



**HAL**  
open science

# Imagerie électromagnétique 2D par inversion des formes d'ondes complètes : Approche multiparamètres sur cas synthétiques et données réelles

Hugo Pinard

► **To cite this version:**

Hugo Pinard. Imagerie électromagnétique 2D par inversion des formes d'ondes complètes : Approche multiparamètres sur cas synthétiques et données réelles. Sciences de la Terre. Université Grenoble Alpes, 2017. Français. NNT : 2017GREAU041 . tel-01830657

**HAL Id: tel-01830657**

**<https://theses.hal.science/tel-01830657v1>**

Submitted on 5 Jul 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## THÈSE

Pour obtenir le grade de

### **DOCTEUR DE LA COMMUNAUTÉ UNIVERSITÉ GRENOBLE ALPES**

Spécialité : **Sciences de la Terre et de l'Univers et de  
l'Environnement (CESTUE)**

Arrêté ministériel : 25 mai 2016

Présentée par

**Hugo PINARD**

Thèse dirigée par **Stéphane Garambois et Ludovic Métivier**

préparée au sein du **Laboratoire Institut des Sciences de la Terre**  
dans l'**Ecole doctorale Terre, Univers, Environnement**

## **Imagerie électromagnétique 2D par inversion des formes d'ondes complètes**

Approche multiparamètres sur cas synthétiques  
et données réelles

Thèse soutenue publiquement le **20 décembre 2017** ,  
devant le jury composé de :

**Madame Albane Saintenoy**

Maître de conférences, Université Paris Sud Orsay, Rapporteur

**Monsieur Jean-François Girard**

Professeur, Université de Strasbourg, Rapporteur

**Monsieur Denis Jongmans**

Professeur, Université Grenoble-Alpes, Président

**Monsieur Guy Sénéchal**

Maître de conférences, Université de Pau et des Pays de l'Adour,  
Examineur

**Monsieur Stéphane Garambois**

Professeur, Université Grenoble-Alpes, Directeur de thèse

**Monsieur Ludovic Métivier**

Chargé de Recherche, CNRS délégation Alpes, Directeur de thèse





# Remerciements

N'ayant que peu de temps pour bien réfléchir à ces remerciements, je serai bref et je ferai de mon mieux pour n'oublier personne.

Pour commencer, je remercie mes directeurs de thèse (Stéphane et Ludovic) qui m'ont donné ma chance et permis de débiter cette thèse, au sein du Laboratoire ISTerre, ainsi que de m'avoir suivi durant ces quatre années ... assez mouvementées.

Je remercie les membres du Jury d'avoir accepté de tenir ce rôle et donc d'avoir pris le temps de lire mon manuscrit puis de s'être déplacé à Grenoble pour assister à ma soutenance.

Je remercie les sponsors du Consortium SEISCOPE. Bien évidemment, je remercie aussi les membres de cette équipe (basée à Grenoble et Nice) avec qui j'ai pu échanger et qui m'ont aidé à progresser. Cela m'a d'ailleurs permis (obligé à) apprendre à parler et à lire l'anglais (pour de vrai).

Merci à tous les membres du laboratoire qui m'ont suivi, aidé, conseillé et avec qui j'ai pu discuter avec passion de géosciences. Merci aussi à celles et ceux que j'ai rencontrés en conférence ou sur le terrain pour de multiples discussions fort intéressantes et enrichissantes. Merci aussi à celles et ceux, plus en amont (école d'ingé et précédemment), qui m'ont formé et donc permis d'en arriver là.

Je remercie François Lavoué pour ses précieux conseils et son manuscrit de thèse, qui, il faut le dire, m'a beaucoup aidé à progresser du début à la fin de ma thèse.

Je remercie tous les thésards du groupe, enfin, étant l'un des derniers à passer le cap, je devrais plutôt utiliser le terme de jeunes docteurs. Merci à vous tous pour votre gentillesse, votre bonne humeur et les supers moments passés ensemble. Je fais une dédicace particulière à Okba pour ces précieux conseils et son temps passé à m'expliquer différents éléments (parfois obscurs) associés à l'informatique. Je fais une autre dédicace particulière à Camille pour ces trois années passées à partager le même bureau, à discuter, à rigoler (travailler aussi) et à me supporter lorsque je rallais contre mon PC.

Je remercie toute ma famille pour son aide précieuse et tout son soutien dans les bons moments mais aussi les moins bons. J'ai une forte pensée pour ceux qui ne sont plus là physiquement avec moi/nous pour souffler un bon coup et sourire à la fin heureuse de cette aventure.

Enfin, je remercie ma femme Maéva pour tout ce qu'elle a fait pendant ces quatre années. Je te remercie infiniment de m'avoir supporté (au sens large) et de t'être occupée de tant de choses. Sans toi, ces remerciements n'auraient probablement jamais eu lieu. Merci d'avoir pris soin de notre fille Cléa et merci à toi Cléa pour tes encouragements. Merci à vous deux.



# Résumé

Le radar géologique est une méthode d'investigation géophysique basée sur la propagation d'ondes électromagnétiques dans le sous-sol. Avec des fréquences allant de 5 MHz à quelques GHz et une forte sensibilité aux propriétés électriques, le géoradar fournit des images de réflectivité dans des contextes et à des échelles très variés : génie civil, géologie, hydrogéologie, glaciologie, archéologie. Cependant, dans certains cas, la compréhension fine des processus étudiés dans la subsurface nécessite une quantification des paramètres physiques du sous-sol. Dans ce but, l'inversion des formes d'ondes complètes, méthode initialement développée pour l'exploration sismique qui exploite l'ensemble des signaux enregistrés, pourrait s'avérer efficace. Dans cette thèse, je propose ainsi des développements méthodologiques par une approche d'inversion multiparamètres (permittivité diélectrique et conductivité), pour des configurations en transmission, en deux dimensions. Ces développements sont ensuite appliqués à un jeu de données réelles acquises entre forages.

Dans une première partie, je présente tout d'abord la méthode numérique utilisée pour modéliser la propagation des ondes électromagnétiques dans un milieu 2D hétérogène, élément indispensable pour mener à bien le processus d'imagerie. Ensuite, j'introduis puis étudie le potentiel des méthodes d'optimisation locale standards (gradient conjugué non linéaire, l-BFGS, Newton tronqué dans ses versions Gauss-Newton et Exact-Newton) pour découpler la permittivité diélectrique et la conductivité électrique. Je montre notamment qu'un découplage effectif n'est possible qu'avec un modèle initial suffisamment précis et la méthode la plus sophistiquée (Newton tronqué). Comme dans le cas général, ce modèle initial n'est pas disponible, il s'avère nécessaire d'introduire un facteur d'échelle qui répartit le poids relatif de chaque classe de paramètres dans l'inversion. Dans un milieu réaliste avec une acquisition entre puits, je montre que les différentes méthodes d'optimisation donnent des résultats similaires en matière de découplage de paramètres. C'est finalement la méthode l-BFGS qui est retenue pour l'application aux données réelles, en raison de coûts de calcul plus faibles.

Dans une deuxième partie, j'applique cette méthodologie à des données réelles acquises entre deux forages localisés dans des formations carbonatées, à Rustrel (France, 84). Cette inversion est réalisée en parallèle d'une approche synthétique à l'aide d'un modèle représentatif du site étudié et des configurations d'acquisition similaires. Ceci permet de pouvoir comprendre, contrôler et valider les observations et conclusions obtenues sur les données réelles. Cette démarche montre que la reconstruction de la permittivité est très robuste. A contrario, l'estimation de la conductivité souffre de deux couplages majeurs, avec la permittivité diélectrique, d'une part, et avec l'amplitude de la source estimée, d'autre part. Les résultats obtenus sont confrontés avec succès à des données indépendantes (géophysique depuis la surface, analyse sur échantillons de roche), et permet de bénéficier d'une image haute-résolution des formations géologiques. Enfin, une analyse 3D confirme que les structures 3D à fort contraste de propriétés,

---

telles que la galerie enfouie sur notre site, nécessiteraient une approche de modélisation 3D, notamment pour mieux expliquer les amplitudes observées.

# Abstract

Ground Penetrating Radar (GPR) is a geophysical investigation method based on electromagnetic waves propagation in the underground. With frequencies ranging from 5 MHz to a few GHz and a high sensitivity to electrical properties, GPR provides reflectivity images in a wide variety of contexts and scales : civil engineering, geology, hydrogeology, glaciology, archeology. However, in some cases, a better understanding of some subsurface processes requires a quantification of the physical parameters of the subsoil. For this purpose, inversion of full waveforms, a method initially developed for seismic exploration that exploits all the recorded signals, could prove effective. In this thesis, I propose methodological developments using a multiparameter inversion approach (dielectric permittivity and conductivity), for two-dimensional transmission configurations. These developments are then applied to a real data set acquired between boreholes.

In a first part, I present the numerical method used to model the propagation of electromagnetic waves in a heterogeneous 2D environment, a much-needed element to carry out the process of imaging. Then, I introduce and study the potential of standard local optimization methods (nonlinear conjugate gradient, l-BFGS, Newton truncated in its Gauss-Newton and Exact-Newton versions) to fight the trade-off effects related to the dielectric permittivity and to the electrical conductivity. In particular, I show that effective decoupling is possible only with a sufficiently accurate initial model and the most sophisticated method (truncated Newton). As in the general case, this initial model is not available, it is necessary to introduce a scaling factor which distributes the relative weight of each parameter class in the inversion. In a realistic medium and for a cross-hole acquisition configuration, I show that the different optimization methods give similar results in terms of parameters decoupling. It is eventually the l-BFGS method that is used for the application to the real data, because of lower computation costs.

In a second part, I applied the developed Full waveform inversion methodology to a set of real data acquired between two boreholes located in carbonate formations, in Rustrel (France, 84). This inversion is carried out together with a synthetic approach using a model representative of the studied site and with a similar acquisition configuration. This approach enables us to monitor and validate the observations and conclusions derived from data inversion. It shows that reconstruction of dielectrical permittivity is very robust. Conversely, conductivity estimation suffers from two major couplings : the permittivity and the amplitude of the estimated source. The derived results are successfully compared with independent data (surface geophysics and rock analysis on plugs) and provides a high resolution image of the geological formation. On the other hand, a 3D analysis confirms that 3D structures presenting high properties contrasts, such as the buried gallery present in our site, would require a 3D approach, notably to better explain the observed amplitudes.





# Table des matières

|  |           |
|--|-----------|
| Introduction générale  | 13        |
| <b>1 Approche multiparamètres sur cas synthétiques : théorie et algorithmes</b>                                | <b>21</b> |
| 1.1 Le problème direct   | 22        |
| 1.1.1 Notions théoriques   | 22        |
| 1.1.1.1 Equations de Maxwell   | 22        |
| 1.1.1.2 Relations constitutives et paramètres électromagnétiques   | 24        |
| 1.1.1.3 Courant total, paramètres effectifs et angle de perte  | 26        |
| 1.1.1.4 Caractéristiques des matériaux diélectriques aux fréquences radar                                      | 28        |
| 1.1.2 Propagation d'ondes  | 31        |
| 1.1.2.1 Equation de Helmholtz ou de diffusion-propagation  | 31        |
| 1.1.2.2 Résolution du problème direct dans un milieu 2D hétérogène   | 33        |
| 1.2 Le problème inverse  | 37        |
| 1.2.1 Généralités sur l'inversion des formes d'ondes complètes   | 37        |
| 1.2.1.1 Définitions  | 37        |
| 1.2.1.2 Le formalisme  | 38        |
| 1.2.2 Stratégies d'optimisation locale   | 39        |
| 1.2.2.1 Interprétations physiques du gradient et du Hessien  | 40        |
| 1.2.2.2 Calcul du pas de descente $\alpha$   | 42        |
| 1.2.2.3 Calcul de la direction de descente   | 44        |
| 1.2.3 Méthodes de l'état adjoint du premier et second ordre  | 46        |
| 1.2.3.1 Premier ordre : calcul du gradient   | 46        |
| 1.2.3.2 Second ordre : calcul des produits Hessien-vecteur   | 47        |
| 1.2.4 Le gradient et le Hessien : implémentation   | 51        |
| 1.2.4.1 Le gradient  | 52        |
| 1.2.4.2 Le produit Hessien-vecteur   | 54        |
| 1.2.4.3 La paramétrisation   | 56        |
| 1.2.5 Analyses complémentaires   | 57        |
| 1.2.5.1 Sensibilité au modèle initial  | 57        |
| 1.2.5.2 Pouvoir de résolution de l'inversion des formes d'ondes et échantillonnage dans le domaine fréquentiel | 58        |
| 1.3 Applications multiparamètres sur données synthétiques  | 62        |
| 1.3.1 Le modèle des croix  | 62        |
| 1.3.1.1 Le modèle et le paramétrage de l'inversion   | 62        |
| 1.3.1.2 Les résultats  | 65        |
| 1.3.2 Un modèle plus réaliste  | 68        |

TABLE DES MATIÈRES

---

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| 1.3.2.1  | Le modèle et le paramétrage de l'inversion . . . . .  | 68        |
| 1.3.2.2  | Les résultats . . . . .   | 70        |
| 1.4      | Conclusions . . . . .   | 73        |
| <b>2</b> | <b>Inversion des champs d'ondes acquis en transmission dans un milieu carbonaté</b>                             | <b>75</b> |
| 2.1      | Introduction . . . . .  | 75        |
| 2.2      | Contextes de l'étude . . . . .  | 77        |
| 2.2.1    | Historique du LSBB . . . . .  | 77        |
| 2.2.1.1  | Un peu d'histoire . . . . .   | 77        |
| 2.2.1.2  | Le LSBB : un centre de recherches interdisciplinaires . . . . .   | 79        |
| 2.2.1.3  | Le site de la sortie de secours et son intérêt . . . . .  | 79        |
| 2.2.2    | Contexte géologique . . . . .   | 79        |
| 2.2.2.1  | Contexte hydrogéologique . . . . .  | 81        |
| 2.2.2.2  | Investigations géophysiques antérieures . . . . .   | 81        |
| 2.3      | Acquisition, pré-traitement des données et estimation préliminaire des paramètres                               | 84        |
| 2.3.1    | Analyse de la carotte du forage, acquisition et présentation des données  | 84        |
| 2.3.2    | Analyse des données 3D en temps et en fréquence . . . . .   | 85        |
| 2.3.2.1  | Analyse préliminaire des données . . . . .  | 86        |
| 2.3.2.2  | Analyse qualitative des radargrammes . . . . .  | 87        |
| 2.3.3    | Estimation quantitative préliminaire de la permittivité diélectrique et de la conductivité électrique . . . . . | 89        |
| 2.3.3.1  | Modèle de permittivité . . . . .  | 89        |
| 2.3.3.2  | Modèle de conductivité . . . . .  | 90        |
| 2.3.3.3  | Conclusion . . . . .  | 93        |
| 2.3.4    | Conversion 3D/2D . . . . .  | 94        |
| 2.3.4.1  | La formulation . . . . .  | 94        |
| 2.3.4.2  | Analyse des données converties . . . . .  | 94        |
| 2.4      | Inversion des données réelles de Rustrel en parallèle de données synthétiques .                                 | 97        |
| 2.4.1    | Introduction . . . . .  | 97        |
| 2.4.2    | Préliminaires . . . . .   | 99        |
| 2.4.2.1  | Définition du modèle synthétique . . . . .  | 99        |
| 2.4.2.2  | Estimation de la source . . . . .   | 100       |
| 2.4.2.3  | Choix des sources . . . . .   | 102       |
| 2.4.2.4  | Choix de la discrétisation en fréquence . . . . .   | 104       |
| 2.4.3    | Inversion monoparamètre de la permittivité . . . . .  | 105       |
| 2.4.3.1  | Influence et choix de la source . . . . .   | 105       |
| 2.4.3.2  | Influence de la stratégie fréquentielle . . . . .   | 111       |
| 2.4.3.3  | Influence du nombre d'itérations . . . . .  | 117       |
| 2.4.3.4  | Conclusion . . . . .  | 121       |
| 2.4.4    | Inversion multiparamètres de la permittivité et la conductivité . . . . .                                       | 122       |
| 2.4.4.1  | Influence combinée de la source et du scaling . . . . .   | 122       |
| 2.4.4.2  | Nombre d'itérations et inversion monoparamètre pour la conductivité . . . . .                                   | 131       |
| 2.4.4.3  | Une inversion multiparamètres ou deux inversions monoparamètres ?   | 134       |
| 2.4.4.4  | Conclusion . . . . .  | 136       |
| 2.4.5    | Inversion multiparamètres et mise à jour de la source . . . . .   | 136       |

|         |  |            |
|---------|--|------------|
| 2.4.5.1 | Imagerie du site de Rustrel . . . . .                                    | 137        |
| 2.4.5.2 | Imagerie sur modèle synthétique . . . . .                                | 141        |
| 2.4.5.3 | Conclusion . . . . .   | 145        |
| 2.5     | Résultats dans le milieu à forts contrastes et interprétations . . . . . | 146        |
| 2.5.1   | Inversion des données acquises à Rustrel sur le profil complet . . . . . | 146        |
| 2.5.2   | Analyse des résultats . . . . .  | 151        |
| 2.5.2.1 | La teneur en eau . . . . .   | 151        |
| 2.5.2.2 | La stratification . . . . .  | 154        |
| 2.5.2.3 | Discussions sur l'apport de la FWI . . . . .                             | 155        |
| 2.6     | Conclusions . . . . .  | 159        |
|         | <b>Conclusions et perspectives</b>                                       | <b>161</b> |
|         | <b>Références</b>  | <b>165</b> |
|         | <b>A Données de Rustrel</b>  | <b>179</b> |
|         | <b>B Publication</b>   | <b>185</b> |



# Introduction générale

## L'imagerie de la Terre

La connaissance de la structure interne de la Terre est au cœur d'enjeux sociaux, scientifiques, environnementaux et économiques. Tout d'abord, la proche surface (de quelques centimètres à quelques mètres) est une échelle clé en ce qui concerne le génie civil, la géotechnique, la pollution des sols et leur remédiation en vue de développement d'infrastructures, de prévention et de sécurisation de sites ou bien encore de préservation des milieux naturels. Plus en profondeur (de quelques dizaines de mètres à quelques kilomètres), les problématiques sont également cruciales avec la détection d'aquifères exploitables, de ressources énergétiques (pétrole, gaz), minières ou calorifiques (géothermie). A ces profondeurs, on pourra également citer d'autres enjeux comme le stockage du  $CO_2$  et des déchets radioactifs. A plus grande échelle, viennent ensuite les problématiques associées aux failles actives et au volcanisme, à l'origine de phénomènes destructeurs, qu'il faut analyser et caractériser pour comprendre les processus qui contrôlent leur dynamique. Enfin, l'étude des structures profondes permet de mieux comprendre les structures mantelliques et la géodynamo terrestre à l'origine du bouclier magnétique protecteur de la vie en surface.

Pour répondre aux problématiques posées et améliorer nos connaissances dans ces domaines, une palette de méthodes géophysiques a été développée. En fonction de la cible d'intérêt, de ses propriétés et de sa profondeur, il est donc possible de choisir la(les) méthode(s) la(les) plus appropriée(s). Ainsi la méthode gravimétrique est utilisée pour détecter des anomalies de densité, les méthodes sismiques (réflexion, réfraction, tomographie, analyse des ondes de surface, bruit de fond, sismologie passive) permettent d'évaluer les propriétés mécaniques du milieu géologique et une vaste gamme de méthodes électriques/électromagnétiques donne accès à ses propriétés électriques/électromagnétique. On peut, par exemple, citer les méthodes d'induction électromagnétique (dans les domaines temporel et fréquentiel), la tomographie électrique (ERT) ou encore le radar géologique.

Les méthodes géophysiques fournissent des informations physiques indirectes sur les structures internes de la Terre qu'il faut ensuite savoir interpréter. Elles sont donc traditionnellement confrontées à des méthodes d'observation directes comme les prélèvements ou les forages (diagraphies). Ces dernières méthodes sont utiles car elles donnent des observations directes du sous-sol et peuvent être utilisées pour compléter, valider, voire contraindre les modèles géophysiques. Cependant, ces méthodes directes s'avèrent souvent onéreuses au regard du volume investigué (très ponctuelles), pas forcément représentatives d'un milieu hétérogène, destructives et vite limitées en profondeur. Pour ces raisons, lorsque l'on souhaite avoir accès aux variations 3D d'un milieu, les techniques d'imagerie géophysiques sont privilégiées. Parmi ces

méthodes, le radar géologique (ou Ground Penetrating Radar, GPR) permet de caractériser les propriétés électromagnétiques de la proche surface. C'est sur cette méthode d'investigation que se concentrent les travaux présentés dans cette thèse.

### **Le radar géologique (GPR)**

#### **Principes**

Le radar géologique (GPR) est un outil de prospection actif et non-destructif du sous-sol basé sur la propagation d'ondes électromagnétiques. La prise de mesures GPR débute par une impulsion électromagnétique haute fréquence au niveau d'une antenne émettrice (la source). Le signal émis se propage dans le milieu géologique, interagit avec ce dernier pour finalement être enregistré par une antenne réceptrice (le récepteur). Grâce aux différentes interactions, le signal enregistré porte la signature du milieu, en plus de celle de la source, que l'imagerie va pouvoir exploiter afin de restituer une image du sous-sol.

D'un point de vue applicatif, la profondeur de pénétration (ou encore la distance de propagation) des ondes est très variable car elle s'étend de quelques centimètres à plusieurs dizaines, voire centaines, de mètres. Cette variabilité dépend essentiellement de la fréquence nominale des antennes (de 5 MHz à quelques GHz) et de la conductivité du milieu investigué. Les signaux basses fréquences possèdent une profondeur de pénétration plus grande que ceux hautes fréquences, tandis que la conductivité tend à limiter les distances de propagation via l'atténuation qu'elle induit.

Malgré le développement de dispositifs d'acquisition multi-antennes (Yedlin *et al.* (2016) par exemple), l'acquisition la plus répandue n'en utilise que deux : une pour l'émission et une pour la réception. En fonction de la disposition de ces deux antennes sur le terrain, il existe deux grandes catégories de mesure radar : le mode en réflexion et le mode en transmission. Notons que dans ces deux cas, les dispositifs d'acquisition actuels permettent de suivre en temps réel les données acquises, avec possibilité d'un minimum de traitement (filtre, gain) sur site pour améliorer le suivi.

#### **Le mode en réflexion**

Dans une première configuration, dite à distance (offset) constante, les antennes émettrice et réceptrice, séparées d'une distance fixe, sont déplacées simultanément et régulièrement le long d'un profil. A chaque déplacement une trace est enregistrée et juxtaposée aux précédentes de façon à obtenir une image de la réflectivité du sous-sol. Cette configuration est la plus utilisée car elle permet de réaliser un grand nombre de profils en un temps restreint. Cependant, cette image brute ne doit pas être interprétée directement comme la géométrie réelle du sous-sol. En effet, elle nécessite l'application de filtres pour réduire le bruit et/ou une déconvolution pour corriger l'effet de la source, puis une migration pour replacer les réflecteurs à leur position réelle et focaliser les hyperboles de diffraction. Pour que cette dernière étape soit possible, il faut disposer de la distribution des vitesses du milieu. Cette dernière peut être supposée connue si le milieu investigué est suffisamment homogène et ses propriétés bien connues (un glacier par exemple) ou bien déduite à partir d'hyperbole(s) présente(s) dans la section. Cependant, dans le cas général la vitesse du milieu doit être déduite via des données multi-offset.

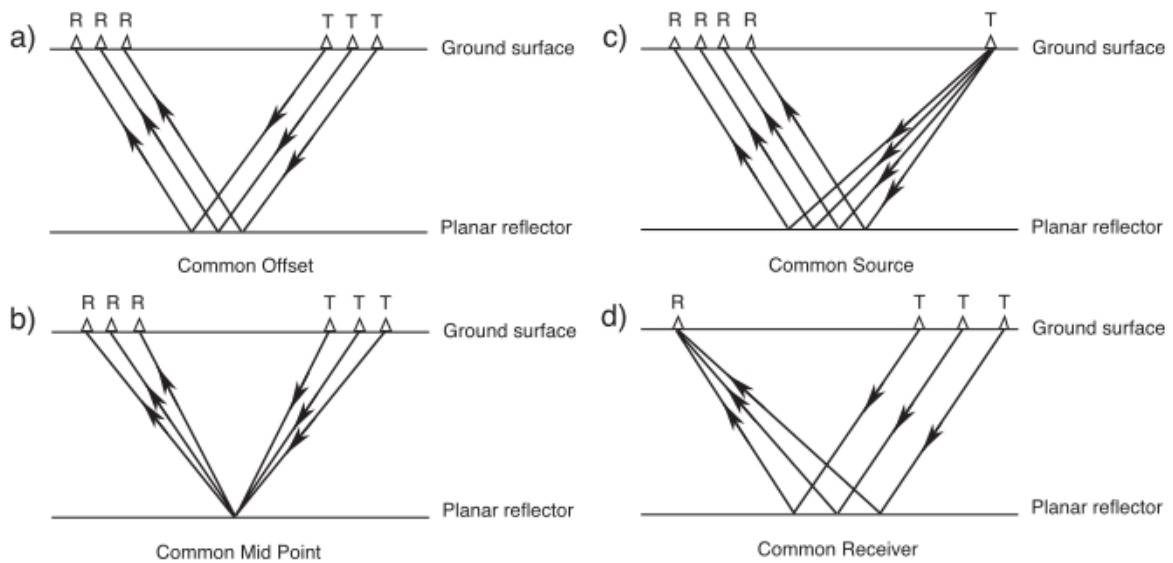


FIGURE 1 – Les différents types d’acquisition dans une configuration en réflexion, d’après Neal (2004).

Dans la configuration en réflexion, les données multi-offset sont acquises avec deux antennes indépendantes que l’opérateur éloigne progressivement l’une de l’autre en enregistrant une trace à chaque nouveau déplacement (Fig. 1). Il existe plusieurs possibilités : déplacer le récepteur à source fixe (source commune), déplacer la source à récepteur fixe (récepteur commun) ou bien déplacer les deux simultanément de part et d’autre d’un point milieu commun (CMP). En général, cette dernière solution est privilégiée et les données enregistrées décrivent des hyperboles de réflexion (si le milieu est plan) que l’on peut analyser par semblance pour déduire des vitesses NMO (Normal MoveOut) qui sont ensuite converties en vitesse d’intervalle, avec la formule de Dix (1955) par exemple. Les vitesses ainsi obtenues sont utilisées pour la migration et la conversion de la section temporelle en profondeur. Notons cependant que ce type de mesure multi-offset n’est pas réalisé de manière systématique car il augmente le temps d’acquisition. Ainsi, il est rare de bénéficier d’un modèle de vitesse hétérogène latéralement.

### Le mode en transmission

Lorsque le milieu géologique est trop conducteur en surface, que la cible située en profondeur ne peut être atteinte avec la résolution souhaitée depuis la surface (compromis pénétration/résolution) ou tout simplement que les conditions s’y prêtent, il est possible d’acquérir des données en transmission. Ce type de mesures est envisageable dès que les antennes émettrice et réceptrice peuvent être placées de part et d’autre de l’objet investigué. C’est par exemple le cas lorsque l’on dispose de forages ou galeries suffisamment proches ou bien que plusieurs faces de l’objet étudié sont accessibles comme un mur, un pilier ou encore un bloc.

De même que pour l’acquisition en réflexion, la mesure en transmission peut être mono ou multi-offset. Dans le cas de la mesure mono-offset, appelée mode ZOP (zéro offset profiling) et illustrée en Figure 2, les antennes sont déplacées en parallèle et une trace est alors enregistrée à chaque nouvelle position. Cette configuration est particulièrement bien adaptée



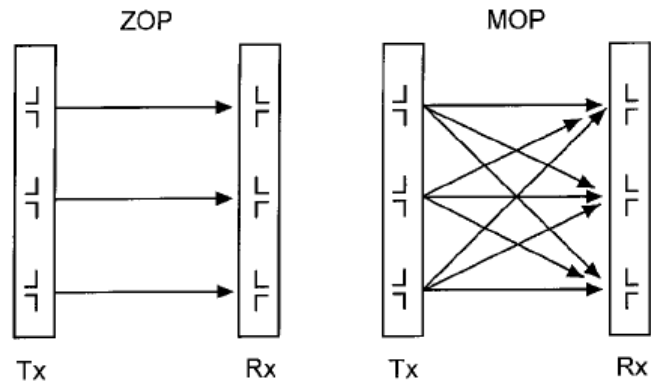


FIGURE 2 – Les différents types d’acquisition dans une configuration en transmission, d’après Huisman *et al.* (2003).

lorsque le sondage a pour but de localiser rapidement des anomalies dans un milieu stratifié plan. La méthode à offset variables, appelée mode MOG (Multi Offset Gather), s’apparente à la méthode d’acquisition par source commune présentée dans le mode en réflexion. Pour une position donnée de la source, une trace est enregistrée pour chaque position du récepteur. Cette opération est répétée à chaque nouvelle position de la source. Comme nous le verrons, le mode MOG est particulièrement bien adapté à la cartographie 2D du milieu, via des algorithmes d’inversion comme la tomographie des temps de première arrivée ou l’inversion des formes d’ondes complètes. C’est cette dernière qui va être présentée et mise en œuvre dans cette thèse.

## Applications

Grâce à ses propriétés haute résolution, sa facilité d’utilisation et ses capacités multi-échelles, le radar géologique est utilisé dans de nombreux domaines des géosciences et de la géo-ingénierie.

Parmi les applications les plus remarquables, il est possible de citer celles réalisées dans la neige et/ou la glace, où les faibles conductivités permettent d’avoir des profondeurs de pénétration importantes. Ainsi, le GPR est employé pour évaluer l’épaisseur des glaciers depuis le milieu des années 60 (Walford, 1964; Bailey *et al.*, 1964; Bentley, 1964) à nos jours (Saintenoy *et al.*, 2013; Bohleber *et al.*, 2017) mais aussi pour mesurer certaines propriétés du manteau neigeux et les suivre dans le temps (Schmid *et al.* (2014), Schmid *et al.* (2015) et Bradford *et al.* (2009)).

Dans un contexte géologique, le GPR est utilisé pour visualiser la stratification dans les sédiments (Davis & Annan, 1989; Bristow & Jol, 2003; Neal, 2004), détecter et/ou caractériser la fracturation de la roche en falaise (Jeannin, 2005; Deparis, 2007; Deparis & Garambois, 2009) ou en puits (Dorn *et al.*, 2012), investiguer les structures karstiques dans le calcaire (Becht *et al.*, 2004) et imager les décalages de marqueurs enfouis induits par des failles actives (Beauprêtre, 2013).

Le radar géologique peut également tirer parti de sa grande sensibilité à l’eau pour les études hydrogéologiques. Ainsi, il est employé pour évaluer la teneur en eau des sols depuis la surface ou entre forages (Huisman *et al.*, 2003) et suivre l’infiltration d’eau dans le sol (Binley *et al.*, 2001), (Looms *et al.*, 2008). On le retrouve également dans l’évaluation de paramètres du

sous-sol tel que la porosité (P. Clement & Barrash, 2006), (Lassen *et al.*, 2015), la cartographie spatiale et temporelle du niveau de la nappe (Doolittle *et al.*, 2006) ou bien la caractérisation d'un aquifère (Dafflon *et al.*, 2011).

Le GPR est aussi utilisé en génie civil à des fins diverses comme l'analyse du béton armé, des fondations, des routes, des ponts et des tunnels. On pourra se référer à Lai *et al.* (2017) pour une synthèse approfondie sur le sujet.

Le radar géologique se montre également intéressant en archéologie car il permet de couvrir rapidement de vastes surfaces afin de cibler les zones les plus prometteuses pour les excavations (Zhao *et al.*, 2013), de préciser la géométrie des vestiges avant excavation (Forte & Pipan, 2008) voire même de tirer des informations sans excavations (Conyers, 2008).

Enfin, le GPR peut aider à la détection de personnes ensevelies sous la neige ou dans les décombres ((Crocco & Ferrara, 2014) pour une synthèse). Il est également très utile pour localiser les mines antipersonnel, en particulier celles réalisées en plastique qui restent indétectables avec les détecteurs de métaux conventionnels (Daniels, 2006).

Même si une visualisation simple et rapide du sous-sol reste suffisante lors de certaines de ces applications, la compréhension et l'interprétation des phénomènes mis en jeux lors de ces études requièrent de plus en plus une quantification haute-résolution de la permittivité et de la conductivité. Pour imager de manière fiable et quantitative ces deux paramètres, les méthodes développées pour l'imagerie sismique quantitatives basées sur des données multi-offset ont été adaptées au radar géologique. Ainsi, on retrouve les analyses de vitesses (Fischer *et al.*, 1992) et d'amplitudes en fonction de l'offset (Deparis & Garambois, 2009), dans une configuration en réflexion, et les tomographies (Holliger *et al.*, 2001; Gloaguen *et al.*, 2005; Musil *et al.*, 2006) basées sur le temps ou l'amplitude de la première arrivée, dans une configuration en transmission. Cependant, ces méthodes ne considèrent qu'une partie de l'information contenue dans les données, ce qui limite les capacités de reconstruction du milieu en matière de résolution et/ou du nombre de cibles. Pour dépasser ces limitations, il est souhaitable de prendre en compte l'intégralité de l'information contenue dans les données, c'est l'inversion des formes d'ondes complètes (Full Waveform Inversion, FWI).

## L'inversion des formes d'ondes complètes (FWI)

L'inversion des formes d'ondes complètes est une technique d'imagerie haute-résolution dont le but est de retrouver les paramètres physiques du sous-sol qui expliquent le mieux l'ensemble des formes d'ondes enregistrées. Cette technique est introduite par Lailly (1983) et Tarantola (1984) dans le contexte de l'imagerie sismique en domaine temporel. Les premières applications (Gauthier *et al.* (1986), Crase *et al.* (1990)) ont rencontré des difficultés en raison des coûts de calcul et des géométries d'acquisition à court offset, qui induisent de très fortes non linéarités dans la fonction coût. Pour tenter de dépasser ces difficultés, Pratt & Worthington (1990), Pratt (1990), Song *et al.* (1995), Pratt *et al.* (1998) ont proposé de travailler dans le domaine fréquentiel, plutôt que temporel, avec des configurations d'acquisition différentes (mesures entre puits et à grands offset). Ces nouvelles configurations se sont avérées, et s'avèrent toujours, très judicieuses car les données enregistrées contiennent des ondes transmises qui donnent la possibilité de reconstruire les grandes structures du milieu, qui manquaient jusqu'alors. Par ailleurs, l'analyse de la redondance, dans la couverture des nombres d'ondes imagés, par ce type d'acquisition et le contenu fréquentiel des données, indique qu'il est possible d'inverser

seulement quelques fréquences bien choisies (Sirgue & Pratt, 2004) pour mener à bien l'inversion. Cela permet de réduire le coût de calcul. Finalement, le milieu géologique peut être reconstruit en commençant par inverser quelques basses fréquences pour obtenir une image des grandes structures du milieu avant de monter en fréquence pour ajouter des détails au modèle. Cette stratégie hiérarchique a permis un essor de la FWI et une multiplication des applications (Virieux & Operto (2009) et Virieux *et al.* (2017) pour une synthèse). Les développements de la FWI pour l'imagerie sismique sont encore particulièrement nombreux de nos jours. Ils constituent une base de travail pour l'application de cette méthode aux données GPR présentée par la suite.

## L'inversion des formes d'ondes du radar géologique : état de l'art

Dans les milieux 1D, l'inversion des formes d'ondes de données GPR est utilisée dans des environnements variés. Ainsi, les applications ont pour but d'estimer la teneur en eau des premiers centimètres des sols cultivés (Lambot *et al.*, 2004, 2006; Jadoon *et al.*, 2010; Minet *et al.*, 2011), de retrouver la permittivité et la conductivité dans des sols à couches plus ou moins minces (Busch *et al.*, 2012, 2014), comme le béton (Kalogeropoulos *et al.*, 2011, 2013; Patriarca *et al.*, 2011), de caractériser le manteau neigeux (Schmid *et al.*, 2016) ou encore d'évaluer le degré de pollution d'un site (Babcock & H. Bradford, 2015). Grâce à l'approximation 1D, le nombre de paramètres mis en jeu dans ces études est relativement faible, ce qui permet d'obtenir des résultats robustes et fiables.

L'application de l'inversion des formes d'ondes aux données GPR en 2D commence avec les travaux de Kuroda *et al.* (2007) avec une approche monoparamètre (permittivité) et de Ernst *et al.* (2007b,a) en multiparamètres (permittivité et conductivité) avec des données acquises entre puits. La considération de deux paramètres dès le début des investigations s'explique par l'empreinte très forte de la conductivité sur les données GPR. Ce paramètre ne peut donc pas être négligé, dans le cas général, comme il est parfois possible de le faire en sismique avec l'atténuation. L'algorithme proposé par Ernst et ses collaborateurs est basé sur une reconstruction alternative de la permittivité et de la conductivité via un algorithme de gradient conjugué. Cette méthode est améliorée par Meles *et al.* (2010) qui proposent une représentation vectorielle des champs observés et une reconstruction simultanée des deux classes de paramètres. Ce nouvel algorithme se montre plus fiable pour reconstruire le milieu pour des données synthétiques et réelles (Yang *et al.*, 2013) mais les auteurs ne discutent pas du couplage entre les deux classes de paramètres (qui existe pourtant dans les résultats). Le nouvel algorithme est ensuite utilisé pour imager des différents aquifères (Klotzsche *et al.*, 2010a, 2012, 2013, 2014; Gueting *et al.*, 2015; Keskinen *et al.*, 2017). L'ensemble de ces investigations (entre puits) a permis de comparer les résultats de la méthode à des données expérimentales comme la porosité (obtenue par des mesures neutroniques ou sur des échantillons décimétriques) avec un certain succès pour la permittivité.

Les résultats obtenus en transmission et ceux issus de l'imagerie sismique de surface ont encouragé la communauté à adapter la méthode à la configuration en réflexion, plus classique pour le GPR. Ainsi, Lopes (2009a) et El Bouajaji *et al.* (2011) ont développé l'inversion monoparamètre (permittivité) tandis que Lavoué *et al.* (2014) entreprennent, sur données synthétiques, l'inversion multiparamètres (permittivité et conductivité). Dans ce dernier travail, les auteurs mettent clairement en évidence le couplage entre paramètres et proposent un nouvel algorithme d'optimisation (l-BGFS) pour les découpler. La méthode est ensuite appliquée à un

jeu de données réelles acquises en réflexion (Lavoué, 2014). Cependant, l'inversion s'est avérée particulièrement complexe car la configuration ne met pas en jeu d'ondes transmises (à part les ondes directes dans l'air et dans le sol), ce qui rend difficile l'estimation de la source et des modèles initiaux. Pour ces raisons, Lavoué (2014) s'est limité à l'inversion de la permittivité et de la source.

En parallèle de ce travail en surface, Van Vorst (2014) continue de travailler entre puits et propose l'algorithme de Gauss-Newton ("plus robuste et plus rapide") pour retrouver simultanément la permittivité, la conductivité et la source. Les résultats obtenus à partir de données synthétiques et réelles sont satisfaisants mais le couplage entre les paramètres n'est pas étudié en détail et la méthode n'est pas comparée aux précédentes pour justifier le surcoût associé à la nouvelle méthode.

L'ensemble de ces investigations montre que la FWI de données GPR est un domaine très actif ces dernières années. Ces études indiquent aussi que de nouveaux types d'algorithmes commencent à être utilisés dans le but de découpler au mieux la permittivité et la conductivité (et la source). En effet, bien que le gradient conjugué soit largement mis en œuvre, les méthodes dites de l-BFGS (Lavoué *et al.* (2014); Lavoué (2014) mais aussi Watson (2016a,b) et de Gauss-Newton (Van Vorst (2014) mais aussi Yang *et al.* (2012)) font leur apparition. Dans ce travail de thèse, je souhaite comparer les performances de ces différents algorithmes afin de sélectionner le plus approprié pour traiter des données réelles acquises dans une configuration entre puits, plus favorable au regard des investigations déjà réalisées.

## Enjeux et plan de la thèse

Mon travail de thèse s'articule autour de deux axes principaux. Le premier consiste à étudier le couplage entre la permittivité, la conductivité et la source dans le cadre de la FWI multi-paramètres en électromagnétisme 2D. Le second vise à évaluer les apports de cette méthode dans le cadre d'une étude hydrogéologique menée dans un milieu carbonaté avec une acquisition 2D entre puits.

Dans un premier chapitre, je me concentre sur le développement des méthodes et des outils nécessaires à l'inversion des formes d'ondes électromagnétiques avant de présenter les premiers résultats. Pour ce faire, je commence par expliquer comment je résous le problème direct après avoir introduit les équations de l'électromagnétisme, les paramètres constitutifs ainsi que les hypothèses retenues pour les investigations. Ensuite, je présente le problème inverse et les différentes méthodes d'optimisation locales utilisées pour le résoudre de manière pratique (gradient conjugué non linéaire, l-BFGS, Newton tronqué : versions Gauss-Newton et Exact-Newton). Je donne des explications sur le rôle joué par deux éléments-clés de l'inversion, le gradient et le Hessien, ainsi que les stratégies de calcul mises en œuvre pour les prendre en compte dans l'imagerie. Enfin, je présente mes premiers résultats portant sur le découplage de la permittivité et de la conductivité, sur des modèles synthétiques, dans des conditions de plus en plus réalistes. Le but de ces tests est de faire un état de l'art sur les différentes méthodes d'optimisation locale et d'évaluer leurs potentiel et limites respectifs dans ce contexte, afin de sélectionner la plus adaptée au traitement des données réelles entre puits.

Dans un second chapitre, j'aborde l'inversion des données réelles acquises sur le site d'études expérimentales de Rustrel (LSBB) localisé en milieu carbonaté. Je commence par un bref historique du site ainsi qu'une synthèse des différentes études géologiques, hydrogéologiques et

géophysiques réalisées sur ce secteur. Je continue par la présentation des données GPR acquises entre deux forages situés de part et d'autre d'une galerie, dont la position et la géométrie connues en font une cible de choix. Ce travail d'analyse se termine par la construction des modèles initiaux nécessaires à la FWI, une conversion 3D/2D des données afin de les rendre compatibles avec l'outil d'inversion développé précédemment et la définition d'un modèle synthétique réaliste du site. Suite à ce travail préparatoire, une partie des données réelles est inversée en parallèle d'un jeu de données issu du modèle synthétique nouvellement créé. Une telle démarche vise à répondre aux problèmes posés par les couplages existants entre la permittivité, la conductivité et la source. C'est aussi l'occasion de déterminer une démarche optimale pour inverser le jeu de données. Une fois cette dernière étape réalisée, les résultats sont confrontés à ceux déjà disponibles, dans le but d'évaluer l'apport de cette méthode et proposer une interprétation géologique plus fine du site. Enfin, c'est aussi la possibilité de tester la validité des hypothèses initiales concernant la géométrie du milieu.

Je termine par une conclusion générale et des propositions de développements futurs pour améliorer le traitement des données synthétiques et réelles.

# Chapitre 1

## Approche multiparamètres sur cas synthétiques : théorie et algorithmes

### Sommaire

---

|            |  |           |
|------------|--|-----------|
| <b>1.1</b> | <b>Le problème direct</b>                                    | <b>22</b> |
| 1.1.1      | Notions théoriques   | 22        |
| 1.1.2      | Propagation d'ondes  | 31        |
| <b>1.2</b> | <b>Le problème inverse</b>                                   | <b>37</b> |
| 1.2.1      | Généralités sur l'inversion des formes d'ondes complètes     | 37        |
| 1.2.2      | Stratégies d'optimisation locale                             | 39        |
| 1.2.3      | Méthodes de l'état adjoint du premier et second ordre        | 46        |
| 1.2.4      | Le gradient et le Hessien : implémentation                   | 51        |
| 1.2.5      | Analyses complémentaires                                     | 57        |
| <b>1.3</b> | <b>Applications multiparamètres sur données synthétiques</b> | <b>62</b> |
| 1.3.1      | Le modèle des croix  | 62        |
| 1.3.2      | Un modèle plus réaliste                                      | 68        |
| <b>1.4</b> | <b>Conclusions</b>   | <b>73</b> |

---

### Introduction

L'inversion des formes d'ondes complètes requiert de résoudre deux problèmes distincts : le problème direct et le problème inverse. Le problème direct consiste à calculer le champ d'ondes dans un modèle numérique représentatif de la réalité, tandis que le problème inverse consiste à retrouver la distribution des paramètres physiques du modèle à l'origine des données observées.

Dans ce chapitre, je débute par la résolution du problème direct. Pour ce faire, j'introduis les équations fondamentales de l'électromagnétisme et les équations constitutives du milieu géologique. Ces dernières sont l'occasion de présenter plus en détail les paramètres physiques, susceptibles d'influencer la propagation des ondes électromagnétiques, et d'énoncer les hypothèses simplificatrices les concernant dans cette thèse. Après avoir combiné les deux systèmes d'équations, le milieu étudié est supposé 2D afin de pouvoir simplifier les équations et simplifier leur résolution numérique via une stratégie de discrétisation par différences finies.

Les développements suivants sont dédiés au problème inverse. Après avoir brièvement rappelé les notions de base d'un problème inverse et les méthodes possibles pour le résoudre, je me concentre sur la formulation du problème d'inversion des formes d'ondes. Celui-ci est résolu de manière itérative via des méthodes d'optimisation locale à partir d'un modèle de départ. Les deux éléments-clés de cette approche, le gradient et le Hessien, sont interprétés physiquement. Ensuite, je présente les différents algorithmes d'optimisation testés dans ce travail. Les méthodes adjointes du premier et second ordre sont développées pour calculer le gradient et le produit Hessien-vecteur, quantités qui doivent être calculées dans l'implémentation de ces méthodes.

La suite logique à ces développements méthodologiques est une mise en situation sur des modèles contrôlés pour évaluer la capacité des différents algorithmes à découpler les paramètres inversés : la permittivité et la conductivité. En considérant des exemples de plus en plus réalistes, nous mettons progressivement en évidence les points forts et les limites de chaque algorithme d'optimisation pour finalement décider de celui qui sera utilisé pour inverser les données réelles.

## 1.1 Le problème direct

### 1.1.1 Notions théoriques

#### 1.1.1.1 Equations de Maxwell

A partir des travaux de Faraday, Ampère et Gauss, Maxwell (1873) pose les bases d'une théorie complète et cohérente de l'électromagnétisme à travers un système de quatre équations couplées. Ces équations sont rappelées ici sous leur forme différentielle :

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} - \mathbf{M}(\mathbf{r}, t), \quad \text{Loi de Maxwell-Faraday,} \quad (1.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \mathbf{J}(\mathbf{r}, t), \quad \text{Loi de Maxwell-Ampère,} \quad (1.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \rho_e(\mathbf{r}, t), \quad \text{Loi de Maxwell-Gauss électrique,} \quad (1.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \rho_m(\mathbf{r}, t), \quad \text{Loi de Maxwell-Gauss magnétique.} \quad (1.4)$$

Les variables  $\mathbf{r}$  et  $t$  désignent le vecteur position (en mètre) et le temps (en seconde). Les champs présents dans le système sont :

- $\mathbf{E}$  : le champ électrique (V/m),
- $\mathbf{H}$  : le champ magnétique (A/m),
- $\mathbf{J}$  : la densité de courant électrique (A/m<sup>2</sup>),
- $\mathbf{M}$  : la densité de courant magnétique (V/m<sup>2</sup>),
- $\mathbf{D}$  : l'induction électrique (C/m<sup>2</sup>),
- $\mathbf{B}$  : l'induction magnétique (T=Wb/m<sup>2</sup>),

tandis que les quantités scalaires désignent

$$\begin{aligned}\rho_e & : \text{ la densité de charge électrique (C/m}^3\text{),} \\ \rho_m & : \text{ la densité de charge magnétique (Wb/m}^3\text{).}\end{aligned}$$

Bien qu'il n'existe pas de vrais courants magnétiques ( $\mathbf{M}$ ), ces derniers peuvent être réalisés en pratique par une boucle de courant électrique. Si cette boucle de courant électrique est suffisamment petite, elle est alors équivalente à un dipôle magnétique.

Les développements à venir se font dans le domaine fréquentiel. Nous faisons le choix de la convention suivante pour la transformée de Fourier :

$$TF(f(t)) = \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{i\omega t} dt, \quad (1.5)$$

où  $i$  est le nombre imaginaire tel que  $i^2 = -1$ . Par intégration par partie, la transformée de Fourier de la dérivée temporelle de  $f$  est simplement donnée par

$$TF\left(\frac{\partial f(t)}{\partial t}\right) = -i\omega TF(f(t)) = -i\omega \hat{f}(\omega). \quad (1.6)$$

En supposant les champs harmoniques et après transformée de Fourier, nous pouvons réécrire les équations de Maxwell dans le domaine fréquentiel comme

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = i\omega \mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega) - \mathbf{M}(\mathbf{r}, \omega) \quad (1.7)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) = -i\omega \mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) + \mathbf{J}(\mathbf{r}, \omega), \quad (1.8)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) = \rho_e(\mathbf{r}, \omega), \quad (1.9)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega) = \rho_m(\mathbf{r}, \omega). \quad (1.10)$$

Pour simplifier les notations, nous omettons le signe  $\hat{\phantom{x}}$  sur les champs qui dépendent de la fréquence angulaire  $\omega$  (rad/s).

Malgré l'avancée majeure qu'elles représentent, les équations de Maxwell ne permettent pas, en l'état, de décrire la propagation d'ondes dans un milieu géologique. En effet, les équations ne sont pas linéairement indépendantes en électrodynamique de sorte qu'il existe en fait quatre inconnues pour deux équations réellement indépendantes (Chew, 1995). Le système est donc sous-déterminé et ne peut pas être résolu en l'état. De plus, les équations n'intègrent pas explicitement les paramètres physiques mis en jeu en électromagnétisme et plus particulièrement dans les mesures GPR. Ces deux points sont résolus par l'ajout de trois relations constitutives liant les quantités vectorielles (induction, champ et courant) entre elles via les paramètres du milieu : la conductivité électrique, la permittivité diélectrique et la perméabilité magnétique respectivement notées  $\sigma$ ,  $\varepsilon$  et  $\mu$ . Nous présenterons ces relations par la suite.



### 1.1.1.2 Relations constitutives et paramètres électromagnétiques

Compte-tenu du rôle central joué par la conductivité électrique, la permittivité diélectrique et la perméabilité magnétique dans ce système et plus spécifiquement dans cette thèse, ces paramètres sont décrits plus amplement dans ce qui suit. Nous faisons deux hypothèses sur le milieu géologique. Premièrement, il est linéaire, c'est-à-dire que les phénomènes de polarisation (respectivement magnétisation), décrits ultérieurement, varient linéairement avec le champ électrique (respectivement magnétique). Deuxièmement, le milieu est isotrope, c'est dire que ces propriétés sont indépendantes de la direction considérée. Il en découle que les paramètres  $\sigma$ ,  $\varepsilon$  et  $\mu$  sont des nombres complexes. Dans le cas anisotrope, ils sont décrits par des tenseurs de dimension 3.

#### La perméabilité magnétique

Dans le vide, ce paramètre intervient simplement à travers la relation :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega) = \mu_0 \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega), \quad (1.11)$$

où  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$  H/m est la valeur définie dans le vide. Dans les milieux géologiques, cette relation se complexifie car l'application d'un champ magnétique induit une magnétisation  $\mathbf{M}$  du milieu qui s'écrit

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}, \omega) = \mu_0 \chi_m(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega), \quad (1.12)$$

où  $\chi_m$  est la susceptibilité magnétique qui traduit la capacité de magnétisation du milieu. L'induction magnétique totale est la somme des deux contributions :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega) = \mu(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega), \quad (1.13)$$

avec  $\mu = \mu_0(1 + \chi_m) = \mu_0 \mu_r$ .

Dans le cas général, les milieux investigués par radar géologique possèdent une perméabilité magnétique relative de 1 ( $\mu_r = 1$ ). Ce n'est que dans des milieux géologiques très spécifiques, riches en fer et/ou nickel, que cette valeur varie significativement. Nous retenons donc  $\mu_r = 1$  lors des applications synthétiques et réelles à venir. Cependant, afin de montrer la faisabilité et la généralité de la méthode proposée, nous considérons  $\mu_r$  variable dans les développements théoriques.

#### La conductivité électrique

La conductivité électrique, inverse de la résistivité, caractérise la capacité du milieu à laisser circuler les charges libres (électrons, ions) sous l'action d'un champ électrique.

Ce mouvement de charges libres se traduit par une densité de courant de conduction, notée  $\mathbf{J}_c$ , dont l'expression suit la loi d'Ohm :

$$\mathbf{J}_c(\mathbf{r}, \omega) = \sigma(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega), \quad (1.14)$$

où  $\sigma$  est la conductivité électrique (en  $S.m^{-1}$ ). Dans les faits, les charges libres ne répondent pas systématiquement de manière instantanée à la sollicitation électrique, en raison, notamment, de la viscosité des fluides ou de collisions entre particules (conducteur non parfait). Il existe donc un déphasage entre  $\mathbf{J}_c$  et  $\mathbf{E}$  que l'on exprime par une conductivité complexe telle que :

$$\sigma(\mathbf{r}, \omega) = \sigma'(\mathbf{r}, \omega) - i\sigma''(\mathbf{r}, \omega). \quad (1.15)$$

où  $\sigma'$  et  $\sigma''$  désignent respectivement les parties réelle et imaginaire de la conductivité.

### La permittivité diélectrique

Cette propriété peut être vue comme l'analogie de la conductivité mais appliquée aux porteurs de charges liés (réseau cristallin, nuage électronique). En réaction au champ électrique  $\mathbf{E}$ , les porteurs de charges électriques liés se redistribuent localement autour d'une nouvelle position d'équilibre. Le déplacement des charges positives et négatives dans des directions opposées crée un moment dipolaire ( $\mathbf{D}$ ). A l'image de  $\mathbf{B}$  pour la perméabilité magnétique,  $\mathbf{D}$  peut être défini dans le vide :

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega), \quad (1.16)$$

mais également dans un milieu géologique via une polarisation induite

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon_0 \chi_e(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega), \quad (1.17)$$

où  $\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$  F/m est la permittivité dans le vide tandis que  $\chi_e$  est la susceptibilité diélectrique décrivant la capacité de polarisation électrique du milieu. L'induction électrique totale s'exprime alors

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega), \quad (1.18)$$

avec  $\varepsilon = \varepsilon_0(1 + \chi_e) = \varepsilon_0 \varepsilon_r$  où la quantité  $\varepsilon_r$  s'appelle permittivité relative.

Grâce à la loi de conservation de la charge, le champ  $\mathbf{E}$  peut être relié aux courants de déplacement  $\mathbf{J}_d$  par :

$$\mathbf{J}_d(\mathbf{r}, \omega) = -i\omega \varepsilon(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega). \quad (1.19)$$

A l'image du courant de conduction  $\mathbf{J}_c$ , les porteurs de charges liés ne répondent pas nécessairement instantanément en quadrature de phase avec le champ électrique  $\mathbf{E}$ , ce qui se traduit par une permittivité complexe

$$\varepsilon(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon'(\mathbf{r}, \omega) + i\varepsilon''(\mathbf{r}, \omega), \quad (1.20)$$

où  $\varepsilon'$  et  $\varepsilon''$  rendent respectivement compte de l'accumulation d'énergie et des pertes diélectriques engendrées par les mécanismes de polarisation comme expliqué schématiquement ci-dessous.

Pour une fréquence d'excitation  $f (= \frac{\omega}{2\pi})$ , faible devant la fréquence de relaxation d'un mécanisme de polarisation donné, les porteurs de charges liés ont le temps de s'organiser et de s'orienter avec le champ électrique, préservant un état d'équilibre dit quasi-statique. La permittivité  $\varepsilon$  est alors une quantité réelle et l'énergie stockée par les déplacements relatifs des particules chargées est maximale. Si la fréquence augmente, les porteurs de charges commencent à engendrer des frottements limitant leur réactivité et leur capacité à suivre l'excitation. Une partie de l'énergie est alors convertie en chaleur. De plus, l'énergie stockée par polarisation décroît car cette dernière n'est plus totale. Lorsque la fréquence d'excitation atteint la fréquence de relaxation du mécanisme considéré, les porteurs de charge sont en mouvement permanent et la perte d'énergie est maximale. Lorsque la fréquence continue d'augmenter, ils n'ont progressivement plus le temps de réagir aux sollicitations de l'excitation et finissent par ne plus être sensibles au mécanisme de polarisation considéré.

De cette manière, on distingue quatre principaux types de polarisation caractérisés par leur fréquence de relaxation.

- La polarisation électronique due au déplacement relatif du nuage électronique par rapport à son noyau.
- La polarisation atomique ou ionique due aux déplacements relatifs des cations et des anions constitutifs du réseau cristallin.
- La polarisation dipolaire due à l'orientation des molécules ayant un moment dipolaire permanent (typiquement l'eau) selon les lignes de champs.
- La polarisation interfaciale due à l'accumulation des particules chargées aux interfaces d'un milieu soumis à une sollicitation.

Une illustration de ces phénomènes de polarisation et de relaxation est fournie en Figure 1.1, où sont affichées les parties réelles et imaginaires de la permittivité en fonction de la fréquence. Compte-tenu des fréquences mises en jeu lors de l'utilisation de radar géologique (10 MHz à 2 GHz), les polarisations électronique et atomique sont présentes de manière systématique en raison de leur haute fréquence de relaxation. A part dans les milieux secs, la polarisation dipolaire doit également être prise en compte du fait du fort pouvoir de polarisation des molécules d'eau généralement présentes dans le sol. Ainsi, seule la polarisation interfaciale n'est pas mise en jeu lors de l'utilisation du GPR.

### 1.1.1.3 Courant total, paramètres effectifs et angle de perte

Nous avons vu que le milieu géologique pouvait être caractérisé à la fois par une densité de courant de conduction et une densité de courant de déplacement. Nous définissons la densité de courant total  $\mathbf{J}_t$  comme :

$$\mathbf{J}_t(\mathbf{r}, \omega) = \mathbf{J}_c(\mathbf{r}, \omega) + \mathbf{J}_d(\mathbf{r}, \omega) = -i\omega\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)(\varepsilon'_e(\mathbf{r}, \omega) + i\varepsilon''_e(\mathbf{r}, \omega)), \quad (1.21)$$

avec

$$\varepsilon'_e(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon'(\mathbf{r}, \omega) + \frac{\sigma''(\mathbf{r}, \omega)}{\omega}, \quad (1.22)$$

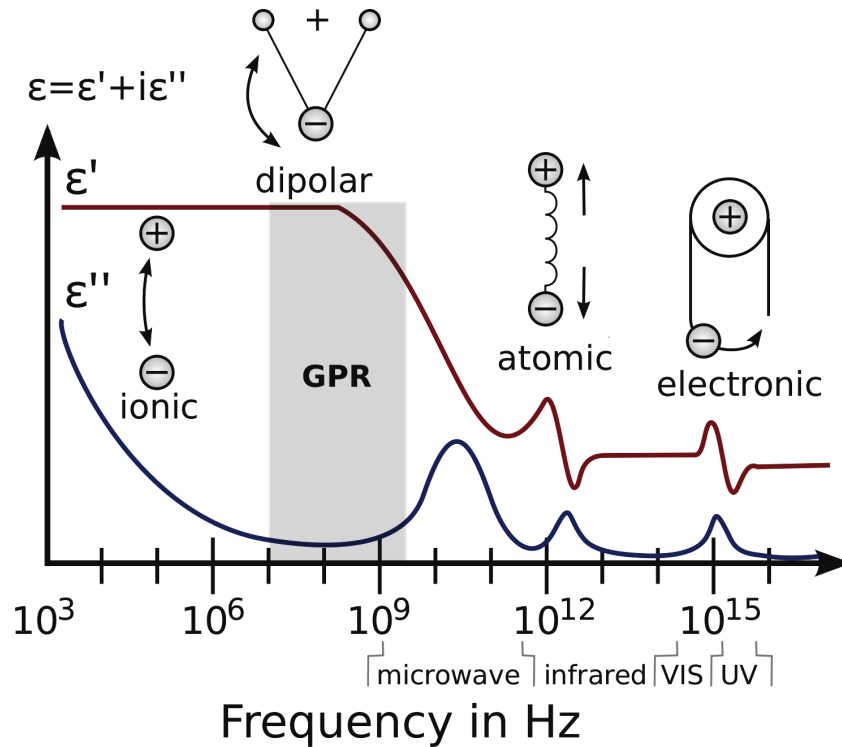


FIGURE 1.1 – Processus de polarisation et permittivité diélectrique à différentes fréquences (d'après Lavoué (2014) et [http://en.wikipedia.org/wiki/File:Dielectric\\_responses.svg](http://en.wikipedia.org/wiki/File:Dielectric_responses.svg))

$$\varepsilon_e''(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon''(\mathbf{r}, \omega) + \frac{\sigma'(\mathbf{r}, \omega)}{\omega}. \quad (1.23)$$

Les expressions (1.22) et (1.23) montrent que la partie imaginaire de la permittivité joue le rôle d'une conductivité et que la partie imaginaire de la conductivité joue le rôle d'une permittivité. Par conséquent, il n'est pas possible expérimentalement de mesurer chacune de ces quatre quantités de façon indépendante. En fait, seules les quantités effectives sont accessibles à la mesure expérimentale.

Les expressions (1.22) et (1.23) sont également impliquées dans la définition de l'angle de perte  $\delta$ . Ce paramètre permet de caractériser la perte énergétique lors de la propagation d'ondes. Par convention, la tangente de cet angle est définie comme le rapport de l'énergie perdue sur l'énergie stockée. En négligeant  $\sigma''$  (Topp *et al.*, 1980; Hollender & Tillard, 1998), on en déduit

$$\tan \delta(\mathbf{r}, \omega) = \frac{\varepsilon_e''(\mathbf{r}, \omega)}{\varepsilon_e'(\mathbf{r}, \omega)} = \frac{\sigma'(\mathbf{r}, \omega)}{\omega \varepsilon'(\mathbf{r}, \omega)} + \frac{\varepsilon''(\mathbf{r}, \omega)}{\varepsilon'(\mathbf{r}, \omega)} = \frac{1}{Q(\mathbf{r}, \omega)} \quad (1.24)$$

où les deux termes désignent respectivement les pertes par conduction dues aux déplacements des porteurs de charges libres et les pertes diélectriques dues aux phénomènes de relaxation des porteurs de charges liés. En suivant cette formule, il devient évident que plus le milieu est conducteur, plus les pertes sont importantes. Cela explique que les milieux conducteurs ne sont pas favorables au GPR. Dans cette égalité, on trouve également le facteur de qualité  $Q$  qui est

parfois introduit pour caractériser l'atténuation des milieux. Notons que cette notion est plus couramment utilisée en sismique.

#### 1.1.1.4 Caractéristiques des matériaux diélectriques aux fréquences radar

La permittivité  $\varepsilon_e$  est une quantité dispersive car elle dépend de la fréquence. Dans la mesure où le radar géologique émet une impulsion large bande, il est important de disposer de modèles mathématiques pouvant rendre compte de cette dépendance pour pouvoir modéliser au mieux une propagation d'ondes dans le milieu donné. Afin de se concentrer sur la notion fréquentielle, la dépendance spatiale est momentanément omise.

Dans la littérature, plusieurs modèles empiriques existent pour décrire la dépendance fréquentielle de  $\varepsilon_e$ . Tous ces modèles peuvent s'écrire selon une formule commune :

$$\varepsilon_e(\omega) = \varepsilon_\infty + \varepsilon_0 \chi(\omega) + i \frac{\sigma_{DC}}{\omega}, \quad (1.25)$$

où  $\varepsilon_\infty$  désigne la permittivité haute fréquence. Cette grandeur, considérée comme réelle, rend compte de la permittivité associée aux mécanismes de polarisation dont les fréquences de relaxation sont largement supérieures à la gamme fréquentielle du GPR. Un autre réel,  $\sigma_{DC}$ , donne la conductivité statique (à fréquence nulle) tandis que la susceptibilité électrique (complexe)  $\chi$  caractérise les mécanismes de polarisation non compris dans le terme  $\varepsilon_\infty$ . En fait, les différents modèles existants diffèrent par l'expression de  $\chi$ .

La première formulation est issue des travaux de Debye (1929) :

$$\chi(\omega) = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{1 + i\omega\tau}, \quad (1.26)$$

où  $\varepsilon_s$  est la permittivité statique (réelle) valide à basse fréquence et  $\tau$  le temps de relaxation caractéristique du mécanisme de polarisation considéré (inverse de la fréquence de relaxation). Cette formulation, à un seul temps de relaxation, est bien adaptée pour décrire la polarisation des molécules dipolaires comme l'eau.

Ce modèle peut être modifié afin de décrire plus finement les mécanismes de polarisation (Cole & Cole (1941), Davidson & Cole (1951)). Cependant, ces modèles font intervenir de nouveaux paramètres qu'il faut calibrer, ce qui complique la description des milieux géologiques.

De manière alternative, Jonscher (1977, 1981) propose une "réponse diélectrique universelle". Cette réponse reprend le mécanisme de Debye, pour décrire correctement le phénomène de relaxation, auquel s'ajoutent des lois puissances pour décrire le comportement hors du domaine fréquentiel de la relaxation de Debye. Ce modèle de Jonscher permet de caractériser assez finement le matériau sur une très large gamme de fréquences. Une formulation haute fréquence basée sur seulement 3 paramètres est dérivée par Hollender & Tillard (1998) telle que

$$\chi(\omega) = \chi_r \left( \frac{\omega}{\omega_r} \right)^{n-1} \left( 1 + i \cotan \frac{n\pi}{2} \right), \quad (1.27)$$

où  $\chi_r$ ,  $\omega_r$  et  $n$ , tous réels, sont respectivement : un paramètre de susceptibilité, une fréquence de référence arbitraire et un exposant caractéristique du régime haute fréquence. Cette approximation a largement participé à la diffusion de ce modèle par sa simplicité mais aussi

par sa description très précise du matériau dès que les fréquences utilisées sont supérieures à ses fréquences de relaxation. A titre d'illustration, les paramètres de Jonscher pour certains milieux sont disponibles dans le tableau 1.1. On retrouve également dans ce tableau des valeurs moyennes de permittivité et conductivité effectives à 100 et 200 MHz.

En se basant sur la formule 1.27 et les valeurs du tableau 1.1, Lavoué (2014) montre que dans le cas général, la conductivité du milieu n'est pas négligeable aux fréquences GPR. Il met aussi en évidence que la dispersion est présente dans la plupart des matériaux naturels et même particulièrement forte concernant la conductivité. Il faudrait donc tenir compte de la dépendance fréquentielle pour avoir une estimation fiable des paramètres à une fréquence donnée afin de reproduire au mieux la propagation d'ondes dans un milieu réel à ladite fréquence. Cependant, Lavoué (2014) montre également que les données GPR sont particulièrement sensibles à la permittivité haute fréquence et finalement peu aux paramètres dispersifs de Jonscher ( $\chi_r$  et  $n$ ). Par conséquent, nous préfererons utiliser une paramétrisation simplifiée et non dispersive au travers d'une permittivité et d'une conductivité réelles et indépendantes de la fréquence. Cela revient à négliger les paramètres dispersifs introduits par Jonscher mais aussi toute forme de permittivité imaginaire  $\varepsilon''$  (comme s'était déjà le cas pour  $\sigma''$ ). Notons que cette paramétrisation n'est pas nouvelle et qu'elle est utilisée dans la majorité des algorithmes d'inversion de données GPR. Dans cette thèse, le milieu sera donc considéré comme isotrope, linéaire, et non-dispersif.

APPROCHE MULTIPARAMÈTRES SUR CAS SYNTHÉTIQUES : THÉORIE ET ALGORITHMES

| Medium   | $\varepsilon_{\infty r}$ | $\chi_r$ | $n$  | $\sigma_{DC}$<br>(mS/m) | $\varepsilon'_r(\omega)$ |         | $\sigma(\omega)$ (mS/m)                |         | $\sigma_{DC}/(\varepsilon'\omega)$<br>(100 MHz) |
|--|--------------------------|----------|------|-------------------------|--------------------------|---------|--|---------|---|
|  |                          |          |      |                         | 100 MHz                  | 200 MHz | 100 MHz                                | 200 MHz |   |
|  |                          |          |      |                         |                          |         |  |         |   |
| Air/vacuum   | 1                        | 0        | 1    | 0.                      | 1                        |         | 0.                                     |         | 0.  |
| Snow (dry) <sup>(1)</sup>                            |                          |          |      |                         | ~ 1.2 to 1.5             |         | 0.                                     |         | 0.  |
| Ice <sup>(1),(3b),(4)</sup>                          |                          |          |      |                         | 3.2                      |         | ~ 10 <sup>-3</sup> to 10 <sup>-2</sup> |         | ~ 10 <sup>-5</sup> to 5.10 <sup>-4</sup>        |
| Distilled water <sup>(1),(4)</sup>                   |                          |          |      |                         | 81                       |         | ~ 10 <sup>-3</sup> to 10 <sup>-2</sup> |         | ~ 10 <sup>-6</sup> to 10 <sup>-5</sup>          |
| Fresh water <sup>(4)</sup>                           |                          |          |      |                         | 81                       |         | ~ 10 <sup>-2</sup> to 10 <sup>-1</sup> |         | ~ 10 <sup>-5</sup> to 10 <sup>-4</sup>          |
| Saline water <sup>(1),(4)</sup>                      |                          |          |      |                         | 81                       |         | ~ 10 <sup>2</sup> to 10 <sup>3</sup>   |         | ~ 10 <sup>-1</sup> to 2                         |
| Peat <sup>(1)</sup>                                  |                          |          |      |                         | ~ 60 to 80               |         | ~ 1 to 10                              |         | ~ 10 <sup>-3</sup> to 3.10 <sup>-2</sup>        |
| Sedimentary rocks <sup>(1)</sup>                     |                          |          |      |                         | ~ 4 to 10                |         | ~ 10 <sup>-2</sup> to 10 <sup>2</sup>  |         | ~ 10 <sup>-4</sup> to 2                         |
| Limestone <sup>(3a),(4)</sup>                        |                          |          |      |                         | ~ 4 to 9                 |         | ~ 10 <sup>-1</sup> to 3.3              |         | ~ 10 <sup>-4</sup> to 10 <sup>-1</sup>          |
| Limestone (dry) <sup>(3b)</sup>                      | 8.14                     | 0.94     | 0.82 |                         | 9.08                     | 8.97    | 1.5                                    | 2.7     | ~ 0.03  |
| Limestone <sup>(3b)</sup><br>(fresh water saturated) | 17.3                     | 1.1      | 0.33 |                         | 18.4                     | 18.0    | 10.7                                   | 13.5    | ~ 0.10  |
| Gneiss - Schist <sup>(1)</sup>                       |                          |          |      |                         | ~ 5 to 15                |         | ~ 10 <sup>-3</sup> to 10               |         | ~ 10 <sup>-5</sup> to 0.4                       |
| Schist <sup>(3a)</sup>                               |                          |          |      |                         | ~ 5 to 15                |         | ~ 30 to 3.10 <sup>2</sup>              |         | ~ 10 <sup>-1</sup> to 10                        |
| Schist <sup>(2)</sup>                                | 10.2                     | 13.6     | 0.66 | 6.4                     | 23.8                     | 21.0    | 51                                     | 77      | ~ 0.2   |
| Clay-rich rocks <sup>(1)</sup>                       |                          |          |      |                         | ~ 5 to 40                |         | ~ 1 to 10 <sup>3</sup>                 |         | ~ 10 <sup>-2</sup> to 10                        |
| Clay <sup>(3a)</sup>                                 |                          |          |      |                         | ~ 8 to 12                |         | ~ 10 to 10 <sup>2</sup>                |         | ~ 10 <sup>-1</sup> to 1                         |
| Clay <sup>(4)</sup>                                  |                          |          |      |                         | ~ 3 to 60                |         | ~ 10 <sup>-1</sup> to 10 <sup>3</sup>  |         | ~ 10 <sup>-4</sup> to 10                        |
| Wet clay <sup>(3b)</sup>                             | 55                       | 30       | 0.25 |                         | 85.0                     | 72.8    | 403.                                   | 479.    | ~ 0.7   |
| Shale <sup>(3b)</sup>                                | 4.3                      | 2.6      | 0.6  |                         | 6.9                      | 6.3     | 10.5                                   | 15.9    | ~ 0.25  |
| Siltstone <sup>(3b)</sup>                            | 3.1                      | 4.2      | 0.68 |                         | 7.3                      | 6.5     | 12.8                                   | 20.6    | ~ 0.3   |
| Sand <sup>(1)</sup>                                  |                          |          |      |                         | ~ 2 to 10                |         | ~ 10 <sup>-2</sup> to 10               |         | ~ 10 <sup>-4</sup> to 0.5                       |
| Sand <sup>(3a)</sup>                                 |                          |          |      |                         | ~ 5 to 40                |         | ~ 10 <sup>-1</sup> to 3.3              |         | ~ 10 <sup>-4</sup> to 10 <sup>-1</sup>          |
| Dry sand <sup>(4)</sup>                              |                          |          |      |                         | ~ 3 to 6                 |         | ~ 10 <sup>-3</sup> to 1                |         | ~ 10 <sup>-5</sup> to 10 <sup>-2</sup>          |
| Dry sand <sup>(3b)</sup>                             | 2.5                      | 0        | 1    |                         | 2.5                      |         | 0.                                     |         | 0.  |
| Sand <sup>(4)</sup><br>(water saturated)             |                          |          |      |                         | ~ 20 to 30               |         | ~ 10 <sup>-1</sup> to 10 <sup>2</sup>  |         | 10 <sup>-3</sup> to 0.5                         |
| Wet sand <sup>(3b)</sup>                             | 29                       | 4        | 0.5  |                         | 33                       | 31.8    | 22.2                                   | 31.5    | ~ 0.1   |
| Quartzite <sup>(1)</sup>                             |                          |          |      |                         | ~ 3 to 6                 |         | ~ 10 <sup>-3</sup> to 10               |         | ~ 10 <sup>-5</sup> to 0.5                       |
| Sandstone <sup>(3a)</sup>                            |                          |          |      |                         | ~ 4 to 5                 |         | ~ 1 to 30                              |         | ~ 10 <sup>-2</sup> to 1                         |
| Sandstone <sup>(4)</sup>                             |                          |          |      |                         | ~ 4 to 5                 |         | ~ 3.10 <sup>-1</sup> to 1              |         | ~ 10 <sup>-2</sup>                              |
| Granite <sup>(3a)</sup>                              |                          |          |      |                         | ~ 4 to 6                 |         | ~ 10 <sup>-2</sup> to 1                |         | ~ 10 <sup>-4</sup> to 10 <sup>-2</sup>          |
| Granite <sup>(2)</sup>                               | 5.0                      | 1.10     | 0.94 | 0.19                    | 6.10                     | 6.05    | 0.8                                    | 1.3     | ~ 10 <sup>-2</sup>                              |
| Granite (dry) <sup>(3b)</sup>                        | 4.7                      | 0.7      | 0.93 |                         | 5.40                     | 5.37    | 0.4                                    | 0.8     | ~ 0.01  |
| Granite <sup>(3b)</sup><br>(fresh water saturated)   | 5.6                      | 0.5      | 0.51 |                         | 6.10                     | 6.96    | 2.7                                    | 3.8     | ~ 0.7   |

TABLE 1.1 – Propriétés électriques de différents matériaux. D'après Lavoué (2014), qui a compilé ces propriétés à partir des travaux de <sup>(1)</sup>(Saintenoy, 1998, tab. 3.1, p. 49), <sup>(2)</sup>Girard (2002), <sup>(3a)</sup>(Jeannin, 2005, tab. 1.1, p. 41), <sup>(3b)</sup>(Jeannin, 2005, tab. 2.1, p. 76), <sup>(4)</sup>Loeffler (2005, tab. 1, p. 29).

## 1.1.2 Propagation d'ondes

### 1.1.2.1 Equation de Helmholtz ou de diffusion-propagation

Ici, on cherche à comprendre les effets d'une permittivité et une conductivité réelles et constantes sur la propagation des ondes électromagnétiques en milieu homogène. A partir des développements précédents, les relations constitutives s'écrivent dans le domaine fréquentiel :

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega), \quad (1.28)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega) = \mu(\mathbf{r})\mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega), \quad (1.29)$$

$$\mathbf{J}_c(\mathbf{r}, \omega) = \sigma(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega), \quad (1.30)$$

où les paramètres  $(\varepsilon, \sigma, \mu)$  sont des scalaires réels. Dans un milieu homogène, sans source, l'introduction des relations constitutives dans les équations de Maxwell donne l'équation de Helmholtz :

$$\Delta \mathbf{u}(\mathbf{r}, \omega) + k^2(\omega)\mathbf{u}(\mathbf{r}, \omega) = 0, \quad (1.31)$$

où  $\mathbf{u}$  peut être  $\mathbf{E}$  ou  $\mathbf{H}$  tandis que  $k$  le nombre d'ondes (complexe) tel que

$$k^2(\omega) = \varepsilon_e(\omega)\mu\omega^2 \quad \text{et} \quad \varepsilon_e(\omega) = \varepsilon + i\frac{\sigma}{\omega}. \quad (1.32)$$

On retrouve dans l'expression de  $\varepsilon_e$  la compétition entre les deux formes de courant et donc la compétition entre diffusion ( $\sigma$ ) et propagation ( $\varepsilon$ ).

En considérant une source impulsive en  $r = 0$  et en rappelant que le milieu est homogène, la solution de l'équation (1.31) est de la forme :

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, \omega) \propto \frac{e^{ikr}}{4\pi r}, \quad (1.33)$$

où  $r = |\mathbf{r}|$  est la distance à la source tandis que le symbole  $\propto$  désigne la proportionnalité. Le nombre d'onde  $k$  est défini, d'après l'équation (1.32), par

$$k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon_e} = \beta + i\alpha, \quad (1.34)$$

où les parties réelle  $\beta$  et imaginaire  $\alpha$ , appelées coefficient de phase (propagation) et d'atténuation, s'écrivent

$$\alpha = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2} \left( \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2} - 1 \right)}, \quad (1.35)$$

$$\beta = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2} \left( \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2} + 1 \right)}. \quad (1.36)$$



## APPROCHE MULTIPARAMÈTRES SUR CAS SYNTHÉTIQUES : THÉORIE ET ALGORITHMES

---

Ces deux expressions montrent que, dans le cas général, la permittivité et la conductivité jouent un rôle dans les coefficients de propagation et d'atténuation. En substituant l'expression du nombre d'ondes dans l'équation (1.33), il vient :

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, \omega) \propto \frac{e^{i\beta r} e^{-\alpha r}}{4\pi r}, \quad (1.37)$$

où on identifie un terme propagatif  $e^{i\beta r}$ , un terme d'atténuation intrinsèque  $e^{-\alpha r}$  et un terme de décroissance géométrique  $1/r$ .

Connaissant  $\beta$ , la vitesse de phase des ondes électromagnétiques s'exprime :

$$v(\omega) = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \left[ \frac{1}{2} \left( \sqrt{1 + \left( \frac{\sigma}{\varepsilon\omega} \right)^2} + 1 \right) \right]^{-1/2}. \quad (1.38)$$

Dans les milieux à forte perte ( $\tan \delta \gg 1$ ),  $\alpha$  et  $\beta$  tendent vers une valeur commune souvent appelée épaisseur de peau :

$$\alpha = \beta = \sqrt{\frac{\mu\sigma\omega}{2}}. \quad (1.39)$$

Dans les milieux à faible perte ( $\tan \delta \ll 1$ ), la vitesse de phase et  $\alpha$  tendent vers des valeurs constantes, couramment utilisées,

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}, \quad (1.40)$$

$$\alpha = \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}. \quad (1.41)$$

Cette dernière quantité peut être reliée au facteur de qualité  $Q$  via la relation

$$\alpha = \frac{\omega}{2vQ}. \quad (1.42)$$

Au final, en première approximation, la vitesse des ondes radar dépend de la permittivité tandis que l'atténuation est contrôlée par la permittivité et la conductivité. A plus basse fréquence, la conductivité, même réelle et indépendante de la fréquence, introduit une dépendance fréquentielle de la vitesse et de l'atténuation, donc de la dispersion.

### 1.1.2.2 Résolution du problème direct dans un milieu 2D hétérogène

Les milieux naturels, et en particulier la proche surface, sont des milieux très hétérogènes. Dans ces conditions, les solutions analytiques développées précédemment ne sont pas à même de décrire la propagation d'ondes de sorte qu'il faille faire appel à la modélisation numérique pour pouvoir réaliser de l'imagerie quantitative. La modélisation numérique peut s'avérer particulièrement demandeuse en ressource informatique lorsque les milieux géologiques sont modélisés en 3D avec une grande complexité physique. Cet aspect calculatoire est renforcé dans le cadre de la méthode d'inversion des formes d'ondes, présentée dans le chapitre suivant, puisqu'elle requiert de résoudre de manière répétée le problème direct. Dans le cadre de la paramétrisation discutée précédemment, nous détaillons maintenant la stratégie numérique efficace et économique utilisée pour mener à bien la résolution du problème direct que nous avons adoptée dans cette thèse.

En commençant par introduire les relations constitutives dans les équations de Maxwell, nous obtenons le système d'équations couplées :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial H_z(\mathbf{x}, \omega)}{\partial y} - \frac{\partial H_y(\mathbf{x}, \omega)}{\partial z} = -i\omega\varepsilon(\mathbf{x})E_x(\mathbf{x}, \omega) + \sigma(\mathbf{x})E_x(\mathbf{x}, \omega) + J_s^x(\mathbf{x}, \omega), \\ \frac{\partial H_x(\mathbf{x}, \omega)}{\partial z} - \frac{\partial H_z(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x} = -i\omega\varepsilon(\mathbf{x})E_y(\mathbf{x}, \omega) + \sigma(\mathbf{x})E_y(\mathbf{x}, \omega) + J_s^y(\mathbf{x}, \omega), \\ \frac{\partial H_y(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x} - \frac{\partial H_x(\mathbf{x}, \omega)}{\partial y} = -i\omega\varepsilon(\mathbf{x})E_z(\mathbf{x}, \omega) + \sigma(\mathbf{x})E_z(\mathbf{x}, \omega) + J_s^z(\mathbf{x}, \omega), \\ \frac{\partial E_z(\mathbf{x}, \omega)}{\partial y} - \frac{\partial E_y(\mathbf{x}, \omega)}{\partial z} = i\omega\mu(\mathbf{x})H_x(\mathbf{x}, \omega) - M_s^x(\mathbf{x}, \omega), \\ \frac{\partial E_x(\mathbf{x}, \omega)}{\partial z} - \frac{\partial E_z(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x} = i\omega\mu(\mathbf{x})H_y(\mathbf{x}, \omega) - M_s^y(\mathbf{x}, \omega), \\ \frac{\partial E_y(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x} - \frac{\partial E_x(\mathbf{x}, \omega)}{\partial y} = i\omega\mu(\mathbf{x})H_z(\mathbf{x}, \omega) - M_s^z(\mathbf{x}, \omega), \end{array} \right. \quad (1.43)$$

où  $E_x, E_y, E_z$  et  $H_x, H_y, H_z$  désignent respectivement les composantes horizontale, transverse et verticale des champs électrique et magnétique et  $\mathbf{x}$  le vecteur position en 2D. Afin de simplifier le problème et réduire les coûts de calcul, nous faisons l'hypothèse d'un milieu à deux dimensions dont le plan d'observation est noté ( $xOz$ ). Selon cette hypothèse, les propriétés du milieu ( $\varepsilon, \mu$  et  $\sigma$ ) mais aussi les champs d'ondes et les sources ne varient pas dans la direction  $y$ . Après application de cette hypothèse 2D, nous obtenons deux systèmes hyperboliques du premier ordre complètement découplés. Ces deux systèmes correspondent en fait à deux modes de propagation distincts, des ondes électromagnétiques, appelés transverse électrique (TE) et transverse magnétique (TM).

$$TE \left\{ \begin{array}{l} -i\omega\varepsilon_e(\mathbf{x}, \omega)E_y(\mathbf{x}, \omega) - \frac{\partial H_x(\mathbf{x}, \omega)}{\partial z} + \frac{\partial H_z(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x} = -J_s^y(\mathbf{x}, \omega), \\ -i\omega\mu(\mathbf{x})H_x(\mathbf{x}, \omega) - \frac{\partial E_y(\mathbf{x}, \omega)}{\partial z} = -M_s^x(\mathbf{x}, \omega), \\ -i\omega\mu(\mathbf{x})H_z(\mathbf{x}, \omega) + \frac{\partial E_y(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x} = -M_s^z(\mathbf{x}, \omega), \end{array} \right. \quad (1.44)$$

$$TM \begin{cases} -i\omega\mu(\mathbf{x})H_y(\mathbf{x},\omega) + \frac{\partial E_x(\mathbf{x},\omega)}{\partial z} - \frac{\partial E_z(\mathbf{x},\omega)}{\partial x} = -M_s^y(\mathbf{x},\omega), \\ -i\omega\varepsilon_e(\mathbf{x},\omega)E_x(\mathbf{x},\omega) + \frac{\partial H_y(\mathbf{x},\omega)}{\partial z} = -J_s^x(\mathbf{x},\omega), \\ -i\omega\varepsilon_e(\mathbf{x},\omega)E_z(\mathbf{x},\omega) - \frac{\partial H_y(\mathbf{x},\omega)}{\partial x} = -J_s^z(\mathbf{x},\omega). \end{cases} \quad (1.45)$$

Dans le cadre de cette thèse, il est intéressant de noter que les modes TE et TM sont excités respectivement par des antennes GPR dans la direction  $y$  et dans le plan  $(xOz)$ . La variable  $\mathbf{x}$  désigne la position en 2D. On retrouve la permittivité effective dont l'expression est

$$\varepsilon_e(\mathbf{x},\omega) = \varepsilon(\mathbf{x}) + \frac{i\sigma(\mathbf{x})}{\omega}. \quad (1.46)$$

En anticipant les développements à venir, nous écrivons les systèmes (1.44) et (1.45) sous la forme suivante afin de mettre en évidence les équations d'ondes du second-ordre ,

$$TE \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial E_y(\mathbf{x},\omega)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial E_y(\mathbf{x},\omega)}{\partial z} \right) + \omega^2 \varepsilon_e E_y(\mathbf{x},\omega) = \\ -i\omega J_s^y(\mathbf{x},\omega) + \frac{\partial}{\partial z} \frac{M_s^x(\mathbf{x},\omega)}{\mu} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{M_s^z(\mathbf{x},\omega)}{\mu}, \\ -i\omega\mu H_x(\mathbf{x},\omega) + \frac{\partial E_y(\mathbf{x},\omega)}{\partial z} = -M_s^x(\mathbf{x},\omega), \\ -i\omega\mu H_z(\mathbf{x},\omega) - \frac{\partial E_y(\mathbf{x},\omega)}{\partial x} = -M_s^z(\mathbf{x},\omega), \end{cases} \quad (1.47)$$

et

$$TM \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\varepsilon_e} \frac{\partial H_y(\mathbf{x},\omega)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\varepsilon_e} \frac{\partial H_y(\mathbf{x},\omega)}{\partial z} \right) + \omega^2 \mu H_y(\mathbf{x},\omega) = \\ -i\omega M_s^y(\mathbf{x},\omega) - \frac{\partial}{\partial z} \frac{J_s^x(\mathbf{x},\omega)}{\varepsilon_e} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{J_s^z(\mathbf{x},\omega)}{\varepsilon_e}, \\ -i\omega\varepsilon_e E_x(\mathbf{x},\omega) - \frac{\partial H_y(\mathbf{x},\omega)}{\partial z} = -J_s^x(\mathbf{x},\omega), \\ -i\omega\varepsilon_e E_z(\mathbf{x},\omega) + \frac{\partial H_y(\mathbf{x},\omega)}{\partial x} = -J_s^z(\mathbf{x},\omega). \end{cases} \quad (1.48)$$

De manière intéressante, les systèmes (1.44) et (1.45) présentent une structure mathématique analogue à celle du système acoustique vitesse-pression :

$$Acoustique \begin{cases} -i\omega \frac{P(\mathbf{x},\omega)}{K(\mathbf{x},\omega)} = \frac{\partial v_x(\mathbf{x},\omega)}{\partial x} + \frac{\partial v_z(\mathbf{x},\omega)}{\partial z} - i\omega \frac{P_s(\mathbf{x},\omega)}{K(\mathbf{x},\omega)}, \\ -i\omega\rho(\mathbf{x})v_x(\mathbf{x},\omega) = \frac{\partial P(\mathbf{x},\omega)}{\partial x} + \rho(\mathbf{x})f_x(\mathbf{x},\omega), \\ -i\omega\rho(\mathbf{x})v_z(\mathbf{x},\omega) = \frac{\partial P(\mathbf{x},\omega)}{\partial z} + \rho(\mathbf{x})f_z(\mathbf{x},\omega), \end{cases} \quad (1.49)$$

qui s'écrit également

$$Acoustique \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial P(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial P(\mathbf{x}, \omega)}{\partial z} \right) + \omega^2 \frac{P(\mathbf{x}, \omega)}{K(\mathbf{x}, \omega)} = \\ -\omega^2 \frac{P^s}{K(\mathbf{x}, \omega)}(\mathbf{x}, \omega) + \frac{\partial f_z(\mathbf{x}, \omega)}{\partial z} + \frac{\partial f_x(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x}, \\ -i\omega\rho(\mathbf{x})v_x(\mathbf{x}, \omega) = \frac{\partial P(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x} + \rho(\mathbf{x})f_x(\mathbf{x}, \omega), \\ -i\omega\rho(\mathbf{x})v_z(\mathbf{x}, \omega) = \frac{\partial P(\mathbf{x}, \omega)}{\partial z} + \rho(\mathbf{x})f_z(\mathbf{x}, \omega), \end{array} \right. \quad (1.50)$$

où  $P$  est la pression (Pa),  $v_x$  et  $v_z$  sont les vitesses de déplacement selon  $x$  et  $z$  (m/s),  $\rho$  est la densité (kg/m<sup>3</sup>),  $K$  est le module de rigidité (Pa),  $f_x$  et  $f_z$  sont les sources sous forme de force selon  $x$  et  $z$  (m/s<sup>2</sup>), et  $P_s$  est une source explosive/isotrope de pression (in Pa). De cette analogie structurelle des équations découle, pour chaque mode, une analogie des variables et des paramètres entre les physiques électromagnétique et visco-acoustique, comme proposé dans le tableau 1.2.

| TE              |                   |                 | TM              |                   |             |
|-----------------|-------------------|-----------------|-----------------|-------------------|-------------|
| $E_y$           | $\leftrightarrow$ | $P$             | $H_y$           | $\leftrightarrow$ | $P$         |
| $H_z$           | $\leftrightarrow$ | $-v_x$          | $E_z$           | $\leftrightarrow$ | $v_x$       |
| $H_x$           | $\leftrightarrow$ | $v_z$           | $E_x$           | $\leftrightarrow$ | $-v_z$      |
| $\varepsilon_e$ | $\leftrightarrow$ | $1/K$           | $\varepsilon_e$ | $\leftrightarrow$ | $\rho$      |
| $\mu$           | $\leftrightarrow$ | $\rho$          | $\mu$           | $\leftrightarrow$ | $1/K$       |
| $J_{s_y}$       | $\leftrightarrow$ | $i\omega P_s/K$ | $J_{s_x}$       | $\leftrightarrow$ | $\rho f_z$  |
|                 |                   |                 | $J_{s_z}$       | $\leftrightarrow$ | $-\rho f_x$ |

TABLE 1.2 – Correspondance entre les variables acoustiques et électromagnétiques.

Cette analogie mathématique entre les deux physiques, déjà discutée dans la littérature par (Carcione & Cavallini, 1995) et (Carcione & Robinson, 2002), est de première importance dans le cadre de ma thèse. En effet, elle me permet de résoudre le problème de propagation d'ondes électromagnétiques grâce à un code initialement développé pour la simulation d'ondes acoustiques : TOY2DAC. Ce code, dans sa version isotrope, est basé sur la discrétisation par différences finies de l'équation du second ordre visco-acoustique (première équation du système 1.50) dans le domaine fréquence via le schéma à grilles mixtes proposé par Jo *et al.* (1996) et (Hustedt *et al.*, 2004).

Ce schéma de discrétisation (Fig. 1.2 c) est basé sur la discrétisation de l'équation d'onde du second ordre sur deux schémas décalés de 45° (Fig. 1.2 a et b) dont les 9 points de discrétisation ont été pondérés de manière optimale afin de réduire la dispersion et l'anisotropie numérique. Il en résulte un schéma de discrétisation, appelé schéma à grilles mixtes, compact et précis qui ne requiert que 4 points de discrétisation par longueur d'onde (Jo *et al.* (1996), (Hustedt *et al.*, 2004)). Au final, cette formulation mène à un système linéaire de la forme

$$A(m(x), \omega)u(\omega, x) = s(\omega, x), \quad (1.51)$$

où  $A$  est la matrice d'impédance complexe,  $u$  le champ d'onde discrétisé ( $E_y$  en TE ou  $H_y$  en TM) et  $s$  le terme source discrétisé. Si  $u$  est discrétisé sur une grille de taille  $(N_x, N_z)$  alors la matrice d'impédance est de taille  $M$  avec  $M = N_x \times N_z$ . Ce système linéaire est résolu

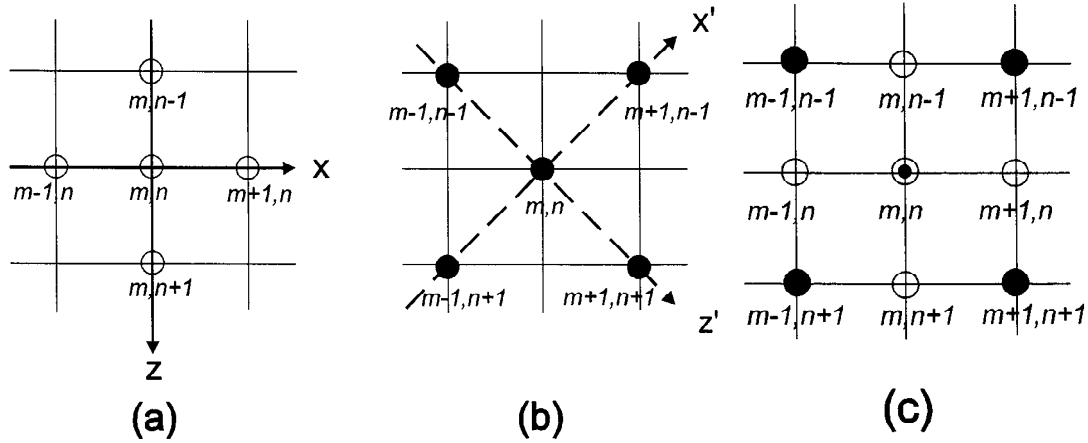


FIGURE 1.2 – Schéma différences finies (d’après Jo *et al.* (1996)). a) Schéma classique à cinq points. b) Schéma décalé. c) Schéma à grilles mixtes.

via une factorisation LU par le solveur direct parallèle basé sur une approche multi-frontale MUMPS (MUMPS-team, 2009). Cette factorisation consiste à transformer la matrice  $A$  en deux matrices triangulaires supérieure et inférieure telle que  $A = LU$ . Après factorisation, la solution au système (1.51) est calculée par substitution prograde  $Ly = b$  suivie d’une substitution rétrograde  $Uu = y$ . L’effort de calcul de cette méthode se situe dans la factorisation initiale de la matrice sous forme LU. Ce coût de calcul dépend directement de la largeur de bande de la matrice et du nombre de coefficients non nul. Il est donc important d’utiliser un schéma compact (largeur de bande faible) et requérant peu de points de discrétisation par longueur d’onde afin de réduire  $N_x$  et  $N_z$  et donc la taille de la matrice  $A$  à factoriser. De ce point de vue, le schéma à grille mixte, utilisé dans cette thèse, constitue une avancée significative par rapport au schéma classique (Fig. 1.2 a) qui nécessite 10 points de discrétisation par longueur d’onde.

Cette méthode de résolution du problème direct met en avant l’intérêt à travailler dans le domaine fréquentiel. En effet, cette méthode requière une seule factorisation LU par fréquence qui peut ensuite être utilisée à faible coût pour un grand nombre de sources. Cette méthode est donc d’autant plus intéressante que le nombre de sources est important. Cette efficacité est renforcée par la redondance des données dont il est possible de profiter en n’inversant les données que pour quelques fréquences (Pratt & Worthington (1990), Song *et al.* (1995)). Enfin, le domaine fréquentiel permet de prendre en compte facilement la conductivité et les phénomènes de dispersion associés sans avoir à introduire de mécanismes de relaxation dans les équations, comme c’est le cas dans le domaine temporel.

Au final, pour obtenir les champs d’ondes électromagnétiques, il faut résoudre le système (1.51), associé aux équations du second-ordre dans les systèmes 1.47 et 1.48, par factorisation LU. Une fois les champs  $E_y$  (TE) et  $H_y$  (TM) calculés, il est possible de déduire les deux autres champs de chaque mode par différences finies en suivant les deux équations du premier ordre du système considéré.

## 1.2 Le problème inverse

### 1.2.1 Généralités sur l'inversion des formes d'ondes complètes

#### 1.2.1.1 Définitions

D'un point de vue général, la résolution d'un problème inverse vise à déterminer les paramètres d'un système à partir de données expérimentales issues de ce système. Plus concrètement, quand nous parlons de résoudre ce problème dans le cadre de l'imagerie électromagnétique, nous souhaitons obtenir la distribution de paramètres physiques de la subsurface grâce à l'analyse de champs d'ondes électromagnétiques s'étant propagés dans cette subsurface. Notons à ce stade que la source à l'origine des champs d'ondes est généralement mal connue, lors d'applications réelles, de sorte qu'elle doit souvent être considérée aussi comme une inconnue. Pour que l'inversion soit possible et fiable, elle nécessite une relation entre les paramètres physiques du modèle  $m$  et des observables  $d_{cal}$ , que l'on peut comparer directement aux observations expérimentales  $d_{obs}$ . En géophysique, ce lien est fourni par le problème direct et s'écrit de façon générale

$$d_{cal} = F(m), \quad (1.52)$$

où  $F$  est l'opérateur souvent non linéaire qui formalise les lois physiques. Une telle relation a déjà été rencontrée dans cette thèse, c'est l'équation d'onde. Dans ce dernier cas,  $F$  peut être vu comme l'opérateur consistant à résoudre l'équation d'onde pour une distribution de paramètre  $m$  et une source donnée. Par la suite, il faudra ajouter, à cette définition de  $F$ , une extraction des champs d'ondes calculés aux différents points d'observation. Dans le cadre de la propagation d'onde, le problème direct est dit bien posé, c'est à dire qu'une solution unique est obtenue dès qu'une physique du sous-sol, un modèle  $m$  et une source sont définis.

Nous ne pouvons pas en dire autant de la transformation allant des observations vers les paramètres du modèle. En effet, cette transformation (le problème inverse) est mal posée au sens d'Hadamard (Hadamard, 1902) qui définit un problème bien posé comme suit

- existence d'une solution,
- unicité d'une solution,
- continuité de la solution par rapport aux données.

La non existence d'une solution peut provenir de la physique employée lors de la résolution du problème direct. En effet, cette dernière, à travers les hypothèses faites (géométrie 2D, paramétrisation, source ponctuelle), n'est pas toujours en mesure d'expliquer l'ensemble des phénomènes observés. En plus de ces hypothèses, il convient de mentionner que le bruit, présent dans les données réelles, n'est pas modélisable par définition. Par conséquent, il n'est pas possible de trouver la solution  $m$  qui explique parfaitement toutes les données enregistrées. Le problème inverse est donc résolu sous une forme relaxée via le problème d'optimisation :

$$\min_{\mathbf{m}} f(m) \quad \text{avec} \quad f(m) = |\mathbf{d}_{obs} - d_{cal}(\mathbf{m})|, \quad (1.53)$$

où nous cherchons les paramètres du modèle  $m$  (et la source) qui expliquent le mieux les données au sens d'une certaine norme qui mesure la distance entre les données observées et les données calculées  $\mathbf{d}_{cal} = F(m)$ , notée ici  $|\cdot|$ .

La non unicité de la solution provient du fait que plusieurs  $m$  peuvent expliquer les données avec le même degré d'exactitude. Cela provient de la formulation du problème inverse (1.53) mais aussi de la sensibilité des données aux paramètres du milieu et à la nature multiparamètres du problème inverse. En effet, en règle générale, la géométrie des dispositifs d'acquisition ne permet pas d'avoir une information suffisante pour contraindre l'ensemble des paramètres du modèle. C'est par exemple le cas pour les paramètres du modèle situés en profondeur lorsque des dispositifs d'acquisition de surface sont mis en jeux. De plus, dans le cas de la FWI multiparamètres, il existe des couplages entre les paramètres et la source de sorte que certaines observations peuvent être expliquées par des combinaisons variées des paramètres. Ces couplages, à l'origine des développements méthodologiques de cette thèse, sont donc discutés plus en détail dans la partie 1.2.2.1.

### 1.2.1.2 Le formalisme

Dans cette thèse, le problème inverse qui nous intéresse est l'inversion des formes d'ondes complètes (Full Waveform Inversion, FWI). Cette méthode cherche à interpréter la totalité du signal, contrairement aux méthodes de tomographie basées uniquement sur les temps de parcours d'arrivées sélectionnées. Le gain potentiel est une amélioration de la résolution jusqu'à la limite  $\lambda_{min}/2$ , où  $\lambda_{min}$  est la plus petite longueur d'onde propagée. Nous utilisons la norme  $\ell_2$  pour définir la fonction coût, de sorte que

$$f(m) = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{N_\omega} \sum_{s=1}^{N_s} \Delta d_s^\dagger(m, \omega_l) \Delta d_s(m, \omega_l), \quad (1.54)$$

où l'exposant  $\dagger$  est l'opérateur adjoint, équivalent à l'application des opérateurs transposé  $(^t)$  et conjugué  $*$ . Les entrées  $N_s$  et  $N_\omega$  désignent respectivement le nombre de sources et de fréquences discrètes utilisées dans l'inversion. Les résidus  $\Delta d_s(m, \omega_l)$  sont définis comme la différence entre les données observées et les données calculées :

$$\Delta d_s(m, \omega_l) = d_{obs,s}(\omega_l) - d_{cal,s}(m, \omega_l). \quad (1.55)$$

$\Delta d_s(m, \omega_l)$  est un vecteur ayant une entrée par récepteur, pour la source considérée. Les données calculées  $d_{cal,s}(m, \omega_l)$  sont obtenues par extraction aux récepteurs du champ d'ondes  $E_s(m, \omega_l)$ , calculé comme la solution du problème direct pour la source  $s$ , le modèle  $m$  et la pulsation  $\omega_l$ . Cette étape est formalisée par un opérateur d'extraction  $R_s$ , tel que

$$d_{cal,s}(m, \omega_l) = R_s E_s(m, \omega_l). \quad (1.56)$$

Pour minimiser la fonction coût (1.54), il existe deux grandes familles de méthodes numériques : les méthodes globales et locales. Les premières, qui consistent à parcourir l'espace des modèles (voir Sambridge & Mosegaard (2002) pour une revue), sont généralement bien adaptées aux problèmes non linéaires car elles permettent, en théorie, d'avoir une vue d'ensemble des minima locaux de la fonction coût et donc de choisir parmi ces derniers le minimum global et le modèle associé (Fig. 1.3). Ces méthodes globales donnent aussi la possibilité d'extraire des statistiques sur la solution, ce qui ouvre la porte vers la quantification d'incertitude attachée à la solution. Dans ce contexte, le nombre croissant de paramètres a progressivement conduit au

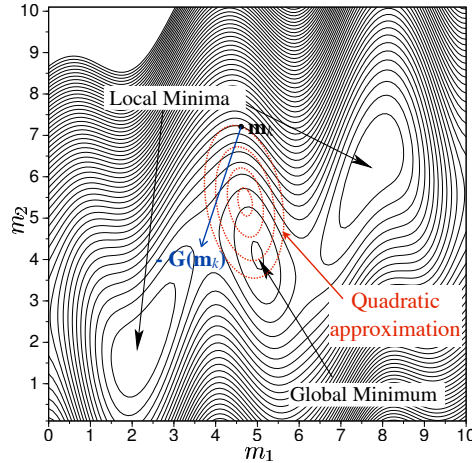


FIGURE 1.3 – Carte de la fonction coût pour une étude à deux degrés de liberté. Le vecteur  $-G(m_k)$  correspond à la direction opposée au gradient au point  $m_k$ . Une illustration de l’approximation quadratique locale au point  $m_k$  est proposée en rouge (d’après Lavoué (2014), modifiée d’après Sirgue (2003)).

développement d’algorithmes plus économiques qui concentrent leurs recherches sur les zones plus à même d’expliquer les données. C’est par exemple le cas de l’algorithme de voisinage proposé par Sambridge (1999a), Sambridge (1999b). Cependant, même dans ces conditions, cet algorithme et ceux basés sur la Méthode de Monte Carlo (Metropolis & Ulam, 1949) ou ceux utilisés dans le cadre d’applications géophysiques comme les algorithmes génétique (Holland, 1975) et de recuit simulé (Kirkpatrick *et al.*, 1983), restent trop coûteux pour être utilisés dans le cadre de la FWI. En effet, ces méthodes globales requièrent de nombreuses évaluations de la fonction coût, c’est à dire de résoudre de nombreux problèmes directs. Cela n’est évidemment pas possible, dans un temps raisonnable, si la résolution du problème direct requiert beaucoup de ressources ou si l’espace des modèles est trop vaste, ce qui est généralement le cas avec la FWI car après discrétisation le nombre de paramètres à reconstruire atteint des ordres de grandeur de  $10^4$  à  $10^6$  en 2D et de  $10^6$  à  $10^9$  en 3D. L’inversion des formes d’ondes complètes repose donc sur les méthodes d’optimisation locale qui permettent de converger vers un minimum local de manière itérative à un coût nettement plus abordable que les méthodes globales. Cependant, ces méthodes locales sont très sensibles au modèle initial et aux fortes non linéarités qui peuvent exister dans le cadre de la FWI. La convergence vers le minimum global, plutôt qu’un minimum local, passe alors par une stratégie spécifique pour atténuer les effets des non linéarités. Ce point très important est discuté plus amplement en partie 1.2.5.

## 1.2.2 Stratégies d’optimisation locale

Dans un schéma d’optimisation locale, à partir d’un modèle de départ  $m_0$ , le nouveau modèle  $m_{k+1}$  est calculé en suivant le schéma :

$$m_{k+1} = m_k + \alpha_k \Delta m_k, \quad (1.57)$$

où  $\Delta m_k$  est la direction de descente, et  $\alpha_k \in \mathbb{R}^+$  est le pas de descente obtenu via une



procédure de recherche linéaire (Nocedal & Wright, 2006a; Bonnans *et al.*, 2006). La direction de descente  $\Delta m_k$  est une solution approchée de l'équation de Newton,

$$H(m_k)\Delta m_k = -\nabla f(m_k), \quad (1.58)$$

où  $\nabla f(m_k) = \frac{\partial f}{\partial m}(m_k)$  et  $H(m_k) = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 m}(m_k)$  désignent le gradient et le Hessien de la fonction coût. Ces deux quantités sont des éléments-clés de l'inversion qu'il faut interpréter.

Si nous reprenons l'exemple de la grille de discrétisation de taille  $(N_x, N_z)$  du problème direct et considérons que tous les points de grille sont impliqués dans l'inversion, alors le modèle  $m$  et le gradient  $\nabla f(m)$  sont de taille  $N = N_x \times N_z \times N_{par}$  où  $N_{par}$  est le nombre de classes de paramètres inversés. La matrice Hessienne est de taille  $(N, N)$ .

Une interprétation du gradient et du Hessien est donnée avant de détailler les méthodes de calcul pour le pas de descente  $\alpha$  et la direction de descente  $\Delta m_k$ .

### 1.2.2.1 Interprétations physiques du gradient et du Hessien

Afin de mieux appréhender le gradient, commençons par expliciter sa formule pour le paramètre  $m_i^p$  pour lequel  $p$  désigne sa classe (permittivité, conductivité et perméabilité par exemple) et  $i$  sa position spatiale dans la grille discrète :

$$\nabla f_i^p(m) = \frac{\partial f(m)}{\partial m_i^p} = \mathbf{Re} \left( \sum_{l=1}^{N_\omega} \sum_{s=1}^{N_s} \left( R_s \frac{\partial E_s(m, \omega_l)}{\partial m_i^p} \right)^\dagger \Delta d_s(m, \omega_l) \right). \quad (1.59)$$

L'équation (1.59) montre que le gradient résulte de produits entre résidus et champs aux dérivées partielles du premier ordre  $\left( \frac{\partial E_s(m, \omega_l)}{\partial m_i^p} \right)$  extraits aux récepteurs. Cette nouvelle quantité peut s'interpréter à partir du problème direct 1.51. En différenciant cette dernière expression pour l'élément  $m_i^p$ , nous obtenons :

$$A(m, \omega_l) \frac{\partial E_s(m, \omega_l)}{\partial m_i^p} = -\frac{\partial A(m, \omega_l)}{\partial m_i^p} E_s(m, \omega_l). \quad (1.60)$$

Cette équation indique que le champ aux dérivées partielles est solution d'une équation d'ondes dont le terme source est  $-\frac{\partial A}{\partial m_i^p} E$ . L'analyse de ce terme source indique que c'est en fait une source secondaire issue de la diffraction du champ direct  $E$  par une anomalie  $\frac{\partial A}{\partial m_i^p}$  localisée au point  $i$ . Notons que le terme source contient le motif de radiation de la classe de paramètre  $p$ . Cette situation est illustrée, dans le domaine temporel, en Figure 1.4 b) pour un point  $m_i$ . En suivant la définition, le gradient par rapport à  $m_i^p$  est alors la corrélation (le produit en domaine fréquentiel) entre le champ aux dérivées partielles enregistré aux récepteurs (Fig. 1.4 a)) et les résidus (Fig. 1.4 c)). Cette corrélation permet de tester la similitude des deux champs d'ondes impliqués dans la formule du gradient (1.59) et ainsi obtenir une image des points diffractants manquants dans le modèle  $m_{k-1}$ , donnant lieu aux résidus. Dans le cas présent (Fig. 1.4), le champ aux dérivées partielles enregistré aux récepteurs coïncide parfaitement avec une partie des résidus, de sorte que la corrélation va conduire à un gradient de forte amplitude au point  $i$ , comme souhaité.

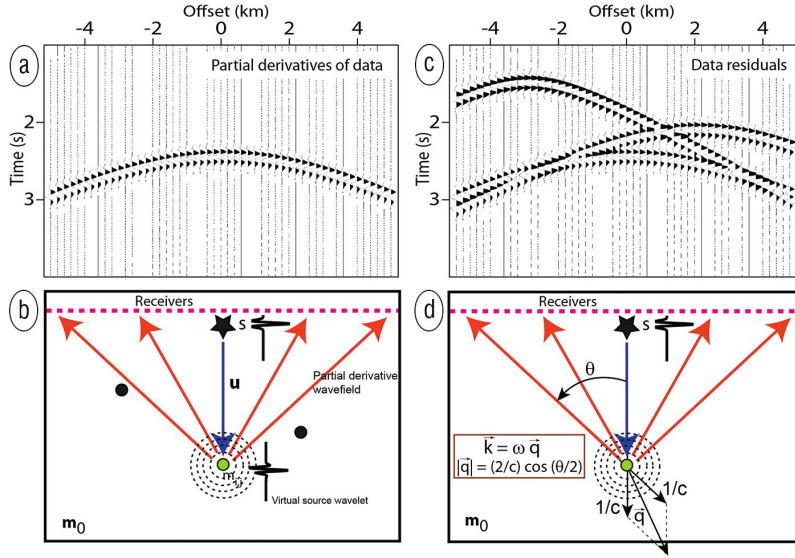


FIGURE 1.4 – Illustration associée à l'interprétation du gradient (d'après Operto *et al.* (2013)). Dans un milieu homogène  $m_0$  se trouvent trois hétérogénéités. La source est matérialisée par une étoile et les récepteurs par la ligne en pointillé. b) La source  $s$  génère un champ d'ondes qui se propage dans le milieu  $m$  et se diffracte sur les trois hétérogénéités. a) Champ aux dérivées partielles, issu de la diffraction du champ d'ondes par l'hétérogénéité verte (à la position  $i$ ), enregistré aux récepteurs. c) Données résiduelles issues de la différence entre les champs d'ondes calculés dans le modèle  $m$ , d'une part, et l'encaissant homogène  $m_0$ , d'autre part. Les trois arrivées correspondent aux trois hétérogénéités manquantes dans l'encaissant homogène. d) Le rôle de l'acquisition peut être analysé en considérant l'angle  $\theta$  entre la source et le récepteur (cf partie 1.2.5.2).

Le gradient est un élément central de l'inversion mais il connaît certaines limitations. En effet, pour deux classes de paramètres  $p_1$  et  $p_2$  ayant des motifs de diffraction similaires  $\left(\frac{\partial A}{\partial m_i^{p_1}} \simeq \frac{\partial A}{\partial m_i^{p_2}}\right)$ , la direction de descente issue du gradient pour ces deux paramètres sera similaire, ce qui peut être en désaccord avec la direction de descente requise dans la réalité. Ce phénomène s'appelle le couplage entre paramètres. De plus, le gradient ne considère que de la diffraction simple. Pour tenter de dépasser ces limitations, il est utile d'étudier la matrice Hessienne. L'expression de cette dernière est obtenue en dérivant le gradient par  $m_j^q$  :

$$(H_{pq})_{ij}(m) = \mathbf{Re} \left( \sum_{l=1}^{N_\omega} \sum_{s=1}^{N_s} \left( R_s \frac{\partial E_s(m, \omega_l)}{\partial m_i^p} \right)^\dagger R_s \frac{\partial E_s(m, \omega_l)}{\partial m_j^q} + \left( R_s \frac{\partial^2 E_s(m, \omega_l)}{\partial m_i^p \partial m_j^q} \right)^\dagger \Delta d_s(m, \omega_l) \right), \quad (1.61)$$

où  $q$  désigne une classe de paramètres et  $j$  sa position spatiale.

Dans l'approximation de Gauss-Newton, la matrice Hessienne, l'équation (1.61) est réduite à son premier terme. Celui-ci est le produit de deux champs aux dérivées partielles du premier ordre enregistrés aux récepteurs, obtenus après dérivation simple de  $E$  par rapport à la paire de paramètres  $(m_i^p, m_j^q)$ . Ainsi, cette partie du Hessien permet de rendre compte de la corrélation existante entre ces champs et qui est à l'origine de la défocalisation de la perturbation à appliquer au modèle (Pratt *et al.* (1998)). Au final, par l'intermédiaire des champs, cette matrice donne une information sur le couplage entre les deux paramètres discrets considérés ( $m_i^p$  et  $m_j^q$ ).

Lorsque  $p = q$ , nous considérons les termes des blocs diagonaux qui illustrent les couplages spatiaux (effets de la fréquence finie sur la résolution) entre deux paramètres de même classe. Deux paramètres proches spatialement sont plus susceptibles de donner des champs aux dérivées partielles voisins de sorte qu'une augmentation de la proximité spatiale de  $i$  et  $j$  conduise à une augmentation de la corrélation associée. Ce phénomène se traduit dans la matrice Hessienne par une dominance des termes proches de la diagonale jusqu'à atteindre l'amplitude maximale sur la diagonale via l'autocorrélation ( $i = j$ ).

Lorsque  $p \neq q$ , nous considérons les blocs hors diagonaux qui illustrent les couplages entre deux paramètres de classe différente. Dans le cas  $i = j$ , nous mesurons le couplage entre des paramètres de classes différentes à une position donnée pour donner les termes diagonaux des blocs hors diagonaux. Si  $i \neq j$  alors nous sommes dans le cas le plus général qui consiste à mesurer le couplage entre deux paramètres de nature différente situés à des positions différentes.

L'application de l'inverse de l'opérateur de Gauss-newton au gradient doit donc permettre de refocaliser la perturbation à apporter au modèle pour chaque classe de paramètre tout en réduisant les couplages entre les classes de paramètres.

Le second terme du Hessien résulte du produit entre résidus et champs aux dérivées partielles du second ordre enregistrés aux récepteurs, obtenus par dérivations doubles du champ  $E$  par les paramètres  $m_i^p$  et  $m_j^q$ . D'un point de vue physique, le champ  $E$  correspond à un champ d'ondes émis à la source puis diffracté deux fois dans le milieu, en  $m_i^p$  puis en  $m_j^q$ , avant d'être enregistré aux récepteurs. Ce phénomène de double diffraction est susceptible de se produire dans les milieux à forts contrastes et générer des diffractions secondaires dont les amplitudes ne sont pas négligeables. Si tel est le cas, l'interprétation de ces diffractions doubles (voire multiples) par de la diffraction simple via le gradient peut créer de forts artefacts et perturber le processus d'imagerie. Pour limiter ces artefacts, il faut donc être capable d'appliquer l'inverse du second membre du Hessien au gradient.

### 1.2.2.2 Calcul du pas de descente $\alpha$

Ici, nous expliquons comment est calculé le pas de descente  $\alpha$  pour une direction de descente  $\Delta m_k$ . La première approche consiste à résoudre de façon exacte le sous-problème (1.62) afin de trouver la valeur optimale de  $\alpha$ .

$$\min_{\alpha > 0} f(m_k + \alpha_k \Delta m_k). \quad (1.62)$$

La résolution du problème (1.62) peut s'avérer coûteuse car elle requiert d'évaluer la fonction coût pour de nombreuses valeurs de  $\alpha$ . Il n'est donc pas raisonnable de résoudre finement ce problème à chaque itération  $k$ .

Pour contourner ce problème de coût tout en garantissant une décroissance adéquate de la fonction coût, il est d'usage de faire appel aux méthodes de recherche de pas, dites inexactes. Dans cette étude, nous choisissons la formulation basée sur les conditions de Wolf :

$$f(m_k + \alpha_k \Delta m_k) \leq f(m_k) + c_1 \alpha_k \nabla f_k^T m_k, \quad (1.63)$$

$$\nabla f(m_k + \alpha_k \Delta m_k)^T \Delta m_k \geq c_2 \nabla f_k^T \Delta m_k. \quad (1.64)$$

La première condition, appelée également condition de décroissance suffisante ou condition d'Armijo, garantit une décroissance suffisante de la fonction coût d'une itération à la suivante, comme souhaité. Cette condition est illustrée en Figure 1.5 par la ligne verte. La seconde condition, également appelée condition de courbure, a pour but d'éviter les valeurs de  $\alpha$  trop faibles pour être intéressantes car elles entraînent une convergence lente. Comme le montre la Figure 1.5, ces faibles valeurs de  $\alpha$  sont exclues par l'intermédiaire de ce critère représenté par les lignes en pointillé noir.

Ces deux conditions garantissent une convergence vers le minimum local le plus proche du point de départ (Nocedal & Wright (2006a)). Sans ces conditions, il n'y a pas de garantie de convergence de l'algorithme d'optimisation.

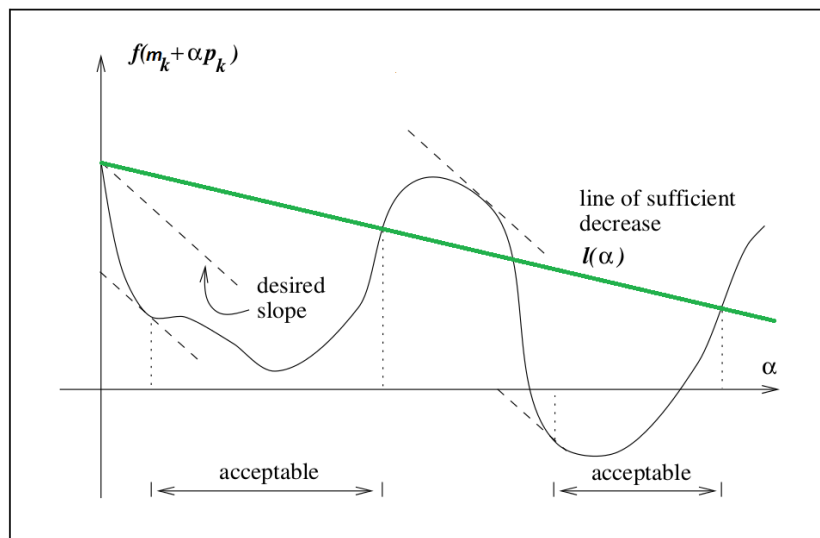


FIGURE 1.5 – Illustration du principe de recherche du pas de descente via les conditions de Wolf (d'après Nocedal & Wright (2006b)).

### 1.2.2.3 Calcul de la direction de descente

Ici, nous présentons les solutions approchées de l'équation (1.58), obtenues avec les méthodes d'optimisation locale standards.

#### Méthodes basées sur le gradient

La méthode la plus simple est la méthode du gradient. Elle revient à approcher la matrice Hessienne par la matrice identité  $H^{-1} = I$ . Il en découle une direction de descente basée uniquement sur le gradient  $\Delta m_k = -\nabla f(m_k)$ . Cette méthode est connue pour avoir une convergence lente.

Pour accélérer la convergence, il est classique de combiner linéairement la direction de plus forte descente courante  $-\nabla f(m_k)$  avec la direction de descente de l'itération précédente  $\Delta m_{k-1}$ . Cette méthode, appelée gradient conjugué non linéaire, calcule la direction de descente en suivant la formulation

$$\begin{cases} \Delta m_0 = -\nabla f(m_0), \\ \Delta m_k = -\nabla f(m_k) + \beta_k \Delta m_{k-1}, \quad k \geq 1, \end{cases} \quad (1.65)$$

où  $\beta_k \in \mathbb{R}$  est un scalaire. Il existe de nombreuses façons de calculer  $\beta_k$  donnant lieu à autant de versions de gradient conjugué non-linéaire (Fletcher & Reeves (1964), Polak & Ribière (1969)). Dans cette étude, nous utilisons la formulation de Dai & Yuan (1999) pour laquelle

$$\beta_k = \frac{\|\nabla f(m_k)\|^2}{(\nabla f(m_k) - \nabla f(m_{k-1}))^T \Delta m_{k-1}}. \quad (1.66)$$

Ces méthodes ne prennent pas en compte l'information associée au Hessien.

#### Méthodes de quasi-Newton

L'idée des méthodes de Quasi-newton est d'estimer économiquement l'action du Hessien inverse afin d'accélérer la convergence. Avec ces méthodes, la direction de descente est de la forme :

$$\Delta m_k = -Q_k \nabla f(m_k), \quad (1.67)$$

où la matrice  $Q_k$  est une approximation du Hessien inverse mise à jour à chaque itération. Nous retenons celle initialement introduite par Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS) et plus particulièrement sa version à mémoire limitée (*l*-BFGS). D'un point de vue algorithmique, la matrice  $Q_k$  n'est pas construite explicitement. En effet, la formulation proposée par Nocedal & Wright, 2006a; Nocedal, 1980) estime directement le produit  $Q_k \nabla f(m_k)$  à partir des gradients et des modèles calculés lors des itérations précédentes et stockés en mémoire sous une forme adaptée (différence entre deux itérations successives). Cette méthode permet donc de bénéficier de l'information contenue dans le Hessien inverse approché tout en engendrant

des coûts supplémentaires faibles. Aussi, la méthode de  $l$ -BFGS est supposée découpler plus efficacement les paramètres que les méthodes basées sur le gradient. Cependant, comme observé en imagerie sismique pour la reconstruction des paramètres visco-acoustiques (vitesse d'onde P (Vp), densité, atténuation) (Métivier *et al.*, 2014; Métivier & Brossier, 2016), elle peut ne pas exploiter complètement l'information portée par le Hessien particulièrement lors des premières itérations puisque la matrice  $Q_k$  est alors estimée à partir de peu d'information et donc imprécise.

### Méthodes de Newton tronqué

Afin de disposer d'une estimation plus fiable de l'opérateur Hessien, on peut utiliser les méthodes dites de Newton tronqué ou Newton inexacte, comme proposé en imagerie sismique par Métivier *et al.* (2013, 2014); Castellanos *et al.* (2015). Une revue de cette méthode d'optimisation locale est fournie par Nash (2000). Dans le cadre de cette stratégie, la direction de descente  $\Delta m_k$  est calculée, à chaque itération  $k$ , comme une solution approchée du système linéaire associée à l'équation de Newton (1.58).

Pour résoudre ce système, on utilise un algorithme de gradient conjugué (CG). Celui-ci autorise une résolution du système linéaire (1.58) sans avoir à construire explicitement la matrice Hessienne, ce qui serait prohibitif du point de vue du calcul engendré. Le CG ne nécessite que le calcul de produits Hessien-vecteur ( $Hv$ ).

Ainsi, pour résoudre ce système, il faut :

- être capable de calculer des produits Hessien-vecteur ( $Hv$ ) de manière efficace,
- un critère d'arrêt adapté pour la résolution du système (1.58).

La construction du produit  $Hv$  pour nos applications est proposée en partie 1.2.3.2. Le critère d'arrêt retenu pour la résolution du système linéaire (1.58) a été introduit par Eisenstat & Walker (1994) et s'écrit sous la forme :

$$\|H(m_k)\Delta m_k + \nabla f(m_k)\| \leq \eta_k \|\nabla f(m_k)\|. \quad (1.68)$$

Le paramètre  $\eta$  est un terme de forçage qui reflète l'exactitude de l'approximation quadratique locale de la fonction coût. En pratique, quand cette approximation est correcte,  $\eta$  diminue de sorte que le système (1.58) est résolu plus finement. En revanche, quand la précision de l'approximation diminue,  $\eta$  augmente de manière à avoir une résolution moins précise du système (1.58). Concrètement, la valeur de  $\eta$  est déterminée, à chaque itération du système interne, comme la mesure de la distance entre le développement de Taylor du premier ordre du gradient à l'itération  $k - 1$  et le gradient à l'itération  $k$  :

$$\eta_k = \frac{\|\nabla f(m_k) - \nabla f(m_{k-1}) - \gamma_{k-1}H(m_{k-1})\Delta m_{k-1}\|}{\|\nabla f(m_{k-1})\|}. \quad (1.69)$$

Une discussion plus approfondie sur le choix de ce critère d'arrêt est proposée par Métivier *et al.* (2013). L'algorithme du gradient conjugué est conçu pour les systèmes symétriques positifs, il est donc bien adapté pour résoudre le système dans l'approximation de Gauss-Newton (GN), car sa matrice associée est symétrique positive par construction. A l'opposé, dans sa

version Exact-Newton (EN), la matrice Hessienne n'est plus nécessairement positive de sorte que le gradient conjugué n'est plus adapté. Pour faire face à cette difficulté, l'algorithme dispose d'un détecteur de courbure négative de la matrice Hessienne qui stoppe la résolution du système linéaire dès qu'une courbure négative est détectée.

Concernant l'implémentation des algorithmes d'optimisation et de la recherche du pas de descente  $\alpha$ , nous utilisons la "SEISCOPE Optimization Toolbox" (Métivier & Brossier, 2016). Cette boîte à outils, basée sur un protocole de discussion interactif, requiert seulement de calculer le gradient et le produit  $Hv$  avant de les lui transmettre.

### 1.2.3 Méthodes de l'état adjoint du premier et second ordre

#### 1.2.3.1 Premier ordre : calcul du gradient

Malgré l'intérêt de la formule (1.59) pour l'interprétation du gradient, il n'est pas souhaitable d'utiliser cette formulation d'un point de vue de l'implémentation car cela demanderait le calcul des champs aux dérivées partielles pour chaque point  $i$  du modèle, c'est-à-dire de résoudre autant de problèmes directs que de paramètres inversés ( $N = N_x \times N_z \times N_{par}$ ). Pour éviter ce coût de calcul, nous nous basons plutôt sur la méthode d'état-adjoint du premier ordre (revue par Plessix (2006)) qui consiste à minimiser la fonction coût 1.54 sous contrainte. Pour simplifier la démonstration, nous supposons que  $N_s = 1$ ,  $N_w = 1$  et  $N_{par} = 1$ . Les formules générales sont obtenues par sommation. Dans ces conditions, nous souhaitons résoudre le problème de minimisation sous contrainte :

$$\min_m \frac{1}{2} \|d - Ru\|^2 \text{ avec } F(m, u) = 0, \quad (1.70)$$

où  $F(m, u)$  est une réécriture du problème direct (1.51) telle que  $F(m, u) = A(m)u - s$ .

Pour résoudre le problème (1.70), nous introduisons le Lagrangien associé  $L_1$  :

$$L_1(m, u, \lambda) = \frac{1}{2} \|d - Ru\|^2 + \mathbf{Re}(F(m, u), \lambda)_{\mathcal{W}}, \quad (1.71)$$

où  $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{W}}$  est le produit scalaire dans l'espace des champs d'ondes  $\mathcal{W}$  et  $\lambda \in \mathcal{W}$  est une variable adjointe.

Nous choisissons  $\underline{u}(m)$  comme solution du problème direct, de sorte que

$$F(m, \underline{u}(m)) = 0. \quad (1.72)$$

Ce choix permet d'écrire

$$L_1(m, \underline{u}(m), \lambda) = \frac{1}{2} \|d_{obs} - R\underline{u}(m)\|^2 + 0 = f(m). \quad (1.73)$$

En dérivant par rapport à  $m$ , nous avons

$$\frac{\partial L_1(m, \underline{u}(m), \lambda)}{\partial m} = \nabla f(m), \quad (1.74)$$

qui s'écrit également

$$\mathbf{Re} \left( \frac{\partial F(m, \underline{u}(m))}{\partial m}, \lambda \right) + \frac{\partial L_1(m, \underline{u}(m), \lambda)}{\partial u} \frac{\partial \underline{u}(m)}{\partial m} = \nabla f(m). \quad (1.75)$$

Nous définissons l'état adjoint  $\underline{\lambda}(m)$  tel que

$$\frac{\partial L_1(m, \underline{u}(m), \underline{\lambda}(m))}{\partial u} = 0. \quad (1.76)$$

Pour calculer l'expression de (1.76), nous réalisons un développement limité du Lagrangien (1.71) :

$$\begin{aligned} L_1(m, u + du, \lambda) &= \frac{1}{2} \|d_{obs} - R(u + du)\|^2 + \mathbf{Re} (F(m, u + du) - s, \lambda) \\ &= \frac{1}{2} \|d_{obs} - Ru - Rdu\|^2 + \mathbf{Re} \left( F(m, u) + \frac{\partial F(m, u)}{\partial u} du, \lambda \right) \\ &= \frac{1}{2} \|d_{obs} - Ru\|^2 + \mathbf{Re} (-Rdu, d_{obs} - Ru) + \mathbf{Re} (F(m, u), \lambda) + \\ &\quad \mathbf{Re} \left( \frac{\partial F(m, u)}{\partial u} du, \lambda \right) + o \|du\|^2 \\ &= L(m, u, \lambda) + \mathbf{Re} \left( du, -R^\dagger (d_{obs} - Ru) \right) + \mathbf{Re} \left( du, \left( \frac{\partial F(m, u)}{\partial u} \right)^\dagger \lambda \right) + o \|du\|^2. \end{aligned}$$

Ainsi, dans notre cas

$$\frac{\partial L_1(m, \underline{u}(m), \underline{\lambda}(m))}{\partial u} = 0, \quad (1.77)$$

implique que  $\underline{\lambda}(m)$  est solution de l'équation adjointe

$$\left( \frac{\partial F(m, \underline{u}(m))}{\partial u} \right)^\dagger \lambda(m) = R^\dagger (d_{obs} - Ru(m)). \quad (1.78)$$

Finalement, le gradient s'écrit

$$\nabla f(m) = \mathbf{Re} \left( \left( \frac{\partial F(m, \underline{u}(m))}{\partial m} \right)^\dagger \underline{\lambda}(m) \right). \quad (1.79)$$

### 1.2.3.2 Second ordre : calcul des produits Hessien-vecteur

Comme mentionné, il n'est pas souhaitable de calculer explicitement le Hessien, de sorte que les méthodes du Newton tronqué requièrent les produits Hessien-vecteur ( $Hv$ ). Ces derniers sont obtenus via une méthode adjointe du second ordre. Nous rappelons ici la stratégie proposée dans Métivier *et al.* (2013) et Métivier *et al.* (2014). Tout d'abord, nous définissons la fonctionnelle  $h_v(m)$  comme



$$h_v(m) = (\nabla f(m), v)_{\mathcal{M}}, \quad (1.80)$$

où  $(\cdot, \cdot)_M$  désigne le produit scalaire dans l'espace des paramètres  $\mathcal{M}$ . Le gradient de cette fonctionnelle est donné par

$$\nabla h_v(m) = H(m)v. \quad (1.81)$$

Pour calculer  $\nabla h_v(m)$ , nous utilisons de nouveau un formalisme Lagrangien. Nous introduisons donc un nouveau Lagrangien  $L_2$  :

$$\begin{aligned} L_2(m, g, \lambda, u, \mu_1, \mu_2, \mu_3) = & (g, v)_{\mathcal{M}} + \\ & \left( g - \mathbf{Re} \left( \left( \frac{\partial F(m, u)}{\partial m} \right)^\dagger \lambda \right), \mu_1 \right)_{\mathcal{M}} + \\ & \mathbf{Re} \left( \left( \frac{\partial F(m, u)}{\partial u} \right)^\dagger \lambda - R^\dagger(d - Ru), \mu_2 \right)_{\mathcal{W}} + \\ & \mathbf{Re}(F(m, u), \mu_3)_{\mathcal{W}}, \end{aligned} \quad (1.82)$$

où  $(\cdot, \cdot)_W$  désignent le produit scalaire dans l'espace des champs d'ondes  $W$ . Nous choisissons  $\underline{u}(m)$ ,  $\underline{\lambda}(m)$  et  $\underline{g}(m)$  comme solutions de :

$$F(m, \underline{u}(m)) = 0, \quad \left( \frac{\partial F(m, \underline{u}(m))}{\partial u} \right)^\dagger \underline{\lambda}(m) = R^\dagger(d_{obs} - R\underline{u}(m)), \quad \underline{g}(m) = \mathbf{Re} \left( \left( \frac{\partial F(m, \underline{u}(m))}{\partial m} \right)^\dagger \underline{\lambda}(m) \right). \quad (1.83)$$

Ainsi, nous obtenons

$$L_2(m, \underline{u}(m), \underline{\lambda}(m), \underline{g}(m), \mu_1, \mu_2, \mu_3) = h_v(m), \quad (1.84)$$

puis en dérivant par rapport à  $m$ ,

$$\frac{\partial L_2}{\partial m}(m, \underline{u}(m), \underline{\lambda}(m), \underline{g}(m), \mu_1, \mu_2, \mu_3) = \nabla h_v(m) = H(m)v. \quad (1.85)$$

En développant cette expression, il vient

$$\begin{aligned}
 H(m)v = & -\mathbf{Re} \left( \left( \frac{\partial^2 F(m, \underline{u}(m))^\dagger}{\partial m^2} \underline{\lambda}(m) \right)^\dagger \mu_1 \right) + \mathbf{Re} \left( \left( \frac{\partial^2 F(m, \underline{u}(m))^\dagger}{\partial m \partial u} \underline{\lambda}(m) \right)^\dagger \mu_2 \right) + \\
 & \mathbf{Re} \left( \left( \frac{\partial F(m, \underline{u}(m))^\dagger}{\partial m} \right)^\dagger \mu_3 \right) + \\
 & \frac{\partial L_2(m, \underline{g}(m), \underline{\lambda}(m), \underline{u}(m), \mu_1, \mu_2, \mu_3)}{\partial g} \frac{\partial \underline{g}(m)}{\partial m} + \\
 & \frac{\partial L_2(m, \underline{g}(m), \underline{\lambda}(m), \underline{u}(m), \mu_1, \mu_2, \mu_3)}{\partial \lambda} \frac{\partial \underline{\lambda}(m)}{\partial m} + \\
 & \frac{\partial L_2(m, \underline{g}(m), \underline{\lambda}(m), \underline{u}(m), \mu_1, \mu_2, \mu_3)}{\partial u} \frac{\partial \underline{u}(m)}{\partial m}.
 \end{aligned} \tag{1.86}$$

Nous choisissons les nouvelles variables adjointes  $\underline{\mu}_1(m)$ ,  $\underline{\mu}_2(m)$  et  $\underline{\mu}_3(m)$  telles que

$$\begin{cases} \frac{\partial L_2(m, \underline{g}(m), \underline{\lambda}(m), \underline{u}(m), \underline{\mu}_1(m), \underline{\mu}_2(m), \underline{\mu}_3(m))}{\partial g} = 0, \\ \frac{\partial L_2(m, \underline{g}(m), \underline{\lambda}(m), \underline{u}(m), \underline{\mu}_1(m), \underline{\mu}_2(m), \underline{\mu}_3(m))}{\partial \lambda} = 0, \\ \frac{\partial L_2(m, \underline{g}(m), \underline{\lambda}(m), \underline{u}(m), \underline{\mu}_1(m), \underline{\mu}_2(m), \underline{\mu}_3(m))}{\partial u} = 0. \end{cases} \tag{1.87}$$

A l'image de ce qui a été réalisé pour le calcul du gradient, nous utilisons des développements limités à partir du Lagrangien (1.82) :

$$\begin{aligned}
 L_2(m, u, \lambda, g + dg, \mu_1, \mu_2, \mu_3) = & (g + dg, v) + (g + dg - \frac{\partial F(m, u)^\dagger}{\partial m} \lambda, \mu_1) \\
 & + (\frac{\partial F(m, u)^\dagger}{\partial u} \lambda - R^\dagger(d - Ru), \mu_2) + (F(m, u), \mu_3) \\
 = & (g, v) + (g - \frac{\partial F(m, u)^\dagger}{\partial m} \lambda, \mu_1) \\
 & + (\frac{\partial F(m, u)^\dagger}{\partial u} \lambda - R^\dagger(d - Ru), \mu_2) + (F(m, u), \mu_3) + (dg, v) + (dg, \mu_1) \\
 = & L_2(m, u, \lambda, g, \mu_1, \mu_2, \mu_3) + (dg, v + \mu_1).
 \end{aligned} \tag{1.88}$$

Ainsi, dans notre cas

$$\frac{\partial L_2}{\partial g} = 0, \tag{1.89}$$

implique

$$v + \mu_1 = 0. \tag{1.90}$$

De plus, nous avons

$$\begin{aligned}
L_2(m, u, \lambda + d\lambda, g, \mu_1, \mu_2, \mu_3) &= (g, v) + (g - \frac{\partial F(m, u)^\dagger}{\partial m}(\lambda + d\lambda), \mu_1) \\
&+ (\frac{\partial F(m, u)^\dagger}{\partial u}(\lambda + d\lambda) - R^\dagger(d - Ru), \mu_2) + (F(m, u), \mu_3) \\
&= (g, v) + (g - \frac{\partial F(m, u)^\dagger}{\partial m}\lambda, \mu_1) \\
&+ (\frac{\partial F(m, u)^\dagger}{\partial u}\lambda - R^\dagger(d - Ru), \mu_2) + (F(m, u), \mu_3) - (\frac{\partial F(m, u)^\dagger}{\partial m}(d\lambda), \mu_1) \\
&+ (\frac{\partial F(m, u)^\dagger}{\partial u}d\lambda, \mu_2) \\
&= L_2(m, u, \lambda, g, \mu_1, \mu_2, \mu_3) - (\frac{\partial F(m, u)^\dagger}{\partial m}d\lambda, \mu_1) + (\frac{\partial F(m, u)^\dagger}{\partial u}d\lambda, \mu_2).
\end{aligned} \tag{1.91}$$

Ainsi

$$\frac{\partial L_2}{\partial \lambda} = 0, \tag{1.92}$$

implique

$$- (\frac{\partial F(m, u)^\dagger}{\partial m}d\lambda, \mu_1) + (\frac{\partial F(m, u)^\dagger}{\partial u}d\lambda, \mu_2) = 0. \tag{1.93}$$

Finalement, nous avons

$$\begin{aligned}
L_2(m, u + du, \lambda, g, \mu_1, \mu_2, \mu_3) &= (g, v) + (g - \frac{\partial F(m, u+du)^\dagger}{\partial m}\lambda, \mu_1) \\
&+ (\frac{\partial F(m, u+du)^\dagger}{\partial u}\lambda - R^\dagger(d - Ru), \mu_2) + (F(m, u+du), \mu_3) \\
&= (g, v) + (g - \frac{\partial F(m, u)^\dagger}{\partial m}\lambda, \mu_1) \\
&+ (\frac{\partial F(m, u)^\dagger}{\partial u}\lambda - R^\dagger(d - Ru), \mu_2) + (F(m, u), \mu_3) \\
&- (\frac{\partial^2 F(m, u)^\dagger}{\partial u \partial m}\lambda du, \mu_1) + (\frac{\partial^2 F(m, u)^\dagger}{\partial u^2}\lambda du, \mu_2) \\
&+ (R^\dagger R du, \mu_2) + (\frac{\partial F(m, u)^\dagger}{\partial u}du, \mu_3) \\
&= L_v(m, u, \lambda, g, \mu_1, \mu_2, \mu_3) - (du, (\frac{\partial^2 F(m, u)^\dagger}{\partial u \partial m}\lambda)^\dagger \mu_1) \\
&+ (du, (\frac{\partial^2 F(m, u)^\dagger}{\partial u^2}\lambda)^\dagger \mu_2) + (du, (R^\dagger R)^\dagger \mu_2) + (du, (\frac{\partial F(m, u)^\dagger}{\partial u})^\dagger \mu_3).
\end{aligned} \tag{1.94}$$

Ainsi

$$\frac{\partial L_v}{\partial u} = 0, \tag{1.95}$$

implique

$$- \left( \frac{\partial^2 F(m, u)}{\partial u \partial m} \lambda \right)^\dagger \mu_1 + \left( \frac{\partial^2 F(m, u)}{\partial u^2} \lambda \right)^\dagger \mu_2 + (R^T R)^\dagger \mu_2 + \left( \frac{\partial F(m, u)}{\partial u} \right)^\dagger \mu_3 = 0. \quad (1.96)$$

En définitive, dans notre cas, nous obtenons le système

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\mu}_1(m) = -v, \\ \frac{\partial F(m, \underline{u}(m))}{\partial u} \underline{\mu}_2(m) = \frac{\partial F(m, \underline{u}(m))}{\partial m} \underline{\mu}_1(m), \\ \frac{\partial F(m, \underline{u}(m))}{\partial u} \underline{\mu}_3(m) = -R^\dagger R \underline{\mu}_2(m) - \left( \frac{\partial^2 F(m, \underline{u}(m))}{\partial u^2} \lambda(m) \right)^\dagger \underline{\mu}_2(m) \\ \quad + \left( \frac{\partial^2 F(m, \underline{u}(m))}{\partial u \partial m} \lambda(m) \right)^\dagger \underline{\mu}_1(m), \end{array} \right. \quad (1.97)$$

et le produit Hessien-vecteur

$$\begin{aligned} H(m)v = & -\mathbf{Re} \left( \left( \frac{\partial^2 F(m, \underline{u}(m))}{\partial m^2} \lambda(m) \right)^\dagger \underline{\mu}_1(m) \right) + \\ & \mathbf{Re} \left( \left( \frac{\partial^2 F(m, \underline{u}(m))}{\partial m \partial u} \lambda(m) \right)^\dagger \underline{\mu}_2(m) \right) + \\ & \mathbf{Re} \left( \left( \frac{\partial F(m, \underline{u}(m))}{\partial m} \right)^\dagger \underline{\mu}_3(m) \right). \end{aligned} \quad (1.98)$$

#### 1.2.4 Le gradient et le Hessien : implémentation

Maintenant que les méthodes d'état adjoint du premier et second ordre ont fourni les expressions générales du gradient et du produit Hessien-vecteur, nécessaires aux algorithmes présentés précédemment, nous donnons plus de détails sur la façon de les obtenir et leurs expressions dans le cadre de cette thèse. Pour cela, il faut d'abord définir  $F(m, u)$  qui intervient de manière régulière dans les différentes expressions. En fait, il existe deux possibilités. La quantité  $F(m, u)$  peut être définie comme l'équation d'onde du second ordre des systèmes (1.47) et (1.48) ou comme les systèmes complets (1.44) et (1.45) composés de trois équations du premier ordre.

Dans le premier cas, nous écrivons, pour le mode TE,

$$F(m, u) = A_1(m, \omega)u - s, \quad (1.99)$$

avec

$$A_1(m, \omega) = \omega^2(\varepsilon_r \varepsilon_0 + \frac{i\sigma}{\omega}) + \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\mu_r \mu_0} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\mu_r \mu_0} \frac{\partial}{\partial z} \quad \text{et} \quad u = E_y. \quad (1.100)$$

Dans le second cas, nous écrivons

$$F(m, u) = A_2(m, \omega)u - s, \quad (1.101)$$

où  $A_2(m, \omega)$  s'écrit sous la forme compacte

$$A_2(m, \omega) = -i\omega S(m) + C\partial x + D\partial z, \quad (1.102)$$

avec pour le mode TE,

$$S = \begin{pmatrix} \varepsilon_e & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad s = \begin{pmatrix} -J_s^y \\ -M_s^x \\ -M_s^z \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} E_y \\ H_x \\ H_z \end{pmatrix}, \quad (1.103)$$

et pour le mode TM,

$$S = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_e & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_e \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad s = \begin{pmatrix} -M_s^y \\ -J_s^x \\ -J_s^z \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} H_y \\ E_x \\ E_z \end{pmatrix}. \quad (1.104)$$

Comme nous allons le voir, le calcul du gradient nécessite de dériver  $A_1(m, \omega)$  ou  $A_2(m, \omega)$  par rapport à  $m$ . L'opérateur  $A_1(m, \omega)$  contient des dérivées spatiales liées aux paramètres de sorte que le calcul de sa dérivée peut s'avérer fastidieux et surtout dépend du schéma de discrétisation utilisé. En ce qui concerne l'opérateur  $A_2(m, \omega)$ , les dérivations spatiales portées par  $C$  et  $D$  ne sont pas liées aux paramètres du modèle (portés par  $S$ ). Cette configuration est très favorable et utile puisque la dérivation par  $m$  supprime naturellement les matrices  $C$  et  $D$ , conduisant à une formulation assez simple et flexible d'un point de vue de l'implémentation. C'est pour cela que nous travaillerons par la suite avec cette approche. Cette stratégie a été mise en œuvre en sismique pour les équations élasto-dynamique par Yang *et al.* (2016).

#### 1.2.4.1 Le gradient

A partir de la formule (1.101), nous voyons que

$$\frac{\partial F(m, \underline{u}(m))}{\partial u} = A_2(m), \quad \frac{\partial F(m, \underline{u}(m))}{\partial m} = \frac{\partial A_2(m)}{\partial m} \underline{u}(m), \quad (1.105)$$

de sorte que le gradient (1.79) s'écrit

$$\nabla f(m) = \mathbf{Re} \left\{ u^\dagger(m) \frac{\partial A_2(m, \omega)^\dagger}{\partial m} \lambda(m) \right\} = \mathbf{Re} \left\{ u^T(m) \frac{\partial A_2(m, \omega)^T}{\partial m} \lambda^*(m) \right\}. \quad (1.106)$$

où  $*$ ,  $T$  et  $\dagger$  désignent respectivement les opérateurs conjugué, transposé et transposé conjugué. Le champ d'ondes direct  $u(m)$  est solution du système direct, (1.44) en TE et (1.45) en TM. Les champs adjoints  $\lambda = (L_y, K_x, K_z)^T$  (TE) et  $\lambda = (K_y, L_x, L_z)^T$  (TM) de même dimension que  $u$ , sont solutions du système adjoint, obtenu via l'introduction de  $F(m, u)$  dans le système (1.78) :

$$A_2^\dagger(m, \omega)\lambda = R^\dagger \Delta d, \quad (1.107)$$

où

$$A_2^\dagger(m, \omega) = (-i\omega S(m))^\dagger - C\partial_x - D\partial_z. \quad (1.108)$$

En développant le système d'équations adjoint (1.107), pour le mode TE, il vient :

$$\begin{cases} i\omega\varepsilon_e^\dagger(\mathbf{x}, \omega)L_y(\mathbf{x}, \omega) + \frac{\partial K_x(\mathbf{x}, \omega)}{\partial z} - \frac{\partial K_z(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x} = R^\dagger \Delta_{E_y}(\mathbf{x}, \omega), \\ i\omega\mu(\mathbf{x})K_x(\mathbf{x}, \omega) + \frac{\partial L_y(\mathbf{x}, \omega)}{\partial z} = R^\dagger \Delta_{H_x}(\mathbf{x}, \omega), \\ i\omega\mu(\mathbf{x})K_z(\mathbf{x}, \omega) - \frac{\partial L_y(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x} = R^\dagger \Delta_{H_z}(\mathbf{x}, \omega). \end{cases} \quad (1.109)$$

Le système (1.109) est ensuite réécrit en une équation du second-ordre et deux équations du premier ordre comme cela a été fait pour le problème direct :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial L_y(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial L_y(\mathbf{x}, \omega)}{\partial z} \right) + \omega^2 \varepsilon_e^\dagger L_y(\mathbf{x}, \omega) = \\ -i\omega R^\dagger \Delta_{E_y}(\mathbf{x}, \omega) + \frac{\partial}{\partial z} \frac{R^\dagger \Delta_{H_x}(\mathbf{x}, \omega)}{\mu} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{R^\dagger \Delta_{H_z}(\mathbf{x}, \omega)}{\mu}, \\ i\omega\mu(\mathbf{x})K_x(\mathbf{x}, \omega) + \frac{\partial L_y(\mathbf{x}, \omega)}{\partial z} = R^\dagger \Delta_{H_x}(\mathbf{x}, \omega), \\ i\omega\mu(\mathbf{x})K_z(\mathbf{x}, \omega) - \frac{\partial L_y(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x} = R^\dagger \Delta_{H_z}(\mathbf{x}, \omega). \end{cases} \quad (1.110)$$

L'opérateur d'onde associé à l'équation du second-ordre de ce nouveau système (première ligne) montre une grande similitude avec celui de l'équation du second-ordre du problème direct (1.47), la seule différence se situe au niveau de  $\varepsilon_e$  qui est conjugué dans un cas mais pas dans l'autre. Ainsi en prenant le conjugué du système adjoint (1.110), nous retrouvons le même opérateur d'onde du second-ordre. Cela nous permet de réutiliser la factorisation LU, calculée et stockée lors du problème direct, avec de nouveaux termes sources : ceux de l'équation du second-ordre du système (1.110) conjugué. De cette façon, le champ  $L_y^*$  est obtenu par résolution des systèmes triangulaires issus de la factorisation LU de la matrice associée au système du second ordre du problème direct. Une fois cette première composante calculée ( $L_y^*$ ), les deux autres ( $K_x^*$  et  $K_z^*$ ) sont déduites par différences finies, comme pour le problème direct. Un raisonnement identique a été appliqué au mode TM afin d'obtenir, pour les deux modes, une stratégie efficace pour calculer les champs adjoints requis pour la construction des gradients.

Maintenant que les champs des problèmes direct et adjoint sont accessibles, nous nous concentrons sur la matrice de diffraction et les expressions du gradient. La formulation choisie permet d'exprimer simplement la matrice de diffraction :

$$\frac{\partial A_2(m, \omega)}{\partial m} = -i\omega \frac{\partial S(m, \omega)}{\partial m}, \quad (1.111)$$

puisque les matrices  $C$  et  $D$ , indépendantes de  $m$ , sont annulées par la dérivation. Par conséquent, les gradients en un point donné  $\mathbf{x}$  pour les différents paramètres  $\varepsilon, \sigma, \mu$  sont définis par

– pour le mode TE :

$$\begin{cases} \frac{\partial f(m)}{\partial \varepsilon}(\mathbf{x}) = -\Re(i\omega E_y(\mathbf{x})L_y^*(\mathbf{x})), \\ \frac{\partial f(m)}{\partial \sigma}(\mathbf{x}) = \Re(E_y(\mathbf{x})L_y^*(\mathbf{x})), \\ \frac{\partial f(m)}{\partial \mu}(\mathbf{x}) = -\Re(i\omega(H_x(\mathbf{x})K_x^*(\mathbf{x}) + H_z(\mathbf{x})K_z^*(\mathbf{x}))), \end{cases} \quad (1.112)$$

– pour le mode TM :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_r}(\mathbf{x}) = -\Re(i\omega(E_x(\mathbf{x})L_x^*(\mathbf{x}) + E_z(\mathbf{x})L_z^*(\mathbf{x}))), \\ \frac{\partial f}{\partial \sigma_r}(\mathbf{x}) = \Re((E_x(\mathbf{x})L_x^*(\mathbf{x}) + E_z(\mathbf{x})L_z^*(\mathbf{x}))), \\ \frac{\partial f}{\partial \mu_r}(\mathbf{x}) = -\Re(i\omega H_y(\mathbf{x})K_y^*(\mathbf{x})). \end{cases} \quad (1.113)$$

Ces formules soulignent le rôle clé joué par la formulation (1.102) basée sur les équations du premier ordre. En effet, ces formules obtenues sont faciles à implémenter car les gradients à la position  $\mathbf{x}$  ne dépendent que de quantités définies en  $\mathbf{x}$ . Finalement, la construction du gradient, via la méthode de l'état adjoint du premier ordre, se montre très économique puisqu'elle implique de résoudre seulement un seul champ d'ondes supplémentaire, ce qui est réalisé avec une grande efficacité dans le cas présent.

#### 1.2.4.2 Le produit Hessien-vecteur

De la même façon que pour le gradient, nous avons

$$\frac{\partial^2 F(m, u)}{\partial u^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 F(m, u)}{\partial m^2} = 0, \quad (1.114)$$

car la matrice  $S(m)$  dépend linéairement des paramètres. Cela a pour effet de simplifier le système (1.97) et le produit  $Hv$  (1.98) qui devient

$$H(m)v = \Re\left(u^\dagger \left(\frac{\partial A_2}{\partial m}\right)^\dagger \mu_3\right) + \left(\lambda^\dagger \left(\frac{\partial A_2}{\partial m}\right) \mu_2\right). \quad (1.115)$$

Dans cette expression,  $u$  et  $\lambda$  sont les champs d'ondes direct et adjoint calculés lors de la construction du gradient. Les nouvelles variables adjointes,  $\mu_1(m)$ ,  $\mu_2(m)$  et  $\mu_3(m)$ , sont solutions du système (1.97) simplifié,

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_1 = -v, \\ A_2(m)\mu_2 = -\left(\frac{\partial A_2(m)}{\partial m}u\right)v = -\sum_i v_i \frac{\partial A_2(\mathbf{m})}{\partial m_i}u, \\ A_2^\dagger(m)\mu_3 = -R^\dagger R\mu_2 - \left(\frac{\partial A_2(m)^\dagger}{\partial m}\lambda\right)^\dagger v = -R^\dagger R\mu_2 - \sum_i v_i \left(\frac{\partial A_2(\mathbf{m})}{\partial m_i}\right)^\dagger \lambda. \end{array} \right. \quad (1.116)$$

Ce système montre que  $\mu_1(m)$  est simplement l'opposé de  $v$ , tandis que  $\mu_2(m)$  et  $\mu_3(m)$  sont en fait des champs d'ondes solutions de deux problèmes de propagation d'ondes additionnels, un direct et un adjoint. Ces deux champs sont calculés avec la même stratégie que celle développée pour déterminer les champs incident  $u$  et adjoint  $\lambda$ . Par analogie, ils sont donc définis comme

$$\mu_2 = (O_y, P_x, P_z)^T, \quad \mu_3 = (R_y, Q_x, Q_z)^T, \quad (1.117)$$

pour le mode TE et

$$\mu_2 = (O'_y, P'_x, P'_z)^T, \quad \mu_3 = (R'_y, Q'_x, Q'_z)^T, \quad (1.118)$$

pour le mode TM, où les champs portés par la direction  $y$  sont calculés par MUMPS après discrétisation de la matrice impédance. Au final, les produits  $Hv$  en un point donné  $\mathbf{x}$  pour les différents paramètres  $\varepsilon, \sigma, \mu$  sont définis par

– pour le mode TE :

$$\left\{ \begin{array}{l} Hv_{\varepsilon_r}(\mathbf{x}) = -\Re(i\omega E_y(\mathbf{x})R_y^*(\mathbf{x})) + \Re(i\omega L_y(\mathbf{x})O_y^*(\mathbf{x})), \\ Hv_{\sigma_r}(\mathbf{x}) = \Re(E_y(\mathbf{x})R_y^*(\mathbf{x})) + \Re(L_y(\mathbf{x})O_y^*(\mathbf{x})), \\ Hv_{\mu_r}(\mathbf{x}) = -\Re(i\omega(H_x(\mathbf{x})Q_x^*(\mathbf{x}) + H_z(\mathbf{x})Q_z^*(\mathbf{x}))) + \Re(i\omega(K_x(\mathbf{x})P_x^*(\mathbf{x}) + K_z(\mathbf{x})P_z^*(\mathbf{x}))), \end{array} \right. \quad (1.119)$$

– pour le mode TM :

$$\left\{ \begin{array}{l} Hv_{\varepsilon_r}(\mathbf{x}) = -\Re(i\omega(E_x(\mathbf{x})Q_x'^*(\mathbf{x}) + E_z(\mathbf{x})Q_z'^*(\mathbf{x}))) + \Re(i\omega(L_x(\mathbf{x})P_x'^*(\mathbf{x}) + L_z(\mathbf{x})P_z'^*(\mathbf{x}))), \\ Hv_{\sigma_r}(\mathbf{x}) = \Re((E_x(\mathbf{x})Q_x'^*(\mathbf{x}) + E_z(\mathbf{x})Q_z'^*(\mathbf{x}))) + \Re((L_x(\mathbf{x})P_x'^*(\mathbf{x}) + L_z(\mathbf{x})P_z'^*(\mathbf{x}))), \\ Hv_{\mu_r}(\mathbf{x}) = -\Re(i\omega H_y(\mathbf{x})R_y'^*(\mathbf{x})) + \Re(i\omega K_y(\mathbf{x})O_y'^*(\mathbf{x})). \end{array} \right. \quad (1.120)$$

Comme pour le gradient, la structure des produits  $Hv$  facilite l'implémentation et souligne encore l'intérêt de la formulation retenue. La formulation proposée ici permet d'utiliser le Hessien complet. Si l'on souhaite travailler dans l'approximation de Gauss-Newton, il suffit de négliger les termes du second ordre, comme cela est proposé dans Métivier *et al.* (2013, 2014).



### 1.2.4.3 La paramétrisation

L'ensemble de la formulation inverse est basée sur la paramétrisation  $m = (\varepsilon, \sigma, \mu)$ . Cependant, cela est mentionné dans Lavoué *et al.* (2014), il est préférable d'inverser des paramètres adimensionnels dépendant linéairement de  $m$ , en l'occurrence dans cette thèse  $m = (\varepsilon_r, \sigma_r, \mu_r)$ . Pour passer d'une paramétrisation à l'autre, il faut définir le changement de variables :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_r} &= \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varepsilon_r} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon_r} \frac{\partial}{\partial \sigma} + \frac{\partial \mu}{\partial \varepsilon_r} \frac{\partial}{\partial \mu} = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial \varepsilon}, \\ \frac{\partial}{\partial \sigma_r} &= \frac{\partial \varepsilon}{\partial \sigma_r} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial \sigma}{\partial \sigma_r} \frac{\partial}{\partial \sigma} + \frac{\partial \mu}{\partial \sigma_r} \frac{\partial}{\partial \mu} = \sigma_0 \frac{\partial}{\partial \sigma}, \\ \frac{\partial}{\partial \mu_r} &= \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mu_r} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial \sigma}{\partial \mu_r} \frac{\partial}{\partial \sigma} + \frac{\partial \mu}{\partial \mu_r} \frac{\partial}{\partial \mu} = \mu_0 \frac{\partial}{\partial \mu}. \end{aligned} \quad (1.121)$$

Dans ces conditions,

$$\begin{cases} \frac{\partial f(m)}{\partial \varepsilon_r}(\mathbf{x}) = \varepsilon_0 \frac{\partial f(m)}{\partial \varepsilon}(\mathbf{x}), \\ \frac{\partial f(m)}{\partial \sigma_r}(\mathbf{x}) = \sigma_0 \frac{\partial f(m)}{\partial \sigma}(\mathbf{x}), \\ \frac{\partial f(m)}{\partial \mu_r}(\mathbf{x}) = \mu_0 \frac{\partial f(m)}{\partial \mu}(\mathbf{x}). \end{cases} \quad (1.122)$$

Dans le cas des produits Hessien-vecteur, il vient

$$\begin{cases} (H(m)v)_{\varepsilon_r}(\mathbf{x}) = \varepsilon_0 (H(m)v)_\varepsilon(\mathbf{x}), \\ (H(m)v)_{\sigma_r}(\mathbf{x}) = \sigma_0 (H(m)v)_\sigma(\mathbf{x}), \\ (H(m)v)_{\mu_r}(\mathbf{x}) = \mu_0 (H(m)v)_\mu(\mathbf{x}), \end{cases} \quad (1.123)$$

tandis que les termes sources des problèmes direct et adjoint additionnels deviennent

$$\begin{cases} A_2(m)\mu_2 &= -\alpha \sum_i v_i \frac{\partial A_2(\mathbf{m})}{\partial m_i} u, \\ A_2(m)^\dagger \mu_3 &= -R^\dagger R w - \alpha \sum_i v_i \left( \frac{\partial A_2(\mathbf{m})}{\partial m_i} \right)^\dagger \lambda, \end{cases} \quad (1.124)$$

où  $\alpha \in (\varepsilon_0, \sigma_0, \mu_0)$  en fonction des classes de paramètres inversées. Ce raisonnement peut être adapté à des paramétrisations différentes et plus complexes.

## 1.2.5 Analyses complémentaires

### 1.2.5.1 Sensibilité au modèle initial

La résolution du problème inverse via les méthodes d'optimisation locales implique de partir d'un modèle initial  $m_0$ . Une fois ce dernier sélectionné, les itérations successives du problème inverse doivent permettre de converger vers le minimum global de la fonction coût. Cependant, la capacité à atteindre cet objectif dépend du modèle  $m_0$ .

Lorsque la norme  $\ell_2$  est utilisée, les formes d'ondes calculées dans le modèle initial (et plus généralement dans le modèle  $m_k$ ) sont comparées à celles des données observées échantillon par échantillon. Cependant, cette comparaison peut être ambiguë entraînant deux possibilités (Fig. 1.6). Si le déphasage entre les signaux est inférieur à la demi-période  $T/2$  du signal dans le domaine temporel (respectivement  $\Pi$  dans le domaine fréquentiel) alors les itérations successives du problème inverse ajusteront les bonnes phases. Dans ce cas, le modèle  $m_0$  est dit cinématiquement compatible. Si le déphasage est supérieur à la demi-période alors l'algorithme va ajuster des phases normalement distinctes puis converger vers un minimum local : c'est le saut de phase ou cycle skipping en anglais. Comme il est plus facile d'avoir un déphasage supérieur à  $T/2$  à hautes fréquences qu'à basses fréquences, le saut de phase est plus susceptible de se produire à hautes fréquences (Fig. 1.6). En définitive, le modèle initial utilisé dans l'inversion devra vérifier la compatibilité cinématique à la première itération. Par la suite, les modèles initiaux sont obtenus soit par lissage du modèle vrai à l'aide de filtre Gaussien, soit par la tomographie des temps de première arrivée.

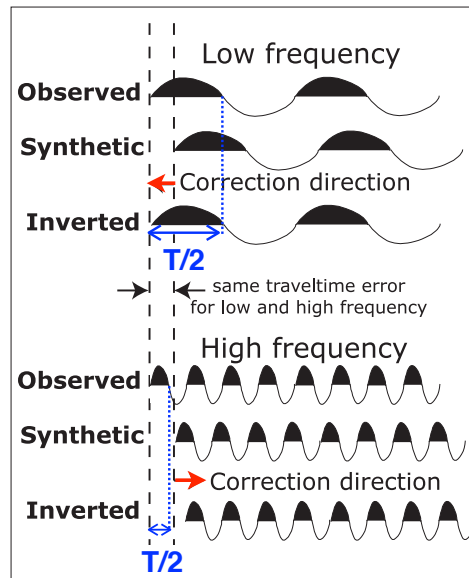


FIGURE 1.6 – Schéma de principe du saut de phase (cycle skipping) sur des données monochromatiques pour deux gammes de fréquences (modifié d'après Yokota & Matsushima (2004)).

### 1.2.5.2 Pouvoir de résolution de l'inversion des formes d'ondes et échantillonnage dans le domaine fréquentiel

L'intérêt de l'inversion des formes d'ondes est sa capacité à fournir des estimations haute résolution de paramètres décrivant les propriétés EM du sous-sol (comparée aux méthodes standards de tomographie). Pour avoir une estimation de cette résolution, on peut analyser la couverture spectrale en nombres d'ondes ( $k_x, k_z$ ) du gradient. En suivant une procédure classique (Devaney (1984)), nous nous plaçons dans un milieu homogène de vitesse  $c_0$  dans lequel se trouvent une source ponctuelle, un récepteur et un point diffractant (Fig. 1.7).

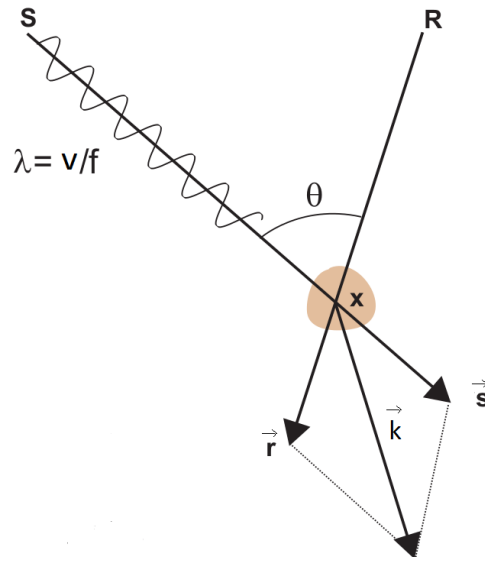


FIGURE 1.7 – Illustration du principe de diffraction en  $x$  à partir d'ondes issues de la source S et du récepteur R, dans un milieu homogène de vitesse  $v(= c_0)$  (d'après Ben Hadj Ali (2009)).

Nous supposons que nous sommes en champ lointain de sorte que les champs d'ondes peuvent être décrits par des ondes planes, et nous négligeons les effets de l'amplitude. Au vu de ces hypothèses, les champs direct et adjoint allant respectivement dans la direction  $s$ , de la source au point diffractant, et dans la direction  $g$  du récepteur au point diffractant, s'écrivent :

$$u(\mathbf{x}, \omega, s) = G_0(\mathbf{x}, \omega, s) = \exp(ik_0\vec{s} \cdot \mathbf{x}), \quad (1.125)$$

$$\lambda(\mathbf{x}, \omega, g) = G_0(\mathbf{x}, \omega, g) = \exp(-ik_0\vec{g} \cdot \mathbf{x}), \quad (1.126)$$

où  $k_0 = \frac{\omega}{c_0}$ . En substituant les expressions de ces champs dans la formule du gradient (1.106) et en omettant le terme associé à la matrice de diffraction pour se concentrer uniquement sur l'échantillonnage des nombres d'ondes, il vient :

$$\nabla f \approx \Re \{ \exp(-ik_0(\vec{s} + \vec{g}) \cdot \mathbf{x}) \Delta d \}. \quad (1.127)$$

Le vecteur nombre d'ondes diffracté  $\vec{k} = k_0(\vec{s} + \vec{g})$ , caractéristique de la résolution spatiale du gradient, s'exprime en fonction de la fréquence et de l'angle de diffraction (Fig. 1.7) comme

$$\vec{k} = \vec{s} + \vec{r} = \frac{2\omega}{c_0} \cos \frac{\theta}{2} \vec{n}, \quad (1.128)$$

où  $\vec{n}$  est le vecteur unitaire dans la direction  $\vec{s} + \vec{r}$ .

Pour illustrer la couverture des nombres d'ondes sur laquelle va s'appuyer la stratégie d'échantillonnage en fréquence, plusieurs exemples simples sont proposés. Pour cela, le vecteur nombre d'onde  $\vec{k}$  est réécrit selon ses composantes horizontale et verticale ( $k_x, k_z$ ) dans un repère 2D cartésien pour un seul couple source-récepteur :

$$\vec{k} = \vec{s} + \vec{g} = \frac{\omega}{c_0} \frac{(z - z_s, x - x_s)}{\sqrt{(z - z_s)^2 + (x - x_s)^2}} + \frac{\omega}{c_0} \frac{(z - z_r, x - x_r)}{\sqrt{(z - z_r)^2 + (x - x_r)^2}}, \quad (1.129)$$

où les couples  $(x, z)$ ,  $(x_s, z_s)$  et  $(x_r, z_r)$  désignent respectivement les positions du point diffractant, de la source et du récepteur. En faisant varier ces positions et la fréquence, il est possible de visualiser la couverture des nombres d'ondes. Pour les différents tests, le milieu est supposé homogène avec  $\varepsilon_r = 4$  et  $\mu_r = 1$  (la formule (1.40), utilisée ici, ne fait pas intervenir la conductivité).

Premièrement, le point diffractant bénéficie d'une illumination complète, c'est-à-dire que des sources et des récepteurs sont placés tout autour du point diffractant. En appliquant la formule (1.129) pour une fréquence de 100 MHz et l'ensemble des couples source/récepteur, nous obtenons la Figure 1.8. Cette dernière, analogue à celle obtenue par Mora (1989), met clairement en évidence de fortes densité et redondance dans la couverture des nombres d'ondes. Elle montre également que l'acquisition utilisée donne accès au nombre d'ondes maximal prévu par la formule (1.128) et donc à la résolution maximale associée ( $\lambda/2$ ).

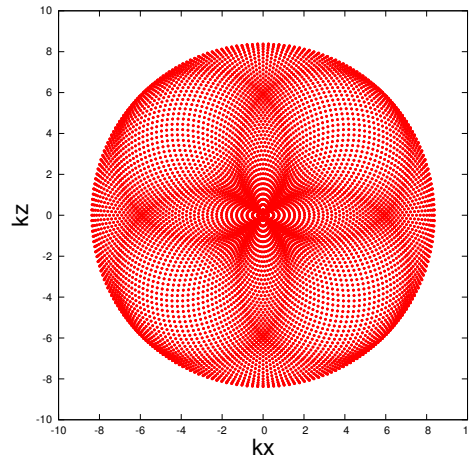


FIGURE 1.8 – Nombres d'ondes imagés pour un point diffractant bénéficiant d'une illumination complète. Notons que la valeur maximale théorique de  $k$  ( $8.38 \text{ rad.m}^{-1}$ ) est atteinte.

Afin de se rapprocher du cas réel étudié ultérieurement, l'acquisition est décimée de façon à avoir une configuration entre puits, pour laquelle les sources et les récepteurs sont dans des puits distincts. Dans cette nouvelle configuration, à distance inter-puits fixe, l'extension verticale du

dispositif d'acquisition joue un rôle clé. En effet, le couple source/récepteur le plus éloigné du point diffractant définit l'angle minimal  $\theta$  du dispositif et donc le nombre d'ondes maximal à fréquence constante (1.129). Pour illustrer cette dépendance, la couverture spectrale de  $k$  est calculée pour différents angles et affichée en Figure 1.9. Une diminution de l'angle  $\theta$ , associée à une augmentation de la longueur du dispositif, induit une augmentation de la couverture spectrale selon  $k_x$  et  $k_z$ . Le cas limite est atteint lorsque l'angle  $\theta$  devient nul, c'est-à-dire que le dispositif est infiniment long. Dans ce cas précis, la couverture spectrale est la réunion de deux cercles de rayon  $k$  (Devaney (1984), Wu & Toksöz (1987), Devaney & Zhang (1991)).

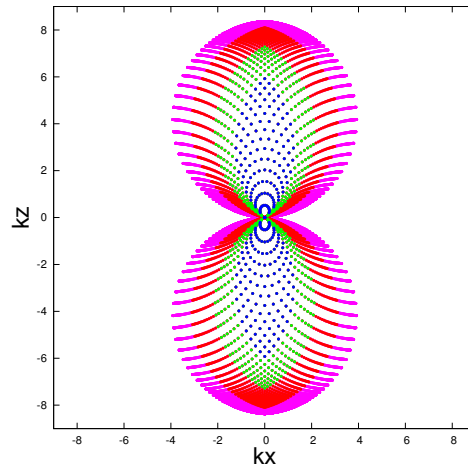


FIGURE 1.9 – Nombres d'ondes imagés pour un point diffractant placé au centre d'une acquisition entre puits. Plusieurs extensions verticales du dispositif d'acquisition sont testées, à sources inter-puits fixe.

Après avoir testé l'influence de l'acquisition sur la couverture des nombres d'ondes, nous évaluons l'influence de la fréquence. Pour ce faire, nous utilisons une acquisition entre puits fixe, dont l'angle minimal est de  $\theta = 90$  degrés, et nous calculons la couverture spectrale pour trois fréquences distinctes (Fig. 1.10). Ce test montre que l'augmentation de la fréquence permet d'échantillonner des nombres d'ondes plus grands selon  $k_x$  et  $k_z$  de sorte que la couverture spectrale associée à une fréquence élevée englobe celles de fréquences plus faibles. Ainsi, il apparaît que les données basses fréquences permettent un échantillonnage plus dense des bas nombres d'ondes. Enfin, les Figures 1.9 et 1.10 montrent une forte dissymétrie dans la couverture spectrale, qui est très limitée pour les faibles  $k_z$ , alors qu'elle est importante et continue pour les faibles  $k_x$ . Cela a pour conséquence un déficit de sensibilité de l'imagerie aux structures verticales par rapport aux structures horizontales, de sorte que les structures verticales sont plus compliquées à reconstruire. La seule solution pour résoudre ce problème est de faire évoluer l'acquisition.

Comme nous l'avons vu en Figure 1.10, la couverture spectrale des nombres d'ondes d'une haute fréquence englobe celles de fréquences plus faibles. L'inversion d'une seule haute fréquence devrait donc pouvoir reconstruire tout le milieu (dans la limite de la résolution maximale), sans problème particulier. Ce test est mené par Song *et al.* (1995) qui montrent que si cette fréquence est trop élevée alors l'inversion reste bloquée dans des minima locaux, conduisant à des résultats insatisfaisants. Dans ce même article, Song *et al.* (1995) montrent que la meilleure stratégie est de commencer par une basse fréquence afin de limiter les risques de saut de phase

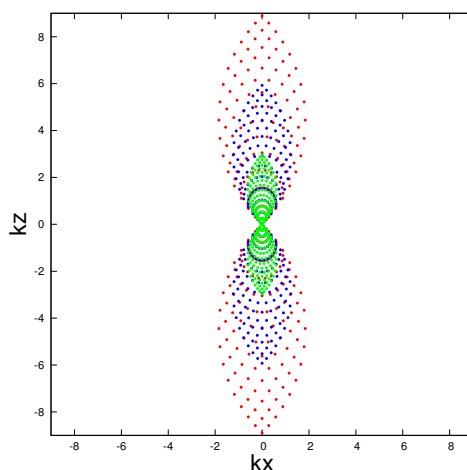


FIGURE 1.10 – Nombres d’ondes imagés pour un point diffractant placé au centre d’une acquisition entre puits qui définit un angle minimal de  $\theta = 90$ . Plusieurs fréquences sont testées avec en vert 50 MHz, en bleu 100 MHz et en rouge 150 MHz.

au début de l’inversion (modèle initial cinématiquement compatible) puis de monter progressivement en fréquence. Cette stratégie permet donc d’atténuer les non-linéarités associées à la FWI et souligne l’intérêt des données basses fréquences pour le bon déroulement de l’inversion. Selon cette approche, l’inversion reconstruit d’abord les grandes structures du milieu, en échantillonnant en premier les grandes longueurs d’ondes ( $\lambda = \frac{c}{f} = \frac{1}{f\sqrt{\mu\epsilon}}$ ), avant d’ajouter des détails plus fins dans le modèle. Cette stratégie allant des basses vers les hautes fréquences a été adaptée avec succès au domaine temporel par Bunks *et al.* (1995) et plus récemment par Meles *et al.* (2011) pour l’inversion de données GPR entre puits. Dans ces deux cas, l’utilisation de filtre passe-bas a permis de sélectionner les données inversées et ainsi monter en fréquence progressivement. Cette procédure hiérarchique reste cependant plus naturelle dans le domaine fréquentiel.

Au-delà de cette stratégie hiérarchique se pose la question du choix des fréquences à inverser. Pour cela, nous suivons les règles proposées par Sirgue & Pratt (2004) et Brossier *et al.* (2009). Premièrement nous pouvons bénéficier de la forte redondance dans le domaine spectral (Fig. 1.9 et 1.10) et décimer les fréquences tout en assurant la continuité de l’échantillonnage dans le domaine des nombres d’ondes. Cette décimation rend l’algorithme économique puisque seulement quelques fréquences discrètes sont alors requises. Cela est d’autant plus vrai que l’espacement entre les fréquences peut croître avec ces fréquences. Cependant, cette sélection peut s’avérer un peu trop restrictive et insuffisante pour reconstruire des milieux complexes et multiparamètres (Brossier *et al.*, 2009). Ainsi, il est préférable d’utiliser des groupes de fréquences qui se superposent partiellement, dès le début de l’inversion, afin de tirer bénéfice de la redondance de l’information et réduire la sensibilité de l’inversion au bruit. La considération de plusieurs fréquences à chaque étape de l’inversion est également un atout dans notre cas. En effet, l’utilisation de plusieurs fréquences simultanément doit aider à réduire le couplage entre la permittivité et la conductivité dont les diagrammes de rayonnement sont similaires mais possèdent des sensibilités différentes vis à vis de la fréquence (formules (1.112), (1.113) et Lavoué *et al.* (2014)).

## 1.3 Applications multiparamètres sur données synthétiques

### 1.3.1 Le modèle des croix

#### 1.3.1.1 Le modèle et le paramétrage de l'inversion

Dans le but de mieux comprendre le comportement et l'efficacité des différentes stratégies d'optimisation utilisées dans le cadre de l'inversion multiparamètres, nous considérons le modèle des croix initialement introduit par Meles *et al.* (2011). Ce modèle consiste en deux anomalies en forme de croix incluses dans un milieu homogène. La Figure 1.11 présente une variante de ce modèle où les croix de permittivité et de conductivité correspondent respectivement à des zones de basse vitesse et de forte atténuation par rapport au milieu encaissant. Nous choisissons de discrétiser ce milieu de 10 mètres de long par 10 mètres de large avec un pas  $h=0.05$  m. Ainsi, le nombre total d'inconnues est  $M_{tot} = N_x N_z N_{par} = 201 \times 201 \times 2 = 80802$ . L'acquisition sélectionnée offre une illumination idéale avec 68 sources et 130 récepteurs répartis tout autour du domaine. Un exemple de radargramme est fourni en Figure 1.12(a) pour une source localisée en  $x = 2$  m et  $z = 1$  m. Il se divise en quatre panneaux, un pour chaque côté du milieu avec dans l'ordre : le haut, la droite, le bas et la gauche. Les données ont également été calculées dans le milieu encaissant sans les anomalies afin de visualiser leur influence sur la propagation d'ondes (Fig. 1.12(b) et (c)). Comme le montre cette dernière figure, les événements associés aux croix sont essentiellement des diffractions, même si on peut noter la présence de signaux transmis au niveau du panneau 2. Rappelons que ces radargrammes sont affichés uniquement à des fins de visualisation de données car les algorithmes sont implémentés dans le domaine fréquentiel.

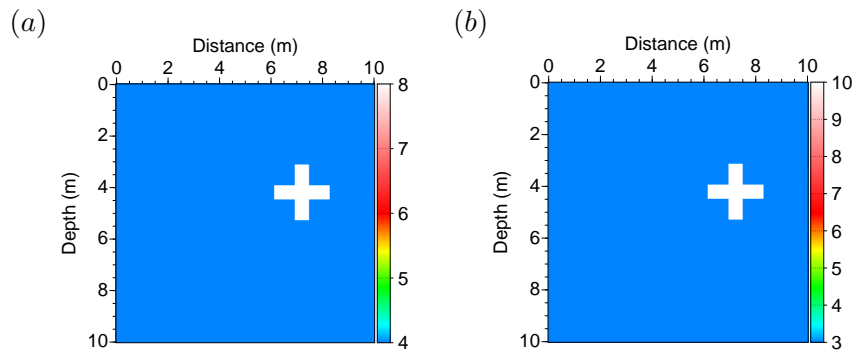


FIGURE 1.11 – Modèles de référence pour la première expérience : permittivité relative (a) et conductivité (b) (mS/m).

Par la suite, la gamme de fréquences utilisée pour les inversions s'étend de 40 à 200 MHz afin d'être compatible avec la largeur de bande d'une antenne GPR centrée sur 100 MHz. Enfin, notons que les données seront inversées sans blanchiment de spectre, donnant plus de poids aux données ayant les plus hautes fréquences.

Dans ce qui suit, la position des croix est supposée connue, de sorte que les points de grilles localisés hors des croix ne sont pas pris en compte dans l'inversion. De plus, les croix sont supposées homogènes afin d'aboutir à un problème inverse ayant seulement deux degrés de liberté : un pour chaque classe de paramètres. Ce problème simplifié donne la possibilité d'étudier l'influence du scaling  $\sigma_0$  issu de l'adimensionnement de la conductivité  $\sigma$  (cf partie 1.2.4.3).

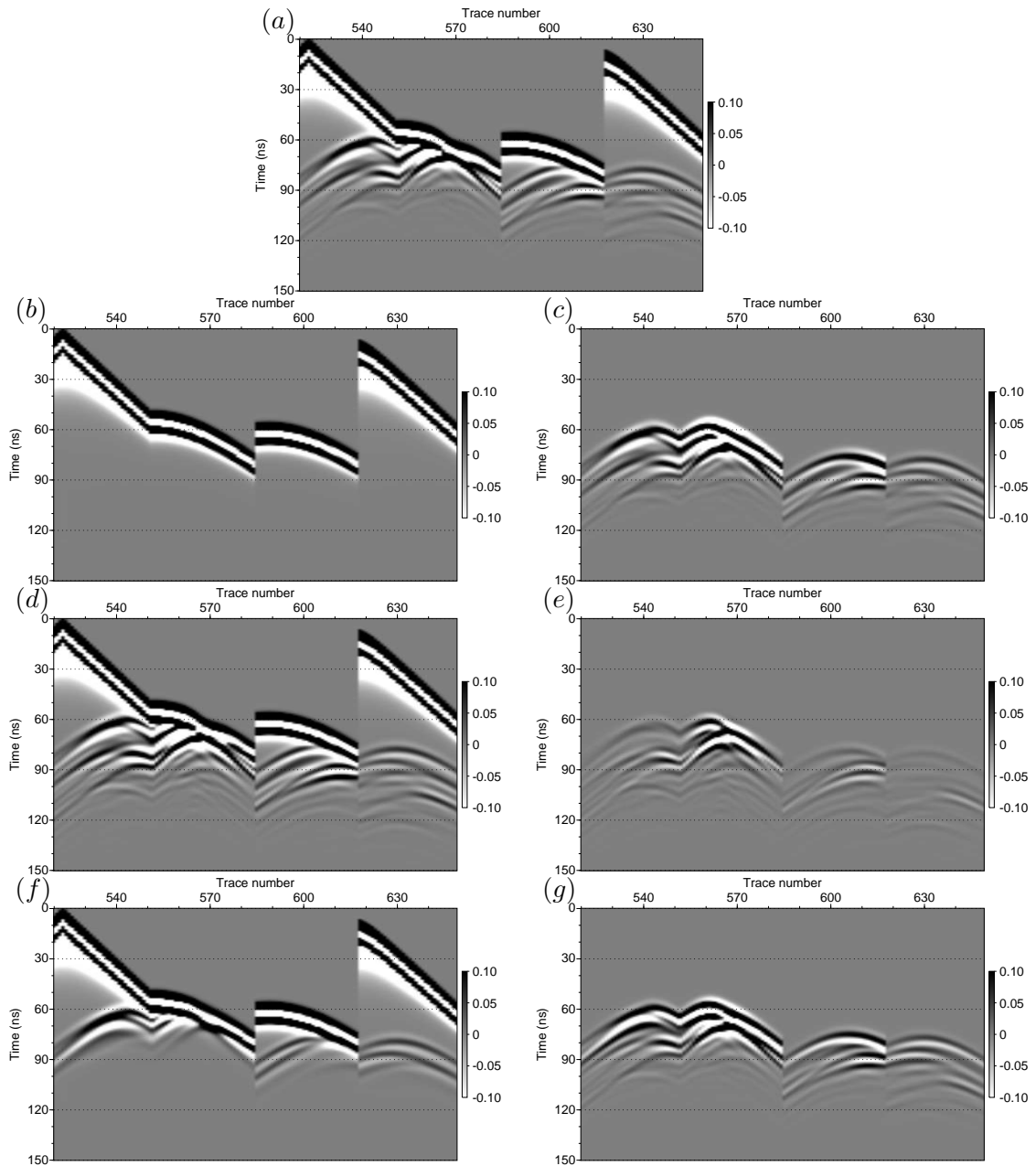


FIGURE 1.12 – Radargrammes calculés dans le modèle de référence de la Figure 1.11 (a). Ces données sont également calculées dans différents modèles initiaux où les couples  $(\epsilon_r - \sigma(mS/m))$  dans les croix varient : (b) 4-3, d) 8.5-6.5 et f) 3-20. Les résidus initiaux associés à chacun des cas sont en c), f) et g). Les données ont été calculées dans le domaine fréquentiel, convoluées à une ondelette de Ricker dont la fréquence pic est à 100 MHz puis transformées en données temporelles via une transformée de Fourier inverse.

Les études menées par Lavoué *et al.* (2014) montrent que la reconstruction de la conductivité  $\sigma$  est très sensible à la définition de ce paramètre d'échelle. En théorie, une meilleure prise en compte du Hessian devrait pouvoir limiter cette sensibilité. L'étude d'influence est menée à bien à travers une analyse par grille à deux dimensions comme réalisé par Malinowski *et al.* (2011)



## APPROCHE MULTIPARAMÈTRES SUR CAS SYNTHÉTIQUES : THÉORIE ET ALGORITHMES

et Lavoué *et al.* (2014). Elle consiste à calculer la fonction coût pour chaque couple permittivité relative/conductivité relative sur des plages de valeurs prédéfinies. Cette analyse a été menée pour deux scaling ( $\sigma_0 = 2.5 \text{ mS/m}$  et  $\sigma_0 = 7.5 \text{ mS/m}$ ). Notons que dans ce cas, la fonction coût est basée sur la comparaison, de manière simultanée, de données observées et calculées pour 7 fréquences distinctes (50, 60, 70, 80, 100, 150 et 200 MHz). Les résultats présentés en Figure 1.13 indiquent que la forme de la fonction coût est grandement influencée par le scaling et que les gammes de valeur de conductivité relative impliquées dans l'inversion sont différentes. Par conséquent, le poids relatif de chaque classe de paramètres durant l'inversion est dépendant du scaling. Comme  $\varepsilon_0$  est fixé, le gradient de permittivité relative pour un point de grille donné est également fixé et est indépendant du scaling. Au contraire, une petite valeur du scaling  $\sigma_0$  donne une large gamme de conductivité relative induisant de faibles gradients de conductivité relative comparés aux gradients de permittivité : l'inversion est plus sensible à la permittivité. Lorsque le scaling grandit, le comportement s'inverse : l'inversion devient progressivement plus sensible à la conductivité. Ainsi, le paramètre  $\sigma_0$  peut être vu comme un facteur permettant de balancer l'influence de chaque classe de paramètres et un moyen d'en favoriser une au détriment de l'autre.

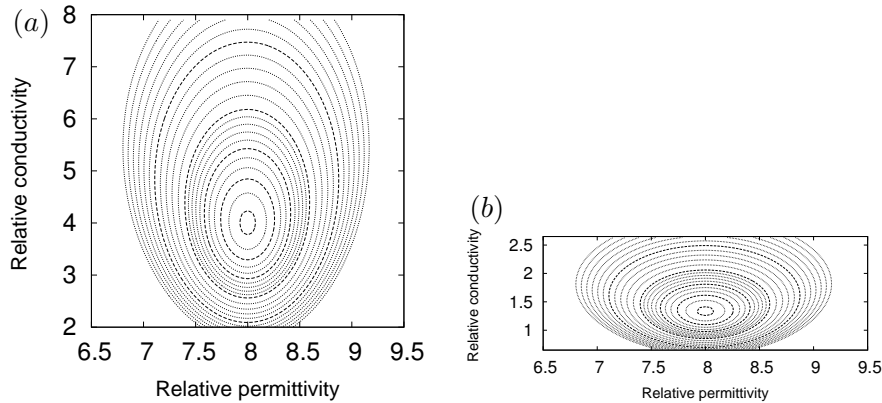


FIGURE 1.13 – Analyse par grille de la fonction coût pour l'inversion à deux degrés de liberté pour deux valeurs de scaling : 2.5 mS/m (a) et 7.5 mS/m (b).

Compte tenu de l'importance du scaling, les performances des quatre algorithmes d'optimisation (le gradient conjugué non linéaire : NLG, l-BFGS, le Gauss-Newton : GN et le Newton Exact : EN) sont comparées pour deux valeurs de  $\sigma_0$ . Cependant, le scaling n'est pas le seul élément d'importance dans la FWI. Ainsi, pour avoir une vision plus large, nous testons, pour chaque scaling, l'influence du modèle initial et la qualité de l'approximation de l'opérateur Hessien inverse (pour les méthodes TRN). Nous inversons simultanément les données issues des 7 fréquences. Les itérations du problème inverse sont arrêtées lorsque la valeur de la fonction coût  $f(m)$  atteint  $10^{-2}f(m_0)$ , soit 1 % de la fonction coût initiale ( $f(m_0)$ ). Enfin, pour suivre les résultats des différentes stratégies, les valeurs dans les croix homogènes sont extraites à chaque itération et superposées à la carte des coûts. A des fins de comparaison et de visualisation des résultats, c'est la conductivité non relative ( $\sigma$ ) qui est présentée dans les figures mais les calculs ont bien été faits avec la conductivité relative ( $\sigma_r$ ). Pour évaluer l'influence des modèles initiaux, deux cas sont testés. Dans le premier cas, les valeurs de permittivité relative et de conductivité initiales dans les croix sont fixées à 8.5 et 6.5 mS/m, ce qui en fait un modèle proche du modèle de référence. Cela se traduit, dans le domaine temporel, par des résidus de faible amplitude car les radargrammes initiaux sont proches des radargrammes de référence

(dans l'ordre Fig. 1.12(e) et (d) et a)). Dans le second cas, les valeurs initiales sont de 3 et 0.02 mS/m, ce qui en fait un modèle éloigné du modèle de référence. De manière logique, les résidus initiaux présentent une amplitude plus importante car les radargrammes initiaux sont plus éloignés de la référence (dans l'ordre Fig. 1.12(g), (f) et a)).

Finalement, dans ce cas à deux degrés de liberté, l'opérateur Hessien est une matrice de taille 2x2 qui peut être inversée exactement. Ainsi, pour chaque modèle de départ, nous comparons l'effet d'un opérateur Hessien inverse exact à celui issu du critère adaptatif proposé par Eisenstat & Walker (1994).

### 1.3.1.2 Les résultats

Nous commençons les investigations avec un scaling fixé à  $\sigma_0 = 5 \text{ mS/m}$ .

Avec un départ proche de la solution (Fig. 1.14a) et b)), les chemins de convergence des différentes méthodes vers le minimum global nécessitent peu d'itérations et n'ont pas tendance à osciller autour de la solution (comme nous le verrons par la suite). Lorsque la prise en compte de l'opérateur Hessien inverse est forcée (Fig. 1.14a) les chemins associés aux méthodes TRN (Gauss-Newton et Exact-Newton) sont distincts de ceux associés aux méthodes NLCG et l-BFGS. Lorsque l'estimation de l'opérateur Hessien inverse est régie par le critère d'arrêt adaptatif de Eisenstat & Walker (1994) (Fig. 1.14b), les chemins de convergence des méthodes TRN se rapprochent de ceux des deux autres méthodes. Ce résultat s'explique par une déconvolution incomplète du gradient par le Hessien inverse. En effet, dans ce cas, la déconvolution s'arrête au bout d'une seule itération du gradient conjugué (contre deux précédemment), ce qui a pour conséquence une direction de descente plus proche du gradient et donc des chemins de convergence plus proches de ceux des méthodes NLCG et l-BFGS.

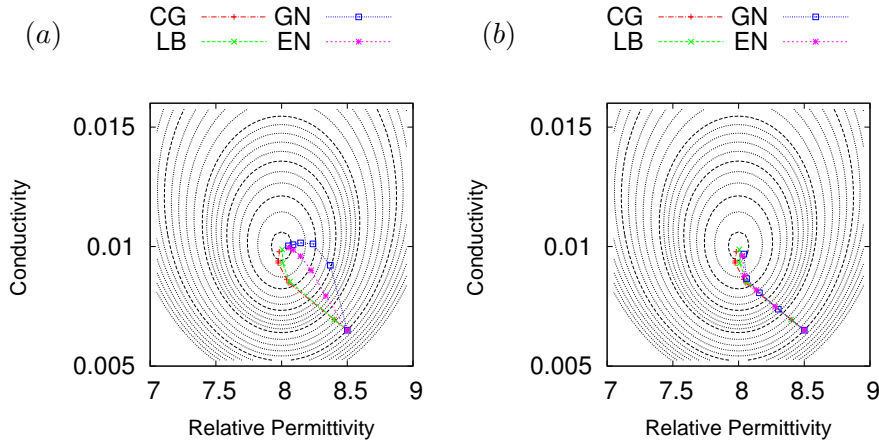


FIGURE 1.14 – Chemins d'inversion dans le domaine physique  $(\epsilon_r, \sigma)$  pour les quatre méthodes d'optimisation avec  $\sigma_0 = 5 \text{ mS/m}$  et un modèle de départ situé à proximité du minimum global (approximation quadratique valable). En a),  $\eta$  est fixé de manière à calculer l'opérateur Hessien inverse exact alors qu'en b),  $\eta$  dépend de l'approximation quadratique locale.

Avec un point de départ éloigné de la référence (Fig. 1.15), le chemin associé au NLCG devient plus complexe et oscille plusieurs fois avant de converger. Le chemin suivi par la méthode de l-BFGS est plus satisfaisant même s'il faut noter que la méthode peut dépasser la solution

## APPROCHE MULTIPARAMÈTRES SUR CAS SYNTHÉTIQUES : THÉORIE ET ALGORITHMES

(en permittivité) avant de revenir en arrière. Si l'on se concentre maintenant sur les méthodes TRN, il est intéressant de noter que la résolution forcée du système interne peut dégrader les premières directions de descente (Fig. 1.15a). Cela s'explique par le fait que dans cette zone de départ, l'approximation quadratique locale est mauvaise. Dans ce contexte, les premières directions de descente calculées par l'algorithme de Gauss-Newton sont également mauvaises car elles s'éloignent de la solution. Dans le cas du Newton Exact, la première direction de descente peut paraître meilleure mais la deuxième descente repart brusquement en arrière (pour la conductivité). En fait, lors du calcul de la première direction de descente, deux itérations internes ont bien été effectuées sans détection de courbures négatives signe qu'une approximation quadratique locale est valable. Ce n'est que lors de la deuxième itération que l'algorithme détecte la courbure négative et suit une direction plus proche du gradient. Lorsque le critère adaptatif de Eisenstat & Walker (1994) est réactivé (Fig 1.15(b)), le gradient conjugué interne est stoppé à la première itération, de sorte que les chemins associés aux méthodes TRN suivent la direction du gradient plutôt qu'un chemin faux. Cet exemple met clairement en évidence le fait que la résolution forcée du système interne n'est pas souhaitable, voire même dangereuse, et que le critère de Eisenstat & Walker (1994) est de première importance pour obtenir un comportement correct des stratégies TRN.

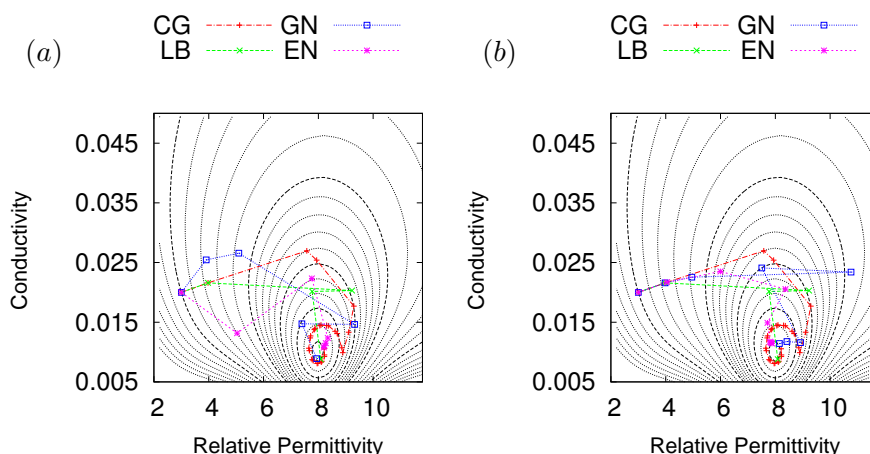


FIGURE 1.15 – Chemins d'inversion dans le domaine physique  $(\epsilon_r, \sigma)$  pour les quatre méthodes d'optimisation avec  $\sigma_0 = 5 \text{ mS/m}$  et un modèle de départ distant du minimum global. En a),  $\eta$  est fixé de manière à calculer l'opérateur Hessian inverse exact alors qu'en b),  $\eta$  dépend de l'approximation quadratique locale.

Pour mesurer l'impact de  $\sigma_0$ , les tests précédents sont effectués une nouvelle fois mais avec  $\sigma_0 = 7.5 \text{ mS/m}$ . Les nouveaux résultats sont affichés en Figures 1.16 et 1.17.

Avec un modèle de départ proche de la solution (Fig. 1.16), la convergence vers le minimum global des différentes méthodes d'optimisation est encore directe. Les chemins de convergence des méthodes NLCG et l-BFGS, obtenus avec le nouveau scaling, diffèrent de ceux présentés en Figure 1.14). Ces deux méthodes sont donc sensibles au scaling. A l'opposé, la comparaison des Figures 1.14a) et 1.16a) indique que les chemins suivis par les méthodes TRN sont identiques dans les deux cas. Ce résultat correspond exactement à ce que l'on attend de la méthode TRN : le gradient est complètement déconvolué par l'opérateur Hessian inverse et l'inversion devient insensible au scaling. Cependant, ce résultat n'est possible qu'avec une valeur de  $\eta$  fixée de manière à calculer l'opérateur Hessian inverse exact. Dès que  $\eta$  est régi par la qualité de

l'approximation quadratique, on retrouve une dépendance au scaling (comparaison des Figures 1.14b) et 1.16b).

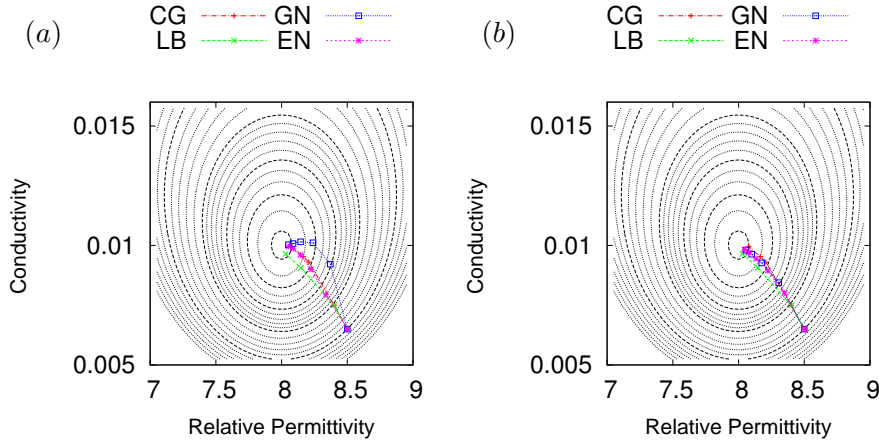


FIGURE 1.16 – Chemins d’inversion dans le domaine physique  $(\varepsilon_r, \sigma)$  pour les quatre méthodes d’optimisation avec  $\sigma_0 = 7.5 \text{ mS/m}$  et un modèle de départ situé à proximité du minimum global (approximation quadratique valable). En a),  $\eta$  est fixé de manière à calculer l’opérateur Hessien inverse exact alors qu’en b),  $\eta$  dépend de l’approximation quadratique locale.

Avec un point de départ éloigné de la référence (Fig. 1.17), nous constatons que le NLCG continue de souffrir de problèmes de convergence en oscillant de façon importante avant convergence. La méthode de l-BFGS est bien plus performante car elle converge avec moins d’itérations et son chemin est plus lisible. La méthode de Gauss-newton avec résolution du problème interne forcée (Fig. 1.17a) donne exactement les mêmes résultats qu’avec  $\sigma_0 = 5 \text{ mS/m}$  (Fig. 1.15a). Ce résultat s’explique par l’incapacité de cette méthode à détecter les courbures négatives présentes quand l’approximation quadratique n’est pas valable. Dans le même temps, la première direction de descente du Newton Exact est exactement la même que celle obtenue avec  $\sigma_0 = 5 \text{ mS/m}$  (Fig. 1.15a) car l’algorithme ne détecte toujours pas de courbure négative locale au départ et calcule un opérateur Hessien inverse complet. Ce n’est qu’à la deuxième itération que l’algorithme du Newton Exact détecte cette courbure négative et suit le gradient, qui dépend du scaling. Ce qui a pour conséquence un chemin de convergence différent de celui obtenu pour  $\sigma_0 = 5 \text{ mS/m}$ . Le changement de scaling ne permet donc pas d’améliorer la situation quand le modèle de départ est éloigné de la solution recherchée. Ainsi, il reste plus pertinent de suivre le critère adaptatif proposé par Eisenstat & Walker (1994) même si cela doit conduire à une dépendance à  $\sigma_0$  comme c’est par exemple le cas en Figure 1.17b).

En définitive, les nouveaux résultats confirment les observations précédentes et montrent qu’il est effectivement possible de s’affranchir du scaling à l’aide d’une déconvolution complète. Cependant, cette déconvolution complète n’est possible qu’avec un modèle de départ proche de la solution. Comme il est peu probable de disposer d’un tel modèle initial lors d’application réaliste/réelle, nous continuons avec le critère de Eisenstat & Walker (1994) et une dépendance au scaling.

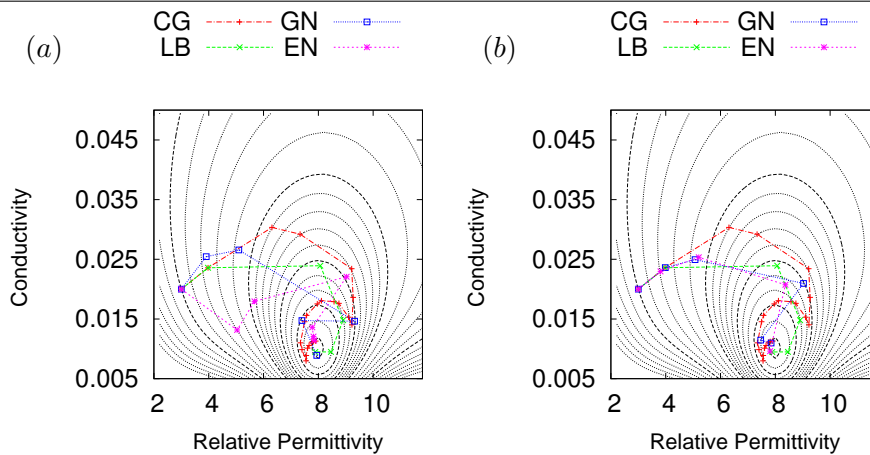


FIGURE 1.17 – Chemins d’inversion dans le domaine physique  $(\epsilon_r, \sigma)$  pour les quatre méthodes d’optimisation avec  $\sigma_0 = 7.5 \text{ mS/m}$  et un modèle de départ distant du minimum global. En a),  $\eta$  est fixé de manière à calculer l’opérateur Hessien inverse exact alors qu’en b),  $\eta$  dépend de l’approximation quadratique locale.

### 1.3.2 Un modèle plus réaliste

Dans cette partie, nous revenons à une inversion plus classique où les points du domaine sont inversés en faisant abstraction des hypothèses précédentes.

#### 1.3.2.1 Le modèle et le paramétrage de l’inversion

Le modèle représente la section d’un massif calcaire karstique (Fig. 1.18 (a) et (c)) dans lequel un tunnel (noté (1)) a été creusé, à une profondeur de 10 mètres. Trois anomalies de faible taille représentant des formations karstiques remplies d’air ou d’argile (numérotées 2 à 4) ainsi qu’une zone fortement altérée (notée 5) sont ajoutées au milieu encaissant. L’interface située à environ 18 mètres indique le toit de la nappe phréatique. Notons que les contrastes de permittivité et de conductivité des cibles avec le milieu encaissant sont assez élevés.

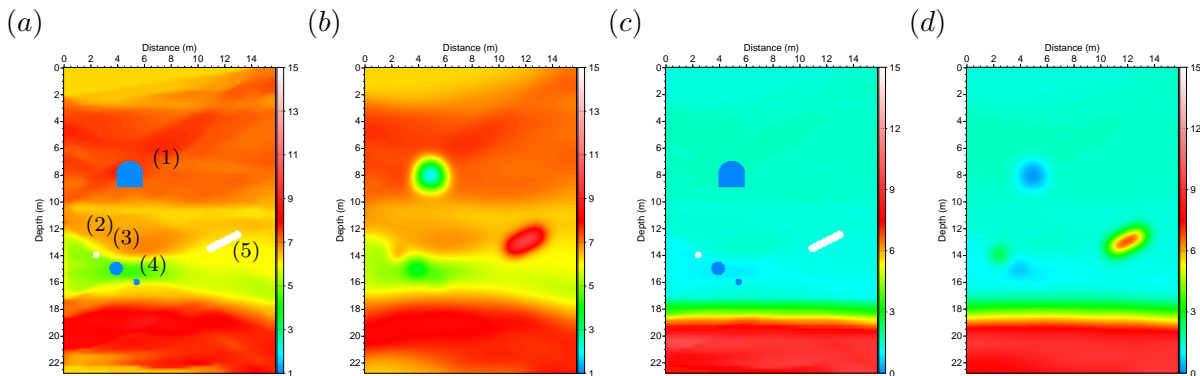


FIGURE 1.18 – Modèles de référence réalistes avec la permittivité relative (a), la conductivité (c) (en mS/m) et les modèles initiaux associés b) et d) (en mS/m).

Les modèles initiaux de permittivité et de conductivité (Fig. 1.18 (b) et (d)) sont obtenus

par lissage des modèles de référence via un filtre Gaussien dont la longueur de corrélation est de 0.75 mètre. La géométrie de l'acquisition se veut représentative d'une acquisition entre puits réelle avec des antennes GPR verticales (mode TM). L'acquisition se fait en transmission. Tout d'abord, les sources sont placées dans un premier puits et les récepteurs dans un second. Chacun des 71 récepteurs, allant de 0.75 à 21.75 mètres, enregistre le signal propagé depuis chacune des 44 sources, allant de 0.75 à 21.25 mètres. Les positions des sources et des récepteurs sont ensuite interchangées (sources dans le second puits et récepteurs dans le premier puits) et l'acquisition de données poursuivie. Cela a pour but de créer un jeu de données issu d'un schéma d'acquisition symétrique. Des radargrammes acquis dans les modèles de référence et initiaux ainsi que les résidus associés sont affichés en Figure 1.20 a) b) et c).

Nous utilisons la stratégie fréquentielle présentée dans le tableau (1.3). Les modèles de permittivité et de conductivité finaux, pour un groupe de fréquences donné, sont utilisés comme modèles initiaux pour le groupe suivant. Deux critères d'arrêt, basés sur la réduction de la fonction coût, sont choisis en fonction du groupe de fréquences considéré. En suivant le critère d'arrêt :

$$\frac{f(m)}{f(m_0)} < \delta, \tag{1.130}$$

nous retenons  $\delta = 0.05$  pour le premier groupe et  $\delta = 0.02$  pour les suivants. Le coût  $f(m_0)$  correspond toujours au coût associé aux modèles initiaux de la FWI (Fig. 1.18 (b) et (d)), communs à toutes les méthodes, pour les fréquences inversées. Ce choix permet d'avoir une comparaison équitable entre les différentes méthodes d'optimisation. Après la première inversion non-linéaire, les modèles obtenus sont plus proches du modèle de référence et  $f(m)$  peut être relativement bas comparé à  $f(m_0)$ , de sorte que la valeur de  $\delta$  doit être abaissée pour disposer de plusieurs itérations non-linéaires.

| Groupes    | 1  | 2  | 3  | 4   | 5   | 6   | 7   |
|------------|----|----|----|-----|-----|-----|-----|
|            | 40 | 50 | 60 | 80  | 80  | 100 | 120 |
| Fréquences | 50 | 60 | 70 | 100 | 100 | 120 | 150 |
|            | 60 | 70 | 80 | 120 | 120 | 150 | 180 |

TABLE 1.3 – Stratégie fréquentielle avec décalage progressif de la bande de fréquences (en MHz).

Concernant le scaling, une valeur commune à toutes les méthodes d'optimisation est sélectionnée ( $\sigma_0 = 2.7 \text{ mS/m}$ ). Cette valeur est déterminée par essai/erreur pour donner une sensibilité à peu près équivalente aux deux paramètres.

Enfin, sans considération supplémentaire, aucune méthode d'optimisation n'est capable de mettre à jour significativement les modèles initiaux et donc de converger vers des modèles finaux satisfaisants. Cela s'explique par la forte empreinte des sources et des récepteurs dans le gradient, ce qui perturbe l'inversion. Pour faire face, le gradient est gelé (forcé à zéro), à chaque itération, dans les zones latérales où se trouvent les sources et les récepteurs. Pour éviter une discontinuité artificielle brutale entre les zones gelées et non gelées du gradient, ce dernier est lissé par un filtre Gaussien dont la longueur de corrélation est de 0.3 mètre. Ainsi, les modèles de permittivité et de conductivité ne sont pas mis à jour dans les zones gelées durant l'inversion. Ce filtre permet également d'éviter les artefacts haute fréquence qui peuvent apparaître dans le gradient au cours de l'inversion. Notons finalement que le même protocole est appliqué aux

produits Hessien-vecteur car le calcul de ces derniers passe également par l'utilisation de sources et de récepteurs.

### 1.3.2.2 Les résultats

Les résultats, présentés en Figure 1.19, montrent des reconstructions similaires de permittivité et de conductivité, pour les différentes méthodes d'optimisation. De manière générale, la reconstruction de la permittivité apparaît plus robuste que celle de la conductivité. En particulier, les structures principales du milieu encaissant sont bien retrouvées pour la permittivité.

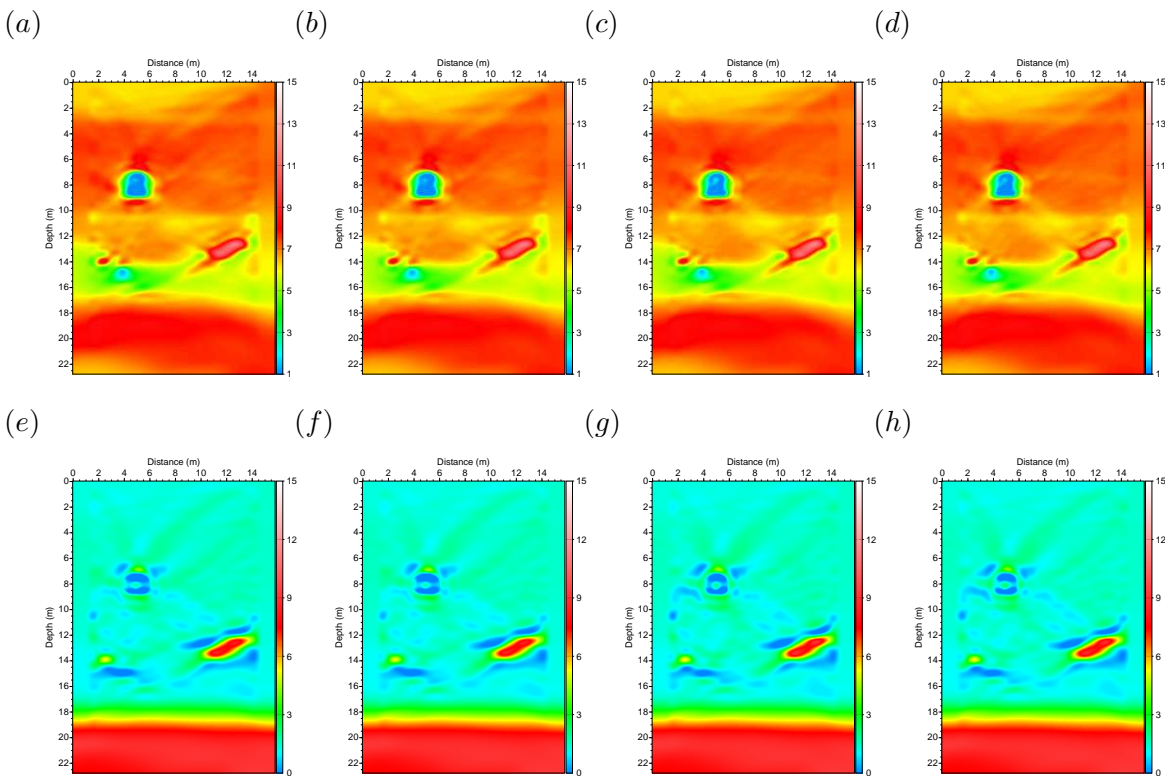


FIGURE 1.19 – Modèles finaux de permittivité relative (première ligne), et de conductivité (en mS/m) (deuxième ligne) obtenus pour les différentes méthodes d'optimisation : (a) et (e) pour le NLCG, (b) et (f) pour l-BFGS, (c) et (g) pour le GN et (d) et (h) pour l'EN.

La galerie est également bien reconstruite. En effet, sa forme mais aussi ses valeurs intrinsèques de permittivité sont bien atteintes. On notera cependant que la résolution latérale est en deçà de sa résolution verticale. Ce résultat s'explique par l'analyse des nombres d'ondes imagés par un dispositif d'acquisition entre puits (cf partie 1.2.5.2), il est donc conforme à ce qui est attendu. Les basses valeurs de conductivité à l'intérieur de la galerie sont également bien retrouvées, mais de manière discontinue, car tous les modèles affichent le même artefact au centre. Notons que cet artefact semble prendre naissance sur les parois latérales.

L'inversion est aussi capable de refocaliser l'anomalie n°5 pour laquelle les valeurs intrinsèques se rapprochent de celles attendues, surtout en ce qui concerne la permittivité. Là encore, la conductivité semble plus sensible avec des valeurs de conductivité sous-évaluées en dessus et en dessous de l'anomalie qui s'expliquent là encore par l'acquisition.

Les trois anomalies restantes (n°2 à 4) sont les plus compliquées à reconstruire en raison de leur faible taille. La plus grande d'entre elles, la n°3, dont le diamètre est de 70 centimètres, est partiellement retrouvée mais ses valeurs intrinsèques ne sont plus atteintes. De plus, ses limites latérales deviennent difficiles à définir, surtout pour la conductivité. Les structures karstiques n°2 et 4 sont encore plus compliquées à reconstruire. En effet, les diamètres associés, de 35 centimètres, sont cette fois voisins de la résolution maximale théorique locale qui est de  $\lambda/2 \simeq 0.35$  mètres. Ce résultat est renforcé par le fait que cette limite théorique de résolution n'est pas atteinte avec un dispositif d'acquisition entre puits de longueur finie, comme c'est le cas ici. A cela, il convient de mentionner que le filtre Gaussien, appliqué à chaque itération, doit également empêcher une meilleure résolution. Notons cependant que l'anomalie n°2 reste mieux reconstruite que l'anomalie n°4, probablement grâce à sa position proche du dispositif d'acquisition et à ses valeurs de permittivité et de conductivité intrinsèques.

A l'image des modèles finaux, les résidus, calculés à la fin de l'inversion (Fig. 1.20 (d) à (g)), présentent un haut degré de similitude. Ces résultats vont dans le sens des observations faites sur l'exemple des croix. En effet, la non-prise en compte du Hessien complet, pour les méthodes du Newton tronqué (Gauss-Newton et Exact-Newton), donne des directions de descente plus proches de celles fournies par les autres méthodes. Par conséquent, les différentes méthodes d'optimisation testées convergent vers des résultats qualitativement identiques, pour un scaling donné. Dans ce contexte, le seul moyen de les différencier est de comparer les coûts de calcul (tableau (1.4)). Ce tableau montre que le nombre de gradients requis par l'inversion tend à se réduire avec la sophistication des méthodes, comme cela était attendu. Cependant, si l'on tient compte du surcoût associé à la résolution du système interne des méthodes TRN, la méthode l-BFGS est finalement la plus intéressante.

| method       | <i>NLCG</i> | l-BFGS    | GN            | EN            |
|--------------|-------------|-----------|---------------|---------------|
| freq.g/sca.  | 2.7         | 2.7       | 2.7           | 2.7           |
| 1            | 10          | 11        | 12/11         | 8/8           |
| 2            | 12          | 8         | 13/19         | 10/15         |
| 3            | 7           | 6         | 7/11          | 5/10          |
| 4            | 12          | 9         | 12/27         | 11/20         |
| 5            | 8           | 8         | 7/18          | 8/20          |
| 6            | 13          | 13        | 11/34         | 10/26         |
| 7            | 24          | 15        | 9/22          | 9/28          |
| <i>Total</i> | <i>86</i>   | <i>70</i> | <i>71/142</i> | <i>61/127</i> |

TABLE 1.4 – Nombres de gradients et de produits Hessien-vecteur (pour les méthodes TRN) construits durant les inversions pour les différentes méthodes d'optimisation. Dans ce tableau, freq.g et sca. signifient groupe de fréquences et scaling.

Des conclusions analogues sont proposées, dans le cadre de l'imagerie multiparamètres sismique, par Yang *et al.* (2017). Les auteurs comparent les performances des algorithmes l-BFGS et TRN (Gauss-Newton et Exact-Newton) pour découpler la vitesse, l'atténuation et la densité et ils montrent que les différentes méthodes d'optimisation donnent des résultats sensiblement identiques. Là aussi, l'algorithme l-BFGS s'avère être le plus économique en matière de coût de calcul global.



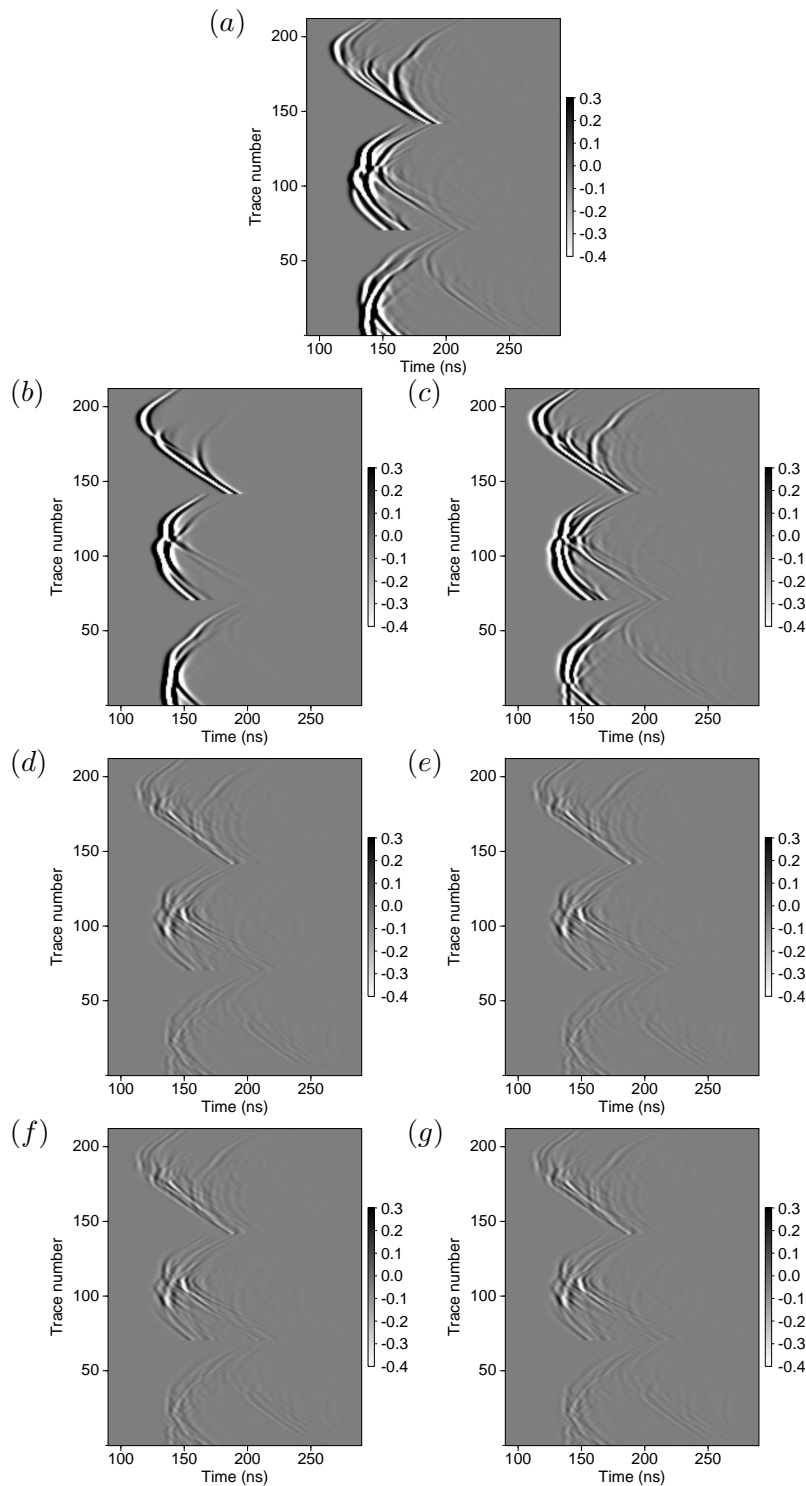


FIGURE 1.20 – Radargrammes calculés pour trois sources dans le puits droit à 4.65, 10.5 and 15.4 m de profondeur : a) données observées calculées dans le modèle de référence (1.18), b) données initiales calculées dans le modèle associé et c) résidus initiaux. Résidus calculés dans les modèles finaux présentés en Figure 1.19, pour les différentes méthodes d’optimisation : (d) NLCG, (e) l-BFGS, (f) GN et (g) EN. Les données ont été calculées dans le domaine fréquentiel, convoluées à une ondelette de Ricker dont la fréquence pic est à 100 MHz puis transformées en données temporelles via une transformée de Fourier inverse.

## 1.4 Conclusions

Dans un premier temps, j'ai introduit les équations de Maxwell et présenté les paramètres physiques influençant la propagation des ondes électromagnétiques dans le milieu géologique (la permittivité diélectrique, la conductivité électrique et la perméabilité magnétique). Cette présentation des paramètres a été l'occasion de définir les équations constitutives et les hypothèses retenues dans cette thèse, à savoir un milieu isotrope linéaire et des paramètres physiques réels et indépendants de la fréquence. La combinaison des équations constitutives et des équations de Maxwell a ensuite permis d'aboutir à un système d'équations régissant la propagation des ondes électromagnétiques dans un milieu géologique donné. Par la suite, ce système d'équations a été ramené à une géométrie 2D et réécrit sous une forme qui facilite le calcul de la propagation d'ondes (une équation du second-ordre et deux équations du premier ordre). Cette propagation d'ondes, en milieu 2D hétérogène, est calculée numériquement par discrétisation d'une équation du second-ordre à l'aide d'un schéma aux différences finies dans le domaine fréquentiel, appelé schéma à grilles mixtes. Cette opération permet d'aboutir à un système linéaire qui est résolu de manière directe via une factorisation LU. Une fois la solution de l'équation du second-ordre obtenue, elle est utilisée pour résoudre le système d'équations complet par différences finies.

Dans un deuxième temps, j'ai présenté brièvement la notion de problème inverse avant de me concentrer sur la formulation plus spécifique de l'inversion des formes d'ondes complètes, connue pour être mal-posée, non-linéaire et de grande taille. Cette dernière caractéristique exclue de résoudre ce problème de manière globale. Il est donc résolu de manière itérative via l'utilisation d'algorithmes d'optimisation locale. Ces algorithmes reposent sur le calcul d'une direction de descente basée sur le gradient et une approximation du Hessien inverse. On a interprété ces deux dernières quantités. L'importance du Hessien inverse pour son rôle de potentiel découplage entre paramètres a conduit au développement d'algorithmes toujours plus élaborés visant à mieux prendre en compte son effet. Ainsi, historiquement, on retrouve dans l'ordre les algorithmes du gradient conjugué non-linéaire, de l-BFGS et du Newton tronqué. Cependant, cette sophistication a un coût de calcul qu'il faut prendre en compte et réduire dans la mesure du possible. Dans notre cas, ce coût a été contenu grâce à l'utilisation des méthodes adjointes du premier et du second ordre qui permettent de calculer de manière très efficace le gradient (nécessaire pour tous les algorithmes) et le produit Hessien vecteur (spécifique au Newton tronqué). Par la suite, ces méthodes adjointes ont été adaptées à l'électromagnétisme dans une formulation particulière donnant lieu à des expressions du gradient et du produit Hessien-vecteur valables quel que soit l'outil de modélisation utilisé. Ce travail méthodologique se termine par une analyse du pouvoir de résolution du gradient.

Dans un troisième temps, les différents algorithmes sont testés, sur des modèles synthétiques, afin de comparer leur capacité respective à retrouver les distributions 2D de permittivité diélectrique et conductivité électrique (supposées réelles et indépendantes de la fréquence, à l'image de la modélisation). Lors d'une première investigation, à deux degrés de liberté, nous montrons qu'un découplage complet de ces deux classes de paramètres n'est possible qu'avec le Newton tronqué lorsque la prise en compte du Hessien est forcée et que le modèle de départ est proche de la solution, c'est-à-dire où l'approximation quadratique est valide. Cependant, dans le cas général, un tel modèle de départ n'est pas disponible et il faut introduire un paramètre additionnel (le scaling) pour répartir de manière adéquate le poids de chaque classe de paramètres dans l'inversion. L'investigation suivante, plus réaliste, montre qu'avec un scaling bien choisi,

il est possible de reconstruire une galerie présentant de forts contrastes de permittivité et de conductivité. Ce point est déterminant en vue de l'application sur données réelles développée au chapitre suivant. Notons tout de même que la conductivité est apparue plus sensible que la permittivité aux forts contrastes. Enfin, les algorithmes testés ont montré des performances équivalentes en termes de reconstruction du milieu de sorte que seuls les coûts de calcul ont permis de les départager. En suivant ce critère de coût, nous choisissons de travailler, par la suite, avec la méthode l-BFGS, laquelle s'est montrée la plus économique.

## Chapitre 2

# Inversion des champs d'ondes acquis en transmission dans un milieu carbonaté

### Sommaire

---

|            |   |            |
|------------|---|------------|
| <b>2.1</b> | <b>Introduction</b>   | <b>75</b>  |
| <b>2.2</b> | <b>Contextes de l'étude</b>   | <b>77</b>  |
| 2.2.1      | Historique du LSBB  | 77         |
| 2.2.2      | Contexte géologique   | 79         |
| <b>2.3</b> | <b>Acquisition, pré-traitement des données et estimation préliminaire des paramètres</b>              | <b>84</b>  |
| 2.3.1      | Analyse de la carotte du forage, acquisition et présentation des données                              | 84         |
| 2.3.2      | Analyse des données 3D en temps et en fréquence   | 85         |
| 2.3.3      | Estimation quantitative préliminaire de la permittivité diélectrique et de la conductivité électrique | 89         |
| 2.3.4      | Conversion 3D/2D  | 94         |
| <b>2.4</b> | <b>Inversion des données réelles de Rustrel en parallèle de données synthétiques</b>                  | <b>97</b>  |
| 2.4.1      | Introduction  | 97         |
| 2.4.2      | Préliminaires   | 99         |
| 2.4.3      | Inversion monoparamètre de la permittivité  | 105        |
| 2.4.4      | Inversion multiparamètres de la permittivité et la conductivité                                       | 122        |
| 2.4.5      | Inversion multiparamètres et mise à jour de la source   | 136        |
| <b>2.5</b> | <b>Résultats dans le milieu à forts contrastes et interprétations</b>                                 | <b>146</b> |
| 2.5.1      | Inversion des données acquises à Rustrel sur le profil complet  | 146        |
| 2.5.2      | Analyse des résultats   | 151        |
| <b>2.6</b> | <b>Conclusions</b>  | <b>159</b> |

---

## 2.1 Introduction

Pour les géophysiciens, la finalité des développements théoriques est leur application aux données réelles. Dans ce chapitre, la FWI va être appliquée à un jeu de données acquis entre

forages localisés dans un milieu carbonaté attenant au site du laboratoire à Bas Bruit de Rustrel (84). Cette zone est connue pour son système karstique qui a déjà fait l'objet de nombreux travaux. De manière générale, les karsts sont des structures géologiques dont les hétérogénéités et la complexité rendent difficile l'exploitation de ces ressources. Ces formations peuvent cependant couvrir de vastes pans de territoire sur le pourtour méditerranéen : jusqu'à 70 % des roches affleurantes d'un pays (Bakalowicz M., 2005) et 33 % en France (Zwahlen, 2003). Ces structures sont souvent négligées comme ressources en eau malgré leurs potentiels, notamment autour de la Méditerranée (Bakalowicz, 2005). Ainsi, dans un contexte global où les ressources en eau deviennent, voire sont déjà, un enjeu majeur, la connaissance de ces structures et de leur fonctionnement devient de plus en plus importants.

Dans ce type d'environnement, les méthodes d'investigation hydrogéologiques classiques, basées sur des observations de surface, des analyses ponctuelles ou encore le suivi des écoulements par traceurs ne permettent pas visualiser les chemins préférentiels des écoulements à travers l'ensemble d'un massif, tout comme les zones de rétention d'eau. Il est donc nécessaire de faire progresser les techniques de reconnaissance existantes afin de mieux comprendre le fonctionnement de tels systèmes. C'est dans ce contexte qu'intervient cette étude géophysique sur le site du LSBB dont le système karstique fait partie intégrante de l'hydrosystème de Fontaine de Vaucluse (FdV) donnant naissance à la plus importante source karstique d'Europe.

En plus de l'intérêt pour leur ressource en eau, ces calcaires constituent une archive géologique et sont d'excellents analogues des réservoirs carbonatés présents au Moyen-Orient (Formation Thamama, Kharaib et Shuaiba) à la fois en termes d'âge, de propriétés pétrophysiques, d'environnement et de faciès de dépôts (Leonide *et al.* (2012)). Ils sont donc un site d'étude pouvant donner des indications sur les réservoirs profonds à l'origine de la production de pétrole et notamment leurs propriétés de transfert.

Les objectifs de ce travail sont doubles et visent à répondre aux points suivants :

-(i) évaluer le potentiel de la FWI à fournir des images multiparamètres (permittivité diélectrique et conductivité électrique) haute-résolution dans les carbonates. Quels modèles initiaux prendre notamment pour la conductivité ? Quel est l'apport de cette technique haute résolution par rapport à une technique comme la tomographie des temps de première arrivée ? Quel est l'apport de l'inversion multiparamètres par rapport à une inversion monoparamètre dans ce contexte carbonaté ? Quelle est l'influence de l'estimation de la source sur la reconstruction du milieu ?

-(ii) améliorer la compréhension du fonctionnement des aquifères karstiques. Les points déjà observés par le passé sont-ils confortés ? Qu'apportent les nouveaux modèles issus de l'inversion entre forages par rapport aux études précédentes ? La méthode proposée pourrait-elle être utilisée de manière plus routinière sur ce site ou ailleurs ? Quel est le potentiel de la méthode pour faire du monitoring de la teneur en eau dans un avenir proche ?

Après avoir présenté plus en détail le site du LSBB, la première partie décrit les études géologiques, hydrogéologiques et géophysiques menées. Le sous-chapitre suivant présente les données issues de l'étude d'une carotte, d'une part, et les données GPR acquises entre forages, d'autre part. Une attention particulière sera apportée aux données GPR concernant leur traitement avant inversion et leur mise en relation avec les connaissances antérieures. Ce sous-chapitre permet, en outre, de définir un modèle synthétique du site étudié.

Ce modèle est utilisé dans le sous-chapitre suivant pour générer des données synthétiques. Ces données sont inversées en parallèle d'une partie des données réelles pour en contrôler

les résultats et si besoin guider les choix concernant les paramètres nécessaires à l'inversion. La démarche optimale, obtenue grâce aux différentes investigations, est ensuite appliquée à l'ensemble des données acquises à Rustrel. Dans une dernière partie, les images quantitatives obtenues sont interprétées et comparées à celles provenant des études précédentes.

## 2.2 Contextes de l'étude

### 2.2.1 Historique du LSBB

#### 2.2.1.1 Un peu d'histoire

Dans un contexte de Guerre Froide et après l'explosion de la première bombe nucléaire soviétique en 1949, l'exécutif français décide de développer l'arme nucléaire. Dans le cadre du programme de frappe nucléaire voulu par le Général de Gaulle, la première bombe A française est actionnée, en 1960, dans le désert du Sahara, et la première bombe H, en 1968, sur l'atoll de Mururoa dans l'océan Pacifique. Dans ce contexte, en 1965, le plateau d'Albion est choisi pour accueillir un système de défense terrestre à partir de missiles dits Sol/Sol Balistiques Stratégiques (SSBS) pouvant contenir chacun une tête nucléaire. Une fois achevé, le système de dissuasion est composé d'une base support à Saint Christol et de deux Postes de Conduite de Tir (PCT1 à Rustrel et PCT2 au Nord de Sault) rattachés à 18 Zones de Lancement (ZL) de missiles SSBS répartis sur l'ensemble du plateau d'Albion. Le site de Rustrel a été choisi pour son "calcaire facile à travailler, suffisamment résistant pour encaisser des chocs" atomiques pour se laisser la possibilité de riposter "et à l'écart de la zone sismique de la Durance". C'est ainsi, qu'à partir de 1966 le plateau d'Albion est une zone militaire stratégique et cela jusqu'en 1998, date à laquelle le site est démilitarisé et démantelé sur décision du Président de la République, Jacques Chirac.

Lors du démantèlement, certaines parties du dispositif ont été vidées de leur contenu, puis bouchées comme le PCT2, pendant que d'autres ont été réutilisées. C'est par exemple le cas d'une des ZL convertie en observatoire astronomique où encore du PCT1 devenu le Laboratoire Souterrain à Bas Bruit (LSBB) de Rustrel - Pays d'Apt (inter-Disciplinary Underground Science and Technology laboratory). Le LSBB est aujourd'hui un domaine de 54 ha avec des altitudes allant de 500 à 1000 m. La galerie creusée sub-horizontalement dans le calcaire présente des profondeurs variables allant de 30 à 519 m sous le massif de la Grande Montagne, compte tenu de la topographie de surface (Fig. 2.1). C'est un total d'environ 3,7 km de galeries réparties principalement entre la galerie principale (1560 mètres), la galerie de secours (1760 mètres) et la galerie anti-souffle (280 mètres) (Fig. 2.2). L'ensemble des parois de la galerie est renforcé par du béton potentiellement armé d'une épaisseur d'environ 70 centimètres, sauf dans la galerie anti-souffle où un simple flocage en ciment recouvre la roche.

Au point le plus profond se trouve la capsule, une salle blindée-faradisée de plus de 1250  $m^3$  qui était le centre névralgique du site avec l'ancien poste de commande de tir nucléaire. Les conditions particulières de cette capsule en font un environnement de bas-bruit électromagnétique. De manière plus générale, le site dans son ensemble, qui bénéficie d'une couverture rocheuse significative et de l'absence de bruits de toutes natures liés aux grands centres urbains (réseaux routiers importants, réseaux ferroviaires par exemple), offre des conditions idéales pour mener des expérimentations très variées.

# INVERSION DES CHAMPS D'ONDES ACQUIS EN TRANSMISSION DANS UN MILIEU CARBONATÉ

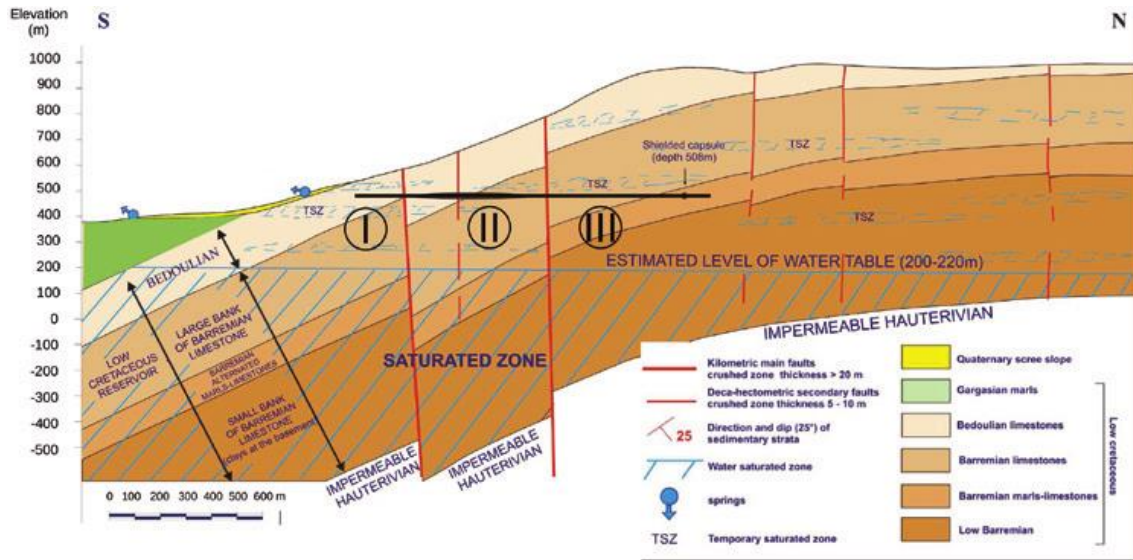


FIGURE 2.1 – Section Sud-Nord conceptuelle (d’après Sénéchal *et al.* (2013), modifiée de Maufroy (2010)). La ligne noire représente les galeries du LSBB recoupant différents compartiments géologiques mentionnés en Figure 2.2.

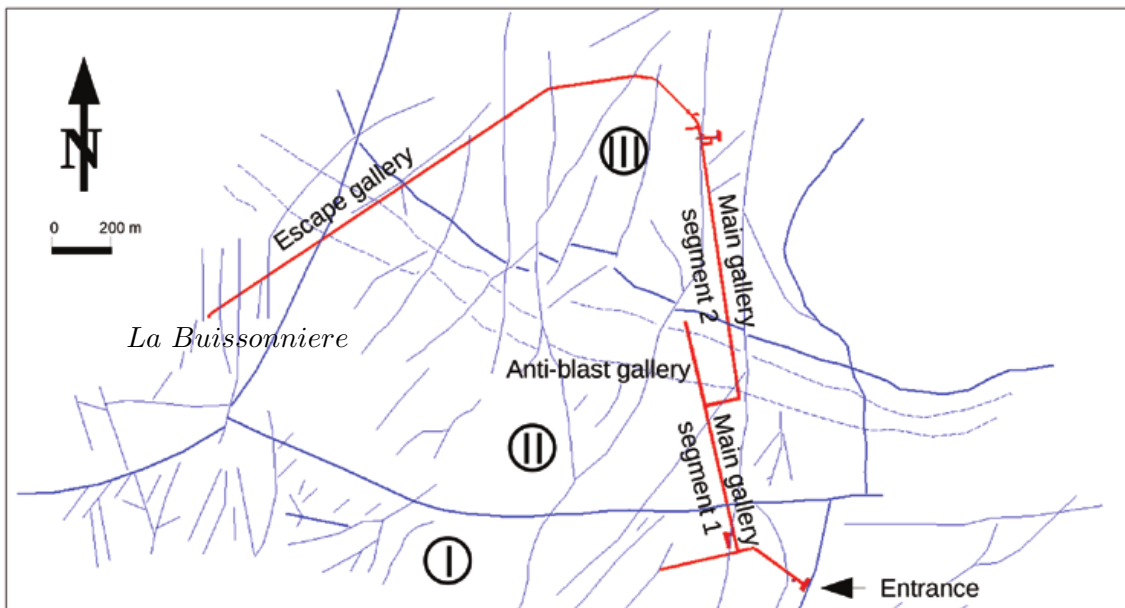


FIGURE 2.2 – Schéma structural de la zone étudiée, principalement basé sur l’interprétation de photographies aériennes (d’après Sénéchal *et al.* (2013)). Les lignes rouges indiquent la géométrie et la localisation du LSBB (modifié de Thiébaud (2003)). Les compartiments géologiques sont notés I, II et III. Les lignes bleues fines et larges désignent respectivement les failles mineures et majeures.

### 2.2.1.2 Le LSBB : un centre de recherches interdisciplinaires

Les conditions uniques du LSBB attirent des scientifiques d'horizons très divers. Bien que l'activité expérimentale se développe actuellement autour de trois thématiques principales : la sismologie, l'hydrogéologie et la physique des astroparticules, d'autres thématiques comme l'électronique et la métrologie sont présentes. C'est ainsi que le LSBB a pu nouer des collaborations avec 35 laboratoires implantés en France mais aussi à l'étranger avec, par exemple, l'Italie, le Portugal et le Canada. De plus amples informations sur le LSBB et les travaux en cours sont disponibles via le site web du LSBB [<http://lsbb.eu>].

### 2.2.1.3 Le site de la sortie de secours et son intérêt

Dans le cadre de notre étude, nous allons nous intéresser au site de la Buissonnière situé à l'extrémité ouest du laboratoire (Fig. 2.2). Il a été sélectionné pour les raisons suivantes :

- La profondeur de la galerie : dans ce secteur, le tunnel du LSBB aboutit sur le puits d'évacuation. Il passe donc suffisamment proche de la surface (de 30 à 50 m selon la topographie) pour que certaines mesures géophysiques puissent caractériser le sol entre galerie et surface. Ces mesures peuvent ensuite être mises en relation avec des données enregistrées en galerie.
- Les connaissances du site : Carrière (2014) a déjà investigué le site et étudié un point d'écoulement permanent D. Nous avons donc des informations sur le site qui pourront servir de base à notre étude et éventuellement être précisées.
- Des forages récents ont été creusés autour de la galerie. Ils permettent d'investiguer la subsurface, jusqu'à une profondeur de 52 mètres, en utilisant des données acquises en transmission et non plus seulement à partir de la surface.
- Un chemin d'accès carrossable permettant un transport facile du matériel géophysique et ayant notamment permis l'accès des machines de forage.

## 2.2.2 Contexte géologique

Les données géologiques de surface sont très importantes car elles permettent d'avoir une première idée de la nature et de l'âge des roches du sous-sol. D'après la carte géologique (Fig. 2.3) issue des travaux de Blanc *et al.* (1973), les roches encaissantes du LSBB sont datées du crétacé inférieur. De manière plus précise, les schémas du site (Fig. 2.1 et 2.2) indiquent que la galerie se situe à cheval sur différents étages géologiques à savoir la Barrémien supérieur et l'Aptien inférieur aussi appelé Bédoulien. L'ensemble de la série est appelé Urgonien en référence au faciès commun de ces roches. Ce faciès se décline en trois subdivisions (ou membres), selon la description de Leenhardt (1883), U1 : calcaires bioclastiques inférieurs, U2 : calcaires à Rudistes, U3 : calcaires bioclastiques supérieurs. Cependant, cette subdivision reste très générale et très variable. Cet aspect est souligné par Leonide *et al.* (2012) qui montrent que les conditions de formation des calcaires Urgoniens engendrent de fortes discontinuités latérales du faciès sur des échelles hectométriques. Ainsi, à l'échelle de la localité de Rustrel, la coupe lithostratigraphique synthétique (Fig. 2.4) dressée à partir de plusieurs affleurements sur le site de Rustrel Masse & Fenerci-Masse (2011) doit être employée avec précaution pour l'interprétation des données. Enfin, deux grandes directions de fracturation affectant le massif



## INVERSION DES CHAMPS D'ONDES ACQUIS EN TRANSMISSION DANS UN MILIEU CARBONATÉ

ont été relevées : l'une orientée N30° correspondant à des failles à composantes décrochantes et l'autre orientée N120° correspondant à des failles à composantes normales (Jeanne (2012)).

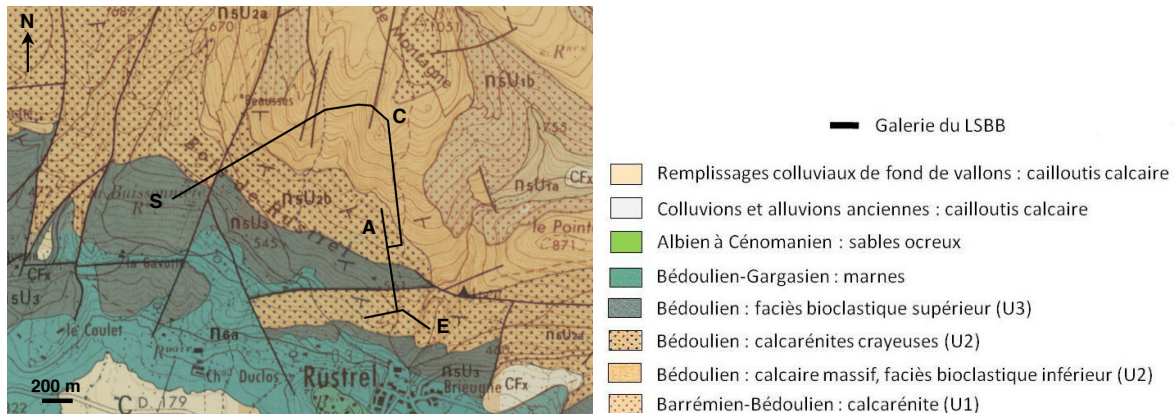


FIGURE 2.3 – Extrait de la carte géologique n°942 (BRGM, 1/50000, à partir du site <http://infoterre.brgm.fr>). Les lignes noires représentent les galeries du LSBB avec respectivement ; E : l'entrée, A : la galerie anti-souffle, C : la capsule et S : la sortie de secours

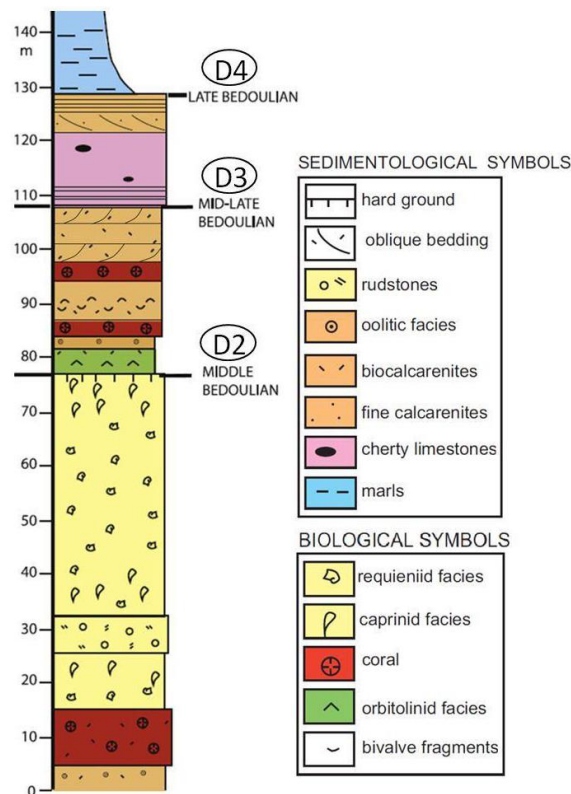


FIGURE 2.4 – Coupe lithostratigraphique synthétique de la localité de Rustrel (d'après Carrière (2014) et Masse & Fenerci-Masse (2011)). Les discontinuités, servant de repères dans la série Urgonienne, sont notées "D2", "D3", et "D4". "D2" constitue la limite entre les membres U2 et U3. Les mesures GPR ont été acquises dans un forage dont la géologie associée varie des côtes 65 à 105 mètres environ.

### 2.2.2.1 Contexte hydrogéologique

Les calcaires dans lesquels sont creusées les galeries du LSBB sont situés dans la partie Sud du bassin d'alimentation de la Fontaine de Vaucluse (FdV/FV)(Fig. 2.5). Ce vaste système karstique possède un bassin d'alimentation d'environ  $1115 \text{ km}^2$  (Puig (1987)) et englobe notamment le Plateau d'Albion, le Mont Ventoux et la Montagne de Lure. En comparant les relevés géologiques structuraux à l'échelle du LSBB, réalisés à la fois en surface Thiébaud (2003) et dans les galeries (BEG 1965), avec ceux réalisés à l'échelle du bassin d'alimentation (Bergerat, 1985), Garry (2007) arrive à la conclusion que le site du "LSBB semble effectivement représentatif du bassin d'alimentation de la FV". Ainsi, de part sa position dans une zone non saturée (ZNS), le LSBB est un observatoire unique pour étudier ce karst, qu'il recoupe arbitrairement, et permet de mieux comprendre le système karstique de la Fontaine de Vaucluse dans son ensemble.

Au sein du LSBB, bien que les observations directes de la roche encaissante soient impossibles, un suivi des écoulements d'eau a été réalisé grâce à des orifices percés dans les parois. Ces écoulements ont fait l'objet de plusieurs thèses de doctorat (Garry (2007), Blondel (2008), Perineau (2013)). Aujourd'hui, jusqu'à 45 points d'écoulement sont échantillonnés lors des périodes pluvieuses, mais seuls les points d'écoulement permanents notés A, B, C et D, le sont de façon hebdomadaire. Les suivis basés sur l'évolution des débits, des paramètres physico-chimiques et isotopiques ont permis de caractériser et de classer les différents types d'écoulements donnant des informations indirectes sur le massif.

Qu'elles soient géologiques ou hydrogéologiques, les études se basent essentiellement sur des observations ponctuelles : écoulements dans les galeries ou affleurements en surface. Dans un contexte hétérogène et discontinu comme le karst de Rustrel, l'extrapolation des données géologiques, en supposant une certaine homogénéité, peut s'avérer insuffisante tout comme les écoulements qui ne donnent qu'un comportement moyen de la zone non saturée (ZNS). Pour avoir davantage d'informations sur la structure géologique sous-jacente et son comportement hydrodynamique, il convient de faire appel aux méthodes géophysiques.

### 2.2.2.2 Investigations géophysiques antérieures

#### Etudes sismiques

Afin d'avoir une meilleure image de l'intérieur du massif, la géophysique a été mise à contribution à travers des études sismiques, électromagnétiques, électriques et gravimétriques. Les résultats obtenus à partir des méthodes sismiques l'ont été par Sénéchal *et al.* (2004) et Maufroy *et al.* (2014). Dans le premier cas, les auteurs ont profité de la proximité entre la galerie principale et la galerie anti-souffle pour étudier le compartiment de roche compris entre les deux. Dans le second, l'inversion des temps de premières arrivées a été utilisée pour caractériser la roche entre la galerie principale et la surface. Dans les deux cas, les vitesses moyennes des ondes sismiques P ont été estimées entre 3500 et 5500 m/s. En supposant une fréquence dominante de 100 Hz et une vitesse moyenne de 4500 m/s, la longueur d'onde est estimée à 45 mètres. Il en découle une résolution décimétrique (Sénéchal *et al.* (2013)) bien trop grande pour être sensible aux structures géologiques (sub)métriques (stratifications, structures karstiques, failles). Toutefois, Maufroy *et al.* (2014) montrent l'existence d'une discontinuité verticale des vitesses sismiques proche de la faille verticale N120.

INVERSION DES CHAMPS D'ONDES ACQUIS EN TRANSMISSION DANS UN MILIEU CARBONATÉ

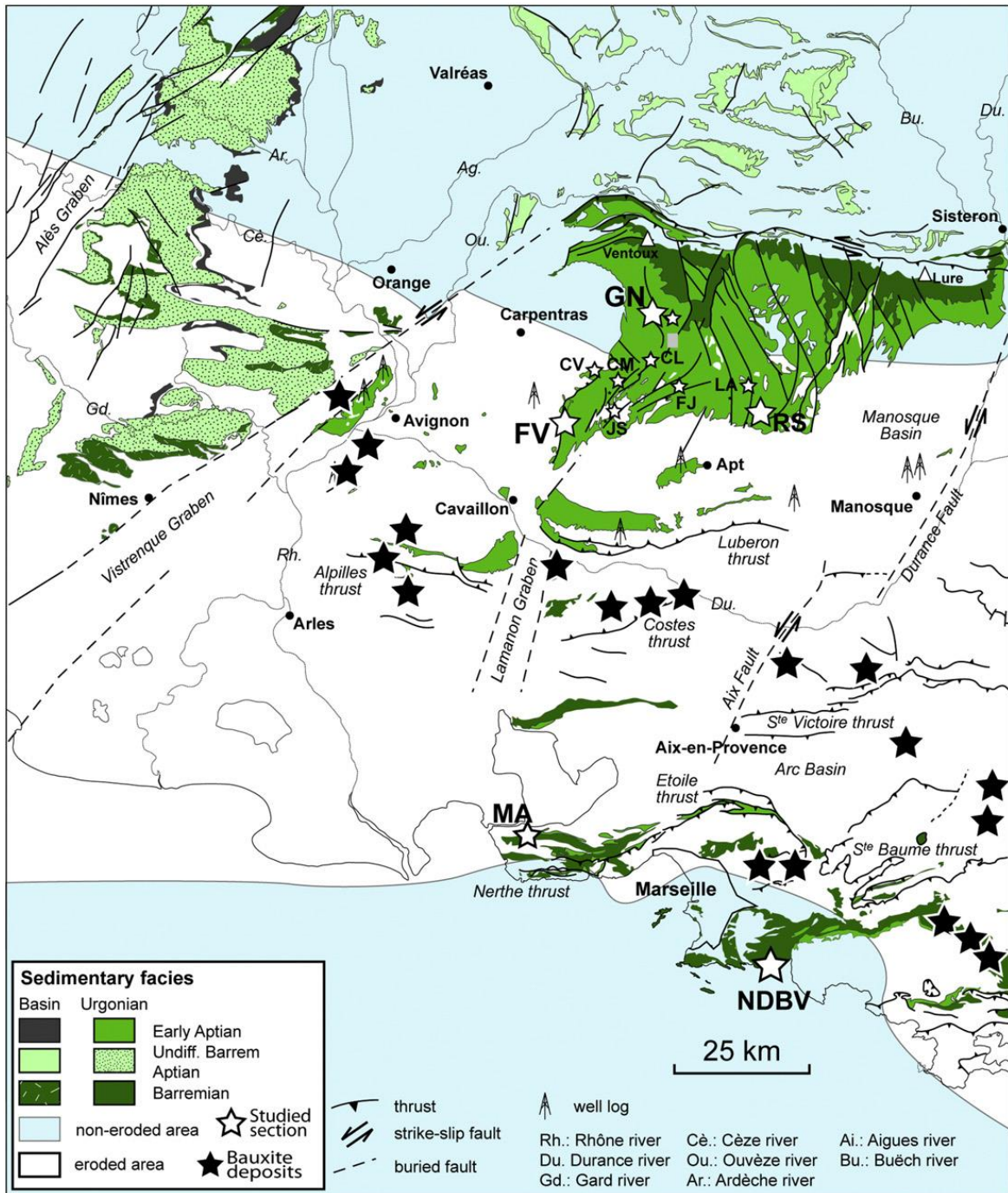


FIGURE 2.5 – Géologie du Sud-Est de la France et localisation du site du Rustrel (RS), d'après Léonide *et al.* (2014). Le massif carbonaté étudié se trouve à l'Est de Carpentras et appartient à la plateforme Urgonienne qui a été déposée dans le bassin Vocontien durant le Crétacé inférieur (Barrémien-Aptien, environ 131 à 113 millions d'années). La résurgence à Fontaine de Vaucluse est indiquée par FV.

## Etudes GPR

Pour imager les structures à plus petite échelle, les longueurs d'ondes utilisées doivent être plus faibles. Dans ce cadre, le GPR est un bon candidat avec des longueurs d'ondes métriques à submétriques, en se basant sur la vitesse des ondes électromagnétiques de 8 à 12 cm/ns et des fréquences généralement utilisées de 100 à 250 MHz. L'attrait pour cet outil géophysique est renforcé par les faibles conductivités du milieu donnant en principe accès à une pénétration importante des ondes.

C'est ainsi que le GPR a été utilisé dans sa configuration classique (à offset constant en réflexion) pour imager la totalité des galeries du LSBB (Sénéchal *et al.* (2013)). La vitesse moyenne a été estimée à environ 9 cm/ns (soit une permittivité relative de 11) en utilisant une analyse par semblance d'un CMP enregistré dans la galerie anti-souffle. Cette campagne a confirmé l'excellente pénétration de l'onde électromagnétique avec des temps de réflexion allant jusqu'à 400 ns, soit près de 18 mètres. Par ailleurs, les réflexions aux interfaces géologiques ont confirmé que le calcaire Bédoulien est constitué de strates calcaires métriques tandis que le calcaire Barrémien est plus massif.

Plusieurs tomographies des temps de premières arrivées GPR ont été réalisées entre plusieurs forages localisés dans la galerie anti-souffle par Van Vorst *et al.* (2010). Ces modèles de permittivité sont ensuite utilisés, avec un modèle de conductivité homogène (2mS/m) calculé à partir des données, comme modèles initiaux pour la FWI. La gamme de permittivité relative obtenue va de 8 à 16 et celle de conductivité de 1.5 à 5 mS/m environ (Van Vorst (2014)). Les auteurs mettent en évidence une correspondance entre les permittivités obtenues et la couleur des calcaires, elle-même directement reliée à la porosité du milieu.

Toujours dans la galerie anti-souffle, Lavoué (2014) inverse un jeu de données GPR acquis dans la configuration multi-offset de surface (configuration très peu répandue) sans que son profil ne recoupe celui de Van Vorst (2014). Compte tenu de la difficulté d'estimation d'un modèle initial dans ce milieu complexe avec cette configuration d'acquisition, l'auteur s'est concentré sur l'inversion monoparamètre de la permittivité en fixant, au début de l'inversion, la source et la conductivité du milieu à 4 mS/m. Les deux modèles initiaux obtenus, et testés dans l'étude, présentent des valeurs de permittivité relative comprises entre 9 et 15, tandis que les finaux associés sont comparables et donnent des valeurs de 7 à 19. Même si l'auteur précise que ces valeurs ne doivent pas être interprétées stricto sensu, mais plutôt être vues comme des tendances générales, elles donnent une idée de la gamme des valeurs possibles.

## Combinaison de méthodes géophysiques

Une étude multi-méthodes a été menée proche de la sortie de secours par Carrière (2014) et Carrière *et al.* (2016). Elle est orientée autour du point d'écoulement atypique D, qui soulève des questions sur l'origine de l'eau et ses mécanismes de régulation. Le GPR est utilisé en surface pour suivre l'évolution latérale de la stratification, les changements de propriété du sol et la présence de fractures. Bien que l'analyse par CMP donne une vitesse de 8.5 cm/ns, les auteurs font savoir qu'une vitesse de 8 cm/ns est plus appropriée pour avoir des conditions d'imagerie satisfaisantes. Une fois convertie en profondeur, les profils GPR indiquent des profondeurs d'investigation allant jusqu'à 10/12 mètres et mettent en évidence différents types de stratifications caractéristiques des affleurements du site.

Ces profils GPR sont associés à des profils ERT. Ces derniers soulignent des zones de résistivité modérée ( $900 \Omega.m$ ) cohérentes d'un profil ERT à l'autre dans un encaissant plus résistif ( $2000 \Omega.m$ ). Ces zones de résistivité modérée se situent au niveau de stratifications obliques, détectées par GPR, et pourraient correspondre à des zones plus poreuses, partiellement remplies d'eau, et à l'origine de l'alimentation du point d'écoulement D.

Des sondages RMP (Résonance Magnétique des Protons) et gravimétriques ont été réalisés pour suivre l'évolution du stock d'eau sur le site. La méthode RMP a été utilisée car elle permet de mesurer un signal géophysique qui est directement lié à la teneur en eau et à la taille des pores tandis que la seconde donne une idée de variation des stocks dans le temps par mesures différentielles.

Enfin, il est possible de citer les travaux de Beres (2013) sur l'analyse de l'anisotropie des calcaires, entre la galerie principale et la galerie anti-souffle, à partir notamment de la tomographie sismique et l'ERT.

### 2.3 Acquisition, pré-traitement des données et estimation préliminaire des paramètres

#### 2.3.1 Analyse de la carotte du forage, acquisition et présentation des données

En 2014, trois forages (F4, F5 et F6) sont réalisés sur le site de la Buissonnière proche de la sortie de secours du LSBB (Fig. 2.6). Parmi ces trois puits de 50 mètres de profondeur environ, le puits F6 a été carotté. Les puits F5 et F6 se situent de part et d'autre du tunnel cible situé à 34 mètres de profondeur. Etant donné que les données GPR ont été enregistrées entre 2 puits, dont celui carotté, nous avons accès à une information locale précise permettant des corrélations avec nos résultats.

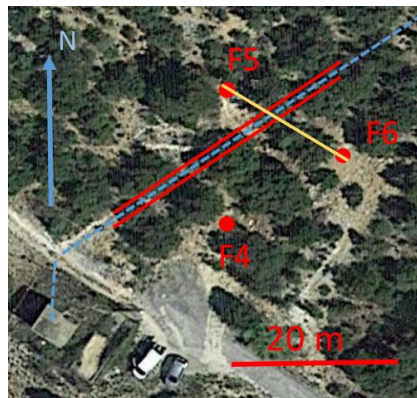


FIGURE 2.6 – Schéma d'implantation des puits et de la galerie (dont l'axe est représenté par les lignes discontinues bleues) sur le site de la Buissonnière.

Une analyse visuelle de la carotte a permis de réaliser une coupe lithostratigraphique à l'emplacement du forage (Fig. 2.7). La comparaison entre cette dernière coupe et celle proposée par Carrière (2014) montre de grandes similarités. En effet, sur la partie basse de la coupe, la même succession de formations carbonatées est retrouvée avec, dans l'ordre, des calcaires à Rudistes (sommet de l'U2), à orbitolines (base de l'U3) et à oolites. Viennent ensuite deux couches à faciès corallien où s'intercalent des calcarénites (Carrière (2014)). On notera cependant des variations puisque Bouaziz (2015) propose de diviser ces calcarénites en deux couches.

Cette distinction se retrouve également sur la partie haute de la coupe où l'ensemble formé de calcarénites proposé par Carrière (2014) devient une alternance de calcarénites et calcaires oolitiques (Bouaziz (2015)).

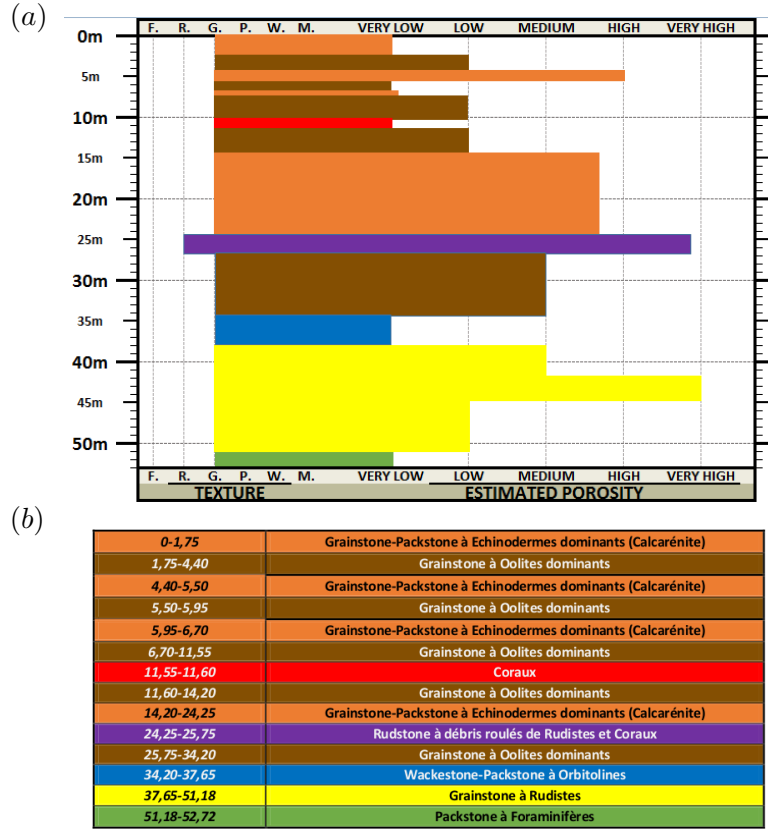


FIGURE 2.7 – Coupe lithostratigraphique (a) et description faciologique (b) de la carotte issue du puits F6 (d'après Bouaziz (2015)).

En plus de confirmer et affiner les observations précédentes, l'analyse de la carotte indique de manière précise la profondeur de chaque couche dans le puits F6. Le carottage a également permis de relever et analyser des échantillons de roche (plug) pour déterminer la porosité et la perméabilité des calcaires (tableau 2.1). Ces valeurs de porosité relativement élevées sont cohérentes avec les mesures réalisées par Guglielmi (2010) à Fontaine de Vaucluse et Léonide *et al.* (2014) sur le site de Rustrel même si ces dernières ne recoupent qu'une partie du profil.

### 2.3.2 Analyse des données 3D en temps et en fréquence

Les données GPR ont été enregistrées par Stéphane Garambois et Guy Sénéchal, dans le cadre du projet Interwells (collaboration Université de Pau et des Pays de l'Adour, d'Avignon, de Grenoble Alpes et Total), en décembre 2014 entre les puits F5 et F6, distants de 17,7 mètres (Fig. 2.6), dans une configuration entre puits. Pour ce faire, deux antennes de forage non-blindées de 100 MHz de la société MALÀ Geoscience ont été utilisées avec l'antenne émettrice dans le puits F5 et l'antenne réceptrice dans le puits F6. Compte tenu de la fréquence nominale des antennes (100 MHz dans l'air) et des valeurs de permittivité des calcaires du secteur, la longueur d'onde dominante attendue est voisine de 0.8 mètre. L'antenne émettrice a été déplacée

## INVERSION DES CHAMPS D'ONDES ACQUIS EN TRANSMISSION DANS UN MILIEU CARBONATÉ

| Faciès                         | Profondeur (m) | Porosité | Perméabilité | caractère de la porosité |
|--------------------------------|----------------|----------|--------------|--------------------------|
| Calcarénite grossière compacte | 1.0            | 0.101    |              | très variable            |
| Faciès à oolites               | 8.95           | 0.189    | 1.687        | variable                 |
| Calcarénite grossière poreuse  | 19.05          | 0.188    | 1.986        | très variable            |
| Rudstone                       | 24.8           | 0.151    | 11.393       | importante               |
| Faciès à oolites               | 29.2           | 0.052    |              | variable                 |
| Faciès à orbitolines           | 34.9           | 0.069    |              | très faible              |
| Faciès à Rudistes poreux       | 43.15          | 0.202    | 3.076        | très variable            |
| Faciès à Rudistes compact      | 51.15          | 0.07     |              | très variable            |

TABLE 2.1 – Mesures de la porosité et de la perméabilité sur plug provenant de différents faciès de la carotte avec caractérisation visuelle de la porosité (d’après Bouaziz (2015)).

tous les mètres de 6 à 49 mètres de profondeur (de 571 à 528 mètres en élévation ; Tableau 2.2) pendant que le récepteur était positionné tous les 25 cm pour enregistrer le champ d’ondes émis pour chaque position de la source de 1 à 51 mètres de profondeur (de 576 à 526 mètres en élévation). Les cinq premiers mètres au niveau de la source n’ont pas fait l’objet de mesure à cause du chemisage en métal des têtes de puits empêchant la propagation du signal vers le milieu. A la fin de l’acquisition, le jeu de données complet regroupe 8761 traces réparties sur 44 tirs contenant environ 200 traces chacun. Enfin, les relevés piézométriques, préalables à l’acquisition des données, indiquaient la présence d’eau vers 39/40 mètres de profondeur dans les puits F5 et F6.

|                |       |       |       |        |        |      |       |
|----------------|-------|-------|-------|--------|--------|------|-------|
| Profondeur (m) | 0     | 5     | 6     | 8.95   | 19.05  | 22.5 | 24.8  |
| Élévation (m)  | 577.5 | 572.5 | 571.5 | 568.55 | 558.45 | 555  | 552.7 |
| Profondeur (m) | 29.2  | 34.9  | 37.5  | 40     | 43.15  | 49.5 | 51.5  |
| Élévation (m)  | 548.3 | 542.6 | 540.0 | 537.5  | 534.35 | 528  | 526   |

TABLE 2.2 – Conversion de la profondeur en élévation. Ce tableau permet de faciliter la lecture en donnant pour les valeurs remarquables et/ou souvent mentionnées la correspondance entre les deux échelles utilisées par la suite. La correspondance est basée sur le premier couple de valeurs (0/577.5) mais une incertitude, de l’ordre de 0.5 mètre, persiste concernant la correspondance exacte.

### 2.3.2.1 Analyse préliminaire des données

Le prétraitement des données brutes a consisté à retirer la valeur moyenne du signal, à appliquer un filtre Butterworth passe bande zéro phase allant de 15 à 240 MHz essentiellement pour retirer les composantes basses fréquences et à recalculer le  $t_0$  des signaux. Pour avoir accès au  $t_0$ , l’acquisition a été préalablement calibrée dans l’air avec une acquisition multi-dépôts. A l’issue de ce prétraitement, l’amplitude des signaux associés aux deux sources situées en fond de puits se sont avérées faibles comparées aux autres signaux. Cette différence a été mise sur le compte d’une diminution de la puissance des batteries en fin d’acquisition et les deux jeux de données associés à ces sources retirés du jeu de données. Le jeu de données résultant est ainsi constitué de 42 shot-gather dont l’un d’eux est montré en Figure 2.8 (a). Une première analyse de ce radargramme montre un fort bruit proche de la surface à la cote 575 mètres. L’analyse fréquentielle de ce bruit (Fig. 2.8 (b)) indique qu’il est constitué d’une fréquence

fondamentale d'environ 15.6 MHz et de ses harmoniques réparties sur l'ensemble de la gamme de fréquence utile. Ce signal est interprété comme le captage d'ondes électromagnétiques dans l'air par les têtes de puits en métal et redirigées ensuite vers l'antenne réceptrice dans le forage. Etant donnée la gamme de fréquence de ce bruit et son amplitude, l'ensemble des traces situées au-dessus de la cote 373.1 mètres sont retirées des données réduisant d'autant l'information associée à la proche surface. Si l'on ne tient pas compte des traces nulles qui sont retirées du jeu de données lors de l'inversion, nous disposons finalement de 7776 traces.

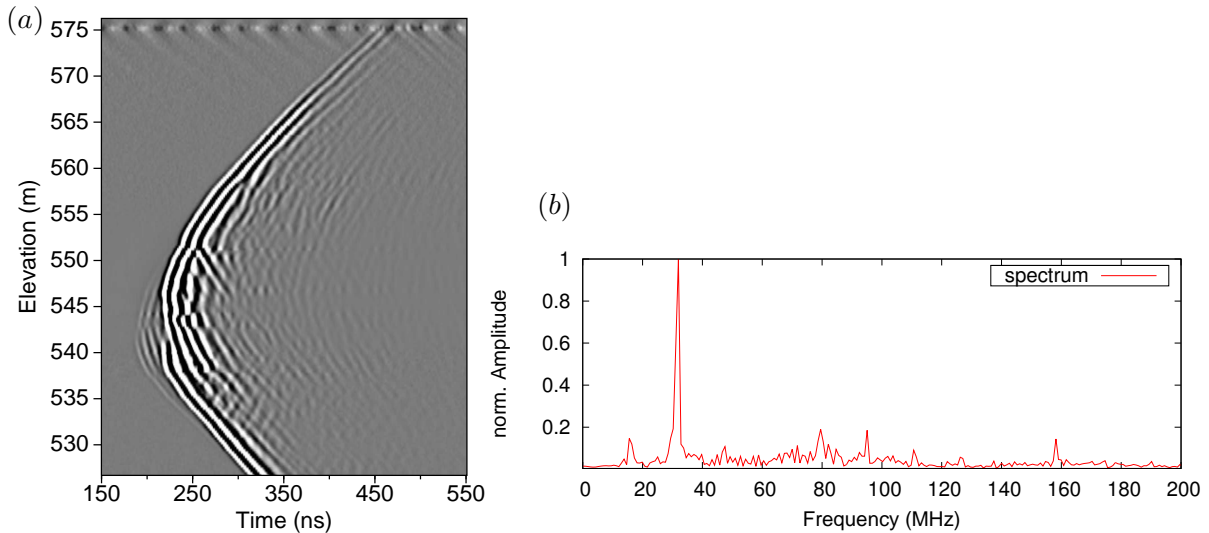


FIGURE 2.8 – (a) Radargramme enregistré pour une source située à l'élévation 544 mètres. Les amplitudes ont été saturées. Notons les traces fortement bruitées à 575 mètres. (b) Spectre d'amplitude associé aux traces bruitées mentionnées en (a).

### 2.3.2.2 Analyse qualitative des radargrammes

Sur l'ensemble du jeu de données, disponible en annexe A, quatre radargrammes sont sélectionnés et présentés en Figure 2.9. La saturation des radargrammes, dominés par la première arrivée, permet de mettre en évidence certaines discontinuités naturelles déjà relevées lors de l'analyse de la carotte et des mesures piézométriques. Il est ainsi possible de visualiser des réflexions/discontinuités dans les données aux cotes 570 et 553 mètres associables à deux couches. Le radargramme dont la source est à la cote 553, soit au niveau d'une discontinuité, montre une certaine complexité. Trois autres réflexions identifiables entre 535 et 530 mètres sont probablement liées aux variations de porosité du "grainstone à Rudistes".

Une autre discontinuité naturelle majeure se manifeste à la cote 537 mètres par l'intermédiaire d'une diminution des amplitudes des ondes (Fig. 2.9 (c) et (d)). Cette discontinuité est localisée à la cote où les puits étaient remplis d'eau, elle est donc interprétée comme le toit de la nappe aquifère. L'influence de la nappe se retrouve également sur le premier radargramme dont le contenu fréquentiel, dans son ensemble, est plus bas car la source est située sous l'eau. De manière plus générale, les radargrammes, dont la source est sous l'eau, présentent un contenu fréquentiel plus bas (Fig. 2.10), où l'on notera le décalage important des pics de fréquence.

Les données mettent également en avant une hyperbole de diffraction de faible amplitude dont l'apex se situe à la cote 543 mètres. Cette diffraction est due à la galerie présente entre les deux forages.



## INVERSION DES CHAMPS D'ONDES ACQUIS EN TRANSMISSION DANS UN MILIEU CARBONATÉ

Enfin, l'influence de la surface libre est peu présente dans le jeu de données. Seuls deux radargrammes (Fig. 2.16 (a) et annexe A) montrent des réflexions associées à la présence de cette interface. Dans la mesure où les amplitudes associées sont faibles et du fait de la topographie 3D du terrain de la surface libre, dont les effets potentiels sont non reproductibles en 2D, cette interface ne sera pas prise en compte par la suite. Le milieu géologique sera donc supposé infini dans toutes les directions.

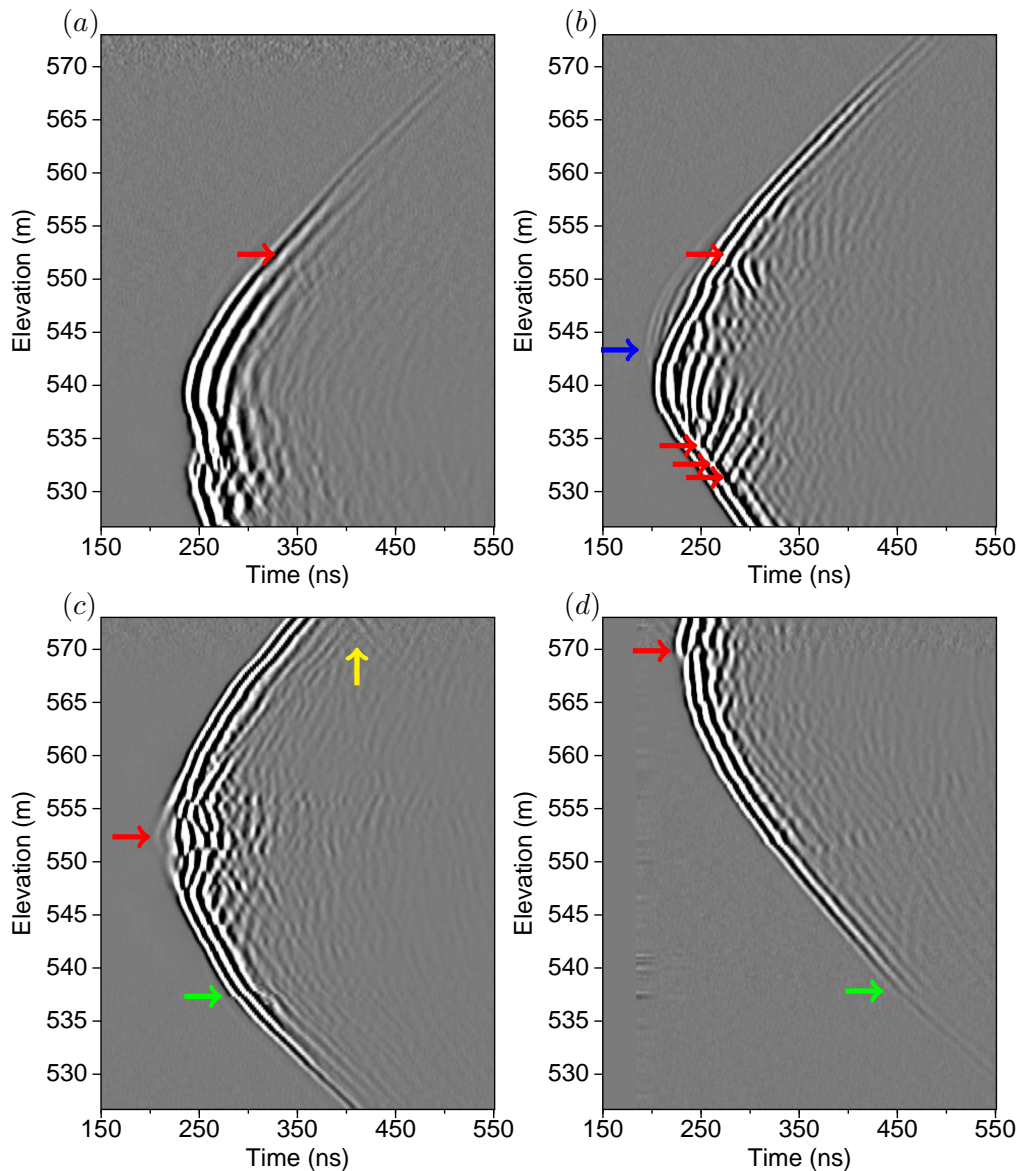


FIGURE 2.9 – Radargrammes enregistrés pour les sources situées aux élévations (a) 534, (b) 540, (c) 553 et (d) 569 mètres. Les données ont été saturées avec la même palette de couleur, ce qui permet de comparer les amplitudes entre les différents radargrammes. Les flèches font références aux différentes réflexions/discontinuités mentionnées dans le texte : en rouge la présence d'interfaces géologiques, en bleu la galerie, en jaune la surface libre et en vert la nappe aquifère.

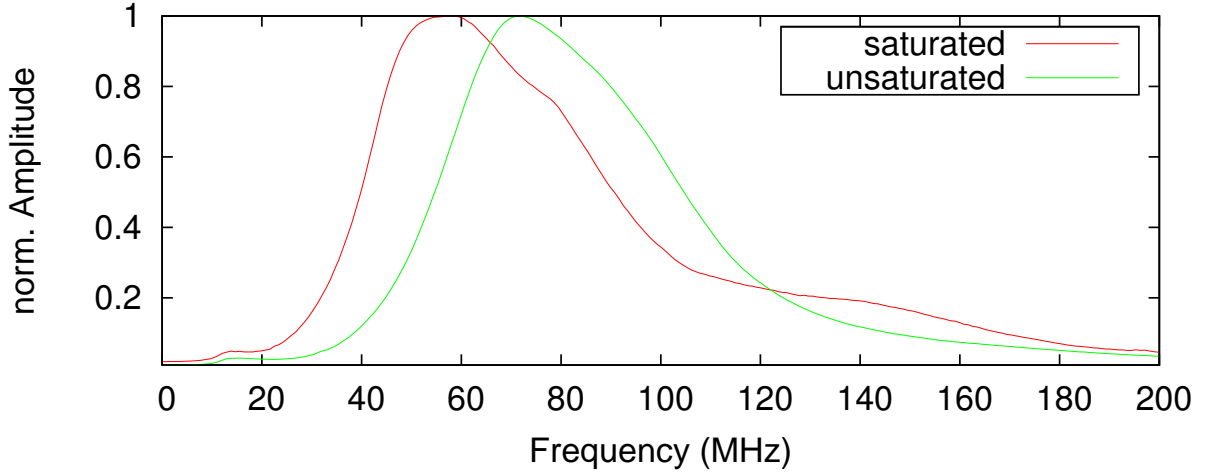


FIGURE 2.10 – Spectres d’amplitude moyens pour les sources situées sous (saturated) et hors (unsaturated) nappe. Les maximums d’amplitude sont enregistrés à 57.9 et 71.7 MHz.

### 2.3.3 Estimation quantitative préliminaire de la permittivité diélectrique et de la conductivité électrique

#### 2.3.3.1 Modèle de permittivité

Afin d’obtenir un premier modèle de permittivité, deux méthodes sont investiguées. La première, basée sur l’hypothèse d’un milieu stratifié et horizontal, consiste à sélectionner les propagations quasi-horizontales. Sur l’ensemble du jeu de données, ne sont conservées que les traces associées à des récepteurs dont la profondeur  $z_r$  est suffisamment proche de celle de la source associée  $z_s$ , via la formule,

$$|z_s - z_r| < \delta \quad (2.1)$$

avec  $\delta = 1m$ . Compte tenu de la distance entre chaque récepteur, ce critère permet de sélectionner 8 traces pour chaque source. L’ensemble des traces collectées (336 en tout) sont juxtaposées en fonction de la profondeur pour donner la Figure 2.11 (a). Les temps de première arrivée permettent ainsi d’avoir une première image des vitesses relatives des différentes couches présentes sur le site.

La deuxième méthode pour estimer la permittivité repose sur l’inversion des temps de première arrivée à l’aide de l’algorithme SIRT (Simultaneous Iterative Reconstruction Technique) implémenté dans le logiciel Sardine. Dans la mesure où la sortie de ce logiciel est la lenteur (inverse de la vitesse), cette dernière est convertie en permittivité avec la formule,

$$\varepsilon_r = (c \times s)^2 \quad (2.2)$$

où  $s$  est la lenteur (inverse de la vitesse) et  $c$  la vitesse de la lumière dans le vide. Le modèle de permittivité, obtenu après cinq itérations de l’algorithme SIRT puis conversion, est affiché en Figure 2.11 (b).

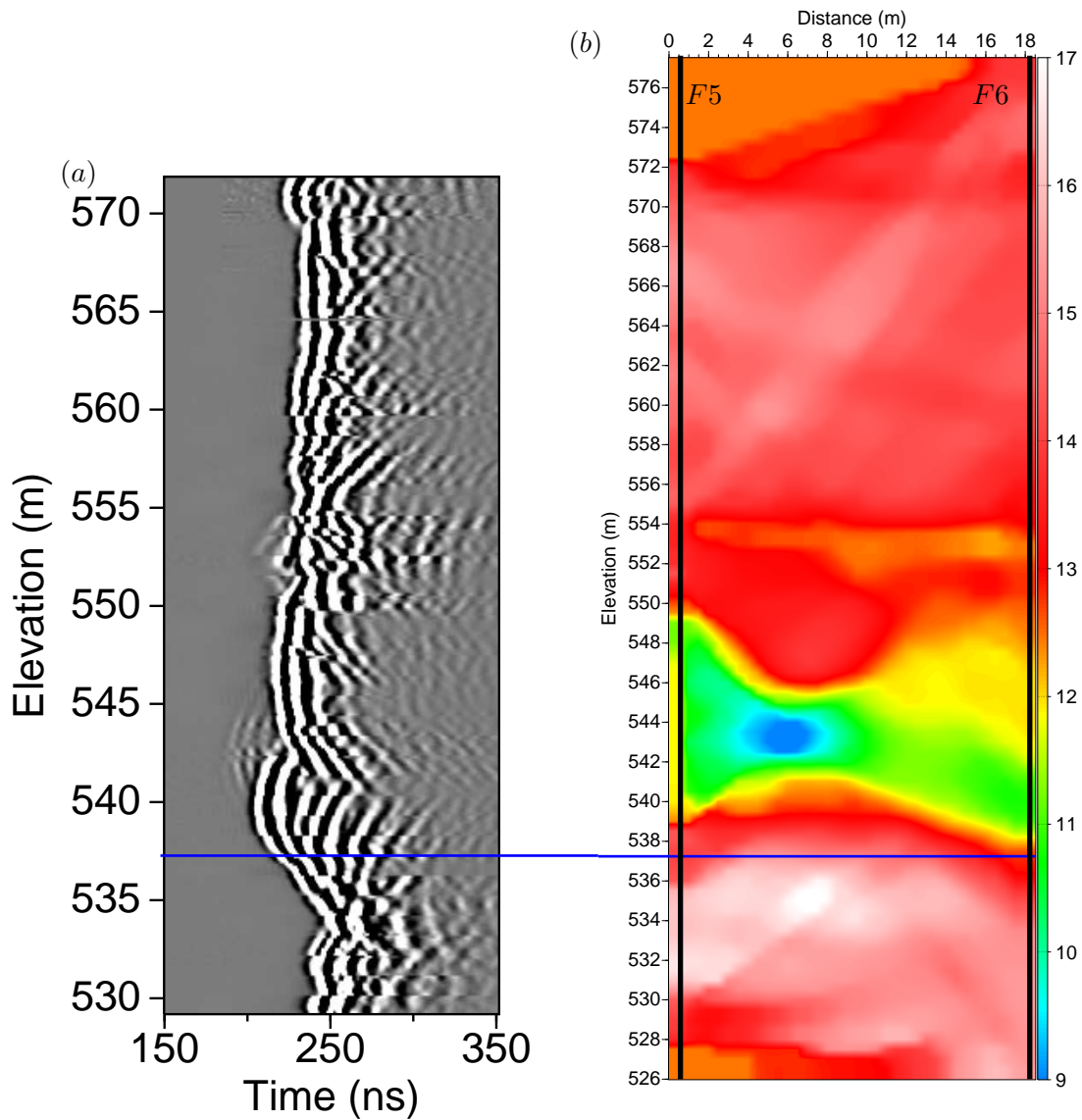


FIGURE 2.11 – (a) Profil de données GPR 1D selon la profondeur. (b) Modèle tomographique de permittivité relative obtenu par conversion des lenteurs. Notons que le centre de la galerie en (b) est davantage décalé vers le puits F5 que ne le laisse penser le plan d’implantation en Figure 2.6. La ligne bleue correspond à la profondeur de la nappe à 537 mètres. Les puits F5 et F6 sont représentés par les lignes verticales noires en (b).

### 2.3.3.2 Modèle de conductivité

Pour obtenir un modèle de conductivité, deux solutions ont été investiguées : utiliser des lois reliant la permittivité et la conductivité pour obtenir une image de conductivité à partir de celle de permittivité ou bien analyser la décroissance de l’amplitude des ondes, phénomène principalement dû à l’atténuation.

La première solution va consister à combiner les lois de Topp (Topp *et al.* (1980)) et d’Archie

(Archie (1942)). La loi de Topp est un modèle empirique permettant de relier la permittivité diélectrique relative  $\varepsilon_r$  d'un sol à sa teneur en eau volumique  $\theta$ . Topp *et al.* (1980) montrent à partir de plusieurs échantillons de sol que la permittivité dépend principalement de la teneur en eau du sol étudié et finalement très peu d'autres paramètres comme la densité ou les fréquences utilisées (entre 20 MHz et 1 GHz). C'est la compilation de l'ensemble de leurs mesures qui donne la loi,

$$\varepsilon_r = 3,03 + 9,3 \times \theta + 146 \times \theta^2 - 76,7 \times \theta^3. \quad (2.3)$$

Les auteurs proposent également la formule réciproque, utilisée dans le cas présent,

$$\theta = -5,3 \cdot 10^{-2} + 2,92 \cdot 10^{-2} \times \varepsilon_r - 5,5 \cdot 10^{-4} \times \varepsilon_r^2 + 4,3 \cdot 10^{-6} \times \varepsilon_r^3. \quad (2.4)$$

La teneur en eau volumique ainsi obtenue peut être introduite dans une seconde relation empirique, celle d'Archie, s'écrivant sous la forme

$$\sigma = S_w^n \phi^m \sigma_w \quad (2.5)$$

où  $\sigma$  et  $\sigma_w$  sont les conductivités de la roche et de l'eau,  $S_w = \frac{\theta}{\phi}$  la saturation,  $\phi$  la porosité,  $m$  le facteur de cimentation et  $n$  l'exposant de saturation. Pour appliquer cette formule à notre site, il convient donc de définir les différentes grandeurs. Les exposants sont choisis tels que  $m = n = 2$  (de manière classique) tandis que la valeur de la conductivité de l'eau est supposée identique sur tout le profil et extraite des travaux de Garry (2007). Dans ces derniers, les prélèvements d'eau effectués au point d'écoulement D (à priori compris dans le profil) donnent une valeur moyenne de  $422 \cdot 10^{-4} S/m$ . L'utilisation de cette unique valeur sur l'ensemble du profil pose la question de sa représentativité alors que l'eau se charge en ions au fur et à mesure de son infiltration dans le sol. Cependant, faute d'information supplémentaire sur la distribution 2D de cette quantité, cette unique valeur est utilisée. Le profil de conductivité finalement obtenu est en Figure 2.12(a).

La seconde méthode est basée sur l'analyse de l'atténuation des ondes électromagnétiques au cours de leur propagation. En supposant que l'amplitude  $A$  des ondes électromagnétiques dans le milieu est régie par la formule :

$$A = \frac{A_0}{r} e^{-\alpha r} \quad (2.6)$$

qui s'écrit également,

$$\ln(Ar) = \ln(A_0) - \alpha r. \quad (2.7)$$

où les quantités  $A_0$ ,  $r$  et  $\alpha$  désignent respectivement l'amplitude initiale de l'onde, la distance source-récepteur et l'atténuation du milieu. Cette formulation suppose un trajet en ligne droite entre source et récepteur, tous deux ponctuels et de réponse isotrope. Bien que la taille réelle des antennes ne puisse pas être prise en compte, l'influence de la radiation est réduite en pointant, autant que possible, des ondes quasi-horizontales (idéalement par couche). Des exemples des pointés de l'amplitude maximum sont présentés en Figure 2.13 où les pentes donnent l'atténuation à différentes profondeurs. Chaque valeur d'atténuation  $\alpha$  est ensuite convertie en

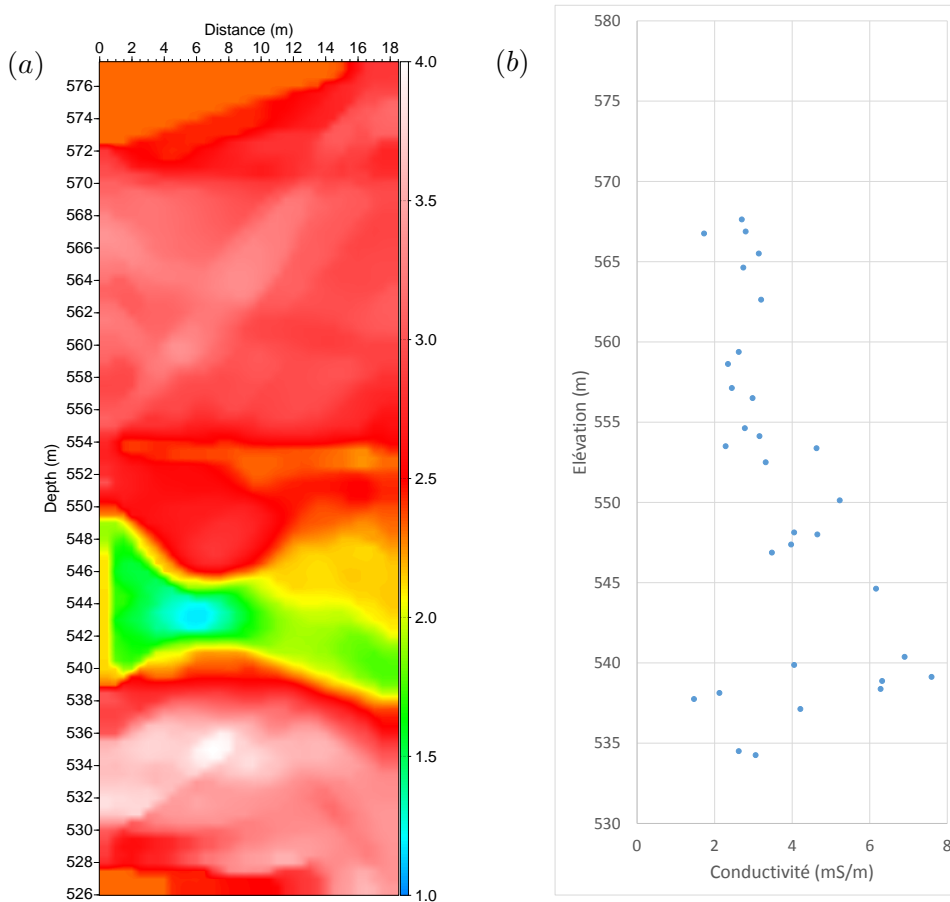


FIGURE 2.12 – (a) Modèle tomographique de conductivité (en mS/m) obtenu par conversion du modèle de permittivité (Fig. 2.11 via les lois de Topp et Archie). (b) Profil 1D de conductivité obtenu par analyse de la décroissance d’amplitude des ondes. Par la suite, la conductivité est systématiquement représentée en mS/m.

conductivité  $\sigma$  via la formule 2.8 puis remplacée en Figure 2.12 (b) à une élévation définie comme la moyenne entre celle de la source et celle du premier récepteur pointé, associé à ladite source.

$$\sigma = 2\alpha \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \quad (2.8)$$

avec  $\varepsilon$  et  $\mu$  supposés homogènes. Les valeurs relatives de ces deux paramètres ont été choisies égales à 14, comme valeur moyenne de la partie supérieure du milieu issu de la tomographie, et 1, par hypothèse initiale.

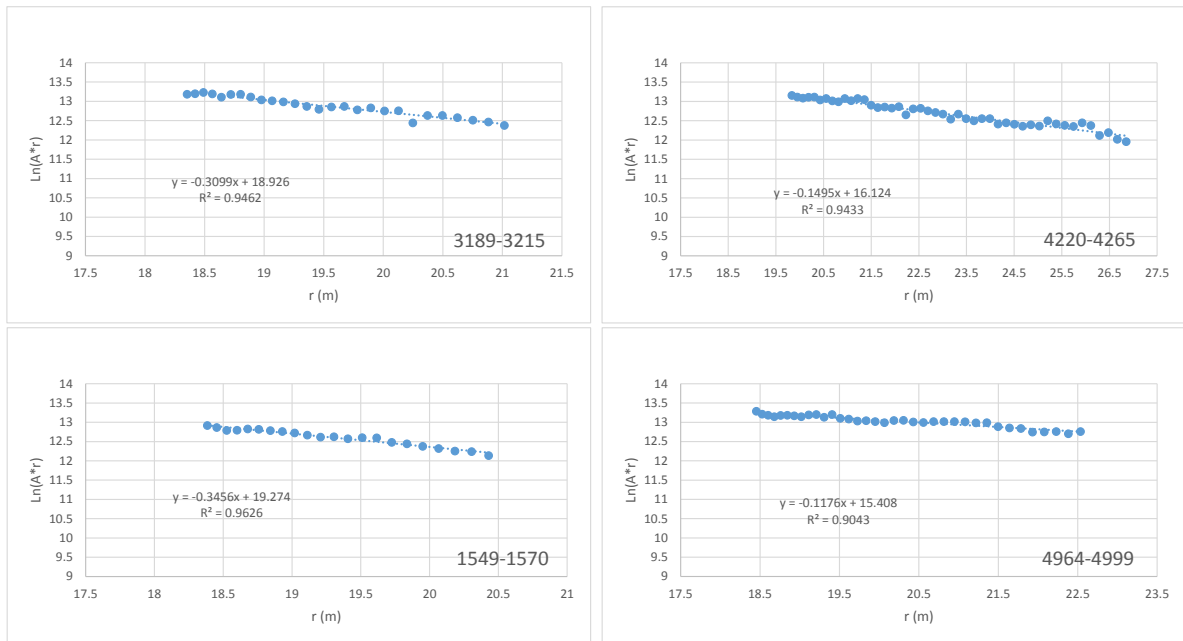


FIGURE 2.13 – Exemples de régressions linéaires utilisées pour estimer l’atténuation. Les nombres en bas à droite des régressions font référence à la numérotation des traces.

### 2.3.3.3 Conclusion

Le modèle de permittivité issu de la tomographie est cohérent avec l’analyse 1D des données et les informations de la carotte. Par exemple, la nappe apparaît à travers des permittivités plus élevées en partie basse, notamment en dessous de la cote 537. On notera cependant que le modèle paraît assez lisse au niveau des couches signalées comme créant de fortes réflexions/discontinuités dans les données. C’est aussi le cas concernant la galerie qui apparaît très étalée en comparaison de ses dimensions réelles (environ 2 mètres de diamètre).

Concernant la conductivité, la cohérence entre les modèles (Fig. 2.12) est plus mitigée. La partie haute est très satisfaisante avec une valeur moyenne voisine de 3 mS/m dans les deux cas. À l’opposé, la partie entre les cotes 535 et 555 m montre des tendances opposées. Pour expliquer de telles différences, nous pouvons invoquer deux raisons. La première est liée à la présence de la galerie qui diffracte une partie de l’énergie électromagnétique dans le milieu conduisant à une conductivité surestimée. La deuxième trouve son origine dans la complexité du milieu stratifié qui rend le processus de picking des amplitudes par couche difficile comme illustré par le radargramme en Figure 2.9 (c). Ainsi, pour l’inversion, nous prendrons comme modèle initial de conductivité celui obtenu à partir du modèle de permittivité, qui est plus robuste.

Cette première évaluation des modèles initiaux met en avant deux parties distinctes au sein du modèle. Une partie haute relativement homogène et une partie basse plus complexe avec la galerie et la discontinuité introduite par la nappe. Ainsi, nous nous concentrerons d’abord sur l’inversion des données acquises dans la partie haute avant de revenir ultérieurement sur l’ensemble du profil.

## 2.3.4 Conversion 3D/2D

### 2.3.4.1 La formulation

Dans la mesure où les outils de modélisation et d'inversion, présentés dans la première partie de cette thèse, requièrent des données 2D, il faut convertir les données acquises à Rustrel. Une étude comparant deux techniques de conversion 3D/2D est proposée par Van Vorst *et al.* (2014). Dans cette étude, les inversions basées sur un même jeu de données, mais converti avec les deux techniques, amènent à des résultats similaires, proches du modèle de référence validant les méthodes. Les auteurs mettent également en évidence que l'absence de conversion des données mène à un modèle satisfaisant pour la permittivité mais pas pour la conductivité dont les valeurs sont surestimées. Dans la mesure où la conductivité est souhaitée dans notre étude, nous convertissons nos données avec la formule de Bleistein (1986) (formule (2.9)) qui est évidemment l'une des deux validées par Van Vorst *et al.* (2014). Par ailleurs, cette conversion est déjà utilisée dans le contexte de la FWI appliquée à des données GPR par Klotzsche *et al.* (2010b) et Lavoué (2014).

$$d_{obs}^{2D}(t) = d_{obs}^{3D}(t)e^{i\pi/4} \sqrt{\frac{\tau}{f\varepsilon^{mean}\mu}} \quad (2.9)$$

où  $d_{obs}^{2D}(t)$  et  $d_{obs}^{3D}(t)$  désignent les données au format 2D et 3D,  $\tau$  le temps de première arrivée,  $\varepsilon^{mean}$  la valeur de permittivité moyenne sur le milieu (ici  $\varepsilon_r = 14$  sur la partie haute). Comme nous pouvons nous en rendre compte, cette formule est basée sur l'hypothèse forte d'un milieu homogène ("mean") ce qui explique également pourquoi nous étudions d'abord la partie haute du modèle qui vérifie globalement cette hypothèse. On notera tout de même que l'utilisation du temps de parcours  $\tau$  permet de prendre en compte en partie des parcours légèrement courbés.

### 2.3.4.2 Analyse des données converties

Après conversion 3D/2D du jeu de données complet, les effets de cette transformation peuvent être visualisés sur une trace extraite du jeu de données (Fig. 2.14). Cette figure montre les amplitudes 2D de cette trace convertie en utilisant plusieurs permittivités relatives moyennes. Les écarts d'amplitude deviennent non négligeables lorsque la valeur de permittivité utilisée s'éloigne de la valeur moyenne choisie (14). La comparaison globale 3D/2D met en évidence une augmentation d'amplitude venant rétablir la dispersion géométrique ainsi qu'un léger changement de contenu fréquentiel (Fig. 2.15) pour l'ensemble des traces retenues (7776). Le pic fréquentiel des données 3D à 71 MHz diminue légèrement pour passer à 69 MHz en 2D. Au-delà de ce décalage spectral, cette analyse fréquentielle est importante pour avoir une idée des fréquences présentes dans les données et donc potentiellement sélectionnées pour les inversions. En plus de ce graphique, où toutes les contributions sont sommées, il est intéressant d'afficher des radargrammes dans différentes gammes de fréquences (Fig. 2.16). Il est alors possible de mettre en évidence une sensibilité différente du champ d'ondes au milieu, en fonction de son contenu fréquentiel. Ainsi, pour les fréquences inférieures à 50 MHz, les hétérogénéités/discontinuités du milieu n'influencent pas ou très peu la propagation d'ondes. Avec l'augmentation du contenu fréquentiel, l'influence des hétérogénéités se fait de plus en plus forte jusqu'à la dernière bande de fréquence pour laquelle la discontinuité à 553 mètres stoppe

quasiment la propagation des ondes vers le bas du profil. L'observation des données filtrées permet également de se faire une idée sur le rapport signal sur bruit. Par exemple, il paraît peu avantageux de commencer l'inversion dans la bande 31/39 MHz sous peine d'interpréter du bruit.

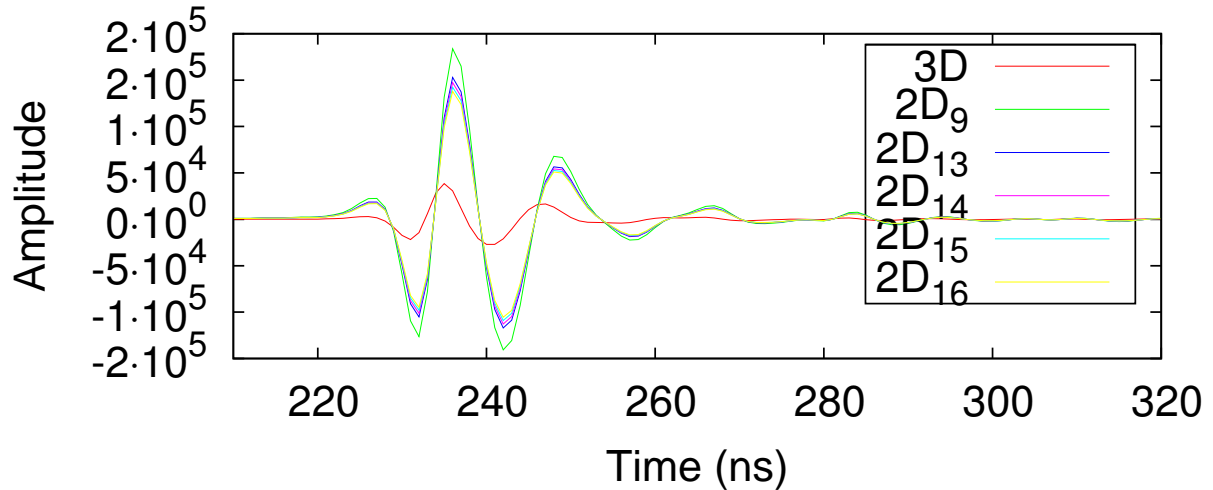


FIGURE 2.14 – Exemple de conversion d'une trace de la 3D à la 2D pour différentes valeurs de permittivité relative moyenne. La permittivité relative utilisée pour chaque trace est donnée en indice. Notons les variations d'amplitudes en fonction de la permittivité.

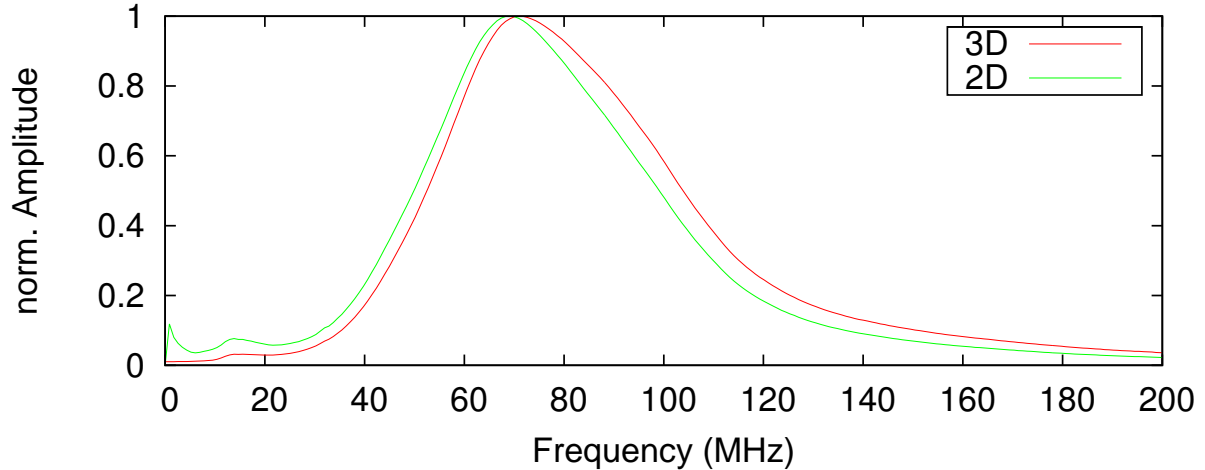


FIGURE 2.15 – Spectres d'amplitude moyens de l'ensemble du jeu de données avant (3D) et après (2D) conversion. Notons le décalage du pic d'amplitude qui passe de 70.8 MHz en 3D à 69.1 MHz en 2D.



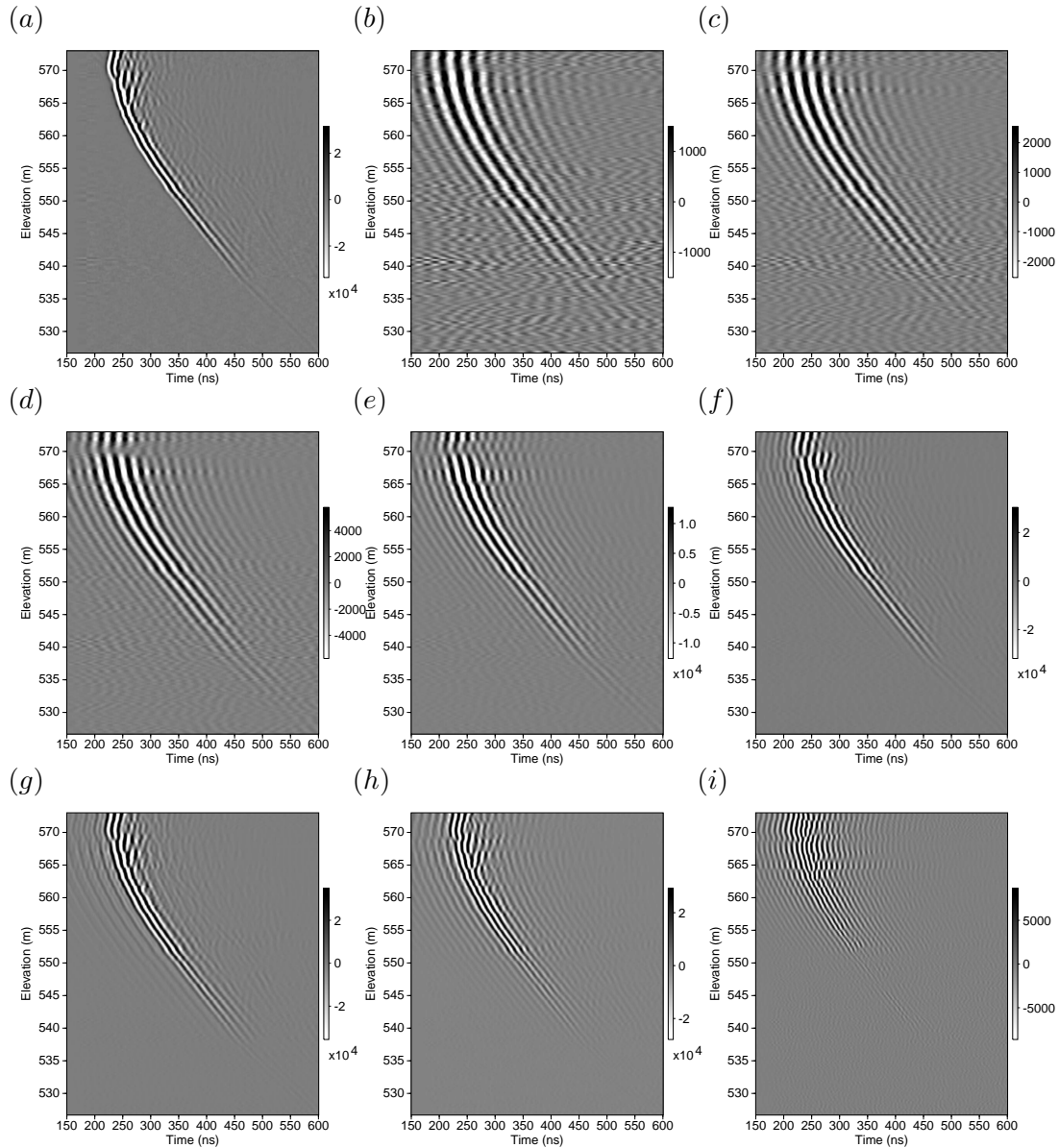


FIGURE 2.16 – Radargrammes enregistrés pour la source située à 570 mètres et filtrés dans différentes gammes de fréquences via un filtre de Butterworth passe-bande : (a) sans filtre, (b) de 31 à 39 MHz, (c) de 35 à 43 MHz, (d) de 39 à 51 MHz, (e) de 43 à 60 MHz, (f) de 49 à 80 MHz, (g) de 59 à 103 MHz, (h) de 75 à 125 MHz et (i) de 105 à 170 MHz.

## 2.4 Inversion des données réelles de Rustrel en parallèle de données synthétiques

### 2.4.1 Introduction

Un des éléments-clés de l'inversion des formes d'ondes GPR appliquée aux données réelles est l'obtention d'une ondelette source réaliste. En général, bien que l'on ait accès à cette ondelette à l'aide d'enregistrements dans l'air, l'interaction complexe entre le transmetteur et son milieu environnant ne permet pas de véritablement bien la connaître. Ainsi, elle doit être estimée numériquement lors du traitement des données et/ou au cours de l'inversion. Une première approche en ce sens consiste à considérer la source comme une inconnue lors de la minimisation du problème inverse, au même titre que la permittivité et la conductivité. Cette idée, introduite par Tarantola (1984), a été récemment utilisée par Van Vorst (2014) pour l'inversion de données GPR. Cependant, le faible nombre de fréquences considérées dans son travail ne permet pas de visualiser l'ondelette source dans le domaine temporel, que ce soit avant ou après l'inversion, et donc de bénéficier d'une analyse critique sur cette technique. Une deuxième approche, proposée par Ernst *et al.* (2007a), permet d'obtenir la source à l'aide d'une technique de déconvolution itérative. Une comparaison entre des deux approches (Belina *et al.* (2012a)) montre que la deuxième approche est la plus fiable en matière de reconstruction de la source et des paramètres du milieu. Notons cependant que Belina *et al.* (2012a) considèrent trois pas de descente (step-length) lors de l'inversion conjointe de la source et des paramètres du milieu (permittivité, conductivité). Par ailleurs, cette deuxième technique est utilisée avec succès par Klotzsche *et al.* (2013) et Klotzsche *et al.* (2014) pour le traitement de données réelles. L'ensemble de ces résultats nous amène à retenir l'inversion en deux phases distinctes et non une inversion conjointe des trois inconnues en même temps.

Dans la mesure où le workflow a influencé notre choix global de l'inversion, il est proposé en Figure 2.17. Premièrement (PART A), les traces associées aux rais quasi-horizontaux (dans la limite d'un certain angle) sont alignées et normalisées. Les traces sélectionnées sont ensuite inter-corrélées afin d'éliminer celles qui ne sont pas cohérentes et ainsi obtenir une source où seule la forme (et donc la phase) de l'ondelette source est considérée. En parallèle, des tomographies en temps et en amplitude sont réalisées afin de disposer de modèles initiaux de permittivité et de conductivité. Deuxièmement (PART B), la phase et l'amplitude de l'onde sont corrigées à l'aide d'une déconvolution des données observées par les fonctions de Green calculées dans le milieu initial. Enfin (PART C), l'ondelette source obtenue est utilisée pour la FWI où seuls les paramètres du milieu sont impliqués dans le processus de minimisation. En cas de besoin, après plusieurs itérations de FWI, l'ondelette source peut être réestimée ("loop 2") une ou plusieurs fois en vue de nouvelles inversions. L'inversion s'arrête dès que le critère de convergence, basé sur la fonction coût, est atteint.

Ce workflow ne peut pas être appliqué en l'état aux données acquises à Rustrel car il doit être adapté à l'inversion dans le domaine fréquentiel. Il est donc crucial de comprendre l'influence des paramètres recherchés (source, permittivité et conductivité) et de la stratégie d'inversion (stratégie fréquentielle, nombre d'itérations). Pour ce faire, quatre parties sont abordées dans la suite. Dans la mesure où la première étape du workflow (Fig. 2.17) est l'estimation d'une source, nous commencerons par cette étape, qui sera aussi l'occasion d'introduire le modèle synthétique utilisé tout au long de ce chapitre. La deuxième partie consiste à réaliser l'inversion monoparamètre de la permittivité à source fixée. Cette étape est l'occasion de tester, en plus de

INVERSION DES CHAMPS D'ONDES ACQUIS EN TRANSMISSION DANS UN MILIEU CARBONATÉ

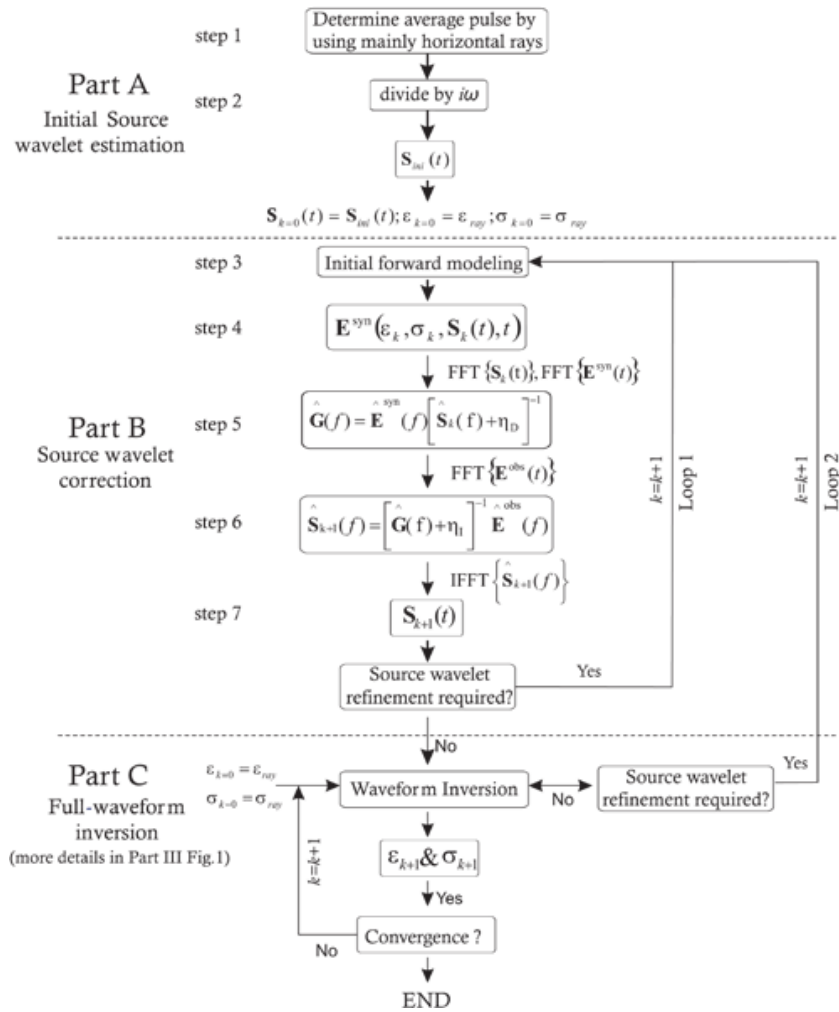


FIGURE 2.17 – Workflow utilisé par Klotzsche *et al.* (2010b) pour réaliser la FWI dans le domaine temporel avec (ré)estimation de la source (étendu d’après Ernst *et al.* (2007a))

la source, la stratégie fréquentielle et le nombre d’itérations dans le but de préparer au mieux l’introduction de la conductivité comme degré de liberté supplémentaire dans l’inversion. Cette introduction, au cours de la troisième partie, vise tout d’abord à évaluer l’intérêt de réaliser une inversion multiparamètres plutôt que monoparamètre mais aussi à trouver la meilleure façon de le faire (inversion simultanée ou séquentielle). Enfin, lors de la dernière partie, la source sera mise à jour régulièrement lors de l’inversion pour tenir compte de l’évolution du milieu sur son estimation. A la fin, nous aurons donc un workflow comparable à celui présenté précédemment ainsi qu’une évaluation du potentiel de celui-ci via les résultats obtenus sur le modèle synthétique.

## 2.4.2 Préliminaires

### 2.4.2.1 Définition du modèle synthétique

Pour tester l'efficacité et les limites de notre workflow, les données de Rustrel sont inversées en parallèle d'un jeu de données synthétiques. Ces dernières sont modélisées pour un modèle connu représentatif du modèle réel. Le modèle de permittivité de référence (Fig. 2.18 (a)) a été conçu à partir des observations des données de forage et des valeurs de permittivité fournies par la tomographie (Fig. 2.11 (b)). Notons que ce modèle, stratifié verticalement, présente une partie supérieure relativement homogène. À l'inverse, la partie basse présente davantage de contrastes avec en particulier deux couches plus rapides (permittivité plus faible), à l'image de celles identifiées dans les données réelles, ainsi que des permittivités plus élevées représentatives de la présence d'eau. La galerie a été supprimée du modèle afin de se concentrer sur les structures non-anthropiques dans un premier temps. Le modèle de conductivité vraie (ou de référence), présenté en Figure 2.18 (c) est obtenu par conversion du modèle de permittivité vraie, à l'aide des lois de Topp et d'Archie (avec  $\sigma_w = 422 \cdot 10^{-4} S/m$ ), pour simuler au mieux l'option retenue pour les données réelles. Le modèle de permittivité synthétique initial (Fig. 2.18 (b)) est obtenu par inversion des temps de première arrivée à partir des données synthétiques. La conductivité initiale est obtenue par conversion du modèle de permittivité initial en suivant les lois de Topp et d'Archie (avec  $\sigma_w = 422 \cdot 10^{-4} S/m$ ) comme dans le cas réel. Le modèle est discrétisé selon une grille de 1031 par 371 points avec une distance entre points de 0.05 mètre, à l'image de la discrétisation retenue dans le cas réel. Le modèle est donc plus large que la distance réelle entre les puits (17.71 mètre) pour éviter d'avoir les sources et récepteurs sur les bords du domaine. L'acquisition utilisée reprend également le schéma des données réelles avec 42 sources espacées de 1 mètre dans le forage gauche tandis que 187 récepteurs espacés de 25 cm enregistrent les données dans le forage droit. Les positions des sources et des récepteurs tombent sur les points de grille, ce qui n'est pas le cas lors des investigations sur données réelles où l'interpolation de Hicks (Hicks (2002)) a dû être utilisée. Enfin, l'ondelette source est un Ricker centré sur 100 MHz.

En plus d'évaluer l'efficacité de notre démarche, l'inversion des deux types de données (réelles et synthétiques) en parallèle va permettre de contrôler les résultats issus des données réelles et le cas échéant d'orienter nos choix en analysant les résultats issus du cas synthétique. Les moyens de comparaison, entre types de données, consistent en la visualisation de caractéristiques communes entre les modèles inversés et l'évolution de la fonction coût (ou misfit) dans le domaine temporel. Bien que l'inversion des données se fasse exclusivement dans le domaine fréquentiel, une fonction coût, calculée dans le domaine temporel, à posteriori des inversions, sert de moyen de comparaison. Pour obtenir la fonction coût en domaine temporel à une étape particulière de l'inversion, il est nécessaire de calculer les fonctions de Green de chaque fréquence dans le modèle souhaité avant de les convoluer à la source utilisée. Les radargrammes ainsi obtenus peuvent être comparés aux données temporelles réelles/observées via la norme  $L_2$  pour obtenir la fonction coût (misfit). Ce critère présente l'avantage de donner des tendances globales facilitant les comparaisons. Il permet également de savoir dans quelle mesure les modèles inversés expliquent les données temporelles observées.

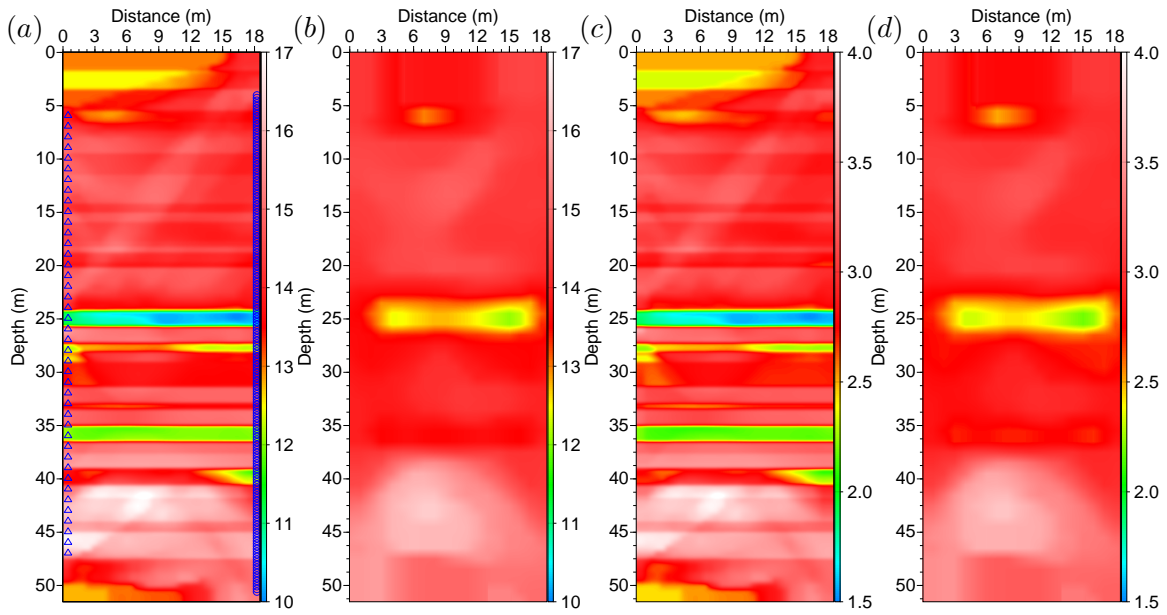


FIGURE 2.18 – Imagerie synthétique : modèles de référence de permittivité relative (a) et de conductivité (c) (en  $mS/m$ ). Modèles initiaux de permittivité relative (b) et de conductivité (d) (en  $mS/m$ ). La Figure (a) montre à gauche les positions des sources et à droite celles des récepteurs.

#### 2.4.2.2 Estimation de la source

##### Formulation

Lors de l'inversion, la signature de la source est obtenue par résolution d'un problème d'inversion linéaire Pratt (1999) grâce à la relation de linéarité entre le champ d'ondes et le terme source du système  $Au = s$ . Ainsi, dans le domaine fréquentiel, la signature de la source, décrite ici pour une fréquence  $\omega$ , une source  $s$  et un récepteur  $r$ , est classiquement calculée via la relation

$$S_{\omega,s,r} = \frac{g_{\omega,s,r}^\dagger d_{obs,\omega,s,r}^{2D}}{g_{\omega,s,r}^\dagger g_{\omega,s,r}}, \quad (2.10)$$

où  $S_{\omega,s,r}$  est la valeur complexe de l'ondelette source pour le triplé  $(\omega,s,r)$  pendant que  $g_{\omega,s,r}$  et  $d_{\omega,s,r}^{2D}$  désignent respectivement la fonction de Green et la donnée complexe enregistrée pour le triplé  $(\omega,s,r)$ . Cette formule autorise l'obtention d'une source (phase et amplitude) en une seule étape et offre une grande flexibilité dans le choix des sommations sur les sources et les récepteurs. En règle générale, cette formule n'est utilisée que pour les quelques fréquences discrètes impliquées dans l'inversion mais il est utile de l'élargir à toutes les fréquences puis d'appliquer une transformée de Fourier inverse pour visualiser l'ondelette source dans le domaine temporel. Enfin, il faut garder à l'esprit qu'il existe un compromis entre la qualité du modèle où les fonctions de Green sont calculées et la qualité de la source estimée : si le modèle ne reproduit pas les données observées, alors la source estimée s'éloigne de la source réelle.

## Validation

Une étape indispensable consiste à valider la méthode en retrouvant l'ondelette de Ricker utilisée dans le calcul des données observées dans le modèle de référence. Ce test a été mené dans le modèle synthétique (Fig. 2.18 (a) et (c)). Grâce à la flexibilité de la formule 2.10, l'estimation est faite globalement d'une part, et pour chaque source individuelle d'autre part, comme illustré en Figures 2.19 (a) (en vert) et (b). L'ondelette de Ricker est retrouvée dans chacun des cas validant ainsi la méthode et l'implémentation de cette dernière.

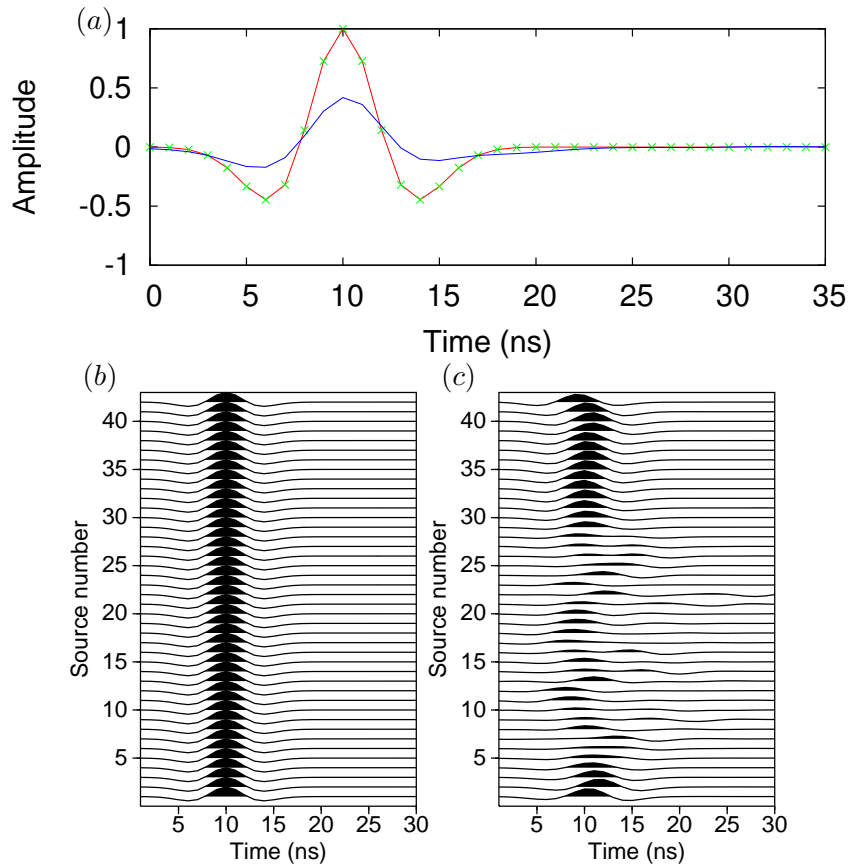


FIGURE 2.19 – Imagerie synthétique. Comparaison (a) de sources reconstruites : en rouge le Ricker, en vert la source estimée dans le milieu de référence et en bleu la source estimée avec toutes les traces dans le milieu initial. (b) Estimations des ondelettes par source individuelle dans le modèle de référence et (c) estimations des ondelettes par source individuelle dans le modèle initial. Pour les figures (b) et (c), les sources individuelles numérotées 1 sont situées à une profondeur de 47 mètres (en Figure 2.18 (a)) tandis que celles numérotées 42 sont situées à une profondeur de 6 mètres.

Lors d'un test plus réaliste, l'ondelette source est calculée en déconvoluant les données observées (dans le modèle en Figures 2.18 (a) et (c)) par les fonctions de Green calculées dans le milieu initial (Fig. 2.18 (b) et (d)). L'ondelette source est encore évaluée individuellement (Fig. 2.19 (c)) et globalement (Fig. 2.19 (a)). Comme l'indique cette dernière figure, l'ondelette obtenue (en bleu) s'éloigne nettement du Ricker initialement utilisé en matière d'amplitude. Ce résultat est la conséquence directe de la sommation, dans le domaine fréquentiel, de toutes les

ondelettes sources estimées individuellement qui sont très différentes (Fig. 2.19 (c)). La grande diversité des ondelettes et leur éloignement par rapport au Ricker s'expliquent par l'absence dans les données du modèle tomographie lisse des fortes réflexions présentes dans les données observées au niveau des forts contrastes. Cet exemple met clairement en évidence le besoin d'estimer la source sur des portions du milieu où le modèle initial est proche du milieu de référence. Pour rappel, la partie supérieure du modèle, où les sources individuelles sont les mieux retrouvées, est celle qui présente le moins de contrastes et donc la plus grande proximité au niveau des données entre le modèle de référence et le milieu tomographique.

### 2.4.2.3 Choix des sources

Compte tenu des éléments précédents et afin de disposer d'une ondelette source initiale proche de l'ondelette de Ricker pour inverser les paramètres du milieu, une sélection manuelle des traces prises en compte pour estimer la source est effectuée. L'observation de la Figure 2.19 (c) donne un premier moyen simple pour effectuer cette sélection. L'ensemble des traces (environ 1500) associées aux sources allant des numéros 33 à 40 sont utilisées pour obtenir la source "Globale" présentée en Figure 2.20. Cependant, certaines de ces traces présentent encore des diffractions non reproduites par les données initiales ou bien sont associées à un offset important. Un deuxième tri, plus fin, est alors opéré sur ces traces pour en extraire 325 qui donnent à leur tour la source "Filtered". De cette façon, les ondelettes estimées par sélection des traces se rapprochent du Ricker (Fig. 2.20), ce qui n'est pas le cas de celle (en bleue) calculée sans analyse particulière (Fig. 2.19 (a)). Une analyse de ces sources dans le domaine fréquentiel montre un décalage vers les basses fréquences lorsque la sélection est moins restrictive (Fig. 2.21).

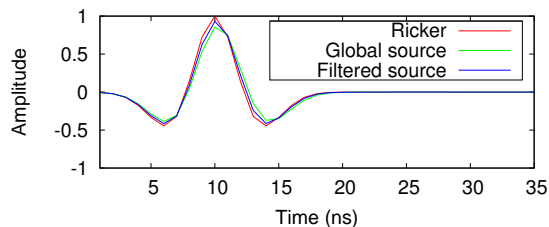


FIGURE 2.20 – Imagerie synthétique : comparaison des sources estimées à partir d'une sélection très stricte (Filtered source) et d'une sélection stricte (Global source) des traces avec le Ricker de référence.

Un processus identique est appliqué aux données réelles pour déterminer les sources dites globale ("Global") et filtrée ("Filtered") en partant des modèles initiaux en Figure 2.22. Le résultat est présenté en Figure 2.23. La première a été obtenue à partir des 2008 traces retenues sur la partie supérieure du modèle tandis que la seconde, issue d'une sélection plus fine, prend en compte 442 de ces traces. Là encore, une baisse du contenu fréquentiel de la source est mise en évidence (Fig. 2.24) lorsque la sélection est moins restrictive. Les sources obtenues ne sont pas parfaitement causales, ce qui peut s'expliquer par un picking un peu tardif des temps de première arrivée et/ou un manque de haute fréquence dans la source, résultant d'une sommation destructive concernant ces fréquences. De manière globale, la différence, entre les deux sources estimées, paraît faible, notamment dans le cas synthétique où le Ricker est bien approché à chaque fois. L'intérêt d'une telle sélection apparaît donc questionnable et est investigué par la

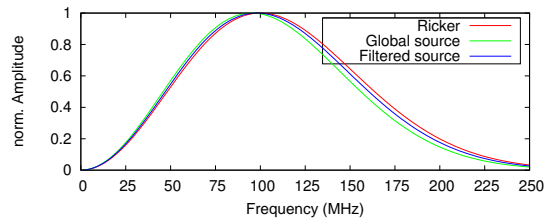


FIGURE 2.21 – Imagerie synthétique : spectres d’amplitude des sources présentées en Figure 2.20. La fréquence associée au pic décroît lorsque la source s’éloigne du Ricker, centré sur 100 MHz, puisque ces pics se situent à 98 et 95 MHz pour les sources filtrée et globale, respectivement.

suite.

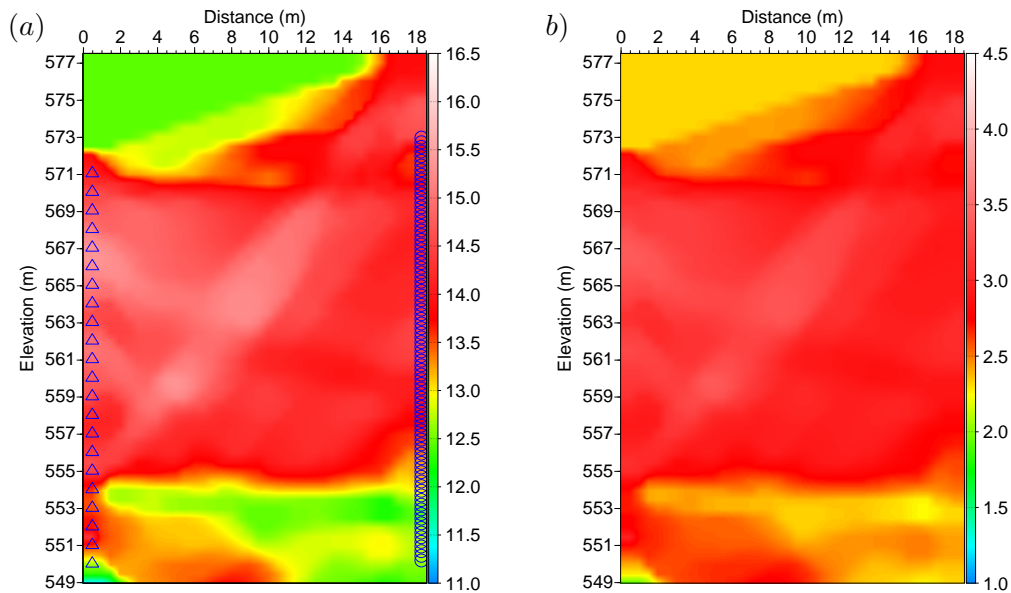


FIGURE 2.22 – Imagerie du site de Rustrel (top) : modèles initiaux de (a) permittivité relative et (b) de conductivité (en  $mS/m$ ) pour l’inversion de la partie supérieure de Rustrel. La figure (a) montre l’acquisition, utilisée dans ce cas, avec à gauche les positions des sources et à droite celles des récepteurs.

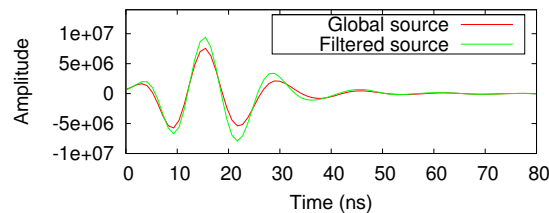


FIGURE 2.23 – Imagerie du site de Rustrel (top) : sources estimées à partir d’une sélection très stricte (Filtered source) et d’une sélection stricte (Global source).



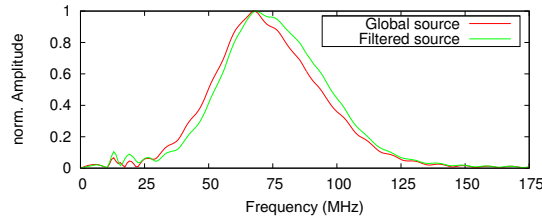


FIGURE 2.24 – Imagerie du site de Rustrel (top) : spectres d’amplitude des sources présentées en Figure 2.23. La fréquence associée au pic d’amplitude décroît lorsque la sélection des traces est moins stricte puisqu’ils se situent à 68.2 MHz et 67.4 MHz pour les sources filtrée et globale, respectivement. Notons également le décalage global des deux courbes.

#### 2.4.2.4 Choix de la discrétisation en fréquence

A la différence du workflow de la Figure 2.17, la FWI est réalisée ici dans le domaine fréquentiel. Dans ce cadre, le choix des fréquences et la stratégie fréquentielle, suivies lors de l’inversion, deviennent des points-clés. Comme nous l’avons vu dans la première partie, cette thématique a fait l’objet de plusieurs investigations avec les travaux de Bunks *et al.* (1995) et Sirgue & Pratt (2004), mais aussi plus récemment avec Brossier (2009) en sismique ou encore Lavoué *et al.* (2014) pour l’électromagnétisme. Il en ressort que l’inversion doit être multi-échelle, c’est-à-dire qu’elle doit commencer par les basses fréquences pour limiter les problèmes de compatibilité cinématique (cycle skipping) entre les données observées et celles calculées dans le modèle initial. Ensuite seulement, le contenu fréquentiel peut augmenter afin d’incorporer des détails dans les modèles en vue d’atteindre la résolution maximum. Enfin, il est préférable d’inverser successivement des groupes de fréquences se chevauchant plutôt que des fréquences individuelles pour bénéficier de la redondance de l’information et ainsi stabiliser l’inversion.

Après visualisation des contenus fréquentiels des données (Fig. 2.15) et des sources (Fig. 2.21), d’une part, et du rapport signal sur bruit des données (Fig. 2.16), d’autre part, la bande fréquentielle 39-129 MHz est choisie pour inverser les données. A partir de cette bande et des prérequis rappelés ci-dessus, deux stratégies d’échantillonnage en fréquence sont proposées dans les tableaux 2.3 et 2.4. Dans chacune, l’échantillonnage au sein d’un groupe de fréquences est équidistant et la borne supérieure est la même d’une stratégie à l’autre. La borne inférieure augmente progressivement dans le premier cas, afin de conserver un nombre de fréquences constant par groupe, alors que dans le second cas, cette borne inférieure reste la même quitte à avoir plus de fréquences à inverser pour un groupe donné. Le but d’un tel choix est de comparer les deux approches et de déterminer l’intérêt de conserver les basses fréquences au fur et à mesure de l’inversion. Pour chacun de ces groupes de fréquences, le critère d’arrêt est fixé initialement à 5 itérations.

|          |                           |
|----------|---------------------------|
| Groupe 1 | 39, 41, 43, 45, 48, 51    |
| Groupe 2 | 43, 46, 49, 52, 56, 60    |
| Groupe 3 | 49, 54, 59, 64, 72, 80    |
| Groupe 4 | 59, 67, 75, 83, 93, 103   |
| Groupe 5 | 75, 85, 95, 105, 115, 125 |

TABLE 2.3 – Stratégie fréquentielle, dite Sweep, avec décalage progressif des fréquences (MHz).

|          |   |
|----------|---|
| Groupe 1 | 39, 41, 43, 45, 48, 51                    |
| Groupe 2 | 39, 43, 47, 51, 55, 59                    |
| Groupe 3 | 39, 45, 51, 57, 63, 69, 75                |
| Groupe 4 | 39, 47, 55, 63, 71, 79, 87, 95, 103       |
| Groupe 5 | 39, 49, 59, 69, 79, 89, 99, 109, 119, 129 |

TABLE 2.4 – Stratégie fréquentielle, dite Bunks, avec cumul des fréquences (MHz).

Les conditions décrites jusqu'à présent ne permettent pas d'imager correctement le milieu car seules les zones voisines des sources et des récepteurs sont modifiées par l'inversion, ce qui est interprété comme des artefacts. Afin d'éviter cela, ces zones sont gelées, c'est-à-dire que le gradient  $y$  est forcé à zéro. Cependant, malgré cette disposition, des artefacts finissent par apparaître proches des sources et la discontinuité créée par la zone gelée pose question. Pour faire face à ces deux problèmes, chaque gradient est lissé à l'aide d'un filtre Gaussien dont la longueur de corrélation est de 0.4 mètre selon  $x$  et  $z$ . Cette dernière valeur présente l'avantage de lisser les artefacts naissants dans le milieu sans trop réduire la résolution maximum de la FWI, égale à la moitié de la plus petite longueur d'onde du milieu (Devaney (1984)).

### 2.4.3 Inversion monoparamètre de la permittivité

Dans un premier temps, seule la permittivité est inversée afin de tester l'influence de trois paramètres : l'ondelette source, la stratégie fréquentielle et le nombre d'itérations. L'effet de chaque paramètre est évalué en parallèle sur le cas réel et sur le cas synthétique pour comparer les résultats.

#### 2.4.3.1 Influence et choix de la source

##### Imagerie du site de Rustrel

Pour commencer, les ondelettes globale et filtrée (Fig. 2.23) sont utilisées pour inverser les données réelles avec une stratégie dite Sweep et 5 itérations par groupe de fréquences, en partant des modèles initiaux affichés en Figure 2.22. La Figure 2.25 présente les modèles finaux de permittivité, associés à chaque source. Ces derniers modèles sont très proches et seuls des profils verticaux permettent d'apprécier les variations. Ces profils diffèrent principalement en parties basse et haute du modèle, c'est-à-dire dans des zones où la couverture en rais est plus faible. Cette première image entre les deux puits permet d'observer une stratification légèrement inclinée vers l'Est (la droite) et de constater des contrastes plus importants en dessous de 550 mètres d'élévation avec une couche plus rapide. Cette couche était déjà visible sur la tomographie des temps de première arrivée (Fig. 2.22) mais la FWI a permis d'en préciser les limites et les valeurs intrinsèques. Malgré cette proximité apparente entre les deux modèles, les fonctions coût associées montrent des différences (Fig. 2.26). La première différence est liée à une erreur initiale plus faible (95 %) pour la source globale que pour celle de la source filtrée (100 %). Ce résultat s'explique très probablement par une prise en compte de plus de données lors de l'estimation de la source globale, menant à une plus grande représentativité et donc une erreur plus faible. Cependant, au cours de l'inversion, la tendance s'inverse et la source sélectionnée plus finement paraît plus avantageuse. A la fin, les coûts sont de 51.7 et

## INVERSION DES CHAMPS D'ONDES ACQUIS EN TRANSMISSION DANS UN MILIEU CARBONATÉ

40.3 % du coût initial pour les sources globale et filtrée, respectivement. Pour les deux sources, cette amélioration de l'ajustement aux données est observable lorsque l'on compare les données calculées, avant et après inversion, aux données observées (Fig. 2.27). L'écart final de 11.4 % (51.7 contre 40.3) entre les jeux de données issus des deux sources est également perceptible sur les radargrammes présentés où les amplitudes des données calculées avec la source filtrée se rapprochent davantage des données observées. Notons tout de même que les données calculées finales, pour les deux sources, présentent un déficit global d'amplitude par rapport au jeu de données réelles.

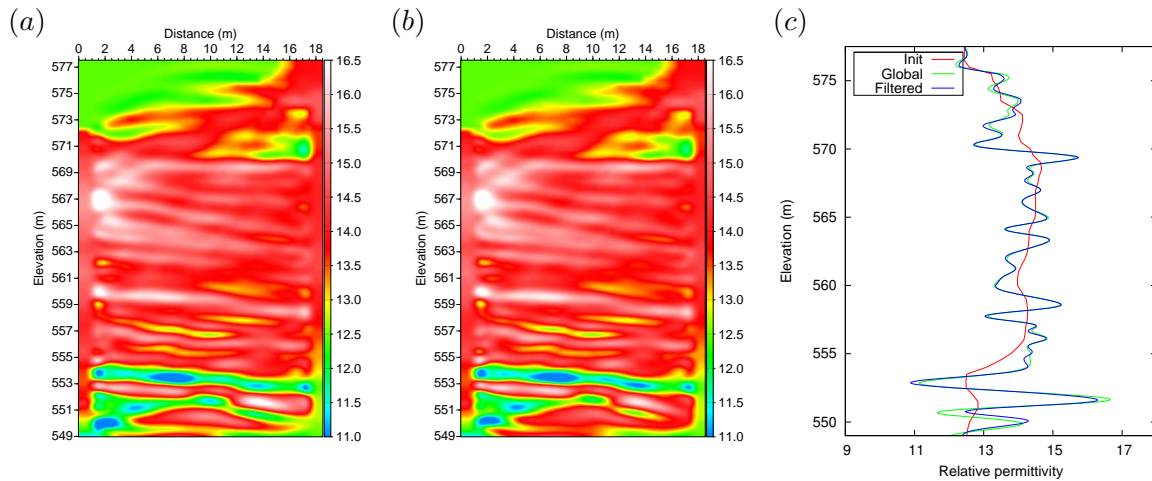


FIGURE 2.25 – Imagerie du site de Rustrel (top) : modèles de permittivité relative reconstruits pour les sources (a) globale et (b) filtrée avec une stratégie fréquentielle Sweep et 5 itérations par groupe de fréquences. (c) Profils verticaux 1D à l'abscisse = 13.45 m

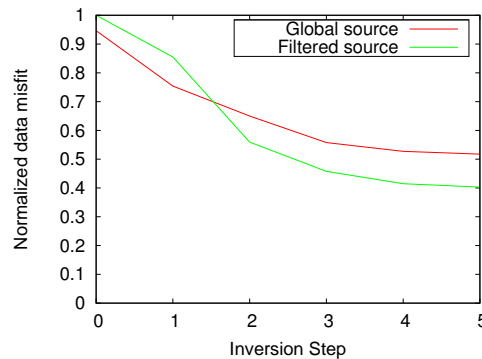


FIGURE 2.26 – Imagerie du site de Rustrel (top) : évolution de la fonction coût au cours de l'inversion. Les coûts ont été normalisés par le coût initial (Step 0) de la source filtrée. Les coûts finaux sont de 51.7 et 40.3 % pour les sources globale et filtrée.

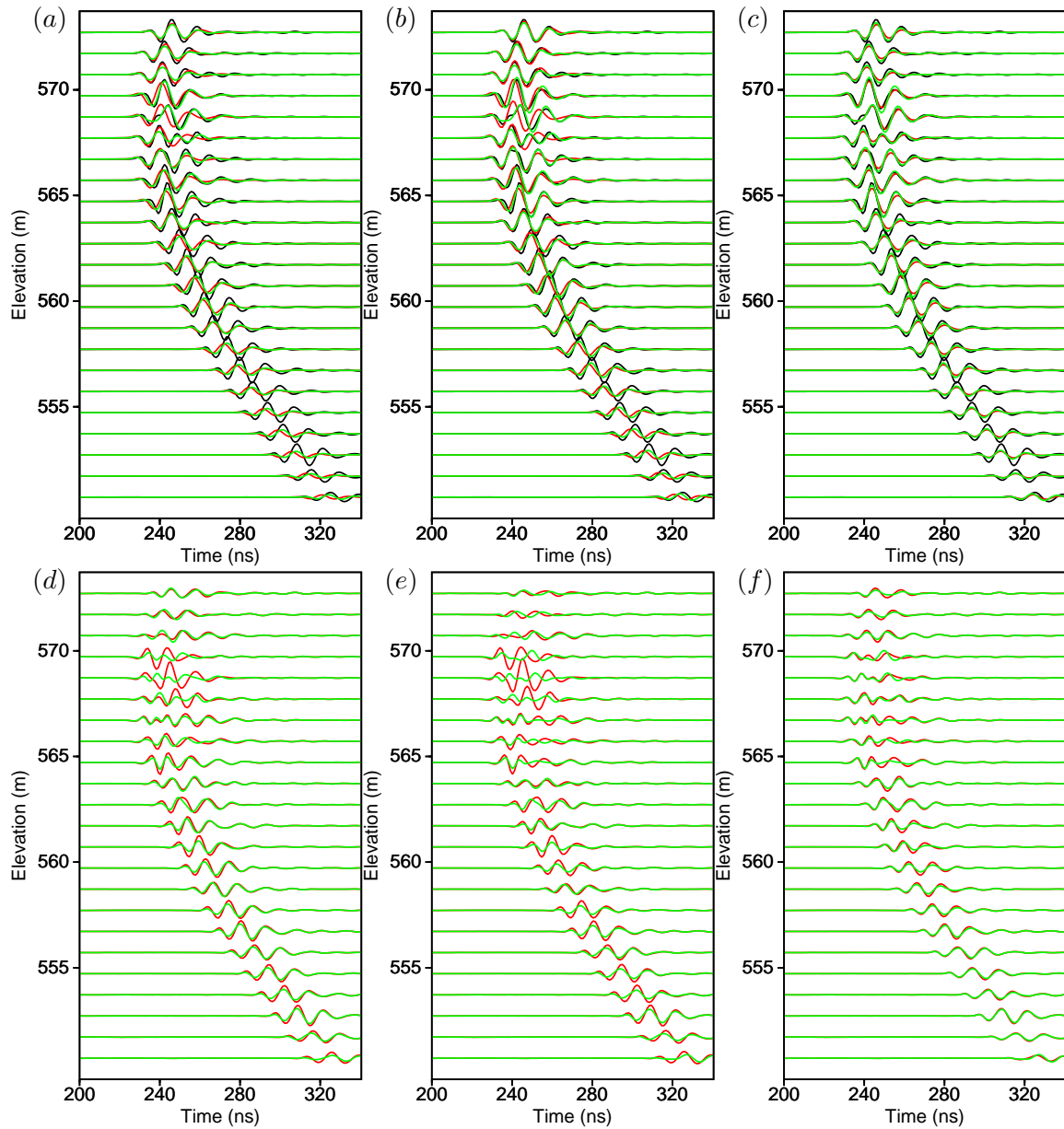


FIGURE 2.27 – Imagerie du site de Rustrel (top) : radargrammes associés à la source située à l'élévation 567 mètres. En première ligne : (a-b) données observées en noir, initiales en rouge et finales en vert avec en (a) source globale et (b) source filtrée. En (c), comparaison des données observées (en noir) avec les données finales calculées pour les sources globale (en rouge) et filtrée (en vert). Les figures (d-f) présentent des résidus calculés à partir des champs d'ondes des figures (a-c). En faisant la différence entre les champs d'ondes de couleur noire et rouge de la figure a), j'obtiens le résidu de couleur rouge de la figure située juste en dessous (ici d). Je note cette opération "noir - rouge  $\rightarrow$  rouge". De même la différence entre les champs d'ondes de couleur noire et verte de la figure a) donne le champ d'ondes vert affiché en figure d) ("noir - vert  $\rightarrow$  vert"). Je répète cette opération en figure b) pour obtenir les résidus de la figure e) et en figure c) pour obtenir les résidus en figure f). Ce principe est valable pour les champs d'ondes affichés sur ce format par la suite.

**Imagerie sur modèle synthétique**

Les données simulées dans le modèle synthétique sont inversées pour les différentes sources (Fig. 2.20) avec la stratégie Sweep et 5 itérations en partant des milieux initiaux (Fig. 2.18 (b) et (d)). Pour avoir une référence, la source originelle (connue de type "Ricker") est également utilisée. Les résultats (Fig. 2.28) montrent des couches horizontales plutôt bien reconstruites et une augmentation des contrastes par rapport au modèle tomographique, à l'image du cas réel. L'analyse des coûts montrent que les erreurs résiduelles sur les données sont très faibles dans chacun des cas puisqu'elles sont comprises entre 4 à 6 % au final (Fig. 2.29), signe que les données sont très bien expliquées. Dans cet exemple, et de manière surprenante, on n'obtient pas de meilleurs résultats avec la source Ricker connue qui montre une erreur finale intermédiaire (5.3 %) pendant que le modèle issu de la source filtrée (4.6 %) reste supérieur à celui issu de la source globale (5.8 %), comme dans le cas réel. Un autre point commun entre cas réel et synthétique, mis en évidence dans cette figure, concerne l'évolution des coûts qui suit un comportement similaire avec une erreur initiale inférieure pour la source globale (86 %) par rapport à la source filtrée (115 %) avant que la tendance ne s'inverse durant l'inversion. Les faibles coûts obtenus dans cet exemple mettent bien en avant l'amélioration obtenue mais rendent compliquée la visualisation des différences pour les sources estimées sur les radargrammes (Fig. 2.31).

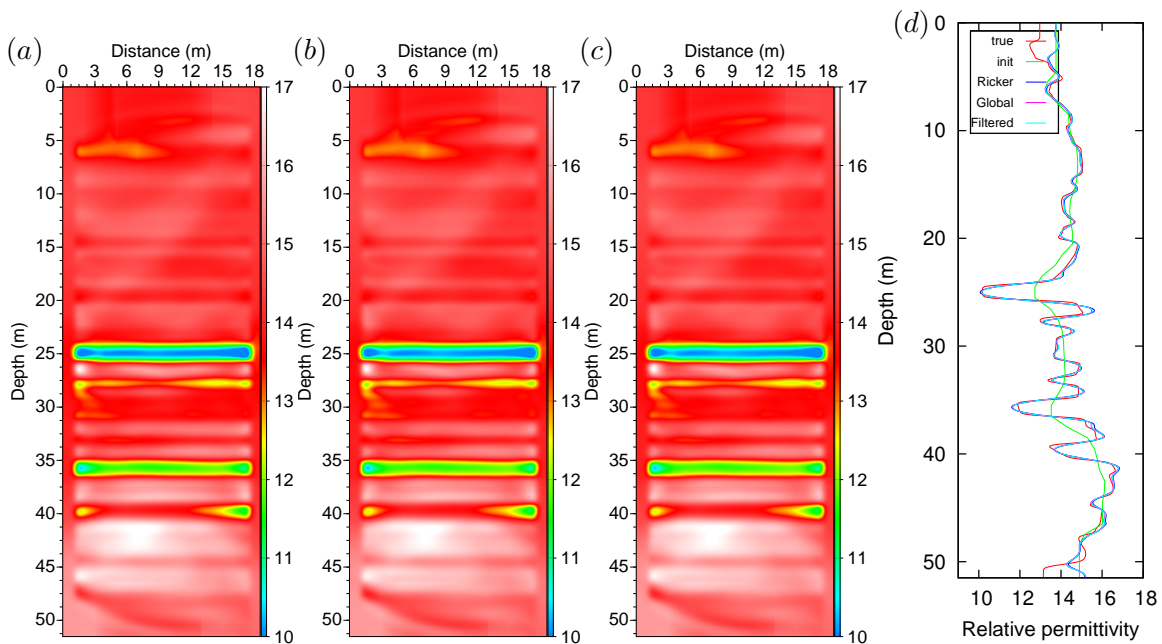


FIGURE 2.28 – Imagerie synthétique : modèles de permittivité relative reconstruits pour les sources (a) Ricker, (b) globale et (c) filtrée avec une stratégie fréquentielle Sweep et 5 itérations par groupe. (d) Profils verticaux 1D à l’abscisse = 9.2 m. Notons que que les profils verticaux des modèles sont quasiment superposés.

Dans la mesure où le milieu à reconstruire est connu, un outil supplémentaire est introduit pour juger de la qualité des reconstructions et éventuellement indiquer si un modèle est mieux reconstruit qu’un autre : c’est l’erreur entre les modèles de référence  $\bar{m}_j$  et reconstruit  $m_j$ , donnée par la formule,

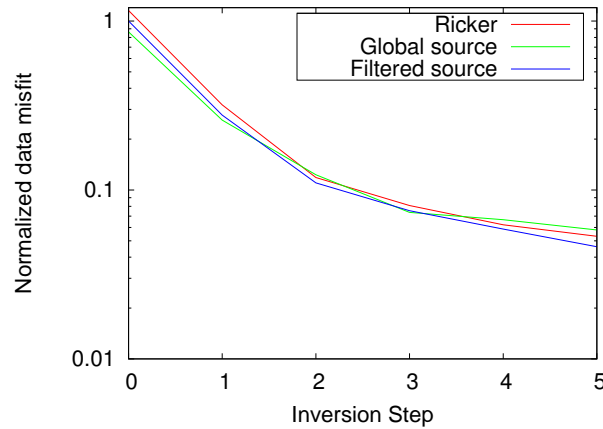


FIGURE 2.29 – Imagerie synthétique : évolution de la fonction coût au cours de l’inversion. Les coûts ont été normalisés par le coût initial (Step 0) de la source filtrée. Les coûts finaux sont de 5.3, 5.8 et 4.6 % pour le Ricker et les sources globale et filtrée.

$$error = \frac{100}{M} \sum_{j=1}^M |m_j - \bar{m}_j|, \quad (2.11)$$

où  $M$  désigne le nombre de points de discrétisation. Une fois la formule appliquée, les résultats (Fig. 2.30) montrent des courbes très proches avec un résultat légèrement meilleur pour les sources estimées. Cette observation, pouvant être mise en relation avec l’erreur sur les données, semble s’expliquer par un meilleur comportement au niveau des zones gelées lorsque le Ricker n’est pas utilisé.

Les résultats issus des données réelles et synthétiques indiquent que la source estimée finement est préférable à celle obtenue plus globalement même si l’avantage apparaît plus faible dans le cas synthétique. Pour cette raison, cette source dite ”filtrée” est conservée pour les tests suivants.

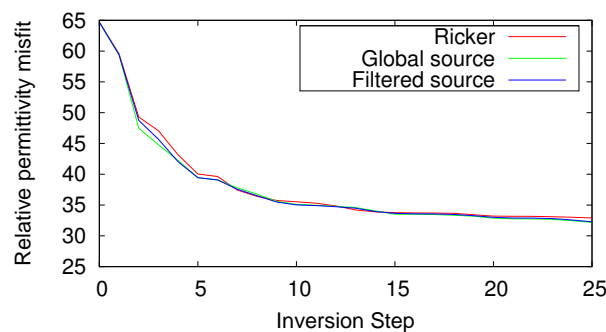


FIGURE 2.30 – Imagerie synthétique : évolution de l’erreur de permittivité relative au cours de l’inversion.

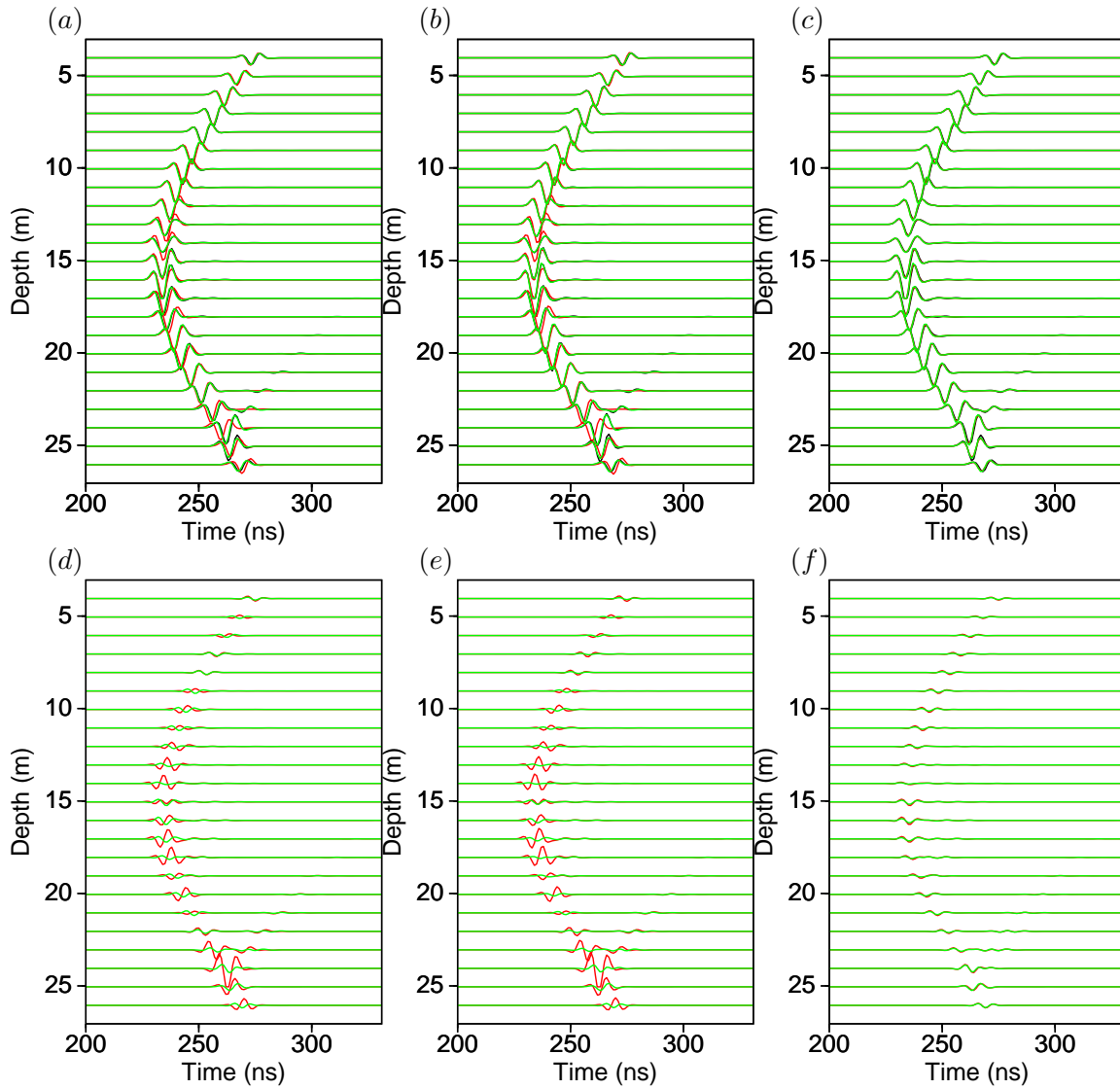


FIGURE 2.31 – Imagerie synthétique : radargrammes associés à la source située à 15 mètres de profondeur. En première ligne : (a-b) données observées en noir, initiales en rouge et finales en vert avec en (a) source globale et (b) source filtrée. En (c), comparaison des données observées en noir et finales pour les sources globale en rouge et filtrée en vert. En seconde ligne : résidus des données situées à l’aplomb avec à chaque fois ”noir - rouge -> rouge” et ”noir - vert -> vert”.

### 2.4.3.2 Influence de la stratégie fréquentielle

Jusqu'à présent, les données sont inversées en suivant la stratégie dite Sweep, pour laquelle la gamme des fréquences inversées augmente à chaque nouvelle inversion non-linéaire sans que les basses fréquences ne soient conservées. Cependant, l'autre stratégie (dite Bunks) doit être testée et une comparaison des résultats, entre les deux stratégies, établie.

#### Imagerie du site de Rustrel

La Figure 2.32 montre les résultats des inversions pour les deux stratégies fréquentielles (tableaux 2.3 et 2.4) avec la source filtrée et 5 itérations. Les nouveaux modèles présentent les mêmes structures obliques et plus largement les mêmes caractéristiques. Cette similitude est confirmée par le profil vertical montrant des variations mineures même dans les zones où la couverture est la plus faible. L'évolution des coûts (Fig. 2.33), de l'état initial à l'état final, indique qu'ils sont sensiblement les mêmes à toutes les étapes du workflow avec un écart minime à l'état final (40.3 % pour Sweep et 40.4 % pour Bunks). Cette proximité ne donne plus la possibilité de choisir une approche plutôt qu'une autre sur la base de ce seul critère. Les données finales dans le domaine temporel (Fig. 2.34) renforcent la tendance observée jusqu'ici avec des formes d'ondes quasiment superposées. Nous pouvons donc dire que les deux stratégies fréquentielles suivent sensiblement le même chemin lors des inversions.

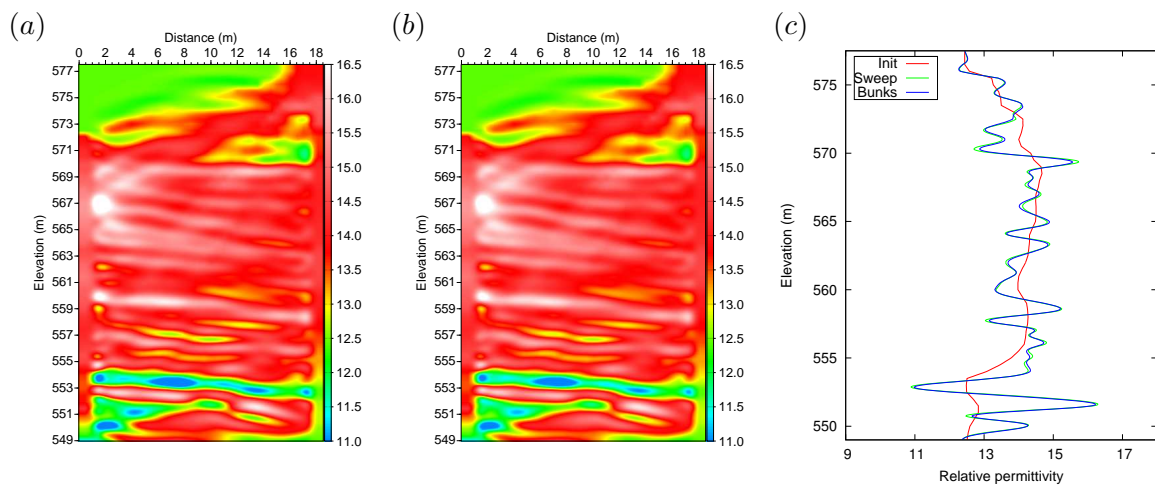


FIGURE 2.32 – Imagerie du site de Rustrel (top) : modèles de permittivité relative reconstruits pour la source filtrée avec une stratégie fréquentielle (a) Bunks et (b) Sweep et 5 itérations par groupe. (c) Profils verticaux 1D à l'abscisse = 13.45 m



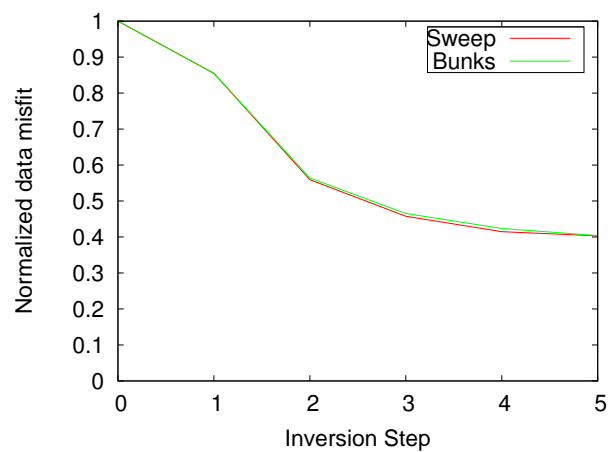


FIGURE 2.33 – Imagerie du site de Rustrel (top) : évolution de la fonction coût au cours de l'inversion. Les coûts ont été normalisés par le coût initial (Step 0) identique. Les coûts finaux sont de 40.3 et 40.4 % pour les stratégies Sweep et Bunks.

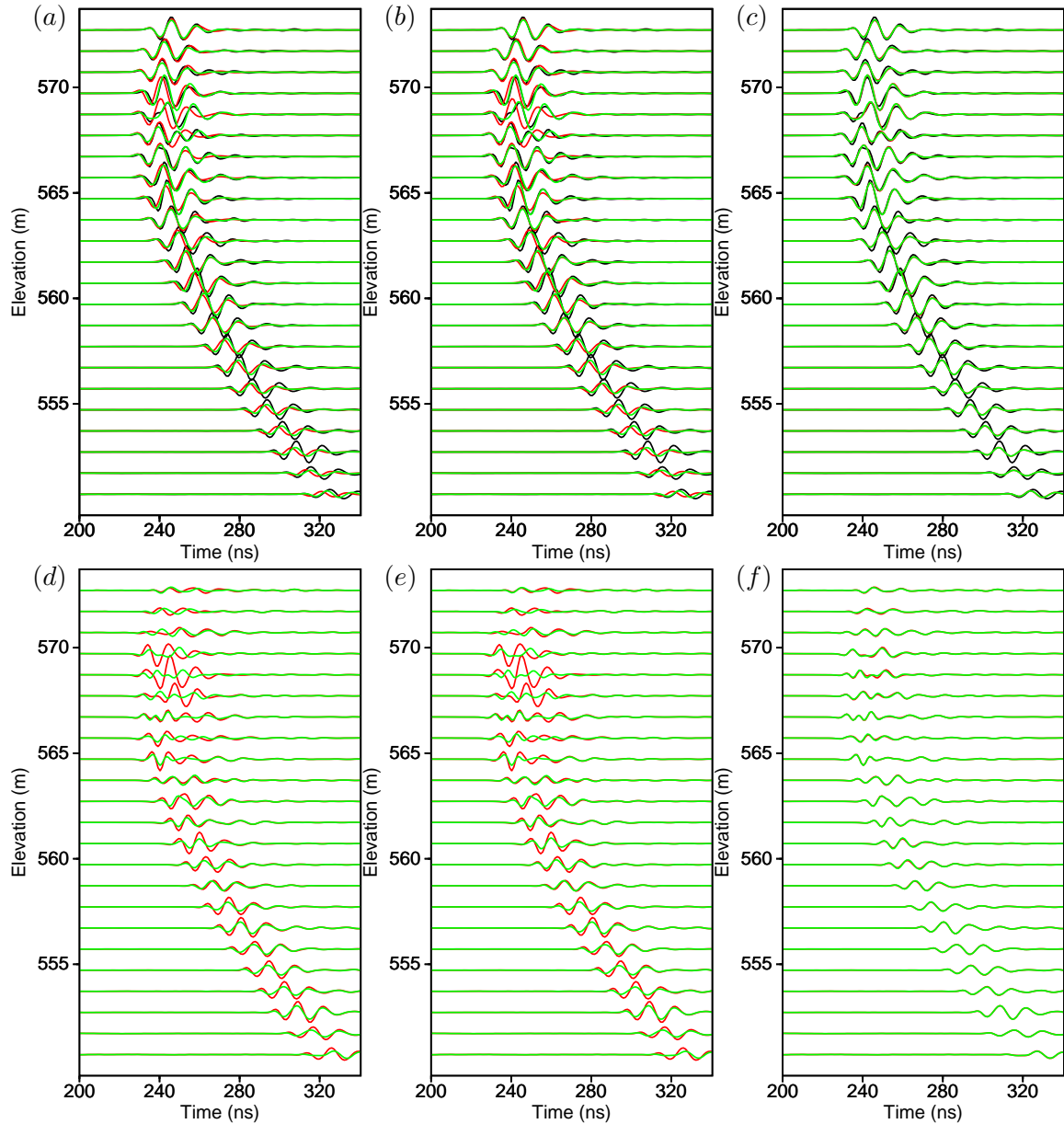


FIGURE 2.34 – Imagerie du site de Rustrel (top) : radargrammes associés à la source située à l’élévation 567 mètres. En première ligne : (a-b) données observées en noir, initiales en rouge et finales en vert avec en (a) stratégie Sweep et (b) stratégie Bunks. En (c), comparaison des données observées en noir et finales pour les stratégies Sweep en rouge et Bunks en vert. En seconde ligne : résidus des données situées à l’aplomb avec à chaque fois ”noir - rouge -> rouge” et ”noir - vert -> vert”.

**Imagerie sur modèle synthétique**

Afin de conforter ces résultats, les données synthétiques sont inversées avec les deux stratégies fréquentielles. Les modèles finaux de permittivité et les profils verticaux associés (Fig. 2.35) mettent en avant des différences minimales. De leur côté, l'évolution des fonctions coût (Fig. 2.36, dont les valeurs finales sont voisines (4.6 % pour Sweep et 5.0 % pour Bunks) et les données dans le domaine temporel (Fig. 2.38), qui montrent des formes d'ondes superposées, ne permettent toujours pas de choisir une méthode plutôt qu'une autre. Enfin, l'évolution de l'erreur sur les modèles (Fig. 2.37) donne des résultats quasiment identiques. Nous pouvons conclure définitivement : les deux approches sont équivalentes et la conservation des basses fréquences au cours de l'inversion n'est pas utile ici.

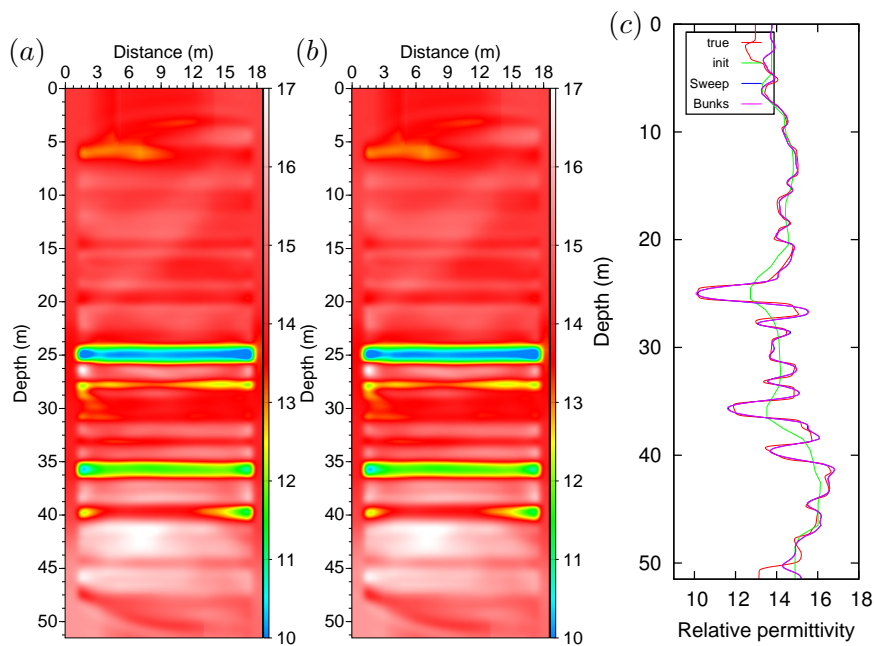


FIGURE 2.35 – Imagerie synthétique : modèles de permittivité relative reconstruits pour la source filtrée avec des stratégies fréquentielles dites (a) Bunks et (b) Sweep et 5 itérations par groupe de fréquences. (c) Profils verticaux 1D à l’abscisse = 9.2 m

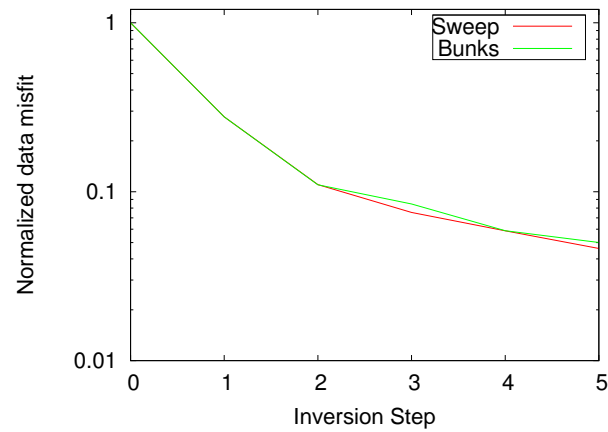


FIGURE 2.36 – Imagerie synthétique : évolution de la fonction coût au cours de l’inversion. Les coûts ont été normalisés par le coût initial (Step 0) identique. Les coûts finaux sont de 4.6 et 5.0 % pour les stratégies Sweep et Bunks.

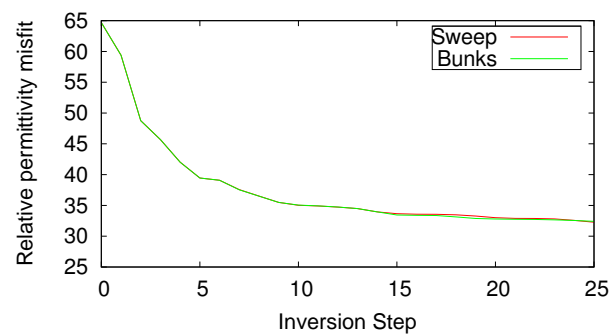


FIGURE 2.37 – Imagerie synthétique : évolution de l’erreur de permittivité relative au cours de l’inversion.

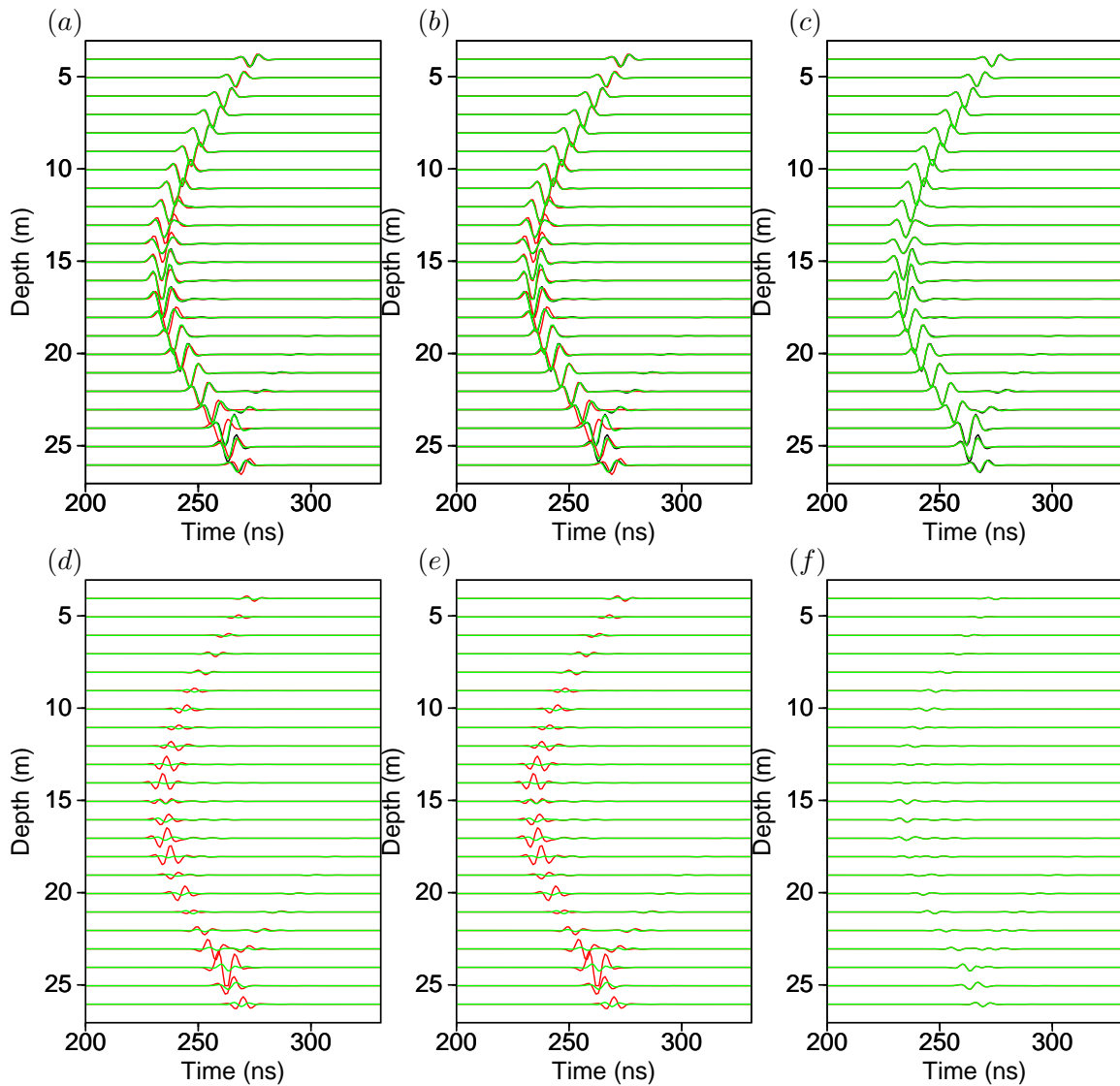


FIGURE 2.38 – Imagerie synthétique : radargrammes associés à la source située à 15 mètres de profondeur. En première ligne : (a-b) données observées en noir, initiales en rouge et finales en vert avec en (a) stratégie Sweep et (b) stratégie Bunks. En (c), comparaison des données observées en noir et finales pour les stratégies Sweep en rouge et Bunks en vert. En seconde ligne : résidus des données situées à l’aplomb avec à chaque fois ”noir - rouge -> rouge” et ”noir - vert -> vert”.

Le coût de l’inversion étant directement proportionnel aux nombres de fréquences mis en jeu (pour construire le gradient), il est plus intéressant, d’un point de vue des ressources informatiques à mobiliser, de garder la stratégie faisant intervenir le moins de fréquences possibles. Les résultats étant équivalents pour les deux stratégies et comme la stratégie Sweep nécessite moins de fréquences, nous continuerons les investigations avec cette stratégie.

### 2.4.3.3 Influence du nombre d'itérations

Comme cela se fait généralement dans le domaine fréquentiel, le nombre d'itérations a été choisi de manière arbitraire à défaut de pouvoir se fixer un critère basé sur l'évolution des données temporelles. On se demande ici dans quelle mesure ce choix influe sur les résultats.

#### Imagerie du site de Rustrel

Au lieu des 5 itérations par groupe de fréquences utilisées précédemment, les calculs sont maintenant conduits avec 10 itérations (avec la stratégie Sweep et la source filtrée). La comparaison des résultats (Fig. 2.39), obtenus avec 5 et 10 itérations, indique que le changement de ce paramètre a un impact non négligeable sur les reconstructions finales. La comparaison des profils verticaux met en avant des variations sur toute la hauteur du modèle avec notamment une augmentation des contrastes en partie basse du modèle. Ces contrastes plus forts sont liés à un changement de "forme" de la couche à 553 mètres, qui apparaît plus accidentée, et donc moins plane s'éloignant en fait de l'image que l'on peut avoir d'une strate géologique. Bien que l'on puisse penser à une augmentation des artefacts le long de cette couche, il n'est pas possible de l'affirmer de manière certaine car les dépôts géologiques se sont faits dans des environnements chahutés pouvant donner des structures moins planes. En revanche, les artefacts déjà présents à proximité des zones gelées se développent de façon non négligeable avec les 5 itérations supplémentaires. L'augmentation du nombre d'itérations se répercute aussi sur l'évolution des coûts (Fig. 2.40) au travers d'une baisse de 2.7 % (40.3 contre 37.6 %). Cette diminution est observable sur les radargrammes (Fig. 2.41), essentiellement sur les traces enregistrées en partie basse du modèle. Au-delà de cette baisse, le nombre supérieur d'itérations ne permet pas de réduire le déficit d'amplitude puisque c'est principalement la phase qui est corrigée.

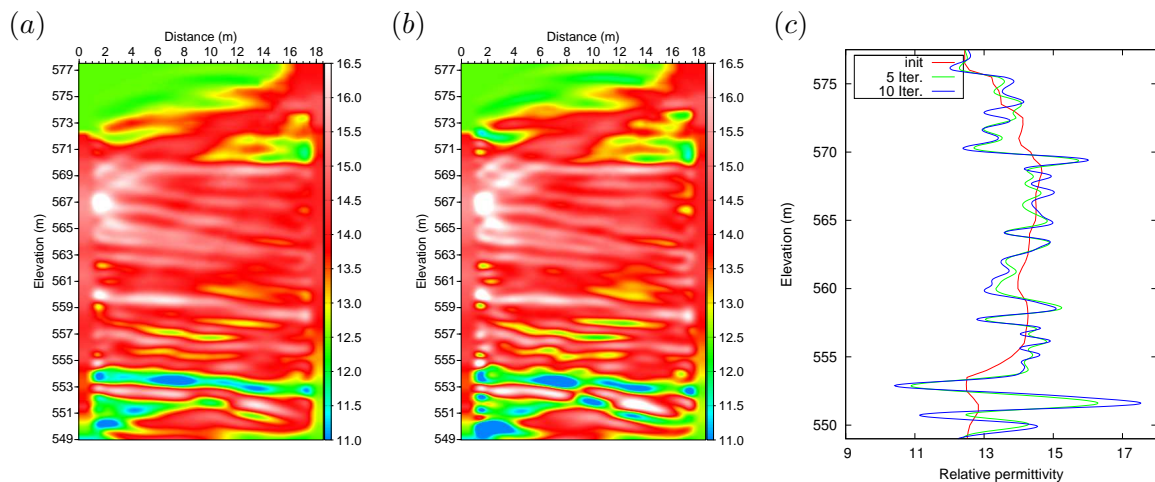


FIGURE 2.39 – Imagerie du site de Rustrel (top) : modèles de permittivité relative reconstruits pour la source filtrée avec une stratégie fréquentielle Sweep et 10 itérations par groupe. (c) Profils verticaux 1D à l'abscisse = 13.45 m

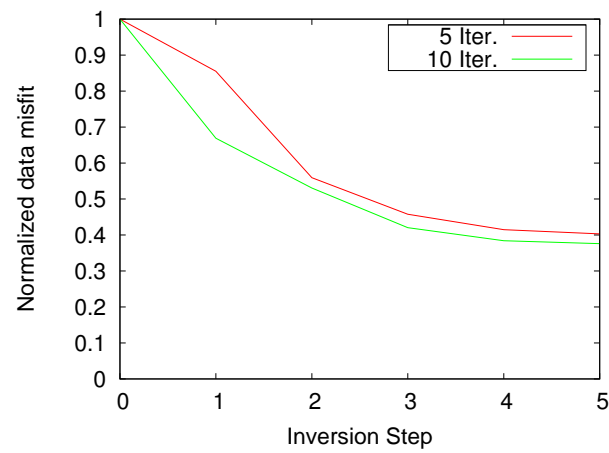


FIGURE 2.40 – Imagerie du site de Rustrel (top) : évolution de la fonction coût au cours de l'inversion. Les coûts ont été normalisés par le coût initial (Step 0) identique. Les coûts finaux sont de 40.3 et 37.6 % pour 5 et 10 itérations.

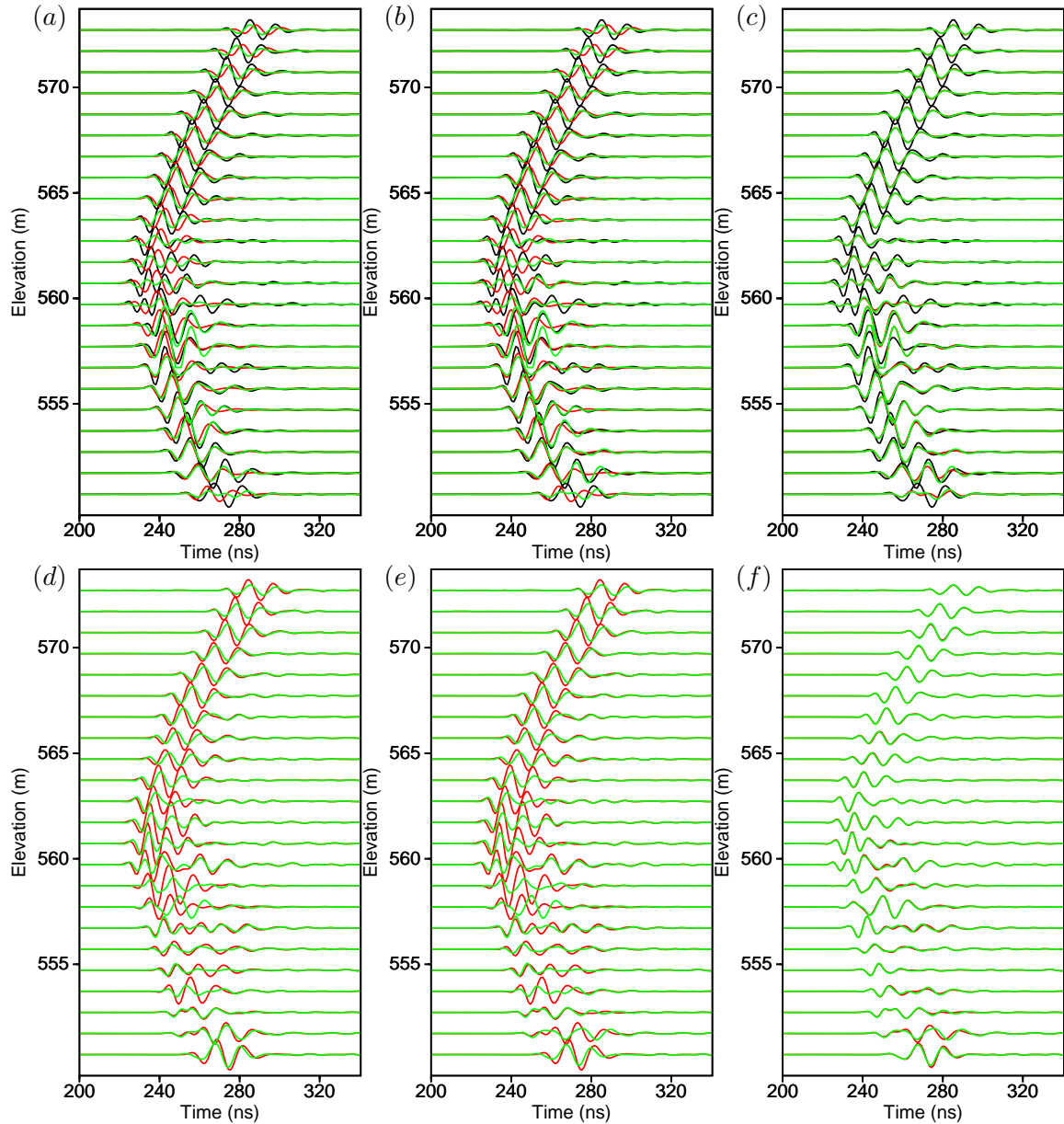


FIGURE 2.41 – Imagerie du site de Rustrel (top) : radargrammes associés à la source située à l'élévation 560 mètres. En première ligne : (a-b) données observées en noir, initiales en rouge et finales en vert avec en (a) source globale et (b) source filtrée. En (c), comparaison des données observées en noir et finales pour les sources globale en rouge et filtrée en vert. En seconde ligne : résidus des données situées à l'aplomb avec à chaque fois "noir - rouge  $\rightarrow$  rouge" et "noir - vert  $\rightarrow$  vert".



**Imagerie sur modèle synthétique**

A l'image du cas réel, l'inversion des données synthétiques avec 10 itérations a été menée (avec la stratégie Sweep et la source filtrée) et le résultat est affiché en Figure 2.42. Cette figure reprend le modèle issu des 5 itérations et présente une comparaison des profils verticaux. Ces derniers montrent que le modèle de permittivité calculé avec 10 itérations est légèrement plus proche du modèle de référence, ce qui est visible essentiellement au niveau des valeurs maximales des strates. Cette plus grande proximité se traduit dans le calcul de l'erreur dans l'espace des modèles en Figure 2.43 où l'erreur passe de 32.3 à 30.0 % tandis que la fonction coût dans l'espace des données (Fig. 2.44) décroît de 4.6 à 3.2 %. Cette amélioration était attendue mais elle reste encore très modeste puisqu'elle demeure inférieure à 2 % alors que le nombre d'itérations a été multiplié par deux. Dans le même temps, des artefacts se développent proches des zones gelées, même si dans le cas présent, ils semblent moins critiques que dans le cas réel. Enfin, le faible écart de coût, sur des valeurs déjà faibles, n'a pas permis de visualiser des changements interprétables dans les radargrammes qui ne sont donc pas montrés.

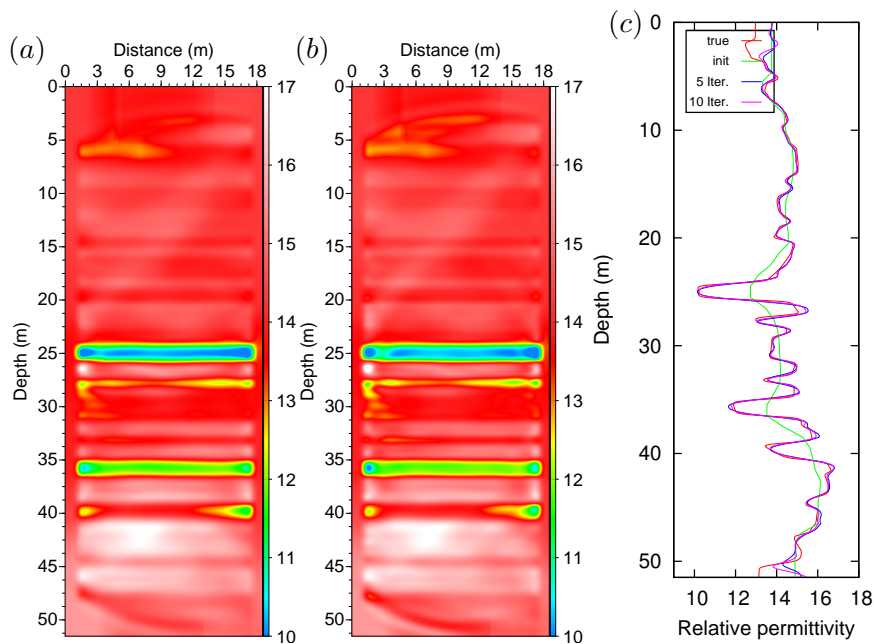


FIGURE 2.42 – Imagerie synthétique : modèles de permittivité relative reconstruits pour la source filtrée avec une stratégie fréquentielle Sweep et 10 itérations par groupe. (c) Profils verticaux 1D à l’abscisse = 9.2 m

De manière globale, l’analyse des résultats des inversions des données réelles et synthétiques montrent une légère réduction du coût lorsque l’inversion passe de 5 à 10 itérations par groupe de fréquences. Cependant, cette amélioration reste faible et doit être nuancée au regard des artefacts qui se développent, surtout dans le cas réel. Il n’est donc pas opportun, dans notre cas, de passer de 5 à 10 itérations et nous retenons les cinq itérations pour les tests à venir.

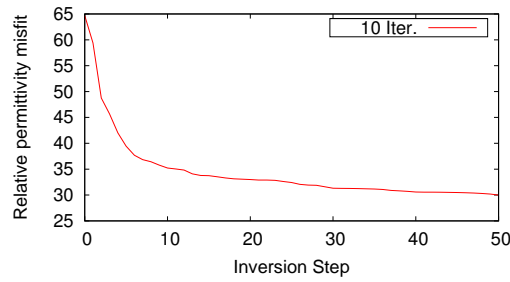


FIGURE 2.43 – Imagerie synthétique : évolution de l’erreur de permittivité relative au cours de l’inversion.

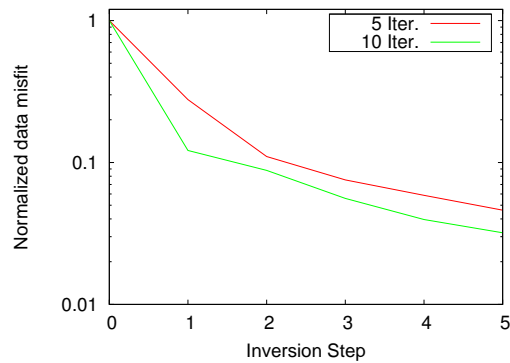


FIGURE 2.44 – Imagerie synthétique : évolution de la fonction coût au cours de l’inversion. Les coûts ont été normalisés par le coût initial (Step 0) identique. Les coûts finaux sont de 4.6 et 3.2 % pour 5 et 10 itérations.

#### 2.4.3.4 Conclusion

Ce sous-chapitre montre tout l’intérêt d’utiliser l’inversion des champs d’ondes par rapport à la tomographie. En effet, la prise en compte de l’ensemble des formes d’ondes a permis d’améliorer de façon très nette la résolution du modèle géologique initial. Nous avons testé plusieurs paramètres tels que la source utilisée, la stratégie fréquentielle ou encore le nombre d’itérations. Il en ressort que le processus de sélection des traces utilisées pour estimer la source a une influence positive sur le modèle et le coût final de l’inversion essentiellement dans le cas réel. Nous avons donc retenu la stratégie d’estimation sélective de la source. Pour ce qui est de la stratégie fréquentielle, les deux proposées dans cette étude ont donné des résultats identiques et seule l’analyse des ressources informatiques mobilisées a permis de trancher pour la stratégie utilisant le plus faible nombre de fréquences mises en jeu dans l’inversion. Enfin, il n’est pas judicieux de vouloir trop itérer, car la réduction, presque forcée, du résidu conduit l’algorithme à accroître les artefacts au niveau de la zone gelée.

De manière générale, les résultats obtenus avec les données réelles et synthétiques indiquent que l’inversion de la permittivité est un processus robuste. La proximité des messages issus des résultats synthétique et réel encourage à continuer ainsi pour imager la conductivité dans une démarche multiparamètres. L’inversion de ce paramètre est encouragée par le déficit d’amplitude des données qui ne semblent pas être explicable par les modèles de permittivité déduits même après 10 itérations.

### 2.4.4 Inversion multiparamètres de la permittivité et la conductivité

La suite de ce travail d'inversion monoparamètre est l'inversion multiparamètres. Dans la mesure où il existe un compromis encore non résolu entre permittivité et conductivité avec l'algorithme l-BFGS, un scaling adapté doit être trouvé pour balancer l'influence de ces deux paramètres. Ce sous-chapitre débute donc par une étude mêlant influence du scaling et de la source afin de trouver un optimum.

#### 2.4.4.1 Influence combinée de la source et du scaling

##### Imagerie du site de Rustrel

Les données réelles sont inversées avec les sources filtrée et globale (Fig. 2.23) pour différentes valeurs de  $\sigma_0$ , prises dans une gamme permettant de mettre à jour les deux paramètres simultanément. Les modèles finaux de permittivité présentent de grandes similitudes quel que soit le choix de la source et du scaling, comme lors des inversions monoparamètre. Cela explique qu'un seul modèle final soit affiché en Figure 2.45. Ces similitudes sont mises en évidence sur les profils verticaux affichés pour différentes sources et différents scaling. Les seules différences significatives apparaissent en partie basse où la couverture en rais est la plus faible. A l'opposé, la conductivité est plus variable comme l'illustre la Figure 2.46 où des différences existent à la fois en termes de résolution et de valeurs moyennes.

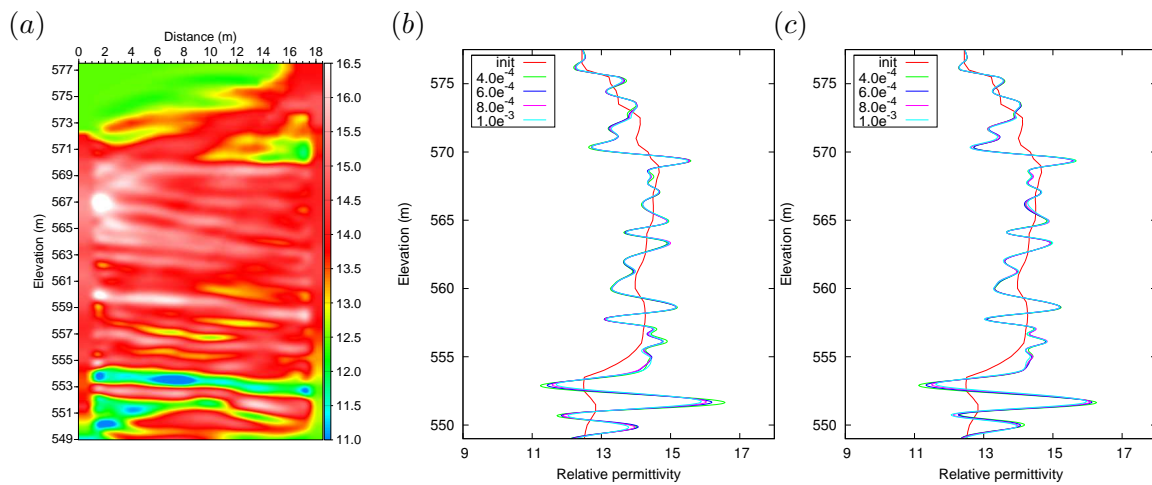


FIGURE 2.45 – Imagerie du site de Rustrel (top) : (a) modèle de permittivité relative reconstruit pour la source filtrée avec une stratégie fréquentielle Sweep, 5 itérations et  $\sigma_0 = 0.0006 S/m$ . Profils verticaux 1D à l'abscisse = 13.45 m pour la source globale (b) et la source filtrée (c). L'ensemble des profils se superposent presque pour chaque source.

Une première lecture de ces résultats indique que les valeurs de conductivité obtenues via la source globale sont en moyenne plus faibles que celles calculées avec la source filtrée. Ce phénomène se produit de façon systématique quel que soit le scaling (Fig. 2.46 (k) à (n)). Ces différences de valeurs moyennes sont à mettre directement en relation avec l'amplitude des sources utilisées dans chaque cas. La source filtrée, dont l'amplitude est grande, donne des conductivités moyennes grandes, tandis que la source globale, dont l'amplitude est plus

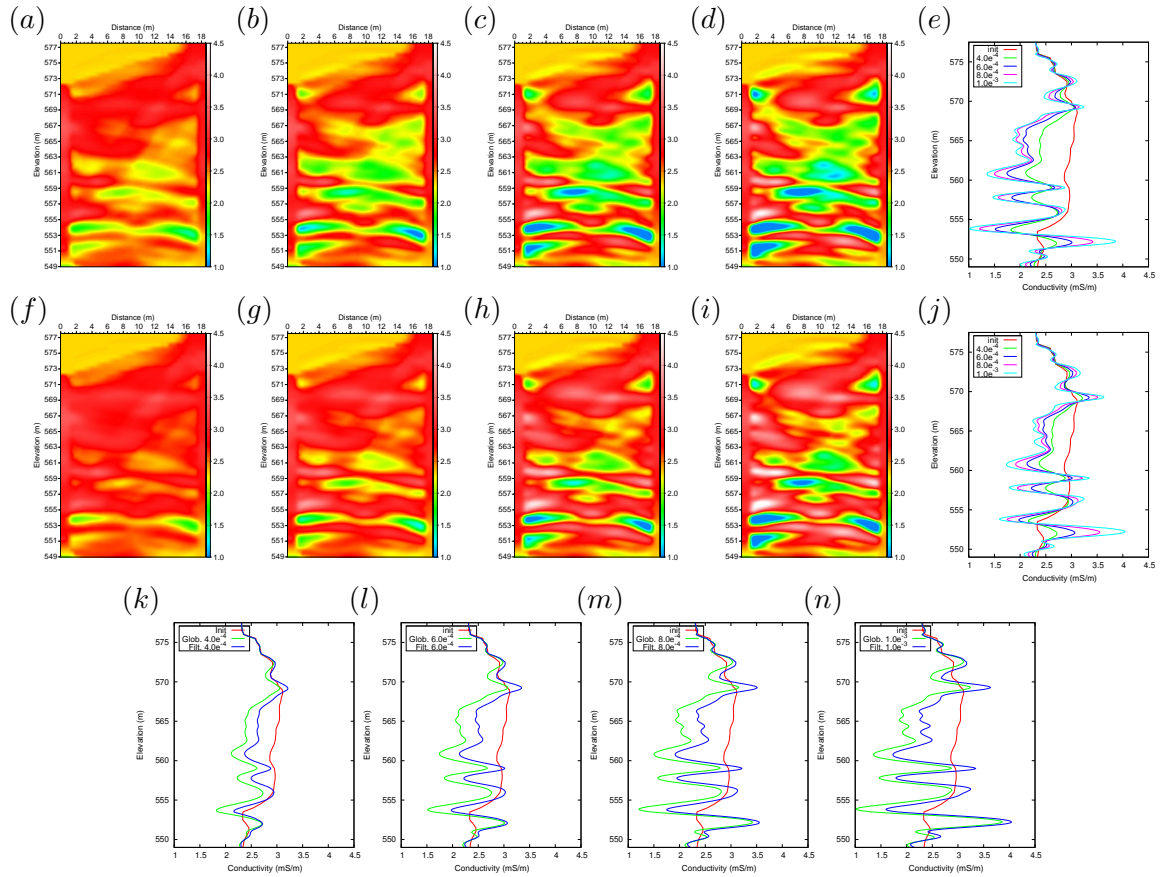


FIGURE 2.46 – Imagerie du site de Rustrel (top) : (a-d) modèles de conductivité reconstruits pour la source globale avec une stratégie fréquentielle Sweep, 5 itérations et les scaling : 0.0004, 0.0006, 0.0008 et 0.001 S/m. (f-i) comme (a-d) mais avec la source filtrée. (e) et (j) : profils verticaux 1D à l’abscisse = 13.45 m des modèles (a-d) et (f-i). (k-n) profils verticaux 1D à l’abscisse = 13.45 m pour les modèles associés à chaque scaling et les deux sources.

faible, donne des conductivités moyennes plus faibles. Ce phénomène logique montre le bon comportement de l’algorithme qui corrige la valeur moyenne de conductivité du milieu pour qu’à source fixée, et après propagation des ondes dans le milieu, les amplitudes des données calculées fittent au mieux les amplitudes des données observées.

Une seconde lecture des résultats est possible à travers la variation de  $\sigma_0$ . L’effet de balance introduit par ce paramètre est bien mis en évidence par des modèles faiblement actualisés lorsque  $\sigma_0$  est faible, et fortement dans le cas inverse. Il en découle des modèles plus ou moins contrastés en fonction de ce scaling (Fig. 2.46 (e) et (j)). Pour les scaling les plus élevés, des zones de très faible conductivité apparaissent à travers une conductivité affichée à 1 mS/m (Fig. 2.46 (c), (d), (h) et (i)). En réalité, la conductivité est voisine de zéro dans ces zones mais la dynamique de l’affichage ne permet pas de le voir. Ces zones critiques apparaissent progressivement dans l’inversion et c’est seulement la limite basse de conductivité, imposée par l’utilisateur (ici zéro), qui empêche la conductivité d’y devenir négative. Il semble donc qu’il faille utiliser des valeurs de scaling pas trop élevées afin de limiter l’apparition de ces zones. A ce stade, il n’existe aucun critère objectif pour sélectionner un modèle, si ce n’est le dire d’expert : une conductivité

négative dans les milieux géologiques n'est pas possible.

Ces exemples montrent que le modèle de permittivité obtenu après inversion peut être considéré comme robuste lors des inversions mono et multiparamètres alors que celui de conductivité sera à considérer de manière qualitative et relatif. Quoi qu'il en soit, la prise en compte de cette grandeur physique dans la modélisation directe et l'inversion permet de mieux expliquer les données, comme souligné par les fonctions coûts (Fig. 2.47). En effet, l'introduction de la conductivité, comme degré de liberté supplémentaire, conduit à une décroissance plus importante de la fonction coût par rapport au cas monoparamètre. L'analyse chiffrée met en évidence une diminution moyenne de 10 et 20 % pour les sources filtrée et globale par rapport à l'inversion monoparamètre. Il en résulte un écart resserré, entre les deux stratégies d'estimation de la sources, compris entre 2 et 4 % selon la valeur de  $\sigma_0$  (0.30 pour la source filtrée contre 0.33 % pour la source globale, en moyenne). Dans la mesure où l'amélioration apportée par l'inversion de la conductivité est significative, elle est directement observable dans les radargrammes (Fig. 2.48 et 2.49).

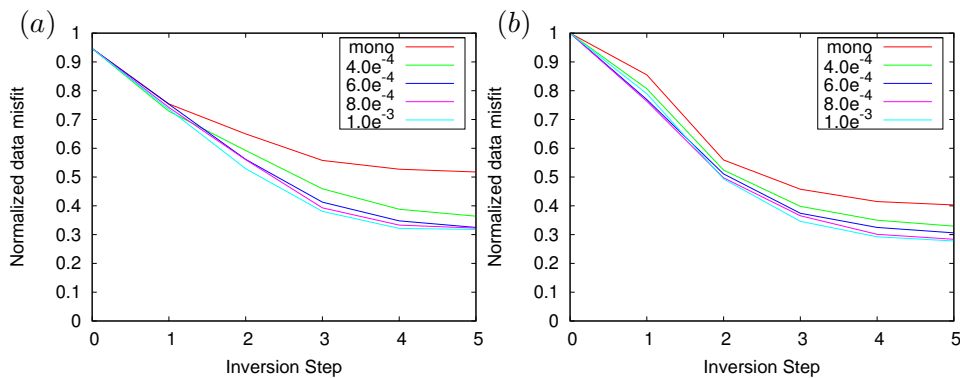


FIGURE 2.47 – Imagerie du site de Rustrel (top) : évolution de la fonction coût au cours de l'inversion. Les coûts ont été normalisés par le coût initial (Step 0) de la source filtrée. Les coûts finaux moyens pour la source globale (a) et la source filtrée (b) sont de 33 et 30 %. Les coûts monoparamètres ont été ajoutés.

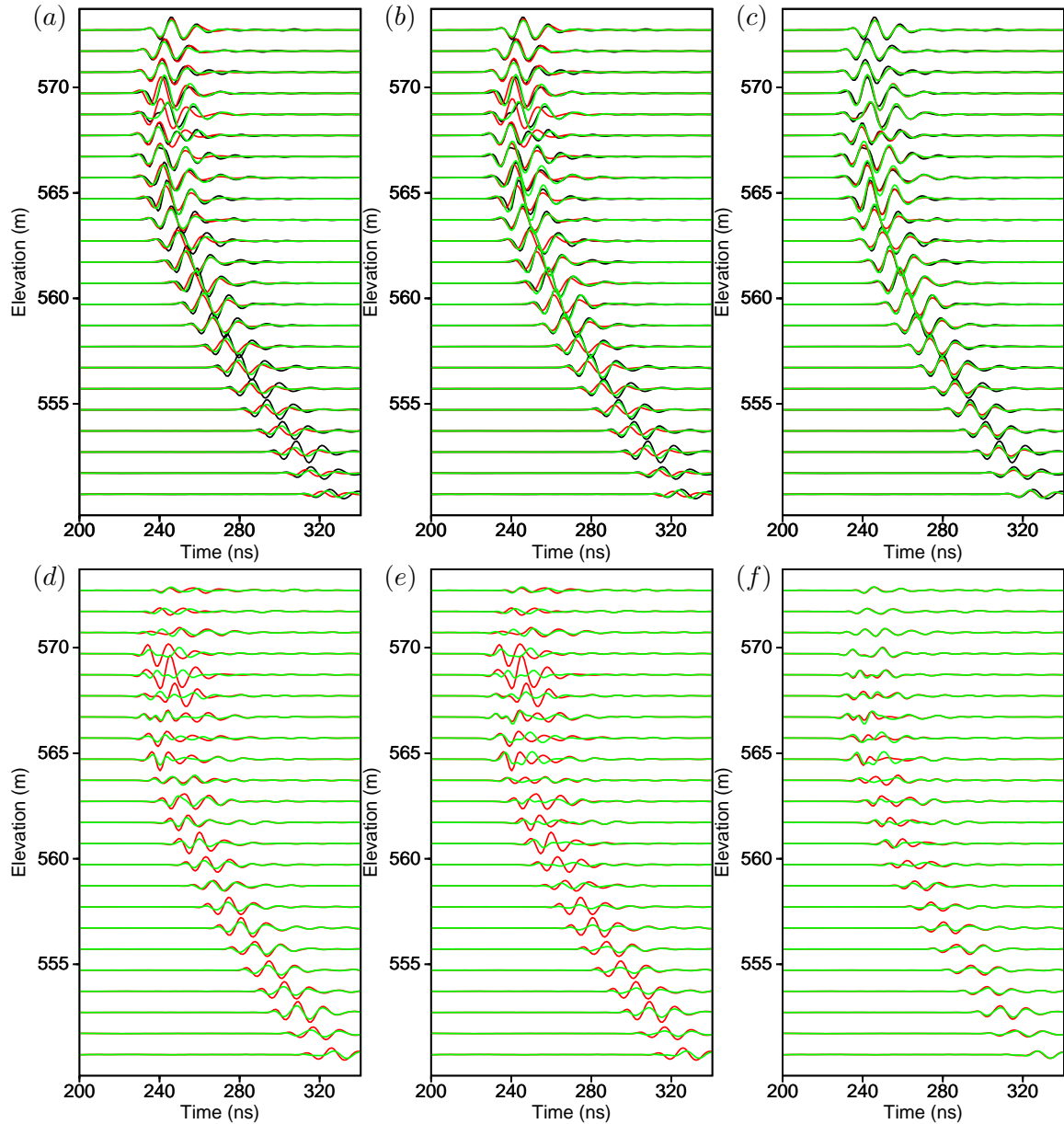


FIGURE 2.48 – Imagerie du site de Rustrel (top) : radargrammes associés à la source située à l’élévation 567 mètres. En première ligne : (a-b) données observées en noir, initiales en rouge et finales avec en vert (a) inversion monoparamètre et (b) inversion multiparamètres. En (c), comparaison des données observées en noir et finales pour les inversion mono en rouge et multiparamètres en vert. En seconde ligne : résidus des données situées à l’aplomb avec à chaque fois ”noir - rouge -> rouge” et ”noir - vert -> vert”.

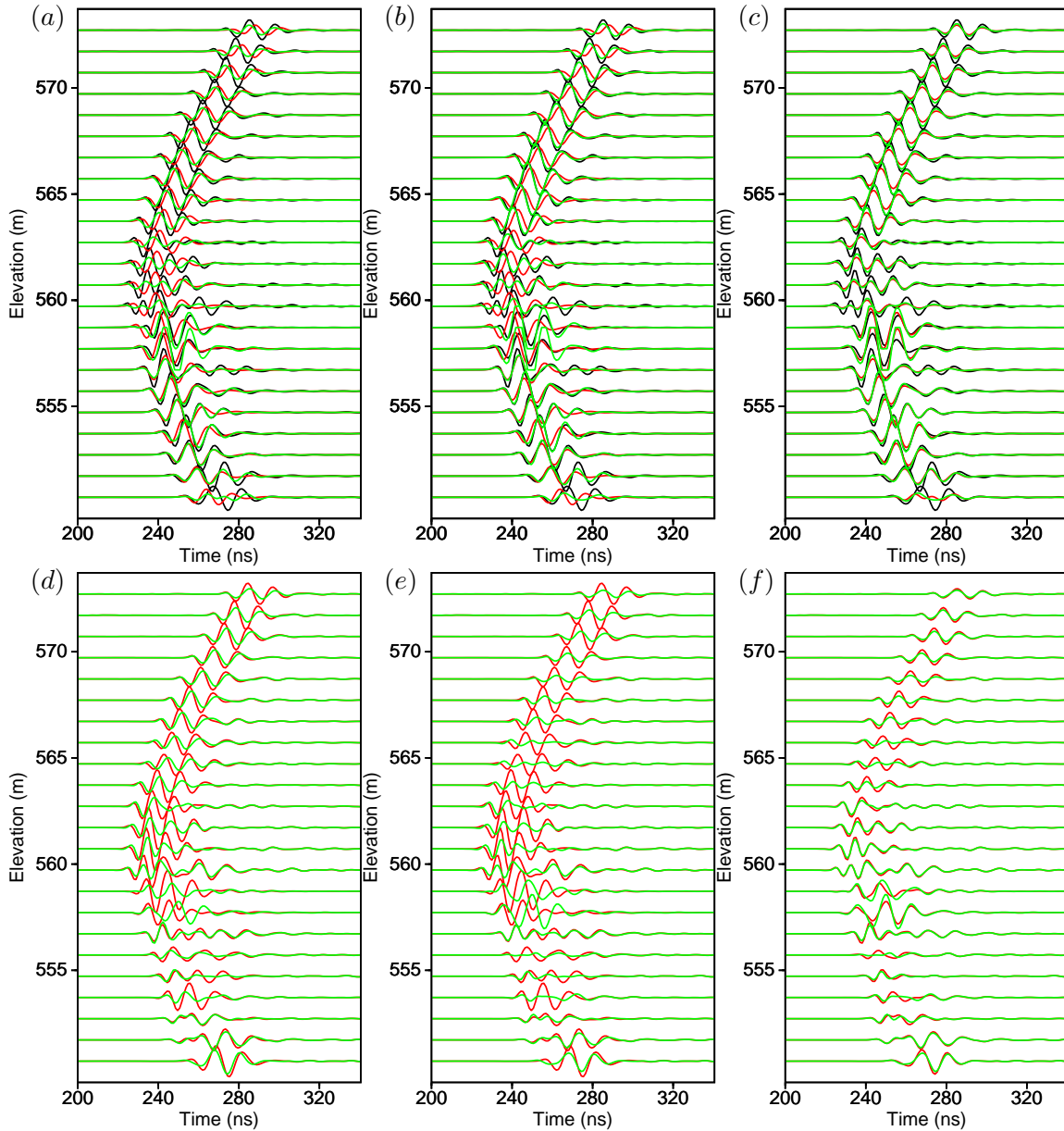


FIGURE 2.49 – Imagerie du site de Rustrel (top) : radargrammes associés à la source filtrée située à l’élévation 560 mètres. En première ligne : (a-b) données observées en noir, initiales en rouge et finales en vert pour (a) inversion monoparamètre et (b) inversion multiparamètres. En (c), comparaison des données observées en noir et finales pour les inversions mono en rouge et multiparamètres en vert. En seconde ligne : résidus des données situées à l’aplomb avec à chaque fois ”noir - rouge -> rouge” et ”noir - vert -> vert”.

### Imagerie sur modèle synthétique

Dans la continuité du travail fait en monoparamètre, les données synthétiques font l'objet d'inversions multiparamètres avec la stratégie Sweep, 5 itérations, les sources (Fig. 2.20) et une gamme de  $\sigma_0$  identique au cas réel (de 0.4 à 1 mS/m). Les modèles finaux de permittivité et les profils verticaux associés (Fig. 2.50) confirment la robustesse du processus d'inversion pour ce paramètre au travers de reconstructions presque identiques. Les modèles de conductivité, présentés en Figure 2.51 ainsi que les profils associés en Figure 2.52 montrent des variations analogues à celles observées précédemment. Ainsi, on retrouve le décalage vers des valeurs moyennes de conductivité plus faibles lorsque la source est de plus faible amplitude ou plus basse fréquence mais aussi des contrastes de conductivité de moins en moins marqués lorsque le scaling décroît. Notons que les décalages constants sont plus faibles que dans le cas réel. Cette observation est probablement liée à l'utilisation de sources elle-mêmes plus proches de la source référence en matière d'amplitude.

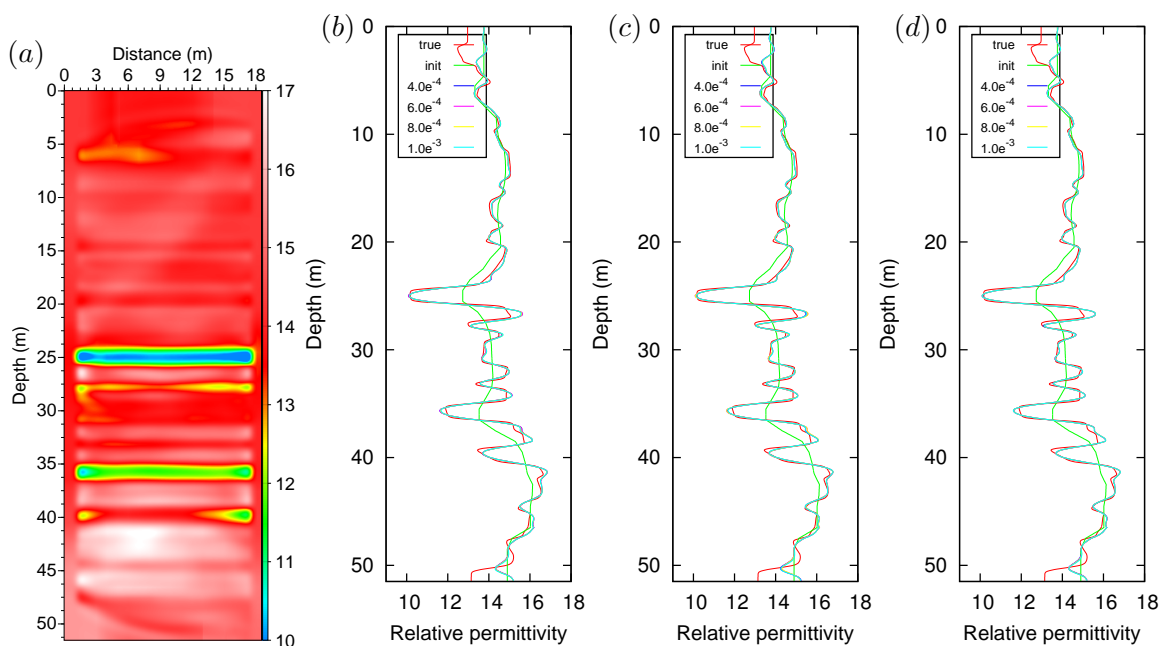


FIGURE 2.50 – Imagerie synthétique : (a) modèle de permittivité relative reconstruit pour la source filtrée avec une stratégie fréquentielle Sweep, 5 itérations et  $\sigma_0 = 0.0006 S/m$ . Profils verticaux 1D à l'abscisse = 9.2 m pour le Ricker (b), la source globale (c) et la source filtrée (d). L'ensemble des profils se superposent presque pour chaque source.

L'analyse des coûts montre des tendances variables (Fig. 2.53). Lorsque le Ricker ou la source filtrée sont utilisés, les erreurs mesurées dans les cas multiparamètres sont systématiquement plus faibles que celles issues du cas monoparamètre. Par contre, dans le cas de la source globale, l'erreur moyenne, calculée pour les différents scaling, est confondue avec l'erreur monoparamètre. Ainsi, au fur et à mesure que la source utilisée dans l'inversion s'éloigne de la source de référence, l'intérêt d'inverser la conductivité diminue.



# INVERSION DES CHAMPS D'ONDES ACQUIS EN TRANSMISSION DANS UN MILIEU CARBONATÉ

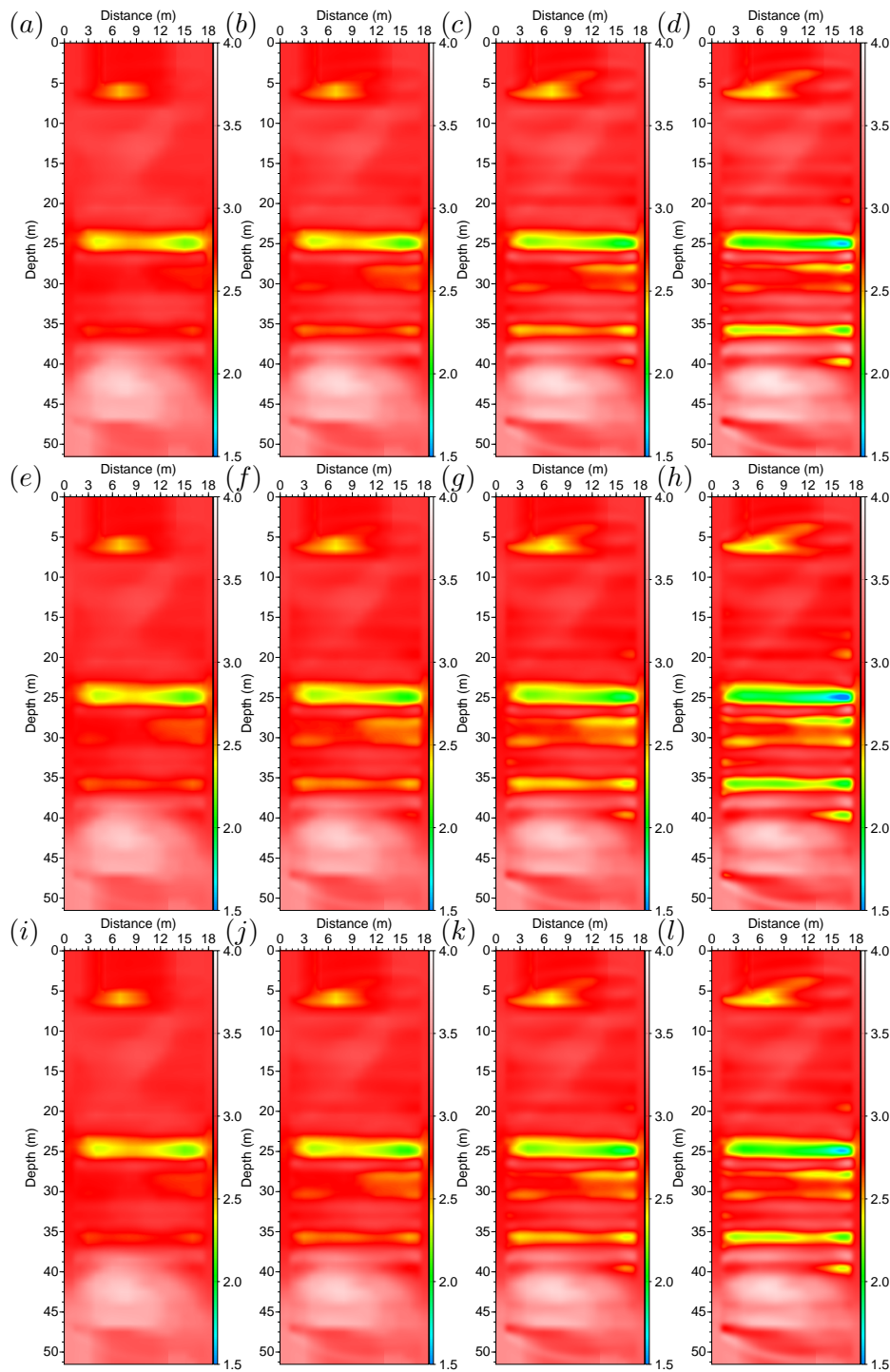


FIGURE 2.51 – Imagerie synthétique : modèles de conductivité reconstruits avec une stratégie fréquentielle Sweep et 5 itérations. Les sources utilisées sont le Ricker (première ligne), la source globale (deuxième ligne) et la source filtrée (troisième ligne). Les scaling utilisés sont 0.0004, 0.0006, 0.0008 et 0.001 S/m de la première à la quatrième colonne.

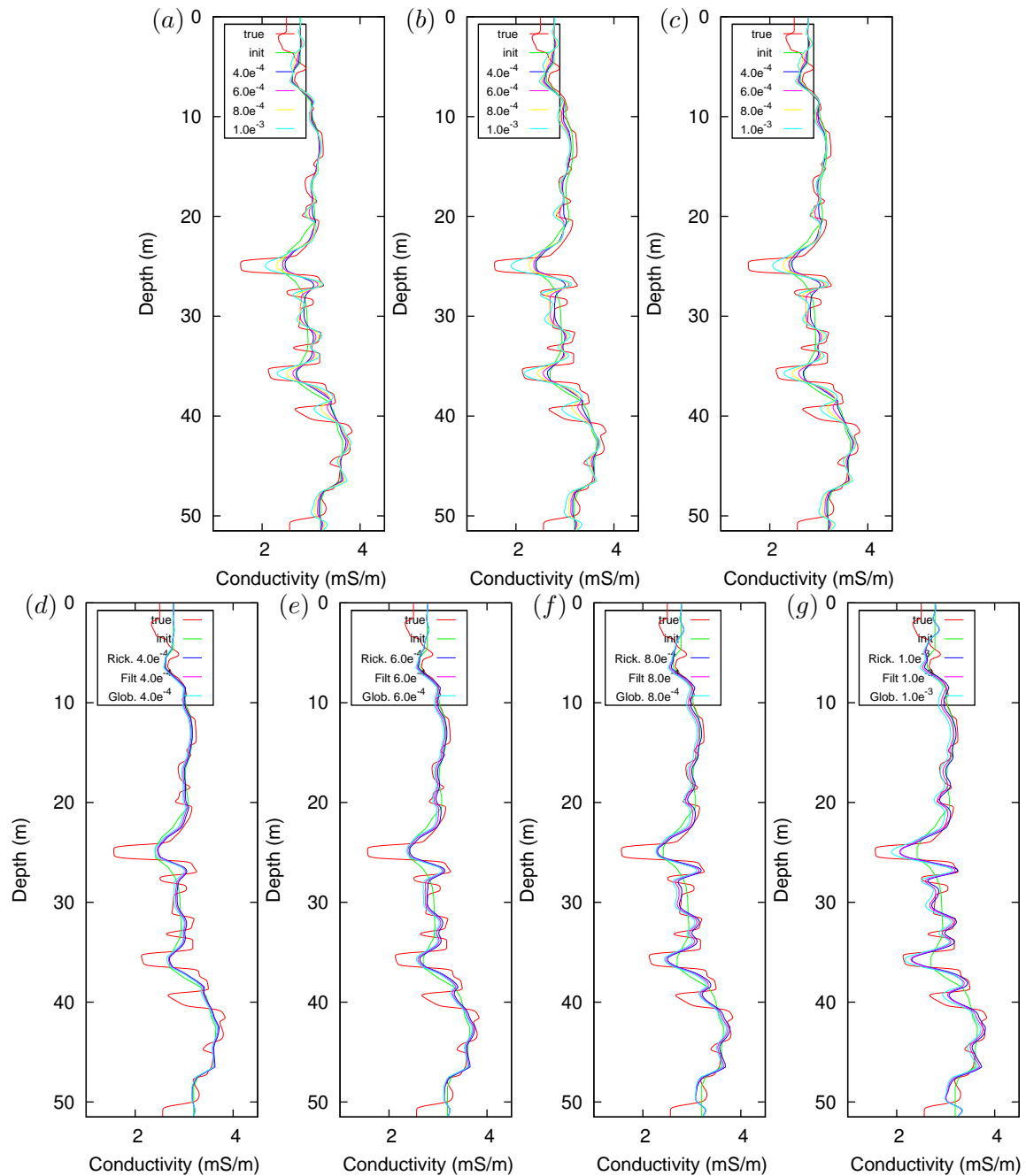


FIGURE 2.52 – Imagerie synthétique : profils verticaux 1D à l'abscisse = 9.2 m pour les modèles présentés en Figure 2.51. Première ligne : profils tracés pour le Ricker (a) et les sources globale et (b) et filtrée (c). Deuxième ligne : profils tracés pour les scaling 0.0004 (d), 0.0006 (e), 0.0008 (f) et 0.001 S/m (g).

En l'espèce, le gain obtenu en inversant la conductivité semble faible comparé au cas réel, avec une diminution de seulement 2 à 3 % dans les meilleurs cas (Fig. 2.53). Cela résulte très probablement d'une plage de variation de conductivité relativement restreinte (par rapport au cas réel) ne permettant pas à ce paramètre d'avoir un impact fort sur les résidus. Nous sommes

# INVERSION DES CHAMPS D'ONDES ACQUIS EN TRANSMISSION DANS UN MILIEU CARBONATÉ

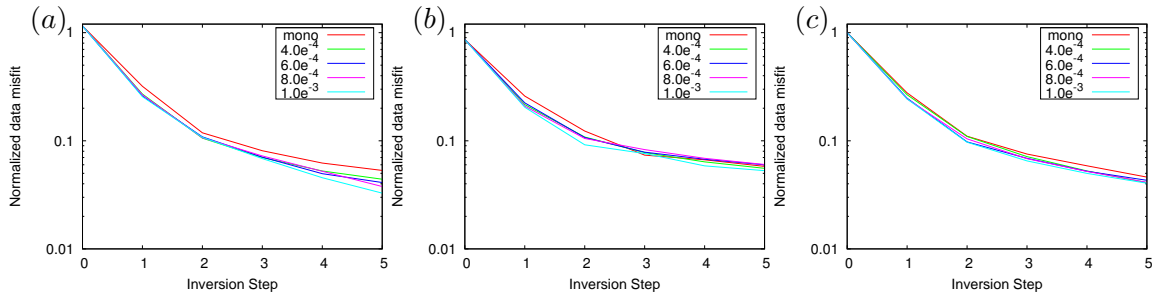


FIGURE 2.53 – Imagerie synthétique : évolution de la fonction coût au cours de l'inversion. Les coûts ont été normalisés par le coût initial (Step 0) de la source filtrée. Les coûts monoparamètres ont été ajoutés. Les coûts sont présentés pour les différents scaling et les différentes sources : (a) Ricker, (b) source globale et (c) source filtrée.

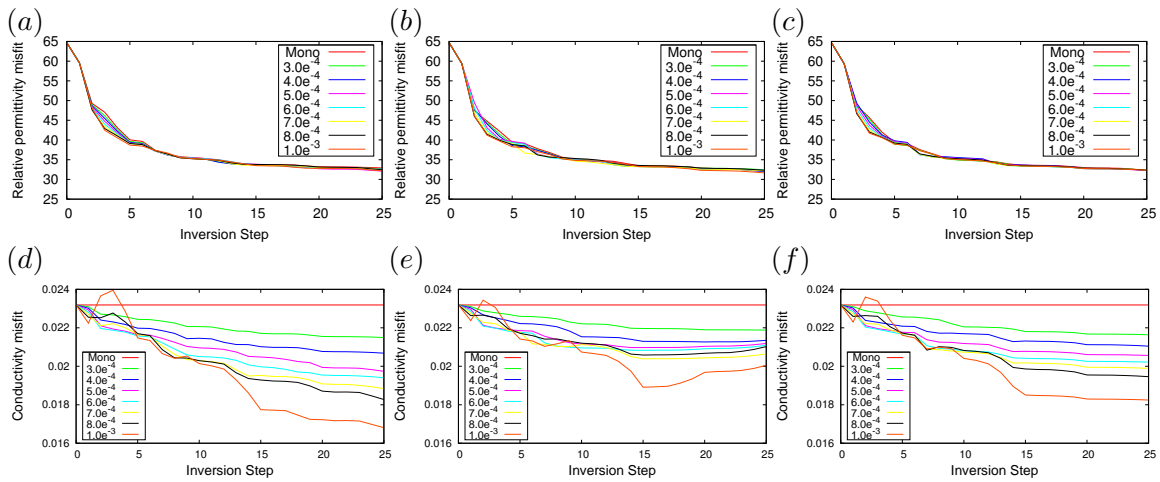


FIGURE 2.54 – Imagerie synthétique. Première ligne : évolution de l'erreur de permittivité relative au cours de l'inversion pour le Ricker (a),(b) source globale et (c) source filtrée. Deuxième ligne : évolution de l'erreur de conductivité au cours de l'inversion pour le (d) Ricker, (e) la source globale et (f) la source filtrée.

donc dans un cas où l'influence de la conductivité est difficile à mettre en évidence.

La formule 2.11 est utilisée pour calculer les erreurs dans l'espace des modèles en fonction des sources et des scaling. Les résultats, rassemblés en Figure 2.54, confirment les informations avancées jusqu'ici. La permittivité est robuste vis-à-vis des scaling et des sources utilisées alors que la conductivité y est très sensible. L'analyse des erreurs de conductivité se divise en deux parties : avant et après les trois premiers groupes de fréquences (step 15).

Après les trois premiers groupes de fréquences, les inversions menées avec le Ricker voient les erreurs sur la conductivité décroître de façon monotone et cela d'autant plus que le scaling est élevé. A l'opposé, lorsque les sources estimées sont utilisées, les erreurs de conductivité tendent à se stabiliser voire à augmenter. Il existe donc un lien entre la qualité de la restitution haute fréquence de la source et la qualité de la reconstruction de la conductivité. En effet, la perte de haute fréquence des sources estimées (Fig. 2.21) crée un décalage moyen des valeurs de conductivité (Fig. 2.52) par rapport à celles obtenues avec le Ricker. Ce décalage se répercute

ensuite sur la conductivité (Fig. 2.54 (d-f)).

En se fiant uniquement à l'erreur de conductivité finale, nous aurions tendance à choisir les scaling les plus grands. Cependant, l'erreur ne décroît pas de façon monotone lors des deux derniers groupes de fréquences. Ainsi, lors de ces deux groupes, l'algorithme corrige en priorité la permittivité au détriment de la conductivité dont l'erreur peut augmenter lorsque les scaling les plus grands sont utilisés. Comme cette augmentation n'est pas souhaitable, nous ne retenons pas les scaling associés à ce phénomène. En définitive, le scaling répondant le mieux aux critères de décroissance monotone sur l'ensemble de l'inversion et d'erreur minimale finale est  $\sigma_0 = 0.0006 S/m$ . Compte tenu des comportements et des caractéristiques similaires entre les inversions de données réelles et synthétiques, ce scaling est également retenu dans le cas réel. La visualisation des modèles associés (Fig. 2.46 (b) et (g)) montrent que les bornes imposées ne sont pas atteintes pour la source filtrée, et presque pas pour la source globale, tout en ayant des contrastes marqués, ce qui tend à valider ce choix.

Pour conclure, il existe un fort compromis entre la source estimée initialement et la conductivité reconstruite. Comme la source n'est pas mise à jour lors de l'inversion, il est donc primordial d'avoir une source aussi fiable que possible dès le départ si l'on veut obtenir la conductivité la plus correcte possible. Au-delà de cette conclusion, cette investigation soulève deux questions :

Comment se fait-il, qu'à l'état final, il y ait un seul modèle de permittivité alors que plusieurs modèles de conductivité, différenciés uniquement par la résolution, coexistent ? Est-ce que le manque potentiel de hautes fréquences des sources estimées dans le cas réel suffit à expliquer les différences importantes de résolution entre la permittivité et la conductivité (comparaison des Figures 2.45 (a) et 2.46 (g)), malgré un diagramme de radiation semblable ?

#### 2.4.4.2 Nombre d'itérations et inversion monoparamètre pour la conductivité

Afin de réévaluer, dans le cadre d'une approche multiparamètres, les résultats obtenus en monoparamètre concernant le nombre d'itérations, les données réelles et synthétiques sont inversées avec : le scaling optimal ( $\sigma_0 = 0.0006 S/m$ ), les sources filtrées (obtenues dans les cas réel et synthétique), la stratégie Sweep et 10 itérations par groupe de fréquences. Les résultats (Fig. 2.55) indiquent que la borne inférieure de conductivité est de nouveau atteinte au travers des valeurs proches de zéro. Ainsi, l'augmentation du nombre d'itérations, non souhaitable mais non préjudiciable pour la permittivité (cf partie 2.4.3.3), devient critique lorsque la conductivité est inversée. L'analyse des coûts encourage à conserver l'augmentation du nombre d'itérations, car les coûts finaux diminuent de manière non négligeable de 6.7 et 2.4 % (Fig. 2.56). Suite à cette divergence des résultats concernant l'intérêt d'augmenter ou pas le nombre d'itérations, nous choisissons tout de même de continuer avec 5 itérations pour éviter de trop converger et endommager la conductivité, quitte à avoir un modèle plus lisse.

Grâce aux profils verticaux (Fig. 2.55 (c) et (f)), il est intéressant de noter que l'augmentation du nombre d'itérations ou l'utilisation d'un scaling plus élevé ont des effets analogues sur l'évolution des modèles de conductivité. En effet, ces 2 approches mènent à un modèle plus contrasté et plus proche du modèle vrai (dans le cas synthétique). Pour expliquer cette observation, on peut émettre l'hypothèse qu'un scaling et/ou un nombre d'itérations relativement faible ne permettent pas d'atteindre le vrai modèle final de conductivité mais plutôt un modèle intermédiaire entre le vrai modèle final et le modèle initial. Si cette hypothèse était vérifiée,

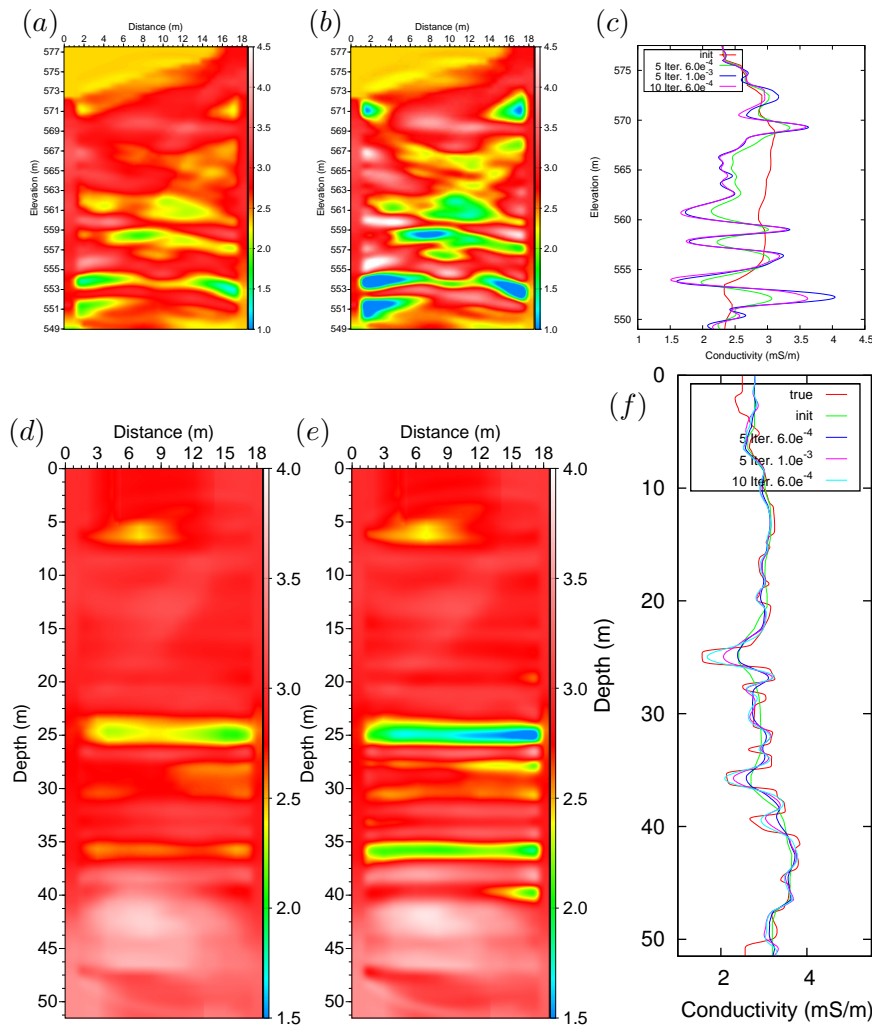


FIGURE 2.55 – Imagerie du site de Rustrel (top) (première ligne) et imagerie synthétique (seconde ligne). Première ligne : modèles de conductivité reconstruits avec une stratégie fréquentielle Sweep, la source filtrée,  $\sigma_0 = 0.0006 S/m$  en utilisant 5 (a) et 10 (b) itérations par groupe de fréquences puis profils verticaux 1D (c) à l’abscisse  $x = 13.45 m$ . (d-f) comme pour ((a-c) mais le profil est relevé à l’abscisse  $x = 9.2 m$ . Le profil vertical, calculé pour une source filtrée, la stratégie Sweep,  $\sigma_0 = 0.001 S/m$  et 5 itérations par groupe de fréquences, a été ajouté dans les deux cas.

elle expliquerait l’origine des différents modèles de conductivité présentés en Figures 2.46 et 2.51.

Afin de valider cette hypothèse, une nouvelle inversion synthétique monoparamètre est menée. Les données observées sont calculées avec la source Ricker dans les modèles de référence (Fig. 2.18 (a) et (c)). Dans cet exemple, seule la conductivité est reconstruite en partant du modèle initial (Fig. 2.18 (d)) pendant que la permittivité, supposée connue et identique au modèle de référence, reste fixe. Pour éviter l’influence des différents groupes de fréquences, seul le premier groupe est considéré dans l’inversion pendant que le nombre d’itérations maximales est porté à 20 pour évaluer s’il y convergence vers une solution unique ou pas. Enfin, plusieurs

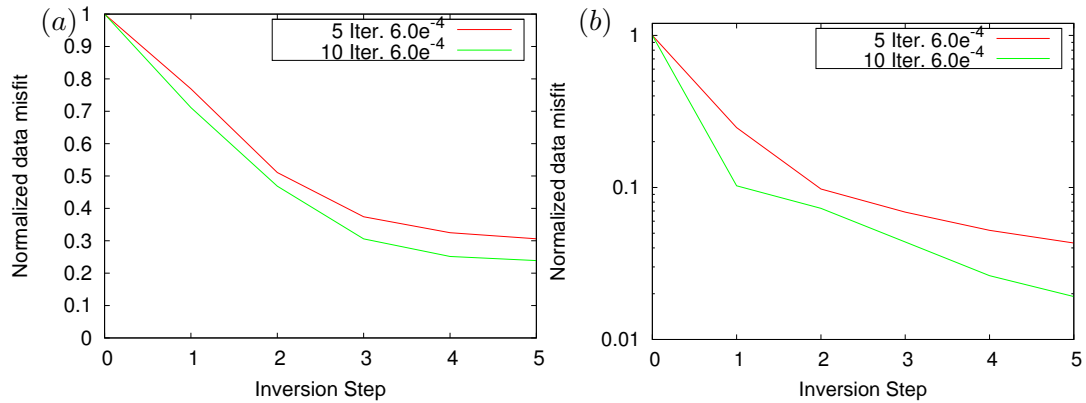


FIGURE 2.56 – Imagerie du site de Rustrel (top) en (a) et imagerie synthétique (b) : évolution de la fonction coût au cours de l’inversion. Les coûts ont été normalisés par le coût initial (Step 0) de la source filtrée associée à chaque cas. Lorsque l’on passe de 5 à 10 itérations, les coûts finaux passe de 30.6 à 23.9 % en (a) et de 4.3 à 1.9 % en (b).

valeurs de  $\sigma_0$  sont testées.

Le modèle final de conductivité obtenu pour le scaling optimal est présenté en Figure 2.57 (a). Il est accompagné des profils verticaux extraits des modèles de conductivité obtenus à différentes itérations pour les différents scaling. La justesse du modèle présenté avec la référence (Fig. 2.18 (b)) est à mettre sur le compte de la bonne cinématique fournie par la permittivité vraie et de la source utilisée. Ceci est confirmé par le profil vertical associé (Fig. 2.57 (e)), qui est voisin du profil de référence, comme tous les autres d’ailleurs. Avec un nombre d’itérations suffisant, il est donc possible de converger vers le modèle unique. Par ailleurs, l’analyse des profils associés aux premières itérations (Fig. 2.57 (b) et (c)) montre que le scaling a une influence forte sur la convergence vers le modèle unique. De manière contre-intuitive au premier abord, les scaling les plus élevés ne permettent pas forcément de converger plus rapidement vers le modèle vrai. Ce phénomène, illustré sur les profils verticaux par une convergence plus rapide pour  $\sigma_0 = 0.0006 S/m$  (qui n’est pas le scaling le plus élevé), s’explique par l’interaction entre l’effet du scaling sur le paramètre à reconstruire et le gradient associé, d’une part, et les règles de Wolf utilisées pour calculer la longueur de descente, d’autre part. Dans ce contexte, les divers degrés de convergence de la conductivité, visibles lors des premières itérations, au niveau des couches les plus rapides, sont à rapprocher des observations faites en Figures 2.46 (e) et (j), 2.52 (d-g) et 2.55 (c) et (f).

En définitive, les investigations multiparamètres ont révélé que le scaling et le nombre d’itérations ont un effet commun : une convergence de la conductivité vers des modèles de plus en plus contrastés jusqu’à atteindre des valeurs non physiques par endroits. Pour éviter ce dernier point, nous pouvons et avons joué sur deux leviers : limiter le nombre d’itérations (à 5) et/ou utiliser des scaling relativement faibles de manière à favoriser la permittivité plutôt que la conductivité. Dans la continuité, le dernier test a permis d’expliquer l’origine des différents modèles de conductivité obtenus en Figure 2.51 : tous les modèles convergent vers une solution (ou au moins un groupe de solutions voisines) mais sont stoppés à des stades de convergence différents. Il faudra donc garder à l’esprit que les conductivités absolues des couches géologiques ne seront probablement jamais atteints dans cette étude.

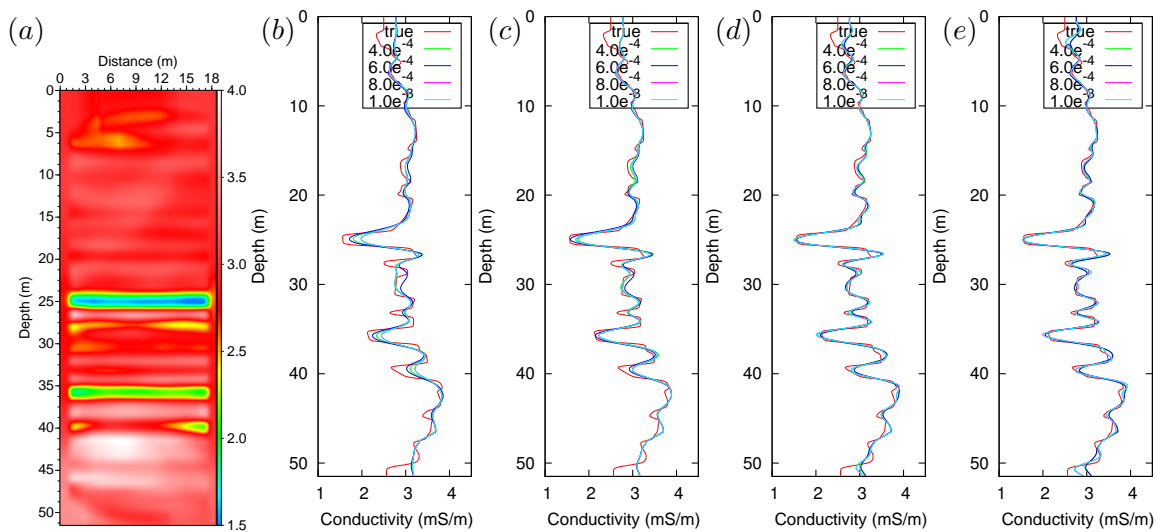


FIGURE 2.57 – Imagerie synthétique : modèle de conductivité reconstruit lors d’une inversion monoparamètre à permittivité vraie avec le Ricker, le premier groupe de fréquence, 20 itérations et  $\sigma_0 = 0.0006 \text{ S/m}$ . Des profils verticaux de conductivité 1D sont relevés à l’abscisse = 9.2 après (b) 2, (c) 4, (d) 11 et (e) 18 itérations dans ce cas mais aussi pour d’autres scaling. Notons que tous les profils convergent vers une solution unique lorsque le nombre d’itérations est suffisamment grand.

### 2.4.4.3 Une inversion multiparamètres ou deux inversions monoparamètres ?

Depuis le début de ce chapitre, nous nous efforçons d’inverser simultanément la permittivité et la conductivité avec la difficulté de sélectionner un scaling optimal. On peut donc se demander s’il n’est pas plus judicieux de raisonner en deux étapes successives dans un workflow dit séquentiel. Lors d’une première étape, la permittivité est inversée à conductivité initiale fixée puis, lors d’une seconde étape, la conductivité est inversée en prenant comme modèle de permittivité fixé celui obtenu lors de la première étape. En plus de s’affranchir du scaling, une telle démarche présente l’avantage de fournir une cinématique fiable pour bien reconstruire la conductivité. L’investigation monoparamètre réalisée précédemment (cf partie 2.4.4.2) renforce d’ailleurs ce point de vue car le modèle final de conductivité était satisfaisant (Fig. 2.57 (a)).

En fait, la première étape de ce nouveau workflow a déjà été réalisée (cf partie 2.4.3.1). Concernant la seconde étape, nous repartons des modèles finaux de permittivité présentés en Figures 2.25 et 2.28 puis inversons la conductivité. Pour ce qui est des entrées requises pour ces inversions, le scaling est fixé à 1 (pas de scaling), les modèles initiaux de conductivité sont en Figures 2.22 (b) et 2.18 (d), la stratégie fréquentielle dite Sweep est utilisée avec 5 itérations par groupe de fréquences et les différentes sources sont testées.

Les modèles finaux de conductivité, pour les données synthétiques et réelles, sont fournis respectivement en Figures 2.58 et 2.59. Dans le cas synthétique, les modèles finaux de conductivité, issus des différentes sources, présentent de nombreuses oscillations. Un tel phénomène n’est pas nouveau et a déjà été rencontré par Kamei & Pratt (2013) en sismique cross-hole et Lavoué *et al.* (2014) en électromagnétisme (illumination complète et de surface). Les oscillations apparaissent lorsque l’inversion favorise la conductivité comme c’est le cas ici à travers un poids infini pour la conductivité. Après investigations, ces auteurs arrivent à la conclusion que

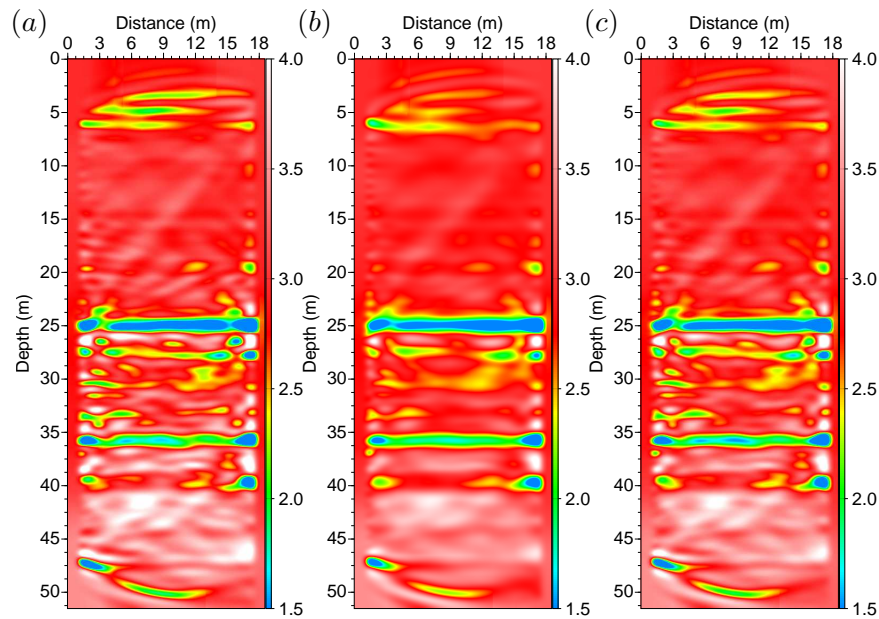


FIGURE 2.58 – Imagerie synthétique : modèles de conductivité reconstruits lors d’une inversion monoparamètre après une première inversion monoparamètre de la permittivité. Les résultats ont été obtenus pour le Ricker (a), la source globale (b) et la source filtrée (c) avec 5 itérations par groupe de fréquences, la stratégie Sweep et  $\sigma_0 = 1$ . Notons les nombreuses oscillations.

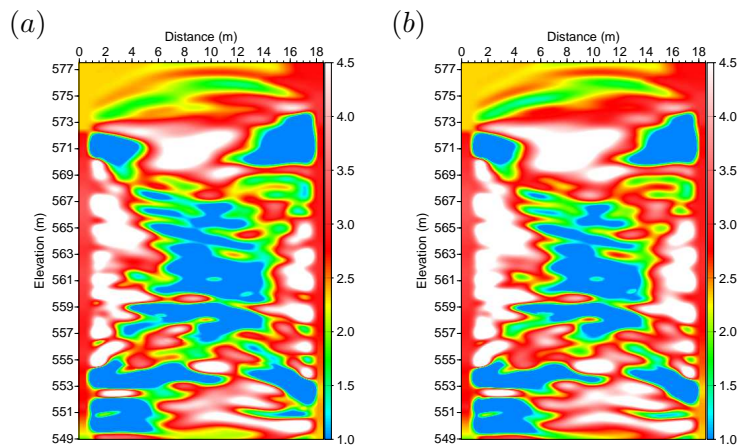


FIGURE 2.59 – Imagerie du site de Rustrel (top) : modèles de conductivité reconstruits lors d’une inversion monoparamètre après une première inversion monoparamètre de la permittivité. Les résultats ont été obtenus pour la source globale (a) et la source filtrée (b) avec 5 itérations par groupe de fréquences, la stratégie Sweep et  $\sigma_0 = 1$ .

ces fluctuations sont non physiques et qu’elles trouvent leur origine dans le compromis entre les paramètres. Dans le cas présent, le filtre gaussien, mis en place pour lisser le gradient, n’est pas suffisant pour empêcher l’apparition de ces artéfacts. Pour y remédier, Kamei & Pratt (2013) proposent une deuxième inversion multiparamètres et non plus monoparamètre. Cependant, ce choix implique à nouveau de définir un scaling optimal afin de balancer le poids des paramètres



lors de la seconde inversion.

Dans le cas réel, en plus des oscillations, le compromis se manifeste par une surestimation nette des valeurs de conductivité (autant à la hausse qu'à la baisse). De tels artéfacts trouvent leur origine dans un résidu non négligeable associé à la permittivité à l'issue de la première étape. Un tel résidu existe puisque l'augmentation du nombre d'itérations, non retenue ici à cause des artéfacts, conduit à réduire l'écart entre modèles de référence et final (cf partie 2.4.3.3). Ce résidu issu de la permittivité est corrigé lors de la seconde étape par de la conductivité menant naturellement à la surestimation observée.

Quoi qu'il en soit, ces exemples montrent, que dans le cas présent, il est préférable d'inverser simultanément les deux paramètres avec un scaling judicieusement choisi dès le début. Ce choix de workflow simultané, plutôt que séquentiel, est d'ailleurs renforcé par un coût de calcul double requis par l'option séquentielle pour laquelle les cinq inversions non-linéaires doivent être réalisées deux fois.

#### 2.4.4.4 Conclusion

Les tests réalisés au cours de ce sous-chapitre ont tout d'abord permis d'évaluer l'intérêt de passer d'une inversion monoparamètre à une inversion multiparamètres. Les résultats issus des données réelles et synthétiques montrent que ce passage est essentiel si l'on veut expliquer au mieux les formes d'ondes électromagnétiques. Cependant, il est apparu, au fur et à mesure des investigations, que la conductivité nouvellement introduite n'est pas quantitative mais qualitative. En effet, elle est apparue très sensible à la source utilisée, surtout pour les hautes fréquences, mais aussi au scaling et aux nombres d'itérations utilisés. Pour faire face à cette sensibilité, nous avons dû fixer un scaling et un nombre d'itérations relativement faibles pour limiter l'update de ce paramètre évitant ainsi la convergence vers des valeurs non physiques. Enfin, nous avons testé l'intérêt d'une inversion séquentielle de la permittivité et de la conductivité, plutôt que simultanée, mais les résultats obtenus montrent qu'il est préférable de rester sur une inversion simultanée.

#### 2.4.5 Inversion multiparamètres et mise à jour de la source

A l'issue des investigations précédentes, il apparaît que le choix d'une source estimée au début de l'inversion, puis fixée par la suite, est une limitation à la reconstruction de la conductivité (Fig. 2.54 (d-f)). Le but de cette partie est donc de tester l'intérêt d'une mise à jour régulière de la source.

Il existe au moins deux possibilités pour réestimer la source, soit à chaque itération non linéaire, soit à chaque inversion non linéaire. Dans cette étude, c'est la seconde possibilité qui est retenue, afin de permettre au milieu géologique d'être corrigé suffisamment entre deux mises à jour de l'ondelette, limitant ainsi les possibles effets "aller-retour" entre la source et le milieu. La source nouvellement estimée, à la fin d'un groupe de fréquences, est utilisée pour inverser le suivant. A l'image du travail développé jusqu'ici, l'inversion des données réelles précède celle des données synthétiques avec, dans les deux cas, une inversion monoparamètre et une inversion multiparamètres (avec  $\sigma_0 = 0.0006 S/m$ ).

### 2.4.5.1 Imagerie du site de Rustrel

Les Figures 2.60, 2.61 et 2.62 montrent les modèles reconstruits et les profils verticaux associés. Ces figures mettent en avant la grande stabilité de la reconstruction de la permittivité vis à vis de l'évolution de la source, que ce soit avec une approche monoparamètre ou multiparamètres. A l'opposé, la conductivité est plus sensible avec des décalages moyens clairement observables. Notons que ces décalages peuvent se faire à la hausse (source globale) et à la baisse (source filtrée).

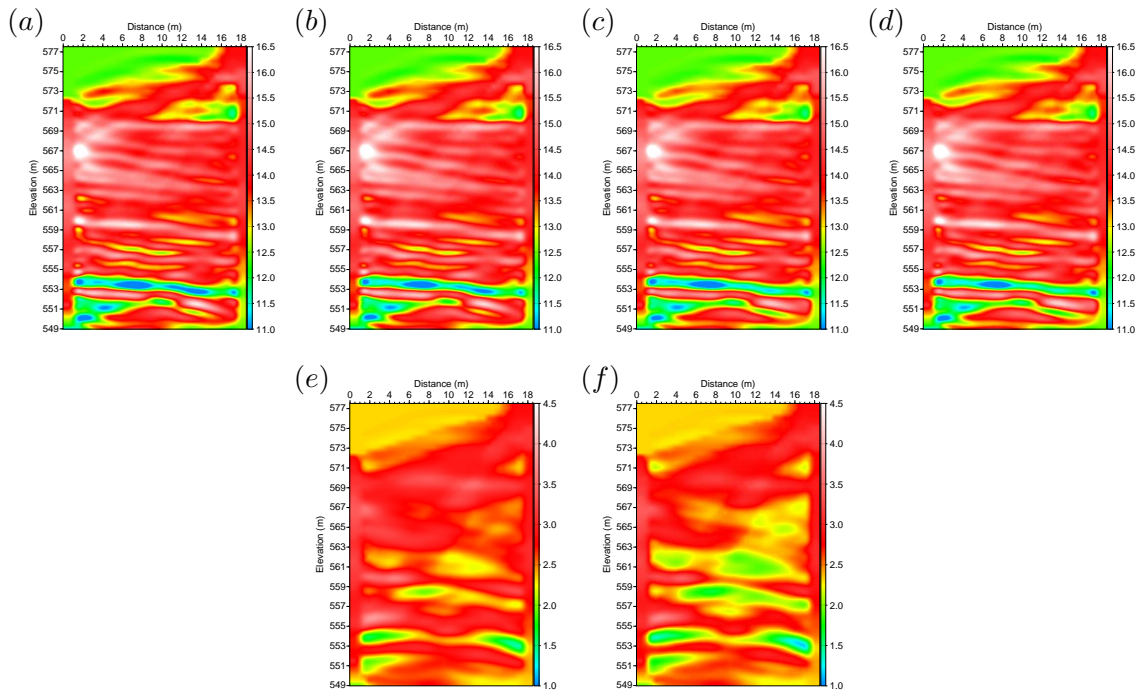


FIGURE 2.60 – Imagerie du site de Rustrel (top). En première ligne, les modèles de permittivité reconstruits lors d'inversion mono (a et b) et multiparamètres avec  $\sigma_0 = 0.0006 S/m$  (c et d) pour les sources globale (a et c) et filtrée (b et d) qui sont mises à jour durant l'inversion (Fig. 2.63). En deuxième ligne, les modèles de conductivité (e et f) issus des inversions multiparamètres dont les permittivités sont respectivement (c) et (d).

Du côté des sources (Fig. 2.63), des variations significatives sont également observées. La source globale voit son amplitude augmenter en monoparamètre et en multiparamètres, tandis que la source filtrée affiche deux tendances opposées avec une augmentation d'amplitude en monoparamètre et une diminution en multiparamètres. Cette évolution de la source, qui a peu d'effet sur la permittivité, impacte directement la conductivité à laquelle elle est donc liée. La source, dont l'amplitude a augmenté, donne un modèle final de conductivité moyenne plus élevée et inversement. Ce lien entre amplitude de la source et conductivité moyenne a déjà été mis en évidence précédemment. La nouveauté, c'est la possibilité de voir ce phénomène se produire au cours de l'inversion et dans des directions variables.

# INVERSION DES CHAMPS D'ONDES ACQUIS EN TRANSMISSION DANS UN MILIEU CARBONATÉ

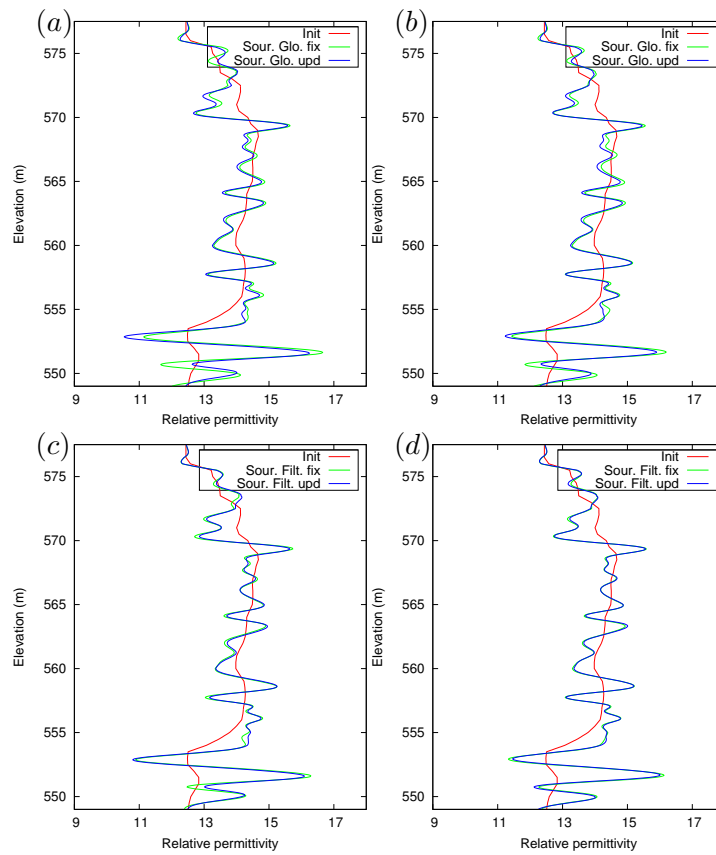


FIGURE 2.61 – Imagerie du site de Rustrel (top) : profils verticaux 1D de permittivité relative à l'abscisse = 13.45 m pour les modèles présentés en Figure 2.60 pour les deux sources et les inversions mono (a et c) et multiparamètres (b et d). A chaque fois, le profil obtenu à source fixe a été ajouté pour comparaison.

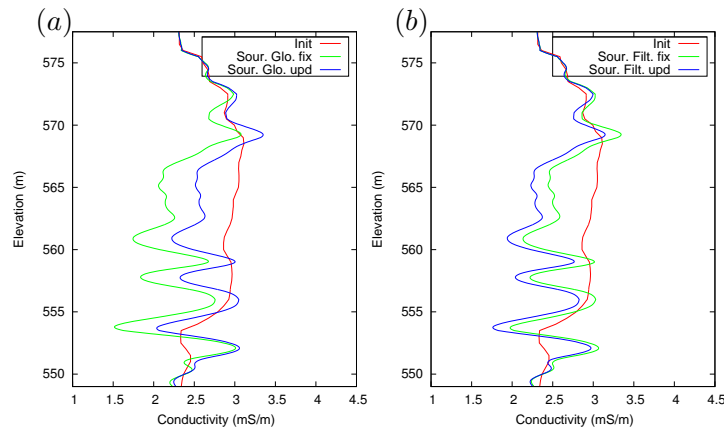


FIGURE 2.62 – Imagerie du site de Rustrel (top) : profils verticaux 1D de conductivité à l'abscisse = 13.45 m pour les modèles présentés en Figure 2.60 pour les deux sources. A chaque fois, le profil obtenu à source fixe a été ajouté pour comparaison.

Concernant la source elle-même, sa mise à jour induit une augmentation de son contenu fréquentiel (Fig. 2.64). Cette augmentation s'explique par la convergence du modèle courant vers le modèle vrai, au fur et à mesure de l'inversion. Il en résulte que les fonctions de Green, calculées dans les modèles les plus récents, sont de plus en plus à même de décrire la propagation des ondes hautes fréquences, ce qui limite en retour la destruction par sommation du contenu haute fréquence de la source (formule 2.10). Dans le domaine temporel, cette montée en fréquence se manifeste par un resserrement de la source (Fig. 2.63) et par un rétablissement partiel de sa causalité, validant du même coup une des hypothèses émises pour expliquer ce manque de causalité.

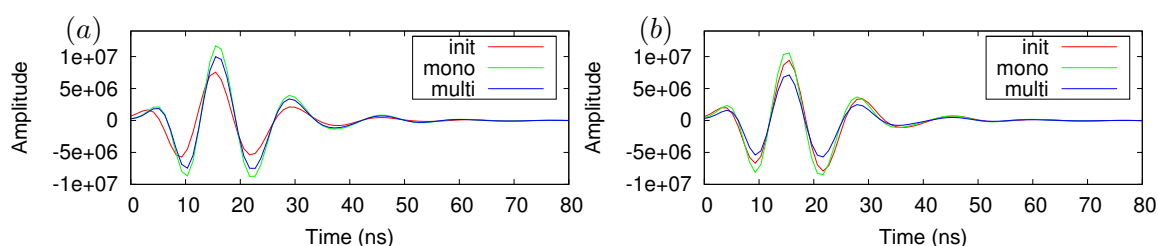


FIGURE 2.63 – Imagerie du site de Rustrel (top) : sources globale (a) et filtrée (b) estimées avant (init) et après inversions mono et multiparamètres.

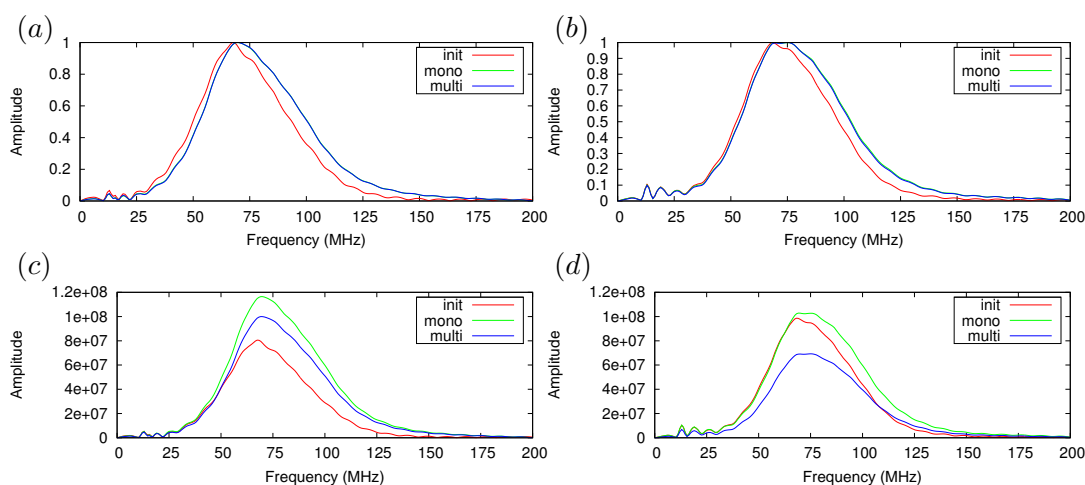


FIGURE 2.64 – Imagerie du site de Rustrel (top) : spectres d'amplitude des sources présentées en Figure 2.63. Les spectres associés à la source globale (a et c) ont été normalisés (a) ou pas (c). De même, pour les spectres associés à la source filtrée : normalisé en (b) et non normalisé en (d). Notons que pour la source globale le pic de fréquence passe de 67.4 (init) à 69.1 MHz et celui de la filtrée de 68.2 à 75.2 MHz.

Le dernier point à souligner est l'évolution du coût (Fig. 2.65). L'introduction de la mise à jour de la source induit globalement une diminution du coût final. Ce dernier passe de 52 à 37 % pour la source globale et de 40 à 38 % pour la source filtrée en monoparamètre, tandis qu'elle mène à une valeur de 30.8 % pour les deux sources en multiparamètres. Ainsi en multiparamètres, seule l'inversion à partir de la source globale bénéficie de la mise à jour de la source.

# INVERSION DES CHAMPS D'ONDES ACQUIS EN TRANSMISSION DANS UN MILIEU CARBONATÉ

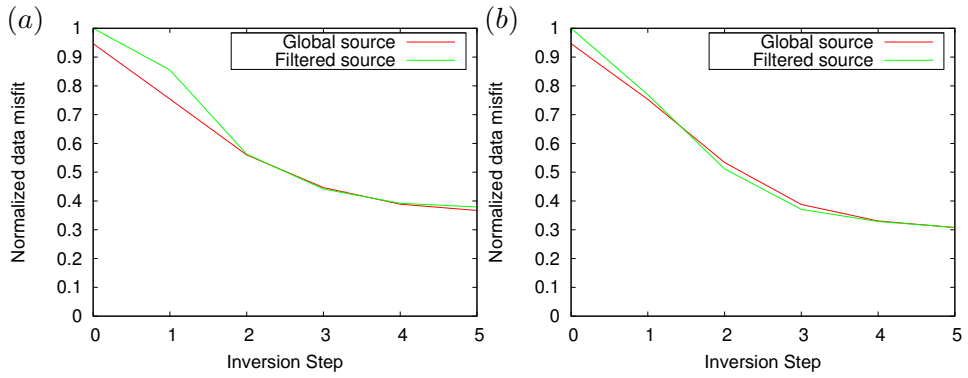


FIGURE 2.65 – Imagerie du site de Rustrel (top) : évolution de la fonction coût au cours de l'inversion lorsque la source utilisée est mise à jour dans l'inversion. Les coûts ont été normalisés par le coût initial (Step 0) de la source filtrée. Les coûts finaux des inversions monoparamètre sont voisins (37/38 %) et ceux issus des inversions multiparamètres sont identiques (30.8%).

### 2.4.5.2 Imagerie sur modèle synthétique

Les données synthétiques sont inversées en suivant la démarche adoptée par les données réelles afin de valider les observations précédentes et si possible apporter davantage d'informations. Les modèles finaux de permittivité obtenus avec la mise à jour des sources (filtrée et globale) ne montrent pas de différences avec ceux obtenus via la source fixe (Fig. 2.66 et 2.67), que ce soit en mono ou en multiparamètres. Ainsi, cette grandeur physique apparaît comme insensible à cette mise à jour. À l'opposé, les reconstructions de conductivité et les profils verticaux associés (Fig. 2.66 et 2.68) indiquent que la conductivité  $\gamma$  est encore sensible.

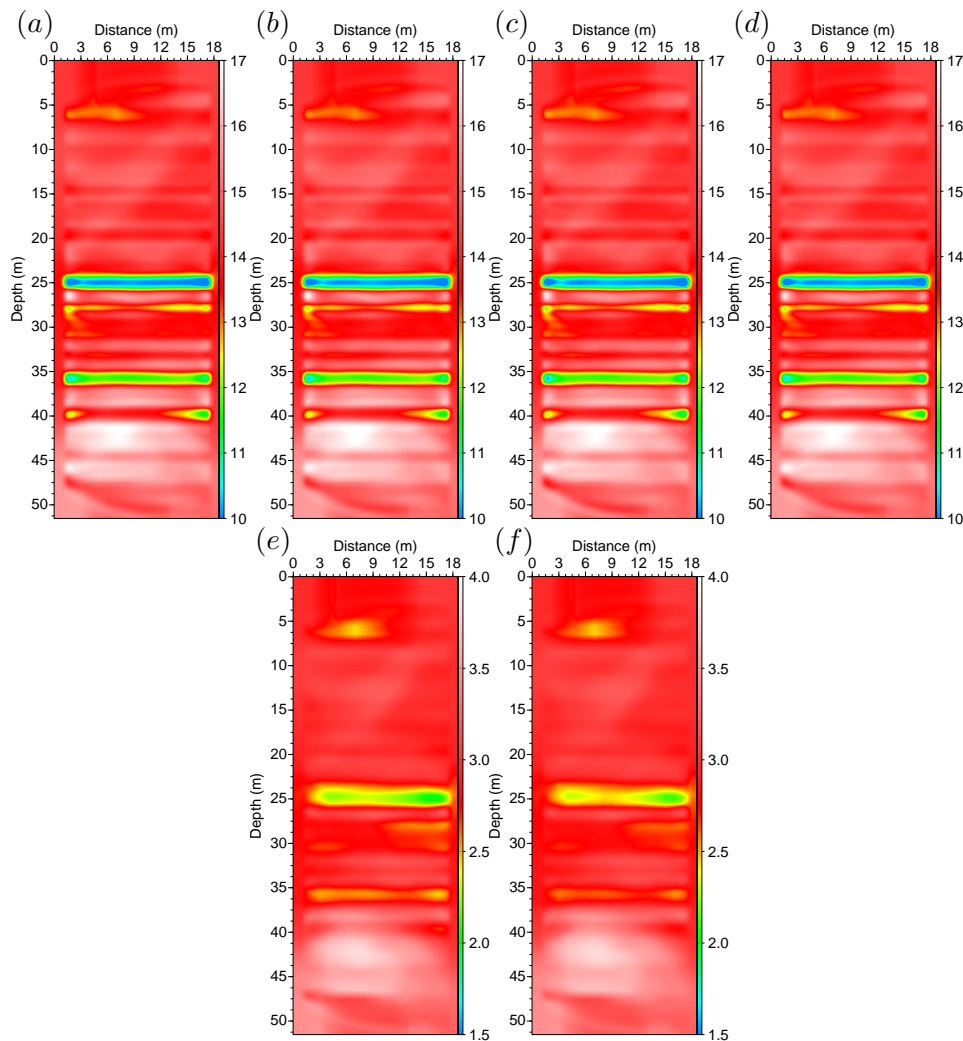


FIGURE 2.66 – Imagerie synthétique . En première ligne, les modèles de permittivité reconstruits lors d'inversion mono (a et b) et multiparamètres avec  $\sigma_0 = 0.0006 S/m$  (c et d) pour les sources globale (a et c) et filtrée (b et d) qui sont mises à jour durant l'inversion (Fig. 2.69). En deuxième ligne, les modèles de conductivité (e et f) issus des inversions multiparamètres dont les permittivités associées sont respectivement (c) et (d).

## INVERSION DES CHAMPS D'ONDES ACQUIS EN TRANSMISSION DANS UN MILIEU CARBONATÉ

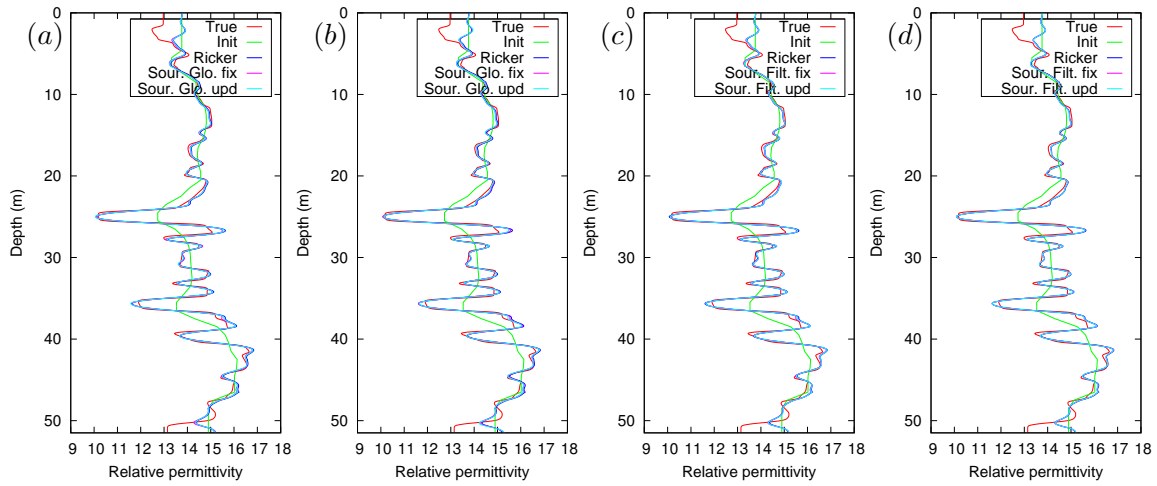


FIGURE 2.67 – Imagerie synthétique : profils verticaux 1D de permittivité relative à l’abscisse = 9.2 m pour les modèles présentés en Figure 2.66 pour les deux sources et les inversions mono (a et c) et multiparamètres (b et d). A chaque fois, les profils obtenus avec le Ricker et à source fixe ont été ajoutés pour comparaison. Les profils finaux sont quasiment superposés à chaque fois.

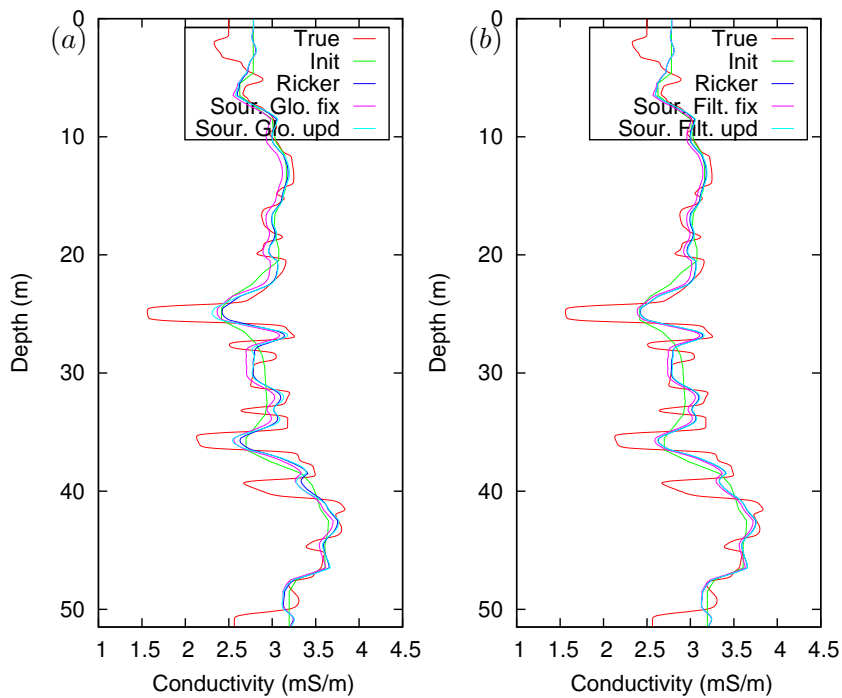


FIGURE 2.68 – Imagerie synthétique : profils verticaux 1D de conductivité à l’abscisse = 9.2 m pour les modèles présentés en Figure 2.66 pour les deux sources. A chaque fois, les profils obtenus avec le Ricker et à source fixe ont été ajoutés pour comparaison. Notons que les profils obtenus via une source mise à jour convergent vers le profil associé au Ricker, surtout pour la source filtrée.

Cette fois, l'amplitude des sources (globale et filtrée) est réévaluée uniquement à la hausse (Fig. 2.69). Ces augmentations induisent de manière logique une augmentation globale des conductivités moyennes qui tendent vers celles obtenues avec le Ricker de référence (Fig. 2.68). La procédure de réestimation est efficace puisque les deux sources convergent vers le Ricker de référence dans les domaines temporel et fréquentiel (Fig. 2.69 et 2.70). Comme souhaité, le rétablissement des hautes fréquences de ces sources permet en retour une meilleure restitution du contenu haute fréquence de la conductivité. En effet, les problèmes de stagnation, voire d'augmentation de l'erreur sur la conductivité observés en Figures 2.54 (d-f), sont résolus et une décroissance monotone est maintenant observée (Fig. 2.71 (c)).

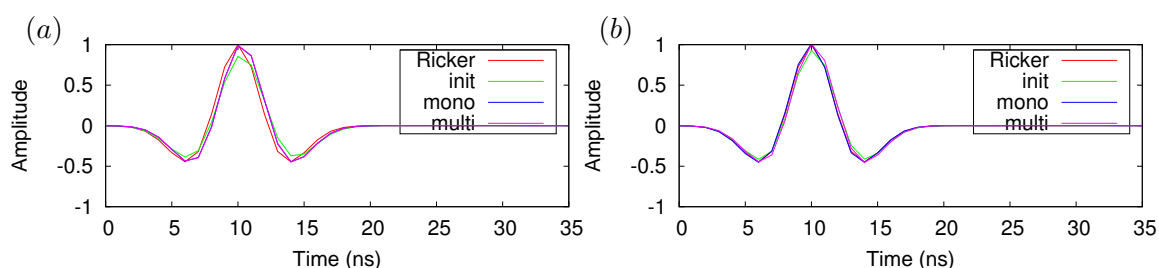


FIGURE 2.69 – Imagerie synthétique : sources globale (a) et filtrée (b) estimées avant (init) et après inversions mono et multiparamètres. Le Ricker de référence a été ajouté.

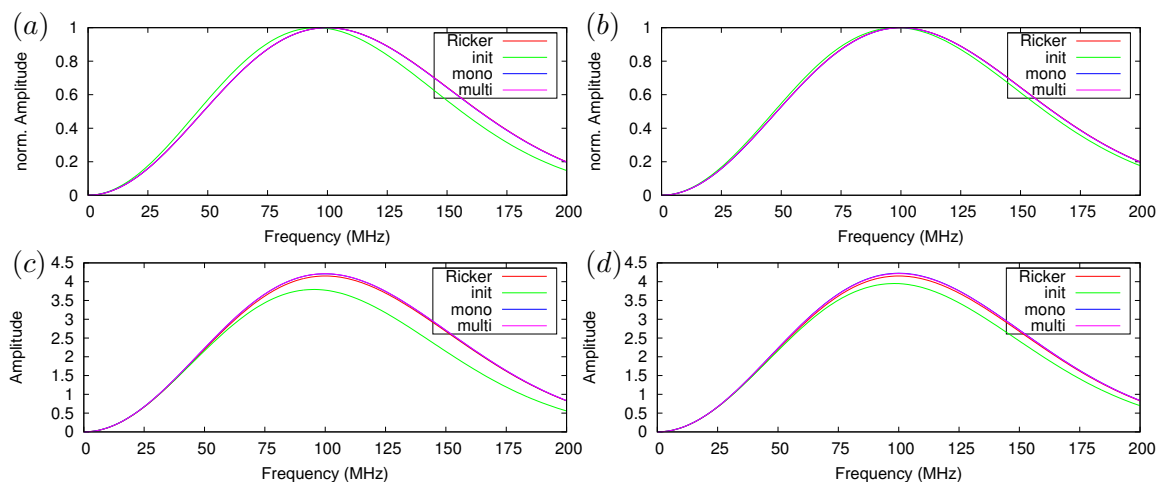


FIGURE 2.70 – Imagerie synthétique : spectres d'amplitude des sources présentées en Figure 2.69. Les spectres associés à la source globale (a et c) ont été normalisés (a) ou pas (c). De même, pour les spectres associés à la source filtrée : normalisé en (b) et non normalisé en (d). Notons que les sources mises à jour présentent un pic de fréquence à 100 MHz, comme le Ricker.

De manière surprenante, l'erreur de conductivité obtenue avec la source globale réestimée est plus faible que celles obtenues avec le Ricker de référence et la source filtrée réestimée. Deux raisons expliquent cette observation : une moins grande sensibilité à la zone gelée et une meilleure reconstruction des strates les plus rapides, comme observé à 25 et 26 mètres par exemples (Fig. 2.68 (a)).

Ces investigations, menées pour évaluer le bénéfice d'une mise à jour de la source, nous ont



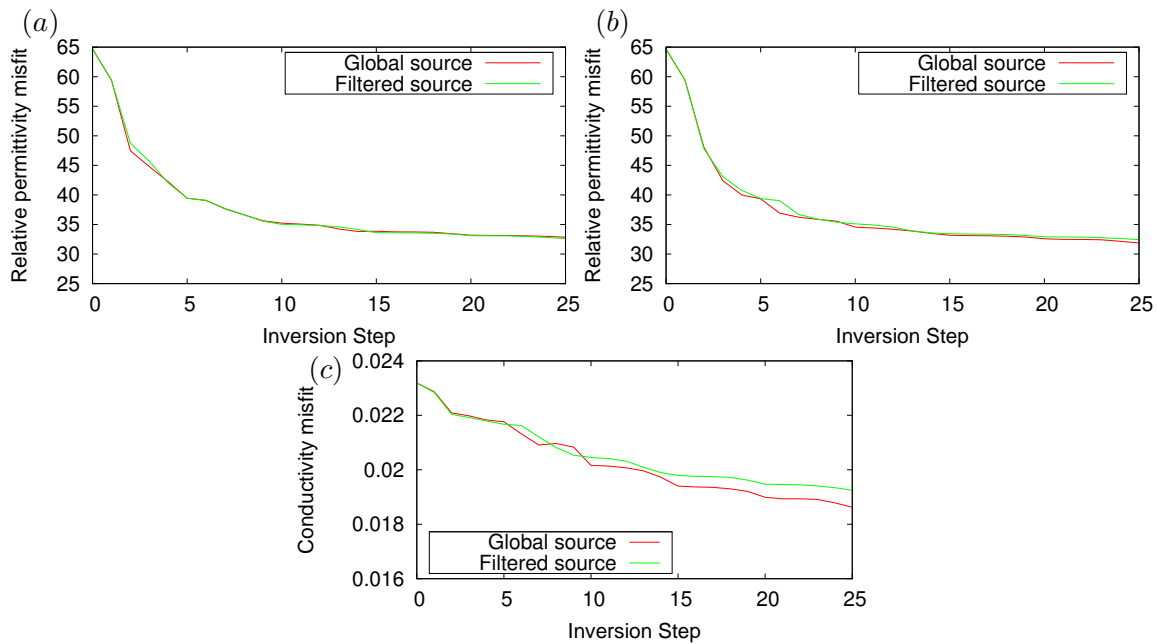


FIGURE 2.71 – Imagerie synthétique : évolution de l’erreur de permittivité relative au cours de l’inversion pour des inversions (a) mono et (b) multiparamètres pour les deux sources estimées. (c) de même pour la conductivité en multiparamètres.

progressivement rapproché des tests réalisés par Belina *et al.* (2012a). Les auteurs arrivent à des conclusions similaires aux nôtres sur certains points : une convergence de la source vers le Ricker de référence lorsque la source est réestimée au cours de l’inversion, d’une part, et une grande stabilité de la permittivité lors des inversions même lorsque la source change, d’autre part. Le point de désaccord majeur venant de leur conclusion finale annonçant qu’il n’existe pas de fort compromis entre l’estimation de la source et les milieux reconstruits, ce qui n’est pas notre cas avec la conductivité.

Malgré la mise à jour de la source et l’augmentation de son contenu fréquentiel dans le cas réel, la résolution de la conductivité reste très inférieure à celle de la permittivité. Si dans le cas synthétique, le manque de contraste, et donc de résolution, est attribué à un scaling relativement faible (choisi pour limiter les artefacts), cet élément ne semble pas suffisant pour expliquer les écarts, résiduels et importants, observés dans le cas réel. Notons que les résultats obtenus par Van Vorst (2014) montrent également cette différence de résolution entre paramètres. Des hypothèses supplémentaires, cumulables et non exhaustives, peuvent alors être formulées. Tout d’abord, la conversion 3D/2D, réalisée à permittivité constante, peut jouer un rôle car elle affecte de façon importante les amplitudes (Fig. 2.14) et donc la conductivité via le processus d’imagerie. Ensuite, il est probable que les paramètres inversés fassent intervenir des mécanismes de dispersion qui ne sont pas pris en compte dans notre algorithme, surtout en présence d’eau (Belina *et al.* (2012b)). Enfin, il est possible que les réflexions dans le milieu soient principalement dues aux contrastes de permittivité, qui en tire ensuite bénéfice pour être reconstruite. De son côté, la conductivité serait reconstituée essentiellement par l’intermédiaire des ondes transmises, conduisant naturellement à une résolution plus faible. Ce phénomène, déjà connu en sismique (Prioux *et al.* (2013)), pourrait se produire en électromagnétisme par simple analogie entre les deux physiques.

### 2.4.5.3 Conclusion

Au vu des résultats, nous pouvons dire que cette partie répond aux attentes ayant abouti à son développement. En effet, le rétablissement des hautes fréquences de la source a permis de rétablir, en retour, le contenu haute fréquence de la conductivité. Ces investigations ont aussi renforcé le caractère qualitatif de la conductivité et le lien fort qui l'unit à l'amplitude de la source. Dans le même temps, la permittivité est restée insensible à cette mise à jour. Ce résultat est en accord avec les conclusions obtenues précédemment qui renforcent encore un peu sa robustesse.

En plus d'améliorer la reconstruction de la conductivité, ces inversions de données réelles et synthétiques montrent une fois encore qu'il est plus intéressant d'inverser les deux paramètres plutôt qu'un seul. En effet, dans les deux cas, le coût final de l'inversion multiparamètres est plus faible que celui associé à l'inversion monoparamètre. A ce propos, les coûts réels indiquent également que le processus de sélection des traces, mises en jeux dans l'estimation de la source, peut être compensé par l'actualisation de la source. Si ce résultat peut sembler logique et bienvenu, il faut rester prudent car le cas synthétique ne permet pas d'aboutir à la même conclusion. Effectivement, la source finement estimée reste plus intéressante, au regard de ce critère, puisque le coût reste inférieur de 3 % en mono et multiparamètres. De plus, compte tenu de la sensibilité de la conductivité vis-à-vis de l'amplitude de la source, il est souhaitable d'avoir la source la plus fiable le plus tôt possible dans l'inversion. Pour rappel, nous avons estimé la source sur une portion de modèle relativement homogène comparé à l'ensemble du profil.

## 2.5 Résultats dans le milieu à forts contrastes et interprétations

### 2.5.1 Inversion des données acquises à Rustrel sur le profil complet

Les tests précédents ont permis de déterminer une démarche d'inversion optimale : stratégie fréquentielle Sweep avec 5 itérations par groupe de fréquences, la source filtrée mise à jour à la fin de chaque groupe de fréquences et un scaling égal à  $0.6 \text{ mS/m}$  pour l'inversion multiparamètres. Cette stratégie est maintenant appliquée à l'ensemble du jeu de données (7776 traces) avec l'objectif d'imager la galerie du LSBB située à 34 mètres de profondeur. Les modèles initiaux, présentés en Figures 2.72 (a) et (d), sont calculés via les temps de première arrivée et convertis pour la conductivité (lois de Topp et Archie). Ce modèle initial de conductivité présente l'avantage d'avoir une anomalie résistive à l'emplacement de la galerie, ce qui est sans doute le cas en réalité. Les résultats d'inversion monoparamètre et multiparamètres ont été obtenus avec un gradient forcé à zéro au niveau des sources et récepteurs suivi d'un filtre Gaussien. Les modèles reconstruits sont affichés en Figures 2.72 b), c) et e). Dans la mesure où nous disposons déjà d'informations sur la partie haute, une comparaison est réalisée au travers de profils verticaux affichés en Figure 2.73. La première analyse se concentre uniquement sur la permittivité.

La partie haute du profil, comprise entre 555 mètres et la surface, présente des variations identiques et des valeurs stables à l'abscisse  $x=6.85$  mètres (Fig. 2.73 (a)) et de légers décalages à l'abscisse  $x=16.45$  mètres (Fig. 2.73 (d)). Ces décalages sont probablement imputables à la zone gelée située à proximité.

Une seconde partie du profil, située entre 549 et 555 mètres, présente davantage de variations (Fig. 2.73 (a) et (d)). En plus des valeurs intrinsèques qui changent, les couches géologiques se retrouvent légèrement décalées verticalement. Ce phénomène trouve son origine dans les contrastes plus forts entre couches (alternances de couches rapides et lentes) mais surtout dans des couvertures différentes du milieu. En effet, l'introduction des données associées à la partie basse du milieu (en dessous de 549 mètres) permet d'avoir plus d'informations sur ces couches, et donc de mieux contraindre l'inversion dans le second cas. Pour cette raison, le milieu reconstruit avec l'ensemble des 7776 traces est probablement le plus proche de la réalité.

La comparaison des résultats obtenus en mono et multiparamètres sur le profil complet (Fig. 2.73 (b) et (e)) montre une très grande stabilité, ce qui est très positif. L'analyse des résultats au niveau de la galerie (à 543 mètres en Figure 2.73 (b)) est également très encourageant en monoparamètre, puisque la galerie est bien retrouvée avec une valeur  $\varepsilon_r = 1$ , caractéristique de l'air qu'elle contient. De plus, le centre de la galerie est décalé vers la droite du profil, vers le puits F6, occupant ainsi une position plus en accord avec ses coordonnées relevées par GPS (Fig. 2.6). De manière inattendue, l'inversion multiparamètres s'éloigne de ce résultat avec des valeurs qui passent de 1 à 4 dans la galerie.

La comparaison des résultats en matière de conductivité (Fig. 2.72 (e) et 2.73 (c) et (f)) montre une forte variabilité. Ce constat n'est pas une surprise compte tenu de la nature qualitative de la reconstruction de ce paramètre. Dans ce contexte, nous sommes plutôt satisfaits de la stabilité des variations observées selon la profondeur et de leur cohérence avec le modèle de permittivité (comparaison des Figures 2.73 (d) et (f)) laissant entrevoir une réalité géologique. Comme attendu, la partie sous nappe (en dessous de 537 mètres) est plus conductrice même si ce résultat est à approfondir pour deux raisons. D'une part, la formulation utilisée pour convertir les données 3D en 2D est basée sur une permittivité de 14, alors que le milieu de

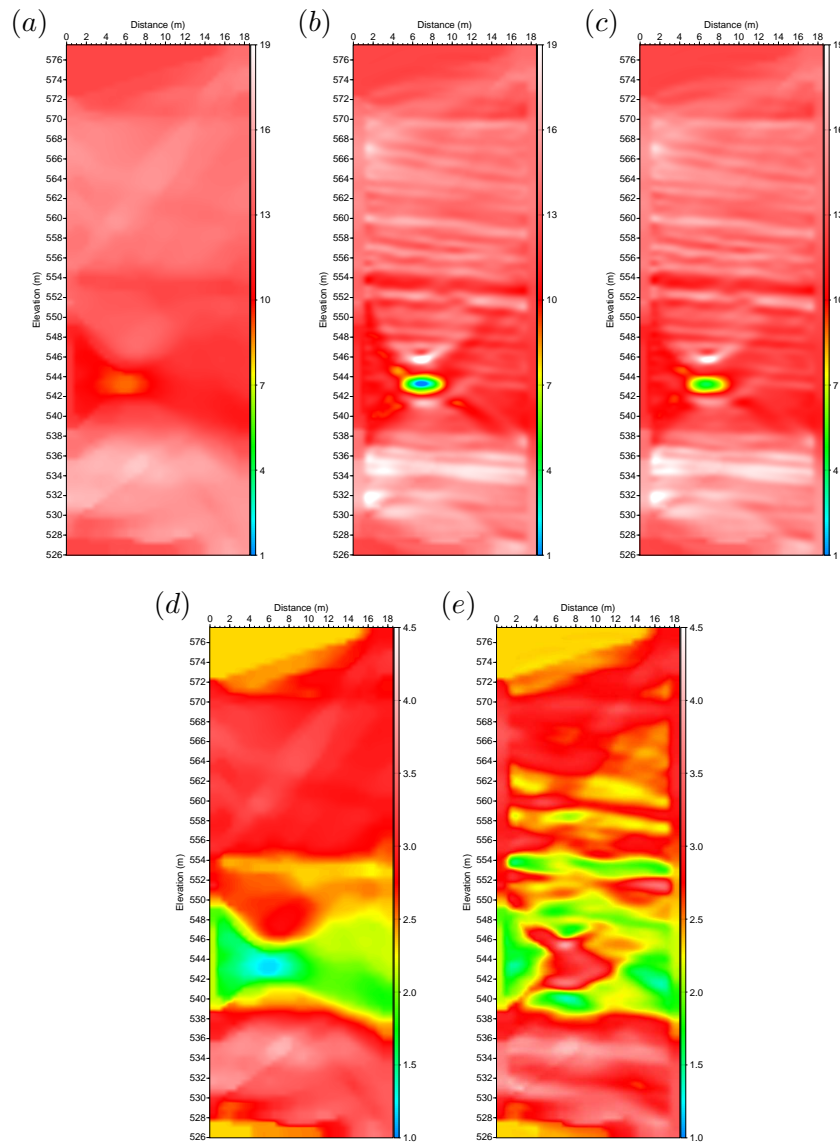


FIGURE 2.72 – Imagerie du site de Rustrel (complet) : en haut, modèles de permittivité (a) initial, reconstruits après inversions (b) monoparamètre et (c) multiparamètres ( $\sigma_0 = 0.0006 S/m$ ). En bas, modèles de conductivité (d) initial et (e) reconstruit après inversion multiparamètres.

permittivité initial indique plutôt des valeurs de 15 à 16 dans cette zone. Or, cette conversion a des effets considérables sur l'amplitude comme présenté dans la Figure 2.14. D'autre part, la source estimée dans la partie hors nappe a un contenu fréquentiel bien différent de celui mesuré dans la nappe (Fig. 2.10), biaisant très probablement sa forme réelle et, en particulier, son amplitude. Pour avoir une idée plus juste de la conductivité dans la nappe, il faudrait faire une étude spécifique sur la portion immergée. Enfin, un des éléments majeurs de l'étude reste discutable : c'est la galerie, qui montre une divergence entre un modèle initial résistif (relativement proche de la réalité connue) et un modèle final plus conducteur que le milieu géologique

## INVERSION DES CHAMPS D'ONDES ACQUIS EN TRANSMISSION DANS UN MILIEU CARBONATÉ

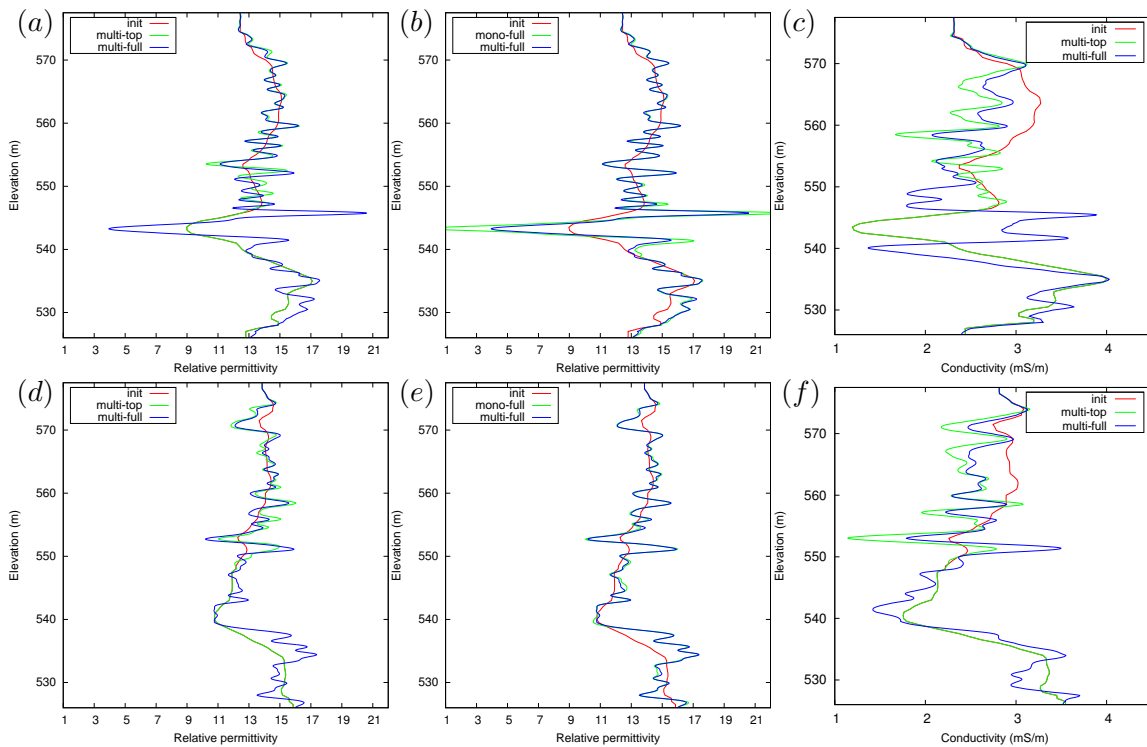


FIGURE 2.73 – Imagerie du site de Rustrel (complet). Profils verticaux 1D aux abscisses  $x = 6.85$  m (a-c) et  $x = 16.95$  m (d-f). Le premier profil inclut la galerie tandis que le second est proche du puits F6. Les profils de permittivité multiparamètres (multi-full, extraits de la Figure 2.72 (c)) sont comparés à ceux (en (a) et (d)) de permittivité multiparamètres sur la partie haute (multi-top, extraits de la Figure 2.60 (d)) et à ceux (en (b) et (e)) de permittivité monoparamètre (mono-full, extraits de la Figure 2.72 (b)). De même pour la conductivité (c) et (f) en multiparamètres avec les Figures 2.72 (e) et 2.60 (f).

lui-même (Fig. 2.72 (e)).

Plusieurs hypothèses peuvent être avancées pour expliquer ceci. La première est la présence potentielle de métal sous forme de barres d'acier qui viendraient renforcer les parois de la galerie. Cependant, cette hypothèse, soutenue par la nature initiale du site (militaire), semble exclue car les différentes campagnes d'investigation des parois de la galerie n'ont jamais mis en évidence la présence de structures métalliques dans le secteur de l'étude. La deuxième hypothèse consiste à considérer que le modèle de conductivité initial est trop simple ou trop éloigné de la réalité. Bien que ce modèle initial ne soit pas optimal en affichant des valeurs initiales "éloignées" des valeurs finales entre 555 et 570 mètres (Fig. 2.73 (c)), cet élément ne semble pas suffisant pour expliquer les observations.

Une troisième hypothèse vient de Ellefsen *et al.* (2011) qui proposent une étude dont la configuration générale est très proche de la nôtre. Dans cette étude, des données GPR sont acquises en laboratoire, dans la configuration cross-hole, à l'aide de deux puits verticaux espacés d'environ 0.8 mètre pour une hauteur de 1.6 mètre. Chacun de ces puits reçoit soit les sources, soit les récepteurs. La cible principale est une galerie artificielle rectangulaire incluse dans du sable et remplie d'air. L'axe de cette galerie artificielle, décentré et contenu dans le plan horizontal, vient recouper le plan vertical défini par les puits avec un angle d'environ 63 degrés.

Les auteurs inversent alternativement les logarithmes des parties réelle et imaginaire de la vitesse complexe. Une fois inversées, ces deux quantités peuvent être reliées à la permittivité et à la conductivité via des formules adaptées. Leurs résultats montrent que la galerie est bien retrouvée en matière de permittivité. Par contre, la partie complexe de la vitesse, directement proportionnelle à la conductivité, montre une tendance opposée à celle attendue. En effet, une conductivité plus forte est observée à l'emplacement de la galerie. Les auteurs l'expliquent par une probable mauvaise représentation des sources et des récepteurs, d'une part, et un couplage entre les antennes et le milieu géologique plus complexe que prévu, d'autre part.

Au-delà de leurs conclusions, la mise en relation des deux études (celle-ci et celle de Ellefsen *et al.* (2011)) fournit une piste supplémentaire pour expliquer la dérive de la conductivité : c'est l'orientation de la galerie. Dans les deux cas, l'angle résultant de l'intersection entre la galerie et le plan défini par les deux puits est non négligeable. Cette orientation 3D pourrait avoir une influence significative sur les données GPR. Pour étudier ce problème 3D, des simulations de propagation d'ondes électromagnétiques ont été réalisées avec le logiciel gprMax3D (Giannopoulos (2005), Warren *et al.* (2016), Giannakis *et al.* (2016)). Pour cette simulation, une galerie circulaire à orientation variable est placée dans un milieu homogène ( $\varepsilon_r = 14$ ,  $\sigma = 3.0$  mS/m et  $\mu_r = 1$ ) (Fig. 2.74). Deux angles  $\alpha = 0^\circ$  et  $\alpha = 28^\circ$  sont testés afin de simuler un milieu 2.5D et un milieu 3D, comme celui rencontré à Rustrel. Une source notée  $s_1$  (Ricker centré sur 100 MHz) est placée dans le puits F5 tandis que 73 récepteurs, régulièrement espacés de 0.25 m, enregistrent les trois composantes du champ électrique ( $E_x$ ,  $E_y$  et  $E_z$ ) dans le puits F6.

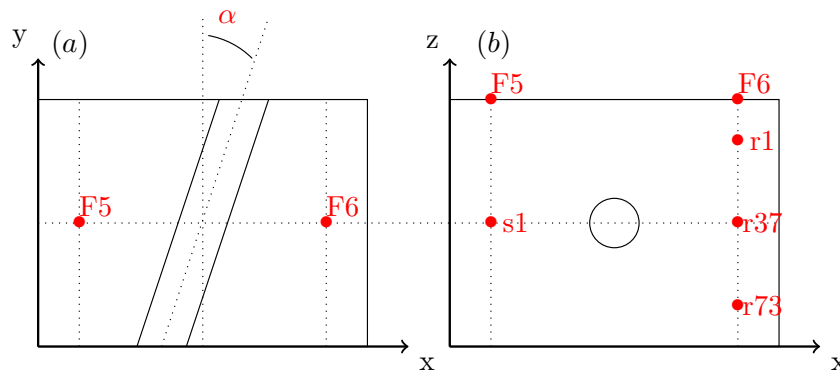


FIGURE 2.74 – Coupes 2D du milieu dans lequel est simulée la propagation d'ondes électromagnétiques. En (a), vue de dessus avec l'implantation des puits F5 et F6 et la galerie orientée selon l'angle  $\alpha$ . En (b), coupe verticale F5/F6 avec la source notée  $s_1$  et les 73 récepteurs notés  $r_1$  à  $r_{73}$ . Pour la simulation, la galerie mesure 2 mètres de diamètre et les distances  $[s_1-r_{37}]$  et  $[r_1-r_{73}]$  sont de 18 mètres.

Les radargrammes issus de ces simulations (Fig. 2.75) montrent pour chaque composante, deux fronts d'ondes (notés FR1 et FR2), un associé à la propagation dans le milieu homogène (FR2) et un autre issu de la diffraction sur la galerie (FR1). Si en 2.5D, deux fronts d'ondes sont clairement visibles ; en 3D, l'amplitude du front FR1 devient relativement faible. L'amplitude de la composante  $E_y$  augmente de plus d'un ordre de grandeur quand le milieu passe de la 2.5D à la 3D. Nous pouvons en déduire que le changement de l'axe de la galerie induit des changements significatifs dans la propagation des ondes, de sorte qu'un transfert d'énergie des composantes  $E_x$  et  $E_z$  vers  $E_y$  est observé. A ce transfert d'énergie s'ajoute des changements

dans la cinématique, en particulier concernant la composante  $E_y$ .

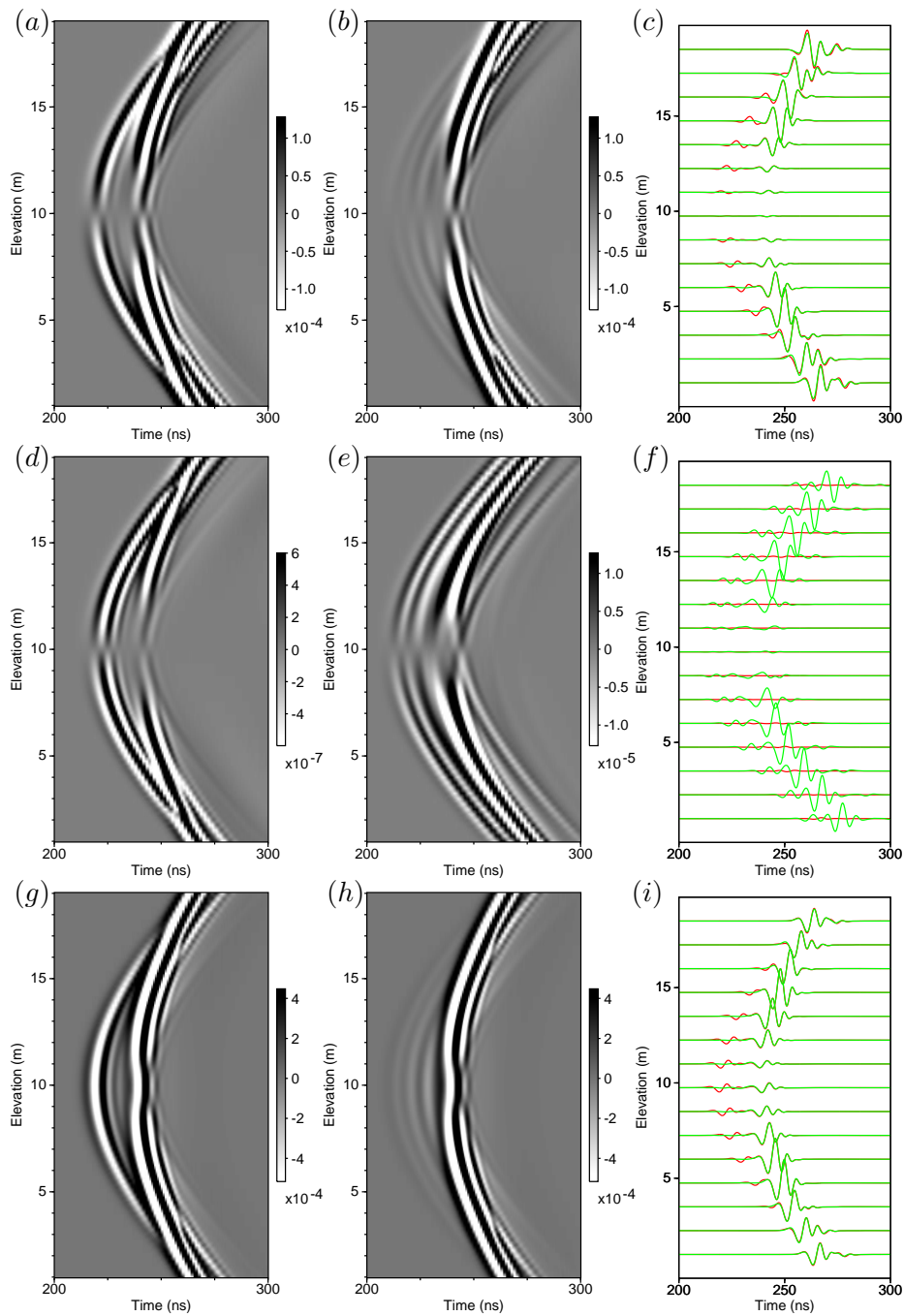


FIGURE 2.75 – Radargrammes calculés dans le milieu 3D (Fig. 2.74). Les composantes  $E_x$  (haut),  $E_y$  (milieu) et  $E_z$  (bas) ont été calculées pour les angles  $\alpha = 0$  (gauche) et  $\alpha = 28$  (milieu). A droite sont reportés, pour chaque composante, les champs d'ondes normalisés par l'amplitude maximale issue de la simulation 2.5D ( $\alpha = 0$ ), avec en vert les composantes calculées pour  $\alpha = 0$  et en rouge  $\alpha = 28$ .

Lors de l'acquisition des données réelles en 3D, l'énergie diffractée par la galerie est importante, ce qui mène à un front d'ondes FR1 de faible amplitude, comme c'est le cas dans les données réelles (annexe A). Le front FR2, ayant voyagé principalement dans le milieu géologique, est relativement stable et peu sensible à la présence de la galerie comme présenté en Figure 2.75 (i). Lorsque ces données réelles sont inversées, à l'aide d'un algorithme 2D, elles sont comparées à des données synthétiques ne présentant qu'une faible perte d'énergie par diffraction du front FR1, à l'image de la simulation 2.5D. Pour compenser ce décalage d'amplitude au niveau du front FR1, l'algorithme tend à augmenter la conductivité à l'emplacement de la galerie. Dans le même temps, le front FR2 est inversé convenablement car il n'est que faiblement impacté par la galerie.

En plus des milieux reconstruits et des profils verticaux, il est instructif de visualiser les radargrammes (Fig. 2.76). Le radargramme, dont la source est en partie haute du modèle, montre des données initiales déjà proches des données réelles. Dans ce cas, l'inversion a consisté essentiellement à recalibrer les phases car l'amplitude reste plus délicate à obtenir à cause des faibles scaling et nombres d'itérations. À l'opposé, le radargramme, associé à une source au niveau du tunnel, montre une convergence plus complexe entre données réelles et finales calculées. Les données initiales se composent d'une première arrivée de forte amplitude, qui n'est pas présente dans les données réelles. À l'état final, l'amplitude de cette première arrivée a été fortement atténuée et les arrivées du front d'onde "FR2" des données réelles partiellement expliquées. Dans la mesure où ce second front est associé à une propagation dans le milieu géologique, il devrait permettre de reconstruire une partie des structures géologiques autour de la galerie. C'est justement ce qui est observé en Figure 2.72 où la permittivité permet de distinguer la stratification autour de la galerie, même si des artéfacts en forme de croix continuent de réduire la lisibilité. Enfin, la mesure du coût final (Fig. 2.77) indique qu'il est toujours plus intéressant d'inverser deux paramètres plutôt qu'un seul.

En définitive, nous pouvons dire que la démarche définie précédemment a été étendue avec succès à la partie basse du profil en imageant la stratification sur toute la hauteur du modèle. La galerie a posé plus de problèmes que prévu et une nouvelle hypothèse a été introduite puis étayée par des simulations numériques 3D. Ainsi, seule une inversion 3D permettrait de retrouver la conductivité attendue dans la galerie.

## 2.5.2 Analyse des résultats

### 2.5.2.1 La teneur en eau

Dans le cadre de l'étude hydrogéologique, la distribution de la teneur en eau dans le massif est une donnée importante. La distribution de la teneur en eau calculée en utilisant la loi de Topp, et affichée en Figure 2.78. De son côté, la porosité a été mesurée sur un profil important à Rustrel (Léonide *et al.* (2014)) et il faut souligner que les variations observées sont cohérentes à celles relevées par Bouaziz (2015). Cependant, ces premières mesures ont été réalisées sur des échantillons prélevés près de la surface (donc potentiellement altérés par les conditions atmosphériques) et il n'est pas possible de les replacer avec précision le long de notre profil. Pour ces raisons, nous comparons les valeurs de teneur en eau uniquement avec la porosité mesurée sur la carotte (Tableau 2.5). Les valeurs aux extrémités du profil n'ont pas été retenues car elles se situent dans des zones non contraintes par l'inversion. Si l'on met de côté la valeur mesurée pour le faciès rudstone (discutée ultérieurement), il existe une certaine corrélation



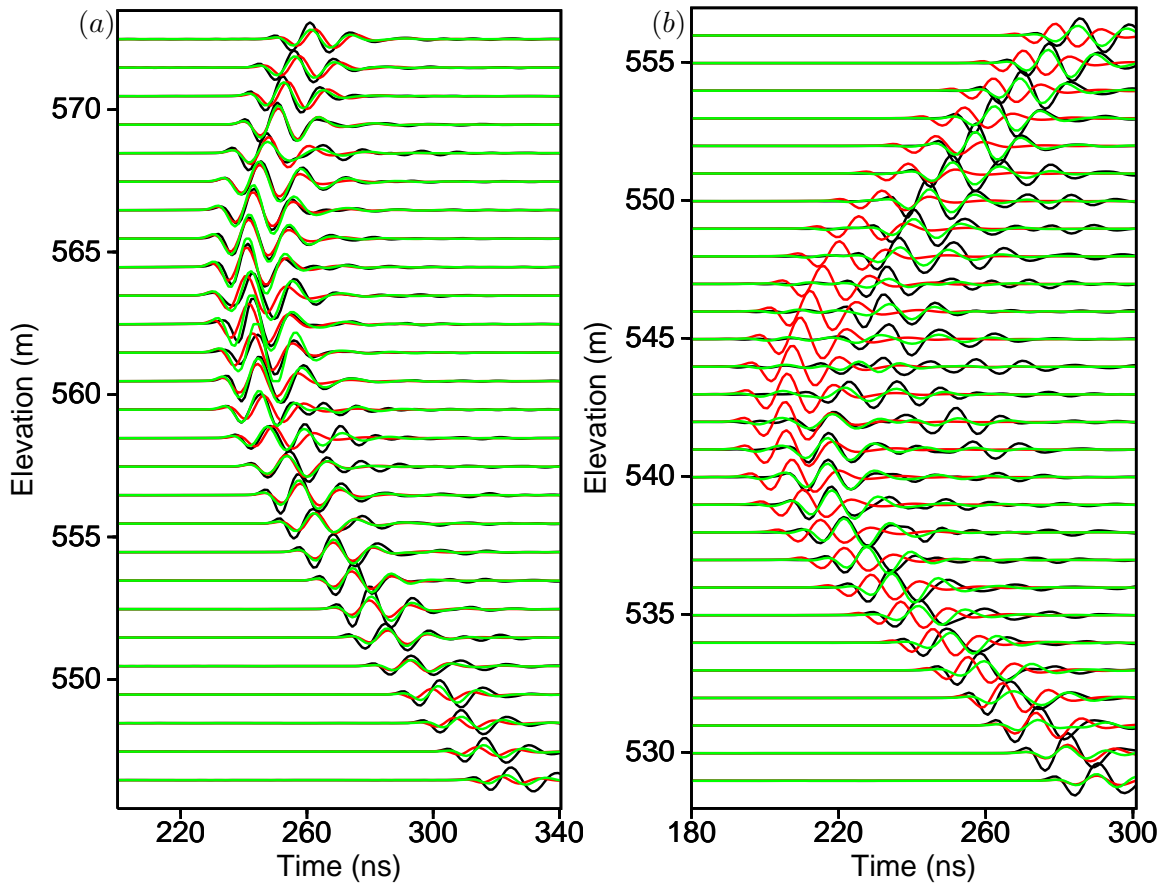


FIGURE 2.76 – Imagerie du site de Rustrel (complet) : radargrammes dont les sources sont situées aux élévations (a) 564 et (b) 542 mètres. En noir les données réelles, en rouge les données initiales et en vert les données finales calculées.

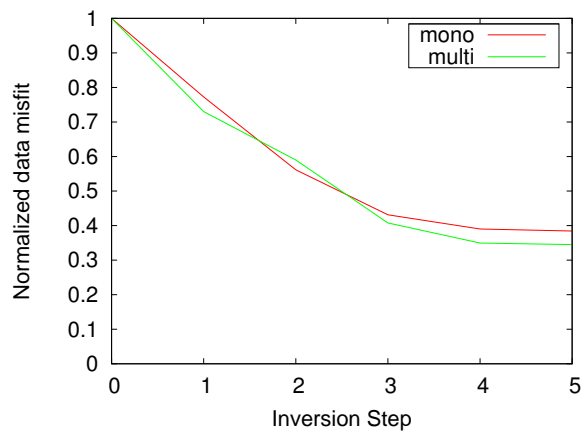


FIGURE 2.77 – Imagerie du site de Rustrel (complet) : évolution de la fonction coût au cours de l'inversion. Les coûts ont été normalisés par le coût initial (Step 0). Les coûts finaux sont de 38.4 et 34.4 % en mono et multiparamètres.

entre les valeurs déduites de l'imagerie et celles mesurées sur plug. Les plus grands écarts entre ces deux grandeurs physiques sont associés aux couches situées à 29.2 et 34.9 mètres et peuvent s'expliquer par l'influence de la galerie à ces profondeurs, qui peut perturber la reconstruction de la permittivité diélectrique. Cependant, il apparaît que la teneur en eau est surestimée de façon systématique car elle ne devrait pas dépasser la porosité par définition.

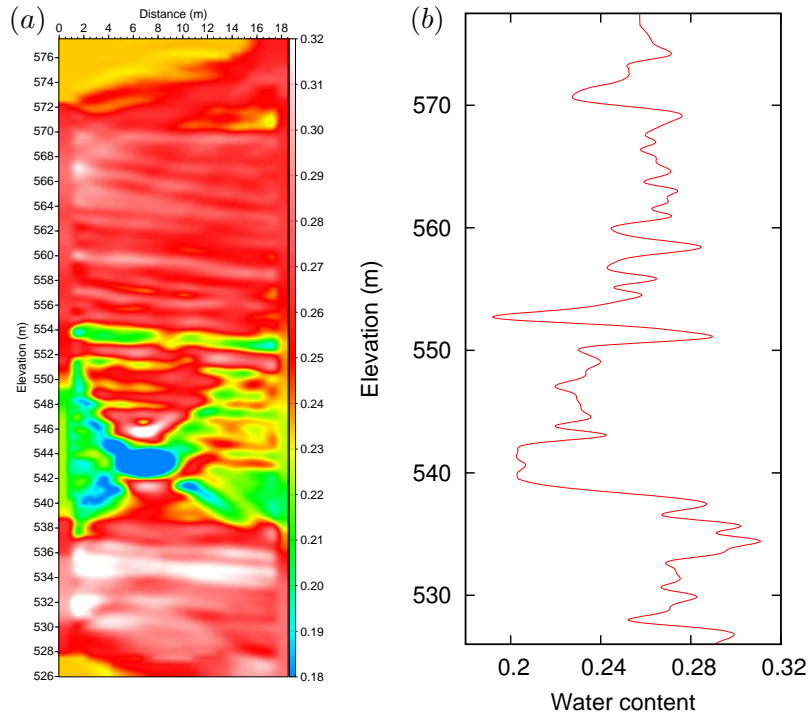


FIGURE 2.78 – Imagerie du site de Rustrel (complet) : teneur en eau du milieu, calculée à partir du modèle de permittivité présenté en Figure 2.72 (c). Notons que la teneur en eau est fortement influencée par la présence de la galerie, ce qui conduit à réduire la fiabilité des valeurs entre 550 et 538 mètres, même si les données observées sont partiellement expliquées (Fig. 2.76 (b)). (b) profil de teneur en eau relevé à l’abscisse  $x=16.95$  mètres.

| Faciès                        | Profondeur (m) | Porosité | Teneur en eau |
|-------------------------------|----------------|----------|---------------|
| Faciès à oolites              | 8.95           | 0.19     | 0.27          |
| Calcarénite grossière poreuse | 19.05          | 0.19     | 0.28          |
| Rudstone                      | 24.8           | 0.151    | [0.20-0.28]   |
| Faciès à oolites              | 29.2           | 0.05     | 0.23          |
| Faciès à orbitolines          | 34.9           | 0.07     | 0.22          |
| Faciès à Rudistes poreux      | 43.15          | 0.202    | 0.31          |

TABLE 2.5 – Comparaison des porosités mesurées sur plug et des teneurs en eau issues du profil en Figure 2.78 (b) pour les différents faciès. Une incertitude existe pour le rudstone donc une plage de valeurs est proposée.

Cette surestimation peut s'expliquer par une surestimation de la permittivité, pouvant elle-même s'expliquer de multiples façons. D'une part, elle peut être liée à un picking tardif des temps de première arrivée, qui se manifeste par une source estimée non parfaitement causale. Mais, la mise à jour de la source, lors de l'inversion (cf partie 2.4.5), montre une augmentation du contenu fréquentiel qui tend à rétablir cette causalité et donc exclure l'hypothèse du picking tardif. D'autre part, la porosité a été mesurée sur des plug, c'est à dire des échantillons de roche de taille relativement faible pouvant ne pas être complètement représentatif du milieu. Par exemple, la fracturation qui traverse le massif, et les vides causés par la dissolution karstique, sont variables sur le terrain et peu, voire pas, pris en compte dans le calcul de la porosité. Ces deux types de structure peuvent contenir de l'eau (surtout dans un milieu saturé). Cette eau venant augmenter la permittivité observée et par conséquent la teneur en eau moyenne déduite de la loi de Topp.

La seconde hypothèse implique directement la loi de Topp qui est une loi empirique obtenue grâce à des mesures sur des matériaux allant des limons sableux aux argiles alors que nous sommes en présence de carbonates. Il conviendrait ainsi de mieux connaître les relations permittivité diélectrique/teneur en eau dans ce genre d'environnement grâce à des mesures en laboratoire et les développements théoriques associés (Han *et al.* (2016), Revil (2013)).

Enfin, notons que la surestimation de la teneur en eau, observée ici, a également été obtenue par Van Vorst (2014), qui utilise aussi la loi de Topp suite à l'inversion de formes d'ondes de données cross-hole acquises dans la galerie du LSBB. Cette observation n'est donc pas isolée.

### 2.5.2.2 La stratification

Les structures légèrement inclinées, allant du puits F5 vers le puits F6 (vers la droite), peuvent correspondre à la stratification. Pour confirmer la réalité géologique de ces structures, une analyse de pendage est réalisée. D'une part, sur le flanc Sud du plateau d'Albion, où se trouvent les forages étudiés, le pendage général réel est d'environ 15° vers le Sud (Carrière, 2014). D'autre part, le modèle de permittivité (Fig. 2.72 (c)) fournit un pendage d'environ 10° de 560 et 568 mètres et un autre de 5° sur le reste du profil (de 532 à 560 mètres). Ces deux valeurs ne peuvent pas être comparées directement au pendage réel. En effet, le plan défini par les forages F5 et F6 n'est pas aligné avec le Sud, de sorte que les pendages mesurés, sur le modèle de permittivité, sont en fait des pendages apparents. Pour avoir une comparaison fiable, ces derniers sont convertis en pendages réels, via la formule :

$$\tan(\phi) = \frac{\tan(\phi_1)}{\cos(\alpha)} \quad (2.12)$$

où  $\phi_1$ ,  $\phi$  et  $\alpha$  sont respectivement le pendage apparent, le pendage réel (que l'on cherche) et l'angle entre les directions de pendage qui est de 63 degrés d'après la Figure 2.6 . Après application de la formule, les deux pendages sont recalculés à 11 et 20 degrés. La cohérence de ces valeurs avec le pendage moyen réel (15°) nous conforte dans l'idée que les structures légèrement inclinées, sur le modèle de permittivité, correspondent bien aux couches géologiques.

### 2.5.2.3 Discussions sur l'apport de la FWI

L'ensemble des informations relatives au puits F6 est réuni en Figure 2.79 pour permettre de recouper les informations et obtenir une première interprétation :

- En règle générale, dans un milieu partiellement saturé, il est difficile d'établir un lien direct entre permittivité et porosité car on ne connaît pas la teneur en eau d'une couche donnée ni les valeurs intrinsèques de permittivité de la matrice poreuse. Mais dans le cas particulier d'un milieu saturé, la porosité, la permittivité, la teneur en eau et la vitesse des ondes électromagnétiques ne sont pas des grandeurs indépendantes les unes des autres. En effet, une porosité élevée donne une teneur en eau élevée. Cette dernière teneur en eau conduit à une permittivité élevée puis à une vitesse faible d'après la formule (2.2). Dans un milieu sec, le raisonnement inverse est vrai.
- Le profil de permittivité issu de la FWI met en avant trois strates aux élévations 540, 553 et 571 mètres par l'intermédiaire de valeurs locales de permittivité plus faibles. Les couches en question doivent donc être localement plus rapides. Cette exigence est bien vérifiée par le profil 1D qui montre effectivement des temps de trajet plus courts aux élévations indiquées. Bien que le modèle tomographique présentait déjà une diminution de permittivité aux niveaux souhaités, la FWI a permis d'en préciser les valeurs pour mieux expliquer les décalages temporels.
- Les recoupements d'informations et les identifications sont plus faciles sur la partie basse du milieu. Ainsi, le calcaire à orbitolines correspond à la couche rapide observée à l'élévation 540 mètres. La plus faible porosité mesurée (0.05) est ainsi associée aux temps de parcours les plus courts. Ceci est également vérifié par la couche située juste en dessous (de 37 à 51 mètres de profondeur), que l'on identifie donc comme la couche à Rudistes. En effet, cette couche affiche la plus forte porosité mesurée (0.202) et les temps de parcours les plus longs (profil 1D), ce qui est logique et même renforcé dans le cas présent par le fait que cette couche est immergée dans la nappe donc saturée. On peut même se demander si ce n'est pas la forte porosité de cette couche qui est à l'origine de cette nappe.
- La partie intermédiaire du profil est plus délicate à interpréter car le profil de permittivité met en évidence deux couches à 25 mètres pour un seul faciès de type rudstone. Pour ajouter à la difficulté, la porosité du faciès rudstone est élevée ce qui devrait conduire à des vitesses faibles dans un milieu saturé. Or nous avons noté la présence d'une couche rapide dans cette zone. Pour résoudre ce paradoxe, deux hypothèses sont proposées : la présence d'une strate à faciès rudstone dont seule la partie basse est saturée, ou bien la présence de deux couches géologiques dont l'une n'apparaît pas distinctement dans les faciès. Un début de réponse est apporté par les mesures de la densité de la carotte qui montrent un pic vers 24 mètres, c'est-à-dire au-dessus du calcaire à faciès rudstone. Ce calcaire plus dense aurait donc une porosité plus faible et une vitesse plus élevée dans l'hypothèse d'un milieu saturé. Ainsi nous pourrions distinguer à 24 mètres une strate géologique dense de faciès calcarénite (non différenciée du faciès à calcarénites allant de 15 à 24 mètres) qui surmonte le faciès rudstone plus poreux et plus lent. Enfin, notons que l'introduction du profil de densité renforce les résultats précédents puisque le calcaire à orbitolines pointe vers un horizon en moyenne dense et le calcaire à faciès rudstone vers un horizon en moyenne peu dense. C'est exactement ce que nous pouvions attendre de leur porosité respective.

## INVERSION DES CHAMPS D'ONDES ACQUIS EN TRANSMISSION DANS UN MILIEU CARBONATÉ

---

- La troisième couche rapide, située à 571 mètres, correspond à une succession de faciès dominée par des calcarénites mais le manque de données sur la porosité, l'absence de continuité dans le relevé de densité (vides créés par dissolution ?) et la résolution maximale de la FWI nous empêchent d'aller plus loin dans l'analyse.
- Bien que les variations de conductivité soient moins nombreuses que celles de permittivité, elles suivent globalement les mêmes tendances pour les deux paramètres. De façon logique, la conductivité est plus forte dans les zones identifiées comme les plus poreuses et donc contenant le plus d'eau facilitant la conduction.

Le recoupement de l'ensemble des informations disponibles a fourni une première vue du sous-sol et une première identification des couches géologiques entre les puits F5 et F6. Ainsi, il est possible de relocaliser la discontinuité D2 à 37.5 mètres de profondeur (à la base du faciès à orbitolines). Ce décalage induit un repositionnement de la galerie dans le membre géologique U3. Cette première vision reste cependant préliminaire et devra être affinée (voire modifiée) pour tenir compte : de la fracturation, des vides dûs à la karstification, des différents types de porosité (intragranulaire, intergranulaire, vacuolaire), de l'incertitude sur la correspondance entre profondeur et élévation et enfin de la présence effective d'une discontinuité de porosité marquée vers 24/25 mètres de profondeur au niveau du calcaire de type rudstone. Pour cela, il serait souhaitable de faire des études complémentaires sur la carotte, comme des relevés de porosité plus réguliers et des mesures continues de permittivité pour établir un profil directement comparable à celui issu de la FWI.

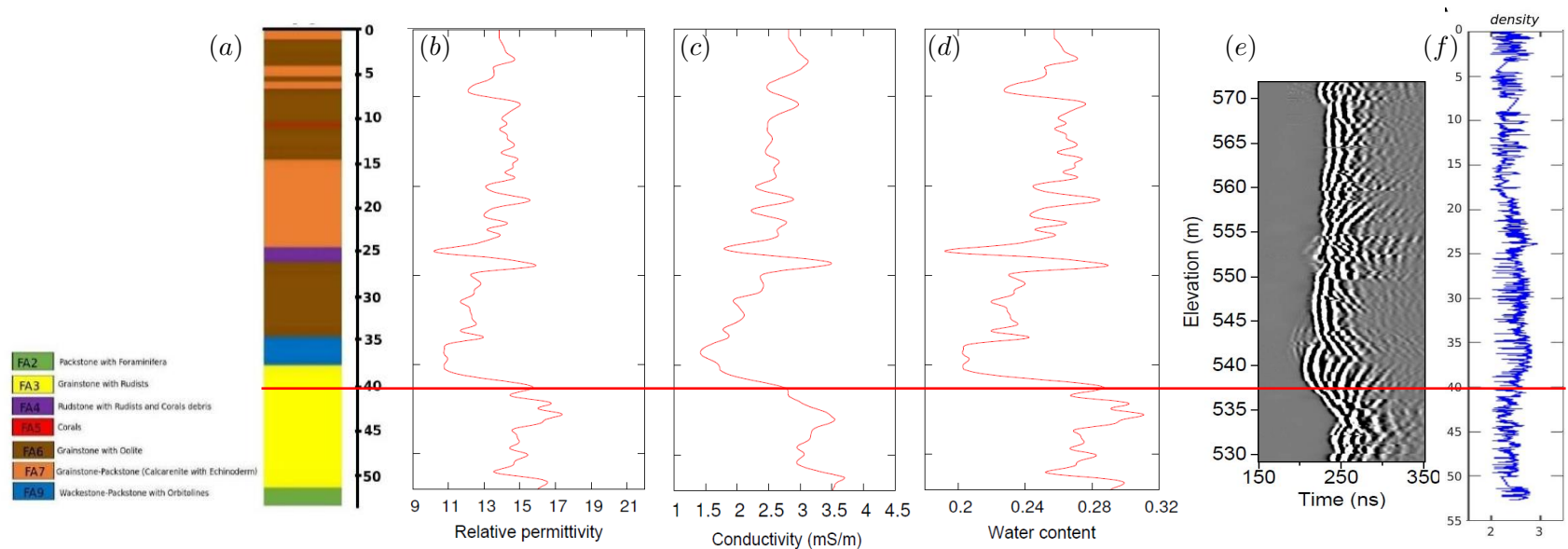


FIGURE 2.79 – Imagerie du site de Rustrel (complet) : synthèse. (a) faciès présents sur le site (d’après Andriani Racic (2016)), (b-c) profils verticaux 1D de permittivité relative et conductivité à l’abscisse  $x = 16.95$  m des Figures 2.72 (c) et (e), (d) teneur en eau (repris de la Figure 2.78), (e) profil de données GPR 1D selon la profondeur (repris de Figure 2.11 (a)) et (f) densité de la carotte (d’après Andriani Racic (2016)). Si les faibles permittivités vers 542 mètres correspondent bien au calcaire à orbitolines, il faudrait légèrement décaler l’ensemble des profils, de cette étude, vers le haut et changer la correspondance dans le Tableau 2.2. La ligne rouge recoupant cette synthèse correspond à la profondeur de la nappe à 537 mètres.

Maintenant que l'on dispose d'un aperçu plus précis et cohérent du sous-sol, il est intéressant de le rapprocher de l'étude hydrogéologique du site réalisée par Carrière *et al.* (2013), Carrière (2014) et Carrière *et al.* (2016) en reprenant plusieurs points :

– La subsurface et le GPR :

Les données GPR acquises depuis la surface par Carrière (2014) donnent des informations sur les 10 premiers mètres. Dans notre cas, les 5 premiers mètres n'ont pu faire l'objet d'inversion en raison du tubage des forages. Les 5 mètres suivants montrent une stratification de banc calcaire dont l'épaisseur est de l'ordre du mètre, en accord avec les profils acquis depuis la surface. Il n'a pas été possible de mettre en évidence les structures obliques associées à ces bancs calcaires.

– La conductivité :

Les données de conductivité issues de l'ERT ont des profondeurs d'investigation plus importantes puisqu'elles vont jusqu'à 40 mètres environ pour le profil le plus long. Ce dernier montre une conductivité moyenne de l'ordre de 0.5 mS/m, voire un peu moins en profondeur. Les valeurs déduites de l'analyse des formes d'ondes GPR sont plutôt de l'ordre de 2 à 3 mS/m si l'on fait une moyenne des valeurs obtenues dans cette étude (2 à 4 mS/m) et dans des études comparables : 4 mS/m pour Lavoué (2014) et 1.5 à 5 mS/m pour Van Vorst (2014). Il existe donc un écart entre les deux types de mesure (GPR et ERT). Cette différence peut s'expliquer par la nature dispersive de la conductivité (effective), qui pourra être étudiée également en laboratoire (Sengwa & Soni, 2006; Olatinsu *et al.*, 2013; Gomaa *et al.*, 2015).

– Des chemins d'écoulement préférentiel :

Carrière *et al.* (2013) relèvent grâce à l'ERT des zones de plus faible résistivité ( $900 \Omega.m$ ) liées à des chemins d'écoulement préférentiel de l'eau dans la surface. Dans notre cas, il est possible qu'une de ces zones ait été détectée par l'intermédiaire d'une discontinuité de permittivité de la couche rapide située à 571 mètres, d'une part, et à une augmentation de la conductivité dans la zone, d'autre part. Cependant, la faible couverture en rais de cette couche plus rapide ne permet pas de mieux contraindre l'inversion dans cette zone.

– Au niveau de la galerie :

Les modèles de permittivité (Fig. 2.72 (b) et (c)) montrent une anomalie de forte permittivité au toit de la galerie. Elle pourrait être interprétée comme une zone d'accumulation d'eau venant alimenter le point d'écoulement dans la galerie. Malgré ce lien possible entre le point D et l'anomalie de permittivité, de nombreux tests montrent l'obtention de modèles présentant des artefacts en dessus et en dessous de la galerie. A ce stade, il est donc déconseillé de faire le lien entre cette anomalie et le point D.

– De manière plus globale :

En plus de ces résultats GPR et ERT, des investigations RMP et gravimétriques ont été menées pour détecter l'eau et évaluer ses variations. A l'aplomb du point D, elles concluent à la présence de trois zones distinctes : deux zones riches en eau allant de 5 à 20 mètres et en dessous de 40 mètres, ainsi qu'une zone plus sèche autour de 30 mètres (voir Figure 3 (d) de Carrière *et al.* (2016)). La distribution de teneur en eau déduite de la permittivité (Fig. 2.78) est en accord avec ces résultats puisqu'elle affiche des distributions similaires. Effectivement, la teneur en eau est en moyenne plus élevée entre les élévations 555 et 569 mètres et en dessous de 538 mètres, où se trouve notamment le membre U2 très poreux, et des valeurs en moyenne plus faibles entre les deux où se trouvent justement le calcaire

à orbitolines de faible porosité. Compte tenu de la cohérence sur la répartition de l'eau, on pourrait probablement affiner les résultats RMP en inversant de nouveau les jeux de données avec en entrée la stratification haute résolution issue de la permittivité. Cela permettrait d'avoir en entrée une description réaliste du modèle géologique plutôt qu'un nombre de couches arbitrairement choisi.

En définitive, les informations, apportées par la FWI de données GPR, ont conforté l'interprétation et les conclusions issues de l'étude hydrogéologique précédente en plus de fournir une image haute-résolution du sous-sol entre les deux forages. Un point important n'a cependant pas pu être confirmé : c'est la présence d'une faille supposée alimenter en eau le point D. Cette faille, issue de la famille de failles N30°, est susceptible de recouper le profil F5/F6 (comparaison entre la Figure 2.6 et la Figure 53 des travaux de Carrière (2014)).

## 2.6 Conclusions

La méthode d'inversion des champs d'ondes complets a montré des résultats encourageants sur des données réelles acquises entre forages sur le site de Rustrel dans les carbonates.

La présentation du site, des contextes géologique et hydrogéologique ont permis une première approche de l'environnement. Cependant, les observations locales (affleurements, mesure des propriétés de l'eau dans la galerie) ont montré des limites. Pour dépasser ces limites, de multiples investigations géophysiques ont alors été réalisées afin de qualifier/quantifier le massif et ses propriétés de manière plus continue. Les études GPR et ERT ont fourni des valeurs quantitatives de permittivité et de conductivité permettant de se faire une idée et être comparées plus tard à nos résultats.

L'analyse s'est ensuite recentrée sur le site étudié à travers la description de la carotte et surtout l'analyse des données 3D. Ces dernières ont ensuite été utilisées pour déterminer des premiers modèles de permittivité et de conductivité servant par la suite de modèles initiaux à la FWI. Enfin, les données ont été converties pour être compatibles avec une inversion 2D. A cette occasion, il est clairement apparu que le choix de permittivité moyenne, requis par la formulation utilisée, avait un impact sur l'amplitude des ondes.

L'inversion des données réelles en parallèle des données synthétiques constitue un point original de ce travail. Compte tenu des interactions multiples entre les ingrédients de la FWI, ces derniers ont été introduits et étudiés pas à pas afin de comprendre au mieux l'influence, l'apport et les éventuels points faibles de chacun. L'estimation de la source initiale, les inversions monoparamètres puis multiparamètres, la mise à jour de la source à travers des choix concernant la stratégie fréquentielle et le nombre d'itérations, nous ont permis d'aboutir une stratégie optimale qui amène à différentes conclusions :

- L'inversion monoparamètre des formes d'ondes constitue bien un apport majeur en termes de résolution et de comparaison avec les données par rapport à une technique plus traditionnelle comme la tomographie des temps de première arrivée.
- L'inversion multiparamètres constitue une avancée par rapport à l'inversion monoparamètre dans ce contexte carbonaté plutôt peu atténuant. En effet, la prise en compte de la conductivité, en plus de la permittivité, a permis de mieux rendre compte de la propagation des ondes dans le milieu, en expliquant l'amplitude des formes d'ondes qui semble inaccessible à la permittivité seule.



## INVERSION DES CHAMPS D'ONDES ACQUIS EN TRANSMISSION DANS UN MILIEU CARBONATÉ

---

- La mise à jour de la source au cours de l'inversion a un effet essentiellement sur la conductivité. En effet, cela permet de restituer le contenu haute fréquence de la source, qui peut en retour corriger le contenu haute fréquence de la conductivité.
- L'analyse parallèle s'est révélée être un point méthodologique clé pour valider les observations faites sur les données réelles de façon quasi constante, allant même jusqu'à guider l'inversion réelle à travers le choix du scaling.

Les résultats haute-résolution obtenus montrent une stratification du milieu conforme à celle relevée sur le terrain par les études antérieures ainsi qu'une quasi-saturation du milieu en eau. Un profil vertical de permittivité a permis une première identification des couches géologiques mise en évidence par l'imagerie. De manière générale, les informations issues de la FWI confortent l'étude hydrogéologique de référence sur le site et, surtout donne une vue globale et continue du milieu entre les deux forages. Cependant, des points-clés, comme la présence d'une faille et l'entrée d'eau dans la galerie, n'ont pas pu être affinés.

# Conclusions et perspectives

## Conclusions générales

Mon travail de thèse a consisté à développer puis à appliquer la méthode d'inversion des formes d'ondes de données GPR. Le but était d'obtenir des estimations quantitatives haute-résolutions de la permittivité diélectrique et de la conductivité électrique dans des géométries 2D entre puits.

Dans le chapitre 1, je compare les performances de différents algorithmes d'optimisation, prenant en compte avec plus ou moins de précision l'information contenue dans le Hessien. En particulier, sur un exemple simplifié à deux paramètres, je montre que la méthode de Newton tronqué (TRN) est capable de découpler convenablement la permittivité et la conductivité. Dans ce cas, on peut s'affranchir d'un paramètre de mise à l'échelle ad hoc, habituellement introduit pour répartir le poids de chaque classe de paramètre dans l'inversion. Cependant, ceci n'est possible que si le modèle de départ est suffisamment proche du modèle exact, condition difficile à réaliser en pratique. Hors d'une zone proche du minimum global dans laquelle l'approximation quadratique de la fonction coût est précise, la méthode de Newton tronqué se comporte comme les méthodes d'optimisation locales plus standards. En particulier, elle est sensible au paramètre de mise à l'échelle. Je montre ensuite que, dans une configuration d'acquisition en transmission et pour un scaling donné, les différentes méthodes donnent des résultats similaires, de sorte que le coût de calcul est la seule option pour les classer. De ce point de vue, la méthode l-BFGS est la plus efficace, c'est donc celle qui est choisie pour inverser les données réelles acquises dans les carbonates de Rustrel.

Le chapitre 2 présente l'inversion des données réelles de Rustrel, qui a été menée en parallèle d'un modèle synthétique supposé représentatif du site. Cette stratégie a pour but de contrôler la validité des approches, des résultats et faciliter leur interprétation. Ce chapitre montre que l'obtention d'un résultat optimal passe par l'inversion du jeu de données pour plusieurs valeurs de scaling. Les résultats obtenus doivent ensuite être départagés à l'aide de critères supplémentaires comme l'erreur sur les modèles (sur modèles synthétiques) et/ou l'erreur sur les données finales, pour n'en retenir, finalement, qu'un seul. Ce(s) critère(s) revient(ient) à sélectionner un scaling favorisant la reconstruction de la permittivité et donc de la cinématique. Cela a un effet bénéfique sur la conductivité, qui profite alors d'une meilleure cinématique pour se reconstruire, mais aussi d'une convergence plus lente empêchant ce paramètre de converger trop rapidement vers des minimums locaux associés à des valeurs non physiques (valeurs nulles voire négatives). La contrepartie à un tel scaling est la faible résolution obtenue pour la conductivité par rapport à celle de la permittivité. Nous avons également montré que l'inversion séquentielle de la permittivité et de la conductivité n'est pas souhaitable, il s'avère

donc nécessaire d'inverser les deux classes de paramètres en même temps, obligeant de ce fait à trouver un scaling adapté.

Ainsi, le choix d'un scaling est surtout requis pour l'estimation de la conductivité, car la permittivité est très robuste aux cours des différentes inversions mono et multiparamètres. Cette robustesse est également vérifiée lorsque la source est mise à jour lors de l'inversion. A contrario, la conductivité est très sensible à l'estimation de la source et en particulier à l'amplitude de cette dernière. La conductivité souffre donc d'un second couplage. Cette conclusion est cohérente et complémentaire de celle proposée par Keskinen *et al.* (2017) qui mettent en évidence le même couplage lors de l'estimation de la source initiale pour des modèles de conductivité initiaux différents.

En définitive, l'inversion multiparamètres de la permittivité et de la conductivité, avec mise à jour régulière de la source, est la meilleure stratégie pour imager les milieux géologiques. En effet, les résultats obtenus à partir des données de Rustrel permettent aujourd'hui de bénéficier d'une image continue haute-résolution entre les deux puits, ce qui n'était pas le cas avec la tomographie des premières arrivées. Les images quantitatives ont également permis de relier les variations de permittivité à la porosité et aux différents faciès géologiques, ce qui pourrait à l'avenir améliorer notre compréhension du fonctionnement hydrogéologique du site.

## Perspectives

Dans le but d'améliorer les résultats de la FWI, plusieurs points peuvent certainement être améliorés.

### Comment déterminer les modèles initiaux ?

Dans cette étude, le modèle initial de permittivité a été obtenu par inversion des temps de première arrivée. Cette méthode est bien établie car elle fournit une estimation des vitesses du milieu fiable. Cependant, elle pourrait être améliorée, comme le montre Irving *et al.* (2007) qui proposent également une solution de picking automatique des traces les plus bruitées associées aux grands angles de propagation en configuration cross-hole. La détermination du modèle initial de conductivité (ou d'atténuation) a été plus problématique. Deux approches distinctes ont été utilisées : conversion de la permittivité, via les lois de Topp et Archie, et analyse des amplitudes. Ces deux méthodes ont donné des résultats concordant sur la partie haute (relativement homogène) du profil, mais aussi des divergences importantes en partie basse. Ces divergences peuvent s'expliquer par une loi de Topp qui semble limitée pour les milieux carbonatés, une loi d'Archie utilisée avec une seule valeur de conductivité de l'eau et une analyse d'amplitude qui manque de robustesse. Ainsi, nous souhaitons obtenir la conductivité, via des approches plus robustes et systématiques comme la tomographie d'amplitude présentée par Holliger *et al.* (2001); Gloaguen *et al.* (2005) et Giroux *et al.* (2007).

### Préconditionnement

Lors de la phase de développement méthodologique, un aspect important de l'inversion des formes d'ondes n'a pas été investigué : le preconditionnement. Dans le cadre de l'inversion multiparamètres de données sismiques, Métivier *et al.* (2015) proposent d'étendre la

stratégie de préconditionnement initialement proposée par Shin *et al.* (2001) en monoparamètre. Cette stratégie consiste à approcher chaque bloc de l'opérateur Hessien par sa diagonale. Le préconditionneur est ensuite calculé comme l'inverse de cette approximation avant d'être appliqué à l'équation de Newton. Ce type de préconditionnement a déjà montré son potentiel. En effet, les résultats obtenus, sur données synthétiques, avec les algorithmes de l-BFGS et du Newton tronqué préconditionnés sont bien meilleurs que ceux issus des versions non préconditionnées (Métivier *et al.*, 2015; Yang *et al.*, 2017).

Concernant l'inversion de données GPR, Lopes (2009b) utilise un algorithme basé sur un gradient préconditionné via l'approche de Shin *et al.* (2001) pour l'inversion monoparamètre de la permittivité. Toujours en monoparamètre, Watson (2016b) montre l'apport du préconditionnement pour l'algorithme de l-BFGS. Pour l'inversion de données GPR en multiparamètres, van der Kruk *et al.* (2015) montrent l'apport du gradient conjugué non linéaire préconditionné sur sa version classique, notamment pour réduire les artefacts de conductivité créés par les zones gelées au niveau des sources et des récepteurs. Au vu de ces résultats, nous envisageons de développer le préconditionnement pour l'inversion de données GPR multiparamètres, en particulier pour le Newton tronqué.

### Approche 3D

Les difficultés rencontrées lors de l'inversion des données GPR de Rustrel nous amènent à considérer l'inversion 3D et non plus 2D. Premièrement, la formule utilisée pour convertir les données 3D en 2D requiert de choisir une permittivité moyenne. Si ce choix est évident, et sans effets significatifs dans un milieu relativement homogène, il ne l'est plus dans un milieu plus contrasté. En effet, dès que la permittivité s'éloigne de la moyenne, l'amplitude des ondes converties peut varier de façon importante induisant, de ce fait, des valeurs de conductivité moins fiables après inversion multiparamètres. Deuxièmement, le non-respect de l'hypothèse 2D peut provoquer une perte non négligeable de l'énergie électromagnétique. Ce phénomène, non reproductible avec les outils de modélisation 2D, est problématique pour l'estimation de la conductivité. Considérer la troisième dimension permettrait de résoudre ces deux problèmes. Cependant, ce changement de dimension n'est pas neutre en matière de temps de calcul et de ressources informatiques à mobiliser. Malgré cela, des développements en ce sens ont débuté récemment. Ainsi, Mozaffari *et al.* (2016) proposent des inversions 2.5D entre puits. Dans ce cas, les modèles de permittivité et de conductivité 2D (compris entre les deux puits) sont étendus de part et d'autre de ce plan de manière invariable dans la troisième dimension. Ce procédé permet de définir un cube 3D appelé modèle 2.5D. Ensuite, les champs d'ondes sont calculés dans ce milieu 2.5D avant d'inverser les paramètres dans le plan central (associé aux puits). Le nouveau modèle 2D ainsi obtenu est étendu à nouveau et ainsi de suite. Cette stratégie permet de s'affranchir de la conversion 3D/2D, mais restera limitée si l'hypothèse 2D du milieu n'est pas vérifiée, comme c'est le cas avec la galerie du LSBB.

Ces développements montrent que l'inversion de données GPR en 3D devrait être plus courante dans un avenir proche. Elle a même débuté pour imager la permittivité, sur modèles synthétiques, avec des maillages de tailles raisonnables (Watson, 2016b).

Toujours dans cette perspective 3D, il est également envisageable d'adapter des algorithmes de modélisation et d'inversion d'ondes sismiques 3D dans l'approximation visco-élastique à l'électromagnétisme 3D, à l'image de ce qui a été réalisé dans cette thèse dans une géométrie 2D. En effet, la structure des équations sismiques proposées par Gosselin-Cliche & Giroux (2014)

(équation 1) peut être reproduite en électromagnétisme, ce qui mène à une nouvelle analogie entre les deux physiques, en 3D cette fois. Cette analogie mise en évidence aux cours de mes travaux n'a pas pu être exploitée dans le temps imparti et pourra faire l'objet de recherches futures.

### **Suivi temporel de la teneur en eau du massif**

Lors de son étude hydrogéologique, Carrière (2014) met en évidence des variations saisonnières du stock d'eau dans les calcaires Urgoniens. Pour mieux comprendre cette dynamique, il faudrait mettre en place un suivi temporel capable de quantifier les variations observées ou/et faire des essais d'injection. Pour traiter les données entre deux instants/périodes, on pourra s'inspirer des travaux de Asnaashari (2013). Ces derniers visent à quantifier les variations de vitesses sismiques locales ( $V_p$ ), induites par la substitution de gaz par de l'eau, ou l'injection de valeur d'eau pour faciliter l'extraction de pétrole. Pour quantifier au mieux les variations, trois stratégies sont testées (dites parallèle, séquentielle et différentielle) sur des cas synthétiques et réels pour déterminer la plus appropriée. Il en ressort que la troisième est la plus fiable mais elle requiert une acquisition fixe, ce qui n'est généralement pas le cas avec le GPR. Il faudra donc réfléchir à la meilleure stratégie d'acquisition à adopter dans notre cas.

# Bibliographie

- Andriani Racic, M. V. . (2016). Application of Geostatistical Inversion in GPR Velocity Tomography for Characterization of Urganian Limestone (LSBB-Rustrel). Mémoire de D.E.A., Université de Pau et des Pays de l'Adour.
- Archie, G. E. (1942). The electrical resistivity log as an aid in determining some reservoir characteristics. *Transactions of the American Intitute of Mining and Metallurgical Engineers*, 146:55–62.
- Asnaashari, A. (2013). *Quantitative 4D seismic imaging in complex media using 2D full waveform inversion*. Thèse de doctorat, ISTerre, Université Joseph Fourier.
- Babcock, E. & H. Bradford, J. (2015). Reflection waveform inversion of ground-penetrating radar data for characterizing thin and ultrathin layers of nonaqueous phase liquid contaminants in stratified media. *GEOPHYSICS*, 80:H1–H11.
- Bailey, J. T., Evans, S. & Robin, G. Q. (1964). Radio echo sounding of polar ice sheets. *Nature*, 204(4957):420–421.
- Bakalowicz, M. (2005). Karst groundwater : a challenge for new resources. *Hydrogeology Journal*, 13(1):148–160.
- Bakalowicz M., D. N. (2005). Ressources en eau du karst : un enjeu pour le bassin méditerranéen. *Géosciences - l'eau souterraine. Géosciences - l'eau souterraine BRGM*, 2, pages 26–31.
- Beauprêtre, S. (2013). *Développement d'une approche de paléosismologie géophysique par imagerie Géoradar. Applications aux failles décrochantes actives de Nouvelle Zélande*. Thèse de doctorat, Université de Grenoble.
- Becht, A., Tronicke, J., Appel, E. & Dietrich, P. (2004). Inversion strategy in crosshole radar tomography using information of data subsets. *GEOPHYSICS*, 69(1):222–230.
- Belina, F., Irving, J., Ernst, J. & Holliger, K. (2012a). Analysis of an iterative deconvolution approach for estimating the source wavelet during waveform inversion of crosshole georadar data. *Journal of Applied Geophysics*, 78:20–30.
- Belina, F., Irving, J., Ernst, J. & Holliger, K. (2012b). Evaluation of the reconstruction limits of a frequency-independent crosshole georadar waveform inversion scheme in the presence of dispersion. *Journal of Applied Geophysics*, 78:9–19.

## BIBLIOGRAPHIE

---

- Ben Hadj Ali, H. (2009). *Three dimensional visco-acoustic frequency domain full waveform inversion*. Thèse de doctorat, Université de Nice-Sophia-Antipolis.
- Bentley, C. R. (1964). The structure of Antarctica and its ice cover. In Odishaw, H., éditeur : *Research in Geophysics, v.2 Solid Earth and Interface Phenomena*, pages 335–389. Technology Press of Massachusetts Institute of Technology.
- Beres, J. (2013). *Characterization of anisotropy in a karstified carbonate platform using seismic and electrical resistivity methods - a joint approach*. Thèse de doctorat, Université Paris Sud.
- Binley, A., Winship, P., Middleton, R., Pokar, M. & West, J. (2001). High-resolution characterization of vadose zone dynamics using cross-borehole radar. *Water Resources Research*, 37(11):2639–2652.
- Blanc, M., P., M. J., P., D. P. & Roux M., Weydert P., R. J. (1973). Carte géologique et notice explicative (1/50 000), feuille 942, Sault-de-Vaucluse, France. *BRGM, Orléans*.
- Bleistein, N. (1986). Two-and-one-half dimensional in-plane wave propagation. *Geophysical Prospecting*, 34:686–703.
- Blondel, T. (2008). *Traçage spatial et temporel des eaux souterraines dans les hydrosystèmes karstiques par les matières organiques dissoutes : Expérimentation et application sur les sites du Laboratoire Souterrain à Bas Bruit (LSBB) de Rustrel-Pays d’Apt et de Fontaine de Vaucluse*. Thèse de doctorat, Université d’Avignon et des pays de Vaucluse.
- Bohleber, P., Sold, L., Hardy, D. R., Schwikowski, M., Klenk, P., Fischer, A., Sirguey, P., Cullen, N. J., Potocki, M., Hoffmann, H. & Mayewski, P. (2017). Ground-penetrating radar reveals ice thickness and undisturbed englacial layers at kilimanjaro’s northern ice field. *The Cryosphere*, 11(1):469–482.
- Bonnans, J. F., Gilbert, J. C., Lemaréchal, C. & Sagastizábal, C. A. (2006). *Numerical Optimization, Theoretical and Practical Aspects*. Springer series, Universitext.
- Bouaziz, I. (2015). Etude d’une carotte de la plateforme Urgonienne du Vaucluse : Approches sédimentologie, pétrophysique et numérique. Mémoire de D.E.A., Université de Pau et des Pays de l’Adour.
- Bradford, J. H., Harper, J. T. & Brown, J. (2009). Complex dielectric permittivity measurements from ground-penetrating radar data to estimate snow liquid water content in the pendular regime. *Water Resources Research*, 45:W08403.
- Bristow, C. S. & Jol, H. M., éditeurs (2003). *Ground Penetrating Radar in Sediments*. Geological Society, London.
- Brossier, R. (2009). *Imagerie sismique à deux dimensions des milieux visco-élastiques par inversion des formes d’onde : développements méthodologiques et applications*. Thèse de doctorat, Université de Nice-Sophia-Antipolis.
- Brossier, R., Operto, S. & Virieux, J. (2009). Seismic imaging of complex onshore structures by 2D elastic frequency-domain full-waveform inversion. *Geophysics*, 74(6):WCC105–WCC118.

- Bunks, C., Salek, F. M., Zaleski, S. & Chavent, G. (1995). Multiscale seismic waveform inversion. *Geophysics*, 60(5):1457–1473.
- Busch, S., van der Kruk, J., Bikowski, J. & Vereecken, H. (2012). Quantitative conductivity and permittivity estimation using full-waveform inversion of on-ground GPR data. *Geophysics*, 77(6):H79–H91.
- Busch, S., van der Kruk, J. & Vereecken, H. (2014). Improved characterization of fine-texture soils using on-ground GPR full-waveform inversion. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 52:3947–3958.
- Carcione, J. & Cavallini, F. (1995). On the acoustic-electromagnetic analogy. *Wave motion*, 21:149–162.
- Carcione, J. M. & Robinson, E. M. (2002). On the acoustic-electromagnetic analogy for the reflection-refraction problem. *Studia Geophysica et Geodaetica*, 46:321–346.
- Carrière, S. D. (2014). *Etude hydrogéophysique de la structure et du fonctionnement de la zone non saturée du karst*. Thèse de doctorat, Université d’Avignon et des pays de Vaucluse.
- Carrière, S. D., Chalikakis, K., Sénéchal, G., Danquigny, C. & Emblanch, C. (2013). Combining Electrical Resistivity Tomography and Ground Penetrating Radar to study geological structuring of karst Unsaturated Zone. *Journal of Applied Geophysics*, 94:31–41.
- Carrière, S. D., Chalikakis, K., Danquigny, C., Davi, H., Mazzilli, N., Ollivier, C. & Emblanch, C. (2016). The role of porous matrix in water flow regulation within a karst unsaturated zone : an integrated hydrogeophysical approach. *Hydrogeology Journal*, 24(7):1905–1918.
- Castellanos, C., Métivier, L., Operto, S., Brossier, R. & Virieux, J. (2015). Fast full waveform inversion with source encoding and second-order optimization methods. *Geophysical Journal International*, 200(2):720–744.
- Chew, W. C. (1995). *Waves and Fields in Inhomogeneous Media*. IEEE Press, New York.
- Cole, K. S. & Cole, R. H. (1941). Dispersion and absorption in dielectrics. *Journal of Chemical Physics*, 9:341–351.
- Conyers, L. B. (2008). Ground-penetrating radar for landscape archaeology : Method and applications. *Seeing the Unseen - Geophysics and Landscape Archaeology*.
- Cruse, E., Pica, A., Noble, M., McDonald, J. & Tarantola, A. (1990). Robust elastic non-linear waveform inversion : application to real data. *Geophysics*, 55:527–538.
- Crocco, L. & Ferrara, V. (2014). A review on ground penetrating radar technology for the detection of buried or trapped victims. *In CTS*.
- Dafflon, B., Irving, J. & Barrash, W. (2011). Inversion of multiple intersecting high-resolution crosshole gpr profiles for hydrological characterization at the boise hydrogeophysical research site. *Journal of Applied Geophysics*, 73:305–314.
- Dai, Y. & Yuan, Y. (1999). A nonlinear conjugate gradient method with a strong global convergence property. *SIAM Journal on Optimization*, 10:177–182.



- Daniels, D. J. (2006). A review of GPR for landmine detection. *Sensing and Imaging : An International Journal*, 7(3):90–123.
- Davidson, D. W. & Cole, R. H. (1951). Dielectric relaxation in glycerol, propylene glycol, and *n*-propanol. *The Journal of Chemical Physics*, 19(12):1484–1490.
- Davis, J. L. & Annan, A. P. (1989). Ground penetrating radar for high-resolution mapping of soil and rock stratigraphy. *Geophysical Prospecting*, 37:531–551.
- Debye, P. (1929). Polar molecules. *Chemical Catalogue Co.*
- Deparis, J. (2007). *Etude des éboulements rocheux par méthodes géophysiques*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble 1.
- Deparis, J. & Garambois, S. (2009). On the use of dispersive APVO GPR curves for thin-bed properties estimation : Theory and application to fracture characterization. *Geophysics*, 74(1):J1–J12.
- Devaney, A. (1984). Geophysical diffraction tomography. *Geoscience and Remote Sensing, IEEE Transactions on*, GE-22(1):3–13.
- Devaney, A. J. & Zhang, D. (1991). Geophysical diffraction tomography in a layered background. *Wave motion*, 14:243–265.
- Dix, C. H. (1955). Seismic velocities from surface measurements. *Geophysics*, 20:68–86.
- Doolittle, J. A., Jenkinson, B., Hopkins, D., Ulmer, M. & Tuttle, W. (2006). Hydrogeological investigations with ground-penetrating radar (GPR) : Estimating water-table depths and local ground-water flow pattern in areas of coarse-textured soils. *Geoderma*, 131:317–329.
- Dorn, C., Linde, N., Doetsch, J., Borgne, T. L. & Bour, O. (2012). Fracture imaging within a granitic rock aquifer using multiple-offset single-hole and cross-hole GPR reflection data. *Journal of Applied Geophysics*, 78:123–132.
- Eisenstat, S. C. & Walker, H. F. (1994). Choosing the forcing terms in an inexact Newton method. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 17:16–32.
- El Bouajaji, M., Lanteri, S. & Yedlin, M. (2011). Discontinuous Galerkin frequency domain forward modelling for the inversion of electric permittivity in the 2D case. *Geophysical Prospecting*, 59(5):920–933.
- Ellefsen, K. J., Mazzella, A. T., Horton, R. J. & McKenna, J. R. (2011). Phase and amplitude inversion of crosswell radar data. *Geophysics*, 76(3):J1–J12.
- Ernst, J. R., Green, A. G., Maurer, H. & Holliger, K. (2007a). Application of a new 2D time-domain full-waveform inversion scheme to crosshole radar data. *Geophysics*, 72(5):J53–J64.
- Ernst, J. R., Maurer, H., Green, A. G. & Holliger, K. (2007b). Full-waveform inversion of cross-hole radar data based on 2-D finite-difference time-domain solutions of Maxwell’s equations. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 45(9):2807–2828.
- Fischer, E., McMechan, G. A. & Annan, A. P. (1992). Acquisition and processing of wide-aperture ground-penetrating radar data. *Geophysics*, 57(3):495–504.

- Fletcher, R. & Reeves, C. M. (1964). Function minimization by conjugate gradient. *Computer Journal*, 7:149–154.
- Forte, E. & Pipan, M. (2008). Integrated seismic tomography and ground-penetrating radar (GPR) for the high-resolution study of burial mounds. *Journal of Archaeological Science*, 35:2614–2623.
- Garry, B. (2007). *Etude des processus d'écoulements de la zone non saturée pour la modélisation des aquifères karstiques : expérimentation hydrodynamique et hydrochimique sur les sites du laboratoire souterrain à bas bruits (LSBB) de Rustrel et de Fontaine de Vaucluse*. Thèse de doctorat, Université d'Avignon et des pays de Vaucluse.
- Gauthier, O., Virieux, J. & Tarantola, A. (1986). Two-dimensional nonlinear inversion of seismic waveforms : numerical results. *Geophysics*, 51(7):1387–1403.
- Giannakis, I., Giannopoulos, A. & Warren, C. (2016). A realistic fdtd numerical modeling framework of ground penetrating radar for landmine detection. *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing*, 9(1):37–51.
- Giannopoulos, A. (2005). Modelling ground penetrating radar by GprMax. *Construction and Building Materials*, 19:755–762.
- Girard, J.-F. (2002). *Imagerie géoradar et modélisation des diffractions multiples*. Thèse de doctorat, Université Louis Pasteur, Strasbourg 1.
- Giroux, B., Gloaguen, E. & Chouteau, M. (2007). bh tomo a matlab borehole georadar 2d tomography package. *Computers & Geosciences*, 33(1):126 – 137.
- Gloaguen, E., Marcotte, D., Chouteau, M. & Perroud, H. (2005). Borehole radar velocity inversion using cokriging and cosimulation. *Journal of Applied Geophysics*, 57:242–259.
- Gomaa, M. M., Kassab, M. A. & El-Sayed, N. A. (2015). Study of petrographical and electrical properties of some jurassic carbonate rocks, north sinai, egypt. *Egyptian Journal of Petroleum*, 24(3):343 – 352.
- Gosselin-Cliche, B. & Giroux, B. (2014). 3D frequency-domain finite-difference viscoelastic-wave modeling using weighted average 27-point operators with optimal coefficients. *Geophysics*, 79(3):T169–T188.
- Gueting, N., Klotzsche, A., van der Kruk, J., Vanderborght, J., Vereecken, H. & Englert, A. (2015). Imaging and characterization of facies heterogeneity in an alluvial aquifer using gpr full-waveform inversion and cone penetration tests. *Journal of Hydrology*, 524(Supplement C):680 – 695.
- Guglielmi, Y. (2010). Carbonate reservoirs - the Rustrel-Fontaine de Vaucluse LSBB : a unique facility for deep carbonate reservoir. *I-Dust 2010, Apt, France - <http://lsbb.eu>*.
- Hadamard, J. (1902). Sur les problèmes aux dérivés partielles et leur signification physique. *Princeton University Bulletin*, pages 49–52.
- Han, T., Clennell, M. B., Pervukhina, M. & Josh, M. (2016). Saturation effects on the joint elastic–dielectric properties of carbonates. *Journal of Applied Geophysics*, 129:36–40.

- Hicks, G. J. (2002). Arbitrary source and receiver positioning in finite-difference schemes using Kaiser windowed sinc functions. *Geophysics*, 67:156–166.
- Holland, J. H. (1975). *Adaption in Natural and Artificial Systems*. University of Michigan Press.
- Hollender, F. & Tillard, S. (1998). Modeling ground-penetrating radar wave propagation and reflection with the Jonscher parameterization. *Geophysics*, 63(6):1933–1942.
- Holliger, K., Musil, M. & Maurer, H. (2001). Ray-based amplitude tomography for crosshole georadar data : a numerical assessment. *Journal of Applied Geophysics*, 47:285–298.
- Huisman, J. A., Hubbard, S. S., Redman, J. D. & Annan, A. P. (2003). Measuring soil water content with ground penetrating radar : A review. *Vadose Zone Journal*, 2:476–491.
- Hustedt, B., Operto, S. & Virieux, J. (2004). Mixed-grid and staggered-grid finite difference methods for frequency domain acoustic wave modelling. *Geophysical Journal International*, 157:1269–1296.
- Irving, J., Knoll, M. & Knight, R. (2007). Improving crosshole radar velocity tomograms : A new approach to incorporating high-angle travelttime data. *Geophysics*, 72(4).
- Jadoon, K. Z., Lambot, S., Scharnagl, B., van der Kruk, J., Slob, E. & Vereecken, H. (2010). Quantifying field-scale surface soil water content from proximal GPR signal inversion in the time domain. *Near Surface Geophysics*, 8(6):483–491.
- Jeanne, P. (2012). *Architectural, petrophysical and hydromechanical properties of fault zones in fractured-porous rocks : compared studies of a moderate and a mature fault zones (France)*. Thèse de doctorat, Université de Nice Sophia-Antipolis.
- Jeannin, M. (2005). *Etude des processus d'instabilités des versants rocheux par prospection géophysique - Apport du radar géologique*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble 1.
- Jo, C. H., Shin, C. & Suh, J. H. (1996). An optimal 9-point, finite-difference, frequency-space 2D scalar extrapolator. *Geophysics*, 61:529–537.
- Jonscher, A. (1977). The universal dielectric response. *Nature*, 267(5613):673–679.
- Jonscher, A. K. (1981). A new understanding of the dielectric relaxation of solids. *Journal of Materials Science*, 16:2037–2060.
- Kalogeropoulos, A., van der Kruk, J., Hugenschmidt, J., Bikowski, J. & Brühwiler, E. (2013). Full-waveform GPR inversion to assess chloride gradients in concrete. *NDT&E International*, 57:74–84.
- Kalogeropoulos, A., van der Kruk, J., Hugenschmidt, J., Busch, S. & Merz, K. (2011). Chlorides and moisture assessment in concrete by GPR full waveform inversion. *Near Surface Geophysics*, 9(3):277–285.
- Kamei, R. & Pratt, R. G. (2013). Inversion strategies for visco-acoustic waveform inversion. *Geophysical Journal International*, 194:859–894.

- Keskinen, J., Klotzsche, A., Looms, M. C., Moreau, J., van der Kruk, J., Holliger, K., Stemmerik, L. & Nielsen, L. (2017). Full-waveform inversion of crosshole gpr data : Implications for porosity estimation in chalk. *Journal of Applied Geophysics*, 140(Supplement C):102 – 116.
- Kirkpatrick, S., Gelatt, C. D. & Vecchi, M. P. (1983). Optimization by simulated annealing. *Science*, 220(4598):671–680.
- Klotzsche, A., van der Kruk, J., Bradford, J. & Vereecken, H. (2014). Detection of spatially limited high-porosity layers using crosshole gpr signal analysis and full-waveform inversion. *Water Resources Research*, 50(8):6966–6985.
- Klotzsche, A., van der Kruk, J., Linde, N., Doetsch, J. & Vereecken, H. (2013). 3-D characterization of high-permeability zones in a gravel aquifer using 2-D crosshole GPR full-waveform inversion and waveguide detection. *Geophysical Journal International*, 195(2):932–944.
- Klotzsche, A., van der Kruk, J., Meles, G. A., Doetsch, J. A., Maurer, H. & Linde, N. (2010a). Full-waveform inversion of cross-hole ground-penetrating radar data to characterize a gravel aquifer close to the Thur River, Switzerland. *Near Surface Geophysics*, 8.
- Klotzsche, A., van der Kruk, J., Meles, G. A., Doetsch, J. A., Maurer, H. & Linde, N. (2010b). Full-waveform inversion of cross-hole ground-penetrating radar data to characterize a gravel aquifer close to the thur river, switzerland. *Near Surface Geophysics*, 8.
- Klotzsche, A., van der Kruk, J., Meles, G. A. & Vereecken, H. (2012). Crosshole GPR full-waveform inversion of waveguides acting as preferential flow paths within aquifer systems. *Geophysics*, 77(4):H57–H62.
- Kuroda, S., Takeuchi, M. & Kim, H. (2007). Full-waveform inversion algorithm for interpreting crosshole radar data : a theoretical approach. *Geosciences Journal*, 11(3):211–217.
- Lai, W. W., Dérobert, X. & Annan, P. (2017). A review of ground penetrating radar application in civil engineering : A 30-year journey from locating and testing to imaging and diagnosis. *NDT & E International*.
- Lailly, P. (1983). The seismic inverse problem as a sequence of before stack migrations. In Bednar, R. & Weglein, éditeurs : *Conference on Inverse Scattering, Theory and application, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia*, pages 206–220.
- Lambot, S., Slob, E. C., van den Bosch, I., Stockbroeckx, B. & Vanclooster, M. (2004). Modeling of ground-penetrating radar for accurate characterization of subsurface electric properties. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 42(11):2555–2568.
- Lambot, S., Weihermüller, L., Huisman, J. A., Vereecken, H., Vanclooster, M. & Slob, E. C. (2006). Analysis of air-launched ground-penetrating radar techniques to measure the soil surface water content. *Water Resources Research*, 42:W11403.
- Lassen, R., Sonnenborg, T., Jensen, K. & Looms, M. (2015). Monitoring co2 gas-phase migration in a shallow sand aquifer using cross-borehole ground penetrating radar. *International Journal of Greenhouse Gas Control*, 37(Supplement C):287 – 298.

- Lavoué, F. (2014). *2D Full waveform inversion of ground penetrating radar data : Towards multiparameter imaging from surface data*. Thèse de doctorat, Univ. Grenoble Alpes.
- Lavoué, F., Brossier, R., Métivier, L., Garambois, S. & Virieux, J. (2014). Two-dimensional permittivity and conductivity imaging by full waveform inversion of multioffset GPR data : a frequency-domain quasi-Newton approach. *Geophysical Journal International*, 197(1):248–268.
- Leenhardt, F. (1883). Etude géologique de la région du Mont Ventoux. *Paris : Masson*, page 273 p.
- Leonide, P., Borgomano, J., Masse, J.-P. & Doublet, S. (2012). Relation between stratigraphic architecture and multi-scale heterogeneities in carbonate platforms : The Barremian-lower Aptian of the Monts de Vaucluse, SE France. *Sedimentary Geology*, 265:87–109.
- Léonide, P., Fournier, F., Reijmer, J. J., Vonhof, H., Borgomano, J., Dijk, J., Rosenthal, M., van Goethem, M., Cochard, J. & Meulenaars, K. (2014). Diagenetic patterns and pore space distribution along a platform to outer-shelf transect (urgonian limestone, barremian–aptian, {SE} france). *Sedimentary Geology*, 306:1–23.
- Loeffler, O. (2005). *Modélisation géoradar de la proche surface, estimation de la teneur en eau et influence d'un polluant*. Thèse de doctorat, Université Louis Pasteur, Strasbourg 1.
- Looms, M., Jensen, K., Binley, A. & Nielsen, L. (2008). Monitoring unsaturated flow and transport using cross-borehole geophysical methods. *Vadose Zone Journal*, 7:227–237.
- Lopes, F. (2009a). *Inversion des formes d'ondes électromagnétiques de données radar (GPR) multioffsets*. Thèse de doctorat, Université Denis Diderot, Paris 7.
- Lopes, F. (2009b). *Inversion des formes d'ondes électromagnétiques de données radar (GPR) multioffsets*. Thèse de doctorat, Institut de Physique du Globe de Paris - Université Denis Diderot Paris 7.
- Malinowski, M., Operto, S. & Ribodetti, A. (2011). High-resolution seismic attenuation imaging from wide-aperture onshore data by visco-acoustic frequency-domain full waveform inversion. *Geophysical Journal International*, 186(3):1179–1204.
- Masse, J.-P. & Fenerci-Masse, M. (2011). Drowning discontinuities and stratigraphic correlation in platform carbonates. the late Barremian–early Aptian record of southeast France. *Cretaceous Research*, 32(6):659–684.
- Maufroy, E. (2010). *Caractérisation et modélisation numérique de l'effet de site topographique 3D : application à la Grande Montagne de Rustrel, Vaucluse*. Thèse de doctorat, Université de Nice-Sophia Antipolis.
- Maufroy, E., Gaffet, S., Operto, S., Guglielmi, Y. & Boyer, D. (2014). Travel time inversion from ground level to gallery : protocol for the characterization of P-wave signature in a fractured-porous Urgonian platform at hectometric scale. *Near surface Geophysics*, 12:doi :10.3997/1873–0604.2014025.
- Maxwell, J. C. (1873). *A Treatise on Electricity and Magnetism*. Clarendon Press, Oxford.

- Meles, G. A., Greenhalgh, S., van der Kruk, J., Green, A. G. & Maurer, H. (2011). Taming the non-linearity problem in GPR full-waveform inversion for high contrast media. *Journal of Applied Geophysics*, 73:174–186.
- Meles, G. A., van der Kruk, J., Greenhalgh, S. A., Ernst, J. R., Maurer, H. & Green, A. G. (2010). A new vector waveform inversion algorithm for simultaneous updating of conductivity and permittivity parameters from combination crosshole/borehole-to-surface GPR data. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 48:3391–3407.
- Métivier, L., Bretaudeau, F., Brossier, R., Operto, S. & Virieux, J. (2014). Full waveform inversion and the truncated Newton method : quantitative imaging of complex subsurface structures. *Geophysical Prospecting*, 62:1353–1375.
- Métivier, L. & Brossier, R. (2016). The seiscopy optimization toolbox : A large-scale nonlinear optimization library based on reverse communication. *Geophysics*, 81(2):F11–F25.
- Métivier, L., Brossier, R., Operto, S. & Virieux, J. (2015). Acoustic multi-parameter FWI for the reconstruction of P-wave velocity, density and attenuation : preconditioned truncated newton approach. In *Expanded Abstracts, 85th Annual Meeting*, pages 1198–1203. SEG.
- Métivier, L., Brossier, R., Virieux, J. & Operto, S. (2013). Full Waveform Inversion and the truncated Newton method. *SIAM Journal On Scientific Computing*, 35(2):B401–B437.
- Metropolis, N. & Ulam, S. (1949). The Monte Carlo Method. *Journal of the American Statistical Association*, 44(247):335–341.
- Minet, J., Wahyudi, A., Bogaert, P., Vanclooster, M. & Lambot, S. (2011). Mapping shallow soil moisture profiles at the field scale using full-waveform inversion of ground penetrating radar data. *Geoderma*, 161(3-4):225–237.
- Mora, P. R. (1989). Inversion = migration + tomography. *Geophysics*, 54(12):1575–1586.
- Mozaffari, A., Klotzsche, A., He, G., Vereecken, H., van der Kruk, J., Warren, C. & Giannopoulos, A. (2016). Towards 3d full-waveform inversion of crosshole gpr data. In *2016 16th International Conference on Ground Penetrating Radar (GPR)*, pages 1–4.
- MUMPS-team (2009). *MUMPS - MULTifrontal Massively Parallel Solver users' guide - version 4.9.2 (November 5, 2009)*. ENSEEIHT-ENS Lyon, <http://www.enseeiht.fr/apo/MUMPS/> or <http://graal.ens-lyon.fr/MUMPS>.
- Musil, M., Maurer, H., Holliger, K. & Green, A. G. (2006). Internal structure of an alpine rock glacier based on crosshole georadar traveltimes and amplitudes. *Geophysical Prospecting*, 54:273–285.
- Nash, S. G. (2000). A survey of truncated Newton methods. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 124:45–59.
- Neal, A. (2004). Ground-penetrating radar and its use in sedimentology : principles, problems and progress. *Earth-Science Reviews*, 66:261–330.
- Nocedal, J. (1980). Updating Quasi-Newton Matrices With Limited Storage. *Mathematics of Computation*, 35(151):773–782.

## BIBLIOGRAPHIE

---

- Nocedal, J. & Wright, S. J. (2006a). *Numerical Optimization*. Springer, 2nd édition.
- Nocedal, J. & Wright, S. J. (2006b). *Numerical Optimization*. Springer, 2nd édition.
- Olatinsu, O. B., O., O. D. & F., O. K. (2013). Radio frequency dielectric properties of limestone and sandstone from ewekoro, eastern dahomey basin. *Advances in Applied Science Research*, Volume 4:pp 150 – 158.
- Operto, S., Brossier, R., Gholami, Y., Métivier, L., Prioux, V., Ribodetti, A. & Virieux, J. (2013). A guided tour of multiparameter full waveform inversion for multicomponent data : from theory to practice. *The Leading Edge*, Special section Full Waveform Inversion(September):1040–1054.
- P. Clement, W. & Barrash, W. (2006). Crosshole radar tomography in an alluvial aquifer near boise, idaho. *J. Environ. Eng. Geophys*, 11:171–184.
- Patriarca, C., Lambot, S., Mahmoudzadeh, M. R., Minet, J. & Slob, E. (2011). Reconstruction of sub-wavelength fractures and physical properties of masonry media using full-waveform inversion of proximal penetrating radar. *Journal of Applied Geophysics*, 74:26–37.
- Perineau, A. (2013). *Caractérisation du fonctionnement de la zone non saturée des aquifères karstiques - Approche directe par études hydrodynamiques et hydrochimiques sur le bassin de recherche, d'expérimentation et d'observation de Fontaine de Vaucluse - Laboratoire Souterrain à Bas Bruit de Rustrel - Pays d'Apt*. Thèse de doctorat, Université d'Avignon et des pays de Vaucluse.
- Plessix, R. E. (2006). A review of the adjoint-state method for computing the gradient of a functional with geophysical applications. *Geophysical Journal International*, 167(2):495–503.
- Polak, E. & Ribière, G. (1969). Note sur la convergence de méthodes de directions conjuguées. *Revue Française d'Informatique et de Recherche Opérationnelle*, 16:35–43.
- Pratt, R. G. (1990). Inverse theory applied to multi-source cross-hole tomography. part II : elastic wave-equation method. *Geophysical Prospecting*, 38:311–330.
- Pratt, R. G. (1999). Seismic waveform inversion in the frequency domain, part I : theory and verification in a physical scale model. *Geophysics*, 64:888–901.
- Pratt, R. G., Shin, C. & Hicks, G. J. (1998). Gauss-Newton and full Newton methods in frequency-space seismic waveform inversion. *Geophysical Journal International*, 133:341–362.
- Pratt, R. G. & Worthington, M. H. (1990). Inverse theory applied to multi-source cross-hole tomography. Part I : acoustic wave-equation method. *Geophysical Prospecting*, 38:287–310.
- Prioux, V., Brossier, R., Operto, S. & Virieux, J. (2013). Multiparameter full waveform inversion of multicomponent OBC data from valhall. Part 1 : imaging compressional wavespeed, density and attenuation. *Geophysical Journal International*, 194(3):1640–1664.
- Puig, J.-M. (1987). *Le système karstique de la Fontaine de Vaucluse*. Thèse de doctorat, Université d'Avignon.

- Revil, A. (2013). Effective conductivity and permittivity of unsaturated porous materials in the frequency range 1 mhz–1ghz. *Water Resources Research*, 49(1):306–327.
- Saintenoy, A. (1998). *Radar géologique : acquisition de données multi-dépôts pour une mesure multi-paramètres*. Thèse de doctorat, Université Denis Diderot, Paris 7.
- Saintenoy, A., Friedt, J.-M., Booth, A. D., Tolle, F., Bernard, E., Laffly, D., Marlin, C. & Griselin, M. (2013). Deriving ice thickness, glacier volume and bedrock morphology of Austre Lovénbreen (Svalbard) using GPR. *Near Surface Geophysics*, 11(2):253–261.
- Sambridge, M. & Mosegaard, K. (2002). Monte Carlo methods in geophysical inverse problems. *Reviews of Geophysics*, 40(3):1–29.
- Sambridge, M. S. (1999a). Geophysical inversion with a neighbourhood algorithm - I. Searching a parameter space. *Geophysical Journal International*, 138:479–494.
- Sambridge, M. S. (1999b). Geophysical inversion with a neighbourhood algorithm - II. Appraising the ensemble. *Geophysical Journal International*, 138:727–746.
- Schmid, L., Heilig, A., Mitterer, C., Schweizer, J., Maurer, H., Okorn, R. & Eisen, O. (2014). Continuous snowpack monitoring using upward-looking ground-penetrating radar technology. *Journal of Glaciology*, 60(221):509–525.
- Schmid, L., Koch, F., Heilig, A., Prasch, M., Eisen, O., Mauser, W. & Schweizer, J. (2015). A novel sensor combination (upgpr-gps) to continuously and nondestructively derive snow cover properties. *Geophysical Research Letters*, 42(9):3397–3405.
- Schmid, L., Schweizer, J., Bradford, J. & Maurer, H. (2016). A synthetic study to assess the applicability of full-waveform inversion to infer snow stratigraphy from upward-looking ground-penetrating radar data. *Geophysics*, 81(1):WA213–WA223.
- Sénéchal, G., Rousset, D. & Gaffet, S. (2013). Ground-penetrating radar investigation inside a karstified limestone reservoir. *Near Surface Geophysics*, 11:283–291.
- Sénéchal, G., Rousset, D., Gloaguen, E. & Lebourg, T. (2004). High resolution seismic experiment within the low-noise underground laboratory (LSBB) of Rustrel (France). *In 10th European Meeting of Environmental and Engineering Geophysics*.
- Sengwa, R. J. & Soni, A. (2006). Low-frequency dielectric dispersion and microwave dielectric properties of dry and water-saturated limestones of jodhpur region. *GEOPHYSICS*, 71(5):G269–G277.
- Shin, C., Jang, S. & Min, D. J. (2001). Improved amplitude preservation for prestack depth migration by inverse scattering theory. *Geophysical Prospecting*, 49:592–606.
- Sirgue, L. (2003). *Inversion de la forme d'onde dans le domaine fréquentiel de données sismiques grand offset*. Thèse de doctorat, Université Paris 11, France - Queen's University, Canada.
- Sirgue, L. & Pratt, R. G. (2004). Efficient waveform inversion and imaging : a strategy for selecting temporal frequencies. *Geophysics*, 69(1):231–248.



- Song, Z., Williamson, P. & Pratt, G. (1995). Frequency-domain acoustic-wave modeling and inversion of crosshole data. Part 2 : Inversion method, synthetic experiments and real-data results. *Geophysics*, 60(3):786–809.
- Tarantola, A. (1984). Inversion of seismic reflection data in the acoustic approximation. *Geophysics*, 49(8):1259–1266.
- Thiébaud, E. (2003). Etude structurale et hydrogéologique du site du Laboratoire Souterrain à Bas Bruit de Rustrel. Mémoire de D.E.A., Université de Franche-Comté.
- Topp, G. C., Davis, J. L. & Annan, A. P. (1980). Electromagnetic determination of soil water content : measurements in coaxial transmission lines. *Water Resources Research*, 16(3):574–582.
- van der Kruk, J., Gueting, N., Klotzsche, A., He, G., Rudolph, S., von Hebel, C., Yang, X., Weihermüller, L., Mester, A. & Vereecken, H. (2015). Quantitative multi-layer electromagnetic induction inversion and full-waveform inversion of crosshole ground penetrating radar data. *Journal of Earth Science*, 26(6):844–850.
- Van Vorst, D. (2014). *Cross-Hole GPR Imaging : Traveltime and Frequency-Domain Full-Waveform Inversion*. Thèse de doctorat, The University of British Columbia.
- Van Vorst, D., Yedlin, M., Guglielmi, Y., Cappa, F., Gaffet, S., Maxwell, M. & Oldenburg, D. (2010). GPR imaging of a fracture zone in the Vaucluse Karst Aquifer using 2D eikonal inversion. In *3rd inter-Disciplinary Underground Science & Technology Conference (i-DUST 2010), Rustrel (France)*.
- Van Vorst, D., Yedlin, M. J., Virieux, J. & Krebes, E. S. (2014). 3-D to 2-D data conversion for electromagnetic wave propagation using an acoustic transfer function : Application to cross-hole GPR data. *Geophysical Journal International*, 198(1):474–483.
- Virieux, J., Asnaashari, A., Brossier, R., Métivier, L., Ribodetti, A. & Zhou, W. (2017). An introduction to Full Waveform Inversion. In Grechka, V. & Wapenaar, K., éditeurs : *Encyclopedia of Exploration Geophysics*, pages R1–1–R1–40. Society of Exploration Geophysics.
- Virieux, J. & Operto, S. (2009). An overview of full waveform inversion in exploration geophysics. *Geophysics*, 74(6):WCC1–WCC26.
- Walford, M. E. R. (1964). Radio echo sounding through an ice shelf. *Nature*, 204(4956):317–319.
- Warren, C., Giannopoulos, A. & Giannakis, I. (2016). gprmax : Open source software to simulate electromagnetic wave propagation for ground penetrating radar. *Computer Physics Communications*, 209:163–170.
- Watson, F. (2016a). Towards 3d full-wave inversion for gpr. In *2016 IEEE Radar Conference (RadarConf)*, pages 1–6.
- Watson, F. M. (2016b). *Better imaging for landmine detection : an exploration of 3D Full-Waveform Inversion for Ground Penetrating Radar*. Thèse de doctorat, Univ. of Manchester.
- Wu, R. S. & Toksöz, M. N. (1987). Diffraction tomography and multisource holography applied to seismic imaging. *Geophysics*, 52:11–25.

- Yang, P., Brossier, R., Métivier, L. & Virieux, J. (2016). A review on the systematic formulation of 3D multiparameter full waveform inversion in viscoelastic medium. *Geophysical Journal International*, 207(1):129–149.
- Yang, P., Brossier, R., Métivier, L., Virieux, J. & Zhou, W. (2017). A second-order adjoint truncated Newton approach to time-domain multiparameter full waveform inversion in viscoacoustic medium. *SIAM Journal on Scientific Computing*, page submitted.
- Yang, X., Klotzsche, A., Meles, G., Vereecken, H. & van der Kruk, J. (2013). Improvements in crosshole GPR full-waveform inversion and application on data measured at the Boise Hydrogeophysics Research site. *Journal of Applied Geophysics*, 99:114–124.
- Yang, X., van der Kruk, J., Bikowski, J., Kumbhar, P., Vereecken, H. & Meles, G. (2012). Full-waveform inversion of GPR data in frequency-domain. In *14th International Conference on Ground Penetrating Radar (GPR 2012), Shanghai (China)*, pages 324–328.
- Yedlin, M., Dauvignac, Jean-Yves, Fortino, Nicolas, Pichot, Christian, Cova, Raul, Henley, David, Hall, Kevin & Gaffet, Stéphane (2016). Progress on ultra-wideband (uwb) multi-antenna radar imaging for miga. *E3S Web of Conf.*, 12:01001.
- Yokota, T. & Matsushima, J. (2004). Seismic waveform tomography in the frequency-space domain : selection of the optimal temporal frequency for inversion. *Exploration Geophysics*, 35(1):19–24.
- Zhao, W., Forte, E., Pipan, M. & Tian, G. (2013). Ground penetrating radar (gpr) attribute analysis for archaeological prospection. *Journal of Applied Geophysics*, 97:107–117.
- Zwahlen, F. (2003). Vulnerability and risk mapping for the protection of carbonate (karst) aquifers. *Final Report, EU Publications Office (OPOCE)*, page 297 p.

## BIBLIOGRAPHIE

---

## Annexe A

# Données de Rustrel

### **Jeu de données complet acquis entre les puits F5 et F6.**

L'ensemble des données a fait l'objet d'un retrait de la composante constante, d'un filtre Butterworth passe-bande zéro phase allant 15 et 240 MHz et d'une correction de  $t_0$ . Les données sont présentées ici avec une saturation d'amplitude identique, c'est-à-dire avec la même palette de couleurs (correspondant sous SU à des seuils ("clip") min et max identiques à tous les radargrammes et non une saturation relative (comme "perc")). Cela permet une comparaison directe des différents radargrammes notamment en matière d'amplitude.

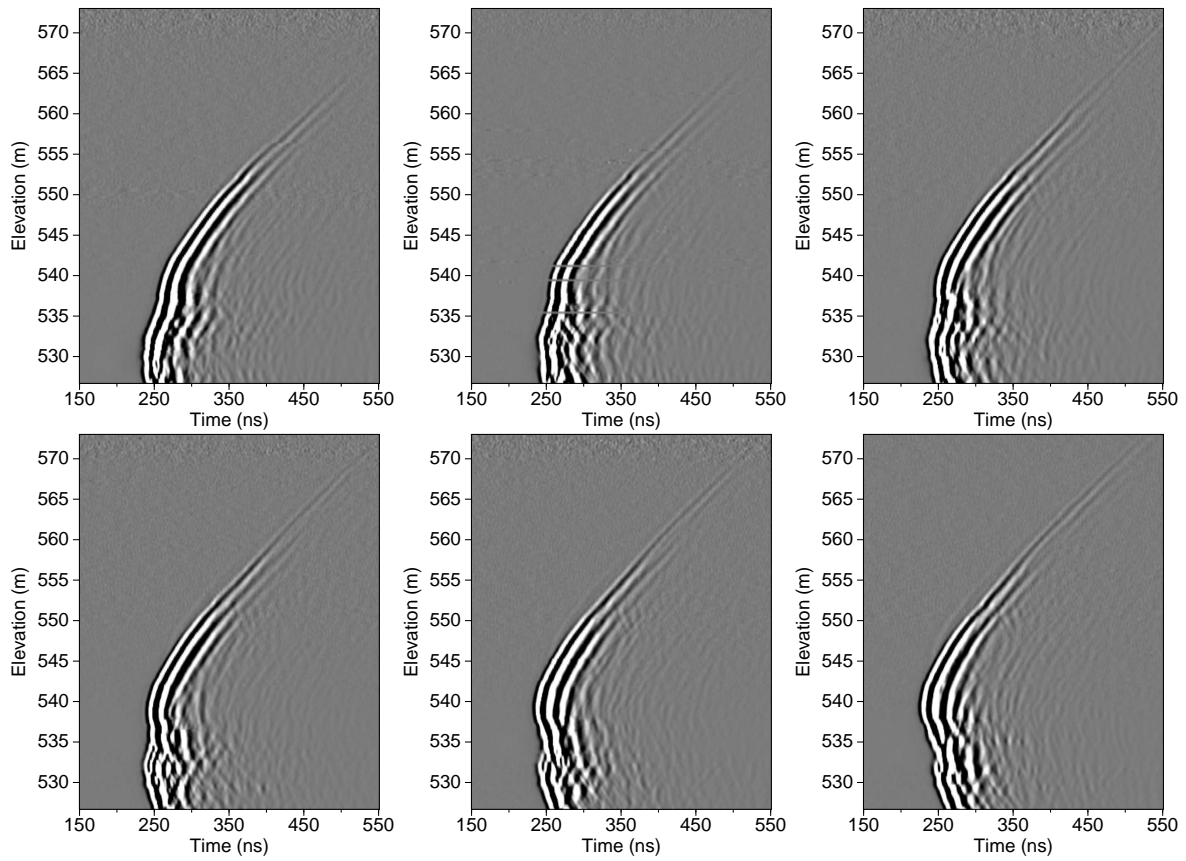


FIGURE A.1 – Radargrammes dont les sources vont de 530 à 535 mètres en élévation.

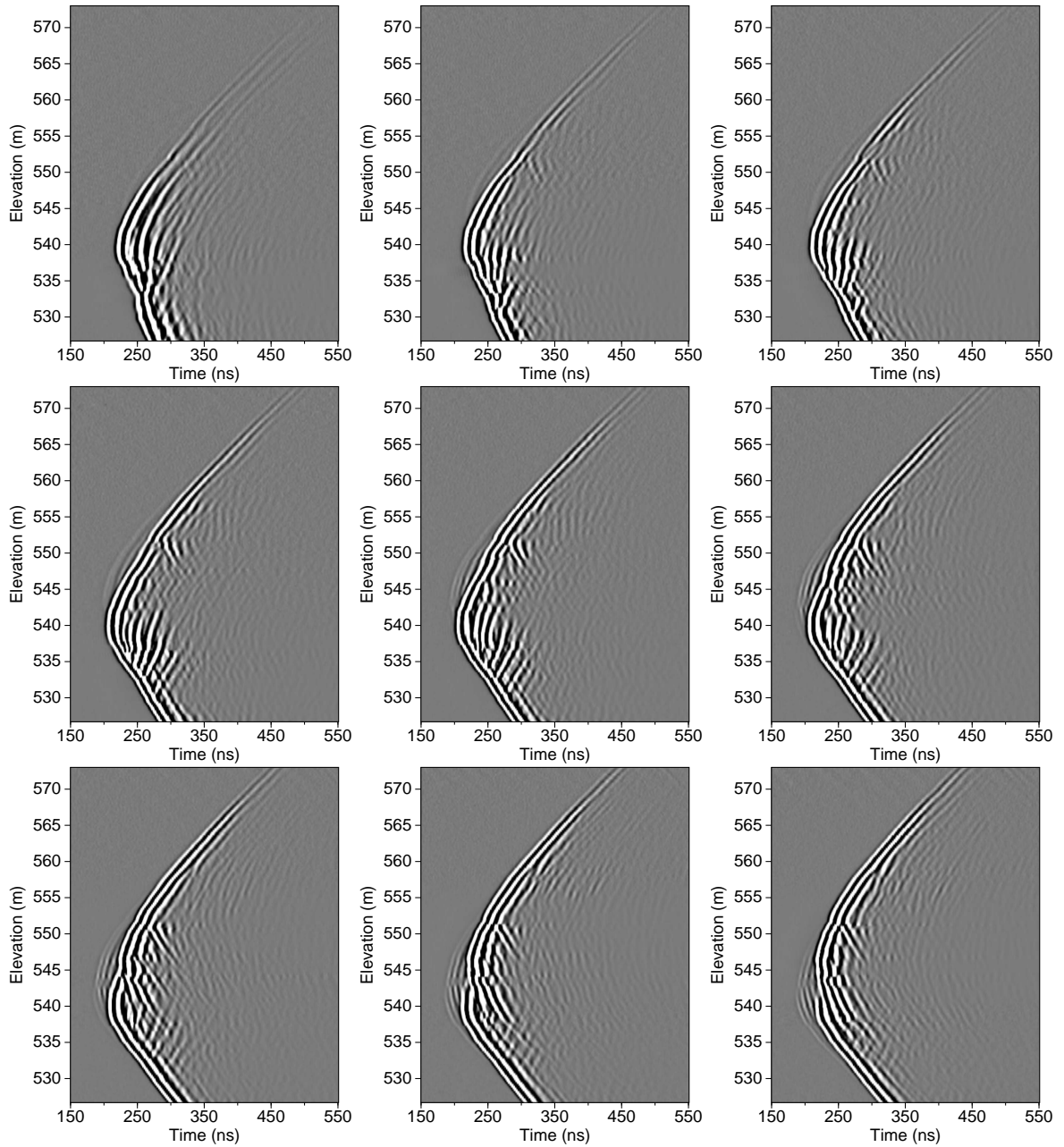


FIGURE A.2 – Radargrammes dont les sources vont de 536 à 544 mètres en élévation.

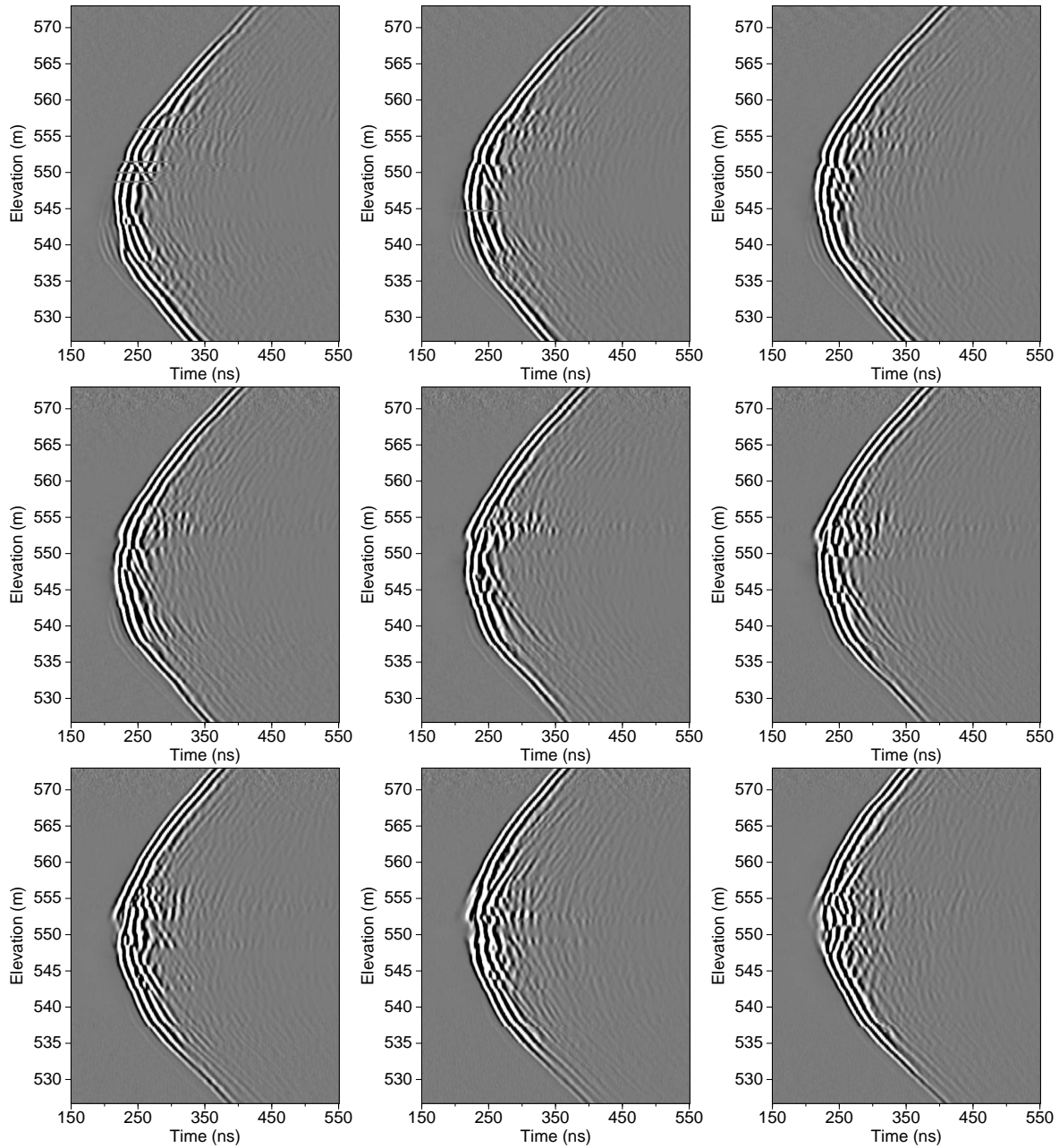


FIGURE A.3 – Radargrammes dont les sources vont de 545 à 553 mètres en élévation.

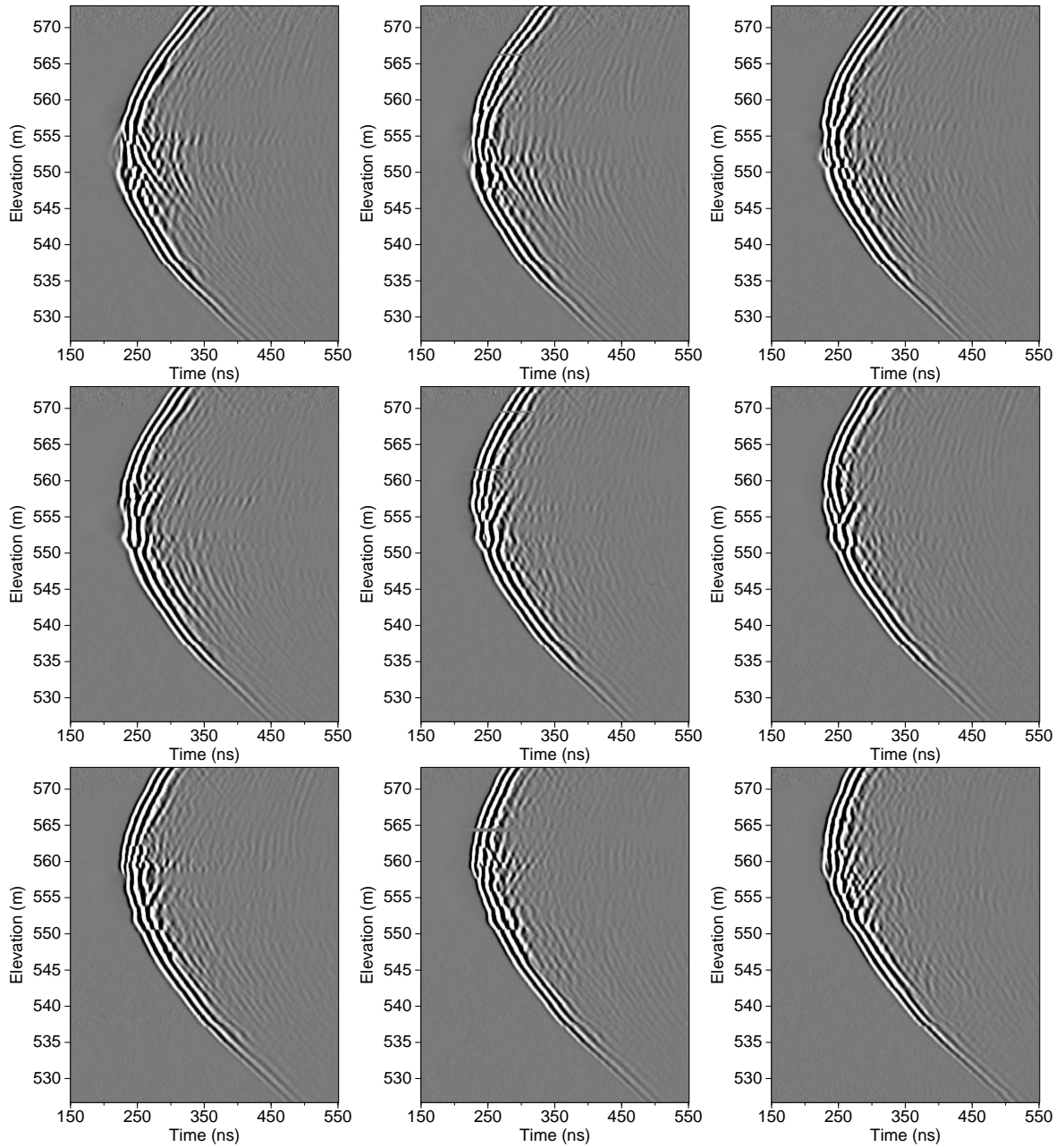


FIGURE A.4 – Radargrammes dont les sources vont de 554 à 562 mètres en élévation.



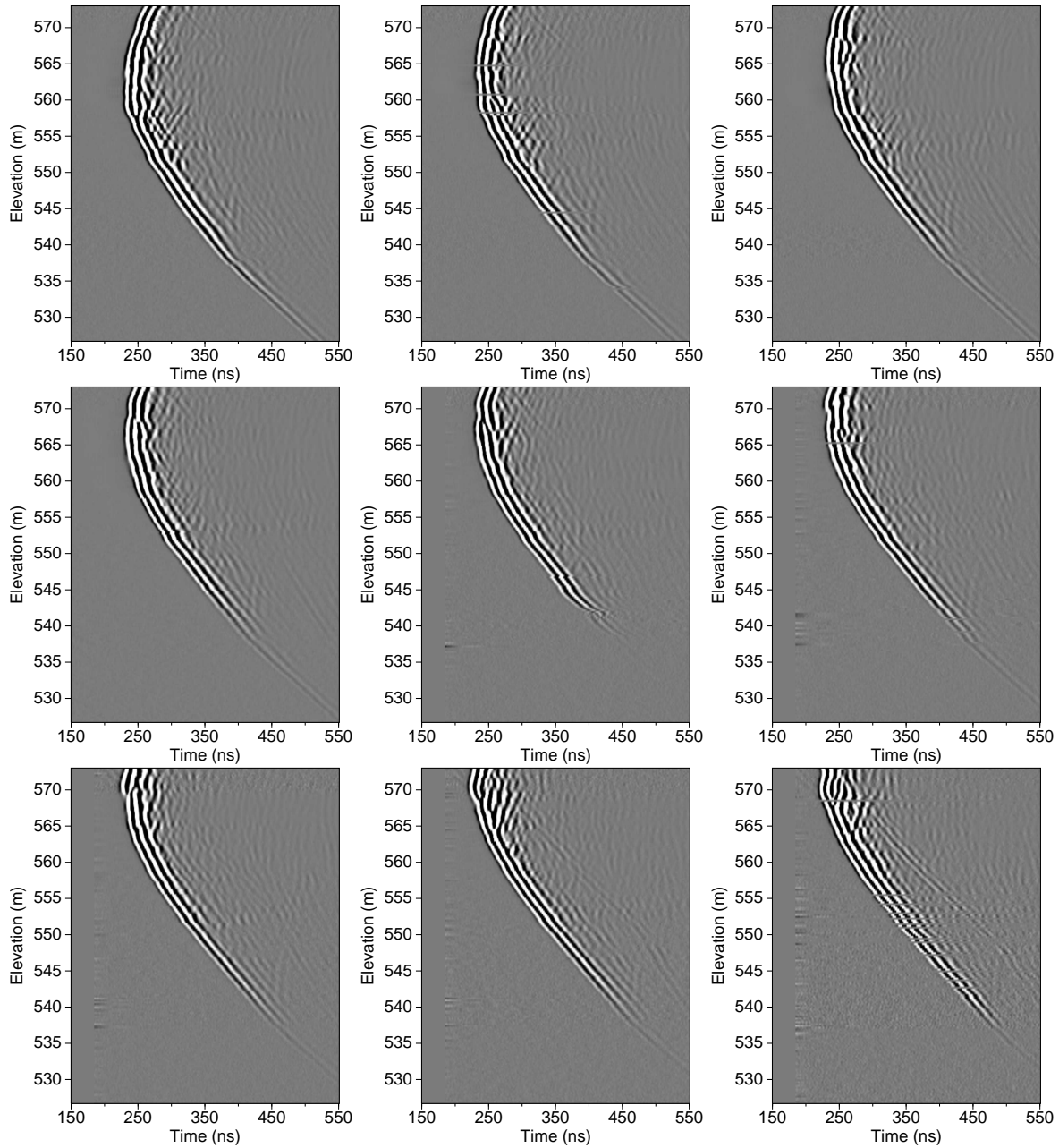


FIGURE A.5 – Radargrammes dont les sources vont de 563 à 571 mètres en élévation.

## **Annexe B**

# **Publication**

La publication présentée ci-dessous est un résumé étendu (abstract) soumis pour la conférence i-DUST 2016 qui s'est tenu à l'Université d'Avignon en Juin 2016. Cette publication présente les résultats préliminaires de l'inversion des formes d'ondes des données de Rustrel.

# Full-waveform inversion of GPR data acquired between boreholes in Rustrel carbonates

Hugo Pinard<sup>1,a</sup>, Stéphane Garambois<sup>1</sup>, Ludovic Métivier<sup>1</sup>, Michel Dietrich<sup>1</sup>, Guy Sénéchal<sup>2</sup>, and Dominique Rousset<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Université Grenoble Alpes, ISTerre, CNRS, 38000 Grenoble, France

<sup>2</sup> LFCR, Université de Pau et des Pays de l'Adour, 64000 Pau, France

**Abstract.** Full waveform inversion (FWI) of seismic or Ground Penetrating Radar data provides high-resolution quantitative images of the constitutive parameters of the rock/soil which control seismic/GPR wave propagation. We developed a 2D inversion tool in the frequency domain adapted to the multi-parameter physics controlling GPR propagation in isotropic non dispersive media, i.e. dielectric permittivity and electrical conductivity. This inversion engine was previously tested using synthetic 2D data to mitigate the trade-off between the two parameter classes. In this paper, we present the required processing techniques and first inversion results obtained on a real GPR dataset acquired in carbonates with a cross-hole configuration. The presence of the 2 m diameter underground gallery at depth constitutes a nice target to test the robustness, efficiency and resolution of the inversion in such high-contrasts context. Starting from a time tomographic image for the dielectric permittivity and from a homogeneous conductivity, we show that FWI is efficient to retrieve high resolution images of dielectric permittivity but struggles with electrical conductivity. As a quality control, we compare real and synthetic radargrams computed from the tomography and final images, showing the efficiency of the process to reconstruct some events but also underlying some issues, particularly on large incidence angles amplitude traces.

## 1. Introduction

The knowledge of the subsurface is crucial for a wide range of scientific issues such as environmental, archaeological, hydrological, geological and civil engineering. In this frame, Ground Penetrating Radar (GPR) plays a key role thanks to its non-invasive and high resolution features. Multioffset measurements may provide quantitative information of the subsurface through velocity analysis or inverse processes like travelttime tomography or full waveform inversion (FWI). With travelttime tomography, only a small fraction of the recorded data is involved in the inversion providing a smooth quantitative image of the dielectric permittivity with a limited resolution. In this context, FWI, which takes benefit from the whole recorded signal, should improve the image resolution.

FWI of cross-hole GPR datasets has shown its efficiency on synthetic and real [1] cases. Here, we perform FWI in carbonate environment with the favorable cross-hole configuration in order to evaluate our multi-parameter inversion algorithm. Based on previous

---

<sup>a</sup> Corresponding author: hugo.pinard@univ-grenoble-alpes.fr

synthetic tests, we use the l-BFGS algorithm which is well known in seismic to reconstruct simultaneously subsurface parameters.

Here, we briefly explain the concepts underlying the FWI with the description of the forward and inverse problems. We then describe the pre-processing methodologies used to estimate the source wavelet and to convert real data acquired in a 3D environment to 2D data managed by the code. Finally, we present our preliminary FWI result which contains many artifacts. Despite these artifacts, which emphasize the current failure of the inversion, we show the first benefits of the method.

## 2. Theoretical basics on forward and inverse problems

In 2D, the introduction of the constitutive properties in the Maxwell-Faraday and Maxwell-Ampère equations gives two distinct systems: the transverse electric (TE) and the transverse magnetic (TM) modes. Here, we consider only the TM one with vertical electric sources, as used in boreholes. The system of three first-order equations is recast into one second-order equation and two first-order equations. This transformation and acoustic/electromagnetic analogy [2] allow to simulate electromagnetic wave propagation using finite-difference frequency-domain schemes initially developed for seismic modeling in visco-acoustic approximation [3]. This formulation leads to the system  $A(m)H_y = s$  where the discrete wave operator  $A(m)$  contains the subsurface parameters  $m$  while  $H_y$  and  $s$  are respectively the magnetic wavefield and the discretized source terms. This linear system is solved using a LU factorization through a sparse direct solver [4]. The electrical fields  $E_x$  and  $E_z$ , associated to GPR antennas, are deduced by finite-difference of  $H_y$  following the two first-order equations.

This frequency domain formulation allows to solve TM equations at a reasonable computational cost incorporating easily the diffusive attenuation through the complex effective permittivity  $\varepsilon_e = \varepsilon + i\sigma/\omega$  with the dielectric permittivity  $\varepsilon$  [F/m], the electrical conductivity  $\sigma$  [S/m], the angular frequency  $\omega$  [rad/s] and the pure imaginary number (using a conventional time-harmonic dependency in  $e^{-i\omega t}$ ).

The formalism of FWI has been introduced in the seismic context by [5] and [6] in the time domain and developed later by [7] in the frequency domain. The target of the FWI is to find the distribution of parameters  $m$  which minimizes the real misfit function  $f(m)$ . This quantity is defined as the distance between the observed data  $d_{obs,\omega_j,s}$  and the calculated data  $d_{cal,\omega_j,s}(m)$ , namely the residuals  $\Delta d_{\omega_j,s}(m) = d_{obs,\omega_j,s} - d_{cal,\omega_j,s}(m)$ , through the  $\ell_2$  norm:

$$f(m) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N_\omega} \sum_{s=1}^{N_s} \Delta d_{\omega_j,s}(m)^\dagger \Delta d_{\omega_j,s}(m) \quad (1)$$

where the symbol  $\dagger$  denotes the transpose conjugate operator while the total number of sources and discrete frequencies are denoted by  $N_s$  and  $N_\omega$  respectively. In our particular case, observed and calculated data correspond to the vertical components of the electric field ( $E_z$ ) at receiver positions. The FWI procedure iteratively updates the model of the subsurface through the formula:

$$m_{k+1} = m_k + \alpha_k \Delta m_k, \quad (2)$$

where  $\alpha_k$  is the linesearch parameter satisfying the Wolfe conditions and  $\Delta m_k$  is the descent direction solution of the Newton equation  $H_k \Delta m_k = -\nabla f_k$ . Among the different methods to solve the Newton equation, we choose the l-BFGS one for its efficiency and accuracy. With this method, the inverse of the Hessian operator  $H(m_k)^{-1}$  is approximated through finite-difference of  $l$  previous gradients  $\nabla f(m_{k-1}) \dots \nabla f(m_{k-l})$ . Thus, the algorithm only requires to

compute the gradients of each parameter. These quantities are obtained very efficiently thanks to the first-order adjoint-state method ([8] for a review). In the following application, we also introduce the Tikhonov regularization to smooth as much as possible the model update.

### 3. Application

Data were acquired in an Urgonian karstic limestone massif located near the LSBB. This underground structure goes through the mountain (Fig. 1a). One of its gallery, located close to the exit (S), is relatively shallow and can thus be investigated from boreholes. Among the different boreholes drilled to study carbonate properties, two of them surrounded the gallery (Fig. 1b). This configuration allowed to perform measurements in cross-hole configuration.

Two 100 MHz antennas have been used to record the dataset between these two 50 m deep boreholes separated by 18 m. 44 sources are evenly distributed (1 m interval) in borehole F5 while 200 traces have been recorded every 25 cm in borehole F6. Examples of radargram are displayed in Fig. 1c and d for two different source positions. The first one shows diffractions only between traces 70 and 100 while the second one is more complex, exhibiting three distinct hyperbolae with apex at traces 120, 135 and 145.

All first arrivals have been picked and inverted using a SIRT algorithm to get a smooth image of the velocity and so of the dielectric permittivity (Fig. 2a). The 2 m diameter underground gallery at depth 34 m is visible but appears quite spread compared to the reality where sharp contrasts exist at the interfaces air/concrete/carbonates. We expect that FWI provides higher resolution images in particular of the gallery.

Before applying FWI, a pre-processing of the data is required. We first remove the average value of each trace and apply a Butterworth filter to cut low and high frequency noises. Since our forward modeling engine is 2D and the observed data ( $d_{obs}^{3D}(t)$ ) are 3D, we apply a 3D-to-2D conversion to get the 2D observed data ( $d_{obs}^{2D}(t)$ ). The conversion, given here for one trace, is performed through the formula,

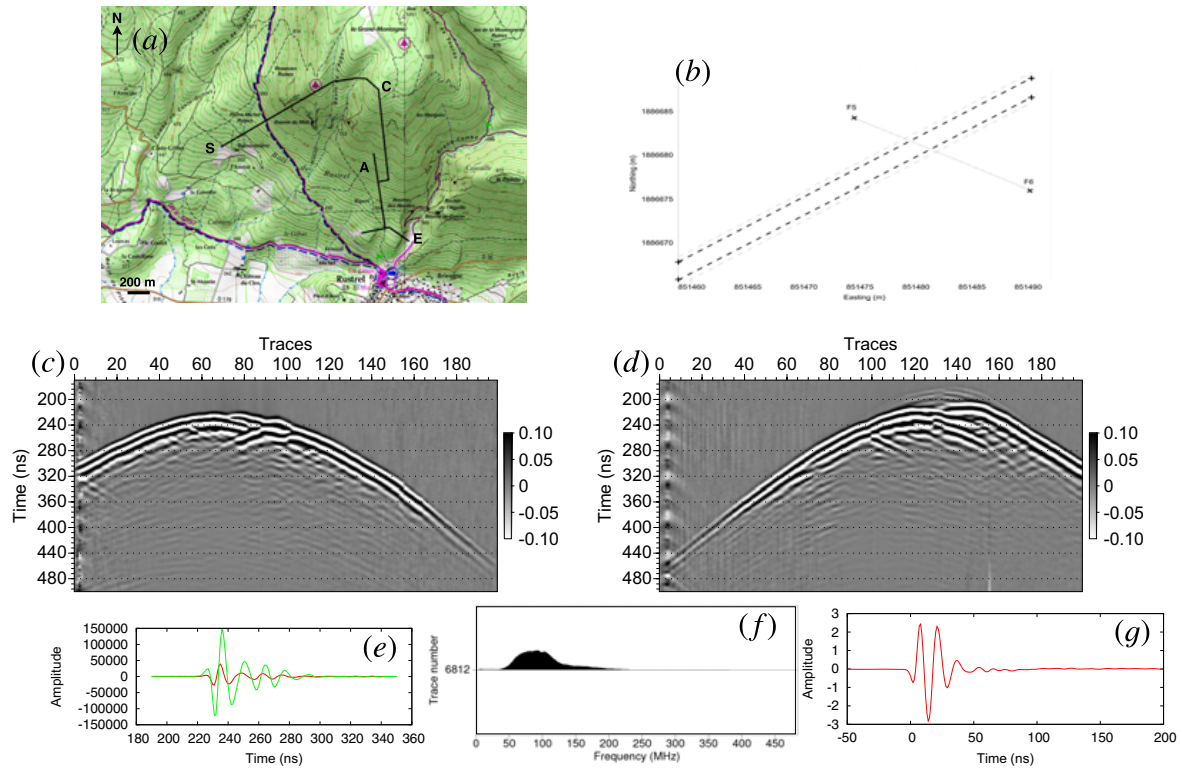
$$d_{obs}^{2D}(t) = \sqrt{\frac{2\pi v(t)^2 t}{\omega}} e^{i\pi/4} d_{obs}^{3D}(t) \quad (3)$$

with  $t$  denotes the time,  $\omega$  the angular frequency,  $i$  imaginary number and  $v(t)$  the wave velocity which is assumed to be homogeneous (in the formula) and equals to 8 cm/ns following the travelttime tomography result. One example of this conversion is displayed in Fig. 1e where changes in phase and amplitude can be clearly seen. Then, the dataset is normalized by shot-gather to be sure that none of these shot-gathers dominates the misfit function. Note that frequency content of the signal is extracted and displayed in Fig. 1f. In general, all frequencies between 50 to 150 MHz have a strong amplitude so that this frequency band can be used to perform the FWI.

The last step of the pre-processing consists in estimating the source wavelet. In the frequency-domain, this estimation, detailed here for one frequency  $\omega_j$  and one source  $s$ , is classically realized through the linear inversion proposed by [9],

$$S_{\omega_j,s} = \frac{g_{\omega_j,s}^\dagger d_{obs,\omega_j,s}^{2D}}{g_{\omega_j,s}^\dagger g_{\omega_j,s}}, \quad (4)$$

where  $S_{\omega_j,s}$  is the complex value of the source wavelet at frequency  $\omega_j$  while  $g_{\omega_j,s}$  and  $d_{obs,\omega_j,s}^{2D}$  denote respectively the incident Green's functions recorded at receiver positions and the observed data in the frequency domain. Here, each source  $s$  is supposed independent from each other so that one source estimation is done per shot-gather. After computations of  $S_{\omega_j,s}$  for all frequencies and inverse Fourier transform, the resulting source wavelet for one



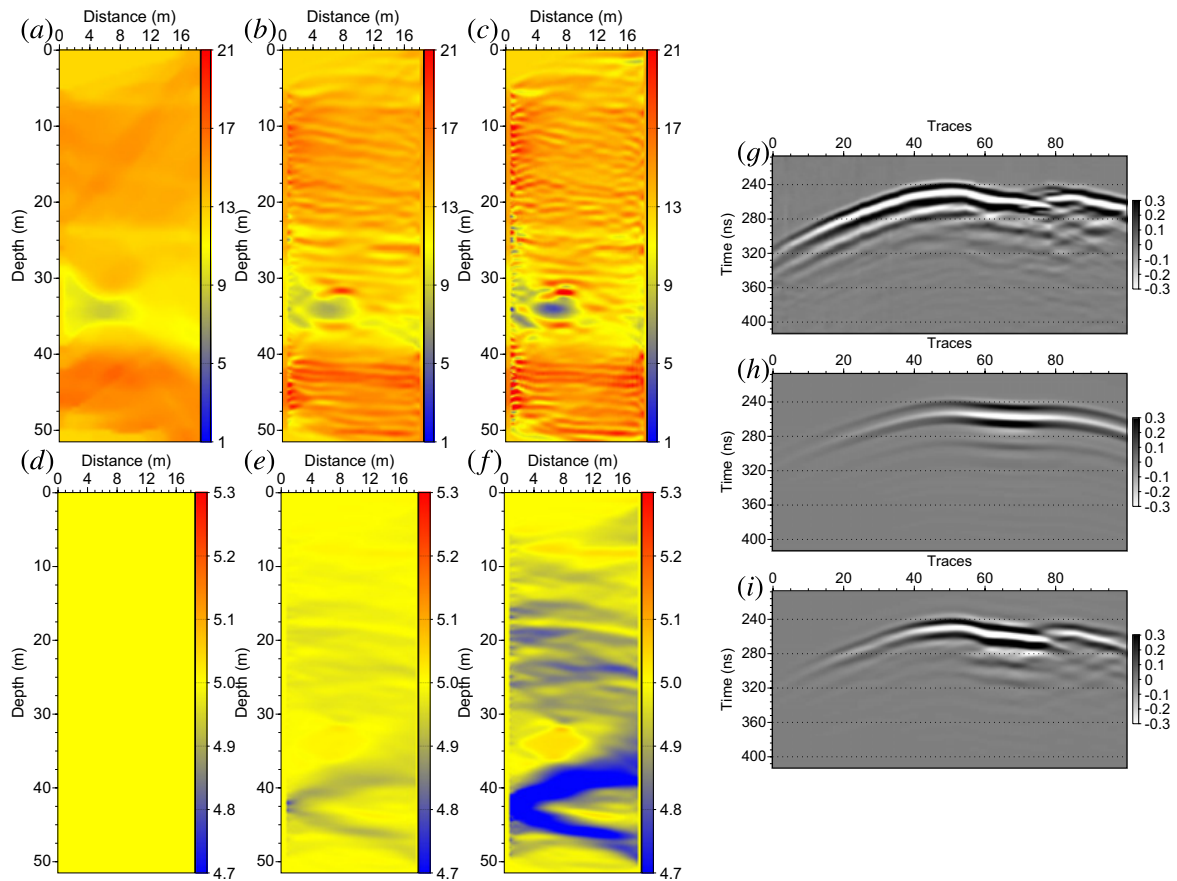
**Figure 1.** (a) Location of LSBB galleries (black line). E denotes the main entrance, A the anti blast gallery, C the shielded LSBB capsule and S the exit. (b) Zoom close to the exit with the locations of the two boreholes of interest and the gallery. Observed radargrams for source positions at depth (c) 18 m and (d) 34 m. (e) 3D-to-2D conversion for one trace the 3D (red) and 2D (green) traces. (f) Frequency content of one trace. (g) Source wavelet estimated before the inversion for one shot-gather.

source located at depth 17 m is displayed in Fig. 1g. The wavelet may be compared with a Ricker wavelet (second-order derivative of a Gaussian distribution) even if side rebounds are currently quite strong. Even if the wavelet can be updated regularly during the inversion, we choose to estimate it once at the beginning and keep fixed after.

The 51.5 m by 18.5 m model is discretized using a grid interval of 0.05 m to ensure that electromagnetic modeling satisfies the sampling criterion of four/five grid points per minimum wavelength. The initial model for the permittivity is provided by the traveltime tomography while the conductivity one is taken homogeneous (Fig. 2a and d).

The discrete frequencies strategy used to invert data follows the strategy developed by [10] and the frequency content of the dataset (Fig. 1f). One example of this strategy is presented in Table 1. Frequencies of a given group are used to perform one nonlinear inversion and associated results are used as initial models for the next group. Starting by the lower frequencies to reconstruct the large structures of the medium, higher frequencies are progressively introduced to improve the resolution of the model. Note that the frequency sampling ensures a continuous sampling in the wavenumber space. In this paper, we restrict results to the first group because we need to improve some points before using the high frequency content.

As discussed by [11], we invert relative parameters instead of parameter themselves so that they are defined as  $\epsilon_r = \epsilon/\epsilon_0$  where  $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ Fm}^{-1}$  (vacuum value) and  $\sigma_r = \sigma/\sigma_0$  where  $\sigma_0$  has to be chosen accurately. If this parameter is too high, only the



**Figure 2.** (a–c) Relative permittivity after 0, 15 and 30 iterations; (d–f) conductivity [mS/m] after 0, 15 and 30 iterations. (g) observed data, (h) initial data and (i) final data for 100 receivers associated to one source located at depth 39 m.

**Table 1.** Frequency strategy for the inversion (MHz).

|         |     |     |     |
|---------|-----|-----|-----|
| Group 1 | 50  | 60  | 70  |
| Group 2 | 60  | 70  | 80  |
| Group 3 | 70  | 80  | 100 |
| Group 4 | 80  | 100 | 120 |
| Group 5 | 100 | 120 | 150 |

conductivity is updated and vice versa for the permittivity. In this paper,  $\sigma_0 = 1.0 \cdot 10^{-4} \text{ S/m}$  to slightly promote the relative permittivity update which stabilizes the inversion. Areas around sources and receivers have been frozen to prevent the model being updated only at these positions. We decided to perform 30 nonlinear iterations. The normalized misfit functions with respect to the initial value are 0.8 and 0.78 respectively at the 15<sup>th</sup> and 30<sup>th</sup> iterations. This small decrease is linked to difficulties for the algorithm to remove the imprint of sources and receivers despite the presence of the frozen zone (Fig. 2). At the end, sources and receivers, through their vertical dipolar injection points, create horizontal artifacts in the model. These latter, which present a higher wavenumber content in the permittivity model, still require a deeper analysis to better understand their origins and remove them.

Despite these artifacts, we obtain an increase of the resolution of the gallery focusing the permittivity and providing a first image of conductivity. In Fig. 2, the limit of the gallery becomes progressively sharper while the final relative permittivity value in the gallery is

closer to the expected one (“1” for the void). For the conductivity model, the gallery appears more conductive than the geological medium and the presence of water-saturated layers around 38 m depths is not detected. These results can be explained either by the presence of iron in the concrete of the gallery (even if its presence is not confirmed) or more probably by an initial model of conductivity too simple and/or too far from the true one.

Because the FWI is based-on data fitting procedure, radargrams are shown in Fig. 2g, h and i. Comparing observed and initial data, several differences can be underlined. Before trace 45, a clear mismatch in amplitude is visible while after this trace, the initial data do not reproduce the complex structure of the observed data and specially the discontinuity around trace 77. The analysis of the final radargram shows that the mismatch in amplitude is still present meaning that the algorithm did not update the model to reduce this difference. Actually, the algorithm concentrates its efforts on the complex arrivals and the discontinuity which are well retrieved at the end of the inversion. This final radargram, obtained with only one group of frequencies, emphasizes the potential of the FWI.

## 4. Conclusion

We briefly propose the formulation of a 2D frequency-domain FWI for GPR datasets in TM configuration to reconstruct simultaneously dielectric permittivity and electrical conductivity. Then, we present our first results using a dataset recorded near the LSBB. These results are promising with a focalization of the gallery in permittivity and a first image of conductivity. This work will be continued with a better handling of the source estimation (at each nonlinear iteration), the consideration of all groups of frequencies and other initial conductivity models. These different points should improve the quality and the resolution of the final reconstructions and, we hope, allow the detection of multi-scale heterogeneities characterizing the carbonate properties of this massif. Final results will be compared to well logs, electrical tomography and checked against ground truth (for the gallery location). At middle/long term, new acquisitions will be performed and results will be used to follow the evolution of the massif properties over time.

This study was partially funded by the SEISCOPE consortium (<http://seiscope2.osug.fr>), sponsored by BP, CGG, CHEVRON, EXXON-MOBIL, JGI, PETROBRAS, SAUDI ARAMCO, SCHLUMBERGER, SHELL, SINOPEC, STATOIL, TOTAL and WOODSIDE. This study was granted access to the HPC resources of CIMENT infrastructure (<https://ciment.ujf-grenoble.fr>) and CINES/IDRIS under the allocation 046091 made by GENCI. We thank the LSBB facilities for their support for field experiments.

## References

- [1] A. Klotzsche, J. van der Kruk, G.A. Meles, H. Vereecken, *Geophysics*, **77**, H57 (2012).
- [2] J.M. Carcione and F. Cavallini, *Wave motion*, **21**, 149 (1995).
- [3] B. Hustedt, S. Operto, and J. Virieux, *Geophysical Journal International*, **157**, 1269 (2004).
- [4] MUMPS-team. *MUMPS – Multifrontal Massively Parallel Solver users’ guide – version 4.9.2 (November 5, 2009)*. ENSEEIHT-ENS Lyon, <http://www.enseeiht.fr/apo/MUMPS/> or <http://graal.ens-lyon.fr/MUMPS> February (2009).
- [5] P. Lailly, *The seismic problem as a sequence of before-stack migrations*, in *Conference on Inverse Scattering: Theory and Applications*, edited by J. Bednar, (SIAM, Philadelphia, 1983).



- [6] A. Tarantola, *Geophysics*, **49**, 1259 (1984).
- [7] R.G. Pratt and M.H. Worthington, *Geophysical Prospecting*, **38**, 287 (1990).
- [8] R.E. Plessix, *Geophysical Journal International*, **167**, 495 (2006).
- [9] R.G. Pratt, *Geophysics*, **64**, 888 (1999).
- [10] L. Sirgue, R.G. Pratt, *Geophysics*, **69**, 231 (2004).
- [11] F. Lavoué, R. Brossier, L. Métivier, S. Garambois, J. Virieux, *Geophysical Journal International*, **197**, 248 (2014).

