HAL open science

Percolation, permutations, particules en interaction

Lucas Gerin

To cite this version:

Lucas Gerin. Percolation, permutations, particules en interaction. Probabilités [math.PR]. Paris Saclay, 2018. tel-01838158v1

HAL Id: tel-01838158

https://theses.hal.science/tel-01838158v1

Submitted on 13 Aug 2018 (v1), last revised 17 May 2019 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université Paris-Sud

École doctorale de mathématiques Hadamard (ED 574)
Laboratoire CMAP, École Polytechnique (UMR 7641 CNRS)

Mémoire présenté pour l'obtention du

Diplôme d'habilitation à diriger les recherches

Discipline : Mathématiques

par

Lucas GERIN

Percolation, permutations, particules en interaction

Rapporteurs :
David ALDOUS
Raphaël CERF
Brigitte CHAUVIN

Date de soutenance : 2 juillet 2018

Composition du jury :

Vincent BEFFARA	(Examinateur)
Thierry BODINEAU	(Examinateur)
Raphaël CERF	(Rapporteur)
Brigitte CHAUVIN	(Rapportrice)
Jean-François LE GALL	(Examinateur)
Régine MARCHAND	(Examinatrice)

Sommaire

Liste de publications 5
Introduction 7
1 Percolation 12
1.1 Le modèle de la percolation de premier passage 12
1.2 Le modèle d'Eden en grande dimension [6] 14
1.3 Distances en percolation [8] [10] 18
1.4 Discussions et perspectives 23
2 Particules en interaction 27
2.1 Optimisation combinatoire et processus d'Hammersley [12] . . . 27
2.2 Le processus d'Hammersley sur $\mathbb{Z}$ [12] 36
2.3 Arbres d'Hammersley [14] 38
2.4 Un modèle simple de branchement avec sélection [9] 43
2.5 Discussions et perspectives 46
3 Permutations 48
3.1 Permutations séparables et excursion brownienne [13] 48
3.2 Universalité dans les classes closes par substitution [15] 57
3.3 Au-delà de l'universalité [15] 63
3.4 Méthodes de simulations 65
3.5 Discussions et perspectives 65
Bibliographie 67

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier très chaleureusement David Aldous, Raphaël Cerf et Brigitte Chauvin qui m'ont fait l'honneur de prendre le temps de lire et d'évaluer ce mémoire. Je suis très heureux et fier qu'en plus de Raphaël et Brigitte, Vincent Beffara, Thierry Bodineau, Jean-François Le Gall et Régine Marchand soient membres du jury. J'aurais beaucoup aimé que Philippe Chassaing puisse se joindre à nous, j'imagine qu'il est fier d'augmenter sa liste (assez sélective) d'anciens étudiants habilités.

Le plus grand plaisir de notre métier est de pouvoir travailler en collaboration, pour certaines prolongées sur plusieurs années. Depuis la thèse j'ai eu la chance de découvrir des théorèmes avec Nathanaël Enriquez, Olivier Couronné, Anne-Laure Basdevant, Marie Albenque (en plus du groupe de travail du RER C !), Jean-Baptiste Gouéré, Frédérique Bassino, Mathilde Bouvel, Valentin Féray, Adeline Pierrot, Arvind Singh et Mickaël Maazoun. Nathanaël et Anne-Laure jouent (au moins par la quantité d'articles) un rôle particulier, je suis assez fier de leur avoir transmis respectivement mes passions pour les mesures stationnaires markoviennes et l'inégalité de Hoeffding.

J'espère que toutes ces collaborations dureront encore longtemps !

Depuis 2009 j'ai été un membre actif de deux des meilleures salles café de la communauté mathématique. La salle Framboise de Modal'X est l'une des plus chaleureuses de France, parce qu'elle est petite mais surtout parce qu'on y croise (en plus des personnes déjà nommées) Xavier, Antoine, Sylvia, Christian, les Laurent et tous les autres. Parallèlement j'avais toujours un très grand plaisir à faire partie de la communauté Aléa, humainement et scientifiquement. J'ai ensuite migré vers la salle café du CMAP, tout aussi bien fréquentée. Merci à Anne et François, Flore et Aline mes partenaires de café et de tableaux Excel, Carl, Thierry, Sylvie qui m'a accueilli dans son équipe et emmené en Iran, tous les joueuses et joueurs du Real Matrice et celles et ceux qui ont fait avancer le problème du dé à 7 faces. Un grand merci aussi aux super équipes administratives du laboratoire et du département.

Grâce à vous tous cela a toujours été un grand plaisir de venir travailler.

Je ne devrais pas l'avouer ici mais mon plus grand impact scientifique de ces dernières années a peut-être été ma participation depuis 2011 à *Mat'Les Vacances*. Un grand merci à tous les profs/anims de ce très beau projet (je remercie particulièrement Vincent, malgré la cohabitation sonore en E3020) et bien sûr à tous les jeunes participants.

Beaucoup de membres de ma famille étaient à Nancy pour ma soutenance de thèse. Certains ne sont plus là aujourd'hui, d'autres sont arrivés et tous m'ont encouragé, je les embrasse très fort. J'ai peur qu'ils n'apprécient pas l'élégance du théorème 1.11 et la grande généralité du théorème 3.17, mais je crois qu'ils sont trop gentils pour l'avouer.

C'est ma dernière occasion de remercier Sarah dans un manuscrit. Je voudrais la remercier pour tout, et surtout pour toutes les aventures qui nous attendent ces prochaines années.

Publications postérieures à la thèse

[15] Universal limits in substitution-closed permutation classes. Chap.3.
F.Bassino, M.Bouvel, V.Féray, L.Gerin, M.Maazoun, A.Pierrot. `arXiv:1706.08333`.

[14] From Hammersley's lines to Hammersley's trees. Chap.2.
A.-L.Basdevant, J.-B. Gouéré, L.Gerin et A.Singh. *Probability Theory and Related Fields*, à paraître.

[13] The Brownian limit of separable permutations. Chap.3.
F.Bassino, M.Bouvel, V.Féray, L.Gerin et A.Pierrot. *Annals of Probability*, à paraître.

[12] Discrete Hammersley's lines with sources and sinks. Chap.2.
A.-L.Basdevant, N.Enriquez, L.Gerin et J.-B. Gouéré. ALEA, vol.13 (2016), p.33-52.

[11] The Page-Rényi parking process. /
L.Gerin. *The Electronic Journal of Combinatorics*, vol.22 (2015) n.4, paper 4.4.

[10] The shape of large balls in highly supercritical percolation. Chap.1.
A.-L.Basdevant, N.Enriquez, L.Gerin et J.-B. Gouéré. *Electronic Journal of Probability*, vol.19 (2014) paper n.26, p.1-14.

[9] A branching-selection process related to censored Galton-Walton processes. Chap.2.
O.Couronné et L.Gerin. *Annales de l'IHP : Probabilités et Statistiques*, vol.50 (2014) n.1, p.84-94.

[8] Distances in the highly supercritical percolation cluster. Chap.1.
A.-L.Basdevant, N.Enriquez et L.Gerin. *Annals of Probability*, vol.41 (2013) n.6, p.4342-4358.

[7] On the algebraic numbers computable by some generalized Ehrenfest urns. /
M.Albenque et L.Gerin. *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, vol.14 (2012) n.2, p.271-284.

[6] Construction of a short path in high dimensional first passage percolation. Chap.1.
O.Couronné, N.Enriquez et L.Gerin. *Electronic Communications in Probability*, vol.16 (2011) p.22-28.

[5] Random sampling of lattice paths with constraints, via transportation. /
L.Gerin. Proceedings of *Analysis of Algorithms'10*. DMTCS Proceedings, vol.AM (2010), p.317-328.

Publications issues de la thèse

[4] On the convergence of a population protocol when population goes to infinity.
O.Bournez, Ph.Chassaing, J.Cohen, L.Gerin et X.Koegler. *Applied Mathematics and Computation*, vol.215 (2009) n.4, p.1340-1350.

[3] Examples of fast and slow convergence of 2D asynchronous cellular systems.
N.Fatès et L.Gerin. *Journal of Cellular Automata*, vol.4 (2009) n.4, p.323-337.

[2] Asynchronous cellular automata and Brownian motion.
Ph.Chassaing et L.Gerin. Proceedings of *Analysis of Algorithms'07*. DMTCS Proceedings, vol.AH (2007), p.385-402.

[1] Efficient estimation of the cardinality of large data sets.
Ph.Chassaing et L.Gerin. Proceedings of *4th Colloquium on Mathematics and Computer Science*. DMTCS Proceedings, vol.AG (2006), p.419-422.

Introduction

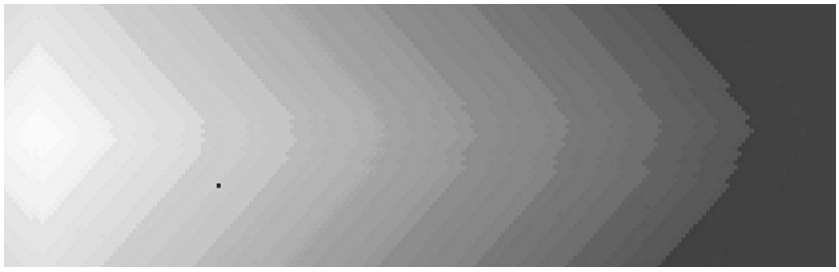
Ce mémoire est consacré à la présentation d'une grande partie de mes travaux de recherche depuis mon recrutement comme maître de conférences en 2009. Ces travaux se situent à l'interface entre probabilités discrètes, combinatoire et optimisation combinatoire, et physique statistique.

Plus précisément, il s'agit de développer des méthodes probabilistes pour la résolution de problèmes combinatoires et de physique statistique. La stratégie consiste à établir une correspondance entre le problème initial et un processus aléatoire très bien étudié (TASEP, processus d'Hammersley, processus de Galton-Watson) ou nouveau mais résoluble. Selon les cas, l'asymptotique est obtenue par différentes méthodes : théorèmes limites pour des processus, limites hydrodynamiques de systèmes de particules, calculs de mesures stationnaires, combinatoire analytique. On verra que ces correspondances permettent souvent d'obtenir des résultats au premier ordre (loi des grands nombres). Au-delà de ces résultats, l'ambition à plus long terme est d'identifier des classes d'universalité de modèles probabilistes.

Chapitre 1 : Percolation et percolation de premier passage [6,8,10]

Collaborations avec A.-L.Basdevant (Nanterre), O.Couronné (Nanterre), N.Enriquez (Nanterre), et J.-B.Gouéré (Tours).

Je me suis intéressé aux systèmes de particules en interaction par le biais de la percolation, et en particulier de la percolation de premier passage. Mes résultats les plus significatifs dans ce domaine sont obtenus dans les articles [8,10]. Le contexte est celui de la percolation par arête dans $\mathbb{Z}^2$, lorsque l'on garde chaque arête avec une probabilité p proche de 1 (et on l'efface avec probabilité $1-p$). Nous avons tout d'abord obtenu le premier ordre asymptotique (lorsque $p \to 1$) des distances dans l'amas de percolation.



Des boules de rayons différents pour D_n, pour la même réalisation de la percolation ($p = 0.95$).

Notons D_n la distance (aléatoire) entre l'origine $(0,0)$ et le point $(n,0)$, après percolation.

Théorème 1.10. *Lorsque p tend vers 1, conditionnellement à l'événement $\{0$ est dans la composante connexe infinie$\}$,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{D_n}{n} = 1 + \frac{1-p}{2} + \mathcal{O}\left((1-p)^2\right).$$

Dans [10] nous étendons le résultat à toute direction fixée (voir théorème 1.11). Ce genre de résultat asymptotique est très rare pour des modèles non-orientés. La preuve du théorème 1.10 est intéressante en soi. Nous exprimons D_n (ou plutôt une légère variante de D_n) comme une fonction simple du *courant* du TASEP (voir Section 1.3), qui est un système de particule hors-équilibre.

Dans le Chapitre 1, je présente également l'article [6] écrit avec O.Couronné et N.Enriquez. Il s'agit d'un problème de percolation de premier passage en grande dimension, dont l'origine se trouve dans des travaux de Eden [Ede61]. Nous donnons une construction effective d'un chemin reliant l'origine de $\mathbb{Z}^d$ au point $(n, 0, 0, \ldots, 0)$ en percolation de premier passage, avec des temps de passage exponentiels sur les arêtes. Il se trouve que, pour d grand, ce chemin est presque optimal et améliore grandement une construction précédente due à Kesten. Ceci permet de démontrer que dès la dimension $d = 35$, la forme limite n'est pas une boule euclidienne. Les "records" précédents étaient $d = 600000$ [Kes86] puis $d = 54$ [Dha88].

Chapitre 2 : Particules en interaction [9,12,14]

Collaborations avec A.-L.Basdevant (Nanterre), O.Couronné (Nanterre), N.Enriquez (Nanterre), J.-B.Gouéré (Tours) et A.Singh (Orsay).

Les techniques développées avec A.-L.Basdevant, N.Enriquez puis J.-B.Gouéré autour des théorèmes 1.10,1.11 pour la percolation de *premier* passage nous ont amenés naturellement à étudier la littérature autour de la percolation de *dernier* passage. Dans ces derniers modèles, les connexions avec des systèmes de particules sont connues depuis longtemps, et plus simples à exploiter.

L'archétype d'un tel système de particules est le *processus d'Hammersley*, introduit de façon implicite par Hammersley [Ham72] pour résoudre le problème de la plus longue sous-suite croissante dans une permutation uniforme (appelé parfois problème d'Ulam, ou problème d'Ulam-Hammersley). L'approche suggérée par Hammersley et utilisée avec succès par Aldous-Diaconis [AD95] consiste à déterminer la limite hydrodynamique du processus.

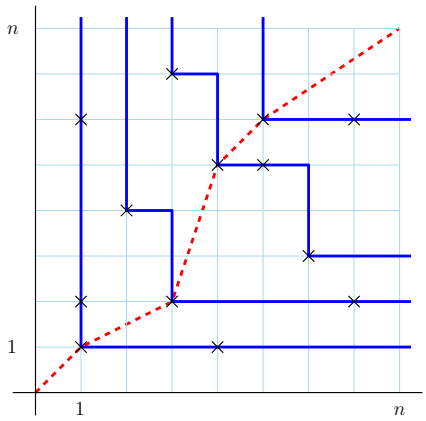
Plus spécifiquement, nous nous sommes intéressés dans [12] au processus d'Hammersley discret (voir la définition p.30), qui a également une interprétation en termes de sous-suite croissante.

En étudiant de façon fine la dynamique du processus d'Hammersley, nous avons unifié et simplifié des résultats dus essentiellement à Seppäläinen [Sep97], et apporté de nouvelles conséquences.

Théorème 2.5. *Soit $\xi = (\xi_{i,j})_{i,j\geq 1}$ un champ de Bernoulli(p) i.i.d. On note $L_{(n,m)}$ la longueur de la plus grande suite de points de ξ pour laquelle les abscisses et les ordonnées sont strictement croissantes.*
Alors on a la loi des grands nombres suivante : pour tous $a, b > 0$, quand n tend vers l'infini,

$$\frac{L_{(an,bn)}}{n} \xrightarrow{p.s.} \frac{\sqrt{p}(2\sqrt{ab} - (a+b)\sqrt{p})}{1-p}.$$

L'approche générale pour [12], ainsi que plus tard dans [14], est de trouver des variantes ou des sous-modèles exactement résolubles de façon explicite (en général en



En bleu : une réalisation du processus d'Hammersley dans un carré.
En rouge, la plus longue "sous-suite" croissante associée.

déterminant des mesures stationnaires). Ce qui est intéressant est que la preuve est entièrement probabiliste, et donne des résultats nouveaux sur le processus d'Hammersley lui-même.

Nous obtenons dans [14] avec les mêmes auteurs et A.Singh des nouvelles conséquences de cette approche pour des "arbres d'Hammersley". Les particules bleues de la figure précédente peuvent alors brancher en plus de se déplacer. Nous étudions de façon assez fine le processus obtenu (il s'agit maintenant d'un processus à temps et espace continus). Nos résultats ont une interprétation combinatoire qui confirme les prédictions récentes en informatique théorique [IB15], alors qu'aucun résultat rigoureux n'était connu. Nous avons l'espoir de généraliser cette approche pour d'autres ensembles, et d'autres relations d'ordre. Des conjectures ont été récemment proposées dans [BBDI17].

Je conclus le Chapitre 2 par une présentation de l'article [9] écrit avec O.Couronné. Nous étudions le comportement asymptotique d'un processus de Galton-Watson surcritique *censuré* en N : à chaque génération on ne garde que N individus. Nous déduisons de notre étude des asymptotiques précises sur un système de particules introduit dans [Bér08, BG10].

Chapitre 3 : Permutations [13,15]

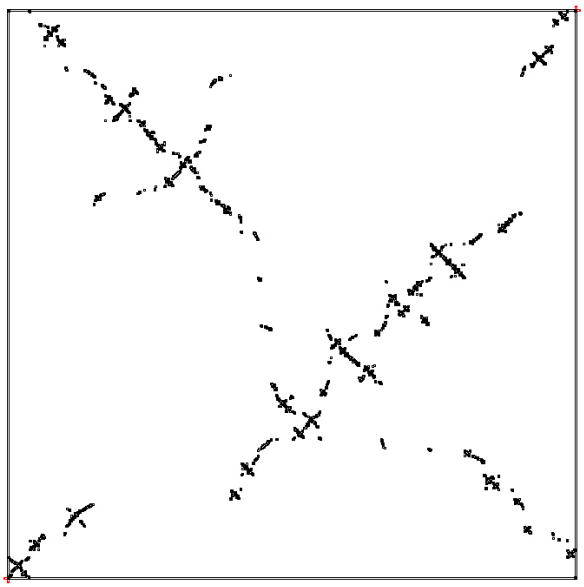
Collaborations avec F.Bassino (Villetaneuse), M.Bouvel (Zürich), V.Féray (Zürich), M.Maazoun (Lyon) et A.Pierrot (Orsay).

Cette partie est assez indépendante du reste et consacrée à un thème de recherche plus récent pour moi, il s'agit d'une approche probabiliste pour la combinatoire des permutations. Dans [13,15], nous obtenons des résultats assez précis sur le problème suivant : à quoi ressemble une permutation aléatoire de grande taille prise uniformement au hasard dans une classe de permutations donnée ?

Une *classe de permutations* $\mathcal{C}$ est l'ensemble des permutations qui évitent un ou plusieurs sous-motifs fixés. Par exemple, $\sigma = 35241$ est dans la classe des permutations qui évitent le motif 123, car on ne peut trouver 3 indices $1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq 5$ tels que $\sigma(i_1) < \sigma(i_2) < \sigma(i_3)$.

Il faut savoir que jusque-là, les seuls résultats probabilistes sur les classes de permutations portaient sur des classes spécifiques évitant un motif donné et de petite taille.On peut citer [Jan17, HRS17a, HRS17b, MP14] pour différents motifs de taille 3, la situation n'est déjà pas triviale. Pour ces motifs-là, les permutations uniformes ont une forme limite déterministe : quasiment tous les points se concentrent autour de la diagonale.

L'article [13] porte sur une classe particulière : les permutations *séparables*. Ce sont celles qui évitent à la fois 2413 et 3142. Le comportement est alors très différent, à toutes les échelles le comportement est non-déterministe :



Une simulation d'une approximation de la "permutation séparable brownienne" : une permutation uniforme séparable de taille 18000.

Nous démontrons que les permutations séparables uniformes admettent une forme limite. Nous avons appelé cet objet limite la *permutation séparable infinie brownienne*, elle peut en effet se construire naturellement comme fonction aléatoire d'une excursion brownienne. Cette construction a certaines analogies avec la construction de l'arbre brownien d'Aldous.

Dans le cas général d'une classe de permutation quelconque, la situation est beaucoup plus complexe car il n'existe pas de codage simple d'une classe de permutation donnée. Le résultat principal de [15] démontre que pour une famille assez naturelle de classes de permutations, les classes *closes par substitution*, on retrouve le comportement observé pour les permutations séparables :

Théorème 3.17. *Sous une certaine condition technique* (**H1**)*, pour toutes les classes de permutations closes par substitution, la loi uniforme sur les permutations dans cette classe admet comme objet limite la permutation séparable brownienne.*

La définition de "close par substitution" est donnée au Chapitre 3.2, presque toutes les familles closes par substitution étudiées dans la littérature vérifient notre condition (**H1**). Il est possible en théorie que (**H1**) ne soit pas réalisée, et alors nous montrons que la limite peut être une permutation infinie *stable*, codée par un arbre réel stable ([DLG02]). Pour donner un sens précis au théorème 3.17, le bon cadre est celui des

permutons introduits dans [HKM+13], nous avons d'ailleurs démontré des critères de convergence pour des permutons aléatoires.

Les théorèmes 3.5,3.17 sont des résultats assez techniques. Le cœur de la preuve pour le cas général est une décomposition combinatoire des permutations en tant qu'arbres avec des sommets internes de plusieurs types. L'asymptotique est alors obtenue par des méthodes de combinatoire analytique. Nous obtenons des résultats nouveaux d'énumération, et nos preuves donnent par ailleurs des algorithmes simples de génération de très grandes permutations tirées uniformément au hasard dans une classe donnée, close par substitution.

Les articles [13,15] ouvrent des perspectives multiples. Il s'agit à mon avis de résultats très significatifs en combinatoire, dont on peut sûrement déduire encore d'autres conséquences probabilistes.

Autres travaux [5,7,11]

Ces trois articles sont plus éloignés de mes intérêts scientifiques actuels, et ne sont pas traités dans ce mémoire. Je les décris très brièvement ici :

- Dans [5], l'objectif est d'estimer de façon élémentaire des temps de mélange de chaînes de Markov utilisées pour la simulation, dans le cas très particulier de marches aléatoires contraintes. Les preuves reposent sur la méthode de *path coupling* de chaînes de Markov. Il se trouve que ces résultats sont strictement inclus dans un article antérieur de D.Wilson [Wil04], dont la méthode est par ailleurs bien plus robuste.
- Dans [7], nous étudions avec M.Albenque un problème d'urnes motivé par une question assez naturelle en informatique théorique (calcul distribué). Avec des arguments combinatoires et des approximations de diffusions nous donnons une caractérisation assez précise des nombres algébriques "calculables" dans ce modèle simplifié.
- Dans [11], j'étends des résultats très anciens sur le modèle du Parking discret de Page-Rényi, qui peut s'interpréter comme un problème de percolation en dimension $d = 1$ avec (faible) dépendance.

1 Percolation

L'objectif de ce chapitre est de présenter les résultats que j'ai obtenus avec mes collaborateurs dans le cadre de la percolation, et plus précisément de la percolation de premier passage.

[6] Construction of a short path in high dimensional first passage percolation.
O.Couronné, N.Enriquez et L.Gerin. *Electronic Communications in Probability*, vol.16 (2011) p.22-28.

[8] Distances in the highly supercritical percolation cluster.
A.-L.Basdevant, N.Enriquez et L.Gerin. *Annals of Probability*, vol.41 (2013) n.6, p.4342-4358.

[10] The shape of large balls in highly supercritical percolation.
A.-L.Basdevant, N.Enriquez, L.Gerin et J.-B. Gouéré. *Electronic Journal of Probability*, vol.19 (2014) paper n.26, p.1-14.

1.1 Le modèle de la percolation de premier passage

La percolation et la percolation de premier passage sont dédiées à l'étude macroscopique de milieux désordonnés modélisés par une perturbation aléatoire de $\mathbb{Z}^d$. Je présente en détail la percolation de premier passage, une référence assez exhaustive et moderne est [ADH17]. On se donne $\{\tau_e, e$ arêtes de $\mathbb{Z}^d\}$ une famille de variables aléatoires positives indépendantes de même loi τ. Pour une arête e, τ_e est appelé *temps de passage* de l'arête e. Pour un *chemin* γ allant de x à y

$$\gamma \ : x = z_0 \to z_1 \to \cdots \to z_k = y$$

le temps de passage $\tau(\gamma)$ du chemin γ est, par extension, la somme des temps de passage de ses arêtes :

$$\tau(\gamma) = \sum_{i=0}^{k-1} \tau_{(z_i, z_{i+1})}.$$

Et ainsi les $\{\tau_e\}$ définissent une pseudo-distance aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$:

$$D(x,y) = \inf_{\gamma \,:\, x \to y} \tau(\gamma),$$

où l'$\inf$ est pris sur tous les chemins qui vont de x à y.
Des exemples célèbres pour la loi τ sont la loi géométrique, la loi de Bernoulli, la loi exponentielle. La percolation de premier passage a été introduite par Hammersley et Welsh [HW65], les questions qui se posent naturellement sont les suivantes :

1. Que peut-on dire de $D(x,y)$ lorsque x, y sont éloignés ? Par exemple, si l'on note $\vec{n} = (n, 0, 0, \ldots, 0)$, quel est l'ordre de grandeur de $D(\vec{0}, \vec{n})$ quand n tend vers l'infini ? Comment évolue son espérance ?
2. Et sa variance ?
3. À quoi ressemble une géodésique entre $\vec{0}$ et $\vec{n}$?
4. Quelle est la forme des grandes boules (aléatoires) de D ? Comment la loi τ influe sur cette forme ?

Dans ce chapitre, je présente des contributions relatives aux questions 1 et 4. Par ailleurs, notre article [10] donne des arguments en faveur de conjectures connues pour les questions 2 et 3. Pour poser quelques notations et donner le contexte, je rappelle tout d'abord quelques résultats historiques.

Existence de la constante de croissance

On s'attend à ce que $D(\vec{0}, \vec{n})$ se comporte linéairement en n. L'outil essentiel pour le démontrer est la *sous-additivité*. Ici on peut appliquer une version du théorème sous-additif ergodique due à Liggett.

Théorème 1.1 (*Théorème sous-additif ergodique [Lig85]*)

Soit $(X_{m,n})_{0\leq m<n}$ une suite de variables aléatoires positives et intégrables telles que

1. *Pour tous $m < n$, on a $X_{0,n} \leq X_{0,m} + X_{m,n}$ p.s.*
2. *Pour tout m, les suites $(X_{m,m+k})_{k\geq 1}$ et $(X_{m+1,m+1+k})_{k\geq 1}$ ont même loi.*
3. *Pour tout k, la suite $(X_{nk,(n+1)k})_{n\geq 0}$ est stationnaire et ergodique.*

Alors on a la convergence presque-sûre et dans L^1

$$\frac{X_{0,n}}{n} \overset{n\to+\infty}{\to} \inf_{n\geq 1} \frac{\mathbb{E}\left[X_{0,n}\right]}{n} \quad \in [0, +\infty).$$

En appliquant le théorème précédent à $X_{m,n} = D(\vec{m}, \vec{n})$, on a la brique essentielle du résultat suivant :

Théorème 1.2 (*voir [Kes86], Théorème 2.8*)

Supposons que $\mathbb{E}[\min\{\tau_1, \ldots, \tau_{2d}\}] < +\infty$, alors pour tout $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_d) \in \mathbb{Z}^d$ on a

$$\frac{D(\vec{0}, n\mathbf{k})}{n} \overset{p.s., L^1}{\to} \inf_{n\geq 1} \frac{\mathbb{E}\left[D(\vec{0}, n\mathbf{k})\right]}{n} \quad \in [0, +\infty).$$

Le terme de droite est noté $\mu_\tau(\mathbf{k})$ et est appelé constante de temps *dans la direction $\mathbf{k}$.*

Quand il n'y a pas d'ambiguïté on note $\mu = \mu_\tau = \mu_\tau(1, 0, 0, \ldots, 0)$. Une conséquence immédiate de la définition de μ est l'inégalité (valable pour tout n)

$$\mu \leq \frac{\mathbb{E}\left[D(\vec{0}, \{x_1 = n\})\right]}{n} \leq \frac{\mathbb{E}\left[D(\vec{0}, \vec{n})\right]}{n},$$

où $\{x_1 = n\} = \{n\} \times \mathbb{Z}^{d-1}$ est l'hyperplan formé par les points dont la première coordonnée est n.

Notons que l'énoncé n'exclut pas le cas $\mu_\tau = 0$, auquel cas le théorème 1.2 dit simplement que la croissance est sous-linéaire. On sait exactement lorsque ce cas a lieu. Rappelons pour cela une définition : le seuil critique p_c de la percolation par arête dans $\mathbb{Z}^d$ est défini par

$$p_c = \inf\{p \in [0, 1],\ \mathbb{P}_p\left(\vec{0} \text{ est dans une composante connexe infinie }\right) > 0\},$$

où $\mathbb{P}_p$ est la mesure obtenue en gardant les arêtes avec probabilité p.

Théorème 1.3 (*[Kes86] Théorème 1.15*)

Pour la percolation de premier passage dans $\mathbb{Z}^d$, on a

$$\mu > 0 \text{ si et seulement si } \mathbb{P}(\tau = 0) < p_c \in (0,1).$$

Il est en fait assez immédiat que si $\mathbb{P}(\tau = 0) > p_c$ alors on a $D(\vec{0}, \vec{n}) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)$. En effet, la composante connexe infinie d'arêtes "nulles" occupe une proportion strictement positive de l'espace. Dans le cas critique $\mathbb{P}(\tau = 0) = p_c$, on comprend maintenant assez bien le cas de la dimension 2 : [CCD86, Dam16].

À part le cas où $\mu = 0$, il n'y aucune loi non-déterministe τ pour laquelle on sache calculer μ. Il est assez peu probable que pour des lois τ non-triviales μ ait une expression remarquable. Pour l'évaluation de la constante de temps, l'enjeu est plutôt d'essayer de comprendre comment $\mu_\tau(\mathbf{k})$ dépend de τ et de $\mathbf{k}$. Nos contributions relatives à cette question font l'objet des Sections 1.2, 1.3.

Le théorème de forme de Cox-Durrett

Soit B_t la boule (aléatoire) de rayon t pour la distance D. On peut essayer de décrire l'évolution des grandes boules aléatoires B_t. Si $\mu > 0$, il y a une loi des grands nombres :

Théorème 1.4 (*Richardson [Ric73], Cox-Durrett [CD81]*)

On suppose que τ est telle que $\mu > 0$ et que $\mathbb{E}[\min\{\tau_1, \dots, \tau_{2d}\}^2] < \infty$. Il existe alors un ensemble non vide $B^\star \subset \mathbb{R}^d$ tel que, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left((1-\varepsilon)B^\star \subset \frac{1}{t} B_t \subset (1+\varepsilon)B^\star, \text{ pour } t \text{ assez grand} \right) = 1.$$

$B^\star$ est un compact convexe déterministe.

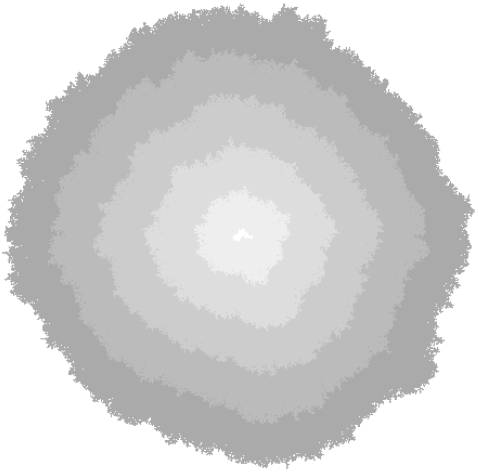
Bien sûr, puisqu'on ne connaît jamais μ_τ, on ne connaît jamais $B^\star$. On sait simplement que, chaque B_t ayant une loi invariante par symétrie axiale ou verticale, $B^\star$ est symétrique par rapport aux deux axes.

1.2 Le modèle d'Eden en grande dimension [6]

Le modèle de percolation de premier passage dans $\mathbb{Z}^d$ avec des temps de passage exponentiels a toujours suscité un intérêt particulier, on peut effet interpréter le modèle comme un problème dynamique. L'idée est de considérer le processus

$$(B_t)_{t\geq 0} = (\text{Boule de rayon } t \text{ pour } D)_{t\geq 0} = \Big(\{x; D(\vec{0}, x) \leq t\}\Big)_{t\geq 0}.$$

Ce processus est à valeurs dans l'ensemble des parties finies de $\mathbb{Z}^d$. Lorsque τ est une loi exponentielle, il s'agit d'un processus de Markov. Ce processus est alors appelé *modèle d'Eden*. Voici la même réalisation du modèle d'Eden dans $\mathbb{Z}^2$ à différents instants :



Depuis [Ric73], on attribue parfois à Eden la conjecture suivante :

Conjecture (*Conjecture d'Eden [Ede61]*)

Pour le modèle d'Eden dans $\mathbb{Z}^d$, la forme asymptotique $B^\star$ est une boule euclidienne.

Il y a effectivement des simulations dans [Ede61], mais en réalité les conclusions qui en sont tirées sont beaucoup plus prudentes :

As yet the samples of configurations computed in this way appear to be too few to justify anything more than a few qualitative statements. It is to be seen that the colony is essentially circular in outline.

On est à peu près convaincu aujourd'hui que cette conjecture est fausse en toute dimension. À l'aide de simulations très méticuleuses Alm et Deijfen [AD15] ont estimé la différence (faible) entre $B^\star$ et la boule euclidienne de même rayon pour $d = 2$.

Dès 1984, Kesten avait eu l'intuition que cette conjecture devait être fausse au moins en grande dimension, pour des raisons géométriques. En effet, la percolation de premier passage est construite sur $\mathbb{Z}^d$, dont la distance de graphe est la distance L^1. Si $B^\star$ était bien une boule euclidienne, les points $(\frac{n}{\sqrt{d}}, \dots, \frac{n}{\sqrt{d}})$ et $(n, 0, \dots, 0)$, qui sont sur la même boule euclidienne, devraient être à même distance de zéro pour D, asymptotiquement. On aurait

$$D(\vec{0}, (\tfrac{n}{\sqrt{d}}, \dots, \tfrac{n}{\sqrt{d}})) = D(\vec{0}, (n, 0, \dots, 0)) + \mathrm{o}(n).$$

Or, en grande dimension, les boules L^1 et L^2 diffèrent de plus en plus :

$$\| (\tfrac{n}{\sqrt{d}}, \dots, \tfrac{n}{\sqrt{d}}) \|_{L^1(\mathbb{Z}^d)} = n\sqrt{d}, \qquad \| (n, 0, \dots, 0) \|_{L^1(\mathbb{Z}^d)} = n.$$

Pour réfuter la conjecture d'Eden, on considère donc la constante de temps le long des axes

$$\mu^{(d)} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} D(\vec{0}, (n, 0, \dots, 0)),$$

et la constante de temps le long de la "diagonale"

$$\mu_\star^{(d)} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} D(\vec{0}, (\tfrac{n}{\sqrt{d}}, \dots, \tfrac{n}{\sqrt{d}})).$$

Si la conjecture d'Eden est vraie en dimension d, alors $\mu^{(d)} = \mu_\star^{(d)}$.

Théorème 1.5 (*Kesten [Kes86] p.239-248*)

Pour la percolation de premier passage avec temps de passage exponentiels, on a le long des axes, pour d assez grand,

$$\mu^{(d)} \leq 11\frac{\log(d)}{d}. \tag{1}$$

Le long de la diagonale, pour tout d,

$$\mu_\star^{(d)} \geq 0.184/\sqrt{d}. \tag{2}$$

En particulier, pour $d > 650000$ on a $11\frac{\log(d)}{d} < 0.184/\sqrt{d}$ et la conjecture d'Eden est fausse.

L'inégalité (2) est obtenue par *union bound* et facilement améliorable (voir théorème 1.7). L'inégalité (1) est démontrée par la méthode du second moment. La méthode de Kesten n'est pas du tout spécifique à la loi exponentielle, Dhar a exploité la structure Markovienne du modèle d'Eden pour démontrer le résultat suivant :

Théorème 1.6 (*Dhar [Dha88]*)

Pour la percolation de premier passage avec temps de passage exponentiels, on a le long des axes

$$\lim_{d\to+\infty} \mu^{(d)}\frac{d}{\log(d)} = 1/2. \tag{3}$$

La preuve de Dhar est assez élégante mais, comme celle de Kesten, elle n'est pas constructive. Par ailleurs, les bornes obtenues par Dhar à d fixée sont rigoureuses, mais le passage à $d \to \infty$ ne l'est pas tout à fait [1]. Avec O.Couronné et N.Enriquez, nous contruisons explicitement dans [6] un chemin aléatoire $\vec{0} \to \{x_1 = 1\}$ qui, pour d grand, a un temps de passage en $\log(d)/d$.

Une stratégie presque optimale

Soit $\mathcal{P}$ le chemin défini de la façon suivante. On fixe $\ell \geq 1$, soit $p_1, ..., p_\ell$ une collection de ℓ entiers avec

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_\ell \leq d - 1.$$

Nous allons fabriquer un chemin $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\ell, p_1, ..., p_\ell)$ avec $\ell + 1$ arêtes connectant $\vec{0}$ à l'hyperplan $\{x_1 = 1\}$, dont les temps de passage sont les plus courts possibles.

Les ℓ premières arêtes de ce chemin sont dans $\{x_1 = 0\}$, et la dernière relie $\{x_1 = 0\}$ à $\{x_1 = 1\}$. Le chemin $\mathcal{P}(\ell, p_1, ..., p_\ell)$ est défini récursivement :

Pas 1. Parmi les $2(d-1)$ arêtes adjacentes à $\vec{0}$ dans $\{x_1 = 0\}$, on considère les p_1 qui ont les plus petits temps de passage. On numérote ces arêtes $\vec{0} \to z_1[1], \ldots, \vec{0} \to z_1[p_1]$.

Pas 2. On considère les arêtes dans $\{x_1 = 0\}$ partant de $z_1[1], \ldots, z_1[p_1]$, et qui ne sont pas colinéaires aux p_1 arêtes sélectionnées au Pas 1. Parmi ces arêtes (qui sont distinctes) on sélectionne les p_2 qui ont les plus petits temps de passage. Les extrémités des arêtes sont notées $z_2[1], \ldots, z_2[p_2]$.

1. Pour être précis, l'argument de monotonie juste avant l'équation (17) dans [Dha88] n'est pas clair.

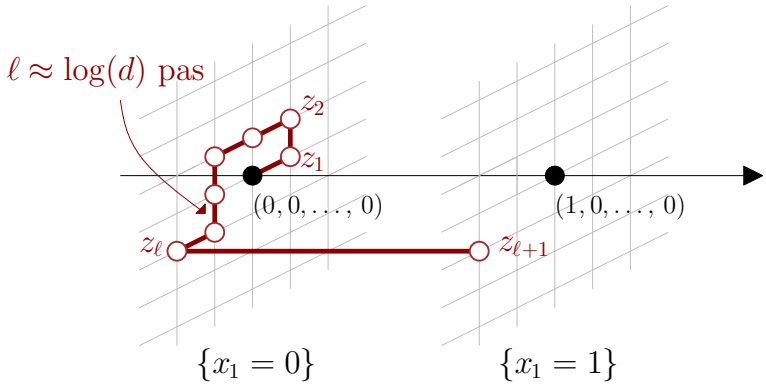


FIGURE 1. Un schéma du chemin $\vec{0} \to \{x_1 = 1\}$ construit dans [6].

...

Pas ℓ. Pour chaque $z_{\ell-1}[1], \dots, z_{\ell-1}[p_{\ell-1}]$, on considère les arêtes non colinéaires à celles déjà rencontrées dans les étapes précédentes. On sélectionne les p_ℓ plus petites, elles finissent en $z_\ell[1], \dots, z_\ell[p_\ell]$.

Pas $\ell+1$. Parmi les p_ℓ arêtes $(z_\ell[1], z_\ell[1]+e_1), \dots, (z_\ell[p_\ell], z_\ell[p_\ell]+e_1)$, on choisit la plus petite. On note cette arête $z_\ell \to z_{\ell+1}$.

Finalement, on construit $\mathcal{P}$ en remontant de $z_{\ell+1}$ à 0 : c'est l'unique chemin tel que

$$\mathcal{P} : 0 \to z_1 \to z_2 \to z_3 \to \cdots \to z_{\ell-1} \to z_\ell \to z_{\ell+1}$$

dans lequel, pour tout $1 \le i \le \ell - 1$, l'arête (z_i, z_{i+1}) est de la forme $(z_i[r], z_{i+1}[s])$ pour certains r, s.

Théorème 1.7 (*Couronné-Enriquez-Gerin [6]*)

En prenant $\ell = \lfloor \log d \rfloor$, et pour un certain choix des $(p_i)_{i \le \ell}$, la stratégie ci-dessus donne un chemin qui garantit que le long des axes,

$$\mu^{(d)} \le \frac{\log(d)}{d} \times \frac{e}{4} = \frac{\log(d)}{d} \times 0,679... \tag{4}$$

Par ailleurs, le long de la diagonale et pour tout d

$$\mu_\star^{(d)} \ge \frac{\sqrt{\alpha_\star^2 - 1}}{2\sqrt{d}} = \frac{0.33136\dots}{\sqrt{d}} \tag{5}$$

où $\alpha_\star = 1.1997\dots$ est la solution positive de $\coth \alpha = \alpha$.

La preuve de (4) consiste, une fois la construction faite, à optimiser les paramètres $(p_i)_{i \le \ell}$. Par ailleurs, cette preuve s'adapte à toutes les lois τ qui admettent une densité non nulle en zéro, mais nous avons poussé les calculs uniquement dans le cas de la loi exponentielle.

Pour la minoration (5), nous avons simplement raffiné l'argument de dénombrement de Kesten. D.Dhar nous a d'ailleurs signalé que l'inégalité (5) était en fait équivalente à un autre résultat antérieur [Dha86].

En combinant notre minoration (5) de $\mu_\star^{(d)}$ et des majorations exactes de $\mu^{(d)}$ calculées numériquement à partir de formules démontrées dans [Dha88], nous avons obtenu

le résultat suivant.

Corollaire 1.8 (*Couronné-Enriquez-Gerin [6]*)

Pour $d \geq 35$, $\mu^{(d)} < \mu_\star^{(d)}$ et la conjecture d'Eden est fausse.

Voici quelques valeurs numériques que nous avons obtenues [2] :

d	majoration de $\mu^{(d)}$	minoration de $\mu_\star^{(d)}$	Conclusion
...			
33	0.058517	0.057682	?
34	0.057150	0.056827	?
35	0.055860	0.056010	la conjecture est fausse
36	0.054640	0.055226	la conjecture est fausse
37	0.053488	0.054475	la conjecture est fausse
38	0.052397	0.053753	la conjecture est fausse
39	0.051367	0.053060	la conjecture est fausse
...			

À la suite de nos travaux, plusieurs auteurs ont amélioré nos résultats :

- Deux étudiants de l'X que j'ai supervisés, Q.Bertrand et J.Pertinand [BP18], ont récemment généralisé la stratégie de Dhar et l'ont implémentée de façon efficace pour améliorer encore les bornes sur $\mu^{(d)}, \mu_\star^{(d)}$. Ils démontrent que la conjecture d'Eden est fausse dès la dimension 22.
- A.Auffinger et S.Tang [AT16] ont calculé la limite $\lim_{d\to+\infty} \mu^{(d)} \frac{d}{\log(d)}$ pour tout temps de passage, lorsque le temps de passage admet une densité non nulle en zéro. La stratégie est directement inspirée de [Kes86]. Ceci démontre que pour toutes ces lois la forme limite ne peut être la boule euclidienne, en dimension suffisamment grande.
- A.Martinsson [Mar17] a démontré que notre minoration (**5**) est en réalité asymptotiquement optimale : $\lim_{d\to+\infty} \mu_\star^{(d)} \sqrt{d} = \frac{\sqrt{\alpha_\star^2 - 1}}{2}$.

1.3 Sur la forme limite dans l'amas de percolation surcritique [8] et [10]

Je présente maintenant les résultats de deux articles compagnons écrits avec A.-L.Basdevant, N.Enriquez, puis J.-B.Gouéré. Il s'agit également d'un problème de forme limite en percolation de premier passage, cette fois en dimension 2.

Rappelons qu'on ne connaît la forme limite $B^\star$ dans le théorème 1.4 pour aucune loi τ non constante (dans ce cas $B^\star$ est bien sûr le losange de la norme L^1). Pour comprendre comment $B^\star$ dépend de τ, on peut commencer par le cas où τ est proche d'une loi constante. C'est ce que nous avons fait avec

$$\tau = \begin{cases} 1 & \text{avec probabilité } p \\ +\infty & \text{avec probabilité } 1-p, \end{cases}$$

pour un p très proche de 1. Autrement dit, on considère les distances dans l'amas de percolation (très) surcritique. Ceci n'a d'intérêt que si 0 est dans la composante connexe infinie de percolation, événement que l'on note $\{0 \leftrightarrow +\infty\}$. Remarquons que ce n'est

2. On peut trouver sur ma page web le code `python`, ainsi qu'un grand nombre de valeurs numériques.

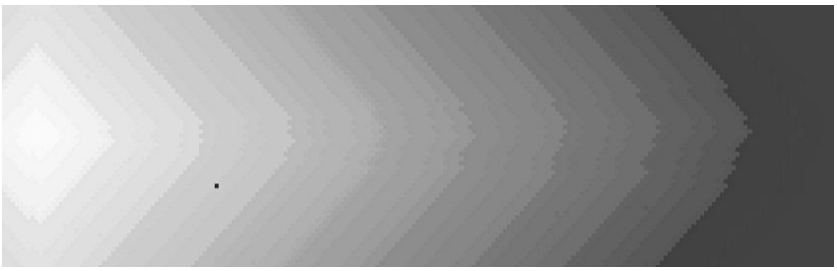


FIGURE 2. Simulation illustrant le théorème 1.11. Les nuances de gris représentent les boules de différents rayons, pour une seule réalisation (ici, $p = 0.95$).

pas un conditionnement très fort car on prouve assez facilement que si p est assez grand, $\mathbb{P}(0 \leftrightarrow +\infty) \geq 1 - 2(1-p)^4$.

Gärtner-Molchanov [GM90] ont donné le premier argument rigoureux vers un théorème limite, Antal-Pisztora [AP96] ont obtenu un contrôle exponentiel des distances $D(\vec{0}, \vec{n})$. Pour un théorème de forme, la situation est plus compliquée à cause du conditionnement, l'argument de sous-additivité ne s'adapte pas si facilement pour démontrer l'existence d'une constante de temps. (Une autre approche dûe à Cerf-Théret [CT16] consiste à régulariser les variables aléatoires $D\left(\vec{0}, (nx, ny)\right)$.)

Théorème 1.9 (*Garet-Marchand ([GM04] Th.3.2)*)

Sur l'événement $\{\vec{0} \leftrightarrow \infty\}$, pour tout (x, y) la suite

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \vec{0}\leftrightarrow(nx,ny)}} \frac{D\left(\vec{0}, (nx, ny)\right)}{n}$$

converge presque-sûrement vers une limite constante, notée $\mu_p(x, y)$.

On cherche à déterminer la forme de la boule lorsque p est proche de 1, il faut donc commencer par évaluer le comportement asymptotique de $\mu_p(1, 0)$. En combinant les deux résultats suivants :

- Marchand exprime [Mar02] les arêtes de la forme limite en fonction de la *vitesse* en percolation orientée v_p sur $\mathbb{Z}^2$;
- Durrett-Liggett [DL81] avaient précédemment donné des bornes sur v_p ;

on obtient l'encadrement suivant de la constante de temps le long des axes :

$$1 + \frac{1-p}{3} \leq \mu_p(1, 0) \leq 1 + (1-p).$$

Étrangement il ne semblait pas exister dans la littérature un meilleur encadrement de $\mu_p(1, 0)$. Nous avons obtenu le développement asymptotique suivant :

Théorème 1.10 (*Distances le long des axes : Basdevant-Enriquez-Gerin [8]*)

Lorsque p tend vers 1,

$$\mu_p(1, 0) = 1 + \frac{1-p}{2} + \mathcal{O}\left((1-p)^2\right).$$

La stratégie générale consiste à approcher $D(\vec{0},\vec{n})$ par une fonctionnelle du TASEP *à l'équilibre* dans un intervalle. Ceci nous a permis d'évaluer la distance entre $\vec{0}$ et $\vec{n}$ dans la percolation réduite à une bande $\mathbb{Z}\times[-h_n;h_n]$, avec $h_n=\mathrm{o}(n)$.

Pour cette raison, ce premier article donnait des résultats uniquement sur la constante de temps dans la direction horizontale. Pour étudier le comportement de $D(\vec{0},n\times(1,y))$ avec $y\neq 0$, nous devions étendre notre correspondance percolation $\leftrightarrow$ TASEP au TASEP *hors équilibre*, sur $\mathbb{Z}$ tout entier et non plus sur un intervalle. Nous avons réalisé ce travail avec les mêmes auteurs et J.-B.Gouéré.

Soit $\lambda\in[0,+\infty)$ fixé, on pose

$$\mu_p\Big(1,\lambda(1-p)\Big)=\lim_{\substack{n\to\infty\\ \vec{0}\leftrightarrow n(1,\lambda(1-p))}}\frac{D\left(\vec{0},n(1,\lambda(1-p))\right)}{n}.$$

En combinant à nouveau [Mar02] et [DL81] on déduit que la forme a une arête plate pour $\lambda\leq 1$. Nous avons complété la description pour $\lambda<1$.

Théorème 1.11 (*Distance près des axes : Basdevant-Enriquez-Gerin-Gouéré [10]*)

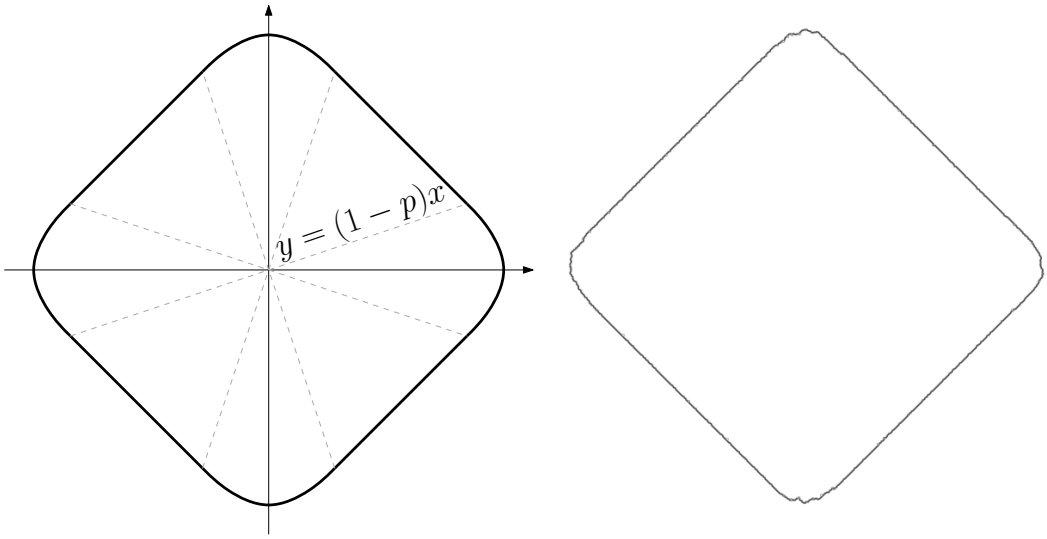
- **Asymptotique en $p\to 1$.**

$$\mu_p\Big(1,\lambda(1-p)\Big)=\begin{cases}1+\lambda(1-p) & \textit{si } \lambda\geq 1,\\ 1+(1-p)\frac{1+\lambda^2}{2}+\mathcal{O}\left((1-p)^2\right) & \textit{si } \lambda\leq 1.\end{cases}$$

- **Minoration uniforme.** *Pour tout $0\leq\lambda\leq 1$ et tout $p>1/2$,*

$$\mu_p\Big(1,\lambda(1-p)\Big)\geq 2-\sqrt{1-(1-p)(1+\lambda^2)+\lambda^2(1-p)^2}.$$

La première assertion suggère que, lorsque p est proche de 1, la forme limite doit ressembler au losange de la distance L^1, où les quatre coins sont rabotés et remplacés par des arcs de parabole :



À gauche : une version stylisée du théorème 1.11. À droite : une simulation pour $p=0.95$.

Preuves des théorèmes 1.10 et 1.11 : une connexion avec le TASEP

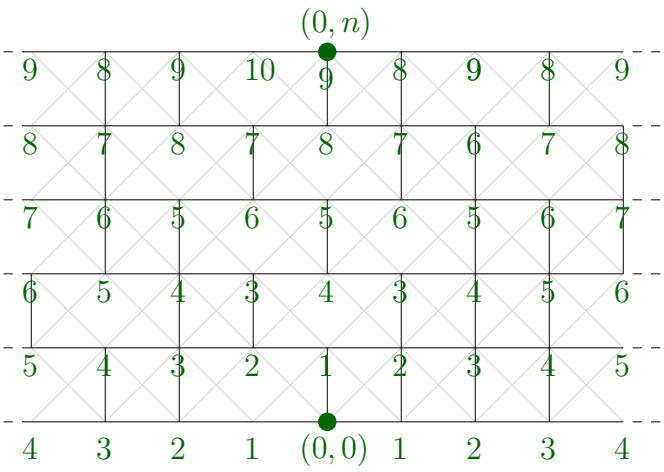
Notre idée pour évaluer $D(\vec{0}, \vec{n})$ est d'introduire et d'exploiter une connexion entre la géométrie de la composante connexe infinie, objet statique de dimension 2 et l'évolution du TASEP (*Totally Asymmetric Simple Exclusion Process*), qui est un système de particules en dimension 1.

Pour présenter cette connexion, nous avons introduit un graphe aléatoire très simple, dans lequel les distances sont censées être proches des distances dans la composante connexe infinie. Pour améliorer la présentation je présente dans la suite l'asymptotique de la distance $D(\vec{0}, (0, n))$ (plutôt que $D(\vec{0}, (n, 0))$).

On considère le graphe dont les sommets sont les points de $\mathbb{Z}^2$, et dont les arêtes sont données par :

1. Toutes les arêtes horizontales de $\mathbb{Z}^2$;
2. Chaque arête verticale est présente indépendamment avec probabilité p ;
3. Dans chaque carré unité, on ajoute les deux arêtes diagonales, mais on leur attribue la longueur 2 (au lieu de $\sqrt{2}$).

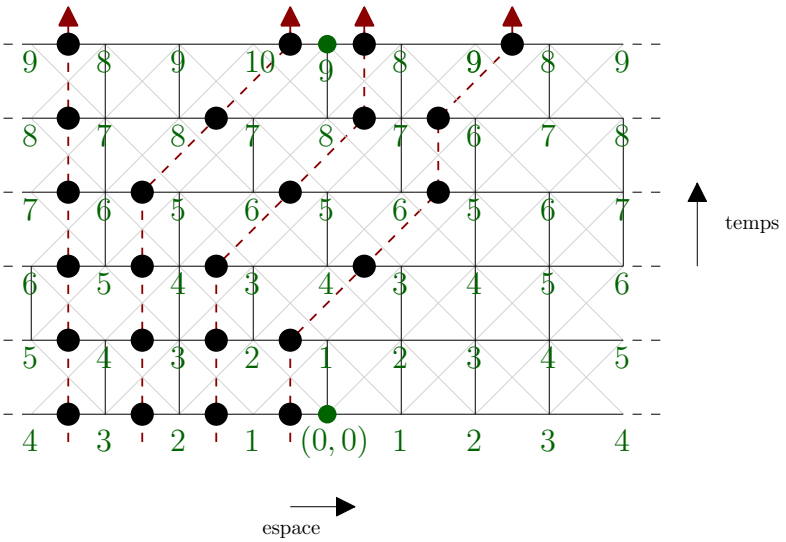
Notons $D^{\times}(.,.)$ les distances dans ce graphe aléatoire (le $\times$ fait référence aux arêtes diagonales dans chaque carré), on remarque que ce graphe est toujours connexe. Voici un exemple de réalisation de ce graphe aléatoire, avec les distances à l'origine :



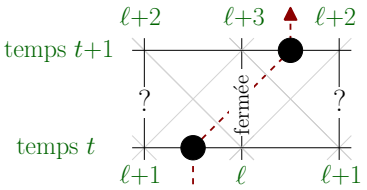
On peut se convaincre que si p est très proche de 1, les distances $D^{\times}(.,.)$ dans ce graphe sont proches de $D(.,.)$: une arête diagonale fixée ne joue un rôle dans les distances que si deux arêtes du carré correspondant sont supprimées, ce qui arrive avec probabilité $\mathrm{const} \times (1-p)^2$.

Il est très facile de voir que les distances entre les deux sommets d'une arête horizontale diffèrent toujours exactement de 1. Nous allons mettre une particule $\bullet$ sur toutes les arêtes horizontales de la forme $\ell + 1 \leftrightarrow \ell$, et rien sur les arêtes $\ell \leftrightarrow \ell + 1$

de sorte que, pour la réalisation de la figure précédente, on obtient la configuration de particules suivante :



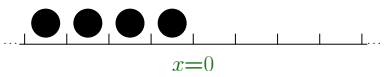
Il se trouve que si l'on voit le temps allant de bas en haut, alors l'évolution des particules est très simple. On vérifie facilement qu'aucune particule n'apparaît ni ne disparaît, et que la seule évolution possible est la suivante : lorsqu'une particule • a un espace vide immédiatement à sa droite, et que l'arête verticale immédiatement à son Nord-Est est absente, alors elle avance :



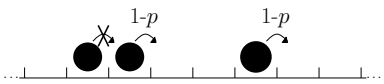
On peut ainsi démontrer la chose suivante :

Proposition 1.12 (*TASEP et modèle simplifié, [8] Prop.3*)

Lorsque le temps évolue, les particules forment une chaîne de Markov à valeurs dans $\{\bullet, \quad\}^{\mathbb{Z}}$ *dont l'évolution est définie de la façon suivante. La configuration initiale est :*



À chaque pas de temps, chaque particule • qui est suivie d'un espace vide à sa droite avance d'un pas avec probabilité $1-p$*, indépendamment des autres particules. Toutes les particules sautent simultanément.*



Ce processus est appelé TASEP (synchrone) à temps discret de paramètre $1-p$*.*

Lorsque le TASEP est ainsi défini avec cette condition initiale asymétrique ...●●●_ _ _..., on parle de TASEP *hors équilibre*, par opposition à une configuration initiale invariante par translation. La première connexion entre le TASEP hors équilibre et un modèle de croissance remonte semble-t-il à Rost [Ros81, p.43]. Il s'agit d'une correspondance exacte (non asymptotique) entre le TASEP en temps continu et la percolation de *dernier* passage dans le quart de plan, avec temps de passages exponentiels.

De notre côté, la connexion avec le TASEP permet d'évaluer plusieurs quantités reliées aux distances dans le modèle simplifié. En effet, il est facile de voir que dans le modèle simplifié,

$$D^{\times}(\vec{0},(k,n)) \overset{\text{(loi)}}{=} n + 2J_{n,k}, \tag{6}$$

où $J_{n,k}$ est le *courant* du TASEP, c'est-à-dire le nombre de particules à droite de k, à l'instant n, dans le TASEP. Pour l'exemple de la figure précédente, on a $D(\vec{0},(0,5)) = 9 = 5 + 2 \times 2$.

Or, une loi des grands nombres pour le terme de droite dans (6) a été démontrée par [JPS98]. Cette loi des grands nombres pour le TASEP discret hors équilibre généralise le cas continu, plus connu, dû à Liggett [Lig75] puis Rost [Ros81]. En démontrant que les distances dans le modèle simplifié sont proches des distances dans l'amas de percolation, nous en déduisons ainsi les théorèmes 1.10 et 1.11.

1.4 Discussions et perspectives

Nos théorèmes 1.10-1.11 ouvrent de nombreuses questions. Je propose quelques perspectives possibles, classées par ordre (supposé) croissant de difficulté. On peut imaginer que le modèle simplifié $D^{\times}(.,.)$ est un modèle jouet pour commencer à approcher des problèmes ouverts en percolation de premier passage.

Dimension supérieure ★

Il est possible de définir un analogue du TASEP dans $\mathbb{Z}^2$ (qui serait donc en correspondance avec un modèle simplifié de percolation dans $\mathbb{Z}^3$). La loi des grands nombres pour ce TASEP dans $\mathbb{Z}^2$ n'est pas connue. Si l'on arrive à évaluer le courant de particules dans ce modèle, alors on pourra en déduire l'équivalent du théorème 1.10.

Pour une estimée de forme limite analogue au théorème 1.11, la tâche paraît plus difficile : un argument essentiel de [10] consiste à décrire certaines géodésiques dans le modèle simplifié de percolation, il paraît compliqué d'étendre cet argument en dimension supérieure.

Géométrie de l'amas ★★

Nous n'avons pas poussé plus loin les calculs, mais il semble possible de déduire du théorème 1.11 et de sa preuve de nouvelles informations sur la géométrie de l'amas infini $\mathcal{C}$ de percolation dans $\mathbb{Z}^2$, pour $p \to 1$. Par exemple, que peut-on dire de la taille de

$$\{x \in \mathbb{Z}^2,\ D(0,x) = n\}?$$

Cette question a été étudiée récemment [DHL17] dans le cas général (pour tout $p > 1/2$).

Notons $\mathcal{C}_n$ les points de l'amas dans la boîte $2n \times 2n$:

$$\mathcal{C}_n = \mathcal{C} \cap [-n, n]^2.$$

Alors la *constante de Cheegers* de $\mathcal{C}_n$ est définie par

$$\Phi_{\mathcal{C}_n} := \min \left\{ \frac{|\partial A|}{|A|},\ A \subset \mathcal{C}_n, 0 < |A| \leq |\mathcal{C}_n|/2 \right\}.$$

On sait d'après [Gol18] qu'il existe une constante c_p telle que $n\Phi_{\mathcal{C}_n} \to c_p$ presque sûrement. On peut chercher à déterminer l'asymptotique de c_p lorsque $p \to 1$. La motivation vient du fait que pour un graphe régulier G les propriétés isopérimétriques de G sont liées au comportement asymptotique de la marche aléatoire standard sur G [PSC01].

Courbure ★★★

Notre théorème 1.11 peut être rapproché du problème de la courbure de la forme limite. Introduisons pour cela une définition : soit $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$, supposons qu'il existe $\kappa(\mathbf{u}), c, C > 0$ tels que

$$c|\mathbf{z}|^{\kappa(\mathbf{u})} \leq \mu(\mathbf{u} + \mathbf{z}) - \mu(\mathbf{u}) \leq C|\mathbf{z}|^{\kappa(\mathbf{u})}, \tag{7}$$

la constante $\kappa(\mathbf{u})$ est alors la *courbure* de la forme limite $B_\star$ dans la direction $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$. Le théorème 1.11 va dans le sens de la conjecture selon laquelle le long des axes et pour la plupart des lois τ, la forme limite est courbée comme les boules euclidiennes.

Conjecture (***[ADH17], Questions 9-11***)

Pour des lois τ très générales, la forme limite est courbée uniformément près des axes : $\kappa(\mathbf{u})$ existe pour u proche de $(1, 0)$ et

$$\kappa(\mathbf{u}) \geq 2,$$

où les constantes c, C définissant κ dans (7) peuvent être choisies uniformément en $\mathbf{u}$.

Il manque dans le théorème 1.11 une uniformité en λ du $\mathcal{O}((1-p)^2)$ pour avoir la courbure $\kappa((1, 0)) = 2$ le long des axes. En fait, le théorème 1.11 n'empêche même pas que la forme limite autour de $(1, 0)$ ait une arête verticale.

Nous mentionnons également un résultat intéressant sur un modèle proche, qui traite de la stricte convexité de la forme limite. Considérons une loi τ telle que

- τ est à support dans $[1, +\infty)$,
- $\mathbb{P}(\tau = 1) = p \geq p_c$, où p_c est le seuil de percolation critique en percolation orientée dans $\mathbb{N}^2$.

Notons $B^\star(\tau)$ la forme limite associée à cette loi τ. Clairement $B^\star(\tau)$ est incluse dans la boule $\diamond$ de rayon 1 pour la norme L^1. Plus précisément

1. $B^\star(\tau)$ coïncide avec $\diamond$ en 4 arêtes dont les coordonnées s'écrivent explicitement en fonction de v_p (vitesse de la percolation orientée, voir [DL81]) ;
2. La frontière de $B^\star(\tau)$ est dérivable aux 8 points où $B^\star(\tau)$ s'écarte de $\diamond$ (ceci exclut que $B^\star(\tau)$ soit un polygone).

Le premier point est dû à Marchand [Mar02], le dernier à Damron-Auffinger [AD13].

Pour notre modèle de $\tau \in \{1, +\infty\}$, on peut remarquer que les 4 segments de parabole qui complètent le losange dans la figure p.20 se recollent de façon lisse à $\diamond$.

Fluctuations de $D(\vec{0},\vec{n})$ ★★★

La question ouverte la plus célèbre pour la percolation de premier passage est probablement le problème des fluctuations.

Conjecture ([ADH17], Question 13)

*En dimension 2, pour des lois τ très générales, l'*exposant de fluctuation χ *est égal à $1/3$.*

L'exposant χ est "défini" par $\mathrm{Var}\Big(D(\vec{0},(0,n))\Big) \approx n^{2\chi+o(1)}$, on ne sait pas démontrer qu'un tel exposant existe.Pour l'instant, les meilleures bornes connues sont :

Théorème 1.13 (*Minoration [NP95] et majoration [BKS03, BR08] de la variance*)

Pour une grande famille de temps de passages discrets et continus, il existe des constantes $c, C > 0$ telles que

$$c\log(n) \leq \mathrm{Var}\Big(D(\vec{0},(0,n))\Big) \leq C\frac{n}{\log(n)}.$$

Il se trouve que les fluctuations du TASEP sont connues, et ceci donne donc les fluctuations de la variable aléatoire $D^{\times}(\vec{0},(0,n))$.

Théorème 1.14 (*Fluctuations pour le TASEP discret [JPS98],[Joh00a]*)

Pour le TASEP discret de paramètre $1-p$, si l'on note $J_{n,k}$ le nombre de particules à droite de k à l'instant n, alors pour tout $x \in (-p,p)$

$$\frac{J_{n,\lfloor nx\rfloor}}{n} \overset{n\to+\infty}{\to} j_p(1,x) := \tfrac{1}{2}(1-x) - \tfrac{1}{2}\sqrt{p(1-\tfrac{1}{1-p}x^2))} \qquad \textit{p.s.}$$

De plus, il existe une constante $\gamma(x)$ telle que

$$\frac{J_{n,\lfloor nx\rfloor} - nj_p(1,x)}{\gamma(x)n^{1/3}} \overset{n\to+\infty}{\to} \mathrm{TW} \qquad \textit{(en loi)},$$

où TW est la loi de Tracy-Widom.

On en déduit donc directement avec (6) que les distances simplifiées $D^{\times}(\vec{0},(0,n))$ ont des fluctuations en $n^{1/3}$: quand n est grand,

$$D^{\times}(\vec{0},(0,n)) \approx \Big(1+\tfrac{1}{2}(1-p)\Big)n + \gamma(0)n^{1/3}\mathrm{TW}. \tag{8}$$

On a également un contrôle de la variance de $J_{n,0}$, donc de $D^{\times}(\vec{0},(0,n))$ (voir [BDM+01, Cor.1.3]). On en déduit qu'il existe $c, C > 0$ tels que pour n assez grand

$$cn^{2/3} \leq \mathrm{Var}\Big(D^{\times}(\vec{0},(0,n))\Big) \leq Cn^{2/3}.$$

Notre correspondance TASEP/percolation établie en (6) donne ainsi un mince espoir (une illusion plutôt) de pouvoir avancer dans l'estimation de $\mathrm{Var}\Big(D(\vec{0},(0,n)) \mid D(\vec{0},(0,n)) < \infty\Big)$.

Plus généralement, (8) confirme que la percolation de premier passage semble bien appartenir à la classe d'universalité des processus de croissance gouvernés par l'équation

KPZ. En dimension 2, cela se traduit par les deux phénomènes suivants (on renvoie à [Cor16]) :

- Exposant de fluctuation χ égal à $1/3$.
- Exposant de dispersion ξ égal à $2/3$: un chemin optimal typique s'écarte du segment $(0,0) \to (n,0)$ de l'ordre de $n^{2/3+\mathrm{o}(1)}$.

Pour l'instant, les modèles dont on sait démontrer qu'ils ont de tels exposants sont uniquement des modèles orientés (plutôt reliés à la percolation de *dernier* passage donc, voir par exemple [Joh00a, Joh00b], respectivement pour le TASEP et le processus d'Hammersley).

2 Particules en interaction

En étudiant les liens entre systèmes de particules et percolation de premier passage, nous nous sommes naturellement intéressés avec A.-L.Basdevant, N.Enriquez et J.-B.Gouéré à la littérature autour de la percolation de dernier passage. Dans ce cas, les correspondances avec des systèmes de particules sont connues depuis longtemps, et plus simples à exploiter. C'était d'ailleurs déjà l'une des motivations de l'article pionnier de Rost [Ros81] sur le TASEP. Nous avons alors étudié des liens éventuels avec le problème d'Ulam-Hammersley, qui est également un modèle de percolation de dernier passage. Ce chapitre est ainsi consacré à nos résultats sur ces systèmes de particules, il s'agit des articles [12,14]. Je finis par l'article [9] dont le domaine d'applications est assez différent : il s'agit d'un modèle de branchement avec sélection.

[12] Discrete Hammersley's lines with sources and sinks.
A.-L.Basdevant, N.Enriquez, L.Gerin et J.-B. Gouéré. ALEA, vol.13 (2016), p.33-52.

[14] From Hammersley's lines to Hammersley's trees.
A.-L.Basdevant, J.-B. Gouéré, L.Gerin et A.Singh. *Probability Theory and Related Fields*, à paraître.

[9] A branching-selection process related to censored Galton-Walton processes.
O.Couronné et L.Gerin. *Annales de l'IHP : Probabilités et Statistiques*, vol.50 (2014) n.1, p.84-94.

2.1 Optimisation combinatoire et processus d'Hammersley discret [12]

Je présente un travail en collaboration avec A.-L.Basdevant, N.Enriquez, J.-B.Gouéré. Il s'agit d'explorer certaines propriétés du *processus d'Hammersley discret*. L'idée générale consiste à introduire des conditions aux bords qui rendent le modèle résoluble explicitement. Cette stratégie nous a été inspirée par Cator-Groeneboom [CG05], elle avait été introduite à peu près en même temps en percolation de dernier passage avec poids géométriques par Seppäläinen et ses co-auteurs ([Sep09, Sec.2.2.],[BCS06]).

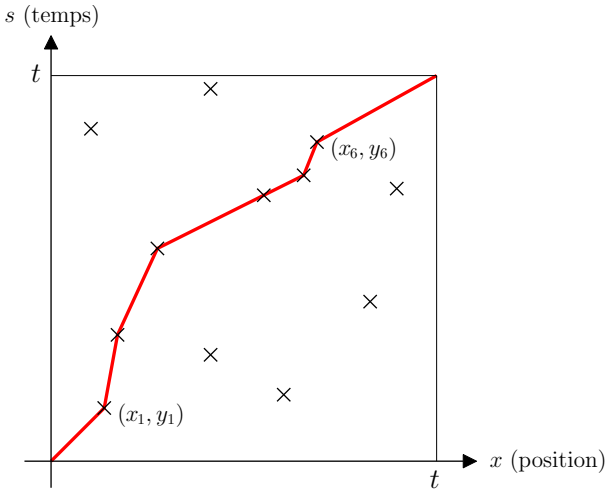
Les résultats nouveaux sont les théorèmes 2.3-2.8 ci-dessous, la motivation initiale est l'étude d'un problème d'optimisation combinatoire.

Problème d'Ulam et processus d'Hammersley-Aldous-Diaconis continus

La présentation moderne de ce problème est due à Aldous-Diaconis [AD95] (et implicite dans [Ham72]). Soit Π un Processus Ponctuel de Poisson (PPP) homogène d'intensité 1 sur le quart de plan $[0,+\infty)^2$. Pour $t \geq 0$, on note $\mathcal{L}_t$ le nombre maximal de points de $\Pi \cap [0,t]^2$ qui sont en "position croissante", c'est-à-dire

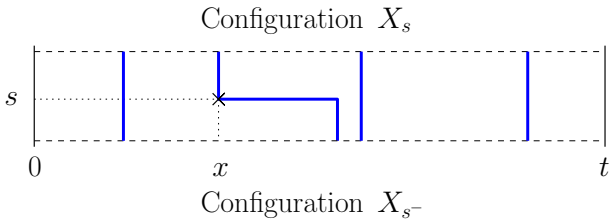
$$\mathcal{L}_t = \max\left\{k;\ \text{il existe } (x_1,y_1),\dots,(x_k,y_k) \in \Pi, x_1 < \dots < x_k \leq t \text{ et } y_1 < \dots < y_k \leq t\right\}.$$

Voici un exemple avec $\mathcal{L}_t = 6$ (les points de Π sont représentés par des croix $\times$) :

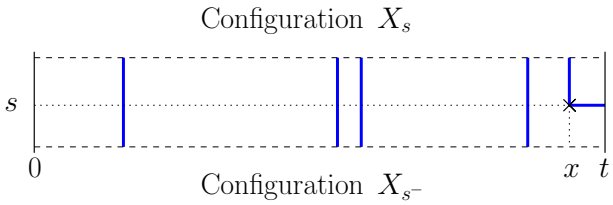


On s'attend à ce que la variable aléatoire $\mathcal{L}_t$ se comporte comme $\mathrm{const} \times t$. Pour évaluer à l'aide de simulations cette constante, Hammersley a couplé Π avec un processus de sauts purs à valeurs dans les mesures ponctuelles sur $[0, t]$. Ce processus $(X_s)_{0 \leq s \leq t}$ est défini de la façon suivante.

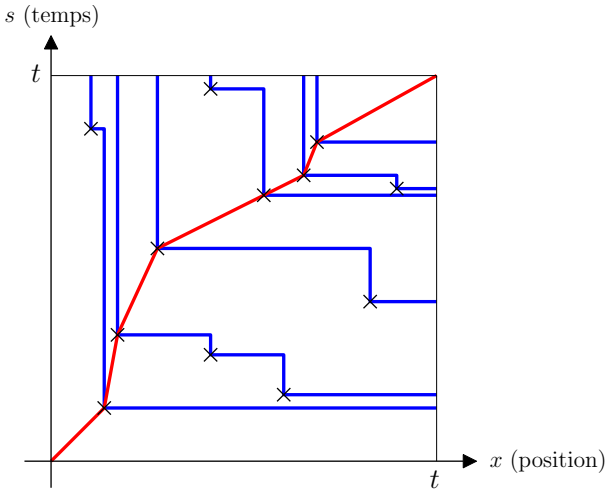
On a $X_0 = \varnothing$. Lorsqu'une croix $\times$ apparaît à la position (x, s), la particule située immédiatement à droite de x dans X_{s^-} saute immédiatement en x :



S'il n'y a aucune particule dans $X_{s^-} \cap [x, t]$ alors une particule est créée (et placée en x) :



Pour la réalisation du PPP ci-dessous cela donne (le temps va de bas en haut) :



Chacune des lignes brisées bleues dans la figure ci-dessus est appelée une *ligne d'Hammersley*. On démontre assez facilement qu'il y a toujours exactement $\mathcal{L}_t$ lignes d'Hammersley (ici, $\mathcal{L}_t = 6$). Cette façon de représenter la variable aléatoire $\mathcal{L}_t$ a permis à Hammersley de conjecturer $\mathcal{L}_t \sim 2t$ et à Aldous et Diaconis de démontrer la conjecture d'Hammersley.

Théorème 2.1 (*Aldous-Diaconis [AD95] Th.5.a)*)

Lorsque $t \to +\infty$,

$$\frac{\mathcal{L}_t}{t} \overset{p.s.}{\to} 2.$$

Ceci donne la première preuve probabiliste[3] (après dépoissonisation, voir [Ste97], Chap.1) du problème d'Ulam : la longueur typique $\ell(n)$ de la plus longue sous-suite croissante d'une permutation aléatoire uniforme de n éléments est de l'ordre de $2\sqrt{n}$. En effet, il est facile de voir que n points indépendants et uniformément répartis dans $[0, \sqrt{t}]^2$ définissent une permutation uniforme de taille n, de sorte que

$$\ell(X) \overset{\text{(loi)}}{=} \mathcal{L}_{\sqrt{t}},$$

où X est une Poisson de paramètre t.

La preuve d'Aldous-Diaconis repose sur une étude très fine du comportement asymptotique du processus d'Hammersley, avec la condition initiale $\varnothing$. Ce processus n'est bien sûr pas stationnaire car des particules apparaissent mais ne disparaissent jamais. Dix ans plus tard, Cator-Groeneboom [CG05] ont proposé une autre approche pour prouver le théorème 2.1 en étudiant une variante stationnaire du processus d'Hammersley. Pour cela ils ont ajouté des *sources* et *puits* à la définition de (X_t). Nous avons adapté dans [12] cette notion de sources/puits pour deux variantes discrètes possibles du processus d'Hammersley.

3. La preuve historique [VK77] repose sur une correspondance entre $\ell(n)$ et la forme de Tableaux de Young aléatoires.

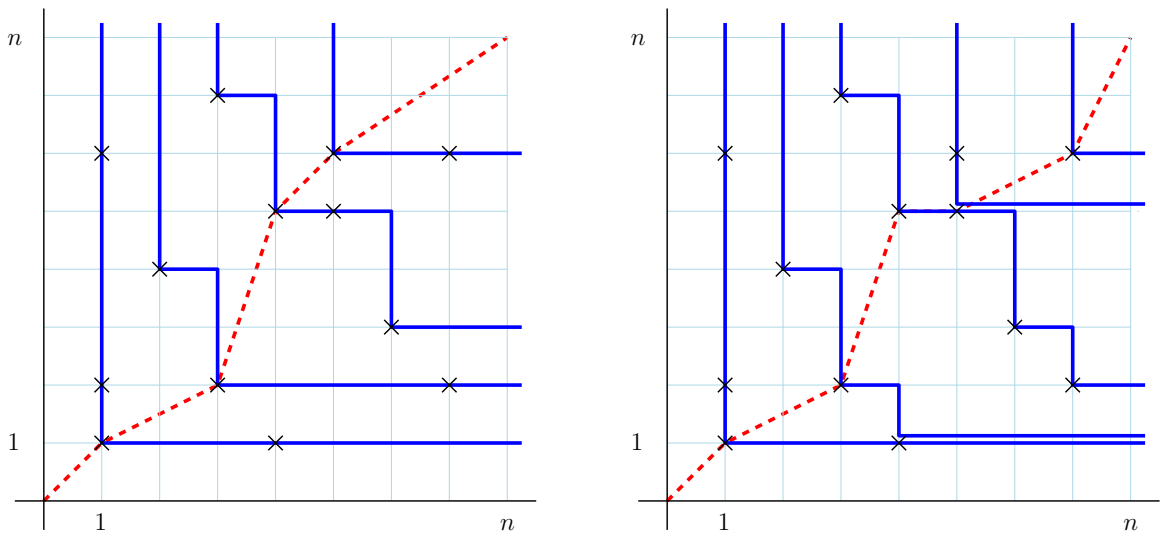


FIGURE 3. Réalisations des variables aléatoires $L^{(1)}_{n,n}, L^{(2)}_{n,n}$ pour $n = 8$, avec la même réalisation de Π (sur ce dessin on anticipe en bleu les lignes d'Hammersley qui sont définies plus bas). Ici, $L^{(1)}_{n,n} = 4$ et $L^{(2)}_{n,n} = 5$.

Définition 2.2 (*Problèmes d'Ulam discrets*)

Soit $(\Pi_{i,j})_{i,j\geq 1}$ *un champ de Bernoulli*(p) *i.i.d. On considère la* plus longue sous-suite croissante $L^{(1)}_{m,n}$ *à l'intérieur de la boîte* $[1,m] \times [1,n]$ *:*

$$L^{(1)}_{m,n} = \max\{L;\ \textit{il existe}\ (i_1,j_1),\dots,(i_L,j_L) \in \Pi, i_1 < \dots < i_L \leq m\ \textit{et}\ j_1 < \dots < j_L \leq n\}.$$

On considère également la plus longue sous-suite croissante au sens large :

$$L^{(2)}_{m,n} = \max\{L;\ \textit{il existe}\ (i_1,j_1),\dots,(i_L,j_L) \in \Pi, i_1 < \dots < i_L \leq m\ \textit{et}\ j_1 \leq \dots \leq j_L \leq n\}$$

Des exemples de $L^{(1)}_{n,n}, L^{(2)}_{n,n}$ sont donnés en Fig. 3.

En étudiant deux variantes discrètes du processus d'Hammersley continu, nous avons unifié et simplifié des résultats dus essentiellement à Seppäläinen [Sep97, Sep98], sur le comportement asymptotique de $L^{(1)}_{m,n}, L^{(2)}_{m,n}$.

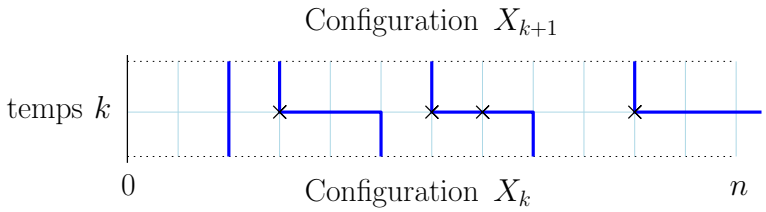
Processus d'Hammersley discret

Pour expliquer la stratégie (et présenter également les preuves originales de Seppäläinen), définissons maintenant le processus d'Hammersley discret. Nous avons étudié deux versions du processus, l'une adaptée au calcul de $L^{(1)}$ et l'autre à $L^{(2)}$. Pour simplifier je présente uniquement la version adaptée à $L^{(1)}$. Ce processus avait été introduit par Seppäläinen dans [Sep97].

Pour tout $n \geq 1$, il s'agit d'un processus $(X_k)_{k\geq 1}$ à valeurs dans $\{0,1\}^n$, défini de la façon suivante. Initialement, $X_0 = 0^n$. Connaissant $X_k \in \{0,1\}^n$, voici comment on construit X_{k+1}. On considère les croix $\times$ de $\Pi \cap \{1,\dots,n\} \times \{k\}$ de la gauche vers la droite (ci-dessous, $\Pi \cap \{1,\dots,n\} \times \{k\} = \{3,6,7,10\}$). Pour une $\times$ située en x, la

particule située immédiatement à droite de x dans X_k saute immédiatement en x. Si ce faisant elle traverse une autre $\times$ alors par la suite on fait comme si cette $\times$ n'existait pas (c'est le cas ci-dessous avec la particule en $x = 7$).

Comme pour le modèle continu, s'il n'y a aucune particule dans $X_k \cap [x, n]$ alors une particule est créée (et placée en x).



À nouveau, on appelle *ligne d'Hammersley* chaque ligne brisée définie par la trajectoire d'une particule. On vérifie facilement que

- Deux lignes d'Hammersley ne se croisent jamais.
- Chaque ligne d'Hammersley commence en un point sur le bord droit de la boîte $\{1, \ldots, n\}^2$ et finit sur le bord haut.
- Il y a autant de lignes d'Hammersley que la variable aléatoire $L^{(1)}_{n,n}$ associée aux points de Π.

Grâce à ce dernier point, l'estimation du comportement asymptotique de $L^{(1)}_{n,n}$ revient à étudier le nombre de lignes d'Hammersley dans une (grande) boîte finie.

Cette vision géométrique du problème d'Hammersley discret peut aussi être attribuée à Viennot [Vie77], qui fait en quelque sorte le lien avec l'approche algébrique de la correspondance RSK (Robinson-Schensted-Knuth).

La définition du processus $(X_k)_{k\geq 0}$ s'étend immédiatement à un processus à valeurs dans $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$, L'idée de Seppäläinen est d'utiliser certaines mesures stationnaires de ce processus sur $\mathbb{Z}$. Pour conclure la preuve du théorème 2.5 (a) Seppäläinen exprime les limites (déterministes) de $L^{(1)}_{nx,ny}/n$ et $L^{(2)}_{nx,ny}/n$ comme des solutions de problèmes variationnels.

Nos contributions dans [12] consistent à décrire de façon exacte le processus $(X_k)_{k\geq 0}$ dans une boîte finie, et à conclure l'étude des mesures stationnaires de $(X_k)_{k\geq 0}$ sur $\mathbb{Z}$.

Comment rendre Hammersley stationnaire : Sources et Puits

Nous avons emprunté à Cator et Groeneboom [CG05] l'idée d'introduire des "sources" et "puits" dans le processus (ils l'avaient fait pour Hammersley continu). Cette idée a également été introduite à peu près en même temps en percolation de dernier passage avec poids géométriques ([Sep09, Sec.2.2.],[BCS06]).

Pour simplifier les notations on se place dans un carré : $m = n$. On fixe $\alpha, \alpha^\star \in (0, 1)$,

Sources. On suppose maintenant que la configuration $X_0 \in \{0, 1\}^n$ est distribuée comme un n-uplet de $\mathrm{Bernoulli}(\alpha)$ indépendantes. Chacun des points de X_0 est alors une *source* qui est le début d'une nouvelle ligne d'Hammersley.

Puits. Sur chaque point de $\{0\} \times \{1, \ldots, n\}$ on place indépendamment une croix $\times$, avec probabilité $\alpha^\star$. Ces $\times$ sont appelées des *puits* et jouent exactement le même rôle que les $\times$ de Π, sauf que lorsque une ligne d'Hammersley touche un puits elle s'arrête.

Les sources et puits sont indépendants entre eux, et indépendants de Π. On note $L^{(1),\alpha,\alpha^\star}_{n,n}$ le nombre de lignes d'Hammersley avec sources d'intensité α, puits d'intensité $\alpha^\star$.

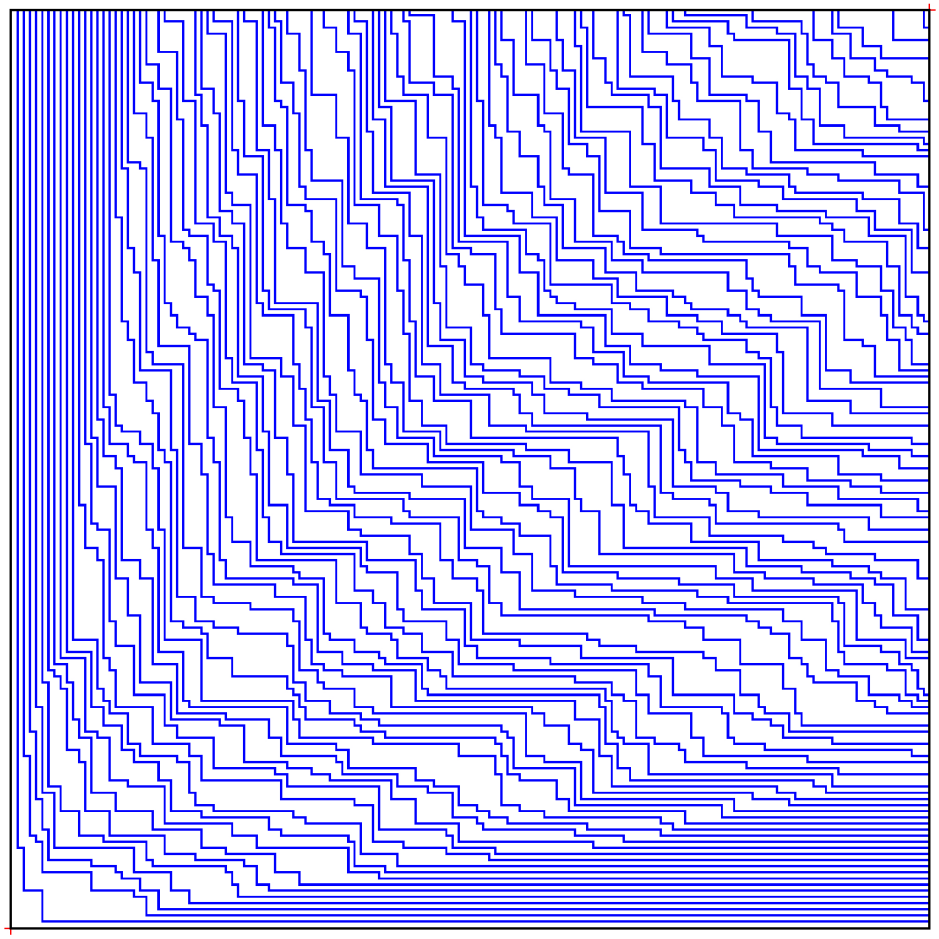


FIGURE 4. Une simulation du processus d'Hammersley sur $\{1, 2, \ldots, 150\}^2$, pour Π d'intensité $p = 0.1$.

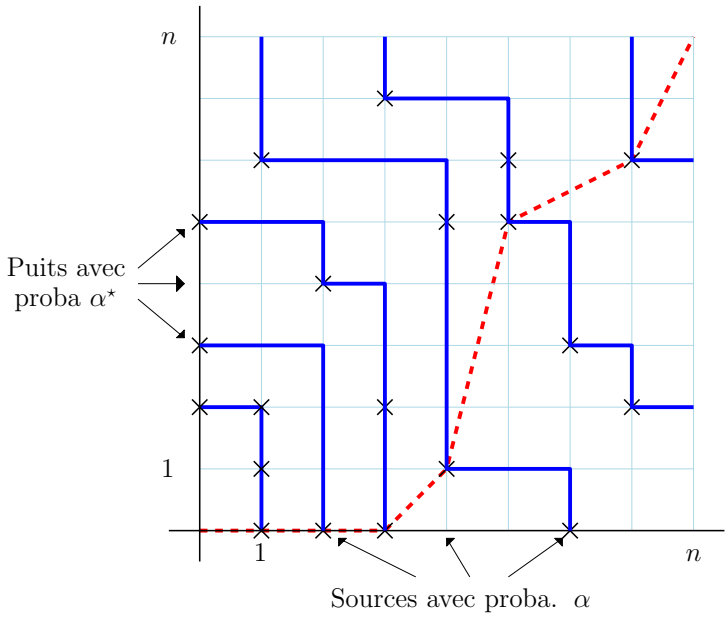


FIGURE 5. Une réalisation du processus $(X_k)_{0\leq k\leq n}$ avec 4 sources et 3 puits. Ici, $L_{n,n}^{(1),\alpha,\alpha^\star} = 6$.

Théorème 2.3 (*Basdevant-Enriquez-Gerin-Gouéré [12] Th.3.1*)

Pour tout $n \geq 1$, on considère le processus d'Hammersley discret sur $\{1,\dots,n\}$ avec des sources d'intensité α et des puits d'intensité $\alpha^\star$. Pour tout α, si l'on choisit

$$\alpha = \frac{p(1-\alpha)}{\alpha + p(1-\alpha)}, \tag{9}$$

alors le processus est stationnaire.

En fait, la preuve démontre que la processus est également stationnaire lorsque c'est l'axe des x qui est pris comme axe des temps.

Le théorème 2.3 évoque un résultat semblable en percolation de dernier passage avec poids géométriques (voir par exemple Section 2.2. dans [Sep09], ou une version moins explicite dans [RSSV10]).

Remarque 2.4

Dans [12] nous obtenons également un résultat analogue au théorème 2.3 pour la variante de Hammersley discret adaptée au cas de la sous-suite croissante au sens large. Dans ce cas, un point de $\{0\} \times \{1,\dots,n\}$ peut avoir plusieurs puits. Nous démontrons que, pour une loi géométrique bien choisie sur les puits, le processus est stationnaire.

Une conséquence du théorème 2.3 est que, pour chaque ordonnée $k \geq 0$, le nombre de particules dans X_k (donc le nombre de lignes d'Hammersley croisant la droite $y = k$) est une $\mathrm{Binomiale}(\alpha)$. Ceci permet d'évaluer le comportement asymptotique de $L_{n,n}^{(1),\alpha,\alpha^\star}$,

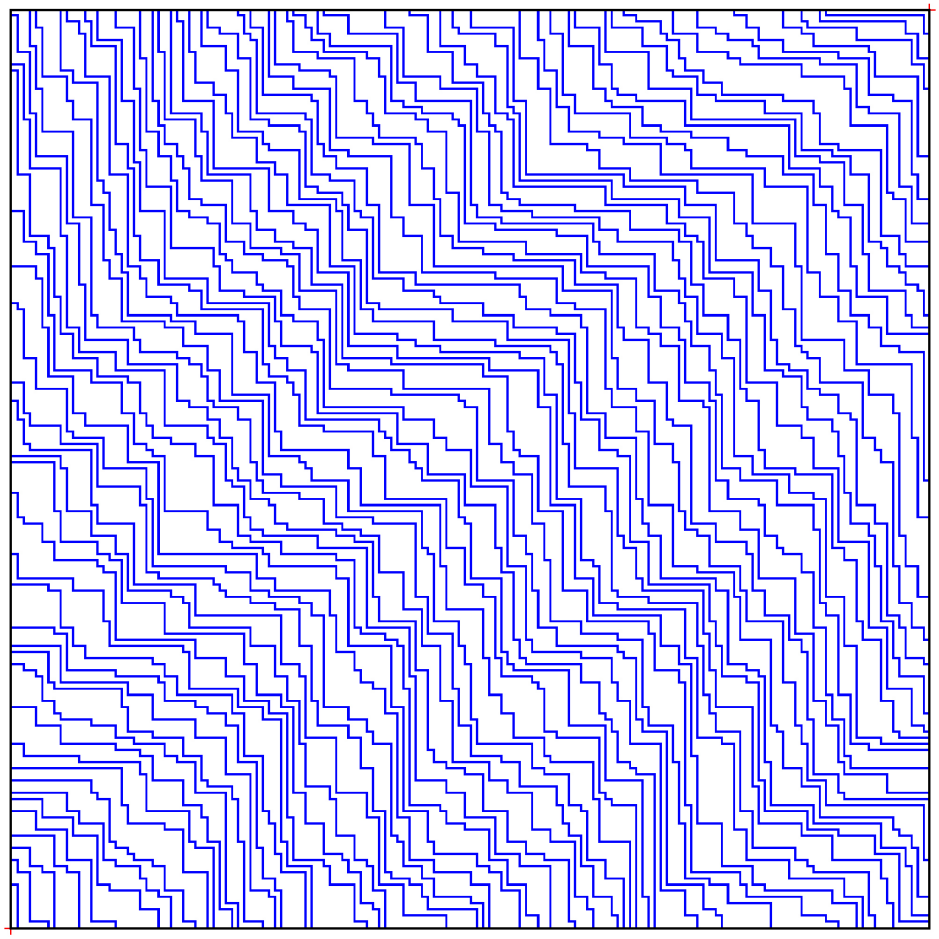


FIGURE 6. Illustration du théorème 2.3 : une simulation du processus d'Hammersley sur $\{1, 2, \ldots, 150\}^2$, pour Π d'intensité $p = 0.1$ et avec sources et puits stationnaire de même intensité (soit $\alpha = \alpha^\star$ et vérifiant (9).)

au moins en espérance. En effet,

$$\begin{aligned} L_{n,n}^{(1),\alpha,\alpha^\star} &= \#\{ \text{ Lignes qui sortent de la boîte par la gauche } \} \\ &\quad + \#\{ \text{ Lignes qui sortent de la boîte par le haut } \} \\ &= \#\{ \text{ puits } \} + \#\{ \text{ Lignes qui sortent de la boîte par le haut } \} \\ &= \#\{ \text{ puits } \} + \#\{ \text{ sources } \} \qquad \text{(par stationnarité)} \\ &\overset{\text{(loi)}}{=} \mathrm{Binomiale}(\alpha^\star) + \mathrm{Binomiale}(\alpha) \end{aligned} \tag{10}$$

(les deux dernières binomiales ne sont pas indépendantes).

Pour revenir au problème initial et déduire de (10) le comportement asymptotique de $L_{n,n}^{(1)}$, on a tout d'abord clairement une domination stochastique

$$L_{n,n}^{(1)} \preccurlyeq L_{n,n}^{(1),\alpha,\alpha^\star} \overset{\text{(loi)}}{=} \mathrm{Binomiale}(\alpha^\star) + \mathrm{Binomiale}(\alpha),$$

où $(\alpha, \alpha^\star)$ vérifie (9). Cette domination étant vraie pour tout $(\alpha, \alpha^\star)$, on obtient facilement une majoration de $L_{n,n}^{(1)}$ en optimisant en α. Le choix optimal est

$$\alpha = \alpha^\star = \frac{\sqrt{p}}{1+\sqrt{p}}. \tag{11}$$

La preuve de la minoration est plus difficile, et explique que cette preuve n'ait pas été proposée avant. Techniquement, elle consiste à exploiter la stricte convexité de la forme limite des expressions (12),(13). On en déduit que $L_{n,n}^{(1)}$ est en fait stochastiquement proche de $L_{n,n}^{(1),\alpha,\alpha^\star}$, si l'on choisit les paramètres donnés par (11).

Finalement ceci donne une preuve élémentaire et unifiée des résultats suivants.

Théorème 2.5 (*Seppäläinen [Sep97, Sep98] Basdevant-Enriquez-Gerin-Gouéré [12]*)

Soient $x, y > 0$ fixés. Lorsque n tend vers l'infini,

(a) Pour la plus longue sous-suite croissante,

$$\frac{L^{(1)}_{\lfloor nx \rfloor, \lfloor ny \rfloor}}{n} \overset{p.s.}{\to} \begin{cases} \frac{\sqrt{p}\left(2\sqrt{xy}-(x+y)\sqrt{p}\right)}{1-p} & \text{si } p < \min\{x/y, y/x\}, \\ \min\{x, y\} & \text{sinon.} \end{cases} \tag{12}$$

(b) Pour la plus longue sous-suite croissante au sens large,

$$\frac{L^{(2)}_{\lfloor nx \rfloor, \lfloor ny \rfloor}}{n} \overset{p.s.}{\to} \begin{cases} 2\sqrt{xyp(1-p)+(x-y)} & \text{si } p < x/(x+y), \\ x & \text{sinon.} \end{cases} \tag{13}$$

Notons que Seppäläinen a en fait énoncé (13) sous une forme assez différente : comme un problème de percolation de dernier passage. Pour des paramètres bien choisis c'est équivalent à $L_{m,n}^{(2)}$. Nous nous sommes par ailleurs rendu compte récemment qu'exploitant une formulation du problème sous forme du 5-*vertex model*, Majumdar-Mallick-Nechaev [MMN08] ont également trouvé une preuve alternative de (12).

Les fluctuations de $L_{n,n}^{(2)}$ autour de sa moyenne sont connues et sont décrites par la loi de Tracy-Widom ([Joh01, Th.5.3], et indépendamment dans [GTW01]). Pour les

fluctuations de $L_{n,n}^{(1)}$ le résultat est plus récent et moins précis : Ciech et Georgiou [CG17] ont obtenu l'ordre de grandeur de la variance de $L_{n,n}^{(1),\alpha,\alpha^\star}$ avec les conditions aux bords de notre équation (**9**) (pour le cas sans conditions aux bords voir par exemple le corollaire 1 avec $h_1 = h_2 = 1$ dans [BG18]).

Application : Le problème d'Ulam revisité

Comme conséquence indirecte du théorème 2.5, nous expliquons dans ([12], p.46-47) comment obtenir une nouvelle solution simple et probabiliste au problème d'Ulam. L'idée est la suivante : si l'on prend $m = n$ grand et $p = 1/n$ dans le modèle discret, il y a en moyenne une croix par ligne et par colonne, et donc le champ Π doit ressembler à $n(1 + \mathrm{o}(1))$ points uniformément répartis dans un grand carré, donc à une permutation de taille n.

En appliquant le théorème 2.5 avec $x = y = 1$, le terme de droite dans (**12**) se simplifie en $2\sqrt{p}/(1+\sqrt{p})$. On s'attend donc, si l'on s'autorise à prendre $p = 1/n$ dans le théorème 2.5, à

$$\ell(n) \approx L_{n,n}^{(1)} \overset{\text{Th.2.5}}{\sim} n \times \frac{2\sqrt{1/n}}{1+\sqrt{1/n}} \sim 2\sqrt{n},$$

et l'on retrouve le célèbre résultat de Vershik-Kerov et Aldous-Diaconis. Cette preuve peut être rendue rigoureuse car (**10**) donne des estimées non-asymptotiques de $L_{n,n}^{(1)}$.

2.2 Le processus d'Hammersley sur $\mathbb{Z}$ [12]

Considérons maintenant le processus d'Hammersley à espace/temps continus sur $\mathbb{R}$ tout entier, puis à espace/temps discret sur $\mathbb{Z}$. Nous avons vu en Section 2.1 les raisons historiques qui ont amené à étudier ces processus (problème d'Ulam). Au-delà de cette motivation, le processus d'Hammersley (dans sa version discrète ou continue) est un exemple de système de particules en interaction avec une interaction non locale.

Commençons par Hammersley continu $(X_t)_{t\geq 0}$, où chaque X_t est une mesure ponctuelle sur $\mathbb{R}$. Une façon d'étendre à $\mathbb{R}$ la construction de la Section précédente est de dire que si la configuration X_t est constituée de particules en positions $\cdots < x_{-2} < x_{-1} < x_0 < x_1 < \ldots$, alors chaque x_i saute indépendamment avec taux $(x_i - x_{i-1})$, uniformément dans l'intervalle (x_{i-1}, x_i).

Un problème de définition se pose si une particule dans X_t n'a plus de particules à sa gauche. Pour éviter ceci, on impose (voir Lemma 2 dans [AD95]) que l'on ait suffisamment de particules à gauche de tout point dans X_0 :

$$\liminf_{x\to-\infty} \frac{\mathrm{card}(X_0 \cap (-x, 0))}{x} > 0. \tag{14}$$

Pour démontrer le théorème 2.1, et parce que ce résultat est intéressant en soi, Aldous-Diaconis ont étudié les mesures ponctuelles (en espace) sur $\mathbb{R}$ qui sont stationnaires (en temps) pour Hammersley continu.

Théorème 2.6 (*Aldous-Diaconis [AD95] Lemma 7*)

Pour toute intensité $\lambda > 0$, le processus ponctuel de Poisson homogène d'intensité λ sur $\mathbb{R}$ est une mesure stationnaire pour Hammersley continu.
Par ailleurs, ce sont les seules mesures stationnaires extrémales invariantes par translation.

Présentons maintenant les résultats analogues pour Hammersley discret $(X_k)_{k\geq 0}$, où cette fois X_k est une mesure ponctuelle simple sur $\mathbb{Z}$, c'est-à-dire un sous-ensemble de $\mathbb{Z}$. Comme dans la section précédente la dynamique est portée par un champ de Bernoulli(p) i.i.d Π sur $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$. Si $X_k = \cdots < x_{-2} < x_{-1} < x_0 < x_1 < \dots$, alors chaque x_i saute simultanément au point le plus à gauche dans $\Pi \cap (x_{i-1}, x_i)$ (s'il n'y a pas de tel point, x_i ne saute pas).

Pour démontrer le théorème 2.5, Seppäläinen obtient le résultat suivant :

Théorème 2.7 (*Seppäläinen ([Sep97] Lemma 2.1)*)

Pour toute intensité $\alpha \in (0,1]$, la mesure produit $\mathrm{Bernoulli}(\alpha)^{\otimes\mathbb{Z}}$ est stationnaire pour la dynamique d'Hammersley discret.

Par mesure produit, on signifie simplement qu'initialement, on place indépendamment en chaque site de $\mathbb{Z}$ une particule avec probabilité α. Le théorème 2.7 se comprend bien (et peut se déduire) avec le théorème 2.3, en faisant tendre la taille de la boîte vers l'infini. On peut se demander si, comme en temps continu, ce sont les seules mesures stationnaires invariantes par translation, la réponse est oui.

Théorème 2.8 (*Basdevant-Enriquez-Gerin-Gouéré [12] Th.5.1.*)

Les seules mesures stationnaires extrémales et invariantes par translation pour le processus d'Hammersley discret sur $\mathbb{Z}$ sont les mesures produit $\mathrm{Bernoulli}(\alpha)^{\otimes\mathbb{Z}}$.

En temps discret, il est très facile de voir qu'il existe des mesures stationnaires qui ne sont pas invariantes par translation, par exemple si X_0 est de la forme $(\dots,1,1,1,1,0,0,0,0,\dots)$.

Pour démontrer le théorème 2.8, nous utilisons des arguments de couplage qui sont inspirés de la preuve de [JPS98] pour le TASEP discret (défini Section 1.3). L'intérêt du résultat et la difficulté de la preuve tiennent au fait que les interactions entre particules sont non bornées.

Application : Hammersley hors équilibre

Une question naturelle pour aller au-delà des théorèmes 2.6, 2.7 et 2.8 est de chercher à comprendre le comportement du processus d'Hammersley (dans sa version continue ou discrète) *hors équilibre*.

Considérons pour simplifier le cas du processus d'Hammersley en temps discret, dans le cas où la mesure initiale est $\mathrm{Bernoulli}(\alpha)^{\otimes\mathbb{Z}_{\leq 0}} \otimes \mathrm{Bernoulli}(\beta)^{\otimes\mathbb{Z}_{\geq 1}}$, avec $\alpha < \beta$.

Pour $(x,k) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}$, notons $\rho(x,k)$ l'intensité de la configuration à la position (k,x) :

$$\rho(x,k) = \mathbb{P}(X_k(x) = 1).$$

On a la configuration initiale

$$\rho(x,0) = \begin{cases} \beta \text{ pour } x \leq 0, \\ \alpha \text{ pour } x \geq 1, \end{cases}$$

il y a un ainsi *choc* en $x = 0$. On cherche à comprendre comment ce choc se propage dans l'espace lorsque $k \to +\infty$. La vitesse est clairement linéaire, on s'attend donc à l'existence d'une limite hydrodynamique

$$h(x,t) = \lim_{k\to+\infty} \rho(\lfloor kx \rfloor, \lfloor kt \rfloor) \in (\alpha,\beta).$$

La limite existe en adaptant des arguments de sur-additivité, et des calculs heuristiques suggèrent l'expression suivante pour h (voir Fig.7) :

$$h(x,t) = \begin{cases} \beta & \text{si } x \leq tm_p(\beta) \\ \frac{\sqrt{p}}{1-p}\left(\sqrt{t/x} - \sqrt{p}\right) & \text{si } tm_p(\beta) \leq x \leq tm_p(\alpha) \\ \alpha & \text{si } x \geq tm_p(\alpha), \end{cases} \tag{15}$$

où l'on a posé

$$m_p(a) = \frac{p}{(1-(1-p)(1-a))^2}.$$

Il n'est pas difficile de démontrer (15) à partir des théorèmes 2.3 et 2.8, cette formule se déduit également des travaux de Seppäläinen. Par contre, un résultat analogue pour la variante du processus d'Hammersley correspondant à $L^{(2)}_{n,n}$ semble bien moins évident.

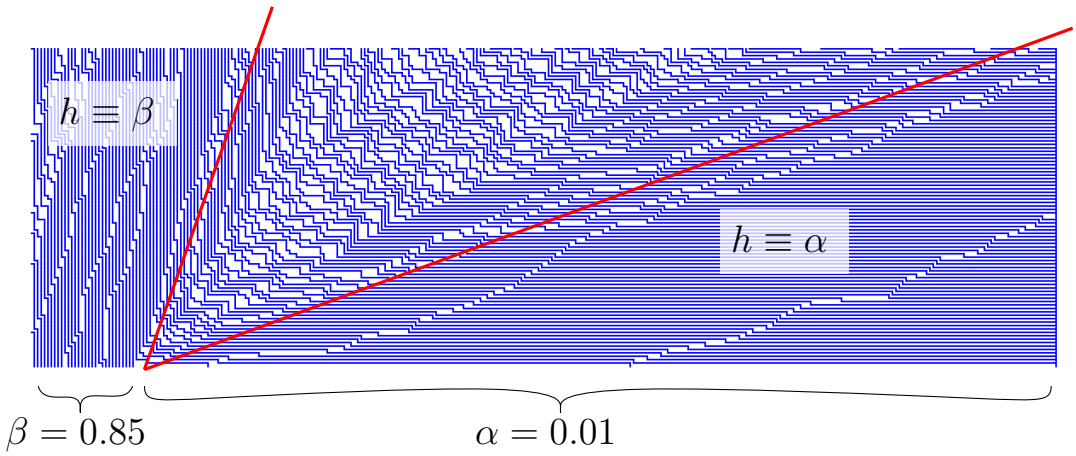


FIGURE 7. Illustration de (15) : une simulation du processus d'Hammersley hors équilibre, dans la boîte $[-30; 300] \times [0; 120]$. Les intensités initiales sont $\beta = 0.85, \alpha = 0.01$, et $p = 0.3$.

2.3 Arbres d'Hammersley [14]

Avec A.-L.Basdevant, J.-B.Gouéré et A.Singh, nous avons ensuite étudié dans [14] une variante du processus d'Hammersley continu, pour répondre à une question combinatoire posée par Istrate et Bonchis [IB15].

Ce problème est celui de l'analyse de l'algorithme de tri glouton *patience sorting*, lorsque l'on trie des nombres dans des arbres. On se donne comme paramètres une suite d'arbres planaires (les fils d'un sommet donné sont ordonnés) enracinés $T_1, T_2, \ldots$ **sans feuilles** : chaque sommet a au moins un fils (ces arbres sont donc forcément infinis).

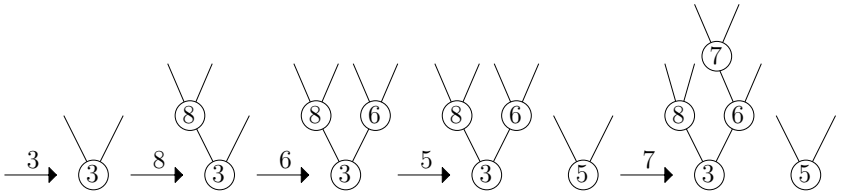
Soient $X_1, X_2, \ldots$ une suite de réels distincts. On stocke successivement les X_i dans les sommets des arbres T de la façon suivante :

- X_1 est rangé à la racine de T_1 ;
- Chaque X_i est rangé dans le fils libre le plus à gauche d'un sommet où est rangé l'un des X_j tels que $X_j < X_i$:

- S'il y a plusieurs tels X_j, on prend le plus grand possible ;
- S'il n'y en a pas on place X_i à la racine du premier arbre non-encore occupé.

À tout moment on a donc par construction une forêt d'*arbres croissants*[4] : le long de chaque branche, les étiquettes des sommets sont croissantes.

Voici les 5 premières étapes de l'algorithme *patience sorting*. Ici, tous les arbres $T_1, T_2, \dots$ sont égaux à l'arbre binaire infini et $(X_1, X_2, \dots) = (3, 8, 6, 5, 7, \dots)$:



Nous faisons le modèle probabiliste suivant :

- Les $X_1, X_2, \dots$ sont des v.a. i.i.d. uniformes sur $[0; 1]$.
- Les $T_1, T_2, \dots$ sont des arbres aléatoires de Galton-Watson i.i.d. (et indépendants des X_i) de loi de reproduction μ à support dans $\mathbb{Z}_{\geq 1}$.

Comme on impose $\mu(0) = 0$, les arbres sont tous forcément infinis.

Soit $R_n \in \{1, \dots, n\}$ le nombre d'arbres occupés par au moins un X_i à l'étape n. Dans l'exemple ci-dessus, on a $(R_1, R_2, \dots) = (1, 1, 1, 2, 2, \dots)$. La question posée par Istrate-Bonchis, qui introduisent le problème dans [IB15], est d'estimer le comportement asymptotique de la suite (R_n). Il est clair que R_n est au moins de l'ordre de $\log(n)$ puisque c'est l'ordre de grandeur du nombre de records dans les X_i (chaque nouveau record minimum ajoute un arbre). Ils conjecturent que

$$\frac{\mathbb{E}[R_n]}{\log(n)} \overset{n\to+\infty}{\to} \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \tag{16}$$

lorsque les T_i sont tous égaux à l'arbre binaire infini (*i.e.* $\mu = 2$ avec probabilité 1). Cette conjecture ne semble pas résister à des simulations pour n grand. Étrangement, il est déjà difficile de démontrer que $\log(n)$ est bien le bon ordre de grandeur.

Avant d'énoncer notre résultat, signalons que pour la loi de reproduction dégénérée $\mu \equiv 1$ alors R_n a même loi que la longueur $\ell(n)$ de la plus longue sous-suite croissante d'une permutation aléatoire uniforme de taille n, et on rappelle que dans ce cas $R_n \sim 2\sqrt{n}$ (voir p.29).

Théorème 2.9 (*Basdevant-Gerin-Gouéré-Singh [14] Th.1.1*)

On suppose que μ n'est pas la masse de Dirac en 1. Alors il existe une constante $c_\mu \geq 1$ telle que

$$\frac{\mathbb{E}[R_n]}{\log(n)} \to c_\mu.$$

On ne connaît pas en général l'expression de c_μ (pas même pour $\mu \equiv 2$ qui permettrait de prouver ou réfuter (16)), on a simplement la majoration

$$c_\mu \leq \frac{2-\mu(1)}{1-\mu(1)}. \tag{17}$$

4. Dans les articles [IB15, BHMZ11] qui nous ont inspiré le modèle, ces arbres sont appelés un peu improprement *heaps* (tas). Habituellement, la définition d'un tas impose, en plus de la croissance, que l'arbre soit *complet* (voir [CCG18, Sec.1.2.4]).

Si μ est la loi géométrique de moyenne $1/\alpha$, on sait calculer cette constante et par ailleurs on peut montrer que la convergence a lieu p.s. :

$$\frac{R_n}{\log(n)} \overset{\text{p.s.}}{\to} \frac{1}{1-\alpha}.$$

Le cas de la loi géométrique est rendu particulier par l'absence de mémoire : au lieu de tirer tous les arbres initialement, on peut tirer au sort indépendamment à chaque création d'un noeud d'un arbre si c'est le dernier de sa fratrie.

Il ne semble pas y avoir d'argument simple pour justifier la borne supérieure $R_n = \mathcal{O}(\log(n))$ (pour le problème d'Ulam par exemple, la majoration est obtenue par simple dénombrement et *union bound*). Étonnamment, c'est bien l'étude du cas des arbres de Galton-Watson avec loi μ géométrique qui permet d'obtenir la majoration pour tous les arbres (même déterministes !).

Une question immédiate au regard du théorème 2.9 est celle d'une convergence plus forte que celle de l'espérance, pour toute loi μ. Ceci a été résolu par A.-L.Basdevant et A.Singh.

Théorème 2.10 (*Basdevant-Singh [BS18]*)

On suppose que μ n'est pas la masse de Dirac en 1. Soit c_μ la constante donnée par le théorème 2.9, on a

$$\frac{R_n}{\log(n)} \overset{\text{p.s.}}{\to} c_\mu.$$

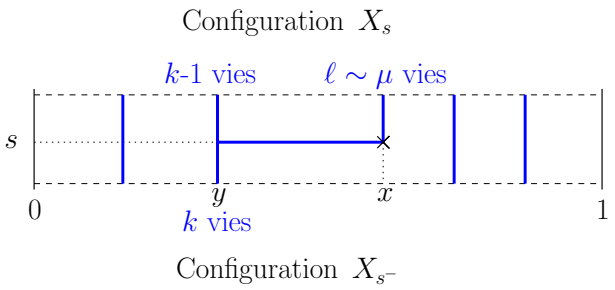
Stratégie de preuve : le processus d'Hammersley avec *vies*

La preuve du théorème 2.9 est inspirée de la stratégie d'Hammersley/Aldous-Diaconis détaillée en Section 2.1 pour l'estimation de $\ell(n)$. On construit également un processus de sauts purs à valeurs dans les mesures ponctuelles sur $[0,1]$.

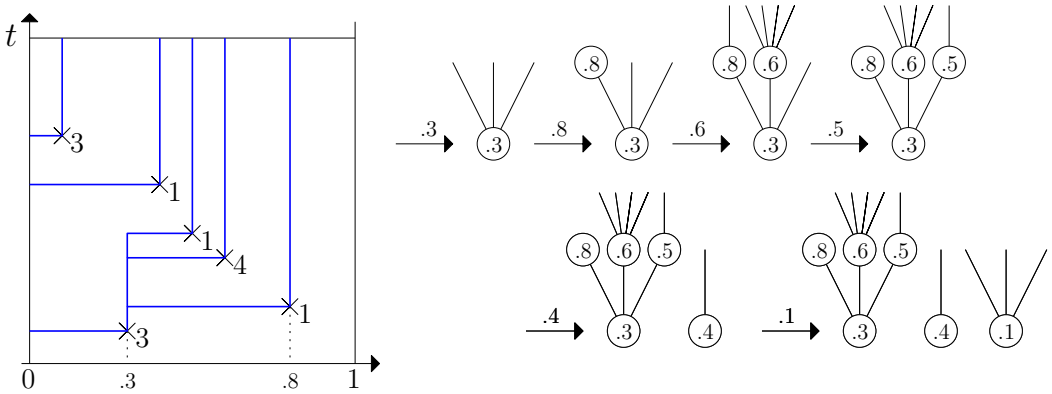
Soit Π un Processus Ponctuel de Poisson homogène d'intensité 1 sur la bande $[0,1]\times[0,+\infty)$, on numérote les points de Π $(X_1,t_1),(X_2,t_2),\dots$ de sorte que $t_1 < t_2 < \dots$. Les X_i représentent les v.a. uniformes que l'on cherche à stocker dans des arbres. Étant donné Π, le processus $(X_s)_{0\le s\le t}$ est défini de façon similaire au processus d'Hammersley, sauf que chaque croix $\times$ naît avec un nombre de *vies* aléatoires, et que les particules se déplacent vers la droite.

Plus formellement :

- On a $X_0 = \varnothing$.
- Lorsqu'une croix $\times$ apparaît dans Π à la position (x,s) :
  - La particule située immédiatement à gauche (disons en y) de x dans X_{s^-} "perd" une vie. Une particule est créée en x, elle tire au sort un nombre de vies selon la loi μ, indépendamment de tout le reste du processus. On considère que le réel x est rangé dans l'arbre, comme fils de y.
  - S'il n'y a aucune particule dans $X_{s^-}\cap[0,x]$ alors une particule est créée (et placée en x). C'est alors la racine d'un nouvel arbre.



Voici une réalisation du processus, avec l'interprétation en terme de *patience sorting* dans des arbres :



Les lignes d'Hammersley sont alors remplacées par des *Arbres d'Hammersley*. Notons $\mathcal{R}_t$ le nombre d'arbres créés par ce processus dans la boîte $[0,1]\times[0,t]$ (dans l'exemple ci-dessus $\mathcal{R}_t = 3$). On a

$$\mathcal{R}_t \overset{(loi)}{=} R_N,$$

où N suit la loi de Poisson de paramètre t, et N est indépendante des X_i servant à fabriquer les variables $R(n)$.

Il se trouve que le processus $(\mathcal{R}_t)_{t\geq 0}$ est bien plus simple à étudier lorsque μ est une loi géométrique.

Un modèle exactement soluble : μ-Hammersley avec la loi géométrique

On suppose maintenant que $\mu(k) = \alpha(1-\alpha)^{k-1}$ pour $k \geq 1$. Comme dit plus haut, ce cas permet de faire des calculs explicites. De façon très similaire au théorème 2.3 pour le processus d'Hammersley discret, on peut fabriquer une version (presque) stationnaire de μ-Hammersley, à l'aide de *sources* et *puits*. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ un paramètre fixé,

Sources. On place sur $[0,x]\times\{0\}$ un PPP homogène d'intensité λ. Chaque particule reçoit indépendamment un nombre de vies distribuée suivant μ.

Puits. On place sur $\{x\}\times[0,+\infty)$ un PPP **inhomogène** d'intensité $s \mapsto \frac{\mathrm{d}s}{\lambda+(1-\alpha)s}$, chacun de ces points agit comme une croix au point (x,s).

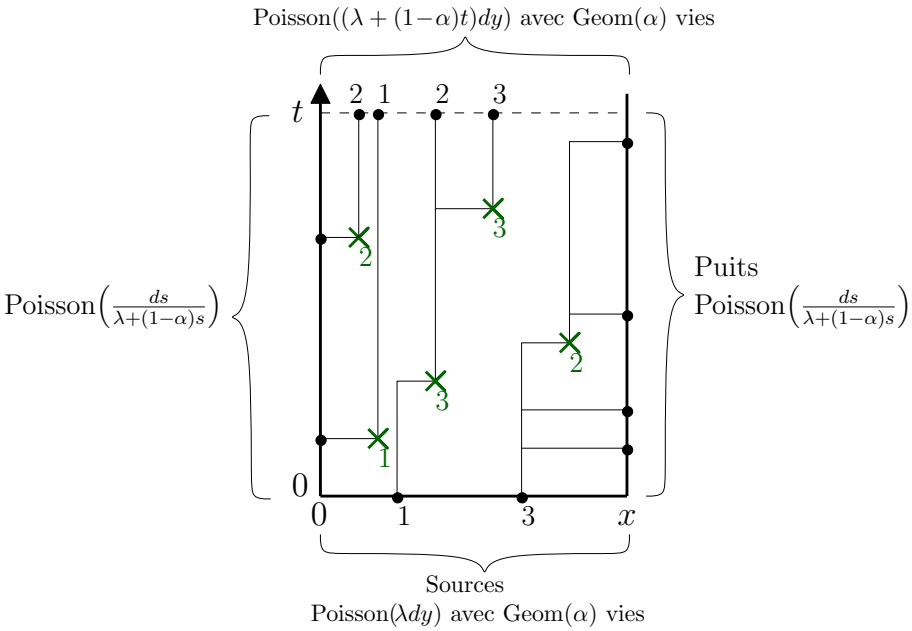
Le processus des sources est supposé indépendant du processus des puits.

Théorème 2.11 (*Basdevant-Gerin-Gouéré-Singh [14] Th.3.2 et Th.3.5*)

On peut construire le processus de μ-Hammersley avec sources et puits sur toute boîte $[0,x]\times[0,t]$. Ce processus vérifie les propriétés suivantes :

- **Stationnarité de la droite vers la gauche.** *Pour tout $y\in[0,x]$, l'intersection des lignes avec le segment $\{y\}\times[0,t]$ est un PPP inhomogène d'intensité $s\mapsto \frac{\mathrm{d}s}{\lambda+(1-\alpha)s}$.*
- **Presque-stationnarité du bas vers le haut.** *Pour tout $s\in[0,t]$, l'intersection des lignes avec le segment $[0,x]\times\{s\}$ est un PPP homogène d'intensité $x\mapsto\lambda+(1-\alpha)s$.*

Le théorème 2.11 se comprend mieux sur la figure suivante :



En particulier, le nombre de nouveaux arbres créés dans la boîte $[0,x]\times[0,t]$ a la même loi que le nombre de puits, c'est-à-dire la loi de Poisson de paramètre

$$\int_0^t \frac{\mathrm{d}s}{\lambda+(1-\alpha)s} = \frac{1}{1-\alpha}\left(\log(\lambda+(1-\alpha)t)-\log(\lambda)\right) \sim_{t\to+\infty} \frac{1}{1-\alpha}\log(t).$$

On en déduit facilement que $\limsup_{\text{p.s.}} \frac{\mathcal{R}_t}{\log(t)} \le 1/(1-\alpha)$, la $\liminf$ est plus difficile à obtenir. Pour $x=1, t=n$, on voit ainsi finalement pourquoi $R(n)$ est bien de l'ordre de $\frac{1}{1-\alpha}\log(n)$, lorsque la loi de reproduction des arbres μ est la loi géométrique de moyenne $1/\alpha$.

Conclusion de la preuve du théorème 2.9 : dominations

Pour en déduire le théorème, on démontre d'abord que la suite $\left(\frac{\mathbb{E}[R_n]}{\log(n)}\right)_n$ converge vers une constante $c_\mu\in[1,+\infty)\cup\{+\infty\}$. La partie difficile est de montrer que $c_\mu<+\infty$, on aimerait avoir dans l'idéal une propriété de monotonie de $\mu\mapsto c_\mu$.

Si $\mu'\preccurlyeq\mu$ pour l'ordre stochastique, alors $c_\mu\le c_{\mu'}$. C'est évident si l'on pense à l'interprétation par l'algorithme de *patience sorting*. Mais bien sûr, μ n'a aucune raison

de dominer stochastiquement une loi géométrique (a priori μ domine seulement la loi δ_1 et rappelons que dans ce cas on a $R_n \sim 2\sqrt{n}$). On a par contre la propriété de comparaison suivante :

Lemme 2.12 (*[14] Prop.4.1.*)

Soit μ'' une loi de reproduction de moyenne finie, et soit μ' la loi de reproduction à support dans $\{1,2\}$ telle que $\mathbb{E}[\mu'] = \mathbb{E}[\mu'']$. On a pour tout n

$$\mathbb{E}[R'_n] \leq \mathbb{E}[R''_n],$$

où R'_n (resp. R''_n) sont les nombres d'arbres nécessaires pour trier n nombres avec une loi de reproduction μ' (resp.μ'').

La preuve est assez astucieuse et presque déterministe. Elle repose sur l'observation du comportement d'une particule de seconde classe qui apparaît lorsqu'un sommet "perd" une vie dans l'arbre.

On en déduit finalement

$$\mathbb{E}[R_n] \leq \mathbb{E}[R'_n] \leq \mathbb{E}[R''_n],$$

avec

- μ' est à support dans $\{1,2\}$ avec $\mu'(1) = \mu(1)$ (donc $\mu' \preccurlyeq \mu$).
- μ'' est la loi géométrique telle que $\mathbb{E}[\mu'] = \mathbb{E}[\mu'']$, c'est-à-dire la loi géométrique de moyenne $1/\alpha = \mu(1) + 2(1-\mu(1))$.

Pour ce choix de $1/\alpha = \mu(1) + 2(1-\mu(1))$ on a bien l'égalité $\mathbb{E}[R''_n] = \frac{1}{1-\alpha} = \frac{2-\mu(1)}{1-\mu(1)}$, soit (**17**).

2.4 Un modèle simple de branchement avec sélection [9]

Il s'agit d'un travail en commun avec Olivier Couronné. C'est une application des systèmes de particules à un modèle de branchement avec sélection. Cet article raffine un résultat de J.Bérard [Bér08] puis J.Bérard et J.-B.Gouéré [BG10] sur une famille de systèmes de particules avec branchement/sélection, cet article étant lui-même motivé par des résultats heuristiques de Brunet-Derrida [BD97].

Les modèles de branchement avec sélection ont été introduits avec des motivations physiques, pour modéliser la propagation d'un front entre deux milieux. Ces modèles sont en lien avec l'équation F-KPP, introduite pour un modèle biologique.

Rappelons le modèle de Bérard-Gouéré. Soit μ une loi de *déplacement* sur $\mathbb{Z}$, on considère l'évolution en temps discret de N particules sur $\mathbb{N}$, dont la dynamique est définie comme suit.

1. Initialement, les N particules sont situées en 0.
2. Connaissant la position des N particules à l'instant k, la configuration à l'instant $k+1$ est donnée par les trois opérations suivantes :

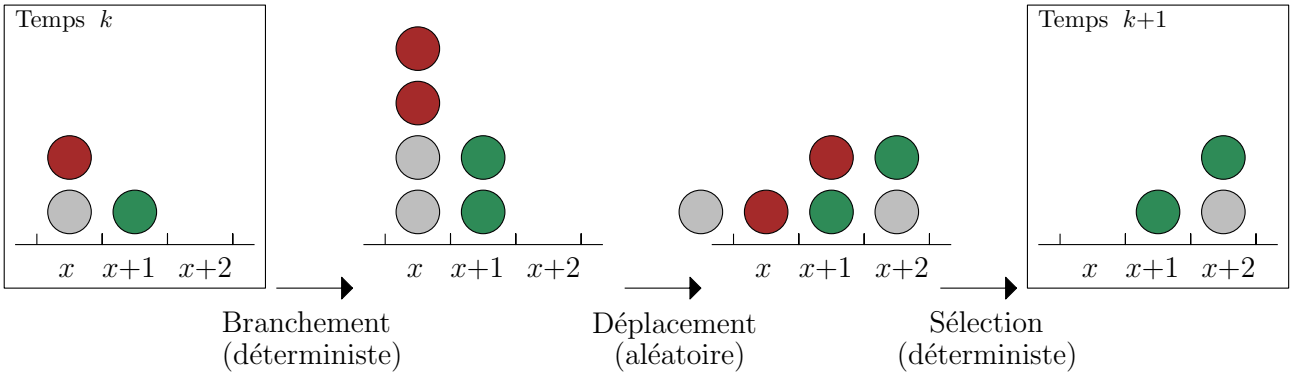
Branchement Chacune des N particules est remplacée par 2 particules à la même position [5].

Déplacement Ces $2N$ particules effectuent ensuite un pas de loi μ à partir de leurs positions actuelles. Tous ces déplacements se font de manière i.i.d.

5. Dans l'article, nous considérons en fait le cas où le branchement est également aléatoire.

Sélection On ne conserve que les N particules les plus à droite.

Voici un exemple de passage d'une configuration à une autre[6], pour $N = 3$:



Du point de vue des notations, il est pratique de voir la configuration à l'instant k comme une mesure ponctuelle sur $\mathbb{N}$, notée $X_k^{(N)}$ (de sorte que par exemple $X_0^{(N)} = N\delta_0$). La position de la particule la plus à droite est donc $\max X_k^{(N)}$. Bérard et Gouéré démontrent tout d'abord qu'il existe une vitesse limite (déterministe) $v_N(\mu)$ pour le processus :

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k} \min X_k^{(N)} = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k} \max X_k^{(N)} = v_N(\mu) \qquad \text{p.s..}$$

Par ailleurs, la suite $v_N(\mu)$ est croissante et converge donc vers un $v_\infty(\mu) \in (0,1)$, le résultat principal de [BG10] est l'estimation de la vitesse de convergence.

Nous présentons leurs résultats dans le cas où μ est une loi de Bernoulli : $\mu(1) = \alpha = 1 - \mu(0)$, pour $\alpha \in (0,1)$. On note alors la vitesse $v_N(\alpha)$.

Théorème 2.13 (*Vitesse $\alpha < 1/2$, [Bér08] Th.1-2, [BG10], Prop.2 et Th.1*)

On suppose que $\alpha < 1/2$. On a

$$v_\infty(\alpha) - v_N(\alpha) \overset{N\to+\infty}{\sim} \frac{\chi(\alpha)}{(\log(N))^2},$$

où $\chi(\alpha) > 0$ est une constante.

La correction en $\log(N)^{-2}$ était prévue par Brunet et Derrida (Section 5 dans [BD97]).Le théorème 2.13 s'applique en réalité à une très grande famille de lois μ différentes, sous des conditions sur la transformée de Laplace (voir hypothèses (A1)-(A2)-(A3) dans [BG10]).

Il se trouve que ces conditions ne sont pas vérifiées pour la loi de Bernoulli avec $\alpha \geq 1/2$, la dérive de la marche est trop importante. Le comportement qualitatif de la suite $(v_N(\alpha))_N$ est très différent et en réalité beaucoup plus simple à comprendre, car alors $v_\infty(\alpha) = 1$.

6. Les couleurs sont là pour illustrer le branchement, mais toutes les particules sont identiques, et peu importe celles qui sont conservées après sélection en cas d'*ex-aequo*.

Théorème 2.14 (*Vitesse $\alpha \geq 1/2$, [Bér08] Th.3-4, [BG10], Th.4-5*)

On suppose que $\alpha = 1/2$. Il existe $c(\alpha), C(\alpha) > 0$ tels que

$$\frac{c(\alpha)}{N} \leq 1 - v_N(\alpha) \leq \frac{C(\alpha)}{N}.$$

Pour $\alpha > 1/2$, il existe $d(\alpha), D(\alpha) > 0$ tels que

$$\exp(-d(\alpha)N) \leq 1 - v_N(\alpha) \leq \exp(-D(\alpha)N).$$

Avec Olivier Couronné, nous avons estimé la décroissance de $1 - v_N(\alpha)$ dans ce cas extrême $\alpha > 1/2$:

Théorème 2.15 (*Vitesse $\alpha > 1/2$, Couronné-Gerin [9] Th.2*)

On suppose que $\alpha > 1/2$. On a

$$1 - v_N(\alpha) \overset{N \to +\infty}{\sim} q^N,$$

où

$$q = \frac{1 - 2\alpha(1-\alpha) - \sqrt{1 - 4\alpha(1-\alpha)}}{2\alpha^2}$$

est la probabilité d'extinction d'un Galton-Watson de loi de reproduction $\mathrm{Binom}(2, \alpha)$.

Précisons qu'il s'agit bien d'un équivalent classique et pas d'un équivalent logarithmique. La preuve repose sur une comparaison stochastique avec un processus de Galton-Watson *censuré* c'est-à-dire que l'on conserve au plus N individus à chaque génération. Cette comparaison était déjà implicite dans [Bér08, BG10].

Définition 2.16

Soit $N \geq 1$ un entier et χ une loi de reproduction sur $\mathbb{N}$. Le processus de Galton-Watson censuré à hauteur N *est la chaîne de Markov $(Z_k)_{k \geq 0}$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ définie par $Z_0 = N$ et, sachant $Z_k = z$,*

$$Z_{k+1} = \begin{cases} \min\{N; Y_1 + \cdots + Y_z\} & \text{si } z > 0, \\ 0 & \text{si } z = 0, \end{cases}$$

où les Y_i sont i.i.d. de loi χ.

Le lien avec le modèle de Bérard-Gouéré est le suivant. Pour $i \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}$, on note $X_k^{(N)}(i)$ le nombre de particules à la position i à l'instant k. Remarquons que tant que $X_k^{(N)}(k) > 0$, alors le processus est toujours allé à la vitesse maximale 1.

Lemme 2.17

Le nombre de particules situées à la position la plus à droite possible suit un processus de Galton-Watson censuré :

$$\left(X_k^{(N)}(k)\right)_{k\geq 0} \overset{(loi)}{=} (Z_k)_{k\geq 0},$$

où Z est un Galton-Watson censuré en N, de loi de reproduction $\mathrm{Binom}(2,\alpha)$.

Notre preuve du théorème 2.15 repose donc sur des estimées du temps d'extinction du processus de Galton-Watson censuré (une variation de résultats précédents de [Top09]).

L'étude des processus de branchement/sélection a explosé depuis les travaux pionniers de Brunet-Derrida. Nous avons parlé ici du cas où la sélection est faite en tuant les particules qui ne sont pas parmi les N les plus à droite (voir également [BM14, CC17]). D'autres processus de sélection sont possibles, par exemple en tuant les particules avec une probabilité dépendant de la distance avec la particule la plus à droite [CM17]. Beaucoup de problèmes restent ouverts, on pense que l'asymptotique de $v_\infty - v_N$ doit avoir un comportement relativement universel, en dehors du cas assez dégénéré sur lequel nous avons travaillé.

On peut se demander si, pour ces autres modèles de sélection, on peut trouver des modèles exactement résolubles qui permettraient d'avoir des estimées assez fines par des méthodes combinatoires.

2.5 Discussions et perspectives

Il reste beaucoup de questions qui m'intéressent à propos des différents processus d'Hammersley.

Hammersley discret et particules de seconde classe ★

En plus d'introduire dans [CG05] une très jolie astuce pour le calcul de la limite hydrodynamique du Processus d'Hammersley, Cator-Groeneboom en déduisent dans [CG06] une preuve conceptuelle des fluctuations en $n^{1/3}$. Ils relient les fluctuations aux trajectoires de certaines particules de *seconde classe* (voir Th.2.1. dans [CG06]). Ceci est complémentaire de l'approche algébrique de Johansson [Joh00b, Joh01] et Gravner-Tracy-Widom [GTW01], qui repose sur la correspondance de Robinson-Schensted-Knuth.

Pour totalement achever le travail commencé dans [12], il faudrait essayer d'adapter la stratégie de [CG06] aux particules de seconde classe dans le cas discret. Ce n'est pas si simple, car leurs preuves utilisent fortement les différentes invariances du Processus de Poisson, propriétés très "continues" donc.

D'autres processus d'Hammersley discrets ★★

À propos des problèmes d'Ulam discrets, deux problèmes très naturels résistent :

- On peut bien sûr se demander comment se comporte la plus longue sous-suite

croissante, au sens large dans les deux dimensions :

$$L^{(3)}_{m,n} = \max\Big\{L;\ \text{il existe } (i_1,j_1),\dots,(i_L,j_L)\in\Pi,$$
$$i_1\le\dots\le i_L\le m \text{ et } j_1\ \le\dots\le j_L\le n\Big\}.$$

On a également (par sur-additivité) l'existence d'une fonction Ψ_p telle qu'il y a convergence presque-sûre

$$\frac{L^{(3)}_{nx,ny}}{n}\to\Psi_p(x,y).$$

On ne connaît pas l'expression de Ψ_p, et on peut se convaincre assez facilement qu'il ne peut pas exister de résultat analogue (sources/puits) au théorème 2.3 pour ce troisième problème. La stratégie de Seppäläinen ne semble pas non plus s'adapter. On peut cependant espérer obtenir une représentation probabiliste de Ψ_p, peut-être en fonction des mesures stationnaires d'un troisième processus d'Hammersley sur le cercle.

- Tout aussi naturellement, on peut chercher l'asymptotique de l'équivalent de $L^{(1)}_{n,n,n}$ en dimension 3. Celle-ci semble reliée à un processus de "nappes" d'Hammersley. Nous n'avons pas poussé très loin les calculs, mais nous ne voyons pas vraiment d'équivalent au miracle des sources et puits.

Arbres d'Hammersley ★★

Au regard des hypothèses du théorème 2.9 il vient une question immédiate : que se passe-t-il si l'on autorise les lois de reproductions μ avec $\mu(0)>0$. On cherche alors à ranger les X_i dans des arbres avec *feuilles*. Les différents cas suivants sont de difficulté croissante :

- μ **est sous-critique.** Chaque arbre T_i est alors fini p.s., et de taille bornée en espérance. On a alors clairement que R_n est linéaire en n.
- μ **est sur-critique.** Il est vraisemblable que R_n se comporte également en $\log(n)$, mais nous n'avons pas réussi à le démontrer.
- μ **est critique.** Il est très difficile de deviner ce qui va se passer. Peut-être que R_n se comporte en $\sqrt{n}$, comme pour le problème d'Ulam. Pour étudier cela nous avons essayé avec les trois mêmes auteurs, sans succès pour l'instant, d'étudier le cas de μ géométrique à support dans $\mathbb{Z}_{\ge 0}$.

Pour revenir à la motivation algorithmique, Balogh *et al.* proposent dans [BBDI17] de ranger de façon dynamique non plus des réels X_i mais des intervalles $[X_i,Y_i]$ de $[0,1]$ dans des arbres. L'état de leurs conjectures sur le comportement asymptotique du nombre d'arbres pour ranger des intervalles aléatoires et "uniformes" n'est pas clair. Ce qui rend tout de même optimiste est le fait que le problème de la "plus longue sous-suite croissante d'intervalles" admet une solution élégante [JSW90, Win88].

3 Permutations

L'objet de ce chapitre est de présenter les contributions obtenues avec mes coauteurs dans le cadre de la combinatoire des permutations, par une approche probabiliste.

[13] The Brownian limit of separable permutations.
F.Bassino, M.Bouvel, V.Féray, L.Gerin et A.Pierrot. *Annals of Probability*, à paraître.

[15] Universal limits in substitution-closed permutation classes.
F.Bassino, M.Bouvel, V.Féray, L.Gerin, M.Maazoun, A.Pierrot. `arXiv:1706.08333` (2017).

L'objectif général est d'étudier la limite d'échelle des permutations aléatoires, tirées uniformément au hasard dans une *classe de permutation* assez générale. Une classe de permutation est l'ensemble des permutations qui évitent un ou des motifs fixés (voir les définitions en Section 3.1). Il s'agit à mon avis d'un sujet riche du point de vue probabiliste et combinatoire sur lequel il y a eu jusque-là peu de travaux probabilistes, les perspectives sont nombreuses.

L'article [13] est consacré à une classe particulière de permutations : les permutations *séparables*. Nous décrivons leur comportement asymptotique à l'aide d'un objet nouveau appelé *permuton brownien*. Il s'agit d'une "permutation séparable continue" aléatoire qui peut se voir comme une fonction aléatoire d'une excursion brownienne.

Dans [15], nous généralisons grandement ce travail en étudiant le comportement asymptotique pour quasiment toutes les classes de permutations closes par substitution (voir Définition 3.15 plus loin). Ceci démontre que le permuton brownien est relativement universel, dans le sens où il apparaît pour toutes les classes closes par substitution étudiées jusque-là. Il faut savoir qu'à notre connaissance, les seuls résultats probabilistes portaient sur des classes spécifiques évitant un motif donné et de petite taille. On peut citer [Jan17, HRS17a, HRS17b, MP14] pour différents motifs de taille 3.

Ces travaux sont à l'exacte interface entre combinatoire et probabilités. Une conséquence est que je commence ce chapitre par une assez longue introduction à la combinatoire des permutations, pour mieux présenter et motiver les résultats.

3.1 Permutations séparables et excursion brownienne [13]

Combinatoire des permutations : motifs et classes de permutations

J'introduis tout d'abord quelques définitions de combinatoire des permutations. L'ensemble des $n!$ permutations de taille n est noté $\mathfrak{S}_n$, et $\mathfrak{S} = \cup_n \mathfrak{S}_n$. Il est pratique dans la suite de représenter les permutations graphiquement sous la forme d'un diagramme $n \times n$ dans lequel un "•" en coordonnée (i, j) signifie que $\sigma(i) = j$. Par exemple, représente la permutation $\sigma = 1243$.

Pour une permutation σ de taille n, et $I \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ un sous-ensemble de taille k, soit $\mathrm{pat}_I(\sigma)$ la permutation de taille k induite par les valeurs $\{\sigma_i,\ i \in I\}$. Par exemple pour $\sigma = 65831247$ et $I = \{2, 5, 7\}$ on a

$$\mathrm{pat}_{\{2,5,7\}}\left(6\bar{5}83\bar{1}2\bar{4}7\right) = \text{ permutation induite par } 514 = 312,$$

car les valeurs $\sigma_2\sigma_5\sigma_7 = 514$ sont dans le même ordre relatif que la permutation 312. On dit que $\pi = 312$ est un *motif* de $\sigma = 65831247$, la séquence particulière 514 est une *occurrence* de π dans σ.

On note $\mathrm{occ}(\pi, \sigma)$ le nombre d'occurrences de π dans σ :

$$\mathrm{occ}(\pi, \sigma) = \mathrm{card}\{I \subset \{1, 2, \dots, n\} \text{ de taille } k \text{ tels que } \mathrm{pat}_I(\sigma) = \pi\} \leq \binom{n}{k}.$$

Soit $\tau_1, \tau_2, \dots$ une famille (finie ou infinie) de motifs[7]. On note $\mathrm{Avoid}_n(\tau_1, \tau_2, \dots)$ l'ensemble des permutations de taille n qui évitent les motifs $\tau_1, \dots$. On pose $\mathrm{Avoid}(\tau_1, \dots) = \cup_n \mathrm{Avoid}_n(\tau_1, \dots)$.

Définition 3.1 (*Classes de permutations*)

Un ensemble de permutations qui peut s'écrire sous la forme $\mathrm{Avoid}(\tau_1, \tau_2 \dots)$ *pour une famille* $(\tau_i)_{i \in I}$ *(finie ou infinie) de motifs est appelé* classe de permutations.

Les classes de permutations ont une autre caractérisation naturelle. Il s'agit de tous les sous-ensembles de $\mathfrak{S}$ stables par passage au sous-motif (voir par exemple [BÍ2, Sec.5.1.2]) : $\mathcal{C}$ est une classe si et seulement si

$$\begin{cases} \sigma \in \mathcal{C} \\ \pi \text{ motif dans } \sigma \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \pi \in \mathcal{C}.$$

L'article [13] est dédié à l'étude probabiliste d'une classe de permutations assez particulières : les *permutations séparables*. Dans [15], nous montrons que les phénomènes observés s'étendent à une très grande famille naturelle de classes de permutations.

Permutations séparables

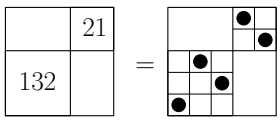
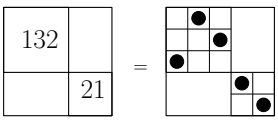
Pour introduire les permutations séparables, il faut ajouter une structure sur $\mathfrak{S}$.

Définition 3.2

Soient σ, σ' *deux permutations de tailles respectives* k *et* ℓ. *Leurs* somme directe *et* somme inverse *sont les deux permutations de tailles* $k + \ell$ *définies respectivement par*

$$\begin{aligned} \sigma \oplus \sigma' &= \sigma_1 \dots \sigma_k (\sigma'_1 + k) \dots (\sigma'_\ell + k) \text{ et} \\ \sigma \ominus \sigma' &= (\sigma_1 + \ell) \dots (\sigma_k + \ell) \sigma'_1 \dots \sigma'_\ell. \end{aligned}$$

Voici un exemple :

$132 \oplus 21 =$  $= 13254$ $\qquad$ $132 \ominus 21 =$  $= 35421$

7. Dans tout ce qui suit *motif* est absolument synonyme de *permutation*, mais suggère qu'il s'agit d'un motif de taille fixée, notée en général k, dans une permutation dont la taille n grandit.

On vérifie facilement que $\oplus$ et $\ominus$ sont associatifs, ce qui permet de définir sans ambiguïté la somme directe et inverse de $r \geq 3$ permutations. Par exemple, on a

$$1234 = 1 \oplus (1 \oplus (1 \oplus 1)) = 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1,$$
$$4321 = 1 \ominus (1 \ominus (1 \ominus 1)) = 1 \ominus 1 \ominus 1 \ominus 1.$$

Définition 3.3

Une permutation est dite séparable *si elle peut se décomposer uniquement avec la permutation triviale* 1 *et les opérateurs* $\oplus, \ominus$.

On vient de voir que l'identité $123\ldots n$ est séparable, un autre exemple est donné par $1432 = 1 \oplus (1 \ominus 1 \ominus 1)$. Par contre, on peut vérifier que 2413 n'est pas séparable.

Signalons que les permutations séparables ont plusieurs caractérisations intéressantes :

- Une permutation est séparable si et seulement si elle évite les motifs 2413 et 3142. C'est donc bien une classe de permutations.
- Parmi les matrices de permutations, les matrices des permutations séparables sont exactement les configurations initiales pour lesquelles la *percolation Bootstrap* remplit tout le carré [SS91].
- Les permutations séparables de taille n sont les permutations qui sont solutions d'un problème d'entrelacement de n polynômes (voir [Ghy13] ou [Ghy17] pour d'autres caractérisations).

On sait par ailleurs dénombrer les permutations séparables (il y en a de l'ordre de $(3+2\sqrt{2})^{n+o(n)}$ [Wes95]).

Le permuton brownien

Notons σ_n une permutation séparable uniforme de taille n. La question à laquelle nous nous sommes intéressés est la suivante : "À quoi ressemble le diagramme de σ_n, pour n grand ?". Nous verrons que cela est équivalent à étudier la loi limite des fréquences d'apparition de n'importe quel motif dans σ_n.

Nous avons besoin de considérer des variables aléatoires à valeurs dans l'ensemble des diagrammes. Le cadre agréable pour faire cela est celui des *permutons*.

Définition 3.4

Un permuton *est une mesure de probabilité sur le carré* $[0,1]^2$ *dont les marginales sont uniformes : pour tout borélien* A, $\mu([0,1]\times A) = \mu(A \times [0,1]) = \mathrm{Lebesgue}(A)$.

Toute permutation σ peut se plonger dans l'ensemble des permutons, de la façon suivante : on associe à σ le permuton μ_σ qui est défini ainsi : dans chaque petit carré $[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}] \times [\frac{\sigma(i)-1}{n}, \frac{\sigma(i)}{n}]$ on met une masse $1/n$, uniformément répartie dans le petit carré.

On munit l'ensemble $\mathcal{M}$ des permutons de la topologie faible : une suite de permutons μ_n converge vers μ si

$$\int_{[0,1]^2} f d\mu_n \overset{n\to+\infty}{\to} \int_{[0,1]^2} f d\mu$$

pour toute fonction f continue bornée. Dans ce sens-là, les permutons associés à des permutations séparables admettent une limite continue :

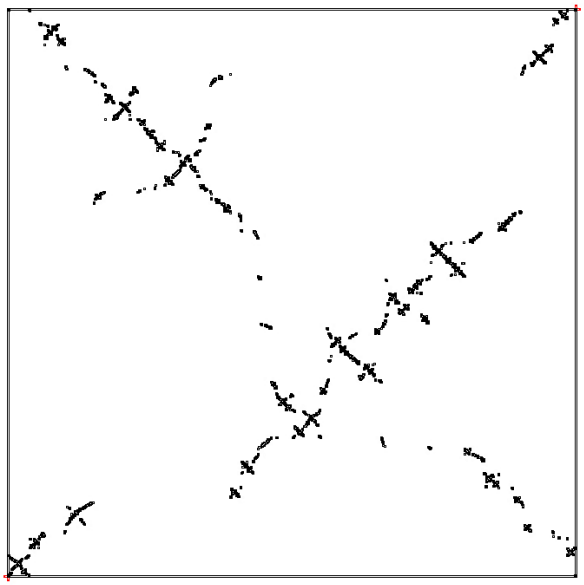


FIGURE 8. Le diagramme d'une permutation séparable uniforme de taille $n = 17705$. On peut voir cette simulation comme l'approximation du support d'une réalisation du permuton séparable brownien (voir Th.3.5).

Théorème 3.5 (*Convergence du permuton des permutations séparables [13] (Th. 1.6)*)

Pour tout n, soit σ_n une permutation séparable aléatoire uniforme de taille n, et soit μ_{σ_n} le permuton associé à σ_n.

Il existe un permuton aléatoire μ tel que la suite $(\mu_{\sigma_n})_n$ converge en loi, pour la topologie faible dans $\mathcal{M}$, vers μ. Ce permuton μ est appelé permuton séparable brownien.

La construction du permuton séparable brownien est liée à celle du *Continuum Random Tree* d'Aldous [Ald93] (ce qui explique la terminologie). Plus de détails apparaîtront plus loin.

Pour expliquer la stratégie de preuve du théorème 3.5 et décrire l'objet limite μ, on verra en proposition 3.7 que la convergence en loi pour la topologie faible dans $\mathcal{M}$ s'exprime de façon combinatoire, en termes d'occurrences de motifs.

Pour cela, il faut étendre la notion d'occurrence de motif à un permuton. De façon informelle, on note $\widetilde{\mathrm{occ}}(\pi, \mu)$ la probabilité de fabriquer le motif π en tirant k points indépendants suivant la loi donnée par μ.

Définition 3.6 (*Densité d'un motif π dans un permuton μ*)

Soient μ un permuton (déterministe), et π un motif de taille k.
Soit $(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}})$ un k-uplet $(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) = ((\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}_1), \ldots, (\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{y}_k))$ de k points dans $[0,1]^2$, tirés indépendamment selon la mesure de probabilité μ. On range ces k points dans l'ordre croissant des abscisses, l'ordre des ordonnées définit alors une permutation (aléatoire) que l'on note $\mathrm{Perm}(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}})$.

On note alors

$$\widetilde{\mathrm{occ}}(\pi, \mu) = \mathbb{P}\left(\mathrm{Perm}(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) = \pi \right).$$

Pour π fixé, on s'attend à ce que le motif π apparaisse de l'ordre de $\binom{n}{k}$ fois dans σ. On a en effet l'inégalité suivante ([HKM+13, Lemma 4.2]) : pour tout π et tout σ on a

$$\left| \frac{1}{\binom{n}{k}} \mathrm{occ}(\pi, \sigma) - \widetilde{\mathrm{occ}}(\pi, \mu_\sigma) \right| \leq k^2/n. \tag{18}$$

Proposition 3.7 (*Théorème de Portmanteau pour les permutons ([15], Th.2.5)*)

Soit (σ_n) une suite de permutations aléatoires, et μ un permuton aléatoire. Il y a équivalence entre :

1) La suite $(\mu_{\sigma_n})_n$ converge en loi vers μ.

2) Le vecteur infini aléatoire $\left(\frac{1}{\binom{n}{k}} \mathrm{occ}(\pi, \sigma_n)\right)_{\pi \in \mathfrak{S}}$ converge en loi vers un vecteur infini aléatoire $(\Lambda_\pi)_{\pi \in \mathfrak{S}}$ (les vecteurs sont indexés par l'ensemble $\mathfrak{S}$ de toutes les permutations).

3) Pour tout k, et tout motif π de taille k, il existe une constante Δ_π telle que

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{\binom{n}{k}} \mathrm{occ}(\pi, \sigma_n)\right] \overset{n \to +\infty}{\to} \Delta_\pi.$$

Dans ce dernier cas, on a $\Delta_\pi = \mathbb{E}\left[\widetilde{\mathrm{occ}}(\pi, \mu)\right]$.

Convergence des espérances $\Rightarrow$ Convergence des moments joints ?

Le critère 2) dans la proposition 3.7 n'est pas surprenant, c'est l'analogue de la convergence des marginales finies. La tension est garantie par la compacité de $\mathcal{M}$.

Le critère 3) est plus étonnant : on remplace la convergence de tous les moments et de tous les moments joints par la simple convergence des espérances. Ceci est dû à l'observation suivante. Pour tous motifs π_1, π_2, on peut écrire $\widetilde{\mathrm{occ}}(\pi_1, \mu) \times \widetilde{\mathrm{occ}}(\pi_2, \mu)$ comme combinaison linéaire finie $\sum_{\pi' \in \mathfrak{S}} \alpha_{\pi'} \widetilde{\mathrm{occ}}(\pi', \mu)$ pour certains coefficients $\alpha_{\pi'}$.

Prenons un exemple : pour $\pi_1 = 12$ et $\pi_2 = 21$, soient M_1, M_2, M_3, M_4 des points de $[0,1]^2$ indépendants tirés selon le permuton μ,

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathrm{occ}}(12, \mu) \times \widetilde{\mathrm{occ}}(21, \mu) &= \mathbb{P}(M_1, M_2 \text{ codent pour } 12)\mathbb{P}(M_3, M_4 \text{ codent pour } 21) \\
&= \mathbb{P}(M_1, M_2 \text{ codent pour } 12,\ M_3, M_4 \text{ codent pour } 21) \quad (19) \\
&= \mathbb{P}(M_1, M_2, M_3, M_4 \text{ réordonnés codent pour } 1243, 1342, 1342, \dots) \\
&= \widetilde{\mathrm{occ}}(1243, \mu) + 2\,\widetilde{\mathrm{occ}}(1342, \mu) + \dots. \quad (20)
\end{aligned}$$

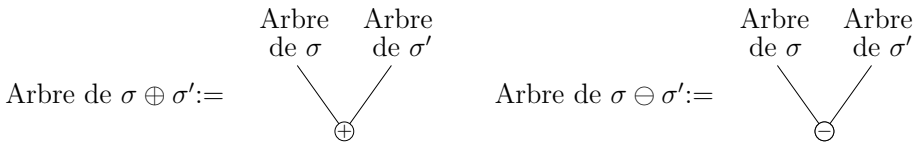
On passe ensuite à l'espérance dans (20).

Des décompositions analogues peuvent également s'écrire pour les occurrences $\mathrm{occ}(\pi, \sigma_n)$ de motifs dans les permutations (l'écriture est toutefois plus compliquée car il s'agit de tirages avec remise : les M_i dans (19) peuvent être égaux). Ainsi la convergence pour tous les π des espérances $\mathbb{E}[\frac{1}{\binom{n}{k}} \mathrm{occ}(\pi, \sigma_n)]$ garantit en fait la convergence de tous les moments, et moments joints.

Preuve du théorème 3.5 : codage par des arbres et excursions

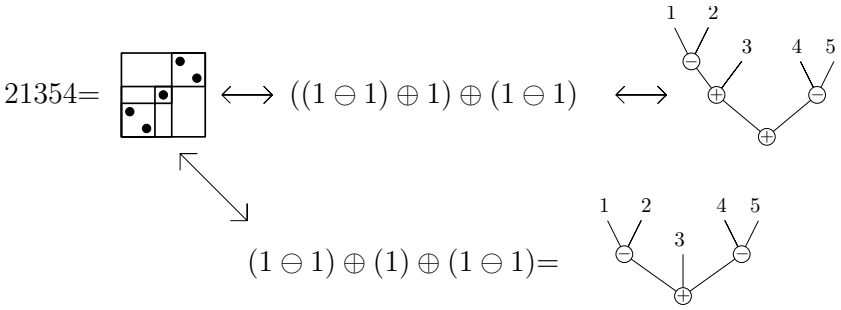
En vertu de la caractérisation donnée par la proposition 3.7, et de l'approximation Permuton/Permutation donnée par (**18**), il suffit pour démontrer le théorème 3.5 de trouver l'équivalent de $\mathbb{E}[\mathrm{occ}(\pi, \sigma_n)]$ pour n'importe quel motif π. Par ailleurs, ceci déterminera entièrement la loi du permuton séparable brownien μ.

Le théorème 3.5 est ainsi ramené à un résultat de combinatoire. Les permutations séparables étant construites à partir des opérateurs $\oplus, \ominus$, il est naturel de les coder par des arbres *binaires*, avec des signes $\oplus/\ominus$ sur les sommets internes. On construit récursivement un arbre binaire associé à une permutation séparable, en partant de l'arbre réduit à une feuille pour la permutation 1 :



Malheureusement, cet arbre binaire associé à une permutation n'est pas unique[8], par exemple $123 = 1 \oplus (1 \oplus 1) = (1 \oplus 1) \oplus 1$, de sorte que 123 est codée par deux arbres binaires distincts : et .

Pour avoir un codage bijectif on va fusionner tous les sommets $\oplus$ voisins, et tous les $\ominus$ voisins, voir l'exemple ci-dessus (on a numéroté les feuilles de gauche à droite pour plus de clarté) :



L'arbre obtenu (en bas à droite) n'est plus forcément binaire. À cause de cette fusion, cet arbre vérifie une contrainte simple : 2 sommets internes voisins ont forcément des signes $\oplus, \ominus$ différents. Nous résumons tout ceci dans la proposition suivante (voir [13] Prop.2.13).

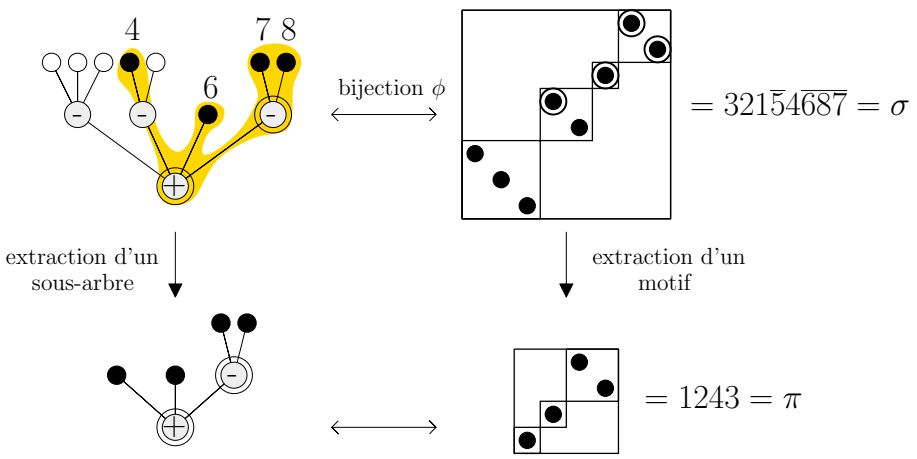
8. Il existe un autre codage bijectif des permutations séparables par des arbres binaires avec contraintes, voir par exemple ([SS91] p.277).

Proposition 3.8 (*Les permutations séparables sont des arbres de Schröder*)

Il existe une bijection ϕ entre

1. *L'ensemble des permutations séparables de taille n.*
2. *L'ensemble des* arbres de Schröder *signés avec n feuilles : c'est-à-dire les arbres planaires dans lesquels*
   - *Chaque sommet interne a un signe $\oplus$ ou $\ominus$;*
   - *Deux sommets internes voisins ne peuvent avoir le même signe (autrement dit, les signes alternent le long de chaque branche et donc tous les signes sont entièrement déterminés par le signe de la racine) ;*
   - *Les sommets internes ont tous au moins deux enfants.*

Cette représentation des permutations permet d'utiliser les techniques habituelles pour l'étude asymptotique des grands arbres aléatoires. Par ailleurs, extraire un motif π de taille k dans une permutation σ revient à extraire un sous-arbre à k feuilles dans $\phi(\sigma)$, et à regarder le motif codé par ϕ^{-1} (dans l'exemple ci-dessous, on extrait le motif $\mathrm{pat}_{\{4,6,8,7\}}\left(321\bar{5}4\overline{687}\right) = 1243$) :



Ceci peut se résumer de la façon suivante :

Lemme 3.9

Soit π un motif de taille k, et σ une permutation,

$$\mathrm{occ}(\pi, \sigma) = \text{ Nombre de sous-arbres à } k \text{ feuilles dans } \phi(\sigma), \text{ qui codent pour } \pi.$$

Nous sommes donc ramenés au problème suivant : soit T_n un arbre de Schröder uniforme à n feuilles, avec n grand. Pour k et π de taille k fixés, combien T_n a-t-il de sous-arbres qui codent pour π ? Autrement dit, si l'on tire k feuilles $\ell_1, \ldots, \ell_k$ uniformément au hasard dans T_n, quelle est la probabilité que le sous-arbre extrait à partir de $\ell_1, \ldots, \ell_k$ code pour π ?

La stratégie est la suivante :

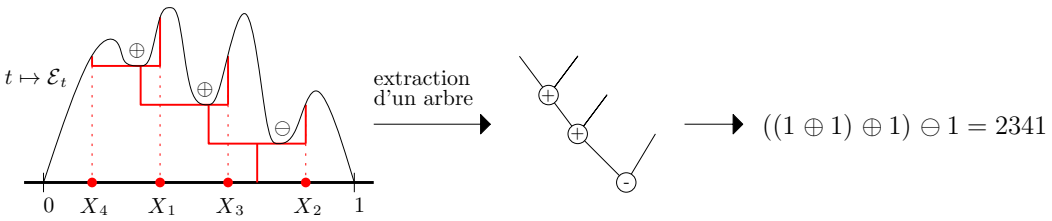
- On utilise tout d'abord l'observation ([PR15, CK14]) que T_n a même loi qu'un arbre de Galton-Watson de loi de reproduction bien choisie, conditionné à avoir n feuilles.

- On utilise ensuite le fait déjà démontré par Pitman-Rizzolo [PR15] et Kortchemski [Kor12] que le processus de contour de T_n converge en loi vers l'excursion brownienne.
- La partie la plus difficile est la suivante. D'une part en nous inspirant notamment de [MM03, PR15] pour l'analyse du processus de contour, et d'autre part en utilisant des arguments d'échangeabilité, nous démontrons que
  - Les abscisses de $\ell_1, \dots, \ell_k$ dans le processus de contour renormalisé convergent en loi, lorsque $n \to +\infty$, vers k variables uniformes indépendantes $X_1, \dots, X_k$.
  - Les $k-1$ sommets internes qui sont les plus proches ancêtres communs de $\ell_1, \dots, \ell_k$ dans T_n ont, asymptotiquement quand $n \to +\infty$, des signes $\oplus, \ominus$ indépendants et équilibrés.

De tout cela nous déduisons que le comportement asymptotique de la variable aléatoire $\tilde{\mathrm{occ}}(\pi, \mu_{\sigma_n})$ peut se décrire à l'aide des sous-arbres de taille k extraits d'une réalisation d'une excursion brownienne. Nous donnons cette construction de façon informelle.

Soient $(\mathcal{E}_t)_{0 \le t \le 1}$ une excursion brownienne normalisée et $\mathbf{s} = (s_m)_m$ une famille de signes $\oplus, \ominus$ indépendants[9] et équilibrés, indexés par les minima locaux de $\mathcal{E}$.

Pour $k \ge 2$ fixé, on tire des v.a. $X_1, \dots, X_k$ uniformes et indépendantes sur $[0,1]$ (et indépendantes de $\mathcal{E}$). Ces k points induisent un arbre à k feuilles sur $\mathcal{E}$, par la construction habituelle des arbres réels (voir [LG05, Sec.2.5] pour une définition plus formelle). Voici un exemple avec $k = 4$:



Cet arbre est presque-sûrement binaire, et ses noeuds internes $v_1, \dots, v_{k-1}$ correspondent à des minima locaux de $\mathcal{E}$, ils ont donc un signe déterminé par $\mathbf{s}$. Ainsi, les variables $X_1, \dots, X_k$ induisent un arbre binaire à k feuilles, avec des signes sur les sommets internes, et donc induisent une permutation de taille k.

On pose alors

$$\Lambda_\pi = \Lambda_\pi(\mathcal{E}, \mathbf{s}) = \mathbb{P}\left(\text{L'arbre binaire induit par } X_1, \dots, X_k \text{ code pour } \pi \;\middle|\; \mathcal{E}, \mathbf{s} \right). \tag{21}$$

Notons que si π n'est pas séparable, alors π ne peut être codé par un arbre binaire, et donc $\Lambda_\pi \equiv 0$. Si π est séparable, Λ_π est une variable aléatoire non-triviale ([13], Prop.9.5).

Nous pouvons énoncer le résultat principal de [13].

9. Pour être précis, on numérote les minima locaux de $\mathcal{E}$ avec une fonction mesurable $v : \mathcal{E} \to \{1, 2, \dots\}$, et on tire ensuite les signes $(s_{v_j})_j$ indépendamment de $\mathcal{E}$.

Théorème 3.10 (*Permutations séparables et excursion brownienne [13] (Th. 1.6)*)

Pour tout n, soit σ_n une permutation séparable aléatoire uniforme de taille n. Pour tout k et tout motif π de taille k, quand $n \to +\infty$,

$$\frac{1}{\binom{n}{k}} \mathrm{occ}(\pi, \sigma_n) \overset{(loi)}{\to} \Lambda_\pi, \tag{22}$$

où Λ_π est défini par (21). La convergence ci-dessus est une convergence jointe pour tous les π : pour toute famille finie de motifs $(\pi_1, \ldots, \pi_r)$ de tailles $k_1, \ldots, k_r$,

$$\left(\frac{1}{\binom{n}{k_1}} \mathrm{occ}(\pi_1, \sigma_n), \ldots, \frac{1}{\binom{n}{k_r}} \mathrm{occ}(\pi_r, \sigma_n) \right) \overset{(loi)}{\to} (\Lambda_{\pi_1}, \ldots, \Lambda_{\pi_r}) \tag{23}$$

Dans le terme de droite de (23) on tire les X_i indépendamment pour chaque Λ_{π_j}, mais sur la même réalisation de $(\mathcal{E}, \mathbf{s})$. Ainsi les $\Lambda_{\pi_1}, \ldots, \Lambda_{\pi_r}$ ne sont *pas* indépendants (ce qui est cohérent au regard du terme de gauche).

Le théorème 3.10 implique le théorème 3.5, et donne une représentation constructive de la loi de la limite μ. En particulier on a pour tout motif π

$$\widetilde{\mathrm{occ}}(\pi, \mu) \overset{(\text{loi})}{=} \Lambda_\pi.$$

Les variables Λ_π ne semblent pas avoir de loi connue, même pour une taille de motif π très petite. Nous avons calculé à l'ordinateur, grâce aux décompositions évoquées en (20), les premiers moments de Λ_{12} :

$$\mathbb{E}[\Lambda_{12}] = \frac{1}{2}; \ \mathbb{E}[\Lambda_{12}^2] = \frac{17}{60}; \ \mathbb{E}[\Lambda_{12}^3] = \frac{7}{40}; \ \mathbb{E}[\Lambda_{12}^4] = \frac{6361}{55440}; \ \mathbb{E}[\Lambda_{12}^5] = \frac{1741}{22176}.$$

Le théorème 3.10 est un résultat de nature *quenched* : un milieu aléatoire est donné par le tirage de μ (équivalent donc à une excursion brownienne et des signes), et on considère ensuite les variables aléatoires $(\widetilde{\mathrm{occ}}(\pi, \mu))_\pi$ conditionnellement à μ.

On peut en déduire un résultat *annealed* en prenant l'espérance dans (22), on intègre alors suivant $(\mathcal{E}, \mathbf{s})$. Il se trouve que l'arbre codé par une excursion brownienne et des v.a. uniformes est lui-même un arbre binaire uniforme ([LG05] Sec.2.6), ce qui fait que l'on peut évaluer l'espérance. On obtient alors le corollaire suivant, qui estime la proportion d'un motif π dans une grande permutation séparable uniforme.

Corollaire 3.11 (*Motifs dans les permutations séparables ([13], Th.1.3)*)

Soit σ_n une permutation séparable uniforme de taille n, alors pour tout k et tout motif π de taille k,

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{\binom{n}{k}} \mathrm{occ}(\pi, \sigma_n) \right] \overset{n \to +\infty}{\to} = \mathbb{E}[\Lambda_\pi] = \frac{N_\pi}{2^{k-1} \mathrm{Cat}_{k-1}},$$

où N_π est le nombre d'arbres binaires signés à k feuilles qui codent pour π, et $\mathrm{Cat}_k = \frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}$ est le k-ème nombre de Catalan.

Par exemple, $N_{123} = 2$ car 123 est codé par et , alors que $N_{231} = 1$ puisque

231 est uniquement codé par . Le motif 123 apparaît deux fois plus souvent *en moyenne* dans σ_n que le motif 231.

Comparaison avec l'état de l'art

La combinatoire énumérative des classes de permutations est maintenant ancienne. Une question célèbre est d'évaluer le cardinal de $\mathrm{Avoid}_n(\tau_1, \dots)$ (même pour un seul motif interdit τ_1 de petite taille c'est une question non-triviale). Du point de vue probabiliste c'est étonnament un sujet très récent.
Pour les formes limites :

- Miner et Pak [MP14] décrivent de façon très précise la forme asymptotique d'une permutation dans $\mathrm{Avoid}_n(\tau)$, pour les 6 motifs τ de taille 3. Ils mentionnent une connexion possible avec l'excursion brownienne.
- Une telle connexion est exploitée par Hoffman, Rizzolo and Slivken [HRS17a]. Il faut savoir que pour les 6 motifs de taille 3, $\mathrm{Avoid}_n(\tau)$ est compté par le n-ème nombre de Catalan, c'est-à-dire le nombre d'excursions discrètes de longueur $2n$. Ils en déduisent dans [HRS17b] de nouvelles conséquences combinatoires.
- Kenyon *et al.* [KKRW15] ont récemment proposé un point de vue assez différent. Ils s'intéressent à la forme limite d'une permutation, lorsque l'on impose la proportion d'un ou plusieurs motifs donnés. Ils démontrent que le permuton limite est la solution d'un problème variationnel, et arrivent à le résoudre explicitement pour certains petits motifs. Leurs résultats ne semblent pas pour l'instant s'appliquer aux classes de permutations (voir la discussion en fin de Section 2 dans [KKRW15]).

Pour les occurrences de motifs :

- Bóna [B10] donne des estimées de $\mathbb{E}[(\pi, \sigma_n)]$ pour σ_n uniforme dans $\mathrm{Avoid}_n(132)$, avec plusieurs motifs π de petite taille. C'est donc un résultat analogue au corollaire 3.11.
- Le premier résultat relatif à la loi limite de $\mathrm{occ}(\pi, \sigma_n)$ pour σ_n uniforme dans $\mathrm{Avoid}_n(\tau)$ est dû à Janson [Jan17]. Pour $\tau = 132$, il exprime la loi limite de $\frac{1}{\binom{n}{k}}\mathrm{occ}(\pi, \sigma_n)$ (ce sont les analogues de nos Λ_π) en fonction de l'aire sous une excursion brownienne.

3.2 Universalité dans les classes closes par substitution [15]

L'objectif du second article [15] est de démontrer que le comportement asymptotique de la classe des permutations séparables est en fait universel dans les classes de permutations *closes par substitution*. Madras-Yıldırım [MY17] ont par exemple observé très récemment que les simulations pour la classe $\mathrm{Avoid}(2413)$ ressemblaient à nos simulations du permuton séparable brownien. Nous avons besoin de quelques autres définitions pour introduire les résultats de [15].

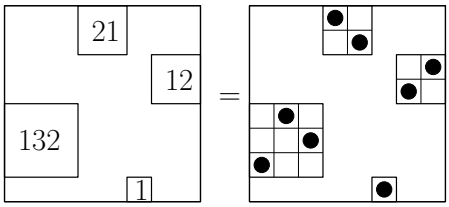
Substitution de permutations

On a vu que les opérateurs $\oplus, \ominus$ ne suffisent pas à engendrer toutes les permutations, par exemple on ne peut pas obtenir 2413. Pour engendrer $\mathfrak{S}$, on doit rajouter l'opérateur de substitution.

Définition 3.12

Soit $\theta = \theta(1)\cdots\theta(d)$ une permutation de taille d, et soient d permutations $\pi^{(1)},\ldots,\pi^{(d)}$. La substitution *de $\pi^{(1)},\ldots,\pi^{(d)}$ dans θ est la permutation de taille $|\pi^{(1)}|+\cdots+|\pi^{(d)}|$ obtenue en remplaçant chaque $\theta(i)$ par la suite d'entiers dans le même ordre relatif que $\pi^{(i)}$.*
Cette permutation est notée $\theta[\pi^{(1)},\ldots,\pi^{(d)}]$.

Voici un exemple avec $\theta = 2413$:

$2413[132, 21, 1, 12] =$ 

$= 24387156$

(Les opérations $\pi_1 \oplus \pi_2$ et $\pi_1 \ominus \pi_2$ peuvent s'écrire comme les substitutions $12[\pi_1,\pi_2]$, $21[\pi_1,\pi_2]$.) On peut maintenant engendrer $\mathfrak{S}$ tout entier, les blocs élémentaires sont les *permutations simples*.

Définition 3.13 (*Permutation simple*)

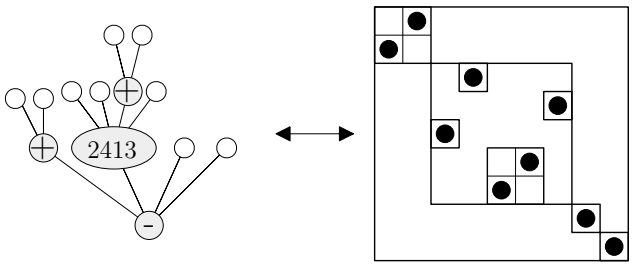
Une permutation simple *est une permutation de taille $n \geq 2$ qui n'envoie aucun intervalle non trivial vers un intervalle.*

Par exemple, 451326 n'est pas simple car elle envoie $[3;5]$ sur $[1;3]$. Les permutations simples de petites tailles sont 12, 21, 2413, 3142 (il n'y en a pas de taille 3). Il y a $\frac{n!}{e}(1+\mathrm{o}(1))$ permutations simples [AAK03].

Proposition 3.14 (*Décomposition des permutations ([AA05], Prop.2)*)

Toute permutation σ de taille $n \geq 2$ se décompose d'une façon unique de l'une des façons suivantes :
- *$\sigma = \alpha[\pi^{(1)},\ldots,\pi^{(d)}]$, où α est simple de taille $d \geq 4$;*
- *$\sigma = \oplus[\pi^{(1)},\ldots,\pi^{(d)}]$, où $d \geq 2$ est maximal ;*
- *$\sigma = \ominus[\pi^{(1)},\ldots,\pi^{(d)}]$, où $d \geq 2$ est maximal.*

(Par "d maximal" dans le deuxième (resp. troisième) item on sous-entend qu'aucun $\pi^{(1)},\ldots,\pi^{(d)}$ ne peut se redécomposer directement avec $\oplus$ (resp. $\ominus$).
À nouveau, cette décomposition se code naturellement par des arbres. Cette fois on peut avoir des sommets internes indexés par $\oplus, \ominus$, ou par une permutation simple. Par exemple :



$= 894367521$

Pour avoir unicité de l'arbre, on impose à nouveau que deux sommets $\oplus$ (resp. $\ominus$) ne sont jamais voisins. Nous appelons ces arbres les arbres de Schröder engendrés par $\mathcal{S}$.

Définition 3.15 (*Classe close par substitution*)

Une classe $\mathcal{C}$ de permutations est close par substitution *si pour tout θ de taille d, et pour tous $\pi^{(1)}, \dots, \pi^{(d)}$ on a*

$$\begin{cases} \theta \in \mathcal{C} \\ \pi^{(1)}, \dots, \pi^{(d)} \in \mathcal{C} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \theta[\pi^{(1)}, \dots, \pi^{(d)}] \in \mathcal{C}.$$

- La classe des permutations séparables est close par substitution. En effet, si $\theta, \pi^{(1)}, \dots, \pi^{(d)} \in \mathcal{C}$ alors ces $d+1$ permutations sont codées par des arbres de Schröder, et ceci est également vrai pour la substitution $\theta[\pi^{(1)}, \dots, \pi^{(d)}]$.
- La classe $\mathrm{Avoid}(123)$ des permutations qui évitent 123 n'est pas close par substitution. Par exemple $12, 132, 312$ sont dans $\mathrm{Avoid}(123)$, alors que la substitution $12[132, 312]$ ne l'est pas.

Il se trouve qu'une classe close par substitution se décrit facilement à l'aide de son ensemble de permutations simples.

Proposition 3.16 (*Les classes closes par substitution sont des Schröder généralisés*)

Soit $\mathcal{C}$ une classe de permutations close par substitution, on note $\mathcal{S}$ l'ensemble des permutations simples dans $\mathcal{C}$.
Les permutations dans $\mathcal{C}$ sont exactement celles qui peuvent s'écrire à partir de la permutation triviale 1, des opérateurs $\oplus, \ominus$ et de substitutions de la forme $\alpha[\dots]$ avec $\alpha \in \mathcal{S}$.

La classe $\mathcal{C}$ est donc en bijection avec les arbres de Schröder généralisés :

- *Chaque sommet interne a un signe indexé par $\oplus$ ou $\ominus$ ou un $\alpha \in \mathcal{S}$;*
- *On ne peut pas avoir deux sommets internes voisins indexés tous deux par $\oplus$ ou tous deux par $\ominus$;*
- *Les sommets internes indexés par $\oplus, \ominus$ ont tous au moins deux enfants.*

Pour $\mathcal{S} = \varnothing$, on retrouve la plus petite classe close par substitution : la classe des permutations séparables.

La motivation de [15] est la suivante : quelle est la forme d'une permutation aléatoire tirée uniformément dans $\mathcal{C} \cap \mathfrak{S}_n$, pour n grand ? Il est clair que la réponse va dépendre de la famille $\mathcal{S}$, nous avons réussi à caractériser ce comportement limite de façon assez précise. Soit

$$S(z) = \sum_{\alpha \in \mathcal{S}} z^{|\alpha|}$$

la fonction génératrice associée à $\mathcal{S}$ et soit $R_S \in [0, +\infty]$ son rayon de convergence. On suppose que $R_S > 0$ et on introduit une condition technique

$$R_S > 0 \quad \text{et} \quad \lim_{r \nearrow R_S} S'(r) > \frac{2}{(1+R_S)^2} - 1. \qquad \textbf{(H1)}$$

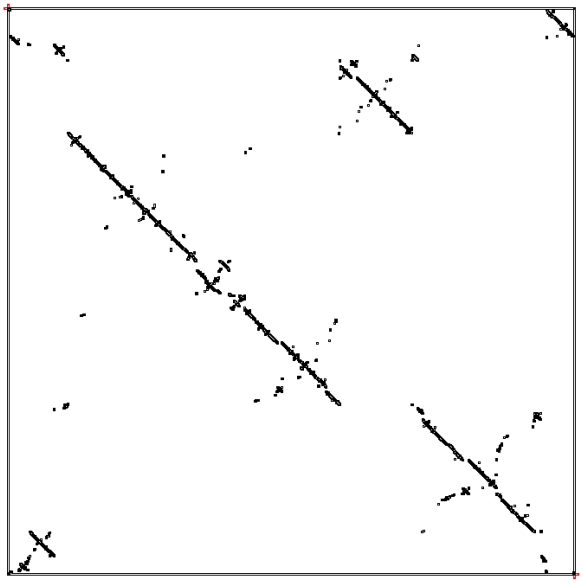


FIGURE 9. Simulation : le support d'une réalisation du permuton brownien séparable de biais $p = 0.2$.

Théorème 3.17 (*Universalité du permuton brownien ([15], Th.1.10)*)

Soit $\mathcal{C}$ une classe de permutations close par substitution, et $\mathcal{S}$ l'ensemble des permutations simples dans $\mathcal{C}$. Pour $n \geq 1$, soit σ_n une permutation aléatoire uniforme de taille n dans $\mathcal{C}$, et μ_{σ_n} le permuton associé à σ_n.

On suppose que la fonction S vérifie la condition (**H1**)*. Alors la suite $(\mu_{\sigma_n})_n$ converge en loi vers le permuton brownien séparable* biaisé *de paramètre $p_{\mathcal{S}}$, avec un $p_{\mathcal{S}}$ explicite.*

Le permuton brownien séparable *biaisé* est construit de la même façon que celui sans biais, à la différence que les $\oplus$ (resp. $\ominus$) sont tirés avec probabilité p (resp. $1-p$).

La condition (**H1**) n'est pas très restrictive. Si $\mathcal{S}$ est finie, alors S est un polynôme et donc $R_S = +\infty$: la condition (**H1**) est alors vérifiée. Si $S'(R_s) = +\infty$ (par exemple si S est rationnelle), (**H1**) est également vraie. En fait, la condition (**H1**) est vérifiée pour toutes les classes closes par substitution que nous avons rencontrées dans la littérature (et pour lesquelles on sait évaluer R_S) :

- Les familles $\mathcal{S}$ telles que $\mathcal{S} \cap \mathfrak{S}_n$ est bornée : les *simple parallel alternations* et les simples "en coin" (voir [Bri10]), les oscillantes et quasi-oscillantes [BBR11], les familles de simples incluses dans $\mathrm{Avoid}(4213, 3142)$, $\mathrm{Avoid}(4213, 1342)$ et $\mathrm{Avoid}(4213, 3124)$ [AAV14].
- Les familles pour lesquels $\mathcal{S}$ est rationnelle, et donc $S'(R_s) = +\infty$: les permutations simples en *épingle* [BBR11], les familles incluses dans $\mathrm{Avoid}(3124, 4312)$ [Pan17], $\mathrm{Avoid}(2143, 4312)$ et $\mathrm{Avoid}(1324, 4312)$ [AAB12], $\mathrm{Avoid}(2143, 4231)$ [AAB11], $\mathrm{Avoid}(1324, 4231)$ [AAV09], $\mathrm{Avoid}(4312, 3142)$ et $\mathrm{Avoid}(4231, 3124)$ [AAV14].
- Des familles pour lesquelles S a une singularité en racine carrée en R_s, par exemple les permutations simples évitant 321 [AV13].

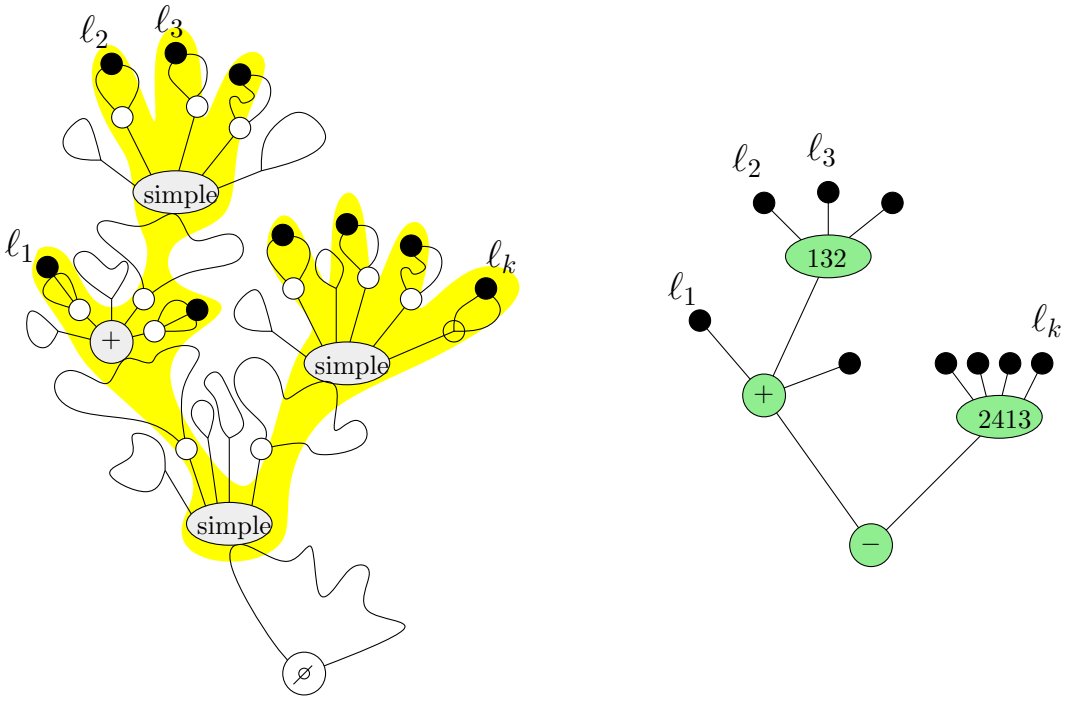


FIGURE 10. À gauche, le squelette stylisé d'un arbre codant pour une grande permutation dans $\mathcal{C} \cap \mathfrak{S}_n$, avec k feuilles $\ell_1, \ldots, \ell_k$ tirées uniformément au hasard. À droite, le sous-arbre induit par ces k feuilles. On doit évaluer la probabilité que cet arbre code pour π. Cette fois, les sommets internes de cet arbre peuvent être indexés par des permutations (simples ou pas), et plus seulement par $\oplus, \ominus$.

Stratégie de la preuve du théorème 3.17 et condition (H1)

Pour démontrer le théorème 3.17, nous devons évaluer la limite pour tout π de

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{\binom{n}{k}}\mathrm{occ}(\pi, \sigma_n)\right] = \frac{1}{\binom{n}{k}\mathrm{card}\left(\mathcal{C} \cap \mathfrak{S}_n\right)} \sum_{s \in \mathcal{C} \cap \mathfrak{S}_n} \mathrm{occ}(\pi, s).$$

En vertu de la décomposition donnée par le théorème 3.14, le nombre $\mathrm{occ}(\pi, \sigma_n)$ d'occurrences peut s'écrire comme le nombre de sous-arbres de taille k dans un arbre de Schröder engendré par $\mathcal{S}$ (voir Fig.10). On devine que la combinatoire est bien plus compliquée que pour le cas des séparables, où l'on avait $\mathcal{S} = \varnothing$.

Nous avons pensé utiliser l'approche "Galton-Watson conditionnés" de l'article [13] : les arbres de Schröder engendrés par $\mathcal{S}$ peuvent en effet être vus comme des Galton-Watson *multi-types* conditionnés. Cependant, plusieurs arguments de [13] ne semblent pas s'étendre facilement, notamment l'argument d'échangeabilité évoqué plus haut.

À la place, nous avons utilisé la combinatoire analytique pour faire de l'asymptotique à partir de certaines séries génératrices comptant les arbres de Schröder engendrés par $\mathcal{S}$, avec plusieurs types de contraintes.

Nous expliquons maintenant pourquoi apparaît la condition (**H1**).
Pour évaluer les occurrences d'un π fixé, on doit énumérer les sous-arbres avec une certaine racine. Par exemple, on vérifie facilement que la série génératrice $T_{\mathrm{not}\oplus}(z)$

comptant les arbres tels que la racine n'est pas $\oplus$ est solution de l'équation fonctionnelle [10]

$$T_{\text{not}\oplus} = z + \frac{T_{\text{not}\oplus}^2}{1 - T_{\text{not}\oplus}} + S\left(\frac{T_{\text{not}\oplus}}{1 - T_{\text{not}\oplus}}\right) =: z + \Lambda_S(T_{\text{not}\oplus}) \tag{24}$$

(voir les détails [11] dans [15] Prop.4.1).

Écrivons plutôt cette équation sous la forme

$$z = T(z) - \Lambda_S(T(z)), \tag{25}$$

où l'inconnue est T. On cherche à inverser (25) pour avoir une expression de T (ou au moins son développement asymptotique). À cause du théorème d'inversion locale, on devine que tout va dépendre de s'il existe ou non un point à l'intérieur du disque $D(0, R_\Lambda)$ tel que $\frac{\partial}{\partial t}(t - \Lambda_S(t)) = 0$, c'est-à-dire $\Lambda_S'(t) = 1$. Il se trouve que cette condition est équivalente à la condition (H1) :

$$\text{(H1)} \Leftrightarrow \lim_{t \nearrow R_\Lambda} \Lambda_S'(t) > 1, \tag{H1'}$$

où R_Λ est le rayon de convergence de Λ_S. (les coefficients étant positifs, la plus petite singularité est forcément réelle).

On cherche alors à inverser l'équation fonctionnelle (25), et on montre que $T_{\text{not}\oplus}$ a sa singularité dominante en

$$\rho_S = \tau - \Lambda_S(\tau),$$

où τ est l'unique solution de $\Lambda_S'(\tau) = 1$ (cette solution existe grâce à (H1')). On peut alors déterminer le comportement asymptotique de $T_{\text{not}\oplus}$ autour de cette singularité (en particulier, il s'agit d'une singularité en $\text{const} \times (\rho - z)^{1/2}$, habituelle pour une série comptant des arbres).

En utilisant des décompositions combinatoires fines des arbres de Schröder engendrés par $\mathcal{S}$, nous pouvons alors déterminer les asymptotiques de toutes les familles d'arbres pertinentes pour l'évaluation de $\mathbb{E}[\text{occ}(\pi, \sigma_n)]$.

Dans les cas où (H1) n'est pas vérifiée, l'asymptotique est différente. Nous arrivons à couvrir quasiment tous les cas et obtenons le théorème 3.18, qui est nouveau et intéressant en lui-même pour la combinatoire des classes de permutations. Ce théorème est la combinaison des propositions 5.8, corollaire 6.4, lemme 7.3 dans [15], ces résultats sont découpés dans cet article car les calculs asymptotiques sont traités dans des sections différentes.

10. On est en général plus habitué à des équations du type $T = 1 + z\Lambda(T)$, qui apparaissent lorsque l'on compte les arbres suivant le nombre de sommets, et pas suivant le nombre de feuille comme ici.

11. Très brièvement : un arbre compté par $T_{\text{not}\oplus}$ est soit (i) une suite d'au moins 2 arbres comptés par $T_{\text{not}\ominus} = T_{\text{not}\oplus}$, soit (ii) une permutation simple de degré d et la donnée de d arbres sans contraintes, dont on peut vérifier qu'il sont comptés par $T_{\text{not}\oplus}/(1 - T_{\text{not}\oplus})$.

Théorème 3.18 (*Énumération des classes closes par substitution [15]*)

Soit $\mathcal{C}$ une classe de permutations close par substitution, et soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des permutations simples dans $\mathcal{C}$. On lui associe la génératrice Λ_S définie par (24), de rayon de convergence R_Λ.

- **Cas standard (H1) :** $\lim_{r \nearrow R_\Lambda} \Lambda'_S(r) > 1$. *Il existe* $0 < \rho_S < 1, C_S > 0$ *tels que*
$$\mathrm{card}(\mathcal{C} \cap \mathfrak{S}_n) \overset{n\to\infty}{\sim} C_S(1/\rho_S)^n \frac{1}{n^{3/2}}.$$
- **Cas critique :** $\lim_{r \nearrow R_\Lambda} \Lambda'_S(r) = 1$. *On suppose que la singularité de Λ_S en R_Λ est d'exposant $\delta > 1$. Alors il existe $0 < \rho_S < 1, C_S > 0$ tels que*
$$\mathrm{card}(\mathcal{C} \cap \mathfrak{S}_n) \overset{n\to\infty}{\sim} C_S(1/\rho_S)^n \frac{1}{n^{1+\min(\delta,2)^{-1}}}.$$
- **Cas dégénéré :** $\lim_{r \nearrow R_\Lambda} \Lambda'(r) < 1$. *On suppose que la singularité de Λ_S en R_Λ est d'exposant $\delta > 1$. Alors il existe $0 < \rho_S < 1, C_S > 0$ tels que*
$$\mathrm{card}(\mathcal{C} \cap \mathfrak{S}_n) \overset{n\to\infty}{\sim} C_S(1/\rho_S)^n \frac{1}{n^{\delta+1}}.$$

(Dans le théorème ci-dessus, on dit que Λ a une singularité en r d'exposant $\delta \notin \mathbb{Z}_{\geq 0}$ lorsque $\Lambda(z) = f(z) + (c + \mathrm{o}(1))(r - z)^\delta$ avec f analytique et $c \neq 0$. Notons que si $\delta < 1$ alors on a forcément $\lim_{r \nearrow R_\Lambda} \Lambda'_S(r) = +\infty$ on ne peut donc pas être dans le cas critique ou sous-critique.)

En particulier, dans chacun des trois cas ci-dessus, on a une expression du taux de croissance (ou *limite de Stanley-Wilf*) :
$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{card}(\mathcal{C} \cap \mathfrak{S}_n)^{1/n} = 1/\rho_S,$$
avec ρ_S explicite, si l'on connaît la série génératrice S comptant les permutations simples dans $\mathcal{C}$.

3.3 Au-delà de l'universalité [15]

Le cas standard dans le théorème 3.18 ci-dessus est la brique essentielle pour démontrer le théorème 3.17. Les cas *critique* et *sous-critique* indiquent le comportement asymptotique éventuel de μ_{σ_n} dans le cas où la famille $\mathcal{S}$ de permutations simples ne vérifie pas la condition (H1).

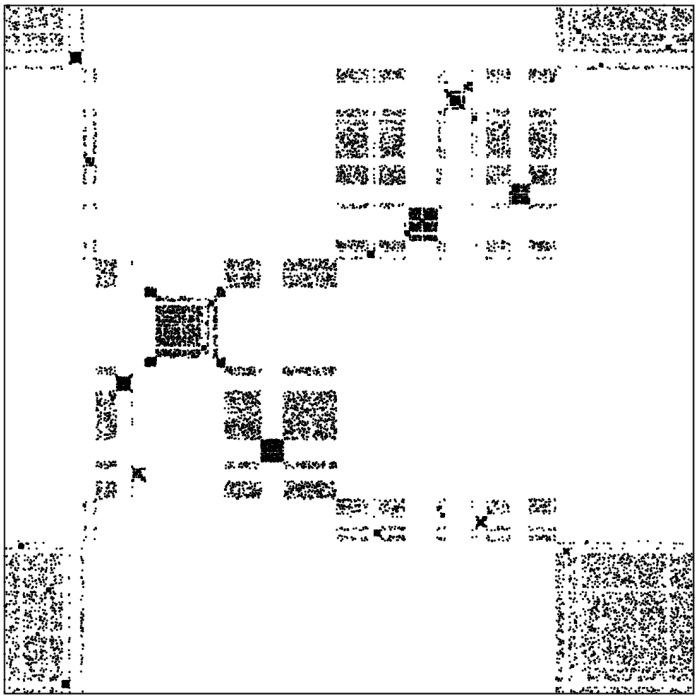


FIGURE 11. Simulation : le support d'une réalisation du permuton stable d'indice $\delta = 1.1$ (simulation de M.Maazoun).

Théorème 3.19 (*Au-delà de l'universalité ([15], Prop.6.10 et Th.7.6-7.8)*)

Soit $\mathcal{C}$ une classe de permutations close par substitution, et soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des permutations simples dans $\mathcal{C}$. Soit σ_n une permutation aléatoire uniforme de taille $n \geq 1$ dans $\mathcal{C}$, et μ_{σ_n} le permuton associé à σ_n.

- **Cas critique :** $\lim_{r \nearrow R_\Lambda} \Lambda'(r) = 1$. *Selon le type δ de la singularité de Λ en R_Λ, μ_{σ_n} converge vers un permuton brownien séparable biaisé (si $\delta \geq 2$), ou vers un autre type de permuton ν_δ, appelé permuton stable d'indice δ (si $1 < \delta < 2$).*
- **Cas dégénéré :** $\lim_{r \nearrow R_\Lambda} \Lambda'(r) < 1$. *Avec une légère condition technique supplémentaire sur S (condition (CS) dans [15]), si le permuton associé à une permutation simple uniforme dans $\mathcal{S}$ converge en loi vers un permuton $\mu_{\mathcal{S}}$, alors $\mu_{\sigma_n} \to \mu_{\mathcal{S}}$.*

La terminologie *permuton stable* vient du fait qu'une construction possible de ν_δ est donnée de la façon suivante : pour tout k et tout motif π de taille k,

$$\mathbb{E}\left[\widetilde{\mathrm{occ}}(\pi, \nu_\delta)\right] = \mathbb{P}\left(\text{L'arbre stable d'indice } \delta \text{ de taille } k \text{ code pour } \pi\right).$$

L'arbre stable d'indice δ de taille k est la marginale à k feuilles de l'arbre réel stable introduit par Duquesne-Le Gall ([DLG02], Th.3.3.3). Les sommets internes de cet arbre à k feuilles sont ensuite indexés par des $\oplus, \ominus$ et des permutations simples dans $\mathcal{C}$, avec une loi qui dépend de la famille des simples de $\mathcal{C}$.

3.4 Méthodes de simulations

Les preuves développées dans [13],[15] donnent des stratégies efficaces pour simuler des diagrammes correspondant à une permutation uniforme dans une certaine classe.

Permutations séparables. Comme on l'a dit plus haut, les permutations séparables de taille n sont en bijection avec les arbres de Schröder à n feuilles. La loi uniforme sur ces arbres peut être construite comme la loi d'un arbre de Galton-Watson T conditionné à avoir un nombre de feuilles $|T| = n$, lorsque la loi de reproduction ν est la suivante :

$$\nu(0) = 2 - \sqrt{2}, \qquad \nu(1) = 0, \qquad \nu(i) = \left(1 - \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{i-1} \text{ (pour } i \geq 2).$$

La loi ν est critique, de sorte que $\mathbb{P}(|T| \geq n) \sim \mathrm{const}/\sqrt{n}$. La méthode du rejet est alors envisageable : on simule des arbres de Galton-Watson jusqu'à dépasser une taille donnée, c'est ainsi qu'on a obtenu la Figure 8 p.51.

Permutations dans une classe close. Il n'est pas aussi évident de simuler de façon exacte une permutation uniforme dans une classe close par substitution quelconque, sauf par des bijections *ad-hoc* dans certains cas. Pour simuler le permuton limite, on peut toutefois utiliser les preuves des théorèmes 3.17,3.19. Selon les cas, une approximation du permuton limite peut alors être obtenue (voir les détails en Appendice de [15]) par différents arbres de Galton-Watson conditionnés, dans lesquels les types $\oplus/\ominus$ des sommets internes sont tirés au sort avec un biais. C'est la stratégie utilisée pour les Figures 9,11.

La simulation exacte de permutations dans une classe donnée, close par substitution ou non, est tout de même possible en utilisant une décomposition qui généralise celle de la proposition 3.14. Cette décomposition permet de rentrer dans le cadre des générateurs aléatoires de Boltzmann [DFLS04] (très grossièrement, il s'agit d'une méthode qui généralise la stratégie "Galton-Watson conditionné" à des structures combinatoires plus complexes). C'est avec cet algorithme qu'est obtenue la simulation de la Figure 12.

3.5 Discussions et perspectives

Nos résultats d'énumérations et de formes limites sur les classes de permutations ouvrent plusieurs perspectives, à court et moyen terme.

Limites locales ★★

Lorsque l'on se fixe une classe de permutations, il y a une question assez naturelle à laquelle nous n'avons pas répondu : que peut-on dire des *limites locales* des permutations. Si on se limite dans un premier temps au cas des permutations séparables :

- Que peut-on dire de la probabilité de l'occurrence d'un motif π à k positions successives $\ell, \ell+1, \ldots, \ell+k-1$? Ceci est relié à la limite locale des arbres de Schröder.
- Existe-t-il un modèle raisonnable d'arbre de Schröder infini (discret) uniforme ? Est-ce que cet arbre code pour une permutation séparable infinie "uniforme" ?

Notre renormalisation en $\binom{n}{k}^{-1}$ écrase les phénomènes locaux et les théorèmes 3.5,3.10 ne disent donc rien des limites locales. Ceci dit, nos résultats d'énumération non-asymptotique doivent pouvoir donner des conséquences intéressantes pour les limites locales.

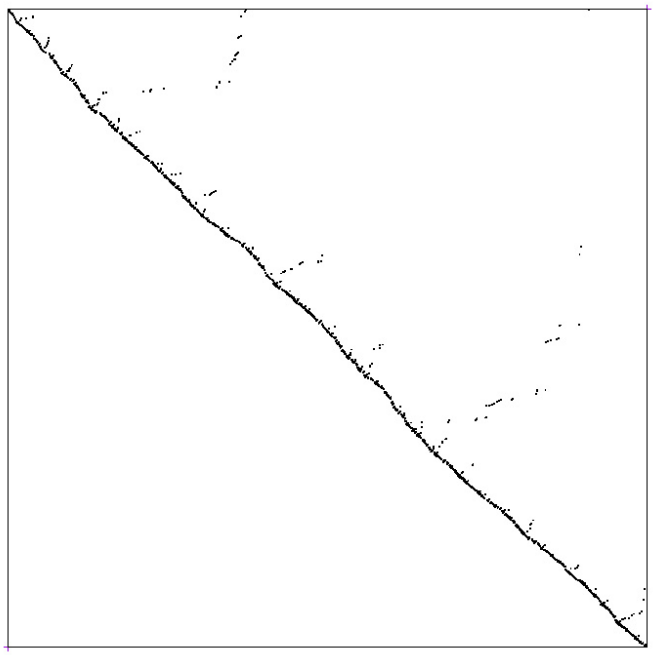


FIGURE 12. Une permutation de taille 1496 choisie uniformément parmi celles qui évitent 132.

Classes non closes par substitution ★★★

Le permuton brownien n'est certainement pas universel parmi toutes les classes de permutations (à savoir, celles qui ne sont pas closes par substitution).

Ne serait-ce que pour un motif π fixé de taille 3, les classes $\mathrm{Avoid}(\pi)$ des permutations évitant π ne présentent pas le même comportement asymptotique [12]. Des travaux précédents [Jan17, HRS17a, HRS17b, MP14] montrent en effet que le comportement limite est déterministe. Quasiment tous les points se concentrent autour d'une diagonale, voir Figure 12.

Une question, sans doute assez difficile, est de déterminer les classes pour lesquelles la limite obtenue est déterministe, et celles pour lesquelles on obtient à nouveau le permuton séparable brownien biaisé (ou un autre permuton aléatoire). Il est illusoire d'avoir des critères aussi explicites que dans les théorèmes 3.17,3.19, tout au plus peut-on espérer développer une méthode systématique qui, éventuellement à l'aide de calculs sur machine, permette de déterminer le comportement limite de certaines classes naturelles de permutations. Une approche possible se trouve dans une décomposition en arbres des permutations d'une classe donnée qui généralise celle de la proposition 3.14 (voir [Pie13], Sec.3.3.2). Peut-être est-il possible d'analyser ces permutations par les arbres aléatoires liés à cette décomposition.

12. Et rappelons que pour tout π de taille 3 la classe $\mathrm{Avoid}(\pi)$ n'est pas close par substitution, par exemple $12, 132, 312$ sont dans $\mathrm{Avoid}(123)$, alors que la substitution $12[132, 312]$ ne l'est pas.

Bibliographie

[AA05] Michael H. Albert and Michael D. Atkinson. Simple permutations and pattern restricted permutations. *Discrete Mathematics*, 300(1-3) :1–15, 2005.

[AAB11] Michael H. Albert, Michael D. Atkinson, and Robert Brignall. The enumeration of permutations avoiding 2143 and 4231. *Pure Mathematics and Applications. PU.M.A.*, 22(2) :87–98, 2011.

[AAB12] Michael H. Albert, Michael D. Atkinson, and Robert Brignall. The enumeration of three pattern classes using monotone grid classes. *Electronic Journal of Combinatorics*, 19(3) :Paper 20, 34, 2012.

[AAK03] Michael H. Albert, Michael D. Atkinson, and Martin Klazar. The enumeration of simple permutations. *Journal of Integer Sequences*, 6(4), 2003.

[AAV09] Michael H. Albert, Michael D. Atkinson, and Vincent Vatter. Counting 1324, 4231-avoiding permutations. *Electronic Journal of Combinatorics*, 16(1) :Research Paper 136, 9, 2009.

[AAV14] Michael H. Albert, Michael D. Atkinson, and Vincent Vatter. Inflations of geometric grid classes : three case studies. *Australasian Journal of Combinatorics*, 58 :24–47, 2014.

[AD95] David Aldous and Persi Diaconis. Hammersley's interacting particle process and longest increasing subsequences. *Probability Theory and Related Fields*, 103(2) :199–213, 1995.

[AD13] Antonio Auffinger and Michael Damron. Differentiability at the edge of the percolation cone and related results in first-passage percolation. *Probability Theory and Related Fields*, 156(1-2) :193–227, 2013.

[AD15] Sven Erick Alm and Maria Deijfen. First passage percolation on $\mathbb{Z}^2$: A simulation study. *Journal of Statistical Physics*, 161(3) :657–678, 2015.

[ADH17] Antonio Auffinger, Michael Damron, and Jack Hanson. *50 years of first-passage percolation*, volume 68 of *University Lecture Series*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2017.

[Ald93] David J. Aldous. The continuum random tree III. *The Annals of Probability*, 21(1) :248–289, 1993.

[AP96] Peter Antal and Agoston Pisztora. On the chemical distance for supercritical Bernoulli percolation. *Annals of Probability*, pages 1036–1048, 1996.

[AT16] Antonio Auffinger and Si Tang. On the time constant of high dimensional first passage percolation. *Electronic Journal of Probability*, 21, 2016.

[AV13] Michael H. Albert and Vincent Vatter. Generating and enumerating 321-avoiding and skew-merged simple permutations. *Electronic Journal of Combinatorics*, 20(2) :Paper 44, 11, 2013.

[BÍ0] Miklós Bóna. The absence of a pattern and the occurrences of another. *Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science*, 12(2) :89–102, 2010.

[BÍ2] Miklós Bóna. *Combinatorics of permutations*. Discrete Mathematics and its Applications (Boca Raton). CRC Press, Boca Raton, FL, second edition, 2012.

[BBDI17] János Balogh, Cosmin Bonchiș, Diana Diniș, and Gabriel Istrate. Computing a minimal partition of partial orders into heapable subsets. `arXiv:1706.01230`, 2017.

[BBR11] Frédérique Bassino, Mathilde Bouvel, and Dominique Rossin. Enumeration of pin-permutations. *Electronic Journal of Combinatorics*, 18(1) :Paper 57, 39, 2011.

[BCS06] Márton Balázs, Eric Cator, and Timo Seppalainen. Cube root fluctuations for the corner growth model associated to the exclusion process. *Electronic Journal of Probability*, 11 :1094–1132, 2006.

[BD97] Eric Brunet and Bernard Derrida. Shift in the velocity of a front due to a cutoff. *Physical Review E.*, 56(3, part A) :2597–2604, 1997.

[BDM+01] Jinho Baik, Percy Deift, Ken T.-R. McLaughlin, Peter Miller, and Xin Zhou. Optimal tail estimates for directed last passage site percolation with geometric random variables. *Advances in Theoretical and Mathematical Physics*, 5(6) :1207–1250, 2001.

[Bér08] Jean Bérard. An example of Brunet-Derrida behavior for a branching-selection particle system on $\mathbb{Z}$. `arxiv:0810.5567`, 2008.

[BG10] Jean Bérard and Jean-Baptiste Gouéré. Brunet-Derrida behavior of branching-selection particle systems on the line. *Communications in Mathematical Physics*, 298(2) :323–342, 2010.

[BG18] Anne-Laure Basdevant and Lucas Gerin. Longest increasing paths with gaps. `arXiv:1805.09136`, 2018.

[BHMZ11] John Byers, Brent Heeringa, Michael Mitzenmacher, and Goergios Zervas. Heapable sequences and subsequences. In *Proceedings of ANALCO11, Workshop on Analytic Algorithmics and Combinatorics*, pages 33–44, 2011.

[BKS03] Itai Benjamini, Gil Kalai, and Oded Schramm. First passage percolation has sublinear distance variance. *Annals of Probability*, 31(4) :1970–1978, 2003.

[BM14] Jean Bérard and Pascal Maillard. The limiting process of N-particle branching random walk with polynomial tails. *Electronic Journal of Probability*, 19 :no. 22, 17, 2014.

[BP18] Quentin Bertrand and Jules Pertinand. Dimension improvement in Dhar's refutation of the Eden conjecture. *Physics Letters A*, 382(11) :761–765, 2018.

[BR08] Michel Benaïm and Raphaël Rossignol. Exponential concentration for first passage percolation through modified Poincaré inequalities. *Annales de l'Institut Henri Poincaré Probabilités et Statistiques*, 44(3) :544–573, 2008.

[Bri10] Robert Brignall. A survey of simple permutations. In *Permutation patterns*, volume 376 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 41–65. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2010.

[BS18] Anne-Laure Basdevant and Arvind Singh. Almost-sure asymptotics for the number of heaps inside a random sequence. *Electronic Communications in Probability*, 23 (paper n.17), 2018.

[CC17] Francis Comets and Aser Cortines. Finite-size corrections to the speed of a branching-selection process. *Brazilian Journal of Probability and Statistics*, 31(3) :476–501, 2017.

[CCD86] Jennifer T. Chayes, L. Chayes, and Richard Durrett. Critical behavior of the two-dimensional first passage time. *Journal of Statistical Physics*, 45(5-6) :933–951, 1986.

[CCG18] Brigitte Chauvin, Julien Clément, and Danièle Gardy. *Arbres pour l'algorithmique*. Disponible sur `HAL`, 2018.

[CD81] Theodore J. Cox and Richard Durrett. Some limit theorems for percolation processes with necessary and sufficient conditions. *Annals of Probability*, pages 583–603, 1981.

[CG05] Eric Cator and Piet Groeneboom. Hammersley's process with sources and sinks. *Annals of Probability*, 33(3) :879–903, 2005.

[CG06] Eric Cator and Piet Groeneboom. Second class particles and cube root asymptotics for Hammersley's process. *Annals of Probability*, 34(4) :1273–1295, 2006.

[CG17] Federico Ciech and Nicos Georgiou. Order of the variance in the discrete Hammersley process with boundaries. `arXiv:1712.06479`, 2017.

[CK14] Nicolas Curien and Igor Kortchemski. Random non-crossing plane configurations : A conditioned Galton-Watson tree approach. *Random Structures & Algorithms*, 45(2) :236–260, 2014.

[CM17] Aser Cortines and Bastien Mallein. A n-branching random walk with random selection. *ALEA, Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.*, XIV :117–137 (electronic), 2017.

[Cor16] Ivan Corwin. Kardar-Parisi-Zhang universality. *Notices of the AMS*, 63(3), 2016.

[CT16] Raphaël Cerf and Marie Théret. Weak shape theorem in first passage percolation with infinite passage times. *Annales de l'Institut Henri Poincaré, Probabilités et Statistiques*, 52(3) :1351–1381, 2016.

[Dam16] Michael Damron. Recent work on chemical distance in critical percolation. `arXiv:1602.00775`, 2016.

[DFLS04] Philippe Duchon, Philippe Flajolet, Guy Louchard, and Gilles Schaeffer. Boltzmann samplers for the random generation of combinatorial structures. *Combinatorics, Probability and Computing*, 13(4-5) :577–625, 2004.

[Dha86] Deepak Dhar. Asymptotic shape of Eden clusters. In *On growth and form*, pages 288–292. Springer, 1986.

[Dha88] Deepak Dhar. First passage percolation in many dimensions. *Physics Letters A*, 130(4-5) :308–310, 1988.

[DHL17] Michael Damron, Jack Hanson, and Wai-Kit Lam. The size of the boundary in first-passage percolation. `arXiv:1709.09613`, 2017.

[DL81] Richard Durrett and Thomas M. Liggett. The shape of the limit set in Richardson's growth model. *Annals of Probability*, pages 186–193, 1981.

[DLG02] Thomas Duquesne and Jean-François Le Gall. Random trees, Lévy processes and spatial branching processes. *Astérisque*, 281 :vi+147, 2002.

[Ede61] Murray Eden. A two-dimensional growth process. *Dynamics of fractal surfaces*, 4 :223–239, 1961.

[Ghy13] Étienne Ghys. Intersecting curves (variation on an observation of Maxim Kontsevich). *American Mathematical Monthly*, 120(3) :232–242, 2013.

[Ghy17] Étienne Ghys. A singular mathematical promenade. Livre en préparation, disponible en ligne, 2017.

[GM90] Jürgen Gärtner and Stanislav A Molchanov. Parabolic problems for the Anderson model. *Communications in Mathematical Physics*, 132(3) :613–655, 1990.

[GM04] Olivier Garet and Régine Marchand. Asymptotic shape for the chemical distance and first-passage percolation on the infinite Bernoulli cluster. *ESAIM Probability and Statistics*, 8 :169–199, 2004.

[Gol18] Julian Gold. Intrinsic isoperimetry of the giant component of supercritical bond percolation in dimension two. *Electronic Journal of Probability*, 23 :paper n.53, 2018.

[GTW01] Janko Gravner, Craig A. Tracy, and Harold Widom. Limit theorems for height fluctuations in a class of discrete space and time growth models. *Journal of Statistical Physics*, 102(5) :1085–1132, 2001.

[Ham72] John M. Hammersley. A few seedlings of research. In *Proceedings of the 6th Berkeley Symp. Math. Statist. and Probability*, volume 1, pages 345–394, 1972.

[HKM+13] Carlos Hoppen, Yoshiharu Kohayakawa, Carlos Gustavo Moreira, Balázs Ráth, and Rudini Menezes Sampaio. Limits of permutation sequences. *Journal of Combinatorial Theory. Series B*, 103(1) :93–113, 2013.

[HRS17a] Christopher Hoffman, Douglas Rizzolo, and Erik Slivken. Pattern-avoiding permutations and Brownian excursion, Part I : shapes and fluctuations. *Random Structures & Algorithms*, 50(3) :394–419, 2017.

[HRS17b] Christopher Hoffman, Douglas Rizzolo, and Erik Slivken. Pattern-avoiding permutations and Brownian excursion, Part II : fixed points. *Probability Theory and Related Fields*, À paraître (2017).

[HW65] John M. Hammersley and Dominic J. A. Welsh. First-passage percolation, subadditive processes, stochastic networks, and generalized renewal theory. In *Proc. Internat. Res. Semin., Statist. Lab., Univ. California, Berkeley, Calif*, pages 61–110. Springer-Verlag, New York, 1965.

[IB15] Gabriel Istrate and Cosmin Bonchis. Partition into heapable sequences, heap tableaux and a multiset extension of Hammersley's process. In *Proceedings of Combinatorial Pattern Matching*, pages 261–271, 2015.

[Jan17] Svante Janson. Patterns in random permutations avoiding the pattern 132. *Combinatorics, Probability and Computing*, 26(1) :24–51, 2017.

[Joh00a] Kurt Johansson. Shape fluctuations and random matrices. *Communications in Mathematical Physics*, 209(2) :437–476, 2000.

[Joh00b] Kurt Johansson. Transversal fluctuations for increasing subsequences on the plane. *Probability Theory and Related Fields*, 116(4) :445–456, 2000.

[Joh01] Kurt Johansson. Discrete orthogonal polynomial ensembles and the Plancherel measure. *Annals of Mathematics*, 153(1) :259–296, 2001.

[JPS98] William Jockusch, James Propp, and Peter Shor. Random domino tilings and the arctic circle theorem. `arxiv:9801068`, 1998.

[JSW90] Joyce Justicz, Edward R. Scheinerman, and Peter M. Winkler. Random intervals. *American Mathematical Monthly*, 97(10) :881–889, 1990.

[Kes86] Harry Kesten. Aspects of first passage percolation. In *École d'été de probabilités de Saint-Flour, XIV—1984*, volume 1180 of *Lecture Notes in Math.*, pages 125–264. Springer, Berlin, 1986.

[KKRW15] Richard Kenyon, Daniel Kral, Charles Radin, and Peter Winkler. Permutations with fixed pattern densities. `arXiv:1506.02340`, 2015.

[Kor12] Igor Kortchemski. Invariance principles for Galton-Watson trees conditioned on the number of leaves. *Stochastic Processes and their Applications*, 122(9) :3126–3172, 2012.

[LG05] Jean-François Le Gall. Random trees and applications. *Probability Surveys*, 2 :245–311, 2005.

[Lig75] Thomas M. Liggett. Ergodic theorems for the asymmetric simple exclusion process. *Transactions of the American Mathematical Society*, 213 :237–261, 1975.

[Lig85] Thomas M. Liggett. An improved subadditive ergodic theorem. *Annals of Probability*, 13(4) :1279–1285, 1985.

[Mar02] Régine Marchand. Strict inequalities for the time constant in first passage percolation. *Annals of Applied Probability*, 12(3) :1001–1038, 2002.

[Mar17] Anders Martinsson. First-passage percolation on Cartesian power graphs. *À paraître dans Annals of Probability*, 2017.

[MM03] Jean-François Marckert and Abdelkader Mokkadem. The depth first processes of Galton-Watson trees converge to the same Brownian excursion. *Annals of Probability*, 31(3) :1655–1678, 2003.

[MMN08] Satya N. Majumdar, Kirone Mallick, and Sergei Nechaev. Bethe ansatz in the Bernoulli matching model of random sequence alignment. *Phys. Rev. E (3)*, 77(1) :011110, 10, 2008.

[MP14] Sam Miner and Igor Pak. The shape of random pattern-avoiding permutations. *Advances in Applied Mathematics*, 55 :86–130, 2014.

[MY17] Neal Madras and Gökhan Yıldırım. Longest monotone subsequences and rare regions of pattern-avoiding permutations. *Electronic Journal of Combinatorics*, 24(4) :P4–13, 2017.

[NP95] Charles M. Newman and Marcelo S. T. Piza. Divergence of shape fluctuations in two dimensions. *Annals of Probability*, 23(3) :977–1005, 1995.

[Pan17] Jay Pantone. The enumeration of permutations avoiding 3124 and 4312. *Annals of Combinatorics*, 21(2) :293–315, 2017.

[Pie13] Adeline Pierrot. Combinatoire et algorithmique dans les classes de permutations. *Thèse de l'Université Paris 7*, 2013.

[PR15] Jim Pitman and Douglas Rizzolo. Schröder's problems and scaling limits of random trees. *Transactions of the American Mathematical Society*, 367(10) :6943–6969, 2015.

[PSC01] Charles Pittet and Laurent Saloff-Coste. A survey on the relationships between volume growth, isoperimetry, and the behavior of simple random walk on cayley graphs, with examples. *Prépublication*, 2001.

[Ric73] Daniel Richardson. Random growth in a tessellation. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 74(03) :515–528, 1973.

[Ros81] Hermann Rost. Non-equilibrium behaviour of a many particle process : Density profile and local equilibria. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*, 58(1) :41–53, 1981.

[RSSV10] Leonardo T. Rolla, Vladas Sidoravicius, Donatas Surgailis, and Maria E. Vares. The discrete and continuum broken line process. *Markov Processes and Related Fields*, 16(1) :79–116, 2010.

[Sep97] Timo Seppäläinen. Increasing sequences of independent points on the planar lattice. *Annals of Applied Probability*, 7(4) :886–898, 1997.

[Sep98] Timo Seppäläinen. Exact limiting shape for a simplified model of first-passage percolation on the plane. *Annals of Probability*, 26(3) :1232–1250, 1998.

[Sep09] Timo Seppäläinen. Lecture notes on the corner growth model. Available at `http://www.math.wisc.edu/~seppalai`, 2009.

[SS91] Louis Shapiro and A. B. Stephens. Bootstrap percolation, the Schröder numbers, and the N-kings problem. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 4(2) :275–280, 1991.

[Ste97] John Michael Steele. *Probability theory and combinatorial optimization*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 1997.

[Top09] Valentin A. Topchiĭ. The time to extinction for Galton-Watson processes censored at a high level. *Teoriya Veroyatnosteĭ i ee Primeneniya*, 54(2) :271–287, 2009.

[Vie77] Gérard Viennot. Une forme géométrique de la correspondance de Robinson-Schensted. *Combinatoire et représentation du groupe symétrique*, pages 29–58, 1977.

[VK77] Anatoly M. Vershik and Sergei V. Kerov. Asymptotics of Plancherel measure of symmetrical group and limit form of Young tables. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 233.6 :1024–1027, 1977.

[Wes95] Julian West. Generating trees and the Catalan and Schröder numbers. *Discrete Mathematics*, 146(1-3) :247–262, 1995.

[Wil04] David Bruce Wilson. Mixing times of lozenge tiling and card shuffling markov chains. *Annals of Applied Probability*, 14(1) :274–325, 2004.

[Win88] Peter Winkler. Recent results in the theory of random orders. *Applications of discrete mathematics (Clemson, SC, 1986)*, pages 59–64, 1988.