



HAL
open science

Optimisation de consommation pour un véhicule de type voiture

Ouazna Oukacha

► **To cite this version:**

Ouazna Oukacha. Optimisation de consommation pour un véhicule de type voiture. Mathématiques générales [math.GM]. Université de Toulon, 2017. Français. NNT : 2017TOUL0016 . tel-01834675

HAL Id: tel-01834675

<https://theses.hal.science/tel-01834675v1>

Submitted on 10 Jul 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ÉCOLE DOCTORALE 548 - MER ET SCIENCES
Laboratoire LSIS

THÈSE présentée par :

Ouazna OUKACHA

soutenue le : **17 novembre 2017**

pour obtenir le grade de Docteur en Mathématiques
Spécialité : Contrôle optimal

**Optimisation de consommation pour un
véhicule de type voiture**

THÈSE dirigée par :

M. GAUTHIER Jean-Paul

Professeur émérite, Université de Toulon

JURY :

M. CAILLAU Jean-Baptiste

Professeur, (Rapporteur)
Université Côte d'Azur

M. SIGALOTTI Mario

Chargé de Recherche, (Rapporteur)
INRIA, PARIS

M. HAMMOURI Hassan

Professeur, (Examineur)
Université Claude Bernard, Lyon 1

M. AIDENE Mohamed

Professeur, (Examineur)
Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou

MME. CHITTARO Francesca

Maître de Conférences, (Examineur)
Université de Toulon

M. BOIZOT Nicolas

Maître de Conférences, (co-encadrant)
Université de Toulon

Je dédie ce travail à l'âme de mon cher père.

Remerciements

En premier lieu, je tiens à remercier *M. Jean-Paul GAUTHIER*, mon directeur de thèse, pour la confiance qu'il m'a accordée en acceptant d'encadrer ce travail doctoral, pour ses multiples conseils et pour le temps qu'il a consacré à diriger mes recherches. Je lui suis très reconnaissante pour ses qualités pédagogiques et scientifiques, sa franchise et sa sympathie.

Je tiens aussi à remercier mon co-encadrant, *M. Nicolas BOIZOT*, pour les remarques constructives qu'il m'a fournies, ainsi que pour ses précieux conseils durant toute la période de ma thèse. J'ai été extrêmement sensible à ses qualités humaines d'écoute et de compréhension. J'ai eu grand plaisir à travailler à ses côtés.

Je suis très honorée par la présence de *M. Hassan HAMMOURI* qui a accepté de présider mon jury de thèse.

Je remercie *M. Jean-Baptiste CAILLAU*, pour l'honneur qu'il me fait de participer à mon jury de thèse en qualité de rapporteur de mon travail, pour le temps consacré à la lecture de mon travail, ainsi que pour les suggestions et les remarques judicieuses qu'il m'a indiquées.

M. Mario Sigalotti a lui aussi accepté le rôle de rapporteur de mes travaux. Je lui suis reconnaissante pour le regard d'expert qu'il a porté sur mon manuscrit.

Je remercie *M. Mohamed AIDENE* d'avoir accepté de faire parti du jury de cette thèse. C'est toujours un plaisir de vous voir parmi les membres de mon jury.

Je suis très reconnaissante envers *Mme. Francesca CHITTARO* pour nos échanges au cours de cette thèse, mais aussi pour son soutien, son accueil et ses précieux conseils.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à *M. Eric BUSVELLE*, pour le temps qu'il m'a consacré, pour son soutien et ses conseils toujours très pertinents.

Je tiens à remercier l'ensemble des membres du laboratoire LSIS pour leur accueil chaleureux et plus particulièrement le directeur *Mustapha OULADSINE*, mais aussi

Mme. Élisabeth MURISASCO, sans oublier *Mme. Adoracion DI SANTI*.

Je tiens aussi à remercier tout particulièrement *Mme. Patricia CASANOVA*, l'assistante de l'École doctorale "Mer et Sciences".

J'adresse mes sincères remerciements à tout le personnel du service des relations internationales de l'Université de Toulon, pour leur accueil généreux, leur aide et leurs conseils.

Je souhaite remercier tout particulièrement *Mme. Amandine WISZ*, pour sa bonne humeur, son soutien et son accueil.

Un grand merci à *M. Andrea FURLANETTO*, pour son soutien et son accueil.

Je souhaite remercier *M. Youcef TALEB*, pour tout ce qu'il m'a apporté durant mon cursus universitaire.

Je remercie aussi mes amies *Cécile* et *Xuan*, pour l'aide et le soutien qu'elles m'ont apporté, et sans oublier mon ami *Léonardo*.

Enfin, les mots les plus simples étant les plus forts, j'adresse toute mon affection à ma famille, et en particulier à ma maman qui a fait beaucoup pour que je puisse réaliser ce travail. Merci pour ton soutien et ton encouragement durant toutes ces années. Je tiens également à remercier mes deux sœurs, mon frère, mon beau-frère, et sans oublier mon cousin *Mehdi*.

Optimisation de consommation pour un véhicule de type voiture

Résumé

Mots clefs - optimisation de la consommation énergétique ; arcs singuliers ; régularité ; fonction coût non-différentiable.

Cette thèse présente l'étude d'un problème de contrôle optimal dont le coût est non-différentiable pour certaines valeurs du contrôle ou de l'état, tout en restant Lipschitz. Ce problème nous a été inspiré par la problématique générale de la minimisation de l'énergie dépensée par un véhicule ou robot de type voiture le long d'un trajet dont le profil de route est connu à l'avance. Cette problématique est formulée à l'aide d'un modèle simple de la dynamique longitudinale du véhicule et une fonction coût qui englobe la notion d'efficacité du processus de conversion énergétique. Nous présentons un résultat régularité des contrôles, valable pour la classe des systèmes non-linéaires, affines dans les contrôles, classe à laquelle appartient notre problème. Ce résultat nous permet d'exclure les phénomènes de *chattering* de l'ensemble des solutions. Nous réalisons trois études de cas pour lesquelles les trajectoires optimales sont composées d'arcs *bang*, d'*inactivations*, d'arcs *singuliers* et, dans certains cas, de *retours en arrière*.

Optimisation of energy consumption for a car-like vehicle

Abstract

Keywords - energy consumption minimisation ; singular arcs ; regularity ; non-differentiable cost function.

The present thesis is a study of an optimal control problem having a non-differentiable, but Lipschitz, cost function. It is inspired by the minimization of the energy consumption of a car-like vehicle or robot along a road which profile is known. This problem is stated by means of a simple model of the longitudinal dynamics and a running cost that comprises both an absolute value function and a function that accounts for the efficiency of the energy conversion process. A regularity result that excludes *chattering* phenomena from the set of solutions is proven. It is valid for the class of control affine systems, which includes the considered problem. Three case studies are detailed and analysed. The optimal trajectories are shown to be made of bang, singular arcs, inactivated and backward arcs.

Table des matières

Table des figures	x
Introduction	1
1 Modélisation et description du problème	4
1.1 Modélisation	4
1.1.1 Dynamique du système	5
1.1.2 Fonction coût	10
1.2 Problème de contrôle optimal en temps final fixe	11
1.3 Régularité des contrôles	14
1.4 Trajectoires sans retour en arrière	21
2 Analyse par le Principe du Maximum de Pontryagin	23
2.1 Problème en temps minimal	26
2.2 Types de trajectoires	27
2.3 Étude des arcs singuliers	30
2.4 Nature des Trajectoires et cas d'études	33
3 Résolution du problème dans le cas d'une route plate	35
3.1 Route plate, sans frottement	35
3.2 Route plate, avec frottement	41
3.2.1 Fonction de rendement constante	43
3.2.2 Fonction de rendement non constante	54
4 Un cas de route non plane	60
4.1 Analyse des extrémales sans retour en arrière	62
4.1.1 Trajectoires extrémales avec un contrôle $u(T_f) = 0$	62
4.1.2 Autres trajectoires extrémales sans retour en arrière	69
4.2 Résolution du problème de contrôle optimal	76
4.2.1 Trajectoire en temps petit	76
4.2.2 Méthodologie	77
4.3 Cas particulier : fonction de rendement constante	81

Conclusion	82
Annexes	
A Contrôlabilité locale en temps petit et accessibilité normale	87
B Code Mathematica de l'exemple 1.1	90
Références	92

Table des figures

1.1	Modélisation et notations.	4
1.2	Réprésentation graphique de la construction du profil de la route	9
1.3	Exemples de fonction de rendement.	11
1.4	Stratégie de contrôle de type $u_{\varepsilon, \Delta t}(t)$	12
1.5	Stratégie de contrôle de type $u_{\varepsilon}(t)$	13
1.6	Trajectoire de $\Gamma(t)$	22
2.1	Condition de maximisation dans le cas normal.	29
3.1	Stratégie optimale dans le cas d'un système double intégrateur	40
3.2	Trajectoires optimales et non-optimales dans le cas d'une route plane avec une fonction de rendement constante.	53
3.3	Trajectoire optimale du problème (\mathcal{P}_3) avec une fonction de rendement non constante, $T_f < T_{lim}$	57
3.4	Trajectoire optimale du problème (\mathcal{P}_3) avec une fonction de rendement non constante $T_f > T_{lim}$	58
3.5	Trajectoire optimale du problème (\mathcal{P}_3) avec une fonction de rendement non constante $T_f > T_{lim}$	59
4.1	Dérivée de θ par rapport à x et profil de la route dans les coord. (ξ, h) .	61
4.2	Trajectoire extrême correspondante à la stratégie (4.3)	66
4.3	Trajectoire extrême correspondante à la stratégie (4.6)	67
4.4	Trajectoire extrême correspondante à la stratégie (4.7)	68
4.5	Trajectoire extrême correspondante à la stratégie (4.6)	69
4.6	Trajectoire extrême correspondante à la stratégie (4.9)	71
4.7	Trajectoire extrême correspondant à la stratégie (4.10)	73
4.8	Trajectoire extrême correspondant à la stratégie (4.13)	75
4.9	Trajectoire optimale du problème (\mathcal{P}_4) pour $T_f \approx 17.75$	79
4.10	Trajectoire extrême du problème (\mathcal{P}_4) pour $T_f \approx 17.75$	80

Introduction générale

Ce manuscrit de thèse présente des éléments d'étude du problème général de l'optimisation énergétique d'un véhicule de type voiture ou d'un robot mobile. Nous avons formulé cette problématique dans le cadre du contrôle optimal, en particulier, nous avons choisi de tirer parti des propriétés spécifiques à un coût non-différentiable pour certaines valeurs de l'état ou du contrôle. En effet, comme cela est maintenant bien connu, voir [2, 5, 9, 10, 21, 24, 31], un coût de ce type peut avoir pour conséquence la présence d'inactivations dans la stratégie de contrôle. C'est-à-dire que le contrôle est nul, ou inactif, sur un ou plusieurs intervalles de temps non-triviaux. Comme cela a été mis en avant dans de précédents travaux, par exemple [10, 31], ce type de comportement semble tout à fait pertinent lorsqu'il s'agit de modéliser un problème de minimisation énergétique. En effet, les inactivations jouent le rôle d'un mécanisme de sélection des moments où appliquer un contrôle est le plus efficace.

Afin de formaliser mathématiquement ce problème, nous avons à notre disposition une littérature vaste, principalement dû à la large palette de choix qui s'offre à nous concernant la façon de modéliser d'une part la dynamique du véhicule, d'autre part le coût, et enfin sélectionner une méthode de résolution du problème. Dans ce travail, à l'exemple de ce qui est fait dans [19, 22, 25, 27], nous ne nous attachons qu'à modéliser la dynamique longitudinale du véhicule. Un lecteur intéressé par des informations concernant une modélisation tant transversale que longitudinale de la dynamique pourra consulter [15, 26]. De plus, nous avons décidé de ne pas incorporer de modèle mathématique du système de conversion énergétique au modèle dynamique du déplacement, contrairement à [19, 22, 25, 27], mais plutôt d'inclure cet aspect du problème dans le coût comme cela a été fait dans [8, 14]. Pour ce faire, nous avons recours à une fonction de rendement et au rapport entre puissance et rendement. La notion de puissance que nous utilisons, qui justement nous permet d'introduire la non-différentiabilité du coût, est inspirée de précédents travaux menés sur la notion d'inactivation. En particulier, nous nous appuyons sur [4, 5], ainsi que sur les différents travaux des mêmes auteurs portant sur la minimisation du travail absolu d'un système mécanique actionné. Par exemple, si $x(t)$ est un déplacement et $u(t)$ une force extérieure, alors le travail absolu de u , calculé sur l'intervalle $[0, T]$ est

$$\int_0^T |\dot{x}(\tau)u(\tau)|d\tau$$

L'outil principal utilisé dans cette thèse est le principe du maximum de Pontryagin [23]. Ce principe a été développé par Lev S. Pontryagin et ses collaborateurs au début des années 1960 et se compose de différents théorèmes délivrant une série de conditions nécessaires à l'optimalité d'une trajectoire. Ces conditions nous permettent de calculer explicitement un ensemble de trajectoires, dites extrémales, candidates à l'optimalité, qu'il faut ensuite analyser. Ce résultat fondamental de la théorie du contrôle optimal est appelé principe car il est possible de former plusieurs théorèmes différents selon la nature du problème rencontré. Dans la mesure où notre fonction coût est non-différentiable pour certaines valeurs du contrôle ou de l'état, nous aurons recours au théorème développé par F. Clarke [12]. Dans un second temps, certaines simplifications nous permettront de nous limiter à une version classique du principe du maximum.

Nous verrons que les stratégies optimales du problème qui est abordé dans ce manuscrit sont composées de classiques arcs de type *bang* et d'inactivations, mais aussi d'arcs singuliers (déterminés par l'analyse ou la dérivation successive de la fonction de commutation, voir [3, 6, 13]). Nous examinons aussi d'autres types de trajectoires, possiblement solutions du problème formulé, dites *trajectoires avec retour en arrière*, et dont l'occurrence est fortement liée au profil de route considéré.

Organisation du manuscrit

En plus de la présente introduction, ce manuscrit est composé de quatre chapitres et d'une conclusion.

Le premier chapitre porte sur la modélisation et la description du problème. Une première section concerne la modélisation de la dynamique du véhicule et du critère à minimiser. Dans une seconde section, nous examinons l'existence de trajectoires optimales. Les deux sections suivantes présentent un important résultat sur la régularité des contrôles optimaux, et un lemme qui nous permet de simplifier notre problème pour certains profils de route.

Le deuxième chapitre est dédié à l'analyse du problème par la version du principe du maximum de Clarke [12]. À la suite de quelques définitions préliminaires et de l'énoncé de la version du principe du maximum de Clarke, une première section porte sur l'étude du problème en temps minimal associé. Les études, d'une part, des trajectoires anormales et normales, et d'autre part, des arcs singuliers font l'objet des deux autres sections de ce chapitre.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude du problème du véhicule sur route plane. Il est divisé en deux sections. La première traite du cas sans frottement, tandis que la seconde porte sur le cas avec frottement. Nous voyons alors apparaître des solutions

optimales comprenant un arc singulier.

Enfin, le quatrième chapitre porte sur l'analyse de notre problème pour un profil de route spécifique. Nous verrons apparaître un nouveau comportement singulier ainsi que des trajectoires avec retour en arrière candidates à l'optimalité. Une courte section, en fin de chapitre, présente le cas particulier d'une fonction de rendement triviale dans le contexte de ce profil de route.

Contributions

Cette thèse a donné lieu à une prépublication ainsi qu'à des présentations et discussions des résultats lors de conférences nationales et internationales, comme cela est précisé ci-dessous :

Prépublication

- Ouazna Oukacha, Nicolas Boizot, *Consumption minimisation for an academic vehicle*. Submitted to OPTIMAL CONTROL APPLICATIONS and METHODS. 2016. < hal – 01384651 >

Communications Internationales

- Ouazna Oukacha, N. Boizot, J-P. Gauthier, M. Aidene, *Optimisation de la consommation d'une voiture électrique : un cas simple*, Colloque sur l'Optimisation et les Systèmes d'Information COSI'2014, Béjaia, (Algérie), 8-10 Juin 2014.
- Ouazna Oukacha, N. Boizot, *Minimisation L^1 de la consommation d'une voiture*, Journées SMAI-MODE, Toulouse (France), 23-25 mars 2016.
- Ouazna Oukacha, N. Boizot, *Consumption minimisation for a car-like robot : Case study for a non-flat road profile*. In :6th International Conference on. Systems and Control (ICSC). DOI : 10.1109/ICoSC.2017.7958672, p. 334-341. 2017.

Communications Nationales

- Ouazna Oukacha, N.Boizot, JP.Gauthier, M.Aidene, *Optimisation de consommation énergétique pour un véhicule de type voiture*, 2ème Journées Scientifiques LAROMAD, Tizi-ouzou (Algérie), 28-30 octobre 2013.
- Ouazna Oukacha, N.Boizot, *Optimiser la consommation d'un véhicule le long d'un trajet*, 9 ème Journées Scientifiques, La Recherche à l'Université : 7èmes Rencontres CARTT'15, Toulon (France), 21-22 avril 2015.

Chapitre 1

Modélisation et description du problème

Ce chapitre est structuré de la manière suivante : la section 1.1 porte sur la modélisation du problème. La dynamique du système est décrite en détail dans la section 1.1.1 et la fonction coût dans la section 1.1.2. Dans la section 1.2, nous déterminons si le temps final peut être fixe ou libre. La section 1.3 est consacrée à la description d'un théorème de régularité des contrôles. Finalement dans la section 1.4, nous démontrons un lemme qui nous permettra de simplifier le problème pour certains types de route.

1.1 Modélisation

Le déplacement de la voiture est représenté sur une route, dans un plan position-hauteur (ξ, h) , comme schématisé en Figure 1.1. Le profil de cette route est décrit à l'aide d'une fonction $\mathcal{C}^1 : h = \varphi(\xi)$. La dynamique du système est donnée par la 2nde loi de Newton et le coût par le travail absolu de la force motrice (i.e. la poussée) appliquée à la voiture.

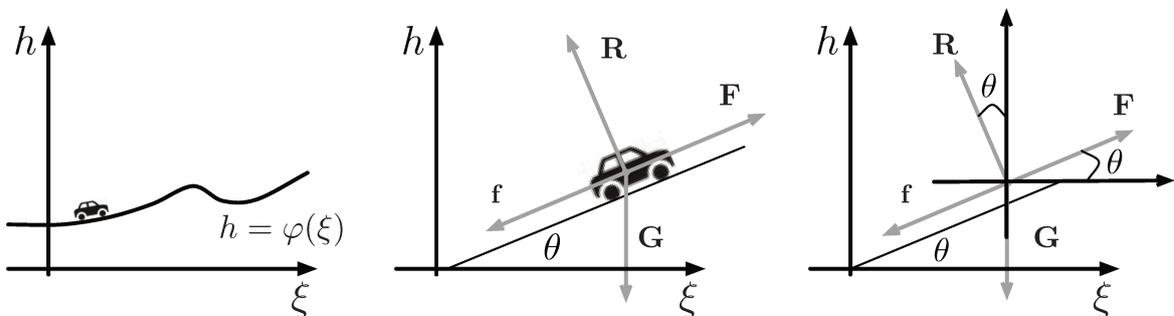


FIGURE 1.1 – Modélisation et notations.

1.1.1 Dynamique du système

Le bilan des forces exercées sur la voiture s'écrit :

$$\sum \mathcal{F} = m\gamma \quad (1.1)$$

où m est la masse de la voiture, $\gamma = (\ddot{\xi}, \ddot{h})$ l'accélération de la voiture et \mathcal{F} désigne l'ensemble des forces appliquées sur la voiture.

Comme schématisé à la Figure 1.1, cette voiture est soumise aux quatre forces suivantes :

1. $G = (G_\xi, G_h)$: la force de gravité ;
2. $R = (R_\xi, R_h)$: la réaction de la route ;
3. $f = (f_\xi, f_h)$: la force de frottement, opposée au mouvement.
4. $F = (F_\xi, F_h)$: la force motrice.

En suivant les notations du schéma de modélisation de la Figure 1.1, les quatre forces s'expriment de la manière suivante :

$$F = \begin{pmatrix} F \cos(\theta) \\ F \sin(\theta) \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} -f \cos(\theta) \\ -f \sin(\theta) \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} -R \sin(\theta) \\ R \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

où

1. nous ne considérons que les frottements visqueux, par conséquent f sera proportionnelle à la vitesse du mouvement, $\|f\| = \alpha \|V\| = \alpha \sqrt{\dot{\xi}^2 + \dot{h}^2}$, avec $V = (\dot{\xi}, \dot{h})$ et $\alpha > 0$ est constant ;
2. $R = mg \cos(\theta)$, où g est la constante gravitationnelle ;
3. F est l'amplitude de la force motrice, il s'agit de la variable de contrôle du problème que l'on note u dans la suite (i.e. $u = F$) ;
4. θ est l'angle entre l'horizontale et la droite portée par le châssis du voiture (i.e. l'orientation de la voiture), autrement dit, θ représente la pente de la route.

De ce qui précède, l'équation (1.1) s'écrit :

$$m \begin{pmatrix} \ddot{\xi} \\ \ddot{h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \cos(\theta) \\ u \sin(\theta) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\alpha \operatorname{sgn}(\dot{\xi}) \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{h}^2} \cos(\theta) \\ -\alpha \operatorname{sgn}(\dot{\xi}) \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{h}^2} \sin(\theta) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -mg \cos(\theta) \sin(\theta) \\ mg \cos^2(\theta) \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

Profil de la route

Le profil de la route est décrit par une fonction \mathcal{C}^1 , $h = \varphi(\xi)$. Cette fonction permet de déterminer uniquement la valeur de l'angle θ à partir de la position ξ :

$$\theta \in] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \text{ et } \theta(\xi) = \arctan(\varphi'(\xi)) \quad (1.3)$$

où φ' représente la dérivée de φ par rapport à ξ . Ainsi,

$$\dot{h} = \varphi'(\xi)\dot{\xi} \quad \text{et} \quad \ddot{h} = \varphi'(\xi)\ddot{\xi} + \varphi''(\xi)\dot{\xi}^2,$$

et alors $\dot{\xi}^2 + \dot{h}^2 = \dot{\xi}^2 (1 + (\varphi'(\xi))^2)$. Par conséquent, le système (1.2) devient :

$$m \begin{pmatrix} \ddot{\xi} \\ \ddot{h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \cos(\theta) \\ u \sin(\theta) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\alpha \dot{\xi} \sqrt{1 + (\varphi'(\xi))^2} \cos(\theta) \\ -\alpha \dot{\xi} \sqrt{1 + (\varphi'(\xi))^2} \sin(\theta) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -mg \cos(\theta) \sin(\theta) \\ mg \cos^2(\theta) \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

Le système (1.4) n'a en fait qu'un seul degré de liberté et sa dynamique se résume à :

$$\begin{cases} m\ddot{\xi} = u \cos(\theta(\xi)) - \alpha \dot{\xi} \sqrt{1 + (\varphi'(\xi))^2} \cos(\theta(\xi)) - mg \cos(\theta(\xi)) \sin(\theta(\xi)) \\ \theta(\xi) = \arctan(\varphi'(\xi)) \end{cases} \quad (1.5)$$

Remarquons que le système (1.5) est suffisamment complexe pour rendre les futures analyses d'autant plus difficiles. Une trajectoire de ce système est définie par l'abscisse ξ et l'ordonnée h qui est égale à la fonction $\varphi(\xi)$, c'est à dire par le point $(\xi, \varphi(\xi))$. Une autre manière de caractériser ce système est d'utiliser la longueur d'arc entre l'origine et la position du véhicule sur la route. Nous allons voir que cette paramétrisation conduit à une écriture simplifiée du système (1.5).

Abscisse curviligne

Soit x l'abscisse curviligne de $(\xi, h(\xi))$, définie par :

$$x = \int_0^{\xi} \sqrt{1 + (\varphi'(\xi))^2} d\xi$$

Nous calculons $\frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial \xi} \times \frac{d\xi}{dt}$ à l'aide de la relation $\frac{\partial x}{\partial \xi} = \sqrt{1 + (\varphi'(\xi))^2}$.

Ainsi $\dot{x} = \dot{\xi} \sqrt{1 + (\varphi'(\xi))^2}$, ce qui implique :

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \ddot{\xi} \sqrt{1 + (\varphi'(\xi))^2} + \varphi''(\xi) \dot{\xi}^2 \left(1 + (\varphi'(\xi))^2\right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \left(\ddot{\xi} \left(1 + (\varphi'(\xi))^2\right) + \varphi'(\xi) \varphi''(\xi) \dot{\xi}^2 \right) \left(1 + (\varphi'(\xi))^2\right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \left(\ddot{\xi} + \varphi'(\xi) \ddot{h} \right) \left(1 + (\varphi'(\xi))^2\right)^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Substituons cette dernière équation dans le système (1.4) :

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \left(\frac{u}{m} \cos(\theta(\xi)) - \frac{\alpha \dot{\xi} \sqrt{1 + (\varphi'(\xi))^2}}{m} \cos(\theta(\xi)) - g \cos(\theta(\xi)) \sin(\theta(\xi)) \right) (\dot{\xi}^2 + \dot{h}^2)^{-\frac{1}{2}} \\ &\quad + \varphi'(\xi) \left(\frac{u}{m} \sin(\theta(\xi)) - g - \frac{\alpha \dot{\xi} \sqrt{1 + (\varphi'(\xi))^2}}{m} \sin(\theta(\xi)) + g \cos(\theta(\xi))^2 \right) (\dot{\xi}^2 + \dot{h}^2)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Après simplification, nous obtenons :

$$\ddot{x} = \frac{1}{m} \left(u - \alpha \dot{\xi} \sqrt{1 + (\varphi'(\xi))^2} - mg \sin(\theta(\xi)) \right) \left(\cos(\theta(\xi)) + \varphi'(\xi) \sin(\theta(\xi)) \right) (\dot{\xi}^2 + \dot{h}^2)^{-\frac{1}{2}} \quad (1.6)$$

Ensuite, nous calculons la quantité suivante :

$$\begin{aligned} \cos(\theta(\xi)) + \varphi'(\xi) \sin(\theta(\xi)) &= \cos(\theta(\xi)) \left(1 + \varphi'(\xi) \frac{\sin(\theta(\xi))}{\cos(\theta(\xi))} \right) \\ &= \cos(\theta(\xi)) \left(1 + \varphi'(\xi) \tan(\theta(\xi)) \right) \\ &\stackrel{cf.(1.3)}{=} \cos(\theta(\xi)) \left(1 + (\varphi'(\xi))^2 \right) \end{aligned} \quad (1.7)$$

D'après l'équation(1.3) nous avons :

$$\cos(\theta(\xi)) = \cos\left(\arctan\left(\varphi'(\xi)\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\varphi'(\xi))^2}} \quad (1.8)$$

et l'équation (1.7) devient :

$$\cos(\theta(\xi)) + \varphi'(\xi) \sin(\theta(\xi)) = \sqrt{1 + (\varphi'(\xi))^2}$$

Remplaçons cette dernière relation dans l'équation (1.6), afin d'obtenir :

$$\ddot{x} = \frac{1}{m} \left(u - \alpha \dot{\xi} \sqrt{1 + (\varphi'(\xi))^2} - mg \sin(\theta(\xi)) \right) \frac{\sqrt{1 + (\varphi'(\xi))^2}}{\sqrt{1 + (\varphi'(\xi))^2}}$$

Chapitre 1 - Modélisation et description du problème

Finalement, la dynamique de notre problème est donnée par :

$$\ddot{x} = \frac{1}{m} \left(u - \alpha \dot{\xi} \sqrt{1 + (\varphi'(\xi))^2} - mg \sin(\theta(\xi)) \right) \quad (1.9)$$

A chaque donnée de x , nous pouvons associer un unique couple $(\xi, \varphi(\xi))$, et par conséquence un unique angle θ . Ainsi, θ peut-être vu comme une fonction de x : $\theta \equiv \theta(x)$.

Nous notons $y = \dot{x}$ et le système (1.5) s'écrit alors :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \frac{1}{m} \left(u - \alpha y - mg \sin(\theta(x)) \right) \end{cases} \quad (1.10)$$

Il nous semble donc intéressant de définir le profil de la route sous la forme d'une fonction $x \rightarrow \theta(x)$. Le profil de la route, dans le plan (ξ, h) peut alors être reconstruit sous la forme d'une courbe paramétrée $x \rightarrow (\xi, \varphi(\xi))$ en suivant la méthodologie ci-dessous.

Définition du profil de route à partir de $\theta(x)$

D'après la définition de l'abscisse curviligne x :

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\varphi'(x))^2}} \quad (1.11)$$

avec $\varphi'(x) = \frac{\partial \varphi(\xi(x))}{\partial \xi(x)} = \tan(\theta(x))$.

Afin de reconstruire la fonction de profil $\varphi(x)$, écrivons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(\xi(x))}{\partial x} &= \frac{\partial \varphi(\xi(x))}{\partial \xi} \times \frac{\partial \xi}{\partial x} \\ &= \varphi'(\xi(x)) \times \frac{1}{\sqrt{1 + (\varphi'(x))^2}} \\ &= \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{1 + (\varphi'(x))^2}} \end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} = \frac{\tan(\theta(x))}{\sqrt{1 + (\tan(\theta(x)))^2}} \quad (1.12)$$

Chapitre 1 - Modélisation et description du problème

Dans la suite, l'analyse du problème de contrôle optimal résultant de cette modélisation sera faite à l'aide du principe du maximum de Pontryagin. D'après ce principe, la dérivée partielle de la pente $\theta(x)$ par rapport à la variable d'état x (i.e. $\frac{\partial \theta(x)}{\partial x}$) intervient dans l'équation adjointe associée à la variable d'état y . Par conséquent, une méthode simple pour obtenir le graphe de $\theta(x)$ est de définir tout d'abord la courbe de la dérivée de l'angle $\theta(x)$ par rapport à x . Nous l'intégrons ensuite afin d'obtenir la fonction $\theta(x)$. Finalement, on construit les fonctions $\xi(x)$ et $\varphi(\xi(x))$ à partir des équations (1.11) et (1.12).

Exemple 1.1 Soit un profil de route défini par un angle $\theta(x)$ dont la dérivée est formée de six types de morceaux comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta(x) \text{ est croissant sur } x \in [x_7, x_6], \\ \theta(x) \text{ est décroissant sur } x \in]x_6, x_5[, \\ \theta(x) \text{ est décroissant sur } x \in]x_5, x_4[, \\ \theta(x) \text{ est croissant sur } x \in [x_4, x_3[, \\ \theta(x) \text{ est croissant sur } x \in [x_3, x_2[, \\ \theta(x) \text{ est constant sur } x \in [x_2, x_1[, \end{array} \right.$$

avec $x_7 < x_6 < x_5 < x_4 < x_3 < x_2 < x_1$.

Ce profil est illustré à la Figure 1.2. Ce graphe a été obtenu à l'aide du code présenté à l'Annexe B.

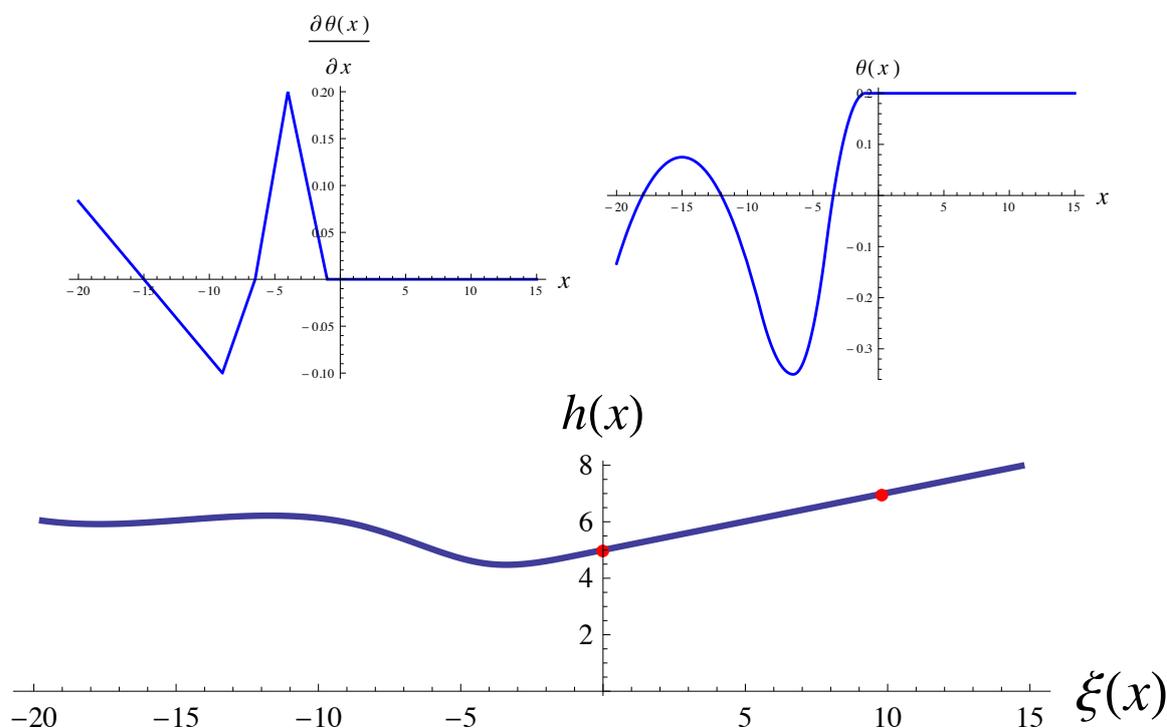


FIGURE 1.2 – Représentation graphique de la construction du profil de la route
 $x_7 = -20, x_6 = -15, x_5 = -9, x_4 = -6.5, x_3 = -4, x_2 = -1, x_1 = 5$.

1.1.2 Fonction coût

Dans ce travail, on cherche à minimiser l'énergie dépensée pour déplacer une voiture d'une position de départ jusqu'à une position finale en un temps T_f .

Soit $D(t)$ le débit d'énergie. La fonction coût associée est :

$$\int_0^{T_f} D(\tau) d\tau \quad (1.13)$$

Dans le but d'exprimer cette quantité comme une fonction de l'état du système (1.10), nous utilisons la notion de travail absolu de la force motrice.

Soit A le travail absolu de la force propulsive, en suivant la définition qui est proposée dans [4] :

$$A = \int_0^{T_f} |\dot{\xi}u| \sqrt{1 + (\varphi'(\xi))^2} d\tau$$

La puissance absolue instantanée associée au travail A est donnée par $\frac{dA}{dt}$, et est reliée au débit à l'aide d'une fonction de rendement, notée $\rho(\cdot)$:

$$\frac{dA}{dt} = D(t)\rho(\cdot)$$

Cette fonction, dont la Figure 1.3 fournit quelques exemples, répond aux hypothèses suivantes :

- son argument est la vitesse du véhicule : $y = \xi \sqrt{1 + (\varphi'(x))^2}$;
- elle prend ses valeurs dans l'intervalle $]0,1]$, pour tout $y \in \mathbb{R}$;
- elle suit l'un des deux comportements suivants pour tout $y \in \mathbb{R}^+$ (respectivement \mathbb{R}^-) :
 1. $\rho(y)$ est identiquement constante ;
 2. $\rho(y)$ admet un maximum y^+ , est croissante sur $]0, y^+[$ et décroissante sur $]y^+, +\infty[$;
 $(\rho(y)$ admet un maximum y^- , est décroissante sur $]y^-, 0[$ et croissante sur $] - \infty, y^- [$) ;
- elle est dérivable autant de fois que nécessaire.

Finalement, la fonction coût est notée $J(u)$ et est donnée par l'expression suivante :

$$J(u) = \int_0^{T_f} \frac{|\dot{\xi}u|}{\rho\left(\dot{\xi}\sqrt{1 + (\varphi'(\xi))^2}\right)} \sqrt{1 + (\varphi'(\xi))^2} d\tau = \int_0^{T_f} \frac{|yu|}{\rho(y)} d\tau \quad (1.14)$$

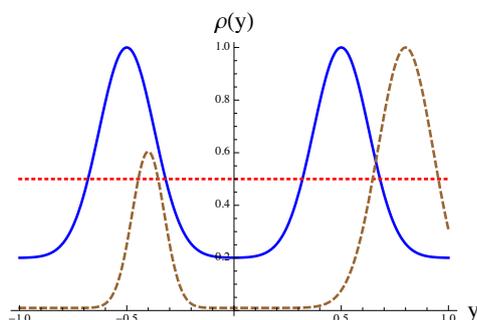


FIGURE 1.3 – Exemples de fonction de rendement.

1.2 Problème de contrôle optimal en temps final fixe

Dans la suite de ce travail, afin d'alléger les calculs, nous supposons que $m = 1$ et $g = 1$. Aussi, nous limitons notre étude aux trajectoires partant de l'origine, i.e. position initiale nulle à vitesse nulle. Nous obtenons ainsi le problème de contrôle optimal suivant :

$$(\mathcal{P}_1) \left\{ \begin{array}{l} \text{Minimiser} \\ \text{Sous les contraintes} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} J(u) = \int_0^{T_f} \frac{|yu|}{\rho(y)} d\tau \\ (\Sigma_1) \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = u - \alpha y - \sin(\theta(x)) \end{cases} \quad \text{pour } t \in [0, T_f] \\ \\ X(0) = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X(T_f) = \begin{pmatrix} x(T_f) \\ y(T_f) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_f \\ 0 \end{pmatrix} \\ \\ |u(t)| \leq 1 \quad \text{pour } t \in [0, T_f] \\ \\ T_f > 0 \text{ est fixé.} \end{array}$$

Existence des trajectoires optimales

D'après le Théorème 2 de [5] inspiré du schéma de preuve de [18], le problème (\mathcal{P}_1) en temps final fixe admet une solution si $T_f \geq T_{min}$, où T_{min} est le temps de parcours minimal de $X(0)$ à $X(T_f)$. En particulier, si $T_f = T_{min}$, alors la solution optimale est donnée par le problème (\mathcal{P}_{min}) présenté dans la section 2.1. Dans le cas contraire, le problème (\mathcal{P}_1) n'admet pas de solution.

Dans le but d'effectuer une étude du problème (\mathcal{P}_1) en temps final libre, nous remarquons qu'un profil de route spécifique, un coût qui pénalise le temps de parcours

ou encore une fonction de rendement spécifique $\rho(y)$ sont nécessaires. Ceci est illustré dans le cas d'une route plate (i.e. $\theta \equiv 0$) par la proposition ci-dessous.

Proposition 1.1 *Considérons le problème (\mathcal{P}_1) avec une route plate (i.e. $\theta \equiv 0$). Si le temps final est libre, alors la valeur minimale de la fonction coût n'est pas atteinte.*

Preuve 1.1

1. **Cas de la route plate sans frottement :** *Considérons une famille de contrôles de la forme – voir Figure 1.4 :*

$$u_{\varepsilon, \Delta t}(t) = \begin{cases} \varepsilon & \text{si } 0 \leq t < \Delta t \\ 0 & \text{si } \Delta t \leq t < T_f - \Delta t \\ -\varepsilon & \text{si } T_f - \Delta t \leq t < T_f \end{cases} \quad (1.15)$$

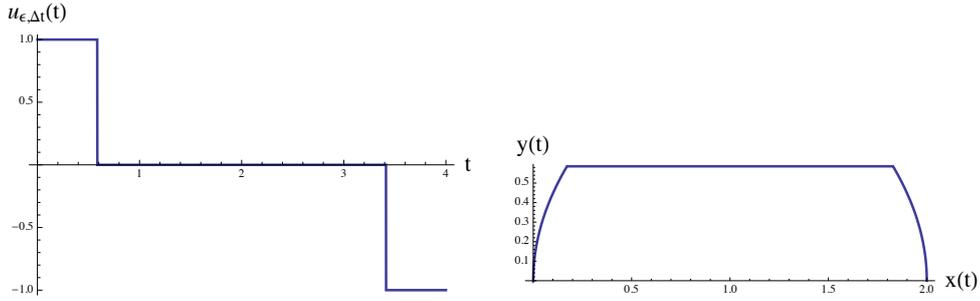


FIGURE 1.4 – Stratégie de contrôle de type $u_{\varepsilon, \Delta t}(t)$, cf. equ.(1.15).

Pour $\varepsilon > 0$ fixé, le système (Σ_1) est réduit à un double intégrateur et sa trajectoire associée est donnée par :

– pour $t < \Delta t$,

$$x(t) = \varepsilon \frac{t^2}{2}$$

– pour $\Delta t \leq t < T_f - \Delta t$,

$$x(t) = \varepsilon \frac{\Delta t^2}{2} + \varepsilon \Delta t (t - \Delta t)$$

– pour $T_f - \Delta t \leq t < T_f$,

$$x(t) = \varepsilon \frac{\Delta t^2}{2} + \varepsilon \Delta t (T_f - 2\Delta t) + \varepsilon \Delta t (t - T_f + \Delta t) - \varepsilon \frac{(t - T_f + \Delta t)^2}{2}$$

– pour $t = T_f$:

$$x(T_f) = \varepsilon \frac{\Delta t^2}{2} + \varepsilon \Delta t (T_f - 2\Delta t) + \varepsilon \frac{\Delta t^2}{2}$$

Ainsi :

$$x(T_f) = \varepsilon \Delta t (T_f - \Delta t)$$

D'après cette dernière équation, l'expression de T_f en fonction des données du problème est

$$T_f = \frac{\Delta t^2 \varepsilon + x_f}{\Delta t \cdot \varepsilon}. \quad (1.16)$$

La valeur du coût correspondante est :

$$J(u) = \int_0^{\Delta t} \frac{\varepsilon y}{\rho(y)} dt + \int_{T_f - \Delta t}^{T_f} \frac{\varepsilon y}{\rho(y)} dt$$

Remarquons que le coût tend vers 0 lorsque $\Delta t \rightarrow 0$, ou $\varepsilon \rightarrow 0$. Dans les deux cas, nous obtenons $T_f \rightarrow \infty$ et le coût minimum n'est pas atteint.

2. **Cas de la route plate avec frottement** : Soit la famille de contrôles suivante – voir Figure 1.5 :

$$u_\varepsilon(t) = \begin{cases} \varepsilon & \text{si } 0 \leq t < \Delta t \\ -\varepsilon & \text{si } \Delta t \leq t < T_f \end{cases} \quad (1.17)$$

Pour $\varepsilon > 0$ fixé, la trajectoire de (Σ_1) associée est donnée par :

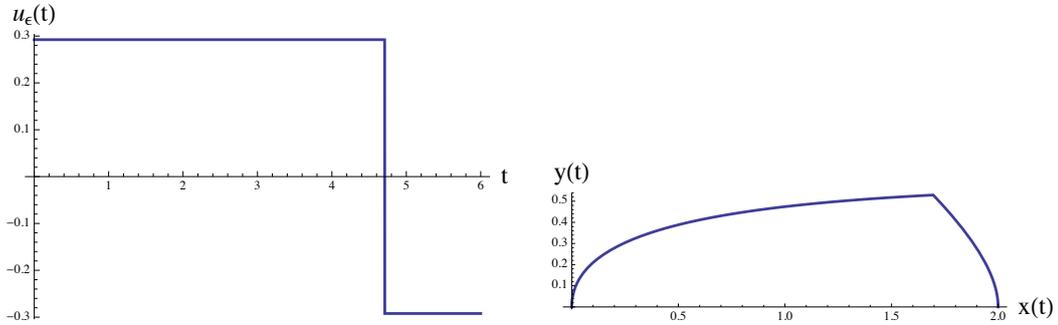


FIGURE 1.5 – Stratégie de contrôle de type $u_\varepsilon(t)$, cf. equ.(1.17).

— pour $t < \Delta t$,

$$\begin{cases} x(\Delta t) &= \frac{\varepsilon}{\alpha} \left[\Delta t + \frac{e^{-\alpha \Delta t}}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} \right] \\ y(\Delta t) &= \frac{\varepsilon}{\alpha} [1 - e^{-\alpha \Delta t}] \end{cases}$$

— pour $\Delta t \leq t < T_f$,

$$\begin{cases} x(T_f) &= \frac{e^{-\alpha T_f}}{\alpha^2} \varepsilon (1 - 2e^{\alpha \Delta t} + e^{\alpha T_f} (1 + 2\alpha \Delta t - \alpha T_f)) \\ y(T_f) &= -\frac{\varepsilon e^{-\alpha T_f}}{\alpha} [1 - 2e^{\alpha \Delta t} + e^{\alpha T_f}] \end{cases}$$

De l'équation $y(T_f) = 0$ on tire l'expression $T_f = \frac{1}{\alpha} \ln(2e^{\alpha \Delta t} - 1)$ que l'on ré-injecte dans la formule de $x(T_f)$. La relation $x(T_f) = x_f$ permet ensuite de calculer :

$$\Delta t = \frac{1}{\alpha} \ln \left(e^{\frac{\alpha^2 x_f}{\varepsilon}} + \sqrt{e^{\frac{\alpha^2 x_f}{\varepsilon}} \left(e^{\frac{\alpha^2 x_f}{\varepsilon}} - 1 \right)} \right).$$

Comme $\Delta t \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \infty$, il en va de même pour T_f . Afin de démontrer que le minimum du coût n'est pas atteint, il nous reste à montrer que $J(u_\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$. Comme $J(u_\varepsilon) = \int_0^{T_f} \frac{|u_\varepsilon y|}{\rho(y)} dt = \varepsilon \int_0^{T_f} \frac{|y|}{\rho(y)} dt$, alors le coût tend vers 0 lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ et le minimum n'est pas atteint. ■

1.3 Régularité des contrôles

Pour tout temps $t \in [0, T]$, où T est positif et fixe, soit un système de la forme :

$$(\Sigma_0) \quad \dot{x} = F(x) + uG(x)$$

L'état initial est noté $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $n > 0$. Les champs de vecteurs $F(\cdot)$ et $G(\cdot)$ sont supposés réels analytiques et $|u(t)| \leq 1$. L'application entrée-sortie associée à (Σ_0) est :

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}^n \times L^1_{[0, T]} &\longrightarrow C^0_{[0, T]} \\ (x_0, u(\cdot)) &\longmapsto x(\cdot) \end{aligned}$$

où $x(\cdot)$ est la trajectoire de (Σ_0) associée à l'état initial x_0 , et au contrôle $u(\cdot)$. Pour x_0 fixé, nous utiliserons la notation $\Phi_{x_0}(u) = \Phi(x_0, u)$. L'ensemble $L^1_{[0, T]}$ est muni de sa topologie naturelle, $C^0_{[0, T]}$ est muni de la topologie de la convergence uniforme, et \mathbb{R}^n de la topologie de la distance Euclidienne.

Soit $\psi(\cdot)$ une fonction continue. Le coût associé à une trajectoire de (Σ_0) donnée par le contrôle $u(\cdot)$ à partir de l'état initial x_0 est noté $J(\cdot)$ et est défini par :

$$\begin{aligned} J : \mathbb{R}^n \times L^1_{[0, T]} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ (x_0, u(\cdot)) &\longmapsto \int_0^T |\psi(x)u| dt \end{aligned}$$

Lemme 1.1 $\Phi(\cdot)$ et $J(\cdot)$ sont uniformément continues.

Preuve 1.2 Tout d'abord remarquons que $\mathbb{R}^n \times L^1_{[0, T]}$ et $C^0_{[0, T]}$ sont des ensembles métrisables, et en tant que tels, la continuité séquentielle implique la continuité uniforme.

1. Soit $(u_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de contrôles de $L^1_{[0, T]}$ convergeant vers une fonction $u(t)$ et $x_0^{(n)}$ une suite de \mathbb{R}^n convergeant séquentiellement vers x_0 . Nous noterons $x_n(t)$

Chapitre 1 - Modélisation et description du problème

la trajectoire de (Σ_0) issue de l'état initial $x_0^{(n)}$ associée au contrôle $u_n(t)$, et $x(t)$ la trajectoire issue de l'état initial x_0 et associée au contrôle $u(t)$. Nous avons ainsi les relations :

$$x_n(t) = x_0^{(n)} + \int_0^t F(x_n(\tau)) + u_n(\tau)G(x_n(\tau))d\tau,$$

$$x(t) = x_0 + \int_0^t F(x(\tau)) + u(\tau)G(x(\tau))d\tau.$$

Maintenant, nous écrivons l'expression de $E_n(t) = x(t) - x_n(t)$:

$$E_n(t) = \underbrace{(x_0 - x_0^{(n)})}_A + \underbrace{\int_0^t (F(x) - F(x_n)) d\tau}_B + \underbrace{\int_0^t (uG(x) - u_nG(x_n)) d\tau}_C,$$

et nous réécrivons la partie C ci-dessus comme suit :

$$C = \underbrace{\int_0^t (u - u_n)G(x)d\tau}_{C_1} + \underbrace{\int_0^t u_n(G(x) - G(x_n))d\tau}_{C_2}$$

alors, on peut majorer la norme de $E_n(t)$ comme suit :

$$\|E_n(t)\| \leq \|A\| + \|B\| + \|C_1\| + \|C_2\| \quad (1.18)$$

En restriction à un sous-ensemble compact, F et G sont Lipschitz de constantes respectives K_1 et K_2 et nous avons les inégalités suivantes :

(a) $\forall \bar{\varepsilon} > 0, \exists \bar{N} \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n > \bar{N}, \|A\| < \bar{\varepsilon}$,

(b) F est Lipschitz :

$$\|B\| \leq \int_0^t \|F(x) - F(x_n)\| d\tau \leq K_1 \int_0^t \|E_n(\tau)\| d\tau,$$

(c) G est borné supérieurement (par une constante notée \tilde{K}) sur $[0, T]$ et

$$\|C_1\| \leq \tilde{K} \int_0^t \|u_n(\tau) - u(\tau)\| d\tau,$$

(d) finalement, $\forall n, |u_n| \leq 1$, et G est Lipschitz, ce qui donne :

$$\|C_2\| \leq K_2 \int_0^t \|E_n(\tau)\| d\tau.$$

Chapitre 1 - Modélisation et description du problème

L'inégalité (1.18) devient donc :

$$\|E_n(t)\| \leq \|x_0 - x_0^{(n)}\| + K_1 \int_0^t \|E_n(\tau)\| d\tau + \tilde{K} \int_0^t \|u_n(\tau) - u(\tau)\| d\tau + K_2 \int_0^t \|E_n(\tau)\| d\tau \quad (1.19)$$

La suite (u_n) converge au sens $L^1_{[0,T]}$: $\forall \tilde{\varepsilon} > 0$, il existe un entier \tilde{N} tel que

$\forall n > \tilde{N} : \tilde{K} \int_0^t \|u_n - u\| d\tau < \tilde{\varepsilon}$. Ainsi pour $n > \max(\bar{N}, \tilde{N})$, (1.19) devient :

$$\|E_n(t)\| \leq (\bar{\varepsilon} + \tilde{\varepsilon}) + (K_1 + K_2) \int_0^t \|E_n(\tau)\| d\tau \leq (\bar{\varepsilon} + \tilde{\varepsilon}) + (K_1 + K_2) \int_0^T \|E_n(\tau)\| d\tau.$$

Pour tout $t \in [0, T]$, en utilisant le lemme de Gronwall :

$$\|E_n(t)\| \leq (\bar{\varepsilon} + \tilde{\varepsilon}) e^{(K_1 + K_2)T}, \quad \forall n > \tilde{N}.$$

Autrement dit, pour un $\varepsilon > 0$ donné, nous pouvons choisir $(\bar{\varepsilon} + \tilde{\varepsilon})$ de sorte à ce que pour tout $n > N = \max(\bar{N}, \tilde{N})$, $\|E_n(t)\| < \varepsilon$ pour tout $t \in [0, T]$.

Ce qui prouve la continuité de $\Phi(., .)$.

2. Dans cette seconde partie, nous utilisons le résultat de continuité précédent et la continuité de $u \mapsto |u|$ pour la topologie L^1 .

Comme précédemment, $u_n(t)$ est une suite de contrôles convergeant vers $u(t)$ dans $L^1_{[0,T]}$, $x_0^{(n)}$ est une suite de \mathbb{R}^n convergeant vers x_0 , et x_n (resp. x) est la trajectoire de (Σ_0) issue de $x_0^{(n)}$ donnée par le contrôle u_n (resp. x_0 et u). Nous écrivons maintenant la différence :

$$\begin{aligned} |J(u_n) - J(u)| &= \left| \int_0^T |\psi(x_n)u_n| dt - \int_0^T |\psi(x)u| dt \right| \\ &= \left| \int_0^T |\psi(x_n)| (|u_n| - |u|) dt - \int_0^T |u| (|\psi(x_n)| - |\psi(x)|) dt \right| \end{aligned}$$

Puisque la suite $x_n(t)$ converge uniformément vers $x(t)$ dans $C^0_{[0,T]}$, il existe donc une constante $M > 0$, et un entier $N(M) \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n > N(M)$, nous avons $|\psi(x_n)| < M$. Etant donné $\varepsilon > 0$, il existe aussi un rang $N(\frac{\varepsilon}{2MT})$, et un rang $N(\frac{\varepsilon}{2T})$ de sorte que :

$$(a) \quad \left| |u_n| - |u| \right| < \frac{\varepsilon}{2MT} \text{ pour tout } n > N\left(\frac{\varepsilon}{2MT}\right),$$

$$(b) \quad \left| |\psi(x_n)| - |\psi(x)| \right| < \frac{\varepsilon}{2T} \text{ pour tout } n > N\left(\frac{\varepsilon}{2T}\right).$$

Par conséquent, il existe un rang $N(\varepsilon)$ tel que pour tout $n > N(\varepsilon)$

$$|J(u_n) - J(u)| < M \int_0^T \frac{\varepsilon}{2MT} dt + \int_0^T \frac{\varepsilon}{2T} dt = \varepsilon$$

ce qui nous donne la continuité séquentielle de $J(., .)$. ■

Chapitre 1 - Modélisation et description du problème

Théorème 1.1 Soit \mathcal{PA} le sous-ensemble de $L^1_{[0,T]}$ composé des contrôles algébriques par morceaux sur un ensemble de mesure totale — i.e. presque partout algébriques sur un nombre fini de sous intervalles de $[0, T]$. On se donne un problème de contrôle optimal de la forme :

$$(\mathcal{P}_0) \left\{ \begin{array}{l} \text{Minimiser} \quad J(u) = \int_0^{T_f} |\psi(x(\tau))u(\tau)| d\tau \\ \text{Sous les contraintes} \quad (\Sigma_0) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = F(x) + uG(x) & \text{pour } t \in [0, T_f] \\ x(0) = x_0, \quad x(T_f) = x_f, \\ |u(t)| \leq 1 & \text{pour } t \in [0, T_f] \\ T_f > 0 \text{ est fixé.} \end{cases} \end{array} \right.$$

sous les hypothèses suivantes :

(\mathcal{H}_0) $\psi(\cdot)$ admet un maximum sur \mathbb{R}^n ;

(\mathcal{H}_1) $J(\cdot)$ atteint son minimum sur \mathcal{PA} , la valeur de ce minimum est notée J_M ;

(\mathcal{H}_2) les trajectoires temps minimal de (Σ_0) sont données par des contrôles de \mathcal{PA} ;

(\mathcal{H}_3) (Σ_0) est localement contrôlable en temps petit au point x_f ;

(\mathcal{H}_4) (x_f, u_f) est un point d'équilibre de (Σ_0) tel que $\psi(x_f)u_f \equiv 0$.

Alors J_M est aussi le minimum de $J(\cdot)$ sur $L^1_{[0, T_f]}$.

Le théorème reste valable si x_f est remplacé par x_0 dans les hypothèses (\mathcal{H}_3) et (\mathcal{H}_4).

Preuve 1.3 Soient un état initial x_0 et un état final x_f . Supposons qu'il existe un contrôle $u^* \in (L^1_{[0, T_f]} \setminus \mathcal{PA})$ joignant x_0 à x_f tel que $J(u^*) < J_M$. Nous allons faire apparaître une contradiction avec l'hypothèse (\mathcal{H}_1).

Affirmation : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un intervalle $I_\varepsilon \subset [0, T]$ de mesure ε tel que la trajectoire x^* de (Σ_0) donnée par le contrôle u^* n'est pas la solution du problème temps minimal sur l'intervalle I_ε .

En effet, si ce n'est pas le cas : il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout intervalle $I_\varepsilon \subset [0, T]$ de mesure ε , la trajectoire x^* de (Σ_0) donnée par le contrôle u^* est la solution du problème temps minimal sur l'intervalle I_ε .

Par conséquent, d'après (\mathcal{H}_2) : il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout intervalle $I_\varepsilon \subset [0, T]$ de mesure ε , le contrôle $u^* \in \mathcal{PA}$.

On en déduit que $u^* \in \mathcal{PA}$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse $u^* \notin \mathcal{PA}$.

Chapitre 1 - Modélisation et description du problème

Nous allons maintenant définir un nouveau contrôle u_ε à partir de u^* comme suit :

1. t_1 et t_2 sont les frontières de I_ε , avec $0 \leq t_1 < t_2 \leq T_f$;
2. pour tout $t \leq t_1$, $u_\varepsilon(t) = u(t)$;
3. ensuite, $u_\varepsilon(t)$ est la solution du problème temps minimal pour (Σ_0) joignant $x^*(t_1)$ à $x^*(t_2)$.
Le temps de parcours ainsi obtenu est noté t_{min} : $t_1 + t_{min} < t_2$.
Le temps ainsi gagné est noté δ : $\delta = t_2 - t_1 - t_{min}$.
4. Puisque (Σ_0) est invariant en temps, pour $t \in]t_1 + t_{min}, T_f - \delta]$, $u_\varepsilon(t) = u^*(t_2 - t_1 - t_{min} + t)$ emmène x de $x(t_1 + t_{min}) = x(t_2)$ à x_f .
5. Enfin, $u_\varepsilon(t) = u_f$ pour $t \in]T_f - \delta, T_f]$.

Ce nouveau contrôle emmène donc x de x_0 à x_f en un temps $T_f - \delta < T_f$, où $\delta = t_2 - t_1 - t_{min}$. La différence de coût entre la trajectoire associée à u_ε (notée x_ε) et celle associée à u^* est :

$$\begin{aligned}
 J(u^*) - J(u_\varepsilon) &= \int_0^{T_f} |\psi(x(t))u(t)| dt - \int_0^{T_f} |\psi(x_\varepsilon(t))u_\varepsilon(t)| dt \\
 &= \underbrace{\int_0^{t_1} |\psi(x(t))u(t)| dt}_A + \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} |\psi(x(t))u(t)| dt}_B + \underbrace{\int_{t_2}^{T_f} |\psi(x(t))u(t)| dt}_C \\
 &\quad - \underbrace{\int_0^{t_1} |\psi(x_\varepsilon(t))u_\varepsilon(t)| dt}_D - \underbrace{\int_{t_1}^{t_1+t_{min}} |\psi(x_\varepsilon(t))u_\varepsilon(t)| dt}_E \\
 &\quad - \underbrace{\int_{t_1+t_{min}}^{T_f-\delta} |\psi(x_\varepsilon(t))u_\varepsilon(t)| dt}_F - \underbrace{\int_{T_f-\delta}^{T_f} |\psi(x_\varepsilon(t))u_\varepsilon(t)| dt}_G
 \end{aligned}$$

1. D'après la définition de u_ε , $A = D$.
2. Les intervalles $[t_1 + t_{min}, T_f - \delta]$ et $[t_2, T_f]$, ont tous les deux la même mesure — i.e. $T_f - \delta - t_1 - t_{min} = T_f - t_2$. De plus :
 - (a) pour $t \in [0, T_f - t_2]$, $u_\varepsilon(t_1 + t_{min} + t) = u^*(t_2 + t)$,
 - (b) $x_\varepsilon(t_1 + t_{min}) = x^*(t_2)$,
 - (c) (Σ_0) est invariant en temps.

Par conséquent $\forall t \in [0, T_f - t_2]$, $x_\varepsilon(t_1 + t_{min} + t) = x^*(t_2 + t)$.

Finalement, comme la fonction de coût $\psi(\cdot)$ est elle aussi invariante en temps, alors $C = F$.

Chapitre 1 - Modélisation et description du problème

3. Puisque $(x_\varepsilon, u_\varepsilon) = (x_f, u_f)$ sur $[T_f - \delta, T_f]$, alors $G = 0$ — cf. hypothèse (\mathcal{H}_4) .

Nous obtenons donc :

$$\begin{aligned} |J(u^*) - J(u_\varepsilon)| &= \left| \int_{t_1}^{t_2} |\psi(x(t))u(t)| dt - \int_{t_1}^{t_1+t_{min}} |\psi(x_\varepsilon(t))u_\varepsilon(t)| dt \right| \\ &\leq \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{|\psi(x(t))|}_{\leq M} \underbrace{|u(t)|}_{\leq 1} dt + \int_{t_1}^{t_1+t_{min}} |\psi(x_\varepsilon(t))| |u_\varepsilon(t)| dt \\ &\leq M(t_2 - t_1) + Mt_{min} \leq 2\varepsilon M \end{aligned}$$

où $M > 0$ est le maximum de la fonction $\psi(\cdot)$ — cf. hypothèse (\mathcal{H}_0) .

A partir de maintenant, $\varepsilon > 0$ est fixé tel que $2\varepsilon M < \frac{J_M - J(u^*)}{3}$, et x_ε est la trajectoire de (Σ_0) issue de x_0 engendrée par u_ε .

Ceci a pour conséquence de fixer le petit temps $\delta > 0$, ainsi que l'ensemble accessible de $(-\Sigma_0)$ à partir de x_f en temps plus petit que δ . Cet ensemble est noté $\mathcal{A}_\delta^-(x_f)$.

D'après [16], voir aussi l'annexe A :

1. la contrôlabilité locale de (Σ_0) en temps court au point x_f , implique la contrôlabilité locale de $(-\Sigma_0)$ en temps court. ;
2. l'hypothèse de réelle analyticité de $F(x)$ et $G(x)$ entraîne que $(-\Sigma_0)$ est auto-accessible en temps court au point x_f ;
3. comme x_f est un point d'équilibre de $(-\Sigma_0)$, alors l'auto-accessibilité est valable en temps fixe.

Il existe donc un contrôle $u_e \in \mathcal{PA}$ joignant tout point de $\mathcal{A}_\delta^-(x_f)$ en un temps exactement égal à δ . Le c ut d'un tel morceau de trajectoire est :

$$\int_{T_f - \delta}^{T_f} |\psi(x_e(t))u_e(t)| dt \leq 2\delta M < 2\varepsilon M < \frac{J_M - J(u^*)}{3} \quad (1.20)$$

Nous allons maintenant construire une $L^1_{[0, T_f]}$ -perturbation de u_ε , notée u_δ , appartenant à \mathcal{PA} . Remarquons que l'ensemble $\mathcal{A}_\delta^-(x_f)$ est indépendant de la construction qui suit. Il s'agit là d'un point crucial de cette preuve.

Premièrement, d'après le théorème de Luzin (i.e. [17]), pour tout $m > 0$ il existe une fonction continue \mathcal{C}_δ telle que $\{t : \mathcal{C}_\delta(t) \neq u_\varepsilon(t)\}$ soit de mesure au plus égale à m . Cette fonction \mathcal{C}_δ est ensuite saturée en ± 1 de sorte à obtenir une fonction continue $\bar{\mathcal{C}}_\delta$ telle que $\|u_\varepsilon - \bar{\mathcal{C}}_\delta\|_{L^1} < 2m$.

Deuxièmement, il existe une suite de polynômes, notée $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, convergeant uniformément vers $\bar{\mathcal{C}}_\delta$. Ainsi, pour tout $\tilde{m} > 0$, il existe un polynôme P_δ de la suite $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

Chapitre 1 - Modélisation et description du problème

qui soit \tilde{m} -proche de $\bar{\mathcal{C}}_\delta$ au sens $L^1_{[0, T_f]}$. Nous prendrons comme contrôle $u_\delta(t) \in \mathcal{PA}$ le polynôme P_δ saturé en ± 1 , et $\|u_\varepsilon - u_\delta\|_{L^1} < 2m + \tilde{m}$.

La continuité des applications $\Phi_{x_0}(\cdot)$, et $J_{x_0}(\cdot)$, cf. Lemme 1.1, nous garantit de pouvoir choisir m et \tilde{m} tels que

1. $|J(u_\varepsilon) - J(u_\delta)| < \frac{J_M - J(u^*)}{3}$,
2. $x_\delta(T_f - \delta)$ soit proche de x_f , à savoir $x_\delta(T_f) \in \mathcal{A}_\delta^-(x_f)$.

Pour finir, le contrôle $\tilde{u} \in \mathcal{PA}$ joignant x_0 à x_f en un temps fixe T_f est défini par :

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} u_\delta(t) & \text{si } 0 \leq t \leq T_f - \delta \\ u_\varepsilon(t) & \text{sinon.} \end{cases}$$

En particulier, nous avons les relations $J(\tilde{u}) = J(u_\delta) + J(u_\varepsilon)$ et

$$|J(u^*) - J(\tilde{u})| < \underbrace{|J(u^*) - J(u_\varepsilon)|}_{< \frac{J_M - J(u^*)}{3}} + \underbrace{|J(u_\varepsilon) - J(u_\delta)|}_{< \frac{J_M - J(u^*)}{3}} + \underbrace{|J(u_\delta)|}_{< \frac{J_M - J(u^*)}{3}} < J(u^*) - J_M$$

ce qui contredit la minimalité de J_M sur \mathcal{PA} — i.e. l'hypothèse (\mathcal{H}_1) — et conclut la preuve.

Nous allons maintenant montrer comment ce résultat est conservé si (x_0, u_0) est le point d'équilibre autour duquel (Σ_0) est localement contrôlable.

- Le contrôle $u_\varepsilon(t)$ est construit de manière similaire, sauf sur $[0, \delta]$ où il est égal à u_0 .
- Le petit temps δ étant fixé à l'étape précédente, il en va de même pour l'ensemble accessible de (Σ_0) à partir de x_0 en temps plus petit que δ : $\mathcal{A}_\delta^+(x_0)$.

Comme précédemment, le résultat portant sur l'auto-accessibilité en temps court nous garantit l'existence d'un contrôle de \mathcal{PA} joignant x_0 à tout point de $\mathcal{A}_\delta^+(x_0)$ en un temps exactement δ . Le coût d'un tel morceau de trajectoire étant inférieur à $\frac{J_M - J(u^*)}{3}$.

- $x_\varepsilon(t)$ désigne la trajectoire issue de x_0 en appliquant le contrôle u_ε . Nous définissons $\tilde{x}_\varepsilon(\tau) = x_\varepsilon(T_f - \tau)$ dont la dynamique est :

$$\frac{d\tilde{x}_\varepsilon}{d\tau} = - \left. \frac{dx_\varepsilon(t)}{dt} \right|_{(T_f - \tau)} = -F(\tilde{x}_\varepsilon(\tau)) - u_\varepsilon(T_f - \tau)G(\tilde{x}_\varepsilon(\tau))$$

Le contrôle $\tilde{u}_\varepsilon(\tau) = u_\varepsilon(T_f - \tau)$, pour $\tau \in [0, T_f - \delta]$, appliqué au système $(-\Sigma_0)$ joint donc $\tilde{x}(0) = x_f$ et $\tilde{x}(T_f - \delta) = x_0$.

Le théorème de Luzin et la propriété de densité des polynômes sont alors appliqués à la fonction $\tilde{u}(\tau)$. Comme le Lemme 1.1 s'applique aussi au système $(-\Sigma_0)$, il existe donc un contrôle $\tilde{u}_\delta \in \mathcal{PA}$ tel que $|J(\tilde{u}_\delta) - J(\tilde{u}_\varepsilon)| < \frac{J_M - J(u^*)}{3}$, tel que $\tilde{x}_\delta(T_f - \delta) \in \mathcal{A}_\delta^+(x_0)$.

- En effectuant un changement de variable similaire à celui du point précédent — i.e. $x_\delta(t) = \tilde{x}_\delta(T_f - t)$ — alors le contrôle $u_\delta(t) = \tilde{u}_\delta(T_f - t)$, pour $t \in [\delta, T_f]$, appliqué au système (Σ_0) , joint un point initial $x_\delta(\delta) \in \mathcal{A}_\delta^+(x_0)$ à $x_\delta(T_f) = \tilde{x}_\delta(0) = x_f$.
- Finalement, un contrôle de \mathcal{PA} joignant x_0 à x_f , avec un coût inférieur à J_M est construit en appliquant le contrôle joignant x_0 à $x_\delta(\delta) \in \mathcal{A}_\delta^+(x_0)$ pour $t \in [0, \delta]$, puis $u_\delta(t)$ pour $t \in [\delta, T_f]$. ■

Remarque 1.1 *Le petit temps auto-accessible de (Σ_0) est un point clé de la preuve. Comme on peut le voir dans le Corollaire 4.15 de [6], ainsi que dans l'annexe A, la propriété “ $F(\cdot)$ et $G(\cdot)$ sont des champs vecteurs réels analytiques” peut être remplacée par “ $F(\cdot)$ et $G(\cdot)$ sont \mathcal{C}^1 et localement bornés”.*

1.4 Trajectoires sans retour en arrière

Le résultat que nous allons présenter dans cette section porte sur un cas particulier. Lorsque la pente est identiquement nulle (i.e $\theta = 0$), le problème (\mathcal{P}_1) est indépendant de la variable x , et cette situation correspond à la route plate. Dans ce cas, le problème (\mathcal{P}_1) sera invariant par translation le long de l'axe $\mathcal{O}x$ du plan (x, y) , ce qui nous permet de simplifier ainsi l'expression du coût en s'appuyant sur le lemme ci-dessous.

Lemme 1.2 *Considérons un profil de route tel que le problème (\mathcal{P}_1) est invariant par translation le long de l'axe $\mathcal{O}x$ dans le diagramme des phases de (Σ_1) . Alors, toute trajectoire présentant un “retour en arrière” — i.e. un intervalle de temps non trivial sur lequel $y < 0$ — n'est pas une trajectoire optimale.*

Preuve 1.4 *Soit $\Gamma(t) = (x_\Gamma(t), y_\Gamma(t))$ une trajectoire du système (Σ_1) .*

D'après le Théorème 1.1, afin d'être candidate à l'optimalité, cette trajectoire est constituée d'un nombre fini d'arcs. Supposons que $y_\Gamma(t)$ admet un seul retour en arrière et peut être décrit de la manière suivante :

$$y_\Gamma(t) = \begin{cases} y_\Gamma(t) < 0, & \text{sur } [0, t_1[\\ y_\Gamma(t) \geq 0, & \text{sur } [t_1, T_f] \end{cases}$$

Notons par Γ^- le morceau de courbe correspondant à $y < 0$, et Γ^+ le reste de la courbe. Nous allons maintenant construire une nouvelle trajectoire, notée $\gamma = (x_\gamma, y_\gamma)$, n'incluant pas de retour en arrière et dont le coût associé sera inférieur ou égal à celui de Γ . Les arguments de la preuve sont illustrés dans la Figure 1.6.

Opérons une translation de Γ^+ le long de l'axe $\mathcal{O}x$ de sorte à placer le point $A = (x_\Gamma(t_1), y_\Gamma(t_1))$ en $(0, 0)$. Cette nouvelle courbe, notée Γ_{trans}^+ est représentée sur la Figure 1.6. Les instants t_2 et t_3 sont définis comme suit :

Chapitre 1 - Modélisation et description du problème

- soit B le point d'intersection entre Γ^+ et Γ_{trans}^+ , alors $B = (x_\Gamma(t_2), y_\Gamma(t_2))$;
- soit C le translaté de B lorsque Γ_{trans}^+ est ramené sur Γ^+ , alors $C = (x_\Gamma(t_3), y_\Gamma(t_3))$.

La trajectoire γ est alors :

$$\gamma(t) = \begin{cases} \Gamma_{trans}^+(t + t_1) & \text{sur } 0 \leq t \leq t_2 - t_1, \\ \Gamma^+(t + t_3) & \text{sur } t_2 - t_1 \leq t \leq (t_2 - t_1) + (T_f - t_3), \\ (x_f, 0) & \text{sur } (t_2 - t_1) + (T_f - t_3) \leq t \leq T_f. \end{cases}$$

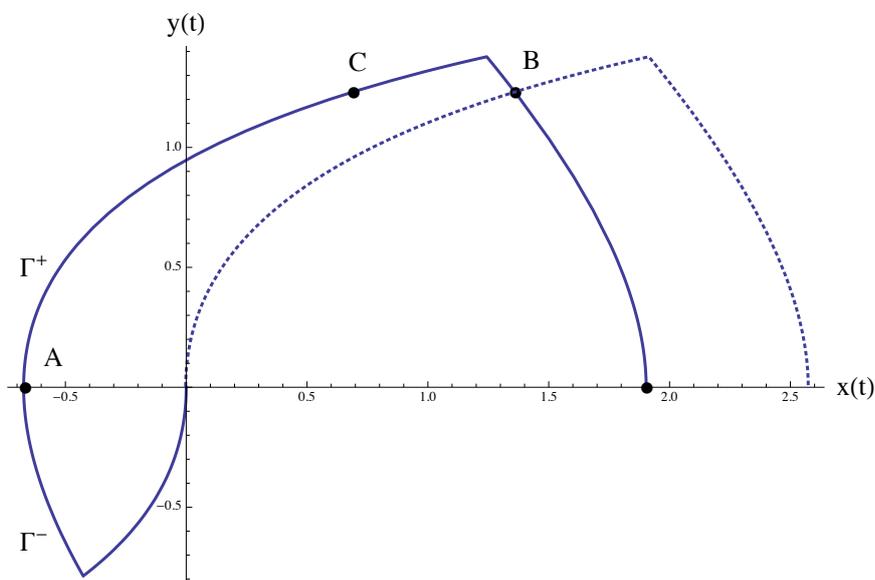


FIGURE 1.6 – Trajectoire de $\Gamma(t)$

Soit u_Γ (resp. u_γ) le contrôle correspondant à la courbe Γ (resp. γ), et $J^\Gamma(u)$ (resp. $J^\gamma(u)$) le coût associé :

$$\begin{aligned} J^\Gamma(u) &= \int_0^{T_f} \frac{|y_\Gamma u_\Gamma|}{\rho(y_\Gamma)} dt = \int_0^{t_1} \frac{|y_\Gamma u_\Gamma|}{\rho(y_\Gamma)} dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{|y_\Gamma u_\Gamma|}{\rho(y_\Gamma)} dt + \int_{t_2}^{t_3} \frac{|y_\Gamma u_\Gamma|}{\rho(y_\Gamma)} dt + \int_{t_3}^{T_f} \frac{|y_\Gamma u_\Gamma|}{\rho(y_\Gamma)} dt \\ &\geq \int_{t_1}^{t_2} \frac{|y_\Gamma u_\Gamma|}{\rho(y_\Gamma)} dt + \int_{t_3}^{T_f} \frac{|y_\Gamma u_\Gamma|}{\rho(y_\Gamma)} dt = \int_0^{t_2-t_1} \frac{|y_\gamma u_\gamma|}{\rho(y_\gamma)} dt + \int_{t_2-t_1}^{(t_2-t_1)+(T_f-t_3)} \frac{|y_\gamma u_\gamma|}{\rho(y_\gamma)} dt = J^\gamma(u) \end{aligned}$$

■

Remarque 1.2 Le raisonnement utilisé dans la preuve reste valable pour un nombre fini de retours en arrière.

Chapitre 2

Analyse du problème par le Principe du Maximum de Pontryagin

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté un problème de contrôle optimal dont le système dynamique est non-linéaire et la fonction de coût est non-lisse. Le principe du maximum de Pontryagin est la version mathématique la plus aboutie pour déterminer les trajectoires optimales d'un système contrôlé décrit par des équations aux dérivées ordinaires. Dans ce chapitre, nous analysons le problème (\mathcal{P}_1) , en toute généralité à l'aide de ce principe. Rappelons tout d'abord le problème considéré :

$$(\mathcal{P}_1) \left\{ \begin{array}{l} \text{Minimiser} \quad J(u) = \int_0^{T_f} \frac{|yu|}{\rho(y)} d\tau \\ \text{Sous les contraintes} \quad (\Sigma_1) \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = u - \alpha y - \sin(\theta(x)) \end{cases} \quad \text{pour } t \in [0, T_f] \\ \\ X(0) = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X(T_f) = \begin{pmatrix} x(T_f) \\ y(T_f) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_f \\ 0 \end{pmatrix} \\ \\ |u(t)| \leq 1 \quad \text{pour } t \in [0, T_f] \\ \\ T_f > 0 \text{ est fixé.} \end{array} \right.$$

En raison de la présence, dans l'expression du coût, de la fonction valeur absolue, qui n'est pas dérivable à l'origine, nous n'allons pas utiliser dans un premier temps la version classique du principe du maximum de Pontryagin [23].

Nous allons plutôt formuler notre problème grâce au *principe du maximum étendu* de Clarke [12].

Définition 2.1 Trajectoire Admissible

Le couple $(X(t), u(t))$ est dit admissible si

1. $X(t)$ est une solution du système (Σ_1) pour le contrôle $u(t)$,
2. les contraintes du problème (\mathcal{P}_1) sont vérifiées,
3. le coût $J(u)$ associé est bien défini.

Définition 2.2 Minimiseur local

(X^*, u^*) est appelé *minimiseur local* s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour toute trajectoire admissible (X, u) telle que $\|X - X^*\| \leq \varepsilon$, alors $J(u) \geq J(u^*)$.

En suivant [12], si l'on note la dépendance dynamique de (\mathcal{P}_1) par $\dot{X} = f(t, X, u)$ et la fonction coût par $J(u) = \int_0^{T_f} \Lambda d\tau$ et l'ensemble des contrôles admissibles par U , alors le problème (\mathcal{P}_1) vérifie l'hypothèse Lipschitz suivante :

$$\begin{aligned} &\text{pour chaque } t \in \mathbb{R} \text{ et } u \in U, \text{ il existe } k(t, u) \text{ telle que} \\ &\|f(X_2, u) - f(X_1, u)\| \leq k(t, u)\|X_2 - X_1\|, \quad \forall X_1, X_2 \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \quad (2.1)$$

Théorème 2.1 [12] Soit (X^*, u^*) un minimum local pour le problème (\mathcal{P}_1) , où l'hypothèse Lipschitz (2.1) est vérifiée. Alors il existe un arc $p(\cdot) : [0, T_f] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ainsi qu'un scalaire $\lambda_0 \leq 0$ satisfaisant :

— la condition de non-trivialité

$$(\lambda_0, p(t)) \neq 0, \quad \forall t \in [0, T_f], \quad (2.2)$$

— l'inclusion adjointe (ou inclusion Hamiltonienne) pour presque tout $t \in [0, T_f]$,

$$-\dot{p}(t) \in \partial_X \mathcal{H}(\lambda_0, p, X, u) \quad (2.3)$$

où $\partial_X \mathcal{H}$ est le sous-différentiel de \mathcal{H} par rapport à X .

— la condition maximisante pour presque tout $t \in [0, T_f]$,

$$\max_{u \in U(t)} \mathcal{H}(\lambda_0, p, X, u) = \mathcal{H}(\lambda_0, p, X^*, u^*)$$

où \mathcal{H} s'appelle Hamiltonien, il est défini par :

$$\mathcal{H} : \mathbb{R}^- \times (\mathbb{R}^n)^* \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$$

avec

$$\mathcal{H}(\lambda_0, p, X, u) = \lambda_0 f^\circ(X, u) + pf(X, u) \quad (2.4)$$

Chapitre 2 - Analyse par le Principe du Maximum de Pontryagin

Si le problème est autonome, alors nous pouvons ajouter à ces conditions la constance du Hamiltonien le long d'un minimum local :

$$\mathcal{H}(\lambda_0, p, x^*, u^*) = H$$

Si le temps final T_f est libre, alors $H = 0$.

Remarque 2.1 Dans la suite de ce travail, le Hamiltonien sera toujours noté \mathcal{H} , et la constante H .

Définition 2.3 Trajectoire extrémale

Une extrémale du problème (\mathcal{P}_1) est un quadruplet $(\lambda_0, p(\cdot), X(\cdot), u(\cdot))$ solution du système Hamiltonien formé par (Σ_1) et l'équation (2.3). Par extension, le contrôle d'une trajectoire extrémale sera appelé contrôle extrémal.

Définition 2.4 Trajectoire extrémale anormale

On appelle extrémale anormale une trajectoire extrémale pour laquelle la constante $\lambda_0 = 0$.

Définition 2.5 Trajectoire extrémale normale

On appelle extrémale normale une trajectoire extrémale pour laquelle la constante $\lambda_0 < 0$.

Définition 2.6 Arc singulier

Un arc singulier est une extrémale le long de laquelle le Hamiltonien \mathcal{H} est indépendant du contrôle $u(t)$, voir [7] par exemple. Dans la cas du problème (\mathcal{P}_1) , il s'agit aussi d'un morceau de trajectoire sur lequel le contrôle n'atteint pas ses bornes. Ceci signifie que le contrôle prend ses valeur à l'intérieur de l'ensemble U .

Remarque 2.2 Généralement, la constante λ_0 est choisie égale à $-\frac{1}{2}$ ou -1 .

Appliquons maintenant le principe du maximum de Pontryagin au problème (\mathcal{P}_1) . Les solutions optimales sont recherchées parmi les trajectoires extrémales.

Soit $\mathcal{P} = (p, q)$ le vecteur adjoint. Le Hamiltonien du problème est :

$$\mathcal{H}(\lambda_0, \mathcal{P}, X, u) = \lambda_0 \frac{|yu|}{\rho(y)} + py + q \left(u - \alpha y - \sin(\theta(x)) \right), \text{ avec } \lambda_0 \in \{0, -1\}$$

Les équations adjointes sont :

$$\dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}(\lambda_0, \mathcal{P}, X, u) \quad (2.5)$$

$$-\dot{q} \in D_y \mathcal{H}(\lambda_0, \mathcal{P}, X, u). \quad (2.6)$$

Le contrôle optimal maximise le Hamiltonien à chaque instant, ainsi :

$$u(t) = \operatorname{argmax}_{|u| \leq 1} \mathcal{H}(\lambda_0, \mathcal{P}, X, u) \quad (2.7)$$

Chapitre 2 - Analyse par le Principe du Maximum de Pontryagin

Comme le système (Σ_1) est autonome, alors le Hamiltonien $\mathcal{H}(\lambda_0, X, \mathcal{P}, u, t)$ est constant le long des trajectoires extrémales :

$$H = \max_{|u| \leq 1} \mathcal{H}(\lambda_0, \mathcal{P}, X, u) \quad (2.8)$$

Puisque le problème (\mathcal{P}_1) est en temps final fixe, il faut tout d'abord étudier le problème en temps minimal, afin de calculer le temps minimum, noté T_{min} .

2.1 Problème en temps minimal

Le problème en temps minimal correspondant au problème (\mathcal{P}_1) est :

$$(\mathcal{P}_{min}) \left\{ \begin{array}{l} \text{Minimiser} \quad J(u) = \int_0^{T_f} d\tau \\ \text{Sous les contraintes} \quad (\Sigma_1) \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = u - \alpha y - \sin(\theta(x)) \end{cases} \quad \text{pour } t \in [0, T_f] \\ \\ X(0) = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X(T_f) = \begin{pmatrix} x(T_f) \\ y(T_f) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_f \\ 0 \end{pmatrix} \\ \\ |u(t)| \leq 1 \quad \text{pour } t \in [0, T_f] \\ \\ T_f > 0 \text{ est libre.} \end{array} \right.$$

Le Hamiltonien du problème (\mathcal{P}_{min}) est :

$$\mathcal{H}(-1, \mathcal{P}, X, u) = py + q \left(u - \alpha y - \sin(\theta(x)) \right) - 1$$

et les équations adjointes sont :

$$\begin{aligned} \dot{p} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}(-1, \mathcal{P}, X, u) = q \cos(\theta(x)) \theta'(x) \\ \dot{q} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y}(-1, \mathcal{P}, X, u) = -p + \alpha q \end{aligned}$$

où $\theta'(x) = \frac{\partial \theta(x)}{\partial x}$.

Le maximum du Hamiltonien du problème (\mathcal{P}_{min}) est :

$$\max_{|u| \leq 1} H = py - q \left(\alpha y + \sin(\theta(x)) \right) - 1 + \max_{|u| \leq 1} \{qu\} \quad (2.9)$$

Le contrôle est donc donné par :

$$u(t) = \text{sign}(q) = \begin{cases} 1 & \text{si } q > 0 \\ u \in [-1, 1] & \text{si } q = 0 \\ -1 & \text{si } q < 0 \end{cases}$$

Le problème (\mathcal{P}_{min}) n'admet pas d'arc singulier. En effet, s'il existe un intervalle I tel que $q(t) = 0$ sur I et $\dot{q}(t) = 0$ sur \dot{I} alors :

$$\begin{cases} \dot{p} = 0 \Rightarrow p = p_c \\ \dot{q} = -p_c \Rightarrow p_c = 0 \end{cases}$$

Cela implique que le vecteur adjoint \mathcal{P} est nul (i.e. $\mathcal{P} = (0, 0)$) le long de l'arc singulier. Si $\lambda_0 = 0$, alors $(\lambda_0, \mathcal{P}) = (0, 0)$ sur I , ce qui n'est pas possible d'après le Théorème 2.1. Si $\lambda_0 = -1$, alors le Hamiltonien est :

$$\mathcal{H}(-1, \mathcal{P}, X, u) = -1 \tag{2.10}$$

D'autre part, le temps final est libre, alors :

$$\mathcal{H}(-1, \mathcal{P}, X, u) = 0$$

ce qui est en contradiction avec l'équation (2.10).

Par conséquent, la solution optimale est donnée par le contrôle bang-bang suivant :

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } q \geq 0 \\ -1 & \text{si } q < 0 \end{cases} \tag{2.11}$$

Puisque le système (Σ_1) dépend de plusieurs paramètres, en particulier du profil de la route, il est difficile de déterminer l'expression de temps minimal de manière générale. Nous indiquerons donc son expression dans chacun des cas d'étude que nous traiterons dans la suite.

2.2 Types de trajectoires

Dans cette section, nous étudions les trajectoires extrémales anormales et normales associées au problème (\mathcal{P}_1) .

Trajectoire extrémale anormale

Le Hamiltonien anormal est donné par :

$$\mathcal{H}(0, \mathcal{P}, X, u) = py + q \left(u - \alpha y - \sin(\theta(x)) \right)$$

Chapitre 2 - Analyse par le Principe du Maximum de Pontryagin

La condition de maximisation (2.8) devient :

$$H = py - q \left(\alpha y + \sin(\theta(x)) \right) + \max_{|u| \leq 1} \{qu\}$$

Nous remarquons que cette dernière formule est similaire à l'équation (2.9), alors le contrôle extrémal correspondant est donné par l'équation (2.11).

Trajectoire extrémale normale

Le Hamiltonien normal est donné par :

$$\mathcal{H}(-1, \mathcal{P}, X, u) = -\frac{|yu|}{\rho(y)} + py + q \left(u - \alpha y - \sin(\theta(x)) \right)$$

La condition de maximisation (2.8) devient :

$$H = py - q \left(\alpha y + \sin(\theta(x)) \right) + \max_{|u| \leq 1} \left\{ qu - \frac{|yu|}{\rho(y)} \right\}$$

Comme schématisé à la Figure 2.1, les trajectoires candidates à l'optimalité sont données par la stratégie de contrôle suivante :

$$u(t) = \operatorname{argmax}_{|u| \leq 1} \mathcal{H}(-1, \mathcal{P}, X, u) \tag{2.12}$$

$$= \operatorname{argmax}_{|u| \leq 1} \left(qu - \frac{|yu|}{\rho(y)} \right) = \begin{cases} 1 & \text{si } q > \frac{|y|}{\rho(y)} \\ u \in [0, 1] & \text{si } q = \frac{|y|}{\rho(y)} \\ 0 & \text{si } -\frac{|y|}{\rho(y)} < q < \frac{|y|}{\rho(y)} \\ u \in [-1, 0] & \text{si } q = -\frac{|y|}{\rho(y)} \\ -1 & \text{si } q < -\frac{|y|}{\rho(y)} \end{cases} \tag{2.13}$$

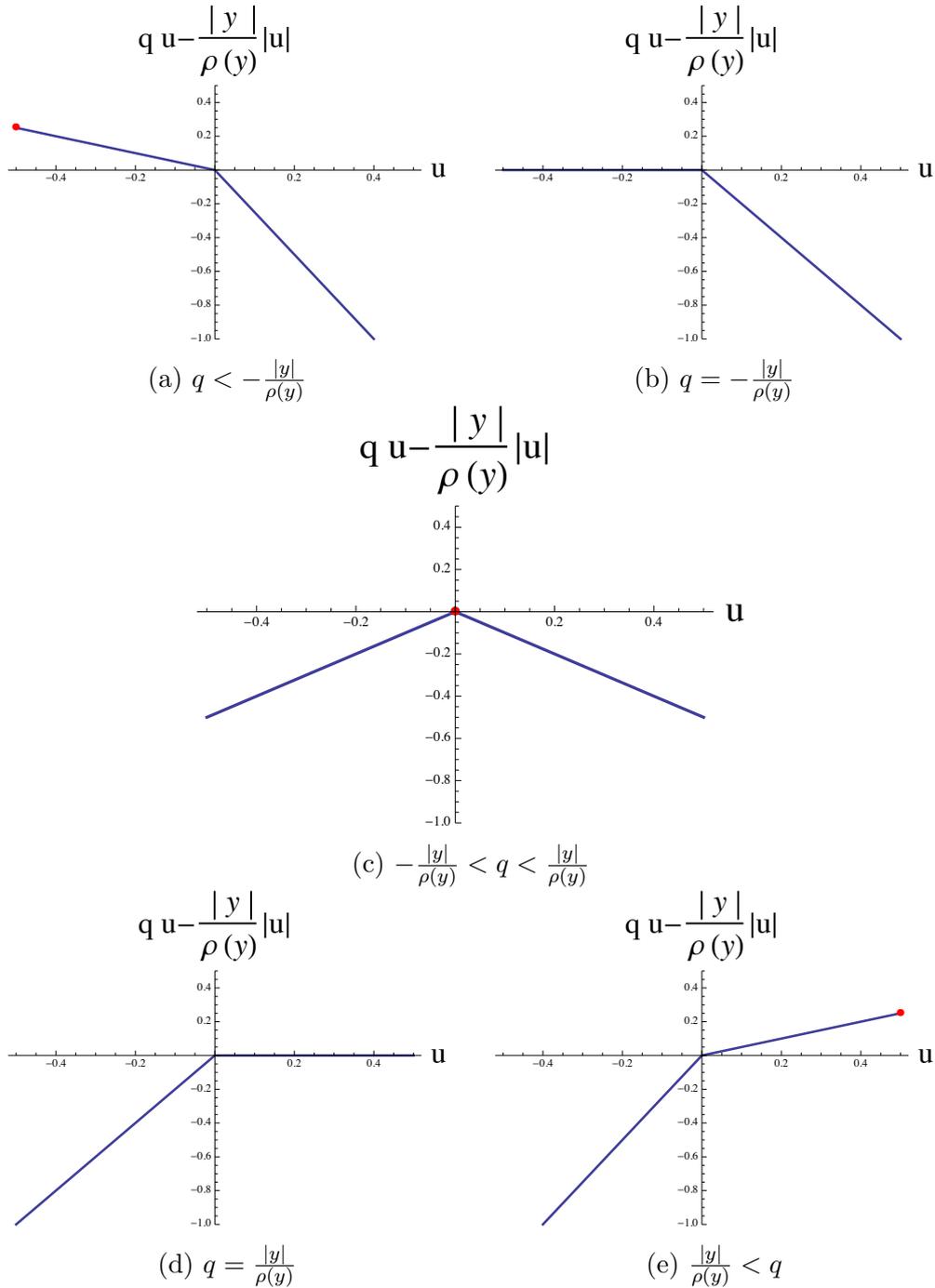


FIGURE 2.1 – Condition de maximisation dans le cas normal.

Dans la section suivante, nous nous intéressons aux arcs singuliers des trajectoires extrémales normales, et proposons une caractérisation de ces trajectoires.

2.3 Étude des arcs singuliers

Dans le cas du problème (\mathcal{P}_1) un arc singulier est caractérisé par un intervalle de temps non-trivial I sur lequel l'une des deux relations suivantes est vraie :

$$q = \frac{|y|}{\rho(y)} \quad \text{ou} \quad q = -\frac{|y|}{\rho(y)}$$

D'après l'ensemble des règles données par l'équation (2.13), le Hamiltonien le long d'un arc singulier est décrit par :

$$H = py - q \left(\sin(\theta(x)) + \alpha y \right) \quad \text{avec} \quad q(t) = \frac{|y(t)|}{\rho(y(t))} \quad \text{ou} \quad q(t) = -\frac{|y(t)|}{\rho(y(t))}$$

Selon les valeurs prises par la variable $y(t)$ nous avons plusieurs cas à étudier :

1. il existe $t \in I$ tel que $y(t) = 0$.
 Dans ce cas, le Hamiltonien est égal à zéro (i.e. $H = 0$) le long de la trajectoire extrémale correspondante.
2. $y(t) > 0$ et $q(t) = \frac{|y|}{\rho(y)}$, $\forall t \in I$.
 Dans ce cas, le Hamiltonien est donné par :

$$H = py - \frac{y}{\rho(y)} \left(\sin(\theta(x)) + \alpha y \right) = y \left(p - \frac{1}{\rho(y)} \left(\sin(\theta(x)) + \alpha y \right) \right)$$

La dérivée du Hamiltonien H par rapport à la variable de temps t est :

$$\begin{aligned} 0 = y \left[\dot{p} - \frac{1}{\rho(y)} \left(\cos(\theta(x))\theta'(x)\dot{x} + \alpha\dot{y} \right) + \frac{\rho'(y)\dot{y}}{\rho(y)} \left(\sin(\theta(x)) + \alpha y \right) \right] \\ + \dot{y} \left[p - \frac{1}{\rho(y)} \left(\sin(\theta(x)) + \alpha y \right) \right] \end{aligned} \quad (2.14)$$

où $\rho'(y) = \frac{\partial \rho(y)}{\partial y}$ et $\theta'(x) = \frac{\partial \theta(x)}{\partial x}$.

D'après l'équation (2.5), la dérivée du vecteur adjoint p par rapport à la variable de temps t est :

$$\dot{p} = q \cos(\theta(x))\theta'(x) \quad \Rightarrow \quad \dot{p} = \frac{y}{\rho(y)} \cos(\theta(x))\theta'(x)$$

Substituons cette dernière formule dans l'équation (2.14) :

$$\begin{aligned} 0 = y \left[\frac{y}{\rho(y)} \cos(\theta(x))\theta'(x) - \frac{1}{\rho(y)} \left(\cos(\theta(x))\theta'(x)\dot{x} + \alpha\dot{y} \right) + \frac{\rho'(y)\dot{y}}{\rho(y)} \left(\sin(\theta(x)) + \alpha y \right) \right] \\ + \dot{y} \left[p - \frac{1}{\rho(y)} \left(\sin(\theta(x)) + \alpha y \right) \right]. \end{aligned}$$

Après simplification, nous obtenons :

$$0 = \dot{y} \left[p - \sin(\theta(x)) \left(\frac{1}{\rho(y)} - \frac{y\rho'(y)}{\rho^2(y)} \right) - \alpha y \left(\frac{2}{\rho(y)} - \frac{y\rho'(y)}{\rho^2(y)} \right) \right] \quad (2.15)$$

Cette dernière expression est de la forme :

$$0 = \dot{y} \left[p - \sin(\theta(x))A - B \right] \quad (2.16)$$

avec $A = \frac{1}{\rho(y)} - \frac{y\rho'(y)}{\rho^2(y)}$ et $B = \alpha y \left(\frac{2}{\rho(y)} - \frac{y\rho'(y)}{\rho^2(y)} \right)$.

Selon l'équation (2.16), nous avons deux cas à étudier :

- (a) si $\dot{y} = 0$, alors y est constant et égal à $y = \frac{1}{\alpha} \left(u - \sin(\theta(x)) \right)$;
- (b) si $\dot{y} \neq 0$, alors $p - \sin(\theta(x))A - B = 0$, la dérivée de cette dernière expression par rapport au temps t est :

$$\dot{p} - \cos(\theta(x))\theta'(x)\dot{x}A - \sin(\theta(x))\dot{A} - \dot{B} = 0 \quad (2.17)$$

avec $\dot{A} = \dot{y}L$ et $\dot{B} = \alpha\dot{y}(2A + Ly)$, où $L = -\frac{2\rho'(y)}{\rho(y)^2} - \frac{\rho''(y)y}{\rho(y)^2} + \frac{2y(\rho'(y))^2}{\rho(y)^3}$ et $\rho''(y) = \frac{\partial \rho'(y)}{\partial y}$.

De ce qui précède, l'équation (2.17) devient :

$$C + \dot{y}D = 0 \quad (2.18)$$

avec $C = \cos(\theta(x))\theta'(x)\frac{\rho'(y)y^2}{\rho(y)^2}$ et $D = -2\alpha A - \left(\sin(\theta(x)) + \alpha y \right)L$.

La suite de cette analyse dépend de la forme de la fonction $\theta(x)$. Deux possibilités se présentent alors :

- i. si $\frac{\partial \theta}{\partial x} \neq 0$, c'est à dire si la fonction θ n'est pas constante par rapport à la variable x , alors on peut étudier les comportements possibles pour les arcs extrémaux singuliers en utilisant l'équation différentielle $\dot{y} = -\frac{C}{D}$ et ainsi :

$$\dot{y} = \frac{\cos(\theta(x))\theta'(x)\frac{\rho'(y)y^2}{\rho(y)^2}}{2\alpha \left(\frac{1}{\rho(y)} - \frac{y\rho'(y)}{\rho^2(y)} \right) + \left(\sin(\theta(x)) + \alpha y \right) \left(-\frac{2\rho'(y)}{\rho(y)^2} - \frac{\rho''(y)y}{\rho(y)^2} + \frac{2y(\rho'(y))^2}{\rho(y)^3} \right)} \quad (2.19)$$

- ii. s'il existe un sous-intervalle $J \in I$ non trivial, sur lequel $\frac{\partial \theta}{\partial x} = 0$, c'est à dire si le système évolue sur un morceau de route sur lequel la fonction

de profil θ est constante par rapport à x , alors $C = 0$. Par conséquent, $\dot{y}D = 0$ et puisque nous supposons que $\dot{y} \neq 0$, alors $D = 0$. La dérivée de D par rapport au temps est de la forme $\dot{y}E$.

En effet, nous avons :

$$D = -2\alpha A - \left(\sin(\theta(x)) + \alpha y \right) L$$

et ainsi

$$\dot{D} = -2\alpha \dot{A} - \left(\cos(\theta(x)) \underbrace{\theta'(x)}_{=0} \dot{x} + \alpha \dot{y} \right) L - \left(\sin(\theta(x)) + \alpha y \right) \dot{L}$$

$$\dot{D} = -2\alpha \dot{y} L - \alpha \dot{y} L - \left(\sin(\theta(x)) + \alpha y \right) \dot{y} K$$

$$= \dot{y} \left(\underbrace{-3\alpha L - \left(\sin(\theta(x)) + \alpha y \right) K}_E \right)$$

$$0 = \dot{y} E$$

$$\text{où } K = -\frac{3\rho''(y)}{\rho(y)^2} + \frac{6(\rho'(y))^2}{\rho(y)^3} - \frac{y\rho'''(y)}{\rho(y)^2} + \frac{6y\rho'(y)\rho''(y)}{\rho(y)^3} - \frac{6y(\rho'(y))^3}{\rho(y)^4} \text{ et } \rho'''(y) = \frac{\partial \rho''(y)}{\partial y}.$$

Puisque $\dot{y} \neq 0$, alors $E = 0$. La dérivée de E par rapport au temps est de la forme $\dot{y}F$, où F est une formule qui dépend de y , $\rho(y)$ et de la dérivée de $\rho(y)$ jusqu'à l'ordre quatre.

En fait, il n'y a pas de nouvelle information à obtenir de cette façon. En effet, chaque dérivée successive se présentera sous la forme $\dot{y}G(x, y)$, avec $G(x, y) = 0$ et où $G(x, y)$ ne dépend que de x , y et des dérivées successives de $\rho(y)$ jusqu'à un certain ordre. Ainsi, en notant $C_1 = p(t)$ et $C_2 = \sin(\theta(t))$, constants pour tout $t \in J \subset I$, un arc singulier de ce type existe uniquement si la fonction de rendement est solution de :

$$H = \left(C_1 - \frac{1}{\rho(y)} (C_2 + \alpha y) \right) \quad \text{pour } t \in J \text{ et } \dot{y} \neq 0$$

Ce qui n'est presque jamais le cas.

3. Autres cas :

Nous procédons de la même manière dans les trois cas restants :

(a) $y > 0$ et $q = -\frac{|y|}{\rho(y)}$;

(b) $y < 0$ et $q = \frac{|y|}{\rho(y)}$;

(c) $y < 0$ et $q = -\frac{|y|}{\rho(y)}$.

L'étude détaillée de tous ces cas nous conduit à la même conclusion qu'auparavant, la formule (2.19) restant inchangée.

Proposition 2.1 *Si la fonction de rendement est constante, i.e. $\rho(y) = \rho_c$, et si le problème (\mathcal{P}_1) admet un arc singulier, alors il est de la forme $\dot{y} = 0$.*

Preuve 2.1 *Si $\rho(y) = \rho_c$, alors l'équation (2.15) devient :*

$$0 = \dot{y} \left[p - \frac{1}{\rho_c} \left(\sin(\theta(x)) + 2\alpha y \right) \right]$$

D'après cette formule, nous avons deux possibilités : $\dot{y} = 0$ ou $\dot{y} \neq 0$.

Si $\dot{y} \neq 0$ alors $p - \frac{1}{\rho_c} \left(\sin(\theta(x)) + 2\alpha y \right) = 0$, et $p = \frac{1}{\rho_c} \left(\sin(\theta(x)) + 2\alpha y \right)$ et ainsi :

$$\dot{p} = \frac{1}{\rho_c} \left(\cos(\theta(x))\theta'(x)\dot{x} + 2\alpha\dot{y} \right)$$

D'autre part, nous avons : $\dot{p} = \frac{y}{\rho_c} \cos(\theta(x))\theta'(x)$. Les deux dernières formules nous permettent d'obtenir : $2\alpha\dot{y} = 0$. Par conséquent : $\dot{y} = 0$. ■

2.4 Nature des Trajectoires et cas d'études

Dans la suite de ce travail, nous verrons que les trajectoires optimales sont composées des morceaux de trajectoires suivants.

1. Arc bang

Un morceau de trajectoire est de type *bang* si la variable de contrôle est égale soit à son maximum, soit à son minimum.

2. Trajectoire avec inactivation

On appelle trajectoire avec *inactivation* une trajectoire telle que la variable de contrôle s'anule sur un intervalle non trivial.

3. Arc singulier

Un morceau de trajectoire est *singulier* si son contrôle est compris dans $] -1, 0[$ ou $] 0, 1[$.

4. Trajectoire avec retour en arrière

On appelle trajectoire avec *retour en arrière* une trajectoire telle que la vitesse (y) devient négative sur un intervalle de temps non trivial.

Le problème (\mathcal{P}_1) peut se décomposer en de nombreux sous-problèmes : forme de la route, avec ou sans frottements, etc. Dans cette thèse, nous limitons notre étude à trois configurations du problème (\mathcal{P}_1) que nous notons comme suit :

1. (\mathcal{P}_2) : route plate, sans frottement ;
2. (\mathcal{P}_3) : route plate, avec frottement ;
3. (\mathcal{P}_4) : un profil de route non-plate, sans frottement.

Les systèmes (Σ_i) , $i = 2, 3$ correspondants aux problèmes (\mathcal{P}_2) et (\mathcal{P}_3) sont linéaires, contrairement au système du problème (\mathcal{P}_4) , qui est non-linéaire.

Chapitre 3

Résolution du problème dans le cas d'une route plate

Dans ce chapitre, nous traitons le cas simple d'une route plane. Il est organisé comme suit : dans la section 3.1, nous abordons le cas sans frottement, tandis que la section 3.2 est dédiée au cas avec frottement.

3.1 Route plate, sans frottement

Dans cette section, nous allons nous intéresser au problème simplifié suivant : la route est plate (i.e. $\theta(x) = 0$) et le coefficient de frottement α est nul. Le problème correspondant est donné par :

$$(\mathcal{P}_2) \left\{ \begin{array}{l} \text{Minimiser} \quad J(u) = \int_0^{T_f} \frac{|yu|}{\rho(y)} d\tau \\ \text{Sous les contraintes} \quad (\Sigma_2) \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = u \end{cases} \text{ pour } t \in [0, T_f] \\ \\ X(0) = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X(T_f) = \begin{pmatrix} x(T_f) \\ y(T_f) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_f \\ 0 \end{pmatrix} \\ \\ |u(t)| \leq 1 \quad \text{pour } t \in [0, T_f] \\ \\ T_f > 0 \text{ est fixé.} \end{array} \right.$$

Remarquons que (Σ_2) est un système double intégrateur. Le problème en temps minimal correspondant est le premier exemple traité dans [23, Ch. 1]. En particulier, les solutions sont de type bang-bang avec au plus une commutation. La stratégie de contrôle est :

$$u_{min}(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } 0 \leq t < \Delta t, \\ -1 & \text{pour } \Delta t \leq T_{min} \end{cases}$$

Chapitre 3 - Résolution du problème dans le cas d'une route plate

et la formule du temps minimal est décrite par :

$$T_{min} = 2\sqrt{x_f} \quad (3.1)$$

Dès que $T_f > T_{min}$, il n'y a pas d'extrémale anormale, nous nous concentrons donc sur les extrémales normales.

D'après le Lemme 1.2, la trajectoire optimale est à chercher dans la classe des courbes telles que $y(t) \geq 0$. Le Hamiltonien normal associé à (\mathcal{P}_2) est donc donné par :

$$\mathcal{H}(-1, \mathcal{P}, X, u) = -\frac{y|u|}{\rho(y)} + py + qu$$

et les équations adjointes sont :

$$\begin{aligned} \dot{p} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}(-1, \mathcal{P}, X, u) = 0 \\ \dot{q} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y}(-1, \mathcal{P}, X, u) = -p + |u| \left(\frac{1}{\rho(y)} - \frac{y\rho'(y)}{\rho(y)^2} \right) \end{aligned}$$

Le Hamiltonien est constant le long d'une trajectoire extrémale :

$$\mathcal{H}|_{t=0} = \mathcal{H}|_{t=T_f} = H \quad \implies \quad H = u(0)q(0) = u(T_f)q(T_f) \quad (3.2)$$

La condition de maximisation donne la relation :

$$\max_{|u| \leq 1} \left\{ \mathcal{H}(-1, \mathcal{P}, X, u) \right\} = py + \underbrace{\max_{|u| \leq 1} \left\{ qu - \frac{y|u|}{\rho(y)} \right\}}_{(I)}. \quad (3.3)$$

Pour $y(t) \neq 0$, la partie (I) s'écrit : $\frac{y(t)}{\rho(y(t))} \max_{|u| \leq 1} \left\{ \frac{q(t)\rho(y(t))}{y(t)} u(t) - |u(t)| \right\}$.

De plus, il existe¹ t_1 et t_2 dans $[0, T_f]$ tels que $y(t_1) = y(t_2) = 0$ et $y(t) > 0$ pour tout $t \in]t_1, t_2[$. La quantité $\kappa(t) = \frac{q(t)\rho(y(t))}{y(t)}$ est bien définie sur $]t_1, t_2[$ et l'ensemble des règles (2.13) devient :

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } \kappa(t) > 1 \\ u^+ & \text{si } \kappa(t) = 1 \\ 0 & \text{si } -1 < \kappa(t) < 1 \\ u^- & \text{si } \kappa(t) = -1 \\ -1 & \text{si } \kappa(t) < -1 \end{cases} \quad (3.4)$$

où $u^+ \in [0, 1]$ et $u^- \in [-1, 0]$.

1. Dans le cas contraire $X(T_f)$ n'est jamais atteint.

Chapitre 3 - Résolution du problème dans le cas d'une route plate

Puisque le problème (\mathcal{P}_2) n'admet pas de retour en arrière, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $u > 0$ sur un interval de la forme $]t_1, t_1 + \varepsilon[$, c'est à dire $\kappa(t) \geq 1$. Afin de rejoindre le point $y(t_2) = 0$ par le système (Σ_2) , la variable de contrôle doit devenir négative à un moment donné, ou de manière équivalente, $\kappa(t)$ doit être inférieure ou égal à -1 . Il existe donc un temps $t^* \in]t_1, t_2[$ tel que $\kappa(t^*) = 0$ et $\dot{\kappa}(t^*) < 0$.

Etude du comportement de $\kappa(t)$ sur $]t_1, t_2[$:

$$\begin{aligned}
 \dot{\kappa}(t) &= \widehat{\left(\frac{q\rho(y)}{y} \right)} \\
 &= \frac{q\dot{y}\rho'(y)}{y^2} + \frac{\dot{q}\rho(y)y}{y^2} - \frac{q\rho(y)\dot{y}}{y^2} \\
 &= \frac{q\dot{y}\rho'(y)}{y} + \rho(y)\frac{1}{y^2} \underbrace{\left(\dot{q}y - q\dot{y} \right)}_{-H - \frac{|u|\rho'(y)y^2}{\rho(y)^2}} \\
 &= -\rho(y)\frac{H}{y^2} + \rho'(y) \left(\frac{q\dot{y}}{y} - \frac{|u|}{\rho(y)} \right) \\
 &= -\frac{\rho(y)}{y^2}H + \frac{\rho'(y)}{\rho(y)} \left(\kappa u - |u| \right) \tag{3.5}
 \end{aligned}$$

Suivant l'équation (3.4), quand $\kappa = 0$ alors $u = 0$. Par conséquent, l'équation (3.5) devient :

$$\dot{\kappa}(t^*) = -\frac{\rho(y)}{y^2}H$$

La constante H doit alors être strictement positive. D'après la relation (3.2) on déduit : $u(0)q(0) \neq 0$ et $u(T_f)q(T_f) \neq 0$.

Affirmation : $q(0) > 0$ et $u(0) = 1$.

En effet, si $q(0) < 0$ alors $q(0) < -\frac{y}{\rho(y)} = 0$ et la loi de commande nous indique $u = -1$. La trajectoire correspondante présentera donc un retour en arrière et ce qui est en contradiction avec Lemme (1.2).

Affirmation : $q(T_f) < 0$ et $u(T_f) = -1$.

Supposons $q(T_f) > 0$, comme $y(T_f) = 0$, cela implique $q(T_f) > \frac{y(T_f)}{\rho(y(T_f))}$, donc $u(T_f) = 1$. Par continuité, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $q(T_f) > y(T_f)$ sur $]T_f - \varepsilon, T_f[$. Alors $u(t) = +1$ sur $]T_f - \varepsilon, T_f[$ avec $y(T_f) = 0$, ce qui implique $y(t) < 0$ sur $]T_f - \varepsilon, T_f[$. Une telle trajectoire n'est pas optimale, toujours d'après le Lemme 1.2.

De ces deux affirmations, on déduit que $q(0) = -q(T_f)$.

Proposition 3.1 *Le problème (\mathcal{P}_2) n'admet pas d'arc singulier.*

Preuve 3.1 *D'après les règles (3.4), le problème (\mathcal{P}_2) admet un arc singulier si $\kappa(t) = 1$ ou $\kappa(t) = -1$, et $\dot{\kappa}(t) = 0$ sur un intervalle I non trivial.*

Chapitre 3 - Résolution du problème dans le cas d'une route plate

Si $\kappa(t) = 1$ (respectivement $\kappa(t) = -1$), et selon (3.4), le contrôle est $u \geq 0$ (respectivement $u \leq 0$), alors l'équation (3.5) devient :

$$\dot{\kappa}(t) = -\frac{\rho(y)}{y^2}H + \frac{\rho'(y)}{\rho(y)}(u - u) = -\frac{\rho(y)}{y^2}H < 0 \quad \text{avec } \kappa(t) = 1$$

et aussi

$$\dot{\kappa}(t) = -\frac{\rho(y)}{y^2}H + \frac{\rho'(y)}{\rho(y)}(-u - (-u)) = -\frac{\rho(y)}{y^2}H < 0 \quad \text{avec } \kappa(t) = -1$$

Remarquons que dans les deux cas $\dot{\kappa}(t) \neq 0$. Par conséquent, une trajectoire extrémale ne contient pas d'arc singulier. ■

D'après la preuve de cette proposition, un contrôle qui commute à la valeur $u = 0$ ne peut pas retourner à 1. De même, lorsqu'un contrôle commute à la valeur $u = -1$, il ne peut pas retourner à 0. Par conséquent, une trajectoire extrémale présente au maximum 2 commutations. En fait, pour un $T_f > T_{min}$, il n'y a qu'une seule trajectoire extrémale possible, celle générée par la séquence de contrôle :

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } t \in [0, \Delta t[\\ 0 & \text{pour } t \in [\Delta t, T_f - \Delta t[\\ -1 & \text{pour } t \in [T_f - \Delta t, T_f] \end{cases} \quad (3.6)$$

Remarquons que ce contrôle $u(t)$ correspond au contrôle $u_{\varepsilon, \Delta t}(t)$ (avec $\varepsilon = 1$) qui à été donné par l'équation (1.15). Par conséquent, la condition terminale est : $x_f = \Delta t T_f - \Delta t^2$. Ce qui nous permet de calculer Δt :

$$\Delta t = \frac{1}{2} \left(T_f - \sqrt{T_f^2 - 4x_f} \right) \quad (3.7)$$

Cette relation est bien définie, puisque $T_f > T_{min}$ implique $(T_f^2 - 4x_f) > 0$ — cf. équation (3.9).

Calcul de p_0 et q_0 :

Les conditions initiales du vecteur adjoint p_0 et q_0 de la stratégie de contrôle (3.6) sont calculées de la manière suivante :

Sur $[\Delta t, T_f - \Delta t]$, $u = 0$, ce qui implique :

$$\begin{cases} \dot{p} = 0 \\ \dot{q} = -p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = p_0 \\ q = -p_0 t + q_1 \end{cases}$$

où $q_1 = q(\Delta t)$ et ainsi $q_1 = \frac{y_1}{\rho(y_1)}$, car $\kappa(\Delta t) = 1$ (Δt est le premier temps de commutation), avec $y_1 = y(\Delta t)$.

Chapitre 3 - Résolution du problème dans le cas d'une route plate

Le deuxième temps de commutation $T_f - \Delta t$, nous permet d'avoir $q_2 = -\frac{y_2}{\rho(y_2)}$, où $q_2 = q(T_f - \Delta t)$ et $y_2 = y(T_f - \Delta t)$. Le long de cet arc :

$$q_2 = -p_0 (T_f - \Delta t) + q_1$$

Par conséquent :

$$p_0 = \frac{q_2 - q_1}{T_f - \Delta t}$$

D'autre part, le Hamiltonien le long de l'intervalle $[\Delta t, T_f - \Delta t]$, $u = 0$ est : $H = p_0 y_1$. D'après l'équation (3.2), on obtient :

$$q_0 = p_0 y_1$$

La stratégie optimale est illustrée par la Figure 3.1. Le contrôle optimal est présenté dans la Figure 3.1a et les trajectoires, par les Figures 3.1b et 3.1c. Le tracé dans l'espace des phases est montré à la Figure 3.1d. Les Figures 3.1e et 3.1g montrent les fonctions de commutation pour une fonction de rendement constante et non constante respectivement. Finalement, la Figure 3.1f représente la fonction de rendement non constante utilisée pour les calculs de la Figure 3.1g : la partie en pointillé indique la forme de la fonction de rendement, tandis que la partie en rouge correspond aux valeurs visitées par le contrôle optimal.

La fonction de rendement ne joue aucun rôle spécifique dans ce problème. en particulier, elle n'apparaît pas dans l'expression des temps de commutation — cf. équation (3.7). En fait, la solution de ce problème est exactement la même que celle du problème qui consiste à minimiser $\int_0^{T_f} |u(t)| dt$ pour un système à double intégrateur (voir [24]).

Chapitre 3 - Résolution du problème dans le cas d'une route plate

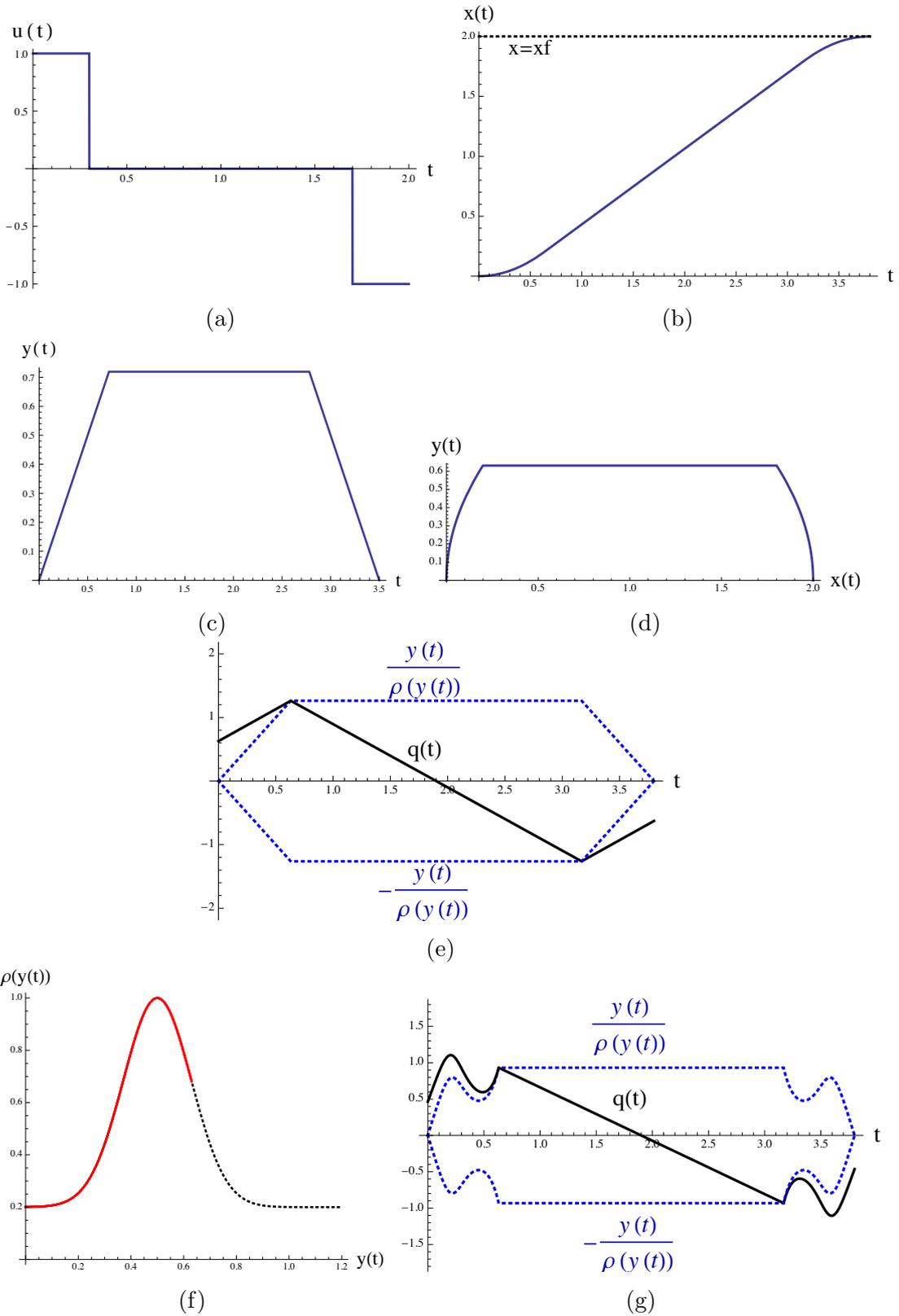


FIGURE 3.1 – Stratégie optimale dans le cas d'un système double intégrateur :

$$x_f = 2, T_{min} \approx 2.82 \text{ et } T_f = 3.8.$$

3.2 Route plate, avec frottement

Dans cette section, nous poursuivons notre étude pour une route plate, cette fois-ci, en introduisant le coefficient de frottement dans le système dynamique. Le problème (\mathcal{P}_3) est :

$$(\mathcal{P}_3) \left\{ \begin{array}{l} \text{Minimiser} \\ \text{Sous les contraintes} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} J(u) = \int_0^{T_f} \frac{|yu|}{\rho(y)} d\tau \\ (\Sigma_3) \left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = y \\ \dot{y} = u - \alpha y \end{array} \right. \quad \text{pour } t \in [0, T_f] \\ \\ X(0) = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X(T_f) = \begin{pmatrix} x(T_f) \\ y(T_f) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_f \\ 0 \end{pmatrix} \\ \\ |u(t)| \leq 1 \quad \text{pour } t \in [0, T_f] \\ \\ T_f > 0 \text{ est fixé.} \end{array}$$

Le problème en temps minimal est le second exemple traité dans [23, Ch.1], il est aussi présenté dans [30, Ch. 3]. En particulier, les solutions sont de type bang-bang avec au plus une commutation — cf. [18, Thm. 20]. La stratégie de contrôle est :

$$u_{min}(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } 0 \leq t < \Delta t, \\ -1 & \text{pour } \Delta t \leq T_{min} \end{cases} \quad (3.8)$$

et la formule du temps minimal est :

$$T_{min} = -\frac{1}{\alpha} \left(\ln \left(1 - \sqrt{1 - e^{-\alpha^2 x_f}} \right) \right) \quad (3.9)$$

Comme précédemment, le problème (\mathcal{P}_3) n'admet pas de trajectoire extrémale anormale, car le système (Σ_3) est linéaire et contrôlable.

Le Lemme 1.2 implique que les trajectoires optimales n'admettent pas de retour en arrière (i.e. $y(t) \geq 0, \forall t \in [0, T_f]$). Le Hamiltonien normal associé à (\mathcal{P}_3) est alors :

$$\mathcal{H}(-1, \mathcal{P}, X, u) = -\frac{y|u|}{\rho(y)} + py + q(u - \alpha y),$$

et les équations adjointes sont :

$$\begin{aligned} \dot{p} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}(-1, \mathcal{P}, X, u) = 0 \\ \dot{q} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y}(-1, \mathcal{P}, X, u) = -p + \alpha q + |u| \left(\frac{1}{\rho(y)} - \frac{y\rho'(y)}{\rho(y)^2} \right) \end{aligned}$$

Chapitre 3 - Résolution du problème dans le cas d'une route plate

Lorsque la variable de contrôle u est constante, la solution du système (Σ_3) est donnée par :

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t})y_0 + \frac{u}{\alpha}\left(t + \frac{1}{\alpha}(e^{-\alpha t} - 1)\right) \\ y(t) = y_0 e^{-\alpha t} + \frac{u}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t}) \end{cases} \quad (3.10)$$

où $x_0 = x(0)$ et $y_0 = y(0)$.

Comme dans la section 3.1, nous avons la relation : $H = u(0)q(0) = u(T_f)q(T_f)$, et nous définissons la quantité $\kappa(t) = \frac{q(t)\rho(y(t))}{y(t)}$. Elle est définie sur un sous-intervalle ouvert $]t_1, t_2[\subset [0, T_f]$, tel que $y(t) > 0$ pour $t \in]t_1, t_2[$, $y(t_1) = y(t_2) = 0$. La dérivée de $\kappa(t)$ par rapport au temps t est :

$$\begin{aligned} \dot{\kappa}(t) &= \widehat{\left(\frac{q\rho(y)}{y}\right)} \\ &= \frac{qy\rho'(y)\dot{y}}{y^2} + \frac{\dot{q}\rho(y)y}{y^2} - \frac{q\rho(y)\dot{y}}{y^2} \\ &= \frac{qy\rho'(y)\dot{y}}{y} + \rho(y)\frac{1}{y^2} \underbrace{\left(\dot{q}y - q\dot{y}\right)}_{-H + \alpha qy - \frac{|u|\rho'(y)y^2}{\rho(y)^2}} \\ &= -\rho(y)\frac{H}{y^2} - \frac{|u|\rho'(y)}{\rho(y)} + \frac{q\rho(y)}{y} \left(\alpha + \frac{\rho'(y)\dot{y}}{\rho(y)}\right) \\ &= -\frac{\rho(y)}{y^2}H - \frac{|u|\rho'(y)}{\rho(y)} + \kappa(t) \left(\alpha + \frac{\rho'(y)}{\rho(y)}(u - \alpha y)\right) \end{aligned} \quad (3.11)$$

Nous procédons de la même manière que précédemment. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $u > 0$ sur un intervalle ouvert de la forme $]t_1, t_1 + \varepsilon[$, et (Σ_3) est tel que le contrôle u doit être négatif afin d'avoir $y(t_2) = 0$. Par conséquent, il y a un temps t^* tel que $\kappa(t^*) = 0$ et $\dot{\kappa}(t^*) < 0$. D'après l'équation (3.11) : $\dot{\kappa}(t^*) = -\frac{\rho(y)}{y^2}H$, alors $H > 0$, ainsi $u(0) = 1$, $u(T_f) = -1$ et $q(0) = -q(T_f)$.

Le reste de cette section est divisée en deux parties. Dans la première, la fonction de rendement $\rho(y)$ est supposée égale à une constante $0 < \bar{\rho} \leq 1$. Cette hypothèse nous permet de décrire complètement la solution du problème (\mathcal{P}_3) par rapport à la valeur de $T_f > T_{min}$. Dans une deuxième partie, nous proposons une méthodologie pour obtenir la solution du problème avec une fonction de rendement non constante en s'inspirant du résultat de la première partie.

3.2.1 Fonction de rendement constante

Dans la première partie de cette section, nous présentons la stratégie optimale lorsque la fonction rendement est supposée identiquement égale à 1 — i.e. $\bar{\rho} = 1$. Le résultat reste valable pour toute fonction de rendement $\bar{\rho}$ constante tel que $0 < \bar{\rho} \leq 1$. Le Hamiltonien normal associé à (\mathcal{P}_3) devient :

$$\mathcal{H}(-1, \mathcal{P}, X, u) = -y|u| + py + q(u - \alpha y),$$

et les équations adjointes sont :

$$\begin{aligned} \dot{p} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}(-1, \mathcal{P}, X, u) = 0 \\ \dot{q} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y}(-1, \mathcal{P}, X, u) = -p + \alpha q + |u| \end{aligned}$$

Désormais nous connaissons les trois données suivantes :

1. la variable de contrôle est égale à 1 sur un intervalle de la forme $[0, \varepsilon[$;
2. la variable de contrôle est égale à -1 sur un intervalle de la forme $[T_f - \varepsilon, T_f[$;
3. il peut y avoir un (ou plusieurs) arc singulier, et un tel arc est caractérisé par $\dot{y} = 0$ d'après la Proposition 2.1.

Une conséquence directe de ce troisième cas est qu'il n'y a pas d'arc singulier de la forme $q = -y$ — i.e. avec $u \in [-1, 0]$. En effet, $\dot{y} = 0$ avec $y > 0$ ne peut être atteint que par un contrôle strictement positif.

Dans la suite du texte, nous notons un arc singulier par $u_{sing} \in]0, 1[$. Le lemme suivant expose plusieurs résultats qui nous permettent de lister l'ensemble des stratégies candidates à l'optimalité.

Analyse des trajectoires comprenant un arc singulier

Lemme 3.1

1. Si la variable de contrôle commute à la valeur $u = 0$, alors elle ne peut plus être strictement positive.
2. Si la variable de contrôle commute à la valeur $u = -1$, alors elle ne peut pas retourner à 0.
3. Il ne peut y avoir au plus qu'un seul arc singulier.
4. Pour les trajectoires extrémales composées d'un arc singulier :
 - (a) $y = \sqrt{\frac{q_0}{\alpha}}$ le long de l'arc singulier ;
 - (b) Le contrôle correspondant est $u_{sing} = \sqrt{\alpha q_0}$;
 - (c) La relation suivante est retenue : $p_0 = 2\sqrt{\alpha q_0}$.

Preuve 3.2

1. Dans la preuve de la première affirmation, nous utilisons la quantité $\kappa(t)$. Une commutation du contrôle de $u > 0$ à $u = 0$ signifie qu'il existe un temps t^* , tel que $\kappa(t^*) = 1$ et $\dot{\kappa}(t^*) < 0$. Par continuité, il existe ε tel que $\kappa(t) \leq 1$ sur $]t^*, t^* + \varepsilon[$. Nous exprimons ci-dessous $\dot{\kappa}(t)$ au temps t^* :

$$\dot{\kappa}(t^*) = -\frac{H}{y(t^*)} + \alpha < 0$$

Sur $]t^*, t^* + \varepsilon[$, d'après la loi de contrôle, $u(t) = 0$, et alors $y(t) < y(t^*)$. Par conséquent, sur $]t^*, t^* + \varepsilon[$, nous avons :

$$\dot{\kappa}(t) = -\frac{H}{y(t)^2} + \alpha \underbrace{\kappa(t)}_{\leq 1} \leq -\frac{H}{y(t)^2} + \alpha \leq -\frac{H}{y(t^*)^2} + \alpha = \dot{\kappa}(t^*) < 0.$$

On en conclut que lorsque $\kappa(t)$ devient plus petit que 1, il le reste. Autrement dit, une fois que le contrôle prend la valeur 0, il ne redeviendra jamais positif.

2. La deuxième affirmation est basée sur des arguments similaires à la première.
3. Supposons qu'il existe une trajectoire extrémale comprenant deux arcs singuliers. D'après la première affirmation, si le contrôle s'annule, il ne peut plus redevenir singulier. Alors la séquence de contrôle est de la forme suivante :

$$\begin{cases} u = 1 & \text{pour } t \in [0, t_1[\\ u_{sing} & \text{pour } t \in [t_1, t_2[\\ u = 1 & \text{pour } t \in [t_2, t_3[\\ u_{sing} & \text{pour } t \in [t_3, t_4[\end{cases}$$

Le long d'un arc singulier, nous avons : $\kappa = 1$ et $\dot{\kappa} = 0$, et l'équation (3.11) s'écrit :

$$0 = -\frac{H}{y(t)^2} + \alpha \quad \Rightarrow \quad y^2 = \frac{H}{\alpha} = \frac{q_0}{\alpha} \quad (\text{car } H = q_0 u_0)$$

Puisque y est constant le long de l'arc singulier, alors $y^2(t_2) = \frac{q_0}{\alpha}$ et $y^2(t_3) = \frac{q_0}{\alpha}$. Comme $u = 1$ entre t_2 et t_3 , alors $y(t)$ croît, ce qui contredit l'égalité $y^2(t_2) = y^2(t_3)$ et l'existence d'un second arc singulier.

4. Les affirmations (a) et (b) viennent de la relation utilisée dans la démonstration du point (3) : $y^2 = \frac{q_0}{\alpha}$. Afin de prouver l'affirmation (c), nous remarquons simplement que $\dot{\kappa}$ et \dot{y} sont nuls le long d'arc singulier. Ceci est également valable pour \dot{q} puisque $y = q$ le

long de cet arc. En remplaçant $q(t)$ par son expression, on obtient :

$$\begin{aligned} 0 = \dot{q} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y}(-1, \mathcal{P}, X, u) = -p + \alpha q + |u| \\ &= -p + \alpha y + u_{sing} \\ &= -p + 2u_{sing}. \end{aligned}$$

■

Remarque 3.1 Selon les informations réunies jusqu'à maintenant, les séquences de contrôle candidates à l'optimalité sont :

1. $u = 1$, puis $u = 0$ et enfin $u = -1$;
2. $u = 1$, puis $u = u_{sing}$, $u = 0$ et enfin $u = -1$;
3. $u = 1$, puis $u = u_{sing}$, $u = 1$, $u = 0$ et enfin $u = -1$.

Lemme 3.2 La séquence de contrôle suivante, avec $\sqrt{\alpha q_0} \neq 1$, n'est pas une extrémale

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } t \in [0, t_1[\\ \sqrt{\alpha q_0} & \text{pour } t \in [t_1, t_2[\\ 1 & \text{pour } t \in [t_2, t_3[\\ 0 & \text{pour } t \in [t_3, t_4[\\ -1 & \text{pour } t \in [t_4, T_f] \end{cases}$$

Preuve 3.3 Nous allons essentiellement montrer qu'une telle trajectoire n'est pas une extrémale du problème. En particulier, nous nous concentrons sur l'intervalle $[t_2, t_3[$ et montrons que le temps $t_3 > t_2$ n'existe pas.

Soit \bar{t} la quantité $t - t_2$ et la solution du système (Σ_2) pour $t > t_2$ avec $u = 1$ est :

$$y(\bar{t}) = \left(y(t_2) - \frac{1}{\alpha} \right) e^{-\alpha \bar{t}} + \frac{1}{\alpha} \quad \text{et} \quad q(\bar{t}) = \left(q(t_2) - \frac{p_0 - 1}{\alpha} \right) e^{\alpha \bar{t}} + \frac{p_0 - 1}{\alpha}$$

Une commutation $u = 1$ vers $u = 0$ au temps t_2 implique $y(t_2) = q(t_2)$. Une commutation $u = 0$ vers $u = 1$ au temps t_3 implique $y(t_3) = q(t_3)$. Par conséquent, $t_3 - t_2$ est la solution de l'équation suivante :

$$\left(y(t_2) - \frac{1}{\alpha} \right) e^{-\alpha \bar{t}} + \frac{1}{\alpha} = \left(q(t_2) - \frac{p_0 - 1}{\alpha} \right) e^{\alpha \bar{t}} + \frac{p_0 - 1}{\alpha}$$

Notons $q_2 = q(t_2)$, et réécrivons la relation précédente :

$$\left(q_2 - \frac{1}{\alpha} \right) e^{-\alpha \bar{t}} + \frac{1}{\alpha} = \left(q_2 - \frac{p_0 - 1}{\alpha} \right) e^{\alpha \bar{t}} + \frac{p_0 - 1}{\alpha}$$

Chapitre 3 - Résolution du problème dans le cas d'une route plate

Après une nouvelle simplification, et en notant $X = e^{\alpha \bar{t}}$, cette dernière équation devient :

$$(\alpha q_2 - p_0 + 1)X^2 + (p_0 - 2)X - \alpha q_2 + 1 = 0 \quad (3.12)$$

Nous avons, $y(t_2) = y(t_1)$, ce qui implique $q_2 = \sqrt{\frac{q_0}{\alpha}}$ — cf. Lemme 3.1. De plus, en calculant le Hamiltonien au temps $t = t_2$: $\mathcal{H}|_{t=t_2} = \mathcal{H}|_{t=0} = q_0$. Nous obtenons les relations :

$$q_0 = \alpha q_2^2 \quad \text{et} \quad q_0 = p_0 q_2 - \alpha q_2^2 \xrightarrow{q_2 \neq 0} p_0 = 2\alpha q_2 \quad (3.13)$$

Par conséquent, l'équation donnée dans (3.12) devient :

$$(1 - \alpha q_2)(X - 1)^2 = 0$$

- Si $(1 - \alpha q_2) = 0$, alors $q_0 = \alpha q_2^2 = \frac{1}{\alpha}$, et $\sqrt{\alpha q_0} = 1$ ce qui est en contradiction avec la supposition $\sqrt{\alpha q_0} \neq 1$.
- Si $(X - 1) = 0$, alors $X = 1$ et $\bar{t} = 0$, ce qui signifie que $t_3 > t_2$ n'existe pas.

Par conséquent, la stratégie de contrôle examinée, n'engendre pas de trajectoire extrémale. ■

Lemme 3.3 *Considérons la séquence de contrôle :*

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0, t_1[\\ \sqrt{\alpha q_0} & \text{si } t \in [t_1, t_2[\\ 0 & \text{si } t \in [t_2, t_3[\\ -1 & \text{si } t \in [t_3, T_f] \end{cases} \quad (3.14)$$

1. Si la stratégie (3.14) est extrémale, alors $t_3 - t_2 = \frac{1}{\alpha} \ln(1 + \sqrt{2})$.
2. Pour un couple de paramètres α et x_f donné, il existe un temps $T_{lim} > 0$ tel que pour tout $T_f > T_{lim}$, il existe une séquence de contrôles de la forme (3.14) joignant $(0, 0)$ à $(x_f, 0)$.

Preuve 3.4

1. Si l'on note, $y_1 = y(t_1)$, et puisque le second arc est singulier, nous savons que $y(t_2) = q(t_2) = y_1$, i.e. sur l'intervalle $[t_1, t_2]$, $y(t)$ est constant et $\kappa(t) = \frac{q(t)}{y(t)} = 1$. En notant $\bar{t} = t - t_2$, les équations de q et y sur l'intervalle $[t_2, t_3]$ sont, avec $u = 0$:

$$q(\bar{t}) = y_1 e^{\alpha \bar{t}} - \frac{p_0}{\alpha} (e^{\alpha \bar{t}} - 1) \quad \text{et} \quad y(\bar{t}) = y_1 e^{-\alpha \bar{t}}.$$

Au temps t_3 , une commutation du contrôle entre les valeurs 0 et -1 a lieu, ce qui correspond à la relation $q(t_3) = -y(t_3)$. Nous combinons maintenant la relation $p_0 = 2\sqrt{\alpha q_0} = 2u_{sing}$ du Lemme 3.1, point (4) avec le fait que y soit constant, égal à y_1 , le long de l'arc singulier. Alors $u_{sing} = \alpha y_1$, ce qui entraîne $p_0 = 2\alpha y_1$.

Chapitre 3 - Résolution du problème dans le cas d'une route plate

Nous examinons maintenant le calcul de la valeur de \bar{t} telle que $-y(\bar{t}) = q(\bar{t})$:

$$\begin{aligned} -y_1 e^{-\alpha \bar{t}} &= y_1 e^{\alpha \bar{t}} - \frac{p_0}{\alpha} (e^{\alpha \bar{t}} - 1) \\ -y_1 e^{-\alpha \bar{t}} &= y_1 e^{\alpha \bar{t}} - \frac{2\alpha y_1}{\alpha} (e^{\alpha \bar{t}} - 1) \\ -e^{-\alpha \bar{t}} &= e^{\alpha \bar{t}} - 2(e^{\alpha \bar{t}} - 1) && (\text{puisque } y_1 > 0) \\ -1 &= e^{2\alpha \bar{t}} - 2(e^{2\alpha \bar{t}} - e^{\alpha \bar{t}}) \\ 0 &= X^2 - 2X - 1 && (\text{avec } X = e^{\alpha \bar{t}}) \end{aligned}$$

Ainsi $X = 1 \pm \sqrt{2}$, d'où $t_3 - t_2 = \frac{1}{\alpha} \ln(1 + \sqrt{2})$.

2. Nous allons procéder comme suit :

(a) on considère le cas limite, $t_1 = t_2$ (pas d'arc singulier). C'est-à-dire que le contrôle est donné par :

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0, t_1[\\ 0 & \text{si } t \in [t_1, t_3[\\ -1 & \text{si } t \in [t_3, T_f] \end{cases} \quad (3.15)$$

D'après la solution du système (Σ_3) donnée à l'équation (3.10), on obtient :

— sur $t \in [0, t_1[$: $u(t) = 1$

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{\alpha} \left(t + \frac{1}{\alpha} (e^{-\alpha t} - 1) \right) \\ y(t) = \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}) \end{cases}$$

— sur $t \in [t_1, t_3[$: $u(t) = 0$

$$\begin{cases} x(t) = x_1 + \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha(t-t_1)}) y_1 \\ y(t) = y_1 e^{-\alpha(t-t_1)} \end{cases}$$

où $x_1 = x(t_1) = \frac{1}{\alpha} \left(t_1 + \frac{1}{\alpha} (e^{-\alpha t_1} - 1) \right)$ et $y_1 = y(t_1) = \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t_1})$.

Après simplification, on obtient :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{\alpha} t_1 - \frac{1}{\alpha^2} (1 - e^{-\alpha t_1}) e^{-\alpha(t-t_1)} \\ y(t) = \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t_1}) e^{-\alpha(t-t_1)} \end{cases}$$

— sur $t \in [t_3, T_f]$: $u(t) = -1$

$$\begin{cases} x(t) = x_3 + \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha(t-t_3)}) y_3 - \frac{1}{\alpha} \left(t - t_3 + \frac{1}{\alpha} (e^{-\alpha(t-t_3)} - 1) \right) \\ y(t) = y_3 e^{-\alpha(t-t_3)} - \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha(t-t_3)}) \end{cases}$$

où $x_3 = x(t_3) = \frac{1}{\alpha}t_1 - \frac{1}{\alpha^2}\left(1 - e^{-\alpha t_1}\right)e^{-\alpha(t_3-t_1)}$ et $y_3 = y(t_3) = \frac{1}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha t_1}\right)e^{-\alpha(t_3-t_1)}$.

Après simplification, on obtient :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{\alpha}t_1 - \frac{1}{\alpha}(t - t_2) - \frac{1}{\alpha^2}\left(e^{-\alpha(t-t_1)} - e^{-\alpha t} - 1 + e^{-\alpha(t-t_2)}\right) \\ y(t) = \frac{1}{\alpha}\left(e^{-\alpha(t-t_1)} - e^{-\alpha t} - 1 + e^{-\alpha(t-t_2)}\right) \end{cases}$$

Calculons $x(t)$ et $y(t)$ au temps $t = T_f$:

$$\begin{cases} x(T_f) = \frac{1}{\alpha}t_1 - \frac{1}{\alpha}(T_f - t_3) - \frac{1}{\alpha^2}\left(e^{-\alpha(T_f-t_1)} - e^{-\alpha T_f} - 1 + e^{-\alpha(T_f-t_3)}\right) \\ y(T_f) = \frac{1}{\alpha}\left(e^{-\alpha(T_f-t_1)} - e^{-\alpha T_f} - 1 + e^{-\alpha(T_f-t_3)}\right) \end{cases} \quad (3.16)$$

(b) Comme $t_3 - t_2 = \frac{1}{\alpha}\ln(1 + \sqrt{2})$, alors $T_f - t_3 = T_f - \frac{1}{\alpha}\ln(1 + \sqrt{2}) - t_1$, ce qui nous permet avec la contrainte $y(T_f) = 0$ de calculer t_1 en fonction de α et T_f :

En effet :

$$\begin{aligned} y(T_f) &= 0 \\ e^{-\alpha(T_f-t_1)} - e^{-\alpha T_f} - 1 + e^{-\alpha(T_f-t_3)} &= 0 \\ e^{-\alpha(T_f-t_1)} - e^{-\alpha T_f} - 1 + e^{-\alpha\left(T_f - \frac{1}{\alpha}\ln(1+\sqrt{2}) - t_1\right)} &= 0 \\ e^{-\alpha(T_f-t_1)} - e^{-\alpha T_f} - 1 + \left(1 + \sqrt{2}\right)e^{-\alpha(T_f-t_1)} &= 0 \\ \left(2 + \sqrt{2}\right)e^{-\alpha(T_f-t_1)} - e^{-\alpha T_f} - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$t_1 = \frac{1}{\alpha} \ln \left[\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) (1 + e^{\alpha T_f}) \right] \quad (3.17)$$

(c) Puisque $y(T_f) = 0$, l'expression x_f de l'équation (3.10) devient :

$$\begin{aligned} x_f &= \frac{1}{\alpha}t_1 - \frac{1}{\alpha}(T_f - t_3) - \frac{1}{\alpha^2} \underbrace{\left(e^{-\alpha(T_f-t_1)} - e^{-\alpha T_f} - 1 + e^{-\alpha(T_f-t_3)}\right)}_{=y(T_f)=0} \\ &= \frac{1}{\alpha}t_1 - \frac{1}{\alpha}\left(T_f - \frac{1}{\alpha}\ln(1 + \sqrt{2}) - t_1\right) \\ &= -\frac{T_f}{\alpha} + \frac{\ln(1 + \sqrt{2})}{\alpha^2} + \frac{2}{\alpha^2}t_1 \end{aligned}$$

Chapitre 3 - Résolution du problème dans le cas d'une route plate

En substituant l'équation (3.17) dans cette dernière expression nous trouvons :

$$x_f = -\frac{T_f}{\alpha} + \frac{\ln(1 + \sqrt{2})}{\alpha^2} + \frac{2}{\alpha^2} \ln \left(\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) (1 + e^{\alpha T_f}) \right) \quad (3.18)$$

(d) Ensuite, nous inversons la relation (3.18) afin de connaître T_f , en fonction de α et x_f , qui est le temps minimum nécessaire pour atteindre $X(T_f) = (x_f, 0)$ partant de $X(0) = (0, 0)$ en appliquant la séquence de contrôle (3.14). On obtient les relations ci-dessous, l'expression de T_{lim} étant l'une des deux :

$$\frac{1}{\alpha} \ln \left((1 + \sqrt{2})e^{\alpha^2 x_f} - 1 - \sqrt{\left((1 + \sqrt{2})e^{\alpha^2 x_f} - 1\right)^2 - 1} \right) \leq 0$$

et

$$\frac{1}{\alpha} \ln \left((1 + \sqrt{2})e^{\alpha^2 x_f} - 1 + \sqrt{\left((1 + \sqrt{2})e^{\alpha^2 x_f} - 1\right)^2 - 1} \right) > 0$$

On en conclut l'existence de :

$$T_{lim} = \frac{1}{\alpha} \ln \left((1 + \sqrt{2})e^{\alpha^2 x_f} - 1 + \sqrt{\left((1 + \sqrt{2})e^{\alpha^2 x_f} - 1\right)^2 - 1} \right).$$

■

Stratégie optimale

D'après toutes les analyses effectuées dans les paragraphes précédents, nous en déduisons que deux stratégies optimales sont possibles. La première est donnée par la séquence de contrôle (3.14). La deuxième stratégie est donnée par la séquence de contrôle suivante :

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0, t_1[\\ 0 & \text{si } t \in [t_1, t_2[\\ -1 & \text{si } t \in [t_2, T_f] \end{cases} \quad (3.19)$$

Pour tout ensemble de paramètres α , x_f , $T_f > T_{min}$, il existe une séquence de contrôles de la forme (3.19) joignant $(0, 0)$ à $(x_f, 0)$. Remarquons que cette séquence est identique à celle du contrôle (3.15) pour $t_2 = t_3$. Par conséquent, les trajectoires correspondantes au contrôle (3.19) sont données par l'équation (3.16).

La contrainte $y(T_f) = 0$ nous permet de calculer l'expression de t_2 . En effet, $y(T_f) = 0$ ce qui implique :

$$\begin{aligned} e^{-\alpha(T_f - t_1)} - e^{-\alpha T_f} - 1 + e^{-\alpha(T_f - t_2)} &= 0 \\ e^{-\alpha(T_f - t_2)} &= 1 - e^{-\alpha(T_f - t_1)} + e^{-\alpha T_f} \\ e^{\alpha t_2} &= \left(1 - e^{-\alpha(T_f - t_1)} + e^{-\alpha T_f}\right) e^{\alpha T_f} \end{aligned}$$

Chapitre 3 - Résolution du problème dans le cas d'une route plate

Par conséquent :

$$t_2 = T_f + \frac{1}{\alpha} \ln \left(e^{-\alpha T_f} \left(1 - e^{\alpha t_1} + e^{\alpha T_f} \right) \right) \quad (3.20)$$

Nous substituons t_2 dans $x(T_f)$ et ensuite, nous calculons l'expression de t_1 à partir de la contrainte $x(T_f) = x_f$:

$$\begin{aligned} x_f &= \frac{1}{\alpha} t_1 - \frac{1}{\alpha} (T_f - t_2) - \frac{1}{\alpha^2} \underbrace{\left(e^{-\alpha(T_f-t_1)} - e^{-\alpha T_f} - 1 + e^{-\alpha(T_f-t_2)} \right)}_{=y(T_f)=0} \\ &= \frac{1}{\alpha} t_1 - \frac{1}{\alpha^2} \ln \left(e^{-\alpha T_f} \left(1 - e^{\alpha t_1} + e^{\alpha T_f} \right) \right) \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$t_1 = \frac{1}{\alpha} \ln \left(\frac{1}{2} \left(1 + e^{\alpha T_f} - \sqrt{1 + 2e^{\alpha T_f} + e^{2\alpha T_f} - 4e^{\alpha^2 x_f + \alpha T_f}} \right) \right) \quad (3.21)$$

La trajectoire générée par le contrôle (3.19) est clairement optimale lorsque $T_{min} < T_f < T_{lim}$. En effet, il n'existe pas d'autre trajectoire extrémale.

Théorème 3.1 (*Stratégie optimale pour une fonction de rendement constante*) On se donne un ensemble de paramètres α , x_f , T_f , et soit $X(t) : t \mapsto (x(t), y(t))$ la trajectoire de (Σ_3) joignant $(0, 0)$ à $(x_f, 0)$ selon une séquence de contrôle de la forme (3.19).

1. Si $(X(t), p_0, q(t))$ est une extrémale du principe du maximum de Pontryaguin, alors p_0 et q_0 sont donnés par les expressions suivantes :

$$p_0 = \frac{e^{-\alpha t_2} (e^{\alpha t_1} - 1) (1 + e^{2\alpha(t_2-t_1)})}{e^{\alpha(t_2-t_1)} - 1}$$

et

$$q_0 = \frac{e^{-2\alpha t_1}}{\alpha} \left(e^{\alpha t_1} - 1 \right) \left(1 + e^{\alpha t_1} (p_0 - 1) \right).$$

2. Si $T_f > T_{lim}$, où la valeur de T_{lim} est donnée au Lemme 3.3, alors $(X(t), p_0, q(t))$ n'est pas une trajectoire extrémale.
3. La solution du problème du contrôle optimal (\mathcal{P}_3) sur une route plate, avec un coefficient de frottement α et une fonction de rendement constante est :
 - (a) pour $T_{min} < T_f \leq T_{lim}$, avec T_{lim} comme dans Lemme 3.3, la stratégie de contrôle optimal est (3.19).
 - (b) pour $T_f > T_{lim}$, la stratégie de contrôle optimal est (3.14).

Preuve 3.5 1. Les paramètres α , x_f , T_f étant donnés, les temps de commutations t_1 et t_2 de la séquence de contrôle (3.19) sont donnés par (3.21) et (3.20). nous pouvons ainsi calculer $y(t_1)$ et $y(t_2)$.

Chapitre 3 - Résolution du problème dans le cas d'une route plate

- **L'expression de p_0** est déterminée en utilisant l'équation de $q(t)$ sur l'intervalle $[t_1, t_2]$: $q(t) = q(t_1)e^{\alpha(t-t_1)} - \frac{p_0}{\alpha} (e^{\alpha(t-t_1)} - 1)$. Comme t_1 et t_2 sont les instants de commutation du contrôle, nous avons $\frac{q(t_1)}{y(t_1)} = 1$ et $\frac{q(t_2)}{y(t_2)} = -1$. Ainsi, p_0 est déterminé en résolvant l'équation $q(t_2) = -y(t_2)$.

En effet :

$$\begin{aligned}
 q(t_2) &= -y(t_2) \\
 q(t_1)e^{\alpha(t_2-t_1)} - \frac{p_0}{\alpha} (e^{\alpha(t_2-t_1)} - 1) &= -\frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t_1}) e^{-\alpha(t_2-t_1)} \\
 y(t_1)e^{\alpha(t_2-t_1)} - \frac{p_0}{\alpha} (e^{\alpha(t_2-t_1)} - 1) &= -\frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t_1}) e^{-\alpha(t_2-t_1)} \\
 \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t_1}) e^{\alpha(t_2-t_1)} - \frac{p_0}{\alpha} (e^{\alpha(t_2-t_1)} - 1) &= -\frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t_1}) e^{-\alpha(t_2-t_1)} \\
 p_0 (e^{\alpha(t_2-t_1)} - 1) &= (1 - e^{-\alpha t_1}) (e^{-\alpha(t_2-t_1)} + e^{\alpha(t_2-t_1)}) \\
 p_0 (e^{\alpha(t_2-t_1)} - 1) &= e^{\alpha t_1} (1 - e^{-\alpha t_1}) (e^{-\alpha t_2} + e^{\alpha(t_2-2t_1)}) \\
 p_0 (e^{\alpha(t_2-t_1)} - 1) &= e^{-\alpha t_2} (e^{\alpha t_1} - 1) (1 + e^{2\alpha(t_2-t_1)})
 \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$p_0 = \frac{e^{-\alpha t_2} (e^{\alpha t_1} - 1) (1 + e^{2\alpha(t_2-t_1)})}{e^{\alpha(t_2-t_1)} - 1}$$

- **L'expression de q_0** est déterminée en travaillant sur l'intervalle $[0, t_1]$, sur lequel $q(t) = q_0 e^{\alpha t} + \frac{1}{\alpha} (1 - p_0) (e^{\alpha t} - 1)$ et $y(t) = \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t})$. En effet :

$$\begin{aligned}
 y(t_1) &= q(t_1) \\
 \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t_1}) &= q_0 e^{\alpha t_1} + \frac{1}{\alpha} (1 - p_0) (e^{\alpha t_1} - 1) \\
 q_0 e^{\alpha t_1} &= \frac{1}{\alpha} (e^{-\alpha t_1} (e^{\alpha t_1} - 1) - (1 - p_0) (e^{\alpha t_1} - 1)) \\
 q_0 e^{\alpha t_1} &= \frac{1}{\alpha} ((e^{\alpha t_1} - 1) (e^{-\alpha t_1} + (p_0 - 1))) \\
 q_0 e^{\alpha t_1} &= \frac{e^{-\alpha t_1}}{\alpha} ((e^{\alpha t_1} - 1) (1 + e^{\alpha t_1} (p_0 - 1)))
 \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$q_0 = \frac{e^{-2\alpha t_1}}{\alpha} \left((e^{\alpha t_1} - 1) (1 + e^{\alpha t_1} (p_0 - 1)) \right)$$

Dans les deux cas, l'expression déterminée est unique.

2. Pour l'ensemble des paramètres α , x_f , T_f , supposons que $(X(t), p_0, q_0)$ est une trajectoire extrémale. Alors, t_1 , p_0 et q_0 peuvent être calculés explicitement. Par

Chapitre 3 - Résolution du problème dans le cas d'une route plate

conséquent, nous pouvons aussi calculer les expressions de $y(t)$ et $q(t)$ sur l'intervalle $[0, t_1]$ (avec $u = 1$). Une commutation du contrôle a lieu dès que $y(t) = q(t)$, nous résolvons donc cette équation pour la variable t .

$$y(t) = q(t)$$

$$\frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}) = q_0 e^{\alpha t} + \frac{1}{\alpha} (1 - p_0) (e^{\alpha t} - 1)$$

Par conséquent :

$$(\alpha q_0 + 1 - p_0) e^{\alpha t} - (2 - p_0) + e^{-\alpha t} = 0$$

$$(\alpha q_0 + 1 - p_0) e^{2\alpha t} - (2 - p_0) e^{\alpha t} + 1 = 0$$

Posons $X = e^{\alpha t}$, ce qui implique :

$$(\alpha q_0 + 1 - p_0) X^2 - (2 - p_0) X + 1 = 0$$

$\Delta = (2 - p_0)^2 - 4(\alpha q_0 + 1 - p_0) = p_0^2 - 4\alpha q_0$, alors deux solutions se présentent :

$$X = \frac{(2 - p_0) \pm \sqrt{p_0^2 - 4\alpha q_0}}{2(\alpha q_0 + 1 - p_0)}$$

Ensuite, nous remplaçons p_0 et q_0 par les expressions obtenues précédemment et après simplification, nous obtenons :

- (a) un premier temps qui est égal à t_1 ;
- (b) un deuxième, inférieur à t_1 pour tout $T_f > T_{lim}$.

Ainsi, pour $T_f > T_{lim}$, une commutation du contrôle a lieu avant le temps t_1 ce qui est en contradiction avec la séquence de contrôle (3.19).

3. L'analyse effectuée dans la section précédente montre qu'il n'y a que deux stratégies extrémales possibles. Elles ont les restrictions suivantes :

- (a) la trajectoire correspondant à la séquence du contrôle (3.19) n'est pas une extrémale dès que $T_f > T_{lim}$.
- (b) la trajectoire correspondant à la séquence du contrôle (3.14) n'existe pas pour $T_{min} < T_f \leq T_{lim}$.

■

La Figure 3.2 illustre les arguments du Théorème 3 pour les paramètres fixés $x_f = 6$ et $\alpha = 0.5$. La quantité T_{lim} est déterminée comme expliqué dans le Lemme 3.3. Les Figures 3.2a et 3.2b représentent les trajectoires optimales pour $T_f < T_{lim}$, et les Figures 3.2c et 3.2d correspondent au cas $T_f > T_{lim}$. En particulier, les Figures 3.2e et 3.2f illustrent le fait que la stratégie (3.19) n'est pas une extrémale pour $T_f > T_{lim}$.

Chapitre 3 - Résolution du problème dans le cas d'une route plate

Ces deux dernières figures sont obtenues comme suit : t_1 et t_2 sont déterminés afin de conduire $X(0)$ à $X(T_f)$ en utilisant la stratégie (3.19). Lorsque nous appliquons ce contrôle au système Hamiltonien, nous constatons que la trajectoire $q(t)$ intersecte $y(t)$ pour un temps $0 < t < t_1$. Comme attendu cette trajectoire n'est pas une extrémale.

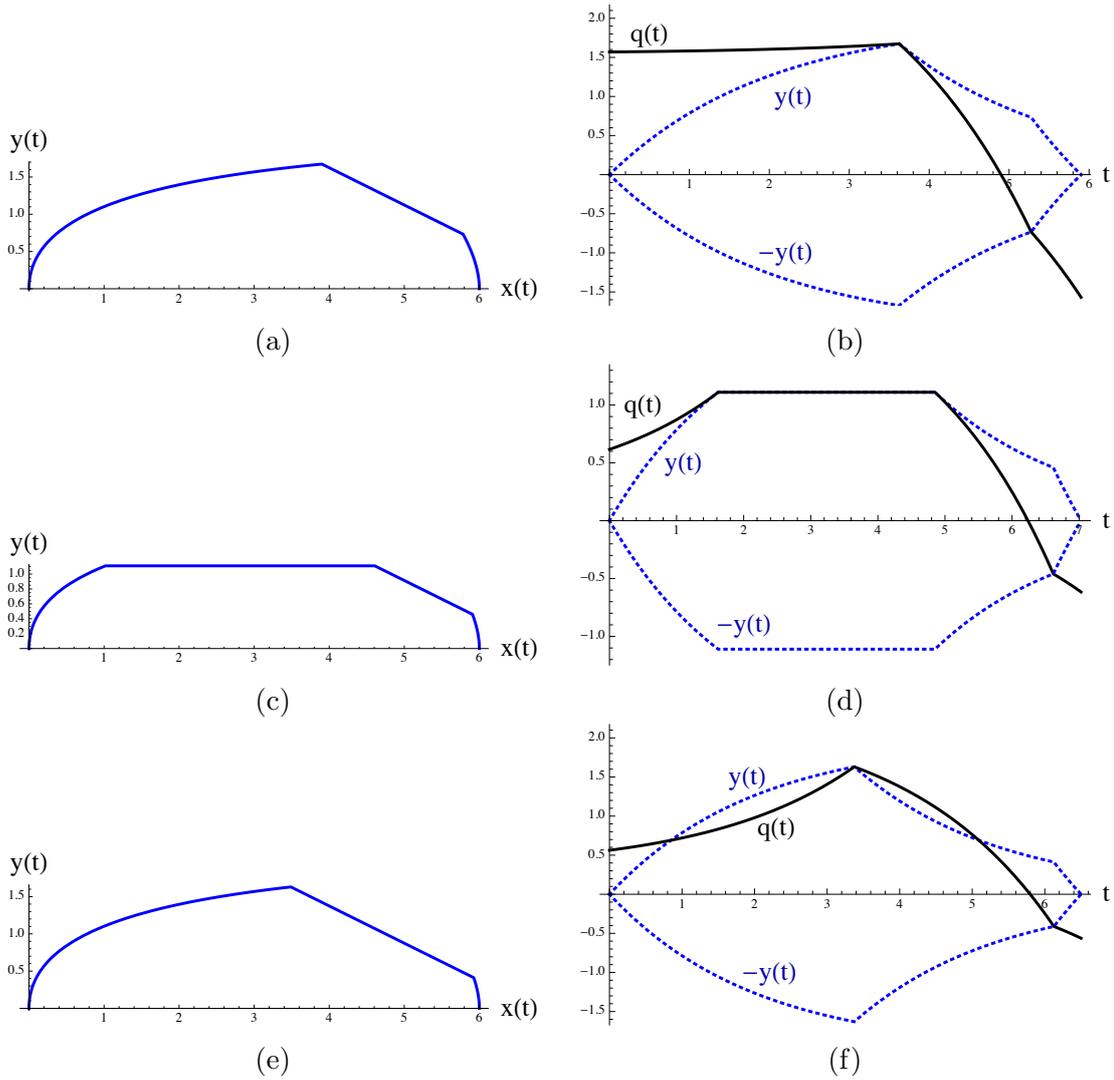


FIGURE 3.2 – Trajectoires optimales et non-optimales dans le cas d'une route plane avec une fonction de rendement constante. Paramètres : $\alpha = 0.5$, $x_f = 6$, $T_{min} \approx 5.52$ et $T_{lim} \approx 5.95$.

Les Figures 3.2a, et 3.2b correspondent à $T_f = 5.9$. Les Figures 3.2c à 3.2f correspondent à $T_f = 6.5$.

3.2.2 Fonction de rendement non constante

Dans la deuxième partie de cette section, nous nous intéressons au problème (\mathcal{P}_3) , cette fois-ci avec une fonction de rendement $\rho(\cdot)$ qui varie en fonction de la vitesse y .

Remarquons qu'une résolution analytique du problème (\mathcal{P}_3) pour une fonction de rendement quelconque est difficile, nous proposons donc une méthodologie basée sur le point (3) du Théorème 3.

1. Nous calculons une trajectoire de (Σ_3) donnée par la séquence de contrôle (3.19).
2. Si cela est possible, nous calculons une trajectoire de (Σ_3) donnée par la séquence du contrôle (3.14).
3. Nous vérifions que la trajectoire est une extrémale, et calculons le coût de façon explicite pour éliminer les ambiguïtés possibles.
4. Il peut arriver qu'aucune des stratégies (3.19) et (3.14) ne produise de trajectoire extrémale. En fait, le Lemme 3.1 n'est plus vrai et il peut y avoir plus d'une commutation de la variable du contrôle entre les valeurs $u = 0$ et $u = -1$. Lorsque cette situation a lieu, une nouvelle stratégie de contrôle est examinée — voir (3.24) ci-dessous.

Une trajectoire de (Σ_3) , donnée par la stratégie (3.19), telle que $X(T_f) = (x_f, 0)$ est donnée par les relations (3.21) et (3.20), comme avant. Cependant, pour une trajectoire donnée par la séquence du contrôle (3.14), la relation $t_3 - t_2 = \frac{1}{\alpha} \ln(1 + \sqrt{2})$ du Lemme 3.3 n'est plus valable, et nous devons utiliser un schéma numérique.

Calcul des trajectoires extrémales données par la stratégie (3.14)

Tout d'abord, nous cherchons des expressions pour p_0 et q_0 . Le long d'un arc singulier, puisque $\dot{y} = 0$, alors $\dot{q} = \frac{d}{dt} \left(\frac{y}{\rho(y)} \right) = 0$. Nous notons y_s la valeur de $y(t)$ le long d'un arc singulier, alors $u_{sing} = \alpha y_s$ et :

$$\begin{aligned}
 0 = \dot{q} &= -\frac{\partial}{\partial y} \mathcal{H} = \frac{|u_{sing}|}{\rho(y_s)} - \frac{y_s |u_{sing}| \rho'(y_s)}{\rho^2(y_s)} + \alpha q_s - p_0 \quad \text{où} \quad q_s = \frac{y_s}{\rho(y_s)} \quad \text{et} \quad \rho'(y) = \frac{\partial \rho}{\partial y}(y) \\
 &\Rightarrow p_0 = \frac{2\alpha y_s}{\rho(y_s)} - \frac{\alpha y_s^2 \rho'(y_s)}{\rho^2(y_s)}
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

Maintenant, puisque $u_0 = 1$, et en désignant par \mathcal{H}_s le Hamiltonien calculé le long d'un arc singulier, nous avons :

$$\mathcal{H}|_{t=0} = q_0 = \mathcal{H}_s = p_0 y_s + q_0 (u_{sing} - y_s) - \frac{y_s |u_{sing}|}{\rho(y_s)} \quad \Rightarrow \quad q_0 = p_0 y_s - \frac{\alpha y_s^2}{\rho(y_s)} \tag{3.23}$$

Afin de calculer une trajectoire extrémale associée à (3.14), nous proposons la méthodologie suivante :

Chapitre 3 - Résolution du problème dans le cas d'une route plate

1. soit t_1 une valeur arbitraire, alors $y(t_2) = y(t_1) = y_s$ ce qui permet de calculer p_0 et q_0 ;
2. la durée $(t_3 - t_2)$ est la solution de l'équation $q(t) = -\frac{y(t)}{\rho(y(t))}$ où $q(t)$ et $y(t)$ sont les solutions du système Hamiltonien associé à (\mathcal{P}_3) avec $u = 0$, $y(0) = y_s$ et $q(0) = \frac{y_s}{\rho(y_s)}$;
3. la durée $(T_f - t_3)$ est donnée par la contrainte $y(t) = 0$ où $y(t)$ est la solution de (Σ_3) avec $u = -1$ et en fixant $y(0)$ à la valeur prise par y dans l'étape précédente lorsque nous avons résolu l'équation $q(t) = -\frac{y(t)}{\rho(y(t))}$;
4. t_1 est déterminé afin de résoudre l'équation $x(T_f) = x_f$, avec la durée de l'arc singulier (i.e. $t_2 - t_1$) donnée par T_f moins la longueur des trois autres arcs.

Remarque 3.2 — *Chaque étape de cette méthodologie est réalisée avec une simple dichotomie.*

- *Pour un ensemble donné de paramètres α et x_f , le temps minimal T_{lim} pour l'existence d'une stratégie singulière (3.14) est déterminé avec une méthodologie similaire : l'arc singulier est réduit à un point, mais les contraintes sont conservées. Le temps t_1 est déterminé tel que $x(T_f) = x_f$, ce qui produit la valeur de $T_{lim} = T_f$.*
- *En pratique, si une stratégie singulière existe, alors la stratégie élémentaire (3.19) n'est pas une extrémale.*

Trajectoires présentant deux étapes de freinage

Les deux stratégies de contrôle présentées jusqu'à présent — i.e. (3.14) et (3.19) — ne couvrent pas l'ensemble des situations que nous avons rencontré pendant la résolution de ce cas. Puisque le Lemme 3.1 ne garantit plus que chaque type de commutation se produit au plus une fois, nous considérons la stratégie (3.24) ci-dessous.

Rappelons que le coût est l'intégrale de la fonction $\frac{|yu|}{\rho(y)}$. D'une part, le fait qu'il tende vers zéro lorsque y tend vers 0 montre d'intérêt de freiner à faible vitesse. D'autre part, le contrôle devrait être non nul lorsque la fonction de rendement est maximale. En fait, les stratégies (3.14) et (3.19) réalisent un compromis entre ces deux comportements, le fait que ces deux stratégies ne soient pas extrémales amène à penser que le freinage se produit en deux temps. En d'autres termes, $u = -1$ une première fois lorsque la fonction de rendement est suffisamment élevée, et une seconde fois lorsque la vitesse est suffisamment basse.

La stratégie (3.24) ci-dessous produit effectivement des trajectoires extrémales lorsque

(3.14) et (3.19) ne le font pas.

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{quand } t \in [0, t_1[\\ \alpha y_1 & \text{quand } t \in [t_1, t_2[\\ 0 & \text{quand } t \in [t_2, t_3[\\ -1 & \text{quand } t \in [t_3, t_4[\\ 0 & \text{quand } t \in [t_4, t_5[\\ -1 & \text{quand } t \in [t_5, T_f] \end{cases} \quad (3.24)$$

En se basant sur la méthodologie développée pour la stratégie (3.14) nous proposons une méthodologie adaptée à la stratégie (3.24), comme suit :

1. soit t_1 une valeur arbitraire, alors $y(t_2) = y(t_1) = y_s$ ce qui permet de calculer p_0 et q_0 ;
2. Notons par T_2 la quantité $(t_3 - t_2)$. La durée T_2 est la solution de l'équation $q(t) = -\frac{y(t)}{\rho(y(t))}$. Puisque le contrôle $u = 0$ sur cet intervalle, le vecteur adjoint est calculé explicitement par cette équation $q(t) = q_s e^{\alpha(t-t_2)} - \frac{p_0}{\alpha} (e^{\alpha(t-t_2)} - 1)$ où $q_s = q(t_1) = q(t_2)$. Ce qui implique $q(t) = \frac{y_s}{\rho(y_s)} e^{\alpha(t-t_2)} - \frac{p_0}{\alpha} (e^{\alpha(t-t_2)} - 1)$ et $y(t)$ est donné par l'équation : $y(t) = y_s e^{-\alpha(t-t_2)}$. La résolution de $q(t_3) = -\frac{y(t_3)}{\rho(y(t_3))}$ est :

$$\begin{aligned} \frac{y_s}{\rho(y_s)} e^{\alpha T_2} - \frac{p_0}{\alpha} (e^{\alpha T_2} - 1) &= -\frac{y_s e^{-\alpha T_2}}{\rho(y_s)} \\ \left(\frac{y_s}{\rho(y_s)} - \frac{p_0}{\alpha} \right) e^{\alpha T_2} + \frac{p_0}{\alpha} &= -\frac{y_s e^{-\alpha T_2}}{\rho(y_s)} \\ \left(\frac{y_s}{\rho(y_s)} - \frac{p_0}{\alpha} \right) e^{2\alpha T_2} + \frac{p_0}{\alpha} e^{\alpha T_2} &= -\frac{y_s}{\rho(y_s)} \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$T_2 = \frac{1}{\alpha} \ln \left(\frac{p_0 \rho(y_s) + \sqrt{p_0^2 \rho(y_s)^2 + 4\alpha p_0 \rho(y_s) y_s - 4\alpha^2 y_s^2}}{2p_0 \rho(y_s) - 2\alpha y_s} \right)$$

3. Soit T_3 la quantité $(t_4 - t_3)$. La durée T_3 est la solution de l'équation $q(t) = -\frac{y(t)}{\rho(y(t))}$ où $q(t)$ et $y(t)$ sont les solutions du système Hamiltonien associé à (\mathcal{P}_4) , avec $u = -1$, $y(0) = y(T_2)$ et $q(0) = -\frac{y_0}{\rho(y_0)}$;
4. Soit T_4 la quantité $(t_5 - t_4)$. La durée T_4 est la solution de l'équation $q(t) = -\frac{y(t)}{\rho(y(t))}$ avec $u = 0$, où $q(t)$ et $y(t)$ sont donnés par $q(t) = q_0 e^{\alpha(t-t_4)} - \frac{p_0}{\alpha} (e^{\alpha(t-t_4)} - 1)$ et $y(t) = y_0 e^{-\alpha(t-t_4)}$, avec $y_0 = y(T_3)$ et $q_0 = -\frac{y_0}{\rho(y_0)}$. Comme au point (2), la durée T_4 peut être calculée explicitement et elle est égale à : $T_4 = \frac{1}{\alpha} \ln \left(\frac{-\alpha y_0}{p_0 \rho(y_0) + \alpha y_0} \right)$;
5. Soit T_5 la quantité $(T_f - t_5)$. La durée T_5 est donnée par la contrainte $y(t) = 0$ où $y(t)$ est donné par $y(t) = y_0 e^{-\alpha(t-t_5)} + \frac{u}{\alpha} (1 - e^{-\alpha(t-t_5)})$ avec $u = -1$ et $y(0) = y(T_4)$;
6. Soit T_s la quantité $(t_2 - t_1)$. La durée T_s est déterminée de la manière suivante :

Chapitre 3 - Résolution du problème dans le cas d'une route plate

- (a) Tout d'abord, nous calculons l'aire formée par la courbe $y(t)$ pour les durées T_2, T_3, T_4 et T_5 , et nous la notons par x^* .
- (b) Ensuite, puisque $y(t)$ est constant sur la durée T_s , l'aire le long de cet intervalle est égal à $x_s = y_s T_s$.
- (c) Finalement, comme l'aire au temps T_f est $x(T_f) = x_f$, elle est aussi égale à la somme de toutes les aires, i.e. $x_f = x_s + x^*$. Par conséquent :

$$T_s = \frac{x_f - x^*}{y_s}$$

7. t_1 est déterminé afin de résoudre l'équation $t_1 + T_s + T_2 + \dots + T_5 = T_f$, où T_f est la valeur du temps final qui a été fixée.

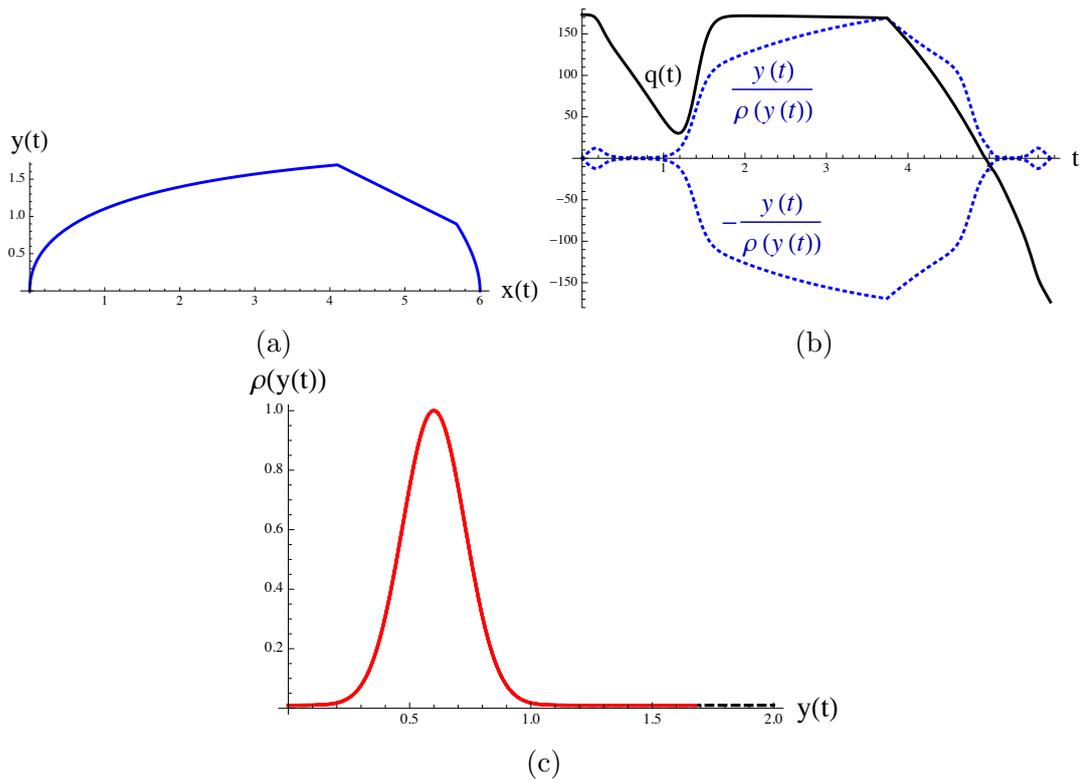


FIGURE 3.3 – Trajectoire optimale du problème (\mathcal{P}_3) avec une fonction de rendement non constante. Paramètres : $\alpha = 0.5$, $x_f = 6$, $T_{min} \approx 5.52$, $T_{lim} \approx 5.8$ et $T_f = 5.75$.

Les Figures 3.3, 3.4 et 3.5 illustrent les trajectoires optimales calculées selon la méthodologie ci-dessus pour les paramètres fixés $x_f = 6$ et $\alpha = 0.5$. La Figure 3.3 correspond au cas $T_{min} < T_f < T_{lim}$, et les Figures 3.4 et 3.5 à $T_f > T_{lim}$. Pour $T_f = 10$, ni (3.19) ni (3.14) ne produisent de trajectoire extrémale, mais la nouvelle stratégie (3.24)

oui. Ceci est illustré à la Figure 3.5. En fait, cette situation ne se produit uniquement lorsque T_f est choisi dans un intervalle de temps assez petit. Dans les Figures 3.3c, 3.4c et 3.5c les valeurs visitées par la fonction de rendement sont tracées en rouge. Les tracés bleus de la Figure 3.5c correspondent aux deux périodes de freinage.

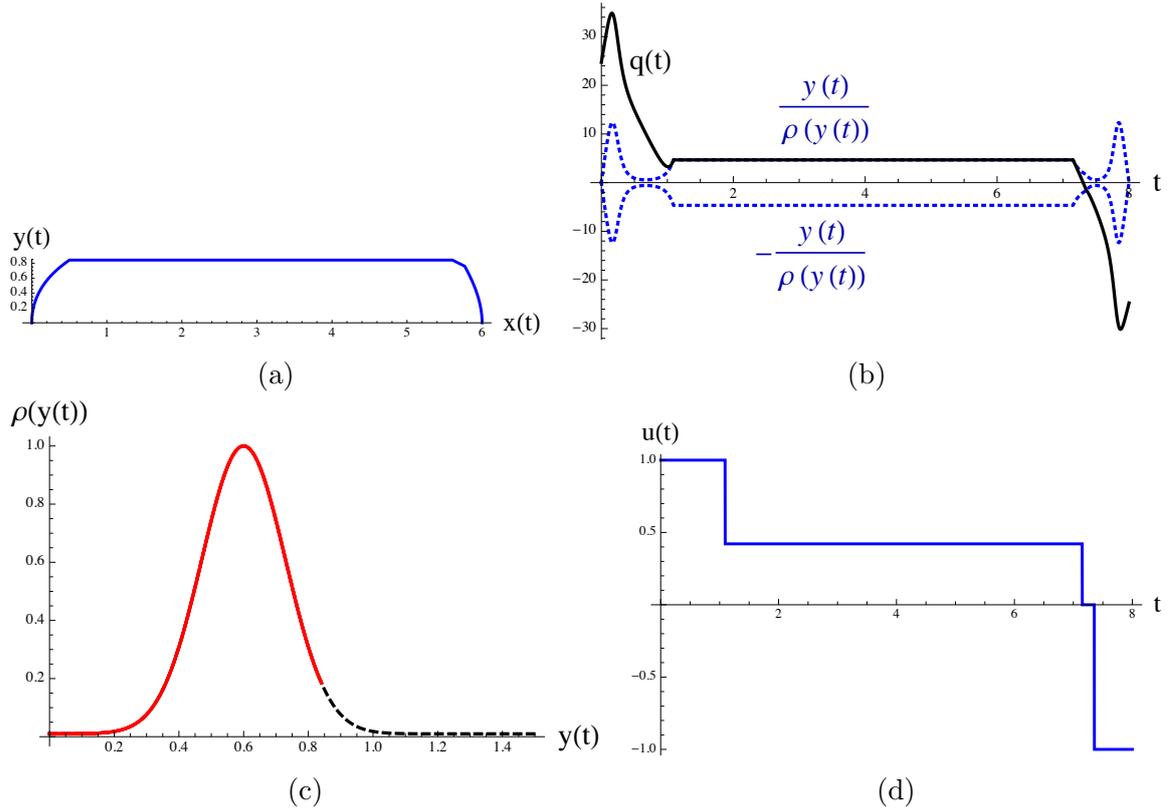


FIGURE 3.4 – Trajectoire optimale du problème (\mathcal{P}_3) avec une fonction de rendement non constante. Paramètres : $\alpha = 0.5$, $x_f = 6$, $T_{min} \approx 5.52$, $T_{lim} \approx 5.8$ et $T_f = 8$.

Remarque 3.3 Nous remarquons que les trajectoires extrémales de la forme de celle présentée à la Figure 3.5f n'existent pas pour toute fonction de rendement non constante. En fait, dans le cas de la fonction de rendement montrée dans la Figure 3.1d, où $\rho(0) = 0.2$, une telle extrémale n'existe pas. Ce phénomène peut être compris comme une traduction du fait que le rapport entre le maximum et le minimum du rendement n'est pas assez important et qu'il est beaucoup plus intéressant de freiner seulement à vitesse faible.

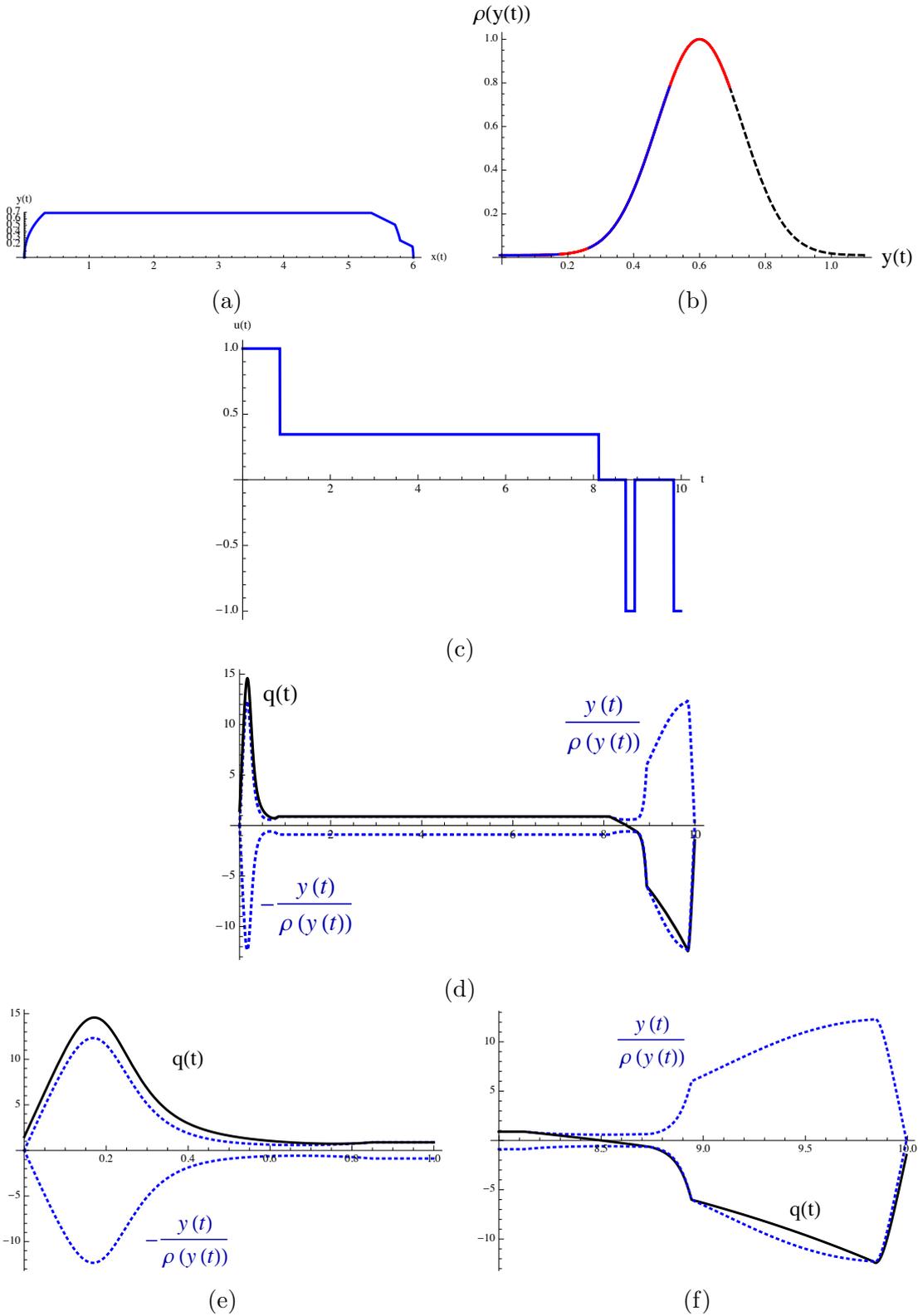


FIGURE 3.5 – Trajectoire optimale du problème (\mathcal{P}_3) avec une fonction de rendement non constante. Paramètres : $\alpha = 0.5$, $x_f = 6$, $T_{min} \approx 5.52$, $T_{lim} \approx 5.8$ et $T_f = 10$.

Chapitre 4

Un cas de route non plane

Dans ce chapitre, nous considérons un profil de route particulier, mais ne prenons pas en compte les frottements. Le problème est donc formulé de la manière suivante :

$$(\mathcal{P}_4) \left\{ \begin{array}{l} \text{Minimiser} \\ \text{Sous les contraintes} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} J(u) = \int_0^{T_f} \frac{|yu|}{\rho(y)} d\tau \\ (\Sigma_4) \left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = y \\ \dot{y} = u - \sin(\theta(x)) \end{array} \right. \quad \text{pour } t \in [0, T_f] \\ \\ X(0) = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X(T_f) = \begin{pmatrix} x(T_f) \\ y(T_f) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_f \\ 0 \end{pmatrix} \\ \\ |u(t)| \leq 1 \quad \text{pour } t \in [0, T_f] \\ \\ T_f > 0 \text{ est fixé.} \end{array}$$

Comme expliqué dans la section 1.1.1, le profil de la route est défini à l'aide d'une fonction $x \rightarrow \frac{\partial \theta}{\partial x}(x)$ et reconstruit numériquement. Le profil considéré dans cette partie du travail a le comportement suivant, représenté à la Figure 4.1 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta(x) \text{ est décroissante pour } x \in [-10, -6.5[\\ \theta(x) \text{ est croissante pour } x \in] - 6.5, -1[\\ \theta(x) \text{ est constant pour } x \geq -1 \end{array} \right.$$

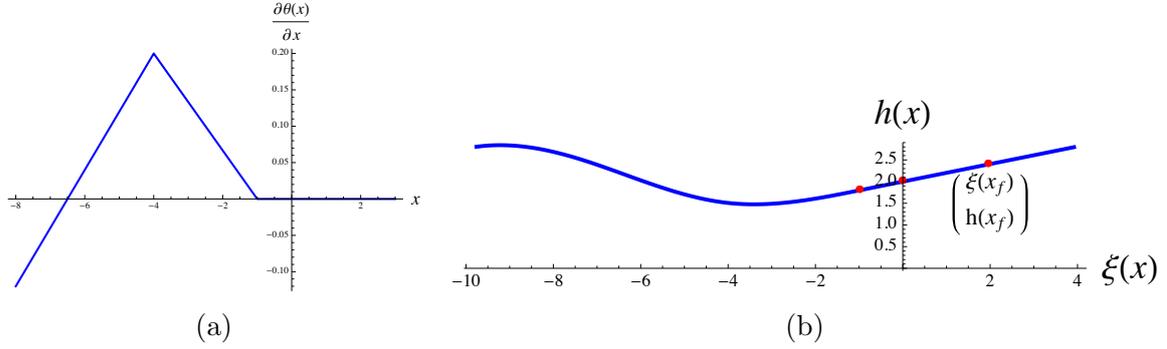


FIGURE 4.1 – Dérivée de θ par rapport à x et profil de la route dans les coordonnées (ξ, h) . Les points rouges figurant sur le profil de la route correspondent à $x = -1$, $x = 0$ et $x = x_f$, dans cet ordre.

Ce choix de profil a deux conséquences importantes sur l'ensemble des stratégies candidates à l'optimalité. Tout d'abord, le Lemme 1.2 ne s'applique plus systématiquement le long du profil considéré. Ainsi, les trajectoires présentant un (ou plusieurs) retour en arrière ne sont plus exclues de l'ensemble des solutions. Deuxièmement, on remarque que contrairement aux cas qui ont été précédemment traités, il est possible d'atteindre la vitesse $y(T_f) = 0$ à l'aide d'un contrôle nul sur un intervalle de temps de la forme $[T_f - \varepsilon, T_f]$. Ainsi, le raisonnement que nous avons utilisé précédemment pour conclure à la positivité du Hamiltonien le long d'une trajectoire extrémale doit être adapté lorsque cette situation se présente.

Dans le but de simplifier les notations, lorsqu'il n'y a aucune ambiguïté, nous notons $K = \sin(\theta(x))$ pour $x \geq -1$. La solution du système (Σ_4) , pour $x \geq -1$, un contrôle constant u , et en partant de l'état initial (x_0, y_0) est :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}(u - K)t^2 + y_0t + x_0 \\ y(t) = (u - K)t + y_0 \end{cases} \quad (4.1)$$

La solution temps minimal de (\mathcal{P}_4) est de type bang-bang — cf. équation (3.8) — et :

$$T_{min} = \frac{2\sqrt{x_f}}{\sqrt{1 - K^2}} \quad (4.2)$$

Le temps de commutation est noté t_c :

$$t_c = \frac{(1 + K)\sqrt{x_f}}{\sqrt{1 - K^2}}$$

Dans l'ensemble des simulations que nous présentons dans la suite de ce chapitre, les paramètres du problème sont les suivants : $x_f = 2$ et $K = 0.2$. Par conséquent, le

temps minimal est égal à $T_{min} \approx 2.885$.

Comme précédemment, dès que T_f est plus grand que T_{min} , il n'y a pas d'extrémale anormale.

Dans un premier temps, nous nous intéressons au problème (\mathcal{P}_4) uniquement dans le cas d'une fonction de rendement non-constante, cf. sections 4.1 et 4.2. Le cas particulier d'une fonction de rendement contante sera abordé quant-à-lui dans la section 4.3.

4.1 Analyse des extrémales sans retour en arrière

Nous allons tout d'abord nous intéresser aux trajectoires pour lesquelles la contrainte $y(T_f) = 0$ peut être atteinte à l'aide d'un contrôle nul sur un intervalle de la forme $]T_f - \varepsilon, T_f]$. En particulier, nous allons étudier dans quelle mesure une telle trajectoire peut être extrémale.

4.1.1 Trajectoires extrémales avec un contrôle $u(T_f) = 0$

Soit $T_f^{1,0}$, le temps nécessaire pour atteindre $X = (x_f, 0)$ avec la stratégie suivante :

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } t \in [0, t_c[\\ 0 & \text{pour } t \in [t_c, T_f^{1,0}] \end{cases} \quad (4.3)$$

Nous calculons les valeurs de $T_f^{1,0}$ et t_c explicitement en fonction de K et x_f à l'aide de la solution (4.1) :

$$T_f^{1,0} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{x_f}}{\sqrt{(1-K)K}} \quad \text{et} \quad t_c = \frac{\sqrt{2}K\sqrt{x_f}}{\sqrt{(1-K)K}} \quad (4.4)$$

Lemme 4.1 1. Si la séquence de contrôle (4.3) est extrémale, alors le Hamiltonien H est nul le long de la trajectoire correspondante ;

2. nous avons l'équivalence suivante :

$$\rho'(y(t_c)) \geq 0 \quad \iff \quad (4.3) \text{ est une stratégie extrémale}$$

Preuve 4.1 1. Pour tout $x \geq -1$, le Hamiltonien s'écrit :

$$\mathcal{H}(-1, \mathcal{P}, X, u) = -\frac{|yu|}{\rho(y)} + py + q(u - K).$$

Pour une trajectoire extrémale donnée par la stratégie (4.3), $u(T_f) = 0$ et $\frac{y(T_f)}{\rho(y(T_f))} \leq q(T_f) \leq -\frac{y(T_f)}{\rho(y(T_f))}$. Puisque $y(T_f) = 0$, alors $q(T_f) = 0$, et le Hamiltonien au temps T_f est :

$$H = -\frac{|y_f u_f|}{\rho(y_f)} + p_f y_f + q_f (u - K) = 0.$$

où $y_f = y(T_f)$, $q_f = q(T_f)$ et $p_f = p(T_f)$.

2. (a) $\rho'(y(t_c)) \geq 0 \Rightarrow$ **(4.3) est une stratégie extrémale.**

Supposons que $\rho'(y_c) \geq 0$, avec $y_c = y(t_c)$. Puisque $u = 1$ sur $]0, T_c[$, alors $y \geq 0$ sur $]0, t_c]$.

Soient $p = p_0$ une constante, et $q(t)$ la solution de

$$\begin{aligned} \dot{q} &= -\frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{y}{\rho(y)} + py + q(1-K) \right) \quad \text{avec } q(0) = 0 \\ &= -p + |u| \left(\frac{1}{\rho(y)} - \frac{y\rho'(y)}{\rho^2(y)} \right) \end{aligned}$$

Nous calculons maintenant la dérivée de $\mathcal{H}(-1, \mathcal{P}, X, u)$ par rapport au temps t sur $]0, t_c[$. Rappelons que $y > 0$ et u est constant, ce qui produit $\dot{\mathcal{H}} = 0$. Par conséquent, \mathcal{H} est constant sur $[0, t_c]$ par continuité.

Maintenant, nous posons $q_0 = q(0) = 0$, ce qui implique $\mathcal{H}|_{t=0} = 0$, et ainsi $\mathcal{H}|_{t=t_c} = 0$.

Le temps de commutation t_c se produit lorsque $q(t_c) = \frac{y_c}{\rho(y_c)}$ et cela est vrai si $p_0 = \frac{K}{\rho(y_c)}$. En effet, d'après l'analyse faite précédemment, nous avons :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}|_{t=t_c} &= 0 \\ p_0 y_c + q_c \left(u - K \right) - \frac{y_c |u|}{\rho(y_c)} &= 0 \\ p_0 y_c + \frac{y_c}{\rho(y_c)} \left(u - K \right) - \frac{y_c |u|}{\rho(y_c)} &= 0 \\ y_c \left(p_0 - \frac{K}{\rho(y_c)} \right) &= 0 \end{aligned}$$

Par conséquent, $p_0 = \frac{K}{\rho(y_c)}$, car $y_c \neq 0$.

Afin de montrer que (4.3) est une stratégie extrémale, il nous reste encore à démontrer les deux inégalités suivantes :

- i. $q(t) > \frac{y}{\rho(y)}$ sur $]0, t_c[$;
- ii. $-\frac{y}{\rho(y)} < q(t) < \frac{y}{\rho(y)}$ sur $]t_c, T_f^{1,0}[$.

— Sur $]0, t_c[$:

comme nous supposons $u(t) = 1$ sur $]0, t_c[$, nous devons montrer que $q(t) > \frac{y}{\rho(y)}$ sur cet intervalle.

De ce qui précède, nous avons $H = 0$, ce qui implique :

$$-\frac{y}{\rho(y)} + p_0 y + q(1-K) = 0$$

Par conséquent :

$$q = \frac{y}{1-K} \left(\frac{1}{\rho(y)} - p_0 \right)$$

Maintenant, nous calculons la quantité $q - \frac{y}{\rho(y)}$, afin d'étudier son signe :

$$\begin{aligned} q - \frac{y}{\rho(y)} &= \frac{y}{1-K} \left(\frac{1}{\rho(y)} - p_0 \right) - \frac{y}{\rho(y)} \\ &= \frac{y}{\rho(y)} \left(\frac{1}{1-K} - 1 \right) - \frac{y}{1-K} p_0 \end{aligned}$$

Après quelques manipulations, et en remplaçant p_0 par $\frac{K}{\rho(y_c)}$, nous obtenons :

$$q - \frac{y}{\rho(y)} = \frac{K}{1-K} \left(\frac{1}{\rho(y)} - \frac{1}{\rho(y_c)} \right) y$$

D'après la supposition $\rho'(y_c) \geq 0$ et $0 < y(t) < y_c$ sur $]0, t_c[$, alors $\left(\frac{1}{\rho(y)} - \frac{1}{\rho(y_c)} \right) > 0$. Nous en déduisons $q > \frac{y}{\rho(y)}$.

— Sur $]t_c, T_f^{1,0}[$:

comme nous supposons $u = 0$ sur $]t_c, T_f^{1,0}[$, nous devons montrer que

$$-\frac{y(t)}{\rho(y(t))} < q(t) < \frac{y(t)}{\rho(y(t))} \text{ sur cet intervalle.}$$

Soit $\bar{t} = t - t_c$, la solution du système (Σ_4) pour $t > t_c$ avec $u = 0$ est :

$$y(\bar{t}) = -K\bar{t} + y_c \quad \text{et} \quad q(\bar{t}) = -p_0\bar{t} + q(t_c) = -\frac{K}{\rho(y_c)}\bar{t} + \frac{y_c}{\rho(y_c)}$$

La contrainte $y(T_f^{1,0}) = 0$ nous permet d'avoir :

$$T_f^{1,0} - t_c = \frac{y_c}{K}$$

Remplaçons cette dernière formule dans $q(\bar{t})$:

$$\begin{aligned} q(\bar{t}) &= -\frac{K}{\rho(y_c)}\bar{t} + \frac{y_c}{\rho(y_c)} \\ q(T_f^{1,0}) &= -\frac{K}{\rho(y_c)}(T_f^{1,0} - t_c) + \frac{y_c}{\rho(y_c)} \\ q(T_f^{1,0}) &= -\frac{K}{\rho(y_c)} \times \frac{y_c}{K} + \frac{y_c}{\rho(y_c)} \end{aligned}$$

Par conséquent $q(T_f^{1,0}) = 0$ et trivialement $-\frac{y}{\rho(y)} < q$ sur $]t_c, T_f^{1,0}[$.
 Finalement, il nous reste à montrer que $q(t) < \frac{y}{\rho(y)}$ sur cet intervalle.
 Nous allons maintenant déterminer le signe de $q - \frac{y}{\rho(y)}$:

$$\begin{aligned} q - \frac{y}{\rho(y)} &= \frac{y_c}{\rho(y_c)} - \frac{K}{\rho(y_c)} \bar{t} - \frac{y}{\rho(y)} \\ &= \frac{y_c}{\rho(y_c)} - \frac{K}{\rho(y_c)} \bar{t} - \frac{y_c - K\bar{t}}{\rho(y)} \\ &< \frac{y_c}{\rho(y_c)} - \frac{K}{\rho(y_c)} \bar{t} - \frac{y_c - K\bar{t}}{\rho(y_c)} = 0 \quad (\text{puisque } y < y_c) \text{ et } (y_c - K\bar{t} > 0) \end{aligned}$$

D'après les règles (2.13), la stratégie (4.3) est extrémale puisque :

- i. $u = 1$ et $q(t) > \frac{y}{\rho(y)}$ sur $]0, t_c[$;
- ii. $u = 0$ et $-\frac{y}{\rho(y)} < q(t) < \frac{y}{\rho(y)}$ sur $]t_c, T_f^{1,0}[$.

(b) $\rho'(y(t_c)) \geq 0 \iff$ (4.3) est une stratégie extrémale.

Supposons que $\rho'(y_c) < 0$, avec $y_c = y(t_c)$. Cette partie de la démonstration fait appel à la quantité $\kappa(t)$. Nous considérons $\kappa(t) = \frac{q\rho(y)}{y}$ sur un intervalle de temps comprenant t_c et tel que $y > 0$. Nous supposons que (4.3) est une stratégie extrémale. Ensuite, nous calculons la dérivée de $\kappa(t)$ par rapport au temps sur cet intervalle :

$$\dot{\kappa}(t) = -\frac{H\rho(y)}{y^2} - \frac{|u|\rho'(y)}{\rho(y)} + \kappa(t)\frac{\rho'(y)}{\rho(y)}\dot{y} \quad (4.5)$$

Lorsque $t = t_c$, nous avons $\kappa(t_c) = 1$ et $u \geq 0$, ce qui produit $\dot{\kappa}(t_c) = -\frac{\rho'(y(t_c))}{\rho(y(t_c))}K$ puisque $H = 0$. Par conséquent, une commutation du contrôle ne peut avoir lieu puisque $\dot{\kappa}(t_c) > 0$. Ceci contredit le fait que (4.3) est une trajectoire extrémale. ■

D'après le Lemme 4.1, lorsque $\rho'(y_c) < 0$ la stratégie (4.3) n'est pas extrémale. Il est donc naturel de se poser la question suivante : que se passe-t-il lorsque $\rho'(y_c) < 0$? En s'inspirant des solutions qui ont été trouvées à la section 3.2, la possibilité de la présence d'un arc singulier vient à l'esprit.

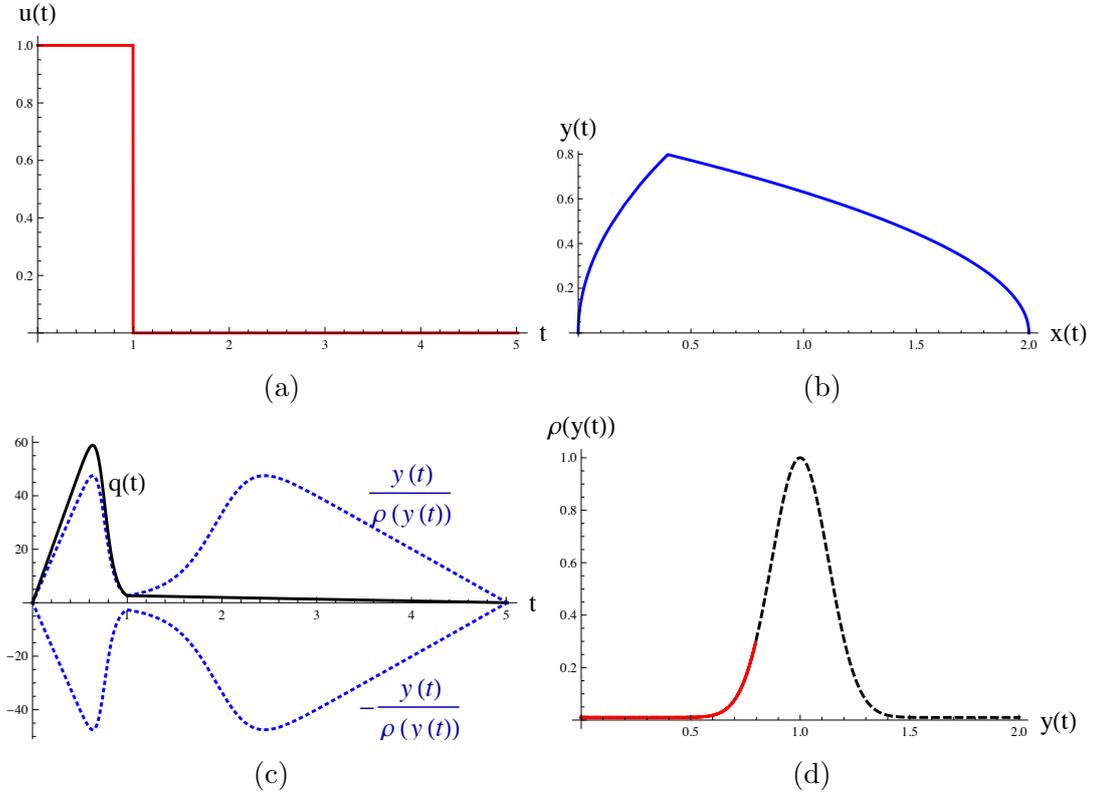


FIGURE 4.2 – Trajectoire extrême correspondant à la stratégie (4.3), $T_f^{1,0} \approx 5.01$.
Le coût associé est égal à 23.9346.

Comme nous l'avons vu dans la section 2.3, si $\theta(x)$ est constant, alors les arcs singuliers sont de la forme $\dot{y} = 0$. On se propose d'étudier une stratégie de la forme :

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } t \in [0, t_c[\\ K & \text{pour } t \in [t_c, t_c + t_{sing}[\\ 0 & \text{pour } t \in [t_c + t_{sing}, T_f^{1,s,0}] \end{cases} \quad (4.6)$$

La trajectoire de (Σ_4) associée à ce contrôle possède un arc singulier sur l'intervalle de temps $[t_c, t_c + t_{sing}[$. Ce dernier peut être aussi large que nécessaire de sorte à vérifier la contrainte $x(T_f) = x_f$. Cette stratégie est illustrée dans la Figure 4.3.

Lemme 4.2 1. Le temps final $T_f^{1,s,0}$ est déterminé de façon unique ;

2. Si nous supposons que la stratégie (4.6) est extrême, alors :

(a) $H = 0$;

(b) Un arc singulier peut se produire si et seulement si $\rho'(y(t_c)) = 0$;

3. Si la stratégie (4.3) n'est pas extrême, alors la stratégie (4.6) est extrême avec

$$p_0 = \frac{K}{\rho(y_c)} \quad \text{et} \quad q_0 = 0$$

Preuve 4.2 1. Le temps final $T_f^{1,s,0}$ est calculé de la manière suivante :

- t_c est calculé de sorte à ce que la fonction de rendement $\rho(\cdot)$ atteigne son maximum sur $\mathbb{R}^{+,*}$ à $y(t_c)$;
- t_{sing} et $T_f^{1,s,0}$ sont calculés en utilisant les deux contraintes $y(T_f^{1,s,0}) = 0$ et $x(T_f^{1,s,0}) = x_f$.

(a) La preuve est identique à celle du premier point du Lemme 4.1.

(b) la dérivée de la quantité $\kappa = \frac{q\rho(y)}{y}$ par rapport au temps est calculée au temps t_c , ce qui donne $\dot{\kappa}(t_c) = -\frac{\rho'(y(t_c))}{\rho(y(t_c))}K$, puisque $H = 0$ — voir la formule (4.5). Un arc singulier existe le long d'un intervalle $[t_c, t_c + t_{sing}[$, $t_{sing} > 0$ si $\dot{\kappa}(t_c) = 0$, ce qui se produit uniquement lorsque $\rho'(y_c) = 0$.

2. La preuve est basée sur des arguments similaires à ceux du Lemme 4.1.

Les valeurs de p_0 et de q_0 sont déterminées comme suit. Comme $H = 0$ alors $q_0 = 0$. Le long de l'arc singulier le Hamiltonien est : $H = y_c \left(p_0 - \frac{K}{\rho(y_c)} \right) = 0$, et par conséquent $p_0 = \frac{K}{\rho(y_c)}$ puisque $y_c \neq 0$, où $y_c = y(t_c)$. ■

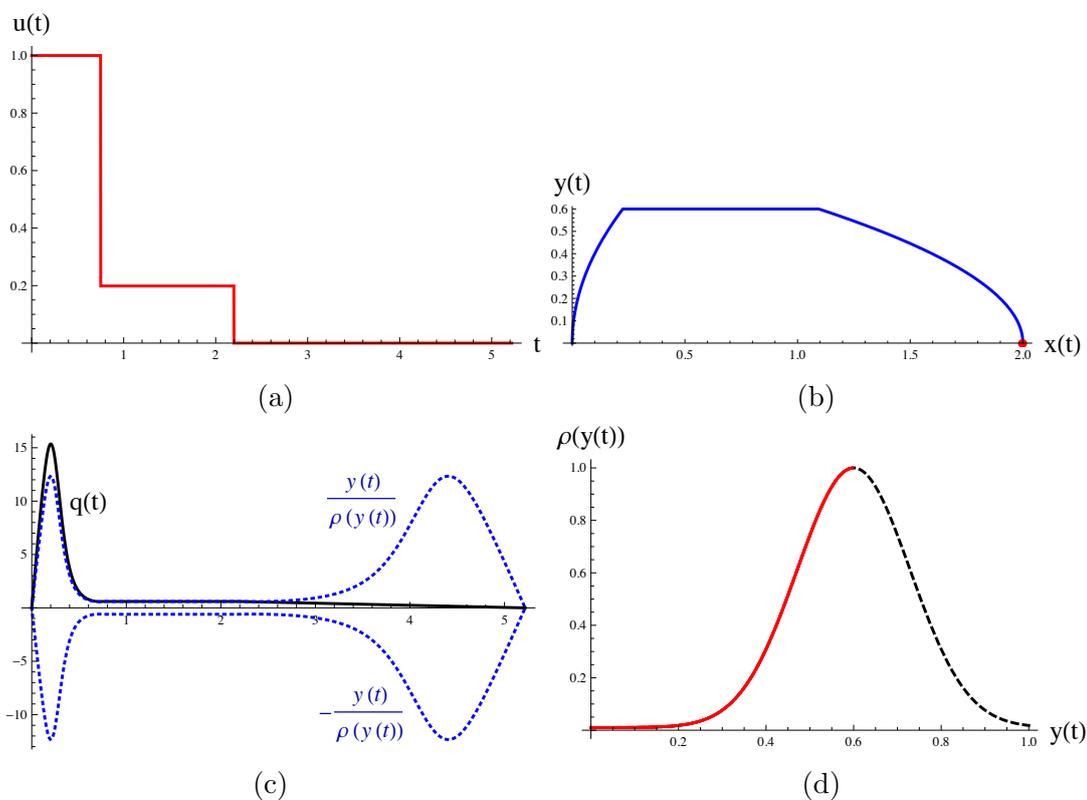


FIGURE 4.3 – Trajectoire extrémale correspondante à la stratégie (4.6), $T_f^{1,s,0} = 5.2177$. Le coût associé est égal à 3.605.

Remarque 4.1 Les stratégies (4.3) et (4.6) ne peuvent pas toutes deux être extrémales.

Présence d'un arc singulier en début ou en fin de trajectoire

Supposons maintenant que la stratégie (4.3) soit extrême et considérons un temps final $T_f > T_f^{1,0}$. Nous savons d'une part que si une trajectoire extrême possède un arc singulier de la forme $y = 0, \dot{y} = 0$, alors $H = 0$. De plus, nous avons vu dans la section précédente que lorsque (4.3) est extrême, alors $H = 0$. Nous en concluons que si la stratégie (4.3) est extrême, alors pour tout $T_f > T_f^{1,0}$, la stratégie suivante est aussi extrême :

$$u(t) = \begin{cases} K & \text{pour } t \in [0, t_1[\\ 1 & \text{pour } t \in [t_1, t_1 + t_c[\\ 0 & \text{pour } t \in [t_1 + t_c, T_f - t_2[\\ K & \text{pour } t \in [T_f - t_2, T_f[\end{cases} \quad (4.7)$$

où $t_1 \geq 0, t_2 \geq 0$ et $t_1 + t_2 = T_f - T_f^{1,0}$. Cette stratégie est illustrée dans la Figure 4.4.

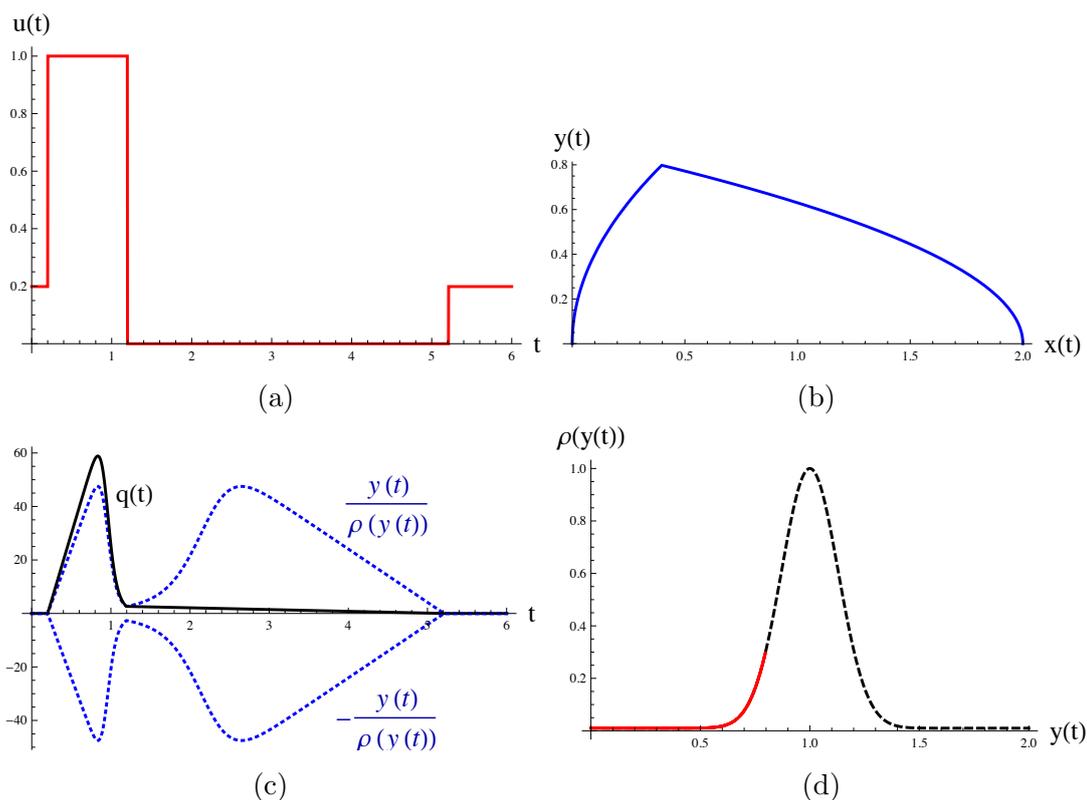


FIGURE 4.4 – Trajectoire extrême correspondante à la stratégie (4.7), $T_f = 6$.
Le coût associé est égal à 23.9346.

Pour les mêmes raisons, lorsque la stratégie (4.6) est extrême, alors pour tout

$T_f > T_f^{1,s,0}$ la stratégie suivante est aussi extrémale :

$$u(t) = \begin{cases} K & \text{pour } t \in [0, t_1[\\ 1 & \text{pour } t \in [t_1, t_1 + t_c[\\ K & \text{pour } t \in [t_1 + t_c, t_1 + t_c + t_{sing}[\\ 0 & \text{pour } t \in [t_1 + t_c + t_{sing}, T_f - t_2[\\ K & \text{pour } t \in [T_f - t_2, T_f] \end{cases} \quad (4.8)$$

où $t_1 \geq 0$, $t_2 \geq 0$ et $t_1 + t_2 = T_f - T_f^{1,s,0}$. Cette stratégie est illustrée dans la Figure 4.5.

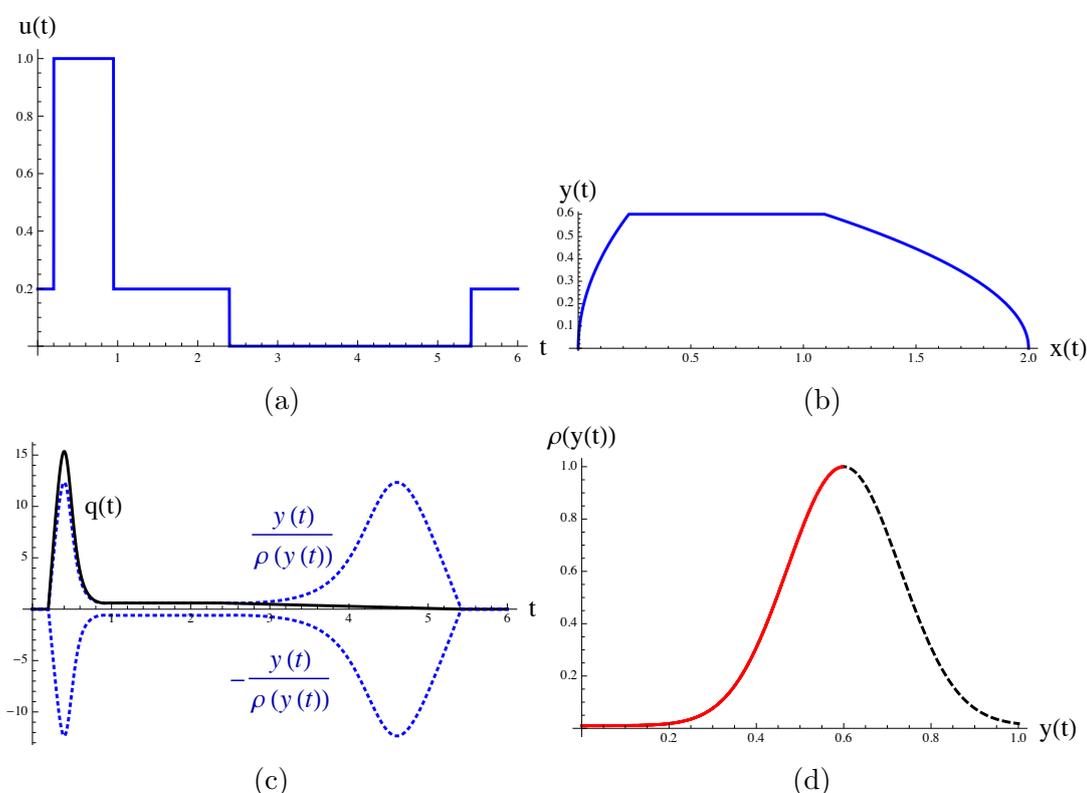


FIGURE 4.5 – Trajectoire extrémale correspondante à la stratégie (4.6), $T_f = 6$.
Le coût associé est égal à 3.605.

Remarque 4.2 Dès que (4.3) est extrémale et que $T_f > T_f^{1,0}$, il existe une infinité de stratégies extrémales de la forme (4.7). Toutes ces stratégies ont le même coût. Ceci est aussi valable pour les stratégies (4.6), (4.8) pour $T_f > T_f^{1,s,0}$.

4.1.2 Autres trajectoires extrémales sans retour en arrière

Supposons que le temps final soit inférieur à $T_f < T_f^{1,0}$ ou $T_f < T_f^{1,s,0}$, en fonction de la configuration du problème, alors les trajectoires présentées précédemment

ne sont pas extrémales. Quelles sont les stratégies extrémales permettant d'atteindre $(x_f, 0)$ depuis $(0, 0)$ en temps plus petit que celui donné par les stratégies (4.3) et (4.6)? En nous inspirant des résultats du chapitre précédent, nous allons examiner les stratégies suivantes :

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{sur } t \in [0, t_1[\\ 0 & \text{sur } t \in [t_1, t_2[\\ -1 & \text{sur } t \in [t_2, T_f] \end{cases} \quad u(t) = \begin{cases} 1 & \text{sur } t \in [0, t_1[\\ K & \text{sur } t \in [t_1, t_2[\\ 0 & \text{sur } t \in [t_2, t_3[\\ -1 & \text{sur } t \in [t_3, T_f] \end{cases} \quad u(t) = \begin{cases} 1 & \text{sur } t \in [0, t_1[\\ K & \text{sur } t \in [t_1, t_2[\\ 0 & \text{sur } t \in [t_2, t_3[\\ -1 & \text{sur } t \in [t_3, t_4[\\ 0 & \text{sur } t \in [t_4, t_5[\\ -1 & \text{sur } t \in [t_5, T_f] \end{cases}$$

Lemme 4.3 *Etant donné le contrôle :*

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{sur } t \in [0, t_1[\\ 0 & \text{sur } t \in [t_1, t_2[\\ -1 & \text{sur } t \in [t_2, T_f] \end{cases} \quad (4.9)$$

Si cette stratégie est extrémale, alors nous pouvons calculer :

1. les temps de commutations t_1 et t_2 pour tout $T_f > T_{\min}$ et pour tout x_f ;
2. les valeurs de p_0 et de q_0 .

Preuve 4.3 1. Les valeurs de x_f et T_f étant données, les deux contraintes $y(T_f) = 0$ et $x(T_f) = x_f$ nous permettent de calculer explicitement les temps de commutations de t_1 et de t_2 à l'aide de la solution (4.1) :

$$\begin{cases} t_1 = T_f(1 + K) - t_2 \\ t_2 = \frac{1}{2} \left(T_f(1 + K) + \sqrt{(1 - K^2)T_f^2 - 4x_f} \right) \end{cases}$$

2. Les conditions initiales des vecteurs adjoints p_0 et q_0 sont calculés de la manière suivante :

— p_0 est déterminé le long d'arc où le contrôle u est égal à zéro. En effet, sur $t \in [t_1, t_2[$, $u = 0$, alors : $\dot{q} = -p_0$, et $q(t) = -p_0 t + q_1$ où $q_1 = q(t_1)$ et ainsi $q_1 = \frac{y_1}{\rho(y_1)}$, avec $y_1 = y(t_1)$.

Au point $t = t_2$, nous avons $q_2 = -\frac{y_2}{\rho(y_2)}$, où $q_2 = q(t_2)$ et $y_2 = y(t_2)$. Le long de cet arc :

$$-\frac{y_2}{\rho(y_2)} = -p_0 + \frac{y_1}{\rho(y_1)}$$

Par conséquent :

$$p_0 = \frac{y_2 + y_1}{\rho(y_2) + \rho(y_1)}.$$

— q_0 est calculé en combinant le Hamiltonien donné au temps initial $t = 0$ et celui formulé le long de l'arc $[t_1, t_2]$, i.e. $q_0(1 - K) = p_0 y_1 - K \frac{y_1}{\rho(y_1)}$. Par conséquent :

$$q_0 = \frac{y_1}{1 - K} \left(p_0 - \frac{K}{\rho(y_1)} \right)$$

■

Cette stratégie est illustrée dans la Figure 4.6.

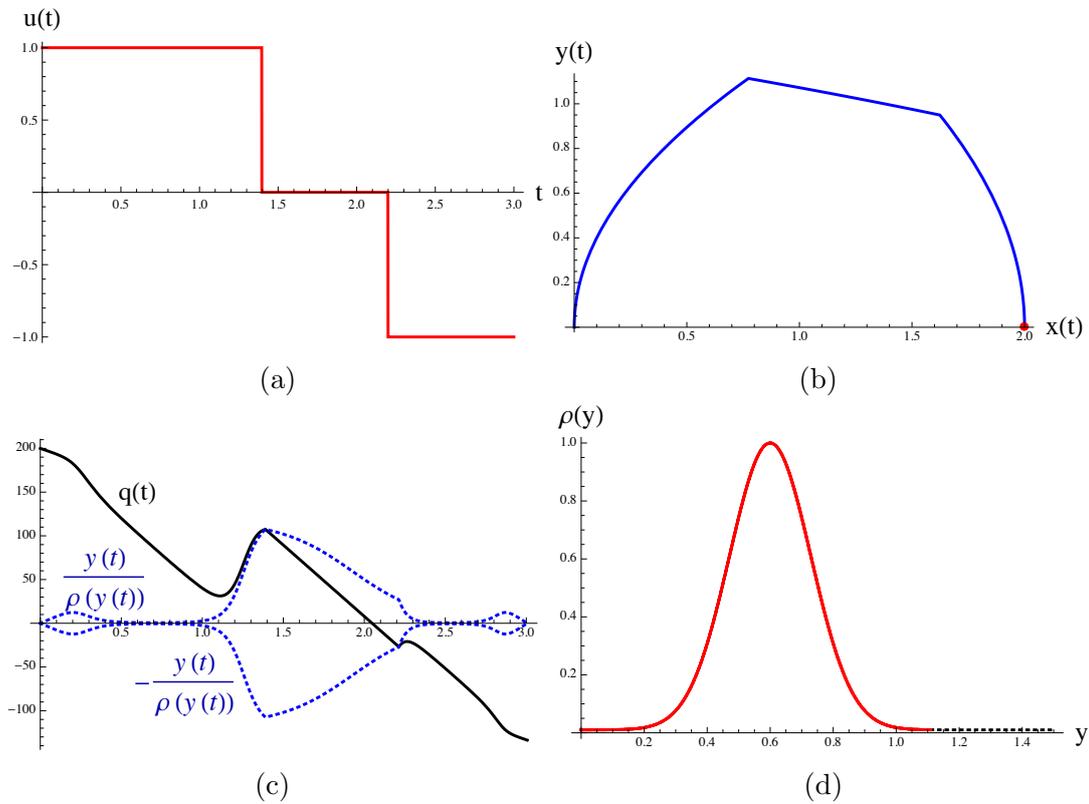


FIGURE 4.6 – Trajectoire extrême correspondante à la stratégie (4.9), $T_f = 3$.
Le coût associé est égal à 25.0324

Remarque 4.3 En pratique lorsque la stratégie (4.3) est extrême, alors la stratégie (4.9) est aussi extrême pour tout $T_f < T_f^{1,0}$.

Lemme 4.4 Considérons le contrôle :

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } t \in [0, t_1[\\ K & \text{pour } t \in [t_1, t_2[\\ 0 & \text{pour } t \in [t_2, t_3[\\ -1 & \text{pour } t \in [t_3, T_f] \end{cases} \quad (4.10)$$

Si cette stratégie est extrémale, alors :

1. Les conditions initiales des vecteurs adjoints p_0 et q_0 sont données par les deux expressions ci-dessous, où $y_s = y(t_1)$:

$$p_0 = K \left(\frac{1}{\rho(y_s)} - \frac{y_s \rho'(y_s)}{\rho(y_s)^2} \right) \quad (4.11)$$

$$q_0 = \frac{K y_s^2 \rho'(y_s)}{(K-1)\rho(y_s)^2} \quad (4.12)$$

2. La dérivée de la fonction de rendement est négative au temps $t = t_1$ — i.e. $\rho'(y_1) < 0$.

Preuve 4.4 1. Les expressions de p_0 et de q_0 sont obtenues de la manière suivante : sur l'intervalle $[t_1, t_2]$, nous avons $q = \frac{y}{\rho(y)}$ et $\dot{y} = 0$, ce qui implique que $\dot{q} = 0$ le long de cet arc singulier, on obtient donc :

$$\begin{aligned} -p_0 + |u| \left(\frac{1}{\rho(y)} - \frac{y \rho'(y)}{\rho(y)^2} \right) &= 0 \\ -p_0 + K \left(\frac{1}{\rho(y_s)} - \frac{y_s \rho'(y_s)}{\rho(y_s)^2} \right) &= 0 \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$p_0 = K \left(\frac{1}{\rho(y_s)} - \frac{y_s \rho'(y_s)}{\rho(y_s)^2} \right)$$

D'autre part, le long de cet arc singulier, le Hamiltonien est :

$$\begin{aligned} H &= p_0 y_s + q_s (K - K) - \frac{K y_s}{\rho(y_s)} \\ &= p_0 y_s - \frac{K y_s}{\rho(y_s)} \end{aligned}$$

En combinant cette dernière formule avec l'expression du Hamiltonien au temps $t = 0$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} q_0(1 - K) &= p_0 y_s - \frac{K y_s}{\rho(y_s)} \\ &= K \left(\frac{1}{\rho(y_s)} - \frac{y_s \rho'(y_s)}{\rho(y_s)^2} \right) y_s - \frac{K y_s}{\rho(y_s)} \\ &= -K \frac{y_s^2 \rho'(y_s)}{\rho(y_s)^2} \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$q_0 = \frac{K y_s^2 \rho'(y_s)}{(K-1)\rho(y_s)^2}$$

2. La dérivée de la quantité de $\kappa(t)$ est donnée par l'équation (4.5). Le long d'un arc singulier cette formule devient :

$$\dot{\kappa}(t) = -\frac{H\rho(y)}{y^2} - \frac{K\rho'(y)}{\rho(y)}$$

D'après les règles (2.13), un arc singulier existe si et seulement si $\dot{\kappa}(t) = 0$ et cela ne peut se produire que si $\rho'(y) < 0$. ■

Remarquons que la stratégie (4.10) est similaire à celle de (3.14) — voir Chapitre 3. Afin de calculer une trajectoire extrémale associée à la stratégie (4.10), nous utilisons la méthodologie qui a été développée pour la stratégie (3.14). La stratégie (4.10) est illustrée dans la Figure 4.7.

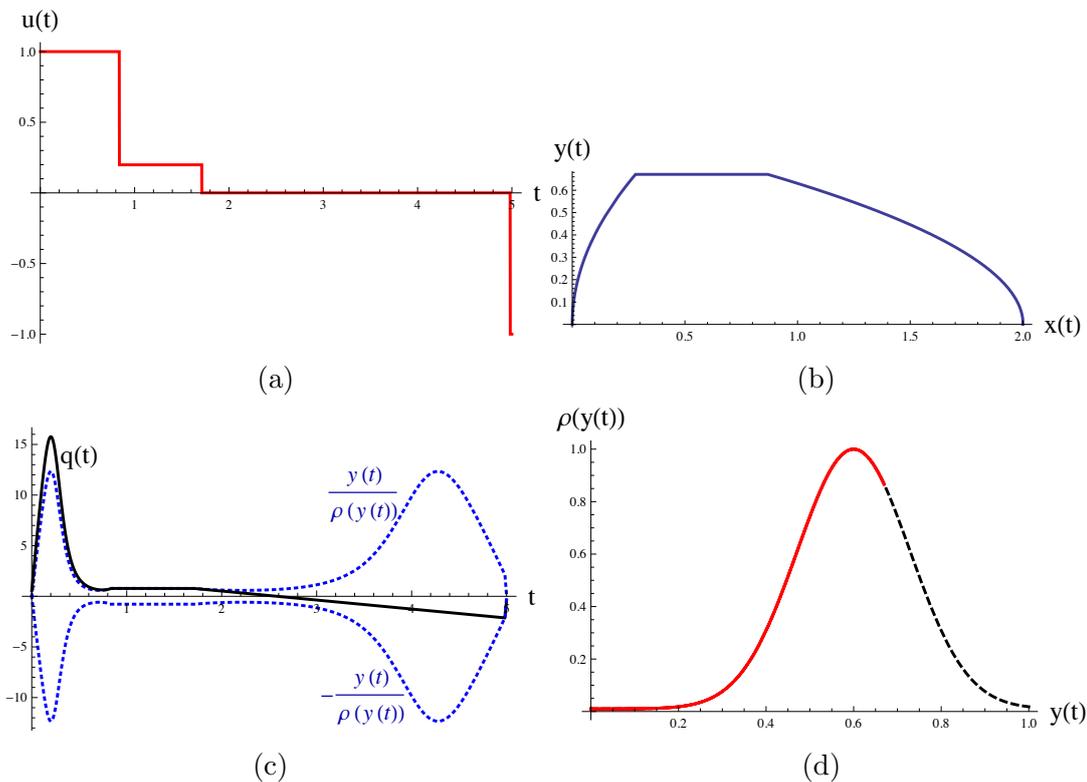


FIGURE 4.7 – Trajectoire extrémale correspondant à la stratégie (4.10), $T_f = 5$.
Le coût associé est égal à 3.6466.

Lemme 4.5 *Considérons le contrôle :*

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } t \in [0, t_1[\\ K & \text{pour } t \in [t_1, t_2[\\ 0 & \text{pour } t \in [t_2, t_3[\\ -1 & \text{pour } t \in [t_3, t_4[\\ 0 & \text{pour } t \in [t_4, t_5[\\ -1 & \text{pour } t \in [t_5, T_f] \end{cases} \quad (4.13)$$

Preuve 4.5 *Comme précédemment, si cette dernière stratégie est extrémale, alors les conditions initiales des vecteurs adjoints p_0 et q_0 sont données par le Lemme 4.4.*

Remarque 4.4 — *En pratique, si $T_f^{1,s,0}$ est extrémale, alors nous observons l'existence d'un temps T_{lim} tel que pour tout $T_f \in]T_{lim}, T_f^{1,s,0}[$, une des deux stratégies (4.10) ou (4.13) est extrémale.*

— *Si l'une des stratégies (4.9), (4.10) et (4.13) est extrémale, alors les deux autres ne le sont pas.*

La stratégie (4.13) est illustrée dans la Figure 4.8.

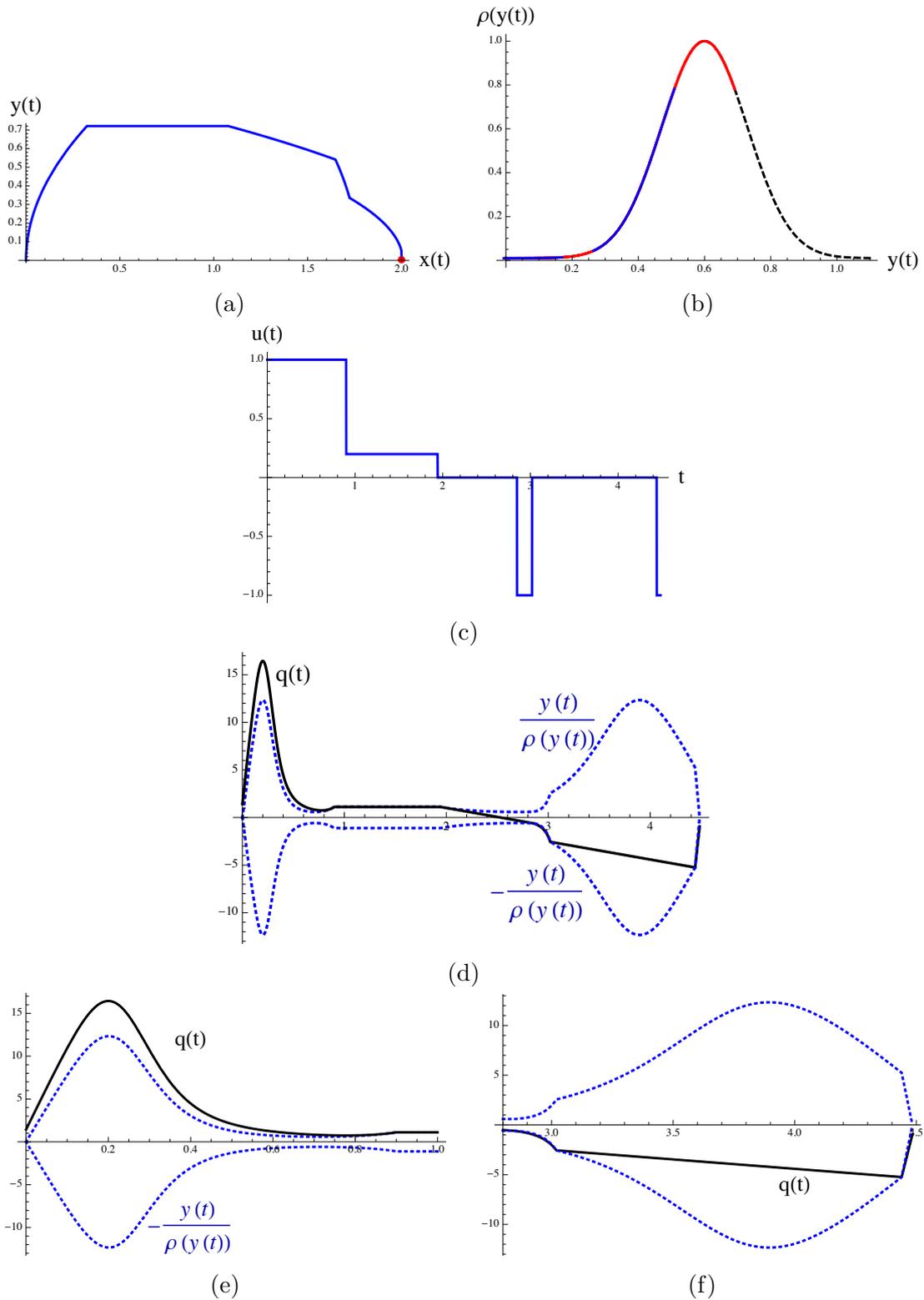


FIGURE 4.8 – Trajectoire extrême correspondant à la stratégie (4.13), $T_f = 4.48$. Le coût associé est égal à 4.0792. Figure 4.8b : les parties du graphe tracées en bleu correspondent aux moments où $u = -1$.

4.2 Résolution du problème de contrôle optimal

4.2.1 Trajectoire en temps petit

Nous allons maintenant définir le temps T_{back} comme suit :

$$T_{back} = \max_{\mathbb{R}^{+*}} \left\{ T_f \text{ tel que } \forall u \in L^1_{[0, T_f]} \begin{cases} X(0) = X_0, X(T_f) = X_f \\ \theta(x(t)) = \theta(0) \end{cases} \forall t \in [0, T_f] \right\}$$

Nous appelons **trajectoire en temps petit** une trajectoire qui possède un temps final T_f inclut dans l'intervalle $]T_{min}, T_{small}]$. où $T_{small} = \min(T_{back}, T_f^{1,0})$.

Lemme 4.6 trajectoires en temps petit

1. Une trajectoire optimale de (\mathcal{P}_4) pour $T_f < T_{back}$ n'admet pas de retour en arrière.
2. Les extrémales en temps petit de (\mathcal{P}_4) ne contiennent pas d'arc singulier de la forme $y = 0$.
3. Si y_s est la vitesse constante de l'arc singulier extrémal en temps petit, alors $\frac{\partial \rho}{\partial y}(y_s) < 0$.
4. Considérons une trajectoire extrémale en temps petit contenant un arc singulier, et notant la vitesse constante y_s . Les conditions initiales des vecteurs adjoints p_0 et q_0 sont données par :

$$\begin{cases} p_0 = K \left(\frac{1}{\rho(y_s)} - \frac{y_s \rho'(y_s)}{\rho(y_s)^2} \right) \\ q_0 = \frac{K y_s^2 \rho'(y_s)}{(K-1)\rho(y_s)^2} \end{cases} \quad (4.14)$$

Preuve 4.6 1. Puisque $T_f < T_{back}$, les trajectoires $(x(t), y(t))$ de (\mathcal{P}_4) partant de $(0, 0)$ peuvent atteindre $(x_f, 0)$ seulement en restant sur la partie de la route telle que $\theta(x(t))$ est constant. Par conséquent, (\mathcal{P}_4) peut être considéré comme un problème invariant par translations le long de l'axe Ox . D'après le Lemme 1.2, une telle trajectoire optimale n'admet pas de retour en arrière.

2. Une extrémale en temps petit ne peut pas atteindre $y(T_f) = 0$ avec une stratégie de la forme (4.3), le contrôle u doit donc devenir négatif. Par conséquent, il existe un intervalle non-trivial de la forme $]\tilde{t}, \bar{t}[$ tel que :

- $y > 0$ pour tout $t \in]\tilde{t}, \bar{t}[$ et la quantité $\kappa(t) = \frac{q\rho(y)}{y}$ existe pour tout $t \in]\tilde{t}, \bar{t}[$;
- $\kappa(\tilde{t}) = 1$ et $\kappa(\bar{t}) = -1$
- Il y a un temps $t^* \in]\tilde{t}, \bar{t}[$ tel que $\kappa(t^*) = 0$ et $\dot{\kappa}(t^*) < 0$.

La dérivée de $\kappa(t)$ par rapport au temps, sur cet intervalle est à nouveau donnée par l'équation (4.5). Lorsque $\kappa(t^*) = 0$, nous avons $u = 0$ et $\dot{\kappa}(t^*) = -\frac{H\rho(y)}{y^2}$, alors H doit être strictement positif afin de réaliser $\dot{\kappa}(t^*) < 0$. Un arc singulier avec $y = 0$ n'existe pas puisque cela implique $H = 0$.

3. Comme précédemment, nous définissons la quantité $\kappa(t) = \frac{q\rho(y)}{y}$ sur les intervalles avec $y \neq 0$, et nous trouvons une expression de $\dot{\kappa}(t)$ — voir l'équation (4.5) ci-dessous. Le long d'un arc singulier, nous avons $\kappa(t) = 1$ et $\dot{\kappa}(t) = 0$, et selon l'expression (4.5), nous obtenons l'égalité suivante :

$$0 = -\frac{H\rho(y)}{y^2} - \frac{K\rho'(y)}{\rho(y)}$$

Ce qui ne peut être vrai si $\rho'(y)$ est négatif.

4. Les deux expressions sont facilement obtenues comme suit :

— la résolution de l'équation $0 = -\frac{H\rho(y_s)}{y_s^2} - \frac{K\rho'(y_s)}{\rho(y_s)}$ pour H , puisque $\dot{y} = 0$ le long un arc singulier. Par conséquent : $H = -\frac{Ky_s^2\rho'(y_s)}{\rho(y_s)^2}$.

— la relation $H = q_0(u(0) - K) = q_0(1 - K)$ produit l'expression de q_0 . En effet, $-\frac{Ky_s^2\rho'(y_s)}{\rho(y_s)^2} = q_0(1 - K)$ et ce qui implique :

$$q_0 = \frac{Ky_s^2\rho'(y_s)}{(K - 1)\rho(y_s)^2}$$

— finalement, l'écriture du Hamiltonien H le long un arc singulier, $H = p_0y_s - \frac{y_s}{\rho(y_s)}K$, nous permet de fournir l'expression de p_0 . Par conséquent, $-\frac{Ky_s^2\rho'(y_s)}{\rho(y_s)^2} = p_0y_s - \frac{y_s}{\rho(y_s)}K$ et ainsi :

$$p_0 = K\left(\frac{1}{\rho(y_s)} - \frac{y_s\rho'(y_s)}{\rho(y_s)^2}\right).$$

■

4.2.2 Méthodologie

Le problème de contrôle optimal (\mathcal{P}_4) pour le profil de route représenté à la Figure 4.1, est résolu en suivant la méthodologie ci-dessous.

Nous cherchons dans un premier temps à déterminer l'ensemble des extrémales sans retour en arrière, en fonction de la valeur du temps final.

1. Considérons la stratégie (4.3). Nous vérifions le signe de $\frac{\partial \rho}{\partial y}(y(t_c))$ et ensuite nous décidons laquelle des stratégies (4.3) ou (4.6) est extrémale. Nous notons \bar{T}_f le temps final correspondant. Les stratégies (4.3) et (4.6) sont représentées par les Figures 4.2 et 4.3 respectivement

2. Pour tout $T_f > \bar{T}_f$, les stratégies de la forme (4.7) ou de la forme (4.8) sont extrémales et donc candidates à l'optimalité. Ces stratégies sont illustrés dans les Figures 4.4 et 4.5 respectivement.
3. Si la stratégie (4.3) est extrémale, alors, pour tout $T_{min} < T_f < \bar{T}_f$, la stratégie (4.9) est extrémale et déterminée à l'aide du Lemme (4.4).
4. Si la stratégie (4.6) est extrémale, alors il existe un temps $T_{min} < T_{lim} < \bar{T}_f$ tel que :
 - la stratégie (4.9) est extrémale pour $T_{min} < T_f < T_{lim}$;
 - pour $T_f > T_{lim}$, la stratégie extrémale est de la forme (4.10) ou (4.13) et est déterminée à l'aide des Lemmes (4.5) et (4.6).

Elles sont illustrées dans les Figures 4.7 et 4.8 respectivement.

5. Finalement, si $T_f \leq T_{back}$, on en conclu que la trajectoire extrémale trouvée est optimale. Dans le cas contraire, nous procédons à une étude numérique afin de déterminer s'il existe des extrémales présentant un retour en arrière. Par exemple, pour $T_f = 4.48$ la trajectoire présenté à la Figure 4.8 est considérée optimale. Des trajectoires extrémales possédant des retours en arrière sont présentées dans les Figures 4.9 et 4.10.

Afin de mieux comprendre cette dernière étape, nous avons effectué une exploration numérique par la manipulation des valeurs de p_0 et q_0 . Comme attendu, les trajectoires extrémales présentant des retours en arrière existent. Un fait intéressant est que de telles extrémales ne sont pas nécessairement optimales. Dans la Figure 4.9, un exemple de trajectoire optimale avec retour en arrière est présentée. La fonction de rendement est la même que celle utilisée pour déterminer la trajectoire de la Figure 4.2. Dans ce cas, la stratégie avec retour en arrière de la Figure 4.9 coûte moins que la stratégie de la forme (4.8) — puisque les arcs avec $y = 0$ ont un coût nul, la stratégie (4.8) coûte la même chose quelle que soit la valeur de $T_f > T_f^{1,s,0}$.

D'un autre côté, la Figure 4.10 montre une trajectoire extrémale qui admet un retour en arrière. Cette trajectoire est obtenue pour une fonction de rendement $\rho(y)$ telle que $\rho(0)$ est 20 fois supérieur à celui utilisé dans la Figure 4.9 — il s'agit là du seul paramètre qui à été modifié dans la conception de ρ . Les maximums des deux fonctions coût sont identiques, et sont obtenus pour les mêmes valeurs de y . Dans ce cas, le coût associé à la stratégie (4.8) est égal à 0.73, et la stratégie de la Figure 4.10 n'est pas optimale. Dans les Figures 4.9d et les Figures 4.10d, les valeurs visitées par chacune des fonctions de rendement lorsque $u = -1$ sont mises en évidence. Les Figures 4.9d et Figures 4.10d, mettent en évidence une information similaire pour $u = 1$. Les différentes couleurs sont à associer aux Figures 4.9c et 4.10c.

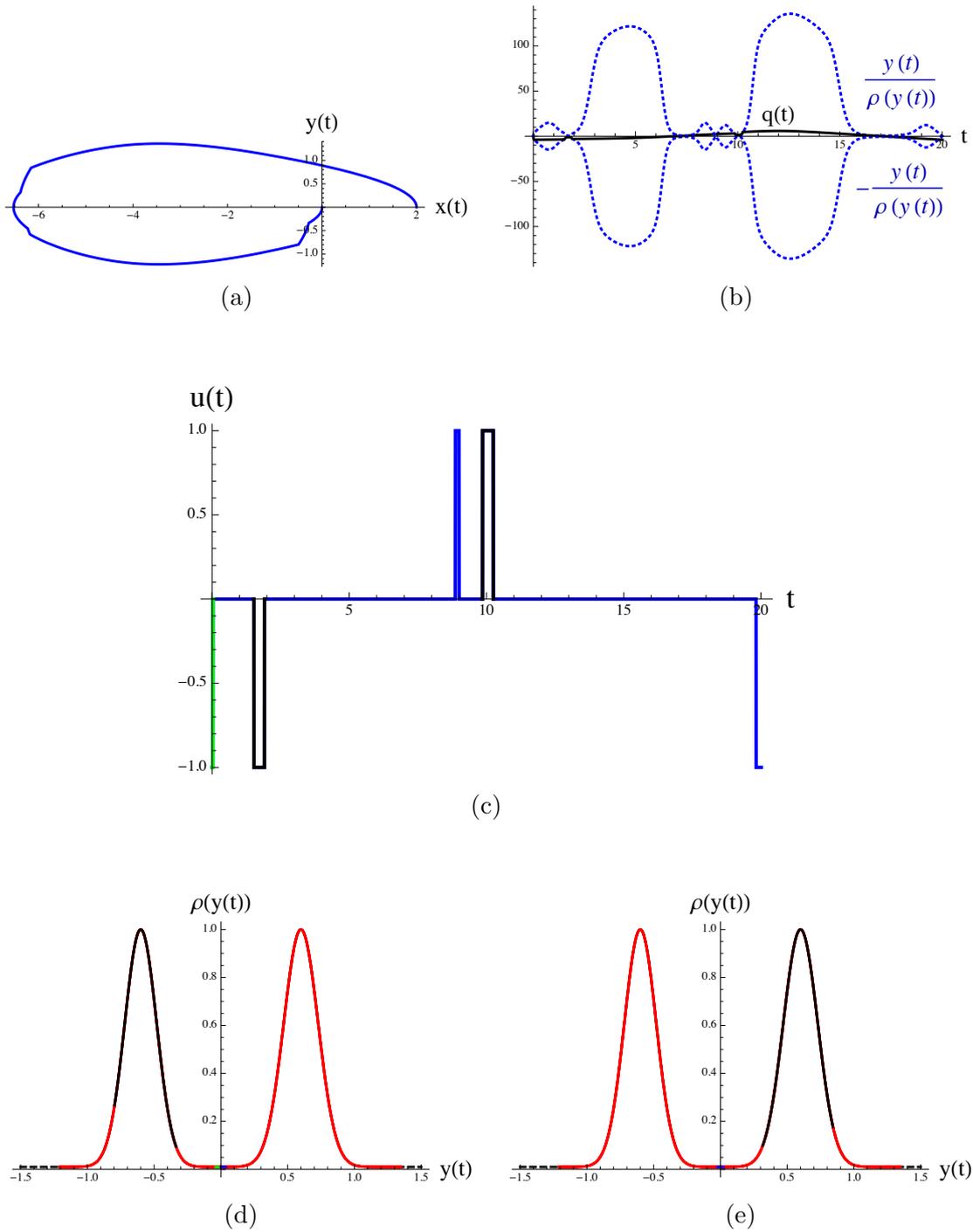


FIGURE 4.9 – Trajectoire optimale du problème (\mathcal{P}_4) pour $T_f \approx 17.75$. Le coût associé est ≈ 1.61 tandis qu'il est ≈ 3.605 pour la stratégie (4.8) — cf. Figure 4.2.

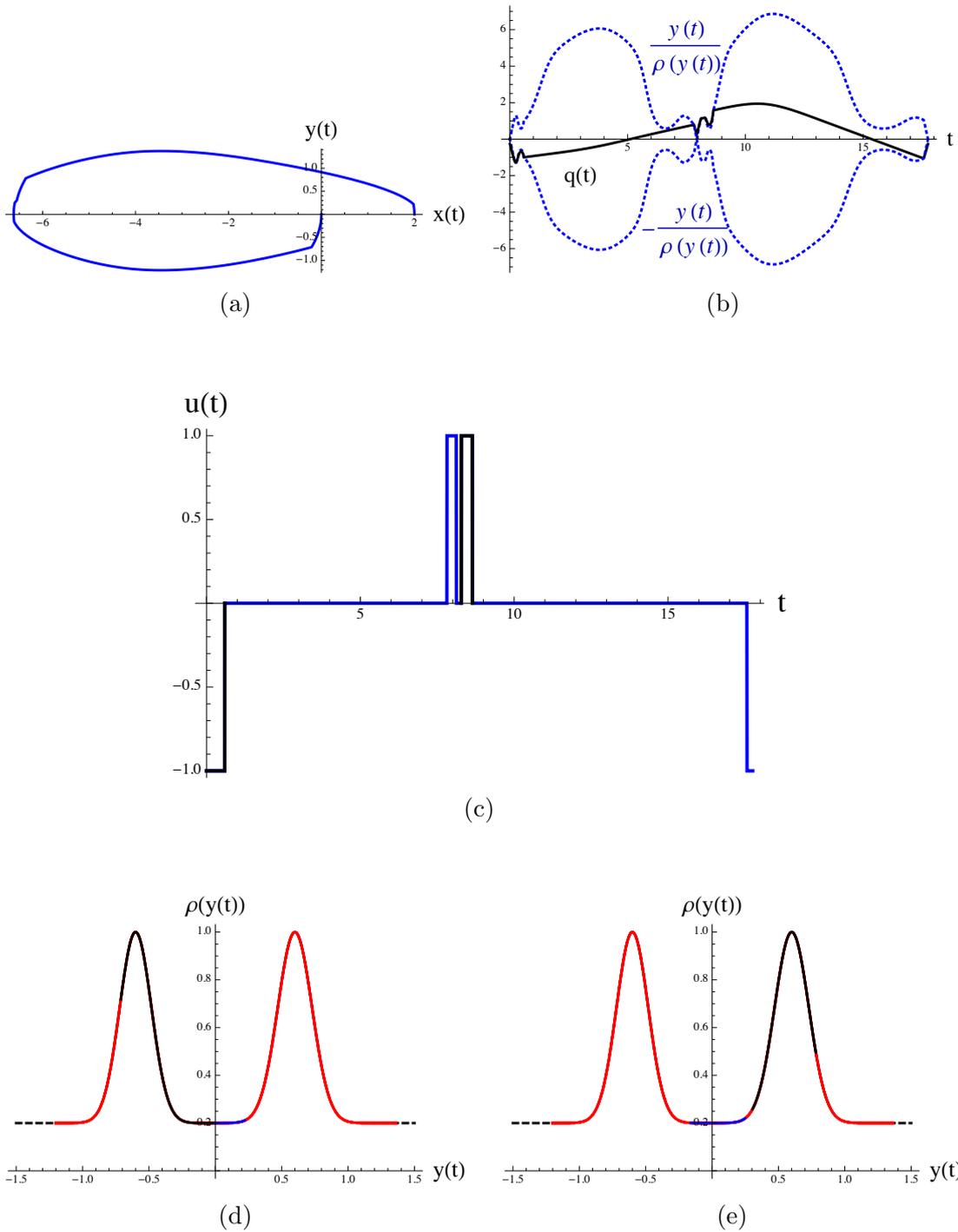


FIGURE 4.10 – Trajectoire extrême du problème (\mathcal{P}_4) pour $T_f \approx 17.75$. Le coût associé est ≈ 1.02 tandis qu'il est ≈ 0.73 pour la stratégie (4.8) avec la fonction de rendement des Figures 4.10d et 4.10e.

4.3 Cas particulier : fonction de rendement constante

Comme précédemment, il n'y a pas d'extrémale anormale dès que $T_f > T_{min}$. Comme nous l'avons vu dans le Chapitre 3.2.1, la fonction de rendement peut-être considérée identiquement égale à 1, et le Hamiltonien normal est :

$$H = py + q(u - K) - |yu|$$

Nous commençons avec la stratégie

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{sur } [0, t_c[\\ 0 & \text{sur } [t_c, T_f^{1,0}[\end{cases} \quad (4.15)$$

où t_c et T_f ont été donnés par l'équation (4.4).

Lemme 4.7 1. La stratégie (4.15) est extrémale et singulière.

2. $H = 0$.

3. Pour tout $T_f > T_f^{1,0}$, alors la stratégie suivante

$$u(t) = \begin{cases} K & \text{pour } t \in [0, t_1[\\ 1 & \text{pour } t \in [t_1, t_1 + t_c[\\ 0 & \text{pour } t \in [t_1 + t_c, T_f - t_2[\\ K & \text{pour } t \in [T_f - t_2, T_f[\end{cases}$$

est aussi extrémale singulière, où $t_1 \geq 0$, $t_2 \geq 0$ et $t_1 + t_2 = T_f - T_f^{1,0}$.

Preuve 4.7 1. La stratégie (4.15) est telle que $y \geq 0$ pour tout $t \geq 0$, ainsi le Hamiltonien devient :

$$H = py + q(u - K) - y|u|$$

Par conséquent,

$$\begin{cases} \dot{p} = 0 \Rightarrow p = p_0 \\ \dot{q} = -p_0 + |u| \end{cases}$$

De plus, comme $u(T_f) = 0$, alors $-y(T_f) \leq q(T_f) \leq y(T_f)$, ce qui implique $q(T_f) = 0$, $H = 0$ et finalement $q(0) = 0$. Nous avons donc :

$$\begin{cases} q(t_c) = (1 - p_0)t_c \\ y(t_c) = (1 - K)t_c \end{cases}$$

Alors $p_0 = K$ puisque la commutation en t_c indique que $q(t_c) = y(t_c)$. On en conclut directement que $y(t) = q(t)$ pour tout $t \in [t_c, T_f^{1,0}]$, la relation est donc vraie pour tout $t \in [0, T_f^{1,0}]$. Nous avons ainsi montré que (4.15) est une stratégie extrémale singulière.

2. Ce fait apparaît dans la preuve de (1).
3. Un arc singulier de la forme $y = 0$, $\dot{y} = 0$ implique $H = 0$, ce qui est compatible avec le point précédent. ■

Lorsque $T_f < T_f^{1,0}$ nous nous intéressons à la stratégie :

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{sur } [0, t_1[\\ 0 & \text{sur } [t_1, t_2[\\ -1 & \text{sur } [t_2, T_f[\end{cases} \quad (4.16)$$

- Lemme 4.8**
1. Pour $T_f < T_f^{1,0}$, la seule stratégie extrémale est la stratégie (4.16).
 2. Les temps de commutation, p_0 et q_0 sont donnés au Lemme (4.4).

Preuve 4.8 1. Comme $T_f < T_f^{1,0}$, alors $q(T_f) \neq 0$ et par conséquent $H \neq 0$. D'après le point 1 de la section 2.3, alors $\dot{y} = 0$, $y = 0$ n'est pas un arc singulier.

Soit $\varepsilon > 0$ tel que $y < 0$ sur $]0, \varepsilon[$, considérons la quantité $\kappa = \frac{q}{y}$ et calculons sa dérivée :

$$\dot{\kappa} = -\frac{H}{y^2}$$

Si $H > 0$, alors κ décroît indéfiniment auquel cas seule une commutation du type $u = 0$ vers $u = -1$ peut avoir lieu, et y ne changera jamais de signe.

Si $H < 0$, il ne pourra donc pas y avoir de commutation vers le contrôle $u = -1$ et $y(T_f) = 0$ ne pourra pas être atteint.

On en déduit qu'une extrémale ne comprend pas d'intervalle $]0, \varepsilon[$ tel que $y < 0$.

Soit $\varepsilon > 0$ tel que $y > 0$ sur $]0, \varepsilon[$, considérons la quantité $\kappa = \frac{q}{y}$ et calculons sa dérivée :

$$\dot{\kappa} = -\frac{H}{y^2}$$

On en conclut que $H > 0$ et que la stratégie (4.16) est extrémale. En effet, dans le cas contraire, $H < 0$ la quantité κ augmente et le contrôle ne commute jamais.

2. Voir Lemme (4.4). ■

Conclusion et Perspectives

L'objectif de ce travail a été de traiter la problématique de la minimisation de l'énergie dépensée par un véhicule, en prenant pour cadre la théorie du contrôle optimal. Nous avons, dans un premier temps, développé un modèle simple de la dynamique longitudinale du véhicule et de sa consommation énergétique, ce deuxième point constituant le coût de notre problème de contrôle optimal. Etant donné que ce coût est non-différentiable pour certaines valeurs de l'état et de la variable de contrôle (ceci étant dû au fait qu'il repose sur la notion de travail absolu), alors les stratégies optimales comprennent des inactivations du contrôle. Par la suite, nous avons montré que le problème ainsi obtenu n'admet pas de minimum en temps final libre, et avons donc procédé à une étude en temps final fixe. Nous avons aussi proposé un théorème de régularité des contrôles candidats à l'optimalité, ce qui nous a permis d'évacuer le phénomène de *chattering* de l'ensemble des solutions. Finalement, nous avons étudié ce problème en nous appuyant sur le principe du maximum de Pontryagin, dans sa version classique ainsi que dans la version proposée par F. Clarke.

Notre problème dépend de nombreux paramètres, en termes de fonction de rendement et de profil de route, ce qui le rend difficile à aborder directement. Ceci nous a amené à définir une série de trois sous-problèmes que nous avons traités dans ce manuscrit :

1. route plate, sans frottement ;
2. route plate, avec frottement ;
3. un profil de route non-plate, sans frottement.

Nous avons proposé une solution en temps minimal pour chacun de ces trois sous-problèmes et montré que, pour tout temps final (fixe) strictement plus grand, aucun de ces sous-problèmes n'admet d'extrémale anormale. Nous avons aussi étudié et caractérisé les arcs singuliers normaux. Les trois cas présentés ci-dessus, nous ont permis de mettre en avant la richesse du problème considéré. En effet, tandis que les solutions du premier cas étaient limitées à des stratégies de type *bang-inactivation-bang* (et ce sans que la fonction de rendement n'aie de rôle à jouer), les solutions optimales du second cas sont de la forme *bang-arc singulier-inactivation-bang* pour un temps final choisi assez grand. Ce phénomène a lieu indépendamment de la fonction de rendement choisie. Cependant, dans le cas d'une fonction de rendement non-triviale, nous voyons apparaître des stratégies optimales de type *bang-arc singulier-inactivation-bang-inactivation-bang* (la fonction de rendement étant maximale le long de l'arc in-

diqué en gras). Finalement, le profil de route spécifique qui a été étudié dans le troisième cas, et qui requiert un arrêt et un démarrage en pente, présente tous les comportements précédemment observés auxquels s'ajoutent :

- l'influence de la fonction de rendement sur la présence ou non d'un arc singulier,
- la présence d'arcs singuliers au début ou à la fin de la trajectoire,
- l'apparition de trajectoires extrémales présentant un retour en arrière, certaines de ces trajectoires pouvant être optimales.

Ce travail nous a donc permis de formaliser un problème de contrôle optimal riche, présentant trois grandes perspectives.

1. L'analyse des arcs singuliers nous a permis de faire apparaître une caractérisation sous la forme d'une équation différentielle de la variable $y(t)$, valable uniquement sur les morceaux de route non-plane. Ainsi, les investigations numériques que nous avons réalisées pour le troisième sous-problème, dans le but de faire apparaître des extrémales avec retour en arrière, pourraient être complétées par une recherche d'arcs singuliers de ce type.
2. Une seconde perspective de travail consiste à traiter des cas d'études supplémentaires en commençant par introduire un coefficient de frottement dans le troisième cas que nous avons abordé. Notre but étant ensuite de nous diriger vers des profils de route plus généraux.
3. Une dernière perspective de travail se situe au niveau de la modélisation du coût. Trois modifications intéressantes nous semblent pouvoir être apportées. La première est de considérer une fonction de rendement ayant pour arguments la vitesse y , mais aussi la variable de contrôle u . Ceci nous permettrait en particulier de faire varier le rendement du système de conversion d'énergie en fonction du signe de la variable de contrôle (freinage Vs accélération). La seconde piste consiste à relaxer l'hypothèse $\rho(0) \neq 0$, en considérant par exemple une fonction de rendement ayant un développement limité en 0 de la forme $Cy + O(y^2)$ où C est une constante non-nulle. Cela aurait pour conséquence une mise à contribution du contrôle plus fréquente lorsque le rendement est haut. En effet, en procédant ainsi la fonction coût ne sera plus nulle à vitesse nulle. La troisième piste consiste à traiter ce problème en temps libre. Pour cela, il nous faut modifier la fonction coût, par exemple par l'ajout (sous le signe intégral) d'une constante, pénalisant ainsi les longs temps de parcours.

Annexes

Annexe A

Contrôlabilité locale en temps petit et accessibilité normale

Nous rappelons les principales notions de contrôlabilité, ainsi que les deux théorèmes utilisés dans la preuve de notre résultat de régularité. Ces notions viennent principalement de [16] où le sujet est traité en détails en toute généralité.

Soit un système de contrôle de la forme suivante :

$$(\Sigma_0) \quad \dot{x}(t) = F(x(t)) + u(t)G(x(t))$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathcal{U}_{adm} \subset L^1_{[0, \infty[}$ et \mathcal{U}_{adm} est un ensemble de contrôles uniformément bornés, admissibles pour (Σ_0) . Les champs de vecteurs $F(\cdot)$ et $G(\cdot)$ sont supposés \mathcal{C}^1 . L'ensemble des contrôles de \mathcal{U}_{adm} constants par morceaux est noté $\mathcal{U}_{step} \subset \mathcal{U}_{adm}$.

Définition A.1 Ensemble accessible

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$. L'ensemble accessible de (Σ_0) , à partir x_0 , pour un temps $T > 0$, est défini comme suit :

$$\mathcal{A}(x_0, T) = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \text{ t.q. } \exists u \in \mathcal{U}_{adm} \text{ t.q. la trajectoire } x(t) \text{ de } (\Sigma_0) \text{ issue de } x_0 \text{ vérifie } x(T) = \bar{x}\}$$

L'ensemble accessible pour un temps strictement plus petit que $T > 0$ est noté :

$$\mathcal{A}_T(x_0) = \bigcup_{0 \leq t < T} \mathcal{A}(x_0, t)$$

Définition A.2 Contrôlabilité locale en temps petit (STLC)

Le système (Σ_0) est dit localement contrôlable en temps petit depuis x_0 , si pour tout $T > 0$, l'ensemble $\mathcal{A}_T(x_0)$ contient un voisinage ouvert de x_0 .

Définition A.3 Contrôlabilité locale en temps petit fixé (STLCFT)

Le système (Σ_0) est dit localement contrôlable en temps petit fixé depuis x_0 , si

pour $T > 0$ fixé, alors pour tout $0 < t < T$, l'ensemble accessible $\mathcal{A}(x_0, t)$ contient un voisinage ouvert de x_0 .

Définition A.4 Accessibilité normale (NR)

Un point $x_f \in \mathbb{R}^n$ est dit **normalement accessible** depuis $x_0 \in \mathbb{R}^n$ par le système de contrôle (Σ_0) , si x_f est accessible depuis x_0 par un contrôle $u \in \mathcal{U}_{step}$.

Nous pouvons aussi introduire la notion **d'accessibilité normale** d'un point x_f en temps plus petit que T , à partir d'un point x_0 si :

x_f est normalement accessible depuis x_0 par une trajectoire $x(\cdot)$ de (Σ_0) telle que
 $x(0) = x_0$ et $x(\bar{T}) = x_f$ pour $\bar{T} < T$.

Définition A.5 Normalement auto-accessible (NSR)

Un point x_0 est dit **normalement auto-accessible** par le système (Σ_0) , s'il est normalement accessible depuis lui-même.

Définition A.6 Normalement auto-accessible en temps petit (STNSR)

Un point x_0 est dit **normalement auto-accessible en temps petit** par le système (Σ_0) si pour tout $T > 0$, il est normalement auto-accessible en un temps inférieur à T .

Proposition A.1 Si x_0 est STNSR par (Σ_0) , alors (Σ_0) est STLC depuis x_0 par des contrôles pris dans \mathcal{U}_{step} .

Théorème A.1 Sous l'hypothèse que le système de contrôle (Σ_0) , vérifie l'une des trois propriétés suivantes :

- les champs de vecteurs $F(\cdot)$ et $G(\cdot)$ sont réels analytiques ;
- l'algèbre de Lie engendrée par $F(\cdot)$ et $G(\cdot)$ est de rang maximal ;
- les champs de vecteurs $F(\cdot)$ et $G(\cdot)$ sont \mathcal{C}^1 et localement bornés.

Alors les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. (Σ_0) est STLC par des contrôle de \mathcal{U}_{step} ;
2. (Σ_0) est STLC par des contrôle de \mathcal{U}_{adm} ;
3. x_0 est STSNR par (Σ_0) ;
4. $(-\Sigma_0)$ est STLC par des contrôle de \mathcal{U}_{step} ;
5. $(-\Sigma_0)$ est STLC par des contrôle de \mathcal{U}_{adm} ;
6. x_0 est STSNR par $(-\Sigma_0)$;

Théorème A.2 Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$, un point normalement auto-accessible en temps petit par le système (Σ_0) . Soit $T > 0$ fixé. Alors tout point de l'ensemble accessible $\mathcal{A}_T(x_0)$ est normalement accessible depuis x_0 en un temps plus petit que T .

Remarque A.1 *Si de plus, le point x_0 est un point d'équilibre du système (Σ_0) , alors les deux théorèmes ci-dessus restent vrai en considérant la contrôlabilité locale (ainsi que l'accessibilité normale) en temps petit **fixé**.*

Annexe B

Code Mathematica de l'exemple [1.1](#)

```
In[1]:=
(* Data *)
x1 = 5;
x2 = -1;
x3 = -4;
x4 = -6.5` ;
x5 = -9;
x6 = -15;
x7 = -20;
Smax = 0.2` ;
Smin = 0.1` ;
K = 0.2` ;

In[2]:=
(* Compute the length : L *)
L1 = x2 - x1;
L2 = x3 - x2;
L3 = x3 - x4;
L4 = x4 - x5;
L5 = x6 - x5;
L6 = x7 - x6;
```

```

In[3]:= (* Compute slopes and intercepts *)
p1 =  $\frac{S_{max}}{L2}$ ;
Op1 = -p1 x2;
p2 =  $\frac{S_{max}}{L3}$ ;
Op2 = (p1 - p2) x3 + Op1;
p3 =  $\frac{S_{min}}{L4}$ ;
Op3 = p3 x4 + Op2;
p4 =  $\frac{S_{min}}{L5}$ ;
Op4 = (p3 - p4) x5 + Op3;

In[4]:= (* Constants Needed To Properly define Theta *)
C1 = -  $\left( \frac{p1 x2^2}{2} + Op1 x2 \right)$ ;
C2 = -  $\left( \frac{p2 x3^2}{2} + Op2 x3 \right) + \left( \frac{p1 x3^2}{2} + Op1 x3 + C1 \right)$ ;
C3 = -  $\left( \frac{p3 x4^2}{2} + Op3 x4 \right) + \left( \frac{p2 x4^2}{2} + Op2 x4 + C2 \right)$ ;
C4 = -  $\left( \frac{p4 x5^2}{2} + Op4 x5 \right) + \left( \frac{p3 x5^2}{2} + Op3 x5 + C3 \right)$ ;

In[5]:= Dtheta[xsi_] := If[xsi < x5, p4 xs_i + Op4,
  If[xsi < x4, p3 xs_i + Op3, If[xsi < x3, p2 xs_i + Op2, If[xsi < x2, p1 xs_i + Op1, 0]]]];
Theta[xsi_] := If[xsi < x5,  $\frac{p4 xs_i^2}{2} + Op4 xs_i + C4$ , If[xsi < x4,  $\frac{p3 xs_i^2}{2} + Op3 xs_i + C3$ ,
  If[xsi < x3,  $\frac{p2 xs_i^2}{2} + Op2 xs_i + C2$ , If[xsi < x2,  $\frac{p1 xs_i^2}{2} + Op1 xs_i + C1$ , 0]]]] + K;

```

Code Mathematica de l'exemple 1.1

```
In[6]:= (* DRAWING THE ROAD IN THE (pos,height) plane *)
Phi0 = 5;
Start = -20;
Stop = 15;
x0 = 0;
xf = 10;
Avant =
First[NDSolve[{x'[xsi] ==  $\frac{1}{\sqrt{1 + \text{Tan}[\text{Theta}[\text{xsi}] ]^2}}$ , P'[xsi] ==  $\frac{\text{Tan}[\text{Theta}[\text{xsi}]]}{\sqrt{1 + \text{Tan}[\text{Theta}[\text{xsi}] ]^2}}$ ,
  x[0] == 0, P[0] == Phi0}, {x[xsi], P[xsi]}, {xsi, 0, Stop}]];
Arriere = First[NDSolve[{x'[xsi] == - $\frac{1}{\sqrt{1 + \text{Tan}[\text{Theta}[-\text{xsi}] ]^2}}$ ,
  P'[xsi] == - $\frac{\text{Tan}[\text{Theta}[-\text{xsi}]]}{\sqrt{1 + \text{Tan}[\text{Theta}[-\text{xsi}] ]^2}}$ , x[0] == 0, P[0] == Phi0},
  {x[xsi], P[xsi]}, {xsi, 0, Abs[Start]}]];

```

Références

- [1] A. Agrachev and Y. Sachkov. *Control Theory from the Geometric Viewpoint*, volume 87 of *Encyclopedia of Mathematical Sciences*. Springer, 2004.
- [2] W. Alt and C. Schneider. Linear-quadratic control problems with l^1 -control cost. *Optim. Control Appl. Meth.*, 36(4) :512–534, 2015. [1](#)
- [3] D. J. Bell and D. H. Jacobson. *Singular Optimal Control Problems*. Academic Press : London, 1975. [2](#)
- [4] B. Berret, C. Darlot, F. Jean, T. Pozzo, C. Papaxanthis, and J. P. Gauthier. The inactivation principle : Mathematical solutions minimizing the absolute work and biological implications for the planning of arm movements. *PLOS Computational Biology*, 4(10), 2008. [1](#), [10](#)
- [5] B. Berret, J.-P. Gauthier, and C. Papaxanthis. How humans control arm movements. In *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, volume 261, pages 44–58, 2008. [1](#), [11](#)
- [6] B. Bonnard and M. Chyba. *Singular Trajectories and their Role in Control Theory*, volume 40 of *Mathématiques & Applications*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New-York, 2003. [2](#), [21](#)
- [7] U. Boscain and B. Piccoli. *Optimal Syntheses for Control Systels on 2-D Manifolds*, volume 43 of *Mathématiques & Applications*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New-York, 2004. [25](#)
- [8] H. Bouvier, G. Colin, and Y. Chamaillard. Determination and comparison of optimal eco-driving cycles for hybrid electric vehicles. In *Proceedings of the European ControlConference (ECC)*, pages 142–147, 2015. [1](#)
- [9] Z. Chen. L^1 -optimality conditions for circular restricted three-body problems. *arXiv :1511.01816v2 [math.OC]*, Submitted on 5 Nov 2015. [1](#)
- [10] Z. Chen, J.-B. Caillau, and Y. Chitour. L^1 -minimization for mechanical systems. *arXiv :1506.00569v2 [math.OC]*, Submitted on 1 Jun 2015. [1](#)

-
- [11] Q. Cheng, L. Nouvelière, and O. Orfila. A new eco-driving assistance system for a light vehicle : Energy management and speed optimization. In *Intelligent Vehicles Symposium (IV), 2013 IEEE*, pages 1434 – 1439, 2013.
 - [12] F. Clarke. *Functional Analysis, Calculus of Variations and Optimal Control*. Springer-Verlag London, 2013. [2](#), [23](#), [24](#)
 - [13] G. Fraser-Andrews. Finding candidate singular optimal controls : a state of the art survey. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 60(2) :25–57, 1989. [2](#)
 - [14] Y. Gaoua. *Modèles mathématiques et techniques d’optimisation non linéaire et combinatoire pour la gestion d’énergie d’un système multi-source : vers une implantation temps-réel pour différentes structures électriques de véhicules hybrides*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Toulouse, 2014. [1](#)
 - [15] T. D. Gillespie. *Fundamentals of vehicle dynamics*. Premiere Series Books. Society of Automotive Engineers Inc., 1992. [1](#)
 - [16] K. A. Grasse. On the relation between small-time local controllability and normal self-reachability. *Mathematics of Control, Signal and Systems*, 1992. [19](#), [87](#)
 - [17] A. N. Kolmogorov and S. V. Fomin. *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis, Vol. 2*. Graylock Press, Rochester, New-York, 1961. [19](#)
 - [18] E. B. Lee and L. Markus. *Foundations of optimal control theory*. The SIAM series in Applied Mathematics. John Wiley and Sons, New York-London-Sydney, 1967. [11](#), [41](#)
 - [19] H. T. Luu. *Développement de méthodes de réduction de la consommation en carburant d’un véhicule dans un contexte de sécurité et de confort : un compromis entre économie et écologie*. PhD thesis, Université d’Evry-Val-d’Essonne, 2011. [1](#)
 - [20] H. T. Luu, L. Nouvelière, and S. Mammar. Dynamic programming for fuel consumption optimization on light vehicle. In *IFAC Proceedings Volumes*, volume 43, pages 372–377, 2010.
 - [21] H. Maurer and MR. De Pinho. Optimal control of epidemiological seir models with l1-objectives and control-state constraints. <hal- 01101291>, Submitted on 8 Jan 2015. [1](#)
 - [22] A. Merakeb, F. Messine, and M. Aidène. A branch and bound algorithm for minimizing the energy consumption of an electrical vehicle. *4OR*, 12(3) :261–283, 2014. [1](#)

- [23] L. S. Pontryagin, V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze, and E. F. Mishchenko. *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. John Wiley and Sons, New York-London-Sydney, 1962. [2](#), [23](#), [35](#), [41](#)
- [24] I. M. Ross. *Modern Astrodynamics*, chapter Space Trajectory Optimization and L^1 -Optimal Control Problems, pages 155–188. Elsevier, 2006. [1](#), [39](#)
- [25] T. Schwickart, H. Voos, J-R. Hadji-Minaglou, M. Darouach, and A. Rosich. Design and simulation of a real-time implementable energy-efficient model-predictive cruise controller for electric vehicles. *Journal of the Franklin Institute*, 352 :603–625, 2015. [1](#)
- [26] K. D. Sebesta. *Optimal observers and optimal control : improving car efficiency with Kalman et Pontryagin*. PhD thesis, Université de Bourgogne ; Université du Luxembourg, 2010. [1](#)
- [27] P. Tokekar, N. Karnad, and V. Isler. Energy-optimal trajectory planning for car-like robots. *Autonomous Robots*, 37(3) :279–300, 2014. [1](#)
- [28] Hugo Touchette. Legendre-fenchel transforms in a nutshell. Technical report, School of Mathematic Sciences, Queen Mary, University of London, 2007.
- [29] Hugo Touchette. Elements of convex analysis. Technical report, School of Mathematic Sciences, Queen Mary, University of London, 2013.
- [30] E. Trelat. *Contrôle optimal : Theorie et applications*. Collection Mathematique Concretes. Vuibert, 2005. [41](#)
- [31] G. Vossen and H. Maurer. On l^1 -minimization in optimal control and applications to robotics. *Optim. Control Appl. Meth.*, 27 :301–321, 2006. [1](#)

Ouazna, OUKACHA

Laboratoire des Sciences de l'Information et des Systèmes, LSIS UMR 7296

Université de Toulon

Optimisation de consommation pour un véhicule de type voiture

Résumé en français

Cette thèse présente l'étude d'un problème de contrôle optimal dont le coût est non-différentiable pour certaines valeurs du contrôle ou de l'état, tout en restant Lipschitz. Ce problème nous a été inspiré par la problématique générale de la minimisation de l'énergie dépensée par un véhicule ou robot de type voiture le long d'un trajet dont le profil de route est connu à l'avance. Cette problématique est formulée à l'aide d'un modèle simple de la dynamique longitudinale du véhicule et une fonction coût qui englobe la notion d'efficacité du processus de conversion énergétique. Nous présentons un résultat de régularité des contrôles, valable pour la classe des systèmes non-linéaires, affines dans les contrôles, classe à laquelle appartient notre problème. Ce résultat nous permet d'exclure les phénomènes de *chattering* de l'ensemble des solutions. Nous réalisons trois études de cas pour lesquelles les trajectoires optimales sont composées d'arcs *bang*, d'inactivations, d'arcs singuliers et, dans certains cas, de retours en arrière.

Mots clés : optimisation de la consommation énergétique ; arcs singuliers ; régularité ; fonction coût non-différentiable.

Optimisation of energy consumption for a car-like vehicle

Résumé en anglais

The present thesis is a study of an optimal control problem having a non-differentiable, but Lipschitz, cost function. It is inspired by the minimization of the energy consumption of a car-like vehicle or robot along a road which profile is known. This problem is stated by means of a simple model of the longitudinal dynamics and a running cost that comprises both an absolute value function and a function that accounts for the efficiency of the energy conversion process. A regularity result that excludes chattering phenomena from the set of solutions is proven. It is valid for the class of control affine systems, which includes the considered problem. Three case studies are detailed and analysed. The optimal trajectories are shown to be made of bang, inactivated and backward arcs.

Keywords: energy consumption minimisation; singular arcs; regularity; non-differentiable cost function.