Fonction de multiplicité de Corwin-Greenleaf pour certains groupes de Lie à nilradical co-compact

Anis Messaoud

FACULTÉ DES SCIENCES DE SFAX

ÉCOLE DOCTORALE DES SCIENCES FONDAMENTALES

THÈSE DE DOCTORAT

Discipline : Mathématiques

Spécialité : Mathématiques Fondamentales

Présentée par

Anis MESSAOUD

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR EN MATHÉMATIQUES

Fonction de multiplicité de Corwin-Greenleaf pour certains groupes de Lie à nilradical co-compact

---

Soutenue le 15 Mars 2018

Professeurs membres de jury:

M. Hatem Hamrouni	**Président**	**Sfax, Tunisie**
M. Ali Baklouti	**Encadreur**	**Sfax, Tunisie**
M. Khaled Tounsi	**Rapporteur**	**Sfax, Tunisie**
M. Tilmann Wurzbacher	**Rapporteur**	**Metz, France**
Mme. Fatma Khlif	**Examinatrice**	**Sfax, Tunisie**
M. Hidénori Fujiwara	**Examinateur**	**Fukuoka, Japan**
M. Tarou Yoshino	**Examinateur**	**Tokyo, Japan**

MATHEMATICS
is one of the essential emanations
of the human spirit, a thing
to be valued in and for itself,
like art or poetry.
OSWALD VEBLEN 1924

Dédicace

À mes chers parents qui n'ont cessé de me combler par leur amour et leur tendresse.

À ma chère femme pour son amour, sa patience et ses sacrifices.

À mes chers enfants Iyed et Noursine.

À tous les membres de ma famille sans aucune exception.

À tous ceux que ma réussite leur tient à coeur.

Et à la mémoire de monsieur Majdi Ben Halima.

Résumé

Soient $G \supset H$ des groupes de Lie, $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h}$ leurs algèbres de Lie, et $\mathrm{pr} : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{h}^*$ la projection naturelle. Pour les orbites coadjoints $\mathscr{O}^G \subset \mathfrak{g}^*$ et $\mathscr{O}^H \subset \mathfrak{h}^*$, on note $n(\mathscr{O}^G, \mathscr{O}^H)$ le nombre de H-orbites dans l'intersection $\mathscr{O}^G \cap \mathrm{pr}^{-1}(\mathscr{O}^H))$, connue par **la fonction de multiplicité de Corwin-Greenleaf**. Notre but dans cette thèse est la description de cette fonction pour certains groupes de Lie à radical nilpotent co-compact, en particulier les produits semi-directs $G = K \ltimes N$ des groupes compacts K avec des groupes de Lie nilpotents N.L'espace dual $\widehat{G}$ de G a été déterminé par la théorie de Mackey et la paramétrisation géométrique donnée par R. L. Lipsmann qui a prouvé qu'il existait une bijection entre $\widehat{G}$ et l'espace des orbites coadjointes admissibles de G. Dans l'esprit de la méthode de l'orbite due à Kirillov et Kostant, on s'attend à ce que $n(\mathscr{O}^G, \mathscr{O}^K)$ coïncide avec la multiplicité de $\tau \in \widehat{K}$ apparaissant dans la restriction à K d'une représentation unitaire irréductible π de G où π est attaché à $\mathscr{O}^G$ et τ est attaché à $\mathscr{O}^H$. Le premier exemple traité dans ce travail est le cas des extensions compactes du groupe $\mathbb{R}^n$ et le deuxième exemple considéré dans cette thèse est le cas des extensions compactes du groupe Heisenberg $\mathbb{H}_n$. Dans ces deux exemples nous avons étudié la relation entre la fonction de multiplicité de Corwin-Greenleaf $n(\mathscr{O}^G, \mathscr{O}^K)$ et la multiplicité $m(\pi, \tau)$ de τ dans la restriction de π à K, en premier lieu nous avons discuté le cas d'égalité entre elles en donnant des conditions sur les représentations π et τ et en deuxième lieu nous avons étudié des cas où $n(\mathscr{O}^G, \mathscr{O}^K) \neq m(\pi, \tau)$. Cette inégalité est intéressante parce que nous nous attendons l'égalité comme l'indique le nom de la fonction de multiplicité Corwin-Greenleaf. Le troisième exemple est un projet d'article consacré aussi à l'étude de cette fonction de multiplicité pour les extensions compactes du groupe de Lie libre de pas 2 $\mathbb{F}_{n,2}$.

Abstract

Let $G \supset H$ be Lie groups, $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h}$ their Lie algebras, and $\mathrm{pr} : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{h}^*$ the natural projection. For coadjoint orbits $\mathscr{O}^G \subset \mathfrak{g}^*$ and $\mathscr{O}^H \subset \mathfrak{h}^*$, we denote by $n(\mathscr{O}^G, \mathscr{O}^H)$ the number of H-orbits in the intersection $\mathscr{O}^G \cap \mathrm{pr}^{-1}(\mathscr{O}^H))$, which is known as the **Corwin-Greenleaf multiplicity function**. Our goal in this thesis is the description of this function of some Lie groups with co-compact nilpotent radical, in particular the semi direct products $G = K \ltimes N$ of compacts groups K with nilpotent Lie groups N. The dual space $\widehat{G}$ of

G had been determined via Mackey's theory and the geometric parametrization given by R. L. Lipsmann who had proved that there is a bijection between $\widehat{G}$ and the admissible coadjoint orbit space of G. In the spirit of the orbit method due to Kirillov and Kostant, one expects that $n(\mathscr{O}^G, \mathscr{O}^H)$ coincides with the multiplicity of $\tau \in \widehat{K}$ occurring in an irreducible unitary representation π of G when restricted to K, if π is attached to $\mathscr{O}^G$ and τ is attached to $\mathscr{O}^K$. The first example treated in this work is the case of the compact extensions of the group $\mathbb{R}^n$ and the second example regarded in this thesis is the case of the compact extensions of the Heisenberg group $\mathbb{H}_n$. In these two examples we investigated the relationship between the Corwin-Greenleaf multiplicity function $n(\mathscr{O}^G, \mathscr{O}^K)$ and the multiplicity $m(\pi, \tau)$ of τ in the restriction of π to K, firstly, we discussed the case of equality between them by giving conditions on the representations π et τ and secondly, we have studied cases where $n(\mathscr{O}^G, \mathscr{O}^K) \neq m(\pi, \tau)$. This inequality is interesting because we expect the equality as the naming of the Corwin-Greenleaf multiplicity function suggests. The third example is a draft article also devoted to the study of this multiplicity function for compact extensions of the free two-step nilpotent Lie group $\mathbb{F}_{n,2}$.

Remerciements

En préambule à cette thèse nous remercions " **ALLAH** " qui nous aide et nous donne la patience et le courage durant ces longues années d'étude.

Il m'est agréable d'exprimer ma profonde et respectueuse gratitude et mes sincères remerciements à toutes les personnes qui ont soutenu ce travail et aidé, de prés ou de loin, à le mener à bien.

Je dois commencer par remercier Monsieur **Majdi Ben Halima** qui a initié mon encadrement de thèse. Son décés en février 2016 m'a provoqué une grande perturbation et a été très regrettable. Je lui suis également reconnaissant de m'avoir assuré un encadrement rigoureux au début de cette thèse, tout en me donnant toutefois la possibilité de trouver par moi-même mon cheminement personnel. Il m'a toujours accordé généreusement le temps nécessaire pour partager avec moi ses idées et sa grande expérience. C'est l'homme qui su m'aider à apprendre le développement des résultats ainsi que la rédaction d'un papier scientifique, il n'a ménagé ni ses commentaires, toujours judicieux et rigoureux, ni ses encouragements. Je le remercie infiniment.

Aprés le décés du Monsieur **Majdi Ben Halima**, j'étais parrainé par le Professeur **Ali Baklouti** qui a pris la charge de me guider avec compétence pour achever cette thèse. Je lui exprimé toute ma reconnaissance, qui, malgré ses nombreuses occupations, a accepté de prendre la direction de cette thèse en cours de route, transformant ainsi les difficultés rencontrées en une expérience enrichissante. Je le remercie chaleureusement pour son encadrement, son œil critique et pour son soutien constant durant cette thèse. Sa compétence, sa rigueur scientifique et sa clairvoyance m'ont beaucoup appris.

Je suis très honoré à exprimer toute ma gratitude envers les membres du jury qui ont bien voulu consacrer à ma thèse une partie de leur temps et je tiens à remercier :

Monsieur **Hatem Hamrouni** qui m'a fait l'honneur d'accepté d'être présient de jury de ma thèse.

Monsieur **Khaled Tounsi** et Monsieur **Tilmann Wurzbacher** pour l'honneur qu'ils m'ont fait pour ses participations à mon jury de thèse en qualité de rapporteurs de mon travail, pour le temps consacré à la lecture de cette thèse, et pour les suggestions et les remarques judicieuses qu'ils m'ont indiquées.

Madame **Fatma Khlif**, Monsieur **Hidénori Fujiwara** et Monsieur **Tarou Yoshino** m'ont fait l'honneur en acceptant d'êtres membres de mon jury de thèse en qualité d'examinateurs. Je tiens à les assurer de ma profonde reconnaissance pour l'intérêt qu'ils portent à ce travail.

Mes remerciements vont particulièrement à mon père, **Boubaker Messaoud**, qui m'a appris à rester toujours debout face aux difficultés. J'adresse des remerciements de même ordre à ma mère, **Khadija Yahya**, qui m'a constamment encouragée et soutenue tout au long de ces années. Je ne saurai passer sous silence l'apport inestimable des autres membres de ma famille (frères, sœurs, nièces, neveux, etc.) qui m'ont soutenue, de près ou de loin durant mes études doctorales. C'est également le moment d'exprimer ma gratitude à mes enfants **Iyed** et **Noursine** pour l'amour qu'ils me témoignent et pour la part certaine qu'ils ont joué dans la réalisation de cette thèse.

Les mots me manquent pour remercier, à sa juste valeur, ma femme, **Nada Elaifa**, pour ses soutiens moral et psychologique indispensables pour maintenir ce projet à flot au travers des aléas de la vie et pour avoir cru en mes capacités intellectuelles et à mon sens de l'organisation pour le réaliser.

J'adresse aussi mes sincères remerciements à tous les membres du laboratoire de Mathématiques Appliquée et Analyse Harmonique pour m'avoir accueilli et encouragé durant cette période.

Je ne saurais terminer sans souligner le soutien amical et chaleureux de mes amis de tous les jours qui m'ont soutenu durant ce parcours doctoral. Je m'abstiens de les nommer tellement la liste est longue. Je nommerai tout de même mes amis, **Aymen Rahali**, **Souheil Bejjar** et **Abdellatif Omri** que je les remercie spécialement pour ses conseils et ses appuis.

Contents

Introduction

Les groupes de Lie s'introduisent naturellement dans de nombreuses questions de mathématiques pures et appliquées. Créée à l'origine au XIXe siècle par le mathématicien norvégien Sophus Lie, la théorie a été développée tout au long du XXe siècle en parallèle avec les progrès de l'algèbre, de la topologie et de la géométrie différentielle et aussi l'impulsion des recherches en physique et en mécanique théorique. elle englobe plusieurs théories comme : la mesure de Haar, la théorie du produit de composition, les séries de Fourier, les fonctions presque-périodiques, les groupes d'opérateurs unitaires et en partie la théorie de potentiel, la théorie ergodique et la topologie algébrique.

L'un des problèmes essentiels de l'analyse harmonique et plus précisément de la théorie des représentations des groupes de Lie est la détermination du dual unitaire $\widehat{G}$ d'un groupe de Lie G, i.e. l'ensemble des classes d'équivalence de représentations irréductibles et unitaires de G, l'une des idées importantes liées à la description de $\widehat{G}$ est d'établir une correspondance entre $\widehat{G}$ et l'espace $\mathfrak{g}^*/G$ des orbites co-adjointes de G, où $\mathfrak{g}^*$ désigne le dual de l'algèbre de Lie de G. Dans certains cas, la théorie de Mackey des représentations induites nous permet de décrire explicitement le dual unitaire de G. On désire si possible, donner pour chaque classe de telles représentations une réalisation concrète de l'une d'entre elles, en terme d'un objet géométrique lié au groupe. Une réponse complète à cette question a été apportée dans un premier lieu par A. A. Kirillov qui a établi par la méthode des orbites, dans le cadre des groupes nilpotents, une bijection naturelle entre l'espace des orbites $\mathfrak{g}^*/G$ de la représentation coadjointe du groupe G et son dual unitaire $\widehat{G}$ [12]. Étant donnée une orbite de la représentation coadjointe de G, à toute polarisation invariante de cette orbite, Kirillov fait correspondre une réalisation de l'élément de $\widehat{G}$

correspondant à l'orbite. Cette méthode a été étendue par Bernat [4] pour les groupes de Lie exponentiels résolubles, Auslander-Kostant [1] pour les groupes de Lie résolubles. Dans le cadre des groupes de Lie à nilradical co-compact, une version de la méthode des orbites due à Lipsman, associe une orbite coadjoint $\mathscr{O}_\xi \in \mathfrak{g}^*$, de certaine forme régulière ξ sur $\mathfrak{g}$ dite admissible, à chaque représentation unitaire irréductible. Il a prouvé dans [16] l'existence d'une bijection entre $\widehat{G}$ et un sous-espace $\mathfrak{g}^\ddagger/G$ de $\mathfrak{g}^*/G$, appelé espace des orbites co-adjointes admissibles.

Un autre axe de recherche assez important dans la théorie des représentations est celui de l'étude de la décomposition d'une représentation unitaire d'un groupe de Lie G en "somme" de représentations unitaires irréductibles. On suppose que H est un sous groupe fermé de G, on peut considérer deux contextes naturels pour la décomposition irréductible d'une représentation unitaire : l'une est une représentation induite d'un groupe plus petit (notée $Ind_H^G\sigma$ pour $\sigma \in \widehat{H}$) et l'autre est est la restriction d'un groupe plus grand (notée $\pi\big|_H$ pour $\pi \in \widehat{G}$). Les formules de décompositions correspondantes sont appelées respectivement formule de Plancherel et règle de branchement. Donc l'un des problèmes fondamentaux de la théorie des représentations est la règle de branchement qui permet de décrire la décomposition de la restriction de π sur H en termes d'intégrale directe de représentations unitaires irréductibles de H :

$$\pi\big|_H \simeq \int_{\widehat{H}}^{\oplus} m(\pi,\tau)d\mu(\tau),$$

où μ est une mesure borélienne sur $\widehat{H}$ et $m(\pi,.) : \widehat{H} \to \mathbb{N}\cup\{\infty\}$ est une fonction mesurable appelée *fonction de multiplicité* [9]. Apporter une réponse au problème de branchement consiste à donner une description explicite de la mesure μ et de la fonction de multiplicité $m(\pi,.)$. Des réponses satisfaisantes ont été données à ce problème par Corwin-Greenleaf pour le cas nilpotent, Lipsman pour le cas complètement résoluble et par Fujiwara pour le cas résoluble exponentiel.

Soient G un groupe de Lie connexe, simplement connexe et H un sous groupe de G, on note $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ leurs algèbres de Lie respectivement et pr : $\mathfrak{g}^* \to \mathfrak{h}^*$ la projection canonique entre leurs espaces duaux. Pour $\pi \in \widehat{G}$ et $\tau \in \widehat{H}$, on note $\mathscr{O}_\pi \subset \mathfrak{g}^*$ et $\mathscr{O}_\tau \subset \mathfrak{h}^*$ respectivement les orbites coadjointes associées. L. Corwin et F. P. Grenleaf donnent une décomposition explicite en représentations irréductibles de la restriction $\pi\big|_H$, elle est donnée en termes de géométrie orbitale. Cette description utilise la méthode des orbites des Kirillov qui donne une bijection entre le dual unitaire $\widehat{G}$ et l'ensemble des orbites coadjointes $\mathfrak{g}^*$. L. Corwin et F. P. Greenleaf montrent dans [8] que τ apparait dans l'intégrale $\pi\big|_H$ si $\mathrm{pr}^{-1}(\mathscr{O}_\tau)$ rencontre $\mathscr{O}_\pi$, ceci prouve que la multiplicité de τ dans $\pi\big|_H$ est déterminée géométriquement en termes d'intersection d'orbites coadjointes, elle est déterminée en comptant le nombre des H-orbites dans $\mathscr{O}_\pi \cap \mathrm{pr}^{-1}(\mathscr{O}_\tau)$: c'est *la fonction de multiplicité de Corwin-Greenleaf* notée $n(\mathscr{O}_\pi, \mathscr{O}_\tau)$. Dans cet esprit on s'attend à ce que cette fonction $n(\mathscr{O}_\pi, \mathscr{O}_\tau)$ coïncide avec la multiplicité d'une représentation unitaire irréductible τ de H se produisant dans la décomposition intégrale directe (règle de branchement) de la restriction $\pi\big|_H$. La recherche dans cette direction a été étendue pour les groupes de Lie nilpotents et certains groupes résolubles, par Kirillov, Corwin, Greenleaf, Lipsman et Fujiwara [8, 10, 11, 12], T. Kobayashi, B. Orsted et S. Nasrin pour les groupes de Lie semi-simples [14, 15]. Cependant, très peu d'attention a été accordée jusqu'à présent sur la fonction de multiplicité de Corwin-Greenleaf pour les groupes de Lie à nilradical co-compact.

Les deux premières parties de ma thèse sont une contribution à l'étude de cette fonction au cadre des groupes de Lie à nilradical co-compact. J'ai essayé, en collaboration avec M. Ben Halima, de traiter le cas des produits semi-direct $G = K \ltimes \mathbb{N}$ de groupes compacts K et nilpotents $\mathbb{N}$. L'espace dual de ces groupes a été déterminé à l'aide de la théorie des petits groupes de Mackey et de la théorie des orbites de Kirillov par R. L. Lipsmann. Le problème auquel nous nous étions consacrés fût de comparer la fonction de multiplicité $m(\pi, \tau)$ pour $\pi \in \widehat{G}$ et $\tau \in \widehat{K}$ à celle de Corwin-Greenleaf $n(\mathscr{O}_\pi, \mathscr{O}_\tau)$. La première partie est consacré aux extensions compactes de $\mathbb{R}^n$, soit $G = K \ltimes \mathbb{R}^n$ le produit semi-direct de groupe K et $\mathbb{R}^n$, où K est un sous groupe fermé de $O(n)$. Rappelons que la multiplication dans ce groupe est donnée par

$$(A, x)(B, y) := (AB, x + Ay), \;\; A, B \in K, x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Notons par $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathbb{R}^n$ l'algèbre de Lie de G. En appliquant encore une fois la théorie des petits groupes de Mackey, nous concluons que chaque représentation unitaire irréductible de dimension infinie de G est déterminée par une paire (μ, u), où

$$u = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ r \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

avec $r > 0$ et μ est le plus haut poids d'une représentation unitaire irréductible de $H := K_u$, le stabilisateur de u dans K. D'autre part, chaque représentation unitaire irréductible de dimension finie de G est obtenue par extension triviale d'une représentation unitaire irréductible de K. Soit χ_u le caractère unitaire de $\mathbb{R}^n$ donné par $\chi_u(v) = e^{iu^t v}$ pour tout $v \in \mathbb{R}^n$ et soit $\sigma_\nu \in \widehat{K_u}$ de plus haut poids ν, on définit $\sigma_\nu \otimes \chi_u \in \widehat{K_u \ltimes \mathbb{R}^n}$ par

$$(\sigma_\nu \otimes \chi_u)(A, a) = e^{iu^t a}\sigma(A), \quad A \in K_u,\ a \in \mathbb{R}^n$$

et on désigne par $\pi_{(\nu,u)}$ la représentation induite donnée par

$$\pi_{(\nu,u)} := Ind_{K_u \ltimes \mathbb{R}^n}^G(\sigma_\nu \otimes \chi_u)$$

c'est une représentation unitaire irréductible de G on l'associe l'orbite coadjointe admissible $\mathscr{O}^G_{(\nu,u)}$. Soit $\tau_\lambda \in \widehat{K}$ de plus haut poids λ, on note $\mathscr{O}^K_\lambda$ l'orbite coadjointe admissible de K associée à cette représentation. La multiplicité de τ_λ dans la restriction de $\pi_{(\sigma,\chi_u)}$ sur K est notée $m(\pi_{(\nu,u)}, \tau_\lambda)$. Nous avons prouvé les deux résultats suivants :

Théorème 0.0.1. *([2]) On a*

$$m(\pi_{(\nu,u)}, \tau_\lambda) \neq 0 \Leftrightarrow n(\mathscr{O}^G_{(\nu,u)}, \mathscr{O}^K_\lambda) \neq 0.$$

Théorème 0.0.2. *([2]) Soit* $(K, H) = (SO(n), SO(n-1))$ *avec* $n \geq 3$. *On suppose que* ν *et* λ *sont des poids fortement dominants de* H *et* K*, respectivement. Alors*

$$n(\mathscr{O}^G_{(\nu,u)}, \mathscr{O}^K_\lambda) \leq 1$$

et donc, $m(\pi_{(\nu,u)}, \tau_\lambda) = n(\mathscr{O}^G_{(\nu,u)}, \mathscr{O}^K_\lambda)$.

Dans le même contexte, nous avons aussi considéré le cas de produit semi-direct $G = K \ltimes \mathbb{H}_n$, où K est un sous groupe fermé de $U(n)$ et $\mathbb{H}_n = \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$ est le groupe de Heisenberg standard de dimension $2n+1$. Il est clair que G est un sous-groupe de $U(n) \ltimes \mathbb{H}_n$, qu'on appelle souvent le groupe des déplacement de Heisenberg. La méthode des orbites mise au point par Lipsman [16] dans le cadre des groupes de Lie à nilradical co-compact établit une bijection entre le dual unitaire de G_n et son espace des orbites co-adjointes admissibles.

Pour $z = (z_1, \ldots, z_n)$ et $w = (w_1 \ldots, w_n)$ deux vecteurs de $\mathbb{C}^n$, on désigne par $\langle\ ,\ \rangle$ le produit scalaire usuel sur $\mathbb{C}^n$ définit par

$$\langle z.w \rangle := \sum_{j=1}^{n} z_j \overline{w_j}.$$

Rappelons que la multiplication dans le groupe de Heisenberg est donnée par

$$(z,t)(z',t') = \Big(z + z', t + t' - \frac{1}{2}\operatorname{Im}\langle z, z'\rangle\Big), \;\; z, z' \in \mathbb{C}^n, \;\; t, t' \in \mathbb{R},$$

où $\operatorname{Im}(z)$ est la partie imaginaire de $z \in \mathbb{C}$. Le groupe K agit naturellement par automorphismes sur $\mathbb{H}_n$ comme suit

$$k \cdot (z,t) := (kz, t),$$

où $k \in K$ et $(z,t) \in \mathbb{H}_n$. La loi de groupe dans G est donnée par

$$(k,z,t) \cdot (k',z',t') = \Big(kk', z + kz', t + t' - \frac{1}{2}\operatorname{Im}\langle z, kz'\rangle\Big),$$

$k, k' \in K$ et $(z,t), (z',t') \in \mathbb{H}_n$. Notons $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \ltimes \mathfrak{h}_n$ l'algèbre de Lie de G, tout élément de ν dans $\mathfrak{g}^* = (\mathfrak{k} \ltimes \mathfrak{h}_n)^*$ peut être identifier par un élément $(U, u, x) \in \mathfrak{k} \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$ tel que

$$\langle (U,u,x), (B,w,s) \rangle = \operatorname{tr}(UB) + \operatorname{Im}\langle u, w\rangle + xs,$$

où $(B, w, s) \in \mathfrak{g}$. L'orbite coadjointe de G passant par le point $(U, 0, x)$ est dite générique et notée par $\mathscr{O}^G_{(U,0,x)}$. Nous avons prouvé le résultat suivant :

Théorème 0.0.3. *([3]) Si $(K, \mathbb{H}_n)$ est une paire de Gelfand et U est un élément central de $\mathfrak{k}$, alors*

$$n\big(\mathscr{O}^G_{(U,0,x)}, \mathscr{O}^K_X\big) \leq 1$$

pour toute orbite coadjointe $\mathscr{O}^K_X$ dans $\mathfrak{k}^*$.

Pour $K = U(n)$, $G = U(n) \ltimes \mathbb{H}_n$ est le groupe de déplacement de Heisenberg. La description de dual unitaire $\widehat{G}$ de G est basée aussi sur la théorie des petits groupes de

Mackey . Les représentations irréductibles de dimension infinie de $\mathbb{H}_n$ sont paramétrées par $\mathbb{R}^*$. Pour $\alpha \in \mathbb{R}^*$ on note σ_α une représentation irréductible de $\mathbb{H}_n$ et $\mathscr{F}_\alpha(n)$ l'espace de Fock déterminé par

$$\mathscr{F}_\alpha(n) = \left\{ f : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C} \text{ holomorphe} \mid \int_{\mathbb{C}^n} |f(w)|^2 e^{-\frac{|\alpha|}{2}|w|^2} dw < \infty \right\}$$

, la représentation σ_α peut être réaliser sur $\mathscr{F}_\alpha(n)$ par

$$\sigma_\alpha(z,t)f(w) = e^{i\alpha t - \frac{\alpha}{4}|z|^2 - \frac{\alpha}{2}\langle w,z\rangle} f(w+z)$$

pour $\alpha > 0$ et

$$\sigma_\alpha(z,t)f(\overline{w}) = e^{i\alpha t + \frac{\alpha}{4}|z|^2 + \frac{\alpha}{2}\langle \overline{w},\overline{z}\rangle} f(\overline{w}+\overline{z})$$

pour $\alpha < 0$ où $z \in \mathbb{C}^n$ et $t \in \mathbb{R}$. Pour $A \in U(n)$, on définie sur $\mathscr{F}_\alpha(n)$ l'opérateur d'entrelacement $W_\alpha(A)$ par

$$W_\alpha(A)f(w) = f(A^{-1}w).$$

Les poids dominants de $U(n)$ sont paramétrés par des séquences $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{Z}^n$ tels que $\lambda_1 \geq \lambda_2 ... \geq \lambda_n$. On note $(\tau_\lambda, \mathscr{H}_\lambda)$ une représentation unitaire irréductible de K de plus haut poids λ où $\mathscr{H}_\lambda$ est espace de Hilbert de τ_λ, donc d'après Mackey [11], pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^*$

$$\pi_{(\lambda,\alpha)}(A,z,t) := \tau_\lambda(A) \otimes \sigma_\alpha(z,t) \circ W_\alpha(A), \;\; (A,z,t) \in G,$$

est une représentation unitaire irréductible de G réaliser sur l'espace $\mathscr{H}_\lambda \otimes \mathscr{F}_\alpha(n)$, cette représentation $\pi_{(\lambda,\alpha)}$ est dite générique. Nous avons prouvé les résultats suivants :

Théorème 0.0.4. *([3]) On a*

$$m(\pi_{(\lambda,\alpha)}, \tau_\mu) \neq 0 \Rightarrow n(\mathscr{O}^G_{(\lambda,\alpha)}, \mathscr{O}^K_\mu) \neq 0.$$

Théorème 0.0.5. *([3]) Soit $n \geq 2$. On suppose que λ est un poids fortement dominant de $K = U(n)$. Alors pour tout poids dominant μ de K tel que $B_{\lambda,\mu}$ est inversible on a*

$$n(\mathscr{O}^G_{(\lambda,\alpha)}, \mathscr{O}^K_\mu) \leq 1.$$

La matrice $B_{\lambda,\mu}$ est définie dans le chapitre 3, section 4.3.

Théorème 0.0.6. *([3]) Soit $n \geq 2$. Si le poids dominant $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$ de K satisfait $\lambda_1 = ... = \lambda_n = a$ pour un certain $a \in \mathbb{Z}$, alors pour tout poids dominant μ de K avec $\mu \neq \lambda$ on a*

$$n(\mathscr{O}^G_{(\lambda,\alpha)}, \mathscr{O}^K_\mu) \leq 1;$$

De plus $n(\mathscr{O}^G_{(\lambda,\alpha)}, \mathscr{O}^K_\mu) \neq 0$ si et seulement si μ est de la forme

Cas 1: *si $\alpha > 0$ alors $\mu = (\underbrace{b, ..., b}_{p}, \underbrace{a, ..., a}_{q}) \in \mathbb{Z}^n$, $p + q = n$, $b \in \mathbb{Z}$ avec $b > a$.*

Cas 2: *si $\alpha < 0$ alors $\mu = (\underbrace{a, ..., a}_{p}, \underbrace{b, ..., b}_{q}) \in \mathbb{Z}^n$, $p + q = n$, $b \in \mathbb{Z}$ avec $a > b$.*

Par conséquent, si $\mu_{n-1} \neq a$ et $n(\mathscr{O}^G_{(\lambda,\alpha)}, \mathscr{O}^K_\mu) \neq 0$ alors $m(\pi_{(\lambda,\alpha)}, \tau_\mu) \neq n(\mathscr{O}^G_{(\lambda,\alpha)}, \mathscr{O}^K_\mu)$.

Une conséquence des théorèmes (0.0.4. et 0.0.5.) est que la fonction de multiplicité de Corwin-Greenleaf $n(\mathscr{O}^G_{(\lambda,\alpha)}, \mathscr{O}^K_\mu)$ coïncide avec $m(\pi_{(\lambda,\alpha)}, \tau_\mu)$, la multiplicité de τ_μ dans la restriction de $\pi_{(\lambda,\alpha)}\big|_{U(n)}$, pour μ un poids dominant particulier de $U(n)$ [3].

Dans le dernier chapitre on désire étudier le produit semi-direct $G = K \ltimes \mathbb{F}_{n,2}$ où K est un sous groupe fermé connexe de $O(n)$ et $\mathbb{F}_{n,2}$ est le groupe de Lie libre de pas 2. Soit $\mathfrak{f}_{n,2} = \mathbb{R}^n \oplus \bigwedge^2 \mathbb{R}^n$ l'algèbre de Lie de $\mathbb{F}_{n,2}$, on identifie le sous espace $\mathfrak{z} = \bigwedge^2 \mathbb{R}^n$ de $\mathfrak{f}_{n,2}$ avec l'espace vectoriel réel des matrices carrés $n \times n$ antisymétriques $\mathfrak{so}(n)$. Donc, pour $u, v \in \mathbb{R}^n$ on associe à $u \wedge v$ la matrice $M_{u,v}$ de $\mathfrak{so}(n)$ définie par $M_{u,v} = vu^t - uv^t$.
En termes de coordonnées exponentiels, la multiplication dans le groupe $\mathbb{F}_{n,2}$ est donnée par

$$(u, \xi) \cdot (v, \eta) = (u + v, \xi + \eta + \frac{1}{2} u \wedge v).$$

Le groupe K agit sur $\mathbb{F}_{n,2}$ par automorphisme comme suit

$$k \cdot (u, A) = (ku, kAk^t), \text{ où } k \in K, (u, A) \in \mathbb{F}_{n,2}.$$

On identifie $\mathbb{F}_{n,2}$ avec son algèbre de Lie $\mathfrak{f}_{n,2}$ par l'application exponentiel, donc la loi de groupe dans G est donnée par

$$(k_1, X_1) \cdot (k_2, X_2) = (k_1 k_2, X_1 (k_1 \cdot X_2)), \; k_1, k_2 \in K, \; X_1, X_2 \in \mathfrak{f}_{n,2}.$$

Plan de la thèse: Cette thèse est organisée comme suit:

1. Le premier chapitre a pour but principal de rappeler quelques généralités concernant les groupes de Lie localement compacts et compacts et leurs représentations, ainsi que la méthode des orbites de Lipsman pour les groupes de Lie à nilradical co-compact.

2. Les chapitres 2 et 3 sont deux articles basés sur les résultats que nous avons cités ci-dessus concernant respectivement les extensions compactes de $\mathbb{R}^n$ et de groupe de Heisenberg $\mathbb{H}_n$.

3. Le quatrième chapitre est un projet d'article consacré aussi à l'étude de la fonction de multiplicité de Corwin-Greenleaf pour les extensions compactes de groupe de Lie libre de pas 2 $\mathbb{F}_{n,2}$.

Chapter 1

Généralités

L'objectif essentiel de ce chapitre est d'introduire le matériel nécessaire pour la compréhension de cette thèse. Nous rappelons d'abord quelques généralités concernant les groupes de Lie localement compacts et compacts et leurs représentations. Nous revenons ensuite sur la structure des produits semi-directs compacts nilpotents ainsi que leur duaux unitaires, via la théorie de Mackey. Nous terminons ce chapitre en expliquant brièvement la méthode des orbites pour les groupes de Lie à nilradical co-compact.

1.1 Représentations des groupes localement compacts

Soient G un groupe localement compact, $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert séparable et $GL(\mathscr{H})$ le groupe des automorphismes sur $\mathscr{H}$.

1.1.1 Définitions

1. Une application π est dite **représentation** de G sur $\mathscr{H}$, si π est un morphisme de groupes topologiques de G dans $GL(\mathscr{H})$ et π est fortement continue, i.e, l'application

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathscr{H} \\ g & \longmapsto & \pi(g)\xi \end{array}$$

   est continue. On dit aussi que $\mathscr{H}$ est un G-module.

2. Soient π une représentation de G sur $\mathscr{H}$ et U un sous-espace vectoriel de $\mathscr{H}$. Alors U est dit **G-invariant** si $\pi(g)U \subseteq U$, pour tout $g \in G$.

3. Une représentation π de G sur $\mathscr{H}$ est dite **irréductible** si les seuls sous-espaces fermés G-invariants de $\mathscr{H}$ sont $\{0\}$ et $\mathscr{H}$.

4. Une représentation π de G sur $\mathscr{H}$ est dite **unitaire** si pour tout $g \in G$, $\pi(g)$ est un opérateur unitaire par rapport au produit scalaire fixé sur $\mathscr{H}$, i.e,

$$\langle \pi(g)u, \pi(g)v \rangle = \langle u, v \rangle \ \ \forall g \in G, \ \forall\, u, \, v \in \mathscr{H}.$$

5. Soient $(\pi, \mathscr{H})$ et (τ, W) deux représentations de G. On appelle **opérateur d'entrelacement** de π et τ une application linéaire bornée $A : \mathscr{H} \longrightarrow W$ tel que

$$A\pi(g) = \tau(g)A, \ \forall g \in G.$$

6. Soient $(\pi, \mathscr{H})$ et (τ, W) deux représentations de G. Alors π et τ sont dites **équivalentes** s'il existe un isomorphisme bicontinu A de $\mathscr{H}$ dans W tel que $A\pi(g) = \tau(g)A$ pour tout $g \in G$.

7. Soit π une représentation de G sur $\mathscr{H}$. Alors π est dite **de dimension finie** si la dimension de $\mathscr{H}$ est finie.

8. Soit π une représentation de G sur $\mathscr{H}$. On appelle **représentation duale** de π le morphisme de groupes π^* de G dans $\mathrm{GL}(\mathscr{H}^*)$ défini par

$$(\pi^*(g)\alpha)(v) = \alpha(\pi(g)^{-1}v),$$

pour $g \in G, v \in \mathscr{H}$ et $\alpha \in \ \mathscr{H}^*$, où $\mathscr{H}^*$ est le dual de $\mathscr{H}$.

9. Soient π et τ deux représentations de G respectivement sur $\mathscr{H}$ et W. On note par $\pi \oplus \tau$ (resp. $\pi \otimes \tau$), la représentation somme directe de π et τ (resp. produit tensoriel de π et τ) définies par:

$$\begin{aligned} (\pi \oplus \tau)(g)(v + w) &= \pi(g)v + \tau(g)w \\ (\pi \otimes \tau)(g)(v \otimes w) &= \pi(g)v \otimes \tau(g)w \end{aligned}$$

pour $g \in G$, $v \in \mathscr{H}$ et $w \in W$.

On note par $\widehat{G}$ l'ensemble des classes d'équivalence des représentations unitaires irréductibles de G. Dans la suite, nous confonderons souvent les classes d'équivalences dans $\widehat{G}$ avec leurs représentants.

1.1.2 Orbite co-adjointe

Soit G un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et soit $\mathfrak{g}^*$ le dual vectoriel de $\mathfrak{g}$.

Définitions 1.1.1. 1. L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ opère sur lui même par représentation **adjointe** ad:

$$ad_X(Y) = [X, Y], \ \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

2. Le groupe G opère sur $\mathfrak{g}$ par représentation **adjointe** Ad:

$$g.X := Ad(g)X, \ \forall g \in G, X \in \mathfrak{g}$$

et sur $\mathfrak{g}^*$ par représentation **co-adjointe** Ad^*:

$$\langle Ad^*(g)l, X\rangle = \langle g \cdot l, X\rangle = \langle l, Ad(g^{-1})X\rangle, \ g \in G, l \in \mathfrak{g}^*, X \in \mathfrak{g}.$$

3. Pour $l \in \mathfrak{g}^*$, on note par

$$\mathfrak{g}(l) := \{X \in \mathfrak{g}, \ \langle l, [X, \mathfrak{g}]\rangle = \{0\}\}$$

le stabilisateur de l dans $\mathfrak{g}$, et par

$$G_l := \{g \in G, \ g \cdot l = l\}$$

le stabilisateur de l dans G.

4. L'ensemble

$$G \cdot l := \{g \cdot l, \ g \in G\} =: \mathscr{O}(l) \subset \mathfrak{g}^*$$

est appelé la G-**orbite co-adjointe en** l et $\mathfrak{g}^*/G$ l'espace des **orbites co-adjointes** de G

1.1.3 Représentation induite

Soit H un sous-groupe fermé de G. Soient dg une mesure de Haar invariante à gauche sur G,i.e. une mesure de Radon invariante à gauche (une telle mesure existe pour tout groupe localement compact [21] et elle est unique à un scalaire multiplicatif près et strictement positive) et Δ_G la fonction module de G donnée par la relation suivante

$$\forall x \in G, \int_G f(gx^{-1})dg = \Delta_G(x) \int_G f(g)dg,$$

où f est un élément de $C_c(G/H)$, l'espace des fonctions continues sur G à support compact. De plus pour $x \in G$ la fonction module de G vérifiant

$$\Delta_G(x) = |det(Ad(x))|^{-1}.$$

Notons $\Delta_{H,G}$ le caractère positif de H donné par:

$$\Delta_{H,G}(h) = \frac{\Delta_H(h)}{\Delta_G(h)},\ h \in H.$$

Soit maintenant, $K(G,H)$ l'espace des fonctions $F : G \longrightarrow \mathbb{C}$ continues, à support compact modulo H et vérifiants:

$$F(gh) = \Delta_{H,G}(h)^{-1}F(g),\ \forall\, g \in G,\ h \in H.$$

Il est bien connu que G agit sur $K(G,H)$ par tarnslation à gauche. Il existe une unique forme linéaire positive G-invariante sur $K(G,H)$ (à un scalaire multiplicatif près). Cette forme linéaire, notée généralement $\nu_{G,H}$, et vérifie

$$\nu_{G,H}(F) = \oint_{G/H} F(g)d\nu_{G,H}(g),\ \forall\, F \in K(G,H).$$

Remarquons que si $\Delta_G = \Delta_H$ sur H, alors $\nu_{G,H}$ est une mesure G-invariante sur l'espace homogène G/H et $K(G,H) = C_c(G/H)$.

Soit ρ une représentation unitaire de H dans l'espace de Hilbert $\mathscr{H}_\rho$ et notons $K_\rho(G,H)$ le nouvel espace des fonctions F de G à valeurs dans $\mathscr{H}_\rho$ continues, à support compact modulo H et vérifiants

$$F(gh) = \Delta_{H,G}(h)^{\frac{1}{2}}\rho(h^{-1})F(g),\ pour\ tous\ g \in G,\ h \in H.$$

Pour $F \in K_\rho(G,H)$, l'application $g \longmapsto \|F(g)\|^2_{\mathscr{H}_\rho}$ appartient à $K(G,H)$. Ainsi nous pouvons définir une norme L^2 sur $K_\rho(G,H)$ comme suit:

$$\|F\|_2 := \Big(\oint_{G/H} \|F(g)\|_{\mathscr{H}_\rho} d\nu(g)\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Le groupe G agit sur le complété $L^2(G/H,\mathscr{H}_\rho)$ de $K_\rho(G,H)$ (pour la norme $\|.\|_2$) par la représentation régulière à gauche. Cette représentation est dite **représentation induite** de H dans G, notée généralement $Ind_H^G\rho$ et nous avons

$$Ind_H^G\rho(x)(\xi)(y) = \xi(x^{-1}y),\ \forall x, y \in G,\ \xi \in L^2(G/H,\mathscr{H}_\rho).$$

Cette réalisation des représentations induites est celle de Blattner [6], et est équivalente à celle de Mackey [18]. Cette méthode est fréquemment utilisée pour la construction des représentations unitaires à partir d'un sous-groupe. En particulier, pour les représentations unitaires dites monomiales qui sont les représentations induites par un caractère unitaire d'un sous-groupe fermé. Il est connu (voir [5, 7]) que les groupes exponentiels qu'on va introduire ultérieurement sont monomiales, i.e., toute représentation unitaire irréductible est équivalente à une représentation monomiale.

1.2 Groupes de Lie exponentiels

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie.

1.2.1 Définitions

1. Soit $\mathscr{D}^0(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$, $\mathscr{D}^1(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ et par réccurence

$$\mathscr{D}^k(\mathfrak{g}) = [\mathscr{D}^{k-1}(\mathfrak{g}), \mathscr{D}^{k-1}(\mathfrak{g})],\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

   L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est dite **résoluble** s'il existe $n \in \mathbb{N}$, tel que $\mathscr{D}^n(\mathfrak{g}) = \{0\}$.

2. Soit $\mathscr{C}^0(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$, $\mathscr{C}^1(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ et par réccurence

$$\mathscr{C}^k(\mathfrak{g}) = [\mathscr{C}^{k-1}(\mathfrak{g}), \mathfrak{g}],\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

   L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est dite **nilpotente** s'il existe $n \in \mathbb{N}$, tel que $\mathscr{C}^n(\mathfrak{g}) = \{0\}$. Notons qu'un groupe de Lie G est dit **résoluble** (resp. **nilpotent**) si son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est résoluble (resp. nilpotente).

3. Un groupe de Lie G résoluble, connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est dit **exponentiel** si l'application exponentielle

$$exp_G : \mathfrak{g} \longrightarrow G$$

   est un difféomorphisme.

Dans la suite de cette section, G désignera un groupe de Lie exponentiel connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Pour $l \in \mathfrak{g}^*$, notons B_l la forme bilinéaire antisymétrique définie par:

$$B_l(X, Y) = \langle l, [X, Y] \rangle, \ \ X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Posons $\mathfrak{g}(l) := \Big\{ X \in \mathfrak{g}, \ \langle l, [X, \mathfrak{g}] \rangle = \{0\} \Big\}$. Remarquons que $\mathfrak{g}(l)$ est l'algèbre de Lie du stabilisateur $G_l = \{g \in G, \ g.l = l\}$.

Définitions 1.2.1. 1) Un sous-espace $\mathfrak{p}_l$ de $\mathfrak{g}$ est appelé **polarisation** en l si:
(i) le sous-espace $\mathfrak{p}_l$ est isotrope pour B_l, i.e; $\langle l, [\mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_l] \rangle = 0$,
(ii) $dim(\mathfrak{p}_l) = \frac{1}{2}\Big(dim(\mathfrak{g}) + dim(\mathfrak{g}(l)) \Big)$.
2) Une polarisation $\mathfrak{p}_l$ en l satisfait la condition de Pukanszky ou est une polarisation de Pukanszky si

$$l + \mathfrak{p}_l^{\perp} = Ad^*(P_l)l = P_l.l,$$

où $P_l := exp(\mathfrak{p}_l)$ et $\mathfrak{p}_l^{\perp}$ est l'orthogonal de $\mathfrak{p}_l$ par rapport à B_l.
3) Le caractère unitaire χ_l de P_l associé à l est défini par:

$$\chi_l(expX) = e^{-i\langle l, X \rangle}, \ \forall X \in \mathfrak{p}_l.$$

Remarque 1.2.2. Si G est un groupe de Lie nilpotent, alors toute polarisation satisfait la condition de Pukanszky.

1.2.2 La méthode des orbites

Il est bien connu que le dual unitaire $\widehat{G}$ de G peut être paramétrisé via la méthode des orbites de Kirillov-Bernat-Vergne. Etant donnée une polarisation de Pukanszky $\mathfrak{p}$ en $l \in \mathfrak{g}^*$, définissons une représentation $\pi_{l,\mathfrak{p}}$ par:

$$\pi_{l,\mathfrak{p}} = Ind_{P_l}^{G} \chi_l.$$

Théorème 1.2.3. *La représentation $\pi_{l,\mathfrak{p}}$ de G est irréductible et sa classe d'équivalence $[\pi_{l,\mathfrak{p}}]$ dépend uniquement de l'orbite co-adjointe de l. Toute représentation irréductible de G est équivalente à une représentation induite $\pi_{l,\mathfrak{p}}$ d'un caractère χ_l d'une polarisation* *de Pukanszky. De plus, l'application suivante, appelée* ***l'application*** *(ou* ***la correspondance****)* ***de Kirillov****,*

$$\begin{array}{rcl}\mathscr{K} : \mathfrak{g}^*/G & \longrightarrow & \widehat{G} \\ \mathscr{O} & \longmapsto & [\pi_{l,\mathfrak{p}}]\end{array}$$

est un homéomorphisme.

Démonstration. Voir [19]. □

1.3 Groupes de Lie compacts et leurs représentations

Pour les preuves des résultats de cette section, nous renvoyons le lecteur au livre de A.W. Knapp [13]. Dans ce qui suit, G désignera un groupe de Lie compact connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.

Proposition 1.3.1. *Soit π une représentation de G sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel V de dimension finie. Alors il existe un produit scalaire hermitien $\langle\, ,\, \rangle$ sur V tel que, relativement à ce produit scalaire, π est unitaire.*

Corollaire 1.3.2. *Si π est une représentation de G sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel V de dimension finie, alors π se décompose en somme directe de sous-représentations irréductibles.*

Proposition 1.3.3. (***Lemme de Schur***) *Soient π et τ deux représentations irréductibles de dimension finie de G respectivement sur V et W. Si $L : \mathrm{V} \longrightarrow \mathrm{W}$ est une application linéaire vérifiant*

$$L\pi(g) = \tau(g)L,$$

pour tout $g \in \mathrm{G}$, alors L est un isomorphisme ou L est identiquement nulle.

Corollaire 1.3.4. *Soit π une représentation irréductible de dimension finie de G sur V. Si $L : \mathrm{V} \longrightarrow \mathrm{V}$ est une application linéaire vérifiant*

$$\pi(g)L = L\pi(g),$$

pour tout $g \in \mathrm{G}$, alors $L = \lambda\, id$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Remarque 1.3.5. *Toute représentation irréductible de dimension finie d'un groupe de Lie compact abélien est unidimensionnelle.*

Proposition 1.3.6. *Toute représentation unitaire irréductible de G est de dimension finie.*

Désignons par dg une mesure de Haar G-invariante.

Théorème 1.3.7. (***Relations d'orthogonalité de Schur***)
Soit π une représentation $\mathbb{C}$-linéaire de G dans un espace vectoriel V de dimension d_π. Alors pour tous $u, u^{'}, v, v^{'} \in V$,

$$\int_G \langle \pi(g)u, v\rangle \overline{\langle \pi(g)u^{'}, v^{'}\rangle} dg = \frac{1}{d_\pi}\langle u, u^{'}\rangle \overline{\langle v, v^{'}\rangle}.$$

Soit τ une autre représentation unitaire irréductible de G *sur W. Supposons que π et τ ne sont pas équivalentes. Alors*

$$\int_G \langle \pi(g)u, v\rangle \overline{\langle \tau(g)u^{'}, v^{'}\rangle}\, dg = 0$$

pour tous $u, v \in V$ et tous $u^{'}, v^{'} \in W$.

Notons par $L^2_\pi(G)$ le sous espace de $L^2(G)$ engendré par les coefficients de la représentation π, i.e, les fonctions de la forme

$$g \longmapsto \langle \pi(g)u, v\rangle,\ u, v \in V.$$

On en déduit que deux représentations irréductibles π et τ d'un groupe compact G sont équivalentes si et seulement si les espaces $L^2_\pi(G)$ et $L^2_\tau(G)$ sont égaux.

Théorème 1.3.8. (***Peter-Weyl***)
Soit π une représentation unitaire irréductible de G. Alors on a:

$$L^2(G) = \overline{\bigoplus_{\pi \in \widehat{G}} L^2_\pi(G)}.$$

Définition 1.3.9. Soient π et τ deux représentations de G de dimension finie. On suppose de plus que τ est irréductible. On appelle **multiplicité** de τ dans π le nombre des sous-représentations irréductibles de π qui sont équivalentes à τ. Cette multiplicité est parfois notée par $[\pi : \tau]$.

Théorème 1.3.10. *Soient π et τ deux représentations unitaires de G respectivement sur V et W. Supposons que τ est irréductible. Alors*

$$[\pi : \tau] = dim_{\mathbb{C}} Hom_G(V, W) = dim_{\mathbb{C}} Hom_G(W, V).$$

Définitions 1.3.11. Soit K un sous-groupe fermé connexe de G.

1. Si $\tau : G \to GL(V)$ est une représentation unitaire irréductible de G, on note par $Res_K^G \tau$ ou bien $\tau\mid_K$ la restriction de τ à K.

2. La description de la décomposition en irréductibles de $Res_K^G \tau$ pour toute représentation unitaire irréductible τ de G est appelée **règle de branchement** de G à K.

Proposition 1.3.12. *L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ admet un prouduit scalaire $\langle\, ,\, \rangle$ $Ad(G)$-invariant, i.e*

$$\langle Ad(g)u, Ad(g)v\rangle = \langle u, v\rangle$$

pour tout $g \in G$, et pour tous $u, v \in \mathfrak{g}$. Relativement à ce produit scalaire, les éléments de $Ad(G)$ sont des endomorphismes orthogonaux et les éléments de $ad(\mathfrak{g})$ sont des endomorphismes anti-symétriques.

Théorème 1.3.13. *L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est réductive.*

Proposition 1.3.14. *Si de plus $\mathfrak{g}$ est semi-simple, alors la forme de Killing de $\mathfrak{g}$ est définie négative.*

Proposition 1.3.15. *Soit $\mathfrak{g}'$ une algèbre de Lie complexe semi-simple, B est sa forme de Killing et $\mathfrak{h}'$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}'$, et $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}', \mathfrak{h}')$ l'ensemble des racines.*

1. *$B\big|_{\mathfrak{h}'\times\mathfrak{h}'}$ est non dégénéré, par conséquent à chaque racine α correspond H_α dans $\mathfrak{h}'$ avec $\alpha(H) = B(H, H_\alpha)$ pour tout $H \in \mathfrak{h}'$.*

2. *Δ engendre $\mathfrak{h}'^*$.*

Remarque 1.3.16. On peut transférer la restriction de la forme de Killing à $\mathfrak{h}'$ à une forme bilinéaire sur le dual $\mathfrak{h}'^*$ par la définition

$$\langle \varphi, \psi\rangle = B(H_\varphi, H_\psi) \text{ pour } \varphi,\ \psi\ \in \mathfrak{h}'^*.$$

Proposition 1.3.17. *Soit* $l = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{h}$

1. *Il existe* l *racines* $\alpha_1, ..., \alpha_l$ *tels que* $(H_{\alpha_1}, ..., H_{\alpha_l})$ *soit une base de* $\mathfrak{h}'$ *sur* $\mathbb{C}$.

2. *Soit* $(\omega_1, ..., \omega_l)$ *la base dual de* $\mathfrak{h}'^*$ *vérifiant* $\omega_i(H_{\alpha_j}) = \delta_{ij}$ *et* $V = \bigoplus_{j=1}^{l} \mathbb{R}\omega_j$, *la restriction la forme bilinéaire* $\langle ., . \rangle$ *sur* $V \times V$ *est un produit scalaire défini positive*

Définition 1.3.18. Soient $\varphi_1, ..., \varphi_l$ des générateurs de V, on définit la positivité comme suit : On dit que $\varphi > 0$ s'il existe un indice k tel que $\langle \varphi, \varphi_i \rangle = 0$ pour $1 \leq i \leq k-1$ et $\langle \varphi, \varphi_k \rangle > 0$. On dit que $\varphi > \psi$ si $\varphi - \psi$ est positive.

Définitions 1.3.19. 1. On dit qu'une racine α est réduite si $\frac{1}{2}\alpha$ n'est pas une racine.

2. On dit qu'une racine α est simple si $\alpha > 0$ et si α ne se décompose pas comme $\beta_1 + \beta_2$ avec β_1 et β_2 deux racines positives.

Remarque 1.3.20. Une racine simple est nécessairement réduite.

Proposition 1.3.21. *Si* $l = \dim V$, *alors ils existent* l *racines simples* $\alpha_1, ..., \alpha_l$ *linéairement indépendantes. Si* β *est une racine qui s'écrit comme* $\beta = x_1\alpha_1 + ... + x_l\alpha_l$, *alors tous les* x_j *sont des entiers de même signe (si* 0 *on dit que* β *est positive ou négative).*

Remarque 1.3.22. Toute racine positive α peut s'écrire $\alpha = \sum_{i=1}^{l} n_i\alpha_i$ avec les n_i sont des entiers ≥ 0.

Définitions 1.3.23. 1. On dit qu'un ensemble $\Pi = \{\alpha_1, ..., \alpha_l\}$ est un système simple s'il est constitué de l racines réduites indépendantes telle que toute expression d'un membre α de Δ en tant que $\sum_i c_i\alpha_i$ ait tout les c_i non nuls du même signe.

2. Soit Π un système simple, On définit Δ^+ par l'ensemble de toutes les racines de la forme $\sum_i c_i\alpha_i$ avec les $c_j \geq 0$.

Définitions 1.3.24. Soit φ une représentation sur l'espace vectoriel V, $\lambda \in \mathfrak{h}'$.

1. On définit le sous espace V_λ par

   $$V_\lambda = \{v \in V \mid (\varphi(H) - \lambda(H)1)^n v = 0 \text{ pour tout } H \in \mathfrak{h}' \text{ et un certain } n = n(H, V)\}.$$

   Si $V_\lambda \neq 0$, alors V_λ est appelé espace de poids généralisé et λ est un poids.

2. Les éléments de V_λ sont appelés vecteurs de poids généralisés.

3. L'espace de poids associé à λ est

$$V_\lambda = \{v \in V \mid \varphi(H)v = \lambda(H)v \text{ pour tout } H \in \mathfrak{h}'\}\,.$$

Proposition 1.3.25. *Soit $\mathfrak{g}'$ une algèbre de Lie complexe semi-simple, $\mathfrak{h}'$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}'$, $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}', \mathfrak{h}')$ l'ensemble des racines et $\mathfrak{h}'_{\mathfrak{o}} = \sum_{\alpha\in\Delta} \mathbb{R}H_\alpha$.*
Si φ est une représentation de $\mathfrak{g}'$ sur l'espace vectoriel complexe de dimension finie V, alors

1. *$\varphi(\mathfrak{h}')$ agit en diagonale sur V, de sorte que tout vecteur de poids généralisé est un vecteur de poids et V est la somme directe de tous les espaces de poids.*

2. *Les poids de V sont dans ${\mathfrak{h}'_{\mathfrak{o}}}^*$.*

Définition 1.3.26. Le plus grand poids dans l'ordre est appelé **le plus haut poids** de φ.

Définitions 1.3.27. Soit T un sous-groupe analytique de G.

1. T est dit **tore** de G s'il est isomorphe à $S^1 \times \ldots \times S^1$.

2. T est dit **tore maximal** dans G si pour tout tore S de G vérifiant $T \subset S \subset G$, on a que $T = S$.

Remarque 1.3.28. *Tout groupe de Lie compact, connexe et abélien est un tore.*

Proposition 1.3.29. *Les tores maximaux dans G sont exactement les sous-groupes analytiques associés aux sous-algèbres abéliennes maximales dans $\mathfrak{g}$.*

Exemples 1.3.30. *1. Si $G = U(n)$, alors*

$$T = \{diag(\exp(i\theta_1), \ldots, \exp(i\theta_n));\ \ \theta_j \in \mathbb{R}\ \forall\, 1 \leq j \leq n\}$$

est un tore maximal dans G.

2. Si $G = Sp(n)$, alors

$$T = \{diag(\exp(i\theta_1), \ldots, \exp(i\theta_n), \exp(-i\theta_1), \ldots \exp(-i\theta_n));\ \ \theta_j \in \mathbb{R}\ \ \forall\, 1 \leq j \leq n\}$$

est un tore maximal dans G.

Soit T un tore maximal dans G d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$, et soient $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ et $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ les complexifications respectives de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$. Alors $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. On note par $\Delta(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}^{\mathbb{C}})$ le système des racines de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ relativement à $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$. Rappelons que

$$\mathfrak{g} = Z(\mathfrak{g}) \oplus [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}],$$

où $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ est une algèbre de Lie semi-simple. Il s'ensuit que

$$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = Z(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}) \oplus [\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}].$$

De plus, on a

$$\mathfrak{h}^{\mathbb{C}} = Z(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}) \oplus \mathfrak{h}'^{\mathbb{C}}$$

avec $\mathfrak{h}'^{\mathbb{C}}$ une sous-algèbre de Cartan de $[\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}]$. En utilisant la décomposition radicielle de l'algèbre de Lie complexe semi-simple $[\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}]$ relativement à $\mathfrak{h}'^{\mathbb{C}}$, on obtient que

$$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{h}^{\mathbb{C}} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}^{\mathbb{C}})} \mathfrak{g}_{\alpha}^{\mathbb{C}}$$

où le système des racines $\Delta(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}^{\mathbb{C}})$ est donné par

$$\Delta(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}) = \{\alpha \in (\mathfrak{h}^{\mathbb{C}})^*;\ \alpha\,|_{\mathfrak{h}'^{\mathbb{C}}} \in \Delta([\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}], \mathfrak{h}'^{\mathbb{C}}) \text{ et } \alpha\,|_{Z(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})} \equiv 0\}$$

et

$$\mathfrak{g}_{\alpha}^{\mathbb{C}} = \{X \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}; [H, X] = \alpha(H)X \ \forall H \in \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}\}.$$

Proposition 1.3.31. *Si $\lambda \in (\mathfrak{h}^{\mathbb{C}})^*$, alors les conditions suivantes sont équivalentes.*

1. *Si $H \in \mathfrak{h}$ vérifie $\exp(H) = 1$, alors $\lambda(H) \in 2i\pi\mathbb{Z}$.*

2. *Il existe un caractère multiplicatif ξ_λ sur T tel que*

$$\xi_\lambda(\exp(H)) = \exp(\lambda(H))$$

pour tout $H \in \mathfrak{h}$.

Remarque 1.3.32. *Si $\alpha \in \Delta$, alors α vérifie 1) et 2).*

Définition 1.3.33. Une forme linéaire $\lambda \in (\mathfrak{h}^{\mathbb{C}})^*$ vérifiant 1) et 2) est appelée **forme analytiquement intégrale**.

Proposition 1.3.34. *Si $\lambda \in (\mathfrak{h}^{\mathbb{C}})^*$ est analytiquement intégrale, alors λ satisfait la relation suivante*

$$\frac{2\langle \lambda, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \in \mathbb{Z} \qquad (*)$$

pour tout $\alpha \in \Delta$.

Définitions 1.3.35. 1. Une forme linéaire $\lambda \in (\mathfrak{h}^{\mathbb{C}})^*$ vérifiant la condition $(*)$ est dite **forme algébriquement intégrale**.

2. Une forme linéaire $\lambda \in (\mathfrak{h}^{\mathbb{C}})^*$ est dite **dominante** si $\langle \lambda, \alpha \rangle \geq 0$ pour tout $\alpha \in \Delta^+$.

3. Une forme linéaire $\lambda \in (\mathfrak{h}^{\mathbb{C}})^*$ est dite **fortement dominante** si $\langle \lambda, \alpha \rangle > 0$ pour tout $\alpha \in \Delta^+$.

Théorème 1.3.36. *Il existe une correspondance bijective entre $\widehat{G}$ et l'ensemble des formes dominantes analytiquement intégrales sur $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$. Cette correspondance associe à chaque classe $[\pi] \in \widehat{G}$ son plus haut poids λ, cette classe sera notée $[\pi_\lambda]$.*

Exemples 1.3.37. *Soient $\mathfrak{g} = su(n)$ avec $n \geq 2$ et*

$$\mathfrak{h} = \Big\{ diag(h_1, \ldots, h_n);\ \ h_j \in i\mathbb{R}\ \forall 1 \leq j \leq n,\ \sum_{j=1}^{n} h_j = 0 \Big\}.$$

Rappelons que $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ est une sous-algèbre de Cartan de l'algèbre de Lie complexe semi-simple $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = sl(n, \mathbb{C})$. Les formes linéaires $e_k \in (\mathfrak{h}^{\mathbb{C}})^*$, $1 \leq k \leq n$, définis par

$$e_k(diag(h_1, \ldots, h_n)) = h_k$$

engendrent le dual $(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}})^*$.

1. Soit V l'espace vectoriel de tous les polynômes complexes de degré N qui sont homogènes en $z_1, \ldots, z_n, \overline{z_1}, \ldots, \overline{z_n}$. Soit

$$H = diag(it_1, \ldots, it_n) \ \ avec\ \ t_j \in \mathbb{R}\ \forall\, 1 \leq j \leq n,\ \ et\ \sum_{j=1}^{n} t_j = 0.$$

On introduit la représentation φ de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ sur V est définie comme suit

$$\begin{aligned}
\varphi(H)P(Z,\overline{Z}) &= \frac{d}{dr}\Big|_{r=0} P\Bigg(\exp(-rH)\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}, \exp(rH)\begin{pmatrix} \overline{z_1} \\ \vdots \\ \overline{z_n} \end{pmatrix}\Bigg) \\
&= \frac{d}{dr}\Big|_{r=0} P\Bigg(\begin{pmatrix} \exp(-irt_1)z_1 \\ \vdots \\ \exp(irt_n)z_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \exp(irt_1)\overline{z_1} \\ \vdots \\ \exp(irt_n)\overline{z_n} \end{pmatrix}\Bigg). \\
&= \sum_{j=1}^{n}(-it_j z_j)\frac{\partial P}{\partial z_j}(Z,\overline{Z}) + \sum_{j=1}^{n}(it_j\overline{z_j})\frac{\partial P}{\partial \overline{z_j}}(Z,\overline{Z}). \qquad (1)
\end{aligned}$$

Si P est un monôme de la forme

$$P(Z,\overline{Z}) = z_1^{k_1}\ldots z_n^{k_n}\overline{z_1^{l_1}}\ldots\overline{z_n^{l_n}}$$

avec $\sum_{j=1}^{n}(k_j+l_j) = N$, alors l'équation (1) implique que

$$\varphi(H)P = (\sum_{j=1}^{n}(l_j-k_j)it_j)P.$$

Donc le monôme P ci-dessus est un vecteur de poids associé au poids

$$\sum_{j=1}^{n}(l_j-k_j)e_j.$$

Ainsi le plus haut poids de cette représentation est Ne_1.

2. Soient $\{\xi_j\}_{j=1}^{n}$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$ et $V = \bigwedge^l \mathbb{C}^n$. On considère la représentation ψ de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ sur V donnée par

$$\begin{aligned}
\psi(H)(\xi_{j_1}\wedge\ldots\wedge\xi_{j_l}) &= \sum_{k=1}^{l}\xi_{j_1}\wedge\ldots\wedge H\xi_{j_k}\wedge\ldots\wedge\xi_{j_l} \\
&= \sum_{k=1}^{l}(it_{j_k})(\xi_{j_1}\wedge\ldots\wedge\xi_{j_l}),
\end{aligned}$$

où $1 \le j_1 < \ldots < j_l \le n$. Pour $1 \le l \le n$, il est clair que $\xi_{j_1}\wedge\ldots\wedge\xi_{j_l}$ est un vecteur de poids associé au poids

$$\sum_{k=1}^{l} e_{j_k}.$$

On en déduit que le plus haut poids de cette représentation est

$$\sum_{k=1}^{l} e_k.$$

1.4 Produit semi-direct compact nilpotent

Notons par N un groupe de Lie nilpotent d'algèbre de Lie $\mathfrak{n}$. Soit K un sous-groupe compact du groupe des automorphismes de N, noté $Aut(N)$. Nous pouvons ainsi définir le produit semi-direct $G := K \ltimes N$. La loi de groupe de G est donnée par

$$(k_1, x_1)(k_2, x_2) = (k_1 k_2, x_1 k_1.x_2),\ \ k_1, k_2 \in K,\ x_1, x_2 \in N.$$

Soit π une représentation unitaire irréductible de N. Pour $k \in K$, on définit la représentation π_k par:

$$\pi_k(x) = \pi(k.x).$$

Notons $K_\pi = \{k \in K,\ \pi_k \simeq \pi\}$ le stabilisateur de π sous l'action de K sur $\widehat{N}$.
Soit $l \in \mathfrak{n}^*$, le dual vectoriel de $\mathfrak{n}$. Pour $k \in K$, la forme linéaire l_k est définie sur $\mathfrak{n}$ par

$$l_k(X) = \langle l, k.X\rangle,\ X \in \mathfrak{n}.$$

Alors pour $k, k^{'} \in K$, on a

$$\pi_{kk'} = (\pi_k)_{k'}\ et\ l_{kk'} = (l_k)_{k'}.$$

Soit $\mathscr{O}_\pi$ l'orbite coadjointe associée à π dans $\mathfrak{n}^*$, ainsi on a

$$\mathscr{O}_{\pi_k} = (\mathscr{O}_\pi)_k.$$

En effet, pour tous $k \in K$ et $f \in \mathscr{S}(N)$, l'espace des fonctions de Schwartz définies sur N, on a

$$\begin{aligned}\pi_k(f) &= \int_N \pi_k(k.x) f(x) dx \\ &= \int_N \pi(x) f(k^{-1.x}) dx \\ &= \pi(f^k),\end{aligned}$$

où $f^k(x) := f(k^{-1}.x)$, $x \in G$. Donc

$$tr(\pi_k((f)) = \int_{\mathscr{O}_\pi} f^k \widehat{\circ\, exp}(q) d\mu_{\mathscr{O}_\pi}(q).$$

Or

$$\begin{aligned}
\widehat{f^k \circ exp}(q) &= \int_{\mathfrak{n}} f^k \circ exp(y) e^{-i\langle q,y\rangle} dy \\
&= \int_{\mathfrak{n}} f \circ exp(k^{-1}.y) e^{-i\langle q,y\rangle} dy \\
&= \int_{\mathfrak{n}} f^k \circ exp(y) e^{-i\langle q,k^{-1}.y\rangle} dy \\
&= \widehat{f \circ exp(}q_k),
\end{aligned}$$

d'où

$$tr(\pi_k((f)) = \int_{(\mathscr{O}_\pi)_k} \widehat{f^k \circ exp}(q) d\mu_{(\mathscr{O}_\pi)_k}(q).$$

Par suite K_π est le stabilisateur de $\mathscr{O}_\pi$.

Il existe une représentation de K_π, dite représentation **projective**, notée W_π, telle que pour tout $k \in K_\pi$, l'opérateur $W_\pi(k)$ entrelace π et π_k, i.e,

$$\pi_k(x) = W_\pi(k)\pi(x)W_\pi(k)^{-1},\ \forall x \in N.$$

De plus, pour tous $k_1, k_2 \in K_\pi$, les opérateurs $W_\pi(k_1k_2)$ et $W_\pi(k_1) \circ W_\pi(k_2)$ entrelacent π et $\pi_{k_1k_2}$, $\forall k_1, k_2 \in K_\pi$. Ainsi l'application suivante

$$\sigma : K_\pi \times K_\pi \longrightarrow \mathbb{S}^1 := \{z \in \mathbb{C};\ |z| = 1\}$$

vérifie

$$W_\pi(k_1k_2) = \sigma(k_1, k_2)W_\pi(k_1)W_\pi(k_2).$$

La représentation W_π est dite **σ-représentation** de K_π.

Avec les même notations ci-dessus, nous avons le résultat suivant:

Théorème 1.4.1. *Pour $\pi \in \widehat{N}$, supposons que W_π est une σ-représentation de K_π. Soit T une $\overline{\sigma}-$représentation de K_π. Alors $\rho := T \otimes \pi W_\pi$ est une représentation irréductible de $K_\pi \ltimes N$. Soit $\widetilde{\rho} = Ind_{K_\pi \ltimes N}^{K \ltimes N}(\rho)$ la représentation induite de $K \ltimes N$ induite de ρ sur l'espace $L^2(K \ltimes N/K_\pi \ltimes N, \rho)$. Alors $\widetilde{\rho} \in \widehat{K \ltimes N}$, et toute représentation irréductible de $K \ltimes N$ est obtenue de cette manière. De plus*

$$Ind_{K_\pi \ltimes N}^{K \ltimes N}(\rho)\Big|_K \simeq Ind_{K_\pi}^{K}(\rho|_{K_\pi}) = Ind_{K_\pi}^{K}(T \otimes W_\pi),$$

et

$$L^2(K \ltimes N/K_\pi \ltimes N, \rho) \cong L^2(K/K_\pi, T \otimes W_\pi).$$

Démonstration. Voir [19]. □

1.5 Méthode des orbites pour les groupes de Lie à nilradical co-compact

Définitions 1.5.1. 1) Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie. La somme de tous les idéaux nilpotents de $\mathfrak{g}$ est un idéal nilpotent de $\mathfrak{g}$, appelé le nilradical de $\mathfrak{g}$.

2) Soit G un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Le nilradical de G est le sous-groupe normal nilpotent connexe maximal de G. Son algèbre de Lie est le nilradical de $\mathfrak{g}$.

Exemple 1.5.2. Le nilradical du groupe $SO(n) \ltimes \mathbb{R}^n$ est le sous-groupe des translations $T \cong \mathbb{R}^n$.

Soit G un groupe de Lie dont le nilradical N est simplement connexe et co-compact. D'après un théorème de structure bien connu (voir [16]), G est un produit semi-direct $K \ltimes N$, où K est un sous-groupe compact du groupe des automorphismes de N. Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{n}$ l'algèbre de Lie de G, où $\mathfrak{k}$ et $\mathfrak{n}$ désignent respectivement les algèbres de Lie de K et N.

Définitions 1.5.3. 1) Une forme linéaire l sur $\mathfrak{g}$ est dite **admissible** s'il existe un caractère unitaire χ_l de la composante neutre G_l^0 du stabilisateur G_l de l dans G tel que

$$d\chi_l = il_{|_{\mathfrak{g}(l)}}.$$

2) Une forme linéaire l sur $\mathfrak{g}$ est dite **alignée** si elle vérifie

$$G_l = K_l \ltimes N_l \text{ et } G_\theta = K_\theta \ltimes N_\theta,$$

où $\theta = l_{|_{\mathfrak{n}}}$.

Soit l une forme linéaire sur $\mathfrak{g}$. La restriction ξ de l sur $\mathfrak{k}(\theta)$ est admissible et indépendante de l'alignement de l. De plus, on a $(K_\theta)_\xi = K_l$.

Notons

$$\Gamma(\chi_\xi) = \{f : K_\theta^0/(K_\theta^0)_\xi \to E_{\chi_\xi},\ \textit{holomorphe telle que } p \circ f = 1\},$$

où

$$E_{\chi_\xi} = \{[k, z] = [kk_\xi, \chi_\xi(k_\xi)^{-1} z];\ k \in K_\theta^0, k_\xi \in (K_\theta^0)_\xi, z \in \mathbb{C}\},$$

et p est la projection canonique, i.e.

$$p([k,z] = k.(K_\theta^0)_\xi).$$

par le théorème de Borel-Weil (voir [13]), la représentation ν_ξ définie par

$$\nu_\xi(k)f(x) = k.f(k^{-1}.x)$$

est une représentation unitaire irréductible de K_θ^0 sur $\Gamma(\chi_\xi)$.
D'après Lipsman ([16]), il existe $\tau \in \widehat{(K_\theta)_\xi}$ telle que $\tau|_{K_\pi}^0$ est un multiple du caractère χ_ξ.
Soit V_τ l'espace vectoriel complexe de τ. Notons par E_τ le fibré vectoriel holomorphe

$$E_\tau = \{[k,v] = [kk_\xi, \chi_\xi(k_\xi)^{-1}z];\ k \in K_\theta^0, k_\xi \in (K_\theta^0)_\xi, v \in V_\tau\}.$$

Remarquons que K_θ agit par taranslation à gauche sur E_τ. Soit $\Gamma(\tau)$ l'espace des sections holomorphes

$$\Gamma(\tau) = \{f : K_\theta/(K_\theta)_\xi \to E_\tau,\ \text{holomorphe telle que}\ p \circ f = 1\},$$

avec

$$p([k,v]) = k.(K_\theta)_\xi.$$

L'application $\sigma_{\xi,\tau}$ définie par

$$\sigma_{\xi,\tau}(k)f(x) = k.f(k^{-1}.x)$$

est une représentation irréductible de K_θ sur $\Gamma(\tau)$ et toute les représentations irréductibles de K_θ sont obtenues de cette manière.
Lipsman a prouvé dans ([16]) qu'il existe une bijection entre l'ensemble des représentations unitaires irréductibles de dimension finie τ de $K_l = (K_\theta)_\xi$ telles que $\tau|_{K_l^0}$ est un multiple de χ_ξ, et l'ensemble des représentations unitaires irréductibles de dimension finie $\sigma_{\xi,\tau}$ de K_θ dont la restriction sur K_θ^0 est un multiple de

$$\sum_{K_\theta^0/(K_\theta^0)_\xi}^{\oplus} k.\nu_\xi.$$

Notons $\gamma \in \widehat{N}$ une induite de θ et $\widetilde{\gamma}$ l'extension canonique de γ sur $K_\theta \ltimes N$. Alors la représentation

$$\pi_{l,\tau} := Ind_{K_\theta \ltimes N}^G(\sigma_{\xi,\tau} \otimes \widetilde{\gamma})$$

est une représentation unitaire irréductible de G et toute les représentations unitaires irréductibles de G sont obtenues de cette manière.

Bibliography

[1] L. Auslander, B. Kostant, Quantization and representations of solvable Lie groups, *Bull. Amer. Math. Soc.* **73** (1967), 692-695.

[2] M. Ben Halima, A. Messaoud, Corwin-Grenleaf multiplicity function for compact extensions of $\mathbb{R}^n$, *Int. J. Math.*, **26** (2015), 146-158.

[3] M. Ben Halima, A. Messaoud, Corwin-Grenleaf multiplicity function for compact extensions of the Heisenberg group, (soumis).

[4] P. Bernat, Sur les représentations unitaires des groups de Lie résolubles, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (3)*, **82** (1965), 37-99.

[5] P. Bernat, N. Conze, M. Duflo, M. Lévy-Nahas, M. Raïs, P. Renouard, M. Vergne, Représentations des groupes de Lie résolubles, Dunod, Paris, 1972, Monographies de la Société Mathématique de France, No. 4.

[6] R. J. Blattner, On induced representations, *Amer. J. Math.* **83** (1961), 79-98.

[7] N. Bourbaki, Intégration, Hermann, Paris, 1967.

[8] L. Corwin, F. Greenleaf, Spectrum and multiplicities for unitary representations in nilpotent Lie groups, *Pacific J. Math.* **135** (1988), 233-267.

[9] J. Dixmier, *C*-algebras,*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1977, Translated from the French by Francis Jellett, North-Holland Mathematical Library, Vol. 15.

[10] H. Fujiwara, Représentations monomiales des groupes de Lie résolubles exponentiels, *The Orbit Method in Representation Theory*, Prog. Math., Vol. 82 Birkhauser, 1990, pp 61-84.

[11] F.P. Greenleaf, Harmonic analysis on nilpotent homogeneous spaces, *Contemp. Math.*, **177** (1994), 1-26.

[12] A. A. Kirillov, *Lectures on the orbit method*, Graduate Studies in Mathematics, Vol.64 Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.

[13] A.W. Knapp, *Lie Groups Beyond an Introduction - Second Edition*, Birkhäuser, Boston, 2002.

[14] T. Kobayashi and B. Orsted, Conformal geometry and branching laws for unitary representations attached to minimal nilpotent orbits, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **326** (1998), 925-930.

[15] T. Kobayashi and S. Nasrin, Multiplicity one theorem in the orbit method, in: *Lie groups and symmetric spaces*, 161-169, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 210, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.

[16] R.L. Lipsman, Orbit theory and harmonic analysis on Lie groups with co-compact nilradical, *J. Math. pures et appl.*, **59** (1980), 337-374.

[17] R.L. Lipsman, Attributes and applications of the Corwin-Greenleaf multiplicity function, *Contemp. Math.*, **177** (1994), 27-46.

[18] G.W. Mackey, Induced representations of locally compact groups. I, *Ann. of Math. (2)*, **55** (1952), 101-139.

[19] G.W. Mackey, *The theory of unitary group representations*, Chicago University Press, 1976.

[20] G.W. Mackey, *Unitary group representations in physics, probability and number theory*, Benjamin-Cummings, 1978.

[21] A. Weil, *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications*, Hermann, Paris, 1965, Monographies de la Société Mathématique de France, No. 4.

Chapter 2

Corwin-Greenleaf multiplicity function for compact extensions of $\mathbb{R}^n$

Abstract

Let $G = K \ltimes \mathbb{R}^n$, where K is a compact connected subgroup of $O(n)$ acting on $\mathbb{R}^n$ by rotations. Let $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{k}$ be the respective Lie algebras of G and K, and $pr : \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{k}^*$ the natural projection. For admissible coadjoint orbits $\mathscr{O}^G \subset \mathfrak{g}^*$ and $\mathscr{O}^K \subset \mathfrak{k}^*$, we denote by $n(\mathscr{O}^G, \mathscr{O}^K)$ the number of K-orbits in $\mathscr{O}^G \cap pr^{-1}(\mathscr{O}^K)$, which is called the Corwin-Greenleaf multiplicity function. Let $\pi \in \widehat{G}$ and $\tau \in \widehat{K}$ be the unitary representations corresponding, respectively, to $\mathscr{O}^G$ and $\mathscr{O}^K$ by the orbit method. In this paper, we investigate the relationship between $n(\mathscr{O}^G, \mathscr{O}^K)$ and the multiplicity $m(\pi, \tau)$ of τ in the restriction of π to K. If π is infinite-dimensional and the associated little group is connected, we show that $n(\mathscr{O}^G, \mathscr{O}^K) \neq 0$ if and only if $m(\pi, \tau) \neq 0$. Furthermore, for $K = SO(n)$, $n \geq 3$, we give a sufficient condition on the representations π and τ in order that $n(\mathscr{O}^G, \mathscr{O}^K) = m(\pi, \tau)$.

2.1 Introduction

Let G be a connected and simply connected nilpotent Lie group with Lie algebra $\mathfrak{g}$. It was pointed out by Kirillov that the unitary dual $\widehat{G}$ of G is parametrized by $\mathfrak{g}^*/G$, the set of coadjoint orbits. The bijection

$$\widehat{G} \simeq \mathfrak{g}^*/G$$

is called the Kirillov correspondence (see [6]). The important feature of this correspondence is the functoriality relatively to inclusion $K \subset G$ of closed connected subgroups. It means that if we start with unitary representations $\pi \in \widehat{G}$ and $\tau \in \widehat{K}$ and if we denote by $\mathscr{O}^G \subset \mathfrak{g}^*$ and $\mathscr{O}^K \subset \mathfrak{k}^*$ their corresponding coadjoint orbits, then the multiplicity $m(\pi, \tau)$ of τ in the direct integral decomposition of the restriction $\pi\big|_K$ can be computed in terms of the space $\mathscr{O}^G \cap p^{-1}(\mathscr{O}^K)/K$, where $p : \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{k}^*$ denotes the natural projection. More precisely, Corwin and Greenleaf proved that the multiplicity $m(\pi, \tau)$ coincides almost everywhere with the "mod K" intersection number $n(\mathscr{O}^G, \mathscr{O}^K)$ defined as follows:

$$n(\mathscr{O}^G, \mathscr{O}^K) := \sharp\Big[\big(\mathscr{O}^G \cap p^{-1}(\mathscr{O}^K)\big)/K\Big]$$

(see [2]). The function

$$n : \mathfrak{g}^*/G \times \mathfrak{k}^*/K \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}, \quad (\mathscr{O}^G, \mathscr{O}^K) \longmapsto n(\mathscr{O}^G, \mathscr{O}^K)$$

is known as the Corwin-Greenleaf multiplicity function.

Suppose now that $G = K \ltimes \mathbb{R}^n$, where K stands for a compact connected subgroup of the automorphisms group $Aut(\mathbb{R}^n)$. As usual, $\mathbb{R}^n$ can be equipped with an Euclidean scalar product which embeds the compact group K as a subgroup of orthogonal transformations. In the sequel, we shall simply assume that K is a closed connected subgroup of $O(n)$. The multiplication law in G is given by

$$(A, a) \cdot (B, b) = (AB, a + Ab)$$

for $(A, a), (B, b) \in G$. As shown by Lipsman in [10], each irreducible unitary representation of G can be constructed by holomorphic induction from an admissible linear functional of $\mathfrak{g}$. Furthermore, two irreducible representations in $\widehat{G}$ are equivalent if and only if their respective linear functionals are in the same coadjoint orbit. Thus we can identify the dual space $\widehat{G}$ with the lattice of admissible coadjoint orbits.

Let $\pi \in \widehat{G}$ and $\tau \in \widehat{K}$ correspond to admissible coadjoint orbits $\mathscr{O}^G$ and $\mathscr{O}^K$ respectively, and let $p : \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{k}^*$ be the restriction map. In the spirit of the orbit method for nilpotent Lie groups, one expects that the multiplicity of τ in $\pi\big|_K$ is given by $\sharp\Big[\big(\mathscr{O}^G \cap p^{-1}(\mathscr{O}^K)\big)/K\Big]$. Unlike the nilpotent case, this fact is not in general valid for the semidirect product $G = K \ltimes \mathbb{R}^n$ (see Theorem 3 below). Assuming that $\pi\big|_K$ is multiplicity free as a representation of K, one can ask the following question:

Question. Is the intersection $\mathscr{O}^G \cap p^{-1}(\mathscr{O}^K)$ a single K-orbit, provided it is not empty ?

Our interest for this question is motivated by recent multiplicity-free results in the orbit method obtained by Kobayashi and Nasrin [9],[14] (see also [11]).

By Mackey's little group theory [12,13], the set $\widehat{G}$ is given by the following procedure. Let u be a non-zero vector in $\mathbb{R}^n$. We denote by χ_u the unitary character of $\mathbb{R}^n$ given by $\chi_u(v) = e^{iu^tv}$ for all $v \in \mathbb{R}^n$. The stabilizer of u in K, denoted by K_u, is called the little group at u. For any $\sigma \in \widehat{K_u}$, define $\sigma \otimes \chi_u \in \widehat{K_u \ltimes \mathbb{R}^n}$ by

$$(\sigma \otimes \chi_u)(A, a) = e^{iu^ta}\sigma(A)$$

for $A \in K_u$ and $a \in \mathbb{R}^n$. The induced representation

$$\pi_{(\sigma,\chi_u)} := Ind^G_{K_u \ltimes \mathbb{R}^n}(\sigma \otimes \chi_u)$$

is irreducible and every infinite-dimensional irreducible unitary representation of G is equivalent to some $\pi_{(\sigma,\chi_u)}$. Apart from these infinite-dimensional unitary representations $\pi_{(\sigma,\chi_u)}$, the finite-dimensional unitary representations of K also yield finite-dimensional unitary representations of G.

Let us fix a non-zero vector u in $\mathbb{R}^n$ and assume that the group $H := K_u$ is connected. Let σ_ν be an irreducible representation of H with highest weight ν. For simplicity, write $\pi_{(\nu,u)}$ instead of $\pi_{(\sigma_\nu,\chi_u)}$ and denote by $\mathscr{O}^G_{(\nu,u)}$ the corresponding admissible coadjoint orbit of G. Given an irreducible representation $\tau_\lambda \in \widehat{K}$ with highest weight λ, we denote by $\mathscr{O}^K_\lambda$ the associated admissible coadjoint orbit of K. As above, the multiplicity of τ_λ in the restriction of $\pi_{(\nu,u)}$ to K is denoted by $m(\pi_{(\nu,u)}, \tau_\lambda)$. The main results of the present work are

Theorem A. We have

$$m(\pi_{(\nu,u)}, \tau_\lambda) \neq 0 \Leftrightarrow n(\mathscr{O}^G_{(\nu,u)}, \mathscr{O}^K_\lambda) \neq 0.$$

Theorem B. Let $(K, H) = (SO(n), SO(n-1))$ with $n \geq 3$. Assume that ν and λ are strongly dominant weights of H and K, respectively. Then

$$n(\mathscr{O}^G_{(\nu,u)}, \mathscr{O}^K_\lambda) \leq 1$$

and hence, $m(\pi_{(\nu,u)}, \tau_\lambda) = n(\mathscr{O}^G_{(\nu,u)}, \mathscr{O}^K_\lambda)$.

2.2 Coadjoint orbits of $K \ltimes \mathbb{R}^n$

Let K be a closed connected subgroup of $O(n)$ with Lie algebra $\mathfrak{k}$. The group K acts naturally on $\mathbb{R}^n$ by rotations, and then one can form the semidirect product $G = K \ltimes \mathbb{R}^n$. As set $G = K \times \mathbb{R}^n$ and the group multiplication is given by

$$(A, a) \cdot (A', a') = (AA', a + Aa')$$

for $(A, a), (A', a') \in G$. The Lie algebra of this group is $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathbb{R}^n$ (as vector space) with Lie bracket

$$[(U, u), (U', u')] = \big(UU' - U'U, Uu' - U'u\big)$$

for $(U, u), (U', u') \in \mathfrak{g}$. The vector dual space $\mathfrak{g}^*$ of $\mathfrak{g}$ can be identified with $\mathfrak{k}^* \oplus (\mathbb{R}^n)^*$. The adjoint action of G on $\mathfrak{g}$ is expressed by the relation

$$Ad_G((A, a))(U, u) = (AUA^t, Au - AUA^t a),$$

where $(A, a) \in G$ and $(U, u) \in \mathfrak{g}$. Each linear functional F on $\mathfrak{g}$ can be identified with an element $(U, u) \in \mathfrak{g}$ via the natural scalar product

$$\langle (U, u), (V, v) \rangle := \frac{1}{2} tr(UV^t) + u^t v,$$

where $(V, v) \in \mathfrak{g}$. It follows that for $(A, a) \in G$, $(U, u) \in \mathfrak{g}^*$ and $(V, v) \in \mathfrak{g}$

$$\begin{aligned} \langle Ad^*_G((A, a))(U, u), (V, v) \rangle &= \langle (U, u), Ad_G((A, a)^{-1})(V, v) \rangle \\ &= \frac{1}{2} tr((AUA^t)V^t) + (Au)^t(Va) + (Au)^t v. \end{aligned}$$

Given two vectors a and b in $\mathbb{R}^n$, there exists a unique matrix $W_{a,b}$ in $\mathfrak{k}$ such that

$$\frac{1}{2} tr(W_{a,b} V^t) = b^t V a$$

for all $V \in \mathfrak{k}$. Observe that

$$W_{Aa, Ab} = A W_{a,b} A^t$$

for all $A \in K$. Now, we can write

$$\langle Ad^*_G((A, a))(U, u), (V, v) \rangle = \langle (AUA^t + W_{a,Au}, Au), (V, v) \rangle,$$

i.e.,

$$Ad^*_G((A, a))(U, u) = (AUA^t + W_{a,Au}, Au).$$

Therefore, the coadjoint orbit $\mathscr{O}^G_{(U,u)}$ of G through (U,u) is given by

$$\begin{aligned}\mathscr{O}^G_{(U,u)} &= \{(AUA^t + W_{a,Au}, Au); A \in K, a \in \mathbb{R}^n\} \\ &= \{(A(U+W)A^t, Au); A \in K, W \in \mathscr{W}_u\},\end{aligned}$$

where $\mathscr{W}_u := \{W_{a,u}; a \in \mathbb{R}^n\}$.

2.3 Irreducible unitary representations of $K \ltimes \mathbb{R}^n$

We keep the notation of Section 2. Let u be a non-zero vector in $\mathbb{R}^n$. We denote by χ_u the unitary character of the vector Lie group $\mathbb{R}^n$ given by $\chi_u(v) = e^{iu^t v}$ for all $v \in \mathbb{R}^n$. We define the little group K_u at u to be the stabilizer of u in K. Let σ be an irreducible unitary representation of K_u on some (finite-dimensional!) Hilbert space $\mathscr{H}$. The map

$$\sigma \otimes \chi_u : (A,a) \longmapsto e^{iu^t a}\sigma(A)$$

is a representation of the semidirect product $K_u \ltimes \mathbb{R}^n$. Let $L^2(K,\mathscr{H})$ be the completion of the vector space of all continuous maps $\eta : K \longrightarrow \mathscr{H}$ with respect to the norm

$$\|\eta\| = \Big(\int_K \|\eta(A)\|^2 dA\Big)^{\frac{1}{2}},$$

where dA is a normalized Haar measure on K. Define $L^2(K,\mathscr{H})^\sigma$ to be the subspace of $L^2(K,\mathscr{H})$ consisting of the maps ξ which satisfy the covariance condition

$$\xi(AB) = \sigma(B^t)\xi(A)$$

for $B \in K_u$ and $A \in K$. The induced representation

$$\pi_{(\sigma,\chi_u)} := Ind^G_{K_u \ltimes \mathbb{R}^n}(\sigma \otimes \chi_u)$$

is realized on $L^2(K,\mathscr{H})^\sigma$ by

$$\pi_{(\sigma,\chi_u)}((A,a))\xi(B) = e^{i(Bu)^t a}\xi(A^t B),$$

where $(A,a) \in G$, $\xi \in L^2(K,\mathscr{H})^\sigma$ and $B \in K$. Mackey's theory tells us that the representation $\pi_{(\sigma,\chi_u)}$ is irreducible and that every infinite-dimensional irreducible unitary representation of G is equivalent to some $\pi_{(\sigma,\chi_u)}$. Furthermore, two representations $\pi_{(\sigma,\chi_u)}$ and $\pi_{(\sigma',\chi_{u'})}$ are equivalent if and only if u and u' lie in the same K-orbit and the representations σ and σ' are equivalent under the identification of the conjugate subgroups K_u and $K_{u'}$. In this way, we obtain all irreducible representations of G which are not trivial on the normal subgroup $\mathbb{R}^n$. On the other hand, every irreducible unitary representation τ of K extends trivially to an irreducible representation, also denoted by τ, of G by $\tau(A,a) := \tau(A)$ for $A \in K$ and $a \in \mathbb{R}^n$.

For $\Omega \in \mathbb{R}^n/K$, let u be any element of Ω and define $\widehat{G}(\Omega)$ to be the set of all induced representations $\pi_{(\sigma,\chi_u)}$ with $\sigma \in \widehat{K_u}$. Then $\widehat{G}$ is the disjoint union of the $\widehat{G}(\Omega)$, Ω in $\mathbb{R}^n/K$. Up to identification, we can write

$$\widehat{G} = \widehat{K} \bigcup \Big(\bigcup_{\Omega \in \Lambda} \widehat{G}(\Omega) \Big)$$

where Λ is the set of non-trivial K-orbits in $\mathbb{R}^n$. Finally, notice that $\bigcup_{\Omega\in\Lambda} \widehat{G}(\Omega)$ has full Plancherel measure in $\widehat{G}$ (see [7]).

2.4 Admissible coadjoint orbits of $K \ltimes \mathbb{R}^n$

Let us fix a non-zero vector u in $\mathbb{R}^n$ and assume that the little group K_u is connected. Take T_{K_u} and T_K to be maximal tori respectively in K_u and K such that $T_{K_u} \subset T_K$. Consider an irreducible unitary representation $\sigma_\nu : K_u \longrightarrow U(\mathscr{H}_\nu)$ with highest weight ν. Then

$$\pi_{(\sigma_\nu,\chi_u)} = Ind_{K_u \ltimes \mathbb{R}^n}^{G} (\sigma_\nu \otimes \chi_u)$$

is an irreducible unitary representation of G. To simplify notation, we shall write $\pi_{(\nu,u)}$ instead of $\pi_{(\sigma_\nu,\chi_u)}$. We fix an irreducible unitary representation $\tau_\nu : K \longrightarrow U(\mathscr{H}_\nu^{'})$ with highest weight ν and we realize the representation space $\mathscr{H}_\nu$ of σ_ν as the smallest K_u-invariant subspace of $\mathscr{H}_\nu^{'}$ that contains the ν-weight space of $\mathscr{H}_\nu^{'}$.

Choose a normalized highest weight vector w_ν in $\mathscr{H}_\nu^{'}$ and define a vector $U_\nu \in \mathfrak{k}$ by the relation

$$\frac{1}{2} tr(U_\nu U^t) = -i \langle d\tau_\nu(U) w_\nu, w_\nu \rangle$$

for all $U \in \mathfrak{k}$. If we set $\ell_{\nu,u} := (U_\nu, u)$, then we can see that the stabilizer $G(\ell_{\nu,u})$ of $\ell_{\nu,u}$ in G is equal to $G(\ell_{\nu,u}) = K(\ell_{\nu,u}) \ltimes \mathbb{R}^n(\ell_{\nu,u})$. Hence, $\ell_{\nu,u}$ is aligned in the sense of Lipsman (see [10]). A linear functional $\ell \in \mathfrak{g}^*$ is called admissible, if there exists a unitary character χ of the connected component of $G(\ell)$, such that $d\chi = i\ell|_{\mathfrak{g}}$. Notice that the linear functional $\ell_{\nu,u}$ is admissible and so, according to Lipsman [10], the representation of G obtained by holomorphic induction from $\ell_{\nu,u}$ is equivalent to the representation $\pi_{(\nu,u)}$. Now, for an irreducible unitary representation τ_λ of K with highest weight λ, we take the linear functional $\ell_\lambda := (U_\lambda, 0)$ of $\mathfrak{g}^*$ which is clearly aligned and admissible. Hence, the representation of G obtained by holomorphic induction from the linear functional ℓ_λ is equivalent to the representation τ_λ.

We denote by $\mathscr{O}_\lambda^G$ the coadjoint orbit of ℓ_λ and by $\mathscr{O}_{(\nu,u)}^G$ the coadjoint orbit of $\ell_{\nu,u}$. Let $\mathfrak{g}^\ddagger \subset \mathfrak{g}^*$ be the union of all the $\mathscr{O}_{(\nu,u)}^G$ and of all the $\mathscr{O}_\lambda^G$ and denote by $\mathfrak{g}^\ddagger/G$ the corresponding set in the orbit space. It follows now from [10], that $\mathfrak{g}^\ddagger$ is just the set of all admissible linear functionals of $\mathfrak{g}$. The result of Lipsman stated in the introduction gives us a bijection between the space $\mathfrak{g}^\ddagger/G$ of admissible coadjoint orbits and the unitary dual $\widehat{G}$.

2.5 Main results

We continue to use the notation of the previous sections. Fix a non-zero vector u in $\mathbb{R}^n$ and assume that the Lie subgroup $H := K_u$ is connected. The corresponding Lie algebra of H is denoted by $\mathfrak{h}$, i.e., $\mathfrak{h} = \{U \in \mathfrak{k};\ Uu = 0\}$. Let $\pi_{(\nu,u)} \in \widehat{G}$ and $\tau_\lambda \in \widehat{K}$ be as before. To these irreducible unitary representations, we attach respectively the coadjoint orbits $\mathscr{O}_{(\nu,u)}^G$ and $\mathscr{O}_\lambda^K$. Here $\mathscr{O}_\lambda^K$ is the orbit in $\mathfrak{k}^*$ through U_λ, i.e., $\mathscr{O}_\lambda^K = Ad_K^*(K)U_\lambda$. If $p : \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{k}^*$ denotes the canonical projection, then we can define the "mod K" number

$$n(\mathscr{O}_{(\nu,u)}^G, \mathscr{O}_\lambda^K) := \sharp\Big[\big(\mathscr{O}_{(\nu,u)}^G \cap p^{-1}(\mathscr{O}_\lambda^K)\big)/K\Big].$$

Proposition 2.5.1. *Let H_ν be the stabilizer of U_ν in H. Then*

$$n(\mathscr{O}_{(\nu,u)}^G, \mathscr{O}_\lambda^K) = \sharp\Big[\big((U_\nu + \mathscr{W}_u) \cap \mathscr{O}_\lambda^K\big)/H_\nu\Big].$$

Proof. Assume that $\mathscr{O}_{(\nu,u)}^G \cap p^{-1}(\mathscr{O}_\lambda^K) \neq \emptyset$, i.e., the set

$$\mathscr{F} := \big\{W \in \mathscr{W}_u;\ U_\nu + W \in \mathscr{O}_\lambda^K\big\}$$

is non-empty. We define an equivalence relation in $\mathscr{F}$ by

$$W_1 \sim W_2 \Leftrightarrow \exists A \in H_\nu;\ W_2 = AW_1A^t.$$

The set of equivalence classes is denoted by $\mathscr{F}/H_\nu$. Letting

$$\mathscr{E}_W := \{(A(U_\nu + W)A^t, Au); A \in K\}$$

for $W \in \mathscr{F}$, one can easily prove that

$$W_1 \sim W_2 \Leftrightarrow \mathscr{E}_{W_1} = \mathscr{E}_{W_2}.$$

Since

$$\mathscr{O}^G_{(\nu,u)} \cap p^{-1}(\mathscr{O}^K_\lambda) = \bigcup_{W\in\mathscr{F}} \mathscr{E}_W,$$

we can deduce that

$$\begin{aligned} n(\mathscr{O}^G_{(\nu,u)}, \mathscr{O}^K_\lambda) &= \sharp\Big[\big(\mathscr{O}^G_{(\nu,u)} \cap p^{-1}(\mathscr{O}^K_\lambda)\big)/K\Big] \\ &= \sharp\Big[\mathscr{F}/H_\nu\Big] \\ &= \sharp\Big[\big((U_\nu + \mathscr{W}_u) \cap \mathscr{O}^K_\lambda\big)/H_\nu\Big]. \end{aligned}$$

This completes the proof of the proposition. □

Let us denote by q the canonical projection from $\mathfrak{k}^*$ to $\mathfrak{h}^*$.

Proposition 2.5.2. *The intersection $\mathscr{O}^G_{(\nu,u)} \cap p^{-1}(\mathscr{O}^K_\lambda)$ is non-empty if and only if $U_\nu \in q(\mathscr{O}^K_\lambda)$.*

Proof. The result of the proposition immediately follows from the equivalence

$$\mathscr{O}^G_{(\nu,u)} \cap p^{-1}(\mathscr{O}^K_\lambda) \neq \emptyset \Leftrightarrow \big(U_\nu + \mathscr{W}_u\big) \cap \mathscr{O}^K_\lambda \neq \emptyset$$

and the direct sum decomposition $\mathfrak{k} = \mathfrak{h} \oplus \mathscr{W}_u$. □

Now we turn our attention to the multiplicity $m(\pi_{(\nu,u)}, \tau_\lambda)$ of τ_λ in the restriction of $\pi_{(\nu,u)}$ to K. We have

$$\begin{aligned} m(\pi_{(\nu,u)}, \tau_\lambda) &=: mult(\pi_{(\nu,u)}\big|_K, \tau_\lambda) \\ &= mult(Ind_H^K \sigma_\nu, \tau_\lambda) \\ &= mult(\tau_\lambda\big|_H, \sigma_\nu). \end{aligned}$$

Proposition 2.5.3. *The representation τ_λ occurs in the restriction of $\pi_{(\nu,u)}$ to K if and only if $U_\nu \in q(\mathscr{O}^K_\lambda)$.*

Proof. A proof of the if part can be found in [1]. The only if part is directly obtained by applying a result of Guillemin-Sternberg [3,4] (compare [5]) wich relates the branching problem for compact connected Lie groups to the projection of coadjoint orbits.

□

From the above propositions, we immediately obtain

Theorem 2.5.4. *We have*

$$m(\pi_{(\nu,u)},\tau_\lambda)\neq 0 \Leftrightarrow n(\mathscr{O}^G_{(\nu,u)},\mathscr{O}^K_\lambda)\neq 0.$$

As illustrated by the following example, the multiplicities $m(\pi_{(\nu,u)},\tau_\lambda)$ and $n(\mathscr{O}^G_{(\nu,u)},\mathscr{O}^K_\lambda)$ may coincide in certain cases. Let 1_K stand for the trivial representation of K. It is well known that the multiplicity of $1_K\in\widehat{K}$ in $\pi_{(\nu,u)}\big|_K$ is 0 or 1. The coadjoint orbit corresponding to the representation 1_K is $\{0\}$ and the formula for the multiplicity $n(\mathscr{O}^G_{(\nu,u)},\{0\})$ is

$$n(\mathscr{O}^G_{(\nu,u)},\{0\})=\sharp\Big[\big(\mathscr{O}^G_{(\nu,u)}\cap\mathfrak{k}^\perp\big)/K\Big],$$

where $\mathfrak{k}^\perp:=p^{-1}(\{0\})=\{\ell\in\mathfrak{g}^*;\ \ell(\mathfrak{k})=0\}$. Clearly, $\mathscr{O}^G_{(\nu,u)}\cap\mathfrak{k}^\perp$ is a single K-orbit whenever the intersection is non-empty, i.e., $n(\mathscr{O}^G_{(\nu,u)},\{0\})\leq 1$. Thus, $m(\pi_{(\nu,u)},\tau_\lambda)=n(\mathscr{O}^G_{(\nu,u)},\mathscr{O}^K_\lambda)$.

In the remainder of this paper, we fix $K=SO(n)$ with $n\geq 3$. Then $G=K\ltimes\mathbb{R}^n$ is the so-called Euclidean motion group. Without loss of generality, we can take $u=(0,...,0,r)^t\in\mathbb{R}^n$ with $r\in\mathbb{R}^*_+$. In fact, if u and $u^{'}$ belong to the same sphere centered at zero and of radius $r=\|u\|$, then $K_{u'}=AK_uA^t$ for some $A\in K$ and the representations $\pi_{(\nu,u)}$ and $\pi_{(\nu,u')}$ are equivalent. Notice that the little group at the vector $u=(0,...,0,r)^t\in\mathbb{R}^n$ is the subgroup $H=SO(n-1)$. In this case, H is a multiplicity free subgroup of K in the following sense: For any irreducible representation ρ of K, all the irreducible H-components of the restriction $\rho\big|_H$ of ρ to H have multiplicity at most 1. The multiplicity free property for the restriction $\pi_{(\nu,u)}\big|_K$ may predict that the Corwin-Greenleaf function $n(\mathscr{O}^G_{(\nu,u)},\mathscr{O}^K_\lambda)$ is either 0 or 1, and then $m(\pi_{(\nu,u)},\tau_\lambda)=n(\mathscr{O}^G_{(\nu,u)},\mathscr{O}^K_\lambda)$. Next, we shall prove that this prediction turns out to be true when the weights ν and λ are strongly dominant.

Let us first recall a useful fact concerning the weight lattice of $SO(n)$, $n\geq 3$. Fix the Cartan subalgebra of $\mathfrak{so}(n)$ consisting of the two-by-two diagonal blocks

$$\begin{pmatrix}0&\theta_j\\-\theta_j&0\end{pmatrix},j=1,...,[\frac{n}{2}],$$

starting from the upper left. Here, $[\frac{n}{2}]$ denotes the largest integer smaller then $\frac{n}{2}$. For an integer $j\in\{1,...,[\frac{n}{2}]\}$, denote by e_j the associated evaluation functional on the complexification of the Cartan subalgebra. If the standard choice of positive roots is made (see, e.g., [8]), then the dominant weights (resp. strongly dominant weights) λ for $SO(n)$ are given by expressions

$$\lambda=\lambda_1e_1+...+\lambda_de_d\longleftrightarrow\lambda=(\lambda_1,...,\lambda_d)$$

such that

$$\lambda_1 \geq ... \geq \lambda_{d-1} \geq |\lambda_d| \quad (\text{resp. } \lambda_1 > ... > \lambda_{d-1} > |\lambda_d|)$$

when $n = 2d$ is even, and

$$\lambda_1 \geq ... \geq \lambda_d \geq 0 \quad (\text{resp. } \lambda_1 > ... > \lambda_d > 0)$$

when $n = 2d + 1$ is odd, where $2\lambda_i$ and $\lambda_i - \lambda_j$ are integers for all i, j.

Now, we are in position to prove

Theorem 2.5.5. *Let $(K, H) = (SO(n), SO(n-1))$ with $n \geq 3$. Assume that ν and λ are strongly dominant weights of H and K, respectively. Then*

$$n(\mathscr{O}^G_{(\nu,u)}, \mathscr{O}^K_\lambda) \leq 1$$

and hence, $m(\pi_{(\nu,u)}, \tau_\lambda) = n(\mathscr{O}^G_{(\nu,u)}, \mathscr{O}^K_\lambda)$.

Proof. We will prove the theorem only for the pair $(K, H) = (SO(2d + 1), SO(2d))$. Analogous proof hold in the remaining case $(K, H) = (SO(2d + 2), SO(2d + 1))$.

Given the vector $u = (0, ..., 0, r)^t \in \mathbb{R}^n$, $r \in \mathbb{R}^*_+$, we have

$$\mathscr{W}_u = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & -y_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -y_{2d} \\ y_1 & \dots & y_{2d} & 0 \end{pmatrix} ;\ y_j \in \mathbb{R}\, \forall\, j \right\}.$$

Letting $\nu = (\nu_1, ..., \nu_d)$ be a strongly dominant weight of H and

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

we associate to the representation $\pi_{(\nu,u)}$ the linear functional $\ell_{\nu,u} = (U_\nu, u)$ in $\mathfrak{g}^*$, where

$$U_\nu = \begin{pmatrix} \nu_1 J & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \nu_d J & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

We shall denote by H_ν the stabilizer of U_ν in H.

Let $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_d)$ be a strongly dominant weight of K. We link the representation τ_λ to the linear functional $\ell_\lambda = (U_\lambda, 0)$ in $\mathfrak{g}^*$, where

$$U_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 J & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_d J & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assume that $n(\mathscr{O}^G_{(\nu,u)}, \mathscr{O}^K_\lambda) \neq 0$. Then there exists a skew-symmetric matrix

$$W = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & -y_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -y_{2d} \\ y_1 & \dots & y_{2d} & 0 \end{pmatrix}$$

in $\mathscr{W}_u$ such that $U_\nu + W = AU_\lambda A^t$ for some $A \in K$. For all $x \in \mathbb{R}$, we have

$$det(U_\nu + W - ix\mathbb{I}) = i(-1)^{d+1} x P(x)$$

where P is the unitary polynomial of degree $2d$ given by

$$P(x) = \prod_{i=1}^{d} (x^2 - \nu_i^2) - \sum_{j=1}^{d} \Big((y_{2j-1}^2 + y_{2j}^2) \prod_{i=1, i\neq j}^{d} (x^2 - \nu_i^2) \Big).$$

Let Q be the following unitary polynomial of degree $2d$:

$$Q(x) = \prod_{i=1}^{d} (x^2 - \nu_i^2) - \sum_{j=1}^{d} \frac{\prod_{i=1}^{i=d} (\lambda_i^2 - \nu_j^2) \prod_{i=1, i\neq j}^{i=d} (x^2 - \nu_i^2)}{\prod_{i=1, i\neq j}^{i=d} (\nu_i^2 - \nu_j^2)}.$$

Applying the Lagrange's interpolation theorem, we have

$$\prod_{i=1}^{d} (\lambda_k^2 - \nu_i^2) = \sum_{j=1}^{d} \frac{\prod_{i=1}^{i=d} (\lambda_i^2 - \nu_j^2) \prod_{i=1, i\neq j}^{i=d} (\lambda_k^2 - \nu_i^2)}{\prod_{i=1, i\neq j}^{i=d} (\nu_i^2 - \nu_j^2)},$$

and so $Q(\pm\lambda_k) = 0$ for $k = 1, ..., d$. It follows that $P = Q$, and then

$$y_{2j-1}^2 + y_{2j}^2 = \frac{\prod_{i=1}^{i=d} (\lambda_i^2 - \nu_j^2)}{\prod_{i=1, i\neq j}^{i=d} (\nu_i^2 - \nu_j^2)}$$

for all $j = 1, ..., d$.

Consider again the set $\mathscr{F} = \left\{W \in \mathscr{W}_u;\, U_\nu + W \in \mathscr{O}_\lambda^K\right\}$. Since $\mathscr{F}$ is stable under the natural action of H_ν on $\mathscr{W}_u$, the stabilizer H_ν is necessarily included in the torus

$$T_H = \left\{ \begin{pmatrix} cos(\theta_1) & sin(\theta_1) & & & & \\ -sin(\theta_1) & cos(\theta_1) & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & cos(\theta_d) & sin(\theta_d) & \\ & & & -sin(\theta_d) & cos(\theta_d) & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} ;\, \theta_j \in \mathbb{R}\, \forall\, j \right\}.$$

Furthermore, it is clear that $T_H \subseteq H_\nu$ and then we have $H_\nu = T_H$. By observing that the H_ν-action on $\mathscr{F}$ is transitive, we deduce that $\mathscr{O}_{(\nu,u)}^G \cap p^{-1}(\mathscr{O}_\lambda^K)$ is a single K-orbit, i.e.,

$$n(\mathscr{O}_{(\nu,u)}^G, \mathscr{O}_\lambda^K) = m(\pi_{(\nu,u)}, \tau_\lambda) = 1.$$

$\square$

Concluding this section, let us prove the following result:

Theorem 2.5.6. *Let the pair (K, H) be either $(SO(2d+1), SO(2d))$ or $(SO(2d+2), SO(2d+1))$. If the dominant weight $\nu = (\nu_1, ..., \nu_d)$ of H satisfies $\nu_1 = ... = \nu_d = \alpha$ for some $\alpha \in \frac{1}{2}\mathbb{N}^*$, then for any dominant weight λ of K with $\lambda \neq \nu$ we have*

$$n(\mathscr{O}_{(\nu,u)}^G, \mathscr{O}_\lambda^K) \neq 1.$$

Consequently, if $n(\mathscr{O}_{(\nu,u)}^G, \mathscr{O}_\lambda^K) \neq 0$ then $m(\pi_{(\nu,u)}, \tau_\lambda) \neq n(\mathscr{O}_{(\nu,u)}^G, \mathscr{O}_\lambda^K)$.

Proof. We take $(K, H) = (SO(2d+1), SO(2d))$. The proof of the remaining case $(K, H) = (SO(2d+2), SO(2d+1))$ goes along the same lines.

Let $\nu = (\nu_1, ..., \nu_d)$ be a dominant weight of H such that $\nu_1 = ... = \nu_d = \alpha$ with $\alpha \in \frac{1}{2}\mathbb{N}^*$. Assume that $n(\mathscr{O}_{(\nu,u)}^G, \mathscr{O}_\lambda^K) \neq 0$ for some dominant weight λ of K. Then there exists a skew-symmetric matrix

$$W = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & -y_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -y_{2d} \\ y_1 & \dots & y_{2d} & 0 \end{pmatrix}$$

in $\mathscr{W}_u$ such that $U_\nu + W = AU_\lambda A^t$ for some $A \in K$. For all $x \in \mathbb{R}$, we have

$$det(U_\nu + W - ix\mathbb{I}) = i(-1)^{d+1} x P(x)$$

with

$$P(x) = (x^2 - \alpha^2)^{d-1}\Big(x^2 - \alpha^2 - \sum_{j=1}^{d}(y_{2j-1}^2 + y_{2j}^2)\Big).$$

Applying the branching rule from $SO(2d+1)$ to $SO(2d)$ (see, e.g., [8]), we observe that the weight λ is of the form

$$\lambda = (\beta, \underbrace{\alpha, ..., \alpha}_{d-1})$$

where $\beta \in \frac{1}{2}\mathbb{N}^*$ and $\beta - \alpha \in \mathbb{N}^*$. Thus we get

$$\sum_{j=1}^{d}(y_{2j-1}^2 + y_{2j}^2) = r^2$$

with $r = \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}$. Since H_ν is a proper subgroup of $SO(2d)$, the H_ν-action on the $(2d-1)$-dimensional sphere centered at zero and with radius r is not transitive. That is, the H_ν-action on the set $\mathscr{F} = \big\{W \in \mathscr{W}_u;\ U_\nu + W \in \mathscr{O}_\lambda^K\big\}$ is not transitive. Therefore, $n(\mathscr{O}_{(\nu,u)}^G, \mathscr{O}_\lambda^K) \neq 1$ and so

$$m(\pi_{(\nu,u)}, \tau_\lambda) \neq n(\mathscr{O}_{(\nu,u)}^G, \mathscr{O}_\lambda^K).$$

□

Bibliography

[1] D. Arnal, M. Ben Ammar, M. Selmi, Le problème de la réduction à un sous-groupe dans la quantification par déformation, *Ann. Fac. Sci. Toulouse*, **12** (1991), 7-27.

[2] L. Corwin, F. Greenleaf, Spectrum and multiplicities for unitary representations in nilpotent Lie groups, *Pacific J. Math.*, **135** (1988), 233-267.

[3] V. Guillemin, S. Sternberg, Convexity properties of the moment mapping, *Invent. math.*, **67** (1982), 491-513.

[4] V. Guillemin, S. Sternberg, Geometric quantization and multiplicities of group representations, *Invent. math.*, **67** (1982), 515-538.

[5] G.J. Heckman, Projection of orbits and asymptotic behavior of multiplicities for compact connected Lie groups, *Invent. math.*, **67** (1982), 333-356.

[6] A. A. Kirillov, *Lectures on the orbit method*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.

[7] A. Kleppner, R.L. Lipsman, The Plancherel formula for group extensions, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, **4** (1972), 459-516.

[8] A.W. Knapp, *Lie Groups Beyond an Introduction - Second Edition*, Birkhäuser, Boston, 2002.

[9] T. Kobayashi and S. Nasrin, Multiplicity one theorem in the orbit method, in: *Lie groups and symmetric spaces*, 161-169, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 210, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.

[10] R.L. Lipsman, Orbit theory and harmonic analysis on Lie groups with co-compact nilradical, *J. Math. pures et appl.*, **59** (1980), 337-374.

[11] R.L. Lipsman, Attributes and applications of the Corwin-Greenleaf multiplicity function, *Contemp. Math.*, **177** (1994), 27-46.

[12] G.W. Mackey, *The theory of unitary group representations*, Chicago University Press, 1976.

[13] G.W. Mackey, *Unitary group representations in physics, probability and number theory*, Benjamin-Cummings, 1978.

[14] S. Nasrin, Corwin-Greenleaf multiplicity functions for Hermitian symmetric spaces and multiplicity-one theorem in the orbit method, *Int. J. Math.*, **21** (2010), 279-296.

Chapter 3

Corwin-Greenleaf multiplicity function for compact extensions of the Heisenberg group

Abstract

Let $\mathbb{H}_n$ be the $(2n+1)$-dimensional Heisenberg group and K a closed subgroup of $U(n)$ acting on $\mathbb{H}_n$ by automorphisms such that $(K, \mathbb{H}_n)$ is a Gelfand pair. Let $G = K \ltimes \mathbb{H}_n$ be the semidirect product of K and $\mathbb{H}_n$. Let $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{k}$ be the respective Lie algebras of G and K, and $\mathrm{pr} : \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{k}^*$ the natural projection. For coadjoint orbits $\mathscr{O}^G \subset \mathfrak{g}^*$ and $\mathscr{O}^K \subset \mathfrak{k}^*$, we denote by $n\big(\mathscr{O}^G, \mathscr{O}^K\big)$ the number of K-orbits in $\mathscr{O}^G \cap \mathrm{pr}^{-1}(\mathscr{O}^K)$, which is called the Corwin-Greenleaf multiplicity function. In this paper, we give two sufficient conditions on $\mathscr{O}^G$ in order that

$$n\big(\mathscr{O}^G, \mathscr{O}^K\big) \leq 1 \text{ for any } K\text{-coadjoint orbit } \mathscr{O}^K \subset \mathfrak{k}^*.$$

For $K = U(n)$, assuming furthermore that $\mathscr{O}^G$ and $\mathscr{O}^K$ are admissible and denoting respectively by π and τ their corresponding irreducible unitary representations, we also discuss the relationship between $n\big(\mathscr{O}^G, \mathscr{O}^K\big)$ and the multiplicity $m(\pi, \tau)$ of τ in the restriction of π to K. Especially, we study in Theorem 4 the case where $n(\mathscr{O}^G, \mathscr{O}^K) \neq m(\pi, \tau)$. This inequality is interesting because we expect the equality as the naming of the Corwin-Greenleaf multiplicity function suggests.

3.1 Introduction

Let G be a connected and simply connected nilpotent Lie group with Lie algebra $\mathfrak{g}$ and $\widehat{G}$ the unitary dual of G, i.e. the set of all equivalence classes of irreducible unitary representations of G. Then Kirillov proved that the unitary dual $\widehat{G}$ of G is parametrized by $\mathfrak{g}^*/G$, the set of coadjoint orbits. The bijection

$$\widehat{G} \simeq \mathfrak{g}^*/G$$

is called the Kirillov correspondence (see [7]). Let π be the unitary representation corresponding to a given coadjoint orbit $\mathscr{O}^G \subset \mathfrak{g}^*$. Let K be a subgroup of G. Then the restriction $\pi\big|_K$ is decomposed into a direct integral of irreducible unitary representations of K:

$$\pi\big|_K \simeq \int_{\widehat{K}}^{\oplus} m(\pi,\tau)d\mu(\tau) \quad \text{(branching rule)}$$

where $d\mu$ is a Borel measure on the unitary dual $\widehat{K}$. Then Corwin and Greenleaf proved that the above multiplicity $m(\pi,\tau)$ coincides almost everywhere with the "mod K" intersection number $n(\mathscr{O}^G, \mathscr{O}^K)$ defined as follows:

$$n(\mathscr{O}^G, \mathscr{O}^K) := \sharp\Big(\big(\mathscr{O}^G \cap \mathrm{pr}^{-1}(\mathscr{O}^K)\big)/K\Big)$$

(see [4]). Here, $\mathscr{O}^G \subset \mathfrak{g}^*$ and $\mathscr{O}^K \subset \mathfrak{k}^*$ are the coadjoint orbits corresponding to $\pi \in \widehat{G}$ and $\tau \in \widehat{K}$, respectively, under the Kirillov correspondence $\widehat{G} \simeq \mathfrak{g}^*/G$ and $\widehat{K} \simeq \mathfrak{k}^*/K$, and

$$\mathrm{pr} : \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{k}^*$$

is the natural projection. The function

$$n : \mathfrak{g}^*/G \times \mathfrak{k}^*/K \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}, \quad (\mathscr{O}^G, \mathscr{O}^K) \longmapsto n(\mathscr{O}^G, \mathscr{O}^K)$$

is sometimes referred as the **Corwin-Greenleaf multipliccity function**. In the special case that $\tau = 1_K$, the formula for the multiplicity function $n(\mathscr{O}^G, \{0\})$ is

$$n(\mathscr{O}^G, \{0\}) := \sharp\Big(\big(\mathscr{O}^G \cap \mathfrak{k}^\perp\big)/K\Big),$$

where $\mathfrak{k}^\perp := \mathrm{pr}^{-1}(\{0\}) = \{\ell \in \mathfrak{g}^*; \ell(\mathfrak{k}) = 0\}$.

In the spirit of the orbit method due to Kirillov, R. Lipsman established a bijection between a class of coadjoint orbits of G and the unitary dual $\widehat{G}$ (see [13]). Given a linear form $\psi \in \mathfrak{g}^*$, we denote by $G(\psi)$ its stabilizer in G. Then ψ is called admissible if there exists a unitary character χ of the identity component of $G(\psi)$ such that $d\chi = i\psi_{|\mathfrak{g}(\psi)}$. Let $\mathfrak{g}^\ddagger$ be the set of all admissible linear forms on $\mathfrak{g}$. For $\psi \in \mathfrak{g}^{\ddagger}$, one can construct an irreducible unitary repesentation π_ψ by holomorphic induction. According to Lipsman [13], every irreducible unitary representation of G arises in this manner. By observing that π_ψ is equivalent to $\pi_{\psi'}$ if and only if ψ and ψ' lie in the same G-orbit, we get finally a bijection between the space $\mathfrak{g}^{\ddagger}/G$ of admissible coadjoint orbits and $\widehat{G}$.

Let $\pi \in \widehat{G}$ and $\tau \in \widehat{K}$ correspond to admissible coadjoint orbits $\mathscr{O}^G$ and $\mathscr{O}^K$ respectively and let $\mathrm{pr} : \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{k}^*$ be the restriction map. One expects that the multiplicity of τ in $\pi\big|_K$ is given by $\sharp\Big(\big(\mathscr{O}^G \cap \mathrm{pr}^{-1}(\mathscr{O}^K)\big)/K\Big)$. Results in this direction have been established for compact extensions of $\mathbb{R}^n$ (see [1]). In this setting the Corwin-Greenleaf multiplicity function $n(\mathscr{O}^G, \mathscr{O}^K)$ may become greater than one, or even worse, may take infinity. For example, if $(K, \mathbb{H}_n)$ is a Gelfand pair then $n(\mathscr{O}^G, \{0\}) = 1$, i.e., $\mathscr{O}^G \cap \mathfrak{k}^{\perp}$ is a single K-orbit (see [3]).

Question. Give a sufficient condition on the admissible coadjoint orbit $\mathscr{O}^G$ in $\mathfrak{g}^*$ in order that

$$n(\mathscr{O}^G, \mathscr{O}^K) \leq 1 \text{ for any admissible coadjoint orbit } \mathscr{O}^K \subset \mathfrak{k}^*.$$

Our interest for this question is motivated by the formulation and the results by Kobayashi-Nasrin [9,16] which may be intepreted as the “classical limit” of the multiplicity-free theorems in the branching laws of semisimple Lie groups that were established in [10,11,12] by three different methods, explicit branching laws [10], the theory of visible actions [11], and Verma modules [12].

Let $\mathbb{H}_n = \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}, n \geq 1$, be the standard Heisenberg group of real dimension $2n+1$. The maximal compact subgroup of $Aut(\mathbb{H}_n)$ is the unitary group $U(n)$, and it acts by $k.(z,t) = (kz, t)$. In this paper we consider the Lie group $G = K \ltimes \mathbb{H}_n$, the semidirect product of the K and $\mathbb{H}_n$, where K stands for a closed subgroup of $U(n)$ acting on $\mathbb{H}_n$ as above. Our group G is obviously a subgroup of the so-called Heisenberg motion group, which is the semidirect product $U(n) \ltimes \mathbb{H}_n$. The group K acts on the unitary dual $\widehat{\mathbb{H}_n}$ of $\mathbb{H}_n$ via

$$k.\sigma = \sigma \circ k^{-1}$$

for $k \in K$ and $\sigma \in \widehat{\mathbb{H}_n}$. Let K_σ denote the stabilizer of σ (up to unitary equivalence). Let π be an irreducible unitary representation of G associated to a given admissible coadjoint orbit $\mathscr{O}$ in $\mathfrak{g}^{\ddagger}/G$. Mackey's little group theory [14,15] tells us that π is determined by a pair (σ, τ) where $\sigma \in \widehat{\mathbb{H}_n}$ and $\tau \in \widehat{K_\sigma}$. We consider here the case where the representation π is generic, i.e., π has Mackey parameters (σ, τ) such that the stabilizer K_σ is all of K. In this case we have

$$\pi(k, z, t) = \tau(k) \otimes \sigma(z, t) \circ W_\sigma(k),$$

$(k, z, t) \in G$, with W_σ being a (non-projective) unitary representation of K in the Hilbert space $\mathscr{H}_\sigma$ of σ that intertwines $k.\sigma$ with σ:

$$(k.\sigma)(z, t) = W_\sigma(k)^{-1} \circ \sigma(z, t) \circ W_\sigma(k)$$

for all $k \in K, (z, t) \in \mathbb{H}_n$. The main results of the present work are

Theorem 1. If $(K, \mathbb{H}_n)$ is a Gelfand pair and U is a central element of $\mathfrak{k}$, then

$$n\big(\mathscr{O}^G_{(U,0,x)}, \mathscr{O}^K_X\big) \leq 1$$

for any coadjoint orbit $\mathscr{O}^K_X$ in $\mathfrak{k}^*$.

Theorem 2. We have

$$m(\pi_{(\lambda,\alpha)}, \tau_\mu) \neq 0 \Rightarrow n(\mathscr{O}^G_{(\lambda,\alpha)}, \mathscr{O}^K_\mu) \neq 0.$$

Theorem 3. Let $n \geq 2$. Assume that λ is strongly dominant weight of $K = U(n)$. Then for any dominant weight μ of K such that $B_{\lambda,\mu}$ is invertible we have

$$n(\mathscr{O}^G_{(\lambda,\alpha)}, \mathscr{O}^K_\mu) \leq 1.$$

The matrix $B_{\lambda,\mu}$ is defined in Section 4.3 p 11.

Theorem 4. Let $n \geq 2$. If the dominant weight $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$ of K satisfies $\lambda_1 = ... = \lambda_n = a$ for some $a \in \mathbb{Z}$, then for any dominant weight μ of K with $\mu \neq \lambda$ we have

$$n(\mathscr{O}^G_{(\lambda,\alpha)}, \mathscr{O}^K_\mu) \leq 1$$

Moreover, $n(\mathscr{O}^G_{(\lambda,\alpha)}, \mathscr{O}^K_\mu) \neq 0$ if and only if μ is of the form

Case 1: if $\alpha > 0$ then $\mu = (\underbrace{b, ..., b}_{p}, \underbrace{a, ..., a}_{q}) \in \mathbb{Z}^n$, $p + q = n$, $b \in \mathbb{Z}$ with $b > a$.

Case 2: if $\alpha < 0$ then $\mu = (\underbrace{a, ..., a}_{p}, \underbrace{b, ..., b}_{q}) \in \mathbb{Z}^n$, $p + q = n$, $b \in \mathbb{Z}$ with $a > b$.

Consequently, if $\mu_{n-1} \neq a$ and $n(\mathscr{O}^G_{(\lambda,\alpha)}, \mathscr{O}^K_\mu) \neq 0$ then $m(\pi_{(\lambda,\alpha)}, \tau_\mu) \neq n(\mathscr{O}^G_{(\lambda,\alpha)}, \mathscr{O}^K_\mu)$.

The paper is organized as follows. Section 2 introduces the coadjoint orbits of $K \ltimes \mathbb{H}_n$. In Sec. 3, we give two sufficient conditions on $\mathscr{O}^G$ in order that $n\big(\mathscr{O}^G, \mathscr{O}^K\big) \leq 1$ for any K-coadjoint orbit $\mathscr{O}^K \subset \mathfrak{k}^*$. Section 4.1 deals with the description of the generic unitary dual $\widehat{U(n) \ltimes \mathbb{H}_n}$ of $U(n) \ltimes \mathbb{H}_n$. Section 4.2 is devoted to the description of the subspace of generic admissible coadjoint orbits of $U(n) \ltimes \mathbb{H}_n$ and to the branching rules from $U(n) \ltimes \mathbb{H}_n$ to $U(n)$. In Sec. 4.3, the Corwin-Greenleaf multiplicity function for $U(n) \ltimes \mathbb{H}_n$ is studied in some situations and the main results of this work are derived.

3.2 Coadjoint orbits of $K \ltimes \mathbb{H}_n$

On the n-dimensional complex vector space $\mathbb{C}^n$, we fix the usual scalar product $\langle\ ,\ \rangle$. Let $\mathbb{H}_n = \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$ with group law

$$(z,t)(z',t') := (z+z', t+t' - \frac{1}{2} Im\langle z, z'\rangle)$$

denote the $(2n+1)$-dimensional Heisenberg group. Let K be a closed subgroup of $U(n)$. The group K acts naturally on $\mathbb{H}_n$ by automorphisms, and then one can form the semidirect product $G = K \ltimes \mathbb{H}_n$. Let us denote by (k,z,t) the elements of G where $k \in K$ and $(z,t) \in \mathbb{H}_n$. The group law of G is given by

$$(k,z,t)\cdot(k',z',t') = (kk', z+kz', t+t' - \frac{1}{2} Im\langle z, kz'\rangle).$$

We identify the Lie algebra $\mathfrak{h}_n$ of $\mathbb{H}_n$ with $\mathbb{H}_n$ via the exponential map. We also identify the Lie algebra $\mathfrak{k}$ of K with its vector dual space $\mathfrak{k}^*$ through the K-invariant inner product

$$(A,B) = tr(AB).$$

For $z \in \mathbb{C}^n$ define the $\mathbb{R}$-linear form z^* in $(\mathbb{C}^n)^*$ by

$$z^*(w) := Im\langle z, w\rangle.$$

One defines a map $\times : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathfrak{k}$, $(z,w) \mapsto z \times w$ by

$$(z \times w, B) = z \times w(B) := w^*(Bz)$$

with $B \in \mathfrak{k}$. It is easy to verify that for $k \in K$, one has

$$\mathrm{Ad}_K(k)(z \times w) = (kz) \times (kw).$$

Each element ν in $\mathfrak{g}^* = (\mathfrak{k} \ltimes \mathfrak{h}_n)^*$ can be identified with an element $(U,u,x) \in \mathfrak{k} \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$ such that

$$\langle (U,u,x),(B,w,s)\rangle = (U,B) + u^*(w) + xs,$$

where $(B,w,s) \in \mathfrak{g}$. By a direct computation, one obtains that the coadjoint action of G is

$$\mathrm{Ad}^*_G(k,z,t)(U,u,x) = \big(\mathrm{Ad}_K(k)U + z \times (ku) + \frac{x}{2} z \times z, ku + xz, x\big).$$

Letting k and z vary over K and $\mathbb{C}^n$ respectively, the coadjoint orbit $\mathscr{O}^G_{(U,u,x)}$ through the linear form (U,u,x) can be written

$$\mathscr{O}^G_{(U,u,x)} = \Big\{\big(\mathrm{Ad}_K(k)U + z \times (ku) + \frac{x}{2} z \times z, ku + xz, x\big);\ k \in K, z \in \mathbb{C}^n\Big\}$$

or equivalently, replacing z by kz,

$$\mathscr{O}^G_{(U,u,x)} = \Big\{ k \cdot \big(U + z \times u + \frac{x}{2} z \times z, u + xz, x\big);\ k \in K, z \in \mathbb{C}^n \Big\}.$$

Remark Here we regard z as a column vector $z = (z_1, ... z_n)^T$ and $z^* := \overline{z}^T$. Then $z \times u \in \mathfrak{u}^*(n) \cong \mathfrak{u}(n)$ is the n by n skew Hermitian matrix $\frac{i}{2}(uz^* + zu^*)$. Indeed, for all $B \in \mathfrak{u}(n)$ we compute

$$(uz^* + zu^*, B) = tr((uz^* + zu^*)B) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} B_{ji} z_i \overline{u}_j - \sum_{1 \leq i,j \leq n} u_i \overline{B}_{ij} \overline{z}_j = -2iz \times u(B).$$

In particular, $z \times z$ is the skew Hermitian matrix izz^* whose entries are determined by $(izz^*)_{lj} = iz_l \overline{z}_j$.

The G-coadjoint orbit arising from the initial point $(U, 0, x)(x \neq 0)$ is said to be generic. Notice that the space of generic coadjoint orbits of G is parametrized by the set $\big(\mathfrak{k}/K\big) \times \big(\mathbb{R} \backslash \{0\}\big)$. Concluding this section, let us underline that the union of all generic coadjoint orbits of G is dense in $\mathfrak{g}^*$.

3.3 Corwin-Greenleaf multiplicity function for $K \ltimes \mathbb{H}_n$

We keep the notation of Sec. 2. Consider the generic coadjoint orbit $\mathscr{O}^G_{(U,0,x)}$ through the element $(U, 0, x)$ in $\mathfrak{g}^*$. For $X \in \mathfrak{k}$, we introduce the set

$$\mathscr{F}_X := \Big\{ z \in \mathbb{C}^n;\ U + \frac{x}{2} z \times z \in \mathscr{O}^K_X \Big\}.$$

Here $\mathscr{O}^K_X$ is the K-coadjoint orbit in $\mathfrak{k}^* \simeq \mathfrak{k}$ through X. Letting H be the stabilizer of U in K, we define an equivalence relation in $\mathscr{F}_X$ by

$$z \sim w \Leftrightarrow \exists h \in H;\ w = hz.$$

The set of equivalence classes is denoted by $\mathscr{F}_X/H$.

Proposition 3.3.1. *For any $X \in \mathfrak{k}$, we have*

$$n\big(\mathscr{O}^G_{(U,0,x)}, \mathscr{O}^K_X\big) = \sharp\Big(\mathscr{F}_X/H\Big).$$

Proof. Fix an element X in $\mathfrak{k}$. For $z \in \mathbb{C}^n$, let us set

$$E_z := \Big\{ k \cdot \big(U + \frac{x}{2} z \times z, xz, x\big);\ k \in K \Big\}.$$

Observe that

$$E_z = E_w \Leftrightarrow z \sim w.$$

Since

$$\mathscr{O}^G_{(U,0,x)} \cap \mathrm{pr}^{-1}(\mathscr{O}^K_X) = \bigcup_{z \in \mathscr{F}_X} E_z,$$

it follows that

$$\begin{aligned} n\big(\mathscr{O}^G_{(U,0,x)}, \mathscr{O}^K_X\big) &= \sharp\Big[\big(\mathscr{O}^G_{(U,0,x)} \cap \mathrm{pr}^{-1}(\mathscr{O}^K_X)\big)/K\Big] \\ &= \sharp\Big(\mathscr{F}_X/H\Big). \end{aligned}$$

This completes the proof of the proposition. $\square$

Following [2], we define the moment map $\tau : \mathbb{C}^n \to \mathfrak{k}^*$ for the natural action of K on $\mathbb{C}^n$ by

$$\tau(z)(A) = z^*(Az)$$

for $A \in \mathfrak{k}$. Since $\langle z, Az\rangle$ is pure imaginary, one can also write $\tau(z)(A) = \frac{1}{i}\langle z, Az\rangle$. The map τ is a key ingredient in the proof of the following result.

Theorem 3.3.2. *If $(K, \mathbb{H}_n)$ is a Gelfand pair and U is a central element of $\mathfrak{k}$, then*

$$n\big(\mathscr{O}^G_{(U,0,x)}, \mathscr{O}^K_X\big) \leq 1$$

for any coadjoint orbit $\mathscr{O}^K_X$ in $\mathfrak{k}^*$.

Proof. Let U be a central element of $\mathfrak{k}$. Then for any $X \in \mathfrak{k}$,

$$n\big(\mathscr{O}^G_{(U,0,x)}, \mathscr{O}^K_X\big) = \sharp\Big(\mathscr{F}_X/K\Big).$$

Fix a non-zero element $X \in \mathfrak{k}$ and assume that the set $\mathscr{F}_X$ is not empty. It is clear that $\mathscr{F}_X$ is stable under the natural action of K on $\mathbb{C}^n$. If z and w are two elements in $\mathscr{F}_X$, then there exists $k \in K$ such that

$$w \times w = \mathrm{Ad}_K(k)(z \times z).$$

Thus we get the equality $\mathscr{O}^K_{\tau(z)} = \mathscr{O}^K_{\tau(w)}$. Since $(K, \mathbb{H}_n)$ is a Gelfand pair, the moment map $\tau : \mathbb{C}^n \to \mathfrak{k}^*$ is injective on K-orbits [2]. That is, if $\mathscr{O}^K_{\tau(z)} = \mathscr{O}^K_{\tau(w)}$, then $Kz = Kw$. We conclude that the K-action on $\mathscr{F}_X$ is transitive and hence $n\big(\mathscr{O}^G_{(U,0,x)}, \mathscr{O}^K_X\big) = 1$. $\square$

3.4 Corwin-Greenleaf multiplicity function for $U(n) \ltimes \mathbb{H}_n$ and branching rules

3.4.1 Generic unitary dual of $U(n) \ltimes \mathbb{H}_n$

In the sequel, we fix $K = U(n)$ with $n \geq 2$. Then $G = K \ltimes \mathbb{H}_n$ is the so-called Heisenberg motion group. The description of the unitary dual $\widehat{G}$ of G is based on the Mackey little group theory. In the present paper we consider only the generic irreducible unitary representation of G.

Let us recall a useful fact from the representation theory of the Heisenberg group (see,e.g.,[5] for details). The infinite dimensional irreducible representations of $\mathbb{H}_n$ are parametrized by $\mathbb{R}^*$. For each $\alpha \in \mathbb{R}^*$, the Kirillov orbit $\mathscr{O}_\alpha^{\mathbb{H}_n}$ of the irreducible representation σ_α is the hyperplane $\mathscr{O}_\alpha^{\mathbb{H}_n} = \{(z, \alpha),\ z \in \mathbb{C}^n\}$. It is clear that for every α the coadjoint orbit $\mathscr{O}_\alpha$ is invariant under the K-action. Therefore K preserves the equivalence class of σ_α. The representation σ_α can be realized in the Fock space

$$\mathscr{F}_\alpha(n) = \left\{ f : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C} \text{ holomorphic} \mid \int_{\mathbb{C}^n} |f(w)|^2 e^{-\frac{|\alpha|}{2}|w|^2} dw < \infty \right\}$$

as

$$\sigma_\alpha(z,t) f(w) = e^{i\alpha t - \frac{\alpha}{4}|z|^2 - \frac{\alpha}{2}\langle w, z\rangle} f(w+z)$$

for $\alpha > 0$ and

$$\sigma_\alpha(z,t) f(\overline{w}) = e^{i\alpha t + \frac{\alpha}{4}|z|^2 + \frac{\alpha}{2}\langle \overline{w}, \overline{z}\rangle} f(\overline{w}+\overline{z})$$

for $\alpha < 0$. We refer the reader to [5] or [6] for a discussion of the Fock space. For each $A \in K$, the operator $W_\alpha(A) : \mathscr{F}_\alpha(n) \to \mathscr{F}_\alpha(n)$ defined by

$$W_\alpha(A) f(w) = f(A^{-1}w)$$

intertwines σ_α and $(\sigma_\alpha)_A$ given by $(\sigma_\alpha)_A(z,t) := \sigma_\alpha(Az, t)$. Observe that W_α is a unitary representation of K in the Fock space $\mathscr{F}_\alpha(n)$.

As usual, the dominant weights of $K = U(n)$ are parametrized by sequences $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{Z}^n$ such that $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_n$. Denote by $(\tau_\lambda, \mathscr{H}_\lambda)$ an irreducible unitary representation of K with highest weight λ. Then by Mackey [15], for each nonzero $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\pi_{(\lambda,\alpha)}(A, z, t) := \tau_\lambda(A) \otimes \sigma_\alpha(z,t) \circ W_\alpha(A), \ \ (A, z, t) \in G,$$

is an irreducible unitary representation of G realized in $\mathscr{H}_\lambda \otimes \mathscr{F}_\alpha(n)$. This representation $\pi_{(\lambda,\alpha)}$ is said to be generic. The set of all equivalence classes of generic irreducible unitary representations of G, denoted by $\widehat{G}_{gen}$, is called the generic unitary dual of G. Notice that $\widehat{G}_{gen}$ has full Plancherel measure in the unitary dual $\widehat{G}$ (see [8]).

3.4.2 Generic admissible coadjoint orbits of $U(n) \ltimes \mathbb{H}_n$ and Branching rules

We shall freely use the notation of the previous subsection. Given a dominant weight $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$ of K, we associate to $\pi_{(\lambda,\alpha)}$ the linear form $\ell_{\lambda,\alpha} = (U_\lambda, 0, \alpha)$ in $\mathfrak{g}^*$ where

$$U_\lambda = \begin{pmatrix} i\lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & i\lambda_n \end{pmatrix}.$$

Observe that $\ell_{\lambda,\alpha}$ is an admissible linear form on $\mathfrak{g}$. Denote by $G(\ell_{\lambda,\alpha})$, $K(\ell_{\lambda,\alpha})$ and $\mathbb{H}_n(\ell_{\lambda,\alpha})$ the stabilizers of $\ell_{\lambda,\alpha}$ respectively in G, K and $\mathbb{H}_n$. We have

$$\begin{aligned} G(\ell_{\lambda,\alpha}) &= \{(A,z,t) \in G;\ (AU_\lambda A^* + \frac{\alpha}{2} z \times z, \alpha z, \alpha) = (U_\lambda, 0, \alpha)\} \\ &= \{(A,0,t) \in G; AU_\lambda A^* = U_\lambda\}, \\ K(\ell_{\lambda,\alpha}) &= \{A \in K;\ (AU_\lambda A^*, 0, \alpha) = (U_\lambda, 0, \alpha)\} \\ &= \{A \in K;\ AU_\lambda A^* = U_\lambda\}, \\ \mathbb{H}_n(\ell_{\lambda,\alpha}) &= \{(z,t) \in \mathbb{H}_n; (U_\lambda + \frac{\alpha}{2} z \times z, \alpha z, \alpha) = (U_\lambda, 0, \alpha)\} \\ &= \{0\} \times \mathbb{R}. \end{aligned}$$

It follows that $G(\ell_{\lambda,\alpha}) = K(\ell_{\lambda,\alpha}) \ltimes \mathbb{H}_n(\ell_{\lambda,\alpha})$. According to Lipsman [13], the representation $\pi_{(\lambda,\alpha)}$ is equivalent to the representation of G obtained by holomorphic induction from the linear form $\ell_{\lambda,\alpha}$. Now, for an irreducible unitary representation τ_μ of K with highest weight μ, we take the linear functional $\ell_\mu := (U_\mu, 0, 0)$ of $\mathfrak{g}^*$ where

$$U_\mu = \begin{pmatrix} i\mu_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & i\mu_n \end{pmatrix}.$$

which is clearly aligned and admissible. Hence, the representation of G obtained by holomorphic induction from the linear functional ℓ_μ is equivalent to the representation τ_μ. We denote by $\mathscr{O}^G_\mu$ the coadjoint orbit of ℓ_μ and by $\mathscr{O}^G_{(\lambda,\alpha)}$ the coadjoint orbit associated to the linear form $\ell_{\lambda,\alpha}$. Let $\mathfrak{g}^\ddagger$ be the set of all admissible linear forms of G. The orbit space $\mathfrak{g}^\ddagger/G$ is called the space of admissible coadjoint orbits of G. The set of all coadjoint orbits $\mathscr{O}^G_{(\lambda,\alpha)}$ turns out to be the subspace of generic admissible coadjoint orbits of G.

Let τ_λ be an irreducible unitary representation of the unitary group $K = U(n)$ with highest weight $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{Z}^n$. Recall that the irreducible representations of $G = K \ltimes \mathbb{H}_n$ that come from an infinite dimensional irreducible representation $\sigma_\alpha \in \widehat{\mathbb{H}_n}$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$, are of the form $\pi_{(\lambda,\alpha)}$ with

$$\pi_{(\lambda,\alpha)}(A, z, t) = \tau_\lambda(A) \otimes \sigma_\alpha(z, t) \circ W_\alpha(A)$$

for $(A, z, t) \in G$. Here W_α denotes the natural representation of K on the ring $\mathbb{C}[z_1, ..., z_n]$ of holomorphic polynomials on $\mathbb{C}^n$, given by

$$(A.p)((z_1, ..., z_n)^T) = p(A^{-1}(z_1, ..., z_n)^T).$$

The space $\mathbb{C}[z_1, ..., z_n]$ decomposes under the action of K as

$$\mathbb{C}[z_1, ..., z_n] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{C}_k[z_1, ..., z_n]$$

where $\mathbb{C}_k[z_1, ..., z_n]$ denotes the space of homogeneous polynomials of degree k, thus we have $W_\alpha = \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} \tau_{\alpha,k}$ where $\tau_{\alpha,k}$ is the representation of K on $\mathbb{C}_k[z_1, ..., z_n]$. Consider now an irreducible unitary representation τ_μ of K with highest weight μ. The multiplicity of τ_μ in the representation $\pi_{(\lambda,\alpha)}$ is given by

$$\begin{aligned} m(\pi_{(\lambda,\alpha)}, \tau_\mu) &= mult(\pi_{(\lambda,\alpha)}\big|_K, \tau_\mu) \\ &= mult(\tau_\lambda \otimes W_\alpha, \tau_\mu) \\ &= mult(\bigoplus_{k\in\mathbb{N}} \tau_\lambda \otimes \tau_{\alpha,k}, \tau_\mu). \end{aligned}$$

3.4.3 Corwin-Greenleaf multiplicity function for $U(n) \ltimes \mathbb{H}_n$

We continue to use the notation of the previous sections. Fix α a nonzero real. Let $\pi_{(\lambda,\alpha)} \in \widehat{G}$ and $\tau_\mu \in \widehat{K}$ be as before. To these unitary representations, we attach respectively the generic coadjoint orbit $\mathscr{O}^G_{(\lambda,\alpha)}$ and the coadjoint orbit $\mathscr{O}^K_\mu$. Here $\mathscr{O}^K_\mu$ is the orbit in $\mathfrak{k}^*$ through U_μ i.e., $\mathscr{O}^K_\mu = \mathrm{Ad}^*_K(K)U_\mu$. Now, we turn our attention to the multiplicity $m(\pi_{(\lambda,\alpha)}, \tau_\mu)$ of τ_μ in the restriction of $\pi_{(\lambda,\alpha)}$ to K, we shall prove the following result:

Theorem 3.4.1. *We have*

$$m(\pi_{(\lambda,\alpha)}, \tau_\mu) \neq 0 \Rightarrow n(\mathscr{O}^G_{(\lambda,\alpha)}, \mathscr{O}^K_\mu) \neq 0.$$

Proof. Denote by $\tau_{\alpha,k} = \tau_{(0,...,0,-k)}$ the irreducible representation of K on $\mathbb{C}_k[z_1, ..., z_n]$ with highest weight $(0, ..., 0, -k) \in \mathbb{Z}^n$. Then, we have

$$\begin{aligned} \pi_{(\lambda,\alpha)}\big|_K &= \tau_\lambda \otimes W_\alpha \\ &= \tau_\lambda \otimes \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} \tau_{(0,...,0,-k)} \\ &= \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} \tau_\lambda \otimes \tau_{(0,...,0,-k)}. \end{aligned}$$

Consider again the set $\mathscr{F}_\mu = \left\{z \in \mathbb{C}^n; U_\lambda + \frac{\alpha}{2} z \times z \in \mathscr{O}_\mu^K\right\}$. Now, assume that $m(\pi_{(\lambda,\alpha)}, \tau_\mu) \neq 0$. Then there exists $k \in \mathbb{N}$ such that

$$\tau_\mu \subset \tau_\lambda \otimes \tau_{(0,...,0,-k)}$$

hence

$$\mathscr{O}_\mu \subset \mathscr{O}_\lambda + \mathscr{O}_{(0,...,0,-k)}$$

So, there exists $C \in U(n)$ such that

$$U_\lambda + CU_{(0,...,0,-k)}C^{-1} \in \mathscr{O}_\mu$$

Let $z = C(0, ..., 0, r)^t$ with

$$r = \begin{cases} i\sqrt{\dfrac{2k}{\alpha}} & \text{if } \alpha > 0, \\ \\ \sqrt{\dfrac{-2k}{\alpha}} & \text{if } \alpha < 0. \end{cases}$$

Therefore, we have $\frac{\alpha}{2} z \times z = CU_{(0,...,0,-k)}C^{-1}$. It follows that $\mathscr{F}_\mu \neq \emptyset$, and then $n(\mathscr{O}^G_{(\lambda,\alpha)}, \mathscr{O}^K_\mu) \neq 0$. □

The converse of this theorem is false in general if we take for example $\lambda = (-1, ..., -1)$ and $\mu = (0, ..., 0, -1)$ we will see in the last theorem that $n(\mathscr{O}^G_{(\lambda,\alpha)}, \mathscr{O}^K_\mu) \neq 0$ (see Theorem 4) but

$$\begin{aligned} \tau_\lambda \otimes W_\alpha &= \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} \tau_\lambda \otimes \tau_{(0,...,0,-k)} \\ &= \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} \tau_{(-1,...,-1,-1-k)}. \end{aligned}$$

Therefore $\tau_\mu = \tau_{(0,...,0,-1)} \not\subseteq \tau_\lambda \otimes W_\alpha$ and then $m(\pi_{(\lambda,\alpha)}, \tau_\mu) = 0$.

In the remainder of this paper, we give two situation where the Corwin-Greenleaf multiplicity function is less than one and discuss the relationship between $n(\mathscr{O}^G_{(\lambda,\alpha)}, \mathscr{O}^K_\mu)$ and $m(\pi_{(\lambda,\alpha)}, \tau_\mu)$.

For some particular dominant weight μ, we shall prove in the first situation that $m(\pi_{(\lambda,\alpha)}, \tau_\mu)$ coincides with $n(\mathscr{O}^G_{(\lambda,\alpha)}, \mathscr{O}^K_\mu)$, but in the second situation we have $m(\pi_{(\lambda,\alpha)}, \tau_\mu) \neq n(\mathscr{O}^G_{(\lambda,\alpha)}, \mathscr{O}^K_\mu)$.

Let us first fix some notation that we will use later. Let $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n), \mu = (\mu_1, ..., \mu_n) \in \mathbb{Z}^n$ such that $\lambda_1 \geq ... \geq \lambda_n$ and $\mu_1 \geq ... \geq \mu_n$. To these dominant weights of K we attach the matrix $B_{\lambda,\mu}$ and the vector $V_{\lambda,\mu}$ defined as follows

$$B_{\lambda,\mu} = \left(\prod_{k=1,k\neq j}^{n} (\mu_i - \lambda_k) \right)_{1\leq i,j\leq n} \quad \text{and} \quad V_{\lambda,\mu} = \left(\prod_{k=1}^{n} (\mu_1 - \lambda_k), ..., \prod_{k=1}^{n} (\mu_n - \lambda_k) \right)^T.$$

Now , we are in position to prove

Theorem 3.4.2. *Let $n \geq 2$. Assume that λ is strongly dominant weight of K. Then for any dominant weight μ of K such that $B_{\lambda,\mu}$ is invertible we have*

$$n(\mathscr{O}^G_{(\lambda,\alpha)}, \mathscr{O}^K_\mu) \leq 1.$$

Proof. Let $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$ be a strongly dominant weight of K. We shall denote by H_λ the stabiliser of U_λ in K. Assume that $n(\mathscr{O}^G_{(\lambda,\alpha)}, \mathscr{O}^K_\mu) \neq 0$ for some dominant weight μ of K. Then there exists $z \in \mathbb{C}^n$ such that $U_\lambda + \frac{\alpha}{2} z \times z = AU_\mu A^*$ for some $A \in K$. For all $x \in \mathbb{R}$, we have

$$det(U_\lambda + \frac{\alpha}{2} z \times z - ix\mathbb{I}) = (-i)^n P(x)$$

where P is the unitary polynomial of degree n given by

$$P(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - \lambda_i) - \frac{\alpha}{2} \sum_{j=1}^{n} \prod_{i=1,i\neq j}^{n} (x - \lambda_i)|z_j|^2.$$

Therefore we have $P(\mu_k) = 0$ for $k = 1, ..., n$. It follows that

$$V_{\lambda,\mu} = \frac{\alpha}{2} B_{\lambda,\mu} (|z_1|^2, ..., |z_n|^2)^T$$

Consider again the set $\mathscr{F}_\mu = \left\{ z \in \mathbb{C}^n, U_\lambda + \frac{\alpha}{2} z \times z \in \mathscr{O}^K_\mu \right\}$. Hence

$$\mathscr{F}_\mu = \left\{ z \in \mathbb{C}^n, (|z_1|^2, ..., |z_n|^2)^T = \frac{2}{\alpha} B^{-1}_{\lambda,\mu} V_{\lambda,\mu} \right\}.$$

Since $H_\lambda = \mathbb{T}^n$ the n-dimensional torus, we conclude that $n(\mathscr{O}^G_{(\lambda,\alpha)}, \mathscr{O}^K_\mu) = 1$. □

Corollary 3.4.3. *Let $n \geq 2$. Assume that $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$ is strongly dominant weight of K and $\mu = (\lambda_1, ..., \lambda_{n-1}, \lambda_n - k)$ for some $k \in \mathbb{N}$. Then we have*

$$m(\pi_{(\lambda,\alpha)}, \tau_\mu) = n(\mathscr{O}^G_{(\lambda,\alpha)}, \mathscr{O}^K_\mu)$$

Proof. Let $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$ be a strongly dominant weight of K. Suppose that $\mu = (\lambda_1, ..., \lambda_{n-1}, \lambda_n - k)$ for some $k \in \mathbb{N}$, then $B_{\lambda,\mu}$ is invertible, therefore $n(\mathscr{O}^G_{(\lambda,\alpha)}, \mathscr{O}^K_\mu) \leq 1$. Since $\pi_{(\lambda,\alpha)}\big|_K = \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} \tau_{(\lambda_1,...,\lambda_{n-1},\lambda_n-k)}$ then $m(\pi_{(\lambda,\alpha)}, \tau_\mu) = 1$ and by the theorem 2 we deduce that

$$m(\pi_{(\lambda,\alpha)}, \tau_\mu) = n(\mathscr{O}^G_{(\lambda,\alpha)}, \mathscr{O}^K_\mu).$$

□

Concluding this section, let us prove the following result:

Theorem 3.4.4. *Let $n \geq 2$. If the dominant weight $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$ of K satisfies $\lambda_1 = ... = \lambda_n = a$ for some $a \in \mathbb{Z}$, then for any dominant weight μ of K with $\mu \neq \lambda$ we have*

$$n(\mathscr{O}^G_{(\lambda,\alpha)}, \mathscr{O}^K_\mu) \leq 1$$

Moreover, $n(\mathscr{O}^G_{(\lambda,\alpha)}, \mathscr{O}^K_\mu) \neq 0$ if and only if μ is of the form

Case 1: *if $\alpha > 0$ then $\mu = (\underbrace{b, ..., b}_{p}, \underbrace{a, ..., a}_{q}) \in \mathbb{Z}^n$, $p + q = n$, $b \in \mathbb{Z}$ with $b > a$.*

Case 2: *if $\alpha < 0$ then $\mu = (\underbrace{a, ..., a}_{p}, \underbrace{b, ..., b}_{q}) \in \mathbb{Z}^n$, $p + q = n$, $b \in \mathbb{Z}$ with $a > b$.*

Consequently, if $\mu_{n-1} \neq a$ and $n(\mathscr{O}^G_{(\lambda,\alpha)}, \mathscr{O}^K_\mu) \neq 0$ then $m(\pi_{(\lambda,\alpha)}, \tau_\mu) \neq n(\mathscr{O}^G_{(\lambda,\alpha)}, \mathscr{O}^K_\mu)$.

Proof. Let $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$ be a dominant weight of K such that $\lambda_1 = ... = \lambda_n = a$ with $a \in \mathbb{Z}$. Assume that $n(\mathscr{O}^G_{(\lambda,\alpha)}, \mathscr{O}^K_\mu) \neq 0$ for some dominant weight μ of K. Then there exists $z \in \mathbb{C}^n$ such that $U_\lambda + \frac{\alpha}{2} z \times z = AU_\mu A^*$ for some $A \in K$. For all $x \in \mathbb{R}$, we have

$$det(U_\lambda + \frac{\alpha}{2} z \times z - ix\mathbb{I}) = (-i)^n P(x)$$

with

$$P(x) = (x - a)^{n-1} \left(x - a - \frac{\alpha}{2} \sum_{j=1}^{n} |z_j|^2 \right).$$

Then we have $P(\mu_k) = 0$ for $k = 1, ..., n$. It follows that

$$\begin{cases} \mu_k = a \\ \text{or} \\ \mu_k \neq a \ \text{ and } \ \mu_k = a + \dfrac{\alpha}{2} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} |z_j|^2. \end{cases}$$

Since $\mu \neq \lambda$ then there exists $1 \leq k \leq n$ such that $\mu_k \neq a$.

<u>**Case** $\alpha > 0$</u> : Let $p = max\{1 \leq k \leq n, \mu_k \neq a\}$ then

$$\mu_p = a + \frac{\alpha}{2}\sum_{j=1}^{n}|z_j|^2 > a.$$

Since $\mu_1 \geq ... \geq \mu_p \geq ... \geq \mu_n$, we obtain

$$\mu = (\underbrace{b, ..., b}_{p}\underbrace{a, ..., a}_{q}) \text{ with } b = a + \frac{\alpha}{2}\sum_{j=1}^{n}|z_j|^2.$$

Consider again the set $\mathscr{F}_\mu = \left\{z \in \mathbb{C}^n, U_\lambda + \frac{\alpha}{2} z \times z \in \mathscr{O}_\mu^K\right\}$ then

$$\mathscr{F}_\mu = \left\{ z \in \mathbb{C}^n, \sum_{j=1}^{n}|z_j|^2 = (b-a)\frac{2}{\alpha} \right\}.$$

Since $H_\lambda = K$ we can deduce that $n(\mathscr{O}_{(\lambda,\alpha)}^G, \mathscr{O}_\mu^K) = 1$.

<u>**Case** $\alpha < 0$</u> : Let $l = min\{1 \leq k \leq n, \mu_k \neq a\}$ then

$$\mu_l = a + \frac{\alpha}{2}\sum_{j=1}^{n}|z_j|^2 < a.$$

Hence

$$\mu = (\underbrace{a, ..., a}_{p}\underbrace{b, ..., b}_{q}) \text{ with } b = a + \frac{\alpha}{2}\sum_{j=1}^{n}|z_j|^2, p = l - 1$$

and so $n(\mathscr{O}_{(\lambda,\alpha)}^G, \mathscr{O}_\mu^K) = 1$.

Now, Suppose that $\mu_{n-1} \neq a$, if $\alpha > 0$ we get $\mu = (b, ..., b, a) \in \mathbb{Z}^n$ with $b > a$ and if $\alpha < 0$, $\mu = (\underbrace{a, ..., a}_{p}, \underbrace{b, ..., b}_{q}) \in \mathbb{Z}^n$ with $a > b$ and $q \geq 2$. Since $\pi_{(\lambda,\alpha)}\big|_K = \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} \tau_{(a,...,a,a-k)}$ then $m(\pi_{(\lambda,\alpha)}, \tau_\mu) = 0$ and hence $m(\pi_{(\lambda,\alpha)}, \tau_\mu) \neq n(\mathscr{O}_{(\lambda,\alpha)}^G, \mathscr{O}_\mu^K)$.

This completes the proof of the theorem. $\square$

Acknowledgment

The authors would like to thank the referee for his / her careful reading of our paper and for remarks improving the article.

Bibliography

[1] M. Ben Halima, A. Messaoud, Corwin-Grenleaf multiplicity function for compact extensions of $\mathbb{R}^n$, *Int. J. Math.*, **26** (2015), 146-158.

[2] C. Benson, J. Jenkins, P. Lipsman, and G. Ratcliff, A geometric criterion for Gelfand pairs associated with the Heisenberg group, *Pacific J. Math.*, **178** (1997), 1-36.

[3] C. Benson, J. Jenkins, and G. Ratcliff, The orbit method and Gelfand pairs associated with nilpotent Lie groups, *J. Geometric Analyses*, **9** (1999), 569-582.

[4] L. Corwin, F. Greenleaf, Spectrum and multiplicities for unitary representations in nilpotent Lie groups, *Pacific J. Math.* **135** (1988), 233-267.

[5] G. B. Folland, *Harmonic analysis in phase space*, Princeton University Press, 1989.

[6] R. Howe, Quantum mechanics and partial differential equations,*J. Funct. Anal.*, **38** (1980), 188-255.

[7] A. A. Kirillov, *Lectures on the orbit method*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.

[8] A. Kleppner, R.L. Lipsman, The Plancherel formula for group extensions, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, **4** (1972), 459-516.

[9] T. Kobayashi and S. Nasrin, Multiplicity one theorem in the orbit method, in: *Lie groups and symmetric spaces*, 161-169, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 210, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.

[10] T. Kobayashi, Multiplicity-free theorems of the restrictions of unitary highest weight modules with respect to reductive symmetric pairs, *Progr. Math.*, **255**, Birkhäuser, (2007), 45-109.

[11] T.Kobayashi, Multiplicity-free representations and visible actions on complex manifolds, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, **41** (2005), 497-549.

[12] T. Kobayashi, Restrictions of generalized Verma modules to symmetric pairs, Transformation Groups **17** (2012), 523-546.

[13] R.L. Lipsman, Orbit theory and harmonic analysis on Lie groups with co-compact nilradical, *J. Math. pures et appl.*, **59** (1980), 337-374.

[14] G.W. Mackey, *The theory of unitary group representations*, Chicago University Press, 1976.

[15] G.W. Mackey, *Unitary group representations in physics, probability and number theory*, Benjamin-Cummings, 1978.

[16] S. Nasrin, Corwin-Greenleaf multiplicity functions for Hermitian symmetric spaces and multiplicity-one theorem in the orbit method, *Int. J. Math.*, **21** (2010), 279-296.

Chapter 4

Corwin-Greenleaf multiplicity function for compact extensions of the free two-step nilpotent Lie group

Abstract

Let $\mathbb{F}_{n,2}, n \geq 3$ be the free two-step nilpotent Lie group and let $G = K \ltimes \mathbb{F}_{n,2}$, where K is a closed connected subgroup of $O(n)$ acting on $\mathbb{F}_{n,2}$ by automorphisms. Let $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{k}$ be the respective Lie algebras of G and K, and $\mathrm{pr} : \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{k}^*$ the natural projection. For admissible coadjoint orbits $\mathscr{O}^G \subset \mathfrak{g}^*$ and $\mathscr{O}^K \subset \mathfrak{k}^*$, we denote by $n\big(\mathscr{O}^G, \mathscr{O}^K\big)$ the number of K-orbits in $\mathscr{O}^G \cap \mathrm{pr}^{-1}(\mathscr{O}^K)$, which is called the Corwin-Greenleaf multiplicity function. Let $\pi \in \widehat{G}$ and $\tau \in \widehat{K}$ be the unitary representations corresponding, respectively, to $\mathscr{O}^G$ and $\mathscr{O}^K$ by the orbit method. In this paper, we investigate the relationship between $n(\mathscr{O}^G, \mathscr{O}^K)$ and the multiplicity $m(\pi, \tau)$ of τ in the restriction of π to K.

4.1 Introduction

Let G be a connected and simply connected nilpotent Lie group. By the unitary dual $\widehat{G}$ of G, we mean the set of all equivalence classes of irreducible unitary representations of G. The first representation-theoretic question concerning the group G is the description of the set $\widehat{G}$. If G is a Lie group with Lie algebra $\mathfrak{g}$, then the investigation of the relationship between $\widehat{G}$ and the space $\mathfrak{g}^*/G$ of G-coadjoint orbits turns out to be a deep mathematical problem. In this direction, it is well-known that for a connected and simply connected nilpotent Lie group, the unitary dual $\widehat{G}$ is parametrized by $\mathfrak{g}^*/G$. The bijection

$$\widehat{G} \simeq \mathfrak{g}^*/G$$

is called the Kirillov correspondence (see[7]). Let K be a subgroup of G, we write $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$ for their Lie algebras, and $\mathrm{pr} : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{k}^*$ for the natural projection map between their dual spaces. The important feature of the Kirillov correspondence is the functoriality relatively to inclusion $K \subset G$ of closed connected subgroups. It means that if we start with unitary representations $\pi \in \widehat{G}$ and $\tau \in \widehat{K}$ and if we denote by $\mathscr{O}^G \subset \mathfrak{g}^*$ and $\mathscr{O}^K \subset \mathfrak{k}^*$ their corresponding coadjoint orbits, then the multiplicity $m(\pi, \tau)$ of τ in the direct integral decomposition of the restriction $\pi\big|_K$ (branching rule) where $\pi\big|_K \simeq \int_{\widehat{K}}^{\oplus} m(\pi, \tau) d\mu(\tau)$ and $d\mu$ is a Borel measure on the unitary dual $\widehat{K}$, can be computed in terms of the space $\mathscr{O}^G \cap \mathrm{pr}^{-1}(\mathscr{O}^K)/K$. More precisely, Corwin and Greenleaf proved that the multiplicity $m(\pi, \tau)$ coincides almost everywhere with the "mod K" intersection number $n(\mathscr{O}^G, \mathscr{O}^K)$ defined as follows:

$$n(\mathscr{O}^G, \mathscr{O}^K) := \sharp\Big[\big(\mathscr{O}^G \cap \mathrm{pr}^{-1}(\mathscr{O}^K)\big)/K\Big]$$

(see [4]). The function

$$n : \mathfrak{g}^*/G \times \mathfrak{k}^*/K \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}, \quad (\mathscr{O}^G, \mathscr{O}^K) \longmapsto n(\mathscr{O}^G, \mathscr{O}^K)$$

is known as the Corwin-Greenleaf multiplicity function.

Let K be a compact Lie group acting by automorphisms on a simply connected nilpotent Lie group N. Let $G = K \ltimes N$ be the semidirect product of K and N with the multiplication

$$(k, n)(k', n') = (kk', n(k \cdot n')),$$

where $k, k' \in K$ and $n, n' \in N$. In the spirit of the orbit method due to Kirillov, R. Lipsman established a bijection between a class of coadjoint orbits of G and the unitary dual $\widehat{G}$ (see [9]).

Given a linear form $\psi \in \mathfrak{g}^*$, we denote by $G(\psi)$ its stabilizer in G. Then ψ is called admissible if there exists a unitary character χ of the identity component of $G(\psi)$ such that $d\chi = i\psi_{|\mathfrak{g}(\psi)}$. Let $\mathfrak{g}^\ddagger$ be the set of all admissible linear forms on $\mathfrak{g}$. For $\psi \in \mathfrak{g}^\ddagger$, one can construct an irreducible unitary representation π_ψ by holomorphic induction. According to Lipsman [9], every irreducible unitary representation of G arises in this manner. Thus we obtain a map from the set $\mathfrak{g}^\ddagger$ onto $\widehat{G}$. By observing that π_ψ is equivalent to $\pi_{\psi'}$ if and only if ψ and ψ' lie in the same G-orbit, we get finally a bijection between the space $\mathfrak{g}^\ddagger/G$ of admissible coadjoint orbits and $\widehat{G}$.

Let $\pi \in \widehat{G}$ and $\tau \in \widehat{K}$ correspond to admissible coadjoint orbits $\mathscr{O}^G$ and $\mathscr{O}^K$ respectively, and let $p : \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{k}^*$ be the restriction map. As a functorial property of the orbit method, one expects that the Corwin-Greenleaf multiplicity function $n(\mathscr{O}^G, \mathscr{O}^K)$ coincides with the multiplicity of an irreducible unitary representation τ of K occuring in the direct integral decomposition (branching law) of the restriction $\pi\big|_K$. Research in this direction has been made extensive for nilpotent Lie groups and certain solvable groups, by Kirillov, Corwin, Greenleaf, Lipsman and Fujiwara among others [4,5,6,7] and for compact extensions of $\mathbb{R}^n$ by M.Ben Halima and A.Messaoud [1]. however, very little attention has been paid so far on the Corwin-Greenleaf multiplicity function for nilradical co-compact Lie groups (see [1,2] for some few results).

In this paper we consider the Lie group $G = K \ltimes \mathbb{F}_{n,2}$, the semi direct product of a closed connected subgroup K of $O(n)$ and the free two-step nilpotent Lie group $\mathbb{F}_{n,2}$, inspired by recent multiplicity-free results in the orbit method obtained by Kobayashi and Nasrin [8],[13] (see also [10]), we seek a sufficient condition on the admissible coadjoint orbit $\mathscr{O}^G$ in $\mathfrak{g}^*$ in order that

$$n(\mathscr{O}^G, \mathscr{O}^K) \leq 1 \text{ for any admissible coadjoint orbit } \mathscr{O}^K \subset \mathfrak{k}^*.$$

4.2 Coadjoint orbits of $K \ltimes \mathbb{F}_{n,2}$

Consider the free-two step nilpotent Lie algebra $\mathfrak{f}_{n,2} = \mathbb{R}^n \oplus \bigwedge^2 \mathbb{R}^n, n \geq 3$, with Lie bracket

$$[(u,\xi),(v,\eta)] = (0, u \wedge v).$$

The simply connected nilpotent Lie group which corresponds to $\mathfrak{f}_{n,2}$ is called the free two-step nilpotent Lie group and is denoted $\mathbb{F}_{n,2}$. In terms of exponential coordinates, the multiplication rule in $\mathbb{F}_{n,2}$ is expressed by

$$(u,\xi)\cdot(v,\eta) = (u+v, \xi+\eta+\frac{1}{2}u \wedge v).$$

Using the canonical basis of $\mathbb{R}^n$, we identify the subspace $\mathfrak{z} = \bigwedge^2 \mathbb{R}^n$ of $\mathfrak{f}_{n,2}$ with the vector space $\mathfrak{so}(n)$ of real $n \times n$ skew-symmetric matrices so that $u \wedge v$ correspond to the matrix $M_{u,v} = vu^t - uv^t$.

Let K be a closed connected subgroup of $O(n)$. The group K acts on $\mathbb{F}_{n,2}$ via

$$k \cdot (u, A) = (ku, kAk^t),$$

and then one can form the semidirect product $G = K \ltimes \mathbb{F}_{n,2}$.We shall identify $\mathbb{F}_{n,2}$ with its Lie algebra $\mathfrak{f}_{n,2}$ by the exponential map. The Campbell-Hausdorff formula shows that the group product and Lie bracket are related by

$$XY = X + Y + \frac{1}{2}[X, Y]$$

for $X, Y \in \mathfrak{f}_{n,2}$. The inverse for X is $X^{-1} = -X$. The derived action of K on $\mathfrak{f}_{n,2}$ coincides with the action of K on $\mathbb{F}_{n,2}$ under this identification. We write $k \cdot X$ for the action of $k \in K$ on $X \in \mathfrak{f}_{n,2}$. Similarly, $U.X$ denotes the action of $U \in \mathfrak{k}$ on $X \in \mathfrak{f}_{n,2}$. The contragredient actions of K and $\mathfrak{k}$ on $\nu \in \mathfrak{f}_{n,2}^*$ are $(k \cdot \nu)(X) = \nu(k^{-1} \cdot X)$ and $(U \cdot \nu)(X) = -\nu(U \cdot X)$ respectively. Let us denote by (k, X) the elements of G where $k \in K$ and $X \in (\mathfrak{f}_{n,2} = \mathbb{F}_{n,2})$. The group law of G is given by

$$(k_1, X_1) \cdot (k_2, X_2) = (k_1 k_2, X_1(k_1 \cdot X_2))$$

and one has $(k, X)^{-1} = (k^{-1}, k^{-1} \cdot X^{-1}) = (k^{-1}, -k^{-1} \cdot X)$. Elements of $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \ltimes \mathfrak{f}_{n,2}$ will be written as (U, X) or as $U + X$ where $U \in \mathfrak{k}$ and $X \in \mathfrak{f}_{n,2}$. The Lie bracket in $\mathfrak{g}$ is given by

$$[(U_1, X_1), (U_2, X_2)] = ([U_1, U_2], [X_1, X_2] + U_1 \cdot X_2 - U_2 \cdot X_1).$$

In particular, $[U, X] = U.X \in \mathfrak{f}_{n,2}$. For $k \in K, U \in \mathfrak{k}$ and $X, Y \in \mathfrak{f}_{n,2}$, from the facts that K and $\mathbb{F}_{n,2}$ are subgroups of G one has

$$\mathrm{Ad}_G(k)U = \mathrm{Ad}_K(k)U,$$

$$\mathrm{Ad}_G(Y)X = \mathrm{Ad}_{\mathbb{F}_{n,2}}(Y)X = X + [Y, X]$$

and since $(k, 0)(e, X)(k, 0)^{-1} = (e, k \cdot X)$ one obtains

$$\mathrm{Ad}_G(k)X = k \cdot X$$

and if we use the fact that $\mathfrak{f}_{n,2}$ is an ideal in $\mathfrak{g}$ one has

$$\mathrm{Ad}_G(Y)U = U - U \cdot Y - \frac{1}{2}[Y, U \cdot Y].$$

Then by a direct computation, one obtains that the adjoint action of G is

$\mathrm{Ad}_G(k,Y)(U,X)$

$$= \Big(\mathrm{Ad}_K(k)U, k\cdot X - (\mathrm{Ad}_K(k)U)\cdot Y + [Y, k\cdot X] - \frac{1}{2}[Y, (\mathrm{Ad}_K(k)U)\cdot Y]\Big).$$

Identify the Lie algebra $\mathfrak{f}_{n,2}$ with its vector dual space $\mathfrak{f}^*_{n,2}$ through the K-invariant scalar product

$$\langle (u,A),(v,B)\rangle = u^t v - \frac{1}{2}tr(AB).$$

Then, each linear functional $\ell \in \mathfrak{g}^*$ can be identified with an element $(U,X)\in\mathfrak{g}$ such that

$$\begin{aligned} \ell(V,Y) &= \langle (U,X),(V,Y)\rangle \\ &= -\frac{1}{2}tr(UV) + \langle X, Y\rangle \end{aligned}$$

for $(V,Y)\in\mathfrak{f}_{n,2}$. Following [3], we define a map $\times : \mathfrak{f}_{n,2}\times\mathfrak{f}_{n,2}\to\mathfrak{k}$ by the relation

$$-\frac{1}{2}tr((Y\times X)U) = \langle X, U\cdot Y\rangle$$

for $X,Y\in\mathfrak{f}_{n,2}$ and $U\in\mathfrak{k}$. The map $\times : \mathfrak{f}_{n,2}\times\mathfrak{f}_{n,2}\to\mathfrak{k}$ satisfies the equivariance property:

$$\mathrm{Ad}_K(k)(Y\times X) = (k\cdot Y)\times(k\cdot X).$$

The coadjoint action of G is thus given by

$\mathrm{Ad}^*_G(k,Y)(U,X)$

$$\begin{aligned} &= \Big(\mathrm{Ad}_K(k)U + Y\times(k\cdot X) + \frac{1}{2}Y\times \mathrm{ad}^*_{\mathbb{F}_{n,2}}(Y)(k\cdot X), \mathrm{Ad}^*_{\mathbb{F}_{n,2}}(Y)(k\cdot X)\Big) \\ &= k\cdot\Big(U + (k^{-1}\cdot Y)\times X + \frac{1}{2}(k^{-1}\cdot Y)\times \mathrm{ad}^*_{\mathbb{F}_{n,2}}(k^{-1}\cdot Y)X, \mathrm{Ad}^*_{\mathbb{F}_{n,2}}(k^{-1}\cdot Y)X\Big) \end{aligned}$$

where $k\cdot(U,X) := (\mathrm{Ad}_K(k)U, k\cdot X) = \mathrm{Ad}_G(k,0)(U,X)$ (compare[3]). From this, one obtains the following description of the coadjoint orbit of G through $(U,X)\in\mathfrak{g}^*$.

$$\begin{aligned} \mathscr{O}^G_{(U,X)} &= \Big\{\Big(\mathrm{Ad}_K(k)U + Y\times(k\cdot X) + \frac{1}{2}Y\times \mathrm{ad}^*_{\mathbb{F}_{n,2}}(Y)(k\cdot X), \mathrm{Ad}^*_{\mathbb{F}_{n,2}}(Y)(k\cdot X)\Big); \\ &\quad k\in K,\ Y\in\mathfrak{f}_{n,2}\Big\} \\ &= \Big\{k\cdot\Big(U + (k^{-1}\cdot Y)\times X + \frac{1}{2}(k^{-1}\cdot Y)\times \mathrm{ad}^*_{\mathbb{F}_{n,2}}(k^{-1}\cdot Y)X, \mathrm{Ad}^*_{\mathbb{F}_{n,2}}(k^{-1}\cdot Y)X\Big); \\ &\quad k\in K,\ Y\in\mathfrak{f}_{n,2}\Big\} \end{aligned}$$

Letting k and Y range over K and $\mathfrak{n}$ respectively, the coadjoint orbit $\mathscr{O}^G_{(U,X)}$ can be written

$$\mathscr{O}^G_{(U,X)} = \Big\{k\cdot\Big(U + Y\times X + \frac{1}{2}Y\times \mathrm{ad}^*_{\mathbb{F}_{n,2}}(Y)X, \mathrm{Ad}^*_{\mathbb{F}_{n,2}}(Y)X\Big);\ k\in K,\ Y\in\mathfrak{f}_{n,2}\Big\}$$

4.3 Irreducible unitary representation of $K \ltimes \mathbb{F}_{n,2}$

4.3.1 On Lie groups with co-compact nilradical

In this paragraph, N is a simply connected nilpotent Lie group with Lie algebra $\mathfrak{n}$, and K a compact Lie group with Lie algebra $\mathfrak{k}$ that acts smoothly by automorphisms on N. Consider the semidirect product $G = K \ltimes N$. The multiplication rule in G is given by

$$(k_1, x_1) \cdot (k_2, x_2) = (k_1 k_2, x_1(k_1 \cdot x_2))$$

for $(k_1, x_1), (k_2, x_2) \in G$. The corresponding Lie algebra of G is denoted by $\mathfrak{g}$. For $\rho \in \widehat{N}$, let $\mathscr{O}_\rho^N$ denote the coadjoint orbit associated to ρ by the Kirillov orbit method. For $k \in K$, let $\rho_k(x) := \rho(k \cdot x)$ so that ρ_k is another irreducible unitary representation of N in the Hilbert space $\mathscr{H}_\rho$ of ρ. The stabilizer $K_\rho \subset K$ of ρ is

$$K_\rho = \{k \in K; \rho_k \text{ is unitarily equivalent to } \rho\}.$$

Note that $K_\rho = \left\{k \in K;\ k \cdot \mathscr{O}_\rho^N = \mathscr{O}_\rho^N\right\}$. For each $k \in K$, one has a unitary operator $W_\rho(k) : \mathscr{H}_\rho \to \mathscr{H}_\rho$, unique up to scalar multiplies, that intertwines ρ with ρ_k. Since the operators $W_\rho(k_1 k_2)$ and $W_\rho(k_1)W_\rho(k_2)$ intertwines ρ with $\rho_{k_1 k_2}$ for any $k_1, k_2 \in K$, there exists a map $\sigma(= \sigma_\rho) : K_\rho \times K_\rho \to U(1)$ satisfying

$$W_\rho(k_1 k_2) = \sigma(k_1, k_2) W_\rho(k_1) W_\rho(k_2).$$

We call W_ρ a σ-representation of K_ρ. Let now τ be a $\bar{\sigma}$-representation of K_ρ. We define a unitary representation $\tilde{\pi}$ of $K_\rho \ltimes N$ by

$$\tilde{\pi}(k, x) = \tau(k) \otimes \rho(x) \circ W_\rho(k).$$

Using the Mackey induction [12], one sees that $\pi = Ind_{K_\rho \ltimes N}^G(\tilde{\pi})$ is irreducible. Furthermore, the Mackey theory [11, 12] guarantees that all irreducible unitary representations of G are obtained in this way. We also have

$$\pi\big|_K \simeq Ind_{K_\rho}^K(\tau \otimes W_\rho).$$

4.3.2 Unitary dual of $K \ltimes \mathbb{F}_{n,2}$

Let us now return to the context and notation of section 2. As explained above, the description of the unitary dual of $G = K \ltimes \mathbb{F}_{n,2}$ is based on the Mackey theory. We first recall the irreducible unitary representations of $\mathbb{F}_{n,2}$.

Theorem 4.3.1. *Let ρ be an irreducible unitary representation of $\mathbb{F}_{n,2}$. Then there is a direct sum decomposition $X+Y+Z$ of $\mathbb{R}^n$, a unique α in $\mathfrak{z}^* = \mathfrak{so}(n)^*$, and a unique β in Z^* such that ρ can be realized on $L^2(X)$ as follows*

$$[\rho(x+y+z,A)f](x') = e^{i\alpha(A)}e^{i\beta(z)}e^{\frac{i}{2}\alpha((x+2x')\wedge y)}f(x+x')$$

where $x, x' \in X$, $y \in Y$, $z \in Z$, $A \in \mathfrak{so}(n)$, and $f \in L^2(X)$.

Now we recall how the Mackey theory describes $\widehat{G}$ in terms of representations of $\mathbb{F}_{n,2}$ and subgroups K.

The group K acts on the unitary dual $\widehat{\mathbb{F}_{n,2}}$ of $\mathbb{F}_{n,2}$ via

$$k \cdot \pi = \pi \circ k^{-1}$$

for $k \in K$, $\pi \in \widehat{\mathbb{F}_{n,2}}$. Let K_π denote the stabilizer of π (up to unitary equivalence).

Note that

$$K_\pi = K_{\mathscr{O}}$$

where $\mathscr{O} = \mathscr{O}^N(\pi) \subset \mathfrak{f}_{n,2}^*$ is the coadjoint orbit for π.

Lemma 2.3 in [3] shows that there is a (non-projective) unitary representation

$$W_\pi : K_\pi \to U(\mathscr{H}_\pi)$$

of K_π in the representation space $\mathscr{H}_\pi$ for π that intertwines $k \cdot \pi$ with π:

$$(k \cdot \pi)(x) = W_\pi(k)^{-1}\pi(x)W_\pi(k)$$

for all $k \in K_\pi$, $x \in \mathbb{F}_{n,2}$. Given any irreducible unitary representation α of K_π Mackey theory ensures that

$$\rho_{\pi,\alpha} = Ind_{K_\pi \ltimes \mathbb{F}_{n,2}}^{K \ltimes \mathbb{F}_{n,2}}\big((k,x) \mapsto \alpha(k) \otimes \pi(x)W_\pi(k)\big)$$

is an irreducible unitary representation of G. Moreover, up to unitary equivalence, all irreducible unitary representation of G have this form. That is

$$\widehat{G} = \Big\{\rho_{\pi,\alpha} \ : \ \pi \in \widehat{\mathbb{F}_{n,2}},\ \alpha \in \widehat{K_\pi}\Big\}.$$

We say that $\rho = \rho_{\pi,\alpha}$ has Mackey parameters (π, α). For our purposes it important to note that the intertwining representation W_π can be canonically chosen, so that the parameters (π, α) completely determine $\rho_{\pi,\alpha}$. Corollary 3.2 in [9] establishes this, via positive polarisation, in the general setting of Lie groups with co-compact nilradical. In the current context this observation amounts to the proof of Lemma 2.3 in [3]

Bibliography

[1] M. Ben Halima, A. Messaoud, Corwin-Grenleaf multiplicity function for compact extensions of $\mathbb{R}^n$, *Int. J. Math.*, **26** (2015), 146-158.

[2] M. Ben Halima, A. Messaoud, Corwin-Grenleaf multiplicity function for compact extensions of the Heisenberg group, (soumis).

[3] C. Benson, J. Jenkins, and G. Ratcliff, The orbit method and Gelfand pairs associated with nilpotent Lie groups, *J. Geometric Analyses*, **9** (1999), 569-582.

[4] L. Corwin, F. Greenleaf, Spectrum and multiplicities for unitary representations in nilpotent Lie groups, *Pacific J. Math.* **135** (1988), 233-267.

[5] H. Fujiwara, Représentations monomiales des groupes de Lie résolubles exponentiels, *The Orbit Method in Representation Theory*, Prog. Math., Vol. 82 Birkhauser, 1990, pp 61-84.

[6] F.P. Greenleaf, Harmonic analysis on nilpotent homogeneous spaces, *Contemp. Math.*, **177** (1994), 1-26.

[7] A. A. Kirillov, *Lectures on the orbit method*, Graduate Studies in Mathematics, Vol.64 Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.

[8] T. Kobayashi and S. Nasrin, Multiplicity one theorem in the orbit method, in: *Lie groups and symmetric spaces*, 161-169, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 210, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.

[9] R.L. Lipsman, Orbit theory and harmonic analysis on Lie groups with co-compact nilradical, *J. Math. pures et appl.*, **59** (1980), 337-374.

[10] R.L. Lipsman, Attributes and applications of the Corwin-Greenleaf multiplicity function, *Contemp. Math.*, **177** (1994), 27-46.

[11] G.W. Mackey, *The theory of unitary group representations*, Chicago University Press, 1976.

[12] G.W. Mackey, *Unitary group representations in physics, probability and number theory*, Benjamin-Cummings, 1978.

[13] S. Nasrin, Corwin-Greenleaf multiplicity functions for Hermitian symmetric spaces and multiplicity-one theorem in the orbit method, *Int. J. Math.*, **21** (2010), 279-296.

Majdi Ben Halima and Anis Messaoud*

Preparatory Institute for Engineering Studies of Gafsa,

Department of Mathematics

University of Gafsa

El Khayzorane street-Zaroug- Gafsa 2112

2100-Gafsa, Tunisia

E-mail adress*: anis_mess1@yahoo.fr