



HAL
open science

Méthode global/local non-intrusive pour les simulations cycliques non-linéaires

Maxime Blanchard

► **To cite this version:**

Maxime Blanchard. Méthode global/local non-intrusive pour les simulations cycliques non-linéaires. Mécanique des solides [physics.class-ph]. Université Paris Saclay (COMUE), 2018. Français. NNT : 2018SACLN003 . tel-01852574

HAL Id: tel-01852574

<https://theses.hal.science/tel-01852574>

Submitted on 2 Aug 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Méthode *global/local* non-intrusive pour les simulations cycliques non-linéaires

Thèse de doctorat de l'Université Paris-Saclay
préparée à l'École Normale Supérieure de Cachan
(École Normale Supérieure Paris-Saclay)

École doctorale n°579 Sciences mécaniques et énergétiques, matériaux et
géosciences
Spécialité de doctorat: Solides, structures et matériaux

Thèse présentée et soutenue à l'École Normale Supérieure Paris-Saclay, le
18 Janvier 2018, par

M. Maxime Blanchard

Composition du Jury :

M. Patrick Laborde	(Président)
Professeur Université de Toulouse 3 Paul Sabatier	
M. Habibou Maitournam	(Examineur)
Professeur ENSTA Paristech	
M. Jean-Michel Bergheau	(Rapporteur)
Professeur École Nationale d'Ingénieurs de Saint-Étienne	
M. Laurent Stainier	(Rapporteur)
Professeur École Centrale de Nantes	
M. Olivier Allix	(Directeur)
Professeur ENS Paris-Saclay	
M. Pierre Gosselet	(Co-directeur)
Chargé de Recherche CNRS, LMT ENS Paris-Saclay	
M. Geoffrey Desmeure	(Examineur)
Chef d'unité Safran Aircraft Engines	

Je tiens à témoigner de chaleureux remerciements à...

... l'ensemble des membres de mon jury qui m'ont fait l'honneur d'accepter (en un temps record) de participer et de m'accorder du temps afin de valider et d'échanger sur le travail effectué. Un grand merci donc à Patrick Laborde pour la présidence du jury et son regard bienveillant sur ces travaux, aux rapporteurs Laurent Stainier et Jean-Michel Bergheau pour leurs apports et corrections dans les aspects de la mécanique non-linéaire et de calculs de structures relatifs à cette thèse. Enfin, des remerciements appuyés à Habibou Maitournam, qui était une des « premières références bibliographiques » sur lesquelles j'ai commencé à travailler. Le comportement asymptotique des structures étant une de ses spécialités, ses remarques ont beaucoup apporté à ma compréhension de ces phénomènes.

... mon équipe de direction de thèse Olivier Allix, Pierre Gosselet et Geoffrey Desmeure. Nous avons toujours dit que nous formions une super équipe avec chacun nos spécialités et ce fût un bonheur de travailler en sachant que je pouvais compter sur vous à n'importe quel moment et que l'on pourrait trouver une solution à presque tous les problèmes rencontrés. Merci pour votre soutien sans failles durant ces trois années et plus avec tout de même une mention spéciale à Olivier pour la dernière ligne droite incroyable que nous avons mené. Je n'oublie pas Lionel Gendre, qui fût le pionnier sur ces travaux avec quasiment la même équipe. Son travail exceptionnel et la rigueur des informations qu'il a laissé, m'ont permis de réaliser ces travaux qui n'auraient pas été les mêmes sans son héritage.

... Marion Gruin, Adrien Darlet et à toute l'équipe des méthodes mécaniques de Safran Aircraft Engines de Villaroche pour leur accueil et soutien sans faille durant ces trois ans. Même si je travaillais qu'occasionnellement sur le site, je n'avais pas l'impression d'être mis à l'écart et c'est avec un grand plaisir que je venais à chaque fois. Un remerciement spécial à Christian Palecnzy, mon tuteur de stage de M1 qui m'a donné goût à l'aéronautique et au travail en milieu industriel ainsi qu'à Erwan Morice pour notre collaboration sur cette thématique en fin de thèse.

... tout le laboratoire du LMT pour l'atmosphère incroyable qui a régné pendant toutes ces années, je souhaite parler d'amitié au delà des relations professionnelles. Mention spéciale à l'équipe du centre de calcul Frisou, Philippe Sanchez et Pierre Lucotte pour leur patience et aide dans les moments difficiles de l'informatique. « À mon clan » dont les membres formeront à jamais des amis.

... à toute la famille pour leur soutien durant ces années (mention spéciale à mon petit flocon). Ce fût un moment magique de vous avoir autour de moi à la soutenance et merci encore, merci, pour ce souvenir magnifique. Merci aux autres grands parents pour les corrections de ce manuscrit effectuées chacun sur votre ordinateur. À ma grand mère Henriette partie trop tôt durant cette dernière année.

Table des matières

Table des matières	i
Table des figures	v
Liste des tableaux	ix
Introduction	1
1 État de l'art	5
1 Méthodes de prise en compte de détails ou de comportements locaux . . .	5
1.1 Une description <i>macroscopique</i> est suffisante	7
1.2 La description <i>micro</i> est nécessaire partout	9
1.3 Méthodes entre homogénéisation et « <i>concurrent multiscale</i> » . . .	12
1.4 Méthodes d'enrichissement local	14
1.5 Méthodes de couplage de type <i>global/local</i>	19
2 Résolutions non-linéaires et accélérations	25
2.1 Méthodes de Newton	25
2.2 Méthodes de Newton modifiée et de quasi-Newton	26
2.3 <i>Aitken's δ^2</i>	28
2.4 Gradient conjugué non-linéaire	29
3 Méthodes numériques pour chargements cycliques	30
3.1 Méthodes semi-analytiques	31
3.2 Méthode de Zarka	31
3.3 Méthode des sauts de cycles	32
3.4 Méthodes à grands incréments de temps de type <i>LaTin</i>	35
3.5 Méthode cyclique directe	37
3.6 Contrôle optimal	39
3.7 Homogénéisation asymptotique temporelle	40
3.8 Méthode de parallélisation en temps	41
2 Loi de comportement matériau utilisée et intégration temporelle	45
1 Phénomènes apparaissant à haute température	45
1.1 Observations issues d'essais de traction	46
1.2 Le fluage et la relaxation	47

2	Formulation thermodynamique	49
2.1	Partition des déformations	49
2.2	Choix des variables thermodynamiques	49
2.3	Lois d'évolution	50
3	Loi de comportement retenue	51
3.1	Potentiel plastique <i>rapide</i>	52
3.2	Potentiel plastique lent	53
3.3	Paramètres de la loi de comportement	54
4	Illustration de la loi de comportement	54
4.1	Implémentation dans un code commercial	54
4.2	Essais numériques	55
4.3	Comportements asymptotiques des structures	58
5	Application aux calculs non linéaires de structures	59
5.1	Modèles traités et difficultés rencontrées	59
5.2	Pratiques d'intégration temporelle	60
5.3	Application au modèle de référence	67
3	Extension du couplage non-intrusif dans le cadre de la plasticité généralisée	73
1	Limitation des versions précédentes et objectifs	73
2	Algorithme <i>global/local</i> non-intrusif non-linéaire	74
2.1	Particularités de la version proposée	74
2.2	Formulation continue	75
2.3	Formulation par éléments finis	80
2.4	Traitement des maillages non-conformes	83
2.5	Convergence générale de l'algorithme	85
3	Interprétation en tant que méthode de Schwarz	87
3.1	Décomposition du modèle de référence	87
3.2	Algorithme de résolution	88
3.3	Lien avec la méthode <i>global/local</i> et apports	88
4	Techniques d'accélération de convergence	90
4.1	Quasi-Newton	90
4.2	<i>Aitken's</i> δ^2	90
4.3	Gradient conjugué non-linéaire	90
5	Résultats numériques	94
5.1	Convergence	94
5.2	Influence de la conformité des interfaces	95
5.3	Précision	95
5.4	Stagnation du résidu et de l'erreur	96
4	Méthode <i>global/local</i> pour calculs cycliques	99
1	Schémas de couplage temporels proposés	100
1.1	Distinction <i>global/local</i> des histoires en temps	100
1.2	Idées générales pour le couplage	100

1.3	Couplage fixe sur grille arbitraire	101
1.4	Couplage faible	102
1.5	Couplage fort	103
1.6	Apport de la pré-discrétisation	103
2	Illustrations et performances	105
2.1	Problème traité et évaluations de la précision	105
2.2	Grilles d'intégration temporelles obtenues selon le couplage	105
2.3	Précision des solutions obtenues	113
2.4	Bilan des performances concernant les couplages	117
2.5	Vers un couplage haute performance	119
3	Cas des maillages non-conformes	121
3.1	Intégration temporelle	121
3.2	Convergence	122
3.3	Écart en fin de cycle	122
3.4	Résultats sur un cycle de chargement	122
5	Développement et couplage d'une méthode pour le calcul du cycle limite	125
1	Réponse cyclique de structures élasto-viscoplastiques	125
1.1	Problème traité	125
1.2	Analyse de la stabilisation	126
2	Analyse par méthode de sauts de cycles	127
2.1	Principe de la méthode	127
2.2	Échantillonnage de la solution	128
2.3	Procédé d'extrapolation	129
2.4	Calcul de la longueur de saut	130
2.5	Reconstruction de la solution	134
2.6	Développement non-intrusif	137
2.7	Algorithme retenu	139
3	Illustrations numériques	140
3.1	Facteur d'extrapolation	140
3.2	Calcul de la longueur de saut par minimum	142
3.3	Calcul de la longueur de saut en moyenne	143
4	Couplage avec la méthode <i>global/local</i>	146
4.1	Application de la méthode <i>global/local</i>	146
4.2	Illustrations numériques	147
6	Application à une structure de complexité industrielle	151
1	Présentation du cas test	151
2	Difficultés liées au 3D	154
2.1	Gestion des interfaces et des incompatibilités de maillage	154
2.2	Précaution quand au choix des éléments	156
2.3	Gestion des données écrites par le code commercial	157
3	Résultats sur un cycle de chargement	158

3.1	Pré-discrétisation	158
3.2	Résultats obtenus	159
4	Application des sauts de cycles	162
5	Spécificités liées au traitement d'un cas métier	163
Conclusion et perspectives		165
A Annexes		169
1	Paramètres matériaux	169
2	Résultats des couplages temporels	169
Bibliographie		175

Table des figures

1	Génération actuelle de moteurs <i>Safran Aircraft Engines</i> et <i>CFM</i>	2
2	Application sur aube de turbine haute pression	3
1.1	Principe de la méthode FE ² (adapté de [Feyel et Chaboche, 2000])	8
1.2	Domaines de Schwarz avec et sans recouvrement	9
1.3	Illustration de l'approche multi-grilles	11
1.4	Application de la méthode HDPM [Oden et Zohdi, 1997]	16
1.5	Type de modèle utilisé en <i>submodeling</i> [Cresta, 2008]	19
1.6	Modèles intervenant dans la méthode <i>global/local</i>	23
1.7	Espaces de projection : (a) adaptation (b) adaptation avec plasticité (c) accommodation [Khalij <i>et al.</i> , 2002]	32
1.8	Description de la solution en terme de cycles plutôt qu'en temps	33
1.9	Description des étapes de la méthode [Relun <i>et al.</i> , 2013]	36
1.10	Parallélisation en temps <i>via</i> deux grilles imbriquées	41
2.1	Évolution de la mise en radeau de la micro-structure lors d'un essai de traction à haute température [Dirand, 2011]	46
2.2	Essai de traction à vitesse de déformation variable [Lemaitre <i>et al.</i> , 2009]	47
2.3	Phénomènes liés à l'élasto-viscoplasticité [Lemaitre <i>et al.</i> , 2009]	48
2.4	Essais numériques de fluage et de relaxation	55
2.5	Répartition entre les potentiels pendant le fluage	56
2.6	Répartition entre les potentiels pendant la relaxation	56
2.7	Influence de la vitesse de déformation	57
2.8	Répartition de la plasticité entre les potentiels lent et rapide	57
2.9	Dépendance à la température	58
2.10	Comportement asymptotique des structures sous chargement cyclique	59
2.11	Modèles élémentaires	59
2.12	Structures utilisées	60
2.13	Analyse de la zone critique	63
2.14	Influence de la grille d'intégration sur la plasticité cumulée rapide	64
2.15	Influence de la grille d'intégration sur la plasticité cumulée lente	64
2.16	Pré-discrétisations obtenues sur un cycle	66
2.17	Grilles temporelles des calculs de référence	68
2.18	Solution de référence en fin de cycle en contrainte de Mises	69

2.19	Solution de référence en fin de cycle : plasticité rapide	69
2.20	Solution de référence en fin de cycle : plasticité lente	70
3.1	Modèles continus mis en œuvre dans la méthode globale/locale	75
3.2	Modèles 2D avec interface non-conforme	83
3.3	Schéma de principe du raccord effectué	85
3.4	Modèles global et local en tant que sous-domaines de Schwarz	89
3.5	Performances du gradient conjugué	93
3.6	Influence de la discrétisation de la recherche linéaire (<i>RLs</i>)	94
3.7	Solution de référence obtenue sur un incrément	95
3.8	Convergences obtenues avec les différentes techniques (conformes) . . .	96
3.9	Convergence dans les cas conformes et non-conformes	97
3.10	Niveaux d'erreurs relatives vraies	97
3.11	Convergence du résidu en fonction de la précision	98
4.1	Définition initiale d'un cycle de chargement	99
4.2	Grilles temporelles des approches de couplage faible	107
4.3	Grilles temporelles des approches de couplage fort	107
4.4	Évolution de l'écart en montée à l'itération 0	109
4.5	Évolution de l'écart en montée à l'itération 1	109
4.6	Évolution de l'écart en montée à l'itération 3	110
4.7	Suivi des déplacements lors d'une décharge avec les itérations	110
4.8	Nombre de <i>cutbacks</i> par incrément (couplage faible avec $\Delta p_{cut} = 1e^{-4}$) .	111
4.9	Évolution erreur descente itération 0	111
4.10	Évolution erreur descente itération 1	112
4.11	Évolution erreur descente itération 10	112
4.12	Évolution de la solution plastique en fin de cycle	113
4.13	Solution de l'approche monolithique en fin de cycle ($\Delta p_r = 1e^{-5}$)	114
4.14	Précision en fin de cycle obtenue en <i>couplage faible global/local</i>	115
4.15	Précision en fin de cycle obtenue en <i>couplage faible global/local</i>	116
4.16	Maillages locaux utilisés et éléments post-traités	117
4.17	Précision sur le cycle complet pour une intégration à $\Delta p_{cut} = 1e^{-4}$	118
5.1	Comportement cyclique (150 cycles) du modèle de référence	126
5.2	Comportement asymptotique de la zone locale	127
5.3	Procédé d'échantillonnage de la solution temporelle	128
5.4	Solutions échantillonnées en plasticité cumulée rapide	129
5.5	Stabilisation des déformations plastiques pour l'élément #2272	129
5.6	Visualisation des cartes de dérivées	130
5.7	Données de longueurs de saut	132
5.8	Solution sauts de cycles en plasticité cumulée rapide (élément #10775) . .	135
5.9	Schéma de principe d'une extrapolation avec relaxation	136
5.10	Solution sauts de cycles en contraintes élément #10093	137
5.11	Implémentation non-intrusive	138

5.12	Sélection des éléments selon η_{s-1} (1 ^{er} saut)	141
5.13	Cartes de longueurs de saut pour différentes tentatives (minimum)	142
5.14	Solutions par calcul par minimum (élément #10775)	143
5.15	Solutions par calcul en moyenne (élément #10775)	144
5.16	Cartes de différents sauts pour $\eta_{s-1} = 2e^{-3}$ (minimum)	145
5.17	Solutions par calcul en moyenne et $\eta_{s-1} = 2e^{-3}$ (élément #10775)	145
5.18	Solutions par analyse <i>global/local</i> (élément #670 le plus chargé)	147
5.19	Performances obtenues pour l'analyse <i>global/local</i> (élément #10775)	148
6.1	Représentations du modèle global	152
6.2	Maillage global	153
6.3	Modèles liés au bord d'attaque	153
6.4	Modèles liés au bord de fuite	154
6.5	Interfaces entre les modèles	155
6.6	Incompatibilité et conformité des interfaces	155
6.7	Efforts de réaction sur les interfaces	156
6.8	Efforts de réaction obtenus selon le type d'élément utilisé	157
6.9	Intégrations réalisées	158
6.10	Solutions globales au maximum de la mission	159
6.11	Courbes de convergence	160
6.12	Écarts relatifs obtenus sur le cycle pour le bord d'attaque	160
6.13	Écarts relatifs obtenus sur le cycle pour le bord de fuite	161
6.14	Technique de saut de cycle appliquée au modèle global 3D	162
A.1	Solution de l'approche par <i>submodeling</i> en fin de cycle	170
A.2	Précision en fin de cycle avec la méthode <i>global/local</i> obtenue en <i>couplage fort</i> conforme	171
A.3	Précision en fin de cycle avec GLM obtenue en <i>couplage faible</i> non-conforme	172
A.4	Écart sur un cycle pour l'élément #669 (modèles non-conformes)	173
A.5	Écart sur un cycle pour l'élément #11724 (modèles non-conformes)	173

Liste des tableaux

2.1	Paramètres matériaux de l'IN100 (800°C) [Lemaitre <i>et al.</i> , 2009]	54
2.2	Intégration temporelle des calculs de référence	67
2.3	Répartition des <i>cutbacks</i> sur le cycle	68
2.4	Niveaux d'erreur sur l'élément le plus chargé sur les « références »	71
4.1	Écarts et temps de calculs obtenus selon les grilles utilisées	101
4.2	Intégration temporelle sur un cycle selon le couplage utilisé	106
4.3	Répartition des <i>cutbacks</i> sur le cycle	108
4.4	Écart sur un cycle par rapport référence pour l'élément #436	115
4.5	Performances de l'accélération de convergence	120
4.6	Répartition des <i>cutbacks</i> sur le cycle : modèles non-conformes	121
4.7	Niveaux d'erreur sur l'élément le plus chargé # 436 ($\Delta p_{cut} = 1e^{-4}$)	122
5.1	Valeurs de q_{Extr} obtenues selon les essais	141
5.2	Performances obtenues pour le calcul en minimum	142
5.3	Performances obtenues pour le calcul en minimum	144
6.1	Dimensions des maillages mis-en-jeu	152

Introduction

Le contexte aéronautique est caractérisé par une concurrence économique et des normes environnementales qui poussent à réduire drastiquement les émissions de gaz à effet de serre ainsi que la consommation des moteurs. Ces diminutions peuvent atteindre 15% pour des moteurs comme le *Leap* (fig. 1a) et le *Silvercrest* (fig1b) par rapport à la génération antérieure. De tels progrès sont possibles *via* l'emploi de nouveaux matériaux plus légers et résistants à la température, par des optimisations de conception (réduction des jeux fonctionnels) et de design (optimisation des pièces pour limiter la masse générale).

Un autre point clé de ces gains est l'augmentation de la température dans le moteur (de 400°C sur 40 ans) qui atteint désormais 1400°C dans les parties appelées chaudes, que sont la chambre de combustion et la turbine haute pression. À de telles températures, les aubes de turbine haute pression 2a doivent être refroidies en permanence, par de l'air passant à l'intérieur de la structure et ressortant par des micro-perforations. Ce niveau de température et un dimensionnement optimisé, font que les pièces sont sollicitées au plus près de leurs limites, fixées par les marges de sécurité actuelles. Ceci est confirmé par l'examen des pièces revenues de vol montrant des zones plastifiées qui sont largement généralisées à l'ensemble de la structure.

Partant de ce constat et dans la recherche d'une précision accrue, les simulations utilisant des modèles de comportement fortement non-linéaires, permettant de reproduire toute la complexité des comportements élasto-viscoplastiques à hautes températures, deviennent incontournables. De plus, il s'agit de prendre en compte des détails structuraux, comme les micros perforations de refroidissement, très petits par rapport aux dimensions de la structure. L'ensemble engendre une complexité importante, que ce soit dans la création des maillages éléments-finis ou la résolution elle-même, pour assurer la convergence des simulations. En outre, une précision importante est attendue pour la réponse cyclique de la structure étudiée, car cette solution est ensuite utilisée pour l'analyse de la durée de vie.

Aujourd'hui ces différents aspects sont incompatibles avec les contraintes temporelles très importantes des bureaux d'études.

Souvent externalisée, l'opération de maillage peut représenter un délai long dans la chaîne de calcul totale de telles structures, ce qui est un frein supplémentaire aux tests rapides de modifications géométriques. Aussi en dehors de cas très limités où le modèle complet (loi matériaux et maillage) est calculé de manière monolithique, comme pour la certification, des compromis sont réalisés entre la représentation fine de la

structure (fig. 2b) et le coût numérique total de la simulation. Les détails structuraux peuvent être traités à part, à travers des techniques de *sub-modeling* [Cormier *et al.*, 1999], de manière partielle en ne représentant que les détails jugés critiques ou encore *via* des modèles d'homogénéisation. Ces approches peuvent conduire à des écarts importants [Cresta, 2008], notamment sur l'évaluation de la plasticité qui devient une quantité d'intérêt de plus en plus utilisée pour les estimations de durée de vie, qui est un enjeu actuel majeur étudié pour des phénomènes de plus en plus complexes [Berthoulet *et al.*, 2018].

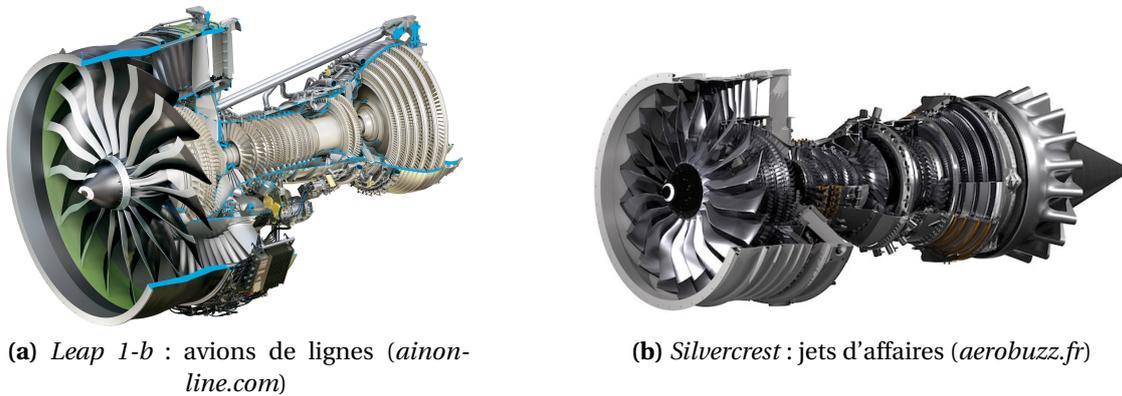


FIGURE 1 – Génération actuelle de moteurs *Safran Aircraft Engines* et *CFM*

Le principe des méthodes de couplage *global/local* non-intrusives par substitution offre un cadre théorique et pratique très bien adapté aux problématiques précédentes. Il s'agit de permettre aux bureaux d'études, en utilisant leurs logiciels de calcul (ici *Abaqus/Standard*) de simuler rapidement l'influence de modifications de détails structuraux ou d'écarts de fabrication sur le comportement de la structure puis sur sa durée de vie. Les premières méthodes de type *global/local* ont été proposées dans [Whitcomb, 1991]. On s'appuie dans cette thèse sur les formulations non-intrusives proposées de façon indépendante par Olivier Allix et développées en collaboration avec Pierre Gosselet dans différents travaux de thèse :

- Lionel Gendre [Gendre, 2009, Gendre *et al.*, 2009, Gendre *et al.*, 2011] dans le cas de la plasticité localisée ;
- Guillaume Guguin [Guguin *et al.*, 2014, Guguin *et al.*, 2016] dans le cas du couplage de modèles de dimensions différentes (plaques composites, 3D) ;
- Omar Bettinotti [Bettinotti *et al.*, 2014a, Bettinotti *et al.*, 2014b, Bettinotti *et al.*, 2017] dans le cas de la dynamique explicite.

À l'origine de la présente thèse, le pari est de pouvoir étendre les travaux menés en plasticité localisée, sur un pas de temps, à des cas de viscoplasticité généralisée à l'ensemble de la structure pour des modèles de complexité industrielle sous des sollicitations cycliques, en obtenant une efficacité acceptable pour une précision importante. Comme le présentait Alain Combescure, suite à des présentations des travaux menés pour la plasticité, l'extension à la viscoplasticité risquait d'engendrer de très

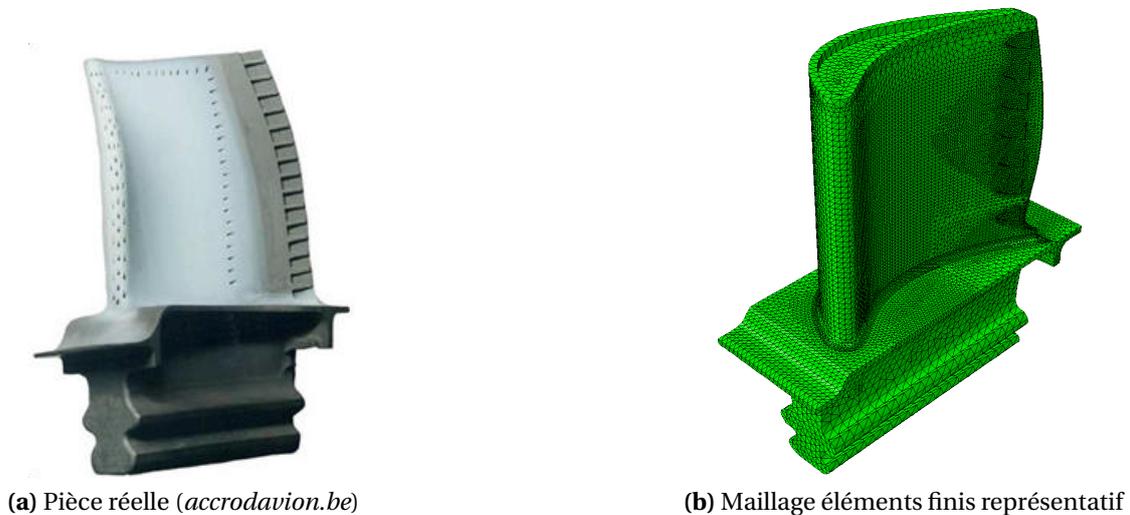


FIGURE 2 – Application sur aube de turbine haute pression

nombreuses difficultés ; l'expérience acquise lors de ces travaux de thèse n'est pas venue infirmer cette prédiction !

Une difficulté importante liée à la viscoplasticité est celle de la précision. En fait cette question, apparemment simple, nous a finalement posé un grand nombre de problèmes. La raison en est double, notre inexpérience dans ce domaine, et le fait d'utiliser un code industriel où bien des aspects sont cachés voire inaccessibles. Ces difficultés sont accentuées par le fait d'utiliser des modèles indépendants : un modèle global et parfois plusieurs locaux. En effet, à partir d'une discrétisation imposée, un code comme *Abaqus* procède en cas de besoin (en particulier suite à des difficultés de convergence) à des sous-discrétisations. Ces raffinements temporels sont alors différents selon les modèles calculés. Ce problème a été repéré sur des cas 2D à partir de calculs monolithiques élémentaires. Les précisions obtenues par les approches *global/local*, sans contrôle de ces sous-discrétisations, sont très insuffisantes. Une première difficulté est donc de maîtriser cette problématique de sous-discrétisation temporelle et de piloter *Abaqus* en conséquence. Mais ce seul aspect est apparu insuffisant.

À travers différents exemples, nous nous sommes rendu compte que notre usage du pilotage proposé par *Abaqus* conduisait à des solutions non-convergées en temps. En effet, les analyses obtenues par les approches *global/local*, impliquant des sous-discrétisations en temps plus fines que celles des modèles monolithiques, nous semblent alors plus précises que les solutions dites de référence. C'est pourquoi, une partie importante de cette thèse est directement liée à l'intégration temporelle des lois de comportement matériau en calcul de structures. Une fois ces aspects maîtrisés, les discrétisations temporelles, associées à des maillages locaux utilisant des éléments beaucoup plus fins que le global (sans détails structuraux), apparaissent extrêmement fines, rendant plus prégnants les problèmes liés aux temps de calcul. Afin de les réduire, des

approches non-intrusives, de type quasi-Newton et gradient conjugué non-linéaire, sont également étudiées en privilégiant non pas le nombre d'itérations, mais plutôt le temps de calcul. Enfin, la méthode *global/local* est combinée avec une approche de saut de cycles. Ici encore les techniques habituellement utilisées [Lesne et Savalle, 1989, Saï, 1993] ont du être assez fortement adaptées pour être à même de traiter les cas étudiés dans cette thèse. L'ensemble est appliqué sur des exemples de complexités industrielles discutés en fin de ce document.

Les travaux réalisés durant cette thèse sont rapportés dans le présent document comme suit :

- Le *chapitre 1* propose un état de l'art des différents domaines de recherche abordés, tels que les méthodes dédiées à la représentation optimisée des détails structuraux, qui ont inspiré la méthode *global/local*. Dans le but d'optimiser les performances du couplage, des techniques issues des mathématiques appliquées sont rappelées ainsi que leur développement non-intrusif, s'il existe. Enfin, une large part de ce premier chapitre est octroyée aux méthodes d'évaluation du cycle limite.
- Le *chapitre 2* est réservé aux modèles de comportements matériaux qui sont un point-clé dans la démonstration de la crédibilité de cette méthode. Leur intégration numérique, ainsi que leurs propriétés de stabilisation de la structure, sont présentées et investiguées.
- Le *chapitre 3* est dédié à la mise en place de l'algorithme de couplage *global/local* dans un cadre complètement non-linéaire avec en particulier les techniques d'accélération de convergence. L'implémentation non-intrusive dans un code de calcul commercial y est aussi rappelée, ainsi que quelques difficultés rencontrées.
- Le *chapitre 4* est consacré aux raccords temporels réalisés entre les modèles de la stratégie, qui à précision égale, nécessitent des discrétisations en temps différentes. Plusieurs schémas de couplage sont proposés et leurs performances, avantages et inconvénients, sont discutés.
- Dans le *chapitre 5*, il est question de calculs répétés sur plusieurs cycles *via* la méthode *global/local* non-linéaire, afin d'obtenir une évaluation aussi rapide que possible et précise du cycle limite.
- Enfin dans le *sixième et dernier chapitre*, l'ensemble des méthodes et techniques mises en place est utilisé, démontrant les capacités opérationnelles de ces travaux sur une application à une structure 3D de complexité industrielle, comparable à un véritable cas métier traité avec succès à Safran Aircraft Engines.

Chapitre 1

État de l'art

Dans un premier temps, ce chapitre établit un état de l'art de méthodes permettant la prise en compte de détails structuraux ou de comportements localisés. Des différences sont établies entre les approches, suivant que les phénomènes étudiés de manière fine se produisent à une échelle différente de celle de la structure ou si la distinction n'est pas évidente. Dans ce dernier cas, les méthodes de type *global/local* font l'objet d'une étude spécifique ainsi que d'une revue précise de leurs applications. Les avantages et inconvénients des différentes méthodes sont analysés avec en vue leur application au sein de codes industriels, ce qui est la motivation première des approches non-intrusives.

Dans un deuxième temps, une attention particulière est portée aux techniques classiques de résolution des problèmes non-linéaires puisqu'elles sont utilisées dans le contexte des méthodes *global/local* pour améliorer les performances du couplage.

Enfin, une bibliographie sur les méthodes permettant d'approximer efficacement le cycle limite des structures est donnée afin d'en bénéficier dans le couplage proposé. En effet, un calcul « frontal » est très coûteux et des stratégies adaptées peuvent conduire à une importante réduction du temps de calcul.

1 Méthodes de prise en compte de détails ou de comportements locaux

De plus en plus de méthodes utilisent la dénomination « multi-échelles » que ce soit en terme de modélisation, de comportement matériau ou de simulation afin de caractériser le niveau de complexité dans la représentation des phénomènes à analyser.

Le comportement mécanique général, dit *macro*, d'une structure peut dépendre de phénomènes ne pouvant être précisément décrits qu'à des échelles inférieures. Par exemple, les aubes de turbines peuvent présenter des micro-perforations servant au refroidissement global de la pièce, à une échelle 100 fois plus petite que celle de la structure. La plasticité se crée initialement dans ces zones, puis assouplit le comporte-

ment général de l'aube et peut engendrer ultérieurement des redistributions à l'échelle de la pièce entière.

Classiquement la résolution des problèmes mécaniques a recours à la méthode des éléments finis qui utilise un maillage pour représenter la géométrie. Afin de capter ces phénomènes *micro*, le maillage doit, dans ces zones, être très fin, ce qui conduit à une complexité et à des coûts de calcul importants, pouvant même être rédhibitoires pour l'utilisation d'une telle analyse.

Un modèle multi-échelles utilise une échelle adaptée à chaque phénomène, pour laquelle le niveau de description peut être totalement différent de la géométrie de la structure complète :

- L'échelle *macro* a vocation à représenter les grandes interactions (en particulier les flux d'efforts) dans la structure. Une telle description peut avoir recours à une représentation approchée de la géométrie, par exemple avec l'omission de certains détails topologiques nécessitant une finesse de maillage importante ou avec une représentation homogénéisée du matériau comme avec des lois de comportement à variables généralisées.
- L'échelle *micro* est un niveau de description auquel on suppose « exactement connus et représentés » la géométrie et les matériaux.
- Des niveaux de descriptions intermédiaires peuvent être insérés.

Un calcul monolithique de toute la structure décrite à l'échelle *micro* est très rarement atteignable ou à un coût de calcul numérique exorbitant. La question à laquelle doit répondre l'utilisateur est alors de déterminer si une description à l'échelle *macro* est suffisante pour la précision souhaitée ou si l'emploi d'un modèle *micro* est indispensable. Outre ces deux cas extrêmes, de nombreuses approches proposent des alternatives qui mettent en jeu les deux échelles dans la représentation de la structure, là où elles sont pertinentes.

On distingue, dans cette partie de l'état de l'art, les méthodes d'analyses structurales selon que :

- **la description *macro* est considérée comme suffisante pour l'ensemble de la structure.** Ce type d'analyses s'appuie sur des modèles macroscopiques *ad-hoc* ou déduits, explicitement ou implicitement, de techniques d'homogénéisation.
- **la description *micro* est nécessaire partout.** L'échelle fine est donc calculée directement sur l'ensemble de la structure. Afin d'en réduire les coûts numériques, des méthodes de simulation, adaptées aux calculateurs parallèles, ont été développées comme les méthodes de décomposition de domaine ou les approches multi-grilles. Ces techniques sont de plus en plus appelées *concurrent multiscale* pour les distinguer des méthodes impliquant plusieurs échelles sans dialogue aux niveaux fins.
- **une analyse fine n'est nécessaire que dans une zone locale** et la description *macro* est considérée comme satisfaisante dans la majorité de la structure. Une question clé est alors la technique de couplage utilisée pour lier les deux types de représentations. Les techniques de résolution peuvent alors être :
 - **itératives** : notamment dans le cas de méthodes intermédiaires entre homo-

générisation et « *concurrent multiscale* ».

— **directes** : dans le cadre de techniques d'enrichissement local.

Concernant les analyses visant à analyser finement une zone partielle de la structure, un paragraphe est dédié aux **méthodes de type *global/local*** objet de cette thèse.

1.1 Une description *macroscopique* est suffisante

La question est donc celle de la définition du comportement macroscopique. Très souvent celle-ci est basée sur des modèles dits phénoménologiques. Dans le cas de matériaux où la microstructure est complexe, ce comportement macroscopique peut être construit par homogénéisation. Un domaine privilégié est celui des matériaux composites où un volume élémentaire représentatif (*VER*) périodique peut être défini.

1.1.1 Homogénéisation

Dans ce cas, la théorie de l'homogénéisation asymptotique, initiée par [Sanchez-Palencia, 1974], fournit un cadre rigoureux pour définir le comportement homogénéisé dans le cas linéaire et même pour des lois de physiques différentes. À partir d'un calcul macroscopique, il est ensuite possible de revenir aux quantités locales sur le *VER*. Cette technique est particulièrement efficace mais requiert une hypothèse de séparation d'échelle complète, non-valable en cas de forts gradients de sollicitations macroscopiques comme au voisinage des bords des structures. Notons que cette hypothèse de séparation d'échelle se traduit, en terme de calcul, par la définition du comportement macroscopique au niveau des points de Gauss du modèle de la structure entière. Ainsi, la taille du *VER* disparaît complètement du calcul. De nombreuses méthodes existent pour l'homogénéisation du *VER*, comme une approche analytique à l'aide d'un développement limité [Devries *et al.*, 1989] ou encore par des formules énergétiques [Tabiei et Yi, 2002] dans lesquelles le *VER* est lui-même décomposé en cellules.

Une des difficultés de cette approche est son extension au non-linéaire bien que des réponses soient déjà proposées [Terada et Kikuchi, 2001] ou encore [Brassart *et al.*, 2012] pour les matériaux composites.

1.1.2 Méthode FE²

Cette méthode [Feyel et Chaboche, 2000] très populaire permet d'étendre numériquement les approches d'homogénéisation aux cas de comportements non-linéaires. À partir d'une solution macro homogénéisée, on résout, en chaque point de Gauss, un modèle défini sur le *VER*, soumis à l'incrément de déformation associé à la solution *macro*. Le résultat à l'échelle *micro* permet ensuite de construire le comportement tangent FE². Ce processus peut alors être répété sur plusieurs incréments de déformation ou de chargement.

Le procédé itératif est décrit de manière générale ci-dessous et illustré par la figure 1.1. Il est initialisé par un calcul, sur la structure complète, avec une loi matériau homogénéisée.

- À chaque point de Gauss macroscopique est associé un problème *microscopique* représentant le *VER* et résolu par éléments finis. Le chargement microscopique est défini à partir de l'itéré de déformation macroscopique, on en déduit par le calcul un état de contrainte microscopique et par homogénéisation un état macroscopique. On calcule de la même manière le comportement tangent macroscopique sous les hypothèses de l'homogénéisation périodique.
- Le problème *macroscopique* utilise l'état homogénéisé pour calculer le résidu d'équilibre, et le comportement tangent pour effectuer une itération de Newton qui fournit la déformation macroscopique aux points de Gauss.

Cette méthode se caractérise par de très nombreux appels aux calculs microscopiques, ce qui peut se révéler coûteux malgré un parallélisme parfait.

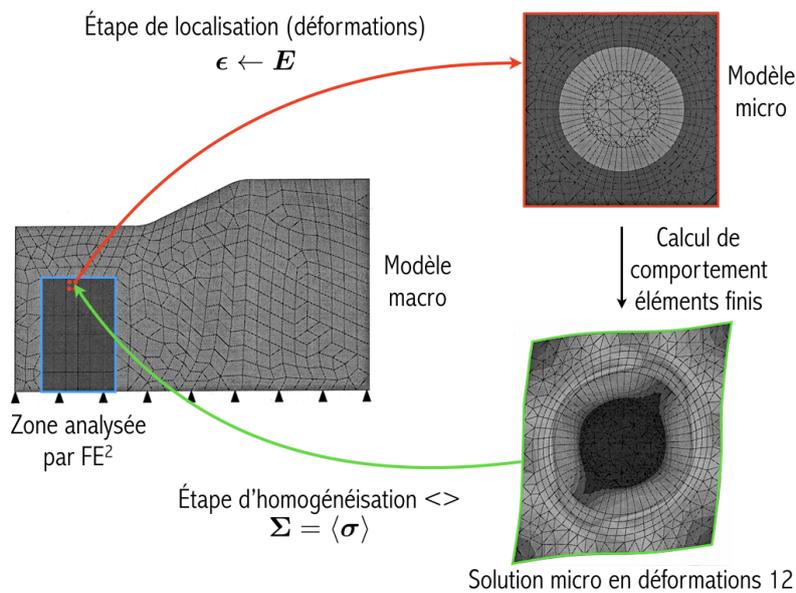


FIGURE 1.1 – Principe de la méthode FE^2 (adapté de [Feyel et Chaboche, 2000])

Un avantage de la méthodologie est qu'elle peut être appliquée à des comportements macroscopiques particulièrement complexes, comme ceux issus de la mécanique des milieux continus généralisés [Feyel, 2003]. Un inconvénient de la méthode est son coût, aussi des simplifications ont été proposées. [Peyre *et al.*, 2013] réduit « la complexité numérique des modèles » FE^2 *via* une méthode d'hyper-réduction du domaine d'intégration. Par ailleurs, [Ramière, 2017] propose une version hybride dans laquelle seuls certains points de Gauss sont analysés par la méthode FE^2 lorsque cela est nécessaire, sinon un modèle homogénéisé classique est employé.

1.2 La description *micro* est nécessaire partout

Lorsque les hypothèses justifiant une approche d'homogénéisation sont mises en défaut sur l'ensemble de la structure, comme en l'absence de *VER* précis ou lorsque les gradients des solutions macroscopiques sont trop prononcés (mécanique de la rupture), des simulations à l'échelle fine sont requises. Le calcul monolithique est alors extrêmement coûteux et des approches multi-échelles dédiées ont été développées; elles sont adaptées aux ordinateurs à architecture parallèle. On peut citer dans cette catégorie les méthodes de décomposition de domaine et les méthodes multi-grilles. Par souci de simplicité, les techniques rapportées dans cette section sont présentées dans le cadre linéaire, même si ce dernier n'est pas restrictif.

1.2.1 Méthode de Schwarz

Historiquement, la méthode de Schwarz a été conçue de manière à résoudre de manière itérative un problème posé sur un domaine complexe, à partir de résolutions effectuées sur des domaines simples (pour notre exposé, deux sous-domaines *cf.* figure 1.2). Un point essentiel de cette méthode est que les deux domaines Ω_1 , Ω_2 présentent une zone de recouvrement.

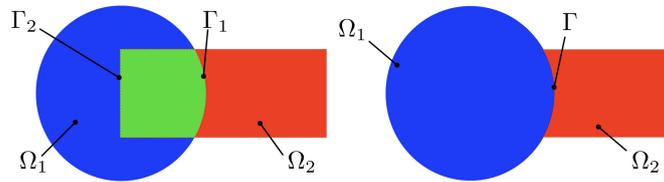


FIGURE 1.2 – Domaines de Schwarz avec et sans recouvrement

Deux variantes principales existent, comme rappelé en détails dans [Gander, 2008], qui se distinguent par l'ordre de résolution et la façon d'échanger les informations entre les sous-domaines :

- *Méthode de Schwarz multiplicative* : il s'agit d'une approche séquentielle utilisant systématiquement la dernière solution calculée sur l'autre sous domaine.

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{K}_1 \underline{u}_1^i = \underline{F}_1 \quad \text{dans } \Omega_1 \\ \underline{u}_1^i = \underline{u}_2^{i-1} \quad \text{sur } \Gamma_1 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{K}_2 \underline{u}_2^i = \underline{F}_2 \quad \text{dans } \Omega_2 \\ \underline{u}_2^i = \underline{u}_1^i \quad \text{sur } \Gamma_2 \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (1.1)$$

Cette technique présente une bonne convergence, mais par définition ne peut être parallélisée (ou de manière relativement grossière par coloriage des sous-domaines).

- *Méthode de Schwarz additive* : c'est ici une approche parallèle, mais qui a une convergence moins rapide que la précédente.

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{K}_1 \underline{u}_1^i = \underline{F}_1 \quad \text{dans } \Omega_1 \\ \underline{u}_1^i = \underline{u}_2^{i-1} \quad \text{sur } \Gamma_1 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{K}_2 \underline{u}_2^i = \underline{F}_2 \quad \text{dans } \Omega_2 \\ \underline{u}_2^i = \underline{u}_1^{i-1} \quad \text{sur } \Gamma_2 \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (1.2)$$

Une application de l'approche additive est la méthode Chimère initialement proposée dans [Steger *et al.*, 1982] dans le cadre de la mécanique des fluides puis améliorée dans [Brezzi *et al.*, 2001].

[Lions, 1990] souligne la nécessité d'avoir une zone de recouvrement afin d'utiliser ces méthodes, ce qui est assez restrictif. Il propose alors de changer l'information qui transite entre les sous domaines et remplace les conditions de Dirichlet par celles de Robin, c'est-à-dire des conditions mixtes en déplacements et en efforts :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{K}_1 \underline{u}_1^{i+1} = \underline{f}_1 + \lambda_1^{i+1} \quad \text{dans } \Omega_1 \\ \lambda_1^{i+1} + \mathbf{Q}_1 \underline{u}_1^{i+1} = \lambda_2^i + \mathbf{Q}_1 \underline{u}_2^i \quad \text{sur } \Gamma \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{K}_2 \underline{u}_2^{i+1} = \underline{f}_2 + \lambda_2^{i+1} \quad \text{dans } \Omega_2 \\ \lambda_2^{i+1} + \mathbf{Q}_2 \underline{u}_2^{i+1} = \lambda_1^{i+1} + \mathbf{Q}_2 \underline{u}_1^{i+1} \quad \text{sur } \Gamma \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (1.3)$$

Cela revient à résoudre sur chaque sous-domaine, un problème soumis à des conditions de Robin dont les impédances d'interface \mathbf{Q}_1 , \mathbf{Q}_2 sont des paramètres. Seule la version alternée est rappelée ici, bien que son homologue parallèle fonctionne également. Ce type d'approches, sans recouvrement, a connu un essor important. [Glowinski et Le Tallec, 1990] l'utilise et propose une interprétation en la comparant à une technique de Lagrangien augmenté.

D'autres techniques sans recouvrement existent. Elles ne reposent pas sur un point fixe contractant mais sur la formulation d'un problème condensé à l'interface [Farhat et Roux, 1991, Mandel, 1993].

Les méthodes de décomposition de domaine telles que présentées ici souffrent d'un problème d'extensibilité (chute des performances avec l'augmentation du nombre de sous-domaines). Pour y remédier, il suffit de rajouter une contrainte de second niveau bien choisie [Farhat *et al.*, 1994, Mandel, 1993, Ladevèze et Dureisseix, 2000] ; on parle alors de méthode multi-échelles, par analogie avec les méthodes multi-grilles, le second niveau est alors dit « grossier ».

1.2.2 Méthodes multi-grilles

Les méthodes multi-grilles sont des techniques d'accélération pour les solveurs itératifs. Elles reposent sur le constat que ces algorithmes, appliqués à des systèmes creux, sont efficaces pour transférer l'information haute fréquence (associé à une petite longueur d'onde – typiquement la taille de maille), mais peinent à transmettre l'information à grande longueur d'onde (basse fréquence – *macro*). Par une hiérarchie de grilles,

de plus en plus grossières, les méthodes multi-grilles [Fedorenko, 1964] transmettent l'information macroscopique et permettent d'accélérer la résolution pour les solveurs itératifs classiques de types Gauss-Seidel, Jacobi, SSOR ou encore de gradient conjugué [Saad, 2000].

On donne le principe général des méthodes à deux grilles. On souhaite résoudre le problème fin $\mathbf{K}_h \mathbf{u}_h = \mathbf{f}_h$. Pour cela, on construit une représentation grossière \mathbf{K}_H , des opérateurs d'extension $\mathbf{E}_{H \rightarrow h}$ et de restriction $\mathbf{R}_{h \rightarrow H}$. Un algorithme possible d'implémentation est le suivant :

- On réalise quelques itérations sur la grille fine (pré-lissage) de manière à obtenir un itéré \mathbf{u}_h et un résidu $\mathbf{r}_h = \mathbf{f}_h - \mathbf{K}_h \mathbf{u}_h$.
- On projette le résidu sur la grille grossière $\mathbf{r}_H = \mathbf{R}_{h \rightarrow H} \mathbf{r}_h$, et on résout le problème grossier de manière à en déduire une correction : $\Delta \mathbf{u}_H = \mathbf{r}_H$.
- On ramène la correction à l'échelle fine : $\mathbf{u}_h = \mathbf{u}_h + \mathbf{E}_{H \rightarrow h} \Delta \mathbf{u}_H$.
- On réalise quelques itérations du solveur fin, à partir de \mathbf{u}_h (post-lissage). Si besoin on remonte sur la grille grossière

La résolution du problème grossier peut elle-même être traitée par un solveur itératif, accéléré par une méthode multi-grille. On a alors au moins trois grilles et à la fin de chaque calcul on peut s'interroger s'il vaut mieux passer à une grille plus fine (pour mieux évaluer le résidu) ou une grille plus grossière (pour mieux propager l'information). Différents cycles classiques sont possibles (V-cycle, W-cycle cf. fig. 1.3). On peut aussi construire le cycle selon les niveaux d'erreur apparaissant à chaque échelle.

Quand la grille grossière est construite à partir d'une véritable discrétisation éléments finis, on parle de méthode multi-grilles géométrique. Une possibilité pour calculer la grille fine est d'utiliser une technique de multi-grilles algébrique $\mathbf{K}_H = \mathbf{R}_{h \rightarrow H} \mathbf{K}_h \mathbf{E}_{H \rightarrow h}$. En général, on choisit $\mathbf{E}_{H \rightarrow h} = \mathbf{R}_{h \rightarrow H}^T$ (ce qui préserve la symétrie de la matrice grossière). Il est possible de construire des restrictions $\mathbf{R}_{h \rightarrow H}$ par une simple analyse de la matrice \mathbf{K}_h , sans référence au maillage ou au problème continu.

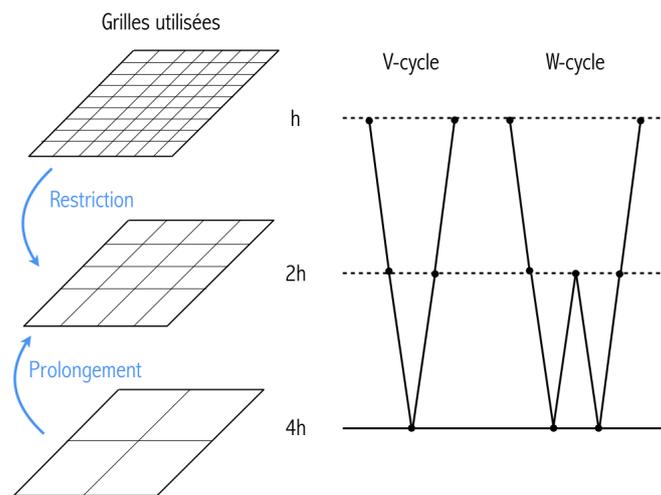


FIGURE 1.3 – Illustration de l'approche multi-grilles

Les techniques multi-grilles bien construites sont optimales dans le sens où le coût de calcul est de l'ordre de grandeur de la taille du système linéaire à résoudre [Yserentant, 1986], elles sont donc bien adaptées aux grands problèmes. Dans le cadre des méthodes multi-grilles géométriques [Briggs *et al.*, 2000], la principale difficulté est de construire une collection de grilles adaptées au problème à traiter. En pratique cela revient à dé-raffiner le maillage initial jusqu'à obtenir un coût négligeable de résolution, en construisant au final deux ou trois niveaux d'analyses. Depuis, [Rannou *et al.*, 2009] a utilisé cette méthode pour de la propagation de fissure 3D, [Passieux *et al.*, 2011] pour une estimation des facteurs d'intensité de contrainte en pointe de fissure en utilisant des séries de Williams ou encore [Gerstenberger et Tuminaro, 2013] pour des fissures multiples.

Les variantes de *Newton-Multigrid* consistent en la résolution des équations linéarisées sur les différentes grilles, au nombre de deux ou trois dans [Fish et Shek, 2000]. Les opérations de transfert entre les niveaux se font par les outils d'homogénéisation asymptotique. [Brandt, 1977] propose une approche plus directe, sous le nom de *Full Approximation Scheme*, pour laquelle l'ensemble de la solution non-linéaire est transférée entre les grilles. [Fish *et al.*, 1995] l'utilise couplée à la méthode *BFGS* pour le traitement de grandes structures élasto-plastiques, fortement non-linéaires et affiche de bonnes performances.

[Brandt, 1977] a aussi utilisé les méthodes multi-grilles lorsque la solution fine n'est nécessaire que dans une zone (zoom) de la structure. La grille fine ne correspond qu'à une partie de la structure, la solution finale est donc formée par l'assemblage des deux grilles. Plusieurs variantes ont été ensuite mises en place [Hackbusch, 1984, McCormick et Thomas, 1986] et les applications ont été nombreuses :

- matériaux composites périodiques où la grille fine représente le VER *ie.* représentation fine du matériau [Fish et Belsky, 1994],
- problème mal posé (non-défini positif) à cause d'un collage de modèles *via* une interface hybride [Fish *et al.*, 1996],
- problèmes de dimensions différentes où un modèle coque est enrichi par un modèle 3D [Fish *et al.*, 1997],
- de la fissuration avec un nombre plus important de grilles [Gravouil et Combescure, 2003].

1.3 Méthodes entre homogénéisation et « *concurrent multiscale* »

Ces méthodes introduisent une longueur caractéristique pour la prise en compte de l'échelle *micro* au sein du modèle *macro*.

1.3.1 Méthodes d'homogénéisation étendue

Dans le cas où les hypothèses sous-jacentes à l'homogénéisation périodique, en particulier la séparation d'échelles, sont mal respectées, comme lorsque les cellules *micro* interagissent entre elles, on peut se tourner vers des méthodes introduisant plus

de niveaux d'étude que la FE^2 . [Ghosh *et al.*, 2001] utilise trois niveaux, un modèle *micro* pour les zones critiques où les échelles sont couplées, un modèle *macro* homogénéisé pour les zones peu exigeantes et enfin un modèle intermédiaire utilisant la FE^2 dans le reste de la structure. Les analyses *micro* utilisent une technique particulière appelée *Voronoi Cell Finite Element Method*. Cette méthode développée par [Ghosh *et al.*, 1996] est dédiée aux micro-structures hétérogènes ayant des effets de couplage entre chaque cellule. Cette approche met en œuvre deux niveaux d'étude *macro/micro* et a été implémentée dans *Abaqus* pour traiter le problème *macro*. L'interface avec le modèle *micro* est réalisée par une fonction utilisateur permettant de prendre en compte le comportement homogénéisé.

Lorsque les hypothèses de l'homogénéisation périodique ne sont satisfaites nulle part, les compromis précédents ne sont plus possibles. [Ibrahimbegović et Marković, 2003] proposent alors de travailler sur les quantités discrètes, c'est-à-dire directement sur les champs de la solution éléments finis, afin de coupler les modèles *micro* et *macro*, ici aussi de manière itérative. Un point fondamental de la méthode est de remplacer un élément *macro* par une cellule raffinée *micro*, ainsi il n'y a plus de comportement homogénéisé *macro* car il dépend élémentairement de la cellule *micro* sur laquelle il est évalué. Enfin pour résoudre le problème *macro*, le comportement local est ré-assemblé, après avoir été condensé sur l'interface de la cellule *via* le complément de Schur. L'enrichissement ne se fait plus par point de Gauss comme pour la méthode FE^2 mais par cellule *macro* sans avoir à vérifier les hypothèses liées à l'homogénéisation périodique.

La cinématique du problème *macro* est celle fournie par le maillage grossier et peut être insuffisante. Il est dans ce cas nécessaire de l'enrichir comme dans [Kouznetsova *et al.*, 2004], où l'analogie peut être réalisée avec l'enrichissement hiérarchique (*cf.* 1.4.2). Parfois le couplage en déplacement a tendance à surévaluer la rigidité dans la zone du raccord. Pour y remédier une approche en efforts dite duale a été proposée [Marković et Ibrahimbegović, 2004], au prix d'une complexité accrue.

1.3.2 Méthode multi-échelles variationnelle

À l'origine de cette méthode, [Hughes, 1995] part du constat que les phénomènes se produisant à une échelle inférieure à celle du maillage utilisé, ne peuvent être détectés. Afin d'obtenir une solution précise \mathbf{u} du phénomène étudié, un terme d'enrichissement local \mathbf{v}^L obtenu sur un problème *micro* est employé. Ce dernier n'étant pas calculable par éléments finis, il est résolu de manière analytique. Pour une solution exacte, on peut avoir recours à une fonction de Green \mathbf{g} appliquée au résidu d'équilibre \mathbf{r}^G associé à la solution globale \mathbf{u}^G :

$$\begin{cases} \mathbf{u} = \mathbf{u}^G + \mathbf{v}^L \\ \mathbf{v}^L(x) = \int_{\Omega} \mathbf{g}(x, \mathbf{y}) \mathbf{r}^G(\mathbf{y}) d\Omega \end{cases} \quad (1.4)$$

La difficulté d'application de cette méthode réside dans la manière d'approximer la

fonction de Green qui est non-locale et rarement calculable analytiquement. Une possibilité est proposée dans [Hughes *et al.*, 1998] au moyen de fonctions bulles. Comme pour la méthode *HDPM*, le résidu d'équilibre constitue un bon estimateur de l'erreur de la solution obtenue.

1.4 Méthodes d'enrichissement local

1.4.1 Enrichissement basé sur la partition de l'unité

La méthode des éléments finis permet d'exprimer la solution dans un espace d'approximation par des fonctions de formes φ_i et des poids α_i . La base de fonctions de forme $\{\varphi_i\}_{i \in I}$ forme une partition de l'unité car leur somme est égale à 1. La méthode partition de l'unité est aussi appelée *PUM* (*Partition of Unity Method*) [Melenk et Babuška, 1996]. La solution éléments finis u_h est enrichie par de nouvelles fonctions d'approximations $\{\psi_j\}_{j \in J}$:

$$u_h = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \alpha_{ij} \varphi_i \psi_j \quad (1.5)$$

Ces méthodes sont dites sans maillage car les fonctions de formes $\{\psi_j\}$ ne s'appuient pas nécessairement sur une discrétisation éléments finis. Les besoins sont principalement issus du domaine de la mécanique de la rupture où les opérations de remaillage sur le front de fissuration peuvent être un frein à ce type de calculs [Barsoum, 1974]. La méthode *X-FEM* (*eXtended Finite Element Method*) proposée par [Moës et Dolbow, 1999] permet de s'en affranchir, en utilisant un enrichissement de la solution, spécifique à la discontinuité du champ de déplacement. Elle a été étendue à la propagation dans [Moës et Belytschko, 2002], provoquant un fort succès conduisant à son implémentation dans des codes commerciaux tels *Abaqus/Standard* ou *Code_Aster*.

La discontinuité est donc introduite par des fonctions de forme éléments finis enrichies et ajoutées à celles déjà présentes classiquement : une fonction d'Heaviside (H) pour le saut de déplacement et quatre autres (F_j) pour représenter la singularité en pointe de fissure par un développement asymptotique.

$$u_h = \sum_{i \in I} a_i \varphi_i + \sum_{i \in I_H} b_i H \varphi_i + \sum_{i \in I_F} \sum_{j=1}^4 c_{ij} F_j \varphi_i \quad (1.6)$$

Sur le même principe, la méthode *G-FEM* (*Generalized Finite Element Method*) [Strouboulis *et al.*, 2000] utilise des solutions analytiques, comme des fonctions *handbook* dans [Strouboulis *et al.*, 2003], des développements asymptotiques [Brancherie *et al.*, 2008] ou des solutions pré-calculées [Chahine *et al.*, 2008, Chahine *et al.*, 2009] en lieu et place des fonctions H et (F_j).

1.4.2 Enrichissement hiérarchique micro/macro

Lorsque le phénomène multi-échelles est localisé à l'échelle *macro*, par exemple pour la fissuration, il nécessite alors un maillage très fin en pointe de fissure. En outre,

une forte hétérogénéité est introduite localement dans la structure. On peut alors avoir recours aux méthodes dites d'enrichissement. Dans cette gamme d'approches, l'échelle *micro* n'est plus prise en compte par l'intermédiaire d'un comportement matériau homogénéisé, mais directement *via* la solution fine, en particulier le champ de déplacement.

Ces techniques corrigent la solution globale \mathbf{u}^G , ayant une discrétisation grossière du domaine Ω de la structure complète, par un terme correctif local \mathbf{v}^L dans la zone d'intérêt Ω_I , décrite finement. La solution construite \mathbf{u} est définie comme :

$$\mathbf{u} = \begin{cases} \mathbf{u}^G + \mathbf{v}^L & \text{dans } \Omega_I \\ \mathbf{u}^G & \text{dans } \Omega \setminus \Omega_I \end{cases} \quad (1.7)$$

Une attention particulière doit être portée sur le respect de la continuité des déplacements et de l'équilibre des contraintes dans Ω_I et particulièrement sur l'interface Γ [Ladevèze *et al.*, 2001, Guidault *et al.*, 2008], ainsi que pour l'indépendance linéaire des espaces d'approximation des deux zones.

Ces méthodes sont basées sur la proposition initiale de [Zienkiewicz *et al.*, 1983] et sont appelées enrichissements hiérarchiques car la correction cinématique s'effectue du niveau le plus bas jusqu'au plus haut.

Sur une application de soudage, [Duan *et al.*, 2007] utilise un modèle local pour traiter ce procédé complexe en 3D puis les déformations plastiques sont introduites au niveau global en tant que déformations initiales d'une analyse élastique.

1.4.3 HDPM

La méthode de projection de Dirichlet homogénéisée, nommée *HDPM*, a été initialement introduite par [Oden et Zohdi, 1997] pour l'étude de structures fortement hétérogènes en élasticité linéaire. Le modèle *macro* est relativement grossier (maillage régulier) et utilise un comportement homogénéisé. Au niveau *micro*, on trouve des cellules issues de la grille régulière de la structure *macro*, dans lesquelles la micro-structure est décrite finement. La méthode suit un processus itératif en quatre étapes :

- Résolution du problème *macro* pour initialiser le processus et fournir une solution globale \mathbf{u}^G .
- Choix des cellules critiques (k) sur lesquelles une correction doit être apportée : un indicateur d'erreur, entre la loi homogénéisée et la loi micro, basé sur les travaux de [Zohdi *et al.*, 1996] permet de définir quelles cellules doivent être analysées finement.
- Correction des cellules critiques, par une approche descendante pilotée par les déplacements issus de la solution globale sur la frontière des cellules locales.
- Assemblage de la solution corrigée entre la solution globale et les termes correctifs des cellules ré-analysées :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^G + \sum_k (\mathbf{v}_k^L - \mathbf{u}^G)|_{\Omega_k} \quad (1.8)$$

et mise à jour de l'estimateur d'erreur *a posteriori*.

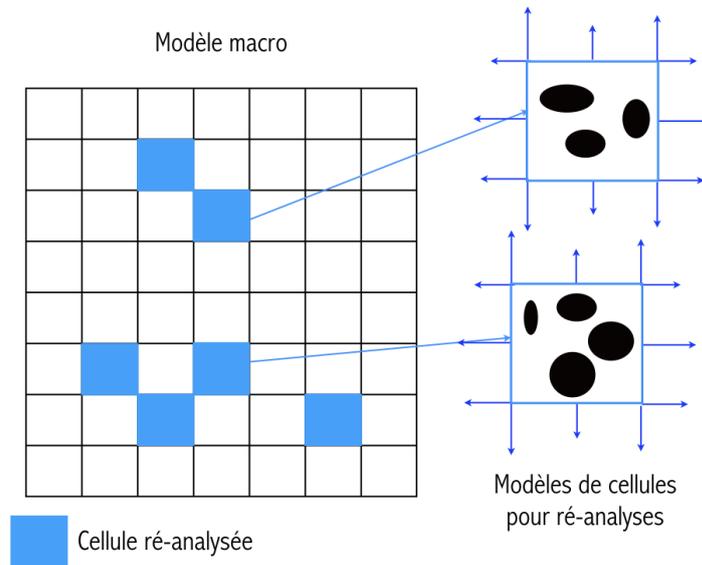


FIGURE 1.4 – Application de la méthode HDPM [Oden et Zohdi, 1997]

Des améliorations ont été apportées par [Oden *et al.*, 1999] pour des estimateurs d'erreur locale en contrainte. Ensuite, [Zohdi et Wriggers, 1999] remplace le pilotage en déplacement des cellules par un raccord en effort, puis [Zohdi *et al.*, 2001] apporte une correction globale visant à réduire le saut d'effort entre les cellules ainsi que le temps de calcul général.

Le point fondamental de cette méthode est l'utilisation de l'indicateur d'erreur. Même s'il peut être majorant de l'erreur en énergie, sa convergence a été prouvée après chaque raffinement. En outre, il apporte une démarche nouvelle qui est de baser le raffinement sur l'erreur de modèle et non pas uniquement sur la discrétisation spatiale (*cf.* figure 1.4).

1.4.4 Méthodes de ré-analyse structurale

On cherche, à partir du comportement de la structure avant la modification, des chargements élémentaires représentant l'influence de la modification topologique. La façon de prendre en compte l'influence de la modification donne lieu à deux variantes :

- *Approche exacte* : le détail topologique est représenté par un terme correctif qu'il faut ensuite appliquer à la matrice de rigidité initiale. Cette correction peut être appliquée de manière non-intrusive par des opérations algébriques [Akgün *et al.*, 2001] en appliquant la formule de Sherman-Morrison [Sherman et Morrison, 1949] (correction de rang 1) ou de Woodbury [Woodbury, 1950] (correction de rang n quelconque). Cela est possible sous réserve d'avoir accès à cette matrice et de pouvoir s'en resservir pour les calculs suivants. Une telle approche peut s'avérer fastidieuse si l'on a seulement accès aux matrices de rigidité élémentaires.

Ces méthodes utilisent un modèle global linéaire et un modèle local concentrant l'ensemble des difficultés non-linéaires d'origines matériaux et géométriques [Kirsch et Bogomolni, 2007]. Afin d'obtenir de bonnes performances, les modifications doivent être de rang faible dans la matrice de rigidité.

- *Méthode approchée* : les modifications topologiques sont représentées par des développements limités des équations d'équilibre puis prises en compte par des calculs aux chargements auto-équilibrés [Holnicki-Szulc, 1991]. [Saka, 1991] étend la validité de cette technique à une plus large gamme de modifications, devant tout de même rester localisées. En effet, de part cette technique, à modification identique, le rang de la correction dans la matrice de rigidité est plus important qu'avec l'approche précédente. Cependant, cette technique est bien adaptée aux grandes structures car les modifications peuvent être condensées sur l'interface sans altérer la qualité de la solution [Kirsch et Liu, 1995]. Elle a été testée sur des exemples simples [Kirsch et Papalambros, 2001] puis étendue à des exemples en trois dimensions [Weisser et Bouhaddi, 2009].

1.4.5 La méthode Arlequin

Initialement développée dans [Ben Dhia, 1998] puis étendue à une version mixte [Ben Dhia et Rateau, 2001], cette méthode est une technique de couplage de domaines avec recouvrement, ayant des physiques [Xiao et Belytschko, 2004] ou des raffinements en espaces différents. Son originalité est de proposer un raccord sur un volume dans la zone de recouvrement de part et d'autre de l'interface, réalisant alors une zone de transition Ω_k entre les modèles. Ces derniers y coexistent *via* un paramètre α venant pondérer la contribution énergétique de chaque modèle dans la formulation des puissances virtuelles. La solution est enfin obtenue par résolution monolithique par assemblage des rigidités des deux domaines.

En matière de non-intrusivité, cette méthode peut poser un problème spécifique quand à la définition de la zone de collage dans un code commercial. C'est sûrement pourquoi elle a été implémentée dans *Code_Aster* de manière intrusive. Une version moins intrusive est proposée dans [Touzeau, 2013] en instaurant un procédé itératif pour le couplage des modèles mis en jeu.

1.4.6 La méthode *hp-d*

Cette technique se base sur les travaux de [Rank, 1992] liés à l'adaptivité *hp*, c'est-à-dire que pour obtenir un raffinement optimal, *ie.* réalisant un compromis entre la qualité de la solution et le nombre d'éléments utilisés, il convient de :

- Réduire la taille des éléments près des détails : *adaptivité h*
- Augmenter l'ordre des éléments éloignés des détails : *adaptivité p*

La méthode *hp-d* est établie dans [Rank et Krause, 1997] puis étendue à des cas plus complexes [Krause et Rank, 2003]. Elle est destinée à des problèmes présentant des détails structuraux ou des hétérogénéités, venant perturber la régularité de la solution

dans des zones localisées. Elle met en œuvre deux modèles se recouvrant partiellement : un fin Ω_h et un grossier Ω_p dont les interfaces sont notées Γ_i , $i = [h, p]$. Le problème grossier a une adaptivité de type p , car les détails n'y sont pas représentés, tandis que le modèle fin à un raffinement de type h .

La solution est construite comme la contribution des deux modèles, en imposant *a priori* la continuité des déplacements sur les interfaces, telle que :

$$\begin{cases} \mathbf{u} = \mathbf{u}_h + \mathbf{u}_p \\ \mathbf{u}_h = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_h \\ \mathbf{u}_p = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_p \end{cases} \quad (1.9)$$

Afin de rendre ces modèles compatibles, en partant du maillage du modèle p , si des degrés de liberté identiques sont présents dans le modèle fin h alors ils sont retirés. Cela rend la résolution du problème couplé réalisable par une approche classique par bloc.

L'implémentation est relativement aisée, ce qui a permis d'appliquer cette méthode sur de nombreux exemples, comme de la plasticité localisée dans [Düster *et al.*, 1999] ou pour du couplage 1D-2D [Düster *et al.*, 2007]. Une version un peu moins performante à cause de sa résolution monolithique et son cadre d'élasticité linéaire, est appelée *s-version* [Fish, 1992] aussi appliquée aux matériaux composites dans [Fish et Markolefas, 1992] proposant des applications d'une plus grande complexité.

1.4.7 Méthodes utilisant des patches d'éléments

Il s'agit de méthodes empruntant des idées aux méthodes multi-échelles et au principe de résolution de Schwarz, rappelant aussi des aspects de zooms structuraux. Elles utilisent un modèle global discrétisé grossièrement qui est ensuite enrichi par des modèles locaux, appelés patches d'éléments finis, pouvant présenter un raffinement ou une physique améliorée. [Rezzonico *et al.*, 2007] propose une analyse multi-échelles dans un cadre de résolution semblable à la méthode Chimère. Les différents modèles se superposent sans avoir à vérifier les hypothèses de séparation d'échelle, que peuvent requérir les techniques d'enrichissement classiques.

[Lozinski et Pironneau, 2011] proposent un zoom numérique, (*Schwarz Zoom method*) pour un raffinement de maillage et l'ajout d'une physique de poro-mécanique, dont la résolution alternée utilise les méthodes de Schwarz. La démonstration de la convergence dans le cadre d'interfaces non-conformes est réalisée par [Hecht *et al.*, 2009]. Une proposition intéressante est aussi faite dans [Chouly et Lozinski, 2014] qui couple ces pratiques à un algorithme de type *pararéel* rappelé dans la suite de ce document.

On peut aussi citer la « splitting method » [Babuska et Andersson, 2005] pour laquelle les zones susceptibles d'abriter des fissures sont analysées par patches, dits *hand-books*, afin d'obtenir une solution précise pouvant se rapprocher de la *G-FEM*.

1.5 Méthodes de couplage de type *global/local*

Dans bon nombre d'analyses, une approche par homogénéisation quelconque peut s'avérer satisfaisante dans la majeure partie de la structure (modèle global) tandis qu'un modèle fin (dit local) est incontournable dans des zones critiques. C'est le fondement des méthodes *global/local* dans lesquelles un algorithme réalise le couplage entre les diverses représentations de la structure, complètes ou partielles. On conserve ainsi une solution précise dans toute la structure : celle-ci est apportée soit par l'échelle *macro* ou l'échelle *micro*.

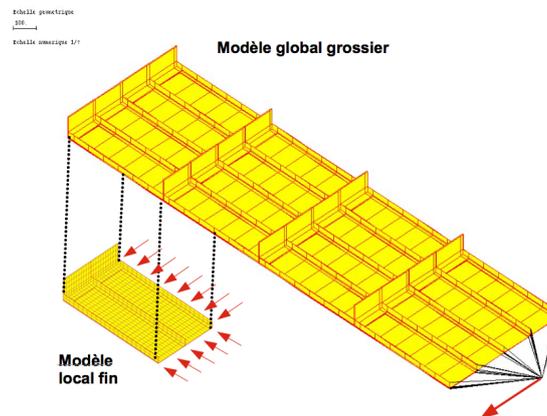


FIGURE 1.5 – Type de modèle utilisé en *submodeling* [Cresta, 2008]

La plupart des méthodes rapportées ici, peuvent être résumées de la manière suivante (*cf. fig. 1.5*). Un modèle global représente la totalité de la structure mais ne dispose pas de toute la complexité recherchée : il est décrit à l'échelle *macro*. Un ou plusieurs modèles, dits locaux, sont alors introduits avec une description *micro*. La technique des approches réside donc dans le couplage entre les différents modèles.

La prise en compte des phénomènes dans le modèle local peut avoir une influence importante sur la solution globale. Une fois le modèle local piloté par le global (classe de méthodes descendantes), il est nécessaire de corriger ce dernier par l'information issue de l'analyse fine. Selon les méthodes, on distingue celles qui visent une correction directe ou si cette dernière est réalisée à travers un schéma itératif.

Une première famille de méthodes permet de corriger le modèle global de manière directe, c'est-à-dire sans avoir à réaliser des itérations dans la stratégie. Elles consistent à introduire, au sein d'une structure complète, un détail topologique de la manière la plus économique possible.

1.5.1 La condensation statique

Dans la plupart des applications visées, la géométrie de la partie globale n'est jamais modifiée et il en va de même pour sa rigidité lorsque que le modèle est linéaire élastique. La condensation statique est une technique *a priori* et consiste à condenser

la partie complémentaire de la structure complète sur l'interface Γ (voir la figure 1.6 pour la description des sous-domaines). L'ensemble des degrés de liberté est réduit à ceux de l'interface grâce au complément de Schur du domaine. Son calcul est une opération coûteuse mais qui n'est réalisée qu'une seule fois avant la simulation et le problème à résoudre est alors équivalent d'un point de vue de la solution, mais beaucoup plus simple à résoudre. [Hirai, 1985] utilise cette pratique pour un raffinement local de maillage sans modifications majeures et plus récemment [Wyart *et al.*, 2008] y a recours pour de la propagation 3D de fissure et enfin [Wyart *et al.*, 2009] le met en œuvre dans un couplage 2D/3D utilisant des modèles coques. Dans ces deux derniers cas, le modèle local utilise une formulation *X-FEM* pour traiter la fissuration toujours sans modifier le modèle global condensé. Une modification de la topologie dans la zone locale nécessite alors seulement un remaillage local.

La seule donnée du complément de Schur permet donc d'avoir le comportement exact de la zone complémentaire du modèle global, sans avoir à communiquer les détails géométriques et le chargement, ce qui peut être pratique dans des cas à haute confidentialité. Cette méthode est d'ailleurs très répandue dans les codes commerciaux sous l'appellation de *super-élément*.

Cette méthode peut être combinée à une réanalyse structurale, comme proposé dans [Hirai *et al.*, 1984], afin d'obtenir une précision accrue sur des facteurs d'intensité de contrainte. Ce type d'analyses nécessite habituellement un plus grand nombre de simulations, mettant en jeu des maillages imbriqués. Dans l'approche proposée, les différents niveaux d'analyses sont condensés jusqu'au niveau le plus grossier.

1.5.2 Approches descendantes

Ces techniques sont très utilisées dans l'industrie car disponibles dans la plupart des codes commerciaux, ce qui a été rendu possible par leur simplicité de mise en œuvre, leur robustesse (*ie.* capacité à traiter des modèles différents) et leur relativement bonne précision, lorsque les hypothèses de séparation d'échelles sont respectées.

Leur principe général est le suivant :

- Un calcul global est réalisé et fournit les conditions limites aux modèles locaux : en déplacement [Kelley, 1982] ou en rigidité [Jara-Almonte et Knight, 1988]. Ces différences font naître deux sous-classes de méthodes discutées dans la suite.
- Les modèles locaux sont résolus, potentiellement de manière parallèle, donnant la solution fine, à partir des grandeurs de pilotage issues de l'analyse globale.

Raccord en déplacement Les modèles locaux sont pilotés par le déplacement d'interface issu de l'analyse globale. Initialement apparue sous le nom *SBD* pour *Specified Boundary Displacement* [Kelley, 1982], cette méthode est désormais connue sous l'appellation *submodeling*. Utilisée rapidement en élasticité linéaire pour les matériaux composites [Ransom et Knight, 1989], cette technique a été étendue aux non-linéarités matérielles et géométriques dans [Ransom *et al.*, 1992]. [Kapania *et al.*, 1997] s'en sert

pour l'étude de détails topologiques sur des plaques composites *via* une analyse de Ritz sur le modèle global.

Les travaux ont ensuite concerné l'amélioration de la qualité de la solution locale obtenue, notamment à propos de la taille de la zone à étudier localement [Srinivasan *et al.*, 1996]. En effet, sans la correction globale apportée par les méthodes bi-directionnelles, un niveau d'erreur non-négligeable peut être introduit par ce type de raccord. [Cresta, 2008] rapporte un niveau d'erreur de 30% sur les contraintes et déformations de la solution locale dans un problème de flambage localisé. [Mao et Sun, 1991] travaille sur la dépendance à la position de la frontière, plus le modèle local est grand meilleure est la solution, car on contient bien le comportement spécifique. Cependant on perd en performance, puisque le modèle local devient plus coûteux à résoudre. La qualité du raccord a ensuite été spécifiquement étudiée, notamment pour répondre au besoin d'avoir des maillages non-conformes au niveau de l'interface, afin d'optimiser la modularité de la technique. Initialement, le raccord a été réalisé par des fonctions de formes linéaires [Kelley, 1982] puis des fonctions spécifiques aux plaques ont été utilisées par [Ransom et Knight, 1989] ou encore une interpolation de Lagrange dans [Voleti *et al.*, 1995], des splines cubiques pour [Cormier *et al.*, 1999] et enfin [Srinivasan *et al.*, 1999] traite des modèles plus complexes.

Raccord en efforts Outre les redistributions du modèle local sur le global, la principale source d'erreur est la mauvaise évaluation des rigidités mises en vis-à-vis. Le raccord en efforts, au prix d'une complexité accrue de la technique et de l'implémentation, permet de mieux apprécier la rigidité de la partie complémentaire de la structure ; ce qui améliore la solution locale lors de l'application de manière faible des déplacements imposés et évite d'éventuels blocages cinématiques. Par la nature même des éléments finis formulés en déplacement, cette quantité n'est pas disponible directement et nécessite un post-traitement, à partir du champ de contrainte évalué aux points de Gauss. Par des opérations géométriques, comme l'identification des faces, il faut transférer ce champ aux nœuds de l'interface. Parfois, il faut même avoir recours à des techniques de régularisation [Zienkiewicz et Zhu, 1992] ou des adaptations [Gu *et al.*, 2004].

Une variante efficace de raccord en efforts est la *Specified Boundary Stiffness and Force*, en somme du *submodeling* en efforts, proposée par [Jara-Almonte et Knight, 1988] réduisant les niveaux d'erreurs. Les efforts sont alors pris en compte par une condition de Robin imposée sur les nœuds d'une bande d'éléments, décalée de l'interface entre les modèles mis en jeu, afin de mieux représenter la rigidité de la zone complémentaire.

1.5.3 *Refined global/local method*

Cette méthode est proposée dans [Mao et Sun, 1991] dans une approche exclusivement élastique linéaire, elle commence par l'analyse du modèle global dont la solution en déplacement est extraite sur les frontières avec les modèles locaux. Ces derniers ont

un maillage plus fin que leurs zones globales correspondantes, fournissant aux niveaux des détails topologiques une solution plus précise en termes de contraintes et de déplacements. *Via* la rigidité de la zone locale ré-analysée, un vecteur d'efforts basé sur le saut de déplacements entre les solutions locales et globales est construit puis appliqué comme un chargement extérieur additionnel, lors d'un calcul global de correction.

1.5.4 Méthodes de couplage *global/local* non-intrusives

On porte ici une attention particulière aux méthodes de type *global/local* puisqu'il s'agit de la technique retenue dans les travaux rapportés dans ce document. Initialement proposée dans [Whitcomb, 1991] pour des calculs élastiques et élasto-plastiques sur structures 2D, elle a ensuite été étendue aux dimensions supérieures dans [Whitcomb et Woo, 1993a] et enfin aux non-linéarités géométriques dans [Whitcomb et Woo, 1993b]. Ces méthodes permettent de corriger le modèle global par le comportement du local, ce qui était le principal inconvénient des méthodes de *submodeling* (cf. section 1.5.2). Ainsi, au prix de suffisamment d'itérations les redistributions et l'influence du local sur le global sont prises en compte de manière exacte. À noter qu'une méthode aux objectifs assez proches, mais basée sur la partition de l'unité, a été proposée dans [Plews *et al.*, 2012]. Elle est destinée au traitement de forts gradients thermiques très localisés, en couplant de manière volumique les modèles *via* des projections analogues à [Temizer et Wriggers, 2011, Holl *et al.*, 2013] ou encore par homogénéisation [Hühne *et al.*, 2016].

Le principe de base est le suivant, on utilise un modèle global $\bar{\Omega}^G = \bar{\Omega}^C \cup \bar{\Omega}^A$ (cf. figure 1.6) représentant l'ensemble de la structure avec possiblement une loi de comportement simple ainsi qu'une géométrie assez grossière. Lorsqu'une zone doit être analysée plus finement (raffinement de maillage, changement de géométrie, loi de comportement plus complexe) un modèle local Ω_k^L (k indice les modèles locaux) est construit, et *via* un processus itératif, qui sera rappelé dans le chapitre 3, les solutions locales sont substituées au sein de la solution globale, de la manière suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{u} = \mathbf{u}^G & \text{dans } \Omega^C = \Omega^G \setminus (\cup_k \Omega_k^L) \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_k^L & \text{dans } \Omega_k^L, \forall k \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}^G = \mathbf{u}_k^L & \text{sur } \Gamma_k = \Omega^G \cap \partial\Omega_k^L \end{cases} \quad (1.10)$$

Ce couplage est une ré-analyse exacte puisque il converge vers la solution monolithique (quand elle est réalisable), c'est-à-dire la résolution d'un seul modèle constitué de la zone complémentaire Ω^C et des modèles locaux Ω_k^L ; cette propriété est très importante si l'on souhaite appliquer la méthode à des calculs de certification.

La majorité des versions et applications réalisées avec ce couplage utilisent un pilotage en déplacement lors de la descente (global vers local) puis une correction en effort pour la remontée (local vers le global). Au prix d'une implémentation plus lourde, [Gendre *et al.*, 2011] propose une version mixte du pilotage lors de la descente grâce à des conditions de Robin offrant un taux de convergence amélioré.

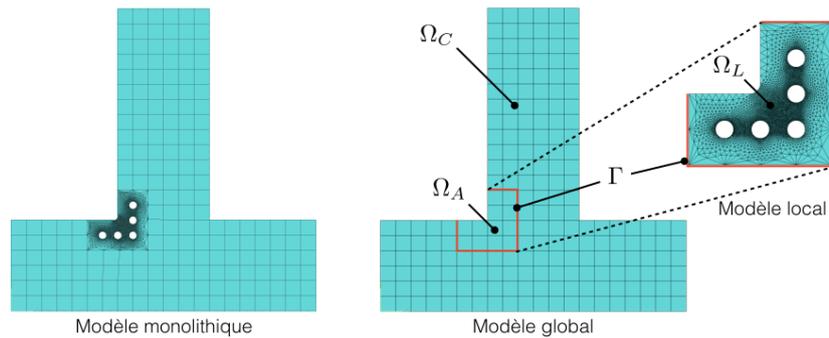


FIGURE 1.6 – Modèles intervenant dans la méthode *global/local*

Un tel algorithme de couplage est très adapté à une mise en œuvre non-intrusive [Gendre *et al.*, 2009] car dans le cas de maillages conformes, il suffit d’être capable d’échanger les déplacements et les efforts de réactions aux nœuds des interfaces Γ_k , ce qui est possible dans la majorité des codes de calcul commerciaux. De plus, comme ces derniers sont actuellement dotés d’une sur-couche de programmation, un script générique peut être développé afin de rendre cet algorithme automatique. Par ailleurs, il est possible de traiter, par exemple, le modèle global dans un code générique éléments finis et les modèles locaux dans des codes plus spécifiques de « recherche » adaptés aux phénomènes en jeu.

Une revue est proposée ici par domaine d’application :

- *Lois de comportement différentes et détails géométriques* : initialement ce type de couplage a été développé pour traiter de la plasticité localisée [Gendre *et al.*, 2009, Liu *et al.*, 2014], où le modèle global est élastique linéaire tandis que des détails structuraux sont ajoutés par des modèles locaux munis d’une loi élasto-plastique non-linéaire. Cela introduit une baisse de la rigidité dans la zone locale modifiant la comportement global de la structure.
- *Mécanique de la rupture* : [Passieux *et al.*, 2013] traite un problème de propagation de fissure *via* une formulation *X-FEM* multi-grilles tandis que [Gupta *et al.*, 2003] se tourne vers la *G-FEM*. Dans ces travaux, la fissure est représentée explicitement au niveau local et le modèle global reste quant à lui purement élastique. Ces travaux ouvrent la voie à un modèle local évolutif en espace augmentant avec l’avancée de la fissure [Duval *et al.*, 2016].
- *Couplage stochastique/déterministe* : [Chevreuil *et al.*, 2013] utilise un modèle global déterministe et les incertitudes de sources matérielles sont introduites par plusieurs modèles locaux stochastiques. Cela permet de remplacer des méthodes dédiées, sans modifier la rigidité globale qui demeure déterministe, tel que [Berveiller *et al.*, 2006] qui propose directement la mise en œuvre d’éléments stochastiques pour *Abaqus/Standard*. Dans ce cadre, [Nouy et Pled, 2017] fournit une preuve de convergence sous des hypothèses faibles (*ie.* pour des problèmes monotones).
- *Contact* : [Duval *et al.*, 2016] traite ces problèmes, qui nécessitent un maillage

fin, au sein d'un modèle local. Le chargement associé est répercuté au sein du modèle global simple *via* le couplage.

- *Dynamique transitoire* : [Bettinotti *et al.*, 2014a] revisite le couplage pour traiter des problèmes de dynamique explicite. Une formulation améliorée est proposée dans [Bettinotti *et al.*, 2014b], notamment concernant l'accélération et les efforts d'inertie, ce qui augmente drastiquement les performances. Ce couplage a ensuite été appliqué [Bettinotti *et al.*, 2017] pour traiter le délaminage de structures en matériaux composites sous impact dans *Abaqus/Explicit*. [Chantrait *et al.*, 2014] ajoute des schémas implicites en dehors de la zone d'impact grâce au découplage *global/local*, ce qui autorise de plus grands pas de temps et donc des économies de temps de calcul. L'implémentation est réalisée à la fois dans *Zset* et *Europlexus*. Dans tous ces travaux en dynamique, une légère intrusivité est nécessaire pour rester performant.
- *Raccord 2D/3D* : [Guguin *et al.*, 2014] étudie les raccords entre des modèles plaques et des modèles volumiques de boulons. Des fonctions de relèvements sont pré-calculées pour effectuer le raccord. Une solution plus simple à mettre en œuvre est proposée dans [Guinard *et al.*, 2017], où une zone tampon d'éléments coques est introduite dans le modèle local. Le couplage 2D/3D à proprement parler est alors réalisé par la fonction *Abaqus TIE* au sein du modèle local et le couplage local/global a lieu entre deux modèles de plaques.
- *Matériaux composites* : [Daghia et Ladevèze, 2012] proposent une version pour l'étude de l'endommagement des composites *via* le méso-modèle d'endommagement [Lubineau et Ladevèze, 2008] pour le modèle global et un modèle microscopique au niveau local où les mécanismes de dégradation sont représentés de manière explicite.
- *Couplage de maillages différents* : [Liu *et al.*, 2014] utilise pour de la plasticité localisée un couplage de maillages non-conformes par une technique *mortar* au niveau de l'interface *global/local*. [Bouclier *et al.*, 2013b] propose quant à lui un couplage entre une formulation éléments finis classiques et un modèle local utilisant des *NURBS*, basé sur de précédents travaux [Bouclier *et al.*, 2013a]. [Duval, 2016] propose un outils d'estimateur d'erreur en discrétisation spatiale pilotant les zones de raffinement locales pouvant ensuite être étendu à d'autres travaux de la littérature [Ladevèze, 2008, Ladevèze *et al.*, 2010], notamment avec de premières propositions non-intrusives.
- *Décomposition de domaine* : fort de l'expérience acquise sur l'utilisation de plusieurs patchs locaux rapprochés, [Duval, 2016] établit dans le cadre des méthodes *global/local* une technique de relocalisation non-linéaire de manière non-intrusive. Les modèles locaux non-linéaires recouvrent totalement le modèle global demeurant élastique. Cela offre un outil de décomposition de domaines implémentable dans des codes commerciaux (*Code_Aster*), au prix de performances amoindries par rapport aux implémentations intrusives [Cresta *et al.*, 2007, Pebrel *et al.*, 2008, Hinojosa *et al.*, 2014, Negrello *et al.*, 2016].

Bien qu'ayant généralement des performances moindres, les applications de la mé-

thode *global/local* permettent de traiter sensiblement les mêmes problèmes que les méthodes dédiées, mais au sein de codes commerciaux généralistes, ce qui en fait de formidables outils de développement et de démonstration voire désormais d'analyses quantitatives. De plus, dans de nombreux exemples, ces méthodes peuvent très bien réutiliser des modèles complexes et spécifiques sans avoir à les ré-implémenter ce qui est très confortable et représente un gain de temps exceptionnel en évitant de revalider l'outil.

2 Résolutions non-linéaires et accélérations

La généralisation des calculs non-linéaires en mécanique des structures entraîne des besoins en matière de réduction du temps de calcul. En effet, leur résolution « naturelle » est basée sur l'utilisation d'un algorithme de Newton utilisant une matrice tangente qui est coûteuse à calculer et qu'il faut mettre à jour à chaque itération. Des méthodes alternatives et moins coûteuses telles que celles de quasi-Newton ont donc été développées. Elles consistent à approximer la matrice tangente à moindre coût au prix d'un taux de convergence plus faible. Par ailleurs, des techniques d'accélération de convergence telles que les *Aitken's* δ^2 ont aussi vu le jour.

Les performances, en terme de temps de calcul, des méthodes de couplage non-intrusif sont liées au nombre d'itérations nécessaires pour atteindre le niveau de précision souhaité par l'utilisateur. L'amélioration du taux de convergence a donc été investigué depuis leur lancement [Gendre, 2009]. Les techniques classiques de résolution de problèmes non-linéaires présentées ici ont été adaptées aux besoins spécifiques du couplage, permettant d'obtenir une amélioration sensible des performances.

2.1 Méthodes de Newton

2.1.1 Cas scalaire

Dans le cas scalaire, on recherche la solution de l'équation $f(x) = 0$ pour laquelle f est non-linéaire par rapport à x . La résolution classique se fait par un algorithme de Newton-Raphson, dans lequel une itération se fait de la manière suivante, partant d'une valeur initiale x_0 :

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \quad (1.11)$$

La convergence peut être suivie par le résidu $f(x)$, elle est quadratique localement, c'est-à-dire que $\alpha = 2$ dans la relation suivante :

$$\exists C > 0 / |x_{i+1} - x| \leq C|x_i - x|^\alpha \quad (1.12)$$

Cet algorithme est très robuste, ce qui a contribué à sa popularité, mais peut diverger lorsque f n'est pas dérivable en tout point au voisinage de x ou si l'initialisation x_0 est trop éloignée de la solution. Cela est rarement le cas en EVP, mais peut se produire

lorsqu'on applique de manière trop agressive un chargement, notamment au niveau local, lors de l'intégration de la loi matériau pour obtenir l'incrément de plasticité.

2.1.2 Calcul de structures

Un problème non-linéaire en calcul de structures se résout de manière analogue mais dans le domaine vectoriel.

L'approche par éléments finis est basée sur une résolution en déplacements \mathbf{u} via une loi de comportement liant les efforts intérieurs $\mathbf{f}_{int}(\mathbf{u})$, opérateur non-linéaire par rapport à \mathbf{u} , aux efforts extérieurs \mathbf{f}_{ext} et sont exprimés aux nœuds du maillage. Le problème à résoudre est :

$$\mathbf{f}_{int}(\mathbf{u}) = -\mathbf{f}_{ext} \quad (1.13)$$

On peut ici aussi construire un résidu \mathbf{r} , dit d'équilibre, tel que :

$$\mathbf{r}(\mathbf{u}) = \mathbf{f}_{int}(\mathbf{u}) + \mathbf{f}_{ext} = \mathbf{0} \quad (1.14)$$

Une itération i de l'algorithme de Newton-Raphson pour la résolution de ce problème est alors :

$$\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{u}_i - \left[\frac{\partial \mathbf{f}_{int}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}_i) \right]^{-1} (\mathbf{f}_{int}(\mathbf{u}_i) + \mathbf{f}_{ext}) \quad (1.15)$$

où $\frac{\partial \mathbf{f}_{int}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}_i)$ est la matrice tangente [Simo et Taylor, 1985], que l'on note \mathbf{K}_i dans la suite. Elle dépend de \mathbf{u} et doit par conséquent être assemblée et re-factorisée à chaque itération de l'algorithme, d'où le coût de cette approche qui conserve une convergence quadratique. De plus, elle dépend de la loi de comportement du matériau et du niveau de plasticité obtenu par un algorithme de retour radial sur la surface seuil [Simo et Taylor, 1986, Simo, 1992].

Il s'agit d'une méthode incrémentale pour laquelle la convergence doit être obtenue sur le pas de temps courant avant de passer au suivant. Cela peut s'avérer coûteux numériquement, surtout pour traiter plusieurs cycles de chargement. Pour surmonter cet inconvénient, [Bergheau *et al.*, 2016] propose de découpler, en espace et temps, les équations à résoudre grâce à l'emploi de la *Proper Generalized Decomposition*. Une telle méthode peut aussi se rapprocher des méthodes de calcul du cycle limite comme dans [Zuchiatti *et al.*, 2007].

2.2 Méthodes de Newton modifiée et de quasi-Newton

2.2.1 Méthode de Newton modifiée

La difficulté d'établir une expression de l'opérateur tangent et le coût qu'il représente peuvent conduire au choix pragmatique d'utiliser à sa place la matrice élastique initiale, on parle alors de « méthode de Newton modifiée ». Cette matrice étant moins adaptée au problème traité, que la tangente, l'algorithme présentera une convergence linéaire $\alpha \sim 1$ dans (1.12), mais chaque itération sera nettement moins coûteuse. Cela

peut s'avérer efficace globalement, en particulier lorsque le comportement est faiblement non-linéaire ou alors quand les pas de temps sont petits.

Des solutions de mises à jour partielles, toutes les I itérations, I fixé par l'utilisateur ou basé sur un incrément de la plasticité cumulée, peuvent s'avérer aussi une alternative efficace.

2.2.2 Techniques de quasi-Newton

Une approche différente est possible en construisant une approximation de la matrice tangente comme la méthode de la sécante, qui s'écrit dans le cas unidimensionnel comme :

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \quad (1.16)$$

La convergence obtenue avec cette méthode est de $\alpha = 1.618$, le nombre d'or.

Les méthodes de quasi-Newton (Broyden, SR1, BFGS) sont la généralisation au cas vectoriel de cette technique et sont très répandues en mécanique. On cherche $\hat{\mathbf{K}}_i$ l'approximation de la matrice tangente à l'itération i sous la forme d'une correction de rang faible de la matrice de rigidité précédente :

$$\hat{\mathbf{K}}_i = \hat{\mathbf{K}}_{i-1} + \Delta\hat{\mathbf{K}}_i \quad (1.17)$$

Les techniques diffèrent ensuite sur l'expression du terme correctif, mais dans tous les cas, elles réutilisent les solutions en déplacements $\Delta\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_i - \mathbf{u}_{i-1}$ et les résidus $\mathbf{y}_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i-1}$ des itérations précédentes :

— *Broyden (good Broyden's formula)* [Broyden, 1965], non-symétrique et de rang 1 :

$$\Delta\hat{\mathbf{K}}_i = \frac{(\mathbf{y}_i - \hat{\mathbf{K}}_i \Delta\mathbf{u}_i) \Delta\mathbf{u}_i^T}{\Delta\mathbf{u}_i^T \Delta\mathbf{u}_i} \quad (1.18)$$

— *SR1 (Symetric Rank one)*, symétrique et de rang 1 [Conn *et al.*, 1991] :

$$\Delta\hat{\mathbf{K}}_i = \frac{(\mathbf{y}_i - \hat{\mathbf{K}}_i \Delta\mathbf{u}_i) (\mathbf{y}_i - \hat{\mathbf{K}}_i \Delta\mathbf{u}_i)^T}{(\mathbf{y}_i - \hat{\mathbf{K}}_i \Delta\mathbf{u}_i)^T \Delta\mathbf{u}_i} \quad (1.19)$$

— *BFGS (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno)*, symétrique et de rang 2 dont une implémentation courante est proposée dans [Matthies et Strang, 1979] :

$$\Delta\hat{\mathbf{K}}_i = \frac{\mathbf{y}_i \mathbf{y}_i^T}{\mathbf{y}_i^T \Delta\mathbf{u}_i} - \frac{\hat{\mathbf{K}}_i \Delta\mathbf{u}_i (\hat{\mathbf{K}}_i \Delta\mathbf{u}_i)^T}{(\hat{\mathbf{K}}_i \Delta\mathbf{u}_i)^T \Delta\mathbf{u}_i} \quad (1.20)$$

Ces corrections sont apportées directement sur l'inverse de la matrice de rigidité, afin de conserver sa factorisation ainsi que le rang faible de la modification, grâce à la formule de Sherman-Morrison [Sherman et Morrison, 1949] pour les corrections de rang 1 et de Woodburry [Woodbury, 1950] pour celles de rangs plus élevés. Ce type d'approche se prête très bien au développement non-intrusif (*cf.* section 4). Ces méthodes sont souvent couplées avec un algorithme de recherche linéaire, *line-search* en anglais (*cf.* section 2.4 pour l'application au gradient conjugué non-linéaire).

2.3 Aitken's δ^2

Il s'agit d'une classe de techniques ayant connu un franc succès grâce à la simplicité de leur mise en œuvre et de leur faible coût numérique. Initialement proposée dans [Aitken, 1926], elle est appliquée sur des suites mathématiques $(x^i)_{i \in \mathbb{N}}$ convergeant vers une limite x^* .

Un premier calcul de suite est réalisé donnant une valeur approchée $\lim_{i \rightarrow \infty} x^i = x^*$. La formulation des Aitken's δ^2 est appliquée sur la suite calculée $(x^i)_{i \in \mathbb{N}}$ et permet d'obtenir une suite $(\tilde{x}^i)_{i \in \mathbb{N}}$ ayant une meilleure convergence (suite dite accélérée) $|\tilde{x}^i - x^*| < |x^i - x^*|$.

Plusieurs formulations équivalentes sont rappelées ou établies dans [King, 1979] :

$$\tilde{x}^{i+2} = x^{i+2} - \frac{(x^{i+2} - x^{i+1})^2}{(\tilde{x}^i - 2x^{i+1} + x^{i+2})} \quad (1.21)$$

[Steffensen, 1933] propose d'utiliser le terme extrapolé par le procédé, pour le calcul de l'itéré suivant et [Irons et Tuck, 1969] débute l'extension aux vecteurs. Cette technique d'accélération peut aussi être couplée à des méthodes de point fixe pour des recherches de zéro par exemple. Avec un algorithme de Newton (méthode de la sécante) l'efficacité au sens de [Traub, 1964] est de $\sqrt{2}$ ou encore avec un procédé de Schwarz [Berenguer *et al.*, 2013]. Sur ce principe, les travaux ont ensuite porté sur des améliorations des performances, en augmentant l'ordre de la méthode. Par exemple à l'ordre 4, [King, 1979] porte l'efficacité à 1,587 en utilisant seulement trois évaluations de la suite.

Ces méthodes présentent un inconvénient car seul un itéré accéléré est utilisé dans la suite du calcul et par conséquent, il faut attendre deux calculs supplémentaires pour effectuer une autre accélération. [King, 1980] établit une formulation dite « avec mémoire » permettant de réutiliser les itérés accélérés pour l'extrapolation suivante. Ainsi une fois la procédure initialisée avec deux itérés, des accélérations peuvent être réalisées à chaque résolution portant l'efficacité à 1,618.

Soit ϕ l'opérateur permettant de calculer l'itéré suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} x^{i+2} = \phi(\tilde{x}^{i+1}) & \text{Calcul de l'itéré} \\ K = \frac{x^{i+2} - x^{i+1}}{\tilde{x}^{i+1} - \tilde{x}^i} & \text{Tangente approchée} \\ \tilde{x}^{i+2} = \tilde{x}^{i+1} - \left(\frac{1}{1-K} \right) (\tilde{x}^{i+1} - x^{i+2}) & \text{Modification de l'itéré} \end{array} \right. \quad (1.22)$$

Pour des utilisations en mécanique, la formulation doit être étendue aux vecteurs [Chow et Kay, 1984], en projetant le vecteur de correction afin d'obtenir un facteur de relaxation scalaire. Il faut initialiser la technique par deux itérations sans modifications ($\omega_0 = 1$, $\tilde{\mathbf{u}}^i = (\mathbf{u}^i)$ pour $i = 1, 2$). Ensuite à chaque itération, on peut construire $\tilde{\mathbf{u}}^{i+2}$ qui

est l'accélération apportée à l'itéré courant non-modifié \mathbf{u}^{i+2} obtenu par une résolution classique :

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{u}}^{i+2} = \tilde{\mathbf{u}}^{i+1} + \omega^{i+1} (\mathbf{u}^{i+2} - \tilde{\mathbf{u}}^{i+1}) \\ \text{avec : } \omega^{i+1} = \omega^i \frac{(\tilde{\mathbf{u}}^i - \mathbf{u}^{i+1})^T (\tilde{\mathbf{u}}^i - \mathbf{u}^{i+1} - \tilde{\mathbf{u}}^{i+1} + \mathbf{u}^{i+2})}{(\tilde{\mathbf{u}}^i - \mathbf{u}^{i+1} - \tilde{\mathbf{u}}^{i+1} + \mathbf{u}^{i+2})^T (\tilde{\mathbf{u}}^i - \mathbf{u}^{i+1} - \tilde{\mathbf{u}}^{i+1} + \mathbf{u}^{i+2})} \end{cases} \quad (1.23)$$

Cette formulation a été appliquée à des problèmes de mécanique des fluides dans [Küttler et Wall, 2008], puis au cadre *global/local* dans [Liu *et al.*, 2014]. La formule est appliquée en considérant comme suite convergente les vecteurs de déplacements nodaux d'interface à chaque itération (\mathbf{u}^i) ainsi que ceux ayant subi une accélération ($\tilde{\mathbf{u}}^i$).

Le surcoût de calcul de cette technique est négligeable, car elle consiste uniquement à effectuer des opérations sur des vecteurs déjà extraits et de taille réduite, celle des interfaces. L'amélioration de la convergence est significative et se maintient même sur des exemples de difficulté croissante [Duval *et al.*, 2016].

Des travaux sur la formulation continuent d'être effectués : [Bumbariu, 2012] pour un nouveau schéma d'extrapolation et une interpolation par polynômes d'Hermite dans [Ion Păvăloiu, 2016].

2.4 Gradient conjugué non-linéaire

Moins connu que dans le cas linéaire, le gradient conjugué non-linéaire peut se révéler tout aussi efficace. La différence principale est que le pas de descente n'est plus explicite, mais nécessite une *line-search* pour être déterminé.

Soit la résolution d'un problème d'optimisation suivant :

$$\min \{f(x) : x \in \mathbb{R}^n\} \quad (1.24)$$

La méthode de gradient conjugué génère une suite d'itérés (x_i) suivant l'algorithme 1, la technique de *line-search* est détaillée par la suite.

Il existe plusieurs méthodes de recherche linéaire permettant d'obtenir à chaque itération une approximation du pas de descente optimal $\alpha_i = \operatorname{argmin}_{\alpha} f(x_i + \alpha d_i)$ à partir de l'itéré courant x_i et de la direction actuelle d_i . Des règles importantes sont donnés par les *conditions fortes de Wolfe* :

— Règle d'Armijo : impose que le pas ne soit pas trop grand,

$$f(x + \alpha d) \leq f(x) + \epsilon_1 \alpha (\nabla f(x)^T d) \quad \text{avec : } 0 < \epsilon_1 < 1 \quad (1.25)$$

en pratique $\epsilon_1 = 10^{-4}$

— Règle de Wolfe : elle évite les pas trop petits,

$$\nabla f(x + \alpha d)^T d \geq \epsilon_2 (\nabla f(x)^T d) \quad (1.26)$$

avec $0 < \epsilon_1 < \epsilon_2 < 1$ et usuellement $\epsilon_2 = 0,99$

Algorithm 1: Gradient conjugué non-linéaire

Initialisation :

- Valeur initiale $x_0 \in \mathbb{R}^n$:- Direction de descente : $d_0 = -\nabla f(x_0)^T$ **for** $i \in [0, \dots, I]$ **do**- Recherche linéaire : $[\alpha_i] = \text{lineSearch}(x_i; d_i)$ - Calcul du nouvel itéré : $x_{i+1} = x_i + \alpha_i d_i$ - Calcul du gradient : $\nabla f(x_{i+1}) = \text{gradient}(x_{i+1})$ - Mise-à-jour du paramètre d'orthogonalisation : β_i ;- Mise à jour de la direction de recherche $d_{i+1} \leftarrow \nabla f(x_{i+1})^T + \beta_i d_i$ **end**

Pour chacune de ces méthodes des évaluations de la fonction f sont nécessaires, ce qui peut représenter un coût de calcul important.

Le paramètre d'orthogonalisation β_i a fait l'objet de nombreuses propositions suivant le type de problème à traiter, afin d'être optimal. Une liste non-exhaustive des formulations est rappelée ici, avec la notation suivante $y_i = \nabla f(x_{i+1}) - \nabla f(x_i)$:

$$\begin{aligned}
 \beta_i^{HS} &= \frac{\nabla f(x_{i+1})^T y_i}{d_{i+1}^T y_i} && \text{[Hestenes et Stiefel, 1952]} \\
 \beta_i^{FR} &= \frac{\nabla^T f(x_{i+1}) \nabla f(x_{i+1})}{\nabla^T f(x_i) \nabla f(x_i)} && \text{[Fletcher et Reeves, 1964]} \\
 \beta_i^{PR} &= \frac{\nabla^T f(x_{i+1}) y_i}{\nabla^T f(x_i) \nabla f(x_i)} && \text{[Polak et Ribiere, 1969]} \\
 \beta_i^{DY} &= \frac{\nabla^T f(x_{i+1}) \nabla f(x_{i+1})}{d_{i+1}^T y_i} && \text{[Dai et Yuan, 1999]}
 \end{aligned} \tag{1.27}$$

3 Méthodes numériques pour chargements cycliques

Une structure sous sollicitations cycliques peut, sous certaines conditions de chargement et de loi de comportement matériau, atteindre un état stabilisé, aussi appelé cycle limite, lorsque certaines variables internes évoluent de manière périodique sur chaque cycle de sollicitation. La stabilisation intervient après un nombre de cycles qui dépend du niveau de chargement de la structure étudiée. Dans le contexte des structures chaudes aéronautiques, la fatigue à faible nombre de cycles (50 à 100) est prépondérante et en particulier l'interaction fatigue-fluage intervenant lors des calculs de durée de vie.

Dans ce type d'analyses, la phase transitoire est très courte par rapport à la durée de vie de la structure dont l'essentiel s'effectue sur le cycle limite qui est ensuite répété. Ainsi seule cette information est indispensable pour les calculs de durée de vie et il n'est pas nécessaire de connaître précisément les cycles transitoires amenant au cycle

limite. C'est pourquoi un ensemble de techniques vise à obtenir la solution asymptotique, en évitant le calcul transitoire incrémental très coûteux, sont disponibles dans la littérature, permettant d'établir l'évolution thermo-mécanique de la structure jusqu'à un état limite éventuellement stabilisé.

3.1 Méthodes semi-analytiques

Avant l'apparition de moyens de calcul modernes, permettant de calculer quelques cycles de chargement en loi de comportement non-linéaire, des méthodes de détermination rapide du cycle limite ont été proposées d'abord en plasticité [Halphen et Nguyen, 1981] puis en élasto-viscoplasticité et enfin sur des applications plus complexes [Johnson, 1992]. Elles sont basées sur l'analyse mathématique des lois de comportements et permettent d'établir des propriétés de stabilisation [Koiter, 1960, König, 1987] liées à l'écroutissage. Elles permettent de postuler la forme de la solution recherchée ou encore de construire un chargement extérieur limite, permettant d'approcher le cycle limite, s'il existe, de manière directe. Outre la méthodologie proposée par ces études, il est possible d'en tirer les propriétés cycliques de ces comportements. On peut en outre exploiter numériquement les propriétés de périodicité de la solution en contrainte et en vitesse, comme par exemple dans la méthode cyclique directe (*cf.* section 3.5), en ce qui concerne la convergence vers la solution asymptotique. Dans [Ladevèze et Rougée, 1985], des invariants ne dépendant que de la sollicitation limite sont dégagés.

3.2 Méthode de Zarka

Initialement proposée dans [Zarka *et al.*, 1980] sous l'appellation « méthode d'analyse simplifiée des structures inélastiques », elle permet d'estimer la solution élasto-plastique d'une structure complète uniquement à partir de calculs éléments finis en élasticité linéaire, ce qui est bien moins coûteux que par des résolutions non-linéaires. Il s'agit en outre d'une recherche directe de l'état limite, c'est-à-dire que l'histoire du chargement n'est pas obligatoirement respectée et peut donc être réalisée de manière simplifiée.

De manière générale, la déformation totale est décomposée comme suit avec l'introduction d'un champ de déformation initial ϵ^0 :

$$\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^p + \epsilon^0 \quad (1.28)$$

La déformation plastique ϵ^p est obtenue *via* un changement de variable, aussi appelée paramètre de transformée interne, $\mathbf{y} = C\epsilon^p$ pouvant être considérée comme de l'écroutissage cinématique. Ensuite une deuxième transformation, dite structurelle, fait appel à un tenseur \mathbf{R} des contraintes résiduelles $\mathbf{Y} = \mathbf{y} - \mathbf{R}$. L'espace des \mathbf{Y} varie entre deux convexes « minimum » et « maximum » jusqu'à sa stabilisation dans un état plastiquement admissible. Dans le cas de l'adaptation, ces deux espaces limites possèdent

une intersection non vide, dans laquelle se trouve la solution stabilisée. Pour l'accommodation, comme la déformation plastique varie au cours du cycle limite, l'intersection entre les deux espaces limites est vide, il faut alors procéder par projection (cf. figure 1.7) sur les surfaces seuil de chaque espace.

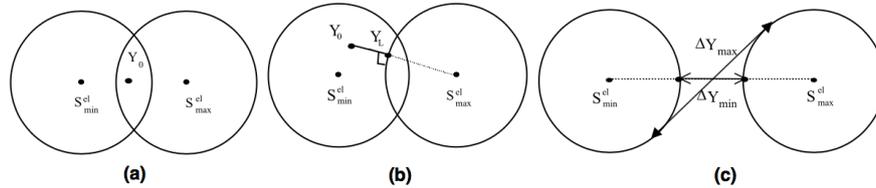


FIGURE 1.7 – Espaces de projection : (a) adaptation (b) adaptation avec plasticité (c) accommodation [Khalij *et al.*, 2002]

C'est grâce à ces changements de variables, représentant la principale difficulté d'application d'une telle méthode, que l'on peut s'affranchir de calculs non-linéaires.

Depuis, cette méthode a été utilisée pour traiter des cas plus évolués [Khalij *et al.*, 2002], même si les calculs et les modèles matériaux restent assez simples.

3.3 Méthode des sauts de cycles

Initialement proposée dans [Savalle et Culie, 1978] puis [Lesne et Savalle, 1989], cette méthode est basée sur le constat que les évolutions des variables internes sont importantes au cours d'un cycle, mais relativement faibles lorsqu'on les observe à un instant identique sur plusieurs cycles consécutifs (cf. figure 1.8). À cette échelle, une extrapolation de ces grandeurs devient envisageable et permet de réduire considérablement le nombre de calculs à effectuer.

Prélèvement des variables internes Afin d'exprimer les variables du modèle en fonction du nombre de cycles, on choisit un instant particulier τ du cycle de période T . On crée alors un vecteur \mathbf{Y} des variables internes en prélevant la solution au même instant τ de chaque cycle calculé. [Saï, 1993, Arzt, 1994] préconisent de prélever la solution en régime élastique, pour cela on fait coïncider τ avec la fin du cycle. On concatène ensuite les valeurs de chaque variable interne pour chaque point de Gauss de la structure étudiée.

Par exemple pour un cycle N , l'opération de prélèvement de la solution y s'écrit :

$$\mathbf{Y}(N) = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\alpha} \\ \mathbf{X} \\ \mathbf{p} \\ \dots \end{bmatrix} ((N-1)T + \tau) \quad (1.29)$$

avec : \mathbf{u} le champ de déplacements et $\boldsymbol{\alpha}$, \mathbf{X} , \mathbf{p} les variables internes du modèle utilisé.

La solution finalement obtenue $\mathbf{Y}(c)$ est un échantillonnage, sur chaque cycle calculé, de la solution temporelle $y(t)$.

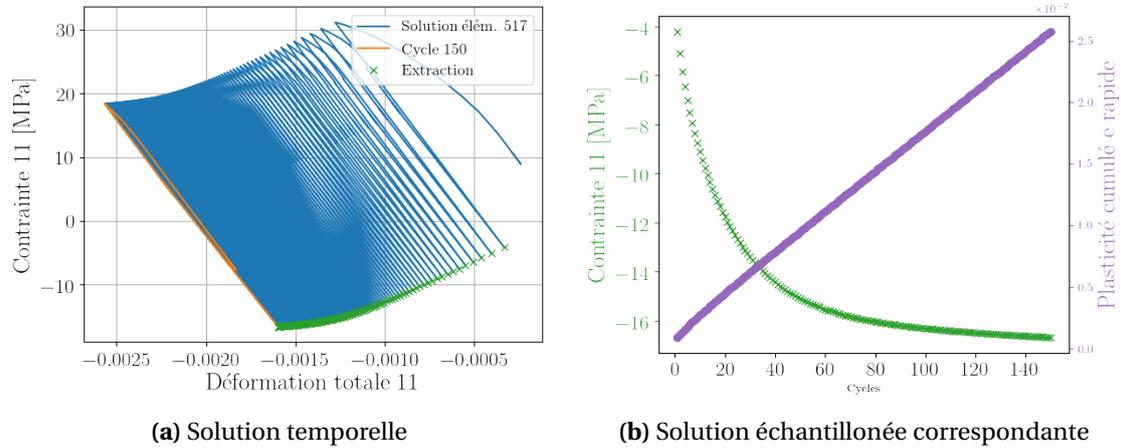


FIGURE 1.8 – Description de la solution en terme de cycles plutôt qu'en temps

Méthodes d'extrapolation La solution échantillonnée $\mathbf{Y}(c)$ est plus régulière que la solution temporelle notamment vis-à-vis de l'évolution des variables. À partir du calcul de quelques cycles consécutifs, une extrapolation de l'état de la structure est possible, ce qui évite de calculer l'intégralité des cycles. Le nombre de cycles « sautés » lors de l'extrapolation est calculé par la méthode.

Plusieurs approches ont été proposées pour l'extrapolation, la première à avoir vu le jour est basée sur un développement asymptotique au deuxième ordre, [Saï, 1993] l'implémente dans le code industriel *Zébulon*, [Arzt, 1994] l'utilise couplée à un solveur de type *LaTin* [Ladevèze, 1999]. Il faut attendre [Foerch *et al.*, 2000] pour une utilisation dans *Abaqus* et une application industrielle sur une aube de turbine.

On considère trois cycles qui permettent d'évaluer les dérivées de \mathbf{Y} , puis on utilise un développement limité de Taylor à l'ordre 2 du vecteur solution :

$$\mathbf{Y}(N + \Delta N) \simeq \mathbf{Y}(N) + \mathbf{Y}'(N)\Delta N + \mathbf{Y}''(N)\frac{\Delta N^2}{2} \quad (1.30)$$

Une bonne précision requiert que le terme du second ordre soit négligeable par rapport à celui du premier ordre, ce qui fournit une relation supplémentaire permettant de déterminer la longueur du saut autorisé ΔN :

$$\Delta N \mathbf{Y}'(N) \gg \frac{\Delta N^2}{2} \mathbf{Y}''(N) \quad (1.31)$$

Un paramètre, dit de « qualité », ρ est introduit afin de satisfaire la condition précédente, plusieurs valeurs sont utilisées dans la littérature. Le paramètre pilote la longueur du saut : plus ρ est grand, plus le saut est long mais moins la condition 1.31 est respectée et moins l'extrapolation est précise.

L'expression de la longueur de saut est alors la suivante :

$$\Delta N = 2\rho \frac{Y'(N)}{Y''(N)} \quad (1.32)$$

Ainsi en chaque point de Gauss de la structure, une longueur de saut différente est obtenue. Il est alors préconisé de prendre la valeur minimum pour l'ensemble de la structure.

$$\Delta N = 2\rho \min_{\text{pt Gauss}} \left(\left| \frac{Y'(N)}{Y''(N)} \right| \right) \quad (1.33)$$

Il faut donc évaluer les dérivées de la solution ce qui constitue un point clé de la méthode. Plusieurs méthodes existent comme par les différences finies sur les cycles de bases [Saï, 1993, Cojocar et Karlsson, 2006, Burlon *et al.*, 2014] ou analytiquement en considérant une interpolation polynomiale d'ordre 2 sur la base du saut [Arzt, 1994]. [Cao, 2010] utilise des fonctions d'évolution types, dont les paramètres sont identifiés à chaque saut par la méthode des moindres carrés. Un inconvénient est que des fonctions différentes sont par exemple utilisées pour les contraintes tangentielles et normales, ce qui alourdit l'implémentation. [Kiewel *et al.*, 2000] propose d'utiliser des fonctions polynomiales du deuxième et troisième ordre maximum afin d'éviter les oscillations lors de l'interpolation. Cette méthode est utilisée dans le contexte de la fatigue à grand nombre de cycles ($\sim 8.10^5$ cycles) et la longueur de saut n'est pas basée sur la qualité du développement limité, mais sur l'écart avec une extrapolation linéaire fictive.

En toute rigueur, la longueur de saut est calculée pour chaque variable du modèle, ce qui peut rendre ce travail assez fastidieux. C'est pourquoi [Burlon *et al.*, 2014] se base uniquement sur la déformation plastique qui a un comportement plus régulier que les autres variables internes.

Enfin, dans la plupart des méthodes, le développement limité 1.30 est réutilisé pour construire l'état extrapolé de la solution.

Autres domaines d'application Initialement utilisée pour des comportements non-linéaires de type viscoplastique, la technique a ensuite portée sur l'extrapolation de la variable d'endommagement seule. [Kiewel *et al.*, 2000] analyse certaines parties de la chambre de combustion de moteurs aéronautiques. Sa stratégie n'est pas appliquée durant les premiers cycles où les variations sont importantes, cette période étant courte par rapport à la durée de vie de la structure. [Van Paepegem *et al.*, 2001] étudie l'endommagement d'éprouvettes en matériaux composites *via* une extrapolation linéaire. [Bogard *et al.*, 2008] réalise une étude pour des calculs de fatigue de roulements à billes, soumis à un très grand nombre de cycles, l'application spécifique le conduit à établir une formule d'extrapolation dédiée. Par ailleurs, [Kravchenko et Petermann, 2014] utilisent une méthode de sauts de cycles dans le cadre de la mécanique de la rupture, ayant recours à une zone cohésive sous chargement thermo-mécanique.

3.4 Méthodes à grands incréments de temps de type *LaTin*

3.4.1 Principe de la méthode *LaTin*

Cette méthode, initiée par [Ladevèze, 1985], tire son acronyme de *Large Time Increment* mais n'est pas une méthode incrémentale, dans le sens où à chaque itération de la méthode, une solution sur tout l'espace-temps est obtenue et non pas sur un pas de temps unique. Outre le fait qu'elle représente une alternative à l'algorithme classique de résolution de type Newton incrémental pour les problèmes d'évolution comme l'élasto-viscoplasticité [Boisse, 1987], elle se prête bien à la simulation de chargements cycliques [Arzt, 1994]. Elle repose sur deux principes que sont la *séparation des difficultés*, c'est-à-dire que les équations à résoudre sont séparées en deux espaces : un espace \mathcal{A}_d affine représentant l'équilibre global de la structure et une variété Γ regroupant les lois non-linéaires d'évolution des variables internes. Cette méthode vient rechercher la solution de manière alternée dans ces deux espaces en deux étapes, de manière itérative. La solution élastique linéaire sur l'ensemble du chargement s_0 permet d'initialiser ce processus, ensuite de manière générale (pour plus de précisions on peut se référer à [Ladevèze, 1996, Ladevèze, 1999]) une itération ($i > 0$) de la méthode LATIN se déroule de la façon suivante (cf. figure 1.9) :

- *L'étape locale* : les équations non-linéaires de comportement, ponctuelles en espace et en temps donc parallélisables à petit grain, sont résolues à partir de la connaissance d'une solution s_{i-1} . Un état plastiquement admissible \hat{s}_i est construit dans Γ *via* une direction de recherche \mathbb{E}^+ (paramètre de la méthode) :

$$\begin{cases} \hat{s}_i \in \Gamma \\ \hat{s}_i - s_{i-1} \in \mathbb{E}^+ \end{cases} \quad (1.34)$$

- *L'étape linéaire* : le problème élastique, posé sur l'ensemble de la durée de l'analyse dans \mathcal{A}_d , est résolu à partir de la solution locale \hat{s}_i *via* une direction de recherche \mathbb{E}^- . Ces équations sont linéaires et globales en espaces ce qui conduit à devoir inverser une matrice de grande taille. C'est pourquoi des méthodes de réduction de modèle ont été appliquées afin de limiter les coûts de stockage de la solution espace-temps, telle que l'approximation radiale [Cognard, 1989] ou de la *PGD* pour *Proper Generalized Decomposition* dans [Relun *et al.*, 2013]. La recherche de la solution est la suivante :

$$\begin{cases} s_i \in \mathcal{A}_d \\ s_i - \hat{s}_i \in \mathbb{E}^- \end{cases} \quad (1.35)$$

Une relaxation statique $\mu \in [0.5, 0.8]$ peut être utilisée sur la solution de l'étape globale :

$$s_i = \mu s_i + (1 - \mu) s_{i-1} \quad (1.36)$$

La convergence est mesurée *via* un indicateur spécial entre les solutions globales et locales :

$$\eta_{LaTin} = \frac{\|\hat{s}_i - s_i\|}{\|\hat{s}_i + s_i\|} \quad (1.37)$$

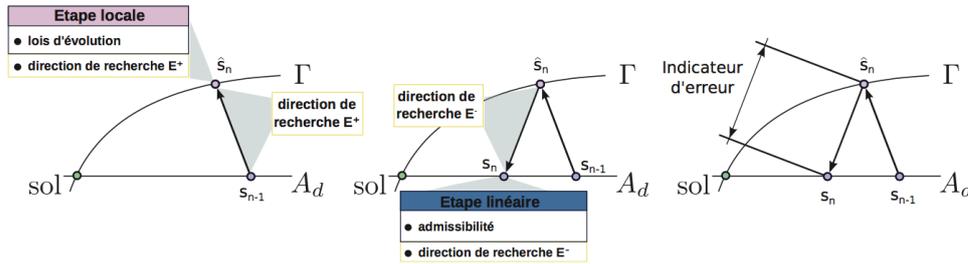


FIGURE 1.9 – Description des étapes de la méthode [Relun *et al.*, 2013]

Un point clé de la méthode, influant grandement sur les performances, est la définition des directions de recherche. De nombreux travaux ont porté sur leur choix :

- \mathbb{E}^+ à direction verticale où on réutilise directement le champ de contrainte, \mathbb{E}^- avec la matrice tangente [Bussy, 1989],
- Utilisant un algorithme de Lagrangien projeté [Ladevèze, 1981, Boisse, 1987] inspiré de la mécanique des fluides,
- *Via* des opérateurs plus complexes dépendant du matériau utilisé, initialement dans [Ladevèze, 1985] jusqu'à la version actuelle de [Relun *et al.*, 2013] avec une direction de recherche optimisée.

Domaines d'application Comme évoqué précédemment, cette technique était dédiée au calcul de comportements non-linéaires comme l'élasto-plasticité [Boisse, 1987, Boisse *et al.*, 1990] ou l'élasto-viscoplasticité [Cognard, 1989]. Elle a ensuite été étendue au traitement de problèmes de thermo-mécanique [Cognard *et al.*, 1999], de chocs en élasto-viscoplasticité [Royer, 1989, Ladevèze, 1996], de structures composites stratifiées, notamment le délaminage [Allix, 1989], aux grandes transformations [Bussy *et al.*, 1990] ou encore au flambage [Boucard et Ladevèze, 1997].

La séparation de la résolution en deux étapes a permis d'étendre son utilisation à des problèmes complexes tels que le contact, l'optimisation avec des calculs multiparamétriques [Boucard et Ladevèze, 1999, Boucard, 2001], l'endommagement [Vitse, 2016] ou encore la décomposition de domaine [Ladevèze, 1999] avec potentiellement du contact. Pour ce dernier type d'applications, un développement non-intrusif a été réalisé par [Oumaziz *et al.*, 2016, Oumaziz *et al.*, 2017]. Dans ces nombreuses extensions, des travaux spécifiques ont été effectués afin d'optimiser chaque étape de la stratégie.

3.4.2 Approche cyclique

Proposée par [Maouche *et al.*, 1997] en élasto-plasticité due à des contacts évolutifs, cette méthode s'inspire de la méthode *LaTin* [Ladevèze, 1989, Boisse *et al.*, 1989] ainsi que des travaux de [Aken et Nguyen, 1989].

Elle consiste à rechercher le cycle stabilisé sous une forme périodique, sans suivre

le trajet de chargement. Ainsi la solution obtenue est uniquement définie sur le cycle stabilisé. Grâce à la séparation de la résolution des équations mécaniques en deux groupes (équilibre et comportement), l'algorithme itératif de résolution s'effectue en deux étapes :

- *L'étape globale* est un calcul classique incrémental, basé sur la connaissance d'un champ plastique initial. Il s'agit d'un calcul sur un cycle de chargement avec un comportement matériau élastique linéaire.
- *L'étape locale* utilise un algorithme de retour radial, à chaque instant du cycle, permettant de calculer la solution plastique admissible. Les déformations plastiques sont ensuite réutilisées en tant que chargement extérieur lors de l'étape globale suivante.

La convergence est quantifiée par l'intermédiaire de l'écart en périodicité de la solution plastique locale. Cette approche cyclique constitue la version préliminaire de la méthode cyclique directe.

3.5 Méthode cyclique directe

En se basant sur les idées originales de la méthode *LaTin*, [Maitournam *et al.*, 2002] propose la méthode cyclique directe. Le but est de rechercher directement la solution de la structure au cycle stabilisé en comportement non-linéaire soumise à un chargement thermo-mécanique de période T .

Principe de résolution On établit la formulation variationnelle de notre problème d'étude : $\forall t \in [0, T], \forall \mathbf{u}_t^*(x) \in \text{CA à } 0$

$$r(\mathbf{u}(x, t)) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}, t) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}_t^*) d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{f}(x, t) \mathbf{u}_t^*(x) d\Omega - \int_{\partial_F \Omega} \mathbf{F}(x, t) \mathbf{u}_t^*(x) dS = 0 \quad (1.38)$$

Une discrétisation temporelle t_j en N piquets de temps est ensuite mise en place, puis cette équation non-linéaire en \mathbf{u} est décomposée en séries de Fourier et on cherche à annuler chaque coefficient avec :

$$\mathbf{R}_m^c = \frac{2}{T} \sum_{j=1}^{N-1} \mathbf{r}_j \cos\left(2\pi m \frac{t_j}{T}\right) = 0 \text{ et } \mathbf{R}_m^s = \frac{2}{T} \sum_{j=1}^{N-1} \mathbf{r}_j \sin\left(2\pi m \frac{t_j}{T}\right) = 0 \quad (1.39)$$

Les équations obtenues sont non-linéaires en \mathbf{u} par l'intermédiaire de $\mathbf{r}_j = \mathbf{r}(\mathbf{u}, t_j)$ et sont résolues par un schéma de Newton-Raphson à l'étape globale, *via* une matrice tangente assemblée à l'étape locale ou non (on parlera alors de méthode quasi-Newton).

Les résolutions portent uniquement sur une période temporelle, soit la durée d'un cycle. La méthode est un procédé itératif basé sur trois étapes :

- *Étape globale* : on cherche des solutions statiquement et cinématiquement admissibles pour un chargement défini sur l'ensemble de l'intervalle $[0, T]$.

Une matrice tangente ou de quasi-Newton est utilisée pour la résolution du problème linéaire représenté par des séries de Fourier (ou par une base d'ondelettes). Un compromis entre le nombre de termes conservés de la décomposition et le temps de calcul est opéré afin d'obtenir une solution précise et à faible coût)

$$(\mathbf{U}_n^{c/s})^{i+1} = (\mathbf{U}_n^{c/s})^i - \left(\frac{\partial \mathbf{R}_m^{c/s}}{\partial \mathbf{U}_n^{c/s}} \right)^{-1} (\mathbf{R}_m^{c/s})^i \quad (1.40)$$

- *Étape locale* : on détermine les solutions plastiquement admissibles sur l'ensemble du cycle $[0, T]$ via un algorithme de retour radial [Son, 1977, Simo et Hughes, 1998] entre deux piquets de temps, à partir de la prédiction élastique fournie par l'étape globale. Cette étape consiste à résoudre les équations (1.39) et ainsi obtenir les coefficients $(\mathbf{R}_m^{c/s})^{i+1}$. Ceux-ci permettant ensuite de construire la matrice tangente explicitée dans [Maitournam *et al.*, 2002]. Les séries de Fourier peuvent être tronquées, cela réduit la taille du problème à résoudre et par conséquent diminue le temps de calcul.
- *Périodicité* : cette propriété de la solution est imposée sur les grandeurs mécaniques et des variables internes, c'est ce qui marque la différence avec l'approche cyclique précédente.

L'arrêt des itérations est piloté par l'admissibilité plastique des contraintes calculées à l'étape globale ainsi que par la périodicité des déformations plastiques, devant être identiques au premier instant et au dernier instant du cycle après l'étape locale.

Les résultats numériques proposés traitent une structure sur une quarantaine de cycles permettant d'obtenir la stabilisation du cycle, ce qui correspond à la fatigue à faible nombre de cycle.

Cette méthode a été implémentée dans plusieurs codes commerciaux comme *Abaqus/Standard* ou *Cast3m*.

Il est rapporté [Pommier, 2003, Simulia, 2016] que le fait d'imposer la condition de périodicité dans l'algorithme dès le début du processus engendre de l'erreur en présence d'accommodation. En effet, ce phénomène bien que périodique une fois stabilisé ne l'est pas dans sa phase transitoire. Enfin, la méthode ne converge pas lorsque la structure présente du rochet car la solution n'est pas périodique.

Résolution en série de Fourier Les travaux de [Pommier, 2003] apportent des améliorations à la méthode initiale ainsi qu'un développement dans *Abaqus Standard*. Le problème à résoudre est $R(t) = F_{Ext} - F_{Int}$ conduisant à résoudre le système suivant :

$$\mathbf{u}_n^{(i+1)} - \mathbf{u}_n^{(i)} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{R}_n^{(i)} \quad (1.41)$$

avec :

$$u(x, t) = \sum_n u_n^c(x) \cos\left(\frac{2\pi}{T} nt\right) + \sum_n u_n^s(x) \sin\left(\frac{2\pi}{T} nt\right) \quad (1.42)$$

Le champ de déplacement ainsi que le résidu sont développés en séries de Fourier puis un algorithme classique de retour radial est ensuite utilisé pour calculer la solution

plastiquement admissible $(\sigma, \epsilon^p, F_{Int})$. Pour finir, il faut reconstruire le champ $u(t)$ sur $[0, T]$.

Un algorithme général de la méthode est rappelé ici :

1. Initialisation : décomposition du chargement en série de Fourier
2. Prédiction élastique sur $[0, T]$ (en fréquentiel)
3. Test de plasticité sur $[0, T]$ (Arrêt de la procédure si le test est concluant)
4. Calcul des déformations plastiques et des variables internes sur $[0, T]$
5. Décomposition du second membre (forces plastiques, résidu), retour à l'étape 2

Résolution par les ondelettes Comme souvent constaté, les phénomènes visés sont constitués de deux échelles. Aux échelles les plus fines, qui servent à décrire ce qui se passe de manière locale, les coefficients d'ondelettes sont de faible valeur pour un signal ne subissant pas de variations rapides. [Comte *et al.*, 2006] résout le problème d'équilibre sur un espace d'approximation constitué d'une base d'ondelettes réduite permettant une meilleure convergence liée à la régularité locale du signal plus pertinente que la régularité globale des séries de Fourier.

3.6 Contrôle optimal

La méthode a été établie sur un exemple simple en EVP suivant une loi de Norton-Hoff dans [Peigney et Stolz, 2001, Peigney et Stolz, 2003]. Elle consiste à rechercher le cycle limite de manière directe, sous forme d'un problème de minimisation, la structure étant soumise à un chargement thermo-mécanique de période T . Le comportement élastique est considéré comme indépendant de la température.

Une fonctionnelle est construite basée sur la variable de contrôle $s(0) = (\epsilon_0^p, \alpha_0)$ devant être plastiquement admissible (PA), mesurant l'erreur de périodicité de la solution en contraintes. Avec la connaissance de l'état de la structure au début du cycle $(\sigma(0), \mathbf{A}(0), \epsilon_0^p, \alpha_0)$ où \mathbf{A} correspond aux forces thermodynamiques associées aux variables d'écroutissage, liées aux déformations plastiques par la matrice \mathbf{Z} . Grâce aux équations d'évolution du comportement, on peut obtenir la solution à chaque instant t du cycle $[0, T]$, $s(t) = (\sigma(t), \mathbf{A}(t), \epsilon^p(t), \alpha(t))$ qui dépend de la variable de contrôle.

Le cœur de la stratégie est d'exprimer la fonction de minimisation adaptée au problème traité :

$$\mathcal{J}(\epsilon_0^p, \alpha_0) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\Delta \sigma : \mathbf{K}^{-1} : \Delta \sigma + \Delta \mathbf{A} : \mathbf{Z}^{-1} : \Delta \mathbf{A}) d\omega \quad (1.43)$$

avec $\Delta \sigma = \sigma(T) - \sigma(0)$ et $\Delta \mathbf{A} = \mathbf{A}(T) - \mathbf{A}(0)$. Ainsi, la fonctionnelle est nulle si et seulement si $\sigma(T) = \sigma(0)$ et $\mathbf{A}(T) = \mathbf{A}(0)$, ce qui est la propriété de l'état asymptotique de la structure. Le cycle limite est donc recherché par le problème de minimisation suivant :

$$\min_{(\epsilon_0^p, \alpha_0)_{PA}} \mathcal{J}(\epsilon_0^p, \alpha_0) \quad (1.44)$$

Une approximation de \mathcal{J} peut être obtenue par la méthode des éléments finis, ce qui rend cette approche aisément implémentable. Depuis, le champ d'application a été élargi aux problèmes de contact [Peigney, 2004] et aux problèmes inverses en élasto-viscoplasticité [Stolz, 2008].

3.7 Homogénéisation asymptotique temporelle

Cette méthode, plus récente que les techniques d'homogénéisation spatiale (cf. section 1.1) visant principalement à construire un modèle matériau homogène ayant les mêmes réponses macroscopiques qu'avec une description microscopique, a également pour but de réduire drastiquement le temps de calcul.

L'homogénéisation temporelle est basée sur le fait que les hétérogénéités temporelles conduisent à un comportement plutôt homogène sur l'histoire de la structure. Les variations lors de la phase transitoire étant rarement utiles pour les analyses de fatigue par exemple, on s'attache ici encore à approcher le cycle limite par des développements asymptotiques des variables internes afin d'homogénéiser le comportement temporel de ces dernières.

La proposition initiale de cette méthode a été faite dans [Guennouni, 1988]. La décomposition des échelles de temps peut être induite par des phénomènes physiques ou par des chargements intervenant à des fréquences différentes comme en *CCF* (*Combined Cycle Fatigue*). Ainsi on distingue une échelle de temps lente t (pour les basses fréquences F) et une échelle de temps rapide τ (pour les hautes fréquences $F\xi^{-1}$). Ces deux échelles devant être bien séparées $\xi \ll 1$ afin que les variables soient périodiques par rapport au temps rapide, bien que pouvant dépendre des deux échelles.

Les champs du problème à traiter sont exprimés sous la forme de développements asymptotiques en ξ , comme par exemple pour les contraintes :

$$\sigma(x, t, \tau) = \sigma_0(x, t, \tau) + \xi \sigma_1(x, t, \tau) + \mathcal{O}(\xi^2) \quad (1.45)$$

Cette forme est introduite dans toutes les équations que doivent satisfaire ces champs, comme l'équation d'équilibre ou celle de la dynamique. Les différentes équations sont ensuite résolues par ordre de développement commun. Par exemple, l'ordre $1/\xi$ permet d'écrire que la déformation plastique ne dépend que du temps lent [Aubry et Puel, 2010].

[Yu et Fish, 2002b] établit des formulations pour des modèles de visco-élasticité de Maxwell et d'élasto-viscoplasticité suivant une loi puissance. Dans ces deux propositions, deux échelles de temps sont aussi introduites, une *macro* et une *micro*, retrouvant les résultats initiaux de cette technique. L'extension aux chargements thermomécaniques est réalisée dans [Yu et Fish, 2002a].

[Oskay et Fish, 2004] propose une expression du champ de déplacement toujours par un développement asymptotique à deux échelles, il en découle la même séparation d'échelles pour les déformations et les contraintes. La résolution se déroule de manière étagée entre les deux échelles (pouvant être couplées aux ordres les plus bas du développement). Les travaux concernent l'endommagement de matériaux quasi-fragiles,

un apport non-négligeable de ces travaux est le développement en non-intrusif dans *Abaqus/Standard* même si l'implémentation est lourde *via* une *UMAT* pour le matériau.

Autres domaines d'application [Boutin et Wong, 1998] utilisent cette méthode pour de l'homogénéisation en espace et en temps concernant un matériau biphasé thermo-sensible pour lequel l'échelle de temps fine est dictée par des phénomènes thermiques locaux. [Levy *et al.*, 2008] y ont recours pour une application industrielle complexe de mise en forme de matériaux composites, [Aubry et Puel, 2010] s'en servent pour des matériaux élasto-viscoplastiques en quasi-statique dans des analyses *CCF* et proposent une base à une utilisation en dynamique. Enfin, [Puel et Aubry, 2015] s'intéressent à cette technique dans le cadre de la résolution de problèmes inverses.

3.8 Méthode de parallélisation en temps

Le caractère causal du temps a longtemps été un frein au traitement parallèle des problèmes d'évolution, contrairement à l'espace qui fait l'objet de multiples méthodes dédiées comme celles de décomposition de domaine. Les architectures parallèles des calculateurs sont donc bien exploitées pour les résolutions en espace, typiquement sur les maillages éléments finis, mais dès que l'on souhaite résoudre ces problèmes sur des chargements transitoires, des résolutions bien que parallèles en espace doivent être menées de manière séquentielle sur le temps par des schémas incrémentaux. Les travaux précurseurs de [Lions *et al.*, 2001] dans ce domaine ont ouvert la voie du parallélisme en temps sous l'appellation de méthode *pararéelle* dans le cadre mathématique des résolutions d'équations aux conditions initiales.

Le premier principe de la méthode est la séparation de l'intervalle temporel d'étude $[0, T]$ (*cf.* figure 1.10) en N intervalles dits grossiers de longueur $\Delta T = \frac{T}{N}$ (on considère ici le pas constant bien que ce ne soit pas une limitation), eux-mêmes sous-découpés en M piquets de temps notés $t^{n,m}$ de longueur δt (car ils sont relatifs à la fenêtre temporelle grossière n).

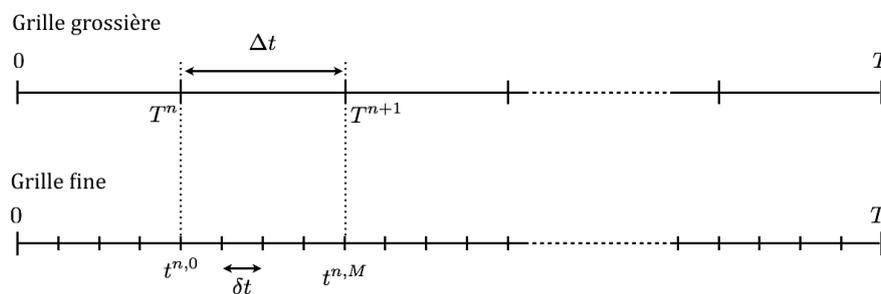


FIGURE 1.10 – Parallélisation en temps *via* deux grilles imbriquées

Le second aspect fondamental est la résolution du problème *via* deux propagateurs nommés grossiers \mathcal{C} et fins \mathcal{F} utilisant respectivement les grilles temporelles

grossières et fines. Le propagateur grossier est peu coûteux à calculer sur le domaine car il est évalué sur moins de piquets de temps et sert à obtenir des valeurs initiales sur chaque fenêtre temporelle n , sa résolution est séquentielle en temps. Sur chaque intervalle temporel, on peut alors résoudre de manière parallèle le propagateur fin grâce aux valeurs initiales.

On obtient ainsi aux piquets de temps $n + 1$ une différence entre les solutions fines et grossières mesurant l'erreur due à la discrétisation en temps, servant à venir corriger la prochaine itération du propagateur grossier *via* la formulation actuelle de cet algorithme proposée dans [Gander et Halpern, 2012] :

$$U_{n+1}^{i+1} = \mathcal{C}_{\Delta t}(T_{n+1}; T_n, U_n^{i+1}) + \mathcal{F}_{\delta t}(T_{n+1}; T_n, U_n^i) - \mathcal{C}_{\Delta t}(T_{n+1}; T_n, U_n^i) \quad (1.46)$$

où :

- $\mathcal{C}_{\Delta t}(T_{n+1}; T_n, U_n^{i+1})$ correspond à la solution obtenue par le propagateur grossier partant de la dernière solution corrigée,
- $\mathcal{F}_{\delta t}(t_{n+1}; t_n, U_n^i)$ est la solution fine obtenue à l'itération précédente,
- $\mathcal{C}_{\Delta t}(t_{n+1}; t_n, U_n^i)$ est la solution grossière obtenue à l'itération précédente avant la correction qui permet, avec la solution fine correspondante, de corriger l'algorithme *via* l'équation (1.46). Le processus itératif est arrêté lorsque la norme de cette correction est inférieure à une certaine tolérance.

L'application de cette méthode est répandue dans le domaine de la mécanique des fluides [Farhat et Chandesris, 2003] mais reste restreinte dans le domaine de la mécanique des structures [Chiaruttini et Rey, 2005]. Cela peut être dû au fait que le gain en temps de calcul chute rapidement avec le nombre d'itérations. Un frein à cette méthode est la construction des deux propagateurs, notamment le grossier, qui doit être peu coûteux, *ie.* fournir rapidement une approximation de la solution sur tout le domaine temporel, avec une précision suffisante pour que l'algorithme ne requière pas trop d'itérations.

Cependant, un avantage considérable de cette approche est de fournir une estimation de la solution finale, potentiellement le cycle limite, à chaque itération ce qui en contexte de bureau d'étude peut être très bénéfique.

Conclusion

Nous venons d'effectuer un état de l'art des méthodes de ré-analyse multi-échelle visant à introduire la représentation de détails ou de comportements évoluant à une échelle différente de celle de la structure ainsi que des méthodes de couplage de modèles permettant de s'affranchir de ces hypothèses de séparation d'échelles.

Concernant notre problématique, les détails ne sont pas découplés de l'échelle de la structure ce qui nous détourne de la première famille de méthodes. Cependant des idées peuvent en être retenues telles que le fait d'utiliser l'information du résidu d'équilibre pour suivre la convergence ou l'erreur lors de la réanalyse.

Il faut donc se tourner vers les méthodes de couplage en particulier les méthodes de type *global/local* afin de bénéficier de la possibilité d'avoir une représentation exacte de ces détails structuraux grâce à leur algorithme itératif non-intrusif.

Cependant ces méthodes doivent être étendues au traitement de non-linéarités généralisées à l'ensemble de la structure, ainsi le modèle global doit lui-même être non-linéaire. Afin de limiter le surcoût de calcul potentiel dû aux itérations, on pourra réutiliser les travaux effectués sur les accélérations de convergence en explorant de nouvelles voies dans le cadre des non-linéarités généralisées.

Enfin, il faudra aussi penser à la simulation de plusieurs cycles de chargement consécutifs dans le but d'obtenir le cycle limite de la structure étudiée. Afin de rendre possible, dans un intervalle de temps restreint, une telle analyse, il faudra dégager une méthode assez souple pour pouvoir être couplée aux grandeurs issues de la méthode *global/local*, mais aussi pouvant être développée de manière non-intrusive.

Chapitre 2

Loi de comportement matériau utilisée et intégration temporelle

Les travaux sur les modèles de comportement non-linéaire de type visco-plastique ont vu le jour dès 1910 avec la loi d'Andrade pour le fluage primaire (*cf.* section 1.2) puis 1929 avec la loi de Norton, qui est toujours d'actualité sous une forme plus aboutie. Depuis plus de 20 ans maintenant, les progrès en science des matériaux et les possibilités offertes par des puissances de calcul, toujours croissantes, sont exploités pour comprendre et simuler l'origine des déformations viscoplastiques par la dynamique des dislocations [Devincre et Kubin, 1997, Verdier *et al.*, 1998, Devincre *et al.*, 2008]. De même, les effets de structurations fines des matériaux sont analysés par des approches poly-cristallines [Barbe *et al.*, 2001]. Ces techniques ont participé à l'amélioration considérable des matériaux destinés aux applications en situations extrêmes, mais ces descriptions à très petites échelles ne sont pas encore utilisées régulièrement en calcul de structures. Ceci étant, la puissance de calcul est aussi un facteur clé dans ce domaine puisqu'elle autorise aujourd'hui les ingénieurs à effectuer de façon, de plus en plus routinière, des calculs non-linéaires complexes. Ces constatations constituent le contexte de cette thèse, dans laquelle l'utilisation de modèles de viscoplasticité macroscopiques assez sophistiqués doivent être étendus à des calculs détaillés de structures 3D.

Ce type de calcul devient indispensable pour le dimensionnement précis de pièces de moteurs aéronautiques, travaillant à des températures dépassant désormais 1400°C.

1 Phénomènes apparaissant à haute température

Les modèles de la viscoplasticité décrivent la dépendance à la vitesse de sollicitation de l'écoulement par fluage de la matière. Ils permettent de tenir compte des variations de vitesses de sollicitations apparaissant lors des chargements transitoires. Le fluage et la viscoplasticité sont dus aux mouvements des dislocations dans les grains, couplés à du glissement entre les plans cristallins.

Concernant les alliages mono-cristallins, ces phénomènes sont activés lors de la mise en radeaux des dislocations (*cf.* figure 2.1). Ces phénomènes sont thermiquement activés apparaissant généralement à partir d'une température d'un quart de celle de fusion du matériau [Lemaitre *et al.*, 2009].

1.1 Observations issues d'essais de traction

On rappelle ici les phénomènes principaux observés lors d'essais à haute température, en les illustrant avec la loi de comportement utilisée dans ce document, appliquée pour un alliage à base nickel *IN100* (*cf.* section 3) :

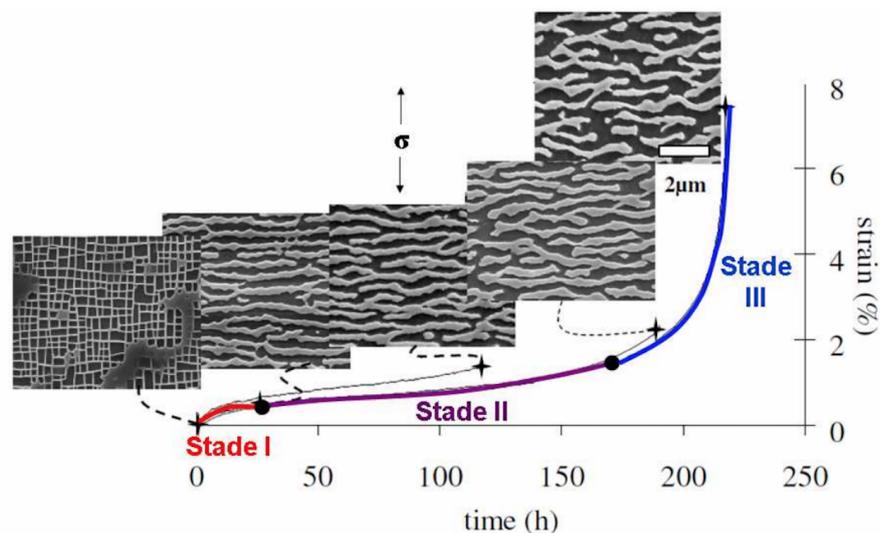


FIGURE 2.1 – Évolution de la mise en radeau de la micro-structure lors d'un essai de traction à haute température [Dirand, 2011]

D'un point de vue macroscopique, objet de cette thèse, la viscoplasticité se manifeste de plusieurs façons :

- Pour un même niveau de déformation, plus la vitesse de sollicitation est élevée plus la contrainte engendrée est importante et la déformation plastique faible (*cf.* figure 2.3b).
- Un changement de la vitesse de sollicitation entraîne une modification de la courbe monotone, vers celle de la nouvelle vitesse (*cf.* figure 2.2).
- La notion de seuil de plasticité n'est plus nettement définie. Un écoulement plastique peut se produire à une contrainte inférieure à celle d'un écoulement précédent. À haute température, la limite d'élasticité peut même disparaître.
- Les phénomènes engendrant la viscoplasticité (dislocations, glissement ou encore changement de phase [Vincent *et al.*, 2003]) sont très dépendant de la température et généralement le niveau de contrainte diminue avec l'élévation de la température.

- *Via* des essais cycliques, on peut mettre en évidence des effets de recouvrance, c'est-à-dire une diminution de la déformation plastique après un temps de maintien suffisamment long. Lors d'essais cycliques à déformation imposée, on observe de la restauration, c'est à dire une diminution du niveau de contrainte au cycle stabilisé. Ce dernier effet tient son nom de la restauration de la structure cristalline, venant compenser l'écroutissage cyclique. La viscosité peut être caractérisée par ce type d'essai, en appliquant un temps de maintien en fin de charge et de décharge. On constate alors que la courbe de comportement dépend de la fréquence du cycle, ainsi que des temps de maintien.

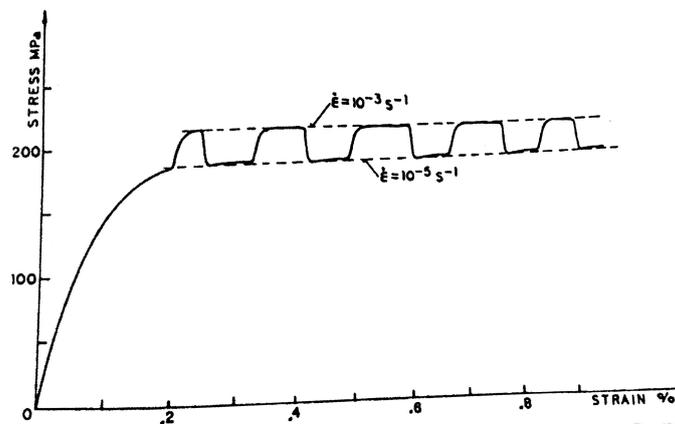


FIGURE 2.2 – Essai de traction à vitesse de déformation variable [Lemaitre *et al.*, 2009]

Lors de décharges, à des vitesses de déformation assez élevées ($\dot{\epsilon} > 10^{-3} s^{-1}$), on observe que le comportement élastique linéaire (ϵ^e) n'est pas modifié par les déformations visco-plastiques ϵ^p . Cela justifie la partition des déformations totales ϵ en déformations élastiques et plastiques (2.1) :

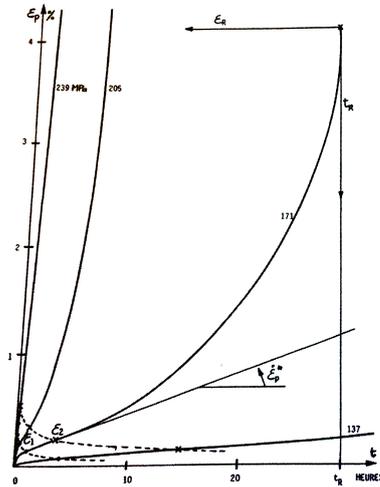
$$\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^p \quad (2.1)$$

1.2 Le fluage et la relaxation

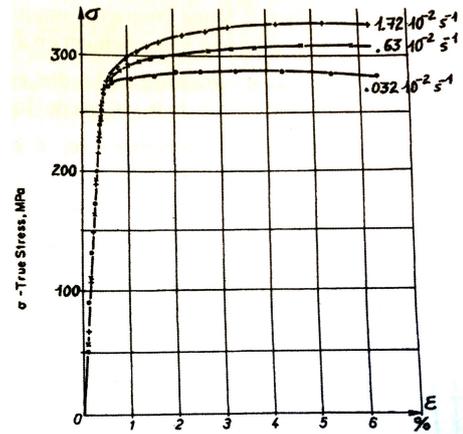
Le fluage est l'évolution de la déformation d'un matériau soumis à une contrainte constante. Lors d'essais de traction uni-axiaux, on constate la présence de trois phases successives (*cf.* figure 2.1) :

- *le fluage primaire* : l'écroutissage du matériau entraîne une diminution de la vitesse de fluage qui initialement est très importante,
- *le fluage secondaire* : la vitesse de fluage est alors quasiment constante et atteint des valeurs de l'ordre de $[10^{-8} s^{-1}, 10^{-3} s^{-1}]$,
- *le fluage tertiaire* : la vitesse de déformation plastique recommence à augmenter rapidement jusqu'à la ruine de la structure. Cette phase est plutôt étudiée en

durée de vie à cause du fort couplage avec l'endommagement, on parlera alors d'interaction fatigue/fluage.



(a) Essais de fluages à plusieurs niveaux de contrainte (IN100 à 1000°C)



(b) Influence de la vitesse de déformation

FIGURE 2.3 – Phénomènes liés à l'élasto-viscoplasticité [Lemaitre *et al.*, 2009]

Le fluage est un phénomène important dans le cadre des applications visées car il est présent durant la phase de vol de croisière (*cf.* figure 4.1), pour laquelle le chargement extérieur appliqué est constant. Pour le type de matériaux étudiés, ce phénomène a été caractérisé par des essais à température ambiante pour plusieurs niveaux de contrainte. Ils ont permis d'établir une relation entre la vitesse de fluage (lors de la phase secondaire) et la contrainte, ce qui a conduit à la loi de Norton :

$$\dot{\epsilon} = \left(\frac{\sigma}{K_N} \right)^{N_N} \quad (2.2)$$

Les paramètres K_N et N_N sont dépendant du matériau et de la température (*cf.* figure 2.9). En effet, l'exposant de Norton N_N a une tendance à décroître lorsque la température augmente, traduisant un comportement de plus en plus visqueux. En effet, plus N_N est grand moins la vitesse est influente. De manière générale ce sont les lois de type Norton-Hoff qui se sont imposées, [Chaboche, 2008] propose une revue d'ensemble de ces modèles.

À cette loi d'écoulement, des lois d'écrouissage cinématique doivent être ajoutées afin de fournir un effet de mémoire du trajet de déformation. Un modèle d'écrouissage isotrope peut finaliser la loi afin d'améliorer la modélisation de la réponse en traction ou celle caractérisant le durcissement cyclique.

De manière duale, le phénomène de relaxation correspond à une diminution de la contrainte dans un matériau soumis à une déformation constante au cours du temps.

C'est un phénomène caractéristique de la viscosité puisqu'à partir de la partition des déformations (2.1) écrite en vitesse :

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^e + \dot{\epsilon}^p \quad (2.3)$$

On peut obtenir une relation entre la vitesse d'écoulement plastique et la contrainte, en utilisant la loi de Hooke et le fait que la déformation est constante $\dot{\epsilon} = 0$:

$$\dot{\epsilon}^p = -\frac{\dot{\sigma}}{E} \quad (2.4)$$

2 Formulation thermodynamique

2.1 Partition des déformations

Suite aux observations expérimentales, on considère que la déformation totale est séparée en une partie élastique réversible ϵ^e et une contribution viscoplastique irréversible, simplement appelée dans la suite déformation plastique :

$$\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^p \quad (2.5)$$

2.2 Choix des variables thermodynamiques

Dans la suite, on choisit d'exprimer les potentiels thermodynamiques en fonction des déformations élastiques et plastiques, de la température T et de variables internes supplémentaires notées de manière générale V_k . Ces grandeurs permettent de décrire l'état du matériau à tout instant.

Par soucis de concision, l'ensemble des développements de la formulation ne sont pas rapportés ici, on pourra pour cela se reporter sur [Lemaitre *et al.*, 2009]. On peut montrer que l'énergie libre spécifique ψ est dépendante de la déformation élastique, de la température et des variables internes comme suit :

$$\begin{cases} \psi = \psi(\epsilon - \epsilon^p, T, V_k) \\ \epsilon^e = \epsilon - \epsilon^p \end{cases} \quad (2.6)$$

On définit ensuite les forces thermodynamiques associées à ϵ et T que sont la contrainte σ et l'entropie s (avec ρ la masse volumique) :

$$\begin{cases} \sigma = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon} \\ s = -\frac{\partial \psi}{\partial T} \end{cases} \quad (2.7)$$

On introduit une variable interne de nature scalaire liée à l'écroutissage isotrope, qui en l'absence de restauration (choix de la loi de comportement dans la section 3), est

assimilée à la déformation plastique cumulée p définie comme (avec t la durée de l'étude) :

$$p = \int_0^t \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\epsilon}^p(\tau) : \dot{\epsilon}^p(\tau)} d\tau \quad (2.8)$$

L'absence de restauration fait que le domaine d'élasticité ne peut rétrécir, comme ce qui peut se produire en réalité, sous l'effet de la température, lorsque la micro-structure cristalline se reconstitue.

L'écroissage cinématique est pour sa part représenté par une variable tensorielle notée α . Au contraire de la variable p qui est croissante, α lors de chargement cyclique notamment n'aura pas d'évolution monotone. En considérant le découplage entre le comportement élastique et l'écroissage, on peut écrire l'énergie libre de la manière suivante :

$$\psi = \psi_e(\epsilon - \epsilon^p, T) + \psi(\alpha, p, T) \quad (2.9)$$

On associe à ces variables internes les forces thermodynamiques correspondantes :

$$\begin{cases} R = \rho \frac{\partial \psi}{\partial r} \\ \mathbf{X} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \end{cases} \quad (2.10)$$

Le second principe s'écrit alors, en faisant l'hypothèse du découplage entre les dissipations intrinsèques et thermiques :

$$\Phi_1 = \sigma : \dot{\epsilon}^p - R\dot{p} - \mathbf{X} : \dot{\alpha} \geq 0 \quad (2.11)$$

2.3 Lois d'évolution

À cause de la dépendance à la vitesse de déformation, la surface seuil de plasticité est remplacée par une famille de surfaces dans l'espace des contraintes, pour lesquelles le module de la vitesse d'écoulement est égal. La déformation plastique instantanée, apparaissant dans la théorie de la plasticité, correspond à une surface de potentiel infini. En viscoplasticité, elle est rejetée à l'infini, on peut donc considérer que ce type de déformation est négligeable.

Le concept de surface d'écoulement est donc bien conservé et le domaine d'élasticité, dans l'espace des contraintes, peut se déformer sous l'action de l'écroissage. Sa taille se réduit très fortement avec la température comme observé expérimentalement (cf. section 1).

La loi d'écoulement viscoplastique est définie par la direction de la vitesse \mathbf{P} et son amplitude $\dot{\lambda}$:

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\lambda} \mathbf{P} \quad (2.12)$$

L'intensité de la vitesse de déformation plastique dépend de la distance du point de chargement à la frontière du domaine d'élasticité, qui est communément mesurée par $f(\sigma, \mathbf{X}, R)$ et est homogène à une contrainte (positive ou nulle). En plasticité, lors

de l'écoulement la condition de cohérence impose que $f = 0$, ce qui n'est plus le cas en viscoplasticité car $f \geq 0$. Par conséquent, le multiplicateur plastique λ n'est plus défini et il faut lui affecter une loi d'évolution de la forme :

$$\dot{\lambda} = \Phi(f) \quad (2.13)$$

Il en va de même pour les variables internes comme l'écroissage cinématique α et isotrope p , auxquelles on doit aussi proposer une loi d'évolution pouvant dépendre du temps afin de modéliser les effets du temps tels que la restauration :

$$\dot{\alpha} = \dot{\lambda} \mathbf{x} + \mathbf{p} \text{ et } \dot{p} = \dot{\lambda} u + s \quad (2.14)$$

Dans ces deux expressions, le premier terme décrit une évolution due à la déformation viscoplastique tandis que le second tient compte des effets temporels. La direction d'écoulement peut être normale (règle de normalité) ou non au domaine d'élasticité, selon le matériau. L'écoulement est alors dit normal et associé si :

$$\mathbf{P} \propto \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (2.15)$$

Au contraire, il peut dériver d'un potentiel $F \neq f$ et l'écoulement est alors non-associé. Dans notre cas, on ne souhaite pas représenter d'effet de restauration de la structure cristalline, la dissipation intrinsèque s'écrit alors comme :

$$\Phi_1 = \Phi(f) \left(\boldsymbol{\sigma} : \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{X} : \frac{\partial F}{\partial \mathbf{X}} + R \frac{\partial F}{\partial R} \right) \geq 0 \quad (2.16)$$

Cette relation permet de construire le potentiel F . Les équations du modèle thermodynamique représentant l'écoulement sont alors :

$$\begin{cases} \dot{\epsilon}^p = \Phi(f) \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \\ \dot{\alpha} = -\Phi(f) \frac{\partial F}{\partial \mathbf{X}} \\ \dot{p} = -\Phi(f) \frac{\partial F}{\partial R} \end{cases} \quad (2.17)$$

3 Loi de comportement retenue

La loi de comportement retenue dans le cadre de cette thèse est un modèle à deux potentiels [Longuet *et al.*, 2013] utilisé à Safran Aircraft Engines pour la simulation des structures chaudes comme la chambre de combustion en Ha188 ou encore les aubes de turbines haute pression qui sont en AM1, un super-alliage mono-cristallin à base nickel, destiné à résister au fluage ainsi qu'à l'oxydation. La version utilisée lors de ces travaux est simplifiée puisqu'elle est isotrope. La loi complète est constituée d'un comportement élastique orthotrope, ici on ne considère que la direction 11.

Cette loi s'appuie sur le modèle classique de Marquis-Chaboche pour l'élasto-visco-plasticité (notée EVP) proposé dans [Chaboche, 1989] et est destinée à représenter les effets des chargements cycliques sur le matériau et les phénomènes classiques rappelés précédemment. Suite à la formulation thermodynamique proposée précédemment, on exprime un premier potentiel plastique, seulement muni d'un écrouissage cinématique non-linéaire, l'énergie libre spécifique prend la forme suivante car le modèle retenu ne comporte pas d'écrouissage isotrope :

$$\rho\psi = \rho\psi_e + \frac{1}{3}C\alpha : \alpha \quad (2.18)$$

La partie élastique du comportement, linéaire et isotrope, est caractérisée par le module d'Young E et le coefficient de Poisson ν :

$$\sigma = \mathbb{K} : (\epsilon - \epsilon^p) \quad (2.19)$$

Comme observé lors des essais, la partition des déformations est conservée :

$$\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^p \quad (2.20)$$

La particularité de cette loi de comportement réside dans l'utilisation de deux potentiels plastiques un rapide (r) et un lent (l) qui engendrent respectivement des déformations plastiques ϵ_r^p et ϵ_l^p telles que $\epsilon^p = \epsilon_r^p + \epsilon_l^p$.

3.1 Potentiel plastique *rapide*

Le premier, appelé *rapide*, est destiné à la représentation du fluage et de la dépendance à la vitesse de sollicitation. Il est prépondérant pour la gamme de vitesse suivante $[10^{-5}, 10^{-2}] s^{-1}$.

Une loi d'écrouissage cinématique non-linéaire d'Armstrong-Frederick est introduite. Cette loi d'évolution utilise un premier terme non-linéaire, dit de rappel, qui permet de retranscrire l'évolution cyclique de la plasticité rapide. Un second terme linéaire est utilisé et est associé à la translation du domaine d'élasticité. Cette loi d'écrouissage est uniquement liée au multiplicateur rapide et prend l'expression suivante :

$$\begin{cases} \dot{\alpha}_r = \dot{\epsilon}_r^p - \gamma\alpha_r \dot{p}_r \\ \dot{X}_r = \frac{2}{3}C\alpha_r \end{cases} \quad (2.21)$$

où C et D sont deux paramètres de la loi dépendant du matériau et de la température, ϵ_r^p est le tenseur des déformations plastiques liées uniquement à la plasticité cumulée rapide p_r . Une telle loi finit par saturer et la valeur asymptotique de cet écrouissage est alors $X_\infty = \frac{C}{\gamma}$.

Ce modèle ne dérivant pas d'un potentiel, il est non-associé. Sous condition d'incompressibilité, il est défini à l'aide d'une fonction seuil f et d'un potentiel d'écoulement F comme suit :

$$\begin{cases} f = J_2(\boldsymbol{\sigma}^D - \mathbf{X}_r^D) - R_\infty \\ F = J_2(\boldsymbol{\sigma}^D - \mathbf{X}_r^D) + \frac{3\gamma}{4C} \mathbf{X}_r : \mathbf{X}_r \end{cases} \quad (2.22)$$

où J_2 désigne la contrainte équivalente de Von Mises, \mathbf{X}_r est l'écroûissage cinématique uniquement lié à ce potentiel et $\boldsymbol{\sigma}^D$ le déviateur des contraintes.

L'écroûissage isotrope est considéré comme saturé avec une valeur R_0 et est ajouté à la limite d'élasticité du matériau σ_y de telle sorte que la limite d'élasticité totale R_∞ devient $R_\infty = R_0 + \sigma_y$. Pour obtenir, une meilleure représentation du comportement réel, sous chargement monotone notamment, il est tout à fait possible d'utiliser une loi non-linéaire du type $R(p_r) = R_0(1 - e^{-bp_r})$ à la place de la valeur saturée.

La fonction Φ décrivant la loi d'évolution du multiplicateur plastique, est de type Norton-Hoff :

$$\Phi(f) = \left\langle \frac{f}{K_r} \right\rangle_+ = \frac{K_r}{n_r + 1} \left\langle \frac{J_2(\boldsymbol{\sigma}^D - \mathbf{X}^D) - R_\infty}{K_r} \right\rangle_+^{n_r + 1} \quad (2.23)$$

En utilisant les lois de l'écoulement (2.17), on peut déduire les relations suivantes caractéristiques de la loi de comportement retenue :

$$\dot{\epsilon}_r^p = \frac{2}{3} \dot{p}_r \frac{\boldsymbol{\sigma}^D - \mathbf{X}^D}{J_2(\boldsymbol{\sigma}^D - \mathbf{X}^D)} \quad (2.24)$$

La vitesse d'écoulement de ce potentiel suit une loi de Norton comme suit :

$$\dot{p}_r = \left\langle \frac{J_2(\boldsymbol{\sigma}^D - \mathbf{X}_r^D) - R_\infty}{K_r} \right\rangle_+^{n_r} \quad (2.25)$$

avec K_r , n_r les paramètres de la loi représentant la viscosité du matériau.

3.2 Potentiel plastique lent

L'ajout de ce second potentiel plastique permet d'améliorer la représentation du fluage à faible niveau de contrainte et de représenter la relaxation de la contrainte moyenne. Cela pourrait être fait par l'intermédiaire de l'ajout d'un terme de rappel temporel dans l'écroûissage, mais l'utilisation d'un deuxième multiplicateur plastique apporte les mêmes effets avec une plus grande simplicité d'implémentation.

Ce potentiel lent devient prépondérant pour des vitesses de sollicitations plus faibles, de l'ordre de $[10^{-9}, 10^{-5}] s^{-1}$. Il se base sur la même formulation que son homologue rapide (2.23) auquel on ôte l'écroûissage cinématique et la limite d'élasticité. On obtient ainsi :

$$\dot{p}_l = \left\langle \frac{J_2(\boldsymbol{\sigma}^D)}{K_l} \right\rangle_+^{n_l} \quad (2.26)$$

et l'expression du taux de déformation plastique est alors :

$$\dot{\epsilon}_l^p = \frac{2}{3} \dot{\rho}_l \frac{\sigma^D}{J_2(\sigma^D)} \quad (2.27)$$

L'absence de limite élastique entraîne l'apparition d'un champ de plasticité dès que la structure est sollicitée. En outre, cela permet de représenter un phénomène observé lors d'essais à haute température, où du fluage se produit à des niveaux de contraintes inférieurs à la limite d'élasticité du matériau.

3.3 Paramètres de la loi de comportement

Utilisée sur les applications métiers pour de l'AM1, la loi de comportement est appliquée ici pour un alliage à base nickel IN100 destiné aux pièces évoluant à haute température, par soucis de confidentialité. L'identification a été effectuée pour une plage de température de $[700, 1100]^{\circ}C$ et les paramètres correspondants pour la loi à deux potentiels sont présentés dans le tableau 2.1 pour une température de $800^{\circ}C$. Les paramètres correspondant aux autres températures sont présentés en annexes 1.

E [MPa]	ν	C [MPa]	γ	R [MPa]	n_r, K_r	n_l, K_l
154000	0.28	615000	1870	80	14, 630	17.2, 1300

TABLE 2.1 – Paramètres matériaux de l'IN100 ($800^{\circ}C$) [Lemaitre *et al.*, 2009]

Dans ce modèle, la température n'est pas prise en compte directement dans les équations constitutives du modèle, au contraire des modèles dédiés anisothermes plus complexes [Lemaitre *et al.*, 2009]. Elle est simplement utilisée pour moduler les paramètres matériaux. Une déformation d'origine thermique ϵ^{th} peut aussi être facilement ajoutée, comme ce qui a été fait pour l'application industrielle.

4 Illustration de la loi de comportement

4.1 Implémentation dans un code commercial

Dans le contexte de développement non-intrusif des travaux rapportés dans ce document, un code commercial est utilisé pour résoudre le problème éléments finis mettant en œuvre la loi de comportement présentée précédemment.

La solution retenue est celle utilisée chez Safran Aircraft Engines pour être à même d'utiliser le logiciel commercial *Abaqus/Standard* pour les calculs éléments finis. Comme la loi de comportement n'est pas nativement présente, on utilise le module *Z-Mat* de la suite logicielle *Zébulon* [Armines et Onera, 2015] qui peut être utilisée comme un *plug-in*. Une telle approche est aussi possible pour les autres codes commerciaux majeurs tels que *ANSYS*, *LS-Dyna*, *SAMCEF* et *Code_Aster*. *Z-Mat* devient alors une bibliothèque de lois de comportement, permettant d'implémenter aisément la loi voulue. Ensuite, son utilisation est totalement transparente pour l'utilisateur, puisque le

solveur du code commercial vient faire appel automatiquement au module, lors de l'intégration locale du comportement. Enfin, *Z-Mat* fournit des outils très utiles, pour obtenir une bonne qualité de la solution. Le schéma d'intégration utilisé dans ces travaux est de type retour radial en formulation implicite mais d'autres possibilités sont disponibles dans *Z-Mat* telles que de la θ -méthode ou du Runge-Kutta.

4.2 Essais numériques

On vérifie sur quelques exemples que la loi de comportement et l'implémentation réalisée permettent de représenter la plupart des phénomènes propres à l'EVP. Les calculs sont effectués sur un élément volumique en traction/compression.

4.2.1 Essai de fluage relaxation

On étudie le comportement en fluage et la relaxation en fonction du temps de maintien (*cf.* figure 2.4).

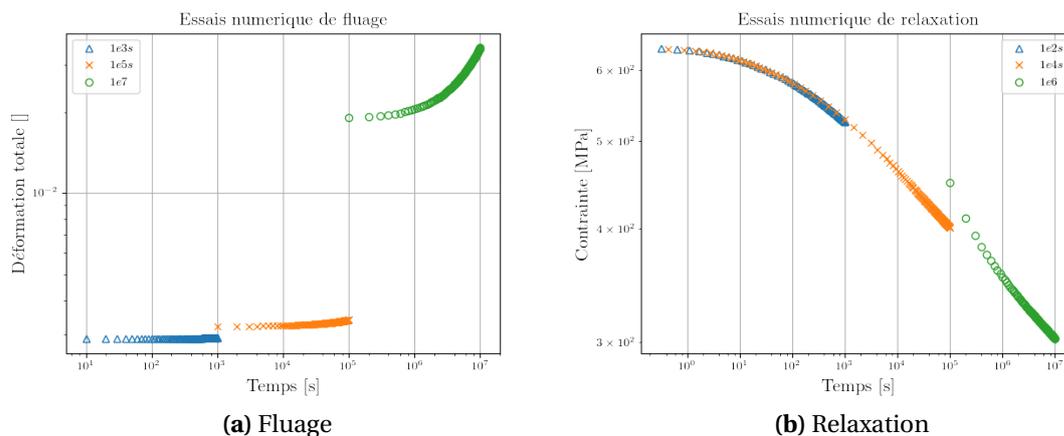


FIGURE 2.4 – Essais numériques de fluage et de relaxation

Ces essais montrent l'importance d'utiliser une durée de simulation adaptée car si cette dernière n'est pas cohérente avec la réalité, on peut ne pas représenter ces phénomènes.

La particularité de la loi de comportement utilisée réside dans l'emploi de deux potentiels viscoplastiques. Il est donc intéressant d'étudier la répartition de la plasticité, entre les deux potentiels, pour un phénomène donné.

On constate que les phénomènes intervenant sur de longs temps caractéristiques tels le fluage (*cf.* figure 2.5) et la relaxation (*cf.* figure 2.6) sont principalement représentés par le potentiel lent. En effet, les variations liées à chaque phénomène, sur ce potentiel, sont beaucoup plus importantes que pour le rapide.

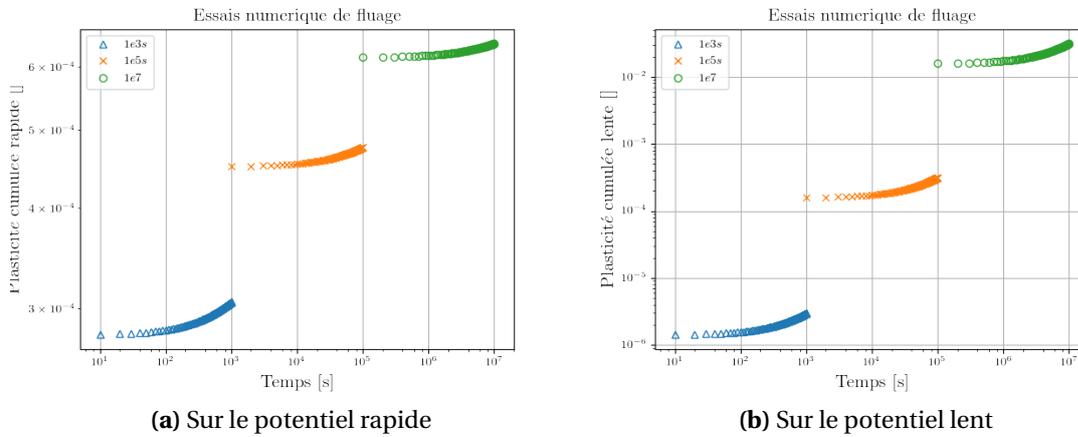


FIGURE 2.5 – Répartition entre les potentiels pendant le fluage

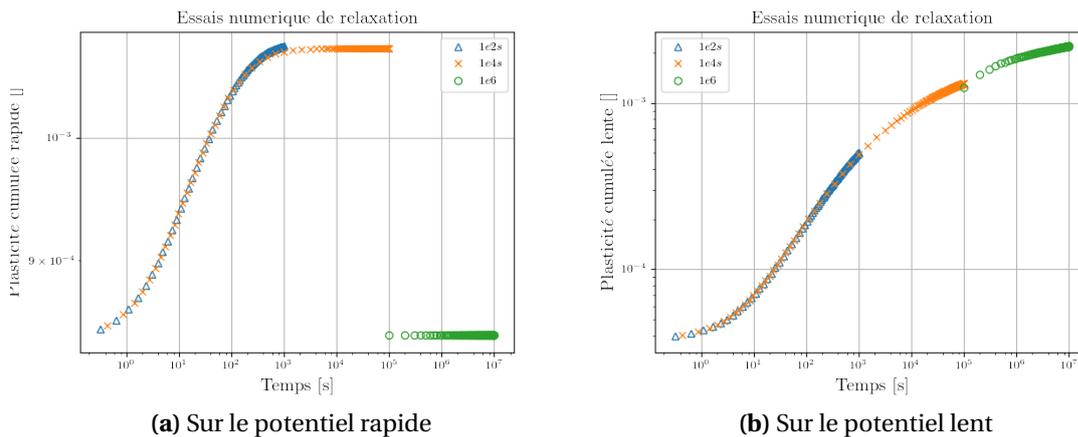


FIGURE 2.6 – Répartition entre les potentiels pendant la relaxation

4.2.2 Dépendance à la vitesse de sollicitation

Cette problématique de dépendance à la vitesse de sollicitation est le fondement de la théorie de l'élasto-viscoplasticité et c'est ce qui la différencie de la plasticité, sa retranscription par la loi de comportement est donc une primordiale. On constate (*cf.* figure 2.7) qu'à déformation imposée plus la vitesse est élevée plus le niveau de contrainte est important mais plus celui de la plasticité est bas.

La répartition du comportement non-linéaire entre les potentiels plastiques est très visible en terme de vitesse de sollicitation (*cf.* figure 2.8). Comme évoqué lors de la description du modèle, le potentiel rapide est prépondérant dans les vitesses élevées $10^{-3}s^{-1}$ (*cf.* figure 2.8a), pour des valeurs moyennes de $10^{-5}s^{-1}$ (*cf.* figure 2.8b) les potentiels sont équivalents et enfin vers $10^{-8}s^{-1}$ le potentiel lent prend le dessus (*cf.* figure

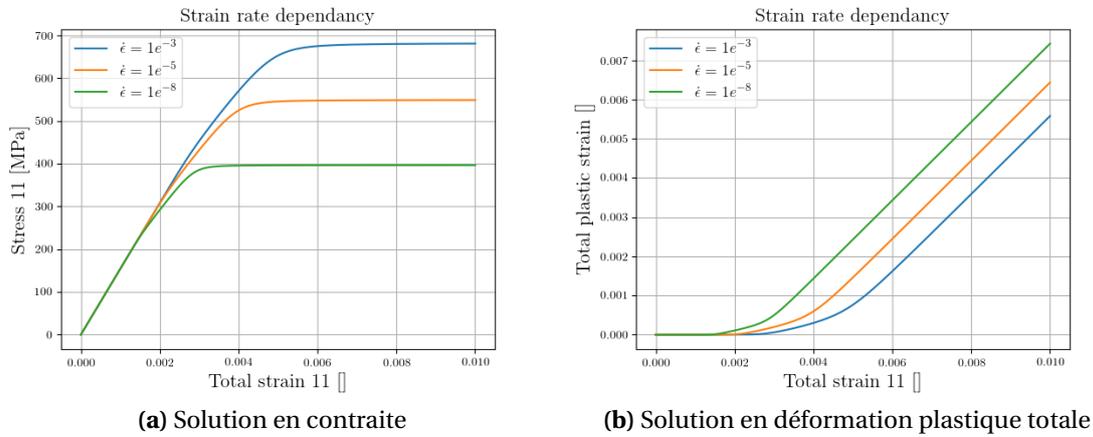


FIGURE 2.7 – Influence de la vitesse de déformation

2.8c).

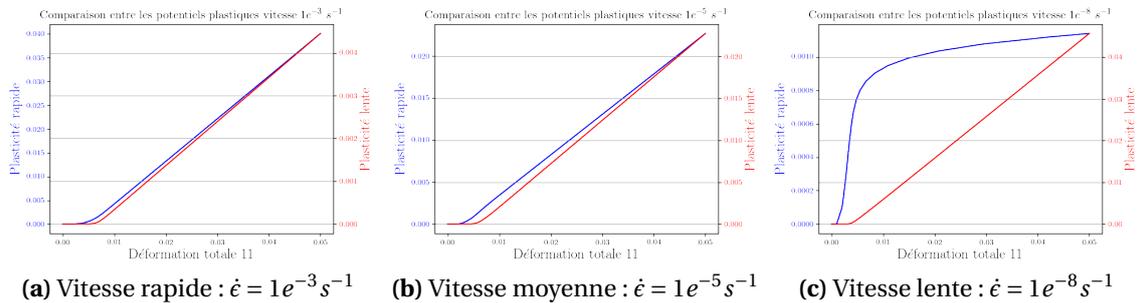


FIGURE 2.8 – Répartition de la plasticité entre les potentiels lent et rapide

Cette influence de la vitesse de déformation sur le comportement est prépondérante dans les calculs de structures. En effet, la géométrie générale mais surtout les détails structuraux introduisent des hétérogénéités importantes dans le champ de vitesse, ce qui impacte beaucoup la solution obtenue.

4.2.3 Influence de la température

La viscoplasticité étant un phénomène thermiquement activé, la température est aussi à intégrer dans notre analyse. La principale influence (*cf.* figure 2.9) est l'abaissement de la limite d'élasticité du matériau, ce qui diminue la contrainte maximale admissible dans le matériau et augmente très largement le niveau de plasticité obtenu.

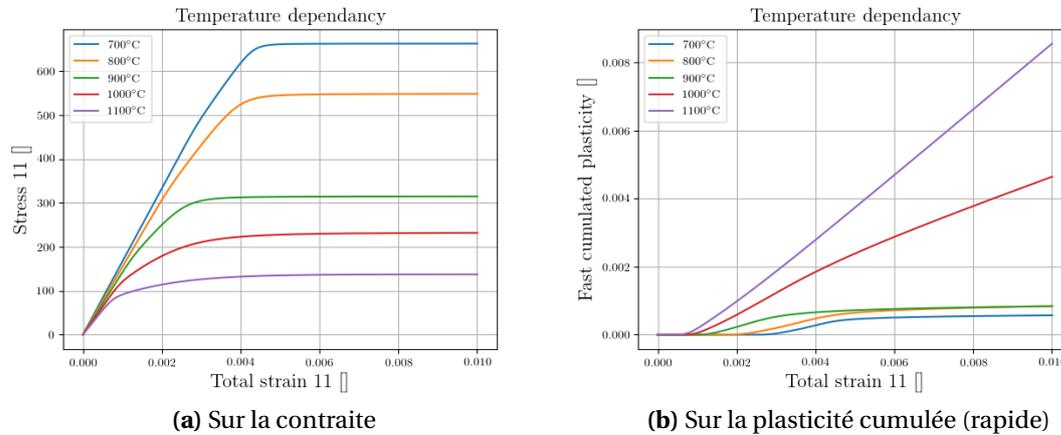


FIGURE 2.9 – Dépendance à la température

4.3 Comportements asymptotiques des structures

Jusqu'ici le modèle de comportement a été évalué sur des chargements monotones, mais ce type de loi est principalement destiné à des calculs cycliques. Dans la plupart des cas de chargement [Constantinescu *et al.*, 2003], la structure atteint un régime asymptotique, au cours duquel les grandeurs, notamment plastiques, sont périodiques voire constantes. On parle parfois de manière abusive de cycle stabilisé, même si au cours du cycle certaines des grandeurs plastiques peuvent varier, comme ϵ^p la déformation plastique. On peut plus généralement le qualifier de cycle limite.

Lorsque la structure atteint cet état limite ou encore asymptotique, celui-ci peut être de trois types :

- *L'adaptation* (cf. figure 2.10a) : la structure évolue en régime élasto-viscoplastique pendant plusieurs cycles puis finit par atteindre un état asymptotique purement élastique. Elle peut alors être soumise à de la fissuration, due à de la fatigue à grand nombre de cycles. Dans ce cas, la dissipation sur un cycle tend vers zéro.
- *L'accommodation* (cf. figure 2.10b) : la réponse asymptotique est périodique pour les déformations plastiques et en variables internes. L'énergie dissipée sur un cycle tend vers une constante. La structure est exposée à de la fissuration à relativement faible nombre de cycles, identifiable par la plasticité cumulée p .
- *Le rochet* (cf. figure 2.10c) : il n'y a pas de stabilisation ni de la déformation plastique ni des autres variables internes. L'accumulation de la déformation plastique de cycle en cycle conduit à la ruine de la structure.

Ces comportements asymptotiques peuvent apparaître simultanément et à des endroits différents de la structure. La stabilisation de la structure peut intervenir à des instants différents selon les zones observées, voire même ne pas être atteinte dans certaines parties.

Les illustrations de la figure 2.10 ont été obtenues sur des modèles poutres dans

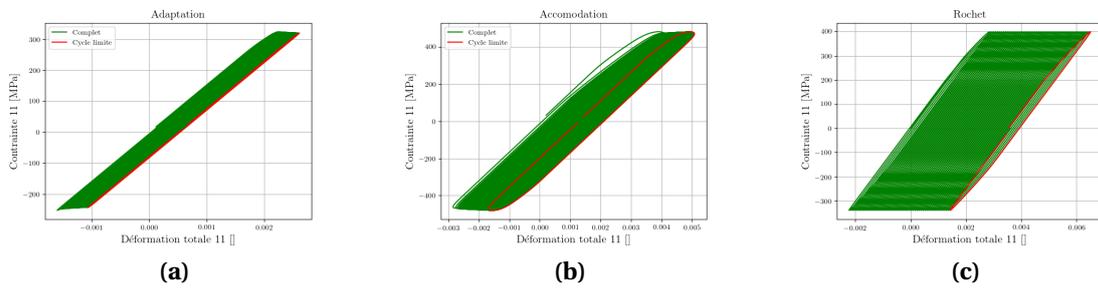


FIGURE 2.10 – Comportement asymptotique des structures sous chargement cyclique

deux configurations différentes (*cf.* figure 2.11) avec la loi de comportement retenue. Le problème à une barre (*cf.* figure 2.11a), soumise à un chargement sinusoïdal de traction/compression cyclique $F(t)$, permet d’obtenir un comportement de rochet. Avec l’ajout d’écroutissage isotrope, on obtient pour cette configuration un comportement d’adaptation. Pour obtenir de l’accommodation, il faut utiliser un système à deux barres parallèles de longueur différente (*cf.* figure 2.11b) ainsi que de l’écroutissage isotrope sinon du rochet apparaît. Cet exemple permet de recréer des redistributions de contraintes dans une structure, de l’adaptation est alors obtenue dans la barre 1 tandis que de la barre 2, la plus courte, atteint un régime d’accommodation.

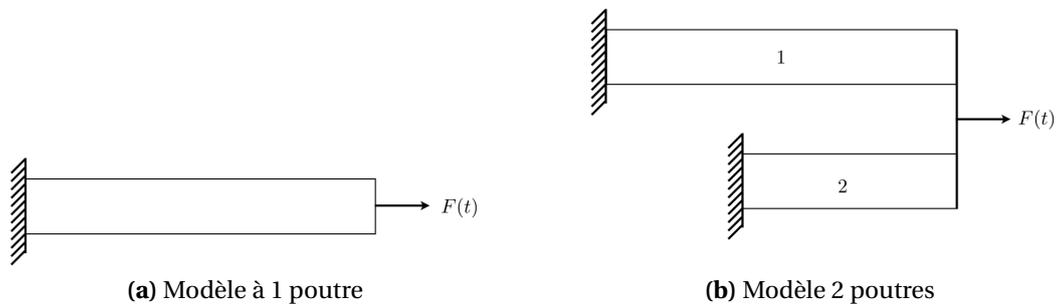


FIGURE 2.11 – Modèles élémentaires

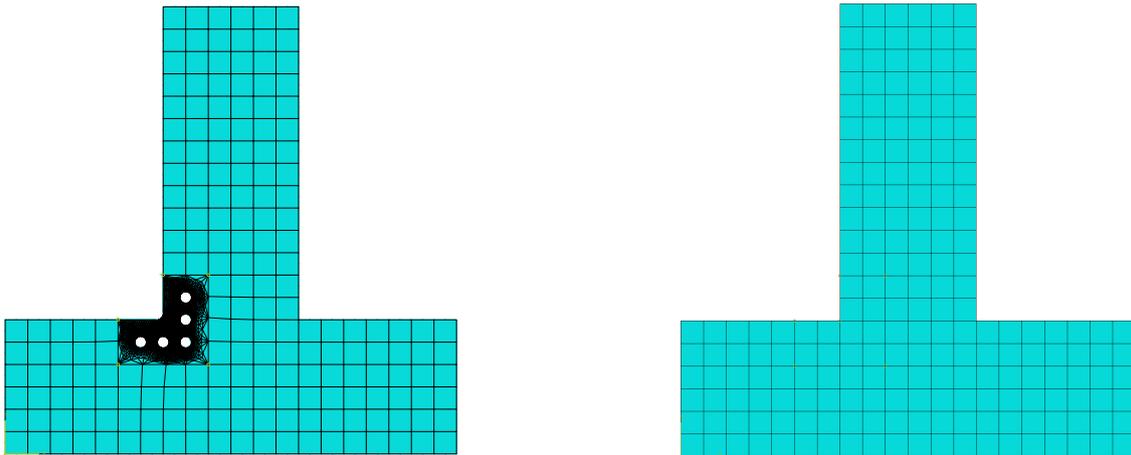
En ce qui concerne les exemples de structures calculés dans la suite de ce document, l’écroutissage isotrope n’a pas été utilisé. Cependant, au contraire des essais élémentaires précédents, aucun comportement de rochet n’a été observé.

5 Application aux calculs non linéaires de structures

5.1 Modèles traités et difficultés rencontrées

Dans le cadre de ces travaux de thèse, plusieurs modèles vont être mis en jeu par l’intermédiaire de la méthode *global/local*. Le but final est de traiter un problème dit

de référence, calculé de manière monolithique (*cf.* figure 2.12a), en deux modèles distincts. Le premier est appelé global (*cf.* figure 2.12b) et représente l'ensemble de la structure en omettant volontairement des détails structuraux, ce qui est moins coûteux à calculer. Le second ne représente qu'une zone d'intérêt (modèle local) de la structure dans laquelle la géométrie est représentée exactement, comme dans la référence.



(a) Modèle monolithique complet (référence)

(b) Modèle global associé

FIGURE 2.12 – Structures utilisées

Dans les simulations numériques en élasto-viscoplasticité en quasi-statique, la problématique des pas de temps utilisés est cruciale (*cf.* section 5.2.2) et peut avoir des conséquences importantes :

- *Manque de précision* : si les pas de temps sont trop grands par rapport à la non-linéarité de la solution, le schéma d'intégration numérique mis en place ne permettra pas d'atteindre la précision espérée du modèle utilisé.
- *Problèmes de robustesse* : selon la solution atteinte au pas de temps précédent, le niveau de chargement à la fin de l'incrément courant et si le pas de temps est trop grand, l'algorithme de résolution peut diverger ou l'intégration au point de Gauss peut échouer (divergence locale). Si le solveur n'est pas équipé de sécurités ou de gestion de tels problèmes, le calcul s'arrête et toute la stratégie mise en place se coupe.

5.2 Pratiques d'intégration temporelle

Les résultats que l'on peut obtenir *via* des simulations numériques, relatifs aux phénomènes réels expliqués précédemment, sont très largement dépendants des lois matériaux utilisées, des valeurs des paramètres, du chargement et de la façon dont

ce dernier est appliqué (vitesse et intensité). Dans le cadre d'un développement non-intrusif, il a fallu commencer par maîtriser la façon dont la loi de comportement est intégrée temporellement, dans le code commercial. Cette section est intégralement transposable à d'autres solveurs commerciaux, tels que *Ansys* ou *Code_Aster*, car leur fonctionnement est similaire.

Dans des calculs linéaires, utilisant la méthode des éléments finis, la qualité de la solution dépend principalement de la finesse du maillage. La réponse de la structure obtenue ne doit plus changer lorsque l'on continue de raffiner cette discrétisation spatiale, on parle alors de convergence du maillage. En pratique, cela requiert un nombre d'éléments très important pouvant engendrer un coût de calcul exorbitant. Dans ces travaux, on considère que le maillage est de qualité suffisante, ce qui est très souvent le cas en contexte industriel car cette tâche est la plupart du temps externalisée : elle est donc une donnée d'entrée du calcul à traiter.

Lors de calculs non-linéaires matériau, la précision de la solution est régie, en plus des considérations précédentes, par les différentes tolérances de convergence que ce soit au niveau de l'intégration matériau ou du respect de l'équilibre global de la structure. Dans ces deux cas, des valeurs de 10^{-6} sont prises afin de garantir la qualité des résolutions à chaque pas de temps. La dernière source d'erreur concerne le choix de la discrétisation temporelle. Cette question est fondamentale en viscoplasticité car la durée du pas de temps intervient explicitement dans l'intégration de la loi de comportement, ce qui la rend très sensible à ce choix. Plusieurs approches sont alors envisageables :

- *Approche overkill* : on impose une grille extrêmement fine en essayant d'être sûr que les pas de temps soient suffisamment fins pour que l'intégration se déroule correctement. La précision est excellente et peut constituer une référence, mais il faut atteindre une finesse extrême des pas de temps, ce qui est très coûteux pour des structures de grandes tailles. De plus, rien ne garanti que cette discrétisation ne nécessite pas au cours de l'intégration l'activation des sécurités du solveur, ce qui occasionnerait un raffinement supplémentaire (cf. section 5.2.1).
- *Approche naïve* : on discrétise grossièrement l'histoire de chargement et on laisse le solveur effectuer des sous pas de temps lorsque cela est nécessaire vis-à-vis des règles énoncées dans la suite 5.2.1. Cette façon de procéder a l'avantage de fournir un nombre de pas de temps minimal garantissant l'intégration et donc un temps de calcul très compétitif. Cependant, aucune garantie n'est obtenue sur la qualité de la solution et selon les essais, les niveaux d'erreurs peuvent être très élevés notamment avec des champs de plasticité importants (cf. section 5.2.2). Cette méthode a l'avantage d'être adaptative, c'est-à-dire que la longueur des pas de temps est variable selon les besoins rencontrés.
- *Approche hybride* : on fait un calcul sur un élément volumique avec la loi de comportement retenue, en raffinement progressivement les pas de temps jusqu'à atteindre la précision souhaitée par rapport à une référence *overkill*, qui dans ce cas n'est pas coûteuse à calculer. Deux variantes sont alors possibles :
 - on fixe un certain pas constant pour l'ensemble du chargement permet-

tant d'atteindre une certaine précision, ce qui présente l'inconvénient de ne pas être adaptatif et on s'expose à des pas de temps non-nécessaires. Un avantage est que ce type d'approches est réalisable dans n'importe quel solveur commercial, en fixant des tailles de pas de temps initiales, minimales et maximales.

- on utilise une possibilité offerte par le solveur ; piloter la longueur du pas de temps par rapport à un incrément d'une des variables internes comme une des plasticités cumulées ou la contrainte, comme ce qui est proposé dans [Szmytka *et al.*, 2015]. Il est alors possible de choisir la valeur de l'incrément pour lequel déclencher un raffinement (aussi appelé *cutback*). Suivant la valeur choisie, des raffinements automatiques 5.2.1 peuvent être nécessaires, notamment lorsque que l'incrément choisi pour déclencher un *cutback* n'est pas assez discriminant.

5.2.1 Sécurités implémentées dans les codes commerciaux

Malgré les précautions prises précédemment, il peut subsister des problèmes dans l'intégration du matériau au niveau des points de Gauss des éléments ou plus globalement vis-à-vis de la convergence sur le pas de temps courant. La plupart des codes commerciaux propose de sous-découper le pas de temps utilisé, lorsqu'une telle difficulté apparaît, même si les méthodes de subdivision diffèrent entre les codes. Concernant *Abaqus/Standard*, il existe de nombreux critères qui peuvent conduire à un *cutback* de telle sorte que pour un pas de temps $\delta \tilde{t}_n$ ayant échoué, la taille du prochain pas tenté sera de $\delta t_n = \alpha \delta \tilde{t}_n$:

- cas de divergence sur l'incrément courant $\alpha = 0,25$
- un taux de convergence trop lent : $\alpha = 0,5$
- solution présentant des discontinuités trop importantes entre deux itérations : $\alpha = 0,75$
- bonne convergence sur deux incréments consécutifs : $\alpha = 1,5$

Il ne s'agit ici que des principaux critères représentant les problèmes rencontrés durant les travaux. Il est intéressant de remarquer que si les pas de temps initialement choisis, où après un raffinement important par exemple du à une singularité, sont trop petits et que l'intégration se déroule correctement, le solveur peut alors procéder à une augmentation de la taille du prochain pas de temps ce qui augmente les performances en temps du solveur.

De tels raffinements sont effectués uniquement dans le but d'obtenir un résultat à la fin de la simulation et il n'y a aucune considération sur la précision de la solution obtenue. On explicite ci-dessous deux cas pathologiques occasionnant l'activation des sécurités du solveur.

Saturation de la loi de Norton-Hoff La vitesse d'écoulement plastique sature en début d'écrouissage à cause de la loi en puissance de la formulation de Norton-Hoff (cf. figure 2.13). Cela est caractérisé par une évolution rapide de la plasticité cumulée, pour

les deux potentiels, la structure est alors quasi-linéaire avec une rigidité initiale importante car peu plastifiée. La matrice tangente a alors une norme importante ce qui conduit à une convergence assez lente lors de l'entrée en régime viscoplastique.

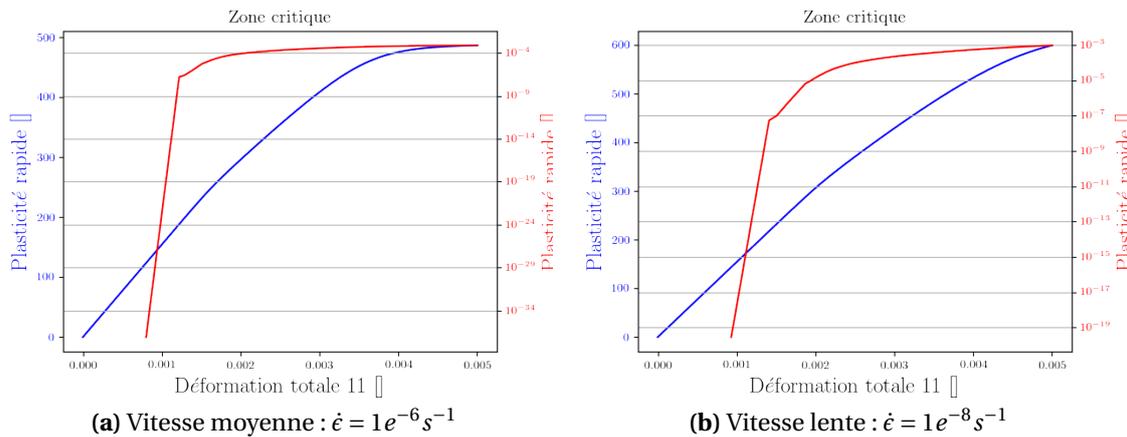


FIGURE 2.13 – Analyse de la zone critique

Ce phénomène est apparu lors de tests avec l'approche naïve, en laissant le solveur raffiner lui-même la grille temporelle, ainsi des *cutbacks* pour *too slow convergence rate* ont été observés.

Divergences locales Le module *Z-Mat* peut lui aussi requérir des *cutbacks* lorsque des divergences locales apparaissent pendant l'intégration de la loi de comportement au niveau de certains points de Gauss, lors de l'application de l'algorithme de retour radial permettant de calculer l'incrément de plasticité local. Ce phénomène peut être du à un incrément de chargement trop important, au niveau de certains éléments critiques, par exemple distordus ou placés près de variations géométriques importantes.

5.2.2 Gestion automatique des pas de temps

L'approche hybride est retenue comme méthode d'intégration de la loi de comportement pour son adaptivité ainsi que pour le compromis entre précision et temps de calcul qu'elle offre, grâce au choix de l'incrément à respecter. Le choix de la variable interne sur laquelle se baser peut porter sur la contrainte, la déformation ou encore les plasticités cumulées, l'érouissage ou les déformations plastiques ayant des variations plus aléatoires. L'automatisme des pas de temps en mécanique non-linéaire est une question récurrente notamment en dynamique [Noels *et al.*, 2002].

L'utilisation de la contrainte comme grandeur a été rapidement exclue car à haut niveau de plasticité, ce qui est le but de l'étude, cette grandeur atteint un plateau (*cf.* figure 2.7) et par conséquent est moins discriminante pour un pilotage en incréments. De plus, en régime élastique la contrainte nécessite des pas de temps, qui sont inutiles

pour la précision. Le choix s'est donc porté sur les plasticités cumulées, rapide et lente, en explorant leurs domaines respectifs de vitesses (*cf.* figures 2.14 et 2.15).

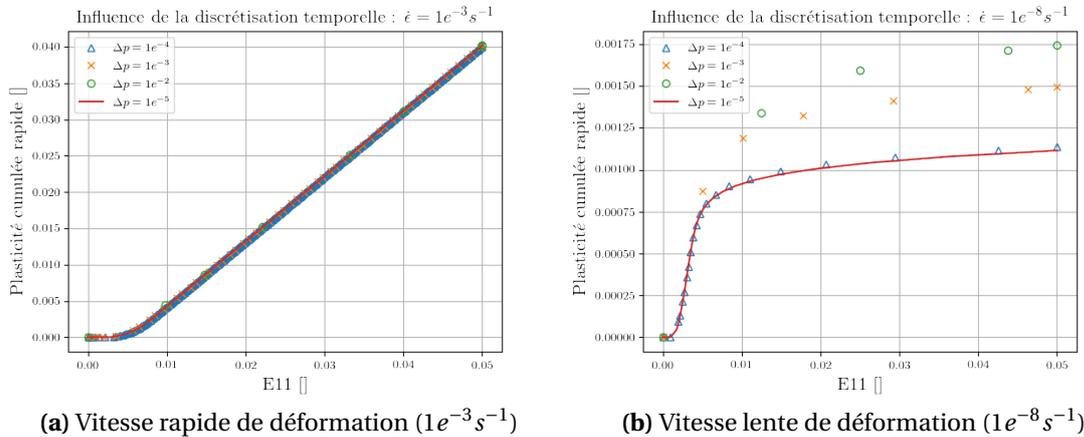


FIGURE 2.14 – Influence de la grille d'intégration sur la plasticité cumulée rapide

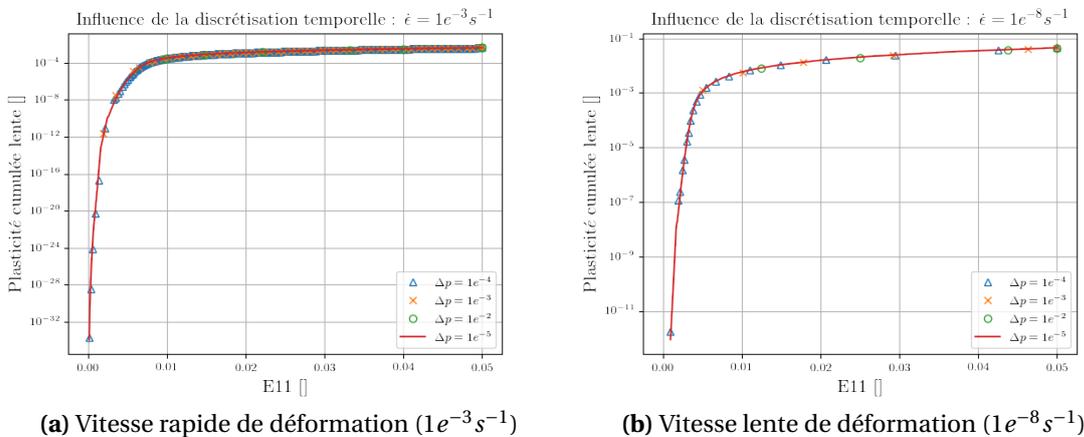


FIGURE 2.15 – Influence de la grille d'intégration sur la plasticité cumulée lente

On constate qu'à des vitesses élevées il n'est pas obligatoire d'intégrer finement la loi de comportement mais le besoin est important à plus faible vitesse. Le potentiel lent est assez insensible au pas d'intégration, il est donc inutile d'imposer un raffinement de temps sur ce potentiel. Les pas de temps requis par la plasticité cumulée rapide suffisent à assurer une bonne qualité de la solution, en outre lorsque l'on utilise en même temps le critère sur les deux plasticités : la précision n'est pas augmentée et un sur-coût est apporté à cause des nombreux pas de temps ce qui augmente considérablement le temps de calcul.

Enfin, la plasticité cumulée en tant que variable scalaire basée sur la déformation plastique, est une mesure dans toutes les directions du modèle en une seule variable, ce qui simplifie l'analyse et la mise en œuvre.

Compte-tenu des résultats obtenus dans les essais numériques, on retient trois niveaux de Δp_r (incrément de plasticité cumulée rapide) pour obtenir une idée du compromis précision temps de calcul :

- $\Delta p_r = 1e^{-3}$ offre un faible coût de calcul avec forcément une précision réduite. Cette valeur peut être adaptée à un besoin de solution rapide.
- $\Delta p_r = 1e^{-4}$ conduit à une excellente précision dans l'intégration de la loi de comportement mais le temps de calcul, bien que raisonnable sur le modèle 2D, constitue une réelle limite sur des structures plus complexes.
- $\Delta p_r = 1e^{-5}$ représente la limite en temps de calcul pour les structures 2D et est inenvisageable sur des modèles 3D importants. Une telle précision est utile pour évaluer l'approche *global/local* dans la suite de ce document. Dans certains cas, des pas de temps très fins sont obtenus et sont proches de ceux générés par l'intégration à $\Delta p_r = 1e^{-5}$ malgré un réglage initial à $1e^{-4}$.

Une telle approche peut être aidée par une pré-discrétisation du cycle de chargement, en enrichissant la définition initiale du cycle. Cela évite au solveur de devoir raffiner un trop grand nombre de fois, le pas de temps courant, car cela peut engendrer un sur-coût numérique.

5.2.3 Stratégies de pré-discrétisation

Sur un incrément de chargement donné et si le pas de temps initial est trop grand, malgré les sécurités mises-en-œuvre dans les solveurs, il peut arriver que le logiciel ne parvienne pas à achever le calcul, même après plusieurs raffinements. C'est pourquoi, il faut réaliser une pré-discrétisation temporelle, basée sur la définition du chargement initial, mais aussi adaptée à la structure étudiée ainsi que son matériau constitutif. Cette étape préliminaire doit être la moins coûteuse possible.

Approche classique Une première façon de faire, assez répandue, est de réaliser un calcul élastique sur l'ensemble du cycle, puis d'en tirer un niveau de contrainte maximal. En comparant, cette valeur avec la courbe de comportement (*cf. figure 2.15*) en traction, on peut évaluer la taille des pas de temps à utiliser, permettant de garantir une précision satisfaisante. Cette approche à l'avantage d'être peu coûteuse numériquement, mais peut s'avérer assez imprécise, notamment lorsque le niveau de plasticité est élevé, car le comportement non-linéaire y est très différent de l'élastique. De plus, la taille du pas de temps utilisé est alors fixe sur l'ensemble du cycle, ce qui peut s'avérer inutile durant certaines phases et donc ralentir la résolution.

Méthode proposée Au regard des moyens actuels de calculs, une simulation globale en élasto-viscoplasticité peut être réalisée en un temps tout à fait raisonnable et même

pour un cycle complet. Ce calcul prend de nos jours autant de temps qu'un équivalent élastique, il y a quelques années.

La stratégie de pré-discrétisation que l'on propose est basée sur un calcul initial du modèle global seul sur le cycle complet, modèle simplifié de la structure dont on dispose dans le cadre de la méthode *global/local*. On contrôle l'intégration temporelle par le solveur de *Zébulon* au moyen d'un seuil de détection Δp_{cut} , basé sur l'incrément Δp_r de plasticité cumulée rapide. Les pas de temps supplémentaires effectués sont ajoutés afin d'enrichir la discrétisation initiale.

Cette méthode a pour avantage d'être peu coûteuse, adaptative en n'ayant pas de piquets de temps fixes. Bien qu'étant automatique, elle fournit une pré-discrétisation propre à la structure et à son matériau. Enfin, même en cas de modification du modèle local, cette dernière reste inchangée.

Les calculs proposés dans la suite de ce document utilisent plusieurs pré-discrétisations globales, selon la précision de l'intégration voulue :

- $\Delta p_{cut} = 1e^{-3}$: fournit une grille pré-discrétisée de **12** pas de temps supplémentaires (cf. figure 2.16a),
- $\Delta p_{cut} = 1e^{-4}$: fournit une grille pré-discrétisée de **44** pas de temps supplémentaires (cf. figure 2.16b),
- avec les sécurités simples (raffinement temporel lorsque qu'une divergence locale apparaît), on obtient **11** pas de temps, ce qui est semblable à $\Delta p_{cut} = 1e^{-3}$.

En effet, lorsque l'on utilise une tolérance de Δp_{cut} trop lâche, par rapport au champ plastique de la solution, on se retrouve confronté à des divergences locales, qui sont gérées par les sécurités du solveur. En cas de problème, le pas de temps courant est alors divisé en deux. Ces pas de temps ne sont alors pas dus à des considérations de précision de la solution.

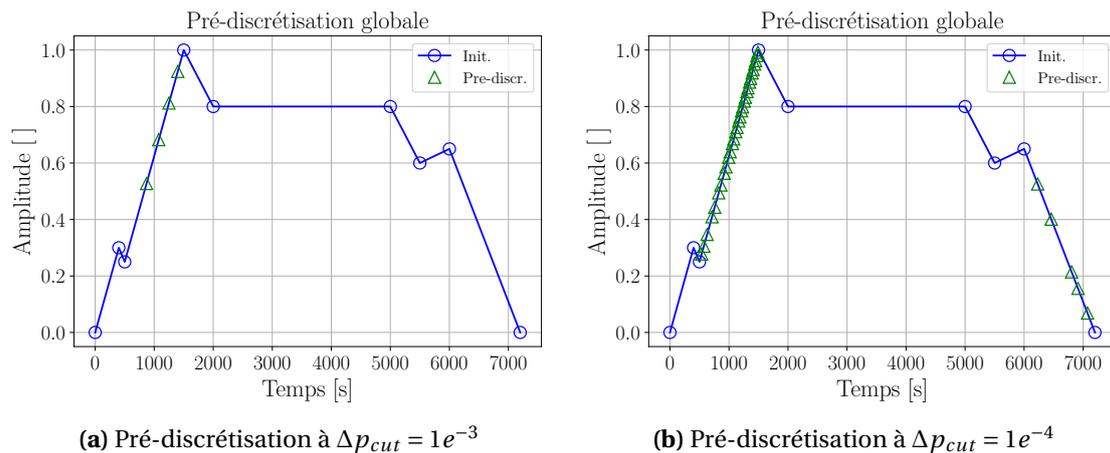


FIGURE 2.16 – Pré-discrétisations obtenues sur un cycle

On remarque qu'avec une intégration temporelle fine, par exemple avec $\Delta p_{cut} = 1e^{-4}$, des *cutbacks* liés à des redistributions apparaissent lors de la décharge en fin de

cycle. Les pas de temps ainsi créés témoignent d'un accroissement du champ plastique. Une discrétisation temporelle grossière, comme pour $\Delta p_{cut} = 1e^{-3}$, ne permet pas de capter précisément ce type de phénomène localisé, comme en témoigne le fait de ne pas avoir de *cutbacks* lors de la décharge sur la figure 2.16a. Cet aspect, observé pour le moment au niveau global s'accroît et devient prépondérant pour le modèle local.

Méthode alternative Dans le cadre du traitement d'un cas métier chez Safran Aircraft Engines, la pré-discrétisation est basée sur la grille temporelle obtenue sur un calcul de thermique préalable. Celle-ci est déterminée de manière à être sûr que l'on passe par les points extrêmes des températures.

5.3 Application au modèle de référence

On étudie désormais, la précision obtenue sur le modèle de référence pour un cycle de chargement complet, selon l'incrément de plasticité choisi.

En calcul de structures, on constate qu'une mauvaise évaluation de la plasticité générale entraîne des différences importantes sur le champ de contraintes résiduelles en fin de cycle. On utilise pour l'intégration de la loi de comportement ainsi que pour la stratégie de pré-discrétisation, le même seuil de raffinement Δp_{cut} , uniquement pour la plasticité cumulée rapide.

5.3.1 Intégration temporelle

On compare ici (cf. tableau 2.2) trois calculs monolithiques sur le modèle, dit de référence, pour différentes tolérances de déclenchement de *cutbacks*. Pour chacune d'entre elles, on précise la façon dont l'intégration de la loi a été contrôlée et aussi le nombre d'incrément obtenus en tant que pré-discrétisation.

Méth. intégration	Nb. Steps pré-discr.	Nb. Steps final	Temps de calcul
Automatique	8	12	1m 11s
$\Delta p_{cut} = 1e^{-3}$	12	27	1m 33s
$\Delta p_{cut} = 1e^{-4}$	44	173	7m 11s
$\Delta p_{cut} = 1e^{-5}$	44	1501	1h 1m 29s

TABLE 2.2 – Intégration temporelle des calculs de référence

On constate que la précision de la solution souhaitée a évidemment un coup numérique important. La méthode *automatique* est une pratique classique et consiste à laisser le solveur réaliser les *cutbacks* selon les sécurités relatives aux divergences locales, car l'option est largement répandue dans les codes commerciaux. Le pilotage des *cutbacks* par une tolérance sur un incrément Δp_{cut} de la solution, correspond aux

trois premières approches et offre une large gamme de compromis entre la précision et le temps de calcul. On constate que le prix de l'intégration à $1e^{-5}$ est très supérieur à celle à $1e^{-4}$ et n'apporte qu'une faible évolution sur la solution finale, comme rapporté dans le tableau 2.4.

La répartition des *cutbacks* est aussi intéressante à étudier, car elle fournit une tendance sur l'évolution de la solution plastique. Pour cela, on classe les pas de temps supplémentaires, selon qu'ils se trouvent en montée $t \in [0, 2000]$ s ou en descente $t \in [2000, 7200]$ s sur le cycle (cf. tableau 2.3).

Précision	$\Delta p_{cut} = 1e^{-5}$	$\Delta p_{cut} = 1e^{-4}$	$\Delta p_{cut} = 1e^{-3}$	Automatique
Montée	1141	100	15	4
Descente	316	29	0	0

TABLE 2.3 – Répartition des *cutbacks* sur le cycle

Pour chaque précision, la solution a tendance à requérir principalement des pas de temps dans la phase de montée du cycle, là où la plasticité se développe initialement. Dans une moindre mesure, lors de la décharge, on observe des redistributions de contraintes entre les zones de la structure engendrées par une évolution de la zone plastique. Avec la plus haute précision, $\Delta p_{cut} = 1e^{-5}$, des évolutions plastiques très fines sont détectées (cf. figure 2.17a) comme lors de décharges rapides ou sur le plateau de fluage.

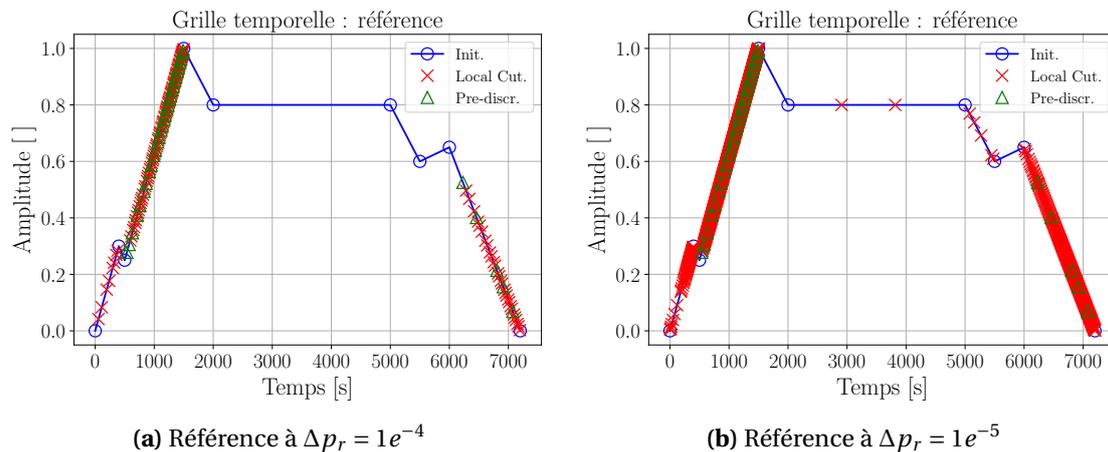


FIGURE 2.17 – Grilles temporelles des calculs de référence

Si de tels pas de temps ne sont pas placés dans ces zones de faibles variations, la solution plastique peut soit ne pas varier soit être sous-estimée. Il reste à savoir si, pour une étude donnée, ces variations sont pertinentes, car une telle précision a un coup numérique important.

5.3.2 Précision obtenue

À propos de la précision des solutions obtenues, les résultats sont rapportés sur les figures 2.18 pour la contrainte de Von Mises, 2.19 pour la plasticité rapide et 2.20 pour le potentiel lent.

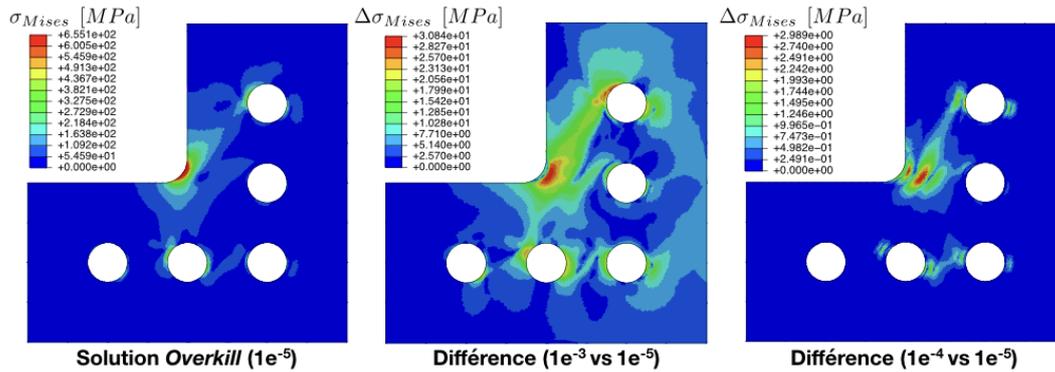


FIGURE 2.18 – Solution de référence en fin de cycle en contrainte de Mises

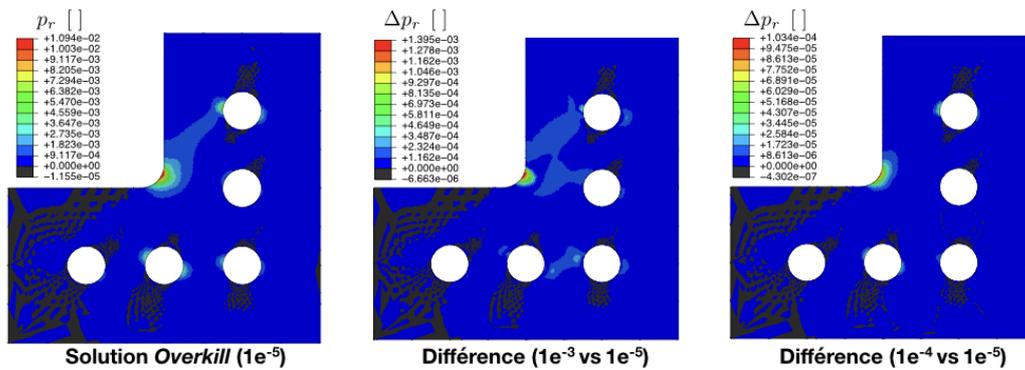


FIGURE 2.19 – Solution de référence en fin de cycle : plasticité rapide

Les ordres de grandeur des écarts ΔX obtenus, par rapport à la solution la plus fine intégrée à $\Delta p_{cut} = 1e^{-4}$, pour les différentes quantités d'intérêt X sont de 10% pour $\Delta p_{cut} = 1e^{-3}$ et de moins de 1% pour $\Delta p_{cut} = 1e^{-4}$.

La localisation est correcte quelque soit la technique d'intégration et seuls les niveaux varient. Avec une valeur d'intégration de $\Delta p_{cut} = 1e^{-4}$, on garantit une précision très satisfaisante tout en demeurant compatible en terme de temps de calcul, avec les standards de développement industriel. Cette valeur était déductible des calculs menés sur l'élément volumique, ce qui évite d'avoir à mener l'étude au niveau de la structure complète.

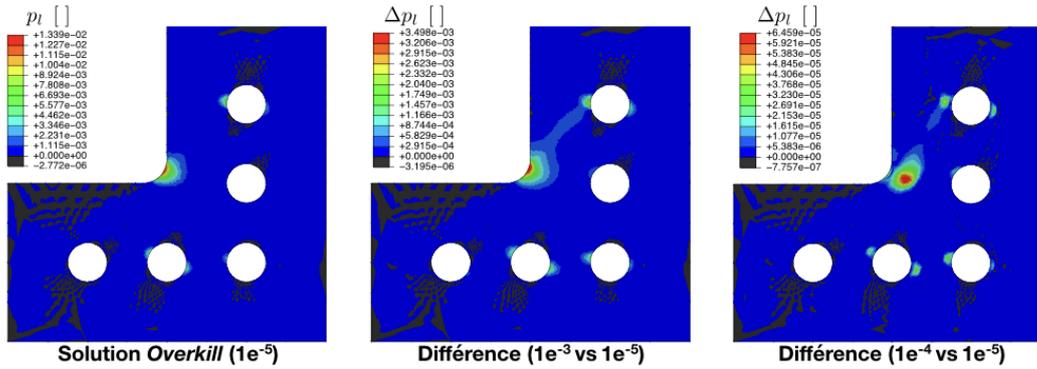


FIGURE 2.20 – Solution de référence en fin de cycle : plasticité lente

5.3.3 Difficulté d'une référence absolue

À des fins d'évaluation, on se sert d'une intégration à $\Delta p_{cut} = 1e^{-5}$, car les pas de temps auxquels elle conduit sont très petits par rapport à la durée du cycle. De plus, compte tenu de la faible taille du modèle, le temps de calcul est tout de même très important et représente une réelle limite sur des structures plus grandes.

Cependant, il apparaît que cette solution n'est toujours pas convergée en temps. Les évolutions obtenues en affinant le seuil Δp_{cut} deviennent très petites et n'apportent pas forcément d'informations supplémentaires, comme une zone critique différente. Au-delà, on constate les tendances suivantes (en fin de cycle) :

- Le maximum de contrainte dans le congé augmente à cause du champ plastique qui crée des tensions internes,
- Le niveau de plasticité général est moins élevé mais est plus diffus (surtout lors de la décharge),
- De la plasticité se propage entre les trous, notamment dans les zones très peu sollicitées jusqu'ici.

Ainsi, il est délicat de qualifier d'erreur, l'écart entre plusieurs calculs soit parce qu'ils sont réalisés avec des Δp_{cut} différents, soit que les pas de temps utilisés ne sont pas les mêmes. On peut quantifier les écarts entre les calculs de référence *via* les cartes d'erreurs des figures 2.18, 2.19 et 2.20. En outre, on définit un indicateur plus local basé sur l'élément le plus chargé de la structure, car il s'agit d'une quantité d'intérêt importante pour les modèles de durée de vie. Il faut donc que la méthode soit très précise sur cet indicateur, $\eta(X)$, pour la contrainte de von Mises ($X = \sigma_{Mises}$), les plasticités cumulées rapides et lentes ($X \in [p_r, p_l]$) :

$$\eta(X) = \frac{(X_{max} - X_{Ref})}{X_{Ref}} \times 100 \quad (2.28)$$

Le tableau 2.4 regroupe l'ensemble de ces résultats. Il permet, avec le tableau 2.2, de statuer sur le compromis entre la précision et le temps de calcul. À ce sujet, on peut dire que l'intégration à $\Delta p_{cut} = 1e^{-4}$ est la plus performante car l'écart avec la solution

limite à $1e^{-5}$ est faible, pour un temps de calcul compatible avec des modèles plus complexes.

Références	Automatique		$1e^{-3}$		$1e^{-4}$		$1e^{-5}$
	Valeur	η [%]	Valeur	η [%]	Valeur	η [%]	Valeur
Mises	579.7	10.9	640.3	1.64	649.9	0.159	650.9
p_r	$1.24e^{-2}$	18.4	$1.1.10e^{-2}$	5.05	$1.06e^{-2}$	0.871	$1.05e^{-2}$
p_l	$1.21e^{-2}$	3.97	$1.24e^{-2}$	1.90	$1.26e^{-2}$	0.277	$1.27e^{-2}$

TABLE 2.4 – Niveaux d'erreur sur l'élément le plus chargé sur les « références »

Cette constatation sur les calculs structuraux vis-à-vis de la précision de l'intégration, obtenue par le contrôle par seuil de *cutbacks*, est en adéquation avec les tests réalisés sur l'élément volumique. Elle permet d'adapter facilement le réglage de la méthode à d'autres applications, ainsi qu'à des lois de comportement différentes, tout en conservant la précision souhaitée. Cette mise au point peut être réalisée à faible coût sur des modèles élémentaires.

Conclusion

Au moyen d'essais numériques simples, la loi de comportement retenue a prouvé qu'elle représente les principaux phénomènes propres à l'élasto-viscoplasticité, théorie du comportement des matériaux évoluant à haute température. Les spécificités de la loi de comportement sont bien retranscrites, avec l'identification de l'IN100, notamment les zones de prépondérance entre les différents potentiels plastiques.

Dans le cadre de ces travaux, c'est le logiciel *Abaqus/Standard* qui est retenu et la loi de comportement est implantée *via* le module *Zmat* de la suite logicielle *Zébulon*, s'adaptant à d'autres logiciels. Cela rend génériques les propositions apportées dans cette section.

D'un point de vue calcul numérique, en mécanique non-linéaire et en particulier pour des lois complexes élasto-viscoplastiques, la grille d'intégration temporelle joue un rôle essentiel dans la qualité de la solution. Diverses pratiques de pré-discrétisation ont été rappelées dans le but de fournir des moyens proposant de bons compromis entre robustesse, précision et coût de calcul. La méthode proposée, basée sur la plasticité cumulée rapide, garantit une excellente précision, notamment sur les calculs de structures présentés dans le chapitre 3 et cela uniquement grâce à des calculs préliminaires sur un élément volumique.

Quelque soit la façon d'intégrer la loi comportement, il faut retenir qu'un besoin différent, en terme de pas de temps, apparaît entre le modèle global, grossier, et le modèle local, fin. En effet, différents niveaux de plasticité y sont atteints car les détails structuraux, introduits au sein du local, concentrent les contraintes et donc la plasticité.

Enfin, comme il en est question dans le chapitre 5, la loi de comportement retenue est capable de représenter les différents comportements asymptotiques de manière précise, *via* les règles d'intégration validées sur le comportement monotone.

Chapitre 3

Extension du couplage non-intrusif dans le cadre de la plasticité généralisée

Ce chapitre présente une version totalement non-linéaire de l'algorithme de couplage *global/local* non-intrusif, avec l'utilisation d'une loi de comportement matériau de type élasto-viscoplastique (EVP). La méthode est tout d'abord présentée sur un pas de temps unique et pour un seul modèle local. L'extension au traitement de chargements complexes est proposée dans le chapitre suivant et deux modèles locaux sont mis en œuvre dans le dernier chapitre. Afin d'améliorer les performances de l'algorithme, des techniques d'accélération de convergence innovantes ou reprises de la littérature sont étudiées, ainsi que le traitement de maillages non-conformes (au niveau de l'interface) facilitant le couplage entre les modèles.

1 Limitation des versions précédentes et objectifs

Un point commun aux méthodes proposées dans la littérature est que le modèle global, représentant toute la structure, est en élasticité linéaire et qu'une analyse non-linéaire est seulement utile dans une zone locale. Historiquement, ce type d'analyse est justifié par le manque de puissance de calcul, seul un modèle grossier élastique de la structure complète pouvait être simulé en un temps raisonnable. Depuis, l'augmentation des ressources numériques à disposition fait qu'un modèle grossier non-linéaire peut être calculable en un temps raisonnable.

Par ailleurs, les modèles de calculs industriels se sont très nettement complexifiés, avec l'emploi de plus en plus systématique de modèles de comportement matériau EVP. Dans le secteur aéronautique, cette évolution est justifiée par l'augmentation de la température de fonctionnement des moteurs d'avions. De nouveaux matériaux, ayant des propriétés adaptées aux hautes températures (de 800 à 1400°C), ne peuvent plus seulement être traités en élasticité linéaire, sans entraîner un niveau d'erreur important. En outre, la plasticité qui était, à des températures inférieures, localisée autour des détails structuraux est désormais généralisée à l'ensemble de la structure, comme

observé lors d'essais ou de retour de moteurs en service.

Les méthodes de réanalyse structurale classiques, basées sur un modèle global en élasticité linéaire, deviennent ainsi obsolètes, du fait de leur incapacité à transmettre la plasticité à l'ensemble de la structure. Enfin, dans la recherche d'une précision toujours plus importante, les modèles de durée de vie commencent eux-aussi à utiliser des quantités non-linéaires, issues de résultats de calculs EVP sur l'ensemble de la structure, notamment vis-à-vis de l'interaction fatigue/fluage.

Le nouvel algorithme proposé doit répondre à ces nouveaux besoins, si l'on veut qu'il soit utilisé pour des applications industrielles au quotidien.

L'algorithme proposé doit permettre d'insérer des descriptions géométriques de détails extrêmement fins dans des modèles globaux EVP. Il doit, en outre, pouvoir être intégré à la chaîne complète de calculs débutant par une simulation aérodynamique, se concluant par l'évaluation de la durée de vie en passant par le cœur de ces travaux, le calcul de comportement mécanique EVP sur plusieurs cycles de chargement. Pour cela, le développement se doit d'être non-intrusif, c'est-à-dire que la stratégie proposée doit être réalisée dans un code commercial, sans nécessiter de modifications ou de développements internes. On peut alors utiliser directement le solveur et les données d'entrée de la simulation du partenaire industriel, et fournir le même type de données de sortie.

2 Algorithme *global/local* non-intrusif non-linéaire

2.1 Particularités de la version proposée

Afin de répondre à l'ensemble de ces objectifs, l'algorithme de type *global/local* non-intrusif, initié dans [Gendre, 2009], est retenu.

Le principal enjeu de la version développée est d'être capable de représenter de manière exacte une zone plastique, débutant au niveau du modèle local, et se propageant à l'ensemble de la structure, à travers la frontière Γ sur laquelle s'effectue le couplage. Pour cela, chaque modèle de la stratégie utilise un comportement EVP.

Dans le cas d'un modèle global élastique, les couplages proposés utilisent une formulation incrémentale. À chaque itération i , on cherche un incrément de déplacement Δu_i , associé à un résidu d'équilibre r_i , ce qui permet de s'affranchir des chargements extérieurs durant les corrections. Du fait de la non-linéarité, cette approche n'est plus viable et à chaque correction, la solution complète u_i devra être recalculée à partir des charges déterminées par l'algorithme.

L'algorithme non-intrusif est basé sur l'échange des déplacements d'interface et des efforts associés, on conserve cette philosophie avec un développement dans *Abaqus/Standard* qui est la plate-forme commerciale de calcul utilisée par notre partenaire industriel. La stratégie est alors développée sous la forme d'un script de programmation Python permettant :

- L'écriture des fichiers de calculs (géométries, paramètres d'intégration, chargement extérieur, données de pilotage par l'interface),
- Le lancement des calculs dans *Abaqus/Standard*,
- L'extraction des solutions sur l'interface (déplacements et efforts) depuis la solution,
- La réalisation de divers post-traitements basiques, comme le suivi de convergence.

Ainsi, il « suffit seulement » d'avoir les fichiers de mise en donnée (maillages, chargement extérieur, définition des *steps* de calcul) et le script Python de pilotage et l'algorithme peut être utilisé sur n'importe quelle station de travail dotée d'une installation *Abaqus/Standard*.

2.2 Formulation continue

On considère une structure mécanique, appelée *référence* (cf. figure 3.1), représentée par un domaine Ω et composée de deux sous-domaines Ω_C (zone complémentaire) et Ω_L (zone locale) tels que :

$$\begin{cases} \bar{\Omega} = \bar{\Omega}_C \cup \bar{\Omega}_L \\ \Gamma = \partial\Omega_C \cap \partial\Omega_L \end{cases} \quad (3.1)$$

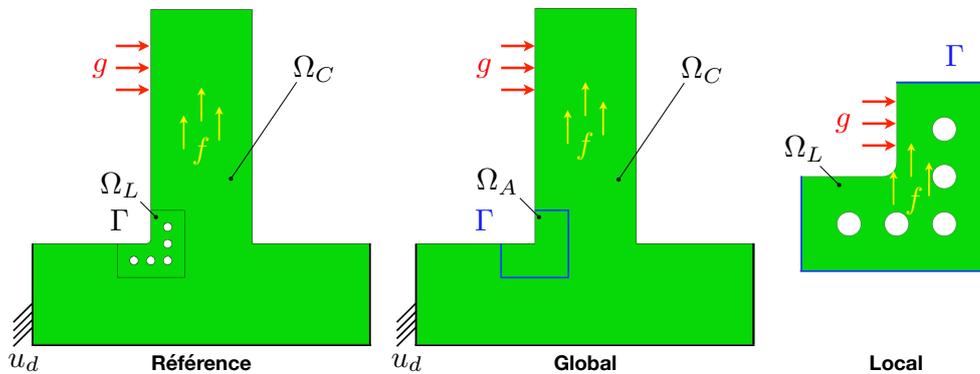


FIGURE 3.1 – Modèles continus mis en œuvre dans la méthode globale/locale

Dans le cadre de l'hypothèse des petites déformations, on note u le champ de déplacement, ϵ le champ de déformation associé (partie symétrique du gradient de u) et σ le tenseur des contraintes de Cauchy. Le domaine Ω est soumis à un effort volumique f (en pratique il s'agit d'un effort centrifuge, provenant de la rotation de l'aube), à des conditions de Dirichlet u_d sur un de ces bords $\partial_d\Omega$ (assemblage aube disque) et de Neumann g sur $\partial_n\Omega$ (pression aérodynamique du flux d'air sur le bord d'attaque de l'aube).

Afin de traiter correctement le problème d'évolution, avec une loi de comportement matériau élasto-viscoplastique, on introduit un instant t appartenant à un intervalle d'étude $\mathcal{T} = [0, T]$. L'ensemble des équations présentées dans la suite doivent

être satisfaites à chaque instant t . Par souci de concision, ce dernier est volontairement omis, sauf si nécessaire.

Soit $V(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega), v = u_d \text{ sur } \partial_d \Omega\}$ l'espace affine des déplacements admissibles et $V^0(\Omega)$ l'espace vectoriel associé.

L'équation d'équilibre classique est la suivante :

$$\int_{\Omega} \sigma : \epsilon(u) dx = \int_{\Omega} f \cdot v dx + \int_{\partial_n \Omega} g \cdot v dS, \forall v \in V^0(\Omega) \quad (3.2)$$

Dans une représentation fonctionnelle du comportement, un opérateur noté \mathcal{B} , non-linéaire par rapport à u , est introduit afin de traiter la non-linéarité entre contrainte et déformation, tel que :

$$\sigma(x, t) = \mathcal{B}(\epsilon(u(x, \tau)), \tau < t), x \in \Omega, t \in \mathcal{T} \quad (3.3)$$

En pratique, une mise en œuvre par variables internes est employée.

Le problème mécanique à résoudre peut être mis sous la forme classique suivante : trouver un champ solution $u \in V(\Omega)$ tel que,

$$a(u, v) = l(v), \forall v \in V^0(\Omega) \quad (3.4)$$

où l est une forme continue linéaire et a une forme continue coercive, linéaire par rapport à v .

Dans la suite, on utilise plusieurs sous-domaines et modèles. Quand une quantité est attachée à un modèle, il est précisé par un exposant.

2.2.1 Problème de référence

Le problème de référence (exposant R) est résolu sur le domaine Ω , composé de deux sous-domaines sans recouvrement, à savoir la partie complémentaire Ω^C , utilisant une représentation grossière de la structure dans sa majorité, et une zone locale d'intérêt Ω^L , utilisant une représentation fine de la géométrie. C'est dans ce modèle que l'on peut insérer des détails structuraux, des optimisations topologiques ou simplement un raffinement de maillage. L'interface Γ entre ces deux sous-domaines est immergée dans le domaine Ω . L'extension à plusieurs zones de ré-analyses locales ne pose pas de soucis particuliers et a déjà été portée à son paroxysme dans [Duval *et al.*, 2016], où les domaines locaux recouvrent totalement la structure.

Le problème de référence, qui en pratique n'est calculé qu'à but de validation, est le suivant : Trouver $u \in V(\Omega)$, tel que $\forall v \in V^0(\Omega)$,

$$a^R(u, v) := a^C(u, v) + a^L(u, v) = l^C(v) + l^L(v) =: l^R(v) \quad (3.5)$$

2.2.2 Décomposition *global/local*

Le principe de la méthode *global/local* est de décomposer le problème de référence en deux modèles distincts (*cf.* figure 3.1) :

- *Le modèle global* représente l'ensemble de la structure de manière grossière, c'est-à-dire que l'on peut y omettre certains détails structuraux. En particulier, le modèle de la zone d'intérêt Ω^L est remplacé par un modèle simplifié, sous-domaine Ω^A , appelé modèle auxiliaire dans la suite de ce document. Le modèle global, de par sa moindre complexité, est beaucoup moins coûteux à résoudre que le modèle de référence.
- *Le modèle local* correspond uniquement à la zone d'intérêt du modèle de référence. Il est piloté par les déplacements issus de l'analyse globale sur l'interface Γ . Un tel modèle peut être très coûteux numériquement, mais au moins il n'est pas alourdi pas les éléments de la zone complémentaire, comme dans le modèle de référence, ce qui constitue une économie importante.

La solution obtenue par l'algorithme de résolution est équivalente à une substitution du modèle local dans le modèle global. En particulier, la solution locale remplace directement celle de la zone auxiliaire. Ainsi, dans Ω^A , on peut utiliser un modèle matériau homogénéisé ou une définition simplifiée du chargement. Par exemple dans [Chevreuil *et al.*, 2013], la zone locale utilise une définition stochastique du matériau, tandis que le modèle auxiliaire reste déterministe.

Afin d'obtenir la formulation *global/local*, on introduit le modèle auxiliaire dans la formulation du problème de référence (3.5), afin de faire apparaître le modèle global :

Trouver $u \in V(\Omega)$, tel que $\forall v \in V^0(\Omega)$,

$$\begin{aligned} a^C(u, v) + a^L(u, v) &= l^C(v) + l^L(v) \\ \underbrace{a^C(u, v) + a^A(u, v)}_{a^G(u, v)} &= \underbrace{l^C(v) + l^A(v)}_{l^G(v)} + (a^A(u, v) - l^A(v)) - (a^L(u, v) - l^L(v)) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Le problème global a^G, l^G est traité par le solveur commercial en étant assemblé et résolu de manière tout à fait classique et monolithique. À partir de l'équation (3.6), on propose un premier schéma itératif, exprimé à l'itération i :

$$a^G(u_{i+1}, v) = l^G(v) + (a^A(u_i, v) - l^A(v)) - (a^L(u_i, v) - l^L(v)) \quad (3.7)$$

Cette équation stationnaire peut être interprétée comme un point fixe sur le problème de référence, préconditionné par la résolution du modèle global. Non seulement un tel schéma itératif peut s'avérer lent à converger mais l'évaluation du membre de droite n'est pas simple en pratique et cette dernière impose que les sous-domaines Ω^A et Ω^L coïncident.

La méthode développée par la suite requiert uniquement que l'interface Γ coïncide géométriquement entre les modèles *ie.* le bord du domaine auxiliaire doit être identique à celui de la zone locale. Soit V_Γ l'espace trace des déplacements sur l'interface Γ et V_Γ^* son dual, à savoir les efforts d'interface, on note $\langle \lambda, v \rangle_\Gamma$, l'opérateur de dualité avec $\lambda \in V_\Gamma^*$ et $v \in V_\Gamma$.

L'idée est de remplacer le second membre de (3.7) par la résolution des problèmes local et auxiliaire. Il est enfin mis sous la forme du chargement correctif P , pris en compte sous la forme d'un effort extérieur, dont on verra qu'il est appliqué sur la frontière interne Γ .

Vision algorithmique On note i le numéro de l'itération courante, on initialise l'algorithme à $i = 0$ avec un chargement correctif initial nul, *ie.* $P_0 = 0$. À chaque itération i , on a le processus suivant :

— *Problème global* : Trouver $u_i^G \in V(\Omega^G)$ tel que,

$$\forall v \in V^0(\Omega^G), \quad a^G(u_i^G, v) = l^G(v) + \langle P_i, v \rangle \quad (3.8)$$

En particulier, on obtient les déplacements sur l'interface Γ : $u_i^{G,\Gamma}$.

— *Problème local* : Trouver $(u_i^L, \lambda_i^L) \in V(\Omega^L) \times V^*(\Omega^L)$, tel que

$$\forall (v, \mu) \in V^0(\Omega^L) \times V_\Gamma^* \left\{ \begin{array}{l} a^L(u_i^L, v) = l^L(v) + \langle \lambda_i^L, v \rangle_\Gamma \\ \langle \mu, u_i^L - u_i^G \rangle_\Gamma = 0 \end{array} \right. \quad (3.9)$$

— *Problème auxiliaire* : Trouver $(u_i^A, \lambda_i^A) \in V(\Omega^A) \times V^*(\Omega^A)$ tel que,

$$\forall (v, \mu) \in V^0(\Omega^A) \times V_\Gamma^* \left\{ \begin{array}{l} a^A(u_i^A, v) = l^A(v) + \langle \lambda_i^A, v \rangle_\Gamma \\ \langle \mu, u_i^A - u_i^G \rangle_\Gamma = 0 \end{array} \right. \quad (3.10)$$

De ces deux solutions, on récupère les efforts de réactions λ_i^L et λ_i^A sur l'interface.

— *Mise-à-jour* :

$$\langle P_{i+1}, v \rangle = \underbrace{(a^A(u_i^A, v^A) - l^A(v^A))}_{\langle \lambda_i^A, v \rangle_\Gamma} - \underbrace{(a^L(u_i^L, v^L) - l^L(v^L))}_{\langle \lambda_i^L, v \rangle_\Gamma} \quad (3.11)$$

avec : $v_{|\Gamma}^A = v_{|\Gamma}^L = v$

— *Évaluation du résidu d'équilibre* r_i (3.19) *et test de convergence* : arrêt de l'algorithme si $\|r_i\| < \eta_{GL}$, sinon on recommence une itération.

η_{GL} est une tolérance de convergence fixée par l'utilisateur. Le résidu mesure le défaut d'équilibre entre les zones complémentaire et locale, ce qui en fait un excellent indicateur de convergence. Les problèmes local et auxiliaire sont totalement séparés et en pratique ils sont résolus en parallèle.

En d'autres termes, on peut résumer l'algorithme de la façon suivante. Le problème global, adoptant une discrétisation spatiale grossière, est calculé à faible coût à chaque itération, en initialisant avec une charge correctrice nulle. Ensuite, on extrait de la solution globale obtenue, les déplacements d'interface Γ qui sont appliqués en tant que conditions de Dirichlet, aux problèmes auxiliaire et local sur leur frontière commune Γ . En considérant une approche par multiplicateurs de Lagrange, pour l'imposition des conditions de Dirichlet, on vient extraire, des solutions locale et auxiliaire, les efforts de réactions λ^L, λ^A correspondants. Ces grandeurs permettent de construire la charge correctrice P_{i+1} à partir de l'équation (3.11). Lors de l'itération suivante, le modèle global est corrigé par cette mise-à-jour de la charge correctrice et un nouveau champ de déplacements est obtenu.

2.2.3 Intérêt du problème auxiliaire

Extraction non-intrusive des efforts de réactions λ Des précautions ont été prises afin de résoudre avec le maximum de précision chaque modèle de la méthode, notamment sur l'intégration temporelle, ainsi qu'au niveau de la solution plastique avec des tolérances de convergence très fines ([Passieux *et al.*, 2013], *via* un algorithme multi-grilles, a recours à des calculs partiellement convergés sur certaines grilles).

En présence d'une résolution exacte, l'équation (3.11) fournit une expression de la charge correctrice, en fonction uniquement des efforts de réactions de l'interface Γ , issus des deux représentations auxiliaire et locale, de la zone d'intérêt :

$$P_{i+1} = (\lambda_i^A - \lambda_i^L) \quad (3.12)$$

Ces efforts λ sont une sortie standard dans la plupart des codes commerciaux, car ils sont définis sur des nœuds soumis à des conditions de Dirichlet.

Certaines formulations de la littérature n'utilisent pas de modèle auxiliaire et ont une expression de la charge correctrice P_i (3.17), à partir de l'effort de réaction de la partie complémentaire λ^C et du résidu d'équilibre r_i (3.13) en basant l'algorithme sur ce dernier.

$$r_i = -(\lambda_i^L + \lambda_i^C) \quad (3.13)$$

λ^C désigne l'effort nodal intérieur au modèle global exercé par la zone d'intérêt sur la zone complémentaire [Gendre, 2009], autrement dit de la contrainte selon la normale sortante à la zone complémentaire sur Γ .

Résidu d'équilibre *via* le modèle auxiliaire Comme le modèle auxiliaire est une restriction du modèle global, il s'agit du domaine intérieur à Ω^G délimité par la frontière Γ , la solution globale restreinte sur Ω^A est donc la même que celle du problème auxiliaire. On a en particulier pour les déplacements :

$$u_i^A = u_{i|\Omega^A}^G \quad (3.14)$$

En outre, on peut définir l'effort de réaction de la zone complémentaire tel que :

$$a^C(u_i^C, v) = l^C(v) + \langle \lambda_i^C, v \rangle_\Gamma, \forall v \in V(\Omega^C) \quad (3.15)$$

En utilisant l'équation (3.6) de décomposition du problème de référence et en y introduisant l'expression précédente de λ^C , on obtient :

$$\underbrace{a^C(u_i^C, v) - l^C(v)}_{\lambda_i^C} + \underbrace{a^A(u_i^A, v) - l^A(v)}_{\lambda^A} = \underbrace{a^A(u_i^A, v) - l^A(v) - (a^L(u, v) - l^L(v))}_{P_i} \quad (3.16)$$

La charge correctrice P_i engendre donc une discontinuité de contrainte normale dans le modèle global :

$$\lambda_i^C + \lambda_i^A = P_i \quad (3.17)$$

En injectant (3.17) dans (3.12), on obtient :

$$\lambda_i^C + \lambda_i^L + P_{i+1} = P_i \quad (3.18)$$

et en utilisant l'expression du résidu d'équilibre (3.13) entre la zone d'intérêt et la partie complémentaire, on établit finalement une formule équivalente de mise à jour du chargement :

$$P_{i+1} = P_i + r_i \quad (3.19)$$

Autrement dit, la charge P est ajustée en fonction du défaut d'équilibre, qui existe au niveau de l'interface, mesuré par le résidu r à l'itération courante. Cela permet par ailleurs de suivre la convergence puisque que, quand le résidu tend vers zéro, la charge corrective n'évolue plus. Les sous-domaines sont alors en équilibre.

En pratique et *via* les modèles mis en jeu, on a accès à la charge corrective P_i à chaque itération i grâce aux forces de réaction λ_i^A, λ_i^L . Le résidu d'équilibre r_i est donc obtenu par post-traitement à partir de ces grandeurs par l'équation (3.19).

2.3 Formulation par éléments finis

On présente désormais l'algorithme du couplage *global/local*, d'un point de vue simplifié purement éléments finis, permettant une implémentation quasiment directe.

2.3.1 Condensation en problème d'interface

Dans l'algorithme proposé, seules des grandeurs liées à l'interface Γ sont échangées : les déplacements u_Γ^G , ainsi que les efforts de réactions correspondant selon les modèles λ^L, λ^A . Il n'y a donc aucune grandeur intégrée sur le domaine à transférer. En outre, on peut représenter le modèle auxiliaire avec la représentation la plus grossière que l'on ait, car cela n'a aucune incidence sur la limite. Cependant, la vitesse de convergence est d'autant plus faible que le modèle auxiliaire se départ du modèle local.

On considère pour chaque modèle mis en jeu $X \in (G, A, L)$, le vecteur nodal associé au champ de déplacement u^X et f^X le vecteur des forces généralisées. On introduit des grandeurs dites d'interface, car uniquement définies sur la frontière Γ , comme les efforts de réactions nodaux λ^X ou encore la charge corrective globale P appliquée sur la frontière intérieure au modèle global. La matrice de rigidité linéarisée de chaque modèle est notée K^X . De même, u_Γ^X est un vecteur de déplacements restreint à l'interface.

Remarque : À cause de la formulation éléments finis, il convient de préciser que les réactions nodales λ ne sont pas directement la discrétisation spatiale des multiplicateurs de Lagrange. En effet, pour un degré de liberté j associé à la fonction de forme

$\phi(i)$, on a :

$$\begin{aligned}\lambda_j^X &= \int_{\Omega^X} (\sigma_h : \varepsilon(\phi_j) - \mathbf{f} \cdot \phi_j) dx - \int_{\partial_n \Omega^X} \mathbf{g} \cdot \phi_j dS \\ &= \int_{\Gamma} (\sigma_h^X \cdot \mathbf{n}^X) \cdot \phi_j dS - \int_{\Omega^X} (\operatorname{div}(\sigma_h) + \mathbf{f}) \cdot \phi_j dx + \int_{\partial_n \Omega^X} (\sigma_h \cdot \mathbf{n}^X - \mathbf{g}) \cdot \phi_j dS\end{aligned}\quad (3.20)$$

Où \mathbf{n}^X désigne la normale sortante au domaine X et σ_h est le tenseur des contraintes obtenues par le calcul éléments finis. Pour obtenir λ , on peut alors adopter diverses approches :

- La plupart des codes commerciaux proposent une sortie standard permettant d'obtenir λ . Dans *Abaqus/Standard* cette quantité n'est disponible que sur des nœuds soumis à des conditions limites de Dirichlet. Ainsi les efforts de réactions ne sont pas disponibles sur la frontière intérieure du modèle global, car seule une condition de Neumann est appliquée. C'est pourquoi l'utilisation du problème auxiliaire devient intéressante car l'interface Γ est soumise à des déplacements imposés issus de la solution globale, ce qui permet d'obtenir les efforts de réaction nodaux correspondant.
- Certains codes commerciaux, comme *Code_Aster*, offrent la possibilité de calculer une telle quantité facilement, pour n'importe quel nœud du modèle. Dans le cas contraire il faut implémenter la formule (3.20) et calculer les efforts de réactions à partir du champ de contrainte éléments finis.
- Cette quantité peut être obtenue par post-traitement, mais cela peut s'avérer fastidieux et surtout cela peut ralentir l'algorithme puisqu'une telle opération doit être réalisée plusieurs fois par itération.

Réduire l'approche *global/local* à un problème d'interface, conduit à rechercher le couple de solution d'interface $\mathbf{u}_{\Gamma,i}^G$ et \mathbf{P}_i . La solution éléments finis sur chaque modèle en découle ensuite directement, par simple résolution.

2.3.2 Résolution

On peut caractériser les différents problèmes à résoudre, uniquement en fonction du champ de déplacement d'interface $\mathbf{u}_{\Gamma,i}^X$ commun à tous les problèmes à une itération i donnée, de leurs efforts de réactions respectifs λ^X et des efforts extérieurs \mathbf{f}^X . Dans ce but, on introduit l'opérateur discret non-linéaire \mathbf{S}^X , dit de « *Dirichlet vers Neumann* », qui permet d'obtenir les efforts d'interface à partir des déplacements de cette même frontière. Ainsi pour chaque modèle de la stratégie, il consiste en pratique à la résolution du problème éléments finis :

$$\begin{cases} \lambda^L = \mathbf{S}^L(\mathbf{u}_{\Gamma}; \mathbf{f}^L) : \text{Problème local} \\ \lambda^A = \mathbf{S}^A(\mathbf{u}_{\Gamma}; \mathbf{f}^A) : \text{Problème auxiliaire} \\ \lambda^C = \mathbf{S}^C(\mathbf{u}_{\Gamma}; \mathbf{f}^C) : \text{Problème complémentaire} \end{cases}\quad (3.21)$$

Du fait des non-linéarités matérielles ou géométriques comme en grandes déformations (*cf.* chapitre 4), les chargements extérieurs doivent être pris en compte à chaque résolution, ce qui nécessite d'adapter les versions incrémentales de l'algorithme proposées dans la littérature [Gendre *et al.*, 2009, Liu *et al.*, 2014, Duval *et al.*, 2016].

Grâce à l'additivité de l'intégrale sur un domaine, on peut proposer une décomposition des problèmes de référence et global telle que :

$$\begin{cases} \mathbf{S}^R = \mathbf{S}^C + \mathbf{S}^L \\ \mathbf{S}^G = \mathbf{S}^C + \mathbf{S}^A \end{cases} \quad (3.22)$$

Ainsi les problèmes de référence (R) et global (G) peuvent s'écrire de manière condensée comme suit :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \mathbf{u}_\Gamma / \mathbf{S}^R(\mathbf{u}_\Gamma; \mathbf{f}^R) = \mathbf{S}^C(\mathbf{u}_\Gamma; \mathbf{f}^C) + \mathbf{S}^L(\mathbf{u}_\Gamma; \mathbf{f}^L) = 0 \\ \text{Trouver } \mathbf{u}_\Gamma / \mathbf{S}^G(\mathbf{u}_\Gamma; \mathbf{f}^G) = \mathbf{S}^C(\mathbf{u}_\Gamma; \mathbf{f}^C) + \mathbf{S}^A(\mathbf{u}_\Gamma; \mathbf{f}^A) = \mathbf{P} \end{cases} \quad (3.23)$$

Les champs intérieurs, notamment de déplacements, sont définis implicitement à partir de leur restriction d'interface, car la solution complète est obtenue lors de la résolution du problème. La grandeur d'interface n'est en réalité qu'une extraction de la solution complète éléments finis.

On introduit pour la description de l'algorithme, les méthodes liées à la résolution des problèmes :

- $[\mathbf{u}^G] = \text{RésolutionGlobale}(\mathbf{P}; \mathbf{f}^G)$, \mathbf{u}^G est le champ global complet défini sur le domaine Ω^G , en particulier on a la restriction sur la frontière telle que : $\mathbf{u}_\Gamma^G = \mathbf{S}^{G^{-1}}(\mathbf{P}; \mathbf{f}^G)$.
- $[\mathbf{u}^L, \boldsymbol{\lambda}^L] = \text{RésolutionLocale}(\mathbf{u}_\Gamma; \mathbf{f}^L)$, \mathbf{u}^L est défini sur le domaine local d'intérêt Ω^L avec conditions de Dirichlet sur la frontière Γ : $\boldsymbol{\lambda}^L = \mathbf{S}^L(\mathbf{u}_\Gamma^G; \mathbf{f}^L)$.
- $[\mathbf{u}^A, \boldsymbol{\lambda}^A] = \text{RésolutionAuxiliaire}(\mathbf{u}_\Gamma; \mathbf{f}^A)$, \mathbf{u}^A est défini sur le domaine auxiliaire Ω^A avec conditions de Dirichlet sur la frontière Γ : $\boldsymbol{\lambda}^A = \mathbf{S}^A(\mathbf{u}_\Gamma^G; \mathbf{f}^A)$. On rappelle que si le logiciel utilisé le permet, cette résolution peut être remplacée par un post-traitement du champ de contrainte issu de l'analyse globale *via* (3.20) puisque seul $\boldsymbol{\lambda}^A$ est utile à l'algorithme.

2.3.3 Implémentation proposée

Suite aux développements effectués ci-dessus, on propose l'implémentation suivante de la méthode sous la forme de l'algorithme 2 écrit en pseudo-code.

Les résolutions des problèmes local et auxiliaire sont ici séparées mais en pratique elles sont réalisées en parallèles car il n'existe pas de dépendance entre les deux problèmes. En pratique, le problème auxiliaire est bien plus rapide à résoudre que le local, ainsi l'utilisation d'un modèle auxiliaire ne ralentit pas la méthode car son traitement est masqué par le processus du local.

La section 4 présente divers procédés d'accélération.

Algorithm 2: Méthode *global/local* non-intrusive sur un pas de temps

```

0 - Initialisation :  $P_0 = 0$  et  $i = 0$ 
while  $\|r_i\|_2 > \epsilon_r$  do
    1 -  $[u_i^G] = \text{RésolutionGlobale}(P_i; f^G)$ 
    2 -  $[\lambda_i^L] = \text{RésolutionLocale}(u_{\Gamma,i}^G; f^L)$ 
    3 -  $[\lambda_i^A] = \text{RésolutionAuxiliaire}(u_{\Gamma,i}^G; f^A)$ 
    4 - Mise-à-jour de la charge correctrice :  $P_{i+1} = \lambda_i^A - \lambda_i^L$ 
    5 - Résidu d'équilibre :  $r_i = P_{i+1} - P_i$ 
    Incrémentation :  $i = i + 1$ 
end
    
```

2.4 Traitement des maillages non-conformes

Jusqu'ici les problèmes ont été écrits en considérant que les modèles présentent des maillages conformes sur l'interface Γ , ainsi les transferts de champs (déplacement u^X et efforts de réactions λ^X) sont particulièrement simples à réaliser. Néanmoins, comme les modèles ne sont pas nécessairement maillés en même temps, il faut porter une attention particulière afin d'imposer le même maillage entre le modèle global et le local. *A priori* ce problème ne se pose pas avec le modèle auxiliaire car il n'est qu'une restriction du problème global, et de ce fait ils sont conformes.

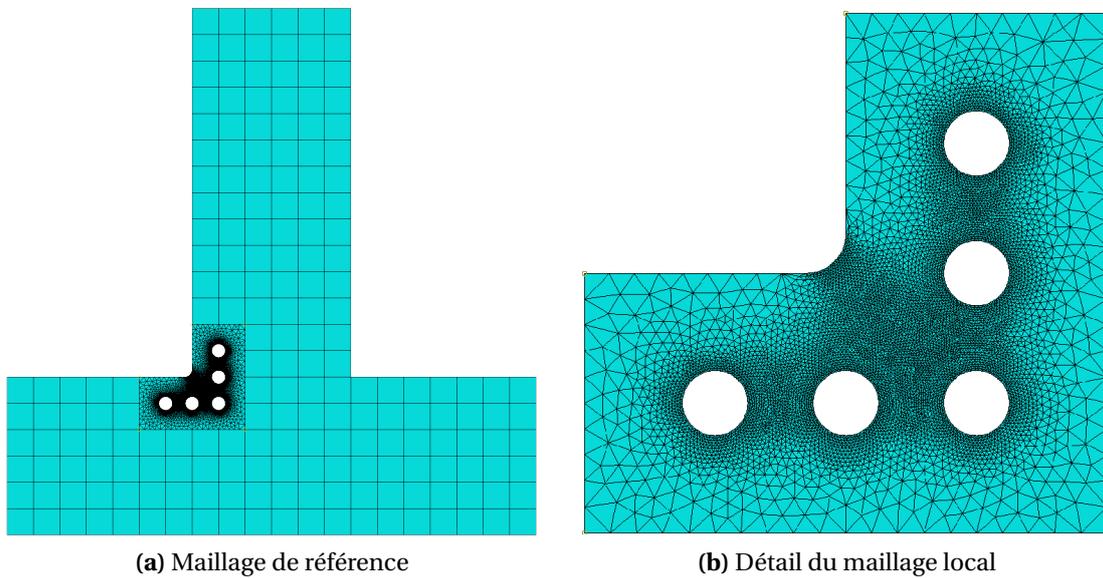


FIGURE 3.2 – Modèles 2D avec interface non-conforme

Une des applications possible de la méthode est de ré-analyser plusieurs modèles locaux sans modifier le modèle global pouvant provenir de collaborateurs différents n'ayant pas forcément le même maillage global. De ce fait, être capable de traiter des

maillages non-conformes sur Γ peut s'avérer très utile.

Des approches basées sur des techniques *Mortar* ont déjà été employées [Liu *et al.*, 2014, Duval, 2016]. Le but ici est de proposer un moyen rapide et suffisamment simple d'implémentation pour pouvoir traiter ce type de raccord. On choisit une mise en œuvre maître-esclave avec transfert cinématique par interpolation. Le champ maître est le global (*a priori* plus grossier), l'esclave est le champ local. La matrice de couplage est notée \mathbf{T} , elle porte uniquement sur les degrés de liberté des interfaces $\dim(\mathbf{T}) = [\text{nbNoeudsMaître} \times \text{nbNoeudsEsclave}]$:

$$\begin{cases} \mathbf{T}\mathbf{u}_\Gamma^G - \mathbf{u}_\Gamma^L = \mathbf{0} & \text{Descente global vers local} \\ \boldsymbol{\lambda}^C + \mathbf{T}^T \boldsymbol{\lambda}^L = \mathbf{0} & \text{Remontée local vers global} \end{cases} \quad (3.24)$$

De ce fait, on conserve le travail mécanique sur l'interface :

$$(\mathbf{u}^L)^t \boldsymbol{\lambda}^L = (\mathbf{u}^G)^t \boldsymbol{\lambda}^G \quad (3.25)$$

Cette technique ne perturbe aucunement l'algorithme proposé car les projections interviennent uniquement lors des échanges au niveau de l'interface entre les modèles. Les détails de la méthode et la formulation utilisée sont présentés en annexes de ce document *cf.* l'annexe A. De manière générale, la construction de la matrice de transfert de champ \mathbf{T} se réalise avant l'analyse dès que l'on a accès aux maillages mis en jeu et elle peut être sauvegardée afin d'être utilisée directement lors de la phase de calcul, elle reste inchangée tant que les maillages ne sont pas modifiés. L'approche générale est la suivante :

- Identification des éléments et des nœuds des interfaces en vis-à-vis,
- Pour chaque nœud du maillage esclave, on identifie l'élément maître correspondant,
- Des poids sont ensuite attribués à chaque nœud de l'élément maître, en fonction des coordonnées du nœud esclave interpolé sur les fonctions de forme de l'élément maître. Les poids finaux attribués à chaque nœud maître en fonction des nœuds esclaves constituent les termes de la matrice \mathbf{T} .

La complexité de cette approche est accrue pour les problèmes 3D principalement à cause de l'identification géométrique des liens entre les nœuds esclaves et maîtres puis dans la phase d'interpolation.

Interpolation sur fonctions de forme Pour chaque nœud du maillage esclave (S), on identifie l'élément maître (M) en vis-à-vis, puis on calcule des poids pour chacun de ses nœuds par interpolation sur les fonctions de forme éléments finis. La matrice \mathbf{T} est initialisée à 0, puis on vient la modifier au gré des relations maître/esclave. Ce couplage dépend de la dimension des éléments utilisés et de leur degré. On donne ici la procédure sur des éléments triangles en deux dimensions linéaires puis quadratique qui conduisent à une interface en une dimension. On note L_e la longueur de l'élément maître et $0 \leq x \leq L_e$ l'abscisse du nœud esclave dans l'arête maître :

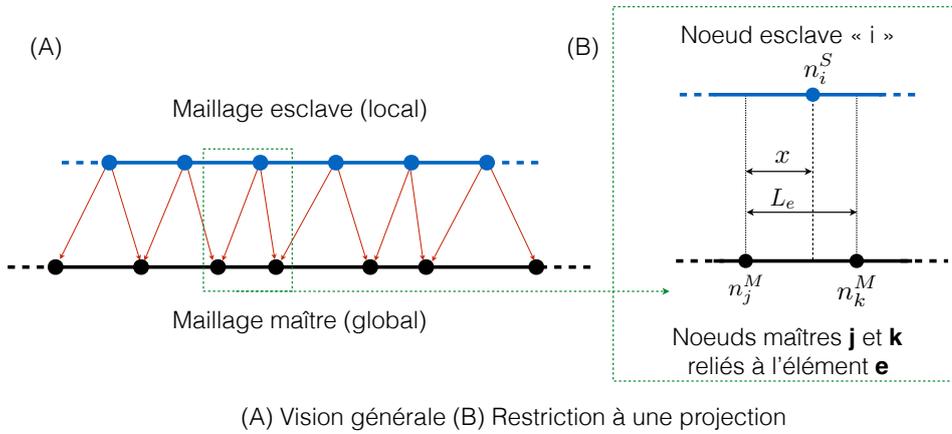


FIGURE 3.3 – Schéma de principe du raccord effectué

- *fonctions de formes éléments finis linéaires* : pour un nœud esclave n_i^S qui appartient à l'élément maître e dont les deux nœuds sont n_j^M et n_k^M . Cette relation modifie deux termes de \mathbf{T} :

$$\begin{cases} T[n_i^S, n_j^M] = 1 - \frac{x}{L_e} \\ T[n_i^S, n_k^M] = \frac{x}{L_e} \end{cases} \quad (3.26)$$

- *fonctions de formes éléments finis quadratiques* : le nœud esclave n_i^S est lié à trois nœuds esclaves n_j^M , n_k^M et n_l^M . Cette relation impacte trois coefficients de la matrice \mathbf{T} :

$$\begin{cases} T[n_i^S, n_j^M] = \left(1 - \frac{x}{L_e}\right) \left(2\left(1 - \frac{x}{L_e}\right) - 1\right) \\ T[n_i^S, n_k^M] = 4 \left(1 - \frac{x}{L_e}\right) \frac{x}{L_e} \\ T[n_i^S, n_l^M] = \frac{x}{L_e} \left(\frac{2x}{L_e} - 1\right) \end{cases} \quad (3.27)$$

Enfin, même dans le cas où les maillages sont conformes la numérotation des nœuds d'interface, entre global et local, est dans la majorité des cas différentes. Le traitement proposé ici permet d'identifier simplement les nœuds en vis-à-vis et de les coupler ; dans ce cas la matrice \mathbf{T} ne sera composée que de 1 ou de 0. Cela évite une renumérotation des nœuds d'interface, impactant ensuite la définition des éléments, qui peut être une tâche fastidieuse.

2.5 Convergence générale de l'algorithme

L'algorithme mis en œuvre (3.11) peut être résumé par l'équation (3.7) de mise-à-jour de la charge correctrice. Cette dernière peut être ré-écrite *via* les formulations des problèmes d'interface comme suit :

$$\mathbf{P}_{i+1} = (\mathbf{S}^A - \mathbf{S}^L) \circ \mathbf{S}^{G^{-1}} (\mathbf{P}_i) \quad (3.28)$$

En introduisant, la partie complémentaire, on obtient :

$$\begin{aligned} P_{i+1} &= (\mathbf{S}^A + \mathbf{S}^C - \mathbf{S}^C - \mathbf{S}^F) \circ \mathbf{S}^{G^{-1}} (P_i) \\ &= P_i - \mathbf{S}^R \circ \mathbf{S}^{G^{-1}} (P_i) \\ P_{i+1} &= (\mathbf{I} - \mathbf{S}^R \circ \mathbf{S}^{G^{-1}}) (P_i) \end{aligned} \quad (3.29)$$

On reconnaît la formulation d'un problème de point fixe, portant sur la charge corrective \mathbf{P} , dont la convergence dépend du caractère contractant de l'opérateur construit *via* les équations (3.28), (3.29) :

$$\mathbf{I} - \mathbf{S}^R \circ \mathbf{S}^{G^{-1}} = (\mathbf{S}^A - \mathbf{S}^L) \circ (\mathbf{S}^A + \mathbf{S}^C)^{-1} \quad (3.30)$$

Ainsi une condition triviale (3.30) pour que l'opérateur soit contractant est : $\mathbf{S}^A \geq \mathbf{S}^L$ (comparaison selon la norme quadratique). Une interprétation mécanique est que la zone d'intérêt du modèle global doit être plus raide que sa représentation dans le local. Dans notre cadre où tous les modèles sont non-linéaires, seuls les détails structuraux sont ajoutés dans la représentation locale, ainsi le modèle auxiliaire constitue une bonne approximation $\mathbf{S}^A \simeq \mathbf{S}^L$, ce qui favorise la convergence de l'algorithme. En pratique cela suffit à la garantir, comme nous le verrons pour des cas complexes. Le cas limite de cette analyse serait le modèle de référence ($\mathbf{S}^A = \mathbf{S}^L$) pour lequel aucune itération n'est nécessaire.

Dans le contexte d'éléments finis stochastiques, [Chevreuil *et al.*, 2013] utilise une formulation stochastique pour la rigidité du modèle local avec notamment des ajouts d'inclusions. Ainsi, cela peut rendre cette zone plus raide que la partie globale qui utilise une loi matériau homogénéisée. Un risque de divergence apparaît alors sur l'algorithme de couplage, c'est pourquoi une étape de relaxation est mise en place.

Apport de la relaxation Il est classique, pour les algorithmes de point fixe, d'ajouter une étape de relaxation, afin de garantir la propriété contractante de l'opérateur ou encore pour accélérer la convergence. Dans ce cas, à partir de (3.30), une itération s'écrit comme :

$$P_{i+1} = P_i - \omega_i \mathbf{S}^R \circ \mathbf{S}^{G^{-1}} (P_i), \quad |\omega| > \epsilon > 0 \quad (3.31)$$

Comme dans le cas linéaire, où des preuves de convergence sont connues ainsi que des valeurs optimales de facteur de relaxation basées sur l'étude des valeurs propres de l'opérateur $\mathbf{S}^{G^{-1}} \mathbf{S}^R$, en non-linéaire ces résultats peuvent être étendus aux problèmes monotones [Nouy et Pled, 2017]. On parle dans ce cas de relaxation statique, puisque un coefficient de relaxation est calculé puis utilisé à chaque itération sans modification. La méthode peut, dans ce dernier cas, être interprétée comme une technique de séparation d'opérateur [Ryu et Boyd, 2016] appliquée au problème d'interface, qui hérite alors de la monotonie et de la coercivité du problème initial.

En pratique, on se tourne vers les méthodes d'accélération de convergence qui sont développées dans la section 4. Celles-ci visent à fournir un facteur de relaxation pour chaque itération dans le but d'augmenter les performances, on peut alors parler de relaxation dynamique.

3 Interprétation en tant que méthode de Schwarz

On propose ici de relier la méthode *global/local* à une approche de Schwarz alternée sans-recouvrement en considérant que le modèle de référence peut être décomposé en deux sous-domaines (*cf.* figure 3.4) : le domaine local Ω^L et la partie complémentaire Ω^C . Il n'y a pas de recouvrement entre ces sous-domaines, qui sont liés uniquement par l'interface Γ .

Une interprétation de la méthode *global/local*, en tant que variante de méthode de décomposition de domaine, a déjà été proposée avec notamment une connexion à la méthode *chimère* dans [Hecht *et al.*, 2009].

3.1 Décomposition du modèle de référence

Le domaine de référence Ω^R est donc décomposé en deux sous-domaines qui sont caractérisés comme suit :

— Problème local

$$\begin{cases} (u^L, \lambda^L) \in V(\Omega^L) \times V_\Gamma^*, \text{ tel que : } \forall v \in V^0(\Omega^L), \\ a^L(u^L, v) = l^L(v) + \langle \lambda^L, v \rangle_\Gamma \end{cases} \quad (3.32)$$

— Problème complémentaire

$$\begin{cases} (u^C, \lambda^C) \in V(\Omega^C) \times V_\Gamma^*, \text{ tel que : } \forall v \in V^0(\Omega^C), \\ a^C(u^C, v) = l^C(v) + \langle \lambda^C, v \rangle_\Gamma \end{cases} \quad (3.33)$$

— Conditions d'interface (continuité du déplacement, équilibre des efforts) :

$$\begin{cases} \langle \lambda^L + \lambda^C, v \rangle_\Gamma = 0, \forall v \in V_\Gamma \\ \langle \mu, u^L - u^C \rangle_\Gamma = 0, \forall \mu \in V_\Gamma^* \end{cases} \quad (3.34)$$

La méthode de Schwarz optimisée repose sur une reformulation des équations d'interface faisant apparaître des opérateurs Q^C et Q^L , définis de V_Γ dans V_Γ^* , et appelés impédances ou rigidités d'interface, comme indiqué sur la figure 3.4.

$$\begin{cases} (\lambda^L + \lambda^C) - Q^C(u^L) + Q^C(u^C) = 0 \\ (\lambda^L + \lambda^C) + Q^L(u^L) - Q^L(u^C) = 0 \end{cases} \quad (3.35)$$

Afin de garantir l'équivalence avec les conditions d'interface, il faut que l'opérateur $(Q^C + Q^L)$ soit injectif et généralement Q^C et Q^L sont choisis tels que chaque forme associée $V_\Gamma^2 \ni (u, v) \mapsto \langle Q^X(u), v \rangle_\Gamma$ ($X = [C, L]$) est bilinéaire symétrique continue et coercive.

En combinant les nouvelles conditions d'interface (3.35) avec l'équilibre des sous-domaines (3.33, 3.32), on obtient des problèmes de Fourier/Robin par sous-domaine :

$$\begin{cases} a^C(u^C, v) + \langle Q^C(u^C), v \rangle_\Gamma = l^C(v) + \langle Q^C(u^L) - \lambda^L, v \rangle_\Gamma, \forall v \in V(\Omega^C) \\ a^L(u^L, v) + \langle Q^L(u^L), v \rangle_\Gamma = l^L(v) + \langle Q^L(u^C) - \lambda^C, v \rangle_\Gamma, \forall v \in V(\Omega^L) \end{cases} \quad (3.36)$$

3.2 Algorithme de résolution

Les deux équations précédentes constituent une itération i d'une version de la méthode de Schwarz alternée. Une implémentation possible est la suivante après initialisation ($\lambda_0^L = 0$, $u_0^L = 0$) de la solution locale :

— Résolution complémentaire :

Trouver $u_{i+\frac{1}{2}}^C \in V(\Omega^C)$ tel que $\forall v \in V(\Omega^C)$,

$$a^C \left(u_{i+\frac{1}{2}}^C, v \right) + \left\langle Q^C \left(u_{i+\frac{1}{2}}^C \right), v \right\rangle_{\Gamma} = l^C(v) + \left\langle Q^C \left(u_i^L \right) - \lambda_i^L, v \right\rangle_{\Gamma} \quad (3.37)$$

— Post-traitement complémentaire : on extrait ou on calcule $\lambda_{i+\frac{1}{2}}^C \in V_{\Gamma}^*$ tel que $\forall v \in V_{\Gamma}$,

$$a^C \left(u_{i+\frac{1}{2}}^C, v \right) = l^C(v) + \left\langle \lambda_{i+\frac{1}{2}}^C, v \right\rangle_{\Gamma} \quad (3.38)$$

— Résolution locale :

Trouver $u_{i+1}^L \in V(\Omega^L)$ tel que $\forall v \in V(\Omega^L)$,

$$a^L \left(u_{i+1}^L, v \right) + \left\langle Q^L \left(u_{i+1}^L \right), v \right\rangle_{\Gamma} = l^L(v) + \left\langle Q^L \left(u_{i+\frac{1}{2}}^C \right) - \lambda_{i+\frac{1}{2}}^C, v \right\rangle_{\Gamma} \quad (3.39)$$

— Post-traitement local : on extrait ou on calcule $\lambda_{i+1}^L \in V_{\Gamma}^*$ tel que $\forall v \in V_{\Gamma}$,

$$a^L \left(u_{i+1}^L, v \right) = l^L(v) + \left\langle \lambda_{i+1}^L, v \right\rangle_{\Gamma} \quad (3.40)$$

L'opérateur de Dirichlet vers Neumann du voisin (noté S^X , avec $X = [C, L]$) est le choix optimal pour les impédances d'interface. Par exemple, pour Ω^C , on a $Q_{opt}^C = S^L$.

3.3 Lien avec la méthode *global/local* et apports

L'algorithme *global/local* non-intrusif correspond à une telle approche si l'on effectue les choix suivants :

— $Q^C = S^A$: l'impédance d'interface de la partie complémentaire est remplacée par les éléments du modèle auxiliaire Ω^A . La résolution de ce problème correspond à l'opérateur de Dirichlet vers Neumann S^A , car à partir de déplacements imposés, issus de la solution globale, on récupère les efforts d'interface correspondants.

— $Q^F = \infty$: ce choix correspond à l'imposition directe, sur le modèle local, des conditions de Dirichlet issues de la solution globale sans prise en compte de la rigidité locale.

S^A est une excellente approximation de S^F tant en terme de rigidité (seuls les détails structuraux ne sont pas pris en compte) que pour les chargements extérieurs. Cette possibilité de porter une information sur le second membre n'est pas standard (en général on travaille uniquement sur l'approximation de la matrice de rigidité) et

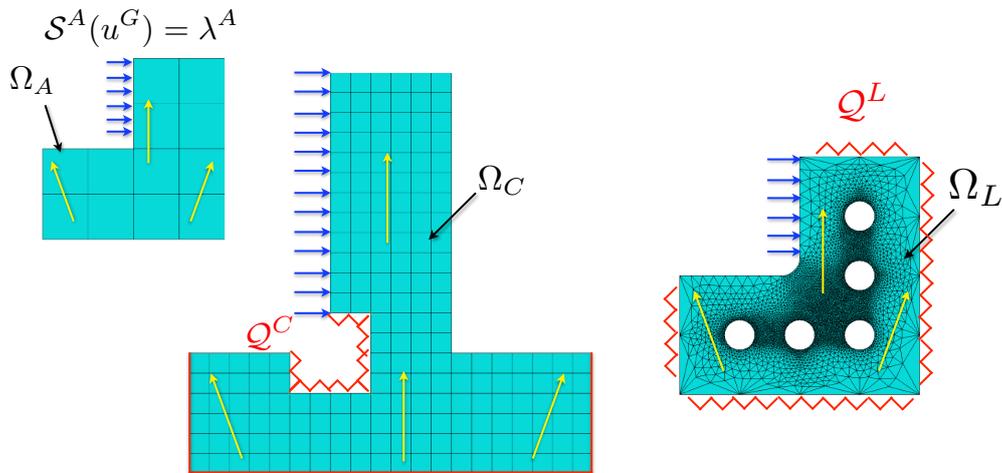


FIGURE 3.4 – Modèles global et local en tant que sous-domaines de Schwarz

procure une bonne initialisation de l'algorithme et de bonnes propriétés de convergence.

Proposer une telle interprétation permet de se placer dans le cadre des méthodes de Schwarz qui vont avec un large corpus théorique et pratique :

- *Accélérateurs de Krylov* : les itérations stationnaires peuvent être remplacées par des solveurs de Krylov ce qui est classique avec les méthodes de Schwarz [Gander et Halpern, 2012]. En outre, la condition $Q^F = \infty$ préserve la symétrie, ce qui permet d'appliquer à notre algorithme une méthode de gradient conjugué (cf. section 4).
- *Approche mixte* : $Q^F = \infty$ constitue une pauvre approximation de l'opérateur optimal. Bien que plusieurs approximations existent [Gander *et al.*, 2002], il est parfois difficile de les développer en contexte non-intrusif du fait de l'accès difficile à la rigidité des modèles. Une approximation à deux échelles de S^C non-intrusive est proposée dans [Gendre *et al.*, 2011] au prix d'une implémentation assez lourde.
- *Calcul parallèle* : le couplage *global/local* correspond à une méthode de Schwarz multiplicative, pour laquelle les deux modèles sont calculés alternativement. Le traitement en parallèle du global et du local peut être envisagé en tant que méthode de Schwarz additive (cf. section 1.2.1), sous réserve de mettre en œuvre une rigidité locale non-infinie.
- *Convergence en non-linéaire* : les méthodes de Schwarz convergent, en particulier, pour des modèles de matériaux à écrouissage positif [Badea, 1991] (opérateurs monotones), ce qui est donc transposable au couplage *global/local* et a d'ailleurs été vérifié dans ces travaux.
- *Méthode avec recouvrement* : les méthodes de Schwarz ont initialement recours à une zone de recouvrement entre sous-domaines pour converger. Cette zone de transition a été utilisée dans [Guguin *et al.*, 2014] pour effectuer un raccord

entre un modèle plaque 2D et une représentation de boulon en 3D. Elle peut également être utilisée pour coupler des maillages non-conformes sur l'interface [Guguin, 2014, Gosselet *et al.*, 2017].

4 Techniques d'accélération de convergence

La convergence de l'algorithme *global/local* est pilotée par la différence de rigidité entre les modèles auxiliaire et local comme démontré dans la section 2.5. Les techniques d'accélération de convergence consistent à corriger la solution en déplacements et/ou en résidu à chaque itération *global/local* afin d'en limiter le nombre requis pour atteindre un certain niveau de précision.

4.1 Quasi-Newton

On souhaite ici étendre les techniques de quasi-Newton, développées dans le cadre d'un modèle global linéaire [Gendre, 2009], à notre algorithme *global/local* dans lequel tous les modèles ont des lois de comportement non-linéaires.

Par rapport à [Gendre, 2009], le modèle auxiliaire nous permet de calculer le résidu sans nécessiter la linéarité du problème global, on peut donc étendre les relations à un problème complètement non-linéaire.

L'algorithme 3 donne la version de l'accélération SR1 adaptée au cas complètement non-linéaire [Gosselet *et al.*, 2017].

4.2 Aitken's δ^2

On peut instaurer de la relaxation dynamique, c'est le cas des *Aitken's δ^2* où le facteur de relaxation est calculé à chaque itération *global/local*. Un avantage non-négligeable de cette technique est le fait que l'on peut utiliser directement le champ de déplacement complet fourni par la solution globale. Le calcul de la relaxation dynamique est donné dans l'algorithme 4 établi sur la base de [Liu *et al.*, 2014].

La complexité de la technique est très réduite avec uniquement des évaluations de produits de vecteurs, ce qui la rend insensible dans le temps de calcul global de l'algorithme *global/local*. Ce qui en fait une méthode de choix dans le contexte non-intrusif.

4.3 Gradient conjugué non-linéaire

La version linéaire du gradient conjugué est bien connue dans la littérature, mais depuis plusieurs années des travaux concernent des versions non-linéaires de cet algorithme. Il faut tout de même faire face à des difficultés supplémentaires :

- Il n'existe pas d'expression directe pour le pas de descente α , contrairement au cas linéaire. Il faut utiliser un algorithme de recherche linéaire pour déterminer une longueur plus ou moins optimale. Pour une direction de descente \mathbf{d} , on

Algorithm 3: Techniques de quasi-Newton non-intrusives (Broyden-SR1)

```

Initialisation arbitraire  $P_0$ 
 $[u_0^G] = \text{RésolutionGlobale}(P_0; f^G)$ 
 $[\lambda_0^L] = \text{RésolutionLocale}(u_0^G; f^L)$ 
 $[\lambda_0^A] = \text{RésolutionAuxiliaire}(u_0^G; f^A)$ 
Résidu :  $r_0 = -(\lambda_0^L + P_0 - \lambda_0^A)$ 
Construire :  $W_0 = [], R_0 = [], x_1 = 0$ 
for  $j \in [1, \dots, m]$  do
   $P_j = \lambda_{j-1}^A - \lambda_{j-1}^L$ 
   $[\tilde{u}_j^G] = \text{RésolutionGlobale}(P_j; f^G)$ 
  if  $j > 1$  then
    Construire :  $W_{j-1} = [W_{j-2}, \tilde{u}_j^G - u_j^G]$ 
    Calcul :  $x_j = (\Delta_{j-1} + W_{j-1}^T R_{j-1})^{-1} W_{j-1}^T r_{j-1}$ 
  end
  Correction :  $u_j^G = \tilde{u}_j^G - W_j x_j$ 
  Construire :  $\delta_j^u = u_{j|\Gamma} - u_{j-1|\Gamma}$ ,  $\Delta_j = \text{diag}(\delta_i^u)_{1 \leq i \leq j}$ 
   $[\lambda_j^L] = \text{RésolutionLocale}(u_j^G; f^L)$ 
   $[\lambda_j^A] = \text{RésolutionAuxiliaire}(u_j^G; f^A)$ 
  Résidu :  $r_j = \lambda_j^A - \lambda_j^L - P_j$ ,  $R_j = [R_{j-1}, r_j]$ 
end

```

Algorithm 4: $[\tilde{u}_i^G] = \text{AccélérationConvergence}(u^G, r, i$ pour Aitken's δ^2

```

Initialisation :  $\omega_0 = 1$ 
if  $i \geq 2$  then
  Calcul du facteur de relaxation : ;
  
$$\omega^{i-1} = \omega^{i-2} \frac{(\tilde{u}^{i-2} - u^{i-1})^T (\tilde{u}^{i-2} - u^{i-1} - \tilde{u}^{i-1} + u^i)}{(\tilde{u}^{i-2} - u^{i-1} - \tilde{u}^{i-1} + u^i)^T (\tilde{u}^{i-2} - u^{i-1} - \tilde{u}^{i-1} + u^i)} \quad (3.41)$$

  Calcul de l'itéré courant :
  
$$\tilde{u}^i = \tilde{u}^{i-1} + \omega^{i-1} (u^i - \tilde{u}^{i-1}) \quad (3.42)$$

else
  Initialisation de la technique d'accélération : pas de modification
  
$$\tilde{u}_i^G = u_i^G \quad (3.43)$$

end

```

cherche une longueur de pas α minimisant le résidu d'équilibre. D'un point de vue non-intrusif, on peut mettre en place une technique d'échantillonnage avec i valeurs de α et en calculant de **manière parallèle** les itérations *global/local*, et en conservant, pour le calcul global suivant, la valeur α_i procurant le résidu le plus petit. Il serait également possible d'interpoler la courbe donnant la norme du résidu en fonction de α et choisir le minimum ; dans ce cas il serait nécessaire de relancer le calcul à partir de ce nouvel α . En pratique, utiliser un des (α_i) échantillonné nous semble plus efficace.

- Une technique de « conjugaison » pour la mise-à-jour de la direction de recherche $\mathbf{P}_{i+1} = -\mathbf{r}_{i+1} + \beta_i \mathbf{P}_i$ avec plusieurs formules possibles pour β_i :

$$\begin{aligned} \text{Fletcher-Reeves : } \beta_i &= \frac{\mathbf{r}_{i+1}^T \mathbf{r}_{i+1}}{\mathbf{r}_i^T \mathbf{r}_i} & \text{Polac-Ribière : } \beta_i &= \frac{\mathbf{r}_{i+1}^T (\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i)}{\mathbf{r}_i^T \mathbf{r}_i} \\ \text{Dai-Yuan : } \beta_i &= \frac{\mathbf{r}_{i+1}^T \mathbf{r}_{i+1}}{\mathbf{P}_i^T (\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i)} & \text{Hestenes-Stiefel : } \beta_i &= \frac{\mathbf{r}_{i+1}^T (\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i)}{\mathbf{P}_i^T (\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i)} \end{aligned} \quad (3.44)$$

De plus, on préfère utiliser $\beta_j \leftarrow \max(0, \beta_j)$ afin d'éviter des gradients négatifs.

Au contraire des techniques d'accélération précédentes, le gradient conjugué nécessite des modifications de l'algorithme *global/local* (cf. algorithme 5).

Algorithm 5: Gradient conjugué non-linéaire et non-intrusif

```

Initialisation arbitraire  $\mathbf{P}_0$ 
 $[\mathbf{u}_0^G] = \text{RésolutionGlobale}(\mathbf{P}_0; \mathbf{f}^G)$ 
 $[\mathbf{u}_0^L, \boldsymbol{\lambda}_0^L] = \text{RésolutionLocale}(\mathbf{u}_0^G; \mathbf{f}^L)$ 
 $[\boldsymbol{\lambda}_0^A] = \text{RésolutionAuxiliaire}(\mathbf{u}_0^G; \mathbf{f}^A)$ 
Post-traitement :  $\boldsymbol{\lambda}_0^C = \mathbf{P}_0 - \boldsymbol{\lambda}_0^A$ ,  $\mathbf{r}_0 = -(\boldsymbol{\lambda}_0^L + \boldsymbol{\lambda}_0^C)$ 
Initialisation :  $\mathbf{P}_0 = \mathbf{r}_0$ 
for  $i \in [0, \dots, m]$  do
  for Échantillons  $(\alpha_{i,i})_i$  do
    Pré-conditionnement :  $[\mathbf{u}_{i,i}^G, \boldsymbol{\lambda}_{i,i}^C] = \text{RésolutionGlobale}(\mathbf{P}_i + \alpha_{i,i} \mathbf{P}_i; \mathbf{f}^G)$ 
     $[\mathbf{u}_{i,i}^L, \boldsymbol{\lambda}_{j,i}^L] = \text{RésolutionLocale}(\mathbf{u}_{j,i}^G; \mathbf{f}^L)$ 
     $[\boldsymbol{\lambda}_{j,i}^A] = \text{RésolutionAuxiliaire}(\mathbf{u}_{j,i}^G; \mathbf{f}^A)$ 
    Post-traitement :  $\boldsymbol{\lambda}_{j,i}^C = \mathbf{P}_{j,i} - \boldsymbol{\lambda}_{j,i}^A$ ,  $\mathbf{r}_{j,i} = -(\boldsymbol{\lambda}_{j,i}^L + \boldsymbol{\lambda}_{j,i}^C)$ 
  end
  Pas de descente optimal (recherche linéaire) : Choisir  $I = \arg \min_i \|\mathbf{r}_{i,j}\|$ 
  Mises-à-jour :  $\mathbf{P}_{j+1} = \mathbf{P}_j + \alpha_{j,I} \mathbf{P}_j$ ;  $\mathbf{u}_{j+1}^{L,G} \leftarrow \mathbf{u}_{j,I}^{L,G}$ ;  $\mathbf{r}_{j+1} \leftarrow \mathbf{r}_{j,I}$ 
  Pseudo-orthogonalisation :  $\mathbf{P}_{j+1} = \mathbf{r}_{j+1} - \beta_j \mathbf{P}_j$  avec  $\beta_j$  via (3.44)
end

```

Dans le cas complètement linéaire, il est possible de dériver un algorithme de gradient conjugué classique (avec descente optimale) qui converge inconditionnellement.

La mise en œuvre non-intrusive peut s'interpréter comme la résolution du problème de référence préconditionné à droite par le problème global (tous deux symétriques définis positifs).

Afin de déterminer une configuration efficace du gradient conjugué non-linéaire, on applique l'algorithme sur l'exemple 3.7 avec les différentes formulations pour β et on teste deux grilles d'échantillonnage pour les valeurs de α lors de la phase de recherche linéaire :

- Une grille grossière constituée des quatre valeurs suivantes $\alpha_j = [0.8, 1., 1.2, 1.4]$
- Une grille fine de 10 valeurs $\alpha_j = [0.8, 1., 1.1, 1.15, 1.2, 1.25, 1.3, 1.35, 1.4]$

La figure 3.5 compare les résultats obtenus vis-à-vis de la convergence du résidu d'équilibre *global/local* à chaque itération de la méthode. On utilise dans un premier temps la grille fine de recherche linéaire afin d'obtenir les meilleures performances possibles. On peut ainsi constater (*cf.* figure 3.5a) que la formulation de Polack-Ribière (PR) fournit dans notre cas d'application les meilleurs résultats en réduisant d'un tiers le nombre d'itérations requises pour converger.

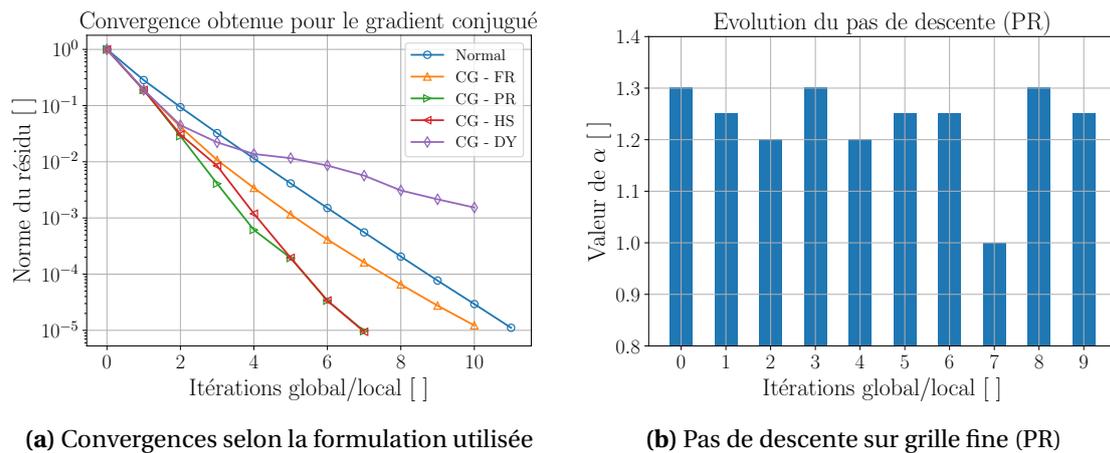


FIGURE 3.5 – Performances du gradient conjugué

On conserve la formule de conjugaison de Polack-Ribière pour la suite des calculs. On s'intéresse désormais à l'influence de la grille d'échantillonnage sur le taux de convergence de l'algorithme. Sur la figure 3.6a on peut constater que les performances du gradient conjugué sont dégradées avec la grille plus grossière par rapport à la fine.

Les figures 3.6b et 3.5b présentent respectivement les valeurs prises par α avec la grille grossière et fine. On peut en retirer :

- On constate que les valeurs inférieures à 1 ne sont jamais utilisées. On peut donc s'affranchir de ces valeurs et en profiter pour enrichir la grille autour de $\alpha = [1.2, 1.3]$.
- En effet, la grille fine nous apprend qu'une valeur optimale peut être trouvée vers $\alpha = 1.25$.

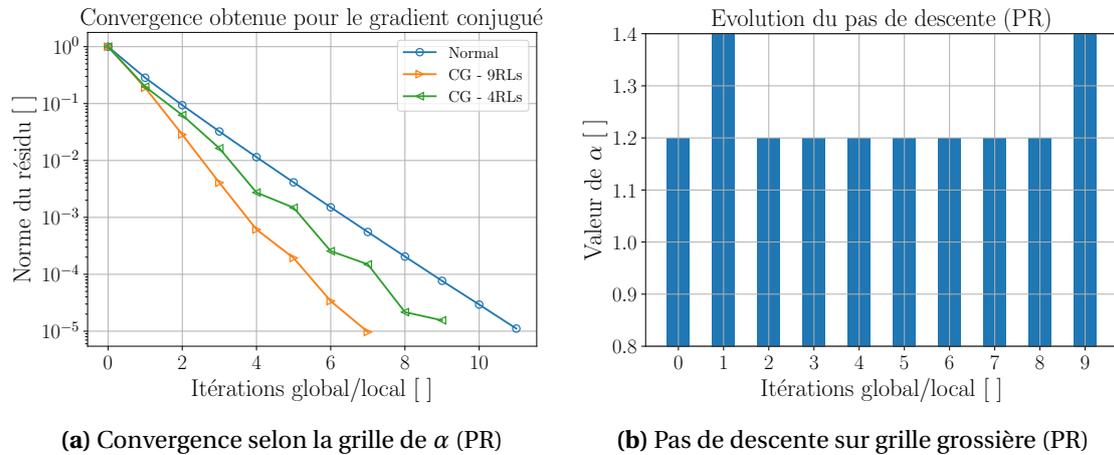


FIGURE 3.6 – Influence de la discrétisation de la recherche linéaire (*RLs*)

- Enfin, une variation assez faible sur α comme 1.25 au lieu de 1.2 conduit à une amélioration des performances.

5 Résultats numériques

Les résultats ont été obtenus dans ce chapitre pour un incrément de chargement unique, en partant d'un état non-sollicité de la structure (*cf.* figure 3.7). Afin de faire apparaître un champ plastique suffisamment représentatif, on construit une référence numérique en utilisant des conditions assez lâches sur les règles de génération de *cut-back*, quitte à perdre en précision sur les quantités mécaniques.

5.1 Convergence

La figure 3.8 compare les différentes techniques d'accélération par rapport au résidu d'équilibre *global/local*, sur les modèles dont les maillages sont conformes sur l'interface. Elles offrent des performances assez semblables avec une réduction de 30% du nombre d'itérations *global/local* requises pour obtenir le même niveau de convergence.

Ce gain de performance est aussi visible sur les temps de calculs de chaque approche :

- Normal : 4 min. 20 s
- SR1 : 3 min. 2 s
- *Aitken's* Δ^2 : 3 min. 21 s
- Gradient conjugué non-linéaire : 2 min. 55 s

La méthode des *Aitken's* Δ^2 est la plus lente sur cette exemple, car elle effectue une itération supplémentaire. Cependant, elle est la moins coûteuse par itération, grâce à

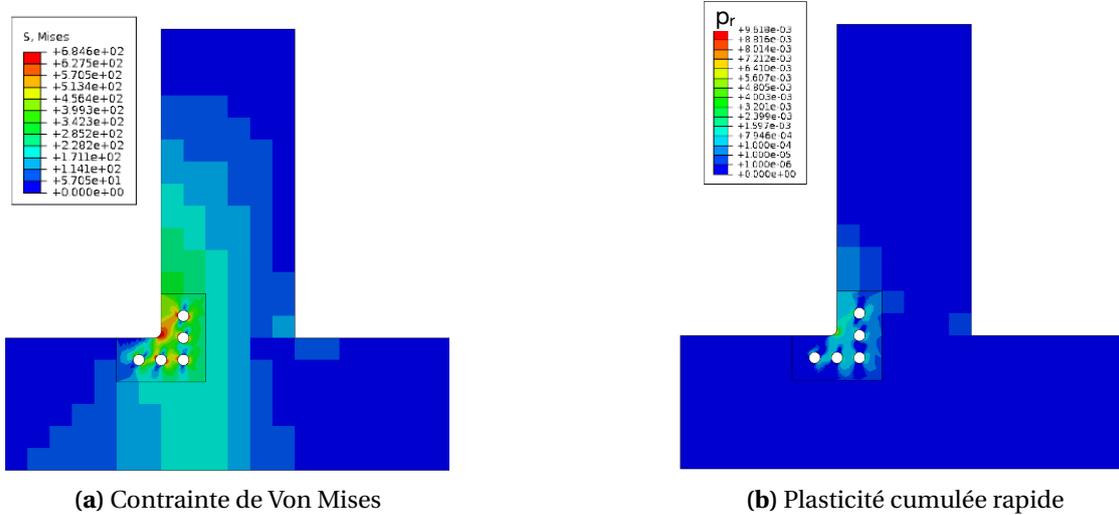


FIGURE 3.7 – Solution de référence obtenue sur un incrément

sa faible complexité numérique. Les techniques *SRI* et dans une moindre mesure de gradient conjugué ont recours a un plus grand nombre d’opérations par itération.

5.2 Influence de la conformité des interfaces

La figure 3.9a compare la convergence selon le résidu d’équilibre entre les modèles conformes et non-conformes sur l’interface. On peut constater que le taux de convergence (évalué par la norme du résidu) n’est que très peu affecté par le raccord proposé par interpolation des fonctions de forme éléments finis. Une différence apparaît à partir de $1e^{-5}$.

On constate également un problème récurrent avec la méthode *global/local* développée dans *Abaqus/Standard* [Liu *et al.*, 2014] : la stagnation du résidu d’équilibre après un certain seuil. Ce point est discuté dans la section 5.4.

La non-conformité affecte aussi le niveau de précision que l’on peut obtenir. Ce point est visible sur la figure 3.9b et discuté plus généralement dans la section suivante.

5.3 Précision

Outre la convergence mesurée en terme de résidu, il est important d’évaluer la précision sur cet exemple académique, pour lequel on peut calculer une référence (*cf.* figure 3.7). On souhaite établir un lien entre la convergence du résidu d’équilibre et l’erreur vraie η , par rapport à la référence (*cf.* figure 3.9b), sur une quantité d’intérêt telle que le maximum de la contrainte de von Mises sur la structure $\eta\sigma$ qui s’écrit :

$$\eta(\sigma) = \frac{\sigma_{\max}^{GL} - \sigma_{\max}^R}{\sigma_{\max}^R} \tag{3.45}$$

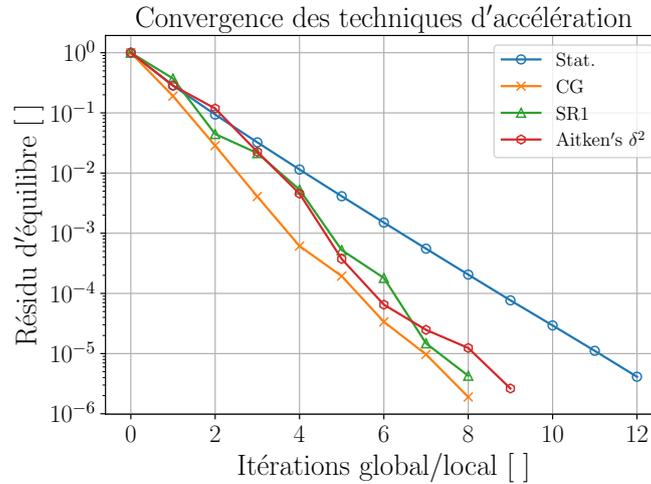


FIGURE 3.8 – Convergences obtenues avec les différentes techniques (conformes)

On peut aussi constater que la variation de la contrainte maximum $\Delta\sigma$ à l'itération i , par rapport à la précédente $i - 1$, continue de varier même si l'erreur vraie ne varie plus.

$$\Delta(\sigma) = \sigma_{\max,i}^{GL} - \sigma_{\max,i-1}^{GL} \quad (3.46)$$

Les valeurs maximales de la contrainte sont obtenues sur l'élément le plus chargé de la structure est celui-ci est identique dans les solutions de l'approche *global/local* et du calcul monolithique de référence.

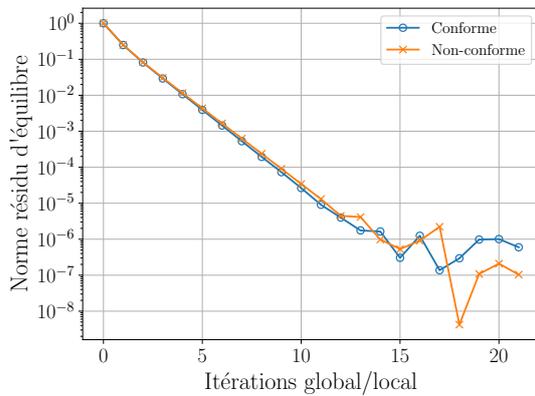
Les niveaux d'erreur relative sont assez semblables entre la contrainte de von Mises (10^{-5}) et la plasticité cumulée (10^{-4}), on commet une erreur relative 10 fois plus importante sur la plasticité que sur la contrainte bien que ces niveaux demeurent assez faibles. On peut remarquer que si pour les accélérations de convergence on obtient une réduction d'un tiers sur le nombre d'itérations, pour atteindre un même niveau de résidu, le gain est plus proche de 50% si on se base sur l'erreur vraie commise.

Ici encore, on constate que cette erreur relative vraie arrive à un plateau.

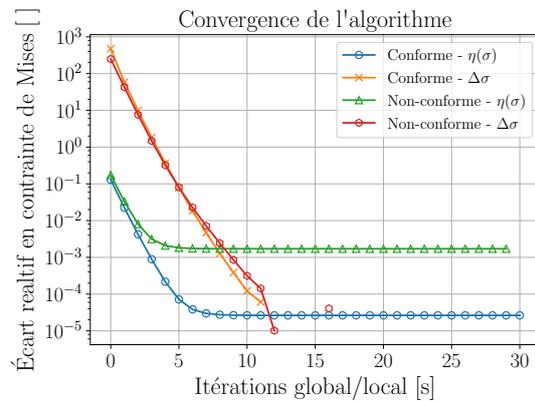
5.4 Stagnation du résidu et de l'erreur

L'erreur vraie relative stagne à un niveau de $1e^{-5}$, de même pour le résidu d'équilibre à $1e^{-7}$. Dans *Abaqus/Standard*, il est possible d'exprimer les nombres flottants de la solution mais aussi ceux utilisés lors de la résolution en simple ou double précision. Cependant, cette option n'affecte que les grandeurs nodales comme les déplacements et les forces de réactions associées, qui sont utilisées dans la stratégie *global/local* et non les contraintes stockées aux points de Gauss.

Ainsi même si le calcul est réalisé en double précision (temps de calcul rallongé et taille des fichiers de résultats augmentée) la solution en contrainte ou en plasticité est exactement la même, ce qui ne permet donc pas d'améliorer le niveau d'erreur vraie.

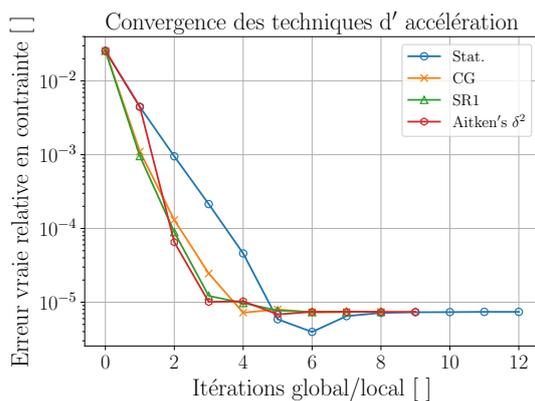


(a) Résidu d'équilibre

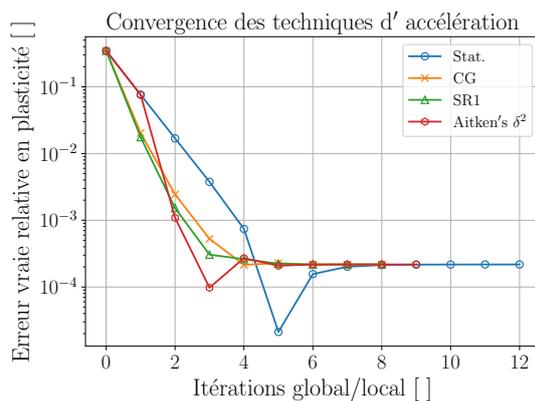


(b) Évolution : erreur vraie $\eta(\sigma)$ et variation $\Delta\sigma$

FIGURE 3.9 – Convergence dans les cas conformes et non-conformes



(a) Erreur en contrainte de Mises



(b) Erreur en plasticité cumulée rapide

FIGURE 3.10 – Niveaux d'erreurs relatives vraies

En activant cette option, on est tout de même capable de dépasser le seuil de stagnation observé sur le résidu d'équilibre comme montré sur la figure 3.11.

Malgré la convergence améliorée, l'erreur continue de stagner au même niveau que précédemment. Cela peut être dû au fait que le flottant écrit dans le fichier de sortie, notamment sur les efforts de réactions est tronqué pour que la taille du fichier ne devienne pas trop grande. Le maillage peut aussi être incriminé. Des éléments distordus ou trop grand peuvent être conduire à un manque de précision dans l'évaluation de l'effort de réaction. Des essais numériques même en linéaire, sur des exemples à plus faible complexité, n'ont pas permis de statuer précisément sur ce point.

On atteint ici les limites du développement non-intrusif, dans un code commercial, dans lequel le solveur utilisé est une « boîte noire », c'est-à-dire que l'on ne peut pas savoir exactement ce qui est fait à l'intérieur, sans avoir accès au code source.

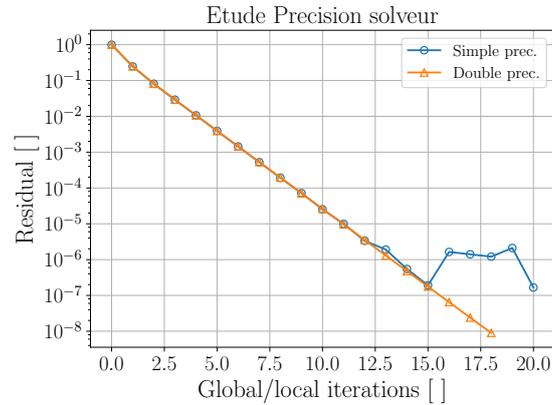


FIGURE 3.11 – Convergence du résidu en fonction de la précision

D'autres solveurs comme celui de *Code_Aster* semblent pouvoir franchir ce niveau de précision comme dans [Guguin *et al.*, 2014, Duval *et al.*, 2016].

Conclusion

Dans ce chapitre, une méthode *global/local* non-intrusive est développée dans le cadre de la plasticité généralisée à l'ensemble de la structure. Pour cela, des traitements spécifiques sont apportés afin d'utiliser un modèle global non-linéaire.

La méthode s'est vue ajoutée une technique de couplage d'interfaces non-conformes, simple et efficace, venant ainsi compléter d'autres propositions comme [Liu *et al.*, 2014, Duval *et al.*, 2016].

Ici présenté sur un pas de temps, ce couplage est étendu à plusieurs incréments dans le chapitre suivant. Dans ce but, des techniques d'accélération de convergence ont pu être réutilisées, ou nouvellement formulées, comme la méthode de gradient conjugué non-linéaire, envisagée par l'interprétation de la méthode *global/local* en tant que méthode de Schwarz, afin de traiter efficacement chacun de ces incréments.

Enfin, plusieurs tests numériques sont menés pour valider la méthode et avoir une meilleure connaissance de ces performances ainsi que de ces limites dans le logiciel utilisé.

Chapitre 4

Méthode *global/local* pour calculs cycliques

Ce chapitre est destiné au traitement d'un cycle de chargement complexe par la méthode *global/local*. Une telle simulation est caractérisée par le fait de devoir traiter plusieurs pas de temps consécutifs, nécessaires à la description des variations du chargement étudié (comme décrit sur la figure 4.1). De plus, avec l'emploi des lois de comportements non-linéaires, en particulier élasto-viscoplastiques, des pas de temps supplémentaires doivent être réalisés (comme développé au chapitre 2) pour mener le calcul à son terme et garantir une précision satisfaisante de la solution.

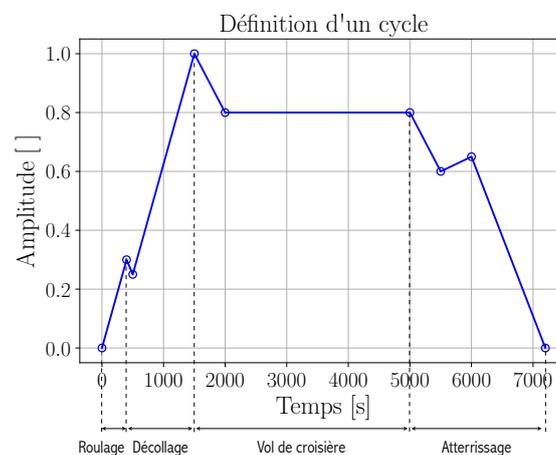


FIGURE 4.1 – Définition initiale d'un cycle de chargement

Ce cycle représente un vol pour un avion, avec les différentes phases que cela comporte, comme par exemple le décollage, le vol de croisière et l'atterrissage. Les variations correspondent au régime moteur et sont directement utilisées pour moduler l'amplitude des efforts extérieurs (pression aérodynamique et effort centrifuge) appliqués à la structure étudiée.

1 Schémas de couplage temporels proposés

1.1 Distinction *global/local* des histoires en temps

L'intégration temporelle des lois de comportement élasto-viscoplastiques est très dépendante des pas de temps utilisés. Sur une structure complexe, il est presque impossible de proposer une discrétisation temporelle *a priori* qui garantisse une bonne précision et qui ne soit pas trop fine, afin que le coût de calcul reste acceptable. C'est pourquoi, on utilise l'approche par pas de temps adaptatifs, validée dans le chapitre 2 sur un élément volumique puis au niveau structural sur le modèle de référence (*cf.* section 5.3). En effet, elle permet d'ajouter un pas de temps supplémentaire, dès que la variable interne de plasticité cumulée rapide, p_r , présente un incrément dépassant une valeur seuil Δp_{cut} . Les pas de temps obtenus par sous-découpage sont appelés *cutbacks*.

Dans la méthode *global/local* non-intrusive, les besoins en terme de discrétisation temporelle sont différents entre le modèle global et le local. En effet, d'importantes concentrations de contraintes apparaissent au niveau des détails structuraux du modèle local et la plasticité y est plus élevée que dans le global. Ainsi à seuil équivalent de Δp_{cut} , le modèle global nécessite moins de pas de temps que le local. De plus, les détails structuraux favorisent l'amorçage lors des charges et les redistributions dans les phases de décharges, ce qui augmente d'autant plus le niveau de plasticité.

Puisque la méthode *global/local* procède par une succession de résolution du modèle global et du local, elle conduit naturellement à utiliser également des discrétisations temporelles *a priori* indépendantes. C'est à la fois un atout, avec la possibilité de gain de temps en utilisant une grille temporelle adaptée à chaque modèle pour une précision donnée et une difficulté, avec la question du couplage en temps de ces modèles. Pour éviter cette dernière difficulté, on peut penser dans un premier temps à utiliser une grille temporelle extrêmement fine (avec un critère restant à définir) identique pour les deux modèles. Les résultats montrés au chapitre 2 indiquent que cela conduirait en pratique à des temps de simulations inacceptables. Ce chapitre s'intéresse donc à déterminer une stratégie permettant de coupler en temps le modèle global et les modèles locaux avec une précision acceptable et au moindre coût.

1.2 Idées générales pour le couplage

La méthode *global/local* dans un cadre non-linéaire est établie dans le chapitre précédent sur un incrément de chargement, en effectuant des corrections de manière itérative à la fin de l'incrément courant. Afin d'utiliser l'algorithme *global/local* sur un cycle complet, il faut effectuer un choix sur la façon d'appliquer les corrections, c'est-à-dire à quels incréments les appliquer, car ceux-ci peuvent être différents selon les modèles.

Dans ce choix, il est important de rappeler que la discrétisation temporelle peut évoluer à cause de plusieurs facteurs :

- Le choix de la discrétisation initiale (*cf.* section 5.2.3),
- La technique d'intégration qui peut engendrer plus ou moins de pas de temps supplémentaires (*cf.* section 5.2.2) selon le seuil utilisé,
- Les corrections *global/local* qui peuvent augmenter le niveau de plasticité et donc ajouter des pas de temps à la grille temporelle courante au fil des itérations (*cf.* chapitre 3).

On propose donc plusieurs couplages offrant des compromis entre précision et coûts de calcul différents mais aussi dépendants des possibilités offertes par les codes.

1.3 Couplage fixe sur grille arbitraire

Une première façon de procéder est de ne réaliser les corrections *global/local* qu'au niveau des pas de temps de la grille de discrétisation temporelle initiale, qui peut être constituée par :

- la définition initiale du chargement (*cf.* figure 4.1),
- une méthode de pré-discrétisation (*cf.* figure 2.16).

Dans cette approche on n'enrichit pas la grille temporelle avec d'éventuels *cutbacks* apparaissant au fil des corrections *global/local* effectuées apportées et chaque modèle peut être sous-intégré en plusieurs pas de temps, au contraire de grilles évolutives comme les couplages forts 1.4 et faibles 1.5 proposés par la suite.

Pour une pré-discrétisation globale et un seuil de *cutbacks* à $\Delta p_{cut} = 1e^{-3}$, aucun pas de temps global n'est ajouté, ce premier couplage est donc semblable avec le deuxième proposé 1.4, c'est pourquoi les résultats ne sont pas rapportés. En effet, ils sont identiques à ceux présentés dans la section 4.4.

Pour une simulation (pré-discrétisation et intégration) à $\Delta p_{cut} = 1e^{-4}$, les résultats obtenus sont très proches du couplage faible car la pré-discrétisation utilisée est de bonne qualité et la solution globale est intégrée précisément compte-tenu de son niveau plastique (*cf.* figure 4.12). Ainsi les pas de temps rajoutés n'ont qu'une faible influence sur le résultat final (*cf.* tableau 4.1).

Grilles temporelles	Nb. pas de temps	$\eta_{max, \sigma}$ [%]	$\eta_{max, p}$ [%]	Temps total
Initiale	8	$1e^{-2}$	1.4	2h 24m
Pré-discr.	44	$8e^{-3}$	1.1	4h 32m
Évolutive (faible)	74	$3e^{-3}$	$9e^{-2}$	7h 33m

TABLE 4.1 – Écarts et temps de calculs obtenus selon les grilles utilisées

Par rapport à un modèle monolithique intégré à $\Delta p_{cut} = 1e^{-4}$, l'écart obtenu, en utilisant simplement la définition initiale du cycle ou la pré-discrétisation, est environ 10 fois plus grand qu'avec une grille évolutive, mais le temps de calcul est considérablement réduit. Cependant sur des exemples plus pathologiques (paramètres matériaux différents, intégration temporelle moins précise), où la plasticité du modèle global était

beaucoup plus élevée, des écarts beaucoup plus élevés ont été observés (de l'ordre de 20%) tant en contrainte qu'en plasticité cumulée maximum.

La précision dépend donc très fortement du choix arbitraire de la grille d'intégration, du modèle dans son ensemble, mais aussi de la manière de réaliser le calcul (pré-discrétisation et intégration). Ce couplage bien que proposant un temps de calcul intéressant ne permet pas de garantir l'exactitude de l'approche dans tous les cas d'application. Néanmoins il a permis de saisir l'importance de respecter chaque pas de temps du modèle global, c'est-à-dire qu'*a minima* la convergence de l'algorithme *global/local* doit y être obtenue, par application des corrections, surtout lorsque le modèle global est largement plastifié.

1.4 Couplage faible

La dépendance à la grille choisie fixe est un inconvénient rédhibitoire à l'utilisation généralisée du couplage précédent, c'est ce qui motive le développement du couplage **faible**.

Celui-ci consiste à respecter l'ensemble des pas de temps liés à la solution globale. Ceux-ci proviennent de la pré-discrétisation initiale \mathcal{T} 5.2.3 ou de *cutbacks* apparaissant durant l'exécution de l'algorithme *global/local* \tilde{t}_n^G liés au pas de temps courant n . En effet, *via* les corrections apportées au modèle global, le niveau de plasticité cumulée est augmenté par rapport à la solution non-corrigée utilisée lors de la pré-discrétisation, ce qui peut entraîner des activations du seuil de *cutback* et donc des pas de temps supplémentaires.

Afin de garantir une excellente précision de la solution (*cf.* section 2.3), il est primordial d'effectuer les corrections *global/local* de tous les pas de temps globaux car cela donne une homogénéité temporelle globale à la structure. En outre, cela permet d'apporter les corrections issues du modèle local de manière directe *ie.* sur un seul pas de temps. Cela est nécessaire en particulier lorsque le modèle global est très largement plastifié le rendant fortement non-linéaire.

Une implémentation possible de ce couplage avec la méthode *global/local* est résumée dans l'algorithme 6.

Pour l'étape 3 de l'algorithme, la résolution du problème local peut se faire sur plusieurs incréments de temps appartenant à la fenêtre globale courante $[t_n, t_{n+1}]$. Ainsi, en plus des piquets de temps globaux \mathcal{T} , la grille locale peut comporter des pas de temps internes supplémentaires qui ne seront pas appliqués au modèle global. Cela représente une réelle économie en temps de calcul (*cf.* section 2.4.1), puisqu'il n'y a pas de correction à réaliser à ces instants et surtout il ne faut pas relancer l'algorithme sur le nouveau pas de temps trouvé. Un tel découplage temporel est rendu possible par la séparation en espace du modèle monolithique offert par la méthode de couplage *global/local*.

Algorithm 6: Couplage faible**Pré-discrétisation :**

- **0** : Calcul global sur tout le cycle $\rightarrow \mathcal{T} = [T_0, \dots, T_N]$

Algorithme *global/local* :

for $t_{n+1} \in \mathcal{T}$ **do**

- Initialisation compteur itérations : $i = 0$

while $\|r_i\| < \eta_{GL}$ **do**

- **1 Résolution globale**

- **2** Détection des cutbacks éventuels $\tilde{t}_n^G \in [t_n, t_{n+1}]$

if $\tilde{t}_n^G \neq 0$ **then**

- **2a** : Mise à jour des pas de temps à $t_{n+1} \rightarrow \tilde{t}_0^G$ et $\tilde{t}_n^G \rightarrow \mathcal{T}$

- **2b** : Mise à jour des chargements extérieurs à t_{n+1}

- **2c** Si $i \neq 0$: Initialisation du compteur d'itérations $i = 0$, \rightarrow étape **1**

end

- **3 Résolutions locale et auxiliaire**

- Incrément du compteur d'itérations : $i = i + 1$

end

end

1.5 Couplage fort

Un troisième et dernier couplage est proposé. Ce couplage (*cf.* algorithme 7) impose que la convergence de l'algorithme soit obtenue à chaque pas de temps, tant global \tilde{t}_n^G que local \tilde{t}_n^L , c'est pourquoi il est qualifié de fort. Pour cela des itérations *global/local* sont effectuées à chaque pas de temps n requis.

Une implémentation possible est proposée sous la forme de l'algorithme 7, elle vise donc à imposer les mêmes pas de temps à l'ensemble des modèles de la stratégie.

La grille finale d'intégration temporelle obtenue est unique, dans le sens où tous les modèles de la stratégie la suivent. Ce type de couplage est censé reproduire de manière exacte le calcul de référence, intégré avec le même seuil de *cutback* Δp_{cut} .

Cela a un coût, puisque si un pas de temps supplémentaire apparaît sur le modèle local, alors il est ajouté à la discrétisation générale \mathcal{T} . Pour cela la solution obtenue sur le pas de temps courant est supprimée, pour toutes les itérations faites jusqu'ici, et ces dernières doivent être reprises à zéro sur le pas de temps \tilde{t}_0^L nouvellement créé.

1.6 Apport de la pré-discrétisation

La pré-discrétisation utilisée dans le contexte *global/local* est primordiale, car sur certains exemples, elle peut faire que le couplage sur grille arbitraire se comporte correctement, alors que les résultats ne sont pas acceptables pour une autre grille initiale.

Par ailleurs pour les couplages sur grilles évolutives, une pré-discrétisation de qualité va limiter l'ajout de pas de temps supplémentaires provenant du global principa-

Algorithm 7: Couplage fort**Pré-discrétisation :**

- **0** : Calcul global sur tout le cycle $\rightarrow \mathcal{T} = [T_0, \dots, T_N]$

Stratégie globale/locale :

for $t_{n+1} \in \mathcal{T}$ **do**

- Initialisation compteur itérations : $i = 0$

while $\|r_i\| < \eta_{GL}$ **do**

- **1** : **Résolution globale**

- **2** : Détection des cutbacks éventuels $\tilde{t}_n^G \in [t_n, t_{n+1}]$

if $\tilde{t}_n^G \neq 0$ **then**

- **2a** : Mise à jour des pas de temps à $t_{n+1} \rightarrow \tilde{t}_0^G$ et $\tilde{t}_n^G \rightarrow \mathcal{T}$

- **2b** : Mise-à-jour des chargements extérieurs à t_{n+1}

- Si $i \neq 0$: Initialisation des itérations $i = 0$, \rightarrow étape **1**

end

- **3** : **Résolutions locale et auxiliaire**

- **4** : Détection des cutbacks éventuels $\tilde{t}_n^L \in [t_n, t_{n+1}]$

if $\tilde{t}_n^L \neq 0$ **then**

- **4a** Mise à jour des pas de temps : $t_{n+1} \rightarrow \tilde{t}_0^L$ et $\tilde{t}_n^L \rightarrow \mathcal{T}$

- **4b** Annulation du pas de temps courant

- **4c** Initialisation des itérations $i = 0$, \rightarrow étape **1**

end

- Incrément du compteur d'itérations : $i = i + 1$

end

end

lement. Cela a pour effet de ne pas ralentir la méthode en devant recommencer les itérations *global/local* sur le pas de temps raffiné, en perdant celles qui viennent d'être effectuées.

2 Illustrations et performances

2.1 Problème traité et évaluations de la précision

On se place dans le cadre où la discrétisation spatiale est imposée, c'est-à-dire que la précision de la solution sera celle du maillage initial (*cf.* section 5.4). L'évaluation de la précision ne se fera donc que par rapport à la discrétisation temporelle et potentiellement par une certaine erreur introduite par l'algorithme *global/local*.

Afin d'évaluer la précision de la méthode proposée, on utilise une solution dite de référence *overkill* en temps, calculée à $\Delta p_{cut} = 1e^{-5}$ à partir de la pré-discrétisation globale effectuée à $\Delta p_{cut} = 1e^{-4}$ (*cf.* section 5.3.3). Ainsi, on peut comparer les solutions à chaque pas de la pré-discrétisation globale.

On traite les modèles globaux et locaux en deux dimensions, dans leur version conforme en terme de maillage d'interface, sur un cycle de chargement complet comme décrit sur la figure 4.1. L'extension aux maillages non-conformes est proposée dans la section 3.

Enfin sur cet exemple académique, on s'attache à dégager l'approche la plus performante, en effectuant un choix sur le type de couplage à utiliser et sur la valeur du seuil de convergence du résidu d'équilibre *global/local* η_{GL} à atteindre.

2.1.1 Le *submodeling*

On introduit une approche appelée *submodeling* à des fins d'évaluation de la méthode *global/local*. En effet, cette technique de zoom descendant (*cf.* chapitre 1) est très répandue dans le monde industriel, il est donc important de s'y référer. Par ailleurs, elle peut être obtenue en forçant l'algorithme *global/local* à ne pas effectuer d'itération. Ainsi dans le cadre du couplage faible et sur chaque pas de temps de la pré-discrétisation, la solution globale vient uniquement piloter le modèle local en déplacements sur l'interface Γ . Par conséquent, la solution globale n'est pas corrigée, il n'y a donc aucun pas de temps à ajouter à la grille temporelle initiale.

2.2 Grilles d'intégration temporelles obtenues selon le couplage

Dans un premier temps, on s'intéresse à l'intégration temporelle réalisée par chaque couplage. On compare (*cf.* tableau 4.2) pour deux seuils $\Delta p_{cut} = [1e^{-3}, 1e^{-4}]$, les grilles finalement obtenues pour le cycle complet (sans compter la pré-discrétisation), le nombre d'itérations *global/local* effectuées, ainsi que leur nombre moyen par incrément.

Le *submodeling* est très performant car, en l'absence d'itérations et malgré une implémentation non-intrusive, il ne coûte que deux fois plus cher que l'approche mo-

Méthode	Δp_{cut}	Cut. Globaux	Cut. Locaux	Ité. G/L (moy.)	Temps de calcul
Submodeling	$1e^{-3}$	0	11	—	3m 54s
	$1e^{-4}$	0	76	—	15m 30s
Couplage faible	$1e^{-3}$	0	12	163 (14)	1h 20m 37s
	$1e^{-4}$	30	122	994 (13)	7h 33m 15s
Couplage fort	$1e^{-3}$	—	13	344 (14)	1h 52m 47s
	$1e^{-4}$	—	381	5659 (13)	27h 27m 23s

TABLE 4.2 – Intégration temporelle sur un cycle selon le couplage utilisé

nolithique correspondante. Le nombre de pas de temps au niveau local est inférieur à l'ensemble des autres approches, ce qui témoigne d'un niveau de plasticité sous-évalué, comme nous le verrons dans la section consacrée à l'erreur commise.

Entre les couplages faibles et forts, les conclusions sont différentes selon les niveaux de seuil utilisés.

À $\Delta p_{cut} = 1e^{-3}$, les deux couplages sont équivalents tant en terme de pas de temps qu'en coût de calcul. Malgré un nombre d'itérations doublées, le couplage fort n'est que faiblement plus lent. En effet, même s'il y a plus de calculs lancés, chaque local n'est calculé que sur un incrément tandis que pour certaines itérations du faible, le local est sous-intégré, ce qui augmente le temps de calcul. Cependant, le couplage fort est tout de même pénalisé par le fait de devoir recalculer l'incrément complet, si un *cutback* local est nécessaire.

À $\Delta p_{cut} = 1e^{-4}$, le couplage faible se comporte tout à fait correctement avec une durée acceptable de simulation, compte tenu des itérations à effectuer et de la faible complexité du modèle. La répartition des pas de temps est aussi conforme à celle obtenue sur le calcul de référence, avec une majorité de *steps* lors de la montée (cf. tableau 4.3). Le modèle global joue bien son rôle de discrétisation *macro*. Avec cette valeur de seuil, 30 pas de temps sont rajoutés car la solution globale est corrigée (cf. section 2.2.3) et sa solution plastique est amplifiée. Cet enrichissement facilite l'intégration du modèle local, la grille finale obtenue est rappelée sur la figure 4.2. Le nombre de pas de temps finalement utilisés est de 196 contre 172 pour la référence intégrée à $\Delta p_{cut} = 1e^{-4}$. La différence provient de l'interaction entre la grille, générée par les pas de temps globaux, et son homologue local qui ne sont pas totalement compatibles. Des pas de temps locaux très proches de ceux du global peuvent ainsi être ajoutés, alors qu'un seul légèrement décalé aurait pu suffire pour les deux modèles. Pour le couplage fort, on ne distingue pas la provenance des *cutbacks*. En effet, ils sont soit dus au modèle global ou soit au modèle local. Le plus souvent, ils proviennent de la solution locale car les détails structuraux la rendent plus sensible à un nouvel incrément de chargement. Si le niveau de chargement est trop important et appliqué brutalement ou en présence d'une pré-discrétisation de moins bonne qualité, des *cutbacks* globaux peuvent alors intervenir, mais ce n'est pas le cas ici.

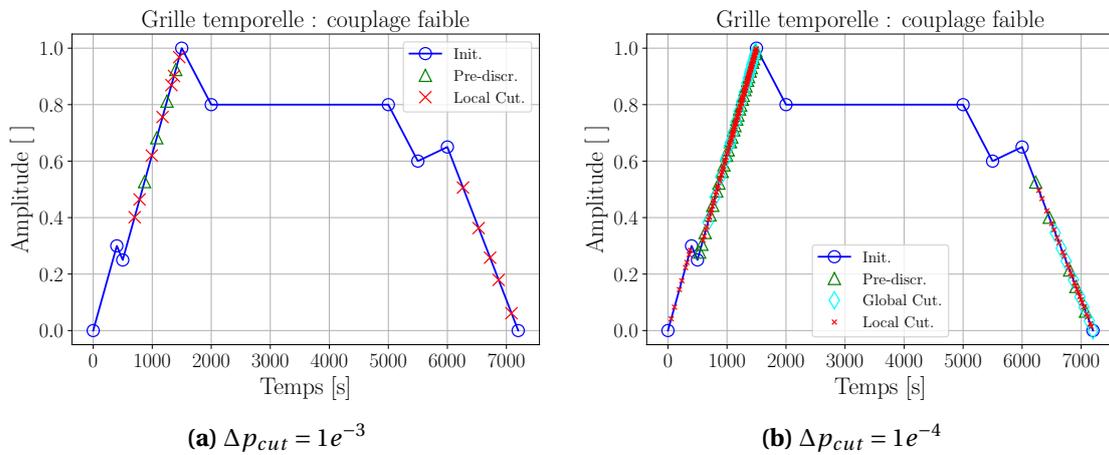


FIGURE 4.2 – Grilles temporelles des approches de couplage faible

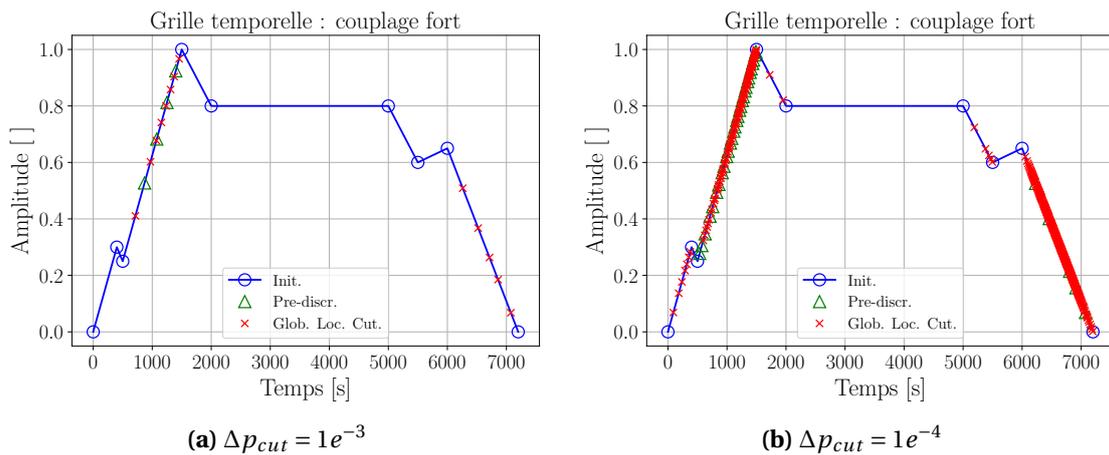


FIGURE 4.3 – Grilles temporelles des approches de couplage fort

Toujours à $\Delta p_{cut} = 1e^{-4}$, l'analyse pour le couplage fort est plus complexe, car le temps de calcul est anormalement élevé en comparaison des autres approches. De plus, on constate que l'on a plus du double de pas de temps par rapport au couplage faible, alors qu'au seuil de $\Delta p_{cut} = 1e^{-3}$ les deux couplages étaient comparables.

Si on regarde la répartition des *cutbacks* obtenus 4.3, ils sont cohérents pour la montée avec une centaine de pas de temps, mais totalement sur-évalués lors de la descente avec un nombre de 274. Ce phénomène est dû aux corrections *global/local*, notamment entre chargement croissant et décroissant. Une analyse détaillée de ce phénomène est proposée dans la section 2.2.2.

Une tendance générale est que le nombre d'itérations par incrément diminue plus le pas de temps est petit, car l'équilibre est moins difficile à obtenir et cela pour les deux couplages. Dans cette étude, la taille des pas de temps est modifiée par le seuil

d'activation Δp_{cut} des *cutbacks*, à $1e^{-3}$ le nombre moyen d'itérations par incrément est de 14 contre 13 à $1e^{-4}$. Il s'agit ici de valeurs moyennes arrondies à un nombre entier. Le couplage fort nécessite légèrement moins d'itérations que le faible, mais cela n'a pas d'impact sur le nombre total d'itérations, car l'algorithme est lancé sur plus de pas de temps.

2.2.1 Répartition des *cutbacks* sur le cycle

Comme pour les calculs de référence, on trie les pas de temps suivant qu'ils appartiennent à la première ou la seconde partie du cycle, puis on compare cette information pour les couplages faibles et forts 4.3.

Pour rappel, la référence intégrée à $\Delta p_{cut} = 1e^{-4}$ a une répartition de pas de temps, en montée/descente, de 100/29 ce qui est cohérent avec ce que l'on obtient pour le couplage faible.

Précisions	$\Delta p_{cut} = 1e^{-3}$		$\Delta p_{cut} = 1e^{-4}$	
	Faible	Fort	Faible	Fort
Montée	7	8	119	107
Descente	5	5	33	274

TABLE 4.3 – Répartition des *cutbacks* sur le cycle

Le nombre de pas de temps obtenus par le couplage fort apparaît comme anormal, puisque plus de 8 fois plus de pas de temps sont réalisés dans la phase de descente que pour le couplage faible, pour la même précision d'intégration $\Delta p_{cut} = 1e^{-4}$. Pourtant, le nombre de pas de temps est cohérent entre les deux approches pour la phase de montée, mais aussi pour l'ensemble du cycle et une précision de $1e^{-3}$.

2.2.2 Différence entre chargement croissant et décroissant

Chargement croissant Dans la littérature, la méthode *global/local* a été appliquée sur des incréments de chargement croissant et principalement avec un modèle global plus raide que le local. Dans ce cadre et sur un incrément, les déplacements initiaux sont sous-estimés, de même pour la plasticité cumulée. Au fil des itérations, la solution locale est corrigée jusqu'à convergence, comme montré sur les figures 4.4, 4.5 et 4.6.

Du point de vue de la gestion des pas de temps, cela a une importance. En effet, comme la plasticité augmente au fil des itérations, l'activation du seuil de *cutback* peut se produire après quelques itérations et ce à la fois au niveau global et au niveau local (cf. figure 4.8a).

Pour le couplage faible, ce phénomène est dommageable lorsqu'un raffinement se produit au niveau global, car il faut alors recommencer les itérations faites jusqu'ici. Par contre, il n'y a aucun problème sur le modèle local, puisque si un pas de temps

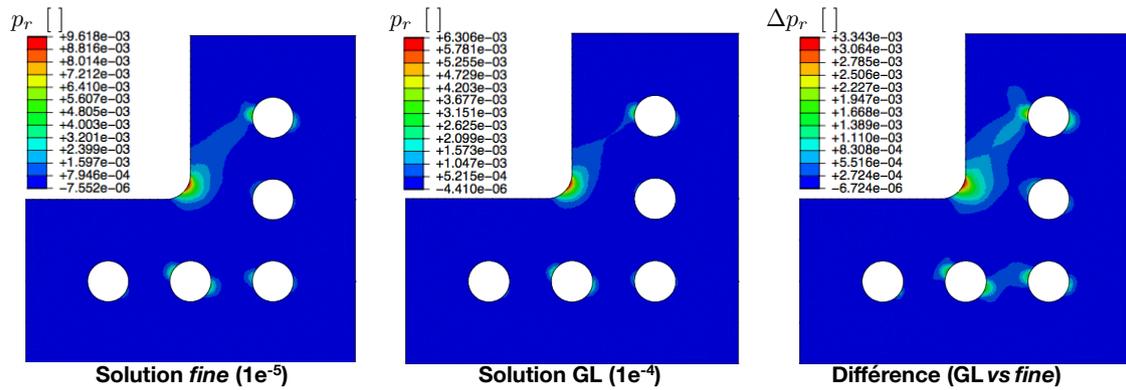


FIGURE 4.4 – Évolution de l'écart en montée à l'itération 0

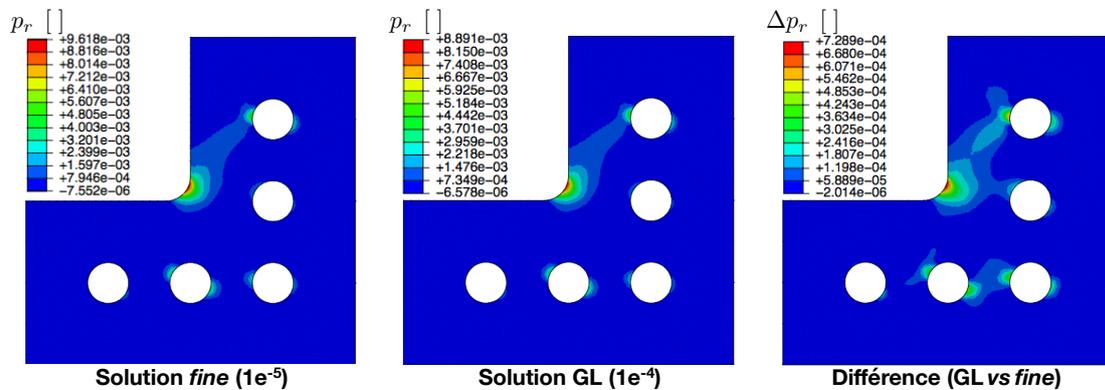


FIGURE 4.5 – Évolution de l'écart en montée à l'itération 1

supplémentaire est requis, il se calcule simplement dans l'analyse locale sans que des itérations *global/local* doivent y être effectuées.

En revanche pour le couplage fort, que le *cutback* apparaisse au niveau global ou dans la solution locale, il faut relancer l'algorithme sur le plus petit pas de temps apparu. Naturellement, cela a un coût non-négligeable sur le temps de calcul total.

Chargement décroissant Dans le cadre nouveau d'un chargement décroissant, les déplacements sont comme précédemment sous-estimés, car la rigidité du problème globale reste plus importante que celle du local, accentuée par la plasticité lors de la charge. La figure 4.7 présente la solution en déplacements sur un incrément de décharge pour la référence, à l'itération *global/local* initiale et enfin à convergence (itération 10).

Pour la plasticité cumulée, le comportement est totalement différent, car l'initialisation *global/local* surestime la plasticité cumulée, comme on peut le constater sur les figures 4.9, 4.10 et 4.11. Du point de vue des pas de temps, cela a pour effet de requérir des pas de temps dans les premières itérations, mais qui ne sont pas nécessaires dans la solution convergée. Les incréments de plasticité cumulée, apparaissant dans ces re-

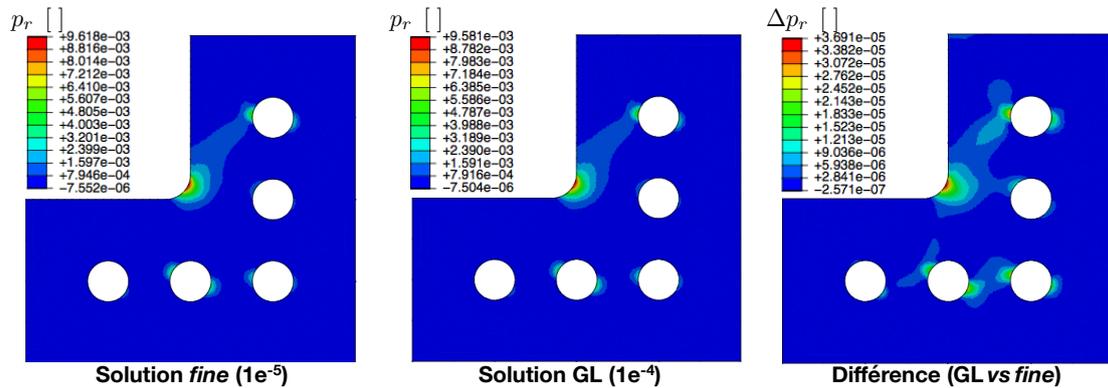


FIGURE 4.6 – Évolution de l'écart en montée à l'itération 3

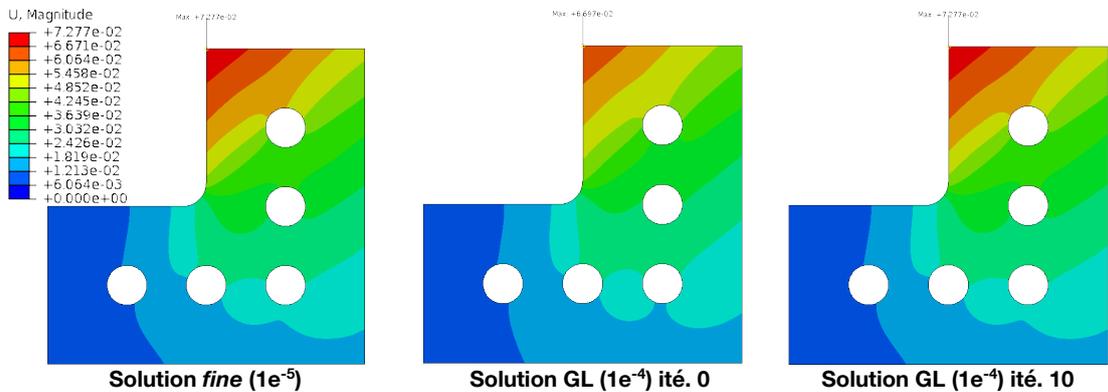


FIGURE 4.7 – Suivi des déplacements lors d'une décharge avec les itérations

distributions, sont moins élevés qu'en chargement croissant et sont principalement présents dans le modèle local, à cause de la présence des détails structuraux. Ainsi, ces *cutbacks* n'apparaissent pas dans le modèle global. Mais même au sein du modèle local, il faut un seuil de déclenchement de *cutback* assez fin pour être confronté à ce genre de problème.

Le couplage faible permet d'éviter cet inconvénient, car ses *cutbacks* locaux disparaissent au fur et à mesure que le local se corrige, comme sur la figure 4.8b. En revanche, pour le couplage fort, comme chaque pas de temps local est ajouté à la discrétisation temporelle générale, l'algorithme est relancé sur chacun d'entre eux. C'est pourquoi, on obtient beaucoup de pas de temps lors de la phase de descente avec ce couplage. Enfin, si le niveau de plasticité atteint dans la structure est trop élevé par rapport au seuil de détection de *cutbacks*, la progression de l'algorithme peut être bloquée par des raffinements intempestifs notamment avec le couplage fort.

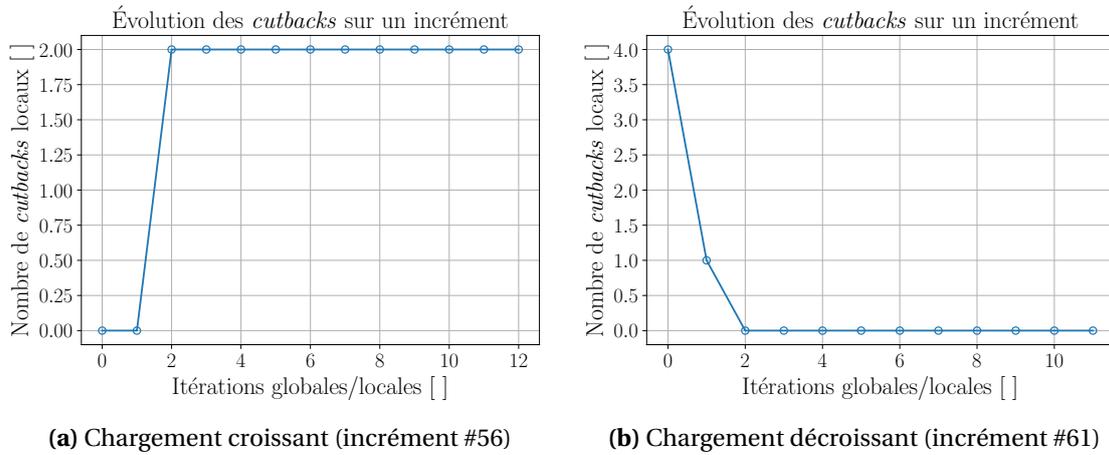


FIGURE 4.8 – Nombre de *cutbacks* par incrément (couplage faible avec $\Delta p_{cut} = 1e^{-4}$)

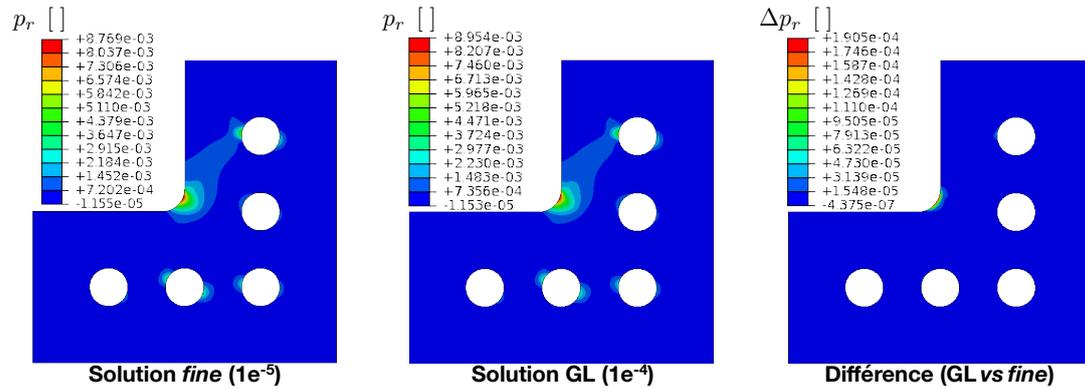


FIGURE 4.9 – Évolution erreur descente itération 0

2.2.3 Corrections apportées au problème global

Par application de l'algorithme *global/local*, la solution globale est corrigée par le modèle local au fil des itérations. Ainsi, par rapport au calcul global seul, servant de pré-discrétisation, cette solution requiert finalement plus d'incrémentes que lors de la pré-discrétisation, car le champ plastique est plus élevé.

Avec le couplage faible, on mesure directement le niveau de correction apporté au modèle global par les itérations, avec l'ajout des pas de temps venant du modèle global. À partir des calculs effectués et rapportés précédemment, on peut retenir que :

- pour la précision de $\Delta p_{cut} = 1e^{-3}$: initialement discrétisée en 12 pas de temps, la solution globale ne requiert aucun pas de temps supplémentaire. Cela est dû au fait que la tolérance Δp_{cut} est trop lâche par rapport à l'accroissement apporté par les corrections. Sur les *maxima* des quantités d'intérêt, on a observé une diminution de 44% de la contrainte de von Mises et une augmentation de 54% sur la plasticité cumulée rapide en fin de cycle.

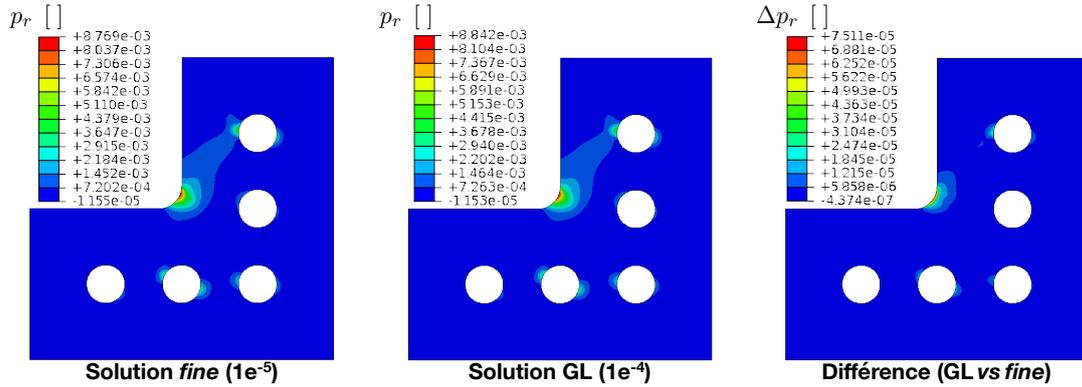


FIGURE 4.10 – Évolution erreur descente itération 1

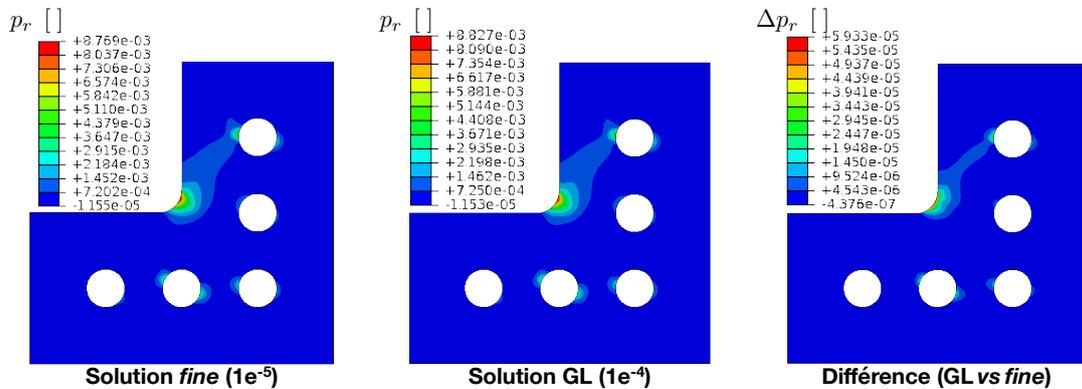


FIGURE 4.11 – Évolution erreur descente itération 10

- pour la précision de $\Delta p_{cut} = 1e^{-4}$: initialement discrétisée en 44 pas de temps, la solution globale est obtenue sur 74 pas de temps. Sur les *maxima* des quantités d'intérêt, on atteint une diminution de 39% sur la contrainte de von Mises contre une augmentation de 50% sur la plasticité cumulée rapide en fin de cycle.

Toujours sur le modèle global, l'apport de l'algorithme *global/local* est visible sur la solution plastique obtenue. En effet, les corrections dues aux trous de micro-perforation entraînent une augmentation de la plasticité cumulée rapide *maximum* par localisation, car son étendue est réduite par rapport au calcul global seul comme on peut le constater sur la figure 4.12.

Les détails structuraux ont un effet de localisation très important, le congé opposé aux trous n'est plus critique lorsque l'on simule avec la méthode *global/local*, car l'aube se déforme davantage au niveau des trous, ce qui décharge cette zone. Il est important de pouvoir faire remonter au niveau *macro* de telles informations, car elles peuvent motiver le choix d'une solution de conception (optimisation géométrique) plutôt qu'une autre, en contexte industriel.

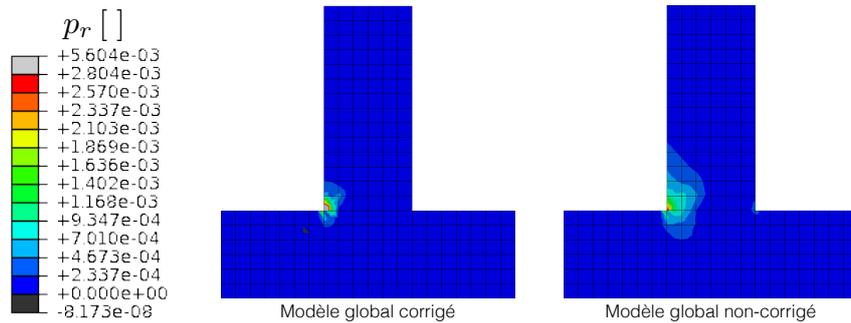


FIGURE 4.12 – Évolution de la solution plastique en fin de cycle

2.3 Précision des solutions obtenues

Après avoir étudié l'aspect lié à l'intégration temporelle, on s'attache maintenant à évaluer la précision de l'algorithme proposé. Pour cela, on analyse les solutions de la zone locale en fin de cycle de chargement, puis plus localement sur des éléments précis, répartis à divers endroits de la (cf. figure 4.16a), sur l'ensemble du cycle. Dans un premier temps, les calculs sont menés sur le modèle mettant en jeu des maillages conformes sur l'interface Γ . L'extension aux modèles non-conformes est présentée dans la section 3.

On utilise, comme référence pour l'évaluation de la précision, un calcul monolithique intégré à $\Delta p_{cut} = 1e^{-5}$ utilisant la pré-discrétisation globale, intégrée à $\Delta p_{cut} = 1e^{-4}$, afin d'être compatible avec l'algorithme *global/local* au moins sur ces pas de temps initiaux.

2.3.1 Précision en fin de cycle

On compare les solutions obtenues en fin de cycle sur la zone d'analyse locale. La comparaison s'effectue sur le champ de contraintes de von Mises ainsi que sur la plasticité cumulée, afin de ne pas surcharger le document, car la plasticité lente est moins discriminante. Les solutions de référence correspondantes sont présentées sur la figure 4.13.

Les solutions issues de l'analyse par *submodeling* sont disponibles sur la figure A.1 en annexes. La zone plastifiée est largement sous-évaluée et l'écart à la référence est du même ordre de grandeur que la solution elle-même. La mauvaise estimation de la zone plastique entraîne un champ de contraintes résiduelles, en fin de cycle, différent de la référence, tant en localisation qu'en niveau. L'erreur commise sur l'élément le plus chargé en fin de cycle (cf. tableau 4.4) est respectivement de 8.9% et 38% pour la contrainte de von Mises et la plasticité cumulée rapide. Par cette approche, ces grandeurs d'intérêt ne sont pas assez précises pour être utilisées dans les modèles de durée de vie. Malgré tout, il faut indiquer que le *submodeling* est la méthode la plus rapide, ce qui en fait une technique répandue dans l'industrie.

Le couplage faible est la technique conduisant au moins d'écart à la référence, avec

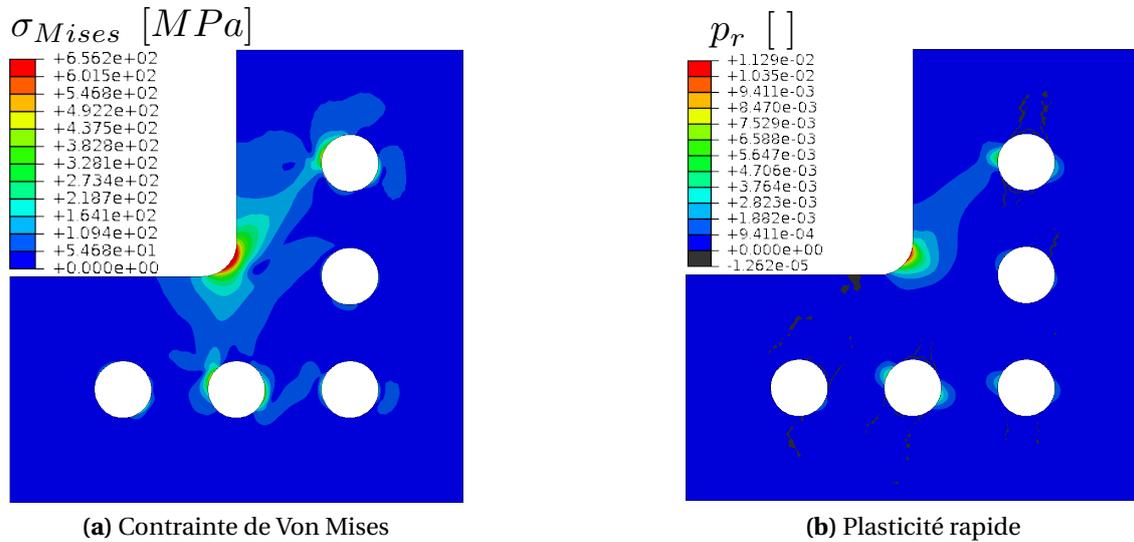


FIGURE 4.13 – Solution de l'approche monolithique en fin de cycle ($\Delta p_r = 1e^{-5}$)

une localisation excellente et un niveau de solution très correct. L'erreur commise sur l'élément le plus chargé est de 0.21% pour la contrainte de von Mises et de 0.8% sur la plasticité cumulée ce qui est correcte compte tenu de la différence d'intégration entre la référence et l'approche *global/local*. Le temps de calcul reste raisonnable pour une telle analyse et comme il sera présenté dans la section 2.5, il peut être réduit de manière importante, ce qui en fait le couplage le plus performant.

Le couplage fort est d'un premier abord le schéma le plus instinctif, mais comme il a été détaillé précédemment, il fait apparaître un problème de pas de temps lors des chargements décroissants. Dans ce type d'évolution, même avec une intégration à $\Delta p_{cut} = 1e^{-4}$, les pas de temps effectifs sont réalisés pour des incréments de plasticité de l'ordre de $1e^{-6}$. Ainsi même la solution de référence se retrouve sous-discrétisée, par rapport à celle du couplage fort dans cette phase de descente. Cela engendre un écart plus important qu'avec le couplage faible pour la référence utilisée (*cf.* figures A.2 en annexes). La sur-discrétisation lors de la descente accentue les phénomènes de redistribution entre les trous, avec un niveau maximal de la plasticité cumulée plus faible dans le congé mais plus élevé entre les détails structuraux. Le champ de contraintes de von Mises est lui aussi impacté et présente un écart plus important du à la différence de la solution plastique.

Comme ce gain de précision, n'est pas forcément nécessaire pour les calculs visés, au regard du sur-coût d'un tel couplage et des problèmes potentiels de robustesse, ce couplage n'est pas le plus performant pour notre application. Lors de calculs précédents, pour lesquels la pré-discrétisation initiale était plus grossière et une gestion des *cutbacks* plus lâche, ce couplage s'avérait plus précis (bien que toujours plus coûteux) que son homologue faible. Il ne faut donc pas le renier totalement.

Pour statuer sur la précision, outre la carte complète de la solution, on propose

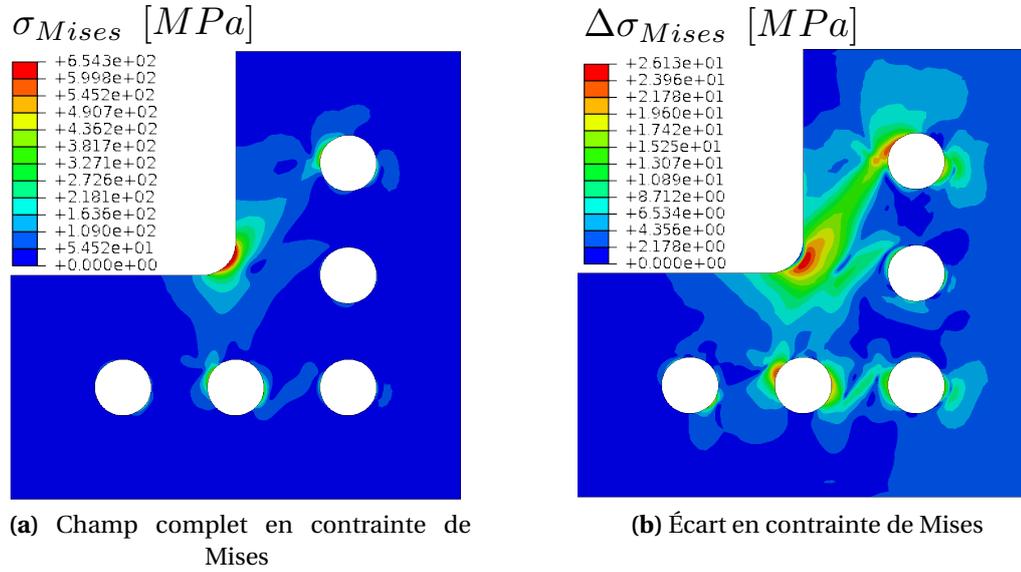


FIGURE 4.14 – Précision en fin de cycle obtenue en *couplage faible global/local*

un indicateur plus global sous la forme d'un écart relatif à la référence utilisée, pour l'élément le plus chargé (élément #436 cf. figure 4.16a). Pour une quantité d'intérêt X , la contrainte de von Mises et les plasticités cumulées rapides et lentes, l'écart relatif a pour expression :

$$\eta(X) = \frac{(X_{max} - X_{Ref})}{X_{Ref}} \times 100 \quad (4.1)$$

Les résultats pour chaque approche et pour les deux seuils de raffinement temporel sont rapportés dans le tableau 4.4.

Approches	<i>Submodeling</i>		C. Faible		C. Fort		Réf. $1e^{-4}$	Réf. $1e^{-5}$
	Valeur	η [%]	Valeur	η [%]	Valeur	η [%]	Valeur	Valeur
Mises	610.2	6.3	649.9	0.16	650.1	0.12	649.9	650.9
p_r	$6.54e^{-3}$	38	$1.06e^{-2}$	0.8	$1.05e^{-2}$	0.08	$1.06e^{-2}$	$1.05e^{-2}$

TABLE 4.4 – Écart sur un cycle par rapport référence pour l'élément #436

Les écarts à la référence sont, à part pour l'approche par *submodeling*, du même ordre de grandeur que ceux obtenus avec la référence intégrée à $\Delta p_{cut} = 1e^{-4}$, c'est-à-dire d'environ 1%. Comme davantage de pas de temps sont utilisés dans les couplages faibles et forts, les solutions obtenues par l'analyse *global/local* sont situées entre les approches monolithiques intégrées à $\Delta p_{cut} = 1e^{-4}$ et $1e^{-5}$. La solution du couplage fort tend fortement vers la précision de l'approche monolithique intégrée à $1e^{-5}$, grâce aux nombreux pas de temps ajoutés lors de la phase de descente. Mais la différence de

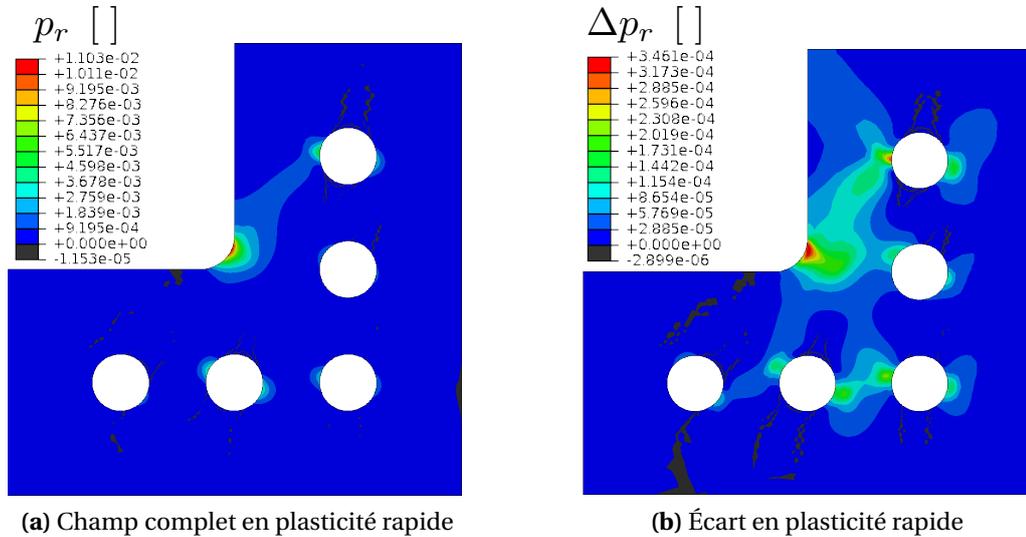


FIGURE 4.15 – Précision en fin de cycle obtenue en *couplage faible global/local*

pas de temps, effectués lors de la phase de montée, conduit à un écart que l'on ne parvient pas à corriger.

2.3.2 Résultats sur un cycle de chargement

On post-traite ici l'écart commis en distinguant certaines zones de la structure (cf. figure 4.16) :

- Les zones directement chargées par les sollicitations extérieures (éléments [41, 436, 460]) sont bien évaluées par les différentes approches, mêmes avec le *sub-modeling*,
- Les zones de redistribution, notamment [9756] entre les trous, sont plus difficiles à évaluer par les méthodes itératives et l'apport du couplage fort est ici utile. Le niveau de plasticité (début de courbe de comportement sensible à l'intégration) y est aussi plus bas, ainsi il dépend principalement de la bonne évaluation de la solution autour de la zone à des niveaux très élevés de précision.

Pour l'élément 436, on distingue deux phases, celle de montée dans laquelle les couplages faibles et forts sont relativement proches. Le faible est un peu plus précis, car il effectue un nombre de pas de temps légèrement supérieur au fort. Il est ainsi plus proche de la référence utilisée. Une fois la phase de descente atteinte, le couplage fort introduit plus de pas de temps et sa solution tend vers la référence. Il finit par être plus précis, en fin de cycle, que le couplage faible. Au niveau du *maximum* du cycle, à 1500s, on remarque un pic d'erreur sur la contrainte. En effet, comme la plasticité est moins bien évaluée entre les couplages et la référence, le champ de contrainte, de type résiduel, dépend principalement du champ plastique ce qui conduit à un accroissement local de l'écart lors de la décharge.

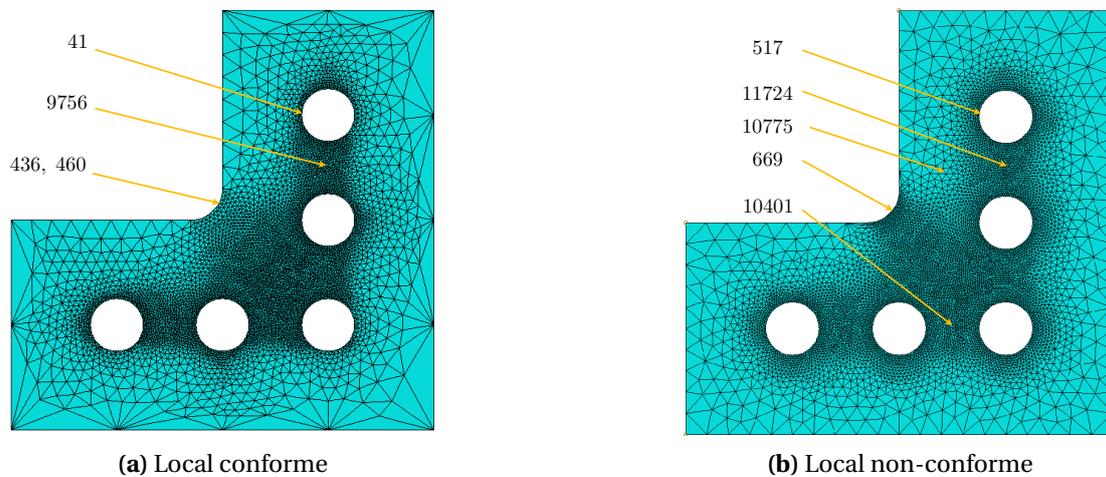


FIGURE 4.16 – Maillages locaux utilisés et éléments post-traités

L'élément 9756 est représentatif des zones de redistribution entre les détails structuraux qui sont caractérisées par des champs plastiques moins élevés, mais plus sensibles à l'intégration temporelle. En début de cycle, les deux couplages sont très proches, mais lors de la deuxième décharge située à 1500s, on constate qu'un écart vif apparaît. En observant les cycles d'intégration sur les figures 4.3b, pour les approches *global/local*, et 2.17b pour la référence, on remarque que seul le couplage fort réalise des pas de temps supplémentaires dans cette zone. Ces deux *steps* additionnels modifient la solution plastique, dans ces zones de redistribution, et introduisent un écart avec la référence, même intégrée très finement.

Lors de la descente en fin de cycle, le couplage fort réalise des pas de temps correspondant à des incréments de plasticité de l'ordre de $1e^{-6}$. Si pour l'élément 436 ce raffinement réduit l'écart avec la référence, il éloigne un peu plus les solutions, forte et de référence, dans les zones de redistribution.

2.4 Bilan des performances concernant les couplages

2.4.1 Couplage faible

Ce couplage offre de loin le meilleur compromis entre le temps de calcul et la précision. En effet, les itérations *global/local* sont réalisées uniquement sur les pas de temps globaux et bien qu'une itération soit plus longue (plusieurs pas de temps locaux) que pour le couplage fort (unique pas de temps local), le temps de calcul en est fortement réduit. Une excellente précision est maintenue car on intègre chaque modèle au plus juste de ses besoins propres (intégration basée sur l'incrément de plasticité) et que le couplage *global/local* est réalisé lui-aussi au plus juste *ie.* aux pas de temps communs globaux et locaux.

Ce couplage offre une excellente flexibilité dans l'intégration de la loi de comporte-

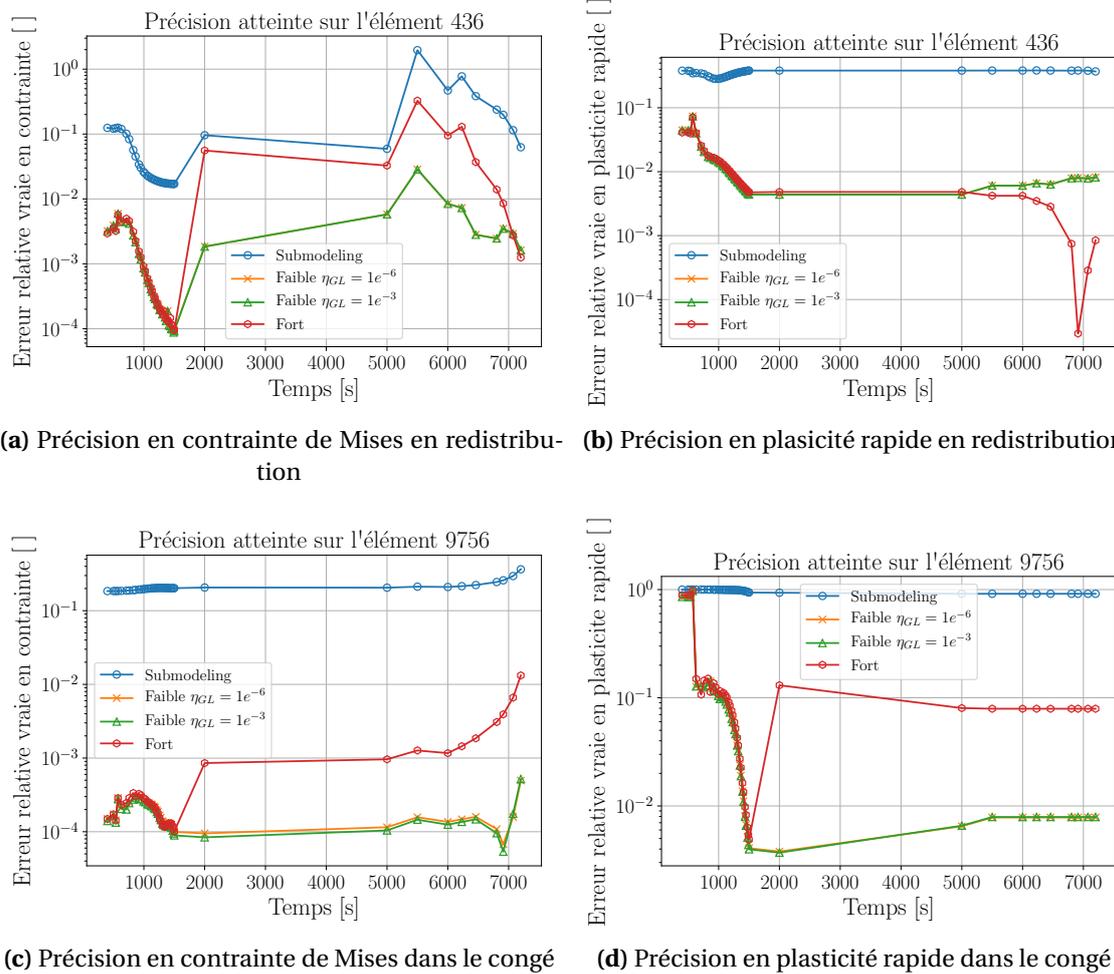


FIGURE 4.17 – Précision sur le cycle complet pour une intégration à $\Delta p_{cut} = 1e^{-4}$

ment du modèle local. En effet, comme il est détaillé dans la suite 2.2.2, le nombre de *cutbacks* requis peut changer au cours des itérations. Le couplage proposé permet de laisser évoluer la discrétisation locale, sans affecter la grille d'intégration générale. Cela s'avère particulièrement efficace dans le traitement du modèle local car la géométrie n'a besoin d'être chargée qu'une fois et non plus pour chaque sous-incrément. Cette étape de pré-traitement du calcul représente une part importante du temps de calcul, notamment lorsque la structure est de taille modeste, car le temps de résolution du problème éléments finis est modéré.

Le seul inconvénient, mais malheureusement inévitable, est que si des *cutbacks* globaux apparaissent après quelques itérations *global/local*, à cause des corrections apportées (cf. figure 4.8), on est obligé d'extraire les déplacements au niveau du premier *cutback* de la solution globale courante et de recommencer à 0 les itérations sur le nouveau pas de temps. Cependant, et il en est de même avec le couplage fort, si des *cutbacks* globaux apparaissent lors de l'initialisation sur le pas de temps courant

(itération 0), on peut extraire simplement les déplacements globaux au premier incrément, mettre à jour l'ensemble des grandeurs temporelles liées au chargement et ainsi poursuivre l'algorithme sans recommencer une simulation globale.

2.4.2 Couplage fort

Il s'agit du couplage qui permet de s'approcher le plus possible de la solution de référence monolithique, car il vérifie la convergence de l'algorithme de couplage à tous les pas de temps de la simulation. Cela engendre un temps de calcul important, car les itérations *global/local* doivent être réalisées à chaque pas de temps. De plus, dès qu'un *cutback* local apparaît (étape 4 de l'algorithme 7) il faut l'ajouter à la discrétisation complète et recommencer les itérations en perdant ce qui a été fait. Cela contribue au temps de simulation général. Cependant, il s'agit du seul algorithme qui garantisse l'exactitude de la solution obtenue pour une précision d'intégration donnée.

L'implémentation peut s'avérer plus complexe que pour les autres versions, car il faut ré-intercaler les pas de temps locaux dans la discrétisation courante et mettre à jour les valeurs des efforts extérieurs.

Enfin, comme rapporté dans la section 2.2.2, lorsque le seuil d'ajout de *cutback* est très fin ($\Delta p_{cut} = 1e^{-4}$), des pas de temps non-souhaités peuvent être rajoutés lors de décharges. Ceux-ci sont dus à la mauvaise évaluation de la solution *global/local* lors des premières itérations. Cela est coûteux car de nouvelles itérations doivent être réalisées sur ces pas de temps et que ces derniers ne sont finalement pas nécessaires pour obtenir la précision imposée initialement.

2.5 Vers un couplage haute performance

2.5.1 Apport de l'accélération de convergence

Dans le but de pouvoir appliquer cette méthode en contexte industriel, notamment en bureau d'étude, la technique des *Aitken's δ^2* a été retenue car elle offre une réduction des itérations semblable aux autres méthodes, mais pour une complexité d'implémentation et un coût de calcul inférieurs aux autres méthodes.

Selon les méthodes de couplage et les seuils de déclenchement des *cutbacks*, le tableau 4.5 récapitule le temps de calcul et le nombre d'itérations *global/local* effectuées. Pour chaque valeur, on associe le pourcentage de réduction, apporté par la technique d'accélération. Les niveaux de précision ne sont pas rappelés, car ils sont identiques aux solutions sans accélération.

Pour l'ensemble des combinaisons couplage/précision d'intégration, l'accélération de convergence fournit une réduction d'environ 30% sur le nombre d'itérations *global/local* totales (9 en moyenne par pas de temps). Cependant, le gain en temps de calcul n'est pas du tout semblable. En effet, le gain procuré par la technique d'accélération de convergence utilisée est seulement d'environ 8% pour le couplage fort et de 40% pour le couplage faible.

Couplages	Δp_r	Temps de calcul		Itérations GL (moy)	
		Valeur	Réd. [en %]	Valeur	Réd. [en %]
Faible	$1e^{-3}$	43m 3s	46,6	114 (9)	30.0
	$1e^{-4}$	4h 37m 28s	38,8	721 (9)	27.5
Fort	$1e^{-3}$	1h 33m 57s	7,6	242 (9)	29.7
	$1e^{-4}$	25h 22m 49s	7,7	4043 (9)	28.6

TABLE 4.5 – Performances de l'accélération de convergence

Cette différence majeure s'explique par le fait que le coût total de la méthode n'est pas uniquement dû à la résolution du problème éléments finis. En effet, pour un calcul dans *Abaqus/Standard*, il y a *grosso modo* trois phases dont la première qui vérifie la mise en donnée et qui charge la géométrie. Pour une structure simple, comme celle étudiée ici, ce temps de pré-traitement peut être comparable au temps de résolution. Ainsi pour le couplage fort, il y a beaucoup plus de calculs lancés que dans le couplage faible, pour lequel le local se calcule *via* des pas de temps internes au fenêtrage réalisé par les *steps* globaux. Pour chaque calcul local, même sur plusieurs pas de temps, l'étape de pré-traitement n'est réalisée qu'une fois. La sauvegarde de la solution complète en vue d'effectuer un **RESTART* est aussi une opération conduisant à un temps d'exécution non-négligeable.

C'est pourquoi, l'accélération de convergence apporte plus de bénéfices au couplage faible qu'à la version forte.

2.5.2 Choix pour une méthode optimale

Suite aux observations effectuées dans le chapitre 3 sur les performances de la méthode *global/local* appliquée à un incrément de chargement, il apparaît que l'erreur vraie stagne rapidement après quelques itérations. Même si le résidu continue de décroître, il n'est pas utile de poursuivre les itérations, car cela ne change plus la précision du résultat. Ce constat se vérifie sur le calcul d'un cycle complet puisque, pour un couplage faible, on fixe la tolérance de convergence sur le résidu d'équilibre r à $\eta_{GL} = 1e^{-3}$ pour chaque incrément de chargement, au lieu de $\eta_{GL} = 1e^{-6}$. Les résultats présentés sur la figure 4.17 montrent que l'erreur vraie reste identique à celle obtenue précédemment. De plus, on obtient une importante réduction du temps de calcul, en passant de 7h 33min 15s à 4h 13min 53s, soit 44% de réduction. Le nombre d'itérations à réaliser passe de 994 à 566 et de 13 à 8 pour le nombre moyen par incrément de chargement.

Suite aux résultats obtenus précédemment, on peut proposer un choix d'options menant à une utilisation de la méthode *global/local* la plus performante, c'est-à-dire celle qui offrira une robustesse importante, un temps de calcul minimal tout en assurant une excellente précision.

Pour cela, on choisit le couplage faible avec une tolérance de convergence de $\eta_{GL} = 1e^{-3}$ sur la norme du résidu d'équilibre d'interface, à laquelle on applique une accélé-

ration de convergence avec la méthode des *Aitken's* δ^2 .

Comme on peut le constater sur la figure 4.17, le niveau d'erreur vraie est semblable à celui atteint avec un niveau de convergence plus élevé de $\eta_{GL} = 1e^{-6}$. Du point de vue des performances sur le temps de calcul numérique, on atteint 448 itérations *global/local* sur le cycle, soit en moyenne 6 itérations par incrément de chargement pour un temps total de 2 h 51 min 34 s. Par rapport à la version initiale, on gagne 62 % de temps de calcul pour la même précision.

3 Cas des maillages non-conformes

De manière générale et en particulier lorsque la plasticité du modèle devient élevée, les éléments distordus peuvent devenir problématiques pour la bonne exécution du calcul. Dans les modèles de l'analyse *global/local*, de tels éléments peuvent être introduits au niveau de l'interface, comme c'est le cas ici dans le cadre de maillages conformes (*cf.* figure 4.16).

La capacité à mettre en œuvre des maillages non-conformes, permet de pouvoir utiliser des éléments fins, au niveau local, tout en conservant un maillage global plus grossier, sans distordre les éléments pour raccorder les maillages. La pré-discrétisation utilisée pour ces modèles reste identique à celle des modèles conformes, car le modèle global est inchangé par rapport à la version conforme.

3.1 Intégration temporelle

Les éléments distordus sont sujets à des difficultés d'intégration temporelle et peuvent requérir plus de pas de temps qu'un maillage de meilleure qualité. C'est le cas sur l'exemple traité puisque avec le maillage non-conforme, à chargement identique et en couplage fort, le cycle complet est intégré sur 373 pas de temps contre 425 pour le maillage conforme.

La répartition des *cutbacks* reste semblable à celle obtenue sur les modèles conformes, avec une majorité de pas de temps requis lors de la phase de montée, sauf encore une fois pour le couplage fort.

Méthodes	C. Faible	C. Fort	Réf. $1e^{-5}$
Montée	119	105	1129
Descente	33	224	300

TABLE 4.6 – Répartition des *cutbacks* sur le cycle : modèles non-conformes

3.2 Convergence

Le niveau moyen du résidu d'équilibre à convergence est désormais de l'ordre de $1e^{-9}$, alors qu'il était de l'ordre de $1e^{-6}$ sur le modèle en maillages conformes sur l'interface, tout en restant en simple précision (cf. figure 3.9). Malgré la discrétisation globale qui reste grossière, celle utilisée du côté local de l'interface apparaît comme bénéfique, notamment pour l'évaluation des forces de réactions.

3.3 Écart en fin de cycle

La figure A.3 rapportée en annexe A présente les solutions complètes obtenues avec le maillage local non-conforme pour un couplage faible. Les écarts sont toujours calculés par rapport à une approche monolithique intégrée à $\Delta p_{cut} = 1e^{-5}$. L'erreur globale commise est plus faible que pour le modèle conforme, même si le niveau d'erreur est important près de l'interface.

En effet, on peut constater des niveaux d'écarts assez importants, du fait de la différence entre les techniques, *TIE d'Abaqus/Standard* utilisée pour la référence et celle développée dans ces travaux, au sein de la stratégie *global/local*. Les écarts les plus importants sont obtenus au niveau des nœuds du maillage global. Le couplage *TIE* réalise un raccord moyen sur la ligne définie par les nœuds d'interface, tandis que le raccord est local par nœuds dans notre couplage.

Même si la convergence peut être poussée au-delà de $r = 1e^{-6}$, cela n'améliore pas la précision finale du calcul (cf. figure 3.9). Comme en témoigne les écarts sur les *maxima* des quantités d'intérêt, les différences sont légèrement plus importantes sur le modèle non-conforme 4.7 que sur le conforme 4.4.

Approches	<i>Submodeling</i>		C. Faible		C. Fort		Réf. $1e^{-4}$	Réf. $1e^{-5}$
	Valeur	η [%]	Valeur	η [%]	Valeur	η [%]	Valeur	Valeur
Mises	589.0	8.9	645.0	0.21	645.1	0.20	645.0	646.3
p_r	$6.25e^{-3}$	38.	$1.02e^{-2}$	0.8	$1.01e^{-2}$	0.15	$1.02e^{-2}$	$1.01e^{-2}$

TABLE 4.7 – Niveaux d'erreur sur l'élément le plus chargé # 436 ($\Delta p_{cut} = 1e^{-4}$)

Remarque : Les valeurs maximales entre la figure A.3 et le tableau 4.7 sont différentes, car sur les cartes en deux dimensions les champs sont lissés alors que dans le tableau une moyenne sur les points de Gauss est utilisée.

3.4 Résultats sur un cycle de chargement

Les niveaux d'erreurs sont semblables à ceux observés avec les modèles conformes, le comportement général est lui aussi assez proche. L'élément 669 (cf. figure A.4) est représentatif des zones directement sollicitées par les efforts extérieurs. Dans la partie

croissante du chargement, le couplage faible est plus proche de la référence que le fort, en générant quelques pas de temps supplémentaires.

Pour l'élément 11724 (*cf. figure A.5*) qui se trouve dans une zone de redistribution, les deux couplages fournissent des résultats très proches. Lors de la phase décroissante du chargement, la solution plastique, notamment rapide, est très peu modifiée pour cet élément ($\Delta p_r = 1e^{-8}$) autour d'une valeur d'environ $p_r = 1e^{-5}$. C'est pourquoi, l'écart n'évolue plus sur cette partie du cycle.

Conclusion

Un choix a été fait dans ces travaux concernant la technique de discrétisation initiale du cycle de chargement. La méthode proposée permet d'atteindre un niveau de précision donné, selon les objectifs de la simulation, tout en offrant une importante robustesse. Son coût de calcul est limité grâce à l'utilisation du modèle global. Les méthodes de couplage proposées ensuite peuvent tout à fait être appliquées avec des techniques différentes pour la pré-discrétisation et pour l'intégration temporelle de la loi matériau sur le cycle de chargement.

Deux méthodes de couplage temporel, entre les modèles globaux et locaux, ont été proposées et testées sur une structure académique soumise à des chargements extérieurs, modulés de manière complexe en amplitude. Le couplage faible se montre le plus efficace, notamment lorsque l'on utilise un seuil fin de raffinement temporel. Il apporte de la flexibilité dans l'intégration des différents modèles et permet ainsi d'obtenir un compromis temps de calcul/précision très intéressant.

Afin de pouvoir comparer les couplages faibles et forts, une référence intégrée à $\Delta p_{cut} = 1e^{-5}$ a été utilisée. Une telle finesse de discrétisation n'est pas envisageable sur des structures plus complexes et on se tournera plutôt vers des seuils de $1e^{-4}$. Avec un tel calcul de référence intégrée à $\Delta p_{cut} = 1e^{-4}$, le couplage faible présente un écart en fin de cycle inférieur à $0.1MPa$ pour le maximum de la contrainte de von Mises.

Après avoir évalué les différentes options et combinaisons possibles, un couplage optimal est proposé permettant, par cette approche, d'obtenir un temps de calcul minimal qui reste plus élevé que l'approche monolithique sur cette application. Cela est dû à la taille du modèle qui reste limitée et qui ne nécessite pas une décomposition de domaine. Par ailleurs, pour chaque calcul de l'algorithme, du fait du développement non-intrusif dans *Abaqus/Standard*, une étape de pré-traitement est réalisée pour le maillage et la mise en données du problème et cela a un coût important par rapport à la résolution seule du problème. Le couplage faible limite le nombre de calculs lancés, ce qui permet d'endiguer ce problème. Le temps passé aux extractions des grandeurs de pilotage, ou à l'écriture des scripts correspondants, n'a aucune influence sur le temps total de calcul, car ces opérations ont été optimisées au *maximum*.

Enfin, la capacité à mettre en œuvre des maillages non-conformes sur l'interface a été démontrée avec succès en 2D pour le moment. Elle permet d'améliorer l'applicabilité de la méthode par rapport à des maillages d'origines diverses, ou de permettre des changements rapides et aisés de maillages locaux par exemple.

Chapitre 5

Développement et couplage d'une méthode pour le calcul du cycle limite

L'algorithme *global/local* proposé, pour traiter une structure utilisant un modèle de matériau non-linéaire sur un cycle de chargement, a prouvé sa précision pour plusieurs couplages temporels, évaluée par un calcul de référence. Même si des efforts ont été apportés, un frein à l'application de cette technique reste son temps de calcul qui demeure important par rapport à une approche monolithique.

Ce chapitre vise à ramener le temps d'application de la méthode à des valeurs compatibles avec une utilisation en bureau d'étude. Pour cela, on va s'intéresser au calcul de la solution de la structure à travers plusieurs cycles de chargements consécutifs. Cette analyse est très coûteuse lorsque qu'elle est réalisée en calculant tous les cycles car la stabilisation de la structure est souvent lente, ce qui nécessite un grand nombre de simulations.

On développe une version de la technique des sauts de cycles destinée à des structures complexes qui sont caractérisées par de fortes variations de la solution dans les premiers cycles, ainsi qu'une forte hétérogénéité des champs. C'est pourquoi quelques modifications doivent être apportées aux formulations existantes.

1 Réponse cyclique de structures élasto-viscoplastiques

1.1 Problème traité

La méthode de sauts de cycles a toujours été appliquée avec une approche monolithique. Afin d'étudier et d'évaluer la méthode, on développe notre version sur le modèle de référence en deux dimensions (*cf.* figure 3.1) dans sa version non-conforme (*cf.* figure 4.16b pour situer les éléments post-traités). Des cycles de chargement, du type de celui utilisé dans le chapitre précédent (*cf.* figure 4.1), sont répétés environ une centaine de fois. L'intensité des chargements extérieurs a été réduite par rapport à l'étude sur un seul cycle afin d'avoir une stabilisation plus réaliste.

1.2 Analyse de la stabilisation

Comme rapporté dans [Kiewel *et al.*, 2000] le comportement asymptotique est caractérisé par trois phases :

- Lors des premiers cycles, de fortes variations des variables du modèle sont observées, notamment avec la plasticité naissante.
- Ensuite, une fois que le champ plastique est bien établi, les variations entre les cycles sont moins importantes et l'évolution des variables internes peut devenir linéaire sur un certain nombre de cycles.
- Enfin, une dernière phase est le lieu de l'endommagement pour des niveaux de plasticité très importants ($p_r \sim 1e^{-2}$) constituant la limite de ces travaux.

La figure 5.1 illustre les différences de stabilisation selon les différentes zones de la structure. Ainsi, la forme du cycle limite est souvent différente en chaque point de Gauss.

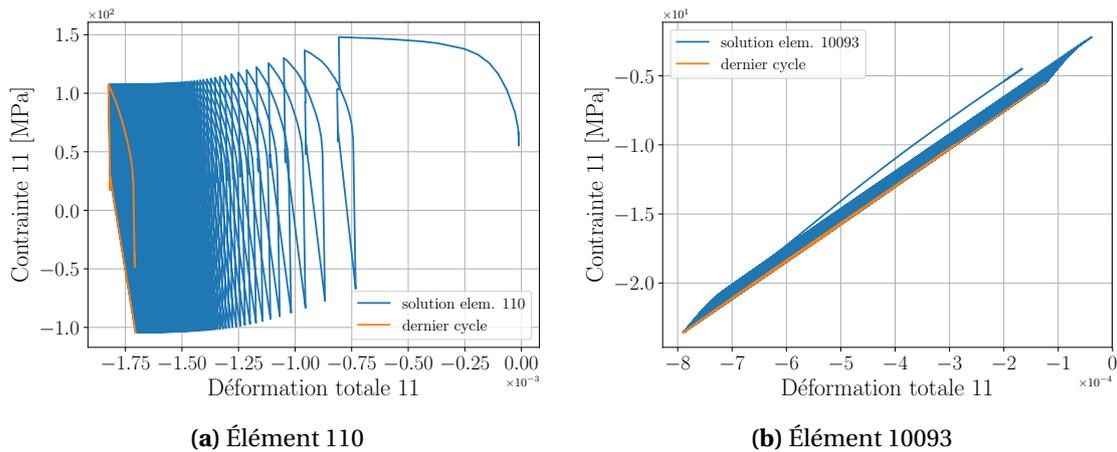


FIGURE 5.1 – Comportement cyclique (150 cycles) du modèle de référence

Sur le modèle monolithique de référence, on calcule 150 cycles de chargement. On peut y identifier (*cf.* figure 5.2) trois types de comportements asymptotiques, caractérisés simplement par une analyse de la plasticité cumulée rapide p_r et notamment son incrément Δp_r entre deux cycles consécutifs :

- Élasticité si $p_r < 1e^{-12}$,
- Adaptation si $\Delta p_r < 1e^{-6}$ et $p_r > 1e^{-12}$,
- Accommodation si $\Delta p_r > 1e^{-6}$ et $p_r > 1e^{-12}$.

On obtient finalement les trois principaux types de comportements asymptotiques dans cette structure, ce qui était l'objectif pour pouvoir tester, sur un exemple pertinent, les performances de la méthode développée ci-dessous.

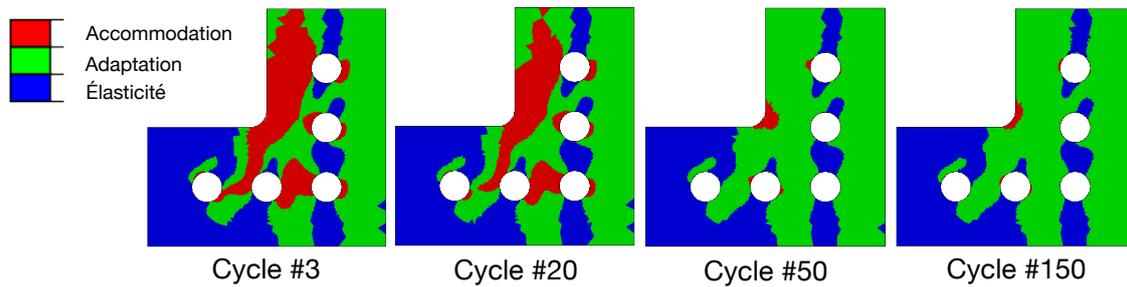


FIGURE 5.2 – Comportement asymptotique de la zone locale

2 Analyse par méthode de sauts de cycles

Après avoir étudié les techniques disponibles dans la littérature (*cf.* chapitre 1), permettant d’obtenir le cycle limite en un minimum de temps, notre choix s’est rapidement porté sur les méthodes de sauts de cycles. En effet, cette classe de techniques se base sur quelques solutions classiques obtenues par éléments finis, puis effectue une extrapolation du comportement, évitant ainsi plusieurs résolutions coûteuses.

Par rapport au couplage avec la méthode *global/local*, les sauts de cycles permettent de réutiliser directement la solution obtenue par cette analyse, ce qui facilite grandement le couplage. Il fallait aussi être capable de développer une telle méthode de manière non-intrusive. À ce sujet, une première réalisation a été proposée par [Cojocar et Karlsson, 2006], avec un développement dans *Abaqus/Standard*, dans le cadre d’une approche monolithique.

2.1 Principe de la méthode

À partir de trois cycles consécutifs c , $c-1$ et $c-2$, on exprime la solution temporelle $y(t)$ obtenue à chaque pas de temps, en fonction des cycles. Pour cela, on réalise un **échantillonnage** de cette dernière, c’est-à-dire qu’on l’extrait à un instant identique de chacun des cycles de base. Cela permet d’obtenir une évolution plus régulière de chaque variable et d’être capable de réaliser une **extrapolation** de la solution, vers un cycle plus lointain, sans avoir à calculer ce modèle sur les cycles intermédiaires. La **longueur du saut** effectué par extrapolation, est déterminée automatiquement par la méthode. Il faut enfin **reconstruire la solution** à l’arrivée du saut, puis en repartir pour simuler quelques nouveaux cycles consécutifs, en pratique trois, et effectuer un nouveau saut.

On s’attache désormais à détailler chacun de ces aspects, tant du point de vue de la formulation que des choix spécifiques qui ont conduit à la version proposée, capable de traiter l’exemple d’application avec précision.

2.2 Échantillonnage de la solution

L'idée fondamentale de la méthode des sauts de cycles est que, sur une structure soumise à un chargement cyclique de période Δt_{cycle} , même si les variations des variables internes au cours du cycle sont importantes (cf. figure 5.3a), ces variations, observées au même instant $\tau \in [0, \Delta t_{cycle}]$ de chaque cycle c , sont lentes (cf. figure 5.3b).

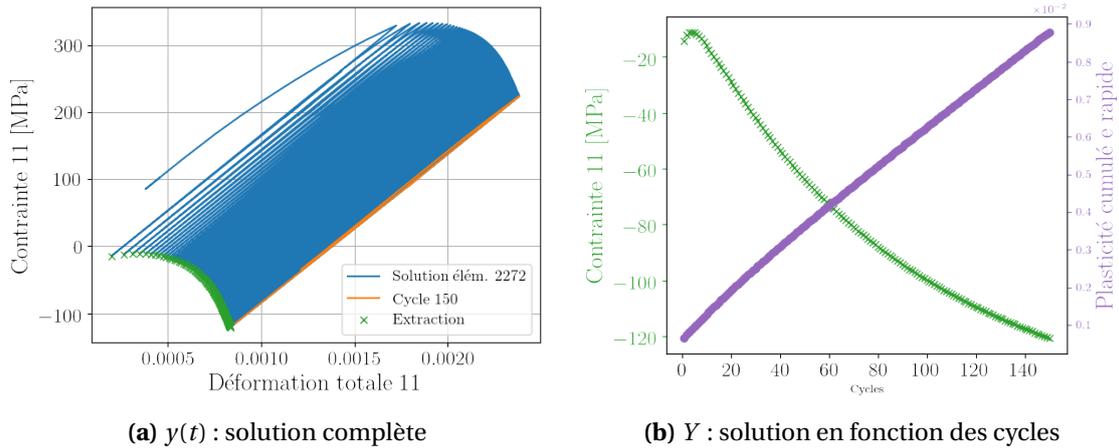


FIGURE 5.3 – Procédé d'échantillonnage de la solution temporelle

Cela revient à échantillonner la solution éléments finis temporelle y sur chacun des cycles de base calculés (cf. figure 5.3a) pour chaque variable i du modèle. Pour le modèle utilisé ici, en deux dimensions, il y en a 27 telles que les déformations élastiques et plastiques (rapides et lentes), les plasticités cumulées *etc.* On construit ainsi, pour chacune d'entre elles, un vecteur \mathbf{Y}_i dont les composantes sont les points de Gauss.

On peut formaliser ce procédé comme suit :

$$\mathbf{Y}_i[c] = y_i(\tau + (c-1) \times \Delta t_{cycle}) \quad (5.1)$$

De telles courbes sont obtenues à chaque point de Gauss de la structure et potentiellement à chaque nœud pour les déplacements. Leurs allures sont très variables, selon la grandeur analysée et l'endroit de la structure analysé. À ce propos, on peut remarquer que la contrainte peut avoir des évolutions moins régulières que la plasticité cumulée rapide (cf. figure 5.3b). Par une telle analyse, on remarque qu'avec son absence d'écrouissage, la déformation plastique lente se stabilise plus vite que la rapide (cf. figure 5.5).

Un premier choix porte sur l'instant τ à utiliser pour réaliser l'échantillonnage de la solution. On opte pour la fin du cycle, lors de la décharge car le comportement global de la structure y est plutôt élastique, comme ce qui est préconisé dans plusieurs travaux antérieurs [Saï, 1993, Arzt, 1994]. Ainsi, l'échantillonnage de la solution peut se résumer sous la forme suivante :

$$\mathbf{Y}_i[c] = y_i(c \times \Delta t_{cycle}) \quad (5.2)$$

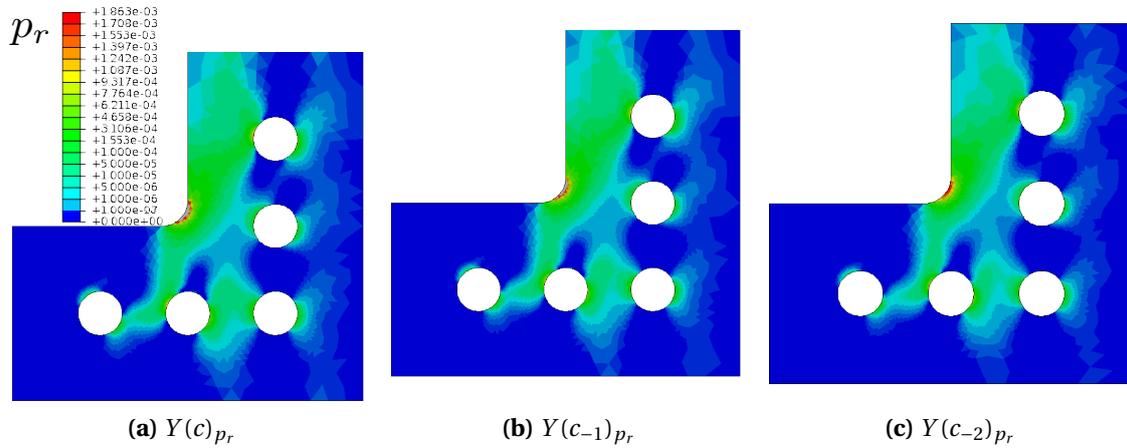


FIGURE 5.4 – Solutions échantillonnées en plasticité cumulée rapide

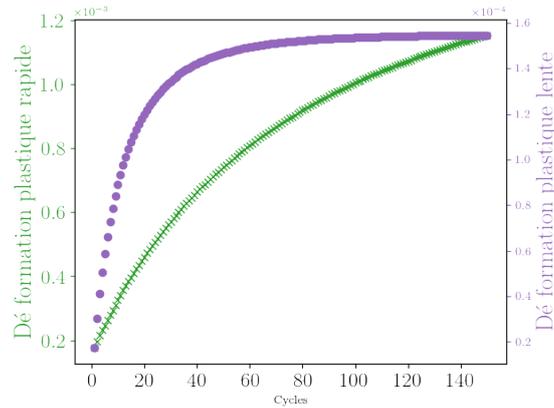


FIGURE 5.5 – Stabilisation des déformations plastiques pour l'élément #2272

2.3 Procédé d'extrapolation

On suppose que l'évolution des variables internes de la solution est quadratique pour notre comportement non-linéaire par rapport à la stabilisation de la structure. Pour représenter cela au mieux, on réalise un développement limité à l'ordre 2, pour une variable Y_i donnée, autour du dernier cycle calculé c . On obtient une expression de la variable considérée, au niveau du cycle d'arrivée $c + \Delta c_i$, via un saut de longueur Δc_i :

$$Y_i[c + \Delta c_i] = Y_i[c] + Y_i'[c] \Delta c + Y_i''[c] \Delta c_i^2 \quad (5.3)$$

L'extrapolation de la solution (5.3) requiert l'évaluation des dérivées premières et secondes. Dans la littérature plusieurs formulations sont utilisées. Dans le cadre de cycles de bases consécutifs, l'expression des dérivées par différences finies [Cojocar et Karlsson, 2006] conduit aux meilleurs résultats, quand d'autres formulations ne permettent pas d'effectuer un saut correct, sur nos exemples, comme avec une interpola-

tion polynomiale [Arzt, 1994].

Ces dérivées utilisent les vecteurs de la solution échantillonnée Y_i pour les trois cycles de bases c , c_{-1} et c_{-2} :

$$\begin{cases} Y_i'[c] \approx s_{-1} = \frac{Y_i[c] - Y_i[c_{-1}]}{c - c_{-1}} \\ Y_i'[c_{-1}] \approx s_{-2} = \frac{Y_i[c_{-1}] - Y_i[c_{-2}]}{c_{-1} - c_{-2}} \\ Y_i''[c] = \frac{s_{-1} - s_{-2}}{c - c_{-1}} \end{cases} \quad (5.4)$$

Ces dérivées sont illustrées sous forme de pentes de variation s_{-1} , s_{-2} sur la figure 5.9 à un point de Gauss quelconque de la structure.

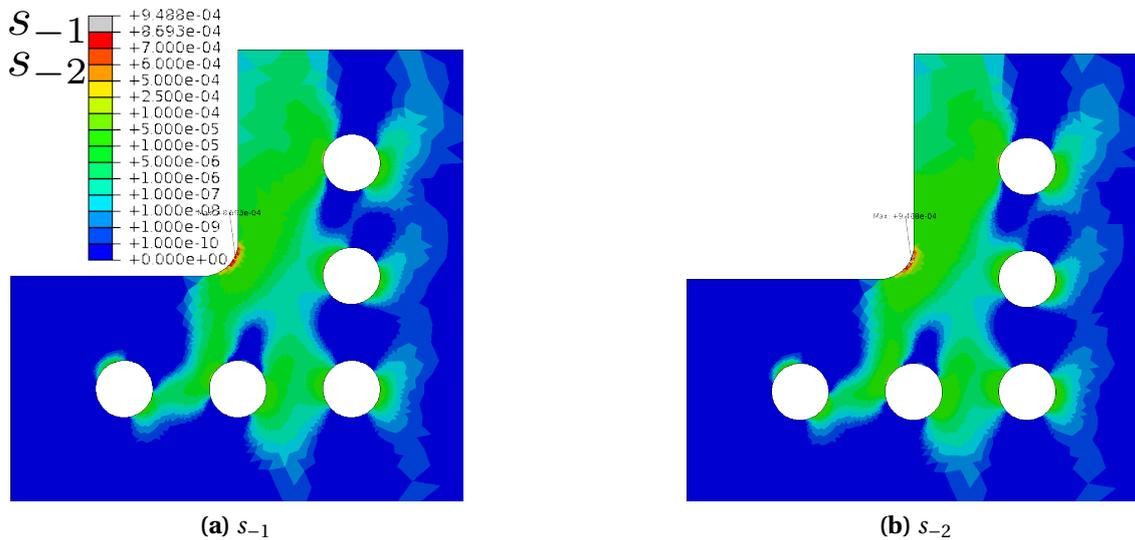


FIGURE 5.6 – Visualisation des cartes de dérivées

Même si elles peuvent sembler identiques (*cf.* figure 5.6), du fait de la stabilisation de la structure, les pentes sont assez différentes et s_{-2} est plus importante que s_{-1} (+9,1% sur le maximum).

2.4 Calcul de la longueur de saut

Il faut désormais exprimer la longueur du saut à effectuer. Pour cela, on utilise le développement limité (5.3). Pour obtenir une solution de qualité, le terme d'ordre 2 doit être négligeable devant celui du premier ordre, d'où la condition suivante :

$$\frac{1}{2} \Delta c_i^2 Y_i''[c] \ll Y_i'[c] \Delta c_i \quad (5.5)$$

Pour satisfaire l'inégalité, on introduit un facteur d'extrapolation q_{Extr} tel que :

$$\Delta c_i = q_{Extr} \frac{Y'_i[c]}{Y''_i[c]} \text{ avec : } q_{Extr} \ll 1 \quad (5.6)$$

La longueur de saut est donc directement liée aux variations de la solution sur les cycles de base et dont on prend, par la suite, la partie entière ainsi que la valeur absolue du quotient des dérivées.

Dans la littérature, une valeur classique de q_{Extr} est $1e^{-2}$, mais qui peut varier fortement selon les exemples traités comme dans [Saï, 1993] de $8e^{-2}$ à 0,5. Il s'agit d'un paramètre que l'utilisateur doit fournir *a priori*, ce qui peut être difficile sans calcul préalable. En effet, une valeur trop faible ne permet pas de faire un saut tandis qu'une trop importante peut conduire à un saut imprécis, voir à des divergences locales durant l'intégration de la loi de comportement à l'arrivée du saut.

En toute rigueur, une longueur de saut est obtenue pour chaque variable du modèle et en chaque point de Gauss de la structure.

Afin que l'ensemble de la structure soit extrapolé à un cycle commun, la méthode initiale propose de ne conserver que le minimum des sauts estimés, sur toutes les variables et dans toute la structure. Comme ce traitement est potentiellement très coûteux, on se contente en pratique d'une seule variable, comme la déformation plastique [Burlon *et al.*, 2014]. Compte-tenu des observations faites dans la section 2.2, **la plasticité cumulée est un meilleur candidat**, car ses variations sont plus régulières que la contrainte notamment. De plus, en tant que grandeur scalaire positive, le traitement en est facilité. Il apparaît aussi que, dans la loi de comportement utilisée, le potentiel rapide se stabilise plus lentement que le lent, comme on peut le constater sur la figure 5.5. Afin d'éviter d'effectuer un saut trop grand, alors que le reste des variables n'est pas stabilisé, on retient finalement la plasticité cumulée rapide p_r . Ainsi, la longueur du saut se calcule comme :

$$\Delta c(p_r) = \left\lceil q_{Extr} \min \left\{ \frac{|s_{-1}(p_r)|}{|s_{-1}(p_r) - s_{-2}(p_r)|} \right\} \right\rceil \quad (5.7)$$

Se baser sur le saut minimum, ainsi déduit sur l'ensemble de la structure, se traduit en pratique à ne pas faire de saut, alors que d'expérience celui-ci est possible. Ces difficultés sont accentuées par la présence des détails structuraux, qui avec la géométrie initiale déjà complexe, engendrent de fortes hétérogénéités dans la solution. Dans notre cadre d'application, ce procédé doit être amélioré.

2.4.1 Sélection des éléments

On propose de sélectionner les éléments les plus pertinents pour l'estimation de la longueur du saut. Tout d'abord, on élimine tous les éléments stabilisés *ie.* tels que :

$$|s_{-1} - s_{-2}| < 1e^{-12} \quad (5.8)$$

Ces éléments éliminés apparaissent en couleur noire sur la figure 5.7a.

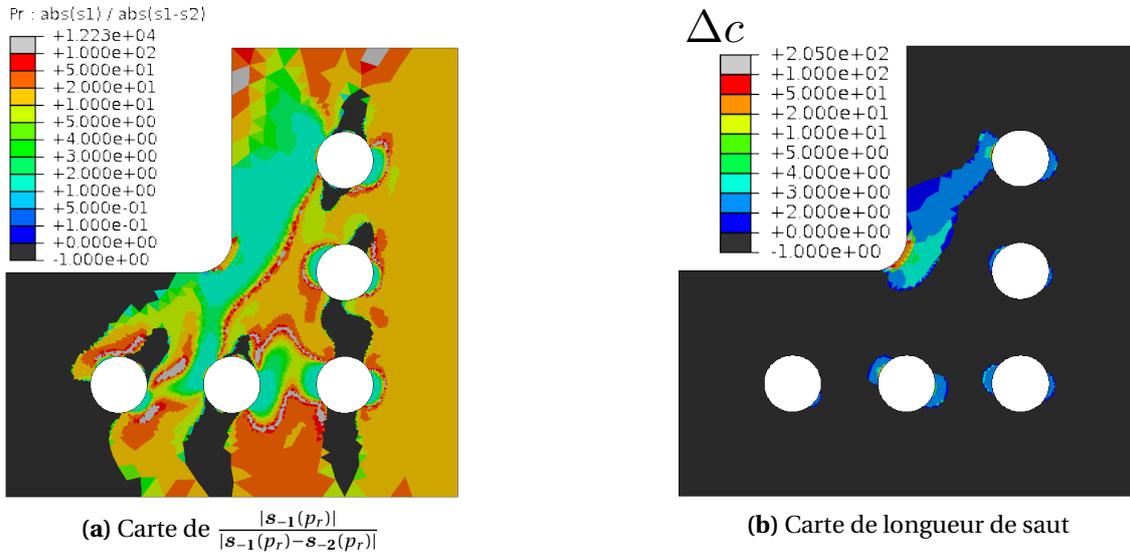


FIGURE 5.7 – Données de longueurs de saut

Ensuite, la longueur de saut est calculée (5.7) à partir des variations relatives de la dernière pente connue s_{-1} . En comparant la carte de p_r (cf. figure 5.4a) pilotant la longueur de saut et celle de s_{-1} sur la figure 5.6a, les longueurs maximales sont obtenues au bord de la zone plastique. Il s'agit de zones faiblement plastiques avec des variations restreintes, ce qui n'est pas forcément pertinent vis-à-vis du reste de la solution. On instaure donc un second seuil, basé sur la valeur maximale de s_{-1} , à laquelle on applique un certain coefficient $\eta_{s_{-1}}$:

$$s_{-1} > \eta_{s_{-1}} \times \max(s_{-1}) \quad (5.9)$$

Selon la valeur retenue, ce critère peut être très discriminant et influent sur la longueur de saut retenue. Par exemple, la figure 5.7b représente les longueurs de saut dans la structure pour $\eta_{s_{-1}} = 1e^{-2}$ et $q_{Extr} = 1,97$.

2.4.2 Méthode de calcul du saut final

Pour éviter de se focaliser sur l'élément le plus critique, on tente de tenir compte de la stabilisation plus générale de la structure. Pour cela, on propose d'utiliser un calcul en moyenne de la longueur de saut finale. La moyenne porte alors sur les points de Gauss des éléments nb_E , sélectionnés par les critères de la section précédente 2.4.1.

$$\Delta c = \left[q_{Extr} \frac{\sum \frac{|s_{-1}|}{|s_{-1}-s_{-2}|}}{nb_E} \right] \quad (5.10)$$

Ce faisant, on prend désormais en compte des éléments en adaptation donc plus stabilisés ce qui permet de plus grands sauts. L'algorithme 8 permet d'obtenir une longueur

Algorithm 8: Calcul de la longueur de saut finale**Input:** q_{Extr} : facteur d'extrapolation, s_x : pentes de variation

- Pour chaque point de Point de Gauss, on calcule la longueur de saut local.

nbPoints = 0

for M *parmis tous les points de Gauss* **do**

- Test de pertinence du point de Gauss courant :

if $s_{-1}^M > \eta_{s_{-1}} \times \max\{s_{-1}\}$ *et* $|s_{-1}^M - s_{-2}^M| < 1e^{-12}$ **then**

$$\tilde{\Delta c}[M] = \left| \frac{s_1^M}{s_1^M - s_2^M} \right| \quad (5.11)$$

nbPoints = nbPoints + 1

end**end**- Calcul de la moyenne arithmétique de la longueur de saut globale $\tilde{\Delta c}$:

$$\Delta c = \left\lfloor q_{Extr} \frac{\sum \tilde{\Delta c}}{nbPoints} \right\rfloor \quad (5.12)$$

- **Ou** calcul par le minimum de la longueur de saut $\tilde{\Delta c}$:

$$\Delta c = \left\lfloor q_{Extr} \min \{ \tilde{\Delta c} \} \right\rfloor \quad (5.13)$$

Output: Δc

de saut globale à toute la structure, en sélectionnant les éléments pertinents, puis en prenant soit le minimum soit la moyenne des longueurs possibles.

Selon la méthode utilisée, mais aussi selon le seuil η_{s-1} appliqué, le facteur d'extrapolation peut varier de manière importante. C'est pourquoi une méthode de détermination automatique est proposée pour pouvoir s'affranchir de ce choix tant abstrait que difficile et ainsi obtenir une approche plus systématique.

2.4.3 Facteur d'extrapolation automatique

Un réel frein à l'utilisation des méthodes de sauts de cycle est la donnée du facteur d'extrapolation, qui peut fortement dépendre du cas d'étude. Dans les cas d'applications traités, il peut varier de façon importante selon que le comportement se stabilise vite ou non, selon la loi matériau utilisée et ses paramètres, selon le niveau des chargements extérieurs et enfin selon la géométrie. Enfin, il est aussi très dépendant de la méthode utilisée pour calculer la longueur finale du saut par le minimum ou la moyenne. Pour le calcul en moyenne, il fluctue beaucoup selon le critère de sélection des éléments retenu.

L'expérience acquise sur des structures et des jeux de paramètres matériau nous permet de dire qu'après les trois premiers cycles de chargement calculés, un saut initial d'une longueur Δc_0 de deux voire trois cycles est raisonnable. En effet, la solution obtenue est satisfaisante dans la majorité des cas simulés. Ce constat permet de calculer la valeur de q_{Extr} de manière automatique en inversant la relation 5.7 ou 5.10 ; par exemple pour le calcul *via* le minimum on a :

$$q_{Extr} = \frac{\Delta c_0}{\min \left\{ \frac{|s_{-1}|}{|s_{-1} - s_{-2}|} \right\}} \quad (5.14)$$

Sur l'ensemble des exemples traités, les valeurs de q_{Extr} les plus importantes n'étaient pas les plus critiques dans la stabilité du saut *ie.* la capacité que l'on a ne pas diverger localement à l'arrivée. C'est pourquoi aucune valeur limite n'a été formulée ici.

La figure 5.8 compare les réponses obtenues pour des longueurs de sauts initiaux de deux et trois cycles. Les deux approches se déroulent correctement et sont aussi rapides l'une que l'autre (environ 1h 40min). Le choix peut porter sur la précision qui est meilleure pour un saut initial de deux cycles, notamment lorsque la solution connaît ses variations les plus importantes. Un saut initial de trois cycles s'avère contre-productif puisque ce premier saut plus long introduit un décalage nécessitant ensuite une quarantaine de cycles (certains sont sautés) pour retrouver une précision acceptable. C'est pourquoi, par la suite, on opte pour une longueur de saut initial de deux cycles.

2.5 Reconstruction de la solution

Désormais tous les outils sont disponibles pour évaluer le développement limité initial 5.3 et construire la solution extrapolée.

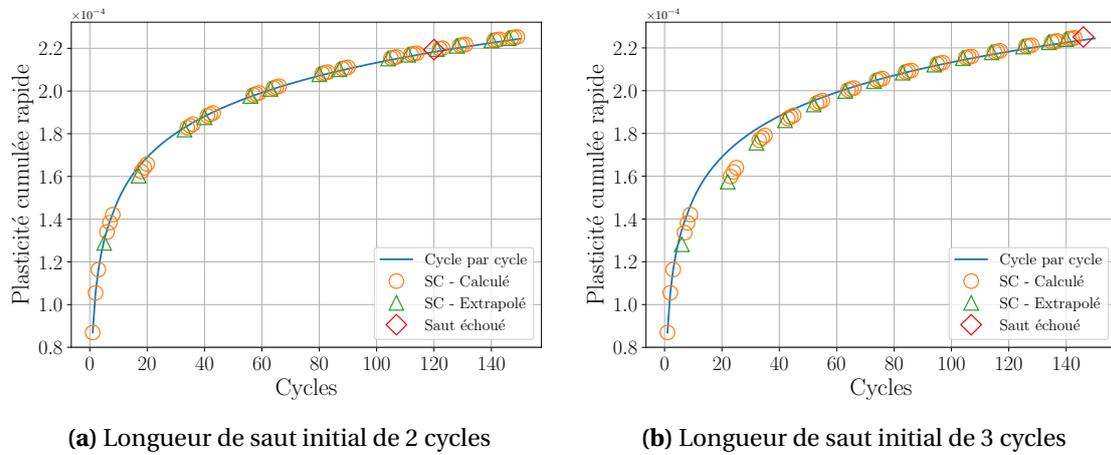


FIGURE 5.8 – Solution sauts de cycles en plasticité cumulée rapide (élément #10775)

2.5.1 Interprétation du facteur d'extrapolation en termes de pentes

Comme représentées sur la figure 5.9, les dérivées premières s_{-1} et s_{-2} sont équivalentes aux pentes de variations, « *slopes* » en anglais, et la dérivée seconde est elle même la dérivée première de ces pentes de variations.

En appliquant cette remarque dans l'expression du développement limité (5.3) pour une variable i du modèle, on obtient :

$$\begin{aligned}
 Y_i[c + \Delta c] &= Y_i + s_{-1}\Delta c + \frac{s_{-1} - s_{-2}}{2}\Delta c^2 \\
 &= Y_i + \frac{1}{2}[2s_{-1} + (s_{-1} - s_{-2})\Delta c]\Delta c \\
 &= Y_i + \frac{1}{2}[s_{-1} + s_{-1} + (s_{-1} - s_{-2})\Delta c]\Delta c \\
 &= Y_i + \frac{1}{2}[s_{-1} + s_p]\Delta c
 \end{aligned}
 \tag{5.15}$$

On fait ainsi apparaître une pente liée à la prédiction, qui est l'extrapolation de la solution à l'arrivée du saut :

$$s_p = s_{-1} + (s_{-1} - s_{-2})\Delta c \tag{5.16}$$

On montre ainsi que l'utilisation du développement de Taylor revient à extrapoler linéairement la dernière pente connue des cycles de base. De plus, on peut se ramener à l'interprétation du facteur de qualité proposée dans [Cojocaru et Karlsson, 2006] :

$$\begin{aligned}
 s_p - s_{-1} &= (s_{-1} - s_{-2})\Delta c \\
 |s_p - s_{-1}| &= |s_{-1} - s_{-2}|\Delta c
 \end{aligned}
 \tag{5.17}$$

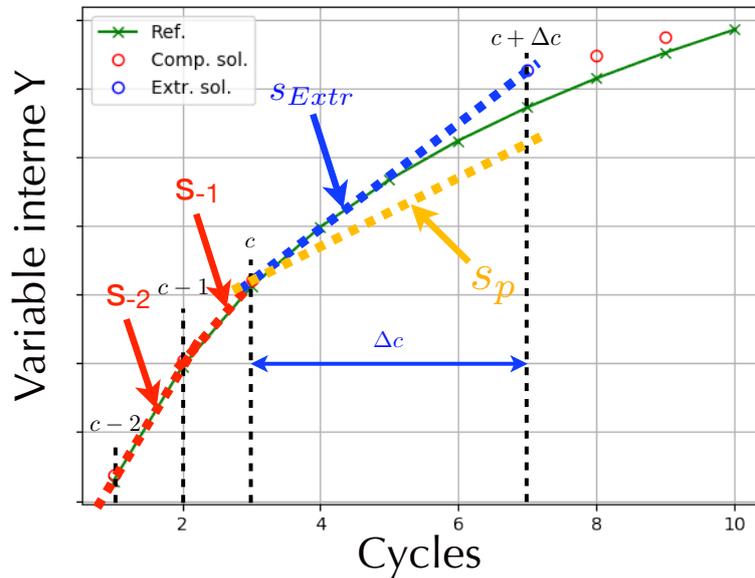


FIGURE 5.9 – Schéma de principe d'une extrapolation avec relaxation

En utilisant, l'expression de la longueur de saut (5.11) :

$$\begin{aligned} |s_p - s_{-1}| &\leq |s_{-1} - s_{-2}| q_{Extr} \frac{|s_{-1}|}{|s_{-1} - s_{-2}|} \\ \frac{|s_p - s_{-1}|}{|s_{-1}|} &\leq q_{Extr} \end{aligned} \quad (5.18)$$

On constate que le facteur d'extrapolation majore l'écart relatif en valeur absolue entre la pente prédite et la dernière pente connue.

2.5.2 Relaxation

Nos cas d'applications sont caractérisés par de fortes pentes de variations entre les cycles de bases lors des premiers cycles. On introduit de la relaxation dans l'approximation de la dérivée seconde afin que l'extrapolation se déroule correctement. Dans le cas contraire, cela peut même conduire à de la plasticité cumulée décroissante lorsque s_p est négative localement.

Cela est dû au fait que si $|s_{-2}| \gg |s_{-1}|$ la pente de prédiction peut alors être négative ou au moins sur-estimer la stabilisation *ie.* l'abaissement de la pente. On vient alors atténuer l'abatement apporté sur s_{-1} , la dernière pente calculée, à cause de la différence $s_{-2} - s_{-1}$, par une relaxation α pour obtenir la pente finale d'extrapolation s_{Extr} :

$$s_{Extr} = \alpha s_{-1} + (1 - \alpha) s_p \quad (5.19)$$

Cela conduit à la mise-à-jour de l'expression de la solution extrapolée :

$$\mathbf{Y}_i [c + \Delta c] = \mathbf{Y}_i + s_{\text{Extr}} \Delta c \quad (5.20)$$

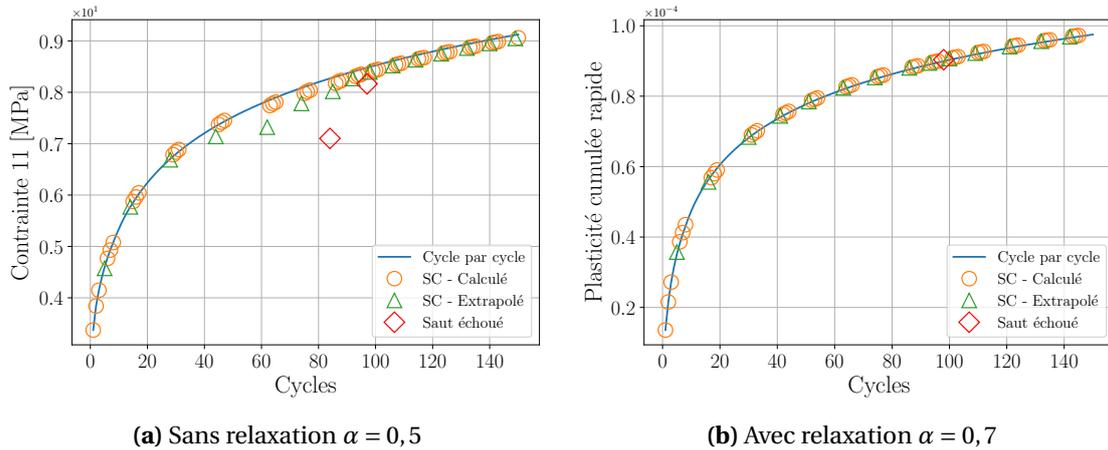


FIGURE 5.10 – Solution sauts de cycles en contraintes élément #10093

Ainsi chaque saut est plus précis, il y a moins de correction sur le cycle suivant le saut et on obtient de meilleures performances. Sans relaxation, on sous-estime la solution, car les cycles de base calculés après le saut ne parviennent pas à corriger l'écart introduit par le saut et on cumule un écart. Avec la relaxation, l'extrapolation est de meilleure qualité, le rattrapage de la solution cycle par cycle est moins important car il y a moins d'erreurs cumulées à chaque saut et on maintient une excellente précision. Dans le cadre de structures viscoplastiques, mêmes avec diverses complexités, les meilleures précisions sont obtenues pour des valeurs de α assez constantes entre 0.7 et 0.8, selon l'écroutissage qui engendre ces grandes variations.

2.6 Développement non-intrusif

La stratégie continue d'être développée de manière non-intrusive dans *Abaqus/Standard* sur le même principe que [Cojocar et Karlsson, 2006], bien que certaines modifications apparaissent.

2.6.1 Implémentation de la solution extrapolée

De manière générale, les sauts de cycles sont développés dans le même script *Python* que la méthode *global/local* afin de pouvoir échantillonner les solutions éléments finis obtenues par les calculs *Abaqus/Standard* et cela de manière totalement automatique. Ainsi, tout le procédé d'extrapolation consiste à manipuler des objets *Python* tels que les vecteurs solutions \mathbf{Y}_i . La principale difficulté réside dans la ré-utilisation de la

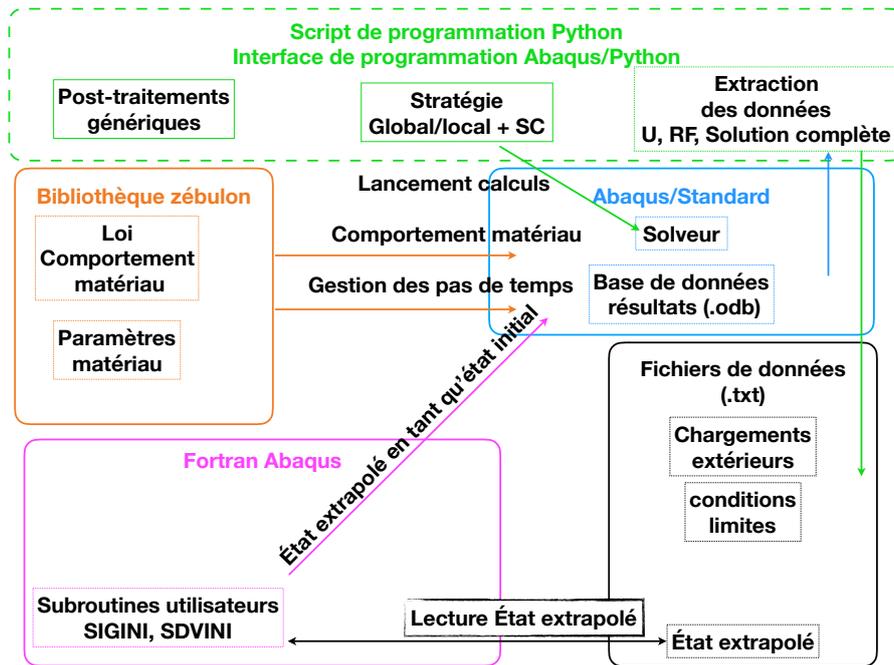


FIGURE 5.11 – Implémentation non-intrusive

solution extrapolée par *Abaqus/Standard*, en tant qu'état initial pour les trois cycles de chargement servant de base au prochain saut.

Dans une analyse cycle par cycle, on utilise la fonction **RESTART* et le solveur peut ré-utiliser une solution, contenue dans plusieurs fichiers, qui ont été générés par le dernier calcul éléments finis réalisé. Pour cela, il a fallu au préalable demander la création de ces fichiers très volumineux car toute la solution est sauvegardée.

Après un saut, la solution extrapolée est contenue dans la surcouche Python et doit être ré-implantée dans un format utilisable pour *Abaqus*, or on ne peut pas écrire "manuellement" les fichiers de **RESTART*. On a donc recours à deux *User Subroutines* en langage *Fortran*, *SIGINI* et *SDVINI* qui permettent respectivement de définir un champ de contrainte initial et l'ensemble des variables du modèle telles que la déformation élastique, les déformations plastiques, l'écroutissement ou encore la plasticité cumulée. En deux dimensions et avec la loi de comportement utilisée, on a 27 composantes à ré-implanter à chaque point de Gauss. Ce faisant, toute la solution est écrite dans un fichier texte. Au lancement du calcul repartant de l'arrivée du saut, on ajoute au fichier d'*input* l'option **INITIAL STATE TYPE=STRESS (AND SOLUTION)* qui indique que la définition de l'état initial n'est pas contenue dans des fichiers de *RESTART*, mais doit être chargée *via* les *subroutines*. Ainsi, avant d'effectuer le calcul, le solveur vient charger la solution par point de Gauss dans l'ordre de définition du maillage en appelant à chaque fois chaque *subroutine*. Pour optimiser ce traitement et le rendre quasiment insensible pour l'utilisateur, le fichier texte est ouvert lors du premier appel à la fonction et ensuite chaque nouvelle utilisation fait progresser la lecture d'une ligne dans le

fichier texte, qui est gardé en mémoire. Ce point est essentiel pour pouvoir traiter des structures à plusieurs millions de degrés de liberté comme au chapitre 4.

Concernant les déplacements, il n'existe pas, à notre connaissance, de fonction permettant de les appliquer dans un état initial. Dans la littérature, il est proposé de réaliser une étape de calcul très courte pour les imposer en tant que conditions de Dirichlet sur toute la structure sans chargement extérieur. Dans les essais menés, outre les conflits à gérer avec les conditions limites pré-existantes, cette étape pouvait perturber la solution extrapolée et la précision du saut était altérée. Une décision a été de ne pas imposer le champ de déplacements, car le solveur n'en a pas besoin en réalité pour le calcul car dans *Abaqus/Standard* celui-ci est incrémental. La donnée des autres variables, notamment la déformation totale est suffisante pour obtenir la même solution. On perd ainsi l'information sur l'histoire des déplacements et des simulations en grandes transformations ou mettant en œuvre du contact ne sont pas réalisables en l'état actuel.

2.6.2 Sécurités après un saut

L'équilibre de la solution extrapolée n'est pas vérifié *a priori* lors du saut, ainsi comme on peut le constater sur les exemples proposés et en particulier sur la figure 5.10a, certains calculs repartant de la solution extrapolée peuvent ne pas permettre de rééquilibrer la solution, lors de l'intégration locale de la loi de comportement sur quelques points de Gauss. Il s'agit de phénomènes très localisés difficiles à éviter, surtout qu'ils interviennent à des hauts niveaux de plasticité.

À l'instar de la gestion des cutbacks dans *Abaqus/Standard*, on propose de limiter la longueur du saut si le calcul suivant a échoué. En pratique, après un échec on reprend le processus d'extrapolation en divisant par deux la longueur du saut tenté, ce qui met à jour le facteur d'extrapolation. Dans la majorité des cas traités, cela a permis de terminer l'analyse par sauts de cycles. Malheureusement, la diminution du facteur d'extrapolation conduit à de plus petits sauts par la suite ce qui pénalise la stratégie. Ainsi, toujours de manière analogue à la gestion des pas de temps, si après un échec deux sauts se réalisent avec succès, on augmente le facteur d'extrapolation d'un coefficient γ tel que :

$$q_{Ext} \leftarrow \gamma \times q_{Ext} \quad (5.21)$$

Des essais avec $\gamma = 2$ conduisaient à un nouvel échec lors du saut ainsi « accéléré », ce qui était contre-productif. Une valeur de $\gamma = 1,25$ procure de bonnes performances, identiques à son équivalent dans *Abaqus/Standard* pour les pas de temps.

2.7 Algorithme retenu

On résume l'ensemble des développements de cette version de sauts de cycles dans un algorithme 9 très proche de l'implémentation réalisée.

Algorithm 9: Stratégie non-intrusive de sauts de cycles

Input: Δc_0 : longueur de saut initiale, α : facteur de relaxation, η_{s-1} : sélection des éléments, c_{Max} : cycle maximum

while $c \leq c_{Max}$ **do**

- Calculs des solutions nécessaires à l'extrapolation

for $c_{Base} = 1 : 3$ **do**

 Résolution du modèle : $y [c_{Base} \times \Delta t_{cycle}]$

 Incrément du nombre de cycle calculé : $c = c + 1$

end

- Construction des vecteurs de variables : $\mathbf{Y}[c]$, $\mathbf{Y}[c-1]$, $\mathbf{Y}[c-2]$, avec (5.2)

- Procédure d'extrapolation par sauts de cycles :

 — Calcul des variations entre les cycles de base : s_{-1} et s_{-2}

 — Calcul des longueurs de sauts à chaque point de Gauss 8 : $\Delta \tilde{c}$

 — Calcul de la longueur finale (8) ou du facteur d'extrapolation avec (5.14) :

Δc ou $q_{Extr}(\Delta c_0)$

 — Prédiction de la pente d'extrapolation avec (5.19)

 — Calcul de la solution extrapolée avec (5.20) et implantation dans

Abaqus/Standard

- Mise-à-jour du nombre de cycles obtenus : $c = c + \Delta c$

end

3 Illustrations numériques

Les applications numériques suivantes portent toujours sur le modèle monolithique de référence afin de constituer une base d'évaluations de la méthode des sauts de cycles. Les différents tests suivent deux études d'influences couplées entre le seuil de sélection des éléments et la méthode de calcul de la longueur de saut qui impactent les performances, mais surtout le facteur d'extrapolation comme rapporté dans le tableau 5.1.

Dans l'ensemble de ces essais numériques, on utilise les paramètres conduisant aux meilleures performances, comme montré dans la section précédente, c'est-à-dire un facteur de relaxation de 0.7 et un calcul du facteur d'extrapolation automatique pour obtenir une longueur de saut initiale de 2 cycles.

On restreint la visualisation des résultats à la zone locale du modèle de référence qui est intégré temporellement à $\Delta p_{cut} = 1e^{-4}$.

3.1 Facteur d'extrapolation

Il s'agit là du paramètre le plus important de la méthode des sauts de cycles et qui semble fluctuer de manière importante selon les cas d'applications. En outre, l'introduction de deux méthodes de calculs, motivée par les hétérogénéités des champs de la solution, le rend encore plus évolutif.

On récapitule dans le tableau 5.1 les différentes valeurs de q_{Extr} obtenues selon les seuils de sélection des éléments et la méthode de calcul utilisée pour retenir une longueur de saut commune à toute la structure.

Valeurs de η_{-1}	q_{Extr} par minimum	q_{Extr} en moyenne
$1e^{-2}$	1,98	0.83
$2e^{-3}$	—	0.13
$1e^{-4}$	2.36	0.066

TABLE 5.1 – Valeurs de q_{Extr} obtenues selon les essais

La figure 5.12 montre l'évolution des éléments sélectionnés en fonction du seuil η_{s-1} utilisé et cela pour le premier saut de chaque simulation. En effet, on constate que cette zone évolue avec la stabilisation de la structure. En outre, pour le premier saut ces zones sont identiques en espace, entre les calculs par le minimum ou la moyenne de la longueur de saut. En effet, seul le niveau des valeurs change selon le q_{Extr} appliqué, les valeurs obtenues conduisent toutes à un même saut initial de 2 cycles et sont basées sur les mêmes solutions, pour les trois premiers cycles.

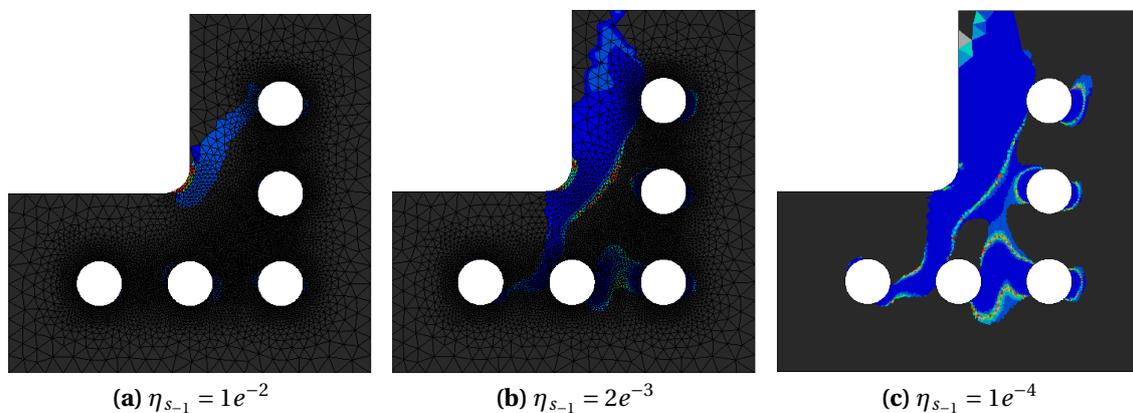


FIGURE 5.12 – Sélection des éléments selon η_{s-1} (1^{er} saut)

Pour le calcul par minimum, le facteur d'extrapolation évolue peu car la zone la plus critique est toujours sélectionnée puisqu'elle regroupe les plus grandes variations de s_{-1} . La modification de η_{s-1} peut ensuite conduire à l'identification d'un point de Gauss plus critique (près des détails structuraux plutôt que dans le congé), présentant des variations relatives plus importantes que précédemment, ce qui conduit à un accroissement de q_{Extr} . Les valeurs de ce paramètre sont beaucoup plus grandes que pour le calcul en moyenne, car il faut amplifier le saut puisque l'on est focalisé sur l'élément le plus critique.

Pour le calcul en moyenne, c'est différent car le principe est d'ajouter une part d'éléments plus stabilisés et non plus se baser uniquement sur l'élément le plus critique. Sur le cas d'étude, de fortes hétérogénéités sont observées sur des bandes d'éléments qui se stabilisent rapidement en périphérie de la zone plastique. Ainsi, plus la zone est grande plus on ajoute de stabilité et plus la valeur du paramètre est petite. Un seuil η_{s-1} faible sélectionne les éléments les plus critiques, d'où une plus grande valeur de q_{Extr} . Mais comme certains de ces éléments se stabilisent rapidement, au saut suivant, ils engendrent un saut important, pouvant conduire à un problème d'intégration, lors du premier calcul repartant de l'arrivée du saut effectué.

3.2 Calcul de la longueur de saut par minimum

Comme décrit dans le tableau 5.1, on réalise plusieurs essais en faisant varier le seuil d'acquisition des éléments, puis on utilise le calcul de la longueur de saut finale en retenant le minimum dans la structure. Pour chaque calcul réalisé, les valeurs de q_{Extr} sont amenées à être modifiées, à la baisse lors de l'échec d'un saut ou à la hausse si plusieurs sauts consécutifs se déroulent correctement. On rappelle dans le tableau 5.1, le cycle auquel se produit la modification.

Valeurs de η_{s-1}	Valeurs de q_{Extr}	Cycles calculés	Temps de calcul
$1e^{-2}$	1,98 - 0,93 (123) - 1,17 (144)	44	1h 38min
$1e^{-4}$	2.36 - 1,06 (110) - 1,33 (123)	44	1h52

TABLE 5.2 – Performances obtenues pour le calcul en minimum

Avec cette méthode, les performances en termes de temps de calcul et de précision sont homogènes, car on focalise la longueur de chaque saut sur le point de Gauss le plus critique. Ainsi, changer le seuil η_{s-1} revient à élargir la zone de sélection et potentiellement à trouver un autre point plus critique.

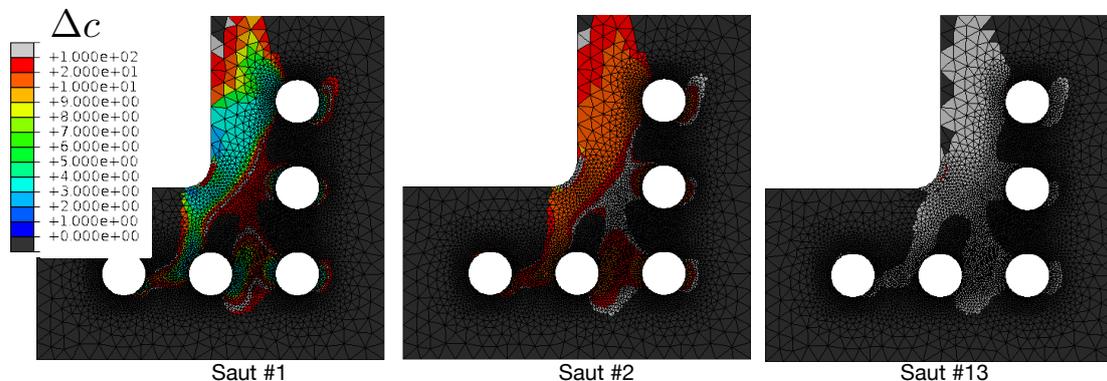
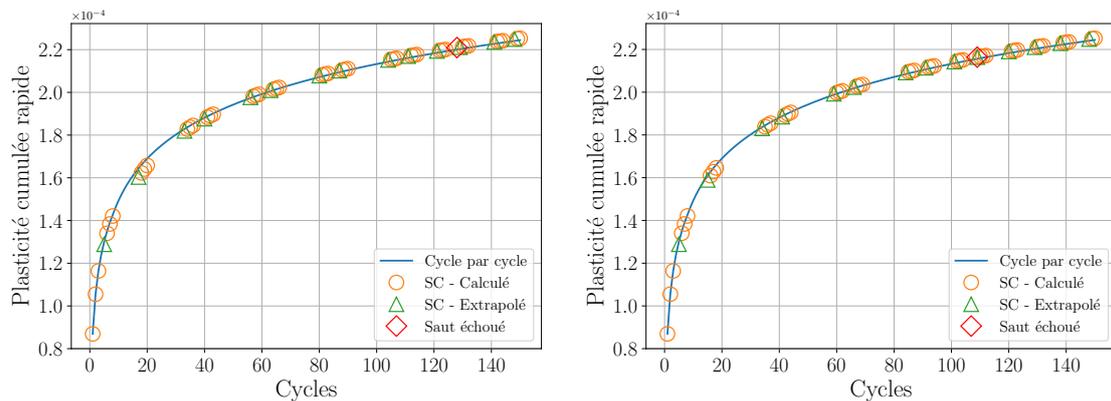


FIGURE 5.13 – Cartes de longueurs de saut pour différentes tentatives (minimum)

L'utilisation d'un q_{extr} important engendre une augmentation générale des longueurs de sauts sur la zone observée (cf. figure 5.13) et cela dès le deuxième saut, à cause de la stabilisation globale de la structure. Lors des derniers sauts, seuls quelques éléments conduisent à un saut raisonnable, voir même quelques points de Gauss uniquement. Cela peut en partie expliquer les faibles longueurs de saut en fin de simulation à haut niveau de plasticité.

Une tendance observable sur l'approche en minimum est que la méthode conduit à des couples de sauts un court lié à un long (cf. figure 5.14). En effet à partir d'une cinquantaine de cycles, après un saut acceptable d'une dizaine de cycles, le saut suivant est très court. On peut penser qu'après une extrapolation importante, de petits décalages de la solution plastique sont introduits et sont rattrapés lors des calculs des cycles de base suivants. Ainsi, des variations relatives importantes, amplifiées sur l'élément le plus critique, apparaissent et limitent la longueur du saut suivant. Celui-ci introduisant moins de décalages, le saut suivant est plus long.



(a) Plasticité cumulée rapide pour $\eta_{s-1} = 1e^{-2}$

(b) Plasticité cumulée rapide pour $\eta_{s-1} = 1e^{-4}$

FIGURE 5.14 – Solutions par calcul par minimum (élément #10775)

3.3 Calcul de la longueur de saut en moyenne

Afin de bénéficier de la stabilisation générale de la structure, on ne base plus le calcul de la longueur de saut finale sur le minimum, mais sur la moyenne dans la zone sélectionnée par le seuil η_{s-1} . Plus la zone est large, plus de faibles variations sont ajoutées et plus on obtient un facteur d'extrapolation faible. En effet, on prend en compte des longueurs de sauts plus importantes, ce qui améliore la prédiction de la longueur finale, donc le facteur d'extrapolation est plus petit (cf. tableau 5.3).

La bonne exécution de l'approche dépend de la valeur de seuil utilisée. Avec $\eta_{s-1} = 1e^{-2}$, on focalise sur une zone très fluctuante (cf. figure 5.12a) à laquelle on applique un facteur d'extrapolation important, conduisant rapidement à de grands sauts imprécis qui ne permettent pas de terminer complètement l'analyse (cf. figure 5.15a). À

Valeurs de η_{s-1}	Valeurs de q_{Extr}	Cycles calculés	Temps de calcul
$1e^{-2}$	0,83 - 0,41 (8)	12	38min (échec)
$2e^{-3}$	0,13	15	35min (fin cycle 360)
$1e^{-4}$	0,066 - 0,028 (99) - 0,035 (113)	45	1h 41min

TABLE 5.3 – Performances obtenues pour le calcul en minimum

l'opposé, une zone plus large $\eta_{s-1} = 1e^{-4}$ (cf. figure 5.12c) pondère bien mieux la stabilisation de la structure et cette approche devient équivalente à l'approche par minimum. Aussi, on observe moins la limitation de la longueur de saut en fin d'analyse et les sauts sont alors de longueurs plus homogènes, limitées par la valeur assez faible et atténuées par la sécurité appliquée sur le facteur d'extrapolation.

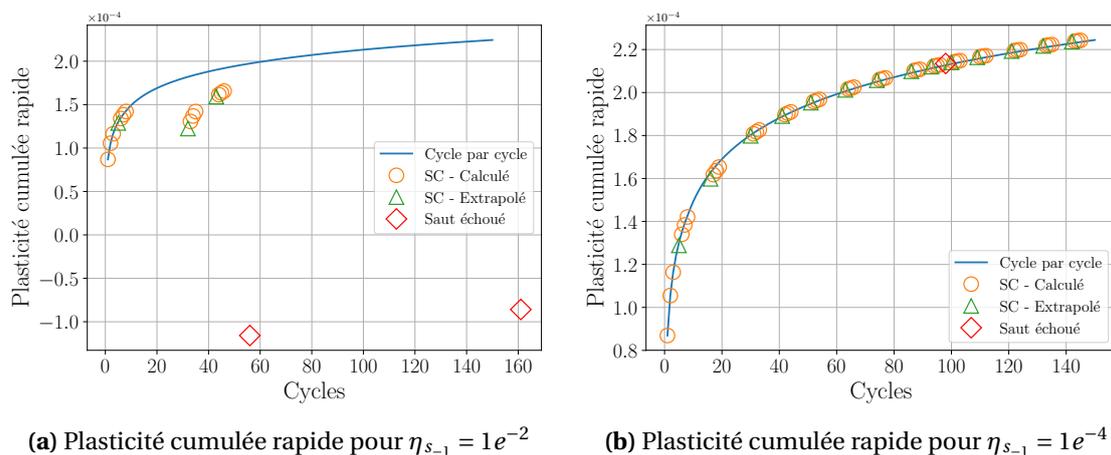


FIGURE 5.15 – Solutions par calcul en moyenne (élément #10775)

Un essai à une valeur intermédiaire de $\eta_{s-1} = 2e^{-3}$ est proposée sur la figure 5.16 où l'on constate que cette valeur permet de bien discriminer la zone pertinente d'éléments pour le calcul de la longueur du saut. Les longueurs y sont bien croissantes au fur et à mesure des sauts.

Bien que le dernier saut conduise à une légère imprécision (cf. figure 5.17), on obtient le comportement auquel on peut s'attendre *ie.* des sauts de plus en plus longs grâce à la stabilisation de la structure.

Le choix $\eta_{s-1} = 2e^{-3}$ apparaît comme le plus performant, car le saut est de bonne longueur. Cependant et c'est la conclusion générale à propos de ce calcul en moyenne, la bonne conduite de cette approche est liée au choix (difficile) de la zone des éléments pour le saut.

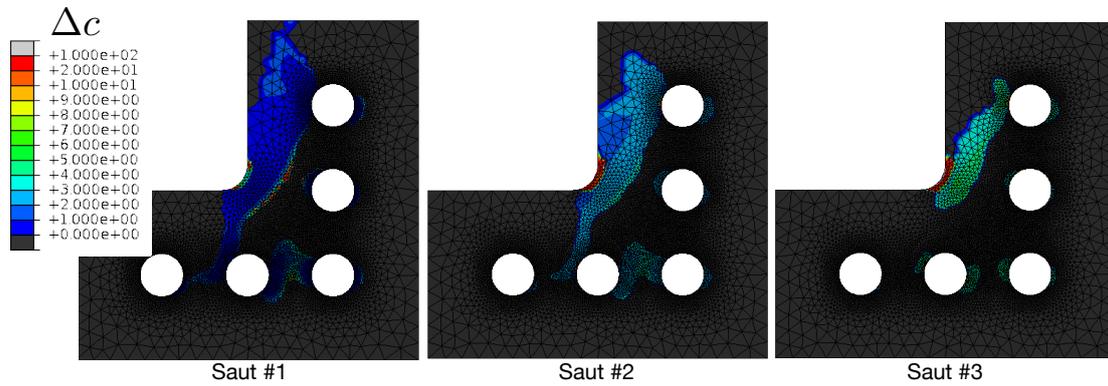


FIGURE 5.16 – Cartes de différents sauts pour $\eta_{s-1} = 2e^{-3}$ (minimum)

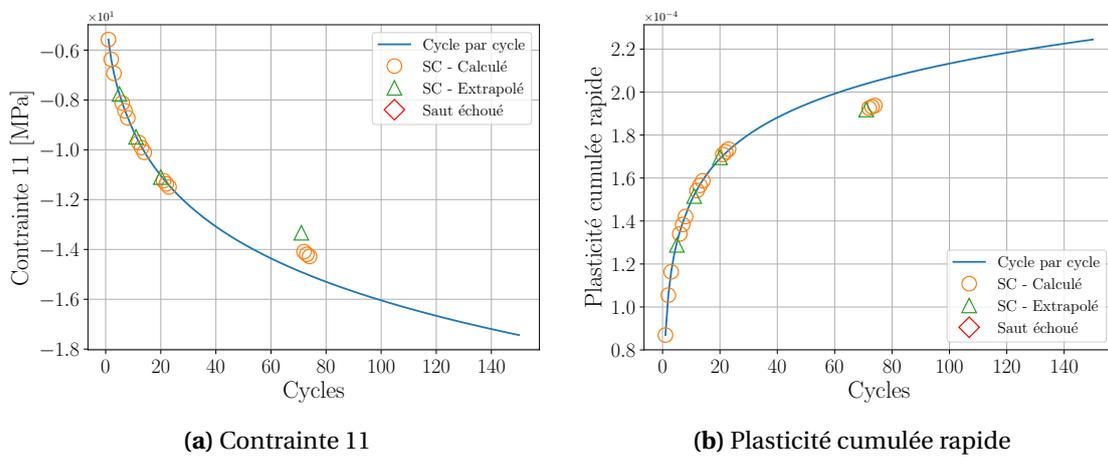


FIGURE 5.17 – Solutions par calcul en moyenne et $\eta_{s-1} = 2e^{-3}$ (élément #10775)

3.3.1 Faible longueur de saut en fin d'analyse

Une interrogation persiste sur le fait que dans la majorité des calculs menés, on observe des sauts de longueur limitée alors que l'impression générale est que la structure est stabilisée. Ce phénomène intervient au-delà du 50ème cycle. Comme on peut le constater sur la figure 5.2, il y a très peu d'évolution générale entre le cycle 50 et le dernier calculé pour la référence. Cette partie de l'histoire de la structure est dominée par de hauts niveaux de plasticité cumulée qui rendent instables les sauts, surtout s'ils sont grands, à cause de divergences locales sur certains éléments critiques. Sur l'ensemble des calculs ayant échoué après un saut, ceux-ci interviennent dans cette zone autour du 100ème cycle.

On peut se demander si ces problèmes sont dus à l'exemple traité (cela n'apparaît pas sur des géométries plus simples). La plasticité cumulée est un indicateur de l'endommagement se développant dans la structure, ainsi on peut atteindre les limites du modèle et donc il n'est peut être pas pertinent d'analyser cette structure à ces ni-

veaux. Les analyses, faites au niveau des points de Gauss limitant la longueur du saut, montrent qu'ils sont situés dans les zones d'accommodation ou légèrement en périphérie de celles-ci. Il peut donc simplement s'agir de problèmes liés au maillage car seuls quelques point de Gauss, répartis sur plusieurs éléments, semblent incriminés.

En outre, comme on a diminué la valeur de q_{Extr} pour assurer la poursuite des calculs après un saut raté, la longueur de saut s'en voit diminuée.

Des cycles supplémentaires de stabilisation [Saï, 1993] peuvent être utilisés, on peut par exemple calculer 5 cycles consécutifs au lieu de 3 avant d'effectuer le saut, ce qui est censé améliorer sa réalisation, mais abaisse le gain en temps de calcul.

4 Couplage avec la méthode *global/local*

Après avoir établi une version plus systématique et robuste dans notre cadre d'étude, la technique de sauts de cycle est couplée à la méthode *global/local* afin que cette dernière puisse être appliquée sur plusieurs cycles de chargement. Sans ce couplage, la procédure d'analyse conduirait à plus d'une centaine d'heures de calcul, car chaque cycle nécessite dans cet exemple une analyse de près d'une heure.

Pour le couplage *global/local*, on se base uniquement sur les modèles locaux, lieux où apparaissent les principaux phénomènes cycliques. On y observe que la moyenne est plus élevée, en terme de longueur de saut, que pour le modèle global, en particulier pour le domaine auxiliaire. Le modèle global, de part sa rigidité importante, subit de fortes variations de sa solution lors des premiers cycles à un niveau de plasticité assez restreint. Au-delà, il se stabilise dans un régime d'accommodation au niveau du congé. Lors des premiers cycles, pour une longueur de saut identique, on observe que le facteur d'extrapolation peut être deux fois plus élevé sur le modèle global que sur le modèle local. Ainsi, si on se base sur ce modèle, les sauts futurs atteignent des longueurs importantes, à cause de la stabilisation générale de la structure (modèle global) plus rapide que celle du modèle local. Ces sauts importants pourraient conduire à des échecs de sauts au niveau local.

C'est pourquoi, on se base uniquement sur le modèle local pour le calcul de la longueur de saut.

4.1 Application de la méthode *global/local*

Dans le couplage avec l'algorithme *global/local*, l'utilisation d'une technique de sauts de cycles, choisie pour cela, ne pose pas de problèmes spécifiques et il faut simplement extrapoler parallèlement le modèle global, l'auxiliaire (réutilisant une partie du traitement global) et le local.

La seule différence consiste alors à extraire les solutions sur les deux modèles principaux et d'y appliquer le traitement défini précédemment dans ce chapitre. On retient une longueur de saut commune issue de la solution locale. D'ailleurs durant les calculs

effectués, ce n'est jamais le global qui a rencontré des problèmes d'intégration matériau (divergence locale) donc ce choix se justifie toujours.

La seule difficulté repose sur la gestion des *subroutines Fortran* qui doivent être triplées, afin d'alimenter chaque modèle avec son propre fichier texte de solution.

4.2 Illustrations numériques

Le calcul porte sur le même modèle non-conforme, au niveau des interfaces, que pour l'approche monolithique. Le seuil de sélection des éléments est de $1e^{-4}$ et le calcul de la longueur de saut est réalisé en moyenne (compromis performance et robustesse). Les paramètres de la méthode *global/local* sont ceux définis pour le couplage optimal, avec une intégration temporelle exécutée à $\Delta p_{cut} = 1e^{-4}$.

Au premier saut, pour une longueur de deux cycles, le facteur d'extrapolation du modèle global est de 0,11 alors qu'il est de 0,057 pour le local. Cette dernière valeur est ensuite appliquée aux deux modèles. Ainsi lors des premiers sauts, le global conduirait à des sauts plus courts que ceux évalués sur le modèle local, mais plus longs, une fois que le processus de stabilisation est avancé.

Les résultats sont semblables à ceux obtenus sur le calcul de référence, le couplage faible utilisé est très précis sur cet exemple. Ainsi, la précision est excellente que ce soit sur l'élément le plus chargé (*cf.* figure 5.18) ou pour un élément placé dans une zone de redistributions (*cf.* figure 5.19). Ces deux éléments représentent respectivement des zones accommodées et adaptées. L'erreur relative commise par rapport à la référence, sur l'élément le plus chargé est de 0.05% pour la contrainte de von Mises et de 0.02% pour la plasticité cumulée rapide. Ces grandeurs d'intérêt doivent être évaluées avec précision, car elles sont ensuite utilisées pour l'évaluation de la durée de vie de la structure.

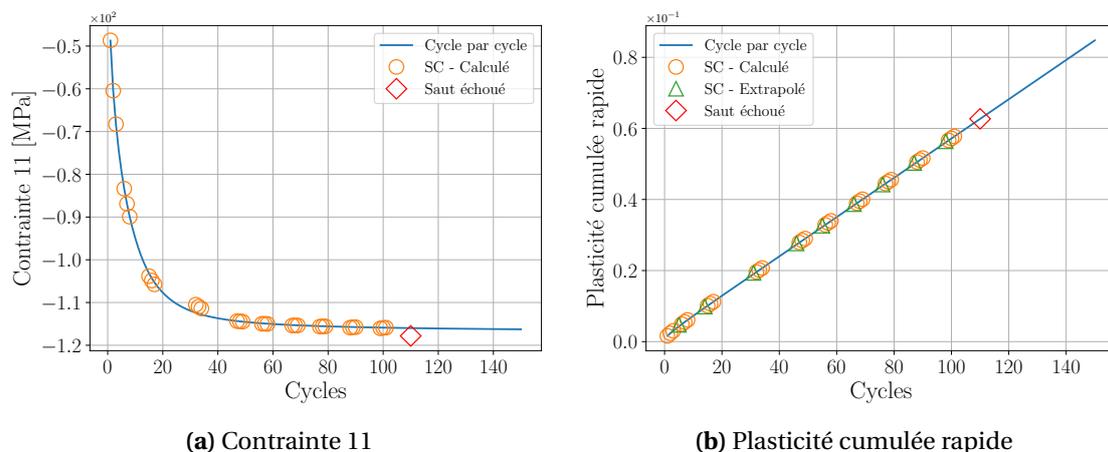


FIGURE 5.18 – Solutions par analyse *global/local* (élément #670 le plus chargé)

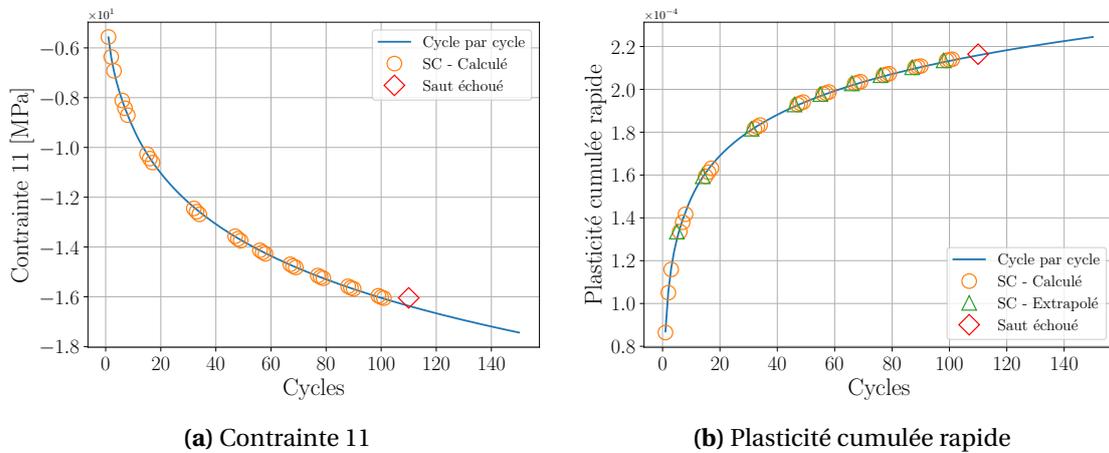


FIGURE 5.19 – Performances obtenues pour l'analyse *global/local* (élément #10775)

Le temps de calcul global est largement réduit et atteint une trentaine d'heures au lieu de la centaine évaluée pour une approche *global/local* cycle par cycle. Afin de réduire la complexité du calcul, la procédure de sécurité n'a pas été implémentée, donc la stratégie s'arrête lorsque le calcul de reprise de l'état extrapolé échoue. La contrainte n'a en réalité pas besoin d'être extrapolée, c'est pourquoi les solutions extrapolées correspondantes n'apparaissent plus sur les courbes. Cette grandeur semble post-traitée après le calcul éléments finis par *Abaqus/Standard*. Cela participe à la simplification de la phase d'extrapolation.

Conclusion

En reprenant les méthodes existantes de sauts de cycles, des choix forts ont permis d'obtenir une méthode systématique et satisfaisante dans le cadre de notre étude :

- choix de la formulation des dérivées,
- choix d'une variable unique pour le calcul de la longueur de saut,
- sélection des éléments pour l'évaluation du saut,
- méthodes de calcul du saut par le minimum ou la moyenne,
- relaxation adaptée aux grandes variations en début d'histoire,
- facteur d'extrapolation automatique basé sur une longueur de saut initiale.

La méthode de sauts de cycles présente donc de nombreux avantages. Sa simplicité, de part la ré-utilisation de solutions éléments finis, facilite grandement son développement non-intrusif. En particulier, cela a été très profitable pour son couplage à la méthode *global/local*.

Malgré de nombreux tests effectués, allant de l'élément volumique à la structure 2D ici, puis 3D dans le chapitre 4 et en passant par des éprouvettes de fatigue 3D, des tests complémentaires peuvent être envisagés pour finir de valider complètement cette méthode. Enfin, l'implémentation peut elle aussi être retravaillée, notamment vis-à-vis du

champ de déplacement initial, afin de traiter des problèmes de contact ou de grandes transformations, qui sont pour l'instant limitant, même s'ils ne sont pas l'objectif de notre étude.

Le choix entre l'utilisation du calcul par moyenne ou par minimum, peut se baser sur la connaissance que l'on a du cas à traiter. S'il s'agit d'un calcul « exploratoire », *ie.* pour lequel on a très peu d'expérience, alors il vaut mieux avoir recours à une estimation basée sur le minimum des longueurs de sauts de la structure, pour être certain d'avoir une solution. Si plusieurs calculs ont déjà été réalisés et que l'on dispose d'une bonne idée de la solution plastique, on peut se tourner vers la méthode de calcul en moyenne plus rapide, notamment si plusieurs calculs similaires (chargements, géométrie) sont réalisés afin de pouvoir régler finement le paramètre η_{s-1} .

Chapitre 6

Application à une structure de complexité industrielle

La méthode *global/local* non-intrusive est évaluée dans ce chapitre sur un cas d'application représentatif des modèles industriels utilisés chez Safran Aircraft Engines. Ce chapitre est consacré à la démonstration des capacités de la version de ce couplage non-linéaire vis-à-vis de telles structures. L'ensemble des simulations réalisées dans ce chapitre a été effectué sur les calculateurs parallèles du LMT et de Safran Aircraft Engines.

1 Présentation du cas test

La structure étudiée ici représente une aube de turbine haute pression refroidie et se veut proche d'une autre application, elle confidentielle, réalisée durant cette thèse sur un modèle en cours d'étude chez Safran Aircraft Engines (*cf.* section 5). Les modèles présentés ci-dessous ont pour objectifs de tester la méthode vis-à-vis :

- du traitement d'un plus grand nombre de degrés de liberté en 3D,
- des performances,
- de la mise en œuvre de plusieurs zones locales d'analyses avec un modèle global non-linéaire.

Un modèle monolithique, dit de référence, est séparé en un modèle global représentant l'ensemble de la structure 6.1, mais à la différence du modèle 2D précédent, il conserve tout de même certains détails structuraux majeurs, tels que les ouvertures de refroidissement à l'arrière de l'aube. On définit sur ce modèle deux zones locales de ré-analyse, comme indiqué sur la figure 6.1b.

La première zone locale de zoom est située à l'avant de la structure sur le bord d'attaque (noté par la suite BA). Le modèle local associé 6.3b présente de multiples trous de micro-perforation servant à créer un bouclier autour de la structure *via* de l'air frais arrivant dans des canaux à l'intérieur de l'aube (*cf.* figure 6.1a). Ce modèle est substitué au sein du modèle global par le modèle auxiliaire associé, représenté sur la

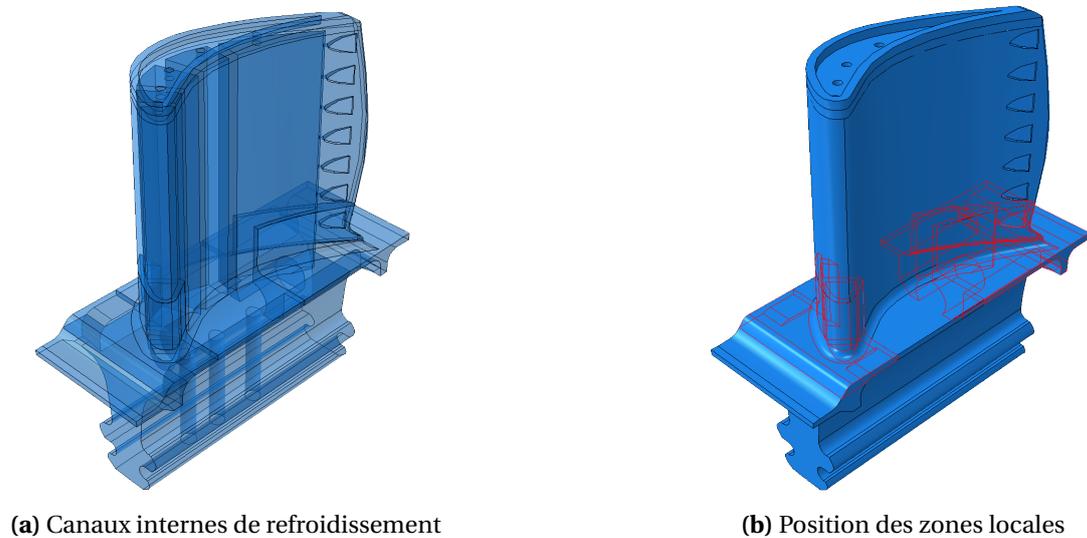


FIGURE 6.1 – Représentations du modèle global

figure 6.3a.

Une seconde zone de ré-analyse est installée à l'arrière de la structure au niveau du bord de fuite (noté BF). Sur le même principe, on représente dans le modèle local de la figure 6.4b des détails de micro-perforation pour le refroidissement. Au contraire, des modèles liés au bord d'attaque, le modèle auxiliaire associé comporte un détail géométrique qui est donc représenté au niveau global.

Le modèle de référence associé comporte environ 1,3 millions de nœuds et est traité par *Abaqus/Standard* avec $5,63e^6$ degrés de libertés (notés *ddl*s dans la suite), ce qui est représentatif des cas les plus complexes réalisés en non-linéaire dans l'industrie et qui sont réservés aux calculs finaux de certification. Le nombre d'éléments à utiliser, et donc de nœuds, est donc bien plus important dès lors que l'on tient compte des détails structuraux. Notons que les modèles locaux sont créés dans les approches usuelles de *submodeling* et ne sont pas nécessairement compatibles en terme de discrétisation aux niveaux des interfaces avec le modèle global. Être à même de réutiliser ces modèles sans avoir à les rendre compatibles avec le modèle global est un avantage de la méthode. La création du maillage de ces pièces de façon monolithique est une tâche très complexe, souvent externalisée.

Modèles	Global	Local BA	Auxiliaire BA	Local BF	Auxiliaire BF
Nbre de <i>ddl</i> s	$1,57e^6$	$1,47e^6$	75 642	$3,16e^6$	500889
Nœuds d'interface	4210	2580	1687	2520	2523

TABLE 6.1 – Dimensions des maillages mis-en-jeu

Les nombres de nœuds, représentatifs du coût de résolution de ces modèles, sont

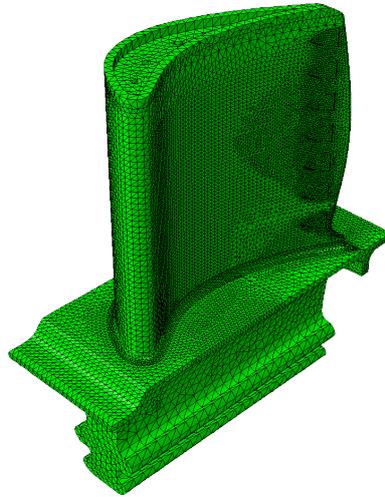
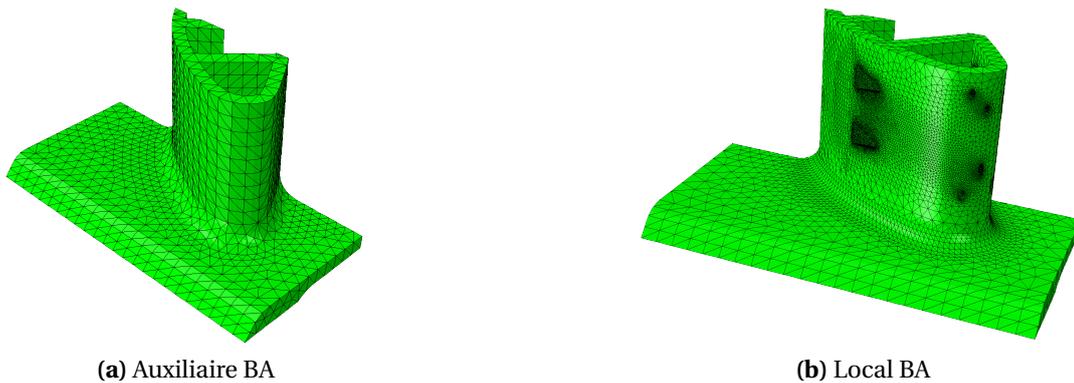


FIGURE 6.2 – Maillage global



(a) Auxiliaire BA

(b) Local BA

FIGURE 6.3 – Modèles liés au bord d'attaque

donnés dans le tableau 6.1. Pour le modèle global et celui de référence, certains des degrés de libertés peuvent être rajoutés, lors de la résolution, afin de coupler les zones locales et auxiliaires à la partie complémentaire (commune aux deux modèles) par la méthode *TIE*. On remarque ici que les modèles locaux sont de tailles comparables voire supérieures à celle du modèle global.

Sur cette structure, une résolution globale sur un cycle de chargement prend environ 20 minutes, tandis qu'il faut 7 heures et 30 minutes pour simuler le modèle de référence.

Les chargements appliqués à la structure sont de même nature que ceux utilisés sur le cas en deux dimensions, à savoir un effort centrifuge sur toute la structure et une pression appliquée sur le bord d'attaque. Chacun de ces efforts est bien entendu répercuté sur les modèles locaux lorsque cela est nécessaire. Les déplacements sont par ailleurs bloqués de manière répartie au niveau du pied de l'aube, afin de prendre en compte l'interaction entre l'aube et le disque.

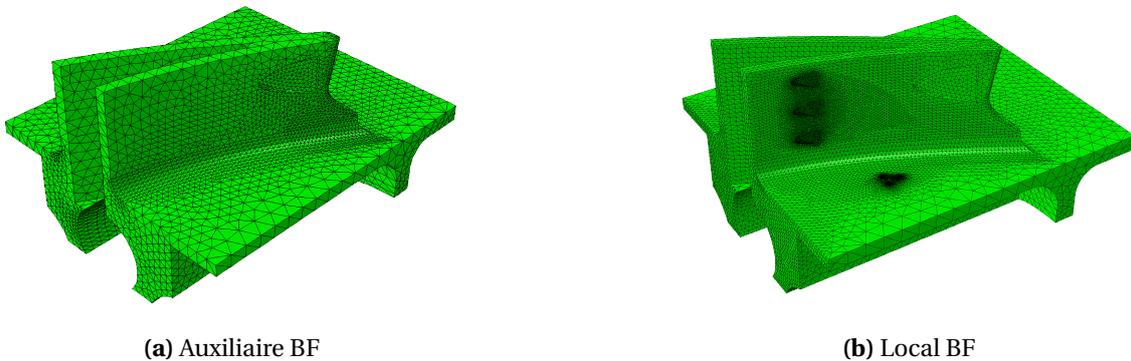


FIGURE 6.4 – Modèles liés au bord de fuite

2 Difficultés liées au 3D

Il n'y a pas eu de blocage majeur lié à l'utilisation de la méthode sur des structures 3D, à part une augmentation générale de la complexité liée à l'implémentation. Cependant, certains points pouvant poser des soucis limités doivent être rappelés.

2.1 Gestion des interfaces et des incompatibilités de maillage

2.1.1 Gestion des interfaces non-conformes en 3D

Le processus de maillage s'est avéré difficile et fastidieux sur ce type d'application, de part la géométrie complexe, mais surtout à cause de la finesse des parois internes de l'aube (cf. figure 6.1a). Dans le but d'être plus modulaire, la question de la ré-utilisation des maillages est prépondérante et ainsi l'outil de couplage pour interfaces non-conformes (cf. figure 6.6) a été étendu en 3D.

L'interface *global/local* (cf. figure 6.5a) entre ces deux modèles est volontairement non-conforme (cf. figure 6.6a) pour tester notre approche sur un problème 3D complexe. L'interface définie sur le bord de fuite est plus fine due à la géométrie complexe. Pour cela et pour marquer une différence avec le bord d'attaque, les maillages sont conformes pour quasiment tous les nœuds de l'interface (voir 6.6b).

Il se base sur le même principe que l'approche en deux dimensions mais se distingue par une complexité accrue :

- *Identification des faces des éléments sur l'interface* : un groupe d'éléments est identifié comme appartenant à l'interface lors de la création du modèle. Ensuite, lors de ce couplage d'interface, une première étape est d'isoler les faces des éléments sur l'interface.
- *Identification du lien entre le nœud esclave et l'élément maître* : une fois les faces des éléments connues, on réalise une boucle sur tous les nœuds du maillage esclave afin de les affilier à une face d'un élément maître, par des considérations géométriques élémentaires.

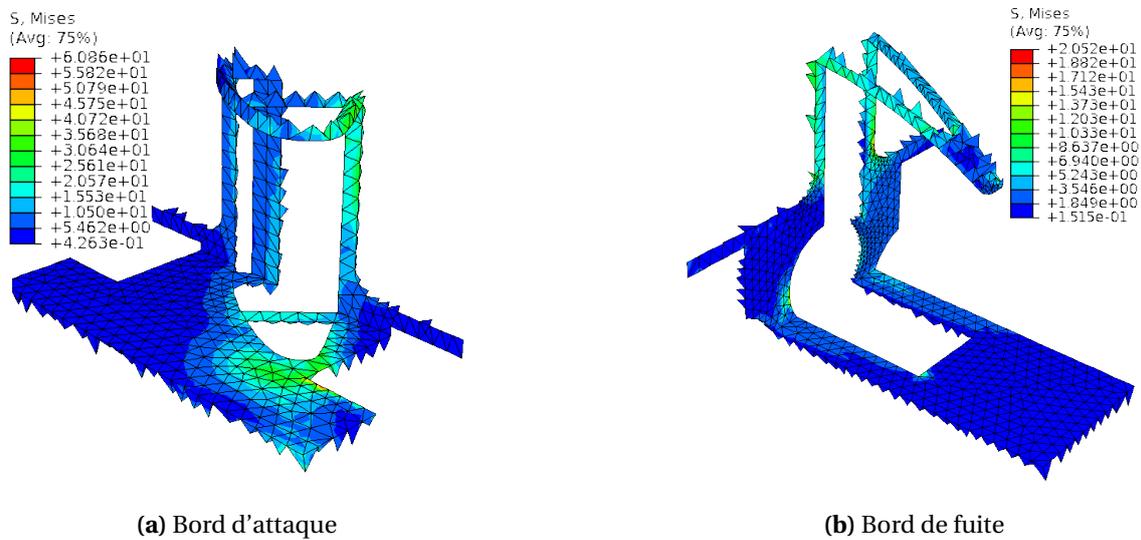


FIGURE 6.5 – Interfaces entre les modèles

— *Interpolation sur les fonctions de forme* : pour pouvoir interpoler le nœud esclave courant sur les fonctions de forme de l'élément maître, on doit tout d'abord calculer sa position dans la configuration initiale de l'élément. Pour cela, on utilise une approche proposée dans [Duffy, 2012].

Une telle approche dépend des éléments utilisés et de leur définition dans le code utilisé. Une part importante du travail consiste, à l'aide de tests élémentaires, à avoir une bonne connaissance du procédé de définition des faces de l'élément, par rapport à l'ordre des nœuds dans la définition de chaque élément.

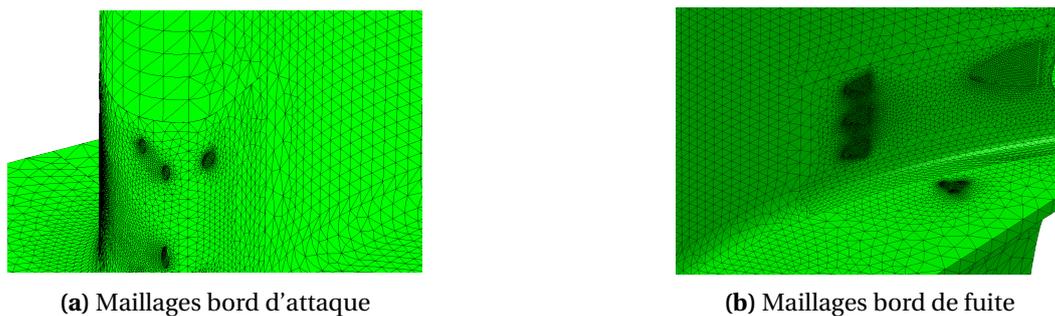


FIGURE 6.6 – Incompatibilité et conformité des interfaces

Toutes ces procédures de couplage ont été automatisées par un script *Python*, lisant les fichiers de définition de chaque modèle de la stratégie et générant les différentes matrices de couplage. Ce procédé est réalisé avant l'exécution de la stratégie et n'est à effectuer qu'une seule fois à la création des modèles éléments finis où si l'on modifie une géométrie.

2.1.2 Complexité de la géométrie des interfaces

La question de la précision du calcul des efforts de réaction a déjà été posée sur des modèles 2D et se retrouve aussi sur les cas 3D (cf. figure 6.7). Vu la taille de la structure à mailler, certaines parties des interfaces ne peuvent pas être raffinées aussi finement qu'elles le nécessiteraient, afin de garder une homogénéité continue de la taille des éléments.

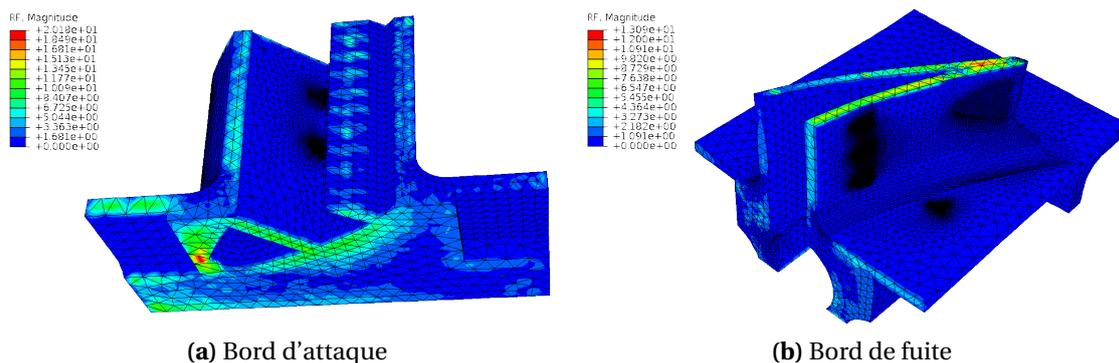


FIGURE 6.7 – Efforts de réaction sur les interfaces

Ainsi, on peut constater sur la figure 6.7 qu'au niveau des interfaces les efforts de réactions sont plutôt homogènes par face observée. Cependant certains des efforts nodaux apparaissent comme important et suggèrent qu'un raffinement du maillage dans leur voisinage serait nécessaire.

2.2 Précaution quand au choix des éléments

Selon le type d'éléments utilisés pour le maillage 3D, il apparaît des différences sur le calcul des forces de réaction pour les éléments volumiques (cube et tétraèdres) quadratiques dans *Abaqus/Standard*. Ces problèmes n'apparaissent pas pour les versions linéaires de ces éléments. Les efforts de réactions présentent des valeurs maximum au niveau des points milieu de chaque arête. Dans certains cas, cela peut conduire à des problèmes de précision de la solution *global/local* voir même des problèmes de convergence.

Sur un exemple simple (cf. figure 6.8) d'un cube en traction, soumis à un déplacement imposé homogène sur une face, on compare les forces de réactions associées obtenues avec des éléments différents. Ce problème intervient tant pour des modèles linéaires que pour des modèles non-linéaires.

Aucune influence sur les contraintes ou la plasticité cumulée, n'a été constatée. Cependant, cela peut grandement perturber notre algorithme, car l'évaluation des efforts de réactions est un point clé.

Pour le traitement du cas test 3D, les éléments C3D10M, utilisant plus de point de Gauss, ont été utilisés afin de corriger ce problème. Cependant même sur l'exemple du

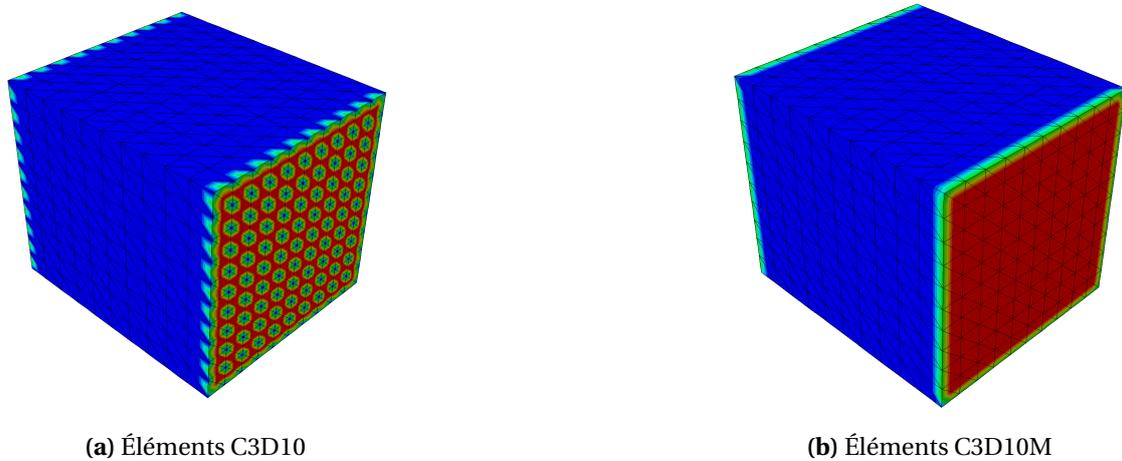


FIGURE 6.8 – Efforts de réaction obtenus selon le type d'élément utilisé

cube, le recours à ces éléments enrichis augmente de près de 30% le temps de calcul.

2.3 Gestion des données écrites par le code commercial

Dans le cadre du développement non-intrusif avec un code commercial, une bonne connaissance des pratiques de ce dernier est primordiale pour s'éviter de petits désagrèments. Par exemple, *Abaqus/Standard* génère plusieurs fichiers à la fin d'un calcul surtout lorsque l'on a besoin d'un *RESTART* ensuite. Des fichiers dédiés sont alors écrits contenant l'ensemble de la solution et sont pas conséquents très volumineux. Par ailleurs, il est important de ne demander que les solutions (contraintes, déplacements, plasticité cumulée) nécessaire car leur écriture prend du temps et augmente la taille des fichiers solutions. Ainsi, l'espace mémoire alloué peut très vite être saturé et provoquer l'arrêt de la stratégie *global/local*. Cet aspect est prépondérant avec l'utilisation de 5 modèles différents sur plusieurs incréments et avec les besoins de *RESTART*. Pour ces raisons, une suppression dynamique des fichiers inutiles à l'incrément $n - 2$ (il ne faut pas supprimer les fichiers utiles de *RESTART* à l'incrément précédent $n - 1$) est instaurée, afin de ne pas saturer l'espace disque.

Un gain de temps important, peut être obtenu lors de l'extraction des efforts de réaction et des déplacements d'interface dans les fichiers de solutions d'*Abaqus/Standard*. Lors de la première extraction, l'ensemble du fichier doit être parcouru et les positions des nœud des interfaces sont sauvegardées (un accès direct n'est pas possible *via* le numéro du nœud). Aux itérations suivantes, un accès direct est possible grâce aux positions enregistrées. Sur les modèles 3D locaux, cela fait passer le temps d'extraction complet à 10 secondes au lieu de 2 minutes environ, ce qui représente un gain important sur toute la simulation.

3 Résultats sur un cycle de chargement

3.1 Pré-discrétisation

La pré-discrétisation est réalisée de la même manière qu'en 2D au moyen d'un calcul sur le modèle global seul à travers le cycle complet. La solution est alors obtenue en *21 min. 23 s.* grâce à 16 processeurs et 20 Go de mémoire vive. Ainsi, on confirme que cette pré-discrétisation est peu coûteuse par rapport au temps total d'analyse.

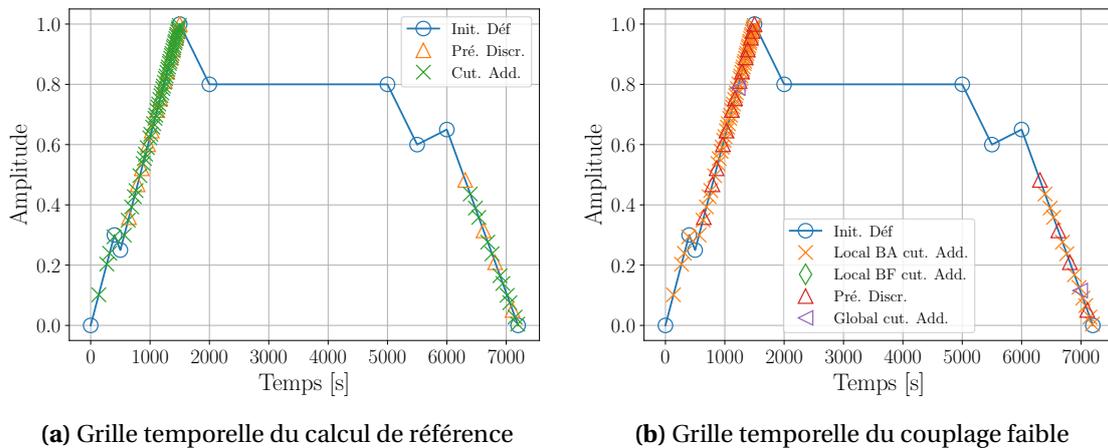


FIGURE 6.9 – Intégrations réalisées

La figure 6.9 compare les grilles d'intégrations obtenues entre le calcul de référence et l'approche *global/local*. Celles-ci sont proches, car basées sur une intégration à pas de temps automatique réglée à $\Delta p_{cut} = 5e^{-4}$. Cette valeur est un compromis entre le temps de calcul et la précision.

On peut récapituler les intégrations réalisées comme suit :

- La *définition initiale du cycle* est constituée de 8 incréments.
- La *pré-discrétisation globale* comprend 17 pas de temps.
- Le *calcul de référence* doit rajouter 62 incréments pour respecter la qualité demandée de $\Delta p_{cut} = 5e^{-4}$.
- Le couplage faible ajoute 2 pas de temps globaux et aussi 62 incréments locaux.
- Le calcul en *submodeling* conduit seulement à 57 pas de temps locaux supplémentaires.

La pré-discrétisation a joué son rôle et a permis de limiter le temps de calcul. En effet, seuls deux pas de temps globaux sont ajoutés ce qui n'a pas ralenti la stratégie. En effet, un des *cutbacks* globaux est apparu dès la première itération ce qui n'a pas ralenti la méthode. Quand au second, il est apparu à la 4ème itération, ce qui a obligé à reprendre complètement le calcul sur le plus petit pas de temps apparu. Moins sollicité que le modèle local du bord d'attaque, le modèle local du bord de fuite est intégré indépendamment et n'a pas requis de pas de temps supplémentaire à la pré-discrétisation.

3.2 Résultats obtenus

L'analyse *global/local* est menée dans sa configuration optimale proposée suite aux exemples 2D : avec un couplage faible et une convergence de résidu limitée à $1e^{-3}$ ou un arrêt après 5 itérations maximum. En pratique, soit la limite du résidu est atteinte soit ce dernier atteint une valeur inférieure à $5e^{-3}$. Il s'agit de valeurs apparues comme satisfaisantes en 2D. Le couplage faible est d'ailleurs étendu à l'utilisation de deux grilles temporelles locales, car l'intégration des deux modèles locaux est indépendante. Ces deux modèles continuent d'être couplés au modèle global à tous les pas de temps de ce dernier.

La figure 6.10 montre les solutions globales obtenues en contrainte de von Mises et en plasticité cumulée rapide au maximum de la mission. À ce sujet, le global a été corrigé de manière importante par les modèles locaux, puisque deux pas de temps ont été ajoutés avec une valeur de détection $\Delta p_{cut} = 5e^{-4}$. Cela veut dire que la solution globale a connu deux incréments d'au moins $5e^{-3}$ sur la solution de plasticité rapide cumulée (ayant au moins un niveau de $5e^{-3}$, cf. figure 6.10b) par rapport à la pré-discrétisation. Cela provient des corrections *global/local* effectuées.

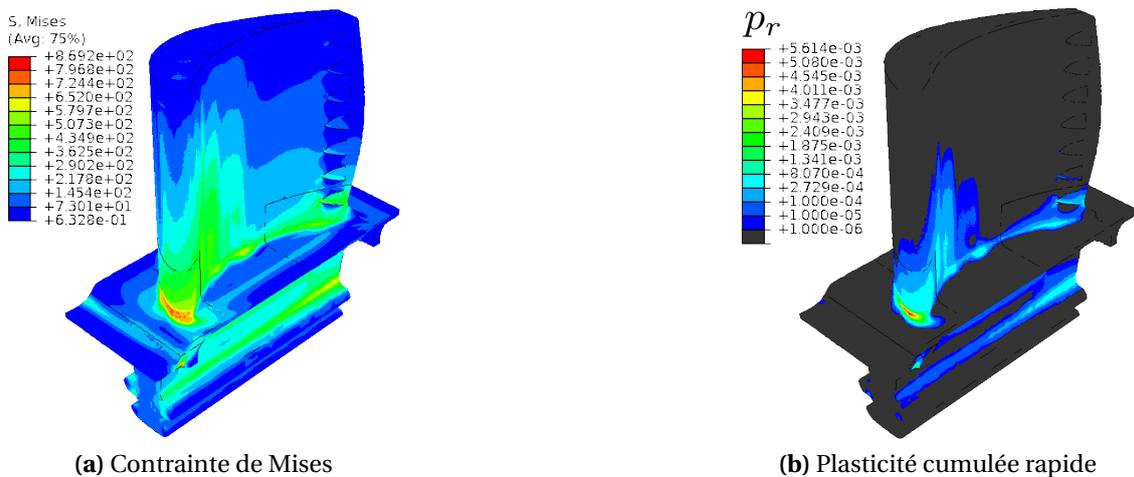


FIGURE 6.10 – Solutions globales au maximum de la mission

Les résidus d'équilibre *global/local* tracés sur la figure 6.11 montrent un taux de convergence plus faible que pour le cas 2D. Cela peut être dû à la complexité des interfaces qui peut influencer sur la correction apportée à la solution. Cependant, on constate malgré tout qu'une correction importante est apportée.

On termine cette étude par l'analyse de la précision sur l'élément le plus chargé de chaque zone locale. Par ailleurs, une analyse par *submodeling* a été réalisée pour comparer les performances. Elle a permis de résoudre le calcul sur le cycle complet en 4 heures et 37 minutes contre 7 heures 27 minutes pour la référence et 31 heures 15 minutes pour la méthode *global/local*.

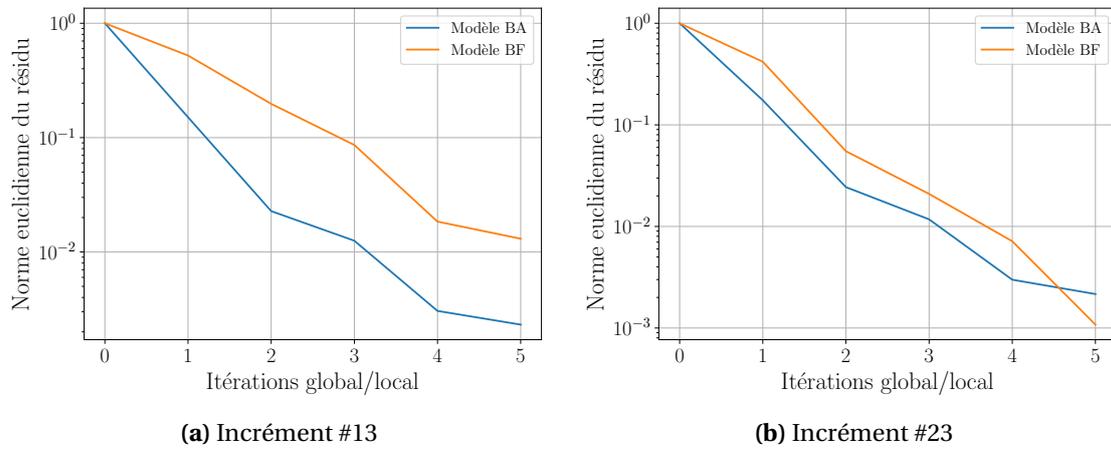


FIGURE 6.11 – Courbes de convergence

Les écarts sur chaque élément le plus chargé de chaque zone locale sont rapportés sur les figures 6.12 et 6.13. On constate que la méthode *global/local* corrige les erreurs inhérentes à l'approche par *submodeling*, erreurs potentiellement importantes de l'ordre de quelques pourcents, notamment sur la plasticité cumulée, bien que cela soit moins visible sur le bord de fuite.

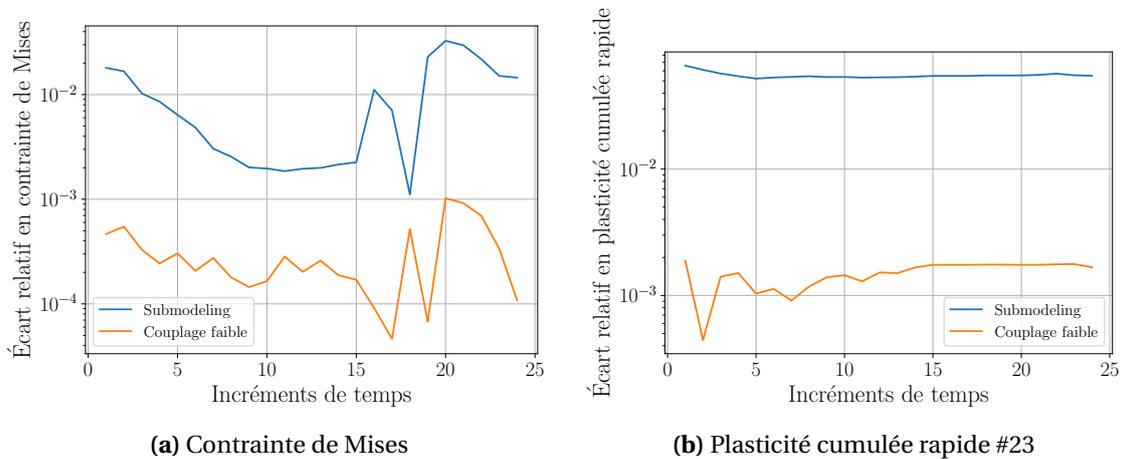


FIGURE 6.12 – Écarts relatifs obtenus sur le cycle pour le bord d'attaque

Ces résultats portent une nouvelle fois le doute sur l'évaluation des efforts de réactions en présence de maillages complexes. En effet, les meilleurs résultats sont obtenus sur le modèle BA qui est couplé *via* l'outil de couplage d'interface non-conforme et une moins bonne précision semble être obtenue sur l'interface conforme censée être moins sujette à des difficultés, or c'est sur cette dernière que le maillage est plus chaotique.

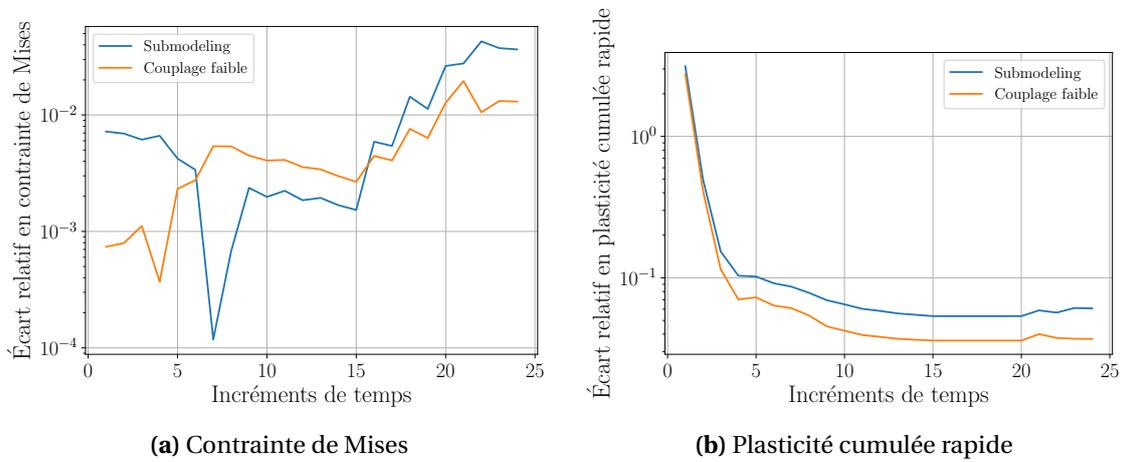


FIGURE 6.13 – Écarts relatifs obtenus sur le cycle pour le bord de fuite

À cause du développement non-intrusif, chaque modèle calculé est relancé indépendamment du calcul précédent. Ainsi, à chaque nouvelle simulation le modèle doit être chargé (10% du temps de calcul) et l'ensemble des résultats sauvegardés (15%). Ainsi 75% du temps de calcul est passé à la résolution du problème éléments finis. Il s'agit là d'estimations qui peuvent évoluer fortement, mais qui illustrent bien ce problème. Cela contribue de manière non-négligeable au temps de calcul général de l'approche *global/local*, ce surcoût en temps de calcul est d'environ 5 à 10% mais peut varier de manière très importante. Cet handicap n'est pas présent sur le calcul de référence, car la géométrie n'est chargée qu'une seule fois et aucun *RESTART* n'est nécessaire, ce qui réduit le temps d'écriture du fichier de résultats. Éviter cet inconvénient semble facile pour l'éditeur du logiciel et des contacts ont été pris avec *Abaqus* dans ce sens. Une décision à ce sujet est en cours chez eux et une version, sans nécessité d'utiliser des *RESTART*, pourrait être rapidement disponible dans les outils de co-simulation.

Un autre aspect pratique concerne la gestion des licences de calcul. À chaque calcul de la stratégie *global/local* (global, auxiliaire et local), le serveur de licences doit être interrogé, pour que de nouvelles soient attribuées. Ainsi, en cas de déconnexion temporaire du serveur ou d'attente à cause d'autres utilisateurs en demande, cet aspect peut grandement ralentir l'exécution de la stratégie.

4 Application des sauts de cycles

Enfin, un calcul du modèle global seul par la méthode des sauts de cycles a été effectué. Il reprend toutes les conclusions obtenues sur les exemples 2D. Il correspond à un calcul en moyenne pour la longueur de saut et une tolérance d'acquisition des éléments à $\eta_{s-1} = 1e^{-4}$. On obtient un facteur d'extrapolation de 0,08 toujours pour un saut initial de 2 cycles.

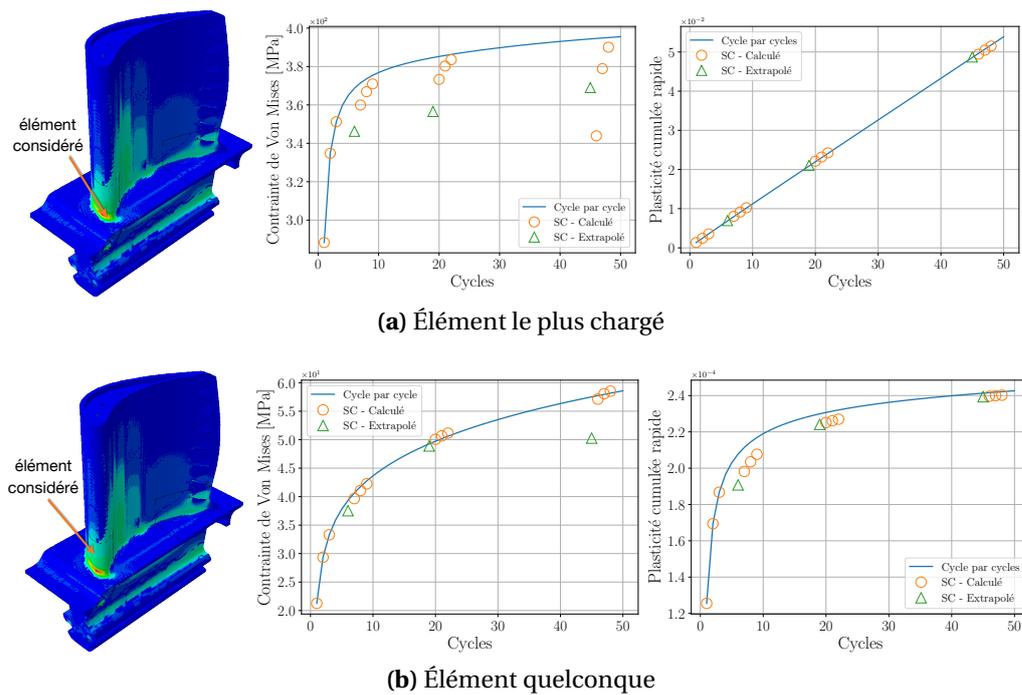


FIGURE 6.14 – Technique de saut de cycle appliquée au modèle global 3D

La méthode semble bien fonctionner, si l'on considère que des sauts de plus en plus grands sont effectués au fur et à mesure de la structure. Les sauts obtenus sur cette application 3D sont de bonne qualité, car bien croissants au fur et à mesure de la stabilisation. L'approche systématique proposée dans le chapitre précédent a bien fonctionné, puisque l'extension à ce cas n'a pas nécessité de réglages supplémentaires à ceux effectués en 2D. Cependant, une augmentation du facteur α de relaxation semble pouvoir améliorer la précision, car de fortes variations locales sont observées sur les premiers cycles comme ce que l'on peut observer sur la figure 6.14.

Le temps de calcul continue d'être réduit puisque le calcul cycle par cycle a duré 6 heures 48 minutes contre 2 heures et 58 minutes pour les sauts de cycles, soit une réduction de 56% du temps de calcul général. Le traitement de plus de degré de liberté ralentit pourtant la stratégie lors de l'extraction de la solution à chaque point de Gauss. Cependant, l'application de la solution extrapolée par la *subroutine Fortran* s'avère particulièrement efficace.

5 Spécificités liées au traitement d'un cas métier

L'exemple précédent est représentatif d'une application réelle réalisée chez Safran Aircraft Engines pour évaluer l'applicabilité de la méthode. Initialement, ce cas test est constitué du modèle de référence qui avait été réalisé dans le cadre d'un calcul de certification. De celui-ci, les modèles locaux ont été extraits et leur mise en données (chargement extérieur) a été extraite de celle de la structure complète. Il ne restait qu'à construire un modèle global en simplifiant le calcul de référence, ce qui a été fait par un bureau d'étude, permettant ainsi d'avoir tous les modèles utiles à une application de la méthode *global/local* non-intrusive.

Les particularités de ce cas test sont les suivantes :

- *Deux zones de ré-analyses* : avec des interfaces parfaitement conformes entre le modèle global et les modèles locaux.
- *Modèle de comportement plus complexe* : avec environ 80 variables et implémenté avec le module *Zmat* de *Zébulon*. Les paramètres matériaux sont aussi réellement identifiés pour le matériau utilisé.
- *Calcul effectué en non-linéaire géométrique*.
- *Prise en compte de la thermique* : en plus de la modification des paramètres matériaux en fonction de la température de la pièce, des déformations dues à la dilatation thermique sont prises en compte.
- *Mise en données plus complexe* : chargements d'origine aérodynamique (pression), utilisation d'élément coques représentant par leurs propriétés matériau la barrière thermique.
- *Chargement extrême* : les variations liées à la définition du chargement sont très importantes et rapides.

Cette application réelle vient étoffer notre expérience et lever les derniers doutes liés à la capacité à appliquer cet algorithme *global/local* non-intrusif en conditions réelles industrielles et cela dans *Abaqus/Standard*.

Malgré la complexité du modèle, la précision de la méthode n'est pas affectée et reste excellente. Par ailleurs, les atouts de la non-intrusivité ont été indispensables et mis en évidence : comme la non-modification des maillages, à ce sujet les matrices de couplage d'interface T ont été indispensables, mais aussi la ré-utilisation de toute la mise en donnée, telle que la loi matériau ou les chargements extérieurs provenant d'autres maillons de la chaîne de calcul.

Les difficultés principales d'applications ont été rencontrées vis-à-vis du transfert du chargement thermique au sein du problème de mécanique. En effet, la simulation mécanique utilise une solution thermique pré-calculée, contenue dans un fichier de résultats spécial au logiciel. Cette solution thermique est caractérisée par de très petits pas de temps pour représenter de fortes variations, jusqu'à 100 fois plus petits que ceux pouvant être utilisés en mécanique. Ainsi, l'histoire de chargement mécanique est découpée initialement en plusieurs fenêtre temporelles, réalisant une bonne pré-discrétisation du cycle pour le problème mécanique. Chacune de ces fenêtres est cadrée sur une portion de la solution thermique, sans que les pas de temps internes à ces

fenêtres soient obligatoirement compatibles. Lors de la résolution, les pas de temps mécaniques différent des pas de temps de la thermique et le solveur opère une interpolation sur la fenêtre de définition pour obtenir le champ de température correct.

En outre, un inconvénient non-résolu est que, si on souhaite appliquer un pas de temps adaptatif pour la mécanique (comme effectué dans cette thèse sur les exemples académiques), quelque soit la technique utilisée ou le pas de temps initial fourni, le solveur ne respecte pas ce choix et utilise le premier pas de temps de la solution thermique de la fenêtre courante. La résolution du problème mécanique au moyen de tels pas de temps conduirait à des temps de calcul trop importants.

Finalement, ce calcul a été mené *via* la méthode *global/local* avec un couplage temporel sur grille arbitraire, constituée des fenêtres mécaniques liées à la solution thermique, car ce lien est indissociable et non modifiable. En outre, la taille des pas de temps du calcul mécanique ont du être fixés sur chaque *step* de calcul, pour forcer le solveur à les utiliser, ce qui a entraîné de nombreuses divergences locales de la solution et a obligé à relancer plusieurs fois la stratégie jusqu'à la bonne exécution du calcul. En effet, aucun raffinement du pas de temps n'est alors possible et le solveur utilise uniquement le pas de temps initial fourni.

Conclusion

Il n'y a pas eu de problèmes majeurs rencontrés lors de l'application de la méthode *global/local* non-intrusive sur cet exemple présentant une complexité réelle. Les difficultés sont surtout apparues lors de la création du modèle et pour la gestion des interfaces, notamment à cause des non-conformités. Des soucis non-anticipés tels que le stockage des fichiers ou le manque de précision de certains éléments sont aussi intervenus.

Malgré cela, la méthode *global/local* a pu être appliquée avec succès sans blocage, bien que la précision liée à cet exemple puisse être améliorée, par un travail supplémentaire d'amélioration du maillage des interfaces, surtout sur le bord de fuite. En outre, la configuration optimale de l'algorithme établie sur le modèle 2D a très bien fonctionné en 3D. Enfin, cette application a permis d'attester des performances de la méthode.

Le traitement du cas métier a permis de lever les derniers doutes ou performances, qui peuvent subsister suite à l'exemple présenté ici. La qualité de sa création a permis d'obtenir des résultats très précis pour de la plasticité véritablement généralisée car favorisée par la thermique. Lors de la réalisation de ce cas test, des besoins, non-résolus à l'heure actuelle, ont été formulés et font l'objet de perspectives intéressantes décrites ci-après dans la conclusion de ces travaux.

Conclusion et perspectives

Les approches de couplage *global/local* non-intrusif étudiées dans cette thèse visent à permettre de simuler une structure complexe au moyen de descriptions à plusieurs échelles, ici deux. Pour le modèle dit global, la structure est décrite en omettant volontairement certains détails structuraux fins. Plusieurs représentations locales de la structure sont utilisées afin de représenter les détails omis dans le premier modèle. Par un procédé de couplage itératif, la solution obtenue à convergence est celle qui serait calculée monolithiquement par un modèle global dans lequel les modèles locaux seraient substitués.

Les travaux antérieurs, les plus proches de ceux menés dans cette thèse, [Gendre *et al.*, 2009] concernaient des comportements globaux linéaires et plastiques localement, impliquant que la zone complémentaire, à la zone locale ait une réponse élastique dans le calcul monolithique. De plus, les questions liées à la discrétisation en temps du chargement, ainsi que son traitement, n'avaient pas été abordées.

En raison de ces limitations, mais aussi de la difficulté intrinsèque des calculs en viscoplasticité, un certain scepticisme s'était exprimé de la part des spécialistes sur la possibilité d'étendre ces travaux, de façon robuste et fiable, à des structures élasto-viscoplastiques complexes.

Le pari de cette thèse était justement qu'il devait être possible de proposer et de développer des méthodes de couplage *global/local* non-intrusives dans le cas de structures de complexité industrielle, pour des comportements dépendant du temps de type élasto-viscoplastique et pour un nombre important de cycles (correspondant à la phase de rodage) au moyen de techniques de sauts de cycles.

Les raisons des interrogations des spécialistes nous sont apparues de plus en plus claires au fur et à mesure des difficultés rencontrées dans l'avancée de ces travaux. Prendre la mesure des difficultés réelles de ce type de calcul nous a pris du temps. Pour décrire ce cheminement de façon synthétique, elles nous sont apparues par le biais du traitement de nombreux exemples. Analysés finement, ils montraient que les résultats obtenus à convergence de la méthode pouvaient correspondre à des solutions non-physiques au niveau des interfaces entre les modèles locaux et globaux et que ces solutions pouvaient-être entachées d'erreurs importantes par rapport à « celles dites de référence ». Ces différents problèmes étaient liés d'une part à des histoires de chargement trop différentes entre les modèles locaux et globaux du fait de leurs discrétis-

sations propres, d'autre part à la précision de l'intégration des lois de comportement elles-mêmes, cette dernière question se posait même au niveau de la référence.

Un premier écueil rencontré dans l'utilisation d'*Abaqus/Standard* est le recours à des sous-discrétisations temporelles basées sur des critères heuristiques, lorsque surviennent des problèmes de convergence. La conséquence est, qu'*a priori*, il est impossible d'obtenir directement des discrétisations locales et globales compatibles. Un premier pas a été fait lorsque la façon d'accéder à ces informations de sous-découpages a été trouvée. Cependant pour les lois de comportement utilisées, les pas de temps ainsi obtenus ne correspondaient pas à des solutions locales et globales de même précision, posant un problème de qualité lors de la mise en œuvre de la méthode de couplage. Une solution a été trouvée en définissant un critère de pas de temps basé sur un incrément de déformation plastique cumulée, en exploitant la possibilité offerte par *Zébulon* de définir le pas de temps en fonction de cet incrément. Pour fixer cette valeur de l'incrément de déformation plastique, une étude a montré que l'erreur d'intégration avait tendance tout d'abord à décroître de façon très importante avec la réduction de la taille des pas de temps, puis au delà d'un seuil d'incrément plastique, de n'apporter que des gains résiduels faibles, notamment par rapport au surcoût de calcul associé.

Cette technique de contrôle de la qualité d'intégration n'étant pas disponible dans tous les solveurs commerciaux d'autres possibilités ont été étudiées. Celle retenue consiste à définir une discrétisation permettant d'obtenir une solution de qualité acceptable sur le modèle global. Associée aux sous-discrétisations automatiques utilisées par *Abaqus/Standard*, cette approche conduit à des résultats acceptables au prix d'une pré-étude difficile à automatiser, mais de toute façon nécessaire pour l'utilisateur souhaitant avoir le contrôle de la qualité des résultats obtenus.

Les autres axes des travaux avaient été plus clairement identifiés au départ de la thèse.

La problématique du couplage temporel entre les modèles avait été anticipée, mais les difficultés liées à l'introduction de pas de temps, non définis à l'avance, a nécessité des développements particuliers. Ceux-ci ont abouti à trois couplages différents : sur grille prédéfinie, faible ou fort. Avec l'expérience acquise durant cette thèse, le choix entre ces couplages se base sur la dépendance en temps de la loi de comportement, du niveau de plasticité du modèle global et de la précision que l'on souhaite atteindre. Les exemples et conclusions rapportés dans ce document peuvent préalablement aider à faire ce choix, en effectuant quelques essais élémentaires sur des modèles très simples.

En raison du temps de calcul nécessaire pour obtenir une bonne précision, un travail spécifique sur l'algorithme a été effectué en utilisant des techniques d'accélération de convergence existantes ou nouvelles. En outre, une étude de l'écart avec la référence en fonction du résidu d'équilibre a permis de proposer des règles permettant d'obtenir la précision souhaitée en un temps réduit.

Le couplage avec la technique des sauts de cycles, permet désormais de réaliser des calculs cycliques *via* la méthode *global/local*, ce qui rend cette méthode utilisable en des temps acceptables, même pour un nombre important de cycles.

L'applicabilité industrielle de l'algorithme *global/local* est le premier enjeu de cette thèse. C'est pourquoi il était absolument nécessaire de traiter des cas de complexité importante tout au long de ces travaux pour prendre la mesure des difficultés, tant du point de vue de la qualité que de celui de la performance associées à la simulation de ce type de modèles. D'un point de vue pratique, une tâche difficile est celle de l'adaptation de la mise en données de façon cohérente entre le modèle global et les différents modèles locaux. Cette tâche, fastidieuse la première fois, est désormais automatisée *via* des fonctions *Python*.

Enfin, l'application sur une structure industrielle réelle a été riche d'enseignements car elle a permis de découvrir des avantages cachés des méthodes non-intrusives. Sans ce type de développement et de méthode, les cas industriels traités n'auraient pu l'être du fait de calculs réalisés, de façon découplée, par les différents bureaux d'études qui s'occupent de la thermique, de l'aérodynamique et de la mécanique. L'intégration dans cette chaîne de calcul a pu être possible comme par exemple avec la réutilisation directe des maillages.

Perspectives

Différents aspects méritent encore d'être étudiés avant de figer les pratiques adaptées à l'usage de la méthode :

- La technique de sauts de cycles couplés à la méthode *global/local* doivent encore être appliqués à l'exemple 3D, pour en vérifier le bon fonctionnement sur des cas correspondants aux objectifs industriels. De plus une interrogation concerne la gestion des longueurs de sauts différentes entre les modèles. On peut envisager de conserver la longueur de saut la plus discriminante ou d'utiliser des longueurs déterminées pour chaque modèle local conduisant à une méthode de sauts de cycles asynchrone. Des travaux préliminaires non présentés ont concernés la correction de la méthode de saut de cycles par son couplage à l'algorithme para-réel. Dans ce contexte, les sauts s'interprètent comme un propagateur grossier en temps, tandis que le calcul cycle par cycle est parallélisé sur des fenêtres de cycles. Des versions optimisées de l'algorithme *global/local* avec sauts de cycles pourraient ainsi être imaginées permettant d'assouplir les conditions sur la précision des sauts de cycles initiaux et peut-être d'utiliser simplement une approche de *submodeling* pour le propagateur grossier.
- Des questions sur la précision atteignable en pratique avec le couplage demeurent dans le cadre d'une utilisation dans *Abaqus/Standard*, vis-à-vis des efforts de réaction.
- La technique liée à l'utilisation d'interfaces non-conformes mériterait d'être approfondie notamment vis-à-vis de la précision et de la qualité des efforts d'interface.
- Les apports fournis par l'interprétation de la méthode comme une méthode de

Schwarz n'ont été que partiellement utilisés (gradient conjugué non-linéaire et propriétés de convergence). Une ré-écriture de l'algorithme *global/local* en tant que technique de Schwarz additif pourrait permettre de paralléliser totalement les résolutions locales et globales.

- L'implémentation de l'algorithme pourrait être étendue afin de permettre le couplage automatique des différents codes de calcul. Les appels aux solveurs concernés se feraient par méthodes *Python*, communiquant seulement les grandeurs d'interfaces entre les différents acteurs.
- Le traitement du cas métier, non présenté dans la thèse a soulevé des problématiques importantes liées à la thermique et à l'aérodynamique. Si on souhaite tester une nouvelle géométrie locale, le but est de ne modifier que le modèle local concerné. Cependant, comment mettre à jour les solutions de température et de pression aérodynamique pour cette nouvelle géométrie, sans traiter pour cela le modèle complet au moins pour ces physiques? Pour le moment, cela n'est possible qu'en reprenant la chaîne complète pour ces étapes et ce pour le calcul modèle complet de référence. Une réelle avancée serait de faire un zoom structural également en thermique et en aérodynamique pour fournir rapidement les conditions limites à appliquer aux modèles locaux. L'utilisation des pas temps imposés par la thermique, beaucoup plus petits que ceux nécessaires pour la simulation mécanique, est très pénalisante. Ici encore les stratégies de couplage sur grille fixe ou par couplage faible devraient offrir des réponses intéressantes.

Annexe A

Annexes

1 Paramètres matériaux

Température (°C)	700	800	900	1000	1100
E (MPa)	166300	154000	141618	127070	111695
n_f	28	14	9	7.5	6.5
K_f	580	630	490	450	420
R_0	110	80	60	30	17
C	678000	615000	362000	139000	41000
γ	2060	1870	1540	1200	830
n_s	42.4	21.2	13.6	11.3	9.8
K_s	1200	1300	1100	1050	980

Le coefficient de Poisson est considéré constant à 0,28.

2 Résultats des couplages temporels

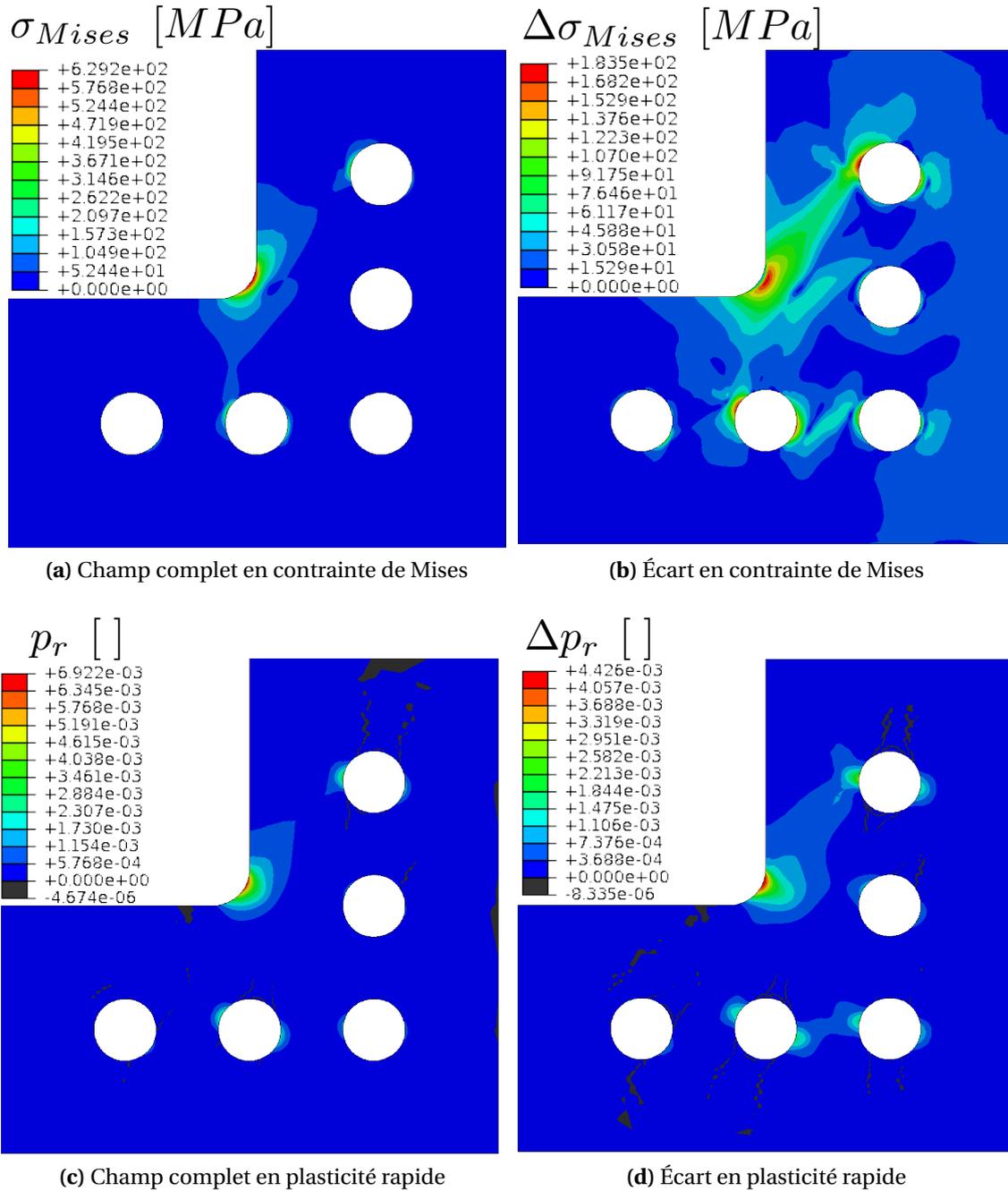


FIGURE A.1 – Solution de l'approche par *submodeling* en fin de cycle

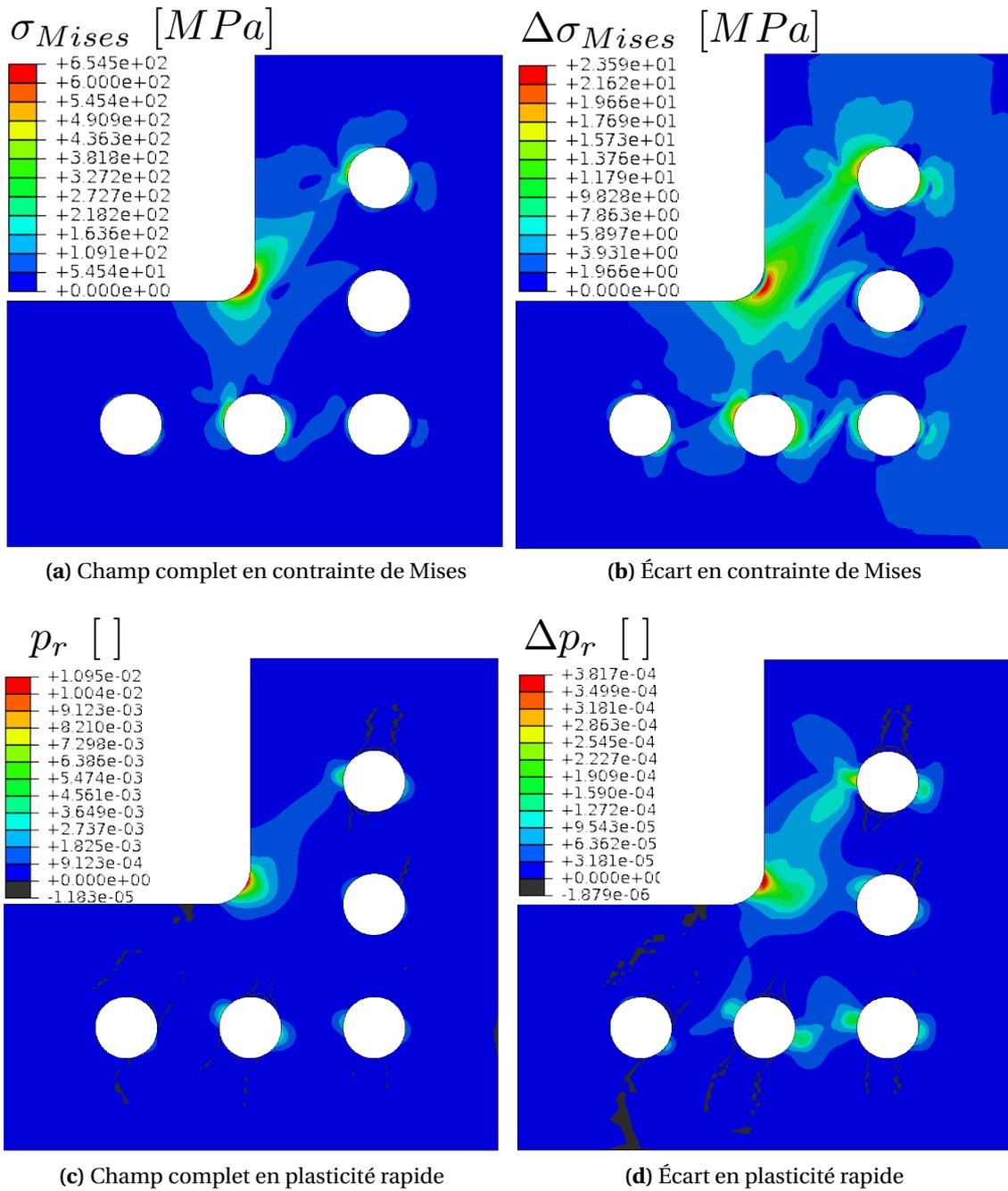


FIGURE A.2 – Précision en fin de cycle avec la méthode global/local obtenue en *couplage fort* conforme

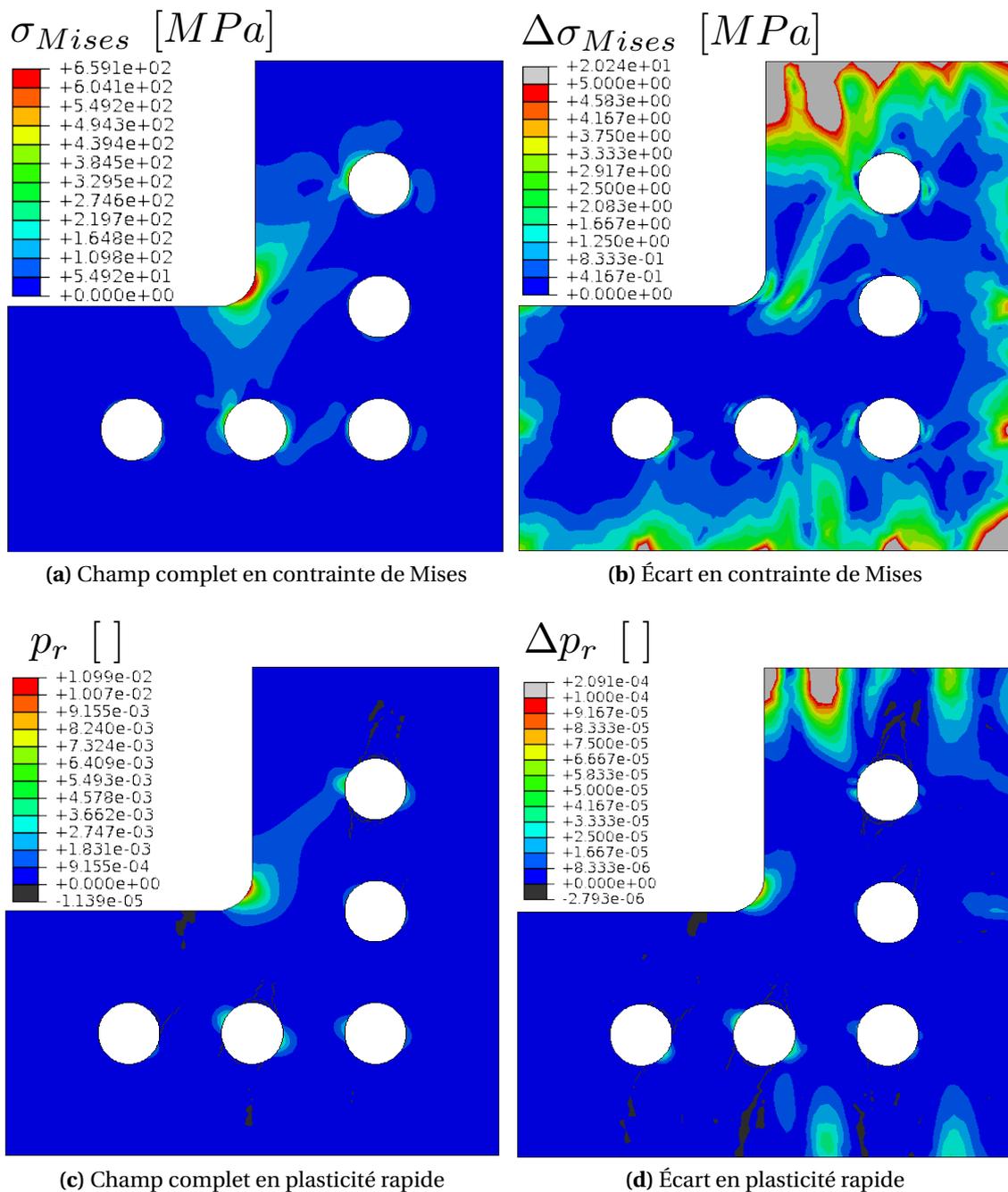
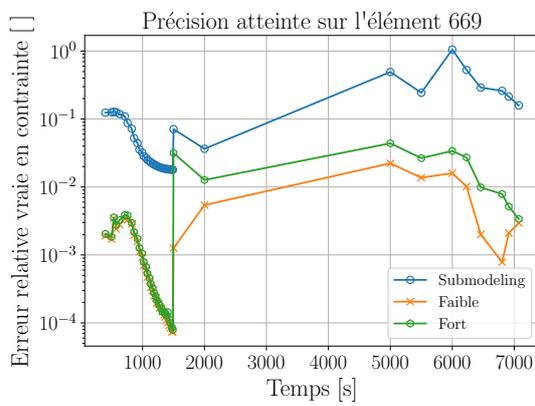
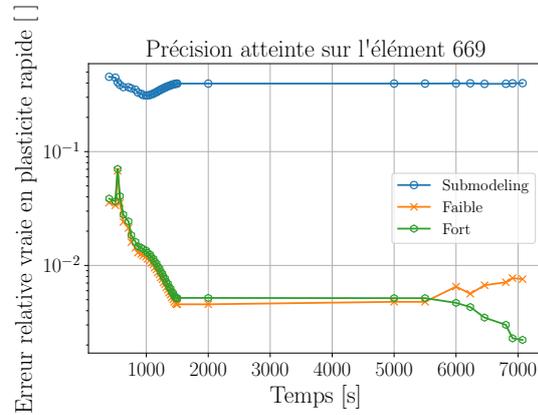


FIGURE A.3 – Précision en fin de cycle avec GLM obtenue en *couplage faible* non-conforme

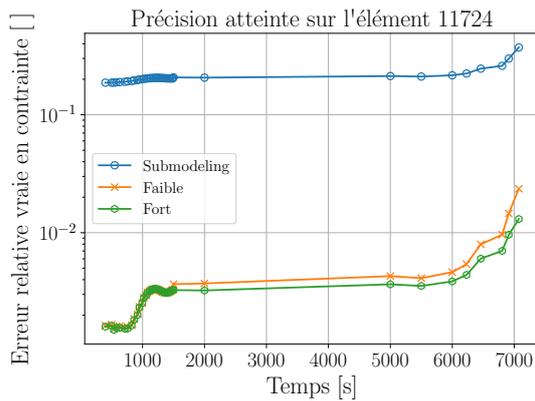


(a) Écart en contrainte de Von Mises

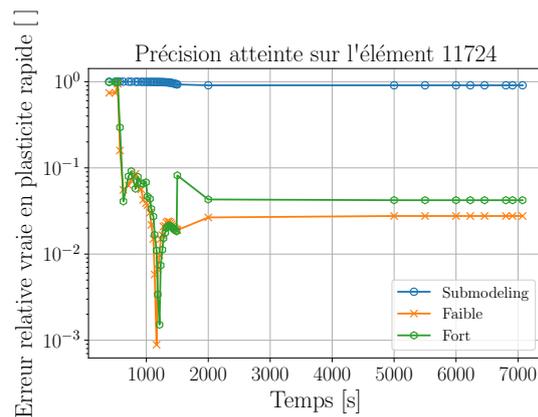


(b) Écart en plasticité rapide

FIGURE A.4 – Écart sur un cycle pour l'élément #669 (modèles non-conformes)



(a) Écart en contrainte de Von Mises



(b) Écart en plasticité rapide

FIGURE A.5 – Écart sur un cycle pour l'élément #11724 (modèles non-conformes)

Bibliographie

- [Aitken, 1926] AITKEN, A. C. (1926). On bernoulli's numerical solution of algebraic equations. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, 46:289–305.
- [Aken et Nguyen, 1989] AKEN, S. et NGUYEN, Q. S. (1989). Determination of the limit response in cyclic plasticity. *Computational plasticity, Eds Owen, Hinton*, pages 639–650.
- [Akgün *et al.*, 2001] AKGÜN, M. A., GARCELON, J. H. et HAFTKA, R. T. (2001). Fast exact linear and non-linear structural reanalysis and the sherman–morrison–woodbury formulas. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50(7):1587–1606.
- [Allix, 1989] ALLIX, O. (1989). *Modélisation du comportement des composites stratifiés : application à l'analyse du délaminage*. Thèse de doctorat, Université Paris 6.
- [Armines et Onera, 2015] ARMINES et ONERA (2015). *Z-set, Material and Structure Analysis Suite, Materials manual Version 8.6*.
- [Arzt, 1994] ARZT, M. (1994). *Approche des phénomènes cycliques par la méthode à grands incréments de temps*. Thèse de doctorat, École Normale Supérieure de Caen.
- [Aubry et Puel, 2010] AUBRY, D. et PUEL, G. (2010). Ccf modelling with use of a two-timescale homogenization model. *Procedia Engineering*, 2(1):787 – 796.
- [Babuska et Andersson, 2005] BABUSKA, I. et ANDERSSON, B. (2005). The splitting method as a tool for multiple damage analysis. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 26(4):1114–1145.
- [Badea, 1991] BADEA, L. (1991). On the Schwarz alternating method with more than two subdomains for nonlinear monotone problems. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 28(1):179–204.
- [Barbe *et al.*, 2001] BARBE, F., FOREST, S. et CAILLETAUD, G. (2001). Intergranular and intragranular behavior of polycrystalline aggregates. part 2 : Results. *International Journal of Plasticity*, 17(4):537 – 563.
- [Barsoum, 1974] BARSOUM, R. S. (1974). Application of quadratic isoparametric finite elements in linear fracture mechanics. *International Journal of Fracture*, 10(4):603–605.

- [Ben Dhia, 1998] BEN DHIA, H. (1998). Problèmes mécaniques multi-échelles : la méthode arlequin. *Comptes-rendu de l'académie des sciences de mathématiques*, 326(IIb):899–904.
- [Ben Dhia et Rateau, 2001] BEN DHIA, H. et RATEAU, G. (2001). Analyse mathématique de la méthode arlequin mixte. *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences*, 332: 649–654.
- [Berenguer *et al.*, 2013] BERENGUER, L., DUFAUD, T. et TROMEUR-DERVOU, D. (2013). Aitken's acceleration of the schwarz process using singular value decomposition for heterogeneous 3d groundwater flow problems. *Computers and Fluids Physics Communications*, 80:320–326.
- [Bergheau *et al.*, 2016] BERGHEAU, J.-M., ZUCHIATTI, S., ROUX, J.-C., Éric FEULVARCH, E., TISSOT, S. et PERRIN, G. (2016). The proper generalized decomposition as a space-time integrator for elastoplastic problems. *Comptes Rendus Mécanique*, 344: 759 – 768.
- [Berthoul *et al.*, 2018] BERTHOUL, B., BATAILLY, A., STAINIER, L., LEGRAND, M. et CARTAUD, P. (2018). Phenomenological modeling of abradable wear in turbomachines. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 98(Supplement C):770 – 785.
- [Berveiller *et al.*, 2006] BERVEILLER, M., SUDRET, B. et LEMAIRE, M. (2006). Stochastic finite element : a non intrusive approach by regression. *Revue européenne de mécanique numérique*, 15(1-3):81–92.
- [Bettinotti *et al.*, 2014a] BETTINOTTI, O., ALLIX, O. et MALHERBE, B. (2014a). A coupling strategy for adaptive local refinement in space and time with a fixed global model in explicit dynamics. *Computational Mechanics*, 53(4):561–574.
- [Bettinotti *et al.*, 2014b] BETTINOTTI, O., ALLIX, O., PEREGO, U., OANCEA, V. et MALHERBE, B. (2014b). A fast weakly intrusive multiscale method in explicit dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 100(8):577–595.
- [Bettinotti *et al.*, 2017] BETTINOTTI, O., ALLIX, O., PEREGO, U., OANCEA, V. et MALHERBE, B. (2017). Simulation of delamination under impact using a global local method in explicit dynamics. *Finite Elements in Analysis and Design*, 125(8):1–13.
- [Bogard *et al.*, 2008] BOGARD, F., LESTRIEZ, P. et GUO, Y. (2008). Numerical modeling of fatigue damage and fissure propagation under cyclic loadings. *International Journal of Damage Mechanics*, 17(2):173–187.
- [Boisse, 1987] BOISSE, P. (1987). *Nouvel algorithme à grand incrément de temps pour le calcul des structures élastoplastiques*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie -Paris 6-.
- [Boisse *et al.*, 1990] BOISSE, P., BUSSY, P. et LADEVÈZE, P. (1990). A new approach in non-linear mechanics : the large time increment method. *International Journal for numerical methods in engineering*, 29:647–663.
- [Boisse *et al.*, 1989] BOISSE, P., LADEVÈZE, P. et ROUGÉE, P. (1989). A large time increment method for elastoplastic problems. *European journal of mechanics. A. Solids*, 8(4):257–275.

- [Boucard, 2001] BOUCARD, P.-A. (2001). Application of the latin method to the calculation of response surfaces. *Proceedings of the First MIT Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics*, 1:78–81–454.
- [Boucard et Ladevèze, 1997] BOUCARD, P.-A. et LADEVÈZE, P. (1997). Post-buckling analysis using a non-incremental method. *In 15th IMACS World Congress on Scientific Computation, Modelling and Applied Mathematics*, 3:449–454.
- [Boucard et Ladevèze, 1999] BOUCARD, P.-A. et LADEVÈZE, P. (1999). Une application de la méthode latin au calcul multirésolution de structures non-linéaires. *Revue européenne des éléments finis*, 8:903–920.
- [Bouclier *et al.*, 2013a] BOUCLIER, R., ELGUEDJ, T. et COMBESCURE, A. (2013a). An isogeometric locking-free nurbs-based solid-shell element for geometrically nonlinear analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 101(10):774–808.
- [Bouclier *et al.*, 2013b] BOUCLIER, R., PASSIEUX, J.-C. et SALAÜN, M. (2013b). Local enrichment of nurbs patches using a non-intrusive coupling strategy : Geometric details, local refinement, inclusion, fracture. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 300:1–26.
- [Boutin et Wong, 1998] BOUTIN, C. et WONG, H. (1998). Study of thermosensitive heterogeneous media via space-time homogenisation. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 17(6):939 – 968.
- [Brancherie *et al.*, 2008] BRANCHERIE, D., DAMBRINE, M., VIAL, G. et VILLON, P. (2008). Effect of surface defects on structure failure : a two-scale approach. *European Journal of Computational Mechanics*, 17(5-7):613–624.
- [Brandt, 1977] BRANDT, A. (1977). Multi-level adaptive solutions to boundary-value problems. *Mathematics of Computation*, 31(138):333–390.
- [Brassart *et al.*, 2012] BRASSART, L., STAINIER, L., DOGHRI, I. et DELANNAY, L. (2012). Homogenization of elasto-(visco) plastic composites based on an incremental variational principle. *International Journal of Plasticity*, 36(Supplement C):86 – 112.
- [Brezzi *et al.*, 2001] BREZZI, F., LIONS, J. L., et PIRONNEAU, O. (2001). Analysis of a chimera method. *Comptes-rendu de l'académie des sciences de mathématiques*, 332(7):655–660.
- [Briggs *et al.*, 2000] BRIGGS, W., HENSON, V. et MCCORMICK, S. (2000). *A multigrid Tutorial, Second Edition*. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [Broyden, 1965] BROYDEN, C. (1965). A class of methods for solving nonlinear simultaneous equations. *Mathematics of Computation*, 19(92):577–593.
- [Bumbariu, 2012] BUMBARIU, O. (2012). A new aiten type method for accelerating iterative sequences. *Applied Mathematics and Computation*, 219:78–82.
- [Burlon *et al.*, 2014] BURLON, S., MROUEH, H. et CAO, J. P. (2014). 'skipped cycles' method for studying cyclic loading and soil-structure interface. *Computers and Geotechnics*, 61:209–220.

- [Bussy, 1989] BUSSY, P. (1989). Sur un algorithme à grands incréments de temps pour la gestion du contact en grandes transformations. *Rapport interne N93, LMT, ENS Cachan*.
- [Bussy *et al.*, 1990] BUSSY, P., ROUGÉE et VAUCHEZ, P. (1990). The large time increment method for numerical simulation of metal forming processes. *Swansea*, pages 102–109.
- [Cao, 2010] CAO, J. (2010). *Modélisation numérique des problèmes d'interfaces sable-pieu pour les très grands nombres de cycles : développement d'une méthode de sauts de cycles*. Thèse de doctorat, Université Lille 1.
- [Chaboche, 2008] CHABOCHE, J. (2008). A review of some plasticity and viscoplasticity constitutive theories. *International Journal of Plasticity*, 24:1642–1693.
- [Chaboche, 1989] CHABOCHE, J.-L. (1989). Constitutive equations for cyclic plasticity and cyclic viscoplasticity. *International journal of plasticity*, 5(3):247–302.
- [Chahine *et al.*, 2008] CHAHINE, E., LABORDE, P. et RENARD, Y. (2008). Spider-xfem, an extended finite element variant for partially unknown crack-tip displacement. *European Journal of Computational Mechanics*, 17(5-7):625–636.
- [Chahine *et al.*, 2009] CHAHINE, E., LABORDE, P. et RENARD, Y. (2009). A reduced basis enrichment for the extended finite element method. *Mathematical Modeling of Natural Phenomena*, 4(1):88–105.
- [Chantrait *et al.*, 2014] CHANTRAIT, T., RANNOU, J. et GRAVOUIL, A. (2014). Low intrusive coupling of implicit and explicit time integration schemes for structural dynamics : Application to low energy impacts on composite structures. *Finite Elements in Analysis and Design*, 86:23–33.
- [Chevreuil *et al.*, 2013] CHEVREUIL, M., NOUY, A. et SAFATLY, E. (2013). A multiscale method with patch for the solution of stochastic partial differential equations with localized uncertainties. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 255:255–274.
- [Chiaruttini et Rey, 2005] CHIARUTTINI, V. et REY, C. (2005). Un schéma d'intégration temporelle multi-échelles appliqué à un problème poro-mécanique non-linéaire. *Giens*.
- [Chouly et Lozinski, 2014] CHOULY, F. et LOZINSKI, A. (2014). Parareal multi-model numerical zoom for parabolic multiscale problems. *Comptes Rendus Mathématique*, 352(6):535 – 540.
- [Chow et Kay, 1984] CHOW, Y. K. et KAY, S. (1984). On the aitken acceleration method for nonlinear problems. *Computers and Structures*, 19(5/6):757–761.
- [Cognard *et al.*, 1999] COGNARD, J., LADEVÈZE, P. et TALBOT, P. (1999). A large time increment approach for thermo-mechanical problems. *Advances in Engineering Software*, 30:583–593.
- [Cognard, 1989] COGNARD, J. Y. (1989). *Une nouvelle approche de problèmes de plasticité et de viscoplasticité : la méthode à grands incréments de temps*. Thèse de doctorat, École Normale Supérieure de Cachan.

- [Cojocaru et Karlsson, 2006] COJOCARU, D. et KARLSSON, A. (2006). A simple numerical method of cycle jumps for cyclically loaded structures. *International Journal of Fatigue*, 28:1677–1689.
- [Comte *et al.*, 2006] COMTE, F., MAITOURNAM, H., BURRY, P. et NGUYEN, T. M. L. (2006). A direct method for the solution of evolution problems. *C. R. Mecanique*, 334(5):317–322.
- [Conn *et al.*, 1991] CONN, A. R., GOULD, N. I. M. et TOINT, P. L. (1991). Convergence of quasi-newton matrices generated by the symmetric rank one update. *Mathematical Programming*, 50(1-3):177–195.
- [Constantinescu *et al.*, 2003] CONSTANTINESCU, A., DANG VAN, K. et MAITOURNAM, M. H. (2003). A unified approach for high and low cycle fatigue based on shakedown concepts. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, 26(6):561–568.
- [Cormier *et al.*, 1999] CORMIER, N. G., SMALLWOOD, B. S., SINCLAIR, G. B. et MEDA, G. (1999). Aggressive submodelling of stress concentrations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46(6):889–909.
- [Cresta, 2008] CRESTA, P. (2008). *Décomposition de domaine et stratégies de relocalisation non-linéaire pour la simulation de grandes structures raidies avec flambage local*. Thèse de doctorat, École Normale Supérieure de Cachan.
- [Cresta *et al.*, 2007] CRESTA, P., ALLIX, O., REY, C. et GUINARD, S. (2007). Nonlinear localization strategies for domain decomposition methods : Application to post-buckling analyses. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(8):1436–1446.
- [Daghia et Ladevèze, 2012] DAGHIA, F. et LADEVÈZE, P. (2012). A micro-meso computational strategy for the prediction of the damage and failure of laminates. *Composite Structures*, 94(12):3644–3653.
- [Dai et Yuan, 1999] DAI, Y. H. et YUAN, Y. (1999). A nonlinear conjugate gradient method with a strong global convergence property. *SIAM Journal on Optimization*, 10(1):177–182.
- [Devincre *et al.*, 2008] DEVINCRE, B., HOC, T. et KUBIN, L. (2008). Dislocation mean free paths and strain hardening of crystals. *Science*, 320(5884):1745–1748.
- [Devincre et Kubin, 1997] DEVINCRE, B. et KUBIN, L. (1997). Mesoscopic simulations of dislocations and plasticity. *Materials Science and Engineering : A*, 234:8 – 14.
- [Devries *et al.*, 1989] DEVRIES, F., DUMONTET, H., DUVAUT, G. et LENE, F. (1989). Homogenization and damage for composite structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 27(2):285–298.
- [Dirand, 2011] DIRAND, L. (2011). *Fluage à haute température d'un superalliage monocristallin : expérimentation in situ en rayonnement synchrotron*. Thèse de doctorat, Institut national polytechnique de Lorraine.

- [Duan *et al.*, 2007] DUAN, Y., VINCENT, Y., BOITOUT, F. et LEBLOND, J. (2007). Prediction of welding residual distortions of large structures using a local/global approach. *Journal of Mechanical Science and Technology AMPT 2007 issue*, 21(10):1700–1706.
- [Duffy, 2012] DUFFY, S. (2012). *Higher order two dimensional shape functions*.
- [Düster *et al.*, 2007] DÜSTER, A., NIGGL, A. et RANK, E. (2007). Applying the hp-d version of the {FEM} to locally enhance dimensionally reduced models. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(37-40):3524 – 3533. Special Issue Honoring the 80th Birthday of Professor Ivo Babuška.
- [Düster *et al.*, 1999] DÜSTER, A., RANK, E., STEINL, G. et WUNDERLICH, W. (1999). A combination of an h- and a p-version of the finite element method for elastic-plastic problems. *In Wunderlich, W.*
- [Duval, 2016] DUVAL, M. (2016). *Apports du couplage non-intrusif en mécanique non-linéaire des structures*. Thèse de doctorat, Université Paul Sabatier.
- [Duval *et al.*, 2016] DUVAL, M., PASSIEUX, J.-C., SALAÜN, M. et GUINARD, S. (2016). Non-intrusive coupling : recent advances and scalable nonlinear domain decomposition. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 23(1):17–38.
- [Farhat et Chandesris, 2003] FARHAT, C. et CHANDESRI, M. (2003). Time-decomposed parallel time-integrators : theory and feasibility studies for fluid, structure, and fluid?structure applications. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 58(9):1397–1434.
- [Farhat *et al.*, 1994] FARHAT, C., MANDEL, J. et ROUX, F. X. (1994). Optimal convergence properties of the FETI domain decomposition method. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 115(3):365–385.
- [Farhat et Roux, 1991] FARHAT, C. et ROUX, F.-X. (1991). A method of finite element tearing and interconnecting and its parallel solution algorithm. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 32(6):1205–1227.
- [Fedorenko, 1964] FEDORENKO, R. (1964). The speed of convergence of one iterative process. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 4:227–235.
- [Feyel, 2003] FEYEL, F. (2003). A multilevel finite element method (fe^2) to describe the response of highly nonlinear structures using generalized continua. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192:3233–3244.
- [Feyel et Chaboche, 2000] FEYEL, F. et CHABOCHE, J.-L. (2000). Fe 2 multiscale approach for modelling the elastoviscoplastic behaviour of long fibre sic/ti composite materials. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 183(3):309–330.
- [Fish, 1992] FISH, J. (1992). The s-version of the finite element method. *Computers & Structures*, 43(3):539–547.
- [Fish et Belsky, 1994] FISH, J. et BELSKY, V. (1994). Multigrid method for periodic heterogeneous media. part 2 : Multiscale modeling and quality control in multidimensional case. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 126:17–38.

- [Fish et Markolefas, 1992] FISH, J. et MARKOLEFAS, S. (1992). The s-version of the finite element method for multilayer laminates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33:1081–1105.
- [Fish *et al.*, 1995] FISH, J., PANDHEERADI, M. et BELSKY, V. (1995). An efficient multi-level solution scheme for large scale nonlinear systems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38:1597–1610.
- [Fish *et al.*, 1996] FISH, J., PANDHEERADI, M. et BELSKY, V. (1996). Efficient solution schemes for interface problems. *Finite Elements in Analysis and Design*, 22:267–280.
- [Fish et Shek, 2000] FISH, J. et SHEK, K. (2000). Multiscale analysis of large scale nonlinear structures and materials. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, 1(1):79–90.
- [Fish *et al.*, 1997] FISH, J., SHEK, K., PANDHEERADI, M. et SHEPHARD, M. S. (1997). Computational plasticity for composite structures based on mathematical homogenization : Theory and practice. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 148(1):53–73.
- [Fletcher et Reeves, 1964] FLETCHER, R. et REEVES, C. M. (1964). Function minimization by conjugate gradients. *The Computer Journal*, 7(2):149.
- [Foerch *et al.*, 2000] FOERCH, R., GROS, V., MOUNOURY, V., QUILICI, S. et CAILLETAUD, G. (2000). Cyclic calculations and life prediction in thermomechanical fatigue using the zmat library. *Proceedings of Abaqus Conference 2000, Newport RI*.
- [Gander *et al.*, 2002] GANDER, M., MAGOULÈS, F. et NATAF, F. (2002). Optimized Schwarz methods without overlap for the Helmholtz equation. *SIAM J. Sci. Comput.*, 24(1):38–60.
- [Gander, 2008] GANDER, M. J. (2008). Schwarz methods over the course of time. *Electronic Transactions on Numerical Analysis*, 31:228–255.
- [Gander et Halpern, 2012] GANDER, M. J. et HALPERN, L. (2012). Méthodes de décompositions de domaines. Rapport technique, Université de Genève.
- [Gendre, 2009] GENDRE, L. (2009). *Approche globale / locale non-intrusive : application aux structures avec plasticité localisée*. Thèse de doctorat, École Normale Supérieure de Cachan.
- [Gendre *et al.*, 2011] GENDRE, L., ALLIX, O. et GOSSELET, P. (2011). A two-scale approximation of the Schur complement and its use for non-intrusive coupling. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 87(9):889–905.
- [Gendre *et al.*, 2009] GENDRE, L., ALLIX, O., GOSSELET, P. et COMTE, F. (2009). Non-intrusive and exact global/local techniques for structural problems with local plasticity. *Computational Mechanics*, 44(2):233–245.
- [Gerstenberger et Tuminaro, 2013] GERSTENBERGER, A. et TUMINARO, R. S. (2013). An algebraic multigrid approach to solve extended finite element method based fracture problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 94(3): 248–272.

- [Ghosh *et al.*, 1996] GHOSH, S., LEE, K. et MOORTHY, S. (1996). Two scale analysis of heterogeneous elastic-plastic materials with asymptotic homogenization and voronoi cell finite element model. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 132(1):63–116.
- [Ghosh *et al.*, 2001] GHOSH, S., LEE, K. et RAGHAVAN, P. (2001). A multi-level computational model for multi-scale damage analysis in composite and porous materials. *International Journal of Solids and Structures*, 38:2335–2385.
- [Glowinski et Le Tallec, 1990] GLOWINSKI, R. et LE TALLEC, P. (1990). Augmented lagrangian interpretation of the nonoverlapping schwarz alternating method. *Third international symposium on domain decomposition methods for partial differential equations*, 23:224–231.
- [Gosselet *et al.*, 2017] GOSSELET, P., BLANCHARD, M. et ALLIX, O. (2017). Non-invasive global-local coupling as a schwarz domain decomposition method : acceleration and generalization. *Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences*. hal-01613966v1.
- [Gravouil et Combescure, 2003] GRAVOUIL, A. et COMBESCURE, A. (2003). Multi-time-step and two-scale domain decomposition method for non-linear structural dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 58:1545–1569.
- [Gu *et al.*, 2004] GU, H., ZONG, Z. et HUNG, K. C. (2004). A modified superconvergent patch recovery method and its application to large deformation problems. *Finite Elements in Analysis and Design*, 40:665–687.
- [Guennouni, 1988] GUENNOUNI, T. (1988). Sur une méthode de calcul de structures soumises à des chargements cycliques : l’homogénéisation en temps. *Modélisation mathématique et analyse numérique*, 22(3):417–455.
- [Guguin *et al.*, 2014] GUGUIN, G., ALLIX, O., GOSSELET, P. et GUINARD, S. (2014). Non-intrusive coupling of 3d and 2d laminated composite models based on finite element 3d recovery. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 98(5):324–343.
- [Guguin *et al.*, 2016] GUGUIN, G., ALLIX, O., GOSSELET, P. et GUINARD, S. (2016). On the computation of plate assemblies using realistic 3d joint model : a non-intrusive approach. *Adv. Model. and Simul. in Eng. Sci.*, 3.
- [Guguin, 2014] GUGUIN, L. (2014). *Stratégie non-intrusive de couplage plaque/3D pour l’application aux plaques composites stratifiées*. Thèse de doctorat, École Normale Supérieure de Cachan.
- [Guidault *et al.*, 2008] GUIDAULT, P.-A., ALLIX, O., CHAMPANEY, L. et CORNUAULT, C. (2008). A multiscale extended finite element method for crack propagation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(5):381–399.
- [Guinard *et al.*, 2017] GUINARD, S., BOUCLIER, R. et PASSIEUX, J.-C. (2017). Couplage non-intrusif d’un modèle global coque et de modèles locaux solides 3d non linéaires pour la simulation d’aérostructures. *13ème colloque national en calcul des structures de Giens*.

- [Gupta *et al.*, 2003] GUPTA, P., PEREIRA, J., KIM, D.-J., DUARTE, C. et EASON, T. (2003). Analysis of three-dimensional fracture mechanics problems : A non-intrusive approach using a generalized finite element method. *Engineering Fracture Mechanics*, 90:41–64.
- [Hackbusch, 1984] HACKBUSCH, W. (1984). Local defect correction and domain decomposition techniques. In Ohmer, K. B. et Stetter, H. J., Suppl. 5:89–113.
- [Halphen et Nguyen, 1981] HALPHEN, B. et NGUYEN, Q. S. (1981). *Comportement Asymptotique des Structures Elastoplastiques sous Chargement Periodique*, pages 101–108. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg.
- [Hecht *et al.*, 2009] HECHT, F., LOZINSKI, A. et PIRONNEAU, O. (2009). Numerical zoom and the schwarz algorithm. *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*, 18.
- [Hestenes et Stiefel, 1952] HESTENES, M. R. et STIEFEL, E. (1952). *Methods of conjugate gradients for solving linear systems*, volume 49. NBS.
- [Hinojosa *et al.*, 2014] HINOJOSA, J., ALLIX, O., GUIDAULT, P. A. et CRESTA, P. (2014). Domain decomposition methods with nonlinear localization for the buckling and post-buckling analyses of large structures. *Advances in Engineering Software*, 70:13–24.
- [Hirai, 1985] HIRAI, I. (1985). An exact zooming method. *Finite Element Analysis and Design*, 1:61–69.
- [Hirai *et al.*, 1984] HIRAI, I., WANG, B. P. et PILKEY, W. D. (1984). An efficient zooming method for finite element analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 20(9):1671–1683.
- [Holl *et al.*, 2013] HOLL, M., LOEHNERT, S. et WRIGGERS, P. (2013). An adaptive multiscale method for crack propagation and crack coalescence. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 93(1):23–51.
- [Holnicki-Szulc, 1991] HOLNICKI-SZULC, J. (1991). *Virtual distortion method*, volume 65. Springer Science & Business Media.
- [Hughes, 1995] HUGHES, T. J. (1995). Multiscale phenomena : Green’s functions, the dirichlet-to-neumann formulation, subgrid scale models, bubbles and the origins of stabilized methods. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 127(1):387–401.
- [Hughes *et al.*, 1998] HUGHES, T. J., FEIJÓO, G. R., MAZZEI, L. et QUINCY, J.-B. (1998). The variational multiscale method—a paradigm for computational mechanics. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 166(1):3–24.
- [Hühne *et al.*, 2016] HÜHNE, S., REINOSO, J., JANSEN, E. et et AL. (2016). A two-way loose coupling procedure for investigating the buckling and damage behaviour of stiffened composite panels. *Composite Structures*, 136:513–525.
- [Ibrahimbegović et Markovič, 2003] IBRAHIMBEGOVIĆ, A. et MARKOVIČ, D. (2003). Strong coupling methods in multi-phase and multi-phase and multi-scale modeling of inelastic behavior of heterogeneous structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192((28-30)):3089–3107.

- [Ion Păvăloiu, 2016] ION PĂVĂLOIU, E. C. (2016). On a robust aitken–newton method based on the hermite polynomial. *Applied Mathematics and Computation*, 287–288:224–231.
- [Irons et Tuck, 1969] IRONS, B. M. et TUCK, R. C. (1969). A version of the aitken accelerator for computer iteration. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1(3):275–277.
- [Jara-Almonte et Knight, 1988] JARA-ALMONTE, C. C. et KNIGHT, C. E. (1988). The specified boundary stiffness/force sbsf method for finite element subregion analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 26(7):1567–1578.
- [Johnson, 1992] JOHNSON, K. (1992). The application of shakedown principles in rolling and sliding contact. *European Journal of Mechanics*, 11:155–172.
- [Kapania et al., 1997] KAPANIA, R. K., HARYADI, S. G. et HAFTKA, R. T. (1997). Global/local analysis of composite plates with cutouts. *Computational Mechanics*, 19:386–396.
- [Kelley, 1982] KELLEY, F. (1982). Mesh requirements for the analysis of a stress concentration by the specified boundary displacement method. In : *Proceedings of the Second International Computers in Engineering Conference, ASME*.
- [Khalij et al., 2002] KHALIJ, L., HARIRI, S. et VAUCHER, R. (2002). Méthode d'analyse simplifiée appliquée aux structures tridimensionnelles. *Revue Européenne des Éléments Finis*, 11(6):703–718.
- [Kiewel et al., 2000] KIEWEL, H., AKTAA, J. et MUNZ, D. (2000). Application of an extrapolation method in thermocyclic failure analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 182(1-2):55 – 71.
- [King, 1979] KING, R. F. (1979). An extrapolation method of order four for linear sequences. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*
- [King, 1980] KING, R. F. (1980). An efficient one-point extrapolation method for linear convergence. *Mathematics of Computation*, 35(152):1285–1290.
- [Kirsch et Bogomolni, 2007] KIRSCH, U. et BOGOMOLNI, M. (2007). Nonlinear and dynamic structural analysis using combined approximations. *Computers and Structures*, 85(10):566–578.
- [Kirsch et Liu, 1995] KIRSCH, U. et LIU, M. (1995). Exact structural reanalysis by a first-order reduced basis approach. *Structural Optimization*, 10:153–158.
- [Kirsch et Papalambros, 2001] KIRSCH, U. et PAPALAMBROS, P. Y. (2001). Exact and accurate solutions in the approximate reanalysis of structures. *AIAA journal*, 39(11): 2198–2205.
- [Koiter, 1960] KOITER, W. (1960). General theorems for elastic-plastic solids. *Prog. Solid Mech.*, 1:165–221.
- [König, 1987] KÖNIG, J. A. (1987). *Shakedown of elastic-plastic structures*, volume 7. Elsevier.

- [Kouznetsova *et al.*, 2004] KOUZNETSOVA, V., GEERS, M. G. et BREKELMANS, W. M. (2004). Multi-scale second-order computational homogenization of multi-phase materials : a nested finite element solution strategy. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 193:5525–5550.
- [Krause et Rank, 2003] KRAUSE, R. et RANK, E. (2003). Multiscale computations with a combination of the h- and p- versions of the finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192:3959–3983.
- [Kravchenko et Pettermann, 2014] KRAVCHENKO, G. et PETTERMANN, H. E. (2014). A cyclic cohesive zone model for transient thermomechanical loading. *In Proceedings : 11th World Congress on Computational Mechanics*.
- [Küttler et Wall, 2008] KÜTTLER, U. et WALL, W. A. (2008). Fixed-point fluid–structure interaction solvers with dynamic relaxation. *Computational Mechanics*, 43(1):61–72.
- [Ladevèze, 2008] LADEVÈZE, P. et CHAMOIN, L. (2008). A non-intrusive method for the calculation of strict and efficient bounds of calculated outputs of interest in linear viscoelasticity problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197:994–1014.
- [Ladevèze, 1981] LADEVÈZE, P. (1981). *Méthodes constructives pour la simulation numérique d'écoulements de fluides non newtoniens*. Thèse de doctorat, Université Paris 6.
- [Ladevèze, 1985] LADEVÈZE, P. (1985). Sur une famille d'algorithmes en mécanique des structures. *Comptes-rendus des séances de l'académie des sciences*, 300(Série 2):41–44.
- [Ladevèze, 1989] LADEVÈZE, P. (1989). La méthode à grand incrément pour l'analyse de structures à comportement non-linéaire décrit par variables internes. *C.R.A.S 309 Série II*, 309(11):1095–1099.
- [Ladevèze, 1996] LADEVÈZE, P. (1996). *Mécanique non-linéaire des structures – Nouvelle approche et méthode de calcul non-incrémentales*. Hermès, Paris.
- [Ladevèze, 1999] LADEVÈZE, P. (1999). *Nonlinear Computational Structural Mechanics. New approaches and Non-Incremental Methods of calculation*. Springer-Verlag.
- [Ladevèze *et al.*, 2010] LADEVÈZE, P., CHAMOIN, L. et FLORENTIN, E. (2010). A new non-intrusive technique for the construction of admissible stress fields in model verification. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199:766–777.
- [Ladevèze et Dureisseix, 2000] LADEVÈZE, P. et DUREISSEIX, D. (2000). A micro/macro approach for parallel computing of heterogeneous structures. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, 1:18–28.
- [Ladevèze *et al.*, 2001] LADEVÈZE, P., LOISEAY, O. et DUREISSEIX, D. (2001). A micro-macro and parallel computational strategy for highly heterogeneous structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 52((1-2)):121–138.
- [Ladevèze et Rougée, 1985] LADEVÈZE, P. et ROUGÉE, P. (1985). Plasticité et viscoplasticité sous chargement cyclique : propriétés et calcul du cycle limite. *Comptes-rendus des séances de l'académie des sciences*, 300(Série 2, 13):891–894.

- [Lemaitre *et al.*, 2009] LEMAITRE, J., CHABOCHE, J., BENALLAL, A. et DESMORAT, R. (2009). *Mécanique des matériaux solides 3^e édition*. Dunod.
- [Lesne et Savalle, 1989] LESNE, P. et SAVALLE, S. (1989). An efficient cycles jump technique for viscoplastic structure calculations involving large number of cycles. *In Proc. of 2nd Int. Conf. Computational Plasticity : Models, Software and Applications*, pages 591–602, Barcelone Espagne.
- [Levy *et al.*, 2008] LEVY, A., POITOU, A., LE CORRE, S. et SOCCARD, E. (2008). Ultrasonic welding of thermoplastic composites, modeling of the process. *International Journal of Material Forming*, 1(1):887–890.
- [Lions *et al.*, 2001] LIONS, J.-L., MADAY, Y. et TURINICI, G. (2001). Résolution d'edp par un schéma en temps "pararéel". *C. R. Acad. Sci. Paris*, 332(Série I):661–668.
- [Lions, 1990] LIONS, P.-L. (1990). On the schwarz alternating method. iii : a variant for nonoverlapping subdomains. *In Third international symposium on domain decomposition methods for partial differential equations*, volume 6, pages 202–223. SIAM Philadelphia, PA.
- [Liu *et al.*, 2014] LIU, Y., SUN, Q. et FAN, X. (2014). A non-intrusive global/local algorithm with non-matching interface : Derivation and numerical validation. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 277:81–103.
- [Longuet *et al.*, 2013] LONGUET, A., BURTEAU, A., COMTE, F. et CROUCHEZ-PILOT, A. (2013). Incremental lifing method applied to high temperature aeronautical component. *In Actes du 11eme colloque national en calcul des structures*.
- [Lozinski et Pironneau, 2011] LOZINSKI, A. et PIRONNEAU, O. (2011). Numerical zoom for advection diffusion problems with localized multiscales. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 27(1):197–207.
- [Lubineau et Ladevèze, 2008] LUBINEAU, G. et LADEVÈZE, P. (2008). Construction of a micromechanics-based intralaminar mesomodel and illustrations in abaqus/standard. *Computational Materials Science*, 43(1):137 – 145. Proceedings of the 16th International Workshop on Computational Mechanics of Materials IWCMM-16.
- [Maitournam *et al.*, 2002] MAITOURNAM, H., POMMIER, B. et THOMAS, J.-J. (2002). Détermination de la réponse asymptotique d'une structure anélastique sous chargement thermodynamique cyclique. *C. R. Mecanique*, 330:703–708.
- [Mandel, 1993] MANDEL, J. (1993). Balancing domain decomposition. *Communications in numerical methods in engineering*, 9(3):233–241.
- [Mao et Sun, 1991] MAO, K. M. et SUN, C. T. (1991). A refined global-local finite element analysis method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 32(1):29–43.
- [Maouche *et al.*, 1997] MAOUCHE, N., MAITOURNAM, M. et DANG VAN, K. (1997). On a new method of evaluation of the inelastic state due to moving contacts. *Wear*, 203:139 – 147.

- [Markovič et Ibrahimbegović, 2004] MARKOVIČ, D. et IBRAHIMBEGOVIĆ, A. (2004). On micro-macro interface conditions for micro scale based fem for inelastic behavior of heterogenous materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193:5503–5523.
- [Matthies et Strang, 1979] MATTHIES, H. et STRANG, G. (1979). The solution of nonlinear finite element equations. *Internation Journal for numerical methods in engineering*, 14:1613–1626.
- [McCormick et Thomas, 1986] MCCORMICK, S. et THOMAS, J. (1986). The fast adaptive composite grid (fac) method for elliptic equations. *Mathematics of Computation*, 46(174):439–456.
- [Melenk et Babuška, 1996] MELENK, J. M. et BABUŠKA, I. (1996). The partition of unity finite element method : basic theory and applications. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 139(1):289–314.
- [Moës et Belytschko, 2002] MOËS, N. et BELYTSCHKO, T. (2002). Extended finite element method for cohesive crack growth. *Engineering fracture mechanics*, 69(7):813–833.
- [Moës et Dolbow, 1999] MOËS, N. et DOLBOW, J. and Belytschko, T. (1999). A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46:131–150.
- [Negrello *et al.*, 2016] NEGRELLO, C., GOSSELET, P., REY, C. et PEBREL, J. (2016). Substructured formulations of nonlinear structure problems – influence of the interface condition. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 107(13): 1083–1105. nme.5195.
- [Noels *et al.*, 2002] NOELS, L., STAINIER, L., PONTHOT, J. P. et BONINI, J. (2002). Automatic time stepping algorithms for implicit numerical simulations of non-linear dynamics. *Advances in Engineering Software*, 33(7):589 – 603. Engineering Computational Technology & Computational Structures Technology.
- [Nouy et Pled, 2017] NOUY, A. et PLED, F. (2017). A multiscale method for semi-linear elliptic equations with localized uncertainties and non-linearities. *arXiv preprint, Mathematical Modelling and Numerical Analysis*.
- [Oden *et al.*, 1999] ODEN, J. T., VEMAGANTI, K. et MOËS, N. (1999). Hierarchical modeling of heterogeneous solids. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 172(1):3–25.
- [Oden et Zohdi, 1997] ODEN, J. T. et ZOHDİ, T. I. (1997). Analysis and adaptive modeling of highly heterogeneous elastic structures. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 148(3):367–391.
- [Oskay et Fish, 2004] OSKAY, C. et FISH, J. (2004). Fatigue life prediction using 2-scale temporal asymptotic homogenization. *Internation Journal for numerical methods in engineering*, 61:329–359.

- [Oumaziz *et al.*, 2017] OUMAZIZ, P., GOSSELET, P., BOUCARD, P.-A. et ABBAS, M. (2017). A parallel non-invasive multi-scale strategy for a mixed domain decomposition method with frictional contact. *submitted (presque) to IJNME*.
- [Oumaziz *et al.*, 2016] OUMAZIZ, P., GOSSELET, P., BOUCARD, P.-A. et GUINARD, S. (2016). A non-invasive implementation of a mixed domain decomposition method for frictional contact problems. *submitted to Computational Mechanics*.
- [Passieux *et al.*, 2011] PASSIEUX, J. C., GRAVOUIL, J. C., J., R. et BAIETTO, M. C. (2011). Direct estimation of generalized stress intensity factors using a three-scale concurrent multigrid xfem. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 85(13):1648–1666.
- [Passieux *et al.*, 2013] PASSIEUX, J.-C., RÉTHORÉ, J., GRAVOUIL, A. et BAIETTO, M.-C. (2013). Local/global non-intrusive crack propagation simulation using a multigrid x-fem solver. *Computational Mechanics*, 52(6):1381–1393.
- [Pebrel *et al.*, 2008] PEBREL, J., REY, C. et GOSSELET, P. (2008). A nonlinear dual-domain decomposition method : Application to structural problems with damage. *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, 6(3).
- [Peigney, 2004] PEIGNEY, M. (2004). Simulating wear under cyclic loading by a minimization approach. *International Journal of Solids and Structures*, 41(24 ?25):6783 – 6799.
- [Peigney et Stolz, 2001] PEIGNEY, M. et STOLZ, C. (2001). Approche par contrôle optimal des structures élastoviscoplastiques sous chargement cyclique. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Series IIB, Mechanics*, 329(9):643–648.
- [Peigney et Stolz, 2003] PEIGNEY, M. et STOLZ, C. (2003). An optimal control approach to the analysis of inelastic structures under cyclic loading. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 51(4):575–605.
- [Peyre *et al.*, 2013] PEYRE, G., RYCKELYNCK, D., FEYEL, F. et KRUCH, S. (2013). Vers une méthode fe2-aphr. *11ème colloque national en calcul des structures de Giens*.
- [Plews *et al.*, 2012] PLEWS, J., DUARTE, C. A. et EASON, T. (2012). An improved non-intrusive global-local approach for sharp thermal gradients in a standard fea platform. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 91(4):361–397.
- [Polak et Ribiere, 1969] POLAK, E. et RIBIERE, G. (1969). Note sur la convergence de méthodes de directions conjuguées. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis - Modélisation Mathématique et Analyse Numérique*, 3(R1):35–43.
- [Pommier, 2003] POMMIER, B. (2003). *Détermination de la réponse asymptotique d'une structure anélastique soumise à un chargement thermomécanique cyclique*. Thèse de doctorat, École polytechnique.
- [Puel et Aubry, 2015] PUEL, G. et AUBRY, D. (2015). Parameter identification of two-time-scale nonlinear transient models. *Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences*.

- [Ramière, 2017] RAMIÈRE, I. (2017). Un schéma de calcul multi-échelles de types éléments finis au carré pour la simulations de combustibles nucléaires hétérogènes. *13ème colloque national en calcul des structures de Giens*.
- [Rank, 1992] RANK, E. (1992). Adaptive remeshing and h-p domain decomposition. *Computers Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 101:299–313.
- [Rank et Krause, 1997] RANK, E. et KRAUSE, R. (1997). A multiscale finite element method. *Computers and Structures*, 64(1-4):139–144.
- [Rannou et al., 2009] RANNOU, J., A., G. et BAIETTO-DUBOURG, M. C. (2009). A local multigrid xfem strategy for 3d crack propagation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 77(4):581–600.
- [Ransom et Knight, 1989] RANSOM, J. B. et KNIGHT, N. J. (1989). Global/local stress analysis of composite panels. *Technical Memorandum 101622, NASA*.
- [Ransom et al., 1992] RANSOM, J. B., MCCLEARY, S. L., AMINPOUR, M. A. et JR., N. F. K. (1992). Computational methods for global/local analysis. *Technical Memorandum 107591, NASA*.
- [Relun et al., 2013] RELUN, N., NÉRON, D. et BOUCARD, P.-A. (2013). A model reduction technique based on the pgd for elastic-viscoplastic computational analysis. *Computational Mechanics*, 51:83–92.
- [Rezzonico et al., 2007] REZZONICO, Vittoria and Lozinski, A., PICASSO, M., RAPPAZ, J. et WAGNER, J. (2007). Multiscale algorithm with patches of finite elements. *Mathematics and Computers in Simulation*, 76(1-3):181 – 187. *Mathematical Modelling and Computational Methods in Applied Sciences and Engineering*.
- [Royer, 1989] ROYER, C. (1989). *Une approche des problèmes de dynamique non-linéaire par la méthode à grand incrément de temps*. Thèse de doctorat, Université Paris 6.
- [Ryu et Boyd, 2016] RYU, E. K. et BOYD, S. (2016). Primer on monotone operator methods. *Applied and Computational Mathematics*, 15(1):3–43.
- [Saad, 2000] SAAD, Y. (2000). Iterative methods for sparse linear systems. *PWS Publishing Company, 3rd edition édition*.
- [Saï, 1993] SAÏ, K. (1993). *Modèles à grand nombre de variables internes et méthodes numériques associées*. Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure des Mines de Paris.
- [Saka, 1991] SAKA, M. (1991). Finite element applications of the theorems of structural variation. *Computers & structures*, 41(3):519–530.
- [Sanchez-Palencia, 1974] SANCHEZ-PALENCIA, E. (1974). Comportement local et macroscopique d'un type de milieux physiques hétérogènes. *International Journal for Engineering Science*, 12:231–251.
- [Savalle et Culie, 1978] SAVALLE, S. et CULIE, J. (1978). Méthodes de calcul associées aux lois de comportement cyclique et d'endommagement. *La recherche aérospatiale*, 5:263–278.

- [Sherman et Morrison, 1949] SHERMAN, J. et MORRISON, W. J. (1949). Adjustment of an inverse matrix corresponding to changes in the elements of a given column or a given row of the original matrix. *Annals of Mathematical Statistics*, 20(621).
- [Simo, 1992] SIMO, J. (1992). Algorithms for static and dynamic multiplicative plasticity that preserve the classical return mapping schemes of the infinitesimal theory. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 99(1):61 – 112.
- [Simo et Hughes, 1998] SIMO, J. et HUGHES, T. (1998). *Computational Inelasticity*. Springer-Verlag, New-York.
- [Simo et Taylor, 1985] SIMO, J. C. et TAYLOR, R. L. (1985). Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 48:101–118.
- [Simo et Taylor, 1986] SIMO, J. C. et TAYLOR, R. L. (1986). A return mapping algorithm for plane stress elastoplasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 22(3):649–670.
- [Simulia, 2016] SIMULIA, A. (2016). Abaqus documentation : Analysis user's guide. *Providence, RI USA*.
- [Son, 1977] SON, N. Q. (1977). On the elastic plastic initial-boundary value problem and its numerical integration. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 11(5):817–832.
- [Srinivasan *et al.*, 1996] SRINIVASAN, S., BIGGERS, S. B. et LATOUR, R. A. (1996). Identifying global/local interface boundaries using an objective search method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39:805–828.
- [Srinivasan *et al.*, 1999] SRINIVASAN, S., de ANDRADE, J. R., BIGGERS JR., S. B. et LATOUR JR., R. A. (1999). 3-d global/local analysis of composite hip prostheses - a model for multiscale structural analysis. *Composite Structures*, 45:163–170.
- [Steffensen, 1933] STEFFENSEN, J. F. (1933). Remarks on iteration. *Skandinavisk Aktuarietidskrift*, 16:64–72.
- [Steger *et al.*, 1982] STEGER, J. L., DOUGHERTY, F. C. et BENEK, J. A. (1982). A chimera grid scheme. *In In ASME Mini-Symposium on Advances in Grid Generation*.
- [Stolz, 2008] STOLZ, C. (2008). Optimal control approach in nonlinear mechanics. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 336(1):238–244.
- [Strouboulis *et al.*, 2000] STROUBOULIS, T., BABUŠKA, I. et COPPS, K. (2000). The design and analysis of the generalized finite element method. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 181(1):43–69.
- [Strouboulis *et al.*, 2003] STROUBOULIS, T., ZHANG, L. et BABUŠKA, I. (2003). Generalized finite element method using mesh-based handbooks : application to problems in domains with many voids. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192(28):3109–3161.

- [Szmytka *et al.*, 2015] SZMYTKA, F., FORRÉ, A. et AUGUSTINS, L. (2015). A time increment control for return mapping algorithm applied to cyclic viscoplastic constitutive models. *Finite Elements in Analysis and Design*, 102-103:19 – 28.
- [Tabiei et Yi, 2002] TABIEI, A. et YI, W. (2002). Comparative study of predictive methods for woven fabric composite elastic properties. *Composite Structures*, 58(1):149 – 164.
- [Temizer et Wriggers, 2011] TEMIZER, I. et WRIGGERS, P. (2011). An adaptive multiscale resolution strategy for the finite deformation analysis of microheterogeneous structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200(37-40):2639 – 2661. Special Issue on Modeling Error Estimation and Adaptive Modeling.
- [Terada et Kikuchi, 2001] TERADA, K. et KIKUCHI, N. (2001). A class of general algorithms for multi-scale analyses of heterogeneous media. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190:5427–5464.
- [Touzeau, 2013] TOUZEAU, J. (2013). *Approche numérique multiéchelle / multimodèle de la dégradation des matériaux composites*. Thèse de doctorat, École Centrale Paris.
- [Traub, 1964] TRAUB, J. F. (1964). Iterative methods for the solution of equations. *Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ*.
- [Van Paepegem *et al.*, 2001] VAN PAEPEGEM, W., DEGRIECK, J. et DE BAETS, P. (2001). Finite element approach for modelling fatigue damage in fibre-reinforced composite materials. *Composites Part B : Engineering*, 32(7):575–588.
- [Verdier *et al.*, 1998] VERDIER, M., FIVEL, M. et GROMA, I. (1998). Mesoscopic scale simulation of dislocation dynamics in fcc metals : Principles and applications. *Modeling and Simulation in Materials Science and Engineering*, 6(6):755.
- [Vincent *et al.*, 2003] VINCENT, Y., BERGHEAU, J.-M. et LEBLOND, J.-B. (2003). Viscoplastic behaviour of steels during phase transformations. *Comptes Rendus de Mécanique*, 331(9):587 – 594.
- [Vitse, 2016] VITSE, M. (2016). *Réduction de modèle pour l'analyse paramétrique de l'endommagement dans les structures en béton armé*. Thèse de doctorat, École Normale Supérieure Paris-Saclay.
- [Voleti *et al.*, 1995] VOLETI, S. R., CHANDRA, N. et MILLER, J. R. (1995). Global-local analysis of large-scales composite structures using finite element methods. *Computers and Structures*, 58(3):453–464.
- [Weisser et Bouhaddi, 2009] WEISSER, T. et BOUHADDI, N. (2009). Réanalyse dynamique de structures par une variante de la méthode des approximations combinées. *In Actes du 9eme colloque national en calcul des structures*.
- [Whitcomb, 1991] WHITCOMB, J. D. (1991). Iterative global/local finite element analysis. *Computers & structures*, 40(4):1027–1031.
- [Whitcomb et Woo, 1993a] WHITCOMB, J. D. et WOO, K. (1993a). Application of iterative global/local finite element analysis. part 1 : Linear analysis. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 9:745–756.

- [Whitcomb et Woo, 1993b] WHITCOMB, J. D. et WOO, K. (1993b). Application of iterative global/local finite-element analysis. part 2 : Geometrically non-linear analysis. *Communications in numerical methods in engineering*, 9(9):757–766.
- [Woodbury, 1950] WOODBURY, M. A. (1950). Inverting modified matrices. *Memorandum Rept. 42, Statistical Research Group*.
- [Wyart *et al.*, 2009] WYART, E., COULON, D., PARDOEN, T., REMACLE, J. et LANI, F. (2009). Application of the substructured finite element/extended finite element method (s-fe/xfe) to the analysis of cracks in aircraft thin walled structures. *Engineering Fracture Mechanics*, 76(1):44–58.
- [Wyart *et al.*, 2008] WYART, E., DUFLLOT, M., COULON, D., MARTINY, P., PARDOEN, T., REMACLE, J. et LANI, F. (2008). Substructuring fe-xfe approaches applied to three-dimensional crack propagation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 215(2):626–638.
- [Xiao et Belytschko, 2004] XIAO, S. et BELYTSCHKO, T. (2004). A bridging domain method for coupling continua with molecular dynamics. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 193(17):1645–1669.
- [Yserentant, 1986] YSERENTANT, H. (1986). On the multi-level splitting of finite element spaces. *Numerical Mathematics*, 49:379–412.
- [Yu et Fish, 2002a] YU, Q. et FISH, J. (2002a). Multiscale asymptotic homogenization for multiphysics problems with multiple spatial and temporal scales : a coupled thermo-viscoelastic example problem. *International Journal of Solids and Structures*, 39(26):6429 – 6452.
- [Yu et Fish, 2002b] YU, Q. et FISH, J. (2002b). Temporal homogenization of viscoelastic and viscoplastic solids subjected to locally periodic loading. *Computational Mechanics*, 29(3):199–211.
- [Zarka *et al.*, 1980] ZARKA, J., ENGEL, J. et INGLEBERT, G. (1980). On a simplified inelastic analysis of structures. *Nuclear Engineering and Design*, 57:333–368.
- [Zienkiewicz *et al.*, 1983] ZIENKIEWICZ, O. C., DE, S. R., CAGO, J. P. et KELLY, D. W. (1983). The hierarchical concept in finite element analysis. *Computers and Structures*, 16(1-4):53–65.
- [Zienkiewicz et Zhu, 1992] ZIENKIEWICZ, O. C. et ZHU, J. Z. (1992). The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. part 1 : The recovery technique. *International Journal of Solids and Structures*, 36(1):2507–2526.
- [Zohdi *et al.*, 1996] ZOHDI, T. I., ODEN, J. T. et RODIN, G. J. (1996). Hierarchical modeling of heterogeneous bodies. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 138(1):273–298.
- [Zohdi et Wriggers, 1999] ZOHDI, T. I. et WRIGGERS, P. (1999). A domain decomposition method for bodies with microstructure based upon material regularization. *International Journal of Solids and Structures*, 36(1):2507–2526.

- [Zohdi *et al.*, 2001] ZOHDI, T. I., WRIGGERS, P. et HUET, C. (2001). A method of substructuring large-scale computational micromechanical problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(43-44):5639–5656.
- [Zuchiatti *et al.*, 2007] ZUCHIATTI, S., ROUX, J.-C., FEULVARCH, E., BERGHEAU, J.-M. et TISSOT, S. (2007). Simulation numérique du soudage de grandes structures par une approche locale/globale. *8e Colloque national en calcul des structures 2007*.

Titre : Méthode *global/local* non-intrusive pour les simulations cycliques non-linéaires

Mots clefs : couplage *global/local* – non-intrusif – élasto-viscoplasticité – calculs cycliques

Résumé : Cette thèse vise à proposer des outils innovants pour le calcul de structures aéronautiques évoluant à haute température. En effet, les régimes de fonctionnement des moteurs actuels conduisent à des évolutions élasto-viscoplastiques généralisées dans les pièces métalliques et l'utilisation de modèles simplifiés (élastiques) n'est plus totalement satisfaisante en terme de précision, même en phase de préconception. De même, la géométrie complexe permettant le refroidissement continu des pièces (micro-perforations) doit être prise en compte de manière exacte. Les techniques de calcul standard pour ce genre de problème conduiraient à des simulations lentes et peu flexibles (la moindre modification entraînant une remise en œuvre complète de la chaîne de calcul). Plus précisément, cette thèse étend les méthodes de type *global/local* non-intrusives au cas de la viscoplasticité généralisée en utilisant deux échelles de temps et d'espace, chacune adaptée aux phénomènes locaux et globaux à capturer. La méthode

est ensuite étendue au calcul de nombreux cycles complexes de chargement, par des techniques de saut de cycles. Le schéma de couplage en temps permet alors une adaptation locale du pas de temps par sous-domaine. Des techniques d'accélération de convergence sont proposées, à l'échelle d'un incrément puis à celle de la succession de cycles (sauts de cycles). Ces développements permettent d'obtenir rapidement et précisément une estimation du cycle limite qui alimente un modèle de durée de vie.

Le couplage non-intrusif est réalisé dans un script de programmation pilotant un code commercial (dans notre cas le langage *Python* et *Abaqus/Standard*). La méthode a été appliquée sur des plateformes de calculs industrielles, en réutilisant directement des maillages et les mises en données issues de modèles intervenant plus tôt dans la chaîne de calcul. Un cas métier, issu d'un bureau d'études de Safran Aircraft Engines, a pu être traité.

Title : Noninvasive *global/local* method for nonlinear cyclic computations

Keywords : *global/local* coupling, noninvasive, elasto-viscoplasticity, cyclic computations

Abstract : This thesis consists in developing innovating tools destined to the simulation of aeronautical structures evolving at high temperature. Indeed, working rates of current engines lead to an elasto-viscoplastic evolution generalized in metallic parts and the use of simplified models (linear elastic) are no longer totally satisfying in term of accuracy, even in initial design process. Likewise, the complex geometry allowing the continuous cool down process of parts (micro-perforations) has to be exactly taken into account. The standard computation techniques dedicated to this kind of models would lead to slow simulations with a lack of flexibility (the slightest modifications leading to restart the whole design process of the computation chain). More precisely, this thesis extends the noninvasive *global/local* methods to the framework of viscoplasticity generalized to the

whole structure, using two scales in time and space, each one adapted to global and local phenomena to capture. The method is then extended to the computation of high number of complex load cycles, by skipped cycles techniques. The time coupling scheme lets then a local adaptation of time steps per subdomain. Convergence acceleration techniques are also set up, first for one time step and then for the whole cycle. The noninvasive coupling is realized in a programming language script managing the commercial software (respectively in our case *Python* and *Abaqus/Standard*). The method has been applied on industrial computational platforms, by reusing directly meshes and data from previous engineering tasks appearing earlier in the computational chain. A genuine test case from a Safran Aircraft Engines design office, was performed successfully.

