



HAL
open science

Résultats de convergence pour les inéquations variationnelles et applications en mécanique du contact

Ahlem Benraouda

► **To cite this version:**

Ahlem Benraouda. Résultats de convergence pour les inéquations variationnelles et applications en mécanique du contact. Mathématiques générales [math.GM]. Université de Perpignan, 2018. Français. NNT : 2018PERP0009 . tel-01834598

HAL Id: tel-01834598

<https://theses.hal.science/tel-01834598>

Submitted on 10 Jul 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

Pour obtenir le grade de
Docteur

Délivré par
UNIVERSITE DE PERPIGNAN VIA DOMITIA

Préparée au sein de l'école doctorale ED305
Et de l'unité de recherche LAMPS

Spécialité : **Mathématiques Appliquées**

Présentée par **Ahlem BENRAOUDA**

**Résultats de convergence pour les inéquations
variationnelles et applications en mécanique du contact**

Soutenue le 06 Juin 2018 devant le jury composé de

M. Samir ADLY, PR, Université de Limoges	Examineur
M. Marius COCOU, PR, Université d'Aix Marseille	Rapporteur
M. Serge DUMONT, PR, Université de Nîmes	Rapporteur
M. Mircea SOFONEA, PR, Université de Perpignan	Directeur
Mme Annick TRUFFERT, MCF, Université de Perpignan	Examinatrice
Mme Sylvie VIGUIER-PLA, MCF, Université de Perpignan	Examinatrice



Résultats de convergence pour les
inéquations variationnelles et applications
en mécanique du contact

Remerciements

"Soyons reconnaissants aux personnes qui nous donnent du bonheur ; elles
sont les charmants jardiniers par qui nos âmes sont fleuries"

Marcel Proust.

"La reconnaissance est la mémoire du cœur"

Henri Lacordaire.

Cette thèse a été réalisée au sein du Laboratoire de Mathématiques et Physique, LAMPS, à l'Université de Perpignan Via Domitia. Je souhaite ici exprimer ma profonde gratitude à tous ceux qui ont contribué à sa réalisation et à son aboutissement.

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de thèse, le Professeur **Mircea Sofonea**, pour avoir accepté de diriger ce travail de recherche, puis pour ses qualités humaines exceptionnelles, sa grande disponibilité malgré ses nombreuses charges, ses encouragements qui ont été pour moi d'une grande importance dans le développement de cette recherche ainsi que ses précieux conseils que je n'oublierai jamais. Aussi, je lui exprime toute ma profonde gratitude pour ses nombreuses relectures et corrections de ce manuscrit. Travailler sous sa direction fût pour moi un grand plaisir.

Je remercie également Messieurs **Marius Cocou**, Professeur à l'Université d'Aix Marseille, et **Serge Dumont**, Professeur à l'Université de Nîmes, d'avoir consacré du temps à la lecture de ma thèse et d'avoir accepté d'en être les rapporteurs.

Je tiens également à exprimer ma gratitude à Monsieur **Samir Adly**, Professeur à l'Université de Limoges, qui a accepté de participer à ce jury en tant que président.

Je remercie également Mesdames **Annick Truffert** et **Sylvie Viguié-pla**, Maîtres de Conférences à l'Université de Perpignan Via Domitia, pour m'avoir fait l'honneur de participer à ce jury.

J'adresse mes vifs remerciements à l'ensemble des membres du LAMPS pour leur bienveillance et le climat sympathique dans lequel ils m'ont accueilli ; sans oublier les secrétaires **Joëlle Sulian** et **Sylvia Munoz** pour leur gentillesse, leur bonne humeur et leur efficacité dans les démarches administratives auprès de l'université et de l'école doctorale. Elles ont été disponibles jusqu'au bout. Qu'elles soient assurées de ma sincère et profonde gratitude.

Mes remerciements vont aussi à mes amies qui m'ont permis de ne jamais dévier de mon objectif final et m'ont apporté leur soutien moral dans les moments difficiles de mon travail. Merci à Naanaa, Meriem, Ahlam, Hanane, Nacera, Wissam, Asma, Hadjer, Sara ...

Ce travail n'aurait pas pu être réalisé sans le financement du gouvernement Algérien, le Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique.

Un très grand *MERCI* à ma chère maman "**Samira**" et mon cher papa "**Aziz**" qui ont su croire en moi et qui m'ont apporté leur aide. Leur confiance, leur encouragement, leur tendresse et leur amour me portent tous les jours. Merci pour avoir fait de moi ce que je suis aujourd'hui. Je vous aime.

Enfin, j'adresse mes sincères remerciements à toute ma famille, et en particulier à mes chers frères (Houssam et son fils "Haytham", Yakoub et Mohib). Je les remercie pour leur soutien, leur aide et leur compréhension.

Ahlem BENRAOUDA.

"La mécanique est le paradis des sciences
mathématiques, parce qu'avec elle, nous
cueillons le fruit des mathématiques"

Léonard de Vinci

Table des matières

Introduction	1
Notations	7
I Résultats de convergence pour les inéquations variationnelles	11
1 Préliminaires	15
1.1 Espaces de fonctions à valeurs vectorielles	16
1.2 Opérateurs non linéaires	17
1.3 Compléments divers	25
2 Inéquations quasivariationnelles elliptiques	33
2.1 Position du problème	34
2.2 Méthode de pénalisation	35
2.3 Un résultat de convergence	44
2.4 Un résultat de convergence pour le problème pénalisé	49
3 Inéquations quasivariationnelles avec opérateurs de mémoire	55
3.1 Position du problème	56
3.2 Méthode de pénalisation	57
3.3 Un résultat de convergence	62
3.4 Un résultat de convergence pour le problème pénalisé	69

4	Inéquations quasivariationnelles duales avec opérateurs de mémoire	75
4.1	Position du problème	76
4.2	Un résultat de convergence	77
4.3	Formulation duale	83
4.4	Un résultat de convergence pour le problème dual	91
II	Application à la mécanique du contact	95
5	Introduction à la mécanique du contact	99
5.1	Espaces fonctionnels.	100
5.2	Cadre physique	107
5.3	Lois de comportement.	109
5.4	Conditions aux limites de contact sans frottement	115
6	Problème de contact élastique unidimensionnel avec contrainte unilatérale	125
6.1	Problème mécanique et formulation variationnelle	126
6.2	Existence et unicité de la solution	131
6.3	Méthode de pénalisation	132
6.4	Un résultat de convergence	134
7	Problème de contact élastique avec compliance normale et contrainte unilatérale	137
7.1	Problème mécanique et formulation variationnelle	138
7.2	Existence et unicité de la solution	141
7.3	Méthode de pénalisation	143
7.4	Un résultat de convergence	146
8	Problème de contact élastique avec contrainte unilatérale et seuil critique	149
8.1	Problème mécanique et formulation variationnelle	150
8.2	Existence et unicité de la solution	153
8.3	Un résultat de convergence	154

8.4	Problèmes de contrôle optimal	159
8.5	Un exemple unidimensionnel	164
9	Problème de contact bidimensionnel élastique avec compliance normale et contrainte unilatérale	171
9.1	Problème mécanique et formulation variationnelle	172
9.2	Existence et unicité de la solution	184
9.3	Un résultat de convergence	186
9.4	Un problème de contrôle optimal	192
10	Problème de contact viscoplastique avec compliance normale et contrainte unilatérale	199
10.1	Problème mécanique et formulation variationnelle	200
10.2	Existence et unicité de la solution	206
10.3	Méthode de pénalisation	208
10.4	Un résultat de convergence	210
11	Problème de contact viscoélastique avec compliance normale et contrainte unilatérale	213
11.1	Problème mécanique et formulation variationnelle	214
11.2	Existence et unicité de la solution	218
11.3	Un résultat de convergence	219
11.4	Formulation duale	221
	Bibliographie	229

Introduction

Les travaux effectués durant ma thèse au sein du Laboratoire de Mathématiques et Physique (LAMPS) portent principalement sur la jonction du domaine des mathématiques appliquées et celui de la mécanique. Ces travaux sont centrés sur des nouveaux résultats de convergence pour des inéquations variationnelles et leurs applications à des problèmes en mécanique du contact.

Du latin "contactus" signifie "toucher" ou "l'état de deux corps qui se touchent". Les phénomènes de contact entre des corps déformables ou entre un corps déformable et une fondation rigide abondent en industrie et dans la vie de tous les jours. Le contact de la roue avec le sol en aéronautique, l'emboutissage des métaux, le contact du piston avec la chemise et l'enfoncement progressif dans un fauteuil lors d'une posture assise ne sont que quelques exemples parmi bien d'autres. La complexité de ces phénomènes conduit à des modèles mathématiques intéressants décrivant des processus de contact qui sont représentés par des systèmes d'équations aux dérivées partielles associés aux conditions aux limites et éventuellement aux conditions initiales. L'étude mathématique des phénomènes de contact est structurée en trois étapes : la modélisation, l'analyse variationnelle et l'approximation numérique.

La mécanique du contact a commencé en 1882 par Hertz [43] avec l'étude d'un problème de contact sans frottement entre deux corps élastiques ayant des surfaces courbes régulières. Depuis le 20ème siècle, des études et analyses dans la théorie de la mécanique du contact ont connu de très forts développements. Le premier problème de contact unilatéral entre un corps élastique et une fondation rigide a été proposé par Signorini dans [75] et le résultat d'existence et d'unicité de la solution de ce problème a été obtenu par Fichera dans [35]. Puis, viennent les travaux de Duvaut et Lions qui ont établi les bases de la théorie mathématique de la mécanique du contact dans l'ouvrage [31] ; ils y ont introduit des formulations variationnelles à des modèles

de contact avec frottement et ont prouvé des résultats d'existence et d'unicité de solution. Par la suite, de nombreux travaux portant sur l'étude des problèmes de contact ont été réalisés ; nous citons, par exemple, [39, 67, 68, 69, 77, 92, 93].

Dans les cinquante dernières années, les inéquations variationnelles sont devenues un outil très important dans l'étude mathématique et l'analyse numérique de nombreux problèmes aux limites non linéaires en physique, mécanique et science de l'ingénieur. Il existe une vaste littérature dédiée à cette théorie, voir [9, 19, 20, 37, 42, 44, 51, 57, 67, 91], par exemple. Dans cette thèse, nous nous intéressons à l'étude des inéquations quasivariationnelles elliptiques et des inéquations quasivariationnelles avec opérateurs de mémoire. De nombreux résultats d'existence et d'unicité de la solution pour les inéquations quasivariationnelles elliptiques sous différentes hypothèses sur les données ont été obtenus dans [65, 86, 87]. Les inéquations quasivariationnelles avec opérateurs de mémoire ont été aussi étudiées dans plusieurs références voir, par exemple, [85, 88, 90].

La théorie du contrôle optimal est une branche interdisciplinaire des mathématiques. Elle recouvre de très nombreux domaines d'application ; citons par exemple le secteur aéronautique, robotique, automobile ainsi que les secteurs médicaux et chimiques. Il s'agit de réaliser une tâche en minimisant un critère, son objectif alors est de déterminer des solutions optimales. Une référence de base concernant l'étude du contrôle optimal des équations aux dérivées partielles est le livre [58]. La littérature consacrée à l'application de la théorie du contrôle optimal en mécanique du contact est limitée à cause des contraintes issues de leur modélisation ainsi que la non linéarité des conditions aux limites de contact et des lois de comportement. Le contrôle optimal de plusieurs problèmes de contact a été étudié, voir [4, 14, 21, 62, 94, 95], par exemple.

Le but de cette thèse est de fournir une contribution dans l'étude théorique des inéquations variationnelles ainsi que dans l'analyse mathématique de plusieurs problèmes en mécanique du contact. Notre objectif dans ce travail de recherche est triple. D'abord, nous étudions le comportement de la solution de certaines classes d'inéquations quasivariationnelles, avec ou sans opérateurs de mémoire, en perturbant l'ensemble des contraintes par une dilatation et une translation. Nous utilisons aussi des méthodes telles que la pénalisation et la dualité. Ensuite, le deuxième objectif est d'illustrer la théorie développée dans l'étude des inéquations variationnelles

par des modèles de contact sans frottement. Plus précisément, nous considérons des problèmes de contact avec des lois de comportement linéaires ou non linéaires pour des matériaux élastiques, viscoélastiques et viscoplastiques, dans des processus statiques ou quasistatiques. Les lois de contact abordées dans ces problèmes sont : la loi de Signorini, la loi de contact avec compliance normale et contrainte unilatérale et la loi de contact avec contrainte unilatérale et seuil critique. Enfin, notre troisième objectif est d'étudier le contrôle optimal de certains problèmes de contact présentés dans cette thèse.

Cette thèse est divisée en **deux parties** que nous allons décrire par la suite afin de faciliter sa lecture.

La première partie, composée de quatre chapitres, est structurée de la manière suivante.

Dans *le premier chapitre*, nous rappelons quelques notions d'analyse fonctionnelle et d'analyse non linéaire. D'abord, nous présentons quelques résultats fondamentaux concernant les espaces de fonctions vectorielles, puis nous passons en revue quelques opérateurs non linéaires tels que les opérateurs monotones et pseudomonotones ainsi que les opérateurs de projection, de pénalisation et de mémoire. Ensuite, nous rappelons quelques propriétés concernant les fonctions et les ensembles convexes, puis nous présentons des résultats d'existence et d'unicité de la solution des inéquations variationnelles elliptiques de première et deuxième espèce et nous rappelons le Lemme de Gronwall. Nous terminons ce chapitre par l'étude d'un problème d'optimisation dont nous avons besoin dans la deuxième partie de cette thèse.

Dans *le deuxième chapitre*, nous nous intéressons à l'étude d'une inéquation quasivariationnelle elliptique. Nous commençons par la position du problème accompagnée d'un résultat d'existence et d'unicité de solution. Puis, nous prouvons un résultat de convergence basé sur la méthode de pénalisation. Ensuite, nous étudions la dépendance de la solution par rapport à la perturbation de l'ensemble des contraintes dans lequel nous considérons une dilatation et une translation. Enfin, nous démontrons un résultat de convergence pour le problème pénalisé portant sur la perturbation des données.

Dans *le troisième chapitre*, nous considérons une inéquation quasivariationnelle avec opérateurs de mémoire. D'une manière analogue avec le chapitre précédent,

nous présentons successivement le problème et un résultat d'existence et d'unicité de solution. Nous poursuivons avec la méthode de pénalisation afin de prouver un résultat de convergence. Puis, nous étudions la dépendance de la solution par rapport à une perturbation de l'ensemble des contraintes. Nous terminons par un résultat de convergence associé au problème pénalisé.

Dans *le quatrième chapitre*, nous nous intéressons à l'étude d'une classe particulière d'inéquations quasivariationnelles avec opérateurs de mémoire étudiées dans le Chapitre 3 afin d'introduire une deuxième formulation, appelée formulation duale. Après avoir présenté le problème et les hypothèses sur les données, nous prouvons un résultat d'existence et d'unicité de solution. Ensuite, nous étudions la dépendance de la solution par rapport à une perturbation de l'ensemble des contraintes. Nous poursuivons avec l'introduction d'une formulation duale, puis nous établissons l'équivalence des deux formulations du problème, i.e., la formulation primale et la formulation duale. Nous terminons ce chapitre par un résultat de convergence pour le problème dual.

La deuxième partie comprend sept chapitres et elle est structurée de la façon suivante.

Le cinquième chapitre est consacré à des préliminaires d'analyse ainsi que des rappels du cadre général des problèmes de contact abordés dans ce travail. Nous commençons par la présentation des espaces de fonctions scalaires ainsi que les principales notations utilisées dans ce manuscrit. Puis, nous présentons le cadre physique ainsi que les lois de comportement élastiques, viscoélastiques et viscoplastiques. Nous terminons ce chapitre par la présentation des différentes conditions de contact utilisées dans les problèmes mécaniques abordés dans ce manuscrit, à savoir le contact avec contrainte unilatérale (la loi de Signorini), le contact avec compliance normale, le contact avec compliance normale et contrainte unilatérale et le contact avec contrainte unilatérale et seuil critique.

Dans *le sixième chapitre*, nous étudions un problème statique de contact unidimensionnel où la loi de comportement est élastique. Le contact est modélisé par une loi de contrainte unilatérale. Après avoir présenté la formulation forte du problème mécanique et les hypothèses sur les données, nous donnons une formulation variationnelle et nous établissons l'existence et l'unicité d'une solution faible. Nous poursuivons avec un résultat de convergence portant sur la pénalisation de la contrainte

unilatérale. L'étude du problème se termine par un deuxième résultat de convergence portant sur la perturbation de l'ensemble des contraintes.

Dans *le septième chapitre*, nous considérons un problème statique de contact élastique avec une loi de compliance normale et contrainte unilatérale. Par une démarche similaire à celle du chapitre précédent, nous nous intéressons à l'existence et l'unicité de la solution du problème, à sa dépendance par rapport à une perturbation de l'ensemble des contraintes ainsi qu'à une pénalisation de la condition de contact. Ainsi, nous établissons la convergence de la solution faible du problème de contact avec compliance normale vers la solution faible du problème de contact avec compliance normale et contrainte unilatérale.

Le huitième chapitre porte sur un problème statique de contact élastique avec une loi de contrainte unilatérale et seuil critique. Nous commençons par la formulation forte du problème mécanique et nous énonçons les hypothèses nécessaires sur les données afin d'obtenir une formulation variationnelle. Ensuite, nous démontrons un résultat d'existence et d'unicité d'une solution faible ainsi qu'un résultat de convergence portant sur la perturbation des données. Nous poursuivons avec l'étude de quatre problèmes de contrôle optimal associés au problème mécanique pour lesquels nous prouvons des résultats d'existence de solutions. Nous terminons par un problème de contact unidimensionnel afin d'illustrer les résultats présentés dans ce chapitre.

Le neuvième chapitre est dédié à l'étude d'un problème de contact d'une poutre élastique en adoptant les hypothèses utilisées dans [89]. La modélisation, l'analyse et l'approximation numérique des problèmes de contact associant des poutres ont été effectuées dans les références [2, 8, 13, 17, 55, 56, 74, 78, 82], par exemple. Dans notre problème, la poutre est supposée en contact avec deux obstacles pour lesquels le contact est modélisé par une loi de Signorini et une loi de compliance normale avec contrainte unilatérale. Nous présentons la formulation forte du problème mécanique. Nous poursuivons avec l'introduction d'une version bidimensionnelle associée au problème mécanique. Puis, nous présentons les hypothèses nécessaires sur les données afin d'obtenir une formulation variationnelle et prouver un résultat d'existence et d'unicité de solution. Ensuite, nous étudions la dépendance de la solution par rapport aux perturbations des données. L'étude du problème se termine par un problème de contrôle optimal pour lequel nous démontrons l'existence de la solution

ainsi que sa dépendance par rapport aux perturbations des données.

Les dixième et onzième chapitres portent respectivement sur l'étude d'un problème de contact viscoplastique et viscoélastique où le processus est quasistatique et le contact est modélisé par une loi de compliance normale et contrainte unilatérale. Dans l'étude du problème de contact viscoplastique nous suivons les mêmes étapes énoncées dans le Chapitre 7. Par ailleurs, dans l'étude du problème de contact considéré dans le Chapitre 11, nous commençons par la présentation de la formulation forte du problème mécanique ainsi que les hypothèses nécessaires sur les données afin d'obtenir une formulation variationnelle, puis nous prouvons un résultat d'existence et d'unicité de la solution du problème et nous étudions sa dépendance par rapport à une perturbation de l'ensemble des contraintes. Ensuite, nous introduisons la formulation duale du problème que nous mettons en relation avec la formulation primale en démontrant un résultat d'équivalence. Nous poursuivons avec un résultat de convergence pour le problème dual portant sur la perturbation des données.

Le manuscrit se termine par une liste des références qui a servi à traiter ce travail de recherche.

Notations

Nous considérons un domaine ouvert et borné Ω de \mathbb{R}^d ($d = 1, 2, 3$) et nous notons par :

$\overline{\Omega}$	l'adhérence de Ω dans \mathbb{R}^d .
Γ	la frontière de Ω supposée régulière.
Γ_i ($i=1, 2, 3$)	une partie mesurable de la frontière Γ .
$\text{mes}(\Gamma_1)$	la mesure de Lebesgue ($d - 1$) dimensionnelle de Γ_1 .
$\boldsymbol{\nu}$	la normale unitaire sortante à Γ .
v_ν, \mathbf{v}_τ	les composantes normales et tangentielles du champ vectoriel \mathbf{v} .
$\sigma_\nu, \boldsymbol{\sigma}_\tau$	les composantes normales et tangentielles du champ tensoriel $\boldsymbol{\sigma}$.
$C(\overline{\Omega})$	l'espace des fonctions continues sur $\overline{\Omega}$.
$C^m(\overline{\Omega})$	l'espace des fonctions continues sur $\overline{\Omega}$ dont les dérivées d'ordre au plus m sont également continues sur $\overline{\Omega}$.
$C_0^\infty(\Omega)$	l'espace des fonctions indéfiniment différentiables avec support compact dans Ω .
$L^p(\Omega)$	l'espace de Lebesgue.
$W^{k,p}(\Omega)$	l'espace de Sobolev.
$H^k(\Omega)$	l'espace $W^{k,2}(\Omega)$.
$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$	l'espace de Sobolev d'ordre $\frac{1}{2}$ sur Γ .
H	l'espace $L^2(\Omega)^d$, i.e., l'espace $\left\{ \mathbf{v} = (v_i) : v_i \in L^2(\Omega), 1 \leq i \leq d \right\}$.
Q	l'espace $\left\{ \boldsymbol{\tau} = (\tau_{ij}) : \tau_{ij} = \tau_{ji} \in L^2(\Omega), 1 \leq i, j \leq d \right\}$.
H_1	l'espace $H^1(\Omega)^d$, i.e., l'espace $\left\{ \mathbf{v} = (v_i) : v_i \in H^1(\Omega), 1 \leq i \leq d \right\}$.
Q_1	l'espace $\left\{ \boldsymbol{\tau} \in Q : \text{Div } \boldsymbol{\tau} \in H \right\}$.
V	l'espace $\left\{ \mathbf{v} \in H_1 : \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ p.p. sur } \Gamma_1 \right\}$.
\mathbf{Q}_∞	l'espace $\left\{ \boldsymbol{\mathcal{E}} = (\mathcal{E}_{ijkl}) : \mathcal{E}_{ijkl} = \mathcal{E}_{jikl} = \mathcal{E}_{klij} \in L^\infty(\Omega), 1 \leq i, j, k, l \leq d \right\}$.

Soit X un espace de Hilbert réel ; on utilise les notations suivantes :

- 0_X l'élément zéro de l'espace X .
- I l'opérateur identité sur X .
- $(\cdot, \cdot)_X$ le produit scalaire de X .
- $\|\cdot\|_X$ la norme de X .
- $x_n \rightharpoonup x$ la convergence faible de la suite $\{x_n\}$ vers l'élément x dans X .
- $x_n \rightarrow x$ la convergence forte de la suite $\{x_n\}$ vers l'élément x dans X .

Soient Y et Z sont deux espaces de Banach réels et $[0, T]$ est un intervalle de temps ; on note par :

- $C([0, T]; Y)$ l'espace des fonctions continues de $[0, T]$ à valeurs dans Y .
- $C(\mathbb{R}_+; Y)$ l'espace des fonctions continues de \mathbb{R}_+ à valeurs dans Y .
- $\mathcal{L}(Y; Z)$ l'espace des applications linéaires et continues de Y dans Z .
- $\mathcal{L}(Y)$ l'espace des applications linéaires et continues de Y dans Y .
- $\|\cdot\|_{C([0, T]; Y)}$ la norme de $C([0, T]; Y)$.
- $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(Y; Z)}$ la norme de $\mathcal{L}(Y; Z)$.

Pour une fonction f ; on note par :

- $\text{supp } f$ le support de f .
- \dot{f}, \ddot{f} la dérivée première et seconde de f par rapport au temps.
- $\partial_i f$ la dérivée partielle de f par rapport à la i ème composante x_i .
- ∇f le gradient de f .
- $\varepsilon(f)$ la partie symétrique du gradient de f , i.e., $\varepsilon(f) = \frac{1}{2}(\nabla f + (\nabla f)^T)$.

Autre notations :

- \mathbb{S}^d l'espace des tenseurs symétriques du second ordre sur \mathbb{R}^d .
- $\mathbf{0}_{\mathbb{S}^d}$ l'élément zéro de \mathbb{S}^d .

\mathbf{I}_d	le tenseur identité du second ordre sur \mathbb{R}^d .
$\ \cdot\ $	la norme euclidienne sur \mathbb{R}^d et \mathbb{S}^d .
P_K	l'opérateur de projection sur le convexe fermé et non vide K .
$\text{tr } A$	la trace du tenseur A .
$\text{Div } A$	la divergence du tenseur A .
r^+	la partie positive de r .
p.p.	presque partout.
ssi	si et seulement si.
s.c.i.	semi-continu inférieurement.
inf	la borne inférieure.
sup	la borne supérieure.
lim inf	la limite inférieure.
lim sup	la limite supérieure.

Première partie

Résultats de convergence pour les inéquations variationnelles

Partie I

Résultats de convergence pour les inéquations variationnelles

Cette partie est dédiée à l'étude et l'analyse des inéquations quasivariationnelles avec ou sans opérateurs de mémoire. Elle est divisée en quatre chapitres. Le premier chapitre, qui servira de base pour l'étude des différents problèmes considérés dans cette thèse, porte sur des éléments fondamentaux d'analyse fonctionnelle et d'analyse non linéaire. Nous commençons par quelques définitions et propriétés des espaces de fonctions vectorielles. Puis, nous présentons quelques éléments d'analyse non linéaire, notamment les propriétés des opérateurs monotones, pseudomonotones, de projection, de pénalisation ainsi que des opérateurs de mémoire. Ensuite, nous rappelons quelques propriétés importantes des fonctions et ensembles convexes et nous présentons des résultats d'existence et d'unicité concernant les inéquations variationnelles elliptiques de première et deuxième espèce et nous rappelons également le Lemme de Gronwall. Nous terminons ce chapitre par un problème d'optimisation. Les Chapitres 2, 3 et 4 sont structurés en quatre sections. Une fois le problème de chaque chapitre est posé, nous présentons un résultat d'existence et d'unicité de solution. Ensuite, nous étudions la dépendance de la solution de chaque problème par rapport à une perturbation de l'ensemble des contraintes et nous prouvons des résultats de convergence basés sur la méthode de pénalisation. Par ailleurs, nous aurons dans le Chapitre 4 une seconde formulation du problème, appelée formulation duale, pour laquelle nous abordons la question de l'existence et de l'unicité de la solution ainsi que sa dépendance par rapport aux perturbations des données. Les résultats de ces chapitres sont présentés dans les travaux [15, 79, 80].

Chapitre 1

Préliminaires

Afin de faciliter la lecture de cette thèse, il nous est paru utile de présenter dans ce premier chapitre des notions d'analyse fonctionnelle ainsi qu'un rappel sur les inéquations variationnelles elliptiques. Ce chapitre est composé de trois sections. Dans la première section, nous introduisons les espaces fonctionnels définis sur un intervalle de temps et à valeurs dans un espace de Banach réel. Dans la deuxième section, nous rappelons quelques résultats préliminaires sur les opérateurs monotones, pseudomonotones et les propriétés des opérateurs de projection. Puis, nous introduisons les notions d'opérateurs de pénalisation et de mémoire et nous en donnons quelques exemples. Dans la troisième section, nous passons en revue quelques notions d'analyse convexe et nous présentons les principaux résultats sur les fonctions et les ensembles convexes. Ensuite, nous présentons quelques résultats d'existence et d'unicité de la solution pour les inéquations variationnelles elliptiques de première et deuxième espèce et nous rappelons le Lemme de Gronwall. Enfin, nous présentons un problème d'optimisation dont nous avons besoin dans la deuxième partie de cette thèse.

1.1 Espaces de fonctions à valeurs vectorielles

Dans cette section, nous rappelons les principaux résultats sur les espaces vectoriels des fonctions définies sur un intervalle de temps et à valeurs dans un espace de Banach réel.

Les espaces $C([0, T]; X)$. Soient $0 < T < \infty$ et $(X, \|\cdot\|_X)$ un espace de Banach réel. Nous notons par $C([0, T]; X)$ l'espace des fonctions continues définies sur $[0, T]$ à valeurs dans X , i.e.,

$$C([0, T]; X) = \{v : [0, T] \rightarrow X : v \text{ est continue}\}.$$

L'espace $C([0, T]; X)$ est un espace de Banach muni de la norme suivante :

$$\|v\|_{C([0, T]; X)} = \max_{t \in [0, T]} \|v(t)\|_X.$$

Pour une partie $K \subset X$ nous utilisons la notation $C([0, T]; K)$ afin de désigner l'ensemble des fonctions continues définies sur $[0, T]$ à valeurs dans K . Par ailleurs, nous utilisons la notation $C([0, T])$ pour l'espace des fonctions continues à valeurs réelles définies sur $[0, T]$, i.e., $C([0, T]) = C([0, T]; \mathbb{R})$.

Les espaces $C(\mathbb{R}_+; X)$. Soit $(X, \|\cdot\|_X)$ un espace de Banach réel. Nous notons par $C(\mathbb{R}_+; X)$ l'espace des fonctions continues définies sur \mathbb{R}_+ à valeurs dans X , i.e.,

$$C(\mathbb{R}_+; X) = \{v : \mathbb{R}_+ \rightarrow X : v \text{ est continue}\}.$$

L'espace $C(\mathbb{R}_+; X)$ peut être organisé canoniquement comme un espace de Fréchet, c'est-à-dire, un espace métrique complet dont la topologie est définie par une famille dénombrable et séparante de semi-normes. Pour plus de détails concernant cette construction, le lecteur pourra se référer à [26, 61], par exemple.

Par ailleurs, la convergence d'une suite $\{x_k\}$ vers un élément x dans l'espace $C(\mathbb{R}_+; X)$ est décrite par

$$(1.1) \quad \begin{cases} x_k \rightarrow x & \text{dans } C(\mathbb{R}_+; X) \text{ lorsque } k \rightarrow \infty \text{ si et seulement si} \\ \max_{r \in [0, n]} (\|x_k(r) - x(r)\|_X) \rightarrow 0 & \text{lorsque } k \rightarrow \infty, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Autrement dit, la suite $\{x_k\}$ converge vers un élément x dans l'espace $C(\mathbb{R}_+; X)$ si et seulement si la suite $\{x_k\}$ converge vers un élément x dans l'espace $C([0, n]; X)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1.2 Opérateurs non linéaires

Considérons maintenant un espace de Hilbert X muni du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_X$ et de la norme associée $\|\cdot\|_X$.

Définition 1.1. Un opérateur $A : X \rightarrow X$ est dit :

(1) *monotone*, si

$$(1.2) \quad (Au - Av, u - v)_X \geq 0 \quad \forall u, v \in X;$$

(2) *strictement monotone*, si

$$(1.3) \quad (Au - Av, u - v)_X > 0 \quad \forall u, v \in X, \quad u \neq v;$$

(3) *non expansif*, si

$$(1.4) \quad \|Au - Av\|_X \leq \|u - v\|_X \quad \forall u, v \in X;$$

(4) *fortement monotone*, s'il existe $m > 0$ tel que

$$(1.5) \quad (Au - Av, u - v)_X \geq m\|u - v\|_X^2 \quad \forall u, v \in X;$$

(5) de *Lipschitz*, s'il existe $M > 0$ tel que

$$(1.6) \quad \|Au - Av\|_X \leq M\|u - v\|_X \quad \forall u, v \in X;$$

(6) *hémicontinu*, si pour toute suite $\{\alpha_n\} \subset \mathbb{R}$ telle que $\alpha_n \rightarrow \alpha$, nous avons

$$(1.7) \quad (A(u + \alpha_n v), w)_X \rightarrow (A(u + \alpha v), w)_X \quad \forall u, v, w \in X;$$

(7) *continu*, si

$$(1.8) \quad u_n \rightarrow u \quad \text{dans } X \implies Au_n \rightarrow Au \quad \text{dans } X.$$

En utilisant la Définition 1.1, nous avons le résultat suivant.

Remarque 1.2. Notons que :

- 1) Tout opérateur fortement monotone est monotone et aussi strictement monotone.
- 2) Tout opérateur de Lipschitz est continu.

- 3) Tout opérateur continu est hémicontinu.
- 4) Tout opérateur non expansif est de Lipschitz avec la constante $M = 1$.

Pour les opérateurs fortement monotones et de Lipschitz nous avons le résultat d'existence et d'unicité suivant.

Théorème 1.3. *Soit $A : X \rightarrow X$ un opérateur fortement monotone et de Lipschitz. Alors, pour tout $f \in X$ il existe un unique élément $u \in X$ tel que $Au = f$.*

Le Théorème 1.3 montre que tout opérateur $A : X \rightarrow X$ fortement monotone et de Lipschitz défini sur un espace de Hilbert est inversible. Les propriétés de son inverse, noté $A^{-1} : X \rightarrow X$, sont données par la proposition suivante.

Proposition 1.4. *Soit $A : X \rightarrow X$ un opérateur fortement monotone et de Lipschitz. Alors, son inverse $A^{-1} : X \rightarrow X$ est aussi un opérateur fortement monotone et de Lipschitz.*

Les démonstrations du Théorème 1.3 et de la Proposition 1.4 peuvent être trouvées dans la référence [87].

Nous présentons par la suite les opérateurs de projection qui constituent une classe importante d'opérateurs non linéaires définis dans les espaces de Hilbert. D'abord, commençons par le résultat d'existence et d'unicité suivant.

Théorème 1.5. *Soit K un sous ensemble fermé, convexe et non vide de l'espace de Hilbert X . Alors, pour tout $f \in X$ il existe un unique élément $u \in K$ tel que*

$$(1.9) \quad \|u - f\|_X = \min_{v \in K} \|v - f\|_X.$$

La démonstration de ce théorème figure dans [87, p.11-12]. Le Théorème 1.5 entraîne la définition suivante.

Définition 1.6. Soit K un sous ensemble fermé, convexe et non vide de l'espace de Hilbert X . Alors, pour tout $f \in X$ l'élément $u \in K$ qui satisfait (1.9) est appelé la *projection* de f sur K et il est noté par $P_K f$. Par ailleurs, l'opérateur $P_K : X \rightarrow K$ est appelé l'*opérateur de projection* sur K .

En utilisant la Définition 1.6, nous déduisons que

$$(1.10) \quad f = P_K f \iff f \in K.$$

Rappelons maintenant la caractérisation suivante des opérateurs de projection.

Proposition 1.7. *Soient $f \in X$ et K un sous ensemble fermé, convexe et non vide de l'espace de Hilbert X . Alors, $u = P_K f$ si et seulement si*

$$(1.11) \quad u \in K, \quad (u, v - u)_X \geq (f, v - u)_X \quad \forall v \in K.$$

Ensuite, nous utilisons la Proposition 1.7 pour déduire le résultat suivant.

Proposition 1.8. *Soit K un sous ensemble fermé, convexe et non vide de l'espace de Hilbert X . Alors, l'opérateur de projection $P_K : X \rightarrow K$ est non expansif et monotone, i.e.,*

$$(1.12) \quad \|P_K u - P_K v\|_X \leq \|u - v\|_X \quad \forall u, v \in X;$$

$$(1.13) \quad (P_K u - P_K v, u - v)_X \geq 0 \quad \forall u, v \in X.$$

Démonstration. Soient $u, v \in X$. D'abord, en utilisant la propriété de la projection (1.11), nous avons

$$(1.14) \quad (P_K u, P_K v - P_K u)_X \geq (u, P_K v - P_K u)_X,$$

$$(1.15) \quad (P_K v, P_K u - P_K v)_X \geq (v, P_K u - P_K v)_X.$$

Ensuite, nous additionnons les inégalités (1.14) et (1.15) pour voir que

$$(P_K u - P_K v, P_K v - P_K u)_X \geq (P_K v - P_K u, u - v)_X$$

et, par conséquent,

$$(1.16) \quad 0 \leq \|P_K u - P_K v\|_X^2 \leq (P_K u - P_K v, u - v)_X.$$

Cette inégalité montre que $P_K : X \rightarrow K$ est un opérateur monotone, i.e., la propriété (1.13) est satisfaite.

D'autre part, en utilisant l'inégalité (1.16) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous obtenons que

$$\|P_K u - P_K v\|_X^2 \leq \|P_K u - P_K v\|_X \|u - v\|_X,$$

c'est-à-dire

$$(1.17) \quad \|P_K u - P_K v\|_X \leq \|u - v\|_X.$$

Nous en déduisons que $P_K : X \rightarrow K$ est un opérateur non expansif, i.e., il satisfait (1.12). De (1.16) et (1.17), nous concluons la démonstration de la Proposition 1.8. \square

Nous introduisons à présent la notion d'opérateurs de pénalisation.

Définition 1.9. Soit K un sous ensemble non vide de l'espace de Hilbert X . Alors, on dit que $G : X \rightarrow X$ est un opérateur de *pénalisation* sur K si les propriétés suivantes sont vérifiées :

$$(1.18) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(a)} \quad (Gu - Gv, u - v)_X \geq 0 \quad \forall u, v \in X. \\ \text{(b)} \quad \text{Il existe } L > 0 \text{ tel que} \\ \quad \quad \|Gu - Gv\|_X \leq L \|u - v\|_X \quad \forall u, v \in X. \\ \text{(c)} \quad (Gu, v - u)_X \leq 0 \quad \forall u \in X, v \in K. \\ \text{(d)} \quad Gu = 0_X \text{ si et seulement si } u \in K. \end{array} \right.$$

Un exemple d'opérateur de pénalisation utilisé dans cette thèse est donné par la proposition suivante, qui montre que dans le cas des ensembles fermés convexes et non vides il existe toujours de tels opérateurs.

Proposition 1.10. Soit K un sous ensemble fermé, convexe et non vide de l'espace de Hilbert X et soit l'opérateur G défini par

$$(1.19) \quad Gu = u - P_K u \quad \forall u \in X,$$

où $P_K : X \rightarrow K$ est l'opérateur de projection sur l'ensemble K . Alors, G est un opérateur de pénalisation. Plus précisément, l'opérateur G satisfait les propriétés

suivantes :

$$(1.20) \quad (Gu - Gv, u - v)_X \geq 0 \quad \forall u, v \in X,$$

$$(1.21) \quad \|Gu - Gv\|_X \leq 2 \|u - v\|_X \quad \forall u, v \in X,$$

$$(1.22) \quad (Gu, v - u)_X \leq 0 \quad \forall u \in X, v \in K,$$

$$(1.23) \quad Gu = 0_X \text{ si et seulement si } u \in K.$$

Démonstration. Soient $u, v \in X$. D'abord, nous utilisons la définition (1.19) pour obtenir que

$$\begin{aligned} (Gu - Gv, u - v)_X &= ((u - P_K u) - (v - P_K v), u - v)_X \\ &= \|u - v\|_X^2 - (P_K u - P_K v, u - v)_X. \end{aligned}$$

Puis, en utilisant cette inégalité et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous obtenons

$$(Gu - Gv, u - v)_X \geq \|u - v\|_X^2 - \|P_K u - P_K v\|_X \|u - v\|_X.$$

En combinant maintenant cette inégalité avec la propriété (1.12) de l'opérateur de projection, nous déduisons que

$$(Gu - Gv, u - v)_X \geq 0,$$

ce qui montre que l'opérateur G satisfait la propriété (1.20).

Nous utilisons à nouveau la définition (1.19) avec la propriété (1.12) pour obtenir

$$\begin{aligned} \|Gu - Gv\|_X &= \|(u - P_K u) - (v - P_K v)\|_X \\ &= \|(u - v) + (P_K v - P_K u)\|_X \\ &\leq 2 \|u - v\|_X. \end{aligned}$$

Nous concluons de cette inégalité que la propriété (1.21) est vérifiée.

Ensuite, prenons $u \in X$ et $v \in K$, i.e., $P_K v = v$. En utilisant la définition (1.19), nous trouvons que

$$\begin{aligned} (1.24) \quad (Gu, v - u)_X &= (u - P_K u, v - u)_X \\ &= (u - P_K u, v - P_K u)_X + (u - P_K u, P_K u - u)_X. \end{aligned}$$

Par ailleurs, en utilisant la propriété (1.11), nous avons que

$$(u - P_K u, v - P_K u)_X \leq 0.$$

En combinant maintenant cette inégalité avec l'égalité (1.24), nous obtenons que

$$(Gu, v - u)_X \leq (u - P_K u, P_K u - u)_X = -\|u - P_K u\|_X^2 \leq 0.$$

Nous en déduisons que la propriété (1.22) est satisfaite.

Finalement, notons que la propriété (1.23) est une conséquence directe de l'équivalence (1.10), ce qui termine la démonstration de la Proposition 1.10. \square

Passons maintenant à une autre classe d'opérateurs non linéaires qui sera utilisée dans cette thèse.

Proposition 1.11. *Soient $(X, (\cdot, \cdot)_X)$ un espace de Hilbert et $A : X \rightarrow X$ un opérateur monotone et hémicontinu. Supposons que la suite $\{u_n\} \subset X$ converge faiblement vers l'élément $u \in X$, c'est-à-dire*

$$(1.25) \quad u_n \rightharpoonup u \quad \text{dans } X \quad \text{lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

En outre, supposons que

$$(1.26) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} (Au_n, u_n - u)_X \leq 0.$$

Alors, pour tout $v \in X$, l'inégalité suivante est satisfaite :

$$(1.27) \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} (Au_n, u_n - v)_X \geq (Au, u - v)_X.$$

Démonstration. Nous utilisons la propriété (1.2) de l'opérateur A pour voir que

$$(Au_n, u_n - u)_X \geq (Au, u_n - u)_X \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

En procédant au passage à la limite inférieure dans cette inégalité lorsque $n \rightarrow +\infty$ et en utilisant la convergence (1.25), nous obtenons

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (Au_n, u_n - u)_X \geq 0.$$

Ensuite, en combinant cette inégalité et l'hypothèse (1.26), nous trouvons que

$$(1.28) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (Au_n, u_n - u)_X = 0.$$

Prenons maintenant $v \in X$, $\theta > 0$ et notons $w = (1 - \theta)u + \theta v$. Nous utilisons la propriété (1.2) pour voir que

$$(Au_n - Aw, u_n - w)_X \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

ce qui implique que

$$(1.29) \quad (Au_n - Aw, u_n - u + \theta(u - v))_X \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Nous écrivons (1.29) sous la forme

$$\begin{aligned} & (Au_n, u_n - u)_X + \theta(Au_n, u - v)_X \\ & \geq (Aw, u_n - u)_X + \theta(Aw, u - v)_X \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

En passant à la limite inférieure dans cette inégalité lorsque $n \rightarrow \infty$, en utilisant la convergence (1.28) et en divisant l'inégalité obtenue par θ , nous trouvons que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (Au_n, u - v)_X \geq (Aw, u - v)_X$$

et, par conséquent,

$$(1.30) \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} (Au_n, u - v)_X \geq (A(u + \theta(v - u)), u - v)_X.$$

Ensuite, nous passons à la limite dans (1.30) lorsque $\theta \rightarrow 0$ et nous utilisons la propriété (1.7) pour voir que

$$(1.31) \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} (Au_n, u - v)_X \geq (Au, u - v)_X.$$

En outre, nous écrivons

$$(Au_n, u_n - v)_X = (Au_n, u_n - u)_X + (Au_n, u - v)_X \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Puis, nous passons à la limite inférieure lorsque $n \rightarrow +\infty$ dans cette égalité et nous utilisons la convergence (1.28) pour obtenir que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (Au_n, u_n - v)_X = \liminf_{n \rightarrow \infty} (Au_n, u - v)_X.$$

Enfin, nous combinons cette égalité et l'inégalité (1.31) afin d'obtenir que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (Au_n, u_n - v)_X \geq (Au, u - v)_X \quad \forall v \in X,$$

ce qui conclut la démonstration de la Proposition 1.11. \square

Définition 1.12. Un opérateur $A : X \rightarrow X$ monotone et hémicontinu tel que (1.25) et (1.26) impliquent (1.27) est appelé un *opérateur pseudomonotone*.

Pour finir cette section, nous introduisons les opérateurs de mémoire qui seront utilisés dans l'étude des inéquations variationnelles avec terme mémoire.

Définition 1.13. Soient $(X, \|\cdot\|_X)$ et $(Y, \|\cdot\|_Y)$ deux espaces vectoriels normés. Un opérateur $\mathcal{S} : C(\mathbb{R}_+; X) \rightarrow C(\mathbb{R}_+; Y)$ est dit un *opérateur de mémoire* si pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $s_n > 0$ tel que

$$(1.32) \quad \|\mathcal{S}u_1(t) - \mathcal{S}u_2(t)\|_Y \leq s_n \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_X ds$$

$$\forall u_1, u_2 \in C(\mathbb{R}_+; X), \quad \forall t \in [0, n].$$

Rappelons ici que les opérateurs de mémoire ont été introduits dans [85]. Notons que dans l'inégalité (1.32) ainsi que partout dans cette thèse nous utilisons la notation $\mathcal{S}v(t)$ pour la valeur de la fonction $\mathcal{S}v$ au point t , i.e., $(\mathcal{S}v)(t) = \mathcal{S}v(t)$.

Nous présentons maintenant deux exemples d'opérateurs de mémoire.

Exemple 1.14. Soit $(X, \|\cdot\|_X)$ un espace vectoriel normé et soit $u_0 \in X$. Considérons l'opérateur $\mathcal{S} : C(\mathbb{R}_+; X) \rightarrow C(\mathbb{R}_+; X)$ défini par

$$(1.33) \quad \mathcal{S}v(t) = \int_0^t v(s) ds + u_0 \quad \forall v \in C(\mathbb{R}_+; X), \quad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

Pour tout $u_1, u_2 \in C(\mathbb{R}_+; X)$, nous avons

$$\|\mathcal{S}u_1(t) - \mathcal{S}u_2(t)\|_X \leq \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_X ds.$$

Par conséquent, l'inégalité (1.32) est satisfaite avec $s_n = 1$, ce qui permet de déduire que \mathcal{S} est un opérateur de mémoire.

Exemple 1.15. Soient $(X, \|\cdot\|_X)$ et $(Y, \|\cdot\|_Y)$ deux espaces vectoriels normés et soit $\mathcal{K} \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{L}(X; Y))$ un opérateur donné. Considérons l'opérateur de Volterra $\mathcal{S} : C(\mathbb{R}_+; Y) \rightarrow C(\mathbb{R}_+; X)$ défini par

$$\mathcal{S}v(t) = \int_0^t \mathcal{K}(t-s)v(s)ds \quad \forall v \in C(\mathbb{R}_+; Y) \quad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

Alors, pour tout $u_1, u_2 \in C(\mathbb{R}_+; Y)$, nous avons

$$\begin{aligned} \|\mathcal{S}u_1(t) - \mathcal{S}u_2(t)\|_X &\leq \int_0^t \|\mathcal{K}(t-s)\|_{\mathcal{L}(X; Y)} \|u_1(s) - u_2(s)\|_Y ds \\ &\leq \max_{t \in [0, n]} \|\mathcal{K}(t-s)\|_{\mathcal{L}(X; Y)} \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_Y ds. \end{aligned}$$

De là, nous en concluons que \mathcal{S} est un opérateur de mémoire, car il vérifié l'inégalité (1.32) avec $s_n = \max_{t \in [0, n]} \|\mathcal{K}(t-s)\|_{\mathcal{L}(X; Y)}$.

Nous poursuivons avec le théorème de point fixe ci-dessous.

Théorème 1.16. Soit $(X, \|\cdot\|_X)$ un espace de Banach et soit $\Lambda : C(\mathbb{R}_+; X) \rightarrow C(\mathbb{R}_+; X)$ un opérateur de mémoire. Alors, l'opérateur Λ admet un unique point fixe, i.e., il existe un unique élément $\eta^* \in C(\mathbb{R}_+; X)$ tel que $\Lambda\eta^* = \eta^*$.

La démonstration du Théorème 1.16 figure dans la référence [77].

1.3 Compléments divers

Dans cette section, nous rappelons quelques propriétés importantes des fonctions et ensembles convexes. Ensuite, nous présentons des résultats d'existence et d'unicité de la solution pour des inéquations variationnelles elliptiques et nous rappelons le Lemme de Gronwall. Nous terminons par un problème d'optimisation.

1.3.1 Fonctions et ensembles convexes

Dans ce paragraphe, nous présentons quelques rappels sur les fonctions et les ensembles convexes. Commençons par les définitions suivantes.

Définition 1.17. Soit X un espace vectoriel réel. Une partie K de X est dite *convexe* si la propriété suivante est satisfaite :

$$u, v \in K \implies (1 - t)u + tv \in K \quad \forall t \in [0, 1].$$

Définition 1.18. Soient X un espace vectoriel réel et K une partie convexe et non vide de X . Une fonction $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ est dite *convexe* si

$$(1.34) \quad f((1 - t)u + tv) \leq (1 - t)f(u) + tf(v),$$

pour tout $u, v \in K$ et $t \in [0, 1]$. La fonction f est dite *strictement convexe* si l'inégalité (1.34) est stricte pour $u \neq v$ et $t \in (0, 1)$.

Notons que si les fonctions $u, v : K \rightarrow \mathbb{R}$ sont convexes et $\lambda \geq 0$ alors les fonctions $u + v : K \rightarrow \mathbb{R}$ et $\lambda u : K \rightarrow \mathbb{R}$ sont aussi convexes.

Définition 1.19. Soient $(X, \|\cdot\|_X)$ un espace vectoriel normé et K une partie convexe, fermée et non vide de X . Une fonction $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ est dite :

(i) *semi-continue inférieurement (s.c.i.)* si pour tout $u \in K$ et pour toute suite $\{u_n\} \subset K$ qui converge vers u dans X , nous avons

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f(u_n) \geq f(u);$$

(ii) *faiblement semi-continue inférieurement* si pour tout $u \in K$ et pour toute suite $\{u_n\} \subset K$ qui converge faiblement vers u dans X , nous avons

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f(u_n) \geq f(u).$$

Il est facile de voir que toute fonction faiblement semi-continue inférieurement est semi-continue inférieurement. Cependant, la réciproque n'est pas vraie et dans le cas des fonctions convexes nous avons le résultat suivant.

Proposition 1.20. Soient $(X, \|\cdot\|_X)$ un espace de Banach, K une partie convexe, fermée et non vide de X et $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. Alors, la fonction f est semi-continue inférieurement si et seulement si elle est faiblement semi-continue inférieurement.

Une propriété importante des fonctions convexes et semi-continues inférieurement est donnée par la proposition suivante.

Proposition 1.21. *Soient $(X, \|\cdot\|_X)$ un espace vectoriel normé, K une partie convexe fermée et non vide de X et $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et semi-continue inférieurement. Alors, f possède une minorante affine continue, c'est-à-dire, il existe $l \in X'$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que*

$$f(v) \geq l(v) + \alpha \quad \forall v \in K.$$

Par la suite, nous présentons quelques résultats sur les semi normes continues définies sur un espace normé.

Proposition 1.22. *Soit $j : X \rightarrow \mathbb{R}$ une semi norme sur l'espace normé $(X, \|\cdot\|_X)$. Alors, j est continue si et seulement s'il existe $m > 0$ tel que*

$$(1.35) \quad j(v) \leq m\|v\|_X \quad \forall v \in X.$$

Une conséquence directe de la Proposition 1.22 est donnée par le résultat suivant.

Corollaire 1.23. *Soient $(X, \|\cdot\|_X)$ un espace normé et j une semi norme sur l'espace X qui satisfait l'inégalité (1.35). Alors, j est une fonction convexe et semi continue inférieurement.*

Pour la preuve de la Proposition 1.22 et du Corollaire 1.23, nous pouvons citer l'ouvrage [87, p.28].

Nous passons maintenant aux ensembles fermés et faiblement fermés.

Définition 1.24. Soient $(X, \|\cdot\|_X)$ un espace vectoriel normé. Un sous ensemble $K \subset X$ est dit :

(i) (*fortement*) *fermé* si la limite de toute suite convergente d'éléments de K appartient à K , i.e.,

$$\{u_n\} \subset K, \quad u_n \rightarrow u \quad \text{dans } X \implies u \in K;$$

(ii) (*faiblement*) *fermé* si la limite faible de toute suite faiblement convergente

d'éléments de K appartient à K , i.e.,

$$\{u_n\} \subset K, \quad u_n \rightharpoonup u \quad \text{dans } X \implies u \in K.$$

Notons que tout sous ensemble faiblement fermé de X est fortement fermé, mais la réciproque n'est pas vraie. Ceci étant dit, nous avons le résultat suivant.

Théorème 1.25. (*Théorème de Mazur*) *Un sous ensemble convexe d'un espace de Banach est (fortement) fermé si et seulement s'il est faiblement fermé.*

La démonstration du Théorème 1.25 figure dans [87, p.7].

1.3.2 Inéquations variationnelles elliptiques

Soit X un espace de Hilbert muni du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_X$ et de la norme associée $\|\cdot\|_X$. Considérons un ensemble $K \subset X$ et un opérateur $A : X \rightarrow X$ tels que

$$(1.36) \quad K \text{ est un sous ensemble convexe, fermé et non vide de } X.$$

$$(1.37) \quad A : X \rightarrow X \text{ est un opérateur fortement monotone et de Lipschitz.}$$

Nous avons le résultat d'existence et d'unicité suivant.

Théorème 1.26. *Supposons que les conditions (1.36) (1.37) sont vérifiées. Alors, pour tout $f \in X$ il existe un unique élément $u \in K$ tel que*

$$(1.38) \quad (Au, v - u)_X \geq (f, v - u)_X \quad \forall v \in K.$$

Le Théorème 1.26 sera utilisé dans le Chapitre 9 afin de prouver l'existence et l'unicité de la solution faible d'un problème de contact pour des matériaux élastiques.

Considérons maintenant une fonctionnelle $j : X \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$(1.39) \quad j : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ est convexe et semi-continue inférieurement.}$$

Nous introduisons à présent le théorème ci-dessous.

Théorème 1.27. *Supposons que les conditions (1.36) (1.37) et (1.39) sont vérifiées. Alors, pour tout $f \in X$ il existe un unique élément $u \in K$ tel que*

$$(1.40) \quad (Au, v - u)_X + j(v) - j(u) \geq (f, v - u)_X \quad \forall v \in K.$$

Les démonstrations des Théorèmes 1.26 et 1.27 peuvent être trouvées dans la référence [87].

Nous terminons ce paragraphe par le Lemme de Gronwall qui intervient dans la démonstration de certains résultats de convergence étudiés dans cette thèse ainsi que dans l'établissement de l'unicité de la solution des inéquations variationnelles avec opérateurs de mémoire.

Lemme 1.28. (*Lemme de Gronwall*) Soient $T > 0$ et $f, g \in C([0, T])$. Supposons qu'il existe $c > 0$ tel que

$$f(t) \leq g(t) + c \int_0^t f(s) ds \quad \forall t \in [0, T].$$

Alors

$$f(t) \leq g(t) + c \int_0^t g(s) e^{c(t-s)} ds \quad \forall t \in [0, T].$$

De plus, si g est non décroissante, nous avons que

$$(1.41) \quad f(t) \leq g(t) e^{ct} \quad \forall t \in [0, T].$$

Une démonstration du Lemme 1.28 peut être trouvée dans [41, 87].

1.3.3 Un problème d'optimisation

Dans ce paragraphe, nous présentons quelques résultats sur les suites bornées dans un espace de Hilbert. Ensuite, nous considérons un problème d'optimisation pour lequel nous détaillons les hypothèses sur les données et nous prouvons un résultat d'existence de solution.

Théorème 1.29. Soit X un espace de Hilbert. Alors, toute suite bornée de X admet une sous suite faiblement convergente.

Théorème 1.30. Soit X un espace de Hilbert et $\{u_n\}$ une suite bornée de X telle que toute sous suite faiblement convergente de $\{u_n\}$ converge vers le même élément $u \in X$. Alors,

$$(1.42) \quad u_n \rightharpoonup u \quad \text{dans } X \quad \text{lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

Nous passons maintenant à l'étude d'un problème de contrôle optimal qui sera utilisé dans le Chapitre 8. Afin de formuler ce problème nous précisons le cadre fonctionnel suivant.

Considérons un espace de Banach réflexif Z muni de la norme $\|\cdot\|_Z$ et un espace de Banach W muni de la norme $\|\cdot\|_W$ qui représentent respectivement l'espace des contrôles et l'espace des états. Considérons également une partie $U_c \subset Z$ faiblement fermée de Z qui représente l'ensemble des contrôles admissibles. Enfin, nous considérons une fonctionnelle $J : U_c \rightarrow \mathbb{R}$ qui représente l'objectif que l'on souhaite atteindre ; elle est définie par

$$(1.43) \quad J(\theta) = \alpha \|ST(\theta) - \phi\|_W + \beta \|\theta\|_Z \quad \forall \theta \in U_c,$$

où $\phi \in W$, α, β sont deux constantes réelles positives et $T : U_c \rightarrow X$, $S : X \rightarrow W$ sont deux opérateurs tels que

$$(1.44) \quad T : U_c \rightarrow X \quad \text{est un opérateur faiblement-fortement continu, i.e.,} \\ \{\theta_n\} \subset U_c, \theta \in U_c, \theta_n \rightharpoonup \theta \text{ dans } Z \implies T\theta_n \rightarrow T\theta \text{ dans } X,$$

$$(1.45) \quad S : X \rightarrow W \quad \text{est un opérateur continu,}$$

où X est un espace vectoriel normé muni de la norme $\|\cdot\|_X$.

Nous considérons maintenant le problème de contrôle optimal suivant.

Problème \mathcal{Q} . *Trouver un élément $\theta^* \in U_c$ tel que*

$$(1.46) \quad J(\theta^*) = \min_{\theta \in U_c} J(\theta).$$

Le résultat d'existence de la solution du Problème \mathcal{Q} est donné par le théorème ci-dessous.

Théorème 1.31. *Le problème de contrôle \mathcal{Q} admet au moins une solution $\theta^* \in U_c$.*

Démonstration. Soit

$$(1.47) \quad \omega = \inf_{\theta \in U_c} J(\theta) \in \mathbb{R}$$

et, soit $\{\theta_n\} \subset U_c$ une suite minimisante pour la fonctionnelle J , i.e.,

$$(1.48) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} J(\theta_n) = \omega.$$

Nous démontrons que cette suite est bornée. Nous raisonnons par l'absurde et donc nous supposons que la suite $\{\theta_n\}$ n'est pas bornée. Alors, en passant à une sous suite, encore notée $\{\theta_n\}$, nous avons que

$$(1.49) \quad \|\theta_n\|_Z \rightarrow +\infty \quad \text{lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

Nous utilisons la définition (1.43) de la fonctionnelle J pour obtenir que

$$J(\theta_n) \geq \beta \|\theta_n\|_Z.$$

En passant à la limite lorsque $n \rightarrow +\infty$ dans cette inégalité et en utilisant (1.49), nous déduisons que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} J(\theta_n) = +\infty,$$

ce qui contredit l'hypothèse (1.48) et donc la suite $\{\theta_n\}$ est bornée. Par conséquent, nous déduisons qu'il existe une sous suite faiblement convergente de $\{\theta_n\}$, encore notée $\{\theta_n\}$, et un élément $\theta^* \in Z$ tels que

$$(1.50) \quad \theta_n \rightharpoonup \theta^* \quad \text{dans } Z \quad \text{lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

Par ailleurs, nous utilisons le fait que l'ensemble U_c est faiblement fermé dans Z afin de déduire que

$$(1.51) \quad \theta^* \in U_c.$$

D'autre part, en combinant la convergence (1.50) et la propriété (1.44) de l'opérateur $T : U_c \rightarrow X$, nous obtenons que

$$T\theta_n \rightarrow T\theta^* \quad \text{dans } X \quad \text{lorsque } n \rightarrow +\infty$$

et, de ce fait, la continuité de l'opérateur $S : X \rightarrow W$ donne que

$$ST(\theta_n) \rightarrow ST(\theta^*) \quad \text{dans } W \quad \text{lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

Nous combinons maintenant cette convergence, la convergence (1.50) et la continuité de la norme pour déduire que

$$(1.52) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \|ST(\theta_n) - \phi\|_W = \|ST(\theta^*) - \phi\|_W$$

et, de plus, grâce à la faible semi-continuité inférieure de la norme, nous avons que

$$(1.53) \quad \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|\theta_n\|_Z \geq \|\theta^*\|_Z.$$

Combinons maintenant (1.52) et (1.53) afin d'obtenir

$$(1.54) \quad \liminf_{n \rightarrow +\infty} J(\theta_n) \geq J(\theta^*)$$

et, par conséquent, nous déduisons de (1.48) et (1.54) que

$$(1.55) \quad \omega \geq J(\theta^*).$$

D'autre part, (1.51) et (1.47) impliquent que

$$(1.56) \quad \omega \leq J(\theta^*).$$

Nous combinons maintenant l'inclusion (1.51) et les inégalités (1.55) (1.56) pour voir que l'égalité (1.46) est satisfaite, ce qui conclut la démonstration. \square

Chapitre 2

Inéquations quasivariationnelles elliptiques

Ce chapitre est dédié à l'étude d'une classe d'inéquations quasivariationnelles elliptiques. Il est composé de quatre sections. Dans la première section, nous présentons le problème ainsi que les hypothèses sur les données afin d'énoncer un résultat d'existence et d'unicité de solution. Puis, dans la deuxième section, nous démontrons un résultat de convergence en utilisant la méthode de pénalisation. Ensuite, dans la troisième section, nous étudions la dépendance de la solution par rapport à une perturbation de l'ensemble des contraintes. Enfin, dans la quatrième section, nous prouvons un résultat de convergence pour le problème pénalisé. Les résultats présentés dans ce chapitre ont fait l'objet d'une partie de l'article [79]. Par ailleurs, dans les Chapitres 6 et 7 nous illustrons ces résultats par des problèmes de contact pour des matériaux élastiques.

2.1 Position du problème

Dans cette section, nous présentons le problème ainsi que les hypothèses sur les données. Ensuite, nous fournissons un résultat d'existence et d'unicité de solution.

Soit X un espace de Hilbert muni du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_X$ et de la norme $\|\cdot\|_X$. Considérons un ensemble $K \subset X$, un opérateur $A : X \rightarrow X$, une fonctionnelle $j : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ et un élément $f \in X$. Considérons également le problème suivant.

Problème \mathcal{P} . *Trouver un élément $u \in K$ tel que*

$$(2.1) \quad (Au, v - u)_X + j(u, v) - j(u, u) \geq (f, v - u)_X \quad \forall v \in K.$$

Remarquons que la fonctionnelle j dépend de la solution de l'inéquation (2.1). De ce fait, les inéquations de ce type s'appellent *inéquations quasivariationnelles elliptiques*.

Dans l'étude du Problème \mathcal{P} nous supposons que les hypothèses suivantes sont vérifiées.

$$(2.2) \quad K \text{ est une partie convexe, fermée et non vide de } X.$$

L'opérateur $A : X \rightarrow X$ est fortement monotone et de Lipschitz, i.e.,

$$(2.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe } m > 0 \text{ tel que} \\ \quad (Au_1 - Au_2, u_1 - u_2)_X \geq m \|u_1 - u_2\|_X^2 \\ \quad \forall u_1, u_2 \in X. \\ \text{(b) Il existe } M > 0 \text{ tel que} \\ \quad \|Au_1 - Au_2\|_X \leq M \|u_1 - u_2\|_X \quad \forall u_1, u_2 \in X. \end{array} \right.$$

La fonctionnelle $j : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ satisfait

$$(2.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Pour tout } \eta \in X, j(\eta, \cdot) : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ est convexe} \\ \quad \text{et semi-continue inférieurement.} \\ \text{(b) Il existe } \alpha \geq 0 \text{ tel que} \\ \quad j(\eta_1, v_2) - j(\eta_1, v_1) + j(\eta_2, v_1) - j(\eta_2, v_2) \\ \quad \leq \alpha \|\eta_1 - \eta_2\|_X \|v_1 - v_2\|_X \quad \forall \eta_1, \eta_2, v_1, v_2 \in X. \end{array} \right.$$

La condition de petitesse

$$(2.5) \quad m > \alpha.$$

Nous avons le résultat d'existence et d'unicité suivant.

Théorème 2.1. *Supposons que les hypothèses (2.2) (2.5) sont vérifiées. Alors, pour tout $f \in X$, le Problème \mathcal{P} possède une solution unique $u \in K$.*

La preuve du Théorème 2.1 figure dans [87, p.49-50].

2.2 Méthode de pénalisation

Dans cette section, nous nous intéressons à la méthode de pénalisation qui consiste à approcher le Problème \mathcal{P} par un problème pénalisé sans contrainte \mathcal{P}_μ défini sur l'espace X , où μ est un coefficient strictement positif, appelé le *paramètre de pénalisation*. Pour plus de détails sur la méthode de pénalisation dans les inéquations variationnelles, nous renvoyons le lecteur à [36, 84]. Notre objectif dans cette section est de démontrer un résultat d'existence et d'unicité de la solution du problème pénalisé \mathcal{P}_μ . Puis, nous prouvons que cette solution converge vers la solution du problème originel \mathcal{P} lorsque le paramètre de pénalisation μ tend vers zéro. Pour ce faire, nous considérons un opérateur de pénalisation $G : X \rightarrow X$ introduit dans la Section 1.2 qui satisfait les conditions suivantes :

$$(2.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(a)} \quad (Gu - Gv, u - v)_X \geq 0 \quad \forall u, v \in X. \\ \text{(b)} \quad \text{Il existe } L > 0 \text{ tel que} \\ \quad \quad \quad \|Gu - Gv\|_X \leq L \|u - v\|_X \quad \forall u, v \in X. \\ \text{(c)} \quad (Gu, v - u)_X \leq 0 \quad \forall u \in X, v \in K. \\ \text{(d)} \quad Gu = 0_X \text{ si et seulement si } u \in K. \end{array} \right.$$

Le problème pénalisé associé au Problème \mathcal{P} est le suivant.

Problème \mathcal{P}_μ . *Trouver un élément $u_\mu \in X$ tel que*

$$(2.7) \quad \begin{aligned} (Au_\mu, v - u_\mu)_X + \frac{1}{\mu} (Gu_\mu, v - u_\mu)_X \\ + j(u_\mu, v) - j(u_\mu, u_\mu) \geq (f, v - u_\mu)_X \quad \forall v \in X. \end{aligned}$$

Le résultat principal de cette section est le théorème ci-dessous.

Théorème 2.2. *Supposons que les conditions (2.2) (2.6) sont vérifiées. Alors :*

i) Pour tout $\mu > 0$, le Problème \mathcal{P}_μ possède une solution unique $u_\mu \in X$.

ii) La solution $u_\mu \in X$ du Problème \mathcal{P}_μ converge fortement dans X vers la solution $u \in K$ du Problème \mathcal{P} , i.e.,

$$(2.8) \quad \|u_\mu - u\|_X \rightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad \mu \rightarrow 0.$$

La démonstration du Théorème 2.2 sera conduite en plusieurs étapes. Elle est basée sur le Théorème 2.1 ainsi que sur les techniques de convexité, de monotonie et de compacité. Dans ce qui suit, nous supposons que les conditions (2.2) (2.6) sont vérifiées. Nous commençons par le résultat d'existence et d'unicité suivant.

Lemme 2.3. *Pour tout $\mu > 0$, le problème pénalisé \mathcal{P}_μ possède une solution unique $u_\mu \in X$.*

Démonstration. Soit $\mu > 0$. Nous utilisons le Théorème 2.1 avec $K = X$. Pour ce faire, nous prouvons que l'opérateur $A + \frac{1}{\mu} G : X \rightarrow X$ est fortement monotone et de Lipschitz. En utilisant les conditions (2.3)(a) et (2.6)(a), nous avons que

$$\begin{aligned} & ((Au + \frac{1}{\mu} Gu) - (Av + \frac{1}{\mu} Gv), u - v)_X \\ &= (Au - Av, u - v)_X + \frac{1}{\mu} (Gu - Gv, u - v)_X \\ &\geq m \|u - v\|_X^2 \quad \forall u, v \in X. \end{aligned}$$

Nous en déduisons que $A + \frac{1}{\mu} G$ est un opérateur fortement monotone, i.e., il satisfait la condition (2.3)(a).

D'autre part, nous utilisons les conditions (2.3)(b) et (2.6)(b) pour obtenir que

$$\begin{aligned} & \|(Au + \frac{1}{\mu} Gu) - (Av + \frac{1}{\mu} Gv)\|_X \\ &= \|(Au - Av) + \frac{1}{\mu} (Gu - Gv)\|_X \\ &\leq (M + \frac{1}{\mu} L) \|u - v\|_X \quad \forall u, v \in X. \end{aligned}$$

Il en résulte que $A + \frac{1}{\mu} G$ est un opérateur de Lipschitz avec la constante $M + \frac{1}{\mu} L$, i.e., il satisfait la condition (2.3)(b). Par conséquent, en utilisant le Théorème 2.1,

nous déduisons que le problème pénalisé \mathcal{P}_μ possède une solution unique $u_\mu \in X$, ce qui conclut la démonstration du Lemme 2.3. \square

Pour continuer, nous considérons le problème auxiliaire suivant.

Problème $\widetilde{\mathcal{P}}_\mu$. *Trouver un élément $\tilde{u}_\mu \in X$ tel que*

$$(2.9) \quad (A\tilde{u}_\mu, v - \tilde{u}_\mu)_X + \frac{1}{\mu} (G\tilde{u}_\mu, v - \tilde{u}_\mu)_X \\ + j(u, v) - j(u, \tilde{u}_\mu) \geq (f, v - \tilde{u}_\mu)_X \quad \forall v \in X.$$

Ce problème est intermédiaire entre les problèmes \mathcal{P} et \mathcal{P}_μ , car la solution u du Problème \mathcal{P} est supposée être connue. En outre, il est facile de voir que l'inéquation (2.9) représente une *inéquation variationnelle de deuxième espèce*. L'unique solvabilité du Problème $\widetilde{\mathcal{P}}_\mu$ est donnée par le lemme suivant.

Lemme 2.4. *Pour tout $\mu > 0$, le Problème $\widetilde{\mathcal{P}}_\mu$ possède une solution unique $\tilde{u}_\mu \in X$.*

Démonstration. Soit $\mu > 0$. D'après le Lemme 2.3, nous avons que l'opérateur $v \mapsto Av + \frac{1}{\mu} Gv$ est fortement monotone et de Lipschitz. Par ailleurs, en utilisant la condition (2.4)(a), nous déduisons que la fonctionnelle $j(u, \cdot) : X \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe et semi-continue inférieurement, où u est la solution du Problème \mathcal{P} . Le Lemme 2.4 est maintenant une conséquence directe du Théorème 1.27 avec $K = X$. \square

Nous effectuons maintenant des estimations a priori sur la solution du problème intermédiaire $\widetilde{\mathcal{P}}_\mu$ pour obtenir le résultat de convergence suivant.

Lemme 2.5. *Il existe une sous suite de la suite $\{\tilde{u}_\mu\}$, de nouveau notée $\{\tilde{u}_\mu\}$, et un élément $\tilde{u} \in X$ tel que*

$$(2.10) \quad \tilde{u}_\mu \rightharpoonup \tilde{u} \quad \text{dans } X \quad \text{lorsque } \mu \rightarrow 0.$$

Démonstration. Soient $\mu > 0$ et $v_0 \in K$. Nous prenons $v = v_0$ dans (2.9) pour obtenir que

$$(2.11) \quad (A\tilde{u}_\mu, v_0 - \tilde{u}_\mu)_X + \frac{1}{\mu} (G\tilde{u}_\mu, v_0 - \tilde{u}_\mu)_X \\ + j(u, v_0) - j(u, \tilde{u}_\mu) \geq (f, v_0 - \tilde{u}_\mu)_X.$$

Ensuite, en écrivant

$$A\tilde{u}_\mu = A\tilde{u}_\mu - Av_0 + Av_0.$$

Puis, en substituant cette égalité dans (2.11), nous obtenons

$$(2.12) \quad (A\tilde{u}_\mu - Av_0, \tilde{u}_\mu - v_0)_X \leq (Av_0, v_0 - \tilde{u}_\mu)_X \\ + \frac{1}{\mu} (G\tilde{u}_\mu, v_0 - \tilde{u}_\mu)_X + j(u, v_0) - j(u, \tilde{u}_\mu) + (f, \tilde{u}_\mu - v_0)_X.$$

D'autre part, en utilisant la condition (2.4)(a), nous déduisons de la Proposition 1.21 qu'il existe deux éléments $\omega(u) \in X$ et $\alpha(u) \in \mathbb{R}$ tels que

$$j(u, v) \geq (\omega(u), v)_X + \alpha(u) \quad \forall v \in X$$

et, en posant $v = \tilde{u}_\mu$ dans cette inégalité, nous avons que

$$(2.13) \quad j(u, \tilde{u}_\mu) \geq (\omega(u), \tilde{u}_\mu)_X + \alpha(u).$$

Nous combinons maintenant les inégalités (2.12) (2.13) et nous utilisons l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour voir que

$$(A\tilde{u}_\mu - Av_0, \tilde{u}_\mu - v_0)_X \\ \leq \frac{1}{\mu} (G\tilde{u}_\mu, v_0 - \tilde{u}_\mu)_X + \left(\|Av_0\|_X + \|f\|_X + \|\omega(u)\|_X \right) \|\tilde{u}_\mu - v_0\|_X \\ + |j(u, v_0)| + |\alpha(u)| + \|\omega(u)\|_X \|v_0\|_X.$$

En outre, en utilisant cette inégalité et les conditions (2.3)(a), (2.6)(c), nous trouvons

$$m \|\tilde{u}_\mu - v_0\|_X^2 \\ \leq \left(\|Av_0\|_X + \|f\|_X + \|\omega(u)\|_X \right) \|\tilde{u}_\mu - v_0\|_X \\ + |j(u, v_0)| + |\alpha(u)| + \|\omega(u)\|_X \|v_0\|_X.$$

Nous utilisons maintenant cette inégalité avec l'inégalité élémentaire

$$(2.14) \quad x, a, b \geq 0 \quad \text{et} \quad x^2 \leq ax + b \implies x^2 \leq a^2 + 2b$$

pour obtenir que

$$\begin{aligned} & \|\tilde{u}_\mu - v_0\|_X \\ & \leq \sqrt{\frac{\left(\|Av_0\|_X + \|f\|_X + \|\omega(u)\|_X\right)^2}{m^2} + \frac{2}{m}\left(|j(u, v_0)| + |\alpha(u)| + \|\omega(u)\|_X\|v_0\|_X\right)}. \end{aligned}$$

Ensuite, nous utilisons cette inégalité avec l'inégalité triangulaire

$$\|\tilde{u}_\mu\|_X \leq \|\tilde{u}_\mu - v_0\|_X + \|v_0\|_X$$

afin de déduire qu'il existe une constante $c > 0$, indépendante de μ , telle que

$$(2.15) \quad \|\tilde{u}_\mu\|_X \leq c.$$

Cette inégalité montre que la suite $\{\tilde{u}_\mu\}$ est bornée dans X . Par conséquent, d'après le Théorème 1.29, nous déduisons qu'il existe une sous suite faiblement convergente de la suite $\{\tilde{u}_\mu\}$, encore notée $\{\tilde{u}_\mu\}$, et un élément $\tilde{u} \in X$ tels que

$$\tilde{u}_\mu \rightharpoonup \tilde{u} \quad \text{dans } X \quad \text{lorsque } \mu \rightarrow 0,$$

ce qui achève la démonstration du Lemme 2.5. □

Nous passons maintenant au résultat suivant.

Lemme 2.6. *L'égalité suivante est satisfaite :*

$$(2.16) \quad \tilde{u} = u.$$

Démonstration. Soit $\mu > 0$. D'abord, montrons que $\tilde{u} \in K$. Pour cela, nous utilisons l'inégalité (2.9) pour voir que

$$(2.17) \quad \begin{aligned} \frac{1}{\mu} (G\tilde{u}_\mu, \tilde{u}_\mu - v)_X & \leq (A\tilde{u}_\mu, v - \tilde{u}_\mu)_X \\ & + j(u, v) - j(u, \tilde{u}_\mu) + (f, \tilde{u}_\mu - v)_X \quad \forall v \in X. \end{aligned}$$

En outre, nous écrivons

$$A\tilde{u}_\mu = A\tilde{u}_\mu - A0_X + A0_X$$

puis, nous substituons cette égalité dans l'inégalité (2.17) pour obtenir que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu} (G\tilde{u}_\mu, \tilde{u}_\mu - v)_X &\leq (A\tilde{u}_\mu - A0_X, v - \tilde{u}_\mu)_X \\ &+ (A0_X, v - \tilde{u}_\mu)_X + j(u, v) - j(u, \tilde{u}_\mu) + (f, \tilde{u}_\mu - v)_X \quad \forall v \in X. \end{aligned}$$

Ensuite, en combinant cette inégalité avec l'inégalité (2.13) et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la condition (2.3)(b), nous trouvons que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu} (G\tilde{u}_\mu, \tilde{u}_\mu - v)_X &\leq \left(M\|\tilde{u}_\mu\|_X + \|A0_X\|_X + \|f\|_X \right) \left(\|v\|_X + \|\tilde{u}_\mu\|_X \right) \\ &+ |j(u, v)| + \|\tilde{u}_\mu\|_X \|\omega(u)\|_X + |\alpha(u)| \quad \forall v \in X. \end{aligned}$$

Nous combinons maintenant cette inégalité avec l'estimation (2.15) pour voir qu'il existe une constante positive c , indépendante de μ , telle que

$$(2.18) \quad (G\tilde{u}_\mu, \tilde{u}_\mu - v)_X \leq c\mu \quad \forall v \in X.$$

Puis, nous posons $v = \tilde{u}$ dans cette inégalité et nous passons à la limite supérieure lorsque $\mu \rightarrow 0$ pour trouver que

$$(2.19) \quad \limsup_{\mu \rightarrow 0} (G\tilde{u}_\mu, \tilde{u}_\mu - \tilde{u})_X \leq 0.$$

Par conséquent, en utilisant les propriétés (2.6)(a) (b), la convergence (2.10) et l'inégalité (2.19), nous déduisons de la Proposition 1.11 que $G : X \rightarrow X$ est un opérateur pseudomonotone et, de ce fait, nous avons que

$$(2.20) \quad \liminf_{\mu \rightarrow 0} (G\tilde{u}_\mu, \tilde{u}_\mu - v)_X \geq (G\tilde{u}, \tilde{u} - v)_X \quad \forall v \in X.$$

D'autre part, l'inégalité (2.18) implique que

$$(2.21) \quad \liminf_{\mu \rightarrow 0} (G\tilde{u}_\mu, \tilde{u}_\mu - v)_X \leq 0 \quad \forall v \in X.$$

Maintenant, nous combinons les inégalités (2.20) et (2.21) afin d'obtenir que

$$(G\tilde{u}, \tilde{u} - v)_X \leq 0 \quad \forall v \in X.$$

En prenant $v = \tilde{u} - G\tilde{u}$ dans cette inégalité, il en résulte que

$$\|G\tilde{u}\|_X^2 \leq 0$$

et, de ce fait, nous déduisons que $G\tilde{u} = 0_X$. Par conséquent, d'après la condition (2.6)(d), nous avons que

$$(2.22) \quad \tilde{u} \in K.$$

Montrons maintenant que \tilde{u} satisfait l'inéquation variationnelle (2.1). Pour ce faire, nous utilisons l'inégalité (2.9) et la condition (2.6)(c) pour voir que

$$(2.23) \quad (A\tilde{u}_\mu, v - \tilde{u}_\mu)_X + j(u, v) - j(u, \tilde{u}_\mu) \geq (f, v - \tilde{u}_\mu)_X \quad \forall v \in K.$$

Prenons $v = \tilde{u} \in K$ dans cette inégalité pour trouver que

$$(A\tilde{u}_\mu, \tilde{u}_\mu - \tilde{u})_X \leq j(u, \tilde{u}) - j(u, \tilde{u}_\mu) + (f, \tilde{u}_\mu - \tilde{u})_X.$$

Ensuite, en passant à la limite supérieure dans cette inégalité lorsque $\mu \rightarrow 0$ et en utilisant la convergence faible (2.10) et la condition (2.4)(a), nous obtenons que

$$(2.24) \quad \limsup_{\mu \rightarrow 0} (A\tilde{u}_\mu, \tilde{u}_\mu - \tilde{u})_X \leq 0.$$

Nous combinons la condition (2.3), la convergence (2.10), l'inégalité (2.24) et nous utilisons la Proposition 1.11 afin de déduire que $A : X \rightarrow X$ est un opérateur pseudomonotone et, par conséquent, nous avons que

$$(2.25) \quad \liminf_{\mu \rightarrow 0} (A\tilde{u}_\mu, \tilde{u}_\mu - v)_X \geq (A\tilde{u}, \tilde{u} - v)_X \quad \forall v \in X.$$

D'autre part, en procédant au passage à la limite inférieure dans (2.23) lorsque $\mu \rightarrow 0$ et en utilisant la convergence faible (2.10) et la condition (2.4)(a), nous obtenons

$$(2.26) \quad \begin{aligned} & \liminf_{\mu \rightarrow 0} (A\tilde{u}_\mu, \tilde{u}_\mu - v)_X \\ & \leq j(u, v) - j(u, \tilde{u}) + (f, \tilde{u} - v)_X \quad \forall v \in K. \end{aligned}$$

En combinant maintenant les inégalités (2.25) et (2.26), nous trouvons que

$$(2.27) \quad (A\tilde{u}, v - \tilde{u})_X + j(u, v) - j(u, \tilde{u}) \geq (f, v - \tilde{u})_X \quad \forall v \in K.$$

Puis, en prenant $v = u$ dans (2.27) et $v = \tilde{u}$ dans (2.1) et en additionnant les inégalités obtenues, nous obtenons que

$$(A\tilde{u} - Au, \tilde{u} - u)_X \leq 0.$$

Cette inégalité combinée avec la condition (2.3)(a) implique que

$$\tilde{u} = u,$$

ce qui achève la démonstration du Lemme 2.6. \square

Nous poursuivons avec le résultat de convergence suivant.

Lemme 2.7. *La suite $\{\tilde{u}_\mu\}$ converge faiblement vers u lorsque $\mu \rightarrow 0$.*

Démonstration. Les Lemmes 2.5 et 2.6 montrent que toute sous suite faiblement convergente de la suite $\{\tilde{u}_\mu\} \subset X$ converge vers l'unique solution $u \in K$ de l'inéquation variationnelle (2.1) et, de plus, l'estimation (2.15) montre que la suite $\{\tilde{u}_\mu\}$ est bornée dans X . Donc, d'après le Théorème 1.30, nous déduisons que la suite $\{\tilde{u}_\mu\}$ converge faiblement vers u , ce qui conclut la démonstration du Lemme 2.7. \square

Nous continuons notre analyse par le résultat de convergence forte suivant.

Lemme 2.8. *La suite $\{\tilde{u}_\mu\}$ converge fortement dans X vers u lorsque $\mu \rightarrow 0$, c'est-à-dire*

$$(2.28) \quad \tilde{u}_\mu \rightarrow u \quad \text{dans } X \quad \text{lorsque } \mu \rightarrow 0.$$

Démonstration. Soit $\mu > 0$. Nous prenons $v = \tilde{u}$ dans (2.25) pour voir que

$$\liminf_{\mu \rightarrow 0} (A\tilde{u}_\mu, \tilde{u}_\mu - \tilde{u})_X \geq 0.$$

Ensuite, en combinant cette inégalité avec l'inégalité (2.24), nous trouvons que

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} (A\tilde{u}_\mu, \tilde{u}_\mu - \tilde{u})_X = 0$$

et, par conséquent, l'égalité (2.16) implique que

$$(2.29) \quad \lim_{\mu \rightarrow 0} (A\tilde{u}_\mu, \tilde{u}_\mu - u)_X = 0.$$

D'autre part, nous utilisons la convergence faible de la suite $\{\tilde{u}_\mu\}$ donnée par le Lemme 2.7 pour obtenir que

$$(2.30) \quad \lim_{\mu \rightarrow 0} (Au, \tilde{u}_\mu - u)_X = 0.$$

En outre, nous utilisons l'hypothèse (2.3)(a) pour trouver que

$$\begin{aligned} m \|\tilde{u}_\mu - u\|_X^2 &\leq (A\tilde{u}_\mu - Au, \tilde{u}_\mu - u)_X \\ &= (A\tilde{u}_\mu, \tilde{u}_\mu - u)_X - (Au, \tilde{u}_\mu - u)_X. \end{aligned}$$

Maintenant, nous combinons cette inégalité et les convergences (2.29) (2.30) afin de déduire que

$$\|\tilde{u}_\mu - u\|_X \rightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad \mu \rightarrow 0,$$

ce qui conclut la démonstration du Lemme 2.8. \square

Nous terminons avec la convergence forte suivante.

Lemme 2.9. *La suite $\{u_\mu\}$ converge fortement dans X vers u lorsque $\mu \rightarrow 0$, c'est-à-dire*

$$u_\mu \rightarrow u \quad \text{dans } X \quad \text{lorsque } \mu \rightarrow 0.$$

Démonstration. Soit $\mu > 0$. D'abord, nous prenons $v = \tilde{u}_\mu$ dans (2.7) et $v = u_\mu$ dans (2.9), ensuite nous additionnons les deux inégalités obtenues pour obtenir que

$$\begin{aligned} (A\tilde{u}_\mu - Au_\mu, \tilde{u}_\mu - u_\mu)_X + \frac{1}{\mu} (G\tilde{u}_\mu - Gu_\mu, \tilde{u}_\mu - u_\mu)_X \\ \leq j(u_\mu, \tilde{u}_\mu) - j(u_\mu, u_\mu) + j(u, u_\mu) - j(u, \tilde{u}_\mu). \end{aligned}$$

Puis, nous combinons cette inégalité avec les conditions (2.3)(a), (2.4)(b) et (2.6)(a) pour voir que

$$(2.31) \quad \|\tilde{u}_\mu - u_\mu\| \leq \frac{\alpha}{m} \|u_\mu - u\|_X.$$

Ensuite, nous utilisons l'inégalité triangulaire

$$\|u_\mu - u\|_X \leq \|u_\mu - \tilde{u}_\mu\|_X + \|\tilde{u}_\mu - u\|_X$$

ainsi que l'inégalité (2.31) pour déduire que

$$\left(1 - \frac{\alpha}{m}\right) \|u_\mu - u\|_X \leq \|\tilde{u}_\mu - u\|_X.$$

Enfin, en combinant cette inégalité avec la condition de petitesse (2.5) et la convergence (2.28), nous déduisons que

$$u_\mu \rightarrow u \quad \text{dans } X \quad \text{lorsque } \mu \rightarrow 0,$$

ce qui conclut la preuve du Lemme 2.9. \square

Nous donnons maintenant la démonstration du Théorème 2.2.

Démonstration. Les points i) et ii) du Théorème 2.2 sont respectivement des conséquences directes des Lemmes 2.3 et 2.9. \square

2.3 Un résultat de convergence

Dans cette section, nous nous intéressons au comportement de la solution du Problème \mathcal{P} lorsque l'on introduit une perturbation de l'ensemble des contraintes K . Pour chaque $\rho > 0$, la perturbation de K est définie par une dilatation de rapport $c(\rho)$ et une translation de valeur $d(\rho)\theta$ où $c : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $d : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ et $\theta \in X$. Nous définissons alors la perturbation K_ρ par l'égalité

$$(2.32) \quad K_\rho = c(\rho)K + d(\rho)\theta.$$

Nous illustrons notre construction par l'exemple suivant.

Exemple 2.10. Soit $X = \mathbb{R}^2$ et considérons une partie K de X tel que

$$K = \{x = (x_1, x_2) \in X : 0 \leq x_1 \leq 1, \quad 0 \leq x_2 \leq 1\}.$$

Nous posons

$$(2.33) \quad c(\rho) = 2\rho + 1, \quad d(\rho) = 2\rho \quad \text{et} \quad \theta = (1, 1).$$

Ensuite, nous combinons (2.33) et la définition (2.32) pour obtenir que

$$K_\rho = \{x_\rho = (x_{1\rho}, x_{2\rho}) \in X : 2\rho \leq x_{1\rho} \leq 4\rho + 1, \quad 2\rho \leq x_{2\rho} \leq 4\rho + 1\}.$$

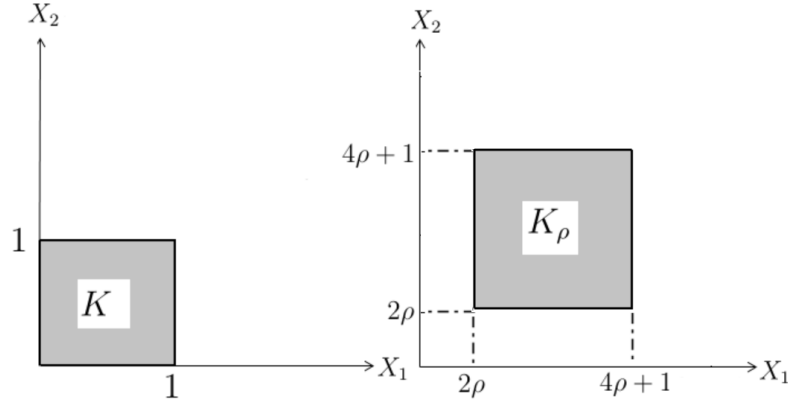


FIGURE I.2.1 : L'ensemble K et sa perturbation K_ρ

La représentation graphique des ensembles K et K_ρ est donnée dans la figure ci-dessus.

Nous considérons à présent le problème perturbé suivant.

Problème \mathcal{P}_ρ . *Trouver un élément $u_\rho \in K_\rho$ tel que*

$$(2.34) \quad \begin{aligned} (Au_\rho, v_\rho - u_\rho)_X + j(u_\rho, v_\rho) - j(u_\rho, u_\rho) \\ \geq (f, v_\rho - u_\rho)_X \quad \forall v_\rho \in K_\rho. \end{aligned}$$

Dans l'étude du Problème \mathcal{P}_ρ nous supposons que les convergences suivantes sont vérifiées :

$$(2.35) \quad c(\rho) \rightarrow 1 \quad \text{et} \quad d(\rho) \rightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad \rho \rightarrow 0.$$

Nous supposons également que

$$(2.36) \quad 0_X \in K_\rho.$$

Par ailleurs, nous supposons que la fonctionnelle j satisfait

$$(2.37) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } j(\eta, \lambda v) = \lambda j(\eta, v) \quad \forall \lambda \geq 0, \forall \eta, v \in X. \\ \text{(b) } j(\eta, \eta) \geq 0 \quad \forall \eta \in X. \\ \text{(c) Il existe une fonction } H : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ \text{ tel que} \\ \quad \text{(c}_1) \quad |j(\eta, u_1) - j(\eta, u_2)| \leq H(\|\eta\|_X) \|u_1 - u_2\|_X \\ \quad \quad \quad \forall \eta, u_1, u_2 \in X. \\ \quad \text{(c}_2) \text{ pour tout } \beta > 0, \text{ il existe } \gamma > 0 \text{ tel que} \\ \quad \quad \quad H(r) \leq \gamma \quad \text{pour tout } r \leq \beta. \end{array} \right.$$

Le résultat principal de cette section est le théorème ci-dessous.

Théorème 2.11. *Supposons que les hypothèses (2.2) (2.5) et (2.32) sont vérifiées.*

Alors :

- i) *Pour tout $\rho > 0$, le Problème \mathcal{P}_ρ possède une solution unique $u_\rho \in K_\rho$.*
- ii) *De plus, si les conditions (2.35) (2.37) sont vérifiées, alors la solution u_ρ du Problème \mathcal{P}_ρ converge fortement dans X vers la solution u du Problème \mathcal{P} , c'est-à-dire*

$$(2.38) \quad \|u_\rho - u\|_X \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } \rho \rightarrow 0.$$

Démonstration. i) Soit $\rho > 0$. Nous utilisons le Théorème 2.1 avec $K = K_\rho$. Tout d'abord, montrons que K_ρ est un sous ensemble convexe, fermé et non vide de X . Il est facile de vérifier que K_ρ est convexe et non vide. Pour montrer qu'il est fermé, nous choisissons une suite $\{v_{\rho n}\} \subset K_\rho$ telle que

$$(2.39) \quad v_{\rho n} \rightarrow w \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty$$

et nous prouvons que $w \in K_\rho$. Soit $n \in \mathbb{N}$, nous utilisons la définition (2.32) pour voir qu'il existe un élément $v_n \in K$ tel que

$$(2.40) \quad v_{\rho n} = c(\rho)v_n + d(\rho)\theta.$$

Puisque K est un sous ensemble fermé de X , nous déduisons qu'il existe un élément $v \in K$ tel que

$$(2.41) \quad v_{\rho n} = c(\rho)v_n + d(\rho)\theta \rightarrow c(\rho)v + d(\rho)\theta \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty.$$

Ensuite, en combinant (2.39) et (2.41), nous concluons que

$$w = c(\rho)v + d(\rho)\theta.$$

D'après la définition (2.32) de l'ensemble K_ρ , nous déduisons que $w \in K_\rho$ et, par conséquent, K_ρ est un sous ensemble fermé de X . Donc, le résultat d'existence et d'unicité de la solution du Problème \mathcal{P}_ρ est une conséquence du Théorème 2.1. \square

ii) Nous utilisons la condition (2.35) pour déduire qu'il existe une constante $\rho^* > 0$ telle que

$$(2.42) \quad c(\rho) > 0 \quad \forall \rho \in (0, \rho^*).$$

Soit $\rho \in (0, \rho^*)$. Prenons $v = \frac{u_\rho - d(\rho)\theta}{c(\rho)} \in K$ dans (2.1), multiplions l'inégalité obtenue par $c(\rho) > 0$ et utilisons la condition (2.37)(a) pour obtenir que

$$(2.43) \quad (Au, u_\rho - d(\rho)\theta - c(\rho)u)_X + j(u, u_\rho - d(\rho)\theta) - j(u, c(\rho)u) \\ \geq (f, u_\rho - d(\rho)\theta - c(\rho)u)_X.$$

D'autre part, nous prenons $v_\rho = c(\rho)u + d(\rho)\theta$ dans (2.34) pour voir que

$$(2.44) \quad (Au_\rho, c(\rho)u + d(\rho)\theta - u_\rho)_X + j(u_\rho, c(\rho)u + d(\rho)\theta) - j(u_\rho, u_\rho) \\ \geq (f, c(\rho)u + d(\rho)\theta - u_\rho)_X.$$

Nous additionnons les inégalités (2.43) et (2.44) pour obtenir que

$$(2.45) \quad (Au_\rho - Au, c(\rho)u + d(\rho)\theta - u_\rho)_X \\ + j(u_\rho, c(\rho)u + d(\rho)\theta) - j(u_\rho, u_\rho) \\ + j(u, u_\rho - d(\rho)\theta) - j(u, c(\rho)u) \geq 0.$$

Ensuite, en écrivant

$$(2.46) \quad c(\rho)u - u_\rho + d(\rho)\theta = u - u_\rho + (c(\rho) - 1)u + d(\rho)\theta$$

puis, en substituant l'égalité (2.46) dans l'inégalité (2.45), nous trouvons que

$$(2.47) \quad (Au_\rho - Au, u_\rho - u)_X \leq (Au - Au_\rho, (1 - c(\rho))u - d(\rho)\theta)_X \\ + j(u_\rho, c(\rho)u + d(\rho)\theta) - j(u_\rho, u_\rho) + j(u, u_\rho - d(\rho)\theta) - j(u, c(\rho)u).$$

Par ailleurs, nous écrivons

$$\begin{aligned}
 & j(u_\rho, c(\rho)u + d(\rho)\theta) - j(u_\rho, u_\rho) + j(u, u_\rho - d(\rho)\theta) - j(u, c(\rho)u) \\
 &= j(u_\rho, c(\rho)u + d(\rho)\theta) - j(u_\rho, u_\rho - d(\rho)\theta) \\
 & \quad + j(u, u_\rho - d(\rho)\theta) - j(u, c(\rho)u + d(\rho)\theta) \\
 & \quad + j(u_\rho, u_\rho - d(\rho)\theta) - j(u_\rho, u_\rho) \\
 & \quad + j(u, c(\rho)u + d(\rho)\theta) - j(u, c(\rho)u).
 \end{aligned}$$

En utilisant cette dernière égalité avec les hypothèses (2.4)(b) et (2.37)(c₁), après quelques calculs, nous obtenons que

$$\begin{aligned}
 (2.48) \quad & |j(u_\rho, c(\rho)u + d(\rho)\theta) - j(u_\rho, u_\rho) + j(u, u_\rho - d(\rho)\theta) - j(u, c(\rho)u)| \\
 & \leq \alpha \|u - u_\rho\|_X \|c(\rho)u - u_\rho + 2d(\rho)\theta\|_X \\
 & \quad + |d(\rho)| \|\theta\|_X (H(\|u\|_X) + H(\|u_\rho\|_X)).
 \end{aligned}$$

Nous écrivons

$$c(\rho)u - u_\rho + 2d(\rho)\theta = u - u_\rho + (c(\rho) - 1)u + 2d(\rho)\theta.$$

Maintenant, en substituant cette égalité dans l'inégalité (2.48), nous trouvons que

$$\begin{aligned}
 (2.49) \quad & |j(u_\rho, c(\rho)u + d(\rho)\theta) - j(u_\rho, u_\rho) + j(u, u_\rho - d(\rho)\theta) - j(u, c(\rho)u)| \\
 & \leq \alpha \|u - u_\rho\|_X^2 + (|c(\rho) - 1| \|u\|_X + 2|d(\rho)| \|\theta\|_X) \|u - u_\rho\|_X \\
 & \quad + |d(\rho)| \|\theta\|_X (H(\|u\|_X) + H(\|u_\rho\|_X)).
 \end{aligned}$$

Nous combinons (2.47) et (2.49) et nous utilisons (2.3)(a) afin d'obtenir que

$$\begin{aligned}
 (2.50) \quad & (m - \alpha) \|u - u_\rho\|_X^2 \\
 & \leq M \|u - u_\rho\|_X (|c(\rho) - 1| \|u\|_X + |d(\rho)| \|\theta\|_X) \\
 & \quad + \alpha \|u - u_\rho\|_X \left(|c(\rho) - 1| \|u\|_X + 2|d(\rho)| \|\theta\|_X \right) \\
 & \quad + |d(\rho)| H(\|u\|_X) \|\theta\|_X + |d(\rho)| H(\|u_\rho\|_X) \|\theta\|_X.
 \end{aligned}$$

Par la suite, montrons que la suite $\{u_\rho\}$ est bornée dans l'espace X . Pour ce faire, nous prenons $v_\rho = 0_X \in K_\rho$ dans (2.34) pour voir que

$$(Au_\rho, u_\rho)_X \leq j(u_\rho, 0_X) - j(u_\rho, u_\rho) + (f, u_\rho)_X.$$

Puis, en utilisant cette inégalité avec les conditions (2.37)(a)-(b), nous trouvons

$$(Au_\rho - A0_X, u_\rho)_X \leq -(A0_X, u_\rho)_X + (f, u_\rho)_X.$$

Ensuite, nous utilisons la condition (2.3)(a) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour obtenir que

$$m\|u_\rho\|_X^2 \leq (\|A0_X\|_X + \|f\|_X)\|u_\rho\|_X.$$

Cette inégalité montre qu'il existe une constante $\beta > 0$, indépendante de ρ , telle que

$$(2.51) \quad \|u_\rho\|_X \leq \beta.$$

En outre, en utilisant l'hypothèse (2.37)(c₂) et l'estimation (2.51), nous déduisons qu'il existe une constante $\gamma > 0$ telle que

$$(2.52) \quad H(\|u_\rho\|_X) \leq \gamma.$$

Nous combinons maintenant les inégalités (2.50) et (2.52) afin de voir que

$$\begin{aligned} (m - \alpha)\|u - u_\rho\|_X^2 &\leq M\|u - u_\rho\|_X(|c(\rho) - 1|\|u\|_X + |d(\rho)|\|\theta\|_X) \\ &\quad + \alpha\|u - u_\rho\|_X \left(|c(\rho) - 1|\|u\|_X + 2|d(\rho)|\|\theta\|_X \right) \\ &\quad + |d(\rho)|H(\|u\|_X)\|\theta\|_X + \gamma|d(\rho)|\|\theta\|_X. \end{aligned}$$

Enfin, nous utilisons cette inégalité avec (2.14) et les hypothèses (2.5), (2.35) pour déduire la convergence (2.38), ce qui conclut la démonstration du Théorème 2.11. \square

2.4 Un résultat de convergence pour le problème pénalisé

Dans cette section, nous considérons le problème pénalisé \mathcal{P}_μ étudié dans la Section 2.2 dans le cas particulier où l'opérateur de pénalisation est celui donné par la Proposition 1.10, i.e.,

$$(2.53) \quad Gu = u - P_K u \quad \forall u \in X,$$

où $P_K : X \rightarrow K$ est l'opérateur de projection sur l'ensemble K .

Pour tout $\mu > 0$, le problème pénalisé dans ce cas est le suivant.

Problème \mathcal{P}_μ^K . *Trouver un élément $u_\mu \in X$ tel que*

$$(2.54) \quad (Au_\mu, v - u_\mu)_X + \frac{1}{\mu} (u_\mu - P_K u_\mu, v - u_\mu)_X \\ + j(u_\mu, v) - j(u_\mu, u_\mu) \geq (f, v - u_\mu)_X \quad \forall v \in X.$$

En utilisant le Théorème 2.2 i), il résulte que, pour tout $\mu > 0$, le Problème \mathcal{P}_μ^K possède une solution unique $u_\mu \in X$. Nous nous intéressons par la suite au comportement de la solution de ce problème lorsque l'on introduit la perturbation de l'ensemble K donnée par (2.32). Pour ce faire, supposons que les conditions (2.2) (2.5) sont vérifiées et considérons G_ρ une perturbation de G définie par

$$(2.55) \quad G_\rho u = u - P_{K_\rho} u \quad \forall u \in X.$$

Ici $P_{K_\rho} : X \rightarrow K_\rho$ représente l'opérateur de projection sur l'ensemble K_ρ .

Ensuite, nous considérons la perturbation suivante du problème pénalisé \mathcal{P}_μ^K .

Problème $\mathcal{P}_\mu^{K_\rho}$. *Trouver un élément $u_{\mu\rho} \in X$ tel que*

$$(2.56) \quad (Au_{\mu\rho}, v_\rho - u_{\mu\rho})_X + \frac{1}{\mu} (u_{\mu\rho} - P_{K_\rho} u_{\mu\rho}, v_\rho - u_{\mu\rho})_X \\ + j(u_{\mu\rho}, v_\rho) - j(u_{\mu\rho}, u_{\mu\rho}) \geq (f, v_\rho - u_{\mu\rho})_X \quad \forall v_\rho \in X.$$

Nous déduisons du Théorème 2.2 i) que, pour tout $\rho > 0$, le Problème $\mathcal{P}_\mu^{K_\rho}$ possède une solution unique $u_{\mu\rho} \in X$.

Afin de prouver la convergence de la solution du Problème $\mathcal{P}_\mu^{K_\rho}$ vers la solution du Problème \mathcal{P}_μ^K lorsque $\rho \rightarrow 0$, nous avons besoin du résultat suivant.

Lemme 2.12. *Soit $\rho > 0$ et supposons que la condition (2.2) est vérifiée et, de plus, supposons que $c(\rho) > 0$. Alors, l'équivalence suivante est satisfaite :*

$$(2.57) \quad P_{K_\rho} u = c(\rho) P_K \left(\frac{u - d(\rho)\theta}{c(\rho)} \right) + d(\rho)\theta \quad \forall u \in X,$$

si et seulement si

$$(2.58) \quad K_\rho = c(\rho)K + d(\rho)\theta.$$

Démonstration. Soient $0 < \rho < \rho^*$ où ρ^* vérifie (2.42) et $u \in X$. Notons par f_ρ la projection de u sur K_ρ et utilisons (2.58) pour déduire qu'il existe un élément $f \in K$ tel que

$$(2.59) \quad f_\rho = c(\rho)f + d(\rho)\theta.$$

D'autre part, il résulte de la définition de la projection (voir Définition 1.6, page 18) que l'inégalité suivante est satisfaite :

$$(2.60) \quad \|f_\rho - u\|_X \leq \|v_\rho - u\|_X \quad \forall v_\rho \in K_\rho$$

et, par conséquent, nous utilisons l'égalité (2.59) pour obtenir que

$$(2.61) \quad \|c(\rho)f + d(\rho)\theta - u\|_X \leq \|v_\rho - u\|_X \quad \forall v_\rho \in K_\rho.$$

Soit v un élément arbitraire de K et notons $v_\rho = c(\rho)v + d(\rho)\theta$. En utilisant la définition (2.58), nous déduisons que $v_\rho \in K_\rho$ et, de ce fait, l'inégalité (2.61) devient

$$\|c(\rho)f + d(\rho)\theta - u\|_X \leq \|c(\rho)v + d(\rho)\theta - u\|_X.$$

Maintenant, en divisant les membres de cette inégalité par $c(\rho) > 0$, nous obtenons que

$$\left\| f - \left(\frac{u - d(\rho)\theta}{c(\rho)} \right) \right\|_X \leq \left\| v - \left(\frac{u - d(\rho)\theta}{c(\rho)} \right) \right\|_X.$$

Puisque v est un élément arbitraire de K , il en résulte que

$$(2.62) \quad P_K \left(\frac{u - d(\rho)\theta}{c(\rho)} \right) = f.$$

D'autre part, rappelons que $f_\rho = P_{K_\rho} u$ et, par conséquent, (2.59) implique que

$$(2.63) \quad f = \frac{P_{K_\rho} u - d(\rho)\theta}{c(\rho)}.$$

En combinant maintenant (2.62) et (2.63), nous déduisons que

$$P_{K_\rho} u = c(\rho)P_K \left(\frac{u - d(\rho)\theta}{c(\rho)} \right) + d(\rho)\theta.$$

Réciproquement, soit $u \in K$ et notons $v = c(\rho)u + d(\rho)\theta$. Nous en avons que $u = \frac{v - d(\rho)\theta}{c(\rho)} \in K$. En utilisant l'équivalence (1.10), nous trouvons que

$$(2.64) \quad P_K u = u = P_K \left(\frac{v - d(\rho)\theta}{c(\rho)} \right).$$

D'autre part, nous avons que

$$(2.65) \quad P_{K_\rho} v = c(\rho) P_K \left(\frac{v - d(\rho)\theta}{c(\rho)} \right) + d(\rho)\theta.$$

Maintenant, nous combinons (2.64) et (2.65) pour déduire que $v = c(\rho)u + d(\rho)\theta \in K_\rho$ et, par conséquent, nous concluons que

$$(2.66) \quad c(\rho)K + d(\rho)\theta \subset K_\rho.$$

Soit v un élément arbitraire de K_ρ . En utilisant (2.57) et (1.10), nous avons que

$$v = P_{K_\rho} v = c(\rho) P_K \left(\frac{v - d(\rho)\theta}{c(\rho)} \right) + d(\rho)\theta$$

et, par conséquent, puisque $P_K \left(\frac{v - d(\rho)\theta}{c(\rho)} \right) \in K$, nous déduisons que

$$(2.67) \quad K_\rho \subset c(\rho)K + d(\rho)\theta.$$

De (2.66) et (2.67), nous concluons que

$$K_\rho = c(\rho)K + d(\rho)\theta,$$

ce qui termine la démonstration du Lemme 2.12. □

Nous énonçons à présent le résultat principal de cette section.

Théorème 2.13. *Supposons que les conditions (2.3) (2.5), (2.32) et (2.35) sont vérifiées. Alors, pour tout $\mu > 0$, la solution du Problème $\mathcal{P}_\mu^{K_\rho}$ converge fortement dans l'espace X vers la solution du Problème \mathcal{P}_μ^K , i.e.,*

$$(2.68) \quad \|u_{\mu\rho} - u_\mu\|_X \rightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad \rho \rightarrow 0.$$

Démonstration. Soit $\mu > 0$. Nous prenons $v = u_{\mu\rho}$ dans (2.54) et $v_\rho = u_\mu$ dans (2.56) et nous additionnons les inégalités obtenues pour voir que

$$(2.69) \quad \begin{aligned} & (Au_{\mu\rho} - Au_\mu, u_{\mu\rho} - u_\mu)_X \\ & \leq \frac{1}{\mu} (u_\mu - P_K u_\mu, u_{\mu\rho} - u_\mu)_X + \frac{1}{\mu} (u_{\mu\rho} - P_{K_\rho} u_{\mu\rho}, u_\mu - u_{\mu\rho})_X \\ & \quad + j(u_\mu, u_{\mu\rho}) - j(u_\mu, u_\mu) + j(u_{\mu\rho}, u_\mu) - j(u_{\mu\rho}, u_{\mu\rho}). \end{aligned}$$

Nous cherchons à présent à évaluer les termes de cette inégalité. Tout d'abord, nous utilisons la condition (2.3)(a) pour voir que

$$(2.70) \quad (Au_{\mu\rho} - Au_\mu, u_{\mu\rho} - u_\mu)_X \geq m \|u_{\mu\rho} - u_\mu\|_X^2.$$

Par ailleurs, nous écrivons

$$\begin{aligned} & (u_\mu - P_K u_\mu) - (u_{\mu\rho} - P_{K_\rho} u_{\mu\rho}) \\ & = (u_\mu - P_K u_\mu) - (u_\mu - P_{K_\rho} u_\mu) + (u_\mu - P_{K_\rho} u_\mu) - (u_{\mu\rho} - P_{K_\rho} u_{\mu\rho}). \end{aligned}$$

Puis, en utilisant la monotonie de l'opérateur $v \mapsto v - P_{K_\rho} v$, nous trouvons que

$$\begin{aligned} & ((u_\mu - P_K u_\mu) - (u_{\mu\rho} - P_{K_\rho} u_{\mu\rho}), u_{\mu\rho} - u_\mu)_X \\ & \leq ((u_\mu - P_K u_\mu) - (u_\mu - P_{K_\rho} u_\mu), u_{\mu\rho} - u_\mu)_X \\ & = (P_{K_\rho} u_\mu - P_K u_\mu, u_{\mu\rho} - u_\mu)_X \end{aligned}$$

et, en multipliant cette inégalité par $\frac{1}{\mu}$, nous avons que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\mu} (u_\mu - P_K u_\mu, u_{\mu\rho} - u_\mu)_X + \frac{1}{\mu} (u_{\mu\rho} - P_{K_\rho} u_{\mu\rho}, u_\mu - u_{\mu\rho})_X \\ & \leq \frac{1}{\mu} (P_{K_\rho} u_\mu - P_K u_\mu, u_{\mu\rho} - u_\mu)_X. \end{aligned}$$

Ensuite, en utilisant cette inégalité avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous obtenons que

$$(2.71) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{\mu} (u_\mu - P_K u_\mu, u_{\mu\rho} - u_\mu)_X + \frac{1}{\mu} (u_{\mu\rho} - P_{K_\rho} u_{\mu\rho}, u_\mu - u_{\mu\rho})_X \\ & \leq \frac{1}{\mu} \|P_{K_\rho} u_\mu - P_K u_\mu\|_X \|u_{\mu\rho} - u_\mu\|_X. \end{aligned}$$

Nous combinons maintenant les inégalités (2.69) (2.71) pour trouver que

$$\begin{aligned} & m \|u_{\mu\rho} - u_\mu\|_X^2 \\ & \leq \frac{1}{\mu} \|P_{K_\rho} u_\mu - P_K u_\mu\|_X \|u_{\mu\rho} - u_\mu\|_X \\ & \quad + j(u_\mu, u_{\mu\rho}) - j(u_\mu, u_\mu) + j(u_{\mu\rho}, u_\mu) - j(u_{\mu\rho}, u_{\mu\rho}). \end{aligned}$$

En outre, en utilisant cette inégalité avec la condition (2.4)(b), nous obtenons que

$$(2.72) \quad (m - \alpha) \|u_{\mu\rho} - u_\mu\|_X \leq \frac{1}{\mu} \|P_{K_\rho} u_\mu - P_K u_\mu\|_X.$$

Enfin, nous combinons l'égalité (2.57) et la convergence (2.35) pour voir que

$$(2.73) \quad \|P_{K_\rho} u_\mu - P_K u_\mu\|_X \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } \rho \rightarrow 0.$$

La convergence (2.68) est une conséquence de l'inégalité (2.72) combinée avec la condition (2.5) et la convergence (2.73). \square

Chapitre 3

Inéquations quasivariationnelles avec opérateurs de mémoire

Dans ce chapitre, nous considérons une classe d'inéquations quasivariationnelles avec opérateurs de mémoire pour laquelle nous démontrons trois résultats de convergence. Ce chapitre est composé de quatre sections. Dans la première section, nous présentons le problème et nous précisons les hypothèses nécessaires sur les données afin d'énoncer un résultat d'existence et d'unicité de solution. Puis, dans la deuxième section, nous prouvons un premier résultat de convergence en utilisant la méthode de pénalisation. Ensuite, dans la troisième section, nous démontrons un deuxième résultat de convergence portant sur une perturbation de l'ensemble des contraintes. Enfin, la quatrième section est consacrée à un résultat de convergence pour un problème pénalisé. Les résultats présentés dans ce chapitre ont été inclus dans l'article [15]. Une version de ces résultats sera présentée dans le chapitre suivant en utilisant la notion de dualité. Par ailleurs, dans le Chapitre 10 nous illustrons ces résultats par un problème de contact pour des matériaux viscoplastiques.

3.1 Position du problème

Dans cette section, nous présentons le problème considéré ainsi qu'un résultat d'existence et d'unicité de la solution du problème. Soient X un espace de Hilbert muni du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_X$ et de la norme associée $\|\cdot\|_X$ et Z un espace vectoriel normé muni de la norme $\|\cdot\|_Z$.

Considérons un sous ensemble $K \subset X$, deux opérateurs $A : X \rightarrow X$ et $\mathcal{S} : C(\mathbb{R}_+; X) \rightarrow C(\mathbb{R}_+; Z)$, une fonctionnelle $j : Z \times X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ et une fonction $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$. Considérons également le problème suivant.

Problème \mathcal{P} . *Trouver une fonction $u : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ tel que l'inégalité suivante est satisfaite :*

$$(3.1) \quad \begin{aligned} u(t) \in K, \quad & (Au(t), v - u(t))_X + j(\mathcal{S}u(t), u(t), v) \\ & - j(\mathcal{S}u(t), u(t), u(t)) \geq (f(t), v - u(t))_X \quad \forall v \in K, \end{aligned}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

Dans l'étude du Problème \mathcal{P} nous supposons que

$$(3.2) \quad K \text{ est une partie convexe, fermée et non vide de } X.$$

De même, nous supposons que l'opérateur $A : X \rightarrow X$ est fortement monotone et de Lipschitz, c'est-à-dire

$$(3.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe } m > 0 \text{ tel que} \\ \quad (Au_1 - Au_2, u_1 - u_2)_X \geq m \|u_1 - u_2\|_X^2 \\ \quad \forall u_1, u_2 \in X. \\ \text{(b) Il existe } M > 0 \text{ tel que} \\ \quad \|Au_1 - Au_2\|_X \leq M \|u_1 - u_2\|_X \quad \forall u_1, u_2 \in X. \end{array} \right.$$

Par ailleurs, nous supposons que la fonctionnelle $j : Z \times X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ satisfait

$$(3.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Pour tout } z \in Z, u \in X, j(z, u, \cdot) : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ est convexe} \\ \quad \text{et semi-continue inférieurement.} \\ \text{(b) Il existe } \alpha \geq 0 \text{ et } \beta \geq 0 \text{ tels que} \\ \quad j(z_1, u_1, v_2) - j(z_1, u_1, v_1) + j(z_2, u_2, v_1) - j(z_2, u_2, v_2) \\ \quad \leq \alpha \|z_1 - z_2\|_Z \|v_1 - v_2\|_X + \beta \|u_1 - u_2\|_X \|v_1 - v_2\|_X \\ \quad \forall z_1, z_2 \in Z, \forall u_1, u_2, v_1, v_2 \in X. \end{array} \right.$$

En outre, nous supposons que $\mathcal{S} : C(\mathbb{R}_+; X) \rightarrow C(\mathbb{R}_+; Z)$ est un opérateur de mémoire, c'est-à-dire

$$(3.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ il existe } s_n > 0 \text{ tel que} \\ \| \mathcal{S}u_1(t) - \mathcal{S}u_2(t) \|_Z \leq s_n \int_0^t \| u_1(s) - u_2(s) \|_X ds \\ \forall u_1, u_2 \in C(\mathbb{R}_+; X), \forall t \in [0, n]. \end{array} \right.$$

Nous supposons également que la fonction f a la régularité

$$(3.6) \quad f \in C(\mathbb{R}_+; X).$$

Enfin, nous supposons la condition de petitesse suivante :

$$(3.7) \quad m > \beta.$$

Nous avons le résultat d'existence et d'unicité suivant.

Théorème 3.1. *Supposons que les conditions (3.2) (3.7) sont vérifiées. Alors, le Problème \mathcal{P} possède une solution unique vérifiant $u \in C(\mathbb{R}_+; K)$.*

La démonstration du Théorème 3.1 peut être trouvée dans [90]. Ce théorème sera utilisé dans le Chapitre 4 pour prouver l'existence et l'unicité de la solution pour une autre classe d'inéquations quasivariationnelles avec opérateurs de mémoire.

3.2 Méthode de pénalisation

Dans cette section, nous considérons une méthode de pénalisation similaire à celle utilisée dans la Section 2.2. Nous prouvons que la solution d'un problème pénalisé \mathcal{P}_μ converge vers la solution du Problème \mathcal{P} lorsque le paramètre de pénalisation μ tend vers zéro. Rappelons que l'opérateur de pénalisation $G : X \rightarrow X$ satisfait les conditions suivantes :

$$(3.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } (Gu - Gv, u - v)_X \geq 0 \quad \forall u, v \in X. \\ \text{(b) Il existe } L > 0 \text{ tel que} \\ \quad \|Gu - Gv\|_X \leq L \|u - v\|_X \quad \forall u, v \in X. \\ \text{(c) } (Gu, v - u)_X \leq 0 \quad \forall u \in X, v \in K. \\ \text{(d) } Gu = 0_X \text{ si et seulement si } u \in K. \end{array} \right.$$

Nous considérons le problème pénalisé ci-dessous.

Problème \mathcal{P}_μ . *Trouver une fonction $u_\mu : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ tel que*

$$(3.9) \quad u_\mu(t) \in X, \quad (Au_\mu(t), v - u_\mu(t))_X + \frac{1}{\mu} (Gu_\mu(t), v - u_\mu(t))_X \\ + j(\mathcal{S}u_\mu(t), u_\mu(t), v) - j(\mathcal{S}u_\mu(t), u_\mu(t), u_\mu(t)) \geq (f(t), v - u_\mu(t))_X \quad \forall v \in X,$$

pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

Nous énonçons à présent le théorème suivant, qui constitue le résultat principal de cette section.

Théorème 3.2. *Supposons que les hypothèses (3.2) (3.8) sont vérifiées. Alors :*

i) *Pour tout $\mu > 0$, le Problème \mathcal{P}_μ possède une solution unique vérifiant $u_\mu \in C(\mathbb{R}_+; X)$.*

ii) *La solution du Problème \mathcal{P}_μ converge vers la solution du Problème \mathcal{P} , i.e.,*

$$(3.10) \quad \|u_\mu(t) - u(t)\|_X \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } \mu \rightarrow 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

Pour démontrer le Théorème 3.2, nous allons procéder en plusieurs étapes. Dans tout ce qui suit, supposons que les conditions (3.2) (3.8) sont vérifiées. Nous présentons en premier lieu le résultat d'existence et d'unicité suivant.

Lemme 3.3. *Pour tout $\mu > 0$, le Problème \mathcal{P}_μ possède une solution unique satisfaisant $u_\mu \in C(\mathbb{R}_+; X)$.*

Démonstration. Soit $\mu > 0$. D'après le Lemme 2.3, nous avons que l'opérateur $v \mapsto Av + \frac{1}{\mu} Gv$ est fortement monotone et de Lipschitz. De ce fait, le résultat d'existence et d'unicité de la solution du Problème \mathcal{P}_μ est une conséquence directe du Théorème 3.1 avec $K = X$. \square

Pour tout $\mu > 0$, considérons le problème auxiliaire qui consiste à trouver une fonction $\tilde{u}_\mu : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, l'inégalité suivante est satisfaite :

$$(3.11) \quad \tilde{u}_\mu(t) \in X, \quad (A\tilde{u}_\mu(t), v - \tilde{u}_\mu(t))_X + \frac{1}{\mu} (G\tilde{u}_\mu(t), v - \tilde{u}_\mu(t))_X \\ + j(\mathcal{S}u(t), \tilde{u}_\mu(t), v) - j(\mathcal{S}u(t), \tilde{u}_\mu(t), \tilde{u}_\mu(t)) \geq (f(t), v - \tilde{u}_\mu(t))_X \quad \forall v \in X.$$

Ce problème est intermédiaire entre les problèmes \mathcal{P}_μ et \mathcal{P} car le terme $\mathcal{S}u$ est supposé être connu. Le résultat d'existence et d'unicité de la solution de ce problème est donné par le lemme suivant.

Lemme 3.4. *Pour tout $\mu > 0$ et $t \in \mathbb{R}_+$, l'inéquation variationnelle (3.11) admet une solution unique $\tilde{u}_\mu(t) \in X$.*

Démonstration. Nous utilisons le Théorème 2.1 avec $K = X$. Soient $\mu > 0$ et $t \in \mathbb{R}_+$. D'abord, rappelons que l'opérateur $A + \frac{1}{\mu}G : X \rightarrow X$ est fortement monotone et de Lipschitz, i.e., la condition (2.3) est satisfaite. Ensuite, considérons la fonctionnelle $\varphi_t : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$(3.12) \quad \varphi_t(v, w) = j(\mathcal{S}u(t), v, w) \quad \forall v, w \in X.$$

En utilisant les propriétés de la fonctionnelle j , il est facile de voir que la fonctionnelle φ_t satisfait la condition (2.4)(a). Par ailleurs, nous considérons les éléments $v_1, v_2, w_1, w_2 \in X$ et nous utilisons l'hypothèse (3.4)(b) pour obtenir que

$$\begin{aligned} & \varphi_t(v_1, w_2) - \varphi_t(v_1, w_1) + \varphi_t(v_2, w_1) - \varphi_t(v_2, w_2) \\ &= j(\mathcal{S}u(t), v_1, w_2) - j(\mathcal{S}u(t), v_1, w_1) + j(\mathcal{S}u(t), v_2, w_1) \\ & \quad - j(\mathcal{S}u(t), v_2, w_2) \leq \beta \|v_1 - v_2\|_X \|w_1 - w_2\|_X. \end{aligned}$$

Cette inégalité montre que la fonctionnelle φ_t satisfait la condition (2.4)(b). De ce fait, le Lemme 3.4 est une conséquence du Théorème 2.1 avec $K = X$. \square

Enonçons à présent le résultat de convergence suivant.

Lemme 3.5. *Si $\mu \rightarrow 0$,*

$$(3.13) \quad \tilde{u}_\mu(t) \rightarrow u(t) \quad \text{dans } X,$$

pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

Démonstration. Soit $t \in \mathbb{R}_+$. En utilisant le Théorème 2.2 ii) avec la fonctionnelle φ_t , définie par (3.12), nous déduisons qu'il existe un unique élément $\tilde{u}(t) \in K$ tel

que l'inégalité suivante est satisfaite :

$$(3.14) \quad (A\tilde{u}(t), v - \tilde{u}(t))_X + j(\mathcal{S}u(t), \tilde{u}(t), v) \\ - j(\mathcal{S}u(t), \tilde{u}(t), \tilde{u}(t)) \geq (f(t), v - \tilde{u}(t))_X \quad \forall v \in K.$$

De plus, la convergence suivante est vérifiée :

$$(3.15) \quad \tilde{u}_\mu(t) \rightarrow \tilde{u}(t) \quad \text{dans } X \quad \text{lorsque } \mu \rightarrow 0.$$

D'autre part, nous prenons $v = \tilde{u}(t)$ dans (3.1) et $v = u(t)$ dans (3.14), puis nous additionnons les inégalités obtenues afin de voir que

$$(A\tilde{u}(t) - Au(t), \tilde{u}(t) - u(t))_X \\ \leq j(\mathcal{S}u(t), \tilde{u}(t), u(t)) - j(\mathcal{S}u(t), \tilde{u}(t), \tilde{u}(t)) \\ + j(\mathcal{S}u(t), u(t), \tilde{u}(t)) - j(\mathcal{S}u(t), u(t), u(t)).$$

Maintenant, en utilisant cette inégalité avec les conditions (3.4)(b) et (3.3)(a), nous obtenons que

$$(m - \beta)\|\tilde{u}(t) - u(t)\|_X^2 \leq 0$$

et, par conséquent, la condition de petitesse (3.7) donne que

$$(3.16) \quad \tilde{u}(t) = u(t).$$

De (3.15) et (3.16), nous concluons la démonstration du Lemme 3.5. \square

Nous terminons avec la convergence suivante.

Lemme 3.6. *Si $\mu \rightarrow 0$,*

$$(3.17) \quad u_\mu(t) \rightarrow u(t) \quad \text{dans } X,$$

pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

Démonstration. Soient $\mu > 0$, $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, n]$. Nous prenons $v = u_\mu(t)$ dans (3.11) et $v = \tilde{u}_\mu(t)$ dans (3.9) et nous ajoutons membre à membre les inégalités

obtenues pour voir que

$$\begin{aligned} & (Au_\mu(t) - A\tilde{u}_\mu(t), u_\mu(t) - \tilde{u}_\mu(t))_X + \frac{1}{\mu} (Gu_\mu(t) - G\tilde{u}_\mu(t), u_\mu(t) - \tilde{u}_\mu(t))_X \\ & \leq j(\mathcal{S}u_\mu(t), u_\mu(t), \tilde{u}_\mu(t)) - j(\mathcal{S}u_\mu(t), u_\mu(t), u_\mu(t)) \\ & \quad + j(\mathcal{S}u(t), \tilde{u}_\mu(t), u_\mu(t)) - j(\mathcal{S}u(t), \tilde{u}_\mu(t), \tilde{u}_\mu(t)). \end{aligned}$$

Ensuite, en utilisant cette inégalité avec la condition (3.8)(a), il résulte que

$$\begin{aligned} & (Au_\mu(t) - A\tilde{u}_\mu(t), u_\mu(t) - \tilde{u}_\mu(t))_X \\ & \leq j(\mathcal{S}u_\mu(t), u_\mu(t), \tilde{u}_\mu(t)) - j(\mathcal{S}u_\mu(t), u_\mu(t), u_\mu(t)) \\ & \quad + j(\mathcal{S}u(t), \tilde{u}_\mu(t), u_\mu(t)) - j(\mathcal{S}u(t), \tilde{u}_\mu(t), \tilde{u}_\mu(t)). \end{aligned}$$

Nous combinons maintenant cette inégalité avec les conditions (3.3)(a) et (3.4)(b) pour obtenir que

$$(m - \beta)\|u_\mu(t) - \tilde{u}_\mu(t)\|_X \leq \alpha\|\mathcal{S}u_\mu(t) - \mathcal{S}u(t)\|_Z$$

puis, nous utilisons la condition de petitesse (3.7) et la condition (3.5) afin de voir que

$$\|u_\mu(t) - \tilde{u}_\mu(t)\|_X \leq \frac{\alpha s_n}{m - \beta} \int_0^t \|u_\mu(s) - u(s)\|_X ds.$$

Ensuite, nous combinons cette inégalité avec l'inégalité triangulaire

$$\|u_\mu(t) - u(t)\|_X \leq \|u_\mu(t) - \tilde{u}_\mu(t)\|_X + \|\tilde{u}_\mu(t) - u(t)\|_X$$

pour obtenir que

$$\|u_\mu(t) - u(t)\|_X \leq \|\tilde{u}_\mu(t) - u(t)\|_X + \frac{\alpha s_n}{m - \beta} \int_0^t \|u_\mu(s) - u(s)\|_X ds.$$

En utilisant le Lemme de Gronwall (Lemme 1.28, page 29), nous trouvons que

$$\begin{aligned} \|u_\mu(t) - u(t)\|_X & \leq e^{\frac{\alpha s_n}{m - \beta} t} \|\tilde{u}_\mu(t) - u(t)\|_X \\ & \leq e^{\frac{\alpha s_n}{m - \beta} n} \|\tilde{u}_\mu(t) - u(t)\|_X. \end{aligned}$$

Par conséquent, la convergence (3.13) implique que

$$(3.18) \quad \|u_\mu(t) - u(t)\|_X \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } \mu \rightarrow 0,$$

ce qui achève la démonstration du Lemme 3.6. □

3.3 Un résultat de convergence

Dans cette section, nous fournissons un résultat de convergence pour le Problème \mathcal{P} portant sur la perturbation (2.32) de l'ensemble K définie dans la Section 2.3. Pour rappel, nous considérons deux fonctions $c : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $d : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ et un élément $\theta \in X$ tels que, pour tout $\rho > 0$, la perturbation K_ρ est définie par

$$(3.19) \quad K_\rho = c(\rho)K + d(\rho)\theta.$$

En outre, les fonctions $c : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ et $d : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ qui satisfont les convergences

$$(3.20) \quad c(\rho) \rightarrow 1 \quad \text{et} \quad d(\rho) \rightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad \rho \rightarrow 0.$$

Considérons également la perturbation suivante du Problème \mathcal{P} .

Problème \mathcal{P}_ρ . *Trouver une fonction $u_\rho : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ tel que*

$$(3.21) \quad \begin{aligned} u_\rho(t) \in K_\rho, \quad & (Au_\rho(t), v_\rho - u_\rho(t))_X + j(\mathcal{S}u_\rho(t), u_\rho(t), v_\rho) \\ & - j(\mathcal{S}u_\rho(t), u_\rho(t), u_\rho(t)) \geq (f(t), v_\rho - u_\rho(t))_X \quad \forall v_\rho \in K_\rho, \end{aligned}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

Afin d'étudier le comportement de la solution du problème perturbé \mathcal{P}_ρ nous supposons que les conditions suivantes sont vérifiées.

$$(3.22) \quad 0_X \in K_\rho.$$

$$(3.23) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } j(z, u, \lambda v) = \lambda j(z, u, v) \quad \forall \lambda \geq 0, \quad z \in Z, \quad u, v \in X. \\ \text{(b) } j(0_Z, 0_X, v) = 0 \quad \forall v \in X. \\ \text{(c) Il existe une fonction } H : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ \text{ tel que} \\ \quad \text{(c}_1\text{) } |j(z, u, v_1) - j(z, u, v_2)| \leq H(\|z\|_Z + \|u\|_X) \|v_1 - v_2\|_X \\ \quad \quad \quad \forall z \in Z, u, v_1, v_2 \in X. \\ \quad \text{(c}_2\text{) Pour tout } \xi > 0, \text{ il existe } \gamma_\xi > 0 \text{ tel que} \\ \quad \quad \quad H(r) \leq \gamma_\xi, \quad \text{pour tout } 0 \leq r \leq \xi. \end{array} \right.$$

Le résultat principal de cette section est le théorème suivant.

Théorème 3.7. *Supposons que les hypothèses (3.2) (3.7) et (3.19) sont vérifiées.*

Alors :

i) *Pour tout $\rho > 0$, le Problème \mathcal{P}_ρ possède une solution unique qui satisfait $u_\rho \in C(\mathbb{R}_+; K_\rho)$.*

ii) *De plus, si les hypothèses (3.20), (3.22) (3.23) sont vérifiées, alors la solution u_ρ du Problème \mathcal{P}_ρ converge vers la solution u du Problème \mathcal{P} , i.e.,*

$$(3.24) \quad u_\rho \rightarrow u \quad \text{dans} \quad C(\mathbb{R}_+; X) \quad \text{lorsque} \quad \rho \rightarrow 0.$$

La démonstration du Théorème 3.7 est basée sur le résultat suivant.

Lemme 3.8. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $w_n > 0$ tel que*

$$(3.25) \quad \|u_\rho(t)\|_X \leq w_n \quad \text{et} \quad \|u(t)\|_X \leq w_n \quad \forall t \in [0, n], \quad \rho > 0.$$

Démonstration. Soient $n \in \mathbb{N}$, $t \in [0, n]$ et $\rho > 0$. Nous prenons $v_\rho = 0_X \in K_\rho$ dans (3.21) pour voir que

$$(Au_\rho(t), u_\rho(t))_X \leq j(\mathcal{S}u_\rho(t), u_\rho(t), 0_X) - j(\mathcal{S}u_\rho(t), u_\rho(t), u_\rho(t)) + (f(t), u_\rho(t))_X.$$

Puis, en utilisant la condition (3.23)(a), nous obtenons que

$$\begin{aligned} (Au_\rho(t) - A0_X, u_\rho(t))_X \\ \leq (f(t), u_\rho(t))_X - j(\mathcal{S}u_\rho(t), u_\rho(t), u_\rho(t)) - (A0_X, u_\rho(t))_X. \end{aligned}$$

D'après la condition (3.3)(a), il résulte que

$$(3.26) \quad m \|u_\rho(t)\|_X^2 \leq (\|A0_X\|_X + \|f(t)\|_X) \|u_\rho(t)\|_X - j(\mathcal{S}u_\rho(t), u_\rho(t), u_\rho(t)).$$

Par ailleurs, nous écrivons

$$\begin{aligned} -j(\mathcal{S}u_\rho(t), u_\rho(t), u_\rho(t)) &= j(\mathcal{S}u_\rho(t), u_\rho(t), 0_X) \\ &\quad - j(\mathcal{S}u_\rho(t), u_\rho(t), u_\rho(t)) + j(0_Z, 0_X, u_\rho(t)) - j(0_Z, 0_X, 0_X) \end{aligned}$$

et nous utilisons la condition (3.4)(b) pour obtenir que

$$(3.27) \quad -j(\mathcal{S}u_\rho(t), u_\rho(t), u_\rho(t)) \leq \alpha \|\mathcal{S}u_\rho(t)\|_Z \|u_\rho(t)\|_X + \beta \|u_\rho(t)\|_X^2.$$

Combinons maintenant les inégalités (3.26) et (3.27) pour voir que

$$(m - \beta) \|u_\rho(t)\|_X \leq \left(\|A0_X\|_X + \max_{t \in [0, n]} (\|f(t)\|_X) + \alpha \|\mathcal{S}u_\rho(t)\|_Z \right)$$

et, par conséquent, la condition de petitesse (3.7) implique que

$$(3.28) \quad \|u_\rho(t)\|_X \leq \frac{1}{m - \beta} \left(\|A0_X\|_X + \max_{t \in [0, n]} (\|f(t)\|_X) + \alpha \|\mathcal{S}u_\rho(t)\|_Z \right).$$

D'autre part, nous utilisons la condition (3.5) pour voir que

$$(3.29) \quad \begin{aligned} \|\mathcal{S}u_\rho(t)\|_Z &= \|\mathcal{S}u_\rho(t) - \mathcal{S}0_X + \mathcal{S}0_X\|_Z \\ &\leq \|\mathcal{S}u_\rho(t) - \mathcal{S}0_X\|_Z + \|\mathcal{S}0_X\|_Z \\ &\leq s_n \int_0^t \|u_\rho(s)\|_X ds + \|\mathcal{S}0_X\|_Z. \end{aligned}$$

Nous combinons maintenant les inégalités (3.28) et (3.29) pour déduire qu'il existe une constante $\lambda_n > 0$, indépendante de ρ , telle que

$$\|u_\rho(t)\|_X \leq \lambda_n + \frac{\alpha s_n}{m - \beta} \int_0^t \|u_\rho(s)\|_X ds \quad \forall t \in [0, n].$$

Ensuite, nous utilisons le Lemme de Gronwall afin d'obtenir que

$$(3.30) \quad \|u_\rho(t)\|_X \leq \lambda_n e^{\frac{t\alpha s_n}{m-\beta}} \leq \lambda_n e^{\frac{n\alpha s_n}{m-\beta}}.$$

Posons

$$w_n = \max \left\{ \lambda_n e^{\frac{n\alpha s_n}{m-\beta}}, \max_{t \in [0, n]} \|u(t)\|_X \right\}.$$

Par conséquent, nous en déduisons que

$$\|u_\rho(t)\|_X \leq w_n \quad \text{et} \quad \|u(t)\|_X \leq w_n,$$

ce qui achève la démonstration du Lemme 3.8. □

Nous passons maintenant à la démonstration du Théorème 3.7.

Démonstration. i) Soit $\rho > 0$. D'après le Théorème 2.11 i), nous avons que l'ensemble K_ρ est convexe, fermé et non vide de X . Donc, en utilisant le Théorème

3.1 avec $K = K_\rho$, nous déduisons que le Problème \mathcal{P}_ρ admet une solution unique qui satisfait $u_\rho \in C(\mathbb{R}_+; K_\rho)$.

ii) Soient $0 < \rho < \rho^*$ où ρ^* vérifie (2.42), $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, n]$. En utilisant la condition (3.19), nous avons que

$$\tilde{v}(t) = \frac{u_\rho(t) - d(\rho)\theta}{c(\rho)} \in K.$$

Nous prenons $v = \tilde{v}(t)$ dans (3.1), nous multiplions l'inégalité obtenue par $c(\rho) > 0$ et nous utilisons la condition (3.23)(a) pour obtenir que

$$(3.31) \quad (Au(t), u_\rho(t) - d(\rho)\theta - c(\rho)u(t))_X + j(\mathcal{S}u(t), u(t), u_\rho(t) - d(\rho)\theta) \\ - j(\mathcal{S}u(t), u(t), c(\rho)u(t)) \geq (f(t), u_\rho(t) - d(\rho)\theta - c(\rho)u(t))_X.$$

D'autre part, nous prenons $v_\rho = c(\rho)u(t) + d(\rho)\theta \in K_\rho$ dans (3.21) pour voir que

$$(3.32) \quad (Au_\rho(t), c(\rho)u(t) + d(\rho)\theta - u_\rho(t))_X + j(\mathcal{S}u_\rho(t), u_\rho(t), c(\rho)u(t) + d(\rho)\theta) \\ - j(\mathcal{S}u_\rho(t), u_\rho(t), u_\rho(t)) \geq (f(t), c(\rho)u(t) + d(\rho)\theta - u_\rho(t))_X.$$

Ensuite, nous additionnons les inégalités (3.31) et (3.32) pour obtenir

$$(3.33) \quad (Au_\rho(t) - Au(t), u_\rho(t) - u(t))_X \\ \leq (Au(t) - Au_\rho(t), (1 - c(\rho))u(t) - d(\rho)\theta)_X \\ + j(\mathcal{S}u(t), u(t), u_\rho(t) - d(\rho)\theta) - j(\mathcal{S}u(t), u(t), c(\rho)u(t)) \\ + j(\mathcal{S}u_\rho(t), u_\rho(t), c(\rho)u(t) + d(\rho)\theta) - j(\mathcal{S}u_\rho(t), u_\rho(t), u_\rho(t)).$$

Nous estimons à présent chaque terme dans l'inégalité (3.33). D'abord, nous écrivons

$$j(\mathcal{S}u(t), u(t), u_\rho(t) - d(\rho)\theta) - j(\mathcal{S}u(t), u(t), c(\rho)u(t)) \\ + j(\mathcal{S}u_\rho(t), u_\rho(t), c(\rho)u(t) + d(\rho)\theta) - j(\mathcal{S}u_\rho(t), u_\rho(t), u_\rho(t)) \\ = j(\mathcal{S}u_\rho(t), u_\rho(t), c(\rho)u(t) + d(\rho)\theta) - j(\mathcal{S}u_\rho(t), u_\rho(t), u_\rho(t) - d(\rho)\theta) \\ + j(\mathcal{S}u(t), u(t), u_\rho(t) - d(\rho)\theta) - j(\mathcal{S}u(t), u(t), c(\rho)u(t) + d(\rho)\theta) \\ + j(\mathcal{S}u(t), u(t), c(\rho)u(t) + d(\rho)\theta) - j(\mathcal{S}u(t), u(t), c(\rho)u(t)) \\ + j(\mathcal{S}u_\rho(t), u_\rho(t), u_\rho(t) - d(\rho)\theta) - j(\mathcal{S}u_\rho(t), u_\rho(t), u_\rho(t)).$$

Puis, en utilisant cette inégalité et les conditions (3.4)(b), (3.23)(c₁), nous obtenons

$$\begin{aligned}
 & j(\mathcal{S}u(t), u(t), u_\rho(t) - d(\rho)\theta) - j(\mathcal{S}u(t), u(t), c(\rho)u(t)) \\
 & + j(\mathcal{S}u_\rho(t), u_\rho(t), c(\rho)u(t) + d(\rho)\theta) - j(\mathcal{S}u_\rho(t), u_\rho(t), u_\rho(t)) \\
 & \leq \alpha \|\mathcal{S}u(t) - \mathcal{S}u_\rho(t)\|_Z \|c(\rho)u(t) - u_\rho(t) + 2d(\rho)\theta\|_X \\
 & + \beta \|u(t) - u_\rho(t)\|_X \|c(\rho)u(t) - u_\rho(t) + 2d(\rho)\theta\|_X \\
 & + |d(\rho)| \|\theta\|_X (H(\|u(t)\|_X + \|\mathcal{S}u(t)\|_Z) + H(\|u_\rho(t)\|_X + \|\mathcal{S}u_\rho(t)\|_Z)).
 \end{aligned}$$

Ensuite, nous écrivons

$$c(\rho)u(t) - u_\rho(t) + 2d(\rho)\theta = u(t) - u_\rho(t) + (c(\rho) - 1)u(t) + 2d(\rho)\theta$$

pour obtenir que

$$\begin{aligned}
 (3.34) \quad & j(\mathcal{S}u(t), u(t), u_\rho(t) - d(\rho)\theta) - j(\mathcal{S}u(t), u(t), c(\rho)u(t)) \\
 & + j(\mathcal{S}u_\rho(t), u_\rho(t), c(\rho)u(t) + d(\rho)\theta) - j(\mathcal{S}u_\rho(t), u_\rho(t), u_\rho(t)) \\
 & \leq \alpha \|\mathcal{S}u(t) - \mathcal{S}u_\rho(t)\|_Z \|u(t) - u_\rho(t)\|_X \\
 & + \alpha \|\mathcal{S}u(t) - \mathcal{S}u_\rho(t)\|_Z (|c(\rho) - 1| \|u(t)\|_X + 2|d(\rho)| \|\theta\|_X) \\
 & + \beta \|u(t) - u_\rho(t)\|_X^2 + \beta \|u(t) - u_\rho(t)\|_X (|c(\rho) - 1| \|u(t)\|_X + 2|d(\rho)| \|\theta\|_X) \\
 & + |d(\rho)| \|\theta\|_X (H(\|u(t)\|_X + \|\mathcal{S}u(t)\|_Z) + H(\|u_\rho(t)\|_X + \|\mathcal{S}u_\rho(t)\|_Z)).
 \end{aligned}$$

D'autre part, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la propriété (3.3)(b), nous obtenons que

$$\begin{aligned}
 (3.35) \quad & (Au(t) - Au_\rho(t), (1 - c(\rho))u(t) - d(\rho)\theta)_X \\
 & \leq M(|1 - c(\rho)| \|u(t)\|_X + |d(\rho)| \|\theta\|_X) \|u(t) - u_\rho(t)\|_X.
 \end{aligned}$$

Combinons maintenant (3.33) (3.35) et utilisons la condition (3.3)(a) pour trouver

que

$$\begin{aligned}
 (3.36) \quad & (m - \beta) \|u_\rho(t) - u(t)\|_X^2 \\
 & \leq \left(M(|c(\rho) - 1| \|u(t)\|_X + |d(\rho)| \|\theta\|_X) + \alpha \|\mathcal{S}u(t) - \mathcal{S}u_\rho(t)\|_Z \right. \\
 & \quad \left. + \beta(|c(\rho) - 1| \|u(t)\|_X + 2|d(\rho)| \|\theta\|_X) \right) \|u(t) - u_\rho(t)\|_X \\
 & \quad + \alpha \|\mathcal{S}u(t) - \mathcal{S}u_\rho(t)\|_Z \left(|c(\rho) - 1| \|u(t)\|_X + 2|d(\rho)| \|\theta\|_X \right) \\
 & \quad + |d(\rho)| \|\theta\|_X \left(H(\|u(t)\|_X + \|\mathcal{S}u(t)\|_Z) + H(\|u_\rho(t)\|_X + \|\mathcal{S}u_\rho(t)\|_Z) \right).
 \end{aligned}$$

La condition (3.5) combinée avec (3.25) implique que

$$\begin{aligned}
 \|\mathcal{S}u(t)\|_Z & \leq \|\mathcal{S}u(t) - \mathcal{S}0_X\|_Z + \|\mathcal{S}0_X\|_Z \\
 & \leq s_n \int_0^t \|u(s)\|_X ds + \|\mathcal{S}0_X\|_Z \leq n w_n s_n + \|\mathcal{S}0_X\|_Z
 \end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$(3.37) \quad \|u(t)\|_X + \|\mathcal{S}u(t)\|_Z \leq w_n(1 + n s_n) + \|\mathcal{S}0_X\|_Z.$$

Nous utilisons des arguments similaires pour déduire que

$$(3.38) \quad \|u_\rho(t)\|_X + \|\mathcal{S}u_\rho(t)\|_Z \leq w_n(1 + n s_n) + \|\mathcal{S}0_X\|_Z.$$

En outre, en utilisant la condition (3.5), nous avons que

$$\begin{aligned}
 \|\mathcal{S}u(t) - \mathcal{S}u_\rho(t)\|_Z & \leq s_n \int_0^t \|u(s) - u_\rho(s)\|_X ds \\
 & \leq s_n \int_0^t \|u(s)\|_X ds + s_n \int_0^t \|u_\rho(s)\|_X ds.
 \end{aligned}$$

Par conséquent, (3.25) entraîne que

$$(3.39) \quad \|\mathcal{S}u(t) - \mathcal{S}u_\rho(t)\|_Z \leq 2n w_n s_n.$$

En posant

$$\xi_n = \max \{w_n(1 + n s_n) + \|\mathcal{S}0_X\|_Z, 2n w_n s_n\} \quad \text{et} \quad \gamma_n = \gamma_{\xi_n}.$$

Alors, les inégalités (3.37)–(3.39) combinées avec la condition (3.23)(c₂) impliquent que

$$\begin{aligned} H(\|u(t)\|_X + \|\mathcal{S}u(t)\|_Z) &\leq \gamma_n, \\ H(\|u_\rho(t)\|_X + \|\mathcal{S}u_\rho(t)\|_Z) &\leq \gamma_n, \\ \|\mathcal{S}u(t) - \mathcal{S}u_\rho(t)\|_Z &\leq \xi_n. \end{aligned}$$

En utilisant maintenant ces inégalités et (3.25) dans l'inégalité (3.36), nous trouvons

$$\begin{aligned} (3.40) \quad (m - \beta)\|u_\rho(t) - u(t)\|_X^2 &\leq \left(M(|c(\rho) - 1| w_n + |d(\rho)| \|\theta\|_X) + \alpha\|\mathcal{S}u(t) - \mathcal{S}u_\rho(t)\|_Z \right. \\ &\quad \left. + \beta(|c(\rho) - 1| w_n + 2|d(\rho)| \|\theta\|_X) \right) \|u(t) - u_\rho(t)\|_X \\ &\quad + \alpha \xi_n \left(|c(\rho) - 1| w_n + 2|d(\rho)| \|\theta\|_X \right) + 2\gamma_n |d(\rho)| \|\theta\|_X. \end{aligned}$$

Cette inégalité combinée avec l'hypothèse (3.7) et l'inégalité élémentaire

$$x, a, b \geq 0 \quad \text{and} \quad x^2 \leq ax + b \implies x \leq a + \sqrt{b}$$

implique que

$$\begin{aligned} (3.41) \quad \|u_\rho(t) - u(t)\|_X &\leq \frac{1}{m - \beta} \left(M(|c(\rho) - 1| w_n + |d(\rho)| \|\theta\|_X) + \beta(|c(\rho) - 1| w_n + 2|d(\rho)| \|\theta\|_X) \right) \\ &\quad + \sqrt{\frac{1}{m - \beta} \left(\alpha \xi_n (|c(\rho) - 1| w_n + 2|d(\rho)| \|\theta\|_X) + 2\gamma_n |d(\rho)| \|\theta\|_X \right)} \\ &\quad + \frac{\alpha}{m - \beta} \|\mathcal{S}u(t) - \mathcal{S}u_\rho(t)\|_Z. \end{aligned}$$

Maintenant, nous notons

$$\begin{aligned} (3.42) \quad B_n(\rho) &= \frac{1}{m - \beta} \left(M(|c(\rho) - 1| w_n + |d(\rho)| \|\theta\|_X) + \beta(|c(\rho) - 1| w_n + 2|d(\rho)| \|\theta\|_X) \right) \\ &\quad + \sqrt{\frac{1}{m - \beta} \left(\alpha \xi_n (|c(\rho) - 1| w_n + 2|d(\rho)| \|\theta\|_X) + 2\gamma_n |d(\rho)| \|\theta\|_X \right)} \end{aligned}$$

et nous utilisons la condition (3.5) dans (3.41) afin de déduire que

$$\|u_\rho(t) - u(t)\|_X \leq B_n(\rho) + \frac{s_n \alpha}{m - \beta} \int_0^t \|u_\rho(s) - u(s)\|_X ds.$$

Par conséquent, le Lemme de Gronwall donne que

$$(3.43) \quad \|u_\rho(t) - u(t)\|_X \leq B_n(\rho) e^{\frac{s_n \alpha}{m - \beta} t},$$

ce qui implique que

$$(3.44) \quad \max_{t \in [0, n]} (\|u_\rho(t) - u(t)\|_X) \leq B_n(\rho) e^{\frac{ns_n \alpha}{m - \beta}}.$$

En outre, nous utilisons la notation (3.42) avec la condition (3.20) pour obtenir que

$$B_n(\rho) \rightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad \rho \rightarrow 0$$

et, de ce fait, nous combinons cette convergence avec l'inégalité (3.44) pour déduire

$$u_\rho \rightarrow u \quad \text{dans} \quad C(\mathbb{R}_+; X) \quad \text{lorsque} \quad \rho \rightarrow 0,$$

ce qui termine la démonstration du Théorème 3.7. □

3.4 Un résultat de convergence pour le problème pénalisé

Dans cette section, nous complétons l'étude du problème pénalisé \mathcal{P}_μ en considérant la perturbation (3.19) de l'ensemble K . Nous supposons que l'opérateur de pénalisation G est donné sous la forme

$$(3.45) \quad Gu = u - P_K u \quad \forall u \in X,$$

où $P_K : X \rightarrow K$ est l'opérateur de projection sur l'ensemble K .

Pour tout $\mu > 0$, le problème pénalisé est le suivant.

Problème \mathcal{P}_μ^K . *Trouver une fonction $u_\mu : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ tel que*

$$(3.46) \quad u_\mu(t) \in X, \quad (Au_\mu(t), v - u_\mu(t))_X + \frac{1}{\mu} (u_\mu(t) - P_K u_\mu(t), v - u_\mu(t))_X \\ + j(\mathcal{S}u_\mu(t), u_\mu(t), v) - j(\mathcal{S}u_\mu(t), u_\mu(t), u_\mu(t)) \geq (f(t), v - u_\mu(t))_X \quad \forall v \in X,$$

pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

Le Théorème 3.2 i) assure l'existence et l'unicité de la solution du Problème \mathcal{P}_μ^K vérifiant $u_\mu \in C(\mathbb{R}_+; X)$. Par ailleurs, afin d'étudier le comportement de la solution de ce problème lorsque l'on introduit la perturbation (3.19) de l'ensemble K nous considérons, pour tout $\rho > 0$, la perturbation G_ρ de l'opérateur G satisfaisant la condition (2.6), et donnée par

$$(3.47) \quad G_\rho u = u - P_{K_\rho} u \quad \text{pour tout } u \in X.$$

Considérons également la perturbation suivante du Problème \mathcal{P}_μ^K .

Problème $\mathcal{P}_\mu^{K_\rho}$. *Trouver une fonction $u_{\mu\rho} : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ tel que*

$$(3.48) \quad u_{\mu\rho}(t) \in X, \quad (Au_{\mu\rho}(t), v - u_{\mu\rho}(t))_X + \frac{1}{\mu} (u_{\mu\rho}(t) - P_{K_\rho} u_{\mu\rho}(t), v - u_{\mu\rho}(t))_X \\ + j(\mathcal{S}u_{\mu\rho}(t), u_{\mu\rho}(t), v) - j(\mathcal{S}u_{\mu\rho}(t), u_{\mu\rho}(t), u_{\mu\rho}(t)) \\ \geq (f(t), v - u_{\mu\rho}(t))_X \quad \forall v \in X,$$

pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

Nous avons le théorème de convergence suivant, qui représente le résultat principal de cette section.

Théorème 3.9. *Supposons que les conditions (3.2) (3.7) et (3.19) (3.20) sont satisfaites. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\mu > 0$, la convergence suivante est vérifiée :*

$$(3.49) \quad \|u_{\mu\rho}(t) - u_\mu(t)\|_X \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } \rho \rightarrow 0.$$

La démonstration du Théorème 3.9 sera réalisée en deux étapes. Elle est basée sur les résultats présentés dans la Section 2.4. En première étape nous considérons le problème intermédiaire qui consiste à trouver une fonction $\tilde{u}_{\mu\rho} : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, l'inégalité suivante est satisfaite :

$$(3.50) \quad (A\tilde{u}_{\mu\rho}(t), v - \tilde{u}_{\mu\rho}(t))_X + \frac{1}{\mu} (\tilde{u}_{\mu\rho}(t) - P_{K_\rho} \tilde{u}_{\mu\rho}(t), v - \tilde{u}_{\mu\rho}(t))_X \\ + j(\mathcal{S}u_\mu(t), \tilde{u}_{\mu\rho}(t), v) - j(\mathcal{S}u_\mu(t), \tilde{u}_{\mu\rho}(t), \tilde{u}_{\mu\rho}(t)) \\ \geq (f(t), v - \tilde{u}_{\mu\rho}(t))_X \quad \forall v \in X.$$

Nous effectuons maintenant des estimations à priori sur la solution de ce problème, qui implique la convergence forte suivante.

Lemme 3.10. *Si $\rho \rightarrow 0$,*

$$(3.51) \quad \tilde{u}_{\mu\rho}(t) \rightarrow u_\mu(t) \quad \text{dans } X,$$

pour tout $\mu > 0$ et $t \in \mathbb{R}_+$.

Démonstration. Soient $\mu > 0$ et $t \in \mathbb{R}_+$. D'après le Théorème 2.13, nous déduisons que

$$(3.52) \quad \tilde{u}_{\mu\rho}(t) \rightarrow \tilde{u}_\mu(t) \quad \text{dans } X \quad \text{lorsque } \rho \rightarrow 0,$$

où la fonction $\tilde{u}_\mu : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ est la solution de l'inéquation suivante :

$$(3.53) \quad \begin{aligned} (A\tilde{u}_\mu(t), v - \tilde{u}_\mu(t))_X + \frac{1}{\mu} (\tilde{u}_\mu(t) - P_K \tilde{u}_\mu(t), v - \tilde{u}_\mu(t))_X \\ + j(\mathcal{S}u_\mu(t), \tilde{u}_\mu(t), v) - j(\mathcal{S}u_\mu(t), \tilde{u}_\mu(t), \tilde{u}_\mu(t)) \\ \geq (f(t), v - \tilde{u}_\mu(t))_X \quad \forall v \in X. \end{aligned}$$

D'autre part, nous prenons $v = \tilde{u}_\mu(t)$ dans (3.46) et $v = u_\mu(t)$ dans (3.53), puis nous additionnons les inégalités obtenues et nous utilisons la monotonie de l'opérateur $I - P_K$ pour trouver que

$$\begin{aligned} (A\tilde{u}_\mu(t) - Au_\mu(t), \tilde{u}_\mu(t) - u_\mu(t))_X \\ \leq j(\mathcal{S}u_\mu(t), \tilde{u}_\mu(t), u_\mu(t)) - j(\mathcal{S}u_\mu(t), \tilde{u}_\mu(t), \tilde{u}_\mu(t)) \\ + j(\mathcal{S}u_\mu(t), u_\mu(t), \tilde{u}_\mu(t)) - j(\mathcal{S}u_\mu(t), u_\mu(t), u_\mu(t)). \end{aligned}$$

Ensuite, en utilisant cette inégalité avec les conditions (3.3)(a) et (3.4)(b), nous obtenons que

$$(m - \beta) \|\tilde{u}_\mu(t) - u_\mu(t)\|_X^2 \leq 0.$$

et, de ce fait, nous déduisons de la condition de petitesse (3.7) que

$$\tilde{u}_\mu(t) = u_\mu(t).$$

Nous concluons de cette égalité et la convergence (3.52) que la convergence (3.51) est satisfaite, ce qui termine la démonstration du Lemme 3.10. \square

Nous énonçons à présent le résultat de convergence forte suivant.

Lemme 3.11. *Si $\rho \rightarrow 0$,*

$$(3.54) \quad u_{\mu\rho}(t) \rightarrow u_{\mu}(t) \quad \text{dans } X,$$

pour tout $\mu > 0$ et $t \in \mathbb{R}_+$.

Démonstration. Soient $\mu > 0$, $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, n]$. Nous prenons $v = u_{\mu\rho}(t)$ dans (3.50) et $v = \tilde{u}_{\mu\rho}(t)$ dans (3.48), nous additionnons les inégalités obtenues et nous utilisons la monotonie de l'opérateur $I - P_{K_\rho}$ afin d'obtenir que

$$\begin{aligned} & (Au_{\mu\rho}(t) - A\tilde{u}_{\mu\rho}(t), u_{\mu\rho}(t) - \tilde{u}_{\mu\rho}(t))_X \\ & \leq j(\mathcal{S}u_{\mu\rho}(t), u_{\mu\rho}(t), \tilde{u}_{\mu\rho}(t)) - j(\mathcal{S}u_{\mu\rho}(t), u_{\mu\rho}(t), u_{\mu\rho}(t)) \\ & \quad + j(\mathcal{S}u_{\mu}(t), \tilde{u}_{\mu\rho}(t), u_{\mu\rho}(t)) - j(\mathcal{S}u_{\mu}(t), \tilde{u}_{\mu\rho}(t), \tilde{u}_{\mu\rho}(t)). \end{aligned}$$

En utilisant cette inégalité avec les conditions (3.3)(a), (3.4)(b) et (3.7), nous déduisons que

$$(3.55) \quad \|u_{\mu\rho}(t) - \tilde{u}_{\mu\rho}(t)\|_X \leq \frac{\alpha}{m - \beta} \|\mathcal{S}u_{\mu\rho}(t) - \mathcal{S}u_{\mu}(t)\|_Z.$$

Puis, nous combinons cette inégalité avec la condition (3.5) pour trouver que

$$\|u_{\mu\rho}(t) - \tilde{u}_{\mu\rho}(t)\|_X \leq \frac{\alpha s_n}{m - \beta} \int_0^t \|u_{\mu\rho}(s) - u_{\mu}(s)\|_X ds.$$

Ensuite, nous utilisons cette inégalité et l'inégalité triangulaire

$$\|u_{\mu\rho}(t) - u_{\mu}(t)\|_X \leq \|u_{\mu\rho}(t) - \tilde{u}_{\mu\rho}(t)\|_X + \|\tilde{u}_{\mu\rho}(t) - u_{\mu}(t)\|_X$$

pour obtenir que

$$\|u_{\mu\rho}(t) - u_{\mu}(t)\|_X \leq \|\tilde{u}_{\mu\rho}(t) - u_{\mu}(t)\|_X + \frac{\alpha s_n}{m - \beta} \int_0^t \|u_{\mu\rho}(s) - u_{\mu}(s)\|_X ds.$$

Nous utilisons maintenant le Lemme de Gronwall pour obtenir que

$$\begin{aligned}\|u_{\mu\rho}(t) - u_{\mu}(t)\|_X &\leq e^{\frac{\alpha s_n}{m-\beta}t} \|\tilde{u}_{\mu\rho}(t) - u_{\mu}(t)\|_X \\ &\leq e^{\frac{\alpha s_n}{m-\beta}n} \|\tilde{u}_{\mu\rho}(t) - u_{\mu}(t)\|_X.\end{aligned}$$

Enfin, nous combinons cette inégalité avec la convergence (3.51) pour déduire que

$$\|u_{\mu\rho}(t) - u_{\mu}(t)\|_X \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } \rho \rightarrow 0,$$

ce qui conclut la démonstration du Lemme 3.11. □

Nous passons maintenant à la démonstration du Théorème 3.9.

Démonstration. Le Théorème 3.9 est une conséquence directe du Lemme 3.11. □

Chapitre 4

Inéquations quasivariationnelles duales avec opérateurs de mémoire

Dans ce chapitre, nous nous proposons de prolonger les résultats présentés dans le Chapitre 3 pour une autre classe d'inéquations quasivariationnelles avec opérateurs de mémoire. Ce chapitre est composé de quatre sections. Dans la première section, nous présentons le problème et nous précisons les hypothèses nécessaires sur les données pour énoncer un résultat d'existence et d'unicité de solution. Dans la deuxième section, nous démontrons un résultat de convergence portant sur une perturbation de l'ensemble des contraintes. La troisième section est consacrée à une formulation duale pour laquelle nous prouvons l'existence et l'unicité de la solution et nous établissons l'équivalence entre les deux formulations du problème. Dans la quatrième section, nous étudions la dépendance de la solution du problème dual par rapport à une perturbation de l'ensemble des contraintes afin d'établir un résultat de convergence. Les résultats présentés dans ce chapitre font l'objet de l'article [80]. Par ailleurs, dans le Chapitre 11 nous illustrons ces résultats dans l'étude d'un problème de contact sans frottement pour des matériaux viscoélastiques.

4.1 Position du problème

Dans cette section, nous présentons le problème ainsi que les hypothèses sur les données, ensuite nous énonçons un résultat d'existence et d'unicité de solution.

Soit $(X, (\cdot, \cdot)_X)$ un espace de Hilbert réel muni de la norme $\|\cdot\|_X$. Considérons l'ensemble $K \subset X$, les opérateurs $A : X \rightarrow X$ et $\mathcal{S} : C(\mathbb{R}_+; X) \rightarrow C(\mathbb{R}_+; X)$ ainsi que la fonction $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ tels que

$$(4.1) \quad K \text{ est une partie convexe, fermée et non vide de } X.$$

L'opérateur $A : X \rightarrow X$ est fortement monotone et de Lipschitz, c'est-à-dire

$$(4.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe } m > 0 \text{ tel que} \\ \quad (Au_1 - Au_2, u_1 - u_2)_X \geq m \|u_1 - u_2\|_X^2 \\ \quad \quad \forall u_1, u_2 \in X. \\ \text{(b) Il existe } M > 0 \text{ tel que} \\ \quad \|Au_1 - Au_2\|_X \leq M \|u_1 - u_2\|_X \quad \forall u_1, u_2 \in X. \end{array} \right.$$

L'opérateur $\mathcal{S} : C(\mathbb{R}_+; X) \rightarrow C(\mathbb{R}_+; X)$ est de mémoire, i.e.,

$$(4.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ il existe } s_n > 0 \text{ tel que} \\ \quad \|\mathcal{S}u_1(t) - \mathcal{S}u_2(t)\|_X \leq s_n \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_X ds \\ \quad \quad \forall u_1, u_2 \in C(\mathbb{R}_+; X), \forall t \in [0, n]. \end{array} \right.$$

La fonction $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ a la régularité

$$(4.4) \quad f \in C(\mathbb{R}_+; X).$$

Avec ces données, nous considérons le problème suivant.

Problème \mathcal{P} . *Trouver une fonction $u : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, l'inégalité suivante est satisfaite :*

$$(4.5) \quad \begin{aligned} u(t) \in K, \quad (Au(t), v - u(t))_X + (\mathcal{S}u(t), v - u(t))_X \\ \geq (f(t), v - u(t))_X \quad \forall v \in K. \end{aligned}$$

Nous avons le résultat d'existence et d'unicité ci-dessous.

Théorème 4.1. *Sous les conditions (4.1) (4.4) le Problème \mathcal{P} possède une solution unique qui satisfait $u \in C(\mathbb{R}_+; K)$.*

Démonstration. Nous utilisons le Théorème 3.1 avec $Z = X$. Pour ce faire, nous considérons la fonctionnelle $j : X \times X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$(4.6) \quad j(z, u, v) = (z, v)_X \quad \forall z, u, v \in X.$$

Il est facile de voir que, pour tout $z, u \in X$, la fonctionnelle $j(z, u, \cdot)$ est convexe et semi-continue inférieurement, c'est-à-dire, elle satisfait la condition (3.4)(a). Considérons maintenant $z_1, z_2, u_1, u_2, v_1, v_2 \in X$. En utilisant la définition (4.6) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous obtenons que

$$\begin{aligned} j(z_1, u_1, v_2) - j(z_1, u_1, v_1) + j(z_2, u_2, v_1) - j(z_2, u_2, v_2) \\ = (z_1 - z_2, v_2 - v_1)_X \leq \|z_1 - z_2\|_X \|v_1 - v_2\|_X. \end{aligned}$$

Cette inégalité montre que la condition (3.4)(b) est satisfaite avec $\alpha = 1$ et $\beta = 0$.

Par ailleurs, notons que la condition de petitesse (3.7) est satisfaite. Le Théorème 4.1 est maintenant une conséquence directe du Théorème 3.1. \square

4.2 Un résultat de convergence

Dans cette section, nous fournissons un résultat de convergence en étudiant le comportement de la solution du Problème \mathcal{P} lorsque l'on introduit une perturbation de l'ensemble des contraintes K . Supposons que les conditions (4.1) (4.4) sont vérifiées et rappelons, pour tout $\rho > 0$, la perturbation K_ρ introduite dans la Section 3.3 satisfaisant la condition (3.22), et donnée par

$$(4.7) \quad K_\rho = c(\rho)K + d(\rho)\theta,$$

avec $\theta \in X$ et les fonctions $c : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $d : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ satisfont les convergences suivantes :

$$(4.8) \quad c(\rho) \rightarrow 1 \quad \text{et} \quad d(\rho) \rightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad \rho \rightarrow 0.$$

Nous considérons la perturbation suivante du Problème \mathcal{P} .

Problème \mathcal{P}_ρ . *Trouver une fonction $u_\rho : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, l'inégalité suivante est satisfaite :*

$$(4.9) \quad u_\rho(t) \in K_\rho, \quad (Au_\rho(t), v_\rho - u_\rho(t))_X + (\mathcal{S}u_\rho(t), v_\rho - u_\rho(t))_X \\ \geq (f(t), v_\rho - u_\rho(t))_X \quad \forall v_\rho \in K_\rho.$$

En utilisant le Théorème 3.7 avec $Z = X$ et la fonctionnelle j , définie par (4.6), nous déduisons que, pour tout $\rho > 0$, le Problème \mathcal{P}_ρ admet une solution unique vérifiant $u_\rho \in C(\mathbb{R}_+; K_\rho)$. De plus, cette solution converge vers la solution u du Problème \mathcal{P} lorsque ρ tend vers 0, i.e.,

$$(4.10) \quad u_\rho \rightarrow u \quad \text{dans } C(\mathbb{R}_+; X) \quad \text{lorsque } \rho \rightarrow 0.$$

Maintenant, nous nous intéressons au comportement de la solution du Problème \mathcal{P} dans un cadre différent à celui introduit précédemment qui sera utile dans l'étude d'un problème dual introduit ci-après. Pour cela, nous faisons des hypothèses supplémentaires sur les données en supposant qu'il existe un sous ensemble $K_0 \subset X$ et un élément $g \in X$ tels que :

$$(4.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } K_0 \text{ est un sous ensemble non vide et fermé de } X. \\ \text{(b) } u, v \in K_0 \implies u + v \in K_0. \\ \text{(c) } \lambda \geq 0, u \in K_0 \implies \lambda u \in K_0. \\ \text{(d) } K = K_0 + g. \end{array} \right.$$

En outre, pour tout $\rho > 0$, nous supposons qu'il existe un élément $g_\rho \in X$ tel que

$$(4.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } K_\rho = K_0 + g_\rho \quad \forall \rho > 0. \\ \text{(b) } g_\rho \rightarrow g \quad \text{dans } X \quad \text{lorsque } \rho \rightarrow 0. \end{array} \right.$$

En utilisant les conditions (4.11) et (4.12), nous avons le résultat suivant.

Remarque 4.2. Notons que :

- a) Les conditions (4.11)(a) (b) montrent que K_0 est un cône fermé dans X .
- b) La condition (4.11) implique la condition (4.1).

c) Si les conditions (4.7) (4.8), (4.11) sont vérifiées alors, pour tout $\rho > 0$, la condition (4.12) est vérifiée avec $g_\rho = c(\rho)g + d(\rho)\theta$.

Nous présentons maintenant le résultat suivant qui sera utilisé par la suite.

Lemme 4.3. *Supposons que les hypothèses (4.2) (4.12) sont vérifiées. Alors, les propriétés suivantes sont satisfaites :*

$$(4.13) \quad \begin{cases} \text{(a)} & g \in K \quad \text{et} \quad g_\rho \in K_\rho \quad \forall \rho > 0. \\ \text{(b)} & 2v - g \in K \quad \forall v \in K \quad \text{et} \quad 2v_\rho - g_\rho \in K_\rho \quad \forall v_\rho \in K_\rho, \forall \rho > 0. \end{cases}$$

Démonstration. D'abord, nous utilisons la condition (4.11)(c) pour voir que $0_X \in K_0$ et, de ce fait, les hypothèses (4.11)(d) et (4.12)(a) impliquent que la condition (4.13)(a) est satisfaite. Ensuite, prenons $v \in K$ et utilisons l'égalité (4.11)(d) pour voir qu'il existe un élément $v_0 \in K_0$ tel que $v = v_0 + g$ et, par conséquent, nous avons que $2v - g = 2(v_0 + g) - g = 2v_0 + g$ et puisque la condition (4.11)(c) implique que $2v_0 \in K_0$, nous déduisons de la condition (4.11)(d) que $2v - g \in K$. Par ailleurs, nous utilisons des arguments similaires pour prouver que $2v_\rho - g_\rho \in K_\rho$ pour tout $v_\rho \in K_\rho$. Nous en déduisons que la propriété (4.13)(b) est satisfaite, ce qui achève la démonstration du Lemme 4.3. \square

Nous énonçons à présent le théorème suivant.

Théorème 4.4. *Supposons que les conditions (4.1) (4.4) et (4.11) (4.12) sont vérifiées. Alors :*

i) *Pour tout $\rho > 0$, le Problème \mathcal{P}_ρ possède une solution unique vérifiant $u_\rho \in C(\mathbb{R}_+; K_\rho)$.*

ii) *La solution u_ρ du Problème \mathcal{P}_ρ converge vers la solution u du Problème \mathcal{P} , i.e.,*

$$(4.14) \quad u_\rho \rightarrow u \quad \text{dans} \quad C(\mathbb{R}_+; X) \quad \text{lorsque} \quad \rho \rightarrow 0.$$

La démonstration du Théorème 4.4 est basée sur le résultat suivant.

Lemme 4.5. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $w_n > 0$ tel que*

$$(4.15) \quad \|u_\rho(t)\|_X \leq w_n \quad \text{et} \quad \|u(t)\|_X \leq w_n \quad \forall t \in [0, n], \quad \forall \rho > 0.$$

Démonstration. Soient $n \in \mathbb{N}$, $t \in [0, n]$ et $\rho > 0$. Nous prenons $v_\rho = g_\rho \in K_\rho$ dans (4.9) pour obtenir

$$\begin{aligned} (Au_\rho(t) - Ag_\rho, u_\rho(t) - g_\rho)_X &\leq (f(t), u_\rho(t) - g_\rho)_X \\ &+ (\mathcal{S}u_\rho(t), g_\rho - u_\rho(t))_X + (Ag_\rho, g_\rho - u_\rho(t))_X. \end{aligned}$$

Ensuite, en utilisant la condition (4.2)(a) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous obtenons que

$$(4.16) \quad m \|u_\rho(t) - g_\rho\|_X \leq \|Ag_\rho\|_X + \max_{t \in [0, n]} (\|f(t)\|_X) + \|\mathcal{S}u_\rho(t)\|_X.$$

Par ailleurs, nous utilisons la condition (4.3) pour trouver que

$$\begin{aligned} (4.17) \quad \|\mathcal{S}u_\rho(t)\|_X &= \|(\mathcal{S}u_\rho(t) - \mathcal{S}g_\rho) + (\mathcal{S}g_\rho - \mathcal{S}0_X) + \mathcal{S}0_X\|_X \\ &\leq \|\mathcal{S}u_\rho(t) - \mathcal{S}g_\rho\|_X + \|\mathcal{S}g_\rho - \mathcal{S}0_X\|_X + \|\mathcal{S}0_X\|_X \\ &\leq s_n \int_0^t \|u_\rho(s) - g_\rho\|_X ds + s_n \int_0^t \|g_\rho\|_X ds + \|\mathcal{S}0_X\|_X. \end{aligned}$$

D'autre part, en utilisant la convergence (4.12)(d), nous déduisons qu'il existe une constante $c > 0$, indépendante de ρ , telle que

$$(4.18) \quad \|g_\rho\|_X \leq c.$$

En combinant maintenant (4.17) et (4.18), nous trouvons que

$$(4.19) \quad \|\mathcal{S}u_\rho(t)\|_X \leq ns_n c + \|\mathcal{S}0_X\|_X + s_n \int_0^t \|u_\rho(s) - g_\rho\|_X ds.$$

En outre, nous utilisons l'estimation (4.18) et la condition (4.2)(b) afin de voir que

$$(4.20) \quad \|Ag_\rho\|_X = \|Ag_\rho - A0_X + A0_X\|_X \leq cM + \|A0_X\|_X.$$

Maintenant, en combinant (4.16), (4.19) et (4.20), nous déduisons qu'il existe une constante $\lambda_n > 0$, indépendante de ρ , telle que

$$\|u_\rho(t) - g_\rho\|_X \leq \lambda_n + \frac{s_n}{m} \int_0^t \|u_\rho(s) - g_\rho\|_X ds.$$

Nous utilisons le Lemme de Gronwall pour obtenir que

$$\|u_\rho(t) - g_\rho\|_X \leq \frac{\lambda_n s_n}{m} e^{\frac{ts_n}{m}} \leq \frac{\lambda_n s_n}{m} e^{\frac{ns_n}{m}}.$$

De là, il en résulte que

$$\|u_\rho(t) - g_\rho\|_X \leq c_n \quad \text{avec} \quad c_n = \frac{\lambda_n s_n}{m} e^{\frac{ns_n}{m}}.$$

Enfin, nous combinons cette inégalité, l'estimation (4.18) et l'inégalité triangulaire

$$\|u_\rho(t)\|_X = \|u_\rho(t) - g_\rho + g_\rho\|_X \leq \|u_\rho(t) - g_\rho\|_X + \|g_\rho\|_X$$

pour obtenir que

$$\|u_\rho(t)\|_X \leq c_n + c.$$

Soit

$$w_n = \max(c_n + c, \max_{t \in [0, n]} (\|u(t)\|_X)).$$

Par conséquent, nous déduisons que

$$\|u_\rho(t)\|_X \leq w_n \quad \text{et} \quad \|u(t)\|_X \leq w_n,$$

ce qui achève la démonstration du Lemme 4.5. □

Nous passons maintenant à la démonstration du Théorème 4.4.

Démonstration. i) Soit $\rho > 0$. D'après les conditions (4.11)(a)-(c) et (4.12)(a), nous déduisons que K_ρ est une partie convexe, fermée et non vide de X . De ce fait, nous utilisons le Théorème 4.1 avec $K = K_\rho$ pour montrer l'existence et l'unicité de la solution du Problème \mathcal{P}_ρ , ce qui conclut la première partie de la démonstration.

ii) Soient $n \in \mathbb{N}$, $t \in [0, n]$ et $\rho > 0$. Nous utilisons (4.12)(a) et (4.11)(d) pour voir que $u_\rho(t) + g - g_\rho \in K$ et, de ce fait, nous prenons $v = u_\rho(t) + g - g_\rho$ dans (4.5) pour obtenir que

$$(4.21) \quad (Au(t), (u_\rho(t) - u(t)) + (g - g_\rho))_X + (\mathcal{S}u(t), (u_\rho(t) - u(t)) + (g - g_\rho))_X \\ \geq (f(t), (u_\rho(t) - u(t)) + (g - g_\rho))_X.$$

D'autre part, les propriétés (4.11)(d) et (4.12)(a) impliquent que $u(t) + g_\rho - g \in K_\rho$ et, par conséquent, en posant $v_\rho = u(t) + g_\rho - g$ dans (4.9), nous obtenons que

$$(4.22) \quad (Au_\rho(t), (u(t) - u_\rho(t)) + (g_\rho - g))_X + (\mathcal{S}u_\rho(t), (u(t) - u_\rho(t)) + (g_\rho - g))_X \\ \geq (f(t), (u(t) - u_\rho(t)) + (g_\rho - g))_X.$$

Nous additionnons maintenant les inégalités (4.21) et (4.22) pour trouver que

$$(Au_\rho(t) - Au(t), u_\rho(t) - u(t))_X \leq (Au(t) - Au_\rho(t), g - g_\rho)_X \\ + (\mathcal{S}u_\rho(t) - \mathcal{S}u(t), u(t) - u_\rho(t))_X + (\mathcal{S}u(t) - \mathcal{S}u_\rho(t), g - g_\rho)_X.$$

Ensuite, en utilisant cette inégalité avec la condition (4.2) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous obtenons que

$$m\|u_\rho(t) - u(t)\|_X^2 \leq \left(M\|g_\rho - g\|_X + \|\mathcal{S}u_\rho(t) - \mathcal{S}u(t)\|_X \right) \|u_\rho(t) - u(t)\|_X \\ + \|\mathcal{S}u_\rho(t) - \mathcal{S}u(t)\|_X \|g_\rho - g\|_X.$$

D'autre part, nous utilisons la condition (4.3) et (4.15) pour obtenir que

$$\|\mathcal{S}u_\rho(t) - \mathcal{S}u(t)\|_X \leq s_n \int_0^t \|u_\rho(s) - u(s)\|_X ds \\ \leq s_n \int_0^t \|u_\rho(s)\|_X ds + s_n \int_0^t \|u(s)\|_X ds \leq 2nw_n s_n.$$

En combinant maintenant cette inégalité avec l'inégalité (4.22), nous trouvons que

$$(4.23) \quad m\|u_\rho(t) - u(t)\|_X^2 \\ \leq \left(M\|g_\rho - g\|_X + \|\mathcal{S}u_\rho(t) - \mathcal{S}u(t)\|_X \right) \|u_\rho(t) - u(t)\|_X \\ + 2nw_n s_n \|g_\rho - g\|_X.$$

Ensuite, nous utilisons l'inégalité

$$x, a, b \geq 0 \quad \text{et} \quad x^2 \leq ax + b \implies x \leq a + \sqrt{b}$$

ainsi que l'inégalité (4.23) et la condition (4.3) afin d'obtenir que

$$(4.24) \quad \|u_\rho(t) - u(t)\|_X \leq \frac{M}{m} \|g_\rho - g\|_X + \left(\frac{2nw_n s_n \|g_\rho - g\|_X}{m} \right)^{\frac{1}{2}} \\ + \frac{s_n}{m} \int_0^t \|u_\rho(s) - u(s)\|_X ds.$$

En outre, nous posons

$$(4.25) \quad T_n(\rho) = \frac{M}{m} \|g_\rho - g\|_X + \left(\frac{2nw_n s_n \|g_\rho - g\|_X}{m} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Puis, nous utilisons cette notation dans l'inégalité (4.24) pour voir que

$$\|u_\rho(t) - u(t)\|_X \leq T_n(\rho) + \frac{s_n}{m} \int_0^t \|u_\rho(s) - u(s)\|_X ds.$$

Par conséquent, le Lemme de Gronwall nous donne que

$$\|u_\rho(t) - u(t)\|_X \leq T_n(\rho) e^{\frac{ts_n}{m}},$$

ce qui implique que

$$(4.26) \quad \max_{t \in [0, n]} (\|u_\rho(t) - u(t)\|_X) \leq T_n(\rho) e^{\frac{ns_n}{m}}.$$

Par ailleurs, en utilisant la notation (4.25) avec la convergence (4.12)(b), nous trouvons que

$$(4.27) \quad T_n(\rho) \rightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad \rho \rightarrow 0.$$

Nous combinons maintenant (4.26) et (4.27) afin de déduire que

$$u_\rho \rightarrow u \quad \text{dans} \quad C(\mathbb{R}_+; X) \quad \text{lorsque} \quad \rho \rightarrow 0,$$

ce qui conclut la démonstration du Théorème 4.4. □

4.3 Formulation duale

Dans cette section, nous nous intéressons à une formulation du Problème \mathcal{P} en termes de la fonction $\sigma = Au + \mathcal{S}u$, appelée formulation duale. Partout dans cette section et la section suivante, nous supposons que l'opérateur $A : X \rightarrow X$ introduit dans la Section 4.1 vérifiant la condition (4.2) et, de plus, il est linéaire. En utilisant la Proposition 1.4, nous déduisons que A est inversible et son inverse, noté $A^{-1} : X \rightarrow X$, satisfait les propriétés suivantes :

$$(4.28) \quad \begin{cases} \text{(a)} & (A^{-1}u, u)_X \geq \frac{m}{M^2} \|u\|_X^2 & \forall u \in X, \\ \text{(b)} & \|A^{-1}u\|_X \leq \frac{1}{m} \|u\|_X & \forall u \in X. \end{cases}$$

Dans l'étude de la formulation duale du Problème \mathcal{P} nous avons besoin au résultat suivant.

Lemme 4.6. *Supposons que les conditions (4.2) (4.3) sont vérifiées. Alors, il existe un unique opérateur $\mathcal{R} : C(\mathbb{R}_+; X) \rightarrow C(\mathbb{R}_+; X)$ tel que, pour toutes fonctions $\sigma, u \in C(\mathbb{R}_+; X)$, l'équivalence suivante est satisfaite :*

$$(4.29) \quad \sigma(t) = Au(t) + \mathcal{S}u(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}_+,$$

si et seulement si

$$(4.30) \quad u(t) = A^{-1}\sigma(t) + \mathcal{R}\sigma(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

De plus, \mathcal{R} est un opérateur de mémoire, i.e., pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $r_n > 0$ tel que

$$(4.31) \quad \|\mathcal{R}\sigma_1(t) - \mathcal{R}\sigma_2(t)\|_X \leq r_n \int_0^t \|\sigma_1(s) - \sigma_2(s)\|_X ds$$

$$\forall \sigma_1, \sigma_2 \in C(\mathbb{R}_+; X), \quad \forall t \in [0, n].$$

Démonstration. Soit $\sigma \in C(\mathbb{R}_+; X)$. Considérons l'opérateur $\Lambda : C(\mathbb{R}_+; X) \rightarrow C(\mathbb{R}_+; X)$ défini par

$$(4.32) \quad \Lambda\eta(t) = A^{-1}\sigma(t) - A^{-1}\mathcal{S}\eta(t) \quad \forall \eta \in C(\mathbb{R}_+; X), t \in \mathbb{R}_+.$$

Notons que l'opérateur Λ dépend de σ mais, par simplicité, nous n'indiquons pas explicitement cette dépendance.

Soient $\eta_1, \eta_2 \in C(\mathbb{R}_+; X)$. Nous utilisons la définition (4.32) et les propriétés (4.28)(b) et (4.3) pour voir que

$$\begin{aligned} \|\Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t)\|_X &= \|A^{-1}\mathcal{S}\eta_2(t) - A^{-1}\mathcal{S}\eta_1(t)\|_X \\ &\leq \frac{1}{m} \|\mathcal{S}\eta_2(t) - \mathcal{S}\eta_1(t)\|_X \leq \frac{s_n}{m} \int_0^t \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_X ds, \\ &\forall n \in \mathbb{N}, t \in [0, n]. \end{aligned}$$

Par conséquent, nous déduisons du Théorème 1.16 que l'opérateur Λ admet un unique point fixe dans $C(\mathbb{R}_+; X)$, noté $\eta^* \in C(\mathbb{R}_+; X)$. En combinant (4.32) avec

l'égalité $A\eta^* = \eta^*$, nous avons que

$$(4.33) \quad \eta^*(t) = A^{-1}\sigma(t) - A^{-1}\mathcal{S}\eta^*(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

Cette égalité permet de considérer un opérateur $\mathcal{R} : C(\mathbb{R}_+; X) \rightarrow C(\mathbb{R}_+; X)$ défini par l'égalité

$$(4.34) \quad \mathcal{R}\sigma(t) = \eta^*(t) - A^{-1}\sigma(t) = -A^{-1}\mathcal{S}\eta^*(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$$

et, de ce fait, (4.33) devient

$$(4.35) \quad \eta^*(t) = A^{-1}\sigma(t) + \mathcal{R}\sigma(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

Supposons maintenant que $\sigma, u \in C(\mathbb{R}_+; X)$ et, de plus, supposons que l'égalité (4.29) est satisfaite. Nous en avons que

$$u(t) = A^{-1}\sigma(t) - A^{-1}\mathcal{S}u(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

Nous combinons cette égalité et l'égalité (4.32) pour obtenir que u est un point fixe de l'opérateur A et, grâce à l'unicité du point fixe, nous déduisons que

$$u(t) = \eta^*(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

En utilisant maintenant cette égalité et (4.35), nous déduisons que l'égalité (4.30) est satisfaite.

Réciproquement, supposons que l'égalité (4.30) est satisfaite. Alors, en utilisant (4.35), nous avons que $u = \eta^*$, ce qui implique que u est un point fixe de l'opérateur A et, de ce fait, la définition (4.32) implique que

$$Au(t) = u(t) = A^{-1}\sigma(t) - A^{-1}\mathcal{S}u(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}_+,$$

ce qui montre que la propriété (4.29) est satisfaite.

Par suite, montrons que \mathcal{R} est un opérateur de mémoire. Pour ce faire, nous considérons deux fonctions $\sigma_1, \sigma_2 \in C(\mathbb{R}_+; X)$ et nous notons par $\eta_1^*, \eta_2^* \in C(\mathbb{R}_+; X)$ les fonctions obtenues par (4.35) avec $\sigma = \sigma_i$, $i = 1, 2$. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, n]$. En utilisant l'égalité (4.34) avec les conditions (4.28)(b) et (4.3), nous obtenons que

$$(4.36) \quad \|\mathcal{R}\sigma_1(t) - \mathcal{R}\sigma_2(t)\|_X \leq \frac{s_n}{m} \int_0^t \|\eta_1^*(s) - \eta_2^*(s)\|_X ds.$$

D'autre part, en utilisant l'égalité (4.35) avec la condition (4.28)(b), nous trouvons

$$\begin{aligned} \|\eta_1^*(s) - \eta_2^*(s)\|_X &= \|(A^{-1}\sigma_1(s) + \mathcal{R}\sigma_1(s)) - (A^{-1}\sigma_2(s) + \mathcal{R}\sigma_2(s))\|_X \\ &\leq \|A^{-1}\sigma_1(s) - A^{-1}\sigma_2(s)\|_X + \|\mathcal{R}\sigma_1(s) - \mathcal{R}\sigma_2(s)\|_X \\ &\leq \frac{1}{m}\|\sigma_1(s) - \sigma_2(s)\|_X + \|\mathcal{R}\sigma_1(s) - \mathcal{R}\sigma_2(s)\|_X \quad \forall s \in \mathbb{R}_+. \end{aligned}$$

Nous combinons maintenant cette inégalité avec l'inégalité (4.36) pour voir que

$$\begin{aligned} \|\mathcal{R}\sigma_1(t) - \mathcal{R}\sigma_2(t)\|_X &\leq \frac{s_n}{m^2} \int_0^t \|\sigma_1(s) - \sigma_2(s)\|_X ds \\ &\quad + \frac{s_n}{m} \int_0^t \|\mathcal{R}\sigma_1(s) - \mathcal{R}\sigma_2(s)\|_X ds. \end{aligned}$$

Ensuite, nous utilisons le Lemme de Gronwall pour trouver que

$$\|\mathcal{R}\sigma_1(t) - \mathcal{R}\sigma_2(t)\|_X \leq \frac{s_n}{m^2} e^{\frac{ns_n}{m}} \int_0^t \|\sigma_1(s) - \sigma_2(s)\|_X ds \quad \forall t \in [0, n].$$

Cette inégalité montre que \mathcal{R} est un opérateur de mémoire, i.e., il satisfait l'inégalité (4.31) avec $r_n = \frac{s_n}{m^2} e^{\frac{ns_n}{m}}$, ce qui termine la démonstration du Lemme 4.6. \square

Pour continuer, nous considérons, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la partie $\Sigma(t) \subset X$ définie par l'égalité

$$(4.37) \quad \Sigma(t) = \{ \tau \in X : (\tau, v - g)_X \geq (f(t), v - g)_X \quad \forall v \in K \}.$$

De plus, nous considérons l'ensemble Σ_0 défini par

$$(4.38) \quad \Sigma_0 = \{ \tau \in X : (\tau, v_0)_X \geq 0 \quad \forall v_0 \in K_0 \}.$$

En utilisant la condition (4.11)(d) avec les définitions (4.37) (4.38), nous obtenons

$$(4.39) \quad \Sigma(t) = \Sigma_0 + f(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

Considérons également le problème suivant.

Problème \mathcal{P}^D . *Trouver une fonction $\sigma : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ tel que*

$$(4.40) \quad \begin{aligned} \sigma(t) \in \Sigma(t), \quad (A^{-1}\sigma(t), \tau - \sigma(t))_X + (\mathcal{R}\sigma(t), \tau - \sigma(t))_X \\ \geq (g, \tau - \sigma(t))_X \quad \forall \tau \in \Sigma(t), \end{aligned}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

Nous appelons par la suite \mathcal{P}^D la formulation duale du Problème \mathcal{P} . Le lien entre les problèmes \mathcal{P} et \mathcal{P}^D est donné par le théorème d'équivalence ci-dessous.

Théorème 4.7. *Sous les hypothèses (4.2) (4.4), (4.11) et (4.28), nous avons les résultats suivants :*

i) *Si u est une solution du Problème \mathcal{P} et $\sigma = Au + \mathcal{S}u$ alors σ est une solution du Problème \mathcal{P}^D .*

ii) *Réciproquement, si σ est une solution du Problème \mathcal{P}^D et $u = A^{-1}\sigma + \mathcal{R}\sigma$ alors u est une solution du Problème \mathcal{P} .*

Démonstration. i) Soit $t \in \mathbb{R}_+$. Supposons que u est une solution du Problème \mathcal{P} et soit $\sigma = Au + \mathcal{S}u$. Alors, l'inégalité (4.5) implique que

$$(4.41) \quad (\sigma(t), v - u(t))_X \geq (f(t), v - u(t))_X \quad \forall v \in K.$$

D'après le Lemme 4.3, nous avons que les éléments $2u(t) - g$ et g appartiennent à K et, de ce fait, nous prenons $v = 2u(t) - g$ et $v = g$ dans (4.41) afin d'obtenir que

$$(4.42) \quad (\sigma(t), u(t) - g)_X = (f(t), u(t) - g)_X.$$

Nous combinons maintenant (4.41) et (4.42) pour voir que

$$(\sigma(t), v - g)_X \geq (f(t), v - g)_X \quad \forall v \in K$$

et, par conséquent, la définition (4.37) entraîne que

$$(4.43) \quad \sigma(t) \in \Sigma(t).$$

Ensuite, nous utilisons l'égalité (4.42) et la définition (4.37) de l'ensemble $\Sigma(t)$ pour obtenir que

$$(4.44) \quad (\tau - \sigma(t), u(t) - g)_X \geq 0 \quad \forall \tau \in \Sigma(t).$$

D'autre part, le Lemme 4.6 implique que $u(t) = A^{-1}\sigma(t) + \mathcal{R}\sigma(t)$ et donc, en utilisant cette égalité dans l'inégalité (4.44), nous obtenons que

$$(4.45) \quad (A^{-1}\sigma(t), \tau - \sigma(t))_X + (\mathcal{R}\sigma(t), \tau - \sigma(t))_X \geq (g, \tau - \sigma(t))_X \quad \forall \tau \in \Sigma(t).$$

Donc, nous combinons l'inclusion (4.43) et l'inégalité (4.45) pour déduire que σ est une solution du Problème \mathcal{P}^D , ce qui conclut la première partie de la démonstration.

ii) Soit $t \in \mathbb{R}_+$. Supposons que σ est une solution du Problème \mathcal{P}^D et $u = A^{-1}\sigma + \mathcal{R}\sigma$. En utilisant l'inégalité (4.40), nous avons que

$$(4.46) \quad (u(t), \tau - \sigma(t))_X \geq (g, \tau - \sigma(t))_X \quad \forall \tau \in \Sigma(t).$$

Afin de prouver que u est une solution du Problème \mathcal{P} nous commençons par démontrer que $u(t) \in K$, i.e., $u_0(t) = u(t) - g \in K_0$. Soit $P : X \rightarrow K_0$ l'opérateur de projection sur la partie convexe fermée et non vide $K_0 \subset X$. Par l'absurde, supposons que

$$(4.47) \quad u_0(t) \notin K_0,$$

ce qui donne que $u_0(t) \neq Pu_0(t)$. En utilisant la propriété de la projection (1.11), nous avons que

$$\begin{aligned} (Pu_0(t) - u_0(t), v_0)_X &\geq (Pu_0(t) - u_0(t), Pu_0(t))_X \\ &> (Pu_0(t) - u_0(t), u_0(t))_X \quad \forall v_0 \in K_0. \end{aligned}$$

Cette inégalité implique qu'il existe une constante $\alpha \in \mathbb{R}$ telle que

$$(4.48) \quad (Pu_0(t) - u_0(t), v_0)_X > \alpha > (Pu_0(t) - u_0(t), u_0(t))_X \quad \forall v_0 \in K_0.$$

En prenant $v_0 = 0_X \in K_0$ dans (4.48), nous obtenons que

$$(4.49) \quad \alpha < 0.$$

Ensuite, supposons qu'il existe un élément $\tilde{v}_0 \in K_0$ tel que

$$(4.50) \quad (Pu_0(t) - u_0(t), \tilde{v}_0)_X < 0$$

Nous prenons $v_0 = \lambda \tilde{v}_0$ dans (4.48) avec $\lambda \geq 0$ pour obtenir que

$$\lambda (Pu_0(t) - u_0(t), \tilde{v}_0)_X > \alpha \quad \forall \lambda \geq 0.$$

Puis, en passant à la limite dans cette inégalité lorsque $\lambda \rightarrow \infty$ et en utilisant l'inégalité (4.50), nous obtenons que $\alpha \leq -\infty$, ce qui contredit l'hypothèse $\alpha \in \mathbb{R}$. Nous en déduisons que

$$(4.51) \quad (Pu_0(t) - u_0(t), v_0)_X \geq 0 \quad \forall v_0 \in K_0.$$

En outre, puisque $\sigma(t) \in \Sigma(t)$, l'égalité (4.39) implique que $\sigma(t) - f(t) \in \Sigma_0$ et, par conséquent, la définition (4.38) nous donne que

$$(4.52) \quad (\sigma(t) - f(t), v_0)_X \geq 0 \quad \forall v_0 \in K_0.$$

Combinons maintenant les inégalités (4.51) et (4.52) pour voir que

$$Pu_0(t) - u_0(t) + \sigma(t) - f(t) \in \Sigma_0.$$

Ensuite, nous utilisons l'égalité (4.39) pour déduire que

$$Pu_0(t) - u_0(t) + \sigma(t) \in \Sigma(t).$$

Nous prenons alors $\tau = Pu_0(t) - u_0(t) + \sigma(t)$ dans (4.46) et nous utilisons l'égalité $u(t) = u_0(t) + g$ pour obtenir que

$$(4.53) \quad (u_0(t), Pu_0(t) - u_0(t))_X \geq 0.$$

Maintenant, nous combinons (4.48) et (4.49) afin de voir que

$$(4.54) \quad (u_0(t), Pu_0(t) - u_0(t))_X < 0.$$

Les inégalités (4.53) et (4.54) aboutissent à une contradiction. Par conséquent, nous déduisons que l'hypothèse (4.47) est fautive et, de ce fait, $u_0(t) \in K_0$, ce qui implique que

$$(4.55) \quad u(t) \in K.$$

Par la suite, nous prouvons que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $u(t)$ vérifie l'inégalité (4.5). D'abord, puisque $f(t) \in \Sigma(t)$, nous prenons $\tau = f(t)$ dans (4.46) pour obtenir que

$$(4.56) \quad (f(t), u(t) - g)_X \geq (\sigma(t), u(t) - g)_X.$$

D'autre part, puisque $\sigma(t) \in \Sigma(t)$ et $u(t) \in K$, la définition (4.37) implique que

$$(4.57) \quad (\sigma(t), u(t) - g)_X \geq (f(t), u(t) - g)_X.$$

Nous combinons maintenant les inégalités (4.56) et (4.57) pour déduire que

$$(\sigma(t), u(t) - g)_X = (f(t), u(t) - g)_X.$$

Par conséquent, puisque $\sigma(t) \in \Sigma(t)$, nous déduisons que

$$(4.58) \quad (\sigma(t), v - u(t))_X \geq (f(t), v - u(t))_X \quad \forall v \in K.$$

D'autre part, puisque $u(t) = A^{-1}\sigma(t) + \mathcal{R}\sigma(t)$, le Lemme 4.6 implique que $\sigma(t) = Au(t) + \mathcal{S}u(t)$ et, par conséquent, (4.58) devient

$$(4.59) \quad \begin{aligned} (Au(t), v - u(t))_X + (\mathcal{S}u(t), v - u(t))_X \\ \geq (f(t), v - u(t))_X \quad \forall v \in K. \end{aligned}$$

Nous combinons maintenant l'inclusion (4.55) et l'inégalité (4.59) pour déduire que u est une solution du Problème \mathcal{P} , ce qui achève la démonstration du Théorème 4.7. \square

Nous fournissons à présent un résultat d'existence et d'unicité de la solution du problème dual \mathcal{P}^D .

Théorème 4.8. *Supposons que les conditions (4.2) (4.4), (4.11) et (4.28) sont vérifiées. Alors le Problème \mathcal{P}^D admet une solution unique qui satisfait $\sigma \in C(\mathbb{R}_+; X)$.*

Démonstration. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, n]$. Nous utilisons le Théorème 4.1 pour déduire qu'il existe une solution unique du Problème \mathcal{P} satisfaisant $u \in C(\mathbb{R}_+; X)$. Par conséquent, le Théorème 4.7 i) montre que $\sigma = Au + \mathcal{S}u$ est une solution du Problème \mathcal{P}^D , ce qui montre la partie liée à l'existence.

Prouvons maintenant que cette solution est unique. Supposons que $\sigma_1, \sigma_2 \in C(\mathbb{R}_+; X)$ sont deux solutions du Problème \mathcal{P}^D , c'est-à-dire, $\sigma_1(t), \sigma_2(t) \in \Sigma(t)$ et, de plus, les inégalités suivantes sont vérifiées :

$$(4.60) \quad (A^{-1}\sigma_1(t), \tau - \sigma_1(t))_X + (\mathcal{R}\sigma_1(t), \tau - \sigma_1(t))_X \geq (g, \tau - \sigma_1(t))_X,$$

$$(4.61) \quad (A^{-1}\sigma_2(t), \tau - \sigma_2(t))_X + (\mathcal{R}\sigma_2(t), \tau - \sigma_2(t))_X \geq (g, \tau - \sigma_2(t))_X,$$

pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\tau \in \Sigma(t)$. Alors, en prenant $\tau = \sigma_2(t)$ dans (4.60) et $\tau = \sigma_1(t)$ dans (4.61), puis en additionnant les inégalités obtenues, nous trouvons que

$$(A^{-1}\sigma_1(t) - A^{-1}\sigma_2(t), \sigma_1(t) - \sigma_2(t))_X \leq (\mathcal{R}\sigma_1(t) - \mathcal{R}\sigma_2(t), \sigma_2(t) - \sigma_1(t))_X.$$

Ensuite, en utilisant cette inégalité avec les conditions (4.28)(a), (4.31) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous trouvons que

$$\|\sigma_1(t) - \sigma_2(t)\|_X \leq \frac{M^2 r_n}{m} \int_0^t \|\sigma_1(s) - \sigma_2(s)\|_X ds.$$

Par conséquent, le Lemme de Gronwall implique que

$$\|\sigma_1(t) - \sigma_2(t)\|_X \leq 0 \quad \forall t \in [0, n].$$

Il en résulte que $\sigma_1(t) = \sigma_2(t)$, ce qui conclut la démonstration du Théorème 4.8. \square

4.4 Un résultat de convergence pour le problème dual

Dans cette section, nous complétons l'étude du problème dual \mathcal{P}^D par un résultat de convergence portant sur la perturbation des données. Pour tout $\rho > 0$ et $t \in \mathbb{R}_+$, nous considérons la perturbation de $\Sigma(t)$ définie par

$$(4.62) \quad \Sigma_\rho(t) = \{\tau_\rho \in X : (\tau_\rho, v_\rho - g_\rho)_X \geq (f(t), v_\rho - g_\rho)_X \quad \forall v_\rho \in K_\rho\},$$

où K_ρ est une perturbation de l'ensemble K satisfaisant la condition (4.12)(a). Nous utilisons la définition (4.62) et la condition (4.12)(a) pour voir que

$$(4.63) \quad \Sigma_\rho(t) = \Sigma_0 + f(t),$$

où Σ_0 est l'ensemble défini par (4.38).

Considérons également la perturbation suivante du Problème \mathcal{P}^D .

Problème \mathcal{P}_ρ^D . *Trouver une fonction $\sigma_\rho : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ tel que l'inégalité suivante est vérifiée :*

$$(4.64) \quad \sigma_\rho(t) \in \Sigma_\rho(t), \quad (A^{-1}\sigma_\rho(t), \tau_\rho - \sigma_\rho(t))_X + (\mathcal{R}\sigma_\rho(t), \tau_\rho - \sigma_\rho(t))_X \\ \geq (g_\rho, \tau_\rho - \sigma_\rho(t))_X \quad \forall \tau_\rho \in \Sigma_\rho(t).$$

pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

Nous avons le théorème d'existence et d'unicité ainsi que de convergence ci-dessous qui représente le résultat principal de cette section.

Théorème 4.9. *Supposons que les hypothèses (4.2) (4.4), (4.11), (4.12)(a) et (4.28) sont vérifiées. Alors :*

i) *Pour tout $\rho > 0$, le Problème \mathcal{P}_ρ^D possède une solution unique qui satisfait $\sigma_\rho \in C(\mathbb{R}_+; X)$.*

ii) *De plus, si la condition (4.12)(b) est vérifiée, alors la convergence suivante est satisfaite :*

$$(4.65) \quad \sigma_\rho \rightarrow \sigma \quad \text{dans} \quad C(\mathbb{R}_+; X) \quad \text{lorsque} \quad \rho \rightarrow 0.$$

Démonstration. i) Soient $t \in \mathbb{R}_+$ et $\rho > 0$. Nous utilisons (4.63) et (4.39) pour voir que

$$\Sigma(t) = \Sigma_\rho(t).$$

Par conséquent, nous utilisons le Théorème 4.8 pour déduire que le Problème \mathcal{P}_ρ^D possède une solutions unique vérifiant $\sigma_\rho \in C(\mathbb{R}_+; X)$, ce qui conclut la première partie de la démonstration.

ii) Soient $t \in \mathbb{R}_+$ et $\rho > 0$. Puisque $\Sigma(t) = \Sigma_\rho(t)$, nous prenons $\tau = \sigma_\rho(t) \in \Sigma(t)$ dans (4.40) et $\tau_\rho = \sigma(t) \in \Sigma_\rho(t)$ dans (4.64), puis nous additionnons les deux inégalités obtenues pour trouver que

$$\begin{aligned} & (A^{-1}\sigma_\rho(t) - A^{-1}\sigma(t), \sigma_\rho(t) - \sigma(t))_X \\ & \leq (\mathcal{R}\sigma_\rho(t) - \mathcal{R}\sigma(t), \sigma(t) - \sigma_\rho(t))_X + (g_\rho - g, \sigma_\rho(t) - \sigma(t))_X. \end{aligned}$$

Ensuite, nous utilisons cette inégalité avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz et les conditions (4.28) et (4.31) pour obtenir que

$$\begin{aligned} & \frac{m}{M^2} \|\sigma_\rho(t) - \sigma(t)\|_X^2 \\ & \leq \left(\|g_\rho - g\|_X + r_n \int_0^t \|\sigma_\rho(s) - \sigma(s)\|_X ds \right) \|\sigma_\rho(t) - \sigma(t)\|_X \end{aligned}$$

et, par conséquent, nous avons que

$$\begin{aligned} & \|\sigma_\rho(t) - \sigma(t)\|_X \\ & \leq \frac{M^2}{m} \|g_\rho - g\|_X + \frac{r_n M^2}{m} \int_0^t \|\sigma_\rho(s) - \sigma(s)\|_X ds. \end{aligned}$$

Nous utilisons maintenant le Lemme de Gronwall afin de voir que

$$\|\sigma_\rho(t) - \sigma(t)\|_X \leq \frac{M^2}{m} \|g_\rho - g\|_X e^{\frac{r_n M^2 t}{m}},$$

ce qui implique que

$$\max_{t \in [0, n]} (\|\sigma_\rho(t) - \sigma(t)\|_X) \leq \frac{M^2}{m} \|g_\rho - g\|_X e^{\frac{nr_n M^2}{m}}.$$

Enfin, en combinant cette inégalité avec la convergence (4.12)(b), nous déduisons que

$$\sigma_\rho \rightarrow \sigma \quad \text{dans } C(\mathbb{R}_+; X) \quad \text{lorsque } \rho \rightarrow 0,$$

ce qui conclut la démonstration du Théorème 4.9. □

Deuxième partie

Application à la mécanique du contact

Partie II

Application à la mécanique du contact

Dans cette partie, nous allons illustrer les résultats présentés dans la Partie I dans l'étude de plusieurs problèmes de contact sans frottement avec différentes conditions de contact. Cette partie est divisée en sept chapitres. Le premier chapitre aborde un certain nombre de préliminaires dont la connaissance est nécessaire à l'étude qui va suivre. Nous commençons par présenter les espaces de fonctions utilisés dans ce travail ainsi que leurs principales propriétés. Ensuite, nous précisons le cadre physique et nous présentons quelques éléments de modélisation en mécanique du contact, puis nous décrivons les lois de comportement élastique, viscoélastique et viscoplastique. Aussi, nous présentons les lois de contact sans frottement utilisées dans les problèmes de contact abordés dans cette thèse. Dans le deuxième chapitre, nous étudions un problème de contact élastique unidimensionnel. Nous présentons en premier temps la formulation forte du problème mécanique ainsi que les hypothèses nécessaires sur les données afin d'obtenir une formulation variationnelle. Une fois la formulation variationnelle établie, nous démontrons un résultat d'existence et d'unicité de la solution faible du problème. Ensuite, nous prouvons deux résultats de convergence. Dans le troisième chapitre, nous considérons un problème de contact statique entre un corps élastique et une fondation. L'objectif de ce chapitre est de prouver un résultat d'existence et d'unicité de solution et de montrer quelques résultats de convergence basés sur la perturbation et la pénalisation de la contrainte unilatérale. Dans le quatrième chapitre, nous traitons un problème similaire à celui présenté dans le chapitre précédent, la différence résidant dans la condition de

contact utilisée. Après avoir présenté le problème mécanique et établi la formulation variationnelle, nous abordons la question de l'existence et de l'unicité d'une solution, puis nous démontrons un résultat de convergence portant sur la perturbation des données du problème. Ensuite, nous nous intéressons à des problèmes de contrôle optimal pour lesquels nous prouvons l'existence de la solution. Enfin, nous terminons par un problème de contact unidimensionnel afin d'illustrer les résultats présentés dans ce chapitre. Dans le cinquième chapitre, nous nous intéressons à l'étude d'un processus de contact statique entre une poutre élastique et deux obstacles. Dans un premier temps, nous présentons une version bidimensionnelle associée au problème mécanique. Puis, nous proposons une formulation variationnelle et nous poursuivons avec un résultat d'existence et d'unicité de solution. Ensuite, nous prouvons un résultat de convergence portant sur la perturbation des données. Enfin, nous étudions un problème de contrôle optimal. Dans le sixième et le septième chapitre, nous considérons respectivement un problème de contact pour des matériaux viscoplastiques et viscoélastiques où le processus est quasistatique et le contact suit une loi de compliance normale et contrainte unilatérale. Après avoir présenté la formulation forte du problème, nous donnons une formulation variationnelle. Puis, nous démontrons un résultat d'existence et d'unicité de solution et nous étudions quelques résultats de convergence. Par ailleurs, dans l'étude du problème de contact viscoélastique nous introduisons une formulation variationnelle duale pour laquelle nous démontrons un résultat d'existence et d'unicité de la solution et nous étudions sa dépendance par rapport aux perturbations des données. Les travaux associés à ces résultats sont présentés dans les articles [15, 16, 79, 80, 81].

Chapitre 5

Introduction à la mécanique du contact

Dans ce chapitre, nous nous proposons de rappeler quelques éléments d'analyse ainsi que des notions de modélisation en mécanique du contact. Ce chapitre est structuré en quatre sections. Dans la première section, nous introduisons les espaces fonctionnels utilisés dans cette thèse et nous présentons leurs principales propriétés. Dans la deuxième section, nous décrivons le cadre physique de certains problèmes de contact étudiés ci-après. La troisième section est consacrée aux lois de comportement pour les matériaux élastiques, viscoélastiques et viscoplastiques. Nous terminons avec la quatrième section où nous précisons les conditions aux limites de contact sans frottement qui seront utilisées dans les chapitres suivants.

5.1 Espaces fonctionnels

Dans cette section, nous présentons les espaces fonctionnels utilisés dans cette partie ainsi que leurs principales propriétés qui seront indispensables dans l'étude des problèmes de contact abordés dans ce manuscrit. Dans ce qui suit, Ω est un domaine borné de \mathbb{R}^d ($d = 1, 2, 3$), de frontière Γ lipschitzienne. Par ailleurs, nous supposons que Γ se décompose de la manière suivante : $\Gamma = \overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_2 \cup \overline{\Gamma}_3$ de telle sorte que $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset$ si $i \neq j$ où Γ_1, Γ_2 et Γ_3 sont mesurables et, de plus, $\text{mes}(\Gamma_1) > 0$. En outre, nous notons par $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ l'adhérence de Ω dans \mathbb{R}^d et nous désignons par $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \dots, \nu_d)$ la normale unitaire sortante à Γ . Un point générique de \mathbb{R}^d est noté par $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_d)$ et une collection d'entiers non négatifs est notée par $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$, appelée un multi-indice, et sa longueur est $|\alpha| = \sum_{i=1}^d \alpha_i$. Nous adoptons ici la convention de l'indice muet ; aussi un indice qui suit une virgule indique une dérivation partielle par rapport à la composante correspondante de la variable. Notons également qu'un point au-dessus d'une fonction représente la dérivée temporelle.

5.1.1 Espaces de fonctions scalaires

Les espaces $C^m(\overline{\Omega})$. Soit $C(\overline{\Omega})$ l'espace des fonctions continues sur $\overline{\Omega}$. Il est bien connu que $C(\overline{\Omega})$ est un espace de Banach s'il est muni de la norme suivante :

$$\|v\|_{C(\overline{\Omega})} = \sup\{|v(\boldsymbol{x})| : \boldsymbol{x} \in \Omega\} \equiv \max\{|v(\boldsymbol{x})| : \boldsymbol{x} \in \overline{\Omega}\}.$$

Notons par D^α l'opérateur différentiel défini par

$$D^\alpha v(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial^{|\alpha|} v(\boldsymbol{x})}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}}.$$

Evidemment D^0 représente l'opérateur identité. Deux exemples pour l'opérateur D^α sont :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} &= D^\alpha v(\boldsymbol{x}), \quad \alpha = (1, 0, \dots, 0); \\ \frac{\partial^d v(\boldsymbol{x})}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}} &= D^\alpha v(\boldsymbol{x}), \quad \alpha = (1, 1, \dots, 1). \end{aligned}$$

Pour tout entier m , $C^m(\overline{\Omega})$ désigne l'espace des fonctions continues sur $\overline{\Omega}$ dont les dérivées d'ordre au plus m sont également continues sur $\overline{\Omega}$, i.e.,

$$C^m(\overline{\Omega}) = \{v \in C(\overline{\Omega}) : D^\alpha v \in C(\overline{\Omega}) \text{ pour } |\alpha| \leq m\}.$$

Lorsque $m = 0$, nous notons usuellement $C(\overline{\Omega}) \equiv C^0(\overline{\Omega})$. L'espace $C^m(\overline{\Omega})$ est un espace de Banach dont la norme est donnée par

$$\|v\|_{C^m(\overline{\Omega})} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha v\|_{C(\overline{\Omega})}.$$

Par ailleurs, nous définissons l'espace des fonctions infiniment différentiables par

$$C^\infty(\overline{\Omega}) = \bigcap_{m=0}^{\infty} C^m(\overline{\Omega}) = \{v \in C(\overline{\Omega}) : v \in C^m(\overline{\Omega}) \quad \forall m \in \mathbb{Z}^+\}.$$

Le *support* d'une fonction v sur Ω est défini par

$$\text{supp } v = \overline{\{\mathbf{x} \in \Omega : v(\mathbf{x}) \neq 0\}}.$$

Nous disons qu'une fonction v est à support compact dans Ω si son support $\text{supp } v$ est un sous ensemble propre de l'ensemble Ω . Nous désignons par $C_0^\infty(\Omega)$ l'espace des fonctions infiniment différentiables sur l'ensemble Ω et à support compact dans Ω , i.e.,

$$C_0^\infty(\Omega) = \{v \in C^\infty(\Omega) : \text{supp } v \subset \Omega\}.$$

Il est facile de voir que $C_0^\infty(\Omega) \subset C^\infty(\overline{\Omega})$.

Les espaces $L^p(\Omega)$. Soit $p \in [1, \infty[$. Nous désignons par $L^p(\Omega)$ l'espace des fonctions mesurables définies sur Ω à valeurs dans \mathbb{R} telles que

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |v(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty.$$

$L^p(\Omega)$ est un espace de Banach muni de la norme $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$. De plus, il est séparable et, pour $1 < p < \infty$, il est réflexif.

Pour $p = \infty$, $L^\infty(\Omega)$ est l'espace des fonctions mesurables et essentiellement bornées définies sur Ω à valeurs dans \mathbb{R} , i.e., pour tout $v \in L^\infty(\Omega)$ il existe une constante $c > 0$ telle que $v(\mathbf{x}) \leq c$ p.p. dans Ω . Il est muni de la norme

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} \text{ess}|v(x)| < \infty.$$

Il est également un espace de Banach.

Pour $p \in [1, \infty]$, son conjugué, noté q , est défini par

$$\begin{cases} \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 & \text{si } p \neq 1, \\ q = \infty & \text{si } p = 1. \end{cases}$$

Soient $u \in L^p(\Omega)$ et $v \in L^q(\Omega)$. Alors, nous avons que

$$\int_{\Omega} |u(x)v(x)| dx \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}.$$

Cette inégalité est connue sous le nom d'inégalité de Hölder. En particulier, si $p = 2$ nous retrouvons l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\int_{\Omega} |u(x)v(x)| dx \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall u, v \in L^2(\Omega).$$

Notons que $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} |u(x)v(x)| dx \quad \forall u, v \in L^2(\Omega).$$

Par ailleurs, nous identifions $L^2(\Omega)$ à son dual, i.e., $(L^2(\Omega))' = L^2(\Omega)$.

Les espaces de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $p \in [1, \infty]$. Nous définissons l'espace de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ par

$$W^{k,p}(\Omega) = \{ u \in L^p(\Omega) \quad \text{tel que} \quad D^\alpha u \in L^p(\Omega) \quad \text{avec} \quad |\alpha| \leq k \}$$

qui est un espace de Banach lorsqu'on le munit de la norme suivante :

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} \right)^{1/p} & \text{si } 1 \leq p < +\infty, \\ \max_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)} & \text{si } p = +\infty. \end{cases}$$

Pour $p = 2$, l'espace $W^{k,2}(\Omega)$ sera noté par $H^k(\Omega)$; c'est un espace de Hilbert dont le produit scalaire est donné par

$$(u, v)_{H^k(\Omega)} = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq k} D^\alpha u(x) D^\alpha v(x) dx \quad \forall u, v \in H^k(\Omega).$$

Par la suite, nous présentons quelques propriétés importantes sur les espaces de Sobolev. Commençons par un résultat de compacité connu sous le nom du Théorème de Rellich dont la démonstration figure dans [3, 18], par exemple.

Théorème 5.1. (*Théorème de Rellich*) *L'injection canonique de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte, i.e., de toute suite bornée de $H^1(\Omega)$ nous pouvons extraire une sous suite convergente dans $L^2(\Omega)$.*

Notons que pour une fonction v de $H^1(\Omega)$, nous ne pouvons pas définir sa valeur à la frontière Γ . Le moyen qui permet de définir la trace d'une fonction $v \in H^1(\Omega)$ est donné par le théorème suivant.

Théorème 5.2. (*Théorème de trace de Sobolev*) *Soit Ω un ouvert borné et lipschitzien de \mathbb{R}^d . Alors, il existe une application linéaire et continue $\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$ telle que*

$$\gamma v = v|_{\Gamma} \quad \text{lorsque } v \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}).$$

De plus, l'application $\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$ est compacte, i.e., de toute suite bornée $\{v_n\}$ de $H^1(\Omega)$, il existe une sous suite $\{v_{n_p}\} \subset \{v_n\}$ telle que $\{\gamma v_{n_p}\}$ est une suite convergente dans $L^2(\Gamma)$.

L'application γ s'appelle *application de trace*. La continuité de cette application implique qu'il existe une constante $c > 0$ telle que

$$(5.1) \quad \|\gamma v\|_{L^2(\Gamma)} \leq c \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Par ailleurs, notons que l'application γ n'est pas surjective et l'image de $H^1(\Omega)$ par γ est notée par $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

Pour plus de détails sur les espaces de Sobolev, nous renvoyons le lecteur à [1, 18, 31].

5.1.2 Espaces fonctionnels pour la mécanique

Nous notons par \mathbb{S}^d l'espace des tenseurs symétriques d'ordre deux sur \mathbb{R}^d ($d = 1, 2, 3$). Le produit scalaire et la norme euclidienne sur \mathbb{R}^d et \mathbb{S}^d sont donnés respec-

tivement par

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= u_i v_i, & \|\mathbf{v}\| &= (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})^{\frac{1}{2}} & \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^d, \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau} &= \sigma_{ij} \tau_{ij}, & \|\boldsymbol{\tau}\| &= (\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau})^{\frac{1}{2}} & \forall \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{S}^d.\end{aligned}$$

Pour l'étude des problèmes de contact, nous introduisons les espaces suivants :

$$H = L^2(\Omega)^d = \{ \mathbf{v} = (v_i) : v_i \in L^2(\Omega), \quad 1 \leq i \leq d \},$$

$$Q = \{ \boldsymbol{\tau} = (\tau_{ij}) : \tau_{ij} = \tau_{ji} \in L^2(\Omega), \quad 1 \leq i, j \leq d \},$$

$$H_1 = \{ \mathbf{v} = (v_i) : v_i \in H^1(\Omega), \quad 1 \leq i \leq d \},$$

$$Q_1 = \{ \boldsymbol{\tau} \in Q : \text{Div } \boldsymbol{\tau} \in H \},$$

$$\mathbf{Q}_\infty = \{ \mathcal{E} = (\mathcal{E}_{ijkl}) : \mathcal{E}_{ijkl} = \mathcal{E}_{jikl} = \mathcal{E}_{klij} \in L^\infty(\Omega), \quad 1 \leq i, j, k, l \leq d \},$$

où $\boldsymbol{\varepsilon} : H_1 \rightarrow Q$ et $\text{Div} : Q_1 \rightarrow H$ sont respectivement les opérateurs de *déformation* et de *divergence* définis par

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = (\varepsilon_{ij}(\mathbf{u})), \quad \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad \text{Div } \boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij,j}) \quad 1 \leq i, j \leq d.$$

Les espaces H , Q , H_1 et Q_1 sont des espaces de Hilbert munis des produits scalaires

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_H = \int_{\Omega} u_i v_i dx = \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} dx,$$

$$(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau})_Q = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \tau_{ij} dx = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau} dx,$$

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{H_1} = (\mathbf{u}, \mathbf{v})_H + (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_Q,$$

$$(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau})_{Q_1} = (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau})_Q + (\text{Div } \boldsymbol{\sigma}, \text{Div } \boldsymbol{\tau})_H,$$

et les normes associées sont notées respectivement par $\|\cdot\|_H$, $\|\cdot\|_Q$, $\|\cdot\|_{H_1}$ et $\|\cdot\|_{Q_1}$.

Par ailleurs, notons que \mathbf{Q}_∞ est un espace de Banach muni de la norme

$$\|\mathcal{E}\|_{\mathbf{Q}_\infty} = \max_{1 \leq i, j, k, l \leq d} \|\mathcal{E}_{ijkl}\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Un calcul élémentaire nous donne que

$$(5.2) \quad \|\mathcal{E}\boldsymbol{\tau}\|_Q \leq d \|\mathcal{E}\|_{\mathbf{Q}_\infty} \|\boldsymbol{\tau}\|_Q \quad \forall \mathcal{E} \in \mathbf{Q}_\infty, \forall \boldsymbol{\tau} \in Q.$$

Puisque la frontière Γ est lipschitzienne, le vecteur normal extérieur $\boldsymbol{\nu}$ est défini presque partout. Pour tout champ de vecteur $\mathbf{u} \in H_1$, nous définissons respectivement les composantes *normales* u_ν et les composantes *tangentielles* \mathbf{u}_τ par

$$(5.3) \quad u_\nu = \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nu} \quad \text{et} \quad \mathbf{u}_\tau = \mathbf{u} - u_\nu \boldsymbol{\nu}.$$

De même, pour un champ tensoriel régulier $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \rightarrow \mathbb{S}^d$, σ_ν et $\boldsymbol{\sigma}_\tau$ représentent respectivement les composantes *normales* et *tangentielles* de $\boldsymbol{\sigma}$ qui sont données par

$$(5.4) \quad \sigma_\nu = (\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu}) \cdot \boldsymbol{\nu} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\sigma}_\tau = \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} - \sigma_\nu \boldsymbol{\nu}.$$

Nous utilisons les formules (5.3) et (5.4) afin de trouver la relation

$$(5.5) \quad (\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu}) \cdot \mathbf{u} = \sigma_\nu u_\nu + \boldsymbol{\sigma}_\tau \mathbf{u}_\tau.$$

Par ailleurs, nous rappelons la formule de Green

$$(5.6) \quad \int_\Omega \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, dx + \int_\Omega \text{Div } \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v} \, dx = \int_\Gamma \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v} \, da \quad \forall \mathbf{v} \in H_1.$$

Dans l'étude des problèmes mécaniques de contact nous utilisons en général le sous espace V de H_1 défini par

$$V = \{ \mathbf{v} \in H_1 : \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \text{p.p. sur } \Gamma_1 \}.$$

Notons que V est un sous espace fermé de H_1 et, puisque $\text{mes}(\Gamma_1) > 0$, il résulte de l'inégalité de Korn qu'il existe une constante $c_K > 0$ dépendant uniquement de Ω et Γ_1 telle que

$$(5.7) \quad \|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})\|_Q \geq c_K \|\mathbf{v}\|_{H_1} \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Une démonstration de cette inégalité peut être trouvée dans [66]. Nous définissons le produit scalaire $(\cdot, \cdot)_V$ sur V par

$$(5.8) \quad (\mathbf{u}, \mathbf{v})_V = (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_Q$$

et sa norme associée définie par

$$(5.9) \quad \|\mathbf{v}\|_V = \|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})\|_Q.$$

Il résulte de (5.7) (5.9) que $\|\cdot\|_V$ et $\|\cdot\|_{H_1}$ sont des normes équivalentes sur V et, par conséquent, nous déduisons que $(V, \|\cdot\|_V)$ est un espace de Hilbert. Enfin, il existe une constante $c_0 > 0$ dépendant de Ω , Γ_1 et Γ_3 , telle que

$$(5.10) \quad \|\mathbf{v}\|_{L^2(\Gamma_3)^d} \leq c_0 \|\mathbf{v}\|_V \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Nous poursuivons avec une conséquence directe de l'inégalité de Korn.

Théorème 5.3. *Supposons que $\text{mes}(\Gamma_1) > 0$ et notons par $\varepsilon(V)$ l'image de l'opérateur de déformation $\varepsilon : V \rightarrow Q$, i.e.,*

$$\varepsilon(V) = \{\varepsilon(\mathbf{v}) : \mathbf{v} \in V\}.$$

Alors $\varepsilon(V)$ est un sous espace fermé de Q .

Démonstration. Soit $\{\tau_n\}$ une suite d'éléments de $\varepsilon(V)$ qui converge dans Q vers l'élément $\tau \in Q$, i.e.,

$$(5.11) \quad \tau_n \rightarrow \tau \quad \text{dans } Q \quad \text{lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

Alors il existe une suite $\{\mathbf{v}_n\} \subset V$ telle que

$$(5.12) \quad \tau_n = \varepsilon(\mathbf{v}_n) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Il résulte de (5.11) que $\{\tau_n\}$ est une suite de Cauchy dans Q . De ce fait, il vient de la norme de l'espace de V que $\{\mathbf{v}_n\}$ est une suite de Cauchy dans V . Ensuite, puisque V est complet, il existe un élément $\mathbf{v} \in V$ tel que

$$\mathbf{v}_n \rightarrow \mathbf{v} \quad \text{dans } V \quad \text{lorsque } n \rightarrow +\infty$$

et, par conséquent, nous déduisons que

$$(5.13) \quad \varepsilon(\mathbf{v}_n) \rightarrow \varepsilon(\mathbf{v}) \quad \text{dans } Q \quad \text{lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

Nous combinons maintenant (5.11), (5.12) et (5.13) pour déduire que $\tau = \varepsilon(\mathbf{v})$, ce qui implique que $\tau \in \varepsilon(V)$ et conclut la démonstration du Théorème 5.3. \square

5.2 Cadre physique

Dans cette section, nous introduisons le cadre physique qui intervient dans cette thèse, puis nous établissons le modèle mathématique décrivant le contact entre un corps déformable et une fondation qui correspond au cadre physique introduit. Considérons un corps matériel occupant un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 1, 2, 3$) avec une frontière lipschitzienne Γ partitionnée en trois parties mesurables Γ_1 , Γ_2 et Γ_3 telles que $\text{mes}(\Gamma_1) > 0$. Le corps est fixé sur Γ_1 . Des tractions surfaciques de densité \mathbf{f}_2 agissent sur Γ_2 et des forces volumiques de densité \mathbf{f}_0 agissent dans Ω . Sur la partie Γ_3 , le corps est en contact avec une fondation (voir Figure II.5.1).

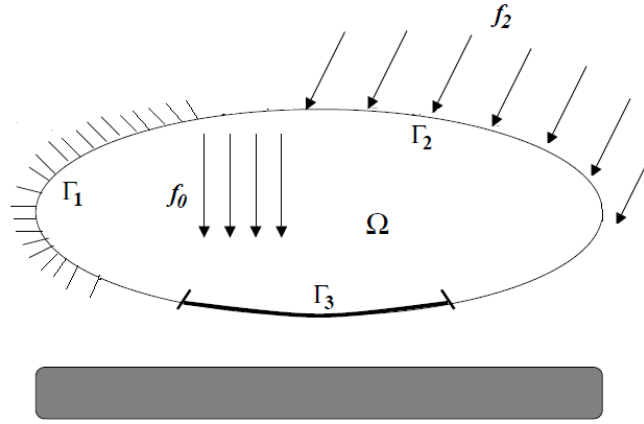


FIGURE II.5.1 : Cadre physique

Notons par $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ le champ de déplacements et par $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$ le champ de contraintes. Pour simplifier les notations, nous n'indiquons pas explicitement la dépendance des différentes fonctions par rapport aux variables \mathbf{x} et t .

Passons maintenant à la description du modèle mathématique qui décrit l'évolution du corps déformable associé au cadre physique ci-dessus. Les fonctions $\mathbf{u} : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^d$ et $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{S}^d$ représentent les inconnues du problème. L'évolution d'un corps est décrite par l'équation suivante :

$$(5.14) \quad \text{Div } \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_0 = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_+,$$

où $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ désigne la densité de masse et $\ddot{\mathbf{u}}$ représente l'accélération du corps.

Cette équation s'appelle *équation du mouvement de Cauchy*. Les processus d'évolution modélisés par l'équation (5.14) s'appellent *processus dynamiques*. Dans certaines situations l'équation (5.14) peut se simplifier. Par exemple, dans le cas où le champ des vitesses $\dot{\mathbf{u}}$ varie très lentement par rapport au temps et donc, le terme $\rho \ddot{\mathbf{u}}$ peut être négligé. Dans ce cas, l'équation (5.14) devient

$$(5.15) \quad \text{Div } \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_0 = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_+.$$

L'équation (5.15) s'appelle *équation d'équilibre* et les processus d'évolution modélisés par cette équation s'appelle *processus quasistatiques*. Dans le cas statique cette équation est valable dans Ω .

Afin de compléter le modèle mathématique donné par l'équation (5.14) ou (5.15), nous allons préciser les conditions aux limites sur chacune des trois parties de Γ . D'abord, puisque le corps est encastré sur Γ_1 , le champ de déplacements y est nul, c'est-à-dire

$$(5.16) \quad \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}_+.$$

Cette condition s'appelle *condition aux limites de déplacement*.

En outre, des tractions surfaciques de densité \mathbf{f}_2 agissent sur la partie Γ_2 et, par conséquent, nous avons que

$$(5.17) \quad \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} = \mathbf{f}_2 \quad \text{sur } \Gamma_2 \times \mathbb{R}_+.$$

La condition (5.17) s'appelle *condition aux limites de traction*; elle signifie que le vecteur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu}$ est donné sur la partie Γ_2 .

A ce stade notons que le modèle mathématique n'est pas complet. En effet, donnons un exemple dans le cas $d = 3$. Nous faisons un bilan des équations disponibles et des inconnues à déterminer. Les relations (5.14) ou (5.15) constituent trois équations et, de plus, nous avons six équations viennent des relations déplacement-déformation. D'autre part, le nombre total des inconnues est quinze : trois inconnues du champ de déplacements, six inconnues du tenseur des déformations et six inconnues du champ de contraintes. Donc, il est évident du point de vue mathématique que nous ne pouvons pas résoudre le modèle mathématique car ils manquent, en

principe, six équations. Nous concluons alors que les équations que nous disposons sont insuffisantes à elles seules pour résoudre le problème mathématique.

Par ailleurs, du point de vue physique, l'équation (5.14) ou (5.15) modélisent un processus universel valable pour tous les matériaux et donc elles sont insuffisantes à elles seules pour décrire l'équilibre des corps matériels. Il est nécessaire de décrire ce qui propre au matériau lui même ; c'est l'objet des lois de comportement que nous présentons dans la section suivante. Enfin, pour compléter notre modèle mathématique, il faut préciser les conditions aux limites de contact sur la partie Γ_3 ; cela fait l'objet de la Section 5.4.

5.3 Lois de comportement

Dans cette section, nous présentons les lois de comportement pour les matériaux élastiques, viscoélastiques et viscoplastiques que nous utilisons dans les chapitres suivants. Ces lois sont présentées par une relation entre le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$, le tenseur des déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$ et leurs dérivées temporelles $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ et $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$. Les lois de comportement caractérisent ce qui propre à chaque type de matériau. L'origine de ces lois est souvent expérimentale et c'est toute une série d'essais qu'il faut réaliser pour établir une loi de comportement.

5.3.1 Lois de comportement élastique

Les expériences physiques, qui constituent le point de départ pour établir les lois de comportement, divisent les matériaux élastiques en deux types : matériaux élastiques linéaires et non linéaires.

Dans le cas d'élasticité linéaire unidimensionnelle, le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ et le tenseur des déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$ sont reliés par la loi de comportement de *Hooke* qui est donnée par

$$\boldsymbol{\sigma} = E \boldsymbol{\varepsilon},$$

où $E > 0$ s'appelle le *module de Young*. Cette loi est représentée dans la Figure ci-dessous.

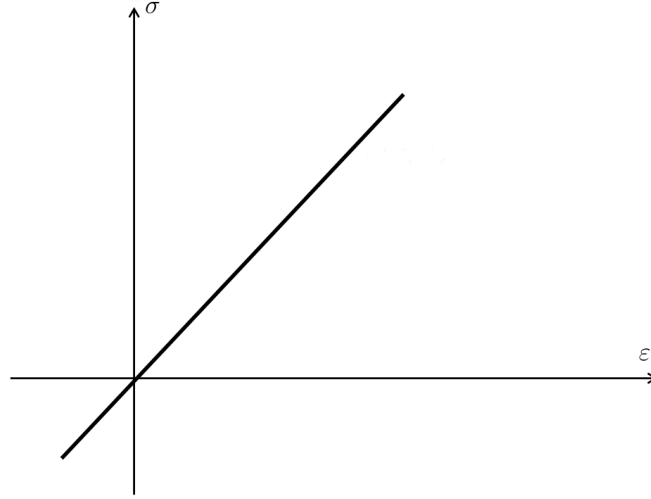


FIGURE II.5.2 : Loi de comportement élastique linéaire

La loi de Hooke a été généralisée par Cauchy qui a proposée d'exprimer une relation linéaire entre le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ et le tenseur des déformations $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$, c'est-à-dire

$$(5.18) \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}),$$

où $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_{ijkl})$ est un tenseur d'ordre quatre s'appelle *tenseur d'élasticité*. Ses composantes \mathcal{E}_{ijkl} s'appellent *coefficients d'élasticité* et elles sont indépendantes du tenseur des déformations. L'équation (5.18) s'écrit également sous la forme

$$(5.19) \quad \sigma_{ij} = \mathcal{E}_{ijkl} \varepsilon_{kl}(\mathbf{u}) \quad 1 \leq i, j, k, l \leq d.$$

Pour les matériaux homogènes, isotropes et linéaires élastiques, nous avons que

$$(5.20) \quad \mathcal{E}_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}),$$

où les constantes λ et μ sont les *coefficients de Lamé* et δ_{ij} est le symbole de Kronecker. En outre, nous utilisons (5.19) et (5.20) pour obtenir

$$(5.21) \quad \sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk}(\mathbf{u}) \delta_{ij} + 2 \mu \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}).$$

De (5.21), il résulte que

$$(5.22) \quad \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\delta_{ij},$$

où le module de Young E et le coefficient de Poisson ν sont définis par

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}.$$

Sous la forme tensorielle, (5.21) devient

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda(\operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))\mathbf{I}_d + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}),$$

où $\operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \varepsilon_{ii}(\mathbf{u})$ représente la trace du tenseur $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$.

Nous supposons dans ce manuscrit que le tenseur \mathcal{E} satisfait les conditions suivantes :

$$(5.23) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } \mathcal{E} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d. \\ \text{(b) } \mathcal{E}_{ijkl} \in L^\infty(\Omega) \quad 1 \leq i, j, k, l \leq d. \\ \text{(c) } \mathcal{E}\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau} \cdot \mathcal{E}\boldsymbol{\sigma} \quad \forall \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{S}^d, \quad \text{p.p. dans } \Omega. \\ \text{(d) Il existe } \alpha_0 > 0 \text{ tel que} \\ \quad \mathcal{E}\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau} \geq \alpha_0 \|\boldsymbol{\tau}\|^2 \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{S}^d, \quad \text{p.p. dans } \Omega. \end{array} \right.$$

En effet, dans l'étude du problème de contact du Chapitre 11, nous avons besoin d'utiliser le tenseur des déformations comme une fonction du tenseur des contraintes. Pour cela, nous utilisons (5.23) pour déduire que le tenseur \mathcal{E} est inversible et, par conséquent, nous inversons l'équation (5.18) pour obtenir que

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \mathcal{E}^{-1}\boldsymbol{\sigma}.$$

Ici $\mathcal{E}^{-1} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$ représente l'inverse du tenseur \mathcal{E} .

Passons maintenant aux matériaux élastiques non linéaires et commençons par le cas unidimensionnel, dont la loi de comportement s'écrit sous la forme

$$(5.24) \quad \sigma = f(\varepsilon),$$

où f est une fonction non linéaire à valeurs réelles. Comme exemple simple de cette loi nous considérons la fonction donnée par

$$(5.25) \quad f(\varepsilon) = \begin{cases} E\varepsilon + \beta(\varepsilon + \varepsilon_0) & \text{si } \varepsilon < -\varepsilon_0, \\ E\varepsilon & \text{si } |\varepsilon| \leq \varepsilon_0, \\ E\varepsilon + \beta(\varepsilon - \varepsilon_0) & \text{si } \varepsilon > \varepsilon_0, \end{cases}$$

où E , β et ε_0 sont des constantes positives. Le graphe de la loi de comportement (5.24) avec la fonction f donnée par (5.25) est représenté dans la Figure ci-dessous. Plusieurs exemples des lois de comportement élastiques non linéaires de la forme (5.25) peuvent être trouvés dans [41, 59, 69, 87], par exemple.

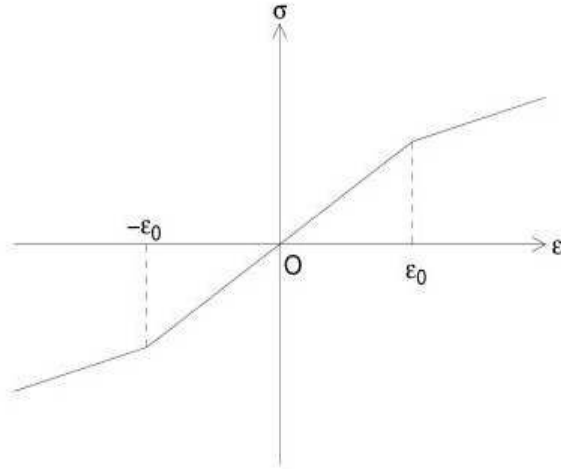


FIGURE II.5.3 : Loi de comportement élastique non linéaire

Dans le cas tridimensionnel, la loi de comportement élastique (5.24) est donnée par la relation

$$(5.26) \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}),$$

où \mathcal{F} est l'opérateur d'élasticité supposé non linéaire. Dans le cas où \mathcal{F} ne dépend pas explicitement de la variable spatiale $\mathbf{x} \in \Omega$, le milieu est dit homogène. Autrement, il est dit non homogène. Un exemple de cette loi est donné par

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \beta(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - P_K\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})).$$

Ici \mathcal{E} est un tenseur d'ordre quatre, β est une constante positive, K est un sous-ensemble convexe, fermé et non vide de \mathbb{S}^d tel que $\mathbf{0}_{\mathbb{S}^d} \in K$ et $P_K : \mathbb{S}^d \rightarrow K$ est l'opérateur de projection sur K .

Des problèmes de contact pour les matériaux élastiques ont été étudiés dans plusieurs travaux, voir [22, 23, 24, 25, 30, 65].

5.3.2 Lois de comportement viscoélastique

Les lois de comportement viscoélastiques sont introduites pour pallier aux insuffisances de la théorie de l'élasticité. En effet, certains phénomènes tels que la relaxation ou le fluage ne peuvent pas être décrits par les lois de comportement élastiques. En outre, les lois de comportement viscoélastiques sont utilisées pour décrire les matériaux comme les caoutchoucs, les polymères et les élastomères. Pour plus d'information sur ce type des lois de comportement, nous pouvons nous référer à [10, 11, 12, 29, 38, 70].

a) Lois de comportement viscoélastique à mémoire courte. Une telle loi est donnée sous la forme

$$(5.27) \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}) + \mathcal{B}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}),$$

où \mathcal{A} est l'opérateur de viscosité et \mathcal{B} est l'opérateur d'élasticité. Notons que ces deux opérateurs peuvent dépendre de la variable spatiale \mathbf{x} mais, par simplicité, nous utilisons respectivement les notations $\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}})$ et $\mathcal{B}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$ pour $\mathcal{A}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}))$ et $\mathcal{B}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))$. En particulier, si \mathcal{A} et \mathcal{B} sont des opérateurs linéaires alors (5.27) nous conduit à la loi de comportement de Kelvin-Voigt

$$\sigma_{ij} = a_{ijkl} \varepsilon_{kl}(\dot{\mathbf{u}}) + b_{ijkl} \varepsilon_{kl}(\mathbf{u}),$$

où σ_{ij} , a_{ijkl} et b_{ijkl} représentent respectivement les composantes du tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$, du tenseur de viscosité \mathcal{A} et du tenseur d'élasticité \mathcal{B} .

L'analyse variationnelle de plusieurs problèmes de contact impliquant (5.27) se trouve dans [71, 72, 73], par exemple.

b) Lois de comportement viscoélastique à mémoire longue. Une loi de comportement viscoélastique à mémoire longue est donnée par

$$(5.28) \quad \boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)) + \int_0^t \mathcal{R}(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s))ds,$$

où \mathcal{F} est l'opérateur d'élasticité et \mathcal{R} est l'opérateur de relaxation. Notons également que ces deux opérateurs dépendent de la variable spatiale \mathbf{x} . En outre, comme le montre la relation (5.28), l'opérateur \mathcal{R} dépend du temps. Dans le cas linéaire, le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij})$, qui satisfait (5.28), est donné par

$$\sigma_{ij}(t) = f_{ijkl} \varepsilon_{kl}(\mathbf{u}(t)) + \int_0^t r_{ijkl}(t-s)\varepsilon_{kl}(\mathbf{u}(s)) ds,$$

où f_{ijkl} et r_{ijkl} représentent respectivement les composantes du tenseur d'élasticité et de relaxation. Notons également que les coefficients f_{ijkl} et r_{ijkl} dépendent de la variable spatiale \mathbf{x} .

Pour plus de détails sur les lois de comportement viscoélastiques à mémoire longue, nous renvoyons à [31, 63, 87], par exemple.

5.3.3 Lois de comportement viscoplastique

Les lois de comportement viscoplastiques sont utilisées dans la littérature afin de décrire les propriétés des métaux et notamment les phénomènes de relaxation, de fluage et de déformations irréversibles. Une loi de comportement viscoplastique est donnée par

$$(5.29) \quad \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}) + \mathcal{G}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})),$$

où \mathcal{E} et \mathcal{G} représentent respectivement l'opérateur linéaire, décrivant les propriétés élastiques du matériau, et la fonction constitutive non linéaire, décrivant son comportement viscoplastique. Un exemple unidimensionnel de la loi (5.29) peut se construire de la façon suivante : supposons que la déformation ε est composée de deux parties, la déformation élastique ε^e et la déformation plastique ε^p , i.e.,

$$(5.30) \quad \varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p.$$

Supposons également que la déformation élastique ε^e satisfait la loi de Hooke et, de ce fait, nous avons que

$$(5.31) \quad \varepsilon^e = \frac{\sigma}{E} \quad \text{et} \quad \dot{\varepsilon}^p = \psi(\sigma, \varepsilon),$$

où E est le module de Young et $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction constitutive. Par conséquent, (5.30) devient

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \psi(\sigma, \varepsilon),$$

ce qui donne que

$$\dot{\sigma} = E \dot{\varepsilon} - E \psi(\sigma, \varepsilon).$$

En considérant maintenant la notation $G(\sigma, \varepsilon) = -E \psi(\sigma, \varepsilon)$ pour tout $(\sigma, \varepsilon) \in \mathbb{R}^2$, nous avons que

$$\dot{\sigma} = E \dot{\varepsilon} + G(\sigma, \varepsilon).$$

Plusieurs problèmes de contact pour des matériaux viscoplastiques ont été étudiés dans [28, 40, 45, 76] et les références citées dans ces travaux.

5.4 Conditions aux limites de contact sans frottement

Dans cette section, nous décrivons les conditions aux limites de contact sans frottement considérées dans les problèmes traités dans cette thèse. Les conditions de contact sont exprimées par des relations entre les composantes normales du champ de déplacements u_ν et les composantes normales du champ de contraintes σ_ν . Notons que les relations qui suivent sont supposées valables p.p. sur $\Gamma_3 \times \mathbb{R}_+$ ou p.p. sur Γ_3 dans le cas des processus statiques.

5.4.1 Condition de contact de Signorini

Cette condition modélise le contact entre un corps déformable et une fondation parfaitement rigide. Cette loi de contact a été proposée en 1933 par Antonio Signorini [75] et elle peut s'obtenir de la façon suivante.

Tout d'abord, puisque la fondation est supposée rigide, elle ne subira pas de déformations et donc le corps ne pourra pas la pénétrer. Alors, nous avons la condition de non pénétration suivante :

$$(5.32) \quad u_\nu \leq 0.$$

Pour les points de la partie Γ_3 de la frontière tels que $u_\nu < 0$, il n'y a pas de contact entre le corps et la fondation et, par conséquent, la force normale de contact s'annule, i.e., $\sigma_\nu = 0$. Par ailleurs, si $u_\nu = 0$ alors le contact se produit et donc la fondation exerce une force dans la direction orientée vers le corps, i.e., $\sigma_\nu \leq 0$. Pour résumer, les conditions de compression et de complémentarité s'écrivent par

$$(5.33) \quad \sigma_\nu \leq 0, \quad \sigma_\nu u_\nu = 0.$$

Rassemblons maintenant les relations (5.32) (5.33) pour voir que

$$u_\nu \leq 0, \quad \sigma_\nu \leq 0, \quad \sigma_\nu u_\nu = 0.$$

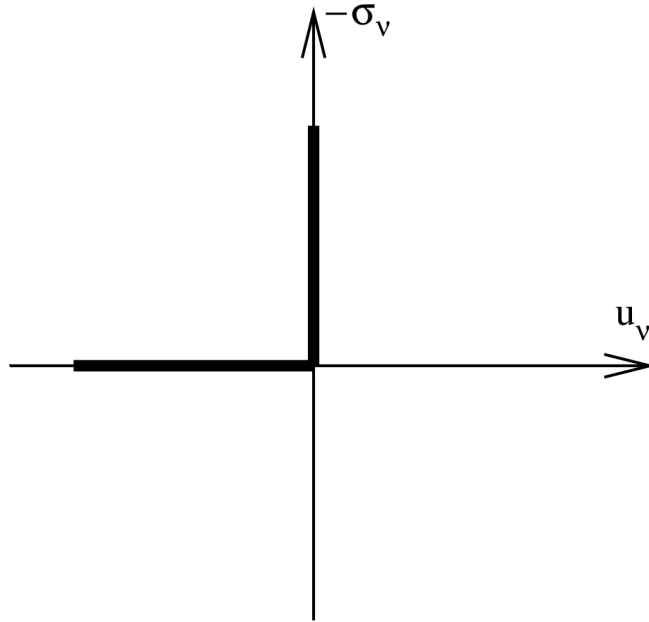


FIGURE II.5.4 : Condition de contact de Signorini

Cette condition s'appelle *condition de contact de Signorini*. Elle est représentée dans la Figure II.5.4 .

Supposons cette fois qu'il existe un *interstice* g entre le corps et la fondation ; la condition de contact de Signorini est alors donnée par

$$u_\nu \leq g, \quad \sigma_\nu \leq 0, \quad \sigma_\nu (u_\nu - g) = 0.$$

Dans ce cas, la condition de complémentarité se traduit de la manière suivante : si $u_\nu = g$ alors le corps est en contact avec la fondation et la force normale est orientée vers le corps, i.e., ($\sigma_\nu \leq 0$). Par ailleurs, si $u_\nu < g$ alors il n'y a pas de contact et dans ce cas la force normale est nulle, i.e., ($\sigma_\nu = 0$). Le graphe de cette loi est représenté dans la figure ci-dessous.

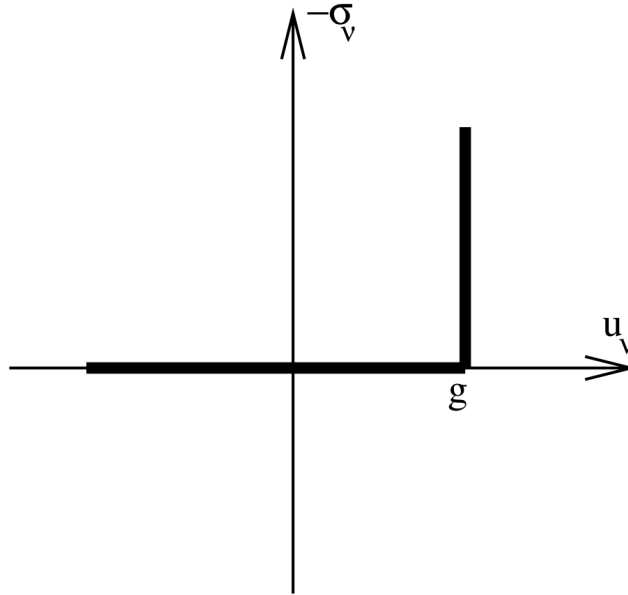


FIGURE II.5.5 : Condition de contact de Signorini avec interstice g

La condition de contact de Signorini a été utilisée dans de nombreux travaux, voir [23, 25, 30, 32, 46, 47] et les références citées dans ces travaux.

5.4.2 Condition de contact avec compliance normale

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à la condition de contact avec compliance normale dans laquelle la fondation est supposée déformable. Elle a été considérée pour la première fois dans [60] dans l'étude d'un problème dynamique pour des matériaux viscoélastiques. Elle s'exprime sous la forme

$$(5.34) \quad -\sigma_\nu = p(u_\nu),$$

où u_ν est le déplacement normal et $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction donnée qui s'annule pour tout argument négatif, c'est-à-dire

$$(5.35) \quad p(r) = 0 \quad \text{si} \quad r \leq 0.$$

Cette condition indique que la fondation exerce une réaction sur le corps en fonction de sa pénétration. Notons que la loi de compliance normale dépend de la fonction p

choisie. Un exemple de fonction qui peut être utilisé dans (5.34) est donné par

$$p(r) = cr^+, \quad r^+ = \max\{r, 0\}.$$

Ici c représente le coefficient de rigidité de la fondation. La représentation graphique de la loi de compliance normale correspondant à cette fonction est donnée dans la Figure II.5.6 .

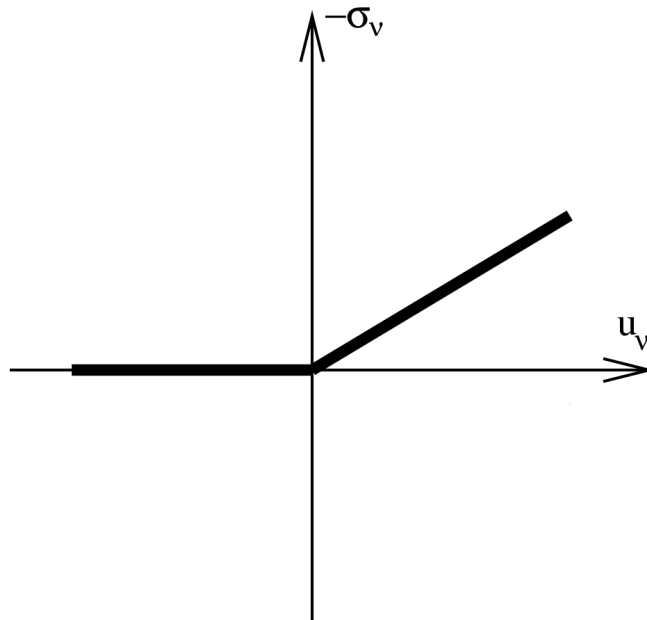


FIGURE II.5.6 : Contact avec compliance normale

Des problèmes de contact avec compliance normale ont été étudiés dans de nombreux travaux, nous pouvons nous référer à [5, 6, 7, 50, 52, 53, 54], par exemple.

5.4.3 Condition de contact avec compliance normale et contrainte unilatérale

Cette condition a été considérée pour la première fois dans [48] dans l'étude d'un problème dynamique pour des matériaux viscoplastiques. Elle s'exprime sous la forme

$$\begin{cases} u_\nu \leq g, \quad \sigma_\nu + p(u_\nu) \leq 0, \\ (u_\nu - g)(\sigma_\nu + p(u_\nu)) = 0, \end{cases}$$

où g est une constante strictement positive et p est une fonction satisfaisant la condition (5.35). Dans cette loi, la fondation est composée d'un matériau rigide recouvert d'un matériau déformable autorisant des pénétrations limitées. Une représentation graphique de cette loi est donnée dans la Figure II.5.7 .

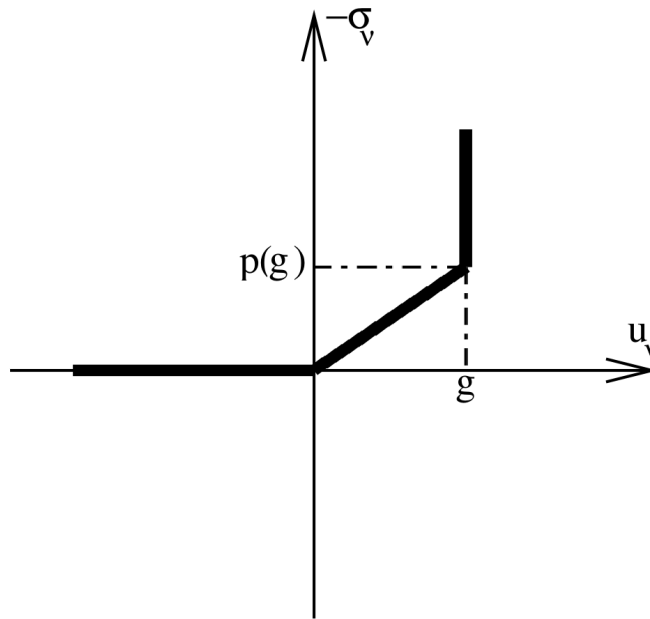


FIGURE II.5.7 : Contact avec compliance normale et contrainte unilatérale

Nous présentons maintenant les observations suivantes :

- 1) Lorsque $0 \leq u_\nu < g$, alors la réaction de la fondation est déterminée uniquement par le déplacement normal (puisque $-\sigma_\nu = p(u_\nu)$). Donc, nous sommes dans le cas de contact avec compliance normale.
- 2) Lorsque $u_\nu = g$, alors la couche d'aspérités est complètement écrasée et, par conséquent, le corps est en contact avec le matériau rigide. Le contact dans ce cas est décrit par la condition de contact de Signorini avec interstice g .
- 3) Si nous faisons tendre g vers zéro, alors la couche d'aspérités disparaît et, de ce fait, nous retrouvons la loi de contact de Signorini. Dans le cas où $g \rightarrow \infty$, la fondation est constituée d'un matériau déformable et nous retrouvons la loi de

contact avec compliance normale. Dans le cas où $g > 0$ et $p = 0$, nous retrouvons la condition de contact de Signorini avec interstice g .

5.4.4 Condition de contact avec contrainte unilatérale et seuil critique

Cette condition de contact a été considérée dans l'article [16] dans l'étude d'un problème de contact statique pour des matériaux élastiques. Dans cette condition, la fondation est constituée d'un matériau parfaitement rigide recouvert d'un matériau rigide-plastique d'épaisseur g . Elle se présente sous la forme

$$(5.36) \quad u_\nu \leq g, \quad \left. \begin{array}{ll} \sigma_\nu = 0 & \text{si } u_\nu < 0 \\ -F < \sigma_\nu < 0 & \text{si } u_\nu = 0 \\ \sigma_\nu = -F & \text{si } 0 < u_\nu < g \\ \sigma_\nu \leq -F & \text{si } u_\nu = g \end{array} \right\},$$

et sa représentation graphique figure ci-dessous.

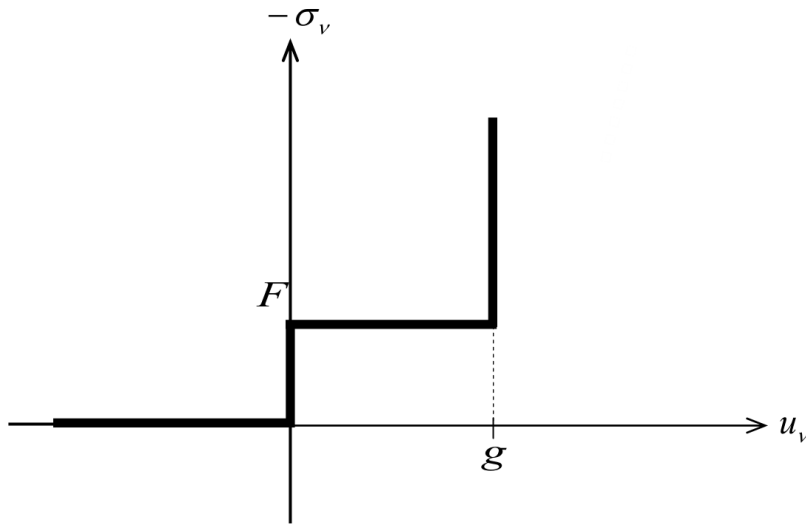


FIGURE II.5.8 : Contact avec contrainte unilatérale et seuil critique

Afin d'obtenir cette loi de contact, nous supposons que la contrainte normale σ_ν a une décomposition additive de la forme

$$(5.37) \quad \sigma_\nu = \sigma_\nu^R + \sigma_\nu^P,$$

où σ_ν^R décrit la réaction du matériau rigide de la fondation et σ_ν^P décrit la réaction du matériau rigide-plastique. Supposons que σ_ν^R satisfait la condition de contact de Signorini avec interstice g , c'est-à-dire

$$(5.38) \quad u_\nu \leq g, \quad \sigma_\nu^R \leq 0, \quad \sigma_\nu^R (u_\nu - g) = 0.$$

Supposons également que σ_ν^P satisfait la condition

$$(5.39) \quad -F \leq \sigma_\nu^P \leq 0, \quad \sigma_\nu^P = \begin{cases} 0 & \text{si } u_\nu < 0, \\ -F & \text{si } u_\nu > 0, \end{cases}$$

où F est une fonction positive qui représente le seuil critique du matériau rigide-plastique. En utilisant la condition (5.39), nous avons que

$$\begin{aligned} -F < \sigma_\nu^P < 0 &\implies u_\nu \leq 0, \\ \sigma_\nu^P = -F &\implies u_\nu \geq 0. \end{aligned}$$

Une représentation graphique de la condition (5.39) est donnée dans la figure ci-dessous.

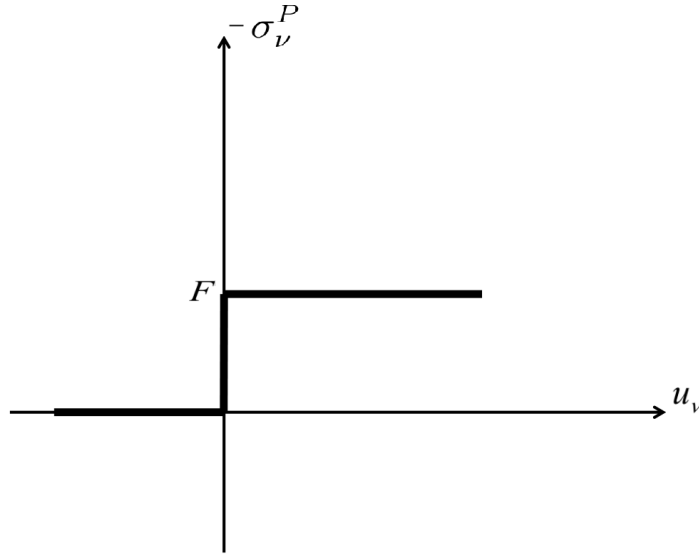


FIGURE II.5.9 : Condition de contact (5.39)

Nous combinons maintenant les conditions (5.38) et (5.39) pour obtenir la condition de contact (5.36). En effet :

- a) Si $u_\nu < 0$, alors (5.39) implique que $\sigma_\nu^P = 0$, (5.38) implique que $\sigma_\nu^R = 0$ et, par conséquent, l'égalité (5.37) montre que $\sigma_\nu = 0$.
- b) Si $u_\nu = 0$, alors (5.39) implique que $-F < \sigma_\nu^P < 0$, (5.38) implique que $\sigma_\nu^R = 0$ et, par conséquent, la décomposition (5.37) montre que $-F < \sigma_\nu < 0$.
- c) Si $0 < u_\nu < g$, alors (5.39) implique que $\sigma_\nu^P = -F$, (5.38) implique que $\sigma_\nu^R = 0$ et, par conséquent, la décomposition (5.37) montre que $\sigma_\nu = -F$.
- d) Si $u_\nu = g$, alors (5.39) implique que $\sigma_\nu^P = -F$, (5.38) implique que $\sigma_\nu^R \leq 0$ et, par conséquent, l'égalité (5.37) montre que $\sigma_\nu \leq -F$.

Nous donnons maintenant quelques interprétations physiques de cette condition de contact. D'abord, lorsqu'il y a une séparation entre le corps et la fondation, c'est-à-dire $u_\nu < 0$, alors la réaction de la fondation est nulle, i.e., $\sigma_\nu = 0$. Supposons maintenant qu'il y a une pénétration mais, sans atteindre le seuil g , c'est-à-dire $0 < u_\nu < g$, alors la réaction du matériau rigide-plastique n'a pas encore atteint le seuil critique F . Si le matériau rigide-plastique est complètement écrasé, c'est-à-dire $u_\nu = g$, alors le corps est en contact avec le matériau rigide et donc la réaction de la fondation dépasse le seuil critique F du matériau rigide-plastique, i.e., $-\sigma_\nu > F$. Nous reviendrons sur cette condition de contact dans le Chapitre 8.

5.4.5 Condition de contact tangentielle

A part les conditions de contact, il convient de décrire les conditions aux limites dans le plan tangent de la surface Γ_3 . Dans cette thèse, nous supposons que la surface de contact est idéalisée et, par conséquent, le frottement est négligeable. Ceci implique que

$$\sigma_\tau = \mathbf{0}.$$

Autrement dit, la contrainte tangentielle s'annule sur la surface de contact tout au long du processus.

L'analyse variationnelle de différents problèmes de contact sans frottement peut être trouvée dans [33, 34, 47].

Nous terminons ce paragraphe en rappelant que dans la littérature le frottement est décrit par la loi de Coulomb (formulée pour la première fois par Amontons en 1699) et ses versions. Pour des applications sur cette loi, nous renvoyons le lecteur à [22, 23, 27, 64], par exemple.

Chapitre 6

Problème de contact élastique unidimensionnel avec contrainte unilatérale

Dans ce chapitre, nous considérons un problème de contact unidimensionnel modélisant le contact entre une tige élastique et un ressort non linéaire. Ce contact est décrit à l'aide d'une loi de contrainte unilatérale. Ce chapitre est composé de quatre sections. Dans la première section, nous présentons la formulation forte du problème mécanique ainsi que les hypothèses nécessaires sur les données afin d'obtenir une formulation variationnelle. Dans la deuxième section, nous démontrons un résultat d'existence et d'unicité d'une solution faible. Dans la troisième section, nous étudions un résultat de convergence en utilisant la méthode de pénalisation. Nous terminons avec la quatrième section qui est consacrée à la dépendance de la solution par rapport à une perturbation de l'ensemble des contraintes. Plus précisément, nous établissons que la solution faible du problème dans lequel est introduite une perturbation dans les contraintes unilatérales converge vers la solution faible du problème original lorsque le paramètre de perturbation tend vers zéro. Les résultats présentés dans ce chapitre ont été inclus dans l'article [79].

6.1 Problème mécanique et formulation variationnelle

Le cadre physique correspondant à notre modèle mécanique est le suivant : nous considérons une tige élastique occupant un intervalle $[0, L]$ avec $L > 0$. La tige est fixée à $x = 0$ et son extrémité $x = L$ est en contact avec un ressort non linéaire de longueur d qui est attaché à un mur rigide \mathcal{W} . Nous supposons que la tige est soumise à l'action des forces volumiques de densité f_0 . Dans la figure ci-dessous, les longueurs g_1 et g_2 sont données par

$$g_1 = d - l_1 \quad \text{et} \quad g_2 = d - l_2.$$

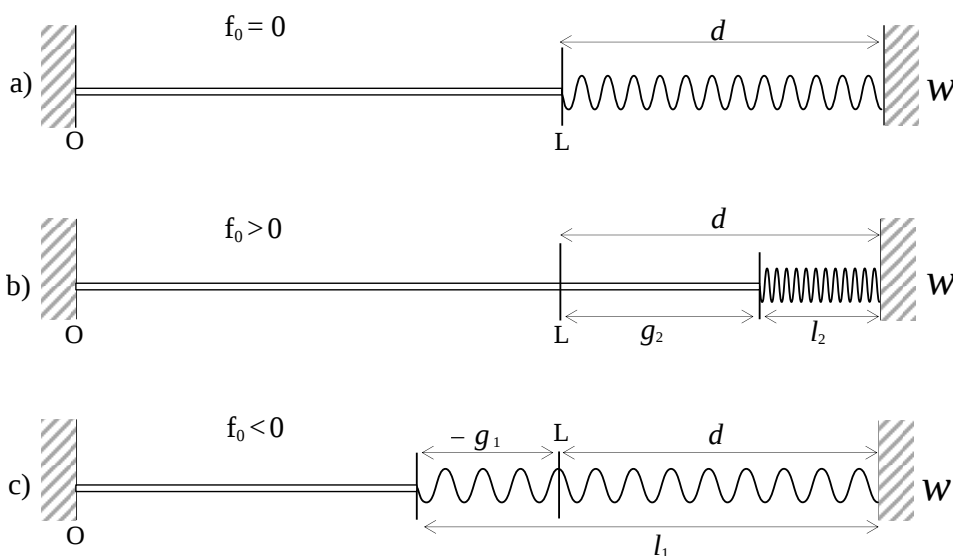


FIGURE II.6.1 : Cadre physique

D'après la Figure II.6.1, nous avons les observations suivantes : si la longueur du ressort est égale à l_2 , nous déduisons que le ressort est complètement comprimé et, de ce fait, il se comporte comme un rigide. D'autre part, si sa longueur devient l_1 alors le ressort est complètement allongé. Donc, nous concluons que la longueur du ressort prend ses valeurs dans l'intervalle $[l_2, l_1]$, i.e., $l_2 \leq d \leq l_1$.

Le problème mécanique se formule de la façon suivante.

Problème \mathcal{P} . *Trouver un champ de déplacements $u : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ et un champ de contraintes $\sigma : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ tels que*

$$(6.1) \quad \sigma(x) = \mathcal{F}\left(\frac{du}{dx}(x)\right) \quad \text{pour } x \in (0, L),$$

$$(6.2) \quad \frac{d\sigma}{dx}(x) + f_0(x) = 0 \quad \text{pour } x \in (0, L),$$

$$(6.3) \quad u(0) = 0,$$

$$(6.4) \quad \begin{cases} g_1 \leq u(L) \leq g_2, \\ -\sigma(L) = p(u(L)) \text{ si } g_1 < u(L) < g_2, \\ -\sigma(L) \leq p(u(L)) \text{ si } u(L) = g_1, \\ -\sigma(L) \geq p(u(L)) \text{ si } u(L) = g_2. \end{cases}$$

Nous fournissons maintenant une explication pour les équations et les conditions du Problème \mathcal{P} . Tout d'abord, l'équation (6.1) représente la loi de comportement élastique dans laquelle $\mathcal{F} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction constitutive. Notons qu'un exemple de cette fonction est donné par (5.25) qui conduit à la version unidimensionnelle de la loi de comportement élastique linéaire par morceaux utilisée dans [59, 87]. Ensuite, (6.2) est l'équation d'équilibre, exprimée ici dans le cas d'un processus statique. La condition (6.3) représente la condition aux limites de déplacement. Enfin, La relation (6.4) concerne la condition aux limites de contact avec contrainte unilatérale où p est une fonction à valeurs réelles donnée qui est positive lorsque l'argument est positif et négative lorsque l'argument est négatif. Une description détaillée de cette condition est la suivante :

a) la condition $g_1 \leq u(L) \leq g_2$ montre que le déplacement de l'extrémité de la tige $u(L)$ est soumis aux contraintes unilatérales.

b) si $g_1 < u(L) < g_2$, alors le ressort a un comportement élastique et la force normale exercée par le ressort sur la tige satisfait l'égalité $-\sigma(L) = p(u(L))$; elle montre que le ressort exerce une pression ou une compression sur la tige en fonction du déplacement du point de contact $x = L$.

c) si $u(L) = g_1$, alors le ressort est complètement allongé et la force normale exercée par le ressort sur la tige satisfait l'inégalité $-\sigma(L) \leq p(u(L))$.

d) si $u(L) = g_2$, alors le ressort est complètement compressé et la force normale exercée sur la tige satisfait l'inégalité $-\sigma(L) \geq p(u(L))$.

Dans l'étude du Problème \mathcal{P} nous utilisons l'espace de déplacements défini par

$$V = \{v \in H^1(0, L) : v(0) = 0\}.$$

L'espace V est un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$(u, v)_V = \int_0^L \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx \quad \forall u, v \in V$$

et de sa norme associée $\|\cdot\|_V$. En outre, en utilisant l'égalité

$$v(L) = \int_0^L \frac{dv}{dx} dx$$

ainsi que l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous avons que

$$(6.5) \quad |v(L)| \leq \sqrt{L} \|v\|_V \quad \forall v \in V.$$

Afin d'étudier l'existence et l'unicité de la solution du problème variationnel introduit ci-après nous supposons que la fonction constitutive \mathcal{F} satisfait les conditions suivantes :

$$(6.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } \mathcal{F} : (0, L) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}. \\ \text{(b) Il existe } L_{\mathcal{F}} > 0 \text{ tel que} \\ \quad |\mathcal{F}(x, \varepsilon_1) - \mathcal{F}(x, \varepsilon_2)| \leq L_{\mathcal{F}} |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| \\ \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in (0, L), \text{ p.p. } x \in (0, L). \\ \text{(c) Il existe } m_{\mathcal{F}} > 0 \text{ tel que} \\ \quad (\mathcal{F}(x, \varepsilon_1) - \mathcal{F}(x, \varepsilon_2))(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \geq m_{\mathcal{F}} |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|^2 \\ \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in (0, L). \\ \text{(d) L'application } x \mapsto \mathcal{F}(x, \varepsilon) \text{ est mesurable sur } (0, L), \\ \quad \text{pour tout } \varepsilon \in \mathbb{R}. \\ \text{(e) L'application } x \mapsto \mathcal{F}(x, 0) \text{ appartient à l'espace } L^2(0, L). \end{array} \right.$$

Nous supposons également que la densité des forces volumiques f_0 a la régularité

$$(6.7) \quad f_0 \in L^2(0, L).$$

De même, nous supposons que la fonction p satisfait les conditions suivantes :

$$(6.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}. \\ \text{(b) Il existe } L_p > 0 \text{ tel que} \\ \quad |p(r_1) - p(r_2)| \leq L_p |r_1 - r_2| \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}. \\ \text{(c) } (p(r_1) - p(r_2))(r_1 - r_2) \geq 0 \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}. \\ \text{(d) } p(r) > 0 \text{ si } r > 0 \text{ et } p(r) < 0 \text{ si } r < 0. \end{array} \right.$$

Un exemple simple de fonction qui satisfait la condition (6.8) est donné par

$$p(r) = \begin{cases} k_1 r & \text{si } r < 0, \\ k_2 r & \text{si } r \geq 0, \end{cases}$$

où k_1, k_2 sont des constantes positives représentant les coefficients de rigidité du ressort. Notons que le cas où $k_1 = k_2 = k$ correspond à un ressort linéaire de coefficient de rigidité k .

Par ailleurs, nous supposons la condition de petitesse

$$(6.9) \quad L_p < \frac{m_{\mathcal{F}}}{L}.$$

Enfin, supposons que les longueurs g_1 et g_2 satisfont

$$(6.10) \quad g_1 < 0 < g_2.$$

Nous nous intéressons maintenant à la formulation variationnelle du problème mécanique \mathcal{P} . Pour cela, nous introduisons l'ensemble de déplacements admissibles U ainsi que l'opérateur $A : V \rightarrow V$, la fonctionnelle $j : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ et l'élément $f \in V$ définis par

$$(6.11) \quad U = \{u \in V : g_1 \leq u(L) \leq g_2\},$$

$$(6.12) \quad (Au, v)_V = \int_0^L \mathcal{F}\left(\frac{du}{dx}\right) \frac{dv}{dx} dx \quad \forall u, v \in V,$$

$$(6.13) \quad j(u, v) = p(u(L)) v(L) \quad \forall u, v \in V,$$

$$(6.14) \quad (f, v)_V = \int_0^L f_0 v dx \quad \forall v \in V.$$

Supposons que (u, σ) est un couple de fonctions suffisamment régulières vérifiant (6.1) (6.4) et soit $v \in U$. En multipliant l'équation (6.2) par la fonction $v - u$, ensuite en intégrant l'équation obtenue sur $(0, L)$ et en utilisant la formule de Green (5.6), nous obtenons que

$$\int_0^L \sigma \left(\frac{dv}{dx} - \frac{du}{dx} \right) dx = \int_0^L f_0 (v - u) dx + \sigma(L)(v(L) - u(L)) - \sigma(0)(v(0) - u(0)).$$

Puis, nous utilisons la condition (6.3) et l'inclusion $v \in U$ pour obtenir que

$$(6.15) \quad \int_0^L \sigma \left(\frac{dv}{dx} - \frac{du}{dx} \right) dx = \int_0^L f_0 (v - u) dx + \sigma(L)(v(L) - u(L)).$$

D'autre part, nous utilisons la condition (6.4) et la définition (6.11) afin de voir que

$$(6.16) \quad \sigma(L)(v(L) - u(L)) \geq -p(u(L))(u(L) - v(L)).$$

En combinant maintenant (6.15) (6.16) et en utilisant les définitions (6.13) (6.14), nous trouvons que

$$(6.17) \quad \int_0^L \sigma \left(\frac{dv}{dx} - \frac{du}{dx} \right) dx + j(u, v) - j(u, u) \geq (f, v - u)_V.$$

Enfin, nous combinons la loi de comportement (6.1), l'inégalité (6.17) et les définitions (6.11) (6.12) pour obtenir la formulation variationnelle suivante du problème mécanique \mathcal{P} .

Problème \mathcal{P}^V . *Trouver un champ de déplacements $u \in U$ tel que*

$$(6.18) \quad (Au, v - u)_V + j(u, v) - j(u, u) \geq (f, v - u)_V \quad \forall v \in U.$$

Notons que le Problème \mathcal{P}^V est formulé en termes de champ de déplacements. Une fois que ce dernier est connu, le champ de contraintes peut être facilement déduit en utilisant la loi constitutive (6.1). Un couple (u, σ) qui satisfait (6.1) et (6.18) est appelé *solution faible* du problème de contact sans frottement \mathcal{P} .

6.2 Existence et unicité de la solution

Dans cette section, nous présentons un résultat d'existence et d'unicité de la solution du problème variationnel \mathcal{P}^V .

Théorème 6.1. *Supposons que les conditions (6.6) (6.10) sont vérifiées. Alors le Problème \mathcal{P}^V admet une solution unique $u \in U$.*

Démonstration. Nous utilisons le Théorème 2.1 avec $X = V$ et $K = U$. D'abord, notons qu'il est facile de vérifier que U est une partie convexe, fermée et non vide de V , c'est-à-dire, la condition (2.2) est satisfaite. Ensuite, nous considérons l'opérateur A défini par (6.12) et nous utilisons la condition (6.6)(c) afin de voir que

$$(6.19) \quad \begin{aligned} (Au - Av, u - v)_V &= \int_0^L \left(\mathcal{F}\left(\frac{du}{dx}\right) - \mathcal{F}\left(\frac{dv}{dx}\right) \right) \left(\frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx} \right) dx \\ &\geq m_{\mathcal{F}} \|u - v\|_V^2 \quad \forall u, v \in V. \end{aligned}$$

De même, en utilisant la définition (6.12) avec la condition (6.6)(b), nous trouvons

$$(6.20) \quad \|Au - Av\|_V \leq L_{\mathcal{F}} \|u - v\|_V \quad \forall u, v \in V.$$

De (6.19) et (6.20), nous déduisons que $A : V \rightarrow V$ est un opérateur fortement monotone et de Lipschitz sur l'espace V , i.e., il satisfait la condition (2.3) avec $m = m_{\mathcal{F}}$ et $M = L_{\mathcal{F}}$.

Par ailleurs, notons que pour tout $\eta \in V$ la fonctionnelle $j(\eta, \cdot) : V \rightarrow \mathbb{R}$, définie par (6.13), est convexe. De plus, en utilisant l'inégalité (6.5), nous déduisons que la fonctionnelle $j(\eta, \cdot)$ est continue et, par conséquent, elle satisfait la condition (2.4)(a). Considérons maintenant $\eta_1, \eta_2, v_1, v_2 \in V$. Nous utilisons l'hypothèse (6.8)(b) et l'inégalité (6.5) pour obtenir que

$$\begin{aligned} &j(\eta_1, v_2) - j(\eta_1, v_1) + j(\eta_2, v_1) - j(\eta_2, v_2) \\ &= (p(\eta_1(L)) - p(\eta_2(L)))(v_2(L) - v_1(L)) \\ &\leq L_p L \|\eta_1 - \eta_2\|_V \|v_1 - v_2\|_V. \end{aligned}$$

Il en résulte que la fonctionnelle j satisfait la condition (2.4)(b) avec $\alpha = L_p L$. En outre, d'après l'hypothèse de petitesse (6.9), nous déduisons que la condition (2.5)

est satisfaite dans la mesure où $\alpha = L_p L$ et $m = m_{\mathcal{F}}$. En utilisant le Théorème 2.1, nous concluons que le Problème \mathcal{P}^V admet une solution unique $u \in U$, ce qui termine la démonstration du Théorème 6.1. \square

6.3 Méthode de pénalisation

Dans cette section, nous démontrons un résultat de convergence pour le Problème \mathcal{P} basé sur la pénalisation de la contrainte unilatérale. Pour ce faire, nous supposons que les conditions (6.6) (6.10) sont vérifiées et nous considérons la fonction $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$(6.21) \quad h(r) = \begin{cases} p(r - g_1) & \text{si } r < g_1, \\ 0 & \text{si } g_1 \leq r \leq g_2, \\ p(r - g_2) & \text{si } r > g_2. \end{cases}$$

Par ailleurs, en utilisant la condition (6.8), nous déduisons que la fonction h est monotone et lipschitzienne avec la constante L_p . Par conséquent, nous définissons l'opérateur de pénalisation $G : V \rightarrow V$ par

$$(6.22) \quad (Gu, v)_V = h(u(L)) v(L) \quad \forall u, v \in V.$$

Ensuite, pour tout $\mu > 0$, nous considérons le problème pénalisé suivant.

Problème \mathcal{P}_μ . *Trouver un champ de déplacements $u_\mu : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ et un champ de contraintes $\sigma_\mu : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ tels que*

$$(6.23) \quad \sigma_\mu(x) = \mathcal{F}\left(\frac{du_\mu}{dx}(x)\right) \quad \text{pour } x \in (0, L),$$

$$(6.24) \quad \frac{d\sigma_\mu}{dx}(x) + f_0(x) = 0 \quad \text{pour } x \in (0, L),$$

$$(6.25) \quad u_\mu(0) = 0,$$

$$(6.26) \quad -\sigma_\mu(L) = p(u_\mu(L)) + \frac{1}{\mu} h(u_\mu(L)).$$

En utilisant les notations (6.12) (6.14) et en procédant de la même manière que dans la Section 6.1, nous obtenons la formulation variationnelle suivante du Problème \mathcal{P}_μ .

Problème \mathcal{P}_μ^V . Trouver un champ de déplacements $u_\mu \in V$ tel que

$$(6.27) \quad \begin{aligned} (Au_\mu, v - u_\mu)_V + \frac{1}{\mu}(Gu_\mu, v - u_\mu)_V \\ + j(u_\mu, v) - j(u_\mu, u_\mu) \geq (f, v - u_\mu)_V \quad \forall v \in V. \end{aligned}$$

Nous avons le théorème d'existence, d'unicité et de convergence suivant, qui constitue le résultat principal de cette section.

Théorème 6.2. *Supposons que les conditions (6.6) (6.10) sont vérifiées. Alors :*

- i) *Pour tout $\mu > 0$, le Problème \mathcal{P}_μ^V possède une solution unique $u_\mu \in V$.*
- ii) *La solution u_μ du Problème \mathcal{P}_μ^V converge fortement dans l'espace V vers la solution u du Problème \mathcal{P}^V , i.e.,*

$$(6.28) \quad \|u_\mu - u\|_V \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } \mu \rightarrow 0.$$

Démonstration. Nous utilisons le Théorème 2.2 avec $X = V$ et $K = U$. Pour ce faire, nous prouvons que l'opérateur G , donné par (6.22), satisfait la condition (2.6). D'abord, nous utilisons la définition (6.22), l'inégalité (6.5) et le fait que la fonction h est lipschitzienne avec la constante L_p pour obtenir que

$$(Gu - Gv, w)_V \leq L_p L \|u - v\|_V \|w\|_V \quad \forall u, v, w \in V.$$

Nous prenons maintenant $w = Gu - Gv$ dans cette inégalité afin de déduire que

$$(6.29) \quad \|Gu - Gv\|_V \leq L_p L \|u - v\|_V \quad \forall u, v \in V.$$

En outre, en utilisant la définition (6.22) et la monotonie de la fonction h , nous obtenons que

$$(6.30) \quad \begin{aligned} (Gu - Gv, u - v)_V \\ = (h(u(L)) - h(v(L)))(u(L) - v(L)) \geq 0 \quad \forall u, v \in V. \end{aligned}$$

Il en résulte des inégalités (6.29) (6.30) que G satisfait les conditions (2.6)(a) (b).

D'autre part, soit $v \in U$. Alors, en utilisant la définition (6.21), il est facile de voir que $h(v(L)) = 0$ et, de ce fait, nous avons que

$$(Gv, w)_V = h(v(L))w(L) = 0 \quad \forall w \in V,$$

ce qui implique que $Gv = 0_V$. Par conséquent, il résulte de l'inégalité (6.30) que

$$(Gu, v - u)_V \leq 0 \quad \forall u \in V, v \in U.$$

Ceci montre que l'opérateur G satisfait la condition (2.6)(c).

Enfin, supposons que $Gu = 0_V$, c'est-à-dire

$$(Gu, v)_V = h(u(L))v(L) = 0 \quad \forall v \in V$$

et, par conséquent, nous déduisons que $h(u(L)) = 0$. Nous utilisons maintenant la définition (6.21) de la fonction h afin de voir que $g_1 \leq u(L) \leq g_2$, ce qui implique que $u \in U$.

Réciproquement, supposons que $u \in U$, c'est-à-dire, $g_1 \leq u(L) \leq g_2$. Par conséquent, en utilisant la définition (6.21), nous déduisons que $h(u(L)) = 0$ et, de ce fait, il résulte de la définition (6.22) que

$$(Gu, v)_V = 0 \quad \forall v \in V,$$

ce qui implique que $Gu = 0_V$. Nous en déduisons que l'opérateur G satisfait la condition (2.6)(d).

Nous concluons de tout ce qui précède que l'opérateur G satisfait la condition (2.6) et donc, le Théorème 6.2 est une conséquence du Théorème 2.2. \square

Le résultat de convergence (6.28) peut s'interpréter du point de vue mécanique de la manière suivante : la solution faible du problème de contact d'une tige élastique et un ressort rigide-élastique peut être approchée par la solution faible du problème de contact d'une tige élastique et un ressort purement élastique avec un coefficient de rigidité suffisamment petit.

6.4 Un résultat de convergence

Nous nous intéressons dans cette section au comportement de la solution du Problème \mathcal{P}^V lorsque l'on introduit une perturbation de l'ensemble des contraintes U . Dans ce qui suit, supposons que les conditions (6.6) (6.10) sont vérifiées. Pour tout

$\rho > 0$, soient $g_{1\rho}$ et $g_{2\rho}$ les perturbations de g_1 et g_2 satisfaisant les conditions

$$(6.31) \quad g_{1\rho} \leq 0 \leq g_{2\rho},$$

$$(6.32) \quad g_{1\rho} \rightarrow g_1 \text{ et } g_{2\rho} \rightarrow g_2 \quad \text{lorsque } \rho \rightarrow 0.$$

Considérons également la perturbation de l'ensemble U définie par

$$(6.33) \quad U_\rho = \{v \in V : g_{1\rho} \leq v(L) \leq g_{2\rho}\}.$$

Ensuite, nous considérons la perturbation suivante du Problème \mathcal{P}^V .

Problème \mathcal{P}_ρ^V . *Trouver un champ de déplacements $u_\rho \in U_\rho$ tel que*

$$(6.34) \quad (Au_\rho, v_\rho - u_\rho)_V + j(u_\rho, v_\rho) - j(u_\rho, u_\rho) \geq (f, v_\rho - u_\rho)_V \quad \forall v_\rho \in U_\rho.$$

Le résultat principal de cette section est le théorème ci-dessous.

Théorème 6.3. *Supposons que les conditions (6.6) (6.10) et (6.31) sont vérifiées.*

Alors :

i) *Pour tout $\rho > 0$, le Problème \mathcal{P}_ρ^V possède une solution unique $u_\rho \in U_\rho$.*

ii) *De plus, si la condition (6.32) est vérifiée, alors la solution u_ρ du Problème \mathcal{P}_ρ^V converge vers la solution u du Problème \mathcal{P}^V , i.e.,*

$$(6.35) \quad \|u_\rho - u\|_V \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } \rho \rightarrow 0.$$

Démonstration. Soit $\rho > 0$. Nous appliquons le Théorème 2.11 avec $X = V$, $K = U$ et $K_\rho = U_\rho$. D'abord, notons que la condition (6.10) nous permet de définir les fonctions $c : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ et $d : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ par les égalités

$$(6.36) \quad c(\rho) = \frac{g_{1\rho} - g_{2\rho}}{g_1 - g_2} \quad \text{et} \quad d(\rho) = \frac{g_{2\rho} g_1 - g_{1\rho} g_2}{g_1 - g_2}.$$

Par ailleurs, considérons une fonction θ telle que

$$(6.37) \quad \theta \in V \quad \text{et} \quad \theta(L) = 1.$$

Montrons maintenant que l'ensemble U_ρ s'écrit de la forme (2.32). Pour cela, prenons deux éléments arbitraires $u, v \in V$ tels que

$$v = \frac{g_{1\rho} - g_{2\rho}}{g_1 - g_2} u + \frac{g_{2\rho} g_1 - g_{1\rho} g_2}{g_1 - g_2} \theta.$$

Puis, nous utilisons (6.37) pour obtenir que

$$g_1 \leq u(L) \leq g_2 \quad \text{si et seulement si} \quad g_{1\rho} \leq v(L) \leq g_{2\rho}$$

et, par conséquent, (6.36) montre que

$$u \in U \quad \text{si et seulement si} \quad c(\rho)u + d(\rho)\theta \in U_\rho.$$

Il en résulte que

$$U_\rho = c(\rho)U + d(\rho)\theta.$$

D'autre part, les conditions (6.32) et (6.31) montrent respectivement que

$$\begin{aligned} c(\rho) \rightarrow 1 \quad \text{et} \quad d(\rho) \rightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad \rho \rightarrow 0, \\ 0_V \in U_\rho, \end{aligned}$$

ce qui implique que les conditions (2.35) (2.36) sont satisfaites.

Par ailleurs, en utilisant la propriété (6.8), il est facile de vérifier que la fonctionnelle j , définie par (6.13), satisfait les conditions (2.37)(a) (b). Considérons maintenant $\eta, u_1, u_2 \in V$. Nous utilisons la condition (6.8)(b) pour obtenir que

$$\begin{aligned} |j(\eta, u_1) - j(\eta, u_2)| &= |p(\eta(L))(u_1(L) - u_2(L))| \\ &\leq L_p |\eta(L)| |u_1(L) - u_2(L)|. \end{aligned}$$

En combinant cette inégalité avec l'inégalité (6.5), nous déduisons que

$$|j(\eta, u_1) - j(\eta, u_2)| \leq L_p L \|\eta\|_V \|u_1 - u_2\|_V.$$

Il en résulte que la fonctionnelle j satisfait la condition (2.37)(c) avec $H(r) = L_p L r$. De ce fait, le Théorème 6.3 est une conséquence directe du Théorème 2.11. \square

En plus de l'intérêt mathématique dans le résultat de convergence (6.35), il est important du point de vue mécanique, car il montre que des petites variations dans les contraintes unilatérales g_1 et g_2 entraînent des petites variations dans la solution faible du problème de contact \mathcal{P} . Donc, nous concluons que la solution faible du problème (6.1) (6.4) dépend continûment des contraintes unilatérales g_1 et g_2 .

Chapitre 7

Problème de contact élastique avec compliance normale et contrainte unilatérale

Dans ce chapitre, nous nous proposons d'étudier un problème de contact statique sans frottement modélisant l'interaction entre un corps élastique et un obstacle assimilé à une fondation. Le contact est décrit à l'aide de la loi de compliance normale et contrainte unilatérale. Ce chapitre est structuré en quatre sections. Dans la première section, nous décrivons le problème mécanique et nous détaillons les hypothèses sur les données afin d'obtenir la formulation variationnelle du problème. Dans la deuxième section, nous démontrons un résultat d'existence et d'unicité d'une solution faible. Dans la troisième section, nous prouvons un premier résultat de convergence en utilisant la méthode de pénalisation. Plus précisément, nous démontrons que la solution faible du problème de contact avec loi de compliance normale converge vers la solution faible du problème de contact avec loi de compliance normale et contrainte unilatérale lorsque le coefficient de déformabilité de la fondation tend vers zéro. Nous terminons avec la quatrième section où nous étudions la dépendance de la solution du problème mécanique par rapport à une perturbation de l'ensemble des contraintes.

7.1 Problème mécanique et formulation variationnelle

Le problème mécanique peut se formuler de la façon suivante.

Problème \mathcal{P} . *Trouver un champ de déplacements $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ et un champ de contraintes $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \rightarrow \mathbb{S}^d$ tels que*

$$(7.1) \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \quad \text{dans } \Omega,$$

$$(7.2) \quad \text{Div } \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_0 = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega,$$

$$(7.3) \quad \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_1,$$

$$(7.4) \quad \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu} = \mathbf{f}_2 \quad \text{sur } \Gamma_2,$$

$$(7.5) \quad \left. \begin{array}{l} u_\nu \leq g, \quad \sigma_\nu + p(u_\nu) \leq 0, \\ (u_\nu - g)(\sigma_\nu + p(u_\nu)) = 0 \end{array} \right\} \quad \text{sur } \Gamma_3,$$

$$(7.6) \quad \boldsymbol{\sigma}_\tau = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_3.$$

Ici, l'équation (7.1) représente la loi de comportement élastique où \mathcal{F} est l'opérateur d'élasticité. Puis, (7.2) est l'équation d'équilibre où \mathbf{f}_0 représente la densité des forces volumiques. Ensuite, les conditions (7.3), (7.4) sont respectivement les conditions aux limites de déplacement et de traction où \mathbf{f}_2 est la densité des tractions surfaciques. Enfin, les relations (7.5) (7.6) représentent la condition aux limites de contact sans frottement avec la loi de compliance normale et contrainte unilatérale. Pour une explication plus détaillée sur cette condition de contact, nous renvoyons au Chapitre 5, Sous-section 5.4.3.

Afin d'étudier le problème mécanique (7.1) (7.6) nous supposons que l'opérateur

d'élasticité \mathcal{F} satisfait les conditions suivantes :

$$(7.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } \mathcal{F} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d. \\ \text{(b) Il existe } L_{\mathcal{F}} > 0 \text{ tel que} \\ \quad \|\mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_1) - \mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_2)\| \leq L_{\mathcal{F}} \|\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2\| \\ \quad \forall \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \\ \text{(c) Il existe } m_{\mathcal{F}} > 0 \text{ tel que} \\ \quad (\mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_1) - \mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_2))(\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2) \geq m_{\mathcal{F}} \|\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2\|^2 \\ \quad \forall \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \\ \text{(d) L'application } \mathbf{x} \mapsto \mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}) \text{ est mesurable sur } \Omega, \\ \quad \text{pour tout } \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{S}^d. \\ \text{(e) L'application } \mathbf{x} \mapsto \mathcal{F}(\mathbf{x}, \mathbf{0}_{\mathbb{S}^d}) \text{ appartient à } Q. \end{array} \right.$$

Par ailleurs, nous supposons que les densités des forces volumiques et des tractions surfaciques ont la régularité

$$(7.8) \quad \mathbf{f}_0 \in L^2(\Omega)^d \quad \text{et} \quad \mathbf{f}_2 \in L^2(\Gamma_2)^d.$$

Nous supposons également que la fonction de compliance normale p satisfait

$$(7.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } p : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+. \\ \text{(b) Il existe } L_p > 0 \text{ tel que} \\ \quad |p(\mathbf{x}, r_1) - p(\mathbf{x}, r_2)| \leq L_p |r_1 - r_2| \\ \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \quad \text{p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3. \\ \text{(c) } (p(\mathbf{x}, r_1) - p(\mathbf{x}, r_2))(r_1 - r_2) \geq 0 \\ \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \quad \text{p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3. \\ \text{(d) } p(\mathbf{x}, r) = 0 \text{ pour tout } r \leq 0, \quad \text{p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3. \\ \text{(e) L'application } \mathbf{x} \mapsto p(\mathbf{x}, r) \text{ est mesurable sur } \Gamma_3, \\ \quad \text{pour tout } r \in \mathbb{R}. \end{array} \right.$$

De même, nous supposons l'hypothèse de petitesse

$$(7.10) \quad L_p < \frac{m_{\mathcal{F}}}{c_0^2},$$

où c_0 est la constante positive donnée par l'inégalité de trace (5.10).

Enfin, nous supposons que

$$(7.11) \quad \text{il existe } \boldsymbol{\theta} \in V \quad \text{tel que } \theta_\nu = 1 \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3.$$

Des exemples de domaines Ω pour lesquels l'hypothèse (7.11) est satisfaite peuvent être trouvés dans [83].

Maintenant, nous nous intéressons à la formulation variationnelle du Problème \mathcal{P} . Pour cela, nous introduisons l'ensemble de déplacements admissibles U , l'opérateur $A : V \rightarrow V$, la fonctionnelle $j : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ et l'élément $\mathbf{f} \in V$ définis par

$$(7.12) \quad U = \{ \mathbf{v} \in V : v_\nu \leq g \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3 \},$$

$$(7.13) \quad j(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Gamma_3} p(u_\nu) v_\nu \, da \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V,$$

$$(7.14) \quad (A\mathbf{u}, \mathbf{v})_V = (\mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_Q \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V,$$

$$(7.15) \quad (\mathbf{f}, \mathbf{v})_V = \int_{\Omega} \mathbf{f}_0 \cdot \mathbf{v} \, dx + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{v} \, da \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Supposons que $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$ sont des fonctions suffisamment régulières, qui satisfont (7.1) (7.6) et soit $\mathbf{v} \in U$. En utilisant la formule de Green (5.6) et l'équation d'équilibre (7.2), nous obtenons que

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) \, dx = \int_{\Omega} \mathbf{f}_0 \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \, dx + \int_{\Gamma} \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \, da.$$

Notons que

$$\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}) = \sigma_\nu (v_\nu - u_\nu) + \boldsymbol{\sigma}_\tau \cdot (\mathbf{v}_\tau - \mathbf{u}_\tau) \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3.$$

En utilisant cette décomposition ainsi que les conditions (7.4), (7.6) et la définition (7.15), nous trouvons que

$$(7.16) \quad \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) \, dx = (\mathbf{f}, \mathbf{v} - \mathbf{u})_V + \int_{\Gamma_3} \sigma_\nu (v_\nu - u_\nu) \, da.$$

D'autre part, nous écrivons

$$\begin{aligned} \sigma_\nu (v_\nu - u_\nu) &= (\sigma_\nu + p(u_\nu))(v_\nu - g) \\ &\quad + (\sigma_\nu + p(u_\nu))(g - u_\nu) - p(u_\nu)(v_\nu - u_\nu) \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3 \end{aligned}$$

puis, nous utilisons la condition (7.5) ainsi que l'inclusion $\mathbf{v} \in U$ pour obtenir que

$$\sigma_\nu (v_\nu - u_\nu) \geq -p(u_\nu)(v_\nu - u_\nu) \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3,$$

ce qui implique que

$$(7.17) \quad \int_{\Gamma_3} \sigma_\nu (v_\nu - u_\nu) da \geq - \int_{\Gamma_3} p(u_\nu) (v_\nu - u_\nu) da.$$

Ensuite, combinons l'égalité (7.16) avec l'inégalité (7.17) et la définition (7.13) pour voir que

$$(7.18) \quad \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) dx + j(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - j(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq (\mathbf{f}, \mathbf{v} - \mathbf{u})_V.$$

Nous utilisons maintenant la loi constitutive (7.1), l'inégalité (7.18) et les définitions (7.12), (7.14) pour obtenir la formulation variationnelle suivante du problème mécanique de contact \mathcal{P} .

Problème \mathcal{P}^V . *Trouver un champ de déplacements $\mathbf{u} \in U$ tel que*

$$(7.19) \quad (A\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u})_V + j(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - j(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq (\mathbf{f}, \mathbf{v} - \mathbf{u})_V \quad \forall \mathbf{v} \in U.$$

Notons que le Problème \mathcal{P}^V est formulé en termes de champ de déplacements. Une fois que ce champ est connu, on peut facilement obtenir le champ de contraintes en utilisant la loi constitutive (7.1). Un couple $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$ qui satisfait (7.1) et (7.19) est appelé *solution faible* du problème de contact élastique sans frottement \mathcal{P} .

7.2 Existence et unicité de la solution

Dans cette section, nous présentons le résultat d'existence et d'unicité de la solution du problème variationnel \mathcal{P}^V .

Théorème 7.1. *Supposons que les hypothèses (7.7) (7.10) sont vérifiées. Alors le Problème \mathcal{P}^V admet une solution unique $\mathbf{u} \in U$.*

Démonstration. Nous appliquons le Théorème 2.1 avec $X = V$ et $K = U$. Tout d'abord, notons qu'il est facile de vérifier que U est une partie convexe, fermée et non vide de V . Ensuite, nous utilisons la définition (7.14) de l'opérateur A et la condition (7.7)(c) afin de voir que

$$(7.20) \quad (A\mathbf{u} - A\mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v})_V \geq m_{\mathcal{F}} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_V^2 \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V.$$

D'autre part, en utilisant la condition (7.7)(b), nous trouvons que

$$(7.21) \quad \|A\mathbf{u} - A\mathbf{v}\|_V \leq L_{\mathcal{F}} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_V \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V.$$

Nous déduisons des inégalités (7.20) et (7.21) que A est un opérateur fortement monotone et de Lipschitz sur l'espace V , c'est-à-dire, il satisfait la condition (2.3) avec $m = m_{\mathcal{F}}$ et $M = L_{\mathcal{F}}$.

Par ailleurs, notons que pour tout $\boldsymbol{\eta} \in V$ la fonctionnelle $j(\boldsymbol{\eta}, \cdot)$, définie par (7.13), est convexe. Ensuite, nous utilisons les propriétés de l'application de trace pour déduire qu'elle est continue et, par conséquent, elle satisfait la condition (2.4)(a). Considérons maintenant les éléments $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$. En utilisant la condition (7.9)(b) et l'inégalité de trace (5.10), nous obtenons

$$(7.22) \quad \begin{aligned} & j(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2) - j(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1) + j(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1) - j(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2) \\ &= \int_{\Gamma_3} (p(u_{1\nu}) - p(u_{2\nu}))(v_{2\nu} - v_{1\nu}) \, da \\ &\leq c_0^2 L_p \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_V. \end{aligned}$$

Il résulte de cette inégalité que la fonctionnelle j satisfait la condition (2.4)(b) avec $\alpha = c_0^2 L_p$. Enfin, notons que l'hypothèse de petitesse (7.10) montre que la condition (2.5) est vérifiée dans la mesure où $\alpha = c_0^2 L_p$ et $m = m_{\mathcal{F}}$. Le Théorème 7.1 est maintenant une conséquence directe du Théorème 2.1. \square

Soit \mathbf{u} la solution du Problème \mathcal{P}^V obtenue dans le Théorème 7.1 et soit $\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$. Alors, nous combinons les propriétés (7.7) de l'opérateur \mathcal{F} avec la régularité de \mathbf{u} pour déduire que $\boldsymbol{\sigma} \in Q$. Soit $\boldsymbol{\varphi}$ un élément arbitraire de $C_0^\infty(\Omega)^d$ et soit $\mathbf{v} = \mathbf{u} \pm \boldsymbol{\varphi}$. Puisque $\mathbf{v} \in U$, en prenant successivement $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \boldsymbol{\varphi}$ et $\mathbf{v} = \mathbf{u} - \boldsymbol{\varphi}$ dans (7.18), nous en déduisons que

$$(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\varphi}))_Q = (\mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi})_V.$$

Nous utilisons maintenant (7.15) et la définition de l'opérateur de divergence Div pour voir que

$$(\text{Div } \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varphi})_{L^2(\Omega)^d} + (\mathbf{f}_0, \boldsymbol{\varphi})_{L^2(\Omega)^d} = 0 \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in C_0^\infty(\Omega)^d.$$

Puisque l'espace $C_0^\infty(\Omega)^d$ est dense dans $L^2(\Omega)^d$, nous en concluons que

$$\operatorname{Div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_0 = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega.$$

Par conséquent, nous utilisons la régularité $\mathbf{f}_0 \in L^2(\Omega)^d$ dans cette égalité pour obtenir que $\operatorname{Div} \boldsymbol{\sigma} \in L^2(\Omega)^d$ et, de ce fait, il résulte que $\boldsymbol{\sigma} \in Q_1$.

Nous concluons du Théorème 7.1 que le problème de contact sans frottement \mathcal{P} admet une solution faible unique, avec la régularité $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}) \in U \times Q_1$.

7.3 Méthode de pénalisation

Dans cette section, nous complétons l'étude du Problème \mathcal{P} en utilisant la pénalisation de la contrainte unilatérale. Pour ce faire, nous supposons que les conditions (7.7) (7.10) sont vérifiées et, pour tout $\mu > 0$, nous considérons le problème de contact pénalisé \mathcal{P}_μ ci-dessous.

Problème \mathcal{P}_μ . *Trouver un champ de déplacements $\mathbf{u}_\mu : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ et un champ de contraintes $\boldsymbol{\sigma}_\mu : \Omega \rightarrow \mathbb{S}^d$ tels que*

$$(7.23) \quad \boldsymbol{\sigma}_\mu = \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_\mu) \quad \text{dans } \Omega,$$

$$(7.24) \quad \operatorname{Div} \boldsymbol{\sigma}_\mu + \mathbf{f}_0 = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega,$$

$$(7.25) \quad \mathbf{u}_\mu = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_1,$$

$$(7.26) \quad \boldsymbol{\sigma}_\mu \boldsymbol{\nu} = \mathbf{f}_2 \quad \text{sur } \Gamma_2,$$

$$(7.27) \quad -\sigma_{\mu\nu} = p(u_{\mu\nu}) + \frac{1}{\mu} p(u_{\mu\nu} - g) \quad \text{sur } \Gamma_3,$$

$$(7.28) \quad \boldsymbol{\sigma}_{\mu\tau} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_3.$$

Pour ce problème $\mu > 0$ est un paramètre de pénalisation qui peut être interprété comme un *coefficient de déformabilité* de la fondation alors que $\frac{1}{\mu}$ représente le *coefficient de rigidité* de celle-ci. Par ailleurs, $u_{\mu\nu}$ représente la composante normale du champ de déplacements \mathbf{u}_μ et $\sigma_{\mu\nu}$, $\boldsymbol{\sigma}_{\mu\tau}$ représentent respectivement les composantes normales et tangentielles du champ de contraintes $\boldsymbol{\sigma}_\mu$.

Nous considérons maintenant l'opérateur $G : V \rightarrow V$ défini par

$$(7.29) \quad (G\mathbf{u}, \mathbf{v})_V = \int_{\Gamma_3} p(u_\nu - g)v_\nu \, da \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V.$$

Ensuite, nous utilisons les notations (7.13) (7.15) et nous procédons de la même manière que dans la Section 7.1 afin d'obtenir la formulation variationnelle suivante du Problème \mathcal{P}_μ .

Problème \mathcal{P}_μ^V . *Trouver un champ de déplacements $\mathbf{u}_\mu \in V$ tel que*

$$(7.30) \quad (\mathbf{A}\mathbf{u}_\mu, \mathbf{v} - \mathbf{u}_\mu)_V + \frac{1}{\mu}(\mathbf{G}\mathbf{u}_\mu, \mathbf{v} - \mathbf{u}_\mu)_V \\ + j(\mathbf{u}_\mu, \mathbf{v}) - j(\mathbf{u}_\mu, \mathbf{u}_\mu) \geq (\mathbf{f}, \mathbf{v} - \mathbf{u}_\mu)_V \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Nous avons le théorème ci-dessous qui représente le résultat principal de cette section.

Théorème 7.2. *Supposons que les conditions (7.7) (7.10) sont vérifiées. Alors :*

- i) *Pour tout $\mu > 0$, le Problème \mathcal{P}_μ^V admet une solution unique $\mathbf{u}_\mu \in V$.*
- ii) *La solution \mathbf{u}_μ du Problème \mathcal{P}_μ^V converge vers la solution \mathbf{u} du Problème \mathcal{P}^V , c'est-à-dire*

$$(7.31) \quad \|\mathbf{u}_\mu - \mathbf{u}\|_V \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } \mu \rightarrow 0.$$

Démonstration. Nous utilisons le résultat abstrait du Théorème 2.2 avec $X = V$ et $K = U$. Pour ce faire, nous prouvons que l'opérateur G , donné par (7.29), satisfait la condition (2.6). Soient $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$. Nous utilisons la condition (7.9)(b) et l'inégalité de trace (5.10) pour obtenir que

$$(\mathbf{G}\mathbf{u} - \mathbf{G}\mathbf{v}, \mathbf{w})_V = \int_{\Gamma_3} (p(u_\nu - g) - p(v_\nu - g))w_\nu da \\ \leq c_0^2 L_p \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_V \|\mathbf{w}\|_V.$$

Ensuite, en prenant $\mathbf{w} = \mathbf{G}\mathbf{u} - \mathbf{G}\mathbf{v}$ dans cette inégalité, nous déduisons que

$$\|\mathbf{G}\mathbf{u} - \mathbf{G}\mathbf{v}\|_V \leq c_0^2 L_p \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_V,$$

ce qui montre que l'opérateur G satisfait la condition (2.6)(b).

En outre, nous utilisons la condition (7.9)(c) pour voir que

$$(\mathbf{G}\mathbf{u} - \mathbf{G}\mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v})_V = \int_{\Gamma_3} (p(u_\nu - g) - p(v_\nu - g))(u_\nu - v_\nu) da \geq 0.$$

Nous déduisons de cette inégalité que l'opérateur G satisfait la condition (2.6)(a).

Soient $\mathbf{u} \in V$ et $\mathbf{v} \in U$. Nous utilisons la définition (7.29) pour voir que

$$\begin{aligned}
 (7.32) \quad (G\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u})_V &= \int_{\Gamma_3} p(u_\nu - g)(v_\nu - u_\nu) da \\
 &= \int_{\Gamma_3} p(u_\nu - g)((v_\nu - g) + (g - u_\nu)) da \\
 &\leq \int_{\Gamma_3} p(u_\nu - g)(v_\nu - g) da + \int_{\Gamma_3} p(u_\nu - g)(g - u_\nu) da.
 \end{aligned}$$

Ensuite, nous utilisons (7.9) pour obtenir que

$$(7.33) \quad p(u_\nu - g)(v_\nu - g) \leq 0 \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3,$$

$$(7.34) \quad p(u_\nu - g)(g - u_\nu) \leq 0 \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3.$$

Par conséquent, en combinant (7.32) (7.34), nous déduisons que

$$(G\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u})_V \leq 0,$$

ce qui montre que l'opérateur G satisfait la condition (2.6)(c).

Enfin, supposons que $G\mathbf{u} = \mathbf{0}_V$, c'est-à-dire, $(G\mathbf{u}, \mathbf{v})_V = 0$ pour tout $\mathbf{v} \in V$ et, par conséquent, pour $\mathbf{u} \in U$, nous avons que

$$(G\mathbf{u}, \mathbf{u})_V = 0,$$

ce qui nous donne que

$$(7.35) \quad \int_{\Gamma_3} p(u_\nu - g)u_\nu da = 0.$$

En utilisant les propriétés (7.9)(a), (c), nous obtenons que

$$p(u_\nu - g)(u_\nu - g) \geq 0 \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3$$

et, par conséquent, nous avons que

$$(7.36) \quad p(u_\nu - g)u_\nu \geq p(u_\nu - g)g \geq 0 \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3.$$

En combinant maintenant (7.35) et (7.36), nous déduisons que

$$p(u_\nu - g)u_\nu = 0 \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3.$$

Donc, nous utilisons cette égalité avec la propriété (7.9)(d) pour déduire que $u_\nu \leq g$, ce qui implique que $\mathbf{u} \in U$.

Réciproquement, supposons que $\mathbf{u} \in U$. En utilisant la définition (7.12) de l'ensemble U , nous déduisons que $u_\nu \leq g$ p.p. sur Γ_3 et, de ce fait, la propriété (7.9)(d) implique que

$$p(u_\nu - g)u_\nu = 0 \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3.$$

En combinant maintenant cette égalité avec la définition (7.29) de l'opérateur G , nous trouvons que

$$(G\mathbf{u}, \mathbf{v})_V = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in V,$$

ce qui montre que $G\mathbf{u} = \mathbf{0}_V$. Nous en déduisons que l'opérateur G satisfait la condition (2.6)(d).

Nous concluons de ce qui précède que l'opérateur G satisfait la condition (2.6). Le Théorème 7.1 est maintenant une conséquence directe du Théorème 2.2. \square

La convergence (7.31) est importante du point de vue mécanique, car elle montre que la solution faible du problème de contact avec compliance normale et contrainte unilatérale peut être approchée d'aussi près que l'on souhaite par la solution faible du problème de contact avec compliance normale, pour un coefficient de déformabilité de la fondation suffisamment petit.

7.4 Un résultat de convergence

Notre objectif dans cette section est d'étudier le comportement de la solution du Problème \mathcal{P}^V lorsque l'on introduit une perturbation dans l'ensemble des contraintes U . Dans ce qui suit, nous supposons que les conditions (7.7)–(7.10) sont vérifiées et nous désignons par \mathbf{u} la solution du Problème \mathcal{P}^V obtenue dans le Théorème 7.1. Pour chaque $\rho > 0$, considérons g_ρ la perturbation de g satisfaisant les conditions

$$(7.37) \quad g_\rho \geq 0,$$

$$(7.38) \quad g_\rho \rightarrow g \quad \text{lorsque } \rho \rightarrow 0.$$

Nous considérons également la perturbation de l'ensemble U définie par

$$(7.39) \quad U_\rho = \{ \mathbf{v} \in V : v_\nu \leq g_\rho \text{ p.p. sur } \Gamma_3 \}.$$

Ensuite, la perturbation du Problème \mathcal{P}^V est la suivante.

Problème \mathcal{P}_ρ^V . *Trouver un champ de déplacements $\mathbf{u}_\rho \in U_\rho$ tel que*

$$(7.40) \quad (A\mathbf{u}_\rho, \mathbf{v} - \mathbf{u}_\rho)_V + j(\mathbf{u}_\rho, \mathbf{v}) - j(\mathbf{u}_\rho, \mathbf{u}_\rho) \geq (\mathbf{f}, \mathbf{v} - \mathbf{u}_\rho)_V \quad \forall \mathbf{v} \in U_\rho.$$

Nous avons le théorème suivant qui représente le résultat principal de cette section.

Théorème 7.3. *Supposons que les conditions (7.7) (7.11), (7.37) sont vérifiées. Alors :*

- i) *Pour tout $\rho > 0$, le Problème \mathcal{P}_ρ^V possède une solution unique $\mathbf{u}_\rho \in U_\rho$.*
- ii) *De plus, si la condition (7.38) est vérifiée, alors la solution \mathbf{u}_ρ du Problème \mathcal{P}_ρ^V converge vers la solution \mathbf{u} du Problème \mathcal{P}^V , i.e.,*

$$(7.41) \quad \|\mathbf{u}_\rho - \mathbf{u}\|_V \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } \rho \rightarrow 0.$$

Démonstration. Soit $\rho > 0$. Nous appliquons le Théorème 2.11 avec $X = V$, $K = U$ et $K_\rho = U_\rho$. Tous d'abord, pour établir la définition (2.32) nous considérons les fonctions $c(\cdot)$ et $d(\cdot)$ définies par

$$c(\rho) = 1 \quad \text{et} \quad d(\rho) = g_\rho - g.$$

De plus, nous utilisons l'hypothèse (7.11) afin de prendre un élément $\boldsymbol{\theta}$ tel que

$$\boldsymbol{\theta} \in V \text{ tel que } \theta_\nu = 1 \text{ p.p. sur } \Gamma_3.$$

Considérons maintenant deux éléments $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ tels que

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + (g_\rho - g)\boldsymbol{\theta}.$$

Notons qu'il est facile de voir que

$$u_\nu \leq g \text{ si et seulement si } v_\nu \leq g_\rho$$

et, par conséquent, nous déduisons que

$$\mathbf{u} \in U \text{ si et seulement si } \mathbf{u} + (g_\rho - g)\boldsymbol{\theta} \in U_\rho,$$

ce qui implique que

$$U_\rho = U + (g_\rho - g)\boldsymbol{\theta}.$$

D'autre part, en utilisant la condition (7.37), nous obtenons que

$$\mathbf{0}_V \in U_\rho$$

et, de plus, la condition (7.38) nous montre que

$$c(\rho) \rightarrow 1 \quad \text{et} \quad d(\rho) \rightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad \rho \rightarrow 0.$$

En outre, en utilisant les propriétés (7.9) de la fonction de compliance normale p , il est facile de vérifier que la fonctionnelle j , définie par (7.13), satisfait les conditions (2.37)(a) (b). Par la suite, nous considérons trois éléments $\boldsymbol{\eta}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$ et nous utilisons la propriété (7.9)(b) ainsi que l'inégalité de trace (5.10) afin d'obtenir que

$$\begin{aligned} |j(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{v}_1) - j(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{v}_2)| &= \int_{\Gamma_3} p(\eta_\nu)(v_{1\nu} - v_{2\nu}) da \\ &\leq c_0^2 L_p \|\boldsymbol{\eta}\|_V \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_V. \end{aligned}$$

Nous déduisons de cette inégalité que la fonctionnelle j satisfait la condition (2.37)(c) avec $H(r) = c_0^2 L_p r$. Par conséquent, le Théorème 7.1 est une conséquence directe du Théorème 2.11. \square

En plus de l'intérêt mathématique dans le résultat de convergence (7.41), il est important du point de vue mécanique, car il montre que des petites perturbations dans la contrainte unilatérale g impliquent des petites perturbations dans la solution faible du Problème \mathcal{P} . Nous concluons que la solution faible du problème de contact \mathcal{P} dépend continûment de la contrainte unilatérale g .

Chapitre 8

Problème de contact élastique avec contrainte unilatérale et seuil critique

Dans ce chapitre, nous considérons un processus de contact statique modélisant le contact entre un corps élastique et une fondation qui est composée d'un matériau rigide recouvert d'un matériau rigide-plastique. Le contact est décrit à l'aide d'une loi de contrainte unilatérale et seuil critique. Ce chapitre est structuré en quatre sections. Dans la première section, nous présentons la formulation forte du problème mécanique ainsi que les hypothèses nécessaires sur les données pour obtenir une formulation variationnelle. Dans la deuxième section, nous abordons la question de l'existence et de l'unicité d'une solution faible. La troisième section est consacrée à un résultat de convergence portant sur la perturbation des données. Dans la quatrième section, nous considérons des problèmes de contrôle optimal pour lesquels nous démontrons un résultat d'existence de solution. Nous terminons avec la cinquième section où nous illustrons les résultats de ce chapitre dans l'étude d'un problème de contact unidimensionnel. Les résultats présentés dans ce chapitre ont fait l'objet de l'article [16].

8.1 Problème mécanique et formulation variationnelle

Le problème mécanique se formule de la manière suivante.

Problème \mathcal{P} . *Trouver un champ de déplacements $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ et un champ de contraintes $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \rightarrow \mathbb{S}^d$ tels que*

$$(8.1) \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \quad \text{dans } \Omega,$$

$$(8.2) \quad \text{Div } \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_0 = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega,$$

$$(8.3) \quad \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_1,$$

$$(8.4) \quad \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu} = \mathbf{f}_2 \quad \text{sur } \Gamma_2,$$

$$(8.5) \quad \left. \begin{array}{ll} \sigma_\nu = 0 & \text{si } u_\nu < 0 \\ -F < \sigma_\nu < 0 & \text{si } u_\nu = 0 \\ \sigma_\nu = -F & \text{si } 0 < u_\nu < g \\ \sigma_\nu \leq -F & \text{si } u_\nu = g \end{array} \right\} \quad \text{sur } \Gamma_3,$$

$$(8.6) \quad \boldsymbol{\sigma}_\tau = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_3.$$

Ici, l'équation (8.1) représente la loi de comportement élastique du matériau dans laquelle \mathcal{F} est la fonction constitutive. Puis, (8.2) est l'équation d'équilibre où \mathbf{f}_0 représente la densité des forces volumiques. Ensuite, (8.3) et (8.4) représentent respectivement les conditions aux limites de déplacement et de traction où \mathbf{f}_2 est la densité des tractions surfaciques. Les relations (8.5) (8.6) caractérisent la condition aux limites de contact sans frottement avec contrainte unilatérale et seuil critique. Pour plus de détails sur cette condition de contact, nous renvoyons au Chapitre 5, Sous-section 5.4.4.

Dans l'étude du problème mécanique (8.1) (8.6), nous considérons l'espace produit $Y = L^2(\Omega)^d \times L^2(\Gamma_2)^d$ qui est un espace de Hilbert muni du produit scalaire canonique $(\cdot, \cdot)_Y$ et de sa norme associée $\|\cdot\|_Y$ et nous notons par $\pi : V \rightarrow Y$ l'opérateur défini par

$$(8.7) \quad \pi\mathbf{v} = (\mathbf{v}, \gamma_2\mathbf{v})_Y \quad \forall \mathbf{v} \in V,$$

où $\gamma_2 : H^1(\Omega)^d \rightarrow L^2(\Gamma_2)^d$ représente l'application de trace sur Γ_2 . En utilisant le Théorème de trace de Sobolev (voir Théorème 5.2, page 103), nous déduisons que l'opérateur $\pi : V \rightarrow Y$ est linéaire et continu, i.e., il existe une constante positive $d_0 > 0$ telle que

$$(8.8) \quad \|\pi \mathbf{v}\|_Y \leq d_0 \|\mathbf{v}\|_V \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

D'autre part, nous combinons la compacité de l'application de trace et l'injection compacte $H^1(\Omega)^d \subset L^2(\Omega)^d$ (voir Théorème 5.1) afin de déduire que l'opérateur π est faiblement-fortement continu, i.e.,

$$(8.9) \quad \mathbf{v}_n \rightharpoonup \mathbf{v} \text{ dans } V \implies \pi \mathbf{v}_n \rightarrow \pi \mathbf{v} \text{ dans } Y \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

Par ailleurs, nous supposons que l'opérateur d'élasticité \mathcal{F} satisfait les conditions suivantes :

$$(8.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } \mathcal{F} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d. \\ \text{(b) Il existe } L_{\mathcal{F}} > 0 \text{ tel que} \\ \quad |\mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_1) - \mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_2)| \leq L_{\mathcal{F}} |\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2| \\ \quad \forall \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \\ \text{(c) Il existe } m_{\mathcal{F}} > 0 \text{ tel que} \\ \quad (\mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_1) - \mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_2))(\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2) \geq m_{\mathcal{F}} \|\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2\|^2 \\ \quad \forall \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \\ \text{(d) L'application } \mathbf{x} \mapsto \mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}) \text{ est mesurable sur } \Omega, \\ \quad \text{pour tout } \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{S}^d. \\ \text{(e) L'application } \mathbf{x} \mapsto \mathcal{F}(\mathbf{x}, \mathbf{0}_{\mathbb{S}^d}) \text{ appartient à } Q. \end{array} \right.$$

De même, nous supposons que les densités des forces volumiques et des tractions surfaciques ont la régularité

$$(8.11) \quad \mathbf{f}_0 \in L^2(\Omega)^d,$$

$$(8.12) \quad \mathbf{f}_2 \in L^2(\Gamma_2)^d.$$

Nous supposons également que le seuil critique F vérifie

$$(8.13) \quad F \in L^2(\Gamma_3), \quad F(\mathbf{x}) \geq 0 \quad \text{p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3.$$

Enfin, nous supposons que

$$(8.14) \quad g > 0.$$

Nous passons maintenant à la formulation variationnelle du Problème \mathcal{P} . Pour cela, nous considérons l'ensemble de déplacements admissibles $U \subset V$ ainsi que la fonctionnelle $j : V \rightarrow \mathbb{R}$ et l'élément $\mathbf{f} \in Y$ définis par

$$(8.15) \quad U = \{ \mathbf{v} \in V : v_\nu \leq g \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3 \},$$

$$(8.16) \quad (A\mathbf{u}, \mathbf{v})_V = \int_{\Omega} \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, dx \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V,$$

$$(8.17) \quad j(\mathbf{v}) = \int_{\Gamma_3} F v_\nu^+ \, da \quad \forall \mathbf{v} \in V,$$

$$(8.18) \quad \mathbf{f} = (\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_2).$$

Ici, r^+ représente la partie positive de r , i.e., $r^+ = \max\{r, 0\}$. Par ailleurs, nous utilisons les définitions (8.7) et (8.18) pour obtenir que

$$(8.19) \quad (\mathbf{f}, \pi\mathbf{v})_Y = \int_{\Omega} \mathbf{f}_0 \cdot \mathbf{v} \, dx + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{v} \, da \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Supposons que $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$ est un couple des fonctions suffisamment régulières satisfaisant (8.1) (8.6) et soit $\mathbf{v} \in U$. D'abord, en utilisant la définition (8.15) et la condition (8.5), nous déduisons que

$$(8.20) \quad \mathbf{u} \in U.$$

Ensuite, en effectuant une intégration par partie sur l'équation d'équilibre (8.2) et en utilisant la formule de Green (5.6), la condition (8.4) et la définition (8.19), nous obtenons que

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))_Q &= (\mathbf{f}, \pi\mathbf{v} - \pi\mathbf{u})_Y + \int_{\Gamma_3} \sigma_\nu(v_\nu - u_\nu) \, da \\ &\quad + \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}_\tau \cdot (\mathbf{v}_\tau - \mathbf{u}_\tau) \, da. \end{aligned}$$

En combinant cette inégalité avec la condition (8.6), nous trouvons que

$$(8.21) \quad (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))_Q = (\mathbf{f}, \pi\mathbf{v} - \pi\mathbf{u})_Y + \int_{\Gamma_3} \sigma_\nu(v_\nu - u_\nu) \, da.$$

Par ailleurs, en utilisant la condition (8.5) avec l'hypothèse (8.13), nous avons que

$$\sigma_\nu(v_\nu - u_\nu) \geq F(u_\nu^+ - v_\nu^+) \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3$$

et, en intégrant sur Γ_3 , nous obtenons

$$(8.22) \quad \int_{\Gamma_3} \sigma_\nu(v_\nu - u_\nu) da \geq \int_{\Gamma_3} F(u_\nu^+ - v_\nu^+) da.$$

En combinant maintenant l'égalité (8.21) avec l'inégalité (8.22), nous trouvons que

$$(8.23) \quad (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))_Q \geq (\mathbf{f}, \boldsymbol{\pi}\mathbf{v} - \boldsymbol{\pi}\mathbf{u})_Y + \int_{\Gamma_3} F(u_\nu^+ - v_\nu^+) da.$$

La formulation variationnelle du Problème \mathcal{P} s'obtient alors en combinant l'inclusion (8.20), l'inégalité (8.23), la loi de comportement (8.1) et les définitions (8.16) (8.17).

Problème \mathcal{P}^V . *Trouver un champ de déplacements $\mathbf{u} \in U$ tel que*

$$(8.24) \quad (A\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u})_V + j(\mathbf{v}) - j(\mathbf{u}) \geq (\mathbf{f}, \boldsymbol{\pi}\mathbf{v} - \boldsymbol{\pi}\mathbf{u})_Y \quad \forall \mathbf{v} \in U.$$

L'unique solvabilité de ce problème fait l'objet de la section suivante.

8.2 Existence et unicité de la solution

Le but de cette section est d'étudier l'existence et l'unicité de la solution du problème variationnel \mathcal{P}^V . Pour cela, nous présentons le théorème suivant.

Théorème 8.1. *Sous les conditions (8.10) (8.14) le Problème \mathcal{P}^V possède une solution unique $\mathbf{u} \in U$.*

Démonstration. Nous utilisons le résultat abstrait du Théorème 1.27 avec $X = V$ et $K = U$. Notons d'abord que U est une partie convexe, fermée et non vide de V . Ensuite, nous prouvons que $A : V \rightarrow V$ est un opérateur fortement monotone et de Lipschitz. Pour cela, nous utilisons la définition (8.16) et la condition (8.10)(c) pour obtenir

$$(8.25) \quad (A\mathbf{u} - A\mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v})_V \geq m_{\mathcal{F}} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_V^2 \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V.$$

D'autre part, en utilisant la définition (8.16) avec la condition (8.10)(b), nous trouvons que

$$(8.26) \quad \|A\mathbf{u} - A\mathbf{v}\|_V \leq L_{\mathcal{F}} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_V \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V.$$

De (8.25) et (8.26), nous déduisons que A est un opérateur fortement monotone et de Lipschitz avec $m = m_{\mathcal{F}}$ et $M = L_{\mathcal{F}}$.

D'autre part, en utilisant le théorème de représentation de Riesz et la définition (8.19), nous déduisons qu'il existe un unique élément $\tilde{\mathbf{f}} \in V$ tel que

$$(8.27) \quad (\tilde{\mathbf{f}}, \mathbf{v})_V = (\mathbf{f}, \pi\mathbf{v})_Y \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Par ailleurs, il est facile de vérifier que la fonctionnelle $j : V \rightarrow \mathbb{R}$, définie par (8.17), est une semi norme. En outre, en utilisant l'hypothèse (8.13) et l'inégalité de trace (5.10), nous obtenons que

$$j(\mathbf{v}) \leq c_0 \|F\|_{L^2(\Gamma_3)} \|\mathbf{v}\|_V \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Cette inégalité combinée avec le Corollaire 1.23 implique que la fonctionnelle j est convexe et semi-continue inférieurement sur V . Nous en déduisons que la fonctionnelle j satisfait la condition (1.39). De ce fait, nous concluons que le Théorème 8.1 est une conséquence directe du Théorème 1.27. \square

Un couple $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$ qui satisfait (8.1) et (8.24) est appelé *solution faible* du problème de contact \mathcal{P} . Le Théorème 8.1 montre que ce problème de contact admet une solution faible unique. En outre, en utilisant des arguments similaires à ceux utilisés en pages 142–143, nous déduisons que $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}) \in U \times Q_1$.

8.3 Un résultat de convergence

Dans cette section, nous nous intéressons au comportement de la solution du Problème \mathcal{P}^V lorsque l'on introduit une perturbation des données. Pour ce faire, supposons que les conditions (8.10)–(8.14) sont vérifiées et désignons par $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_2, F, g)$ la solution du Problème \mathcal{P}^V obtenue dans le Théorème 8.1. Pour tout $\rho > 0$, considérons respectivement $\mathbf{f}_{0\rho}$, $\mathbf{f}_{2\rho}$, F_ρ et g_ρ les perturbations de \mathbf{f}_0 , \mathbf{f}_2 , F et g satisfaisant

les conditions (8.11) (8.14) ainsi que les convergences suivantes :

$$(8.28) \quad \mathbf{f}_{0\rho} \rightharpoonup \mathbf{f}_0 \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega)^d \quad \text{lorsque} \quad \rho \rightarrow 0,$$

$$(8.29) \quad \mathbf{f}_{2\rho} \rightharpoonup \mathbf{f}_2 \quad \text{dans} \quad L^2(\Gamma_2)^d \quad \text{lorsque} \quad \rho \rightarrow 0,$$

$$(8.30) \quad F_\rho \rightharpoonup F \quad \text{dans} \quad L^2(\Gamma_3) \quad \text{lorsque} \quad \rho \rightarrow 0,$$

$$(8.31) \quad g_\rho \rightarrow g \quad \text{lorsque} \quad \rho \rightarrow 0.$$

Ensuite, nous considérons l'ensemble $U_\rho \subset V$, la fonctionnelle $j_\rho : V \rightarrow \mathbb{R}$ et l'élément $\mathbf{f}_\rho \in Y$ définis par

$$(8.32) \quad U_\rho = \{ \mathbf{v} \in V : v_\nu \leq g_\rho \quad \text{p.p. sur} \quad \Gamma_3 \},$$

$$(8.33) \quad j_\rho(\mathbf{v}) = \int_{\Gamma_3} F_\rho v_\nu^+ da \quad \forall \mathbf{v} \in V,$$

$$(8.34) \quad \mathbf{f}_\rho = (\mathbf{f}_{0\rho}, \mathbf{f}_{2\rho}).$$

Considérons également le problème variationnel perturbé suivant.

Problème \mathcal{P}_ρ^V . *Trouver un champ de déplacements $\mathbf{u}_\rho \in U_\rho$ tel que*

$$(8.35) \quad (A\mathbf{u}_\rho, \mathbf{v} - \mathbf{u}_\rho)_V + j_\rho(\mathbf{v}) - j_\rho(\mathbf{u}_\rho) \geq (\mathbf{f}_\rho, \pi\mathbf{v} - \pi\mathbf{u}_\rho)_Y \quad \forall \mathbf{v} \in U_\rho.$$

D'après le Théorème 8.1, nous déduisons que, pour tout $\rho > 0$, le Problème \mathcal{P}_ρ^V possède une solution unique $\mathbf{u}_\rho \in U_\rho$. Le comportement de cette solution lorsque ρ tend vers zéro est donné par le théorème ci-dessous.

Théorème 8.2. *Supposons que les hypothèses (8.10) (8.14) et (8.28) (8.31) sont vérifiées. Alors la solution \mathbf{u}_ρ du Problème \mathcal{P}_ρ^V converge vers la solution \mathbf{u} du Problème \mathcal{P}^V , i.e.,*

$$(8.36) \quad \mathbf{u}_\rho \rightarrow \mathbf{u} \quad \text{dans} \quad V \quad \text{lorsque} \quad \rho \rightarrow 0.$$

La démonstration du Théorème 8.2 sera conduite en plusieurs étapes. Dans tout ce qui suit, nous supposons que les conditions (8.10) (8.14) et (8.28) (8.31) sont vérifiées.

Pour tout $\rho > 0$, nous considérons le problème intermédiaire suivant.

Problème $\tilde{\mathcal{P}}_\rho^V$. Trouver un champ de déplacements $\tilde{\mathbf{u}}_\rho \in U$ tel que

$$(8.37) \quad (A\tilde{\mathbf{u}}_\rho, \mathbf{v} - \tilde{\mathbf{u}}_\rho)_V + j_\rho(\mathbf{v}) - j_\rho(\tilde{\mathbf{u}}_\rho) \geq (\mathbf{f}_\rho, \pi\mathbf{v} - \pi\tilde{\mathbf{u}}_\rho)_Y \quad \forall \mathbf{v} \in U.$$

L'unique solvabilité du Problème $\tilde{\mathcal{P}}_\rho^V$ est assurée par le Théorème 8.1.

Ensuite, en effectuant des estimations à priori sur la solution du Problème $\tilde{\mathcal{P}}_\rho^V$, nous avons le résultat de convergence suivant.

Lemme 8.3. La suite $\{\tilde{\mathbf{u}}_\rho\} \subset U$ converge faiblement vers la solution \mathbf{u} du Problème \mathcal{P}^V , i.e.,

$$(8.38) \quad \tilde{\mathbf{u}}_\rho \rightharpoonup \mathbf{u} \quad \text{dans } V \quad \text{lorsque } \rho \rightarrow 0.$$

Démonstration. Soit $\rho > 0$. Prenons $\mathbf{v} = \mathbf{0}_V$ dans (8.37) pour voir que

$$(A\tilde{\mathbf{u}}_\rho, \tilde{\mathbf{u}}_\rho)_V + j_\rho(\mathbf{u}_\rho) \leq (\mathbf{f}_\rho, \pi\tilde{\mathbf{u}}_\rho)_Y.$$

En combinant cette inégalité avec la positivité de la fonctionnelle j_ρ et les inégalités (8.25), (8.8), nous obtenons que

$$(8.39) \quad \|\tilde{\mathbf{u}}_\rho\|_V \leq \frac{\max(1, d_0)}{m_{\mathcal{F}}} (\|\mathbf{f}_\rho\|_Y + \|A\mathbf{0}_V\|_V).$$

D'autre part, nous utilisons la définition (8.19) avec les convergences (8.28) (8.29) afin de déduire que

$$(8.40) \quad \mathbf{f}_\rho \rightharpoonup \mathbf{f} \quad \text{dans } Y \quad \text{lorsque } \rho \rightarrow 0.$$

Nous en déduisons que la suite $\{\mathbf{f}_\rho\}$ est bornée dans Y , i.e., il existe une constante positive $c > 0$, indépendante de ρ , telle que

$$(8.41) \quad \|\mathbf{f}_\rho\|_Y \leq c.$$

En combinant maintenant les inégalités (8.39) et (8.41), nous trouvons que

$$(8.42) \quad \|\tilde{\mathbf{u}}_\rho\|_V \leq \frac{\max(1, d_0)}{m_{\mathcal{F}}} (c + \|A\mathbf{0}_V\|_V).$$

Cette inégalité montre que la suite $\{\tilde{\mathbf{u}}_\rho\}$ est bornée dans V . Par conséquent, en utilisant le Théorème 1.29, nous déduisons qu'il existe une sous suite faiblement convergente de la suite $\{\tilde{\mathbf{u}}_\rho\}$, encore notée $\{\tilde{\mathbf{u}}_\rho\}$, et un élément $\tilde{\mathbf{u}} \in V$ tels que

$$(8.43) \quad \tilde{\mathbf{u}}_\rho \rightharpoonup \tilde{\mathbf{u}} \quad \text{dans } V \quad \text{lorsque } \rho \rightarrow 0.$$

Par la suite, nous prouvons l'égalité suivante :

$$(8.44) \quad \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}.$$

D'abord, notons que U est une partie convexe et fermée de l'espace de Hilbert V et la suite $\{\tilde{\mathbf{u}}_\rho\} \subset U$ converge faiblement vers $\tilde{\mathbf{u}}$. Donc, du Théorème de Mazur (voir Théorème 1.25, page 28), il résulte que $\tilde{\mathbf{u}} \in U$.

Ensuite, en prenant $\mathbf{v} = \tilde{\mathbf{u}} \in U$ dans (8.37), nous obtenons que

$$(A\tilde{\mathbf{u}}_\rho, \tilde{\mathbf{u}}_\rho - \tilde{\mathbf{u}})_V \leq (\mathbf{f}_\rho, \pi\tilde{\mathbf{u}}_\rho - \pi\tilde{\mathbf{u}})_Y + j_\rho(\tilde{\mathbf{u}}_\rho) - j_\rho(\tilde{\mathbf{u}}).$$

En passant à la limite supérieure dans cette inégalité lorsque $\rho \rightarrow 0$ et en utilisant les convergences (8.30), (8.40), (8.43), (8.9) ainsi que la compacité de l'application de trace, nous trouvons que

$$\limsup_{\rho \rightarrow 0} (A\tilde{\mathbf{u}}_\rho, \tilde{\mathbf{u}}_\rho - \tilde{\mathbf{u}})_V \leq 0.$$

Par conséquent, en utilisant les propriétés (8.25) (8.26), la convergence (8.43) et la Proposition 1.11, nous déduisons que

$$(8.45) \quad \liminf_{\rho \rightarrow 0} (A\tilde{\mathbf{u}}_\rho, \tilde{\mathbf{u}}_\rho - \mathbf{v})_V \geq (A\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{v})_V \quad \forall \mathbf{v} \in U.$$

D'autre part, en procédant au passage à la limite inférieure dans (8.37) lorsque $\rho \rightarrow 0$ et en utilisant les convergences (8.30), (8.40), (8.43), (8.9) et la compacité de l'application de trace, nous trouvons que

$$(8.46) \quad \liminf_{\rho \rightarrow 0} (A\tilde{\mathbf{u}}_\rho, \tilde{\mathbf{u}}_\rho - \mathbf{v})_V \leq (\mathbf{f}, \pi\tilde{\mathbf{u}} - \pi\mathbf{v})_Y + j(\mathbf{v}) - j(\tilde{\mathbf{u}}) \quad \forall \mathbf{v} \in U.$$

Nous combinons maintenant les inégalités (8.45) et (8.46) pour voir que

$$(A\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v} - \tilde{\mathbf{u}})_V + j(\mathbf{v}) - j(\tilde{\mathbf{u}}) \geq (\mathbf{f}, \pi\mathbf{v} - \pi\tilde{\mathbf{u}})_Y \quad \forall \mathbf{v} \in U.$$

Puis, en prenant $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ dans cette inégalité et $\mathbf{v} = \tilde{\mathbf{u}}$ dans (8.24) et en additionnant les inégalités obtenues, nous obtenons que

$$(A\tilde{\mathbf{u}} - A\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u})_V \leq 0.$$

Nous utilisons maintenant cette inégalité avec la propriété (8.25) pour déduire que l'égalité (8.44) est satisfaite.

Nous avons montré que toute sous suite faiblement convergente de la suite $\{\tilde{\mathbf{u}}_\rho\} \subset U$ converge vers l'unique solution \mathbf{u} du Problème \mathcal{P}^V lorsque ρ tend vers zéro. En outre, cette suite est bornée, voir (8.42). Par conséquent, en utilisant le Théorème 1.30, nous déduisons que toute la suite $\{\tilde{\mathbf{u}}_\rho\}$ converge faiblement vers \mathbf{u} lorsque ρ tend vers zéro, ce qui conclut la démonstration du Lemme 8.3. \square .

Nous continuons notre analyse par le résultat de convergence forte suivant.

Lemme 8.4. *La suite $\{\tilde{\mathbf{u}}_\rho\}$ converge fortement dans V vers \mathbf{u} , c'est-à-dire*

$$(8.47) \quad \tilde{\mathbf{u}}_\rho \rightarrow \mathbf{u} \quad \text{dans } V \quad \text{lorsque } \rho \rightarrow 0.$$

Démonstration. Soit $\rho > 0$. Nous prenons $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ dans (8.37) pour voir que

$$(8.48) \quad (A\tilde{\mathbf{u}}_\rho, \tilde{\mathbf{u}}_\rho - \mathbf{u})_V \leq (\mathbf{f}_\rho, \pi\tilde{\mathbf{u}}_\rho - \pi\mathbf{u})_Y + j_\rho(\tilde{\mathbf{u}}_\rho) - j_\rho(\mathbf{u}).$$

Puis, en utilisant l'inégalité (8.25) avec (8.48), nous obtenons que

$$\begin{aligned} m_{\mathcal{F}} \|\tilde{\mathbf{u}}_\rho - \mathbf{u}\|_V^2 &\leq (A\tilde{\mathbf{u}}_\rho - A\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}}_\rho - \mathbf{u})_V \\ &= (A\tilde{\mathbf{u}}_\rho, \tilde{\mathbf{u}}_\rho - \mathbf{u})_V - (A\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}}_\rho - \mathbf{u})_V \\ &\leq (\mathbf{f}_\rho, \pi\tilde{\mathbf{u}}_\rho - \pi\mathbf{u})_Y + j_\rho(\tilde{\mathbf{u}}_\rho) - j_\rho(\mathbf{u}) - (A\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}}_\rho - \mathbf{u})_V. \end{aligned}$$

Ensuite, en passant à la limite lorsque $\rho \rightarrow 0$ dans cette inégalité et en utilisant les convergences (8.30), (8.40), (8.43), (8.9) ainsi que la compacité de l'application de trace, nous obtenons que

$$\|\tilde{\mathbf{u}}_\rho - \mathbf{u}\|_V \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } \rho \rightarrow 0,$$

ce qui conclut la démonstration du Lemme 8.4. \square

Nous passons maintenant à la démonstration du Théorème 8.2.

Démonstration. Soit $\rho > 0$. Nous utilisons les définitions des ensembles U et U_ρ pour obtenir que

$$\frac{g}{g_\rho} \mathbf{u}_\rho \in U \quad \text{et} \quad \frac{g_\rho}{g} \tilde{\mathbf{u}}_\rho \in U_\rho.$$

En prenant $\mathbf{v} = \frac{g}{g_\rho} \mathbf{u}_\rho$ dans (8.37) et en multipliant l'inégalité obtenue par $\frac{g_\rho}{g}$, nous obtenons que

$$(8.49) \quad (A\tilde{\mathbf{u}}_\rho, \mathbf{u}_\rho - \frac{g_\rho}{g} \tilde{\mathbf{u}}_\rho)_V + \frac{g_\rho}{g} j_\rho(\frac{g}{g_\rho} \mathbf{u}_\rho) - \frac{g_\rho}{g} j_\rho(\tilde{\mathbf{u}}_\rho) \geq (\mathbf{f}_\rho, \pi\mathbf{u}_\rho - \frac{g_\rho}{g} \pi\tilde{\mathbf{u}}_\rho)_Y.$$

D'autre part, nous prenons $\mathbf{v}_\rho = \frac{g_\rho}{g} \tilde{\mathbf{u}}_\rho$ dans (8.35) pour voir que

$$(8.50) \quad (A\mathbf{u}_\rho, \frac{g_\rho}{g} \tilde{\mathbf{u}}_\rho - \mathbf{u}_\rho)_V + j_\rho(\frac{g_\rho}{g} \tilde{\mathbf{u}}_\rho) - j_\rho(\mathbf{u}_\rho) \geq (\mathbf{f}_\rho, \pi \frac{g_\rho}{g} \tilde{\mathbf{u}}_\rho - \pi \mathbf{u}_\rho)_Y.$$

Nous additionnons les inégalités (8.49) et (8.50), ensuite nous utilisons l'homogénéité de la fonctionnelle j_ρ , i.e., $j_\rho(\lambda \mathbf{v}) = \lambda j_\rho(\mathbf{v})$ pour $\lambda \geq 0$, et la linéarité de l'opérateur π afin d'obtenir que

$$(A\tilde{\mathbf{u}}_\rho - A\mathbf{u}_\rho, \mathbf{u}_\rho - \frac{g_\rho}{g} \tilde{\mathbf{u}}_\rho)_V \geq 0.$$

Ensuite, en écrivant

$$(A\tilde{\mathbf{u}}_\rho - A\mathbf{u}_\rho, \tilde{\mathbf{u}}_\rho - \mathbf{u}_\rho)_V \leq (A\tilde{\mathbf{u}}_\rho - A\mathbf{u}_\rho, \tilde{\mathbf{u}}_\rho - \frac{g_\rho}{g} \tilde{\mathbf{u}}_\rho)_V.$$

En combinant cette inégalité avec les inégalités (8.25) (8.26), nous obtenons que

$$m_{\mathcal{F}} \|\tilde{\mathbf{u}}_\rho - \mathbf{u}_\rho\|_V \leq L_{\mathcal{F}} \left| 1 - \frac{g_\rho}{g} \right| \|\tilde{\mathbf{u}}_\rho\|_V.$$

Maintenant, nous utilisons cette inégalité avec (8.42) et la convergence (8.31) pour obtenir que

$$(8.51) \quad \|\tilde{\mathbf{u}}_\rho - \mathbf{u}_\rho\|_V \rightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad \rho \rightarrow 0.$$

Enfin, nous combinons l'inégalité triangulaire

$$\|\mathbf{u}_\rho - \mathbf{u}\|_V \leq \|\mathbf{u}_\rho - \tilde{\mathbf{u}}_\rho\|_V + \|\tilde{\mathbf{u}}_\rho - \mathbf{u}\|_V$$

ainsi que les convergences (8.51) et (8.47) pour déduire la convergence (8.36), ce qui termine la démonstration du Théorème 8.2. \square

8.4 Problèmes de contrôle optimal

Dans cette section, nous considérons quatre problèmes de contrôle optimal associés au Problème \mathcal{P}^V . D'après le Théorème 8.2, nous avons que la solution du Problème \mathcal{P}^V dépend des données \mathbf{f}_0 , \mathbf{f}_2 , g , F et, par conséquent, chaque élément de ces données peut jouer le rôle d'un contrôle pour ce problème. Dans ce qui suit, supposons que les conditions (8.10) (8.14) sont vérifiées et notons par $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_2, g, F)$ la solution du Problème \mathcal{P}^V obtenue dans le Théorème 8.1.

Dans l'étude des problèmes de contrôle optimal du Problème \mathcal{P}^V nous utilisons le cadre général introduit dans le Chapitre 1 en pages 30–32 et nous distinguons quatre cas selon le choix du paramètre de contrôle θ .

a) Le cas $\theta = \mathbf{f}_0$. Dans ce cas, nous contrôlons la solution du Problème \mathcal{P}^V par la densité des forces volumiques \mathbf{f}_0 . Pour ce faire, supposons que la densité des forces surfaciques \mathbf{f}_2 , l'épaisseur g et le seuil critique F sont fixés satisfaisant les conditions (8.12)–(8.14). Nous définissons l'ensemble des paires admissibles par l'égalité

$$(8.52) \quad \mathcal{V}_{ad} = \{ (\mathbf{u}, \mathbf{f}_0) \in U \times L^2(\Omega)^d : \mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_2, F, g) \}.$$

Autrement dit, un couple $(\mathbf{u}, \mathbf{f}_0)$ appartient à \mathcal{V}_{ad} si et seulement si $\mathbf{f}_0 \in L^2(\Omega)^d$ et, de plus, \mathbf{u} est la solution du Problème \mathcal{P}^V correspondant aux données $\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_2, F$ et g .

Soient $\phi \in L^2(\Gamma_3)$, $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. Considérons la fonctionnelle $\mathcal{L} : V \times L^2(\Omega)^d \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$(8.53) \quad \mathcal{L}(\mathbf{u}, \mathbf{f}_0) = \alpha \|u_\nu - \phi\|_{L^2(\Gamma_3)} + \beta \|\mathbf{f}_0\|_{L^2(\Omega)^d} \quad \forall \mathbf{u} \in V, \mathbf{f}_0 \in L^2(\Omega)^d.$$

Ensuite, nous considérons le problème de contrôle optimal suivant.

Problème \mathcal{Q}_1 . *Trouver un couple $(\mathbf{u}^*, \mathbf{f}_0^*) \in \mathcal{V}_{ad}$ tel que*

$$(8.54) \quad \mathcal{L}(\mathbf{u}^*, \mathbf{f}_0^*) = \min_{(\mathbf{u}, \mathbf{f}_0) \in \mathcal{V}_{ad}} \mathcal{L}(\mathbf{u}, \mathbf{f}_0).$$

Un couple $(\mathbf{u}^*, \mathbf{f}_0^*)$ qui satisfait (8.54) est appelé une *paire optimale* et l'élément \mathbf{f}_0^* est appelé le *contrôle optimal*.

Nous avons le résultat d'existence suivant.

Théorème 8.5. *Supposons que les conditions (8.12)–(8.14) sont vérifiées et, de plus, supposons que $\phi \in L^2(\Gamma_3)$, $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. Alors le problème de contrôle optimal \mathcal{Q}_1 possède au moins une solution $(\mathbf{u}^*, \mathbf{f}_0^*) \in \mathcal{V}_{ad}$.*

Démonstration. Nous utilisons le Théorème 1.31 avec $Z = L^2(\Omega)^d$, $X = V$, $W = L^2(\Gamma_3)$ et $U_c = L^2(\Omega)^d$. Nous considérons les opérateurs $T : L^2(\Omega)^d \rightarrow V$ et $S : V \rightarrow L^2(\Gamma_3)$ définis par

$$(8.55) \quad T\mathbf{f}_0 = \mathbf{u}(\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_2, F, g) \quad \forall \mathbf{f}_0 \in L^2(\Omega)^d,$$

$$(8.56) \quad S\mathbf{u} = u_\nu \quad \forall \mathbf{u} \in V.$$

D'après le Théorème 8.2, nous déduisons que $T : L^2(\Omega)^d \rightarrow V$ est un opérateur faiblement-fortement continu, i.e., il satisfait la condition (1.44). En outre, nous utilisons la définition (8.56) avec la continuité de l'application de trace afin d'obtenir que l'opérateur $S : V \rightarrow L^2(\Gamma_3)$ est continu, i.e., il satisfait la condition (1.45). Par ailleurs, nous considérons la fonctionnelle $J : L^2(\Omega)^d \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$(8.57) \quad J(\mathbf{f}_0) = \alpha \|ST(\mathbf{f}_0) - \phi\|_{L^2(\Gamma_3)} + \beta \|\mathbf{f}_0\|_{L^2(\Omega)^d} \quad \forall \mathbf{f}_0 \in L^2(\Omega)^d.$$

Nous utilisons le Théorème 1.31 pour déduire qu'il existe au moins un élément $\mathbf{f}_0^* \in L^2(\Omega)^d$ tel que

$$(8.58) \quad J(\mathbf{f}_0^*) = \min_{\mathbf{f}_0 \in L^2(\Omega)^d} J(\mathbf{f}_0).$$

D'autre part, nous utilisons les définitions (8.52) et (8.55) pour voir que

$$(8.59) \quad (\mathbf{u}, \mathbf{f}_0) \in \mathcal{V}_{ad} \iff \mathbf{f}_0 \in L^2(\Omega)^d \quad \text{et} \quad \mathbf{u} = T\mathbf{f}_0.$$

Ensuite, en utilisant les définitions (8.53) et (8.57), nous avons que

$$(8.60) \quad J(\mathbf{f}_0) = \mathcal{L}(T\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_0) \quad \forall \mathbf{f}_0 \in L^2(\Omega)^d.$$

Soit $\mathbf{u}^* = T\mathbf{f}_0^*$. En utilisant (8.58) (8.60), nous déduisons que $(\mathbf{u}^*, \mathbf{f}_0^*) \in \mathcal{V}_{ad}$ et, de plus,

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}^*, \mathbf{f}_0^*) = \mathcal{L}(T\mathbf{f}_0^*, \mathbf{f}_0^*) = J(\mathbf{f}_0^*) \leq J(\mathbf{f}_0) = \mathcal{L}(T\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_0) = \mathcal{L}(\mathbf{u}, \mathbf{f}_0)$$

pour tout $(\mathbf{u}, \mathbf{f}_0) \in \mathcal{V}_{ad}$. Nous en déduisons que $(\mathbf{u}^*, \mathbf{f}_0^*)$ est une solution du Problème \mathcal{Q}_1 , ce qui conclut la démonstration du Théorème 8.5. \square

Le Théorème 8.5 permet de conclure que, sous les hypothèses (8.12) (8.14), le Problème \mathcal{Q}_1 admet au moins une solution.

b) Le cas $\theta = \mathbf{f}_2$. Dans ce cas, nous contrôlons la solution du Problème \mathcal{P}^V par la densité des forces surfaciques \mathbf{f}_2 . Pour ce faire, supposons que la densité des forces volumiques \mathbf{f}_0 , l'épaisseur g et le seuil critique F sont fixés satisfaisant les conditions (8.11), (8.13) (8.14). L'ensemble des paires admissibles est donné par

$$\mathcal{V}_{ad} = \{ (\mathbf{u}, \mathbf{f}_2) \in U \times L^2(\Gamma_2)^d : \mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_2, F, g) \}.$$

En outre, la fonctionnelle coût $\mathcal{L} : V \times L^2(\Gamma_2)^d \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par

$$(8.61) \quad \mathcal{L}(\mathbf{u}, \mathbf{f}_2) = \alpha \|\mathbf{u} - \boldsymbol{\phi}\|_V + \beta \|\mathbf{f}_2\|_{L^2(\Gamma_2)^d}$$

où $\boldsymbol{\phi} \in V$, $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.

Le problème de contrôle optimal est le suivant.

Problème \mathcal{Q}_2 . *Trouver un couple $(\mathbf{u}^*, \mathbf{f}_2^*) \in \mathcal{V}_{ad}$ tel que*

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}^*, \mathbf{f}_2^*) = \min_{(\mathbf{u}, \mathbf{f}_2) \in \mathcal{V}_{ad}} \mathcal{L}(\mathbf{u}, \mathbf{f}_2),$$

Le résultat d'existence de solution du Problème \mathcal{Q}_2 est donné par le théorème suivant.

Théorème 8.6. *Supposons que les conditions (8.11), (8.13) (8.14) sont vérifiées et, de plus, supposons que $\boldsymbol{\phi} \in V$, $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. Alors le problème de contrôle optimal \mathcal{Q}_2 admet au moins une solution $(\mathbf{u}^*, \mathbf{f}_2^*) \in \mathcal{V}_{ad}$.*

Démonstration. Pour ce faire, nous appliquons le Théorème 1.31 avec $Z = L^2(\Gamma_2)^d$, $X = W = V$ et $U_c = L^2(\Gamma_2)^d$. Nous considérons les opérateurs $T : L^2(\Gamma_2)^d \rightarrow V$ et $S : V \rightarrow V$ définis par

$$\begin{aligned} T\mathbf{f}_2 &= \mathbf{u}(\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_2, F, g) & \forall \mathbf{f}_2 \in L^2(\Gamma_2)^d, \\ S\mathbf{u} &= \mathbf{u} & \forall \mathbf{u} \in V. \end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que S satisfait la condition (1.45). En outre, en utilisant le Théorème 8.2, nous déduisons que l'opérateur T satisfait la condition (1.44). Par conséquent, nous utilisons des arguments similaires à ceux utilisés dans la démonstration du Théorème 8.5 pour déduire la démonstration du Théorème 8.6. \square

c) Le cas $\theta = F$. Nous contrôlons cette fois la solution du Problème \mathcal{P}^V par le seuil critique F du matériau rigide-plastique de la fondation. Supposons que les densités des forces volumiques et des tractions surfaciques ainsi que l'épaisseur g sont fixés satisfaisant les conditions (8.11) (8.12), (8.14). Nous considérons l'ensemble des paires admissibles défini par

$$\mathcal{V}_{ad} = \{ (\mathbf{u}, F) \in U \times U_F : \mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_2, F, g) \},$$

où l'ensemble U_F est donné par

$$U_F = \{ F \in L^2(\Gamma_3) : F(\mathbf{x}) \geq 0 \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3 \}.$$

Nous définissons la fonctionnelle coût $\mathcal{L} : V \times U_F \rightarrow \mathbb{R}$ par l'égalité

$$(8.62) \quad \mathcal{L}(\mathbf{u}, F) = \alpha \|\mathcal{F}\varepsilon(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\sigma}_0\|_Q + \beta \|F\|_{L^2(\Gamma_3)}, \quad \forall \mathbf{u} \in V, F \in U_F,$$

où $\boldsymbol{\sigma}_0 \in Q$, $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.

Ensuite, nous considérons le problème de contrôle optimal suivant.

Problème \mathcal{Q}_3 . *Trouver un couple $(\mathbf{u}^*, F^*) \in \mathcal{V}_{ad}$ tel que*

$$(8.63) \quad \mathcal{L}(\mathbf{u}^*, F^*) = \min_{(\mathbf{u}, F) \in \mathcal{V}_{ad}} \mathcal{L}(\mathbf{u}, F).$$

La solvabilité de ce problème est donnée par le théorème ci-dessous.

Théorème 8.7. *Supposons que les conditions (8.11) (8.12), (8.14) sont vérifiées et, de plus, supposons que $\boldsymbol{\sigma}_0 \in Q$, $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. Alors le problème de contrôle optimal \mathcal{Q}_3 admet au moins une solution $(\mathbf{u}^*, F^*) \in \mathcal{V}_{ad}$.*

Démonstration. Nous appliquons le Théorème 1.31 avec $Z = L^2(\Gamma_3)$, $X = V$, $W = Q$, $U_c = U_F$ et $\phi = \boldsymbol{\sigma}_0$. Nous définissons les opérateurs $T : U_F \rightarrow V$ et $S : V \rightarrow Q$ par les égalités

$$TF = \mathbf{u}(\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_2, F, g) \quad \forall F \in U_F,$$

$$S\mathbf{u} = \mathcal{F}\varepsilon(\mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{u} \in V.$$

Notons qu'il est facile de vérifier que l'ensemble U_F est faiblement fermé. En outre, d'après le Théorème 8.2, nous déduisons que l'opérateur T est faiblement fortement continu. Par ailleurs, en utilisant la condition (8.10)(b), nous obtenons que S est un opérateur continu. Par conséquent, en utilisant des arguments similaires à ceux présentés dans la démonstration du Théorème 8.5, nous concluons la démonstration du Théorème 8.7. \square

d) Le cas $\theta = g$. Dans ce cas, nous contrôlons la solution du Problème \mathcal{P}^V par l'épaisseur g du matériau rigide-plastique de la fondation. De ce fait, supposons

que les densités des forces volumiques et des tractions surfaciques ainsi que le seuil critique F sont fixés satisfaisant les conditions (8.11) (8.13). Pour commencer, nous considérons l'ensemble des paires admissibles défini par

$$(8.64) \quad \mathcal{V}_{ad} = \{ (\mathbf{u}, g) \in U \times U_{g_0} : \mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_2, F, g) \},$$

où $U_{g_0} = [g_0, +\infty)$ avec $g_0 > 0$.

Soient $\phi \in L^2(\Gamma_3)$, $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. La fonctionnelle coût $\mathcal{L} : V \times U_{g_0} \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par

$$(8.65) \quad \mathcal{L}(\mathbf{u}, g) = \alpha \|u_\nu - \phi\|_{L^2(\Gamma_3)} + \beta |g| \quad \forall \mathbf{u} \in V, g \in U_{g_0}.$$

Considérons alors le problème de contrôle optimal suivant.

Problème \mathcal{Q}_4 . *Trouver un couple $(\mathbf{u}^*, g^*) \in \mathcal{V}_{ad}$ tel que*

$$(8.66) \quad \mathcal{L}(\mathbf{u}^*, g^*) = \min_{(\mathbf{u}, g) \in \mathcal{V}_{ad}} \mathcal{L}(\mathbf{u}, g).$$

L'existence d'une paire optimale du Problème \mathcal{Q}_4 est donnée par le théorème suivant.

Théorème 8.8. *Supposons que les hypothèses (8.11) (8.13) sont vérifiées et, de plus, supposons que $\phi \in L^2(\Gamma_3)$, $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. Alors le Problème \mathcal{Q}_4 possède au moins une solution $(\mathbf{u}^*, g^*) \in \mathcal{V}_{ad}$.*

Démonstration. Nous utilisons le Théorème 1.31 avec $Z = \mathbb{R}$, $X = V$, $W = L^2(\Gamma_3)$, $U_c = U_{g_0}$, $Tg = \mathbf{u}(\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_2, F, g)$ pour tout $g \in U_{g_0}$ et $S\mathbf{u} = u_\nu$ pour tout $\mathbf{u} \in V$.

En procédant de la même manière que dans la démonstration du Théorème 8.5, nous déduisons que le Problème \mathcal{Q}_4 admet au moins une solution. \square

8.5 Un exemple unidimensionnel

Dans cette section, nous illustrons les résultats présentés dans les Sections 8.1 8.4 par un problème de contact élastique unidimensionnel avec $\Omega = (0, 1)$, $\Gamma_1 = \{0\}$, $\Gamma_2 = \emptyset$ et $\Gamma_3 = \{1\}$ (voir Figure II.8.1).

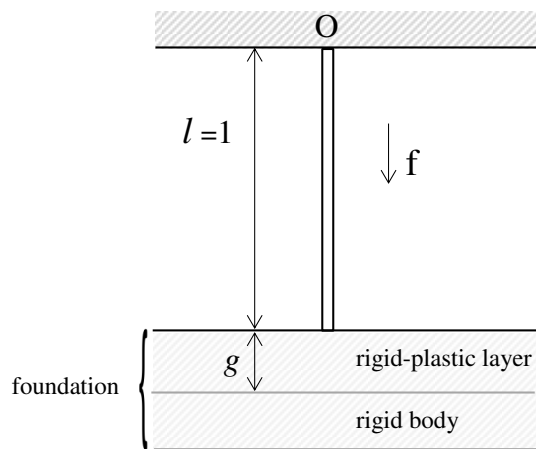


FIGURE II.8.1 : Cadre physique

La formulation forte du problème mécanique est la suivante.

Problème \mathcal{P}_{1d} . *Trouver un champ de déplacements $u: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ et un champ de contraintes $\sigma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tels que*

$$(8.67) \quad \sigma(x) = E u'(x) \quad \text{pour } x \in (0, 1),$$

$$(8.68) \quad \sigma'(x) + f = 0 \quad \text{pour } x \in (0, 1),$$

$$(8.69) \quad u(0) = 0,$$

$$(8.70) \quad u(1) \leq g, \quad \left. \begin{array}{l} \sigma(1) = 0 \quad \text{si } u(1) < 0 \\ -F < \sigma(1) < 0 \quad \text{si } u(1) = 0 \\ \sigma(1) = -F \quad \text{si } 0 < u(1) < g \\ \sigma(1) \leq -F \quad \text{si } u(1) = g \end{array} \right\}.$$

Notons que le Problème \mathcal{P}_{1d} modélise le contact entre une tige élastique de longueur $l = 1$ et une fondation. La tige occupant le domaine $[0, 1]$ est fixé à $x = 0$ et son extrémité $x = 1$ est en contact avec une fondation constituée d'un matériau rigide recouvert par un matériau rigide-plastique d'épaisseur $g > 0$. Ce modèle représente la version unidimensionnelle du Problème \mathcal{P} où l'opérateur d'élasticité $\mathcal{F}\varepsilon = E\varepsilon$ tel $E > 0$ est le module de Young.

Dans l'étude du Problème \mathcal{P}_{1d} nous considérons l'espace V défini par

$$V = \{v \in H^1(0, 1) : v(0) = 0\}$$

ainsi que l'ensemble de déplacements admissibles défini par

$$U = \{u \in V : u(L) \leq g\}.$$

Nous utilisons des arguments similaires à ceux utilisés dans la Section 8.1 afin d'obtenir la formulation variationnelle suivante du Problème \mathcal{P}_{1d} .

Problème \mathcal{P}_{1d}^V . *Trouver un champ de déplacements $u \in U$ tel que*

$$(8.71) \quad \int_0^1 Eu'(v' - u') dx + Fv(1)^+ - Fu(1)^+ \geq \int_0^1 f(v - u) dx \quad \forall v \in U.$$

En utilisant le Théorème 8.1, nous déduisons que le Problème \mathcal{P}_{1d}^V admet une solution unique $u \in U$. En outre, d'après le Théorème 8.2, nous déduisons que cette solution dépend continûment des données f , F et g .

Nous calculons maintenant la solution explicite du Problème \mathcal{P}_{1d}^V en distinguant quatre cas.

a) **Le cas $f < 0$.** Dans ce cas, les forces volumiques sont appliquées dans la direction opposée de la fondation et la solution du Problème \mathcal{P}_{1d}^V est donnée par

$$(8.72) \quad \begin{cases} \sigma(x) = -fx + f \\ u(x) = -\frac{f}{2E}x^2 + \frac{f}{E}x \end{cases} \quad \forall x \in [0, 1].$$

En utilisant (8.72), nous avons que

$$u(1) < 0 \quad \text{et} \quad \sigma(1) = 0.$$

Cette condition montre qu'il y a une séparation entre la tige et la fondation et, par conséquent, la réaction de la fondation est nulle. Ce cas correspond à la Figure II.8.2 a).

b) **Le cas $0 \leq f < 2F$.** Ce cas est présenté dans la Figure II.8.2 b). La solution du Problème \mathcal{P}_{1d}^V est donnée par

$$(8.73) \quad \begin{cases} \sigma(x) = -fx + \frac{f}{2} \\ u(x) = -\frac{f}{2E}x^2 + \frac{f}{2E}x \end{cases} \quad \forall x \in [0, 1].$$

De (8.73), nous avons que

$$u(1) = 0 \quad \text{et} \quad -F < \sigma(1) \leq 0.$$

Cette condition montre que la tige est en contact avec la fondation et la réaction de la fondation est dans la direction opposée de la tige. Puisque la réaction de la fondation $-\sigma(1)$ n'a pas encore atteint le seuil critique F , la tige ne peut pas pénétrer dans la fondation. Le matériau rigide-plastique dans ce cas se comporte comme un rigide.

c) **Le cas** $2F \leq f < 2Eg + 2F$. Ce cas correspond à la Figure II.8.2 c). La solution explicite du Problème \mathcal{P}_{1d}^V est donnée par

$$(8.74) \quad \begin{cases} \sigma(x) = -fx + f - F, \\ u(x) = -\frac{f}{2E}x^2 + \frac{f-F}{E}x \end{cases} \quad \forall x \in [0, 1].$$

En utilisant (8.74), nous avons que

$$0 \leq u(1) < g \quad \text{et} \quad -\sigma(1) = F.$$

Cette condition montre que la réaction de la fondation atteint le seuil critique F et, par conséquent, il y a une pénétration entre la tige et le matériau rigide-plastique de la fondation mais sans atteindre l'épaisseur g . Le matériau rigide-plastique dans ce cas se comporte comme un plastique.

d) **Le cas** $2Eg + 2F \leq f$. La solution explicite du Problème \mathcal{P}_{1d}^V est donnée par

$$(8.75) \quad \begin{cases} \sigma(x) = -fx + \frac{2Eg+f}{2}, \\ u(x) = -\frac{f}{2E}x^2 + \frac{2Eg+f}{2E}x \end{cases} \quad \forall x \in [0, 1].$$

Nous avons que

$$(8.76) \quad 0 \leq u(1) = g \quad \text{et} \quad \sigma(1) \leq -F.$$

Cette condition montre que le matériau rigide-plastique est complètement écrasé et la tige est donc en contact avec le matériau rigide de la fondation, ce qui implique que $-\sigma(1) \geq F$. Ce cas correspond à la Figure II.8.2 d).

Passons maintenant au problème de contrôle optimal. Nous proposons de contrôler la solution du Problème \mathcal{P}_{1d}^V par l'épaisseur du matériau rigide-plastique g . Pour ce faire, considérons le Problème \mathcal{Q}_4 dans le cas unidimensionnel, i.e.,

$$(8.77) \quad \mathcal{V}_{ad} = \{ (u, g) \in U \times U_{g_0} : u \text{ résout l'inéquation variationnelle (8.71)} \}$$

et, la fonctionnelle coût est donnée par

$$(8.78) \quad \mathcal{L}(u, g) = \alpha |u(1) - \phi| + \beta |g|,$$

où $\phi \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $U_{g_0} = [g_0, +\infty)$ avec $g_0 > 0$.

Ensuite, le problème de contrôle optimal est le suivant.

Problème \mathcal{Q}_4^{1d} . *Trouver un couple $(u^*, g^*) \in \mathcal{V}_{ad}$ tel que*

$$(8.79) \quad \mathcal{L}(u^*, g^*) = \min_{(u, g) \in \mathcal{V}_{ad}} \mathcal{L}(u, g).$$

En utilisant le Théorème 8.8, nous déduisons que le Problème \mathcal{Q}_4^{1d} possède au moins une solution. Pour calculer la solution explicite de ce problème, nous supposons que

$$E = 1, \quad f = 10, \quad F = 2, \quad \phi = 4, \quad g_0 = 1 \quad \text{et} \quad U = [1, +\infty).$$

Avec ces données, nous remarquons que si $g \leq 3$ alors $f \geq 2Eg + 2F$ et si $g > 3$ alors $2F \leq f < 2Eg + 2F$. Donc, en utilisant (8.75) et (8.74), nous obtenons que

$$(8.80) \quad u(x) = \begin{cases} -5x^2 + (g + 5)x & \text{si } 1 \leq g \leq 3 \\ -5x^2 + 8x & \text{si } g > 3 \end{cases} \quad \forall x \in [0, 1].$$

D'où

$$u(1) = \begin{cases} g & \text{si } 1 \leq g \leq 3 \\ 3 & \text{si } g > 3 \end{cases} \quad \forall x \in [0, 1].$$

Par ailleurs, la fonctionnelle coût est donnée par

$$(8.81) \quad \mathcal{L}(u, g) = \begin{cases} (\beta - \alpha)g + 4\alpha, & \text{si } 1 \leq g \leq 3 \\ \beta g + \alpha & \text{si } g > 3. \end{cases}$$

Nous concluons par les affirmations suivantes :

- a) Si $\beta > \alpha > 0$ alors le problème de contrôle optimal \mathcal{Q}_4^{1d} possède une solution unique (u^*, g^*) où $g^* = 1$ et u^* est donné par (8.80) avec $g = g^*$.
- b) Si $\beta = \alpha$ alors le problème de contrôle optimal \mathcal{Q}_4^{1d} possède une infinité de solution de la forme (u^*, g^*) où g^* prend ses valeurs dans l'intervalle $[1, 3]$ et u^* est donné par (8.80) avec $g = g^*$.
- c) Si $0 < \beta < \alpha$ alors le problème de contrôle optimal (8.79) admet une solution unique (u^*, g^*) où $g^* = 3$ et u^* est donné par (8.80) avec $g = g^*$.

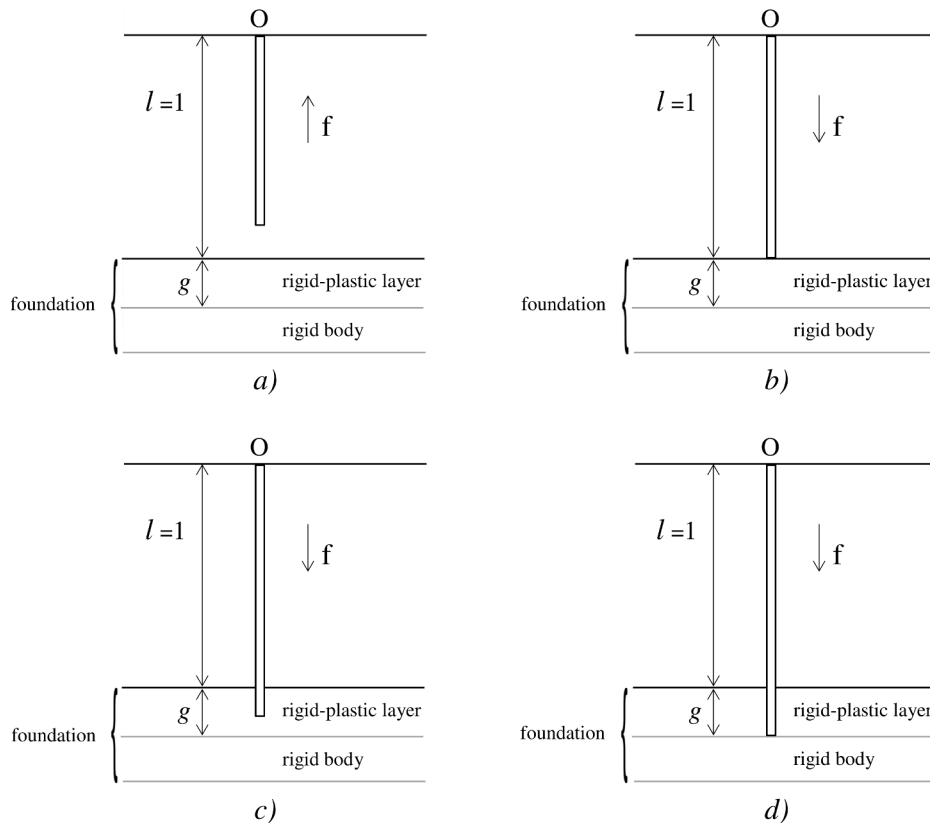


FIGURE II.8.2 : Le contact de la tige avec la fondation

- a) Le cas $f < 0$; b) Le cas $0 \leq f < 2F$;
c) Le cas $2F \leq f < 2Eg + 2F$; d) Le cas $2Eg + 2F \leq f$.

Chapitre 9

Problème de contact bidimensionnel élastique avec compli- ance normale et contrainte unilatérale

Dans ce chapitre, nous considérons un problème de contact statique modélisant le contact entre une poutre élastique et deux obstacles. Ce chapitre est composé de quatre sections. Dans la première section, nous décrivons la formulation forte du problème mécanique et nous introduisons une version bidimensionnelle associée au problème mécanique. Dans la deuxième section, nous présentons les hypothèses nécessaires sur les données afin d'obtenir une formulation variationnelle et prouver un résultat d'existence et d'unicité de solution. Dans la troisième section, nous démontrons un résultat de convergence portant sur la perturbation des données. La quatrième section est consacrée à l'étude d'un problème de contrôle optimal pour lequel nous prouvons l'existence de la solution ainsi que sa dépendance par rapport aux perturbations des données. Les résultats présentés dans ce chapitre font l'objet de l'article [81].

9.1 Problème mécanique et formulation variationnelle

Le cadre physique correspondant au modèle mécanique est le suivant : considérons une poutre élastique occupant un domaine $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^3$. Notons par x, y, z les variables spatiales et supposons que \mathcal{B} est suffisamment longue dans la direction Oz , i.e., $\mathcal{B} = (0, L) \times (-h, h) \times (-\infty, +\infty)$ où L et $2h$ représentent respectivement la longueur et l'épaisseur de la poutre avec $h \ll L$. La poutre est fixée sur $\Gamma_1 = \{0\} \times (-h, h) \times (-\infty, +\infty)$ et, de ce fait, le déplacement y est nul. Des tractions surfaciques de densité \mathbf{p} agissent sur $\Gamma_2 = (0, L) \times \{h\} \times (-\infty, +\infty)$. La poutre est en contact sans frottement avec une fondation rigide sur $\Gamma_3 = \{L\} \times (-h, h) \times (-\infty, +\infty)$ et avec une fondation déformable sur $\Gamma_4 = (0, L) \times \{-h\} \times (-\infty, +\infty)$. Supposons que les forces volumiques sont négligées.

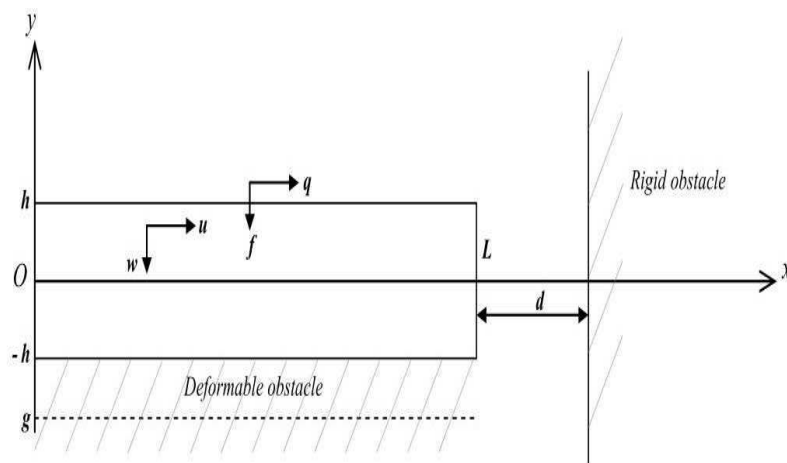


FIGURE II.9.1 : Cadre physique

Le problème mécanique se formule de la manière suivante.

Problème \mathcal{P}_{3d} . *Trouver un champ de déplacements $\mathbf{u} : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^3$ et un champ de*

contraintes $\boldsymbol{\sigma} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{S}^3$ tels que

$$(9.1) \quad \boldsymbol{\sigma} = \lambda (\text{tr } \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) \mathbf{I}_3 + 2 \delta \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \quad \text{dans } \mathcal{B},$$

$$(9.2) \quad \text{Div } \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \quad \text{dans } \mathcal{B},$$

$$(9.3) \quad \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_1,$$

$$(9.4) \quad \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} = \mathbf{p} \quad \text{sur } \Gamma_2,$$

$$(9.5) \quad u_\nu \leq d, \quad \sigma_\nu \leq 0, \quad \sigma_\nu(u_\nu - d) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3,$$

$$(9.6) \quad \left. \begin{array}{l} u_\nu \leq g, \quad \sigma_\nu + p(u_\nu) \leq 0, \\ (u_\nu - g)(\sigma_\nu + p(u_\nu)) = 0 \end{array} \right\} \quad \text{sur } \Gamma_4,$$

$$(9.7) \quad \boldsymbol{\sigma}_\tau = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \cup \Gamma_4.$$

Pour ce problème, (9.1) est la loi de comportement élastique linéaire où λ et δ représentent les coefficients de Lamé. Puis, (9.2) est l'équation d'équilibre dans le cas d'un processus statique. Ensuite, (9.3) (9.4) représentent les conditions aux limites de déplacement et de traction. La relation (9.5) est la condition de contact de Signorini avec interstice d et la condition (9.6) caractérise la loi de contact avec compliance normale et contrainte unilatérale. Enfin, la condition (9.7) montre que la contrainte tangentielle est nulle vu que le contact est considéré sans frottement.

Nous présentons maintenant une version bidimensionnelle associée au Problème \mathcal{P}_{3d} . Pour ce faire, nous considérons la coupe transversale $\Omega = (0, L) \times (-h, h)$ de la poutre et nous supposons que la densité des tractions surfaciques est donnée par

$$(9.8) \quad \mathbf{p} = (q, f, 0) \quad \text{avec } f = f(x) \quad \text{et } q = q(x).$$

Nous en déduisons que, sur la partie Γ_2 , la poutre est soumise à l'action d'une charge verticale f et d'une traction horizontale q . En outre, nous utilisons (9.8) et nous supposons que le champ de déplacements \mathbf{u} est de la forme

$$(9.9) \quad \mathbf{u} = (u, w, 0) \quad \text{avec } u = u(x, y) \quad \text{et } w = w(x),$$

où u, w représentent respectivement le déplacement horizontal et vertical.

Il résulte de l'égalité (9.9) que le tenseur des déformations linéarisés $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$ est donné par

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} u_x & \frac{1}{2}(u_y + w_x) & 0 \\ \frac{1}{2}(u_y + w_x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De là, nous avons que $\text{tr } \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = u_x$ et, par conséquent, la loi constitutive (9.1) donne que le champ de contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ est de la forme

$$(9.10) \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} (\lambda + 2\delta)u_x & \delta(u_y + w_x) & 0 \\ \delta(u_y + w_x) & \lambda u_x & 0 \\ 0 & 0 & \lambda u_x \end{pmatrix}.$$

Introduisons maintenant les notations

$$E = \lambda + 2\delta \quad \text{et} \quad G = \delta.$$

Il en résulte que $\lambda = E - 2G$ et, par conséquent, (9.10) devient

$$(9.11) \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} Eu_x & G(u_y + w_x) & 0 \\ G(u_y + w_x) & (E - 2G)u_x & 0 \\ 0 & 0 & (E - 2G)u_x \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, nous combinons (9.11) et (9.9) pour obtenir que l'équation d'équilibre (9.2) s'écrit par les deux équations suivantes :

$$(9.12) \quad Eu_{xx}(x, y) + Gu_{yy}(x, y) = 0 \quad \text{pour tout } (x, y) \in \Omega,$$

$$(9.13) \quad Gw_{xx}(x) + (E - G)u_{xy}(x, y) = 0 \quad \text{pour tout } (x, y) \in \Omega.$$

Passons maintenant aux conditions aux limites de déplacement et de traction. D'abord, nous combinons la condition (9.3) avec l'égalité (9.9) afin de voir que

$$(9.14) \quad u(0, y) = w(0) = 0 \quad \text{pour tout } y \in [-h, h].$$

Puisque la normale extérieure sur Γ_2 est donnée par $\boldsymbol{\nu} = (0, 1, 0)$, nous utilisons la relation (9.11) pour obtenir que le vecteur des contraintes de Cauchy est de la forme

$$\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu} = (G(u_y + w_x), (E - 2G)u_x, 0).$$

Par conséquent, nous utilisons cette égalité avec (9.8) afin de voir que la condition aux limites (9.4) s'écrit par

$$(9.15) \quad G(u_y(x, h) + w_x(x)) = q(x) \quad \text{pour tout } x \in [0, L],$$

$$(9.16) \quad (E - 2G)u_x(x, h) = f(x) \quad \text{pour tout } x \in [0, L].$$

Passons maintenant aux conditions aux limites de contact. D'abord, puisque la normale extérieure sur Γ_3 est $\boldsymbol{\nu} = (1, 0, 0)$, il résulte de la définition (5.3) et l'égalité (9.9) que les composantes normales du champ de déplacements \mathbf{u} à la partie Γ_3 sont données par

$$(9.17) \quad u_\nu = u \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3.$$

De même, en utilisant la définition (5.4) et l'égalité (9.11), nous obtenons que

$$(9.18) \quad \sigma_\nu = E u_x \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\sigma}_\tau = (0, G(u_y + w_x), 0) \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3.$$

Nous combinons maintenant (9.17) et (9.18) pour obtenir que la condition de contact sans frottement (9.5), (9.7) est donnée par

$$(9.19) \quad u(L, y) \leq d, \quad u_x(L, y) \leq 0, \quad u_x(L, y)(u(L, y) - d) = 0,$$

$$(9.20) \quad u_y(L, y) + w_x(L) = 0,$$

pour tout $y \in [-h, h]$.

D'autre part, notons que la normale extérieure sur la partie Γ_4 est donnée par $\boldsymbol{\nu} = (0, -1, 0)$ et, de ce fait, les composantes normales du champ de déplacements \mathbf{u} sont données par

$$(9.21) \quad u_\nu = -w \quad \text{p.p. sur } \Gamma_4.$$

De plus, en utilisant la définition (5.4) et l'égalité (9.11), nous obtenons que les contraintes normales et tangentielles à Γ_4 s'écrivent par

$$(9.22) \quad \sigma_\nu = (E - 2G)u_x \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\sigma}_\tau = (-G(u_y + w_x), 0, 0) \quad \text{p.p. sur } \Gamma_4.$$

Combinons (9.21), (9.22) et utilisons le fait que le gap entre la partie Γ_4 de la frontière de la poutre et la fondation déformable est $-g$ pour obtenir que la condition de

contact sans frottement (9.6) (9.7) est donnée par

$$(9.23) \quad w(x) \geq g, \quad ((E - 2G)u_x(x, -h) + p(x, -w(x))) \leq 0,$$

$$(9.24) \quad (w(x) - g)((E - 2G)u_x(x, -h) + p(x, -w(x))) = 0,$$

$$(9.25) \quad u_y(x, -h) + w_x(x) = 0,$$

pour tout $x \in [0, L]$.

Enfin, nous rassemblons (9.12) (9.16), (9.19) (9.20) et (9.23) (9.25) afin d'obtenir le problème bidimensionnel suivant.

Problème \mathcal{P}_{2d} . *Trouver un champ de déplacements horizontal $u = u(x, y) : (0, L) \times (-h, h) \rightarrow \mathbb{R}$ et un champ de déplacements vertical $w = w(x) : (0, L) \rightarrow \mathbb{R}$ tels que*

$$(9.26) \quad Eu_{xx}(x, y) + Gu_{yy}(x, y) = 0 \quad \text{pour tout } (x, y) \in \Omega,$$

$$(9.27) \quad Gw_{xx}(x) + (E - G)u_{xy}(x, y) = 0 \quad \text{pour tout } (x, y) \in \Omega,$$

$$(9.28) \quad u(0, y) = w(0) = 0 \quad \text{pour tout } y \in [-h, h],$$

$$(9.29) \quad G(u_y(x, h) + w_x(x)) = q(x) \quad \text{pour tout } x \in [0, L],$$

$$(9.30) \quad (E - 2G)u_x(x, h) = f(x) \quad \text{pour tout } x \in [0, L],$$

$$(9.31) \quad \left. \begin{array}{l} u(L, y) \leq d, \quad u_x(L, y) \leq 0, \\ u_x(L, y)(u(L, y) - d) = 0 \end{array} \right\} \quad \text{pour tout } y \in [-h, h],$$

$$(9.32) \quad u_y(L, y) + w_x(L) = 0 \quad \text{pour tout } y \in [-h, h],$$

$$(9.33) \quad \left. \begin{array}{l} w(x) \geq g, \quad ((E - 2G)u_x(x, -h) + p(x, -w(x))) \leq 0, \\ (w(x) - g)((E - 2G)u_x(x, -h) + p(x, -w(x))) = 0 \end{array} \right\} \\ \text{pour tout } x \in [0, L],$$

$$(9.34) \quad u_y(x, -h) + w_x(x) = 0 \quad \text{pour tout } x \in [0, L].$$

Dans l'étude du Problème \mathcal{P}_{2d} nous introduisons les espaces définis par

$$V = \{u \in H^1(\Omega) : u(0, \cdot) = 0\},$$

$$W = \{w \in H^1(0, L) : w(0) = 0\},$$

$$X = V \times W, \quad Y = L^2(0, L) \times L^2(0, L).$$

Notons que V , W et X sont des espaces de Hilbert munis des produits scalaires

$$(9.35) \quad (u, \psi)_V = \iint_{\Omega} (u\psi + u_x\psi_x + u_y\psi_y) dx dy \quad \forall u, \psi \in V,$$

$$(9.36) \quad (w, \varphi)_W = \int_0^L (w\varphi + w_x\varphi_x) dx \quad \forall w, \varphi \in W,$$

$$(9.37) \quad (\mathbf{u}, \mathbf{v})_X = (u, \psi)_V + (w, \varphi)_W \quad \forall \mathbf{u} = (u, w), \mathbf{v} = (\psi, \varphi) \in X.$$

Les normes associées à ces produits scalaires sont notées respectivement par $\|\cdot\|_V$, $\|\cdot\|_W$ et $\|\cdot\|_X$.

Par ailleurs, nous utilisons la définition (9.37) pour voir que la norme sur l'espace X satisfait

$$(9.38) \quad \|\mathbf{u}\|_X^2 = \|u\|_V^2 + \|w\|_W^2 \quad \forall \mathbf{u} = (u, w) \in X.$$

De plus, nous avons que

$$(9.39) \quad \|w\|_{L^2(0,L)} \leq \|\mathbf{u}\|_X \quad \forall \mathbf{u} = (u, w) \in X.$$

D'autre part, notons que Y est un espace de Hilbert muni du produit scalaire canonique $(\cdot, \cdot)_Y$ et de sa norme associée $\|\cdot\|_Y$. Notons par $\pi : X \rightarrow Y$ l'opérateur défini par

$$(9.40) \quad \pi \mathbf{v} = (\psi^h, \varphi) \quad \forall \mathbf{v} = (\psi, \varphi) \in X,$$

où ψ^h représente la trace de la fonction $\psi \in H^1(\Omega)$ à la frontière $y = h$, i.e.,

$$\psi^h(x) = \psi(x, h) \quad \text{p.p. } x \in [0, L].$$

De la définition (9.40), il résulte que π est un opérateur continu et linéaire et, par conséquent, nous déduisons qu'il existe une constante positive $c_0 > 0$ telle que

$$(9.41) \quad \|\pi \mathbf{v}\|_Y \leq c_0 \|\mathbf{v}\|_X \quad \forall \mathbf{v} \in X.$$

En outre, nous combinons la compacité de l'application de trace avec l'injection compacte $H^1(0, L) \subset L^2(0, L)$ (voir Théorème 5.1, page 103) pour déduire que l'opérateur $\pi : X \rightarrow Y$ est faiblement-fortement continu, c'est-à-dire

$$(9.42) \quad \mathbf{v}_n \rightharpoonup \mathbf{v} \text{ dans } X \implies \pi \mathbf{v}_n \rightarrow \pi \mathbf{v} \text{ dans } Y \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

Afin d'étudier l'existence et l'unicité de la solution du problème variationnel introduit ci-après, nous supposons que les conditions suivantes sont vérifiées :

$$(9.43) \quad E > 0, \quad G > 0,$$

$$(9.44) \quad d \geq 0, \quad g \leq -h,$$

$$(9.45) \quad \mathbf{f} = (q, f) \in Y.$$

Par ailleurs, nous supposons que la fonction de compliance normale p satisfait

$$(9.46) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } p : [0, L] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}. \\ \text{(b) Il existe } L_p > 0 \text{ tel que} \\ \quad |p(x, r_1) - p(x, r_2)| \leq L_p |r_1 - r_2| \\ \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \quad \text{p.p. } x \in [0, L]. \\ \text{(c) } (p(x, r_1) - p(x, r_2))(r_1 - r_2) \leq 0 \\ \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \quad \text{p.p. } x \in [0, L]. \\ \text{(d) } p(x, r) = 0 \text{ si et seulement si } r \leq 0, \quad \text{p.p. } x \in [0, L]. \\ \text{(e) L'application } x \mapsto p(x, r) \text{ est mesurable sur } [0, L], \\ \quad \text{pour tout } r \in \mathbb{R}. \end{array} \right.$$

Maintenant, nous nous intéressons à la formulation variationnelle du Problème \mathcal{P}_{2d} . Pour cela, nous introduisons l'ensemble de déplacements admissibles U et l'opérateur $A : X \rightarrow X$ définis par

$$(9.47) \quad U = \{ \mathbf{u} = (u, w) \in X : u(L, y) \leq d \text{ et } w(x) \geq g \text{ p.p. } (x, y) \in \Omega \},$$

$$(9.48) \quad (A\mathbf{u}, \mathbf{v})_X = E \iint_{\Omega} u_x \psi_x \, dx dy + G \iint_{\Omega} (u_y + w_x)(\psi_y + \varphi_x) \, dx dy \\ - \int_0^L p(-w) \varphi \, dx, \quad \forall \mathbf{u} = (u, w), \quad \mathbf{v} = (\psi, \varphi) \in X.$$

En outre, nous utilisons la définition (9.40) afin de voir que

$$(9.49) \quad (\mathbf{f}, \pi \mathbf{v})_Y = \int_0^L q \psi^h \, dx + \int_0^L f \varphi \, dx \quad \forall \mathbf{v} = (\psi, \varphi) \in X.$$

Supposons maintenant que $\mathbf{u} = (u(x, y), w(x))$ est une fonction suffisamment régulière qui résout le Problème \mathcal{P}_{2d} et soit $\mathbf{v} = (\psi(x, y), \varphi(x)) \in U$. Nous multiplions

l'équation (9.26) par $\psi - u$, puis nous intégrons le résultat sur Ω pour obtenir que

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} E u_{xx}(x, y)(\psi(x, y) - u(x, y)) \, dx dy \\ & + \iint_{\Omega} G u_{yy}(x, y)(\psi(x, y) - u(x, y)) \, dx dy = 0. \end{aligned}$$

Ensuite, en utilisant la formule de Green, la condition (9.28) et la définition de l'espace V , nous trouvons que

$$\begin{aligned} (9.50) \quad & E \iint_{\Omega} u_x(x, y)(\psi_x(x, y) - u_x(x, y)) \, dx dy \\ & + G \iint_{\Omega} u_y(x, y)(\psi_y(x, y) - u_y(x, y)) \, dx dy \\ & = E \int_{-h}^h u_x(L, y)(\psi(L, y) - u(L, y)) \, dy \\ & - G \int_0^L u_y(x, -h)(\psi(x, -h) - u(x, -h)) \, dx \\ & + G \int_0^L u_y(x, h)(\psi(x, h) - u(x, h)) \, dy. \end{aligned}$$

Par ailleurs, nous écrivons

$$\begin{aligned} & u_x(L, y)(\psi(L, y) - u(L, y)) \\ & = u_x(L, y)(\psi(L, y) - d) + u_x(L, y)(d - u(L, y)) \quad \forall y \in [-h, h]. \end{aligned}$$

De ce fait, en utilisant la condition (9.31) et la définition (9.47) de l'ensemble U , nous trouvons que

$$u_x(L, y)(\psi(L, y) - u(L, y)) \geq 0 \quad \forall y \in [-h, h].$$

Ensuite, en intégrant cette inégalité sur l'intervalle $[-h, h]$, nous avons

$$(9.51) \quad \int_{-h}^h u_x(L, y)(\psi(L, y) - u(L, y)) \, dy \geq 0.$$

Nous combinons maintenant les inégalités (9.50) et (9.51) pour trouver que

$$\begin{aligned}
 (9.52) \quad & E \iint_{\Omega} u_x(x, y)(\psi_x(x, y) - u_x(x, y)) \, dx dy \\
 & + G \iint_{\Omega} u_y(x, y)(\psi_y(x, y) - u_y(x, y)) \, dx dy \\
 & + G \int_0^L u_y(x, -h)(\psi(x, -h) - u(x, -h)) \, dx \\
 & \geq G \int_0^L u_y(x, h)(\psi(x, h) - u(x, h)) \, dx.
 \end{aligned}$$

D'autre part, en multipliant l'équation (9.27) par $\varphi - w$ et en intégrant le résultat obtenu sur Ω , nous obtenons que

$$\begin{aligned}
 & \iint_{\Omega} G w_{xx}(x)(\varphi(x) - w(x)) \, dx dy \\
 & + \iint_{\Omega} (E - G) u_{xy}(x, y)(\varphi(x) - w(x)) \, dx dy = 0.
 \end{aligned}$$

En faisant des intégrations par parties et en utilisant la condition (9.28), nous obtenons

$$\begin{aligned}
 (9.53) \quad & G \iint_{\Omega} w_x(x)(\varphi_x(x) - w_x(x)) \, dx dy \\
 & + (E - G) \iint_{\Omega} u_y(x, y)(\varphi_x(x) - w_x(x)) \, dx dy \\
 & - G \int_{-h}^h w_x(L)(\varphi(L) - w(L)) \, dy \\
 & - (E - G) \int_{-h}^h u_y(L, y)(\varphi(L) - w(L)) \, dy = 0.
 \end{aligned}$$

En outre, nous utilisons la condition aux limites (9.32) pour obtenir que

$$(9.54) \quad -G \int_{-h}^h w_x(L)(\varphi(L) - w(L)) \, dy = G \int_{-h}^h u_y(L, y)(\varphi(L) - w(L)) \, dy$$

et, de ce fait, nous combinons (9.53) et (9.54) pour déduire que

$$(9.55) \quad \begin{aligned} & G \iint_{\Omega} (w_x(x) + u_y(x, y))(\varphi_x(x) - w_x(x)) \, dx dy \\ & + (E - 2G) \iint_{\Omega} u_y(x, y)(\varphi_x(x) - w_x(x)) \, dx dy \\ & - (E - 2G) \int_{-h}^h u_y(L, y)(\varphi(L) - w(L)) \, dy = 0. \end{aligned}$$

En additionnant (9.52) et (9.55), nous trouvons

$$(9.56) \quad \begin{aligned} & E \iint_{\Omega} u_x(x, y)(\psi_x(x, y) - u_x(x, y)) \, dx dy \\ & + G \iint_{\Omega} (w_x(x) + u_y(x, y))(\varphi_x(x) - w_x(x)) \, dx dy \\ & + G \iint_{\Omega} u_y(x, y)(\psi_y(x, y) - u_y(x, y)) \, dx dy \\ & + G \int_0^L u_y(x, -h)(\psi(x, -h) - u(x, -h)) \, dx \\ & + (E - 2G) \iint_{\Omega} u_y(x, y)(\varphi_x(x) - w_x(x)) \, dx dy \\ & - (E - 2G) \int_{-h}^h u_y(L, y)(\varphi(L) - w(L)) \, dy \\ & \geq G \int_0^L u_y(x, h)(\psi(x, h) - u(x, h)) \, dy. \end{aligned}$$

Ensuite, en utilisant la condition aux limites (9.29), nous avons que

$$(9.57) \quad \begin{aligned} & G \int_0^L u_y(x, h)(\psi(x, h) - u(x, h)) \, dx \\ & = \int_0^L (q(x) - Gw_x(x))(\psi(x, h) - u(x, h)) \, dx. \end{aligned}$$

En outre, remarquons que

$$(9.58) \quad \begin{aligned} & (E - 2G) \iint_{\Omega} u_y(x, y)(\varphi_x(x) - w_x(x)) \, dx dy \\ & - (E - 2G) \int_{-h}^h u_y(L, y)(\varphi(L) - w(L)) \, dy \\ & = -(E - 2G) \iint_{\Omega} u_{xy}(x, y)(\varphi(x) - w(x)) \, dx dy. \end{aligned}$$

En combinant maintenant les relations (9.56) (9.58), nous déduisons que

$$\begin{aligned}
 (9.59) \quad & E \iint_{\Omega} u_x(x, y)(\psi_x(x, y) - u_x(x, y)) \, dx dy \\
 & + G \iint_{\Omega} (w_x(x) + u_y(x, y)(\varphi_x(x) - w_x(x)) \, dx dy \\
 & + G \iint_{\Omega} u_y(x, y)(\psi_y(x, y) - u_y(x, y)) \, dx dy \\
 & + G \int_0^L u_y(x, -h)(\psi(x, -h) - u(x, -h)) \, dx \\
 & + G \int_0^L w_x(x)(\psi(x, h) - u(x, h)) \, dx \\
 & - (E - 2G) \iint_{\Omega} u_{xy}(x, y)(\varphi(x) - w(x)) \, dx dy \\
 & \geq \int_0^L q(x)(\psi(x, h) - u(x, h)) \, dx.
 \end{aligned}$$

D'autre part, un calcul élémentaire montre que

$$\begin{aligned}
 (9.60) \quad & (E - 2G) \iint_{\Omega} u_{xy}(x, y)(\varphi(x) - w(x)) \, dx dy \\
 & = (E - 2G) \int_0^L u_x(x, h)(\varphi(x) - w(x)) \, dx \\
 & - (E - 2G) \int_0^L u_x(x, -h)(\varphi(x) - w(x)) \, dx.
 \end{aligned}$$

En utilisant la condition aux limites (9.30), l'égalité (9.60) devient

$$\begin{aligned}
 (9.61) \quad & (E - 2G) \iint_{\Omega} u_{xy}(x, y)(\varphi(x) - w(x)) \, dx dy \\
 & = \int_0^L f(x)(\varphi(x) - w(x)) \, dx \\
 & - (E - 2G) \int_0^L u_x(x, -h)(\varphi(x) - w(x)) \, dx.
 \end{aligned}$$

En combinant maintenant (9.59), (9.61) et (9.49), nous obtenons

$$\begin{aligned}
 (9.62) \quad & E \iint_{\Omega} u_x(x, y)(\psi_x(x, y) - u_x(x, y)) \, dx dy \\
 & + G \iint_{\Omega} (w_x(x) + u_y(x, y))(\varphi_x(x) - w_x(x)) \, dx dy \\
 & + G \iint_{\Omega} u_y(x, y)(\psi_y(x, y) - u_y(x, y)) \, dx dy \\
 & + G \int_0^L u_y(x, -h)(\psi(x, -h) - u(x, -h)) \, dx \\
 & + G \int_0^L w_x(x)(\psi(x, h) - u(x, h)) \, dx \\
 & + (E - 2G) \int_0^L u_x(x, -h)(\varphi_x(x) - w_x(x)) \, dx \\
 & \geq (\mathbf{f}, \pi \mathbf{v} - \pi \mathbf{u})_Y.
 \end{aligned}$$

Ensuite, nous utilisons la condition (9.34) pour voir que

$$\begin{aligned}
 (9.63) \quad & G \int_0^L w_x(x)(\psi(x, h) - u(x, h)) \, dx \\
 & = G \iint_{\Omega} w_x(x)(\psi_y(x, y) - u_y(x, y)) \, dx dy \\
 & + G \int_0^L u_y(x, -h)(\psi(x, -h) - u(x, -h)) \, dx.
 \end{aligned}$$

Puis, en substituant (9.63) dans (9.62) et en utilisant la définition (9.48) de l'opérateur A , il en résulte que

$$\begin{aligned}
 (9.64) \quad & (A\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u})_X + \int_0^L ((E - 2G)u_x(x, -h) + p(x, -w(x)))(\varphi(x) - w(x)) \, dx \\
 & \geq (\mathbf{f}, \pi \mathbf{v} - \pi \mathbf{u})_Y.
 \end{aligned}$$

En outre, en écrivant

$$\begin{aligned}
 (9.65) \quad & ((E - 2G)u_x(x, -h) + p(x, -w(x)))(\varphi(x) - w(x)) \\
 & = ((E - 2G)u_x(x, -h) + p(x, -w(x)))(\varphi(x) - g) \\
 & + ((E - 2G)u_x(x, -h) + p(x, -w(x)))(g - w(x))
 \end{aligned}$$

pour tout $x \in [0, L]$. Donc, en combinant (9.33) et (9.47) avec (9.65), nous obtenons

$$((E - 2G)u_x(x, -h) + p(x, -w(x)))(\varphi(x) - w(x)) \leq 0 \quad \forall x \in [0, L]$$

et, par conséquent,

$$(9.66) \quad \int_0^L ((E - 2G)u_x(x, -h) + p(x, -w(x)))(\varphi(x) - w(x))dx \leq 0.$$

La formulation variationnelle du Problème \mathcal{P}_{2d} s'obtient en rassemblant les inégalités (9.64) et (9.66).

Problème \mathcal{P}_{2d}^V . *Trouver un champ de déplacements $\mathbf{u} \in U$ tel que*

$$(9.67) \quad (A\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u})_X \geq (\mathbf{f}, \pi\mathbf{v} - \pi\mathbf{u})_Y \quad \forall \mathbf{v} \in U.$$

L'unique solvabilité du Problème \mathcal{P}_{2d}^V fait l'objet de la section suivante.

9.2 Existence et unicité de la solution

Dans cette section, nous présentons le résultat d'existence et d'unicité de la solution du problème variationnel \mathcal{P}_{2d}^V .

Théorème 9.1. *Sous les conditions (9.43) (9.46) le Problème \mathcal{P}_{2d}^V possède une solution unique $\mathbf{u} \in U$.*

Démonstration. Nous utilisons le Théorème 1.26. Tout d'abord, notons qu'il est facile de vérifier que U , définie par (9.47), est une partie convexe, fermée et non vide de X . Ensuite, prouvons que $A : X \rightarrow X$ est un opérateur fortement monotone et de Lipschitz. Pour cela, considérons les éléments $\mathbf{u}_1 = (u_1, w_1)$, $\mathbf{u}_2 = (u_2, w_2)$, $\mathbf{v} = (\psi, \varphi) \in X$ et utilisons la définition (9.48) de l'opérateur A et la condition (9.46) pour obtenir que

$$(9.68) \quad (A\mathbf{u}_1 - A\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)_X \\ \geq \min(E, 2G) \iint_{\Omega} \left((u_1 - u_2)_x^2 + \frac{1}{2} ((u_1 - u_2)_y + (w_1 - w_2)_x)^2 \right) dx dy.$$

En utilisant maintenant le fait que $\mathbf{v} \in H^1(\Omega)^2$ et l'inégalité de Korn, nous déduisons qu'il existe une constante positive $c_K > 0$ telle que

$$\iint_{\Omega} (\psi_x^2 + \frac{1}{2}(\psi_y + \varphi_x)^2) dx dy \geq c_K \iint_{\Omega} (\psi^2 + \psi_x^2 + \psi_y^2 + \varphi^2 + \varphi_x^2) dx dy.$$

Puis, en combinant cette inégalité avec les définitions (9.35) (9.37), nous obtenons

$$\iint_{\Omega} (\psi_x^2 + \frac{1}{2}(\psi_y + \varphi_x)^2) dx dy \geq \tilde{c}_K \|\mathbf{v}\|_X^2,$$

où \tilde{c}_K est une constante strictement positive dépendant de c_K et h . Ensuite, posons $\mathbf{v} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$ dans cette inégalité pour trouver que

$$\iint_{\Omega} \left((u_1 - u_2)_x^2 + \frac{1}{2} \left((u_1 - u_2)_y + (w_1 - w_2)_x \right)^2 \right) dx dy \geq \tilde{c}_K \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_X^2.$$

Combinons maintenant cette inégalité avec l'inégalité (9.68) afin d'obtenir que

$$(9.69) \quad (A\mathbf{u}_1 - A\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)_X \geq \tilde{c}_K \min(E, 2G) \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_X^2.$$

Il en résulte que A est un opérateur fortement monotone avec $m = \tilde{c}_K \min(E, 2G)$.

D'autre part, en utilisant la définition (9.48), l'inégalité (9.39) et la condition (9.46)(b), nous trouvons que

$$(A\mathbf{u}_1 - A\mathbf{u}_2, \mathbf{v})_X \leq (E + 4G + L_p) \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_X \|\mathbf{v}\|_X \quad \forall \mathbf{v} \in X.$$

Puis, en prenant $\mathbf{v} = A\mathbf{u}_1 - A\mathbf{u}_2$ dans cette inégalité, nous obtenons que

$$(9.70) \quad \|A\mathbf{u}_1 - A\mathbf{u}_2\|_X \leq (E + 4G + L_p) \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_X.$$

De cette inégalité, nous déduisons que A est un opérateur de Lipschitz avec $M = (E + 4G + L_p)$.

Par ailleurs, en utilisant le Théorème de représentation de Riesz, nous déduisons qu'il existe un unique élément $\tilde{\mathbf{f}} \in X$ tel que

$$(\tilde{\mathbf{f}}, \mathbf{v})_X = (\mathbf{f}, \pi \mathbf{v})_Y \quad \forall \mathbf{v} \in X.$$

Le Théorème 9.1 est maintenant une conséquence directe du Théorème 1.26. \square

9.3 Un résultat de convergence

Dans cette section, nous étudions le comportement de la solution du Problème \mathcal{P}_{2d}^V lorsque l'on introduit une perturbation dans les données. Dans ce qui suit, supposons que les conditions (9.43) (9.46) sont vérifiées et notons par \mathbf{u} la solution du Problème \mathcal{P}_{2d}^V obtenue dans le Théorème 9.1. Pour tout $\rho > 0$, considérons respectivement d_ρ , g_ρ et $\mathbf{f}_\rho = (q_\rho, f_\rho)$ les perturbations de d , g et \mathbf{f} satisfaisant les conditions (9.44) (9.45) ainsi que les convergences suivantes :

$$(9.71) \quad g_\rho \rightarrow g \quad \text{et} \quad d_\rho \rightarrow d \quad \text{lorsque} \quad \rho \rightarrow 0,$$

$$(9.72) \quad \mathbf{f}_\rho \rightarrow \mathbf{f} \quad \text{dans} \quad Y \quad \text{lorsque} \quad \rho \rightarrow 0.$$

Considérons également la perturbation U_ρ de l'ensemble U définie par

$$(9.73) \quad U_\rho = \{ \mathbf{u} = (u, w) \in X : u(L, y) \leq d_\rho \text{ et } w(x) \geq g_\rho \text{ p.p. } (x, y) \in \Omega \}.$$

Nous considérons alors la perturbation suivante du problème variationnel \mathcal{P}_{2d}^V .

Problème $\mathcal{P}_{2d}^{V\rho}$. *Trouver un champ de déplacements $\mathbf{u}_\rho = (u_\rho, w_\rho) \in U_\rho$ tel que*

$$(9.74) \quad (A\mathbf{u}_\rho, \mathbf{v}_\rho - \mathbf{u}_\rho)_X \geq (\mathbf{f}_\rho, \pi\mathbf{v}_\rho - \pi\mathbf{u}_\rho)_Y \quad \forall \mathbf{v}_\rho \in U_\rho.$$

Le Théorème 9.1 montre que, pour tout $\rho > 0$, le Problème $\mathcal{P}_{2d}^{V\rho}$ possède une solution unique $\mathbf{u}_\rho = (u_\rho, w_\rho) \in U_\rho$. Par ailleurs, le comportement de cette solution lorsque ρ tend vers zéro est donné par le théorème de convergence ci-dessous.

Théorème 9.2. *Supposons que les hypothèses (9.71) (9.72) sont vérifiées. Alors la solution \mathbf{u}_ρ du Problème $\mathcal{P}_{2d}^{V\rho}$ converge vers la solution \mathbf{u} du Problème \mathcal{P}_{2d}^V , i.e.,*

$$(9.75) \quad \mathbf{u}_\rho \rightarrow \mathbf{u} \quad \text{dans} \quad X \quad \text{lorsque} \quad \rho \rightarrow 0.$$

La démonstration du Théorème 9.2 sera réalisée en plusieurs étapes. Tout d'abord, nous considérons, pour tout $\rho > 0$, le problème intermédiaire qui consiste à trouver un champ de déplacements $\tilde{\mathbf{u}}_\rho = (\tilde{u}_\rho, \tilde{w}_\rho) \in U$ tel que

$$(9.76) \quad (A\tilde{\mathbf{u}}_\rho, \mathbf{v} - \tilde{\mathbf{u}}_\rho)_X \geq (\mathbf{f}_\rho, \pi\mathbf{v} - \pi\tilde{\mathbf{u}}_\rho)_Y \quad \forall \mathbf{v} \in U.$$

En utilisant le Théorème 9.1, nous déduisons que le problème intermédiaire (9.76) possède une solution unique $\tilde{\mathbf{u}}_\rho \in U$.

Enonçons à présent le résultat de convergence faible suivant.

Lemme 9.3. *Il existe une sous suite de la suite $\{\tilde{\mathbf{u}}_\rho\}$, encore notée $\{\tilde{\mathbf{u}}_\rho\}$, et un élément $\tilde{\mathbf{u}} \in U$ tels que*

$$(9.77) \quad \tilde{\mathbf{u}}_\rho \rightharpoonup \tilde{\mathbf{u}} \quad \text{dans } X \quad \text{lorsque } \rho \rightarrow 0.$$

Démonstration. Soit $\rho > 0$. Nous posons $\mathbf{v} = \mathbf{0}_X$ dans (9.76) pour obtenir

$$(A\tilde{\mathbf{u}}_\rho, \tilde{\mathbf{u}}_\rho)_X \leq (\mathbf{f}_\rho, \pi\tilde{\mathbf{u}}_\rho)_Y.$$

Ensuite, en utilisant la forte monotonie de l'opérateur A , l'égalité $A\mathbf{0}_X = \mathbf{0}_X$ et la propriété (9.41), nous obtenons que

$$(9.78) \quad \|\tilde{\mathbf{u}}_\rho\|_X \leq \frac{c_0}{m} \|\mathbf{f}_\rho\|_Y.$$

Combinons maintenant la convergence (9.72) avec l'inégalité (9.78) pour déduire qu'il existe une constante positive $c > 0$, indépendante de ρ , telle que

$$(9.79) \quad \|\tilde{\mathbf{u}}_\rho\|_X \leq c.$$

Nous en déduisons que la suite $\{\tilde{\mathbf{u}}_\rho\} \subset X$ est bornée. De ce fait, d'après le Théorème 1.29, nous déduisons qu'il existe une sous suite faiblement convergente de la suite $\{\tilde{\mathbf{u}}_\rho\}$, encore notée $\{\tilde{\mathbf{u}}_\rho\}$, et un élément $\tilde{\mathbf{u}} \in X$ tels que

$$(9.80) \quad \tilde{\mathbf{u}}_\rho \rightharpoonup \tilde{\mathbf{u}} \quad \text{dans } X \quad \text{lorsque } \rho \rightarrow 0.$$

Par ailleurs, notons que U est une partie convexe et fermée de l'espace X et, de plus, $\{\tilde{\mathbf{u}}_\rho\} \subset U$. Alors, le Théorème 1.25 implique que $\tilde{\mathbf{u}} \in U$, ce qui conclut la démonstration. \square

Nous poursuivons avec le résultat suivant.

Lemme 9.4. *Nous avons l'égalité*

$$(9.81) \quad \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}.$$

Démonstration. Soit $\rho > 0$. Prenons $\mathbf{v} = \tilde{\mathbf{u}} \in U$ dans (9.76) pour obtenir que

$$(A\tilde{\mathbf{u}}_\rho, \tilde{\mathbf{u}}_\rho - \tilde{\mathbf{u}})_X \leq (\mathbf{f}_\rho, \pi\tilde{\mathbf{u}}_\rho - \pi\tilde{\mathbf{u}})_Y.$$

Ensuite, nous passons à la limite supérieure lorsque $\rho \rightarrow 0$ dans cette inégalité et nous utilisons les convergences (9.72), (9.80) et (9.42) afin d'obtenir que

$$\limsup_{\rho \rightarrow 0} (A\tilde{\mathbf{u}}_\rho, \tilde{\mathbf{u}}_\rho - \tilde{\mathbf{u}})_X \leq 0.$$

Par conséquent, en utilisant cette inégalité avec (9.69), (9.70), la convergence (9.80), nous déduisons de la Proposition 1.11 que $A : X \rightarrow X$ est un opérateur pseudomonotone et, de ce fait, nous avons que

$$(9.82) \quad \liminf_{\rho \rightarrow 0} (A\tilde{\mathbf{u}}_\rho, \tilde{\mathbf{u}}_\rho - \mathbf{v})_X \geq (A\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{v})_X \quad \forall \mathbf{v} \in U.$$

D'autre part, en combinant l'inégalité (9.76) avec les convergences (9.72), (9.80) et (9.42), nous obtenons que

$$(9.83) \quad \liminf_{\rho \rightarrow 0} (A\tilde{\mathbf{u}}_\rho, \tilde{\mathbf{u}}_\rho - \mathbf{v})_X \leq (\mathbf{f}, \pi\tilde{\mathbf{u}} - \pi\mathbf{v})_Y \quad \forall \mathbf{v} \in U.$$

Maintenant, nous combinons les inégalités (9.82) et (9.83) pour voir que

$$(A\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v} - \tilde{\mathbf{u}})_X \geq (\mathbf{f}, \pi\mathbf{v} - \pi\tilde{\mathbf{u}})_Y \quad \forall \mathbf{v} \in U.$$

En outre, en prenant $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ dans cette inégalité et $\mathbf{v} = \tilde{\mathbf{u}}$ dans (9.67) et en additionnant les deux inégalités obtenues, nous trouvons que

$$(A\tilde{\mathbf{u}} - A\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) \leq 0.$$

De ce fait, il résulte de la forte monotonie de l'opérateur A que

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u},$$

ce qui conclut la démonstration du Lemme 9.4. □

Nous avons le résultat de convergence faible suivant.

Lemme 9.5. *La suite $\{\tilde{\mathbf{u}}_\rho\}$ converge faiblement dans X vers \mathbf{u} lorsque $\rho \rightarrow 0$.*

Démonstration. Les Lemmes 9.3 et 9.4 montrent que toute sous suite faiblement convergente de la suite $\{\tilde{\mathbf{u}}_\rho\} \subset X$ converge vers l'unique solution \mathbf{u} de l'inéquation variationnelle (9.67). De plus, l'estimation (9.79) montre que la suite $\{\tilde{\mathbf{u}}_\rho\}$ est bornée dans X . Par conséquent, le Lemme 9.5 est une conséquence du Théorème 1.30. □

Nous continuons notre analyse et nous démontrons la convergence suivante.

Lemme 9.6. *La suite $\{\tilde{\mathbf{u}}_\rho\}$ converge fortement dans X vers \mathbf{u} , i.e.,*

$$(9.84) \quad \tilde{\mathbf{u}}_\rho \rightarrow \mathbf{u} \quad \text{dans } X \quad \text{lorsque } \rho \rightarrow 0.$$

Démonstration. Soit $\rho > 0$. Nous prenons $\mathbf{v} = \mathbf{u} \in U$ dans (9.76) pour obtenir

$$(A\tilde{\mathbf{u}}_\rho, \tilde{\mathbf{u}}_\rho - \mathbf{u})_X \leq (\mathbf{f}_\rho, \pi\tilde{\mathbf{u}}_\rho - \pi\mathbf{u})_Y.$$

Puis, en utilisant la forte monotonie de l'opérateur A , nous avons que

$$\begin{aligned} m \|\tilde{\mathbf{u}}_\rho - \mathbf{u}\|_X^2 &\leq (A\tilde{\mathbf{u}}_\rho - A\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}}_\rho - \mathbf{u})_X \\ &= (A\tilde{\mathbf{u}}_\rho, \tilde{\mathbf{u}}_\rho - \mathbf{u})_X - (A\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}}_\rho - \mathbf{u})_X \\ &\leq (\mathbf{f}_\rho, \pi\tilde{\mathbf{u}}_\rho - \pi\mathbf{u})_Y - (A\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}}_\rho - \mathbf{u})_X. \end{aligned}$$

Ensuite, en passant à la limite lorsque ρ tend vers zéro dans cette inégalité et en utilisant les convergences (9.80), (9.72) et (9.42), nous trouvons que

$$\|\tilde{\mathbf{u}}_\rho - \mathbf{u}\|_X \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } \rho \rightarrow 0,$$

ce qui termine la démonstration du Lemme 9.6. □

Nous avons maintenant tous les ingrédients pour démontrer le Théorème 9.2.

Démonstration. Soit $\rho > 0$. Nous définissons les opérateurs $A_V : X \rightarrow V$ et $A_W : X \rightarrow W$ par les égalités

$$(9.85) \quad (A_V \mathbf{u}, \psi)_V = E \iint_\Omega u_x \psi_x \, dx dy + G \iint_\Omega (u_y + w_x) \psi_y \, dx dy,$$

$$(9.86) \quad (A_W \mathbf{u}, \varphi)_W = G \iint_\Omega (u_y + w_x) \varphi_x \, dx dy - \int_0^L p(-w) \varphi \, dx,$$

pour tous $\mathbf{u} = (u, w)$, $\mathbf{v} = (\psi, \varphi) \in X$. Notons qu'il est facile de montrer que les opérateurs A_V et A_W sont linéaires et continus. De plus, en utilisant (9.48), (9.49) et la notation $\psi^h(\cdot) = \psi(\cdot, h)$, nous obtenons que

$$(9.87) \quad (A\mathbf{u}, \mathbf{v})_X = (A_V \mathbf{u}, \psi)_V + (A_W \mathbf{u}, \varphi)_W,$$

$$(9.88) \quad (\mathbf{f}, \pi\mathbf{v})_Y = (q, \psi^h)_{L^2(0,L)} + (f, \varphi)_{L^2(0,L)},$$

pour tous $\mathbf{u} = (u, w)$, $\mathbf{v} = (\psi, \varphi) \in X$. Nous combinons maintenant (9.76), (9.87) et (9.88) pour obtenir que

$$(9.89) \quad (A_V \tilde{\mathbf{u}}_\rho, \psi - \tilde{u}_\rho)_V + (A_W \tilde{\mathbf{u}}_\rho, \varphi - \tilde{w}_\rho)_W \\ \geq (q_\rho, \psi^h - \tilde{u}_\rho^h)_{L^2(0,L)} + (f_\rho, \varphi - \tilde{w}_\rho)_{L^2(0,L)} \quad \forall \mathbf{v} = (\psi, \varphi) \in U.$$

De plus, en combinant (9.74), (9.87) et (9.88), nous trouvons que

$$(9.90) \quad (A_V \mathbf{u}_\rho, \psi_\rho - u_\rho)_V + (A_W \mathbf{u}_\rho, \varphi_\rho - w_\rho)_W \\ \geq (q_\rho, \psi_\rho^h - u_\rho)_{L^2(0,L)} + (f_\rho, \varphi_\rho - w_\rho)_{L^2(0,L)} \quad \forall \mathbf{v}_\rho = (\psi_\rho, w_\rho) \in U_\rho.$$

Par ailleurs, nous utilisons respectivement les définitions (9.47), (9.73) des ensembles U et U_ρ afin de voir que

$$\left(\frac{d}{d_\rho} u_\rho, \tilde{w}_\rho\right) \in U \quad \text{et} \quad \left(\frac{d_\rho}{d} \tilde{u}_\rho, w_\rho\right) \in U_\rho.$$

Par conséquent, prenons $\mathbf{v} = \left(\frac{d}{d_\rho} u_\rho, \tilde{w}_\rho\right) \in U$ dans (9.89) et multiplions l'inégalité obtenue par $\frac{d_\rho}{d}$ pour obtenir que

$$(9.91) \quad (A_V \tilde{\mathbf{u}}_\rho, u_\rho - \frac{d_\rho}{d} \tilde{u}_\rho)_V \geq (q_\rho, u_\rho^h - \frac{d_\rho}{d} \tilde{u}_\rho^h)_{L^2(0,L)}.$$

D'autre part, prenons $\mathbf{v}_\rho = \left(\frac{d_\rho}{d} \tilde{u}_\rho, w_\rho\right) \in U_\rho$ dans (9.90) pour voir que

$$(9.92) \quad (A_V \mathbf{u}_\rho, \frac{d_\rho}{d} \tilde{u}_\rho - u_\rho)_V \geq (q_\rho, \frac{d_\rho}{d} \tilde{u}_\rho^h - u_\rho^h)_{L^2(0,L)}.$$

En additionnant maintenant les inégalités (9.91) et (9.92), nous trouvons que

$$(A_V \tilde{\mathbf{u}}_\rho - A_V \mathbf{u}_\rho, u_\rho - \frac{d_\rho}{d} \tilde{u}_\rho)_V \geq 0.$$

Ensuite, en utilisant cette inégalité avec l'égalité (9.85), après quelques calculs, nous trouvons que

$$(9.93) \quad (A_V \tilde{\mathbf{u}}_\rho - A_V \mathbf{u}_\rho, \tilde{u}_\rho - u_\rho)_V \\ \leq (A_V \tilde{\mathbf{u}}_\rho - A_V \mathbf{u}_\rho, \tilde{u}_\rho - \frac{d_\rho}{d} \tilde{u}_\rho)_V \leq M_V \left| 1 - \frac{d_\rho}{d} \right| \|\tilde{\mathbf{u}}_\rho - \mathbf{u}_\rho\|_X \|\tilde{\mathbf{u}}_\rho\|_X$$

où M_V est la constante de Lipschitz de l'opérateur A_V .

En outre, nous prenons $\mathbf{v} = (\tilde{u}_\rho, \frac{g}{g_\rho} w_\rho) \in U$ dans (9.89) et nous multiplions l'inégalité obtenue par $\frac{g_\rho}{g}$ pour obtenir que

$$(9.94) \quad (A_W \tilde{\mathbf{u}}_\rho, w_\rho - \frac{g_\rho}{g} \tilde{w}_\rho)_W \geq (f_\rho, w_\rho - \frac{g_\rho}{g} \tilde{w}_\rho)_{L^2(0,L)}.$$

Ensuite, en posant $\mathbf{v}_\rho = (u_\rho, \frac{g_\rho}{g} \tilde{w}_\rho) \in U_\rho$ dans (9.90), nous obtenons que

$$(9.95) \quad (A_W \mathbf{u}_\rho, \frac{g_\rho}{g} \tilde{w}_\rho - w_\rho)_V \geq (f_\rho, \frac{g_\rho}{g} \tilde{w}_\rho - w_\rho)_{L^2(0,L)}.$$

Additionnons maintenant les inégalités (9.94) et (9.95) pour voir que

$$(A_W \tilde{\mathbf{u}}_\rho - A_W \mathbf{u}_\rho, w_\rho - \frac{g_\rho}{g} \tilde{w}_\rho)_W \geq 0.$$

En combinant cette inégalité et la définition (9.86) de l'opérateur A_W , nous trouvons

$$(9.96) \quad (A_W \tilde{\mathbf{u}}_\rho - A_W \mathbf{u}_\rho, \tilde{w}_\rho - w_\rho)_W \\ \leq (A_W \tilde{\mathbf{u}}_\rho - A_W \mathbf{u}_\rho, \tilde{w}_\rho - \frac{g_\rho}{g} \tilde{w}_\rho)_W \leq M_W \left| 1 - \frac{g_\rho}{g} \right| \|\tilde{\mathbf{u}}_\rho - \mathbf{u}_\rho\|_X \|\tilde{\mathbf{u}}_\rho\|_X$$

où M_W est la constante de Lipschitz de l'opérateur A_W .

Ensuite, en additionnant les inégalités (9.93) et (9.96), nous obtenons

$$(A_V \tilde{\mathbf{u}}_\rho - A_V \mathbf{u}_\rho, \tilde{u}_\rho - u_\rho)_V + (A_W \tilde{\mathbf{u}}_\rho - A_W \mathbf{u}_\rho, \tilde{w}_\rho - w_\rho)_W \\ \leq \left(M_W \left| 1 - \frac{g_\rho}{g} \right| + M_V \left| 1 - \frac{d_\rho}{d} \right| \right) \|\tilde{\mathbf{u}}_\rho - \mathbf{u}_\rho\|_X \|\tilde{\mathbf{u}}_\rho\|_X.$$

Puis, en utilisant (9.87) et la forte monotonie de l'opérateur A , nous trouvons que

$$\|\tilde{\mathbf{u}}_\rho - \mathbf{u}_\rho\|_X \leq \frac{\max(M_V, M_W)}{m} \left(\left| 1 - \frac{g_\rho}{g} \right| + \left| 1 - \frac{d_\rho}{d} \right| \right) \|\tilde{\mathbf{u}}_\rho\|_X.$$

En combinant maintenant cette inégalité avec l'estimation (9.79) et la convergence (9.71), nous déduisons que

$$(9.97) \quad \|\tilde{\mathbf{u}}_\rho - \mathbf{u}_\rho\|_X \rightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad \rho \rightarrow 0.$$

Enfin, en utilisant l'inégalité triangulaire

$$\|\mathbf{u}_\rho - \mathbf{u}\|_X \leq \|\mathbf{u}_\rho - \tilde{\mathbf{u}}_\rho\|_X + \|\tilde{\mathbf{u}}_\rho - \mathbf{u}\|_X$$

ainsi que les convergences (9.97) et (9.84), nous obtenons que

$$\|\mathbf{u}_\rho - \mathbf{u}\|_X \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } \rho \rightarrow 0,$$

ce qui termine la démonstration du Théorème 9.2. \square

Nous utilisons le Théorème 9.2 pour déduire le résultat suivant.

Remarque 9.7. Le Théorème 9.2 montre que l'application $\mathbf{f} \mapsto \mathbf{u}(\mathbf{f}) : Y \rightarrow X$ qui associée à tout élément $\mathbf{f} \in Y$ la solution $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{f}) \in X$ de l'inéquation variationnelle (9.67) est faiblement-fortement continue, i.e.,

(9.98)

$$\mathbf{f}_n \rightharpoonup \mathbf{f}^* \text{ dans } Y \implies \mathbf{u}(\mathbf{f}_n) \rightarrow \mathbf{u}(\mathbf{f}^*) \text{ dans } X \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

En plus de l'intérêt mathématique dans le résultat de convergence (9.75), il est important du point de vue mécanique, car il montre que la solution faible du Problème \mathcal{P}_{2d} dépend continûment des contraintes g et d ainsi que de la force \mathbf{f} .

9.4 Un problème de contrôle optimal

Dans cette section, nous nous intéressons à un problème de contrôle optimal associé au Problème \mathcal{P}_{2d}^V . Pour cela, supposons que les hypothèses (9.43) (9.44) et (9.46) sont vérifiées et notons par $X \times Y$ l'espace de Hilbert produit de X et Y muni du produit scalaire canonique. Soient α, β, γ et δ sont des constantes strictement positives et soit $\mathbf{u}_0 = (u_0, w_0) \in X$ un élément donné. Nous considérons l'ensemble des paires admissibles $\mathcal{V}_{ad} \subset X \times Y$ défini par

$$(9.99) \quad \mathcal{V}_{ad} = \{ (\mathbf{u}, \mathbf{f}) \in U \times Y : (A\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u})_X \geq (\mathbf{f}, \pi\mathbf{v} - \pi\mathbf{u})_Y \quad \forall \mathbf{v} \in U \}.$$

Considérons également la fonctionnelle coût $\mathcal{L} : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$(9.100) \quad \mathcal{L}(\mathbf{u}, \mathbf{f}) = \alpha \|u - u_0\|_V^2 + \beta \|w - w_0\|_W^2 + \gamma \|q\|_{L^2(0,L)}^2 + \delta \|f\|_{L^2(0,L)}^2,$$

pour tous $\mathbf{u} = (u, w) \in X$ et $\mathbf{f} = (q, f) \in Y$.

Le problème de contrôle optimal se formule de la manière suivante.

Problème \mathcal{Q} . *Trouver un couple $(\mathbf{u}^*, \mathbf{f}^*) \in \mathcal{V}_{ad}$ tel que*

$$(9.101) \quad \mathcal{L}(\mathbf{u}^*, \mathbf{f}^*) = \min_{(\mathbf{u}, \mathbf{f}) \in \mathcal{V}_{ad}} \mathcal{L}(\mathbf{u}, \mathbf{f}).$$

Un couple de fonctions $(\mathbf{u}^*, \mathbf{f}^*) \in \mathcal{V}_{ad}$ satisfaisant (9.101) s'appelle *paire optimale*.

Nous avons le théorème d'existence suivant, qui constitue le résultat principal de cette section.

Théorème 9.8. *Sous les hypothèses (9.43) (9.44) et (9.46), le Problème \mathcal{Q} possède au moins une solution $(\mathbf{u}^*, \mathbf{f}^*) \in \mathcal{V}_{ad}$.*

Démonstration. Soit

$$(9.102) \quad \theta = \inf_{(\mathbf{u}, \mathbf{f}) \in \mathcal{V}_{ad}} \mathcal{L}(\mathbf{u}, \mathbf{f}) \in \mathbb{R}$$

et soit $\{(\mathbf{u}_n, \mathbf{f}_n)\} \subset \mathcal{V}_{ad}$ une suite minimisante pour la fonctionnelle \mathcal{L} , i.e.,

$$(9.103) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{L}(\mathbf{u}_n, \mathbf{f}_n) = \theta.$$

Prouvons que la suite $\{\mathbf{f}_n\}$ est bornée dans Y . Nous raisonnons par l'absurde et nous supposons que $\{\mathbf{f}_n\}$ n'est pas bornée dans Y . En passant à une sous suite, encore notée $\{\mathbf{f}_n\}$, nous avons que

$$(9.104) \quad \|\mathbf{f}_n\|_Y \rightarrow +\infty \quad \text{lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

Nous utilisons maintenant la définition (9.100) et l'égalité $\mathbf{f}_n = (q_n, f_n)$ pour voir que

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}_n, \mathbf{f}_n) \geq \min(\delta, \gamma) \|\mathbf{f}_n\|_Y.$$

Par conséquent, en passant à la limite supérieure lorsque $n \rightarrow +\infty$ dans cette inégalité et en utilisant la convergence (9.104), nous obtenons que

$$(9.105) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{L}(\mathbf{u}_n, \mathbf{f}_n) = +\infty.$$

De (9.103) et (9.105), il vient que $\theta = +\infty$, ce qui contredit l'hypothèse (9.102). Donc, nous concluons que la suite $\{\mathbf{f}_n\}$ est bornée dans Y et, par conséquent, nous utilisons le Théorème 1.29 pour déduire qu'il existe une sous suite faiblement convergente, encore notée $\{\mathbf{f}_n\}$, et un élément $\mathbf{f}^* \in Y$ tels que

$$(9.106) \quad \mathbf{f}_n \rightharpoonup \mathbf{f}^* \quad \text{dans } Y \quad \text{lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

Supposons maintenant que \mathbf{u}^* est la solution de l'inéquation variationnelle (9.67) pour $\mathbf{f} = \mathbf{f}^*$, c'est-à-dire

$$\mathbf{u}^* \in U, \quad (A\mathbf{u}^*, \mathbf{v} - \mathbf{u}^*)_X \geq (\mathbf{f}^*, \pi\mathbf{v} - \pi\mathbf{u}^*)_Y \quad \forall \mathbf{v} \in U.$$

Par conséquent, il résulte de la définition (9.99) de l'ensemble \mathcal{V}_{ad} que

$$(9.107) \quad (\mathbf{u}^*, \mathbf{f}^*) \in \mathcal{V}_{ad}.$$

En outre, en utilisant les convergences (9.106) et (9.98), nous avons que

$$(9.108) \quad \mathbf{u}_n \rightarrow \mathbf{u}^* \quad \text{dans } X \quad \text{lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

Par ailleurs, notons qu'il est facile de montrer que la fonctionnelle \mathcal{L} est convexe et semi-continue inférieurement sur $X \times Y$ et, par conséquent, il résulte de la Proposition 1.20 qu'elle est faiblement semi-continue inférieurement. De ce fait, en utilisant les convergences (9.106) et (9.108), nous déduisons que

$$(9.109) \quad \liminf_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{L}(\mathbf{u}_n, \mathbf{f}_n) \geq \mathcal{L}(\mathbf{u}^*, \mathbf{f}^*).$$

De (9.103) et (9.109), il résulte que

$$\theta \geq \mathcal{L}(\mathbf{u}^*, \mathbf{f}^*).$$

De plus, (9.107) et (9.102) impliquent que

$$\theta \leq \mathcal{L}(\mathbf{u}^*, \mathbf{f}^*).$$

Combinons maintenant ces deux dernières inégalités afin d'obtenir que l'égalité (9.101) est satisfaite, ce qui conclut la démonstration du Théorème 9.8. \square

Nous nous intéressons par la suite à la dépendance de la paire optimale $(\mathbf{u}^*, \mathbf{f}^*)$ par rapport aux données d et g . Pour ce faire, supposons que les conditions (9.43) (9.44) et (9.46) sont vérifiées et considérons respectivement les perturbations d_ρ, g_ρ de d, g satisfaisant la condition (9.44). De plus, considérons l'ensemble des paires admissibles perturbé défini par

$$\mathcal{V}_{ad}^\rho = \{ (\mathbf{u}_\rho, \mathbf{f}) \in U_\rho \times Y : (A\mathbf{u}_\rho, \mathbf{v}_\rho - \mathbf{u}_\rho)_X \geq (\mathbf{f}, \pi\mathbf{v}_\rho - \pi\mathbf{u}_\rho)_Y \quad \forall \mathbf{v}_\rho \in U_\rho \},$$

où U_ρ est la perturbation de l'ensemble U donnée par (9.73).

Considérons également le problème de contrôle optimal perturbé suivant.

Problème \mathcal{Q}^ρ . *Trouver un couple $(\mathbf{u}_\rho^*, \mathbf{f}_\rho^*) \in \mathcal{V}_{ad}^\rho$ tel que*

$$(9.110) \quad \mathcal{L}(\mathbf{u}_\rho^*, \mathbf{f}_\rho^*) = \min_{(\mathbf{u}_\rho, \mathbf{f}) \in \mathcal{V}_{ad}^\rho} \mathcal{L}(\mathbf{u}_\rho, \mathbf{f}).$$

En utilisant le Théorème 9.8, nous déduisons que, pour tout $\rho > 0$, le Problème \mathcal{Q}^ρ possède au moins une solution $(\mathbf{u}_\rho^*, \mathbf{f}_\rho^*) \in \mathcal{V}_{ad}^\rho$. Par ailleurs, nous avons le résultat de convergence suivant.

Théorème 9.9. *Soit $\{(\mathbf{u}_\rho^*, \mathbf{f}_\rho^*)\}$ une suite de solutions du Problème \mathcal{Q}^ρ et supposons que la convergence (9.71) est satisfaite. Alors il existe une sous suite de la suite $\{(\mathbf{u}_\rho^*, \mathbf{f}_\rho^*)\}$, encore notée $\{(\mathbf{u}_\rho^*, \mathbf{f}_\rho^*)\}$, et une solution $(\mathbf{u}^*, \mathbf{f}^*)$ du Problème \mathcal{Q} , telles que*

$$(9.111) \quad \mathbf{u}_\rho \rightarrow \mathbf{u}^* \quad \text{dans } X \quad \text{et} \quad \mathbf{f}_\rho^* \rightharpoonup \mathbf{f}^* \quad \text{dans } Y \quad \text{lorsque } \rho \rightarrow 0.$$

Démonstration. Soit $\rho > 0$ et notons $\mathbf{u}_\rho^* = (u_\rho^*, w_\rho^*)$, $\mathbf{f}_\rho^* = (q_\rho^*, f_\rho^*)$. Nous utilisons la définition (9.100) pour voir que

$$(9.112) \quad \begin{aligned} \|\mathbf{f}_\rho^*\|_Y^2 &= \|q_\rho^*\|_{L^2(0,L)}^2 + \|f_\rho^*\|_{L^2(0,L)}^2 \\ &\leq \frac{1}{\min(\gamma, \delta)} (\gamma \|q_\rho^*\|_{L^2(0,L)}^2 + \delta \|f_\rho^*\|_{L^2(0,L)}^2) \leq \frac{1}{\min(\gamma, \delta)} \mathcal{L}(\mathbf{u}_\rho^*, \mathbf{f}_\rho^*). \end{aligned}$$

Puisque $(\mathbf{u}_\rho^*, \mathbf{f}_\rho^*)$ est une solution du Problème \mathcal{Q}^ρ , nous avons que

$$(9.113) \quad \|\mathbf{f}_\rho^*\|_Y^2 \leq \frac{1}{\min(\gamma, \delta)} \mathcal{L}(\mathbf{u}_\rho, \mathbf{f}) \quad \forall (\mathbf{u}_\rho, \mathbf{f}) \in \mathcal{V}_{ad}^\rho.$$

En outre, puisque $A\mathbf{0}_X = \mathbf{0}_X$, il résulte que $\mathbf{u}_\rho = \mathbf{0}_X$ est la solution du Problème $\mathcal{P}_{2d}^{V\rho}$ pour $\mathbf{f}_\rho = \mathbf{0}_Y$. D'autre part, utilisons (9.100) pour voir que

$$(9.114) \quad \mathcal{L}(\mathbf{0}_X, \mathbf{0}_Y) \leq \max(\alpha, \beta) \|\mathbf{u}_0\|_X^2.$$

Posons maintenant $(\mathbf{u}_\rho, \mathbf{f}) = (\mathbf{0}_X, \mathbf{0}_Y)$ dans (9.113) et utilisons l'inégalité (9.114) pour déduire que la suite $\{\mathbf{f}_\rho^*\}$ est bornée dans Y . Par conséquent, en utilisant le Théorème 1.29, nous déduisons qu'il existe une sous suite faiblement convergente, encore notée $\{\mathbf{f}_\rho^*\}$, et un élément $\mathbf{f}^* \in Y$ tels que

$$(9.115) \quad \mathbf{f}_\rho^* \rightharpoonup \mathbf{f}^* \quad \text{dans } Y \quad \text{lorsque } \rho \rightarrow 0.$$

Notons par \mathbf{u}^* la solution du Problème \mathcal{P}_{2d}^V pour $\mathbf{f} = \mathbf{f}^*$. Donc, la définition (9.99) implique que

$$(9.116) \quad (\mathbf{u}^*, \mathbf{f}^*) \in \mathcal{V}_{ad}$$

et, de plus, le Théorème 9.2 entraîne que

$$(9.117) \quad \mathbf{u}_\rho^* \rightarrow \mathbf{u}^* \quad \text{dans } X \quad \text{lorsque } \rho \rightarrow 0.$$

Montrons maintenant que $(\mathbf{u}^*, \mathbf{f}^*)$ est une solution du problème de contrôle optimal \mathcal{Q} . Pour ce faire, combinons les convergences (9.115), (9.117) et le fait que la fonctionnelle \mathcal{L} est faiblement semi-continue inférieure pour obtenir que

$$(9.118) \quad \mathcal{L}(\mathbf{u}^*, \mathbf{f}^*) \leq \liminf_{\rho \rightarrow 0} \mathcal{L}(\mathbf{u}_\rho^*, \mathbf{f}_\rho^*).$$

Ensuite, fixons une solution $(\tilde{\mathbf{u}}^*, \tilde{\mathbf{f}}^*)$ du Problème \mathcal{Q} et notons par $\tilde{\mathbf{u}}_\rho$ la solution du Problème $\mathcal{P}_{2d}^{V\rho}$ pour $\mathbf{f}_\rho = \tilde{\mathbf{f}}^*$ pour déduire que $(\tilde{\mathbf{u}}_\rho, \tilde{\mathbf{f}}^*) \in \mathcal{V}_{ad}^\rho$. En utilisant l'optimalité de la paire $(\mathbf{u}_\rho^*, \mathbf{f}_\rho^*)$ du Problème \mathcal{Q}^ρ , nous obtenons que

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}_\rho^*, \mathbf{f}_\rho^*) \leq \mathcal{L}(\tilde{\mathbf{u}}_\rho, \tilde{\mathbf{f}}^*) \quad \forall \rho > 0.$$

Par passage à la limite supérieure lorsque $\rho \rightarrow 0$ dans cette inégalité nous obtenons

$$(9.119) \quad \limsup_{\rho \rightarrow 0} \mathcal{L}(\mathbf{u}_\rho^*, \mathbf{f}_\rho^*) \leq \limsup_{\rho \rightarrow 0} \mathcal{L}(\tilde{\mathbf{u}}_\rho, \tilde{\mathbf{f}}^*).$$

Rappelons maintenant que $\tilde{\mathbf{u}}^*$ est la solution du Problème \mathcal{P}_{2d}^V pour $\mathbf{f} = \tilde{\mathbf{f}}^*$ et $\tilde{\mathbf{u}}_\rho$ est la solution du Problème $\mathcal{P}_{2d}^{V\rho}$ pour $\mathbf{f}_\rho = \tilde{\mathbf{f}}^*$. Par conséquent, puisque la convergence (9.71) est satisfaite, nous déduisons du Théorème 9.2 que

$$\tilde{\mathbf{u}}_\rho \rightarrow \tilde{\mathbf{u}}^* \quad \text{dans } X \quad \text{lorsque } \rho \rightarrow 0.$$

La continuité de la fonctionnelle $\mathbf{u} \mapsto \mathcal{L}(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{f}}^*) : X \rightarrow \mathbb{R}$ implique que

$$(9.120) \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} \mathcal{L}(\tilde{\mathbf{u}}_\rho, \tilde{\mathbf{f}}^*) = \mathcal{L}(\tilde{\mathbf{u}}^*, \tilde{\mathbf{f}}^*).$$

Nous combinons maintenant (9.118) (9.120) pour obtenir que

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}^*, \mathbf{f}^*) \leq \mathcal{L}(\tilde{\mathbf{u}}^*, \tilde{\mathbf{f}}^*).$$

D'autre part, puisque $(\tilde{\mathbf{u}}^*, \tilde{\mathbf{f}}^*)$ est une solution du Problème \mathcal{Q} , l'inclusion (9.116) implique que

$$(9.121) \quad \mathcal{L}(\tilde{\mathbf{u}}^*, \tilde{\mathbf{f}}^*) \leq \mathcal{L}(\mathbf{u}^*, \mathbf{f}^*).$$

Combinons (9.120) et (9.121) pour voir que

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}^*, \mathbf{f}^*) = \mathcal{L}(\tilde{\mathbf{u}}^*, \tilde{\mathbf{f}}^*).$$

Par conséquent, nous déduisons que

$$(9.122) \quad (\mathbf{u}^*, \mathbf{f}^*) \text{ est une solution du Problème } \mathcal{Q}.$$

Le Théorème 9.9 est maintenant une conséquence de (9.115), (9.117) et (9.122). \square

Le Théorème 9.8 montre que le problème de contrôle optimal \mathcal{Q} possède au moins une solution optimale $(\mathbf{u}^*, \mathbf{f}^*) \in \mathcal{V}_{ad}$. En outre, le Théorème 9.9 prouve la dépendance de cette solution par rapport aux perturbations des contraintes g et d .

Chapitre 10

Problème de contact viscoplastique avec compliance normale et contrainte unilatérale

Dans ce chapitre, nous considérons un problème de contact quasistatique modélisant le contact entre un corps viscoplastique et un obstacle assimilé à une fondation. Le contact est décrit à l'aide d'une loi de compliance normale et contrainte unilatérale. Ce chapitre est structuré en quatre sections. Dans la première section, nous présentons la formulation forte du problème mécanique ainsi que les hypothèses nécessaires sur les données afin d'obtenir une formulation variationnelle. Dans la deuxième section, nous démontrons un résultat d'existence et d'unicité de la solution du problème. La troisième section est consacrée à la méthode de pénalisation ; nous y démontrons que la solution faible du problème de contact avec compliance normale et contrainte unilatérale peut être approchée par la solution faible du problème de contact avec compliance normale, pour un paramètre de déformabilité de la fondation suffisamment petit. Dans la quatrième section, nous prouvons un résultat de convergence portant sur une perturbation de l'ensemble des contraintes. Les résultats présentés dans ce chapitre font l'objet de l'article [15].

10.1 Problème mécanique et formulation variationnelle

Le cadre physique correspond à celui introduit dans la Section 5.2; pour rappel, nous considérons un corps viscoplastique occupant un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 1, 2, 3$) avec une frontière régulière lipschitzienne Γ partitionnée en trois parties mesurables Γ_1 , Γ_2 et Γ_3 telles que $\text{mes}(\Gamma_1) > 0$. Des tractions surfaciques de densité \mathbf{f}_2 agissent sur Γ_2 et des forces volumiques de densité \mathbf{f}_0 agissent dans Ω . Nous supposons que le corps est fixé sur Γ_1 et Γ_3 correspond à la zone de contact entre le corps et la fondation.

La formulation forte du problème mécanique est la suivante.

Problème \mathcal{Q} . *Trouver un champ de déplacements $\mathbf{u} : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^d$ et un champ de contraintes $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{S}^d$ tels que*

$$(10.1) \quad \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}) + \mathcal{G}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) \quad \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}_+,$$

$$(10.2) \quad \text{Div } \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_0 = \mathbf{0} \quad \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}_+,$$

$$(10.3) \quad \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{sur} \quad \Gamma_1 \times \mathbb{R}_+,$$

$$(10.4) \quad \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu} = \mathbf{f}_2 \quad \text{sur} \quad \Gamma_2 \times \mathbb{R}_+,$$

$$(10.5) \quad \left. \begin{array}{l} u_\nu \leq g, \quad \sigma_\nu + p(u_\nu) \leq 0, \\ (u_\nu - g)(\sigma_\nu + p(u_\nu)) = 0 \end{array} \right\} \quad \text{sur} \quad \Gamma_3 \times \mathbb{R}_+,$$

$$(10.6) \quad \boldsymbol{\sigma}_\tau = \mathbf{0} \quad \text{sur} \quad \Gamma_3 \times \mathbb{R}_+,$$

$$(10.7) \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \quad \boldsymbol{\sigma}(0) = \boldsymbol{\sigma}_0 \quad \text{dans} \quad \Omega.$$

Afin de simplifier l'écriture parfois, nous ne signalons pas explicitement la dépendance des différentes fonctions des variables \mathbf{x} et t . Nous décrivons maintenant les différentes équations et conditions du Problème \mathcal{Q} .

D'abord, l'équation (10.1) représente la loi de comportement viscoplastique où \mathcal{E} est l'opérateur d'élasticité et \mathcal{G} est la fonction constitutive non linéaire du comportement viscoplastique. Puis, (10.2) est l'équation d'équilibre. Ensuite, (10.3) (10.4) sont respectivement les conditions aux limites de déplacement et de traction. Les

relations (10.5) (10.6) représentent la condition aux limites de contact sans frottement de la loi de compliance normale et contrainte unilatérale où $g > 0$. Enfin, la relation (10.7) constitue les conditions initiales où \mathbf{u}_0 est le déplacement initial et $\boldsymbol{\sigma}_0$ est la contrainte initiale.

Dans l'étude du Problème \mathcal{Q} nous utilisons les espaces Q et V définis respectivement en pages 104 et 105. Par ailleurs, nous supposons que l'opérateur \mathcal{E} et la fonction \mathcal{G} vérifient les conditions suivantes :

$$(10.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } \mathcal{E} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d. \\ \text{(b) } \mathcal{E}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}) = (\mathcal{E}_{ijkl}(\mathbf{x})\boldsymbol{\varepsilon}_{kl}) \text{ pour tout } \boldsymbol{\varepsilon} = (\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}) \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \\ \text{(c) } \mathcal{E}_{ijkl} = \mathcal{E}_{jikl} = \mathcal{E}_{klij} \in L^\infty(\Omega). \\ \text{(d) Il existe } m_{\mathcal{E}} > 0 \text{ tel que} \\ \quad \mathcal{E}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\tau}) \cdot \boldsymbol{\tau} \geq m_{\mathcal{E}} \|\boldsymbol{\tau}\|^2 \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \end{array} \right.$$

$$(10.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } \mathcal{G} : \Omega \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d. \\ \text{(b) Il existe } L_{\mathcal{G}} > 0 \text{ tel que} \\ \quad \|\mathcal{G}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_1) - \mathcal{G}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2)\| \\ \quad \leq L_{\mathcal{G}}(\|\boldsymbol{\sigma}_1 - \boldsymbol{\sigma}_2\| + \|\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2\|) \\ \quad \forall \boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\sigma}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \\ \text{(c) L'application } \mathbf{x} \mapsto \mathcal{G}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}) \text{ est mesurable sur } \Omega, \\ \quad \text{pour tout } \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{S}^d. \\ \text{(d) L'application } \mathbf{x} \mapsto \mathcal{G}(\mathbf{x}, \mathbf{0}_{\mathbb{S}^d}, \mathbf{0}_{\mathbb{S}^d}) \text{ appartient à } Q. \end{array} \right.$$

Nous supposons également que les densités des forces volumiques et des tractions surfaciques ont la régularité

$$(10.10) \quad \mathbf{f}_0 \in C(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega)^d), \quad \mathbf{f}_2 \in C(\mathbb{R}_+; L^2(\Gamma_2)^d).$$

La fonction de compliance normale p satisfait

$$(10.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } p : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+. \\ \text{(b) Il existe } L_p > 0 \text{ tel que} \\ \quad |p(\mathbf{x}, r_1) - p(\mathbf{x}, r_2)| \leq L_p |r_1 - r_2| \\ \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \quad \text{p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3. \\ \text{(c) } (p(\mathbf{x}, r_1) - p(\mathbf{x}, r_2))(r_1 - r_2) \geq 0 \\ \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R} \quad \text{p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3. \\ \text{(d) } p(\mathbf{x}, r) = 0 \text{ pour tout } r \leq 0, \quad \text{p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3. \\ \text{(e) L'application } \mathbf{x} \mapsto p(\mathbf{x}, r) \text{ est mesurable sur } \Gamma_3. \end{array} \right.$$

De même, nous supposons la condition de petitesse

$$(10.12) \quad m_\varepsilon > c_0^2 L_p,$$

où c_0 est la constante positive donnée par l'inégalité de trace (5.10).

Enfin, nous supposons que les données initiales vérifient

$$(10.13) \quad \mathbf{u}_0 \in V, \quad \boldsymbol{\sigma}_0 \in Q.$$

Maintenant, nous nous intéressons à la formulation variationnelle du Problème \mathcal{Q} . Pour cela, nous introduisons un ensemble de déplacements admissibles U , deux opérateurs $A : V \rightarrow V$, $P : V \rightarrow V$, une fonctionnelle $j : Q \times V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ et une fonction $\mathbf{f} : \mathbb{R}_+ \rightarrow V$ définis par

$$(10.14) \quad U = \{ \mathbf{v} \in V : v_\nu \leq g \text{ p.p. sur } \Gamma_3 \}.$$

$$(10.15) \quad (A\mathbf{u}, \mathbf{v})_V = (\mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_Q \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V,$$

$$(10.16) \quad (P\mathbf{u}, \mathbf{v})_V = \int_{\Gamma_3} p(u_\nu) v_\nu da \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V,$$

$$(10.17) \quad j(\mathbf{z}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{z}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_Q + (P\mathbf{u}, \mathbf{v})_V \quad \forall \mathbf{z} \in Q, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V,$$

$$(10.18) \quad (\mathbf{f}(t), \mathbf{v})_V = \int_\Omega \mathbf{f}_0(t) \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_2(t) \cdot \mathbf{v} da \quad \forall \mathbf{v} \in V, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

Supposons que $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$ est un couple des fonctions suffisamment régulières qui satisfait (10.1) (10.7). En intégrant la loi de comportement (10.1) et en utilisant la condition (10.7), nous obtenons que

$$(10.19) \quad \boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)) + \int_0^t \mathcal{G}(\boldsymbol{\sigma}(s), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s))) ds + \boldsymbol{\sigma}_0 - \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_0) \quad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

Afin d'établir la formulation variationnelle du Problème \mathcal{Q} nous avons besoin au résultat suivant.

Lemme 10.1. *Supposons que les conditions (10.8) (10.9) et (10.13) sont vérifiées. Alors, il existe un unique opérateur $\mathcal{S} : C(\mathbb{R}_+; V) \rightarrow C(\mathbb{R}_+; Q)$ tel que, pour toutes fonctions $\mathbf{u} \in C(\mathbb{R}_+; V)$ et $\boldsymbol{\sigma} \in C(\mathbb{R}_+; Q)$, l'égalité (10.19) est satisfaite si et seulement si l'égalité suivante est satisfaite :*

$$(10.20) \quad \boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)) + \mathcal{S}\mathbf{u}(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

En outre, $\mathcal{S} : C(\mathbb{R}_+; V) \rightarrow C(\mathbb{R}_+; Q)$ est un opérateur de mémoire, i.e., pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $s_n > 0$ tel que

$$(10.21) \quad \|\mathcal{S}\mathbf{u}_1(t) - \mathcal{S}\mathbf{u}_2(t)\|_Q \leq s_n \int_0^t \|\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)\|_V ds$$

$$\forall \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in C(\mathbb{R}_+; V), \forall t \in [0, n].$$

Démonstration. Soient $\mathbf{u} \in C(\mathbb{R}_+; V)$ et $\boldsymbol{\sigma} \in C(\mathbb{R}_+; Q)$. En utilisant l'égalité (10.19), nous avons que

$$(10.22) \quad \boldsymbol{\sigma}(t) - \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t))$$

$$= \int_0^t \mathcal{G}(\boldsymbol{\sigma}(s) - \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)) + \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s))) ds + \boldsymbol{\sigma}_0 - \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_0) \quad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

Considérons l'opérateur $\Lambda : C(\mathbb{R}_+; Q) \rightarrow C(\mathbb{R}_+; Q)$ défini par

$$(10.23) \quad \Lambda\boldsymbol{\tau}(t) = \int_0^t \mathcal{G}(\boldsymbol{\tau}(s) + \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s))) ds + \boldsymbol{\sigma}_0 - \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_0),$$

pour tout $\boldsymbol{\tau} \in C(\mathbb{R}_+; Q)$ et $t \in \mathbb{R}_+$. Notons que l'opérateur Λ dépend de \mathbf{u} mais, par simplicité, nous ne mettons pas explicitement cette dépendance.

Soient $\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2 \in C(\mathbb{R}_+; Q)$ et $t \in \mathbb{R}_+$. En utilisant l'égalité (10.23) avec la condition (10.9), nous obtenons que

$$\|\Lambda\boldsymbol{\tau}_1(t) - \Lambda\boldsymbol{\tau}_2(t)\|_Q$$

$$= \left\| \int_0^t \mathcal{G}(\boldsymbol{\tau}_1(s) + \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s))) ds + \boldsymbol{\sigma}_0 - \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_0) \right.$$

$$\left. - \int_0^t \mathcal{G}(\boldsymbol{\tau}_2(s) + \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s))) ds - \boldsymbol{\sigma}_0 + \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_0) \right\|_Q$$

$$\leq L_{\mathcal{G}} \int_0^t \|\boldsymbol{\tau}_1(s) - \boldsymbol{\tau}_2(s)\|_Q ds.$$

Par conséquent, en utilisant le Théorème 1.16, nous déduisons que l'opérateur Λ possède un unique point fixe dans $C(\mathbb{R}_+; Q)$, noté $\mathcal{S}\mathbf{u}$. Combinons maintenant (10.23) avec l'égalité $\Lambda(\mathcal{S}\mathbf{u}) = \mathcal{S}\mathbf{u}$ afin de déduire que l'opérateur $\mathcal{S} : C(\mathbb{R}_+; V) \rightarrow C(\mathbb{R}_+; Q)$ est défini par

$$(10.24) \quad \mathcal{S}\mathbf{u}(t) = \int_0^t \mathcal{G}(\mathcal{S}\mathbf{u}(s) + \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s))) ds + \boldsymbol{\sigma}_0 - \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_0).$$

En utilisant maintenant cette définition avec l'égalité (10.22), nous obtenons que

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)) + \mathcal{S}\mathbf{u}(t),$$

ce qui montre que l'égalité (10.20) est satisfaite.

Réciproquement, supposons que $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$ satisfait (10.20). Alors, en combinant (10.20) avec (10.24), nous déduisons que l'égalité (10.19) est satisfaite.

Par suite, prouvons que $\mathcal{S} : C(\mathbb{R}_+; V) \rightarrow C(\mathbb{R}_+; Q)$ est un opérateur de mémoire. Soient $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in C(\mathbb{R}_+; V)$, $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, n]$. En utilisant la définition (10.24) avec les conditions (10.8) et (10.9), nous obtenons que

$$\begin{aligned} & \|\mathcal{S}\mathbf{u}_1(t) - \mathcal{S}\mathbf{u}_2(t)\|_Q \\ & \leq \int_0^t L_{\mathcal{G}}(\|\mathcal{S}\mathbf{u}_1(s) - \mathcal{S}\mathbf{u}_2(s)\|_Q + \|\mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1(s)) - \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_2(s))\|_Q) \\ & \quad + L_{\mathcal{G}}\|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1(s)) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_2(s))\|_Q ds \\ & \leq L_{\mathcal{G}}(1 + \|\mathcal{E}\|_{Q_\infty}) \int_0^t \|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1(s)) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_2(s))\|_Q ds \\ & \quad + L_{\mathcal{G}} \int_0^t \|\mathcal{S}\mathbf{u}_1(s) - \mathcal{S}\mathbf{u}_2(s)\|_Q ds \\ & \leq \mathcal{K} \int_0^t \|\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)\|_V ds + \mathcal{K} \int_0^t \|\mathcal{S}\mathbf{u}_1(s) - \mathcal{S}\mathbf{u}_2(s)\|_Q ds, \end{aligned}$$

où \mathcal{K} est une constante positive dépendant de \mathcal{G} et \mathcal{E} . En utilisant maintenant le Lemme de Gronwall (voir Lemme 1.28, page 29) afin d'obtenir que

$$\|\mathcal{S}\mathbf{u}_1(t) - \mathcal{S}\mathbf{u}_2(t)\|_Q \leq \mathcal{K} e^{n\mathcal{K}} \int_0^t \|\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)\|_V ds,$$

ce qui montre que $\mathcal{S} : C(\mathbb{R}_+; V) \rightarrow C(\mathbb{R}_+; Q)$ est un opérateur de mémoire, i.e., il satisfait l'inégalité (10.21) avec $s_n = \mathcal{K} e^{n\mathcal{K}}$, ce qui termine la démonstration du Lemme 10.1. \square

Passons maintenant à la formulation variationnelle du Problème \mathcal{Q} . Pour cela, nous utilisons l'équation d'équilibre (10.2), la formule de Green (5.6) et la condition

(10.4) afin d'obtenir que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(t) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t))) dx &= \int_{\Omega} \mathbf{f}_0(t) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}(t)) dx \\ &+ \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_2(t) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}(t)) da + \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}(t) \boldsymbol{\nu} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}(t)) da. \end{aligned}$$

Puis, en utilisant la définition (10.18), nous obtenons que

$$(10.25) \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(t) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t))) dx = (\mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t))_V + \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}(t) \boldsymbol{\nu} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}(t)) da.$$

Nous avons que

$$\boldsymbol{\sigma}(t) \boldsymbol{\nu} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}(t)) = \sigma_{\nu}(t)(v_{\nu} - u_{\nu}(t)) + \boldsymbol{\sigma}_{\tau}(t) \cdot (\mathbf{v}_{\tau} - \mathbf{u}_{\tau}(t)) \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3.$$

Donc, en utilisant l'inégalité (10.25) avec la condition (10.6) pour voir que

$$(10.26) \quad \begin{aligned} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(t) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t))) dx &= (\mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t))_V \\ &+ \int_{\Gamma_3} \sigma_{\nu}(t)(v_{\nu} - u_{\nu}(t)) da. \end{aligned}$$

Maintenant, nous écrivons

$$\begin{aligned} \sigma_{\nu}(t)(v_{\nu} - u_{\nu}(t)) &= (\sigma_{\nu}(t) + p(u_{\nu}(t)))(v_{\nu} - g) \\ &+ (\sigma_{\nu}(t) + p(u_{\nu}(t)))(g - u_{\nu}(t)) - p(u_{\nu}(t))(v_{\nu} - u_{\nu}(t)) \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3. \end{aligned}$$

D'après la condition de contact (10.5), nous déduisons que

$$\sigma_{\nu}(t)(v_{\nu} - u_{\nu}(t)) \geq -p(u_{\nu}(t))(v_{\nu} - u_{\nu}(t)) \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3$$

et, en intégrant cette inégalité sur Γ_3 , nous avons que

$$\int_{\Gamma_3} \sigma_{\nu}(t)(v_{\nu} - u_{\nu}(t)) da \geq - \int_{\Gamma_3} p(u_{\nu}(t))(v_{\nu} - u_{\nu}(t)) da.$$

En combinant maintenant cette inégalité avec l'égalité (10.26) et la définition (10.16), nous obtenons que

$$(10.27) \quad \begin{aligned} (\boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)))_Q + (P\mathbf{u}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t))_V \\ \geq (\mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t))_V \quad \forall \mathbf{v} \in U. \end{aligned}$$

Enfin, nous substituons l'égalité (10.20) dans l'inégalité (10.27) et nous utilisons les définitions (10.14) (10.15), (10.17) pour obtenir la formulation variationnelle suivante du Problème \mathcal{Q} .

Problème \mathcal{Q}^V . *Trouver un champ de déplacements $\mathbf{u} : \mathbb{R}_+ \rightarrow U$ tel que*

$$(10.28) \quad \mathbf{u}(t) \in U, \quad (\mathbf{A}\mathbf{u}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t))_V + j(\mathcal{S}\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v}) \\ - j(\mathcal{S}\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t)) \geq (\mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t))_V \quad \forall \mathbf{v} \in U,$$

pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

Notons que le Problème \mathcal{Q}^V représente une inéquation quasivariationnelle avec opérateurs de mémoire. L'unique solvabilité de ce problème fait l'objet de la section suivante.

10.2 Existence et unicité de la solution

Dans cette section, nous présentons le résultat d'existence et d'unicité de la solution du problème variationnel \mathcal{Q}^V .

Théorème 10.2. *Supposons que les conditions (10.8) (10.13) sont vérifiées. Alors le Problème \mathcal{Q}^V possède une solution unique $\mathbf{u} \in C(\mathbb{R}_+; U)$.*

Démonstration. Nous utilisons le Théorème 3.1 avec $X = V$, $Z = Q$ et $K = U$. D'abord, notons qu'il est facile de vérifier que U est une partie convexe, fermée et non vide de V . Ensuite, prouvons que A est un opérateur fortement monotone et de Lipschitz. En utilisant la définition (10.15) avec les conditions (10.8)(b)-(c) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous obtenons que

$$|(\mathbf{A}\mathbf{u} - \mathbf{A}\mathbf{v}, \mathbf{w})_V| \leq \|\mathcal{E}\mathcal{E}(\mathbf{u}) - \mathcal{E}\mathcal{E}(\mathbf{v})\|_Q \|\mathcal{E}\mathcal{E}(\mathbf{w})\|_Q \\ \leq d \|\mathcal{E}\|_{Q_\infty} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_V \|\mathbf{w}\|_V \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V.$$

Puis, en posant $\mathbf{w} = \mathbf{A}\mathbf{u} - \mathbf{A}\mathbf{v}$ dans cette inégalité, nous déduisons que

$$\|\mathbf{A}\mathbf{u} - \mathbf{A}\mathbf{v}\|_V \leq d \|\mathcal{E}\|_{Q_\infty} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_V \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V.$$

Ceci montre que A est un opérateur de Lipschitz, i.e., il satisfait la condition (3.3)(b) avec $M = d \|\mathcal{E}\|_{\mathbf{Q}_\infty}$.

D'autre part, nous utilisons la définition (10.15) avec la condition (10.8)(d) pour obtenir que

$$(10.29) \quad \begin{aligned} (A\mathbf{u} - A\mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v})_V &= (\mathcal{E}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) - \mathcal{E}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_Q \\ &\geq m_\mathcal{E} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_V^2 \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V. \end{aligned}$$

De (10.29), nous déduisons que A est un opérateur fortement monotone, c'est-à-dire, il satisfait la condition (3.3)(a) avec $m = m_\mathcal{E}$.

Par ailleurs, il est facile de vérifier que pour tout $\mathbf{z} \in Q$, $\mathbf{u} \in V$ la fonctionnelle $j(\mathbf{z}, \mathbf{u}, \cdot)$, définie par (10.17), satisfait la condition (3.4)(a). Considérons maintenant $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in Q$, $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$. En utilisant la définition (10.17) avec la condition (10.11)(b) et l'inégalité de trace (5.10), nous trouvons que

$$\begin{aligned} &j(\mathbf{z}_1, \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2) - j(\mathbf{z}_1, \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1) + j(\mathbf{z}_2, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1) - j(\mathbf{z}_2, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2) \\ &= (\mathbf{z}_1, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_2))_Q + (P\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2)_V - ((\mathbf{z}_1, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_1))_Q + (P\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1)_V) \\ &\quad + (\mathbf{z}_2, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_1))_Q + (P\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1)_V - ((\mathbf{z}_2, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_2))_Q + (P\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2)_V) \\ &= (\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_2) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_1))_Q + (P\mathbf{u}_1 - P\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)_V \\ &\leq \|\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2\|_Q \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_V + c_0^2 L_p \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_V. \end{aligned}$$

Cette inégalité montre que la fonctionnelle j satisfait la condition (3.4)(b) avec $\alpha = 1$ et $\beta = c_0^2 L_p$. En outre, d'après la condition (10.12), nous déduisons que $m > \beta$ où $m = m_\mathcal{E}$ et $\beta = c_0^2 L_p$, ce qui montre que la condition (3.7) est vérifiée.

D'après le Lemme 10.1, nous avons que $\mathcal{S} : C(\mathbb{R}_+; V) \rightarrow C(\mathbb{R}_+; Q)$ est un opérateur de mémoire, i.e., il satisfait la condition (3.5). Enfin, notons que la régularité (10.10) implique que $\mathbf{f} \in C(\mathbb{R}_+; V)$, ce qui montre que la condition (3.6) est satisfaite. Le Théorème 10.2 est une conséquence directe du Théorème 3.1. \square

Soit \mathbf{u} la solution du Problème Q^V obtenue dans le Théorème 10.2 et soit $\boldsymbol{\sigma}$ définie par (10.19). Notons que les propriétés (10.8) (10.9) des opérateurs \mathcal{E} et \mathcal{G} combinées avec la régularité de \mathbf{u} impliquent que $\boldsymbol{\sigma} \in C(\mathbb{R}_+; Q)$. En outre, soit $\boldsymbol{\varphi}$

un élément arbitraire de $C_0^\infty(\Omega)^d$ et soit $\mathbf{v} = \mathbf{u} \pm \boldsymbol{\varphi}$. Il est facile de voir que $\mathbf{v} \in U$ et, de ce fait, nous prenons successivement $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \boldsymbol{\varphi}$ et $\mathbf{v} = \mathbf{u} - \boldsymbol{\varphi}$ dans (10.27), puis nous additionnons les inégalités obtenues pour déduire que

$$(\boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\varphi}))_Q = (\mathbf{f}(t), \boldsymbol{\varphi})_V \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in C_0^\infty(\Omega)^d, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

Nous utilisons maintenant la définition (10.18) ainsi que la définition de l'opérateur de divergence Div pour voir que

$$(\text{Div } \boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\varphi})_{L^2(\Omega)^d} + (\mathbf{f}_0(t), \boldsymbol{\varphi})_{L^2(\Omega)^d} = 0 \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in C_0^\infty(\Omega)^d, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

En outre, en utilisant la densité de l'espace $C_0^\infty(\Omega)^d$ dans $L^2(\Omega)^d$, nous obtenons

$$\text{Div } \boldsymbol{\sigma}(t) + \mathbf{f}_0(t) = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

Par conséquent, en combinant cette égalité avec la régularité $\mathbf{f}_0 \in C(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega)^d)$, il résulte que $\text{Div } \boldsymbol{\sigma} \in C(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega)^d)$ et, de ce fait, nous déduisons que $\boldsymbol{\sigma} \in C(\mathbb{R}_+; Q_1)$.

Un couple de fonctions $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$ qui satisfait (10.1) et (10.28) s'appelle *solution faible* du problème de contact \mathcal{Q} . Nous concluons du Théorème 10.2 que ce problème admet une solution faible unique, avec la régularité $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}) \in C(\mathbb{R}_+; U) \times C(\mathbb{R}_+; Q_1)$.

10.3 Méthode de pénalisation

Dans cette section, nous complétons l'étude du problème de contact \mathcal{Q} en démontrant un résultat de convergence basé sur la pénalisation de la contrainte unilatérale. Pour cela, nous considérons le problème de contact sans frottement suivant.

Problème \mathcal{Q}_μ . *Trouver un champ de déplacements $\mathbf{u}_\mu : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^d$ et un champ*

de contraintes $\boldsymbol{\sigma}_\mu : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{S}^d$ tels que

$$(10.30) \quad \dot{\boldsymbol{\sigma}}_\mu = \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}_\mu) + \mathcal{G}(\boldsymbol{\sigma}_\mu, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_\mu)) \quad \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}_+,$$

$$(10.31) \quad \text{Div} \boldsymbol{\sigma}_\mu + \mathbf{f}_0 = \mathbf{0} \quad \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}_+,$$

$$(10.32) \quad \mathbf{u}_\mu = \mathbf{0} \quad \text{sur} \quad \Gamma_1 \times \mathbb{R}_+,$$

$$(10.33) \quad \boldsymbol{\sigma}_\mu \boldsymbol{\nu} = \mathbf{f}_2 \quad \text{sur} \quad \Gamma_2 \times \mathbb{R}_+,$$

$$(10.34) \quad -\sigma_{\mu\nu} = p(u_{\mu\nu}) + \frac{1}{\mu} p(u_{\mu\nu} - g) \quad \text{sur} \quad \Gamma_3 \times \mathbb{R}_+,$$

$$(10.35) \quad \boldsymbol{\sigma}_{\mu\tau} = \mathbf{0} \quad \text{sur} \quad \Gamma_3 \times \mathbb{R}_+,$$

$$(10.36) \quad \mathbf{u}_\mu(0) = \mathbf{u}_0, \quad \boldsymbol{\sigma}_\mu(0) = \boldsymbol{\sigma}_0 \quad \text{dans} \quad \Omega.$$

Ici, $u_{\mu\nu}$ représente la composante normale du champ de déplacements \mathbf{u}_μ ainsi que $\sigma_{\mu\nu}$, $\boldsymbol{\sigma}_{\mu\tau}$ représentent respectivement les composantes normales et tangentielles du champ de contraintes $\boldsymbol{\sigma}_\mu$. En outre, μ est un paramètre positif qui peut être interprété comme un *coefficient de déformabilité* de la fondation.

Dans ce qui suit, supposons que les conditions (10.8) (10.13) sont vérifiées et considérons l'opérateur $G : V \rightarrow V$ défini par

$$(10.37) \quad (G\mathbf{u}, \mathbf{v})_V = \int_{\Gamma_3} p(u_\nu - g)v_\nu da \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V.$$

Notons que l'opérateur G possède les mêmes propriétés de l'opérateur défini par (7.29) dans le Chapitre 7. Donc, nous déduisons du Théorème 7.2 que G est un opérateur de pénalisation, i.e., il satisfait la condition (3.8).

Pour tout $\mu > 0$, nous utilisons des arguments similaires à ceux utilisés dans la Section 10.1 pour obtenir la formulation variationnelle suivante du Problème \mathcal{Q}_μ .

Problème \mathcal{Q}_μ^V . *Trouver un champ de déplacements $\mathbf{u}_\mu : \mathbb{R}_+ \rightarrow V$ tel que*

$$(10.38) \quad \begin{aligned} \mathbf{u}_\mu(t) \in V, \quad & (A\mathbf{u}_\mu(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}_\mu(t))_V + \frac{1}{\mu} (G\mathbf{u}_\mu(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}_\mu(t))_V \\ & + j(\mathcal{S}\mathbf{u}_\mu(t), \mathbf{u}_\mu(t), \mathbf{v}) - j(\mathcal{S}\mathbf{u}_\mu(t), \mathbf{u}_\mu(t), \mathbf{u}_\mu(t)) \\ & \geq (\mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}_\mu(t))_V \quad \forall \mathbf{v} \in V, \end{aligned}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

Le résultat principal de cette section est le théorème suivant.

Théorème 10.3. *Supposons que les conditions (10.8) (10.13) sont vérifiées. Alors :*

- i) *Pour tout $\mu > 0$, le Problème \mathcal{Q}_μ^V possède une solution unique $\mathbf{u}_\mu \in C(\mathbb{R}_+; V)$.*
- ii) *La solution du Problème \mathcal{Q}_μ^V converge vers la solution du Problème \mathcal{Q}^V , i.e.,*

$$(10.39) \quad \|\mathbf{u}_\mu(t) - \mathbf{u}(t)\|_V \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } \mu \rightarrow 0,$$

pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

Démonstration. Nous utilisons le Théorème 3.2 avec $X = V$. Pour ce faire, en utilisant le Théorème 10.2, nous déduisons que A , j , \mathcal{S} et f satisfont les conditions (3.3) (3.6). De plus, le Théorème 7.2 montre que G , défini par (10.37), est un opérateur de pénalisation. Par conséquent, nous concluons que le Théorème 10.3 est une conséquence directe du Théorème 3.2. \square

En plus de l'intérêt mathématique dans le résultat de convergence (10.39), il est important du point de vue mécanique, car il montre que la solution faible du problème de contact viscoplastique avec compliance normale et contrainte unilatérale peut être approchée par la solution faible du problème de contact viscoplastique avec compliance normale, pour un coefficient de déformabilité de la fondation suffisamment petit.

10.4 Un résultat de convergence

Dans cette section, nous complétons l'étude du Problème \mathcal{Q}^V en considérant une perturbation de l'ensemble des contraintes. Dans ce qui suit, nous supposons que les conditions (10.8) (10.13) sont vérifiées et nous notons par \mathbf{u} la solution du Problème \mathcal{Q}^V obtenue dans le Théorème 10.2. Pour tout $\rho > 0$, considérons g_ρ la perturbation de g satisfaisant la convergence

$$(10.40) \quad g_\rho \rightarrow g \quad \text{lorsque } \rho \rightarrow 0.$$

Considérons également la perturbation de l'ensemble U défini par

$$(10.41) \quad U_\rho = \{ \mathbf{v} \in V : v_\nu \leq g_\rho \text{ p.p. sur } \Gamma_3 \}.$$

Ensuite, nous considérons le problème variationnel perturbé suivant.

Problème \mathcal{Q}_ρ^V . Trouver un champ de déplacements $\mathbf{u}_\rho : \mathbb{R}_+ \rightarrow U_\rho$ tel que

$$(10.42) \quad \mathbf{u}_\rho(t) \in U_\rho, \quad (A\mathbf{u}_\rho(t), \mathbf{v}_\rho - \mathbf{u}_\rho(t))_V + j(\mathcal{S}\mathbf{u}_\rho(t), \mathbf{u}_\rho(t), \mathbf{v}_\rho) \\ - j(\mathcal{S}\mathbf{u}_\rho(t), \mathbf{u}_\rho(t), \mathbf{u}_\rho(t)) \geq (\mathbf{f}(t), \mathbf{v}_\rho - \mathbf{u}_\rho(t))_V \quad \forall \mathbf{v}_\rho \in U_\rho,$$

pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

Le résultat principal de cette section est le théorème suivant.

Théorème 10.4. *Supposons que les conditions (10.8) (10.13) sont vérifiées. Alors :*

- i) *Pour tout $\rho > 0$, le Problème \mathcal{Q}_ρ^V possède une solution unique $\mathbf{u}_\rho \in C(\mathbb{R}_+; U_\rho)$.*
- ii) *De plus, si la condition (10.40) est vérifiée, alors la solution \mathbf{u}_ρ du Problème \mathcal{Q}_ρ^V converge vers la solution \mathbf{u} du Problème \mathcal{Q}^V , i.e.,*

$$(10.43) \quad \mathbf{u}_\rho \rightarrow \mathbf{u} \quad \text{dans} \quad C(\mathbb{R}_+; V) \quad \text{lorsque} \quad \rho \rightarrow 0.$$

Démonstration. Soit $\rho > 0$. Nous utilisons le Théorème 3.7 avec $X = V$, $Z = Q$, $U = K$ et $K_\rho = U_\rho$. D'abord, pour établir la définition (3.19) nous considérons les fonctions $c(\cdot)$ et $d(\cdot)$ définies par

$$(10.44) \quad c(\rho) = \frac{g_\rho}{g} \quad \text{et} \quad d(\rho) = 0.$$

Soit $\boldsymbol{\theta} \in V$. Prenons deux éléments \mathbf{u} et \mathbf{v} de V tels que

$$\mathbf{v} = \frac{g_\rho}{g} \mathbf{u}.$$

Il est facile de voir que

$$u_\nu \leq g \quad \text{si et seulement si} \quad v_\nu \leq g_\rho$$

et, par conséquent, nous avons que

$$\mathbf{u} \in U \quad \text{si et seulement si} \quad c(\rho)\mathbf{u} + d(\rho)\boldsymbol{\theta} \in U_\rho,$$

c'est-à-dire

$$U_\rho = c(\rho)U + d(\rho)\boldsymbol{\theta}.$$

Ceci montre que la condition (3.19) est satisfaite. Par ailleurs, il est facile de voir que la condition (3.22) est vérifiée, i.e.,

$$\mathbf{0}_V \in U_\rho.$$

D'autre part, en combinant (10.44) avec la convergence (10.40), nous déduisons que

$$c(\rho) \rightarrow 1 \quad \text{et} \quad d(\rho) \rightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad \rho \rightarrow 0,$$

ce qui montre que la condition (3.20) est vérifiée.

En outre, il est facile de vérifier que la fonctionnelle j , définie par (10.17), satisfait les conditions (3.23)(a) (b). Considérons maintenant $\mathbf{z} \in Q$, \mathbf{u} , \mathbf{v}_1 , $\mathbf{v}_2 \in V$. Alors, en utilisant la définition (10.17) avec la condition (10.11) et l'inégalité de trace (5.10), nous obtenons que

$$\begin{aligned} & |j(\mathbf{z}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_1) - j(\mathbf{z}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_2)| \\ &= |(\mathbf{z}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_1))_Q + (P\mathbf{u}, \mathbf{v}_1)_V - ((\mathbf{z}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_2))_Q + (P\mathbf{u}, \mathbf{v}_2)_V)| \\ &= |(\mathbf{z}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_1) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_2))_Q + (P\mathbf{u}, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)_V| \\ &\leq \max(1, c_0^2 L_p) (\|\mathbf{z}\|_Q + \|\mathbf{u}\|_V) \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_V. \end{aligned}$$

Cette inégalité montre que la condition (3.23)(c) est vérifiée avec $H(r) = \max(1, c_0^2 L_p)r$. Par conséquent, le Théorème 10.4 est une conséquence directe du Théorème 3.7. \square

La convergence (10.43) est importante du point de vue mécanique, car elle montre que la solution faible du problème mécanique (10.1) (10.7) dépend continûment de la contrainte unilatérale g ; elle montre que des petites perturbations dans cette contrainte entraînent des petites perturbations dans la solution faible du problème de contact sans frottement \mathcal{Q} .

Chapitre 11

Problème de contact viscoélastique avec compliance normale et contrainte unilatérale

Dans ce chapitre, nous nous proposons d'étudier un problème de contact quasistatique modélisant l'interaction entre un corps viscoélastique et une fondation. Le contact est décrit à l'aide d'une loi de compliance normale et contrainte unilatérale. Ce chapitre est composé de quatre sections. Dans la première section, nous présentons la formulation forte du problème mécanique ainsi que les hypothèses nécessaires sur les données afin d'obtenir une formulation variationnelle. Puis, dans la deuxième section, nous abordons la question de l'existence et l'unicité d'une solution faible. Ensuite, dans la troisième section, nous démontrons un résultat de convergence portant sur la perturbation de l'ensemble des contraintes. Enfin, dans la quatrième section, nous présentons une formulation variationnelle duale pour laquelle nous démontrons des résultats d'existence, d'unicité, de convergence et d'équivalence. Les résultats présentés dans ce chapitre ont fait l'objet d'une partie de l'article [80].

11.1 Problème mécanique et formulation variationnelle

Le problème mécanique se formule de la façon suivante.

Problème \mathcal{R} . *Trouver un champ de déplacements $\mathbf{u} : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^d$ et un champ de contraintes $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{S}^d$ tels que*

$$(11.1) \quad \boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)) + \int_0^t \mathcal{B}(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s))ds \quad \text{dans } \Omega,$$

$$(11.2) \quad \text{Div } \boldsymbol{\sigma}(t) + \mathbf{f}_0(t) = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega,$$

$$(11.3) \quad \mathbf{u}(t) = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_1,$$

$$(11.4) \quad \boldsymbol{\sigma}(t)\boldsymbol{\nu} = \mathbf{f}_2(t) \quad \text{sur } \Gamma_2,$$

$$(11.5) \quad \left. \begin{array}{l} u_\nu(t) \leq g, \quad \sigma_\nu(t) + p(u_\nu(t)) \leq 0, \\ (u_\nu(t) - g)(\sigma_\nu(t) + p(u_\nu(t))) = 0 \end{array} \right\} \quad \text{sur } \Gamma_3,$$

$$(11.6) \quad \boldsymbol{\sigma}_\tau(t) = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_3.$$

pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

Partout dans ce chapitre, afin de simplifier la notation nous ne signalons pas explicitement la dépendance des différentes fonctions par rapport à la variable spatiale \mathbf{x} . Nous décrivons maintenant les équations et les conditions aux limites du problème mécanique \mathcal{R} .

D'abord, l'équation (11.1) représente la loi de comportement viscoélastique à mémoire longue où \mathcal{A} est l'opérateur d'élasticité et \mathcal{B} est l'opérateur de relaxation. Puis, (11.2) est l'équation d'équilibre où \mathbf{f}_0 est la densité des forces volumiques. Ensuite, (11.3) et (11.4) représentent respectivement les conditions aux limites de déplacement et de traction où \mathbf{f}_2 est la densité des tractions surfaciques. Enfin, les relations (11.5) (11.6) caractérisent la condition aux limites de contact sans frottement avec la loi de compliance normale et contrainte unilatérale où $g > 0$ et p est une fonction donnée.

Dans l'étude du Problème \mathcal{R} nous supposons que les opérateurs \mathcal{A} et \mathcal{B} vérifient

les conditions suivantes :

$$(11.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } \mathcal{A} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d. \\ \text{(b) Il existe } L_{\mathcal{A}} > 0 \text{ tel que} \\ \quad \|\mathcal{A}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_1) - \mathcal{A}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_2)\| \leq L_{\mathcal{A}} \|\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2\| \\ \quad \forall \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \\ \text{(c) Il existe } m_{\mathcal{A}} > 0 \text{ tel que} \\ \quad (\mathcal{A}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_1) - \mathcal{A}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_2)) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2) \geq m_{\mathcal{A}} \|\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2\|^2 \\ \quad \forall \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \\ \text{(d) L'application } \mathbf{x} \mapsto \mathcal{A}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}) \text{ est mesurable sur } \Omega, \\ \quad \text{pour tout } \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{S}^d. \\ \text{(e) L'application } \mathbf{x} \mapsto \mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{0}_{\mathbb{S}^d}) \text{ appartient à } Q. \end{array} \right.$$

$$(11.8) \quad \mathcal{B} \in C(\mathbb{R}_+; \mathbf{Q}_{\infty}).$$

Par ailleurs, nous supposons que les densités des forces volumiques \mathbf{f}_0 et des tractions surfaciques \mathbf{f}_2 ont la régularité

$$(11.9) \quad \mathbf{f}_0 \in C(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega)^d), \quad \mathbf{f}_2 \in C(\mathbb{R}_+; L^2(\Gamma_2)^d).$$

Nous supposons également que la fonction de compliance normale p satisfait

$$(11.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } p : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+. \\ \text{(b) Il existe } L_p > 0 \text{ tel que} \\ \quad |p(\mathbf{x}, r_1) - p(\mathbf{x}, r_2)| \leq L_p |r_1 - r_2| \\ \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R} \quad \text{p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3. \\ \text{(c) } (p(\mathbf{x}, r_1) - p(\mathbf{x}, r_2))(r_1 - r_2) \geq 0 \\ \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \quad \text{p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3. \\ \text{(d) } p(\mathbf{x}, r) = 0 \text{ pour tout } r \leq 0, \quad \text{p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3. \\ \text{(e) L'application } \mathbf{x} \mapsto p(\mathbf{x}, r) \text{ est mesurable sur } \Gamma_3, \\ \quad \text{pour tout } r \in \mathbb{R}. \end{array} \right.$$

Enfin, nous supposons l'hypothèse suivante :

$$(11.11) \quad \text{il existe } \boldsymbol{\zeta} \in V \quad \text{tel que } \boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\nu} \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3.$$

Pour plus des détails sur cette condition, nous renvoyons le lecteur à [49, 83].

Nous nous intéressons maintenant à la formulation variationnelle du Problème \mathcal{R} . Pour cela, nous introduisons l'ensemble de déplacements admissibles U , les opérateurs $\mathcal{S} : C(\mathbb{R}_+; V) \rightarrow C(\mathbb{R}_+; V)$, $P : V \rightarrow V$, $A : V \rightarrow V$ et la fonction $\mathbf{f} : \mathbb{R}_+ \rightarrow V$

définis par

$$(11.12) \quad U = \{ \mathbf{v} \in V : v_\nu \leq g \text{ p.p. sur } \Gamma_3 \},$$

$$(11.13) \quad (\mathcal{S}\mathbf{u}(t), \mathbf{v})_V = \left(\int_0^t \mathcal{B}(t-s) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)) ds, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \right)_Q \quad \forall \mathbf{u} \in C(\mathbb{R}_+; V), \mathbf{v} \in V,$$

$$(11.14) \quad (P\mathbf{u}, \mathbf{v})_V = \int_{\Gamma_3} p(u_\nu) v_\nu da \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V,$$

$$(11.15) \quad (A\mathbf{u}, \mathbf{v})_V = (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_Q + (P\mathbf{u}, \mathbf{v})_V \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V,$$

$$(11.16) \quad (\mathbf{f}(t), \mathbf{v})_V = \int_\Omega \mathbf{f}_0(t) \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_2(t) \cdot \mathbf{v} da \quad \forall \mathbf{v} \in V, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

Supposons que $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$ sont des fonctions suffisamment régulières satisfaisant (11.1) (11.6) et soient $t \in \mathbb{R}_+$, $\mathbf{v} \in U$. Nous effectuons des intégrations par parties sur l'équation d'équilibre (11.2), puis nous utilisons la formule de Green (5.6), l'égalité (5.5) et la condition (11.4) afin d'obtenir que

$$(11.17) \quad \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}(t) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t))) dx = \int_\Omega \mathbf{f}_0(t) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}(t)) dx \\ + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_2(t) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}(t)) da + \int_{\Gamma_3} \sigma_\nu(t) (v_\nu - u_\nu(t)) da.$$

Ensuite, nous utilisons la définition (11.16) pour voir que

$$\int_\Omega \boldsymbol{\sigma}(t) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t))) dx = (\mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t))_V + \int_{\Gamma_3} \sigma_\nu(t) (v_\nu - u_\nu(t)) da.$$

D'autre part, nous écrivons

$$(11.18) \quad \sigma_\nu(t) (v_\nu - u_\nu(t)) = (\sigma_\nu(t) + p(u_\nu(t)) - p(u_\nu(t))) (v_\nu - u_\nu(t)) \\ = (\sigma_\nu(t) + p(u_\nu(t)) (v_\nu - u_\nu(t)) - p(u_\nu(t)) (v_\nu - u_\nu(t)) \\ = (\sigma_\nu(t) + p(u_\nu(t))) (v_\nu - g) + (\sigma_\nu(t) + p(u_\nu(t)) (g - u_\nu(t)) \\ - p(u_\nu(t)) (v_\nu - u_\nu(t)).$$

D'après la condition (11.5), nous avons que

$$(\sigma_\nu(t) + p(u_\nu(t)) (g - u_\nu(t)) = 0, \quad \text{et} \quad \sigma_\nu(t) + p(u_\nu(t)) \leq 0 \text{ p.p. sur } \Gamma_3.$$

De plus, puisque $\mathbf{v} \in U$, il résulte que

$$(\sigma_\nu(t) + p(u_\nu(t)))(v_\nu - g) \geq 0 \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3.$$

Par conséquent, nous déduisons de l'égalité (11.18) que

$$\sigma_\nu(t)(v_\nu - u_\nu(t)) \geq -p(u_\nu(t))(v_\nu - u_\nu(t)) \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3$$

et, en intégrant cette inégalité sur Γ_3 , nous avons que

$$(11.19) \quad \int_{\Gamma_3} \sigma_\nu(t)(v_\nu - u_\nu(t)) \, da \geq - \int_{\Gamma_3} p(u_\nu(t))(v_\nu - u_\nu(t)) \, da.$$

Nous combinons maintenant les inégalités (11.17), (11.19) et la définition (11.14) pour obtenir que

$$(11.20) \quad (\boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)))_Q + (P\mathbf{u}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t))_V \\ \geq (\mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t))_V.$$

Finalement, nous utilisons cette inégalité avec la loi de comportement (11.1) et les définitions (11.12) (11.13), (11.15) afin d'obtenir la formulation variationnelle suivante du Problème \mathcal{R} .

Problème \mathcal{R}^V . *Trouver un champ de déplacements $\mathbf{u} : \mathbb{R}_+ \rightarrow U$ tel que*

$$(11.21) \quad \mathbf{u}(t) \in U, \quad (A\mathbf{u}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t))_V + (\mathcal{S}\mathbf{u}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t))_V \\ \geq (\mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t))_V \quad \forall \mathbf{v} \in U,$$

pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

Notons que le Problème \mathcal{R}^V est formulé en termes de champ de déplacements. Une fois que ce dernier est connu, on peut aisément déduire le champ de contraintes à l'aide de la loi de comportement (11.1). Un couple $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$ qui satisfait (11.1) et (11.21) est appelé *solution faible* du problème de contact viscoélastique sans frottement \mathcal{R} .

11.2 Existence et unicité de la solution

Dans cette section, nous présentons le résultat d'existence et d'unicité de la solution du problème variationnel \mathcal{R}^V .

Théorème 11.5. *Supposons que les conditions (11.7) (11.10) sont vérifiées. Alors le Problème \mathcal{R}^V possède une solution unique qui satisfait $\mathbf{u} \in C(\mathbb{R}_+; U)$.*

Démonstration. Nous appliquons le Théorème 4.1 avec $X = V$ et $K = U$. D'abord, notons qu'il est facile de vérifier que U est une partie convexe, fermée et non vide de V . Ensuite, prouvons que A est un opérateur fortement monotone et de Lipschitz. Pour cela, nous utilisons la définition (11.15) avec les conditions (11.7)(b), (11.10)(b), l'inégalité de trace (5.10) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour obtenir

$$\begin{aligned} & |(A\mathbf{u} - A\mathbf{v}, \mathbf{w})_V| \\ & \leq |(\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}))_Q| + |(P\mathbf{u} - P\mathbf{v}, \mathbf{w})_V| \\ & \leq \|\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})\|_Q \|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w})\|_Q + \int_{\Gamma_3} |(p(u_\nu) - p(v_\nu))w_\nu| da \\ & \leq (L_{\mathcal{A}} + c_0^2 L_p) \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_V \|\mathbf{w}\|_V \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V. \end{aligned}$$

En prenant maintenant $\mathbf{w} = A\mathbf{u} - A\mathbf{v}$ dans cette inégalité, nous obtenons que

$$\|A\mathbf{u} - A\mathbf{v}\|_V \leq (L_{\mathcal{A}} + c_0^2 L_p) \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_V \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V.$$

Il en résulte que A est un opérateur de Lipschitz, c'est-à-dire, il satisfait la condition (4.2)(b) avec $M = L_{\mathcal{A}} + c_0^2 L_p$.

D'autre part, nous utilisons la définition (11.15) avec les conditions (11.7)(c) et (11.10)(c) pour trouver que

$$(A\mathbf{u} - A\mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v})_V \geq m_{\mathcal{A}} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_V^2 \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V.$$

Nous en déduisons que A est opérateur fortement monotone, i.e., il satisfait la condition (4.2)(a) avec $m = m_{\mathcal{A}}$.

Soient $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in C(\mathbb{R}_+; V)$, $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, n]$. Alors, nous utilisons la définition

(11.13) de l'opérateur \mathcal{S} avec la condition (11.8) pour voir que

$$\begin{aligned} & (\mathcal{S}\mathbf{u}_1(t) - \mathcal{S}\mathbf{u}_2(t), \mathbf{v})_V \\ &= \left(\int_0^t \mathcal{B}(t-s) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1(s)) ds - \int_0^t \mathcal{B}(t-s) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_2(s)) ds, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \right)_Q \\ &\leq d \max_{r \in [0, n]} \|\mathcal{B}(r)\|_{\mathbf{Q}_\infty} \int_0^t \|\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)\|_V ds \|\mathbf{v}\|_V \quad \forall \mathbf{v} \in V. \end{aligned}$$

Ensuite, en prenant $\mathbf{v} = \mathcal{S}\mathbf{u}_1(t) - \mathcal{S}\mathbf{u}_2(t)$ dans cette inégalité, nous obtenons que

$$\|\mathcal{S}\mathbf{u}_1(t) - \mathcal{S}\mathbf{u}_2(t)\|_V \leq d \max_{r \in [0, n]} \|\mathcal{B}(r)\|_{\mathbf{Q}_\infty} \int_0^t \|\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)\|_V ds.$$

Cette inégalité montre que \mathcal{S} est un opérateur de mémoire, c'est-à-dire, il satisfait la condition (4.3) avec

$$s_n = d \max_{r \in [0, n]} \|\mathcal{B}(r)\|_{\mathbf{Q}_\infty}.$$

Enfin, nous utilisons la condition (11.9) pour déduire que $\mathbf{f} \in C(\mathbb{R}_+; V)$, i.e., la fonction \mathbf{f} satisfait la condition (4.4). Par conséquent, nous déduisons que le Théorème 11.5 est une conséquence directe du Théorème 4.1. \square

11.3 Un résultat de convergence

Dans cette section, nous fournissons un résultat de convergence pour le Problème \mathcal{R}^V portant sur la perturbation de l'ensemble des contraintes U . Pour ce faire, Nous supposons que les conditions (11.7) (11.11) sont vérifiées et, pour tout $\rho > 0$, nous introduisons la perturbation U_ρ de l'ensemble U définie par

$$(11.22) \quad U_\rho = \{ \mathbf{v} \in V : v_\nu \leq g_\rho \text{ p.p. sur } \Gamma_3 \},$$

où $g_\rho > 0$ est la perturbation de g satisfaisant la convergence suivante :

$$(11.23) \quad g_\rho \rightarrow g \quad \text{lorsque } \rho \rightarrow 0.$$

Ensuite, nous considérons la perturbation suivante du Problème \mathcal{R}^V .

Problème \mathcal{R}_ρ^V . Trouver un champ de déplacements $\mathbf{u}_\rho : \mathbb{R}_+ \rightarrow U_\rho$ tel que

$$(11.24) \quad \mathbf{u}_\rho(t) \in U_\rho, \quad (A\mathbf{u}_\rho(t), \mathbf{v}_\rho - \mathbf{u}_\rho(t))_V + (\mathcal{S}\mathbf{u}_\rho(t), \mathbf{v}_\rho - \mathbf{u}_\rho(t))_V \\ \geq (\mathbf{f}(t), \mathbf{v}_\rho - \mathbf{u}_\rho(t))_V \quad \forall \mathbf{v}_\rho \in U_\rho,$$

pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

Le résultat principal de cette section est le théorème d'existence et d'unicité ainsi que de convergence suivant.

Théorème 11.6. *Supposons que les conditions (11.7) (11.10) sont satisfaites.*

Alors :

i) *Pour tout $\rho > 0$, le Problème \mathcal{R}_ρ^V possède une solution unique vérifiant $\mathbf{u}_\rho \in C(\mathbb{R}_+; U_\rho)$.*

ii) *De plus, si les conditions (11.11) et (11.23) sont vérifiées, alors la solution \mathbf{u}_ρ du Problème \mathcal{R}_ρ^V converge vers la solution \mathbf{u} du Problème \mathcal{R}^V , i.e.,*

$$(11.25) \quad \mathbf{u}_\rho \rightarrow \mathbf{u} \quad \text{dans } C(\mathbb{R}_+; V) \quad \text{lorsque } \rho \rightarrow 0.$$

Démonstration. Soit $\rho > 0$. Nous utilisons le Théorème 4.4 avec $X = V$, $K = U$ et $K_\rho = U_\rho$. Tout d'abord, nous introduisons l'ensemble U_0 défini par

$$U_0 = \{ \mathbf{v} \in V : v_\nu \leq 0 \text{ p.p. sur } \Gamma_3 \}.$$

Il est facile de vérifier que U_0 satisfait les conditions (4.11)(a)-(c). De plus, les ensembles U et U_ρ ont respectivement les décompositions

$$U = U_0 + \mathbf{g} \quad \text{et} \quad U_\rho = U_0 + \mathbf{g}_\rho$$

où $\mathbf{g} = g\boldsymbol{\zeta}$, $\mathbf{g}_\rho = g_\rho\boldsymbol{\zeta}$ et $\boldsymbol{\zeta}$ est l'élément défini dans la condition (11.11). Nous en déduisons que les ensembles U et U_ρ satisfont respectivement les conditions (4.11)(d) et (4.12)(a). En outre, nous utilisons la convergence (11.23) afin d'obtenir que

$$\mathbf{g}_\rho \rightarrow \mathbf{g} \quad \text{dans } V \quad \text{lorsque } \rho \rightarrow 0,$$

ce qui implique que la condition (4.12)(b) est vérifiée. Par conséquent, puisque les conditions (4.2) (4.4) sont vérifiées (voir Théorème 11.5), alors le Théorème 11.6 est une conséquence directe du Théorème 4.4. \square

La convergence (11.25) est importante du point de vue mécanique, car elle montre que la solution faible du Problème \mathcal{R} dépend continûment de la contrainte unilatérale g ; elle indique que des petites variations dans cette contrainte impliquent des petites variations dans la solution faible du problème mécanique de contact (11.1) (11.6).

11.4 Formulation duale

Notre objectif dans cette section est d'obtenir une seconde formulation variationnelle du Problème \mathcal{R} en termes du champ de contraintes, appelée formulation variationnelle duale. Dans ce qui suit, nous supposons que les conditions suivantes sont vérifiées :

$$(11.26) \quad \begin{cases} \mathcal{A} \in \mathbf{Q}_\infty \text{ et il existe } m_{\mathcal{A}} > 0 \text{ tel que} \\ \mathcal{A}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \geq m_{\mathcal{A}} \|\boldsymbol{\varepsilon}\|^2 \quad \forall \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega; \end{cases}$$

$$(11.27) \quad p(\mathbf{x}, r) = 0 \quad \forall r \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3.$$

En utilisant ces conditions ainsi que la définition (11.15), nous déduisons que l'opérateur A s'écrit par

$$(11.28) \quad (A\mathbf{u}, \mathbf{v})_V = (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_Q \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$$

et, de plus, il est linéaire.

Ensuite, nous considérons l'opérateur $\mathcal{S}^* : C(\mathbb{R}_+; Q) \rightarrow C(\mathbb{R}_+; Q)$ défini par

$$\mathcal{S}^*\boldsymbol{\tau}(t) = \int_0^t \mathcal{B}(t-s)\boldsymbol{\tau}(s) ds \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in C(\mathbb{R}_+; Q), t \in \mathbb{R}_+.$$

Il résulte de la condition (11.8) que \mathcal{S}^* est un opérateur de mémoire.

Afin d'établir la formulation variationnelle duale du Problème \mathcal{R}^V nous avons besoin au lemme suivant dont la démonstration est une conséquence directe du Lemme 4.6 avec $X = Q$.

Lemme 11.7. *Il existe un unique opérateur $\mathcal{R}^* : C(\mathbb{R}_+; Q) \rightarrow C(\mathbb{R}_+; Q)$ tel que, pour toutes fonctions $\mathbf{u} \in C(\mathbb{R}_+; V)$ et $\boldsymbol{\sigma} \in C(\mathbb{R}_+; Q)$, nous avons que*

$$(11.29) \quad \boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)) + \int_0^t \mathcal{B}(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)) ds \quad \forall t \in \mathbb{R}_+,$$

si et seulement si

$$(11.30) \quad \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)) = \mathcal{A}^{-1}\boldsymbol{\sigma}(t) + \mathcal{R}^*\boldsymbol{\sigma}(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

En outre, \mathcal{R}^* est un opérateur de mémoire.

En plus des résultats présentés dans le Lemme 11.7 nous rappelons que l'opérateur \mathcal{R}^* est donné par

$$\mathcal{R}^*\boldsymbol{\sigma}(t) = \int_0^t \mathcal{B}^*(t-s)\boldsymbol{\sigma}(s) ds \quad \forall \boldsymbol{\sigma} \in C(\mathbb{R}_+; Q), \quad t \in \mathbb{R}_+$$

où $\mathcal{B}^* \in C(\mathbb{R}_+; \mathbf{Q}_\infty)$ représente le tenseur du fluage. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à [70].

Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, nous introduisons l'ensemble du champ de contraintes admissibles $\Sigma(t)$ défini par

$$(11.31) \quad \Sigma(t) = \{ \boldsymbol{\tau} \in Q : (\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{g}))_Q \geq (\mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \mathbf{g})_V \quad \forall \mathbf{v} \in U \},$$

où $\mathbf{g} = g\boldsymbol{\zeta}$ et $\boldsymbol{\zeta}$ est l'élément défini dans (11.11). Ensuite, nous considérons le problème variationnel suivant.

Problème \mathcal{R}_D^V . Trouver une fonction $\boldsymbol{\sigma} : \mathbb{R}_+ \rightarrow Q$ tel que

$$(11.32) \quad \boldsymbol{\sigma}(t) \in \Sigma(t), \quad (\mathcal{A}^{-1}\boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma}(t))_Q + (\mathcal{R}^*\boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma}(t))_Q \\ \geq (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{g}), \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma}(t))_Q \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \Sigma(t),$$

pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

Nous appelons \mathcal{R}_D^V la formulation variationnelle duale du Problème \mathcal{R} . Le lien entre les problèmes variationnels \mathcal{R}^V et \mathcal{R}_D^V est donné par le théorème d'équivalence suivant qui représente le résultat principal de cette section.

Théorème 11.8. *Supposons que les conditions (11.8) (11.9), (11.11) et (11.26) (11.27) sont vérifiées. Alors les affirmations suivantes sont satisfaites :*

i) *Si \mathbf{u} est une solution du Problème \mathcal{R}^V vérifiant $\mathbf{u} \in C(\mathbb{R}_+; V)$, alors la fonction*

$$(11.33) \quad \boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)) + \int_0^t \mathcal{B}(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)) ds \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$$

est une solution du Problème \mathcal{R}_D^V avec la régularité $\sigma \in C(\mathbb{R}_+; Q)$.

ii) Réciproquement, si σ est une solution du Problème \mathcal{R}_D^V vérifiant $\sigma \in C(\mathbb{R}_+; Q)$, alors il existe une unique fonction $\mathbf{u} \in C(\mathbb{R}_+; V)$ telle que l'égalité (11.33) est satisfaite et, de plus, \mathbf{u} est une solution du Problème \mathcal{R}^V .

Pour démontrer le Théorème 11.8 nous avons besoin de quelques préliminaires. D'abord, puisque $\text{mes}(\Gamma_1) > 0$, il résulte du Théorème 5.3 que l'image de l'opérateur de déformations $\varepsilon : V \rightarrow Q$, noté $\varepsilon(V)$, est un sous espace fermé de Q . C'est une conséquence directe de l'égalité

$$(11.34) \quad \|\mathbf{v}\|_V = \|\varepsilon(\mathbf{v})\|_Q \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Soit $\tilde{P} : Q \rightarrow \varepsilon(V)$ l'opérateur de projection sur $\varepsilon(V) \subset Q$ et notons que l'égalité (11.34) montre que l'opérateur $\varepsilon : V \rightarrow \varepsilon(V)$ est inversible. Par suite, nous définissons l'opérateur $\Theta : Q \rightarrow V$ par

$$\Theta \boldsymbol{\tau} = \varepsilon^{-1}(\tilde{P} \boldsymbol{\tau}) \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in Q.$$

Il en résulte que

$$(11.35) \quad (\Theta \boldsymbol{\tau}, \mathbf{v})_V = (\boldsymbol{\tau}, \varepsilon(\mathbf{v}))_Q \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in Q, \mathbf{v} \in V.$$

Ensuite, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, nous définissons l'ensemble $\bar{\Sigma}(t) \subset V$ par

$$\bar{\Sigma}(t) = \{ \bar{\boldsymbol{\tau}} \in V : (\bar{\boldsymbol{\tau}}, \mathbf{v} - \mathbf{g})_V \geq (\mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \mathbf{g})_V \quad \forall \mathbf{v} \in U \},$$

où l'ensemble U est défini par (11.12). Utilisons cette définition avec la définition (11.31) et l'égalité (11.35) pour déduire que

$$(11.36) \quad \boldsymbol{\tau} \in \Sigma(t) \iff \Theta \boldsymbol{\tau} \in \bar{\Sigma}(t).$$

Nous passons maintenant à la démonstration du Théorème 11.8.

Démonstration. i) Supposons que \mathbf{u} est une solution du Problème \mathcal{R}^V avec $\mathbf{u} \in C(\mathbb{R}_+; V)$ et soit σ la fonction donnée par (11.33). Considérons la fonction $\tilde{\sigma} \in C(\mathbb{R}_+; V)$ définie par

$$(11.37) \quad \tilde{\sigma}(t) = A\mathbf{u}(t) + \mathcal{S}\mathbf{u}(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}_+,$$

où les opérateurs A et \mathcal{S} sont respectivement définis par (11.28) et (11.13). Puisque \mathcal{S} est un opérateur de mémoire, nous déduisons du Lemme 4.6 qu'il existe un unique opérateur de mémoire $\mathcal{R} : C(\mathbb{R}_+; V) \rightarrow C(\mathbb{R}_+; V)$ tel que l'égalité (11.37) est satisfaite si et seulement si

$$(11.38) \quad \mathbf{u}(t) = A^{-1}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(t) + \mathcal{R}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

Soit $t \in \mathbb{R}_+$. Nous utilisons le Théorème 4.7 i) pour déduire que

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(t) \in \overline{\Sigma}(t), \quad (A^{-1}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(t), \bar{\boldsymbol{\tau}} - \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(t))_V + (\mathcal{R}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(t), \bar{\boldsymbol{\tau}} - \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(t))_V \\ \geq (\mathbf{g}, \bar{\boldsymbol{\tau}} - \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(t))_V \quad \forall \bar{\boldsymbol{\tau}} \in \overline{\Sigma}(t). \end{aligned}$$

En substituant l'égalité (11.38) dans cette inégalité pour voir que

$$(11.39) \quad \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(t) \in \overline{\Sigma}(t), \quad (\bar{\boldsymbol{\tau}} - \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(t), \mathbf{u}(t))_V \geq (\mathbf{g}, \bar{\boldsymbol{\tau}} - \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(t))_V \quad \forall \bar{\boldsymbol{\tau}} \in \overline{\Sigma}(t).$$

D'autre part, nous utilisons les égalités (11.37) et (11.33) ainsi que les définitions (11.28) et (11.13) pour obtenir que

$$(11.40) \quad (\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(t), \mathbf{v})_V = (\boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_Q \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Par conséquent, en utilisant le fait que $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(t) \in \overline{\Sigma}(t)$, nous déduisons que

$$(11.41) \quad \boldsymbol{\sigma}(t) \in \Sigma(t).$$

Soit $\boldsymbol{\tau} \in \Sigma(t)$. Notons que l'équivalence (11.36) nous permet de prendre $\bar{\boldsymbol{\tau}} = \Theta\boldsymbol{\tau} \in \overline{\Sigma}(t)$ dans (11.39). En outre, nous utilisons (11.35) et (11.40) pour voir que

$$\begin{aligned} (\bar{\boldsymbol{\tau}}, \mathbf{u}(t))_V = (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)), \boldsymbol{\tau})_Q, \quad (\mathbf{g}, \bar{\boldsymbol{\tau}})_V = (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{g}), \boldsymbol{\tau})_Q, \\ (\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(t), \mathbf{u}(t))_V = (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)), \boldsymbol{\sigma}(t))_Q, \quad (\mathbf{g}, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(t))_V = (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{g}), \boldsymbol{\sigma}(t))_Q. \end{aligned}$$

Substituons ces égalités dans l'inégalité (11.39) pour obtenir que

$$(11.42) \quad (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)), \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma}(t))_Q \geq (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{g}), \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma}(t))_Q.$$

Rappelons que l'égalité (11.33) combinée avec le Lemme 11.7 implique que l'égalité (11.30) est satisfaite et, par conséquent, combinons (11.30) et (11.42) pour voir que

$$(11.43) \quad (A^{-1}\boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma}(t))_Q + (\mathcal{R}^*\boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma}(t))_Q \geq (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{g}), \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma}(t))_Q.$$

Enfin, nous combinons (11.41) et (11.43) pour déduire que l'inégalité variationnelle (11.32) est satisfaite, ce qui termine la première partie de la démonstration du Théorème 11.8.

ii) Supposons que $\boldsymbol{\sigma}$ est une solution du Problème \mathcal{R}_D^V avec la régularité $\boldsymbol{\sigma} \in C(\mathbb{R}_+; Q)$ et considérons la fonction $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \in C(\mathbb{R}_+; Q)$ définie par

$$(11.44) \quad \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) = \mathcal{A}^{-1}\boldsymbol{\sigma}(t) + \mathcal{R}^*\boldsymbol{\sigma}(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

Soit $t \in \mathbb{R}_+$. Nous substituons (11.44) dans (11.32) pour voir que

$$(11.45) \quad (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(t), \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma}(t))_Q \geq (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{g}), \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma}(t))_Q \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \Sigma(t).$$

Considérons maintenant un élément $\mathbf{z} \in Q$ tel que

$$(11.46) \quad (\mathbf{z}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_Q = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Puisque $\boldsymbol{\sigma}(t) \in \Sigma(t)$, en utilisant cette égalité avec la définition (11.31) de l'ensemble $\Sigma(t)$, nous déduisons que $\boldsymbol{\sigma}(t) \pm \mathbf{z} \in \Sigma(t)$. De ce fait, prenons $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\sigma}(t) \pm \mathbf{z}$ dans (11.45) pour déduire que

$$(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(t), \mathbf{z})_Q = (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{g}), \mathbf{z})_Q.$$

En utilisant cette égalité et (11.46), nous trouvons que $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{g}) \in \boldsymbol{\varepsilon}(V)^{\perp\perp}$ où le symbole \perp indique le complément orthogonal dans Q . Par ailleurs, puisque $\boldsymbol{\varepsilon}(V)$ est un sous espace fermé de Q , nous avons que

$$\boldsymbol{\varepsilon}(V)^{\perp\perp} = \boldsymbol{\varepsilon}(V).$$

Par conséquent, nous déduisons qu'il existe un élément $\tilde{\mathbf{u}}(t) \in V$ tel que $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{g}) = \boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{u}}(t))$ et nous notons par $\mathbf{u}(t) = \tilde{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{g}$ pour voir que

$$(11.47) \quad \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)).$$

En combinant maintenant (11.44) et (11.47), nous obtenons que

$$(11.48) \quad \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)) = \mathcal{A}^{-1}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(t) + \mathcal{R}^*\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(t)$$

et, en utilisant le Lemme 11.7, nous déduisons que l'égalité (11.33) est satisfaite. Par ailleurs, l'unicité et la régularité de \mathbf{u} sont des conséquences directes de (11.34) et (11.48).

Par la suite, nous prouvons que \mathbf{u} est une solution du Problème \mathcal{R}^V . Pour ce faire, nous considérons la fonction $\tilde{\boldsymbol{\sigma}} \in C(\mathbb{R}_+; V)$ définie par

$$(11.49) \quad \tilde{\boldsymbol{\sigma}} = A\mathbf{u} + \mathcal{S}\mathbf{u}.$$

Alors, il résulte du Lemme 4.6 que

$$(11.50) \quad \mathbf{u} = A^{-1}\tilde{\boldsymbol{\sigma}} + \mathcal{R}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}.$$

En outre, en utilisant l'égalité (11.48), les définitions (11.28), (11.13) et l'égalité (11.49), nous obtenons que

$$(11.51) \quad (\boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_Q = (\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(t), \mathbf{v})_V \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Soit $\bar{\boldsymbol{\tau}} \in \bar{\Sigma}(t)$ et notons $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\varepsilon}(\bar{\boldsymbol{\tau}})$. Alors, il est facile de voir que $\boldsymbol{\tau} \in \Sigma(t)$. Nous utilisons (11.45) et (11.47) pour voir que

$$(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)), \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma}(t))_Q \geq (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{g}), \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma}(t))_Q.$$

Par conséquent, nous utilisons (11.51) et l'égalité $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\varepsilon}(\bar{\boldsymbol{\tau}})$ pour déduire que

$$(\mathbf{u}(t), \bar{\boldsymbol{\tau}} - \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(t))_V \geq (\mathbf{g}, \bar{\boldsymbol{\tau}} - \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(t))_V.$$

Combinons maintenant cette inégalité et l'égalité (11.50) pour voir que

$$(11.52) \quad (A^{-1}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(t) + \mathcal{R}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(t), \bar{\boldsymbol{\tau}} - \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(t))_V \geq (\mathbf{g}, \bar{\boldsymbol{\tau}} - \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(t))_V.$$

D'autre part, puisque $\boldsymbol{\sigma}$ est une solution du Problème \mathcal{R}_D^V , il résulte que $\boldsymbol{\sigma}(t) \in \Sigma(t)$ et donc, l'égalité (11.51) implique que

$$(11.53) \quad \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(t) \in \bar{\Sigma}(t).$$

Les relations (11.52) et (11.53) montrent que la fonction $\tilde{\boldsymbol{\sigma}} \in C(\mathbb{R}_+; V)$ est une solution de l'inéquation variationnelle (11.39). Donc, en utilisant (11.49) et le Théorème 4.7 ii), nous déduisons que $\mathbf{u}(t)$ satisfait l'inégalité (11.21), pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, ce qui conclut la deuxième partie de la démonstration du Théorème 11.8. \square

Le résultat d'existence et d'unicité de la solution du Problème \mathcal{R}_D^V est donné par le théorème suivant.

Théorème 11.9. *Supposons que les conditions (11.8) (11.9), (11.11) et (11.26) (11.27) sont vérifiées. Alors le Problème \mathcal{R}_D^V possède une solution unique satisfaisant $\sigma \in C(\mathbb{R}_+; Q)$.*

La démonstration du Théorème 11.9 est une conséquence directe du Théorème 4.8 avec $X = Q$.

Il résulte du Théorème 11.8 que si le champ de déplacements \mathbf{u} est solution de la formulation variationnelle primale \mathcal{R}^V et le champ de contraintes σ est solution de la formulation variationnelle duale \mathcal{R}_D^V , alors \mathbf{u} et σ sont reliés par la loi de comportement (11.1). La paire (\mathbf{u}, σ) est appelée *solution faible* du problème de contact sans frottement \mathcal{R} . Nous en concluons que ce problème possède une solution faible unique.

Nous nous intéressons maintenant au comportement de la solution de la formulation variationnelle duale \mathcal{R}_D^V lorsque l'on introduit une perturbation dans la contrainte unilatérale g . Pour tout $\rho > 0$, considérons g_ρ la perturbation de g satisfaisant la convergence

$$g_\rho \rightarrow g \quad \text{lorsque } \rho \rightarrow 0.$$

Considérons également, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la perturbation de $\Sigma(t)$ définie par

$$\Sigma_\rho(t) = \{ \tau \in Q : (\tau, \varepsilon(\mathbf{v}_\rho) - \varepsilon(\mathbf{g}_\rho))_Q \geq (\mathbf{f}(t), \mathbf{v}_\rho - \mathbf{g}_\rho)_V \quad \forall \mathbf{v}_\rho \in U_\rho \},$$

où U_ρ est l'ensemble défini par (11.22). Ensuite, nous considérons le problème variationnel perturbé suivant.

Problème $\mathcal{R}_{D\rho}^V$. *Trouver une fonction $\sigma_\rho : \mathbb{R}_+ \rightarrow Q$ tel que*

$$\begin{aligned} \sigma_\rho(t) \in \Sigma_\rho(t), \quad & (\mathcal{A}^{-1}\sigma_\rho(t), \tau_\rho - \sigma_\rho(t))_Q + (\mathcal{R}^*\sigma_\rho(t), \tau_\rho - \sigma_\rho(t))_Q \\ & \geq (\varepsilon(\mathbf{g}_\rho), \tau_\rho - \sigma_\rho(t))_Q \quad \forall \tau_\rho \in \Sigma_\rho(t), \end{aligned}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

En utilisant le Théorème 4.9 avec $X = Q$, nous déduisons que, pour tout $\rho > 0$, le Problème $\mathcal{R}_{D\rho}^V$ possède une solution unique vérifiant $\sigma_\rho \in C(\mathbb{R}_+; Q)$. En outre, cette solution converge vers la solution de la formulation variationnelle duale \mathcal{R}_D^V , c'est-à-dire

$$\sigma_\rho \rightarrow \sigma \quad \text{dans } C(\mathbb{R}_+; Q) \quad \text{lorsque } \rho \rightarrow 0.$$

Cette convergence montre que la solution du Problème \mathcal{R}_D^V dépend continûment de la contrainte unilatérale g .

Bibliographie

- [1] R. A. Adams, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.
- [2] J. Ahn, K. L. Kuttler and M. Shillor, Dynamic Contact of Two Gao Beams, *Electronical Journal of Differential Equations* **194** (2012), 1–42.
- [3] G. Allaire, *Numerical analysis and optimization*, Oxford University Press, 2007.
- [4] A. Amassad, D. Chenais and C. Fabre, Optimal control of an elastic contact problem involving Tresca friction law, *Nonlinear Analysis* **48** (2002), 1107–1135.
- [5] L.-E. Andersson, A quasistatic frictional problem with normal compliance, *Nonlinear Analysis TMA* **16** (1991), 407–428.
- [6] L.-E. Andersson, A global existence result for a quasistatic contact problem with friction, *Advances in Mathematical Sciences and Applications* **5** (1995), 249–286.
- [7] L.-E. Andersson, Existence results for quasistatic contact problems with Coulomb friction, *Applied Mathematics and Optimization* **42** (2000), 169–202.
- [8] K. T. Andrews, Y. Dumont, M. F. M'Bengue, J. Purcell and M. Shillor, Analysis and simulations of a nonlinear dynamic beam, *Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP)* **63** (2012), 1005–1019.
- [9] C. Baiocchi and A. Capelo, *Variational and Quasivariational Inequalities : Applications to Free-Boundary Problems*, John Wiley, Chichester, 1984.
- [10] H. T. Banks, G. A. Pinter, L. K. Potter, B. C. Munoz and L. C. Yanyo, Estimation and control related issues in smart material structure and fluids, *4th International Conference on Optimization : Techniques and Applications*, Perth, Australia, (1998), 19–34.

- [11] H. T. Banks, S. Hu and Z. R. Kenz, A brief review of elasticity and viscoelasticity for solids, *Advances in Applied Mathematics and Mechanics* **3** (2011), 1–51.
- [12] H. T. Banks, G. A. Pinter, L. K. Potter, J. M. Gaitens and L. C. Yanyo, Modeling of quasistatic and dynamic load responses of filled viscoelastic materials, Chapter 11 in *Mathematical Modeling : Case Studies from Industry*, E. Cumberbatch and A. Fitt, Eds., Cambridge University Press, 2011, 229–252.
- [13] M. Barboteu, N. Djehaf, M. Shillor and M. Sofonea, Modeling and Simulations for Quasistatic Frictional Contact of a Linear 2D Bar, *Journal of Theoretical and Applied Mechanics* **55** (2017), 897–910.
- [14] M. Barboteu, M. Sofonea and D. Tiba, The control variational method for beams in contact with deformable obstacles, *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik (ZAMM)* **92** (2012), 25–40.
- [15] A. Benraouda and M. Sofonea, A convergence result for history-dependent quasivariational inequalities, *Applicable Analysis* **96** (2017), 2635–2651.
- [16] A. Benraouda, M. Couderc and M. Sofonea, Optimal control of a frictionless contact problem with unilateral constraint, soumis.
- [17] A. Benseghir and M. Sofonea, An evolutionary boundary value problem, *Mediterranean Journal of Mathematics* **13** (2016), 4463–4480.
- [18] H. Brézis, *Analyse fonctionnelle*, Masson, Paris, 1983.
- [19] H. Brézis, Equations et inéquations non linéaires dans les espaces vectoriels en dualité, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **18** (1968), 115–175.
- [20] H. Brézis, Problèmes unilatéraux, *J. Math. Pures et Appl.* **51** (1972), 1–168.
- [21] A. Căpăţînă, *Variational Inequalities and Frictional Contact Problems*, Advances in Mechanics and Mathematics, Springer, New York, 2014.
- [22] C. Ciulcu, D. Motreanu and M. Sofonea, Analysis of an elastic contact problem with slip dependent coefficient of friction, *Mathematical Inequalities and Applications* **4** (2001), 465–479.
- [23] M. Cocu, Existence of solutions of Signorini problems with friction, *Int. J. Engng. Sci.* **22** (1984), 567–581.

- [24] M. Cocu, E. Pratt and M. Raous, Existence d'une solution du problème quasistatique de contact unilatéral avec frottement non local, *Comptes Rendus de l'Académie des sciences Paris* **320** (1995), 1413-1417.
- [25] M. Cocu, E. Pratt and M. Raous, Formulation and approximation of quasistatic frictional contact, *Int. J. Engng. Sci.* **34** (1996), 783-798.
- [26] C. Corduneanu, Problèmes globaux dans la théorie des équations intégrales de Volterra, *Ann. Math. Pure Appl.* **67** (1965), 349-363.
- [27] P. Corneschi, T.-V. Hoarau-Mantal and M. Sofonea, A quasistatic contact problem with slip dependent coefficient of friction for elastic materials, *Journal of Applied Analysis* **8** (2002), 59-80.
- [28] N. Cristecu and I. Suliciu, *Viscoplasticity*, Martinus Nijhoff Publishers, Editura Tehnica, Bucharest, 1982.
- [29] A. D. Drozdov, Finite Elasticity and Viscoelasticity - A Course in *the Non-linear Mechanics of Solids*, Singapore, World Scientific, 1996.
- [30] G. Duvaut, Loi de frottement non locale, *J. Méc. Thé. Appl.* Special issue (1982), 73-78.
- [31] G. Duvaut and J.-L. Lions, *Inequalities in Mechanics and Physics*, Berlin, Springer-Verlag, 1976.
- [32] C. Eck, J. Jarušek and M. Krbeč, *Unilateral Contact Problems : Variational Methods and Existence Theorems*, Pure and Applied Mathematics, Chapman/CRC Press, New York, 2005.
- [33] J. R. Fernández-García, W. Han, M. Sofonea and J. M. Viaño, Variational and numerical analysis of a frictionless contact problem for elastic-viscoplastic materials with internal state variable, *Quarterly of Mechanics and Applied Mathematics* **54** (2001), 501-522.
- [34] J. R. Fernández-García, M. Sofonea and J. M. Viaño, A Frictionless Contact Problem for Elastic Viscoplastic Materials with Normal Compliance, *Numerische Mathematik* **90** (2002), 689-719.
- [35] G. Fichera, Problemi elastostatici com vincoli unilaterali : il problema di Signorini com ambigue condizioni al contorno, *Memorie della Accademia Nazionale dei Lincei, Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali* **87** (2) (1964), 91-140.

- [36] R. Glowinski, *Numerical Methods for Nonlinear Variational Problems*, Springer-Verlag, New York, 1984.
- [37] R. Glowinski, J.-L. Lions and R. Trémolières, *Numerical Analysis of Variational Inequalities*, Amsterdam, North-Holland, 1981.
- [38] M. E. Gurtin, *An Introduction to Continuum Mechanics*, New York, Academic Press, 1981.
- [39] W. Han, On the Numerical Approximation of a Frictional Contact Problem with Normal Compliance, *Numerical Functional Analysis and Optimization* **17** (1996), 307–321.
- [40] W. Han and B. D. Reddy, *Plasticity : Mathematical Theory and Numerical Analysis*, Springer Verlag, New York, 1999.
- [41] W. Han and M. Sofonea, *Quasistatic Contact Problems in Viscoelasticity and Viscoplasticity*, Studies in Advanced Mathematics **30**, Providence, RI, American Mathematical Society, Somerville, MA, International Press, 2002.
- [42] J. Haslinger, I. Hlaváček and J. Nečas, Numerical methods for unilateral problems in solid mechanics, *Handbook of Numerical Analysis, Vol. IV*, P.G. Ciarlet and J.-L. Lions (eds.), North-Holland, Amsterdam, 1996, 313–485.
- [43] H. Hertz, Ueber die Berührung fester elastische Körper, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **92** (1882), 156–171.
- [44] I. Hlaváček, J. Haslinger, J. Nečas and J. Lovíšek, *Solution of Variational Inequalities in Mechanics*, New York, Springer-Verlag, 1988.
- [45] I. R. Ionescu and M. Sofonea, *Functional and Numerical Methods in Viscoplasticity*, Oxford University Press, Oxford, 1993.
- [46] J. Jarušek, Dynamic contact problems with given friction for viscoelastic bodies, *Czechoslovak Mathematical Journal* **46** (1996), 475–487.
- [47] J. Jarušek, Remark to dynamic contact problems for bodies with a singular memory, *Comment. Math. Univ. Carolinae* **39** (1998), 545–550.
- [48] J. Jarušek and M. Sofonea, On the solvability of dynamic elastic-viscoplastic contact problems, *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik (ZAMM)* **88** (2008), 3–22.

- [49] P. Kalita, S. Migórski and M. Sofonea, A Class of Subdifferential Inclusions for Elastic Unilateral Contact Problems, *Set Valued and Variational Analysis* **24** (2016), 355–379.
- [50] N. Kikuchi and J. T. Oden, *Contact Problems in Elasticity : A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods*, Philadelphia, SIAM, 1988.
- [51] D. Kinderlehrer and G. Stampacchia, *An Introduction to Variational Inequalities and their Applications*, Classics in Applied Mathematics **31**, Philadelphia, SIAM, 2000.
- [52] A. Klarbring, A. Mikelič and M. Shillor, Frictional contact problems with normal compliance, *International Journal of Engineering Sciences* **26** (1988), 811–832.
- [53] A. Klarbring, A. Mikelič and M. Shillor, On friction problems with normal compliance, *Nonlinear Analysis* **13** (1989), 935–955.
- [54] A. Klarbring, A. Mikelič and M. Shillor, A Global Existence Result for the Quasi- static Frictional Contact Problem with Normal Compliance, *Unilateral Problems in Structural Analysis*, Eds. G. Del Piero and F. Maceri, Birkhauser, Boston, **4** (1991), 85–111.
- [55] K. L. Kuttler, A. Park, M. Shillor and W. Zhang, Unilateral dynamic contact of two beams, *Mathematical and Computer Modelling* **34** (2001), 365–384.
- [56] K. L. Kuttler, J. Purcell and M. Shillor, Analysis and simulations of a contact problem for a nonlinear dynamic beam with a crack, *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics* **65** (2011), 1–25.
- [57] J.-L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Paris, Gauthiers-Villars, 1969.
- [58] J.-L. Lions, *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*, Paris, 1968.
- [59] F. Léné, Sur les matériaux élastiques à énergie de déformation non quadratique, *J. de Mécanique* **13** (1974), 499–534 .
- [60] J. A. C. Martins and J. T. Oden, Existence and uniqueness results for dynamic contact problems with nonlinear normal and friction interface laws, *Nonlinear Analysis : Theory, Methods and Applications* **11** (1987), 407–428.

- [61] J. J. Massera and J. J. Schäffer, *Linear Differential Equations and Function Spaces*, Academic Press, New York-London, 1966.
- [62] A. Matei and S. Micu, Boundary optimal control for nonlinear antiplane problems, *Nonlinear Analysis : Theory, Methods and Applications* **74** (2011), 1641–1652.
- [63] S. Migórski, A. Ochal and M. Sofonea, *Nonlinear Inclusions and Hemivariational Inequalities : Models and Analysis of Contact Problems*, Advances in Mechanics and Mathematics **26**, New York, Springer, 2013.
- [64] D. Motreanu and M. Sofonea, Evolutionary variational inequalities arising in quasistatic frictional contact problems for elastic materials, *Abstract and Applied Analysis* **4** (1999), 255–279.
- [65] D. Motreanu and M. Sofonea, Quasivariational inequalities and applications in frictional contact problems with normal compliance, *Adv. Math. Sci. Appl.* **10** (2000), 103–118.
- [66] J. Nečas and I. Hlaváček, *Mathematical Theory of Elastic and Elastico-Plastic Bodies : an Introduction*, Amsterdam, Oxford, New York, Elsevier Scientific Publishing Company, 1981.
- [67] J. Nečas, J. Jarušek and J. Haslinger, On the solution of the variational inequality to Signorini problem with small friction, *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana* **17** (1980), 796–811.
- [68] J. T. Oden and J. A. C. Martins, Models and computational methods for dynamic friction phenomena, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **52** (1985), 527–634.
- [69] P. D. Panagiotopoulos, *Inequality Problems in Mechanics and Applications*, Birkhäuser, Boston, 1985.
- [70] A. C. Pipkin, *Lectures in Viscoelasticity Theory*, Applied Mathematical Sciences **7**, George Allen & Unwin Ltd. London, Springer Verlag, New York, 1972.
- [71] M. Rochdi, M. Shillor and M. Sofonea, Quasistatic viscoelastic contact with normal compliance and friction, *Journal of Elasticity* **51** (1998), 105–126.
- [72] M. Shillor and M. Sofonea, A quasistatic viscoelastic contact problem with friction, *International Journal of Engineering Science* **38** (2000), 1517–1533.

- [73] M. Shillor, M. Sofonea and J. J. Telega, *Models and Analysis of Quasistatic Contact*, Lecture Notes in Physics **655**, Springer, Berlin, 2004.
- [74] M. Shillor, M. Sofonea and R. Touzani, Quasistatic frictional contact and wear of a beam, *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems* **8** (2001), 201–218.
- [75] A. Signorini, *Sopra alcune questioni di elastostatica*, Atti della Società Italiana per il Progresso delle Scienze, 1933.
- [76] M. Sofonea, *Problèmes Mathématiques en Elasticité et Viscoplasticité, Cours de D.E.A. de Mathématiques Appliquées*, Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand, (1991).
- [77] M. Sofonea, C. Avramescu and A. Matei, A Fixed Point Result with Applications in the Study of Viscoplastic Frictionless Contact Problems, *Communications on Pure and Applied Analysis* **7** (2008), 645–658.
- [78] M. Sofonea and K. Bartosz, A Dynamic Contact Model for viscoelastic plates, *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics* **70** (2017), 1–19.
- [79] M. Sofonea and A. Benraouda, Convergence results for elliptic quasivariational inequalities, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik (ZAMP)* (2017), DOI <https://doi.org/10.1007/s00033-016-0750-z>.
- [80] M. Sofonea and A. Benraouda, Convergence Results for Primal and Dual History-dependent Quasivariational Inequalities, accepted in *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A : Mathematical and Physical Sciences*, (2018).
- [81] M. Sofonea, A. Benraouda and H. Hechaichi, Optimal control of a two-dimensional contact problem, *Applicable Analysis* (2017), 1–18.
- [82] M. Sofonea and A. Benseghir, A nonlinear history-dependent boundary value problem, *Quarterly of Applied Mathematics* **75** (2017), 181–199.
- [83] M. Sofonea, D. Danan and C. Zheng, Primal and Dual Variational Formulation of a Frictional Contact Problem, *Mediterranean Journal of Mathematics* **13** (2016), 857–872.
- [84] M. Sofonea, W. Han and S. Migórski, A penalty Method for History-dependent Variational-Hemivariational Inequalities, *Computers and Mathematics with Applications* (2018), DOI <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2017.12.018>.

- [85] M. Sofonea and A. Matei, History-dependent Quasivariational Inequalities arising in Contact Mechanics, *European Journal of Applied Mathematics* **22** (2011), 471–491.
- [86] M. Sofonea and A. Matei, *Variational Inequalities with Applications. A Study of Antiplane Frictional Contact Problems*, Advances in Mechanics and Mathematics **18**, New York, Springer, 2009.
- [87] M. Sofonea and A. Matei, *Mathematical Models in Contact Mechanics*, London Mathematical Society Lecture Note Series **398**, Cambridge University Press, Cambridge, 2012.
- [88] M. Sofonea and F. Pătrulescu, Penalization of History-dependent Variational Inequalities, *European Journal of Applied Mathematics* **25** (2014), 155–176.
- [89] M. Sofonea and M. Shillor, Modeling and analysis of a frictional contact problem for elastic bars, submitted to *Electronic Journal of Differential Equation*.
- [90] M. Sofonea and Y. Xiao, Fully history-dependent quasivariational inequalities in contact mechanics, *Applicable Analysis* **95** (2016), 2464–2484.
- [91] G. Stampacchia : Formes bilinéaires coercives sur les ensembles convexes, *C. R. Acad. Sci.* **258** (1964), 4413–4416.
- [92] J. J. Telega, Quasi-static Signorini’s contact problem with friction and duality, *International Series of Numerical Mathematics* **101** (1991), 199–214.
- [93] J. J. Telega, Topics on unilateral contact problems of elasticity and inelasticity, *Nonsmooth Mechanics and Applications*, 340–461, Springer-Verlag, Wien, (1988).
- [94] D. Tiba, *Optimal Control of Nonsmooth Distributed Parameter Systems*, Springer, Berlin, 1990.
- [95] A. Touzaline, Optimal control of a frictional contact problem, *Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series* **31** (2015), 991–1000.

Résumé

Le sujet de cette thèse porte sur quelques résultats de convergence pour les inéquations variationnelles avec applications dans l'étude des problèmes aux limites décrivant le contact entre un corps déformable et une fondation. La thèse est composée de deux parties. Dans la première partie, nous nous intéressons à l'analyse des inéquations quasivariationnelles, avec ou sans opérateurs de mémoire, dans un espace de Hilbert. Nous prouvons plusieurs résultats de convergence liés à la perturbation de l'ensemble des contraintes ainsi qu'à une méthode de pénalisation. Aussi, pour une classe d'inéquations quasivariationnelles avec opérateurs de mémoire nous étudions une formulation duale pour laquelle nous présentons des résultats d'existence, d'unicité et d'équivalence. La deuxième partie est consacrée à l'application de ces résultats abstraits dans l'étude de six problèmes de contact pour des matériaux élastiques, viscoélastiques et viscoplastiques, dans le cas statique ou quasistatique. Les lois de contact considérées sont la loi de Signorini, la loi de contact avec compliance normale et contrainte unilatérale et la loi de contact avec contrainte unilatérale et seuil critique. Enfin, nous étudions un nombre de problèmes de contrôle optimal associés aux certains modèles de contact. Pour ces problèmes nous obtenons des résultats d'existence et de convergence.

Mots clés : inéquation quasivariationnelle, opérateur de mémoire, loi de comportement élastique, viscoélastique et viscoplastique, contrainte unilatérale, compliance normale.

Abstract

The topic of this thesis concerns some convergence results for variational inequalities with applications in the study of boundary value problems which describe the contact between a deformable body and a foundation. The thesis is divided into two parts. In the first part, we are interested in the analysis of quasivariational inequalities, with or without history-dependent operators, in Hilbert spaces. We prove some convergence results related to a perturbation of the set of constraints and a penalty method, as well. Moreover, for a class of history-dependent quasivariational inequalities we study a dual formulation for which we present existence, uniqueness and equivalence results. The second part is devoted to applications of this abstract results in the study of six contact problems with elastic, viscoelastic and viscoplastic materials, both in the static or quasistatic case. The contact conditions we consider are the Signorini condition, the normal compliance condition with unilateral constraint, the unilateral constraint condition with yield limit. Finally, we study a number of optimal control problems associated to some contact models. For these problems we provide existence and convergence results.

Keywords : quasivariational inequality, history-dependent operator, elastic, viscoelastic and viscoplastic constitutive law, unilateral constraint, normal compliance.