



**HAL**  
open science

# Modélisation et caractérisation de la stabilité en position assise chez les personnes vivant avec une lésion de la moelle épinière

Mathias Blandeau

► **To cite this version:**

Mathias Blandeau. Modélisation et caractérisation de la stabilité en position assise chez les personnes vivant avec une lésion de la moelle épinière. Biomécanique [physics.med-ph]. Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambresis, 2018. Français. NNT : 2018VALE0021 . tel-01861272

**HAL Id: tel-01861272**

**<https://theses.hal.science/tel-01861272>**

Submitted on 24 Aug 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



**Thèse de doctorat**

Pour obtenir le grade de

**Docteur de l'Université de Valenciennes et du Hainaut Cambrésis**

En

**AUTOMATIQUE**

Présentée et soutenue par Mathias BLANDEAU.

Le 01/06/2018, à Valenciennes

# **Modélisation et Caractérisation de la Stabilité en Position Assise chez les Personnes Vivant avec une Lésion de la Moelle Épinière**

## **JURY :**

### **Président du jury**

- BASSET, Michel. Professeur, ENSISA, Université de Haute Alsace, France

### **Rapporteurs**

- CHÈZE, Laurence. Professeur, LBMC UMR\_T9406, Université Claude Bernard Lyon 1, France

- MAMMAR, Saïd. Professeur, IBISC EA-4526, Université d'Évry Val-d'Essonne, France

### **Examineurs**

- GAGNON, Dany. Professeur, CRIR, Institut de réadaptation Gingras-Lindsay de Montréal, Canada

- BASSET, Michel. Professeur, ENSISA, Université de Haute Alsace, France

**Co-directeur de thèse :** GUERRA, Thierry-Marie. Professeur, LAMIH, Valenciennes, France

**Co-directeur de thèse :** PUDLO, Philippe. Professeur, LAMIH, Valenciennes, France

### **Membres invités**

- DELVAL, Arnaud. MCU-PH, CHRU de Lille, France

- OBADIA, Jean-Marc, Innovation Project Manager, Zodiac Seats France, Issoudun, France

Thèse préparée dans le Laboratoire LAMIH (UMR CNRS 8201)

École doctorale : Sciences Pour l'Ingénieur (SPI 072)



# SOMMAIRE GÉNÉRALE

ABRÉGÉ	5
REMERCIEMENTS	9
ABRÉVIATIONS	11
INTRODUCTION GÉNÉRALE	13
CHAPITRE 1 : CONTRÔLE POSTURAL ET MODÉLISATION, ANALYSE DE L'EXISTANT	17
1. Position assise chez le sujet ordinaire et vivant avec une lésion de la moelle épinière	18
2. Modélisation biomécanique de la stabilité en position assise	28
3. Résumé et objectifs	43
CHAPITRE 2 : LE MODÈLE H2AT	45
1. Modèle théorique	46
2. Vérifications expérimentales	72
3. Conclusions	79
CHAPITRE 3 : LE MODÈLE S3S	81
1. Modèle théorique	82
2. Stabilisation et réduction du nombre de non linéarités	86
3. Observation	94
4. Résultats de simulations	98
5. Conclusion	105
CHAPITRE 4 : COLLECTES EXPÉRIMENTALES ET ESTIMATION DU MOMENT PASSIF	107
1. Introduction	108
2. Matériels et Méthodes	109
3. Résultats	117
4. Discussion	133
5. Conclusions	136
CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES	137
RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES	145
TABLES ET FIGURES	159
CONTRIBUTIONS SCIENTIFIQUES	163
ANNEXES	165
1. Général : Rappels matriciels	166
2. Chapitre 2	167
3. Chapitre 3	177
4. Chapitre 4	191



# ABRÉGÉ

Les personnes vivant avec une lésion de la moelle épinière (LMÉ) subissent une réduction drastique de leurs capacités sensori-motrices en dessous du niveau de la lésion. Cette pathologie influence négativement leur contrôle postural, vu comme le résultat de contributions actives, passives et neuronales. Une approche par modèle est choisie afin de représenter ces différentes contributions et mieux comprendre le contrôle postural en position assise. Deux problèmes apparaissent. Tout d'abord les modèles existants de la position assise sont très rares et inapplicables à l'étude des personnes vivant avec une LMÉ qui, dans l'absence de contrôle musculaire au niveau du tronc, vont utiliser leurs membres supérieurs pour s'équilibrer. De plus, les équations non linéaires sous forme descripteur des modèles biomécaniques existant sont linéarisées dans la majorité des cas afin de simplifier les équations obtenues ce qui n'est plus valable dans le cas de mouvements de grande amplitude. Or des travaux récents fournissent des outils pour analyser ces modèles en utilisant le formalisme de Takagi-Sugeno issu de la logique floue.

Ce travail est focalisé sur l'étude du contrôle postural des personnes vivant avec une LMÉ par des outils de l'automatique non linéaire, trois objectifs sont définis :

1. Proposer des modèles biomécaniques non linéaires de la stabilité en position assise pour les personnes vivant avec une LMÉ.
2. Utiliser des méthodes d'écriture de modèle du domaine de l'automatique non linéaire afin de créer les outils nécessaires à l'estimation des variables internes (non mesurées) au modèle.
3. Améliorer la connaissance de la stabilité chez les personnes vivant avec une LMÉ par l'estimation expérimentale d'efforts internes en fonction de paramètres personnels et des conditions expérimentales.

Les modèles créés dans ce manuscrit sont, à notre connaissance, les premiers à représenter la stabilité assise en considérant le déplacement des membres supérieurs. Il s'agit également des premiers modèles biomécaniques à utiliser les avancées récentes de l'automatique non linéaire pour l'estimation d'efforts internes non mesurables.

Mots-clés : Modèle non linéaire, Formalisme de Takagi-Sugeno, Modèle descripteur, Observateur à Entrées Inconnues, Lésion de la moelle épinière, Équilibre postural

# ABSTRACT

The ability to maintain stability in an unsupported sitting position often becomes challenging after an individual is affected by a spinal cord injury (SCI). In order to better understand sitting postural control as a combination of active, passive and neuronal contribution, a modelling approach is chosen. Two problems arise; first of all, existing models of sitting control are very scarce and inapplicable to people living with a SCI who will use their upper in a compensatory strategy to balance their trunk. Moreover, the majority of biomechanical models nonlinear equations are linearized with small angle hypothesis for an easier processing which is not acceptable when movements become large. Recent advances in nonlinear control theory provide the theoretical tools for the creation of nonlinear observers using the Takagi-Sugeno fuzzy formalism.

This work aims at the study of postural control for people living with a SCI by use of nonlinear tools from control theory; three main goals are formulated:

1. Creating new nonlinear biomechanical models aiming at the study of sitting stability of people living with SCI.
2. Using tools coming from nonlinear control theory to estimate model unmeasured variable
3. Improve the current knowledge on stability for people living with a SCI by estimating internal efforts depending on personal parameters in experimental conditions.

The models created in this manuscript are, to the best of our knowledge, the first to consider the upper limbs displacement for the control of sitting stability and the first biomechanical models to use the recent advances in nonlinear control theory for the estimation of unmeasured variables.

Keywords: Nonlinear model, Takagi-Sugeno formalism, Descriptor model, Unknown input observer, Spinal Cord Injury, Balance, Posture

*À Maëlle et Robin, pour tout.*



# REMERCIEMENTS

Le pire ennemi que l'étudiant en thèse rencontre durant ses travaux est la solitude et l'isolement. Grâce à ces personnes, je n'ai jamais eu à m'en inquiéter.

Je tiens à remercier très chaleureusement mes deux co-directeurs de thèse les Professeurs Thierry-Marie GUERRA et Philippe PUDLO pour leur encadrement, leur suivi et leur soutien pendant ces trois années. Travailler à la rencontre de plusieurs domaines scientifiques a toujours été mon objectif et mes attentes ont été plus que satisfaites sur ce point grâce à ce projet de recherche transdisciplinaire. Merci pour leur disponibilité, leur franchise, et surtout, à la manière du joueur d'échec expérimenté, leur capacité à voir deux ou trois coups en avance.

J'ai eu la chance de commencer ma thèse dans des conditions très favorables grâce à François GABRIELLI, dont l'expérience de la recherche et l'expertise technique dans des domaines tels que le traitement du signal ou dans la réalisation du pâté chinois m'a donné la confiance si importante pendant toute cette thèse. Son départ à Clermont-Ferrand m'a fait passer par la crise d'adolescence du thésard et a été un enseignement parmi tant d'autre. Merci pour ces discussions, merci pour ces critiques et ce recul, merci pour la découverte du jeu de rôle et du filtre de Savitzky-Golay et à très bientôt dans le Puy-de-Dôme.

Le laboratoire du LAMIH est composé de nombreux enseignant-chercheurs et ingénieurs d'étude et de recherche qui ont permis à certains travaux de voir le jour. Un très grand merci à Jimmy LAUBER pour ses discussions passionnantes sur l'automatique linéaire, non-linéaire, sur les meilleures blagues de Kaamelott mais également pour son enthousiasme et sa confiance pour les projets futurs que nous allons mener. Merci à Antoine DEQUIDT pour sa rigueur et son soutien dans l'écriture des équations mécaniques et ses « gribouillages » que je conserve précieusement. Merci à Gérald CONREUR et Thierry POULAIN pour leur aide à l'utilisation de la plateforme PSCHITT-PMR et pour avoir rendu possible cette collecte expérimentale, première en son genre, sur les perturbations aéronautiques. Merci à Christophe GILLET pour son expertise dans le domaine de la capture du mouvement et sa capacité à percevoir les besoins d'une personne et l'orienter subtilement et avec une précision chirurgicale au protocole idéal. Merci enfin à Sébastien PAGANELLI pour son ingéniosité remarquable et sa capacité à préparer des bancs d'essais et plateformes expérimentales de rêve. Je salue chaleureusement tous les doctorants du laboratoire, Rémy, Raton, Anis, Amir, Benyamine, Tarik, Dimitri, Émilie, Lydia qui ont fini ou commencent tout juste leur aventure de la recherche.

La recherche passe aussi par des rencontres et des collaborations sur le plan international. La première fois que j'ai rencontré le Professeur Dany H. GAGNON, je n'avais aucune idée de l'opportunité qui allait se présenter. En partant à deux reprises au laboratoire de pathokinésiologie à

Montréal, j'ai eu l'occasion de découvrir un autre aspect de la recherche de par son fonctionnement outre-Atlantique et à travers une application plus clinique qu'au LAMIH. Cette expérience a été très enrichissante sur le plan personnel (la découverte de la cabane à sucre) mais également professionnel car la base de données obtenue à la suite des collectes expérimentales est conséquente et permettra la publication de plusieurs articles dans le futur. Merci à Youssef EL KHAMLICHI pour son expertise technique au laboratoire, merci à Daniel MARINEAU, jamais à court d'idées pour fabriquer un dispositif expérimental, et un très grand merci à Martin VERMETTE ("Mathiôsss") pour sa gentillesse et son efficacité redoutable à trouver des sujets expérimentaux. Enfin un grand merci à Matthieu LALUMIERE, Dany GAGNON et toute sa famille pour m'avoir confirmé la qualité d'accueil légendaire des québécois.

Un bureau vide pendant plus de 1000 jours, cela peut se révéler fatiguant, heureusement j'ai eu le plaisir de partager le mien avec Victoria SPARTACUS, escrimeuse avignonnaise experte du pouce et Ciska MOLENAAR cycliste néerlandaise pragmatique (pléonasme) avec laquelle j'ai partagé ces 3 années de thèse et qui m'a apporté beaucoup plus qu'elle ne l'imagine. Thomas LAURAIN, rencontré par hasard, apprécié immédiatement, suivi pendant toute sa thèse dans les bons et moins bons moments et au cours de quelques parties de jeux de rôle gravées dans les annales du style et du brio. Enfin merci à Jérémie GUERRA pour tous ces points communs (sauf la crème de marron), ces projets pour le futur, et ta gentillesse à toi et cette magnifique famille que tu as. Je suis fier de vous compter parmi mes amis. Merci également à Archive et Gojira pour avoir composé de si bons albums, écoutés sans relâche pendant l'écriture de ce manuscrit.

Je remercie ma famille qui m'a toujours soutenu dans mes choix et mes études, ma mère pour m'avoir donné la passion du corps humain, mon père pour m'avoir fait découvrir le monde du handicap et mon frère pour m'avoir montré les voies possibles. Enfin, toutes mes pensées vont vers Maëlle qui m'a donné la confiance et le temps pour mener à bout ce projet, qui m'a suivi au Québec par -20°C, qui m'a soutenu dans les moments difficiles et surtout m'a offert le plus cadeau possible : Robin. Je la remercie de tout mon cœur.



# ABRÉVIATIONS

BMI : Inégalités Bilinéaires Matricielles (cf. : LMI)

COM : Centre de masse

COP : Centre de pression

EMG : Électromyogramme

LMÉ : Lésion de la Moelle Épinière

LMI : Inégalités Linéaires Matricielles

LPV : Linéaire à Paramètres Variant

MCS : Modèles en chaînes segmentaires

OEI : Observateur à Entrées Inconnues

PMR : Personne à Mobilité Réduite

q-LPV : quasi LPV

SNC : Système Nerveux Central

T-S : Takagi-Sugeno

# NOTATIONS

Sommes convexes de matrices :

$$A_h = \sum_{i=1}^r h_i(z)A_i, \quad A_h^{-1} = \left( \sum_{i=1}^r h_i(z)A_i \right)^{-1}, \quad A_{hv} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z)v_j(z)A_{ij}$$

L'astérisque (\*) est utilisé dans les expressions matricielles pour représenter les transposées des éléments symétriques. Pour les expressions linéaires, il représente la transposée des éléments situés à gauche du signe précédent, par exemple :

$$\begin{bmatrix} A & B^T \\ B & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & (*) \\ B & C \end{bmatrix}, \quad A + B + A^T + B^T + C = A + B + (*) + C$$



# INTRODUCTION GÉNÉRALE

*Stability is a heavily loaded term with an unstable definition*

Richard Bellman

*Papa dit que nous avons une fausse idée de la stabilité. Que la stabilité pour nous c'est rester sans bouger. Alors qu'être stable c'est être stable dans le mouvement.*

Milena Agus - *Quand le requin dort*

## 1. Contexte et motivations

Selon l'Organisation Mondiale de la Santé, environ 15% des habitants de la planète vivent avec une forme de handicap et l'estimation mondiale de la prévalence du handicap est en hausse notamment en raison du vieillissement de la population (World Health Organization, 2011). Le handicap a longtemps été considéré uniquement à travers les caractéristiques médicales d'une personne, ce qu'on appelle le modèle *médical* (Nagi, 1964). À l'opposé de cette vision, le modèle *social* (Engel, 1977) a été proposé en considérant que les barrières et contraintes extérieures de l'environnement induisaient la situation de handicap. Selon ce modèle, l'amélioration des conditions des personnes en situation de handicap doit passer par une action politique et économique. L'approche actuelle de la situation de handicap, le modèle *biopsychosocial*, intègre les deux modèles précédents et considère le handicap comme résultant de contraintes biologiques, personnelles et sociales (World Health Organization, 2001; Jette, 2006) et a ouvert le débat internationalement sur les problématiques d'accessibilité.

L'accessibilité aux transports pour les personnes en situation de handicap est un axe principal d'action de la Commission Européenne (Commission Européenne, 2010) et l'organisation internationale pour le tourisme (United Nation World Travel Organization, 2013) qui ont constaté l'augmentation des demandes de transport des personnes à mobilité réduite (+3,5% d'utilisateurs à mobilité réduite dans la compagnie Air France en 2014). Malgré ces efforts, les personnes en situation de handicap et plus particulièrement les personnes à mobilité réduite (PMR) souffrent toujours des contraintes d'accessibilité liées au domaine des transports (Porja et al., 2010; Chang and Chen, 2011; Grant, 2013; Eichhorn et al., 2013; Wang and Cole, 2014; Davies and Christie, 2017). Dans ce contexte de développement de l'accessibilité dans les transports pour les PMR, la société Zodiac Seats France (leader mondial dans la conception/fabrication de siège d'avion) a piloté le projet SIEGES/COLIBRI (financé par la Direction Générale de l'Aviation Civile) qui a pour objectif de concevoir et prototyper le siège de l'avion du futur. Le LAMIH UMR CNRS 8201, de par son expérience dans la recherche liée à la situation de handicap, a été associé à ce projet avec une focalisation sur l'accessibilité et le maintien de la stabilité assise chez les PMR.

Il existe plusieurs pathologies et atteintes physiques diminuant la capacité à maintenir son équilibre assis. C'est le cas en particulier de la lésion de la moelle épinière (LMÉ), concernant chaque année un

demi-million de personne dans le monde (World Health Organization, 2013), qui entraîne une réduction drastique de la stabilité posturale assise (Seelen et al., 1997) car le contrôle musculaire et le retour sensoriel sont réduits (ou perdus) en dessous du niveau de la lésion (Kirshblum et al., 2011). La réduction du contrôle postural conduit à l'augmentation du risque de chutes et donc de blessures associées (Xiang et al., 2006; Brotherton et al., 2007; Nelson et al., 2010) ce qui induit un coût socio-économique très important (DeVivo, 1997; Post et al., 1998). Selon (Panjabi, 1992a), la stabilité posturale du rachis résulte de l'action de trois sous-systèmes, actif, passif et neuronal. Or chez les individus vivant avec une LMÉ, ces systèmes sont affaiblis par de nombreux facteurs comme le niveau de la lésion, les modifications physiologiques associées ou encore le développement de stratégies compensatoires qui font toujours l'objet d'études à ce jour (Grangeon et al., 2012; Milosevic et al., 2017). L'importante variabilité physiologique chez les personnes vivant avec LMÉ constitue un frein aux études physiopathologiques, notamment lors de la phase expérimentale, dans ce cas l'utilisation d'un modèle peut être avantageuse.

La modélisation en biomécanique permet de définir un cadre de validité théorique dans le but de tester des hypothèses de comportements par simulation ou à partir de données expérimentales (Reeves and Cholewicki, 2003). Un avantage majeur de l'approche par modèle est de pouvoir faire l'estimation de variables dans des systèmes où il est difficile, voire impossible, de mettre des capteurs comme c'est le cas des efforts internes développés au niveau des articulations chez l'homme. Le contrôle postural en biomécanique a surtout été étudié en position debout et la littérature existante sur les modèles de la position assise est très limitée. Plusieurs méthodologies de modélisation existent pour l'étude du contrôle postural (modèles segmentaires et musculo-squelettiques, « free body diagram » ...) et aboutissent, de par la complexité du corps humain, à l'écriture de modèles non linéaires. À ce stade, la grande majorité des études sur le contrôle postural procèdent à une linéarisation des équations afin de simplifier leur traitement (Masani et al., 2003; Qu et al., 2007; Reeves et al., 2009), réduisant ainsi le cadre de validité théorique du modèle. Une méthode issue du domaine de l'automatique permettant l'estimation de variables non mesurées dans un modèle biomécanique non linéaire a été proposée par (Guelton et al., 2008), mais il a fallu attendre les travaux récents de (Guerra et al., 2015; Estrada-Manzo et al., 2016a) pour obtenir des conditions d'observation permettant d'exploiter au mieux cette méthodologie.

## 2. Objectifs

Ce travail est focalisé sur l'étude du contrôle postural des personnes vivant avec une lésion de la moelle épinière, les objectifs de cette thèse sont :

1. Proposer des modèles biomécaniques non linéaires de la stabilité en position assise pour les personnes vivant avec une LMÉ
2. Utiliser des méthodes d'écriture de modèle du domaine de l'automatique non-linéaire afin de créer les outils nécessaires à l'estimation des variables internes (non mesurées) au modèle.
3. Améliorer la connaissance de la stabilité chez les personnes vivant avec une LMÉ par l'estimation expérimentale d'efforts internes en fonction de paramètres personnels et des conditions expérimentales

### 3. Organisation de la thèse

Ce manuscrit est composé de quatre chapitres et d'une conclusion. Le chapitre 1 est consacré à la revue de l'existant concernant le contrôle postural en biomécanique et les répercussions de la LMÉ sur celui-ci. Les méthodes utilisées pour la modélisation biomécanique sont également présentées, leurs avantages et inconvénients sont discutés et une méthodologie venant du domaine de l'automatique est présentée.

Le chapitre 2 présente un premier modèle du contrôle postural assis. Il s'agit de décrire les étapes de création du modèle, les justifications de choix méthodologiques et les résultats d'estimation des efforts internes par simulations ainsi qu'en conditions expérimentales. Ce premier modèle constitue la base qui permet notamment de vérifier la faisabilité de l'approche, en levant les principaux verrous associés.

À partir de la faisabilité démontrée sur le premier modèle, le chapitre 3 introduit un nouveau modèle plus générique apportant plus de degrés de liberté. Des techniques sont mises en œuvre afin de réduire la complexité supplémentaire due à ces degrés de liberté. Des simulations pour la commande et l'observation à partir du modèle non linéaire complet permettent de valider les approches proposées.

Le chapitre 4 présente les résultats d'une collecte expérimentale menée durant trois mois au laboratoire de pathokinésiologie de l'Université de Montréal sur une cohorte de 26 sujets vivant avec une LMÉ. L'analyse du mouvement de stabilisation assise des sujets est enrichie des résultats d'estimation des couples articulaires internes ce qui permet de mieux comprendre les contributions à la stabilité assise chez ces sujets.

Enfin, une conclusion clôture ce manuscrit avec un rappel des résultats principaux ainsi qu'une discussion sur les perspectives de ces travaux. La structure des Annexes suit l'ordre des chapitres du manuscrit.





# CHAPITRE 1 : CONTRÔLE POSTURAL ET MODÉLISATION, ANALYSE DE L'EXISTANT

1.	Position assise chez le sujet ordinaire et vivant avec une lésion de la moelle épinière	18
1.1.	Rachis vertébrale et lésion de la moelle épinière	18
1.2.	Contrôle postural du rachis asymptotique et sous-systèmes rachidiens	20
1.2.1.	Sous-système actif	20
1.2.2.	Sous-systèmes neuronal	21
1.2.3.	Sous-système passif	23
1.3.	Position assise asymptotique et chez la personne vivant avec une LMÉ	25
1.3.1.	Postures et contrôle	25
1.3.2.	L'importance des membres supérieurs	27
2.	Modélisation biomécanique de la stabilité en position assise	28
2.1.	Modèles musculosquelettiques	29
2.2.	Modèles en chaînes segmentaires	30
2.2.1.	Segment par segment : Dynamique inverse	30
2.2.2.	Modèle entier : Contrôle et linéarisation	31
2.3.	Formalisme de Takagi-Sugeno	34
2.3.1.	Modélisation sous forme T-S : exemple du pendule inverse	34
2.3.2.	Observateurs	37
2.3.3.	Extension aux Modèles Descripteurs	38
2.3.4.	Exemple d'application : Observation sur pendule inverse	40
3.	Résumé et objectifs	43

# 1. Position assise chez le sujet ordinaire et vivant avec une lésion de la moelle épinière

Chez l'humain, le tronc est le segment corporel avec l'impact mécanique le plus important sur le contrôle postural assis. Il est 2 fois plus lourd que la tête et les membres supérieurs réunis, représente plus de la moitié de la hauteur assise et s'appuie sur la structure osseuse du rachis lombaire. Par ailleurs sa fonction stratégique de jonction entre le corps inférieur assis et le corps supérieur érigé en fait la cible d'études depuis longtemps (Chaffin, 1969; Dempster, 1955). Une description anatomique du rachis est tout d'abord nécessaire afin de comprendre les systèmes contribuant à la stabilité assise. Enfin, une comparaison des différences entre l'assise des sujets asymptomatiques et des personnes vivant avec une lésion de la moelle épinière est proposée.

## 1.1. Rachis vertébrale et lésion de la moelle épinière

Le rachis vertébral est composé de 24 vertèbres, 7 cervicales, 12 thoraciques, 5 lombaires et du sacrum (Fig. 1). Il a une double fonction de colonne structurelle et de protection de la moelle épinière. La moelle épinière est le conduit nerveux principal par lequel les informations sensorielles et motrices se déplacent entre le cerveau et le corps. Entre les facettes articulaires de chaque vertèbre, des nerfs rachidiens partent de la moelle épinière pour innervier les muscles et organes du corps (Fig. 2). Dans le plan sagittal (qui coupe un humain selon le plan de symétrie droite/gauche), la colonne vertébrale forme quatre courbes successives permettant d'améliorer la résistance aux efforts de compressions verticales (Kapandji, 2005b) et de maintenir l'horizontalité de la tête.



FIG. 1 : COLONNE VERTÉBRALE (ANATOMY OF THE HUMAN BODY, H. GRAY, 1918)

Il a été démontré que le rachis lombaire est mécaniquement instable avec un risque de flambement (flexion de la colonne comprimée, Fig. 5) lorsque le chargement vertical dépasse les 90N (Crisco et al., 1992a, 1992b). Cette valeur est surprenante à bien des égards, non seulement elle est inférieure au poids du haut du corps, mais surtout des forces internes jusqu'à 50 fois supérieures y ont été mesurées (pression intradiscale, (Panjabi, 2003)) lors d'activités classiques comme la course, ou lors de soulèvement de charges ce qui suppose un ou plusieurs mécanisme de contrôle du rachis.

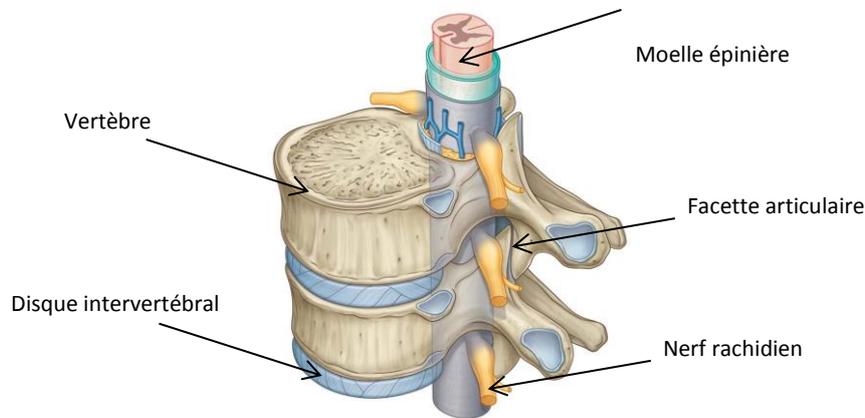


FIG. 2 : DÉTAIL DE LA MOELLE EPINIÈRE ET DU NERF RACHIDIEN (DRAKE ET AL., 2010)

Une lésion de la moelle épinière (LMÉ) affecte la conduction des informations sensorielles et musculaires. La lésion est qualifiée d'incomplète si une partie du message nerveux est transmis ou de complète dans le cas où aucun message nerveux n'est transmis en dessous de la lésion. Dans un souci de simplicité, les lésions de la moelle épinière décrites dans ce manuscrit sont considérées comme complètes. Les symptômes sont dépendant de la sévérité de la lésion, i.e. incomplète ou complète, et également du niveau vertébral de la lésion. Chaque nerf rachidien innerve des zones spécifiques du corps pour transmettre de l'information motrice ou sensorielle (ex : dermatomes pour la sensibilité de la peau, Fig. 3), une lésion entraîne donc l'arrêt de l'innervation pour tous les muscles et organes sous le niveau de la lésion. On parle de tétraplégie si la motricité et/ou sensibilité des membres supérieurs est touchée (atteinte cervicale) et de paraplégie si les membres supérieurs sont épargnés mais que la motricité et/ou sensibilité du tronc ou des membres inférieurs est touchée (Kirshblum et al., 2011).

Les muscles abdominaux sont innervés par les nerfs rachidiens compris entre les vertèbres T6 et T10 alors que les muscles du dos, sont innervés tout au long de la colonne vertébrale (Fig. 4). Une personne souffrant d'une LMÉ ne peut donc pas recruter volontairement ses muscles en dessous du niveau de lésion et adopte une position assise dans la très grande majorité de ses activités quotidiennes. Plusieurs standards existent afin de classer la sévérité (score ASIA (Kirshblum et al., 2011)) et les modifications fonctionnelles (Trunk impairment classification (Altmann et al., 2013)) induites par une LMÉ sur un sujet.

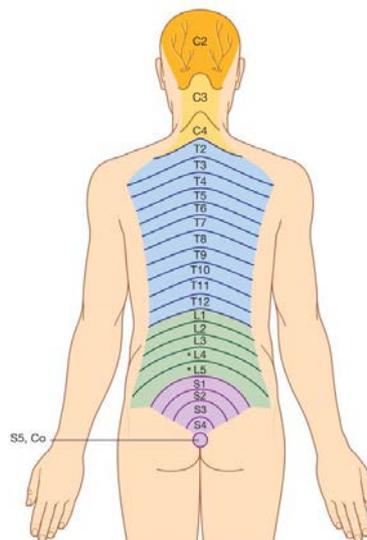


FIG. 3 : DERMATOMES DORSAUX ET NERF RACHIDIEN ASSOCIÉ (DRAKE ET AL., 2010)

Dans les 2 à 3 années suivant leur lésion, ces sujets subissent également des changements physiologiques et morphologiques majeurs, comme une atrophie musculaire caractérisée par une diminution de la quantité de fibre et de l'aire musculaire (Castro, Apple Jr, Hillegass, et al., 1999; Castro, Apple Jr, Staron, et al., 1999), une augmentation de la concentration de tissus graisseux dans les muscles (Maggioni et al., 2003; Spungen, 2000) et une diminution de la densité osseuse et du module d'élasticité des os situés sous la lésion (Lee et al., 1997; Bauman et al., 1999; Dauty et al., 2000).

Le rachis est formé par une superposition de vertèbres formant la colonne vertébrale qui supporte le tronc et protège la moelle épinière. Une LMÉ, entraîne la perte du recrutement musculaire et de l'information sensorielle en dessous du niveau de lésion. Comme le rachis lombaire est naturellement instable, il doit donc exister un système permettant le contrôle de la position assise.

## 1.2. Contrôle postural du rachis asymptotique et sous-systèmes rachidiens

La stabilité du rachis face aux contraintes liées à l'activité quotidienne implique évidemment un système de contrôle. Avant de s'intéresser aux personnes vivant avec une LMÉ, il convient de présenter au préalable la connaissance pour le rachis asymptotique. Dans ses travaux fondateurs, Panjabi a proposé de diviser ce qu'il appelle le système stabilisateur vertébral en 3 sous-systèmes Actif, Neuronal et Passif (Panjabi, 1992a, 1992b).

### 1.2.1. Sous-système actif

Le sous-système actif regroupe les muscles dits fléchisseurs (dont les muscles abdominaux) du rachis ainsi que les muscles du dos érecteurs du rachis soit une vingtaine de muscles différents (Fig. 4). D'un point de vue strictement mécanique, le rachis est sur-actionné par rapport aux degrés de liberté possibles (rotation axiale, flexion/extension et flexion latérale). La disposition des muscles autour de la colonne vertébrale forme une structure haubanée (Kapandji, 2005b), qui permet à la fois les

mouvements spécifiques du rachis (Masani et al., 2009), et crée également la synergie nécessaire à la rigidification de la colonne (Milosevic et al., 2012). Selon Panjabi, c'est notamment grâce à la structure haubanée du sous-système actif que le rachis, naturellement instable, peut-être maintenu droit (Panjabi, 2003) Fig. 5. Lors d'une expérience d'équilibre assis sur un siège instable, il a été montré qu'une contraction maximale des muscles du tronc (co-activation des muscles fléchisseurs et extenseurs) n'améliore pas l'équilibre assis (Reeves et al., 2006). Les auteurs ont conclu que la stabilité du rachis doit résulter d'un système en boucle fermée (rétroaction) plutôt qu'en boucle ouverte.

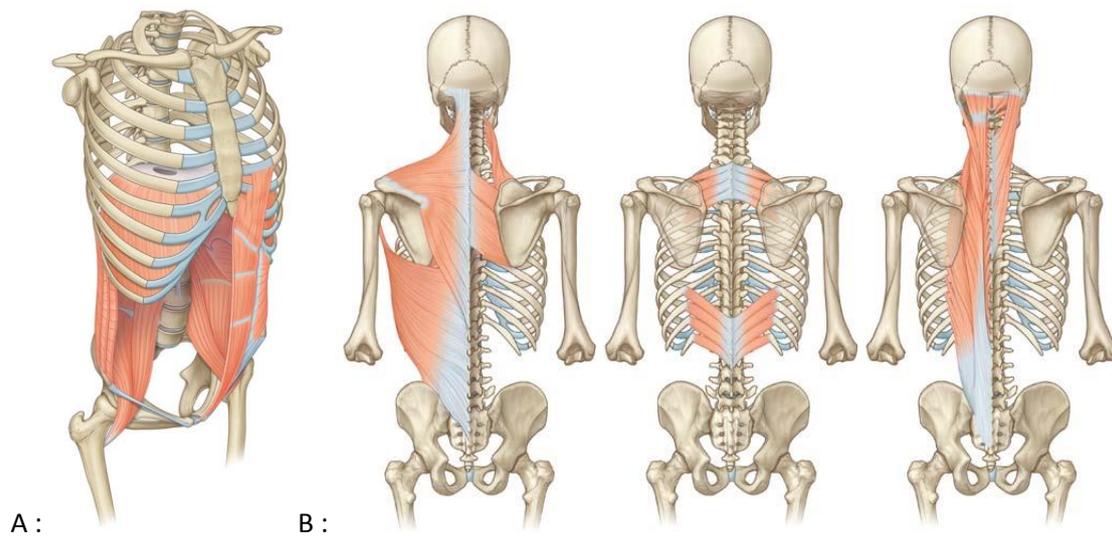


FIG. 4 : A : MUSCLES FLÉCHISSEURS DU RACHIS, B: MUCLES ÉRECTEURS DU RACHIS (DRAKE ET AL., 2010)

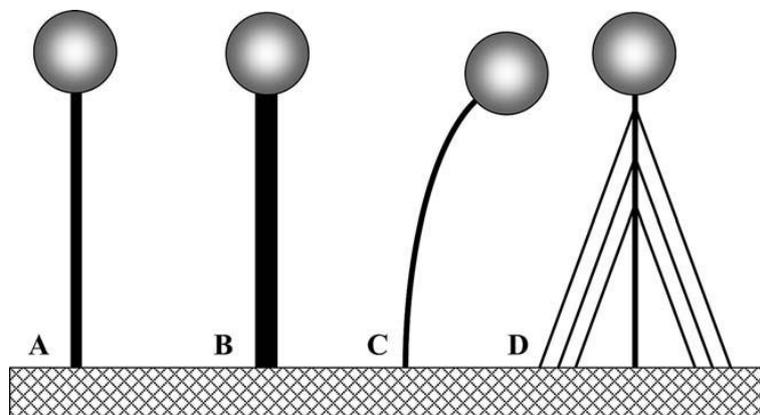


FIG. 5 : FLAMBEMENT D'UNE COLONNE AVEC UNE MASSE AU SOMMET (A : COLONNE STABLE, B : COLONNE PLUS RIGIDE, C : COLONNE MOINS RIGIDE INSTABLE, D : COLONNE MOINS RIGIDE AVEC DES HAUBANS) (PANJABI, 2003)

### 1.2.2. Sous-systèmes neuronal

Le sous-système neuronal est composé du cerveau et de la moelle épinière, aussi appelé système nerveux central (SNC), ainsi que du système nerveux périphérique regroupant tous les neurones et capteurs sensoriels du corps autres que dans le SNC. C'est justement le sous-système neuronal qui permet la rétroaction suggérée par (Reeves et al., 2006), car il est responsable du transport des influx nerveux efférents (excitateurs qui vont activer les fibres musculaires et permettre la contraction

musculaire) et afférents (venant des différents organes sensoriels et allant vers le SNC). Les capteurs sensoriels produisent les informations nécessaires à la modulation de l'activité musculaires et donc du contrôle postural. Les sens et organes sensoriels mobilisés pour le contrôle postural sont entre autre la vision (Prieto et al., 1996), l'oreille interne (Nashner and McCollum, 1985), l'organe tendineux de Golgi (Roberts et al., 1995) et le fuseau neuromusculaire (Johansson et al., 1988).

Le contrôle exercé par le SNC sur le sous-système actif n'est évidemment pas immédiat, en effet certaines études ont mesuré des latences allant de 100 à 210ms entre la mesure d'un signal myoélectrique sur un muscle et la production d'un couple au niveau du tronc (Thelen et al., 1994; van Dieën et al., 1991). Cette latence dans le contrôle est décomposée selon trois retards fondamentaux, le temps de rétroaction, le délai électromécanique et le temps de commande (Reeves et al., 2007; Vette et al., 2009) Fig. 6. Le temps de rétroaction correspond à la durée requise à un influx nerveux pour parcourir le cheminement jusqu'au SNC et est fonction de la vitesse de transduction des fibres nerveuses, vitesse généralement comprise entre 40 et 60m.s<sup>-1</sup>. Le délai électromécanique correspond au temps nécessaire à une fibre musculaire excitée pour produire une force mécanique et a été estimée à 10ms (Winter and Brookes, 1991; Isabelle et al., 2002). Enfin le temps de commande est le plus difficile à estimer car il représente la durée de traitement et de réponse du SNC en plus du temps de transport efférent. Ce temps peut varier de manière très importante selon que le mouvement est volontaire (donc traité par le cerveau) ou reflexe (sans remontée au cerveau). Par exemple, le fait de connaître la nature d'une perturbation va influencer la stratégie de contrôle qui sera moins basée sur un réflexe soudain mais sur une réponse plus modulée (Blouin et al., 2003; Siegmund et al., 2003). La notion d'attention revient également dans la littérature sur le contrôle postural car la charge cognitive réduit la qualité du contrôle postural, notamment chez les personnes âgées, en augmentant le délai de commande (Woollacott and Shumway-Cook, 2002).

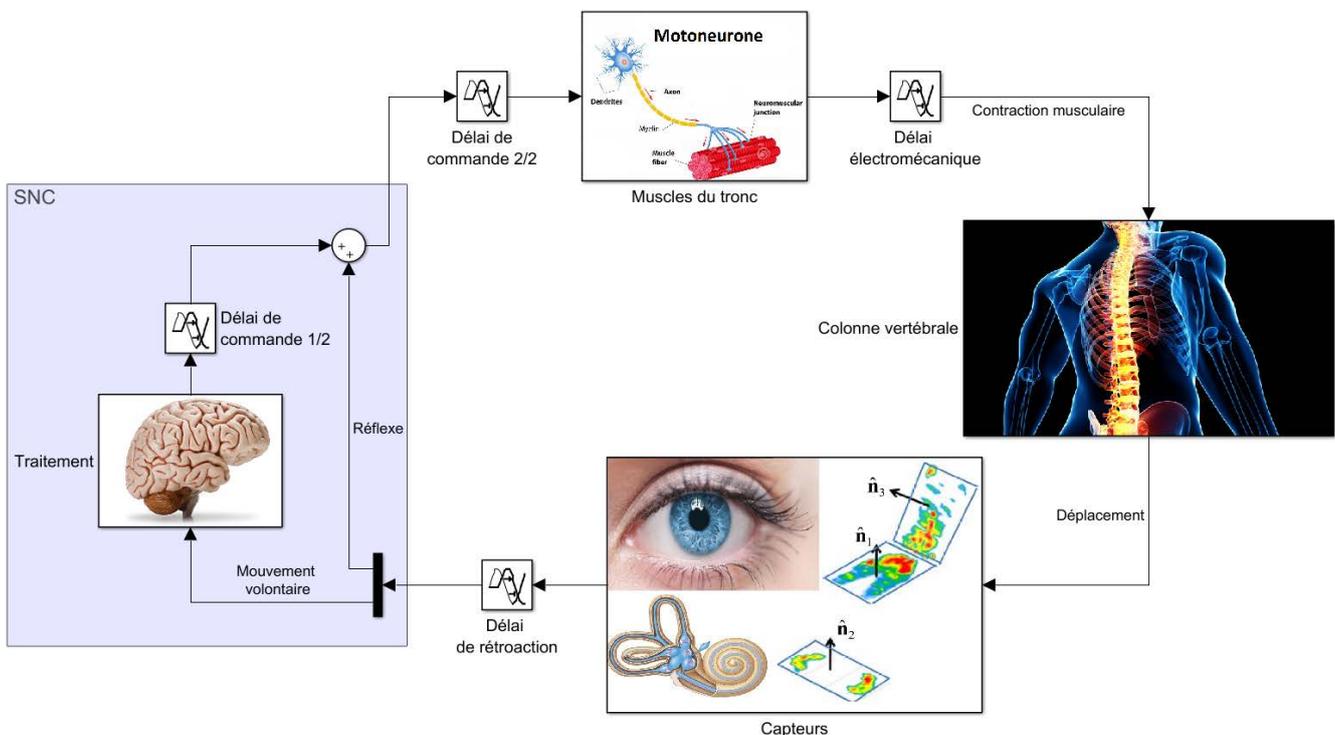


FIG. 6: SCHÉMA DES DIFFÉRENTS DÉLAIS DANS LE CONTRÔLE POSTURAL

### 1.2.3. Sous-système passif

Le sous-système passif est composé de toutes les structures anatomiques (tissus ou os) qui contribuent passivement (sans contrôle, juste mécaniquement) à maintenir l'intégrité du rachis. Au niveau du rachis, chaque articulation vertébrale présente des facettes articulaires pour orienter le déplacement de l'articulation vertébrale, un disque intervertébral est composé de collagène souple pour résister à la compression (Fig. 2) et des ligaments spinaux qui permettent le maintien des vertèbres à chaque articulation ainsi que sur toute la longueur du rachis (Fig. 7). Il a été démontré sur des rachis cadavériques que toutes ces structures apportent une contribution bien spécifique à la résistance en flexion de la colonne lombaire (Schultz et al., 1979). Le sous-système passif englobe également les muscles non-activés qui vont résister mécaniquement à l'étirement. Dans le contexte de la position assise, c'est la chaîne musculaire postérieure, l'enchaînement musculaire postérieur allant du cou jusqu'au pied, qui est sollicitée. Au niveau de l'articulation entre le rachis lombaire et le pelvis, les tendons des muscles du dos se mélangent aux ligaments rachidiens pour se fixer aux vertèbres et au pelvis pour créer le fascia thoraco lombaire (Fig. 8,A). Cette structure transmet l'effort musculaire dans les os mais peut aussi résister passivement à l'étirement lors de mouvement de flexion lombaire ou de rétroversion du pelvis. Dans ses travaux pionniers sur la stabilité du tronc, Bergmark néglige la contribution du fascia thoraco lombaire en justifiant que la lordose lombaire en position debout n'étire pas assez cette structure (Bergmark, 1989) mais il faut garder à l'esprit qu'en position assise (Fig. 8,B), la rétroversion du bassin et l'extension des membres inférieurs vont étirer la chaîne postérieure.

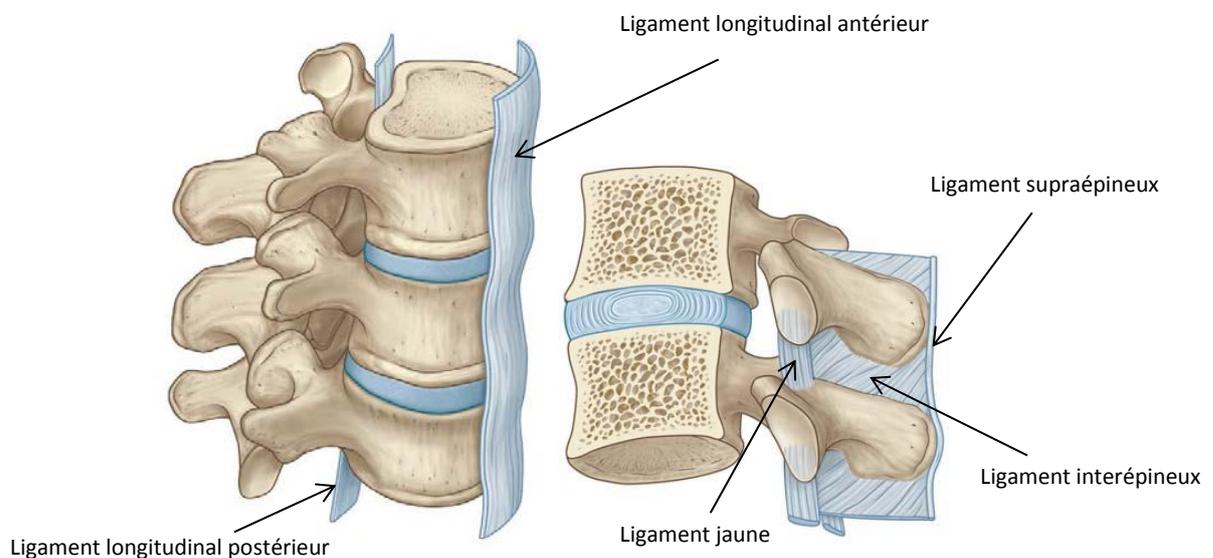


FIG. 7 : LIGAMENTS DU RACHIS (DRAKE ET AL., 2010)

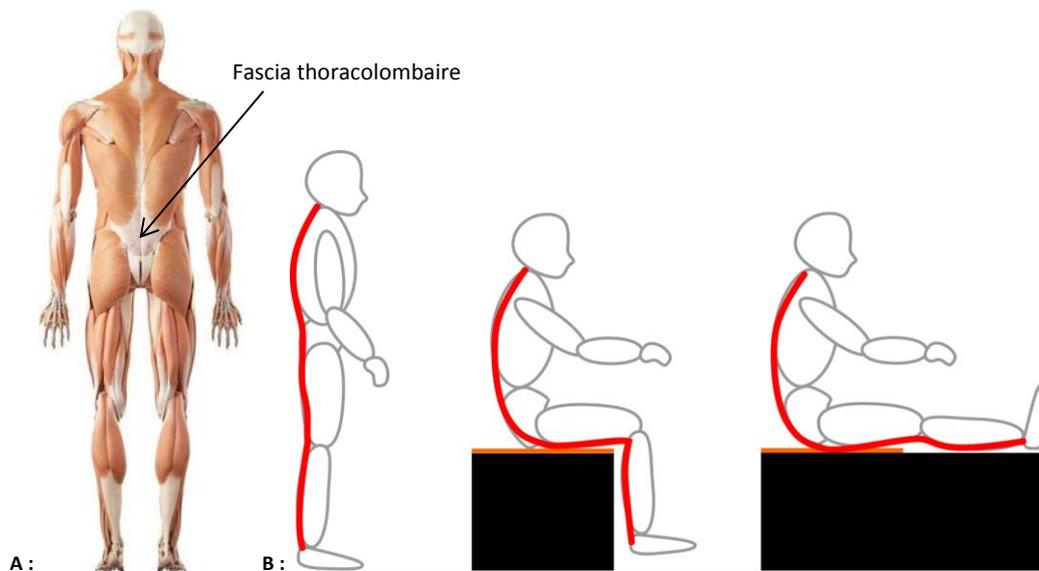


FIG. 8 : A: CHAÎNE POSTÉRIURE B : ETIREMENT DE LA CHAÎNE POSTÉRIEUR EN POSITION ASSISE

En 1992, fort de nombreux résultats expérimentaux sur la rigidité du rachis vertébral cadavériques, Panjabi propose un paramètre pour décrire la rigidité d'un rachis : la zone neutre (Panjabi, 1992b). Dans cette zone, le rachis est droit et les structures passives associées ne sont pas contraintes (comme un élastique non tendu), la résistance passive du rachis est donc nulle. Dans leur revue de résultats expérimentaux, White et Panjabi (White and Panjabi, 1990) ont déterminé pour le rachis lombaire une zone neutre (sans moment résistant) de  $\pm 3^\circ$  en flexion/extension suivi d'un moment de résistance passive de  $1N.m / ^\circ$  ainsi qu'une zone neutre de  $\pm 1.8^\circ$  en flexion latérale suivi d'un moment de résistance passive de  $7.69N.m / ^\circ$ .

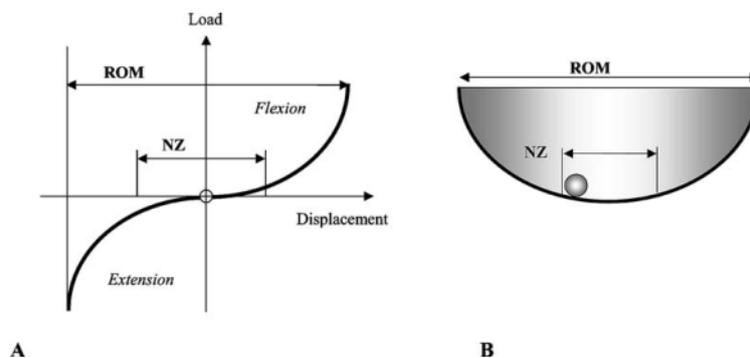


FIG. 9: REPRÉSENTATION DE LA ZONE NEUTRE (NZ) PAR RAPPORT À L'AMPLITUDE DE DÉPLACEMENT (ROM) (PANJABI, 2003)

Le caractère viscoélastique du système passif a été démontré à travers plusieurs travaux, tout d'abord (McGill and Brown, 1992) mesurent que la flexion maximale du dos d'un sujet augmente en quelques minutes après une série d'exercices de flexion et que cette valeur de flexion maximale revient à sa valeur de base après plusieurs dizaines de minutes. Ce phénomène de compliance appelé « creep » traduit selon les auteurs l'hystérésis des tissus passifs du dos. D'autres chercheurs ont mesuré la résistance à la flexion de sujets après être restés assis de manière prolongée devant un bureau (Beach et al., 2005) ou en voiture (De Carvalho and Callaghan, 2011). Dans les deux cas, la

résistance à la flexion du rachis arrive à partir d'un angle de flexion plus important après la position assise prolongée, ce qui indique une résistance passive variable avec le temps et la contrainte.

Il existe une autre contribution passive du rachis qui n'est pas de nature ostéo-tendineuse : la pression intra-abdominale (IAP). Il s'agit d'une augmentation naturelle de la pression dans la cavité abdominale lors de mouvement du tronc et sa contribution sur la stabilisation du rachis a été la source d'études et de discussions depuis plus d'un demi-siècle (Chaffin, 1969). En théorie, l'IAP peut être assimilée à une colonne d'air devant la colonne vertébrale comme le décrit le modèle de (Daggfeldt and Thorstensson, 1997) ce qui produit un moment d'extension au niveau lombaire. Toute la difficulté de ce phénomène réside dans la capacité à le discerner dans les mesures des autres contributions musculaires lors de la stabilisation du tronc (Marras and Mirka, 1996; Arjmand and Shirazi-Adl, 2006a). En effet lorsque des sujets co-contractent leurs muscles abdominaux afin d'augmenter l'IAP, il en résulte un moment lombaire de flexion (Cholewicki et al., 1999). Dans leurs travaux, Hodges et al., (2001) ont réussi à augmenter l'IAP sans provoquer de contraction de muscles du tronc et les résultats indiquent une contribution d'extension de l'IAP. Cette contribution, de l'ordre de 5N.m est faible par rapport aux couples produits par les muscles du tronc mais, comme c'est le cas des résistances passives, elle demeure présente en cas d'absence d'activité musculaire comme pour le sujet vivant avec une LMÉ.

Selon le formalisme de Panjabi, le rachis est donc maintenu par la combinaison de trois sous-systèmes, un système actif combinant les actions des nombreux muscles du rachis qui vont agir en synergie. Un système neuronal qui reçoit les informations sensorielles et transmet les commandes motrices au système actif avec un retard inhérent. Enfin, un système passif dont la résistance mécanique au mouvement est souvent négligée car la plupart des études actuelles se focalisent sur le sujet sain et sur la position debout. Il convient de se demander en quoi la position assise et la LMÉ modifient les contributions de ces systèmes à la stabilité assise.

### **1.3. Position assise asymptomatique et chez la personne vivant avec une LMÉ**

#### **1.3.1. Postures et contrôle**

Il est courant en biomécanique d'étudier le maintien de l'équilibre postural par l'analyse du stabilogramme, i.e. le déplacement du centre de pression (COP), d'un sujet grâce à une plateforme de force et plusieurs paramètres existent pour l'analyse de ce stabilogramme (Prieto et al., 1996; Collins and De Luca, 1993). En 2010, Vette et collaborateurs présentent la première étude comparant l'analyse stabilométrique chez douze sujets asymptomatiques debout et assis pour quantifier l'effet de la posture assise sur le déplacement du COP. Leur réflexion se base sur le fait que la posture assise peut être vue mécaniquement comme un pendule inverse deux fois plus court que celui utilisé en position debout. L'analyse des résultats temporels et fréquentiels confirme la cohérence de l'analogie du pendule inverse avec une amplitude et une vitesse d'oscillation du COP plus faibles ainsi qu'une fréquence de mouvement plus élevée qu'en position debout. Enfin, l'étude de la courbe de diffusion du stabilogramme indique selon les auteurs que les stratégies de contrôle à court et moyen terme sont également modifiées en position assise à cause de la posture mécaniquement plus stable ainsi qu'une rigidité articulaire plus élevée

À l'instar de la position debout, la position assise chez l'humain a pour but de maintenir l'horizontalité de la tête (Kapandji, 2005b). Les courbures du rachis vont permettre de modifier finement la posture assise pour passer d'une posture droite à une posture avachie avec des modifications d'activités musculaires associées (Black et al., 1996; O'Sullivan et al., 2006).



FIG. 10: POSTURE ASSISES ASYMPTOMATIQUES A. RACHIS COMPLÈTEMENT TENDU, B. RACHIS AVACHIS, C. RACHIS LOMBAIRE TENDU (O'SULLIVAN ET AL., 2006)

La posture assise est très différente chez les personnes vivant avec une LMÉ par rapport aux sujets asymptomatiques. En effet la colonne vertébrale, naturellement instable et sans activité musculaire, va se courber sous le poids du tronc. Les sujets vivant avec une LMÉ vont donc présenter une position stable dite « cyphotique » (position B. sur la Fig. 10) avec la flexion du rachis focalisée au niveau lombo-sacré, le pelvis rétroversé (15° en moyenne) et le tronc fléchi (30° en moyenne, (Hobson and Tooms, 1992)). Il est important de noter que dans cette position, le rachis sort de la zone neutre définie par Panjabi et le système passif rachidien est naturellement plus sollicité (notamment la chaîne postérieure via le fascia thoracolombaire). La résistance à l'étirement de la chaîne postérieure va être différente d'un sujet à un autre, notamment en fonction de la souplesse des membres inférieurs qui peut être modifiée par la présence de spasticité chez les sujets personnes vivant avec une LMÉ (Biering-Sorensen et al., 2006). La position assise les jambes allongées (combinant cyphose rachidienne et extension des membres inférieurs) est souvent adoptée par les personnes vivant avec une LMÉ pour les activités quotidiennes (Shirado et al., 2004). Shirado et collaborateurs ont montré que cette position (« assise longue ») permet aux sujets d'améliorer leur stabilité même lorsque leurs bras ne sont pas posés sur les jambes pour la stabilisation (Shirado et al., 2004).

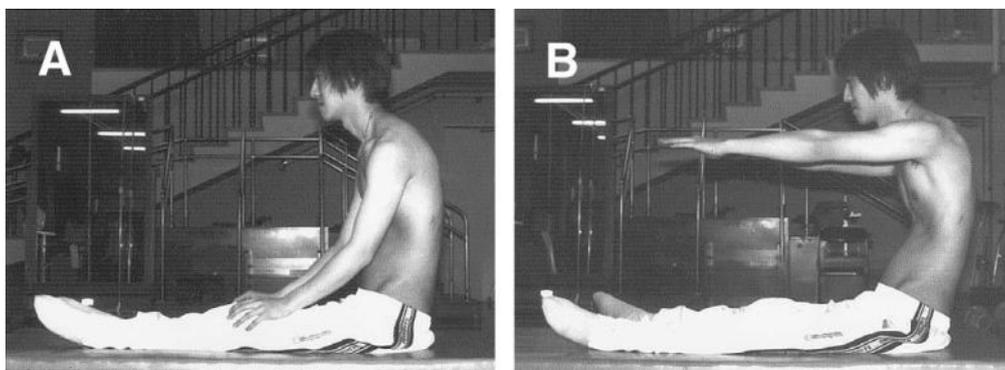


FIG. 11: ASSISE LONGUE (SHIRADO ET AL 2004)

En ce qui concerne le contrôle de la position assise, la réduction ou l'absence d'activité des muscles abdominaux et du tronc associée à une perte de sensation en dessous de la lésion entraînent un contrôle très réduit et un risque de chute très important (Boswell-Ruys et al., 2010; Nelson et al., 2010). Expérimentalement, cela se traduit par des amplitudes et des vitesses de déplacement plus importantes du COP des sujets (Chen et al., 2003; Shirado et al., 2004; Grangeon et al., 2012; Milosevic et al., 2015).

### **1.3.2. L'importance des membres supérieurs**

Les études sur la stabilité assise des sujets asymptomatiques traitent uniquement du contrôle au niveau du rachis lombaire (Cholewicki et al., 2000; Thrasher et al., 2010; Tanaka and Granata, 2007) car c'est à ce niveau que la flexion/extension de la colonne est la plus importante (Kapandji, 2005b). Dans ces expériences, il est demandé aux sujets de maintenir la position assise avec leurs membres supérieurs croisés sur leur tronc. Les personnes vivant avec une LMÉ peuvent maintenir cette position (Milosevic et al., 2017) mais elle est très instable et il est évident que ces sujets doivent adapter leur stratégie de stabilisation en utilisant d'autres parties de leur corps afin de ne pas chuter.

L'apport mécanique des membres inférieurs a été étudié chez les personnes vivant avec une LMÉ car il permet, même sans recrutement musculaire volontaire, de contribuer passivement à la résistance au mouvement dans la direction antéropostérieure par le contact des pieds avec le sol (Janssen-Potten et al., 2002). Milosevic et collaborateurs ont mesuré que l'aide mécanique apportée par le contact au sol des membres inférieurs est similaire pour les sujets avec et sans LMÉ, réfutant ainsi l'hypothèse selon laquelle les personnes vivant avec une LMÉ utilisent plus leurs membres inférieurs pour la stabilisation (Milosevic et al., 2015).

Si les membres inférieurs ne participent pas plus à la stabilisation assise, c'est donc les membres supérieurs qui doivent y contribuer. Par analogie chez les sujets asymptomatiques, il est reconnu que les membres supérieurs permettent d'équilibrer le corps après une perturbation lors de la marche (Bruijn et al., 2010). Plusieurs résultats expérimentaux montrent l'importance des membres supérieurs dans la stabilisation de la position assise des sujets LMÉ. L'équipe de Seelen a mesuré le recrutement électrique musculaire de muscles du tronc et des membres supérieurs chez des sujets asymptomatiques et vivant avec une LMÉ lors de « reach test » consistant à atteindre des cibles le plus vite possible en position assise. Ces mesures électromyographiques (EMG) ont mis en évidence chez les sujets vivant avec une LMÉ un recrutement accentué des muscles des membres supérieurs, normalement peu utilisés pour des tâches posturales (Seelen, Janssen-Potten, Drukker, et al., 1998; Janssen-Potten et al., 1999). Ils ont également mesuré que les sujets avec une lésion haute réalisent la tâche plus rapidement que les sujets avec une lésion basse. Ce résultat contre-intuitif est interprété comme la conséquence d'un mouvement plus simple à programmer car moins de muscles sont recrutables (Seelen, Janssen-Potten, Adam, et al., 1998; Seelen et al., 2001) mais il peut également être dû aux délais de transmission nerveuse présentés précédemment (le chemin nerveux étant plus court pour aller de la tête aux membres supérieurs que jusqu'à la région du tronc).

L'équipe de Dany Gagnon à Montréal a étudié l'apport des membres supérieurs sur la cinématique de la stabilisation assise des sujets vivant avec une LMÉ en mesurant le déplacement du COP dans deux conditions : avec ou sans appui des membres supérieurs (leurs mains en appui sur les cuisses ou légèrement relevées). L'absence de support via les membres supérieurs entraîne une augmentation

de l'amplitude et de la vitesse du déplacement du COP et indique ainsi un effort de contrôle plus important (Grangeon et al., 2012). Selon eux, la stabilité clinique assise gagnerait à être évaluée en prenant en compte l'activité des membres supérieurs chez les sujets vivant avec une LMÉ (Milosevic et al., 2017).

Chez le sujet asymptomatique, la posture et le contrôle de la stabilité assise présentent des similarités avec la position debout. À l'inverse, Les sujets vivant avec une LMÉ sont différents des sujets asymptomatiques sur les deux points car ils présentent une posture plus cyphotique qui, en s'écartant du point d'équilibre, sollicite d'avantage le sous-système passif. De plus, la diminution voire l'absence de recrutement des muscles au niveau de l'articulation lombo-sacrée induit un changement de stratégie de la stabilisation avec une utilisation plus importante des membres supérieurs.

En dessous du niveau de lésion, les muscles et capteurs sensoriels ne sont plus actifs, ainsi la stratégie de stabilisation de l'assise des sujets asymptomatiques (via les muscles du tronc) n'est pas applicable. Cela signifie que les sujets vivant avec une LMÉ doivent développer d'autres stratégies pour stabiliser leur position comme l'utilisation des membres supérieurs qui a été observée expérimentalement. Par ailleurs, la différence de posture par rapport à la position asymptomatique sollicite d'avantage les structures passives du rachis induisant ainsi une résistance mécanique à l'étirement. La quantification de ces efforts produits volontairement et passivement lors de la stabilisation assise permettrait de mieux comprendre l'importance des différentes contributions pour plus tard proposer des positions assises facilitant la stabilité. Dans ce but, une modélisation de la position assise est nécessaire mais quels sont les modèles et les techniques déjà existantes ?

## **2. Modélisation biomécanique de la stabilité en position assise**

La modélisation biomécanique permet l'approche bimodale d'une situation, en combinant un cadre mathématique avec des résultats expérimentaux dans le but de dépasser le stade descriptif des mesures expérimentales. Avant de commencer la présentation des modèles existants, il est important de préciser que la validation au sens propre du terme d'un modèle biomécanique est rarement possible (Reeves and Cholewicki, 2003). Le processus de validation nécessite de pouvoir directement mesurer la valeur estimée par le modèle ce qui, dans le cas d'estimation d'efforts internes chez l'humain, nécessite une procédure invasive et contraignante. L'adéquation du modèle choisi, quel qu'il soit, avec la réalité doit être vérifiée à travers plusieurs essais numériques et surtout expérimentaux.

L'analyse de l'existant a révélé qu'à ce jour, aucun modèle n'existe pour décrire la stabilisation assise en prenant en compte la position des membres supérieurs. Cette partie fait la présentation des modèles existants du tronc et de la position debout ainsi qu'aux techniques d'estimation associées. Différents types de modèles sont présentés puis, une approche venant du domaine de l'automatique permettant de manipuler des modèles non linéaires est décrite.

## 2.1. Modèles musculosquelettiques

Les premiers travaux de modélisation biomécanique par Borelli (XVII<sup>e</sup> siècle) ont immédiatement tenté de représenter le corps humain de façon anatomique en articulant entre eux des segments rigides qui se déplacent par l'action de câbles représentant les muscles (Maquet, 1992). Cette représentation musculosquelettique se rapproche de la réalité anatomique en prenant en compte le bras de levier musculaire ainsi que l'aire musculaire transversale (Bogduk et al., 1992) et a notamment été utilisée pour calculer des valeurs de compression vertébrale (Reeves and Cholewicki, 2003). Évidemment ce type de modèle est très sensible à la précision des informations anatomiques (insertion des muscles, bras de levier, aire musculaire transversale...) et a nécessité de nombreuses études comprenant de l'imagerie médicale (McGill et al., 1988). Une autre difficulté est la définition de la ligne d'action selon laquelle la force se propage en prenant en compte les déplacements et déformations du muscle. L'amélioration de la puissance de calcul a permis à des modèles de plus en plus détaillés (Fig. 12) et anatomiquement corrects de voir le jour mais un autre problème est alors apparu, la question de la répartition des efforts dans les muscles (Reeves and Cholewicki, 2003). En effet, le fait d'augmenter le nombre d'actionneurs au-delà du nombre de degrés de liberté d'un modèle amène à un système d'équation mathématique indéterminé avec trop d'inconnues, il faut donc trouver une technique de distribution des forces.

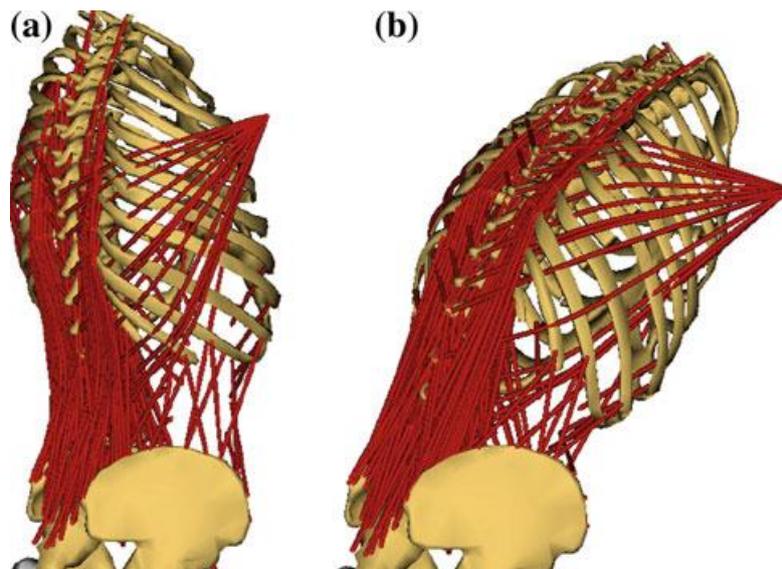


FIG. 12 : MODÈLE MUSCULOSQUELETTIQUE DU RACHIS AVEC 129 FIBRES MUSCULAIRES (CHRISTOPHY ET AL 2012)

Deux techniques ont été utilisées, la première consiste à définir une règle physiologique de l'activation musculaire (par exemple « la somme du carré des forces dans tous les muscles doit être la plus faible possible ») et d'utiliser des algorithmes d'optimisation pour trouver la répartition respectant au mieux cette règle. Plusieurs fonctions de coûts ont été proposées : compression vertébrale, sommes des forces ou des contraintes, élevées au carré ou au cube... La sensibilité des forces prédites dans chaque muscle en fonction de la règle à optimiser a été montrée par (Arjmand and Shirazi-Adl, 2006b), le choix de la règle peut changer l'activation d'un muscle du simple au double et même si certaines règles sont plus corrélées aux activations EMG mesurées sur sujets, la

comparaison étant faite sur des tests statiques, il est délicat d'extrapoler ce résultat pour des situations dynamiques. La deuxième technique consiste à utiliser des signaux EMG afin de contrôler directement un modèle musculaire (van Dieën and Visser, 1999), le pattern d'activation n'est ainsi pas prédéfini à l'avance car il se base sur les mesures mais il semble ne pas y avoir de consensus sur l'équation reliant l'activité EMG et force produite. Il est possible de combiner ces deux méthodes (Gagnon et al., 2011) mais les questions de la bonne fonction d'optimisation ainsi que du choix des méthodes pour assurer l'exactitude de mesures d'activité EMG (notamment pour les muscles profonds) restent ouvertes et demeurent un frein à ces techniques.

L'utilisation des modèles musculosquelettiques pour la modélisation du rachis de personnes vivant avec une LMÉ est complexe car elle nécessite une connaissance poussée de l'anatomie du sujet étudié, anatomie qui est susceptible de changer fortement au cours des premières années suivant la lésion à cause des modifications physiologiques post-lésionnelles.

## **2.2. Modèles en chaînes segmentaires**

Les modèles en chaînes segmentaires (MCS) constituent un outil de base de la modélisation en biomécanique (Dempster, 1955; Chaffin, 1969; Winter, 1987; Reeves and Cholewicki, 2003). Chaque segment corporel est considéré comme rigidement lié au suivant par une articulation pivot en 2D ou rotule en 3D et le moment articulaire est le résultat des actions des muscles agonistes et antagonistes de l'articulation. Cette représentation ne représente donc pas la coactivation car elle ne considère qu'un couple par articulation. Les MCS servent également à l'étude des systèmes mécaniques motorisés (Khalil and Dombre, 2004), c'est notamment par ce biais que des techniques venant du domaine de l'automatique et du contrôle ont été utilisées pour étudier des problèmes biomécaniques (ex : modèle de rachis en notation Denavit-Hartenberg (Vette et al., 2012)).

### **2.2.1. Segment par segment : Dynamique inverse**

La méthode de la dynamique inverse est couramment utilisée en biomécanique (Winter, 1987), elle permet d'étudier l'équilibre dynamique de la chaîne segmentaire comme une succession de segments rigides indépendants (free body diagram (Winter, 2009)) en calculant les équations de Newton-Euler à chaque segment pour obtenir les efforts articulaires générant le mouvement.

Cette méthode peut être réalisée en remontant la chaîne segmentaire (bottom-up) ou en la descendant (top-bottom). Pour la première technique, les forces de résistance du sol sont injectées dans le calcul en tant qu'efforts externes alors que la deuxième utilise uniquement les données cinématiques. Le défaut principal de la dynamique inverse est la distribution successive des erreurs de calcul à chaque nouvelle articulation ce qui peut amener à des résultats erronés dès le segment suivant (Dumas et al., 2017). Les sources d'erreurs sont multiples : mauvaise définition des paramètres inertiels des segments, erreur dans le calcul du centre articulaire, imprécisions dans le point d'application de la force extérieure, déphasage des sources d'informations (Cahouët et al., 2002; McCaw and DeVita, 1995; Riemer et al., 2008)... Enfin, la double dérivation successive des positions des segments pour déterminer les accélérations rend le processus extrêmement sensible au bruit et très peu robuste aux applications en temps réel (Zajac, 1993; Hatze, 2002). De nombreux travaux cherchent à améliorer l'estimation par dynamique inverse depuis sa création, notamment

sur la méthodologie globale de calcul (Dumas, Nicol, et al., 2007), les techniques d'estimations de la cinématique et dynamique de chaque segment (Bonnet, Dumas, et al., 2017), des paramètres inertiels (Bonnet et al., 2016) et de réductions des artefacts de peau (Bonnet, Richard, et al., 2017).

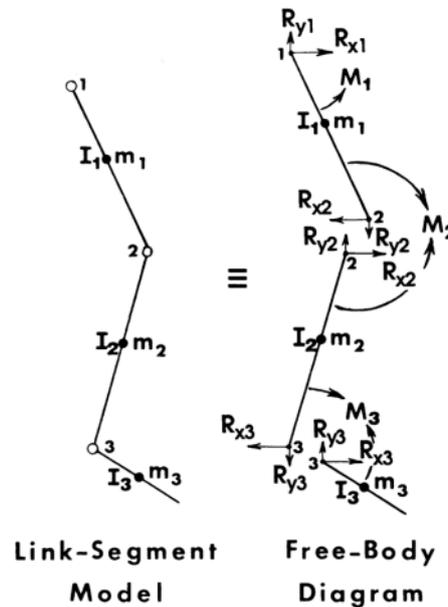


FIG. 13: SPÉARATION DE LA CHAÎNE SEGMENTAIRE POUR LA DYNAMIQUE INVERSE (WINTER 2009)

### 2.2.2. Modèle entier : Contrôle et linéarisation

L'analyse et le contrôle de modèles entiers pour représenter la stabilisation debout a commencé avec le modèle générique de pendule inverse articulé à la cheville (Nashner, 1972; Johansson et al., 1988) et des modèles similaires sont toujours proposés à ce jour (Chagdes et al., 2013; Rusaw and Ramstrand, 2016). De par sa simplicité, le modèle du pendule inverse est utilisé et de nombreuses hypothèses sur les stratégies neuromusculaires du contrôle de la stabilité debout sont proposées sur cette base. Il a été notamment montré que la rigidité articulaire de la cheville est insuffisante pour maintenir la stabilité debout sans contrôle musculaire supplémentaire (Morasso et al., 1999). De nombreuses lois de contrôle (proportionnel-dérivé (Masani et al., 2003), proportionnel-intégral-dérivé (Peterka, 2000), contrôle optimal (Qu et al., 2007)...) ont été proposées avec des résultats de simulations montrant des déplacements de COP similaires aux stabilogrammes observés expérimentalement. Cependant, l'intérêt des études citées pour comprendre la stabilisation debout est discutable sur deux points : 1. Les modèles utilisés sont approximés par une linéarisation au point d'équilibre et 2. La stabilisation debout par la cheville seule est très rarement observée expérimentalement. En effet il est reconnu depuis les observations de (Nashner and McCollum, 1985) que les hanches sont également utilisées et que le pendule inverse néglige cette contribution (van Soest and Rozendaal, 2008; Pinter et al., 2008). Depuis, plus de modèles en double pendule inverse articulés aux chevilles et aux hanches sont proposés dans la littérature (Guelton et al., 2008; Suzuki et al., 2011; Li et al., 2012). Malgré des simplifications sur la modélisation et le modèle mathématique, des résultats stabilométriques proches des données mesurées expérimentalement sont produits. Cet exemple montre bien que la modélisation biomécanique de la stabilisation via le prisme du contrôle peut être biaisée par la robustesse de cette approche.

Seuls deux MCS créés pour l'étude de la position assise chez le sujet sain ont été trouvés dans la littérature. Les deux sont des variations de double pendule inverse 2D. Le premier, un modèle théorique et uniquement dédié à la simulation, permet de définir la zone antéropostérieure possible de stabilité d'une personne assise sur une chaise instable (« wobble chair », (Tanaka et al., 2010), Fig. 14). Le contrôle du modèle est réalisé au niveau de l'articulation lombaire par un contrôleur proportionnel dérivé. Les non linéarités du modèle sont conservées et la zone de stabilité est définie de deux façons : 1. Par la simulation brute de toutes les conditions initiales possibles (angles des deux articulations  $\in [-45^\circ, 45^\circ]$ ) et 2. Par le calcul d'indicateurs non linéaires de stabilité (exposant maximum de Lyapunov).

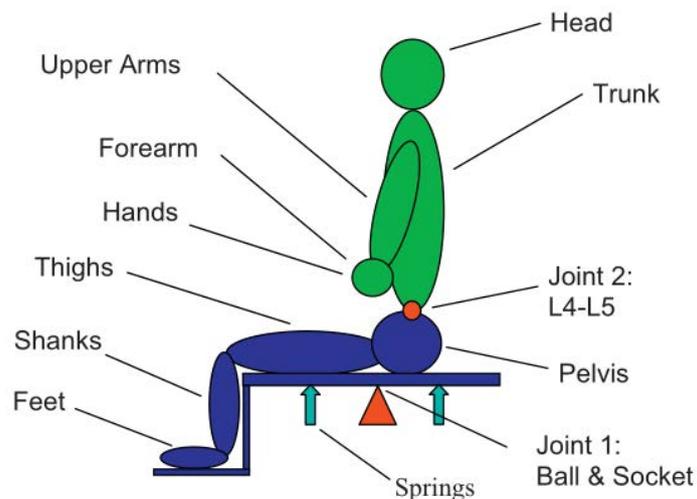


FIG. 14 : MODÈLE DE TANAKA ET AL (2010)

Le second modèle trouvé est proposé par Reeves et collaborateurs (Reeves et al., 2009). Ce modèle dédié à l'étude des retards d'activation dans la stabilisation de l'assise instable latérale (wobble chair) fait la même hypothèse d'un contrôle uniquement au niveau lombaire (Fig. 15). L'intérêt de ce modèle est de se nourrir de données expérimentales issues de l'analyse du mouvement (positions et vitesses angulaires) afin de déterminer par optimisation les paramètres internes du modèle comme les gains de contrôle, la raideur et l'amortissement passif mais aussi le délai d'activation de la loi de contrôle. Ces travaux sont basés sur un modèle linéaire qui ne reste donc valide que pour des petites variations autour d'un point d'équilibre. La Fig. 16 explicite les limitations de cette approche ; les estimations du modèle présentent des écarts importants lorsque les mouvements des sujets s'éloignent de ce point d'équilibre.

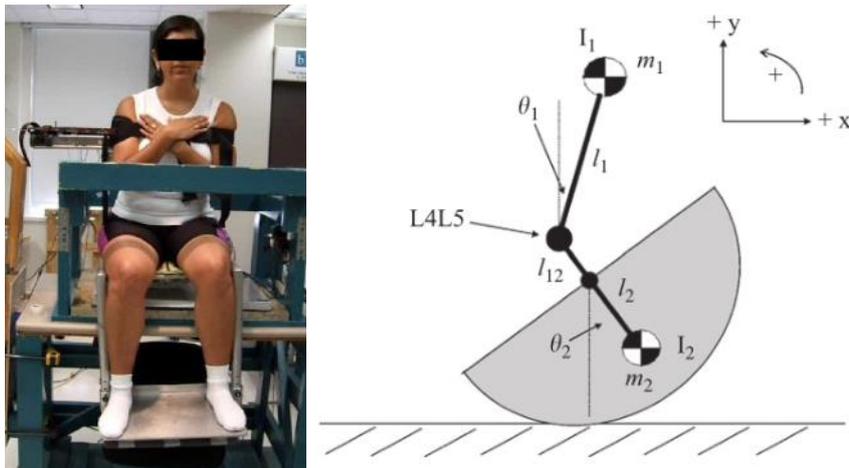


FIG. 15 : MODÈLE DE REEVES ET AL (2009)

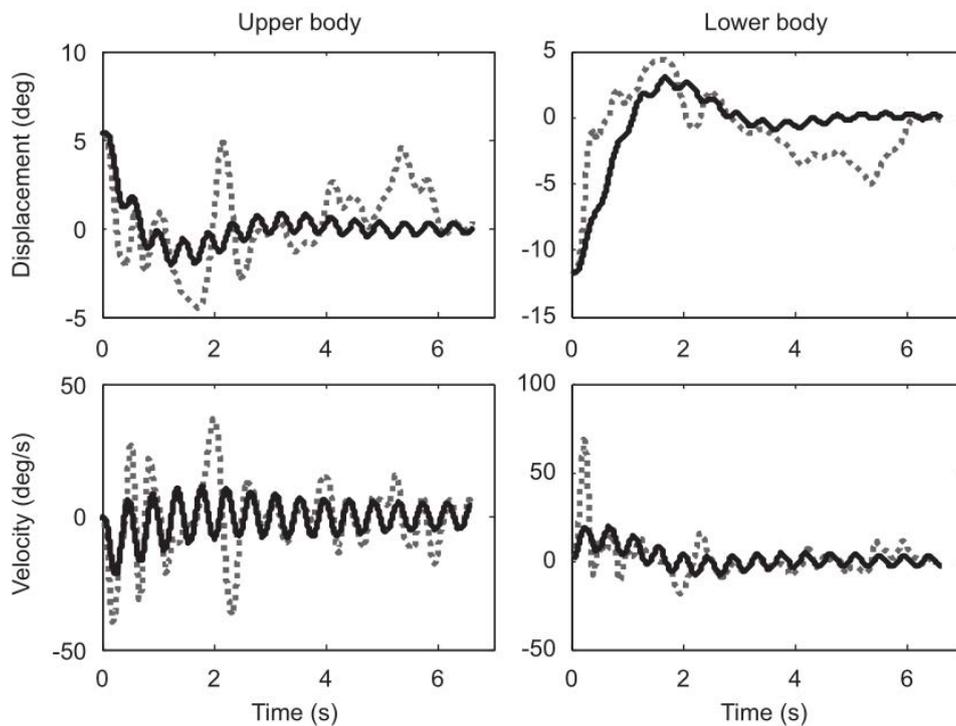


FIG. 16 : CONSÉQUENCES DE LA LINÉARISATION DU MODÈLE DE REEVES ET AL 2009 (DONNÉES EXPÉRIMENTALES EN POINTILLÉS GRIS, VALEURS ESTIMÉES DU MODÈLE EN NOIR)

Les points communs de ces deux modèles sont la réunion du tronc, de la tête et des membres supérieurs dans un même segment rigide, l'hypothèse de stabilisation par l'articulation lombaire et enfin l'écriture des équations dynamiques du modèle entier (à la différence de la dynamique inverse qui calcule par segments) par la dérivation des équations du Lagrangien. Seul un des deux modèles présentés peut être utilisé avec des données expérimentales mais les équations du modèle sont linéarisées au point d'équilibre afin de simplifier la technique d'optimisation ce qui diminue la précision du modèle.

Le modèle MCS permet donc de trouver un compromis entre précision du modèle et variabilité anatomique liée à la LMÉ. L'approche consistant à considérer le modèle dans son intégralité permet d'éviter la propagation d'erreur à chaque nouvelle articulation comme c'est le cas avec la dynamique inverse mais cela impose des modèles plus complexes et non linéaires. À cause de l'instabilité posturale inhérente des personnes vivant avec une LMÉ, les mouvements étudiés (flexion/extension du tronc et des membres supérieurs) s'éloignent fortement des positions d'équilibre statiques, ce qui n'est donc pas compatibles avec l'hypothèse de linéarité. Il est donc important de travailler avec un modèle non linéaire permettant de prendre en compte les caractéristiques de ces mouvements.

### 2.3. Formalisme de Takagi-Sugeno

Une des difficultés principales de la modélisation de systèmes dynamiques en biomécanique est la création d'équations différentielles non linéaires complexes à résoudre. C'est pourquoi dans la littérature, de nombreux travaux linéarisent les équations du modèle autour des points d'équilibres (Cholewicki et al., 1999; Granata et al., 2004; Qu et al., 2007; Reeves et al., 2009; Suzuki et al., 2011; Li et al., 2012). Des modèles simplifiés se justifient pleinement dans un contexte de commande, où la robustesse pallie les simplifications faites (Boyd et al., 1994). Dans le cadre de l'estimation des variables et la reconstruction de variables internes, il est indispensable de disposer du modèle le plus précis possible, toute information simplifiée étant « perdue ». De nombreuses possibilités sont offertes allant des modèles LPV (Linéaire à Paramètres Variant) à des modèles non linéaires. Une famille de modèle qui permet un bon compromis entre représentation des modèles non linéaires et complexité de leur synthèse est le formalisme q-LPV (quasi LPV) ou de Takagi-Sugeno (T-S). Ce type de modèle a déjà été utilisé dans le contexte biomécanique par (Guelton et al., 2008) et sera utilisé dans ce travail. La procédure pour créer un modèle T-S ainsi que les outils mathématiques associés pour l'estimation et la stabilité sont présentés ci-dessous, autour d'un exemple d'application : le pendule inverse de (Qu et al., 2007).

#### 2.3.1. Modélisation sous forme T-S : exemple du pendule inverse

L'approche T-S est une technique de modélisation issue de la logique floue et des règles de type « SI-ALORS » (Zadeh, 1973) qui permet de représenter *exactement* la dynamique d'un modèle non linéaire dans un domaine de validité défini via une somme convexe de sous-modèles linéaires (Takagi and Sugeno, 1985). Les sous-modèles linéaires sont pondérés par des fonctions directement liées aux non linéarités du modèle et obtenues via une approche par secteur non linéaire (Ohtake et al., 2001).

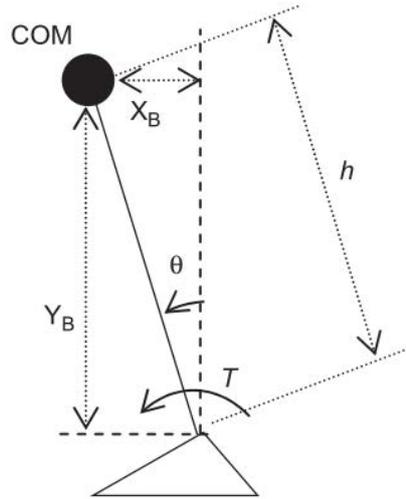


FIG. 17 : PENDULE INVERSE DE QU ET AL., 2007.

La dynamique du modèle s'écrit :

$$I\ddot{\theta}(t) - Mgh \sin(\theta(t)) = T(t) \quad (1.1)$$

Avec  $I$ , le moment d'inertie du pendule,  $g$  la constante de gravitation,  $M$  sa masse et  $T(t)$  le couple développé à la cheville pour maintenir la stabilité debout, l'écriture de (1.1) en représentation d'état est directe :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\theta(t))x(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (1.2)$$

$$\text{Avec } x(t) = \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix}, u(t) = T(t), A(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{Mgh}{I} \times \frac{\sin(\theta(t))}{\theta(t)} & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ I^{-1} \end{bmatrix} \text{ et } C = [1 \quad 0]$$

La version linéarisée au point d'équilibre  $\theta = 0^\circ$  de (1.1) s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_{lin}x(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (1.3)$$

$$\text{Avec } A_{lin} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ Mgh \times I^{-1} & 0 \end{bmatrix}$$

La première étape dans la création d'un modèle T-S est d'identifier les non linéarités des équations du modèle et de les borner. Dans (1.2) il s'agit de  $z_1(t) = \frac{\sin(\theta(t))}{\theta(t)}$  dont on peut prouver aisément que pour tout  $\theta(t)$  alors  $-0.2172 \leq z_1(t) \leq 1$ . Dans la suite,  $z(t)$  correspond au vecteur des

prémises du modèle et regroupe toutes les non linéarités, ici  $z(t) = \{z_1(t)\}$ . Pour alléger les notations, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, le temps  $t$  n'apparaît plus dans les équations.

En fonction des bornes des non linéarités, les secteurs non linéaires sont définis. Le nombre de sous-modèles obtenus dépend directement du nombre de non linéarités  $p$ , à savoir  $2^p$ . La complexité d'un modèle T-S augmente de façon exponentielle par rapport au nombre de non linéarités du modèle.

L'approche par secteur non linéaire consiste à construire une somme convexe d'une variable bornée à partir de ses sommets. Pour cela le résultat suivant est utilisé (Taniguchi et al., 2001; Morère, 2001).

Soit  $f(\cdot) \in [\underline{f}, \bar{f}]$ , il existe deux fonctions  $w_1(\cdot) \geq 0$ ,  $w_2(\cdot) \geq 0$  qui vérifient :

$w_1(\cdot) + w_2(\cdot) = 1$  et  $f(\cdot) = \underline{f} \times w_1(\cdot) + \bar{f} \times w_2(\cdot)$ . Il suffit de choisir :

$$w_1(\cdot) = \frac{\bar{f} - f(\cdot)}{\bar{f} - \underline{f}}, \quad w_2(\cdot) = 1 - w_1(\cdot) \quad (1.4)$$

Pour illustrer cette propriété par rapport au modèle (1.2), considérons une plage angulaire  $\theta \in [-45^\circ, 45^\circ]$ , alors  $z_1 \in [0.253, 1]$  et la Fig. 18 présente le tracé des fonctions d'appartenance sur le domaine de validité  $\theta$ .

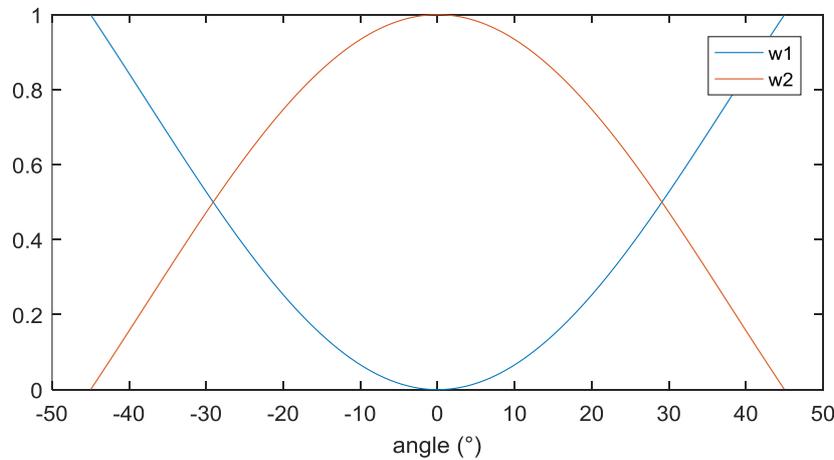


FIG. 18 : FONCTIONS D'APPARTENANCE POUR LA NON LINÉARITÉ  $z_1$ .

Comme  $p = 1$ , on aboutit à 2 modèles :

$$A(\theta) = w_1(\theta) A_1 + w_2(\theta) A_2 \quad (1.5)$$

Avec  $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ Mgh \times I^{-1} \times \underline{z}_1 & 0 \end{bmatrix}$  et  $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ Mgh \times I^{-1} \times \bar{z}_1 & 0 \end{bmatrix}$

On obtient alors une écriture de (1.2) sous la forme d'une somme des sous-modèles linéaires pondérés par les fonctions d'appartenance :

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^2 w_i(z) A_i x + Bu, \quad (1.6)$$

Dans la suite de ce manuscrit, les sommes convexes de matrices (aussi appelé modèle polytopique) sont écrites sous la forme suivante  $A_h = \sum_{i=1}^{2^p} w_i(z) A_i$ . Il est très important de noter que le modèle T-S (1.6) représente exactement le modèle non linéaire (1.2) dans le secteur  $\theta \in [-45^\circ, 45^\circ]$ . Un avantage de ce type de modèle est de pouvoir systématiser leur synthèse avec des outils qui sont issus de l'automatique linéaire. Dans ce contexte, les principaux outils utilisés tout au long de ce mémoire sont donnés ci-après.

### 2.3.2. Observateurs

L'observateur d'état (Luenberger, 1971) est un outil classique du domaine de l'automatique permettant d'estimer l'état d'un système. Pour illustrer nos propos, un modèle polytopique est considéré sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = A_h x + B_h u \\ y = Cx \end{cases} \quad (1.7)$$

Des conditions de rang sont nécessaires pour déterminer l'observabilité du système qui ne sont pas reprises dans ce mémoire. L'observateur s'écrit alors en fonction du modèle du système et des sorties mesurées :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A_h \hat{x} + B_h u + L_h (y - \hat{y}) \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{cases} \quad (1.8)$$

On montre que, sous l'hypothèse que les variables de prémisses soient mesurées, i.e.  $z(t)$  est le même dans les fonctions d'appartenance de (1.7) et (1.8) (Taniguchi et al., 1999), la dynamique de l'erreur d'observation d'état  $e = x - \hat{x}$  s'écrit :

$$\dot{e} = (A_h - L_h C)e \quad (1.9)$$

Et il suffit alors de trouver  $L_h$  qui permette de faire converger  $e \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$ .

Un observateur à entrées inconnues (OEI) pris ici dans le sens d'observateur Proportionnel Intégral (PI) (Koenig and Mammar, 2002) permet de reconstruire simultanément l'état et l'entrée inconnue d'un modèle en supposant que sa dynamique obéit à une dynamique prédéterminée, souvent du type  $\dot{u}(t) = 0$  ou  $\ddot{u}(t) = 0$ . En considérant le vecteur des dérivées successives de l'entrée  $D^T = [u \quad \dot{u} \quad \dots \quad u^{(m)}]$ , la dynamique des entrées peut alors être écrite sous la forme

$\dot{D}(t) = \Gamma D(t)$ . Par exemple,  $\ddot{u}(t) = 0$  correspond à  $\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ . En utilisant le vecteur d'état étendu :

$x^e = \begin{bmatrix} x \\ D \end{bmatrix}$ , l'équation (1.7) s'écrit sous l'hypothèse  $\dot{D}(t) = \Gamma D(t)$  comme :

$$\begin{cases} \dot{x}^e = A_h^e x^e = \begin{bmatrix} A_h & B_h \\ 0 & \Gamma \end{bmatrix} x^e \\ y = C^e x^e = [C \quad 0] x^e \end{cases} \quad (1.10)$$

Ainsi, l'observateur à entrées inconnues s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}^e = A_h^e \hat{x}^e + L_h^e (y - \hat{y}) \\ \hat{y}^e = C^e \hat{x}^e \end{cases} \quad (1.11)$$

Et (1.9) s'écrit alors :

$$\dot{e}^e = (A_h^e - L_h^e C) e^e \quad (1.12)$$

Qui avec le choix adéquat de  $L_h^e$  garantit non seulement la convergence de l'erreur d'état  $e \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$ , mais sous l'hypothèse  $\dot{D}(t) = \Gamma D(t)$  que  $\hat{u}(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} u(t)$ .

Enfin, pour le choix des matrices  $L_h$  et de  $L_h^e$  qui garantissent la stabilité de (1.9) et de (1.12), i.e. la convergence des erreurs d'observation, la méthode de Lyapunov est utilisée (Boyd et al., 1994). Cette méthode permet de dire qu'un système est asymptotiquement stable s'il existe une fonction scalaire liée à l'état du système,  $V(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  respectant  $V(0) = 0$ ,  $V(x) > 0$  pour  $x \neq 0$  et  $\dot{V}(x) < 0$  (resp.  $V(x(k+1)) - V(x(k)) < 0$ ) dans le domaine continu (resp. discret).

L'idée générale derrière cette méthode est que s'il existe une fonction (dite « de Lyapunov »), définie positive dépendant de l'état du système, qui décroît dans le temps, alors il est *prouvé* que le système est asymptotiquement stable. Dans le cas des systèmes mécaniques, un parallèle peut être fait entre la fonction de Lyapunov et une fonction d'énergie, si cette fonction décroît, alors le système finira par s'arrêter. Dans ce mémoire, les solutions sont recherchées en résolvant des Inégalités Matricielles Linéaires (LMI) (Boyd et al., 1994) qui permettent l'utilisation d'outils de résolution puissants (Gahinet et al., 1994).

### 2.3.3. Extension aux Modèles Descripteurs

La forme du modèle (1.2) est très classique en automatique, une forme dite descripteur en est une généralisation qui s'écrit :

$$E(x)\dot{x} = A(x)x + B(x)u(t) \quad (1.13)$$

Elle trouve tout son sens dans les systèmes mécaniques. Pour revenir à l'exemple (1.1) alors  $E = I$ . Si maintenant le système mécanique étudié augmente en complexité (ex : double pendule inverse), il est aisé de comprendre que pour un double pendule, le moment d'inertie (i.e. la répartition de matière autour des centres de rotation) dépend des angles du pendule (i.e. de l'état), la matrice  $E(x)$  est donc dépendante d'une partie de l'état. Le modèle (1.13) appartient à la famille des systèmes descripteurs (Luenberger, 1977). Dans les cas de systèmes mécaniques, la matrice  $E(x)$  regroupe les paramètres liés à l'inertie du système et est toujours définie positive (Lewis et al., 2003). Avec cette dernière propriété, il est possible d'écrire (1.13) sous la forme classique (1.2) :

$$\dot{x} = E(x)^{-1} A(x)x + E(x)^{-1} B(x)u(t) \quad (1.14)$$

Très clairement dans (1.14), si une approche de type T-S est utilisée, les non linéarités de  $E(x)$  vont être distribuées dans toutes les valeurs non nulles de  $A(x)$  et de  $B(x)$  et leur nombre va donc augmenter. Si de plus la matrice des entrées est constante  $B(x) = B$ , ce qui est le cas pour les modèles développés dans ce mémoire,  $E(x)^{-1} B$  ne l'est évidemment pas et cela impose un nombre de contraintes à résoudre beaucoup plus important et un conservatisme dans les résultats. Ces points ont été discutés en détails dans (Estrada-Manzo, 2015). Enfin, il est reconnu comme une bonne pratique de garder un système T-S le plus proche possible de la structure du modèle non linéaire d'origine pour minimiser son conservatisme (Sala et al., 2005).

On peut alors de façon naturelle étendre les observateurs PI de la forme (1.10) à des observateurs PI pour (1.13). En gardant les notations précédentes (1.13) se réécrit :

$$\begin{cases} E_h \dot{x}^e = A_h^e x^e = \begin{bmatrix} A_h & B_h \\ 0 & \Gamma \end{bmatrix} x^e \\ y = C^e x^e = [C \quad 0] x^e \end{cases} \quad (1.15)$$

Cette extension, en continu et en discret sera la base de tous les observateurs mis en œuvre dans ce mémoire. Des résultats basés sur (1.15) sont présents, dans les travaux de (Guelton et al., 2008), avec un observateur PI à entrées inconnues créé pour estimer les moments articulaires au niveau des chevilles et des hanches lors de la stabilisation d'une personne debout en se basant sur un modèle non linéaire de double pendule inverse (Guelton et al., 2008). La comparaison des résultats obtenus avec différentes méthodes de dynamique inverse (bottom-up et top-bottom) a démontré l'intérêt de cette technique comme une alternative à la dynamique inverse et à la linéarisation de modèle complet. Les atouts de l'OEI par rapport aux autres techniques d'estimation présentées sont en premier lieu sa compatibilité d'utilisation avec les systèmes non linéaires, son utilisation sur le MCS complet et non sur chaque segment comme la dynamique inverse (évitant ainsi la propagation successive d'erreurs). En second lieu, sous les conditions de rang adéquates, les informations à fournir sont uniquement les positions, (pas de plateformes de force) et enfin la sensibilité au bruit est réduite (pas de double dérivation) ouvrant la possibilité d'une utilisation en temps-réel dans un système embarqué (Laurain et al., 2015; Feng et al., 2017).

Néanmoins pour des observateurs de ce type basés sur des modèles descripteurs il a fallu attendre les travaux de (Guerra et al., 2015; Estrada-Manzo et al., 2016a) pour que des conditions strictes de type LMI existent, qui permettent d'assurer la convergence des erreurs d'observation. L'ensemble de ces résultats sont la base des travaux développés.

### 2.3.4. Exemple d'application : Observation sur pendule inverse

Dans cet exemple, le pendule inverse (1.1) est stabilisé et deux OEI sont créés pour suivre l'état du système, l'un est linéaire, l'autre est un OEI sous forme T-S. Les conditions initiales sont les mêmes pour le modèle et les observateurs à savoir  $23^\circ$  et  $11,5^\circ/s$ . Dans la simulation, une perturbation artificielle sinusoïdale à 3Hz est appliquée sur l'angle  $\theta$ .

Tout d'abord, les modèles (1.3) et (1.6) sont réécrits en version étendue afin d'ajouter l'entrée du modèle  $u(t)$  dans le vecteur d'état augmenté. La dynamique choisie pour l'entrée inconnue est de type double intégrateur  $\ddot{u} = 0$  d'où :

$$\dot{D}(t) = \Gamma D(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ \dot{u}(t) \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

On peut ainsi créer le nouveau vecteur d'état augmenté  $x^e = \begin{bmatrix} x \\ D \end{bmatrix}$  et écrire :

$$\dot{x}^e = A_{lin}^e x^e \quad (1.17)$$

$$\dot{x}^e = A_h^e x^e \quad (1.18)$$

Avec  $A_{lin}^e = \begin{bmatrix} A_{lin} & [B & 0_{2 \times 1}] \\ 0_2 & \Gamma \end{bmatrix}$ ,  $A_h^e = \begin{bmatrix} A_h & [B & 0_{2 \times 1}] \\ 0_2 & \Gamma \end{bmatrix}$ ,  $C^e = [C \quad 0_{1 \times 2}]$  et  $y = C^e x^e = \theta$  pour les deux modèles. Les équations des observateurs donnent donc :

$$\dot{\hat{x}}^e = A_{lin}^e \hat{x}^e + K_{lin} (y - \hat{y}) \quad (1.19)$$

$$\dot{\hat{x}}^e = A_h^e \hat{x}^e + P^{-1} K_h (y - \hat{y}) \quad (1.20)$$

Avec  $\hat{x}^e = \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{D} \end{bmatrix}$ ,  $\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{\theta} \\ \dot{\hat{\theta}} \end{bmatrix}$  et  $\hat{y} = C^e \hat{x}^e = \hat{\theta}$ , la matrice  $P$  est explicitée plus avant.  $K_{lin}$  peut être

défini par n'importe quelle technique (placement de pôle, régulateur linéaire quadratique ...) et  $K_h$  est défini par LMI afin d'assurer la convergence de (1.20), en effet la dérivée de l'erreur d'estimation  $e = x^e - \hat{x}^e$  s'écrit :

$$\dot{e} = \dot{x}^e - \dot{\hat{x}}^e = (A_h^e - P^{-1} K_h C^e) e \quad (1.21)$$

Il s'agit donc de trouver les gains  $K_h$  tels que le système (1.21) converge vers 0. En choisissant une fonction de Lyapunov quadratique sous la forme  $V(e) = e^T P e$  et  $P = P^T > 0$ , sa dérivée s'écrit comme :

$$\begin{aligned} \dot{V}(e) &= \dot{e}^T P e + e^T P \dot{e} \\ \dot{V}(e) &= e^T (A_h^{eT} P + P A_h^e - K_h C^e - C^{eT} K_h^T) e \end{aligned} \quad (1.22)$$

Il s'en déduit que  $\dot{V}(e) < 0$  si :

$$A_h^{eT} P + P A_h^e - K_h C^e - C^{eT} K_h^T < 0 \quad (1.23)$$

Ou en utilisant la forme polytopique :

$$\sum_{i=1}^r h_i(z) (A_i^{eT} P + P A_i^e - K_i C^e - C^{eT} K_i^T) < 0 \quad (1.24)$$

Les fonctions  $h_i(z) \geq 0$  étant positives (1.24) une condition suffisante pour assurer que  $\dot{V}(e) < 0$  (Tanaka and Wang, 2001) est :

$$\forall i \in \{1, \dots, r\}, A_i^{eT} P + P A_i^e - K_i C^e - C^{eT} K_i^T < 0 \quad (1.25)$$

Les inégalités (1.25) correspondent bien à un ensemble de conditions LMI car linéaires selon les variables à déterminer, i.e.  $P$  et  $K_i$ .

Les résultats de simulation du pendule non linéaire et des deux observateurs sont affichés sur les Fig. 19, Fig. 20 et Fig. 21. Il est manifeste que les deux observateurs convergent et suivent l'évolution de la trajectoire angulaire du pendule. Concernant la vitesse angulaire, l'OEI linéaire présente une erreur plus importante que l'OEI T-S lors de la perturbation. Cette erreur a un effet négatif sur l'estimation de l'entrée inconnue car on constate un décalage entre l'estimation de l'OEI linéaire et de la valeur de référence. Dans cette simulation, l'angle du pendule est compris dans  $\theta \in [-10^\circ \ 10^\circ]$ , les résultats seraient encore plus erronés dans une plage angulaire plus importante.

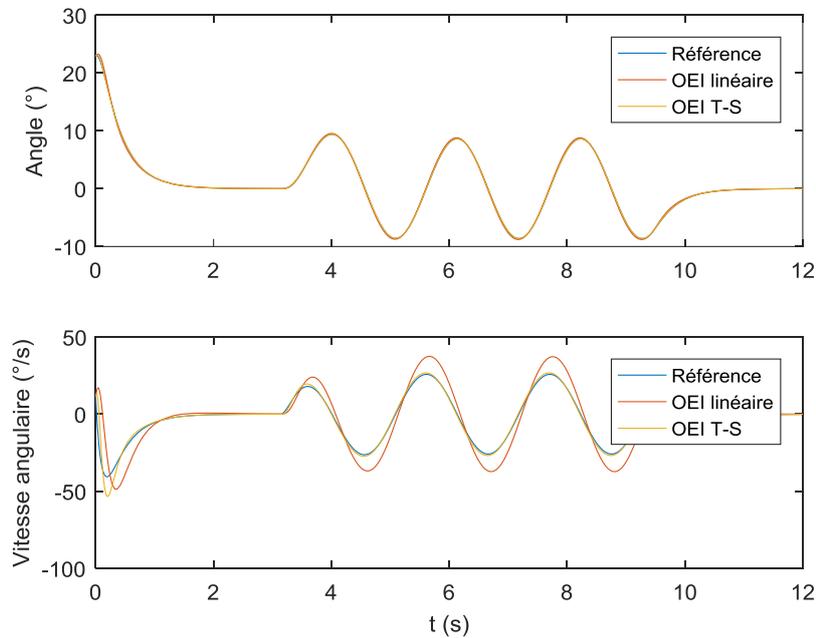


FIG. 19 : SIMULATION D'UN PENDULE INVERSE, RÉSULTATS D'OEI LINÉARISÉ ET T-S

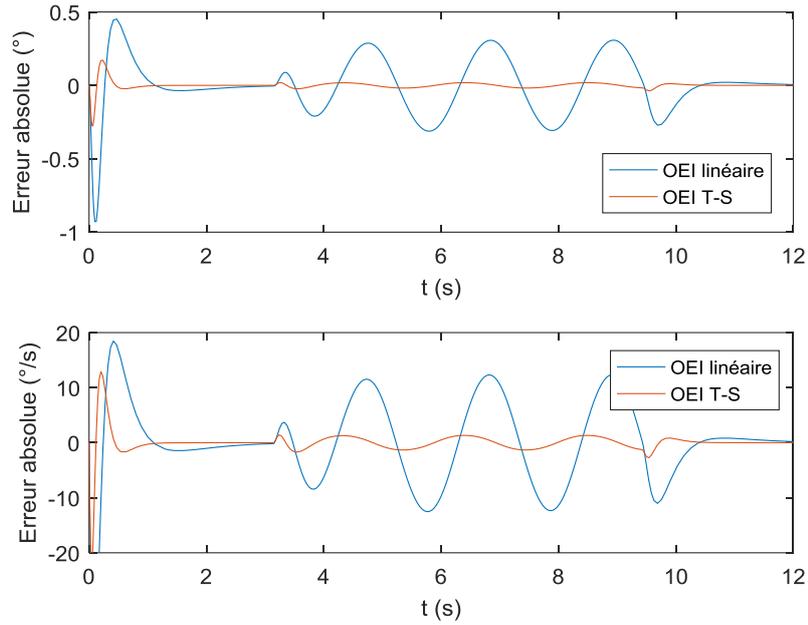


FIG. 20 : ERREUR SUR L'ANGLE  $\theta(t)$  ET LA VITESSE ANGULAIRE  $\dot{\theta}(t)$  ENTRE SIMULATION ET LES DEUX OEI

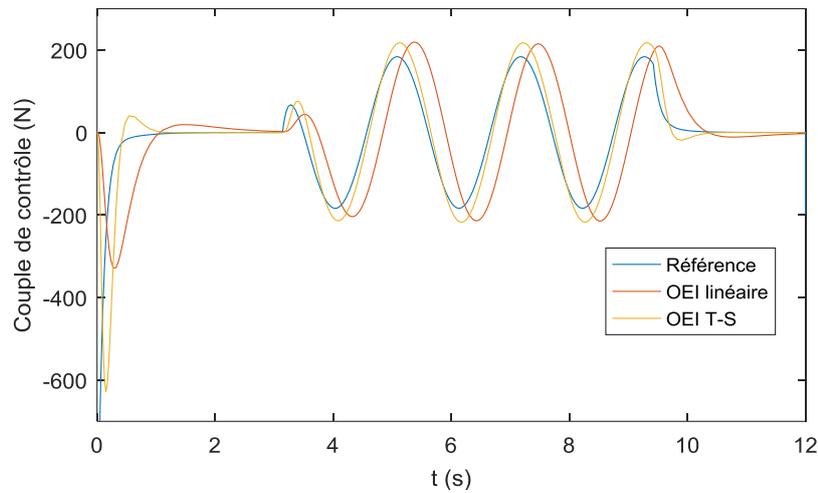


FIG. 21 : LOI DE CONTRÔLE SIMULÉE ET ESTIMÉE

Au travers d'un exemple mécanique simple et souvent utilisé en biomécanique, l'intérêt de la modélisation non-linéaire et de l'approche T-S pour la création d'un observateur à entrées inconnues PI est démontré. De par la structure descripteur non linéaire inhérente aux modèles mécaniques pluri-articulés, l'utilisation de cette méthodologie de manière à obtenir des gains d'observateur sous la forme LMI n'est possible que depuis des travaux récents de (Guerra et al., 2015; Estrada-Manzo et al., 2016a).

Comme expliqué précédemment, il n'existe pas à notre connaissance de modèle prenant en compte l'effet des membres supérieurs sur la stabilisation en position assise chez les personnes vivant avec une LMÉ. Il est donc nécessaire d'en créer un mais le choix du type de modèle et de la méthodologie d'estimation des efforts internes sont très importants et doivent être justifiés. Malgré leur précision anatomique, les modèles musculosquelettiques ne semblent pas adaptés dans le cadre de cette étude car trop sensible aux erreurs anatomiques, la simplicité du modèle en chaîne segmentaire leur est préférée. Les MCS existant pour l'analyse de la stabilité en position assise ne sont pas utilisables ou transposables à notre problématique car le contrôle du modèle est réalisé par l'articulation du tronc et que l'amplitude des mouvements prévus est trop importante pour permettre la linéarisation du modèle. Le formalisme T-S permet : 1. Une représentation exacte un modèle non linéaire dans un domaine de validité et 2. La création d'OEI pour estimer les valeurs non mesurées de l'état ainsi que les efforts internes de stabilisation.

### 3. Résumé et objectifs

Le contrôle postural implique la combinaison de plusieurs structures anatomiques, des recrutements musculaires volontaires avec activation retardée ainsi que la résistance passive inhérente des tissus mous du corps. De par la diminution ou la perte du recrutement musculaire en dessous du niveau de leur lésion, la qualité du contrôle postural des personnes vivant avec une LMÉ est réduite. L'approche modèle est pertinente afin de formaliser et mieux comprendre le contrôle postural dans sa répartition entre efforts internes volontaires et résistance passive chez cette population.

À notre connaissance, il n'existe aucun modèle dédié à l'étude de la position assise prenant en compte la position des membres supérieurs. La littérature scientifique montre pourtant que les personnes vivant avec une LMÉ vont avoir recours à leurs membres supérieurs pour se stabiliser car l'activation de muscles au niveau lombaire est réduite voire impossible. La création d'un modèle biomécanique dynamique entraîne naturellement l'écriture d'un système non linéaire sous forme descripteur. La complexité de ce type de modèle a restreint son utilisation par le passé, les auteurs préférant soit le linéariser soit fixer des gains d'estimation *à priori*. Mais des travaux récents permettent aujourd'hui d'écrire les conditions d'obtention de gains d'observation, afin de créer des OEI capables d'estimer les efforts internes, sous forme LMI.

La technique choisie pour réaliser l'estimation des efforts internes au modèle est donc un observateur PI à entrées inconnues basé sur des modèles descripteurs et un formalisme de Takagi-Sugeno. Ses intérêts sont de pouvoir conserver le modèle non linéaire complet et de prouver la convergence des erreurs d'estimation.

L'objectif de cette thèse est donc de proposer des modèles d'étude de la stabilisation en position assise chez les personnes vivant avec une LMÉ. Les modèles biomécaniques proposés prendront en compte l'impact des membres supérieurs et de résistances passives au niveau lombaire dans la dynamique du système et les efforts internes seront estimés à l'aide d'OEI sous forme T-S descripteur. Les conditions de convergence des observateurs seront définies en utilisant la méthode de Lyapunov et écrites sous la forme d'inégalités linéaires matricielles. Une validation de l'ensemble de la démarche sera réalisée en conditions expérimentales sur des sujets vivants avec une LMÉ.



## CHAPITRE 2 : LE MODÈLE H2AT

1.	Modèle théorique	46
1.1.	Introduction	46
1.2.	Présentation du modèle et remarques	46
1.3.	Modèle continu	48
1.3.1.	Équations du modèle	48
1.3.2.	Loi de contrôle avec retard sur l'entrée	49
1.3.3.	Modèle descripteur T-S continu	50
1.3.4.	OEI et résultats	52
1.3.5.	Simulations	56
1.3.6.	Discussions	59
1.4.	Modèle discret	60
1.4.1.	Équations du modèle	60
1.4.2.	Modèle descripteur T-S discret	61
1.4.3.	OEI et résultats	63
1.4.4.	Simulations	64
1.4.5.	Discussions	66
1.5.	Modèle avec angle et couple passif	67
1.5.1.	Équations du modèle	67
1.5.2.	Simulations	69
1.6.	Conclusions	72
2.	Vérifications expérimentales	72
2.1.	Introduction	72
2.2.	Matériels et Méthodes	73
2.2.1.	Sujets et mesures	73
2.2.2.	Protocole expérimental	73
2.2.3.	Traitement des données mesurées	74
2.3.	Résultats	75
2.4.	Limitations	78
3.	Conclusions	79

# 1. Modèle théorique

## 1.1. Introduction

Dans le chapitre précédent, les modèles présentés étudiant la position assise font l'hypothèse que la stabilité du haut du corps est obtenue par des actions volontaires au niveau de l'articulation lombosacrée recrutant ainsi les muscles érecteurs du rachis et les fléchisseurs (Reeves et al., 2009; Tanaka et al., 2010; Vette et al., 2012). Or en fonction du niveau de lésion, les personnes vivant avec une lésion de la moelle épinière perdent partiellement ou complètement le recrutement volontaire de ces muscles. Les modèles précédents ne sont donc pas appropriés pour cette population chez qui les membres supérieurs vont acquérir une importance stratégique dans le maintien de la stabilité (Janssen-Potten et al., 1999; Seelen, Janssen-Potten, Drukker, et al., 1998). Dans les articles cités, la consigne consistant à demander aux sujets de croiser leurs bras rigidement autour de leur tronc permet d'avancer une deuxième hypothèse, celle d'un corps rigide de type pendule inverse en rotation autour de l'articulation lombo-sacrée (qu'on appelle le corps HAT pour « head, arms and trunk »). Cette hypothèse est d'autant plus discutable qu'il a été montré expérimentalement que dans le cas de l'assise perturbée, le HAT ne reste pas rigide car la tête oscille au niveau du cou (Thrasher et al., 2010). Il est donc nécessaire pour l'étude de la stabilité assise chez les personnes vivant avec une LMÉ de créer un nouveau modèle répondant à ces manques.

Les modèles mécaniques articulés se représentent souvent sous la forme descripteur avec la particularité d'une matrice d'inertie non linéaire inversible (Lewis et al., 2003). Ce type de modèle peut être réécrit comme un modèle flou de Takagi-Sugeno en utilisant la technique classique de secteurs non linéaires (Ohtake et al., 2001). Cette approche a déjà été utilisée par le passé (Guelton et al., 2008) pour la création d'observateurs à entrées inconnues mais les conditions utilisées à l'époque étaient sous la forme d'inégalités matricielles bilinéaires (BMI) qui présentent des produits de matrices à déterminer et dont il n'existe pas d'algorithmes efficaces de résolution. En général, elles doivent être résolues en utilisant deux ensembles séquentiels de LMI mais en ne présentant aucune garantie de convergence vers une solution. Des travaux récents ont défini de nouvelles conditions de stabilité pour des OEI T-S sous forme LMI dans le domaine continu et discret (Guerra et al., 2015; Estrada-Manzo et al., 2016a).

L'objectif de ce chapitre est donc proposer un premier modèle biomécanique volontairement simplifié afin d'appliquer les nouveaux résultats existants dans la création d'OEI T-S sous forme descripteur. Cette méthodologie est testée en simulation et des premiers résultats expérimentaux sont analysés pour vérifier l'adéquation du modèle avec la stabilisation assise.

## 1.2. Présentation du modèle et remarques

L'acronyme H2AT "Head 2 Arms and Trunk" signifie que ce modèle considère les mouvements de la tête et des membres supérieurs dans la stabilisation assise, en opposition à l'hypothèse classique du segment HAT rigide (Reeves et al., 2009; Tanaka et al., 2010; Vette et al., 2012). Ce modèle est un pendule inverse contrôlé par la tête et les membres supérieurs dans le plan sagittal. Le tronc est représenté par un pendule inverse classique en rotation au niveau de l'articulation lombo-sacrée et le deuxième segment, nommé H2A, se déplace linéairement selon une articulation prismatique et

représente le déplacement des COMs des membres supérieurs et de la tête (Fig. 22). C'est la force  $F(t - \tau(t))$  qui stabilise le modèle par le déplacement du point COM<sub>H2A</sub> le barycentre des centre de masse de la tête et des membres supérieurs, selon la distance  $x_H(t)$ . Le retard est dû à la combinaison des retards de transport, de traitement et enfin du délai électromécanique et est estimé à  $60 \pm 10$  ms (Reeves et al., 2007; Vette et al., 2009).

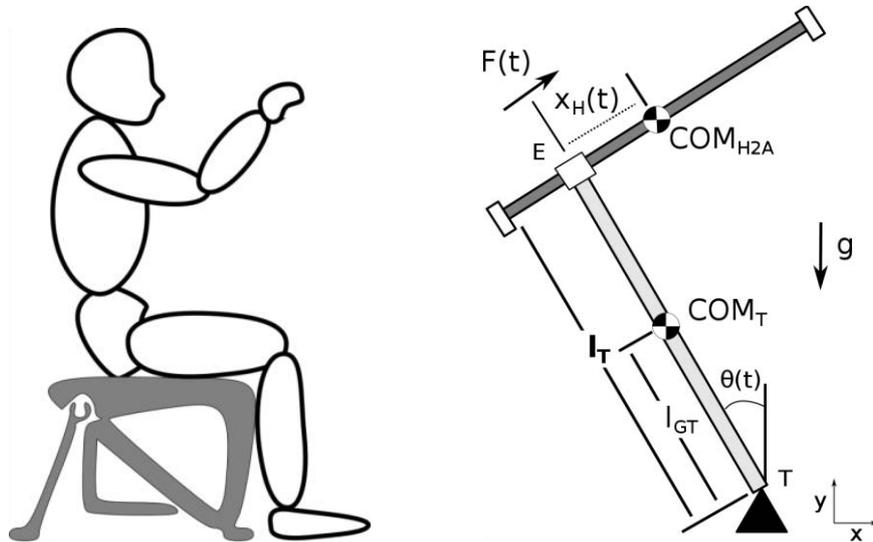


FIG. 22 : LE PENDULE H2AT

Ce modèle est générique dans le sens où il nécessite uniquement de renseigner une masse et le sexe d'un sujet afin de définir les paramètres inertiels des segments en utilisant des équations de régressions (Dumas, Chèze, et al., 2007; Fang et al., 2017). Ainsi, pour un sujet masculin de 80kg, les paramètres inertiels sont  $m_H = 16.1$  kg pour la masse de la tête et des deux bras,  $m_T = 22.64$  kg pour la masse du tronc ; une longueur de tronc de  $l_T = 477$  mm et un centre de masse du tronc (COM<sub>T</sub>) situé à  $l_{GT} = 276.7$  mm (pour plus de lisibilité dans les équations, l'indice « H2A » est remplacé par « H »).

Les données anatomiques de flexion/extension du cou et des membres supérieurs (Kapandji, 2005a, 2005b) permettent de définir l'ensemble compact suivant pour les variables du modèle en mètre, ° et °/s :

$$\Omega_x = \left\{ \begin{array}{l} -0.075 \leq x_H \leq 0.105 \\ -10 \leq \theta \leq 20 \\ -30 \leq \dot{\theta} \leq 30 \end{array} \right\} \quad (2.1)$$

La dynamique du modèle H2AT est obtenue à partir des équations du Lagrangien  $L = E - U$  avec respectivement  $E = E_T + E_{H2A}$  et  $U = U_T + U_{H2A}$  l'énergie cinétique et potentielle respectivement de chaque segment. La dérivation du Lagrangien par les coordonnées généralisées du modèle permet d'écrire les équations dynamiques du modèle H2AT.

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_H} - \frac{\partial L}{\partial x_H} = F(t - \tau(t)) \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

### Remarque 1

Dans le système (2.2), l'articulation du tronc T est dans un premier temps considérée comme parfaite, sans aucune résistance active ou passive (i.e.  $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$ ), cette hypothèse préliminaire peut aisément être levée par le rajout d'une résistance passive, ce qui sera le cas dans les parties suivantes de ce chapitre.

### Remarque 2

Le modèle H2AT est une variation de pendule inverse, il est évidemment instable en boucle ouverte. L'instabilité du modèle ne représente pas un problème pour la création d'un observateur car la convergence est exprimée sur l'erreur d'estimation et non sur l'état du système ; néanmoins il est indispensable de stabiliser ce modèle par une loi de contrôle. Dans la réalité, pour se stabiliser les sujets utilisent une loi de commande interne, et l'objectif est d'estimer les efforts internes développés dans ce cas. Pour la simulation, il convient donc de développer une loi de contrôle qui puisse se rapprocher (en termes d'amplitude et de dynamique) d'un comportement humain.

## 1.3. Modèle continu

### 1.3.1. Équations du modèle

Le calcul et la dérivation du Lagrangien pour le modèle H2AT sont détaillés en annexe.

$$\begin{cases} 0 = m_H \ddot{x}_H(t) - m_H l_T \ddot{\theta}(t) - m_H x_H(t) \dot{\theta}^2(t) + m_H g \sin(\theta(t)) - F(t - \tau(t)) \\ 0 = J(x) \ddot{\theta}(t) - m_H l_T \ddot{x}_H(t) + m_H 2x_H(t) \dot{x}_H(t) \dot{\theta}(t) - (m_H l_T + m_T l_{G_T}) g \sin(\theta(t)) \\ \quad + m_H g x_H(t) \cos(\theta(t)) \end{cases} \quad (2.3)$$

Avec  $J(x) = I_{G_T} + m_T l_{G_T}^2 + I_{G_H} + m_H l_T^2 + m_H x_H^2$ ,  $I_{G_T}$  et  $I_{G_H}$  sont respectivement les moments d'inerties aux points  $COM_T$  et  $COM_{H2A}$ . Le système (2.3) peut être écrit en représentation d'état

avec le vecteur  $x(t) = [x_H(t) \quad \dot{x}_H(t) \quad \theta(t) \quad \dot{\theta}(t)]^T \in \mathbb{R}^4$  :

$$\begin{cases} E(x(t)) \dot{x}(t) = A(x(t)) x(t) + Bu(t - \tau(t)) \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \quad (2.4)$$

$y(t) \in \mathbb{R}^2$  est le vecteur de sortie du système,  $u(t - \tau(t)) = F(t - \tau(t))$  est l'entrée,

$$E(x(t)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_H & 0 & -m_H l_T \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -m_H l_T & 0 & J(x(t)) \end{bmatrix}, B = [0 \ 1 \ 0 \ 0]^T, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ et}$$

$$A(x(t)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -m_H g \frac{\sin(\theta(t))}{\theta(t)} & m_H x_H(t) \dot{\theta}(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -m_H g \cos(\theta(t)) & -2m_H x_H(t) \dot{\theta}(t) & (m_H l_T + m_2 l_{G_T}) g \frac{\sin(\theta(t))}{\theta(t)} & 0 \end{bmatrix}.$$

Les non linéarités du système (2.4) sont donc  $\sin(\theta(t))/\theta(t)$ ,  $\cos(\theta(t))$ ,  $x_H(t) \times \dot{\theta}(t)$  et  $x_H^2(t)$ .

### Remarque 3

Deux points sont à noter dans le système (2.4) : tout d'abord comme prévu la matrice  $E(x(t))$  est inversible  $\forall x_H \in \mathbb{R}$  ; ensuite  $\dot{\theta}(t)$  qui n'est pas une variable mesurée apparaît dans la matrice  $A(x(t))$ . Cette remarque induit la notion d'observateur à variables de prémisses non mesurables, classe d'observateur qui n'admet pas de solutions génériques (Yoneyama, 2009). Ce point est très délicat et conditionne les résultats à venir ; des solutions sont proposées dans les parties suivantes pour permettre d'obtenir une convergence asymptotique des erreurs d'estimation d'état.

### 1.3.2. Loi de contrôle avec retard sur l'entrée

L'approche choisie pour stabiliser le modèle (2.4) avec une loi de contrôle avec retard variable sur l'entrée est inspirée d'une technique de contrôle robuste de modèles incertains retardés (Yue, 2004; Yue and Han, 2005a), la loi de contrôle dépend du retard moyen  $\tau_0 = 60$  ms et s'écrit :

$$u(t) = Kz(t) = K \left[ x(t) + \int_{t-\tau_0}^t e^{A(t-s-\tau_0)} B u(s) ds \right]. \quad (2.5)$$

Cette loi s'applique sur un modèle simplifié, un modèle descripteur linéaire avec incertitudes :

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = (A + \Delta A)x(t) + Bu(t - \tau(t)) \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \quad (2.6)$$

L'utilisation de la loi de contrôle (2.5) implique deux étapes, la première est la définition du gain  $K$  via une synthèse à partir d'une fonctionnelle de Lyapunov-Krasosvkii. Les conditions obtenues écrites

sous la forme de LMI sont détaillées en annexes. La deuxième étape est le calcul « à chaque instant » de la loi de commande à retard distribué (2.5). Effectivement, la partie intégrale nécessite un pas d'intégration et il est nécessaire de trouver une méthode d'implémentation qui soit « insensible » à ce pas, de manière à garantir que la propriété de stabilité soit conservée via cette approximation. Pour rendre possible la simulation de (2.5) sur le modèle H2AT, une inversion dynamique d'un problème de point fixe est utilisée (Georges et al., 2007). Elle est détaillée en annexe, elle consiste à remplacer un problème de forme implicite  $G(x,t) = 0$ , avec  $G(x,t)$  une fonction non linéaire de classe  $C^1$  par la solution à une équation différentielle de type  $\dot{G}(x,t) + \Lambda \times G(x,t) = 0$ . Si  $\Lambda$  est une matrice définie positive, il est évident que la solution converge, i.e.  $G(x,t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ . Un résultat de simulation illustre cette technique et est présenté ci-dessous avec  $K = [8126 \ 1629 \ -6954 \ -1346]$  et  $\Lambda = 50$  pour l'implémentation de la loi (2.5). Les conditions initiales sont  $x(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0.01]^T$  et une perturbation en échelon de  $0.05 \text{ rad/s}^2$  est injectée pendant 0.2s après 2s de simulation.

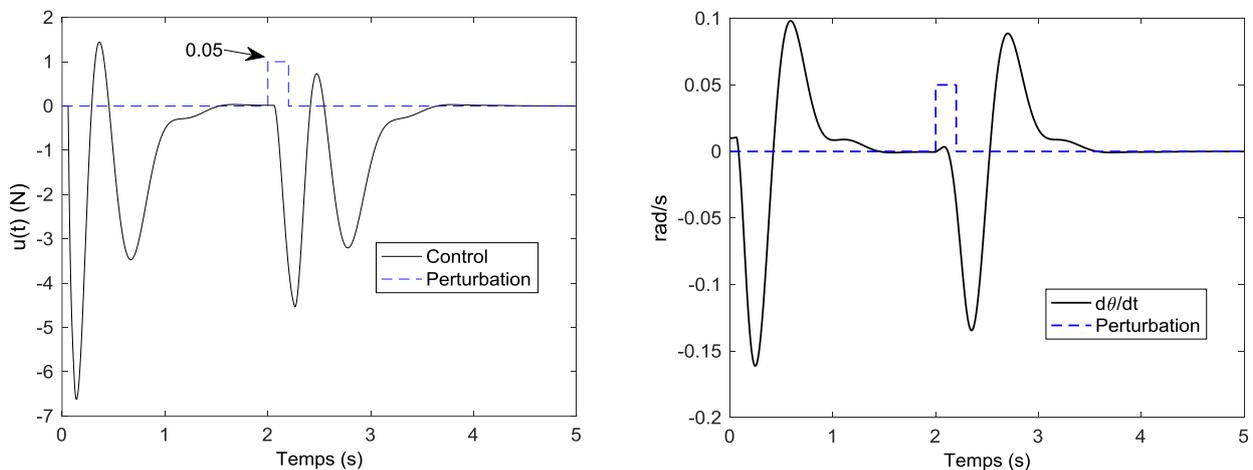


FIG. 23 : LOI DE CONTRÔLE (GAUCHE) ET VITESSE ANGULAIRE (DROITE)

On remarque que, du fait du retard, la loi de contrôle ne réagit pas dans les premiers instants de simulation. Elle réussit néanmoins à stabiliser le modèle car l'état et la loi de contrôle convergent vers 0. Le but ici n'est pas de déterminer la « meilleure » loi de commande possible mais de stabiliser le modèle H2AT afin de pouvoir déterminer des observateurs à entrées inconnues. La loi de commande développée est suffisante pour stabiliser le modèle, le prochain objectif est donc l'estimation de son état.

### 1.3.3. Modèle descripteur T-S continu

Le modèle descripteur non linéaire (2.4) peut s'écrire sous le formalisme de Takagi-Sugeno (Taniguchi et al., 1999). Étant donné qu'une des prémisses est non mesurable, la notation suivante est adoptée (Guerra et al., 2006) :  $\alpha(t)$  représente les prémisses mesurables,  $\beta(t)$  représente les prémisses non mesurables, ainsi (2.4) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{r_e} v_k(z) E_k \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r_\alpha} \sum_{j=1}^{r_\beta} w_i(\alpha_i) w_j(\beta_j) A_{ij} x(t) + Bu(t - \tau(t)) \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \quad (2.7)$$

Avec  $u(t - \tau(t))$  l'entrée retardée du système obtenue en simulation par la loi de contrôle (2.5), en utilisant la notation classique  $E_v = \sum_{k=1}^{r_e} v_k(z) E_k$  et  $A_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{r_\alpha} \sum_{j=1}^{r_\beta} w_i(\alpha_i) w_j(\beta_j) A_{ij}$ , le modèle (2.7) est réécrit sous une forme compacte :

$$\begin{cases} E_v \dot{x}(t) = A_{\alpha\beta} x(t) + Bd(t) \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \quad (2.8)$$

### Hypothèse 1

Le nombre de contraintes LMI à résoudre issu d'un modèle T-S est lié au nombre de modèles, il évolue exponentiellement en puissance de 2 des non linéarités considérées (Taniguchi et al., 1999). Les solveurs actuels ne permettent pas de disposer d'un trop grand nombre de contraintes LMI (quelques centaines au mieux), il est donc impératif de minimiser, si possible la taille du modèle T-S. Pour ce faire, dans notre cas, une propriété basée sur les développements limités est réutilisée. Elle permet d'écrire (Tirmant et al., 2004) que pour tout angle  $\theta(t) \in [-45^\circ, 45^\circ]$  la proposition

suivante est vérifiée :  $\left| \frac{\sin(\theta)}{\theta} - \cos(\theta) \right| < 4\%$ . On considérera donc que  $\sin(\theta)/\theta \approx \cos(\theta)$ .

Cette hypothèse sera confirmée sur les simulations.

Trois non linéarités sont donc retenues pour le modèle (2.7), deux dans la matrice  $A(x(t))$  :  $z_1(\theta) = \sin(\theta)/\theta \approx \cos(\theta)$  et  $z_2(x_H, \dot{\theta}) = x_H \times \dot{\theta}$  et une dans la matrice  $E(x(t))$  :  $z_3(x_H) = x_H^2$ . Comme toutes les non linéarités sont bornées, les fonctions d'appartenance suivantes sont construites :

$$\begin{cases} w_0^j(\cdot) = \frac{\bar{z}_j - z_j(\cdot)}{\bar{z}_j - \underline{z}_j}, \quad w_1^j(\cdot) = 1 - w_0^j(\cdot), \quad j \in \{1, 2\} \\ v_1(x_H) = \frac{x_H^2(t)}{x_H^2}, \quad v_2(x_H) = 1 - v_1(x_H) \end{cases} \quad (2.9)$$

Ainsi le modèle T-S s'écrit :

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^2 v_k(x_H) E_k \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 w_{\delta^i}^i(\theta) w_{\delta^j}^j(x_H \times \dot{\theta}) A_{ij} x(t) + Bu(t - \tau(t)) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (2.10)$$

Avec les digits  $\delta^1 = 0$  et  $\delta^2 = 1$ , la notation des prémisses est :  $\alpha = \theta$  et  $\beta = x_H \times \dot{\theta}$ . Pour valider l'Hypothèse 1 des essais en simulation ont été réalisés en comparant le modèle non linéaire (2.4) et le modèle T-S (2.10) tous deux contrôlés par la loi de contrôle (2.5). L'erreur maximale d'amplitude sur les signaux des variables d'état est inférieure à 0.6% ce qui confirme l'hypothèse.

L'objectif étant d'estimer l'entrée inconnue  $u(t - \tau(t))$ , un observateur à entrées inconnues de type observateur-PI est utilisé (Estrada-Manzo, Zs. Lendek, et al., 2015). Dans ce but, une dynamique de type double intégrateur est considérée, i.e.  $\ddot{d}(t) \approx 0$ , ce qui correspond à écrire que  $d(t) = u(t - \tau(t))$  et :

$$D = \begin{bmatrix} d \\ \dot{d} \end{bmatrix}, \quad \dot{D} = \Gamma \times D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} D \quad (2.11)$$

Ce choix, justifié par des tests préalables, permet de trouver un bon compromis entre complexité de calcul et précision des résultats obtenus. La dynamique de l'entrée inconnue (2.11) est utilisée pour étendre le modèle (2.8) :

$$\begin{cases} E_v^e \dot{x}^e(t) = A_{\alpha\beta}^e x^e(t) \\ y(t) = C^e x^e(t) \end{cases} \quad (2.12)$$

Avec  $x^e = \begin{bmatrix} x \\ D \end{bmatrix}$ ,  $E_v^e = \begin{bmatrix} E_v & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix}$  ( $E_v^e$  est toujours inversible  $\forall x_H \in \mathbb{R}$ ),  $A_{\alpha\beta}^e = \begin{bmatrix} A_{\alpha\beta} & [B & 0_{4 \times 1}] \\ 0_{2 \times 4} & \Gamma \end{bmatrix}$ , et  $C^e = [C \quad 0_{2 \times 2}]$ .

### 1.3.4. OEI et résultats

Deux techniques permettent d'obtenir un problème sous forme de contraintes LMI pour un observateur-PI : le lemme de Finsler (cf. annexes) et la technique de redondance du système descripteur (Estrada-Manzo, 2015). Dans le domaine continu la deuxième technique est choisie, elle consiste en une extension du vecteur d'état du système (2.12) :

$$\begin{aligned} \dot{x}^e(t) &= \dot{x}^e(t) \\ 0 \times \ddot{x}^e(t) &= A_{\alpha\beta}^e x^e(t) - E_v^e \dot{x}^e(t) \end{aligned} \quad (2.13)$$

De ce fait, en définissant le vecteur  $\bar{x}(t) = [x^{eT}(t) \quad \dot{x}^{eT}(t)]^T \in \mathbb{R}^{12}$  :

$$\begin{cases} \bar{E} \dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}_{\alpha\beta v} \bar{x}(t) \\ y(t) = \bar{C} \bar{x}(t) \end{cases} \quad (2.14)$$

Avec  $\bar{E} = \begin{bmatrix} I_6 & 0_6 \\ 0_6 & 0_6 \end{bmatrix}$ ,  $\bar{A}_{\alpha\beta v} = \begin{bmatrix} 0_6 & I_6 \\ A_{\alpha\beta}^e & -E_v^e \end{bmatrix}$ , and  $\bar{C} = [C^e \quad 0_{2 \times 6}]$ . L'intérêt principal de cette

approche est de ne pas avoir à inverser la matrice  $E_v^e$ , son inconvénient est de doubler la taille des matrices utilisées. La formule de l'observateur utilisé, provenant des travaux de (Estrada-Manzo, Zs. Lendek, et al., 2015) est adaptée à (2.14),  $\beta$  représentant les prémisses non mesurées, l'observateur utilise donc  $\hat{\beta} \neq \beta$  :

$$\begin{cases} \bar{E}\dot{\hat{x}}(t) = \bar{A}_{\alpha\hat{\beta}v}\hat{x}(t) + P^{-T}\bar{L}_{\alpha v}(y - \hat{y}) \\ \hat{y}(t) = \bar{C}\hat{x}(t) \end{cases} \quad (2.15)$$

Où  $\hat{x}(t) = \begin{bmatrix} \hat{x}^e(t) \\ \gamma^e(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{12}$  est le vecteur estimé (le vecteur  $\gamma^e(t)$  est expliqué à l'équation (2.33)) et

$\bar{L}_{\alpha v} = \begin{bmatrix} L_{1\alpha v} \\ L_{2\alpha v} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{12 \times 2}$  est le gain de l'observateur, la matrice  $P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ P_3 & P_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{12 \times 12}$ ,  $P_1 = P_1^T > 0$

est la matrice de Lyapunov,  $\bar{L}_{\alpha v}$  et  $P$  sont à déterminer. Le vecteur d'erreur d'estimation augmenté

est défini comme  $\bar{e} = \bar{x} - \hat{x} = \begin{bmatrix} x^e - \hat{x}^e \\ \dot{x}^e - \gamma^e \\ \dot{D} - \gamma_2^e \end{bmatrix}$  dont la dynamique est donnée par :

$$\bar{E}(\dot{\bar{x}} - \dot{\hat{x}}) = \bar{A}_{\alpha\beta v}\bar{x} - \bar{A}_{\alpha\hat{\beta}v}\hat{x} - P^{-T}\bar{L}_{\alpha v}(y - \hat{y}) \quad (2.16)$$

On rappelle que  $\bar{A}_{\alpha\hat{\beta}v} = \sum_{k=1}^{r_e} \sum_{i=1}^{r_\alpha} \sum_{j=1}^{r_\beta} v_k(x_H) w_i(\theta) w_j(x_H \times \hat{\theta}) \bar{A}_{ijk} x(t)$  et avec  $\bar{x} = \hat{x} + \bar{e}$ ,

(2.16) s'écrit :

$$\bar{E}\dot{\bar{e}} = (\bar{A}_{\alpha\beta v} - P^{-T}\bar{L}_{\alpha v}\bar{C})\bar{e} + (\bar{A}_{\alpha\beta v} - \bar{A}_{\alpha\hat{\beta}v})\hat{x} \quad (2.17)$$

$\bar{A}_{\alpha\beta v} - \bar{A}_{\alpha\hat{\beta}v}$  est évidemment une matrice creuse, que l'on peut réécrire :

$$(\bar{A}_{\alpha\beta v} - \bar{A}_{\alpha\hat{\beta}v})\hat{x} = \begin{bmatrix} 0_6 & 0_6 \\ A_{\alpha\beta}^e - A_{\alpha\hat{\beta}}^e & 0_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{D} \\ \gamma_1^e \\ \gamma_2^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{6 \times 1} \\ (A_{\alpha\beta}^e - A_{\alpha\hat{\beta}}^e) \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{D} \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

Dans  $A_{\alpha\beta}^e - A_{\alpha\hat{\beta}}^e$  seuls les éléments (2,4) et (4,2) sont non nuls, i.e.  $\beta$  n'apparaît que pour ces 2 éléments, ainsi après quelques manipulations de (2.17) :

$$\bar{E}\dot{\bar{e}} = (\bar{A}_{\alpha\beta v} - P^{-T}\bar{L}_{\alpha v}\bar{C})\bar{e} + m_H x_H(t) \left( \dot{\theta}(t) - \hat{\theta}(t) \right) \begin{bmatrix} 0_6 \\ 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \\ -2\dot{\hat{x}}_H \\ 0_2 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Or le terme  $\dot{\theta}(t) - \hat{\theta}(t)$  est le 4<sup>ème</sup> élément de  $\bar{e}$ , ce qui permet d'écrire (2.18) comme :

$$\bar{E}\dot{\bar{e}} = (\bar{A}_{\alpha\beta v} - P^{-T}\bar{L}_{\alpha v}\bar{C} + m_H\Delta(t))\bar{e} \quad (2.19)$$

Le problème de prémisses non mesurables est donc ramené à un problème de convergence d'erreur d'observation robuste.  $\Delta(t) \in \mathbb{R}^{12 \times 12}$  est une matrice creuse, elle est nulle à l'exception des termes  $\Delta_{(8,4)}(t) = x_l(t)\hat{\theta}(t)$  et  $\Delta_{(10,4)}(t) = -2x_l(t)\hat{x}_l(t)$ . Un raisonnement classique de commande robuste avec incertitudes paramétriques est adopté, en considérant que pour toute incertitude bornée  $\mu(t) \in [\underline{\mu}, \bar{\mu}]$  il peut s'écrire  $\mu(t) = c + r \times \delta(t)$  avec  $\delta(t) \in [-1, 1]$ , le centre :  $c = 0.5(\bar{\mu} + \underline{\mu})$  et le rayon  $r = 0.5(\bar{\mu} - \underline{\mu})$ . En définissant de manière appropriée  $c_{(8,4)}$ ,  $r_{(8,4)}$ ,  $c_{(10,4)}$  et  $r_{(10,4)}$  (2.19) devient :

$$\bar{E}\dot{\bar{e}} = (\bar{A}_{\alpha\beta v} - P^{-T}\bar{L}_{\alpha v}\bar{C} + m_H A_c + H\delta(t)F)\bar{e} \quad (2.20)$$

Avec :  $H = \begin{bmatrix} 0_{6 \times 2} \\ H_2 \end{bmatrix}$ ,  $H_2^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $F = [F_1 \quad 0_{2 \times 6}]$ ,

$$F_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & m_H \times r_{(8,4)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2m_H \times r_{(10,4)} & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } A_c \text{ une matrice creuse, nulle à l'exception des éléments :}$$

$A_c(8,4) = c_{(8,4)}$ ,  $A_c(10,4) = c_{(10,4)}$ . On exprime  $A'_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta} + m_1 A_c$  :

$$A'_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_H c_{(8,4)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_H c_{(10,4)} \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Ainsi  $A'^e_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} A'_{\alpha\beta} & [B \quad 0_{2 \times 1}] \\ 0_{2 \times 4} & \Gamma \end{bmatrix}$  et l'objectif est donc d'assurer la convergence de :

$$\bar{E}\dot{\bar{e}} = (\bar{A}'_{\alpha\beta v} - P^{-T}\bar{L}_{\alpha v}\bar{C} + H\delta(t)F)\bar{e} \quad (2.22)$$

La convergence de l'erreur d'estimation (2.17) est remplacée par celle de (2.22), qui est étudiée en utilisant une fonction quadratique de Lyapunov :

$$V(\bar{e}) = \bar{e}^T \bar{E}^T P \bar{e}, \quad \bar{E}^T P = P^T \bar{E} \geq 0, \quad (2.23)$$

Avec  $P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ P_3 & P_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{12 \times 12}$  utilisée dans (2.15),  $P_1 = P_1^T > 0$ ,  $P_3$  une matrice quelconque et  $P_4$  une matrice régulière.

**Théorème 1**

On considère le système (2.14) avec l'OEI (2.15). S'il existe des matrices  $P_1 = P_1^T > 0$ ,  $P_3$ ,  $P_4$ ,  $L_{1jk}$ , et  $L_{2jk}$ ,  $i, j \in \{1, \dots, r_\alpha\}$ ,  $k \in \{1, \dots, r_v\}$  et un scalaire  $\gamma > 0$  tels que

$$\Upsilon_{ijk} < 0 \quad (2.24)$$

Avec

$$\Upsilon_{ijk} = \begin{bmatrix} P_3^T A_{ij}^{ve} - L_{1jk} C^e + (*) + \gamma F_1^T F_1 + \lambda P_1 & (*) & (*) \\ P_4^T A_{ij}^{ve} - L_{2jk} C^e + P_1 - (E_k^e)^T P_3 & -P_4^T E_k^e + (*) & (*) \\ H_2^T P_3 & H_2^T P_4 & -\gamma I_2 \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

Alors l'erreur d'estimation  $\bar{e}$  est asymptotiquement stable.

**Preuve**

Calculons la dérivée temporelle de la fonction de Lyapunov (2.23) :

$$\dot{V}(\bar{e}) = \bar{e}^T P^T (\bar{A}'_{\alpha\beta v} - P^{-T} \bar{L}_{\alpha v} \bar{C} + H \delta(t) F) \bar{e} + (*) \quad (2.26)$$

Un taux de décroissance  $\lambda > 1$  (decay rate) est rajouté pour garantir une performance de convergence à l'observateur ce qui donne :

$$\dot{V}(\bar{e}) = \bar{e}^T P^T (\bar{A}'_{\alpha\beta v} - P^{-T} \bar{L}_{\alpha v} \bar{C} + H \delta(t) F) \bar{e} + (*) \leq -\lambda V(\bar{e}) = \bar{e}^T \begin{bmatrix} -\lambda P_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \bar{e} \quad (2.27)$$

La convergence de l'erreur est assurée si  $\dot{V}(\bar{e}) < -\lambda V(\bar{e})$ , d'où :

$$\begin{bmatrix} P_3^T A_{\alpha\beta}^{ve} - L_{1\alpha v} C^e + (*) + \lambda P_1 & (*) \\ P_4^T A_{\alpha\beta}^{ve} - L_{2\alpha v} C^e + P_1 - (E_v^e)^T P_3 & -P_4^T E_v^e + (*) \end{bmatrix} + P^T H \delta(t) F + (*) < 0 \quad (2.28)$$

En considérant que  $\gamma > 0$  et  $\delta(t) \delta^T(t) \leq I_2$ , la dernière partie de (2.28) peut s'écrire :

$$P^T H \delta(t) F + (*) = \begin{bmatrix} P_3^T H_2 \\ P_4^T H_2 \end{bmatrix} \delta(t) F + (*) \leq \gamma^{-1} \begin{bmatrix} P_3^T H_2 \\ P_4^T H_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_2^T P_3 & H_2^T P_4 \end{bmatrix} + \gamma F^T F \quad (2.29)$$

Enfin, avec  $F^T F = \begin{bmatrix} F_1^T F_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  et en utilisant un complément de Schur (cf. annexes) sur (2.28) les conditions LMI suivantes sont obtenues :

$$\Upsilon_{\alpha\beta v} := \begin{bmatrix} P_3^T A_{\alpha\beta}^{ve} - L_{1\alpha v} C^e + (*) + \gamma F_1^T F_1 + \lambda P_1 & (*) & (*) \\ P_4^T A_{\alpha\beta}^{ve} - L_{2\alpha v} C^e + P_1 - (E_v^e)^T P_3 & -P_4^T E_v^e + (*) & (*) \\ H_2^T P_3 & H_2^T P_4 & -\gamma I_2 \end{bmatrix} \leq 0 \quad (2.30)$$

Et clairement, comme  $\Upsilon_{\alpha\beta v} = \sum_{k=1}^{r_e} \sum_{i=1}^{r_\alpha} \sum_{j=1}^{r_\beta} v_k(x_H) w_i(\theta) w_j(x_H \times \dot{\theta}) \bar{A}_{ijk} \Upsilon_{ijk}$  une condition suffisante pour que (2.30) soit vérifiée correspond aux conditions (2.25).

La forme finale de l'OEI-TS est obtenue en partant de (2.16), il est défini comme :

$$\begin{bmatrix} N_{1\alpha v} \\ N_{2\alpha v} \end{bmatrix} = P^{-T} \bar{L}_{\alpha v} = \begin{bmatrix} P_1^{-1} (L_{1\alpha v} - P_3^T P_4^{-T} L_{2\alpha v}) \\ P_4^{-T} L_{2\alpha v} \end{bmatrix}. \quad (2.31)$$

Ainsi,

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}^e \\ \dot{\gamma}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ A_{\alpha\hat{\beta}}^e & -E_v^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}^e \\ \gamma^e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_{1\alpha v} C^e \\ N_{2\alpha v} C^e \end{bmatrix} (x^e - \hat{x}^e) \quad (2.32)$$

Ce qui équivaut à écrire :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}^e = \gamma^e + N_{1\alpha v} C^e (x^e - \hat{x}^e) \\ E_v^e \gamma^e = A_{\alpha\hat{\beta}}^e \hat{x}^e + N_{2\alpha v} C^e (x^e - \hat{x}^e) \end{cases} \quad (2.33)$$

En posant  $\gamma^e = \dot{\hat{x}}^e - N_{1\alpha v} C^e (x^e - \hat{x}^e)$  alors (2.33) s'écrit :

$$E_v^e (\dot{\hat{x}}^e - N_{1\alpha v} C^e (x^e - \hat{x}^e)) = A_{\alpha\hat{\beta}}^e \hat{x}^e + N_{2\alpha v} C^e (x^e - \hat{x}^e) \quad (2.34)$$

Il est à remarquer qu'en convergeant, l'erreur  $x^e - \hat{x}^e$  devient nulle et  $\gamma^e$  tend donc vers  $\dot{\hat{x}}^e$ . Enfin, en regroupant les termes, la forme finale de l'observateur est obtenue :

$$E_v^e \dot{\hat{x}}^e = A_{\alpha\hat{\beta}}^e \hat{x}^e + \begin{bmatrix} E_v^e & I \end{bmatrix} P^{-T} \begin{bmatrix} L_{1\alpha v} \\ L_{2\alpha v} \end{bmatrix} (y - \hat{y}). \quad (2.35)$$

C'est ainsi que se conclut la preuve. ■

### 1.3.5. Simulations

Les simulations de ce chapitre suivent toutes le même protocole, le modèle non linéaire (2.4) est stabilisé avec la loi de contrôle (2.5) en considérant un retard variable  $\tau(t) = 60\text{ms} \pm 10$ . Ce système en boucle fermée par l'état est considéré dans son ensemble comme une « boîte noire » dont les sorties mesurées sont  $y(t) = [x_H(t) \quad \theta(t)]^T$ . L'OEI (2.15) reconstruit les signaux mesurés et non-mesurés de l'état, Fig. 26 et Fig. 27, afin de vérifier l'efficacité de l'OEI, l'erreur d'estimation de l'entrée inconnue est calculée Fig. 28.

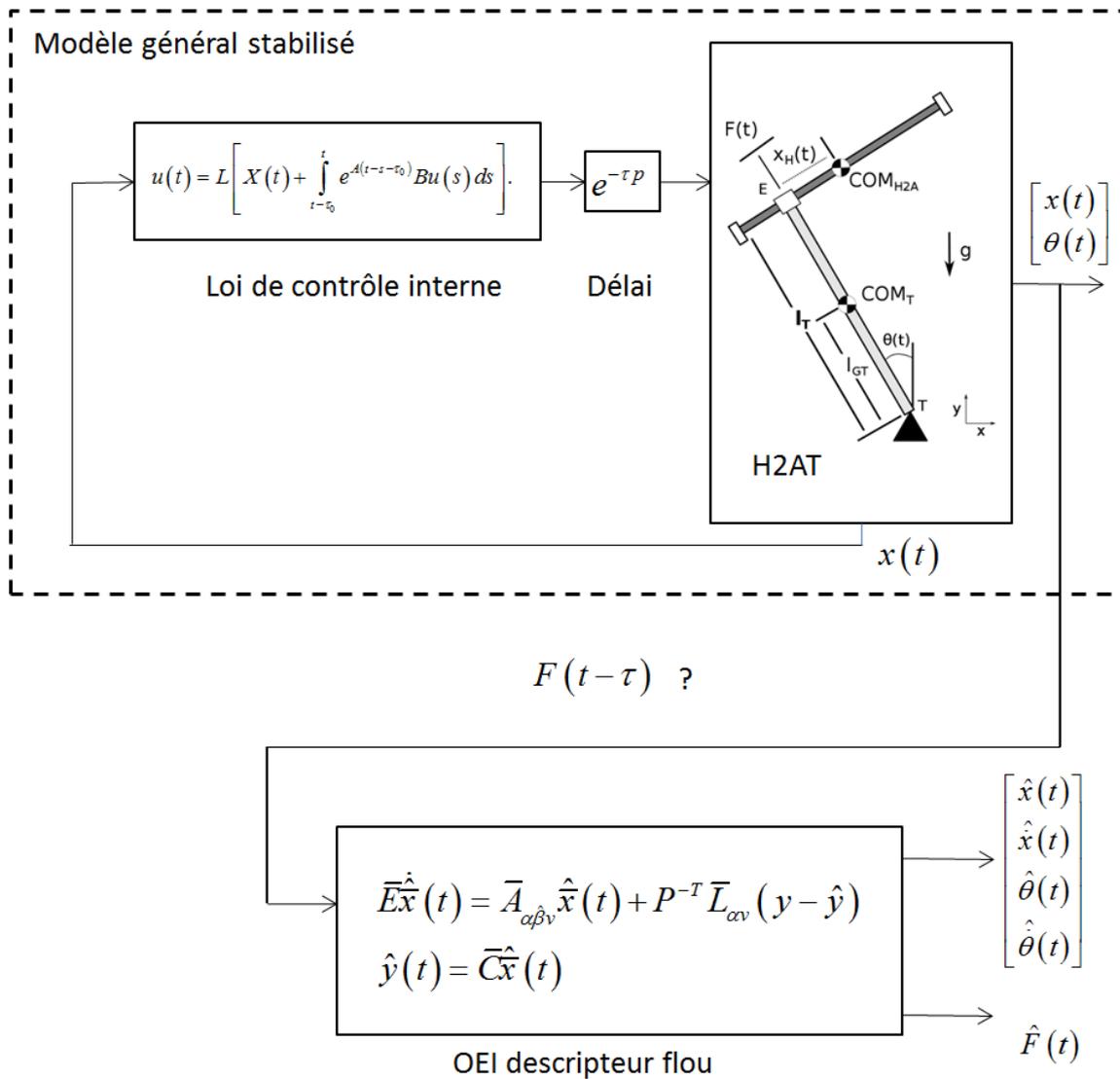


FIG. 24 : PROTOCOLE DE SIMULATION

Les conditions initiales sont  $x(0) = [0 \quad -0.02 \quad 0 \quad 0.01]^T$  et  $\hat{x}(0) = 0_{4 \times 1}$  ; entre 2 et 4 secondes de simulation, une perturbation sinusoïdale de  $10 \text{ rad/s}$  est injectée (Fig. 25), ce type de perturbation correspond aux amplitudes des accélérations utilisées lors d'exercices de rééducation chez des sujets vivants avec une LMÉ (Bjerkefors et al., 2007).

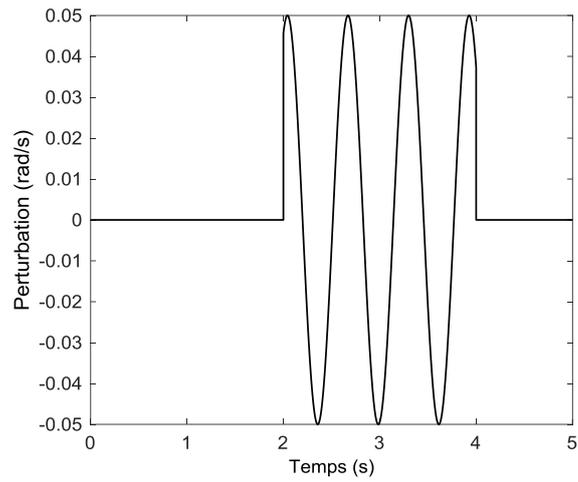


FIG. 25 : SIGNAL DE PERTURBATION

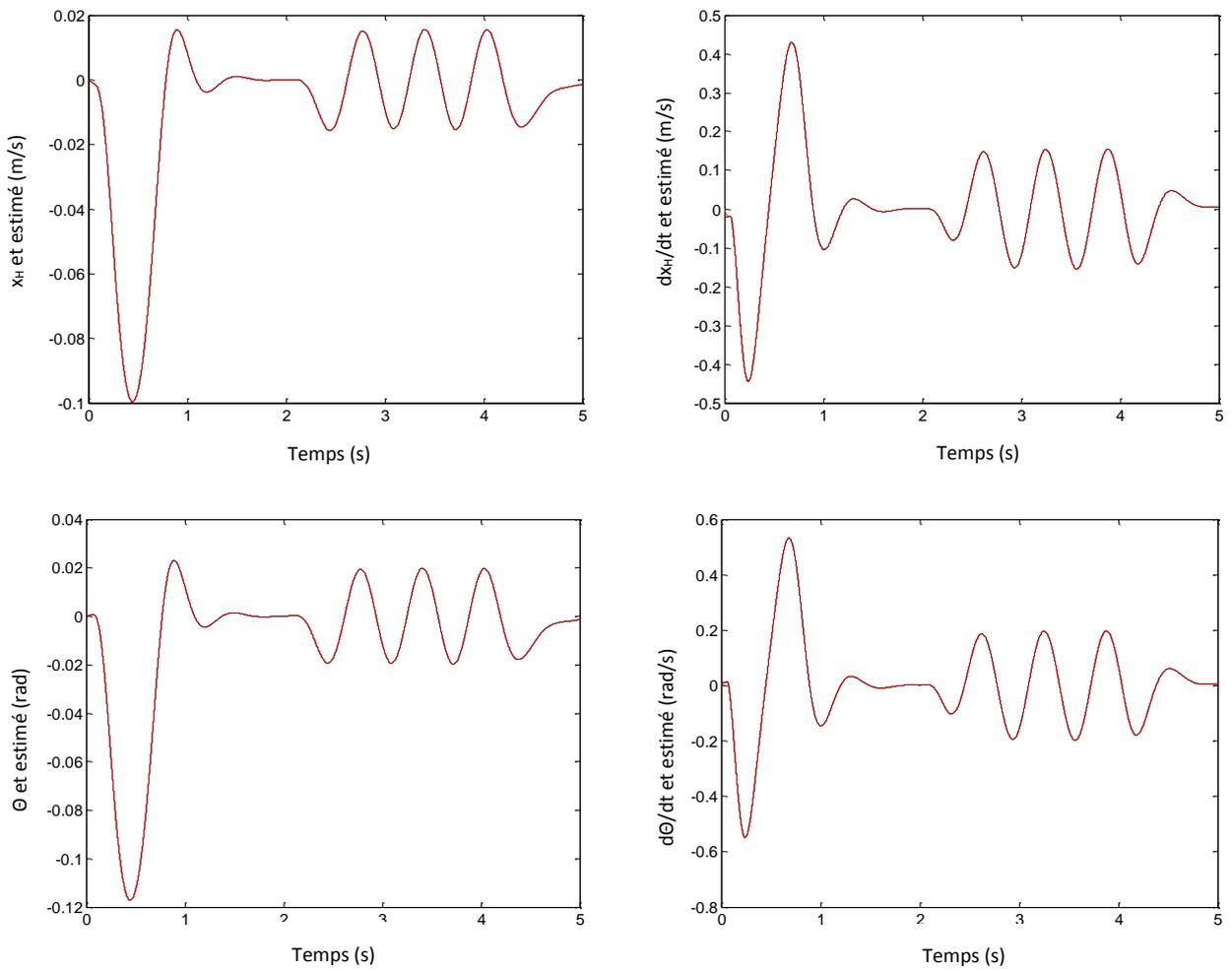


FIG. 26 : VARIABLES D'ÉTAT SIMULÉES (NOIR) ET ESTIMÉES (ROUGE)

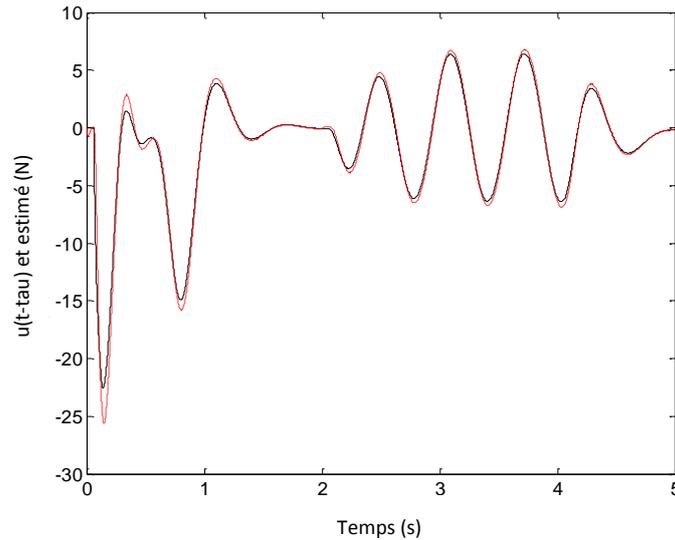


FIG. 27 : LOI DE CONTRÔLE SIMULÉE (NOIR) ET ESTIMÉE (ROUGE)

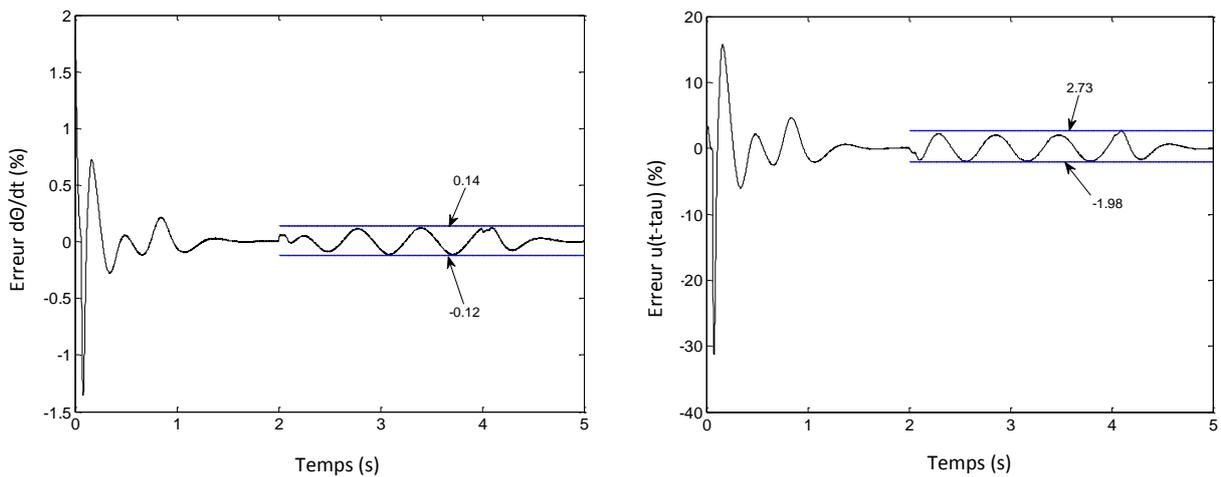


FIG. 28 : ERREUR RELATIVE D'OBSERVATION PRÉMISSE NON MESURÉE (GAUCHE) ET LOI DE CONTRÔLE (DROITE)

On remarque sur la Fig. 28 l'excellente performance de l'OEI pour estimer la prémisse non mesurable  $\dot{\theta}(t)$  avec une erreur convergeant très rapidement en dessous de 0.5%, ce résultat est dû à la forme robuste adoptée en (2.20). L'estimation de l'entrée inconnue est également satisfaisante, la différence due aux conditions initiales est réduite en moins d'une seconde et la perturbation n'induit pas plus de 2.8% d'erreur.

### 1.3.6. Discussions

Ce premier modèle a été créé pour étudier la stabilisation assise de sujets vivant avec une LMÉ. Pour cela, un observateur à entrées inconnues respectant le formalisme Takagi-Sugeno a été défini et la preuve de sa convergence est exprimée en utilisant les conditions LMI issues des travaux récents de (Guerra et al., 2015; Estrada-Manzo et al., 2016a).

Dans le cadre de cette thèse, l'intérêt de cette première étude d'estimation est de mieux connaître les problèmes méthodologiques liés à la modélisation biomécanique et plusieurs points ont été relevés dans ce sens. Tout d'abord les modèles étudiés sont instables en boucle ouverte et doivent être contrôlés, un contrôleur linéaire robuste au retard variable a été utilisé et d'autres outils existent pour ajouter des performances à la loi de contrôle, entre autres, taux de décroissance, placement de pôles D-stabilité (Chilali et al., 1999).

Le deuxième point concerne les non linéarités du modèle. Comme la complexité d'un modèle T-S est exponentiellement liée à son nombre de non linéarité, il est très intéressant de réduire ce nombre si cette approximation induit de faibles différences dans le comportement global du système. L'approximation  $\sin(\theta)/\theta \approx \cos(\theta)$ , pleinement justifiée par le développement limité sur un intervalle donné, a été validée sur le système non linéaire.

Enfin, les équations dynamiques du modèle H2AT sont telles que le modèle T-S obtenu présente des prémisses non mesurables. Cette problématique est toujours ouverte dans le domaine T-S (Ichalal et al., 2016) et n'a pas encore de solution dans le cas des modèles descripteurs. La technique utilisée dans notre cas s'inspire d'une approche robuste pour assurer la convergence de l'erreur d'observation.

Certaines des problématiques soulevées (retard sur l'entrée, prémisses non mesurable) présentent des écueils importants qui sont en partie liés au domaine du continu. Dans un contexte expérimental, le passage en discret est naturel et la suite de ce mémoire montre que certaines des problématiques trouvent des solutions plus directes et donc plus « simples ».

## 1.4. Modèle discret

### 1.4.1. Équations du modèle

Pour écrire les équations du modèle H2AT dans le domaine discret, la méthode classique d'approximation d'Euler est utilisée sur les équations du modèle continue (2.4),  $x(t)$  devient  $x(k)$

et  $\dot{x}(t) \approx \frac{x(k+1) - x(k)}{s}$  avec le vecteur d'état discret  $x(k) = x_k = [x_{H_k} \quad \dot{x}_{H_k} \quad \theta_k \quad \dot{\theta}_k]^T \in \mathbb{R}^4$

et  $s$  le temps d'échantillonnage, le modèle (2.4) s'écrit donc :

$$\begin{aligned} E(x_k) \frac{x_{k+1} - x_k}{s} &= A(x_k) x_k + B u_k \\ E(x_k) x_{k+1} &= (sA(x_k) + E(x_k)) x_k + sB u_k \end{aligned} \quad (2.36)$$

Ainsi le modèle H2AT discret est obtenu :

$$\begin{cases} E(x_k) x_{k+1} = A_d(x_k) x_k + sB u_k \\ y_k = C x_k \end{cases} \quad (2.37)$$

$$\text{avec } u_k = u(k - \tau_k), \quad E(x_k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_H & 0 & -m_H l_T \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -m_H l_T & 0 & J(x_k) \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ et}$$

$$A_d(x_k) = sA(x_k) + E(x_k)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & s & 0 & 0 \\ 0 & m_H & -sm_H g \frac{\sin(\theta_k)}{\theta_k} & \begin{pmatrix} sm_H x_{H_k} \dot{\theta}_k \\ -m_H l_T \end{pmatrix} \\ 0 & 0 & 1 & s \\ -sm_H g \cos(\theta_k) & \begin{pmatrix} -2sm_H x_{H_k} \dot{\theta}_k \\ -m_H l_T \end{pmatrix} & s(m_H l_T + m_T l_{G_T}) g \frac{\sin(\theta_k)}{\theta_k} & J(x_k) \end{bmatrix}.$$

#### Remarque 4

La discrétisation du modèle conserve le nombre et la structure des non linéarités. Les précédentes remarques faites sur le modèle continu concernant la régularité de la matrice descripteur et la présence de prémisses non mesurables s'appliquent également sur le modèle discret.

### 1.4.2. Modèle descripteur T-S discret

En appliquant la méthode des secteurs non linéaires sur (2.37), le système suivant est écrit :

$$\begin{cases} E_h x_{k+1} = A_{d_h} x_k + s B u_k \\ y_k = C x_k \end{cases} \quad (2.38)$$

Avec  $u_k \in \mathbb{R}$  l'entrée inconnue à estimer, les matrices  $E_h = \sum_{i=1}^r h_i(z) E_i$  et  $A_{d_h} = \sum_{i=1}^r h_i(z) A_{d_i}$  représentent les sommes convexes dans les polytopes considérés avec  $\sum_{i=1}^r h_i(z) = 1$  et  $0 < h_i(z) < 1, i \in \{1, \dots, r\}$ .

En suivant le raisonnement décrit dans l'Hypothèse 1 et appliqué pour le modèle continu,  $p = 3$  non linéarités sont identifiées dans (2.37)  $z_1 = \sin(\theta_k) / \theta_k \approx \cos(\theta_k)$ ,  $z_2 = x_{H_k} \dot{\theta}_k$  et  $z_3 = x_{H_k}^2$ , toutes bornées dans l'ensemble compact (2.1) ce qui fait  $r = 2^3 = 8$  règles et les fonctions d'appartenance sont définies selon la formule suivante :

$$w_0^j(\cdot) = \frac{z_j(\cdot) - \underline{z}_j}{\bar{z}_j - \underline{z}_j}, \quad w_1^j(\cdot) = 1 - w_0^j(\cdot), \quad j \in \{1, 2, 3, 4\} \quad (2.39)$$

Les fonctions d'appartenance sont définies selon la notation suivante :

$$h_i = h_{\delta_1^i \times 4 + \delta_2^i \times 2 + \delta_3^i + 1} = \prod_{j=1}^3 w_{\delta_j^i}^j(z_j) \quad (2.40)$$

Où  $i = \delta_1^i \times 4 + \delta_2^i \times 2 + \delta_3^i + 1 \in \{1, \dots, 2^3\}$  est l'indice du modèle,  $\delta_k^i \in \{0, 1\}$  des digits et  $k \in \{1, \dots, 3\}$ . Par exemple,  $7 = \overline{110}$ , d'où :  $h_7 = w_1^1 \times w_1^2 \times w_0^3$  et les matrices associées sont  $(E_7, A_{d_7}) = (E(\bar{z}_3), A_d(\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3))$ . La forme T-S (2.38) est donc une représentation *exacte* du modèle non linéaire discret (2.37). Comme pour le modèle continu, la dynamique de l'entrée inconnue est supposée du 2<sup>e</sup> ordre (ce choix permet de trouver un bon compromis entre complexité de calcul et précision des résultats obtenus), elle s'écrit  $(z-1)^2 d_k \approx 0$ , ce qui donne  $d_{k+2} - 2d_{k+1} + d_k \approx 0$  ou aussi :

$$D_{k+1} = \Gamma \times D_k \Leftrightarrow \begin{bmatrix} d_{k+1} \\ d_{k+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_k \\ d_{k+1} \end{bmatrix}, \quad (2.41)$$

Ainsi, en combinant (2.38) et (2.41), le système étendu s'écrit :

$$\begin{cases} E_h^e x_{k+1}^e = A_{d_h}^e x_k^e \\ y_k = C^e x_k^e \end{cases} \quad (2.42)$$

Avec le vecteur d'état augmenté  $x_k^e = \begin{bmatrix} x_k \\ D_k \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6$ ,  $C^e = [C \ 0_2]$ ,  $E_h^e = \begin{bmatrix} E_h & 0_2 \\ 0_2 & I_2 \end{bmatrix}$ ,

$$A_{d_h}^e = \begin{bmatrix} A_{d_h} & [sB \ 0_{2 \times 1}] \\ 0_2 & \Gamma \end{bmatrix}.$$

### Hypothèse 2

On retrouve la même problématique de prémisses non mesurées dû à la présence dans  $A_d(x_k)$  de la variable  $\dot{\theta}_k$ . Le fait d'être dans le domaine discret permet d'émettre l'hypothèse que si  $\dot{\theta}_k$  varie « lentement » elle peut être remplacée par  $\dot{\theta}_{k-1}$ , variable mesurée, dans  $A_d(x_k)$ . Cela est d'autant plus pertinent, dans le domaine de l'analyse du mouvement, que les mesures sont largement sur-échantillonnées (de 100 à 200Hz). Effectivement, les mouvements humains comme la marche ou le maintien de l'équilibre présentent des fréquences inférieures à 10Hz (Winter, 2009). Ce point est également remarqué dans les expérimentations en position assise, où les données cinématiques sont communément filtrées par un filtre passe-bas avec une fréquence de coupure entre 5 et 10Hz (Gagnon et al., 2008; Reeves et al., 2009; Vette et al., 2010; Grangeon et al., 2012; Milosevic et al., 2015). Cette hypothèse sera confirmée dans la suite de ce mémoire.

### 1.4.3. OEI et résultats

Les travaux de (Estrada-Manzo et al., 2016b), sont utilisés et la forme de l'OEI choisie est :

$$\begin{cases} E_h^e \hat{x}_{k+1}^e = A_{d_h}^e \hat{x}_k^e + H^{-1} K_h (y_k - \hat{y}_k) \\ \hat{y}_k = C^e \hat{x}_k^e \end{cases} \quad (2.43)$$

Avec  $\hat{x}_k^e = \begin{bmatrix} \hat{x}_k^T & \hat{D}_k^T \end{bmatrix}^T$ , le vecteur étendu d'observation. Les matrices  $H \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$  et  $K_h \in \mathbb{R}^{6 \times 2}$  sont les variables à déterminer. L'erreur d'observation est définie comme  $e_k = x_k^e - \hat{x}_k^e$  et sa dynamique est :

$$\begin{aligned} e_{k+1} &= x_{k+1}^e - \hat{x}_{k+1}^e \\ E_h^e e_{k+1} &= E_h^e x_{k+1}^e - E_h^e \hat{x}_{k+1}^e \\ E_h^e e_{k+1} &= A_{d_h}^e x_k^e - A_{d_h}^e \hat{x}_k^e - H^{-1} K_h (y_k - \hat{y}_k) \\ E_h^e e_{k+1} &= (A_h^e - H^{-1} K_h C^e) e_k. \end{aligned} \quad (2.44)$$

La fonction de Lyapunov quadratique suivante est considérée :

$$V(e_k) = e_k^T P e_k, \quad P = P^T > 0. \quad (2.45)$$

#### Théorème 2

La dynamique de l'erreur (2.44) est asymptotiquement stable si des matrices  $P = P^T > 0$ ,  $H \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ ,  $K_i \in \mathbb{R}^{6 \times 2}$   $i \in \{1, \dots, 2^4\}$  existent telles que les conditions :

$$\begin{bmatrix} -\lambda P & (H A_i^e - K_i C^e)^T \\ H A_i^e - K_i C^e & P - H E_i^e - (H E_i^e)^T \end{bmatrix} < 0, \quad i \in \{1, 2, \dots, 16\}. \quad (2.46)$$

soient satisfaites.

#### Preuve

On peut réécrire la dynamique de l'erreur (2.44) sous la forme :

$$\begin{bmatrix} A_h^e - H^{-1} K_h C^e & -E_h^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_k \\ e_{k+1} \end{bmatrix} = 0 \quad (2.47)$$

De même pour la variation de la fonction de Lyapunov  $\Delta V(e_k) = V(e_{k+1}) - \lambda V(e_k)$  avec le taux de décroissance  $0 < \lambda < 1$  :

$$\Delta V(e_k) = \begin{bmatrix} e_k \\ e_{k+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -\lambda P & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_k \\ e_{k+1} \end{bmatrix} < 0. \quad (2.48)$$

Vérifier l'inégalité (2.48) avec la contrainte (2.47) est équivalent à (Lemme de Finsler, cf. annexes) :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_h^e - H^{-1}K_h C^e & -E_h^e \end{bmatrix} + (*) + \begin{bmatrix} -\lambda P & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix} < 0. \quad (2.49)$$

Ce qui nous renvoie à la forme polytopique de l'équation (2.46) et conclut la preuve. ■

### Remarque 5

Les contraintes LMI (2.46) peuvent être facilement améliorées en étendant le cas quadratique, i.e. les matrices  $P$  et  $H$ , à des cas non quadratiques, par exemple des fonctions de Lyapunov  $P_h = \sum_{i=1}^{16} h_i(z) P_i$  proposées dans (Guerra and Vermeiren, 2004). En suivant un développement similaire à la preuve du théorème, les conditions obtenues sont du type :

$$\begin{bmatrix} -\lambda P_h & (H_h A_h^e - K_h C^e)^T \\ H_h A_h^e - K_h C^e & P_{h+} - H_h E_h^e - (H_h E_h^e)^T \end{bmatrix} < 0 \quad (2.50)$$

Avec  $P_{h+} = \sum_{i=1}^{16} h_i(z(k+1)) P_i$ .

### 1.4.4. Simulations

Le protocole de simulation est le même que pour le modèle continu, le modèle H2AT (2.4) est simulé et stabilisé par la loi de contrôle (2.5), puis la sortie du modèle est échantillonnée à une fréquence de 100Hz par un bloqueur d'ordre 0 et injectée dans l'OEI T-S (2.43) qui estime le vecteur d'état et l'entrée inconnue. Les conditions initiales sont  $x_0 = [0 \ 0 \ 0.005 \ 0]^T$  et  $\hat{x}_0 = 0_{4 \times 1}$  et le taux de décroissance est fixé à  $\lambda = 0.2$ . La première vérification consiste à confirmer l'

Hypothèse 2 en comparant l'OEI actuel avec l'approximation  $\dot{\theta}_k \approx \dot{\theta}_{k-1}$  et un OEI idéal (mais irréaliste) qui dispose de la mesure de  $\dot{\theta}_k$ . La figure Fig. 29 ci-dessous présente l'erreur d'estimation de l'entrée inconnue entre les deux OEI testés. L'erreur est inférieure à 0.02% pendant toute la simulation, ce qui confirme la validité de l'Hypothèse 2.

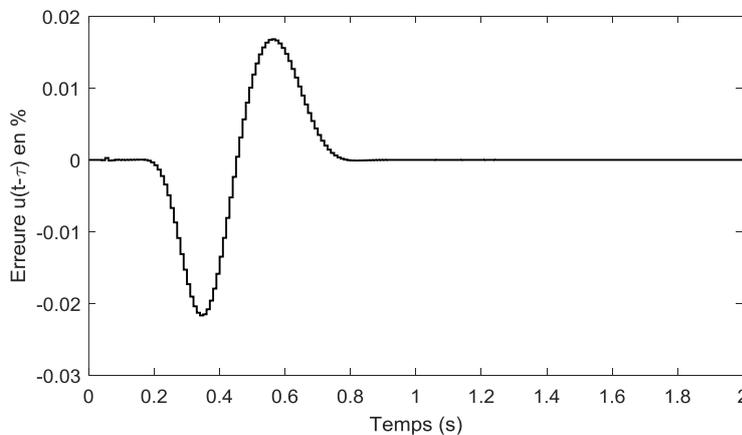


FIG. 29 : ERREUR RELATIVE D'OBSERVATION DUE À L'HYPOTHÈSE 2

## CHAPITRE 2 : LE MODÈLE H2AT

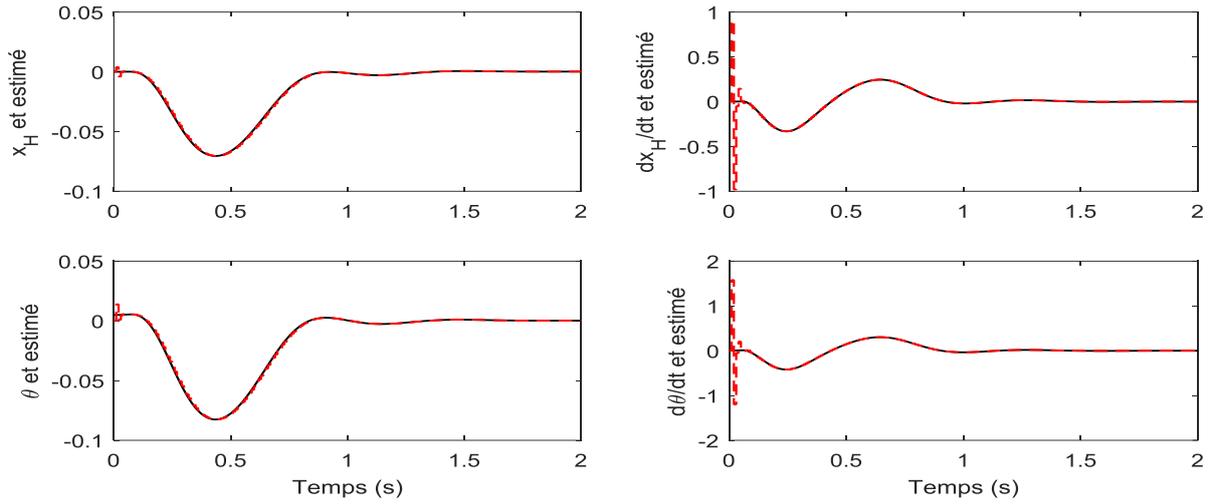


FIG. 30 : VARIABLES D'ÉTAT SIMULÉE (BLEU) ET ESTIMÉE (NOIR)

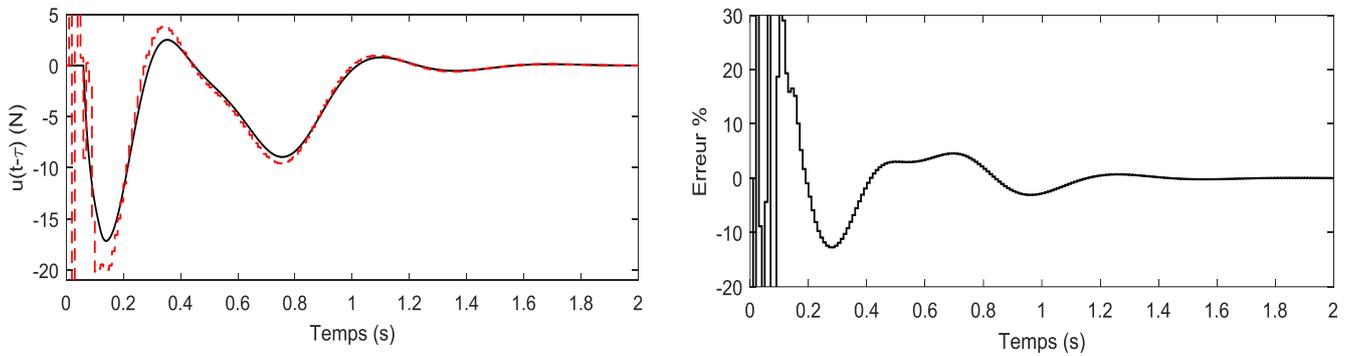


FIG. 31 : ENTRÉE INCONNUE SIMULÉE (BLEU) ET ESTIMÉE (NOIR)

Sur les Fig. 30 et Fig. 31, la convergence de l'observateur sur les variables d'état est très rapide, l'erreur sur l'estimation de l'entrée inconnue est inférieure à 5% après 0.4s. Afin de montrer la capacité de l'OEI à reconstruire un signal en la présence de perturbation, une perturbation sinusoïdale de 2Hz a été ajoutée à l'angle du pendule pendant 6s, les résultats de la simulation et l'estimation de la force stabilisatrice sont présentés sur la Fig. 32.

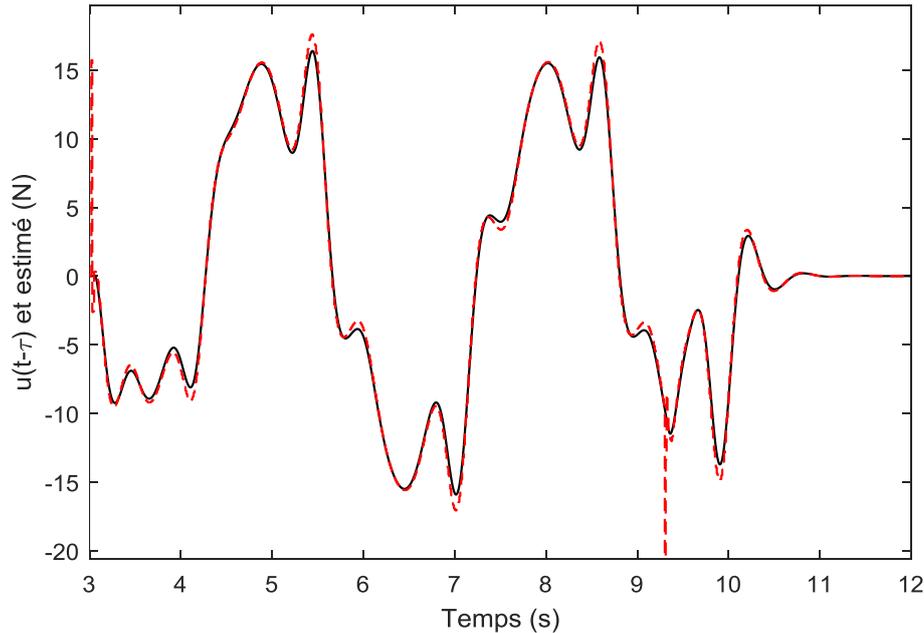


FIG. 32 : ENTRÉE INCONNUE SIMULÉE (BLUE) ET ESTIMÉE (NOIR) AVEC PERTURBATION

### 1.4.5. Discussions

L'utilisation d'un OEI dans le domaine discret présente plusieurs avantages. Le premier est une prise en compte des variables de prémisses non mesurées en utilisant le sur-échantillonnage par rapport à la dynamique des mouvements humains. Un autre avantage, qui a été esquissé dans la remarque 5, équation (2.50), est la possibilité d'utiliser des fonctions de Lyapunov et des définitions d'OEI plus générales, faisant notamment appel aux états précédents (Estrada-Manzo et al., 2016b). C'est pourquoi les prochains OEI créés dans ce mémoire seront exprimés dans le formalisme discret.

Maintenant que le formalisme et les outils théoriques associés au modèle H2AT sont retenus, deux aspects de la conception du modèle peuvent être améliorés. Comme expliqué au début de ce chapitre, le déplacement du point  $COM_{H2A}$  se fait par le biais d'une articulation prismatique, impliquant un déplacement rectiligne du  $COM_{H2A}$  par rapport au tronc. Dans le but de garder les équations du modèle (2.3) les plus simples, ce déplacement a été fixé dans un premier temps comme perpendiculaire à l'axe du tronc mais il apparaît logique de définir un angle dirigeant le déplacement linéaire. Par ailleurs, il est expliqué dans la Remarque 1 que l'articulation du tronc est supposée comme étant mécaniquement parfaite (i.e. sans frottement ou résistance de quelque nature). Cette hypothèse a déjà été faite dans le cas de la modélisation de la position assise (Vette et al., 2012) mais il a été expliqué dans le chapitre précédent que la résistance passive au niveau lombaire doit être plus élevée chez les sujets vivants avec une LMÉ du fait de la sortie de la zone neutre (Panjabi, 1992b). Déterminer la valeur du moment passif est essentiel à la caractérisation de la position assise chez le sujet vivant avec une LMÉ car il s'agit de la seule contribution à la stabilité dans cette région car les sujets n'ont plus d'activité volontaire des muscles situés en dessous de leur lésion. En réponse à ces deux aspects, un modèle H2AT modifié est proposé.

## 1.5. Modèle avec angle et couple passif

### 1.5.1. Équations du modèle

Le modèle H2AT modifié conserve l'hypothèse de déplacement rectiligne du centre de masse des membres supérieurs et de la tête mais introduit un angle  $\alpha$  constant entre la direction de ce déplacement et l'axe du tronc. Un couple de réaction est défini au niveau de l'articulation lombaire Fig. 33, ce qui permet d'écrire le modèle suivant.

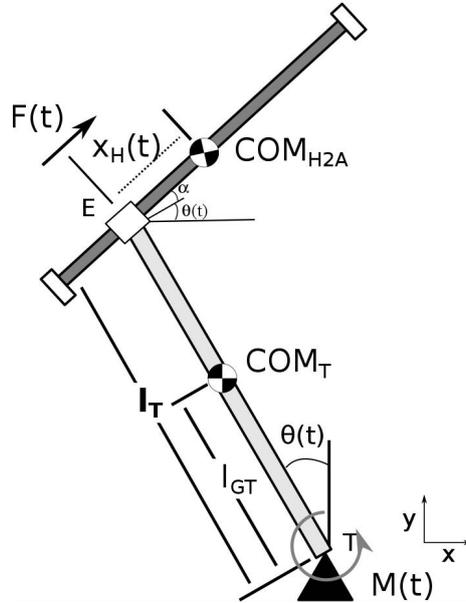


FIG. 33 : LE PENDULE H2AT MODIFIÉ AVEC UN ANGLE CONSTANT ENTRE LE TRONC ET LE DÉPLACEMENT DU  $COM_{H2A}$

$$\begin{cases} F(t) = m_H \ddot{x}_H - m_H \ddot{\theta} l_T \cos(\alpha) - \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 (m_H 2x_H + 2m_H l_T \sin(\alpha)) + m_H g \sin(\theta + \alpha) \\ M_T(t) = \ddot{\theta} (I_{G_T} + m_T l_{G_T}^2 + I_{G_H} + m_H l_T^2 + m_H x_H^2 + 2m_H x_H l_T \sin(\alpha)) - m_H l_T \ddot{x}_H \cos(\alpha) \\ \quad + \dot{\theta} (m_H 2x_H \dot{x}_H + 2m_H \dot{x}_H l_T \sin(\alpha)) - (m_H l_T + m_T l_{G_T}) g \sin(\theta) + m_H g x_H \cos(\theta + \alpha) \end{cases} \quad (2.51)$$

Avec  $J(t) = (I_{G_T} + m_T l_{G_T}^2 + I_{G_H} + m_H b^2 + m_H x_H^2 + 2m_H x_H b \sin(\alpha))$  et en sachant que  $\sin(\theta + \alpha) = \sin(\theta) \cos(\alpha) + \sin(\alpha) \cos(\theta)$ , le système (2.51) peut s'écrire avec le vecteur d'état suivant  $x(k) = x_k = [x_{H_k} \quad \dot{x}_{H_k} \quad \theta_k \quad \dot{\theta}_k]^T \in \mathbb{R}^4$  :

$$\begin{cases} E(x(t)) \dot{x}(t) = A(x(t)) x(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \quad (2.52)$$

Avec  $y(t) \in \mathbb{R}^2$  le vecteur des sorties du système,  $u(t) = \begin{bmatrix} F(t - \tau(t)) - m_H g \sin(\alpha) \cos(\theta(t)) \\ M(t) \end{bmatrix}$

le vecteur des entrées,  $E(x(t)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_H & 0 & -m_H l_T \cos(\alpha) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -m_H l_T \cos(\alpha) & 0 & J(x(t)) \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,

$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$  et

$A(x(t)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \begin{pmatrix} -m_H g \cos(\alpha) \\ \times \frac{\sin(\theta(t))}{\theta(t)} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} m_H x_H(t) \dot{\theta}(t) \\ + m_H l_T \dot{\theta}(t) \sin(\alpha) \end{pmatrix} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -m_H g \cos(\theta(t) + \alpha) & \begin{pmatrix} -2m_H x_H(t) \dot{\theta}(t) \\ -2m_H \dot{\theta}(t) l_T \sin(\alpha) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} (m_H l_T + m_T l_{G_T}) g \\ \times \frac{\sin(\theta(t))}{\theta(t)} \end{pmatrix} & 0 \end{bmatrix}$ .

La présence du terme  $m_H g \sin(\alpha) \cos(\theta(t))$  dans  $u(t)$  dépend uniquement de variables mesurées et ne représente donc pas un problème pour l'estimation de  $F(t - \tau(t))$ .

À partir de (2.52), le déroulement est le même que pour le modèle discret précédent, la discrétisation du modèle se fait par la même méthode d'Euler, ainsi avec

$x_k = [x_{H_k} \quad \dot{x}_{H_k} \quad \theta_k \quad \dot{\theta}_k]^T \in \mathbb{R}^4$ , le modèle s'écrit :

$$\begin{cases} E(x_k) x_{k+1} = A_d(x_k) x_k + s B u_k \\ y_k = C x_k \end{cases} \quad (2.53)$$

Avec  $A_d(x_k) = sA(x_k) + E(x_k)$ , la méthodologie des secteurs non linéaires expliquée en (2.38) est appliquée pour réécrire (2.53) sous la forme d'un modèle T-S:

$$\begin{cases} E_h x_{k+1} = A_{d_h} x_k + s B u_k \\ y_k = C x_k \end{cases} \quad (2.54)$$

Avec les matrices  $E_h = \sum_{i=1}^r h_i(z) E_i$  et  $A_{d_h} = \sum_{i=1}^r h_i(z) A_{d_i}$  sont les sommes convexes dans les polytopes considérés. Comme précédemment, la dynamique des entrées inconnues est supposée du 2<sup>e</sup> ordre, elle s'écrit :

$$\begin{aligned}
 D_{F_{k+1}} = \Gamma \times D_{F_k} &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} d_{F_{k+1}} \\ d_{F_{k+2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{F_k} \\ d_{F_{k+1}} \end{bmatrix} \\
 D_{M_{k+1}} = \Gamma \times D_{M_k} &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} d_{M_{k+1}} \\ d_{M_{k+2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{M_k} \\ d_{M_{k+1}} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.55}$$

Ainsi le système augmenté (2.54) s'écrit en utilisant (2.55) :

$$\begin{cases} E_h^e x_{k+1}^e = A_{d_h}^e x_k^e \\ y_k = C^e x_k^e \end{cases} \tag{2.56}$$

Avec le vecteur d'état augmenté  $x_k^e = [x_k^T \ D_{F_k}^T \ D_{M_k}^T]^T \in \mathbb{R}^8$ ,  $C^e = [C \ 0_{2 \times 4}]$ ,

$$E_h^e = \begin{bmatrix} E_h & 0_2 & 0_2 \\ 0_2 & I_2 & 0_2 \\ 0_2 & 0_2 & I_2 \end{bmatrix}, \quad A_{d_h}^e = \begin{bmatrix} A_{d_h} & [sB_F \ 0_{2 \times 1}] & [sB_M \ 0_{2 \times 1}] \\ 0_2 & \Gamma & 0_2 \\ 0_2 & 0_2 & \Gamma \end{bmatrix}.$$

L'OEI est défini de la même manière que précédemment (2.43) à la différence des gains qui sont adaptés à la taille du nouveau problème donc  $H \in \mathbb{R}^{8 \times 8}$  et  $K_h \in \mathbb{R}^{8 \times 2}$ .

### 1.5.2. Simulations

Le protocole de simulation est expliqué sur la Fig. 34, au cours d'une simulation du modèle continue (2.52) contrôlé par la loi (2.5), il est désormais possible d'ajouter un moment lombaire arbitraire (constant ou variable). Les paramètres fixés sont un échantillonnage à 100Hz, un angle  $\alpha = 5^\circ$ , le taux de décroissance  $\lambda = 0.3$  et les conditions initiales sont  $x_0 = [0 \ 0 \ 0.005 \ 0]^T$ .

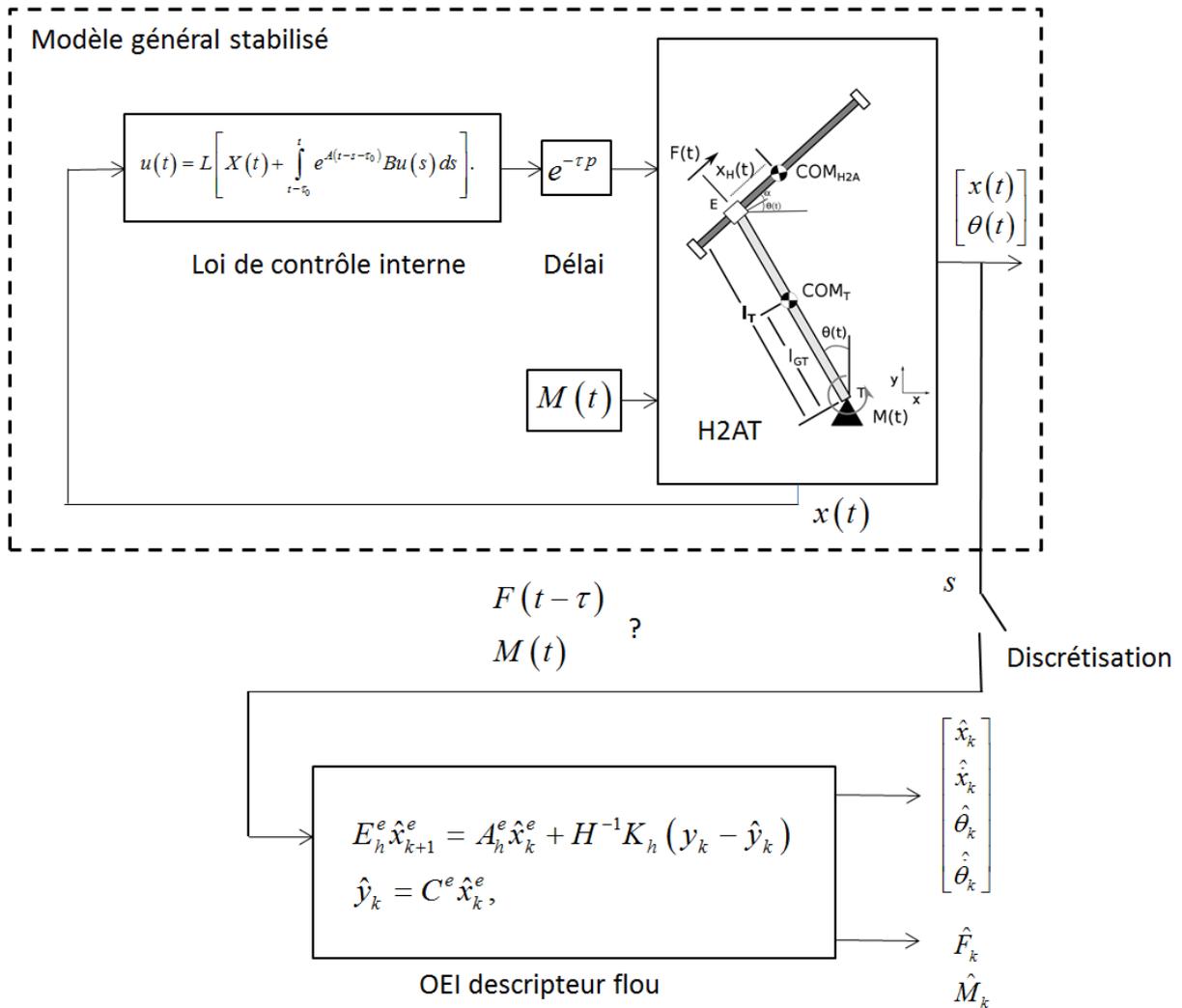


FIG. 34 : PROTOCOLE DE SIMULATION

La première simulation consiste à imposer un couple passif constant  $M = 0.2N.m$ , le résultat de stabilisation est présenté sur la Fig. 35. L'effort interne constant entraîne un décalage de la position d'équilibre du système car il ne se stabilise pas en 0. L'erreur d'observation affichée sur la Fig. 36 converge à 0 en moins de 0.5 sec.

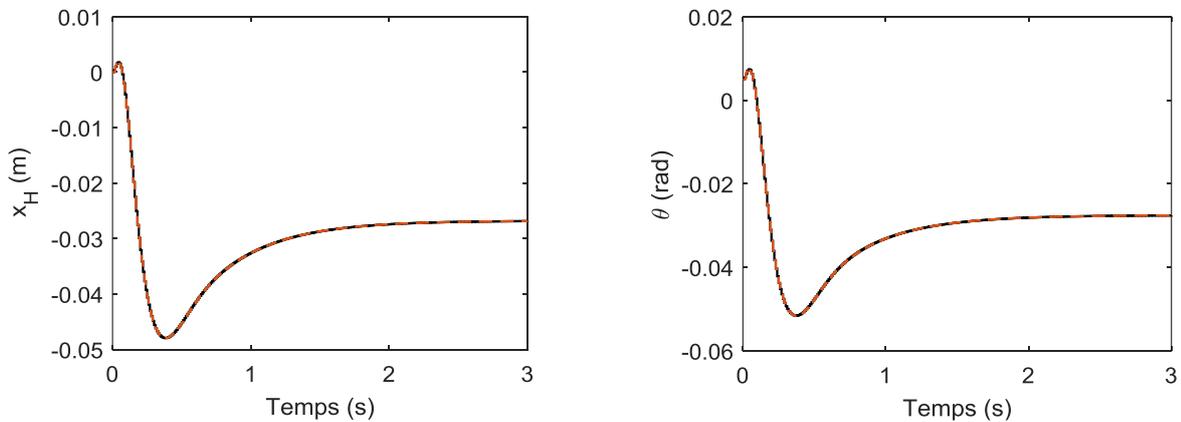


FIG. 35 : ETAT MESURÉ AVEC COUPLE PASSIF CONSTANT

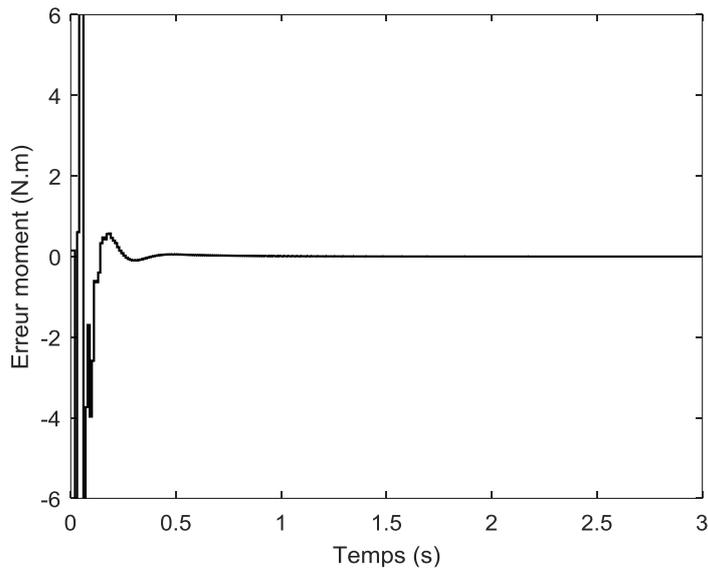


FIG. 36 : ERREUR RELATIVE D'ESTIMATION D'UN COUPLE PASSIF CONSTANT

Dans la deuxième simulation, le couple passif a été arbitrairement défini comme un signal sinusoïdal d'amplitude 0.2 N.m et de fréquence 5Hz. Le résultat d'estimation est affiché sur la Fig. 37.

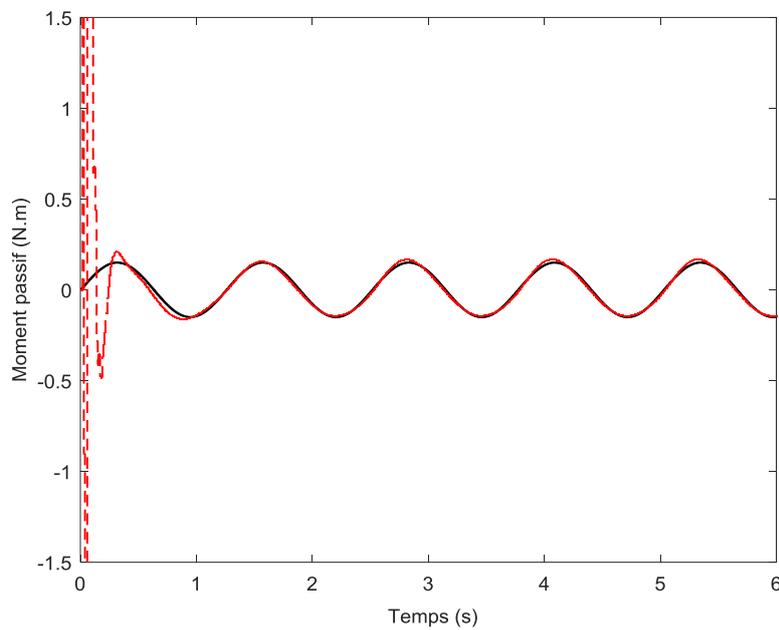


FIG. 37 : COUPLE PASSIF VARIABLE ET VALEUR ESTIMÉE

Le formalisme du modèle H2AT modifié a permis la prise en compte de deux paramètres, un angle  $\alpha$  constant et un couple de réaction au niveau de l'articulation lombaire. Les conditions de convergence ont été étendues directement sur la base du modèle H2AT initial en suivant la même méthodologie dans le domaine discret.

## 1.6. Conclusions

Le modèle H2AT est proposé comme un premier modèle biomécanique pour l'estimation d'efforts internes chez les sujets vivants avec une LMÉ. Les travaux théoriques de (Estrada-Manzo, 2015) sur la création d'OEI T-S sont appliqués dans les domaines temporels continue et discret et le formalisme discret est retenu dans la suite de ce manuscrit comme le plus adapté pour nos besoins. Des solutions sont proposées aux problématiques inhérentes à la stabilisation de modèles biomécaniques (loi de contrôle retardée, prémisse non-mesurable) et les simplifications préliminaires du modèle H2AT (articulation du tronc parfaite, déplacement du point  $COM_{H2A}$  perpendiculaire au tronc) sont corrigées dans une dernière version du modèle. Les résultats de simulation confirment l'intérêt de cette méthode qui, en utilisant uniquement les données angulaires, estime précisément des efforts internes.

## 2. Vérifications expérimentales

### 2.1. Introduction

On rappelle que la validation d'un modèle biomécanique pour l'estimation d'efforts internes sur des sujets humains nécessite une procédure expérimentale invasive. Néanmoins la combinaison de plusieurs résultats expérimentaux peut indiquer l'adéquation d'un modèle théorique avec la réalité. Dans le cas du modèle H2AT, deux vérifications expérimentales sont nécessaires à savoir la linéarité du déplacement du point  $COM_{H2A}$  et l'impact du moment passif. Le modèle H2AT est construit sur une hypothèse simplificatrice : le déplacement du  $COM_{H2A}$  est considéré comme linéaire et d'angle constant par rapport à l'axe du tronc. L'objectif premier de cette expérience est donc de vérifier expérimentalement le bien-fondé de cette hypothèse avant d'aller plus loin dans l'estimation d'efforts internes.

Le modèle H2AT a été créé afin d'estimer les efforts internes et particulièrement le couple passif lombaire car il s'agit de la seule résistance à la chute dans cette région chez les sujets vivant avec une LMÉ. Avant d'utiliser l'OEI, il est nécessaire de trouver une technique expérimentale pour modifier artificiellement l'effet des structures passives sur le rachis afin de vérifier si les résultats estimés se comportent de la même façon. L'extension de la chaîne posturale postérieure, présentée dans le chapitre précédent, est un moyen d'augmenter artificiellement le moment d'extension du rachis et donc le couple passif. Le deuxième objectif de ces expérimentations est donc de vérifier si la cinématique du mouvement est modifiée par la sollicitation de la chaîne posturale postérieure.

## 2.2. Matériels et Méthodes

### 2.2.1. Sujets et mesures

Six sujets vivants avec une LMÉ ont accepté de participer à cette expérience. Après avoir donné leur consentement éclairé de participation à l'étude, ils ont été équipés de 40 marqueurs réfléchissants disposés sur la tête, les membres supérieurs, le dos, le bassin et les membres inférieurs (le détail de la position des marqueurs est donné en Annexes. La position de ces marqueurs est mesurée par un système d'acquisition VICON® de 9 caméras enregistrant à 200Hz et le sujet est également filmé par une caméra vidéo.

Sujet	sexe	poids (kg)	taille (cm)	niveau lésion	Score ASIA
1	H	60	190	T4	A
2	H	70	190	T4	A
3	H	78	175	T4	A
4	H	92	200	C7	A
5	H	75	182	T3	A

TABLE 1 : CARACTÉRISTIQUES DES SUJETS

### 2.2.2. Protocole expérimental

Il a été demandé aux sujets de réaliser une tâche de stabilisation. Cette tâche consiste à maintenir l'équilibre assis en gardant les bras levés devant soi. Après quelques secondes, une force déstabilisante antéropostérieure est appliquée entre les deux omoplates pour venir perturber l'équilibre. Trois conditions de position des membres inférieurs sont étudiées : pliés à 90°, légèrement tendus et complètement tendus. Tous les sujets ont commencé l'expérimentation par trois essais jambes pliées à 90° afin de se familiariser avec le protocole expérimental. L'ordre des conditions de position de jambes est défini de façon aléatoire pour chaque sujet et un minimum de quatre acquisitions réussies (sans perte d'équilibre) est réalisé par condition ce qui donne donc 15 acquisitions par sujets.

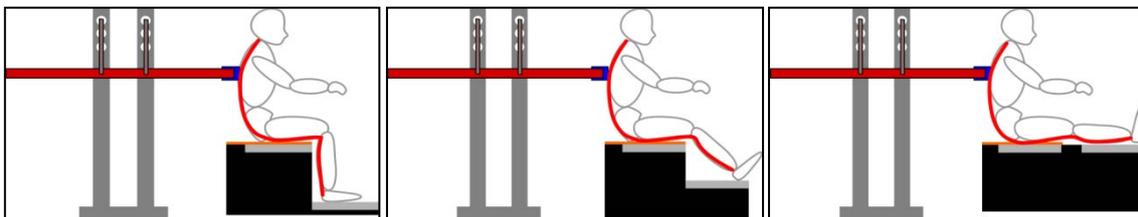


FIG. 38 : CONFIGURATIONS EXPÉRIMENTALES (TRAIT ROUGE : CHAÎNE POSTURALE POSTÉRIEURE)

### 2.2.3. Traitement des données mesurées

Les coordonnées des marqueurs réfléchissants ont été enregistrées pendant les instants précédant et suivant la perturbation. Les centres articulaires et centres de masse des segments des sujets sont ensuite calculés en utilisant des règles de régression (Dumas, Chèze, et al., 2007; Fang et al., 2017). La procédure commence par la définition de l'axe du tronc passant par le milieu des centres articulaires des épaules et le centre de l'articulation lombaire (définis selon les travaux de (Reed et al., 1999)). Puis le point T (rotation du tronc) est déterminé par la méthode des moindres carrés comme l'intersection de tous les axes du tronc pendant l'acquisition. Le point  $COM_{H2A}$  est calculé comme le barycentre des COM de la tête et des membres supérieurs pondéré par la masse de chaque segment.

La Fig. 39 représente le modèle H2AT à partir de données expérimentales, les ronds bleus correspondent à la position des marqueurs réfléchissants, les croix rouges sont les centres de masse des différents segments (tronc, tête, bras, avant-bras, mains) et les ronds rouges correspondent aux positions des centres articulaires calculés. Enfin le segment vert représente le tronc et le segment rouge représente le déplacement du point  $COM_{H2A}$ .

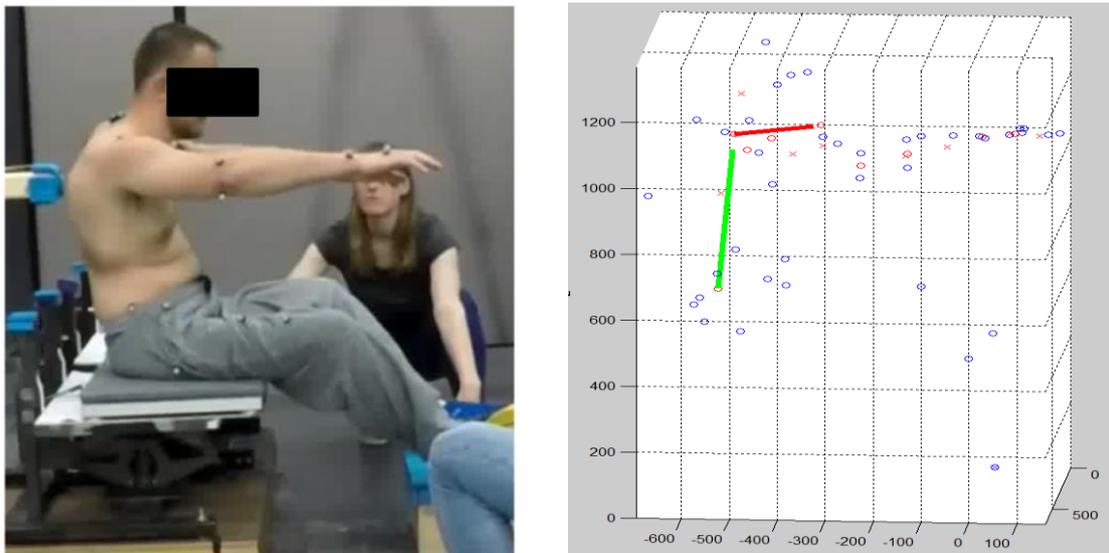


FIG. 39 : RECONSTRUCTION DU MODÈLE H2AT À PARTIR DES MARQUEURS (MARQUEURS BLEUS : MESURÉS, RONDS ROUGES : CENTRE ARTICULAIRES, CROIX ROUGES : CENTRES DE MASSE)

La position du point  $COM_{H2A}$  est ensuite exprimée dans un repère mobile associé au tronc afin de s'affranchir des déplacements du tronc. Enfin, une régression permet de déterminer aux sens des moindres carrés, l'équation de droite qui donne l'angle  $\alpha$  ainsi que la position du point E du modèle H2AT, défini par la distance  $l_T$  Fig. 40. La moyenne quadratique (RMS) de l'erreur de régression linéaire sur la trajectoire du  $COM_{H2A}$  est calculée pour chaque acquisition. Les paramètres  $\alpha$  et  $l_T$  traduisent la stratégie de déplacement de la tête et des membres supérieurs adoptées par les sujets (par exemple : une valeur faible de  $l_T$  indique que le sujet n'a pas beaucoup levé ses membres

supérieurs). Il est donc intéressant de savoir si les sujets ont présenté des paramètres  $\alpha$  et  $l_T$  différents les uns des autres, pour cela, un test statistique de Kruskal-Wallis est réalisé.

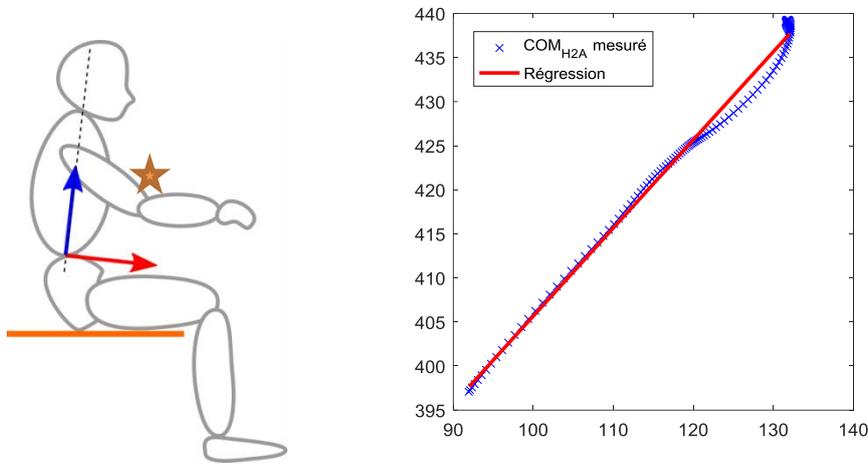


FIG. 40 : EXPRESSION DU  $COM_{H2A}$  DANS LE REPÈRE DU TRONC ET EXEMPLE DE RÉGRESSION

Enfin la distance parcourue par le  $COM_{H2A}$  est calculée comme un indicateur du débattement total réalisé pour la stabilisation (i.e. plus le débattement est important, plus il est difficile de se stabiliser). Les paramètres  $\alpha$  et  $l_T$  ainsi que le débattement sont donc calculés pour chaque sujet et l'effet des différentes conditions d'assise est vérifié par un test statistique de Friedman afin de déterminer si la position assise a un impact sur la stabilisation.

### 2.3. Résultats

Le modèle H2AT est un modèle 2D dans le plan sagittal, la planéité des trajectoires a été contrôlée pendant l'analyse des résultats et les acquisitions présentant une trajectoire non planaire n'ont pas été traitées. La RMS de l'erreur de régression linéaire sur la trajectoire du  $COM_{H2A}$  est inférieure à 2mm dans plus de 60% des acquisitions (48 sur 75), cela correspond à l'ordre de grandeur de la précision en analyse du mouvement (Chèze, 2014) et confirme donc la validité de l'hypothèse du mouvement linéaire du  $COM_{H2A}$ . En regardant les images vidéos des acquisitions non planaires et de celles où la RMS était supérieure à 2mm, il a été observé soit des récupérations asymétriques (ex : un bras bouge plus que l'autre et le mouvement n'est plus dans le plan sagittal) soit des changements de stratégies pendant l'acquisition (ex : le sujet recule les bras puis les lève soudainement en réalisant que sa première action n'était pas suffisante). Les résultats suivants sont uniquement calculés à partir des acquisitions avec déplacement linéaire.

Sujet	Acquisitions avec déplacement linéaire
1	6/15
2	14/15
3	9/15
4	12/15
5	7/15

TABLE 2 : RÉPARTITION DU DÉPLACEMENT LINÉAIRE DU COM<sub>H2A</sub> CHEZ LES SUJETS

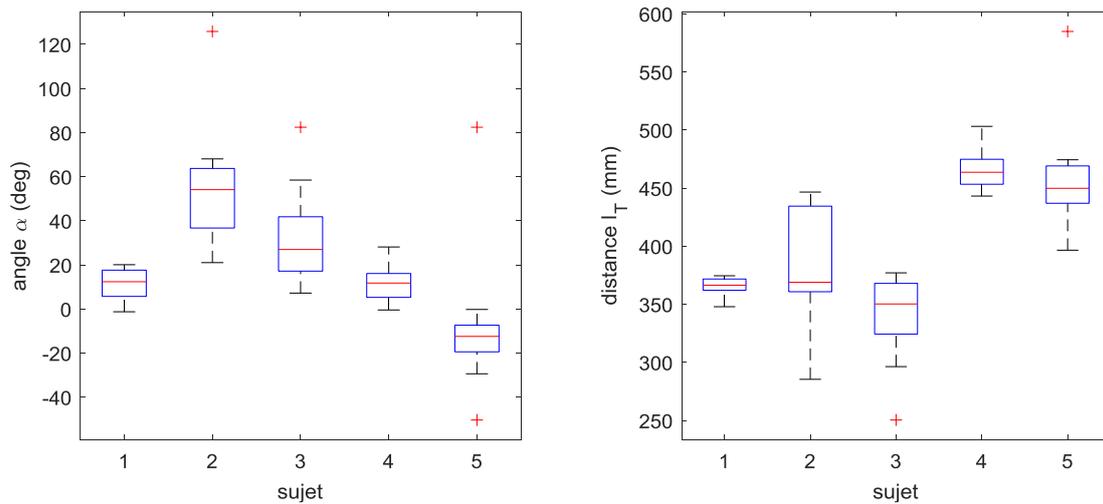


FIG. 41 : RÉPARTITION DES PARAMÈTRES  $\alpha$  ET  $l_T$  ISSUS DE LA RÉGRESSION PAR SUJET

La Fig. 41 présente la répartition sous forme de diagramme en boîte de Tukey des paramètres issus de la régression par moindres carrés sur le déplacement du point COM<sub>H2A</sub> dans le cas de déplacement linéaire. Les moyennes, médianes et amplitudes des deux paramètres sont différents pour chaque sujet et le résultat du test de Kruskal-Wallis confirme ( $p < 0.001$ ) que les sujets adoptent des paramètres de trajectoire du COM<sub>H2A</sub> qui leur sont propres (i.e. chaque sujet s'est stabilisé selon une stratégie qui lui est propre).

Le débattement du COM<sub>H2A</sub> des sujets est présenté en Fig. 42. Au cours des différentes acquisitions, deux types de débattements sont identifiables chez les sujets : réguliers (sujets 1 et 5) et variables (sujets 2, 3 et 4). Cette dualité lors de la perturbation du contrôle postural a été discutée dans les travaux de (Vibert et al., 2001) sur le contrôle de la position de la tête lors d'accélération typique du coup du lapin. Les auteurs ont observé que les sujets adoptaient deux stratégies différentes : rigide ou souple avec une activation musculaire et une cinématique différente dans les deux cas. Dans le cas de la présente étude, ce résultat est attribué à une stratégie de stabilisation différente chez les sujets.

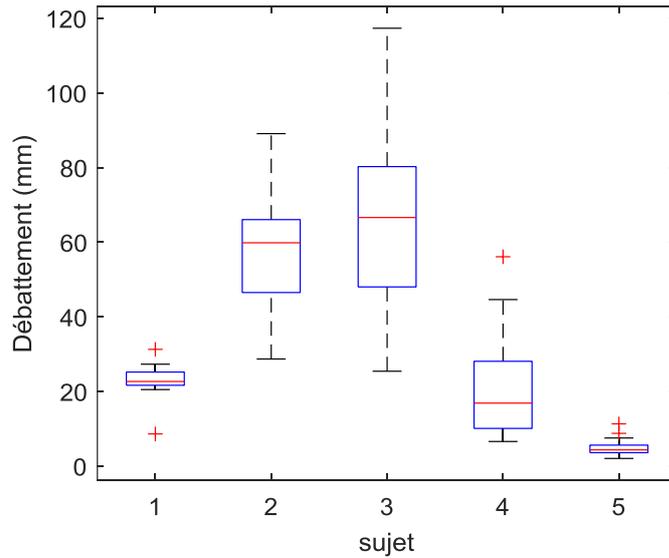


FIG. 42 : DISTANCE PARCOURUE DU COM<sub>H2A</sub> PAR SUJET

Les résultats des tests statistiques de Friedman ne sont pas significatifs, ce qui indique qu'il n'y a pas d'effet de la position assise sur le déplacement du point COM<sub>H2A</sub> des sujets. Malgré l'absence de différence significative les cinq sujets ont indiqué se sentir plus stables quand les membres inférieurs étaient tendus. Par ailleurs, sur la Fig. 43 qui présente le débattement du point COM<sub>H2A</sub> pour le sujet 3 dans le plan mobile lié au tronc, dans la condition jambes pliées en vert, la trajectoire du COM<sub>H2A</sub> est plus pentue et le débattement plus long que dans la condition jambes tendue en bleu. Cette différence, observée également dans les travaux de (Shirado et al., 2004), est due à la sollicitation de la chaîne posturale postérieure qui en se tendant rigidifie le rachis lombaire, ce qui signifie moins de mouvement des membres supérieurs pour la stabilisation. Ce résultat est visible pour le sujet 3 car c'est le sujet dont le COM<sub>H2A</sub> a parcouru en moyenne la plus grande distance (Fig. 42).

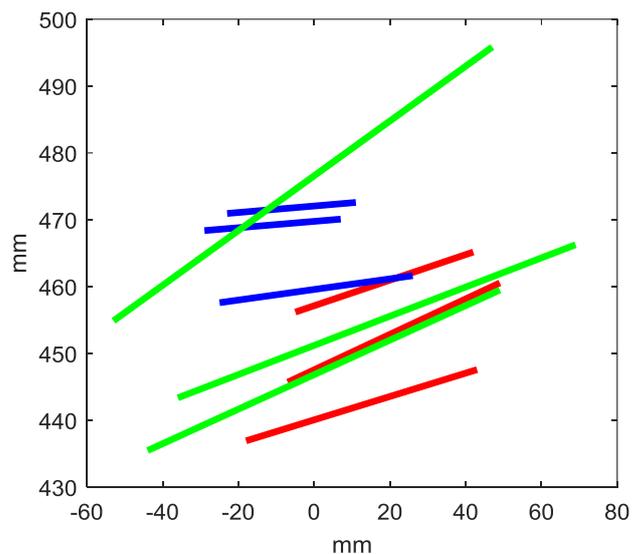


FIG. 43 : DÉBATTEMENT DU COM<sub>H2A</sub> DU SUJET 3 DANS LE REPÈRE MOBILE DU TRONC (VERT : CONDITION JAMBES PLIÉES, ROUGE : CONDITION JAMBE RELEVÉES, BLEU : CONDITION JAMBES TENDUES)

## 2.4. Limitations

Le modèle H2AT est un premier essai de modélisation simplifiée, il a été basé sur un déplacement linéaire du point  $COM_{H2A}$  par rapport au tronc. Cette hypothèse correspond évidemment à une simplification mécanique afin de représenter le mouvement de flexion/extension du cou, des bras et avant-bras. Ce type de liaison prismatique a déjà été utilisé dans la modélisation biomécanique (ex : un pendule inverse télescopique pour représenter le passage assis-debout (Papa and Cappozzo, 1999)) mais cette représentation est limitante d'un point de vue expérimentale et mécanique. Sur le plan expérimental, bien que la majorité des acquisitions soit utilisable, un nombre non négligeable d'acquisitions ne peut être traité car elles ne respectent pas la contrainte de déplacement linéaire. Enfin, mécaniquement parlant, la limite de la liaison prismatique mécanique est qu'elle ne prend pas en compte les effets inertiels de la rotation des membres supérieurs au niveau des articulations du coude et de l'épaule dans l'équation (2.3). Cet effet sera différent en fonction des sujets, par exemple, une personne ayant un bon contrôle de son équilibre sera capable de lever ses membres supérieurs à l'horizontale proche de la hauteur des épaules, à l'opposée une personne avec un contrôle plus faible (ex : avec une lésion plus haute) gardera ses bras très bas (cf. Fig. 44). Dans ces deux conditions une même distance de déplacement des membres supérieurs aura un effet mécanique très différent sur le système global. L'erreur due à cette simplification serait encore plus important dans le cas de mouvements en 3D car les effets de Coriolis seraient à prendre en compte.

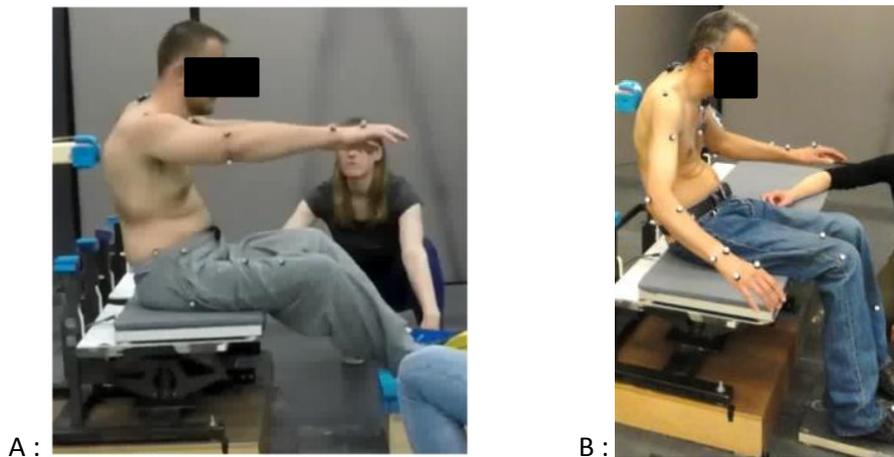


FIG. 44 : A : STABILISATION BRAS HAUTS ; B : STABILISATION BRAS BAS

### 3. Conclusions

Dans ce chapitre un modèle simplifié baptisé H2AT est présenté, il s'agit à notre connaissance, du premier modèle permettant l'analyse de la stabilisation en position assise prenant en compte l'action des membres supérieurs et de la tête, le rendant ainsi utilisable pour les sujets vivant avec une LMÉ. Les équations sont écrites dans les domaines continu et discret et le modèle est paramétré pour être utilisé avec un faible nombre de variables biomécaniques.

L'utilisation d'un modèle quasi-LPV sous la forme Takagi-Sugeno permet d'obtenir des conditions de stabilité du modèle et de créer un observateur à entrées inconnues pour l'estimation des efforts internes de stabilisation. Les preuves de convergence de l'erreur d'estimation sont exprimées en utilisant les conditions LMI issues de travaux récents (Estrada-Manzo, 2015).

L'objectif de ce premier modèle était de voir si une représentation biomécanique simple était compatible avec la méthodologie de l'OEI descripteur sous forme T-S. Cette étude a permis de proposer des solutions aux difficultés méthodologiques relevées (contrôle d'un modèle instable retardé, réduction du nombre de non linéarités, prémisses non mesurables).

Des expérimentations réalisées sur des sujets vivants avec une LMÉ attestent la validité du modèle H2AT dans plus de 60% des cas étudiés et des premiers résultats d'observation ont été présentés. Le modèle simplifié H2AT a rempli son office, notamment d'un point de vue méthodologique en mettant en avant les problématiques et la mise en place de leur solution, il convient maintenant de d'étudier son extension.



## CHAPITRE 3 : LE MODÈLE S3S

1. Modèle théorique	82
1.1. Introduction	82
1.2. Présentation du modèle S3S	82
1.3. Équations du modèle S3S	84
2. Stabilisation et réduction du nombre de non linéarités	86
2.1. Loi de contrôle et motivation	86
2.2. Méthode de réduction	87
2.3. Application au modèle S3S	88
2.4. Passage en discret	91
3. Observation	94
3.1. Le modèle T-S discret	94
3.2. Obtention de l'OEI	95
4. Résultats de simulations	98
5. Conclusion	105

# 1. Modèle théorique

## 1.1. Introduction

Dans le chapitre précédent un premier modèle de chaîne segmentaire destiné à l'étude de la stabilisation assise chez les personnes vivant avec une lésion de moelle épinière (LMÉ) a été présenté. Il se différencie des modèles existants qui contrôlent la position assise uniquement via l'articulation et les muscles du tronc (Reeves et al., 2009; Tanaka et al., 2010) car ce principe n'est pas applicable pour les personnes vivant avec une LMÉ. Le modèle H2AT est à notre connaissance le premier modèle biomécanique prenant en compte le déplacement des membres supérieurs et de la tête sur la stabilisation de la position assise. De par sa représentation mécanique simple, ce modèle présente des limitations comme le fait de ne pas prendre en compte l'inertie des membres supérieurs en rotation autour de leurs articulations ou encore d'être contrôlé par une force globale qui n'a pas de représentation physiologique. Notre objectif est donc de proposer un modèle plus réaliste anatomiquement dans le but de répondre à ce problème.

L'estimation des efforts internes au modèle H2AT se fait par un OEI non linéaire en utilisant l'approche T-S, méthode est sensible au nombre de non linéarités du modèle. Un modèle avec plus d'articulations présente naturellement d'avantage de termes non linéaires et ainsi augmente la complexité des conditions LMI pour déterminer les gains d'observation. De plus, les techniques permettant d'étendre les conditions de stabilité ou d'observations (Kruszewski et al., 2008; Guerra et al., 2012) des modèles T-S aboutissent elles-aussi à une augmentation de la complexité du problème LMI à résoudre. Ces augmentations combinées peuvent rendre les LMI incompatibles aux contraintes des systèmes embarqués (Laurain et al., 2018), voire même insolubles par des calculateurs classiques. Une technique de réduction du nombre de non linéarité est donc proposée pour diminuer la complexité des LMI obtenues tout en restant le plus proche de la représentation exacte du modèle.

L'objectif de ce chapitre est de présenter le nouveau modèle S3S ainsi que les équations de l'observateur à entrées inconnues associé pour estimer les efforts de stabilisation ainsi que le moment au niveau de l'articulation lombaire. Une loi de contrôle est définie dans les domaines continu et discret et les conditions de la stabilité sont écrites sous formes LMI. Des techniques robustes et de réduction du nombre de non linéarités sont décrites pour le calcul des LMI et des résultats de simulations sont présentés afin de montrer l'efficacité des outils créés.

## 1.2. Présentation du modèle S3S

L'acronyme S3S signifie « Seated 3 Segments ». Comme pour le modèle H2AT, il se base sur les observations expérimentales montrant l'importance des membres supérieurs sur la stabilité assise des personnes vivant avec une LMÉ (Janssen-Potten et al., 1999; Grangeon et al., 2012; Milosevic et al., 2017). Le modèle est un triple pendule inverse dont les segments représentent le tronc, les bras et les avant-bras (respectivement segments 0, 1 et 2), ce qui le rend plus proche de la réalité anatomique que le modèle H2AT. Les paramètres inertiels de chaque segments  $i \in \{0, 1, 2\}$ , masse

$m_i$ , longueur  $l_i$ , position du COM  $l_{G_i}$  et moment d'inertie  $I_{G_i}$  sont obtenus en utilisant des règles de régression présentées dans les travaux de (Dumas, Chèze, et al., 2007).

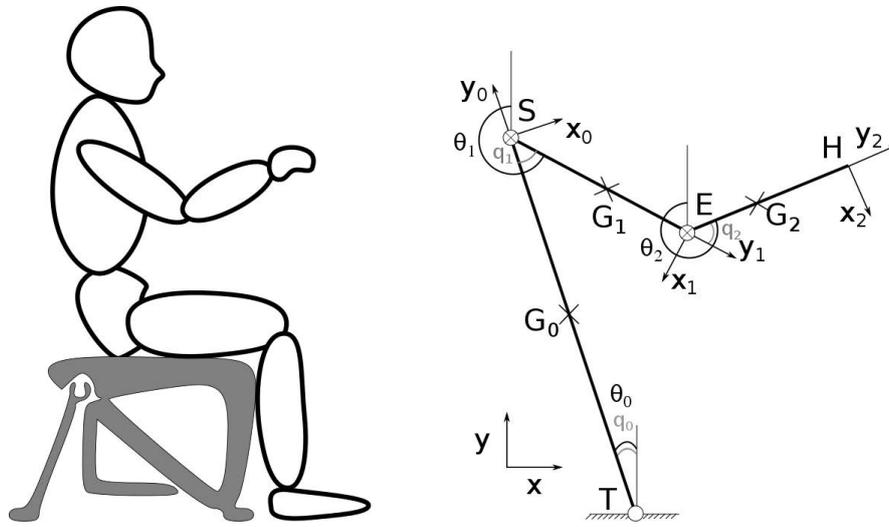


FIG. 45 : LE MODÈLE S3S

Comme pour le modèle H2AT, le système d'équations dynamiques du modèle S3S s'obtient en dérivant les équations du Lagrangien  $L = E - U$  avec  $E = \sum_{i=0}^2 E_i$  et  $U = \sum_{i=0}^2 U_i$  :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_0} - \frac{\partial L}{\partial q_0} = M_T \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial L}{\partial q_1} = M_S \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial L}{\partial q_2} = M_E \end{cases} \quad (3.1)$$

À la différence du modèle H2AT, qui considèrerait le mouvement de la tête dans le déplacement du point  $COM_{H2A}$ , le modèle S3S fait l'hypothèse que la tête et le tronc sont rigidement liés. Ce choix est fait afin de contenir la complexité du modèle S3S et est justifié par : 1. Le fait que la tête est plus légère que les membres supérieurs (Dumas, Chèze, et al., 2007) et 2. Que son débattement est bien moindre, en théorie (Kapandji, 2005a, 2005b) comme en pratique lors des mesures expérimentales du chapitre précédent.

### 1.3. Équations du modèle S3S

Le calcul et la dérivation du Lagrangien pour obtenir les équations du modèle S3S sont détaillés en Annexes, le modèle complet du S3S s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 M_T = \ddot{q}_0 \left( I_{q_0} - 2(m_1 l_0 l_{G_1} + m_2 l_0 l_1) \cos(q_1) - 2m_2 l_0 l_{G_2} \cos(q_2 + q_1) + 2m_2 l_1 l_{G_2} \cos(q_2) \right) \\
 \quad + \ddot{q}_1 \left( I_{q_1} - (m_1 l_0 l_{G_1} + m_2 l_0 l_1) \cos(q_1) - m_2 l_0 l_{G_2} \cos(q_2 + q_1) \right) \\
 \quad + \ddot{q}_2 \left( I_{q_2} - m_2 l_0 l_{G_2} \cos(q_2 + q_1) + m_2 l_1 l_{G_2} \cos(q_2) \right) \\
 \quad + \dot{q}_1^2 \left( (m_1 l_0 l_{G_1} + m_2 l_0 l_1) \sin(q_1) + m_2 l_0 l_{G_2} \sin(q_2 + q_1) \right) \\
 \quad + \dot{q}_2^2 \left( m_2 l_0 l_{G_2} \sin(q_2 + q_1) - m_2 l_1 l_{G_2} \sin(q_2) \right) \\
 \quad + 2\dot{q}_0 \dot{q}_1 \left( (m_1 l_0 l_{G_1} + m_2 l_0 l_1) \sin(q_1) + m_2 l_0 l_{G_2} \sin(q_2 + q_1) \right) \\
 \quad + 2\dot{q}_0 \dot{q}_2 \left( m_2 l_0 l_{G_2} \sin(q_2 + q_1) - m_2 l_1 l_{G_2} \sin(q_2) \right) \\
 \quad + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 \left( m_2 l_0 l_{G_2} \sin(q_2 + q_1) - m_2 l_1 l_{G_2} \sin(q_2) \right) \\
 \quad - (m_0 g l_{G_0} + m_1 g l_0 + m_2 g l_0) \sin(q_0) + (m_1 g l_{G_1} + m_2 g l_1) \sin(q_1 + q_0) \\
 \quad + m_2 g l_{G_2} \sin(q_2 + q_1 + q_0) \\
 M_S = \ddot{q}_0 \left( I_{q_1} + 2m_2 l_1 l_{G_2} \cos(q_2) - (m_1 l_0 l_{G_1} + m_2 l_0 l_1) \cos(q_1) - m_2 l_0 l_{G_2} \cos(q_2 + q_1) \right) \\
 \quad + \ddot{q}_1 \left( I_{q_1} + 2m_2 l_1 l_{G_2} \cos(q_2) \right) + \ddot{q}_2 \left( I_{q_2} + m_2 l_1 l_{G_2} \cos(q_2) \right) \\
 \quad - \dot{q}_0^2 \left( (m_1 l_0 l_{G_1} + m_2 l_0 l_1) \sin(q_1) + m_2 l_0 l_{G_2} \sin(q_2 + q_1) \right) - \dot{q}_2^2 m_2 l_1 l_{G_2} \sin(q_2) \\
 \quad - 2\dot{q}_0 \dot{q}_2 m_2 l_1 l_{G_2} \sin(q_2) - 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 m_2 l_1 l_{G_2} \sin(q_2) + (m_1 g l_{G_1} + m_2 g l_1) \sin(q_1 + q_0) \\
 \quad + m_2 g l_{G_2} \sin(q_2 + q_1 + q_0) \\
 M_E = \ddot{q}_0 \left( I_{q_2} - m_2 l_0 l_{G_2} \cos(q_2 + q_1) + m_2 l_1 l_{G_2} \cos(q_2) \right) + \ddot{q}_1 \left( I_{q_2} + m_2 l_1 l_{G_2} \cos(q_2) \right) + \ddot{q}_2 I_{q_2} \\
 \quad + \dot{q}_0^2 \left( m_2 l_1 l_{G_2} \sin(q_2) - m_2 l_0 l_{G_2} \sin(q_2 + q_1) \right) + \dot{q}_1^2 m_2 l_1 l_{G_2} \sin(q_2) \\
 \quad + 2\dot{q}_0 \dot{q}_1 m_2 l_1 l_{G_2} \sin(q_2) + m_2 g l_{G_2} \sin(q_2 + q_1 + q_0)
 \end{array} \right. \quad (3.2)$$

On définit le vecteur d'état  $x(t) = \begin{bmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{bmatrix} = [q_0 \quad q_1 \quad q_2 \quad \dot{q}_0 \quad \dot{q}_1 \quad \dot{q}_2]^T \in \mathbb{R}^6$ , pour écrire (3.2)

sous forme de représentation d'état (afin d'alléger les notations, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, le temps  $t$  n'apparaît plus dans les équations). 2 modèles seront utilisés suivant qu'il s'agisse de commander ou d'observer (3.2). Le vecteur des entrées est  $u(t) = [M_T \quad M_S \quad M_E]^T \in \mathbb{R}^3$  et  $y \in \mathbb{R}^3$  la sortie du système.

**Modèle pour la commande :**

$$\begin{cases} E(q)\dot{x}(t) = A(x)x(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (3.3)$$

Avec comme matrices :  $E(q) = \begin{bmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & \bar{E}(q) \end{bmatrix}$ ,  $\bar{E}(q) = \begin{bmatrix} e_{11}(q_1, q_2) & e_{12}(q_1, q_2) & e_{13}(q_1, q_2) \\ e_{21}(q_1, q_2) & e_{22}(q_2) & e_{23}(q_2) \\ e_{31}(q_1, q_2) & e_{32}(q_2) & I_{q_2} \end{bmatrix}$ ,

$$A(x) = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & I_3 \\ S(q) & \bar{A}(x) \end{bmatrix}, \quad \bar{A}(x) = \begin{bmatrix} a_{11} \begin{pmatrix} q_1, q_2 \\ \dot{q}_1, \dot{q}_2 \end{pmatrix} & a_{12} \begin{pmatrix} q_1, q_2 \\ \dot{q}_0, \dot{q}_1, \dot{q}_2 \end{pmatrix} & a_{13} \begin{pmatrix} q_1, q_2 \\ \dot{q}_0, \dot{q}_1, \dot{q}_2 \end{pmatrix} \\ a_{21} \begin{pmatrix} q_1, q_2 \\ \dot{q}_0, \dot{q}_2 \end{pmatrix} & a_{22} \begin{pmatrix} q_2 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix} & a_{23} \begin{pmatrix} q_2 \\ \dot{q}_0, \dot{q}_1, \dot{q}_2 \end{pmatrix} \\ a_{31} \begin{pmatrix} q_1, q_2 \\ \dot{q}_0, \dot{q}_1 \end{pmatrix} & a_{32} \begin{pmatrix} q_2 \\ \dot{q}_0, \dot{q}_1 \end{pmatrix} & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} \\ I_3 \end{bmatrix},$$

$$S(q) = \begin{bmatrix} s_0 + s_{01} + s_{012} & s_{01} + s_{012} & s_{012} \\ s_{01} + s_{012} & s_{01} + s_{012} & s_{012} \\ s_{012} & s_{012} & s_{012} \end{bmatrix} \quad s_0 = (m_0 g l_{G_0} + m_1 g l_0 + m_2 g l_0) \frac{\sin(q_0)}{q_0}$$

$$s_{01} = (m_1 g l_{G_1} + m_2 g l_1) \frac{\sin(q_1 + q_0)}{q_1 + q_0} \quad s_{012} = m_2 g l_{G_2} \frac{\sin(q_2 + q_1 + q_0)}{q_2 + q_1 + q_0}$$

**Remarque 1**

Le modèle S3S est instable en boucle ouverte et doit être stabilisé avant de définir un OEI. La loi de contrôle ne concerne que les couples  $M_S$  et  $M_E$  pour se rapprocher du comportement d'une personne vivant avec une LMÉ.

**Modèle pour l'observation :**

$$\begin{cases} E(q)\dot{x} = A(x)x + S(q) + Bu(t) \\ y = Cx \end{cases} \quad (3.4)$$

$$E(q) = \begin{bmatrix} I_3 & 0_3 \\ 0_3 & \tilde{E}(q) \end{bmatrix}, \quad A(x) = \begin{bmatrix} 0_3 & I_3 \\ 0_3 & \tilde{A}(x) \end{bmatrix}, \quad S(q) = \begin{bmatrix} 0_3 \\ \tilde{S}(q) \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0_3 \\ I_3 \end{bmatrix}, \quad C = [I_3 \quad 0_3]$$

et le détail des matrices est donné en Annexes.

**Remarque 2**

Les non linéarités présentes dans la matrice  $S(q)$  dans (3.3) dépendent uniquement des valeurs mesurées de l'état, ce point sera utilisé plus avant pendant la définition de l'OEI.

**Remarque 3**

En décomposant les fonctions  $\cos(q_1 + q_2)$  et  $\sin(q_1 + q_2)$  en produits de cosinus et sinus, 10 termes non linéaires sont identifiés dans le modèle (3.3) à savoir  $z_1(\dot{q}_0) = \dot{q}_0$ ,  $z_2(\dot{q}_1) = \dot{q}_1$ ,  $z_3(\dot{q}_2) = \dot{q}_2$ ,  $z_4(q_1) = \cos(q_1)$ ,  $z_5(q_1) = \sin(q_1)$ ,  $z_6(q_2) = \cos(q_2)$  and  $z_7(q_2) = \sin(q_2)$ ,  $z_8(q_0) = \frac{\sin(q_0)}{q_0}$ ,  $z_9(q_0, q_1) = \frac{\sin(q_0 + q_1)}{q_0 + q_1}$  et  $z_{10}(q_0, q_1, q_2) = \frac{\sin(q_0 + q_1 + q_2)}{q_0 + q_1 + q_2}$ . Ce qui représente donc un modèle T-S d'ordre 6 avec  $2^{10} = 1024$  sous-modèles linéaires. Il est probable que le problème LMI associé, pour l'obtention de gains de contrôle comme d'observation, soit trop lourd d'un point de vue computationnel pour trouver des solutions (Lam and Leung, 2010). Il est donc nécessaire de se pencher sur les techniques existantes de réductions de modèle.

## 2. Stabilisation et réduction du nombre de non linéarités

### 2.1. Loi de contrôle et motivation

L'objectif de la loi de contrôle proposée est de stabiliser le pendule S3S uniquement par les articulations des épaules et des coudes. Dans cette partie, le formalisme du modèle (3.3) est utilisé et l'approche proposée, détaillée en Annexes, consiste en une loi de contrôle partiellement linéarisante qui permet d'obtenir le modèle bouclé suivant :

$$\begin{bmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & \tilde{E}(q) \end{bmatrix} \dot{x} = (\Sigma(x) - \Gamma \times L)x \tag{3.5}$$

Avec  $\Sigma(x) = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & I_3 \\ [\tilde{S}_c(q)]_1 & [\tilde{A}(x)]_1 \\ 0_{2 \times 3} & 0_{2 \times 3} \end{bmatrix}$ , la notation  $[Q]_i$  représente la  $i^e$  ligne de la matrice  $Q$ ,

$\Gamma = \begin{bmatrix} 0_{4 \times 2} \\ I_2 \end{bmatrix}$  et  $L \in \mathbb{R}^{2 \times 6}$  les gains de contrôle à déterminer par LMI. Le modèle contrôlé (3.5)

contient neuf non linéarités :

- 3 dans la matrice  $\tilde{E}(q)$  :  $\cos(q_1)$ ,  $\cos(q_2)$ ,  $\cos(q_2 + q_1)$
- 3 dans la matrice  $[\tilde{S}_c(q)]_1$  :  $\frac{\sin(q_0)}{q_0}$ ,  $\frac{\sin(q_0 + q_1)}{q_0 + q_1}$  et  $\frac{\sin(q_0 + q_1 + q_2)}{q_0 + q_1 + q_2}$
- 3 dans la matrice  $[\tilde{A}(x)]_1$  : des produits de  $\dot{q}$  et  $\sin(q)$

Ce qui amène au même problème soulevé dans la Remarque 3, avec  $2^9 = 512$  sous-modèles linéaires, la complexité du calcul LMI est telle que le solveur ne parvient pas à calculer une solution. Dans cette situation, plusieurs possibilités existent pour permettre la faisabilité du calcul LMI : 1. Réduire la taille du domaine de validité du modèle TS ; 2. Réduire le modèle en diminuant son

nombre de non linéarités. La première possibilité ne peut être retenue notamment compte tenu de la nature instable du modèle.

Pour la commande, il est possible raisonner de deux manières : une partie des non linéarités peut être « absorbée » par la robustesse de la loi (Chadli et al., 2014), i.e. une partie des matrices est donc remplacée par des incertitudes ; une seconde est de profiter de certaines « similarités » entre non linéarités, à l’instar de ce qui a été fait dans le chapitre précédent sur le modèle H2AT.

Les 2 approches sont utilisées. Tout d’abord, les 3 non linéarités de  $[\tilde{A}(x)]_1$  sont réécrites sous forme d’incertitudes réduisant le nombre de sommets à  $2^6 = 64$ , les détails des calculs sont précisés en Annexes. Puis les similarités (basées sur les développements limités de Taylor) des non linéarités permettent alors de proposer un modèle à  $2^4 = 16$  sommets qui est parfaitement compatible avec les solveurs actuels. La méthode utilisée est expliquée dans la partie suivante.

## 2.2. Méthode de réduction

Considérons deux fonctions bornées  $f(x)$  et  $g(x)$  de type  $C^\infty$ , i.e. continue et dérivable à l’infini, sur l’intervalle  $x \in [\underline{x}, \bar{x}]$  telles que  $\bar{w}_f(x) = \frac{\bar{f} - f(x)}{\bar{f} - \underline{f}}$  et  $\bar{w}_g(x) = \frac{\bar{g} - g(x)}{\bar{g} - \underline{g}}$ , l’approche classique par secteurs non linéaires (Ohtake et al., 2001) permet d’écrire :

$$f(x) = \bar{w}_f(x)\underline{f} + (1 - \bar{w}_f(x))\bar{f} \quad (3.6)$$

$$g(x) = \bar{w}_g(x)\underline{g} + (1 - \bar{w}_g(x))\bar{g} \quad (3.7)$$

De par leur propriété  $C^\infty$ , les deux fonctions peuvent être écrites selon le développement limités de Taylor :

$$f(x) = f_0 + f_1x + \dots + f_ix^i + o(x^{i+1}) \quad (3.8)$$

$$g(x) = g_0 + g_1x + \dots + g_ix^i + o(x^{i+1}) \quad (3.9)$$

Avec  $f_i = \frac{f^{(i)}}{i!}$  et  $g_i = \frac{g^{(i)}}{i!}$ , la méthode proposée (Guerra et al., 2018) vise à réécrire  $g(x)$  en utilisant  $w_f(x)$ , la fonction d’appartenance de  $f(x)$ , définie en (3.6) afin de réduire le nombre de sous-modèles linéaires dans le modèle T-S. Cela revient à approximer  $g(x)$  par  $g_{app}(x)$  telle que :

$$g_{app}(x) = \bar{w}_f(x)\underline{g}_{app} + (1 - \bar{w}_f(x))\bar{g}_{app} + g_f \quad (3.10)$$

Pour ce faire, on suppose une relation linéaire en  $w_f(x)$  et  $w_g(x)$ , i.e. il existe  $\lambda_f$  et  $\lambda_0$  tels que :  $w_g(x) = \lambda_f w_f(x) + \lambda_0$ , alors (3.10) peut s’écrire comme :

$$g_{app}(x) = (\lambda_f \bar{w}_f(x) + \lambda_0)\underline{g} + (1 - \lambda_f \bar{w}_f(x) - \lambda_0)\bar{g} \quad (3.11)$$

Et ainsi :

$$g_{app}(x) = \bar{w}_f(x) \left( \lambda_f \underline{g} + (1 - \lambda_f) \bar{g} \right) + (1 - \bar{w}_f(x)) \bar{g} + \lambda_0 (\underline{g} - \bar{g}) \quad (3.12)$$

L'analogie avec (3.10) est directe. L'erreur d'approximation  $e_g(x)$  est définie telle que :

$$\begin{aligned} e_g(x) &= g(x) - g_{app}(x) \\ e_g(x) &= g(x) - \bar{w}_f(x) \left( \lambda_f \underline{g} + (1 - \lambda_f) \bar{g} \right) - (1 - \bar{w}_f(x)) \bar{g} - \lambda_0 (\underline{g} - \bar{g}) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Il faut maintenant trouver les meilleurs paramètres  $\lambda_f$  et  $\lambda_0$  afin de minimiser l'erreur  $e_g(x)$ . La méthode choisie est celle des moindres carrés. L'équation (3.12) est réécrite sous la forme suivante :

$$g_{app}(x) = \begin{bmatrix} \underline{g} - \bar{g} & \bar{w}_f(x) (\underline{g} - \bar{g}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_f \end{bmatrix} + \bar{g} \quad (3.14)$$

Ainsi en combinant (3.13) avec (3.14) on obtient :

$$e_g(x) = g(x) - \bar{g} - (\underline{g} - \bar{g}) \begin{bmatrix} 1 & \bar{w}_f(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_f \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Qu'on peut écrire sous la forme :

$$e_g(x) = y(x) - \phi(x) \lambda \quad (3.16)$$

Avec  $\phi(x) = (\underline{g} - \bar{g}) \begin{bmatrix} 1 & \bar{w}_f(x) \end{bmatrix}$ ,  $\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_f \end{bmatrix}$  et  $y(x) = g(x) - \bar{g}$ . Un total  $N$  points  $(x_i, y(x_i))$

est calculé dans le but de minimiser le terme  $\sum_{i=1}^N e_{g_i}^2$ , la solution est :

$$\lambda_{opt} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T Y \quad (3.17)$$

Avec  $\Phi = \begin{bmatrix} \phi(x_1) \\ \vdots \\ \phi(x_N) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times 2}$  et  $Y = \begin{bmatrix} y(x_1) \\ \vdots \\ y(x_N) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ .

### 2.3. Application au modèle S3S

Dans le contexte du modèle S3S, la remarque initiale à l'origine de cette réflexion  $\frac{\sin(x)}{x} \approx \cos(x)$

(Tirmant et al., 2004) les développements limités de Taylor s'écrivent  $\frac{\sin(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)$  et

$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ . Ainsi en appliquant la procédure à l'approche des secteurs non linéaires

avec  $x \in [-115^\circ, 115^\circ] (\pm 2\pi \text{ rad})$ ,  $f(x) = \cos(x)$  et  $g(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ , le résultat obtenu est :

$$\left. \frac{\sin(x)}{x} \right|_{app} = w_f(x) \times \cos(115^\circ) + (1 - w_f(x)) \times \cos(0^\circ) \quad (3.18)$$

Avec

$$w_f(x) = \lambda_f \frac{1 - \cos(x)}{1 - \cos(2)} + \lambda_0 \quad (3.19)$$

Les paramètres optimaux calculés avec (3.17) sont  $\lambda_0 = -0.014$  et  $\lambda_f = 0.9762$ . Ainsi l'erreur d'approximation maximale est  $|g(x) - g_{app}(x)| \leq 0.0206$  (soit 3.8% d'erreur) Fig. 46.

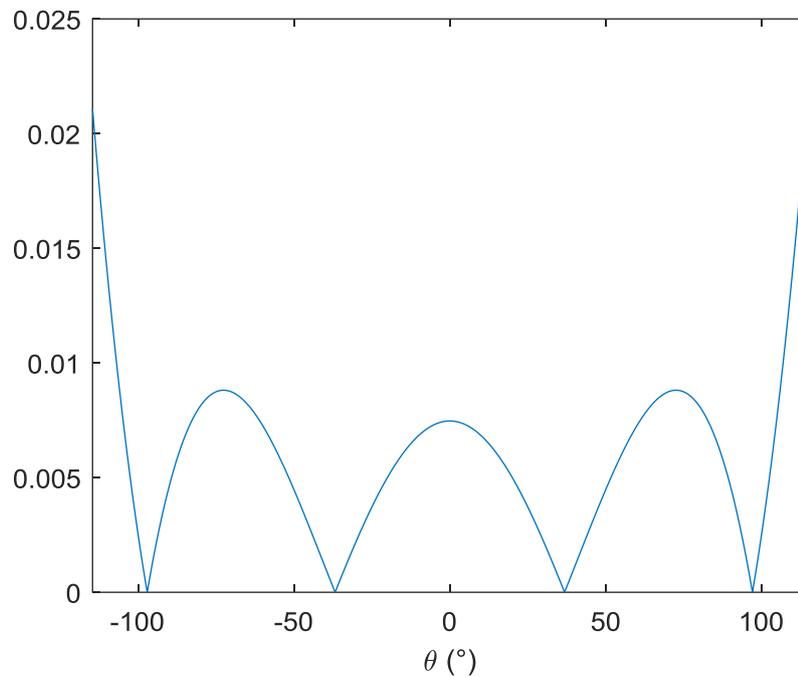


FIG. 46 : ERREUR D'APPROXIMATION DE  $\sin(\theta)/\theta$  PAR  $\cos(\theta)$

Pour appliquer au modèle S3S, les développements suivants sont utilisés :

$$\sin(q_1 + q_0) = \sin(q_1)\cos(q_0) + \sin(q_0)\cos(q_1) = \begin{bmatrix} \frac{\sin(q_0)}{q_0} \cos(q_1) & \frac{\sin(q_1)}{q_1} \cos(q_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \end{bmatrix}$$

On peut alors montrer que 4 non linéarités suffisent à représenter complètement le modèle S3S (on rappelle que  $[\tilde{A}(x)]_1$  est décrit sous forme d'incertitudes); elles correspondent à :  $\cos(q_0)$ ,

$\cos(q_1)$ ,  $\cos(q_2)$  et  $\cos(q_2 + q_1)$ . À chaque fois que le modèle utilise  $\frac{\sin(q)}{q}$ , il est remplacé par

le  $\cos(q)$  équivalent et les sommets du polytope dépendront des  $\lambda_{opt}$  calculés en fonction du domaine considéré de l'angle  $q$ .

Grâce à la combinaison de cette méthode avec l'approche robuste détaillée en Annexes, les conditions LMI de stabilisation du modèle (3.5) sont calculées et un gain de contrôle linéaire est

obtenu  $L = 10^4 \times \begin{bmatrix} 6.7342 & -1.4700 & -0.3034 & 0.7503 & -0.2104 & -0.0371 \\ 2.9317 & -0.6465 & -0.1374 & 0.3261 & -0.0924 & -0.0177 \end{bmatrix}$ .

L'efficacité de la loi de contrôle est testée par simulation du modèle non linéaire (3.3) avec une perturbation sinusoïdale appliquée à la vitesse angulaire du tronc Fig. 47. On voit sur la Fig. 48 que les angles articulaires convergent vers 0°, la position d'équilibre une fois la perturbation terminée sous l'action des couples articulaires Fig. 49.

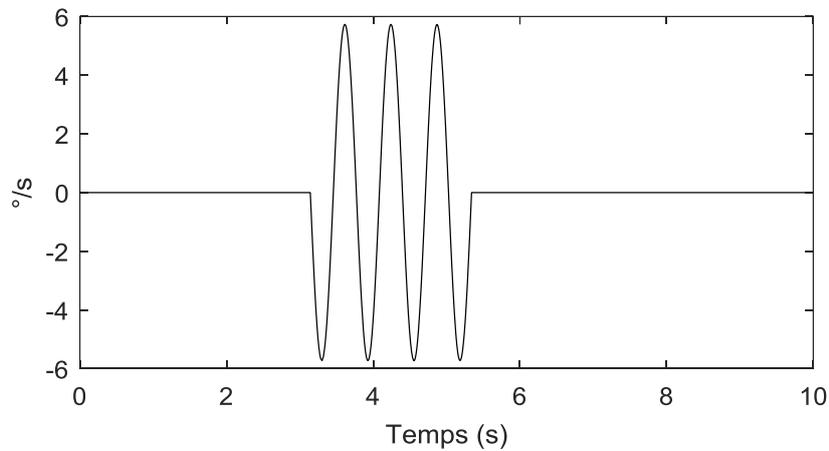


FIG. 47 : SIGNAL DE PERTURBATION

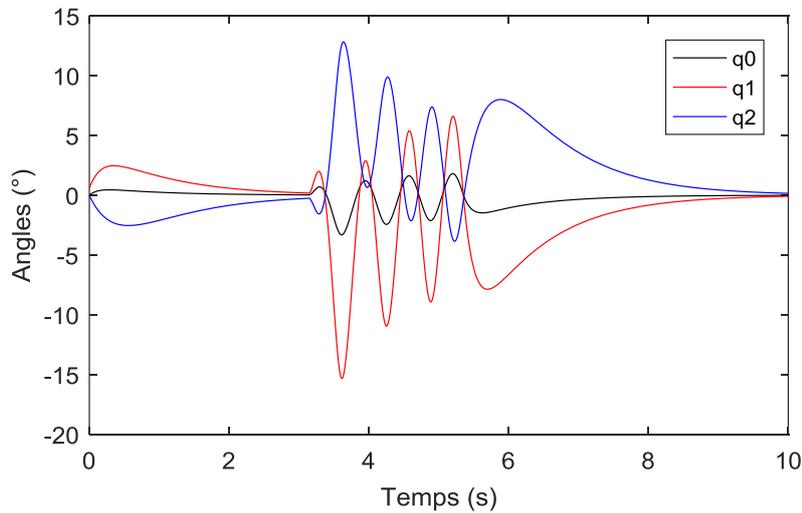


FIG. 48 : ANGLES ARTICULAIRES

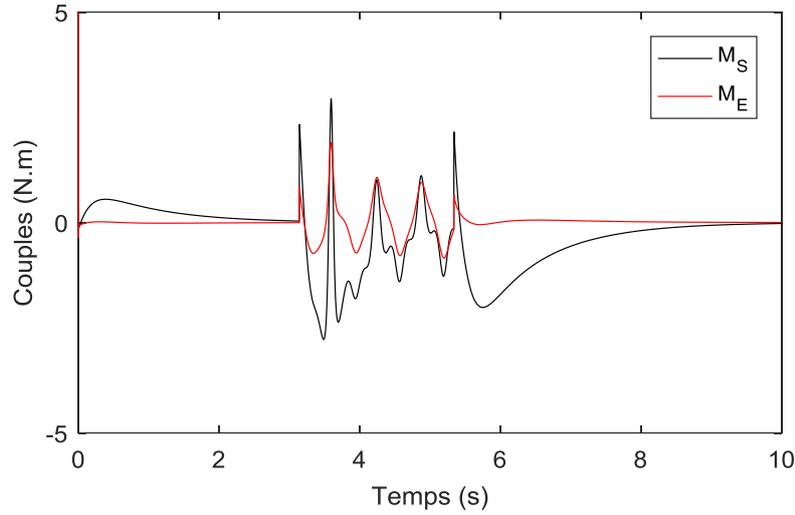


FIG. 49 : COUPLES ARTICULAIRES

## 2.4. Passage en discret

En vue d'une expérimentation future avec un robot actionné, une version discrète (directement exploitable sur une carte de commande) est élaborée en reprenant les différentes étapes du domaine continu. En partant de (3.3) une discrétisation par la méthode d'Euler donne directement le modèle suivant avec  $s$  la période d'échantillonnage :

$$\begin{cases} E(q_k)x_{k+1} = A_d(x_k)x_k + sBu_k \\ y_k = Cx_k \end{cases} \text{ avec } A_d(x_k) = sA(x_k) + E(q_k) \quad (3.20)$$

Les matrices sont définies après (3.3). En écrivant que  $A_d(x_k) = \begin{bmatrix} I_3 & sI_3 \\ sS(q_k) & s\bar{A}(x_k) + \bar{E}(q_k) \end{bmatrix}$ ,

(3.20) devient :

$$\begin{bmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & \bar{E}(q_k) \end{bmatrix} x_{k+1} = \begin{bmatrix} I_3 & sI_3 \\ sS(q_k) & \tilde{A}_d \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} \\ sI_3 \end{bmatrix} u_k \quad (3.21)$$

Avec  $\tilde{A}_d = s\bar{A}(x_k) + \bar{E}(q_k)$ , on rappelle que  $u_k = [M_T \quad M_S \quad M_E]^T \in \mathbb{R}^3$  et que, pour simuler le contrôle d'une personne vivant avec une LMÉ,  $M_T$  est inopérant. Il convient donc de commander (3.21) avec les seules entrées  $M_S$  et  $M_E$ . Pour ce faire la loi de commande suivante est considérée :

$$u_k = - \left( \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S(q_k) & \bar{A}(x_k) + \frac{1}{s}\bar{E}(q_k) \end{bmatrix} + \frac{1}{s} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} L(x_k) \right) x_k \quad (3.22)$$

La première partie permet de linéariser  $[\tilde{A}_d]_2$  et  $[\tilde{A}_d]_3$ , la seconde de piloter le modèle restant avec  $L(x_k) \in \mathbb{R}^{2 \times 6}$  la partie de la commande à déterminer. On aboutit au modèle en boucle fermée par l'état suivant :

$$E(q_k)x_{k+1} = (\Sigma(x_k) - \Gamma \times L(x_k))x_k \quad (3.23)$$

Avec :  $\Sigma(x_k) = \begin{bmatrix} I_3 & sI_3 \\ [sS(q_k)]_1 & [s\bar{A}(x_k) + \bar{E}(q_k)]_1 \\ 0_{2 \times 3} & 0_{2 \times 3} \end{bmatrix}$  et  $\Gamma = \begin{bmatrix} 0_{4 \times 2} \\ I_2 \end{bmatrix}$ . En écrivant  $L(x) = K_{hh-}G_{h-}^{-1}$ ,

selon les travaux de (Estrada-Manzo, Z. Lendek, et al., 2015), un problème de contraintes LMI est obtenu qui consiste à trouver  $G_{z-}$ ,  $P_{z-}$ ,  $R_{z-}$  et  $K_{zz-}$  tels que :

$$\begin{bmatrix} -G_{h-} - G_{h-}^T + P_{h-} & (*) & (*) \\ \Sigma_h G_{h-} - \Gamma K_{hh-} & -E_h R_{h-} - (*) & (*) \\ 0 & R_{h-} & -P_h \end{bmatrix} < 0 \quad (3.24)$$

On retrouve le même problème de complexité des conditions LMI que dans le domaine continu, à savoir  $2^9 = 512$  sommets (et plus de  $512^2 = 260000$  règles due à la double somme  $K_{hh-}$ ), ce qui est incompatible avec les solveurs actuels. Les mêmes techniques de réduction ont été utilisées, i.e. considérer les non linéarités de  $[\tilde{A}(x)]_1$  en termes d'incertitudes et utiliser la méthode de réduction par similarité de développement limités de Taylor, pour arriver à une représentation à  $2^4 = 16$  sommets. Sans entrer dans les détails, (3.23) est transformé en modèle incertain :

$$E(q_k)x_{k+1} = (\Sigma(x_k) + s\Delta\Sigma(x_k) - \Gamma \times L(x_k))x_k \quad (3.25)$$

Avec  $\Delta\Sigma(x) = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{1 \times 3} & [\bar{A}(x)]_1 \\ 0_{2 \times 3} & 0_{2 \times 3} \end{bmatrix} = [e_4 \quad e_4 \quad e_4] \begin{bmatrix} a_{11}(x) & 0 & 0 \\ 0 & a_{12}(x) & 0 \\ 0 & 0 & a_{13}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_4^T \\ e_5^T \\ e_6^T \end{bmatrix}$ , où on utilise les

vecteurs de la base orthonormale  $e_i^T = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots \end{bmatrix}$ . Une écriture classique des

incertitudes est alors utilisée  $a_{1i}(x_k) = \delta_i(x_k)f_i$  et  $|\delta_i(x_k)| < 1$  :

$$\Delta\Sigma(x_k) = H\delta(x_k)F, \quad H = [e_4 \quad e_4 \quad e_4], \quad F = \begin{bmatrix} f_1 e_4^T \\ f_2 e_5^T \\ f_3 e_6^T \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

L'extension de (3.24) au cas (3.25) se fait de façon standard (Estrada-Manzo, 2015) et aboutit à :

Trouver  $G_{h-}$ ,  $P_{h-}$ ,  $R_{h-}$  et  $K_{hh-}$  tels que :

$$\begin{bmatrix} -G_{h-} - G_{h-}^T + P_{h-} & (*) & (*) & 0 & 0 \\ sFG_{h-} & -s\mu I & 0 & 0 & 0 \\ \Sigma_h G_{h-} - \Gamma K_{hh-} & 0 & -E_h R_{h-} - R_{h-}^T E_h^T & (*) & (*) \\ 0 & 0 & s\mu H^T & -s\mu I & 0 \\ 0 & 0 & R_{h-} & 0 & h \end{bmatrix} < 0 \quad (3.27)$$

Il y a donc  $2^4 \times 2^4 = 256$  contraintes LMIs dans (3.27). Un test de simulation est réalisé pour stabiliser le modèle non linéaire (3.21) par la loi de commande (3.22) avec la même perturbation sinusoïdale appliquée à la vitesse angulaire du tronc Fig. 47. Comme pour la simulation dans le domaine continue, les angles articulaires affichés sur la Fig. 50 convergent vers  $0^\circ$ , la position d'équilibre. L'action des couples articulaires est présentée Fig. 51 et le profil des couples est très similaire à celui .

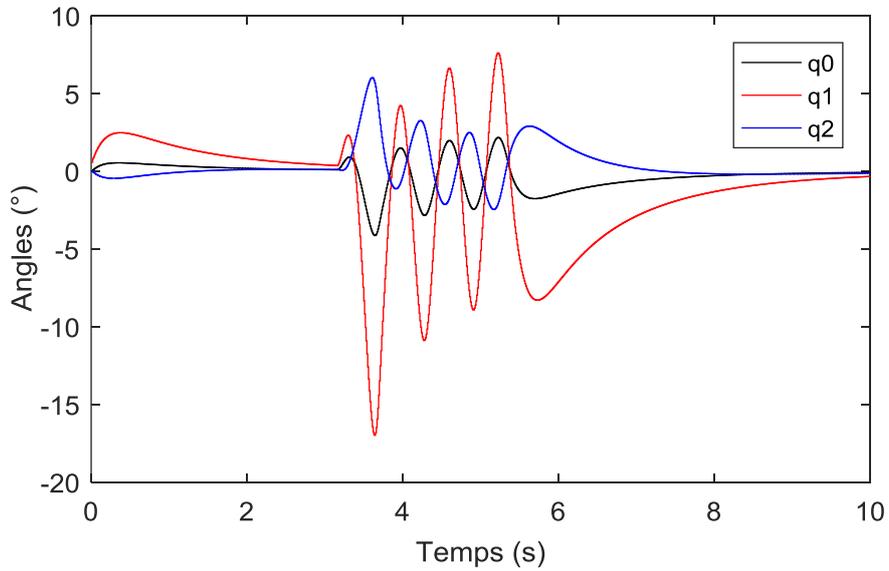


FIG. 50 : DISCRET : ANGLES ARTICULAIRES

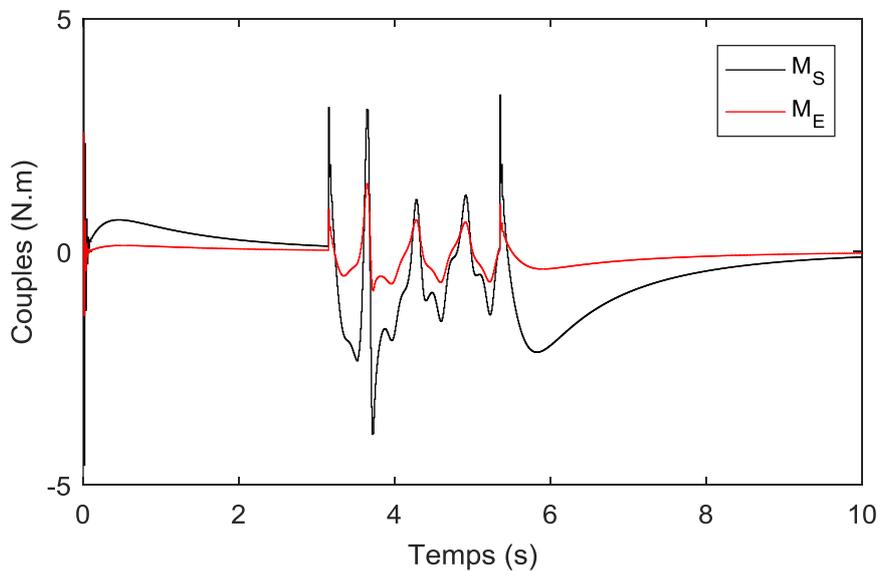


FIG. 51 : DISCRET : COUPLES ARTICULAIRES

Comme le modèle S3S est instable en boucle ouverte, une loi de contrôle est nécessaire à sa stabilisation. Le nombre de sommets auquel aboutit la méthode par secteur non linéaires sur le modèle S3S est trop important pour pouvoir être compatible avec un problème de commande mis sous forme de contraintes LMI. Deux méthodes de réduction du nombre de non linéarités sont donc utilisées de manière successive. Tout d'abord une approche robuste sur les termes de la matrice

$[\tilde{A}_d]$ , puis une méthode d'approximation basée sur les similarités des développements limités de Taylor des non linéarités du modèle. On aboutit alors, dans les domaines continu et discret, à des problèmes de contraintes LMI compatibles avec les solveurs existant ce qui permet de stabiliser le modèle S3S par simulation.

### 3. Observation

Dans ce cadre de l'observation, le formalisme du modèle (3.4) est utilisé afin de faire la séparation entre les matrices définies par des variables mesurées ( $S(q)$ ) et non mesurées ( $A(x)$ ).

#### 3.1. Le modèle T-S discret

Comme discuté dans le chapitre précédent, le modèle (3.4) est discrétisé par la méthode d'Euler, ce qui donne :

$$\begin{cases} E(q_k)x_{k+1} = A_d(x_k)x_k + S_d(q_k) + B_d u_k \\ y_k = Cx_k \end{cases} \quad (3.28)$$

Avec le vecteur d'état discret  $x_k = [q_k^T \quad \dot{q}_k^T]^T = [q_{0_k} \quad q_{1_k} \quad q_{2_k} \quad \dot{q}_{0_k} \quad \dot{q}_{1_k} \quad \dot{q}_{2_k}]^T \in \mathbb{R}^6$ , les matrices  $A_d(x_k) = s \times A(x_k) + E(q_k)$ ,  $S_d(q_k) = s \times S(q_k)$ ,  $B_d = s \times B$ ,  $s$  est la période d'échantillonnage et  $u_k = [M_{T_k} \quad M_{S_k} \quad M_{E_k}]^T \in \mathbb{R}^3$  est l'entrée du modèle.

Les données anatomiques de flexion/extension des membres supérieurs (Kapandji, 2005a, 2005b) permettent de définir l'ensemble compact suivant pour les variables du modèle en mètre, ° et °/s (les angles positifs (resp. négatifs) correspondent à de la flexion (resp. extension)):

$$\Omega_x = \left\{ \begin{array}{l} -20 \leq q_1 \leq 60 \\ -10 \leq q_2 \leq 45 \end{array} , \begin{array}{l} \|\dot{q}_0\| \leq 29 \\ \|\dot{q}_1\| \leq 57 \\ \|\dot{q}_2\| \leq 57 \end{array} \right\} \quad (3.29)$$

En appliquant sur (3.28) la méthode de non linéarités par secteurs définie sur l'ensemble compact (2.1), le modèle T-S suivant est obtenu :

$$\begin{cases} E_h x_{k+1} = A_h x_k + S_d(q_k) + B_d d_k \\ y_k = Cx_k \end{cases} \quad (3.30)$$

Avec  $d_k \in \mathbb{R}^3$  est l'entrée inconnue à estimer, les matrices  $E_h = \sum_{i=1}^r h_i(z) E_i$  et  $A_h = \sum_{i=1}^r h_i(z) A_{d_i}$  représentent les sommes convexes  $\sum_{i=1}^r h_i(z) = 1$  et  $0 \leq h_i(z) \leq 1$ ,  $i \in \{1, \dots, r\}$ . Sept termes non linéaires sont utilisés pour la création de l'OEI à savoir  $z_1(\dot{q}_0) = \dot{q}_0$ ,  $z_2(\dot{q}_1) = \dot{q}_1$ ,  $z_3(\dot{q}_2) = \dot{q}_2$ ,  $z_4(q_1) = \cos(q_1)$ ,  $z_5(q_1) = \sin(q_1)$ ,  $z_6(q_2) = \cos(q_2)$  et

$z_7(q_2) = \sin(q_2)$ . Tous sont bornés dans l'ensemble compact (2.1) ce qui fait  $r = 2^7 = 128$  règles et les fonctions d'appartenance sont donc créés selon la formule suivante :

$$w_0^j(\cdot) = \frac{z_j(\cdot) - \underline{z}_j}{\bar{z}_j - \underline{z}_j}, \quad w_1^j(\cdot) = 1 - w_0^j(\cdot), \quad j \in \{1, \dots, 7\} \quad (3.31)$$

Les fonctions d'appartenance sont définies selon la notation suivante :

$$h_i = h_{\delta_1^i \times 2^{p-1} + \dots + \delta_6^i \times 2 + \delta_7^i + 1} = \prod_{j=1}^7 w_{\delta_j^i}^j(z_j) \quad (3.32)$$

Où  $i = \delta_1^i \times 2^{p-1} + \dots + \delta_6^i \times 2 + \delta_7^i + 1 \in \{1, \dots, 2^7\}$  est le nombre de règles,  $j \in \{1, \dots, 7\}$  et  $\delta_j^i \in \{0, 1\}$  est un digit. Par exemple,  $h_{10} = w_0^1 \times w_0^2 \times w_0^3 \times w_1^4 \times w_0^5 \times w_0^6 \times w_1^7$  et les matrices associées sont  $(E_{10}, A_{10}) = (E(\bar{z}_4, \underline{z}_5, \underline{z}_6, \bar{z}_7), A_d(\underline{z}_1, \underline{z}_2, \underline{z}_3, \bar{z}_4, \underline{z}_5, \underline{z}_6, \bar{z}_7))$ . La forme T-S (3.30) est donc une représentation *exacte* du modèle non linéaire discret (3.28). Afin de capturer la dynamique de l'entrée inconnue, un intégrateur du 2<sup>e</sup> ordre est utilisé (ce choix permet de trouver un bon compromis entre complexité de calcul et précision des résultats obtenus), cette forme classique s'écrit  $(z-1)^2 d_k \approx 0$ , ce qui donne :

$$D_{k+1} = \Gamma \times D_k \Leftrightarrow \begin{bmatrix} d_{k+1} \\ d_{k+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_3 & I_3 \\ -I_3 & 2 \times I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_k \\ d_{k+1} \end{bmatrix}, \quad (3.33)$$

Ainsi, en combinant (3.30) et (2.41), le système étendu est écrit :

$$\begin{cases} E_h^e x_{k+1}^e = A_h^e x_k^e + S^e(q_k) \\ y_k = C^e x_k^e \end{cases} \quad (3.34)$$

Avec le vecteur d'état augmenté  $x_k^e = \begin{bmatrix} x_k^T & D_k^T \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{12}$ ,  $C^e = [C \quad 0_{3 \times 6}]$ ,  $E_h^e = \begin{bmatrix} E_h & 0_6 \\ 0_6 & I_6 \end{bmatrix}$ ,

$$A_h^e = \begin{bmatrix} A_h & [B_d \quad 0_{6 \times 3}] \\ 0_6 & \Gamma \end{bmatrix} \text{ et } S^e(q_k) = \begin{bmatrix} S_d(q_k) \\ 0_6 \end{bmatrix}.$$

### 3.2. Obtention de l'OEI

Les travaux de (Estrada-Manzo et al., 2016b), sont utilisés et la formule de l'OEI est donc :

$$\begin{cases} E_h^e \hat{x}_{k+1}^e = A_h^e \hat{x}_k^e + S^e(q_k) + H(q_k)^{-1} K_h (y_k - \hat{y}_k) \\ \hat{y}_k = C^e \hat{x}_k^e \end{cases} \quad (3.35)$$

Avec  $\hat{x}_k^e = \begin{bmatrix} \hat{x}_k^T & \hat{D}_k^T \end{bmatrix}^T$ , le vecteur étendu d'observation. Les matrices  $H(q_k) \in \mathbb{R}^{12 \times 12}$  et  $K_h \in \mathbb{R}^{12 \times 3}$  sont les variables de l'observateur à déterminer. La structure polytopique de  $H(q_k)$

sera discutée plus avant. L'erreur d'observation est définie comme  $e_k = x_k^e - \hat{x}_k^e$ . Pour obtenir sa dynamique on utilise  $e_{k+1} = x_{k+1}^e - \hat{x}_{k+1}^e$ , comme  $E_h^e$  est bien défini, i.e. son inverse existe pour tout  $q_k$ , c'est équivalent à :  $E_h^e e_{k+1} = E_h^e x_{k+1}^e - E_h^e \hat{x}_{k+1}^e$  et on obtient :

$$E_h^e e_{k+1} = \left( A_h^e - H(q_k)^{-1} K_h C^e \right) e_k \quad (3.36)$$

En considérant une fonction quadratique de Lyapunov:

$$V(e_k) = e_k^T P e_k, \quad P = P^T > 0. \quad (3.37)$$

### Théorème 1 :

La dynamique de l'erreur (3.36) asymptotiquement stable s'il existe des matrices  $P = P^T > 0$ ,  $H_{1,i}, H_2, H_{3,i} \in \mathbb{R}^{12 \times 3}$ ,  $K_i \in \mathbb{R}^{12 \times 3}$  telles que les conditions LMI suivantes soient vérifiées :

$$\begin{bmatrix} -\lambda P & \left( \overline{HA}_i^e - K_i C^e \right)^T \\ \overline{HA}_i^e - K_i C^e & P - \overline{HE}_i^e - \left( \overline{HE}_i^e \right)^T \end{bmatrix} < 0, \quad i \in \{1, 2, \dots, 128\}. \quad (3.38)$$

Avec :  $\overline{HA}_i^e = [H_{1,i} \quad H_2 \quad H_{3,i}] A_i^e$  et  $\overline{HE}_i^e = [H_{1,i} \quad H_2 \quad H_{3,i}] E_i^e$ .

### Preuve :

La dynamique de l'erreur (3.36) est réécrite sous la forme :

$$\begin{bmatrix} A_h^e - H(q_k)^{-1} K_h C^e & -E_h^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_k \\ e_{k+1} \end{bmatrix} = 0 \quad (3.39)$$

De même pour la variation de la fonction de Lyapunov  $\Delta V(e_k) = V(e_{k+1}) - \lambda V(e_k)$  avec le taux de décroissance  $0 < \lambda < 1$  :

$$\Delta V(e_k) = \begin{bmatrix} e_k \\ e_{k+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -\lambda P & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_k \\ e_{k+1} \end{bmatrix} < 0. \quad (3.40)$$

En utilisant le Lemme de Finsler (cf. Annexes) pour vérifier l'inégalité (3.40) avec la contrainte (3.39) :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ H(q_k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_h^e - H(q_k)^{-1} K_h C^e & -E_h^e \end{bmatrix} + (*) + \begin{bmatrix} -\lambda P & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix} < 0. \quad (3.41)$$

Ou de façon équivalente :

$$\begin{bmatrix} -\lambda P & (*) \\ H(q_k) A_h^e - K_h C^e & P - H(q_k) E_h^e - \left( H(q_k) E_h^e \right)^T \end{bmatrix} < 0 \quad (3.42)$$

À partir de (3.42), il convient donc de déterminer la forme de  $H(q_k)$  qui permette une mise sous forme de contraintes LMI et de trouver des solutions. Le choix  $H(q_k) = H$  qui est le plus direct et le plus simple amène à un problème LMI qui n'admet aucune solution ; que ce soit avec SeDuMi (Sturm, 1999), MOSEK (MOSEK ApS, 2015) ou le logiciel YALMIP (Löfberg, 2004).

Plusieurs choix sont possibles. Le but étant, au vu de la taille des matrices et du nombre de sommets du polytope de ne pas choisir de solutions amenant à considérer des doubles sommes. Par exemple si on choisit  $H(q_k) = H_h$  on retrouvera dans (3.42) les termes  $H_h A_h^e$  et  $H_h E_h^e$  qui correspondent à  $H_h A_h^e = \sum_{i=1}^{128} \sum_{j=1}^{128} h_i(z) h_j(z) H_i A_j^e$  et le nombre de LMI passe à  $64 \times 129 = 8256$ .

La technique robuste utilisée pour la commande n'est évidemment pas appropriée ici, où il est indispensable de rester au plus proche du modèle non linéaire. Un compromis entre simplicité et liberté dans le choix des variables consiste à créer des degrés de libertés dans la matrice  $H(q_k)$  tout en évitant les produits croisés qui amènent aux doubles sommes. Pour cela, il est possible de profiter de la structure similaire des matrices  $A_h^e$  et  $E_h^e$  qui correspond à :

$$A_h^e = \begin{bmatrix} A_h & [B_d & 0_{6 \times 3}] \\ 0_6 & \Gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_3 & I_3 & 0_3 & 0_3 \\ 0_3 & \sum_{i=1}^r h_i(z) (\tilde{E}_i + s\tilde{A}_i) & I_3 & 0_3 \\ 0_3 & 0_3 & 0_3 & I_3 \\ 0_3 & 0_3 & -I_3 & 2I_3 \end{bmatrix}$$

$$E_h^e = \begin{bmatrix} E_h & 0_6 \\ 0_6 & I_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 \\ 0_3 & \sum_{i=1}^r h_i(z) \tilde{E}_i & 0_3 & 0_3 \\ 0_3 & 0_3 & I_3 & 0_3 \\ 0_3 & 0_3 & 0_3 & I_3 \end{bmatrix}$$

Comme les termes variables de  $A_h^e$  et  $E_h^e$  sont regroupés dans les colonnes 4, 5, 6, la matrice  $H(q_k) = [H_{1,h} \quad H_2 \quad H_{3,h}]$  est définie par blocs avec  $H_{1,h} \in \mathbb{R}^{12 \times 3}$ ,  $H_2 \in \mathbb{R}^{12 \times 3}$  et  $H_{3,h} \in \mathbb{R}^{12 \times 6}$ . Comme  $H_2$  est une matrice constante qui est la seule à multiplier les colonnes 4, 5 et 6, les produits  $H(q_k) A_h^e$  et  $H(q_k) E_h^e$  restent des sommes simples. La notation suivant est utilisée :

$$\begin{aligned} \overline{HA}_i^e &= [H_{1,i} \quad H_2 \quad H_{3,i}] A_i^e \\ \overline{HE}_i^e &= [H_{1,i} \quad H_2 \quad H_{3,i}] E_i^e \end{aligned} \tag{3.43}$$

L'équation (3.42) est alors vérifiée si les conditions LMI (3.42) sont satisfaites. ■

À partir du théorème 1, il est possible de relâcher plus encore les résultats (toujours sans avoir des doubles sommes sur les mêmes instants) en considérant les instants précédents (Guerra et al., 2012), l'observateur (3.35) devient donc :

$$\begin{cases} E_h^e \hat{x}_{k+1}^e = A_h^e \hat{x}_k^e + S^e(q_k) + H_{h-}^{-1} K_{hh-} (y_k - \hat{y}_k) \\ \hat{y}_k = C^e \hat{x}_k^e \end{cases} \quad (3.44)$$

Avec  $K_{hh-} = \sum_{i=1}^{128} \sum_{j=1}^{128} h_i(z(k)) h_j(z(k-1)) K_{ij}$  et  $H_{h-} = \sum_{i=1}^{128} h_i(z(k-1)) H_i$

La fonction de Lyapunov utilisée est dans ce cas non-quadratique et utilise les matrices  $P_h = \sum_{i=1}^{128} h_i(z(k)) P_i$  et  $P_{h-} = \sum_{i=1}^{128} h_i(z(k-1)) P_i$ . La preuve du théorème 1 est reprise en partant de l'équation (3.44) avec la variation de la fonction de Lyapunov suivante :

$$\Delta V(e_k) = \begin{bmatrix} e_k \\ e_{k+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -\lambda P_{h-} & 0 \\ 0 & P_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_k \\ e_{k+1} \end{bmatrix} < 0, \quad (3.45)$$

pour aboutir via le Lemme de Finsler à la forme de contraintes LMI pour  $i, j \in \{1, 2, \dots, 128\}$  :

$$\begin{bmatrix} -\lambda P_j & (*) \\ H_j A_i^e - K_{ij} C^e & P_i - H_j E_i^e - (H_j E_i^e)^T \end{bmatrix} < 0 \quad (3.46)$$

## 4. Résultats de simulations

Les tests de simulations suivent la même procédure que dans le chapitre précédent, le modèle S3S stabilisé (3.5) est simulé. Ce système agit comme une boîte noire de laquelle sont mesurés les angles articulaires  $y_k = [q_{0_k} \quad q_{1_k} \quad q_{2_k}]^T$  pour être ensuite injectés dans l'OEI (3.44) Fig. 52. Un bruit blanc aléatoire filtré par un filtre du second ordre passe-bas avec une fréquence de coupure de 5Hz est ajouté à  $y_k$  afin de représenter le bruit expérimental.

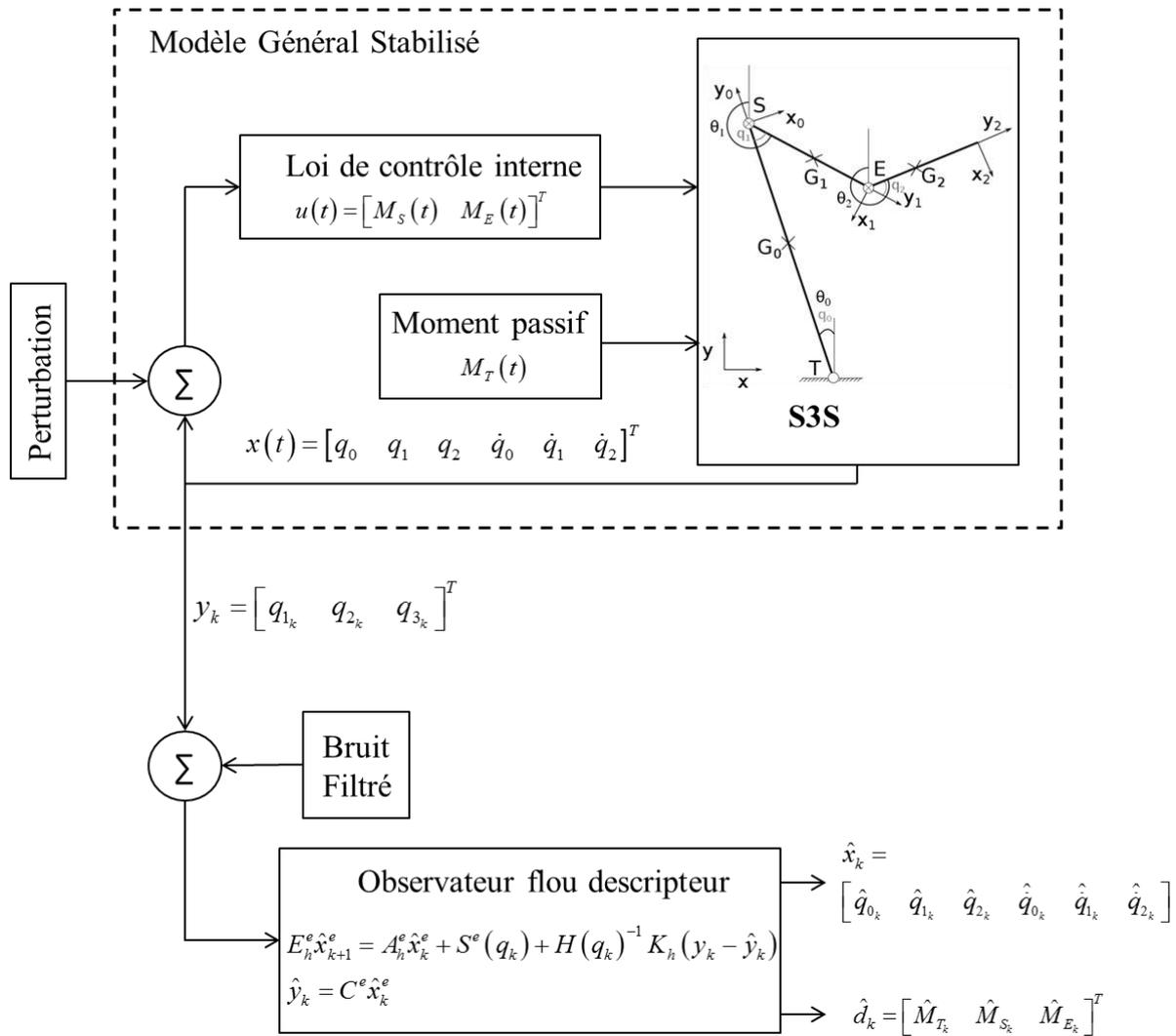


FIG. 52 : PROCÉDURE DE SIMULATION

Les conditions initiales du système S3S sont  $x(0) = [2.3^\circ \ 0 \ 0 \ -17.2^\circ/s \ 0 \ 0]^T$  et  $\hat{x}_k^e(0) = 0_{12 \times 1}$  pour l'OEI. Comme dans le chapitre précédent, l'hypothèse que la période d'échantillonnage  $s = 0.01$  (100Hz) du modèle discret est assez faible est faite, ainsi il est supposé que  $\dot{q}_k \approx \dot{q}_{k-1}$ . La première simulation consiste à imposer un couple passif constant  $M_T = 0.3 \text{ N.m}$ , sur la Fig. 53, cet effort implique un décalage de la position d'équilibre du système car il ne se stabilise pas les angles en zéro. Le moment passif constant et l'erreur d'observation affichés sur la Fig. 54 convergent en moins d'une seconde.

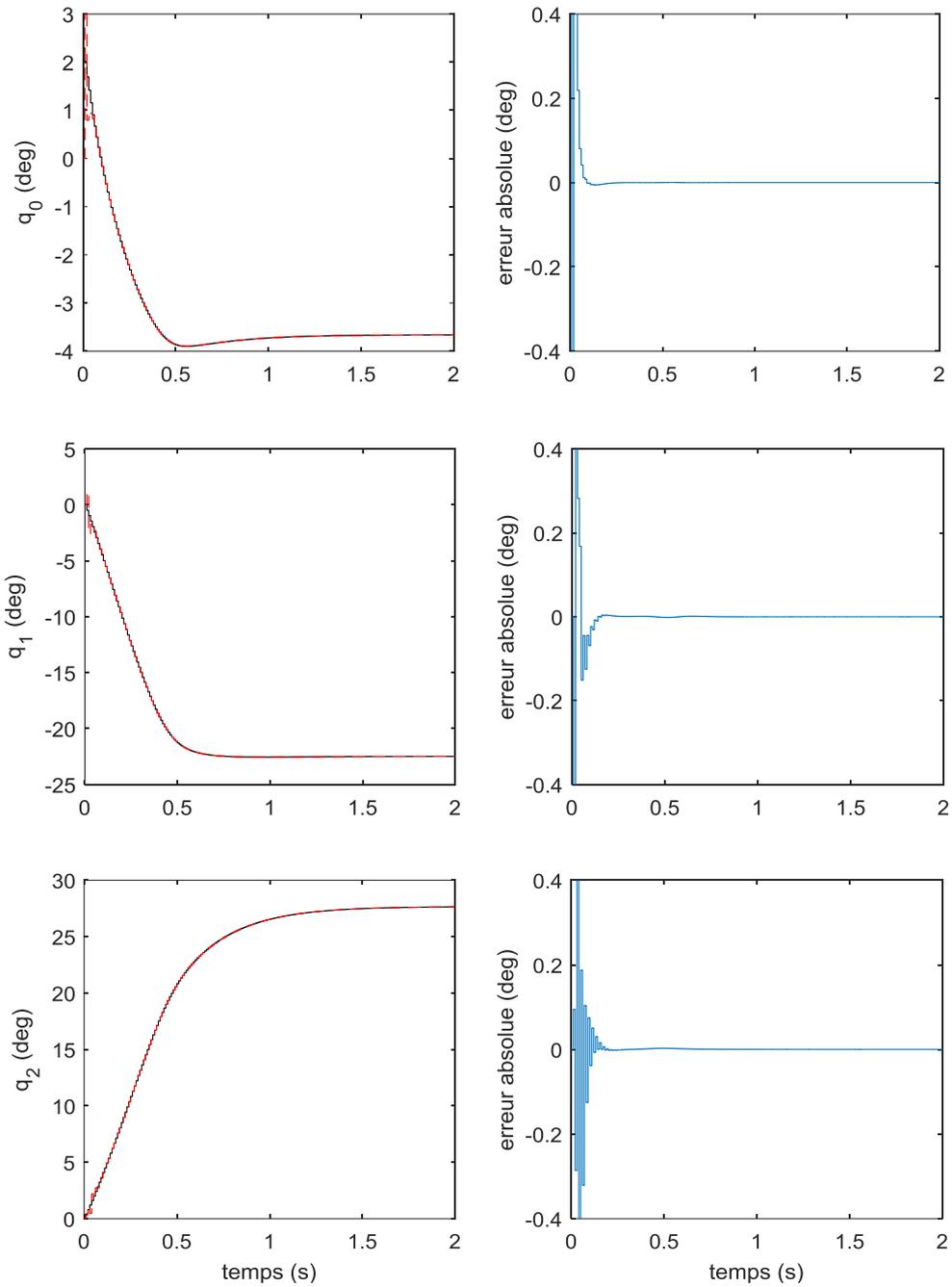


FIG. 53 : ETAT MESURÉS (NOIR) ET ESTIMÉS (ROUGE) AVEC COUPLE PASSIF CONSTANT

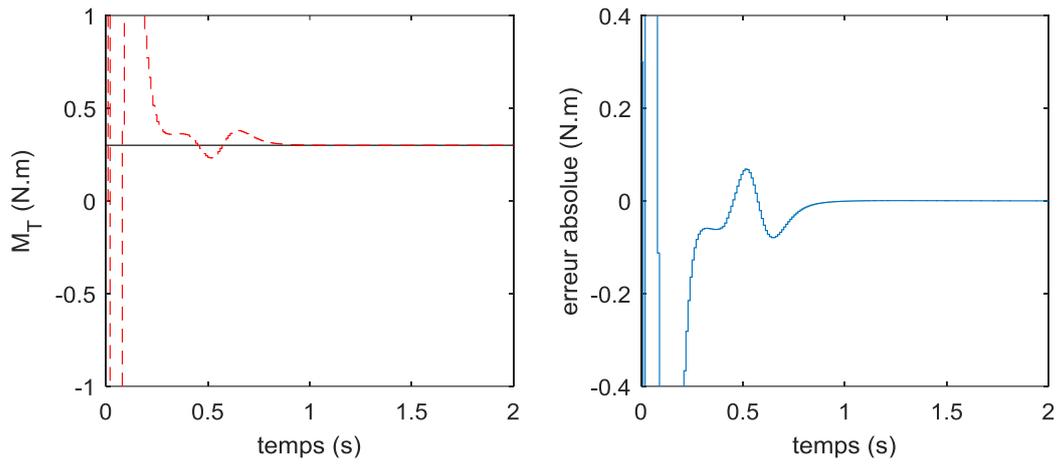


FIG. 54 : MOMENT PASSIF CONSTANT SIMULÉ (NOIR) ET ESTIMÉ (ROUGE)

Dans la deuxième simulation, le couple passif a été arbitrairement défini comme un signal sinusoïdal d'amplitude 0.2 N.m et de fréquence 2Hz. Le résultat d'estimation des angles, vitesses angulaires ainsi que des couples de contrôle et du moment passif lombaire ainsi sont affichés sur les Fig. 55, Fig. 56 et Fig. 57. La convergence est atteinte à partir de 0.5sec de simulation.

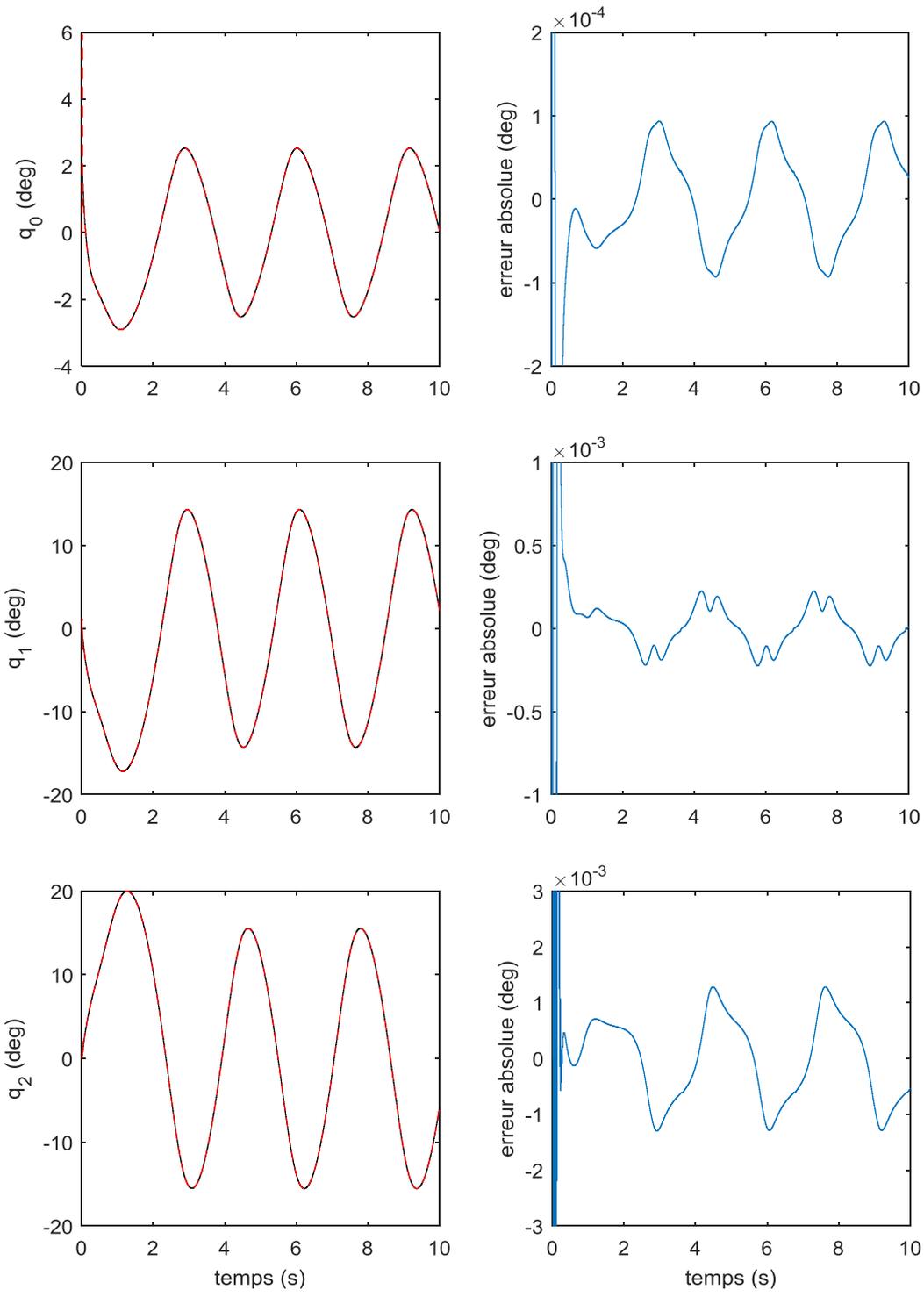


FIG. 55 : GAUCHE : ANGLES ARTICULAIRES SIMULÉS (NOIR) ET ESTIMÉS (ROUGE), DROITE : ERREUR ABSOLUE

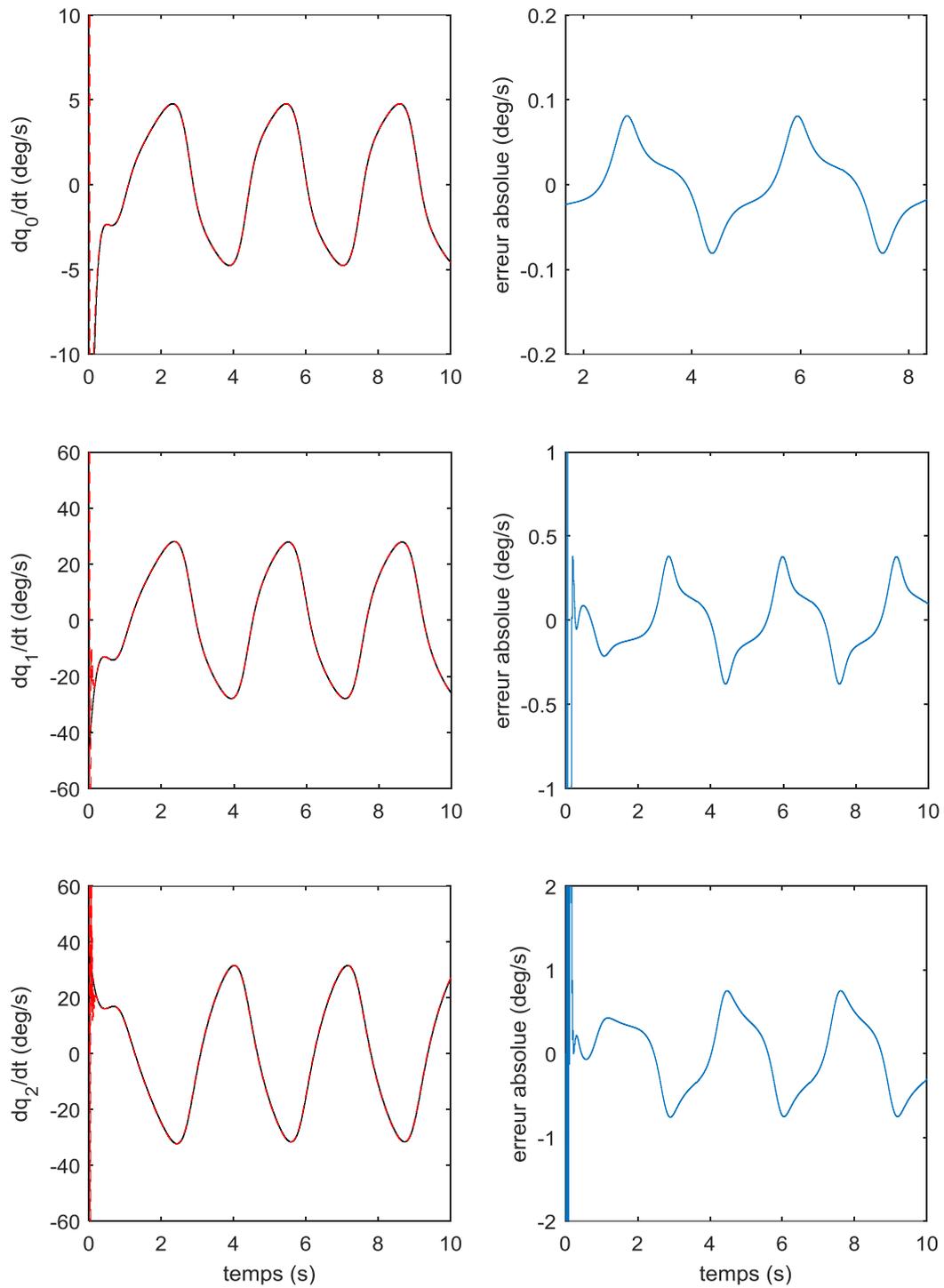


FIG. 56 : GAUCHE : VITESSES ANGULAIRES SIMULÉES (NOIR) ET ESTIMÉES (ROUGE), DROITE : ERREUR ABSOLUE

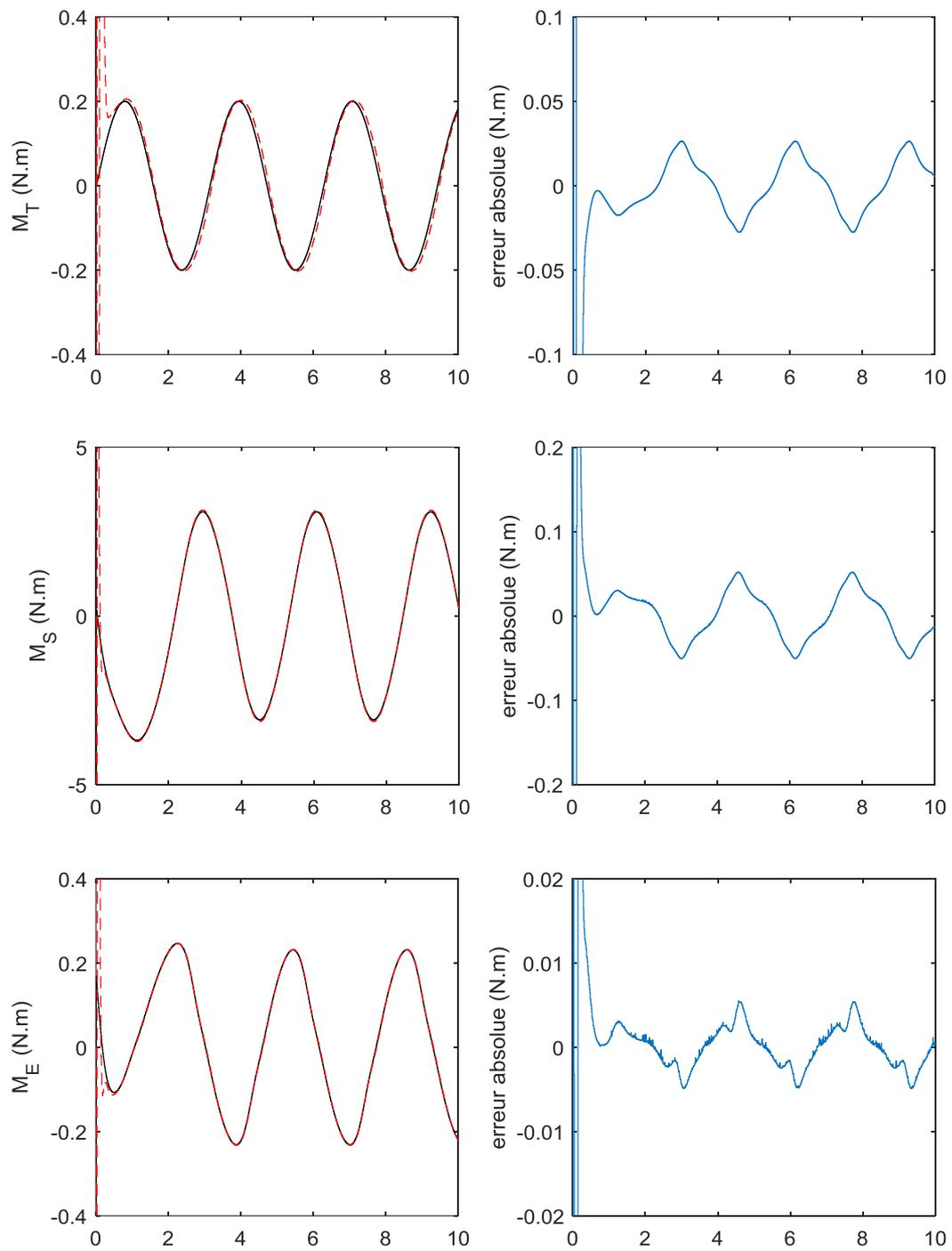


FIG. 57 : GAUCHE : COUPLES ARTICULAIRES SIMULÉS (NOIR) ET ESTIMÉS (ROUGE), DROITE : ERREUR ABSOLUE

## 5. Conclusion

Dans ce chapitre un nouveau modèle, plus proche anatomiquement du mouvement humain, est présenté. Comme dans le chapitre précédent, un OEI T-S discret est défini pour estimer les valeurs de l'état non mesurées et les couples articulaires tout en étant adapté au formalisme des mesures expérimentales. Devant l'augmentation de la complexité mécanique du modèle par rapport à son prédécesseur, une technique de réduction du nombre de non linéarité par approximation de développement limités de Taylor est proposée afin de permettre la faisabilité des conditions LMI. Deux méthodes sont utilisées afin de relâcher les conditions LMI pour l'obtention des gains d'observation, une fonction de Lyapunov non quadratique et des gains d'observation considérant les instants passés.

Ce nouveau modèle et l'OEI associé doivent maintenant être éprouvés par des données expérimentales, c'est le sujet du chapitre suivant.



## CHAPITRE 4 : COLLECTES EXPÉRIMENTALES ET ESTIMATION DU MOMENT PASSIF

1.	Introduction	108
2.	Matériels et Méthodes	109
2.1.	Sujets et mesures	109
2.2.	Protocole expérimental	110
2.2.1.	Outils de mesures	110
2.2.2.	Déroulement d'une acquisition	113
2.2.3.	Approche expérimentale : perturbation et stratégie de stabilisation	114
2.3.	Traitement des données	114
2.3.1.	Post-traitement des données cinématiques	114
2.3.2.	Données cinématiques et couples : modèle S3S	115
2.3.3.	Calculs statistiques	117
3.	Résultats	117
3.1.	Force de perturbation et perte d'équilibre	117
3.2.	Stratégies de stabilisation	119
3.3.	Cinématique	121
3.3.1.	Effet de la stratégie de stabilisation	121
3.3.2.	Effet de la position assise et de la force de perturbation	124
3.4.	Résultats de l'OEI	126
3.4.1.	Convergence et Erreur d'estimation	126
3.4.2.	Effet de la stratégie de stabilisation	128
3.4.3.	Effet de la position assise	131
3.5.	Résumé des résultats statistiques	131
4.	Discussion	133
4.1.	Stabilité assise chez les sujets vivant avec une LME	133
4.1.1.	Perturbation et choix de la stratégie	133
4.1.2.	Stratégies, cinématique et couples articulaires	133
4.1.3.	Effet de l'extension des membres inférieurs	134
4.2.	Remarques sur le modèle S3S	135
4.2.1.	Sources d'erreurs	135
4.2.2.	Compatibilité du modèle et perspectives	135
5.	Conclusions	136
		107

## 1. Introduction

Dans le chapitre précédent, un nouveau modèle biomécanique est développé, le modèle S3S, pour représenter le mouvement de stabilisation assis dans le plan sagittal via la rotation des membres supérieurs de façon plus anatomique qu'avec le modèle précédent (modèle H2AT). Maintenant que le modèle est défini et que la méthode d'estimation des couples articulaires au niveau du coude, des épaules et du tronc est validée par simulations, la prochaine étape est la réalisation de collectes expérimentales sur des personnes vivant avec une LMÉ afin de répondre aux objectifs expérimentaux de cette thèse.

Les collectes expérimentales sur sujets pathologiques sont fastidieuses et chronophages. À titre d'exemple, il a fallu quatre mois pour trouver les cinq sujets pour la collecte du chapitre 2. De plus, tous les sujets étaient des hommes sportifs (contactés grâce à des équipes d'handisport), ce qui peut entraîner des biais dans les résultats car ces personnes ont un entraînement physique important qui peut améliorer leur contrôle postural par rapport à la population moyenne. La variabilité du contrôle postural est très importante chez les personnes vivant avec une LMÉ du fait des niveaux et type de lésion (Wyndaele and Wyndaele, 2006) ainsi que des modifications morphologiques associées (Giangregorio and McCartney, 2006). Dans le but d'avoir un panel expérimental le plus représentatif de personnes vivant avec une LMÉ, un partenariat avec l'équipe du professeur Dany H. Gagnon au sein du laboratoire de pathokinésiologie de l'Université de Montréal au Canada a été mis en place. Ce laboratoire possède une salle d'analyse du mouvement et est situé dans l'Institut de réadaptation Gingras-Lindsay de Montréal ce qui le met en contact avec des personnes vivant avec une LMÉ venant de tout le Québec.

Comme dans le chapitre 2, les expérimentations consistent à perturber l'équilibre assis de sujets vivant avec LMÉ qui doivent se stabiliser en déplaçant leurs membres supérieurs. En considérant les résultats des expérimentations préliminaires du chapitre 2, indiquant une tendance reliant l'extension de la chaîne posturale postérieure et des modifications dans la cinématique du mouvement de stabilisation (moins de débattement du centre de masse des membres supérieurs), les conditions de flexion et extension des membres inférieurs (MI) sont appliquées dans ce chapitre. Le maintien de l'équilibre postural chez des personnes vivant avec une LMÉ avec perturbation extérieure est très peu documenté dans la littérature. Des travaux existent avec des perturbations de l'équilibre utilisant des ergomètres (Bjerkefors et al., 2007) ou des assises mobiles (Kamper, Parnianpour, et al., 1999; Kamper, Barin, et al., 1999; Forssberg and Hirschfeld, 1994), mais la plupart des études récentes concernent un maintien de l'équilibre statique (Milosevic et al., 2017, 2015) ou lors de mouvements volontaires (Gauthier et al., 2013; Grangeon et al., 2012).

On rappelle que le modèle H2AT a été créé pour tester la validité de la nouvelle méthodologie de l'OEI sous forme TS dans une première application biomécanique simple. Les hypothèses de simplifications du modèle H2AT (mouvement planaire, déplacement linéaire du  $COM_{H2A}$ ) représentent des contraintes pour la compatibilité des données expérimentales. L'intérêt du modèle S3S, jugé moins restrictif que le modèle H2AT, est de traiter plus d'informations pour répondre à ce problème ainsi que de permettre une estimation des efforts articulaires plus proche de l'anatomie humaine.

Ce chapitre présente le protocole expérimental, les stratégies de maintien observées chez les sujets, les résultats expérimentaux et d'estimation grâce au modèle S3S et à l'observateur à entrées

inconnues. L'objectif principal est de vérifier l'hypothèse selon laquelle la sollicitation de la chaîne posturale postérieure par extension des membres inférieurs peut modifier les valeurs des couples articulaires, surtout au niveau lombaire, et ainsi améliorer la stabilité des sujets. L'objectif secondaire est d'obtenir une base de données sur la stabilité assise permettant de mieux mettre en relation le contrôle postural des sujets avec des caractéristiques personnelles.

## 2. Matériels et Méthodes

Ce protocole expérimental a fait l'objet d'un dossier de demande d'autorisation éthique et a reçu l'accord du comité d'éthique pour la recherche du Centre de Recherche Interdisciplinaire en réhabilitation du Grand-Montréal (CRIR-1083-0515R).

### 2.1. Sujets et mesures

Au total, 29 sujets dont 3 sujets asymptotiques ont participé à la collecte au sein du laboratoire de pathokinésiologie. Lors de la signature des documents de consentement, le sujet renseigne des informations générales (sexe, âge), anthropométriques (taille, masse) et des informations relatives à sa LMÉ (niveau de lésion, lésion complète ou non, âge de la lésion, score ASIA (Kirshblum et al., 2011)). D'autres données sont mesurées directement sur le sujet comme son tour de taille ainsi que la souplesse musculaire de ses membres inférieurs évaluée selon le test clinique du Straight Leg Raise (SLR). Pour réaliser ce test, le sujet est allongé sur le dos et l'expérimentateur doit relever la jambe tendue du sujet jusqu'à constater soit une résistance soit une rotation du pelvis ou du bas du dos indiquant que l'articulation de la hanche est fléchie à son maximum. Le résultat du score est l'angle maximum de flexion de hanche atteint à ce moment. Ce test est réalisé par une experte kinésithérapeute.

Parmi les 26 sujets vivant avec une LMÉ, 14 ont une lésion complète située au niveau T6 ou supérieur ce qui indique que ces sujets ne peuvent pas recruter ni leurs muscles abdominaux ni ceux du bas du dos. Ces sujets sont considérés dans le groupe dit de « lésion haute », et seront comparés aux 12 autres sujets du groupe « lésion basse ». Cette séparation, purement anatomique, peut être vue comme trop arbitraire. Ainsi, dans le but de pouvoir distinguer d'un point de vue fonctionnel la capacité de maintien d'équilibre des différents sujets, des tests de stabilité issus du système de classification de la fédération internationale de rugby fauteuil sont utilisés (Altmann et al., 2013). Ces tests permettent de classer les sujets vivant avec une LMÉ selon deux notes du score TIC (trunk impairment classification) : 0 et 0,5 sur un maximum de 1,5 (1,5 = tronc asymptotique). Un sujet avec un score de 0 n'a aucun contrôle du tronc, adopte une posture cyphotique dès qu'il lève les membres supérieurs et peut perdre l'équilibre très facilement. Un score de 0,5 atteste un contrôle du tronc modéré, le sujet peut maintenir une posture droite du tronc avec les membres supérieurs levés. La difficulté des tests est conçue afin qu'un sujet vivant avec une LMÉ complète ne puisse pas avoir un score supérieur à 0,5. La Table 3 résume les données de tous les sujets, les sujets M001, M002 et M003 sont les trois sujets asymptotiques.

TABLE 3 : DONNÉES DES SUJETS (NR : NON RENSEIGNÉ, NA : NON APPLICABLE)

Sujet	Âge	Sexe	Masse (kg)	Taille (cm)	Lésion	ASIA	TIC	Âge Lésion (année)	Fusion vertébrale	SLR_L (°)	SLR_R (°)	Tour de taille (cm)
S225	29	F	58,5	162,6	T6	A	0,5	4,7	NR	90	90	NR
S228	28	H	59,9	177,8	T4	A	0	5,8	NR	110	95	NR
S229	30	H	76,2	178	T6	A	0	7,6	NR	85	80	NR
S230	27	F	51,7	157,5	T10	B	0,5	3,3	S1-T8	90	100	NR
S231	39	H	63,0	165	T9	A	0,5	8,8	NR	90	90	NR
S232	65	H	94,8	185	T10	A	0,5	10,8	NR	100	105	NR
S233	40	F	72,1	168	T4	A	0	6,3	NR	105	105	NR
S234	53	F	59,5	162	T4	A	0	5	NR	85	90	NR
S235	39	H	70,7	180	T10	A	0,5	12,8	NR	95	95	NR
S236	26	H	53,5	167,6	T8	B	0,5	10,1	NR	110	110	NR
S238	60	H	89,4	175	T5	A	0,5	6,6	non	90	90	123
S239	32	F	54,8	162,6	T6	A	0,5	2,3	T11-T4	120	120	79
S240	45	H	105	180	T10	A	0,5	5,3	T12-T11	110	110	NR
S241	33	F	50,6	165	T11	A	0,5	10,5	L2-T10	90	80	78
S243	53	F	46,5	170	C7	A	0	29,8	non	80	85	79
S244	62	H	74,2	188	T2	A	0	36,8	non	85	85	109
S245	34	H	79,6	191	T6	A	0	10,4	T7-T5	120	120	NR
S246	32	F	57,5	163	T8	A	0,5	2,8	T11-T5	85	90	84
S248	57	H	86,3	180	T3	A	0,5	32,5	non	105	105	NR
S251	53	H	100	180	T11	A	0,5	3,3	L1-T9	70	70	113
S253	41	H	96,5	178	T5	A	0,5	13,4	T11-T4	85	80	121
S254	44	H	71,9	165	T7	A	0,5	11	T11-T5	90	90	110
S256	42	H	94,5	185	T10	A	0,5	6,9	L2-T11	105	95	118
S258	57	H	68,3	183	T6	A	0	8,3	non	90	90	96
S259	37	H	73,1	187	T6	A	0,5	10,4	non	90	90	104
S261	50	H	87,9	185	T10	A	0,5	7,4	T12-T8	90	90	108
M001	30	F	56,0	156	NA	NA	1,5	NA	NA	NR	NR	79
M002	25	H	80,2	180	NA	NA	1,5	NA	NA	NR	NR	90
M003	30	F	52,5	171	NA	NA	1,5	NA	NA	NR	NR	74

## 2.2. Protocole expérimental

### 2.2.1. Outils de mesures

La collecte débute par la lecture et le remplissage des documents de consentement et d'informations. Les mesures préliminaires (pesée, tour de taille, SLR, score TIC) sont ensuite réalisées puis les sujets sont équipés avec les capteurs optiques.

Le système d'analyse du mouvement du laboratoire de pathokinésiologie est un dispositif Optotrak® (NDI, Waterloo, Canada) qui utilise des capteurs dits « actifs ». À la différence du système VICON® utilisé dans le chapitre 2 et de ses marqueurs réfléchissants (passifs), le système Optotrak® utilise des diodes infra-rouge (IR) dont le rayonnement est capté par des blocs de caméras installés dans la salle

d'analyse Fig. 58. L'avantage de cette technique est que chaque diode va émettre des IR selon une fréquence qui lui est propre, ainsi le système de capture détermine la position et l'identité de chaque marqueur ce qui évite, entre autres, les erreurs d'inversion de marqueurs lors du post-traitement des données. Le point négatif est que chaque diode est alimentée électriquement ce qui rend la logistique de l'expérimentation plus complexe avec la gestion des câbles (Fig. 59 et Fig. 61). Les diodes peuvent être posées séparément sur des points anatomiques précis (ex : tempe droite ou gauche) ou groupées trois par trois sur des segments rigides (cluster) Fig. 58. Au total, 39 diodes sont installées sur chaque sujet, le détail du placement est disponible en Annexes.



FIG. 58 : QUATRE DIODES DONT TROIS DOSPOSÉES SUR UN CLUSTER

Dans le but de limiter le nombre de marqueurs sur les sujets (pour une logistique et un post-traitement simplifiés) et de ne pas perdre la position de marqueurs facilement occultés par le corps ou les dispositifs expérimentaux, une technique de « probing » est choisie. Cette méthode consiste à pointer la position d'un point anatomique à l'aide d'une sonde (probe) calibrée Fig. 59. Par exemple, la position de l'épicondyle médial du coude (la pointe osseuse à l'intérieur du coude) est nécessaire pour calculer le centre de cette articulation. Cependant ce point est très souvent caché des caméras par le bras ou le tronc ce qui rend la technique de probing intéressante. Dans ce cas, la position de l'épicondyle médial est pointée, enregistrée, puis rigidement liée à 3 autres points du segment bras (ex : épicondyle latéral et deux autres points du cluster bras). Grâce à cette hypothèse de corps rigide, la cinématique du point pointé est obtenue en post-traitement grâce aux trajectoires des 3 points liés. Au total 16 points sont pointés par probing, le détail du placement est fourni en Annexes.



FIG. 59 : SONDE UTILISÉE PENDANT LES COLLECTES

## CHAPITRE 4 : COLLECTES EXPÉRIMENTALES ET ESTIMATION DU MOMENT PASSIF

Le dispositif utilisé pour appliquer la force déstabilisante est réglable en hauteur (Fig. 60 et Fig. 61) afin de s'adapter à la taille du sujet et présente un bloc de mousse pour amortir le contact. Il est équipé de deux capteurs, le premier est un interrupteur (footswitch) placé sur le bloc de mousse et relié à la carte d'acquisition pour définir l'instant de contact avec le sujet, le second est un dynamomètre permettant de connaître l'intensité de la force déstabilisante.



FIG. 60 : DISPOSITIF DE PERTURBATION

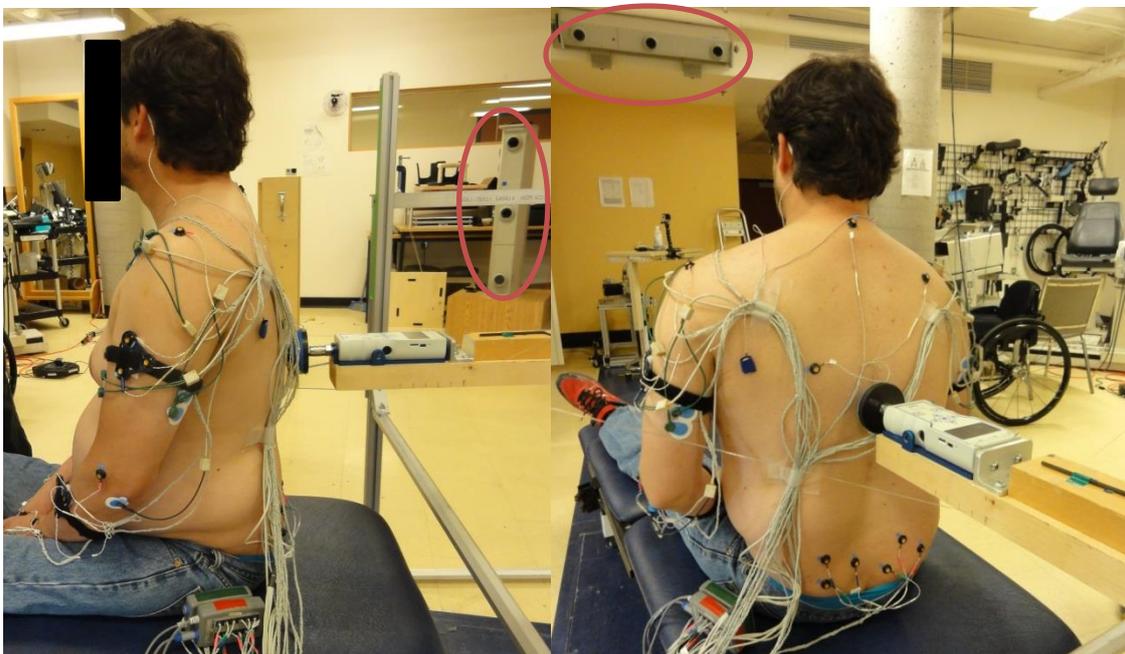


FIG. 61 : DIODES INFRA-ROUGE, CABLES D'ALIMENTATION, POSITIONNEMENT DU DISPOSITIF DE PERTURBATION, LES CERCLES INDIQUENT DES BLOCS DE 3 CAMÉRAS

**Remarque 1**

Le lecteur peut remarquer la présence d'électrodes EMG posées sur les sujets. Ces capteurs n'ont pas été utilisés dans cette expérience mais dans le cadre d'une autre collecte qui était prévue immédiatement après.

**2.2.2. Déroulement d'une acquisition**

Les sujets ont pour objectif de maintenir leur équilibre en position assise en gardant leurs membres supérieurs levés en présence d'une force déstabilisante appliquée dans le dos au niveau de la vertèbre T8. Chaque acquisition suit le même déroulement, après indication de l'expérimentateur, le sujet lève les bras et maintient cette position. Après 2 à 3 secondes en équilibre, une force dans la direction antérieure est appliquée pour venir perturber le sujet qui doit alors maintenir son équilibre en déplaçant, si besoin, ses membres supérieurs. Enfin, 2 à 3 secondes après avoir retrouvé son équilibre, l'expérimentateur indique au sujet de rebaisser les bras (Fig. 62). Le temps calculé entre les instants 3 et 4 de la Fig. 62 correspond au temps requis par le sujet pour se stabiliser, ce temps de stabilisation est comparé entre les sujets.

Deux conditions de position des membres inférieurs (MI) sont étudiées : hanches et genoux fléchis à 90° avec les pieds au sol ou MI complètement tendus, un minimum de six acquisitions sont réalisées par conditions expérimentales. Les 14 premiers sujets ont commencé par la condition MI tendus et les suivants ont commencé par la condition genoux fléchis pour limiter les effets d'apprentissage lors de l'analyse des données.

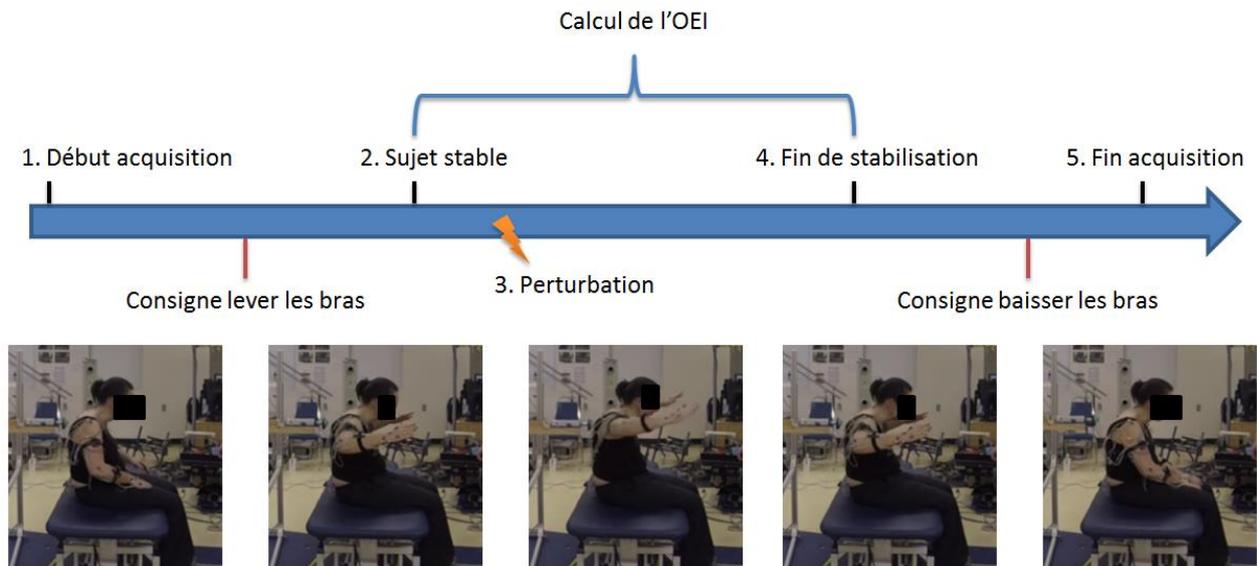


FIG. 62 : DÉROULEMENT D'UNE ACQUISITION

La cinématique des sujets est mesurée par le système d'acquisition à une fréquence de 60 Hz, les données sont synchronisées avec le foot switch pour connaître l'instant de l'impact ainsi qu'un interrupteur dans la main de l'expérimentateur pour indiquer les instants importants de la procédure expérimentale (indication de début, stabilisation, indication de fin). Les acquisitions sont également

filmées par des caméras Go Pro sous trois angles différents (de face et des deux profils) et les fichiers vidéo sont synchronisés par un logiciel développé par un ingénieur du LAMIH.

### **2.2.3. Approche expérimentale : perturbation et stratégie de stabilisation**

Tous les sujets n'ont pas les mêmes capacités pour maintenir leur équilibre, cette capacité est évalué par le score TIC et est aussi corrélée au niveau de lésion (Gauthier et al., 2013). De plus, il a été observé que le contrôle postural des personnes vivant avec une LMÉ est négativement corrélé à la peur de la chute (John et al., 2010). La cinématique d'une personne qui ne se sent pas en confiance vis-à-vis de son équilibre va être plus saccadée, plus ample et plus à risque de chute. Ainsi, le fait de demander aux sujets de lever leurs bras à une hauteur constante, fixée à priori, risque d'induire un biais lié à la qualité du contrôle postural et au ressenti de chaque sujet. Pour cette raison, la consigne donnée au sujet au début de l'acquisition est de lever les membres supérieurs jusqu'à ressentir le besoin de maintenir leur équilibre en les déplaçant. Ainsi, un sujet avec une bonne capacité de maintien lèvera ses membres supérieurs plus hauts qu'un sujet éprouvant des difficultés à maintenir son équilibre. Avant de traiter les données quantitatives issues du système de capture du mouvement et de l'OEI, les vidéos des expérimentations ont été analysées dans le but de classifier les stratégies de stabilisation choisies par les sujets.

Cette approche se traduit également dans le choix de l'intensité de la force déstabilisante. Cette force a pour objectif de solliciter le maintien de la stabilité du sujet et non d'entraîner une perte d'équilibre du sujet. La force de perturbation est progressivement augmentée par l'expérimentateur jusqu'à ce que l'intensité soit suffisante pour que le sujet puisse récupérer son équilibre, le ressenti du sujet est pris en compte dans le choix d'augmenter la perturbation afin de pas créer de crispation du sujet. L'intensité des forces de perturbation est comparée pour les sujets en fonction de leur niveau de lésion, leur score de TIC et les conditions expérimentales.

## **2.3. Traitement des données**

### **2.3.1. Post-traitement des données cinématiques**

Le format de fichier produit par le système Optotrak® est un format propriétaire, non compatible avec le programme du système VICON® du LAMIH, il a donc été décidé de créer un programme afin de ne pas dépendre des chercheurs du laboratoire de Montréal pour réaliser le post-traitement des données cinématiques. Ce programme est une interface graphique sous Matlab® qui permet de visualiser les données, combler les marqueurs manquants (disparitions ou occultations de marqueurs) dans les trajectoires et rajouter les points définis lors de la phase de probing. Les disparitions des marqueurs ont été corrigées par trois techniques, des splines cubiques (pour les « trous » inférieurs à cinq images), une technique de corps rigide lorsque 3 marqueurs du même segment étaient présents. Enfin une dernière technique d'intercorrélation de trajectoire (Gløersen and Federolf, 2016) est utilisée lorsque la technique de corps rigide n'est pas utilisable (quand on ne dispose pas de 3 marqueurs rigidement liés pour en reconstruire un 4<sup>e</sup>) pour les « trous » plus longs que cinq images.

La Fig. 63 est une image issue de l'interface graphique du programme, les coordonnées selon les axes X, Y et Z du point P\_Clust1 sont affichées sur les trois figures. Le rectangle en pointillés noir indique une disparition de marqueurs et le tracé en pointillé correspond à la reconstruction de ce point, en l'occurrence, une reconstruction par corps rigide en utilisant les coordonnées des points P\_Clust4, P\_Clust5 et P\_Clust6 (appartenant tous au même segment, le pelvis) sélectionnés sur la colonne de droite.

Lorsque les disparitions de marqueurs sont trop importantes pour permettre une reconstruction de qualité (notamment dans le cas des six marqueurs du pelvis, facilement occultés par l'expérimentateur et le dispositif de perturbation situés à l'arrière du sujet), l'acquisition est exclue du traitement, ce cas correspond à 10% des acquisitions traitées.

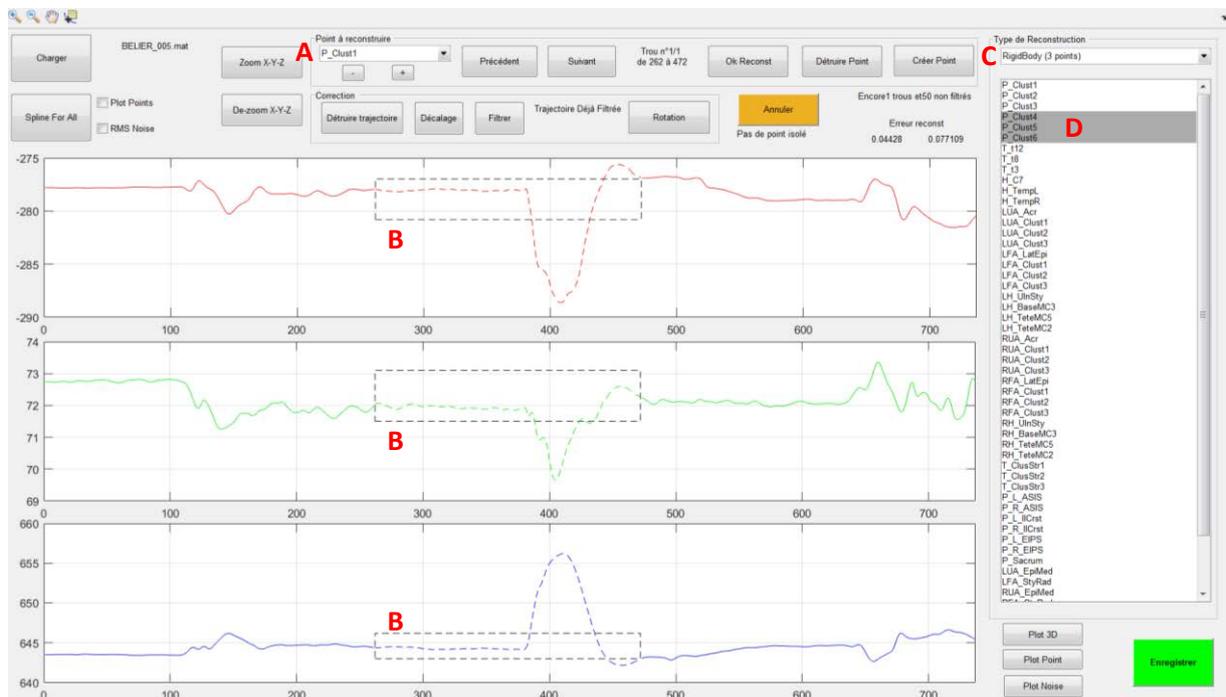


FIG. 63 : PROGRAMME DE POST-TRAITEMENT DES DONNÉES CINÉMATIQUES POUR LA RECONSTRUCTION DE LA TRAJECTOIRE D'UN POINT (A) PENDANT UNE DISPARITION (B) PAR UNE MÉTHODE DE RECONSTRUCTION (C) À L'AIDE D'AUTRES TRAJECTOIRES (D)

### 2.3.2. Données cinématiques et couples : modèle S3S

Une fois les trajectoires des marqueurs corrigées, il est possible de calculer la position des points T (trunk), S (shoulder), E (elbow) et H (hands) nécessaires à la création du modèle S3S Fig. 22. Les positions des centres articulaires des épaules et coudes sont déterminées à l'aide des tables de régression de (Dumas, Chèze, et al., 2007). Les points S, E et H sont respectivement définis comme le milieu des centres articulaires des épaules, des coudes et enfin le barycentre des deux mains. La position du point T est définie en deux étapes. Tout d'abord la position du centre articulaire lombosacré est obtenue en utilisant les équations de régression de (Murphy et al., 2011) ?. Puis le point T est ensuite défini comme le point d'intersection (obtenu par une méthode des moindres carrés) de toutes les lignes passant par le point S et le centre lombosacré durant l'acquisition (entre les instants 2 et 4, Fig. 62). Cette procédure est appliquée pour chaque nouvelle acquisition. Une fois la trajectoire des quatre points définis, les angles  $q_0$ ,  $q_1$ ,  $q_2$ , angles sagittaux relatifs entre chaque

segment du modèle, sont calculés et injectés dans l'OEI défini au chapitre précédent pour réaliser l'estimation des couples articulaires. L'un des intérêts de commencer l'estimation à partir de l'instant 2 (Fig. 62) est qu'il n'y a pas de problème de conditions initiales pour l'OEI, i.e. l'erreur d'estimation d'état a convergé avant que le sujet ne soit perturbé. La convergence de l'observateur est considérée comme atteinte à l'instant où l'erreur d'estimation angulaire devient inférieure à  $10^{-3}^\circ$ . Cet instant est calculé pour chaque acquisition et l'erreur d'estimation à la suite de cet instant est calculée pour toutes les acquisitions selon la formule :

$$\varepsilon(k) = q_i(k) - \hat{q}_i(k) \quad , i \in \{0, 1, 2\} \quad (4.1)$$

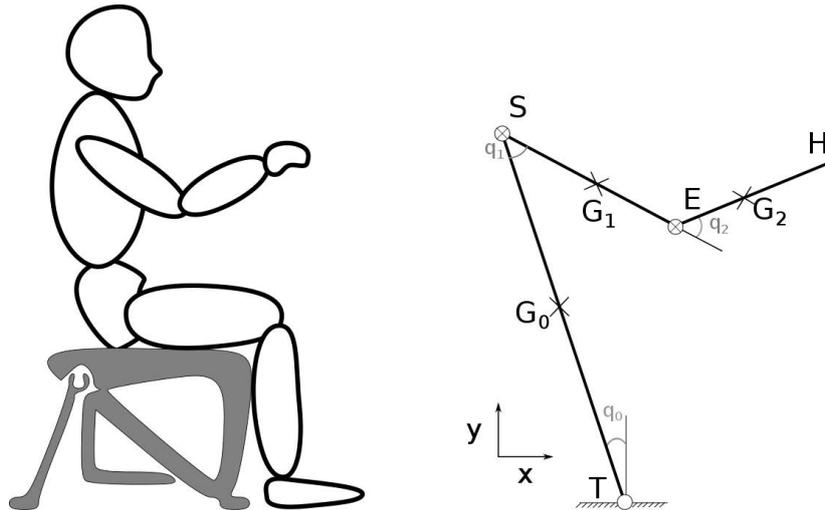


FIG. 64 : LE MODÈLE S3S

La disparité des mouvements de stabilisation enregistrés, aussi bien au niveau intra qu'interindividuelle, ne permet pas de donner de sens à un calcul de « mouvement moyen » par sujet. C'est ce qui a été fait dans les travaux de (Bjerkefors et al., 2007) sur des exercices de stabilité pour des sujets vivant avec une LMÉ. La différence principale avec notre protocole expérimental est que la perturbation était produite à l'aide d'un ergomètre programmable donc identique pour toutes les acquisitions. Dans notre cas, la force de déstabilisation n'est pas constante ce qui va naturellement modifier la trajectoire du sujet. Il est donc choisi que les acquisitions soient traitées indépendamment avec pour chaque acquisition six signaux, trois sont mesurés (les angles  $q_0$ ,  $q_1$  et  $q_2$ ) et trois sont estimés (les couples articulaires  $M_T$ ,  $M_S$  et  $M_E$ ). Cinq indicateurs sont calculés pour chaque signal, l'amplitude et la moyenne des signaux et trois autres indicateurs calculés par intégration des signaux, l'*integral squared error* (ISE), l'*integral absolute error* (IAE) et l'*integral time-weighted absolute error* (ITAE) définis de la manière suivante :

$$ISE(\varepsilon(k)) = \sum_{k=0}^N \varepsilon(k)^2 \quad (4.2)$$

$$IAE(\varepsilon(k)) = \sum_{k=0}^N |\varepsilon(k)| \quad (4.3)$$

$$ITAE(\varepsilon(k)) = \sum_{k=0}^N k \times |\varepsilon(k)| \quad (4.4)$$

Ces indicateurs sont généralement calculés dans le contexte de systèmes contrôlés avec une valeur de référence ce qui permet le calcul d'une erreur telle que  $\varepsilon(k) = x(k) - x_{ref}$  (avec  $x(k) = \{q_0, q_1, q_2, M_T, M_S, M_E\}$ ). Avant la perturbation, le sujet est considéré comme à l'équilibre, la valeur de référence  $x_{ref}$  de chaque signal est donc définie comme la valeur du signal à l'instant précédant l'impact. Afin d'être comparables entre tous les sujets, ces indicateurs sont calculés sur une durée (i.e. nombre d'échantillons  $N$ ) commune à tous les sujets après la perturbation jusqu'à la fin de l'acquisition (instants 3 à 5, Fig. 62). La durée commune minimum après la perturbation entre tous les sujets est de 2,4 secondes soit 144 échantillons.

L'ISE et l'IAE traduisent une notion d'énergie car le signal est intégré selon le temps. De par la fonction au carré, l'ISE est plus pénalisant pour les signaux présentant des valeurs éloignées de la référence et produit des valeurs plus élevées que l'IAE. L'ITAE apporte une information supplémentaire car en multipliant par le temps à l'intérieur de l'intégrale, les variations tardives des signaux sont plus pénalisantes dans le calcul de l'indicateur, ce paramètre peut donc indiquer lorsqu'un sujet met plus de temps à se stabiliser.

### 2.3.3. Calculs statistiques

Les données appariées comparant les résultats pour chaque sujet entre les deux conditions de Membres Inférieurs (MI) sont traitées par un test de rangs signés de Wilcoxon. Les données indépendantes (ex : temps de stabilisation, force de perturbation...) pour comparer les différents groupes parmi plusieurs groupes de sujets (ex : lésion basse VS lésion haute VS asymptotiques) sont traitées par un test de Kruskal-Wallis ou un test de Wilcoxon-Mann-Whitney dans le cas de la comparaison entre deux groupes (ex : lésion basse VS lésion haute). La corrélation des données mesurées par rapport à la force de perturbation est calculée par un calcul de coefficient de corrélation de Pearson.

Pour les tests répétés (entre sujets et entre conditions), une procédure de correction de Bonferroni a été utilisée. Au total, il y a 30 répétitions des tests (six signaux, cinq indicateurs par signal) ce qui ramène le seuil de significativité de 0,05 à  $p = \frac{0.05}{30} = 0.0017$ .

## 3. Résultats

### 3.1. Force de perturbation et perte d'équilibre

Il est rappelé que l'objectif de cette expérimentation est de solliciter le contrôle postural des sujets sans provoquer une perte d'équilibre, c'est pourquoi l'intensité de la force de perturbation est adaptée à la réaction et au ressenti du sujet. Un total de 350 acquisitions sont réalisées dans cette collecte avec entre 6 et 9 acquisitions par condition de MI et par sujet. L'intensité moyenne des forces de perturbations est de  $35,6 \pm 14$ N. Sur la Fig. 65, l'intensité des forces de perturbation de toutes les acquisitions est répartie par type de lésion (A) et par score TIC (B). Il apparaît que les sujets avec une lésion basse sont perturbés avec des forces d'intensité plus importantes que les sujets avec

une lésion haute. Ces résultats graphiques sont confirmés par le calcul statistique du test de Wilcoxon-Mann-Whitney ( $p < 0.001$ ).

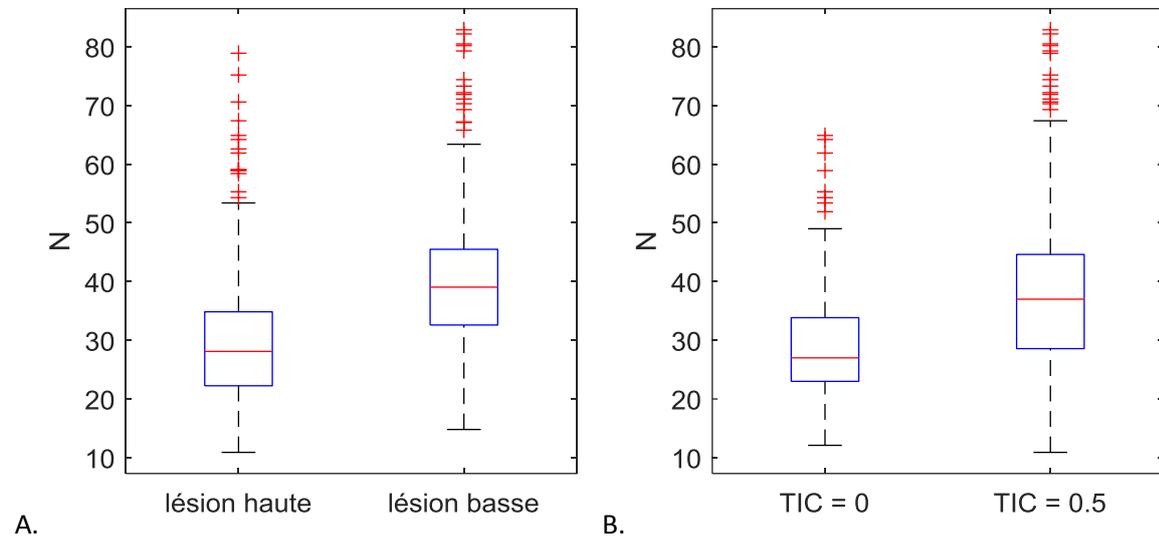


FIG. 65 : FORCES DE PERTURBATION SUR TOUTES LES ACQUISITIONS SELON A. LE NIVEAU DE LÉSION ET B. LE SCORE TIC

Moins de 10% des perturbations ont entraîné une perte d'équilibre (31 pertes d'équilibre) chez 11 des 26 sujets. Ces sujets appartiennent tous au groupe de lésion haute et parmi eux, six sujets ont un score TIC de 0. Les tableaux de contingence (Table 4) indiquent le nombre des sujets ayant perdu l'équilibre au moins une fois en fonction du niveau de lésion (A) et du score TIC (B). Le résultat des tests de Fisher réalisés pour chaque tableau souligne la dépendance entre le niveau de lésion ( $p < 0.001$ ) ainsi que le score TIC ( $p < 0.05$ ) et le fait d'avoir perdu l'équilibre. Ce résultat signifie que les chances de perdre l'équilibre augmentent quand le contrôle musculaire diminue et correspond à l'intuition. Il est par ailleurs cohérent avec les travaux comparant le niveau de lésion avec des indicateurs de stabilité calculés à partir du centre de pression dans le cas de mouvements volontaires (Gauthier et al., 2013) ou de maintien de l'équilibre assis (Milosevic et al., 2017)

TABLE 4 : TABLEAU DE CONTINGENCE DES SUJETS AVEC OU SANS PERTE D'ÉQUILIBRE EN COMPARANT À LEUR NIVEAU DE LÉSION ET LEUR SCORE TIC

A.	Lésion haute	Lésion basse	Total
Perte d'équilibre	11	0	11
Maintien d'équilibre	3	12	15
Total	14	12	26

B.	TIC = 0	TIC = 0.5	Total
Perte d'équilibre	6	5	11
Maintien d'équilibre	2	13	15
Total	8	18	26

### 3.2. Stratégies de stabilisation

L'analyse des vidéos a permis d'isoler trois types de stratégies chez les sujets vivant avec une LMÉ : la stratégie basse mobile (le sujet lève ses membres supérieurs en dessous du niveau des épaules et les déplace d'avant en arrière après la perturbation pour se stabiliser, Fig. 66), la stratégie haute mobile (le sujet peut lever ses membres supérieurs au niveau des épaules et doit les déplacer après la perturbation pour se stabiliser, Fig. 67) et la stratégie haute fixe (le sujet peut lever ses membres supérieurs au niveau des épaules et n'a pas besoin de les déplacer après la perturbation, Fig. 68).

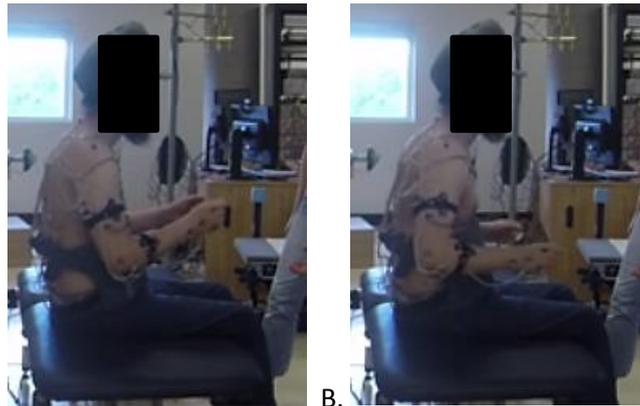


FIG. 66 : STRATÉGIE BASSE MOBILE (BM) (A : AVANT PERTURBATION, B : APRÈS)

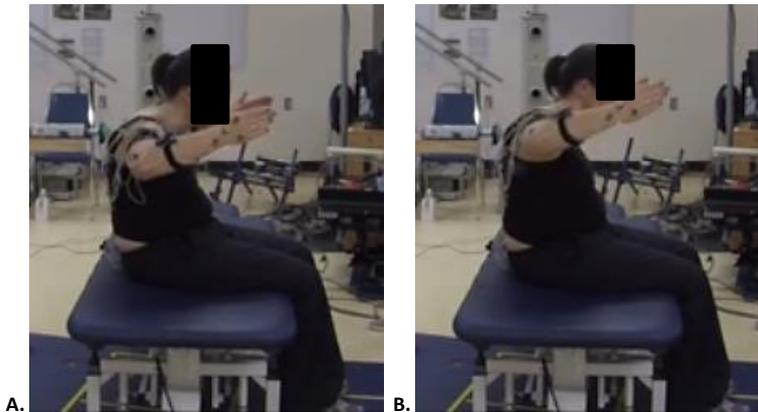
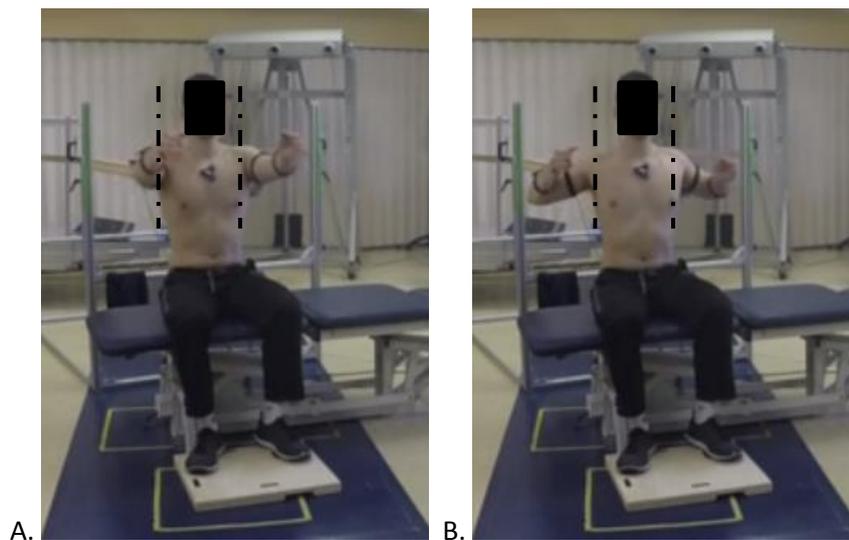


FIG. 67 : STRATÉGIE HAUTE MOBILE (HM) (A : AVANT PERTURBATION, B : APRÈS)



FIG. 68 : STRATÉGIE HAUTE FIXE (HF) (A : AVANT PERTURBATION, B : APRÈS)

Il est important d'utiliser cette classification pour savoir quelles acquisitions sont exploitables par le modèle et l'observateur à entrées inconnues. En effet, dans le cas de la stratégie haute mobile, le déplacement des membres supérieurs se fait par rotation des bras selon un axe vertical passant par les épaules (Fig. 69). Le modèle S3S est créé dans le plan sagittal et les axes de rotation des segments du modèle sont donc perpendiculaires à ce plan, un mouvement de rotation des épaules n'est pas prévu par le formalisme du modèle S3S. Lors d'un mouvement de rotation des épaules, la longueur des segments, projetée dans le plan sagittal, va changer, ce qui fait que la cinématique d'un sujet utilisant la stratégie haute mobile n'est pas analysable par le modèle S3S et l'OEI associé. Des pistes d'améliorations du modèle S3S sont présentées dans les discussions et perspectives de ce chapitre.



**FIG. 69 : DÉPLACEMENT DES MEMBRES SUPÉRIEURS PAR ROTATION DES ÉPAULES SELON UN AXE VERTICAL (EN POINTILLÉS) DANS LE CADRE DE LA STRATÉGIE HAUTE MOBILE (HM)**

Chaque sujet choisit sa stratégie de stabilisation en lien avec sa capacité à maintenir son équilibre avec les membres supérieurs relevés ainsi que son sentiment de sécurité comme expliqué par (John et al., 2010). La TABLE 5 recense les stratégies observées en fonction de la condition de MI chez les 26 sujets vivant avec une LMÉ. Sept sujets (26%) ont adopté la stratégie haute fixe (HF), treize sujets (50%) ont choisis la stratégie haute mobile (HM) et deux sujets (8%) ont adopté la stratégie basse mobile (BM). Chez quatre sujets (16%), l'extension des MI a entraîné un changement de la stratégie de stabilisation assez important pour être attesté à partir des images vidéo des acquisitions, la discussion de ce résultat combiné aux données cinématiques est réalisée à la fin de ce chapitre. Il a été demandé aux sujets asymptotiques de suivre la stratégie haute fixe pour leurs acquisitions car elle correspond logiquement à la stratégie la plus contraignante pour l'équilibre postural (du fait de la masse déportée des membres supérieurs).

TABLE 6 : RÉPARTITION DES STRATÉGIES PAR CONDITION (MI : MEMBRES INFÉRIEURS, BASSE MOBILE : BM, HAUTE MOBILE: HM, HAUTE FIXE: HF)

Id	MI fléchis	MI tendus	Lésion	TIC	Id	MI fléchis	MI tendus	Lésion	TIC
<b>S225</b>	<b>BM</b>	<b>HM</b>	T6	0,5	S241	HM	HM	T11	0,5
S228	HM	HM	T4	0	S243	HM	HM	C7	0
S229	HM	HM	T6	0	S244	HM	HM	T2	0
<b>S230</b>	<b>HM</b>	<b>HF</b>	T10	0,5	S245	HM	HM	T6	0
S231	HM	HM	T9	0,5	S246	HF	HF	T8	0,5
S232	HF	HF	T10	0,5	S248	HM	HM	T3	0,5
S233	HM	HM	T4	0	S251	HF	HF	T11	0,5
S234	HF	HF	T4	0	S253	HF	HF	T5	0,5
S235	HM	HM	T10	0,5	S254	HF	HF	T7	0,5
S236	HM	HM	T8	0,5	<b>S256</b>	<b>HM</b>	<b>HF</b>	T10	0,5
S238	HM	HM	T5	0,5	S258	HF	HF	T6	0
S239	BM	BM	T6	0,5	S259	BM	BM	T6	0,5
<b>S240</b>	<b>HM</b>	<b>HF</b>	T10	0,5	S261	HM	HM	T10	0,5

### 3.3. Cinématique

Comme expliqué précédemment, la stratégie de stabilisation HM n'est pas compatible avec la dynamique du modèle S3S et donc de l'OEI. L'objectif principal de ce chapitre étant l'analyse de la cinématique et des résultats d'estimation issus de l'OEI, le choix est donc fait de focaliser l'analyse des résultats sur des sujets dont le déplacement est compatible avec le modèle S3S (stratégies BM et HF). Les deux sujets suivant la stratégie BM (S239 et S259) ainsi que deux sujets avec une stratégie HF (S246 et S251) et deux sujets asymptotiques (M001 et M003) sont choisis.

#### 3.3.1. Effet de la stratégie de stabilisation

Tout d'abord, la Fig. 70 présente le temps de stabilisation entre les sujets BM, HF, et asymptotiques. Les sujets suivant la stratégie BM ont significativement besoin de plus de temps pour stabiliser leur position assise après la perturbation ( $p < 0.001$ ), il n'y a pas de différence significative les groupes HF et asymptotiques.

Sur la Fig. 71, les courbes de l'angle articulaire du tronc  $q_0$  pour toutes les acquisitions sont affichées pour chaque sujet. Le début de chaque courbe correspond à 0,5 seconde avant la perturbation. Une diminution de l'angle du tronc, naturellement liée à la perturbation, est constatée pour tous les sujets dans les instants suivant l'impact. L'angle du tronc des sujets avec une stratégie BM suit une trajectoire très saccadée avec des dépassements par rapport à la valeur de l'angle avant perturbation. À l'opposé, les trajectoires des sujets avec une stratégie HF présentent un profil plus répétable et en ce sens, se rapproche des trajectoires des sujets asymptotiques. Commencant par une diminution de l'angle liée à la perturbation puis à un retour au niveau de la valeur avant impact sans à-coup ni dépassement. Malgré ces différences de trajectoire, aucune différence significative concernant les indicateurs (amplitude, moyenne, ISE, IAE ITAE) de l'angle  $q_0$  n'est trouvée.

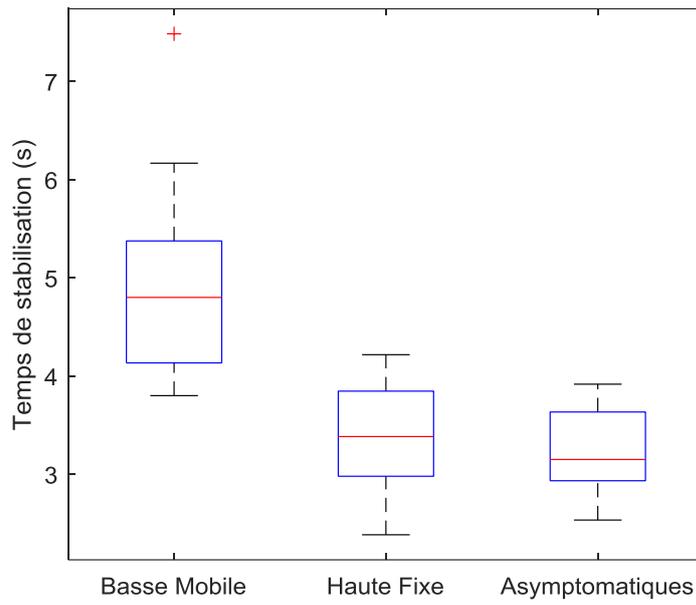


FIG. 70 : TEMPS DE STABILISATION ENTRE SUJETS

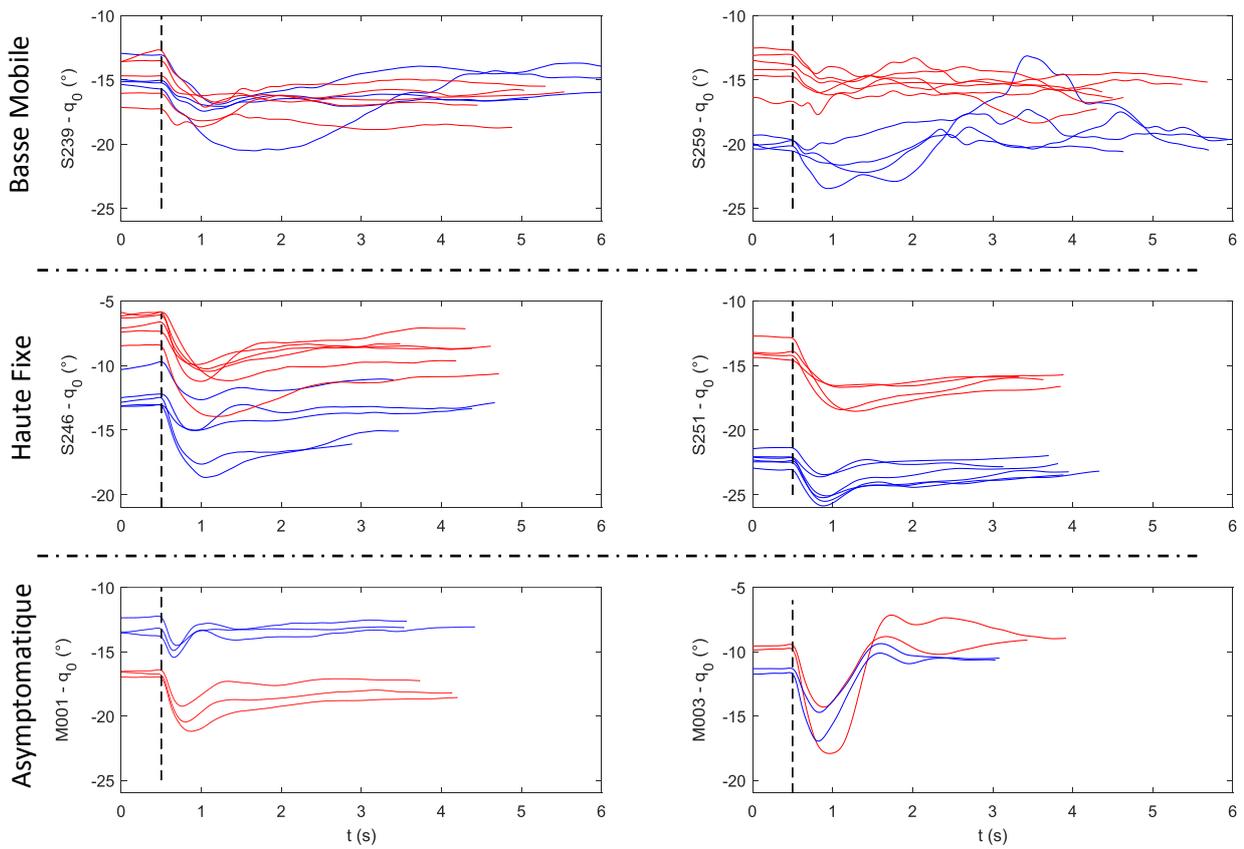


FIG. 71 : ANGLE AU POINT T POUR LES SUJETS BM (HAUT), HF (MILIEU) ET ASYMPTOMATIQUES (BAS), BLEU : MI TENDUS, ROUGE : MI PLIÉS, LA LIGNE EN POINTILLÉS NOIR INDIQUE L'INSTANT DE LA PERTURBATION

Les Fig. 73 et Fig. 74 présentent les trajectoires de l'angle à l'épaule  $q_1$  et l'angle du coude  $q_2$  uniquement entre les quatre sujets vivant avec une LMÉ car les trajectoires des sujets HF sont identiques à celles des sujets asymptomatiques de par la stratégie HF qui consiste à ne pas bouger les membres supérieurs. Les valeurs des angles  $q_1$  et  $q_2$  sont naturellement très différentes en fonction du type de stratégie utilisée avec des valeurs de  $q_1$  autour de  $15^\circ$  pour les sujets BM et de  $100^\circ$  pour les sujets HF et inversement pour l'angle  $q_2$ . Les amplitudes angulaires sont plus importantes pour les sujets BM que pour les sujets HF dont les trajectoires sont presque constantes. Les différences significatives des indicateurs ISE, IAE et ITAE ( $p < 0.001$ , Fig. 72) entre les deux stratégies confirment ce résultat car ces indicateurs calculent un écart par rapport à la valeur de référence avant perturbation.

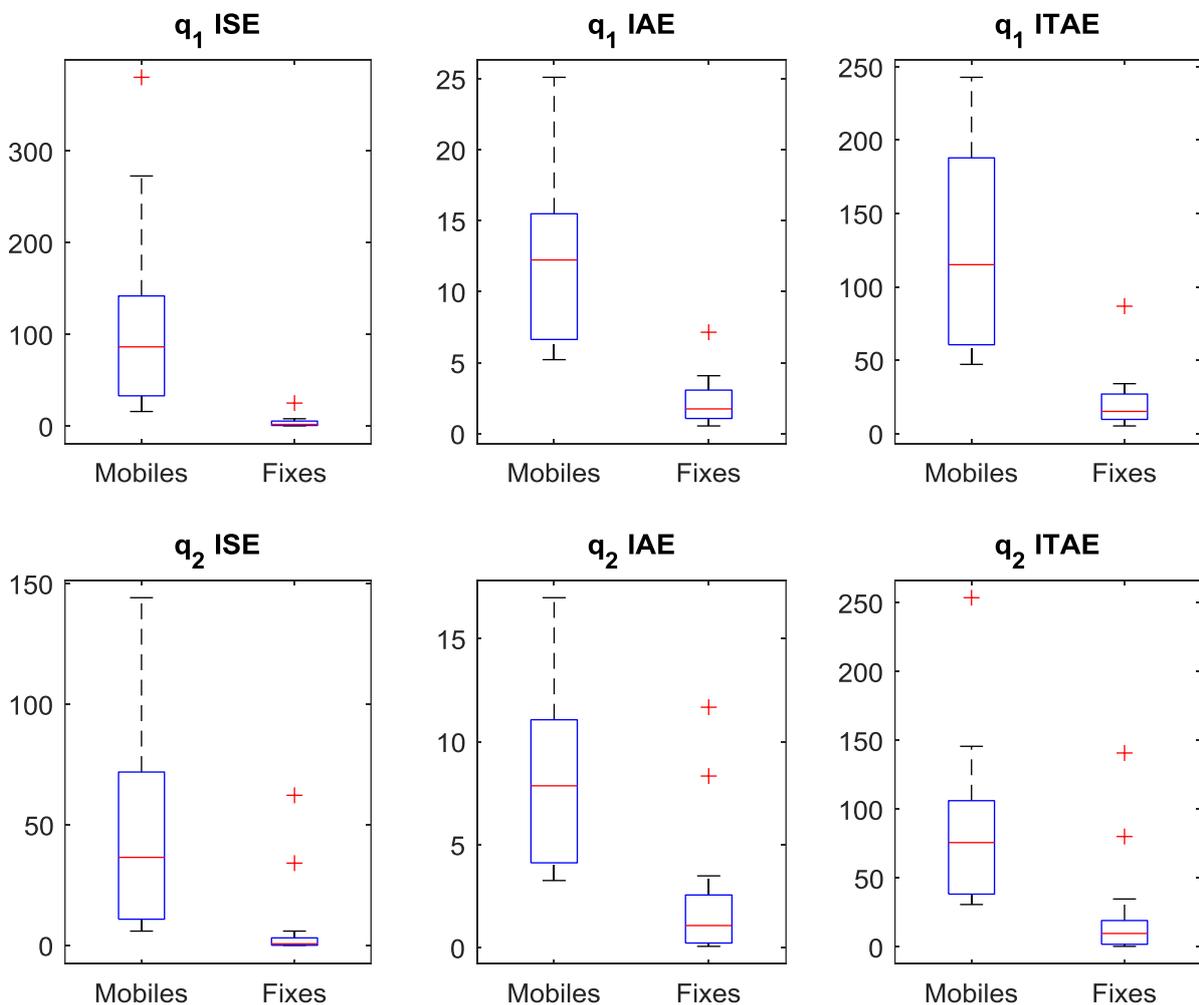


FIG. 72 : INDICATEURS ISE, IAE ET ITAE POUR LES ANGLES AU POINT S (HAUT) ET E (BAS) ET DIFFÉRENCE ENTRE LES SUJETS MOBILES ET FIXES ( $P < 0.001$ )

CHAPITRE 4 : COLLECTES EXPÉRIMENTALES ET ESTIMATION DU MOMENT PASSIF

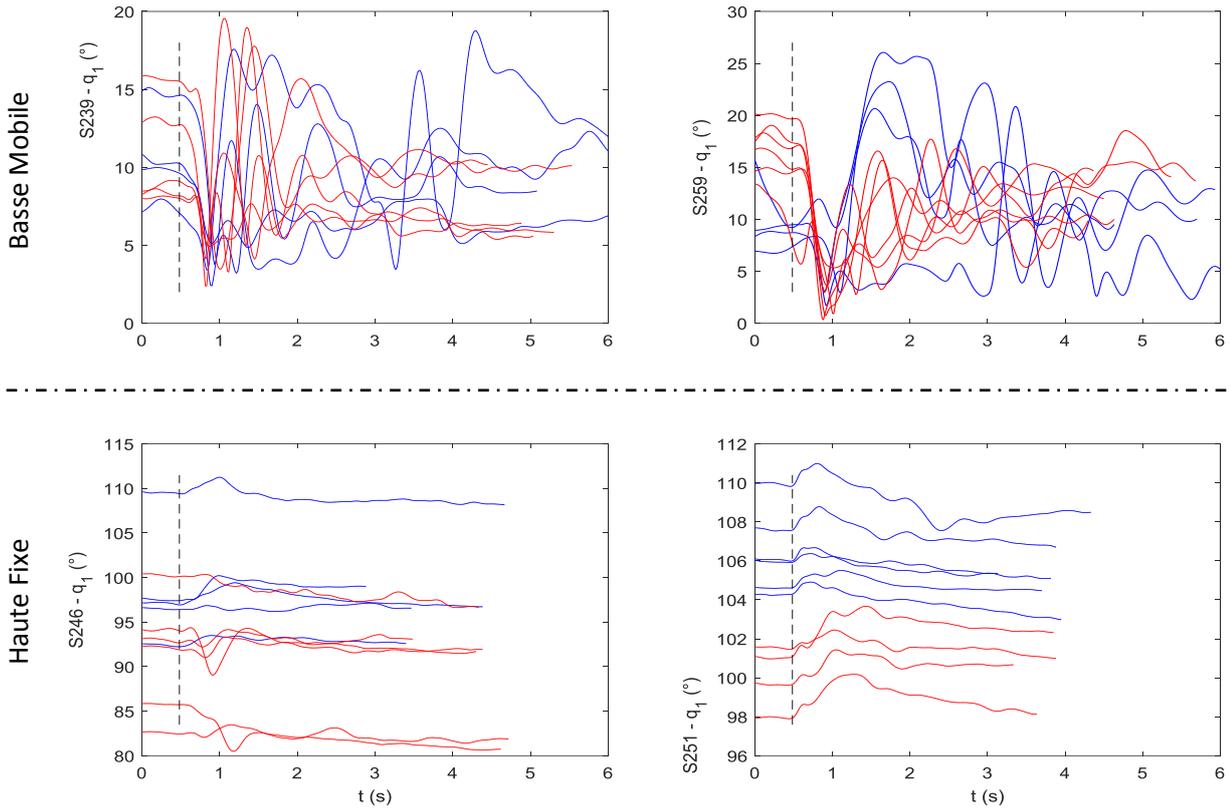


FIG. 73 : ANGLE AU POINT S POUR LES SUJETS MOBILES (HAUT) ET FIXES (BAS) (BLEU : MI TENDUS, ROUGE: MI PLIÉS), LA LIGNE EN POINTILLÉS NOIR INDIQUE L'INSTANT DE LA PERTURBATION

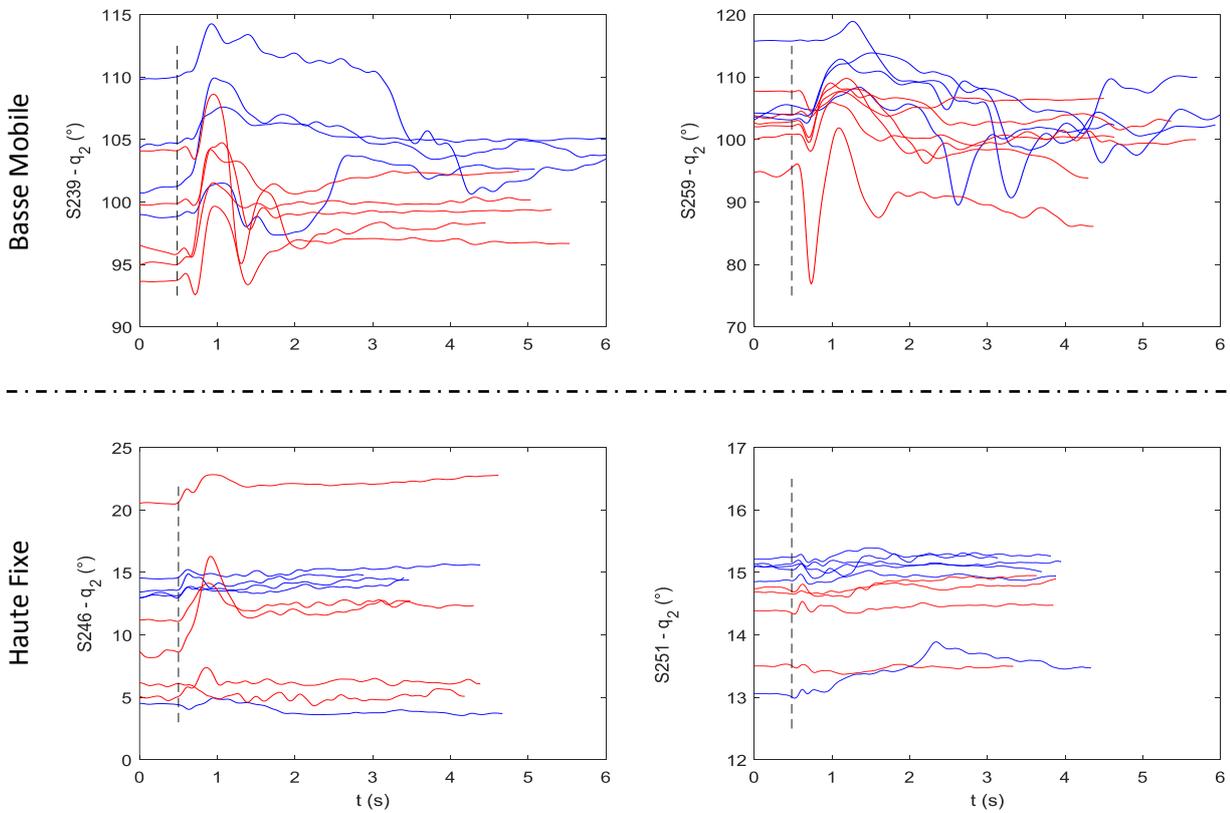


FIG. 74 : ANGLE AU POINT E POUR LES SUJETS MOBILES (HAUT) ET FIXES (BAS) (BLEU : MI TENDUS, ROUGE: MI PLIÉS), LA LIGNE EN POINTILLÉS NOIR INDIQUE L'INSTANT DE LA PERTURBATION

### 3.3.2. Effet de la position assise et de la force de perturbation

Comme expliqué précédemment, tous les sujets n'ont pas été perturbés avec la même intensité. Par contre, il est nécessaire de vérifier si l'intensité de la force de perturbation n'est pas différente chez un même sujet entre les conditions de position des MI. Un test statistique apparié par sujets est réalisé sur l'intensité des forces entre les deux conditions et le résultat est non significatif. Cela indique que chaque sujet a été perturbé de façon similaire dans les deux conditions. Cette vérification est importante car elle nous permet d'attribuer d'éventuelles différences dans les mesures à la condition de position des MI et non à la variation de la force entre les deux conditions.

Sur les Fig. 71, Fig. 73 et Fig. 74, la couleur bleue (resp. rouge) des courbes désigne la condition avec les membres inférieurs tendus (resp. pliés). Les résultats des tests statistiques appariés indiquent une différence significative sur les moyennes des angles  $q_0$  et  $q_1$  pour chaque condition. Dans la position MI pliées, le tronc est plus droit donc l'angle  $q_0$  du tronc est plus proche de  $0^\circ$  (ce résultat est discuté en fin de chapitre). Cette position est également associée à une diminution de l'angle moyen  $q_1$  ce qui est logique, en rappelant que chaque sujet a gardé la même stratégie de stabilisation, car d'un point de vue géométrique les membres supérieurs sont maintenus à la même position donc les angles  $q_0$  et  $q_1$  sont liés.

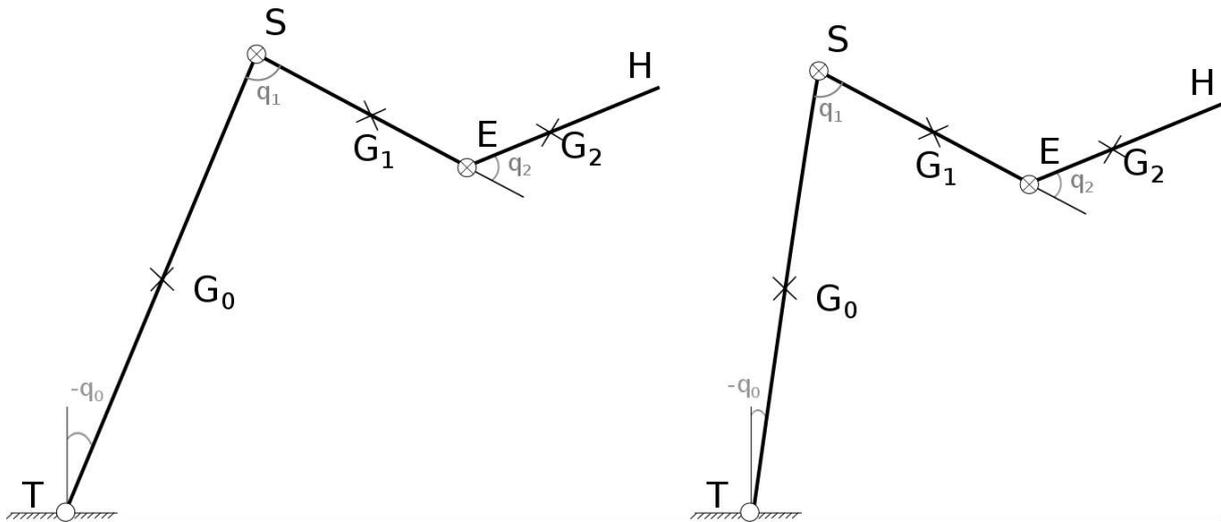


FIG. 75 : RÉPARTITION DES ANGLES AUX POINTS T ET S EN FONCTION DE LA FLEXION DU TRONC

Un dernier résultat cinématique concerne les deux sujets suivant la stratégie HF, l'amplitude de l'angle  $q_0$ , calculée entre l'instant de perturbation et la fin de l'acquisition, est positivement corrélée à la force de perturbation mesurée par le bélier ( $r = 0,78$   $p < 0,005$  pour S246 et  $r = 0,76$   $p < 0,01$  pour S251). L'interprétation de ce résultat, combiné aux résultats d'estimation, est discutée par la suite.

Après avoir étudié la cinématique des sujets en fonction des stratégies et conditions expérimentales, il faut maintenant analyser les résultats de l'estimation des couples articulaires. Le récapitulatif des résultats statistiques significatifs entre les stratégies de position assise et la position des MI est présenté dans la Table 7 en fin de partie.

### 3.4. Résultats de l'OEI

#### 3.4.1. Convergence et Erreur d'estimation

La première étape dans l'analyse des résultats d'estimation est de vérifier la convergence de l'observateur sur les valeurs mesurées (i.e. les angles articulaires). Pour toutes les acquisitions, la convergence de l'OEI est atteinte en moins de 0.3 secondes ; la convergence de l'observateur est donc garantie avant la perturbation. La valeur maximale parmi toutes les acquisitions de l'erreur d'estimation calculée selon (4.1) est de  $0.9^\circ$ . Le calcul de la moyenne quadratique de cette erreur d'estimation (RMSE) pour les trois angles dans toutes les acquisitions traitées est présenté (Fig. 76).

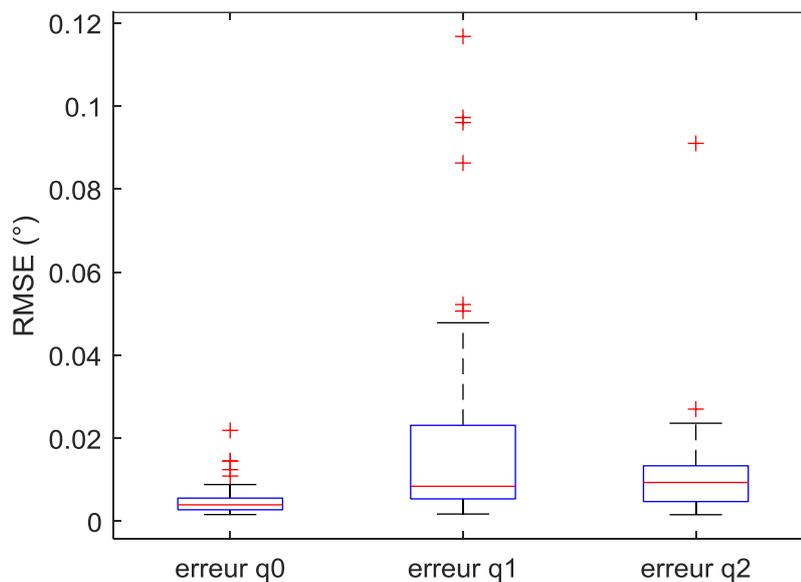


FIG. 76 : MOYENNE QUADRATIQUE DE L'ERREUR D'ESTIMATION POUR CHAQUE ANGLE SUR TOUTES LES ACQUISITIONS TRAITÉES

La Fig. 77 présente, lors d'une acquisition spécifique, les trois angles articulaires ainsi que leur estimation et l'erreur d'estimation absolue calculée quelques instants avant la perturbation et jusqu'à la stabilisation du sujet. L'erreur est très faible (inférieure à  $0.05^\circ$ ) et augmente dans les instants suivant la perturbation, lorsque les angles varient très rapidement.

# CHAPITRE 4 : COLLECTES EXPÉRIMENTALES ET ESTIMATION DU MOMENT PASSIF

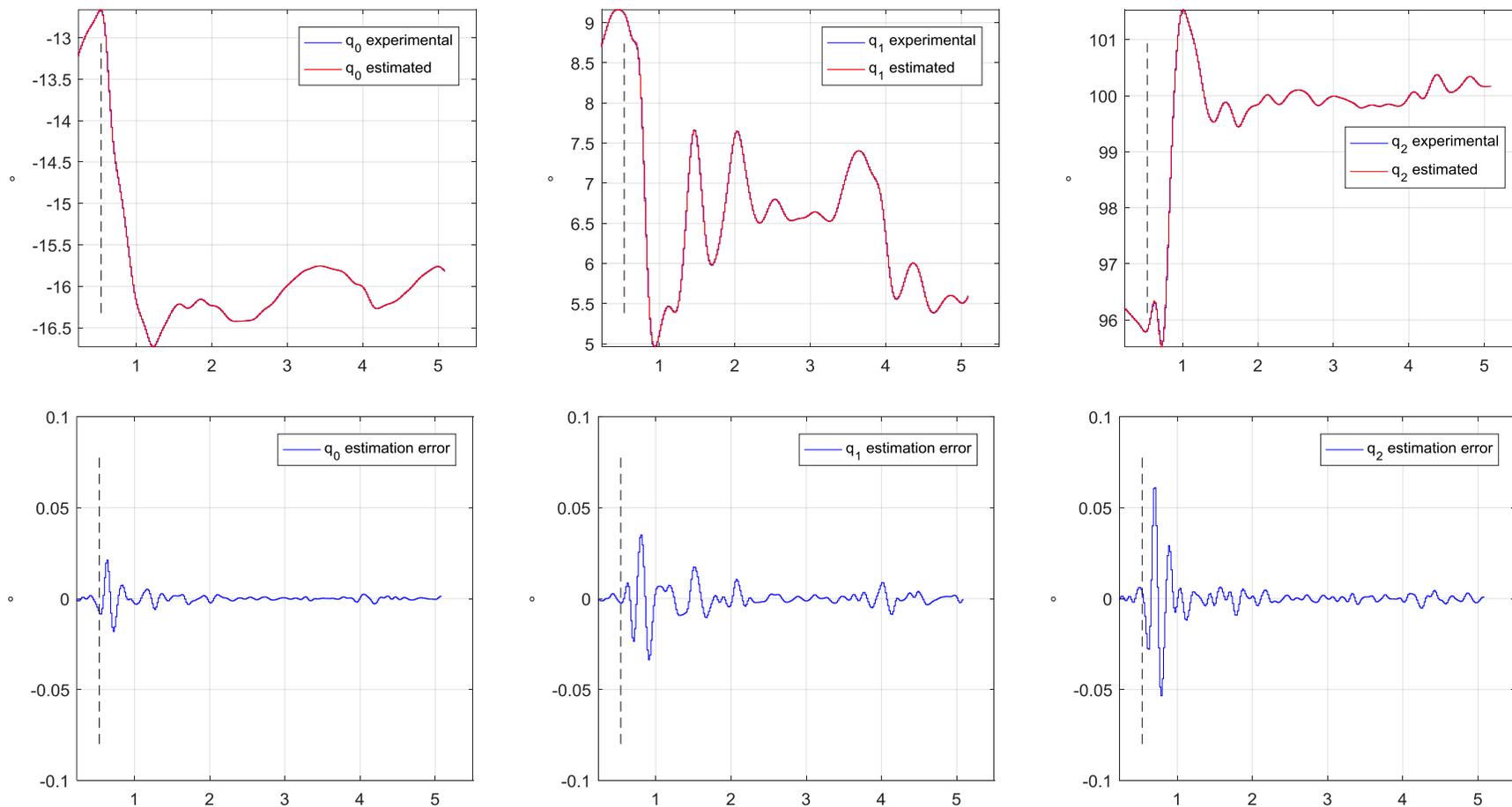


FIG. 77 : ESTIMATION DES ANGLES ARTICULAIRES ET CALCUL D'ERREUR D'ESTIMATION ABSOLUE (POINTILLÉS NOIR : PERTURBATION)

### 3.4.2. Effet de la stratégie de stabilisation

La Fig. 78 présente le couple articulaire  $M_T$  estimé pour chaque acquisition chez les six sujets. Le couple est positif au début de chaque acquisition ce qui est logique d'un point de vue de l'équilibre mécanique car l'angle  $q_0$  est négatif à cet instant (rappel : un couple articulaire positif va faire tourner le segment dans le sens antihoraire). À la suite de la perturbation, le couple  $M_T$  diminue chez tous les sujets, cette diminution est liée à la perturbation qui pousse le sujet dans la direction antérieure ce qui équivaut (Fig. 79) à injecter un couple articulaire négatif (resp. positif) au niveau de l'articulation du tronc (resp. de l'épaule). Comme pour la cinématique, les courbes des sujets suivant la stratégie de stabilisation HF présentent un profil semblable à celles des sujets asymptotiques alors que les courbes des sujets suivant la stratégie BM sont plus saccadées et sont variables plus longtemps après la perturbation.

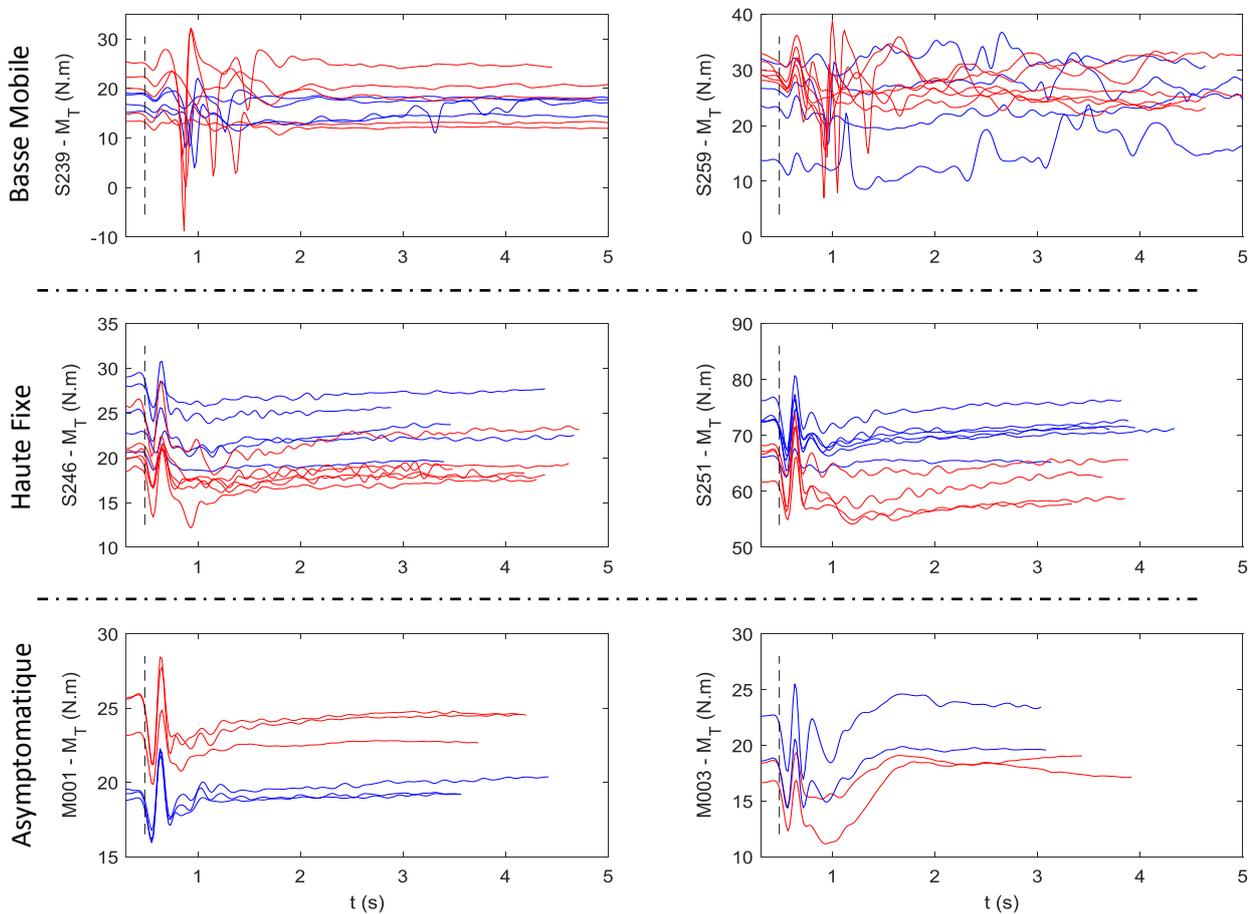


FIG. 78 : COUPLE ARTICULAIRE ESTIMÉ AU POINT T POUR LES SUJETS MOBILES (HAUT), FIXES (MILIEU) ET ASYMPTOMATIQUES (BAS), BLEU : MI TENDUS, ROUGE : MI PLIÉS, LA LIGNE EN POINTILLÉS NOIR INDIQUE L'INSTANT DE LA PERTURBATION

#### Remarque 2

L'intensité du couple  $M_T$  du sujet S251 est de deux à trois fois plus élevée que pour les autres sujets. Sachant que le sujet S251 pèse 100kg (2<sup>e</sup> sujet le plus lourd de la cohorte (Table 3)), cette

observation nous motive à utiliser la méthode présentée dans les travaux de (Moisio et al., 2003) qui consiste à diviser les valeurs des indicateurs des couples (moyennes, amplitude, ISE, IAE et ITAE) par la masse de chaque sujet afin d'obtenir une valeur normalisée.

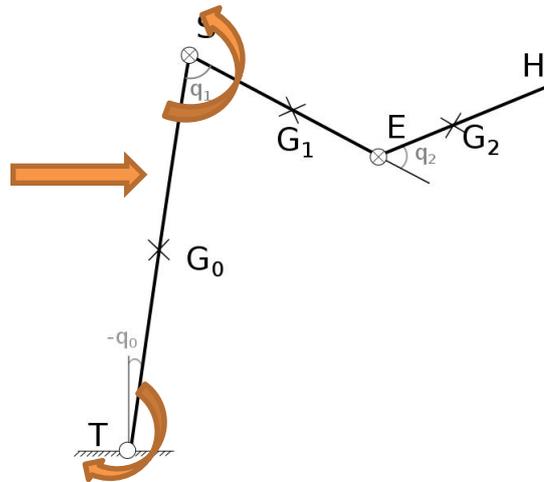


FIG. 79 : COUPLES ARTICULAIRES PRODUITS AUX POINTS T ET S À LA SUITE DE LA PERTURBATION

En zoomant sur les trajectoires (Fig. 80), pendant les premières 200ms après la perturbation (ligne pointillée noire), le couple  $M_T$  varie de manière similaire entre les sujets mais qu'après 200ms (ligne pointillée rouge) il se stabilise chez les sujets fixes et varie fortement chez les sujets mobiles. Cette période correspond aux mouvements de stabilisation des membres supérieurs qui débutent entre 150 et 200ms après la perturbation et dont les angles  $q_1$  et  $q_2$  ainsi que des vitesses angulaires vont influencer la valeur du couple  $M_T$ .

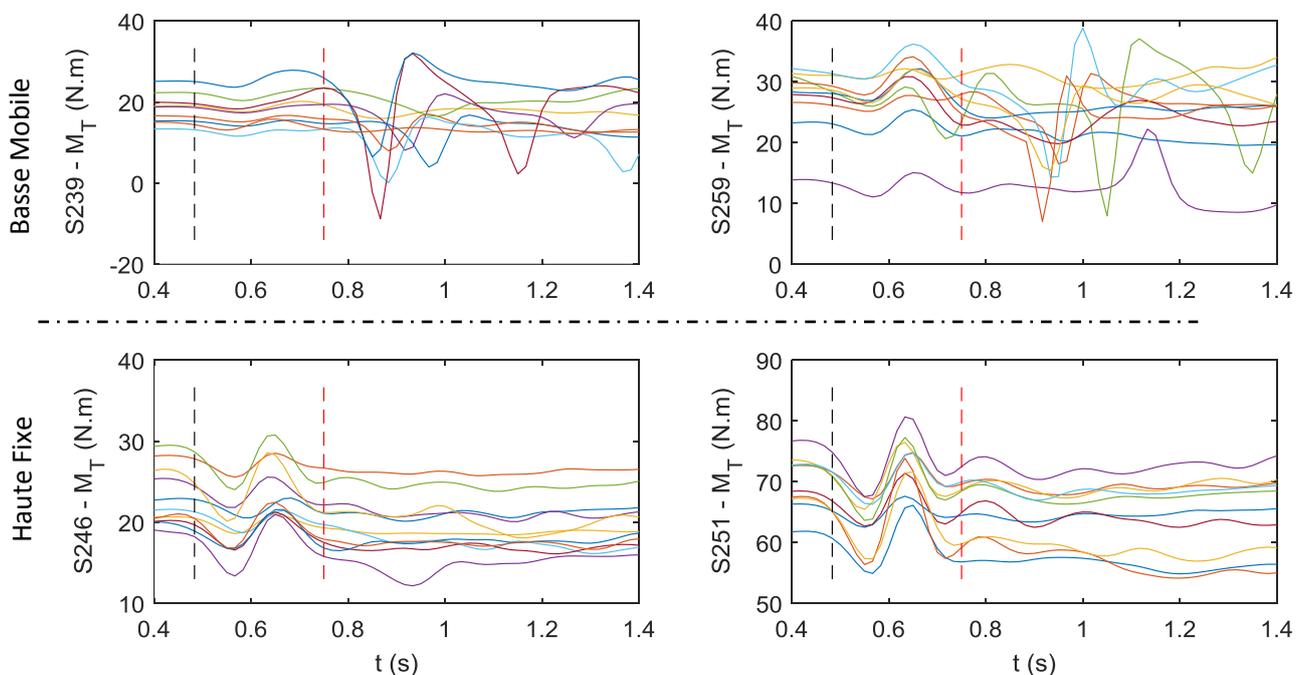


FIG. 80 : COUPLE  $M_T$  DANS LES INSTANTS SUIVANT LA PERTURBATION (LES CONDITIONS NE SONT PAS PRÉCISÉES POUR SIMPLIFIER LA VISUALISATION DES COURBES), POINTILLÉS NOIR : PERTURBATION, POINTILLÉS ROUGE : PERTURBATION+200MS

Les Fig. 81 et Fig. 82 présentent les trajectoires des couples estimés à l'épaule  $M_S$  et au coude  $M_E$  entre les quatre sujets vivant avec une LMÉ (car les trajectoires des sujets fixes sont similaires à celles des sujets asymptotiques). Les valeurs des couples sont naturellement très différentes en fonction du type de stratégie utilisée avec des valeurs moyennes de  $M_S$  autour de 1 N.m pour les sujets mobiles et de 10 N.m et plus pour les sujets fixes. Cette différence est cohérente avec le fait que les sujets HF maintiennent leurs membres supérieurs levés là où les sujets BM les laissent plus retomber

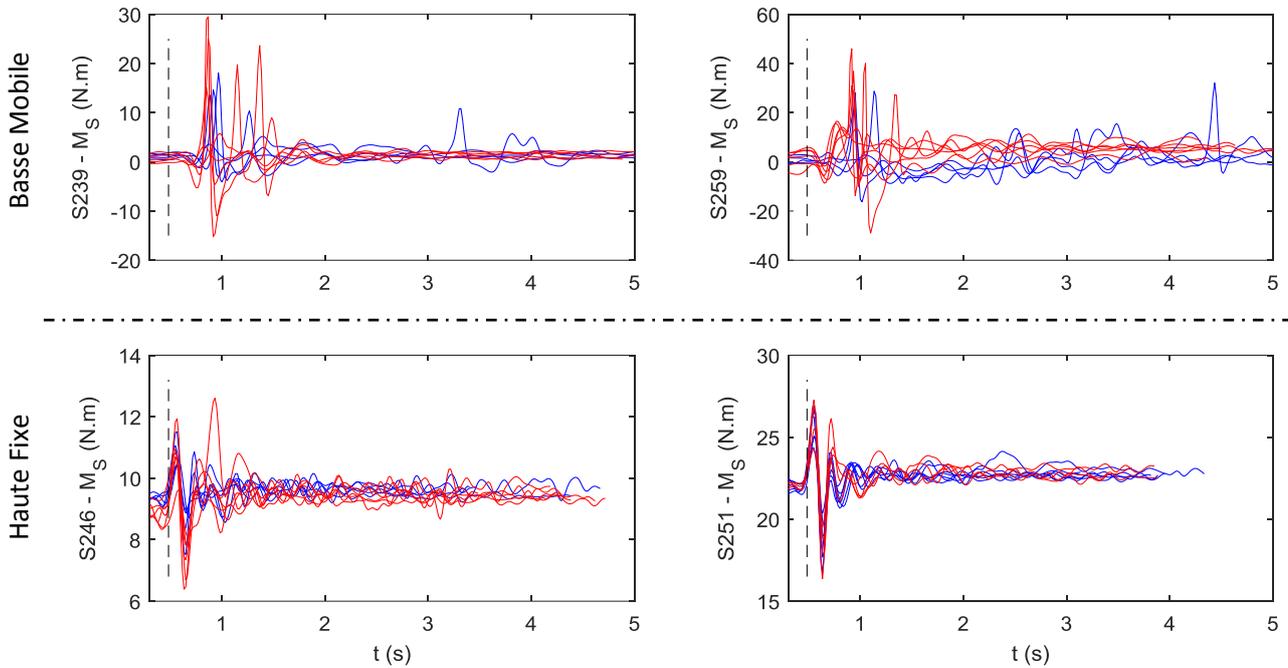


FIG. 81 : COUPLE ARTICULAIRE ESTIMÉ AU POINT S POUR LES SUJETS MOBILES (HAUT), FIXES (BAS), BLEU : MI TENDUS, ROUGE: MI PLIÉS, LA LIGNE EN POINTILLÉS NOIR INDIQUE L'INSTANT DE LA PERTURBATION

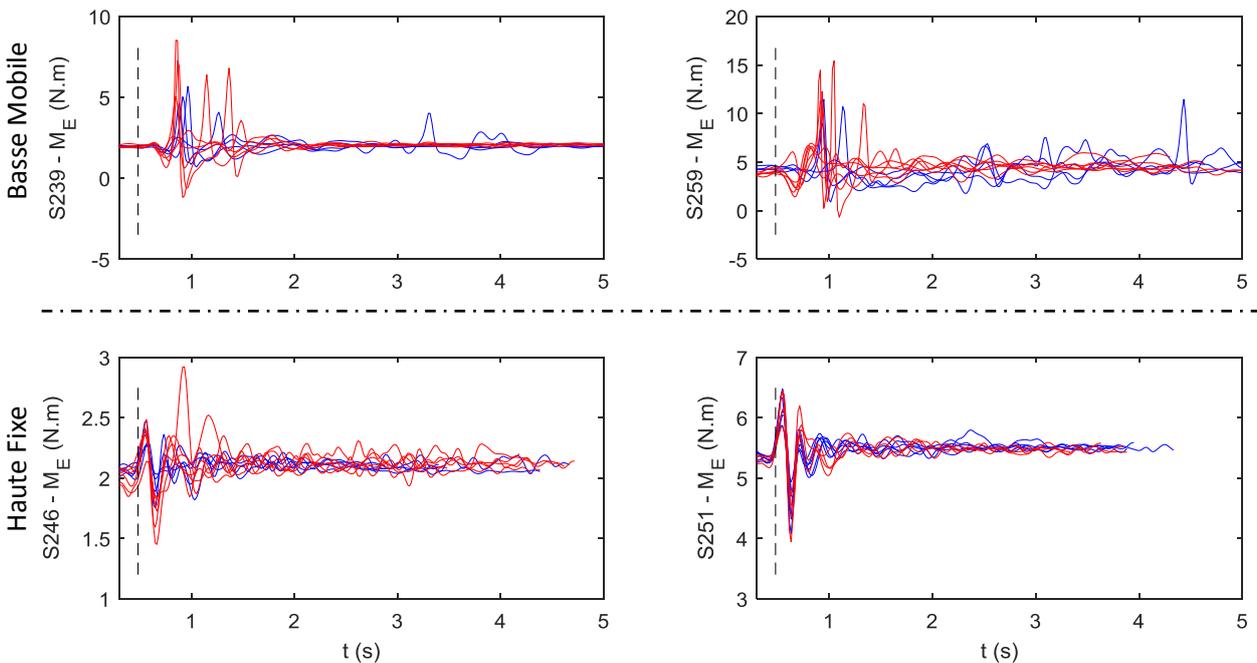


FIG. 82 : COUPLE ARTICULAIRE ESTIMÉ AU POINT E POUR LES SUJETS MOBILES (HAUT), FIXES (BAS), BLEU : MI TENDUS, ROUGE: MI PLIÉS, LA LIGNE EN POINTILLÉS NOIR INDIQUE L'INSTANT DE LA PERTURBATION

Les valeurs moyennes du couple  $M_E$  sont proches pour tous les sujets ( $2\text{N.m} < M_E < 6\text{N.m}$ ). Cela s'explique pour deux raisons : 1. Le segment avant-bras est léger par rapport aux bras et au tronc ; 2. Même si l'angle  $q_2$  (relatif) diffère entre les deux stratégies, l'inclinaison dans l'espace (angle absolu) du segment de l'avant-bras est la même dans les deux stratégies. Ainsi le moment produit par la gravité entre les sujets et le moment résistant  $M_E$  également.

On rappelle que pour les calculs statistiques, les intensités des couples estimés dans les acquisitions sont normalisées par la masse de chaque sujet. Comme pour les angles, les indicateurs ISE, IAE et ITA des couples normalisés  $M_S / m$  et  $M_E / m$  des sujets mobiles sont significativement supérieurs à ceux des sujets fixes. De plus, les valeurs moyennes des couples normalisés  $M_T / m$  et  $M_S / m$  chez les sujets fixes sont significativement supérieurs à celles des sujets mobiles.

### 3.4.3. Effet de la position assise

Les calculs statistiques appariés n'apportent pas de résultats significatifs concernant les indicateurs des couples estimés en fonction de la position assise. Seule une tendance, non significative du fait des corrections de Bonferroni ( $p < 0,05$ ), concernant des indicateurs du couple lombaire normalisé  $M_T / m$  est constatée. Cette tendance indique d'une part que l'amplitude, l'ISE et l'IAE du couple lombaire normalisé sont plus élevées lorsque les MI sont pliés, et que la valeur moyenne du couple lombaire est supérieure lorsque les MI sont tendus. La discussion de ces résultats est réalisée dans la partie suivante.

## 3.5. Résumé des résultats statistiques

Le récapitulatif des résultats des tests statistiques est présenté dans la Table 7. D'un point de vue cinématique, les sujets avec une stratégie de position assise de type basse mobile (BM) vont plus déplacer leurs membres supérieurs en terme d'amplitude ainsi que dans la durée ce qui se traduit par une augmentation des indicateurs d'amplitude, ISE, IAE et ITAE des angles  $q_1$  et  $q_2$ . De manière logique, cette augmentation du déplacement des membres supérieurs induit une augmentation des couples articulaires normalisés estimés au niveau des épaules et du coude pour les sujets suivant la stratégie BM. Par ailleurs, le couple normalisé lombaire moyen est plus important chez les sujets fixes que chez les sujets mobiles.

Enfin, la position des membres inférieurs (MI) entraîne une modification posturale au niveau des angles des épaules ainsi que du tronc qui est plus fléchi lorsque les MI sont tendus. Une tendance, bien que non significative, est à noter concernant le couple normalisé lombaire qui est estimé comme plus important lors de la tension des MI et plus variable lors de la flexion des MI.

CHAPITRE 4 : COLLECTES EXPÉRIMENTALES ET ESTIMATION DU MOMENT PASSIF

TABLE 7 : RÉCAPITULATIF DES DIFFÉRENCES SIGNIFICATIVES SUR LES INDICATEURS ENTRE LES STRATÉGIES ET CONDITIONS DES MI (P < 0.001 SAUF \* : P<0.05)

			Basse Mobile (BM) / Haute Fixe (HF)	MI Pliés (P) / Tendus (T)
Cinématique	q <sub>0</sub>	amplitude	/	/
		moyenne	/	P > T
		ISE	/	/
		IAE	/	/
		ITAE	/	/
	q <sub>1</sub>	amplitude	BM > HF	/
		moyenne	HF > BM	T > P
		ISE	BM > HF	/
		IAE	BM > HF	/
		ITAE	BM > HF	/
	q <sub>2</sub>	amplitude	BM > HF	/
		moyenne	BM > HF	/
		ISE	BM > HF	/
		IAE	BM > HF	/
		ITAE	BM > HF	/
Estimation	M <sub>T</sub> /m	amplitude	BM > HF	P > T *
		moyenne	HF > BM	T > P *
		ISE	BM > HF	P > T *
		IAE	/	P > T *
		ITAE	/	/
	M <sub>S</sub> /m	amplitude	BM > HF	/
		moyenne	HF > BM	/
		ISE	BM > HF	/
		IAE	BM > HF	/
		ITAE	BM > HF	/
	M <sub>E</sub> /m	amplitude	BM > HF	/
		moyenne	/	/
		ISE	BM > HF	/
		IAE	BM > HF	/
		ITAE	BM > HF	/

## 4. Discussion

### 4.1. Stabilité assise chez les sujets vivant avec une LMÉ

#### 4.1.1. Perturbation et choix de la stratégie

Le protocole mis en place laisse libre le choix de la stratégie de stabilisation au sujets afin de ne pas demander à des sujets aux capacités physiques différentes de réaliser les mêmes mouvements.

Les premiers résultats sont liés à l'intensité de la perturbation et les pertes d'équilibre. Les sujets avec une lésion basse (< T6) ont été perturbés avec une force plus importante que les sujets avec une lésion haute pour solliciter leur contrôle postural. De plus, les quelques pertes d'équilibre concernent uniquement des sujets avec une lésion haute dont la moitié a un score TIC de 0,5 indiquant un contrôle modéré du tronc. Ces résultats rappellent que l'équilibre des sujets avec une lésion haute est plus précaire, ce qui est cohérent avec les travaux précédents sur le sujet (Seelen et al., 2001; Gauthier et al., 2013; Milosevic et al., 2017), et que l'intensité des forces de perturbation était suffisante pour solliciter le contrôle postural des sujets.

Trois stratégies différentes de stabilisation à l'aide des membres supérieurs sont identifiées par l'analyse vidéo : basse mobile, haute mobile et haute fixe. Le fait d'avoir les mains levées est reconnu comme augmentant la difficulté du contrôle postural (Grangeon et al., 2012; Milosevic et al., 2017). De plus, il est mécaniquement logique de considérer que l'instabilité posturale augmente de façon proportionnelle à la hauteur des membres supérieurs (en analogie avec le pendule inverse dont la masse serait concentrée au sommet). Cette stratégie de stabilisation, choisie personnellement par le sujet, traduit à la fois un sentiment de sécurité du sujet mais donne également une indication sur l'efficacité de son contrôle postural assis. En d'autres termes, les sujets suivant la stratégie haute fixe sont plus stables que les sujets suivant la stratégie basse mobile.

#### 4.1.2. Stratégies, cinématique et couples articulaires

La cinématique des acquisitions de deux sujets suivant une stratégie basse mobile, deux sujets suivant une stratégie haute fixe et deux sujets asymptotiques (stratégie haute fixe) a été analysée. La ressemblance entre les trajectoires angulaires et les couples articulaires des sujets fixes et asymptotiques est telle que sur tous les indicateurs statistiques calculés, aucune différence significative n'a été trouvée entre ces deux groupes.

Le temps nécessaire à la stabilisation des sujets mobiles après perturbation est en moyenne 50% plus long que celui des autres sujets. Les mouvements des membres supérieurs sont plus importants en termes d'amplitude angulaire et temporelle, les couples articulaires normalisés développés au niveau des épaules et des coudes sont également plus élevés chez ces sujets. Logiquement, le couple articulaire normalisé de l'épaule est supérieur pour les sujets fixes car ces sujets maintiennent leurs bras à l'horizontale par rapport au tronc alors que les sujets mobiles les gardent plus proches de l'axe du tronc.

Enfin, le résultat principal d'estimation entre les stratégies de stabilisation est la différence significative des moyennes du couple normalisé lombaire  $M_T / m$  entre les acquisitions des sujets fixes et mobiles. Ce couple est plus élevé chez les sujets fixes que chez les sujets mobiles. Une plus

grande rigidité au niveau lombaire du fait de ce couple confère logiquement une résistance supérieure à la force de perturbation et donc une stabilité plus importante.

Il faut rappeler que le couple  $M_T$  regroupe plusieurs contributions mécaniques, il peut s'agir des contributions passives associées à la contrainte mécanique des tissus mous du tronc (capsule articulaire, ligaments, pression intra-abdominale...); ou bien, chez les sujets asymptomatiques ou avec une lésion basse, du couple résultant de l'activation des muscles érecteurs du rachis pour résister à la force de perturbation. Les trajectoires de l'angle du tronc chez les sujets fixes vivant avec une LMÉ ne ressemblent pas à celles observées par (Thrasher et al., 2010) dans des expériences similaires chez des sujets asymptomatiques car il n'y a pas de dépassement de l'angle d'origine. Cette observation peut être expliquée par la différence d'intensité de perturbation entre les études, avec une moyenne de 35.6N dans notre cas et de 186.6N dans l'étude de (Thrasher et al., 2010). La cinématique observée chez les sujets fixe laisse à penser que ces sujets adoptent un comportement de résistance rigide à la flexion (analogue à un ressort/amortisseur de torsion). Cette hypothèse est renforcée par le résultat significatif de corrélation entre l'amplitude de l'angle  $q_0$  et l'intensité de la force de perturbation chez ces sujets.

#### 4.1.3. Effet de l'extension des membres inférieurs

L'hypothèse formulée en amont de cette expérience est qu'il est possible d'améliorer le contrôle postural des personnes vivant avec une LMÉ en passant de la position membres inférieurs pliés à 90° à tendus à l'horizontale, augmentant de ce fait la rigidité au niveau du tronc.

Les résultats de l'analyse qualitative des vidéos des acquisitions dans les deux conditions sont que l'extension des membres inférieurs a permis de passer de la stratégie basse mobile à haute mobile chez un sujet et de la stratégie haute mobile à haute fixe chez trois autres. Comme discuté précédemment, ces changements sont équivalents à une amélioration de la stabilité chez ces quatre sujets (15% de la cohorte). Ce résultat qualitatif est cohérent avec les observation et mesures de (Shirado et al., 2004) sur l'effet positif de la position assise longue (MI tendus) sur la stabilité assise.

L'extension des membres inférieurs est associée à une augmentation de la flexion du tronc (le tronc se rapproche de la verticale), ce résultat peut être contre-intuitif car si la chaîne posturale postérieure est sollicitée lors de l'extension des MI, le tronc devrait se rapprocher de la verticale dans un mouvement d'extension. Cela s'explique de deux manières, la première est que la position assise longue provoque une rotation postérieure du pelvis (Shirado et al., 2004), ce qui entraîne un recul du centre de l'articulation lombaire utilisé dans le calcul de l'axe du tronc et donc une augmentation géométrique de l'angle de flexion. La deuxième raison suppose une compensation de la part des sujets car l'extension des MI tire sur les tissus mous du bas du dos et entraîne donc le tronc en arrière. En considérant que la chute en arrière est la plus dangereuse pour les sujets car il est impossible de se retenir avec les mains, une posture compensatoire et plus sécurisante pour ces sujets consiste à fléchir d'avantage le tronc.

Enfin, des tendances concernant le couple normalisé lombaire  $M_T / m$  sont à souligner. La valeur moyenne du couple  $M_T / m$  est supérieure lorsque les MI tendus et la variabilité du couple  $M_T / m$  (représentée par l'amplitude, l'ISE et l'IAE) est supérieure lorsque les MI pliés et. L'augmentation du couple moyen est cohérente avec le changement postural discuté précédemment car la flexion du tronc et l'extension des MI entraîne une sollicitation encore plus importante de la chaîne posturale

postérieure. En ce qui concerne la variabilité du couple lombaire, il est logique qu'un système mécanique rigide soit moins variable qu'un système plus souple. Il est donc important d'augmenter le nombre d'acquisitions traitées afin de vérifier si ces tendances se confirment, ce qui vérifierait l'hypothèse principale de cette étude sur la modification des valeurs du couple lombaire par extension des MI ainsi que son impact sur la stabilité assise.

### **4.2. Remarques sur le modèle S3S**

#### **4.2.1. Sources d'erreurs**

Il y a plusieurs sources d'erreurs pouvant influencer la qualité de l'estimation des couples passifs, les plus évidentes sont liées à des erreurs de modélisation et ont été discutées précédemment. Au niveau expérimental, la présence d'artefacts de peau pour les marqueurs autour de l'épaule peut entraîner une erreur de calcul du centre de l'articulation de l'épaule (point S). La correction des artefacts de peau pour les membres supérieurs est toujours un problème ouvert en biomécanique (Blache et al., 2017) et des travaux récents ont été réalisés pour réduire leurs effets en (Naaim et al., 2017) ou avec des filtres de Kalman étendus (Bonnet, Richard, et al., 2017).

#### **4.2.2. Compatibilité du modèle et perspectives**

Pour rappel, un objectif fondamental de ce travail est d'estimer des efforts internes non mesurables à partir de données expérimentales mesurées. Des outils et méthodes de l'automatique non linéaire existent pour créer des observateurs dans ce but mais cette approche nécessite d'être structurée par étapes de complexité croissante. Le modèle H2AT permet d'attester la faisabilité de cette méthodologie et le modèle S3S est donc la 2<sup>e</sup> version dans la mise en œuvre du modèle permettant d'expliquer les différentes variables posturales impliquées dans la position assise d'une personne vivant avec une LMÉ. De par sa définition dans le plan sagittal, le modèle S3S n'est utilisable que pour l'analyse de mouvements planaires, ce qui était déjà le cas du modèle H2AT où la planéité des trajectoires était vérifiée avant analyse. Concernant l'utilisation de données expérimentales, le modèle S3S permet de traiter plus d'acquisitions que le H2AT car, parmi les trajectoires planaires, les seules acquisitions non traitées ont été celles avec des pertes d'équilibre ou des pertes de marqueurs non reconstituables. Au regard des mouvements mesurés expérimentalement, il convient maintenant de proposer de nouvelles améliorations du modèle S3S.

Plusieurs pistes d'amélioration sont identifiées, tout d'abord concernant la représentation du tronc comme un segment rigide en flexion au niveau de l'articulation lombaire est une simplification mécanique. D'un point de vue anatomique, il est reconnu que la flexion/extension du rachis se concentre principalement aux articulations des cinq vertèbres lombaires et du pelvis (Kapandji, 2005b). De plus, les angles articulaires entre les vertèbres lombaires et le pelvis sont corrélés les uns avec les autres ce qui signifie qu'en connaissant l'angle total de flexion on peut déduire les angles de chaque articulation vertébrale. Ces coefficients, identifiés par (White and Panjabi, 1990), ont déjà été utilisés dans le cadre du modèle segmentaire de tronc proposé par (Vette et al., 2012). Ajouter cette modification au modèle S3S permettrait d'améliorer la cohérence anatomique du modèle sans ajouter de complexité car il y aurait toujours un angle lombaire divisé à travers cinq articulations.

Une deuxième amélioration concerne la définition du point T dans le modèle, actuellement ce point est considéré comme fixe car le pelvis ne se translate pas et est calculé comme le centre de rotation de l'axe du tronc pendant l'acquisition. Le fait que le point T soit fixe est une contrainte mécanique qui va entraîner une sensibilité plus importante du couple  $M_T$  au déplacement des membres supérieurs. Une possibilité pour relâcher l'articulation pivot du point T serait de la placer sur une articulation prismatique (à la façon du pendule inverse sur un chariot, problème classique d'automatique) ou d'utiliser la représentation de (Reeves et al., 2009) consistant à placer l'articulation lombaire sur un demi cylindre représentant le pelvis. Il est à noter que ces deux propositions augmenteront obligatoirement la complexité du modèle en ajoutant de nouvelles non linéarités.

Malgré toutes ces améliorations, toutes les acquisitions présentant des mouvements en 3D ne peuvent toujours pas être analysées à l'aide du modèle S3S et donc de l'OEI associé. La création d'un futur modèle permettant un déplacement latéral des membres supérieurs est donc nécessaire pour estimer les couples articulaires dans ces articulations.

## 5. Conclusions

Dans ce chapitre, le protocole et les données expérimentales d'une collecte réalisée au laboratoire de pathokinésiologie de l'Université de Montréal sont présentés. Cette collecte permet d'obtenir une base de données expérimentale sur la stabilité assise des sujets vivant avec une LMÉ regroupant une population variée en termes de sexe, d'âge et de niveau de lésion. En l'espace de 16 semaines à Montréal, le protocole d'étude a été écrit, le dossier de demande d'éthique a été soumis et accepté et 350 acquisitions ont été collectées sur 26 sujets vivant avec une LMÉ ainsi que sur 3 sujets sains. Les stratégies de maintien des sujets, les résultats cinématiques et les couples articulaires estimés grâce au modèle S3S et à l'observateur à entrées inconnues associé sont comparés en fonction de la stabilité des sujets et des conditions d'extension des membres inférieurs.

Les sujets ayant une bonne stabilité assise présentent un couple lombaire en moyenne plus important que les sujets avec une stabilité précaire. De plus, l'analyse des acquisitions montre une amélioration de la stabilité de 15% des sujets après extension des membres inférieurs. Ces résultats soutiennent l'hypothèse selon laquelle la rigidité lombaire participe à la stabilité assise et que l'extension de la chaîne posturale postérieure peut l'augmenter.

Ce travail représente la première estimation de couples articulaires lors de la stabilisation de sujets vivant avec lésion de la moelle épinière par le biais d'un observateur à entrées inconnues écrit sous la forme Takagi-Sugeno. Les futurs travaux consisteront à améliorer le modèle S3S afin d'augmenter le nombre de sujets analysés. La recherche de corrélations entre les couples estimés et des paramètres personnels des sujets (souplesse des membres inférieurs, score TIC, niveau de lésion, âge de la lésion etc...) seront réalisées. Les stratégies de stabilisation seront également analysées afin de déterminer les lois de contrôle sous-jacentes permettant de les reproduire en simulation.

## CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Les personnes vivant avec une lésion de la moelle épinière (LMÉ) subissent un affaiblissement de leurs capacités sensori-motrices en dessous du niveau de lésion ce qui influence négativement leur contrôle postural. Afin de mieux analyser la stabilité assise, ce travail adopte une approche par modèle mais les représentations existantes de la position assise sont très rares et inapplicables pour les individus vivant avec une LMÉ. Ce travail s'est donc focalisé sur l'étude de la stabilité assise des personnes vivant avec une LMÉ par des outils de l'automatique non linéaire, trois objectifs ont été définis :

1. Proposer des modèles biomécaniques non linéaires de la stabilité en position assise pour les personnes vivant avec une LMÉ
2. Utiliser des méthodes d'écriture de modèle du domaine de l'automatique non linéaire afin de créer les outils nécessaires à l'estimation des variables internes (non mesurées) du modèle.
3. Améliorer la connaissance de la stabilité chez les personnes vivant avec une LMÉ par l'estimation expérimentale d'efforts internes en fonction de paramètres personnels et des conditions expérimentales

Ce chapitre présente les contributions apportées dans ce travail de thèse ainsi que les perspectives de recherches futures dans les domaines de la modélisation et de l'étude du contrôle postural assis.

### 1. Contributions

Pour éviter d'être confronté directement et simultanément à des problèmes de faisabilité, de complexité, de limitations des solveurs numériques, il a été décidé de procéder par étapes en commençant par une étude de faisabilité sur un modèle simplifié, le modèle H2AT. Ce dernier présente une complexité réduite compatible avec les solveurs actuels et nous a permis de nous focaliser sur les difficultés méthodologiques, à savoir : le choix du cadre temporel (continu ou discret), le contrôle d'un modèle instable retardé en entrée, des techniques de réduction du nombre de non linéarités et surtout, dans le contexte de l'observation du système, le traitement des prémisses non mesurables. Toutes ces étapes ont été franchies et les méthodologies ont été validées par simulations et à l'aide de mesures expérimentales.

Cette première étude validée, un deuxième modèle (le S3S) a été créé dans le but d'augmenter la qualité anatomique du modèle et donc de l'estimation. Les mêmes verrous que sur le modèle H2AT ont été retrouvés, seule l'augmentation du nombre de non linéarités, comme attendu, n'est pas directement compatible avec les solveurs actuels. Cette augmentation ne pose pas de problèmes pour la partie commande car des techniques de robustesse peuvent être utilisées pour réduire la taille du polytope en garantissant les performances désirées. Par contre, pour la partie observation et l'estimation des entrées inconnues, il est nécessaire de conserver un observateur qui soit basé sur un système non linéaire « le plus proche possible » du modèle S3S. Une méthode d'approximation

## CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

basée sur les similarités des développements limités de Taylor a été mise en œuvre de manière à conserver un modèle très proche du modèle S3S tout en diminuant le nombre de sommets du polytope et permettant de résoudre les problèmes de contraintes LMI associés. Les modèles S3S et l'OEI associé ont été validés en simulation. Les modèles H2AT et S3S sont, à notre connaissance, les premiers modèles permettant l'étude de la stabilisation assise par le déplacement des membres supérieurs.

Enfin les résultats cinématiques et d'estimation par le modèle S3S et l'OEI associé lors d'une collecte expérimentale sur sujets vivant avec une LMÉ montrent que la couple passif lombaire est associé à une bonne stabilité assise et que l'extension de la chaîne posturale postérieure peut l'augmenter.

En conclusion, cette thèse a fait la preuve de concept qu'il est possible d'utiliser les outils de l'automatique non linéaire dans le but d'estimer des couples internes et a répondu aux trois objectifs formulés dans l'introduction. Les travaux théoriques des chapitres 2 et 3 combinés aux données expérimentales du chapitre 4 fournissent de nouvelles données pour l'étude du contrôle postural chez les personnes vivant avec une LMÉ et ouvrent la voie vers une utilisation plus large des outils de l'automatique non linéaire en biomécanique. Le résumé des contributions et communications (revues scientifiques et conférences) réalisées au cours de la thèse est présenté dans la Table 8

TABLE 8 : CONTRIBUTIONS DE CETTE THÈSE

Modèle ou Méthode	Contributions	Communications
H2AT	Modèle et l'OEI dans le domaine continu	IFAC ICONS 2016 / AMSE 2016 / ESB 2016 / IFRATH 2016
Méthode	Loi de contrôle pour entrée retardée et implémentation par inversion dynamique	FUZZ-IEEE 2016 / LFA 2016
Méthode	Réduction du nombre de non linéarités et approche robuste pour l'OEI continu	EAAI 2018 (IF 2.894)
H2AT	OEI dans le domaine discret	IFAC-WC 2017 / LFA 2017
H2AT	Résultats des expérimentations préliminaires	Neurophysiologie Clinique 2016 (IF 1.479) / PEM 2016 / ESB 2017
S3S	Modèle et l'OEI dans le domaine discret	JoB 2018 (IF 2.664, soumise)
Méthode	Méthode de réduction du nombre de non linéarités par approximation (Développement de Taylor)	IFAC CESCIT 2018

## 2. Perspectives

### 2.1. Modélisation

#### 2.1.1. Modélisation biomécanique

Les perspectives à court terme concernant la modélisation sont d'apporter des modifications au modèle S3S. Le déplacement de l'articulation pivot au point T est à envisager pour se rapprocher d'une définition plus anatomique du centre de l'articulation lombaire. Plusieurs solutions sont envisagées, placer le point T sur une liaison prismatique afin de permettre un déplacement horizontal, représenter le segment du bassin par un demi-cylindre comme dans la représentation de (Reeves et al., 2009) et enfin, séparer la liaison pivot unique en cinq articulations vertébrales lombaires contraintes cinématiquement les unes aux autres en utilisant les angles de (White and Panjabi, 1990) comme dans les travaux de (Vette et al., 2012).

L'étape supplémentaire nécessaire est de réaliser un modèle en 3D, i.e. capable de reproduire les effets des mouvements latéraux observés expérimentalement. Ce modèle 3D permettra alors de couvrir l'ensemble des mouvements de la position assise et pourra être utilisé sur la totalité des données collectées au laboratoire de Montréal.

#### 2.1.2. Formalisme T-S et OEI

La compatibilité de ce modèle 3D et/ou des rajouts des articulations devra évidemment être confrontée avec les capacités de résolution des solveurs actuels ; tout en gardant bien à l'esprit que dans le cadre de l'observation il est indispensable de rester au plus proche du modèle non linéaire. La généralisation des méthodes de réduction de modèle, telle que celle présentée dans le chapitre 3 par approximation de Taylor, fait partie des objectifs futurs afin de pouvoir trouver des solutions aux problèmes écrits sous forme de contraintes LMI.

Naturellement, si la prise en compte du modèle global ne peut se faire, l'utilisation d'une représentation distribuée du système T-S (Lendek et al., 2011) est envisageable. En effet dans un modèle segmentaire, la sortie d'un segment peut être vue comme l'entrée du segment suivant. Cette méthode permet de réduire considérablement la complexité des calculs car les LMI sont écrites pour chaque sous-système. De plus, un nouvel observateur peut être défini pour chaque sous-système afin de s'adapter à sa cinématique spécifique. Cette méthode présente, a priori, deux défauts, devoir trouver une fonction de Lyapunov commune à chaque sous-système et le fait de séparer l'estimation à chaque articulation qui risque de propager (sans précautions adéquates) les erreurs d'estimation au sous-système suivant ; comme c'est le cas dans la dynamique inverse. La différence du système T-S distribué avec la dynamique inverse est qu'il est possible de garder plusieurs segments dans un même sous-système et ainsi chercher à faire des connections de sous-systèmes au niveau d'articulations où l'erreur d'estimation serait minime. Il serait intéressant d'étudier, via cette méthode, le compromis entre complexité et qualité d'estimation en fonction des systèmes définis. Enfin, il est tout à fait possible de penser à résoudre localement le problème d'observation, i.e. par sous-systèmes, ce qui permettrait de fixer les gains des observateurs et à rechercher une fonction de Lyapunov (très certainement non quadratique) pour l'ensemble du système non linéaire en gardant quelques paramètres de réglage, tels que la vitesse de convergence par exemple. Ce dernier cas pourrait se révéler très prometteur, puisqu'il permet à la fois de résoudre le problème de la grande

taille et du grand nombre de variables, tout en conservant la preuve de la convergence asymptotique de l'erreur d'estimation d'état.

L'observateur à entrées inconnues est un outil classique du domaine de l'automatique qui a fait ses preuves avec des applications industrielles liées au domaine automobile (Losero et al., 2018; Laurain et al., 2015) ou à l'utilisation des fauteuils roulants (Feng et al., 2017; Mohammad et al., 2017). Cet outil est très rarement utilisé dans le domaine de la biomécanique, les auteurs lui préférant la méthode classique de la dynamique inverse.

Dans les chapitres 2 et 3, la problématique des prémisses (vitesses angulaires) non mesurables dans l'observateur a été résolue en utilisant le sur-échantillonnage des données mesurées par rapport à la dynamique du système. Cette méthode est pratiquement très efficace, mais d'un point de vue théorique elle n'est pas complètement justifiée, au sens où il manque la preuve que l'écart dû à ce retard d'un échantillon permet toujours de garantir la convergence de l'erreur d'estimation. Une autre technique, en continu, pour améliorer l'observateur serait d'utiliser des méthodes de différentiations comme le différentiateur de Levant (Levant, 2003) afin d'obtenir les dérivées temporelles des angles à la manière d'un capteur virtuel comme dans les travaux de (Ichalal et al., 2015). Le différentiateur de Levant a l'avantage d'être robuste aux bruits et a été utilisé dans des travaux récents sur la stabilisation de modèles T-S pour l'estimation de dérivées temporelle de l'état ainsi que des fonctions d'appartenances (Arceo et al., 2018).

## **2.2. Contrôle postural**

### **2.2.1. En condition expérimentale**

Ce travail représente la première estimation de couples articulaires lors de la stabilisation de sujets vivant avec lésion de la moelle épinière par le biais d'un observateur à entrées inconnues écrit sous la forme Takagi-Sugeno. Le maintien de la position assise sans support est déterminant pour la bonne réalisation d'activités quotidiennes chez les personnes vivant avec une LMÉ et a été étudié dans de nombreuses situations, par l'analyse du signal électromyographique des muscles du dos et des membres supérieurs (Seelen, Janssen-Potten, Adam, et al., 1998; Janssen-Potten et al., 2001), ou du déplacement du centre de pression mesuré sous le bassin (Janssen-Potten et al., 2001; Chen et al., 2003; Shirado et al., 2004; Grangeon et al., 2012) ou sous les membres inférieurs (Milosevic et al., 2015). La combinaison des signaux EMG et du déplacement du COP donne une idée de la stratégie de stabilisation utilisée mais ne permet pas de connaître l'effort articulaire développé lors de la stabilisation. Cette connaissance permettrait d'approfondir la compréhension du contrôle postural assis en apportant une information sur l'effort global développé (ou coût énergétique) lors du maintien de la stabilité assise.

En revenant au contexte de cette thèse et à l'objectif global du projet concernant le maintien de la position assise dans un siège d'avion, une personne assise dans un siège offrant un bon maintien ne doit pas générer de couples articulaires trop importants pour se stabiliser. Une perspective future est de réaliser des collectes expérimentales en comparant plusieurs types d'assises (Aissaoui et al., 2001; Janssen-Potten et al., 2002) et d'estimer l'effort développé pour maintenir l'équilibre dans chaque configuration. Le LAMIH est justement équipé d'un hexapode hydraulique (Rexroth) sur lequel il est possible d'installer des plateformes expérimentales (plateforme PSCHITT PMR, Fig. 83). Une première collecte expérimentale a permis d'observer l'impact de différentes perturbations classiques

## CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

(déplacement et freinage linéaire) ou typique du domaine de l'aéronautique (trous d'air, atterrissage) sur le contrôle postural de sujets vivant avec une LMÉ (Fig. 84). Il est envisagé de réaliser d'autres collectes plus fondamentales concernant le contrôle postural assis en étudiant l'effet de perturbations sensorielles (Speers et al., 2002; Sayenko et al., 2010), de vibrations du corps entier (Slota et al., 2008; Wang and Rahmatalla, 2013).



FIG. 83: HEXAPODE DYDRAULIQUE ET PLATEFORME EXPÉRIMENTALE AVEC SIÈGES D'AVION

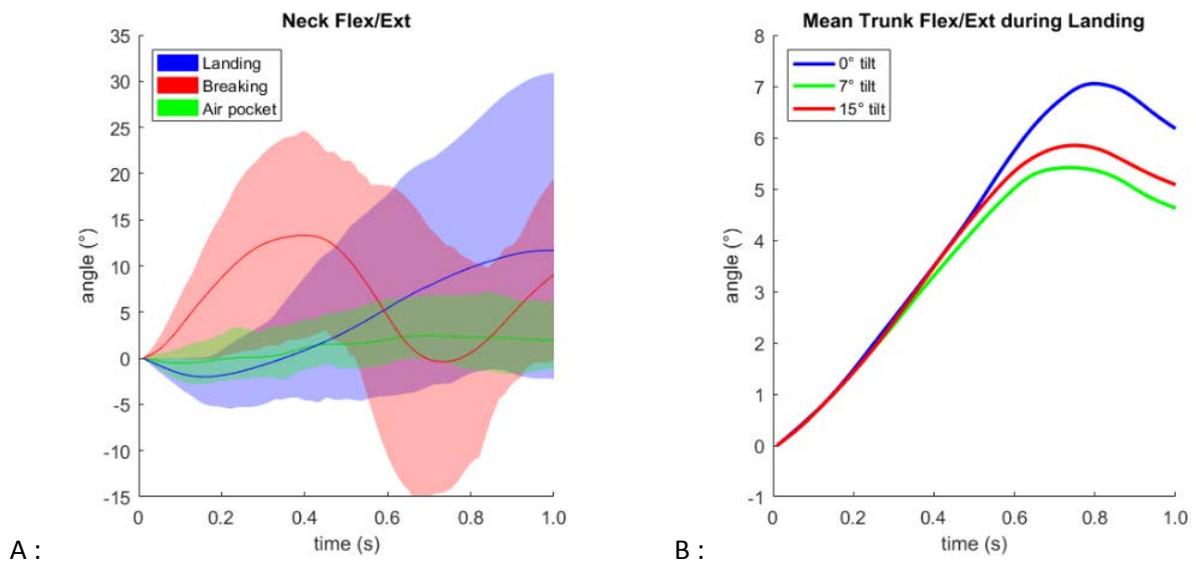


FIG. 84: ETUDE PRÉLIMINAIRE, A : ANGLE DE FLEXION DU COU EN FONCTION DE LA PERTURBATION, B : ANGLE TRONC/SIÈGE EN FONCTION DE LA PERTURBATION

### 2.2.2 En simulation

Les collectes expérimentales sont nécessaires afin de mieux comprendre le contrôle postural assis mais, comme expliqué dans le chapitre 4, elles sont coûteuses en temps et en moyens expérimentaux. Dans le contexte industriel à la base de cette thèse, une question posée est : comment évaluer si le maintien d'un siège est meilleur qu'un autre ? L'utilisation de simulation numérique peut, dans ce cadre bien défini, répondre à cette question. Mais des informations sont nécessaires afin de réaliser une modélisation la plus précise du passager, notamment la connaissance du couple passif au niveau lombaire. La recherche de corrélations entre les couples estimés expérimentalement et des paramètres personnels des sujets (souplesse des membres inférieurs,

score TIC, niveau de lésion, âge de la lésion etc...) permettrait d'attribuer une valeur de couple lombaire pour un sujet spécifique et ainsi créer un modèle de simulation paramétrable. L'utilisation de la simulation est intéressante d'un point de vue économique mais également sur le plan éthique car elle permet de tester des conditions de perturbations expérimentales plus importantes tout en conservant un comportement observé expérimentalement. Ainsi les bureaux d'études pourraient réaliser des évaluations comparatives de la qualité de maintien de différents concepts de sièges afin de trouver des compromis entre le coût de fabrication et la qualité fonctionnel de leur produit. Une autre perspective future serait d'utiliser les données mesurées lors de la stabilisation afin de déterminer les paramètres d'une loi de contrôle et de l'utiliser dans des simulations en augmentant progressivement la perturbation jusqu'à l'échec de stabilisation.

### 2.3. Validation expérimentale

L'un des points essentiels de ce type d'approches effectuées sur l'humain est de pouvoir valider expérimentalement les résultats. Cette validation expérimentale est particulièrement importante du fait que tous les signaux internes, notamment les entrées inconnues, ne sont pas directement mesurables, voire pas mesurables du tout. Par exemple, les efforts articulaires internes ne sont pas mesurables à moins d'utiliser des capteurs invasifs entraînant une méthodologie expérimentale complexe et un recours à une procédure impliquant le Comité de Protection des Personnes avec des problématiques d'éthique importantes.

L'idéal est alors de disposer d'un système complètement instrumenté (incluant les actionneurs des entrées inconnues) qui puisse reproduire l'ensemble des situations voulues. Le cahier des charges d'un banc d'essai anthropomorphique motorisé, répliquant les degrés de libertés des sujets lors des collectes expérimentales du chapitre 4, a été mis au point de façon conjointe entre les chercheurs et Sébastien Paganelli (Ingénieur d'Étude au LAMIH et médaillé de cristal du CNRS en 2015). Ce dernier a conçu et réalisé le système à partir du cahier des charges (Fig. 85 et Fig. 86). Les performances demandées sont représentatives des mouvements possibles (Kapandji, 2005a) et correspondent à :

- Amplitude angulaire des coudes :  $160^\circ \Rightarrow$  de  $0$  à  $+160^\circ$
- Amplitude angulaire des épaules :  $200^\circ \Rightarrow$  de  $-10^\circ$  à  $+190^\circ$
- Vitesse angulaire maximum des coudes :  $200^\circ/s \Rightarrow$  amplitude complète effectuée en 800ms
- Vitesse angulaire maximum des épaules :  $125^\circ/s \Rightarrow$  amplitude complète effectuée en 1550ms

Pour réaliser ces performances, le mannequin dispose de quatre actionneurs de type moteur linéaire à vis à billes placés sur les coudes et les épaules. Les angles sont directement obtenus à partir des actionneurs, à l'exception de l'angle du tronc qui est obtenu par capteur de déplacement laser (de classe 2) posé sur le sternum Fig. 86. Les autres capteurs correspondent à six dynamomètres traction / compression (coudes, épaules et clavicules) qui permettent d'obtenir les couples articulaires. L'ensemble du mannequin sera commandé à partir d'une carte D-Space et du logiciel MATLAB/Simulink.

## CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

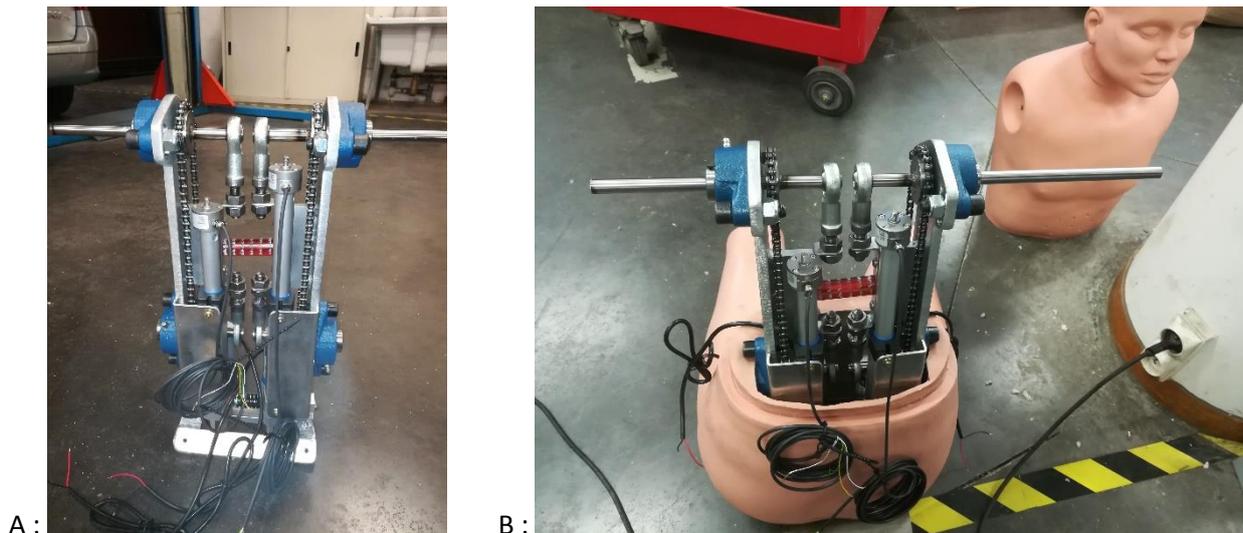


FIG. 85 : A : ARMATURE POUR ARTICULATION DES ÉPAULES, B : IMPLÉMENTATION DE L'ARMATURE DANS LE MANNEQUIN



FIG. 86 : A : MANNEQUIN ÉQUIPÉ, B : CAPTEUR LASER

La première étape correspond à la stabilisation robuste du mannequin, elle sera réalisée à partir des méthodes vues dans le chapitre 3. Un des challenges étant de reproduire, si possible, des mouvements similaires à ceux de sujets. L'un des objectifs serait alors de pouvoir reproduire des pathologies différentes, en introduisant par exemple des retards variables sur l'entrée, en modifiant les paramètres inertiels, en introduisant des dissymétries etc...

Ce challenge est important car il faut être capable, plus que de simplement stabiliser le mannequin, de paramétrer des lois de commande qui soient capables de reproduire des mouvements prédéfinis.

Naturellement, le fait de disposer des couples articulaires et des entrées « inconnues » va permettre de valider les méthodologies développées au chapitre 3 et d'en qualifier la pertinence. Des bouclages inévitables seront nécessaires pour affiner le réglage des observateurs en fonction des différents paramètres utilisés (retard, pathologie ...).

## CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Enfin, placé sur l'hexapode dynamique Fig. 83, ce mannequin pourrait reproduire les stratégies de stabilisation de sujets humains et être soumis à des perturbations d'intensités croissantes sans avoir à s'inquiéter du risque de chute. Ce banc d'essai anthropomorphe motorisé permettant la validation de modèle biomécanique est, à notre connaissance, une première dans la rencontre entre les domaines de l'automatique et de la biomécanique.

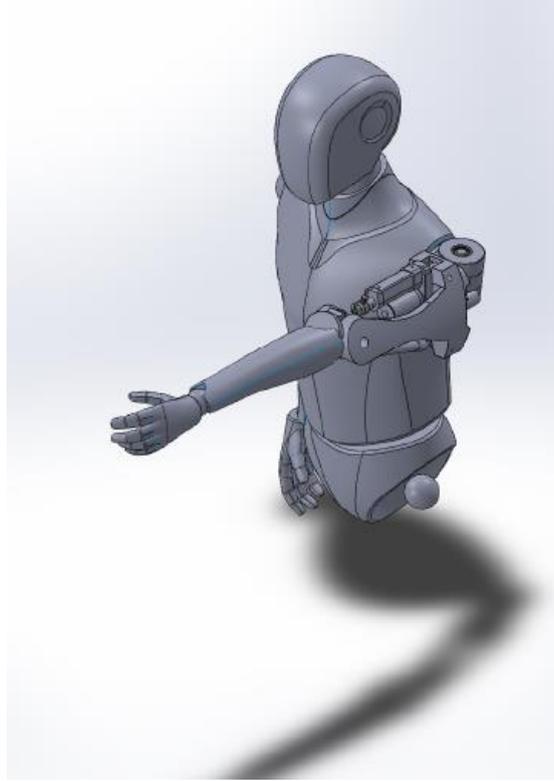


FIG. 87 : CONCEPTION NUMÉRIQUE DU MANNEQUIN MOTORISÉ



## RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- Aissaoui, R., Boucher, C., Bourbonnais, D., Lacoste, M. & Dansereau, J. (2001) Effect of seat cushion on dynamic stability in sitting during a reaching task in wheelchair users with paraplegia. *Archives of Physical Medicine and Rehabilitation*. 82 (2), 274–281.
- Altmann, V. C., Groen, B. E., van Limbeek, J., Vanlandewijck, Y. C. & Keijsers, N. L. W. (2013) Reliability of the revised wheelchair rugby trunk impairment classification system. *Spinal Cord*. 51 (12), 913–918.
- Arceo, J. C., Márquez, R., Estrada-Manzo, V. & Bernal, M. (2018) Stabilization of Nonlinear Singular Systems via Takagi–Sugeno Models and Robust Differentiators. *International Journal of Fuzzy Systems*. 1–9.
- Arjmand, N. & Shirazi-Adl, A. (2006a) Role of intra-abdominal pressure in the unloading and stabilization of the human spine during static lifting tasks. *European Spine Journal*. 15 (8), 1265–1275.
- Arjmand, N. & Shirazi-Adl, A. (2006b) Sensitivity of kinematics-based model predictions to optimization criteria in static lifting tasks. *Medical Engineering & Physics*. 28 (6), 504–514.
- Bauman, W. A., Spungen, A. M., Wang, J., Pierson, R. N. J. & Schwartz, E. (1999) Continuous loss of bone during chronic immobilization: a monozygotic twin study. *Osteoporosis international : a journal established as result of cooperation between the European Foundation for Osteoporosis and the National Osteoporosis Foundation of the USA*. 10 (2), 123–127.
- Beach, T. A. C., Parkinson, R. J., Stothart, J. P. & Callaghan, J. P. (2005) Effects of prolonged sitting on the passive flexion stiffness of the in vivo lumbar spine. *The Spine Journal: Official Journal of the North American Spine Society*. 5 (2), 145–154.
- Bergmark, A. (1989) Stability of the lumbar spine. A study in mechanical engineering. *Acta orthopaedica Scandinavica. Supplementum*. 2301–54.
- Biering-Sorensen, F., Nielsen, J. B. & Klinge, K. (2006) Spasticity-assessment: a review. *Spinal Cord*. 44 (12), 708–722.
- Bjerkefors, A., Carpenter, M. G. & Thorstensson, A. (2007) Dynamic trunk stability is improved in paraplegics following kayak ergometer training. *Scandinavian Journal of Medicine & Science in Sports*. 17 (6), 672–679.
- Blache, Y., Dumas, R., Lundberg, A. & Begon, M. (2017) Main component of soft tissue artifact of the upper-limbs with respect to different functional, daily life and sports movements. *Journal of Biomechanics*. 6239–46.
- Black, K. M., McClure, P. & Polansky, M. (1996) The influence of different sitting positions on cervical and lumbar posture. *Spine*. 21 (1), 65–70.

- Blouin, J.-S., Descarreaux, M., Bélanger-Gravel, A., Simoneau, M. & Teasdale, N. (2003) Attenuation of human neck muscle activity following repeated imposed trunk-forward linear acceleration. *Experimental Brain Research*. 150 (4), 458–464.
- Bogduk, N., Macintosh, J. E. & Pearcy, M. J. (1992) A universal model of the lumbar back muscles in the upright position. *Spine*. 17 (8), 897–913.
- Bonnet, V., Daune, G., Joukov, V., Dumas, R., Fraisse, P., Kulić, D., Seilles, A., Andary, S. & Venture, G. (2016) 'A constrained Extended Kalman Filter for dynamically consistent inverse kinematics and inertial parameters identification', in *2016 6th IEEE International Conference on Biomedical Robotics and Biomechatronics (BioRob)*. June 2016 pp. 944–949.
- Bonnet, V., Dumas, R., Cappozzo, A., Joukov, V., Daune, G., Kulić, D., Fraisse, P., Andary, S. & Venture, G. (2017) A constrained extended Kalman filter for the optimal estimate of kinematics and kinetics of a sagittal symmetric exercise. *Journal of Biomechanics*. 62140–147.
- Bonnet, V., Richard, V., Camomilla, V., Venture, G., Cappozzo, A. & Dumas, R. (2017) Joint kinematics estimation using a multi-body kinematics optimisation and an extended Kalman filter, and embedding a soft tissue artefact model. *Journal of Biomechanics*. 62148–155.
- Boswell-Ruys, C. L., Harvey, L. A., Delbaere, K. & Lord, S. R. (2010) A Falls Concern Scale for people with spinal cord injury (SCI-FCS). *Spinal cord*. 48 (9), 704–709.
- Boyd, S., Ghaoui, L. E., Feron, E. & Balakrishnan, V. (1994) *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Brotherton, S. S., Krause, J. S. & Nietert, P. J. (2007) A Pilot Study of Factors Associated With Falls in Individuals With Incomplete Spinal Cord Injury. *The Journal of Spinal Cord Medicine*. 30 (3), 243–250.
- Bruijn, S. M., Meijer, O. G., Beek, P. J. & Dieën, J. H. van (2010) The effects of arm swing on human gait stability. *The Journal of Experimental Biology*. 213 (23), 3945–3952.
- Cahouët, V., Luc, M. & David, A. (2002) Static optimal estimation of joint accelerations for inverse dynamics problem solution. *Journal of Biomechanics*. 35 (11), 1507–1513.
- Castro, M. J., Apple Jr, D. F., Hillegass, E. A. & Dudley, G. A. (1999) Influence of complete spinal cord injury on skeletal muscle cross-sectional area within the first 6 months of injury. *European Journal of Applied Physiology and Occupational Physiology*. 80 (4), 373–378.
- Castro, M. J., Apple Jr, D. F., Staron, R. S., Campos, G. E. R. & Dudley, G. A. (1999) Influence of complete spinal cord injury on skeletal muscle within 6 mo of injury. *Journal of Applied Physiology*. 86 (1), 350–358.
- Chadli, M., Karimi, H. R. & Shi, P. (2014) On stability and stabilization of singular uncertain Takagi–Sugeno fuzzy systems. *Journal of the Franklin Institute*. 351 (3), 1453–1463.
- Chaffin, D. B. (1969) A computerized biomechanical model—Development of and use in studying gross body actions. *Journal of Biomechanics*. 2 (4), 429–441.
- Chagdes, J. R., Rietdyk, S., Jeffrey, M. H., Howard, N. Z. & Raman, A. (2013) Dynamic stability of a human standing on a balance board. *Journal of Biomechanics*. 46 (15), 2593–2602.

- Chang, Y.-C. & Chen, C.-F. (2011) Identifying mobility service needs for disabled air passengers. *Tourism Management*. 32 (5), 1214–1217.
- Chen, C. L., Yeung, K. T., Bih, L. I., Wang, C. H., Chen, M. I. & Chien, J. C. (2003) The relationship between sitting stability and functional performance in patients with paraplegia. *Archives of Physical Medicine and Rehabilitation*. 84 (9), 1276–1281.
- Chèze, L. (2014) *Analyse cinématique du mouvement humain*. Collection Bioingénierie et Santé. ISTE éditions.
- Chilali, M., Gahinet, P. & Apkarian, P. (1999) Robust pole placement in LMI regions. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 44 (12), 2257–2270.
- Cholewicki, J., Juluru, K. & McGill, S. M. (1999) Intra-abdominal pressure mechanism for stabilizing the lumbar spine. *Journal of Biomechanics*. 32 (1), 13–17.
- Cholewicki, J., Polzhofer, G. . & Radebold, A. (2000) Postural control of trunk during unstable sitting. *Journal of Biomechanics*. 33 (12), 1733–1737.
- Collins, J. J. & De Luca, C. J. (1993) Open-loop and closed-loop control of posture: a random-walk analysis of center-of-pressure trajectories. *Experimental Brain Research*. 95 (2), 308–318.
- Commission Européenne (2010) *Stratégie européenne 1010-2020 en faveur des personnes handicapées : un engagement renouvelé pour une Europe sans entrave*.
- Crisco, J. J., Panjabi, M. M., Yamamoto, I. & Oxland, T. R. (1992a) Euler stability of the human ligamentous lumbar spine. Part I: Theory. *Clinical Biomechanics (Bristol, Avon)*. 7 (1), 19–26.
- Crisco, J. J., Panjabi, M. M., Yamamoto, I. & Oxland, T. R. (1992b) Euler stability of the human ligamentous lumbar spine. Part II: Experiment. *Clinical Biomechanics*. 7 (1), 27–32.
- Daggfeldt, K. & Thorstensson, A. (1997) The role of intra-abdominal pressure in spinal unloading. *Journal of Biomechanics*.
- Dauty, M., Perrouin Verbe, B., Maugars, Y., Dubois, C. & Mathe, J. . (2000) Supralesional and sublesional bone mineral density in spinal cord-injured patients. *Bone*. 27 (2), 305–309.
- Davies, A. & Christie, N. (2017) An exploratory study of the experiences of wheelchair users as aircraft passengers – implications for policy and practice. *IATSS Research*. 41 (2), 89–93.
- De Carvalho, D. E. & Callaghan, J. P. (2011) Passive stiffness changes in the lumbar spine and effect of gender during prolonged simulated driving. *International Journal of Industrial Ergonomics*. 41 (6), 617–624.
- Dempster, W. T. (1955) The Anthropometry of Body Action. *Annals of the New York Academy of Sciences*. 63 (4), 559–585.
- DeVivo, M. J. (1997) Causes and costs of spinal cord injury in the United States. *Spinal Cord*. 35 (12), 809–813.
- van Dieën, J. H., Thissen, C. E. a. M., van de Ven, A. J. G. M. & Toussaint, H. M. (1991) The electro-mechanical delay of the erector spinae muscle: influence of rate of force development,

- fatigue and electrode location. *European Journal of Applied Physiology and Occupational Physiology*. 63 (3–4), 216–222.
- van Dieën, J. H. & Visser, B. (1999) Estimating net lumbar sagittal plane moments from EMG data. The validity of calibration procedures. *Journal of Electromyography and Kinesiology*. 9 (5), 309–315.
- Drake, R. L., Vogl, W. A. & Mitchell, A. W. M. (2010) *Gray's anatomy*. 2nd edition. Philadelphia: Churchill Livingstone/Elsevier.
- Dumas, R., Brånemark, R. & Frossard, L. (2017) Gait Analysis of Transfemoral Amputees: Errors in Inverse Dynamics Are Substantial and Depend on Prosthetic Design. *IEEE Transactions on Neural Systems and Rehabilitation Engineering*. 25 (6), 679–685.
- Dumas, R., Chèze, L. & Verriest, J.-P. (2007) Adjustments to McConville et al. and Young et al. body segment inertial parameters. *Journal of Biomechanics*. 40 (3), 543–553.
- Dumas, R., Nicol, E. & Chèze, L. (2007) Influence of the 3D Inverse Dynamic Method on the Joint Forces and Moments During Gait. *Journal of Biomechanical Engineering*. 129 (5), 786–790.
- Eichhorn, V., Miller, G. & Tribe, J. (2013) TOURISM: A SITE OF RESISTANCE - STRATEGIES OF INDIVIDUALS WITH A DISABILITY. *Annals of Tourism Research*. 43 (0), 578–600.
- Engel, G. (1977) Need for a New Medical Model - Challenge for Biomedicine. *Science*. 196 (4286), 129–136.
- Estrada-Manzo, V. (2015) *Estimation and control of descriptor systems*.
- Estrada-Manzo, V., Lendek, Z. & Guerra, T. M. (2016a) Generalized LMI observer design for discrete-time nonlinear descriptor models. *Neurocomputing*. 182210–220.
- Estrada-Manzo, V., Lendek, Z. & Guerra, T. M. (2016b) Generalized LMI observer design for discrete-time nonlinear descriptor models. *Neurocomputing*. 182210–220.
- Estrada-Manzo, V., Lendek, Zs. & Guerra, T. M. (2015) 'Unknown input estimation of nonlinear descriptor systems via LMIs and Takagi-Sugeno models', in *54th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*. 2015 Osaka, Japan: . pp. 6349–6354.
- Estrada-Manzo, V., Lendek, Z., Guerra, T. M. & Pudlo, P. (2015) Controller Design for Discrete-Time Descriptor Models: A Systematic LMI Approach. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*. 23 (5), 1608–1621.
- Fang, Y., Morse, L. R., Nguyen, N., Tsantes, N. G. & Troy, K. L. (2017) Anthropometric and biomechanical characteristics of body segments in persons with spinal cord injury. *Journal of Biomechanics*. 5511–17.
- Feng, G., Guerra, T. M., Busoniu, L. & Mohammad, S. (2017) 'Unknown input observer in descriptor form via LMIs for power-assisted wheelchairs', in July 2017 pp. 6299–6304.
- Forsberg, H. & Hirschfeld, H. (1994) Postural adjustments in sitting humans following external perturbations: muscle activity and kinematics. *Experimental Brain Research*. 97 (3), 515–527.

- Gagnon, D., Arjmand, N., Plamondon, A., Shirazi-Adl, A. & Larivière, C. (2011) An improved multi-joint EMG-assisted optimization approach to estimate joint and muscle forces in a musculoskeletal model of the lumbar spine. *Journal of Biomechanics*. 44 (8), 1521–1529.
- Gagnon, D., Nadeau, S., Desjardins, P. & Noreau, L. (2008) Biomechanical assessment of sitting pivot transfer tasks using a newly developed instrumented transfer system among long-term wheelchair users. *Journal of Biomechanics*. 41 (5), 1104–1110.
- Gahinet, P., Nemirovskii, A., Laub, A. J. & Chilali, M. (1994) ‘The LMI control toolbox’, in *Proceedings of 1994 33rd IEEE Conference on Decision and Control*. December 1994 pp. 2038–2041 vol.3.
- Gauthier, C., Gagnon, D., Grangeon, M., Jacquemin, G., Nadeau, S., Masani, K. & Popovic, M. R. (2013) Comparison of multidirectional seated postural stability between individuals with spinal cord injury and able-bodied individuals. *J Rehabil Med*. 4547 – 54.
- Georges, D., Besancon, G., Benayache, Z. & Witrant, E. (2007) ‘A nonlinear state feedback design for nonlinear systems with input delay’, in *Control Conference (ECC), 2007 European*. 2007 IEEE. pp. 915–921.
- Giangregorio, L. & McCartney, N. (2006) Bone Loss and Muscle Atrophy in Spinal Cord Injury: Epidemiology, Fracture Prediction, and Rehabilitation Strategies. *The Journal of Spinal Cord Medicine*. 29 (5), 489–500.
- Gløersen, Ø. & Federolf, P. (2016) Predicting missing marker trajectories in human motion data using marker intercorrelations. *PloS one*. 11 (3), e0152616.
- Granata, K. P., Slota, G. P. & Bennett, B. C. (2004) Paraspinal muscle reflex dynamics. *Journal of Biomechanics*. 37 (2), 241–247.
- Grangeon, M., Gagnon, D., Gauthier, C., Jacquemin, G., Masani, K. & Popovic, M. R. (2012) Effects of upper limb positions and weight support roles on quasi-static seated postural stability in individuals with spinal cord injury. *Gait & posture*. 36 (3), 572–579.
- Grant, R. (2013) The State of PRM Accessibility in Single Aisle Commercial Aircraft. *SAE Technical Paper*. (2013-01–2309), .
- Guelton, K., Delprat, S. & Guerra, T.-M. (2008) An alternative to inverse dynamics joint torques estimation in human stance based on a Takagi–Sugeno unknown-inputs observer in the descriptor form. *Control Engineering Practice*. 16 (12), 1414–1426.
- Guerra, T. M., Bernal, M. & Blandeau, M. (2018) ‘Reducing the number of vertices in some Takagi–Sugeno models: example in the mechanical field’, in *IFAC-PapersOnLine*. June 2018 Faro, Portugal: . p.
- Guerra, T. M., Estrada-Manzo, V. & Lendek, Z. (2015) Observer design for Takagi–Sugeno descriptor models: An LMI approach. *Automatica*. 52154–159.
- Guerra, T. M., Kerkeni, H., Lauber, J. & Vermeiren, L. (2012) An Efficient Lyapunov Function for Discrete T-S Models: Observer Design. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*. 20 (1), 187–192.
- Guerra, T. M., Kruszewski, A., Vermeiren, L. & Tirmant, H. (2006) Conditions of output stabilization for nonlinear models in the Takagi–Sugeno’s form. *Fuzzy Sets and Systems*. 157 (9), 1248–1259.

- Guerra, T. M. & Vermeiren, L. (2004) LMI-based relaxed nonquadratic stabilization conditions for nonlinear systems in the Takagi–Sugeno’s form. *Automatica*. 40 (5), 823–829.
- Hatze, H. (2002) The fundamental problem of myoskeletal inverse dynamics and its implications. *Journal of Biomechanics*. 35 (1), 109–115.
- Hobson, D. A. & Tooms, R. E. (1992) Seated lumbar/pelvic alignment. A comparison between spinal cord-injured and noninjured groups. *Spine*. 17 (3), 293–298.
- Hodges, P. W., Cresswell, A. G., Daggfeldt, K. & Thorstensson, A. (2001) In vivo measurement of the effect of intra-abdominal pressure on the human spine. *Journal of biomechanics*. 34 (3), 347–353.
- Ichalal, D., Marx, B., Maquin, D. & Ragot, J. (2016) ‘A method to avoid the unmeasurable premise variables in observer design for discrete time TS systems’, in *International Conference on Fuzzy Systems, FUZZ-IEEE*. July 2016 Vancouver, Canada: . p.
- Ichalal, D., Marx, B., Ragot, J. & Maquin, D. (2015) Unknown input observer for LPV systems with parameter varying output equation. *IFAC-PapersOnLine*. 48 (21), 1030–1035.
- Isabelle, M., Sylvie, Q.-B. & Chantal, P. (2002) Electromechanical assessment of ankle stability. *European Journal of Applied Physiology*. 88 (6), 558–564.
- Janssen-Potten, Y. J. M., Seelen, H. A. M., Drukker, J., Huson, T. & Drost, M. R. (2001) The effect of seat tilting on pelvic position, balance control, and compensatory postural muscle use in paraplegic subjects. *Archives of Physical Medicine and Rehabilitation*. 82 (10), 1393–1402.
- Janssen-Potten, Y. J. M., Seelen, H. A. M., Drukker, J., Reulen, J. P. H. & Drost, M. R. (1999) Postural muscle responses in the spinal cord injured persons during forward reaching. *Ergonomics*. 42 (9), 1200–1215.
- Janssen-Potten, Y. J., Seelen, H. A. M., Drukker, J., Spaans, F. & Drost, M. R. (2002) The effect of footrests on sitting balance in paraplegic subjects. *Archives of Physical Medicine and Rehabilitation*. 83 (5), 642–648.
- Jette, A. M. (2006) Toward a Common Language for Function, Disability, and Health. *Physical Therapy*. 86 (5), 726–734.
- Johansson, R., Magnusson, M. & Akesson, M. (1988) Identification of human postural dynamics. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*. 35 (10), 858–869.
- John, L. T., Cherian, B. & Babu, A. (2010) Postural control and fear of falling in persons with low-level paraplegia. *The Journal of Rehabilitation Research and Development*. 47 (5), 497.
- Kamper, D., Barin, K., Parnianpour, M., Reger, S. & Weed, H. (1999) Preliminary investigation of the lateral postural stability of spinal cord-injured individuals subjected to dynamic perturbations. *Spinal cord*. 37 (1), 40–46.
- Kamper, D., Parnianpour, M., Barin, K., Adams, T., Linden, M. & Hemami, H. (1999) Postural stability of wheelchair users exposed to sustained, external perturbations. *Journal of rehabilitation research and development*. 36 (2), 121–132.

- Kapandji, A. I. (2005a) *Anatomie fonctionnelle I : Membres supérieurs. Physiologie de l'appareil locomoteur*. 6th edition. Maloine.
- Kapandji, A. I. (2005b) *Anatomie fonctionnelle III : Tête et rachis*. 6th edition. Maloine.
- Khalil, W. & Dombre, E. (2004) Google-Books-ID: nyrY0Pu5kl0C. *Modeling, Identification and Control of Robots*. Butterworth-Heinemann.
- Kirshblum, S. C., Burns, S. P., Biering-Sorensen, F., Donovan, W., Graves, D. E., Jha, A., Johansen, M., Jones, L., Krassioukov, A. & Mulcahey, M. J. (2011) International standards for neurological classification of spinal cord injury (revised 2011). *J Spinal Cord Med*. 34535 – 546.
- Koenig, D. & Mammar, S. (2002) Design of proportional-integral observer for unknown input descriptor systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 47 (12), 2057–2062.
- Kruszewski, A., Wang, R. & Guerra, T. M. (2008) Nonquadratic Stabilization Conditions for a Class of Uncertain Nonlinear Discrete Time TS Fuzzy Models: A New Approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 53 (2), 606–611.
- Lam, H.-K. & Leung, A. (2010) *Stability Analysis of Fuzzy-Model-Based Control Systems: Linear-Matrix-Inequality Approach*. Studies in Fuzziness and Soft Computing. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag.
- Laurain, T., Lauber, J. & Palhares, R. M. (2018) Avoiding Matrix Inversion in Takagi-Sugeno-Based Advanced Controllers and Observers. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*. 26 (1), 216–225.
- Laurain, T., Lauber, J. & Palhares, R. M. (2015) 'Observer design to control individual cylinder spark advance for idle speed management of a SI engine', in June 2015 pp. 262–267.
- Lee, T. Q., Shapiro, T. A. & Bell, D. M. (1997) Biomechanical properties of human tibias in long-term spinal cord injury. *Journal of rehabilitation research and development*. 34 (3), .
- Lendek, Z., Guerra, T. M., Babuska, R. & de Schutter, B. (2011) *Stability Analysis and Nonlinear Observer Design using Takagi-Sugeno Fuzzy Models*. Studies in Fuzziness and Soft Computing. Springer.
- Levant, A. (2003) Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control. *International Journal of Control*. 76 (9–10), 924–941.
- Lewis, F. L., Dawson, D. M. & Abdallah, C. T. (2003) *Robot Manipulator Control: Theory and Practice*. CRC Press.
- Li, Y., Levine, W. S. & Loeb, G. E. (2012) A Two-Joint Human Posture Control Model With Realistic Neural Delays. *IEEE Transactions on Neural Systems and Rehabilitation Engineering*. 20 (5), 738–748.
- Löfberg, J. (2004) 'YALMIP : a toolbox for modeling and optimization in MATLAB', in September 2004 pp. 284–289.
- Losero, R., Lauber, J. & Guerra, T.-M. (2018) Virtual strain gauge based on a fuzzy discrete angular domain observer: Application to engine and clutch torque estimation issues. *Fuzzy Sets and Systems*.

## TABLES ET FIGURES

- Luenberger, D. (1971) An introduction to observers. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 16 (6), 596–602.
- Luenberger, D. (1977) Dynamic equations in descriptor form. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 22 (3), 312–321.
- Maggioni, M., Bertoli, S., Margonato, V., Merati, G., Veicsteinas, A. & Testolin, G. (2003) Body composition assessment in spinal cord injury subjects. *Acta diabetologica*. 40 Suppl 1S183–186.
- Maquet, P. (1992) Iatrophysics to biomechanics. From Borelli (1608-1679) to Pauwels (1885-1980). *Bone & Joint Journal*. 74-B (3), 335–339.
- Marras, W. & Mirka, G. (1996) Intra-abdominal pressure during trunk extension motions. *Clinical Biomechanics*. 11 (5), 267–274.
- Masani, K., Popovic, M. R., Nakazawa, K., Kouzaki, M. & Nozaki, D. (2003) Importance of Body Sway Velocity Information in Controlling Ankle Extensor Activities During Quiet Stance. *Journal of Neurophysiology*. 90 (6), 3774–3782.
- Masani, K., Sin, V. W., Vette, A. H., Thrasher, T. A., Kawashima, N., Morris, A., Preuss, R. & Popovic, M. R. (2009) Postural reactions of the trunk muscles to multi-directional perturbations in sitting. *Clinical Biomechanics*. 24 (2), 176–182.
- McCaw, S. T. & DeVita, P. (1995) Errors in alignment of center of pressure and foot coordinates affect predicted lower extremity torques. *Journal of Biomechanics*. 28 (8), 985–988.
- McGill, S. M. & Brown, S. (1992) Creep response of the lumbar spine to prolonged full flexion. *Clinical Biomechanics*. 7 (1), 43–46.
- McGill, S. M., Patt, N. & Norman, R. W. (1988) Measurement of the trunk musculature of active males using CT scan radiography: Implications for force and moment generating capacity about the L4L5 joint. *Journal of Biomechanics*. 21 (4), 329–341.
- Milosevic, M., Gagnon, D. H., Gourdou, P. & Nakazawa, K. (2017) Postural regulatory strategies during quiet sitting are affected in individuals with thoracic spinal cord injury. *Gait & Posture*. 58 (Supplement C), 446–452.
- Milosevic, M., Masani, K., Kuipers, M. J., Rahouni, H., Verrier, M. C., McConville, K. M. V. & Popovic, M. R. (2015) Trunk control impairment is responsible for postural instability during quiet sitting in individuals with cervical spinal cord injury. *Clinical Biomechanics*. 30 (5), 507–512.
- Milosevic, M., Valter McConville, K. M., Sejdic, E., Masani, K., Kyan, M. J. & Popovic, M. R. (2012) Visualization of Trunk Muscle Synergies During Sitting Perturbations Using Self-Organizing Maps (SOM). *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*. 59 (9), 2516–2523.
- Mohammad, S., Guerra, T. M. & Pudlo, P. (2017) *Method and device assisting with the electric propulsion of a rolling system, wheelchair kit comprising such a device and wheelchair equipped with such a device*.
- Moisio, K. C., Sumner, D. R., Shott, S. & Hurwitz, D. E. (2003) Normalization of joint moments during gait: a comparison of two techniques. *Journal of Biomechanics*. 36 (4), 599–603.

## TABLES ET FIGURES

- Morasso, P. G., Baratto, L., Capra, R. & Spada, G. (1999) Internal models in the control of posture. *Neural Networks*. 12 (7–8), 1173–1180.
- Morère, Y. (2001) *Mise en oeuvre de lois de commande pour les modèles flous de type Takagi-Sugeno*. Valenciennes.
- MOSEK ApS (2015) *The MOSEK optimization toolbox for MATLAB manual. Version 7.1 (Revision 28)*.
- Murphy, A. J., Bull, A. M. J. & McGregor, A. H. (2011) Predicting the lumbosacral joint centre location from palpable anatomical landmarks. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part H: Journal of Engineering in Medicine*. 225 (11), 1078–1083.
- Naaim, A., Moissenet, F., Duprey, S., Begon, M. & Chèze, L. (2017) Effect of various upper limb multibody models on soft tissue artefact correction: A case study. *Journal of Biomechanics*. 62102–109.
- Nagi, S. (1964) A Study in the Evaluation of Disability and Rehabilitation Potential - Concepts, Methods, and Procedures. *American Journal of Public Health and the Nations Health*. 54 (9), 1568–1579.
- Nashner, L. M. (1972) Vestibular postural control model. *Kybernetik*. 10 (2), 106–110.
- Nashner, L. M. & McCollum, G. (1985) The organization of human postural movements: A formal basis and experimental synthesis. *Behavioral and Brain Sciences*. 8 (1), 135–150.
- Nelson, A. L., Groer, S., Palacios, P., Mitchell, D., Sabharwal, S., Kirby, R. L., Gavin-Dreschnack, D. & Powell-Cope, G. (2010) Wheelchair-Related Falls in Veterans With Spinal Cord Injury Residing in the Community: A Prospective Cohort Study. *Archives of Physical Medicine and Rehabilitation*. 91 (8), 1166–1173.
- Ohtake, H., Tanaka, K. & Wang, H. O. (2001) 'Fuzzy modeling via sector nonlinearity concept', in July 2001 pp. 127–132.
- Oliveira, M. C. de & Skelton, R. E. (2001) 'Stability tests for constrained linear systems', in *Perspectives in robust control*. Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer, London. pp. 241–257.
- O'Sullivan, P. B., Dankaerts, W., Burnett, A. F., Farrell, G. T., Jefford, E., Naylor, C. S. & O'Sullivan, K. J. (2006) Effect of different upright sitting postures on spinal-pelvic curvature and trunk muscle activation in a pain-free population. *Spine*. 31 (19), E707–E712.
- Panjabi, M. M. (2003) Clinical spinal instability and low back pain. *Journal of Electromyography and Kinesiology*. 13 (4), 371–379.
- Panjabi, M. M. (1992a) The stabilizing system of the spine. Part I. Function, dysfunction, adaptation, and enhancement. *Journal of spinal disorders & techniques*. 5 (4), 383–389.
- Panjabi, M. M. (1992b) The Stabilizing System of the Spine. Part II. Neutral Zone and Instability Hypothesis. *Journal of Spinal Disorders*. 5 (4), 390–397.
- Papa, E. & Cappozzo, A. (1999) A telescopic inverted-pendulum model of the musculo-skeletal system and its use for the analysis of the sit-to-stand motor task. *Journal of Biomechanics*. 32 (11), 1205–1212.

- Peterka, R. J. (2000) Postural control model interpretation of stabilogram diffusion analysis. *Biological cybernetics*. 82 (4), 335–343.
- Pinter, I. J., Swigchem, R. van, Soest, A. J. K. van & Rozendaal, L. A. (2008) The Dynamics of Postural Sway Cannot Be Captured Using a One-Segment Inverted Pendulum Model: A PCA on Segment Rotations During Unperturbed Stance. *Journal of Neurophysiology*. 100 (6), 3197–3208.
- Poria, Y., Reichel, A. & Brandt, Y. (2010) The Flight Experiences of People with Disabilities: An Exploratory Study. *Journal of Travel Research*. 49 (2), 216–227.
- Post, M. W., de Witte, L. P., van Asbeck, F. W., van Dijk, A. J. & Schrijvers, A. J. (1998) Predictors of health status and life satisfaction in spinal cord injury. *Archives of Physical Medicine and Rehabilitation*. 79 (4), 395–401.
- Prieto, T. E., Myklebust, J. B., Hoffmann, R. G., Lovett, E. G. & Myklebust, B. M. (1996) Measures of postural steadiness: Differences between healthy young and elderly adults. *Ieee Transactions on Biomedical Engineering*. 43 (9), 956–966.
- Qu, X., Nussbaum, M. A. & Madigan, M. L. (2007) A balance control model of quiet upright stance based on an optimal control strategy. *Journal of Biomechanics*. 40 (16), 3590–3597.
- Reed, M. P., Manary, M. A. & Schneider, L. W. (1999) 'Methods for Measuring and Representing Automobile Occupant Posture', in 1999 p.
- Reeves, N. P. & Cholewicki, J. (2003) Modeling the human lumbar spine for assessing spinal loads, stability, and risk of injury. *Critical reviews in biomedical engineering*. 31 (1–2), .
- Reeves, N. P., Cholewicki, J. & Narendra, K. S. (2009) Effects of reflex delays on postural control during unstable seated balance. *Journal of Biomechanics*. 42 (2), 164–170.
- Reeves, N. P., Everding, V. Q., Cholewicki, J. & Morrisette, D. C. (2006) The effects of trunk stiffness on postural control during unstable seated balance. *Experimental brain research*. 174 (4), .
- Reeves, P., Narendra, K. S. & Cholewicki, J. (2007) Spine stability: The six blind men and the elephant. *Clinical Biomechanics*. 22 (3), 266–274.
- Riemer, R., Hsiao-Weckler, E. T. & Zhang, X. (2008) Uncertainties in inverse dynamics solutions: A comprehensive analysis and an application to gait. *Gait & Posture*. 27 (4), 578–588.
- Roberts, S., Eisenstein, S. M., Menage, J., Evans, E. H. & Ashton, I. K. (1995) Mechanoreceptors in intervertebral discs. Morphology, distribution, and neuropeptides. *Spine*. 20 (24), 2645–2651.
- Rusaw, D. F. & Ramstrand, S. (2016) Validation of the Inverted Pendulum Model in standing for transtibial prosthesis users. *Clinical Biomechanics*. 31100–106.
- Sala, A., Guerra, T. M. & Babuška, R. (2005) Perspectives of fuzzy systems and control. *Fuzzy Sets and Systems*. 156 (3), 432–444.
- Sayenko, D. G., Alekhina, M. I., Masani, K., Vette, A. H., Obata, H., Popovic, M. R. & Nakazawa, K. (2010) Positive effect of balance training with visual feedback on standing balance abilities in people with incomplete spinal cord injury. *Spinal Cord*. 48 (12), 886–893.

- Schultz, A. B., Warwick, D. N., Berkson, M. H. & Nachemson, A. L. (1979) Mechanical Properties of Human Lumbar Spine Motion Segments—Part I: Responses in Flexion, Extension, Lateral Bending, and Torsion. *Journal of Biomechanical Engineering*. 101 (1), 46–52.
- Seelen, H. A. M., Janssen-Potten, Y. J. M. & Adam, J. J. (2001) Motor preparation in postural control in seated spinal cord injured people. *Ergonomics*. 44 (4), 457–472.
- Seelen, H. A. M., Janssen-Potten, Y. J. M., Adam, J. J., Drukker, J., Spaans, F. & Huson, A. (1998) Postural motor programming in paraplegic patients during rehabilitation. *Ergonomics*. 41 (3), 302–316.
- Seelen, H. A. M., Janssen-Potten, Y. J. M., Drukker, J., Reulen, J. P. H. & Pons, C. (1998) Development of new muscle synergies in postural control in spinal cord injured subjects. *Journal of Electromyography and Kinesiology*. 8 (1), 23–34.
- Seelen, H. A. M., Janssen-Potten, Y. J. M., Huson, A., Spaans, F. & Reulen, J. P. (1997) Impaired balance control in paraplegic subjects. *Journal of electromyography and kinesiology : official journal of the International Society of Electrophysiological Kinesiology*. 7 (2), 149–160.
- Shirado, O., Kawase, M., Minami, A. & Strax, T. E. (2004) Quantitative evaluation of long sitting in paraplegic patients with spinal cord injury. *Archives of Physical Medicine and Rehabilitation*. 85 (8), 1251–1256.
- Siegmund, G. P., Sanderson, D. J., Myers, B. S. & Timothy Inglis, J. (2003) Rapid neck muscle adaptation alters the head kinematics of aware and unaware subjects undergoing multiple whiplash-like perturbations. *Journal of Biomechanics*. 36 (4), 473–482.
- Slota, G. P., Granata, K. P. & Madigan, M. L. (2008) Effects of seated whole-body vibration on postural control of the trunk during unstable seated balance. *Clinical Biomechanics*. 23 (4), 381–386.
- van Soest, A. J. “Knoek” & Rozendaal, L. A. (2008) The inverted pendulum model of bipedal standing cannot be stabilized through direct feedback of force and contractile element length and velocity at realistic series elastic element stiffness. *Biological Cybernetics*. 99 (1), 29–41.
- Speers, R. A., Kuo, A. D. & Horak, F. B. (2002) Contributions of altered sensation and feedback responses to changes in coordination of postural control due to aging. *Gait & posture*. 16 (1), .
- Spungen, A. M. W., Jack Pierson, Richard N. Bauman, William A. (2000) Soft tissue body composition differences in monozygotic twins discordant for spinal cord injury. *Journal of Applied Physiology*. 88 (4), 1310–1315.
- Sturm, J. F. (1999) Using SeDuMi 1.02, A Matlab toolbox for optimization over symmetric cones. *Optimization Methods and Software*. 11 (1–4), 625–653.
- Suzuki, Y., Nomura, T. & Morasso, P. (2011) ‘Stability of a double inverted pendulum model during human quiet stance with continuous delay feedback control’, in *2011 Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society, EMBC*. August 2011 pp. 7450–7453.
- Takagi, T. & Sugeno, M. (1985) Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*. SMC-15 (1), 116–132.

## TABLES ET FIGURES

- Tanaka, K. & Wang, H. O. (2001) *Fuzzy Control Systems Design and Analysis: A Linear Matrix Inequality Approach*. New York, NY, USA: John Wiley & Sons, Inc.
- Tanaka, M. L. & Granata, K. P. (2007) 'Methods & nonlinear analysis for measuring torso stability', in *ASCE 18th Engineering Mechanics Division Conference Blacksburg, VA*. 2007 pp. 3–6.
- Tanaka, M. L., Ross, S. D. & Nussbaum, M. A. (2010) Mathematical modeling and simulation of seated stability. *Journal of Biomechanics*. 43 (5), 906–912.
- Taniguchi, T., Tanaka, K., Ohtake, H. & Wang, H. O. (2001) Model construction, rule reduction, and robust compensation for generalized form of Takagi-Sugeno fuzzy systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*. 9 (4), 525–538.
- Taniguchi, T., Tanaka, K. & Wang, H. O. (2000) Fuzzy descriptor systems and nonlinear model following control. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*. 8 (4), 442–452.
- Taniguchi, T., Tanaka, K., Yamafuji, K. & Wang, H. O. (1999) 'Fuzzy descriptor systems: stability analysis and design via LMIs', in *American Control Conference*. 1999 IEEE. pp. 1827–1831.
- Thelen, D. G., Schultz, A. B. & Ashton-Miller, J. A. (1994) Quantitative interpretation of lumbar muscle myoelectric signals during rapid cyclic attempted trunk flexions and extensions. *Journal of Biomechanics*. 27 (2), 157–167.
- Thrasher, T. A., Sin, V. W., Masani, K., Vette, A. H., Craven, B. C. & Popovic, M. R. (2010) Responses of the Trunk to Multidirectional Perturbations During Unsupported Sitting in Normal Adults. *Journal of Applied Biomechanics*. 26 (3), 332–340.
- Tirmant, H., Vermeiren, L., Guerra, T. M., Baloh, M. & Parent, M. (2004) 'Real-time robust control of a two-wheeled vehicle: the B2', in *IEEE VTS-VPP*. 2004 Paris: . p.
- United Nation World Travel Organization (2013) 'Report on the World Committee on Tourism Ethics: Recommendations on Accessible Tourism 3', in 2013 Zambia, Zimbabwe: . p.
- Vette, A. H., Masani, K., Kim, J.-Y. & Popovic, M. R. (2009) Closed-Loop Control of Functional Electrical Stimulation-Assisted Arm-Free Standing in Individuals With Spinal Cord Injury: A Feasibility Study. *Neuromodulation: Technology at the Neural Interface*. 12 (1), 22–32.
- Vette, A. H., Masani, K., Sin, V. & Popovic, M. R. (2010) Posturographic measures in healthy young adults during quiet sitting in comparison with quiet standing. *Medical Engineering & Physics*. 32 (1), 32–38.
- Vette, A. H., Yoshida, T., Thrasher, T. A., Masani, K. & Popovic, M. R. (2012) A comprehensive three-dimensional dynamic model of the human head and trunk for estimating lumbar and cervical joint torques and forces from upper body kinematics. *Medical Engineering & Physics*. 34 (5), 640–649.
- Vibert, N., MacDougall, H. G., De Waele, C., Gilchrist, D. P. D., Burgess, A. M., Sidis, A., Migliaccio, A., Curthoys, I. S. & Vidal, P. P. (2001) Variability in the control of head movements in seated humans: a link with whiplash injuries? *The Journal of Physiology*. 532 (3), 851–868.
- Wang, W. & Cole, S. (2014) Perceived Onboard Service Needs of Passengers with Mobility Limitations: An Investigation among Flight Attendants. *Asia Pacific Journal of Tourism Research*. 19 (11), 1239–1259.

## TABLES ET FIGURES

- Wang, Y. & Rahmatalla, S. (2013) Human head–neck models in whole-body vibration: Effect of posture. *Journal of Biomechanics*. 46 (4), 702–710.
- White, A. A. & Panjabi, M. M. (1990) Google-Books-ID: hDFsQgAACAAJ. *Clinical Biomechanics of the Spine*. Lippincott.
- Winter, D. A. (2009) *Biomechanics and motor control of human movement*. 4. ed. Hoboken, NJ: Wiley.
- Winter, D. A. (1987) *The biomechanics and motor control of human gait*. Waterloo, Ontario: Univ. of Waterloo Press.
- Winter, E. M. & Brookes, F. B. (1991) Electromechanical response times and muscle elasticity in men and women. *European Journal of Applied Physiology and Occupational Physiology*. 63 (2), 124–128.
- Woollacott, M. & Shumway-Cook, A. (2002) Attention and the control of posture and gait: a review of an emerging area of research. *Gait & Posture*. 16 (1), 1–14.
- World Health Organization (2001) *International classification of functioning, disability and health: ICF*. Geneva: World Health Organization.
- World Health Organization (2013) *Spinal cord injury - Key facts*
- World Health Organization (ed.) (2011) *World report on disability*. Geneva: Weltbank.
- Wyndaele, M. & Wyndaele, J.-J. (2006) Incidence, prevalence and epidemiology of spinal cord injury: what learns a worldwide literature survey? *Spinal Cord*. 44 (9), 523–529.
- Xiang, H., Chany, A.-M. & Smith, G. A. (2006) Wheelchair related injuries treated in US emergency departments. *Injury Prevention*. 12 (1), 8–11.
- Yoneyama, J. (2009)  $H^\infty$  filtering for fuzzy systems with immeasurable premise variables: An uncertain system approach. *Fuzzy Sets and Systems*. 160 (12), 1738–1748.
- Yue, D. (2004) Robust stabilization of uncertain systems with unknown input delay. *Automatica*. 40 (2), 331–336.
- Yue, D. & Han, Q.-L. (2005a) Delayed feedback control of uncertain systems with time-varying input delay. *Automatica*. 41 (2), 233–240.
- Yue, D. & Han, Q.-L. (2005b) Delayed feedback control of uncertain systems with time-varying input delay. *Automatica*. 41 (2), 233–240.
- Zadeh, L. A. (1973) Outline of a New Approach to the Analysis of Complex Systems and Decision Processes. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*. SMC-3 (1), 28–44.
- Zajac, F. E. (1993) Muscle coordination of movement: A perspective. *Journal of Biomechanics*. 26:109–24.



## TABLES ET FIGURES

### Tables :

Table 1 : Caractéristiques des sujets .....	73
Table 2 : Répartition du déplacement linéaire du COM <sub>H2A</sub> chez les sujetsS .....	76
Table 3 : Données des sujets (NR : non renseigné, NA : non applicable).....	110
Table 4 : Tableau de contingence des sujets avec ou sans perte d'équilibre en comparant à leur niveau de lésion et leur score TIC.....	118
Table 5 : répartition des stratégies Par condition (MI : Membres inférieurs, Basse mobile : BM, Haute mobile: HM, haute fixe: HF) .....	121
Table 6 : Récapitulatif des différences significatives sur les indicateurs entre les stratégies et conditions des MI (p < 0.001 sauf * : p<0.05) .....	132
Table 7 : Contributions de cette thèse .....	138
Table 8 : Nom des marqueurs (les couleurs correspondent aux marqueurs de la figure ci-dessus) ..	176
Table 9 : Nom des marqueurs .....	191
Table 10 : point probés.....	192

### Figures :

Fig. 1 : Colonne vertébrale ( <i>Anatomy of the Human Body</i> , H. GRay, 1918).....	18
Fig. 2 : Détail de LA Moelle epinière et DU nerf rachidien (Drake et al., 2010) .....	19
Fig. 3 : Dermatomes dorsaux et nerf rachidien associé (Drake et al., 2010) .....	20
Fig. 4 : A : muscles fléchisseurs du rachis, B: muscles érecteurs du rachis (Drake et al., 2010).....	21
Fig. 5 : Flambement d'une colonne avec une masse au sommet (A : colonne stable, B : colonne plus rigide, C : colonne moins rigide instable, D : colonne moins rigide avec des haubans) (Panjabi, 2003) .....	21
Fig. 6: Schéma des différents délais dans le contrôle postural .....	22
Fig. 7 : Ligaments du rachis (Drake et al., 2010).....	23
Fig. 8 : A: Chaîne postérieure B : Ettirement de la chaîne postérieure en position assise.....	24
Fig. 9: Représentation de la zone neutre (NZ) par rapport à l'amplitude de déplacement (ROM) (Panjabi, 2003).....	24
Fig. 10: posture assises asymptomatiques A. rachis complètement tendu, B. rachis avachis, C. Rachis lombaire tendu (O'Sullivan et al., 2006).....	26
Fig. 11: assise longue (Shirado et al 2004) .....	26
Fig. 12 : Modèle Musculosquelettique du rachis avec 129 fibres musculaires (Christophy et al 2012)29	
Fig. 13: spéaration de la chaîne segmentaire pour la Dynamique inverse (Winter 2009).....	31
Fig. 14 : Modèle de Tanaka et al (2010) .....	32
Fig. 15 : Modèle de Reeves et al (2009) .....	33

Fig. 16 : Conséquences de la linéarisation du modèle de reeves et al 2009 (données expérimentales en pointillés gris, valeurs estimées du modèle en noir)..... 33

Fig. 17 : Pendule Inverse de Qu et al., 2007..... 35

Fig. 18 : Fonctions d'appartenance pour la non linéarité  $z_1$ ..... 36

Fig. 19 : Simulation d'un pendule inverse, résultats d'oei linéarisé et T-S..... 41

Fig. 20 : Erreur sur l'angle  $\theta(t)$  et la vitesse angulaire  $\dot{\theta}(t)$  entre simulation et les deux OEI ..... 42

Fig. 21 : Loi de contrôle simulée et estimée..... 42

Fig. 22 : Le pendule H2AT ..... 47

Fig. 23 : Loi de contrôle (GAUCHE) et vitesse angulaire (droite)..... 50

Fig. 24 : protocole de Simulation..... 57

Fig. 25 : Signal de perturbation ..... 58

Fig. 26 : Variables d'état simulées (Noir) et estimées (Rouge) ..... 58

Fig. 27 : Loi de contrôle simulée (Noir) et estimée (Rouge)..... 59

Fig. 28 : Erreur Relative d'observation prémisses non mesurées (gauche) et loi de contrôle (droite).... 59

Fig. 29 : erreur relative d'observation due à l'hypothèse 2 ..... 64

Fig. 30 : variables d'état simulée (bleu) et estimée (noir)..... 65

Fig. 31 : entrée inconnue simulée (bleu) et estimée (noir)..... 65

Fig. 32 : Entrée inconnue simulée (bleu) et estimée (noir) avec perturbation ..... 66

Fig. 33 : Le pendule H2AT modifié avec un angle constant entre le tronc et le déplacement du  $COM_{H2A}$  ..... 67

Fig. 34 : protocole de Simulation..... 70

Fig. 35 : Etat mesuré avec couple passif constant..... 70

Fig. 36 : Erreur relative d'estimation d'un couple passif constant ..... 71

Fig. 37 : couple PASSIF variable et valeur estimée ..... 71

Fig. 38 : configurations expérimentales (trait rouge : chaîne posturale postérieure) ..... 73

Fig. 39 : reconstruction du modèle H2AT à partir des marqueurs (marqueurs bleus : mesurés, ronds rouges : centres articulaires, croix rouges : centres de masse)..... 74

Fig. 40 : Expression du  $COM_{H2A}$  dans le repère du tronc et exemple de régression ..... 75

Fig. 41 : répartition des Paramètres  $\alpha$  et  $l_T$  Issus de la régression par sujet..... 76

Fig. 42 : Distance parcourue du  $COM_{H2A}$  par sujet ..... 77

Fig. 43 : Débattement du  $COM_{H2A}$  du sujet 3 dans le repère mobile du tronc (vert : condition jambes pliées, rouge : condition jambe relevées, bleu : condition jambes tendues) ..... 77

Fig. 44 : A : Stabilisation bras hauts ; B : Stabilisation bras BAS..... 78

Fig. 45 : Le modèle S3S ..... 83

Fig. 46 : erreur d'approximation de  $\sin(\theta)/\theta$  par  $\cos(\theta)$  ..... 89

Fig. 47 : Signal de perturbation ..... 90

Fig. 48 : Angles articulaires..... 90

## TABLES ET FIGURES

Fig. 49 : Couples articulaires.....	91
Fig. 50 : Discret : Angles articulaires.....	93
Fig. 51 : Discret : couples articulaires.....	93
Fig. 52 : Procédure de simulation.....	99
Fig. 53 : etat mesurés (NOIR) et estimés (ROUGE) avec couple passif constant .....	100
Fig. 54 : Moment passif constant simulé (NOIR) et estimé (ROUGE).....	101
Fig. 55 : Gauche : Angles articulaires simulés (NOIR) et estimés (ROUGE), Droite : erreur absolue ..	102
Fig. 56 : Gauche : Vitesses angulaires simulées (NOIR) et estimées (ROUGE), Droite : erreur absolue .....	103
Fig. 57 : Gauche : Couples articulaires simulés (NOIR) et estimés (ROUGE), Droite : erreur absolue	104
Fig. 58 : Quatre diodes dont trois disposées sur un cluster.....	111
Fig. 59 : sonde utilisée pendant les collectes .....	111
Fig. 60 : dispositif de perturbation .....	112
Fig. 61 : diodes infra-rouge, cables d'alimentation, positionnement du dispositif de perturbation, les cercles indiquent des blocs de 3 caméras.....	112
Fig. 62 : Déroulement d'une acquisition .....	113
Fig. 63 : Programme de Post-Traitement des données cinématiques pour la reconstruction de la trajectoire d'un point (A) pendant une disparition (B) par une méthode de reconstruction (C) à l'aide d'autres trajectoires (D) .....	115
Fig. 64 : Le modèle S3S.....	116
Fig. 65 : forces de perturbation sur toutes les acquisitions selon A. le niveau de lésion et B. le score TIC.....	118
Fig. 66 : Stratégie Basse Mobile (BM) (A : avant perturbation, B : après).....	119
Fig. 67 : Stratégie Haute mobile (HM) (A : avant perturbation, B : après).....	119
Fig. 68 : Stratégie HAUTE Fixe (HF) (A : avant perturbation, B : après).....	119
Fig. 69 : déplacement des membres supérieurs par rotation des épaules selon un axe vertical (en pointillés) dans le cadre de la stratégie haute mobile (HM) .....	120
Fig. 70 : temps de stabilisation entre sujets.....	122
Fig. 71 : Angle au point T pour les sujets BM (haut), HF (milieu) et asymptotiques (bas), BLEU : MI tendus, Rouge : MI pliés, la ligne en pointillés noir indique l'instant de la perturbation.....	122
Fig. 72 : indicateurs ISE, IAE et ITAE pour les angles au point S (haut) et E (bas) et différence entre les sujets mobiles et fixes ( $p < 0.001$ ).....	123
Fig. 73 : Angle au point S pour les sujets mobiles (haut) et fixes (bas) (bleu : MI tendus, Rouge: MI pliés), la ligne en pointillés noir indique l'instant de la perturbation .....	124
Fig. 74 : Angle au point E pour les sujets mobiles (haut) et fixes (bas) (Bleu : MI tendus, Rouge: MI pliés), la ligne en pointillés noir indique l'instant de la perturbation .....	124
Fig. 75 : répartition des angles aux points T et S en fonction de la flexion du tronc .....	125
Fig. 76 : Moyenne quadratique de l'erreur d'estimation pour chaque angle sur toutes les acquisitions traitées .....	126

Fig. 77 : Estimation Des angles articulaires et calcul d'erreur d'estimation Absolue (pointillés noir : perturbation)..... 127

Fig. 78 : Couple articulaire estimé au point T pour les sujets mobiles (haut), fixes (milieu) et asymptomatiques (bas), Bleu : MI tendus, Rouge: MI pliés, la ligne en pointillés noir indique l'instant de la perturbation ..... 128

Fig. 79 : Couples articulaires produits aux points t et s à la suite de la perturbation ..... 129

Fig. 80 : Couple  $M_T$  dans les instants suivant la perturbation (les conditions ne sont pas précisées pour simplifier la visualisation des courbes), pointillés noir : perturbation, pointillés ROUGE : perturbation+200ms ..... 129

Fig. 81 : Couple articulaire estimé au point S pour les sujets mobiles (haut), fixes (Bas), bleu : MI tendus, Rouge: MI pliés, la ligne en pointillés noir indique l'instant de la perturbation..... 130

Fig. 82 : Couple articulaire estimé au point E pour les sujets mobiles (haut), fixes (Bas), bleu : MI tendus, Rouge: MI pliés, la ligne en pointillés noir indique l'instant de la perturbation..... 130

Fig. 83: Hexapode hydraulique et plateforme expérimentale avec sièges d'avion ..... 141

Fig. 84: etude préliminaire, A : angle de flexion du cou en fonction de la perturbation, B : angle Tronc/siège en fonction de la perturbation ..... 141

Fig. 85 : A : armature pour articulation des épaules, B : implémentation de l'armature dans le mannequin ..... 143

Fig. 86 : A : Mannequin équipé, B : capteur laser ..... 143

Fig. 87 : conception numérique du Mannequin motorisé ..... 144

Fig. 88 : modèles H2AT ..... 167

Fig. 89 : loi de commande pour la condition initiale  $X^T(0) = [0 \ 0 \ 0.005 \ 0]$  ..... 173

Fig. 90 : Placement des marqueurs ..... 175

Fig. 91 : changement d'angle  $q_1$  ..... 177

Fig. 92 : Placement des marqueurs ..... 191

Fig. 93 : Localisation des point anatomiques probés ..... 192

## CONTRIBUTIONS SCIENTIFIQUES

### Articles de revues scientifiques :

1. **Modelling Seated Postural Stability for Complete Spine Cord Injury**  
M. Blandeau, V. Estrada-Manzo, T.M. Guerra, P. Pudlo, F. Gabrielli  
2016, AMSE JOURNALS - AMSE IFRATH Publication - Modelling C; Vol. 77; N° 2; pp 40 – 50
2. **Stabilité assise chez les personnes avec lésion médullaire**  
M. Blandeau, C. Molenaar, V. Estrada-Manzo, T.M. Guerra, P. Pudlo, F. Gabrielli  
2016, Neurophysiologie Clinique/Clinical Neurophysiology (IF 1.479), Vol. 46 ; N° 4-5, pp 247
3. **Fuzzy unknown input observer for understanding sitting control of persons living with spinal cord injury**  
M. Blandeau, V. Estrada-Manzo, T.M. Guerra, P. Pudlo, F. Gabrielli  
2018, Engineering Applications of Artificial Intelligence (IF 2.894) 67, 381-389
4. **Proposing a New Non-Linear Modelling Approach for Studying Sitting Postural control in individuals with sensorimotor impairments: A proof-of-concept**  
M. Blandeau, T.M. Guerra, A. Dequidt, P. Pudlo, D.H. Gagnon,  
2018, Journal of Biomechanics, (IF 2.664, soumise)

### Conférences avec comité de relecture :

1. **Unknown Input Observer for Understanding Sitting Control of Persons with Spine Cord Injury**  
M. Blandeau, V. Estrada-Manzo, T.M. Guerra, P. Pudlo, F. Gabrielli  
2016, 4<sup>th</sup> IFAC Conference on Intelligent Control and Automation Science (ICONS), Reims, France
2. **How a person with spinal cord injury controls a sitting situation Unknown input observer and delayed feedback control with time-varying input delay**  
M. Blandeau, V. Estrada-Manzo, T.M. Guerra, P. Pudlo, F. Gabrielli  
2016, FUZZ-IEEE, IEEE International Conference on, Vancouver, Canada
3. **Seated stability for spinal-cord injury: a model-based approach**  
M. Blandeau, V. Estrada-Manzo, T.M. Guerra, P. Pudlo, F. Gabrielli  
2016, 22<sup>nd</sup> Congress of the European Society of Biomechanics, Lyon, France
4. **Contrôle de la position assise chez le sujet paraplégique**  
M. Blandeau, V. Estrada-Manzo, T.M. Guerra, P. Pudlo, F. Gabrielli  
2016, 25<sup>e</sup> Rencontres Francophones sur la Logique Floue (LFA), La Rochelle, France
5. **Modélisation du Maintien de la Posture Assise chez la Personne avec Lésion Médullaire Complète**  
M. Blandeau, V. Estrada-Manzo, T.M. Guerra, P. Pudlo, F. Gabrielli  
2016, 9<sup>e</sup> Conférence sur les Aides Techniques pour les Personnes en Situation de Handicap, Paris, France
6. **Stabilité assise chez les personnes avec lésion médullaire**  
M. Blandeau, C. Molenaar, V. Estrada-Manzo, T.M. Guerra, P. Pudlo, F. Gabrielli  
2016, Congrès Posture Équilibre Mouvement, Nancy, France

7. **Unknown input observer based on discrete-time nonlinear descriptor model for understanding sitting control**  
M. Blandeau, T.M. Guerra, V. Estrada-Manzo, P. Pudlo, F. Gabrielli  
2017, 20<sup>th</sup> IFAC-World Congress, Toulouse, France
8. **Modelling seated stability of subjects with paralysis of trunk and lower limb muscles**  
M. Blandeau, C. Molenaar, D.H. Gagnon, T.M. Guerra, P. Pudlo, F. Gabrielli  
2017, 23<sup>rd</sup> Congress of the European Society of Biomechanics, Séville, Espagne
9. **Analyse du contrôle de la position assise par observateur à entrées inconnues via un modèle non linéaire descripteur discret**  
M. Blandeau, T.M. Guerra, V. Estrada-Manzo, P. Pudlo, F. Gabrielli  
2017, 26<sup>e</sup> Rencontres Francophones sur la Logique Floue (LFA), Amiens, France
10. **Reducing the number of vertices in some Takagi-Sugeno models: example in the mechanical field**  
T.M. Guerra, M. Bernal, M. Blandeau  
2018, 3<sup>rd</sup> IFAC Conference on Embedded Systems, Computational Intelligence and Telematics in Control (CESCIT 2018), Faro, Portugal
11. **Movement strategies to maintain sitting balance when exposed to aircraft perturbations in a simulated environment: A preliminary kinematic study in people living with a spinal cord injury**  
M. Blandeau, C. Molenaar, V. Spartacus, T. Poulain, G. Conreur, S. Paganelli, T.M. Guerra, D.H. Gagnon, P. Pudlo, 2018, 8<sup>th</sup> World Congress of Biomechanics, Dublin, Ireland

1. Général : Rappels matriciels	166
1.1. Complément de Schur	166
1.2. Lemme de Finsler	166
2. Chapitre 2	167
2.1. Détails de calculs du modèle H2AT	167
2.2. Conditions de stabilité du contrôleur robuste	170
2.3. Implémentation de la loi de commande	174
2.4. Capture du mouvement : Placement des marqueurs	175
3. Chapitre 3	177
3.1. Détails de calculs du modèle S3S	177
3.1.1. Énergie cinétique	178
3.1.2. Énergie potentielle	178
3.1.3. Calcul du Lagrangien	179
3.1.4. Modèle Complet	183
3.1.5. Détails des matrices de représentation d'état	184
3.2. Loi de contrôle	185
3.2.1. Écriture du modèle pour le contrôle	185
3.2.2. Pseudo inverse et problème LMI	186
3.2.3. Réduction de modèle : Robustesse	188
3.2.4. Réduction de modèle : Approximation des développements de Taylor	189
4. Chapitre 4	191
4.1. Capture du mouvement : Placement des marqueurs	191

## 1. Général : Rappels matriciels

### 1.1. Complément de Schur

En supposant  $M = M^T = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{12}^T & M_{22} \end{bmatrix}$  avec  $M_{11}$  et  $M_{22}$  des matrices carrées de dimensions appropriées, alors :

$$M < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} M_{11} < 0 \\ M_{22} - M_{12}^T M_{11}^{-1} M_{12} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M_{22} < 0 \\ M_{11} - M_{12} M_{22}^{-1} M_{12}^T < 0 \end{cases} \quad (5.1)$$

### 1.2. Lemme de Finsler

Lemme (Oliveira and Skelton, 2001) : En considérant  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $Q = Q^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $W \in \mathbb{R}^{m \times n}$  tel que  $\text{rang}(W) < n$  ; les expressions suivantes sont équivalentes :

1.  $x^T Q x < 0, \quad \forall x \in \{x \in \mathbb{R}^n : x \neq 0, Wx = 0\}$
  2.  $\exists M \in \mathbb{R}^{n \times m} : MW + W^T M^T + Q < 0$
- (5.2)

## 2. Chapitre 2

### 2.1. Détails de calculs du modèle H2AT

Le modèle H2AT présenté ici est celui avec un angle quelconque entre les deux segments. Pour retrouver les équations du premier modèle, il suffit de considérer  $\alpha = 0$  et  $M(t) = 0$ .

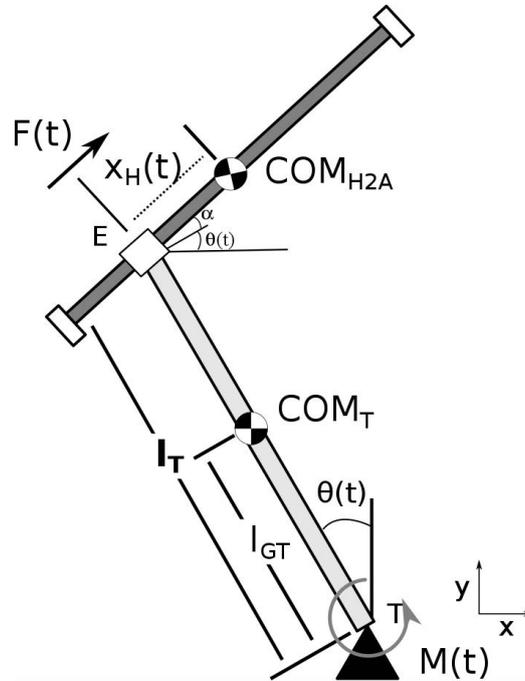


FIG. 88 : MODÈLES H2AT

Pour obtenir la dynamique du modèle H2AT, on calcule le Lagrangien du système sous la forme :

$$L = E - U \quad (5.3)$$

Avec  $E$  et  $U$ , respectivement l'énergie cinétique et potentielle du système. L'énergie cinétique du système est égale à la somme des énergies de chaque solide selon la formule générale (Khalil and Dombre, 2004):

$$E_j = \frac{1}{2} \left( \vec{\omega}_j^T I_{G_j} \vec{\omega}_j + m_j \vec{V}_{G_j}^T \vec{V}_{G_j} \right) \quad (5.4)$$

Solide tronç :

$$E_T = \frac{1}{2} \left( \vec{\omega}^T I_{G_T} \vec{\omega} + m_T \vec{V}_{G_T}^T \vec{V}_{G_T} \right)$$

$$E_T = \frac{1}{2} \left( I_{G_T} \dot{\theta}^2 + m_T \dot{\theta}^2 l_{G_T}^2 \right) \quad (5.5)$$

$$E_T = \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 \left( I_{G_T} + m_T l_{G_T}^2 \right)$$

Solide H2A :

$$\begin{aligned}\vec{V}_{G_H}^T \vec{V}_{G_H} &= \left( -\dot{\theta} l_T \cos(\theta) + \dot{x}_H \cos(\theta + \alpha) - \dot{\theta} x_H \sin(\theta + \alpha) \right)^2 \\ &\quad + \left( -\dot{\theta} l_T \sin(\theta) + \dot{x}_H \sin(\theta + \alpha) + \dot{\theta} x_H \cos(\theta + \alpha) \right)^2 \\ \vec{V}_{G_H}^T \vec{V}_{G_H} &= \dot{\theta}^2 l_T^2 \cos^2(\theta) + \dot{x}_H^2 \cos^2(\theta + \alpha) + \dot{\theta}^2 x_H^2 \sin^2(\theta + \alpha) - 2\dot{\theta} l_T \dot{x}_H \cos(\theta) \cos(\theta + \alpha) \\ &\quad + 2\dot{\theta}^2 x_H l_T \cos(\theta) \sin(\theta + \alpha) - 2\dot{\theta} x_H \dot{x}_H \cos(\theta + \alpha) \sin(\theta + \alpha) + \\ &\quad \dot{\theta}^2 l_T^2 \sin^2(\theta) + \dot{x}_H^2 \sin^2(\theta + \alpha) + \dot{\theta}^2 x_H^2 \cos^2(\theta + \alpha) - 2\dot{\theta} \dot{x}_H l_T \sin(\theta) \sin(\theta + \alpha) \quad (5.6) \\ &\quad - 2\dot{\theta}^2 x_H l_T \sin(\theta) \cos(\theta + \alpha) + 2\dot{x}_H \dot{\theta} x_H \cos(\theta + \alpha) \sin(\theta + \alpha)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{V}_{G_H}^T \vec{V}_{G_H} &= \dot{\theta}^2 l_T^2 + \dot{x}_H^2 + \dot{\theta}^2 x_H^2 - 2\dot{\theta} l_T \dot{x}_H (\cos(\theta) \cos(\theta + \alpha) + \sin(\theta) \sin(\theta + \alpha)) \\ &\quad - 2\dot{\theta}^2 x_H l_T (\sin(\theta) \cos(\theta + \alpha) - \cos(\theta) \sin(\theta + \alpha))\end{aligned}$$

$$\vec{V}_{G_H}^T \vec{V}_{G_H} = \dot{\theta}^2 l_T^2 + \dot{x}_H^2 + \dot{\theta}^2 x_H^2 - 2\dot{\theta} l_T \dot{x}_H \cos(\alpha) + 2\dot{\theta}^2 x_H l_T \sin(\alpha)$$

$$E_H = \frac{1}{2} \left( \vec{\omega}^T I_{G_H} \vec{\omega} + m_H \vec{V}_{G_H}^T \vec{V}_{G_H} \right)$$

$$E_H = \frac{1}{2} \left( I_{G_H} \dot{\theta}^2 + m_H \left( \dot{\theta}^2 l_T^2 + \dot{x}_H^2 + \dot{\theta}^2 x_H^2 - 2\dot{\theta} l_T \dot{x}_H \cos(\alpha) + 2\dot{\theta}^2 x_H l_T \sin(\alpha) \right) \right) \quad (5.7)$$

$$E_H = \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 \left( I_{G_H} + m_H l_T^2 + m_H x_H^2 + 2m_H x_H l_T \sin(\alpha) \right) + \frac{m_H}{2} \left( \dot{x}_H^2 - 2\dot{\theta} l_T \dot{x}_H \cos(\alpha) \right)$$

Ainsi on obtient :

$$E = E_T + E_H$$

$$E = \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 \left( I_{G_T} + m_T l_{G_T}^2 + I_{G_H} + m_H l_T^2 + m_H x_H^2 + 2m_H x_H l_T \sin(\alpha) \right) + \frac{m_H}{2} \left( \dot{x}_H^2 - 2\dot{\theta} l_T \dot{x}_H \cos(\alpha) \right) \quad (5.8)$$

Le calcul pour l'énergie potentielle est direct :

$$U = U_T + U_H$$

$$U_T = m_T g l_{G_T} \cos(\theta)$$

$$U_H = m_H g \left( l_T \cos(\theta) + x_H \sin(\theta + \alpha) \right)$$

$$U = \left( m_H g l_T + m_T g l_{G_T} \right) \cos(\theta) + m_H g x_H \sin(\theta + \alpha) \quad (5.9)$$

En injectant (5.8) et (5.9) dans (5.3) le Lagrangien s'écrit :

$$\begin{aligned}L &= \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 \left( I_{G_T} + m_T l_{G_T}^2 + I_{G_H} + m_H l_T^2 + m_H x_H^2 + 2m_H x_H l_T \sin(\alpha) \right) + \frac{m_H}{2} \left( \dot{x}_H^2 - 2\dot{\theta} l_T \dot{x}_H \cos(\alpha) \right) \\ &\quad - \left( m_H g l_T + m_T g l_{G_T} \right) \cos(\theta) - m_H g x_H \sin(\theta + \alpha)\end{aligned} \quad (5.10)$$

La dérivation du Lagrangien selon les coordonnées généralisées permet d'écrire :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_H} - \frac{\partial L}{\partial x_H} = F(t - \tau(t)) \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = M(t) \end{cases} \quad (5.11)$$

Première équation :

$$\frac{\partial L}{\partial x_H} = \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 (m_H 2x_H + 2m_H l_T \sin(\alpha)) - m_H g \sin(\theta + \alpha) \quad (5.12)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_H} = m_H \dot{x}_H - m_H \dot{\theta} l_T \cos(\alpha) \quad (5.13)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_H} = m_H \ddot{x}_H - m_H \ddot{\theta} l_T \cos(\alpha) \quad (5.14)$$

D'où :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_H} - \frac{\partial L}{\partial x_H} = m_H \ddot{x}_H - m_H \ddot{\theta} l_T \cos(\alpha) - \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 (m_H 2x_H + 2m_H l_T \sin(\alpha)) + m_H g \sin(\theta + \alpha) \\ F(t - \tau(t)) = m_H \ddot{x}_H - m_H \ddot{\theta} l_T \cos(\alpha) - \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 (m_H 2x_H + 2m_H l_T \sin(\alpha)) + m_H g \sin(\theta + \alpha) \end{cases} \quad (5.15)$$

Deuxième équation :

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = (m_H g l_T + m_T g l_{G_T}) \sin(\theta) - m_H g x_H \cos(\theta + \alpha) \quad (5.16)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \dot{\theta} (I_{G_T} + m_T l_{G_T}^2 + I_{G_H} + m_H l_T^2 + m_H x_H^2 + 2m_H x_H l_T \sin(\alpha)) - m_H l_T \dot{x}_H \cos(\alpha) \quad (5.17)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= \ddot{\theta} (I_{G_T} + m_T l_{G_T}^2 + I_{G_H} + m_H l_T^2 + m_H x_H^2 + 2m_H x_H l_T \sin(\alpha)) \\ &\quad + \dot{\theta} (m_H 2x_H \dot{x}_H + 2m_H \dot{x}_H l_T \sin(\alpha)) - m_H l_T \ddot{x}_H \cos(\alpha) \end{aligned} \quad (5.18)$$

D'où :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \ddot{\theta} (I_{G_T} + m_T l_{G_T}^2 + I_{G_H} + m_H l_T^2 + m_H x_H^2 + 2m_H x_H l_T \sin(\alpha)) - m_H l_T \ddot{x}_H \cos(\alpha) \\ \quad + \dot{\theta} (m_H 2x_H \dot{x}_H + 2m_H \dot{x}_H l_T \sin(\alpha)) - (m_H g l_T + m_T g l_{G_T}) \sin(\theta) + m_H g x_H \cos(\theta + \alpha) \\ M_T(t) = \ddot{\theta} (I_{G_T} + m_T l_{G_T}^2 + I_{G_H} + m_H l_T^2 + m_H x_H^2 + 2m_H x_H l_T \sin(\alpha)) - m_H l_T \ddot{x}_H \cos(\alpha) \\ \quad + \dot{\theta} (m_H 2x_H \dot{x}_H + 2m_H \dot{x}_H l_T \sin(\alpha)) - (m_H g l_T + m_T g l_{G_T}) \sin(\theta) + m_H g x_H \cos(\theta + \alpha) \end{cases} \quad (5.19)$$

Ce qui permet d'écrire le modèle suivant :

$$\begin{cases} F(t) = m_H \ddot{x}_H - m_H \ddot{\theta} l_T \cos(\alpha) - \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 (m_H 2x_H + 2m_H l_T \sin(\alpha)) + m_H g \sin(\theta + \alpha) \\ M_T(t) = \ddot{\theta} (I_{G_T} + m_T l_{G_T}^2 + I_{G_H} + m_H l_T^2 + m_H x_H^2 + 2m_H x_H l_T \sin(\alpha)) - m_H l_T \ddot{x}_H \cos(\alpha) \\ \quad + \dot{\theta} (m_H 2x_H \dot{x}_H + 2m_H \dot{x}_H l_T \sin(\alpha)) - (m_H l_T + m_T l_{G_T}) g \sin(\theta) + m_H g x_H \cos(\theta + \alpha) \end{cases} \quad (5.20)$$

## 2.2. Conditions de stabilité du contrôleur robuste

Considérons le système descripteur incertain avec entrée retardé suivant :

$$\begin{aligned} E \dot{X}(t) &= (A + \Delta A(t)) X(t) + Bu(t - \tau) \\ y(t) &= CX(t), \end{aligned} \quad (5.21)$$

Et la loi de commande distribuée :

$$u(t) = Kz(t) = K \left[ x(t) + \int_{t-\tau_0}^t e^{A(t-s-\tau_0)} Bu(s) ds \right]. \quad (5.22)$$

Avec  $\Delta A(t) = D\Delta(t)E_a$  décrivant l'incertitude avec  $\Delta(t)$  matrice bornée en norme  $\|\Delta(t)\| \leq 1$  et en étendant les travaux de (Yue and Han, 2005b) aux modèles descripteurs (5.21), le Théorème 1 donne un résultat.

### Théorème 1.

Considérons un modèle linéaire descripteur incertain (5.21), des scalaires  $\tau_0$ ,  $\delta$ ,  $\tau(t) \in [\tau_0 - \delta, \tau_0 + \delta]$  et  $\rho_i > 0$   $i = 2, 3, 4$ , s'il existe une matrice non-singulière  $X$ , des matrices  $\bar{P}_k$   $k = 1, 2, 3$ ,  $Y$ ,  $\bar{N}_i$  et  $M_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ ,  $\bar{T} > 0$ ,  $\bar{R} > 0$ ,  $\bar{S} > 0$  et des scalaires  $\varepsilon_j > 0$ ,  $j = 1, 2$ , tels que :

$$\begin{bmatrix} \bar{P}_1 & \bar{P}_2 \\ * & \bar{P}_3 \end{bmatrix} > 0 \quad \text{et} \quad \Pi = \begin{bmatrix} \bar{\Pi}_{11} & \bar{\Pi}_{12} \\ * & \bar{\Pi}_{22} \end{bmatrix} < 0, \quad (5.23)$$

avec

$$\bar{\Pi}_{11} = \begin{bmatrix} \bar{\Gamma}_{11} & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} & \Gamma_{14} & \bar{P}_3 \\ * & \Gamma_{22} & \Gamma_{23} & \Gamma_{24} & 0 \\ * & * & \Gamma_{33} & \Gamma_{34} & -\bar{P}_3 \\ * & * & * & \Gamma_{44} & \bar{P}_2 \\ * & * & * & * & -\frac{\bar{S}}{\tau_0} \end{bmatrix}, \quad W^{-1} \geq \int_{-\tau_0}^0 e^{A^T \eta} E_a^T E_a e^{A \eta} d\eta, \text{ et}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\Gamma}_{11} &= \bar{P}_2 + \bar{P}_2^T - AX^T - BY - XA^T - Y^T B^T + \bar{T} + \tau_0 \bar{S} + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) DD^T, \\
\Gamma_{12} &= \bar{N}_1 - B_1 Y - \rho_2 (XA^T + Y^T B^T) + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \rho_2 DD^T \\
\Gamma_{13} &= -\bar{P}_2 - \bar{N}_1 + B_1 Y - \rho_3 (XA^T + Y^T B^T) + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \rho_3 DD^T, \\
\Gamma_{14} &= \bar{P}_1 - \rho_4 (XA^T + Y^T B^T) + X^T + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \rho_4 DD^T, \\
\Gamma_{22} &= \bar{N}_2 + \bar{N}_2^T - \rho_2 (B_1 Y + Y^T B_1^T) + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \rho_2^2 DD^T, \\
\Gamma_{23} &= -\bar{N}_2 + \bar{N}_3^T + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \rho_2 \rho_3 DD^T, \\
\Gamma_{24} &= \bar{N}_4^T - \rho_4 Y^T B_1^T + \rho_2 X^T + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \rho_2 \rho_4 DD^T, \\
\Gamma_{33} &= -\bar{N}_3 - \bar{N}_3^T + \rho_3 (B_1 Y + Y^T B_1^T) - \bar{T} + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \rho_3^2 DD^T, \\
\Gamma_{34} &= \rho_4 Y^T B_1^T + \rho_3 X^T - \bar{N}_4^T + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \rho_3 \rho_4 DD^T, \text{ et} \\
\Gamma_{44} &= \rho_4 (X + X^T) + 2\delta \bar{R} + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \rho_4^2 DD^T.
\end{aligned}$$

Alors la loi de commande (5.22) avec  $K = YX^{-T}$  stabilise asymptotiquement le modèle (5.21) pour tout retard  $\tau(t) \in [\tau_0 - \delta, \tau_0 + \delta]$ .

#### Preuve.

Considérons la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii suivante avec  $z(t)$  définie dans (5.22) :

$$V(z, t) = V_1(z, t) + V_2(z, t), \quad (5.24)$$

Avec :

$$\begin{aligned}
V_1 &= z^T(t) P_1 z(t) + 2z^T(t) P_2 \int_{t-\tau_0}^t z(s) ds + \int_{t-\tau_0}^t z^T(s) ds P_3 \int_{t-\tau_0}^t z(s) ds, \\
V_2 &= \int_{t-\tau_0}^t z(s)^T T z(s) ds + \int_{t-\tau_0}^t \int_s^t z(v)^T S z(v) dv ds + \int_{t-\tau_0}^t \int_s^t z(v)^T \tau_0 \varepsilon_1^{-1} \left[ (* E_a e^{A(s-v)} BK \right] z(v) dv ds \\
&\quad + \int_{t-\tau_0-\delta}^{t-\tau_0} \int_s^{t-\tau_0} \dot{z}(v)^T R \dot{z}(v) dv ds + \int_{t-\tau_0}^{t-\tau_0+\delta} \int_s^{t-\tau_0+\delta} \dot{z}(v)^T R \dot{z}(v) dv ds + \delta \int_{t-\tau_0}^t \dot{z}(s)^T R \dot{z}(s) ds + \delta \int_{t-\tau_0+\delta}^t \dot{z}(s)^T R \dot{z}(s) ds
\end{aligned}$$

Des variables additionnelles (permettant de relâcher les résultats des problèmes LMI) sont introduites à l'aide des égalités suivantes :

$$\begin{bmatrix} z(t) \\ z(t-\tau(t)) \\ z(t-\tau_0) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(t-\tau(t)) - z(t-\tau_0) - \int_{t-\tau_0}^{t-\tau(t)} \dot{z}(s) ds \\ \vdots \end{bmatrix} = 0 \text{ et}$$

$$\begin{bmatrix} z(t) \\ z(t-\tau(t)) \\ z(t-\tau_0) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -A(t)z(t) - BKz(t-\tau(t)) \\ +BKz(t-\tau_0) + \Delta A(t) \int_{t-\tau_0}^t e^{A(t-s-\tau_0)} BKz(s) ds + \dot{z}(t) \end{bmatrix} = 0$$

En appliquant le Lemme 1 issu de (Yue and Han, 2005a), nous obtenons :

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ * & P_3 \end{bmatrix} > 0 \quad \text{et} \quad (5.25)$$

$$\Xi = \begin{bmatrix} \Xi_{11} & \Xi_{12} \\ * & \Xi_{22} \end{bmatrix} < 0, \quad (5.26)$$

avec

$$\Xi_{11} = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} & \Sigma_{13} & \Sigma_{14} & P_3 \\ * & \Sigma_{22} & \Sigma_{23} & \Sigma_{24} & 0 \\ * & * & \Sigma_{33} & \Sigma_{34} & -P_3 \\ * & * & * & \Sigma_{44} & P_2 \\ * & * & * & * & -\frac{1}{\tau_0} S \end{bmatrix}, \quad \Xi_{12} = \begin{bmatrix} \delta N_1 & E_a^T \\ \delta N_2 & 0 \\ \delta N_3 & 0 \\ \delta N_4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Xi_{22} = \begin{bmatrix} -\delta R & 0 \\ 0 & -\varepsilon_2 I \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_{ij} = X \Sigma_{ij} X^T, i, j \in \{1, \dots, 4\},$$

$$\Gamma_{11} = X P_2 X^T + X P_2^T X^T - (A + BK) X^T - X (A + BK)^T + X T X^T + \tau_0 X S X^T + X \Psi X^T + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) D D^T,$$

$$B = e^{-A\tau_0} B_1, \Psi = \tau_0 \varepsilon_1^{-1} K^T B_1^T \int_{t-\tau_0}^t e^{A^T(s-t)} E_a^T E_a e^{A(s-t)} ds B_1 K \quad \text{Avec} \quad M_i = \rho_i M_1, \quad X = M_1^{-1},$$

$\bar{P}_k = X P_k X^T \quad k \in \{1, 2, 3\}$ ,  $\bar{N}_i = X N_i X^T$ ;  $i \in \{1, \dots, 4\}$ ,  $\bar{T} = X T X^T$ ;  $\bar{R} = X R X^T$ ;  $\bar{S} = X S X^T$  et  $Y = K X^T$ . En multipliant (5.25) et (5.26) à droite et à gauche par  $\text{diag}[X \quad X \quad X \quad X \quad X \quad I]$ , on obtient :

$$X \Psi X^T = \tau_0 \varepsilon_1^{-1} Y^T B_1^T \int_{t-\tau_0}^t e^{A^T(s-t)} E_a^T E_a e^{A(s-t)} ds B_1 Y \leq \tau_0 \varepsilon_1^{-1} Y^T B_1^T W^{-1} B_1 Y \quad (5.27)$$

En utilisant le complément de Schur sur  $\tau_0 \varepsilon_1^{-1} Y^T B_1^T W^{-1} B_1 Y$  et le changement de variable  $\eta = s - t$ , (5.27) donne

$$W^{-1} \geq \int_{-\tau_0}^0 e^{A^T \eta} E_a^T E_a e^{A \eta} d\eta. \quad (5.28)$$

Ce qui conclut la preuve. ■

L'implémentation de ce signal d'entrée est délicat car il est impossible de calculer explicitement le terme intégral dans l'équation (5.22). Une technique d'approximation de l'état prédit et d'inversion dynamique du point fixe décrite dans (Georges et al., 2007) est utilisée. Cette implémentation est traitée dans la partie suivante.

### Exemple de simulation.

Pour calculer la loi de commande (5.22)  $J(x(t))$  est considérée constante, i.e.  $E$  est constante.

$\Delta A(t)$  représente l'ensemble des déviations possibles de  $E^{-1}A(X)$  en sachant que toutes les variables sont bornées dans l'ensemble compact (en mètre, radian et radian/s):

$$\Omega_x = \left\{ \begin{array}{l} -0.075 \leq x \leq 0.105 \\ -0.087 \leq \theta \leq 0.122 \\ |\dot{\theta}| \leq 0.209 \end{array} \right\} \quad (5.29)$$

Une solution est trouvée au problème LMI (5.23) avec le gain  $K = [8126 \quad 1629 \quad -6954 \quad -1346]$  et :

$$W = 10^3 * \begin{bmatrix} 1.281 & * & * & * \\ -1.206 & 5.815 & * & * \\ 0.384 & -0.136 & 1.590 & * \\ -2.584 & 4.223 & 0.915 & 12.33 \end{bmatrix}$$

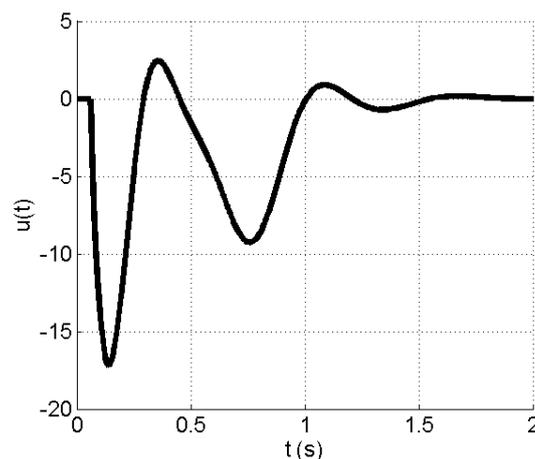


FIG. 89 : LOI DE COMMANDE POUR LA CONDITION INITIALE  $X^T(0) = [0 \quad 0 \quad 0.005 \quad 0]$

Fig. 89 montre la réponse de la loi de commande à la condition initiale  $X^T(0) = [0 \quad 0 \quad 0.005 \quad 0]$  avec un délai de  $\tau = 60\text{ms} \pm 10\text{ms}$ .

### 2.3. Implémentation de la loi de commande

Considérons le système descripteur incertain avec entrée retardé suivant :

$$\begin{aligned} E\dot{X}(t) &= (A + \Delta A(t))X(t) + Bu(t - \tau) \\ y(t) &= CX(t), \end{aligned} \quad (5.30)$$

Et la loi de commande

$$u(t) = Kz(t) = K \left[ x(t) + \int_{t-\tau_0}^t e^{A(t-s-\tau_0)} Bu(s) ds \right]. \quad (5.31)$$

il est impossible de calculer explicitement le terme intégrale de (5.31) dans la simulation du modèle (5.30). Effectivement, pour approximer l'intégrale, il est nécessaire d'utiliser un pas d'intégration. Il faut donc disposer d'une méthode « insensible » à ce pas d'intégration qui permette de conserver les propriétés de stabilité même avec l'approximation utilisée. Pour ce faire, une inversion dynamique d'un problème de point fixe est utilisée (Georges et al., 2007). L'idée principale est de remplacer le problème initial  $G(x, t) = 0$ ,  $G(x, t)$  une fonction de classe  $C^1$ , par rechercher une solution à l'équation différentielle suivante avec  $\Lambda > 0$  :

$$\dot{G} + \Lambda G = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial G}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial G}{\partial t} + \Lambda G(x, t) = 0 \quad (5.32)$$

Les arguments des fonctions sont omis lorsqu'il n'y a pas de confusion possible. En supposant que la matrice Jacobienne  $\frac{\partial G}{\partial x}$  est régulière alors (5.32) devient :

$$\dot{x} = -\frac{\partial G}{\partial x}^{-1} \left( \frac{\partial G}{\partial t} + \Lambda G(x, t) \right) \quad (5.33)$$

La solution de (5.32) est  $G(x, t) = e^{-\Lambda t} G(x(0), 0)$ , et comme  $\Lambda > 0$ , cela garantit pour toute conditions initiales que  $G(x, t) \rightarrow 0$   $t \rightarrow \infty$ .  $\Lambda > 0$  peut alors être utilisé pour contrôler la vitesse de la convergence. On considère, avec  $\tau_0$  constant, l'approximation au premier ordre suivante :

$$\hat{x}(t, t + \tau_0) = x(t) + \int_t^{t+\tau_0} \dot{x}(s) ds = x(t) + \int_t^{t+\tau_0} (\bar{A}x(s) + \bar{B}u(s - \tau_0)) ds$$

Avec  $\bar{x}(t) = \begin{bmatrix} \hat{x}(t, t + \tau_0) \\ u(t) \end{bmatrix}$ ,  $\bar{A} = E^{-1}A$  et  $\bar{B} = E^{-1}B$ , l'objectif est alors de trouver une solution au problème de point fixe suivant :

$$\bar{x}(t) = H(\bar{x}(t), x(t)) = \begin{bmatrix} x + \tau_0 (\bar{A}\hat{x}(t, t + \tau_0) + \bar{B}u(t)) \\ Ke^{-\bar{A}\tau_0} (x + \tau_0 (\bar{A}\hat{x}(t, t + \tau_0) + \bar{B}u(t))) \end{bmatrix}$$

Ou de façon équivalente :

$$\bar{x}(t) = \begin{bmatrix} I \\ Ke^{-\bar{A}\tau_0} \end{bmatrix} x + \tau_0 \begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ Ke^{-\bar{A}\tau_0} \bar{A} & Ke^{-\bar{A}\tau_0} \bar{B} \end{bmatrix} \bar{x}$$

Ainsi, en définissant la fonction  $G(\bar{x}, x) = \bar{x}(t) - H(\bar{x}(t), x(t))$ , on peut appliquer (5.33). Pour ce faire, il est nécessaire de calculer :

$$\frac{\partial H(\bar{x}(t), x(t))}{\partial \bar{x}(t)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial \hat{x}(t, t + \tau_0)} & \frac{\partial H}{\partial u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_0 \bar{A} & \tau_0 \bar{B} \\ \tau_0 Ke^{-\bar{A}\tau_0} \bar{A} & \tau_0 Ke^{-\bar{A}\tau_0} \bar{B} \end{bmatrix};$$

Ce qui entraîne après quelques manipulations :

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} I - \tau_0 \bar{A} & -\tau_0 \bar{B} \\ -\tau_0 Ke^{-\bar{A}\tau_0} \bar{A} & I - \tau_0 Ke^{-\bar{A}\tau_0} \bar{B} \end{bmatrix}^{-1} \left( \begin{bmatrix} I \\ Ke^{-\bar{A}\tau_0} \end{bmatrix} (Ax + Bu(t - \tau_0)) - \Lambda \left( \begin{bmatrix} I - \tau_0 \bar{A} & -\tau_0 \bar{B} \\ -\tau_0 Ke^{-\bar{A}\tau_0} \bar{A} & I - \tau_0 Ke^{-\bar{A}\tau_0} \bar{B} \end{bmatrix} \bar{x} - \begin{bmatrix} I \\ Ke^{-\bar{A}\tau_0} \end{bmatrix} x \right) \right) \\ u(t) = [0 \quad 1] \bar{x}(t). \end{cases} \quad (5.34)$$

On a remplacé l'implémentation de (5.31) par celle d'une loi de commande à retour d'état dynamique qui garantit une convergence de  $\bar{x}(t) - H(\bar{x}(t), x(t))$  en fonction de  $\Lambda > 0$ .

## 2.4. Capture du mouvement : Placement des marqueurs

Voici le placement des marqueurs réfléchissants utilisés lors des expérimentations de vérification du modèle H2AT.

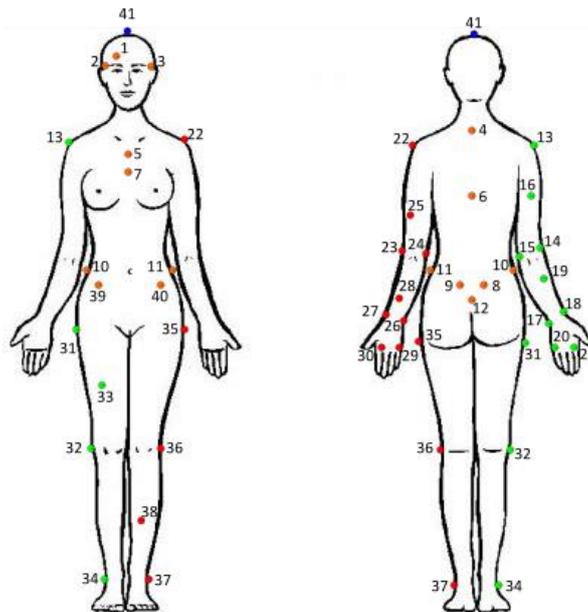


FIG. 90 : PLACEMENT DES MARQUEURS

TABLE 9 : NOM DES MARQUEURS (LES COULEURS CORRESPONDENT AUX MARQUEURS DE LA FIGURE CI-DESSUS)

Segment	Nom marqueur	ID	Segment	Nom marqueur	ID
Tete	R_Arcade	1	Bras Gauche	L_Acromion	22
Tete	R_Tempe	2	Bras Gauche	L_CoudeExt	23
Tete	L_Tempe	3	AvBras Gauche	L_Coude_Ext	23
Tronc	C7	4	Bras Gauche	L_CoudeInt	24
Tronc	Manubrium	5	Bras Gauche	L_RotHumerus	25
Tronc	T8	6	AvBras Gauche	L_Ulna	26
Tronc	Sternum	7	Main Gauche	L_Ulna	26
Pelvis	R_EIPS	8	AvBras Gauche	L_Radius	27
Pelvis	L_EIPS	9	AvBras Gauche	L_RotAvBras	28
Pelvis	R_Crete	10	Main Gauche	L_MC5	29
Pelvis	L_Crete	11	Main Gauche	L_MC2	30
Pelvis	Sacrum	12	Cuisse Droite	R_Troc	31
Bras Droit	R_Acromion	13	Cuisse Droite	R_Genou	32
Bras Droit	R_CoudeExt	14	Jambe Droite	R_Genou	32
AvBras Droit	R_Coude_Ext	14	Cuisse Droite	R_RotCuisse	33
Bras Droit	R_CoudeInt	15	Jambe Droite	R_Cheville	34
Bras Droit	R_RotHumerus	16	Cuisse Gauche	L_Troc	35
AvBras Droit	R_Ulna	17	Cuisse Gauche	L_Genou	36
Main Droite	R_Ulna	17	Jambe Gauche	L_Genou	36
AvBras Droit	R_Radius	18	Jambe Gauche	L_Cheville	37
AvBras Droit	R_Rot_AvBras	19	Jambe Gauche	L_RotJambe	38
Main Droite	R_MC5	20	Pelvis	R_EIAS	39
Main Droite	R_MC2	21	Pelvis	L_EIAS	40
			Tete	HeadVertex	41

### 3. Chapitre 3

#### 3.1. Détails de calculs du modèle S3S

Pour obtenir la dynamique du modèle S3S, on calcule le Lagrangien du système sous la forme :

$$L = E - U \quad (5.35)$$

Avec  $E$  et  $U$ , respectivement l'énergie cinétique et potentielle du système. L'énergie cinétique du système est égale à la somme des énergies de chaque solide selon la formule générale (Khalil and Dombre, 2004):

$$E = \sum_{i=0}^2 E_i = \sum_{i=0}^2 \left( \vec{\omega}_i^T I_{G_i} \vec{\omega}_i + m_i \vec{V}_{G_i}^T \vec{V}_{G_i} \right) \quad (5.36)$$

$$U = \sum_{i=0}^2 U_i = \sum_{i=0}^2 m_i \vec{g}^T \cdot \vec{TG}_i \quad (5.37)$$

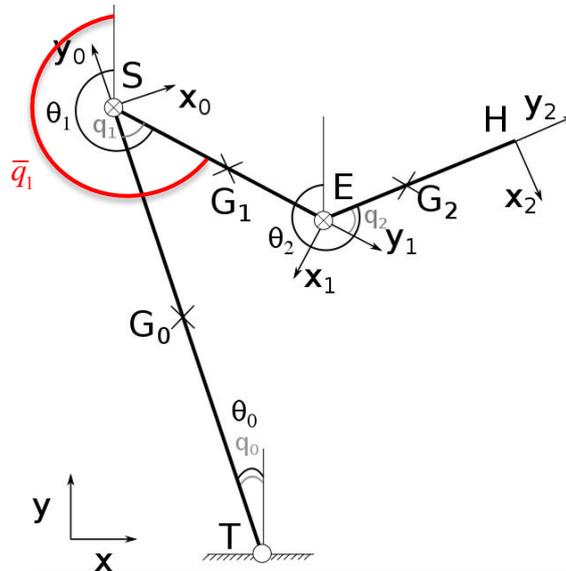


FIG. 91 : CHANGEMENT D'ANGLE  $q_1$

Le formalisme de (Khalil and Dombre, 2004) impose que l'angle relatif  $\bar{q}_1$  soit défini entre les axe  $y_0$  et  $y_1$  mais il y a plus de sens biomécanique d'utiliser l'angle  $q_1$  tel que  $\bar{q}_1 = q_1 + \pi$ . Sans quoi  $\bar{q}_1 = 0^\circ$  signifie que le sujet a ses bras levés dans la continuité du tronc. Les équivalences entre angles relatifs et absolus précisée ci-dessous :

$$\begin{aligned} q_0 &= \theta_0; & \bar{q}_1 &= \theta_1 - \theta_0; & \bar{q}_1 &= q_1 + \pi \\ q_2 &= \theta_2 - \theta_1; & q_{20} &= \theta_2 - \theta_0; \end{aligned} \quad (5.38)$$

### 3.1.1. Énergie cinétique

Solide 0 :

$$E_0 = \frac{1}{2} \left( \vec{\omega}_0^T I_{G_0} \vec{\omega}_0 + m_0 \vec{V}_{G_0}^T \vec{V}_{G_0} \right) \quad (5.39)$$

$$E_0 = \frac{1}{2} \left( I_{G_0} \dot{\theta}_0^2 + m_0 \dot{\theta}_0^2 l_{G_0}^2 \right)$$

Solide 1 :

$$\vec{V}_{G_1,1/R} = -\dot{\theta}_0 l_0 \vec{x}_0 - \dot{\theta}_1 l_{G_1} \vec{x}_1$$

$$E_1 = \frac{1}{2} \left( \vec{\omega}_1^T I_{G_1} \vec{\omega}_1 + m_1 \vec{V}_{G_1}^T \vec{V}_{G_1} \right)$$

$$E_1 = \frac{1}{2} \left( I_{G_1} \dot{\theta}_1^2 + m_1 \left( (-\dot{\theta}_0 l_0)^2 + (-\dot{\theta}_1 l_1)^2 + (\dot{\theta}_0 l_0 \dot{\theta}_1 l_1 \vec{x}_0 \cdot \vec{x}_1) + (\dot{\theta}_0 l_0 \dot{\theta}_1 l_1 \vec{x}_1 \cdot \vec{x}_0) \right) \right) \quad (5.40)$$

$$E_1 = \frac{1}{2} \left( I_{G_1} \dot{\theta}_1^2 + m_1 \left( \dot{\theta}_0^2 l_0^2 + \dot{\theta}_1^2 l_{G_1}^2 + 2 \dot{\theta}_0 \dot{\theta}_1 l_{G_1} \cos(\bar{q}_1) \right) \right)$$

$$E_1 = \frac{1}{2} \left( I_{G_1} \dot{\theta}_1^2 + m_1 \left( \dot{\theta}_0^2 l_0^2 + \dot{\theta}_1^2 l_{G_1}^2 - 2 \dot{\theta}_0 \dot{\theta}_1 l_{G_1} \cos(q_1) \right) \right)$$

Solide 2 :

$$\vec{V}_{G_2,2/R} = -\dot{\theta}_0 l_0 \vec{x}_0 - \dot{\theta}_1 l_1 \vec{x}_1 - \dot{\theta}_2 l_{G_2} \vec{x}_2$$

$$E_2 = \frac{1}{2} \left( \vec{\omega}_2^T I_{G_2} \vec{\omega}_2 + m_2 \vec{V}_{G_2}^T \vec{V}_{G_2} \right)$$

$$E_2 = \frac{1}{2} \left( I_{G_2} \dot{\theta}_2^2 + m_2 \left( (-\dot{\theta}_0 l_0)^2 + (-\dot{\theta}_1 l_1)^2 + (-\dot{\theta}_2 l_{G_2})^2 + (\dot{\theta}_0 l_0 \dot{\theta}_1 l_1 \vec{x}_0 \cdot \vec{x}_1) + (\dot{\theta}_0 l_0 \dot{\theta}_1 l_1 \vec{x}_1 \cdot \vec{x}_0) \right. \right. \\ \left. \left. + (\dot{\theta}_0 l_0 \dot{\theta}_2 l_{G_2} \vec{x}_0 \cdot \vec{x}_2) + (\dot{\theta}_0 l_0 \dot{\theta}_2 l_{G_2} \vec{x}_2 \cdot \vec{x}_0) + (\dot{\theta}_1 l_1 \dot{\theta}_2 l_{G_2} \vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2) + (\dot{\theta}_1 l_1 \dot{\theta}_2 l_{G_2} \vec{x}_2 \cdot \vec{x}_1) \right) \right) \quad (5.41)$$

$$E_2 = \frac{1}{2} \left( I_{G_2} \dot{\theta}_2^2 + m_2 \left( \dot{\theta}_0^2 l_0^2 + \dot{\theta}_1^2 l_1^2 + \dot{\theta}_2^2 l_{G_2}^2 + 2 \dot{\theta}_0 \dot{\theta}_1 l_1 \cos(\bar{q}_1) + 2 \dot{\theta}_0 \dot{\theta}_2 l_{G_2} \cos(q_{20}) \right) \right. \\ \left. + 2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 l_{G_2} \cos(q_2) \right)$$

$$E_2 = \frac{1}{2} \left( I_{G_2} \dot{\theta}_2^2 + m_2 \left( \dot{\theta}_0^2 l_0^2 + \dot{\theta}_1^2 l_1^2 + \dot{\theta}_2^2 l_{G_2}^2 - 2 \dot{\theta}_0 \dot{\theta}_1 l_1 \cos(q_1) + 2 \dot{\theta}_0 \dot{\theta}_2 l_{G_2} \cos(q_{20}) \right) \right. \\ \left. + 2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 l_{G_2} \cos(q_2) \right)$$

### 3.1.2. Énergie potentielle

On rappelle que  $\vec{g}^T = [0 \quad g]$

$$U_0 = m_0 g l_{G_0} \cos(\theta_0) \quad (5.42)$$

$$U_1 = m_1 g (l_0 \cos(\theta_0) + l_{G_1} \cos(\theta_1)) \quad (5.43)$$

$$U_2 = m_2 g (l_0 \cos(\theta_0) + l_1 \cos(\theta_1) + l_{G_2} \cos(\theta_2)) \quad (5.44)$$

Donc

$$U = m_0 g l_{G_0} \cos(\theta_0) + m_1 g (l_0 \cos(\theta_0) + l_{G_1} \cos(\theta_1)) + m_2 g (l_0 \cos(\theta_0) + l_1 \cos(\theta_1) + l_{G_2} \cos(\theta_2)) \quad (5.45)$$

$$U = (m_0 g l_{G_0} + m_1 g l_0 + m_2 g l_0) \cos(\theta_0) + (m_1 g l_{G_1} + m_2 g l_1) \cos(\theta_1) + m_2 g l_{G_2} \cos(\theta_2)$$

### 3.1.3. Calcul du Lagrangien

Le Lagrangien s'écrit :

$$L = \frac{\dot{\theta}_0^2}{2} (I_{G_0} + m_0 l_{G_0}^2 + m_1 l_0^2 + m_2 l_0^2) + \frac{\dot{\theta}_1^2}{2} (I_{G_1} + m_1 l_{G_1}^2 + m_2 l_1^2) + \frac{\dot{\theta}_2^2}{2} (I_{G_2} + m_2 l_{G_2}^2) \\ - \dot{\theta}_0 \dot{\theta}_1 (m_1 l_0 l_{G_1} + m_2 l_0 l_1) \cos(q_1) + \dot{\theta}_0 \dot{\theta}_2 m_2 l_0 l_{G_2} \cos(q_2) + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 m_2 l_1 l_{G_2} \cos(q_2) \quad (5.46) \\ - (m_0 g l_{G_0} + m_1 g l_0 + m_2 g l_0) \cos(\theta_0) - (m_1 g l_{G_1} + m_2 g l_1) \cos(\theta_1) - m_2 g l_{G_2} \cos(\theta_2)$$

On rappelle que  $\theta_0 = q_0$ ,  $\theta_1 = q_1 + \pi + q_0$  et  $\theta_2 = q_2 + q_1 + \pi + q_0$  donc

$$L = \frac{\dot{q}_0^2}{2} (I_{G_0} + m_0 l_{G_0}^2 + m_1 l_0^2 + m_2 l_0^2) + \frac{(\dot{q}_1 + \dot{q}_0)^2}{2} (I_{G_1} + m_1 l_{G_1}^2 + m_2 l_1^2) + \frac{(\dot{q}_2 + \dot{q}_1 + \dot{q}_0)^2}{2} (I_{G_2} + m_2 l_{G_2}^2) \\ - \dot{q}_0 (\dot{q}_1 + \dot{q}_0) (m_1 l_0 l_{G_1} + m_2 l_0 l_1) \cos(q_1) - \dot{q}_0 (\dot{q}_2 + \dot{q}_1 + \dot{q}_0) m_2 l_0 l_{G_2} \cos(q_2 + q_1) \\ + (\dot{q}_1 + \dot{q}_0) (\dot{q}_2 + \dot{q}_1 + \dot{q}_0) m_2 l_1 l_{G_2} \cos(q_2) - (m_0 g l_{G_0} + m_1 g l_0 + m_2 g l_0) \cos(q_0) \\ + (m_1 g l_{G_1} + m_2 g l_1) \cos(q_1 + q_0) + m_2 g l_{G_2} \cos(q_2 + q_1 + q_0) \quad (5.47)$$

$$L = \frac{\dot{q}_0^2}{2} (I_{G_0} + m_0 l_{G_0}^2 + m_1 l_0^2 + m_2 l_0^2) + \frac{(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_0^2 + 2\dot{q}_0 \dot{q}_1)}{2} (I_{G_1} + m_1 l_{G_1}^2 + m_2 l_1^2) \\ + \frac{(\dot{q}_2^2 + \dot{q}_1^2 + \dot{q}_0^2 + 2\dot{q}_0 \dot{q}_2 + 2\dot{q}_0 \dot{q}_1 + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2)}{2} (I_{G_2} + m_2 l_{G_2}^2) \\ - (\dot{q}_0 \dot{q}_1 + \dot{q}_0^2) (m_1 l_0 l_{G_1} + m_2 l_0 l_1) \cos(q_1) - (\dot{q}_0 \dot{q}_2 + \dot{q}_0 \dot{q}_1 + \dot{q}_0^2) m_2 l_0 l_{G_2} \cos(q_2 + q_1) \\ + (\dot{q}_0^2 + \dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_0 \dot{q}_1 + \dot{q}_0 \dot{q}_2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2) m_2 l_1 l_{G_2} \cos(q_2) - (m_0 g l_{G_0} + m_1 g l_0 + m_2 g l_0) \cos(q_0) \\ + (m_1 g l_{G_1} + m_2 g l_1) \cos(q_1 + q_0) + m_2 g l_{G_2} \cos(q_2 + q_1 + q_0) \quad (5.48)$$

Il reste donc à calculer les 3 trois équations du Lagrangien :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_0} - \frac{\partial L}{\partial q_0} = M_T \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial L}{\partial q_1} = M_S \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial L}{\partial q_2} = M_E \end{array} \right. \quad (5.49)$$

### 1<sup>ère</sup> équation du modèle

$$\frac{\partial L}{\partial q_0} = (m_0 g l_{G_0} + m_1 g l_0 + m_2 g l_0) \sin(q_0) - (m_1 g l_{G_1} + m_2 g l_1) \sin(q_1 + q_0) - m_2 g l_{G_2} \sin(q_2 + q_1 + q_0) \quad (5.50)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_0} = & \dot{q}_0 (I_{G_0} + I_{G_1} + m_1 l_{G_1}^2 + m_2 l_1^2 + I_{G_2} + m_2 l_{G_2}^2 + m_0 l_{G_0}^2 + m_1 l_0^2 + m_2 l_0^2) \\ & + \dot{q}_1 (I_{G_1} + I_{G_2} + m_2 l_{G_2}^2 m_1 l_{G_1}^2 + m_2 l_1^2) + \dot{q}_2 (I_{G_2} + m_2 l_{G_2}^2) \\ & - (\dot{q}_1 + 2\dot{q}_0) (m_1 l_0 l_{G_1} + m_2 l_0 l_1) \cos(q_1) - (\dot{q}_2 + \dot{q}_1 + 2\dot{q}_0) m_2 l_0 l_{G_2} \cos(q_2 + q_1) \\ & + (2\dot{q}_0 + 2\dot{q}_1 + \dot{q}_2) m_2 l_1 l_{G_2} \cos(q_2) \end{aligned} \quad (5.51)$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_0} = & \ddot{q}_0 \left( I_{G_0} + I_{G_1} + m_1 l_{G_1}^2 + m_2 l_1^2 + I_{G_2} + m_2 l_{G_2}^2 + m_0 l_{G_0}^2 + m_1 l_0^2 + m_2 l_0^2 \right. \\ & \left. - 2(m_1 l_0 l_{G_1} + m_2 l_0 l_1) \cos(q_1) - 2m_2 l_0 l_{G_2} \cos(q_2 + q_1) + 2m_2 l_1 l_{G_2} \cos(q_2) \right) \\ & + \ddot{q}_1 \left( I_{G_1} + I_{G_2} + m_2 l_{G_2}^2 m_1 l_{G_1}^2 + m_2 l_1^2 + 2m_2 l_1 l_{G_2} \cos(q_2) \right) \\ & \left. - (m_1 l_0 l_{G_1} + m_2 l_0 l_1) \cos(q_1) - m_2 l_0 l_{G_2} \cos(q_2 + q_1) \right) \\ & + \ddot{q}_2 (I_{G_2} + m_2 l_{G_2}^2 - m_2 l_0 l_{G_2} \cos(q_2 + q_1) + m_2 l_1 l_{G_2} \cos(q_2)) \\ & + \dot{q}_1^2 ((m_1 l_0 l_{G_1} + m_2 l_0 l_1) \sin(q_1) + m_2 l_0 l_{G_2} \sin(q_2 + q_1)) \\ & + \dot{q}_2^2 (m_2 l_0 l_{G_2} \sin(q_2 + q_1) - m_2 l_1 l_{G_2} \sin(q_2)) \\ & + 2\dot{q}_0 \dot{q}_1 ((m_1 l_0 l_{G_1} + m_2 l_0 l_1) \sin(q_1) + m_2 l_0 l_{G_2} \sin(q_2 + q_1)) \\ & + 2\dot{q}_0 \dot{q}_2 (m_2 l_0 l_{G_2} \sin(q_2 + q_1) - m_2 l_1 l_{G_2} \sin(q_2)) \\ & + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 (m_2 l_0 l_{G_2} \sin(q_2 + q_1) - m_2 l_1 l_{G_2} \sin(q_2)) \end{aligned} \quad (5.52)$$

Les équations (5.52) et (5.50) sont combinées pour obtenir la 1<sup>ère</sup> équation du Lagrangien :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_0} - \frac{\partial L}{\partial q_0} = & \ddot{q}_0 \left( I_{G_0} + I_{G_1} + m_1 l_{G_1}^2 + m_2 l_1^2 + I_{G_2} + m_2 l_{G_2}^2 + m_0 l_{G_0}^2 + m_1 l_0^2 + m_2 l_0^2 \right. \\
& \left. - 2(m_1 l_0 l_{G_1} + m_2 l_0 l_1) \cos(q_1) - 2m_2 l_0 l_{G_2} \cos(q_2 + q_1) + 2m_2 l_1 l_{G_2} \cos(q_2) \right) \\
& + \ddot{q}_1 \left( I_{G_1} + I_{G_2} + m_2 l_{G_2}^2 + m_1 l_{G_1}^2 + m_2 l_1^2 + 2m_2 l_1 l_{G_2} \cos(q_2) \right) \\
& \left. - (m_1 l_0 l_{G_1} + m_2 l_0 l_1) \cos(q_1) - m_2 l_0 l_{G_2} \cos(q_2 + q_1) \right) \\
& + \ddot{q}_2 \left( I_{G_2} + m_2 l_{G_2}^2 - m_2 l_0 l_{G_2} \cos(q_2 + q_1) + m_2 l_1 l_{G_2} \cos(q_2) \right) \\
& + \dot{q}_1^2 \left( (m_1 l_0 l_{G_1} + m_2 l_0 l_1) \sin(q_1) + m_2 l_0 l_{G_2} \sin(q_2 + q_1) \right) \\
& + \dot{q}_2^2 \left( m_2 l_0 l_{G_2} \sin(q_2 + q_1) - m_2 l_1 l_{G_2} \sin(q_2) \right) \\
& + 2\dot{q}_0 \dot{q}_1 \left( (m_1 l_0 l_{G_1} + m_2 l_0 l_1) \sin(q_1) + m_2 l_0 l_{G_2} \sin(q_2 + q_1) \right) \\
& + 2\dot{q}_0 \dot{q}_2 \left( m_2 l_0 l_{G_2} \sin(q_2 + q_1) - m_2 l_1 l_{G_2} \sin(q_2) \right) \\
& + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 \left( m_2 l_0 l_{G_2} \sin(q_2 + q_1) - m_2 l_1 l_{G_2} \sin(q_2) \right) \\
& - (m_0 g l_{G_0} + m_1 g l_0 + m_2 g l_1) \sin(q_0) + (m_1 g l_{G_1} + m_2 g l_1) \sin(q_1 + q_0) \\
& + m_2 g l_{G_2} \sin(q_2 + q_1 + q_0)
\end{aligned} \tag{5.53}$$

## 2<sup>e</sup> équation du modèle

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial q_1} = & (\dot{q}_0 \dot{q}_1 + \dot{q}_0^2) (m_1 l_0 l_{G_1} + m_2 l_0 l_1) \sin(q_1) + (\dot{q}_0 \dot{q}_2 + \dot{q}_0 \dot{q}_1 + \dot{q}_0^2) m_2 l_0 l_{G_2} \sin(q_2 + q_1) \\
& - (m_1 g l_{G_1} + m_2 g l_1) \sin(q_1 + q_0) - m_2 g l_{G_2} \sin(q_2 + q_1 + q_0)
\end{aligned} \tag{5.54}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = & \dot{q}_0 \left( I_{G_1} + I_{G_2} + m_2 l_{G_2}^2 + m_1 l_{G_1}^2 + m_2 l_1^2 + 2m_2 l_1 l_{G_2} \cos(q_2) \right) \\
& \left. - (m_1 l_0 l_{G_1} + m_2 l_0 l_1) \cos(q_1) - m_2 l_0 l_{G_2} \cos(q_2 + q_1) \right) \\
& + \dot{q}_1 \left( I_{G_1} + I_{G_2} + m_2 l_{G_2}^2 + m_1 l_{G_1}^2 + m_2 l_1^2 + 2m_2 l_1 l_{G_2} \cos(q_2) \right) \\
& + \dot{q}_2 \left( I_{G_2} + m_2 l_{G_2}^2 + m_2 l_1 l_{G_2} \cos(q_2) \right)
\end{aligned} \tag{5.55}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = & \ddot{q}_0 \left( I_{G_1} + I_{G_2} + m_2 l_{G_2}^2 + m_1 l_{G_1}^2 + m_2 l_1^2 + 2m_2 l_1 l_{G_2} \cos(q_2) \right) \\
& \left. - (m_1 l_0 l_{G_1} + m_2 l_0 l_1) \cos(q_1) - m_2 l_0 l_{G_2} \cos(q_2 + q_1) \right) \\
& + \ddot{q}_1 \left( I_{G_1} + I_{G_2} + m_2 l_{G_2}^2 + m_1 l_{G_1}^2 + m_2 l_1^2 + 2m_2 l_1 l_{G_2} \cos(q_2) \right) \\
& + \ddot{q}_2 \left( I_{G_2} + m_2 l_{G_2}^2 + m_2 l_1 l_{G_2} \cos(q_2) \right) \\
& + \dot{q}_0 \dot{q}_1 \left( (m_1 l_0 l_{G_1} + m_2 l_0 l_1) \sin(q_1) + m_2 l_0 l_{G_2} \sin(q_2 + q_1) \right) \\
& + \dot{q}_0 \dot{q}_2 \left( m_2 l_0 l_{G_2} \sin(q_2 + q_1) - 2m_2 l_1 l_{G_2} \sin(q_2) \right) \\
& - 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 m_2 l_1 l_{G_2} \sin(q_2) - \dot{q}_2^2 m_2 l_1 l_{G_2} \sin(q_2)
\end{aligned} \tag{5.56}$$

Les équations (5.56) et (5.54) sont combinées pour obtenir la 2<sup>e</sup> équation du Lagrangien :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial L}{\partial q_1} = & \ddot{q}_0 \left( I_{G_1} + I_{G_2} + m_2 l_{G_2}^2 + m_1 l_{G_1}^2 + m_2 l_1^2 + 2m_2 l_1 l_{G_2} \cos(q_2) \right) \\
& - \left( m_1 l_0 l_{G_1} + m_2 l_0 l_1 \right) \cos(q_1) - m_2 l_0 l_{G_2} \cos(q_2 + q_1) \\
& + \ddot{q}_1 \left( I_{G_1} + I_{G_2} + m_2 l_{G_2}^2 + m_1 l_{G_1}^2 + m_2 l_1^2 + 2m_2 l_1 l_{G_2} \cos(q_2) \right) + \ddot{q}_2 \left( I_{G_2} + m_2 l_{G_2}^2 + m_2 l_1 l_{G_2} \cos(q_2) \right) \\
& - \dot{q}_0^2 \left( \left( m_1 l_0 l_{G_1} + m_2 l_0 l_1 \right) \sin(q_1) + m_2 l_0 l_{G_2} \sin(q_2 + q_1) \right) \\
& - \dot{q}_2^2 m_2 l_1 l_{G_2} \sin(q_2) - 2\dot{q}_0 \dot{q}_2 m_2 l_1 l_{G_2} \sin(q_2) - 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 m_2 l_1 l_{G_2} \sin(q_2) \\
& + \left( m_1 g l_{G_1} + m_2 g l_1 \right) \sin(q_1 + q_0) + m_2 g l_{G_2} \sin(q_2 + q_1 + q_0)
\end{aligned} \tag{5.57}$$

### 3<sup>e</sup> équation du modèle

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial q_2} = & \left( \dot{q}_0 \dot{q}_2 + \dot{q}_0 \dot{q}_1 + \dot{q}_0^2 \right) m_2 l_0 l_{G_2} \sin(q_2 + q_1) - \left( \dot{q}_0^2 + \dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_0 \dot{q}_1 + \dot{q}_0 \dot{q}_2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2 \right) m_2 l_1 l_{G_2} \sin(q_2) \\
& - m_2 g l_{G_2} \sin(q_2 + q_1 + q_0)
\end{aligned} \tag{5.58}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = & \dot{q}_0 \left( I_{G_2} + m_2 l_{G_2}^2 \right) - \dot{q}_0 m_2 l_0 l_{G_2} \cos(q_2 + q_1) + \dot{q}_0 m_2 l_1 l_{G_2} \cos(q_2) \\
& + \dot{q}_1 \left( I_{G_2} + m_2 l_{G_2}^2 \right) + \dot{q}_1 m_2 l_1 l_{G_2} \cos(q_2) + \dot{q}_2 \left( I_{G_2} + m_2 l_{G_2}^2 \right)
\end{aligned} \tag{5.59}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = & \ddot{q}_0 \left( I_{G_2} + m_2 l_{G_2}^2 - m_2 l_0 l_{G_2} \cos(q_2 + q_1) + m_2 l_1 l_{G_2} \cos(q_2) \right) \\
& + \ddot{q}_1 \left( I_{G_2} + m_2 l_{G_2}^2 + m_2 l_1 l_{G_2} \cos(q_2) \right) + \ddot{q}_2 \left( I_{G_2} + m_2 l_{G_2}^2 \right) \\
& + \dot{q}_0 \dot{q}_2 \left( m_2 l_0 l_{G_2} \sin(q_2 + q_1) - m_2 l_1 l_{G_2} \sin(q_2) \right) + \dot{q}_0 \dot{q}_1 m_2 l_0 l_{G_2} \sin(q_2 + q_1) \\
& - \dot{q}_1 \dot{q}_2 m_2 l_1 l_{G_2} \sin(q_2)
\end{aligned} \tag{5.60}$$

Les équations (5.60) et (5.58) sont combinées pour obtenir la 3<sup>e</sup> et dernière équation du Lagrangien :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial L}{\partial q_2} = & \ddot{q}_0 \left( I_{G_2} + m_2 l_{G_2}^2 - m_2 l_0 l_{G_2} \cos(q_2 + q_1) + m_2 l_1 l_{G_2} \cos(q_2) \right) \\
& + \ddot{q}_1 \left( I_{G_2} + m_2 l_{G_2}^2 + m_2 l_1 l_{G_2} \cos(q_2) \right) + \ddot{q}_2 \left( I_{G_2} + m_2 l_{G_2}^2 \right) \\
& + \dot{q}_0^2 \left( m_2 l_1 l_{G_2} \sin(q_2) - m_2 l_0 l_{G_2} \sin(q_2 + q_1) \right) + \dot{q}_1^2 m_2 l_1 l_{G_2} \sin(q_2) \\
& + 2\dot{q}_0 \dot{q}_1 m_2 l_1 l_{G_2} \sin(q_2) + m_2 g l_{G_2} \sin(q_2 + q_1 + q_0)
\end{aligned} \tag{5.61}$$

### 3.1.4. Modèle Complet

Pour simplifier l'écriture, on pose :

$$I_{q_0} = I_{G_0} + I_{G_1} + I_{G_2} + m_1 l_{G_1}^2 + m_2 l_1^2 + m_2 l_{G_2}^2 + m_0 l_{G_0}^2 + m_1 l_0^2 + m_2 l_0^2,$$

$$I_{q_1} = I_{G_1} + I_{G_2} + m_2 l_{G_2}^2 + m_1 l_{G_1}^2 + m_2 l_1^2 \text{ et}$$

$$I_{q_2} = I_{G_2} + m_2 l_{G_2}^2.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} M_T = \ddot{q}_0 \left( I_{q_0} - 2(m_1 l_0 l_{G_1} + m_2 l_0 l_1) \cos(q_1) - 2m_2 l_0 l_{G_2} \cos(q_2 + q_1) + 2m_2 l_1 l_{G_2} \cos(q_2) \right) + \ddot{q}_1 \left( I_{q_1} - (m_1 l_0 l_{G_1} + m_2 l_0 l_1) \cos(q_1) - m_2 l_0 l_{G_2} \cos(q_2 + q_1) \right) \\ \quad + \ddot{q}_2 \left( I_{q_2} - m_2 l_0 l_{G_2} \cos(q_2 + q_1) + m_2 l_1 l_{G_2} \cos(q_2) \right) + \dot{q}_1^2 \left( (m_1 l_0 l_{G_1} + m_2 l_0 l_1) \sin(q_1) + m_2 l_0 l_{G_2} \sin(q_2 + q_1) \right) \\ \quad + \dot{q}_2^2 \left( m_2 l_0 l_{G_2} \sin(q_2 + q_1) - m_2 l_1 l_{G_2} \sin(q_2) \right) + 2\dot{q}_0 \dot{q}_1 \left( (m_1 l_0 l_{G_1} + m_2 l_0 l_1) \sin(q_1) + m_2 l_0 l_{G_2} \sin(q_2 + q_1) \right) \\ \quad + 2\dot{q}_0 \dot{q}_2 \left( m_2 l_0 l_{G_2} \sin(q_2 + q_1) - m_2 l_1 l_{G_2} \sin(q_2) \right) + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 \left( m_2 l_0 l_{G_2} \sin(q_2 + q_1) - m_2 l_1 l_{G_2} \sin(q_2) \right) \\ \quad - (m_0 g l_{G_0} + m_1 g l_0 + m_2 g l_0) \sin(q_0) + (m_1 g l_{G_1} + m_2 g l_1) \sin(q_1 + q_0) + m_2 g l_{G_2} \sin(q_2 + q_1 + q_0) \\ M_S = \ddot{q}_0 \left( I_{q_1} + 2m_2 l_1 l_{G_2} \cos(q_2) - (m_1 l_0 l_{G_1} + m_2 l_0 l_1) \cos(q_1) - m_2 l_0 l_{G_2} \cos(q_2 + q_1) \right) + \ddot{q}_1 \left( I_{q_1} + 2m_2 l_1 l_{G_2} \cos(q_2) \right) + \ddot{q}_2 \left( I_{q_2} + m_2 l_1 l_{G_2} \cos(q_2) \right) \\ \quad - \dot{q}_0^2 \left( (m_1 l_0 l_{G_1} + m_2 l_0 l_1) \sin(q_1) + m_2 l_0 l_{G_2} \sin(q_2 + q_1) \right) - \dot{q}_2^2 m_2 l_1 l_{G_2} \sin(q_2) - 2\dot{q}_0 \dot{q}_2 m_2 l_1 l_{G_2} \sin(q_2) - 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 m_2 l_1 l_{G_2} \sin(q_2) \\ \quad + (m_1 g l_{G_1} + m_2 g l_1) \sin(q_1 + q_0) + m_2 g l_{G_2} \sin(q_2 + q_1 + q_0) \\ M_E = \ddot{q}_0 \left( I_{q_2} - m_2 l_0 l_{G_2} \cos(q_2 + q_1) + m_2 l_1 l_{G_2} \cos(q_2) \right) + \ddot{q}_1 \left( I_{q_2} + m_2 l_1 l_{G_2} \cos(q_2) \right) + \ddot{q}_2 I_{q_2} \\ \quad + \dot{q}_0^2 \left( m_2 l_1 l_{G_2} \sin(q_2) - m_2 l_0 l_{G_2} \sin(q_2 + q_1) \right) + \dot{q}_1^2 m_2 l_1 l_{G_2} \sin(q_2) + 2\dot{q}_0 \dot{q}_1 m_2 l_1 l_{G_2} \sin(q_2) + m_2 g l_{G_2} \sin(q_2 + q_1 + q_0) \end{array} \right. \quad (5.62)$$

### 3.1.5. Détails des matrices de représentation d'état

On définit le vecteur d'état  $x(t) = \begin{bmatrix} q(t)^T & \dot{q}(t)^T \end{bmatrix}^T = [q_0 \quad q_1 \quad q_2 \quad \dot{q}_0 \quad \dot{q}_1 \quad \dot{q}_2]^T \in \mathbb{R}^6$  pour écrire (5.62) sous forme de représentation d'état :

$$\begin{cases} E(q(t))\dot{x}(t) = A(x(t))x(t) + S(q(t)) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (5.63)$$

$y(t) \in \mathbb{R}^3$  est la sortie du système,  $u(t) = \begin{bmatrix} M_S(t) \\ M_E(t) \end{bmatrix}$  est l'entrée,  $E(q(t)) = \begin{bmatrix} I_3 & 0_3 \\ 0_3 & \tilde{E}(q(t)) \end{bmatrix}$ ,

$A(x(t)) = \begin{bmatrix} 0_3 & I_3 \\ 0_3 & \tilde{A}(x(t)) \end{bmatrix}$ ,  $S(q(t)) = \begin{bmatrix} 0_3 \\ \tilde{S}(q(t)) \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0_{4 \times 2} \\ I_2 \end{bmatrix}$ ,  $C = [I_3 \quad 0_3]$  et le détail des

matrices est :

$$\tilde{E}_{1,1}(q(t)) = I_{q_0} - 2(m_1 l_0 l_{G_1} + m_2 l_0 l_1) \cos(q_1) - 2m_2 l_0 l_{G_2} \cos(q_2 + q_1) + 2m_2 l_1 l_{G_2} \cos(q_2),$$

$$\tilde{E}_{1,2}(q(t)) = I_{q_1} + 2m_2 l_1 l_{G_2} \cos(q_2) - (m_1 l_0 l_{G_1} + m_2 l_0 l_1) \cos(q_1) - m_2 l_0 l_{G_2} \cos(q_2 + q_1),$$

$$\tilde{E}_{1,3}(q(t)) = I_{q_2} - m_2 l_0 l_{G_2} \cos(q_2 + q_1) + m_2 l_1 l_{G_2} \cos(q_2),$$

$$\tilde{E}_{2,1}(q(t)) = I_{q_1} + 2m_2 l_1 l_{G_2} \cos(q_2) - (m_1 l_0 l_{G_1} + m_2 l_0 l_1) \cos(q_1) - m_2 l_0 l_{G_2} \cos(q_2 + q_1),$$

$$\tilde{E}_{2,2}(q(t)) = I_{q_1} + 2m_2 l_1 l_{G_2} \cos(q_2),$$

$$\tilde{E}_{2,3}(q(t)) = I_{q_2} + m_2 l_1 l_{G_2} \cos(q_2),$$

$$\tilde{E}_{3,1}(q(t)) = I_{q_2} - m_2 l_0 l_{G_2} \cos(q_2 + q_1) + m_2 l_1 l_{G_2} \cos(q_2),$$

$$\tilde{E}_{3,2}(q(t)) = I_{q_2} + m_2 l_1 l_{G_2} \cos(q_2)$$

$$\tilde{E}_{3,3}(q(t)) = I_{q_2},$$

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{1,1}(x(t)) = & -\dot{q}_1 \left( (m_1 l_0 l_{G_1} + m_2 l_0 l_1) \sin(q_1) + m_2 l_0 l_{G_2} \sin(q_2 + q_1) \right) \\ & + \dot{q}_2 m_2 l_{G_2} (-l_0 \sin(q_2 + q_1) + l_1 \sin(q_2)) \end{aligned},$$

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{1,2}(x(t)) = & -(\dot{q}_1 + \dot{q}_0) \left( (m_1 l_0 l_{G_1} + m_2 l_0 l_1) \sin(q_1) + m_2 l_0 l_{G_2} \sin(q_2 + q_1) \right) \\ & + \dot{q}_2 m_2 l_{G_2} (l_1 \sin(q_2) - l_0 \sin(q_2 + q_1)) \end{aligned},$$

$$\tilde{A}_{1,3}(x(t)) = (\dot{q}_0 + \dot{q}_1 + \dot{q}_2)m_2l_{G_2}(-l_0 \sin(q_2 + q_1) + l_1 \sin(q_2)),$$

$$\tilde{A}_{2,1}(x(t)) = \dot{q}_0((m_1l_0l_{G_1} + m_2l_0l_1)\sin(q_1) + m_2l_0l_{G_2}\sin(q_2 + q_1)) + \dot{q}_2m_2l_1l_{G_2}\sin(q_2),$$

$$\tilde{A}_{2,2}(x(t)) = \dot{q}_2m_2l_1l_{G_2}\sin(q_2),$$

$$\tilde{A}_{2,3}(x(t)) = (\dot{q}_0 + \dot{q}_1 + \dot{q}_2)m_2l_1l_{G_2}\sin(q_2),$$

$$\tilde{A}_{3,1}(x(t)) = \dot{q}_0(m_2l_0l_{G_2}\sin(q_2 + q_1) - m_2l_1l_{G_2}\sin(q_2)) - \dot{q}_1m_2l_1l_{G_2}\sin(q_2),$$

$$\tilde{A}_{3,2}(x(t)) = -(\dot{q}_0 + \dot{q}_1)m_2l_1l_{G_2}\sin(q_2)$$

$$\tilde{A}_{3,3}(x(t)) = 0$$

Et

$$\tilde{S}(q(t)) = - \begin{bmatrix} -(m_0gl_{G_0} + m_1gl_0 + m_2gl_0)\sin(q_0) + (m_1gl_{G_1} + m_2gl_1)\sin(q_1 + q_0) + m_2gl_{G_2}\sin(q_2 + q_1 + q_0) \\ (m_1gl_{G_1} + m_2gl_1)\sin(q_1 + q_0) + m_2gl_{G_2}\sin(q_2 + q_1 + q_0) \\ m_2gl_{G_2}\sin(q_2 + q_1 + q_0) \end{bmatrix}$$

## 3.2. Loi de contrôle

### 3.2.1. Écriture du modèle pour le contrôle

La forme du modèle (3.3) est utilisée dans le manuscrit pour l'observation, écrire la matrice  $S(q(t))$  sous forme de vecteur permet de l'annuler lors du calcul de l'erreur d'observation. Dans le cas du contrôle, il est choisi de réécrire  $S(q(t))$  sous une forme matricielle multiplié par le vecteur d'état, on obtient ainsi :

$$\begin{cases} E(q(t))\dot{x}(t) = (A(x(t)) + S_C(q(t)))x(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (5.64)$$

$$\text{Avec } S_C(q(t)) = \begin{bmatrix} 0_3 & 0_3 \\ \tilde{S}_C(q(t)) & 0_3 \end{bmatrix}, \tilde{S}_C(q(t)) = - \begin{bmatrix} -s_0 + s_{01} + s_{012} & s_{01} + s_{012} & s_{012} \\ s_{01} + s_{012} & s_{01} + s_{012} & s_{012} \\ s_{012} & s_{012} & s_{012} \end{bmatrix} \text{ et}$$

$$s_0 = (m_0gl_{G_0} + m_1gl_0 + m_2gl_0) \frac{\sin(q_0)}{q_0}$$

$$s_{01} = (m_1gl_{G_1} + m_2gl_1) \frac{\sin(q_1 + q_0)}{q_1 + q_0}$$

$$s_{012} = m_2 g l_{G_2} \frac{\sin(q_2 + q_1 + q_0)}{q_2 + q_1 + q_0}$$

Il est choisi de séparer les matrices  $A(x(t))$  et  $S_c(q(t))$  car les non linéarités présentes dans  $A(x(t))$  dépendent de valeurs non mesurées de l'état.

### 3.2.2. Pseudo inverse et problème LMI

La notation  $[Q]_i$  représente la  $i^e$  ligne de la matrice  $Q$ , dans (5.64) on remarque que

$[\tilde{E}(q)]_{2,3} = \begin{bmatrix} [\tilde{E}(q)]_2 \\ [\tilde{E}(q)]_3 \end{bmatrix}$  est de rang plein, il est donc possible de créer la matrice pseudo inverse de

Moore-Penrose :

$$\check{E}(q) = [\tilde{E}(q)]_{2,3}^T \left( [\tilde{E}(q)]_{2,3} [\tilde{E}(q)]_{2,3}^T \right)^{-1} \quad (5.65)$$

Sachant que :

$$[\tilde{E}(q)]_{2,3} \check{E}(q) = I_2 \quad (5.66)$$

Ainsi on définit la loi de contrôle de la manière suivante :

$$u(t) = u_{com}(t) + u_l(t)$$

$$u_{com}(t) = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{S}_c(q) & \tilde{A}(x) \end{bmatrix} x \quad (5.67)$$

$$u_l(t) = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \check{E}(q) \check{E}(q) \begin{bmatrix} L_1(x) & L_2(x) \end{bmatrix} x \quad (5.68)$$

Le terme  $u_{com}(t)$  a pour objectif d'annuler les deux dernières lignes des matrices  $\tilde{S}_c(q)$  et  $\tilde{A}(x)$  alors que le terme  $u_l(t)$  va participer au contrôle du système restant. Les dimensions des matrices sont cohérentes car  $(3 \times 3)(3 \times 3)(3 \times 2)(2 \times 6)(6 \times 1)$ .  $L(x) \in \mathbb{R}^{2 \times 6}$ , on obtient donc le problème suivant :

$$E(q) \dot{x} = (\Sigma(x) - \Gamma \times L(x)) x \quad (5.69)$$

$$\text{Avec } E(q) = \begin{bmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & \check{E}(q) \end{bmatrix}, \Sigma(x) = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & I_3 \\ [\tilde{S}_c(q)]_1 & [\tilde{A}(x)]_1 \\ 0_{2 \times 3} & 0_{2 \times 3} \end{bmatrix}, \Gamma = \begin{bmatrix} 0_{4 \times 2} \\ I_2 \end{bmatrix} \text{ et } L(x) \in \mathbb{R}^{2 \times 6}$$

Revenons à la définition des matrices :

$$\tilde{E}(q) = \begin{bmatrix} e_{11}(q_1, q_2) & e_{12}(q_1, q_2) & e_{13}(q_1, q_2) \\ e_{21}(q_1, q_2) & e_{22}(q_2) & e_{23}(q_2) \\ e_{31}(q_1, q_2) & e_{32}(q_2) & I_{q_2} \end{bmatrix}, [\tilde{S}_c(q)]_1 = [-s_0 + s_{01} + s_{012} \quad s_{01} + s_{012} \quad s_{012}] \text{ et}$$

$$[\tilde{A}(x)]_1 = \begin{bmatrix} a_{11}(q_1, q_2) & a_{12}(q_1, q_2) & a_{13}(q_1, q_2) \\ a_{11}(\dot{q}_1, \dot{q}_2) & a_{12}(\dot{q}_0, \dot{q}_1, \dot{q}_2) & a_{13}(\dot{q}_0, \dot{q}_1, \dot{q}_2) \end{bmatrix}$$

Le nombre de non linéarités est donc 9 avec :

- 3 non linéarités issues de  $[\tilde{S}_c(q)]_1$  :  $s_0, s_{01}, s_{012}$
- 3 non linéarités issues de  $[\tilde{A}(x)]_1$  :  $a_{11}(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2), a_{12}(x), a_{13}(x)$
- 3 non linéarités issues de  $\tilde{E}(q)$  :  $\cos(q_1), \cos(q_2), \cos(q_2 + q_1)$

Ce qui donne  $2^9 = 512$  règles, en utilisant les travaux de (Taniguchi et al., 2000), on considère le vecteur d'état augmenté  $\bar{x} = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}$  en on réécrit (5.69) comme :

$$\bar{E}\dot{\bar{x}} = (\bar{\Sigma}(x) - \bar{\Gamma} \times \bar{L}(x))\bar{x} \quad (5.70)$$

Avec  $\bar{E} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\bar{\Sigma}(x) = \begin{bmatrix} 0 & I \\ \Sigma(x) & -E(q) \end{bmatrix}$ ,  $\bar{\Gamma} = \begin{bmatrix} 0 \\ \Gamma \end{bmatrix}$  et  $\bar{L}(x) = [L(x)P_1^{-1} \quad 0]$ . On considère la fonction quadratique de Lyapunov suivante :

$$V(\bar{x}) = \bar{x}^T \bar{E}^T P^{-1} \bar{x} \quad (5.71)$$

avec  $\bar{E}^T P^{-1} = P^{-1} \bar{E} \geq 0$  et  $P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ P_3 & P_4 \end{bmatrix}$ ,  $P_1 = P_1^T > 0$ . Les conditions LMI de stabilisation du modèle sont donc obtenues sous la forme :

$$Y(x) := \begin{bmatrix} P_3 + P_3^T & (*) \\ \Sigma(x)P_1 - \Gamma \times L(x) - E(q)P_3 + P_4^T & -E(q)P_4 - P_4^T E^T(q) \end{bmatrix} < 0 \quad (5.72)$$

En considérant le domaine de validité suivant :

$$\Omega_x = \left\{ \begin{array}{l} -20 \leq q_1 \leq 60, \|\dot{q}_0\| \leq 29 \\ -10 \leq q_2 \leq 45, \|\dot{q}_1\| \leq 57 \\ \|\dot{q}_2\| \leq 57 \end{array} \right\} \quad (5.73)$$

alors la LMI (5.72) ne trouve pas de solution. Cela ne veut pas dire que le problème LMI est infaisable (car les conditions sont nécessaires et non suffisantes) mais plutôt que le solveur ne parvient pas à trouver une solution au problème d'optimisation convexe (Lam and Leung, 2010). Plusieurs techniques existent pour trouver des solutions dans ce cas de figure : réduire le domaine de validité, relâcher les conditions (ex : Matrice de Lyapunov non quadratique) et simplifier le modèle en

réduisant son nombre de non linéarités. Nous choisissons cette dernière technique et présentons deux méthodes pour le faire.

### 3.2.3. Réduction de modèle : Robustesse

La première méthode pour réduire le nombre de non linéarités est l'approche d'un problème de robustesse. Le plus pratique dans notre cas est de réduire le terme  $[\tilde{A}(x)]_1$  car ainsi il n'y a plus de non linéarité sur  $\dot{q}$ , le problème (5.69) s'écrit donc :

$$\begin{bmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & \tilde{E}(q) \end{bmatrix} \dot{x} = (\Sigma(q) + \Delta\Sigma(x) - \Gamma \times L(q))x \quad (5.74)$$

Avec  $\Delta\Sigma(x) = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{1 \times 3} & [\bar{A}(x)]_1 \\ 0_{2 \times 3} & 0_{2 \times 3} \end{bmatrix} = [e_4 \quad e_4 \quad e_4] \begin{bmatrix} a_{11}(x) & 0 & 0 \\ 0 & a_{12}(x) & 0 \\ 0 & 0 & a_{13}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_4^T \\ e_5^T \\ e_6^T \end{bmatrix}$  et

$\Sigma(q) = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & I_3 \\ [\tilde{S}_C(q)]_1 & 0_{1 \times 3} \\ 0_{2 \times 3} & 0_{2 \times 3} \end{bmatrix}$ , on utilise la notation classique qui veut que

$e_i^T = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots \end{bmatrix}$ . Si les termes  $a_{1i}(x)$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$  sont centrés

$a_{1i}(x) = \delta_i(x) f_i$  avec  $|\delta_i(x)| < 1$  alors :

$$\Delta\Sigma(x) = H\delta(x)F \quad (5.75)$$

Avec  $H = [e_4 \quad e_4 \quad e_4]$  et  $F = \begin{bmatrix} f_1 e_4^T \\ f_2 e_5^T \\ f_3 e_6^T \end{bmatrix}$ .

On réécrit la LMI (5.72) en ajoutant les contraintes d'incertitude :

$$\begin{bmatrix} P_3 + P_3^T & (*) \\ \Sigma(q)P_1 - \Gamma \times L(q) - E(q)P_3 + P_4^T & -E(q)P_4 - P_4^T E^T(q) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & (*) \\ \Delta\Sigma(x)P_1 & 0 \end{bmatrix} < 0 \quad (5.76)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & (*) \\ H\delta(x)FP_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ H \end{bmatrix} \delta(x) [FP_1 \quad 0] + (*) \leq \begin{bmatrix} \mu^{-1} P_1 F^T F P_1 & 0 \\ 0 & \mu H H^T \end{bmatrix} \quad (5.77)$$

Donc (5.76) est vrai si :

$$\begin{bmatrix} P_3 + P_3^T + \mu^{-1} P_1 F^T F P_1 & (*) \\ \Sigma(q)P_1 - \Gamma \times L(q) - E(q)P_3 + P_4^T & -E(q)P_4 - P_4^T E^T(q) + \mu H H^T \end{bmatrix} < 0 \quad (5.78)$$

Un complément de Schur nous permet de réécrire (5.78) sous forme LMI :

$$\begin{bmatrix} P_3 + P_3^T & (*) & (*) \\ FP_1 & -\mu I & 0 \\ \Sigma(q)P_1 - \Gamma \times L(q) - E(q)P_3 + P_4^T & 0 & -E(q)P_4 - P_4^T E^T(q) + \mu HH^T \end{bmatrix} \leq 0 \quad (5.79)$$

On rappelle que  $\Sigma(q) = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & I_3 \\ [\tilde{S}_C(q)]_1 & 0_{1 \times 3} \\ 0_{2 \times 3} & 0_{2 \times 3} \end{bmatrix}$ ,  $E(q) = \begin{bmatrix} I_3 & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & \tilde{E}(q) \end{bmatrix}$

$$[\tilde{S}_C(q)]_1 = [-s_0 + s_{01} + s_{012} \quad s_{01} + s_{012} \quad s_{012}] \quad , \quad \tilde{E}(q) = \begin{bmatrix} e_{11}(q_1, q_2) & e_{12}(q_1, q_2) & e_{13}(q_1, q_2) \\ e_{21}(q_1, q_2) & e_{22}(q_2) & e_{23}(q_2) \\ e_{31}(q_1, q_2) & e_{32}(q_2) & I_{q_2} \end{bmatrix}$$

d'où:

- 3 non linéarités issues de  $[\tilde{S}_C(q)]_1$ :  $s_0, s_{01}, s_{012}$
- 3 non linéarités issues de  $\tilde{E}(q)$ :  $\cos(q_1), \cos(q_2), \cos(q_2 + q_1)$

Ce qui donne  $2^6 = 64$  sous modèles linéaires.

### 3.2.4. Réduction de modèle : Approximation des développements de Taylor

En partant de l'équation du modèle (5.62), on rappelle que le terme  $[\tilde{S}_C(q)]_1$  est issu de l'expression de  $M_T$  dans la 1<sup>ère</sup> équation du modèle :

$$-(m_0 g l_{G_0} + m_1 g l_0 + m_2 g l_0) \sin(q_0) + (m_1 g l_{G_1} + m_2 g l_1) \sin(q_1 + q_0) + m_2 g l_{G_2} \sin(q_2 + q_1 + q_0) \quad (5.80)$$

Qu'on écrit :

$$\begin{bmatrix} \tilde{s}_0 \frac{\sin(q_0)}{q_0} + \tilde{s}_{01} \frac{\sin(q_1 + q_0)}{q_1 + q_0} + \tilde{s}_{012} \frac{\sin(q_2 + q_1 + q_0)}{q_2 + q_1 + q_0} \\ \tilde{s}_{01} \frac{\sin(q_1 + q_0)}{q_1 + q_0} + \tilde{s}_{012} \frac{\sin(q_2 + q_1 + q_0)}{q_2 + q_1 + q_0} \\ \tilde{s}_{012} \frac{\sin(q_2 + q_1 + q_0)}{q_2 + q_1 + q_0} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} \quad (5.81)$$

Avec  $\tilde{s}_0 = (m_0 g l_{G_0} + m_1 g l_0 + m_2 g l_0)$ ,  $\tilde{s}_{01} = (m_1 g l_{G_1} + m_2 g l_1)$  et  $\tilde{s}_{012} = m_2 g l_{G_2}$ , or en utilisant la propriété trigonométrique  $\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$ , sur (5.80), on écrit :

$$\begin{aligned} & -\tilde{s}_0 \sin(q_0) + \tilde{s}_{01} (\sin(q_1)\cos(q_0) + \sin(q_0)\cos(q_1)) \\ & + \tilde{s}_{012} (\sin(q_2 + q_1)\cos(q_0) + \sin(q_0)\cos(q_2 + q_1)) \end{aligned} \quad (5.82)$$

$$\begin{bmatrix} (-\tilde{s}_0 + \tilde{s}_{01} \cos(q_1) + \tilde{s}_{012} \cos(q_2 + q_1)) \frac{\sin(q_0)}{q_0} \\ \tilde{s}_{01} \cos(q_0) \frac{\sin(q_1)}{q_1} + \tilde{s}_{012} \cos(q_0) \frac{\sin(q_2 + q_1)}{q_2 + q_1} \\ \tilde{s}_{012} \cos(q_0) \frac{\sin(q_2 + q_1)}{q_2 + q_1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} \quad (5.83)$$

En considérant  $\cos(q_1)$ ,  $\cos(q_2)$  et  $\cos(q_2 + q_1)$ , les 3 non linéarités présentent dans  $\tilde{E}(q)$  et en ajoutant une 4<sup>e</sup> non linéarité :  $\cos(q_0)$ , il est alors possible de représenter toutes les non linéarités de (5.83) car  $\frac{\sin(q_0)}{q_0}$  est approximée par  $\cos(q_0)$ ,  $\frac{\sin(q_1)}{q_1}$  est approximée par  $\cos(q_1)$  et  $\frac{\sin(q_1 + q_2)}{q_1 + q_2}$  par  $\cos(q_1 + q_2)$ .

Ainsi par la combinaison de la méthode robustesse et de l'approximation des développements de Taylor, on réduit le modèle (5.69) de  $2^9 = 512$  sous modèles linéaires à  $2^4 = 16$ .

## 4. Chapitre 4

### 4.1. Capture du mouvement : Placement des marqueurs

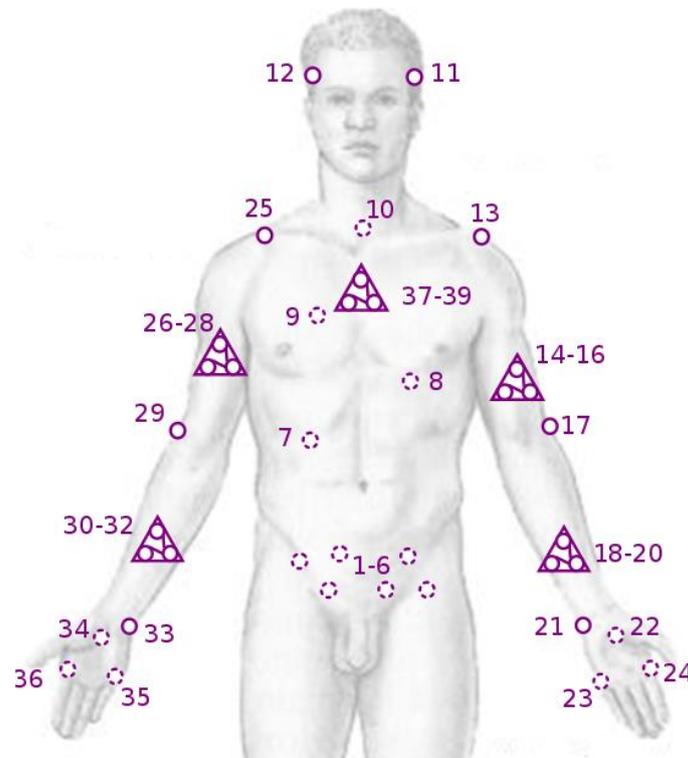


FIG. 92 : PLACEMENT DES MARQUEURS

TABLE 10 : NOM DES MARQUEURS

SEGMENT	#LED	MARQUEUR	SEGMENT	#LED	MARQUEUR
PELVIS	1	Pelvis	MAIN	23	Tete MC5 D
PELVIS	2	Pelvis	MAIN	24	Tete MC2 D
PELVIS	3	Pelvis	BRAS	25	Acromion G
PELVIS	4	Pelvis	BRAS	26	cluster G
PELVIS	5	Pelvis	BRAS	27	cluster G
PELVIS	6	Pelvis	BRAS	28	cluster G
TRONC	7	paraspinal droite T12	AVANT BRAS	29	Épicondyle latéral G
TRONC	8	paraspinal gauche T8	AVANT BRAS	30	cluster G
TRONC	9	paraspinal droite de T3	AVANT BRAS	31	cluster G
TETE	10	C7	AVANT BRAS	32	cluster G
TETE	11	Tempe D	MAIN	33	Processus styloïd ulnaire G
TETE	12	Tempe G	MAIN	34	Base MC3 G
BRAS	13	Acromion D	MAIN	35	Tete MC5 G
BRAS	14	cluster D	MAIN	36	Tete MC2 G
BRAS	15	cluster D	TRONC	37	cluster sternal
BRAS	16	cluster D	TRONC	38	cluster sternal
AVANT BRAS	17	Épicondyle latéral D	TRONC	39	cluster sternal
AVANT BRAS	18	cluster D			
AVANT BRAS	19	cluster D			
AVANT BRAS	20	cluster D			
MAIN	21	Processus styloïd ulnaire D			
MAIN	22	Base MC3 D			

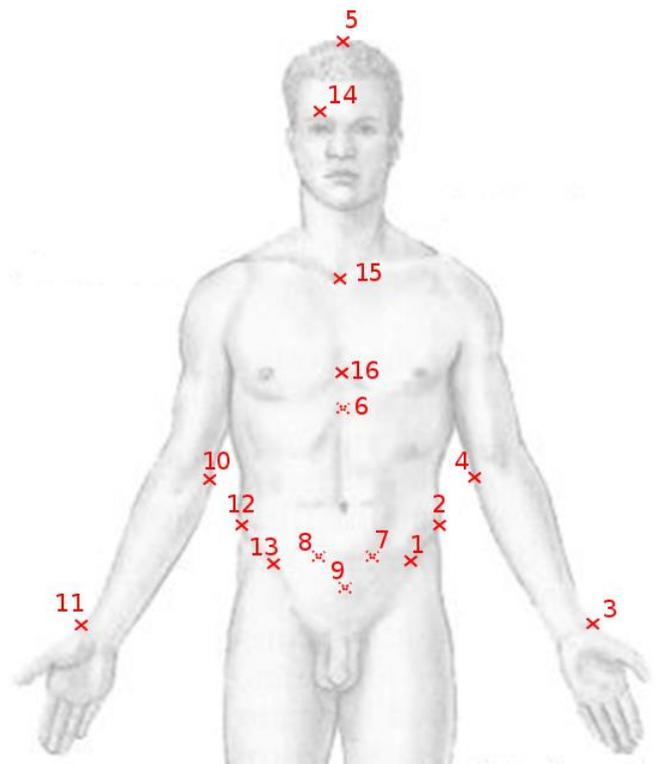


FIG. 93 : LOCALISATION DES POINT ANATOMIQUES PROBÉS

TABLE 11 : POINT PROBÉS

#	POINT PROBÉS
1	Épine illiaque Antéro supérieure (EIAS) G
2	Crête Illiaque G
3	Styloïde radial G
4	Epicondyle Médiale G
5	Head Vertex
6	T8
7	Épine illiaque Postéro supérieure (EIPS) G
8	EIPS D
9	Sacrum
10	Epicondyle Médial D
11	Styloïde radial D
12	Crête Illiaque D
13	EIAS D
14	Arcade Sourcillière D
15	Manubrium
16	Xyphoïd

