}(p,\psi))$ sous courant $J_g(t)$, avec $\varepsilon = 5 \times 10^{-3}$. Mêmes conditions de régime libre qu'à la Figure 6.6. (a) Fonction normalisée D calculée par le ratio des sensibilités $C_{\Omega} / C_{\Omega, dx2}$ avec $C_{\Omega, dx2} = C_{\Omega}(b_{J0} = 0) = 635$ MHz. (b) Déphasage additionnel ψ_0 . Le ratio critique $(b'_{J0} / a'_{J0})_{crit} = r_{dx2} / r_{caX2}$ en $p_0 \approx 0,093$ et $B/\mathcal{A} \approx -0,91$ est indiqué en pointillé bleu.

Là encore, le modèle concorde avec les propriétés simulées, Figure 6.7 (a,b). Lorsque le coefficient b_{J0} augmente, la gamme de synchronisation augmente aussi car l'amplitude du forçage résultant est plus forte. Par exemple, au ratio $b'_{J0} / a'_{J0} = 10^{-1}$, C_{Ω} vaut trois fois la valeur $C_{\Omega, dx2}$. Par ailleurs, la variation de b'_{J0} / a'_{J0} fait varier continûment le déphasage ψ_0 , comme attendu.

D'après le modèle, la grandeur importante à la description de la transition est le ratio critique des composants $(b'_{J0} / a'_{J0})_{crit} = r_{dx2} / r_{caX2}$. Il détermine l'ordre de grandeur de b'_{J0} / a'_{J0} , à partir duquel s'opère la transition de forçage. Il faut donc s'attendre aux deux régimes suivants : lorsque $b'_{J0} / a'_{J0} \ll (b'_{J0} / a'_{J0})_{crit}$, les propriétés sont dominées par le forçage $\mathcal{D}_{X,2}$, tandis que lorsque $b'_{J0} / a'_{J0} \gg (b'_{J0} / a'_{J0})_{crit}$, elles sont dominées par $Ca_{X,2}$. Comme ici $(b'_{J0} / a'_{J0})_{crit} = 4.10^{-2}$, des rapports même très faibles de b'_{J0} / a'_{J0} peuvent changer les propriétés de synchronisation. Ce phénomène est causé par la différence intrinsèque en amplitude des forçages canoniques $Ca_{X,2}$ et $\mathcal{D}_{X,2}$.

Enfin, ce cas de synchronisation est intéressant car il peut se produire aussi bien dans les oscillateurs uniformes que vortex. Un exemple est donné chez [83]. Les auteurs se sont servis d'une combinaison similaire à $(Ca_{X,2}, \mathcal{D}_{X,2})$, adaptée au cas vortex, pour étudier le rapport a_{J0}/b_{J0} . Ils ont dérivé une formule similaire à (6.20) et montré que leurs systèmes génèrent un déphasage supplémentaire voisin de $\pi/2$, dû à un fort effet de champ.

Une application directe de l'étude est de pouvoir prédire l'effet du couple de pseudo-champ sur la synchronisation.

○ Effet du couple pseudo – champ

La combinaison permet d'expliquer simplement l'influence du couple de pseudo-champ sur la synchronisation. Pour rappel, c'est un couple conservatif, qui apparait dans l'équation LLGS lorsque l'équation de Gilbert (1.7) est prise comme point de départ. S'il n'y a pas d'autre source d'effet de champ, la composante du couple équivaut à $b'_{J0} = -\alpha a'_{J0}$, de sorte que le ratio des composantes vaut :

$$\frac{b'_{J0}}{a'_{J0}} = -\alpha \quad (6.27)$$

Connaissant le ratio r_{dx2}/r_{cax2} (6.26) et $(b'_{J0} / a'_{J0})_{crit}$, on peut prédire que des valeurs typiques de α ($\approx 10^{-2}$) influenceront la synchronisation d'ordre 2 à un courant. Par exemple dans notre cas où $\alpha = 0,02$, b'_{J0} / a'_{J0} est proche de $(b'_{J0} / a'_{J0})_{crit} = 4.10^{-2}$, ce qui va générer un décalage de ψ_0 et une modification de la gamme de synchronisation, comme le montre la Figure 6.8.

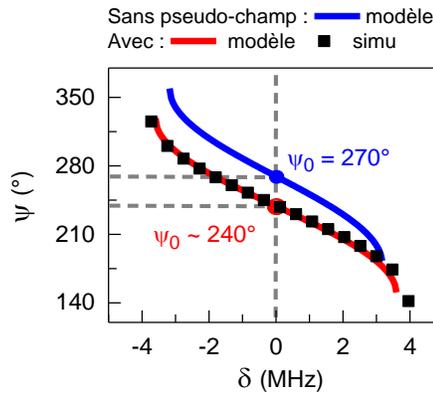


Figure 6.8. Effet du couple de pseudo-champ sur la synchronisation sous courant RF à l'ordre 2. Mêmes conditions d'opérations que précédemment. Les cas avec et sans le terme de pseudo-champ sont indiqués.

En particulier, la figure montre que $\psi_0 = 240^\circ$ avec l'effet de pseudo-champ, alors que $\psi_0 = 270^\circ$ sans cet effet. Cela génère un décalage d'environ -30° . En parallèle, la sensibilité C_Ω augmente de 110 %. Ces modifications ne sont pas négligeables et montrent bien qu'il faut tenir compte du forçage induit $Ca_{x,2}$ pour expliquer les propriétés. En particulier, cela permet de comprendre les écart de ψ_0 observés par [19] (figure III.8 p106) dans l'étude de la synchronisation d'ordre 1 et 2 sous courant RF. Les écarts, d'environ 30° , étaient en réalité dus à ce terme de pseudo-champ.

Plus généralement si la forme de Gilbert est correcte, la génération de forçages purement dissipatifs ($\mathcal{D}_{y,1}$, $\mathcal{D}_{z,1}$, $\mathcal{D}_{x,2}$) devient expérimentalement plus difficile car il faut tenir compte en plus du couple de pseudo-champ dans la synchronisation. Un moyen de réduire son influence sur la synchronisation est de diminuer l'amortissement α du système. A l'inverse, on peut imaginer mesurer son intensité à partir du déphasage provoqué. Il faut cependant être sûr de ne mesurer aucun autre effet de champ de spin à côté.

6.3.3. Discussions

On discute certaines applications de ces combinaisons.

6.3.3.1. Combinaisons « vectorielles » avec $\Sigma = \pi/2 + m\pi$

Les combinaisons vectorielles, comme celles étudiées ($Ca_{y,1}(p,\psi)$, $Ca_{z,1}(p,\psi)$), présentent plusieurs avantages. Comme déjà souligné, elles offrent un moyen de régler précisément ψ_0 entre 0 et 2π , en modifiant les composantes spatiales $\{\rho_i\}_{i=y,z}$ du signal injecté. Cela peut servir notamment à réaliser un déphaseur électronique de 360° qui fonctionne dans la gamme RF. Une solution consisterait à synchroniser l'oscillateur à l'ordre 1, à un signal d'entrée. Par exemple, le signal d'entrée peut être converti en un champ $H_g(t)$ via une ligne de champ. Le signal de sortie émis par l'oscillateur est déphasé de ψ_0 avec le signal d'entrée. L'avantage de cette solution est que l'on opère toujours au centre de la gamme de synchronisation, ce qui permet de stabiliser au maximum le signal de sortie (faible Δf). On peut imaginer une autre solution de déphasage, qui consisterait à changer l'accordage δ (ou de façon équivalente J_{dc} ou H_{dc}). Cependant, la solution est moins bonne car Δf augmente quand δ s'écarte de 0 et la plage de réglage est limitée ($\Delta\psi < \pi$).

Par ailleurs, ces combinaisons ont l'avantage d'être décrites par un ratio r_α/r_β identique (6.24) et dépendant uniquement du paramètre \mathcal{B}/\mathcal{A} . Cette propriété est commune à toutes les combinaisons vectorielles de forçages canoniques, que cela soit à l'ordre 1 ou l'ordre 3. Excepté qu'à l'ordre 3, le cas $\mathcal{B}/\mathcal{A} = 0$ annule la synchronisation. Autrement les variations des propriétés sont les mêmes que celles discutées précédemment. Le rapport (6.24) apparaît donc être un ratio fondamental pour comprendre toutes les propriétés de ces combinaisons.

6.3.3.2. Combinaisons « mixtes » avec $\Sigma = \pi/2 + m\pi$

A l'inverse, les composantes des forçages des combinaisons mixtes sont plus difficiles à manipuler que celles du cas vectoriel, ce qui limite les possibilités. Par exemple dans le cas de la combinaison ($Ca_{x,2}(p,\psi)$, $\mathcal{D}_{x,2}(p,\psi)$), il n'est pas possible d'augmenter b_{j0} (l'amplitude du couple à champ de spin), au profit de a_{j0} (celle du couple de Slonczewski) seulement avec le courant J_{dc} ou le champ H_{dc} . La seule possibilité est d'agir sur la structure de l'oscillateur, par exemple en utilisant les effets de la barrière tunnel, d'Oersted, ou des couches adjacentes. Avec ces méthodes, il est possible de décaler ψ_0 de $\pm\pi/2$ comme en [83] car c'est une valeur limite, il apparaît au contraire plus difficile de modifier précisément ψ_0 . A l'inverse, on peut utiliser les combinaisons d'une autre façon. Par exemple, la mesure de ψ_0 permet d'accéder au rapport a_{j0}/b_{j0} . Dans ce cas, c'est la mesure de ψ_0 qui se révèle cruciale pour extraire des propriétés importantes du système.

○ *En résumé*

Les combinaisons telles que $\Sigma = \pi/2 + m\pi$ sont certainement les combinaisons les plus fonctionnelles, parmi toutes les combinaisons possibles. L'avantage est de pouvoir lier simplement ψ_0 avec les composantes des forçages combinés. Puisque que l'on connaît analytiquement le rapport des amplitudes r_α/r_β des forçages, on peut imaginer deux modes de fonctionnement : 1) pouvoir prédire et régler précisément ψ_0 entre 0 et 2π ou 2) pouvoir remonter au ratio des composantes via la mesure de ψ_0 . Enfin, nous avons vérifié la validité du modèle dans le cas de deux combinaisons $(Ca_{y,1}(\rho, \psi), Ca_{z,1}(\rho, \psi))$, $(Ca_{x,2}(\rho, \psi), \mathcal{D}_{x,2}(\rho, \psi))$. En particulier, la dernière étude montre que le couple de pseudo-champ génère des modifications visibles sur les propriétés combinaison, qui peuvent être mesurées.

6.4. Conclusion

L'approximation des forçages à valeurs réelles nous a permis d'étudier, de façon simple et générale, les cas de synchronisation composée de deux forçages canoniques. L'intérêt de ces combinaisons est de permettre le contrôle des propriétés de synchronisation grâce à plusieurs paramètres réglables par l'expérimentateur : les composantes globales ρ'_i et le déphasage temporel τ entre les forçages combinés. Par ailleurs, nous avons introduit le déphasage total $\Sigma(\tau)$ qui permet de classer les combinaisons en plusieurs groupes selon leurs fonctionnalités (voir les tableaux récapitulatifs 6.1, 6.2, annexe 6.5.2).

- $\Sigma = 0 + m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$: Ces combinaisons permettent d'augmenter ou de diminuer sensiblement la synchronisation suivant τ . En particulier si $\Sigma = 0$, la gamme de synchronisation résultant est la somme des gammes des forçages combinés tandis que si $\Sigma = \pi$, c'est la différence. Ces combinaisons offrent un moyen pratique de renforcer la synchronisation. L'exemple typique est celui de la synchronisation à un champ $\mathbf{H}_g(t)$ rotatif dans le plan $(\mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z)$, qui active les forçages $(Ca_{y,1}(\rho, \psi), Ca_{z,1}(\rho, \psi \pm \pi/2))$ où $\tau = \pm \pi/2$.

- $\Sigma = \pi/2 + m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$: A l'inverse, ces combinaisons ont l'avantage de relier la valeur ψ_0 aux composantes ρ'_i des forçages. On peut s'en servir de deux façons différentes : soit pour régler précisément ψ_0 , notamment par l'usage de combinaisons vectorielles de type $(Ca_{y,1}(\rho, \psi), Ca_{z,1}(\rho, \psi))$ ou bien soit pour obtenir le ratio des composantes $\rho'_\alpha / \rho'_\beta$ par la mesure de ψ_0 . Cette dernière méthode peut être pratique pour mesurer le ratio des composantes a_{j0}/b_{j0} de la combinaison de forçages $(Ca_{x,2}(\rho, \psi), \mathcal{D}_{x,2}(\rho, \psi))$.

Plus généralement, la méthode développée pourra être un outil utile pour explorer les différents forçages de l'oscillateur uniforme, ainsi que pour aider à former de nouvelles combinaisons avec les propriétés recherchées.

6.5. Annexes

6.5.1. Ordre de grandeur des ratios d'amplitudes

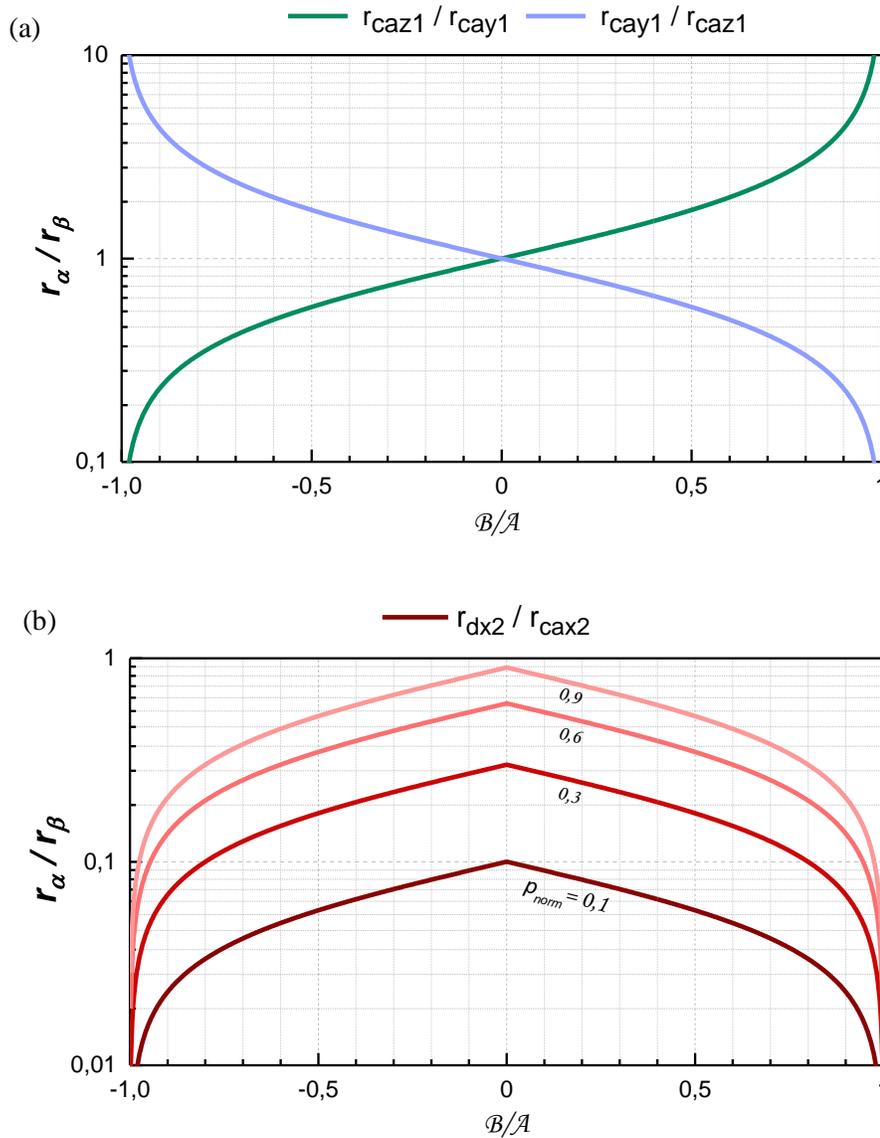


Figure 6.9. Ratios d'amplitudes r_{α}/r_{β} étudiés dans ce chapitre. (a) Ratio $r_{\text{caz1}}/r_{\text{cay1}}$ (6.16) ou (6.24) et son inverse $r_{\text{cay1}}/r_{\text{caz1}}$. (b) Ratio $r_{\text{dx2}}/r_{\text{cax2}}$ (6.26). Les ratios permettent de connaître les quantités telles que : $\Delta C_{\Omega+}$ ou le ratio critique des composantes $(\rho'_a/\rho'_b)_{\text{crit}}$.

6.5.2. Tables de combinaison

$\tau = 0$		$Ca_{z,1}$	$Da_{y,1}$	$Da_{z,1}$	$Ca_{x,2}$	$D_{x,2}$	$Ca_{y,3}$	$Ca_{z,3}$	$D_{y,3}$	$D_{z,3}$
		π	π	$3\pi/2$	$3\pi/2$	π	$3\pi/2$	0	π	$3\pi/2$
$Ca_{y,1}$	$\theta = \pi/2$			o						
$Ca_{z,1}$	π		o							
$Da_{y,1}$	π									
$Da_{z,1}$	$3\pi/2$									
$Ca_{x,2}$	$3\pi/2$									
$D_{x,2}$	π									
$Ca_{y,3}$	$3\pi/2$									o
$Ca_{z,3}$	0								o	
$D_{y,3}$	π									

Tableau 6.1. Table de combinaison des forçages canoniques avec $\tau = 0 + m\pi$. Les combinaisons « | » vérifient $\Sigma = \pi/2 + m\pi$, et celles « o » vérifient $\Sigma = 0 + m\pi$. En vert, les combinaisons vectorielles et en rouge les combinaisons mixtes. Les combinaisons impossibles à cause d'ordres différents ont des cases vides. Rappel : pour les forçages à valeurs réelles avec $N < 0$, $\psi_0 = \theta - \pi/2$.

$\tau = \pm\pi/2$		$Ca_{z,1}$	$Da_{y,1}$	$Da_{z,1}$	$Ca_{x,2}$	$\mathcal{D}_{x,2}$	$Ca_{y,3}$	$Ca_{z,3}$	$\mathcal{D}_{y,3}$	$\mathcal{D}_{z,3}$
		π	π	$3\pi/2$	$3\pi/2$	π	$3\pi/2$	0	π	$3\pi/2$
$Ca_{y,1}$	$\theta = \pi/2$	0	o							
$Ca_{z,1}$	π			o						
$Da_{y,1}$	π			0						
$Da_{z,1}$	$3\pi/2$									
$Ca_{x,2}$	$3\pi/2$					o				
$\mathcal{D}_{x,2}$	π									
$Ca_{y,3}$	$3\pi/2$							0	o	
$Ca_{z,3}$	0									o
$\mathcal{D}_{y,3}$	π									0

Tableau 6.2. Table de combinaison des forçages canoniques avec $\tau = \pm\pi/2$. Même légende que précédemment.

Chapitre 7. Etude du régime transitoire

L'étude du régime transitoire de l'oscillateur synchronisé est cruciale, notamment pour comprendre les spectres de bruits observés en expérience. Bien que le sujet ait été traité à plusieurs reprises [82] [81], l'approche de ce chapitre est différente car elle se focalise uniquement sur les forçages à valeurs réelles. D'abord, la partie 7.1 commence par calculer les paramètres de relaxation du système. Puis, les calculs sont vérifiés avec la simulation, pour plusieurs cas de forçages canoniques. Enfin, les résultats sont repris en 7.2 pour discuter plus en détails du régime stochastique, c'est-à-dire la réponse de l'oscillateur à un bruit thermique. Le modèle est comparé avec la simulation et les sauts de phases sont brièvement étudiés.

7.1. Etude du régime transitoire

On va étudier le régime transitoire du système synchronisé dans l'approximation des forçages à valeurs réelles. La section 7.1.1 commence par calculer les modes propres du système. Puis, la section 7.1.2 applique les résultats aux cas des forçages canoniques de l'oscillateur.

7.1.1. Modélisation

Comme pour l'étude du régime libre, le principe consiste à linéariser le système, puis le résoudre au voisinage d'un état stationnaire (p_s, ψ) . La relaxation est caractérisée par les modes propres et suivant leurs valeurs, peut être : sur - critique, critique ou sous critique (pseudo - périodique).

7.1.1.1. Système linéarisé

Le point de départ est le système (3.32), obtenu au voisinage de p_0 à condition que $p_s \ll p_0$:

$$\begin{cases} \dot{p}_s = -2\Gamma_p(p_0)p_s + 2 p_0 \operatorname{Re}(\mathcal{F}(p_0, \psi)) \\ \dot{\psi} = -\delta + nN p_s + n \operatorname{Im}(\mathcal{F}(p_0, \psi)) \end{cases} \quad (7.1)$$

Le système (7.1) a une forme simple car \mathcal{F} ne dépend que de ψ . On cherche à linéariser le système au voisinage d'un état stationnaire (p_s, ψ) . Pour l'instant, l'état (p_s, ψ) peut se trouver n'importe où dans la gamme de synchronisation. En s'aidant de la méthode de la section 2.4.3.1, on obtient :

$$\begin{pmatrix} \dot{\delta p} \\ \dot{\delta \psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\Gamma_p & 2 p_0 \partial_\psi \operatorname{Re}(\mathcal{F}(p_0, \psi)) \\ nN & n \partial_\psi \operatorname{Im}(\mathcal{F}(p_0, \psi)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta p \\ \delta \psi \end{pmatrix} \quad (7.2)$$

Soit alors le forçage à valeurs réelles défini par :

$$\mathcal{F}(p, \psi) = a_g r(p) \cos(\psi - \theta(p)) \quad (7.3)$$

$a_g > 0$ est l'amplitude du signal générateur, $\theta(p)$ l'orientation du forçage et $r(p) > 0$ l'amplitude du forçage.

Le système linéarisé devient :

$$\begin{pmatrix} \dot{\delta p} \\ \dot{\delta \psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\Gamma_p & -2p_0 a_g r \sin(\psi - \theta) \\ nN & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta p \\ \delta \psi \end{pmatrix} \quad (7.4)$$

A la différence du système linéarisé libre (2.66), celui-ci est fondamentalement du 2nd ordre car les équations de puissance et de phase sont couplées entre elles par le terme de forçage. On cherche dans la section suivante ses modes propres.

7.1.1.2. Modes propres λ_{\pm}

Les modes propres λ_{\pm} du système valent :

$$\lambda_{\pm} = -\Gamma_p \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{2n|v|a_g r}{\Gamma_p} \sin(\psi - \theta)} \right) \quad (7.5)$$

Par ailleurs, ψ s'exprime en fonction de δ selon (3.92), ce qui donne :

$$\lambda_{\pm} = -\Gamma_p \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{2n|v|a_g r \sqrt{1 - \left(\frac{\delta}{\Delta\Omega}\right)^2}}{\Gamma_p}} \right) \quad (7.6)$$

Comme $|\delta/\Delta\Omega|$ est plus petit que 1, $\left(1 - \left(\frac{\delta}{\Delta\Omega}\right)^2\right)^{1/2}$ vaut quasiment l'unité sur la majeure partie de la gamme de synchronisation. Sa variation n'est significative qu'au voisinage de la bordure (c.à.d. $|\delta/\Delta\Omega| = 1$).

Par conséquent, si l'état (p_s, ψ) est pris au voisinage du centre de la gamme, les modes λ_{\pm} se simplifient en :

$$\lambda_{\pm} = -\Gamma_p \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{a_g}{a_{cr}}} \right) \quad (7.7)$$

Où l'amplitude critique a_{cr} est défini par :

$$a_{cr} = \frac{\Gamma_p}{2|v|r n} = \frac{\Gamma_p}{2C_{\Omega}} \quad (7.8)$$

C_{Ω} est la sensibilité de synchronisation des forçages à valeurs réelles (3.88).

La relaxation du système est gouvernée par les modes λ_{\pm} (7.7), voir aussi [48]. Comme (p_s, ψ) est un état stable du système, les modes doivent être stables aussi. En effet comme $\Gamma_p > 0$, on a immédiatement $\Re(\lambda_{\pm}) < 0$. Ainsi après perturbation, les variables d'écart δp et $\delta \psi$ tendent toujours vers 0. Quant au type de la relaxation, il est déterminé par la partie imaginaire de λ_{\pm} . La section suivante discute les différents cas possibles.

7.1.1.3. Régime de relaxation

Suivant la valeur du ratio a_g/a_{cr} , la relaxation peut être : sur - critique, critique ou sous critique (pseudo – périodique) [82] [81] :

- Cas : $a_g < a_{cr}$ ($a_g = a_{cr}$), régime sur - critique (critique) : la racine existe et les modes λ_{\pm} sont réels. Cela se traduit par la relaxation exponentielle et sans oscillation du système vers son état d'équilibre. En particulier, le temps caractéristique de relaxation est donné par celui du mode λ_{\pm} qui s'amortit le plus lentement, appelé mode dominant. Ici puisque $\Re(\lambda_{+}) > \Re(\lambda_{-})$, c'est λ_{-} le mode dominant. En général, ce régime peut être qualifié « d'Adlérien » [82] [81], dans la mesure où les systèmes à un degré de liberté, décrits par l'équation d'Adler, relaxent aussi sans oscillations.
- Cas $a_g > a_{cr}$ (régime sous critique ou pseudo – périodique) : Dans ce cas, les modes λ_{\pm} ont une partie imaginaire. Le régime de relaxation est sous-critique, ce qui se traduit par un amortissement oscillatoire de fréquence $\Im(\lambda_{\pm})$. Ce régime n'est possible que parce que le système a au moins deux degrés de libertés, la phase et la puissance. C'est pourquoi il est aussi qualifié de « non - Adlérien » [82] [81] car l'équation d'Adler seule ne permet pas de l'observer.

La propriété suivante résume les paramètres importants. On note par Γ_{ps} (rad/s) = $-\Re(\lambda_{-})$ la fréquence d'amortissement et ω_s (rad/s) = $\Im(\lambda_{\pm})$ la fréquence transitoire du régime sous-critique.

Propriété 7.1 : Si $a_g < a_{cr}$ ($a_g = a_{cr}$), le régime est sur – critique (critique) de paramètre :

$$\Gamma_{ps} = \Gamma_p \left(1 - \sqrt{1 - \frac{a_g}{a_{cr}}} \right) \quad (7.9)$$

En revanche si $a_g > a_{cr}$, le régime est sous – critique de paramètres :

$$\begin{cases} \Gamma_{ps} = \Gamma_p \\ \omega_s = \Gamma_p \sqrt{\frac{a_g}{a_{cr}} - 1} \end{cases} \quad (7.10)$$

Avec a_{cr} donnée par (7.8).

Comparés à la littérature, les paramètres de la propriété 7.1 sont identiques à ceux obtenus par [82] parce qu'en réalité les hypothèses sont les mêmes. Les auteurs ont eux obtenus les modes λ_{\pm} dans le cas d'un forçage circulaire, qu'ils ont ensuite simplifiés en supposant $|v| \gg 1$. En revanche, notre approche est de considérer d'emblée un forçage à valeurs réelles, représentatif de tous les forçages du moment que $|v| \gg 1$ (précisément si la propriété 3.9 est respectée). C'est donc normal de retrouver les mêmes expressions. Identiquement, les deux méthodes affirment que les paramètres de relaxation (propriété Propriété 7.1) sont valables pour n'importe quels forçages, du moment que $|v| \gg 1$.

Néanmoins, notre approche présente plusieurs avantages :

- En premier, a_{cr} (7.8) est explicitée seulement en fonction de Γ_p et C_Ω . Ainsi peu importe l'expression de C_Ω , le fait est que plus C_Ω augmente, plus le seuil a_{cr} diminue. Par exemple, soient deux cas de forçages générés par un signal de même nature. Si l'un est en régime sous-critique et si l'autre à une sensibilité de synchronisation plus forte alors on peut être sûr que le second sera en régime sous – critique à la même amplitude.
- Le second est qu'il devient possible d'utiliser les amplitudes des forçages canoniques du tableau 4.5, combinés ou non, pour calculer tous les seuils a_{cr} voulus.

De façon générale, la propriété 7.1 montre que la relaxation se caractérise toujours par un seuil d'amplitude a_{cr} du signal générateur, à partir duquel la relaxation devient sous critique. Passer ce seuil, l'amortissement Γ_{ps} sature et donc il n'est pas possible de diminuer le temps de relaxation à souhait. Cela peut être un inconvénient si l'oscillateur est soumis au bruit thermique car alors les fluctuations de puissance et de phase augmentent dans la gamme $|f - f_0| < \Gamma_{ps}$, et cette gamme ne peut être réduite. Ceci est une des limitations des forçages à valeurs réelles mais pas des forçages en général. Par exemple, [82] montre que si l'on tient compte d'un terme $Im(F)$ dans l'équation de phase alors Γ_{ps} (le temps de relaxation) continue d'augmenter (de diminuer) avec l'amplitude σ . Ainsi pour les forçages qui ne sont pas exactement réels, la limitation de Γ_{ps} ne reste qu'une approximation, seulement vérifiée aux fortes non linéarités.

La section suivante compare le modèle avec la simulation

7.1.2. Simulation

Grâce aux amplitudes tableau 4.5, il devient possible de calculer tous les seuils a_{cr} des forçages canoniques et de leurs combinaisons. On commence par discuter la valeur de ces seuils, puis on vérifie le modèle avec la simulation macrospin.

7.1.2.1. Valeurs théoriques de a_{cr}

Dans le cas d'une synchronisation à un forçage canonique, le forçage F appliqué au système peut s'écrire comme en (4.42). Ainsi à l'aide de (3.88) et (7.8), a_{cr} peut s'écrire :

$$a_{cr} = \frac{\Gamma_p}{2 C_\Omega} = \frac{\Gamma_p}{n|v|k\rho_l r(p)} \quad (7.11)$$

Où $r(p)$ est l'amplitude des forçages définie au tableau 4.5.

A titre d'exemple, la Figure 7.1 montre l'évolution de $a_{cr}(p_{norm})$ des forçages d'ordre 1 et 2.

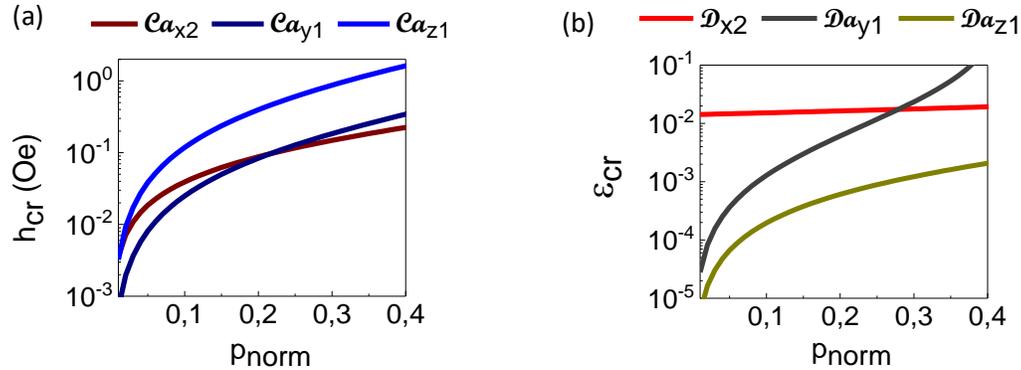


Figure 7.1. Evolution de a_{cr} ($p_1 = 1$) avec la puissance normalisée p_{norm} dans le cas de l'oscillateur de référence. Ici $0 < p_{norm} < 0.4$ équivaut à $-375 \times 10^9 \text{ A/m}^2 < J_{dc} < -440 \times 10^9 \text{ A/m}^2$. (a) Cas des forçages conservatifs forcés par un champ RF. (b) Cas des forçages dissipatifs forcés par un courant RF.

De façon générale, l'amplitude critique a_{cr} augmente avec la puissance car Γ_p augmente aussi tandis que C_Ω diminue. L'explication est valable dans tous les cas sauf celui de $D_{x,2}$. Pour ce forçage, ϵ_{cr} augmente parce que l'augmentation de Γ_p est simplement plus rapide que C_Ω . Par ailleurs, on retrouve dans l'évolution de a_{cr} toutes les caractéristiques de C_Ω vues à la section 4.2.1.2. Par exemple à l'ordre 1, a_{cr} tend vers 0 car C_Ω diverge. Autres exemples, comme C_Ω est plus grand dans le cas de $D_{z,1}$ que celui de $D_{y,1}$ alors l'amplitude a_{cr} doit être plus petite pour le premier que pour le second, même raisonnement pour les forçages $C_{z,1}$ et $C_{y,1}$.

On voit que les amplitudes critiques sont étonnamment faibles dans tous les cas. Par exemple à $p_{norm} = 0.18$ ($J_{dc} = -400 \times 10^9 \text{ A/m}^2$), le seuil vaut $h_{cr} = 0,07 \text{ Oe}$ pour $C_{y,1}$ et $\epsilon_{cr} = 4,6 \times 10^{-3}$ pour $D_{y,1}$. En expérience, les seuils sont facilement atteignables car l'amplitude du champ générateur peut facilement être comprise entre : 1 et 10 Oe et celle du courant injecté entre : $0.1 < \epsilon < 1$. Par conséquent, on peut dire que le régime de relaxation des oscillateurs uniformes doit être un régime sous-critique.

7.1.2.2. Comparaison avec la simulation

Un bon moyen de vérifier le modèle est de comparer la fréquence transitoire ω_s , puisqu'elle s'exprime par les deux paramètres principaux Γ_p et a_{cr} . Pour cela, on va suivre la méthode proposée par [82]. Le système est synchronisé à un signal générateur dont l'amplitude est modulée par un train d'impulsion. Le but est de synchroniser/ désynchroniser le système pour faire apparaître le régime de relaxation. La fréquence transitoire ω_s est mesurée à travers la densité spectrale de puissance $S_{m_y}(f)$ de $m_y(t)$, voir Figure 7.2.

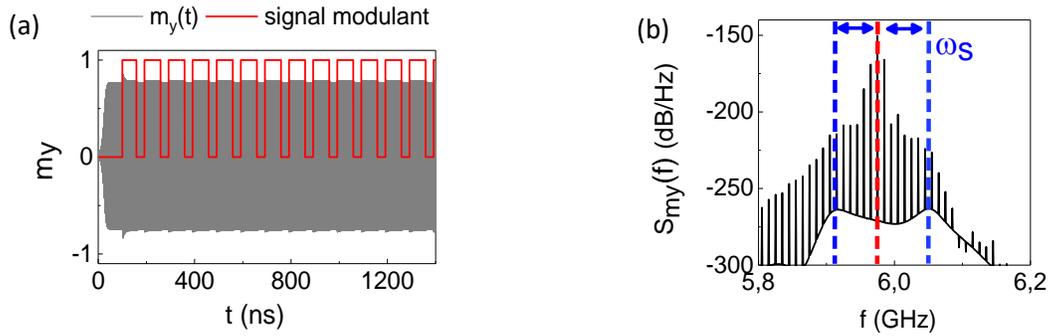


Figure 7.2. Observation de la fréquence transitoire ω_s dans le régime sous-critique. Le système est synchronisé à un signal générateur ($\delta \approx 0$) modulé en amplitude. (a) Allure de la composante $m_y(t)$ et du signal modulant de fréquence $f_m = 10$ MHz. f_m est suffisamment lent pour laisser le système se synchroniser à un palier ($\Gamma_{ps} \approx 132$ rad/s, temps de relaxation ≈ 8 ns). (b) Densité spectrale de puissance de $m_y(t)$ en échelle log. Le spectre fait apparaître la porteuse (trait rouge), modulé par la fréquence f_m (nombreux pics noirs) et la fréquence ω_s produit par le régime sous-critique.

La méthode est appliquée pour extraire f_s (Hz) = $\omega_s/2\pi$ dans trois cas de forçages canoniques, Figure 7.3.

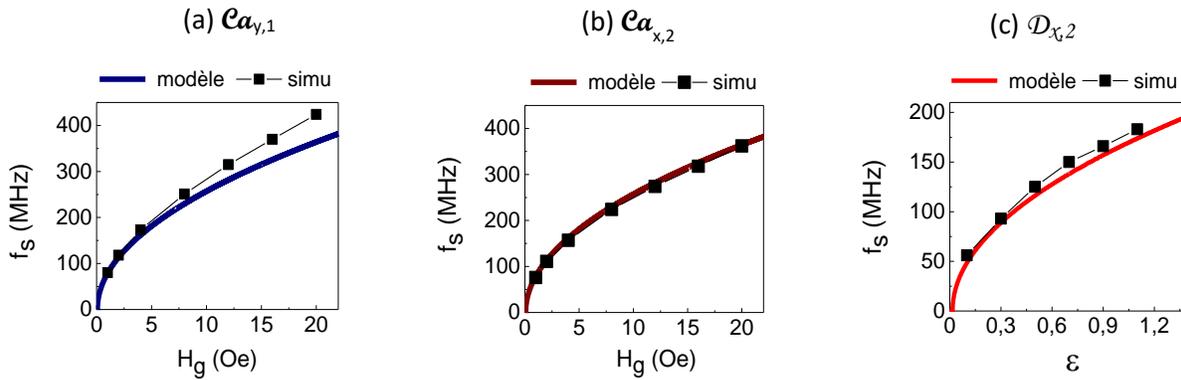


Figure 7.3. Evolution de f_s (Hz) avec l’amplitude du générateur, pour l’oscillateur de référence. Les résultats de simulation sont comparés avec ceux du modèle. Conditions du régime libre : $J_{dc} = -400 \times 10^9$ A/m² ($p = 0,0905$, $\zeta \approx 1,07$), $H_{dc} = 400$ Oe, $f_0 = 5.968$ GHz. (a) Cas du forçage $C_{y,1}$, (b) $C_{x,2}$ et (c) $D_{x,2}$.

L’accord modèle/simulation est globalement bon. Cependant, on peut voir qu’entre les forçages la précision de l’accord varie à mesure que l’amplitude du générateur augmente. Le cas idéal est celui du forçage $C_{x,2}$. Dans ce cas, les prédictions du modèle concordent bien avec la simulation. Cela s’explique car ce forçage est le seul à avoir une amplitude indépendante de la puissance, ce qui assure la forte validité du système synchronisé (7.1) (condition $p_s \ll p_0$). A l’inverse les fréquences f_s des forçages $D_{x,2}$ et $C_{y,1}$ diffèrent de plus en plus avec l’amplitude du générateur. Or justement, ces forçages dépendent fortement de la puissance, surtout en ce point d’opération $J_{dc} = -400 \times 10^9$ A/m² (voir la pente de C_Ω à $p_{norm} \approx 0.2$ la section 4.3). C’est pourquoi le modèle est moins valable dans ces deux cas, aux fortes amplitudes.

○ *En résumé :*

Les différents régimes de relaxation de l'oscillateur synchronisé ont été étudiés en se limitant aux cas des forçages à valeurs réelles. Nous avons obtenu tout comme en [82] les expressions des modes propres λ_{\pm} et le seuil critique a_{cr} qui gouvernent la relaxation. Cependant ici, a_{cr} est exprimé de façon générale, en fonction seulement de Γ_p et C_{Ω} . Si on applique le modèle aux cas des forçages canoniques, on voit que a_{cr} est une faible valeur d'amplitude : $a_{cr} < 1$ Oe pour les forçages champs et $\varepsilon_{cr} < 1 \times 10^{-2}$ pour le courant. Ainsi dans le cas des oscillateurs uniformes, le régime sous-critique est favorisé.

7.2. Régime stochastique

Grâce aux résultats précédents, nous allons pouvoir discuter plus en détails la réponse de l'oscillateur au bruit thermique [116]. On commence par calculer les spectres de bruits de l'oscillateur, puis on compare le modèle avec la simulation.

7.2.1. Modélisation

On cherche à exprimer les densités spectrales de puissance des fluctuations de phase $S_{\delta\psi}$ et de puissance $S_{\delta p}$ de l'oscillateur, lorsqu'il est en régime synchronisé et soumis à la température. Pour cela, on introduit le bruit thermique $\xi(t)$, un processus gaussien complexe avec les propriétés statistiques suivantes :

$$\langle \xi(t) \rangle = 0, \quad \langle \xi(t) \overline{\xi(\tau)} \rangle = 2D_n \delta(t - \tau) \quad (7.12)$$

D_n est le coefficient de diffusion thermique qui s'écrit (voir notations de [20]) :

$$D_n = \frac{\gamma_0 k_b T \Gamma_+(p)}{V \mu_0 M_s \omega(p)} = 4\pi \Delta f_0 p_0 \quad (7.13)$$

Avec : V le volume de la couche, M_s l'aimantation spontanée, k_b la constante de Boltzmann, γ_0 le rapport gyromagnétique, μ_0 la perméabilité du vide, $T(K)$ la température et Δf_0 la largeur spectrale intrinsèque de l'oscillateur en régime libre (HWMH = « half width at half maximum »).

Pour simplifier, le bruit thermique est suffisamment faible pour ne pas induire de sauts dans la phase de l'oscillateur (régime de synchronisation de fréquence). Le principe du calcul consiste à résoudre le système linéaire avec le terme de bruit thermique, obtenir les réponses harmoniques $\delta p_s(\omega)$ et $\delta \psi(\omega)$ et ainsi les densités spectrales associées [117].

7.2.1.1. Calcul des densités spectrales

Avec le bruit thermique, l'équation dynamique (3.25) s'écrit :

$$\dot{d} = \mathcal{T}_\delta(d) + \mathcal{T}_G(d) + \mathcal{T}_{SL}(d) + \mathcal{T}_F(d, t) + \xi(t)e^{j\frac{\psi}{n}} \quad (7.14)$$

Cela donne le système linéarisé :

$$\begin{pmatrix} \dot{\delta p} \\ \dot{\delta \psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\Gamma_p & -2p_0 a_g r \sin(\psi - \theta) \\ nN & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta p_s \\ \delta \psi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\sqrt{p_0} \mathcal{R}e(\xi) \\ \frac{n}{\sqrt{p_0}} \mathcal{I}m(\xi) \end{pmatrix} \quad (7.15)$$

Grâce à l'étude précédente, on connaît déjà les valeurs propres λ_\pm (7.7) du système homogène. On leur associe à présent les vecteurs propres : $u_\pm = \left(\frac{\lambda_\pm}{nN}, 1\right)$. Dans ce cas, les réponses harmoniques $\delta p_s(\omega)$, $\delta \psi(\omega)$ peuvent s'exprimer par :

$$\begin{pmatrix} \delta p(\omega) \\ \delta \psi(\omega) \end{pmatrix} = \frac{nN}{\lambda_+ - \lambda_-} \begin{pmatrix} \frac{\lambda_+}{nN} & \frac{\lambda_-}{nN} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{j\omega - \lambda_+} & 0 \\ 0 & \frac{1}{j\omega - \lambda_-} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\lambda_-}{nN} \\ -1 & \frac{\lambda_+}{nN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\sqrt{p_0} \mathcal{R}e(\xi(\omega)) \\ \frac{n}{\sqrt{p_0}} \mathcal{I}m(\xi(\omega)) \end{pmatrix} \quad (7.16)$$

Ce qui se simplifie en :

$$\begin{pmatrix} \delta p(\omega) \\ \delta \psi(\omega) \end{pmatrix} = \frac{1}{(j\omega - \lambda_+)(j\omega - \lambda_-)} \begin{pmatrix} j\omega & -\frac{\Gamma_p^2}{nN} \left(\frac{a_g}{a_{cr}}\right) \\ nN & -2\Gamma_p + j\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\sqrt{p_0} \mathcal{R}e(\xi(\omega)) \\ \frac{n}{\sqrt{p_0}} \mathcal{I}m(\xi(\omega)) \end{pmatrix} \quad (7.17)$$

On explicite alors les v.p : $-\Gamma_p \pm j\omega_s$. En passant à la densité spectrale de puissance (d.s.p.), on obtient :

$$\begin{pmatrix} S_{\delta p}(\omega) \\ S_{\delta \psi}(\omega) \end{pmatrix} = \frac{1}{\left((2\omega\Gamma_p)^2 + \left(\omega^2 - \Gamma_p^2 \left(\frac{a_g}{a_{cr}}\right)^2\right)^2\right)} \begin{pmatrix} \omega^2 & \frac{\Gamma_p^4}{(nN)^2} \left(\frac{a_g}{a_{cr}}\right)^2 \\ (nN)^2 & (2\Gamma_p)^2 + \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8p_0 D_n \\ 2\frac{n^2}{p_0} D_n \end{pmatrix} \quad (7.18)$$

En réalité, l'expression fonctionne pour n'importe quel régime de relaxation (sur-critique et sous-critique).

Une fois le calcul fait :

Propriété 7.2 : d.s.p. des fluctuations de puissance $\delta p(t)$:

$$S_{\delta p}(f) = \frac{8p_0^2 \Delta f_0}{\pi} \frac{f^2 + \left(\frac{\Gamma_p}{4\pi v}\right)^2 \left(\frac{a_g}{a_{cr}}\right)^2}{f^2 \left(\frac{\Gamma_p}{\pi}\right)^2 + \left(f^2 - \left(\frac{\Gamma_p}{2\pi}\right)^2 \left(\frac{a_g}{a_{cr}}\right)^2\right)^2} \quad (7.19)$$

- d.s.p. des fluctuations de phase $\delta\psi(t)$:

$$S_{\delta\psi}(f) = \frac{2\Delta f_0 n^2}{\pi} \frac{f^2 + \left(\frac{\Gamma_p}{\pi}\right)^2 (1 + v^2)}{f^2 \left(\frac{\Gamma_p}{\pi}\right)^2 + \left(f^2 - \left(\frac{\Gamma_p}{2\pi}\right)^2 \left(\frac{a_g}{a_{cr}}\right)^2\right)^2} \quad (7.20)$$

Avec f , le décalage de fréquence par rapport à la fréquence d'oscillation en régime libre f_0 .

Les spectres de bruits $S_{\delta p}$, $S_{\delta\psi}$ se comportent de façon similaire et sont tous les deux caractérisés par la fréquence de résonance f_r :

$$f_r = \frac{\Gamma_p}{2\pi} \sqrt{\frac{a_g}{a_{cr}}} \quad (7.21)$$

En particulier dans le régime fortement sous-critique où $a_g \gg a_{cr}$, on a l'approximation : $f_r \approx f_s$.

Il existe deux cas limites :

- $f \ll f_r$: Les spectres sont des bruits blancs. Cela traduit les perturbations du bruit thermique sur la phase et la puissance du système, au voisinage de sa position d'équilibre. En particulier, ce comportement de la phase contraste avec celui du régime libre [59], où elle était libre de diffuser ($S_{\delta\psi} \propto 1/f^2$). Ce sont en réalité les fluctuations dans cette gamme de fréquence qui contribuent le plus à l'instabilité de l'oscillateur. Ce régime sera abordé plus en détails à la section suivante.
- $f \gg f_r$: A l'inverse, le bruit thermique est atténué en $1/f^2$. A cause de l'amortissement, les variables de l'oscillateur ne sont pas assez rapides pour réagir au bruit thermique, ce qui provoque en retour le filtrage du bruit.

7.2.1.2. Limites en $f \ll f_r$

Si la gamme de fréquence est suffisamment faible comparée à la fréquence de résonance f_r , les spectres se réduisent à des bruits blancs d'amplitudes :

$$f \ll f_r : S_{\delta p} = \frac{8\pi\Delta f_0}{N^2}, \quad S_{\delta\psi} = \frac{8\pi\Delta f_0}{(ra_g)^2} \quad (7.22)$$

La première caractéristique est que l'amplitude des deux spectres est proportionnelle à Δf_0 . On comprend donc immédiatement pourquoi les oscillateurs les plus stables thermiquement en régime libre, par exemple les oscillateurs vortex ($\Delta f_0 = 10 \text{ kHz} - 1 \text{ MHz}$), sont aussi les plus stables en régime synchronisé. Au contraire pour les oscillateurs uniformes, il faut s'attendre à ce que leurs fluctuations soient de plusieurs ordres de grandeur supérieures ($\Delta f_0 = 1 \text{ MHz} - 100 \text{ MHz}$), même en régime synchronisé.

Par ailleurs, on voit que les valeurs planchers de $S_{\delta p}$, $S_{\delta\psi}$ ne dépendent pas des mêmes paramètres. Par exemple, $S_{\delta p}$ diminue avec N tandis que $S_{\delta\psi}$ diminue avec ra_g , le produit de l'amplitude du forçage par celle du signal générateur. Cette dernière propriété est cruciale car c'est sur cette quantité qu'il faut agir pour réduire les fluctuations de l'oscillateur.

Par exemple, une première solution est d'augmenter l'amplitude du signal générateur. Par exemple dans l'étude de [83] sur les oscillateurs vortex, les auteurs montrent que l'augmentation du courant d'injection permet d'atteindre le régime de synchronisation de fréquence (absence de sauts de phase) et de diminuer la valeur plancher de la densité spectrale (à l'ordre 1 : $S_{\delta\psi} \approx -90 \text{ dBc/Hz @ } 1 \text{ kHz}$). Néanmoins, il n'est pas toujours possible d'augmenter l'amplitude du signal générateur comme on le souhaite. Par exemple pour les oscillateurs uniformes à barrières tunnels, la forte valeur de Δf_0 combinée à la limitation du courant d'injection par la tension de claquage de l'isolant empêche d'atteindre le régime de synchronisation de fréquence [16]. Dans ce cas, la formule (7.22) indique qu'il faut plutôt chercher à maximiser la sensibilité de synchronisation. Il faut le faire à travers l'amplitude r du forçage et non à travers v car $S_{\delta\psi}$ en est indépendant. On comprend donc tout l'intérêt d'explorer les forçages à la recherche de ceux qui offrent les plus fortes amplitudes de forçages. Cela permet de mieux stabiliser la phase tout en ayant une amplitude générateur faible.

7.2.1.3. Définition de $S_{\delta a}$, $S_{\delta\phi}$

Pour vérifier la concordance du modèle avec la simulation, on utilisera plutôt la d.s.p. $S_{\delta a}$ (bruit d'amplitude) associée aux fluctuations d'amplitude normalisée $\delta a(t)$ (1.15) :

$$S_{\delta a}(f) = \frac{S_{\delta p}(f)}{4p_0^2} \quad (7.23)$$

De même, on utilisera plutôt la d.s.p. $S_{\delta\phi}$ (bruit de phase) associée à ψ_{osc} (1.20) :

$$S_{\delta\phi}(f) = \frac{S_{\delta\psi}(f)}{n^2} \quad (7.24)$$

A la limite où $f \ll f_r$, on a les simplifications suivantes :

$$S_{\delta a} = \frac{2\pi\Delta f_0}{(Np_0)^2}, \quad S_{\delta\phi} = \frac{8\pi\Delta f_0}{(nr a_g)^2}, \quad \frac{S_{\delta a}}{S_{\delta\phi}} = \left(\frac{\omega_r}{2\nu\Gamma_p}\right)^4 \quad (7.25)$$

La dernière égalité est pratique pour mesurer le produit $\Gamma_p \cdot \nu$ car la mesure des spectres $S_{\delta a}$, $S_{\delta\phi}$ donne simultanément la fréquence de résonance f_r et les valeurs des planchers.

7.2.2. Simulation

A présent, nous voulons vérifier le modèle avec la simulation. Pour cela, on synchronise l'oscillateur à un courant RF via le forçage $\mathcal{D}_{\chi,2}$, en présence de la température. On ajoute le processus gaussien $\mathbf{H}_T(t)$ dans la composition du champ total, vérifiant les propriétés statistiques suivantes [115] :

$$\langle H_T(t) \rangle = 0, \quad \langle H_T(t) \overline{H_T(t)} \rangle = 2D_{m,n} \delta(t - \tau) \quad (7.26)$$

Le coefficient $D_{m,n}$ vérifie :

$$D_{m,n} = \frac{\alpha k_b T}{\gamma_0 \mu_0 V M_s} \quad (7.27)$$

Où α est l'amortissement de la couche libre et les autres constantes déjà définies en (7.13). Précisément, $D_{m,n}$ (en variable \mathbf{m}) ne se transforme en D_n (7.13) (en variable c) que lorsque $\mathcal{B}/\mathcal{A} \rightarrow 0$.

La valeur du processus $\mathbf{H}_T(t)$ à l'instant t est déterminée par une variable aléatoire gaussienne de valeur efficace :

$$H_{T,eff} = \sqrt{\frac{2D_{m,n}}{\Delta t}} \quad (7.28)$$

Avec Δt le pas d'intégration du simulateur ($\Delta t = 10$ fs).

L'objectif est d'obtenir le bruit d'amplitude $S_{\delta a}$ et de phase $S_{\delta\phi}$ de l'oscillateur, en fonction de l'amplitude du signal générateur et de la température. Pour cela, on utilise la même procédure qu'à la section 5.1.3. D'abord, le simulateur fournit l'évolution de $\mathbf{m}(t)$. Ensuite, on extrait $c(t)$ et $\psi_{osc}(t)$ en appliquant numériquement les transformations du formalisme à $\mathbf{m}(t)$ et enfin, on calcul les densités spectrales souhaitées.

7.2.2.1. Evolution avec ε

L'évolution de $S_{\delta a}$, $S_{\delta\phi}$ pour différent ε est montrée à la Figure 7.4.

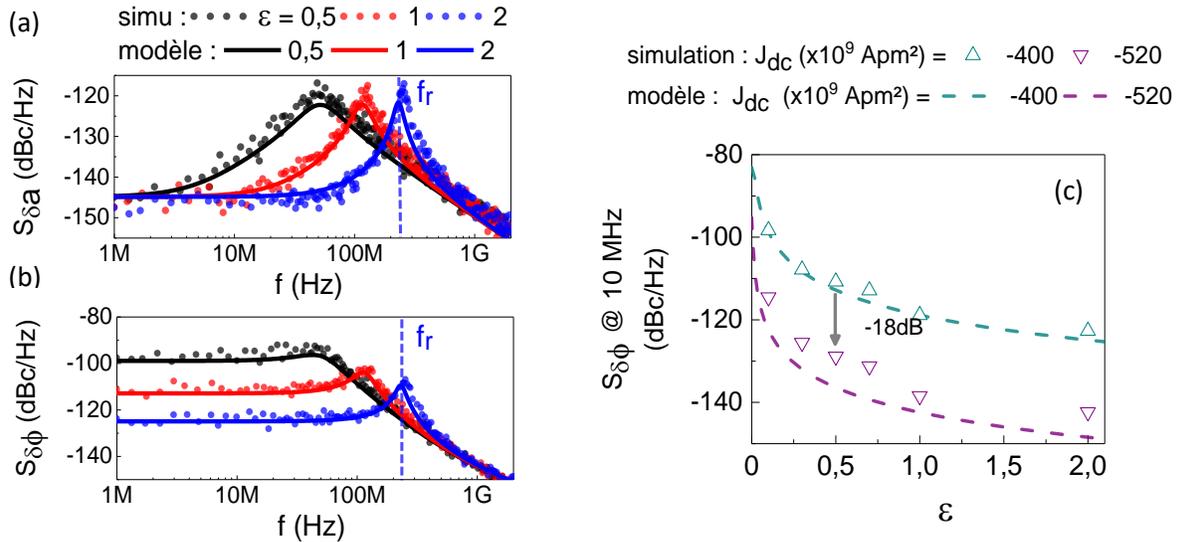


Figure 7.4 Simulation des bruits d'amplitude $S_{\delta a}$ et de phase $S_{\delta\psi}$ à $T = 1\text{K}$ pour le forçage $\mathcal{D}_{X,2}$. (a-b) Comparaison entre simulation et modèle à $J_{dc} = -400 \times 10^9 \text{ A/m}^2$ ($p = 0,0905$, $\zeta \approx 1,07$), $H_{dc} = 400 \text{ Oe}$, $f_0 = 5,968 \text{ GHz}$, $\Delta f_0 = 1,8 \text{ kHz}$ et $\delta = 0$. (c) Evolution de $S_{\delta\phi}$ à $f = 10 \text{ MHz}$ de la porteuse f_0 en fonction de ε et de J_{dc} .

Les figures (a,b) montrent le bon accord du modèle avec les spectres simulés à basse température ($T = 1 \text{ K}$). On retrouve effectivement toutes les caractéristiques prédites par la théorie. Aux fréquences $f \ll f_r$, les bruits d'amplitudes possèdent une même valeur de plancher, indépendamment de la valeur ε . A l'inverse, le plancher des bruits de phase diminue lorsque ε augmente. Enfin, chaque spectre est maximal à la fréquence de résonance f_r puisque la relaxation de l'oscillateur est à chaque fois dans le régime sous critique.

Par ailleurs, la figure (c) montre que si l'amplitude r du forçage augmente alors le bruit de phase diminue, comme attendu. Dans le cas de $\mathcal{D}_{X,2}$, l'amplitude r est proportionnelle à p (4.22) or la puissance est plus forte à $J_{dc} = -520 \times 10^9 \text{ A/m}^2$ ($p = 0,337$) qu'à $J_{dc} = -400 \times 10^9 \text{ A/m}^2$ ($p = 0,090$) donc le bruit de phase doit être plus faible dans le premier cas. On voit qu'il faut atteindre $\varepsilon = 2,0$ dans le cas où $J_{dc} = -400 \times 10^9 \text{ A/m}^2$, pour avoir la même stabilité de phase qu'à $\varepsilon = 0,1$ où $J_{dc} = -520 \times 10^9 \text{ A/m}^2$. On a donc clairement intérêt à jouer à la fois sur l'amplitude du générateur et l'amplitude du forçage pour augmenter la stabilité de la phase.

7.2.2.2. Evolution avec T

L'évolution de $S_{\delta\phi}$ en fonction de la température est montrée à la Figure 5.6.

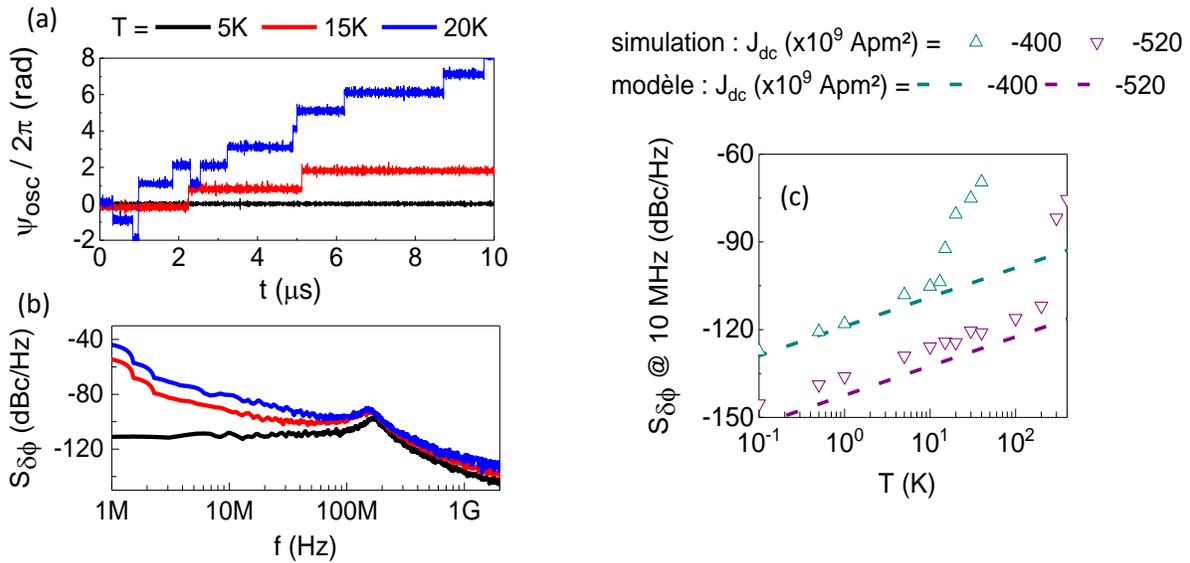


Figure 7.5. Caractérisation de ψ_{osc} en fonction de la température à $\varepsilon = 1$ pour le forçage \mathcal{D}_{χ_2} . Même autres paramètres dynamiques qu'à la figure précédente. (a) Evolution temporelle de ψ_{osc} sur 10 μs . (b) Bruit de phase $S_{\delta\phi}$ associé. (c) Evolution de $S_{\delta\phi}$ à 10 MHz pour : $J_{dc} = -400 \times 10^9$ A/m² et $J_{dc} = -520 \times 10^9$ A/m².

Lorsque la température augmente, l'évolution de ψ_{osc} sur des traces de 10 μs présente des sauts de phase de plus en plus nombreux, voir figure (a). En particulier à l'ordre 2, ces sauts ont une hauteur de $\pm\pi$ car $\psi_{osc}(t)$ possède deux positions d'équilibre stables entre $[0, 2\pi]$. Si l'ordre avait été n , les sauts auraient été de $\pm 2\pi/n$. La conséquence de ces sauts dans le spectre de $S_{\delta\phi}$ est la transformation du bruit blanc en un bruit plus ou moins coloré ($1/f^\alpha$, $0 < \alpha < 2$) dans la gamme $f \ll f_r$, suivant le nombre de sauts (figure (b)). Cette élévation traduit la perte de cohérence de la phase qui ne se trouve plus maintenue au voisinage d'une seule position d'équilibre. On peut voir des exemples de tels spectres dans l'expérience de [83] sur les oscillateurs vortex.

L'évolution de $S_{\delta\phi}$ à $f = 10$ MHz, calculée sur des traces de 10 μs , est illustrée à la figure (c). L'augmentation de la température fait augmenter $S_{\delta\phi}$ via l'augmentation de Δf_0 , jusqu'au moment où la valeur s'écarte du modèle, traduisant l'apparition des sauts de phases. Dans le cas où $J_{dc} = -400 \times 10^9$ A/m², l'apparition des sauts se produit dès $T = 10$ K. C'est un inconvénient car cela veut dire qu'en expérience où $T = 300$ K, il est pratiquement impossible d'exploiter le phénomène de synchronisation car la phase est trop instable. Dans le cas où $J_{dc} = -520 \times 10^9$ A/m², l'augmentation de l'amplitude du forçage permet de mieux la stabiliser, ce qui permet de repousser l'apparition des premiers sauts entre $T = 200$ K et $T = 300$ K. Ainsi, on voit que chercher à diminuer $S_{\delta\phi}$, par exemple en diminuant les amplitudes r ou a_g , est aussi important pour diminuer le nombre de sauts dans l'évolution de ψ_{osc} .

7.3. Conclusion

Nous avons étudié le régime transitoire de l'oscillateur synchronisé, grâce à l'approximation des forçages à valeurs réelles. D'abord, nous avons calculé les paramètres de relaxation : a_{cr} , Γ_{ps} et ω_s du système, qui ont été ensuite appliqués avec succès aux forçages canoniques. Pour les oscillateurs uniformes, il en ressort que la relaxation est de nature sous critique car le seuil a_{cr} est facilement atteignable. Ensuite, ces résultats ont permis ensuite de comprendre la réponse au bruit thermique. Globalement, la stabilisation de la phase et l'immunité aux sauts de phases peut se renforcer soit par la diminution de Δf_0 ou bien soit, quand c'est impossible, par l'augmentation de $\Delta\Omega$ via le produit $r.a_g$. On comprend donc tout l'intérêt de chercher les forçages qui ont les meilleures sensibilités de synchronisation au sens d'un fort produit $r.a_g$.

Chapitre 8. Régime synchronisé avec forte variation de puissance

Le modèle de synchronisation développé jusqu'à présent repose sur la condition de puissance : $p_s \ll p_0$ (modèle « signal faible »). Nous avons vu au chapitre 5 que les amplitudes du générateur requises pour vérifier le modèle varient fortement entre les forçages. Par exemple, elles peuvent être aussi faibles que : $H_g = 5 \times 10^{-2}$ Oe pour $C_{y,1}$ ou encore que : $|\varepsilon| = 1,4 \times 10^{-3}$ pour $\mathcal{D}_{y,1}$. C'est évidemment une forte limitation car le domaine de validité du modèle se limite alors à des faibles valeurs de $\Delta\Omega$ (< 10 MHz). Ce chapitre cherche un moyen d'étendre le modèle universel au cas où la condition $p_s \ll p_0$ ne fonctionne plus. Dans ce cas, la forte puissance synchronisée doit, d'une certaine façon, changer les propriétés de synchronisation, notamment via l'amplitude du forçage qui dépend de p .

La partie 0, établit un nouveau système dynamique au voisinage de p_0 incluant cette fois la dérivée $\partial_p \mathcal{F}(p)$ (modèle « signal fort »). Ensuite, le système est résolu en se limitant seulement aux forçages à valeurs réelles. Cependant, cela ne restreint pas pour autant la portée des résultats car tous les forçages de notre oscillateur sont la plupart du temps de ce type. Dans ce cas, les solutions sont asymétriques avec le désaccord de fréquence δ ce qui les différencie des solutions symétriques de [20]. L'asymétrie dépend à la fois des paramètres du système comme la fonction $\Gamma_p(p)$ et du forçage à travers $\partial_p \mathcal{F}(p)$. La partie 8.2 applique les résultats du modèle aux cas des forçages canoniques et enfin les compare avec la simulation.

8.1. Etude des solutions stationnaires

Dans le cas où la condition $p_s \ll p_0$ ne s'applique plus, le système différentiel (3.32) et ses solutions associées (3.40), (3.46) ne sont plus valables. Pour y remédier, nous allons reprendre le système exact (3.26) et le développer au voisinage de p_0 en incluant cette fois la dérivée partielle du forçage $\partial_p \mathcal{F}(p_0, \psi)$. Pour simplifier les calculs, le système n'est résolu que dans le cas d'un forçage à valeurs réelles. Le fait marquant est que les solutions sont asymétriques. Nous étudions et discutons, en détails, les implications de cette nouvelle propriété.

8.1.1. Système dynamique centré sur p_0

8.1.1.1. Système approché

L'objectif est de dériver un système équivalent à celui de (3.32) mais dans le cas où l'approximation $p_s \ll p_0$ n'est plus valable. En reprenant le système exact (3.26), l'équation de puissance centrée sur p_0 s'écrit :

$$\dot{p}_s = 2(p_0 + p_s) \left(-\Gamma_+(p_0 + p_s) + \Gamma_-(p_0 + p_s) + \mathcal{R}e(\mathcal{F}(p_0 + p_s, \psi)) \right) \quad (8.1)$$

Puis, en développant les fonctions $\Gamma_{\pm}(p)$ et $\mathcal{F}(p)$ au 1^{er} ordre :

$$\begin{aligned} \dot{p}_s = -2(p_0 + p_s) & \left(\Gamma_+(p_0) - \Gamma_-(p_0) + (G_+(p_0) - G_-(p_0))p_s - \mathcal{R}e(\mathcal{F}(p_0, \psi)) \right. \\ & \left. - p_s \mathcal{R}e(\partial_p \mathcal{F}(p_0, \psi)) \right) \end{aligned} \quad (8.2)$$

Soit la forme développée, avec $\Gamma_{\pm}(p_0) = \Gamma_{\pm}(p_0)$:

$$\begin{aligned} \dot{p}_s = -2\Gamma_p(p_0)p_s + 2p_0 \mathcal{R}e(\mathcal{F}(p_0, \psi)) + 2p_0 p_s \mathcal{R}e(\partial_p \mathcal{F}(p_0, \psi)) - 2(G_+(p_0) - G_-(p_0))p_s^2 \\ + 2p_s \mathcal{R}e(\mathcal{F}(p_0, \psi)) + 2p_s^2 \mathcal{R}e(\partial_p \mathcal{F}(p_0, \psi)) \end{aligned} \quad (8.3)$$

Finalement en ne gardant que les termes de plus bas ordre, il vient :

$$\dot{p}_s = -2\Gamma_p(p_0)p_s + 2p_0 \mathcal{R}e(\mathcal{F}(p_0, \psi)) + 2p_0 p_s \mathcal{R}e(\partial_p \mathcal{F}(p_0, \psi)) \quad (8.4)$$

L'équation de phase devient elle :

$$\dot{\psi} = -\delta + n \mathcal{I}m(\mathcal{F}(p_0, \psi)) + n p_s \left(N + \mathcal{I}m(\partial_p \mathcal{F}(p_0, \psi)) \right) \quad (8.5)$$

Et au final :

Equations de synchronisation de 4^{ième} forme :

$$\begin{cases} \dot{p}_s = -2\Gamma_p(p_0)p_s + 2p_0\mathcal{R}e(\mathcal{F}(p_0, \psi)) + 2p_0p_s\mathcal{R}e(\partial_p\mathcal{F}(p_0, \psi)) \\ \dot{\psi} = -\delta + n\mathcal{I}m(\mathcal{F}(p_0, \psi)) + np_s(N + \mathcal{I}m(\partial_p\mathcal{F}(p_0, \psi))) \end{cases} \quad (8.6)$$

Ce système possède la dépendance supplémentaire en $\partial_p\mathcal{F}$, qui intervient à la fois dans les équations de puissance et de phase. Cette contribution traduit la variation de l'amplitude du forçage lorsque la puissance des oscillations change. On remarque que le système obtenu est plus général que le système (3.32), dans la mesure où il tend vers lui quand $\partial_p\mathcal{F}$ s'annule.

8.1.1.2. Système stationnaire

En utilisant la condition de stationnarité : $\dot{p}_s = \dot{\psi} = 0$, p_s s'obtient immédiatement par :

$$p_s = \frac{\mathcal{R}e(\mathcal{F})}{\Gamma_p/p_0 - \mathcal{R}e(\partial_p\mathcal{F})} \quad (8.7)$$

Puis, en substituant (8.7) dans l'équation de phase (8.6), il vient :

$$-\frac{\delta}{n} + \mathcal{I}m(z_v\mathcal{F}) + \frac{p_0\delta}{n\Gamma_p}\mathcal{R}e(\partial_p\mathcal{F}) + \frac{p_0}{\Gamma_p}(\mathcal{R}e(\mathcal{F})\mathcal{I}m(\partial_p\mathcal{F}) - \mathcal{I}m(\mathcal{F})\mathcal{R}e(\partial_p\mathcal{F})) = 0 \quad (8.8)$$

La solution stationnaire de puissance est déterminée par l'expression (8.7), tandis la solution de phase s'obtient en résolvant l'équation (8.8). En particulier, l'équation de phase est beaucoup plus compliquée à résoudre que l'équation d'Adler (3.39) vu précédemment. La seule façon d'aller plus loin est de trouver l'hypothèse qui peut la simplifier.

En réalité, nous n'avons pas besoin de savoir la résoudre dans tous les cas de forçages. En effet dans le cas de notre oscillateur, tous les forçages se confondent à des forçages à valeurs réelles. En choisissant ce type, l'équation peut se simplifier et être résolue. La résolution est détaillée à la section suivante.

8.1.2. Solutions stationnaires

Soit le forçage à valeurs réelles défini par :

$$\mathcal{F}(p, \psi) = a_g r(p) \cos(\psi - \theta(p)) \quad (8.9)$$

$a_g > 0$ est l'amplitude du signal générateur, $r(p) > 0$ l'amplitude et $\theta(p) \in [0, 2\pi]$ l'orientation du forçage.

8.1.2.1. Résolution

Avec le forçage (8.9), l'équation de phase (8.8) peut se simplifier car son dernier terme vaut 0 ($Im(\mathcal{F}) = Im(\partial_p \mathcal{F}) = 0$). Donc, il vient :

$$Im(z_v \mathcal{F}) + \frac{p_0 \delta}{n \Gamma_p} \mathcal{R}e(\partial_p \mathcal{F}) - \frac{\delta}{n} = 0 \quad (8.10)$$

Soit de façon explicite :

$$v a r \cos(\psi - \theta) + \frac{p_0 \delta a_g \partial_p r \cos(\psi - \theta)}{n \Gamma_p} - \frac{\delta}{n} = 0 \quad (8.11)$$

C'est-à-dire :

$$\cos(\psi - \theta) = \frac{\delta}{n v a_g r \left(1 + \frac{\partial_p r}{n N r} \delta\right)} \quad (8.12)$$

La solution de phase devient alors :

$$\psi = \arcsin\left(-\frac{\delta}{n |v| a_g r \left(1 + \frac{\partial_p r}{n N r} \delta\right)}\right) + \operatorname{sgn}(N) \frac{\pi}{2} + \theta + 2m\pi, \quad m \in \mathbb{Z} \quad (8.13)$$

En injectant la solution (8.13) dans l'expression (8.7), on obtient aussi la solution de puissance. Les solutions stationnaires sont alors :

Propriété 8.1 : Soit le forçage à valeurs réelles : $\mathcal{F}(p) = a_g r(p) \cos(\psi - \theta(p))$, les solutions sont données par :

$$\begin{cases} \psi = \arcsin\left(-\frac{\delta}{\Delta\Omega(\delta)}\right) + \operatorname{sgn}(N) \frac{\pi}{2} - \theta + 2m\pi, \quad m \in \mathbb{Z} \\ p_s = \frac{\delta}{nN} \end{cases} \quad (8.14)$$

Avec : $\Delta\Omega(\delta) = \Delta\Omega_0 \left(1 + \frac{\partial_p r}{n N r} \delta\right)$, $\Delta\Omega_0 = n |v| a_g r$

Comparée à la solution (3.92), la nouvelle diffère seulement par l'expression de la phase. En particulier, l'expression est à présent de la forme $\arcsin(\delta/\Delta\Omega(\delta))$, avec la fonction affine $\Delta\Omega(\delta) : \Delta\Omega(\delta) = a + b\delta$ $a, b \in \mathbb{Z}$. Comme le terme en arcsin n'est plus impair avec le désaccord de fréquence δ , la gamme de synchronisation devient asymétrique, ce qui est une nouvelle caractéristique. Par ailleurs si $\partial_p r = 0$, la solution (8.14) tend bien vers la solution (3.92) avec $\Delta\Omega = \Delta\Omega_0$.

Dans le modèle proposé, la nature asymétrique est uniquement causée par le fait que $\partial_p r \neq 0$, peu importe l'amplitude du forçage ou celle du signal générateur. C'est en réalité un peu réducteur car il peut y avoir d'autres causes d'asymétrie. Par exemple, N peut dépendre aussi de p . De façon résumée, on retiendra que le modèle n'est rigoureusement valable que si la seule source de variation avec p vient du forçage.

Les sections suivantes 8.1.2.2,3 sont consacrées à l'étude générale des solutions. Les limites supérieures ($\delta > 0$) et inférieures ($\delta < 0$) des gammes $\Delta\Omega$ et $\Delta\Pi$ sont notées $\Delta\Omega_{\pm}$ et $\Delta\Pi_{\pm}$.

8.1.2.2. Asymétrie de pente

La première conséquence de la solution (8.14) est de rendre la synchronisation asymétrique (appelée asymétrie « de pente »). L'asymétrie est causée par le terme $\partial_p \mathcal{F}(p_0, \psi) \neq 0$, qui modifie l'amplitude du forçage selon p_s , étendant la gamme de synchronisation d'un côté plutôt qu'un autre suivant le signe de la dérivée.

- *Calcul des limites :*

Les limites sont atteintes lorsque l'argument de arcsin vaut ± 1 , c'est-à-dire quand δ vérifie :

$$-\frac{\delta}{\Delta\Omega(\delta)} = \pm 1 \quad (8.15)$$

Soit en injectant la fonction $\Delta\Omega(\delta)$ (8.14) dans (8.15) :

$$\Delta\Omega_{\pm} = \frac{\pm\Delta\Omega_0}{1 \mp \frac{\text{sgn}(N)p_0 a_g \partial_p r}{\Gamma_p}} \quad (8.16)$$

Selon la limite considérée $\Delta\Omega_+$ ou $\Delta\Omega_-$, la correction est différente ce qui crée l'asymétrie.

L'expression (8.16) suggère de définir la nouvelle quantité suivante :

Définition 8.1 : Le taux d'asymétrie du forçage est défini par :

$$t_a = \text{sgn}(N) \frac{a_g p_0 \partial_p r}{\Gamma_p} \quad (8.17)$$

Et la sensibilité d'asymétrie par :

$$C_a = t_a / a_g \quad (8.18)$$

Le taux t_a et la sensibilité associée C_a ont l'avantage de rassembler toute l'information asymétrique de la synchronisation. En particulier, la sensibilité C_a dépend de deux types de quantités : D'abord, elle dépend des paramètres dynamiques du système via $\text{sgn}(N)p_0/\Gamma_p$. Puis, elle dépend aussi des paramètres du forçage à travers la dérivée $\partial_{p,r}$. Précisément, la relation est linéaire de sorte que C_a est nulle si et seulement si $\partial_{p,r}$ l'est. Le terme $\partial_{p,r}$ est donc la quantité fondamentale qui gouverne l'asymétrie. Par ailleurs, t_a ou C_a sont des grandeurs signées dont le signe dépend de celui de N et de $\partial_{p,r}$. Lorsque $C_a > 0$, nous dirons que l'asymétrie est positive. Dans ce cas, l'extrémité supérieure $\Delta\Omega_+$ (inférieure $\Delta\Omega_-$) de la gamme de synchronisation est plus grande (plus petite) que dans le cas symétrique. A l'inverse, lorsque $C_a < 0$, l'asymétrie est négative et le contraire se produit.

Il est possible de donner une signification physique au sens de variation. Par exemple si $N > 0$, on sait que la puissance synchronisée va augmenter avec δ . Si en plus $\partial_{p,r} > 0$, alors l'amplitude du forçage augmente avec la puissance, qui augmente avec δ . Dans ce cas, la synchronisation ne peut être qu'asymétriquement positive car l'augmentation de δ renforce le forçage ce qui provoque l'extension de $\Delta\Omega_+$ et le rétrécissement de $\Delta\Omega_-$. De la même façon, on peut intuitiver le signe de l'asymétrie quelque soit le signe de $\partial_{p,r}$ ou de N .

Nous explicitons les limites en fonction de t_a . Avec la définition 8.1, les limites (8.16) se réécrivent :

$$\Delta\Omega_{\pm} = \frac{\pm\Delta\Omega_0}{1 \mp t_a} \quad (8.19)$$

L'expression montre de façon claire que les limites ne sont plus égales à $\Delta\Omega_0$, à cause de la présence du taux t_a . En particulier, plus le taux t_a est fort et plus l'asymétrie est forte.

Deux cas se présentent :

Cas N°1 : Lorsque $a_g \ll 1$, le taux vérifie $|t_a| \ll 1$. Ainsi, l'expression (8.16) se simplifie au 1^{er} ordre en :

$$\Delta\Omega_{\pm} \approx \pm\Delta\Omega_0(1 \pm t_a) \quad (8.20)$$

Dans ce cas, t_a est équivalent au taux $t_{a,exp}$ introduit en (5.4) :

$$t_a \approx t_{a,exp} = \frac{\Delta\Omega_0 - |\Delta\Omega_+|}{\Delta\Omega_0} = \frac{\Delta\Omega_0 - |\Delta\Omega_-|}{\Delta\Omega_0} \quad (8.21)$$

Le taux t_a apparaît, tout comme $t_{a,exp}$, être l'erreur relative des limites asymétriques $\Delta\Omega_{\pm}$ par rapport à la gamme $\Delta\Omega_0$. Il devient alors possible d'explicitier $t_{a,exp}$ en fonction des paramètres généraux du forçage et du système. On note que c'est seulement dans ce cas où $|t_a| \ll 1$ que la correction est identique pour les deux côtés. Par exemple, si $t_a = +1\%$ et $\Delta\Omega_0 = 100$ MHz, alors $\Delta\Omega_+ = 101$ MHz et $\Delta\Omega_- = 99$ MHz.

Cas N°2 : En revanche dans le cas général, la correction n'est pas la même des deux côtés. L'un est plus fortement modifié que l'autre. L'introduction des fonctions d'erreurs relatives Err_{\pm} permettent de mieux comprendre le rôle joué par t_a :

$$Err_{\pm} = \frac{\Delta\Omega_0 - |\Delta\Omega_{\pm}|}{\Delta\Omega_0} = \mp \frac{t_a}{1 \mp t_a} \quad (8.22)$$

Par exemple, si $t_a = +1\%$ et $\Delta\Omega_0 = 100$ MHz, alors les limites asymétriques deviennent plus précisément : $\Delta\Omega_+ = 101,01$ MHz et $\Delta\Omega_- = 99,01$ MHz. Cette différence de correction devient de plus en plus significative si t_a augmente.

- *Calcul de la gamme complète :*

On peut définir plus généralement la gamme complète $\Delta\Omega$ par :

$$\Delta\Omega = \frac{|\Delta\Omega_+| + |\Delta\Omega_-|}{2} \quad (8.23)$$

Soit avec l'expression (8.19) :

$$\Delta\Omega = \frac{\Delta\Omega_0}{1 - t_a^2} \quad (8.24)$$

Et au premier ordre si $|t_a| \ll 1$:

$$\Delta\Omega \simeq \Delta\Omega_0(1 + t_a^2) \quad (8.25)$$

Du fait de la correction inégale des limites, $\Delta\Omega$ doit augmenter à mesure que t_a augmente comme le montre cette dernière expression. Au passage, puisque $\Delta\Omega$ n'est plus linéaire en α , la sensibilité $C_{\Omega} = \Delta\Omega/\alpha_g$ ne peut plus s'appliquer en tant que telle.

On va se pencher, à présent, sur un second type d'asymétrie qui peut se produire aussi dans nos oscillateurs.

8.1.2.3. Asymétrie de saturation de la puissance

Il se peut que l'amplitude du signal générateur soit si forte que la variation p_s diminue jusqu'à la fermeture complète de l'orbite. Si l'amplitude augmente au-delà, le système se désynchronise, limitant partiellement l'extension de $\Delta\Omega$. Nous cherchons à calculer la valeur de ce seuil. En principe, le modèle « signal faible » peut la fournir car nous cherchons simplement à ce que la puissance minimale synchronisée s'annule. Cependant en prenant en compte le terme $\partial_p r$, il est possible de donner une valeur plus précise, calculée ci-dessous.

D'abord, les limites $\Delta\Pi_{\pm}$ de la solution de puissance s'obtiennent facilement avec les fréquences $\Delta\Omega_{\pm}$:

$$\Delta\Pi_{\pm} = \frac{-\Delta\Omega_{\pm}}{n|N|} = \frac{\mp\Delta\Pi_0}{1 \mp t_a} \quad (8.26)$$

Si $N < 0$, la saturation n'arrive qu'aux désaccords de fréquences positives. A la limite de la saturation, la puissance vérifie :

$$\Delta\Pi_{+} = \frac{-\Delta\Omega_{+}}{n|N|} = -p_0 \quad (8.27)$$

En injectant l'expression (8.19) de $\Delta\Omega_{+}$, le seuil d'amplitude vérifie :

$$a_{sat} = \frac{p_0}{C_{\Pi} + p_0 C_a} = \frac{a_{sat,0}}{1 + a_{sat,0} C_a} \quad (8.28)$$

Où $a_{sat,0}$, est l'amplitude de saturation lorsque $\partial_p r = 0$, définit par :

$$a_{sat,0} = \frac{p_0}{C_{\Pi}} = \frac{2\Gamma_p}{r} \quad (8.29)$$

D'après (8.29), l'amplitude de saturation a_{sat} dépend de la sensibilité d'asymétrie C_a et de $a_{sat,0}$. L'amplitude a_{sat} peut être plus grande ou plus petite que $a_{sat,0}$, suivant le signe de $\partial_p r$. Par exemple, si $\partial_p r > 0$ et $N < 0$ alors $C_a < 0$ et donc $a_{sat} > a_{sat,0}$. En effet, la limite supérieure $\Delta\Omega_{+}$ est plus petite que la valeur du cas symétrique $\Delta\Omega_0$, c'est pourquoi il faut que a_{sat} soit plus forte que $a_{sat,0}$ pour compenser la diminution³⁹. Lorsque le seuil d'amplitude est atteint, le système se désynchronise. Dans ce cas, une asymétrie supplémentaire se crée car d'un côté l'extension de $\Delta\Omega_{+}$ stoppe avec a alors que de l'autre $\Delta\Omega_{-}$ peut encore augmenter⁴⁰.

En pratique, le seuil s'observe d'autant plus facilement que la puissance de synchronisation est proche de 0. Par ailleurs, il s'observe aussi plus facilement chez les forçages conservatifs que dissipatifs, car l'amplitude des premiers est de plusieurs ordres de grandeurs supérieurs à celle des seconds.

Pour terminer, la section suivante cherche à préciser la notion de signal faible, en se servant du taux d'asymétrie introduit au cours de l'étude.

8.1.3. Condition de signal faible

Précédemment, nous avons défini un signal générateur d'amplitude faible si le taux d'asymétrie $t_{a,exp}$ est faible aussi, voir propriété 5.1. Or ce taux n'est pas autre chose que le taux t_a , dont l'expression dépend

³⁹ On peut définir aussi $t_{a,sat}$ (le taux d'asymétrie à saturation) qui s'écrit : $t_{a,sat} = p_0 / (C_{\Pi}/C_a + p_0)$

⁴⁰ Potentiellement, la limite opposée $\Delta\Omega_{-}$ peut grandir jusqu' à ce que la puissance atteigne p_{opp} (voir plus). Néanmoins, l'amplitude a est dans ce cas si forte que la théorie présentée ici ne s'applique plus. Pour cela, nous ne pouvons pas savoir ce qui se passe de l'autre côté.

des paramètres du forçage, du système et de l'amplitude du signal. Il devient alors possible de donner un critère plus quantitatif sur l'amplitude.

En explicitant t_a dans la propriété 5.1, la condition devient :

$$|t_a| = |a_g C_a| \ll 1 \quad (8.30)$$

Soit la condition sur l'amplitude a_g :

Propriété 8.2 : Le signal RF est considéré faible si l'amplitude a_g vérifie : $a_g \ll \frac{1}{|C_a|}$

La notion de faible amplitude est donc conditionnée par la sensibilité asymétrique, qui dépend du forçage et du système. En particulier si $C_a = 0$, comme pour le forçage $Ca_{x,2}$, n'importe quelle amplitude de signal peut être considérée comme faible car la synchronisation n'a pas d'asymétrie de pente. De façon générale, la condition permet de connaître, pour n'importe quel forçage, l'amplitude $a_{g,lim} = t_{a,lim} / C_a$ associée à un taux d'asymétrie limite $t_{a,lim}$ fixé (par ex : $t_{a,lim} = 1\%$ ou $0,1\%$). Un avantage pratique est que cela permet de pouvoir contrôler l'erreur entre le « modèle signal faible » et la simulation.

○ *En résumé*

Cette partie a montré qu'en incluant le terme de premier ordre $\partial_p \mathcal{F}(p_0, \psi)$ dans la dynamique, il est possible d'obtenir de nouvelles équations de synchronisation, qui génèrent des solutions asymétriques avec la fréquence. La grandeur centrale est le taux d'asymétrie t_a (ou la sensibilité C_a) qui caractérise tout le contenu asymétrique de la synchronisation. Ces solutions permettent de prédire deux types d'asymétries : 1) La plus importante est l'asymétrie de pente. Elle est intrinsèque aux forçages dès lors que $\partial_p \mathcal{F}(p_0, \psi) \neq 0$, ce qui arrive dans la plupart des cas. Elle traduit le fait que l'amplitude du forçage varie avec la puissance à cause du terme $\partial_p \mathcal{F}(p_0, \psi)$. 2) Il y a aussi l'asymétrie de saturation. Elle se produit quand la variation de p_s est si forte que la puissance des oscillations s'annule, restreignant l'extension d'un des côtés de $\Delta\Omega$. Enfin, puisque le taux t_a caractérise l'asymétrie de la synchronisation, il peut se révéler aussi utile pour préciser la notion de signal générateur de faible amplitude.

8.2. Application aux forçages canoniques à valeurs réelles

L'objectif est d'appliquer le modèle « signal fort » au cas concret des forçages canoniques simplifiés dans leurs formes réelles. La section 8.2.1 commence par discuter les variations de toutes les sensibilités asymétriques. Ensuite, la section 8.2.2 compare les prédictions du modèle avec la simulation lorsque l'amplitude du signal augmente, à puissance fixée.

8.2.1. Expressions de C_a

La sensibilité asymétrique (8.18) appliquée aux forçages canoniques à valeurs réelles (4.42) s'écrit :

$$C_a = \text{sgn}(N) \frac{k \rho_i p_0 \partial_p r(p)}{2\Gamma_p} \quad (8.31)$$

$r(p)$ est l'amplitude des forçages du tableau 4.5. Les autres quantités ont la même signification qu'en (4.42). Les facteurs $\partial_p r$ à tous les ordres sont listés dans le tableau 8.1 suivant.

Forçages	$\partial_p r \left(\frac{B}{\mathcal{A}}, p \right) =$	
$Ca_{y,1}$	$-\left(\frac{\sqrt{1+g\left(\frac{B}{\mathcal{A}}\right)} - \text{Sign}\left(\frac{B}{\mathcal{A}}\right)\sqrt{1-g\left(\frac{B}{\mathcal{A}}\right)}}{g\left(\frac{B}{\mathcal{A}}\right)} \right) \left(\frac{1+p}{4\sqrt{2} p^{3/2}} \right)$	(8.32)
$Ca_{z,1}$	$-\left(\frac{\sqrt{1+g\left(\frac{B}{\mathcal{A}}\right)} + \text{Sign}\left(\frac{B}{\mathcal{A}}\right)\sqrt{1-g\left(\frac{B}{\mathcal{A}}\right)}}{g\left(\frac{B}{\mathcal{A}}\right)} \right) \left(\frac{1+p}{4\sqrt{2} p^{3/2}} \right)$	(8.33)
$Ca_{x,2}$	0	(8.34)
$Ca_{y,3}$	$\left(\frac{\sqrt{1+g(B/\mathcal{A})} - \text{Sign}(B/\mathcal{A})\sqrt{1-g(B/\mathcal{A})}}{g(B/\mathcal{A})} \right) \frac{ B/\mathcal{A} }{4\sqrt{2}p}$	(8.35)
$Ca_{z,3}$	$\left(\frac{\sqrt{1+g(B/\mathcal{A})} + \text{Sign}(B/\mathcal{A})\sqrt{1-g(B/\mathcal{A})}}{g(B/\mathcal{A})} \right) \frac{ B/\mathcal{A} }{4\sqrt{2}p}$	(8.36)
$Da_{y,1}$	$-\left(\frac{\sqrt{1+g\left(\frac{B}{\mathcal{A}}\right)} + \text{Sign}\left(\frac{B}{\mathcal{A}}\right)\sqrt{1-g\left(\frac{B}{\mathcal{A}}\right)}}{g\left(\frac{B}{\mathcal{A}}\right)} \right) \left(\frac{1+3\left(1-\frac{B}{\mathcal{A}}\right)p-3\left(2-3\frac{B}{\mathcal{A}}+\left(\frac{B}{\mathcal{A}}\right)^2\right)p^2}{4\sqrt{2} p^{3/2}} \right)$	(8.37)
$Da_{z,1}$	$-\left(\frac{\sqrt{1+g\left(\frac{B}{\mathcal{A}}\right)} - \text{Sign}\left(\frac{B}{\mathcal{A}}\right)\sqrt{1-g\left(\frac{B}{\mathcal{A}}\right)}}{g\left(\frac{B}{\mathcal{A}}\right)} \right) \left(\frac{1+3\left(1+\frac{B}{\mathcal{A}}\right)p-3\left(2+3\frac{B}{\mathcal{A}}+\left(\frac{B}{\mathcal{A}}\right)^2\right)p^2}{4\sqrt{2} p^{3/2}} \right)$	(8.38)
Dx_{2}	$ B/\mathcal{A} $	(8.39)
$Dy_{,3}$	$\left(\sqrt{\left(1+g\left(\frac{B}{\mathcal{A}}\right)\right)} - \text{Sign}\left(\frac{B}{\mathcal{A}}\right)\sqrt{\left(1-g\left(\frac{B}{\mathcal{A}}\right)\right)} \right) \frac{3 B/\mathcal{A} }{4\sqrt{2}} \sqrt{p}$	(8.40)
$Dz_{,3}$	$\left(\sqrt{\left(1+g\left(\frac{B}{\mathcal{A}}\right)\right)} + \text{Sign}\left(\frac{B}{\mathcal{A}}\right)\sqrt{\left(1-g\left(\frac{B}{\mathcal{A}}\right)\right)} \right) \frac{3 B/\mathcal{A} }{4\sqrt{2}} \sqrt{p}$	(8.41)

Tableau 8.1. Expressions de $\partial_p r(p)$. Rappel : $Dx_{2} = Da_{x,2}$, $Dy_{,3} = Da_{y,3}$, $Dz_{,3} = Da_{z,3}$ car ces forçages sont exactement rectilignes.

A titre d'exemple, la Figure 8.1 montre les différentes sensibilités C_a des forçages ainsi que quelques amplitudes caractéristiques du forçage $Ca_{y,1}$ obtenues à l'aide de (8.28) et (8.31).

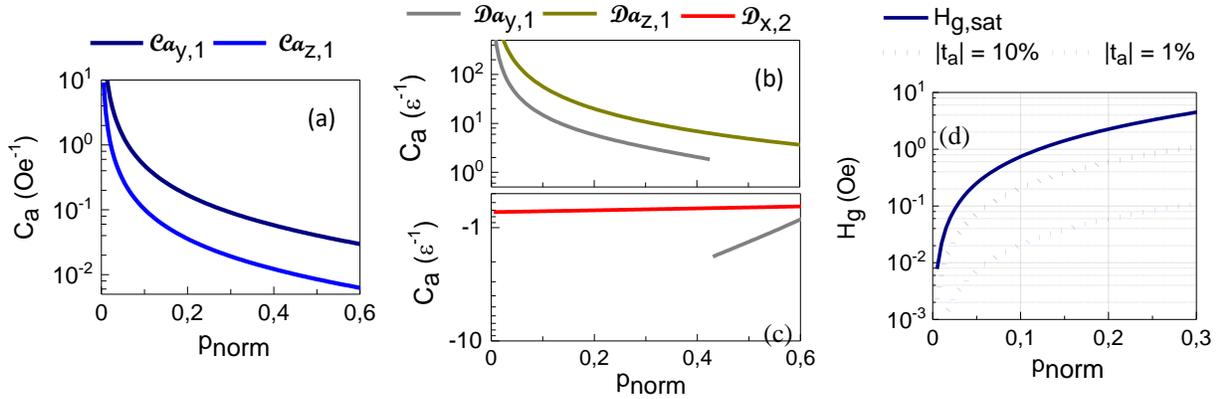


Figure 8.1. Sensibilités asymétriques des forçages canoniques à valeurs réelles. (a-c) Evolution des sensibilités C_a avec la puissance normalisée p_{norm} tel que : $0 < p_{norm} < 0.6$ ($|J_{cr}| = 375 \times 10^9$ A/m² < $|J_{dc}| < 486 \times 10^9$ A/m²). Par exemple : si $p_{norm} = 0,2$, $C_a \approx 0.18$ Oe⁻¹ pour le forçage $Ca_{y,1}$ donc $t_a \approx 180\%$ si $|H_g| = 1$ Oe. (d) Amplitudes de champ limite de $Ca_{y,1}$ selon p_{norm} tel que : $0 < p_{norm} < 0,3$ ($|J_{cr}| = 375 \times 10^9$ A/m² < $|J_{dc}| < 420 \times 10^9$ A/m²).

De façon générale, toutes les sensibilités C_a à l'ordre 1 divergent lorsque p_{norm} tend vers 0, ce qui entraîne une asymétrie de pente infiniment grande. Dans ce cas, le modèle « signal faible » est plus difficile à vérifier car il ne fonctionne que pour des gammes de synchronisation très faibles. En revanche quand p_{norm} augmente, C_a diminue et la courbe se régularise. Dans ce cas, le modèle « signal faible » fonctionne de mieux en mieux avec des signaux générateurs d'amplitudes plus fortes. Le cas $Da_{y,1}$ est encore une fois particulier. En plus de diminuer, C_a change de signe après la transition d'ellipticité.

A l'ordre 2, les comportements sont plus simples. Comme la dérivée $\partial_{p,r}$ du forçage $Ca_{x,2}$ est nulle, ce forçage ne génère pas de synchronisation symétrique, tant que l'amplitude du signal générateur ne fait pas saturer la puissance. En revanche, la sensibilité C_a du forçage $D_{x,2}$ existe mais est quasi constante avec la puissance. La déviation est causée par les facteurs $\Gamma_p(p)/p_0$, voir (8.31).

A l'aide des sensibilités C_a et de la formule (8.28), il est possible aussi de calculer toutes les amplitudes remarquables d'un forçage : par exemple l'amplitude à un taux d'asymétrie fixé ou bien l'amplitude à saturation. La Figure 8.1 (d) montre l'exemple du forçage $Ca_{y,1}$. Entre autres, on retrouve les ordres de grandeur de l'amplitude H_g qui ont servi à l'étude comparative des solutions stationnaires, voir section 5.3.2. Le modèle confirme qu'à $J_{dc} = 400 \times 10^9$ A/m² ($p_{norm} \approx 0,18$), l'amplitude $H_g = 0,05$ Oe correspond bien à un taux d'asymétrie de 1%. Cela est en effet inférieur au critère de comparaison expérimental que nous avons fixé à 3-4%.

8.2.2. Modèle vs simulation

On va commencer par vérifier l'asymétrie de pente à travers la synchronisation du forçage \mathcal{D}_{x_2} sous courant. En particulier, le modèle est remarquablement vérifié, même pour des amplitudes J_g comparables à J_{dc} . Ensuite, on vérifie l'asymétrie de saturation à travers la synchronisation de $\mathcal{C}a_{x_2}$ sous champ et enfin, on termine par discuter le cas des autres forçages canoniques.

8.2.2.1. Cas du forçage \mathcal{D}_{x_2}

Le forçage le plus adapté pour vérifier l'asymétrie de pente est le forçage \mathcal{D}_{x_2} car il est déjà à valeurs réelles sans approximation. Le modèle « signal fort » doit donc, en principe, très bien concorder avec la simulation. Dans cette étude, le système est synchronisé via \mathcal{D}_{x_2} avec un courant RF dont l'amplitude est variable. La Figure 8.2 montre l'évolution de la gamme de synchronisation, de ses limites ainsi qu'un exemple de solutions stationnaires.

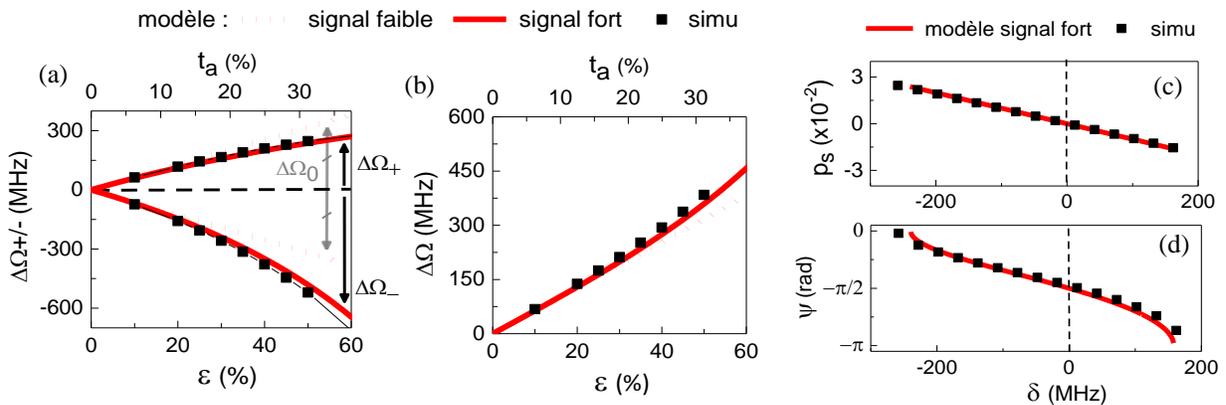


Figure 8.2. Comparaison du modèle « signal fort » avec la simulation dans le cas du forçage \mathcal{D}_{x_2} . Conditions du régime libre : $H_{dc} = 400$ Oe, $J_{dc} = -400 \times 10^9$ A/m² ($\zeta \approx 1,07$, $p = 0,0905$, $p_n = 0,173$), $f_0 = 5.968$ GHz, $\nu(p) = -22$. Sensibilité d'asymétrie : $C_a = -0,681$. (a) Limites $\Delta\Omega_{\pm}$. Diagramme connu aussi sous le nom de « langue d'Arnold ». (b) Evolution de $\Delta\Omega$ en fonction de l'amplitude $\varepsilon = J_g/J_{dc}$. (c-d) Solutions stationnaires pris à $\varepsilon = -0,3$ ($t_a = -0,204$).

La simulation confirme clairement le comportement asymétrique du forçage et les prédictions du modèle. L'asymétrie est négative ($C_a < 0$), donc la limite inférieure est plus forte et la limite supérieure moins forte, que celles du cas symétrique, voir Figure 8.2 (a). Par ailleurs, la simulation confirme que la correction est inégale suivant la limite considérée. Par exemple pour $\varepsilon = 0,5$, l'écart $|\Delta\Omega_+ - \Delta\Omega_0| = 112$ MHz est effectivement différent à $||\Delta\Omega_-| - \Delta\Omega_0| = 162$ MHz. Ce même effet se voit aussi par l'augmentation de la gamme de synchronisation complète $\Delta\Omega$, voir Figure 8.2 (b). Enfin, l'accord de la simulation avec le modèle se traduit de façon remarquable avec les solutions stationnaires, voir Figure 8.2 (c-d). Toutes les caractéristiques fines comme l'allure de la puissance ou le déphasage additionnel sont correctement prédites.

Nous voulons savoir les limites du modèle « signal fort » et en particulier répondre à la question suivante : Jusqu'à quelles amplitudes faut-il augmenter le signal pour que la simulation diffère du modèle ? La Figure 8.3 donne un élément de réponse.

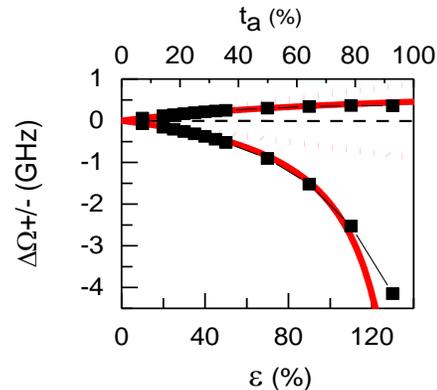


Figure 8.3. Evolution de la gamme de synchronisation sous très forte amplitude. Mêmes conditions de régime libre qu'à la Figure 8.2.

La première valeur d'amplitude qui montre un écart significatif est $\varepsilon = 1,3$. En ce point, l'extrémité $\Delta\Omega_+$ est encore correcte mais l'extrémité $\Delta\Omega_-$ n'est pas aussi forte que prévu. L'explication doit se trouver hors du cadre du modèle car pour ce forçage il n'y a pas de terme de dérivée seconde $\partial^2_p F(\rho_0, \psi)$. En regardant de plus près, le système se désynchronise sans raison apparente. Une raison possible est peut-être que la limite $\Delta\Omega_-$ est si basse que la fréquence du signal s'approche de l'harmonique 1, perturbant ainsi le système.

A part cela, la correspondance simulation/modèle est encore tout à fait bonne. Le modèle reste correct, même pour des valeurs de courant J_g voisines de J_{dc} (voir les cas : $\varepsilon = 0,9$ ou $\varepsilon = 1,1$). Ce résultat est à la fois remarquable et contre intuitif car le phénomène de synchronisation se discute souvent lorsque le signal RF est faible devant les grandeurs dynamiques d'un système, voir [12]. Une explication possible serait la spécificité de l'équation LLGS, qui décrit exactement la synchronisation par une résonance de type paramétrique entre le signal générateur et un couple résonant. C'est peut-être cette absence d'approximation qui rend si bien valable le modèle aux signaux forts.

8.2.2.2. Cas du forçage $Ca_{x,2}$

Le forçage $Ca_{x,2}$ permet au contraire d'étudier l'asymétrie de saturation car il n'a pas d'asymétrie de pente. La Figure 8.4 montre l'évolution de la gamme de synchronisation.

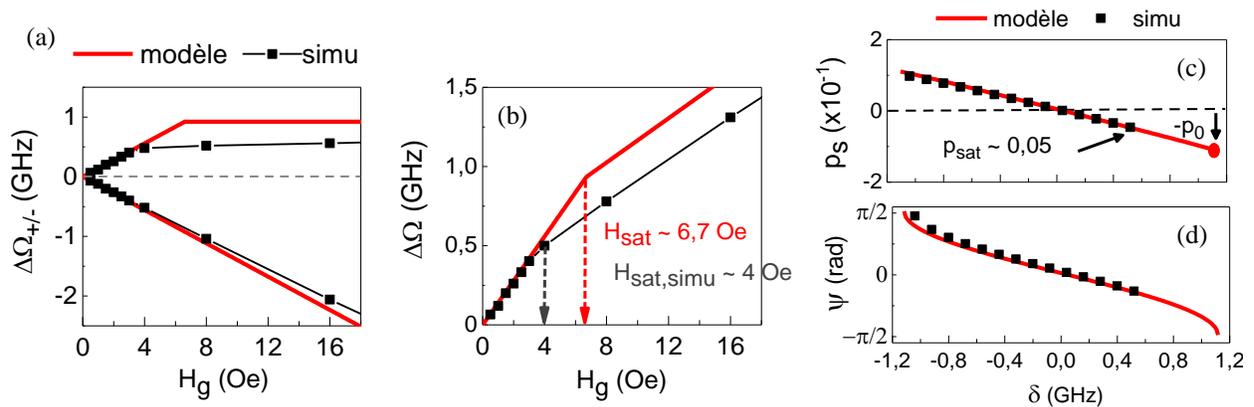


Figure 8.4. Comparaison du modèle « signal fort » avec la simulation dans le cas du forçage C_{x2} . Conditions de régime libre qu'à la Figure 8.2. (a) Evolution des limites $\Delta\Omega_{\pm}$ avec l'amplitude H_g . (b) de $\Delta\Omega$. (c) Solutions stationnaires pris à $H_g = 8$ Oe.

On distingue deux régimes de fonctionnement différents suivant l'amplitude H_g . Lorsque $H_g < 4$ Oe, la synchronisation du système simulé est symétrique, comme attendu. Dans ce cas, la gamme $\Delta\Omega$ est linéaire avec H_g ($C_{\Omega} \approx 140$ MHz/Oe) et les deux extrémités $\Delta\Omega_+$ et $\Delta\Omega_-$ sont égales en valeurs absolues. En revanche lorsque $H_g > 4$ Oe, la synchronisation est suffisamment forte pour saturer la puissance, ce qui provoque l'asymétrie de saturation, décrit à la section 8.1.2.3. Une conséquence est que le taux de croissance de $\Delta\Omega$ est divisé par 2 ($C_{\Omega} = 63 \pm 15$ MHz/Oe) car la limite positive $\Delta\Omega_+$ sature tandis que l'autre limite $\Delta\Omega_-$ est libre de croître, voir Figure 8.4 (a-b). Par ailleurs, $\Delta\Omega_-$ croît encore linéairement avec la puissance ce qui confirme l'absence d'asymétrie de pente de ce forçage.

Cependant bien que la saturation du système soit attendue, elle se produit dans ce cas trop tôt. Précisément, la théorie la prédit seulement à partir de 6,7 Oe, soit 2,7 Oe de plus qu'en réalité. Si la saturation de $\Delta\Omega_-$ arrive trop tôt, c'est que la puissance synchronisée sature aussi trop tôt, voir Figure 8.4 (c-d). La solution de puissance confirme que la désynchronisation se produit avant que la puissance de synchronisation s'annule (c.à.d. $p_s = p_0$). Cette puissance saturante semble être une constante, du moins avec l'amplitude, car aucune valeur plus forte de H_g ($H_g = 16, 28, 40, 60$ Oe) semble pouvoir la changer. Une explication possible est qu'en diminuant la puissance synchronisée, les termes non résonants de la dynamique deviennent relativement forts pour désynchroniser le système.

Le forçage Ca_{x2} conduit donc effectivement à l'asymétrie de saturation si l'amplitude est suffisamment forte. Cependant le seuil observé est inférieur à celui prédit. Cela peut être causé par la présence d'autres termes que le modèle n'inclus pas. Ainsi pour ce type d'asymétrie, la simulation ne confirme que partiellement la théorie.

8.2.2.3. Cas généraux

Plus généralement, la Figure 8.5 montre l'évolution de la gamme de synchronisation pour tous les forçages d'ordres 1 et 2. On compare les limites $\Delta\Omega_{\pm}$ obtenues par simulation avec celles données par

les deux modèles : signal faible et signal fort et donne les limites $\Delta H_{+/-}$ d'hystérésis mesurées pour chaque forçage.

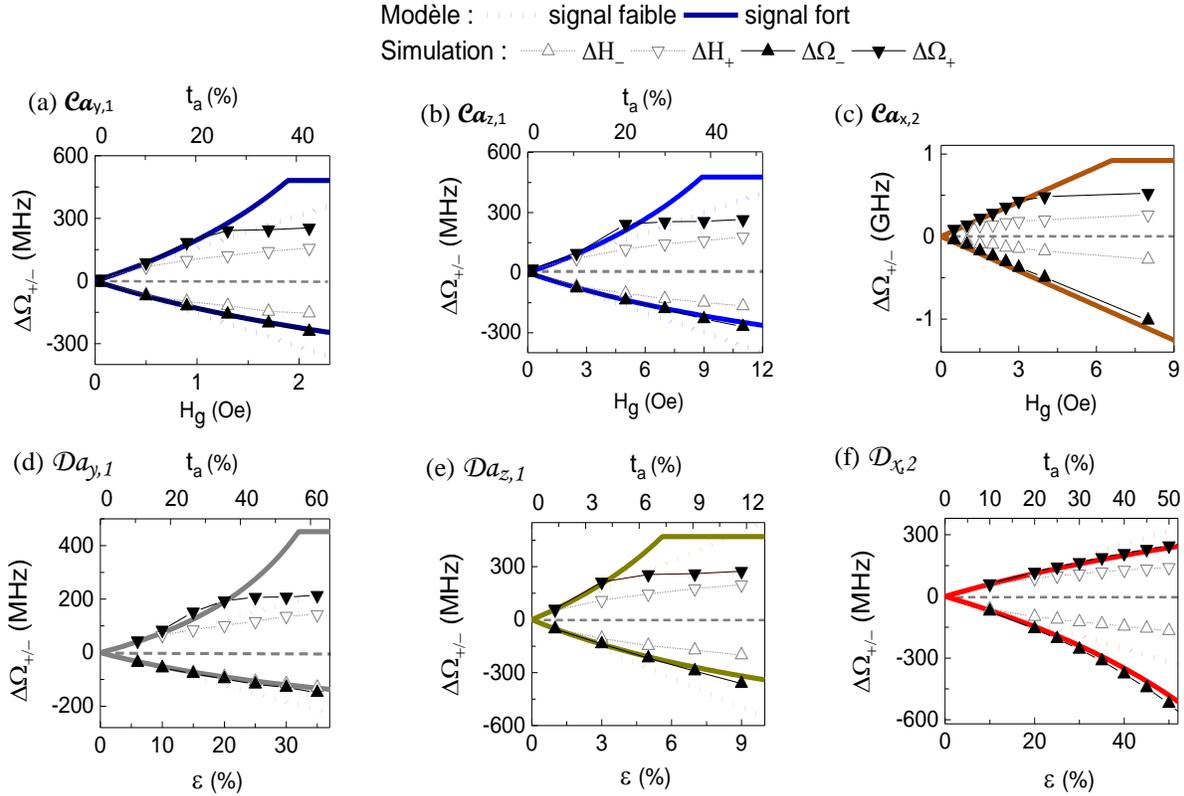


Figure 8.5. Evolution de la gamme de synchronisation pour tous les forçages d'ordres 1 et 2. Mêmes conditions de régime libre qu'à la Figure 8.2. Les limites de gammes $\Delta\Omega_{\pm}$ sont extraites du modèle « signal faible », « signal fort » et de la simulation. La figure montre aussi les limites d'hystérésis ΔH_{\pm} extraites de la simulation, voir déf à la Figure 5.1. Le centre des gammes ($\delta=0$) est indiqué en pointillé gris pour apprécier la symétrie des évolutions. (a) Cas du forçage canonique $\mathcal{C}a_{y,1}$. (b) $\mathcal{C}a_{z,1}$. (c) $\mathcal{C}a_{x,2}$. (d) $\mathcal{D}a_{y,1}$. (e) $\mathcal{D}a_{z,1}$. (f) $\mathcal{D}x_2$

Le premier élément qui ressort est encore le remarquable accord entre la simulation et le modèle « signal fort » pour décrire tous les cas d'asymétrie de pente. En effet, cela fonctionne aussi bien pour le forçage $\mathcal{D}x_2$ qui est exactement réel que pour tous les autres forçages simplifiés. Cela confirme que la solution (8.14) est assez générale pour décrire toutes les situations de forçages.

Cependant comme déjà souligné à la section 8.2.2.2, le modèle ne fournit pas la valeur exacte de l'amplitude de saturation, mais seulement un ordre de grandeur approximatif. En regardant de plus près, la puissance saturante à partir duquel le système se désynchronise semble être approximativement $p_{\text{sat}} \approx 0.04$, dans tous les cas de forçage où cela se produit. Néanmoins, ce n'est pas non plus une constante de valeur exacte car par exemple, $p_{\text{sat}} = 0,037$ pour $\mathcal{D}z_1$ alors que $p_{\text{sat}} = 0,047$ pour $\mathcal{D}y_1$. Par ailleurs, nous ne

savons pas comment elle varie avec la puissance, le champ statique H_{dc} , α etc... . On ne peut connaître qu'une estimation de l'amplitude de saturation.

En revanche pour le forçage $\mathcal{D}_{x,2}$, le problème de la saturation ne se pose pas car il n'y en a pas. En effet, lorsque la puissance synchronisée diminue, l'amplitude du forçage diminue aussi jusqu'à s'annuler en $p = 0$. Par conséquent, aucune amplitude de signal générateur aussi forte soit-elle ne peut faire saturer la puissance synchronisée. Le résultat est en fait le même pour tous les forçages qui s'annulent quand la puissance s'annule, comme $\mathcal{D}_{y,3}$ ou $\mathcal{D}_{z,3}$.

Pour terminer, les figures donnent aussi les limites d'hystérésis ΔH_{\pm} , obtenues par la simulation. Cela donne l'opportunité d'étudier le lien entre hystérésis et asymétrie. Le premier point important est que la gamme « robuste » de synchronisation ΔH ($= \Delta H_+ - \Delta H_-$), tout comme la gamme complète $\Delta \Omega$, augmente avec l'amplitude du signal générateur. En revanche à la différence de $\Delta \Omega$, elle reste tout le temps symétrique.

Ce résultat va dans le sens de ceux de [80]. A partir d'un modèle simplifié de l'équation LLGS, ils montrent de façon quasi-analytique que la gamme robuste est symétrique dans le cas des forçages dissipatifs. Ici, on voit que c'est aussi le cas des forçages conservatifs. D'après [15], le régime hystérétique est symétrique lorsque la non linéarité N est une simple constante, comme c'est le cas ici avec $p \ll 1$. En revanche, ils affirment qu'un facteur $N(p)$ plus irrégulier aurait pu donner un régime hystérétique asymétrique.

○ *En résumé :*

Nous avons appliqué le modèle « signal fort » aux forçages canoniques à valeurs réelles de l'oscillateur, puis confronté les prédictions avec la simulation. Globalement, l'asymétrie de pente et ses limites de synchronisation $\Delta \Omega_{\pm}$ sont correctement prédites pour tous les forçages canoniques. Cela fonctionne aussi bien pour le forçage $\mathcal{D}_{x,2}$, qui lui est rigoureusement réel, que pour les autres forçages qui ne le sont qu'approximativement. En particulier, l'accord pour le forçage $\mathcal{D}_{x,2}$ est bon même pour des valeurs de J_g voisines de J_{dc} , ce qui est un fort argument en faveur du modèle. En revanche, l'asymétrie de saturation avec sa limite $\Delta \Omega_+$ est moins bien validée par la simulation. Pour tous les forçages, on trouve effectivement que la synchronisation sature lorsque la puissance p_s devient faible mais pas lorsqu'elle s'annule. La saturation se produit donc trop tôt. Une explication peut être la contribution plus importante des termes non résonants à l'approche du seuil, qui font désynchroniser le système. A défaut d'avoir la valeur exacte, le modèle donne néanmoins un ordre de grandeur approximatif.

8.3. Conclusion

Nous avons développé un modèle qui permet de décrire la synchronisation dans une gamme plus étendue d'amplitudes de signaux générateurs. Pour cela, un nouveau système dynamique a été établi, tenant compte de l'influence de la dérivée $\partial_p \mathcal{F}(p)$. Le système peut se résoudre pour les forçages à valeurs réelles, ce qui fournit alors des solutions stationnaires asymétriques en δ .

Nous avons étudié deux types d'asymétries. Causée par $\partial_p \mathcal{F}(p) \neq 0$, l'asymétrie de pente est caractérisée par le taux t_a et la sensibilité d'asymétrie C_a . Nous avons alors pu calculer et vérifier la validité du phénomène pour tous les forçages canoniques à valeurs réelles, ce qui confirme la justesse du modèle. Le second type d'asymétrie est l'asymétrie de saturation. Il se produit lorsque la synchronisation est si forte que la puissance synchronisée s'annule, désynchronisant le système. Appliqué au forçage canonique, il en ressort que la valeur prédite est comparable à la valeur simulée mais pas de façon exacte. La cause probable est la présence de terme non résonant que ne prend pas en compte le modèle.

Les avantages du modèle « signal fort » peuvent se résumer en trois points : 1) Celui de pouvoir décrire la synchronisation sous plus forts signaux dans tous les cas de forçage tant que la propriété 3.9 est vérifiée, 2) prédire quantitativement les phénomènes d'asymétrie et enfin 3) de fournir un cadre plus large qui permet de contrôler l'application du modèle « signal faible ».

Partie IV :
Etudes expérimentales

Chapitre 9. Expériences d'injection de courant

L'objectif de ce chapitre est d'étudier la synchronisation expérimentale des oscillateurs à aimantation uniforme planaire. Le principe consiste à injecter un courant RF dans l'oscillateur à l'ordre 2, puis à observer le signal émis dans le domaine spectral et temporel. Bien que la comparaison quantitative avec la théorie reste délicate (température, extinctions de signal et dynamique multimode), on peut néanmoins commenter certaines caractéristiques générales, comme la dépendance de la puissance en régime synchronisé, la présence de saut de phase ou bien la nature de la relaxation. La partie 9.1 introduit les techniques expérimentales, puis la partie 9.2 résume les résultats expérimentaux obtenus.

9.1. Techniques expérimentales

La caractérisation des oscillateurs consiste à mesurer électriquement les signaux microondes émis (ou RF, ici $100 \text{ MHz} < f < 10 \text{ GHz}$). En 9.1.1, on commence par introduire les concepts RF de bases. Puis en 9.1.2, on décrit le banc de mesure. En 9.1.3, on traite le problème de la puissance émise/reçue par l'oscillateur et enfin en 9.1.4, on décrit brièvement les échantillons utilisés.

9.1.1. Concepts RF

Le problème est d'amener le signal émis par l'oscillateur aux instruments de mesure. Or la gamme de fréquence des signaux appartient aux fréquences RF. La longueur d'onde vaut environ 1 cm, ce qui est bien moins que la distance entre l'échantillon et les instruments ($\approx 50 \text{ cm}$). Dans ce cas, il faut prendre en compte les effets de propagation du signal, si l'on ne veut pas perdre la puissance. Les résultats font appel à la théorie des micro-ondes [118] dont nous commençons par donner les notions de bases. On introduit d'abord l'élément principal : la ligne de transmission.

9.1.1.1. La ligne de transmission

Comme le signal est de nature électromagnétique, il se propage sous forme d'ondes selon les équations bien connues de Maxwell [119]. Il existe, cependant, certains cas de guides d'onde dont la propagation peut se modéliser plus simplement à l'aide de concepts d'électrocinétique : tension u , courant i , conductance G , résistance R , inductance L et capacité C . En particulier, cela est possible si on se limite aux modes électromagnétiques TEM, dans lesquels les champs \mathbf{H} , \mathbf{E} sont perpendiculaires à la direction de propagation. Dans cette représentation, le courant et la tension sont définis à une distance z de la ligne et varient dans le temps.

La modélisation électrique d'un tronçon est représentée à la Figure 9.1.

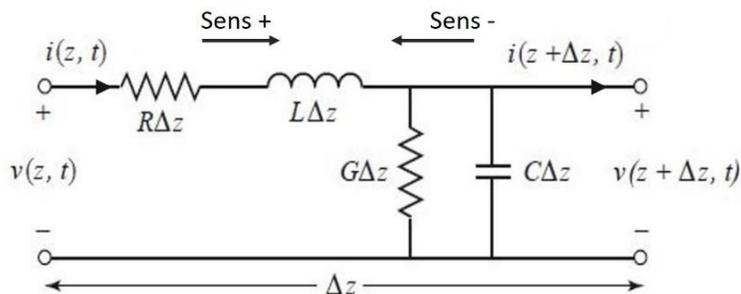


Figure 9.1. Modélisation d'un tronçon de ligne de distance infinitésimale Δz . Le signal est représenté par i et u . La capacité C et l'inductance L traduisent la propagation du signal tandis que R et G traduisent les pertes énergétiques. G , R , C , L sont les paramètres primaires de la ligne. Le modèle a été proposé par Heaviside vers 1880 [118].

Le modèle conduit aux deux équations de propagation suivantes (équations du télégraphiste) :

$$\begin{aligned}\frac{\partial v(z, t)}{\partial t} &= -Ri(z, t) - C \frac{\partial i(z, t)}{\partial t} \\ \frac{\partial i(z, t)}{\partial t} &= -Gv(z, t) - C \frac{\partial v(z, t)}{\partial t}\end{aligned}\quad (9.1)$$

Les solutions sont des ondes qui se propagent dans les deux sens \pm de la ligne.

$$\begin{aligned}v(x, t) &= v^-(x, t) + v^+(x, t) = (V^- e^{\gamma z} + V^+ e^{-\gamma z}) e^{j\omega t} \\ i(x, t) &= i^-(x, t) + i^+(x, t) = (I^- e^{\gamma z} + I^+ e^{-\gamma z}) e^{j\omega t}\end{aligned}\quad (9.2)$$

avec le paramètre : $\gamma = (R + jL\omega)(G + jC\omega)$.

La grandeur fondamentale est l'impédance caractéristique :

$$\frac{V^+}{I^+} = -\frac{V^-}{I^-} = Z_c = \sqrt{\frac{R + jL\omega}{G + jC\omega}}\quad (9.3)$$

Z_c traduit le rapport tension sur courant qui s'établit lors de la propagation de l'onde et dépend uniquement des paramètres de la ligne. Par ailleurs, Z_c contrôle aussi les échanges de puissance entre la ligne avec ses entrées. En particulier, si l'impédance Z d'une entrée est égale à Z_c , on dit que la ligne est adaptée. Dans ce cas, tous les échanges de puissance entre la ligne et Z se font sans pertes. Dans le cas contraire, seulement une certaine puissance est transmise tandis que l'autre est rayonnée sous forme d'onde réfléchi. Le degré d'adaptation est représenté par le coefficient de réflexion Γ_r , défini par :

$$\frac{V^-}{V^+} = \Gamma_r = \frac{Z - Z_c}{Z + Z_c}\quad (9.4)$$

On cherchera toujours à ce que la ligne soit adaptée aux impédances d'entrée ($\Gamma_r = 0$). En électronique RF, l'impédance caractéristique de tous les câbles, composants et instruments, sont standardisées à 50Ω de sorte que la condition d'adaptation est en pratique toujours vérifiée. Dans nos expériences, la seule désadaptation que l'on rencontre est entre l'oscillateur spintronique et l'entrée de ligne, car l'impédance de l'oscillateur (à barrière tunnel) vérifie : $Z > 50 \Omega$. C'est donc à cette jonction qu'il faut faire attention.

9.1.1.2. Matrice de diffusion S

Pour réaliser des opérations sur le signal RF, la ligne est entrecoupée de composants, modélisés chacun par un quadripôle, voir Figure 9.2.

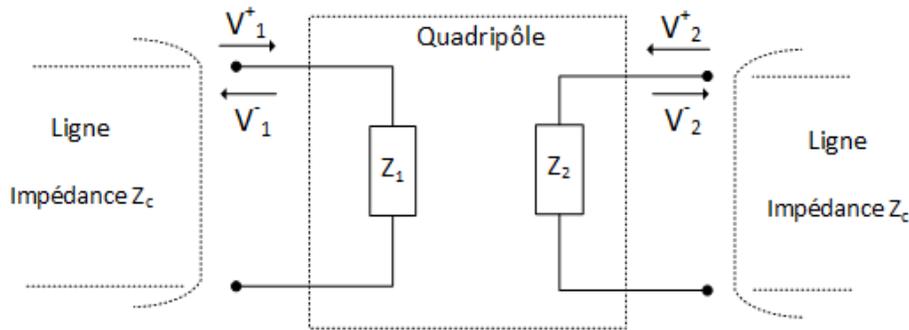


Figure 9.2. Représentation du quadripôle, couplé aux lignes de transmission d'impédance caractéristique Z_c . Les ondes V_1^+ , V_2^+ entrent dans le quadripôle via les entrées 1,2 tandis que les ondes V_1^- , V_2^- en sortent. Si la ligne est adaptée alors toutes les ondes incidentes traversent le quadripôle sans réflexion. Dans ce cas, il n'y a pas de pertes de puissance par réflexion.

Le quadripôle est caractérisé par toutes les relations qui existent entre les tensions et les courants, incidents et sortants. Il y a plusieurs façons équivalentes de le représenter (matrices : Y , T , Z). De préférence, on utilisera la matrice S définie par :

$$\begin{pmatrix} V_1^- \\ V_2^- \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} V_1^+ \\ V_2^+ \end{pmatrix} \text{ et } S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \quad (9.5)$$

Elle caractérise l'influence du quadripôle sur les amplitudes et phases des ondes de tension V^\pm . Les coefficients sont complexes et se mesurent à l'aide d'un analyseur de réseaux (ou VNA).

En particulier, les coefficients S_{21} , S_{12} traduisent son influence sur les ondes traversantes. On parlera souvent de gain G , défini par :

$$G \text{ (dB)} = -20 \log |S_{21}| \quad (9.6)$$

A l'inverse, les coefficients S_{11} , S_{22} traduisent les réflexions à l'entrée et à la sortie. Il s'agit des coefficients de réflexions du quadripôle, voir (9.4) :

$$\Gamma_{r,1} = S_{11} = \frac{Z_1 - Z_c}{Z_1 + Z_c}, \quad \Gamma_{r,2} = S_{22} = \frac{Z_2 - Z_c}{Z_2 + Z_c} \quad (9.7)$$

En pratique, la chaîne de mesure, qui conduit le signal de l'oscillateur aux instruments, est composée de nombreux composants RF (câbles coaxiaux, filtres et amplificateurs), de matrices S différentes. Pour obtenir la matrice globale, il y a deux solutions : on peut soit combiner toutes les matrices de chaque

élément à l'aide des formules de la théorie [118] ou soit, ce qui est le plus simple, mesurer directement au VNA, les coefficients de la chaîne complète.

9.1.2. Description du banc de mesure

Le banc de mesure utilisé dans nos expériences est détaillé à la Figure 9.3. L'oscillateur est connecté via une sonde et un bias-tee, qui crée deux circuits indépendants selon la gamme de fréquence :

Circuit statique ($f < 30$ kHz) : Le circuit permet de polariser statiquement l'oscillateur pour accéder aux états entretenus. D'une part, la source de courant (Keithley 2400X) se charge d'injecter le courant statique I_{dc} . D'autre part, le banc permet de changer l'amplitude et l'angle du champ statique H_{dc} , appliqué dans le plan de la couche.

Circuit RF ($f > 30$ kHz) : Une fois en états entretenus, l'oscillateur émet un signal alternatif de faible puissance ($1 \text{ nW} < p < 100 \text{ nW}$) dans la gamme de fréquence RF. Celui-ci passe dans la branche haute fréquence du bias-tee, puis traverse successivement : un filtre passe haut ($f > 2$ GHz), un amplificateur large bande (100MHz-12GHz) de gain 40 dB et un diviseur de puissance. Le signal est mesuré ensuite simultanément par deux instruments : un analyseur de spectre à balayage (Rhode et Schwartz – 26 GHz) et un oscilloscope temps réel à haut taux d'échantillonnage (Tektronix - 50 Gs/s).

Pour réaliser la synchronisation, on injecte un courant alternatif dans l'oscillateur grâce à un générateur RF (Agilent E8257D). Celui-ci est placé entre le bias-tee et l'amplificateur via un circulateur. Le générateur peut envoyer des signaux avec une puissance moyenne de + 15 dBm, à des fréquences allant jusqu'à 40 GHz. Pour le besoin de l'expérience, le générateur émet un signal de fréquence proche du 2nd harmonique de l'oscillateur, soit environ entre 14 à 16 GHz. La puissance varie entre -10 dBm et +2 dBm selon les types d'échantillons. Cela donne un courant RF effectivement vu par l'oscillateur, compris entre 0.5 mA et 2 mA. Pour accéder à la valeur du courant, il faut tenir compte de l'atténuation de la chaîne de mesure et des pertes réactives de la ligne coplanaire, voir 9.1.3.2.

En quelque sorte, le circulateur permet de créer deux circuits RF indépendants, dans lesquels les signaux se déplacent dans des sens opposés :

- *Circuit RF d'émission :* Il a pour fonction d'acheminer le signal émis par l'oscillateur aux instruments, schéma figure (b). Globalement, la chaîne de mesure a une bande passante de 2 GHz – 12 GHz avec un gain $G \approx 30$ dB. Le signal est enregistré à la fois dans le domaine spectral et temporel.
- *Circuit RF d'injection :* En revanche, celui-là amène le signal générateur à l'oscillateur, c.à.d. dans le sens inverse, schéma équivalent à la figure (c). Le signal est émis par le générateur et se dirige vers l'oscillateur, modélisé par une impédance.

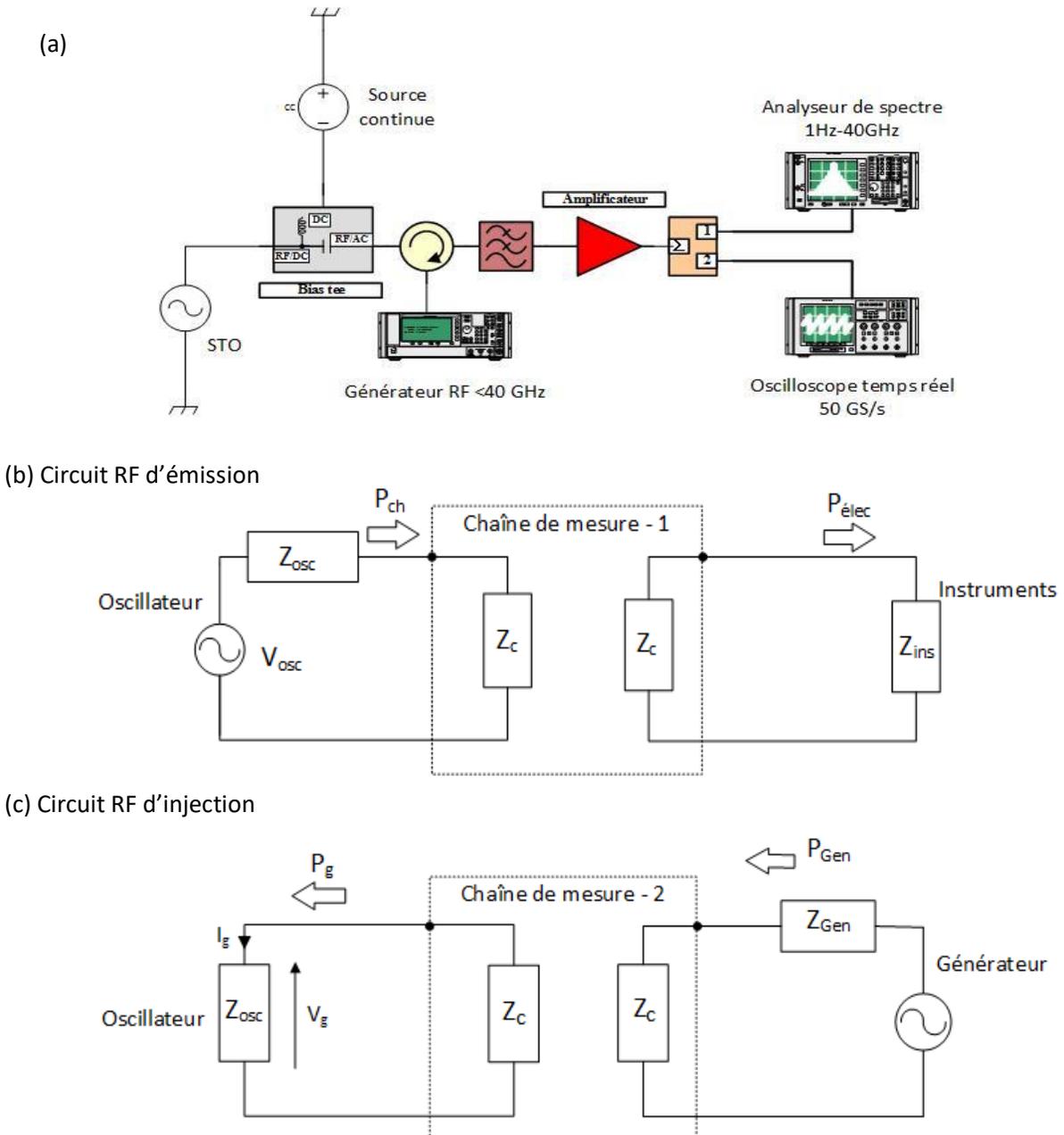


Figure 9.3. (a) Banc de mesure utilisé pour les expériences de synchronisation. Le bias-tee crée un circuit statique et RF indépendant l'un de l'autre. L'oscillateur est connecté au circuit par une sonde RF, que l'on vient manuellement appliquer. Il est placé sur un support, dans l'entrefer d'un aimant. Le champ appliqué ($H_{dc} < 1$ kOe) est uniquement planaire mais l'angle dans le plan peut varier car l'aimant est monté sur un positionneur. (b) circuit RF d'émission : bande de fréquence : 2 - 12 GHz et gain $G \approx 30$ dB. (c) circuit RF d'injection. Z_{osc} , Z_{ins} , Z_{Gen} , Z_c sont les impédances de l'oscillateur, des instruments, du générateur et celle caractéristique de ligne ($Z_{ins} = Z_{Gen} = Z_c = 50 \Omega$). Les puissances P_g , P_{Gen} , P_{ch} , $P_{élec}$ sont définies à la section suivante.

9.1.3. Transmission de puissance

Le problème crucial est d'arriver à modéliser les échanges de puissance entre l'oscillateur et la chaîne de mesure. Cela va permettre de connaître la puissance réellement émise par l'oscillateur, connaissant la puissance mesurée à l'analyseur de spectre. Cependant, cela va aussi permettre de connaître la puissance et le courant réellement injectés dans l'oscillateur par le générateur.

On commence par traiter le problème dans le cas le plus simple, où seule la désadaptation entre la résistance de l'oscillateur et celle de la chaîne entre en jeu. Ensuite, on traite le cas plus compliqué où il faut tenir compte de l'influence du substrat. A partir d'une certaine fréquence de coupure $f_{\text{sub}} (\approx 10 \text{ GHz})$, déterminée par le substrat, l'impédance de l'oscillateur chute car il existe des capacités parasites sur le substrat qui shuntent le signal. C'est problématique car la puissance émise ou reçue par l'oscillateur chute aussi. Pour cela, il faut faire appel à un modèle plus raffiné de l'impédance de l'oscillateur.

9.1.3.1. Cas de désadaptation simple

○ Puissances délivrées par l'oscillateur

On commence par chercher la puissance moyenne délivrée par l'oscillateur à la chaîne P_{ch} , Figure 9.3 (a). Si l'impédance de l'oscillateur vaut : $Z_{\text{osc}} = R_{\text{osc}} + jX_{\text{osc}}$ et celle de la chaîne vaut : $Z_c = R_c + jX_c$, alors la puissance P_{Ch} vaut [118] :

$$P_{\text{Ch}} = \frac{1}{2} \text{Re}(V_1^+ I_1^{+*}) = \frac{1}{2} |V_{\text{osc}}|^2 \frac{R_c}{(R_c + R_{\text{osc}})^2 + (X_c + X_{\text{osc}})^2} \quad (9.8)$$

La puissance transmise est maximale quand les impédances de l'oscillateur et de la chaîne sont conjuguées : $R_{\text{osc}} = R_c$ et $X_{\text{osc}} = -X_c$. La puissance est ainsi partagée à part égale entre Z_{osc} et Z_c , ce qui donne le meilleur rendement possible. La puissance est appelée la puissance disponible de l'oscillateur et vaut : $|V_{\text{osc}}|^2 / 8R_c$.

Dans le cas simple où l'impédance Z_{osc} est réelle ($Z_{\text{osc}} = R_{\text{osc}}$), on a si $Z_c = R_c = 50 \Omega$:

$$P_{\text{Ch}} = \frac{1}{2} |V_{\text{osc}}|^2 \frac{R_c}{(R_c + R_{\text{osc}})^2} \quad (9.9)$$

En tenant compte du coefficient de transmission S_{21} de la chaîne de mesure, on peut exprimer la puissance délivrée par l'oscillateur à l'instrument $P_{\text{élec}}$:

$$P_{\text{élec}} = \frac{1}{2} |V_{\text{osc}}|^2 \frac{R_c |S_{21}|^2}{(R_c + R_{\text{osc}})^2} \quad (9.10)$$

Par ailleurs, la tension de l'oscillateur peut s'écrire⁴¹ :

$$V_{osc} = R_{ap} \left(\frac{\Delta R}{R_{ap}} \right) I_{dc} \quad (9.11)$$

Avec R_p , R_{ap} les résistances en état parallèle et anti parallèle, $\Delta R = R_{ap} - R_p$, la différence entre ces résistances et I_{dc} le courant statique.

Enfin si on suppose que $R_{osc} \approx R_{ap}$, on aboutit à la formule plus simple [120] :

$$P_{elec} = \frac{\beta}{(1 + \beta)^2} \left(\frac{\Delta R}{R_{ap}} \right)^2 |S_{21}|^2 \frac{R_{ap} I_{dc}^2}{2} \quad (9.12)$$

où : $\beta = R_{ap}/R_c$.

On voit que la puissance mesurée aux instruments est influencée par quatre contributions : (1) la désadaptation d'impédance via le facteur $\beta/(1 + \beta)^2$, (2) le ratio magnéto résistif via $\Delta R/R_{ap}$ (\approx TMR), (3) l'amplification de la chaîne et (4) la puissance intrinsèque de l'oscillateur. Par exemple si la résistance R_{ap} passe de 50 Ω à 100 Ω alors la puissance diminue de 12%. C'est significatif mais pas si important car on sait réaliser des R_{ap} d'environ 100 Ω . Par contre, la dépendance avec $\Delta R/R_{ap}$ paraît plus cruciale. Si le facteur double alors la puissance augmente d'un facteur 4. On comprend alors tout l'importance d'augmenter la TMR ou n'importe quel autre rapport magnéto résistif.

○ Puissance reçue par l'oscillateur

A l'inverse dans le cas de l'injection de signaux, on cherche à connaître la puissance délivrée par le générateur à l'oscillateur P_g , connaissant la puissance émise du générateur P_{Gen} , Figure 9.3 (b).

Si l'oscillateur a une impédance R_{osc} , le coefficient de réflexion vaut à son entrée :

$$\Gamma_r = \frac{R_{osc} - R_c}{R_{osc} + R_c} \quad (9.13)$$

Si $\Gamma_r \neq 0$, la puissance P_g délivrée par le générateur à l'oscillateur est plus faible que P_{Gen} car une partie de la puissance est perdue par réflexion à cause de la désadaptation à l'entrée. P_g s'exprime par :

$$P_g = P_{Gen} (1 - |\Gamma_r|^2) \quad (9.14)$$

En combinant (9.13) et (9.14), on obtient ainsi :

⁴¹ La valeur de la tension est ici un peu surestimée car on suppose que la résistance balaie la différence complète $\Delta R = R_{ap} - R_p$, ce qui n'est pas le cas en pratique.

$$P_g = \frac{4\beta}{(1 + \beta)^2} P_{Gen} \quad (9.15)$$

On vérifie bien que si l'oscillateur est adapté à la chaîne $\beta = 1$, on retrouve $P_g = P_{Gen}$. Toute la puissance émise par le générateur est alors consommée par l'oscillateur. Au contraire si $\beta \rightarrow 0$ ou $\pm\infty$, P_g s'annule et l'oscillateur n'absorbe plus de puissance.

Par ailleurs, le courant I_g vu par l'oscillateur s'exprime par :

$$I_g = \sqrt{\frac{2 P_{Gen}(1 - |\Gamma_r|^2)}{R_{osc}}} \quad (9.16)$$

De la même façon, on voit que si $\beta \rightarrow 0$ ou $\pm\infty$, plus aucun courant RF ne circule dans l'oscillateur. Ce sont les cas à éviter car la synchronisation devient alors impossible.

9.1.3.2. Prise en compte du substrat

Dans nos expériences, on effectue une synchronisation de type harmonique. Cela implique que la fréquence du signal injecté est beaucoup plus forte ($f > 10$ GHz) que la fréquence propre de l'oscillateur ($f < 10$ GHz). Malheureusement, cela génère de nouveaux problèmes. Au-delà de 10 GHz, le substrat génère des capacités parasites qui modifient fortement l'impédance de l'oscillateur, ainsi que la puissance et le courant réellement injectés. Or ce sont des paramètres importants à connaître pour caractériser le mieux possible la synchronisation.

Pour cela, on va utiliser un modèle plus raffiné d'impédance du substrat, qui comportera : une capacité C et une inductance L à déterminer. Une fois les paramètres mesurés, le modèle permet de remonter à la puissance injectée P_g dans l'oscillateur, à toutes les fréquences souhaitées.

○ Modélisation

La Figure 9.4 décrit en détails l'oscillateur et son substrat.

L'oscillateur est connecté à une ligne coplanaire (CPW = coplanar wave guide), qui comporte deux pistes de masse (-) et une piste de signal (+), Figure 9.4 (a). La ligne et la chaîne de mesure sont connectées via la sonde RF dont les pattes touchent les zones de contact des pistes. Pour modéliser électroniquement le substrat, on tient compte de l'inductance et de la capacité parasite des pistes. En particulier, on néglige la résistance parasite R éventuelle, qui peut exister au contact entre la sonde et les pistes (entre 1Ω et 5Ω). Par ailleurs, il existe une autre capacité, dit de « recouvrement », causée par : (1) la surface de recouvrement des électrodes aux bornes de l'oscillateur (env. 100 nm) et (2) par leur faible espacement, Figure 9.4 (b). En combinant toutes ces influences, on obtient le modèle d'impédance simple de la Figure 9.4 (c).

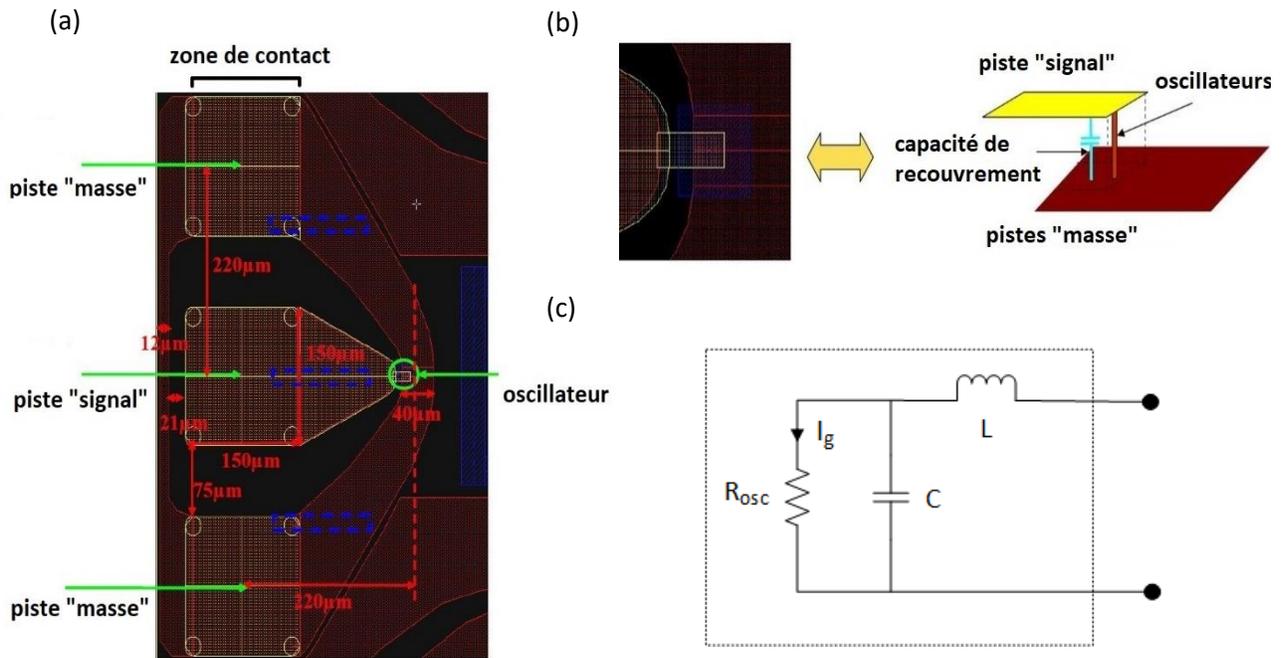


Figure 9.4. (a) Vu du dessus : du substrat, de la ligne coplanaire et de l'oscillateur. On applique les pattes de la sonde RF sur les zones de contact des pistes. (b) Zoom sur l'oscillateur. (c) Modèle électronique équivalent. C est la capacité parasite totale qui comprend celle de la piste et celle de recouvrement. La résistance de contact sonde/piste et celle de fuite des capacités sont négligées.

L'impédance totale du modèle, Figure 9.4 (c), vaut :

$$Z = R_{osc} \frac{1 + \frac{L}{R_{osc}} j\omega + LC(j\omega)^2}{1 + R_{osc}C j\omega} \quad (9.17)$$

On vérifie qu'en régime statique ($\omega \rightarrow 0$), Z tend bien vers R_{osc} . En pratique, la valeur mesurée R_{osc} peut différer de la vraie valeur à cause de la résistance de contact, mais la mesure ne permet pas de faire la différence.

On va voir qu'en réalité c'est le pôle : $\omega = -1/R_{osc}C$ de (9.17) qui est dominant. Ainsi approximativement, l'impédance se comporte comme un filtre passe-bas, dont la fréquence de coupure f_{sub} vaut :

$$f_{sub} \approx \frac{1}{2\pi R_{osc}C} \quad (9.18)$$

A présent que l'expression de l'impédance est connue, on peut se servir des résultats établis précédemment pour connaître toutes les grandeurs injectées dans l'oscillateur : le coefficient de réflexion Γ_r (9.4), la puissance injectée P_g dans l'oscillateur (9.14) et le courant injecté I_g (9.16). Le

problème réside, alors, dans la détermination des paramètres L, C. Pour cela, on va mesurer le coefficient de réflexion à l'analyseur de réseau, puis utiliser les relations (9.17)(9.4) pour les extraire.

○ *Résultats*

La figure 9.5 montre les résultats obtenus :

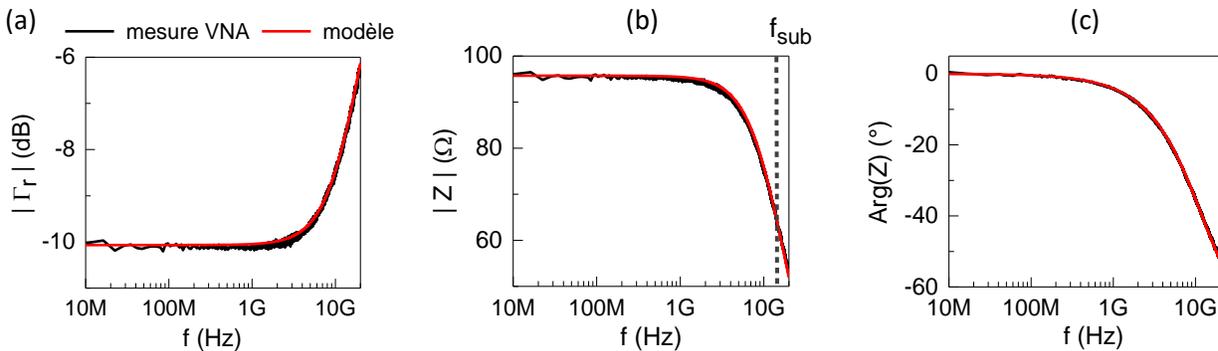


Figure 9.5. (a) Module du coefficient de réflexion mesuré à l'analyseur de réseau (VNA) sur 10 MHz – 20 GHz et courbe extraite du modèle. (b). Module de Z et (c) argument de Z. Echantillon #1, voir tableau ci-dessous. La mesure est effectuée après avoir calibré l'instrument et la sonde RF à l'aide du substrat de calibration CS-5.

Le tableau 9.1 relève les paramètres L, C extraits pour 3 échantillons identiques, de même substrat et même fabrication.

Echantillon	R_{osc}	L (pH)	C (pF)	f_{sub} (GHz)
#1	95	34.4329	0.11899	14.09
#2	92	31.2116	0.13066	13.24
#3	60	75.6986	0.11151	23.7
Moyenne :		41	0.123	

Tableau 9.1.

On voit que la méthode exposée est répétable car les paramètres L, C sont de même ordre de grandeur, pour chacun des dispositifs⁴². Comme valeurs moyennes, on relève : $L \approx 41$ pH et $C \approx 0.123$ pF. En revanche, la fréquence de coupure varie car elle dépend à la fois de la capacité et de la résistance. Pour la plupart de nos dispositifs, R_{osc} vaut 100Ω , ce qui donne f_{sub} entre 10 - 15GHz. Dans ces cas, la puissance P_g et le courant I_g injectés dans l'oscillateur sont fortement réduits et la seule façon d'accéder précisément à leurs valeurs est d'utiliser le modèle avec l'impédance (9.17).

Pour augmenter f_{sub} , il existe plusieurs solutions. En premier, on peut essayer de diminuer R_{osc} , par exemple en se rapprochant le plus possible de 50Ω . On peut aussi essayer de diminuer la capacité C. Pour cela, une solution est de minimiser la surface de recouvrement des électrodes au niveau de l'oscillateur. L'autre solution consiste à diminuer la permittivité des isolants (le substrat pour la capacité

⁴² L'inductance de la piste peut légèrement varier de 1 à 5 pH suivant la position de la sonde sur la zone de contact. Le mieux est de placer la sonde le plus proche de l'oscillateur.

des pistes et la résine isolante pour celle de recouvrement). Dans tous les cas, on voit que cela nécessite des efforts supplémentaires à faire sur la fabrication des échantillons.

9.1.4. Présentation des échantillons

9.1.4.1. Paramètres de fabrication

Les oscillateurs étudiés sont des nano piliers à aimantation uniforme planaire. La réalisation est un processus laborieux dont la description ne sera pas discutée ici [121]. On peut résumer néanmoins le processus en deux étapes principales :

1) *Le dépôt des couches.* Cela consiste à déposer une dizaine de couches minces sur un substrat en silicium, par technique d'épitaxie par jet moléculaire. En particulier, le dépôt de la barrière tunnel est l'étape cruciale du processus (MgO épaisseur 1 nm). C'est là où se décident les deux propriétés importantes de la barrière : le ratio TMR = $R_{ap} - R_p / R_p$ et le produit RA⁴³.

2) *La nano fabrication.* On crée la forme cylindrique du pilier (gravure par RIE) et on réalise les contacts électroniques d'accès par photolithographie.

Ce qui fait la qualité de l'oscillateur est une TMR haute (>100%) et un bas produit RA ($1 \Omega \cdot \mu\text{m}^2$). En particulier, ce dernier paramètre est important pour avoir des états entretenus. En effet, la tension V de fonctionnement vérifie toujours l'inégalité suivante :

$$V_{cr} = RA J_{cr} < V < V_d \quad (9.19)$$

où V_{cr} est la tension critique à partir de laquelle démarre les oscillations et V_d la tension de dégradation, qui marque la rupture de la barrière.

Pour ne pas dégrader la barrière, V doit être suffisamment faible comparée à V_d mais supérieure à V_{cr} . Le seul moyen possible est alors de baisser le produit RA. En pratique, le RA est associé à l'épaisseur de la barrière, ce qui nécessite un contrôle fin de sa déposition et de sa qualité.

9.1.4.2. Structures

La composition des échantillons est résumée dans le tableau suivant :

⁴³ Produit de R_p par la surface S du pilier.

Type N°	Origine de la déposition	Lieu de la nano Fabrication	Structure du bas vers le haut (Epaisseur en nm)
1	INL (Portugal)	PTA – CEA Grenoble	Ta(3)/CuN(30)/Ta(5)/PtMn(20)/ CoFe(2)/Ru(0.85)/ CoFe(2.2)/CoFe(0.5)/ MgO/CoFe(0.5)/CoFeB(1.5)/ Ta(5)/Ru(7)
2	Entreprise Hitachi	Entreprise Hitachi	IrMn/CoFe/Ru/CoFe/ MgO(0.9)/ CoFe(0.5)CoFe(3.4)

Tableau 9.2. Caractéristiques des échantillons. Valeurs cibles : TMR \approx 100%, RA \approx 1 $\Omega \cdot \mu\text{m}^2$. Rouge = couche anti ferromagnétique, vert = couche polarisante (SAF) et bleu = couche libre.

En particulier, les échantillons n°1 ont été réalisés dans le cadre du projet MOSAIC. La fabrication a eu lieu au laboratoire sur la plateforme PTA par K. Jaimes-Merazzo. Les échantillons n°2 ont été obtenus dans le cadre de partenariats privés. Les deux lots ont des valeurs de TMR et RA similaires mais diffèrent statistiquement par leurs tensions de dégradation. Les échantillons n°1 ont une tension plus forte : $400 < V_d < 600$ mV que les seconds : $300 < V_d < 400$ mV, ce qui permet potentiellement d'injecter plus de courant.

9.2. Expériences

L'objectif est d'étudier expérimentalement la synchronisation de l'oscillateur uniforme planaire. On se restreint ici au cas de l'injection d'un courant RF à l'ordre 2. En particulier, la nature du forçage mise en jeu sera l'une des questions centrales de l'étude. Pour chacun des deux exemples traités, la démarche sera la même :

- *Etape N°1 - régime statique* : Sélection de l'échantillon selon sa courbe magnéto résistive.
- *Etape N°2 - régime libre* : Accès au états entretenus en variant : I_{dc} , H_{dc} et l'angle du champ A.
- *Etape N°3 - régime synchronisé* : Injection du courant RF pour le synchroniser.

On commence par l'échantillon n°1 puis on aborde l'échantillon n°2.

9.2.1. Echantillon n°1

9.2.1.1. Régime statique

La courbe magnéto-résistive de l'échantillon sélectionné est montrée à la Figure 9.6.

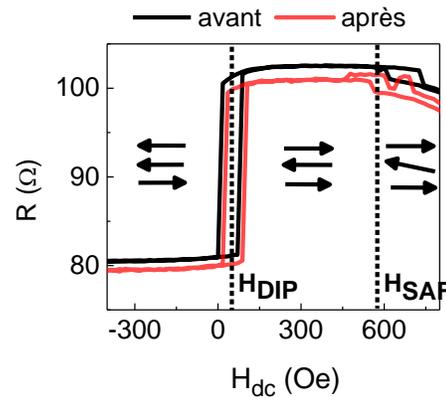


Figure 9.6. Courbes magnéto-résistives de l'échantillon de type n°1 (110 nm x 110 nm), prises avant et après l'expérience de synchronisation. Courant de mesure : $I_{dc} = 5 \mu\text{A}$. Le champ est appliqué dans le plan de la couche et colinéaire à l'axe facile d'aimantation ($A = +0^\circ$). Caractéristiques : $R_p = 80 \Omega$, $R_{ap} = 103 \Omega$, $\Delta R = 23 \Omega$ et $\text{TMR} = 25\%$. H_{DIP} est le champ de biais et H_{SAF} le champ de retournement du SAF.

L'état de basse résistance est l'état d'alignement parallèle entre les aimantations de la couche libre et de la couche supérieure du SAF. Selon les grandeurs de l'expérience, l'état est atteint pour les valeurs négatives du champ appliqué. Lorsque le champ dépasse le seuil : $H_{dc} > H_{DIP}$, l'aimantation de la couche libre se renverse, provoquant l'état de haute résistance ou l'état antiparallèle. Dans ce cas de figure : $R_p \approx 80 \Omega$, $R_{ap} \approx 100 \Omega$, ce qui donne une TMR de 25%. La transition ne se produit pas ici précisément à $H_{DIP} = 0 \text{ Oe}$ mais à $H_{DIP} \approx 50 \text{ Oe}$ (état parallèle favorisé) à cause du rayonnement dipolaire du SAF sur la couche libre. Lorsque le champ est suffisamment fort $H > H_{SAF}$, l'aimantation de la couche supérieure du SAF se retourne aussi, provoquant à nouveau la diminution de la résistance. Le champ de retournement vaut ici $H_{SAF} \approx 570 \text{ Oe}$.

Pour cet échantillon, la configuration magnétique de la couche libre est mono-domaine comme souhaité. En effet, le renversement de l'aimantation est brutal et les valeurs des résistances anti/parallèles sont constantes avec le champ. Dans la suite de l'expérience, la zone de fonctionnement qui va nous intéresser est l'état antiparallèle : $H_{DIP} < H_{dc} < H_{SAF}$. Le courant est négatif de façon à exciter directement l'aimantation de la couche libre. Il doit être suffisamment fort pour exciter les états entretenus du système mais pas trop pour ne pas dégrader la barrière tunnel. Pour ces échantillons, la tension de dégradation V_d est comprise entre : $400 \text{ mV} < V_d < 600 \text{ mV}$. Nous avons choisi de ne pas dépasser 300 mV ($\max(|I_{dc}|) \approx 3 \text{ mA}$), de façon à laisser une marge suffisante pour appliquer ensuite le courant RF. Effectivement, la figure montre que les courbes magnéto-résistives prises avant et après l'expérience sont les mêmes. L'échantillon ne s'est donc pas (ou peu) dégradé pendant l'enregistrement des données, ce qui va permettre d'exploiter les résultats.

La section suivante résume les caractéristiques dynamiques en régime libre.

9.2.1.2. Régime libre

La seconde étape consiste à accéder aux états entretenus du système. Pour cela, on fait varier les trois degrés de libertés permis par l'expérience : le champ H_{dc} , son angle d'application A et le courant statique I_{dc} , pour trouver les meilleures conditions d'excitation. La Figure 9.7 montre un exemple de diagramme spectral des excitations, obtenu en fonction du champ à courant et angle fixés. Ensuite, la Figure 9.8 se focalise sur l'évolution des propriétés du mode principal M1.

Commentaires Figure 9.7 : Le diagramme montre que le courant excite au moins deux modes, notés M1 et M2. D'abord, ils appartiennent tous les deux à la couche libre car leurs fréquences augmentent avec le champ. Ils sont ici séparés d'environ 700 MHz. Parmi les deux, M1 est le plus important car d'une part il est plus stable avec le champ et d'autre part est caractérisé par une plus forte puissance. C'est le mode uniforme car c'est aussi celui qui a la plus basse fréquence (c.à.d. plus basse énergie).

En revanche la puissance de M2 fluctue. Par exemple, le mode est plus fort dans la gamme : $390 \text{ Oe} < H_{dc} < 520 \text{ Oe}$, s'affaiblit entre : $520 \text{ Oe} < H_{dc} < 600 \text{ Oe}$ (cercle blanc) puis se renforce de nouveau après. De façon générale, nous avons trouvé ce type de spectre dans la plupart des échantillons étudiés que cela soit dans ce type N°1 ou le type suivant N°2, voir section 9.2.2. Ainsi en expérience, la dynamique de l'aimantation n'est pas purement macrospin. Plusieurs modes, autre que le mode uniforme, peuvent être excités par le courant, ce qui est un inconvénient car cela dégrade les propriétés du mode uniforme. On remarque que c'est dans la gamme de champ où M2 s'affaiblit que M1 possède les meilleures caractéristiques spectrales.

Commentaires Figure 9.8 : La Figure 9.8 montre en particulier l'évolution des propriétés du mode M1. Lorsque le mode M2 s'affaiblit, la largeur spectrale du mode M1 diminue tandis que la puissance augmente, figures (a,c). En particulier autour de $H_{dc} = 520 \text{ Oe}$, le mode M1 vérifie : $p \approx 4 \text{ nW}$ et $\Delta f \approx 30 \text{ MHz}$ alors que typiquement Δf vaut environ 100 MHz. Cette zone nous intéresse car c'est là où la dynamique de la couche libre se rapproche le plus d'une évolution macrospin. Pour cela, nous fixons le champ à cette valeur pour le reste de l'expérience.

En général, la variation de la largeur spectrale est une caractéristique des interactions qui se produisent entre le mode uniforme et les autres modes du système. Dans notre cas de figure, deux modes proches en fréquence se concurrencent pour aller vers le régime entretenu. Il faut alors choisir le champ pour promouvoir l'un plutôt que l'autre. D'une façon similaire, on peut voir aussi des interactions entre le mode entretenu et les modes amortis du système. En particulier, les modes amortis peuvent provenir des modes internes à la couche libre [54][122][123] ou bien sont causés par le couplage entre les couches du système, voir par exemple [57][56]. Globalement, les interactions provoquent des discontinuités en fréquence, des modifications de la largeur spectrale ou de la puissance. Leur compréhension est encore un sujet actif de recherche.

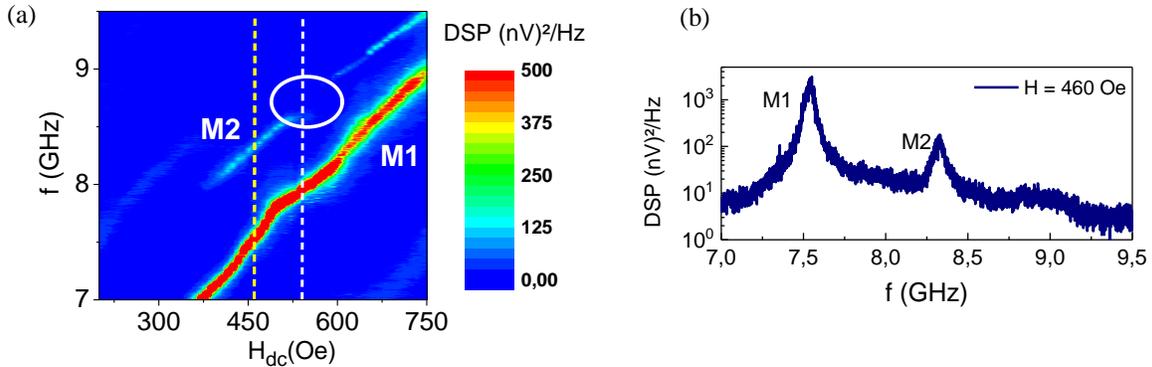


Figure 9.7. (a) Diagramme spectral pris à $I_{dc} = -2$ mA et $A = +20^\circ$. Le diagramme s’obtient par la juxtaposition des spectres, comme celui pris en (b) à $H_{dc} = 460$ Oe, en fonction du champ. La résolution de l’analyseur vaut ici RBW = 500 kHz. Tous les spectres ont été normalisés en $(nV)^2/Hz$.

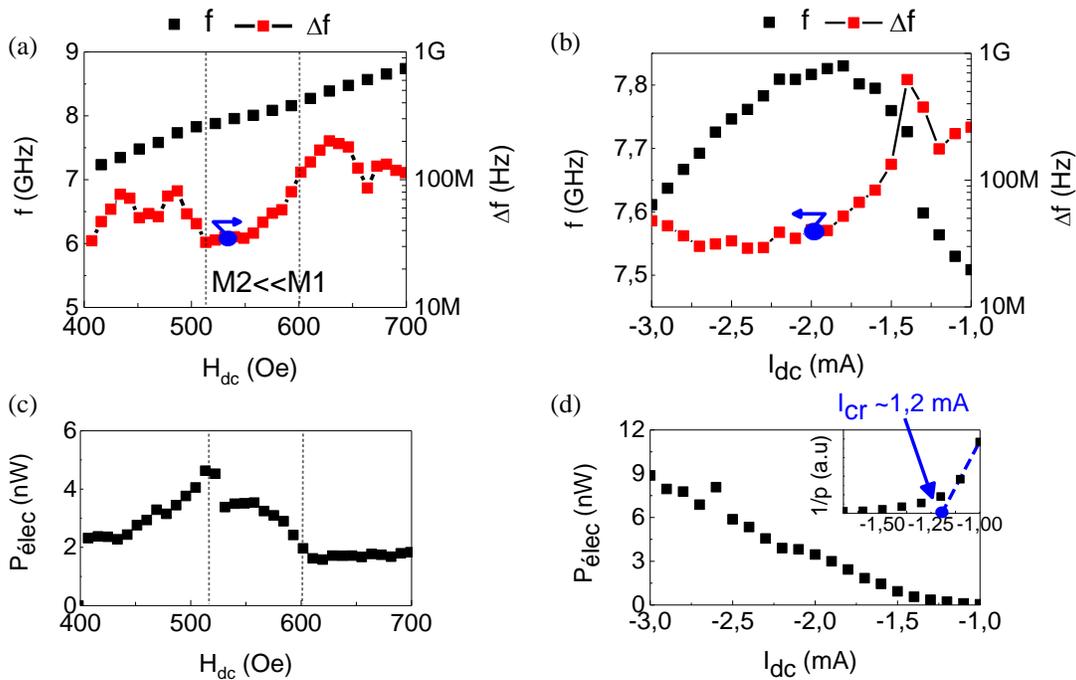


Figure 9.8. Evolution du mode M1 en fonction du champ à $I_{dc} = -2$ mA (a,c) et en fonction du courant à $H_{dc} = 520$ Oe (b,d). Les propriétés étudiées sont : la fréquence, la largeur spectrale (FMWH) et $P_{élec}$, la puissance intégrée du pic. La zone délimitée en (a,c) est la zone d’affaiblissement du mode M2.

Les figures (b,d) montrent l'évolution du mode M1 en fonction du courant en $H_{dc} = 520$ Oe. L'évolution est typique de celle d'un mode entretenu de type IPP. En effet lorsque le courant augmente, la puissance augmente progressivement tandis que la largeur spectrale et la fréquence diminuent. En particulier, la diminution de la fréquence est la signature du mode IPP (valeur de la non linéarité : $N \approx 185$ MHz / mA). En étudiant la dépendance en $1/\rho$ [124], on obtient le courant critique de l'échantillon : $I_{cr} \approx 1,2$ mA soit $V \approx 120$ mV. Dans ce cas, l'échantillon permet d'atteindre des super-criticités jusqu'à : $\xi = I_{dc}/I_{cr} \approx 2$, ce qui laisse une marge de courant/tension suffisamment étendue pour étudier les états entretenus du système.

9.2.1.3. Régime synchronisé

○ Résultats

La dernière étape consiste à synchroniser l'oscillateur. On injecte un courant RF dont la fréquence f_g est voisine du second harmonique du système ($f_g = 2f_0 \approx 15$ GHz). La Figure 9.9 montre l'évolution typique des propriétés du mode M1 lors du balayage en fréquence du générateur.

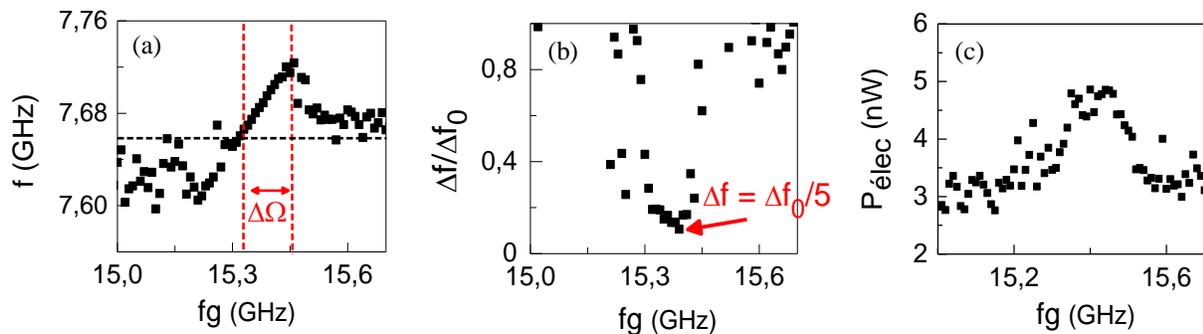


Figure 9.9. Caractérisation de la synchronisation du mode M1 à : $A = +20^\circ$, $H_{dc} = 520$ Oe, $I_{dc} = -2,4$ mA et $\varepsilon = I_g/I_{dc} = 1,7$. Evolution de (a) la fréquence, (b) la largeur spectrale et (c) la puissance électrique P_{elec} . La valeur ε tient compte de l'atténuation du substrat sur l'amplitude du signal générateur.

On voit que l'oscillateur se synchronise bien au signal générateur, ce qui se traduit par : 1) l'égalité en fréquence $f = 2f_g$, figure (a), et 2) la diminution de la largeur spectrale, figure (b). Dans ce cas, la gamme de synchronisation atteint $\Delta\Omega \approx 220$ MHz et la largeur spectrale vaut $\Delta f \approx 6$ MHz au centre de la gamme, soit une réduction d'un facteur 5 ($\Delta f_0 \approx 30$ MHz). La variation de la puissance est commentée plus en détails à la section suivante.

Plus globalement, les évolutions générales de $\Delta\Omega$ et Δf sont montrées à la Figure 9.10.

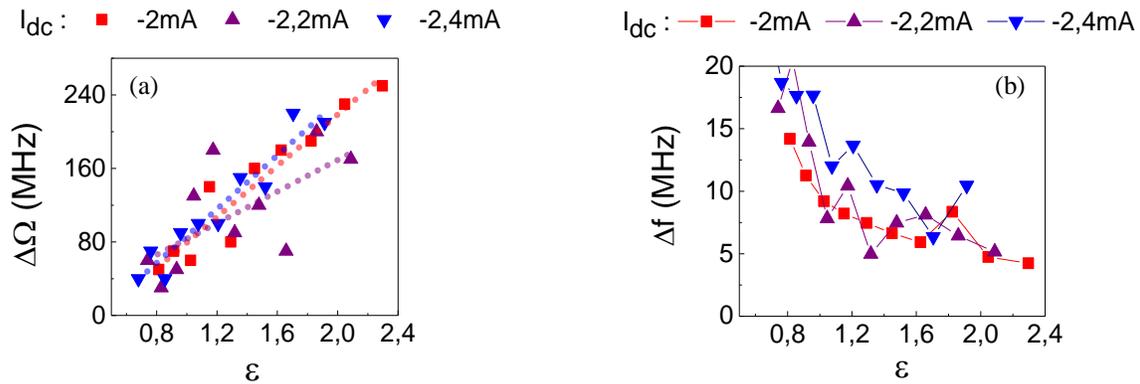


Figure 9.10. Evolution de (a) $\Delta\Omega$ et (b) Δf en fonction de ε , dans le cas de trois valeurs de courant statique I_{dc} . Les sensibilités de synchronisation C_Ω mesurées par régression linéaire valent : $C_\Omega = 139 \text{ MHz}/\varepsilon$ à $I_{dc} = -2,0 \text{ mA}$, $C_\Omega = 86 \text{ MHz}/\varepsilon$ à $I_{dc} = 2,2 \text{ mA}$ et $C_\Omega = 146 \text{ MHz}/\varepsilon$ à $I_{dc} = 2,4 \text{ mA}$.

Les figures (a,b) montrent le comportement typique de la synchronisation en fonction de l'amplitude ε du signal générateur : 1) $\Delta\Omega$ augmente linéairement tandis que 2) Δf diminue. Dans cette expérience, la meilleure performance que nous obtenons est $\Delta\Omega \approx 250 \text{ MHz}$ et $\Delta f \approx 4 \text{ MHz}$ à $I_{dc} = -2 \text{ mA}$ et $\varepsilon = 2,3$. Ces mesures sont assez comparables à celles qui ont été reportées dans la littérature. Par exemple chez [16], les auteurs ont mesuré dans des structures similaires : $\Delta\Omega \approx 300 \text{ MHz}$ pour $\varepsilon = 0,8$ avec une réduction d'un facteur 7 de Δf ($\Delta f = 35 \text{ MHz}$). En particulier, les ordres de grandeurs de réduction de Δf sont similaires.

En revanche, la figure (a) montre un premier désaccord avec le modèle. En particulier, on ne voit pas de différence de comportement entre les différents courants I_{dc} . En effet, on s'attendrait à ce que la sensibilité de synchronisation soit plus forte avec I_{dc} , comme ce que prédit le modèle pour le forçage $\mathcal{D}_{X,2}$. Nous ne pensons pas que cela soit un problème lié à la nature du mode M1 car les Figure 9.8 (b,d) indiquent un comportement bien du type IPP. En revanche, le problème peut venir éventuellement de la nature du forçage. C'est ce que nous allons discuter dans la section suivante à travers l'étude de la puissance synchronisée de l'oscillateur.

○ Discussions

La puissance électrique à l'intérieur de la gamme de synchronisation est montrée à la Figure 9.9 (c). On voit que la puissance équivaut à la puissance libre aux extrémités de la gamme et passe par un maximum au centre. Cela donne ainsi une allure très courbée, voire « quasi-triangulaire ». En réalité, cela doit être aussi le cas de la puissance des oscillations p_s , celle prédite par le modèle, car l'effet de magnétorésistance n'est pas censé la modifier (courbe $P_{elec}(I_{dc})$ monotone, Figure 9.8 (d)). On conclut donc que la puissance synchronisée n'est pas linéaire ($\psi_p \neq 3\pi/2$). Pour expliquer ce fait, deux hypothèses peuvent être avancées.

Comme ψ_p dépend de v , la première hypothèse est que v est très faible⁴⁴ : $0 < |v| < 1$. Dans ce cas, le forçage mis en jeu est probablement le forçage uniforme $C_{x,2}(p,\psi)$ à cause de l'effet champ de spin $b_{j0} \neq 0$. Le forçage $\mathcal{D}_{x,2}(p,\psi)$ doit être absent car lorsque $|v| \rightarrow 0$ alors $\Delta\Omega[\mathcal{D}_{x,2}] \rightarrow 0$ aussi (pour les forçages réels : $\Delta\Omega \propto v$, éq. (3.88)). L'hypothèse a l'avantage d'expliquer à la fois la forme non monotone de la puissance et la faible variation de $\Delta\Omega$ avec⁴⁵ I_{dc} , voir (4.19). Cependant, on comprend mal pourquoi la synchronisation fonctionne si bien alors que la plupart des forçages, en particulier $C_{x,2}(p,\psi)$, ont une synchronisation fortement réduite lorsque v est faible (forçages circulaires : $\Delta\Omega \propto \sqrt{1+v^2}$, éq. (3.55)).

A l'inverse, la seconde hypothèse est que le forçage mis en jeu n'est pas uniforme. Par exemple, la synchronisation peut se faire via le champ d'Oersted, produit par le courant qui traverse la couche libre. Cela résoudrait alors le problème de la puissance car le modèle ne s'applique pas aux forçages non uniformes. Si c'est effectivement le cas, l'inconvénient immédiat est que l'on ne peut pas se servir quantitativement du modèle que nous avons développé. Pour des études futures, nous suggérons alors de mieux caractériser ce type de synchronisation par la simulation micromagnétique.

Cependant, le modèle peut au moins nous aider à discerner laquelle des deux hypothèses est la plus probable. Pour cela, on étudie de plus près les résultats de [75]. Dans l'article, les auteurs s'intéressent à l'oscillateur uniforme avec l'aimantation hors du plan. Ils étudient notamment la synchronisation à l'ordre 1 par un champ, produit par une ligne de champ. Lors de l'expérience, ils mesurent la puissance des oscillations grâce à la composante hors du plan m_z de l'aimantation, via l'instrument MRFM. La Figure 9.11 montre les résultats obtenus.

L'étude montre que le balayage de f_0 via I_{dc} au voisinage de $f_g = 8,1$ GHz produit la synchronisation de l'oscillateur au champ. En particulier, la composante Δm_z varie négativement (bleu) puis positivement (rouge), ce qui correspond à la variation linéaire de la puissance synchronisée ($p_s = p - p_0$). D'après le modèle, on conclut que l'oscillateur vérifie $|v| \gg 1$ et qu'il se couple à un des forçages de type $C_{z,1}$ ou $C_{y,1}$ ⁴⁶ produit par le champ RF. Cela est possible car ces forçages sont générés par un champ qui est uniforme dans tout le volume de la couche. Ainsi, on voit qu'il est possible de trouver des situations où le modèle est vérifié.

Pour décider entre les deux hypothèses, on suggère de réaliser l'expérience suivante. On synchronise l'oscillateur planaire au même point d'opération à $n = 2$, via un champ puis via un courant. Si la variation de la puissance synchronisée est la même dans les deux cas, on conclut que la non linéarité est effectivement faible. Par contre, si la puissance est linéaire dans le premier cas mais pas dans le second alors on conclut, cette fois, que c'est le premier qui est produit par un forçage uniforme et non le second. Dans cette expérience, le modèle développé est décisif pour caractériser la nature du forçage.

⁴⁴ v n'a pas pu être mesuré dans cet expérience.

⁴⁵ Bien que l'amplitude r du forçage $C_{x,2}(p,\psi)$ ne dépende pas directement de p (et donc de I_{dc}), la gamme $\Delta\Omega$ en dépend quand même à cause de la dépendance de $v(p)$. Par ailleurs, il se peut aussi que B/A dépende de I_{dc} .

⁴⁶ Pour les oscillateurs hors du plan, les forçages $C_{z,1}$, $C_{y,1}$ sont équivalents car $B/A \approx 0$

Eventuellement, on peut compléter l'expérience par des simulations micromagnétiques annexes, qui caractériseront en particulier la synchronisation via les forçages non uniformes.

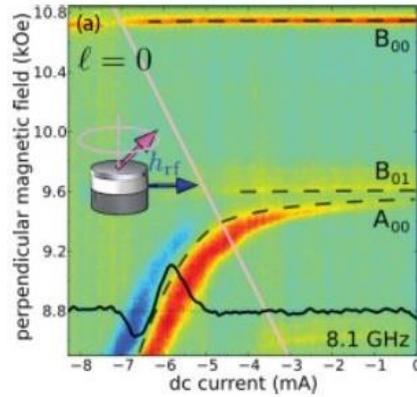


Figure 9.11. Evolution de la composante hors du plan Δm_z de l'aimantation en fonction du champ H_{dc} et du courant I_{dc} , extrait de [75]. Synchronisation de l'oscillateur à un champ RF de fréquence $f_g = 8,1$ GHz. Ici, l'oscillateur est une vanne de spin (Py/Cu/Py) de diamètre 200 nm. Un très fort champ statique H_{dc} (≈ 10 kOe) est appliqué pour saturer l'aimantation hors du plan. La grandeur mesurée par MRFM est $\Delta m_z = m_z - m_{z0}$ où m_{z0} est la composante en régime libre. Dans cette configuration, la puissance de l'oscillateur p du modèle est directement liée à m_z par $p = \Delta m_z / 2m_s$.

9.2.2. Echantillon n°2

9.2.2.1. Régime statique

Pour le second lot, on choisi l'échantillon présentant la courbe magnéto-résistive suivante :

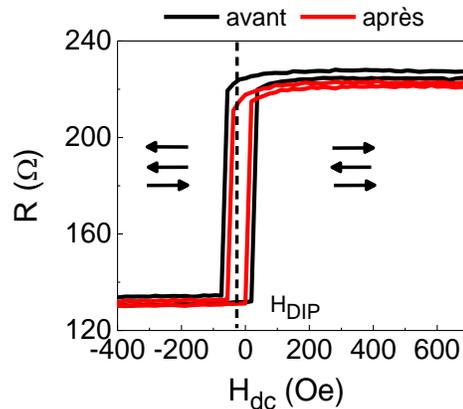


Figure 9.12. Courbes magnéto-résistives de l'échantillon de type n°2 (100x100 nm), prises avant et après l'expérience de synchronisation. Même conditions d'application du champ et du courant qu'à la Figure 9.6. Caractéristiques : $R_p = 134 \Omega$, $R_{ap} = 227 \Omega$, $\Delta R = 93 \Omega$, $TMR = 71\%$ et $H_{dip} \approx -25$ Oe (état anti parallèle favorisé). Le renversement du SAF n'est pas montré mais se produit ici vers 1 kOe.

Dans ce cas, la TMR vaut 71%, ce qui est supérieur à celle de l'échantillon précédent (TMR = 25%). Cela va permettre d'augmenter la puissance émise de l'oscillateur d'au moins par un facteur 10 ($(71/25)^2 \approx 10$) et permettre des mesures temporelles du régime synchronisé. Cependant l'inconvénient est que ces échantillons présentent statistiquement une tension de dégradation V_d plus faible, comprise entre 300 mV et 400 mV. Cela limite alors le courant à environ -1.8 mA. Pendant l'expérience, nous nous sommes limités à un courant statique de $I_{dc} = -1,5$ mA. Même si la valeur est limitée, on voit que la courbe n'a pas changé pendant l'expérience, ce qui permet d'exploiter les résultats.

9.2.2.2. Régime libre

La seconde étape est de trouver les états entretenus du système. On voit que l'échantillon présente de fortes excitations lorsque le champ est appliqué à l'angle : $A = +10^\circ$. Pour cet angle, on mesure les caractéristiques spectrales suivantes en fonction du champ, Figure 9.13. L'évolution des propriétés du mode M1 en fonction du courant, à $H_{dc} = 350$ Oe, est donnée à la Figure 9.14.

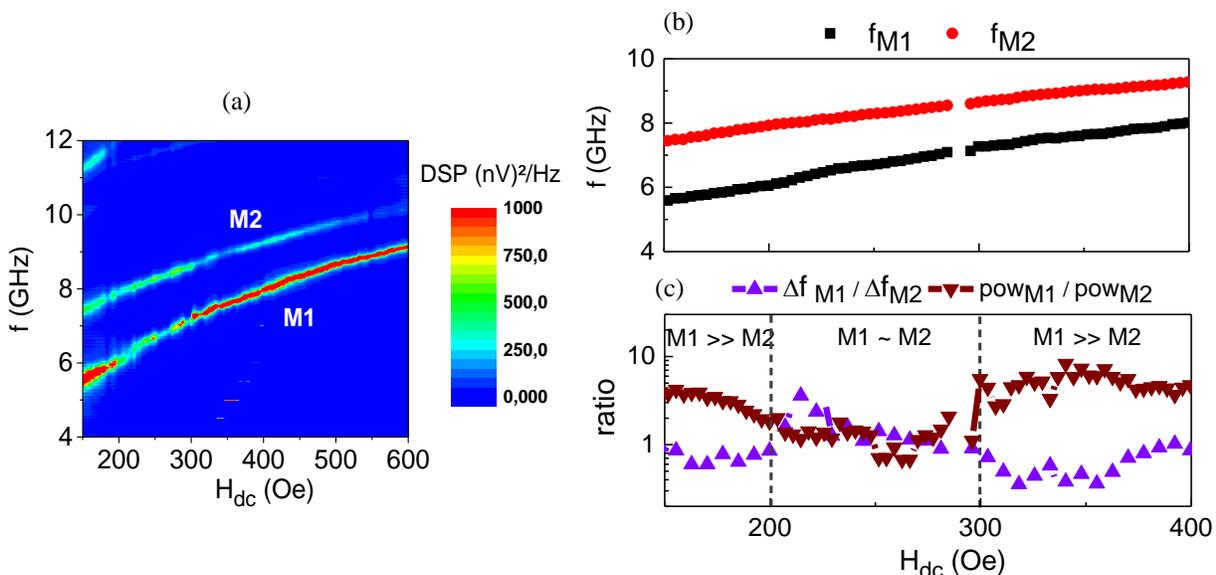


Figure 9.13. Caractéristiques spectrales prises à : $A = +10^\circ$ et $I_{dc} = -1,5$ mA en fonction du champ statique H_{dc} . (a) Diagramme spectral. (b) Evolution des fréquences des modes M1, et M2. (c) Evolution des rapports des largeurs spectrales $\Delta f_{M1} / \Delta f_{M2}$ et de la puissance p_{M1} / p_{M2} en fonction du champ.

Commentaire Figure 9.13 : Comme dans l'échantillon précédent, le courant excite principalement deux modes dans la dynamique, notés encore M1 et M2. M1 est le mode uniforme et M2 est un autre mode de plus haute énergie, localisé aussi dans la couche libre. Les fréquences des deux modes sont séparées d'environ 1.57 GHz, voir figure (b). La particularité est qu'ici l'interaction entre les deux modes est plus visible.

Par exemple les figures (a,c) montrent que : lorsque $H_{dc} < 200$ Oe et $H_{dc} > 300$ Oe, M1 domine M2 en terme de puissance tandis que lorsque $200 \text{ Oe} < H_{dc} < 300$ Oe, les deux modes sont équivalents.

L'interaction se traduit aussi dans l'évolution de la largeur spectrale. Quand M1 est dominant, sa largeur spectrale diminue tandis que celle de M2 augmente. Là encore, on voit la compétition que se livrent ces modes de la couche libre vers le régime entretenu. Il faut donc choisir la gamme de champ approprié pour obtenir le mode avec les meilleures caractéristiques spectrales. Ici, nous choisissons de fixer le champ à $H_{dc} = 350$ Oe, là où M1 domine le plus la dynamique. La largeur spectrale est aussi la plus faible : $\Delta f_{M1} = 50$ MHz.

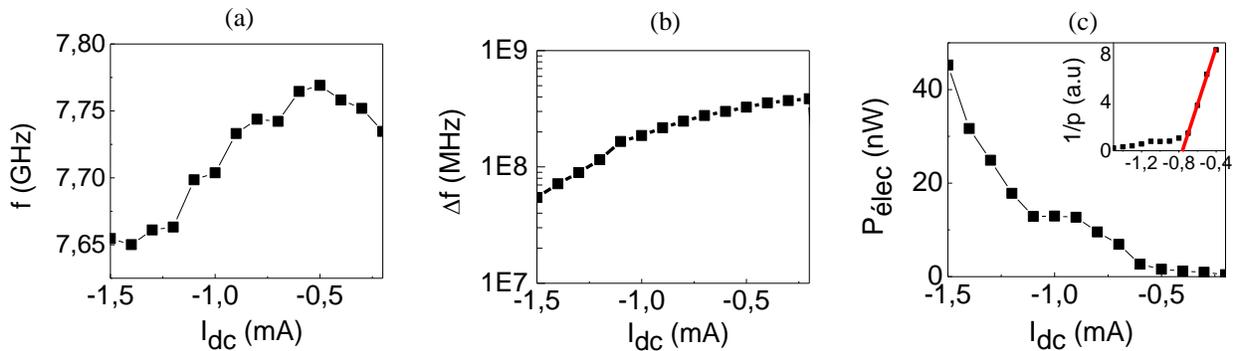


Figure 9.14. Evolution du mode M1 avec le courant I_{dc} . (a) fréquence, (b) largeur spectrale et (c) puissance.

Commentaire Figure 9.14 : En $H_{dc} = 350$ Oe, le mode M1 se comporte bien comme un mode de type IPP. En effet, la fréquence et la largeur spectrale diminue tandis que la puissance augmente à mesure que le courant augmente. En particulier grâce à une TMR plus élevée, la puissance est plus forte et atteint jusqu'à 45 nW en $I = -1,5$ mA, contre 5 à 10 nW dans le cas précédent. L'étude de $1/p$ donne le courant critique de la couche égal à : $I_{cr} = 0,8$ mA ce qui permet d'atteindre des super-criticités égales à $\xi = I_{dc}/I_{cr} = 2$ pour l'étude de la dynamique.

9.2.2.3. Régime synchronisé

Grâce à la puissance plus forte, on a pu caractériser à la fois spectralement et temporellement le signal émis par l'oscillateur. On commence par l'étude spectrale.

o Caractérisation spectrale

On injecte un courant RF dans l'oscillateur dont l'amplitude varie entre $0.25 < \varepsilon < 0.79$ et la fréquence voisine du 2nd harmonique ($14.5 \text{ GHz} < f_g < 16 \text{ GHz}$). La Figure 9.15 montre les résultats obtenus.

Le meilleur résultat est obtenu pour $\varepsilon = 0,79$, figure (a). Dans ce cas, la gamme de synchronisation atteint $\Delta\Omega \approx 250$ MHz et la largeur spectrale diminue jusqu'à $\Delta f = 2$ MHz au centre de la gamme. Cela donne une réduction au moins d'un facteur 50, ce qui est le meilleur résultat que nous connaissons pour les oscillateurs uniformes (chez [16] la réduction était d'un facteur 7). L'évolution de $\Delta\Omega$ est proportionnelle à ε comme attendu, figure (b). La sensibilité mesurée vaut ici : $C_\Omega = 355$ MHz.

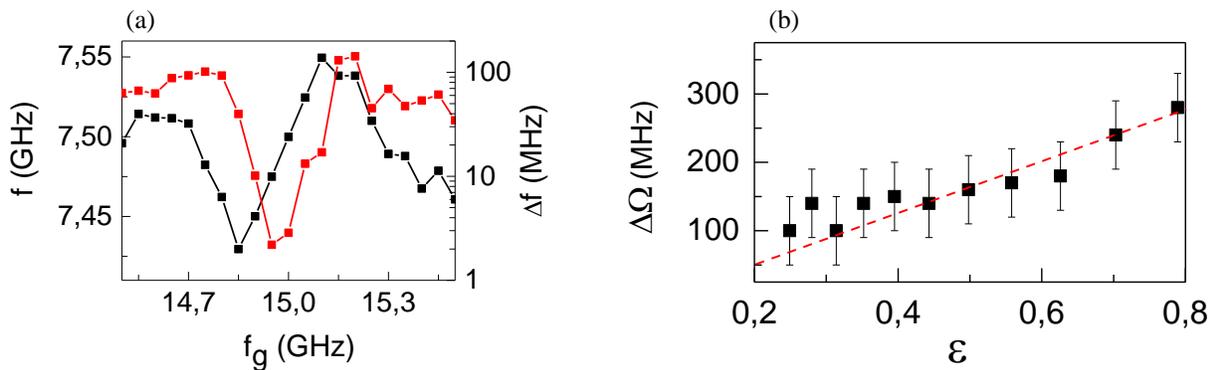


Figure 9.15. (a) Evolution de f , Δf avec f_g pour $\varepsilon = 0,79$, $I_{dc} = -1,5$ mA et $H_{dc} = 520$ Oe. (b) Evolution de $\Delta\Omega$ avec ε .

o Caractérisation temporelle

Par ailleurs, nous avons aussi enregistré le signal émis par l'oscillateur, à l'aide d'un oscilloscope à haut taux d'échantillonnage (50 Gs/s). La durée d'enregistrement est de 40 μ s. Une fois le signal acquis, on effectue le traitement numériquement suivant. D'abord, le signal est filtré par un filtre passe bande de largeur B (typiquement $B = 4$ GHz). Puis on calcule ensuite le signal analytique associé, ce qui permet de connaître la phase et l'amplitude instantanées.

L'évolution du déphasage instantané ψ_{osc} est montrée à la Figure 9.16.

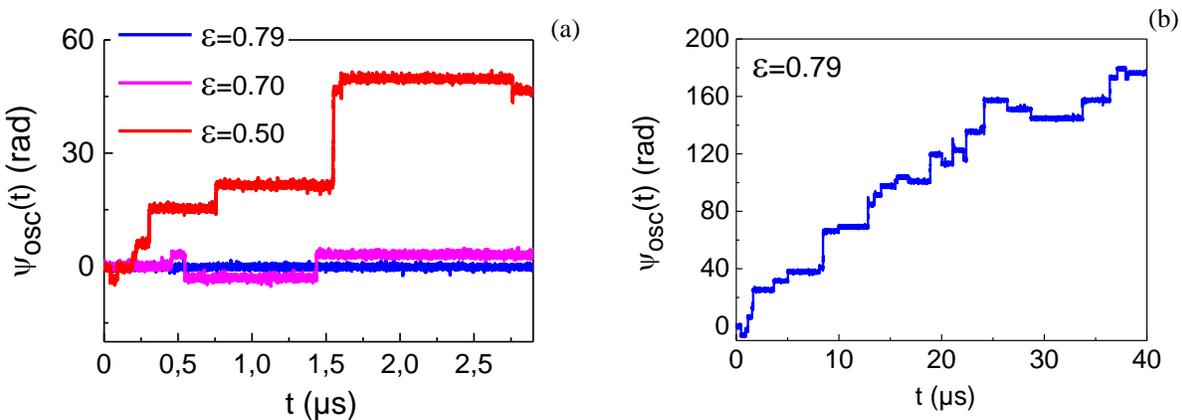


Figure 9.16. (a) Evolution de $\psi_{osc} = \phi - \phi_g/2$ sur 3 μ s. ϕ est la phase de l'oscillateur extraite de la trace temporelle et ϕ_g la phase du générateur de valeur absolue arbitraire (le signal générateur n'est pas enregistré). La valeur absolue de ψ_{osc} est donc aussi arbitraire. (b) Evolution totale de ψ_{osc} sur 40 μ s pour $\varepsilon = 0,79$. Dans les deux cas, $f_g = 15$ GHz et le filtre passe-bande vaut 4 GHz.

Suivant l'amplitude du générateur, la phase subit aléatoirement des sauts, ce qui traduit l'influence du bruit thermique sur la synchronisation. Ce sont ces mêmes sauts qui ont été décrits par la simulation dans la partie 7.2. Le fait important est que plus l'amplitude du générateur augmente et plus le nombre

de sauts diminue, figure (a). En effet, comme la synchronisation est plus robuste, la phase est davantage stabilisée. En particulier en $\varepsilon = 0,79$ ($I_g = 1,2$ mA), la phase est stable sur au moins $3 \mu\text{s}$. Néanmoins pour cette même amplitude, une observation sur une durée plus longue fait apparaître aussi des sauts de phase (figure (b)). Par conséquent, le régime atteint n'est pas celui de la synchronisation de fréquence. Un moyen de l'atteindre aurait été d'augmenter encore l'amplitude du générateur mais celle-ci est limitée par la tension de dégradation due à la barrière.

Dans la littérature, des situations de synchronisation robuste ont déjà été observées notamment dans les oscillateurs vortex. Par exemple, [83] ont observé pour des injections de courant I_g de 2-3 mA, des stabilisations de la phase jusqu'à 5 ms. Cette meilleure efficacité est causée par plusieurs facteurs : 1) La forte stabilité thermique du vortex comparée à l'aimantation uniforme, 2) la bonne symétrie du champ d'Oersted avec le vortex et 3) l'amplitude du courant injecté.

Par ailleurs, les sauts peuvent être de valeurs différentes. Globalement on en observe deux types :

- Les premiers sont des sauts de phases de $\pm\pi$ rad, comme à la Figure 9.17 (a). Ce sont les sauts prédits par la théorie. De façon générale, une synchronisation d'ordre n engendre des sauts de $\pm 2\pi/n$. Or comme ici l'ordre est 2, les sauts sont de $\pm\pi$. Du point de vue de la dynamique, cela veut dire qu'il y a deux positions d'équilibres stables dans l'intervalle $\psi_{\text{osc}} \in [0, 2\pi]$. En particulier, la Figure 9.17 (b) montre l'allure du signal pendant l'un de ces sauts.

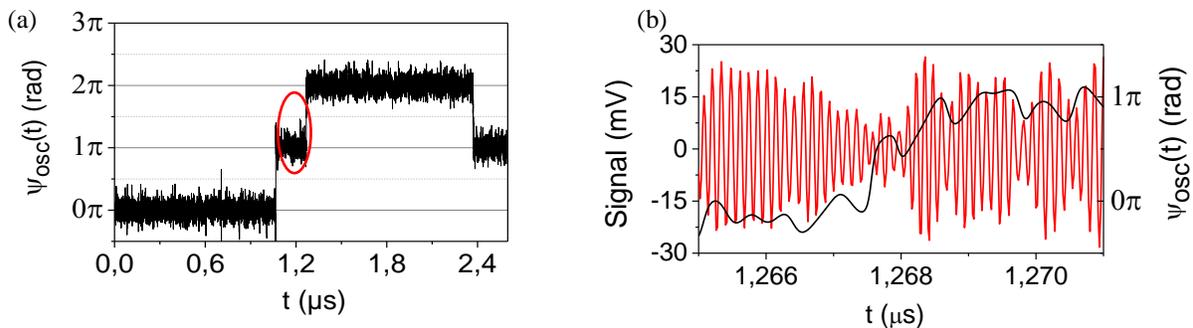


Figure 9.17. Observation des déphasages de π . (a) Evolution de $\psi_{\text{osc}}(t)$ sur $2,5 \mu\text{s}$ à $\varepsilon = 0,79$. (b) Zoom sur le saut à $1,26 \mu\text{s}$ avec l'évolution du signal enregistré.

- L'autre possibilité est que le déphasage soit un multiple de π , comme à la Figure 9.18 (a). Cela se produit car l'oscillateur subit des extinctions de signal, qui se manifestent par une chute totale de la puissance sur plusieurs ns. Dans ce cas, l'oscillateur se désynchronise et la phase est momentanément perdue. Lorsque l'oscillation redémarre, la phase prend une nouvelle valeur indépendamment de celle qu'elle avait avant l'extinction, ce qui engendre un saut aléatoire multiple de π . En particulier, la Figure 9.18 (b) montre l'allure du signal pendant un de ces sauts. Dans ce cas, la puissance du bruit est supérieure à la puissance du signal car celle-ci a fortement chuté. La phase est momentanément perdue, entraînant ici un saut d'environ 5π . On peut essayer de filtrer le signal avec un filtre de largeur plus étroite ($B = 1$ GHz) pour augmenter la qualité du signal (augmentation

du SNR), Figure 9.18 (c). Sauf qu'ici, les sauts se produisent encore car l'oscillateur s'éteint bel et bien. Ce phénomène d'extinction s'observe régulièrement dans nos oscillateurs uniformes planaires [120] et n'est pas encore à ce jour élucidé. On peut constater que la synchronisation ne permet pas de les supprimer.

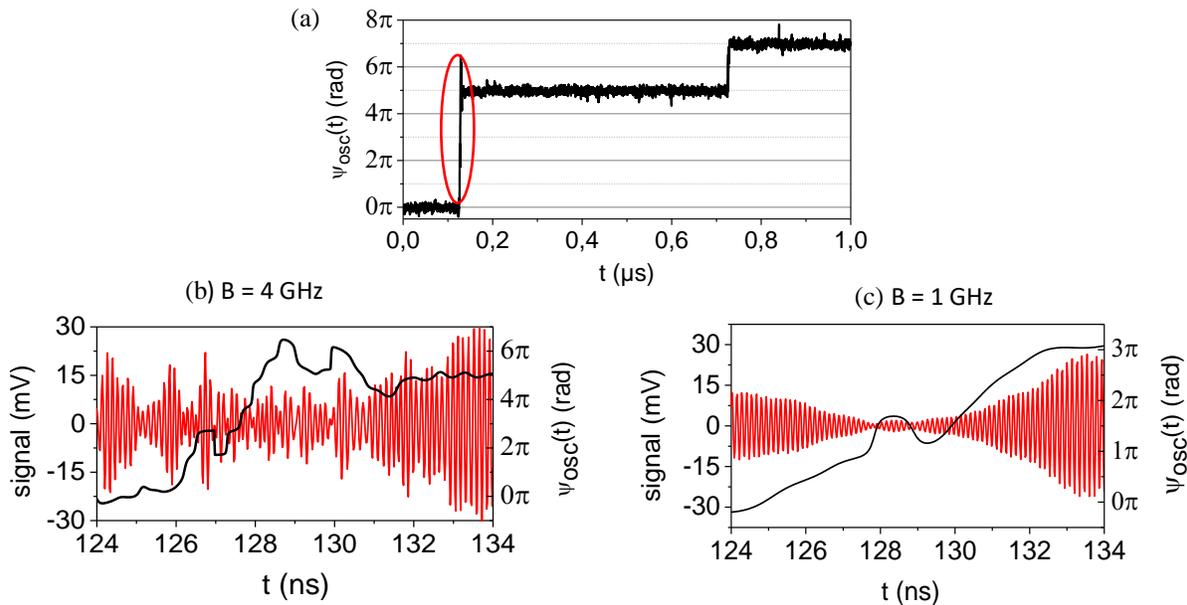


Figure 9.18. Observation des déphasages dû aux extinctions. (a) Evolution de $\psi_{osc}(t)$ sur $1\mu s$ à $\epsilon = 0,79$. (b) Zoom sur le saut qui se produit à 128 ns avec $B = 4$ GHz et (c) $B = 1$ GHz.

De façon similaire, il peut aussi se produire la situation suivante. L'amplitude du signal fluctue suffisamment pour qu'à un moment donné le bruit surpasse le signal, entraînant un saut. Cependant, il se peut que le signal ne s'éteigne pas ou autrement dit que l'oscillateur fonctionne toujours. Dans ce cas, un filtre plus étroit permet de supprimer ces sauts « parasites ». La Figure 9.19 montre un exemple. En général, ces sauts se produisent souvent lorsque la puissance de l'oscillateur génère un faible SNR ($SNR < 10$ dB). Cela est aussi lié à la tendance naturelle à la diminution du signal mais qui, dans ce cas précis, ne se concrétise pas en extinctions.

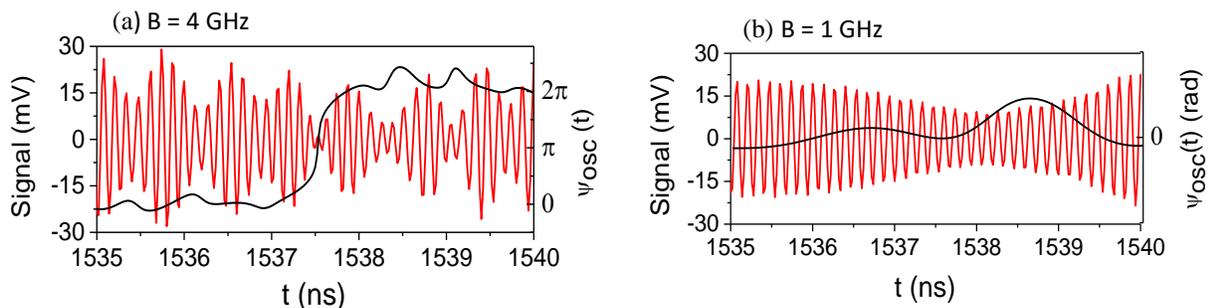


Figure 9.19. Déphasages de $\pm 2\pi$. (a) Evolution de $\psi_{osc}(t)$ avec $B = 4$ GHz et (c) avec $B = 1$ GHz.

○ Bruit d'amplitude / de phase

Pour terminer, on va étudier le bruit d'amplitude et de phase du signal à partir de sa trace temporelle, Figure 9.20 (a,b).

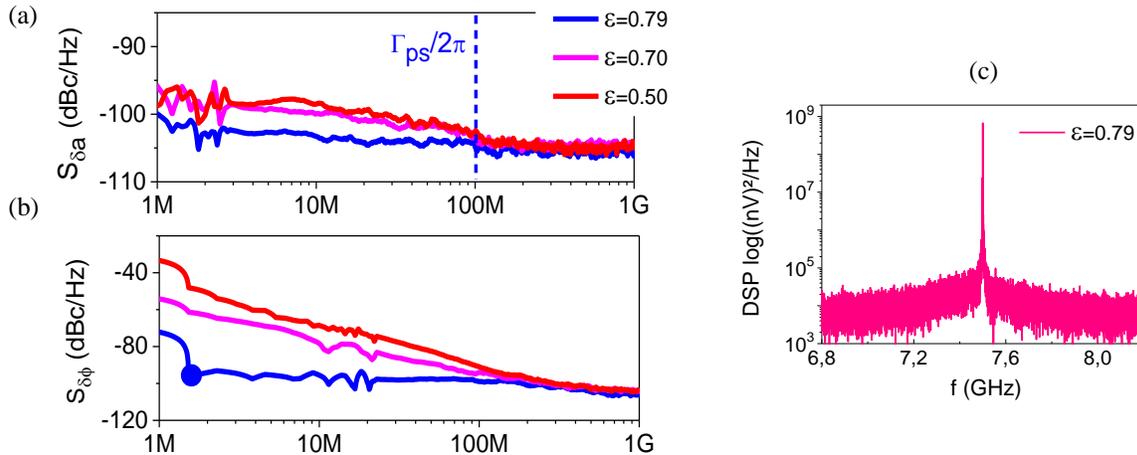


Figure 9.20. (a,b) Evolution du bruit d'amplitude $S_{\delta a}$ et du bruit de phase $S_{\delta\phi}$ en fonction de ϵ . (c) Densité spectrale du signal mesuré (sur 40 μ s) à $\epsilon = 0,79$.

Au faible ϵ , le bruit de phase (figure (b)) évolue en $1/f^2$ à cause des nombreux sauts de phases qui se produisent (voir les traces de 3 μ s de la Figure 9.16 (a)). Pour faire diminuer le nombre de sauts, il faut augmenter ϵ . Par exemple en $\epsilon = 0,79$, l'amplitude du générateur est suffisante pour supprimer les sauts, ce qui conduit à un bruit de phase évoluant en un bruit blanc dans la gamme $[1, \Gamma_{ps}/2\pi \approx 100 \text{ MHz}]$ et de valeur au moins $S_{\delta\phi} \approx -100 \text{ dBc/Hz}$ à 1,5 MHz (point bleu). On peut donc obtenir des stabilités de phase entre deux sauts qui sont comparables à la simulation. Cependant, il faudra encore améliorer sur le long terme la stabilité de la phase. Sur ce point, les oscillateurs vortex montrent de meilleures performances. Par exemple, ils peuvent atteindre des stabilités de $S_{\delta\phi} \approx -100 \text{ dBc/Hz}$ à 10 kHz [83].

Par ailleurs, la figure (a) montre que l'augmentation de ϵ conduit aussi à la stabilisation de l'amplitude. Par exemple, le bruit d'amplitude atteint $S_{\delta a} = -102 \text{ dBc/Hz}$ à 1,5 MHz pour $\epsilon = 0,79$ contre $S_{\delta a} = -97 \text{ dBc/Hz}$ à 1,5 MHz pour en $\epsilon = 0,50$. Cependant cette diminution n'est pas attendue car le plancher de bruit blanc de $S_{\delta a}$ est censé être indépendant de ϵ . C'est une autre différence entre l'expérience et la théorie.

Enfin, les fonctions $S_{\delta a}$ et $S_{\delta\phi}$ peuvent nous renseigner sur la nature de la relaxation. D'abord, $S_{\delta a}$ nous indique la fréquence d'amortissement : $\Gamma_{ps} \approx 100 \text{ MHz}$. Par contre, on ne voit pas de pics résonants, caractéristiques d'une relaxation sous critique. Il n'y en a ni chez $S_{\delta a}$ ou $S_{\delta\phi}$ ni dans la densité spectrale du signal mesuré à l'oscilloscope, figure (c). Ce résultat est contraire à la théorie, qui affirme que la relaxation ne peut être que sous critique. Cette différence peut s'expliquer par :

- La nature non uniforme du forçage. Si le forçage est effectivement de de type, nous ne savons pas comment se comporte le régime transitoire. Peut-être que le forçage favorise la relaxation surcritique.
- La limitation de l'amplitude du générateur : C'est une autre possibilité car [125] a mesuré dans un échantillon du même type des pics modulés à 500 MHz de la porteuse. D'un point de vue théorique, il existe toujours un seuil critique à partir duquel l'amplitude du générateur enclenche le régime sous-critique. Néanmoins, les seuils prédits sont très faibles ($\varepsilon \approx 1 \times 10^{-2}$ pour $\mathcal{D}_{x,2}$). La relaxation observée aurait dû être aussi de type sous-critique tout comme celle de l'échantillon n°2. Par conséquent, l'argument n°1 reste le plus plausible.
- Une dernière possibilité est la non linéarité : Le seuil critique vaut : $a_{cr} = \Gamma_p / C\Omega$. Il est donc inversement proportionnel à N. Si l'échantillon n'est pas suffisamment non linéaire, le seuil est plus grand.

Tout comme l'étude de la puissance synchronisée, on voit que la nature du régime de relaxation peut aussi apporter des informations sur la nature du forçage.

9.3. Conclusion

Par deux fois, nous avons synchronisé l'oscillateur à un courant RF à l'ordre 2. Grâce au modèle développé, nous avons pu discuter certaines caractéristiques de la synchronisation. D'abord, l'allure de la puissance synchronisée nous fait penser que le forçage mis en jeu est non uniforme, généré par le champ d'Oersted du courant RF. Si cela se confirme, cela veut dire que la théorie ne peut modéliser les cas de synchronisation par courant, ce qui est alors un inconvénient. En revanche, elle doit pouvoir s'appliquer au champ RF produit par une ligne de courant. Nous avons ensuite discuté la nature de la relaxation. Là encore nous trouvons une différence avec la théorie car le seuil de transition semble largement plus grand que celui prédit. Dans le but de mieux comprendre toutes ces observations, nous suggérons de comparer ces résultats avec ce qu'aurait donné la synchronisation sous champ dans les mêmes conditions. Il serait aussi intéressant d'étudier la synchronisation via la simulation micromagnétique.

Conclusion générale

Depuis une dizaine d'années, la synchronisation d'oscillateurs spintroniques est un sujet largement étudié à cause de son fort potentiel applicatif. De nombreuses études théoriques ont été faites sur les mécanismes de synchronisation comme l'injection d'un signal RF [74][80], l'auto-injection [96][126] ou la synchronisation mutuelle d'oscillateurs [73][95]. Dans ce travail essentiellement théorique, nous nous sommes intéressés aux multiples façons d'injecter un signal RF dans l'oscillateur uniforme. Pour cela, nous avons utilisé le modèle universel, introduit par [20] pour les oscillateurs spintroniques. Nous avons franchi une « montagne » de transformation (formalisme ondes de spin), qui ont servi à transformer l'équation LLGS en une équation plus simple, appelée équation d'amplitude universelle. Le problème de la synchronisation s'exprime alors plus simplement et notre travail a pu commencer. Nous résumons les principales étapes.

Les oscillateurs non linéaires possèdent avant tout deux degrés de libertés couplés, puissances et phases. Du point de vue de la synchronisation, cela conduit à avoir une variété de forçages possibles que nous avons qualifiés de : circulaires, rectilignes ou quelconques suivant leurs expressions mathématiques. Ensuite, nous avons utilisé le système dérivé par [20] pour étudier en toute généralité les propriétés de synchronisation des forçages ($\Delta\Omega$, ψ_0 , $\Delta\Pi$, ψ_p) sans se soucier de leurs réalisations. En particulier, les grandeurs $\Delta\Pi$, ψ_p caractérisent la puissance synchronisée et pour la première fois sont étudiées de façon complète. Les forçages les plus « spectaculaires » sont certainement les forçages rectilignes, comme le forçage à synchronisation nulle, ou celui à valeurs imaginaires qui annule la sensibilité de puissance. Une propriété importante est que, lorsque $|v| \gg 1$, la plupart des forçages se résument à leurs composantes sur la puissance (forçage à valeurs réelles) dont les propriétés de synchronisation sont voisines.

Ces forçages à valeurs réelles jouent un rôle de forçage limite avec les caractéristiques suivantes :

- 1) La variation de puissance synchronisée est linéaire
- 2) Sa pente est égale à celle du régime libre
- 3) La gamme de synchronisation est linéaire en v .

Cette simplification est très pertinente pour les oscillateurs uniformes car en général $|v| \gg 1$.

Concrètement, toutes ces propriétés ont été mises en application dans le cas de l'oscillateur uniforme planaire. Cependant, le problème est qu'il faut calculer le forçage, pour chaque cas de synchronisation de l'oscillateur et il en existe beaucoup. Pour traiter cette diversité en perdant le moins de temps possible, nous avons décidé de transformer une bonne fois pour toute les forçages canoniques, qui servent ensuite à reconstituer n'importe quels forçages. Ces forçages ont été calculés, étudiés sous tous leurs aspects et enfin vérifiés numériquement. Par ailleurs grâce à la technique des forçages à valeurs réelles, nous avons pu discuter de façon simple des sujets plus techniques : la combinaison de forçages,

le régime transitoire et le régime de synchronisation sous forts signaux. Dans cette dernière étude, nous établissons un nouveau système dynamique qui fournit une solution asymétrique en δ . Tous ces modèles concordent bien avec la simulation. Le résultat principal est que l'on peut désormais calculer toutes les propriétés de synchronisation de tous les forçages possibles de l'oscillateur uniforme.

Entre autres, le modèle développé donne des éléments de réponse à la question du « meilleur » forçage. Par exemple pour l'oscillateur planaire ($\mathcal{B}/\mathcal{A} \approx -1$), certains forçages canoniques sont favorisés par rapport à d'autres ($C_{y,1}, \mathcal{D}_{z,1} \gg C_{z,1}, \mathcal{D}_{y,1}$). C'est donc ceux là qu'il faut utiliser pour une synchronisation plus forte. D'autres pistes, comme l'injection d'un champ RF polarisé circulairement sont intéressantes car la gamme $\Delta\Omega$ est la somme des gammes combinées. Par ailleurs, le modèle suggère une nouvelle expérience. Si le signal RF est injecté via un courant et un champ, alors $\Delta\Omega$ doit changer en fonction de τ , le retard sur les deux voies. Au centre de la gamme, cela se manifestera par une variation de la largeur spectrale Δf . Il s'agit donc d'un moyen simple pour augmenter $\Delta\Omega$.

Grâce au modèle, nous avons pu aussi discuter les résultats d'expériences, de façon plus approfondie. Par exemple, nous avons trouvé deux pistes pour expliquer nos mesures de puissance synchronisée : soit la non linéarité est très faible $\nu \approx 0$, soit le forçage est non uniforme. Pour décider, nous suggérons de synchroniser l'oscillateur au même point d'opération via un champ, puis via un courant. L'analyse de la puissance synchronisée permettra de répondre à la question en utilisant les résultats du modèle. Si les forçages sous courant se révèlent en effet non uniformes, alors il faudrait mieux les caractériser par la simulation micromagnétique. Il convient cependant d'être prudent car, toute interprétation reste délicate à cause de la température, la dynamique multi mode de l'oscillateur et les interactions non maîtrisées (rayonnement dipolaire entre les couches).

Enfin, le modèle peut être étendu à d'autres situations, différentes que celles de la synchronisation par injection. Par exemple, il peut aussi servir à décrire la boucle à verrouillage de phase (PLL). Dans ce cas, la phase de l'oscillateur est asservie à celle d'un oscillateur plus stable, fonctionnant à plus faible fréquence. Même si physiquement, l'oscillateur est modulé plutôt que synchronisé, l'effet final est le même : le déphasage est fixe et le système dynamique est le même qu'ici. En utilisant la richesse de la dynamique, on peut envisager plusieurs schémas de fonctionnement. Par exemple, il est possible de reboucler le signal correcteur par le courant, ce qui crée l'équivalent d'un forçage à valeurs réelles. Il est aussi envisageable de le reboucler par le champ, ce qui crée l'équivalent d'un forçage à valeurs imaginaires. Autrement dit, la puissance de l'oscillateur ne varie pas dans son domaine de fonctionnement ce qui peut être une caractéristique recherchée pour la conception de PLL.

Pour le futur, nous proposons de mieux comprendre la synchronisation fractionnaire ou l'étude de nouveaux schémas de PLL. On peut aussi étudier l'injection d'un signal RF sur une matrice d'oscillateurs. Enfin, le modèle développé doit pouvoir s'adapter à l'auto-injection ou la synchronisation mutuelle avec les différentes orientations. De façon générale, la synchronisation des oscillateurs uniformes est un sujet encore loin d'être épuisé. Nous souhaitons que ce travail ait aidé et aidera à mieux comprendre la synchronisation des oscillateurs spintroniques à aimantation uniforme.

Bibliographie

- [1] M. Lahmani, C. Dupas, and P. Houdy, *Les nanosciences 1. Nanotechnologies et nanophysique*, Belin. 2009.
- [2] A. Y. Cho and J. R. Arthur, "Molecular beam epitaxy," *Prog. Solid State Chem.*, vol. 10, no. Part 3, pp. 157–191, 1975.
- [3] M. N. Baibich, J. M. Broto, A. Fert, F. N. Van Dau, F. Petroff, P. Eitenne, G. Creuzet, A. Friederich, and J. Chazelas, "Giant magnetoresistance of (001)Fe/(001)Cr magnetic superlattices," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 61, no. 21, pp. 2472–2475, 1988.
- [4] G. Binash, P. Grunberg, F. Sarenbach, and W. Zinn, "Enhanced magnetoresistance in layered magnetic structures," *Phys. Rev. B*, vol. 39, no. 7, pp. 4828–4830, 1989.
- [5] T. R. Mcguire and R. I. Potter, "Anisotropic Magnetoresistance in Ferromagnetic 3d Alloys," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 11, no. 4, pp. 1018–1038, 1975.
- [6] L. Berger, "Emission of spin waves by a magnetic multilayer traversed by a current," *Phys. Rev. B*, vol. 54, no. 13, pp. 9353–9358, 1996.
- [7] J. C. Slonczewski, "Current-driven excitation of magnetic multilayers," *J. Magn. Magn. Mater.*, vol. 159, no. 1–2, pp. L1–L7, Jun. 1996.
- [8] E. B. Myers, D. C. Ralph, J. A. Katine, R. N. Louie, and R. A. Buhrman, "Current-Induced Switching of Domains in Magnetic Multilayer Devices," *Science (80-.)*, vol. 285, no. 5429, pp. 867–870, Aug. 1999.
- [9] H. Ohno, M. D. Stiles, and B. Dieny, "Spintronics [Scanning the issue]," *Proc. IEEE*, vol. 104, no. 10, pp. 1782–1786, 2016.
- [10] M. Tsoi, A. G. M. Jansen, J. Bass, W. Chiang, V. Tsoi, and P. Wyder, "Generation and detection of phase-coherent current-driven magnons in magnetic multilayers," *Nature*, vol. 406, no. 6791, pp. 46–8, 2000.
- [11] S. I. Kiselev, J. C. Sankey, I. N. Krivorotov, N. C. Emley, R. J. Schoelkopf, R. a Buhrman, and D. C. Ralph, "Microwave oscillations of a nanomagnet driven by a spin-polarized current.," *Nature*, vol. 425, no. 6956, pp. 380–3, 2003.
- [12] A. Pikovsky, M. Rosenblum, and K. Jurgén, *Synchronization A universal Concept in Nonlinear Sciences*. Cambridge university press, 2001.
- [13] S. Kaka, M. R. Pufall, W. H. Rippard, T. J. Silva, S. E. Russek, and J. a Katine, "Mutual phase-locking of microwave spin torque nano-oscillators.," *Nature*, vol. 437, no. 7057, pp. 389–92, Sep. 2005.
- [14] F. B. Mancoff, N. D. Rizzo, B. N. Engel, and S. Tehrani, "Phase-locking in double-point-contact spin-

- transfer devices.," *Nature*, vol. 437, no. 7057, pp. 393–5, Sep. 2005.
- [15] P. Tabor, V. Tiberkevich, A. Slavin, and S. Urazhdin, "Hysteretic synchronization of nonlinear spin-torque oscillators," *Phys. Rev. B*, vol. 82, no. 2, pp. 2–5, 2010.
- [16] M. Quinsat, J. F. Sierra, I. Firastrau, V. Tiberkevich, A. Slavin, D. Gusakova, L. D. Buda-Prejbeanu, M. Zarudniev, J.-P. P. Michel, U. Ebels, B. Dieny, M.-C. C. Cyrille, J. a. Katine, D. Mauri, and A. Zeltser, "Injection locking of tunnel junction oscillators to a microwave current," *Appl. Phys. Lett.*, vol. 98, no. 182503, pp. 1–3, 2011.
- [17] S. Urazhdin, P. Tabor, V. Tiberkevich, and A. Slavin, "Fractional Synchronization of Spin-Torque Nano-Oscillators," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 105, no. 10, p. 104101, Aug. 2010.
- [18] A. N. Slavin and P. Kabos, "Approximate Theory of Microwave Generation in a Current-Driven Magnetic Nanocontact Magnetized in an Arbitrary Direction," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 41, no. 4, pp. 1264–1273, 2005.
- [19] C. Dieudonné, "Synchronization of a spin-transfer oscillator to a RF current : Mechanisms and characterization at room-temperature," Université Grenoble Alpes, 2015.
- [20] A. Slavin and V. Tiberkevich, "Nonlinear Auto-Oscillator Theory of Microwave Generation by Spin-Polarized Current," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 45, no. 4, pp. 1875–1918, 2009.
- [21] M. Le Bellac, *Physique quantique*, 3ième. EDP sciences - Collection : Savoirs actuels, 2013.
- [22] N. . Ashcroft and N. . Mermin, *Solid state physics*. College publishing, 1976.
- [23] Hubert Alex and R. Schäfer, *Magnetic Domains*, vol. 40, no. 159. 1998.
- [24] K. Y. Guslienko, V. Novosad, Y. Otani, H. Shima, and K. Fukamichi, "Field evolution of magnetic vortex state in ferromagnetic disks," *Appl. Phys. Lett.*, vol. 78, no. 24, pp. 3848–3850, 2001.
- [25] D. Houssameddine, "Dynamique de l'aimantation de nano-oscillateurs micro-ondes à transfert de spin," Université Joseph Fourier, 2009.
- [26] N. F. Mott, "The Electrical Conductivity of Transition Metals," *Proc. R. Soc. A Math. Phys. Eng. Sci.*, vol. 153, no. 880, pp. 699–717, Feb. 1936.
- [27] B. Dieny, V. S. Speriosu, S. S. P. Parkin, B. A. Gurney, D. R. Wilhoit, and D. Mauri, "Giant magnetoresistive in soft ferromagnetic multilayers," *Phys. Rev. B*, vol. 43, no. 1, pp. 1297–1300, 1991.
- [28] M. Julliere, "Tunneling between ferromagnetic films," *Phys. Lett. A*, vol. 54, no. 3, pp. 225–226, 1975.
- [29] P. Mavropoulos, N. Papanikolaou, and P. Dederichs, "Complex band structure and tunneling through ferromagnet /Insulator /Ferromagnet junctions," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 85, no. 5, pp. 1088–91, Jul. 2000.
- [30] W. H. Butler, X.-G. Zhang, T. C. Schulthess, and J. M. MacLaren, "Spin-dependent tunneling conductance of Fe | MgO | Fe sandwiches," *Phys. Rev. B*, vol. 63, no. 5, p. 54416, Jan. 2001.

- [31] S. S. P. Parkin, C. Kaiser, A. Panchula, P. M. Rice, B. Hughes, M. Samant, and S.-H. Yang, "Giant tunnelling magnetoresistance at room temperature with MgO (100) tunnel barriers.," *Nat. Mater.*, vol. 3, no. 12, pp. 862–7, Dec. 2004.
- [32] S. Yuasa, T. Nagahama, A. Fukushima, Y. Suzuki, and K. Ando, "Giant room-temperature magnetoresistance in single-crystal Fe/MgO/Fe magnetic tunnel junctions.," *Nat. Mater.*, vol. 3, no. 12, pp. 868–71, Dec. 2004.
- [33] M. Bowen, M. Bibes, A. Barthélémy, J. P. Contour, A. Anane, Y. Lemaître, and A. Fert, "Nearly total spin polarization in La₂/3Sr₁/3MnO₃ from tunneling experiments," *Appl. Phys. Lett.*, vol. 82, no. 2, pp. 233–235, 2003.
- [34] Y. Huai, F. Albert, P. Nguyen, M. Pakala, and T. Valet, "Observation of spin-transfer switching in deep submicron-sized and low-resistance magnetic tunnel junctions," *Appl. Phys. Lett.*, vol. 84, no. 16, pp. 3118–3120, 2004.
- [35] G. D. Fuchs, N. C. Emley, I. N. Krivorotov, P. M. Braganca, E. M. Ryan, S. I. Kiselev, J. C. Sankey, D. C. Ralph, R. A. Buhrman, and J. A. Katine, "Spin-transfer effects in nanoscale magnetic tunnel junctions," *Appl. Phys. Lett.*, vol. 85, no. 7, pp. 1205–1207, 2004.
- [36] J. Barnaś, a. Fert, M. Gmitra, I. Weymann, and V. Dugaev, "From giant magnetoresistance to current-induced switching by spin transfer," *Phys. Rev. B*, vol. 72, no. 2, p. 24426, Jul. 2005.
- [37] S. Petit, N. de Mestier, C. Baraduc, C. Thirion, Y. Liu, M. Li, P. Wang, and B. Dieny, "Influence of spin-transfer torque on thermally activated ferromagnetic resonance excitations in magnetic tunnel junctions," *Phys. Rev. B*, vol. 78, no. 18, p. 184420, Nov. 2008.
- [38] L. Landau and E. Lifshits, "on the Theory of the Dispersion of Magnetic Permeability in Ferromagnetic Bodies," *Phys. Zeitsch. der Sow.*, vol. 169, no. 14, pp. 14–22, 1935.
- [39] T. L. Gilbert, "Classics in Magnetism A Phenomenological Theory of Damping in Ferromagnetic Materials," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 40, no. 6, pp. 3443–3449, Nov. 2004.
- [40] A. G. Gurevich and G. A. Melkov, *Magnetization oscillations and waves*. CRC press, Inc, 1996.
- [41] N. Locatelli, V. Cros, and J. Grollier, "Spin-torque building blocks," *Nat. Publ. Gr.*, vol. 13, no. 1, pp. 11–20, 2014.
- [42] B. D. Apalkov, B. Dieny, and J. M. Slaughter, "Magnetoresistive Random Access Memory," *Proc. IEEE*, vol. 104, no. 10, 2016.
- [43] A. Fábíán, C. Terrier, S. S. Guisan, X. Hoffer, M. Dubey, L. Gravier, J.-P. Ansermet, and J.-E. Wegrowe, "Current-Induced Two-Level Fluctuations in Pseudo-Spin-Valve (Co/Cu/Co) Nanostructures," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 91, no. 25, p. 257209, 2003.
- [44] S. Urazhdin, N. Birge, W. P. Pratt, and J. Bass, *Current-Driven Magnetic Excitations in Permalloy-Based Multilayer Nanopillars*, vol. 91. 2003.
- [45] S. I. Kiselev, J. C. Sankey, I. N. Krivorotov, N. C. Emley, R. J. Schoelkopf, R. a Buhrman, and D. C. Ralph, "Microwave oscillations of a nanomagnet driven by a spin-polarized current.," *Nature*, vol. 425, no. 6956, pp. 380–3, 2003.

- [46] W. Rippard, M. Pufall, S. Kaka, S. Russek, and T. Silva, "Direct-Current Induced Dynamics in Co90Fe10/Ni80Fe20 Point Contacts," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 92, no. 2, p. 27201, Jan. 2004.
- [47] V. S. Pribiag, I. N. Krivorotov, G. D. Fuchs, P. M. Braganca, O. Ozatay, J. C. Sankey, D. C. Ralph, and R. a. Buhrman, "Magnetic vortex oscillator driven by d.c. spin-polarized current," *Nat. Phys.*, vol. 3, no. 7, pp. 498–503, May 2007.
- [48] S. H. Strogatz, *Non linear dynamics and chaos*, 2nd ed. Westview press, 2015.
- [49] C. Misbah, *Dynamiques complexes et morphogenèse*, Springer. 2001.
- [50] A. A. Andronov, E. . Leontovich, I. . Gordon, and A. . Maier, *Theory of Bifurcations of Dynamical Systems on a Plane*. Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem, 1971.
- [51] P. Kartaschoff, *Monographs in physical measurement : frequency and time*, Academic p. 1978.
- [52] V. S. L'vov, *Wave Turbulence Under Parametric Excitation*, vol. 2. Springer-Verlag, 1991.
- [53] E. Grimaldi, A. Dussaux, P. Bortolotti, J. Grollier, G. Pillot, A. Fukushima, H. Kubota, K. Yakushiji, S. Yuasa, and V. Cros, "Response to noise of a vortex based spin transfer nano-oscillator," *Phys. Rev. B - Condens. Matter Mater. Phys.*, vol. 89, no. 10, pp. 1–8, 2014.
- [54] D. Houssameddine, S. H. Florez, J. a. Katine, J.-P. Michel, U. Ebels, D. Mauri, O. Ozatay, B. Delaet, B. Viala, L. Folks, B. D. Terris, and M.-C. Cyrille, "Spin transfer induced coherent microwave emission with large power from nanoscale MgO tunnel junctions," *Appl. Phys. Lett.*, vol. 93, no. 2, p. 22505, 2008.
- [55] C. Kittel, "On the theory of ferromagnetic resonance absorption," *Phys. Rev.*, vol. 73, no. 2, pp. 155–161, 1948.
- [56] E. Montebianco, "Characterization of spintronic nano-oscillators (STNO) based on magnetic coupled multilayer," Université Grenoble Alpes, 2014.
- [57] M. Romera, E. Montebianco, F. Garcia-Sanchez, B. Dela??t, L. D. Buda-Prejbeanu, and U. Ebels, "Non-linear mode interaction between spin torque driven and damped modes in spin torque nano-oscillators," *Appl. Phys. Lett.*, vol. 106, no. 19, 2015.
- [58] R. Lebrun, N. Locatelli, F. A. Araujo, H. Kubota, S. Tsunegi, K. Yakushiji, A. Fukushima, J. Grollier, and S. Yuasa, "Nonlinear behavior and mode coupling in spin transfer nano-oscillators," *Phys. Rev. Appl.*, vol. 2, no. 6, p. 61001, Jul. 2014.
- [59] M. Quinsat, D. Gusakova, J. F. Sierra, J. P. Michel, D. Houssameddine, B. Delaet, M.-C. Cyrille, U. Ebels, B. Dieny, L. D. Buda-Prejbeanu, J. a. Katine, D. Mauri, A. Zeltser, M. Prigent, J.-C. Nallatamby, and R. Sommet, "Amplitude and phase noise of magnetic tunnel junction oscillators," *Appl. Phys. Lett.*, vol. 97, no. 18, p. 182507, 2010.
- [60] P. Zou, K. Ma, and S. Mou, "A Low Phase Noise VCO Based on Substrate-Integrated Suspended Line Technology," *IEEE Microw. Wirel. Components Lett.*, vol. 27, no. 8, pp. 727–729, 2017.
- [61] J.-V. Kim, V. Tiberkevich, and A. Slavin, "Generation Linewidth of an Auto-Oscillator with a Nonlinear Frequency Shift: Spin-Torque Nano-Oscillator," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 100, no. 1, p. 17207, Jan. 2008.

- [62] D. Houssameddine, J. F. Sierra, D. Gusakova, B. Delaet, U. Ebels, L. D. Buda-Prejbeanu, M.-C. Cyrille, B. Dieny, B. Ocker, J. Langer, and W. Maas, "Spin torque driven excitations in a synthetic antiferromagnet," *Appl. Phys. Lett.*, vol. 96, no. 7, p. 72511, 2010.
- [63] S. Tamaru, H. Kubota, K. Yakushiji, S. Yuasa, and A. Fukushima, "Extremely Coherent Microwave Emission from Spin Torque Oscillator Stabilized by Phase Locked Loop," *Sci. Rep.*, vol. 5, no. November, p. 18134, Dec. 2015.
- [64] S. Tamaru, H. Kubota, K. Yakushiji, A. Fukushima, and S. Yuasa, "Analysis of phase noise in a spin torque oscillator stabilized by phase locked loop," *Appl. Phys. Express*, vol. 9, no. 5, p. 53005, May 2016.
- [65] R. Lebrun, S. Tsunegi, P. Bortolotti, H. Kubota, A. S. Jenkins, M. Romera, K. Yakushiji, A. Fukushima, J. Grollier, S. Yuasa, and V. Cros, "Mutual synchronization of spin torque nano-oscillators through a long-range and tunable electrical coupling scheme," *Nat. Commun.*, vol. 8, no. May, p. 15825, 2017.
- [66] M. R. Pufall, W. H. Rippard, S. Kaka, T. J. Silva, and S. E. Russek, "Frequency Modulation of Spin-Transfer Oscillators," *Appl. Phys. Lett.*, vol. 86, no. 8, p. 13, 2004.
- [67] B. van der Pol, "The Nonlinear Theory of Electric Oscillations," *Proc. IRE*, vol. 22, no. 9, pp. 1051–1086, 1934.
- [68] A. T. Winfree, "Biological rhythms and the behavior of populations of coupled oscillators," *J. Theor. Biol.*, vol. 16, no. 1, pp. 15–42, Jul. 1967.
- [69] Y. Kuramoto, *Chemical oscillations waves and turbulence*. Springer Series in Synergetics, 1984.
- [70] R. Adler, "Locking Phenomena in Oscillators," *Proc. IEEE*, vol. 61, no. 10, pp. 1380–1385, 1973.
- [71] W. Rippard, M. Pufall, S. Kaka, T. Silva, S. Russek, and J. Katine, "Injection Locking and Phase Control of Spin Transfer Nano-oscillators," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 95, no. 6, p. 67203, Aug. 2005.
- [72] A. N. Slavin and V. S. Tiberkevich, "Nonlinear self-phase-locking effect in an array of current-driven magnetic nanocontacts," *Phys. Rev. B*, vol. 72, no. 9, pp. 1–4, 2005.
- [73] A. N. Slavin and V. S. Tiberkevich, "Theory of mutual phase locking of spin-torque nanosized oscillators," *Phys. Rev. B - Condens. Matter Mater. Phys.*, vol. 74, no. 10, p. 104401, Sep. 2006.
- [74] B. Georges, J. Grollier, M. Darques, V. Cros, C. Deranlot, B. Marcilhac, G. Faini, and a. Fert, "Coupling Efficiency for Phase Locking of a Spin Transfer Nano-Oscillator to a Microwave Current," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 101, no. 1, p. 17201, Jul. 2008.
- [75] A. Hamadeh, G. De Loubens, V. V. Naletov, J. Grollier, C. Ulysse, V. Cros, and O. Klein, "Autonomous and forced dynamics in a spin-transfer nano-oscillator: Quantitative magnetic-resonance force microscopy," *Phys. Rev. B - Condens. Matter Mater. Phys.*, vol. 85, no. 14, pp. 2–5, 2012.
- [76] Z. Li, Y. C. Li, and S. Zhang, "Dynamic magnetization states of a spin valve in the presence of dc and ac currents: Synchronization, modification, and chaos," *Phys. Rev. B*, vol. 74, no. 5, p. 54417, 2006.

- [77] Y. Zhou, J. Persson, S. Bonetti, and J. Åkerman, "Tunable intrinsic phase of a spin torque oscillator," *Appl. Phys. Lett.*, vol. 92, no. 9, pp. 1–4, 2008.
- [78] T. Zeng, Y. Zhou, J. Åkerman, P. T. Lai, and P. W. T. Pong, "Linear Phase Tuning of Spin Torque Oscillators Using In-Plane Microwave Fields," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 50, no. 1, pp. 1–4, 2014.
- [79] C. Serpico, R. Bonin, G. Bertotti, M. D'Aquino, and I. D. Mayergoyz, "Theory of injection locking for large magnetization motion in spin-transfer nano-oscillators," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 45, no. 10, pp. 3441–3444, 2009.
- [80] M. Aquino, C. Serpico, R. Bonin, G. Bertotti, I. D. Mayergoyz, M. d'Aquino, C. Serpico, R. Bonin, G. Bertotti, and I. D. Mayergoyz, "Micromagnetic analysis of injection locking in spin-transfer nano-oscillators," *Phys. Rev. B*, vol. 82, no. 6, p. 64415, 2010.
- [81] G. Finocchio, M. Carpentieri, A. Giordano, and B. Azzerboni, "Non-Adlerian phase slip and nonstationary synchronization of spin-torque oscillators to a microwave source," *Phys. Rev. B*, vol. 14438, pp. 1–5, 2012.
- [82] Y. Zhou, V. Tiberkevich, G. Consolo, E. Iacocca, B. Azzerboni, A. Slavin, and J. Åkerman, "Oscillatory transient regime in the forced dynamics of a nonlinear auto oscillator," *Phys. Rev. B*, vol. 82, no. 1, p. 12408, Jul. 2010.
- [83] R. Lebrun, A. Jenkins, A. Dussaux, N. Locatelli, S. Tsunegi, E. Grimaldi, H. Kubota, P. Bortolotti, K. Yakushiji, J. Grollier, A. Fukushima, S. Yuasa, and V. Cros, "Understanding of Phase Noise Squeezing under Fractional Synchronization of a Nonlinear Spin Transfer Vortex Oscillator," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 115, no. 1, pp. 1–5, 2015.
- [84] R. Lehndorff, D. E. Bürgler, C. M. Schneider, and Z. Celinski, "Injection locking of the gyrotropic vortex motion in a nanopillar," *Appl. Phys. Lett.*, vol. 97, no. 14, p. 142503, 2010.
- [85] a. Dussaux, a. V. Khvalkovskiy, J. Grollier, V. Cros, a. Fukushima, M. Konoto, H. Kubota, K. Yakushiji, S. Yuasa, K. Ando, and a. Fert, "Phase locking of vortex based spin transfer oscillators to a microwave current," *Appl. Phys. Lett.*, vol. 98, no. 13, p. 132506, 2011.
- [86] P. S. Keatley, S. R. Sani, G. Hrkac, S. M. Mohseni, P. Dürrenfeld, J. Åkerman, and R. J. Hicken, "Superharmonic injection locking of nanocontact spin-torque vortex oscillators," *Phys. Rev. B*, vol. 94, no. 9, p. 94404, Sep. 2016.
- [87] A. Hamadeh, N. Locatelli, V. V. Naletov, R. Lebrun, G. De Loubens, J. Grollier, O. Klein, and V. Cros, "Perfect and robust phase-locking of a spin transfer vortex nano-oscillator to an external microwave source," *Appl. Phys. Lett.*, vol. 104, no. 2, pp. 17–21, 2014.
- [88] S. Perna, L. Lopez-Diaz, M. D'Aquino, and C. Serpico, "Large Hysteresis effect in Synchronization of Nanocontact Vortex Oscillators by Microwave Fields," *Sci. Rep.*, vol. 6, no. August, p. 31630, 2016.
- [89] S. Erokhin and D. Berkov, "Robust synchronization of an arbitrary number of spin-torque-driven vortex nano-oscillators," *Phys. Rev. B*, vol. 89, no. 14, p. 144421, 2014.
- [90] A. Ruotolo, V. Cros, B. Georges, A. Dussaux, J. Grollier, C. Deranlot, R. Guillemet, K. Bouzehouane, S. Fusil, and A. Fert, "Phase-locking of magnetic vortices mediated by antivortices," *Nat. Nanotechnol.*, vol. 4, no. 8, pp. 528–532, 2009.

- [91] A. D. Belanovsky, N. Locatelli, P. N. Skirdkov, F. A. Araujo, J. Grollier, K. A. Zvezdin, V. Cros, and A. K. Zvezdin, "Phase locking dynamics of dipolarly coupled vortex-based spin transfer oscillators," *Phys. Rev. B*, vol. 85, no. 10, p. 100409, Mar. 2012.
- [92] A. D. Belanovsky, N. Locatelli, P. N. Skirdkov, F. Abreu Araujo, K. A. Zvezdin, J. Grollier, V. Cros, A. K. Zvezdin, F. A. Araujo, and K. A. Zvezdin, "Numerical and analytical investigation of the synchronization of dipolarly coupled vortex spin-torque nano-oscillators," *Appl. Phys. Lett.*, vol. 103, no. 12, 2013.
- [93] F. Abreu Araujo, A. D. Belanovsky, P. N. Skirdkov, K. A. Zvezdin, A. K. Zvezdin, N. Locatelli, R. Lebrun, J. Grollier, V. Cros, G. de Loubens, and O. Klein, "Optimizing magnetodipolar interactions for synchronizing vortex based spin-torque nano-oscillators," *Phys. Rev. B*, vol. 92, no. 4, p. 45419, Jul. 2015.
- [94] N. Locatelli, A. Hamadeh, F. Abreu Araujo, A. D. Belanovsky, P. N. Skirdkov, R. Lebrun, V. V. Naletov, K. A. Zvezdin, M. Muñoz, J. Grollier, O. Klein, V. Cros, and G. de Loubens, "Efficient Synchronization of Dipolarly Coupled Vortex-Based Spin Transfer Nano-Oscillators," *Sci. Rep.*, vol. 5, p. 17039, 2015.
- [95] B. Georges, J. Grollier, V. Cros, and A. Fert, "Impact of the electrical connection of spin transfer nano-oscillators on their synchronization : an analytical study Impact of the electrical connection of spin transfer nano-oscillators on their synchronization : an analytical study," *Appl. Phys. Lett.*, vol. 232504, pp. 23–26, 2008.
- [96] S. Tsunegi, E. Grimaldi, R. Lebrun, H. Kubota, A. S. Jenkins, K. Yakushiji, A. Fukushima, P. Bortolotti, J. Grollier, S. Yuasa, and V. Cros, "Self-Injection Locking of a Vortex Spin Torque Oscillator by Delayed Feedback," *Sci. Rep.*, vol. 6, p. 26849, May 2016.
- [97] S. Sani, J. Persson, S. M. Mohseni, Y. Pogoryelov, P. K. Muduli, A. Eklund, G. Malm, M. Käll, A. Dmitriev, and J. Åkerman, "Mutually synchronized bottom-up multi-nanocontact spin-torque oscillators," *Nat. Commun.*, vol. 4, 2013.
- [98] A. R. Safin, N. N. Udalov, M. V. Kapranov, Safin, Ansar R., Udalov, Nicolay N., and Kapranov, Mikhail V., "Mutual Phase Locking of Very Nonidentical Spin Torque Nanooscillators via Spin Wave Interaction," *Eur. Phys. J. Appl. Phys.*, vol. 67, no. 2, pp. 1–6, 2014.
- [99] H.-H. Chen, C.-M. Lee, J.-C. Wu, L. Horng, C.-R. Chang, and J.-H. Chang, "Synchronization of spin torque nano-oscillators through dipolar interactions," *J. Appl. Phys.*, vol. 115, no. 13, p. 134306, Apr. 2014.
- [100] M. Elyasi, C. S. Bhatia, and H. Yang, "Synchronization of spin-transfer torque oscillators by spin pumping, inverse spin Hall, and spin Hall effects," *J. Appl. Phys.*, vol. 117, no. 6, p. 63907, 2015.
- [101] T. Taniguchi, "Synchronization of Spin Torque Oscillators through Spin Hall Magnetoresistance," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 53, no. 11, pp. 1–7, 2017.
- [102] S. Urazhdin, V. E. Demidov, R. Cao, B. Divinskiy, V. Tyberkevych, A. Slavin, A. B. Rinkevich, and S. O. Demokritov, "Mutual synchronization of nano-oscillators driven by pure spin current," *Appl. Phys. Lett.*, vol. 109, no. 16, p. 162402, 2016.
- [103] Y. Li, X. de Milly, F. Abreu Araujo, O. Klein, V. Cros, J. Grollier, and G. de Loubens, "Probing Phase

- Coupling Between Two Spin-Torque Nano-Oscillators with an External Source," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 118, no. 24, p. 247202, 2017.
- [104] D. D. Stancil and A. Prabhakar, *Spin Waves Theory and Applications*. Springer Science+Business Media, LLC, 2009.
- [105] T. Holstein and H. Primakoff, "Field dependence of the intrinsic domain magnetization of a ferromagnet," *Phys. Rev.*, vol. 58, no. 12, pp. 1098–1113, 1940.
- [106] Lamb H, *Hydrodynamics*. Cambridge university press, 1924.
- [107] V. . Zakharov and N. N. Filonenko, "Weak turbulence of capillary waves," *Appl Mech Tech Phys*, 1967.
- [108] N. N. Bogoliubov, "a New Method in the Theory of Superconductivity," *Jetp*, vol. 34, no. 58, 1958.
- [109] G. Bertotti, C. Serpico, I. D. Mayergoyz, A. Magni, M. D'Aquino, and R. Bonin, "Magnetization Switching and Microwave Oscillations in Nanomagnets Driven by Spin-Polarized Currents," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 94, no. 12, p. 127206, 2005.
- [110] L. Bianchini, S. Cornelissen, J.-V. Kim, T. Devolder, W. van Roy, L. Lagae, and C. Chappert, "Direct experimental measurement of phase-amplitude coupling in spin torque oscillators," *Appl. Phys. Lett.*, vol. 97, no. 3, p. 32502, 2010.
- [111] M. Quinsat, F. Garcia-Sanchez, A. S. Jenkins, V. S. Tiberkevich, A. N. Slavin, L. D. Buda-Prejbeanu, A. Zeltser, J. A. Katine, B. Dieny, M. C. Cyrille, and U. Ebels, "Modulation bandwidth of spin torque oscillators under current modulation," *Appl. Phys. Lett.*, vol. 105, no. 15, pp. 1–4, 2014.
- [112] A. Purbawati, U. Ebels, F. Garcia-Sanchez, L. D. Buda-Prejbeanu, and U. Ebels, "Enhanced modulation rates via field modulation in spin torque," *Appl. Phys. Lett.*, vol. 122402, no. 12, pp. 1–6, 2016.
- [113] C. Gignoux and B. Silvestre-Brac, *Mécanique, de la formulation lagrangienne au chaos hamiltonien*. EDP sciences, 2002.
- [114] J. Grollier, V. Cros, and A. Fert, "Synchronization of spin-transfer oscillators driven by stimulated microwave currents," *Phys. Rev. B*, vol. 73, no. 6, p. 60409, 2006.
- [115] J. L. Garcia-Palacios and F. J. Lazaro, "Langevin-dynamics study of the dynamical properties of small magnetic particles," *Phys. Rev. B*, vol. 58, no. 22, pp. 937–958, 1998.
- [116] M. Tortarolo, B. Lacoste, J. Hem, C. Dieudonné, M. Cyrille, and J. A. Katine, "Injection locking at 2f of spin torque oscillators under influence of thermal noise," *Sci. Rep.*, vol. 8, no. 1728, pp. 1–7, 2018.
- [117] N. Pottier, *Physique statistique hors équilibre*. Collection : Savoirs Actuels, 2007.
- [118] D. Pozar, *Microwave Engineering Fourth Edition*. John Wiley & Sons, Inc., 2005.
- [119] Feynman, Leighton, and Sands, *Les cours de physiques de Feynman. Electromagnétisme 1*. Dunod, Paris, 1999.

-
- [120] D. Houssameddine, U. Ebels, B. Dieny, K. Garello, J.-P. Michel, B. Delaet, B. Viala, M.-C. Cyrille, J. Katine, and D. Mauri, "Temporal Coherence of MgO Based Magnetic Tunnel Junction Spin Torque Oscillators," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 102, no. 25, p. 257202, Jun. 2009.
- [121] J. D. Costa, S. Serrano-Guisan, J. Borme, F. L. Deepak, M. Tarequzzaman, E. Paz, J. Ventura, R. Ferreira, and P. P. Freitas, "Impact of MgO Thickness on the Performance of Spin-Transfer Torque Nano-Oscillators," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 51, no. 11, pp. 1–4, 2015.
- [122] A. Vaysset, "Micromagnetic modelling of spin-transfer-driven magnetisation dynamics in nanopillars," Université Grenoble Alpes, 2006.
- [123] A. Helmer, S. Cornelissen, T. Devolder, J.-V.-V. Kim, W. van Roy, L. Lagae, C. Chappert, W. Van Roy, L. Lagae, and C. Chappert, "Quantized spin-wave modes in magnetic tunnel junction nanopillars," *Phys. Rev. B*, vol. 81, no. 9, p. 94416, Mar. 2010.
- [124] V. Tiberkevich, A. Slavin, and J.-V. Kim, "Microwave power generated by a spin-torque oscillator in the presence of noise," *Appl. Phys. Lett.*, vol. 91, no. 19, p. 192506, 2007.
- [125] M. Quinsat, "Etude d'un auto-oscillateur non-isochrone : Application à la dynamique non-linéaire de l'aimantation induite par transfert de spin," Université Grenoble Alpes, 2012.
- [126] G. Khalsa, M. D. Stiles, and J. Grollier, "Critical current and linewidth reduction in spin-torque nano-oscillators by delayed self-injection," *Appl. Phys. Lett.*, vol. 106, no. 24, 2015.
- [127] M. A. Ruderman and C. Kittel, "Indirect exchange coupling of nuclear magnetic moments by conduction electrons," *Phys. Rev.*, vol. 96, no. 1, pp. 99–102, 1954.
- [128] P. Bruno and C. Chappert, "Oscillatory coupling between ferromagnetic layers separated by a nonmagnetic metal spacer," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 67, no. 12, pp. 1602–1605, 1991.
- [129] W. H. Meiklejohn and C. P. Bean, "New Magnetic Anisotropy," *Phys. Rev.*, vol. 105, no. 3, pp. 904–913, Feb. 1957.
- [130] L. Néel, "No Title," *C. R. Acad. Sci.*, vol. 255, p. 1676, 1962.
- [131] T. Moriya, "New Mechanism of Anisotropic Superexchange Interaction," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 4, no. 5, pp. 4–6, 1960.

Résumé

L'auto-oscillateur à transfert de spin est un nano système à fort potentiel applicatif dans le domaine des sources microondes à fréquence variable. Néanmoins à cause de sa taille, l'oscillateur est fortement perturbé par l'agitation thermique et il faut chercher différentes stratégies pour augmenter sa cohérence spectrale. Une solution prometteuse est la synchronisation mutuelle d'oscillateur. Pour définir les meilleurs schémas de synchronisation, il est important d'étudier la synchronisation à un générateur externe. Ce travail, d'ordre théorique, traite la synchronisation d'un oscillateur spintronique à un signal microonde. L'équation de mouvement de l'aimantation (équation de Landau-Lifshitz-Gilbert-Slonczewski) est transformée en une équation d'amplitude complexe, qui permet de traiter les mécanismes de synchronisation de manière unifiée. Nous introduisons les forçages canoniques de l'oscillateur, transformés des couples $\{\mathbf{m} \times \mathbf{u}_i, \mathbf{m} \times \mathbf{m} \times \mathbf{u}_i\}_{i=x,y,z}$ et discutons leurs propriétés de synchronisation. Si l'oscillateur est fortement non isochrone ($|\nu| \gg 1$), il est possible de simplifier le problème pour traiter la combinaison de forçages canoniques, le régime transitoire, le régime de synchronisation sous température et sous fort signal externe. Les études analytiques sont confrontées aux études numériques et expérimentales pour un oscillateur à base d'une jonction tunnel.

Mots clés : Spintronique - Dynamique d'aimantation - Auto-oscillateur - Dynamique non linéaire - Nanotechnologie - Synchronisation - Equation LLGS - Equation de Landau-Stuart

Abstract

The spin-transfer torque oscillator is a nano-sized system which could be part of the next generation of microwave current controlled oscillator. However, the oscillator is strongly affected by thermal fluctuations as every nano-sized system, which strongly degrades its spectral coherency. To solve this issue, the most promising strategy is to mutually synchronize an array of oscillators. In order to find the best synchronization schemes, one has to better understand the synchronization of the oscillator to an external source. The present work is essentially theoretical and consists to study the synchronization of a spintronic oscillator to a microwave external signal. The dynamic equation of the magnetization (Landau-Lifshitz-Gilbert-Slonczewski equation) is transformed in a simplified complex amplitude equation, which allows to address the different synchronizations mechanisms in a unified way. In particular, we introduce the canonical forcing function of the oscillator by transforming the torques $\{\mathbf{m} \times \mathbf{u}_i, \mathbf{m} \times \mathbf{m} \times \mathbf{u}_i\}_{i=x,y,z}$ and then discuss their synchronization properties. If the oscillator is strongly non-isochronous ($|\nu| \gg 1$), it becomes possible to address the combination of forcing functions, study of the transient regime, study of synchronization under thermal noise or under strong amplitude external signal. Analytical studies are compared with numerical simulations and experiments on magnetic tunnel barrier oscillators.

Keywords : Spintronics - Magnetization dynamics - Auto-oscillator - Non-linear dynamics - Nanotechnology - Synchronization - LLGS equation - Landau - Stuart equation