



**HAL**  
open science

# Analyse spectrale et calcul numérique pour l'équation de Boltzmann

Ibrahim Jrad

► **To cite this version:**

Ibrahim Jrad. Analyse spectrale et calcul numérique pour l'équation de Boltzmann. Analyse numérique [math.NA]. Normandie Université, 2018. Français. NNT: 2018NORMR020. tel-01830061

**HAL Id: tel-01830061**

**<https://theses.hal.science/tel-01830061>**

Submitted on 4 Jul 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE

Pour obtenir le diplôme de doctorat

Spécialité Mathématiques (4200001)

Préparée au sein de « l'université de Rouen-Normandie »

## Analyse spectrale et calcul numérique pour l'équation de Boltzmann

Présentée et soutenue par  
Ibrahim JRAD

Thèse soutenue publiquement le (27/06/2018)  
devant le jury composé de

Mme. Gisella CROCE	Maître de conférences / Université du Havre	Examineur
M. Léo GLANGETAS	Professeur / Université de Rouen Normandie	Directeur de thèse
M. Frédéric HERAU	Professeur / Université de Nantes	Rapporteur
M. Nicolas LERNER	Professeur / Université Pierre et Marie Curie (Paris VI)	Examineur
M. Yoshinori MORIMOTO	Professeur / Kyoto University	Rapporteur
M. Chao-Jiang XU	Professeur / Université de Rouen Normandie	Codirecteur de thèse

Thèse dirigée par Léo GLANGETAS et Chao Jiang XU, laboratoire LMRS, université de Rouen-Normandie





## Résumé

Dans cette thèse, nous étudions les solutions de l'équation de Boltzmann. Nous nous intéressons au cadre homogène en espace où la solution  $f(t, x, v)$  dépend uniquement du temps  $t$  et de la vitesse  $v$ . Nous considérons des sections efficaces singulières (cas dit non cutoff) dans le cas Maxwellien. Pour l'étude du problème de Cauchy, nous considérons une fluctuation de la solution autour de la distribution Maxwellienne puis une décomposition de cette fluctuation dans la base spectrale associée à l'oscillateur harmonique quantique.

Dans un premier temps, nous résolvons numériquement les solutions en utilisant des méthodes de calcul symbolique et la décomposition spectrale des fonctions de Hermite. Nous considérons des conditions initiales régulières et des conditions initiales de type distribution.

Ensuite, nous prouvons qu'il n'y a plus de solution globale en temps pour une condition initiale grande et qui change de signe (ce qui ne contredit pas l'existence globale d'une solution faible pour une condition initiale positive - voir par exemple Villani Arch. Rational Mech. Anal 1998).

**Mot-clefs** : Equation de Boltzmann, équations cinétiques, noyau singulier, décomposition spectrale, calcul symbolique, calcul numérique, explosion en temps fini.



## Abstract

In this thesis, we study the solutions of the Boltzmann equation. We are interested in the homogeneous framework in which the solution  $f(t, x, v)$  depends only on the time  $t$  and the velocity  $v$ . We consider singular cross-sections (non cutoff case) in the Maxwellian case. For the study of the Cauchy problem, we consider a fluctuation of the solution around the Maxwellian distribution then a decomposition of this fluctuation in the spectral base associated to the quantum harmonic oscillator

At first, we solve numerically the solutions using symbolic computation methods and spectral decomposition of Hermite functions. We consider regular initial data and initial conditions of distribution type.

Next, we prove that there is no longer a global solution in time for a large initial condition that changes sign (which does not contradict the global existence of a weak solution for a positive initial condition - see for example Villani Arch. Rational Mech. Anal 1998).

**Keywords :** Boltzmann equation, kinetic equations, spectral decomposition, symbolic computation, singular kernel, numerical computation, Blowup.



## Remerciements

Je remercie tout particulièrement Léo Glangetas et Chao-Jiang Xu d'avoir dirigé ma thèse avec beaucoup d'efforts et de patience. Ils ont toujours été là pour me soutenir au cours de l'élaboration de cette thèse. Leurs qualités pédagogiques remarquables m'ont permis de profiter de leurs connaissances et ont contribué à l'avancement de mon travail en ne négligeant ni leurs conseils avisés et ni leurs critiques constructives. Je les remercie pour toutes les heures qu'ils ont consacrées à diriger cette thèse.

Mes remerciements vont également à Messieurs les Professeurs Frédéric Héreau et Yoshinori Morimoto, qui ont accepté d'être les rapporteurs de cette thèse et dont les remarques et commentaires m'ont permis d'améliorer la compréhension de ce mémoire. Pour tout cela je les remercie vivement.

Monsieur Nicolas Lerner, président du jury de thèse, madame Gisella Croce, examinatrice, ont acceptés de me consacrer leur temps en examinant le manuscrit. J'en suis honoré et je leurs exprime toute ma profonde reconnaissance.

J'aimerais aussi remercier tous les membres du Laboratoire de Mathématiques Raphaël Salem et du département de Mathématiques pour leur accueil. J'adresse un remerciement tout particulier à Pierre Calka, directeur du laboratoire et Patrizia Donato, directrice adjointe et responsable des relations internationales du laboratoire, de m'y avoir accueilli chaleureusement avec les meilleures conditions de travail et pour leur soutien pendant cette période. Je remercie aussi Edwige Auvray, Gérard Grancher, Sandrine Halé,



Marc Jolly, Isabelle Lamitte et Hamed Smail pour leur soutien administratif et technique.

Par ailleurs, je tiens également à adresser mes sincères remerciements aux personnes non encore citées dont les permanents, les anciens et futurs docteurs pour leur soutien mutuel, leurs encouragements, leurs savoirs scientifiques et leurs échanges amicaux pendant ces trois années de dur labeur. Un grand merci à tous les doctorants et anciens doctorants du laboratoire. Je les remercie tous pour leur aide et leurs encouragements. Je pense tout spécialement à Safia et Slim pour leurs amitiés, je n'oublierai jamais les bons moments que nous avons partagés.

Je remercie également tous mes amis Zaher, Salah, Mamdouh, Ahmed, Hamza et Imad pour m'avoir supporté et encouragé tous les jours depuis plusieurs années. Je les en remercie sincèrement.

Un très grand MERCI à toute ma famille qui m'a soutenu et qui m'a gratifié de son amour et fourni les motivations qui ont permis d'arriver jusque là: Ma grand mère, Papa, maman, mes oncles: Nazih, Mamdouh, Moustapha, Kifah, Saleh, mes tantes: Wafaa, Amal, Rouba, Nidal et mes frères: Abdalla et Ziad. Je leur adresse toute ma gratitude du fond du cœur.

Encore un grand merci à tous pour m'avoir conduit à ce jour mémorable.

Ibrahim Jrad  
Rouen, juin 2018

# Table des Matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
1.1	Equation de Boltzmann . . . . .	1
1.2	Rappel des résultats connus de l'équation de Boltzmann . . . .	9
1.3	Résultats de la thèse . . . . .	13
1.4	Organisation du mémoire . . . . .	27
<b>2</b>	<b>Décomposition spectrale</b>	<b>29</b>
2.1	Décomposition spectrale des opérateurs linéarisé et non linéarisé	29
2.2	Transformation de l'équation de Boltzmann en un système d'EDO . . . . .	34
2.3	Estimations des valeurs propres . . . . .	39
2.4	Solutions formelles . . . . .	43
2.5	Convergence des solutions formelles . . . . .	47
<b>3</b>	<b>Introduction à la méthode numérique utilisée</b>	<b>51</b>
3.1	Présentation de diverses méthodes numériques . . . . .	52
3.2	Renormalisation de la solution . . . . .	53
3.3	Procédure et résultats numérique . . . . .	55
3.4	Calcul des valeurs propres linéaires . . . . .	56

3.5	Calcul des valeurs propres non linéaires . . . . .	57
3.6	Solution numérique du problème linéaire . . . . .	59
3.7	Solution numérique pour le problème non linéaire . . . . .	62
<b>4</b>	<b>Test de la méthode avec les solutions BKW</b>	<b>67</b>
4.1	Introduction à la solution BKW . . . . .	68
4.2	Décomposition de la solution BKW dans la base spectrale . . .	71
4.3	Equations satisfaites par $g_n$ - cas cutoff . . . . .	73
4.4	Résultats numériques - cas cutoff . . . . .	76
4.5	Résultats numériques - cas non cutoff . . . . .	81
4.6	Conclusion du chapitre . . . . .	83
<b>5</b>	<b>Applications numériques</b>	<b>85</b>
5.1	Etude pour la donnée $F = \mu + \sqrt{\mu} A \varphi_2$ . . . . .	87
5.1.1	Etude pour $A = 1$ . . . . .	88
5.1.2	Etude pour $A = 10$ . . . . .	90
5.1.3	Etude pour $A = 20$ . . . . .	92
5.2	Calcul pour la condition initiale $\mu + \delta$ . . . . .	95
5.2.1	Calcul de la condition initiale . . . . .	95
5.2.2	Résultats numériques . . . . .	98
5.3	Conclusion du chapitre . . . . .	101
<b>6</b>	<b>Propriétés de blowup pour des solutions non positives</b>	<b>105</b>
6.1	Présentation du problème . . . . .	105
6.2	Décomposition spectrale . . . . .	107
6.3	Preuve du théorème 6.1 . . . . .	112
6.3.1	Nouvelle formulation (introduction de la suite $(k_n)_n$ ) . .	112

6.3.2	Modèle simplifié . . . . .	116
6.3.3	Estimations de $k_n$ . . . . .	118
<b>7</b>	<b>Algorithmes</b>	<b>125</b>
<b>8</b>	<b>Annexes</b>	<b>131</b>
8.1	Identité de Bobylev . . . . .	131
8.2	Quelques résultats sur les harmoniques sphériques . . . . .	135
8.3	Propriétés des polynômes d’Hermite . . . . .	137
8.4	Oscillateur harmonique quantique . . . . .	138
8.5	Fonctions spéciales . . . . .	139
<b>9</b>	<b>Références</b>	<b>141</b>



# Chapitre 1

## Introduction

Dans cette introduction, nous présentons l'équation de Boltzmann et le cadre dans lequel nous allons l'étudier. Puis nous rappelons des résultats connus sur le problème de Cauchy. Enfin nous donnons les résultats contenus dans cette thèse.

### 1.1 Equation de Boltzmann

L'équation de Boltzmann, donnée par Ludwig Boltzmann en 1872 (et James Clerk Maxwell 1866), modélise les collisions entre particules dans des gaz raréfiés, voir Boltzmann [13]. Comme nous le savons, Boltzmann a créé une théorie qui décrit le mouvement des gaz comme des boules qui pourraient se heurter et rebondir les uns contre les autres, voir par exemple Cercignani [17]. Ce modèle peut être considéré par l'un des nombreux cas qui représentent l'équation dite cinétique. Actuellement, la diversité des sciences et des applications contient ces modèles comme la dynamique des gaz raréfiés, la modélisation des semi-conducteurs, le transfert radiatif, et scien-

ces biologiques et sociales. On suppose qu'une particule a un mouvement de translation rectiligne et uniforme jusqu'au moment où elle est déviée par la collision avec une autre particule du gaz. Ce type d'équations est la combinaison d'un terme de transport linéaire et de plusieurs termes d'interaction qui décrivent l'évolution dans le temps de la distribution de particules dans l'espace de phase. L'équation qui porte son nom est la suivante

$$\begin{cases} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f = \mathbf{Q}(f, f), \\ f(t = 0, x, v) = F(x, v) \end{cases} \quad (1.1)$$

où  $f = f(t, x, v) \geq 0$  est la densité de probabilité de trouver une particule à l'instant  $t$ , sur la position  $x$  et avec une vitesse  $v$  où l'espace physique et l'espace des vitesses sont situés en trois dimensions. Les termes  $v \cdot \nabla_x f$  et  $\mathbf{Q}(f, f)$  décrivent respectivement l'action libre des particules et le processus de collision binaire. L'opérateur bilinéaire  $\mathbf{Q}(f, f)$  est appelé l'opérateur de collision de Boltzmann et il est donné par

$$\mathbf{Q}(g, f)(v) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} B(v - v_*, \sigma) (g'_* f' - g_* f) dv_* d\sigma$$

où l'on utilise la notation  $f'_* = f(t, x, v'_*)$ ,  $f' = f(t, x, v')$ ,  $f_* = f(t, x, v_*)$ . Les symboles  $v'_*$  et  $v'$  sont des abréviations pour les expressions

$$v' = \frac{v + v_*}{2} + \frac{|v - v_*|}{2} \sigma, \quad v'_* = \frac{v + v_*}{2} - \frac{|v - v_*|}{2} \sigma$$

avec  $\sigma \in \mathbb{S}^2$  la sphère unité. Ils sont obtenus de telle sorte que la collision préserve le nombre des particules, la quantité de mouvement et l'énergie cinétique (les chocs étant supposés élastiques), à savoir

$$v'_* + v' = v + v_*, \quad |v'_*|^2 + |v'|^2 = |v|^2 + |v_*|^2 \quad (1.2)$$

où  $|\cdot|$  est la norme euclidienne sur  $\mathbb{R}^3$ . Notons que  $v, v'$  sont les vitesses avant la collision et  $v_*, v'_*$  sont les vitesses après la collision.

La section efficace non négative  $B(z, \sigma)$  avec  $z = (v - v_*)$  ne dépend que de  $|z|$  et le produit scalaire  $\frac{z}{|z|} \cdot \sigma = \cos \theta$  avec  $\theta$  est l'angle de déviation. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que le support de cette section est inclus dans l'ensemble  $\cos \theta \geq 0$ . Sinon et puisque  $(v, v_*, \sigma) \rightarrow (v, v_*, -\sigma)$  laisse invariant la section efficace, on peut poser

$$\tilde{B}(v - v_*, \sigma) = [B(v - v_*, \sigma) + B(v - v_*, -\sigma)] \mathbb{1}_{\{\frac{v-v_*}{|v-v_*|} \cdot \sigma \geq 0\}}$$

où  $\mathbb{1}_E$  est la fonction caractéristique sur l'ensemble  $E$ . Voir par exemple Villani [51] et les références associées pour plus de détails sur la section efficace et pour un noyau de collision général. Pour les modèles physiques, il prend généralement la forme

$$B(v - v_*, \sigma) = \Phi(|v - v_*|)b(\cos \theta), \quad \cos \theta = \frac{v - v_*}{|v - v_*|} \cdot \sigma, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

où  $\Phi(|v - v_*|) = |v - v_*|^\gamma$  est un facteur cinétique et  $\gamma > -3$ .

Dans ce travail, nous considérons le cas spatialement homogène, ce qui signifie que la distribution de densité  $f = f(t, v)$  dépend des variables  $t \geq 0$ ,  $v \in \mathbb{R}^3$  et est uniforme par rapport à  $x$ . Alors l'équation de Boltzmann s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t f = \mathbf{Q}(f, f), \\ f(t = 0, v) = F(v) \end{cases} \quad (1.3)$$

où la donnée initiale  $F$  dépend uniquement de  $v$ . Nous nous placerons dans le cadre de molécules Maxwelliennes pour lesquelles le facteur cinétique  $\Phi \equiv 1$ . Il y a eu pour ce modèle de nombreux travaux. Nous citons par exemple Desvillettes [20, 21], Villani [50], Desvillettes et Golse [23, 24], Desvillettes et Wennberg [25], Lerner, Morimoto, Pravda-Starov et Xu [43]. Dans cette thèse, on s'intéressera essentiellement au cas dit de "non cutoff" où le noyau



de collision est singulier :

$$\int_{S_{N-1}} B(v - v^*, \sigma) d\sigma = \infty. \quad (1.4)$$

L'hypothèse "cutoff" ou encore non singulier implique une troncature angulaire qui permet d'éviter le problème d'intégralité en zéro et il y a beaucoup de travaux correspondantes. Remarquons que dans le cas non cutoff, l'équation de Boltzmann homogène en espace a des propriétés régularisantes, voir par exemple Desvillettes [20, 21]. Par contre, dans le cas cutoff, cette équation présente des propriétés proches de celles de l'équation de transport. On se placera aussi dans ce cadre pour tester la méthode numérique avec des solutions explicites dites "BKW" .

**Propriétés élémentaires de l'opérateur de collision.** On rappelle maintenant d'après Cercignani [17] une des propriétés élémentaire de  $\mathbf{Q}$  : les changements de variables suivants

$$\begin{aligned} (v, v_*, \sigma) &\longrightarrow (v, v_*, -\sigma), \\ (v, v_*, \sigma) &\longrightarrow (v', v'_*, \frac{v - v_*}{|v - v_*|}) \end{aligned}$$

laissent invariants la section efficace puisque le jacobien de ces transformations est égal à 1. On considère pour  $f$  et  $g$  convenables une expression générale de l'opérateur de collision de la forme

$$\mathbf{Q}(g, f)(v) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} B(v - v_*, \sigma) (g' f'_* + g'_* f' - g f_* - g_* f) dv_* d\sigma.$$

Donc, en effectuant les changements de variables précédent et en supposant que  $\varphi$  est une fonction test régulière, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{Q}(g, f)(v) \varphi(v) dv &= \frac{1}{8} \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2} B(v - v_*, \sigma) (g' f'_* + g'_* f' - g f_* - g_* f) \\ &\quad \times (\varphi + \varphi_* - \varphi' - \varphi'_*) dv dv_* d\sigma. \end{aligned}$$

C'est clair que pour  $g = f$ , on aura

$$\int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{Q}(f, f)(v) \varphi(v) dv = \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} B(v - v_*, \sigma) (f' f'_* - f f_*) \times (\varphi + \varphi_* - \varphi' - \varphi'_*) dv dv_* d\sigma. \quad (1.5)$$

D'après les formules (1.2), on obtient pour une fonction  $f$  convenable

$$\int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{Q}(f, f)(v) \begin{pmatrix} 1 \\ v_j \\ |v|^2 \end{pmatrix} dv = 0$$

en posant  $\varphi(v) = 1, v_j (j = 1, 2, 3), |v|^2$ . C'est à dire que si  $f$  est une solution de Boltzmann assez régulière, on a

$$\begin{aligned} \text{conservation de la masse : } & \int_{\mathbb{R}^3} f(t, v) dv = \int_{\mathbb{R}^3} F(v) dv \\ \text{conservation du moment : } & \int_{\mathbb{R}^3} v f(t, v) dv = \int_{\mathbb{R}^3} v F(v) dv \\ \text{conservation de l'énergie : } & \int_{\mathbb{R}^3} |v|^2 f(t, v) dv = \int_{\mathbb{R}^3} |v|^2 F(v) dv. \end{aligned}$$

Ces trois lois de conservation imposent une condition nécessaire sur la solution de l'équation de Boltzmann.

De plus il y a dissipation de l'entropie de Boltzmann: on définit l'entropie de la densité  $f$  par

$$E(f) = \int_{\mathbb{R}^3} f(t, v) \log(f(t, v)) dv.$$

Alors l'entropie est décroissante par rapport au temps. En effet, si on multiplie (1.3) par  $\log f$  et puis on intègre par rapport à  $v$  et en utilisant (1.5), on obtient

$$\begin{aligned} \partial_t E(f) &= \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{Q}(f, f) \log f dv \\ &= \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} B(v - v_*, \sigma) f' f'_* \left( 1 - \frac{f f_*}{f' f'_*} \right) \log \left( \frac{f f_*}{f' f'_*} \right) dv dv_* d\sigma \end{aligned} \quad (1.6)$$

qui est négative puisque  $B \geq 0$ ,  $f' f'_* > 0$  et  $(1 - x) \log x \leq 0$  pour tout  $x \geq 0$ . Ce résultat constitue le H-théorème.

**Solution stationnaire de l'équation  $\mathbf{Q}(f,f)=0$ .** Dans un tel cas, l'équation de Boltzmann 1.1 est dite équation de transport libre, c'est à dire il n'y a pas de collisions entre les particules. Les seules fonctions qui annulent l'opérateur de collision sont les Maxwelliennes, Cercignani [17].

**Théorème.** On suppose que  $f$  est assez régulière. Alors  $Q(f, f) = 0$  si et seulement si  $f(t, v) = \exp(a + w \cdot v + b|v|^2)$  où  $a, b \in \mathbb{R}$  et  $w \in \mathbb{R}^3$ .

*Idée de la preuve.* Supposons que  $f(t, v) = \exp(a + w \cdot v + b|v|^2)$ , on peut en déduire d'après (1.2) que  $\mathbf{Q}(f, f) = 0$ . Pour démontrer le sens inverse, on a besoin de la proposition suivante :

**Proposition.** Soit  $\varphi$  une fonction test régulière avec  $\varphi(v)$  continue. Alors l'égalité des fonctions  $\varphi + \varphi_* = \varphi' + \varphi'_*$  est satisfaite si et seulement si  $\varphi(v) = a + w \cdot v + b|v|^2$ .

La preuve de cette proposition est basée sur le lemme suivant :

**Lemme.** Soit  $E$  est un espace vectoriel de dimension  $n$ . On suppose qu'une fonction réelle  $f$  définie sur  $E$  vérifie pour tout  $v_1$  et  $v_2$  de  $E$  la relation  $f(v_1) + f(v_2) = f(v_1 + v_2)$  et que  $f$  est continue au moins en un point. Alors  $f(v_1) = V \cdot v_1$  où  $V$  est un vecteur constant.

Donc si  $\mathbf{Q}(f, f) = 0$  alors  $\int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{Q}(f, f)(v) \log(f(t, v)) = 0$ . D'après (1.6), on conclut que  $f f_* = f' f'_*$  et par suite  $\log f + \log f_* = \log f' + \log f'_*$ . En utilisant la proposition précédente, on en déduit que  $f(t, v) = \exp(a + w \cdot v + b|v|^2)$ .  $\square$

Les constantes  $a, w, b$  peuvent s'exprimer en fonction des quantités con-

servées, densité  $\rho$ , vitesse macroscopique  $u$ , température  $T$ , par

$$\rho = \int_{\mathbb{R}^3} M(v) dv, \quad \rho u = \int_{\mathbb{R}^3} v M(v) dv \quad \text{et} \quad \rho |u|^2 + 3\rho T = \int_{\mathbb{R}^3} |v|^2 M(v) dv.$$

La Maxwellienne s'écrit alors

$$M(v) = \frac{\rho}{(2\pi T)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{|v-u|^2}{2T}}.$$

Si  $\rho = T = 1$  et  $u \equiv 0$ , on a la distribution Maxwellienne  $\mu$

$$\mu(v) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{|v|^2}{2}}$$

qui vérifie alors

$$\int_{\mathbb{R}^3} \mu(v) dv = 1, \quad \int_{\mathbb{R}^3} v \mu(v) dv = 0 \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}^3} |v|^2 \mu(v) dv = 3.$$

On note que la singularité qui apparaît dans le noyau de collision (1.14) joue un grand rôle concernant le comportement qualitatif des solutions de l'équation de Boltzmann et cette caractéristique est essentielle pour que l'effet régularisant soit présent, voir Desvillettes [19] : en effet, d'une part Desvillettes a observé que les collisions rasantes qui expliquent la non-intégrabilité du facteur angulaire proche de  $\theta = 0$  induit des effets de régularisation pour les solutions de l'équation de Boltzmann dans le cas non cutoff. D'autre part, ces solutions sont au plus aussi régulières que les données initiales : voir par exemple Wennberg [53], lorsque la section efficace est soit supposée intégrable, soit est tronquée (c'est à dire le cas "cutoff"). On explique en bref la motivation physique pour considérer cette structure spécifique de section efficace de collision.

**Sections efficaces.** Dans le cas du modèle des sphères dures, où les particules rebondissent les uns sur les autres comme des boules de billards, la

section efficace s'écrit dans la dimension 3

$$B(v - v_*, \sigma) = |(v - v_*, \sigma)|.$$

On se concentre maintenant au cas non cutoff. Dans le modèle des potentiels intermoléculaires et dans le cas  $N = 3$ , pour les particules qui se repoussent via des forces proportionnelles à  $\frac{1}{\rho^k}$  ( $\rho$  désignant la distance entre les particules et  $k > 2$ ), elle s'écrit approximativement comme produit de deux fonctions de la forme suivante

$$B(v - v_*, \sigma) = |v - v_*|^\gamma b(\cos \theta) \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{k - 5}{k - 1}.$$

La fonction  $b$  est définie implicitement. Elle est positive, localement régulière avec une forte singularité près de 0 de la forme

$$\sin \theta b(\cos \theta) \underset{0}{\approx} |\theta|^{-1-2s}, \quad 0 < s < 1 \quad \text{et} \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Selon les valeurs de l'exposant  $\gamma$ , on a la classification suivante, quelle que soit la forme de la fonction  $b$ :

- si  $\gamma > 0$ , on parle de potentiels durs;
- si  $\gamma = 0$ , il s'agit d'un gaz de Maxwell;
- si  $\gamma < 0$ , on parle de potentiels mous;
- si  $\gamma = -3$ , il s'agit d'un gaz de Coulomb.

Le cas des potentiels répulsifs vérifie (1.4). Pour plus de détails sur le contexte physique et la dérivation de l'équation de Boltzmann, on réfère le lecteur par exemple aux ouvrages Cercignani [17] et Villani [51].

D'après le théorème de Cercignani, la distribution Maxwellienne  $\mu$  est une solution stationnaire de l'équation de Boltzmann, c'est à dire  $Q(\mu, \mu) = 0$ . On considère maintenant une fluctuation  $g$  de la distribution Maxwellienne.

Alors la solution  $f$  de (1.3) peut être écrite comme

$$\begin{aligned} f(t, v) &= \mu(v) + \sqrt{\mu(v)} g(t, v), \\ F(v) &= \mu(v) + \sqrt{\mu(v)} G(v). \end{aligned}$$

Sous cette forme, le problème de Cauchy (1.3) est équivalent au problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} \partial_t g + \mathcal{L}(g) = \Gamma(g, g), \\ g|_{t=0} = g(0, v) = G(v) \end{cases} \quad (1.7)$$

où

$$\mathcal{L}(g) = -\frac{1}{\sqrt{\mu}} [\mathbf{Q}(\sqrt{\mu}g, \mu) + \mathbf{Q}(\mu, \sqrt{\mu}g)]$$

est un opérateur linéaire et

$$\Gamma(g, h) = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \mathbf{Q}(\sqrt{\mu}g, \sqrt{\mu}h)$$

est un opérateur quadratique.

L'opérateur linéarisé  $\mathcal{L}$  est un opérateur symétrique positif non borné sur  $L^2(\mathbb{R}_v^3)$ , voir Cercignani [17], Lerner, Morimoto, Pravda-Starov et Xu [41, 42, 43], avec le noyau

$$\mathcal{N} = \text{vect} \{ \sqrt{\mu}, \sqrt{\mu}v_1, \sqrt{\mu}v_2, \sqrt{\mu}v_3, \sqrt{\mu}|v|^2 \}. \quad (1.8)$$

Nous allons étudier dans cette thèse les solutions de l'équation (1.7).

## 1.2 Rappel des résultats connus de l'équation de Boltzmann

Nous rappelons les résultats sur l'existence de solutions faibles de l'équation de Boltzmann. L'étude des propriétés mathématiques a été en premier faite

dans le cas cutoff. Si la condition initiale a une masse et une énergie finie, alors il y a existence, unicité de solutions. Si de plus l'entropie est finie, ces solutions convergent vers l'équilibre. Voir les travaux de Carlemann [16], Povzner [3] et Arkeryd [4].

Il y a eu par la suite de nombreux travaux dans le cas cutoff, voir par exemple Elmroth [28], Gustafsson [37], Desvillettes [39], Wennberg [52], Mischler et Wennberg [44], et les références incluses.

L'étude dans le cas non cutoff nécessite d'autres méthodes à cause de la singularité du noyau. Arkeryd a montré dans [5] l'existence de solutions faibles dans le cas des potentiels mous ( $\gamma \geq -1$ ) et en dimension 3. Le cas de potentiels durs a été traité par Arkeryd [6] et Elmroth [28].

Villani [50] a par la suite montré l'existence de solutions faibles dans un grand nombre de cas.

En utilisant les propriétés de symétrisation de l'opérateur de collision, on peut définir une notion de solution faible :

**Définition 1.1.** [50] *Soit  $f_0$  une fonction initiale définie sur  $\mathbb{R}^3$  de masse, énergie et entropie finies. On dit que  $f(t, v) \rightarrow f(t, v)$  est une solution faible ( $-2 \leq \gamma < 1$ ) et une H-solution faible ( $-3 \leq \gamma \leq 2$ ) pour le problème de Cauchy associé à l'équation (1.3) si elle vérifie les conditions suivantes:*

$$a) f \geq 0; \quad f \in C(\mathbb{R}^+; \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)); \quad \forall t \geq 0, \quad f \in L \log L \cap L_2^1(\mathbb{R}^3),$$

$$f \in L^1([0, T]; L_{2+\gamma}^1(\mathbb{R}^3))$$

$$b) f(0) = f_0$$

$$c) \forall t \geq 0, \int f(t) \chi = \int f_0 \chi \quad \text{pour } \chi = 1, v_i, |v|^2,$$

$$\int f \log f(t) \leq \int f_0 \log f_0$$

d) Pour tout  $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^+, C_0^\infty(\mathbb{R}^3))$  et pour tout  $t \geq 0$  on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} f(t, v) \varphi(t, v) dv - \int_{\mathbb{R}^3} f_0 \varphi(0, v) dv - \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^3} f(\tau, v) \partial_\tau \varphi(\tau, v) dv \\ = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^3} Q(f, f)(\tau, v) \varphi(\tau, v) dv \end{aligned}$$

où l'on a posé :

$$\begin{aligned} \int Q(f, f) \varphi dv = \\ \frac{1}{2} \int B(v - v_*, \sigma) f(v) f(v_*) [\varphi(v) + \varphi(v_*) - \varphi(v') - \varphi(v'_*)] dv dv_* d\sigma. \end{aligned}$$

On introduit les hypothèses suivantes sur la section efficace:

- Hypothèse (A) :  $B(z, \theta) = \Phi(|v - v_*|) b(\theta) = |z|^\gamma b(\cos \theta)$  avec  $-2 \leq \gamma < 1$  et  $\int \theta^2 b(\cos \theta) d\theta < \infty$ .

**Théorème 1.2.** [50] Soit  $f_0$  une fonction positive avec une masse, une énergie et une entropie finie. Soit  $\gamma > 0$  et  $f_0 \in L_{2+\delta}^1(\mathbb{R}^3)$  pour un  $\delta > 0$ . Alors sous la condition (A), il existe une solution faible du problème de Cauchy pour l'équation de Boltzmann avec condition initiale  $f_0$ . De plus, pour tout  $\varphi \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^3)$ ,  $t \rightarrow \int f(t) \varphi$  est Lipschitz si  $f_0 \in L_{\gamma+2}^1(\mathbb{R}^3)$  (cela est toujours vrai si  $\gamma \leq 0$ , ou dans tous les cas pour  $t \geq t_0 > 0$ ).

De plus, il est bien connu qu'il y a un effet de régularisation dans les espaces de Sobolev et Schwartz ou les espaces analytiques pour tout temps  $t > 0$ , (voir par exemple [20, 21] et récemment [1]), et que les solutions convergent vers la gaussienne quand le temps tend vers l'infini (voir par exemple [35, 36]).

L'étude de l'équation de Boltzmann a donné par la suite à de nombreux travaux. Dans cette thèse, on s'est intéressé au cas radialement symétrique



avec des méthodes spectrales : dans ce cadre (non cutoff, molécules Maxwelliennes), Lerner, Morimoto, Pravda-Starov et Xu [42] montrent que l'opérateur linéaire de Boltzmann se comporte comme l'oscillateur harmonique fractionnaire  $\mathcal{H}^s$  ( $0 < s < 1$ ) avec

$$\mathcal{H} = -\Delta_v + \frac{|v|^2}{4}.$$

De plus, dans [43], ils ont démontré que la solution de l'équation de Boltzmann est régulière. Plus précisément le problème de Cauchy (1.7) pour une condition initiale petite dans  $L^2$  possède une unique solution globale et cette solution converge exponentiellement vers zéro dans la norme  $L^2$  autour de la distribution Maxwellienne. De plus, elle appartient à l'espace de Gelfand-Shilov  $S_{1/2s}^{1/2s}(\mathbb{R}^3)$  pour tout  $t > 0$  où  $s \in ]0, 1[$  est le paramètre qui apparaît dans l'hypothèse de singularité (1.14). Les espaces de Gelfand-Shilov sont définis par :

**Définition 1.3.** Soit  $\mu_1$  et  $\mu_2$  deux constantes strictement positives telles que  $\mu_1 + \mu_2 \geq 1$ . On définit les espaces  $S_{\mu_2}^{\mu_1}(\mathbb{R}^3)$  par

$$\begin{aligned} S_{\mu_2}^{\mu_1}(\mathbb{R}^3) &= \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^3), \exists a, b > 0 / |\partial_v^\alpha f(v)| \leq b a^{|\alpha|} (\alpha!)^{\mu_1} e^{-\frac{1}{a}|v|^{\frac{1}{\mu_2}}} \right\} \\ &= \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^3), \exists a, b > 0 / \sup_{v \in \mathbb{R}^3} |v^\beta \partial_v^\alpha f(v)| \leq b a^{|\alpha|+|\beta|} (\alpha!)^{\mu_1} (\beta!)^{\mu_2} \right\} \end{aligned}$$

avec  $v \in \mathbb{R}^3$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^3$ .  $S_{\mu_2}^{\mu_1}(\mathbb{R}^3)$  sont appelées espaces de Gelfand-Shilov. Ils peuvent être encore définies à partir des espaces de Schwartz :

$$S_{\mu_2}^{\mu_1}(\mathbb{R}^3) = \left\{ f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3), \exists b, \epsilon > 0 / |f(v)| \leq b e^{-\epsilon|v|^{\frac{1}{\mu_2}}}, |\hat{f}(\xi)| \leq b e^{-\epsilon|\xi|^{\frac{1}{\mu_1}}} \right\}$$

avec  $\xi \in \mathbb{R}^3$  et  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$  est l'espace des fonctions de Schwartz.

**Remarque 1.4.** *Les espaces de Gelfand-Shilov  $S_\mu^\mu(\mathbb{R}^3)$  peuvent être aussi définis à partir de la norme  $L^2$  :*

$$f \in S_\mu^\mu(\mathbb{R}^3) \Leftrightarrow f \in L^2(\mathbb{R}^3), \exists t_0 > 0, \|e^{t_0 \mathcal{H}^{1/2\mu}} f\|_{L^2} < +\infty.$$

**Théorème 1.5.** *[43] On suppose que le noyau de collision vérifie*

$$\sin \theta b(\cos \theta) \underset{0}{\approx} \frac{1}{|\theta|^{1+2s}}, \quad 0 < s < 1.$$

*Soit  $\delta$  une constante strictement positive avec  $\delta < 1$ . Il existe une constante strictement positive  $\epsilon_0$  telle que si  $G \in \mathcal{N}^\perp$  est une fonction radiale avec  $\|G\|_{L^2} \leq \epsilon_0$  alors le problème de Cauchy (1.7) associée à l'équation de Boltzmann non-cutoff spatialement homogène et dans le cas des molécules Maxwellienne a une unique solution globale  $g \in L^\infty(\mathbb{R}_t^+, L^2(\mathbb{R}_v^3))$  qui vérifie*

$$\forall t \geq 0, \|e^{\frac{t}{2} \mathcal{L}} g(t)\|_{L^2} \leq e^{-\frac{\lambda_2}{2} (1-\delta)t} \|G\|_{L^2}$$

*et elle appartient à  $S_{1/2s}^{1/2s}(\mathbb{R}^3)$  pour tout  $t > 0$ .*

Nous allons dans cette thèse considérer le problème de Cauchy dans le cadre de ce théorème.

### 1.3 Résultats de la thèse

Dans cette thèse, nous concentrons sur l'étude des solutions de l'équation de Boltzmann homogène, dans le cas Maxwellien, par des méthodes spectrales. Nous allons calculer ces solutions avec des méthodes de calcul formel et de calcul numérique. Puis nous étudierons le problème de Cauchy pour des conditions initiales  $F = \mu + \sqrt{\mu}G$  avec certaines fonctions  $G$  ( $F$  qui change de signe et  $\|G\|_{L^2}$  grand).

## A. Résolution par des méthodes symboliques

On considère d'abord le problème linéarisé de (1.7)

$$\begin{cases} \partial_t g + \mathcal{L}(g) = 0, \\ g|_{t=0} = g(0, v) = G(v). \end{cases} \quad (1.9)$$

Pour une condition initiale  $G \in L^2(\mathbb{R}_v^3)$ , il existe une unique solution régulière de (1.9) notée

$$g^{\text{lin}}(t) = e^{-t\mathcal{L}}G$$

où l'opérateur  $e^{-t\mathcal{L}}$  est défini classiquement à partir d'une base spectrale associée à l'opérateur  $\mathcal{L}$  (voir chapitre 2). Le problème de Cauchy du problème non linéaire (1.7) est bien posé pour une condition initiale  $G \in L^2(\mathbb{R}_v^3)$  de norme  $L^2$  assez petite, voir Lerner, Morimoto, Pravda-Starov et Xu [43] dans le cas radial et Glangetas, Li et Xu [32] dans le cas non radial.

Dans cette thèse, on souhaite pousser l'étude du problème de Cauchy dans le cas radial pour des données initiale  $G$  générales dans  $L^2$  d'un point de vue numérique et analytique. Pour cela, il est apparu utile de décomposer la solution  $g$  en une partie linéaire ( $g^{\text{lin}}(t)$ , qui est bien connue) et une partie non linéaire (que nous allons étudier dans cette thèse). On définit par  $h(t, v)$  **la partie non linéaire** de la solution qui est telle que

$$g(t, v) = \underbrace{e^{-t\mathcal{L}}G(v)}_{\text{partie linéaire}} + \underbrace{e^{-t\mathcal{L}}h(t, v)}_{\text{partie nonlinéaire}}.$$

On vérifie que formellement  $h(t, v) = e^{t\mathcal{L}}g(t, v) - G(v)$  et  $h(t, v)$  est solution de l'équation suivante

$$\begin{cases} \partial_t h = e^{t\mathcal{L}} \mathbf{\Gamma}(e^{-t\mathcal{L}}(G + h), e^{-t\mathcal{L}}(G + h)), \\ h(0, v) = 0. \end{cases} \quad (1.10)$$

L'opérateur linéaire  $\mathcal{L}$  possède une base spectrale explicite en fonction des polynômes de Laguerre. Plus précisément, on pose

$$\varphi_n(v) = \left( \frac{n!}{\sqrt{2}\Gamma(n + 3/2)} \right)^{1/2} e^{-\frac{|v|^2}{4}} L_n^{[\frac{1}{2}]} \left( \frac{|v|^2}{2} \right) \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

où  $L_n^{[\frac{1}{2}]}$  est le polynôme de Laguerre d'ordre  $\frac{1}{2}$  et de degré  $n$ . Remarquons en particulier que  $\varphi_0(v) = \sqrt{\mu(v)}$  et

$$\varphi_1(v) = \frac{1}{\sqrt{6}}(3 - |v|^2) \sqrt{\mu(v)}, \quad \varphi_2(v) = \frac{1}{2\sqrt{30}}(|v|^4 - 10|v|^2 + 15) \sqrt{\mu(v)}. \quad (1.11)$$

Nous représentons dans la figure 1.1 le graphe des ces fonctions.

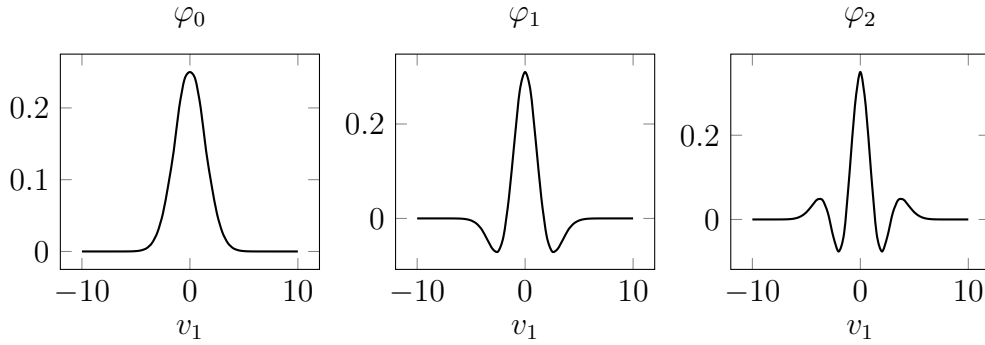


Figure 1.1: Graphe des fonctions propres  $v_1 \mapsto \varphi_n(v_1, 0, 0)$  pour  $n = 0, 1, 2$ .

Pour  $n \geq 0$  la fonction  $\varphi_n$  est un vecteur propre de  $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L}\varphi_n = \lambda_n\varphi_n \quad (1.12)$$

où les valeurs propres linéaires  $(\lambda_n)_n$  sont données par  $\lambda_0 = \lambda_1 = 0$  et pour  $n \geq 2$

$$\lambda_n = \int_0^\pi 2\pi \sin \theta b(\cos \theta) \left\{ 1 - \cos^{2n} \left( \frac{\theta}{2} \right) - \sin^{2n} \left( \frac{\theta}{2} \right) \right\} d\theta.$$

L'opérateur non linéaire  $\Gamma$  se décompose explicitement (et assez simplement) dans la base spectrale : on a pour tout  $p, q \geq 0$

$$\Gamma(\varphi_p, \varphi_q) = \mu_{pq} \varphi_{p+q} \quad (1.13)$$

où pour  $p \geq 1, q \geq 0$

$$\begin{cases} \mu_{pq} = \left( \frac{(2p+2q+1)!}{(2p+1)!(2q+1)!} \right)^{\frac{1}{2}} \int_0^\pi 2\pi \sin \theta b(\cos \theta) \left\{ \sin^{2p} \left( \frac{\theta}{2} \right) \cos^{2q} \left( \frac{\theta}{2} \right) \right\} d\theta \\ \mu_{0q} = - \int_0^\pi 2\pi \sin \theta b(\cos \theta) \left\{ 1 - \cos^{2q} \left( \frac{\theta}{2} \right) \right\} d\theta \end{cases}$$

avec  $\mu_{00} = 0$  et  $\mu_{10} = -\mu_{01}$ .

Dans cette thèse, nous allons considérer deux choix de noyau de collision :

1. Cas cutoff : Le noyau  $b(\cos \theta)$  est régulier. Pour tester la précision des méthodes numériques, on choisira un noyau constant pour lequel il existe des solutions explicites (BKW)

$$2\pi \sin \theta b(\cos \theta) = \frac{1}{2} \sin \theta, \quad \theta \in [0, \pi].$$

2. Cas non cutoff : Le noyau est singulier en 0. Dans les applications numériques, on choisira pour  $s \in ]0, 1[$

$$2\pi \sin \theta b(\cos \theta) = \begin{cases} \sin^{-(1+2s)} \left( \frac{\theta}{2} \right) & \text{si } \theta \in [0, \frac{\pi}{2}[, \\ 0 & \text{si } \theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi]. \end{cases} \quad (1.14)$$

En supposant que  $g(t) \in L_v^2(\mathbb{R}^3)$  est une solution de (1.7), on a la décomposition spectrale suivante

$$g(t, v) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(t) \varphi_n(v), \quad G(v) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n \varphi_n(v)$$

avec  $g_n(t) = \left( g(t, \cdot), \varphi_n(\cdot) \right)_{L^2}$  et  $G_n = \left( G, \varphi_n \right)_{L^2}$ . D'après la partie 3.2, en renormalisant la solution on peut toujours supposer que la condition initiale  $G$  est dans l'orthogonal du noyau  $\mathcal{N}$  de  $\mathcal{L}$  (voir (1.8))

$$G \in \mathcal{N}^\perp.$$

Comme  $\varphi_0$  et  $\varphi_1$  sont dans le noyau (voir (1.11)), on a alors  $G_0 = G_1 = 0$ . En utilisant la décomposition spectrale (1.12) de l'opérateur linéaire  $\mathcal{L}$ , on a

$$e^{-t\mathcal{L}}G(v) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda_n t} G_n \varphi_n(v).$$

Si  $g$  est une solution de (1.7), alors en utilisant les propriétés spectrales (1.12)-(1.13), les coefficients  $g_n$  vérifient le système infini d'équations différentielles ordinaires (voir [43])

$$\begin{cases} g'_0(t) \equiv 0, & g'_1(t) \equiv 0 \text{ et pour tout } n \geq 2, \\ g'_n(t) + \lambda_n g_n(t) = \sum_{\substack{p+q=n \\ 2 \leq p, q \leq n-2}} \mu_{pq} g_p(t) g_q(t) \\ g_n(0) = G_n \text{ (et } G_0 = G_1 = 0). \end{cases} \quad (1.15)$$

Dans le cas non cutoff, l'estimation sur les valeurs propres linéaires est donnée dans [42] par  $\lambda_n \approx n^s$  quand  $n \rightarrow \infty$ , et ce comportement asymptotique induit les propriétés de régularisations de  $g(t, \cdot)$  pour  $t > 0$ . Le cas cutoff pour lequel  $\lambda_n \approx 1$  est donc très différent.

On va étudier maintenant le problème de Cauchy du système d'équations différentielles ordinaires (1.15). Celui ci peut être résolu explicitement par récurrence sur  $n$  puisque pour un entier  $n$  fixé,  $g_n$  est solution d'une équation différentielle linéaire où  $g_n(t)$  apparaît uniquement dans le terme de gauche et tous les  $g_p$  et  $g_q$  apparaissant dans le terme de droite sont tels que  $p, q < n$ , et donc sont connus par l'hypothèse de récurrence.

On remarque que si la série  $\sum_n g_n \varphi_n$  converge dans un espace de fonctions régulières alors la limite est solution de l'équation de Boltzmann (1.7). Le problème dans cette thèse est d'étudier :

- des méthodes de calcul formel de résolution de (1.15)
- la convergence et la divergence à temps fini de la série.

Il est commode d'introduire la décomposition spectrale de la "partie non-linéaire"  $h(t, v)$  (qui est solution de (1.10))

$$h(t, v) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n(t) \varphi_n(v), \quad h_n(t) = (h(t, \cdot), \varphi_n)_{L^2}.$$

Comme  $g = e^{-t\mathcal{L}}(G + h)$ , on peut alors vérifier que  $h_n$  est donné aussi par

$$g_n(t) = e^{-\lambda_n t}(G_n + h_n(t)).$$

En utilisant le système (1.15), on montre que la suite  $(h_n)_n$  est solution de

$$\begin{cases} h'_0(t) = h'_1(t) = h'_2(t) = h'_3(t) = 0 \text{ et pour tout } n \geq 4, \\ h'_n(t) = \sum_{\substack{p+q=n \\ 2 \leq p, q \leq n-2}} \mu_{pq} e^{-(\lambda_p + \lambda_q - \lambda_n)t} (G_p + h_p(t)) (G_q + h_q(t)), \\ h_n(0) = 0 \text{ (et } G_0 = G_1 = 0). \end{cases} \quad (1.16)$$

La suite  $(h_n)_n$  est alors définie explicitement par récurrence par un terme intégral.

**Proposition 1.6.** *Soit  $h_n$  solution de (1.16) pour  $n \in \mathbb{N}$ . On a alors  $h_0 \equiv h_1 \equiv h_2 \equiv h_3 \equiv 0$  et pour tout  $n \geq 4$*

$$h_n(t) = \sum_{\substack{p+q=n \\ 2 \leq p, q \leq n-2}} \int_0^t \mu_{pq} e^{-(\lambda_p + \lambda_q - \lambda_n)s} (G_p + h_p(s)) (G_q + h_q(s)) ds.$$

Pour tout  $n$ , la solution  $h_n(t)$  s'exprime sous forme d'une somme finie de termes exponentiels vérifiant les propriétés algébriques suivantes.

**Proposition 1.7.** *Pour tout entier  $n \geq 4$ , on définit  $I_n$  un ensemble d'indices admissibles*

$$I_n = \left\{ \alpha \in \mathbb{N}^k \mid k \in \mathbb{N}^*, \alpha_i \geq 2, |\alpha| = n \right\}.$$

*Alors pour chaque multi-indice  $\alpha, \beta \in I_n$  il existe des coefficients réels  $c_\beta^\alpha$  qui ne dépend que de  $\lambda_2, \dots, \lambda_n$  et  $\mu_{pq}$  pour  $2 \leq p, q \leq n-2, p+q \leq n$  tel que*

$$h_n(t) = \sum_{\alpha, \beta \in I_n} c_\beta^\alpha G^\alpha (1 - e^{-(\Lambda_\beta - \lambda_n)t})$$

où pour un  $k$ -uplet  $\alpha \in \mathbb{N}^k$ , on a

$$\Lambda_\alpha = \lambda_{\alpha_1} + \lambda_{\alpha_2} + \dots + \lambda_{\alpha_k},$$

$$G^\alpha = G_{\alpha_1} \times G_{\alpha_2} \dots \times G_{\alpha_k}.$$

Dans le cas particulier de certains noyaux singuliers ( $s = \frac{1}{2}$ )

$$2\pi \sin \theta b(\cos \theta) = (\sin(\theta/2))^{-2}$$

les algorithmes (voir chapitre 7) permettent d'obtenir les solutions exactes

$h_n(t)$  :

$$h_0 = h_1 = h_2 = h_3 = 0,$$

$$h_4(t) = \frac{3\sqrt{70}}{10} G_2^2 \left( 1 - e^{-\frac{1}{48}(4+3\pi)t} \right)$$

$$h_5(t) = \frac{\sqrt{66}}{5} G_2 G_3 \left( 1 - e^{-\frac{5}{96}(4+3\pi)t} \right)$$

$$h_6(t) = a_{222}(t)G_2^3 + a_{33}(t)G_3^2 + a_{24}(t)G_2 G_4$$

avec

$$a_{222}(t) = c_0 417375 \sqrt{70} \left( \pi + \frac{112}{75} \right)$$

$$\left( \left( -\frac{69\pi}{53} - \frac{464}{265} \right) e^{-\frac{67t}{240} - \frac{53t\pi}{256}} + \left( \frac{1072}{795} + \pi \right) e^{-\frac{29t}{80} - \frac{69t\pi}{256}} + \left( \frac{16\pi}{53} + \frac{64}{159} \right) \right)$$

$$a_{33}(t) = c_0 10 (1072 + 795\pi) \sqrt{21} (15\pi + 16) \left( 1 - e^{-\frac{29t}{80} - \frac{69t\pi}{256}} \right)$$

$$a_{24}(t) = c_0 70 (75\pi + 112) (464 + 345\pi) \left( 1 - e^{-\frac{67t}{240} - \frac{53t\pi}{256}} \right)$$



et  $c_0 = \frac{\sqrt{143}}{(75040+55650\pi)(464+345\pi)}$ .

Nous avons pu calculer la solution symbolique jusqu'à un degré de liberté  $N = 20$ . Au delà, le nombre de termes exponentiels explose (de l'ordre de  $10^6$ ).

## B. Résultats numériques

Afin de faire l'analyse numérique, nous donnons une forme approximée de la solution :

$$\begin{cases} f_N(t, v) = \mu(v) + \sqrt{\mu(v)} \left( \sum_{n=2}^N e^{-\lambda_n t} (G_n + h_n(t)) \varphi_n(v) \right), \\ F_N(v) = \mu(v) + \sqrt{\mu(v)} \left( \sum_{n=2}^N G_n \varphi_n(v) \right). \end{cases} \quad (1.17)$$

Les approximations de la partie linéaire et non linéaire sont données par

$$\begin{cases} g_N^{\text{lin}}(t, v) = \sum_{n=2}^N e^{-\lambda_n t} G_n \varphi_n(v) \\ g_N^{\text{nl}}(t, v) = \sum_{n=2}^N e^{-\lambda_n t} h_n(t) \varphi_n(v). \end{cases}$$

On suppose que  $G = \sum_n G_n \varphi_n \in L^2$  c'est à dire  $\{G_n\} \in \ell^2$ . Alors  $g^{\text{lin}}$  converge vers  $g$  dans  $L^2$  et la vitesse de convergence est :

- Cutoff : Pour  $G \in L^2$ ,

$$\|g^{\text{lin}}(t, \cdot) - g_N^{\text{lin}}(t, \cdot)\|_{L^2}^2 \lesssim e^{-ct} \sum_{n \geq N+1} |G_n|^2.$$

Pour une condition initiale de mesure, il n'y a pas de régularisation dans  $L^2$  de la solution pour  $t > 0$ .

- Non cutoff : Pour  $G \in L^2$ ,

$$\|g^{\text{lin}}(t, \cdot) - g_N^{\text{lin}}(t, \cdot)\|_{L^2} \lesssim e^{-cN^s t} \|G\|_{L^2}.$$

Pour une condition initiale de mesure  $\{G_n\}$ , il existe des constantes  $b > 0$  et  $\gamma > 0$  telles que pour  $t > 0$

$$\|g^{\text{lin}}(t, \cdot) - g_N^{\text{lin}}(t, \cdot)\|_{L^2} \lesssim \frac{1}{t^b} e^{-\gamma N^{\frac{1}{2}} t}.$$

Notons que le calcul numérique et symbolique de la partie non linéaire  $h_n(t)$  prend la plupart de temps du calcul et aussi la grande partie du travaux dans cette thèse.

Nous donnons maintenant les résultats numériques obtenus en comparant la solution approximée avec la solution BKW. On rappelle l'équation de Boltzmann

$$\begin{cases} \partial_t f = \mathbf{Q}(f, f), \\ f(0, v) = F(v) \end{cases}$$

avec la solution BKW explicite

$$\begin{cases} f_{\text{BKW}}(t, v) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{(1 - e^{-\frac{t}{6}})^{\frac{7}{2}}} \times \\ \quad \left[ \left(1 - \frac{5}{2} e^{-\frac{t}{6}}\right) (1 - e^{-\frac{t}{6}}) + \frac{1}{2} e^{-\frac{t}{6}} |v|^2 \right] e^{-\frac{|v|^2}{2(1 - e^{-\frac{t}{6}})}} \\ \widehat{f_{\text{BKW}}}(t, \xi) = e^{-(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-\frac{t}{6}}) |\xi|^2} \left(1 - \frac{1}{2} e^{-\frac{t}{6}} |\xi|^2\right). \end{cases}$$

Remarquons que si  $t \geq 5.5$ , la solution de l'équation de Boltzmann est positive. Pour cela, nous supposons que  $t_0 = 5.5$  le temps initial et  $t_1 = 6.5$  le temps final, voir par exemple Gamba, Haack, Hauck et Hu [30].

**Test 1.** On considère le cas cutoff. C'est le cas où le noyau de collision  $b(\cos \theta)$  est égale à  $\frac{1}{4\pi}$  et la condition initiale appartient à  $L^2$  :

$$F(v) = f_{\text{BKW}}(t_0, v).$$

**Test 2.** On considère le cas non cutoff. C'est le cas où le noyau de collision

vérifie ( $s = \frac{1}{2}$ )

$$2\pi \sin \theta b(\cos \theta) = \begin{cases} \frac{2}{6+3\pi} \sin^{-2} \left( \frac{\theta}{2} \right) & \text{si } \theta \in [0, \frac{\pi}{2}[, \\ 0 & \text{si } \theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$$

et la condition initiale est une distribution qui change de signe :

$$\begin{cases} F(v) = f_{\text{BKW}}(0, v) \\ \widehat{F}(\xi) = 1 - \frac{1}{2} |\xi|^2. \end{cases}$$

Dans ce cas, les coefficients spectraux de  $G = (F - \mu)/\sqrt{\mu}$  sont donnés par

$$G_n = \frac{-(n-1) \sqrt{(2n+1)!}}{2^n n!}.$$

Nous comparons la solution spectrale approximée  $f_N$  (série tronquée (1.17)) avec la solution BKW dans les tests 1 et 2. Nous considérons donc l'erreur relative

$$E_N(t) = \frac{\|f_N(t, \cdot) - f_{\text{BKW}}(t, \cdot)\|_{L_v^\infty}}{\|f_{\text{BKW}}(t, \cdot)\|_{L_v^\infty}}.$$

On obtient alors les erreurs et le temps de calcul en fonction de  $N$  dans le tableau (1.1) pour le cas cutoff et (1.2) pour le cas non cutoff. Dans les deux

N	10	20	30	40
Temps de calcul (s)	31.	192.	973.	28007.
Erreur $E_N(t_1)$	7.7e-04	4.0e-08	1.4e-12	8.5e-17

Table 1.1: Temps de calcul et erreur pour toutes les algorithmes pour 20 chiffres significatifs, cas cutoff (Test 1).

cas, nous observons une erreur relative qui tend vers 0 exponentiellement quand le degré de liberté  $N$  augmente. Mais le temps de calcul et le nombre de termes dans les expressions formelles des solutions calculées augmentent

N	10	20	30	40
Temps de calcul (s)	3.2	33.	570.	35924.
Erreur $E_N(t_1)$	7.6e-04	4.0e-08	1.4e-12	4.2e-17

Table 1.2: Temps de calcul et erreur pour toutes les algorithmes pour 20 chiffres significatifs, cas non cutoff (Test 2).

exponentiellement avec  $N$ . Nous avons arrêté le calcul à  $N = 40$  pour lequel le temps de calcul est de plusieurs heures et pour lequel  $h_{40}(t)$  est une somme approximativement de  $10^6$  termes exponentiels du type  $a_i e^{-b_i t}$ .

### C. Applications numériques

Nous présentons maintenant les résultats numériques de la méthode appliquée à deux cas :

1. Le cas d'une donnée initiale régulière  $F = \mu + \sqrt{\mu} A \varphi_2$ .
2. Le cas d'une donnée initiale positive de type mesure  $\mu + \delta$ .

#### C.1. Calcul numérique pour $F = \mu + \sqrt{\mu} A \varphi_2$

Nous allons calculer la solutions numérique  $f_N(t, v)$  (série tronquée (1.17)) avec la condition initiale calculée pour  $A = 1, 10, 20$ . Pour  $A = 1$ , on est dans le cas d'une condition initiale  $F$  positive et une norme  $L^2$  "relativement petite". On observe une solution  $f(t, v)$  qui reste positive et qui tend rapidement vers l'équilibre  $\mu$ , voir la figure (1.2).

Pour  $A = 10$  et  $A = 20$ , les conditions initiales  $F$  ne sont plus positives et ont une "grande" norme  $L^2$ . On observe dans le cas  $A = 10$  une croissance de  $f_{40}(t, \cdot)$  avec un maximum autour de 2 pour  $t \simeq 0.5$ , puis la solution converge vers l'équilibre. Pour  $A = 20$ , on observe un phénomène de croissance plus

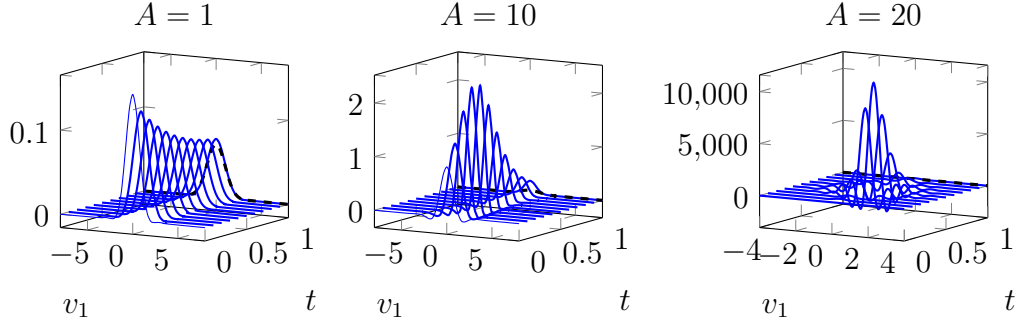


Figure 1.2: Graphe de  $f_{40}$  avec  $f(0, \cdot) = \mu + \sqrt{\mu}A\varphi_2$  pour  $A = 1, 10, 20$ .

forte de l'ordre de  $10^4$ , puis à nouveau une convergence vers l'équilibre. Dans les deux cas, la convergence de  $f_N(t, \cdot)$  vers  $\mu$  lorsque  $t$  approche la valeur 1 est due aux termes exponentiels  $e^{-\lambda_n t}$  qui font tendre vers 0 la fluctuation  $g_N(t, v)$ , et dans le même temps au fait que la solution calculée est limitée à  $N = 40$ . On pense que pour  $t = 1$ , s'il y avait possibilité de calculer  $f_N$  pour des entiers  $N$  bien supérieurs à 40, on observerait une croissance de  $t \rightarrow f_N(t, v)$ , et non pas un retour vers l'équilibre.

Il y a une indication numérique qu'il y a un blowup de la solution  $f(t, \cdot)$  à partir d'un certain temps  $t$  pour de grandes conditions initiales (qui changent de signe).

### C.2. Calcul numérique pour $\tilde{F} = \mu + \delta$

Nous considérons la donnée initiale positive de type mesure  $\tilde{F} = \mu + \delta$  où  $\delta$  est la distribution de Dirac. Après renormalisation, nous nous ramenons à la condition initiale suivante

$$\begin{cases} F(v) = \mu(v) + \sqrt{\mu(v)} G(v), \\ G(v) = 2^{-\frac{13}{4}} \pi^{-\frac{3}{4}} - \sqrt{\mu(v)} + 2^{-\frac{1}{4}} \pi^{\frac{3}{4}} \delta(v). \end{cases}$$

On observe que seule la partie linéaire est singulière et la partie non linéaire semble rester régulière, puis il y a convergence vers la Maxwellienne, voir

figure (1.3).

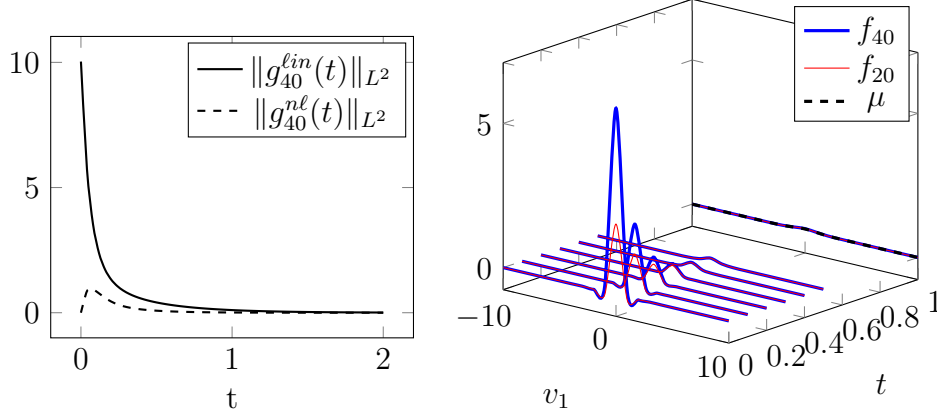


Figure 1.3: La figure à gauche décrit le comportement des parties linéaires et non linéaires. La figure à droite décrit le comportement de la condition initiale et la convergence de  $f$  vers  $\mu$ .

**Remarque 1.8.** *La solution numérique des équations de Boltzman a été essentiellement étudiée dans le cas cutoff. En particulier, nous n'avons pas trouvé de références dans le cas non cutoff pour des données initiales de type mesure. Il s'agit, d'après notre connaissance, d'une nouvelle méthodologie pour résoudre l'équation de boltzmann homogène dans le cas maxwellien et non cutoff.*

#### D. Propriétés de blowup des solutions

Dans [43], les auteurs ont démontrés l'existence d'une solution globale pour l'équation de Boltzmann (1.7) pour une condition initiale qui est une perturbation assez petite dans  $L^2$ , ainsi que la régularité de cette solution dans les espaces de Gelfand-Shilov. Nous donnons un résultat inverse dans le sens où on construit une certaine condition initiale qui est une fluctuation

assez grande autour de la Maxwellienne (et donc qui change de signe), et pour laquelle y a blowup en temps fini.

**Théorème 1.9.** *On considère la solution  $(g_n)_{n \geq 0}$  du système d'équations différentielles (1.15) avec la conditions initiale  $G_n = 0$  pour tout  $n \neq 2$  et  $G_2 = A$ ,  $A > 0$  donné. Ce qui correspond à la solution formelle de l'équation de Boltzmann avec la condition initiale  $F = \mu + \sqrt{\mu} A \varphi_2$ . Alors il existe deux constantes  $0 < A_1 < A_2$  qui ne dépendent que du noyau de collision telles que la solution vérifie :*

- Pour  $A > 0$ , la série  $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(t) \varphi_n$  converge dans  $L_v^2(\mathbb{R}^3)$  pour  $t \in [0, \min(1, \frac{A_1}{A})[$ .
- Pour  $A \geq A_2$ , la série  $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(t) \varphi_n$  diverge dans  $L_v^2(\mathbb{R}^3)$  pour  $t \in [\frac{A_2}{A}, 1]$ .

**Remarque 1.10.** *La solution formelle  $f(t, \cdot)$  qui a pour condition initiale  $F = \mu + \sqrt{\mu} A \varphi_2$  avec  $A \geq A_2$  explose donc au sens suivant*

$$\forall t \in [\frac{A_2}{A}, 1], \quad \left\| \frac{1}{\sqrt{\mu}} f(t, \cdot) \right\|_{L_v^2(\mathbb{R}^3)} = \infty.$$

**Remarque 1.11.** *Le phénomène d'explosion apparaît pour une condition initiale  $F = \mu + \sqrt{\mu} A \varphi_2$  avec  $A$  assez grand. Comme  $\varphi_2$  change de signe (voir aussi (1.11)), la condition initiale n'est plus forcément positive : c'est ce qui est observé pour les solutions qui semblent exploser numériquement. Ce résultat ne contredit pas l'existence d'une solution faible pour des condition initiales positives, voir le théorème (1.2) de Villani [50].*

**Remarque 1.12.** *Les solutions de l'équation de Boltzmann qui changent de signe n'ont pas, à notre connaissance, un intérêt dans des modèles en physique. Mais elles nous semblent intéressantes d'un point de vue analyse des équations aux dérivées partielles.*

La démonstration du théorème reviendra à démontrer à partir de (1.15) une estimation uniforme pour  $0 \leq t \leq 1$  du type

$$|g_{2n}(t)| \approx \sum_{\substack{p+q=n \\ 0 \leq p, q \leq n}} \frac{n^b}{p^a q^a} |g_{2p}(t)| |g_{2q}(t)| \quad (1.18)$$

pour certaines constantes  $a, b$  qui ne dépendent que de  $s$ . On pourra finalement montrer que pour des  $A$  assez grands, la série  $\sum_n g_{2n}(t, \cdot) \varphi_{2n}$  est divergente dans  $L_v^2(\mathbb{R}^3)$ .

**Remarque 1.13.** *On montrera que la suite  $\|g_{2n}(t, \cdot)\|_{L_v^2}$  a un comportement asymptotique proche de la suite des nombres de Catalan qui satisfont la relation de récurrence, à comparer avec l'estimation (1.18):*

$$C_0 = A \quad \text{et} \quad C_{n+1} = \sum_{\substack{p+q=n \\ 0 \leq p, q \leq n}} C_p C_q \quad \text{pour } n \geq 0$$

(pour  $A = 1$ , on a la définition classique des nombres de Catalan). Le nombre  $C_n$  vérifie alors

$$C_n \sim \frac{(4A)^n}{n^{3/2} \sqrt{\pi}}$$

et pour de grandes valeurs de  $A$  ( $A > \frac{1}{4}$ ),  $C_n$  tend vers l'infini.

## 1.4 Organisation du mémoire

Le chapitre 2 expose la décomposition spectrale pour l'équation de Boltzmann. Dans un premier temps, nous introduisons les propriétés des fonctions hermitiennes. Ensuite, nous présentons la forme spectrale de l'équation tout en rappelant les opérateurs linéaires et non linéaires avec les valeurs propres dans le cas non cutoff et les démonstrations associées. Puis, nous expliquons comment transformer cette équation en un système infini d'EDO. Enfin, nous



donnons les estimations des valeurs propres et une expression formelle de la solution.

Le chapitre 3 est une présentation de la méthode de calcul symbolique et numérique utilisée dans cette thèse.

Dans le chapitre 4 nous testons la méthode numérique en comparant les solutions calculées avec la solutions explicite BKW, dans les deux cas cutoff et non cutoff.

Le chapitre 5 est une application de la méthode numérique pour calculer une approximation de la solution dans le cas d'une condition initiale dans  $L^2$  (pouvant être grande en norme  $L^2$ ) et dans le cas d'une condition initiale de type distribution.

Dans le chapitre 6 nous présentons un phénomène de blowup (pour une condition initiale assez grande qui change de signe).

Le chapitre 7 contient les principales algorithmes qui aident les lecteurs à reproduire notre résultats. Les simulations sont faites avec Maple13 et Maple2016.

La partie annexe 8 contient des résultats théoriques qui sont utilisés dans les autres chapitres.

# Chapitre 2

## Décomposition spectrale

Dans ce chapitre, on présente des résultats que l'on va les utiliser dans les chapitres qui suivent. Dans la première section, on décompose les opérateurs linéaires et non linéaires de l'équation de Boltzmann qui sont définis dans le premier chapitre dans la base spectrale définie à partir des polynômes de Laguerre généralisés. Dans la deuxième section, on donne les estimations des valeurs propres linéaires et non linéaires de l'équation de Boltzmann. On termine par donner des expressions symboliques de la solution.

### 2.1 Décomposition spectrale des opérateurs linéarisé et non linéarisé

Cette décomposition spectrale des opérateurs dans le cas de molécules Maxwelliennes a été étudiée par de nombreux auteurs. Voir par exemple [18, 10, 17, 27, 41, 42]. On rappelle ci-dessous les résultats utilisés dans cette thèse, et on va donner certaines démonstrations.

On introduit une base orthonormale de  $L_r^2(\mathbb{R}^3)$  l'ensemble des fonctions symétriques radiales de  $L^2(\mathbb{R}^3)$  définie à partir des polynômes de Laguerre généralisés  $L_n^{[\frac{1}{2}]}$  : pour cela, on pose pour tout  $n \geq 0$

$$\varphi_n(v) = \left( \frac{n!}{\sqrt{2}\Gamma(n+3/2)} \right)^{1/2} e^{-\frac{|v|^2}{4}} L_n^{[\frac{1}{2}]} \left( \frac{|v|^2}{2} \right) \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \quad (2.1)$$

où  $\Gamma(\cdot)$  est la fonction gamma standard définie pour tout  $x > 0$  :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

et le polynôme de Laguerre  $L_n^{[\alpha]}$  d'ordre  $\alpha$  et de degré  $n$  est

$$L_n^{[\alpha]}(x) = \sum_{r=0}^n (-1)^{n-r} \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{r!(n-r)!\Gamma(\alpha+n-r+1)} x^{n-r}.$$

On a par exemple  $\varphi_0(v) = \sqrt{\mu(v)}$ ,  $\varphi_1(v) = (v^2 - 1)\sqrt{\mu(v)}$ .

On rappelle que dans le cas non cutoff le noyau de collision  $b(\cos \theta)$  possède la singularité suivante en  $\theta = 0$

$$\sin \theta b(\cos \theta) \approx \frac{1}{|\theta|^{1+2s}}, \quad 0 < s < 1, \quad \theta \in (0, \frac{\pi}{2}]. \quad (2.2)$$

La proposition suivante analyse la décomposition spectrale pour l'opérateur linéaire de Boltzmann.

**Proposition 2.1.** [18] *Les deux familles  $(\varphi_n(v))_{n \geq 0}$  et  $(\lambda_n)_{n \geq 0}$  sont respectivement les vecteurs propres et les valeurs propres de  $\mathcal{L}$  : on a pour tout  $n \geq 0$*

$$\mathcal{L} \varphi_n = \lambda_n \varphi_n$$

avec  $\lambda_0 = 0$  et pour  $n \geq 1$

$$\lambda_n = \int_0^\pi 2\pi \sin \theta b(\cos \theta) \left\{ 1 - \cos^{2n} \left( \frac{\theta}{2} \right) - \sin^{2n} \left( \frac{\theta}{2} \right) \right\} d\theta. \quad (2.3)$$

On donne maintenant une proposition concernant la forme explicite des valeurs propres non linéaires associées au terme de collision  $\Gamma$ .

**Proposition 2.2.** (voir lemme 3.3 [43]) *L'opérateur quadratique  $\Gamma$  satisfait*

$$\Gamma(\varphi_p, \varphi_q) = \mu_{pq} \varphi_{p+q}$$

où pour  $p \geq 1$  et  $q \geq 0$  les valeurs propres non linéaires sont données par

$$\begin{cases} \mu_{pq} = \left( \frac{(2p+2q+1)!}{(2p+1)!(2q+1)!} \right)^{\frac{1}{2}} \int_0^\pi 2\pi \sin \theta b(\cos \theta) \left\{ \sin^{2p} \left( \frac{\theta}{2} \right) \cos^{2q} \left( \frac{\theta}{2} \right) \right\} d\theta, \\ \mu_{0q} = - \int_0^\pi 2\pi \sin \theta b(\cos \theta) \left\{ 1 - \cos^{2q} \left( \frac{\theta}{2} \right) \right\} d\theta. \end{cases} \quad (2.4)$$

On fixe d'abord quelques notations. Pour  $\xi \in \mathbb{R}^3$ , on note  $\Phi_n(\xi) = \mathcal{F}(\sqrt{\mu} \varphi_n)(\xi)$ , alors (voir (8.3))

$$\Phi_n(\xi) = \frac{1}{\sqrt{(2n+1)!}} |\xi|^{2n} e^{-\frac{1}{2}|\xi|^2}.$$

Pour  $\sigma \in \mathbb{S}^2$  tel que

$$\xi = |\xi| e_1 = |\xi| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \sigma = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 \\ \sin \theta_1 \cos \phi_1 \\ \sin \theta_1 \sin \phi_1 \end{pmatrix}$$

avec  $\theta_1 \in [0, \pi]$  et  $\phi_1 \in [0, 2\pi]$ . Alors  $d\sigma = \sin \theta_1 d\theta_1 d\phi_1$  et en posant

$$\xi^+ = \frac{\xi + |\xi| \sigma}{2} \quad \text{et} \quad \xi^- = \frac{\xi - |\xi| \sigma}{2}$$

on vérifie

$$\begin{cases} \xi^+ = |\xi| \cos \left( \frac{\theta_1}{2} \right) \left( \cos \left( \frac{\theta_1}{2} \right), \sin \left( \frac{\theta_1}{2} \right) \cos(\phi_1), \sin \left( \frac{\theta_1}{2} \right) \sin(\phi_1) \right)^T \\ \xi^- = |\xi| \sin \left( \frac{\theta_1}{2} \right) \left( \sin \left( \frac{\theta_1}{2} \right), -\cos \left( \frac{\theta_1}{2} \right) \cos(\phi_1), -\cos \left( \frac{\theta_1}{2} \right) \sin(\phi_1) \right)^T \\ |\xi^+| = |\xi| \left| \cos \left( \frac{\theta_1}{2} \right) \right|, \quad |\xi^-| = |\xi| \left| \sin \left( \frac{\theta_1}{2} \right) \right|, \quad \xi \cdot \sigma = |\xi| \cos \theta_1. \end{cases} \quad (2.5)$$

*Preuve de la proposition 2.2.* On reprend ici la preuve de [43]. On note que

$$\begin{aligned}\sqrt{\mu} \Gamma(\varphi_p, \varphi_q) &= Q(\sqrt{\mu} \varphi_p, \sqrt{\mu} \varphi_q) \\ \mathcal{F}[\sqrt{\mu} \Gamma(\varphi_p, \varphi_q)](\xi) &= \mathcal{F}[Q(\sqrt{\mu} \varphi_p, \sqrt{\mu} \varphi_q)](\xi).\end{aligned}$$

D'après l'identité de Bobylev (voir (8.1)), en prenant  $g = \sqrt{\mu} \varphi_p$ ,  $f = \sqrt{\mu} \varphi_q$  et en rappelant que (voir lemme 8.3)  $\hat{g} = \Phi_p$ ,  $\hat{f} = \Phi_q$ , on obtient

$$\mathcal{F}[Q(\sqrt{\mu} \varphi_p, \sqrt{\mu} \varphi_q)](\xi) = \int_{\mathbb{S}^2} b\left(\frac{\xi}{|\xi|} \cdot \sigma\right) \{\Phi_p(\xi^-) \Phi_q(\xi^+) - \Phi_p(0) \Phi_q(\xi)\} d\sigma.$$

D'après le lemme 8.3 et les relations (2.5), on calcule

$$\begin{aligned}\Phi_p(\xi^-) \Phi_q(\xi^+) &= \frac{1}{\sqrt{(2p+1)!(2q+1)!}} |\xi^-|^{2p} |\xi^+|^{2q} e^{-\frac{1}{2}(|\xi^-|^2 + |\xi^+|^2)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(2p+1)!(2q+1)!}} \left|\sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right)\right|^{2p} \times \left|\cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right)\right|^{2q} |\xi|^{2p+2q} e^{-\frac{1}{2}(|\xi|^2)}\end{aligned}$$

et

$$\begin{cases} \Phi_0(0) \Phi_q(\xi) = \frac{1}{\sqrt{(2q+1)!}} |\xi|^{2q} e^{-\frac{1}{2}|\xi|^2} & \text{si } p = 0 \\ \Phi_p(0) \Phi_q(\xi) = 0 & \text{si } p \neq 0. \end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned}\Phi_p(0) \Phi_q(\xi) &= \delta_p \frac{1}{\sqrt{(2q+1)!}} |\xi|^{2q} e^{-\frac{1}{2}|\xi|^2} \\ &= \delta_p \frac{1}{\sqrt{(2p+1)!(2q+1)!}} |\xi|^{2p+2q} e^{-\frac{1}{2}|\xi|^2}.\end{aligned}$$

Cas 1: si  $p = q = 0$  alors

$$\{\Phi_0(\xi^-) \Phi_0(\xi^+) - \Phi_0(0) \Phi_0(\xi)\} = \left\{e^{-\frac{1}{2}|\xi|^2} - e^{-\frac{1}{2}|\xi|^2}\right\} = 0.$$

Cas 2: si  $p = 0$  et  $q \geq 0$  alors

$$\begin{aligned}\{\Phi_0(\xi^-) \Phi_q(\xi^+) - \Phi_0(0) \Phi_q(\xi)\} &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{(2q+1)!}} \left\{ \left|\cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right)\right|^{2q} - 1 \right\} |\xi|^{2q} e^{-\frac{1}{2}(|\xi|^2)}.\end{aligned}$$

Cas 3: si  $p \geq 1$  et  $q \geq 0$  alors

$$\begin{aligned} & \{ \Phi_p(\xi^-) \Phi_q(\xi^+) - \Phi_p(0) \Phi_q(\xi) \} = \\ & \frac{1}{\sqrt{(2p+1)!(2q+1)!}} \left\{ \left| \sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \right|^{2p} \left| \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \right|^{2q} \right\} \times |\xi|^{2p+2q} e^{-\frac{1}{2}(|\xi|^2)}. \end{aligned}$$

On définit ensuite pour  $p = 0, q \geq 0$  (cas 1 et 2)

$$\mu_{0q} = - \int_0^\pi 2\pi \sin \theta_1 b(\cos(\theta_1)) \left\{ 1 - \left| \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \right|^{2q} \right\} d\theta_1$$

et pour  $p \geq 1, q \geq 0$  (cas 3)

$$\begin{aligned} \mu_{pq} &= \left( \frac{(2p+2q+1)!}{(2p+1)!(2q+1)!} \right)^{\frac{1}{2}} \times \\ & \int_0^\pi 2\pi \sin \theta_1 b(\cos(\theta_1)) \left\{ \left| \sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \right|^{2p} \left| \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \right|^{2q} \right\} d\theta_1. \end{aligned}$$

On a alors

$$\mathcal{F}[Q(\sqrt{\mu} \varphi_p, \sqrt{\mu} \varphi_q)](\xi) = \mu_{pq} \Phi_{p+q}(|\xi|) = \mu_{pq} \mathcal{F}[\sqrt{\mu} \varphi_{p+q}](|\xi|).$$

C'est-à-dire

$$Q(\sqrt{\mu} \varphi_p, \sqrt{\mu} \varphi_q)(v) = \mu_{pq} \sqrt{\mu} \varphi_{p+q}(v)$$

ou équivalent

$$\Gamma(\varphi_p, \varphi_q)(v) = \mu_{pq} \varphi_{p+q}(v).$$

Ceci conclut la preuve de la proposition. □

La preuve sur les valeurs propres linéaires  $\lambda_n$  découle directement de la proposition 2.2 sur les valeurs propres non linéaires  $\mu_{pq}$ .

*Preuve de la proposition 2.1.* On calcule également les valeurs propre de l'opérateur linéaire  $\mathcal{L}$ . On a

$$\begin{cases} \mathcal{L}(\varphi_n) = -\Gamma(\varphi_n, \varphi_0) - \Gamma(\varphi_0, \varphi_n) = \lambda_n \varphi_n, \\ \lambda_n = -\mu_{n0} - \mu_{0n}. \end{cases}$$

Pour  $n = 0$  on a  $\lambda_0 = -\mu_{00} - \mu_{00} = 0$  et pour  $n = 1$  on a

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -\mu_{10} - \mu_{01} \\ &= \int_0^\pi 2\pi \sin \theta_1 b(\cos \theta_1) \left( -\left| \sin \left( \frac{\theta_1}{2} \right) \right|^2 - \left| \cos \left( \frac{\theta_1}{2} \right) \right|^2 + 1 \right) d\theta_1 = 0.\end{aligned}$$

Pour  $n \geq 2$ , on vérifie que

$$\begin{aligned}\lambda_n &= -\mu_{n0} - \mu_{0n} \\ &= \int_0^\pi 2\pi \sin \theta_1 b(\cos \theta_1) \left\{ 1 - \left| \cos \left( \frac{\theta_1}{2} \right) \right|^{2n} - \left| \sin \left( \frac{\theta_1}{2} \right) \right|^{2n} \right\} d\theta_1 > 0.\end{aligned}$$

Ceci conclut la preuve de la proposition.  $\square$

## 2.2 Transformation de l'équation de Boltzmann en un système d'EDO

On suppose que  $g(t, \cdot) \in L_v^2(\mathbb{R}^3)$  est une solution de (1.7) avec  $g(0, \cdot) = G \in \mathcal{N}^\perp$ . On considère le développement spectral suivant

$$g(t, v) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(t) \varphi_n(v), \quad G(v) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n \varphi_n(v) \quad (2.6)$$

avec  $g_n(t) = \left( g(t, \cdot), \varphi_n(\cdot) \right)_{L^2}$  et  $G_n = \left( G, \varphi_n \right)_{L^2}$  avec  $G_0 = G_1 = 0$ . Par définition, on a

$$e^{-t\mathcal{L}} G(v) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda_n t} G_n \varphi_n(v).$$

C'est la solution de l'équation

$$\begin{cases} \partial_t g^{\text{lin}} + \mathcal{L} g^{\text{lin}} = 0, \\ g^{\text{lin}}(0, v) = G(v). \end{cases}$$

Suivant [43] et les références citées dans cet article, on dérive donc de (1.7) le système infini d'équations différentielles ordinaires suivant

$$\begin{cases} g'_0(t) = 0, & g'_1(t) = 0 \text{ et pour tout } n \geq 2, \\ g'_n(t) + \lambda_n g_n(t) = \sum_{\substack{p+q=n \\ 2 \leq p, q \leq n-2}} \mu_{pq} g_p(t) g_q(t) \end{cases} \quad (2.7)$$

avec  $\lambda_0 = 0$ ,  $\mu_{00} = 0$  et les données initiales (voir (2.6))

$$g_n(0) = G_n \quad \text{pour } n \geq 0.$$

Cette transformation dans le cas des molécules maxwellienne se base sur la décomposition spectrale qui a été régulièrement utilisée. On donne ici une preuve directe de (2.7) en considérant les transformations de Fourier de la solution dans la base spectrale et l'identité de Bobylev et en utilisant les propriétés des développement analytiques. On retrouve aussi directement les valeurs de  $\lambda_n$  et  $\mu_{pq}$  en fonction du noyau de collision. On rappelle que l'on a posé

$$f(t, v) = \mu(v) + \sqrt{\mu(v)} \sum_{n \geq 2} g_n(t) \varphi_n(v).$$

Comme  $\varphi_0 = \sqrt{\mu}$ ,  $\mathcal{F}(\mu(v))(\xi) = e^{-\frac{|\xi|^2}{2}}$  et pour tout  $n \geq 0$  on a

$$\mathcal{F}(\sqrt{\mu(v)} \varphi_n)(\xi) = \frac{|\xi|^{2n}}{\sqrt{(2n+1)!}} e^{-\frac{|\xi|^2}{2}}$$

alors

$$\hat{f}(t, \xi) = \left( 1 + \sum_{n=2}^{\infty} g_n(t) \frac{|\xi|^{2n}}{\sqrt{(2n+1)!}} \right) e^{-\frac{|\xi|^2}{2}}.$$

**Proposition 2.3** (voir le lemme 3.3 [43] + références associées). *On considère une solution formelle radiale  $f(t, v)$  de l'équation de Boltzmann. Plus précisément, on suppose que sa transformée de Fourier  $\hat{f}(t, \xi)$  est solution*



de l'équation

$$\partial_t \hat{f}(t, \xi) = \int_{\mathbb{S}^2} b(\cos \theta) \left\{ \hat{f}(\xi^-) \hat{f}(\xi^+) - \hat{f}(0) \hat{f}(\xi) \right\} d\sigma$$

et que  $\hat{f}(t, \xi)$  s'écrit sous la forme de la série formelle

$$\widehat{f(t, \cdot)}(\xi) = \left( 1 + \sum_{n=2}^{\infty} g_n(t) \frac{|\xi|^{2n}}{\sqrt{(2n+1)!}} \right) e^{-\frac{|\xi|^2}{2}}.$$

Alors  $g_n$  est solution de l'équation différentielle

$$g'_n(t) = -\lambda_n g_n(t) + \left\{ \sum_{\substack{p+q=n \\ p, q \geq 2}} \mu_{pq} g_p(t) g_q(t) \right\}$$

avec

$$\lambda_n = \int_0^\pi b(\cos \theta_1) \left( 1 - \sin^{2n} \left( \frac{\theta_1}{2} \right) - \cos^{2n} \left( \frac{\theta_1}{2} \right) \right) 2\pi \sin \theta_1 d\theta_1$$

et

$$\mu_{pq} = \frac{\sqrt{(2n+1)!}}{\sqrt{(2p+1)!} \sqrt{(2q+1)!}} \times \int_0^\pi b(\cos \theta_1) \left( \sin^{2p} \left( \frac{\theta_1}{2} \right) \cos^{2q} \left( \frac{\theta_1}{2} \right) \right) 2\pi \sin \theta_1 d\theta_1.$$

*Preuve de la proposition 2.3.* On présente une démonstration qui va permettre d'obtenir directement la décomposition spectrale à partir de la base

$$\left\{ \frac{|\xi|^{2n}}{\sqrt{(2n+1)!}} e^{-\frac{|\xi|^2}{2}} \right\} \text{ avec } n \text{ est un entier positif.}$$

On considère le développement

$$\hat{f}(t, \xi) = \left( 1 + \sum_{n=2}^{\infty} g_n(t) \frac{|\xi|^{2n}}{\sqrt{(2n+1)!}} \right) e^{-\frac{|\xi|^2}{2}}.$$

On a alors

$$\partial_t \hat{f}(t, \xi) = \sum_{n=2}^{\infty} g'_n(t) \frac{|\xi|^{2n}}{\sqrt{(2n+1)!}} e^{-\frac{|\xi|^2}{2}}. \quad (2.8)$$

On calcule maintenant le terme de collision : on utilise l'identité de bobylev (8.1) et on pose

$$\xi = |\xi| e_1 = |\xi| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \sigma = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 \\ \sin \theta_1 \cos \phi_1 \\ \sin \theta_1 \sin \phi_1 \end{pmatrix}.$$

D'après (2.5)

$$|\xi^+| = |\xi| \left| \cos \left( \frac{\theta_1}{2} \right) \right|, \quad |\xi^-| = |\xi| \left| \sin \left( \frac{\theta_1}{2} \right) \right|, \quad |\xi^+|^2 + |\xi^-|^2 = |\xi|^2$$

on obtient

$$\begin{aligned} \hat{f}(t, \xi^-) \hat{f}(t, \xi^+) &= \\ & \left( 1 + \sum_{p=2}^{\infty} g_p(t) \frac{|\xi^-|^{2p}}{\sqrt{(2p+1)!}} \right) \left( 1 + \sum_{q=2}^{\infty} g_q(t) \frac{|\xi^+|^{2q}}{\sqrt{(2q+1)!}} \right) e^{-\frac{|\xi|^2}{2}} \\ &= \left( 1 + \sum_{p=2}^{\infty} g_p(t) \frac{|\xi^-|^{2p}}{\sqrt{(2p+1)!}} + \sum_{q=2}^{\infty} g_q(t) \frac{|\xi^+|^{2q}}{\sqrt{(2q+1)!}} \right. \\ & \quad \left. + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{\substack{p+q=n \\ p, q \geq 2}} g_p(t) g_q(t) \frac{|\xi^-|^{2p}}{\sqrt{(2p+1)!}} \frac{|\xi^+|^{2q}}{\sqrt{(2q+1)!}} \right) e^{-\frac{|\xi|^2}{2}}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \left\{ \hat{f}(t, \xi^-) \hat{f}(t, \xi^+) - \hat{f}(t, 0) \hat{f}(t, \xi) \right\} &= \\ & \sum_{n=2}^{\infty} g_n(t) \left( \frac{|\xi^-|^{2n}}{\sqrt{(2n+1)!}} + \frac{|\xi^+|^{2n}}{\sqrt{(2n+1)!}} - \frac{|\xi|^{2n}}{\sqrt{(2n+1)!}} \right) e^{-\frac{|\xi|^2}{2}} \\ & \quad + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{\substack{p+q=n \\ p, q \geq 2}} g_p(t) g_q(t) \left( \frac{|\xi^-|^{2p}}{\sqrt{(2p+1)!}} \frac{|\xi^+|^{2q}}{\sqrt{(2q+1)!}} \right) e^{-\frac{|\xi|^2}{2}}. \end{aligned}$$

Le terme de collision devient

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[Q(f, f)(\cdot)](\xi) &= \int_{\mathbb{S}^{N-1}} b\left(\frac{\xi}{|\xi|} \cdot \sigma\right) \left\{ \hat{f}(\xi^-) \hat{f}(\xi^+) - \hat{f}(0) \hat{f}(\xi) \right\} d\sigma \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} g_n(t) \left( -\lambda_n \frac{|\xi|^{2n}}{\sqrt{(2n+1)!}} \right) e^{-\frac{|\xi|^2}{2}} + \\ &\quad \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{\substack{p+q=n \\ p, q \geq 2}} g_p(t) g_q(t) \left( M_{pq} \frac{|\xi|^{2p}}{\sqrt{(2p+1)!}} \frac{|\xi|^{2q}}{\sqrt{(2q+1)!}} \right) e^{-\frac{|\xi|^2}{2}} \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \lambda_n &= \int_{\mathbb{S}^{N-1}} b\left(\frac{\xi}{|\xi|} \cdot \sigma\right) \left( 1 - \left| \frac{\xi^-}{|\xi|} \right|^{2n} - \left| \frac{\xi^+}{|\xi|} \right|^{2n} \right) d\sigma \\ &= \int_0^\pi b(\cos \theta_1) \left( 1 - \sin^{2n} \left( \frac{\theta_1}{2} \right) - \cos^{2n} \left( \frac{\theta_1}{2} \right) \right) 2\pi \sin \theta_1 d\theta_1 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} M_{pq} &= \int_{\mathbb{S}^{N-1}} b\left(\frac{\xi}{|\xi|} \cdot \sigma\right) \left( 1 - \left| \frac{\xi^-}{|\xi|} \right|^{2n} - \left| \frac{\xi^+}{|\xi|} \right|^{2n} \right) d\sigma \\ &= \int_0^\pi b(\cos \theta_1) \left( \sin^{2p} \left( \frac{\theta_1}{2} \right) \cos^{2q} \left( \frac{\theta_1}{2} \right) \right) 2\pi \sin \theta_1 d\theta_1. \end{aligned}$$

Daprès (2.8) on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} g'_n(t) \left\{ \frac{1}{\sqrt{(2n+1)!}} \right\} |\xi|^{2n} e^{-\frac{|\xi|^2}{2}} &= \\ \sum_{n=2}^{\infty} g_n(t) \left\{ \frac{-\lambda_n}{\sqrt{(2n+1)!}} \right\} |\xi|^{2n} e^{-\frac{|\xi|^2}{2}} &+ \\ \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \sum_{\substack{p+q=n \\ p, q \geq 2}} g_p(t) g_q(t) \left( \frac{M_{pq}}{\sqrt{(2p+1)!} \sqrt{(2q+1)!}} \right) \right\} |\xi|^{2n} e^{-\frac{|\xi|^2}{2}}. \end{aligned}$$

On simplifie par  $e^{-\frac{|\xi|^2}{2}}$  et on définit

$$\mu_{pq} = \frac{\sqrt{(2n+1)!}}{\sqrt{(2p+1)!} \sqrt{(2q+1)!}} M_{pq}.$$

On obtient les développements

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} g'_n(t) \left\{ \frac{1}{\sqrt{(2n+1)!}} \right\} |\xi|^{2n} &= \sum_{n=2}^{\infty} g_n(t) \left\{ \frac{-\lambda_n}{\sqrt{(2n+1)!}} \right\} |\xi|^{2n} \\ &+ \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \sum_{\substack{p+q=n \\ p,q \geq 2}} g_p(t) g_q(t) \left( \frac{\mu_{pq}}{\sqrt{(2n+1)!}} \right) \right\} |\xi|^{2n} \end{aligned}$$

et on déduit que

$$g'_n(t) = -\lambda_n g_n(t) + \left\{ \sum_{\substack{p+q=n \\ p,q \geq 2}} \mu_{pq} g_p(t) g_q(t) \right\}$$

en comparant les développements analytiques.  $\square$

## 2.3 Estimations des valeurs propres

On donne dans cette section des estimations sur les valeurs propres linéaires  $\lambda_n$  et les valeurs propres non linéaires  $\mu_{pq}$  dans le cas non cutoff. Pour cela, on fixe le paramètre  $s$  dans  $]0, 1[$  ( $s$  est un paramètre physique qui apparaît dans le cas non cutoff du noyau de collision, voir (2.2)) et on prend  $2\pi \sin \theta b(\cos \theta) = (\sin \frac{\theta}{2})^{-1-2s}$  pour  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ . On commence à estimer les valeurs propres linéaires.

**Proposition 2.4.** (voir [42], corollaire 2.7)

*Dans le cas non cutoff (2.2), les valeurs propres  $\lambda_n$  ont le comportement asymptotique suivant*

$$\lambda_n \approx n^s$$

quand  $n \rightarrow \infty$ . Il existe donc une constante  $C_\lambda > 0$  tel que pour tous  $n \geq 1$  on a

$$\lambda_n \geq C_\lambda n^s.$$

*Preuve.* On rappelle que les  $\lambda_n$  sont définies par (voir (2.3))

$$\lambda_n = \int_0^\pi 2\pi \sin \theta b(\cos \theta) \left\{ 1 - \cos^{2n} \left( \frac{\theta}{2} \right) - \sin^{2n} \left( \frac{\theta}{2} \right) \right\} d\theta.$$

Comme  $b(\cos \theta) = 0$  pour  $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ , le formule devient

$$\lambda_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi \sin \theta b(\cos \theta) \left\{ 1 - \cos^{2n} \left( \frac{\theta}{2} \right) - \sin^{2n} \left( \frac{\theta}{2} \right) \right\} d\theta.$$

En remplaçant  $\frac{\theta}{2}$  par  $\theta$ , on a bien que

$$\lambda_n = 2 J_n - 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^{2n-1-2s}(\theta) d\theta = 2 J_n + \mathcal{O}\left(\frac{1}{2^n}\right)$$

avec

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \cos^{2n} \theta}{(\sin \theta)^{1+2s}} d\theta.$$

On pose le changement de variable  $v = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} = 1 - \cos \theta$ , alors

$$J_n = \int_0^{1-2^{-\frac{1}{2}}} \frac{1 - (1-v)^{2n}}{v^{1+s}(2-v)^{1+s}} dv.$$

De nouveau, si on prend le changement de variable  $w = 2n v$ , on aura

$$J_n = \int_0^{2n(1-2^{-\frac{1}{2}})} \frac{1 - \left(1 - \frac{w}{2n}\right)^{2n}}{\left(\frac{w}{2n}\right)^{1+s} \left(2 - \frac{w}{2n}\right)^{1+s}} \frac{dw}{2n}$$

C'est-à-dire

$$J_n = (2n)^s \int_0^{2n(1-2^{-\frac{1}{2}})} \frac{1 - \left(1 - \frac{w}{2n}\right)^{2n}}{w^{1+s} \left(2 - \frac{w}{2n}\right)^{1+s}} dw$$

On remarque que

$$0 \leq \frac{1 - \left(1 - \frac{w}{2n}\right)^{2n}}{w^{1+s} \left(2 - \frac{w}{2n}\right)^{1+s}} \leq \frac{1 - \left(1 - \frac{w}{2n}\right)^{2n}}{w^{1+s}} \times \frac{1}{\left(1 + 2^{-\frac{1}{2}}\right)^{1+s}}$$

et

$$\begin{cases} \left(1 - \frac{w}{2n}\right)^{2n} \simeq 1 - w & \text{si } w \simeq 0 \\ 1 - \left(1 - \frac{w}{2n}\right)^{2n} \leq 1 & \text{si } w > 1 \end{cases}$$

alors

$$0 \leq \frac{1 - \left(1 - \frac{w}{2n}\right)^{2n}}{w^{1+s} \left(2 - \frac{w}{2n}\right)^{1+s}} \leq \frac{1}{\left(1 + 2^{-\frac{1}{2}}\right)^{1+s}} \times \left[ \frac{1}{w^s} \mathbb{1}_{[0,1]}(w) + \frac{1}{w^{s+1}} \mathbb{1}_{(1,+\infty)}(w) \right] \in L^1(\mathbb{R}).$$

En utilisant le théorème de la convergence dominée, on déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{J_n}{n^s} = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-w}}{w^{1+s}} dw$$

c'est-à-dire

$$J_n \sim n^s$$

d'où le résultat. □

Pour l'estimation sur les valeurs propres non linéaires, voici la proposition suivante.

**Proposition 2.5.** *On a pour  $p, q \geq 1$ ,  $p + q = n \rightarrow \infty$*

$$\mu_{pq} + \mu_{qp} \approx \frac{n^{\frac{5}{4}+2s}}{p^{\frac{5}{4}+s} q^{\frac{5}{4}+s}}.$$

*Plus précisément, il existe certaines constantes  $0 < C_{\mu,1} < C_{\mu,2}$  telles que pour tous  $p, q \geq 1$  on a*

$$C_{\mu,1} \frac{n^{\frac{5}{4}+2s}}{p^{\frac{5}{4}+s} q^{\frac{5}{4}+s}} \leq \mu_{pq} + \mu_{qp} \leq C_{\mu,2} \frac{n^{\frac{5}{4}+2s}}{p^{\frac{5}{4}+s} q^{\frac{5}{4}+s}}. \quad (2.9)$$

*Preuve.* On rappelle le formule des valeurs propres non linéaires

$$\mu_{pq} = \left( \frac{(2p + 2q + 1)!}{(2p + 1)! (2q + 1)!} \right)^{\frac{1}{2}} \int_0^\pi 2\pi \sin \theta b(\cos \theta) \left\{ \sin^{2p} \left( \frac{\theta}{2} \right) \cos^{2q} \left( \frac{\theta}{2} \right) \right\} d\theta.$$

On sait que  $b(\cos \theta) = 0$  pour  $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ , ainsi  $\mu_{pq} = C_{pq} A_{pq}$  avec

$$C_{pq} = \left( \frac{(2p + 2q + 1)!}{(2p + 1)! (2q + 1)!} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$A_{pq} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1-2s} \left( \frac{\theta}{2} \right) \cos^{2q} \left( \frac{\theta}{2} \right) d\theta.$$

En remplaçant  $\frac{\theta}{2}$  par  $\theta$ , le formule de  $A_{pq}$  devient

$$A_{pq} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin \theta)^{2p-1-2s} (\cos \theta)^{2q} d\theta.$$

Pour l'estimation de la constante  $C_{pq}$ , on a

$$C_{pq} \approx \frac{n^{\frac{1}{2}}}{p^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}}} \left( \frac{(2n)!}{(2p)!(2q)!} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Pour  $A_{pq}$ , on estime l'intégrale en utilisant le changement de variable  $t = \sin^2 \theta$ :

$$\begin{aligned} A_{pq} &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin \theta)^{2p-2s-1} (\cos \theta)^{2q} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin \theta)^{2p-2s-2} (\cos \theta)^{2q-1} 2 \sin \theta \cos \theta d\theta. \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} t^{p-1-s} (1-t)^{q-\frac{1}{2}} dt. \\ &\approx \int_0^{\frac{1}{2}} t^{p-1-s} (1-t)^{q-1-s} dt. \end{aligned}$$

Donc en utilisant le changement de variable  $s = 1 - t$ , on aura

$$\begin{aligned} A_{pq} + A_{qp} &\approx \int_0^1 t^{p-1-s} (1-t)^{q-1-s} dt \\ &= B(p-s, q-s) = \frac{\Gamma(p-s) \Gamma(q-s)}{\Gamma(n-2s)}. \end{aligned}$$

Pour  $x$  grand, on a

$$\Gamma(x) \approx \sqrt{2\pi} x^{\frac{1}{2}} e^{-x} x^x$$

et en utilisant la formule de Stirling suivante

$$n! = \Gamma(n+1) = n \Gamma(n) \approx n^{\frac{3}{2}} e^{-n} n^n$$

on peut écrire

$$\Gamma(p-s) \approx p^{-1-s} p!.$$

Par conséquent, on obtient aussi

$$\Gamma(q-s) \approx q^{-1-s} q! \quad \text{et} \quad \Gamma(n-2s) \approx n^{-1-2s} n!.$$

Ainsi

$$A_{pq} + A_{qp} \approx \frac{p^{-1-s} q^{-1-s} p! q!}{n^{-1-2s} n!}.$$

On reporte dans l'expression des valeurs propres, alors

$$\begin{aligned} \mu_{pq} + \mu_{qp} &\approx \frac{n^{\frac{1}{2}}}{p^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}}} \left( \frac{(2n)!}{(2p)! (2q)!} \right)^{\frac{1}{2}} \times \frac{n^{1+2s} p! q!}{p^{1+s} q^{1+s} n!} \\ &\approx \frac{n^{\frac{3}{2}+2s}}{p^{\frac{3}{2}+s} q^{\frac{3}{2}+s}} \frac{p!}{((2p)!)^{\frac{1}{2}}} \frac{q!}{((2q)!)^{\frac{1}{2}}} \frac{((2n)!)^{\frac{1}{2}}}{n!}. \end{aligned}$$

De l'estimation de Stirling

$$\frac{((2n)!)^{\frac{1}{2}}}{n!} \approx \frac{\left( (2n)^{\frac{1}{2}} e^{-2n} (2n)^{2n} \right)^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{1}{2}} e^{-n} n^n} \approx \frac{2^n}{n^{\frac{1}{4}}},$$

on conclut que

$$\begin{aligned} \mu_{pq} + \mu_{qp} &\approx \frac{n^{\frac{3}{2}+2s}}{p^{\frac{3}{2}+s} q^{\frac{3}{2}+s}} \frac{p^{\frac{1}{4}} q^{\frac{1}{4}} 2^n}{2^p 2^q n^{\frac{1}{4}}} \\ &\approx \frac{n^{\frac{5}{4}+2s}}{p^{\frac{5}{4}+s} q^{\frac{5}{4}+s}}. \end{aligned}$$

□

## 2.4 Solutions formelles

On rappelle que la nouvelle fonction  $h$  (partie non linéaire de la solution) est définie à partir de la fluctuation  $g$  par la relation  $g = e^{-t\mathcal{L}}(G + h)$ . Dans cette section, on donne quelques propriétés concernant  $h(t, v)$  (voir [31]).



**Proposition 2.6.** *On suppose que  $G \in \mathcal{N}^\perp$ . Alors la solution formelle  $h(t, v)$  définie dans (1.10) vérifie*

$$h(t, v) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n(t) \varphi_n(v)$$

où  $h_0 \equiv h_1 \equiv h_2 \equiv h_3 \equiv 0$  et pour tout  $n \geq 4$

$$h_n(t) = \sum_{\substack{p+q=n \\ 2 \leq p, q \leq n-2}} \int_0^t \mu_{pq} e^{-(\lambda_p + \lambda_q - \lambda_n)s} (G_p + h_p(s)) (G_q + h_q(s)) ds. \quad (2.10)$$

**Remarque 2.7.** *Puisque  $G \in \mathcal{N}^\perp$ , on a  $g(t, \cdot) \in \mathcal{N}^\perp$  pour tout  $t > 0$ . Comme on a vu auparavant, on coupe la fonction  $g$  en deux parties comme suivant :*

$$g(t, v) = \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} e^{-\lambda_n t} G_n \varphi_n(v)}_{g^{\text{lin}}(t, v)} + \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} e^{-\lambda_n t} h_n(t) \varphi_n(v)}_{g^{\text{nl}}(t, v)}. \quad (2.11)$$

Donc la solution formelle  $f(t, v)$  peut être écrit comme

$$f(t, v) = \mu(v) + \sqrt{\mu(v)} \sum_{n=2}^{\infty} (e^{-\lambda_n t} G_n + e^{-\lambda_n t} h_n(t)) \varphi_n(v). \quad (2.12)$$

*Preuve de la proposition 2.6.* : Comme  $G \in \mathcal{N}^\perp$ , on obtient  $G_0 = G_1 = 0$  et on peut vérifier à partir de (2.7) que

$$g_0(t) = g_1(t) = 0, \quad g_2(t) = G_2 e^{-\lambda_2 t}, \quad g_3(t) = G_3 e^{-\lambda_3 t}$$

et donc  $h_0 \equiv h_1 \equiv h_2 \equiv h_3 \equiv 0$ . D'après (2.7), on peut écrire

$$g_n(t) = e^{-\lambda_n t} G_n + e^{-\lambda_n t} h_n(t) \quad (2.13)$$

et

$$g'_n(t) + \lambda_n g_n(t) = \sum_{\substack{p+q=n \\ 2 \leq p, q \leq n-2}} \mu_{pq} g_p(t) g_q(t). \quad (2.14)$$

D'après (2.13) et en utilisant (2.14), on aura

$$h'_n(t) = e^{\lambda_n t} \sum_{\substack{p+q=n \\ 2 \leq p, q \leq n-2}} \mu_{pq} g_p(t) g_q(t).$$

On note que  $h_n(0) = g_n^{n\ell}(0) = 0$ . Finalement, en branchant l'expression de  $g_p$  et  $g_q$  de (2.13) dans l'équation précédente et en intégrant, on démontre (2.10). Concernant l'expression exacte des valeurs propres  $\lambda_n$  et  $\mu_{pq}$ , voir [43] et les propositions 2.1 et 2.2. Ceci conclut la preuve.  $\square$

On introduit maintenant les notations suivantes. Pour un  $k$ -uplet  $\alpha \in \mathbb{N}^k$

$$\begin{aligned} \Lambda_\alpha &= \lambda_{\alpha_1} + \lambda_{\alpha_2} + \cdots + \lambda_{\alpha_k}, \\ G^\alpha &= G_{\alpha_1} \times G_{\alpha_2} \cdots \times G_{\alpha_k}. \end{aligned}$$

**Proposition 2.8.** *Pour tout entier  $n \geq 4$ , on définit  $I_n$  un ensemble d'indices admissibles*

$$I_n = \left\{ \alpha \in \mathbb{N}^k \mid k \in \mathbb{N}^*, \alpha_i \geq 2, |\alpha| = n \right\}.$$

Alors pour chaque multi-indice  $\alpha, \beta \in I_n$  il existe des coefficients réels  $c_\beta^\alpha$  qui ne dépend que de  $\lambda_2, \dots, \lambda_n$  et  $\mu_{pq}$  pour  $2 \leq p, q \leq n-2, p+q \leq n$  tel que

$$h_n(t) = \sum_{\alpha, \beta \in I_n} c_\beta^\alpha G^\alpha (1 - e^{-(\Lambda_\beta - \lambda_n)t}). \quad (2.15)$$

*Preuve.* On calcule directement de (2.10)

$$h_4(t) = c_{(2,2)}^{(2,2)} G_2^2 (1 - e^{-(\Lambda_{(2,2)} - \lambda_4)t})$$

avec

$$c_{(2,2)}^{(2,2)} = \frac{\mu_{22}}{(\Lambda_{(2,2)} - \lambda_4)}$$

et

$$h_5(t) = c_{(2,3)}^{(2,3)} G_2 G_3 (1 - e^{-(\Lambda_{(2,3)} - \lambda_5) t}) + c_{(3,2)}^{(3,2)} G_3 G_2 (1 - e^{-(\Lambda_{(3,2)} - \lambda_5) t})$$

où

$$c_{(2,3)}^{(2,3)} = \frac{\mu_{23}}{(\Lambda_{(2,3)} - \lambda_5)} \quad \text{et} \quad c_{(3,2)}^{(3,2)} = \frac{\mu_{32}}{(\Lambda_{(3,2)} - \lambda_5)}.$$

On démontre le résultat par induction. Ensuite, on peut supposer que (2.15) est vrai pour chaque  $h_{n'}$  ( $4 \leq n' \leq n-1$ ). On utilisera l'expression intégrale (2.10) de  $h_n$ . On considère deux entiers  $p, q$  tels que  $2 \leq p, q \leq n-2$  et  $p+q=n$ . Alors d'après (2.15)

$$h_p(t) = \sum_{\alpha, \beta \in I_p} c_{\beta}^{\alpha} G^{\alpha} (1 - e^{-(\Lambda_{\beta} - \lambda_p) t}),$$

$$h_q(t) = \sum_{\alpha', \beta' \in I_q} c_{\beta'}^{\alpha'} G^{\alpha'} (1 - e^{-(\Lambda_{\beta'} - \lambda_q) t}).$$

De la formule intégrale (2.10) on obtient

$$h_n(t) = \int_0^t \sum_{\substack{p+q=n \\ 2 \leq p, q \leq n-2}} (A + B + C + D) ds$$

avec

$$A = \mu_{pq} G_p G_q e^{-(\lambda_p + \lambda_q - \lambda_n) s},$$

$$B = \sum_{\alpha', \beta' \in I_q} \mu_{pq} c_{\beta'}^{\alpha'} G_p G^{\alpha'} (e^{-(\lambda_p + \lambda_q - \lambda_n) s} - e^{-(\lambda_p + \Lambda_{\beta'} - \lambda_n) s}),$$

$$C = \sum_{\alpha, \beta \in I_p} \mu_{pq} c_{\beta}^{\alpha} G^{\alpha} G_q (e^{-(\lambda_p + \lambda_q - \lambda_n) s} - e^{-(\Lambda_{\beta} + \lambda_q - \lambda_n) s}),$$

$$D = \sum_{\alpha, \beta \in I_p} \sum_{\alpha', \beta' \in I_q} \mu_{pq} c_{\beta}^{\alpha} c_{\beta'}^{\alpha'} G^{\alpha} G^{\alpha'} \times$$

$$(e^{-(\lambda_p + \lambda_q - \lambda_n) s} - e^{-(\Lambda_{\beta} + \lambda_q - \lambda_n) s} - e^{-(\lambda_p + \Lambda_{\beta'} - \lambda_n) s} + e^{-(\Lambda_{\beta} + \Lambda_{\beta'} - \lambda_n) s}).$$

Étendre chaque terme précédent et intégrer sur  $[0, t]$ , on obtient le résultat (2.15) puisque chaque nombre  $\lambda_p + \lambda_q - \lambda_n$ ,  $\Lambda_\beta + \lambda_q - \lambda_n$ ,  $\lambda_p + \Lambda_{\beta'} - \lambda_n$ ,  $\Lambda_\beta + \Lambda_{\beta'} - \lambda_n$  sont positifs (voir prochain lemme) et  $|\alpha| = |\beta| = p$ ,  $|\alpha'| = |\beta'| = q$  et  $p + q = n$ .  $\square$

**Lemme 2.9.** *Les valeurs propres linéaires  $\lambda_n$  définies dans (2.3) pour l'équation homogène non cutoff radialement symétrique de Boltzmann vérifient la propriété suivante*

$$\lambda_{\alpha_1 + \dots + \alpha_k} < \lambda_{\alpha_1} + \dots + \lambda_{\alpha_k} (= \Lambda_\alpha)$$

pour un multi-indice  $\alpha \in (\mathbb{N} \setminus \{0, 1\})^k$ .

*Preuve.* D'après [43] (lemme 3.1), on peut écrire

$$\lambda_{\alpha_1 + \alpha_2} < \lambda_{\alpha_1} + \lambda_{\alpha_2},$$

et donc par itération, on obtient

$$\lambda_{(\alpha_1 + \dots + \alpha_k) + \alpha_{k+1}} < \lambda_{\alpha_1 + \dots + \alpha_k} + \lambda_{\alpha_{k+1}} < (\lambda_{\alpha_1} + \dots + \lambda_{\alpha_k}) + \lambda_{\alpha_{k+1}}.$$

$\square$

## 2.5 Convergence des solutions formelles

On détaille dans cette section la méthode spectrale utilisée dans [43] pour démontrer l'existence de solutions de l'équation de Boltzmann dans des espaces de Gelfand-Shilov.

**Théorème 2.10.** [43] *Soit  $\delta$  une constante strictement positive avec  $\delta < 1$ . Il existe une constante strictement positive  $\epsilon_0$  telle que si  $G \in \mathcal{N}^\perp$  est une*

fonction radiale avec  $\|G\|_{L^2} \leq \epsilon_0$  alors le problème de cauchy (1.7) associée à l'équation de Boltzmann non-cutoff spatialement homogène et dans le cas des molécules Maxwellienne a une unique solution globale  $g \in L^\infty(\mathbb{R}_t^+, L^2(\mathbb{R}_v^3))$  donnée par

$$g(t, v) = \sum_{n \geq 0} g_n(t) \varphi_n(v)$$

où  $(g_n)_{n \geq 0}$  sont solutions du système d'équations différentielles (2.7) avec les conditions initiales  $G_n = g_n(0) = (G, \varphi_n)_{L^2}$ . De plus, cette perturbation  $g(t)$  vérifie

$$\forall t \geq 0, \|e^{\frac{t}{2} \mathcal{L}} g(t)\|_{L^2} = \left( \sum_{n \geq 0} e^{\lambda_n t} |g_n(t)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq e^{-\frac{\lambda_2}{2} (1-\delta)t} \|G\|_{L^2}$$

et elle appartient à  $S_{1/2s}^{1/2s}(\mathbb{R}^3)$  pour tout  $t > 0$ .

On donne maintenant l'idée de la démonstration de ce résultat principal, qui utilise des approximations spectrales de la solution.

**Définition 2.11.** Pour  $f \in L^2$ , on définit le projecteur orthogonal sur les  $n + 1$  niveaux d'énergie les plus bas par

$$\mathbf{S}_n f = \sum_{k=0}^n (f, \varphi_k)_{L^2} \varphi_k.$$

Puisque  $(\varphi_n)_n$  est une base spectrale de  $\mathcal{L}$  on a alors la propriété suivante

$$e^{\frac{t}{2} \mathcal{L}} \mathbf{S}_n f = \sum_{k=0}^n e^{\frac{1}{2} \lambda_k t} (f, \varphi_k)_{L^2} \varphi_k.$$

La démonstration du théorème se base sur les deux lemmes suivants (voir [43] pour leur démonstration qui se basent sur les propriétés spectrales de l'opérateur de Boltzmann et sur des estimations sur les valeurs propres) :

**Lemme 2.12.** [43] Il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout  $N \geq 2$ ,  $t \geq 0$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|e^{\frac{t}{2}\mathcal{L}}(\mathbf{S}_N g)(t)\|_{L^2}^2 + \sum_{n=2}^N \lambda_n e^{\lambda_n t} |g_n(t)|^2 \\ \leq C \|e^{\frac{t}{2}\mathcal{L}}(\mathbf{S}_{N-2} g)(t)\|_{L^2} \sum_{n=2}^N \lambda_n e^{\lambda_n t} |g_n(t)|^2. \end{aligned}$$

**Lemme 2.13.** [43] Il existe une constante  $\epsilon_0 > 0$  telle que pour tout  $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$

$$G \in \mathcal{N}^\perp, \|G\|_{L^2} \leq \epsilon \Rightarrow \forall N \geq 0, \forall t \geq 0, \|e^{\frac{t}{2}\mathcal{L}}(\mathbf{S}_N g)(t)\|_{L^2} \leq \epsilon.$$

*Preuve du théorème 2.10.* On rappelle d'abord la décomposition de la perturbation  $g$  dans la base spectrale  $(\varphi_n)_n$

$$g(t, v) = \sum_{n \geq 0} g_n(t) \varphi_n(v).$$

Comme  $(g_n)_{n \geq 0}$  sont solutions du système infini d'équations différentielles ordinaires (2.7) avec les conditions initiales  $G_n = g_n(0) = (G, \varphi_n)_{L^2}$ , alors l'unicité des  $g_n$  implique l'unicité de  $g$ . Ensuite,  $g \in L^\infty(\mathbb{R}_t^+, L^2(\mathbb{R}_v^3))$  pour tout  $t \geq 0$ . En effet, d'après le lemme 2.13, on peut trouver une constante positive  $\epsilon_0$  telle que pour tout  $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$  et lorsque  $N \rightarrow +\infty$

$$G \in \mathcal{N}^\perp, \|G\|_{L^2} \leq \epsilon \Rightarrow \forall t \geq 0, \|e^{\frac{t}{2}\mathcal{L}} g(t)\|_{L^2} \leq \epsilon \leq \epsilon_0.$$

Puisque dans le cas non-cutoff les valeurs propres linéaires  $(\lambda_n)_n$  tendent vers l'infini quand  $n \rightarrow +\infty$  (voir (3.8)), on a bien que

$$G \in \mathcal{N}^\perp, \|G\|_{L^2} \leq \epsilon \Rightarrow \forall t \geq 0, \|g(t)\|_{L^2} \leq \|e^{\frac{t}{2}\mathcal{L}} g(t)\|_{L^2} \leq \epsilon_0 < +\infty.$$

On fixe maintenant  $0 < \delta < 1$ . D'après les lemmes 2.12 et 2.13, il existe deux constantes  $C, \epsilon_0 > 0$  telles que si on choisit  $0 < \epsilon < \inf(\frac{\delta}{C}, \epsilon_0)$  avec

$G \in \mathcal{N}^\perp$ ,  $\|G\|_{L^2} \leq \epsilon$ , on obtient que pour tout  $N \geq 2$ ,  $t \geq 0$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|e^{\frac{t}{2}\mathcal{L}}(\mathbf{S}_N g)(t)\|_{L^2}^2 + \lambda_2(1-\delta) \|e^{\frac{t}{2}\mathcal{L}}(\mathbf{S}_N g)(t)\|_{L^2}^2 \\ = \frac{d}{dt} \|e^{\frac{t}{2}\mathcal{L}}(\mathbf{S}_N g)(t)\|_{L^2}^2 + \lambda_2(1-\delta) \sum_{n=2}^N e^{\lambda_n t} |g_n(t)|^2. \end{aligned}$$

Or comme les  $\lambda_n$  sont positives avec  $\lambda_2 \leq \lambda_n$  pour tout  $n \geq 2$  (voir lemme 2.9), on aura donc d'après lemme 2.12 et 2.13

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|e^{\frac{t}{2}\mathcal{L}}(\mathbf{S}_N g)(t)\|_{L^2}^2 + (1-\delta) \sum_{n=2}^N \lambda_n e^{\lambda_n t} |g_n(t)|^2 \\ \leq C \|e^{\frac{t}{2}\mathcal{L}}(\mathbf{S}_{N-2} g)(t)\|_{L^2}^2 \sum_{n=2}^N \lambda_n e^{\lambda_n t} |g_n(t)|^2 - \delta \sum_{n=2}^N \lambda_n e^{\lambda_n t} |g_n(t)|^2 \\ \leq (C\epsilon - \delta) \sum_{n=2}^N \lambda_n e^{\lambda_n t} |g_n(t)|^2 \leq C(\epsilon - \frac{\delta}{C}) \sum_{n=2}^N \lambda_n e^{\lambda_n t} |g_n(t)|^2 \leq 0. \end{aligned}$$

La résolution d'une équation différentielle ordinaire d'ordre 1 implique que pour tout  $N \geq 2$ ,  $t \geq 0$

$$\|e^{\frac{t}{2}\mathcal{L}}(\mathbf{S}_N g)(t)\|_{L^2} \leq e^{-\frac{\lambda_2}{2}(1-\delta)t} \|G\|_{L^2}$$

et si on fait tendre  $N$  vers l'infini, on a finalement pour tout  $t \geq 0$

$$\|e^{\frac{t}{2}\mathcal{L}} g(t)\|_{L^2} \leq e^{-\frac{\lambda_2}{2}(1-\delta)t} \|G\|_{L^2}.$$

□

# Chapitre 3

## Introduction à la méthode numérique utilisée

Notre objectif est de présenter une méthode alternative pour résoudre formellement et numériquement (avec Maple) l'équation de Boltzmann homogène radiale qui puisse s'appliquer dans le cas non cutoff. On considère le cas symétrique radial et on utilise une méthode spectrale.

On commence par une introduction aux méthodes existantes et par une renormalisation de la solution. on va présenter successivement les méthodes numériques pour calculer les valeurs propres  $\lambda_n$ ,  $\mu_{pq}$ , la solution linéaire et la solution non linéaire.



### 3.1 Présentation de diverses méthodes numériques

La résolution numérique de l'équation de Boltzmann pose la difficulté suivante : la distribution  $f(t, x, v)$  vit dans un espace multidimensionnel. De nombreuses difficultés viennent du coût de calcul. Parmi ces difficultés, l'opérateur de collision est défini par des intégrales multidimensionnelles et pour les calculer cela doit être fait point par point [48, 29]. Pour résoudre numériquement les équations cinétiques, il y a plusieurs méthodes utilisées. Citons les méthodes numériques probabilistes telles que la simulation directe de Monte Carlo (DSMC) [17, 7], les méthodes numériques déterministes telles que les méthodes de volume fini, semi-lagrangien et des schémas spectraux [26].

Il y a deux méthodes déterministes importantes qui ont été utilisées dans les dernières décennies : la méthode de la vitesse discrète (DVM) [33, 49, 11, 14, 46, 15] et la méthode spectrale de Fourier (FSM) [12, 47, 48, 30, 15]. En raison de sa nature discrète, la méthode de la vitesse discrète préserve la positivité de la fonction de distribution, le H-théorème et la conservation exacte de la masse, de l'énergie et du moment. On note que la méthode spectrale de Fourier est basée principalement sur la troncature de l'opérateur de collision et la restriction de la fonction de distribution à un cube approprié, pour plus de détails voir [48, 45].

Nous allons utiliser une nouvelle méthode basée sur le calcul formel.

## 3.2 Renormalisation de la solution

On considère une solution radiale  $\tilde{f}(s, w)$  de l'équation de Boltzmann :

$$\begin{cases} \partial_s \tilde{f} = \mathbf{Q}(\tilde{f}, \tilde{f}), \\ \tilde{f}|_{t=0} = \tilde{F} \end{cases}$$

et on renormalise  $\tilde{f}$  en posant

$$f(t, v) = \alpha \tilde{f}\left(\frac{\alpha}{\beta^3} t, \beta v\right)$$

pour que la nouvelle fonction vérifie pour tout  $t \geq 0$

$$f(t, v) = \mu(v) + \sqrt{\mu(v)} g(t, v) \quad \text{avec} \quad g(t, v) \in \mathcal{N}^\perp. \quad (3.1)$$

Ainsi on se ramenera à l'étude du système d'EDO (1.15).

**Lemme 3.1.** *On considère les fonctions  $f(t, v)$  et  $F(v)$  définies par le changement de variable*

$$\begin{cases} f(t, v) = \alpha \tilde{f}\left(\frac{\alpha}{\beta^3} t, \beta v\right), \\ F(v) = \alpha \tilde{F}(\beta v) \end{cases}$$

où

$$\alpha = \frac{\left(\frac{1}{3} \int_{\mathbb{R}^3} w^2 \tilde{F}(w) dw\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(\int_{\mathbb{R}^3} \tilde{F}(w) dw\right)^{\frac{5}{2}}} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{\left(\frac{1}{3} \int_{\mathbb{R}^3} w^2 \tilde{F}(w) dw\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\int_{\mathbb{R}^3} \tilde{F}(w) dw\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Alors  $f(t, v)$  est une solution de l'équation de Boltzmann (1.3) avec une donnée initiale  $F = \mu + \sqrt{\mu} G$  avec  $G \in \mathcal{N}^\perp$ .

**Remarque 3.2.** *Si  $F$  est telle que*

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} F(v) dv &= \int_{\mathbb{R}^3} \mu(v) dv = 1, \\ \int_{\mathbb{R}^3} |v|^2 F(v) dv &= \int_{\mathbb{R}^3} |v|^2 \mu(v) dv = 3 \end{aligned}$$

alors la fonction  $G$  définie par  $G = \frac{1}{\sqrt{\mu}}(F - \mu)$  appartient à  $\mathcal{N}^\perp$ .

**Remarque 3.3.** *Si la condition initiale  $F$  vérifie*

$$\int_{\mathbb{R}^3} F(v) dv = 1, \quad \int_{\mathbb{R}^3} |v|^2 F(v) dv = 3$$

*alors par conservation de la masse et de l'énergie, on aura*

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(t, v) dv = 1, \quad \int_{\mathbb{R}^3} |v|^2 f(t, v) dv = 3$$

*et la relation (3.1) est donc vérifiée pour tout  $t \geq 0$ .*

*Preuve du lemme 3.1.* Il est facile de vérifier que  $f(t, v)$  est une solution de l'équation de Boltzmann. Puisque  $G$  est une fonction radiale, il suffit de vérifier que

$$\left(G, \sqrt{\mu}\right)_{L^2} = \left(G, |v|^2 \sqrt{\mu}\right)_{L^2} = 0.$$

Rappelant que

$$\begin{cases} \left(\varphi_p, \varphi_q\right)_{L^2} = \delta_{pq}, \\ \varphi_0 = \sqrt{\mu} \quad \text{et} \quad \varphi_1 = 6^{-\frac{1}{2}}(3 - |v|^2)\sqrt{\mu}. \end{cases}$$

C'est équivalent à prouver que

$$\left(F/\sqrt{\mu}, \varphi_0\right)_{L^2} = 1 \quad \text{et} \quad \left(F/\sqrt{\mu}, \varphi_1\right)_{L^2} = 0$$

ce qui donne les équations

$$\begin{cases} \int_{\mathbb{R}^3} F(v) dv = \int_{\mathbb{R}^3} \mu(v) dv = 1, \\ \int_{\mathbb{R}^3} |v|^2 F(v) dv = \int_{\mathbb{R}^3} |v|^2 \mu(v) dv = 3. \end{cases}$$

En utilisant le changement de variable  $w = \beta v$ , on peut vérifier que si on définit les valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$  donné dans le lemme, les équations précédentes sont satisfaites. □

### 3.3 Procédure et résultats numérique

Avec les notions du chapitre 2, on définit la solution spectrale approximée suivante

$$\begin{cases} f_N(t, v) = \mu(v) + \sqrt{\mu(v)} \left( \sum_{n=0}^N e^{-\lambda_n t} (G_n + h_n(t)) \varphi_n(v) \right), \\ h_n(t) = \sum_{\substack{p+q=n \\ 2 \leq p, q \leq n-2}} \int_0^t \mu_{pq} e^{-(\lambda_p + \lambda_q - \lambda_n)s} (G_p + h_p(s)) (G_q + h_q(s)) ds \end{cases} \quad (3.2)$$

avec la condition initiale approximée

$$F_N(v) = \mu(v) + \sqrt{\mu(v)} \left( \sum_{n=0}^N G_n \varphi_n(v) \right). \quad (3.3)$$

Les fonctions propres  $\varphi_n(v)$  sont explicitement données par la formule (2.1). Les valeurs propres définies par (2.3) et (2.4) sont calculées par une intégrale qui dépend du noyau de collision  $b(\cos \theta)$ . On distingue deux cas :

(i) Cas cutoff :  $b(\cos \theta) \equiv \frac{1}{4\pi}$ , c'est-à-dire

$$2\pi \sin \theta b(\cos \theta) = \frac{1}{2} \sin \theta, \quad \theta \in [0, \pi]. \quad (3.4)$$

Le but de l'étude de ce cas est de comparer les solutions numériques calculées avec la solution explicite  $f_{\text{BKW}}$  [8, 38], ce qui sera l'objet du chapitre 4 :

$$f_{\text{BKW}}(t, v) = \frac{1}{2(2\pi)^{\frac{3}{2}}(1 - e^{-t/6})^{\frac{5}{2}}} \times \left[ (2 - 5e^{-t/6}) + \frac{e^{-t/6}}{1 - e^{-t/6}} |v|^2 \right] e^{-\frac{|v|^2}{2(1 - e^{-t/6})}}.$$

(ii) Cas non cutoff : on rappelle que le noyau de collision a une singularité  $b(\cos \theta) \approx \theta^{-(2+2s)}$  pour  $\theta = 0$ , voir (1.14). Pour simplifier, on considère

pour  $s \in ]0, 1[$  la forme suivante

$$2\pi \sin \theta b(\cos \theta) = \begin{cases} \sin^{-(1+2s)}\left(\frac{\theta}{2}\right) & \text{si } \theta \in [0, \frac{\pi}{2}[, \\ 0 & \text{si } \theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi]. \end{cases} \quad (3.5)$$

Dans le cas spécifique  $s = \frac{1}{2}$ , on obtient par des calculs symboliques la valeur exacte des valeurs propres, bien que pour  $s \neq \frac{1}{2}$ , seulement des valeurs approximés.

Dans cette section, on commence par donner les valeurs exactes et approximés des valeurs propres et les estimations de l'erreur. Après, on présente la méthode pour calculer la partie linéaire et non linéaire de la solution et on donne quelques estimations théoriques de l'erreur dans le cas linéaire.

### 3.4 Calcul des valeurs propres linéaires

La valeur propre linéaire  $\lambda_n$  est donné par simple intégrale en une dimension (2.3).

(i) **Cas cutoff.** Le noyau de collision  $b(\cos \theta)$  est régulier et la valeur approximée est facilement calculée avec la méthode standard. On utilise l'outil numérique de Maple

$$\text{int}(\text{function}(\theta), \theta=0.. \pi, \text{numeric}) \simeq \int_0^\pi \text{function}(\theta) d\theta$$

avec 5, 10 ou 20 chiffres significatifs. Dans le cas particulier de la solution BKW, la forme des valeurs propres est explicite et donnée par la proposition 4.6.

(ii) **Cas non cutoff.** On rappelle que le noyau de collision  $b(\cos \theta) \approx \theta^{-(2+2s)}$  est singulier mais il est contrôlé par les autres termes  $\sin \theta (1 -$

$\cos^{2n}(\theta/2) - \sin^{2n}(\theta/2)$ ). Pour éviter une erreur "division par zéro", on utilise la forme suivante

$$\text{int}(\text{function}(\theta), \theta = 10^{-40} \dots \pi, \text{numeric}) \simeq \int_0^\pi \text{function}(\theta) d\theta$$

pour calculer une valeur approximée  $\lambda_n^{\text{appr}}$  avec l'algorithme 4 du chapitre 7. Dans le cas particulier  $s = \frac{1}{2}$ , voir (3.5), on calcule avec l'algorithme 4-bis la valeur symbolique  $\lambda_n^{\text{exact}}$  qui est donné pour  $n \geq 2$  par l'intégrale

$$\lambda_n = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \left\{ 1 - \cos^{2n}\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin^{2n}\left(\frac{\theta}{2}\right) \right\} d\theta.$$

On réduit d'abord la fraction trigonométrique à l'intérieur de l'intégrale par l'outil symbolique de Maple :

$$\text{simplify} \left( \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \left( 1 - \cos^{2n}\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin^{2n}\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) \right)$$

qui supprime la singularité du noyau de collision et donne un polynôme trigonométrique régulier. Puis, l'intégration symbolique

$$\text{int}(\text{function}(\theta), \theta = 0 \dots \pi) = \int_0^\pi \text{function}(\theta) d\theta$$

donne la valeur exacte  $\lambda_n^{\text{exact}}$ . On estime ensuite l'erreur relative  $|\lambda_n^{\text{exact}} - \lambda_n^{\text{appr}}| / \lambda_n^{\text{exact}}$  dans le tableau numérique 3.1.

### 3.5 Calcul des valeurs propres non linéaires

Les valeurs propres non linéaires  $\mu_{pq}$  sont également données par l'intégrale à une dimension (2.4) et prendre une forme explicite dans le cas cutoff  $b(\cos \theta) \equiv \frac{1}{4\pi}$ , voir proposition 4.6. On applique dans le cas cutoff et non cutoff le même outil numérique de Maple que dans la section précédente en utilisant l'algorithme 4 pour un calcul numérique de  $\mu_{pq}^{\text{approx}}$ .

	Valeur exacte	Valeur approx.	Err. relat.
$\lambda_1$	0	0	–
$\lambda_2$	$1 + \frac{1}{2} \pi$	2.5707963267948966193	$2.7 \times 10^{-20}$
$\lambda_3$	$\frac{3}{2} + \frac{3}{4} \pi$	3.8561944901923449289	$1.4 \times 10^{-20}$
$\lambda_4$	$\frac{23}{12} + \frac{15}{16} \pi$	4.8619097794070978277	$5.3 \times 10^{-21}$
$\lambda_{10}$	$\frac{61717}{16128} + \frac{109395}{65536} \pi$	9.0707560428160875528	$1.7 \times 10^{-21}$
$\lambda_{20}$	$\frac{60225247403}{9906683904} + \frac{83945001525}{34359738368} \pi$	13.754545239649748132	$2.6 \times 10^{-20}$
$\lambda_{30}$	$\frac{382807351536613}{48879680618496} + \frac{54496920530418135}{18014398509481984} \pi$	17.335530084539302322	$6.4 \times 10^{-21}$
$\lambda_{40}$	$\frac{9657438142855448158667}{1036599248915011731456} + \frac{66341473743672640538025}{18889465931478580854784} \pi$	20.350013652434449681	$5.0 \times 10^{-20}$

Table 3.1: Calcul symbolique et numérique de  $\lambda_n$  avec 20 chiffres significatifs, cas non cutoff.

Dans le cas particulier (3.5) où on prend  $s = \frac{1}{2}$ , la valeur symbolique  $\mu_{pq}^{\text{exact}}$  de

$$\mu_{pq} = \left( \frac{(2p + 2q + 1)!}{(2p + 1)! (2q + 1)!} \right)^{\frac{1}{2}} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin^2(\frac{\theta}{2})} \{ \sin^{2p}(\frac{\theta}{2}) \cos^{2q}(\frac{\theta}{2}) \} d\theta$$

est calculée par l’algorithme 4-bis pour  $p+q = n = 2, \dots, N = 40$ . Après cela, on présente dans le tableau (3.2) quelques valeurs symboliques et numériques des résultats y compris l’erreur relative  $|\mu_{pq}^{\text{exact}} - \mu_{pq}^{\text{appr.}}|/\mu_{pq}^{\text{exact}}$ . L’erreur relative sur les valeurs propres linéaires et non linéaires en utilisant 20 chiffres significatifs reste inférieure à  $10^{-18}$  et le temps de calcul est inférieur à 600 secondes (dans chaque type de noyau) pour un degré de liberté  $N = 40$ . Pour  $N$  grand, le temps de calcul des valeurs propres est très inférieur au temps de calcul pour le terme non linéaire  $h_n(t)$  (plusieurs heures pour  $N = 40$ ), voir la figure 4.4 à droite.

	Valeur exacte	Valeur approx.	Err. relat.
$\mu_{1,1}$	$\sqrt{30} \left( \frac{1}{6} + \frac{1}{12} \pi \right)$	2.3468052315616459661	$5.2 \times 10^{-20}$
$\mu_{1,2}$	$\sqrt{7} \left( \frac{1}{2} + \frac{3}{16} \pi \right)$	2.8813518209196856030	$1.1 \times 10^{-20}$
$\mu_{2,1}$	$\sqrt{7} \left( \frac{1}{16} \pi \right)$	0.51949205512913010260	$1.3 \times 10^{-20}$
$\mu_{1,19}$	$\sqrt{2460} \left( \frac{4001928871}{59440103424} + \frac{1472719325}{68719476736} \pi \right)$	6.6786311833698659912	$1.4 \times 10^{-20}$
$\mu_{10,10}$	$\sqrt{627967520180} \left( \frac{1}{69730304} + \frac{12155 \pi}{481036337152} \right)$	0.074270916564345586742	$2.8 \times 10^{-20}$
$\mu_{19,1}$	$\sqrt{2460} \left( \frac{-108158197}{59440103424} + \frac{39803225}{68719476736} \pi \right)$	0.17472370665141693658e-5	$2.2 \times 10^{-19}$

Table 3.2: Calcul symbolique et numérique de  $\mu_{pq}$  avec 20 chiffres significatifs, cas non cutoff.

### 3.6 Solution numérique du problème linéaire

On introduit à partir de (2.11) l'approximation de la solution linéaire

$$g_N^{\text{lin}}(t, v) = \sum_{n=0}^N e^{-\lambda_n t} G_n \varphi_n(v) \quad (3.6)$$

où les réels  $G_n$  sont les coefficients spectraux initiaux donnés. Afin de calculer la solution linéaire, on doit définir la valeur des fonctions propres  $\varphi_n$  par la formule (2.1) qui sont définies à partir des polynômes de Laguerre généralisés  $L_n^{[\frac{1}{2}]}$  et quelques autres fonctions mathématiques classiques : voir chapitre 7, Maple algorithme 3.

Finalement, par (2.6) et puisque  $g_0(t) = g_1(t) = 0$  alors

$$g_N^{\text{lin}}(t, v) = \sum_{n=2}^N e^{-\lambda_n t} G_n \varphi_n(v).$$

La valeur approximée  $g_N^{\text{lin}}(t, v)$  peut être calculé par l'algorithme 7-bis du chapitre 6.



On considère la solution du problème linéaire suivant

$$\begin{cases} \partial_t g^{\text{lin}} + \mathcal{L} g^{\text{lin}} = 0, \\ g^{\text{lin}}(0, v) = G(v). \end{cases} \quad (3.7)$$

et on estime l'erreur théorique  $(g^{\text{lin}} - g_N^{\text{lin}})$  dans la norme  $L^2$  pour différentes données initiales  $G$  utilisées pour le calcul dans les sections suivantes.

**(i) Cas cutoff.** Le noyau de collision est régulier, puis par le théorème de la convergence dominée appliqué à l'intégrale (2.3), on obtient l'estimation suivante de  $\lambda_n$

$$\lambda_n \approx \int_0^\pi 2\pi \sin \theta b(\cos \theta) d\theta.$$

D'où, on aura pour une condition initiale  $G \in L^2$  et quand  $n$  tend vers l'infini

$$\|g^{\text{lin}}(t, \cdot) - g_N^{\text{lin}}(t, \cdot)\|_{L^2}^2 \lesssim e^{-ct} \sum_{n \geq N+1} |G_n|^2.$$

Pour une condition initiale de mesure, il n'y a pas de régularisation dans  $L^2$  de la solution pour le temps positif.

**(ii) Cas non cutoff.** On étudie le taux de convergence théorique de la solution approximée. Par l'hypothèse suivante  $b(\cos \theta) \approx \frac{1}{|\theta|^{2+2s}}$ , on a l'estimation suivante (voir[42]) sur les valeurs propres linéaires  $\lambda_n$  de l'opérateur  $\mathcal{L}$  définies dans (2.3)

$$\lambda_n \approx_\infty n^s. \quad (3.8)$$

Donc, il y a une régularisation de la solution pour le temps positif et on obtient les taux de convergence suivants.

**Proposition 3.4.** *On considère la solution du problème linéaire (3.7). Alors on a les estimations suivantes :*

(1) *Pour une condition initiale  $G \in L^2$ ,*

$$\|g^{\text{lin}}(t, \cdot) - g_N^{\text{lin}}(t, \cdot)\|_{L^2} \lesssim e^{-cN^s t} \|G\|_{L^2}.$$

(2) Pour une condition initiale de mesure  $G$  définie par (5.2) et  $s = \frac{1}{2}$  (voir aussi proposition 5.1), il existe des constantes  $b > 0$  et  $\gamma > 0$  telles que pour  $t > 0$

$$\|g^{\text{lin}}(t, \cdot) - g_N^{\text{lin}}(t, \cdot)\|_{L^2} \lesssim \frac{1}{t^b} e^{-\gamma N^{\frac{1}{2}} t}.$$

*Preuve.* La solution de (3.7) est

$$g^{\text{lin}}(t, v) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda_n t} G_n \varphi_n(v).$$

D'après (3.6), l'erreur exacte dans  $L^2$  est

$$\|g^{\text{lin}}(t, \cdot) - g_N^{\text{lin}}(t, \cdot)\|_{L^2}^2 = \sum_{n=N+1}^{\infty} e^{-2\lambda_n t} |G_n|^2.$$

On démontre d'abord (1). Si  $G \in L^2(\mathbb{R}_v^3)$ , puis d'après (3.8) on a

$$\|g^{\text{lin}}(t, \cdot) - g_N^{\text{lin}}(t, \cdot)\|_{L^2}^2 = \sum_{n=N+1}^{\infty} e^{-2\lambda_n t} |G_n|^2 \lesssim e^{-2cN^{\frac{1}{2}} t} \|G\|_{L^2}^2.$$

On peut en déduire que l'erreur exacte tend vers zéro lorsque  $N$  tend vers l'infini.

On démontre maintenant (2). On suppose que  $\tilde{F}$  est une condition initiale de mesure  $\mu + \delta$ . On peut approcher les coefficients spectraux  $G_n$  de  $G$  par  $n^{\frac{1}{4}}$  et par (3.8) on peut alors trouver des constantes positives  $c$  et  $C$  telles que

$$\|g^{\text{lin}}(t, \cdot) - g_N^{\text{lin}}(t, \cdot)\|_{L^2}^2 \leq C \sum_{n=N+1}^{\infty} e^{-cn^{\frac{1}{2}} t} n^{\frac{1}{2}}.$$

On considère la fonction  $\rho_t$  définie sur  $\mathbb{R}_+$  par  $\rho_t(x) = e^{-cx^{\frac{1}{2}} t} x^{\frac{1}{2}}$ . Alors que  $\rho_t$  est positif, continue et croissante pour  $0 \leq x \leq 1/(ct)^2$  et décroissante pour  $x \geq 1/(ct)^2$ , donc en utilisant le critère intégral de Cauchy, on peut écrire l'inégalité suivante :

$$\|g^{\text{lin}}(t, \cdot) - g_N^{\text{lin}}(t, \cdot)\|_{L^2} \leq \frac{C}{t^b} e^{-\gamma N^{\frac{1}{2}} t} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

où  $C$ ,  $b$  et  $\gamma$  sont des constantes positives. □

### 3.7 Solution numérique pour le problème non linéaire

D'après (2.11), on considère la solution approximée de la partie non linéaire

$$g_N^{nl}(t, v) = \sum_{n=0}^N e^{-\lambda_n t} h_n(t) \varphi_n(v). \quad (3.9)$$

On calcule  $h_n(t)$  en utilisant l'algorithme 6 dans le chapitre 7.

1.  $h_0 = h_1 = h_2 = h_3 \equiv 0$
2. on suppose que pour  $n \geq 4$  on a calculé  $h_k(t)$  pour  $k = 0, 1, \dots, n-1$ 
  1. D'après la proposition 2.8,  $h_k(t)$  est une somme finie de termes exponentiels  $a_i e^{-\alpha_i t}$ . Ensuite, on calcule  $h_n(t)$  par la formule (2.10) et l'outil symbolique de Maple

$$\text{int}(\text{function}(s), s=0..t) = \int_0^t \text{function}(s) ds$$

qui consiste à intégrer des termes exponentiels.

On obtient donc les solutions symboliques suivantes :

$$\begin{aligned} h_4 &= \frac{\mu_{22}}{\lambda_2 + \lambda_2 - \lambda_4} G_2^2 (1 - e^{-(\lambda_2 + \lambda_2 - \lambda_4)t}), \\ h_5 &= \frac{\mu_{23} + \mu_{32}}{\lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_5} G_2 G_3 (1 - e^{-(\lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_5)t}), \\ &\dots \end{aligned}$$

Dans l'algorithme, nous assignons les valeurs numériques aux variables  $G_n$ ,  $\lambda_n$ ,  $\mu_{pq}$  dès que possible pour réduire la longueur des expressions de  $h_n(t)$ . Par exemple, dans le cas non cutoff ( $s = \frac{1}{2}$ ), on obtient l'approximation

numérique :

$$h_0 = h_1 = h_2 = h_3 = 0,$$

$$h_4 = 2.51 G_2^2 (1 - e^{-0.279t}),$$

$$h_5 = 1.62 G_2 G_3 (1 - e^{-0.698t}),$$

$$h_6 = 0.322 G_3^2 (1 - e^{-1.20t}) + 1.17 (1 - e^{-0.928t}) G_2 G_4 \\ + (-2.95 e^{-0.928t} + 0.677 + 2.26 e^{-1.20t}) G_2^3,$$

$$h_7 = 0.501 G_2 G_5 (1 - e^{-1.09t}) + 0.220 (1 - e^{-1.51t}) G_3 G_4 \\ + (0.201 + 0.478 e^{-1.79t} - 0.274 e^{-1.51t} - 0.407 e^{-1.09t}) G_2^2 G_3,$$

...

On obtient enfin de (3.9) l'approximation  $g_N^{n\ell}$  de la partie non linéaire de la solution  $g^{n\ell}(t, v)$  par l'algorithme 7-bis.

**Remarque 3.5.** (1) Afin de comparer la partie linéaire et la partie non linéaire, on définit le rapport en  $L^2$ -norm

$$R_N(t) = \frac{\|g_N^{n\ell}(t, \cdot)\|_{L_v^2}}{\|g_N^{\text{lin}}(t, \cdot)\|_{L_v^2}} = \frac{\left(\sum_{n=4}^N |e^{-\lambda_n t} h_n(t)|^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\sum_{n=2}^N |e^{-\lambda_n t} G_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}}. \quad (3.10)$$

Dans le cas non cutoff, si on suppose pour une petite donnée initiale  $G$  dans  $L^2$  que  $G_2 \neq 0$  et que la solution est régulière (ce qui est vrai de [43]), alors l'approximation de la série par leur premier terme donne

$$g_N^{\text{lin}}(t, v) \approx e^{-\lambda_2 t} G_2 \varphi_2(v),$$

$$g_N^{n\ell}(t, v) \approx e^{-\lambda_4 t} h_4(t) = \frac{\mu_{22}}{2\lambda_2 - \lambda_4} G_2^2 e^{-\lambda_4 t} (1 - e^{-(2\lambda_2 - \lambda_4)t}) \varphi_4(v)$$

puisque  $\lambda_n \simeq n^s$ . Par conséquent, le rapport  $R_N(t)$  peut être approché par

$$R_N(t) \approx \tilde{R}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mu_{22}}{2\lambda_2 - \lambda_4} |G_2| e^{-(\lambda_4 - \lambda_2)t} (1 - e^{-(2\lambda_2 - \lambda_4)t}). \quad (3.11)$$

Pour une condition initiale de mesure, l'approximation précédente n'est pas plus précise pour un temps  $t$  petit puisque la norme  $L^2$  de la partie linéaire explose lorsque  $t \rightarrow 0$ . Si on considère le problème pour la condition initiale de distribution  $\mu + \delta$  où  $G_n \approx n^{\frac{1}{4}}$  (voir proposition 5.1), on peut vérifier que la partie linéaire de la solution est singulière

$$\|g^{\text{lin}}(t, \cdot)\|_{L^2}^2 = \sum_{n=2}^{\infty} G_n^2 e^{-2\lambda_n t} \approx \frac{1}{t^\alpha}, \quad \text{quand } t \rightarrow 0 \quad (3.12)$$

pour certains  $\alpha > 0$ .

(2) La longueur de l'expression symbolique  $h_n(t)$  augmente exponentiellement par rapport à  $n$  et donc par (3.9), La longueur de  $g_N^{\text{nl}}(t, v)$  explose:  $h_{40}$  a 7355 termes exponentiels  $a_i e^{-\beta_i t}$  et  $g_{40}^{\text{nl}}(t, v)$  a  $1.6 \times 10^6$  termes polynomiaux exponentiels  $a_i v^{n_i} e^{-\beta_i t}$  après l'expansion de l'expression de  $g_{40}^{\text{nl}}(t, v)$  avec l'outil Maple `expand(expression)`. On présente dans la figure 3.1 l'évolution du nombre de termes de  $h_n(t)$  et  $g_n^{\text{nl}}(t, v)$  pour  $n = 4, \dots, N = 40$ .

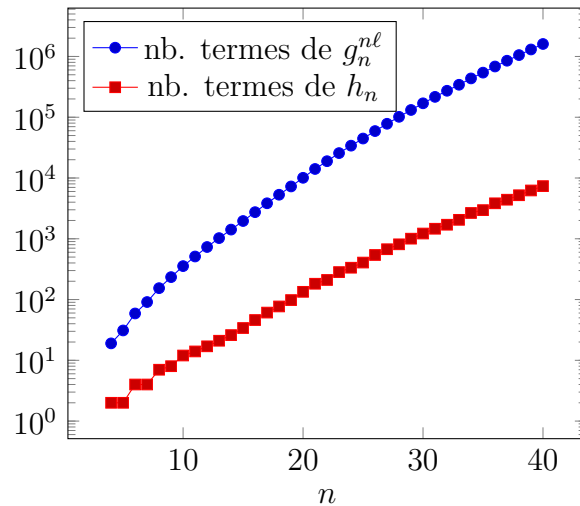


Figure 3.1: Nombre de termes de la solution approximée

Le calcul symbolique et numérique de la partie non linéaire  $h_n(t)$  joue le rôle majeur de notre méthode comme coût en temps et en espace de stockage.



# Chapitre 4

## Test de la méthode avec les solutions BKW

Dans ce chapitre, on va tester la précision de la méthode numérique décrite dans le chapitre 3 en utilisant les solutions explicites dites “BKW” de l’équation de Boltzmann :

$$f_{\text{BKW}}(t, v) = \frac{1}{2(2\pi)^{\frac{3}{2}}(1 - e^{-t/6})^{\frac{5}{2}}} \left[ (2 - 5e^{-t/6}) + \frac{e^{-t/6}}{1 - e^{-t/6}} |v|^2 \right] e^{-\frac{|v|^2}{2(1 - e^{-t/6})}}. \quad (4.1)$$

On rappelle que ces solutions (4.1) ont été obtenues indépendamment par Bobylev [8], Wu et Krook [38]. Ces solutions sont classiquement utilisées pour tester les méthodes numériques dans le cas d’un noyau de collision constant  $B \equiv \frac{1}{4\pi}$ , comme par exemple [30].

Plus précisément, on étudie l’erreur entre la solution numérique et la solution BKW et aussi le temps de calcul en fonction du degré de liberté  $N$ . On précise que la solution BKW (4.1) est une solution exacte dans le cas cutoff et dans le cas non cutoff à condition d’ajuster le noyau de collision



avec une constante multiplicative adéquate.

## 4.1 Introduction à la solution BKW

Nous allons montrer que la solution BKW définie par (4.1) est bien solution de l'équation de Boltzmann.

**Proposition 4.1** ([10, 38]). *On note  $\bar{B}$  le réel positif qui est défini à partir du noyau de Boltzmann*

$$\bar{B} = \int_0^\pi 2\pi \sin \theta b(\cos \theta) \left\{ \cos^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) \right\} d\theta \quad (4.2)$$

et on considère pour un réel donné  $\beta_0$  la fonction

$$f_{BKW}(t, v) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{(1 + 2\beta(t))^{\frac{7}{2}}} \left[ (1 + 5\beta(t))(1 + 2\beta(t)) - \beta(t)|v|^2 \right] e^{-\frac{|v|^2}{2+4\beta(t)}}$$

avec  $\beta(t) = \beta_0 e^{-\bar{B}t}$  ( $\beta_0 = \beta(0)$ ). Alors la transformée de Fourier est donnée par

$$\widehat{f_{BKW}}(t, \xi) = e^{-(\frac{1}{2} + \beta(t))|\xi|^2} + \beta(t) |\xi|^2 e^{-(\frac{1}{2} + \beta(t))|\xi|^2}$$

et la fonction  $f_{BKW}(t, v)$  est une solution de l'équation de Boltzmann.

**Remarque 4.2.** *D'après [38] et les références associées, si on choisit un noyau de collision  $b(\cos \theta) \equiv \frac{1}{4\pi}$  et  $\beta(0) = -\frac{1}{2}$ , on aura  $\bar{B} = \frac{1}{6}$ ,  $\beta(t) = -\frac{1}{2} e^{-t/6}$  et on retrouve exactement la solution BKW donnée dans (4.1).*

**Remarque 4.3.** *On peut vérifier que la solution BKW est naturellement normalisée (voir la partie 3.2)*

$$\int f_{BKW}(t, v) dv = 1 \quad \text{et} \quad \int |v|^2 f_{BKW}(t, v) dv = 3$$

et donc  $(f_{BKW} - \mu)/\sqrt{\mu} \in \mathcal{N}^\perp$ .

*Preuve de la proposition 4.1.* On suit la preuve donnée dans [22] en utilisant la transformation de Fourier et l'identité de Bobylev. On cherche une solution radiale de la forme

$$\hat{f}(t, \xi) = c(1 + \beta(t) |\xi|^2) e^{-(\alpha + \beta(t)) |\xi|^2}, \quad \alpha, c > 0.$$

Alors

$$\partial_t \hat{f}(t, \xi) = -c \beta(t) \beta'(t) |\xi|^4 e^{-(\alpha + \beta(t)) |\xi|^2}.$$

Pour calculer le terme de collision  $\mathcal{F}(Q(f, f)(v))(\xi)$ , on utilise l'identité de Bobylev

$$\mathcal{F}[Q(f, f)(t, \cdot)](\xi) = \int_{\mathbb{S}^{N-1}} b\left(\frac{\xi}{|\xi|} \cdot \sigma\right) \left\{ \hat{f}(t, \xi^-) \hat{f}(t, \xi^+) - \hat{f}(t, 0) \hat{f}(t, \xi) \right\} d\sigma$$

où  $\mathcal{F}(f)(\xi) = \int e^{-i\xi \cdot v} f(v) dv$ .  $\xi^+$  et  $\xi^-$  sont définies par

$$\xi^+ = \frac{\xi + |\xi| \sigma}{2}, \quad \xi^- = \frac{\xi - |\xi| \sigma}{2}.$$

Si on pose  $\xi = (|\xi|, 0, 0)$  et  $\sigma = (\cos \theta, \sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi)$ , on peut vérifier que (voir (2.5))

$$|\xi^+| = |\xi| |\cos(\theta/2)|, \quad |\xi^-| = |\xi| |\sin(\theta/2)|$$

et

$$\begin{aligned} & \left\{ \hat{f}(t, \xi^-) \hat{f}(t, \xi^+) - \hat{f}(t, 0) \hat{f}(t, \xi) \right\} = \\ & c^2 \left\{ (1 + \beta |\xi^-|^2) (1 + \beta |\xi^+|^2) - (1 + \beta |\xi|^2) \right\} e^{-(\alpha + \beta) |\xi|^2} \\ & = c^2 \beta^2 |\xi^-|^2 |\xi^+|^2 e^{-(\alpha + \beta) |\xi|^2}. \end{aligned}$$

Par conséquent, à partir de l'identité de Bobylev, on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[Q(f, f)(t, \cdot)](\xi) &= \int_{\mathbb{S}^{N-1}} b\left(\frac{\xi}{|\xi|} \cdot \sigma\right) \left\{ \hat{f}(\xi^-) \hat{f}(\xi^+) - \hat{f}(0) \hat{f}(\xi) \right\} d\sigma \\
&= \left( \int_{\mathbb{S}^{N-1}} b\left(\frac{\xi}{|\xi|} \cdot \sigma\right) \left\{ \left| \frac{\xi^-}{|\xi|} \right|^2 \left| \frac{\xi^+}{|\xi|} \right|^2 \right\} d\sigma \right) \\
&\quad \times \left( c^2 \beta^2 |\xi|^2 e^{-(\alpha+\beta)|\xi|^2} \right) \\
&= \bar{B} \times c^2 \beta(t)^2 |\xi|^4 e^{-(\alpha+\beta(t))|\xi|^2}
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
\bar{B} &= \int_{\mathbb{S}^{N-1}} b\left(\frac{\xi}{|\xi|} \cdot \sigma\right) \left\{ \left| \frac{\xi^-}{|\xi|} \right|^2 \left| \frac{\xi^+}{|\xi|} \right|^2 \right\} d\sigma \\
&= \int_0^\pi b(\cos \theta) \left\{ \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right\} 2\pi \sin \theta d\theta.
\end{aligned}$$

Finalement, on obtient les deux identités

$$\begin{aligned}
\partial_t \hat{f}(t, \xi) &= -c \beta(t) \beta'(t) |\xi|^4 e^{-(\alpha+\beta(t))|\xi|^2} \\
\mathcal{F}(Q(f, f)(v))(\xi) &= \bar{B} \times c^2 \beta(t)^2 |\xi|^4 e^{-(\alpha+\beta(t))|\xi|^2}.
\end{aligned}$$

La fonction  $f(t, v)$  est donc solution de l'équation e Boltzmann si et seulement si  $\beta(t)$  vérifie l'équation différentielle ordinaire

$$\beta'(t) = -c \bar{B} \beta(t)$$

c'est à dire si et seulement si  $\beta(t) = \beta(0) e^{-c \bar{B} t}$ . La solution  $f(t, v)$  prend alors la forme

$$\hat{f}(t, \xi) = c e^{-\gamma|\xi|^2} + c \beta(t) |\xi|^2 e^{-\gamma|\xi|^2} \quad \text{avec} \quad \gamma(t) = \alpha + \beta(t).$$

Comme  $\beta(\infty) = 0$ ,  $\gamma(\infty) = \alpha$ , on a quand  $t$  tends vers l'infini

$$\hat{f}(t, \xi) \rightarrow c e^{-\alpha|\xi|^2}.$$

Pour que la solution converge vers la Maxwellienne ( $\hat{f}(t, \xi) \rightarrow \hat{\mu}(\xi) = e^{-\frac{1}{2}|\xi|^2}$ ) on choisit donc  $\alpha = \frac{1}{2}, c = 1$ . D'où

$$\hat{f}(t, \xi) = e^{-\gamma|\xi|^2} + \beta(t) |\xi|^2 e^{-\gamma|\xi|^2}.$$

Comme  $\gamma(t) = \frac{1}{2} + \beta(t)$ , on aura

$$\begin{cases} \hat{f}(t, \xi) = e^{-(\frac{1}{2}+\beta(t))|\xi|^2} + \beta(t) |\xi|^2 e^{-(\frac{1}{2}+\beta(t))|\xi|^2} \\ \beta(t) = \beta(0) e^{-\bar{B}t}. \end{cases}$$

En utilisant la transformation de Fourier inverse de l'identité précédente avec

$$\mathcal{F}^{-1}(e^{-\gamma\xi^2}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} (2\gamma)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{v^2}{4\gamma}} \quad \text{et} \quad \mathcal{F}^{-1}(\xi^2 e^{-\gamma\xi^2}) = \frac{6\gamma - v^2}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} (2\gamma)^{\frac{7}{2}}} e^{-\frac{v^2}{4\gamma}}$$

on obtient

$$f(t, v) = \left[ \frac{e^{-\frac{|v|^2}{4\gamma}}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} (2\gamma)^{\frac{3}{2}}} \right] + \beta(t) \left[ \frac{6\gamma - |v|^2}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} (2\gamma)^{\frac{7}{2}}} e^{-\frac{|v|^2}{4\gamma}} \right].$$

Finalement

$$f(t, v) = \frac{e^{-\frac{|v|^2}{2+4\beta(t)}}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} (1+2\beta(t))^{\frac{3}{2}}} + \beta(t) \frac{[(3+6\beta(t)) - |v|^2]}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} (1+2\beta(t))^{\frac{7}{2}}} e^{-\frac{|v|^2}{2+4\beta(t)}}.$$

Comme  $(1+2\beta)^2 + \beta(3+6\beta) = (1+2\beta)(1+5\beta)$ , on a aussi

$$f(t, v) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{(1+2\beta(t))^{\frac{7}{2}}} \left[ (1+5\beta(t))(1+2\beta(t)) - \beta(t)|v|^2 \right] e^{-\frac{|v|^2}{2+4\beta(t)}}.$$

Ce qui conclut la démonstration. □

## 4.2 Décomposition de la solution BKW dans la base spectrale

On note par  $(g_n)_n$  les coefficients spectrales de la solution BKW (4.1). On calcule les coefficients exactes de la solution BKW dans la base spectrale.

**Proposition 4.4.** *On considère la solution BKW (4.1). Alors on a le développement analytique suivant dans la base spectrale*

$$f_{BKW}(t, v) = \mu(v) + \sqrt{\mu(v)} \sum_{n \geq 2} g_n(t) \varphi_n(v)$$

où pour  $n \geq 2$

$$g_n(t) = \frac{-(n-1) \sqrt{(2n+1)!}}{2^n n!} e^{-\frac{nt}{6}}.$$

*Preuve.* On rappelle que la transformée de Fourier de la solution BKW est

$$\widehat{f}(t, \xi) = \left(1 - \frac{1}{2} e^{-\frac{t}{6}} |\xi|^2\right) e^{-(1-e^{-\frac{t}{6}}) \frac{|\xi|^2}{2}}.$$

On pose  $a = \frac{1}{2} e^{-\frac{t}{6}}$  de sorte que

$$\begin{aligned} \widehat{f}(t, \xi) &= \left( e^{a|\xi|^2} - a|\xi|^2 e^{a|\xi|^2} \right) e^{-\frac{|\xi|^2}{2}} \\ &= \left( 1 + \frac{a}{1!} |\xi|^2 + \frac{a^2}{2!} |\xi|^4 + \dots + \frac{a^n}{n!} |\xi|^{2n} + \dots \right. \\ &\quad \left. - a|\xi|^2 - \frac{a^2}{1!} |\xi|^4 - \dots - \frac{a^n}{(n-1)!} |\xi|^{2n} - \dots \right) e^{-\frac{|\xi|^2}{2}}. \end{aligned}$$

Or  $\frac{a^n}{n!} - \frac{a^n}{(n-1)!} = \frac{a^n(1-n)}{n!}$ , donc d'une part on a

$$\begin{aligned} \widehat{f}(t, \xi) &= \left( 1 - \frac{a^2}{2} |\xi|^4 - \dots - \frac{(n-1)a^n}{n!} |\xi|^{2n} - \dots \right) e^{-\frac{|\xi|^2}{2}} \\ &= \left( 1 - \frac{e^{-\frac{2t}{6}}}{8} |\xi|^4 - \dots - \frac{(n-1) e^{-\frac{nt}{6}}}{2^n n!} |\xi|^{2n} - \dots \right) e^{-\frac{|\xi|^2}{2}}. \end{aligned}$$

D'autre part, comme  $\mathcal{F}(\varphi_n)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{(2n+1)!}} |\xi|^{2n} e^{-\frac{1}{2} |\xi|^2}$  (voir lemme 8.3 dans l'annexe), on a le développement dans la base spectrale suivant

$$\widehat{f}(t, \xi) = \left( 1 + \frac{g_2(t)}{\sqrt{5!}} |\xi|^4 + \dots + \frac{g_n(t)}{\sqrt{(2n+1)!}} |\xi|^{2n} + \dots \right) e^{-\frac{|\xi|^2}{2}}.$$

D'où les valeurs exactes de  $g_n(t)$  en comparant les deux précédentes identités. □

### 4.3 Equations satisfaites par $g_n$ - cas cutoff

Dans cette section, on considère le cas d'un noyau de collision constant

$$B(v - v_*, \sigma) = b(\cos \theta) \equiv \frac{1}{4\pi}$$

et la solution BKW (4.1). On rappelle que les coefficients spectraux  $g_n(t)$  sont explicites :

$$f_{\text{BKW}}(t, v) = \mu(v) + \sum_{n=2}^{\infty} g_n(t) \sqrt{\mu(v)} \varphi_n(v)$$

où

$$g_n(t) = -\frac{(n-1) \sqrt{(2n+1)!}}{2^n n!} e^{-\frac{n}{6}t}.$$

Nous allons voir dans la proposition 4.6 que les valeurs propres  $\lambda_n$ ,  $\mu_{pq}$  sont aussi explicites :

$$\lambda_n = \frac{n-1}{n+1} \quad \text{et} \quad \mu_{pq} = \left( \frac{(2p+2q+1)!}{(2p+1)!(2q+1)!} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{p! q!}{(p+q+1)!}.$$

Il nous a semblé intéressant de présenter une démonstration alternative pour prouver que la solution BKW vérifie l'équation de Boltzmann en montrant que ses coefficients spectraux  $g_n(t)$  satisfont le système infini d'équations différentielles (2.7). On a donc aussi la possibilité d'analyser la contribution de chaque terme dans ces EDO.

**Proposition 4.5.** *On considère les fonctions réelles*

$$g_n(t) = -\frac{(n-1) \sqrt{(2n+1)!}}{2^n n!} e^{-\frac{n}{6}t}$$

*et les nombres réels*

$$\lambda_n = \frac{n-1}{n+1} \quad \text{et} \quad \mu_{pq} = \left( \frac{(2p+2q+1)!}{(2p+1)!(2q+1)!} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{p! q!}{(p+q+1)!}.$$

Alors les fonctions  $g_n(t)$  vérifient le système infini d'équations différentielles

$$\frac{d}{dt}g_n(t) + \lambda_n g_n(t) = \sum_{\substack{p+q=n \\ p,q \geq 2}} \mu_{pq} g_p(t) g_q(t).$$

*Preuve.* On calcule d'abord la partie linéaire :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}g_n(t) + \lambda_n g_n(t) &= \left[ -\frac{n}{6} - \frac{n-1}{n+1} \right] \left[ -\frac{(n-1)\sqrt{(2n+1)!}}{2^n n!} e^{-\frac{n}{6}t} \right] \\ &= \left[ \frac{-(n-2)(n-3)}{6(n+1)} \right] \left[ \frac{-(n-1)\sqrt{(2n+1)!}}{2^n n!} e^{-\frac{n}{6}t} \right] \\ &= \left[ \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6} \right] \left[ \frac{\sqrt{(2n+1)!}}{2^n (n+1)!} e^{-\frac{n}{6}t} \right]. \end{aligned}$$

Pour  $n = 1, 2, 3$ , l'équation différentielle est réduite à la partie linéaire qui est donc satisfaite (c'est à dire  $g'_n(t) + \lambda_n g_n(t) = 0$ ). On calcule ensuite la partie non linéaire pour  $n \geq 4$  :

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{p+q=n \\ p,q \geq 2}} \mu_{pq} g_p(t) g_q(t) &= \sum_{\substack{p+q=n \\ p,q \geq 2}} \left[ \left( \frac{(2p+2q+1)!}{(2p+1)!(2q+1)!} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{p!q!}{(p+q+1)!} \right] \\ &\times \left[ -\frac{(p-1)\sqrt{(2p+1)!}}{2^p p!} e^{-\frac{p}{6}t} \right] \left[ -\frac{(q-1)\sqrt{(2q+1)!}}{2^q q!} e^{-\frac{q}{6}t} \right] \\ &= \left[ \sum_{\substack{p+q=n \\ p,q \geq 2}} (p-1)(q-1) \right] \left[ \frac{\sqrt{(2n+1)!}}{2^n (n+1)!} e^{-\frac{n}{6}t} \right]. \end{aligned}$$

Comme pour  $n \geq 4$  on a

$$\sum_{\substack{p+q=n \\ p,q \geq 2}} (p-1)(q-1) = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}$$

ainsi

$$\sum_{\substack{p+q=n \\ p,q \geq 2}} \mu_{pq} g_p(t) g_q(t) = \left[ \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6} \right] \left[ \frac{\sqrt{(2n+1)!}}{2^n (n+1)!} e^{-\frac{n}{6}t} \right]$$

et on déduit que

$$\frac{d}{dt}g_n(t) + \lambda_n g_n(t) = \sum_{\substack{p+q=n \\ p, q \geq 2}} \mu_{pq} g_p(t) g_q(t).$$

□

On précise maintenant comment sont obtenues les valeurs explicites de  $\lambda_n$  et  $\mu_{pq}$  dans le cas d'un noyau de collision constant.

**Proposition 4.6.** *On a les formules suivantes :*

$$(1) \lambda_0 = 0 \text{ et pour tout } n \geq 1, \lambda_n = \frac{n-1}{n+1}.$$

$$(2) \text{ Pour tout } q \geq 0, \mu_{0q} = -\frac{q}{q+1}.$$

$$(3) \text{ Pour tout } p \geq 1 \text{ et } q \geq 0, \mu_{pq} = \left( \frac{(2p+2q+1)!}{(2p+1)!(2q+1)!} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{p! q!}{(p+q+1)!}.$$

*Preuve.* On rappelle que pour  $p \geq 1$  et  $q \geq 0$

$$\mu_{0q} = - \int_0^\pi \frac{1}{2} \sin \theta \left\{ 1 - \cos \left( \frac{\theta}{2} \right)^{2q} \right\} d\theta.$$

$$\mu_{pq} = \left( \frac{(2p+2q+1)!}{(2p+1)!(2q+1)!} \right)^{\frac{1}{2}} \int_0^\pi \frac{1}{2} \sin \theta \left\{ \sin \left( \frac{\theta}{2} \right)^{2p} \cos \left( \frac{\theta}{2} \right)^{2q} \right\} d\theta.$$

On calcule d'abord  $\lambda_n$  où

$$\lambda_n = \int_0^\pi \frac{1}{2} \sin \theta \left\{ 1 - \cos \left( \frac{\theta}{2} \right)^{2n} - \sin \left( \frac{\theta}{2} \right)^{2n} \right\} d\theta.$$

On prend le changement de variable  $x = \cos^2 \frac{\theta}{2}$ . Alors  $dx = -\frac{1}{2} \sin \theta d\theta$  et

$$\lambda_n = \int_0^1 (1 - (1-x)^n - x^n) dx = 1 - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} = \frac{n-1}{n+1}.$$

On calcule après  $\mu_{0q}$ . En utilisant le même changement de variable précédent, on aura

$$\mu_{0q} = - \int_0^1 (1 - x^q) dx = - \left( 1 - \frac{1}{q+1} \right) = -\frac{q}{q+1}.$$



On écrit  $\mu_{pq} = \left( \frac{(2p+2q+1)!}{(2p+1)!(2q+1)!} \right)^{\frac{1}{2}} M_{pq}$  avec

$$M_{pq} = \int_0^\pi \frac{1}{2} \sin \theta \left\{ \sin \left( \frac{\theta}{2} \right)^{2p} \cos \left( \frac{\theta}{2} \right)^{2q} \right\} d\theta.$$

D'après la formule classique de la fonction beta et toujours avec le même changement de variable, on obtient

$$M_{pq} = \int_0^1 (1-x)^p x^q dx = B(q+1, p+1) = \frac{p! q!}{(p+q+1)!}.$$

□

## 4.4 Résultats numériques - cas cutoff

Nous allons utiliser la solution BKW pour tester les méthodes numériques. On remarque que cette solution est singulière en  $t = 0$  et change de signe pour  $0 < t < 6 \ln(5/2) \approx 5.498$ . Puis elle reste strictement positive pour  $t > 6 \ln(5/2)$ . En suivant l'exemple des auteurs [30], on prend un temps initial  $t_0 = 5.5$  et un temps final  $t_1 = 6.5$ . La condition initiale est donc

$$F(v) = f_{\text{BKW}}(5.5, v).$$

On est bien dans le cas d'une condition initiale régulière positive dans  $L^2(\mathbb{R}^3)$ . On montre dans la figure 4.1 l'approximation spectrale  $F_N(v)$  de la condition initiale  $F(v)$ , voir (3.3).

On va donc calculer l'approximation numérique  $f_N(t, v)$  de la solution  $f(t, v)$  qui a pour condition initiale la fonction  $f(0, v) = f_{\text{BKW}}(5.5, v)$  puis à la fin on va comparer  $f_N(t, v)$  au temps final  $t = 1$  (avec donc  $f(1, v) = f_{\text{BKW}}(6.5, v)$ ).

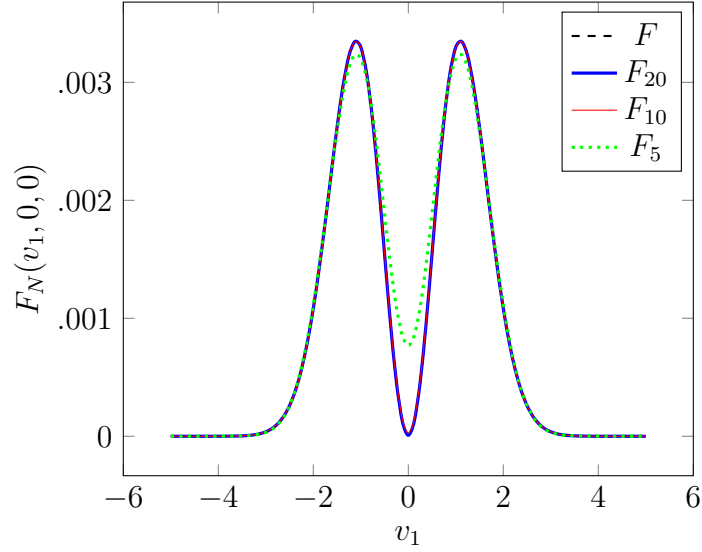


Figure 4.1: Approximation du donnée initiale de la solution BKW.

Pour obtenir l'expression formelle de  $F_N(t)$ , on calcule les coefficients  $h_n(t)$  pour  $n = 4, 5, \dots, N$  avec  $N = 40$ . par la formule de la proposition 2.6. Pour chaque entier  $n$ , la fonction  $t \rightarrow h_n(t)$  est monotone et tend vers une limite finie quand  $t$  tend vers l'infini, voir figure 4.2. On rappelle que  $h_n(t)$  est une somme finie de termes exponentiels décroissants, voir proposition 2.8. Dans le cas particulier de la solution BKW, on a calculé les valeurs exactes de  $h_n(t)$ , voir proposition 2.6. Puisque la donnée initiale  $G$  est une fonction régulière, les coefficients spectraux  $G_n$  diminuent de façon exponentielle. On peut vérifier à partir de la proposition 4.6 et de la formule de Stirling que  $G_n \approx n^{\frac{5}{4}} e^{-nt_0/6}$ . Enfin, en utilisant l'algorithme 8 dans le chapitre 7, on calcule l'erreur relative

$$E_N(t) = \frac{\|f_N(t, \cdot) - f_{\text{BKW}}(t, \cdot)\|_{L_v^\infty}}{\|f_{\text{BKW}}(t, \cdot)\|_{L_v^\infty}}$$

entre la solution spectrale approximée  $f_N$  et la solution BKW à l'instant  $t_0$  et  $t_1$ .

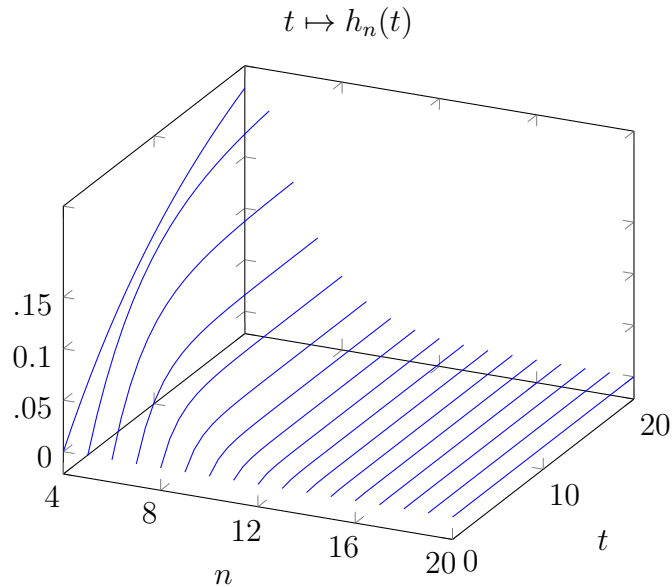


Figure 4.2: Comportement de la solution non linéaire  $h_n$ .

**Définition 4.7.** On appelle ‘précision’ d’une valeur numérique le nombre de chiffres significatifs utilisée pour exprimer cette valeur.

**Remarque 4.8.** Dans le logiciel Maple utilisé dans cette thèse, on peut fixer le nombre de chiffres significatifs. Par exemple avec l’instruction :

```
Digits := 20;
```

les calculs sont effectués avec une précision de 20 chiffres significatifs.

Nous allons tester la méthode numérique avec une précision de 5, 10, 20 chiffres significatifs. On a calculé l’erreur  $E_N(t)$  à l’instant initial  $t_0$  et final  $t_1$ , voir la figure 4.3. On remarque que la précision à l’instant  $t_1$  est meilleure qu’à l’instant  $t_0$  et on peut l’expliquer en raison d’un effet de régularisation rapide en temps de la solution  $f(t, \cdot)$ . Pour l’analyse de la méthode, on va concentrer sur le temps final  $t_1$ . Nous présentons dans la table 4.1 les différentes erreurs

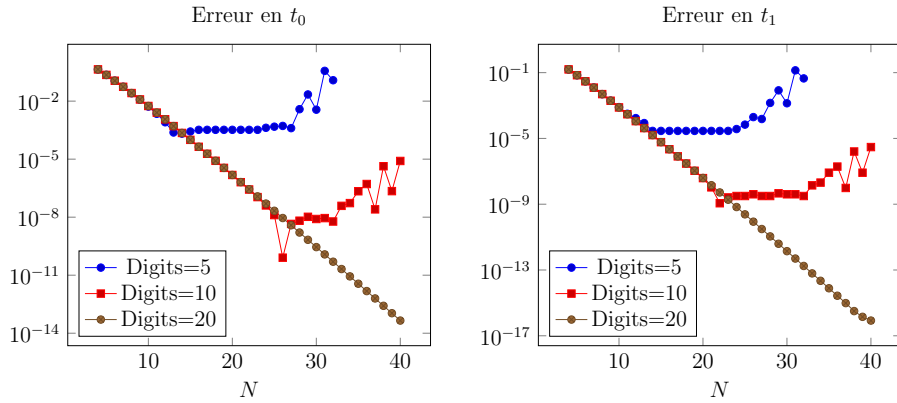


Figure 4.3: Erreur relative  $E_N(t)$  dans  $L_v^\infty$  entre  $f_N(t, \cdot)$  et  $f_{\text{BKW}}(t, \cdot)$ .

relatives pour une précision de 5, 10, 20 chiffres significatifs. Nous avons aussi représenter les temps de calcul dans la figure (4.4). Nous analysons les

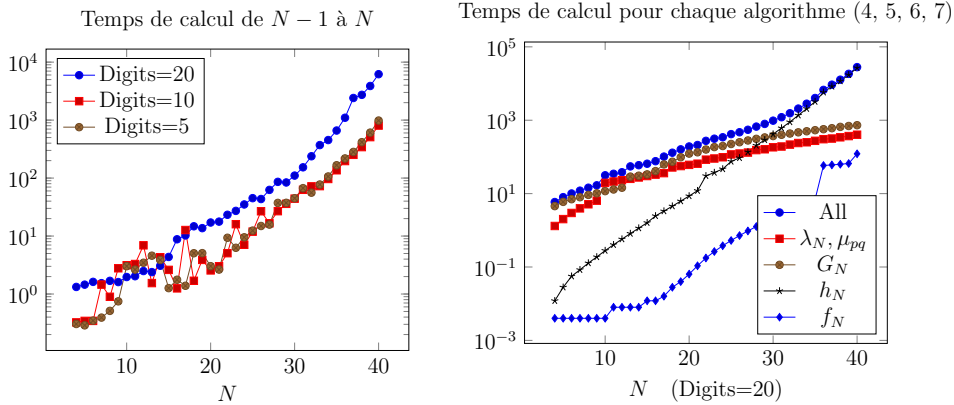


Figure 4.4: Temps de calcul (en secondes)

résultats obtenus dans les différents points suivant :

- D'après la table 4.1, on conclut que pour un nombre de chiffres significatifs donné assez grand et pour un grand  $N$ , on a une erreur qui décroît exponentiellement  $E_N \approx 6.3 \times 10^{-0.42N}$ .
- Pour avoir une erreur relative de  $10^{-5}$ , il suffit de choisir le degré de

N	Digits=5	Digits=10	Digits=20
5	7.0e-02	7.0e-02	7.0e-02
10	8.9e-04	7.7e-04	7.7e-04
15	8.6e-05	6.0e-06	6.0e-06
20	8.6e-05	3.8e-08	4.0e-08
25	3.2e-04	4.0e-09	2.5e-10
30	3.7e-02	4.0e-09	1.4e-12
35	1.4e+01	8.2e-08	7.8e-15
40	2.0e+03	3.0e-06	8.5e-17

Table 4.1: Erreur relative  $E_N(t_1)$  dans  $L_v^\infty$  entre  $f_N(t_1, \cdot)$  et  $f_{\text{BKW}}(t_1, \cdot)$ .

liberté  $N = 15$  et réglez la précision du logiciel sur 5, 10 ou 20 chiffres significatifs. Mais dans le cas de Digits = 5,  $N$  ne doit pas être trop grand : en effet, à partir de  $N = 15$ , l'erreur exacte se stabilise, et augmente même à partir de  $N = 25$ .

- Pour avoir une erreur de  $10^{-10}$ , on ne peut plus prendre un nombre de chiffres significatifs égale à 5. On doit choisir Digits  $\geq 10$  ou 20, mais prendre  $N \leq 23$  dans le cas de Digits = 10, car l'erreur stagne.
- Pour avoir une erreur autour de  $10^{-17}$ , on doit fixer une précision numérique Digits = 20 et on prend  $N = 40$ . Mais le temps de calcul croît exponentiellement : pour  $N \in [30, 40]$ , il est de l'ordre de  $0.0407 \times 10^{0.146N}$ , voir table 4.2.
- On remarque que le temps de calcul est à peu près le même pour la précision numérique du logiciel Maple fixé à 5 ou 10 chiffres significatifs, mais il augmente pour 20 chiffres significatifs, voir la figure 4.4 à gauche.

- Pour  $N$  grand ( $N \geq 30$ ), la part principale du temps de calcul est consacrée au calcul de la partie non linéaire  $h_n(t)$ , voir la figure 4.4 à droite.
- On compare nos résultats numériques (voir la table 4.2) avec par exemple les résultats de [30], voir section 4.1, où les auteurs ont testé en même temps [5.5,6.5] leur méthode spectrale rapide sur la solution BKW. Ils ont obtenu pour un degré de liberté  $N = 32$  une erreur de  $3.90e-08$  (temps=1.78s) et une erreur de  $3.81e-08$  (temps=33.15s) pour  $N = 64$ . On rappelle cependant que notre méthode est limitée aux solutions radiales. Mais il peut être généralisé à des solutions non radiales en utilisant les harmoniques sphériques, voir [32] et les références associées.

N	10	20	30	40
Temps de processeur (s)	31.	192.	973.	28007.
Erreurr $E_N(t_1)$	7.7e-04	4.0e-08	1.4e-12	8.5e-17

Table 4.2: Temps de processeur et erreur pour toutes les algorithmes pour 20 chiffres significatifs, cas cutoff.

## 4.5 Résultats numériques - cas non cutoff

On teste notre méthode dans le cas non cutoff toujours avec la solution BKW (4.1) : on remarque que si on définit le noyau de collision (cas non cutoff (3.5)

avec  $s = \frac{1}{2}$ )

$$2\pi \sin \theta b(\cos \theta) = \begin{cases} \frac{2}{6+3\pi} \sin^{-2} \left( \frac{\theta}{2} \right) & \text{si } \theta \in [0, \frac{\pi}{2}[, \\ 0 & \text{si } \theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi]. \end{cases}$$

alors la constante définie dans (4.2) est  $\bar{B} = \frac{1}{6}$ , et en choisissant à nouveau  $\beta_0 = -\frac{1}{2}$ , on obtient exactement la même solution BKW explicite (4.1) qui a été testé dans la section précédente. Notons que dans ce cas les valeurs propres  $\lambda_n$  et  $\mu_{pq}$  sont complètement différentes :  $\lambda_n \rightarrow \infty$  (alors que dans la section précédente cas cutoff  $\lambda_n \rightarrow 1$ ). Pour  $t \geq 5.5$ , cette solution est positive et tend vers la distribution Maxwellienne quand  $t$  tend vers l'infini. Pour  $t = 0$ , la condition initiale  $F = f_{\text{BKW}}(0, \cdot)$  est une distribution qui change de signe et dont la transformée de Fourier est

$$\mathcal{F}(F)(\xi) = 1 - \frac{1}{2}|\xi|^2$$

et les coefficients spectraux de  $G = (F - \mu)/\sqrt{\mu}$  sont donnés dans la proposition 4.4 par

$$G_n = \frac{-(n-1)\sqrt{(2n+1)!}}{2^n n!}. \quad (4.3)$$

On peut vérifier avec la formule de Stirling que  $G_n \approx n^{\frac{5}{4}}$ . On teste donc la méthode avec une donnée initiale de type distribution. Par conséquent, on a implémenté directement dans l'algorithme 5 les coefficients spectraux  $G_n$  par la formule (4.3). Remarquez que la solution BKW change de signe pour  $t < 5.5$ . On obtient des résultats similaires concernant la précision et la durée à ceux de la section précédente, voir la table 4.2 et 4.3. La différence de temps vient de la différence dans le noyau de collision.

N	10	20	30	40
Temps de processeur (s)	3.2	33.	570.	35924.
Erreur $E_N(t_1)$	7.6e-04	4.0e-08	1.4e-12	4.2e-17

Table 4.3: Temps de processeur et erreur pour toutes les algorithmes pour 20 chiffres significatifs, cas non cutoff.

## 4.6 Conclusion du chapitre

On a utilisé la solution BKW pour tester la méthode numérique dans deux cas :

- Cas cutoff avec une donnée initiale positive dans  $L^2(\mathbb{R}^3)$ . L'erreur relative entre la solution approchée et la solution BKW diminue de façon exponentielle ( $E_N \approx 6.3 \times 10^{-0.42N}$ ) par rapport au degré de liberté  $N$ . Le temps de calcul augmente exponentiellement par rapport à  $N$  ( $0.0407 \times 10^{0.146N}$ ). Il augmente aussi quand le nombre de chiffres significatifs augmente. Les temps de calcul de la partie non linéaire  $h_n(t)$  et de la condition initiale  $G_n$  sont prépondérants par rapport aux calcul des autres termes.
- Cas non cutoff avec une donnée initiale de type distribution. Les résultats obtenus (précision et temps de calcul) sont assez comparable que dans le cas cutoff.





# Chapitre 5

## Applications numériques

On va calculer ses approximations numériques avec un code Maple des solutions formelles  $f(t, v) = \mu(v) + \sqrt{\mu(v)}g(t, v)$  de l'équation de Boltzmann, puis on va analyser les résultats obtenus. On se placera dans le cas noncutoff d'un noyau de collision singulier avec  $s = \frac{1}{2}$  :

$$2\pi \sin \theta b(\cos \theta) = \begin{cases} \sin^{-2} \left( \frac{\theta}{2} \right) & \text{si } \theta \in [0, \frac{\pi}{2}[ , \\ 0 & \text{si } \theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi]. \end{cases}$$

On rappelle les notations : On se donne une condition initiale dans  $\mathcal{N}^\perp$

$$\begin{aligned} f(0, v) &= F(v) = \mu(v) + \sqrt{\mu(v)} G(v) \\ g(0, v) &= G(v) = \sum_{n=2}^{\infty} G_n \varphi_n(v). \end{aligned}$$

La solution formelle est donnée par

$$\begin{aligned} f(t, v) &= \mu(v) + \sqrt{\mu(v)} g(t, v) \\ g(t, v) &= \sum_{n=2}^{\infty} e^{-\lambda_n t} (G_n + h_n(t)) \varphi_n(v) \end{aligned}$$

où les fonctions  $h_n(t)$  (la partie non linéaire de  $g$ ) sont calculées par la formule de récurrence

$$\left\{ \begin{array}{l} h'_0(t) = h'_1(t) = h'_2(t) = h'_3(t) = 0 \text{ et pour tout } n \geq 4, \\ h'_n(t) = \sum_{\substack{p+q=n \\ 2 \leq p, q \leq n-2}} \mu_{pq} e^{-(\lambda_p + \lambda_q - \lambda_n)t} (G_p + h_p(t)) (G_q + h_q(t)), \\ h_n(0) = 0 \text{ (et } G_0 = G_1 = 0). \end{array} \right.$$

Les approximations numériques sont les séries tronquées

$$\begin{aligned} f_N(t, v) &= \mu(v) + \sqrt{\mu(v)} g_N(t, v) \\ g_N(t, v) &= \sum_{n=2}^N e^{-\lambda_n t} (G_n + h_n(t)) \varphi_n(v). \end{aligned}$$

On va s'intéresser à deux cas précis

1. Cas d'une condition initiale dans  $L^2_r(\mathbb{R}^3)$

$$F(v) = \mu(v) + \sqrt{\mu(v)} A \varphi_2(v)$$

où l'on testera le code pour des valeurs différentes de  $A$ .

2. Cas d'une condition initiale de type distribution. On définit la donnée initiale suivante :

$$\tilde{F} = (\text{Distribution Maxwellienne}) + \text{Dirac} = \mu + \delta.$$

On calcule les coefficients spectraux de la condition initiale renormalisée puis on calcule la solution approximée.

## 5.1 Etude pour la donnée $F = \mu + \sqrt{\mu} A \varphi_2$

Nous testons le code Maple pour les conditions initiales suivantes (voir la figure 5.1)

$$F(v) = \mu(v) + \sqrt{\mu(v)} A \varphi_2(v) \quad \text{pour } A = 1, 10, 20.$$

Ceci correspond à choisir la fonction  $G = \sum_{n \geq 0} G_n \varphi_n$  avec tous les  $G_n = 0$  pour  $n \neq 2$  et  $G_2 = A$ . On rappelle que la deuxième fonction propre est donnée par

$$\varphi_2(v) = \frac{1}{2\sqrt{30}}(|v|^4 - 10|v|^2 + 15) \sqrt{\mu(v)}$$

On remarque que pour  $A = 10$  et  $A = 20$ , la condition initiale  $F$  change de

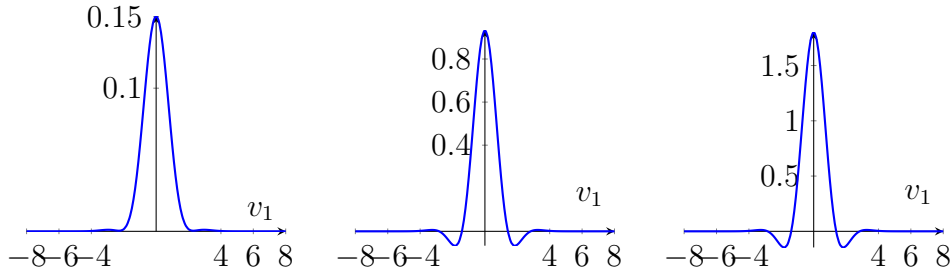


Figure 5.1:  $v_1 \longrightarrow F(v) = \mu(v) + \sqrt{\mu(v)} A \varphi_2(v)$  pour  $A = 1, 10, 20$ .

signe. Mais  $F$  vérifie toujours les conditions de normalisation

$$\int_{\mathbb{R}^3} F(v) dv = 1, \quad \int_{\mathbb{R}^3} |v|^2 F(v) dv = 3$$

puisque  $\varphi_2 \in \mathcal{N}^\perp$ . Nous avons calculé dans les trois cas les approximations  $F_N$  pour  $N$  variant de 2 à 40. Dans ce cas particulier de cette condition initiale, toutes les fonction  $h_{2n+1}$  sont identiquement nulles (cela est démontré dans la proposition 6.4). Dans les sections qui vont suivre, nous ne représenterons que les fonctions  $h_{2n}$ .

### 5.1.1 Etude pour $A = 1$

Les fonctions  $h_n$  sont des fonctions croissantes, positives, vérifiant  $h_n(0) = 0$  et elles tendent vers une limite positive quand  $t \rightarrow \infty$ . Nous représentons dans la figure 5.2 les premières fonctions  $h_4, \dots, h_{10}$ . La suite  $n \rightarrow h_n$  est une

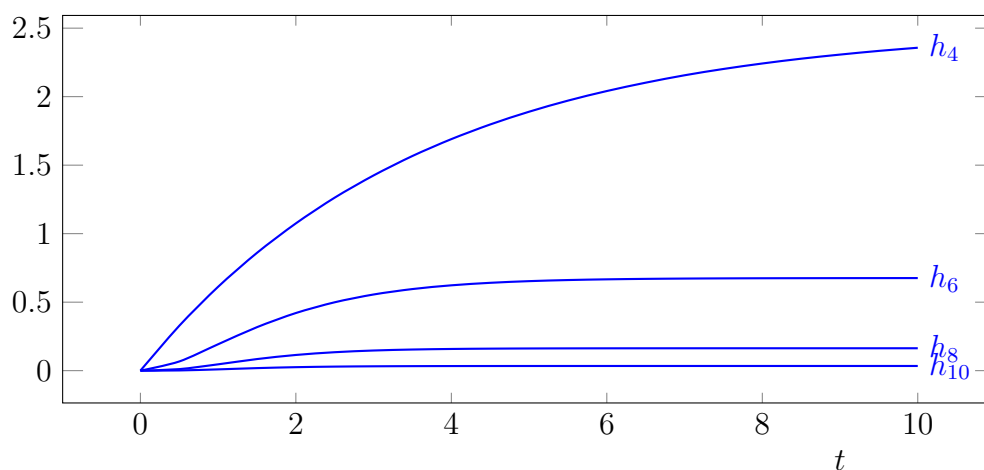


Figure 5.2: Graphe de  $t \rightarrow h_n(t)$  ( $A = 1$ )

suite décroissante, et qui tends rapidement vers 0, et à l'origine au voisinage de  $t = 0$ , la fonction  $h_n$  est de plus en plus plate (on verra que pour  $k \geq 2$  on a  $h_{2k}(t) \simeq t^{k-1}$  dans la proposition 6.6 du chapitre 6). Pour tracer les solutions suivantes, il est plus commode d'utiliser une échelle logarithmique en ordonnée dans la figure 5.3. On observe numériquement que les fonction  $h_n$  tendent vers 0 exponentiellement quand  $n$  tend vers l'infini :

$$\left( \lim_{t \rightarrow \infty} h_n(t) \right) \approx \delta^n \quad \text{avec} \quad 0 < \delta < 1.$$

On étudie maintenant la convergence numérique de la série  $g_N(t, \cdot)$  dans la norme  $L^2$ , voir la figure 5.4. Les deux courbes sont confondues car

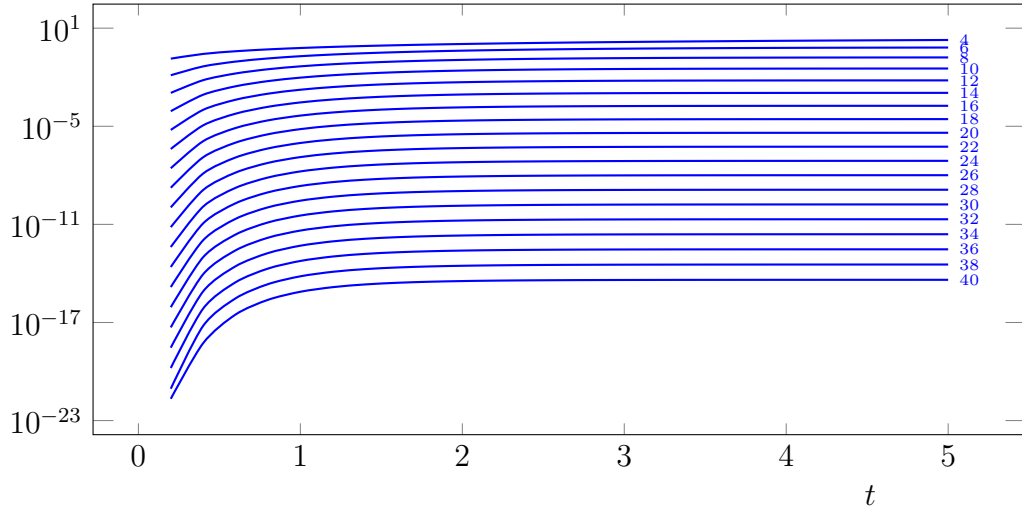


Figure 5.3: Graphe de  $t \rightarrow h_n(t)$  pour  $n = 4, 6, 8, \dots, 40$  ( $A = 1$ )

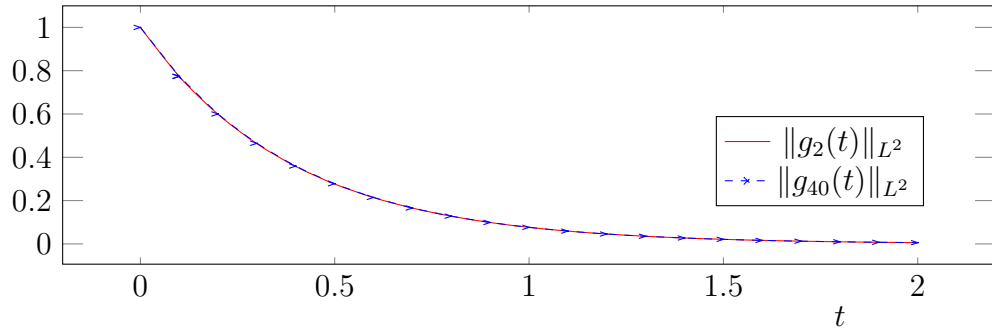


Figure 5.4: Graphe de  $\|g_2(t, \cdot)\|_{L^2}$  et  $\|g_{40}(t, \cdot)\|_{L^2}$  ( $A = 1$ )

$$\|g_2(t, \cdot)\|_{L^2}^2 = G_2 e^{-2\lambda_2 t} \simeq e^{-5.14 t}$$

$$\|g_{40}(t, \cdot)\|_{L^2}^2 = G_2 e^{-2\lambda_2 t} + (G_4 + h_4(t))^2 e^{-2\lambda_4 t} + \dots + (G_{40} + h_{40}(t))^2 e^{-2\lambda_{40} t}$$

avec  $(G_4 + h_4(t)) \simeq 2.51 (1 - e^{-0.280 t})$ . Le rapport

$$\frac{(G_4 + h_4(t))^2 e^{-2\lambda_4 t}}{G_2^2 e^{-2\lambda_2 t}}$$

reste inférieur à 0.012, et les autres  $h_n$  bien plus négligeables.

On représente dans la figure 5.5 l'évolution des solutions  $f_{40}(t, \cdot)$  et  $f_2(t, \cdot)$

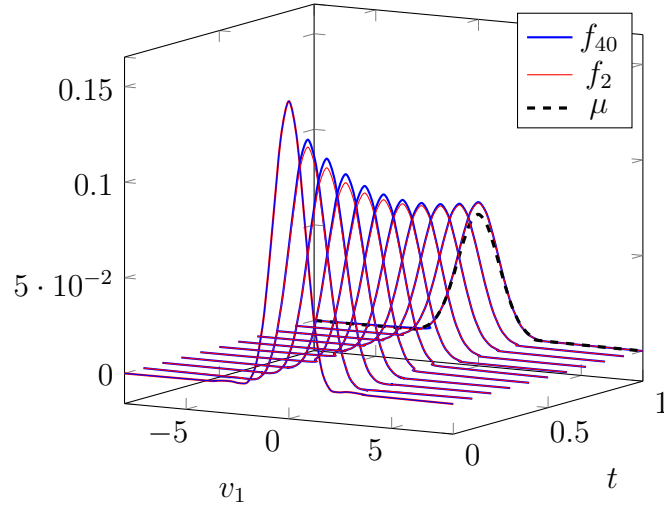


Figure 5.5:  $(t, v_1) \rightarrow f_N(t, v)$  pour  $f(0, \cdot) = \mu + \sqrt{\mu}A\varphi_2$  avec  $A = 1$ .

pour  $t \in [0, 1]$ . On observe que la solution  $f_{40}(t, \cdot)$  converge rapidement vers la distribution maxwellienne  $\mu$ . On a aussi constaté que, à partir de  $N \geq 10$ , les graphes de  $f_N$  et  $f_{40}$  sont confondus. On retrouve donc graphiquement le fait observé précédemment sur les  $g_N$ , que la solution  $f_{40}$  est très proche de  $f_2$ .

Conclusion : il semble d'après ces résultats numériques que la série  $g(t, \cdot)$  est convergente dans  $L^2$ .

### 5.1.2 Étude pour $A = 10$

On a calculé la solution pour la condition initiale avec  $A = 10$ . On obtient les graphes suivants pour les fonctions  $h_n(t)$ , voir la figure 5.6. Clairement, la suite de fonctions  $n \rightarrow h_n$  est croissante et semble diverger exponentiellement vers l'infini:

$$\left( \lim_{t \rightarrow \infty} h_n(t) \right) \approx B^n \quad \text{avec} \quad B > 1.$$

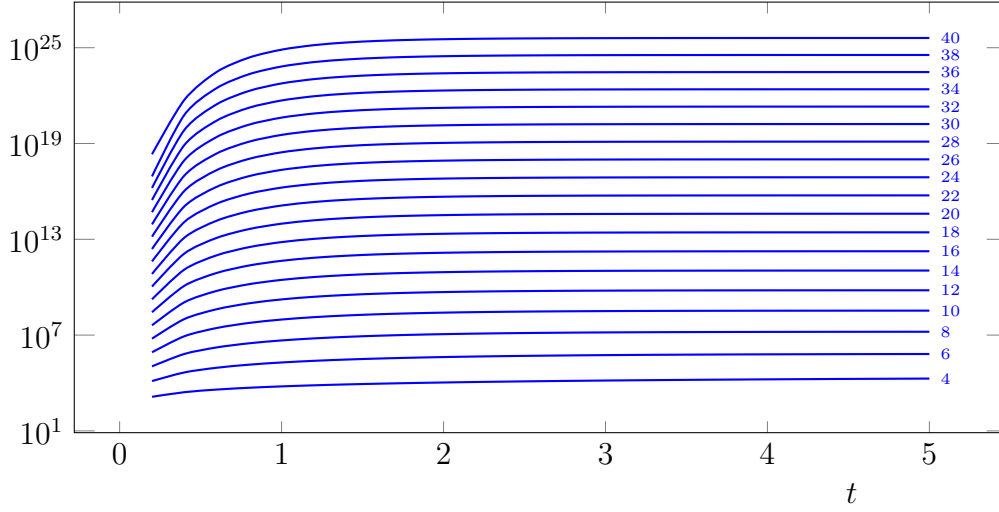


Figure 5.6: Graphe de  $t \rightarrow h_n(t)$  pour  $n = 4, 6, 8, \dots, 40$  ( $A = 10$ )

Dans la série  $\|g_N(t, \cdot)\|_{L^2}^2$ , le terme principal est

$$u_n = (G_n + h_n(t))^2 e^{-2\lambda_n t} = (h_n(t))^2 e^{-2\lambda_n t} \text{ pour } n \geq 4.$$

De plus on sait que  $e^{-2\lambda_n t} \simeq e^{-cn^{\frac{1}{2}} t}$ . On peut donc penser qu'il y a donc divergence de la série  $\sum_n u_n$  car

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \simeq B^2 \times e^{-c((n+1)^{\frac{1}{2}} - n^{\frac{1}{2}})t} \simeq B^2 > 1.$$

On étudie maintenant la convergence numérique de la série  $g_N(t, \cdot)$  dans  $L^2$ . On trace le graphe des fonctions  $t \rightarrow \|g_N(t, \cdot)\|_{L^2}$  pour  $N = 2, 4, \dots, 40$ , voir la figure 5.7. On remarque que les courbes entre  $\|g_{30}(t, \cdot)\|_{L^2}^2$  et  $\|g_{40}(t, \cdot)\|_{L^2}^2$  sont confondues dans le graphe.

On a calculé les solutions numériques  $f_{20}$  et  $f_{40}$ , voir la figure 5.8. Les solutions  $t \rightarrow f_N(t, \cdot)$  ont une croissance forte jusqu'à  $t \simeq 0.5$ , puis tendent à nouveau vers l'équilibre.

Conclusion : L'analyse des graphes des fonctions  $h_n(t)$  incite à penser qu'il y a divergence de la série  $\|g_N(t, \cdot)\|_{L^2}^2$  quand  $N \rightarrow \infty$ . Mais cette divergence



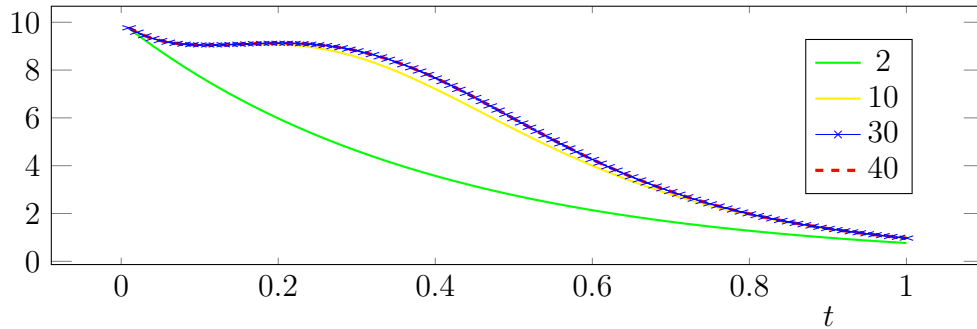


Figure 5.7: Graphe de  $\|g_N(t, \cdot)\|_{L^2}$  pour  $N = 2, 4, \dots ; 40$  ( $A = 10$ )

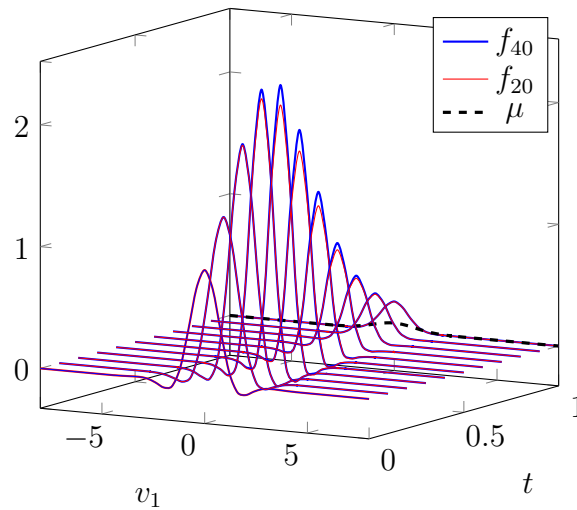


Figure 5.8:  $(t, v_1) \rightarrow f_N(t, v)$  pour  $f(0, \cdot) = \mu + \sqrt{\mu}A\varphi_2$  avec  $A = 10$ .

n'apparaît pas clairement dans l'étude des graphes  $t \rightarrow \|g_N(t, \cdot)\|_{L^2}^2$  et  $t \rightarrow f_N(t, \cdot)$ , et il est difficile de conclure qu'il y a convergence de cette série par l'étude de ces graphes.

### 5.1.3 Etude pour $A = 20$

Les courbes  $h_n(t)$  convergent encore plus rapidement vers l'infini, toujours exponentiellement voir la figure 5.9. Avec le même raisonnement que pour

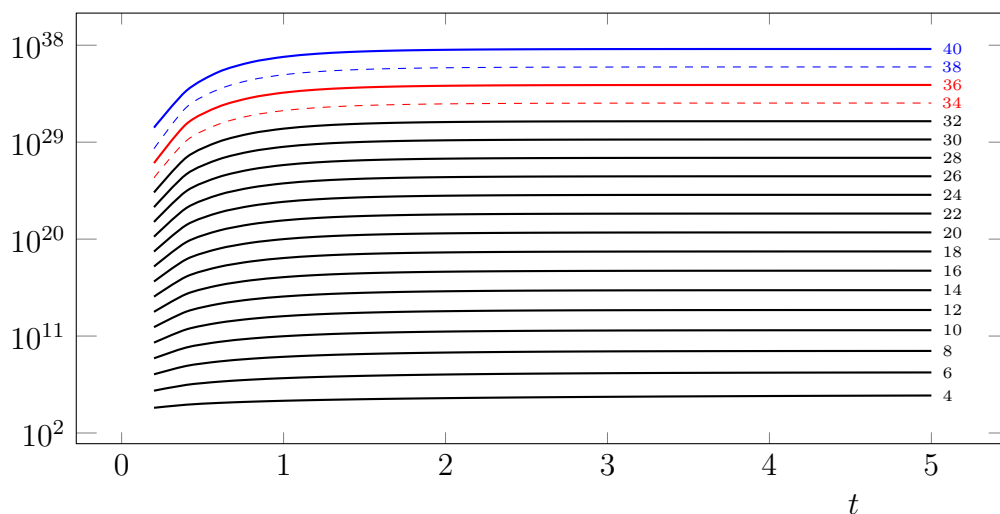


Figure 5.9: Graphe de  $t \rightarrow h_n(t)$  pour  $n = 4, 6, 8, \dots, 40$  ( $A = 20$ )

$A = 10$ , on peut donc penser que les courbes  $h_n(t)$  ont une croissance de type exponentiel, et donc qu'il y a divergence de la série  $\|g_N(t, \cdot)\|_{L^2}^2$  quand  $N \rightarrow \infty$ . On trace maintenant le graphe des fonctions  $t \rightarrow \|g_N(t, \cdot)\|_{L^2}^2$ , voir la figure 5.10 La divergence de la série  $\|g_N(t, \cdot)\|_{L^2}^2$  quand  $N \rightarrow \infty$  apparaît plus

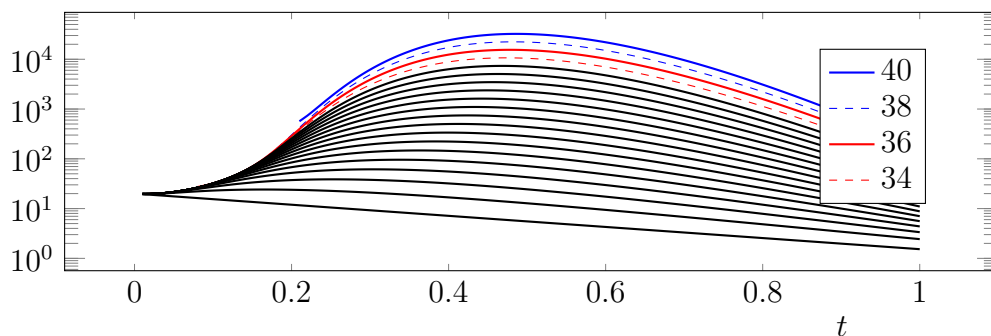


Figure 5.10: Graphe de  $\|g_N(t, \cdot)\|_{L^2}$  pour  $N = 2, 4, \dots ; 40$  ( $A = 20$ )

clairement que pour  $A = 10$ . On remarque que les courbes  $t \rightarrow \|g_N(t, \cdot)\|_{L^2}^2$  tendent vers 0 quand  $t \rightarrow \infty$ : Cela vient du terme exponentiel  $e^{-\lambda_n t}$ , et du fait que le calcul est limité rapidement pour  $N$  : on rappelle que le terme

$h_{40}$  est une somme approximativement de  $10^6$  termes exponentiels et que le temps de calcul est de plusieurs heures. On pense que si on pouvait calculer  $g_N$  pour des  $N$  bien supérieurs à 40, on observerait que par exemple pour  $t = 1$  que la série de  $\|g_N(t, \cdot)\|_{L^2}^2$  divergerait.

On représente le graphe des solutions  $f_{38}$  et  $f_{40}$  dans la figure (5.11). Les solutions  $f_N(t, \cdot)$  prennent de très grandes valeurs, jusqu'à un maximum

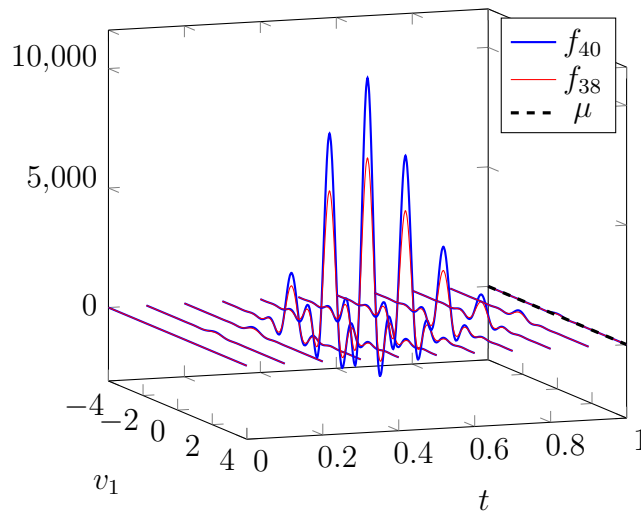


Figure 5.11:  $(t, v_1) \rightarrow f_N(t, v)$  pour  $f(0, \cdot) = \mu + \sqrt{\mu}A\varphi_2$  avec  $A = 20$ .

$f_{40}(t, 0) \simeq 10385$  pour  $t \simeq 0.5$  et sur l'axe central  $v_1 = 0$ . On n'a donné que les graphes pour  $N = 40$  et  $N = 38$ . Pour des valeurs de  $N$  plus petites que 30, les fonctions  $f_N$  deviennent très petites par rapport à  $f_{40}$  (tout comme la condition initiale ou la distribution  $\mu$  qui apparaissent comme des droites sur le graphe, à cause de la grande échelle choisie).

Conclusion : Il y a une évidence numérique de la convergence de la série  $\|g_N(t, \cdot)\|_{L^2}^2$  quand  $N \rightarrow \infty$  pour  $A$  petit. Les résultats pour  $A$  grand mènent à penser qu'il y a plutôt divergence de la série, ce qui ne contredit pas les résultats d'existence globale pour une condition initiale positive, car pour

$A > 10$ , la condition initiale change de signe.

## 5.2 Calcul pour la condition initiale $\mu + \delta$

On définit la donnée initiale de distribution suivante :

$$\tilde{F} = (\text{Distribution Maxwellienne}) + \text{Dirac} = \mu + \delta.$$

On calcule les coefficients spectraux de la condition initiale renormalisée puis on calcule la solution approximée.

### 5.2.1 Calcul de la condition initiale

Dans cette partie, on renormalise d'abord la condition initiale en suivant la section 3.2 puis on calcule explicitement les conditions initiales spectrales qui seront implémentées dans les algorithmes.

En suivant le lemme 3.1, on calcule directement

$$\begin{aligned} \langle \tilde{F}, 1 \rangle &= \int_{\mathbb{R}^3} \mu(v) 1 \, dv + \langle \delta, 1 \rangle = 2, \\ \langle \tilde{F}, v^2 \rangle &= \frac{1}{3} \int_{\mathbb{R}^3} \mu(v) v^2 \, dv + \langle \delta, v^2 \rangle = 1 \end{aligned}$$

et donc  $\alpha = 2^{-\frac{5}{2}}$  et  $\beta = 2^{-\frac{1}{2}}$ . En utilisant le changement de variable  $w = \beta v$ , on obtient la nouvelle donnée initiale de distribution redimensionnée

$$F = \alpha \tilde{F} \circ (\beta \text{Id}) = 2^{-\frac{5}{2}} \left( \mu(2^{-\frac{1}{2}} \cdot) + (2^{\frac{1}{2}})^3 \delta \right).$$

**Proposition 5.1.** *On considère la condition initiale*

$$F = 2^{-\frac{5}{2}} \left( \mu(2^{-\frac{1}{2}} \cdot) + (2^{\frac{1}{2}})^3 \delta \right)$$

et on pose  $G$  telle que  $F = \mu + \sqrt{\mu}G$ . Alors on a

$$G = -\sqrt{\mu} + 2^{-\frac{13}{4}}\pi^{-\frac{3}{4}} + 2^{-\frac{1}{4}}\pi^{\frac{3}{4}}\delta.$$

On considère les coordonnées  $G_n = \langle G, \varphi_n \rangle$  de la distribution  $G$  dans la base spectrale  $(\varphi_n)_n$ . On peut vérifier que

$$G_0 = G_1 = 0$$

et pour tout entier  $n \geq 2$

$$G_n = \langle G, \varphi_n \rangle = \frac{1 + (-1)^n}{2} \left( \frac{(2n+1)!}{2^{2n}(n!)^2} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (5.1)$$

*Preuve.* L'expression de  $G$  découle de la définition de la gaussienne  $\mu$ . On calcule ensuite

$$\langle G, \varphi_n \rangle = -(\varphi_0, \varphi_n)_{L^2} + 2^{-\frac{13}{4}}\pi^{-\frac{3}{4}}(1, \varphi_n)_{L^2} + 2^{-\frac{1}{4}}\pi^{\frac{3}{4}}\varphi_n(0)$$

et la conclusion résulte directement du lemme 8.2.  $\square$

On considère maintenant une approximation gaussienne spéciale  $F_\varepsilon \in L^2$  de la condition initiale de distribution  $F = \mu + \delta$ . Le but de la proposition suivante est d'avoir une estimation de l'erreur commise sur les coefficients spectraux quand on approxime la distribution par une fonction régulière.

**Proposition 5.2.** *On considère pour  $\varepsilon > 0$  la condition initiale*

$$\tilde{F}_\varepsilon(w) = \mu(w) + \frac{1}{\varepsilon^3} \mu\left(\frac{w}{\varepsilon}\right).$$

*D'après le lemme 3.1, la donnée initiale renormalisée de  $\tilde{F}_\varepsilon$  est  $F_\varepsilon = \mu + \sqrt{\mu}G_\varepsilon$  avec  $G_\varepsilon \in \mathcal{N}^\perp$  et*

$$G_\varepsilon(v) = -\sqrt{\mu(v)} + 2^{-\frac{5}{2}}(1 + \varepsilon^2)^{3/2} \left( \sqrt{\mu(\varepsilon v)} + \frac{1}{\varepsilon^3} \sqrt{\mu(v/\varepsilon)} \right).$$

De plus, il y a convergence au sens des distributions quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned} F_\varepsilon &\rightarrow F = 2^{-\frac{5}{2}} \left( \mu(2^{-\frac{1}{2}} \cdot) + (2^{\frac{1}{2}})^3 \delta \right), \\ G_\varepsilon &\rightarrow G = -\sqrt{\mu} + 2^{-\frac{13}{4}} \pi^{-\frac{3}{4}} + 2^{-\frac{1}{4}} \pi^{\frac{3}{4}} \delta. \end{aligned}$$

Les coordonnées de  $G_\varepsilon$  dans la base spectrale  $(\varphi_n)_{n \geq 0}$  sont données par :

$$\begin{aligned} G_{\varepsilon,0} &= G_{\varepsilon,1} = 0, \\ G_{\varepsilon,n} &= \frac{1 + (-1)^n}{2} \frac{(1 - \varepsilon^2)^n}{(1 + \varepsilon^2)^n} \left( \frac{(2n+1)!}{2^{2n}(n!)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \forall n \geq 2. \end{aligned}$$

**Remarque 5.3.** Il y a continuité des coefficients spectraux :  $G_{\varepsilon,n} \rightarrow G_n$  quand  $\varepsilon$  tend vers 0, avec  $G_n$  est donné dans (5.1). L'erreur d'approximation de  $G_n$  par  $G_{\varepsilon,n}$  est donc de l'ordre de  $(1 - ((1 - \varepsilon^2)/(1 + \varepsilon^2))^n)$ .

*Preuve de la proposition 5.2.* D'après le lemme 3.1, on pose

$$F_\varepsilon(v) = \alpha_\varepsilon \tilde{F}_\varepsilon(\beta_\varepsilon v)$$

où

$$\begin{aligned} \alpha_\varepsilon &= \frac{\left( \frac{1}{3} \int_{\mathbb{R}^3} w^2 \tilde{F}_\varepsilon(w) dw \right)^{\frac{3}{2}}}{\left( \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{F}_\varepsilon(w) dw \right)^{\frac{5}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{8} (1 + \varepsilon^2)^{3/2}, \\ \beta_\varepsilon &= \frac{\left( \frac{1}{3} \int_{\mathbb{R}^3} w^2 \tilde{F}_\varepsilon(w) dw \right)^{\frac{1}{2}}}{\left( \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{F}_\varepsilon(w) dw \right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2} (1 + \varepsilon^2)^{1/2}. \end{aligned}$$

Donc  $F_\varepsilon = \mu + \sqrt{\mu} G_\varepsilon$  avec

$$G_\varepsilon(v) = -\sqrt{\mu(v)} + \frac{2^{\frac{3}{4}} (1 + \varepsilon^2)^{3/2}}{16\pi^{3/4}} \left( e^{-\frac{\varepsilon^2 v^2}{4}} + \frac{1}{\varepsilon^3} e^{-\frac{v^2}{4\varepsilon^2}} \right)$$

et comme

$$G_\varepsilon(v) = -\sqrt{\mu(v)} + \frac{2^{\frac{1}{2}} (1 + \varepsilon^2)^{3/2}}{8} \left( \sqrt{\mu(\varepsilon v)} + \frac{1}{\varepsilon^3} \sqrt{\mu(v/\varepsilon)} \right),$$

par conséquent,  $G_\varepsilon \in \mathcal{N}^\perp$ . On calcule d'après le lemme 8.2

$$G_{\varepsilon,n} = (G_\varepsilon, \varphi_n)_{L^2} = I_1 + \frac{2^{\frac{1}{2}} (1 + \varepsilon^2)^{3/2}}{8} (I_2 + I_3)$$

où

$$\begin{aligned} I_1 &= (-\sqrt{\mu}, \varphi_n)_{L^2} = (-\varphi_0, \varphi_n)_{L^2} = -\delta_{0,n}, \\ I_2 &= \left( \sqrt{\mu(\varepsilon \cdot)}, \varphi_n \right)_{L^2} = (2^{\frac{9}{4}} \pi^{\frac{3}{4}}) \varphi_n(0) \frac{(1 - \varepsilon^2)^n}{(1 + \varepsilon^2)^{n+3/2}}, \\ I_3 &= (-1)^n I_2. \end{aligned}$$

Finalement, on obtient :

$$G_{\varepsilon,n} = -\delta_{0,n} + \frac{1 + (-1)^n}{2} \frac{(1 - \varepsilon^2)^n}{(1 + \varepsilon^2)^n} \left( \frac{(2n+1)!}{2^{2n}(n!)^2} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

□

## 5.2.2 Résultats numériques

On applique dans cette section les codes de calcul formel puis numériques précédents pour calculer la solution pour les données initiales positives de type distribution  $\tilde{F} = \mu + \delta$ . On considère seulement le cas non cutoff puisque il y a une certaine régularisation en temps. On a testé l'algorithme pour une solution BKW explicite avec une condition initiale de distribution qui change de signe. D'après la partie précédente, on a renormalisé la solution et on obtient la donnée initiale normalisée

$$\begin{cases} F(v) = 2^{-\frac{5}{2}} \mu(2^{-\frac{1}{2}}v) + 2^{-1} \delta(v), \\ G(v) = 2^{-\frac{13}{4}} \pi^{-\frac{3}{4}} - \sqrt{\mu(v)} + 2^{-\frac{1}{4}} \pi^{\frac{3}{4}} \delta(v). \end{cases} \quad (5.2)$$

On vérifie que  $\langle G, \varphi_0 \rangle = \langle G, \varphi_1 \rangle = 0$  et donc  $G \in \mathcal{N}^\perp$ . On calcule ensuite les coefficients spectraux pour  $n \geq 0$  (voir proposition 5.1) :

$$G_n = \langle G, \varphi_n \rangle = \frac{1 + (-1)^n}{2} \left( \frac{(2n+1)!}{2^{2n}(n!)^2} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On note que les coefficients  $G_{2n+1}$  sont égaux à zéro et on a l'approximation suivante de  $G$  :

$$G(v) \approx \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{1}{4}} \varphi_{2n}(v).$$

On pose  $F_{\text{reg}}(v) = 2^{-\frac{5}{2}} \mu(2^{-\frac{1}{2}}v)$  la partie régulière de la distribution  $F$ . On vérifie dans la figure 5.12 à gauche que la donnée initiale approximée se comporte comme une fonction Dirac. On remarque que pour capturer

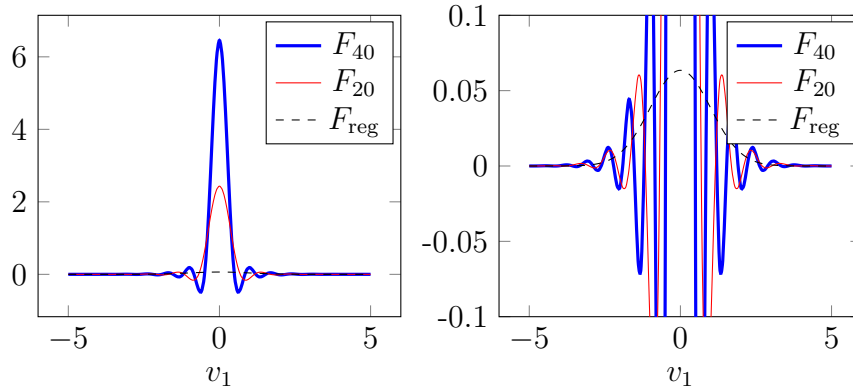


Figure 5.12: Approximation de la condition initiale  $v_1 \rightarrow F_N(v_1, 0, 0)$ .

l'approximation de la partie régulière  $F_{\text{reg}}$ , on doit redimensionner l'axe  $y$ . On observe les oscillations de  $F_N$  qui sont attendu puisque les fonctions  $F_N$  approchent la fonction Dirac lorsque  $N$  tend vers l'infini (voir la figure 5.12 à droite). On se concentre maintenant sur le problème de l'évolution. On calcule ensuite la partie non linéaire  $h_n(t)$  de la solution, voir la figure 5.13 à gauche. On observe quelques preuves numériques que la somme infinie de



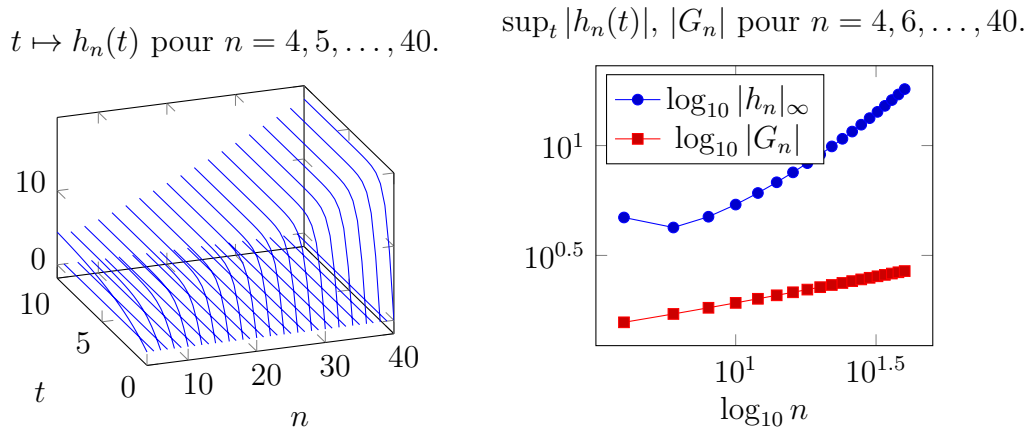


Figure 5.13: Comportement de la partie non linéaire  $h_n$ .

$h_n$  a une croissance inférieure à d'une puissance de  $n$  :

$$\sup_{t \geq 0} |h_n(t)| \leq C n^a$$

avec  $a$  près de 1. Puisque  $G_n \approx n^{\frac{1}{4}}$ , le comportement d'un terme de la série ( $g_N^{\text{lin}}(t) + g_N^{\text{nl}}(t)$ ) est dominé par la partie linéaire : on peut vérifier cette observation en calculant le rapport  $R_N(t) = \|g_N^{\text{nl}}(t, \cdot)\|_{L^2} / \|g_N^{\text{lin}}(t, \cdot)\|_{L^2}$  défini dans (3.10), voir figure 5.14. Les calculs numériques dans la figure à gauche montrent que  $g_N^{\text{nl}}(t)$  est une fonction régulière pour tout temps  $t$ . Pour un temps petit, on vérifie que  $g_N^{\text{lin}}(t)$  est singulière  $t \rightarrow 0$  comme indiqué dans (3.12). Pour un temps grand, la norme  $L^2$  de la partie linéaire ( $\sim e^{-\lambda_2 t}$ ) domine la norme de la partie non linéaire ( $\sim e^{-\lambda_4 t}$ ) et le rapport  $R_N(t)$  se comporte comme  $\tilde{R}(t)$ , voir (3.11).

On calcule ensuite l'approximation numérique  $f_N$  de la solution  $f$  pour  $N = 40$  et on vérifie que la solution se comporte comme une fonction de Dirac quand  $t \rightarrow 0$  et tend vers la distribution maxwellienne quand  $t \rightarrow \infty$ , voir figure 5.15. Puisque  $\lambda_n \approx c \sqrt{n}$  et si le comportement se  $\sup_{t \geq 0} |h_n(t)|$

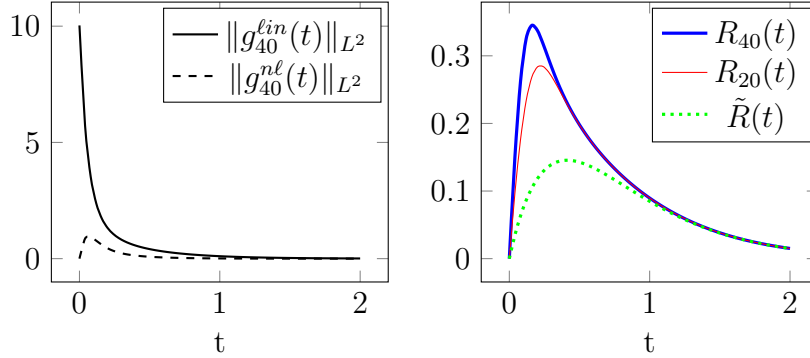


Figure 5.14: Graphe de la partie linéaire, de la partie non linéaire et du rapport  $R_N(t) = \frac{\|g_N^{nl}(t, \cdot)\|_{L_v^2}}{\|g_N^{lin}(t, \cdot)\|_{L_v^2}}$ .

est dominé par une puissance de  $n$  (qui est numériquement vérifié), alors on a pour certains  $b, \gamma > 0$

$$\forall t > 0, \|(f_N(t, \cdot) - f(t, \cdot))/\sqrt{\mu}\|_{L^2} \lesssim \frac{1}{t^b} e^{-\gamma\sqrt{N}t} \rightarrow 0 \quad \text{as } N \rightarrow \infty.$$

Les observations numériques précédentes suggèrent que la série  $(g_N^{lin}(t) + g_N^{nl}(t))$  converge dans  $L^2$  pour  $t > 0$  et la solution  $f(t, \cdot)$  converge vers une distribution Maxwellienne quand  $t \rightarrow \infty$ .

### 5.3 Conclusion du chapitre

On a considéré la fluctuation  $g$  de la solution  $f$  autour de la distribution maxwellienne pour l'équation de Boltzmann définie par

$$f = \mu + \sqrt{\mu}g \quad \text{avec} \quad g(t, v) = \sum_n g_n(t)\varphi_n(v)$$

et on a étudié le comportement des coefficients spectraux

$$g_n(t) = e^{-\lambda_n t}(G_n + h_n(t)), \quad g_n(0) = G_n.$$

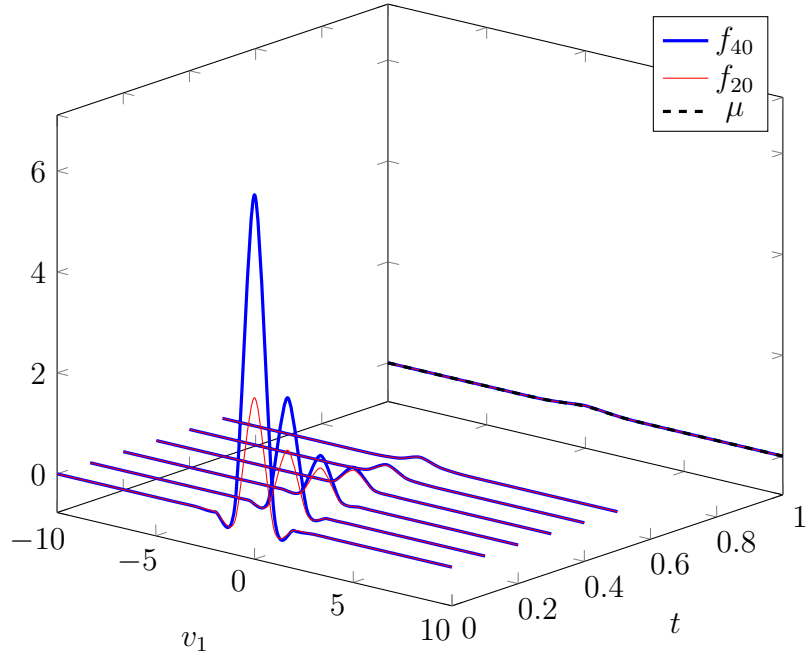


Figure 5.15: Graphe de  $(t, v_1) \mapsto f_N(t, v_1, 0, 0)$  pour  $N = 20, 40$  et  $\mu(v_1, 0, 0)$ .

On calcule formellement les coefficients spectraux  $h_n(t)$  pour  $n = 0, 1, \dots, N$  avec  $N = 40$ . On a calculé dans le cas non cutoff la solution dans les deux cas suivants

1. Pour une donnée initiale  $F = \mu + \sqrt{\mu} A \varphi_2 \in L_r^2(\mathbb{R}^3)$  avec  $A$  prenant les valeurs 1, 10, 20. On observe une convergence de la série

$$g_N(t, v) = \sum_{n=2}^N e^{-\lambda_n t} (G_n + h_n(t)) \varphi_n(v).$$

dans  $L^2$  pour  $A = 1$ . Pour  $A = 10$  et  $A = 20$ , les résultats numériques suggèrent qu'il y a divergence de la série pour  $A$  grand.

2. Pour une donnée initiale de distribution  $\mu + \delta$ . Il y a une régularisation en temps de la solution pour  $t > 0$ . Il y a conservation de la masse, du moment et de l'énergie de la solution approchée puisque  $g(t, \cdot)$  est

orthogonale au noyau  $\mathcal{N}$  pour tout temps  $t$ , voir remarque 2.7. De plus, la solution approximée  $f_N(t, \cdot)$  définie dans (3.2) converge vers une distribution Maxwellienne quand  $t$  tend vers l'infini.



# Chapitre 6

## Propriétés de blowup pour des solutions non positives

Les résultats numériques du chapitre 5 suggèrent que pour une donnée initiale qui se présente comme une grande fluctuation autour de la distribution maxwellienne, la série formelle solution de l'équation de Boltzmann est divergente. Nous étudions dans ce chapitre ce phénomène avec des méthodes d'analyse.

### 6.1 Présentation du problème

On rappelle quelques notions utiles utilisées dans les chapitres précédents.

On considère l'équation de Boltzmann homogène (1.3)

$$\begin{cases} \partial_t f = \mathbf{Q}(f, f), \\ f(0, v) = F(v). \end{cases}$$

On écrit la solution  $f$  comme une fluctuation autour de la Maxwellienne

$$f(t, v) = \mu(v) + \sqrt{\mu(v)} g(t, v).$$

La fonction  $g$  est alors solution du problème de Cauchy (1.7)

$$\begin{cases} \partial_t g + \mathcal{L}(g) = \mathbf{\Gamma}(g, g), \\ g|_{t=0} = g(0, v) = G(v). \end{cases}$$

Le noyau de collision dans le cas non cutoff vérifie (1.14)

$$b(\cos \theta) \approx \frac{1}{|\theta|^{2+2s}}, \quad 0 < s < 1, \quad \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

et le noyau de l'opérateur linéarisé  $\mathcal{L}$  est défini par

$$\mathcal{N} = \text{Vect} \{ \sqrt{\mu}, \sqrt{\mu}v_1, \sqrt{\mu}v_2, \sqrt{\mu}v_3, \sqrt{\mu}|v|^2 \}.$$

La décomposition spectrale de l'opérateur linéaire est

$$\mathcal{L} \varphi_n = \lambda_n \varphi_n, \quad n \geq 0$$

où les valeurs propres linéaire  $\lambda_n$  et les vecteurs propres  $\varphi_n$  sont définies respectivement par (2.3) et (2.1).

On considère le développement spectral

$$g(t, v) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(t) \varphi_n(v), \quad G(v) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n \varphi_n(v).$$

Si la condition initiale  $G$  est dans  $\mathcal{N}^\perp$ , alors  $G_0 = G_1 = 0$  et les coefficients spectraux sont solutions du système d'équations différentielles (2.7)

$$\begin{cases} g_0(t) = 0, \quad g_1(t) = 0 \text{ et pour tout } n \geq 2, \\ g'_n(t) + \lambda_n g_n(t) = \sum_{\substack{p+q=n \\ 0 \leq p, q \leq n}} \mu_{pq} g_p(t) g_q(t) \end{cases} \quad (6.1)$$

On obtient alors la solution formelle de l'équation de Boltzmann (1.3)

$$f(t, v) = \mu(v) + \sqrt{\mu(v)} \sum_{n=0}^{\infty} g_n(t) \varphi_n(v). \quad (6.2)$$

**Théorème 6.1.** *On considère la solution  $(g_n)_{n \geq 0}$  du système d'équations différentielles (6.1) avec la conditions initiale  $G_n = 0$  pour tout  $n \neq 2$  et  $G_2 = A$ ,  $A > 0$  donné. Ce qui correspond à la solution formelle (6.2) de l'équation de Boltzmann avec la condition initiale  $F = \mu + \sqrt{\mu} A \varphi_2$ . Alors il existe deux constantes  $0 < A_1 < A_2$  qui ne dépendent que du noyau de collision telles que la solution vérifie :*

- Pour  $A > 0$ , la série  $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(t) \varphi_n$  converge dans  $L_v^2(\mathbb{R}^3)$  pour  $t \in [0, \min(1, \frac{A_1}{A})[$ .

- Pour  $A \geq A_2$ , la série  $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(t) \varphi_n$  diverge dans  $L_v^2(\mathbb{R}^3)$  pour  $t \in [\frac{A_2}{A}, 1]$ .

**Remarque 6.2.** *La solution formelle  $f(t, \cdot)$  qui a pour condition initiale  $F = \mu + \sqrt{\mu} A \varphi_2$  explose donc pour  $A \geq A_2$  et  $t \in [A_2/A, 1]$  au sens suivant*

$$\forall t \in [\frac{A_2}{A}, 1], \quad \left\| \frac{1}{\sqrt{\mu}} f(t, \cdot) \right\|_{L_v^2(\mathbb{R}^3)} = \infty.$$

*Les conclusions du théorème sont en accord avec les observations numériques du chapitre 5.*

De la preuve de ce théorème, on peut déduire le corollaire suivant:

**Corollaire 6.3.** *Sous les hypothèses du théorème précédent, on suppose que  $A \geq 4 A_2$ . Alors la solution formelle  $f(t, \cdot)$  vérifie*

$$\forall t \in [\frac{4A_2}{A}, 1], \quad f(t, 0) = \mu(0) + \sqrt{\mu(0)} \sum_{n=1}^{\infty} (A^n t^{n-1} k_n(t)) \varphi_{2n}(0) = \infty.$$

La suite du chapitre est consacrée à la démonstration du théorème 6.1.

## 6.2 Décomposition spectrale

Nous introduisons dans cette section une nouvelle formulation du problème bien adaptée à la condition initiale  $\mu + \sqrt{\mu} A \varphi_2$ .



On rappelle que  $\varphi_0 = \sqrt{\mu}$ ,  $\lambda_0 = 0$  et pour  $n \geq 1$

$$\lambda_n = \int_0^\pi 2\pi \sin \theta b(\cos \theta) \left\{ 1 - \cos^{2n} \left( \frac{\theta}{2} \right) - \sin^{2n} \left( \frac{\theta}{2} \right) \right\} d\theta.$$

L'opérateur  $\Gamma$  vérifie  $\Gamma(\varphi_p, \varphi_q) = \mu_{pq} \varphi_{p+q}$  où les valeurs propres non linéaires sont données en (2.4) par la formule : pour  $p \geq 1, q \geq 0$

$$\begin{cases} \mu_{pq} = \left( \frac{(2p+2q+1)!}{(2p+1)!(2q+1)!} \right)^{\frac{1}{2}} \int_0^\pi 2\pi \sin \theta b(\cos \theta) \left\{ \sin^{2p} \left( \frac{\theta}{2} \right) \cos^{2q} \left( \frac{\theta}{2} \right) \right\} d\theta \\ \mu_{0q} = - \int_0^\pi 2\pi \sin \theta b(\cos \theta) \left\{ 1 - \cos^{2q} \left( \frac{\theta}{2} \right) \right\} d\theta. \end{cases}$$

On peut décomposer  $g(t, v)$  sous forme d'une partie linéaire et non linéaire

$$g(t, v) = e^{-t\mathcal{L}} A\varphi_2(v) + e^{-t\mathcal{L}} h(t, v)$$

où la nouvelle solution  $h(t, v)$  vérifie l'équation (1.10)

$$\begin{cases} \partial_t h = e^{t\mathcal{L}} \Gamma(e^{-t\mathcal{L}} (G + h), e^{-t\mathcal{L}} (G + h)), \\ h(0, v) = 0. \end{cases}$$

La fonction  $h$  a la décomposition spectrale  $h(t, v) = \sum_{n=0}^\infty h_n(t) \varphi_n(v)$  avec  $h_n(t) = e^{\lambda_n t} g_n(t) - G_n$ , voir (1.16). Dans la proposition suivante, nous montrons une propriété d'homogénéité importante sur  $h_n$  qui s'écrit comme  $A^{n/2}$  multipliée par une fonction indépendante de  $A$ .

**Proposition 6.4.** *On se donne comme condition initiale  $G = A\varphi_2$  avec  $A \in \mathbb{R}$  et  $(g_n)_n$  la solution de (6.1). Alors la suite de fonctions  $h_n$  définie précédemment vérifie : pour tout entier  $k \geq 2$*

$$\begin{cases} h_{2k-1}(t) \equiv 0 \\ h_{2k}(t) = A^k \bar{h}_k(t) \end{cases} \quad (6.3)$$

où  $(\bar{h}_k)_{k \geq 1}$  est la suite de fonction définie par récurrence

$$\begin{cases} \bar{h}_1(t) \equiv 1 & \text{et pour } k \geq 2 \\ \bar{h}_k(t) = \sum_{\substack{p+q=k \\ 1 \leq p, q \leq k-1}} \int_0^t \mu_{2p,2q} e^{-(\lambda_{2p} + \lambda_{2q} - \lambda_{2k})s} \bar{h}_p(s) \bar{h}_q(s) ds. \end{cases} \quad (6.4)$$

La solution formelle  $f$  s'écrit alors

$$f(t, v) = \mu(v) + \sqrt{\mu(v)} \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(A^n e^{-\lambda_{2n} t} \bar{h}_n(t))}_{=g_{2n}(t)} \varphi_{2n}(v). \quad (6.5)$$

**Remarque 6.5.** La norme  $L^2$  de  $g(t)$  est

$$\|g(t, \cdot)\|_{L^2}^2 = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} g_{2n}(t) \varphi_{2n} \right\|_{L^2}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} A^{2n} \bar{h}_n(t)^2 e^{-2\lambda_{2n} t}$$

Le problème est donc réduit à l'étude de la convergence de cette série, et par conséquent à l'estimation de  $\bar{h}_n(t_0)$  quand  $n \rightarrow \infty$  pour un  $t_0 > 0$  fixé.

*Preuve de la proposition 6.4.* D'après la proposition 2.6, on a  $h_0 = h_1 = h_2 = h_3 \equiv 0$  et pour  $n \geq 4$  on a

$$h_n(t) = \sum_{\substack{p+q=n \\ 2 \leq p, q \leq n-2}} \int_0^t \mu_{p,q} e^{-(\lambda_p + \lambda_q - \lambda_n)s} (G_p + h_p(s)) (G_q + h_q(s)) ds.$$

La relation (6.3) est vérifiée pour  $k = 2$ . En effet,  $h_3 \equiv 0$  et

$$\begin{aligned} h_4(t) &= \int_0^t \mu_{2,2} e^{-(\lambda_2 + \lambda_2 - \lambda_4)s} (G_2 + h_2(s)) (G_2 + h_2(s)) ds \\ &= A^2 \int_0^t \mu_{2,2} e^{-(\lambda_2 + \lambda_2 - \lambda_4)s} ds \end{aligned}$$

On a donc bien  $h_4(t) = A^2 \bar{h}_2(t)$  avec  $\bar{h}_1 \equiv 1$  et

$$\bar{h}_2(t) = \int_0^t \mu_{2,2} e^{-(\lambda_2 + \lambda_2 - \lambda_4)s} \bar{h}_1(t) \bar{h}_1(t) ds.$$

On suppose pour  $k \geq 3$  que les relations (6.3) et (6.4) sont vraies jusqu'à l'ordre  $2k - 2$  et on va montrer qu'elles sont vraies pour l'ordre  $2k - 1$  et  $2k$ .

On écrit pour le terme impair

$$\begin{aligned}
h_{2k-1}(t) &= \sum_{\substack{p+q=2k-1 \\ 2 \leq p, q \leq 2k-3}} \int_0^t \mu_{p,q} e^{-(\lambda_p + \lambda_q - \lambda_{2k-1})s} (G_p + h_p(s)) (G_q + h_q(s)) ds \\
&= \int_0^t \mu_{2,2k-3} e^{-(\lambda_2 + \lambda_{2k-3} - \lambda_{2k-1})s} A h_{2k-3}(s) ds \\
&+ \sum_{\substack{p+q=2k-1 \\ 3 \leq p, q \leq 2k-4}} \int_0^t \mu_{p,q} e^{-(\lambda_p + \lambda_q - \lambda_{2k-1})s} h_p(s) h_q(s) ds \\
&+ \int_0^t \mu_{2k-3,2} e^{-(\lambda_{2k-3} + \lambda_2 - \lambda_{2k-1})s} h_{2k-3}(s) A ds.
\end{aligned}$$

On peut vérifier que  $h_{2k-1} \equiv 0$  : d'après l'hypothèse de récurrence on a  $h_{2k-3} \equiv 0$  et  $h_p h_q \equiv 0$  pour chacun des termes sous le signe intégral. En effet, la somme  $p + q$  étant impaire, si  $p$  est pair on a  $q$  impair et donc  $h_q \equiv 0$  (et vice-versa).

On écrit pour les termes pairs

$$\begin{aligned}
h_{2k}(t) &= \sum_{\substack{p+q=2k \\ 2 \leq p, q \leq 2k-2}} \int_0^t \mu_{p,q} e^{-(\lambda_p + \lambda_q - \lambda_{2k})s} (G_p + h_p(s)) (G_q + h_q(s)) ds \\
&= \int_0^t \mu_{2,2k-2} e^{-(\lambda_2 + \lambda_{2k-2} - \lambda_{2k})s} A h_{2k-2}(s) ds \\
&+ \sum_{\substack{p+q=2k \\ 3 \leq p, q \leq 2k-3}} \int_0^t \mu_{p,q} e^{-(\lambda_p + \lambda_q - \lambda_{2k})s} h_p(s) h_q(s) ds \\
&+ \int_0^t \mu_{2k-2,2} e^{-(\lambda_{2k-2} + \lambda_2 - \lambda_{2k})s} h_{2k-2}(s) A ds.
\end{aligned}$$

D'après l'hypothèse de récurrence, on a  $h_{2k-2}(s) = A^{k-1} \bar{h}_{k-1}(s)$ , et pour  $p$  pair, alors  $q$  est pair et

$$h_p(s) h_q(s) = h_{2p'}(s) h_{2q'}(s) = (A^{p'} \bar{h}_{p'}(s)) (A^{q'} \bar{h}_{q'}(s))$$

avec  $2 \leq p', q' \leq k-2$ . Pour  $p$  impair, alors  $h_p \equiv 0$ . Donc on a

$$\begin{aligned} h_{2k}(t) &= \int_0^t \mu_{2,2k-2} e^{-(\lambda_2 + \lambda_{2k-2} - \lambda_{2k})s} (A^k \bar{h}_{k-1}(s)) ds \\ &+ \sum_{\substack{p'+q'=k \\ 2 \leq p', q' \leq k-2}} \int_0^t \mu_{2p',2q'} e^{-(\lambda_{2p'} + \lambda_{2q'} - \lambda_{2k})s} (A^k \bar{h}_{p'}(s) \bar{h}_{q'}(s)) ds \\ &+ \int_0^t \mu_{2k-2,2} e^{-(\lambda_{2k-2} + \lambda_2 - \lambda_{2k})s} (A^k \bar{h}_{k-1}(s)) ds. \end{aligned}$$

C'est à dire

$$\begin{aligned} h_{2k}(t) &= \int_0^t \mu_{2,2k-2} e^{-(\lambda_2 + \lambda_{2k-2} - \lambda_{2k})s} A^k \bar{h}_1(s) \bar{h}_{k-1}(s) ds \\ &+ \sum_{\substack{p'+q'=k \\ 2 \leq p', q' \leq k-2}} \int_0^t \mu_{2p',2q'} e^{-(\lambda_{2p'} + \lambda_{2q'} - \lambda_{2k})s} (A^k \bar{h}_{p'}(s) \bar{h}_{q'}(s)) ds \\ &+ \int_0^t \mu_{2k-2,2} e^{-(\lambda_{2k-2} + \lambda_2 - \lambda_{2k})s} A^k \bar{h}_{k-1}(s) \bar{h}_1(s) ds \end{aligned}$$

avec  $\bar{h}_1(t) = 1$ . D'où

$$h_{2k}(t) = A^k \sum_{\substack{p+q=k \\ 1 \leq p, q \leq k-1}} \int_0^t \mu_{2p,2q} e^{-(\lambda_{2p} + \lambda_{2q} - \lambda_{2k})s} \bar{h}_p(s) \bar{h}_q(s) ds = A^k \bar{h}_k(t)$$

puisque l'on a posé  $\bar{h}_1(t) = 1$ , ce qui termine la démonstration de (6.3).

Comme pour  $n \geq 1$ , on a

$$g_n(t) = e^{-\lambda_n t} (G_n + h_n(t))$$

On peut en déduire que

$$g_0(t) = g_1(t) = 0$$

$$g_2(t) = e^{-\lambda_2 t} (G_2 + h_2(t)) = A e^{-\lambda_2 t} \bar{h}_1(t)$$

et pour  $k \geq 2$

$$g_{2k-1}(t) = 0,$$

$$g_{2k}(t) = e^{-\lambda_{2k} t} (G_{2k} + h_{2k}(t)) = A^k e^{-\lambda_{2k} t} \bar{h}_k(t)$$

ce qui donne la formule (6.5) de la série formelle et conclut la démonstration. □

## 6.3 Preuve du théorème 6.1

On va introduire une nouvelle suite de fonctions  $(k_n)_n$  qui seront mieux adaptées pour obtenir les estimations nécessaires. On donnera ensuite un éclairage de la démonstration dans un modèle simplifié, puis on terminera la démonstration du théorème.

### 6.3.1 Nouvelle formulation (introduction de la suite $(k_n)_n$ )

On commence par une estimation des fonctions  $\bar{h}_n(t)$  en  $t = 0$  et on rappelle l'équation intégrale vérifiée par la famille  $(\bar{h}_n)_n$  pour  $t \geq 0$  (et même pour  $t \in \mathbb{R}$ ):

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{h}_1(t) \equiv 1 \quad \text{et pour } n \geq 2, \\ \bar{h}_n(t) = \sum_{\substack{p+q=n \\ 1 \leq p, q \leq n-1}} \int_0^t \mu_{2p,2q} e^{-(\lambda_{2p} + \lambda_{2q} - \lambda_{2n})s} \bar{h}_p(s) \bar{h}_q(s) ds. \end{array} \right.$$

**Proposition 6.6.**  $(\bar{h}_n)_{n \geq 1}$  est une suite de fonctions analytiques sur  $\mathbb{R}$  et

$$\bar{h}_n(t) = a_n t^{n-1} + O(t^n) \quad \text{quand } t \rightarrow 0$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 = 1 \quad \text{et pour } n \geq 2 \\ a_n = \frac{1}{n-1} \sum_{\substack{p+q=n \\ 1 \leq p, q \leq n-1}} \mu_{2p,2q} a_p a_q \end{array} \right. \quad (6.6)$$

sont des constantes strictement positives.

*Preuve.* D'une part, pour tout  $n \geq 1$ ,  $\bar{h}_n$  est une fonction analytique en  $t \geq 0$ , et même pour  $t \in \mathbb{R}$  puisque c'est une somme finie de termes exponentiels (voir la démonstration de la proposition 2.8). D'autre part, on a que  $\bar{h}_1(t) = 1$ , ce qui nous permet de poser  $a_1 = 1$  et

$$\begin{aligned}\bar{h}_2(t) &= \int_0^t \mu_{22} e^{-(2\lambda_2 - \lambda_4)s} ds = \frac{\mu_{22}}{2\lambda_2 - \lambda_4} (1 - e^{-(2\lambda_2 - \lambda_4)t}) \\ &= \mu_{22} t + O(t^2)\end{aligned}$$

avec  $0 < \mu_{22} = a_2$ . On suppose par récurrence que la relation est vraie jusqu'à l'ordre  $n - 1$  et on va la démontrer pour l'ordre  $n$  : on a

$$\begin{aligned}\bar{h}_n(t) &= \sum_{\substack{p+q=n \\ 1 \leq p, q \leq n-1}} \int_0^t \mu_{2p,2q} e^{-(\lambda_{2p} + \lambda_{2q} - \lambda_{2n})s} \bar{h}_p(s) \bar{h}_q(s) ds \\ &= \sum_{\substack{p+q=n \\ 1 \leq p, q \leq n-1}} \int_0^t \mu_{2p,2q} e^{-(\lambda_{2p} + \lambda_{2q} - \lambda_{2n})s} \\ &\quad \times (a_p s^{p-1} + O(s^p)) (a_q s^{q-1} + O(s^q)) ds \\ &= \left( \frac{1}{n-1} \sum_{\substack{p+q=n \\ 1 \leq p, q \leq n-1}} \mu_{2p,2q} a_p a_q \right) \\ &\quad \times \int_0^t (n-1) s^{n-2} e^{-(\lambda_{2p} + \lambda_{2q} - \lambda_{2n})s} ds + O(t^n)\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}\int_0^t (n-1) s^{n-2} e^{-(\lambda_{2p} + \lambda_{2q} - \lambda_{2n})s} ds &= \int_0^t (n-1) s^{n-2} (1 + O(s)) ds \\ &= t^{n-1} + O(t^n).\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\bar{h}_n(t) = \left( \frac{1}{n-1} \sum_{\substack{p+q=n \\ 1 \leq p, q \leq n-1}} \mu_{2p,2q} a_p a_q \right) t^{n-1} + O(t^n).$$

□

**Remarque 6.7.** D'après la proposition 6.6 précédente, comme on a l'estimation  $\bar{h}_n(t) \underset{0}{\simeq} a_n t^{n-1}$  il apparaît plus commode de renormaliser la suite pour se ramener à une suite de fonctions qui ne s'annule pas en  $t = 0$ . On introduit donc une nouvelle suite de fonctions  $(k_n)_{n \geq 1}$  qui ne s'annule pas en  $t = 0$ .

**Proposition 6.8.** On définit la suite de fonctions  $(k_n)_n$  par

$$\begin{cases} k_n(t) = t^{-(n-1)} e^{-\lambda_{2n} t} \bar{h}_n(t) & \text{pour } t \neq 0, \\ k_n(0) = a_n \end{cases}$$

où  $(a_n)_n$  est la suite donnée par (6.6). Alors  $k_n$  est une fonction analytique sur  $\mathbb{R}$  et la suite  $(k_n)_n$  vérifie le système d'équations différentielles ordinaires (singulières en  $t = 0$ ) pour  $t \geq 0$

$$\begin{cases} k_1(t) = e^{-\lambda_2 t} & \text{et pour } n \geq 2 \\ t k'_n(t) + ((n-1) + \lambda_{2n} t) k_n(t) = \sum_{\substack{p+q=n \\ 1 \leq p, q \leq n-1}} \mu_{2p,2q} k_p(t) k_q(t), \\ k_n(0) = a_n. \end{cases} \quad (6.7)$$

Elle vérifie aussi le système d'équations intégrales

$$\begin{cases} k_1(t) = e^{-\lambda_2 t} & \text{pour } t \geq 0 \text{ et pour } n \geq 2, t > 0 \\ k_n(t) = \frac{e^{-\lambda_{2n} t}}{t^{n-1}} \sum_{\substack{p+q=n \\ 1 \leq p, q \leq n-1}} \int_0^t \mu_{2p,2q} s^{n-2} e^{\lambda_{2n} s} k_p(s) k_q(s) ds, \\ k_n(0) = a_n. \end{cases} \quad (6.8)$$

De plus, la série formelle définie par (2.12) s'écrit

$$f(t, v) = \mu(v) + \sqrt{\mu(v)} \sum_{n=1}^{\infty} (A^n t^{n-1} k_n(t)) \varphi_{2n}(v). \quad (6.9)$$

**Remarque 6.9.** La norme  $L^2$  de la solution  $g = (f - \mu)/\sqrt{\mu}$  est

$$\|g(t, \cdot)\|_{L^2}^2 = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} g_{2n}(t) \varphi_{2n} \right\|_{L^2}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} A^{2n} t^{2n-2} k_n(t)^2$$

avec  $(g_n)_n$  sont solutions du système d'équations différentielles (2.7) avec la condition initiale  $G = A\varphi_2$ .

*Preuve de la proposition 6.8.* D'après la proposition 6.6, pour tout  $n \geq 1$   $\bar{h}_n$  est une fonction analytique sur  $\mathbb{R}$  et  $\bar{h}_n(t) = a_n t^{n-1} + O(t^n)$ . Donc  $k_n(t) = t^{-(n-1)} e^{-\lambda_{2n} t} \bar{h}_n(t)$  est aussi une fonction analytique sur  $\mathbb{R}$ . On démontre maintenant (6.7). On a pour  $n = 1$

$$k_1(t) = e^{-\lambda_2 t} \bar{h}_1(t) = e^{-\lambda_2 t}$$

puisque  $\bar{h}_1(t) = 1$ . Pour  $n > 1$ , il suffit de dériver  $\bar{h}_n(t)$  (voir proposition 6.6)

$$\bar{h}'_n(t) = \sum_{\substack{p+q=n \\ 1 \leq p, q \leq n-1}} \mu_{2p,2q} e^{-(\lambda_{2p} + \lambda_{2q} - \lambda_{2n})t} \bar{h}_p(t) \bar{h}_q(t)$$

ce qui implique que

$$t^{n-2} e^{-\lambda_{2n} t} \bar{h}'_n(t) = \sum_{\substack{p+q=n \\ 1 \leq p, q \leq n-1}} \mu_{2p,2q} t^{p-1} e^{-\lambda_{2p} t} \bar{h}_p(t) t^{q-2} e^{-\lambda_{2q} t} \bar{h}_q(t).$$

En utilisant

$$\bar{h}'_n(t) = t^{n-1} e^{\lambda_{2n} t} k'_n(t) + ((n-1) + \lambda_{2n} t) t^{n-2} e^{\lambda_{2n} t} k_n(t)$$

on obtient le nouveau système (6.7) d'équations différentielles ordinaire vérifiée par la famille  $(k_n)_n$ . Finalement, la série formelle (6.9) est obtenue directement à partir de la série formelle (6.5).  $\square$

**Remarque 6.10.** Si  $k_n$  est une solution de l'équation différentielle (6.7) qui est de classe  $\mathcal{C}^1$  dans un voisinage de 0, alors en prenant  $t = 0$  dans cette équation on a

$$(n-1)k_n(0) = \sum_{\substack{p+q=n \\ 1 \leq p, q \leq n-1}} \mu_{2p,2q} k_p(0) k_q(0)$$

et on retrouve bien la condition initiale  $k_n(0) = a_n$  définie dans la proposition 6.8 et la relation de récurrence (6.6) définissant la suite  $(a_n)_n$ .



### 6.3.2 Modèle simplifié

Dans cette section, on introduit un exemple simplifié qui permet d'éclairer le comportement des solutions  $g_n(t)$  et avoir des éléments de comparaison avec le cadre classique de l'équation de Boltzmann (il y a de fortes similitudes entre les deux modèles).

On suppose que  $\lambda_n = \lambda > 0$  pour tout  $n$  et  $\mu_{pq} = \mu > 0$  pour tout  $p, q$ . On considère les solutions du système d'équations différentielles ordinaires

$$\begin{cases} g_0(t) = 0, & g_1(t) = 0, \\ g'_n(t) + \lambda g_n(t) = \sum_{\substack{p+q=n \\ 1 \leq p, q \leq n-1}} \mu g_p(t) g_q(t), & \forall n \geq 2. \end{cases} \quad (6.10)$$

**Théorème 6.11.** *La solution de (6.10) avec la condition initiale  $G_n = 0$  pour  $n \neq 2$  et  $G_2 = A$  est*

$$\begin{cases} g_{2n+1} \equiv 0, \\ g_{2n}(t) = A \left( \frac{A\mu}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t}) \right)^{n-1} e^{-\lambda t}. \end{cases}$$

La norme de la série  $g = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \varphi_n$  vérifie alors

$$\|g(t, \cdot)\|_{L^2}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} A^2 \left( \frac{A\mu}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t}) \right)^{2n-2} e^{-2\lambda t}.$$

Il y a donc blowup de la solution pour  $A$  assez grand :

- Pour  $A \leq A_0 = \lambda/\mu$ , la solution est globale en temps.
- Pour  $A > A_0$ , il y a blowup de la solution pour  $t = T$  où

$$T = \frac{1}{\lambda} \log \left( \frac{A}{A - \lambda/\mu} \right).$$

**Remarque 6.12.** 1. On considère la série

$$f(t, v) = \mu(v) + \sqrt{\mu(v)} \sum_{n=1}^{\infty} A \left( \frac{A\mu}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t}) \right)^{n-1} e^{-\lambda t} \varphi_{2n}(v)$$

dont la condition initiale est  $F = \mu + \sqrt{\mu} A\varphi_2$ . On précise que  $f(t, v)$  n'est pas solution d'une équation de Boltzmann. Mais on peut penser que  $f(t, v)$  a un comportement proche de celui du cas cutoff avec un noyau de collision  $\sin\theta b(\cos\theta)$  constant, pour lequel les valeurs propres  $\lambda_n$  tendent vers une constante  $\lambda > 0$ .

2. Nous vérifions le comportement habituel de solutions de blowup en temps:  $T \rightarrow 0$  quand  $\|g(0, \cdot)\|_2 \rightarrow \infty$ . Dans ce cas,  $T \simeq \frac{C}{\|g(0, \cdot)\|_2}$ .

3. L'expression exacte de la norme de  $g(t, \cdot)$  est

$$\|g(t, \cdot)\|_{L^2}^2 = \frac{A^2 e^{-2\lambda t}}{1 - \left(\frac{A\mu}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t})\right)^2} \simeq \frac{C}{T - t} \quad \text{quand } t \rightarrow T^- \text{ (cas blowup)}.$$

Preuve du théorème 6.11. On rappelle que dans ce cas  $k_n$  est défini par

$$\begin{cases} k_1(t) = e^{-\lambda t} & \text{et pour } n \geq 2 \\ k_n(t) = \frac{e^{-\lambda t}}{t^{n-1}} \sum_{\substack{p+q=n \\ 1 \leq p, q \leq n-1}} \int_0^t \mu s^{n-2} e^{\lambda s} k_p(s) k_q(s) ds. \end{cases}$$

On vérifie facilement par récurrence que la solution est

$$k_n(t) = \mu^{n-1} \left( \frac{1 - e^{-\lambda t}}{\lambda t} \right)^{n-1} e^{-\lambda t}.$$

On en déduit d'après la relation (6.9) que

$$\begin{aligned} f(t, v) &= \mu(v) + \sqrt{\mu(v)} \sum_{n=1}^{\infty} (A^n t^{n-1} k_n(t)) \varphi_{2n}(v) \\ &= \mu(v) + \sqrt{\mu(v)} \sum_{n=1}^{\infty} A \left( \frac{A\mu}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t}) \right)^{n-1} \varphi_{2n}(v) \end{aligned}$$

ce qui est équivalent à dire que

$$\begin{cases} g_{2n+1} \equiv 0, \\ g_{2n}(t) = A \left( \frac{A\mu}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t}) \right)^{n-1} e^{-\lambda t}. \end{cases}$$

Pour  $t > 0$ , la norme de  $g(t, \cdot)$  est convergente si et seulement si

$$(A\mu/\lambda) (1 - e^{-\lambda t}) < 1.$$

- Si  $A\mu/\lambda \leq 1$ , l'inégalité est toujours vérifiée.
- Si  $A\mu/\lambda > 1$ , la série est divergente pour  $t \geq T_A$  où  $T_A$  est défini par  $(A\mu/\lambda)(1 - e^{-\lambda T_A}) = 1$ .

□

**Remarque 6.13.** On pourrait aussi vérifier que  $k_n$  vérifie l'équation

$$\begin{cases} k_1(t) = e^{-\lambda t} & \text{et pour } n \geq 2 \\ t k'_n(t) + ((n-1) + \lambda t) k_n(t) = \sum_{\substack{p+q=n \\ 1 \leq p, q \leq n-1}} \mu k_p(s) k_q(s) ds, \\ k_n(0) = \mu^{n-1}. \end{cases}$$

et la condition initiale  $a_n = k_n(0) = \mu^{n-1}$  vérifie

$$\begin{cases} a_1 = 1 & \text{et pour } n \geq 2 \\ a_n = \frac{1}{n-1} \sum_{\substack{p+q=n \\ 1 \leq p, q \leq n-1}} \mu a_p a_q ds. \end{cases}$$

Nous reprenons la démonstration du théorème 6.1.

### 6.3.3 Estimations de $k_n$

On suppose  $0 < s < 1$ . Alors avec les estimations (2.9) et (3.8) sur les valeurs propres, on a

$$\begin{cases} \forall n \geq 2, & C_{\lambda,1} n^s \leq \lambda_n \leq C_{\lambda,2} n^s, \\ \forall p, q, & C_{\mu,1} \frac{n^{\frac{5}{4}+2s}}{p^{\frac{5}{4}+s} q^{\frac{5}{4}+s}} \leq \frac{1}{2} (\mu_{2p,2q} + \mu_{2q,2p}) \leq C_{\mu,2} \frac{n^{\frac{5}{4}+2s}}{p^{\frac{5}{4}+s} q^{\frac{5}{4}+s}}. \end{cases} \quad (6.11)$$

On rappelle que la solution formelle de l'équation de Boltzmann (1.3) s'écrit

$$f(t, v) = \mu(v) + \sqrt{\mu(v)} \sum_{n=1}^{\infty} (A^n t^{n-1} k_n(t)) \varphi_{2n}(v)$$

où les fonctions  $k_n(t)$  sont définies dans la proposition 6.8: elles sont solutions de l'équation intégrale (6.8)

$$\begin{cases} k_1(t) = e^{-\lambda_2 t} & \text{et pour } n \geq 2 \\ k_n(t) = \frac{e^{-\lambda_{2n} t}}{t^{n-1}} \sum_{\substack{p+q=n \\ 1 \leq p, q \leq n-1}} \mu_{2p2q} \int_0^t s^{n-2} e^{\lambda_{2n} s} k_p(s) k_q(s) ds. \end{cases}$$

**Proposition 6.14.** *On considère la suite de fonctions  $(k_n)_n$  qui est définie précédemment. Alors il existe des constantes  $B_1 < B_2$  et  $\delta_1 < \delta_2$  strictement positives et qui ne dépendent que du noyau de collision telles que*

$$\forall t \in [0, 1], \quad B_1 n^{\frac{5}{4}} \delta_1^n \leq k_n(t) \leq B_2 n^{\frac{5}{4}} \delta_2^n.$$

*Preuve du théorème 6.1.* D'après la proposition précédente, il suffit de poser  $A_1 = \frac{1}{\delta_2}$  et  $A_2 = \frac{1}{\delta_1}$  : alors on a  $0 < A_1 < A_2$  et pour  $t \in ]0, 1]$

$$\frac{B_1^2}{t^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{tA}{A_2} \right)^{2n} n^{\frac{5}{2}} \leq \|g(t, \cdot)\|_{L^2}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} A^{2n} t^{2n-2} k_n(t)^2 \leq \frac{B_2^2}{t^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{tA}{A_1} \right)^{2n} n^{\frac{5}{2}}.$$

Par conséquent, la série converge dans  $L_v^2(\mathbb{R}^3)$  pour tout  $t \in [0, \min(1, \frac{A_1}{A})[$  et si  $A \geq A_2$  la série diverge dans  $L_v^2(\mathbb{R}^3)$  pour tout  $t \in [\frac{A_2}{A}, 1]$ . Ce qui conclut la démonstration du théorème 6.1.  $\square$

On donne aussi la preuve du corollaire 6.3.

*Preuve.* On a

$$f(t, 0) = \mu(0) + \sqrt{\mu(0)} \sum_{n=1}^{\infty} (A^n t^{n-1} k_n(t)) \varphi_{2n}(0).$$

Tous les termes de la série sont positifs et

$$\varphi_n(0) \approx \frac{1}{2^n n^{\frac{3}{4}}}.$$

Alors

$$(A^n t^{n-1} k_n(t)) \varphi_{2n}(0) \gtrsim \frac{1}{t} \left( \frac{tA}{4A_2} \right)^n n^{\frac{1}{2}}$$

et la série est divergente pour  $A \geq 4A_2$  et pour tout  $t \in [\frac{4A_2}{A}, 1]$ .  $\square$

On présente ci-dessous la démonstration de la proposition 6.14 qui est le point central pour démontrer la propriété de blowup.

*Preuve de la proposition 6.14.* On détermine d'abord l'estimation inférieure de  $k_n(t)$ . On va montrer par récurrence que pour tout entier  $n \geq 1$  on a

$$\forall t \in [0, 1], \quad k_n(t) \geq B_1 n^\beta \delta_1^n, \quad (6.12)$$

où  $B_1 > 0$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$  et  $\delta_1 > 0$  sont des constantes que l'on fixera plus tard.

Pour que l'hypothèse de récurrence soit vérifiée pour  $n = 1$

$$\forall t \in [0, 1], \quad k_1(t) = e^{-\lambda_2 t} \geq B_1 \delta_1,$$

il est suffisant que

$$B_1 \delta_1 \leq e^{-\lambda_2}. \quad (6.13)$$

On se donne un entier  $n \geq 2$  et on suppose que l'hypothèse (6.12) est vérifiée jusqu'à  $n - 1$ . On considère l'équation intégrale (6.8) vérifiée par  $k_n$ . On peut écrire en intervertissant les rôles de  $p$  et  $q$  et en posant  $p' = q$  et  $q' = p$

$$\begin{aligned} k_n(t) &= \frac{1}{2} \frac{e^{-\lambda_{2n} t}}{t^{n-1}} \sum_{\substack{p+q=n \\ 1 \leq p, q \leq n-1}} \mu_{2p, 2q} \int_0^t \sigma^{n-2} e^{\lambda_{2n} \sigma} k_p(\sigma) k_q(\sigma) d\sigma \\ &+ \frac{1}{2} \frac{e^{-\lambda_{2n} t}}{t^{n-1}} \sum_{\substack{q'+p'=n \\ 1 \leq q', p' \leq n-1}} \mu_{2q', 2p'} \int_0^t \sigma^{n-2} e^{\lambda_{2n} \sigma} k_{q'}(\sigma) k_{p'}(\sigma) d\sigma. \end{aligned}$$

En utilisant les estimations (6.11) sur  $\mu_{pq}$ , on a alors

$$\begin{aligned} k_n(t) &= \frac{e^{-\lambda_{2n} t}}{t^{n-1}} \sum_{\substack{p+q=n \\ 1 \leq p, q \leq n-1}} \frac{1}{2} (\mu_{2p,2q} + \mu_{2q,2p}) \int_0^t \sigma^{n-2} e^{\lambda_{2n} \sigma} k_p(\sigma) k_q(\sigma) d\sigma \\ &\geq \frac{e^{-\lambda_{2n} t}}{t^{n-1}} \sum_{\substack{p+q=n \\ 1 \leq p, q \leq n-1}} C_{\mu,1} \frac{n^{\frac{5}{4}+2s}}{p^{\frac{5}{4}+s} q^{\frac{5}{4}+s}} \int_0^t \sigma^{n-2} e^{\lambda_{2n} \sigma} k_p(\sigma) k_q(\sigma) d\sigma. \end{aligned}$$

Alors en appliquant l'hypothèse de récurrence (6.12) sur  $k_p, k_q$ , on obtient

$$\begin{aligned} k_n(t) &\geq \frac{e^{-\lambda_{2n} t}}{t^{n-1}} \sum_{\substack{p+q=n \\ 1 \leq p, q \leq n-1}} C_{\mu,1} \frac{n^{\frac{5}{4}+2s}}{p^{\frac{5}{4}+s} q^{\frac{5}{4}+s}} \int_0^t \sigma^{n-2} e^{\lambda_{2n} \sigma} (B_1 p^\beta \delta_1^p) (B_1 q^\beta \delta_1^q) d\sigma \\ &\geq B_1^2 C_{\mu,1} \delta_1^n n^{2\beta - \frac{5}{4}} \left( \frac{1}{n-1} \sum_{\substack{p+q=n \\ 1 \leq p, q \leq n-1}} \left(\frac{p}{n}\right)^{\beta - \frac{5}{4} - s} \left(\frac{q}{n}\right)^{\beta - \frac{5}{4} - s} \right) \\ &\quad \times \left( \frac{e^{-\lambda_{2n} t}}{t^{n-1}} \int_0^t (n-1) \sigma^{n-2} e^{\lambda_{2n} \sigma} d\sigma \right). \end{aligned} \quad (6.14)$$

On minore maintenant le terme somme puis le terme intégral de l'inégalité précédente. On impose la condition sur  $\beta$

$$\beta \geq \frac{5}{4}. \quad (6.15)$$

En utilisant les propriétés des sommes de Riemann, il existe une constante  $C_{s,1} > 0$  telle que pour  $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \frac{1}{n-1} \sum_{\substack{p+q=n \\ 1 \leq p, q \leq n-1}} \left(\frac{p}{n}\right)^{\beta - \frac{5}{4} - s} \left(\frac{q}{n}\right)^{\beta - \frac{5}{4} - s} &\simeq \frac{1}{2} \int_0^1 (x)^{\beta - \frac{5}{4} - s} (1-x)^{\beta - \frac{5}{4} - s} dx \\ &\geq C_{s,1} > 0 \end{aligned} \quad (6.16)$$

car  $\beta - \frac{5}{4} - s > -1$  et donc  $\int_0^1 (x)^{\beta - \frac{5}{4} - s} (1-x)^{\beta - \frac{5}{4} - s} dx < \infty$ .

Pour le terme intégral, on va utiliser le lemme dont la démonstration est donnée plus loin.

**Lemme 6.15.** *On définit pour tout  $t > 0$ ,  $J_n(t) = \frac{e^{-t}}{t^{n-1}} \int_0^t (n-1) \sigma^{n-2} e^\sigma d\sigma$  et  $J_n(0) = 1$ . Alors on a pour tout  $t \geq 0$  l'inégalité :  $1 - \frac{1}{n} t \leq J_n(t) \leq 1$ .*

On pose

$$\begin{aligned}\tilde{J}_n(t) &= \frac{e^{-\lambda_{2n} t}}{t^{n-1}} \int_0^t (n-1) \sigma^{n-2} e^{\lambda_{2n} \sigma} d\sigma \\ &= J_n(\lambda_{2n} t).\end{aligned}$$

En utilisant le lemme, pour  $t \in [0, 1]$

$$\tilde{J}_n(t) \geq 1 - \frac{\lambda_{2n}}{n} t \geq 1 - \frac{\lambda_{2n}}{n}.$$

Avec l'estimation (6.11), on a

$$\frac{\lambda_{2n}}{n} \approx \frac{1}{n^{1-s}} \rightarrow 0$$

car  $0 < s < 1$ . Il existe donc des constantes  $\tilde{C}_{\lambda,1}, \tilde{C}_{\lambda,2} > 0$  strictement positives telles que

$$\forall t \in [0, 1], \quad \tilde{C}_{\lambda,1} \leq \tilde{J}_n(t) \leq \tilde{C}_{\lambda,2}. \quad (6.17)$$

En utilisant les estimations (6.14), (6.16), (6.17) on en déduit

$$\begin{aligned}k_n(t) &\geq B_1^2 C_{\mu,1} \delta_1^n n^{2\beta - \frac{5}{4}} \times C_{s,1} \times \tilde{C}_{\lambda,1} \\ &\geq (B_1 n^\beta \delta_1^n) \times \left( B_1 C_{\mu,1} C_{s,1} \tilde{C}_{\lambda,1} n^{\beta - \frac{5}{4}} \right).\end{aligned}$$

On fixe maintenant  $\beta = \frac{5}{4}$  (ce qui est compatible avec la condition imposée (6.15)) et  $B_1 = 1/(C_{\mu,1} C_{s,1} \tilde{C}_{\lambda,1})$ . On peut alors conclure que

$$k_n(t) \geq B_1 n^\beta \delta_1^n.$$

On peut fixer  $\delta_1 > 0$  assez petit pour l'inégalité (6.13) soit vérifiée. Il suffit (par exemple) de poser  $\delta_1 = \frac{e^{-\lambda_2}}{B_1}$ . On a alors les valeurs de  $B_1$  et  $\delta_1$

$$\begin{aligned}B_1 &= 1/(C_{\mu,1} C_{s,1} \tilde{C}_{\lambda,1}) \\ \delta_1 &= C_{\mu,1} C_{s,1} \tilde{C}_{\lambda,1} e^{-\lambda_2}.\end{aligned}$$

La relation de récurrence (6.12) est vérifiée pour  $n$ , ce qui termine la démonstration de l'estimation inférieure.

La preuve pour l'estimation supérieure est identique. Les constantes  $B_2$  et  $\delta_2$  sont données par

$$B_2 = 1/(C_{\mu,2} C_{s,2}) \tilde{C}_{\lambda,2}$$

$$\delta_2 = \frac{e^{-\lambda_2}}{B_2} = C_{\mu,2} C_{s,2} \tilde{C}_{\lambda,2} e^{-\lambda_2},$$

ce qui conclut la démonstration de la proposition.  $\square$

On donne maintenant la démonstration du lemme précédent.

*Preuve du lemme 6.15.* Pour  $0 < \sigma < t$ , en écrivant  $1 < e^\sigma < e^t$ , on obtient

$$e^{-t} \leq J_n(t) \leq 1$$

et donc pour  $n$  fixé on a  $J_n(t) \rightarrow 1$  quand  $t \rightarrow 0^+$ . En intégrant par partie on obtient

$$\int_0^t (n-1) s^{n-2} e^s ds = t^{n-1} e^t - \int_0^t s^{n-1} e^s ds$$

et donc

$$J_n(t) = 1 - \frac{e^{-t}}{t^{n-1}} \int_0^t s^{n-1} e^s ds$$

$$= 1 - \frac{t}{n} J_{n+1}(t).$$

Le lemme découle alors de l'inégalité  $J_{n+1} \leq 1$  démontrée précédemment.  $\square$





# Chapitre 7

## Algorithmes

On présente dans ce chapitre quelques algorithmes utilisés pour le calcul de la solution spectrale approximée et de la solution BKW dans les cas cutoff et non cutoff. Ils ont été testés sur la version Maple13 et Maple2016.

---

Algorithme 1 : Initialisation (voir (3.4) et (3.5))

---

```
Digits := 20:
```

```
N:=10:
```

```
# Noyau de collision : beta = 2*Pi*sin(theta)*b(cos(theta))
```

```
# beta := (1/2)*sin(theta): theta_max := Pi: # cutoff
```

```
# non cutoff : s:=1/2: beta := 1/sin(theta/2)^(1+2*s):
```

```
theta_max := Pi/2:
```

```
# Maxwellienne mu1 et sa racine carrée mu2
```

```
mu1 := (2*Pi)^(-3/2)*exp(-(1/2)*v^2):
```

```
mu2 := (2*Pi)^(-3/4)*exp(-(1/4)*v^2):
```

---

Algorithme 2 : Condition initiale de la solution BKW (4.1)

---

```
# Solution BKW
fBKW := a1 * ( (2-5*(1-K)) + (1-K)*v^2/K ) * exp(-v^2/(2*K)):
a1 := (1/(2*(2*Pi)^(3/2)*K^(5/2))):
K := 1 - exp(-t/6):

# Calcul de la solution BKW en temps t0 = 5.5
F_ := subs(t=5.5, fBKW):
G_ := simplify(expand( (F_ - mu1)/mu2 ), exp):
```

---

Algorithme 3 : Calcul des vecteurs propres  $\varphi_n(v)$  (2.1)

---

```
for n from 1 to N do
  a1 := sqrt(factorial(n)/(sqrt(2)*GAMMA(n+3/2))):
  f1 := exp(-(1/4)*v^2)*LaguerreL(n,1/2,(1/2)*v^2)/sqrt(4*Pi):
  phi[n] := simplify(a1*f1):
end do:
```

---

Algorithme 4 : Calcul numérique des valeurs propres  $\mu_{p,q}$  et  $\lambda_n$  (2.4)

---

```
mu[0,0] := 0: lambda[0] := 0:
for n from 1 to N do
  # Calcul de mu[0,n]
  f1 := 1 - (cos(theta/2))^(2*n):
  f2 := simplify( beta*f1 ):
  mu[0,n] := - int(f2, theta=10^(-40)..theta_max, numeric):
```

```

# Calcul de mu[p,q], p+q=n, p>0
for p from 1 to n do
  q:=n-p:
  a1 := ( (2*p+2*q+1)! / ((2*p+1)!*(2*q+1)!) )^(1/2):
  f1 := (sin(theta/2))^(2*p) * (cos(theta/2))^(2*q):
  f2 := simplify( beta*f1 ):
  mu[p,q] := evalf(a1) *
  int(f2, theta=10^(-40)..theta_max, numeric):
end do:

# Calcul de lambda[n]
lambda[n] := -(mu[n,0]+mu[0,n]):
end do:

```

---

Algorithme 4-bis : Calcul Symbolique des valeurs propres  $\mu_{p,q}$  et  $\lambda_n$  (2.4)

---

```

mu[0,0] := 0: lambda[0] := 0:
for n from 1 to N do
  # Calcul de mu[0,n]
  f1 := 1 - (cos(theta/2))^(2*n):
  f2 := simplify( beta*f1 ):
  mu[0,n] := - int(f2, theta=0..theta_max):

  # Calcul de mu[p,q], p+q=n, p>0
  for p from 1 to n do
    q:=n-p:

```

```

a1 := ( (2*p+2*q+1)! / ((2*p+1)!*(2*q+1)!) )^(1/2):
f1 := (sin(theta/2))^(2*p) * (cos(theta/2))^(2*q):
f2 := simplify( beta*f1 ):
mu[p,q] := a1 * int(f2, theta=0..theta_max):
end do:

# Calcul de lambda[n]
lambda[n] := -(mu[n,0]+mu[0,n]):
end do:

```

---

Algorithme 5 : Calcul de la condition initiale spectrale  $G_n = (G, \varphi_n)_{L^2(\mathbb{R}^3)}$

---

```

G[0] := 0: G[1] := 0:
for n from 2 to N do
  G[n] := int(G_*phi[n]*4*Pi*v^2, v=0..infinity, numeric):
end do:

```

---

Algorithme 6 : Calcul de la partie non linéaire  $h_n(t)$  (2.10)

---

```

h[0] := 0: h[1] := 0: h[2] := 0: h[3] := 0:
for n from 4 to N do
  h[n] := 0:
  for p from 2 to n-2 do
    q:=n-p:
    a1 := mu[p,q] * exp((lambda[n]-lambda[p]-lambda[q])*t):
    f1 := a1 * (G[p]+h[p]) * (G[q]+h[q]):
    f2 := subs(t = s, f1):

```

```

    f3 := int(f2, s = 0..t):
    h[n] := h[n] + f3:
end do:
end do:

```

---

Algorithme 7 : Calcul des solutions successives approximées (3.2) :

$$\begin{cases} g_n^{\text{approx}}(t, v) = \sum_{k=2}^n e^{-\lambda_k t} (G_k + h_k(t)) \varphi_k(v), \\ f_n(t, v) = \mu(v) + \sqrt{\mu(v)} g_n^{\text{approx}}(t, v) \end{cases}$$


---

```

gapprox[0] := 0:
fapprox[0] := mu1 + mu2 * gapprox[0]:
for n from 1 to N do
    gapprox[n] := gapprox[n-1] +
        exp(-lambda[n]*t)*(G[n]+h[n])*phi[n]:
    fapprox[n] := mu1 + mu2 * gapprox[n]:
end do:

```

---

Algorithme 7-bis : Calcul des solutions successives approximées (3.2) :

$$\begin{aligned} g_n^{\text{lin}}(t, v) &= \sum_{k=2}^n e^{-\lambda_k t} G_k \varphi_k(v), & g_n^{\text{nl}}(t, v) &= \sum_{k=2}^n e^{-\lambda_k t} h_k(t) \varphi_k(v), \\ f_n(t, v) &= \mu(v) + \sqrt{\mu(v)} (g_n^{\text{lin}}(t, v) + g_n^{\text{nl}}(t, v)) \end{aligned}$$


---

```

glin[0] := 0:  gnl[0] := 0:
fapprox[0] := mu1 + mu2 * (glin[0] + gnl[0]):
for n from 1 to N do
    glin[n] := glin[n-1] + exp(-lambda[n]*t)*G[n]*phi[n]:
    gnl[n] := gnl[n-1] + exp(-lambda[n]*t)*h[n]*phi[n]:
    fapprox[n] := mu1 + mu2 * (glin[n] + gnl[n]):
end do:

```

---

Algorithme 8 : Calcul de l'erreur entre la solution spectrale approxime et la solution BKW en  $T = t_0$  ou  $T = t_1$ .

---

```
fBKW_T := subs(t=T, fBKW):
m1 := 0:
for v1 from -4 to 4 by 0.1 do
  a1 := evalf(subs(v=v1, fBKW_T):
  m1 := max(m1,a1):
end do:
fBKW_max := m1:

f_T := subs(t=T, fapprox[n]):
for n from 4 to N do
  m1 := 0:
  for v1 from -4 to 4 by 0.1 do
    a1 := evalf(subs(v=v1, abs(f_T - fBKW_T)):
    m1 := max(m1,a1):
  end do:
  erreur[n] := m1/fBKW_max:
end do:
```

# Chapitre 8

## Annexes

### 8.1 Identité de Bobylev

Pour plus d'information sur la démonstration de la proposition ci-dessous, voir [9, 22].

**Proposition 8.1.** *On a*

$$\mathcal{F}[Q(g, f)(v)](\xi) = \int_{\mathbb{S}^{N-1}} b\left(\frac{\xi}{|\xi|} \cdot \sigma\right) \left\{ \hat{g}(\xi^-) \hat{f}(\xi^+) - \hat{g}(0) \hat{f}(\xi) \right\} d\sigma.$$

où

$$\xi^+ = \frac{\xi + |\xi| \sigma}{2}, \quad \xi^- = \frac{\xi - |\xi| \sigma}{2}.$$

*Preuve.* On rappelle que le terme de collision est donné par

$$Q(g, f)(v) = \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{S}^{N-1}} b\left(\frac{v - v_*}{|v - v_*|} \cdot \sigma\right) \{g(v'_*) f(v') - g(v_*) f(v)\} dv_* d\sigma.$$

On démontre la propriété dans le cas cutoff. On peut donc écrire

$$Q(f, g)(v) = Q_+(f, g)(v) - Q_-(f, g)(v)$$



avec

$$Q_+(g, f)(v) = \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{S}^{N-1}} b\left(\frac{v - v_*}{|v - v_*|} \cdot \sigma\right) g(v'_*) f(v') dv_* d\sigma,$$

$$Q_-(f, g)(v) = \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{S}^{N-1}} b\left(\frac{v - v_*}{|v - v_*|} \cdot \sigma\right) g(v_*) f(v) dv_* d\sigma.$$

On démontre d'abord que

$$\mathcal{F}[Q_-(g, f)(v)](\xi) = \int_{\mathbb{S}^{N-1}} b\left(\frac{\xi}{|\xi|} \cdot \sigma\right) \hat{g}(0) \hat{f}(\xi) d\sigma.$$

En effet, d'après Fubini

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[Q_-(g, f)(v)](\xi) &= \int_{\mathbb{R}_v^N} Q_-(g, f)(v) e^{-iv \cdot \xi} dv \\ &= \int_{\mathbb{R}_v^N} e^{-iv \cdot \xi} \left( \int_{\mathbb{R}_{v_*}^N} \int_{\mathbb{S}^{N-1}} b\left(\frac{v - v_*}{|v - v_*|} \cdot \sigma\right) g(v_*) f(v) dv_* d\sigma \right) dv \\ &= \int_{\mathbb{R}_v^N} e^{-iv \cdot \xi} f(v) \left( \int_{\mathbb{R}_{v_*}^N} \underbrace{\left[ \int_{\mathbb{S}^{N-1}} b\left(\frac{v - v_*}{|v - v_*|} \cdot \sigma\right) d\sigma \right]}_{=\text{constant}} g(v_*) dv_* \right) dv. \end{aligned}$$

En utilisant le changement de variable  $\sigma = S(\tilde{\sigma})$  et que  $S(u) \cdot S(v) = u \cdot v$  pour  $u, v \in \mathbb{S}^{N-1}$  où  $S$  est la symétrie orthogonale, il est facile de vérifier que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^{N-1}} b\left(\frac{v - v_*}{|v - v_*|} \cdot \sigma\right) d\sigma &= \int_{\mathbb{S}^{N-1}} b(e_1 \cdot \sigma) d\sigma \\ &= \int_{\mathbb{S}^{N-1}} b\left(\frac{\xi}{|\xi|} \cdot \sigma\right) d\sigma \end{aligned}$$

avec  $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ . On remarque que c'est indépendant de  $v_*$ , donc d'après Fubini

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[Q_-(g, f)(v)](\xi) &= \\ &= \left( \int_{\mathbb{S}^{N-1}} b(e_1 \cdot \sigma) d\sigma \right) \left( \int_{\mathbb{R}_{v_*}^N} g(v_*) dv_* \right) \left( \int_{\mathbb{R}_v^N} e^{-iv \cdot \xi} f(v) dv \right) \\ &= \int_{\mathbb{S}^{N-1}} b\left(\frac{\xi}{|\xi|} \cdot \sigma\right) \hat{g}(0) \hat{f}(\xi) d\sigma. \end{aligned}$$

On démontre ensuite que

$$\mathcal{F}[Q_+(g, f)(v)](\xi) = \int_{\mathbb{S}^{N-1}} b\left(\frac{\xi}{|\xi|} \cdot \sigma\right) \hat{g}(\xi^-) \hat{f}(\xi^+) d\sigma.$$

Soit  $\varphi$  une fonction test. On fait le changement de variables suivant:

$$\begin{cases} v \longrightarrow v' = \frac{v+v_*}{2} + \frac{|v-v_*|}{2}\sigma, \\ v_* \longrightarrow v'_* = \frac{v+v_*}{2} - \frac{|v-v_*|}{2}\sigma. \end{cases}$$

on peut écrire

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} Q_+(g, f)(v) \varphi(v) dv &= \\ \int_{\mathbb{R}_v^N} \left( \int_{\mathbb{R}_{v_*}^N} \int_{\mathbb{S}^{N-1}} B\left(|v-v_*|, \frac{v-v_*}{|v-v_*|} \cdot \sigma\right) g(v'_*) f(v') dv_* d\sigma \right) \varphi(v) dv &= \\ = \int_{\mathbb{R}_v^N \times \mathbb{R}_{v_*}^N \times \mathbb{S}^{N-1}} B\left(|v-v_*|, \frac{v-v_*}{|v-v_*|} \cdot \sigma\right) g(v_*) f(v) dv dv_* d\sigma \end{aligned}$$

On prend une fonction test particulière :  $\varphi(v) = e^{-i v \cdot \xi}$ . Alors

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} Q_+(g, f)(v) e^{-i v \cdot \xi} dv &= \\ \int_{\mathbb{R}_v^N \times \mathbb{R}_{v_*}^N \times \mathbb{S}^{N-1}} B\left(|v-v_*|, \frac{v-v_*}{|v-v_*|} \cdot \sigma\right) g(v_*) f(v) e^{-i v' \cdot \xi} dv dv_* d\sigma. \end{aligned}$$

D'après les formules des vitesses, on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[Q_+(g, f)(v)](\xi) &= \int_{\mathbb{R}_v^N \times \mathbb{R}_{v_*}^N \times \mathbb{S}^{N-1}} B\left(|v-v_*|, \frac{v-v_*}{|v-v_*|} \cdot \sigma\right) g(v_*) f(v) \\ &\quad \times e^{-i \frac{v+v_*}{2} \cdot \xi} e^{-i \frac{|v-v_*|}{2} \sigma \cdot \xi} dv dv_* d\sigma. \end{aligned}$$

On note que (en raison de l'existence d'une isométrie sur  $\mathbb{S}^{N-1}$  échangeant  $\ell$  et  $k$ )

$$\int_{\mathbb{S}^{N-1}} F(k \cdot \sigma, \ell \cdot \sigma) d\sigma = \int_{\mathbb{S}^{N-1}} F(\ell \cdot \sigma, k \cdot \sigma) d\sigma, \quad |\ell| = |k| = 1.$$

On choisit  $k = \frac{v-v_*}{|v-v_*|}$  et  $\ell = \frac{\xi}{|\xi|}$ . D'où

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[Q_+(g, f)(v)](\xi) &= \int_{\mathbb{R}_v^N \times \mathbb{R}_{v_*}^N \times \mathbb{S}^{N-1}} g(v_*) f(v) B\left(|v-v_*|, \frac{\xi}{|\xi|} \cdot \sigma\right) \\ &\quad \times e^{-i\xi \cdot \frac{v+v_*}{2}} e^{-i|\xi| \sigma \cdot \frac{v-v_*}{2}} dv dv_* d\sigma \\ &= \int_{\mathbb{R}_v^N \times \mathbb{R}_{v_*}^N \times \mathbb{S}^{N-1}} g(v_*) f(v) B\left(|v-v_*|, \frac{\xi}{|\xi|} \cdot \sigma\right) \\ &\quad \times e^{-i v \cdot \xi^+} e^{-i v_* \cdot \xi^-} dv dv_* d\sigma. \end{aligned}$$

On rappelle la définition de la transformation de Fourier inverse

$$f(v) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} \hat{f}(\eta) e^{i v \cdot \eta} d\eta.$$

Par Fubini, on aura

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[Q_+(g, f)(v)](\xi) &= \\ &\frac{1}{(2\pi)^{2N}} \int_{\mathbb{S}^{N-1} \times \mathbb{R}_\eta^N \times \mathbb{R}_{\eta_*}^N} \hat{g}(\eta_*) \hat{f}(\eta) \times \\ &\left[ \int_{\mathbb{R}_v^N \times \mathbb{R}_{v_*}^N} B\left(|v-v_*|, \frac{\xi}{|\xi|} \cdot \sigma\right) e^{i v_* \cdot (\eta_* - \xi^-)} e^{i v \cdot (\eta - \xi^+)} dv dv_* \right] d\sigma d\eta d\eta_*. \end{aligned}$$

Si  $X = \int_{\mathbb{R}_v^N \times \mathbb{R}_{v_*}^N} B\left(|v-v_*|, \frac{\xi}{|\xi|} \cdot \sigma\right) e^{i v_* \cdot (\eta_* - \xi^-)} e^{i v \cdot (\eta - \xi^+)} dv dv_*$  et si on prend le changement de variable  $q = v - v_*$ , on déduit d'après Fubini que

$$\begin{aligned} X &= \int_{\mathbb{R}_q^N \times \mathbb{R}_v^N} B\left(|q|, \frac{\xi}{|\xi|} \cdot \sigma\right) e^{i v \cdot (\eta_* + \eta - \xi^- - \xi^+)} e^{-i q \cdot (\eta_* - \xi^-)} dq dv \\ &= \int_{\mathbb{R}_q^N} B\left(|q|, \frac{\xi}{|\xi|} \cdot \sigma\right) e^{-i q \cdot (\eta_* - \xi^-)} dq \times \int_{\mathbb{R}_v^N} e^{i v \cdot (\eta_* + \eta - \xi^- - \xi^+)} dv. \end{aligned}$$

En outre, si  $\xi = \eta_* - \xi^-$  et comme  $\xi^- + \xi^+ = \xi$ , on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_q^N} B\left(|q|, \frac{\xi}{|\xi|} \cdot \sigma\right) e^{-i q \cdot (\eta_* - \xi^-)} dq &= \mathcal{F}[B(|\xi|, \cos \theta)](\xi) \\ \int_{\mathbb{R}_v^N} e^{i v \cdot (\eta_* + \eta - \xi^- - \xi^+)} dv &= (2\pi)^N \delta[\eta = \xi - \eta_*] \\ X &= (2\pi)^N \mathcal{F}\left[B(|\eta_* - \xi^-|, \frac{\xi}{|\xi|} \cdot \sigma)\right](\xi) \delta[\eta = \xi - \eta_*]. \end{aligned}$$

Si on prend  $\xi_* = \eta_* - \xi^-$  or comme  $\xi^- + \xi^+ = \xi$ , on peut écrire

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[Q_+(g, f)(v)](\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{S}^{N-1} \times \mathbb{R}_\eta^N \times \mathbb{R}_{\eta_*}^N} \hat{g}(\eta_*) \hat{f}(\eta) \\ &\quad \times \mathcal{F}\left[B(|\eta_* - \xi^-|, \frac{\xi}{|\xi|} \cdot \sigma)\right](\xi) \delta[\eta = \xi - \eta_*] d\sigma d\eta d\eta_* \\ &= \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{S}^{N-1} \times \mathbb{R}_{\xi_*}^N} \hat{g}(\xi_* + \xi^-) \hat{f}(\xi^+ - \xi_*) \\ &\quad \times \mathcal{F}\left[B(|\xi_*|, \frac{\xi}{|\xi|} \cdot \sigma)\right](\xi) d\sigma d\xi_*. \end{aligned}$$

On rappelle que notre travail est réduit au cas Maxwellian, cela signifie que le noyau  $B$  ne dépend pas de  $|\cdot|$ , on a donc  $B(|z|, \cos \theta) = b(\cos \theta)$  et

$$\mathcal{F}[B(|\xi_*|, \cos \theta)](\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} B(|z|, \cos \theta) e^{-iz \cdot \xi_*} dz = (2\pi)^N \delta[\xi_* = 0] b(\cos \theta).$$

Finalement,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[Q_+(g, f)(v)](\xi) &= \int_{\mathbb{S}^{N-1}} \hat{g}(\xi^-) \hat{f}(\xi^+) b(\cos \theta) d\sigma \\ &= \int_{\mathbb{S}^{N-1}} \hat{g}(\xi^-) \hat{f}(\xi^+) b\left(\frac{\xi}{|\xi|} \cdot \sigma\right) d\sigma. \end{aligned}$$

□

## 8.2 Quelques résultats sur les harmoniques sphériques

On rappelle que

$$\varphi_n(v) = \left(\frac{n!}{\sqrt{2}\Gamma(n+3/2)}\right)^{1/2} e^{-\frac{|v|^2}{4}} L_n^{[\frac{1}{2}]} \left(\frac{|v|^2}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

où le polynôme de Laguerre  $L_n^{[\alpha]}$  d'ordre  $\alpha$ , de degré  $n$  est

$$L_n^{[\alpha]}(x) = \sum_{r=0}^n (-1)^{n-r} \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{r!(n-r)!\Gamma(\alpha+n-r+1)} x^{n-r}.$$

**Lemme 8.2.** *Pour  $a > 0$  et  $n \geq 0$ , on a*

$$\begin{aligned}\varphi_n(0) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{4}}} \left( \frac{(2n+1)!}{2^{2n}(n!)^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \\ \int_{\mathbb{R}^3} \varphi_n(v) dv &= (-1)^n 2^3 \pi^{\frac{3}{2}} \varphi_n(0), \\ (\sqrt{\mu(a)}, \varphi_n)_{L^2} &= (2^{\frac{9}{4}} \pi^{\frac{3}{4}}) \varphi_n(0) \frac{(1-a^2)^n}{(1+a^2)^{n+3/2}}.\end{aligned}$$

*Preuve.* Ces égalités sont des propriétés classiques des fonctions d'Hermitte (on les a vérifiées en utilisant Maple<sup>®</sup>13 pour les entiers  $n \leq 20$ ).  $\square$

**Lemme 8.3.** [43] *Soit  $\xi \in \mathbb{R}^3$  et  $\Phi_n(\xi) = \mathcal{F}(\sqrt{\mu} \varphi_n)(\xi)$ . Alors*

$$\Phi_n(\xi) = \frac{1}{\sqrt{(2n+1)!}} |\xi|^{2n} e^{-\frac{1}{2}|\xi|^2}.$$

*Preuve.* On donne la démonstration faite par Lerner, Morimoto, Pravda-Starov et Xu [43].

C'est équivalent à démontrer que

$$\sqrt{\mu(v)} \varphi_n(v) = \mathcal{F}^{-1} \left( \frac{1}{\sqrt{(2n+1)!}} |\xi|^{2n} e^{-\frac{1}{2}|\xi|^2} \right).$$

On admet la formule standard suivante : pour  $x > 0$ , on a

$$L_n^{\left[\frac{1}{2}\right]}(x) = \frac{e^x x^{-\frac{1}{4}}}{n!} \int_0^\infty t^{n+\frac{1}{4}} J_{\frac{1}{2}}(2\sqrt{xt}) e^{-t} dt$$

(voir par exemple Andrews, Askey, Roy [2], (6.2.15) chapitre 6) où  $J_{\frac{1}{2}}$  est la fonction de Bessel définie par

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x = \sqrt{\frac{x}{2\pi}} \int_0^\pi e^{ix \cos \theta} \sin \theta d\theta.$$

Les fonctions  $\varphi_n(v)$  (2.1) peuvent donc s'écrire à partir de la fonction de Bessel par la formule

$$\varphi_n(v) = \frac{e^{\frac{|v|^2}{4}} |v|^{-\frac{1}{2}}}{2\sqrt{\pi} \Gamma(n + \frac{3}{2}) n!} \int_0^\infty t^{n+\frac{1}{4}} J_{\frac{1}{2}}(|v| \sqrt{2t}) e^{-t} dt.$$

On prend maintenant le changement de variable  $y = \sqrt{2t}$ , on obtient

$$\varphi_n(v) = \frac{e^{\frac{|v|^2}{4}} |v|^{-\frac{1}{2}}}{2^{n+\frac{5}{4}} \sqrt{\pi} \Gamma(n + \frac{3}{2}) n!} \int_0^\infty y^{2n+\frac{3}{2}} J_{\frac{1}{2}}(|v|y) e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

c'est à dire

$$\begin{aligned} \sqrt{\mu(v)} \varphi_n(v) &= \frac{|v|^{-\frac{1}{2}}}{2^{n+2} \pi^{\frac{5}{4}} \sqrt{\Gamma(n + \frac{3}{2})} n!} \int_0^\infty y^{2n+\frac{3}{2}} J_{\frac{1}{2}}(|v|y) e^{-\frac{y^2}{2}} dy \\ &= \frac{|v|^{-\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{(2n+1)!}} \int_0^\infty y^{2n+\frac{3}{2}} J_{\frac{1}{2}}(|v|y) e^{-\frac{y^2}{2}} dy \end{aligned}$$

puisque  $\Gamma(n + \frac{3}{2}) = \Gamma(n+1 + \frac{1}{2}) = \frac{(2n+1)!}{2^{2n+1} n!} \sqrt{\pi}$  (une des propriétés de la fonction gamma). D'autre part, la transformation de Fourier inverse s'exprime aussi à partir de la fonction de Bessel : si on prend les coordonnées sphériques ( $r = |\xi|, \theta, \phi$ ) avec  $\theta \in [0, \pi]$  et  $\phi \in [0, 2\pi]$ , on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1} \left( \frac{1}{\sqrt{(2n+1)!}} |\xi|^{2n} e^{-\frac{1}{2} |\xi|^2} \right) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{\sqrt{(2n+1)!}} |\xi|^{2n} e^{-\frac{1}{2} |\xi|^2} e^{i v \cdot \xi} d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3 \sqrt{(2n+1)!}} \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^{2n} e^{-\frac{r^2}{2}} e^{i |v| r \cos \theta} |J(r, \theta, \phi)| dr d\theta d\phi \\ &= \frac{|v|^{-\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{(2n+1)!}} \int_0^\infty r^{2n+\frac{3}{2}} J_{\frac{1}{2}}(|v|r) e^{-\frac{r^2}{2}} dr \end{aligned}$$

puisque le déterminant du jacobien de cette transformation  $J(r, \theta, \phi)$  est égale à  $-r^2 \sin \theta$ . Ce qui conclut la démonstration.  $\square$

### 8.3 Propriétés des polynômes d'Hermite

Les polynômes d'Hermite  $H_n$  sont une suite de polynômes qui peuvent être définis en deux formes : physique et probabiliste. On s'intéresse à la forme physique : pour  $x \in \mathbb{R}$ ,  $H_n$  est défini par

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}.$$

**Orthogonalité.** La  $n$ -ième fonction de la suite est un polynôme de degré  $n$ . Ces polynômes sont orthogonaux pour la mesure  $e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ , c'est à dire que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x) H_m(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx = n! \sqrt{2\pi} \delta_{nm}$$

où  $\delta_{nm}$  est le symbole de Kronecker, qui vaut 1 quand  $n = m$  et 0 sinon. Ces fonctions forment une base orthogonale de  $L^2(\mathbb{C})$  où les fonctions satisfont la propriété suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx < +\infty$$

dans laquelle le produit scalaire est donné par l'intégrale

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \overline{g(x)} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

**Relation avec  $\varphi_n$ .** Les polynômes de Laguerre généralisés apparaissent dans le traitement de l'oscillateur harmonique quantique, à cause de leur relation aux polynômes d'Hermite, qui peuvent être exprimés par

$$H_{2n+1}(x) = (-1)^n 2^{2n+1} n! x L_n^{[\frac{1}{2}]}(x^2).$$

Ce qui nous permet d'écrire

$$\varphi_n(v) = \frac{(-1)^n}{2^{2n+\frac{7}{4}} (n! \pi \Gamma(n + 3/2))^{\frac{1}{2}}} \frac{H_{2n+1}(|v|/\sqrt{2})}{|v|} e^{-\frac{|v|^2}{4}}$$

et par conséquent,  $(\varphi_n)_{n \geq 0}$  forme une base orthonormale de  $L_r^2(\mathbb{R}^3)$ .

## 8.4 Oscillateur harmonique quantique

On définit les polynômes d'Hermite-Gauss  $(\phi_n)_{n \geq 0}$  pour  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\phi_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2^n n! \pi}} e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}) = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \pi}} \left( x - \frac{d}{dx} \right)^n (e^{-\frac{x^2}{2}})$$

qui forment une base orthonormale de  $L^2(\mathbb{R})$ .

Pour  $\alpha \in \mathbb{N}^3$  un multi-indice et  $v \in \mathbb{R}^3$ , on pose

$$\Psi_\alpha(v) = \psi_{\alpha_1}(v_1)\psi_{\alpha_2}(v_2)\psi_{\alpha_3}(v_3)$$

avec  $\psi_n(x) = 2^{-\frac{1}{4}} \phi_n(2^{-\frac{1}{4}} x)$ . Ces polynômes sont des vecteurs propres de l'opérateur  $\mathcal{H}^{\frac{k}{2}}$  pour  $k \in \mathbb{N}$  où  $\mathcal{H}$  est l'oscillateur harmonique en dimension 3

$$\mathcal{H} = -\Delta + \frac{|v|^2}{4}.$$

Plus précisément, on a

$$\mathcal{H}^{\frac{k}{2}} \Psi_\alpha = (\lambda_\alpha)^{\frac{k}{2}} \Psi_\alpha, \quad \lambda_\alpha = \sum_{j=1}^3 (\alpha_j + \frac{1}{2}).$$

L'espace symétrique de Gelfand-Shilov  $S'_\nu(\mathbb{R}^3)$  peut être caractérisé par sa décomposition dans la base des polynômes d'Hermite-Gauss  $(\Psi_\alpha)_\alpha$

$$\begin{aligned} f \in S'_\nu(\mathbb{R}^3) &\Leftrightarrow f \in C^\infty(\mathbb{R}^3), \exists \tau > 0, \|e^{\tau \mathcal{H}^{\frac{1}{2\nu}}} f\|_{L^2} < +\infty \\ &\Leftrightarrow f \in L^2(\mathbb{R}^3), \exists \epsilon_0 > 0, \left\| \left( e^{\epsilon_0 |\alpha|^{\frac{1}{2\nu}}} (f, \Psi_\alpha)_{L^2} \right)_{\alpha \in \mathbb{N}^3} \right\|_{l^2} < +\infty \\ &\Leftrightarrow \exists C > 0, A > 0, \|(-\Delta + \frac{|v|^2}{4})^{\frac{k}{2}} f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq AC^k (k!)^\nu, \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Pour plus de détails, voir le théorème 2.1 dans [40].

## 8.5 Fonctions spéciales

On rappelle certaines propriétés des fonctions "Beta" et "Gamma".

(1) Fonction Gamma :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$



(2) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$

$$\Gamma(n) = (n - 1)!.$$

(3) Fonction Beta :

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

(4) Pour tout  $p, q \in \mathbb{N}$

$$B(p+1, q+1) = \int_0^1 t^p(1-t)^q dt = \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+2)} = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}.$$

(5) Intégrales de Wallis  $W_n$  : pour tout  $n \geq 0$

$$\begin{aligned} W_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \theta d\theta \\ &= \frac{1}{2} B\left(\frac{n+1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}. \end{aligned}$$

(6) Pour tout  $x > 0$

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

(7) Équivalent de Stirling :

$$n! = \Gamma(n+1) \sim_{+\infty} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

(8) Formules de duplication :

$$\begin{aligned} \Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right)\Gamma(x) &= \sqrt{\pi} 2^{1-2x} \Gamma(2x) \\ \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) &= \frac{(2n)!}{2^{2n}n!} \sqrt{\pi} \\ \Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right) &= 2^{1-2x} \sqrt{\pi x} \frac{\Gamma(2x)}{\Gamma(x)}. \end{aligned}$$

## 9 Références

- [1] R. Alexandre, Y. Morimoto, S. Ukai, C.-J. Xu, and T. Yang. Regularizing effect and local existence for the non-cutoff Boltzmann equation. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 198(1):39–123, 2010.
- [2] G. E. Andrews, R. Askey, and R. Roy. Special functions. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 71, *Cambridge University Press, Cambridge* (1999).
- [3] A. Povzner. The boltzmann equation in the kinetic theory of gases. *Amer. Math. Soc. Trans.*, 47(2):193–214, 1965.
- [4] L. Arkeryd. On the boltzmann equation. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 45:1–34, 1972.
- [5] L. Arkeryd. Intermolecular forces of infinite range and the boltzmann equation. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 77:11–21, 1981.
- [6] L. Arkeryd. Asymptotic behaviour of the boltzmann equation with infinite range forces. *Comm. Math. Phys.*, 86:475–484, 1982.
- [7] G. A. Bird. *Molecular gas dynamics and the direct simulation of gas flows*, volume 42 of *Oxford Engineering Science Series*. The Clarendon

Press, Oxford University Press, New York, 1995. Corrected reprint of the 1994 original, With 1 IBM-PC floppy disk (3.5 inch; DD), Oxford Science Publications.

- [8] A. V. Bobylev. Exact solutions of the Boltzmann equation. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 225(6):1296–1299, 1975.
- [9] A. V. Bobylev. Exact solutions of the nonlinear Boltzmann equation and the theory of relaxation of a Maxwell gas. *Teoret. Mat. Fiz.*, 60(2):280–310, 1984.
- [10] A. V. Bobylev. The theory of the nonlinear spatially uniform Boltzmann equation for Maxwell molecules. In *Mathematical physics reviews, Vol. 7*, volume 7 of *Soviet Sci. Rev. Sect. C Math. Phys. Rev.*, pages 111–233. Harwood Academic Publ., Chur, 1988.
- [11] A. V. Bobylev, A. Palczewski, and J. Schneider. On approximation of the Boltzmann equation by discrete velocity models. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 320(5):639–644, 1995.
- [12] A. V. Bobylev and S. Rjasanow. Difference scheme for the Boltzmann equation based on the fast Fourier transform. *European J. Mech. B Fluids*, 16(2):293–306, 1997.
- [13] L. Boltzmann. Weitere studien über das wärme gleichgewicht unfer gas-moläkuler. *Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften*, 66:275–370, 1872.
- [14] C. Buet, S. Cordier, and P. Degond. Regularized Boltzmann opera-

- tors. *Comput. Math. Appl.*, 35(1-2):55–74, 1998. Simulation methods in kinetic theory.
- [15] Z. Cai, Y. Fan, and L. Ying. Entropy monotonic spectral method for boltzmann equation. *arXiv:1704.07369v1 [math.NA]*, April 2017.
- [16] T. Carleman. Problèmes mathématiques dans la théorie cinétique des gaz. *Almqvist Wiksell*, 1957.
- [17] C. Cercignani. *The Boltzmann equation and its applications*, volume 67 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1988.
- [18] C. W. Chang and G. Uhlenbeck. On the propagation of sound in monatomic gases. *Univ. of Michigan Press. Ann Arbor, Michigan. Reprinted in 1970 in Studies in Statistical Mechanics. Vol. V. Edited by J.L. Lebowitz and E. Montroll, North-Holland*, 1970.
- [19] L. Desvillettes. About the regularizing properties of the non-cut-off Kac equation. *Comm. Math. Phys.*, 168(2):417–440, 1995.
- [20] L. Desvillettes. Regularization for the non-cutoff 2D radially symmetric Boltzmann equation with a velocity dependent cross section. *Transport Theory Statist. Phys.*, 25(3-5):383–394, 1996.
- [21] L. Desvillettes. Regularization properties of the 2-dimensional non-radially symmetric non-cutoff spatially homogeneous Boltzmann equation for Maxwellian molecules. *Transport Theory Statist. Phys.*, 26(3) : 341–357, 1997.

- [22] L. Desvillettes. About the use of the Fourier transform for the Boltzmann equation. *Riv. Mat. Univ. Parma* (7), 2\*:1–99, 2003. Summer School on “Methods and Models of Kinetic Theory” (M&MKT 2002).
- [23] L. Desvillettes and F. Golse. On the smoothing properties of a model boltzmann equation without grad’s cutoff assumption. *Proceedings of the 21st International Symposium on Rarefied Gas Dynamics, R. Brun, R. Campargue, R. Gatignol et J.-C. Lengrand éditeurs, Cépaduès éditions, Toulouse*, 1:47–54, 1999.
- [24] L. Desvillettes and F. Golse. On a model boltzmann equation without angular cutoff. *Diff. Int. Eq.*, 13:567–594, 2000.
- [25] L. Desvillettes and B. Wennberg. Smoothness of the solution of the spatially homogeneous Boltzmann equation without cutoff. *Comm. Partial Differential Equations*, 29(1-2):133–155, 2004.
- [26] G. Dimarco and L. Pareschi. Numerical methods for kinetic equations. *Acta Numer.*, 23:369–520, 2014.
- [27] E. Dolera. On the spectrum of the linearized boltzmann collision operator for maxwellian molecules. *Boll. Unione Mat. Ital.* (9), 46:67–105, 2010.
- [28] T. Elmroth. Global boundedness of moments of solutions of the boltzmann equation for forces of infinite range. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 82:1–12, 1983.
- [29] F. Filbet, C. Mouhot, and L. Pareschi. Solving the Boltzmann equation in  $N \log_2 N$ . *SIAM J. Sci. Comput.*, 28(3):1029–1053, 2006.

- [30] I. M. Gamba, J. R. Haack, C. D. Hauck, and J. Hu. A fast spectral method for the Boltzmann collision operator with general collision kernels. *SIAM J. Sci. Comput.*, 39(4):B658–B674, 2017.
- [31] L. Gnanou and I. Jirad. Numerical computation for the non-cutoff radially symmetric homogeneous Boltzmann equation. *Submitted to Communications in Mathematical Sciences*, July 2017.
- [32] L. Gnanou, H.-G. Li, and C.-J. Xu. Sharp regularity properties for the non-cutoff spatially homogeneous Boltzmann equation. *Kinet. Relat. Models*, 9(2):299–371, 2016.
- [33] D. Goldstein, B. Sturtevant, and J. Broadwell. Investigations of the motion of discrete-velocity gases. *Progress in Astronautics and Aeronautics*, 117:100–117, 1989.
- [34] P.-T. Gressman and R.-M. Strain. Global classical solutions of the Boltzmann equation without angular cut-off. *J. Amer. Math. Soc.*, 24(3):771–847, 2011.
- [35] Hiroshi Tanaka. Probabilistic treatment of the Boltzmann equation of Maxwellian molecules. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, 46(1978), 67-105.
- [36] G. Toscani and C. Villani. Probability metrics and uniqueness of the solution to the Boltzmann equations for Maxwell gas. *J. Statist. Phys.*, 94 (1999), 619-637.
- [37] T. Gustafsson. Global  $l^p$ -properties for the spatially homogeneous Boltzmann equation. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 103:1–38, 1988.

- [38] M. Krook and T. Wu. Exact solutions of the boltzmann equation. *The Physics of Fluids*, 20(10):1589–1595, 1977.
- [39] L.Desvillettes. Some applications of the method of moments for the homogeneous boltzmann equation. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 123(4):387–395, 1993.
- [40] T. Gramchev , S. Pilipović, L. Rodino. Classes of degenerate elliptic operators in Gelfand-Shilov spaces. New Developments in Pseudo-Differential Operators. *Birkhäuser Basel*, 2009(189): 15-31.
- [41] N. Lerner, Y. Morimoto, K. Pravda-Starov, and C.-J. Xu. Phase space analysis and functional calculus for the linearized Landau and Boltzmann operators. *Kinet. Relat. Models*, 6(3):625–648, 2013.
- [42] N. Lerner, Y. Morimoto, K. Pravda-Starov, and C.-J. Xu. Spectral and phase space analysis of the linearized non-cutoff Kac collision operator. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 100(6):832–867, 2013.
- [43] N. Lerner, Y. Morimoto, K. Pravda-Starov, and C.-J. Xu. Gelfand-Shilov smoothing properties of the radially symmetric spatially homogeneous Boltzmann equation without angular cutoff. *J. Differential Equations*, 256(2):797–831, 2014.
- [44] S. Mischler and B. Wennberg. On the spatially homogeneous boltzmann equation. *Annales de l’institut Henri Poincaré, Analyse Non Linéaire*, 16(4):497–501, 1999.
- [45] C. Mouhot and L. Pareschi. Fast algorithms for computing the Boltzmann collision operator. *Math. Comp.*, 75(256):1833–1852, 2006.

- [46] V. A. Panferov and A. G. Heintz. A new consistent discrete-velocity model for the Boltzmann equation. *Math. Methods Appl. Sci.*, 25(7):571–593, 2002.
- [47] L. Pareschi and B. Perthame. A Fourier spectral method for homogeneous Boltzmann equations. In *Proceedings of the Second International Workshop on Nonlinear Kinetic Theories and Mathematical Aspects of Hyperbolic Systems (Sanremo, 1994)*, volume 25, pages 369–382, 1996.
- [48] L. Pareschi and G. Russo. Numerical solution of the Boltzmann equation. I. Spectrally accurate approximation of the collision operator. *SIAM J. Numer. Anal.*, 37(4):1217–1245, 2000.
- [49] F. Rogier and J. Schneider. A direct method for solving the Boltzmann equation. *Transport Theory Statist. Phys.*, 23(1-3):313–338, 1994.
- [50] C. Villani. On a new class of weak solutions to the spatially homogeneous Boltzmann and Landau equations. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 143(3):273–307, 1998.
- [51] C. Villani. A review of mathematical topics in collisional kinetic theory. In *Handbook of mathematical fluid dynamics, Vol. I*, pages 71–305. North-Holland, Amsterdam, 2002.
- [52] B. Wennberg. On moments and uniqueness for solutions to the space homogeneous boltzmann equation. *Transp. Theory. Stat. Phys.*, 24(4):533–539, 1994.
- [53] B. Wennberg. Regularity in the Boltzmann equation and the Radon



transform. *Comm. Partial Differential Equations*, 19(11-12):2057–2074,  
1994.