



HAL
open science

Étude topologique du flot horocyclique : le cas des surfaces géométriquement infinies

Alexandre Bellis

► **To cite this version:**

Alexandre Bellis. Étude topologique du flot horocyclique : le cas des surfaces géométriquement infinies. Topologie générale [math.GN]. Université de Rennes, 2018. Français. NNT : 2018REN1S017 . tel-01863869

HAL Id: tel-01863869

<https://theses.hal.science/tel-01863869>

Submitted on 29 Aug 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE / UNIVERSITÉ DE RENNES 1
sous le sceau de l'Université Bretagne Loire

pour le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Mention : Mathématiques et leurs interactions

Ecole doctorale MathSTIC

présentée par

Alexandre Bellis

préparée à l'unité de recherche UMR 6625 du CNRS : IRMAR
Institut de Recherche Mathématiques de Rennes
U.F.R. De Mathématiques

**Étude topologique du
flot horocyclique :
le cas des surfaces
géométriquement
infinies**

Thèse rapportée par :

Cyril LECUIRE

Chargé de recherche, Univ. Toulouse / *rapporteur*

Thierry BARBOT

Professeur, Univ. Avignon / *rapporteur*

**et soutenue à Rennes
le 22 mai 2018**

devant le jury composé de :

Yves COUDÈNE

Professeur, Univ. Brest / *examineur*

Françoise DAL'BO

Professeur, Univ. Rennes 1 / *directeur de thèse*

Antonin GUILLOUX

Maître de conférence, Univ. Paris 6 / *examineur*

Ruth KELLERHALS

Professeure, Univ. Fribourg / *examinatrice*

Cyril LECUIRE

Chargé de recherche, Univ. Toulouse / *rapporteur*

François MAUCOURANT

Maître de conférence, Univ. Rennes 1 /
examineur

*Il existe des âmes en ébonite qui au spectacle d'une hyperbole arrivent à
contenir leurs larmes...*

Arno Schmidt, Brand's Haide

Remerciements

Mes premiers remerciements s'adressent à Françoise. Elle a su me laisser une grande liberté dans mes choix de recherche, ce qui m'a conduit à trouver un sujet qui me correspond parfaitement. Elle a réussi dans le même temps à me guider au cours de ces années par ses implacables "et pourquoi?". Sans ceux-là, le théorème A serait faux, le théorème B n'existerait pas encore, et je serais convaincu qu'une orbite horocyclique coïncide toujours avec la feuille fortement stable associée, c'est-à-dire que le chapitre quatre de cette thèse et le théorème E en particulier n'auraient pas encore vu le jour. Plus généralement, un grand merci pour m'avoir mieux appris la rigueur mathématique.

Merci à Thierry Barbot et Cyril Lecuire d'avoir accepté le rôle de rapporteur pour ma thèse et d'avoir examiné mon travail. Leurs remarques m'ont permis d'améliorer ce manuscrit. Merci aussi à François Maucourant, Yves Coudène, Antonin Guilloux et Ruth Kellerhals d'avoir bien voulu faire partie de mon jury.

Je tiens à remercier à nouveau Yves Coudène. J'ai commencé à comprendre comment je pouvais réfléchir au flot horocyclique en grande partie grâce aux discussions que j'ai eues avec lui. Il a été disponible pour échanger avec moi tout au long de ma thèse et je me rappellerai son accueil extrêmement chaleureux à Brest. Merci aussi pour son article [CM10] avec François Maucourant.

Je remercie aussi Barbara Schapira, avec qui j'aurais voulu plus discuter. Merci pour son article [Sch13] sur les demi-orbites horocycliques.

Je profite de ces remerciements mathématiques pour remercier Andrew Haas, qui ne me connaît pas, mais dont l'article [Haa96] m'a profondément marqué. Je remercie aussi François Ledrappier. La vision intuitive développée dans son article [Led97] m'aura fait beaucoup avancer.

Je remercie ici à nouveau Ruth, cette fois-ci pour son accueil chaleureux en Suisse. J'ai eu un séjour à Fribourg tout simplement idéal pour rédiger ma thèse et ce manuscrit lui doit énormément. J'en profite pour remercier Edoardo Dotti avec qui j'ai beaucoup apprécié donner des T.D., ainsi que tous les étudiants de L1 que nous avons encadrés (notamment, THE student). Merci aussi à tous les autres membres de l'équipe de Fribourg qui m'ont très bien intégré.

Merci à Felix Ulmer pour les petites questions posées au bureau 634 et dont le cours de didactique m'aura fait réfléchir à l'enseignement des mathématiques. Merci à Yves Guivarc'h pour son regard bienveillant durant les exposés. Merci à Samuel Tapie pour son intérêt pour mon travail et son accueil à Nantes. Merci à Nathalie pour tous les super commentaires sur mon oral.

Merci à Ivan Babenko pour son cours de topologie suivi à Montpellier. Je me rappelle très précisément la découverte de la preuve de l'existence et unicité de \mathbb{R} dans son cours. Merci très sincèrement pour ses encouragements et son suivi

durant mes études.

Merci infiniment à toute l'équipe administrative de Beaulieu qui a su m'aider malgré ma phobie administrative. Sans elle, je n'aurais pas pu aller aux États-Unis, et je n'aurais certainement même pas réussi à m'inscrire en thèse! Merci aussi à elle pour être si sympathique. Merci donc à Nelly Loton, Marie-Aude Verger, Hélène Rousseaux, Aude Guiny, Chantal Halet, Xhensila Lachambre, Emmanuelle Guiot et Carole Wosiak. Merci aussi aux bibliothécaires Marie-Annick Guillemer, Dominique Hervé et Maryse Collin pour leur gentillesse. Merci enfin à André Rebours pour sa rigueur et sa précision.

Merci à tous les thésards du bâtiment maths qui rendent l'ambiance si agréable. Je pense notamment aux séances hebdomadaires de fatday et à tous les repas du midi. Merci donc à Axel, Ophélie, Camille, Florian, Tristan, Thi, Salomé, Charles, Basile, Olivier, Vincent, Yvan, Coralie, Hélène 1, Hélène 2 (je vous laisse décider qui est qui), Maria, Felipe, Damien, Simon et Türkü. Merci à Andres pour toutes nos discussions. Merci à Blandine pour les bons gâteaux et toutes les bonnes danses. Merci à Julie pour avoir été une partenaire de natation motivée.

Merci à la petite bande de prépa agrég qui a rendu l'arrivée à Rennes très sympathique avec des parties de tarot infernales : Philippe, Florian, Alexandre (enfin heu...Vincent?) et Valentin.

Merci à Olivier. Grâce à lui, la moyenne annuelle d'articles publiés dans le bureau 634 était plutôt correcte. Merci aussi à lui d'essayer de sauver notre environnement en utilisant des brouillons format A6 grand maximum.

Merci à Fish pour ces trois années dans le bureau 634. Nous risquons effectivement d'avoir à attendre de se retrouver en maison de retraite pour terminer tous ces fichus crânes jaunes, mais j'y crois. Je ne jugerai pas la qualité de notre contribution au monde mathématique, mais je pense que la décoration de notre porte de bureau aura au moins fait rire des gens. Je profite au passage pour te proposer une petite soirée west-coast swing un de ces jours. Ça pourrait être sympa, ce serait l'occasion de découvrir cette danse. Tu verras, c'est plutôt cool!

Merci à Flocry Narent, avec qui j'ai traversé les turbulences à Montpellier et partagé mes premiers pas à Rennes. J'ai compris pendant ma thèse tout l'intérêt de la rigueur avec laquelle tu pratiques les mathématiques.

Merci à Armèle pour les partages de galères de thésard et les petites sessions de travail très agréables chez ses parents. Merci pour les kouglofs à Paris, les fondues à Fribourg et les galettes à Rennes.

La danse a fait partie intégrante de ma vie de doctorant et a contribué pour beaucoup à ma survie mentale pendant ces quelques années. Je remercie donc sincèrement toute la bande des danseurs : Edith, Mathilde, Guillaume, Katell, Maxence, Fanny, Hélène, FX, Dorothée, Mathieu, Sandrine, François, Laureen, Guillaume, Alexis, Laure, Claire, Adrien, Thibaut, Agathe, Arnaud, Cédric, Nathalie, Alexandra, Stéphane.

Merci à tous mes vieux amis de Montpellier, inspecteur Nerick, Poporc la pin-up, Thomas-le-grand et Thomas-le-un-peu-moins-grand, Louise, Laura Manzana Panzani, ffff Booris, Denton, Lélé et Elliott pour être maintenant, mes "vieux" amis.

Merci à Pascale pour tous les bons repas et l'accueil chaleureux au Petit Rigné, toujours agrémenté de léchouilles aux mollets... Enfin, ça c'est Lisko! Merci à $\sqrt{\text{Christian}}$ (à qui j'offre une paire de bouchons de stylos). Merci à Louissette pour toutes les crêpes et à Paul pour les parties de palet. A vous,

lecteurs, de dire merci à Chloé et moi. Vous ne le savez pas mais nous avons déjà sauvé le monde ensemble un sacré paquet de fois, même en mode difficile. Merci à Martin. Avec encore un peu d'entraînement, notre utilisation des troncs dans la jungle fera plus que des étincelles.

Merci à ma soeur pour sa présence permanente à mes côtés, et à Erwan pour être aussi surprenant et curieux. Merci à mon frère pour avoir compris que les maths, c'est quand même mieux que la bio! Merci à Mirella pour sa gaieté communicative. Merci à Gloria et Benjamin pour les mots si rigolos. Merci à Adryan, à qui je dois toujours une magnifique bouteille d'eau, et à Apolline que j'attends impatiemment pour les tournois de coinche.

Merci à mes parents, pour absolument tout.

Merci à toi, Hortense, d'être là.

Table des matières

Introduction	1
1 Demi-géodésiques d'une surface hyperbolique	10
1.1 Les isométries hyperboliques, paraboliques, et leurs lignes de niveau	11
1.1.1 Isométries hyperboliques, géodésiques, hypercycles	12
1.1.2 Isométries paraboliques, horocycles, cocycle de Busemann	16
1.1.3 Positions relatives des points dans $\mathbb{H}(\infty)$	19
1.2 Groupes fuchsien, points à l'infini, domaines de Dirichlet	25
1.2.1 Les points à l'infini	26
1.2.2 Domaine de Dirichlet	27
1.2.3 Surfaces élémentaires	29
1.3 Surfaces géométriquement finies et surfaces géométriquement in-	
finies	31
1.3.1 Caractérisation de la finitude géométrique en termes de	
demi-géodésiques	31
1.4 Finesse asymptotique et exemples sur des surfaces	33
1.4.1 Les flûtes	35
1.5 Finesse asymptotique et tours des demi-géodésiques	43
1.5.1 Tours d'une demi-géodésique	43
1.5.2 Conséquences de la finesse asymptotique	47
2 Flot horocyclique	51
2.1 Le flot horocyclique dans $T^1\mathbb{H}$ et T^1S	51
2.2 Action duale du flot horocyclique	54
2.3 Proposition fondamentale pour l'étude de la dynamique topolo-	
gique du flot horocyclique	55
2.4 Liens entre points limites, demi-géodésiques et orbites horocycliques	57
2.4.1 Points paraboliques	57
2.4.2 Ensemble non-errant du flot horocyclique	58
2.4.3 Points horocycliques	59
2.4.4 Caractérisation de la finitude géométrique par les orbites	
horocycliques	59
3 Rencontre entre $\overline{h_{\mathbb{R}}u}$ et $g_{\mathbb{R}}u$	60
3.1 Effet de la finesse asymptotique sur la topologie horocyclique . .	60
3.1.1 Démonstration du Théorème A	60
3.2 Application à la minimalité	63
3.3 Études d'orbites horocycliques sur les flûtes non tordues	65

3.4	Démonstration du théorème B	66
3.5	Démonstration de la proposition 3.4.1	71
4	Sur la relation entre feuille fortement stable et orbite horocyclique.	76
4.1	Lemmes géométriques dans $T^1\mathbb{H}$	77
4.2	L'adhérence d'une orbite horocyclique coïncide avec l'adhérence de la feuille fortement stable	84
4.3	Le cas d'un quotient $\Gamma\backslash\mathbb{H}$	86
4.3.1	Cas où $h_{\mathbb{R}}u = W^{ss}u$	86
4.3.2	Cas où $h_{\mathbb{R}}u \subsetneq W^{ss}u$	88
	Index	98
	Bibliographie	99

Introduction

Toutes les géométries sont associées à une famille de courbes élémentaires : les courbes de courbure géodésique constante. Elles sont les outils fondamentaux de la géométrie sur lesquels reposent tous les raisonnements. Une étude approfondie de leur comportement est donc naturelle et indispensable à la compréhension générale de la géométrie. Le cœur de cette thèse est une étude topologique du flot horocyclique, lequel repose sur l'une des courbes élémentaires de la géométrie hyperbolique : l'horocycle. Plus précisément, nous étudierons l'adhérence des orbites du flot horocyclique sur les surfaces Riemanniennes modelées sur le demi-plan de Poincaré $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$, muni de la métrique hyperbolique $dz^2 = (dx^2 + dy^2)/y^2$.

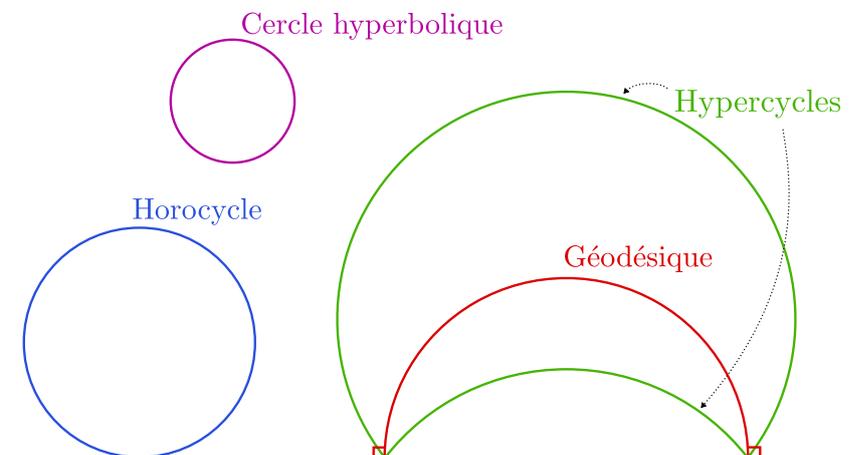
Mais prenons tout d'abord l'exemple du plan euclidien \mathbb{R}^2 . Les courbes élémentaires sont la droite, ou géodésique, qui réalise la plus courte distance entre chacun de ses points, et le cercle qui est l'ensemble des points à égale distance d'un centre. La droite est caractérisée par une courbure géodésique nulle, et le cercle par une courbure géodésique strictement positive.

Considérons maintenant une surface modelée sur le plan euclidien. On s'interroge alors sur l'allure de la projection des droites et des cercles sur cette surface. Topologiquement, la projection du cercle sera toujours compacte. En revanche, le comportement des droites est plus diversifié. Elles peuvent se refermer sur elles-mêmes pour donner une courbe compacte (droite de pente rationnelle sur le tore $(\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z})$), être fermées non-compactes (droite infinie dans un cylindre), ou s'enrouler indéfiniment dans la surface pour former une courbe dense dans celle-ci (droite de pente irrationnelle sur le tore $(\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z})$).

De son côté, le demi-plan de Poincaré \mathbb{H} possède une classe plus riche de courbes élémentaires qui peuvent être rangées dans quatre familles distinctes (voir figure 1 ci-dessous) selon leur courbure géodésique.

- Les **géodésiques**, de courbure nulle. Ces courbes minimisent la distance entre chacun de leurs points. Ce sont des demi-droites euclidiennes verticales ou des demi-cercles euclidiens perpendiculaires à l'axe des réels. Ces courbes sont à l'origine du flot géodésique $g_{\mathbb{R}}$ dans le fibré unitaire tangent $T^1\mathbb{H}$ de \mathbb{H} , qui déplace tout élément de $T^1\mathbb{H}$ le long de la géodésique à laquelle il est tangent.
- Les **hypercycles**, de courbure strictement comprise entre 0 et 1. Tout hypercycle a ses points à égale distance d'une même géodésique. De plus, l'ensemble des points à une distance non-nulle donnée d'une géodésique g est la réunion de deux hypercycles de part et d'autre de g , dont les points extrémaux coïncident avec ceux de g . Si g est une demi-droite verticale, les hypercycles associés sont des demi-droites euclidiennes non verticales.

FIGURE 1 – Les quatre courbes élémentaires de la géométrie hyperbolique



Sinon, ce sont des portions de cercles euclidiens.

- Les **horocycles**, de courbure égale à 1. Ce sont des cercles euclidiens tangents à l'axe des réels, ou des droites euclidiennes horizontales. Ces courbes sont à l'origine du flot horocyclique $h_{\mathbb{R}}$ dans $T^1\mathbb{H}$, qui déplace tout élément de $T^1\mathbb{H}$ le long de l'horocycle auquel il est perpendiculaire.
- Les **cercles hyperboliques**, de courbure strictement plus grande que 1. Ce sont aussi des cercles euclidiens, mais avec un centre différent.

Considérons maintenant une surface hyperbolique $S := \Gamma \backslash \mathbb{H}$, où Γ est un groupe discret d'isométries positives de \mathbb{H} .

Les cercles hyperboliques se projettent toujours sur des courbes compactes sur S , mais les projections des autres courbes sont très riches topologiquement. Par exemple, la projection d'une géodésique peut être compacte, fermée non compacte, ou dense comme en géométrie euclidienne (voir par exemple [Hed39] pour des résultats détaillés). Mais elle peut aussi ne pas être fermée, sans être dense. Dans ce cas-là, son ensemble de points d'accumulations peut être borné ou non borné. Le comportement d'un hypercycle, qui est à distance constante d'une géodésique, est similaire.

La topologie des projections d'horocycles sur des surfaces géométriquement finies (i.e. la réunion d'un ensemble compact avec un nombre fini de bouts cuspidaux et de trompettes, la figure 2 en représente un exemple) est bien connue. Elle est très rigide, en ce sens que ses possibilités sont restreintes. Nous en reparlerons plus loin.

En revanche, si S est géométriquement infinie (i.e. S n'est pas géométriquement finie, la figure 3 en représente deux exemples), la topologie des projections d'horocycles est mal connue et nous manquons de classification pour ce cas de figure. Nous nous intéresserons dans cette thèse non pas aux horocycles sur S , mais aux projections des orbites du flot horocyclique de $T^1\mathbb{H}$ sur le fibré unitaire tangent T^1S de S . Cela définit le flot horocyclique dans T^1S , que l'on notera également $h_{\mathbb{R}}$. Le flot géodésique sur T^1S est défini de la même manière et nous le noterons aussi $g_{\mathbb{R}}$.

Contrairement à la littérature sur le flot géodésique qui est abondante, celle sur le flot horocyclique est assez rare (et encore plus en ce qui concerne les surfaces géométriquement infinies). Les premières traces d'une étude topologique approfondie du flot horocyclique remonte à E. Hopf et G. Hedlund dans les années 1930. L'article [Hed36] est d'un intérêt tout particulier pour nous. Son résultat le plus connu est le suivant : *si S est une surface hyperbolique compacte, toutes les orbites horocycliques $h_{\mathbb{R}}u$ sont denses dans T^1S* . Ce sont les premières surfaces sur lesquelles la topologie des orbites horocycliques a été intégralement déterminée. Ce résultat est déduit d'une propriété plus forte, qui va nous intéresser par la suite. Pour l'énoncer, notons Ω_h l'ensemble non-errant du flot horocyclique sur T^1S . Il est défini comme l'ensemble de tous les éléments u de T^1S tels que pour tout voisinage ouvert U de u dans T^1S , l'ensemble $h_tU \cap U$ est non-vide pour des valeurs arbitrairement grandes de t . C'est sur cet ensemble que la topologie du flot horocyclique est intéressante : en effet, si u n'appartient pas à Ω_h , alors l'orbite $h_{\mathbb{R}}u$ est simplement divergente et n'admet donc aucun point d'accumulation. La propriété de G. Hedlund s'énonce alors ainsi : *supposons que $\Omega_h = T^1S$ et considérons u dans T^1S et $u(\mathbb{R}^+)$, la demi-géodésique associée à u sur S . Si $u(\mathbb{R}^+)$ n'est pas quasi-minimisante, alors l'orbite horocyclique $h_{\mathbb{R}}u$ est dense dans T^1S* . Une demi-géodésique $u(\mathbb{R}^+)$ est dite non quasi-minimisante lorsque pour toute constante $C \geq 0$, il existe un temps $T_C > 0$ tel que pour tout $t \geq T_C$, on a $d(u(0), u(t)) \leq t - C$.

Ce résultat met en lumière un lien profond entre une propriété de la demi-géodésique $u(\mathbb{R}^+)$ et l'orbite horocyclique correspondante $h_{\mathbb{R}}u$. Nous pouvons le percevoir au travers de la relation bien connue de quasi-commutativité entre les deux flots : pour tous réels t et s , on a :

$$g_s h_t g_{-s} = h_{te^s}. \quad (1)$$

Dans l'article [Ebe77], P. Eberlein poursuit l'étude topologique des orbites horocycliques et généralise la propriété obtenue précédemment par Hedlund pour obtenir l'équivalence suivante.

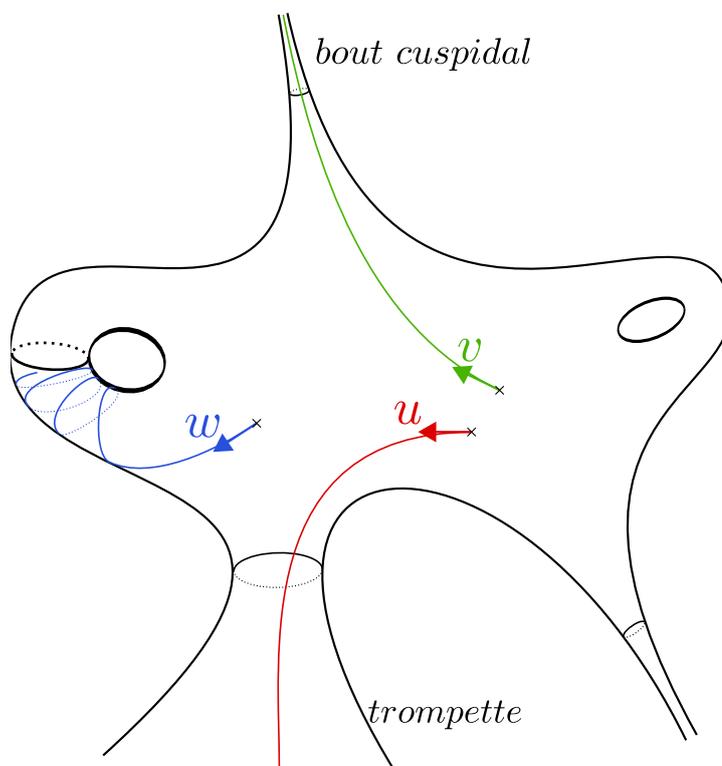
Caractérisation de P. Eberlein : l'orbite $h_{\mathbb{R}}u$ est dense dans Ω_h si et seulement si la demi-géodésique $u(\mathbb{R}^+)$ n'est pas quasi-minimisante.

Le fait d'étudier le flot géodésique pour comprendre le flot horocyclique est une approche devenue classique, mais la profondeur du lien unissant ces deux flots se développe encore.

Observons ici que sur une surface géométriquement finie, il n'existe que deux types de demi-géodésiques $g(\mathbb{R}^+)$ quasi-minimisantes : celles qui partent sans jamais revenir soit dans une trompette (auquel cas g n'appartient pas à Ω_h), soit dans un bout cuspidal (auquel cas g appartient à Ω_h). Ces types de demi-géodésiques sont représentées respectivement par $u(\mathbb{R}^+)$ et $v(\mathbb{R}^+)$ sur la figure 2. Les orbites horocycliques issues des vecteurs de départ de telles demi-géodésiques sont simples à déterminer : elles sont respectivement divergentes, et périodiques. Ainsi, la topologie des orbites horocycliques est entièrement connue sur les surfaces hyperboliques géométriquement finies : une orbite $h_{\mathbb{R}}u$ est soit dense dans Ω_h (si $u(\mathbb{R}^+)$ n'est pas quasi-minimisante), soit compacte (si u est $h_{\mathbb{R}}$ -périodique), soit fermée non-compacte (si u n'appartient pas à Ω_h).

Le comportement du flot horocyclique semble donc plus rigide que celui du flot géodésique, mais il reste cependant un cas à étudier : celui des surfaces géométriquement infinies. C'est sur ces surfaces que prendra place toute l'étude

FIGURE 2 – Surface géométriquement finie



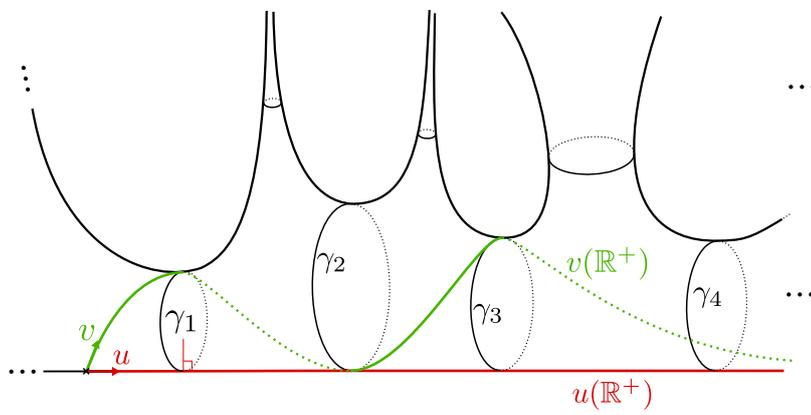
topologique présentée dans cette thèse.

Parmi les exemples les plus simples de surfaces géométriquement infinies, on trouve les flûtes hyperboliques non-tordues (voir sous-section 1.4.1). Une telle surface peut être construite en considérant une suite infinie de pantalons hyperboliques, chacun collé au suivant le long de bords de longueurs égales. Il faut de plus qu'une demi-géodésique quasi-minimisante les rencontre tous en croisant orthogonalement leurs bords collés. On colle enfin une trompette ou un bout cuspidal aux bords des pantalons qui ne sont pas recollés à un autre pantalon. Le premier dessin de la figure 3 en représente un exemple. Sur celui-ci, les pantalons sont recollés le long des géodésiques γ_n , et la demi-géodésique $u(\mathbb{R}^+)$ est quasi-minimisante et les croise toutes orthogonalement. Une étude détaillée de ces surfaces et de la géométrie des demi-géodésiques qu'elle contient est présentée dans [Haa96]. Un autre exemple de surface géométriquement infinie est celui des revêtements abéliens de surfaces compactes (second dessin de la figure 3).

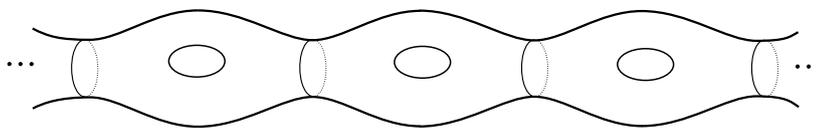
Les surfaces géométriquement infinies offrent de nouvelles possibilités pour les demi-géodésiques quasi-minimisantes, et par là même, pour la topologie des orbites horocycliques. Nous verrons en effet que sur ces surfaces, il existe toujours une demi-géodésique quasi-minimisante $u(\mathbb{R}^+)$ telle que u appartient à Ω_h , mais $u(\mathbb{R}^+)$ ne part pas dans un bout cuspidal (voir proposition 1.3.7). Comme

FIGURE 3 – Exemples élémentaires de surfaces géométriquement infinies

Flûte hyperbolique non-tordue



Revêtement abélien d'une surface compacte



nous l'avons expliqué précédemment, ces demi-géodésiques n'existent pas sur les surfaces géométriquement finies. Nous dirons donc que ce sont des demi-géodésiques quasi-minimisantes *infinies*. Les demi-géodésiques $u(\mathbb{R}^+)$ et $v(\mathbb{R}^+)$ sur la flûte hyperbolique de la figure 3 en sont des représentations. Ce sont ces demi-géodésiques que nous allons étudier pour appréhender le comportement topologique du flot horocyclique propre aux surfaces géométriquement infinies.

La première partie de notre travail porte sur l'intersection entre l'adhérence $\overline{h_{\mathbb{R}}u}$ et la demi-géodésique $g_{\mathbb{R}^+}u$.

Cette partie a été motivée par la question suivante : *sous quelles conditions une surface hyperbolique admet-elle un ensemble minimal pour le flot horocyclique ?* C'est-à-dire, un fermé non-vide de T^1S invariant par $h_{\mathbb{R}}$ dans lequel toutes les orbites horocycliques sont denses. Dans l'étude d'un flot, ces ensembles sont importants car ils permettent de restreindre leur étude à certains sous-ensembles de T^1S .

Le résultat de G. Hedlund mentionné précédemment implique que lorsque la surface S est compacte, alors T^1S est l'unique ensemble minimal pour $h_{\mathbb{R}}$. Si S est géométriquement finie et s'il n'y a pas d'orbite $h_{\mathbb{R}}$ -périodique, ce que nous avons vu sur la topologie des orbites horocycliques dans ce cas implique que l'ensemble non-errant Ω_h et les orbites divergentes sont les seuls ensembles $h_{\mathbb{R}}$ -minimaux. S'il y a des orbites périodiques, elles constituent, avec les orbites divergentes, les seuls ensembles $h_{\mathbb{R}}$ -minimaux de T^1S .

Plaçons-nous maintenant sur une surface hyperbolique S géométriquement infinie. Dans ce cas, les seuls ensembles $h_{\mathbb{R}}$ -minimaux connus sont les orbites horocycliques périodiques et les orbites divergentes. A part cela, tous les résultats sont des résultats de non-existence. Le premier d'entre eux est que Ω_h n'est pas un ensemble minimal. En effet, comme nous l'avons vu, il existe toujours sur ces surfaces une demi-géodésique quasi-minimisante infinie. D'après la caractérisation de P. Eberlein, cela implique qu'il existe des $h_{\mathbb{R}}$ -orbites de Ω_h non denses dans Ω_h .

Les autres résultats de non-existence ont tous été obtenus grâce à l'argument bien connu suivant, qui invite à une étude de l'intersection entre l'adhérence $\overline{h_{\mathbb{R}}u}$ et la demi-orbite $g_{\mathbb{R}^+}u$. Il repose sur la relation de quasi-commutation (1) entre les flots géodésiques et horocycliques énoncée précédemment : *supposons S géométriquement infinie, et considérons u dans T^1S . S'il existe $t \neq 0$ tel que $g_t u \in \overline{h_{\mathbb{R}}u}$, alors l'adhérence $\overline{h_{\mathbb{R}}u}$ n'est pas un ensemble $h_{\mathbb{R}}$ -minimal*. Cette propriété est utilisée par M. Kulikov dans [Kul04] pour construire la première surface hyperbolique sans ensemble $h_{\mathbb{R}}$ -minimal connue. Cela tranche avec le flot géodésique, qui admet toujours des ensembles minimaux. Par la suite, C. Lo et M. Gaye ont construit dans [GL17] d'autres exemples. La même propriété est également utilisée par S. Matsumoto dans [Mat16] qui démontre que, sur une surface géométriquement infinie, lorsqu'une demi-géodésique issue d'un vecteur u rencontre une infinité de géodésiques fermées de longueurs majorées supérieurement, alors l'adhérence $\overline{h_{\mathbb{R}}u}$ contient un vecteur $g_t u$ pour un $t \neq 0$. Il obtient ainsi toute une famille de surfaces hyperboliques sur lesquelles le flot horocyclique n'admet pas d'ensemble minimal.

La minimalité d'un ensemble a par ailleurs une conséquence topologique importante : *si une orbite $h_{\mathbb{R}}u$ n'est pas fermée mais que son adhérence $\overline{h_{\mathbb{R}}u}$ est $h_{\mathbb{R}}$ -minimale, alors l'orbite $h_{\mathbb{R}}u$ est récurrente : il existe une suite de temps*

$(t_n)_\mathbb{N}$ non-bornée telle que $\lim_n h_{t_n} u = u$. La question de la récurrence a été reliée dans [CM10] et [Led97] au rayon d'injectivité le long de la demi-géodésique $u(\mathbb{R}^+)$. Pour un point x d'une surface, notons $\text{Inj}(x)$ le rayon d'injectivité de S en x , défini par :

$$\text{Inj}(x) = \min_{\substack{\gamma \in \Gamma \\ \gamma \neq \text{Id}}} d(\tilde{x}, \gamma \tilde{x}),$$

où \tilde{x} est un relevé de x dans \mathbb{H} . La valeur de ce rayon donne la taille de la surface en x .

On définit alors la finesse asymptotique $\underline{\text{Inj}}(u(\mathbb{R}^+))$ d'une demi-géodésique $u(\mathbb{R}^+)$, par :

$$\underline{\text{Inj}}(u(\mathbb{R}^+)) := \liminf_{t \rightarrow +\infty} \text{Inj}(u(t)).$$

Elle donne la limite des tailles des parties les plus fines de S traversées par $u(\mathbb{R}^+)$.

Y. Coudène et F. Maucourant montrent dans [CM10] que l'orbite $h_{\mathbb{R}} u$ d'un vecteur u non $h_{\mathbb{R}}$ -périodique est récurrente si la finesse asymptotique de $u(\mathbb{R}^+)$ est nulle.

Notre premier résultat aboutit à une description plus détaillée du comportement topologique du flot horocyclique en précisant son lien avec la finesse asymptotique de $u(\mathbb{R}^+)$. Il permet de retrouver les résultats précédemment mentionnés de S. Matsumoto et Coudène-Maucourant et de construire une classe de surfaces hyperboliques sans ensemble $h_{\mathbb{R}}$ -minimal potentiellement plus grande que celle donnée par S. Matsumoto.

Théorème A ([Bel18]). *Soit Γ un groupe fuchsien tel que la surface quotient $S := \Gamma \backslash \mathbb{H}$ soit géométriquement infinie. Soit u dans l'ensemble non-errant Ω_h de $h_{\mathbb{R}}$ sur $T^1 S$. On suppose que $u(\mathbb{R}^+)$ est quasi-minimisante et que u n'est pas $h_{\mathbb{R}}$ -périodique.*

Alors, si $\underline{\text{Inj}}(u(\mathbb{R}^+)) < +\infty$, il existe une suite de temps $(t_n)_\mathbb{N}$ convergeant vers $+\infty$ telle que $g_{t_n} u \in \overline{h_{\mathbb{R}} u}$ pour tout n .

De plus, si $\underline{\text{Inj}}(u(\mathbb{R}^+)) = 0$, alors $g_{\mathbb{R}^+} u \subset \overline{h_{\mathbb{R}} u}$.

Corollaire (Corollaire 3.1.2). *Soient S et u un élément de $T^1 S$ satisfaisant les mêmes hypothèses que dans le théorème A. Si $\underline{\text{Inj}}(u(\mathbb{R}^+)) = 0$, alors pour tout v appartenant à $\overline{h_{\mathbb{R}} u}$, on a $g_{\mathbb{R}^+} v \subset \overline{h_{\mathbb{R}} u}$.*

Notons ici que le théorème A est d'un intérêt particulier pour les surfaces dites *weakly tame*, sur lesquelles O. Sarig étudie les mesures ergodiques infinies du flot horocyclique (voir [Sar10]). En effet, sur de telles surfaces, dès que $u(\mathbb{R}^+)$ est quasi-minimisante et si u n'est pas $h_{\mathbb{R}}$ -périodique, alors $\underline{\text{Inj}}(u(\mathbb{R}^+)) < +\infty$. Faisons aussi observer que étant donné un fermé $h_{\mathbb{R}}$ -invariant \overline{A} , la recherche de temps t tels que $g_t \overline{A} \cap \overline{A}$ soit non-vide est au coeur des travaux de M. Ratner sur la classification des mesures invariantes sur $T^1 S$ (voir [Rat91] ou [Ghy92]).

Corollaire (Théorème 3.2.6). *Si S est une surface géométriquement infinie sans bout cuspidal, alors si toute demi-géodésique de S a une finesse asymptotique finie, le fibré unitaire $T^1 S$ n'admet pas d'ensemble minimal pour le flot horocyclique.*

Le théorème A pose la question d'une caractérisation de la finesse asymptotique de $u(\mathbb{R}^+)$ en fonction de la topologie de l'orbite horocyclique $h_{\mathbb{R}} u$.

D'après ce théorème, si la finesse asymptotique de $u(\mathbb{R}^+)$ est nulle et si u n'est pas $h_{\mathbb{R}}$ -périodique, alors l'orbite $h_{\mathbb{R}}u$ est récurrente. La réciproque est-elle vraie? Plus généralement, si la finesse asymptotique de $u(\mathbb{R}^+)$ est nulle et si u n'est pas $h_{\mathbb{R}}$ -périodique, alors la demi-orbite géodésique $g_{\mathbb{R}^+}u$ est incluse dans $\overline{h_{\mathbb{R}}u}$. La réciproque est-elle vraie?

Dans [Led97], on trouve l'énoncé suivant (Proposition 3) : *soit M une variété riemannienne de courbure négative à géométrie bornée. Soit u dans T^1M tel que la demi-géodésique $u(\mathbb{R}^+)$ est asymptotiquement quasi-minimisante. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, la feuille fortement stable $W^{ss}(g_t u)$ est localement fermée.*

Quand M est une surface hyperbolique S , cet énoncé devient : *s'il existe $C > 0$ tel que $\text{Inj}(x) \geq C$ pour tout x dans S , alors si l'orbite $h_{\mathbb{R}}u$ est récurrente, la demi-géodésique $u(\mathbb{R}^+)$ n'est pas quasi-minimisante. En particulier, si $u(\mathbb{R}^+)$ est quasi-minimisante, alors l'orbite $h_{\mathbb{R}}u$ est localement fermée.* Cela implique en particulier que dans ce dernier cas, $g_{\mathbb{R}^+}u$ n'est pas inclus dans $\overline{h_{\mathbb{R}}u}$. Pour obtenir cette traduction, nous utilisons en fait le théorème D que nous introduirons plus tard. Il fournit dans ce cas l'égalité entre $W^{ss}u$ et $h_{\mathbb{R}}u$. Cet énoncé semble donc répondre positivement à la caractérisation de la finesse asymptotique par la topologie horocyclique.

Cependant, il y avait une erreur dans la preuve et cet énoncé est faux. Le résultat suivant fournit un contre-exemple et permet de plus de répondre négativement aux deux réciproques proposées plus haut. Ainsi, la seule étude de $\overline{h_{\mathbb{R}}u} \cap g_{\mathbb{R}^+}u$ ne permet pas de caractériser la finesse asymptotique.

Théorème B ([Bel18]). *Il existe une surface hyperbolique géométriquement infinie S , avec un rayon d'injectivité supérieur à une constante $C > 0$ en tout point et un élément u de T^1S tel que :*

- (i) $u(\mathbb{R}^+)$ est quasi-minimisante.
- (ii) $g_{\mathbb{R}^+}u \subset \overline{h_{\mathbb{R}}u}$.
- (iii) $C \leq \text{Inj}(u(\mathbb{R}^+)) < +\infty$.

En particulier, l'orbite $h_{\mathbb{R}}u$ n'est pas localement fermée.

La surface que l'on construira pour démontrer le théorème B est une flûte hyperbolique *tordue* (voir section 1.4.1).

La seconde partie de notre travail porte sur la comparaison entre l'orbite $h_{\mathbb{R}}u$ et la feuille fortement stable

$$W^{ss}u := \{v \in T^1S \mid \lim_{t \rightarrow +\infty} D(g_t u, g_t v) = 0\},$$

où D est une distance dans $T^1\mathbb{H}$ projetée sur T^1S .

L'égalité $h_{\mathbb{R}}u = W^{ss}u$ est vraie lorsque $S = \mathbb{H}$. De plus, l'inclusion $h_{\mathbb{R}}u \subset W^{ss}u$ est vérifiée sur toutes les surfaces hyperboliques. Cependant, dans le cas général, l'inclusion réciproque n'est pas directe. Il n'est en effet pas évident que la limite $\lim_{t \rightarrow +\infty} D(g_t u, g_t v) = 0$ entraîne que v appartient à $h_{\mathbb{R}}u$. Bien que l'égalité entre $h_{\mathbb{R}}u$ et $W^{ss}u$ soit souvent supposée vraie dans la littérature, implicitement ou explicitement, nous verrons qu'elle n'est toutefois pas tout le temps vérifiée.

Nous commencerons cependant par établir les adhérences de ces ensembles coïncident toujours. Ainsi, l'étude de l'adhérence $\overline{h_{\mathbb{R}}u}$ revient dans tous les cas à celle de la feuille $\overline{W^{ss}u}$.

Théorème C. *Soit $S := \Gamma \backslash \mathbb{H}$ une surface hyperbolique et u dans $T^1 S$. On a*

$$\overline{h_{\mathbb{R}} u} = \overline{W^{ss} u}.$$

Nous montrerons ensuite que l'égalité entre $h_{\mathbb{R}} u$ et $W^{ss} u$ est bien vérifiée lorsque la finesse asymptotique de la demi-géodésique $u(\mathbb{R}^+)$ est strictement positive.

Théorème D. *Soient $S := \Gamma \backslash \mathbb{H}$ une surface hyperbolique et u dans $T^1 S$. On a l'implication*

$$(\text{Inj}(u(\mathbb{R}^+)) > 0) \implies (h_{\mathbb{R}} u = W^{ss} u).$$

En particulier, si $S = \Gamma \backslash \mathbb{H}$ est une surface géométriquement finie sans bout cuspidal, alors tout u de $T^1 S$ satisfait l'hypothèse du théorème D. Donc on a $h_{\mathbb{R}} u = W^{ss} u$ pour tout u de $T^1 S$. De plus, si G est un sous-groupe quelconque de Γ , alors on peut remarquer que pour tout z de \mathbb{H} , on a

$$\min_{\substack{g \in G \\ g \neq Id}} d(z, gz) \geq \min_{\substack{\gamma \in \Gamma \\ \gamma \neq Id}} d(z, \gamma z).$$

Cela implique que la finesse asymptotique de toute demi-géodésique $u(\mathbb{R}^+)$ de $S' := G \backslash \mathbb{H}$ est aussi strictement positive, et donc que pour tout u dans $T^1 S'$, on a $h_{\mathbb{R}} u = W^{ss} u$.

Le résultat suivant donne en revanche toute une classe de vecteurs u pour lesquels l'égalité entre $h_{\mathbb{R}} u$ et $W^{ss} u$ n'est pas vérifiée. De plus, si u est un tel vecteur, alors $W^{ss} u$ est une réunion indénombrable d'orbites horocycliques distinctes.

Théorème E. *Soit $S := \Gamma \backslash \mathbb{H}$ une surface hyperbolique géométriquement infinie et u dans $T^1 S$ non $h_{\mathbb{R}}$ -périodique et tel que $u(\mathbb{R}^+)$ rencontre une infinité de géodésiques fermées de longueurs tendant vers 0.*

Alors $h_{\mathbb{R}} u \neq W^{ss} u$. De plus, dans ce cas, $W^{ss} u$ est une réunion non-dénombrable d'orbites horocycliques distinctes.

Nous verrons à la section 1.4.1 que l'on peut construire une flûte non-tordue de sorte que la suite des longueurs des bords des pantalons recollés entre eux converge vers 0. Sur une telle flûte, une demi-géodésique $u(\mathbb{R}^+)$ traversant tous les pantalons rencontre une infinité de géodésiques fermées de longueur tendant vers 0. Nous pourrions alors déduire du corollaire 3.1.2, du théorème C et du théorème E le corollaire suivant.

Corollaire (Corollaire 4.3.5). *Il existe une surface hyperbolique S et un élément u appartenant à $T^1 S$ tels que l'adhérence $\overline{h_{\mathbb{R}} u}$ est une réunion indénombrable de double orbites $h_{\mathbb{R}} g_{\mathbb{R}^+} v$ distinctes.*

L'adhérence de cette orbite horocyclique se démarque fortement de toutes celles connues jusqu'à présent.

Chapitre 1

Demi-géodésiques d'une surface hyperbolique

Dans cette thèse, nous établissons certaines propriétés topologiques du flot horocyclique en l'étudiant conjointement avec le flot géodésique. Comme nous le verrons, le comportement d'une orbite horocyclique $h_{\mathbb{R}}u$ dépend de celui de la demi-géodésique $u(\mathbb{R}^+)$. Nous allons ainsi avoir besoin d'établir des propriétés spécifiques à chacun de ces deux flots. Ce premier chapitre est dédié au flot géodésique.

Nous ne ferons pas d'introduction générale à la géométrie hyperbolique, et présenterons uniquement le matériel nécessaire à cette thèse. Une introduction détaillée à la géométrie hyperbolique peut-être trouvée dans [Kat92], [Bea95] ou encore [Dal10].

Ce chapitre est organisé comme indiqué ci-dessous.

Étude des différents types d'isométries et de leurs lignes de niveau. Nous étudierons les isométries hyperboliques et paraboliques séparément, en présentant leurs dynamique et les différentes courbes fondamentales qui leurs sont associées.

Plusieurs outils pour l'étude des demi-géodésiques. Nous présenterons les différents outils qui nous permettront de relier la géométrie des demi-géodésiques à la topologie du flot horocyclique. Nous définirons ainsi successivement le cocycle de Busemann, les différents types de points limites d'un groupe fuchsien et les domaines de Dirichlet. Ces outils seront ensuite mis au service d'une compréhension géométrique des demi-géodésiques sur une surface hyperbolique. Nous introduirons à ce moment-là la notion clé de demi-géodésique quasi-minimisante.

Développements autour du rayon d'injectivité. Nous définirons la notion de finesse asymptotique d'une demi-géodésique. Ce sera l'occasion d'introduire plusieurs exemples fondamentaux de surfaces hyperboliques sur lesquelles nous observerons plusieurs comportements de demi-géodésiques. Nous démontrerons enfin les propositions clés 1 et 2 page 48 et 49 en lien avec la finesse asymptotique.

1.1 Les isométries hyperboliques, paraboliques, et leurs lignes de niveau

Nous munissons le demi-plan $\{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$ de la métrique $dz^2 = (dx^2 + dy^2)/y^2$. C'est le modèle du demi-plan de Poincaré pour la géométrie hyperbolique, que l'on notera \mathbb{H} . La topologie de \mathbb{H} est la même que celle induite par la distance euclidienne, et \mathbb{H} n'est donc pas compact. Nous le compactifions en prenant son adhérence dans $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Nous noterons $\mathbb{H}(\infty) := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ son *bord à l'infini* et $\bar{\mathbb{H}} = \mathbb{H} \cup \mathbb{H}(\infty)$ son adhérence. Plus précisément, un ensemble ouvert de $\bar{\mathbb{H}}$ est soit un ouvert de $\mathbb{H} \cup \mathbb{R}$ pour la topologie induite par la distance euclidienne, soit la réunion du complémentaire d'un compact de $\mathbb{H} \cup \mathbb{R}$ avec le point ∞ . Si D est un sous-ensemble de $\bar{\mathbb{H}}$, nous noterons $D(\infty)$ le bord à l'infini de D , défini par $D(\infty) = \bar{D} \cap \mathbb{H}(\infty)$. Enfin, nous noterons ∂D le bord de D dans \mathbb{H} .

Le groupe des isométries de \mathbb{H} conservant l'orientation s'identifie à $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$, qui agit sur \mathbb{H} par homographie. Cette action se prolonge à $\bar{\mathbb{H}}$:

$$\gamma = \pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{PSL}_2(\mathbb{R}) : z \in \bar{\mathbb{H}} \mapsto \gamma z := \frac{az + b}{cz + d}.$$

Classification des isométries [Kat92]. Une isométrie non triviale γ appartenant à $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ est de l'un des trois types suivants.

- (i) *elliptique* : elle fixe un unique point dans \mathbb{H} .
- (ii) *parabolique* : elle fixe un unique point dans $\mathbb{H}(\infty)$.
- (iii) *hyperbolique* : elle fixe deux points distincts dans $\mathbb{H}(\infty)$.

Si l'on considère une matrice M de $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ représentant une isométrie γ de $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$, alors le type de γ peut être déterminé par la trace de M . Si $|\text{Tr}(M)| < 2$, alors γ est elliptique. Si $|\text{Tr}(M)| = 2$ et si γ est différent de l'identité, alors γ est parabolique. Enfin, si $|\text{Tr}(M)| > 2$, alors γ est hyperbolique.

Identification de $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ avec $T^1\mathbb{H}$.

On note $T^1\mathbb{H}$ le fibré unitaire tangent de \mathbb{H} . Soit γ dans $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ défini par $\gamma z = (az + b)/(cz + d)$. On a

$$\gamma : (z, \tilde{u}) \in T^1\mathbb{H} \mapsto \left(\frac{az + b}{cz + d}, \frac{\tilde{u}}{(cz + d)^2} \right).$$

Cette action de $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ sur $T^1\mathbb{H}$ est simplement transitive (voir [Dal10], propriété I.2.3).

Fixons alors l'élément (i, \tilde{u}_0) dans $T^1\mathbb{H}$, où \tilde{u}_0 est le vecteur unitaire vertical. On identifie $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ à $T^1\mathbb{H}$ via :

$$\gamma \in \text{PSL}_2(\mathbb{R}) \mapsto \gamma(i, \tilde{u}_0) \in T^1\mathbb{H}.$$

Les groupes que nous considérerons par la suite seront sans élément elliptique. Par conséquent, nous bornons notre étude aux isométries hyperboliques et paraboliques.

Les notations que nous allons introduire sont résumées dans la figure 1.1 page 19.

1.1.1 Isométries hyperboliques, géodésiques, hypercycles

Soient η et ξ deux points distincts de $\mathbb{H}(\infty)$. On note (η, ξ) la géodésique ayant ces deux points comme extrémités. Si $\infty \in \{\eta, \xi\}$, alors (η, ξ) est une demi-droite euclidienne verticale. Sinon, c'est un demi-cercle euclidien orthogonal à \mathbb{R} en η et ξ . Pour un point z de \mathbb{H} , on note $[z, \xi)$ la demi-géodésique d'extrémités z et ξ . Si z' est un autre point de \mathbb{H} , le segment hyperbolique compris entre z et z' est noté $[z, z']$.

Avant d'étudier les isométries hyperboliques, nous énonçons la proposition suivante sur les positions relatives de deux géodésiques partageant une extrémité commune.

Proposition 1.1.1. *Soient $g_1 = (\eta_1, \xi)$ et $g_2 = (\eta_2, \xi)$ deux géodésiques distinctes. Ces géodésiques ne se croisent pas dans \mathbb{H} . En particulier, g_1 est entièrement incluse dans une composante connexe de $\mathbb{H} - g_2$.*

Démonstration. Quitte à prendre les images de g_1 et g_2 par un élément de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, on peut supposer que $\xi = \infty$. Alors g_1 et g_2 sont deux géodésiques verticales et le résultat est direct. \square

Soit maintenant γ une isométrie hyperbolique et z un point de \mathbb{H} quelconque. Les points de $\mathbb{H}(\infty)$ définis par

$$\gamma^+ := \lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma^n(z) \text{ et } \gamma^- := \lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma^{-n}(z)$$

ne dépendent pas du point z choisi. Ce sont les deux points fixes de γ dans $\mathbb{H}(\infty)$ et ils sont respectivement qualifiés d'attractif et de répulsif. Pour tout $x \in \mathbb{H}(\infty) - \{\gamma^-, \gamma^+\}$, on a de plus $\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma^n(x) = \gamma^+$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma^{-n}(x) = \gamma^-$. La géodésique (γ^-, γ^+) est invariante par γ et s'appelle l'*axe de translation* de γ .

On note $l(\gamma) := \inf_{z \in \mathbb{H}} d(z, \gamma z)$ la *longueur de translation* de γ . Pour un point z dans \mathbb{H} , on a

$$d(z, \gamma z) = l(\gamma) \iff z \in (\gamma^-, \gamma^+).$$

La longueur de translation de γ et la trace d'une matrice représentant γ dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ sont reliées par l'expression donnée dans la proposition suivante.

Proposition 1.1.2. *Soit γ une isométrie hyperbolique et M une matrice de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ représentant γ . Alors*

$$|\mathrm{Tr}(M)| = 2 \cosh(l(\gamma)/2).$$

Démonstration. Quitte à conjuguer γ dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, on peut supposer que $\gamma^- = 0$ et $\gamma^+ = \infty$. Alors il existe un réel $\lambda > 1$ tel que $\gamma : z \mapsto \lambda z$. Dans ce cas, i appartient à l'axe de γ et $l(\gamma) = d(i, \lambda i) = \ln(\lambda)$. La matrice à coefficients positifs correspondant à γ est $M = \begin{pmatrix} \lambda^{1/2} & 0 \\ 0 & \lambda^{-1/2} \end{pmatrix}$, d'où

$$\mathrm{Tr}(M) = \exp(l(\gamma)/2) + \exp(-l(\gamma)/2) = 2 \cosh(l(\gamma)/2).$$

\square

1.1. LES ISOMÉTRIES HYPERBOLIQUES, PARABOLIQUES, ET LEURS LIGNES DE NIVEAU

La proposition suivante permet d'exprimer la fonction de déplacement $z \mapsto d(z, \gamma z)$ d'une isométrie hyperbolique γ en fonction de la longueur de translation de γ et de la distance de z à l'axe de γ .

Proposition 1.1.3 (Fonction déplacement, [Bea95] Théorème 7.35.1.). *Pour toute isométrie hyperbolique γ et tout z dans \mathbb{H} , on a*

$$\sinh \frac{d(z, \gamma z)}{2} = \cosh(s) \sinh \frac{l(\gamma)}{2},$$

où $s = d(z, (\gamma^-, \gamma^+))$.

Pour une isométrie hyperbolique γ fixée, la valeur $d(z, \gamma z)$ ne dépend donc que de la distance du point z à l'axe de γ . Ainsi les courbes à distance constante de l'axe de γ constituent des lignes de niveau pour la fonction de déplacement de γ .

Définition 1.1.4 (Hypercycle). *Soient η et ξ deux points distincts de $\mathbb{H}(\infty)$ et z un point dans \mathbb{H} . La courbe passant par z dont tous les points sont à distance constante de la géodésique (η, ξ) est appelée hypercycle. On la notera $\text{Hy}(\eta, \xi; z)$. Si z appartient à la géodésique (η, ξ) , l'hypercycle $\text{Hy}(\eta, \xi; z)$ est simplement la géodésique (η, ξ) .*

Considérons un point z' sur l'hypercycle $\text{Hy}(\eta, \xi; z)$ différent de z . On notera $\text{Hy}(\eta, \xi; z, z')$ la portion de $\text{Hy}(\eta, \xi; z)$ comprise entre z et z' . On notera de même $\text{Hy}(\eta, \xi; z, \eta)$ et $\text{Hy}(\xi, \xi'; z, \xi)$ les portions de $\text{Hy}(\eta, \xi; z)$ respectivement comprises entre z et η , et z et ξ .

Si $\infty \in \{\eta, \xi\}$, l'hypercycle $\text{Hy}(\eta, \xi; z)$ est une demi-droite euclidienne d'extrémités η et ξ et passant par z . L'image d'un hypercycle par une isométrie γ est encore un hypercycle. Celle-ci agissant sur \mathbb{H} par homographie, l'image de $\text{Hy}(\eta, \xi; z)$ par γ est donc une portion de cercle euclidien ou de droite euclidienne. Ainsi, si $\infty \notin \{\eta, \xi\}$, l'hypercycle $\text{Hy}(\eta, \xi; z)$ est une portion de cercle euclidien reliant η à ξ (figure 1.1 page 19).

La proposition suivante permet de situer les différents hypercycles ayant des extrémités communes les uns par rapport aux autres.

Proposition 1.1.5. *Soient η et ξ deux points de $\mathbb{H}(\infty)$ et z un point de \mathbb{H} n'appartenant pas à la géodésique (η, ξ) . Notons D la composante connexe de $\mathbb{H} - (\eta, \xi)$ contenant z . L'hypercycle $\text{Hy}(\eta, \xi; z)$ est entièrement inclus dans D . De plus, si z' est un point de $D - \text{Hy}(\eta, \xi; z)$, alors l'hypercycle $\text{Hy}(\eta, \xi; z')$ est entièrement inclus dans la composante connexe de $D - \text{Hy}(\eta, \xi; z)$ contenant z' .*

Démonstration. Il suffit d'observer que la géodésique (η, ξ) et les hypercycles $\text{Hy}(\eta, \xi; z)$ et $\text{Hy}(\eta, \xi; z')$ sont contenus dans des droites euclidiennes ou des cercles euclidiens. Ces courbes se coupent en au plus deux points. Comme elles se rencontrent déjà en η et ξ , cela implique qu'elles n'ont pas d'autre intersection. Chacune est donc contenue dans la composante connexe de \mathbb{H} auquel on a retiré les deux autres courbes. \square

Observons enfin qu'une isométrie hyperbolique γ déplace un point z de \mathbb{H} le long de l'hypercycle $\text{Hy}(\gamma^-, \gamma^+; z)$. En effet, quitte à conjuguer l'isométrie γ dans $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$, on peut supposer que $\gamma^- = 0$ et $\gamma^+ = \infty$. Dans ce cas, γ est la fonction $z \mapsto \lambda z$ pour un certain nombre réel $\lambda > 1$. On remarque alors bien

CHAPITRE 1. DEMI-GÉODÉSIQUES D'UNE SURFACE
HYPERBOLIQUE

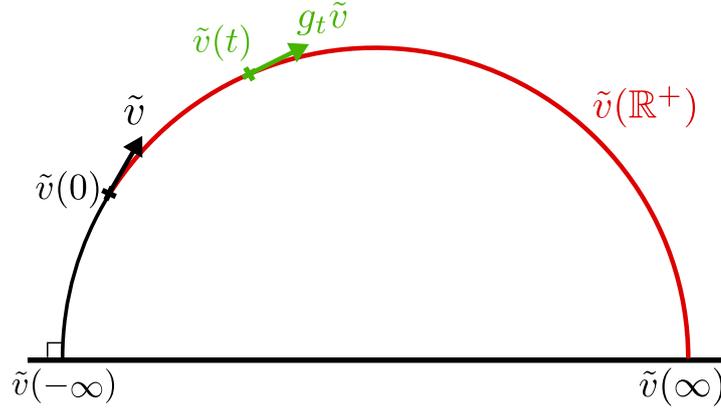
que pour tout point z dans \mathbb{H} , le point γz appartient à l'hypercycle $\text{Hy}(0, \infty; z)$. D'après la proposition 1.1.5, cela implique que si z n'appartient pas à (γ^-, γ^+) , alors pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$ le point $\gamma^k z$ appartient à la même composante connexe de $\mathbb{H} - (\gamma^-, \gamma^+)$ que z . Observons ici plus précisément que le point γz appartient à la portion d'hypercycle $\text{Hy}(0, \infty; z, \infty)$ de $\text{Hy}(0, \infty; z)$ comprise entre z et ∞ . Nous noterons simplement $\text{Hy}(\gamma; z)$ à la place de $\text{Hy}(\gamma^-, \gamma^+; z)$ par la suite (et de même pour les portions d'hypercycles).

Le flot géodésique dans $T^1\mathbb{H}$

Prenons une géodésique orientée c dans \mathbb{H} paramétrée par longueur d'arcs $t \mapsto c(t)$. Notons $z = c(0)$ et prenons un élément \tilde{v} dans le fibré unitaire tangent $T_z^1\mathbb{H}$ de \mathbb{H} en z tel que $c'(0) = \tilde{v}$. On définit le *flot géodésique* $g_{\mathbb{R}}$ sur $T^1\mathbb{H}$ par

$$g_t(z, \tilde{v}) = (c(t), c'(t)).$$

On le notera par la suite $g_t\tilde{v}$ pour plus de concision. La notation $\tilde{v}(t)$ désigne la projection de $g_t\tilde{v} \in T^1\mathbb{H}$ sur \mathbb{H} et on dit que $g_t\tilde{v}$ est basé en $\tilde{v}(t)$. On note $\tilde{v}(-\infty)$ et $\tilde{v}(+\infty)$ les extrémités négatives et positives respectivement de la géodésique $\tilde{v}(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{H}(\infty)$. On dit que \tilde{v} est dirigé vers $\tilde{v}(\infty)$.



Remarquons que le flot géodésique commute avec l'action de $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ sur $T^1\mathbb{H}$: pour tout t dans \mathbb{R} , \tilde{u} dans $T^1\mathbb{H}$ et γ dans $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$, on a

$$g_t\gamma\tilde{u} = \gamma g_t\tilde{u}.$$

Avec l'identification de $T^1\mathbb{H}$ à $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$, on vérifie facilement que l'action du flot géodésique sur $T^1\mathbb{H}$ s'identifie à l'action à droite sur $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ du groupe matriciel

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} e^{\frac{t}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{t}{2}} \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}.$$

C'est-à-dire que si l'on considère un élément \tilde{u} de $T^1\mathbb{H}$, identifié à $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dans $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$, alors

$$g_t\tilde{u} \in T^1\mathbb{H} \longmapsto \pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\frac{t}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{t}{2}} \end{pmatrix} \in \text{PSL}_2(\mathbb{R}).$$

1.1. LES ISOMÉTRIES HYPERBOLIQUES, PARABOLIQUES, ET LEURS LIGNES DE NIVEAU

Les médiatrices

Cette partie sur les géodésiques est l'occasion pour nous de donner l'équation de la médiatrice d'un segment hyperbolique $[i, p]$, pour un point $p \neq i$ quelconque dans \mathbb{H} .

Proposition 1.1.6. *Considérons un point $p = R + iI$ dans \mathbb{H} tel que $I \neq 1$, où $R = \operatorname{Re}(p)$ et $I = \operatorname{Im}(p)$. L'équation de la médiatrice du segment hyperbolique $[i, p]$ est donnée par :*

$$\left(x + \frac{R}{I-1}\right)^2 + y^2 = I \left(1 + \frac{R^2}{(I-1)^2}\right)$$

Si $I = 1$ et $p \neq i$, alors l'équation de la médiatrice de $[i, p]$ est donnée par $x = R/2$.

En particulier, la médiatrice d'un segment hyperbolique quelconque est une géodésique.

Démonstration. Nous utilisons la formule suivante ([Dal10] Exercice 1.8) :

$$\forall a, b \in \mathbb{H}, \sinh \frac{d(a, b)}{2} = \frac{|a - b|}{2\sqrt{\operatorname{Im}(a)\operatorname{Im}(b)}}.$$

En l'appliquant à un point $z = x + iy$ sur la médiatrice de $[i, p]$, nous obtenons l'égalité :

$$\frac{|i - z|}{2\sqrt{\operatorname{Im}(i)\operatorname{Im}(z)}} = \frac{|p - z|}{2\sqrt{\operatorname{Im}(p)\operatorname{Im}(z)}},$$

d'où

$$|i - z|^2 \operatorname{Im}(p) = |p - z|^2.$$

C'est-à-dire

$$Ix^2 + I(y-1)^2 = (x-R)^2 + (y-I)^2,$$

ce qui donne, en arrangeant les termes :

$$x^2(I-1) + 2xR + y^2(I-1) = R^2 + I^2 - I.$$

Si $I = 1$, on obtient $x = R/2$. Sinon,

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{R}{I-1}\right)^2 + y^2 &= \frac{1}{I-1} \left(R^2 + I^2 - I + \frac{R^2}{I-1}\right) \\ &= I \left(1 + \frac{R^2}{(I-1)^2}\right). \end{aligned}$$

C'est l'équation d'un cercle euclidien centré sur l'axe des réels, ce qui définit bien une géodésique de \mathbb{H} . De plus, si $[z, z']$ est un segment hyperbolique quelconque, on peut considérer γ dans $\operatorname{PSL}_2(\mathbb{R})$ telle que $\gamma z = i$. Alors, la médiatrice de $[\gamma z, \gamma z']$ est une géodésique, donc celle de $[z, z']$ aussi. \square

Étant donnée une médiatrice M d'un segment hyperbolique $[i, p]$, nous aurons régulièrement besoin de déterminer quelle composante connexe de $\mathbb{H} - M$ a le point ∞ dans son bord à l'infini. La proposition suivante donne un critère pour le déterminer.

Proposition 1.1.7. *Soit p un point de \mathbb{H} différent de i . Notons M la médiatrice du segment hyperbolique $[i, p]$ et D la composante connexe de $\mathbb{H} - M$ contenant i . Le point ∞ appartient au bord à l'infini $D(\infty)$ si et seulement si la médiatrice M ne rencontre pas la demi-géodésique $[i, \infty)$, ce qui équivaut à $\text{Im}(p) \leq 1$.*

Démonstration. Puisque \overline{D} est connexe par arcs, le point ∞ appartient à $D(\infty)$ si et seulement si toute la demi-géodésique $[i, \infty)$ est incluse dans D . Puisque $M = \partial D$, cela arrive si et seulement si M ne rencontre pas $[i, \infty)$. Il ne reste plus qu'à étudier cette intersection en fonction de $I = \text{Im}(p)$, à l'aide de l'équation de M donnée par la proposition 1.1.6.

Si $I \neq 1$, alors en remplaçant x par 0 dans l'équation de M on trouve

$$y^2 = I + \frac{R^2}{(I-1)^2}(I-1).$$

Cette dernière équation a une solution $y > 1$ si $I > 1$, ce qui implique que $[i, \infty)$ rencontre M . Sinon, si $I < 1$, cette équation a soit une solution $y < 1$, soit pas de solution. Dans ce cas, M ne rencontre pas $[i, \infty)$. Finalement, si $I = 1$, alors $R = \text{Re}(p) \neq 0$ puisque $p \neq i$. Alors M a pour équation $x = R/2$ et $[i, \infty)$ ne rencontre pas M . \square

1.1.2 Isométries paraboliques, horocycles, cocycle de Busemann

Pour deux points z et z' dans \mathbb{H} , on note $C(z; z')$ le cercle hyperbolique de centre z passant par z' . Le cercle $C(z; z')$ est aussi un cercle euclidien, mais avec un centre différent de z .

Considérons une suite de cercles hyperboliques $C(z_n, z')$ passant par un point fixe z' , dont les centres z_n convergent vers un point ξ dans le bord $\mathbb{H}(\infty)$. La courbe que l'on obtient à la limite est un *horocycle*, centré en ξ et passant par z' . C'est une droite horizontale si $\xi = \infty$ et un cercle euclidien tangent à \mathbb{R} sinon. On le note $\text{Ho}(\xi; z')$. Notons directement que l'image d'un horocycle par une isométrie de $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ est encore un horocycle.

Le cocycle de Busemann

Le cocycle de Busemann permet de mesurer l'écartement entre deux horocycles centrés au même point de $\mathbb{H}(\infty)$.

Soit \tilde{v} un vecteur de $T^1\mathbb{H}$ basé en z et pointant vers $\xi \in \mathbb{H}(\infty)$. Soit z' un point de \mathbb{H} . Il existe un temps $t \in \mathbb{R}$ tel que $\tilde{v}(t)$ appartienne à $\text{Ho}(\xi, z')$. On définit le cocycle de Busemann centré en ξ entre z et z' par

$$B_\xi(z, z') = t.$$

Le cocycle de Busemann est constant sur les horocycles : si x appartient à $\text{Ho}(\xi; z)$ et x' appartient à $\text{Ho}(\xi; z')$, alors $B_\xi(x, x') = B_\xi(z, z')$. Remarquons aussi que $\text{Ho}(\xi; z) = \{z' \in \mathbb{H} \mid B_\xi(z, z') = 0\}$.

L'ensemble $\mathbb{H} - \text{Ho}(\xi; z)$ est composé de deux composantes connexes. L'une d'elles ne contient que ξ dans son bord à l'infini. On appelle l'adhérence de cette composante connexe dans \mathbb{H} l'horodisque centré en ξ et passant par z et on le note $\text{Ho}^+(\xi; z)$.

1.1. LES ISOMÉTRIES HYPERBOLIQUES, PARABOLIQUES, ET LEURS LIGNES DE NIVEAU

On observe alors que

$$B_\xi(z, z') = \begin{cases} d(\text{Ho}(\xi, z), \text{Ho}(\xi, z')) & \text{si } z' \in \text{Ho}^+(\xi; z) \\ -d(\text{Ho}(\xi, z), \text{Ho}(\xi, z')) & \text{si } z \in \text{Ho}^+(\xi; z') \end{cases}$$

La proposition suivante donne une autre manière de calculer le cocycle de Busemann.

Proposition 1.1.8 (Section I.1.4, [Dal10]). *Soit ξ un point de $\mathbb{H}(\infty)$ et z et z' deux points de \mathbb{H} . Considérons une demi-géodésique $\tilde{u}(\mathbb{R}^+)$ quelconque telle que $\tilde{u}(\infty) = \xi$. Alors*

$$B_\xi(z, z') = \lim_{t \rightarrow +\infty} d(z, \tilde{u}(t)) - d(z', \tilde{u}(t)).$$

Le cocycle de Busemann vérifie les propriétés classiques suivantes.

Propriété 1.1.9. *Soient γ dans $PSL_2(\mathbb{R})$, ξ dans $\mathbb{H}(\infty)$ et z, z' et z'' dans \mathbb{H} . On a :*

- (i) $B_\xi(z, z') = -B_\xi(z', z)$,
- (ii) $B_{\gamma\xi}(\gamma z, \gamma z') = B_\xi(z, z')$,
- (iii) $B_\xi(z, z'') = B_\xi(z, z') + B_\xi(z', z'')$,
- (iv) $-d(z, z') \leq B_\xi(z, z') \leq d(z, z')$.

Par ailleurs, le cocycle de Busemann entre deux points se déplaçant sur deux demi-géodésiques de mêmes extrémités est constant au cours du temps :

Proposition 1.1.10. *Soient \tilde{u} et \tilde{v} deux vecteurs de $T^1\mathbb{H}$ pointant vers un même point ξ de $\mathbb{H}(\infty)$. Pour tout s dans \mathbb{R} , on a*

$$B_\xi(\tilde{u}(0), \tilde{v}(0)) = B_\xi(\tilde{u}(s), \tilde{v}(s)).$$

Démonstration. Il suffit d'écrire :

$$B_\xi(\tilde{u}(0), \tilde{v}(0)) = B_\xi(\tilde{u}(0), \tilde{u}(s)) + B_\xi(\tilde{u}(s), \tilde{v}(s)) + B_\xi(\tilde{v}(s), \tilde{v}(0))$$

et de constater que $B_\xi(\tilde{u}(0), \tilde{u}(s)) = s = -B_\xi(\tilde{v}(s), \tilde{v}(0))$. \square

Nous nous servons de la proposition 1.1.10 pour établir une autre manière de calculer le cocycle de Busemann.

Propriété 1.1.11. *Soient \tilde{u} et \tilde{v} deux vecteurs de $T^1\mathbb{H}$ pointant vers un même point ξ de $\mathbb{H}(\infty)$. On a :*

$$B_\xi(\tilde{u}(0), \tilde{v}(0)) = \begin{cases} \lim_{t \rightarrow +\infty} d(\tilde{u}(t), \tilde{v}(t)) & \text{si } \tilde{v}(0) \in \text{Ho}^+(\xi; \tilde{u}(0)) \\ -\lim_{t \rightarrow +\infty} d(\tilde{u}(t), \tilde{v}(t)) & \text{si } \tilde{u}(0) \in \text{Ho}^+(\xi; \tilde{v}(0)) \end{cases}$$

Démonstration. Notons $t_0 = B_\xi(\tilde{u}(0), \tilde{v}(0))$. D'après la proposition 1.1.10, pour tout réel t on a

$$|t_0| = |B_\xi(\tilde{u}(t), \tilde{v}(t))| \leq d(\tilde{u}(t), \tilde{v}(t)) \leq d(\tilde{u}(t), \tilde{u}(t+t_0)) + d(\tilde{u}(t+t_0), \tilde{v}(t)).$$

C'est-à-dire :

$$|t_0| \leq d(\tilde{u}(t), \tilde{v}(t)) \leq |t_0| + d(\tilde{u}(t+t_0), \tilde{v}(t)). \quad (1.1)$$

CHAPITRE 1. DEMI-GÉODÉSIQUES D'UNE SURFACE
HYPERBOLIQUE

Quitte à multiplier les vecteurs \tilde{u} et \tilde{v} par une isométrie γ , on peut supposer que $\xi = \infty$. Observons alors que les égalités

$$B_\infty(\tilde{u}(t+t_0), \tilde{v}(t)) = B_\infty(\tilde{u}(t+t_0), \tilde{u}(t)) + B_\infty(\tilde{u}(t), \tilde{v}(t)) = -t_0 + t_0 = 0$$

impliquent que $\tilde{u}(t+t_0)$ appartient à $\text{Ho}(\infty; \tilde{v}(t))$. Ainsi, $\text{Im}(\tilde{u}(t+t_0)) = \text{Im}(\tilde{v}(t))$ et la distance euclidienne entre $\tilde{u}(t+t_0)$ et $\tilde{v}(t)$ est constante et égale à $C := |\text{Re}(\tilde{u}(t+t_0)) - \text{Re}(\tilde{v}(t))|$. Donc la distance hyperbolique $d(\tilde{u}(t+t_0), \tilde{v}(t))$ est plus petite que $C/\text{Im}(\tilde{u}(t))$. Puisque $\tilde{u}(\infty) = \infty$, cette dernière distance converge vers 0 quand t tend vers $+\infty$.

L'encadrement de la distance $d(\tilde{u}(t), \tilde{v}(t))$ donnée par les inéquations (1.1) impliquent ainsi $\lim_{t \rightarrow +\infty} d(\tilde{u}(t), \tilde{v}(t)) = |t_0|$. Or, si $\tilde{v}(0) \in \text{Ho}^+(\xi; \tilde{u}(0))$, alors $t_0 \geq 0$, donc $t_0 = |t_0| = \lim_{t \rightarrow +\infty} d(\tilde{u}(t), \tilde{v}(t))$. Sinon, dans l'autre cas, $t_0 = -|t_0| = -\lim_{t \rightarrow +\infty} d(\tilde{u}(t), \tilde{v}(t))$. \square

Nous ne définissons pas ici le flot horocyclique car nous le ferons au chapitre 2 qui lui est consacré.

Les isométries paraboliques

Soit γ une isométrie parabolique. Nous noterons γ^+ ou γ^- son unique point fixe dans $\mathbb{H}(\infty)$. Cette isométrie est conjuguée dans $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ à $z \mapsto z+1$. Ainsi, elle déplace tout point z de \mathbb{H} le long de l'horocycle $\text{Ho}(\gamma^+; z)$, que nous noterons simplement $\text{Ho}(\gamma; z)$ dans la suite.

Comme le montre la proposition suivante, les horocycles centrés en γ^+ sont aussi les lignes de niveau de la fonction de déplacement $z \mapsto \gamma z$ de γ .

Proposition 1.1.12 ([Par15], section 6). *Soient γ une isométrie parabolique et z_0 dans \mathbb{H} quelconque. Notons $l_\gamma(z_0)$ la distance $l_\gamma(z_0) = d(z_0, \gamma z_0)$.*

Pour tout z dans \mathbb{H} , on a :

$$\sinh \frac{d(z, \gamma z)}{2} = e^s \sinh \frac{l_\gamma(z_0)}{2}$$

où $s := B_{\gamma^+}(z, z_0)$.

La proposition suivante permet de situer les horocycles centrés en un même point ξ de $\mathbb{H}(\infty)$ les uns par rapport aux autres.

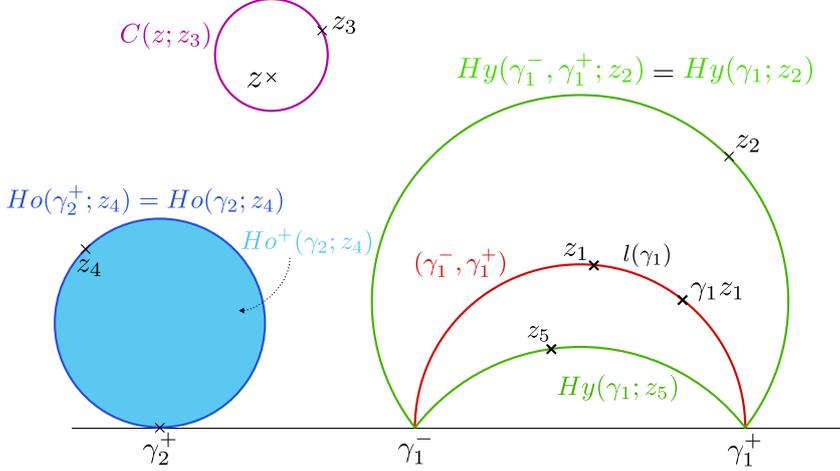
Proposition 1.1.13. *Soient ξ un point de $\mathbb{H}(\infty)$ et z et z' deux points de \mathbb{H} tels que z' n'appartient pas à l'horocycle $\text{Ho}(\xi; z)$. Notons D la composante connexe de $\mathbb{H} - \text{Ho}(\xi; z)$ contenant z' . L'horocycle $\text{Ho}(\xi; z')$ est entièrement inclus dans D .*

Démonstration. Il suffit d'observer que les horocycles $\text{Ho}(\xi; z)$ et $\text{Ho}(\xi; z')$ sont inclus dans des cercles euclidiens tangents l'un à l'autre en ξ . Ces cercles n'ont donc pas d'autre intersection que ξ et donc $\text{Ho}(\xi; z')$ est bien entièrement inclus dans D . \square

Nous introduisons une dernière définition concernant les portions d'horocycles.

1.1. LES ISOMÉTRIES HYPERBOLIQUES, PARABOLIQUES, ET LEURS LIGNES DE NIVEAU

FIGURE 1.1 – Résumé des notations. Ici, γ_1 est hyperbolique et γ_2 parabolique



Définition 1.1.14. Fixons une isométrie parabolique γ et un point z dans \mathbb{H} . L'horocycle $Ho(\gamma; z)$ auquel on retire le point z contient deux composantes connexes. Nous noterons $Ho(\gamma; z, \gamma^+)$ celle qui contient γz , et $Ho(\gamma; z, \gamma^-)$ celle qui contient $\gamma^{-1}z$.

Observons pour terminer que si γ est une isométrie parabolique et z un point de \mathbb{H} , alors pour tout entier naturel non nul n , le point $\gamma^n z$ appartient à $Ho(\gamma; z, \gamma^+)$ et le point $\gamma^{-n}z$ à $Ho(\gamma; z, \gamma^-)$. Il suffit pour le voir de remarquer que dans le cas particulier où $\gamma : z \mapsto z + 1$, cette observation est directe. De plus, si z' est un point de \mathbb{H} n'appartenant pas à $Ho(\gamma; z)$, alors d'après la proposition 1.1.13, pour tout entier k le point $\gamma^k z'$ appartient à la même composante connexe de $\mathbb{H} - Ho(\gamma; z)$ que z' .

1.1.3 Positions relatives des points dans $\mathbb{H}(\infty)$

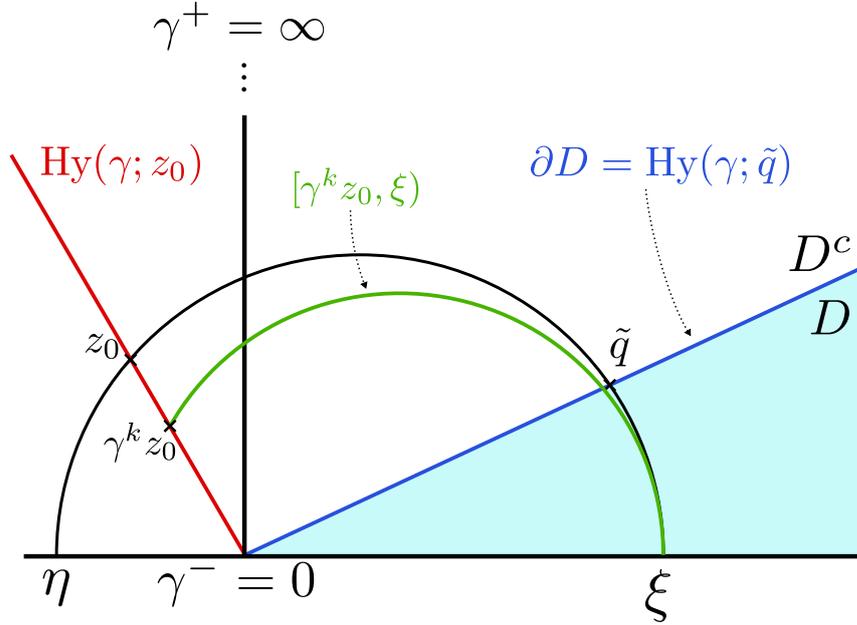
Nous aurons besoin d'étudier l'intersection entre des géodésiques, des hypercycles et des horocycles. L'existence d'une telle intersection dépend de la position des extrémités de ces courbes dans $\mathbb{H}(\infty)$ les unes par rapport aux autres. Pour repérer les positions relatives des points dans $\mathbb{H}(\infty)$, nous introduisons la définition suivante.

Définition 1.1.15. Nous dirons que quatre points distincts η_1, η_2, η_3 et η_4 de $\mathbb{H}(\infty)$ sont rangés, ou positionnés, dans cet ordre si η_2 et η_4 appartiennent à des composantes connexes différentes de $\mathbb{H}(\infty) - \{\eta_1, \eta_3\}$. Nous noterons :

$$\eta_1 \wr \eta_2 \wr \eta_3 \wr \eta_4. \quad (1.2)$$

Notons ici que l'on a $\eta_1 \wr \eta_2 \wr \eta_3 \wr \eta_4$ si et seulement si les géodésiques (η_1, η_3) et (η_2, η_4) se rencontrent dans \mathbb{H} . Nous pouvons ainsi observer directement que la condition (1.2) est équivalente à la condition $\eta_1 \wr \eta_4 \wr \eta_3 \wr \eta_2$. Elle est aussi équivalente à $\eta_2 \wr \eta_1 \wr \eta_4 \wr \eta_3$, ou encore à $\eta_4 \wr \eta_3 \wr \eta_2 \wr \eta_1$. Observons qu'elle implique

FIGURE 1.2 – Proposition 1.1.16



aussi que les points η_3 et η_4 appartiennent à la même composante connexe de $\mathbb{H}(\infty) - \{\eta_1, \eta_2\}$.

Les deux propositions suivantes sont à la base des propositions clefs 1 et 2 page 48 et 49, qui sont au cœur de cette thèse.

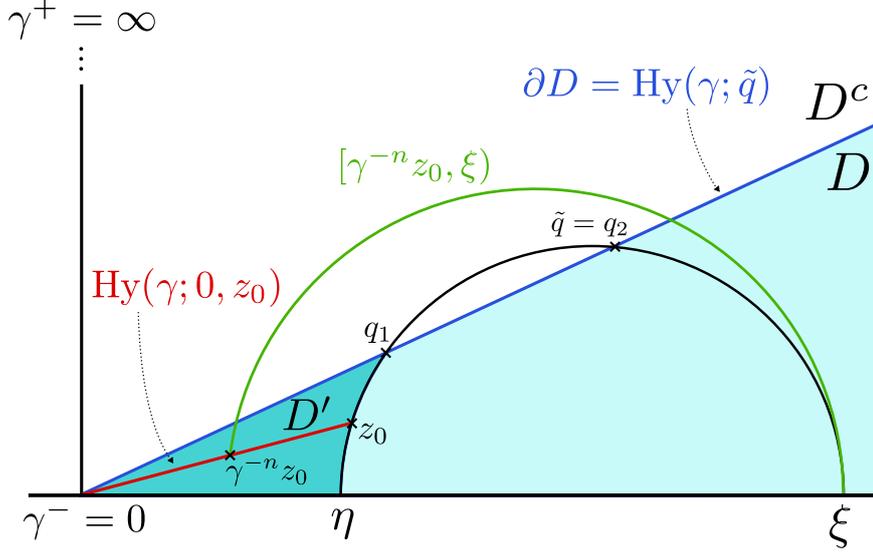
Proposition 1.1.16. *Soient γ une isométrie hyperbolique et η et ξ deux points distincts des points fixes de γ dans $\mathbb{H}(\infty)$. On suppose que $\eta \searrow \gamma^- \searrow \xi \searrow \gamma^+$. Alors, si z_0 et \tilde{q} sont deux points sur la géodésique (η, ξ) tels que $\tilde{q} \in [z_0, \xi)$, pour tout entier k dans \mathbb{Z} , on a*

$$[\gamma^k z_0, \xi) \cap \text{Hy}(\gamma; \tilde{q}) \neq \emptyset \quad (1.3)$$

Démonstration. Pour toute cette démonstration, le lecteur pourra se référer à la figure 1.2. On rappelle que si \tilde{q} appartient à (γ^-, γ^+) , alors l'hypercycle $\text{Hy}(\gamma; \tilde{q})$ est simplement la géodésique (γ^-, γ^+) .

Fixons un entier relatif k . Notons D la composante connexe de $\mathbb{H} - \text{Hy}(\gamma; \tilde{q})$ telle que le point ξ appartienne au bord à l'infini $D(\infty)$ de D . Par définition de D , son bord dans \mathbb{H} est $\partial D = \text{Hy}(\gamma; \tilde{q})$ et nous devons donc montrer que $[\gamma^k z_0, \xi)$ rencontre ∂D . Remarquons que ∂D a γ^- et γ^+ comme extrémités dans $\mathbb{H}(\infty)$. Ainsi, puisque le point ξ est distinct des points fixes de γ , il appartient à l'intérieur de \overline{D} dans $\overline{\mathbb{H}}$. Cela implique qu'il existe z' sur $[\gamma^- z_0, \xi)$ tel que toute la demi-géodésique $[z', \xi)$ est incluse dans D . Ainsi, il nous suffit de montrer que le point $\gamma^k z_0$ appartient à D^c , le complémentaire de D , pour en déduire directement que le segment hyperbolique $[\gamma^k z_0, z']$ rencontre ∂D et conclure la démonstration.

FIGURE 1.3 – Proposition 1.1.17



Avant de poursuivre, rappelons ici que le point $\gamma^k z_0$ appartient à l'hypercycle $\text{Hy}(\gamma; z_0)$, et que celui-ci est entièrement inclus soit dans D , soit dans D^c d'après la proposition 1.1.5. Ainsi, z_0 et $\gamma^k z_0$ appartiennent soit tous les deux à D , soit tous les deux à D^c . On est donc ramenés à montrer que z_0 appartient à D^c .

Quitte à conjuguer γ dans $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$, on peut supposer que $\gamma^- = 0$ et $\gamma^+ = \infty$. Alors, d'après notre hypothèse, les points η et ξ appartiennent à des composantes différentes de $\mathbb{H}(\infty) - \{0, \infty\}$ et sont donc de signes opposés. Ainsi, la géodésique (η, ξ) ne rencontre l'hypercycle $\text{Hy}(\gamma; \tilde{q})$, qui est une demi-droite euclidienne partant de 0, que au point \tilde{q} . La demi-géodésique $[\tilde{q}, \xi)$ est donc incluse dans \overline{D} et la demi-géodésique $(\eta, \tilde{q}]$ dans D^c . Comme le point z_0 appartient à $(\eta, \tilde{q}]$ par hypothèse, il appartient à D^c , ce qui conclut. \square

Rappelons avant d'énoncer la proposition suivante que lorsque l'on considère une isométrie parabolique γ , les notations γ^+ et γ^- désignent toutes les deux l'unique point fixe de γ .

Proposition 1.1.17. *Soient γ une isométrie hyperbolique ou parabolique et η et ξ deux points distincts des points fixes de γ dans $\mathbb{H}(\infty)$. On suppose que l'on a $\eta \wr \gamma^{-1} \eta \wr \gamma^- \wr \xi$. Alors, si z_0 et \tilde{q} sont deux points sur la géodésique (η, ξ) tels que $\tilde{q} \in [z_0, \xi)$, on a pour tout entier l dans \mathbb{N} :*

$$\begin{aligned} [\gamma^{-l} z_0, \xi) \cap \text{Hy}(\gamma; \tilde{q}) &\neq \emptyset \text{ si } \gamma \text{ est hyperbolique} \\ [\gamma^{-l} z_0, \xi) \cap \text{Ho}(\gamma; \tilde{q}) &\neq \emptyset \text{ si } \gamma \text{ est parabolique.} \end{aligned}$$

Démonstration. Pour toute cette démonstration, le lecteur pourra se référer à la figure 1.3.

CHAPITRE 1. DEMI-GÉODÉSINIQUES D'UNE SURFACE
HYPERBOLIQUE

Fixons un entier naturel l . Si γ est hyperbolique (resp. parabolique), notons D la composante connexe de $\mathbb{H} - \text{Hy}(\gamma; \tilde{q})$ (resp. $\mathbb{H} - \text{Ho}(\gamma; \tilde{q})$) telle que le point ξ appartienne au bord à l'infini $D(\infty)$ de D . Par définition de D , son bord dans \mathbb{H} est $\partial D = \text{Hy}(\gamma; \tilde{q})$ (resp. $\partial D = \text{Ho}(\gamma; \tilde{q})$). Ainsi, comme dans la démonstration de la proposition 1.1.16, nous devons montrer que $[\gamma^{-n}z_0, \xi]$ rencontre ∂D et il suffit pour cela de trouver un point z sur $[\gamma^{-n}z_0, \xi]$ appartenant à D^c . Le point $\gamma^{-n}z_0$ appartient à la portion d'hypercycle $\text{Hy}(\gamma; \gamma^-, z_0)$ (resp. à la portion d'horocycle $\text{Ho}(\gamma; \gamma^-, z_0)$, voir définition 1.1.14). Celle-ci est entièrement incluse soit dans D , soit dans D^c d'après la proposition 1.1.5 (resp. 1.1.13). Ainsi, si z_0 appartient à D^c , le point $\gamma^{-n}z_0$ appartient aussi à D^c et on conclut en posant $z = \gamma^{-n}z_0$. Nous supposons donc maintenant que z_0 appartient à D .

Traisons tout d'abord le cas où γ est hyperbolique. Quitte à conjuguer γ dans $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$, on peut supposer que $\gamma^- = 0$ et $\gamma^+ = \infty$. Alors, il existe un réel $\lambda > 1$ tel que $\gamma : z \mapsto \lambda z$. Le point $\gamma^{-n}z_0 = (1/\lambda)^n z_0$ appartient donc à la portion d'hypercycle $\text{Hy}(\gamma; 0, z_0)$, qui est le segment de droite euclidienne compris entre 0 et z_0 . Par ailleurs, si l'on a $\eta \wr 0 \wr \xi \wr \infty$, c'est-à-dire si les points η et ξ appartiennent à des composantes différentes de $\mathbb{H}(\infty) - \{0, \infty\}$, alors la proposition 1.1.16 conclut directement. On suppose donc que η et ξ sont dans la même composante de $\mathbb{H}(\infty) - \{0, \infty\}$, c'est-à-dire que η et ξ ont le même signe. Nous allons supposer pour la suite que ce signe est positif (le cas où il est négatif se traitant de la même manière).

Puisque $\gamma^{-1}\eta = (1/\lambda)\eta$, les points $\gamma^{-1}\eta$ et η ont le même signe et $0 < \gamma^{-1}\eta < \eta$. De plus, par hypothèse, $\eta \wr \gamma^{-1}\eta \wr 0 \wr \xi$. Les points ξ et $\gamma^{-1}\eta$ n'appartiennent donc pas à la même composante de $\mathbb{H}(\infty) - \{0, \eta\}$. Ainsi, nous avons

$$0 < \gamma^{-1}\eta < \eta < \xi. \quad (1.4)$$

Le bord à l'infini $D(\infty)$ de D , qui contient ξ , est donc égal à l'intervalle réel $[0, \infty)$ auquel on rajoute le point ∞ . Donc η et ξ sont tous les deux dans l'intérieur de $D(\infty)$. L'intersection $(\eta, \xi) \cap \partial D$ contient au plus deux points, que l'on note q_1 et q_2 avec $q_2 \in [q_1, \xi]$. On a donc $\tilde{q} = q_1$ ou $\tilde{q} = q_2$, et si cette intersection est réduite à un point, on a $\tilde{q} = q_1 = q_2$ (sur la figure 1.3, on a supposé $q_1 \neq q_2 = \tilde{q}$). Alors, les demi-géodésiques $(\eta, q_1]$ et $[q_2, \xi)$ sont entièrement incluses dans \overline{D} , et le segment $[q_1, q_2]$ dans D^c . Comme \tilde{q} appartient à $[z_0, \xi]$, le point z_0 appartient à $(\eta, \tilde{q}]$. Comme $\tilde{q} = q_1$ ou $\tilde{q} = q_2$ et comme on a supposé que z_0 appartient à D , on a $z_0 \in (\eta, q_1]$. Alors la portion d'hypercycle $\text{Hy}(\gamma; z_0, 0)$ est incluse dans la composante connexe D' de $D - (\eta, \xi)$ ayant pour bord dans \mathbb{H}

$$\partial D' = \text{Hy}(\gamma; 0, q_1) \cup (\eta, q_1]$$

et pour bord à l'infini

$$D'(\infty) = [0, \eta].$$

Le point $\gamma^{-n}z_0$, qui appartient à la portion d'hypercycle $\text{Hy}(\gamma; 0, z_0)$, appartient donc à D' . Mais la demi-géodésique $[\gamma^{-n}z_0, \xi]$ n'est pas incluse dans D' puisque ξ , qui est strictement supérieur à η d'après (1.4), n'appartient pas à $D'(\infty)$. Donc elle coupe $\partial D'$. Puisque la géodésique (η, ξ) et la demi-géodésique $[\gamma^{-n}z_0, \xi]$ ont une extrémité commune, d'après la proposition 1.1.1, $[\gamma^{-n}z_0, \xi]$ ne rencontre pas (η, ξ) . En particulier, $[\gamma^{-n}z_0, \xi]$ ne rencontre pas $(\eta, q_1]$. Ainsi, $[\gamma^{-n}z_0, \xi]$ rencontre forcément l'autre composante de bord de D' , c'est-à-dire l'hypercycle $\text{Hy}(\gamma; 0, q_1)$, qui est inclus dans ∂D . Cela conclut.

1.1. LES ISOMÉTRIES HYPERBOLIQUES, PARABOLIQUES, ET LEURS LIGNES DE NIVEAU

Supposons finalement que γ est une isométrie parabolique. Quitte à la conjuguer dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, on peut supposer que $\gamma^- = \infty$ et que $\gamma : z \mapsto z + 1$. On suit exactement les mêmes étapes que dans le cas où γ est hyperbolique et η et ξ ont le même signe. Par hypothèse, les points $\gamma^{-1}\eta = \eta - 1$ et ξ sont dans des composantes connexes différentes de $\mathbb{H}(\infty) - \{\eta, \infty\}$. Ainsi, on a

$$\eta - 1 < \eta < \xi.$$

On note q_1 et q_2 les points de l'intersection $(\eta, \xi) \cap \mathrm{Ho}(\gamma; \tilde{q})$, avec $q_2 \in [q_1, \xi)$. Comme précédemment, z_0 appartient à la demi-géodésique $(\eta, q_1]$. La demi-portion d'horocycle $\mathrm{Ho}(\gamma; z_0, \gamma^-)$ est donc incluse dans la composante connexe D' de $D - (\eta, \xi)$ ayant pour bord dans \mathbb{H}

$$\partial D' = \mathrm{Ho}(\gamma; q_1, \gamma^-) \cup (\eta, q_1]$$

et pour bord à l'infini

$$D'(\infty) =]\infty, \eta] \cup \infty.$$

Comme dans le cas hyperbolique, la demi-géodésique $[\gamma^{-n}z_0, \xi)$ ne coupe pas $(\eta, q_1]$, donc elle coupe $\partial D'$ sur la composante de bord $\mathrm{Ho}(\gamma; q_1, \gamma^-)$ qui est incluse dans ∂D . \square

Les trois prochaines propositions seront utilisées au chapitre 3. La première énonce le fait que, quitte à remplacer γ par γ^- , on peut toujours supposer que l'on est dans la situation de la proposition 1.1.17.

Proposition 1.1.18. *Soit γ une isométrie hyperbolique ou parabolique. Soit η et ξ deux points distincts de $\mathbb{H}(\infty)$, différents des points fixes de γ . Alors, quitte à remplacer γ par γ^{-1} , on peut supposer que*

$$\eta \wr \gamma^{-1}\eta \wr \gamma^- \wr \xi.$$

Démonstration. Nous devons montrer que, quitte à remplacer γ par γ^{-1} , les points $\gamma^{-1}\eta$ et ξ appartiennent à des composantes connexes de $\mathbb{H}(\infty) - \{\eta, \gamma^-\}$ différentes. Supposons donc que $\gamma^{-1}\eta$ et ξ appartiennent à la même composante.

Si l'isométrie γ est hyperbolique, quitte à la conjuguer dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, on peut supposer que $\gamma^- = 0$ et $\gamma^+ = \infty$. C'est-à-dire que γ est la fonction $\gamma : z \mapsto \lambda z$ pour un certain réel $\lambda > 1$. On observe alors que, puisque $\gamma^{-1}\eta = (1/\lambda)\eta$ et $\gamma\eta = \lambda\eta$, les points $\gamma^{-1}\eta$, $\gamma\eta$ et η sont de même signe et

$$0 < |\gamma^{-1}\eta| < |\eta| < |\gamma\eta|.$$

Puisque $\gamma^{-1}\eta$ et ξ sont dans la même composante connexe de $\mathbb{H}(\infty) - \{\eta, 0\}$, le point ξ a le même signe que $\gamma^{-1}\eta$ et

$$0 < |\xi| < |\eta| < |\gamma\eta| < \infty.$$

En remplaçant γ par γ^{-1} , on a donc $\gamma^- = \infty$ et

$$\xi \wr \eta \wr \gamma^{-1}\eta \wr \gamma^-,$$

ce qui est bien équivalent à $\eta \wr \gamma^{-1}\eta \wr \gamma^- \wr \xi$.

CHAPITRE 1. DEMI-GÉODÉSIQUES D'UNE SURFACE
HYPERBOLIQUE

Si γ est parabolique, quitte à la conjuguer dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, nous pouvons supposer que $\gamma^- = \infty$ et $\gamma : z \mapsto z + 1$. Alors $\gamma^{-1}\eta = \eta - 1$ et $\gamma\eta = \eta + 1$, donc

$$\gamma^{-1}\eta < \eta < \gamma\eta.$$

Puisque $\gamma^{-1}\eta$ et ξ sont dans la même composante de $\mathbb{H}(\infty) - \{\eta, \infty\}$, on a aussi

$$\xi < \eta < \gamma\eta < \infty.$$

En remplaçant γ par γ^{-1} , on obtient $\xi \wr \eta \wr \gamma^{-1}\eta \wr \infty$, ce qui est équivalent à $\eta \wr \gamma^{-1}\eta \wr \gamma^{-1}\xi$. \square

La proposition suivante permet de passer d'une condition sur la position de γ^- et $\gamma^{-1}\eta$ par rapport à η et ξ à une condition sur la position de γ^+ et $\gamma\xi$ par rapport à ces mêmes deux points.

Proposition 1.1.19. *Soient γ une isométrie hyperbolique ou parabolique, et η et ξ deux points distincts dans $\mathbb{H}(\infty)$ et différents des points fixes de γ .*

On a $\eta \wr \gamma^{-1}\eta \wr \gamma^{-1}\xi$ si et seulement si $\eta \wr \gamma^+\wr \gamma\xi \wr \xi$.

Démonstration. Notons C_1 la composante connexe de $\mathbb{H}(\infty) - \{\eta, \gamma^-\}$ qui ne contient pas ξ et C_2 celle de $\mathbb{H}(\infty) - \{\gamma^+, \xi\}$ qui ne contient pas η . Nous devons montrer que $\gamma^{-1}\eta$ appartient à C_1 si et seulement si $\gamma\xi$ appartient à C_2 .

Supposons tout d'abord que γ est hyperbolique et que le point $\gamma^{-1}\eta$ appartient à C_1 . Quitte à conjuguer γ dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, on peut supposer que $\gamma^- = 0$ et $\gamma^+ = \infty$. Dans ce cas, $\gamma : z \mapsto \lambda z$ pour un certain réel $\lambda > 1$. Supposons par exemple que η est strictement positif (le cas où η est négatif se traite de la même manière). Alors, $C_1 =]0, \eta[$ et ξ appartient à $] - \infty, 0[$ ou à $] \eta, \infty[$. Ainsi, C_2 est un intervalle de la forme $] - \infty, \xi[$ ou de la forme $] \xi, \infty[$. Dans les deux cas, $\gamma\xi = \lambda\xi$ appartient à C_2 . On traite la réciproque de la même manière.

Supposons maintenant que γ est parabolique. On conjugue γ dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ de sorte que $\gamma^+ = \infty$ et $\gamma : z \mapsto z + 1$. Alors, comme $\gamma^{-1}\eta = \eta - 1$, on a $C_1 =]\infty, \eta[$ et ξ appartient à $] \eta, \infty[$. Donc C_2 est de la forme $] \xi, \infty[$ et $\gamma\xi = \xi + 1$ appartient à C_2 . La réciproque se traite de la même manière. \square

La proposition suivante permet de passer d'une condition sur la position des points η et $\gamma\xi$ par rapport à γ^+ et ξ , à une condition sur η et $\gamma^n\xi$ par rapport à ces mêmes deux points, pour un entier naturel n non nul.

Proposition 1.1.20. *Soit γ une isométrie parabolique ou hyperbolique. Soient η et ξ deux points de $\mathbb{H}(\infty)$ différents des points fixes de γ . Alors si $\eta \wr \gamma^+\wr \gamma\xi \wr \xi$, on a $\eta \wr \gamma^+\wr \gamma^l\xi \wr \xi$ pour tout entier l dans \mathbb{N} non nul.*

Démonstration. Fixons un entier naturel l non nul. Si γ est hyperbolique, on la conjugue comme d'habitude dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ pour avoir $\gamma^- = 0$, $\gamma^+ = \infty$ et $\gamma : z \mapsto \lambda z$ pour un réel $\lambda > 1$. Alors $\gamma\xi = \lambda\xi$ et $\gamma^l\xi = \lambda^l\xi$. Ainsi, les points ξ , $\gamma\xi$ et $\gamma^l\xi$ ont le même signe et $|\xi| < |\gamma\xi| < |\gamma^l\xi| < \infty$. Les points $\gamma\xi$ et $\gamma^l\xi$ appartiennent donc à la même composante connexe de $\mathbb{H}(\infty) - \{\gamma^+, \xi\}$. Comme η appartient à l'autre composante connexe par hypothèse, cela implique directement $\eta \wr \gamma^+\wr \gamma^l\xi \wr \xi$.

Si γ est parabolique, on la conjugue pour avoir $\gamma^+ = \infty$ et $\gamma : z \mapsto z + 1$. Alors $\gamma\xi = \xi + 1$ et $\gamma^l\xi = \xi + l$, d'où

$$\eta < \xi < \gamma\xi < \gamma^l\xi < \infty.$$

1.2. GROUPES FUCHSIENS, POINTS À L'INFINI, DOMAINES DE DIRICHLET

Ainsi, $\gamma\xi$ et $\gamma^l\xi$ sont dans la même composante connexe de $\mathbb{H}(\infty) - \{\gamma^+, \xi\}$. Puisque η appartient à l'autre composante par hypothèse, cela implique $\eta \wr \gamma^+ \wr \gamma^l \xi \wr \xi$. \square

Nous terminons cette section sur la proposition suivante dont nous nous servirons au chapitre 4.

Proposition 1.1.21. *Soient γ une isométrie hyperbolique et η et ξ deux points distincts de $\mathbb{H}(\infty)$ différents des points fixes de γ .*

Alors les deux points suivant sont vérifiés.

- (i) $\gamma^- \wr \gamma^+ \wr \gamma\xi \wr \xi$.
- (ii) Si $\gamma^- \wr \gamma^+ \wr \eta \wr \xi$, alors $\gamma^- \wr \gamma^+ \wr \gamma\eta \wr \gamma\xi$.

Démonstration. Quitte à conjuguer γ dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, on peut supposer que $\gamma^- = 0$ et $\gamma^+ = \infty$. Alors $\gamma : z \mapsto \lambda z$ pour un certain $\lambda > 1$. Alors $\gamma\xi = \lambda\xi$. Donc les points ξ et $\lambda\xi$ ont même signe et

$$0 < |\xi| < |\lambda\xi| < \infty.$$

Cela implique $\gamma^- \wr \xi \wr \gamma\xi \wr \gamma^+$, ce qui est équivalent à $\gamma^- \wr \gamma^+ \wr \gamma\xi \wr \xi$.

Ensuite, puisque les points ξ et η appartiennent à la même composante connexe de $\mathbb{H}(\infty) - \{0, \infty\}$ par hypothèse, ils ont même signe. Toujours par hypothèse, le point η n'est pas dans la même composante connexe de $\mathbb{H}(\infty) - \{\infty, \xi\}$ que 0. Cela implique

$$0 < |\xi| < |\eta| < \infty. \tag{1.5}$$

Comme $\gamma\xi = \lambda\xi$ et $\gamma\eta = \lambda\eta$, ils ont le même signe que ξ et η et d'après les inégalités (1.5) on a

$$0 < |\gamma\xi| < |\gamma\eta| < \infty.$$

Cela implique $\gamma^- \wr \gamma\xi \wr \gamma\eta \wr \gamma^+$, ou encore $\gamma^- \wr \gamma^+ \wr \gamma\eta \wr \gamma\xi$. \square

1.2 Groupes fuchsien, points à l'infini, domaines de Dirichlet

Soit Γ un sous-groupe de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. Le sous-groupe Γ agit proprement discontinument sur \mathbb{H} si et seulement si il est discret dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ (voir [Kat92], Théorème 2.2.6). Dans ce cas, on dit que Γ est un *groupe fuchsien*. Nous supposons toujours que Γ n'a pas d'élément elliptique. Le quotient $S := \Gamma \backslash \mathbb{H}$ est alors une surface riemannienne. En notant π la projection canonique de \mathbb{H} sur S , on équipe S de la distance définie par

$$d_S(\pi(x), \pi(y)) = \inf_{\gamma \in \Gamma} d(x, \gamma(y)).$$

Dans la suite, la distance d_S sera seulement notée d .

Remarquons aussi ici que le fibré unitaire tangent T^1S est identifié au quotient $\Gamma \backslash \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) = \Gamma \backslash T^1\mathbb{H}$. Nous n'aurons pas besoin de distance sur $T^1\mathbb{H}$ et T^1S avant le chapitre 4, et nous l'introduirons donc à ce moment-là.

1.2.1 Les points à l'infini

Fixons pour la suite un groupe fuchsien Γ sans élément elliptique. Nous allons associer à Γ un ensemble de points de $\mathbb{H}(\infty)$ important pour l'étude de sa dynamique.

Définition 1.2.1. *Soient Γ un groupe fuchsien et z dans \mathbb{H} . L'ensemble suivant ne dépend pas de z et s'appelle l'ensemble limite de Γ .*

$$L(\Gamma) = \overline{\Gamma z} \cap \mathbb{H}(\infty).$$

Remarquons que tous les points fixés par des isométries hyperboliques ou paraboliques sont dans $L(\Gamma)$. On appellera *groupe non-élémentaire* un groupe Γ tel que le cardinal de $L(\Gamma)$ est strictement supérieur à 2. On peut montrer que dès que cette condition est vérifiée, $L(\Gamma)$ est un ensemble de cardinal infini (voir [Kat92], section 3.3.4).

Proposition 1.2.2 (Proposition I.3.6, [Dal10]). *Si Γ n'est pas élémentaire, alors $L(\Gamma)$ est minimal pour Γ : c'est le plus petit ensemble Γ -invariant fermé non-vide de $\mathbb{H}(\infty)$. En particulier, toutes les Γ -orbites de points de $L(\Gamma)$ sont denses dans $L(\Gamma)$.*

L'ensemble $L(\Gamma)$ va nous permettre d'établir des correspondances entre les différents points de vue que l'on adoptera dans nos théorèmes et dans nos démonstrations : énoncé sur une surface hyperbolique et traduction en terme d'action de Γ sur \mathbb{H} et $\mathbb{H}(\infty)$. Pour cela, nous devons distinguer plusieurs types de points dans $L(\Gamma)$.

Les points coniques

Définition 1.2.3. *Un point ξ dans $\mathbb{H}(\infty)$ est dit conique relativement à Γ s'il existe une suite $(\gamma_n)_{\mathbb{N}}$ dans Γ et z dans \mathbb{H} tels que $\lim_n \gamma_n z = \xi$ et*

$$\sup_n d(\gamma_n z, [z, \xi]) < +\infty.$$

On note $L_c(\Gamma)$ l'ensemble des points coniques.

Remarquons ici que si le point ξ est conique pour Γ , alors le point z dans la définition 1.2.3 peut être remplacé par n'importe quel autre point z' de \mathbb{H} , et la demi-géodésique $[z, \xi]$ par n'importe quelle demi-géodésique dirigée vers ξ .

Notons aussi que la suite de points $(\gamma_n z)_{\mathbb{N}}$ rencontre tous les voisinages de ξ dans $\overline{\mathbb{H}} = \mathbb{H} \cup \mathbb{H}(\infty)$, donc ξ appartient à $L(\Gamma)$. Ainsi, on a bien $L_c(\Gamma) \subset L(\Gamma)$.

Les points fixes des isométries hyperboliques sont dans $L_c(\Gamma)$ puisque les suites $(\gamma^n(z))_{\mathbb{N}}$ et $(\gamma^{-n}(z))_{\mathbb{N}}$ convergent vers γ^+ et γ^- respectivement le long de l'hypercycle $Hy(\gamma; z)$. Celui-ci est à distance constante l'axe (γ^-, γ^+) et donc à distance bornée de toute demi-géodésique de direction γ^- ou γ^+ .

Les points horocycliques

Définition 1.2.4. *Un point ξ dans $\mathbb{H}(\infty)$ est dit horocyclique relativement à Γ si pour tout z dans \mathbb{H} , on a $\sup_{\gamma \in \Gamma} B_\xi(z, \gamma z) = +\infty$. On note $L_h(\Gamma)$ cet ensemble.*

1.2. GROUPES FUCHSIENS, POINTS À L'INFINI, DOMAINES DE DIRICHLET

Ainsi, un point ξ est horocyclique relativement à Γ si pour tout z dans \mathbb{H} , l'orbite $\Gamma(z)$ rencontre tous les horodisques centrés en ξ . Puisque l'on peut inclure dans tout voisinage de ξ dans $\overline{\mathbb{H}}$ un horodisque centré en ξ , cela veut dire que l'orbite $\Gamma(z)$ rencontre tous les voisinages de ξ . Donc on a bien $L_h(\Gamma) \subset L(\Gamma)$.

L'inclusion $L_c(\Gamma) \subset L_h(\Gamma)$ est directe.

Les points paraboliques

Définition 1.2.5. *Un point ξ dans $\mathbb{H}(\infty)$ est dit parabolique relativement à Γ s'il existe une isométrie parabolique γ de Γ telle que $\gamma^+ = \xi$. On note $L_p(\Gamma)$ cet ensemble.*

Si ξ est fixé par une isométrie parabolique γ , alors pour tout point z dans \mathbb{H} , la suite $(\gamma^n z)_\mathbb{N}$ converge vers $\gamma^+ = \xi$ le long du demi-horocycle $\text{Ho}(\gamma; z, \gamma^+)$. Celui-ci rencontre tous les voisinages de γ^+ dans $\overline{\mathbb{H}}$, donc γ^+ appartient à $L(\Gamma)$. Ainsi, on a $L_p(\Gamma) \subset L(\Gamma)$.

D'après le théorème suivant, si ξ est parabolique, il existe un horodisque centré en ξ ne rencontrant aucune de ses images non triviales par Γ .

Théorème 1.2.6. *[Théorème 3.17, section I, [Dal10]] Soit ξ dans $L_p(\Gamma)$. Il existe z_0 tel que*

$$\gamma \text{Ho}^+(\xi; z_0) \cap \text{Ho}^+(\xi; z_0) = \emptyset$$

pour tout γ dans Γ qui ne fixe pas ξ .

On remarque alors que le point z_0 vérifie $\sup_{\gamma \in \Gamma} B_\xi(z_0, \gamma z_0) = 0$, ce qui implique en particulier que le point ξ n'est pas horocyclique.

Corollaire 1.2.7. $L_p(\Gamma) \cap L_h(\Gamma) = \emptyset$.

1.2.2 Domaine de Dirichlet

Nous utiliserons au chapitre 3 un domaine fondamental particulier : celui de Dirichlet. D'une part, celui-ci nous permettra de construire aisément un groupe Γ libre et discret (proposition 1.2.12). D'autre part, il nous fournira un critère très utile pour montrer qu'un point ξ de $L(\Gamma)$ n'est pas horocyclique (proposition 1.2.11).

Soit z_0 un point quelconque fixé de \mathbb{H} . Pour toute isométrie γ de $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ différente de l'identité et non elliptique, on note $\mathbb{H}_{z_0}(\gamma)$ le demi-plan défini par :

$$\mathbb{H}_{z_0}(\gamma) = \{z \in \mathbb{H} \mid d(z, z_0) \leq d(z, \gamma z_0)\}.$$

Le bord $\partial\mathbb{H}_{z_0}(\gamma)$ de $\mathbb{H}_{z_0}(\gamma)$ dans \mathbb{H} correspond à la médiatrice du segment hyperbolique $[z_0, \gamma z_0]$. La proposition suivante est directe.

Proposition 1.2.8. *Soit γ une isométrie non elliptique et z_0 un point de \mathbb{H} . On a*

$$\gamma(\partial\mathbb{H}_{z_0}(\gamma^{-1})) = \partial\mathbb{H}_{z_0}(\gamma) \text{ et } \gamma(\mathbb{H}_{z_0}(\gamma^{-1})) = \mathbb{H}_{z_0}^c(\gamma) \cup \partial\mathbb{H}_{z_0}(\gamma),$$

où $\mathbb{H}_{z_0}^c$ est le complémentaire de \mathbb{H}_{z_0} dans \mathbb{H} .

Définition 1.2.9 (Domaine de Dirichlet). *Soit Γ un groupe fuchsien sans élément elliptique. Le domaine de Dirichlet $D_{z_0}(\Gamma)$ centré en z_0 de Γ est défini par*

$$D_{z_0}(\Gamma) := \bigcap_{\substack{\gamma \in \Gamma \\ \gamma \neq id}} \mathbb{H}_{z_0}(\gamma).$$

Le domaine de Dirichlet $D_{z_0}(\Gamma)$ est un domaine fondamental convexe pour l'action de Γ (voir [Kat92], section 3.3.5). Par la suite, nous travaillerons uniquement avec des domaines de Dirichlet centrés en i . Nous énonçons donc les propositions suivantes avec $z_0 = i$, mais elles sont bien entendu vraies pour z_0 quelconque.

Le domaine de Dirichlet va nous donner des critères pour étudier les points limites du groupe Γ . Le premier d'entre eux est que tous les points qui n'appartiennent pas à l'ensemble limite de Γ ont une image par un élément de Γ dans le bord à l'infini de $D_i(\Gamma)$.

Proposition 1.2.10 (Proposition I.4.10, [Dal10]). *Soit Γ un groupe fuchsien sans élément elliptique. Si ξ n'appartient pas à $L(\Gamma)$, alors il existe γ dans Γ tel que $\gamma\xi$ appartient au bord à l'infini $D_i(\Gamma)(\infty)$ de $D_i(\Gamma)$.*

Par la suite, nous aurons besoin de détecter des points limites non horocycliques de Γ . La proposition suivante offre un moyen de le faire grâce au domaine de Dirichlet.

Proposition 1.2.11. *Soit Γ un groupe fuchsien sans élément elliptique. Un point ξ de $\mathbb{H}(\infty)$ appartient à $D_i(\Gamma)(\infty)$ si et seulement si*

$$\sup_{\gamma \in \Gamma} B_\xi(i, \gamma i) = 0.$$

En particulier, $D_i(\Gamma)(\infty) \cap L_h(\Gamma) = \emptyset$.

Démonstration. Quitte à conjuguer Γ dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, on peut supposer $\xi = \infty$. Par définition du domaine de Dirichlet, le point ∞ appartient à $D_i(\Gamma)(\infty)$ si et seulement si pour toute isométrie différente de l'identité de Γ , on a $\infty \in \mathbb{H}_i(\gamma)(\infty)$. Prenons une telle isométrie γ et notons p le point γi . Le bord $\partial\mathbb{H}_i(\gamma)$ correspond ainsi à la médiatrice du segment $[i, p]$ et d'après la proposition 1.1.7, le point ∞ appartient à $\mathbb{H}_i(\gamma)(\infty)$ si et seulement si $\mathrm{Im}(p) \leq 1$. Cette dernière condition est équivalente à $B_\infty(i, \gamma i) \leq 0$. □

Nous terminons cette section sur la proposition suivante. Celle-ci fournit un critère pour déterminer si un groupe est fuchsien. Elle donne de plus son domaine de Dirichlet en fonction de ses générateurs et de leurs inverses seulement.

Proposition 1.2.12. *Considérons une suite $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'isométries non elliptiques éventuellement toutes différentes dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. Supposons que si k et l sont deux indices distincts, alors*

$$(\mathbb{H}_i^c(\gamma_k^{-1}) \cup \mathbb{H}_i^c(\gamma_k)) \cap (\mathbb{H}_i^c(\gamma_l^{-1}) \cup \mathbb{H}_i^c(\gamma_l)) = \emptyset.$$

Alors le groupe $\Gamma := \langle \gamma_n, n \in \mathbb{N} \rangle$ est un groupe fuchsien et l'ensemble

$$D := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{H}_i(\gamma_n) \cap \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{H}_i(\gamma_n^{-1})$$

est le domaine de Dirichlet $D_i(\Gamma)$ de Γ centré en i .

1.2. GROUPES FUCHSIENS, POINTS À L'INFINI, DOMAINES DE DIRICHLET

Démonstration. Notons \mathring{D} l'intérieur de D . Nous allons commencer par montrer

$$\forall \gamma \in \Gamma - \{id\}, \gamma \mathring{D} \cap \mathring{D} = \emptyset. \quad (1.6)$$

Soit γ dans Γ différent de l'identité quelconque. Prenons z dans \mathring{D} et écrivons $\gamma = \gamma_{l_1}^{k_1} \dots \gamma_{l_m}^{k_m}$ comme un mot réduit en les lettres γ_n . C'est-à-dire que pour tout indice $j < m$, on a $l_j \neq l_{j+1}$. Ici, pour tout n le nombre k_n appartient à \mathbb{Z} et nous notons $\epsilon_n = +1$ ou -1 son signe.

Avec un argument de ping-pong classique, nous montrons par récurrence que γz appartient à $\mathbb{H}_i^c(\gamma_{l_1}^{\epsilon_1})$. Puisque z appartient à \mathring{D} , en particulier, il appartient à l'intérieur de $\mathbb{H}_i(\gamma_{l_m}^{-\epsilon_m})$. Ainsi, d'après la proposition 1.2.8, $\gamma_{l_m}^{k_m} z$ appartient à $\mathbb{H}_i^c(\gamma_{l_m}^{\epsilon_m})$. Fixons maintenant un entier n dans l'intervalle $[2, m]$ et supposons que $z_n := \gamma_{l_n}^{k_n} \dots \gamma_{l_m}^{k_m} z$ appartienne à $\mathbb{H}_i^c(\gamma_{l_n}^{\epsilon_n})$. D'après nos hypothèses, les ensembles $\mathbb{H}_i^c(\gamma_{l_n}^{\epsilon_n})$ et $\mathbb{H}_i^c(\gamma_{l_{n-1}}^{-\epsilon_{n-1}})$ ne se rencontrent pas. Ainsi, z_n appartient à $\mathbb{H}_i(\gamma_{l_{n-1}}^{-\epsilon_{n-1}})$. D'après la proposition 1.2.8, cela implique que $\gamma_{l_{n-1}}^{-\epsilon_{n-1}} z_n$ appartient à $\mathbb{H}_i^c(\gamma_{l_{n-1}}^{\epsilon_{n-1}})$. Par récurrence, nous obtenons bien que γz appartient à $\mathbb{H}_i^c(\gamma_{l_1}^{\epsilon_1})$. Puisque $\mathbb{H}_i^c(\gamma_{l_1}^{\epsilon_1}) \cap \mathring{D} = \emptyset$, le point γz n'appartient pas à \mathring{D} . Nous en déduisons donc (1.6).

Nous montrons maintenant qu'il existe $V(i)$ un voisinage ouvert de i d'adhérence compacte ne rencontrant aucun des demi-plans $\mathbb{H}_i^c(\gamma_n)$ et $\mathbb{H}_i^c(\gamma_n^{-1})$. Supposons par l'absurde qu'un tel $V(i)$ n'existe pas. Nous pouvons alors extraire une suite infinie de médiatrices $(\partial \mathbb{H}_i(\gamma_n))_{\mathbb{N}}$ telle que la distance de $\partial \mathbb{H}_i(\gamma_n)$ à i converge vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Cela implique en particulier l'existence de demi-plans $\mathbb{H}_i(\gamma_k)$ et $\mathbb{H}_i(\gamma_l)$, avec k différent de l , tels que l'intersection $\mathbb{H}_i^c(\gamma_k) \cap \mathbb{H}_i^c(\gamma_l)$ n'est pas vide. Cela contredit notre hypothèse et donc $V(i)$ existe.

On observe alors que $V(i)$ est inclus dans \mathring{D} , et d'après (1.6), pour tout γ de Γ différent de l'identité, γi n'appartient pas à $V(i)$. Cela implique que l'action de Γ sur \mathbb{H} est proprement discontinue, et donc que Γ est un groupe fuchsien.

Remarquons maintenant que d'après la définition de D , on a directement $D_i(\Gamma) \subset D$. D'autre part, comme $D_i(\Gamma)$ est un domaine fondamental de Γ , on sait que $\Gamma D_i(\Gamma) = \mathbb{H}$ et $\gamma \mathring{D}_i(\Gamma) \cap \mathring{D}_i(\Gamma) = \emptyset$ pour toute isométrie γ différente de l'identité. Ainsi, on a nécessairement $D \subset D_i(\Gamma)$, ce qui conclut. \square

Définition 1.2.13 (Groupe de Schottky). *Un groupe engendré par une suite d'éléments $(\gamma_n)_{\mathbb{N}}$ satisfaisant les hypothèses de la proposition 1.2.12 est appelé un groupe de Schottky. Si la suite $(\gamma_n)_{\mathbb{N}}$ est infinie, on dira que c'est un groupe de Schottky infini.*

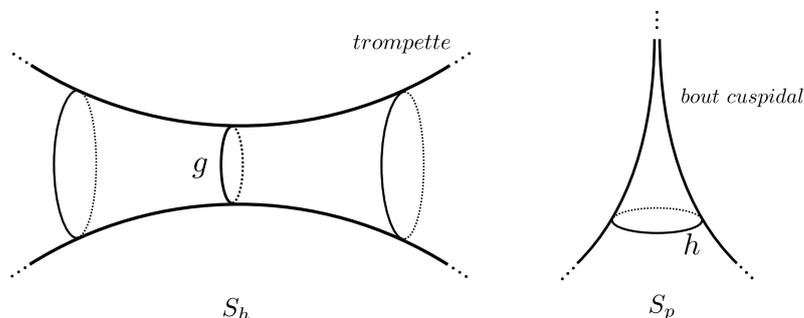
Dans la section 1.4.1, nous nous servons de la proposition 1.2.11 et de la proposition 1.2.12 pour construire des exemples de groupes de Schottky infinis.

1.2.3 Surfaces élémentaires

Soit γ_h une isométrie hyperbolique. Posons Γ_h le groupe engendré par γ_h et $S_h := \Gamma_h \backslash \mathbb{H}$ la surface quotient. Cette surface est représentée sur la figure 1.4.

Notons g la projection de l'axe de γ_h sur S_h . Si l'on retire g à S_h , il reste deux composantes connexes isométriques. Nous appelons *trompette* de la surface S_h l'une ou l'autre de ces composantes.

FIGURE 1.4 – Les deux surfaces élémentaires



Définition 1.2.14. Soient S une surface hyperbolique et A un sous-ensemble de S . On dit que A est une trompette de S s'il existe une isométrie hyperbolique γ telle que A soit isométrique à une trompette de $\langle \gamma \rangle \backslash \mathbb{H}$.

Soit γ_p une isométrie parabolique. Posons Γ_p le groupe engendré par γ_p et $S_p := \Gamma_p \backslash \mathbb{H}$ la surface quotient. Cette surface est représentée sur la figure 1.4.

Considérons un horocycle $\text{Ho}(\gamma_p; z)$ passant par un point z de \mathbb{H} et notons h sa projection sur S_p . Si l'on retire h de S_p , l'une des deux composantes connexe restante est la projection de $\Gamma_p \backslash \text{Ho}^+(\gamma_p; z)$ sur S_p . Nous appelons cette composante un *bout cuspidal* de S_p .

Définition 1.2.15. Soient S une surface hyperbolique et C un sous-ensemble de S . On dit que C est un bout cuspidal de S s'il existe une isométrie parabolique γ telle que C soit isométrique à un bout cuspidal de $\langle \gamma \rangle \backslash \mathbb{H}$.

Nous établissons maintenant qu'à tout isométrie parabolique γ d'un groupe fuchsien Γ est associé un bout cuspidal dans la surface $\Gamma \backslash \mathbb{H}$. Rappelons avant cela que le stabilisateur Γ_ξ d'un point ξ de $L(\Gamma)$ est toujours cyclique (voir [Dal10]).

Proposition 1.2.16. Soit Γ un groupe fuchsien contenant une isométrie parabolique γ_0 . Alors la surface $S := \Gamma \backslash \mathbb{H}$ contient un bout cuspidal associé à γ_0 .

Démonstration. Soit γ_p telle que le sous-groupe cyclique Γ_0 fixant γ_0^+ soit engendré par γ_p . D'après le théorème 1.2.6, il existe z_0 dans \mathbb{H} tel que pour tout isométrie γ ne fixant pas γ_p^+ , on a

$$\gamma \text{Ho}^+(\gamma_p; z_0) \cap \text{Ho}^+(\gamma_p; z_0) = \emptyset. \quad (1.7)$$

De plus, la projection canonique $q : \Gamma_0 \backslash \text{Ho}^+(\gamma_p; z_0) \rightarrow \Gamma \backslash \mathbb{H}$ est injective. En effet, si une isométrie γ de Γ envoie une classe $\Gamma_0 y$ sur une classe $\Gamma_0 y'$, où y et y' appartiennent à $\text{Ho}^+(\gamma_p; z_0)$, alors $\gamma \text{Ho}^+(\gamma_p; z_0)$ rencontre $\text{Ho}^+(\gamma_p; z_0)$. D'après (1.7), cela implique que γ appartient à Γ_0 , et donc $\Gamma_0 y = \Gamma_0 y'$.

Alors, le sous-ensemble $\Gamma_0 \backslash \text{Ho}^+(\gamma_p; z_0)$ de S est bien isométrique à un bout cuspidal de la surface $\Gamma_0 \backslash \mathbb{H}$. \square

1.3 Surfaces géométriquement finies et surfaces géométriquement infinies

Dans cette section, nous allons définir les surfaces géométriquement infinies sur lesquelles aura lieu notre étude topologique.

Avant cela, définissons la notion de *côté* et de *sommet* d'un domaine de Dirichlet. Considérons une isométrie non triviale γ d'un groupe fuchsien Γ sans élément elliptique. Supposons que l'intersection entre $D_i(\Gamma)$ et $\partial\mathbb{H}_i(\gamma)$ soit non vide et non réduite à un point. On dit que cette intersection est un côté du domaine $D_i(\Gamma)$. Elle est soit un segment géodésique, soit une demi-géodésique, soit une géodésique entière. Les sommets de $D_i(\Gamma)$ sont par définition toutes les extrémités de ses côtés (et appartiennent donc potentiellement à $\mathbb{H}(\infty)$).

Définition 1.3.1 (Surfaces géométriquement finies et surfaces géométriquement infinies). *Soit Γ un groupe fuchsien sans élément elliptique. La surface $S := \Gamma \backslash \mathbb{H}$ est dite géométriquement finie (resp. géométriquement infinie) si le domaine de Dirichlet $D_i(\Gamma)$ possède un nombre fini (resp. infini) de côtés. On dit aussi que le groupe Γ est géométriquement fini (resp. géométriquement infini).*

La finitude géométrique d'un groupe fuchsien se caractérise grâce à son ensemble limite.

Théorème 1.3.2 (Théorème 4.13, section I de [Dal10]). *Soit Γ un groupe fuchsien sans élément elliptique et $S := \Gamma \backslash \mathbb{H}$ la surface quotient. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

- (i) S est géométriquement finie.
- (ii) $L(\Gamma) = L_c(\Gamma) \cup L_p(\Gamma)$.
- (iii) $L(\Gamma) = L_h(\Gamma) \cup L_p(\Gamma)$.

On peut déduire directement de ce théorème le corollaire suivant.

Corollaire 1.3.3. *Le groupe Γ est géométriquement infini si et seulement si il existe ξ dans $L(\Gamma)$ qui n'est ni horocyclique, ni parabolique.*

Ce sont précisément ces nouveaux types de points limites, qui n'apparaissent que sur les groupes fuchiens géométriquement infinis, qui vont nous intéresser par la suite. Nous traduisons maintenant les résultats de cette section en termes de demi-géodésiques quasi-minimisantes.

1.3.1 Caractérisation de la finitude géométrique en termes de demi-géodésiques

Nous faisons ici le lien entre les différents types de points limites de Γ et le comportement des demi-géodésiques sur la surface quotient $S := \Gamma \backslash \mathbb{H}$. Le corollaire 1.3.3 fera alors apparaître un type de demi-géodésique propre aux surfaces géométriquement infinies que nous étudierons au chapitre 3.

Commençons par les points limites coniques.

Proposition 1.3.4. *Soient ξ un point de $L(\Gamma)$ et $\tilde{u}(\mathbb{R}^+)$ une demi-géodésique de \mathbb{H} telle que $\tilde{u}(\infty) = \xi$. Le point ξ est conique si et seulement si $\tilde{u}(\mathbb{R}^+)$ se projette sur S en une demi-géodésique $u(\mathbb{R}^+)$ qui repasse une infinité de fois dans un ensemble compact.*

CHAPITRE 1. DEMI-GÉODÉSIQUES D'UNE SURFACE
HYPERBOLIQUE

Démonstration. Par définition de $L_c(\Gamma)$, on sait qu'il existe z dans \mathbb{H} et $(\gamma_n)_{\mathbb{N}}$ dans Γ tels que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n z = \xi$ et $\sup_n d(\gamma_n z, \tilde{u}(\mathbb{R}^+)) \leq C$ pour une certaine constante $C > 0$. C'est-à-dire qu'il existe $t_n \rightarrow +\infty$ telle que $d(\gamma_n z, \tilde{u}(t_n)) \leq C$ pour tout n . Ainsi, la demi-géodésique $u(\mathbb{R}^+)$ repasse une infinité de fois dans l'adhérence de la boule centrée en la projection de z sur S et de rayon C .

Réciproquement, si $u(\mathbb{R}^+)$ repasse une infinité de fois dans un compact K de S , alors il existe une suite d'éléments γ_n de Γ tels que $\tilde{u}(\mathbb{R}^+)$ rencontre $\gamma_n \tilde{K}$ pour tout n . En prenant un point z appartenant à \tilde{K} , on a bien $\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n z = \xi$ et $\sup_n d(\gamma_n z, [z, \xi]) < +\infty$. \square

La propriété correspondante pour les points horocycliques fait intervenir la notion de *demi-géodésique quasi-minimisante*, au cœur du chapitre 3.

Définition 1.3.5 (Demi-géodésique quasi-minimisante). *Une demi-géodésique $u(\mathbb{R}^+)$ d'une surface hyperbolique S est dite quasi-minimisante s'il existe une constante réelle $C \geq 0$ telle que pour tout temps $t > 0$ on ait :*

$$d(u(0), u(t)) \geq t - C.$$

On dit de plus que $u(\mathbb{R}^+)$ est *minimisante* si pour tout temps $t > 0$ on a $d(u(0), u(t)) = t$.

Ainsi, une demi-géodésique $u(\mathbb{R}^+)$ est quasi-minimisante si la distance entre $u(0)$ et $u(t)$ est réalisée à une constante près par le chemin $u([0, t])$ (de longueur t), pour tous les temps $t > 0$.

Remarquons ici qu'une définition équivalente serait : $u(\mathbb{R}^+)$ n'est pas quasi-minimisante si pour toute constante $C > 0$ il existe un temps T_C tel que pour tout $t \geq T_C$, on a $d(u(0), u(t)) < t - C$.

Si un point ξ est conique relativement à Γ , alors d'après la proposition 1.3.4, toute demi-géodésique $\tilde{u}(\mathbb{R}^+)$ d'extrémité ξ se projette en une demi-géodésique qui n'est pas quasi-minimisante sur S .

Proposition 1.3.6. *Un point ξ de $L(\Gamma)$ est horocyclique si et seulement si toute demi-géodésique $\tilde{u}(\mathbb{R}^+)$ d'extrémité ξ se projette sur S en une demi-géodésique $u(\mathbb{R}^+)$ qui n'est pas quasi-minimisante.*

Démonstration. Notons z le point base de \tilde{u} . Par définition d'un point horocyclique, on sait que $\sup_{\gamma \in \Gamma} B_\xi(z, \gamma z) = +\infty$. D'après la proposition 1.1.8, on a

$$\sup_{\gamma \in \Gamma} \lim_{t \rightarrow +\infty} d(z, \tilde{u}(t)) - d(\gamma z, \tilde{u}(t)) = +\infty.$$

C'est-à-dire que pour toute constante $C \geq 0$, il existe γ dans Γ et un temps T_C tel que pour tout temps $t \geq T_C$ on a $d(z, \tilde{u}(t)) - d(\gamma z, \tilde{u}(t)) > C$.

Or, $d(z, \tilde{u}(t)) = t$ et $d(u(0), u(t)) \leq d(\gamma z, \tilde{u}(t))$ pour tout γ dans Γ . D'où

$$\forall C > 0, \exists T_C, \forall t \geq T_C, t - d(u(0), u(t)) > C.$$

Cela est bien équivalent au fait que la demi-géodésique $u(\mathbb{R}^+)$ n'est pas quasi-minimisante. \square

Si u se relève en un élément \tilde{u} dans $T^1\mathbb{H}$ pointant vers un point fixe d'une isométrie parabolique, comme $L_p(\Gamma) \cap L_h(\Gamma) = \emptyset$ d'après la proposition 1.2.7, la demi-géodésique $u(\mathbb{R}^+)$ est quasi-minimisante. Notons aussi que si $\tilde{u}(\infty) \notin L(\Gamma)$, alors en particulier $\tilde{u}(\infty) \notin L_h(\Gamma)$ et donc $u(\mathbb{R}^+)$ est quasi-minimisante. Ce sont d'après le théorème 1.3.2 les seules demi-géodésiques quasi-minimisantes existant sur une surface géométriquement finie.

Ce même théorème peut être reformulé de la manière suivante.

Proposition 1.3.7 (La finitude géométrique par les demi-géodésiques). *Soit Γ un groupe fuchsien sans élément elliptique et $S := \Gamma \backslash \mathbb{H}$ la surface quotient. Les deux propositions suivantes sont équivalentes.*

- (i) *La surface S est géométriquement infinie.*
- (ii) *Il existe un élément u dans l'ensemble non errant Ω_h de $h_{\mathbb{R}}$ sur T^1S non $h_{\mathbb{R}}$ -périodique, et tel que la demi-géodésique $u(\mathbb{R}^+)$ de S est quasi-minimisante.*

La demi-géodésique $u(\mathbb{R}^+)$ de la figure 3 en introduction est une représentation d'une telle demi-géodésique quasi-minimisante. Nous allons leur donner un nom.

Définition 1.3.8 (Demi-géodésique quasi-minimisante infinie). *Une demi-géodésique quasi-minimisante d'une surface hyperbolique $S = \Gamma \backslash \mathbb{H}$ sera dite infinie si son vecteur de départ est dans l'ensemble non errant du flot horocyclique et n'est pas $h_{\mathbb{R}}$ -périodique. De manière équivalente, l'extrémité $\tilde{u}(\infty)$ d'un relevé de $u(\mathbb{R}^+)$ dans \mathbb{H} appartient à $L(\Gamma) - L_h(\Gamma) - L_p(\Gamma)$.*

Prenons un groupe fuchsien Γ sans élément elliptique. D'après la proposition 1.2.11, si ξ appartient au bord à l'infini $D_i(\Gamma)(\infty)$ du domaine de Dirichlet, alors $\xi \notin L_h(\Gamma)$. Ainsi, d'après la proposition 1.3.6, toute demi-géodésique $\tilde{u}(\mathbb{R}^+)$ de \mathbb{H} ayant son extrémité $\tilde{u}(\infty)$ dans $D_i(\Gamma)(\infty)$ se projette sur S en une demi-géodésique quasi-minimisante. En étudiant le bord à l'infini du domaine de Dirichlet, nous pouvons donc détecter des demi-géodésiques quasi-minimisantes $u(\mathbb{R}^+)$ de S . Il sera de plus facile par la suite de déterminer quels sont les points de $D_i(\Gamma)(\infty)$ qui ne sont pas dans $L(\Gamma)$ ou qui sont dans $L_p(\Gamma)$, et quels sont ceux qui sont dans $L(\Gamma) - L_p(\Gamma)$. C'est-à-dire que le domaine de Dirichlet nous permettra de trouver des demi-géodésiques quasi-minimisantes infinies de S , ce qui sera crucial dans la construction de nos exemples.

Corollaire 1.3.9. *Si un point ξ appartient au bord à l'infini du domaine de Dirichlet centré en i d'un groupe Γ , alors toute demi-géodésique $\tilde{u}(\mathbb{R}^+)$ telle que $\tilde{u}(\infty) = \xi$ se projette en une demi-géodésique $u(\mathbb{R}^+)$ quasi-minimisante sur la surface $S = \Gamma \backslash \mathbb{H}$.*

1.4 Finesse asymptotique et exemples sur des surfaces

Soit $S := \Gamma \backslash \mathbb{H}$ une surface hyperbolique. Dans toute la suite, lorsque l'on considérera un point x de S , ou un élément u de T^1S , alors les notations avec un tilde, \tilde{x} ou \tilde{u} , désigneront toujours leurs relevés dans \mathbb{H} ou $T^1\mathbb{H}$.

CHAPITRE 1. DEMI-GÉODÉSIQUES D'UNE SURFACE
HYPERBOLIQUE

Le rayon d'injectivité donne la valeur de la taille de la surface en un point donné. Il sera mis en lien avec la notion de demi-géodésique quasi-minimisante dans le théorème A.

Introduisons les deux définitions suivantes.

Définition 1.4.1 (Rayon d'injectivité et Finesse asymptotique). *Soit $S := \Gamma \backslash \mathbb{H}$ une surface hyperbolique. Soient x dans S et \tilde{x} un relevé quelconque de x dans \mathbb{H} . Le rayon d'injectivité de S en x est défini par*

$$\text{Inj}(x) = \inf_{\substack{\gamma \in \Gamma \\ \gamma \neq Id}} d(\tilde{x}, \gamma \tilde{x}).$$

Soit $u(\mathbb{R}^+)$ une demi-géodésique de S . On appelle finesse asymptotique de $u(\mathbb{R}^+)$ la limite inférieure du rayon d'injectivité le long de celle-ci, et on la note $\underline{\text{Inj}}(u(\mathbb{R}^+))$:

$$\underline{\text{Inj}}(u(\mathbb{R}^+)) := \liminf_{t \rightarrow +\infty} \text{Inj}(u(t)).$$

Nous pouvons d'ores et déjà discuter de la finesse asymptotique de trois types de demi-géodésiques

Proposition 1.4.2. *Soient Γ un groupe fuchsien et $S := \Gamma \backslash \mathbb{H}$ la surface quotient. Si $u(\mathbb{R}^+)$ est une demi-géodésique telle que l'extrémité $\tilde{u}(\infty)$ est un point conique de Γ , alors $\underline{\text{Inj}}(u(\mathbb{R}^+)) < +\infty$.*

Démonstration. La demi-géodésique $u(\mathbb{R}^+)$ repasse toujours dans un compact de S d'après la proposition 1.3.4. Cela implique directement $\underline{\text{Inj}}(u(\mathbb{R}^+)) < +\infty$. \square

Proposition 1.4.3. *Soient Γ un groupe fuchsien et $S := \Gamma \backslash \mathbb{H}$ la surface quotient. Si $u(\mathbb{R}^+)$ est une demi-géodésique telle que l'extrémité $\tilde{u}(\infty)$ est un point parabolique de Γ , alors $\underline{\text{Inj}}(u(\mathbb{R}^+)) = 0$.*

Démonstration. Notons γ une isométrie parabolique fixant $\tilde{u}(\infty)$. Il suffit de constater que lorsque t tend vers $+\infty$, la distance $d(\tilde{u}(t), \gamma \tilde{u}(t))$ tend vers 0. \square

Proposition 1.4.4. *Soient Γ un groupe fuchsien et $S := \Gamma \backslash \mathbb{H}$ la surface quotient. Si $u(\mathbb{R}^+)$ est une demi-géodésique telle que l'extrémité $\tilde{u}(\infty)$ dans $\mathbb{H}(\infty)$ n'appartient pas à $L(\Gamma)$, alors $\underline{\text{Inj}}(u(\mathbb{R}^+)) = +\infty$.*

Démonstration. Supposons, par l'absurde, que $\underline{\text{Inj}}(u(\mathbb{R}^+)) = \alpha < +\infty$. Quitte à conjuguer le groupe Γ , on peut supposer que $\tilde{u}(\infty) = \infty$ et $\tilde{u}(0) = i$. Il existe donc une suite $(\gamma_n)_{\mathbb{N}}$ d'éléments tous différents de l'identité dans Γ et une suite de temps $(t_n)_{\mathbb{N}}$ qui tend vers $+\infty$ telles que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d(\tilde{u}(t_n), \gamma_n \tilde{u}(t_n)) = \alpha.$$

Observons maintenant que les éléments γ_n peuvent être choisis tous distincts. En effet, procédons par l'absurde et supposons qu'il existe une isométrie fixée γ satisfaisant $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(\tilde{u}(t_n), \gamma \tilde{u}(t_n)) = \alpha$. Alors, si γ est hyperbolique, d'après la proposition 1.1.3, l'axe de γ est à distance bornée de $(0, \infty)$. En particulier, $\infty \in \{\gamma^-, \gamma^+\}$. Cela implique que ∞ appartient à $L(\Gamma)$, ce qui est une contradiction. On raisonne de la même manière si l'on suppose que γ est parabolique en utilisant la proposition 1.1.12.

En observant que $B_\infty(\gamma_n i, \gamma_n \tilde{u}(t_n)) \leq d(\gamma_n i, \gamma_n \tilde{u}(t_n)) = d(i, \tilde{u}(t_n)) = t_n$, et $B_\infty(\tilde{u}(t_n), i) = -t_n$, on peut faire le calcul suivant.

$$\begin{aligned} B_\infty(\gamma_n i, i) &= B_\infty(\gamma_n i, \gamma_n \tilde{u}(t_n)) + B_\infty(\gamma_n \tilde{u}(t_n), \tilde{u}(t_n)) + B_\infty(\tilde{u}(t_n), i) \\ &\leq t_n + B_\infty(\gamma_n \tilde{u}(t_n), \tilde{u}(t_n)) - t_n \\ &\leq d(\tilde{u}(t_n), \gamma_n \tilde{u}(t_n)). \end{aligned}$$

Cette dernière quantité converge vers α . Puisque les éléments γ_n sont tous distincts, cela implique qu'il existe un horodisque centré en ∞ contenant une infinité de points distincts $\gamma_n i$. Puisque Γ est un groupe discret, ces points ne peuvent pas s'accumuler en un point de \mathbb{H} . Donc ils s'accumulent en ∞ , ce qui est impossible puisque ∞ n'appartient pas à $L(\Gamma)$. \square

Nous pouvons déduire de ces trois propositions la finesse asymptotique des demi-géodésiques d'une surface géométriquement finie.

Proposition 1.4.5. *Soient Γ un groupe fuchsien géométriquement fini sans élément elliptique et $u(\mathbb{R}^+)$ une demi-géodésique sur la surface quotient $S := \Gamma \backslash \mathbb{H}$. Si \tilde{u} dans $T^1 \mathbb{H}$ est dirigé vers un point de $L(\Gamma)$, alors $\underline{\text{Inj}}(u(\mathbb{R}^+)) < +\infty$. Sinon, $\underline{\text{Inj}}(u(\mathbb{R}^+)) = +\infty$.*

Démonstration. D'après le théorème 1.3.2, soit le point $\tilde{u}(\infty)$ est parabolique, soit il est conique, soit il n'appartient pas à $L(\Gamma)$. Il ne reste alors qu'à appliquer les trois propositions précédentes. \square

1.4.1 Les flûtes

Nous présentons ici une classe de surfaces hyperboliques géométriquement infinies à la fois simple et pourtant très riche. Ces surfaces ont été étudiées spécifiquement par A. Haas, A. Basmajian ou encore A. Starkov (voir [Haa96], [Bas93], [Sta95]).

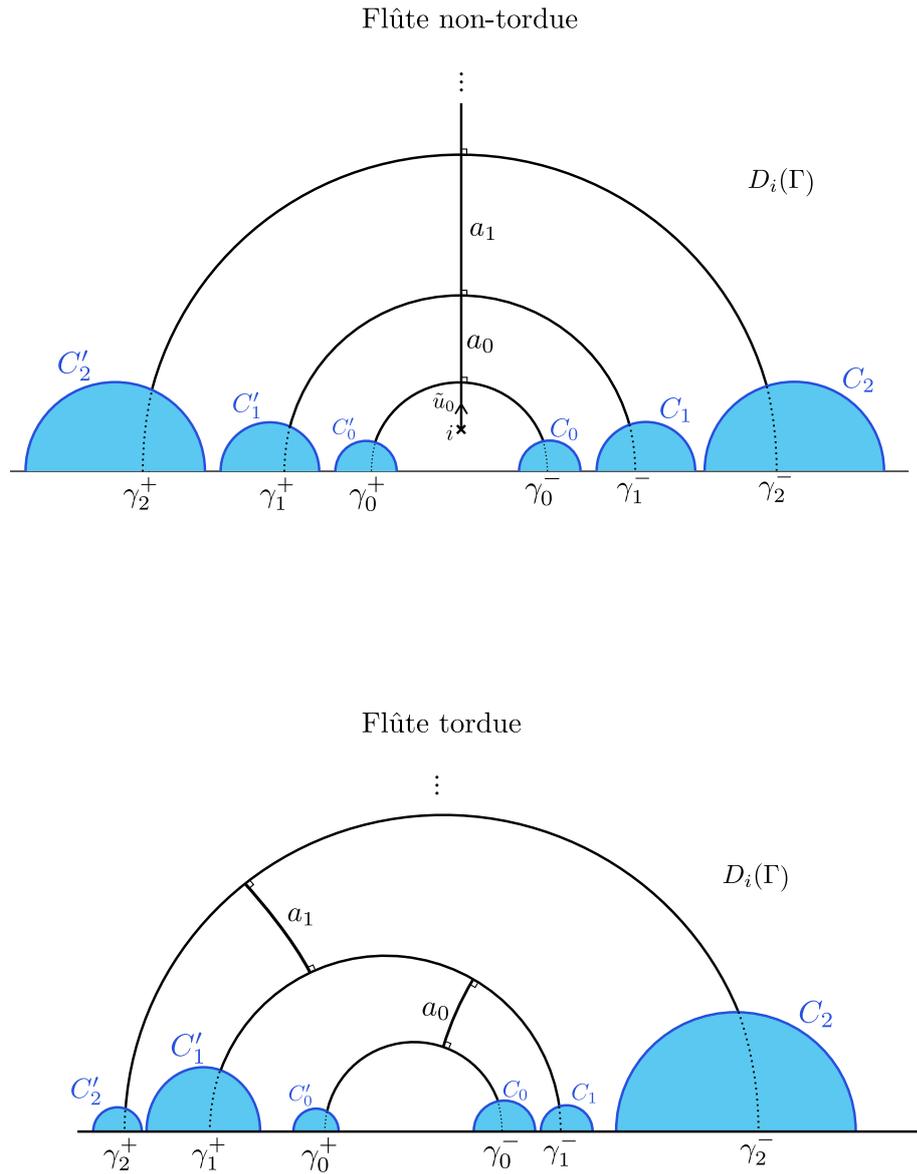
Définition 1.4.6 (Flûte hyperbolique). *Soit Γ un groupe fuchsien et $S := \Gamma \backslash \mathbb{H}$ la surface quotient. Nous dirons que S est une flûte si Γ est un groupe de Schottky infini engendré par une suite $(\gamma_n)_{\mathbb{N}}$ d'isométries hyperboliques dont les axes sont emboîtés : pour tout $n \geq 1$, les axes de γ_{n-1} et γ_{n+1} sont dans des composantes connexes différentes de $\mathbb{H} - (\gamma_n^-, \gamma_n^+)$.*

Rappelons que la définition d'un groupe de Schottky infini a été donnée page 29 (définition 1.2.13). La terminologie "flûte" a été choisie par rapport à l'allure de ces surfaces (voir figure 1.6 par exemple).

Soit $F = \Gamma \backslash \mathbb{H}$ une flûte, où $\Gamma = \langle \gamma_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle$. Nous distinguerons par la suite deux types de flûte : les tordues et les non tordues. Pour les définir, désignons pour tout n par a_n le segment hyperbolique joignant l'axe de γ_n à celui de γ_{n+1} et orthogonal aux deux.

Définition 1.4.7 (Flûtes non tordues et flûtes tordues). *Une flûte F est dite non tordue si les segments géodésiques a_n appartiennent tous à une seule et même demi-géodésique $\tilde{u}(\mathbb{R}^+)$ de \mathbb{H} . Dans le cas contraire, F est dite tordue.*

FIGURE 1.5 – Les domaines de Dirichlet des flûtes



On peut voir l'allure typique du domaine de Dirichlet d'une flûte non tordue et d'une flûte tordue sur la figure 1.5. Les géodésiques C'_n en bleu foncé représentent les médiatrices $\partial\mathbb{H}_i(\gamma_n)$, et les géodésiques C_n les médiatrices $\partial\mathbb{H}_i(\gamma_n^{-1})$. Les zones en bleu clair correspondent aux demi-plans $\mathbb{H}_i^c(\gamma_n)$ et $\mathbb{H}_i^c(\gamma_n^{-1})$. D'après la proposition 1.2.12, $D_i(\Gamma)$ est la partie de \mathbb{H} à l'extérieur des zones colorées en bleu clair sur ces figures.

Définition 1.4.8 (Flûte fine, constante ou épaisse). *La flûte F est dite fine si $\alpha := \liminf_{n \rightarrow +\infty} l(\gamma_n) = 0$. Elle est dite constante (resp. épaisse) si $0 < \alpha < +\infty$ (resp. $\alpha = +\infty$).*

Pour une étude détaillée des flûtes non tordues et de leurs demi-géodésiques, le lecteur peut se référer à [Haa96] ou [Sta95]. Pour une étude des flûtes tordues, il peut se référer à [Bas93].

Nous construisons maintenant plusieurs flûtes non tordues sur lesquelles nous pourrions observer plusieurs demi-géodésiques quasi-minimisantes infinies (définition 1.3.8) ayant des valeurs de finesse asymptotique nulle, strictement positive ou infinie. Les flûtes F_1 , F_2 et F_3 sont tirées de [Sta95] et la flûte F_4 de [PDS12]. Une flûte tordue sera construite au chapitre 3 pour démontrer le théorème B.

Les exemples de flûtes non tordues de [Sta95]

Considérons une suite de géodésiques $(C_n)_{\mathbb{N}}$ d'extrémités toutes positives dans $\mathbb{H}(\infty)$, de rayons et de centres euclidiens $r_n \in \mathbb{R}^+$ et $x_n \in \mathbb{H}(\infty)$ respectivement, avec $x_n < x_{n+1}$ pour tout n . Supposons de plus que $x_0 = r_0$ et que pour tout n , le demi-cercle euclidien C_n soit tangent à C_{n+1} dans $\mathbb{H}(\infty)$. Pour tout $n \geq 1$, on a donc $x_n = 2 \sum_{k=0}^{n-1} r_k + r_n$. Considérons maintenant pour tout $n \geq 1$ l'isométrie γ_n définie par la matrice M_n dans $\text{SL}_2(\mathbb{R})$:

$$M_n = \begin{pmatrix} \frac{x_n}{r_n} & r_n - \frac{x_n^2}{r_n} \\ -1 & \frac{x_n}{r_n} \end{pmatrix}.$$

La trace de M_n étant strictement plus grande que 2, l'isométrie γ_n est hyperbolique. Observons alors que pour $n \geq 1$, les images de $x_n + r_n$ et $x_n - r_n$ sont respectivement égales à $-x_n - r_n$ et $-x_n + r_n$. Ainsi, les images des cercles C_n pour $n \geq 1$ par les isométries γ_n sont les cercles C'_n , symétriques des cercles C_n par rapport à la verticale $(0, \infty)$.

Cela implique en particulier que pour tout n , on a $d(i, C'_n) = d(i, C_n)$. On a donc

$$d(i, C'_n) = d(\gamma_n i, \gamma_n C_n) = d(\gamma_n i, C'_n).$$

Ainsi, pour tout n , on a $\partial\mathbb{H}_i(\gamma_n) = C'_n$ et $\partial\mathbb{H}_i(\gamma_n^{-1}) = C_n$. Or, puisque les cercles C_n ont été choisis tangents les uns aux autres, si k et l sont deux indices distincts, alors

$$(\mathbb{H}_i^c(\gamma_k^{-1}) \cup \mathbb{H}_i^c(\gamma_k)) \cap (\mathbb{H}_i^c(\gamma_l^{-1}) \cup \mathbb{H}_i^c(\gamma_l)) = \emptyset.$$

Alors, d'après la proposition 1.2.12, le groupe $\Gamma := \langle \gamma_n \mid n \geq 1 \rangle$ est un groupe de Schottky infini, engendré par une suite d'éléments hyperboliques dont les axes sont emboîtés. La surface quotient $S := \Gamma \backslash \mathbb{H}$ est donc une flûte.

CHAPITRE 1. DEMI-GÉODÉSIQUES D'UNE SURFACE
HYPERBOLIQUE

D'après la proposition 1.2.12, son domaine de Dirichlet $D_i(\Gamma)$ est

$$D_i(\Gamma) = \bigcap_{n \geq 1} \mathbb{H}_i(\gamma_n) \cap \bigcap_{n \geq 1} \mathbb{H}_i(\gamma_n^{-1}).$$

Un rapide calcul montre que les points fixes des éléments γ_n sont les points $\pm \sqrt{x_n^2 - r_n^2}$. Ainsi, les axes des éléments γ_n sont symétriques par rapport à la verticale $(0, \infty)$. Cela montre que la géodésique $(0, \infty)$ croise tous les axes des éléments γ_n orthogonalement, et donc que la surface $S := \Gamma \backslash \mathbb{H}$ est une flûte non tordue. Le domaine fondamental de cette flûte a la même allure que celui de la flûte non tordue sur la figure 1.5, excepté que les cercles C_n sont tangents les uns aux autres (de même pour les cercles C'_n).

Proposition 1.4.9. *Soit \tilde{u}_0 l'élément de $T^1\mathbb{H}$ basé en i et dirigé vers ∞ . La demi-géodésique $\tilde{u}_0(\mathbb{R}^+)$ se projette sur $S := \Gamma \backslash \mathbb{H}$ en une demi-géodésique $u_0(\mathbb{R}^+)$ quasi-minimisante infinie.*

Démonstration. Nous devons montrer que le point ∞ appartient à $L(\Gamma) - L_p(\Gamma) - L_h(\Gamma)$. Pour tout n , le point $\gamma_n i$ appartient au demi-plan $\mathbb{H}_i^c(\gamma_n)$. La suite $(\gamma_n i)_{\mathbb{N}}$ converge ainsi vers le point ∞ , qui appartient donc à $L(\Gamma)$. Puisqu'il appartient à $D_i(\Gamma)(\infty)$, il n'appartient pas à $L_h(\Gamma)$ d'après la proposition 1.2.11. Enfin, si γ est une isométrie non triviale de Γ , on l'écrit en un mot réduit $\gamma_{l_1}^{k_1} \dots \gamma_{l_m}^{k_m}$ et un argument de ping-pong (voir la démonstration de la proposition 1.2.12) montre que le point ∞ appartient à $\mathbb{H}_i^c(\gamma_{l_1}^{\epsilon_1})$, où ϵ_1 est le signe de k_1 . Ainsi, $\gamma \infty \neq \infty$ et ∞ n'appartient pas à $L_p(\Gamma)$. \square

La proposition suivante montre que la finesse asymptotique de $u_0(\mathbb{R}^+)$ s'étudie directement à l'aide des longueurs de translation des éléments γ_n .

Proposition 1.4.10. *On a :*

$$\underline{\text{Inj}}(u_0(\mathbb{R}^+)) = \liminf_{n \rightarrow +\infty} l(\gamma_n).$$

Démonstration. Pour tout n , on note z_n le point d'intersection de l'axe de γ_n avec $\tilde{u}_0(\mathbb{R}^+)$. On a donc $d(z_n, \gamma_n z_n) = l(\gamma_n)$. Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = \infty$, on a

$$\underline{\text{Inj}}(u_0(\mathbb{R}^+)) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} l(\gamma_n).$$

Supposons maintenant par l'absurde que l'on ait

$$\alpha := \underline{\text{Inj}}(u_0(\mathbb{R}^+)) < L := \liminf_{n \rightarrow +\infty} l(\gamma_n).$$

Quitte à passer à une sous-suite, on peut supposer que $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} l(\gamma_n)$. Prenons alors un nombre $\epsilon > 0$ tel que $\alpha < L - \epsilon$.

Il existe un entier naturel N_1 tel que pour tout $n \geq N_1$, on a $d(z_n, \gamma_n z_n) = l(\gamma_n) > L - \epsilon$. Rappelons que les géodésiques C_n et C'_n sont symétriques par rapport à $(0, \infty)$ et que le bord $\partial D_i(\Gamma)$ du domaine de Dirichlet centré en i de Γ est la réunion de toutes les géodésiques C_n et C'_n . Ainsi, pour tout t , on a

$$d(\tilde{u}_0(t), \partial D_i(\Gamma)) = \min_{n \in \mathbb{N}} d(\tilde{u}_0(t), C_n) \geq \min_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2} d(C_n, C'_n) = \min_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2} l(\gamma_n)$$

Observons que pour tout entier k fixé, on a

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} d(\tilde{u}_0(t), C_k) = +\infty.$$

Ainsi, pour tout N , il existe T_N tel que si $t \geq T_N$, alors

$$d(\tilde{u}_0(t), \partial D_i(\Gamma)) = \min_{n \geq N} d(\tilde{u}_0(t), C_n) = \min_{n \geq N} \frac{1}{2} l(\gamma_n).$$

Donc pour tout $t \geq T_{N_1}$, on a

$$d(\tilde{u}_0(t), \partial D_i(\Gamma)) > \frac{1}{2}(L - \epsilon). \quad (1.8)$$

Considérons maintenant une suite de points $(z'_n)_{\mathbb{N}}$ convergeant vers ∞ le long de $[i, \infty) = \tilde{u}_0(\mathbb{R}^+)$ ainsi qu'une suite $(\gamma'_n)_{\mathbb{N}}$ d'éléments de Γ telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(z'_n, \gamma'_n z'_n) = \alpha$. Considérons aussi un entier naturel N_2 tel que pour tout $n \geq N_2$ on ait $d(z'_n, \gamma'_n z'_n) < L - \epsilon$. Pour tout n , notons p_n le point de $\partial \mathbb{H}_i(\gamma'_n) \cup \partial \mathbb{H}_i(\gamma_n'^{-1})$ tel que

$$\min\{d(z'_n, \partial \mathbb{H}_i(\gamma'_n)), d(z'_n, \partial \mathbb{H}_i(\gamma_n'^{-1}))\} = d(z'_n, p_n).$$

Par définition du domaine de Dirichlet, le point p_n appartient à $\partial D_i(\Gamma) \cup D_i^c(\Gamma)$. Comme $d(z'_n, p_n) \leq d(z'_n, \gamma'_n z'_n)/2$, si $n \geq N_2$, alors $d(z'_n, p_n) < (L - \epsilon)/2$. Cela implique que pour $n \geq N_2$, on a

$$d(z'_n, \partial D_i(\Gamma)) < \frac{1}{2}(L - \epsilon). \quad (1.9)$$

Si l'on prend enfin un entier $n \geq N_2$ tel que z'_n appartienne à $[\tilde{u}(T_{N_1}), \infty)$, les inéquation (1.8) et (1.9) sont en contradiction. Ainsi, $\alpha = L$. \square

En jouant sur les valeurs des nombres r_n dans la définition des matrices M_n , nous pouvons faire varier leurs traces et par là-même les longueurs $l(\gamma_n)$ d'après la proposition 1.1.2. Nous construisons ainsi les trois flûtes suivantes.

- *La flûte non tordue fine* F_1 . Si l'on fixe $r_n = \sum n!$, alors les traces des matrices M_n convergent vers 2, et donc les longueurs $l(\gamma_n)$ convergent vers 0 et $\underline{\text{Inj}}(u_0(\mathbb{R}^+)) = 0$ d'après la proposition 1.4.10.
- *La flûte non-tordue constante* F_2 . Si l'on fixe $r_n = 2$ et $x_n = 2r_n$, alors les longueurs $l(\alpha_n)$ sont constantes et $0 < \underline{\text{Inj}}(u_0(\mathbb{R}^+)) = l(\gamma_n) < +\infty$.
- *La flûte non-tordue épaisse* F_3 . Si l'on fixe $r_n = \frac{1}{n}$, alors les longueurs $l(\gamma_n)$ tendent vers $+\infty$ et l'on a $\underline{\text{Inj}}(u_0(\mathbb{R}^+)) = +\infty$.

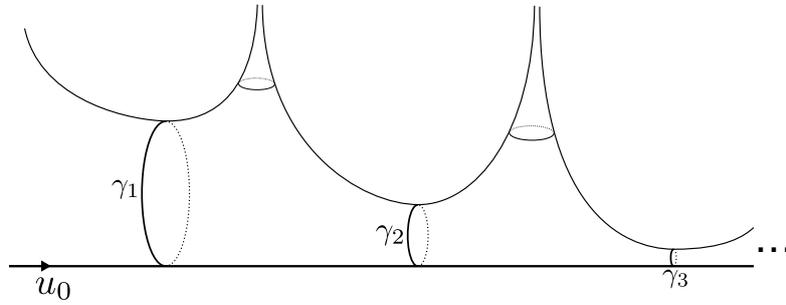
La figure 1.6 récapitule ces trois possibilités.

L'exemple de flûte non tordue de [PDS12]

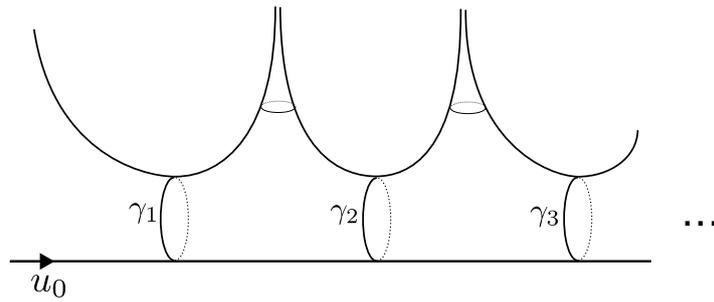
Nous construisons ici une flûte non tordue F_4 ayant la particularité suivante. Il existe une demi-géodésique $u_0(\mathbb{R}^+)$ quasi-minimisante infinie sur F_4 qui ne rencontre aucune géodésique fermée. C'est-à-dire qu'un relevé $\tilde{u}_0(\mathbb{R}^+)$ de $u_0(\mathbb{R}^+)$ dans \mathbb{H} a son extrémité $\tilde{u}_0(\infty)$ dans $L(\Gamma) - L_p(\Gamma) - L_h(\Gamma)$ et ne rencontre pourtant aucun axe d'isométrie hyperbolique. Ce comportement très spécial est différent de celui des demi-géodésiques exhibées sur les trois flûtes présentées

FIGURE 1.6 – Trois types de flûtes non-tordues

La flûte fine F_1



La flûte constante F_2



La flûte épaisse F_3

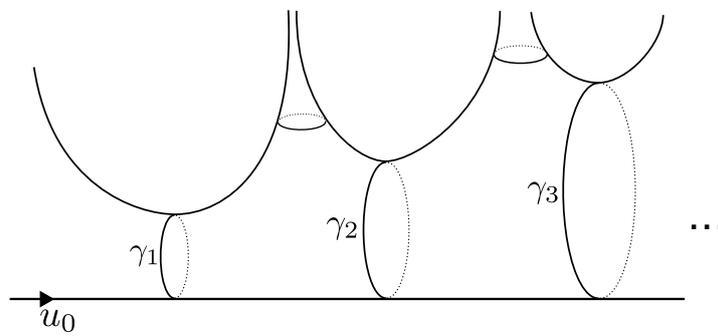
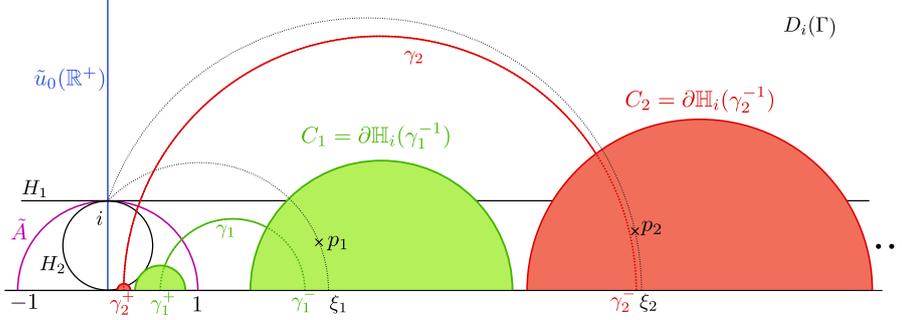


FIGURE 1.7 – Domaine fondamental de la flûte non tordue épaisse F_4



précédemment. Il donne lieu à une orbite horocyclique intéressante que nous étudierons au chapitre 3.

Pour toutes les notations qui suivent, le lecteur peut se référer à la figure 1.7. Considérons les horocycles $H_1 = \text{Ho}(\infty; i)$ et $H_2 = \text{Ho}(0; i)$. Ils sont image l'un de l'autre par la réflexion R d'axe $\tilde{A} = (-1, 1)$. Prenons ensuite une suite de demi-géodésiques $(g_n)_{\mathbb{N}}$ partant toutes de i et dont les extrémités ξ_n sont toutes positives et convergent vers $+\infty$ dans \mathbb{R} . Enfin, considérons une suite $(\epsilon_n)_{\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs convergeant vers 0.

Notons maintenant $(p_n)_{\mathbb{N}}$ la suite de points telle que pour tout n on ait $p_n \in g_n$ et $B_{\infty}(p_n, i) = \epsilon_n$. C'est-à-dire que en posant $I_n = \text{Im}(p_n)$, on a $I_n = 1 - \epsilon_n$. Notons par ailleurs C_n la médiatrice de $[i, p_n]$ et $e_1(n)$ et $e_2(n)$ ses deux extrémités dans $\mathbb{H}(\infty)$ avec $e_1(n) < e_2(n)$.

Proposition 1.4.11. *On a :*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e_1(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} e_2(n) = +\infty.$$

Démonstration. Notons R_n la partie réelle de p_n pour tout n . D'après la proposition 1.1.6, la médiatrice C_n a pour équation

$$\left(x + \frac{R_n}{I_n - 1}\right)^2 + y^2 = I_n \left(1 + \frac{R_n^2}{(I_n - 1)^2}\right).$$

Puisque $I_n = 1 - \epsilon_n$, en notant c_n le centre euclidien de C_n et d_n son rayon

euclidien, on a

$$\begin{aligned}
 e_1(n) = c_n - d_n &= -\frac{R_n}{I_n - 1} - \sqrt{I_n} \left(1 + \frac{R_n^2}{(I_n - 1)^2}\right)^{1/2} \\
 &= \frac{R_n}{\epsilon_n} - \sqrt{1 - \epsilon_n} \left(\frac{\epsilon_n^2 + R_n^2}{\epsilon_n^2}\right)^{1/2} \\
 &= \frac{1}{\epsilon_n} \left(R_n - R_n \sqrt{1 - \epsilon_n} (\epsilon_n^2/R_n^2 + 1)^{1/2}\right) \\
 &= \frac{R_n}{\epsilon_n} \left(1 - \sqrt{1 - \epsilon_n} (\epsilon_n^2/R_n^2 + 1)^{1/2}\right) \\
 &= \frac{R_n}{\epsilon_n} \frac{1 - (1 - \epsilon_n) (\epsilon_n^2/R_n^2 + 1)}{1 + \sqrt{1 - \epsilon_n} (\epsilon_n^2/R_n^2 + 1)^{1/2}} \\
 &= R_n \frac{\epsilon_n^2/R_n^2 + 1}{1 + \sqrt{1 - \epsilon_n} (\epsilon_n^2/R_n^2 + 1)^{1/2}}
 \end{aligned}$$

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \epsilon_n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = +\infty$, on obtient que si n est assez grand, alors $e_1(n) \geq R_n/3$. Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} e_1(n) = +\infty$. On obtient $\lim_{n \rightarrow +\infty} e_2(n) = +\infty$ en observant simplement que $e_1(n) < e_2(n)$ pour tout n . \square

D'après la proposition 1.4.11, quitte à extraire une sous-suite, nous pouvons supposer que les médiatrices C_n sont disjointes et satisfont $e_2(n) < e_1(n+1)$ pour tout n . On peut supposer de plus

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d(C_n, C_{n+1}) = +\infty. \quad (1.10)$$

Cela implique en particulier que pour toute constante K fixée, il existe un entier N_K tel que pour tout $n \geq N_K$, pour tout $k \neq n$, on a

$$d(C_n, C_k) \geq K. \quad (1.11)$$

On définit maintenant $C'_n = R(C_n)$ la réflexion de C_n par rapport à la géodésique $\tilde{A} = (-1, 1)$ pour tout n , et on définit γ_n l'isométrie hyperbolique dont l'axe est perpendiculaire à C_n et C'_n et telle que $\gamma_n(C_n) = C'_n$. Alors pour tout n on a $d(i, C_n) = d(i, C'_n)$. Ainsi,

$$d(i, C'_n) = d(\gamma_n i, \gamma_n C_n) = d(\gamma_n i, C'_n).$$

Donc, pour tout n , on a $\partial \mathbb{H}_i(\gamma_n) = C'_n$ et $\partial \mathbb{H}_i(\gamma_n^{-1}) = C_n$. De plus, par construction, si k et l sont deux indices distincts, alors

$$(\mathbb{H}_i^c(\gamma_k^{-1}) \cup \mathbb{H}_i^c(\gamma_k)) \cap (\mathbb{H}_i^c(\gamma_l^{-1}) \cup \mathbb{H}_i^c(\gamma_l)) = \emptyset.$$

D'après la proposition 1.2.12, le groupe $\Gamma := \langle \gamma_n \mid n \geq 1 \rangle$ est un groupe de Schottky infini, engendré par une suite d'éléments hyperboliques dont les axes sont emboîtés. La surface quotient $F_4 := \Gamma \backslash \mathbb{H}$ est donc une flûte. Par construction, la géodésique \tilde{A} rencontre tous les axes (γ_n^-, γ_n^+) perpendiculairement. Par ailleurs, on a $\liminf_{n \rightarrow +\infty} l(\gamma_n) = +\infty$. Ainsi, F_4 est une flûte non tordue épaisse. D'après la proposition 1.2.12, son domaine de Dirichlet $D_i(\Gamma)$ est

$$D_i(\Gamma) = \bigcap_{n \geq 1} \mathbb{H}_i(\gamma_n) \cap \bigcap_{n \geq 1} \mathbb{H}_i(\gamma_n^{-1}).$$

1.5. FINESSE ASYMPTOTIQUE ET TOURS DES DEMI-GÉODÉSQUES

Cette surface est représentée sur la figure 1.8, où A est la projection de \tilde{A} sur F_4 .

Proposition 1.4.12. *La demi-géodésique $\tilde{u}_0(\mathbb{R}^+) = [i, \infty)$ de $T^1\mathbb{H}$ se projette sur F_4 en une demi-géodésique quasi-minimisante infinie de finesse asymptotique infinie.*

Démonstration. Par construction, pour tout n , on a $\gamma_n^{-1}i = p_n$. Cela implique $\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n^{-1}i = \infty$, donc le point ∞ appartient à $L(\Gamma)$. Par un argument de ping-pong (voir la démonstration de la proposition 1.2.12 par exemple), si γ est un élément de Γ différent de l'identité, alors $\gamma\infty \neq \infty$. Donc $\infty \notin L_p(\Gamma)$. Enfin, d'après la proposition 1.2.11, le point ∞ n'est pas dans $L_h(\Gamma)$. Ainsi, $u_0(\mathbb{R}^+)$ est bien une demi-géodésique quasi-minimisante infinie.

Montrons maintenant que $\text{Inj}(u(\mathbb{R}^+)) = +\infty$. Soit K une constante strictement positive. Nous allons montrer qu'il existe un temps T_K tel que pour tout $t \geq T_K$, on a $\text{Inj}(u(t)) \geq K$, c'est-à-dire $d(\tilde{u}(t), \gamma\tilde{u}(t)) \geq K$ pour tout γ dans Γ différent de l'identité. Considérons donc un tel élément γ et écrivons-le comme un mot réduit en les lettres γ_n :

$$\gamma = \gamma_{l_1}^{k_1} \dots \gamma_{l_m}^{k_m}$$

où k_n a pour signe $\epsilon_n = \pm 1$ pour tout n et $l_j \neq l_{j+1}$ pour tout j .

Observons tout d'abord que par construction, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(C_n, C'_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} l(\gamma_n) = +\infty$. Ainsi, on peut trouver $N(K, 1)$ tel que pour tout $n \geq N(K, 1)$ on ait $l(\gamma_n) \geq K$. On considère alors le temps $T(K, 1)$ tel que pour tout $t \geq T(K, 1)$, pour tout $n \leq N(K, 1)$ on ait $d(\tilde{u}(t), C_n) \geq K$.

Ensuite, d'après la condition (1.11), nous pouvons considérer un certain entier $N(K, 2)$ tel que pour tout $n \geq N(K, 2)$ et pour tout k différent de n , on a $d(C_n, C_k) \geq K$. On considère alors un temps $T(K, 2)$ tel que pour tout $t \geq T(K, 2)$ et pour tout $n \leq N(K, 2)$, on ait $d(\tilde{u}(t), C_n) \geq K$.

Soit alors $T_K = \max\{T(K, 1), T(K, 2)\}$ et $t \geq T_K$. Le point $\gamma\tilde{u}(t)$ appartient à $\mathbb{H}_i^c(\gamma_{l_1}^{\epsilon_1})$. En particulier, $d(\tilde{u}(t), \gamma\tilde{u}(t)) \geq d(\tilde{u}(t), C_{l_1})$. Ainsi, si $l_1 \leq \max\{N(K, 1), N(K, 2)\}$, alors $d(\tilde{u}(t), \gamma\tilde{u}(t)) \geq K$ par définition de T_K , $N(K, 1)$ et $N(K, 2)$. Maintenant, si $l_1 > \max\{N(K, 1), N(K, 2)\}$, on remarque que

$$d(\tilde{u}(t), \gamma\tilde{u}(t)) = d(\gamma_{l_1}^{-k_1}\tilde{u}(t), \gamma_{l_2}^{k_2} \dots \gamma_{l_m}^{k_m}\tilde{u}(t)) > d(C_{l_1}, C_{l_2}) \geq K$$

par définition de $N(K, 2)$. □

Si l'on conjugue Γ par une isométrie de $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ pour envoyer $(-1, 1)$ sur $(0, \infty)$, nous obtenons un groupe $\hat{\Gamma}$ dont le domaine de Dirichlet centré en i a une allure plus classique donnée sur la figure 1.9, où à un élément x de $D_i(\Gamma)$ on a associé l'élément conjugué \hat{x} de $D_i(\hat{\Gamma})$.

1.5 Finesse asymptotique et tours des demi-géodésiques

1.5.1 Tours d'une demi-géodésique

Considérons une demi-géodésique $u(\mathbb{R}^+)$ sur une surface hyperbolique S croisant une géodésique fermée g de longueur $l(g)$. Notons t_0 le premier temps tel que $u(t_0) \in g$ et paramétrons g de sorte que $g(0) = u(t_0)$. Considérons alors

FIGURE 1.8 – Flûte non tordue épaisse

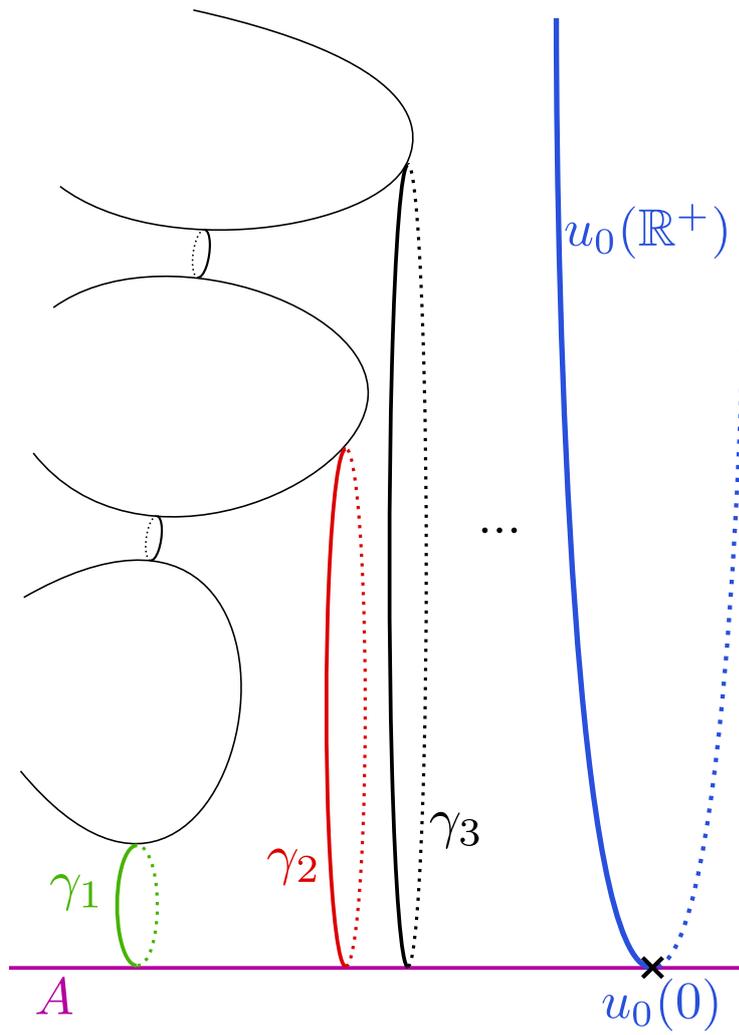
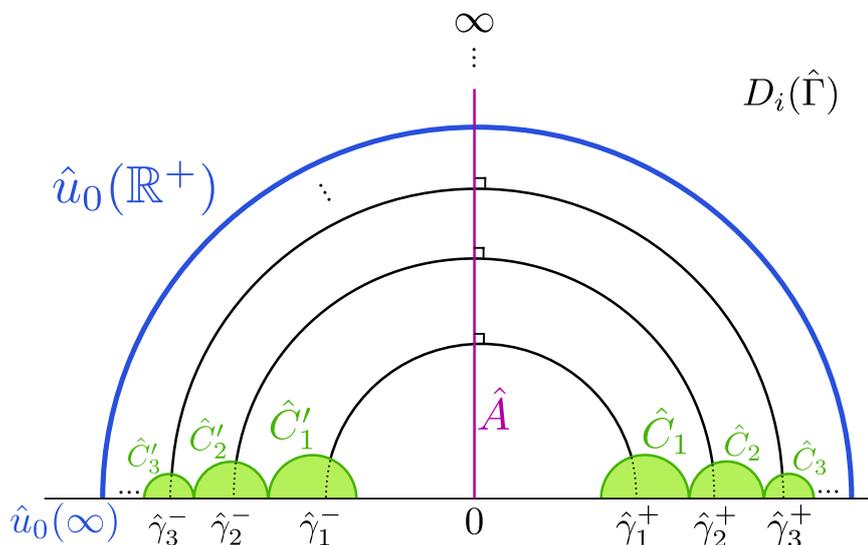


FIGURE 1.9 – Domaine fondamental du groupe $\hat{\Gamma}$



la courbe C suivant $u(\mathbb{R}^+)$ jusqu'à $u(t_0)$, puis faisant un tour autour de g , puis continuant le long de $u(\mathbb{R}^+)$. Formellement, $C(t) = u(t)$ si $t \leq t_0$, puis $C(t) = g(t - t_0)$ si $t \in [t_0, t_0 + l(g)]$ et enfin $C(t) = u(t - t_0)$ si $t \geq t_0 + l(g)$.

Posons alors v l'élément de T^1S tel que $v(0) = u(0) = C(0)$ et $v(\mathbb{R}^+)$ est dans la même classe d'homotopie que $C(\mathbb{R}^+)$.

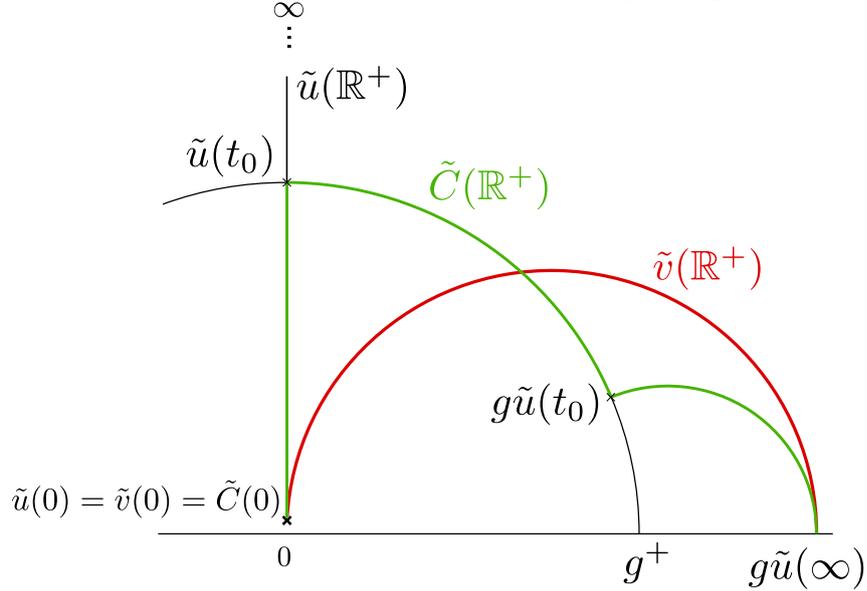
Dans \mathbb{H} , la géodésique g se relève en une géodésique \tilde{g} qui est l'axe d'une isométrie hyperbolique γ . Si l'on relève nos courbes et géodésiques dans \mathbb{H} nous obtenons la situation de la figure 1.10, où les relevés $\tilde{C}(\mathbb{R}^+)$ et $\tilde{v}(\mathbb{R}^+)$ ont la même extrémité $\gamma\tilde{u}(\infty)$.

Pour décrire cette situation, nous dirons que $v(\mathbb{R}^+)$ a fait un tour autour de g par rapport à $u(\mathbb{R}^+)$. Nous généralisons cette situation au cas où $u(\mathbb{R}^+)$ et g ne se croisent pas nécessairement.

Définition 1.5.1 (Triplets (\star) , $(\star\star)$ et tours d'une demi-géodésique). *Soit Γ un groupe fuchsien sans élément elliptique. Soit \tilde{u} et \tilde{v} dans $T^1\mathbb{H}$ et u et v leurs projections sur T^1S .*

- (i) *Dans \mathbb{H} : le triplet $(\tilde{u}, \tilde{v}, \gamma)$ est en position (\star) si $\tilde{u}(0) = \tilde{v}(0)$ et $\tilde{v}(\infty) = \gamma\tilde{u}(\infty)$. Nous dirons qu'il est en position $(\star\star)$ si de plus γ est hyperbolique et $\tilde{u}(\mathbb{R}^+)$ croise l'axe de γ .*
- (ii) *Dans S : le couple (u, v) est en position (\star) (resp. $(\star\star)$) si il existe une isométrie γ dans Γ telle que le triplet $(\tilde{u}, \tilde{v}, \gamma)$ associé est en position (\star) (resp. $(\star\star)$) dans \mathbb{H} .*
- (iii) *Si le triplet $(\tilde{u}, \tilde{v}, \gamma^n)$ est en position (\star) , nous dirons aussi que la demi-géodésique $v(\mathbb{R}^+)$ fait n tours autour de γ par rapport à $u(\mathbb{R}^+)$.*

FIGURE 1.10 – Tours autour d'une géodésique



Prenons un couple (u, v) en position (\star) sur une surface hyperbolique $S = \Gamma \backslash \mathbb{H}$ associé à un triplet $(\tilde{u}, \tilde{v}, \gamma)$. Appliquons γ^{-1} à la demi-géodésique $\tilde{v}(\mathbb{R}^+)$. On remarque que $\gamma^{-1}\tilde{v}(\infty) = \tilde{u}(\infty)$. Ainsi, en notant $B := B_{\tilde{u}(\infty)}(\gamma^{-1}\tilde{v}(0), \tilde{u}(0))$, on a

$$\begin{aligned} B_{\tilde{u}(\infty)}(\gamma^{-1}\tilde{v}(B), \tilde{u}(0)) &= B_{\tilde{u}(\infty)}(\gamma^{-1}\tilde{v}(B), \gamma^{-1}\tilde{v}(0)) + B \\ &= -B + B = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, d'après la propriété 1.1.11, on a

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} d(\gamma^{-1}\tilde{v}(t+B), \tilde{u}(t)) = B_{\tilde{u}(\infty)}(\gamma^{-1}\tilde{v}(B), \tilde{u}(0)) = 0.$$

D'après la définition de la distance d sur S , cela implique

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} d(v(t+B), u(t)) = 0.$$

D'où la définition suivante.

Définition 1.5.2 (Temps pris pour des tours de demi-géodésiques). *Si (u, v) est un couple de T^1S en position (\star) associé à un triplet $(\tilde{u}, \tilde{v}, \gamma)$, nous dirons que le temps pris par $v(\mathbb{R}^+)$ pour faire le tour autour de γ est $B_{\tilde{u}(\infty)}(\gamma^{-1}\tilde{v}(0), \tilde{u}(0))$. Si $v(\mathbb{R}^+)$ a fait n tours autour de γ , le temps pris pour faire ces n tours est par définition $B_{\tilde{u}(\infty)}(\gamma^{-n}\tilde{v}(0), \tilde{u}(0))$.*

Observons que le temps pris pour faire un ou plusieurs tours n'est pas nécessairement positif. En effet, il est possible que $B_{\tilde{u}(\infty)}(\gamma^{-1}\tilde{v}(0), \tilde{u}(0))$ soit strictement négatif.

1.5.2 Conséquences de la finesse asymptotique

La finesse asymptotique a plusieurs implications sur les demi-géodésiques. La proposition suivante donne une conséquence de la finesse asymptotique d'une demi-géodésique $u(\mathbb{R}^+)$ d'une surface $S := \Gamma \backslash \mathbb{H}$ sur la position de certains points fixes d'isométries de Γ .

Proposition 1.5.3. *Soit Γ un groupe fuchsien sans éléments elliptique. Soient $\tilde{u}(\mathbb{R}^+)$ une demi-géodésique de \mathbb{H} et $(\tilde{q}_n)_{\mathbb{N}}$ une suite de points convergeant vers $\tilde{u}(\infty)$ le long de $\tilde{u}(\mathbb{R}^+)$. Soit $(\gamma_n)_{\mathbb{N}}$ une suite d'isométries de Γ toutes distinctes telle que*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d(\tilde{q}_n, \gamma_n \tilde{q}_n) < +\infty.$$

Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n^- = \lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n^+ = \tilde{u}(\infty).$$

Démonstration. Quitte à conjuguer Γ dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, nous pouvons supposer que $\tilde{u}(\infty) = \infty$ et $\tilde{u}(-\infty) = 0$.

Traisons tout d'abord le cas où une infinité d'éléments γ_n sont hyperboliques. On suppose alors par l'absurde que quitte à passer à une sous-suite de $(\gamma_n)_{\mathbb{N}}$, on ait $\eta := \lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n^- \neq \infty$ ou $\xi := \lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n^+ \neq \infty$.

Supposons premièrement que $\eta \neq \xi$. Alors, pour tout z dans \mathbb{H} , la distance $d(z, (\gamma_n^-, \gamma_n^+))$ est bornée supérieurement. Ainsi, puisque $l(\gamma_n) \leq d(q_n, \gamma_n q_n)$ pour tout n , la proposition 1.1.3 implique que pour tout z dans \mathbb{H} , les points $\gamma_n z$ restent dans un compact. Cela contredit le fait que Γ est un groupe discret.

Supposons maintenant que $\eta = \xi \neq \infty$. Si les éléments γ_n sont hyperboliques, on considère la demi-géodésique $[p, \xi)$ partant d'un point p sur $(0, \infty)$ et orthogonale à $\tilde{u}(\mathbb{R}) = (0, \infty)$ (si $\eta = \xi = 0$ on considère n'importe quel point p sur $(0, \infty)$). Pour n suffisamment grand, on a $d(p, (\gamma_n^-, \gamma_n^+)) < d(q_n, (\gamma_n^-, \gamma_n^+))$. Ainsi, la proposition 1.1.3 implique que $d(p, \gamma_n p) < d(q_n, \gamma_n q_n)$. Puisque que les distances $d(q_n, \gamma_n q_n)$ sont bornées supérieurement, nous obtenons à nouveau une contradiction avec le fait que Γ est discret.

Si les éléments γ_n sont paraboliques, on procède à nouveau par l'absurde et on suppose que quitte à passer à une sous-suite, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n^+ = \eta \neq \infty$. Fixons z_0 dans \mathbb{H} . Puisque les points q_n convergent vers ∞ , le point z_0 appartient à l'horodisque $\mathrm{Ho}^+(\gamma_n^+; q_n)$ à partir d'un certain rang. Donc $0 = B_{\gamma_n^+}(z_0, z_0) < B_{\gamma_n^+}(q_n, z_0)$. Ainsi, la proposition 1.1.12 implique que pour n assez grand on a $d(z_0, \gamma_n z_0) < d(q_n, \gamma_n q_n)$, ce qui contredit une fois de plus le fait que Γ est discret.

Ainsi,

$$\eta = \xi = \infty.$$

□

Nous utiliserons par la suite cette proposition dans le cadre du corollaire suivant

Corollaire 1.5.4. *Soient $S := \Gamma \backslash \mathbb{H}$ une surface hyperbolique et $u(\mathbb{R}^+)$ est une demi-géodésique quasi-minimisante infinie de S avec une finesse asymptotique finie. Alors il existe une suite de points $(\tilde{q}_n)_{\mathbb{N}}$ dans \mathbb{H} convergeant vers $\tilde{u}(\infty)$ le long de $\tilde{u}(\mathbb{R}^+)$ et une suite d'isométries toutes distinctes $(\gamma_n)_{\mathbb{N}}$ dans Γ telles que*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d(\tilde{q}_n, \gamma_n \tilde{q}_n) = \underline{\mathrm{Inj}}(u(\mathbb{R}^+)) \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n^- = \lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n^+ = \tilde{u}(\infty). \quad (1.12)$$

CHAPITRE 1. DEMI-GÉODÉSQUES D'UNE SURFACE
HYPERBOLIQUE

Démonstration. Par définition de la finesse asymptotique, nous obtenons directement une suite de points $(\tilde{q}_n)_\mathbb{N}$ et une suite d'isométries $(\gamma_n)_\mathbb{N}$ satisfaisant

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d(\tilde{q}_n, \gamma_n \tilde{q}_n) < +\infty.$$

Il reste à montrer que les isométries γ_n peuvent être choisies toutes distinctes pour appliquer la proposition 1.5.3. Supposons par l'absurde qu'il existe une isométrie γ telle que $\gamma_n = \gamma$ pour une infinité d'indices n . Alors en passant à une sous-suite on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(\tilde{q}_n, \gamma \tilde{q}_n) < +\infty$. D'après les propositions 1.1.3 et 1.1.12, cela implique que la suite de points $(\tilde{q}_n)_\mathbb{N}$ converge vers le point fixe γ^+ de γ . Ainsi, $\tilde{u}(\infty) = \gamma^+$. Ainsi, $\tilde{u}(\infty)$ est un point parabolique ou conique de Γ , ce qui contredit notre hypothèse. \square

Nous allons maintenant voir dans la proposition suivante que la finesse asymptotique permet d'encadrer le temps pris par une demi-géodésique pour faire des tours. C'est la proposition la plus importante de ce chapitre. Elle sera au cœur des démonstrations des théorèmes A et E.

Proposition Clef 1. *Soient $\tilde{v}(\mathbb{R}^+)$ une demi-géodésique de \mathbb{H} et γ une isométrie hyperbolique. Supposons que l'on ait $\tilde{v}(-\infty) \wr \gamma^- \wr \tilde{v}(\infty) \wr \gamma^+$ et prenons un point \tilde{q} sur $\tilde{v}(\mathbb{R}^+)$. Pour tout entier k dans \mathbb{Z} , on a :*

$$\left| B_{\tilde{v}(\infty)}(\gamma^{-(k+1)}\tilde{v}(0), \gamma^{-k}\tilde{v}(0)) \right| \leq d(\tilde{q}, \gamma\tilde{q}).$$

En particulier, si $\tilde{v}(\mathbb{R}^+)$ croise l'axe de γ , on a

$$\left| B_{\tilde{v}(\infty)}(\gamma^{-(k+1)}\tilde{v}(0), \gamma^{-k}\tilde{v}(0)) \right| \leq l(\gamma).$$

Démonstration. Fixons un entier relatif k . En notant $\eta = \tilde{v}(-\infty)$ et $\xi = \tilde{v}(+\infty)$, on a par hypothèse $\eta \wr \gamma^- \wr \xi \wr \gamma^+$. Notons $z_0 = \tilde{v}(0)$. On peut donc appliquer la proposition 1.1.16 pour obtenir que l'intersection de la demi-géodésique $[\gamma^{-k}z_0, \xi)$ avec l'hypercycle $\text{Hy}(\gamma; q)$ n'est pas vide. Notons p un point de cette intersection. Puisque p appartient à $[\gamma^{-k}z_0, \xi)$, on a

$$B_\xi(p, \gamma^{-k}z_0) = -d(p, \gamma^{-k}z_0).$$

De plus, comme p appartient à $\text{Hy}(\gamma; q)$, d'après la proposition 1.1.3, on a $d(\gamma^{-1}p, p) = d(\tilde{q}, \gamma\tilde{q})$. On effectue alors le calcul suivant.

$$\begin{aligned} B_\xi(\gamma^{-(k+1)}z_0, \gamma^{-k}z_0) &= B_\xi(\gamma^{-(k+1)}z_0, \gamma^{-1}p) + B_\xi(\gamma^{-1}p, p) + B_\xi(p, \gamma^{-k}z_0) \\ &\leq d(\gamma^{-(k+1)}z_0, \gamma^{-1}p) + d(\gamma^{-1}p, p) - d(p, \gamma^{-k}z_0) \\ &= d(\gamma^{-k}z_0, p) + d(\tilde{q}, \gamma\tilde{q}) - d(p, \gamma^{-k}z_0) \\ &= d(\tilde{q}, \gamma\tilde{q}). \end{aligned}$$

Pour obtenir l'inégalité $B_\xi(\gamma^{-(k+1)}z_0, \gamma^{-k}z_0) \geq -d(\tilde{q}, \gamma\tilde{q})$, on prend maintenant un point p' dans l'intersection de la demi-géodésique $[\gamma^{-(k+1)}z_0, \xi)$ avec l'hypercycle $\text{Hy}(\gamma; q)$. On a alors

$$B_\xi(\gamma^{-(k+1)}z_0, p') = d(p', \gamma^{-(k+1)}z_0)$$

et $d(p', \gamma p') = d(\tilde{q}, \gamma\tilde{q})$. On peut alors effectuer un calcul similaire :

$$\begin{aligned}
B_\xi(\gamma^{-(k+1)}z_0, \gamma^{-k}z_0) &= B_\xi(\gamma^{-(k+1)}z_0, p') + B_\xi(p', \gamma p') + B_\xi(\gamma p', \gamma^{-k}z_0) \\
&\geq d(\gamma^{-(k+1)}z_0, p') - d(p', \gamma p') - d(\gamma p', \gamma^{-k}z_0) \\
&= d(\gamma^{-(k+1)}z_0, p') - d(\tilde{q}, \gamma\tilde{q}) - d(p', \gamma^{-(k+1)}z_0) \\
&= -d(\tilde{q}, \gamma\tilde{q})
\end{aligned}$$

Si $\tilde{v}(\mathbb{R}^+)$ rencontre l'axe de γ , alors dans les calculs précédents on peut considérer le point \tilde{q} appartenant à l'intersection la demi-géodésique $[z_0, \xi)$ avec l'axe de γ . On aura alors $d(\tilde{q}, \gamma\tilde{q}) = l(\gamma)$, ce qui conclut. \square

Le corollaire suivant est une conséquence directe de la proposition clef 1 .

Corollaire 1.5.5. *Soit $S := \Gamma \backslash \mathbb{H}$ une surface hyperbolique et (u, v) un couple de T^1S en position $(\star\star)$ associé à un triplet $(\tilde{u}, \tilde{v}, \gamma)$. Alors le temps pris par $v(\mathbb{R}^+)$ pour tourner autour de γ par rapport à $u(\mathbb{R}^+)$ appartient à l'intervalle $[-l(\gamma), l(\gamma)]$.*

Démonstration. On remarque tout d'abord que puisque la demi-géodésique $\tilde{u}(\mathbb{R}^+)$ croise l'axe de γ , les points $\tilde{u}(-\infty)$ et $\tilde{u}(\infty)$ appartiennent à des composantes différentes de $\mathbb{H}(\infty) - \{\gamma^-, \gamma^+\}$. Ainsi on a

$$\tilde{u}(-\infty) \wr \gamma^- \wr \tilde{u}(\infty) \wr \gamma^+.$$

Alors, en appliquant la proposition clef 1 avec $k = 0$, on obtient

$$|B_{\tilde{u}(\infty)}(\gamma^{-1}\tilde{u}(0), \tilde{u}(0))| \leq l(\gamma).$$

Puisque $\tilde{v}(0) = \tilde{u}(0)$, le tour pris par $v(\mathbb{R}^+)$ pour faire un tour autour de γ par rapport à $u(\mathbb{R}^+)$ appartient bien à l'intervalle $[-l(\gamma), l(\gamma)]$. \square

Nous établissons maintenant une proposition similaire valable avec une autre condition sur le rangement des points dans $\mathbb{H}(\infty)$.

Proposition Clef 2. *Soient $\tilde{v}(\mathbb{R}^+)$ une demi-géodésique de \mathbb{H} et γ une isométrie non elliptique. Supposons que l'on ait $\tilde{v}(-\infty) \wr \gamma^{-1}\tilde{v}(-\infty) \wr \gamma^- \wr \tilde{v}(\infty)$ et prenons un point \tilde{q} sur $\tilde{v}(\mathbb{R}^+)$ différent de $\tilde{v}(0)$.*

Pour tout entier l dans \mathbb{N} , on a :

$$B_{\tilde{v}(\infty)}(\gamma^{-(l+1)}\tilde{v}(0), \gamma^{-l}\tilde{v}(0)) \leq d(\tilde{q}, \gamma\tilde{q}).$$

Si $l \geq 1$, on a de plus

$$B_{\tilde{v}(\infty)}(\gamma^{-(l+1)}\tilde{v}(0), \gamma^{-l}\tilde{v}(0)) \geq -d(\tilde{q}, \gamma\tilde{q}).$$

Démonstration. Posons $\eta = \tilde{v}(-\infty)$ et $\xi = \tilde{v}(+\infty)$ ainsi que $z_0 = \tilde{v}(0)$. Alors le point \tilde{q} appartient à la demi-géodésique $[z_0, \xi)$. Par hypothèse, on a $\eta \wr \gamma^{-1} \eta \wr \gamma^- \wr \xi$. On peut donc appliquer la proposition 1.1.17 pour obtenir que l'intersection de la demi-géodésique $[\gamma^{-l}z_0, \xi)$ avec l'hypercycle $\text{Hy}(\gamma; q)$ (ou $\text{Ho}(\gamma; q)$ si γ est parabolique) n'est pas vide. Notons p un point de cette intersection. De la même manière que dans la démonstration de la proposition 1.5.2, on effectue les calculs suivants.

CHAPITRE 1. DEMI-GÉODÉSIQUES D'UNE SURFACE
HYPERBOLIQUE

$$\begin{aligned}
B_\xi(\gamma^{-(l+1)}z_0, \gamma^{-l}z_0) &= B_\xi(\gamma^{-(l+1)}z_0, \gamma^{-1}p) + B_\xi(\gamma^{-1}p, p) + B_\xi(p, \gamma^{-l}z_0) \\
&\leq d(\gamma^{-(l+1)}z_0, \gamma^{-1}p) + d(\gamma^{-1}p, p) - d(p, \gamma^{-l}z_0) \\
&= d(\gamma^{-l}z_0, p) + d(\tilde{q}, \gamma\tilde{q}) - d(p, \gamma^{-l}z_0) \\
&= d(\tilde{q}, \gamma\tilde{q}).
\end{aligned}$$

Si $l \geq 1$, on prend un point dans l'intersection de la courbe $[\gamma^{-(l+1)}z_0, \xi]$ avec l'hypercycle $\text{Hy}(\gamma; q)$ (ou $\text{Ho}(\gamma; q)$ si γ est parabolique) et on effectue un calcul similaire :

$$\begin{aligned}
B_\xi(\gamma^{-(l+1)}z_0, \gamma^{-l}z_0) &= B_\xi(\gamma^{-(l+1)}z_0, p') + B_\xi(p', \gamma p') + B_\xi(\gamma p', \gamma^{-l}z_0) \\
&\geq d(\gamma^{-(l+1)}z_0, p') - d(p', \gamma p') - d(\gamma p', \gamma^{-l}z_0) \\
&= d(\gamma^{-(l+1)}z_0, p') - d(\tilde{q}, \gamma\tilde{q}) - d(p', \gamma^{-(l+1)}z_0) \\
&= -d(\tilde{q}, \gamma\tilde{q})
\end{aligned}$$

□

Nous déduisons de la proposition clef 2 un autre corollaire sur une surface hyperbolique.

Corollaire 1.5.6. *Soit $S := \Gamma \backslash \mathbb{H}$ une surface hyperbolique et (u, v) un couple de T^1S en position (\star) associé à un triplet $(\tilde{u}, \tilde{v}, \gamma)$. Soit \tilde{q} le point de $\tilde{u}(\mathbb{R}^+)$ tel que $d(\tilde{q}, \gamma\tilde{q}) = \min_{z \in \tilde{u}(\mathbb{R}^+)} d(z, \gamma z)$. Alors le temps pris par $v(\mathbb{R}^+)$ pour tourner autour de γ par rapport à $u(\mathbb{R}^+)$ est plus petit que $d(\tilde{q}, \gamma\tilde{q})$.*

Démonstration. D'après la proposition 1.1.18, en notant $\eta = \tilde{u}(-\infty)$ et $\xi = \tilde{u}(+\infty)$, quitte à remplacer γ par γ^{-1} , on peut supposer que l'on a

$$\eta \wr \gamma^{-1} \eta \wr \gamma^{-1} \wr \xi.$$

Alors, en appliquant la proposition clef 2 avec $k = 0$, on obtient

$$B_{\tilde{u}(\infty)}(\gamma^{-1}\tilde{u}(0), \tilde{u}(0)) \leq d(\tilde{q}, \gamma\tilde{q}).$$

Puisque $\tilde{v}(0) = \tilde{u}(0)$, le tour pris par $v(\mathbb{R}^+)$ pour faire un tour autour de γ par rapport à $u(\mathbb{R}^+)$ est bien plus petit que $d(\tilde{q}, \gamma\tilde{q})$. □

Chapitre 2

Flot horocyclique

Nous présentons dans ce chapitre les outils dont nous aurons besoin pour étudier la dynamique topologique du flot horocyclique. La proposition la plus importante est la proposition 2.3.2, classique, qui permet d'exprimer la convergence d'une orbite horocyclique dans un fibré $T^1S := \Gamma \backslash T^1\mathbb{H}$ à l'aide de fonctions de Busemann et de l'action du groupe Γ sur \mathbb{H} et $\mathbb{H}(\infty)$. La plupart de nos démonstrations concernant l'adhérence d'orbites horocycliques reposent dessus.

Nous donnerons aussi une version duale de l'étude topologique du flot horocyclique en terme d'action linéaire, qui permettra dans les chapitres à venir de donner un autre éclairage sur les résultats obtenus.

Comme dans la partie précédente, si S est une surface hyperbolique et si u appartient à T^1S , alors \tilde{u} désigne un relevé de u dans $T^1\mathbb{H}$. De même, si \tilde{u} a été défini dans $T^1\mathbb{H}$, alors u est sa projection sur T^1S .

2.1 Le flot horocyclique dans $T^1\mathbb{H}$ et T^1S

Considérons un vecteur \tilde{u} de $T^1\mathbb{H}$ et une paramétrisation par longueur d'arc $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \text{Ho}(\tilde{u}(\infty); \tilde{u}(0))$ de l'horocycle défini par \tilde{u} . Supposons que cette paramétrisation satisfasse $\phi(0) = \tilde{u}(0)$ et que le couple $(d\phi/dt(0), \tilde{u})$ constitue une base positivement orientée de l'espace tangent $T_{\tilde{u}(0)}\mathbb{H}$ à \mathbb{H} en $\tilde{u}(0)$.

Pour tout temps t , on définit $h_t\tilde{u}$ l'élément de $T^1\mathbb{H}$ basé en $h_t\tilde{u}(0) = \phi(t)$ et dirigé vers $h_t\tilde{u}(\infty) = \tilde{u}(\infty)$. L'application h de $\mathbb{R} \times T^1\mathbb{H}$ dans $T^1\mathbb{H}$ définie par

$$h(t, \tilde{u}) = h_t(\tilde{u})$$

définit un flot, que l'on appelle le *flot horocyclique* (voir figure 2.1).

Remarque 2.1.1. *Pour tout \tilde{u} dans $T^1\mathbb{H}$ et t dans \mathbb{R} , on a $\tilde{u}(\infty) = h_t\tilde{u}(\infty)$. De plus, le cocycle de Busemann est invariant par le flot horocyclique dans le sens suivant :*

$$B_{\tilde{u}(\infty)}(\tilde{u}(0), h_t\tilde{u}(0)) = 0.$$

Point de vue matriciel

En utilisant l'identification entre $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ et $T^1\mathbb{H}$ explicitée au début de la section 1.1, on peut définir l'action du flot horocyclique comme l'action à droite

- (i) $\tilde{v} \in h_{\mathbb{R}}\tilde{u}$
(ii) $\lim_{t \rightarrow +\infty} d(\tilde{u}(t), \tilde{v}(t)) = 0$

Démonstration. Supposons tout d'abord que $\tilde{v} = h_s\tilde{u}$. Alors, $g_t\tilde{v} = g_th_sh_s\tilde{u} = h_{se^{-t}}g_t\tilde{u}$ d'après la remarque ci-dessus. Pour tout $t > 0$, on a ainsi $d(\tilde{u}(t), \tilde{v}(t)) \leq |s|e^{-t}$. Cette distance tend bien vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$.

Réciproquement, si $\lim_{t \rightarrow +\infty} d(\tilde{u}(t), \tilde{v}(t)) = 0$, on obtient directement que la condition $\tilde{u}(\infty) = \tilde{v}(\infty)$ est nécessaire. Il ne reste plus qu'à observer que d'après la proposition 1.1.11, on a

$$0 = \lim_{t \rightarrow +\infty} d(\tilde{u}(t), \tilde{v}(t)) = B_{\tilde{u}(\infty)}(\tilde{u}(0), \tilde{v}(0)).$$

Cela implique que \tilde{u} et \tilde{v} sont basés sur le même horocycle centré en $\tilde{u}(\infty)$. \square

Définition du flot horocyclique sur une surface

Proposition 2.1.4. *Pour tous γ , \tilde{u} et t dans $PSL_2(\mathbb{R})$, $T^1\mathbb{H}$ et \mathbb{R} respectivement, on a*

$$\gamma h_t \tilde{u} = h_t \gamma \tilde{u}.$$

Démonstration. D'après la remarque 2.1.1, pour tout vecteur v de $T^1\mathbb{H}$ le vecteur h_tv a même direction que le vecteur v . Ainsi, les vecteurs $\gamma h_t \tilde{u}$ et $h_t \gamma \tilde{u}$ ont la même direction $\gamma \tilde{u}(\infty)$.

De plus, les vecteurs $\gamma h_t \tilde{u}$ et $h_t \gamma \tilde{u}$ sont basés sur le même horocycle puisque d'après la remarque 2.1.1, on a

$$B_{\gamma \tilde{u}(\infty)}(h_t \gamma \tilde{u}(0), \gamma h_t \tilde{u}(0)) = B_{\gamma \tilde{u}(\infty)}(\gamma \tilde{u}(0), \gamma h_t \tilde{u}(0)) = B_{\tilde{u}(\infty)}(\tilde{u}(0), h_t \tilde{u}(0)) = 0.$$

Il ne reste plus qu'à observer que h_t déplace le vecteur \tilde{u} le long de l'horocycle $\text{Ho}(\tilde{u}(\infty); \tilde{u}(0))$ dans le sens indiqué par le signe de t , et à distance $|t|$ pour la distance induite le long de cet horocycle. L'élément γ conservant les angles orientés, le point $\gamma h_t \tilde{u}(0)$ est bien à distance $|t|$ de $\gamma \tilde{u}(0)$ pour la distance induite sur $\text{Ho}(\gamma \tilde{u}(\infty))$, et dans le même sens que $h_t \gamma \tilde{u}(0)$. \square

Grâce à la proposition 2.1.4 nous pouvons définir le flot horocyclique sur un quotient $T^1S = \Gamma \backslash T^1\mathbb{H}$, avec Γ un groupe fuchsien : l'ensemble $h_t \Gamma \tilde{u}$ est égal à la classe $\Gamma h_t \tilde{u}$ de T^1S . Nous noterons à nouveau $h_{\mathbb{R}}$ ce flot.

Remarquons que par définition de la distance d sur S et $h_{\mathbb{R}}$ sur T^1S , la proposition 2.1.3 ne donne plus qu'une implication dans T^1S :

Proposition 2.1.5. *Soient u et v deux éléments de T^1S . Si $v \in h_{\mathbb{R}}u$, alors*
 $\lim_{t \rightarrow +\infty} d(u(t), v(t)) = 0.$

Démonstration. Il existe γ tel que $\gamma \tilde{v}$ appartient à $h_{\mathbb{R}}\tilde{u}$. On a alors

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} d(\tilde{u}(t), \gamma \tilde{v}(t)) = 0$$

d'après la proposition 2.1.3. Cela implique $\lim_{t \rightarrow +\infty} d(u(t), v(t)) = 0$. \square

2.2 Action duale du flot horocyclique

L'application vect que nous allons définir va permettre de traduire un résultat de convergence horocyclique sur une surface hyperbolique en un résultat de convergence d'une orbite linéaire dans \mathbb{R}^2 . Notons E le quotient de $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ par $\{\pm 1\}$. On considère l'application $\text{vect} : T^1\mathbb{H} \rightarrow E$ définie par

$$\text{vect}(\tilde{u}) = \begin{cases} \pm \exp\left(\frac{1}{2}B_{\tilde{u}(\infty)}(i, \tilde{u}(0))\right) / \sqrt{1 + \tilde{u}^2(\infty)} \begin{pmatrix} \tilde{u}(\infty) \\ 1 \end{pmatrix} & \text{si } \tilde{u}(\infty) \neq \infty \\ \pm \exp\left(\frac{1}{2}B_{\tilde{u}(\infty)}(i, \tilde{u}(0))\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{si } \tilde{u}(\infty) = \infty \end{cases}$$

Ceci définit une application continue et surjective. Plus précisément, pour tout élément \vec{u} de E , l'image réciproque $\text{vect}^{-1}(\vec{u})$ est une orbite horocyclique. En effet, si \tilde{u} et \tilde{v} appartiennent à $\text{vect}^{-1}(\vec{u})$, alors $\tilde{u}(\infty) = \tilde{v}(\infty)$ et $B_{\tilde{u}(\infty)}(i, \tilde{u}(0)) = B_{\tilde{v}(\infty)}(i, \tilde{v}(0))$. Ainsi, l'application vect est constante sur les trajectoires du flot horocyclique. Si \tilde{u} est un élément de $T^1\mathbb{H}$, nous noterons \vec{u} son image dans E par l'application vect .

Nous pouvons donc définir l'application vect sur le quotient de $T^1\mathbb{H}$ par les trajectoires horocycliques, c'est-à-dire sur le quotient $\text{PSL}_2(\mathbb{R})/N$. L'application vect définit alors une bijection de $\text{PSL}_2(\mathbb{R})/N$ vers E .

Notons maintenant que le groupe $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ agit linéairement sur E : pour un élément $\pm \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de E et $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$, on pose

$$\gamma \cdot \pm \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \pm \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}.$$

Les actions de $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ sur $T^1\mathbb{H}$ et de $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ sur E sont équivariantes. C'est-à-dire :

Proposition 2.2.1 (Proposition V.1.7, [Dal10]). *Pour tout γ dans $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ et \tilde{u} dans $T^1\mathbb{H}$, on a*

$$\text{vect}(\gamma\tilde{u}) = \gamma \cdot \text{vect}(\tilde{u}).$$

Voici maintenant la propositions que nous utiliserons pour l'expression linéaire de nos résultats.

Proposition 2.2.2. *Soit Γ un groupe fuchsien et $S := \Gamma \backslash \mathbb{H}$ la surface quotient. Soient \tilde{u} et \tilde{v} dans $T^1\mathbb{H}$, se projetant sur u et v dans T^1S , et soient \vec{u} et \vec{v} leurs images par l'application vect . Alors*

$$v \in \overline{h_{\mathbb{R}}u} \text{ si et seulement si } \vec{v} \in \overline{\Gamma\vec{u}}.$$

Démonstration. Le vecteur v appartient à $\overline{h_{\mathbb{R}}u}$ si et seulement si il existe une suite de temps $(t_n)_{\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} h_{t_n}u = v$. Ainsi, il existe une suite $(\gamma_n)_{\mathbb{N}}$ dans Γ telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n h_{t_n} \tilde{u} = \tilde{v}.$$

Comme l'application vect est continue, on obtient $\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{vect}(\gamma_n h_{t_n} \tilde{u}) = \vec{v}$. D'après la proposition 2.2.1, on a $\text{vect}(\gamma_n h_{t_n} \tilde{u}) = \gamma_n \text{vect}(h_{t_n} \tilde{u})$ pour tout n . Enfin, puisque vect est constante sur les trajectoires horocycliques, on a

2.3. PROPOSITION FONDAMENTALE POUR L'ÉTUDE DE LA
DYNAMIQUE TOPOLOGIQUE DU FLOT HOROCYCLIQUE

$\text{vect}(h_{t_n}\tilde{u}) = \text{vect}(\tilde{u}) = \vec{u}$ pour tout n . Ainsi, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n \vec{u} = \vec{v}$, c'est-à-dire que \vec{v} appartient à $\overline{\Gamma \vec{u}}$.

Réciproquement, si \vec{v} appartient à $\overline{\Gamma \vec{u}}$, alors il existe une suite $(\gamma_n)_{\mathbb{N}}$ dans Γ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n \vec{u} = \vec{v}$. Il existe donc une suite $(t_n)_{\mathbb{N}}$ telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} h_{t_n} \gamma_n \tilde{u} = \tilde{v},$$

ce qui conclut. □

2.3 Proposition fondamentale pour l'étude de la dynamique topologique du flot horocyclique

Dans cette section, Γ est un groupe fuchsien fixé et $S := \Gamma \backslash \mathbb{H}$ la surface quotient. Considérons une suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ d'éléments de T^1S convergeant vers un élément v de T^1S . La convergence de la suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ se traduit dans $T^1\mathbb{H}$ par l'existence d'une suite $(\gamma_n)_{\mathbb{N}}$ de Γ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n \tilde{u}_n = \tilde{v}$. C'est-à-dire, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n \tilde{u}_n(0) = \tilde{v}(0)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n \tilde{u}_n(\infty) = \tilde{v}(\infty)$.

Ainsi, pour une suite de temps $(t_n)_{\mathbb{N}}$, la suite $(h_{t_n} u_n)_{\mathbb{N}}$ converge vers v si et seulement si il existe une suite $(\gamma_n)_{\mathbb{N}}$ de $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n \tilde{u}_n(\infty) = \tilde{v}(\infty) \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n h_{t_n} \tilde{u}_n(0) = \tilde{v}(0). \quad (2.1)$$

Nous énonçons maintenant une condition plus pratique à étudier.

Proposition 2.3.1. *Il existe une suite de temps $(t_n)_{\mathbb{N}}$ telle que $h_{t_n} u_n$ converge vers v dans T^1S si et seulement si il existe une suite $(\gamma_n)_{\mathbb{N}}$ de $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ telle que les deux conditions suivantes soient vérifiées.*

- (i) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n \tilde{u}_n(\infty) = \tilde{v}(\infty)$.
- (ii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} B_{\tilde{u}_n(\infty)}(\gamma_n^{-1}i, \tilde{u}_n(0)) = B_{\tilde{v}(\infty)}(i, \tilde{v}(0))$.

Démonstration. D'après ce qui précède cet énoncé, nous devons montrer que les conditions (2.1) sont équivalentes aux conditions de la proposition 2.3.1. Commençons par supposer qu'il existe une suite $(\gamma_n)_{\mathbb{N}}$ de $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ satisfaisant les conditions (2.1). On peut écrire

$$B_{\tilde{u}_n(\infty)}(\gamma_n^{-1}i, \tilde{u}_n(0)) = B_{\gamma_n \tilde{u}_n(\infty)}(i, \gamma_n \tilde{u}_n(0)) = B_{\gamma_n \tilde{u}_n(\infty)}(i, \gamma_n h_{t_n} \tilde{u}_n(0)),$$

où la dernière égalité est obtenue en utilisant la remarque 2.1.1. D'après (2.1), le membre de droite converge vers $B_{\tilde{v}(\infty)}(i, \tilde{v}(0))$, ce qui conclut.

Pour le sens réciproque, quitte à conjuguer le groupe Γ dans $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$, nous pouvons supposer que $\tilde{v}(0) = i$. Alors,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} B_{\tilde{u}_n(\infty)}(\gamma_n^{-1}i, \tilde{u}_n(0)) = B_{\tilde{v}(\infty)}(i, \tilde{v}(0)) = 0. \quad (2.2)$$

Considérons la suite de temps $(t_n)_{\mathbb{N}}$ telle que pour tout n , le point $h_{t_n} \tilde{u}_n(0)$ appartienne à la géodésique passant par $\gamma_n^{-1}i$ et d'extrémité $\tilde{u}_n(\infty)$. Ainsi, $d(i, \gamma_n h_{t_n} \tilde{u}_n(0)) = d(\gamma_n^{-1}i, h_{t_n} \tilde{u}_n(0)) = \pm B_{\tilde{u}_n(\infty)}(\gamma_n^{-1}i, h_{t_n} \tilde{u}_n(0))$. Donc,

$$B_{\tilde{u}_n(\infty)}(\gamma_n^{-1}i, \tilde{u}_n(0)) = B_{\tilde{u}_n(\infty)}(\gamma_n^{-1}i, h_{t_n} \tilde{u}_n(0)) = \pm d(i, \gamma_n h_{t_n} \tilde{u}_n(0)).$$

Cette distance tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ d'après l'équation (2.2). D'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n h_{t_n} \tilde{u}_n(0) = i = \tilde{v}(0).$$

□

Supposons maintenant que l'on cherche à déterminer si un vecteur v appartient à l'adhérence $\overline{h_{\mathbb{R}}u}$. Dans ce cadre, la proposition précédente devient :

Proposition 2.3.2 (Proposition clé sur la convergence horocyclique). *Soient u et v deux éléments de T^1S où $S = \Gamma \backslash \mathbb{H}$. Le vecteur v appartient à l'adhérence $\overline{h_{\mathbb{R}}u}$ si et seulement si il existe une suite $(\gamma_n)_{\mathbb{N}}$ dans Γ telle que les deux conditions suivantes soient vérifiées.*

$$(i) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n \tilde{u}(\infty) = \tilde{v}(\infty).$$

$$(ii) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} B_{\tilde{u}(\infty)}(\gamma_n^{-1}i, \tilde{u}(0)) = B_{\tilde{v}(\infty)}(i, \tilde{v}(0)).$$

Notons de plus $(t_n)_{\mathbb{N}}$ une suite de temps telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} h_{t_n}u = v$. Alors la suite $(t_n)_{\mathbb{N}}$ peut être prise non bornée dans \mathbb{R} si et seulement si $h_{\mathbb{R}}u$ est périodique ou si les éléments γ_n peuvent être supposés tous distincts.

Démonstration. Si la suite $(t_n)_{\mathbb{N}}$ n'est pas bornée dans \mathbb{R} , nous supposons par l'absurde que $h_{\mathbb{R}}u$ n'est pas périodique et que les éléments $(\gamma_n)_{\mathbb{N}}$ ne peuvent pas être choisis tous distincts. En particulier, v appartient à $\overline{h_{\mathbb{R}}u} - h_{\mathbb{R}}u$ et il existe γ dans Γ tel que $\gamma_n = \gamma$ pour une infinité d'indices n . On obtient alors $\gamma \tilde{u}(\infty) = \tilde{v}(\infty)$ et $B_{\tilde{u}(\infty)}(\gamma^{-1}i, \tilde{u}(0)) = B_{\gamma \tilde{u}(\infty)}(i, \gamma \tilde{u}(0)) = B_{\tilde{v}(\infty)}(i, \tilde{v}(0))$. C'est-à-dire que les vecteur $\gamma \tilde{u}$ et \tilde{v} sont sur la même orbite horocyclique, et donc les vecteurs u et v aussi. Cela contredit le fait que v appartient à $\overline{h_{\mathbb{R}}u} - h_{\mathbb{R}}u$.

Réciproquement, si $h_{\mathbb{R}}u$ est périodique, alors $h_{\mathbb{R}}u$ est compacte et v appartient à $h_{\mathbb{R}}u$. En particulier, on peut considérer une suite de temps $(t_n)_{\mathbb{N}}$ non bornée telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} h_{t_n}u = v$. Sinon, si les éléments γ_n peuvent être supposés tous distincts, nous supposons par l'absurde que la suite $(t_n)_{\mathbb{N}}$ est bornée. Quitte à passer à une sous-suite, nous pouvons considérer un temps T tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = T$. On a donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} h_T \gamma_n \tilde{u} = \tilde{v}.$$

Puisque les éléments γ_n sont tous distincts, cela implique que tous les points $h_T \gamma_n \tilde{u}(0)$ sont distincts et convergent vers $\tilde{v}(0)$. Cela contredit le fait que Γ est un groupe discret. □

Récurrence

Définition 2.3.3. *Un élément u de T^1S est dit récurrent pour le flot horocyclique s'il existe une suite de temps $(t_n)_{\mathbb{N}}$ non bornée dans \mathbb{R} telle que*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} h_{t_n}u = u.$$

On dit aussi que l'orbite $h_{\mathbb{R}}u$ est récurrente.

Cette propriété se caractérise à l'aide de la proposition 2.3.1 :

2.4. LIENS ENTRE POINTS LIMITES, DEMI-GÉODÉSIIQUES ET ORBITES HOROCYCLIQUES

Corollaire 2.3.4. *Une orbite $h_{\mathbb{R}}u$ non périodique est récurrente si et seulement si il existe une suite d'éléments tous distincts $(\gamma_n)_{\mathbb{N}}$ de Γ telle que*

- (i) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n \tilde{u}(\infty) = \tilde{u}(\infty)$.
- (ii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} B_{\tilde{u}(\infty)}(\gamma_n^{-1}i, i) = 0$.

Démonstration. Supposons tout d'abord l'existence d'une telle suite $(\gamma_n)_{\mathbb{N}}$ de Γ . En observant que

$$B_{\tilde{u}(\infty)}(\gamma_n^{-1}i, i) = B_{\tilde{u}(\infty)}(\gamma_n^{-1}i, \tilde{u}(0)) - B_{\tilde{u}(\infty)}(i, \tilde{u}(0)),$$

nous déduisons de l'hypothèse (ii) que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} B_{\tilde{u}(\infty)}(\gamma_n^{-1}i, \tilde{u}(0)) = B_{\tilde{u}(\infty)}(i, \tilde{u}(0)).$$

En utilisant la proposition 2.3.2, nous obtenons une suite $(t_n)_{\mathbb{N}}$ non bornée dans \mathbb{R} telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n h_{t_n} \tilde{u} = \tilde{u}$.

Réciproquement, si l'orbite $h_{\mathbb{R}}u$ est récurrente, nous considérons une suite $(t_n)_{\mathbb{N}}$ non bornée dans \mathbb{R} telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} h_{t_n} u = u$. Puisque par hypothèse $h_{\mathbb{R}}u$ n'est pas périodique, la proposition 2.3.2 donne une suite $(\gamma_n)_{\mathbb{N}}$ d'éléments tous distincts de Γ telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n \tilde{u}(\infty) = \tilde{u}(\infty) \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} B_{\tilde{u}(\infty)}(\gamma_n^{-1}i, \tilde{u}(0)) = B_{\tilde{u}(\infty)}(i, \tilde{u}(0)).$$

Il suffit d'observer que $B_{\tilde{u}(\infty)}(\gamma_n^{-1}i, \tilde{u}(0)) = B_{\tilde{u}(\infty)}(\gamma_n^{-1}i, i) + B_{\tilde{u}(\infty)}(i, \tilde{u}(0))$ pour conclure. □

2.4 Liens entre points limites, demi-géodésiques et orbites horocycliques

2.4.1 Points paraboliques

L'ensemble limite parabolique se traduit en termes d'orbite horocyclique.

Proposition 2.4.1. *Une orbite $h_{\mathbb{R}}u$ est périodique si et seulement si $\tilde{u}(\infty)$ appartient à $L_p(\Gamma)$. En particulier, $\overline{h_{\mathbb{R}}u} = h_{\mathbb{R}}u$.*

Démonstration. Si $\tilde{u}(\infty)$ est parabolique, il existe γ une isométrie parabolique telle que $\gamma \tilde{u}(\infty) = \tilde{u}(\infty)$ et $\gamma \tilde{u}(0) \in \text{Ho}(\tilde{u}(\infty); \tilde{u}(0))$. Ainsi, il existe T tel que $\gamma \tilde{u} = h_T \tilde{u}$, c'est-à-dire, $u = h_T u$.

D'autre part, si u est $h_{\mathbb{R}}$ -périodique, il existe γ tel que $\gamma \tilde{u} = h_T \tilde{u}$ et $\gamma \tilde{u}(\infty) = \tilde{u}(\infty)$. Comme γ déplace $\tilde{u}(0)$ le long de l'horocycle $\text{Ho}(\tilde{u}(\infty); \tilde{u}(0))$, c'est une isométrie parabolique. □

Corollaire 2.4.2. *Si u est $h_{\mathbb{R}}$ -périodique, alors l'orbite $\Gamma \vec{u}$ est discrète.*

Démonstration. D'après la proposition 2.4.1, on a $\overline{h_{\mathbb{R}}u} = h_{\mathbb{R}}u$. Alors, d'après la proposition 2.2.2, on a

$$\overline{\Gamma \vec{u}} = \Gamma \vec{u}.$$

□

2.4.2 Ensemble non-errant du flot horocyclique

Nous tournons maintenant notre attention vers les points de $\mathbb{H}(\infty)$ qui n'appartiennent pas à $L(\Gamma)$. La proposition suivante montre que l'ensemble des éléments u de T^1S qui présentent une adhérence d'orbite horocyclique $\overline{h_{\mathbb{R}}u}$ potentiellement non triviale est l'ensemble des vecteurs dont un relevé dans \mathbb{H} pointe vers un point de $L(\Gamma)$ dans $\mathbb{H}(\infty)$.

Proposition 2.4.3. *Soient $S = \Gamma \backslash \mathbb{H}$ une surface hyperbolique u un élément de T^1S tel que $\tilde{u}(\infty)$ n'appartient pas à $L(\Gamma)$.*

(i) *L'orbite $h_{\mathbb{R}}u$ est fermée et non compacte.*

(ii) *Si v n'appartient pas à $h_{\mathbb{R}}u$, alors u n'appartient pas à l'adhérence de $h_{\mathbb{R}}v$.*

Démonstration. Puisque $\tilde{u}(\infty)$ n'appartient pas à $L(\Gamma)$, en particulier, $\tilde{u}(\infty)$ n'est pas parabolique. Ainsi, l'orbite $h_{\mathbb{R}}u$ n'est pas compacte (voir proposition 2.4.1 plus bas). Supposons maintenant qu'il existe un élément v de T^1S tel que v appartienne à $\overline{h_{\mathbb{R}}u} - h_{\mathbb{R}}u$. Puisque $v \notin h_{\mathbb{R}}u$, il existe une suite de temps divergente $(t_n)_{\mathbb{N}}$ telle que $h_{t_n}u$ converge vers v . Cela implique que la suite d'éléments $(\gamma_n)_{\mathbb{N}}$ dans Γ répondant aux conditions de la proposition 2.3.1 contient une infinité d'éléments distincts. Mais puisque les nombres $B_{\tilde{u}(\infty)}(\gamma_n^{-1}i, \tilde{u}(0))$ convergent dans \mathbb{R} , la suite de points $(\gamma_n^{-1}i)_{\mathbb{N}}$ contient un nombre infini d'éléments qui s'accumulent le long d'un horocycle centré en $\tilde{u}(\infty)$. Cela implique en particulier que $\tilde{u}(\infty)$ appartient à $L(\Gamma)$, ce qui est une contradiction.

Supposons maintenant que $u \in \overline{h_{\mathbb{R}}v} - h_{\mathbb{R}}v$. Alors, le même raisonnement que précédemment implique que $\tilde{v}(\infty)$ appartient à $L(\Gamma)$. Mais comme $L(\Gamma)$ est un ensemble fermé Γ -invariant, une suite $(\gamma_n \tilde{v}(\infty))_{\mathbb{N}}$ ne peut pas s'accumuler sur un point n'appartenant pas à $L(\Gamma)$. En particulier, elle ne peut pas converger vers $\tilde{u}(\infty)$. La propriété (i) de la proposition 2.3.2 permet d'aboutir à une contradiction. \square

En particulier, la proposition 2.2.2 implique que si $\tilde{u}(\infty) \notin L(\Gamma)$, alors l'orbite $\Gamma \vec{u}$ est discrète dans E .

Nous faisons maintenant le lien entre l'ensemble limite $L(\Gamma)$ et l'ensemble non-errant du flot horocyclique.

Définition 2.4.4. *L'ensemble non-errant d'un flot $\Phi : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ est l'ensemble des éléments x de X tels que pour tout voisinage ouvert V de x il existe une suite de temps $(t_n)_{\mathbb{N}}$ non-bornée telle que pour tout n on ait*

$$\Phi_{t_n} V \cap V \neq \emptyset.$$

On note cet ensemble Ω_{Φ} .

Il se trouve que l'ensemble non-errant du flot horocyclique correspond précisément à l'ensemble des u dans T^1S tels que $\tilde{u}(\infty)$ appartient à $L(\Gamma)$.

Proposition 2.4.5. *[Proposition V.2.11, [Dal10]] On a l'égalité d'ensembles :*

$$\Omega_h = \{u \in T^1S \mid \tilde{u}(\infty) \in L(\Gamma)\}.$$

Ainsi, lorsque nous étudierons la topologie d'une orbite horocyclique, nous nous restreindrons souvent à son ensemble non-errant Ω_h . Nous noterons par ailleurs $\overrightarrow{\Omega}_h$ l'image par l'application vect de l'ensemble Ω_h , c'est-à-dire :

$$\overrightarrow{\Omega}_h = \{\vec{u} \in E \mid \tilde{u}(\infty) \in L(\Gamma)\}.$$

2.4. LIENS ENTRE POINTS LIMITES, DEMI-GÉODÉSIIQUES ET ORBITES HOROCYCLIQUES

Notons aussi que d'après la proposition 2.4.3, si u appartient à Ω_h , alors $\overline{h_{\mathbb{R}}u}$ est inclus dans Ω_h .

2.4.3 Points horocycliques

Le théorème suivant traite les points limites horocycliques, ou de manière équivalente, les vecteurs u tels que la demi-géodésique $u(\mathbb{R}^+)$ n'est pas quasi-minimisante.

Théorème 2.4.6 ([Ebe77]). *Pour un élément u de T^1S , on a $\overline{h_{\mathbb{R}}u} = \Omega_h$ si et seulement si la demi-géodésique $u(\mathbb{R}^+)$ n'est pas quasi-minimisante. Ceci équivaut encore à $\tilde{u}(\infty) \in L_h(\Gamma)$.*

Ce théorème a un corollaire sur l'adhérence d'orbites horocycliques issues de demi-géodésiques quasi-minimisantes.

Corollaire 2.4.7. *Soit u dans T^1S tel que $u(\mathbb{R}^+)$ est quasi-minimisante. Si v appartient à $\overline{h_{\mathbb{R}}u}$, alors $v(\mathbb{R}^+)$ est quasi-minimisante.*

Démonstration du corollaire 2.4.7. Cela provient simplement du fait que $\overline{h_{\mathbb{R}}v} \subset \overline{h_{\mathbb{R}}u}$. En effet, supposons que $v(\mathbb{R}^+)$ ne soit pas quasi-minimisante. Alors d'après le théorème 2.4.6, on a $\overline{h_{\mathbb{R}}v} = \Omega_h \subset \overline{h_{\mathbb{R}}u}$. Toujours d'après le même théorème, cela contredit le fait que $u(\mathbb{R}^+)$ est quasi-minimisante. \square

Notons ici la proposition suivante qui permet de donner une version linéaire du théorème 2.4.6.

Proposition 2.4.8 ([Dal10], Lemme 3.2). *Soient $S = \Gamma \backslash \mathbb{H}$ une surface hyperbolique et u dans T^1S . Le point $\tilde{u}(\infty)$ appartient à $L_h(\Gamma)$ si et seulement si il existe une suite $(\gamma_n)_{\mathbb{N}}$ dans Γ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n \vec{u} = 0$.*

Théorème 2.4.9 (Version linéaire du théorème 2.4.6). *Soit Γ un groupe fuchsien et \vec{u} dans E tel que $\tilde{u}(\infty)$ appartienne à $L(\Gamma)$. Alors, $\overline{\Gamma \vec{u}} = \overrightarrow{\Omega}_h$ si et seulement si $0 \in \overline{\Gamma \vec{u}}$.*

2.4.4 Caractérisation de la finitude géométrique par les orbites horocycliques

En traduisant le théorème 1.3.2 et le corollaire 1.3.3 grâce au théorème 2.4.6, nous obtenons le résultat suivant.

Proposition 2.4.10. *La surface S est géométriquement infinie si et seulement si la restriction du flot horocyclique à son ensemble non-errant admet une orbite ni dense dans cet ensemble, ni périodique. De plus, une orbite horocyclique $h_{\mathbb{R}}u$ satisfait ces propriétés si et seulement si la demi-géodésique $u(\mathbb{R}^+)$ est quasi-minimisante et infinie.*

C'est ce type d'orbites, associées aux géodésiques quasi-minimisantes infinies, que nous étudierons dans le chapitre 3.

Chapitre 3

Rencontre entre $\overline{h_{\mathbb{R}}u}$ et $g_{\mathbb{R}}u$

Ce chapitre concerne l'étude topologique des orbites horocycliques associées aux demi-géodésiques quasi-minimisantes infinies. Nous avons vu au chapitre 2 (voir proposition 2.4.10) que ces orbites ne sont ni denses ni périodiques dans l'ensemble non errant Ω_h du flot horocyclique. Nous obtiendrons une première idée de leur allure à travers l'étude de l'intersection entre $\overline{h_{\mathbb{R}}u}$ et $g_{\mathbb{R}}u$ (voir Théorème A). Celui-ci repose sur l'étude des implications de la finesse asymptotique de la demi-géodésique $u(\mathbb{R}^+)$. Comme nous le verrons, l'étude de cette intersection est à la base de plusieurs résultats sur le flot horocyclique. Nous déduirons aussi du Théorème A une classe de surfaces hyperboliques sans ensemble minimaux pour le flot horocyclique.

Nous montrerons aussi (Théorème B) que bien que la finesse asymptotique d'une demi-géodésique $u(\mathbb{R}^+)$ a des conséquences sur l'intersection $\overline{h_{\mathbb{R}}u} \cap g_{\mathbb{R}}u$, elle ne suffit pas à la caractériser.

3.1 Effet de la finesse asymptotique sur la topologie horocyclique

3.1.1 Démonstration du Théorème A

On rappelle que si γ est une isométrie parabolique, on note γ^- ou γ^+ son unique point fixe dans $\mathbb{H}(\infty)$.

Théorème A. *Soit $S := \Gamma \backslash \mathbb{H}$ une surface hyperbolique géométriquement infinie, où Γ est un groupe fuchsien sans élément elliptique. Soit $u(\mathbb{R}^+)$ une demi-géodésique quasi-minimisante infinie de S .*

Alors, si $0 < \underline{\text{Inj}}(u(\mathbb{R}^+)) < +\infty$, il existe une suite de temps $(r_n)_{\mathbb{N}}$ convergant vers $+\infty$ telle que $g_{r_n}u \in \overline{h_{\mathbb{R}}u}$ pour tout n .

De plus, si $\underline{\text{Inj}}(u(\mathbb{R}^+)) = 0$, alors $g_{\mathbb{R}^+}u \subset \overline{h_{\mathbb{R}}u}$.

Considérons un relevé \tilde{u} de u dans $T^1\mathbb{H}$. A conjugaison près, on peut supposer que $\tilde{u}(0) = i$ et $\tilde{u}(\infty) = \infty$. Notons que $\tilde{u}(-\infty) = 0$.

Considérons un nombre réel r . D'après la proposition 2.3.2, l'élément $g_r u$ appartient à l'adhérence $\overline{h_{\mathbb{R}}u}$ si et seulement si l'on peut trouver une suite d'éléments $(\alpha_n)_{\mathbb{N}}$ dans Γ telle que

3.1. EFFET DE LA FINESSE ASYMPTOTIQUE SUR LA TOPOLOGIE HOROCYCLIQUE

- (i) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n \infty = \infty$.
- (ii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} B_\infty(\alpha_n^{-1}i, i) = B_\infty(i, \tilde{u}(r)) = r$.

L'objectif de notre démonstration est de construire les éléments α_n auxquels appliquer cette équivalence.

Considérons une suite de points $(\tilde{q}_n)_\mathbb{N}$ convergeant vers $\tilde{u}(\infty)$ le long de $[i, \infty) = [\tilde{u}(0), \tilde{u}(\infty))$ et une suite d'isométries $(\gamma_n)_\mathbb{N}$ dans Γ telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d(\tilde{q}_n, \gamma_n \tilde{q}_n) = \underline{\text{Inj}}(u(\mathbb{R}^+)).$$

S'il existe une isométrie γ telle que $\gamma = \gamma_n$ pour une infinité d'indices n , alors d'après les propositions 1.1.3 et 1.1.12, le fait que les distances $d(\tilde{q}_n, \gamma \tilde{q}_n)$ convergent impliquent que le point ∞ est fixé par γ . Mais par hypothèse, la demi-géodésique $u(\mathbb{R}^+)$ est quasi-minimisante infinie. C'est-à-dire que le point ∞ appartient à $L(\Gamma) - L_p(\Gamma) - L_h(\Gamma)$. En particulier, le point ∞ n'est pas fixé par une isométrie de Γ , donc on peut supposer que toutes les isométries γ_n sont différentes. Nous pouvons donc appliquer la proposition 1.5.3 pour obtenir

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n^- = \lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n^+ = \infty. \quad (3.1)$$

Quitte à passer à une sous-suite, on peut en particulier supposer que pour tout n , les points $0, \infty, \gamma_n^-$ et γ_n^+ sont tous distincts. On applique alors la proposition 1.1.18 et on suppose, quitte à remplacer certaines isométries γ_n par γ_n^{-1} , que pour tout n on a

$$0 \wr \gamma_n^{-1} 0 \wr \gamma_n^- \wr \infty.$$

Nous pouvons maintenant démontrer le lemme suivant.

Lemme 3.1.1. *Soient $\epsilon > 0$ et I un intervalle de \mathbb{R}^+ de longueur $l(I) = \underline{\text{Inj}}(u(\mathbb{R}^+)) + \epsilon$. Pour tous les entiers naturels n et k , on définit le nombre $r(n, k) = B_\infty(\gamma_n^{-k}i, i)$.*

Pour tout n suffisamment grand, il existe un entier naturel k_n tel que le nombre $r(n, k_n)$ appartient à I .

Démonstration. D'après la proposition clef 2 page 49, pour tout $j \geq 0$ on a

$$B_\infty(\gamma_n^{-j}i, \gamma_n^{-(j+1)}i) \leq d(\tilde{q}_n, \gamma_n \tilde{q}_n).$$

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(\tilde{q}_n, \gamma_n \tilde{q}_n) = \underline{\text{Inj}}(u(\mathbb{R}^+))$, si n est assez grand on a pour tout $j \geq 0$

$$B_\infty(\gamma_n^{-j}i, \gamma_n^{-(j+1)}i) \leq l(I). \quad (3.2)$$

Observons maintenant que l'on a la décomposition

$$r(n, k) = \sum_{l=0}^{k-1} B_\infty(\gamma_n^{-k+l}i, \gamma_n^{-k+l+1}i).$$

Ainsi, d'après (3.2), pour n assez grand, $r(n, k)$ est une somme de k termes tous plus petits que $l(I)$.

D'autre part, puisque la suite $(\gamma_n^{-k}i)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $\gamma_n^- \neq \infty$, pour tout n on a

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} B_\infty(\gamma_n^{-k}i, i) = \lim_{k \rightarrow +\infty} r(n, k) = +\infty.$$

Ainsi, si n est assez grand, $r(n, k)$ est une somme, de k termes tous plus petit que $l(I)$, qui converge vers $+\infty$ lorsque k tend vers $+\infty$. Il existe donc un entier naturel k_n tel que le nombre $r(n, k_n) := B_{\infty}(\gamma_n^{-k_n} i, i)$ appartient à l'intervalle I . \square

Quitte à prendre une sous-suite de $(\gamma_n)_{\mathbb{N}}$, on peut supposer que l'entier k_n donné par le lemme 3.1.1 existe pour tout n .

Preuve du théorème A. Fixons un nombre $\epsilon > 0$ et un intervalle I comme dans le lemme 3.1.1. Considérons la suite $(k_n)_{\mathbb{N}}$ donnée par ce même lemme et posons $\alpha_n := \gamma_n^{k_n}$ pour tout n dans \mathbb{N} .

Puisque l'on a supposé $0 \searrow \gamma_n^{-1} 0 \searrow \gamma_n^- \searrow \infty$, on a aussi $0 \searrow \gamma_n^+ \searrow \gamma_n \searrow \infty$ d'après la proposition 1.1.19. Comme $\alpha_n^+ = \gamma_n^+$, d'après la proposition 1.1.20, on a $0 \searrow \alpha_n^+ \searrow \alpha_n \searrow \infty$. Les réels α_n^+ et α_n ont donc le même signe et $|\alpha_n^+| < |\alpha_n|$. D'après les limites (3.1), on a donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n^+ = \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n^+ = \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \infty.$$

De plus, d'après le lemme 3.1.1, tous les nombre $r(n, k_n) = B_{\infty}(\gamma_n^{-k_n} i, i) = B_{\infty}(\alpha_n^{-1} i, i)$ appartiennent à l'intervalle I . La suite $(B_{\infty}(\alpha_n^{-1} i, i))_{\mathbb{N}}$ admet un point d'accumulation r dans I . Ainsi, $g_r u$ appartient à $\overline{h_{\mathbb{R}} u}$.

Considérons maintenant une partition $(I_l)_{\mathbb{N}}$ de \mathbb{R}^+ en intervalles tous de taille $\text{Inj}(u(\mathbb{R}^+)) + \epsilon$. On peut appliquer le même raisonnement que précédemment à chacun des intervalles I_l pour obtenir, pour tout l , un temps r_l dans l'intervalle I_l tel que $g_{r_l} u$ appartient à $\overline{h_{\mathbb{R}} u}$. Ceci conclut dans le cas $\text{Inj}(u(\mathbb{R}^+)) > 0$.

Si $\text{Inj}(u(\mathbb{R}^+)) = 0$, les intervalles I_l sont alors de taille $0 + \epsilon$ pour un $\epsilon > 0$ arbitrairement petit. En faisant tendre ϵ vers 0, on obtient bien que $g_{\mathbb{R}^+} u$ est inclus dans $\overline{h_{\mathbb{R}} u}$. \square

Nous déduisons du théorème A le corollaire suivant sur les adhérences $\overline{h_{\mathbb{R}} u}$.

Corollaire 3.1.2. *Soit $S := \Gamma \backslash \mathbb{H}$ une surface hyperbolique géométriquement infinie, où Γ est un groupe fuchsien sans élément elliptique. Soit $u(\mathbb{R}^+)$ une demi-géodésique quasi-minimisante infinie de S .*

Si la finesse asymptotique de $u(\mathbb{R}^+)$ est nulle, alors $\overline{h_{\mathbb{R}} u}$ est une réunion de double orbites $g_{\mathbb{R}^+} h_{\mathbb{R}} v$.

Démonstration. Soient v un élément dans $\overline{h_{\mathbb{R}} u}$ et t un temps strictement positif. Il existe une suite $(t_n)_{\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} h_{t_n} u = v$. Alors, $\lim_{n \rightarrow +\infty} g_t h_{t_n} u = g_t v$. D'après la propriété de quasi-commutativité des flots $g_{\mathbb{R}}$ et $h_{\mathbb{R}}$ (voir proposition 2.1.2), on peut trouver pour tout n un temps t'_n tel que

$$g_t h_{t_n} u = h_{t'_n} g_t u.$$

On a donc $\lim_n h_{t'_n} g_t u = g_t v$. Ainsi, $g_t v$ appartient à $\overline{h_{\mathbb{R}} g_t u}$. Or, d'après le théorème A, l'élément $g_t u$ appartient à $\overline{h_{\mathbb{R}} u}$. Donc $h_{\mathbb{R}} g_t u$ est inclus dans $\overline{h_{\mathbb{R}} u}$ et en passant à l'adhérence, on obtient $\overline{h_{\mathbb{R}} g_t u} \subset \overline{h_{\mathbb{R}} u}$, et $g_t v \in \overline{h_{\mathbb{R}} u}$, ce qui conclut. \square

Lorsque l'on traduit le théorème A et le corollaire 3.1.2 en utilisant l'action duale du flot horocyclique, nous obtenons :

Corollaire 3.1.3 (Dualité du théorème A et du corollaire 3.1.2). *Sous les hypothèses du théorème A, considérons le vecteur $\vec{u} = \text{vect}(\tilde{u})$ de $\overrightarrow{\Omega}_h$. On a :*

- (i) *si $0 < \text{Inj}(u(\mathbb{R}^+)) < +\infty$, alors il existe une suite de réels $(\lambda_n)_{\mathbb{N}}$ tous supérieurs ou égaux à 1 et convergeant vers $+\infty$ telle que $\lambda_n \vec{u}$ appartient à l'adhérence de $\Gamma \vec{u}$ pour tout n .*
- (ii) *Si $\text{Inj}(u(\mathbb{R}^+)) = 0$, alors pour tout \vec{v} dans $\overrightarrow{\Gamma \vec{u}}$, toute la demi-droite $(1 + \mathbb{R}^+) \vec{v}$ est incluse dans $\overrightarrow{\Gamma \vec{u}}$.*

A l'aide de la proposition 2.4.8, nous en déduisons l'existence d'orbites linéaires très particulières.

Corollaire 3.1.4. *Il existe un sous-groupe Γ discret de $SL_2(\mathbb{R})$ ayant une orbite dans \mathbb{R}^2 dont l'adhérence est une réunion de demi-droites vectorielles ne rencontrant pas un certain voisinage de 0.*

Démonstration. D'après le point (ii) du corollaire 3.1.3, il existe un groupe Γ dont l'adhérence d'une orbite $\Gamma \vec{u}$ s'écrit comme une réunion de demi-droites vectorielles. Si l'on choisit de plus un élément \vec{u} tel que $\tilde{u}(\infty)$ appartient à $L(\Gamma) - L_h(\Gamma)$, alors d'après la proposition 2.4.8, l'orbite $\Gamma \vec{u}$ ne rencontre pas un certain voisinage de 0. \square

Nous verrons au chapitre 4 que dans certains cas, ces demi-droites sont en quantité indénombrables.

3.2 Application à la minimalité

Considérons une surface hyperbolique $S := \Gamma \backslash \mathbb{H}$ et rappelons la définition suivante.

Définition 3.2.1. *Un sous-ensemble M de T^1S est dit minimal pour le flot horocyclique si pour tout u dans M , on a $\overline{h_{\mathbb{R}}u} = M$.*

Proposition 3.2.2. *Soit $S = \Gamma \backslash \mathbb{H}$ une surface géométriquement finie. Si l'ensemble $L_p(\Gamma)$ n'est pas vide, alors les seuls ensembles $h_{\mathbb{R}}$ -minimaux sont les orbites $h_{\mathbb{R}}$ -périodiques et les orbites horocycliques fermées non compactes. Sinon, l'ensemble Ω_h est le seul ensemble $h_{\mathbb{R}}$ -minimal avec les orbites fermées non compactes.*

Démonstration. D'après la proposition 1.3.2, puisque S est géométriquement finie, on a $L(\Gamma) = L_h(\Gamma) \cup L_p(\Gamma)$. Considérons un élément u de T^1S et supposons tout d'abord que l'ensemble $L_p(\Gamma)$ n'est pas vide. Si $\tilde{u}(\infty)$ appartient à $L_p(\Gamma)$, alors u est $h_{\mathbb{R}}$ -périodique et l'orbite $h_{\mathbb{R}}u$ constitue un ensemble $h_{\mathbb{R}}$ -minimal. Si $\tilde{u}(\infty)$ n'appartient pas à $L(\Gamma)$, c'est-à-dire si u n'appartient pas à l'ensemble non errant Ω_h , alors d'après la proposition 2.4.3 l'orbite $h_{\mathbb{R}}u$ est fermée non compacte, ce qui implique en particulier que l'orbite $h_{\mathbb{R}}u$ est $h_{\mathbb{R}}$ -minimal. Enfin, d'après le théorème 2.4.6, si $\tilde{u}(\infty)$ appartient à $L_h(\Gamma)$, alors $\overline{h_{\mathbb{R}}u} = \Omega_h$. En particulier, puisque $L_p(\Gamma)$ n'est pas vide, l'adhérence $\overline{h_{\mathbb{R}}u}$ contient une orbite périodique qui n'est donc pas dense dans $\overline{h_{\mathbb{R}}u}$. Cela implique que $\overline{h_{\mathbb{R}}u}$ n'est pas $h_{\mathbb{R}}$ -minimal.

En revanche, si l'ensemble $L_p(\Gamma)$ est vide, alors $L(\Gamma) = L_h(\Gamma)$ et pour tout u dans T^1S , on a $\overline{h_{\mathbb{R}}u} = \Omega_h$. Ainsi, Ω_h est $h_{\mathbb{R}}$ -minimal. \square

La proposition suivante donne un critère pour la recherche d'ensembles $h_{\mathbb{R}}$ -minimaux sur les surfaces géométriquement infinies.

Proposition 3.2.3. *Soient $S := \Gamma \backslash \mathbb{H}$ une surface hyperbolique géométriquement infinie et u dans Ω_h sur T^1S . Supposons qu'il existe $t_0 \neq 0$ tel que $g_{t_0}u$ appartient à $\overline{h_{\mathbb{R}}u}$. Alors $\overline{h_{\mathbb{R}}u}$ n'est pas un ensemble minimal pour le flot horocyclique.*

Démonstration. La démonstration repose sur l'observation suivante : si $\overline{h_{\mathbb{R}}u} = \Omega_h$, alors $\overline{h_{\mathbb{R}}u}$ n'est pas $h_{\mathbb{R}}$ -minimale. En effet, d'après la proposition 2.4.10, il existe v dans Ω_h tel que $\overline{h_{\mathbb{R}}v}$ est un fermé strictement inclus dans Ω_h .

Par hypothèse, il existe $t_0 \neq 0$ tel que l'intersection de $g_{t_0}\overline{h_{\mathbb{R}}u}$ avec $\overline{h_{\mathbb{R}}u}$ n'est pas vide. Nous allons montrer que ceci implique que si $\overline{h_{\mathbb{R}}u}$ est $h_{\mathbb{R}}$ -minimal, alors $\overline{h_{\mathbb{R}}u} = \Omega_h$. D'après l'observation faite juste avant, ceci est impossible, ce qui implique que $\overline{h_{\mathbb{R}}u}$ n'est pas $h_{\mathbb{R}}$ -minimal. Notons donc $F := \overline{h_{\mathbb{R}}u}$ et $G := F \cap g_{t_0}F$ et supposons par l'absurde que F est $h_{\mathbb{R}}$ -minimal.

Montrons en premier lieu que G est $h_{\mathbb{R}}$ -invariant. Pour cela, considérons un élément f dans G et s dans \mathbb{R} quelconque et montrons que $h_s f$ appartient à G . Soit f' dans F tel que $g_{t_0}f' = f$. D'une part, $h_s f \in F$ car F est $h_{\mathbb{R}}$ -invariant. D'autre part, $h_s f = h_s g_{t_0}f' = g_{t_0}h_{s'}f' \in g_{t_0}F$ pour un certain s' d'après la proposition 2.1.2. Ainsi, $h_s f$ appartient bien à G .

Comme G est un ensemble fermé et $h_{\mathbb{R}}$ -invariant, on en déduit que $\overline{h_{\mathbb{R}}f}$ est inclus dans G . Mais comme F est $h_{\mathbb{R}}$ -minimal, $\overline{h_{\mathbb{R}}f} = F$. Ainsi, $G = F$. On en déduit que $g_{t_0}F = F$ et par suite, pour tout entier k dans \mathbb{Z} , on a $g_{kt_0}F = F$. Cela implique en particulier que $g_{kt_0}f$ appartient à F pour tout entier k dans \mathbb{Z} . Considérons maintenant \vec{F} et \vec{f} les relevés de F et f dans $T^1\mathbb{H}$ et leurs images $\vec{F} = \text{vect}(\vec{F})$ et $\vec{f} = \text{vect}(\vec{f})$ dans E . Alors pour tout entier k dans \mathbb{Z} , le point $\exp(kt_0/2)\vec{f}$ appartient à \vec{F} , ce qui implique que 0 appartient à \vec{F} . D'après la proposition 2.4.8, cela implique que $\vec{f}(\infty) \in L_h(\gamma)$. Ainsi, d'après le théorème 2.4.6, $\overline{h_{\mathbb{R}}f} = F = \Omega_h$, ce qui conclut. \square

La proposition 3.2.3 a été utilisée par C. Lo et M. Gaye qui montrent dans [GL17] le résultat suivant.

Théorème 3.2.4 ([GL17]). *Soit $S = \Gamma \backslash \mathbb{H}$ une surface hyperbolique géométriquement infinie. Si $L(\Gamma) - L_h(\Gamma) - L_p(\Gamma)$ ne contient qu'un nombre dénombrable de points, alors T^1S n'admet pas d'ensemble minimal pour le flot horocyclique.*

La proposition 3.2.3 a d'autre part été utilisée par S. Matsumoto qui montre dans [Mat16] le résultat suivant.

Théorème 3.2.5 ([Mat16]). *Soit S une surface hyperbolique géométriquement infinie. S'il existe une constante $C > 0$ telle que toute demi-géodésique quasi-minimisante $u(\mathbb{R}^+)$ de S rencontre une suite de géodésiques fermées de longueurs toutes plus petites que C , alors T^1S n'admet pas d'ensemble minimal pour le flot horocyclique.*

Pour notre part, nous déduisons de la proposition 3.2.3 et du théorème A le résultat suivant.

Théorème 3.2.6. *Soit $S = \Gamma \backslash \mathbb{H}$ une surface hyperbolique géométriquement infinie telle que la finesse asymptotique de toutes les demi-géodésiques $u(\mathbb{R}^+)$ de S est finie. Alors, si Γ n'a pas d'isométrie parabolique, T^1S n'admet aucun sous-ensemble $h_{\mathbb{R}}$ -minimal.*

3.3. ÉTUDES D'ORBITES HOROCYCLIQUES SUR LES FLÛTES NON TORDUES

Démonstration. Soit u dans T^1S et \tilde{u} un relevé de u dans $T^1\mathbb{H}$. Par hypothèse, $\text{Inj}(u(\mathbb{R}^+)) < +\infty$. Ainsi, d'après la proposition 1.4.4, on sait que $\tilde{u}(\infty) \in L(\Gamma)$, et donc u appartient à Ω_h . Si $\tilde{u}(\infty)$ appartient à $L_h(\Gamma)$, alors $\overline{h_{\mathbb{R}}u} = \Omega_h$ et il existe $t_0 \neq 0$ tel que $g_{t_0}u \in \overline{h_{\mathbb{R}}u}$. D'après la proposition 3.2.3, cela implique que $\overline{h_{\mathbb{R}}u}$ n'est pas $h_{\mathbb{R}}$ -minimal.

Supposons maintenant que $\tilde{u}(\infty)$ n'appartient pas à $L_h(\Gamma)$. Par hypothèse, $\tilde{u}(\infty)$ appartient donc à $L(\Gamma) - L_h(\Gamma) - L_p(\Gamma)$ et on peut appliquer le théorème A. Il existe donc à nouveau $t_0 \neq 0$ tel que $g_{t_0}u \in \overline{h_{\mathbb{R}}u}$, ce qui conclut. \square

Notons ici que l'hypothèse de C. Lo et M. Gaye dans le théorème 3.2.4 permet de traiter le cas de certaines surfaces contenant des demi-géodésiques quasi-minimisantes infinies de finesse asymptotique infinie. Notre théorème ne traite pas ce cas-là mais est en revanche plus général si la surface ne contient pas de telles demi-géodésiques. Remarquons aussi que notre hypothèse est a priori plus générale que celle du théorème 3.2.5 de S. Matsumoto. Nous n'avons cependant pas d'exemple de surface S et de vecteur u dans T^1S tels que $\text{Inj}(u(\mathbb{R}^+)) < +\infty$ et $u(\mathbb{R}^+)$ ne rencontre pas une suite de géodésiques fermées de longueurs bornées supérieurement.

3.3 Études d'orbites horocycliques sur les flûtes non tordues

La flûte non tordue fine F_1 (définie page 39)

Proposition 3.3.1. *Sur le fibré unitaire de la flûte non tordue F_1 , l'adhérence $\overline{h_{\mathbb{R}}u_0}$ est une réunion de double orbites $g_{\mathbb{R}^+}h_{\mathbb{R}}v$.*

Démonstration. Il suffit de constater que $u_0(\mathbb{R}^+)$ satisfait les hypothèses du corollaire 3.1.2 d'après les propositions. \square

La flûte non tordue constante F_2 (définie page 39)

Considérons une demi-géodésique quasi-minimisante infinie $u(\mathbb{R}^+)$ dont la finesse asymptotique n'est pas nulle. Le théorème A ne permet pas de déterminer totalement l'intersection entre l'adhérence $\overline{h_{\mathbb{R}}u}$ et la demi-orbite $g_{\mathbb{R}^+}u$. La proposition suivante montre qu'il est possible que l'orbite $h_{\mathbb{R}}u$ ne soit pas récurrente. En particulier, cela implique que la demi-orbite $g_{\mathbb{R}^+}u$ n'est pas incluse dans $\overline{h_{\mathbb{R}}u}$. Cette proposition montre donc que dans le cadre du théorème A, l'intersection $\overline{h_{\mathbb{R}}u} \cap g_{\mathbb{R}^+}u$ peut différer selon que la finesse asymptotique de $u(\mathbb{R}^+)$ est nulle ou strictement positive.

Proposition 3.3.2. *Sur le fibré unitaire de la flûte non tordue constante F_2 , l'adhérence $\overline{h_{\mathbb{R}}u_0}$ contient une suite non bornée d'éléments $g_{r_n}u_0$ et ne contient pas la demi-orbite $g_{\mathbb{R}^+}u_0$ entière.*

Démonstration. Observons tout d'abord que l'on a $\text{Im}(\gamma i) \leq \frac{1}{4}$ pour tout γ dans Γ différent de l'identité (voir [Sta95]). Cela implique en particulier que pour un élément γ différent de l'identité, on a $B_{\infty}(\gamma^{-1}i, i) \geq \ln(4)$. Ainsi, d'après le corollaire 2.3.4, l'orbite $h_{\mathbb{R}}u$ n'est pas récurrente. On en déduit directement que la demi-orbite géodésique $g_{\mathbb{R}^+}u_0$ n'est pas incluse dans $\overline{h_{\mathbb{R}}u_0}$. \square

Nous verrons cependant dans la section 3.4 (Théorème B) que l'on peut construire une flûte tordue sur laquelle il y a une demi-géodésique $u(\mathbb{R}^+)$ quasi-minimisante infinie telle que $\underline{\text{Inj}}(u(\mathbb{R}^+)) > 0$ et $g_{\mathbb{R}^+}u \subset \overline{h_{\mathbb{R}}u}$.

La flûte non tordue épaisse F_3 (définie page 39)

Les proposition 3.3.3 et 3.3.4 traitent du cas où la finesse asymptotique d'une demi-géodésique quasi-minimisante infinie $u(\mathbb{R}^+)$ est infinie. Comme nous allons le voir, l'orbite $h_{\mathbb{R}}u$ peut être fermée ou non fermée selon les cas.

Proposition 3.3.3. *Sur le fibré unitaire de la flûte non tordue épaisse F_3 , la demi-géodésique $u_0(\mathbb{R}^+)$ est quasi-minimisante infinie et de finesse asymptotique infinie, et l'orbite horocyclique $h_{\mathbb{R}}u_0$ est fermée et non compacte.*

Démonstration. En effet, d'après [Sta95], pour toute suite d'éléments $(\gamma_n)_{\mathbb{N}}$ tous distincts dans Γ , on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} B_{\infty}(\gamma_n^{-1}i, i) = +\infty.$$

D'après la proposition 2.3.2, cela implique que l'orbite horocyclique satisfait $\overline{h_{\mathbb{R}}u} = h_{\mathbb{R}}u$. \square

La flûte non tordue F_4 (définie page 39)

Proposition 3.3.4. *Sur le fibré unitaire de la flûte non tordue F_4 , la demi-géodésique $u_0(\mathbb{R}^+)$ est quasi-minimisante infinie et de finesse asymptotique infinie, et l'orbite horocyclique $h_{\mathbb{R}}u_0$ n'est pas fermée.*

Démonstration. Notons \tilde{v} l'élément de T^1F_4 tel que son relevé \tilde{v} soit basé en i et dirigé vers 0. C'est-à-dire que v est le vecteur opposé à u . Nous allons montrer que v appartient à $\overline{h_{\mathbb{R}}u} - h_{\mathbb{R}}u$.

Observons que pour tout n , on a $\gamma_n^{-1}i = p_n$. Ainsi, $B_{\infty}(\gamma_n^{-1}i, i) = \epsilon_n$. Donc la suite d'éléments tous différents $(\gamma_n)_{\mathbb{N}}$ satisfait :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} B_{\infty}(\gamma_n^{-1}i, i) = 0.$$

Par ailleurs, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n \infty = 0.$$

D'après la proposition 2.3.2, cela implique bien que v appartient à $\overline{h_{\mathbb{R}}u}$. \square

3.4 Démonstration du théorème B

Reprenons l'énoncé de F. Ledrappier ([Led97]) page 8 que nous avons traduit dans notre situation ainsi :

S'il existe $C > 0$ tel que $\text{Inj}(x) \geq C$ pour tout x dans S , alors si une demi-géodésique $u(\mathbb{R}^+)$ est quasi-minimisante, l'orbite $h_{\mathbb{R}}u$ est localement fermée et non récurrente.

D'après cet énoncé, le résultat de la proposition 3.3.2 ne serait pas propre à la flûte F_2 et se généraliserait à toute demi-géodésique $u(\mathbb{R}^+)$ quasi-minimisante infinie de finesse asymptotique sur une surface S strictement positive. L'idée développée dans la démonstration de cet énoncé est la suivante. Si l'on considère

FIGURE 3.1 – Tour avec un angle



un couple (u, v) en position $(\star\star)$ de T^1S associé à un triplet $(\tilde{u}, \tilde{v}, \gamma)$ en position $(\star\star)$, alors le temps pris par $v(\mathbb{R}^+)$ pour faire un tour autour de γ par rapport à $u(\mathbb{R}^+)$ dépend de la longueur $l(\gamma)$. Ce temps pris semble à priori ne pas pouvoir être arbitrairement petit si la longueur $l(\gamma)$ n'est pas arbitrairement petite. Cela implique en particulier d'après le corollaire 2.3.4 que l'horocycle $h_{\mathbb{R}}u$ ne peut être récurrent. Mais ce raisonnement est faux : on a vu (corollaire 1.5.5) que le temps pris par $v(\mathbb{R}^+)$ pour faire un tour autour de γ par rapport à $u(\mathbb{R}^+)$ est compris entre $-l(g)$ et $l(g)$. Or, la valeur exacte de ce temps pris dépend de l'angle d'intersection entre la demi-géodésique $u(\mathbb{R}^+)$ et la projection de l'axe de γ sur S . Ce phénomène est représenté sur la photographie de la figure 3.1. Celle-ci représente une partie d'une flûte hyperbolique, composée de trois pantalons hyperboliques recollés le long de géodésiques fermées simples que nous appellerons γ_1 et γ_2 (ce sont les géodésiques séparant chacun des blocs). Notons $u(\mathbb{R}^+)$ la demi-géodésique représentée par la corde rouge et $v(\mathbb{R}^+)$ la demi-géodésique représentée par la corde noire. Alors nous pouvons observer que la demi-géodésique $v(\mathbb{R}^+)$ fait deux tours sur la surface (autour de γ_1 et γ_2) par rapport à $u(\mathbb{R}^+)$. Cependant, les deux morceaux des demi-géodésiques représentés ici sont de même longueur. Autrement dit, le temps pris par la demi-géodésique $v(\mathbb{R}^+)$ pour faire ces deux tours par rapport à $u(\mathbb{R}^+)$ est nul.

Nous allons nous servir de cette idée pour prouver le théorème B en construisant une surface sur laquelle une demi-géodésique $u(\mathbb{R}^+)$ rencontre une infinité de géodésiques fermées de longueurs toutes plus grande qu'une constante strictement positive fixée (pour que la finesse asymptotique de $u(\mathbb{R}^+)$ soit strictement positive), mais avec des angles variant de sorte que le temps pris pour tourner autour de ces géodésiques fermées puisse être arbitrairement petit.

La surface que nous obtiendrons est une flûte tordue (définition 1.4.6) sur laquelle le rayon d'injectivité est partout plus grand qu'une constante strictement positive. Sur celle-ci, le vecteur u est tel que la demi-géodésique $u(\mathbb{R}^+)$ est quasi-minimisante infinie et l'adhérence $\overline{h_{\mathbb{R}}u}$ contient $g_{\mathbb{R}^+}u$.

Théorème B. *Il existe une surface hyperbolique géométriquement infinie S ayant un rayon d'injectivité partout supérieur à une constante $C > 0$ et un vecteur $u \in \Omega_h$ sur T^1S tel que :*

- (i) $u(\mathbb{R}^+)$ est quasi-minimisante.
- (ii) $g_{\mathbb{R}^+}u \subset \overline{h_{\mathbb{R}}u}$.
- (iii) $C \leq \text{Inj}(u(\mathbb{R}^+)) < +\infty$.

En particulier, l'orbite $h_{\mathbb{R}}u$ est récurrente et pas localement fermée.

Démonstration. Considérons, pour tout nombre rationnel $q \in [4, +\infty[$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'isométrie hyperbolique :

$$g_{q,n} := \begin{pmatrix} \sqrt{q} & (1-q)r_n \\ -\frac{1}{r_n} & \sqrt{q} \end{pmatrix}$$

où $(r_n)_{\mathbb{N}}$ est la suite de nombres réels définie par :

$$\begin{cases} r_1 = 2 \\ r_n = 3r_{n-1}, \forall n \geq 2. \end{cases}$$

Observons ici que pour la valeur $q = 4$, nous retrouvons les isométries qui engendrent la flûte non tordue constante F_2 . Soit maintenant une première famille d'isométries

$$\mathcal{I}_1 := \{g_{q,n}, q \in \mathbb{Q} \cap [4, +\infty[, n \in \mathbb{N}^*\}.$$

On conjugue ensuite les isométries $g_{4,n}$ par les isométries $T_{q,n} := \begin{pmatrix} 1 & t_{q,n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, où q est un nombre rationnel dans $]1, 4[$, n un entier naturel strictement positif, et $t_{q,n} := -r_n(\sqrt{q} - 2)$. On pose :

$$\begin{aligned} h_{q,n} &:= T_{q,n}^{-1}g_{4,n}T_{q,n} \\ &= \begin{pmatrix} 4 - \sqrt{q} & r_n[(\sqrt{q} - 2)^2 - 3] \\ -\frac{1}{r_n} & \sqrt{q} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On définit alors une deuxième famille d'isométries

$$\mathcal{I}_2 := \{h_{q,n}, q \in \mathbb{Q} \cap]1, 4[, n \in \mathbb{N}^*\}.$$

Enfin, nous réunissons ces deux familles en posant

$$\mathcal{I} := \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2 = \{f_{q,n}, q \in \mathbb{Q} \cap]1, +\infty[, n \in \mathbb{N}^*\},$$

où pour tout q dans $\mathbb{Q} \cap]1, +\infty[$ et pour tout n dans \mathbb{N}^* l'isométrie $f_{q,n}$ est définie par :

- $f_{q,n} := h_{q,n}$ si $q \in \mathbb{Q} \cap]1, 4[$,
- $f_{q,n} := g_{q,n}$ si $q \in \mathbb{Q} \cap [4, +\infty)$.

Nous allons montrer que l'on peut choisir une infinité d'éléments γ_n dans \mathcal{I} vérifiant les deux points suivants.

- (i) Si $k \neq l$, alors $(\mathbb{H}_i^c(\gamma_k^{-1}) \cup \mathbb{H}_i^c(\gamma_k)) \cap (\mathbb{H}_i^c(\gamma_l^{-1}) \cup \mathbb{H}_i^c(\gamma_l)) = \emptyset$.

(ii) Pour tout rationnel $q > 1$ fixé, il existe une infinité d'éléments γ_n appartenant au sous-ensemble $\{f_{q,m} \mid m > 0\}$ de \mathcal{I} .

Le groupe engendré par ces éléments γ_n sera alors discret d'après la proposition 1.2.12. Nous allons pouvoir choisir de tels éléments γ_n grâce à la proposition suivante. Pour tout isométrie hyperbolique γ , notons $c(\gamma)$ le centre dans $\mathbb{H}(\infty)$ de la médiatrice $\partial\mathbb{H}_i(\gamma)$ vue comme demi-cercle euclidien et $e_1(\gamma)$ et $e_2(\gamma)$ ses extrémités dans $\mathbb{H}(\infty)$, avec $|e_1(\gamma)| < |e_2(\gamma)|$.

Proposition 3.4.1. *Pour tout rationnel q dans $]1, +\infty[$, on a :*

- (i) $\lim_{n \rightarrow +\infty} c(f_{q,n}) = -\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} c(f_{q,n}^{-1}) = +\infty$,
- (ii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} e_l(f_{q,n}) = -\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} e_l(f_{q,n}^{-1}) = +\infty$ pour $l = 1, 2$,
- (iii) pour tout entier naturel $n > 1$, la médiatrice $\partial\mathbb{H}_i(f_{q,n}^{-1})$ ne rencontre pas l'hypercycle $H := \text{Hy}(0, \infty; 1 + 2i/\sqrt{5})$ d'extrémités 0 et ∞ et passant par $1 + 2i/\sqrt{5}$.

La démonstration de cette proposition étant purement calculatoire, nous la reportons à la section 3.5 pour plus de lisibilité.

Considérons maintenant n'importe quelle bijection $\psi : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{Q} \cap]1, +\infty[\times \mathbb{N}$ et $(q_m, \psi_2(m)) = \psi(m)$ les deux coordonnées de $\psi(m)$. On peut donc écrire

$$\mathcal{I} = \{f_{q_m, \psi_2(m)}, m \in \mathbb{N}\},$$

qui est maintenant une famille indexée par \mathbb{N} . Notons bien que pour chaque rationnel $q \in]1, +\infty[$, il y a une infinité d'entiers m tels que $f_{q_m, \psi_2(m)} = f_{q, \psi_2(m)}$. On définit maintenant une constante $C > 0$ par

$$2C = d((0, \infty), H),$$

où H est l'hypercycle $H = \text{Hy}(0, \infty; 1 + 2i/\sqrt{5})$ d'extrémités 0 et ∞ passant par $1 + i(2/\sqrt{5})$.

Construction des éléments γ_n . Posons $\gamma_0 = f_{q_0, \psi(0)}$. Ensuite, pour tout $m \geq 1$, on définit $\gamma_m = f_{q_m, \psi(n_m)}$, où n_m est le plus petit entier parmi les entiers $p > 0$ satisfaisant les trois propriétés suivantes.

1. $|e_1(f_{q_m, p})| > |e_2(\gamma_{m-1})|$, et $|e_1(f_{q_m, p}^{-1})| > |e_2(\gamma_{m-1}^{-1})|$.
2. $d(\partial\mathbb{H}_i(f_{q_m, p}), \partial\mathbb{H}_i(f_{q_m, p}^{-1})) \geq 2C$
3. $d(\partial\mathbb{H}_i(f_{q_m, p}), \partial\mathbb{H}_i(\gamma_s^{\pm 1})) \geq C$ et $d(\partial\mathbb{H}_i(f_{q_m, p}^{-1}), \partial\mathbb{H}_i(\gamma_s^{\pm 1})) \geq C$ pour tout entier $s < m$.

Les point 1. et 3. proviennent directement du point (ii) de la proposition 3.4.1. Pour le point 2., on remarque que tous les points de la médiatrice $\partial\mathbb{H}_i(f_{q_m, p})$ ont une partie réelle positive par construction et qu'elle ne rencontre pas H d'après le point (iii) de la proposition 3.4.1. Comme la médiatrice $\partial\mathbb{H}_i(f_{q_m, p}^{-1})$ a tous ses points de partie réelle négative, on en déduit

$$d(\partial\mathbb{H}_i(f_{q_m, p}), \partial\mathbb{H}_i(f_{q_m, p}^{-1})) > d((0, \infty), H) = 2C.$$

On pose maintenant $\Gamma := \langle \gamma_m, m \in \mathbb{N} \rangle$. D'après la proposition 1.2.12, le groupe Γ est discret. Nous allons montrer que la surface $S = \Gamma \backslash \mathbb{H}$ répond au théorème B.

D'après la proposition 1.2.12, le domaine de Dirichlet de Γ centré en i est :

$$D_i(\Gamma) = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \mathbb{H}_i(\gamma_m) \cap \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \mathbb{H}_i(\gamma_m^{-1}).$$

Fixons \tilde{u} dans $T^1\mathbb{H}$ défini par $\tilde{u}(0) = i$ et $\tilde{u}(\infty) = \infty$ et considérons sa projection u dans $T^1S := \Gamma \backslash (T^1\mathbb{H})$. Puisque le point ∞ appartient à $D_i(\Gamma)(\infty)$, la demi-géodésique $u(\mathbb{R}^+)$ est quasi-minimisante d'après la proposition 1.2.11. Le point (i) du théorème B est donc vérifié.

Le point (ii) du théorème B repose sur la proposition 2.3.2. Par définition des éléments $f_{q,n}$, on a

$$f_{q,n}^{-1}\infty = \begin{cases} -r_n\sqrt{q} & \text{si } q \geq 4 \\ r_n(\sqrt{q} - 4) & \text{si } q < 4. \end{cases}$$

Ainsi, pour tout rationnel $q > 1$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_{q,n}^{-1}\infty = \infty. \quad (3.3)$$

De plus, puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Im}(f_{q,n}(i)) = 1/q$ pour tout $q > 1$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} B_{\infty}(f_{q,n}(i), i) = B_{\infty}\left(\frac{i}{q}, i\right) = |\ln(q)|. \quad (3.4)$$

Rappelons que pour tout $q \in \mathbb{Q} \cap]1, +\infty[$, il y a une infinité d'éléments $f_{q,n}$ dans Γ . Ainsi, en appliquant la proposition 2.3.2 avec (3.3) et (3.4), on obtient que tous les éléments $g_{|\ln(q)|}u$ appartiennent à $\overline{h_{\mathbb{R}}u}$. D'où le point (ii) du théorème B.

Prenons maintenant un point z dans $D_i(\Gamma)$ quelconque et un élément $\gamma = \gamma_{m_1}^{i_1} \dots \gamma_{m_k}^{i_k}$ dans Γ différent de l'identité quelconque, écrit comme mot réduit en les générateurs γ_m de Γ . Pour tout entier $l < k - 1$, on a donc $m_l \neq m_{l+1}$. Si $k = 1$, alors $\gamma = \gamma_{m_1}^{i_1}$ et le point γz appartient à $\mathbb{H}_i(\gamma_{m_1}^{i_1})$. Ainsi

$$\begin{aligned} d(z, \gamma z) &= d(z, \gamma^{-1}z) \\ &\geq \max(d(z, \partial\mathbb{H}_i(\gamma_{m_1})), d(z, \partial\mathbb{H}_i(\gamma_{m_1}^{-1}))) \end{aligned}$$

Comme $d(\partial\mathbb{H}_i(\gamma_{m_1}), \partial\mathbb{H}_i(\gamma_{m_1}^{-1})) \geq 2C$ par hypothèse, on obtient $d(z, \gamma z) \geq C$.

Si $k > 1$, alors le point $\gamma_{m_1}^{-i_1}z$ appartient à $\mathbb{H}_i(\gamma_{m_1}^{-i_1})$ et le point $\gamma_{m_2}^{i_2} \dots \gamma_{m_k}^{i_k}z$ appartient à $\mathbb{H}_i(\gamma_{m_2}^{i_2})$. Ainsi,

$$\begin{aligned} d(z, \gamma z) &= d(z, \gamma_{m_1}^{i_1} \dots \gamma_{m_k}^{i_k} z) = d(\gamma_{m_1}^{-i_1}z, \gamma_{m_2}^{i_2} \dots \gamma_{m_k}^{i_k} z) \\ &\geq d(\partial\mathbb{H}_i(\gamma_{m_1}^{-i_1}), \partial\mathbb{H}_i(\gamma_{m_2}^{i_2})) \\ &\geq C. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que le rayon d'injectivité sur S est partout plus grand que C . Par ailleurs, la demi-géodésique $[i, \infty)$ croise tous les axes des éléments γ_n puisque les points γ_n^- et γ_n^+ sont de signes opposés et convergent vers ∞ dans $\mathbb{H}(\infty)$. Donc, en particulier, elle croise tous les axes des éléments $f_{4,n}$. D'après la proposition 1.1.2, tous les éléments $f_{4,n}$ ont la même longueur de translation. Ainsi, la finesse asymptotique de $u(\mathbb{R}^+)$ est finie, ce qui termine la démonstration du point (iii) du théorème B. \square

3.5 Démonstration de la proposition 3.4.1

Nous aurons besoin du lemme de géométrie euclidienne suivant.

Lemme 3.5.1. *Soit \mathcal{C} un cercle euclidien centré sur la droite réelle \mathbb{R} , de centre c et de rayon r . Alors, si $r < 2/3c$, le cercle \mathcal{C} ne croise pas la droite euclidienne \mathcal{D} d'équation $y = 2/\sqrt{5}x$.*

Démonstration. Supposons qu'il existe un point (x, y) appartenant à $\mathcal{C} \cap \mathcal{D}$. Alors

$$(x - c)^2 + \frac{4}{5}x^2 = r^2.$$

Ainsi,

$$\frac{9}{5}x^2 - 2xc + c^2 - r^2 = 0.$$

Le discriminant de cette équation est

$$\begin{aligned} \Delta &= 4c^2 - \frac{36}{5}(c^2 - r^2) = -\frac{16}{5}c^2 + \frac{36}{5}r^2 \\ &< -\frac{16}{5}c^2 + \frac{36}{5} \cdot \frac{4}{9}c^2 < 0. \end{aligned}$$

□

Démonstration de la proposition 3.4.1 : Nous allons travailler séparément sur les deux familles \mathcal{I}_1 et \mathcal{I}_2 constituant \mathcal{I} et nous isolerons donc le cas $q \in]1, 4[$ du cas $q \in]4, +\infty[$.

Premier cas : on fixe $q \in [4, +\infty)$. On a

$$\begin{aligned} f_{q,n}i &= \frac{i\sqrt{q} + (1-q)r_n}{-\frac{i}{r_n} + \sqrt{q}} \\ &= \frac{((1-q)r_n + i\sqrt{q})(\sqrt{q} + \frac{i}{r_n})}{q + \frac{1}{r_n^2}} \\ &= \frac{\sqrt{q}(1-q)r_n - \frac{\sqrt{q}}{r_n}}{q + \frac{1}{r_n^2}} + i \frac{1}{q + \frac{1}{r_n^2}}. \end{aligned}$$

On pose $f_{q,n}i = R_{q,n} + iI_{q,n}$, avec

$$R_{q,n} = \frac{\sqrt{q}(1-q)r_n - \frac{\sqrt{q}}{r_n}}{q + \frac{1}{r_n^2}} \text{ et } I_{q,n} = \frac{1}{q + \frac{1}{r_n^2}}.$$

Notons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = +\infty$ et que $(1-q)/\sqrt{q}$ est non nul puisque $q > 1$. Ainsi, lorsque n tend vers $+\infty$, on a les équivalences

$$R_{q,n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} r_n \frac{(1-q)}{\sqrt{q}} \text{ et } I_{q,n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{q}.$$

La proposition 1.1.6 donne alors l'équivalence suivante :

$$c(f_{q,n}) = -\frac{R_{q,n}}{I_{q,n} - 1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -r_n \sqrt{q}.$$

Les centres $c(f_{q,n})$ des médiatrices $\partial\mathbb{H}_i(f_{q,n})$ convergent donc bien vers $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Étudions maintenant les rayon euclidiens $r(f_{q,n})$ de ces médiatrices. On a :

$$r(f_{q,n}) = \sqrt{I_{q,n}} \left(1 + \frac{R_{q,n}^2}{(I_{q,n} - 1)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{q}} \frac{R_{q,n}}{I_{q,n} - 1} = -\frac{1}{\sqrt{q}} c(f_{q,n}) \quad (3.5)$$

Ainsi,

$$e_1(f_{q,n}) = c(f_{q,n}) + r(f_{q,n}) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} r_n(1 - \sqrt{q}).$$

Puisque $|e_2(f_{q,n})| > |e_1(f_{q,n})|$, les extrémités $e_l(f_{q,n})$ des médiatrices $\partial\mathbb{H}_i(f_{q,n})$ convergent vers $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$ pour $l = 1, 2$.

Étudions maintenant la médiatrice $\partial\mathbb{H}_i(f_{q,n}^{-1})$. On a :

$$f_{q,n}^{-1}i = \frac{\sqrt{q}(q-1)r_n + \frac{\sqrt{q}}{r_n}}{q + \frac{1}{r_n^2}} + i \frac{1}{q + \frac{1}{r_n^2}}.$$

La partie réelle de $f_{q,n}^{-1}i$ est l'opposée de celle de $f_{q,n}i$ et leurs parties imaginaires sont égales, donc les géodésiques $\partial\mathbb{H}_i(f_{q,n}^{-1})$ et $\partial\mathbb{H}_i(f_{q,n})$ sont symétriques par rapport à l'axe imaginaire. On déduit maintenant de l'équation (3.5) que pour tout n suffisamment grand, puisque q appartient à $[4, \infty[$, on a

$$|r(f_{q,n})| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{q} c(f_{q,n}) \leq \frac{2}{3} |c(f_{q,n})|.$$

Ainsi, d'après le lemme 3.5.1, cela implique que la géodésique $\partial\mathbb{H}_i(f_{q,n}^{-1})$ ne rencontre pas l'hypercycle $H = \text{Hy}(0, \infty; 1 + 2i/\sqrt{5})$.

Deuxième cas : on fixe $q \in \mathbb{Q} \cap]1, 4[$. On a

$$\begin{aligned} f_{q,n}i &= \frac{(4 - \sqrt{q})i + r_n((\sqrt{q} - 2)^2 - 3)}{-\frac{i}{r_n} + \sqrt{q}} \\ &= \frac{((4 - \sqrt{q})i + r_n((\sqrt{q} - 2)^2 - 3))(\sqrt{q} + \frac{i}{r_n})}{q + \frac{1}{r_n^2}} \\ &= \frac{r_n\sqrt{q}((\sqrt{q} - 2)^2 - 3) - \frac{1}{r_n}(4 - \sqrt{q})}{q + \frac{1}{r_n^2}} + i \frac{1}{q + \frac{1}{r_n^2}}. \end{aligned}$$

On pose $f_{q,n}i = R_{q,n} + iI_{q,n}$, avec

$$R_{q,n} := \frac{r_n\sqrt{q}((\sqrt{q} - 2)^2 - 3) - \frac{1}{r_n}(4 - \sqrt{q})}{q + \frac{1}{r_n^2}}$$

et

$$I_{q,n} = \frac{1}{q + \frac{1}{r_n^2}}.$$

Comme $q \in]1, 4[$, le nombre $\sqrt{q}((\sqrt{q} - 2)^2 - 3)$ est non nul. On a donc les équivalences

$$R_{q,n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} r_n \frac{(\sqrt{q} - 2)^2 - 3}{\sqrt{q}} \quad \text{et} \quad I_{q,n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{q}.$$

3.5. DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION ??

La proposition 1.1.6 donne alors l'équivalence suivante.

$$c(f_{q,n}) = -\frac{R_{q,n}}{I_{q,n} - 1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -r_n \sqrt{q} \frac{(\sqrt{q} - 2)^2 - 3}{1 - q}.$$

Une étude de fonction montre que la constante $\sqrt{q}((\sqrt{q} - 2)^2 - 3)/(1 - q)$ est supérieure ou égale à 2. Ainsi, les centres $c(f_{q,n})$ des médiatrices $\partial\mathbb{H}_i(f_{q,n})$ convergent donc bien vers $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Étudions maintenant les rayons euclidiens $r(f_{q,n})$ de ces médiatrices. On a :

$$r(f_{q,n}) = \sqrt{I_{n,q}} \left(1 + \frac{R_{n,q}^2}{(I_{n,q} - 1)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{q}} \frac{R_{n,q}}{I_{n,q} - 1} = -\frac{1}{\sqrt{q}} c(f_{q,n}),$$

où $1/\sqrt{q}$ appartient à l'intervalle réel $]1/2, 1[$. Ainsi,

$$e_1(f_{q,n}) = c(f_{q,n}) + r(f_{q,n}) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} r_n(1 - \sqrt{q}).$$

Puisque $|e_2(f_{q,n})| > |e_1(f_{q,n})|$, les extrémités $e_l(f_{q,n})$ des géodésiques $\partial\mathbb{H}_i(f_{q,n})$ convergent vers $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$ pour $l = 1, 2$.

On traite maintenant le cas de $f_{q,n}^{-1}$ pour $q \in]1, 4[$. On a

$$\begin{aligned} f_{q,n}^{-1}i &= \frac{i\sqrt{q} - r_n((\sqrt{q} - 2)^2 - 3)}{\frac{i}{r_n} + 4 - \sqrt{q}} \\ &= \frac{(i\sqrt{q} - r_n((\sqrt{q} - 2)^2 - 3))(4 - \sqrt{q} - \frac{i}{r_n})}{(4 - \sqrt{q})^2 + \frac{1}{r_n^2}} \\ &= \frac{-r_n(4 - \sqrt{q})((\sqrt{q} - 2)^2 - 3) + \frac{\sqrt{q}}{r_n}}{(4 - \sqrt{q})^2 + \frac{1}{r_n^2}} + i \frac{1}{(4 - \sqrt{q})^2 + \frac{1}{r_n^2}}. \end{aligned}$$

On pose $f_{q,n}^{-1}i = R_{q,n} + iI_{q,n}$, avec

$$R_{q,n} = \frac{-r_n(4 - \sqrt{q})((\sqrt{q} - 2)^2 - 3) + \frac{\sqrt{q}}{r_n}}{(4 - \sqrt{q})^2 + \frac{1}{r_n^2}}$$

et

$$I_{q,n} = \frac{1}{(4 - \sqrt{q})^2 + \frac{1}{r_n^2}}.$$

Puisque $q \in]1, 4[$, le nombre $(4 - \sqrt{q})[(\sqrt{q} - 2)^2 - 3]$ est non nul. Ainsi, lorsque n tend vers $+\infty$, on a les équivalences

$$R_{q,n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} r_n \frac{(\sqrt{q} - 2)^2 - 3}{\sqrt{q} - 4}$$

et

$$I_{q,n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{(4 - \sqrt{q})^2}.$$

La proposition 1.1.6 donne alors l'équivalence suivante :

$$c(f_{q,n}^{-1}) = -\frac{R_{q,n}}{I_{q,n} - 1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -r_n \frac{((\sqrt{q} - 2)^2 - 3)(\sqrt{q} - 4)}{1 - (4 - \sqrt{q})^2}$$

Puisque le nombre $((\sqrt{q}-2)^2-3)(\sqrt{q}-4)/(1-(4-\sqrt{q})^2)$ est négatif pour $q \in]1, 4[$, les centres $c(f_{q,n}^{-1})$ des médiatrices $\partial\mathbb{H}_i(f_{q,n}^{-1})$ convergent vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Étudions maintenant les rayons euclidiens $r(f_{q,n}^{-1})$ de ces médiatrices. On a

$$r(f_{q,n}^{-1}) = \sqrt{I_{n,q}} \left(1 + \frac{R_{n,q}^2}{(I_{n,q}-1)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\simeq} \frac{1}{4-\sqrt{q}} \frac{R_{q,n}}{I_{q,n}-1} = -\frac{1}{4-\sqrt{q}} c(f_{q,n}^{-1}). \quad (3.6)$$

Ainsi,

$$e_1(f_{q,n}^{-1}) = c(f_{q,n}^{-1}) - r(f_{q,n}^{-1}) \underset{n \rightarrow +\infty}{\simeq} c(f_{q,n}^{-1}) \left(1 + \frac{1}{4-\sqrt{q}} \right).$$

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} c(f_{q,n}) = +\infty$ et $|e_1(f_{q,n}^{-1})| < |e_2(f_{q,n}^{-1})|$, les extrémités $e_l(f_{q,n}^{-1})$ des géodésiques $\partial\mathbb{H}_i(f_{q,n}^{-1})$ convergent vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, pour $l = 1, 2$. On utilise maintenant l'équation (3.6). Puisque $q \in]1, 4[$, le nombre $1/(4-\sqrt{q})$ appartient à $]1/3, 1/2[$. Ainsi, pour tout n suffisamment grand, on a

$$r(f_{q,n}^{-1}) \underset{n \rightarrow +\infty}{\simeq} \frac{1}{4-\sqrt{q}} c(f_{q,n}^{-1}) \leq \frac{2}{3} c(f_{q,n}^{-1}).$$

D'après le lemme 3.5.1, cela implique que la géodésique $\mathbb{H}_i(f_{q,n}^{-1})$ ne rencontre pas l'hypercycle $H = \text{Hy}(0, \infty; 1 + 2i/\sqrt{5})$. \square

Questions et remarques

Quelles sont les formes possibles de l'ensemble $T := \{t \mid g_t u \in \overline{h_{\mathbb{R}}u}\}$ lorsque $\underline{\text{Inj}}(u(\mathbb{R}^+)) > 0$?

Dans le théorème A, lorsque $\underline{\text{Inj}}(u(\mathbb{R}^+)) > 0$, on obtient une suite de temps $(t_n)_{\mathbb{N}}$ convergeant vers $+\infty$ dans \overline{T} . Mais on voit avec le théorème B que, toujours sous la condition $\underline{\text{Inj}}(u(\mathbb{R}^+)) > 0$, l'ensemble T peut être égal à \mathbb{R}^+ . Il serait aussi facile de modifier cet exemple pour que T soit un ensemble de la forme $a + \mathbb{R}^+$ pour un certain $a > 0$.

On peut par ailleurs montrer que si t_1 et t_2 appartiennent à T , alors $t_1 + t_2$ aussi. C'est-à-dire que T est toujours un semi-groupe. On peut ainsi se demander si l'ensemble T pourrait prendre la forme de n'importe quel semi-groupe de \mathbb{R}^+ . En particulier, est-il possible que T soit un ensemble discret et infini ?

Que se passe-t-il lorsque $\underline{\text{Inj}}(u(\mathbb{R}^+)) = +\infty$?

Lorsque u n'appartient pas à l'ensemble non-errant, nous avons déjà remarqué (voir 2.4.3) que $\underline{\text{Inj}}(u(\mathbb{R}^+)) = +\infty$ et que l'orbite $h_{\mathbb{R}}u$ est fermée. Nous avons aussi construit deux surfaces sur lesquelles $\underline{\text{Inj}}(u(\mathbb{R}^+)) = +\infty$ et u est dans Ω_h . Nous avons montré que sur la flûte non tordue F_3 , l'orbite $h_{\mathbb{R}}u$ est fermée, et donc dans ce cas $T = \{0\}$. En revanche, nous avons vu que sur la flûte non tordue F_4 , l'orbite $h_{\mathbb{R}}u$ n'est pas fermée. A-t-on toujours dans ce cas $T = \{0\}$?

Est-ce que la situation $\underline{\text{Inj}}(u(\mathbb{R}^+)) = +\infty$ donne lieu à de nouveaux types d'ensembles $h_{\mathbb{R}}$ -minimaux ?

Sur une surface géométriquement infinie sans bout cuspidal ni trompette, les résultats présentés impliquent que si toutes les demi-géodésiques de la surface

3.5. DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION ??

satisfont $\underline{\text{Inj}}(u(\mathbb{R}^+)) < +\infty$, alors elle ne contient pas d'ensemble minimal pour le flot horocyclique. Le cas $\underline{\text{Inj}}(u(\mathbb{R}^+)) = +\infty$ demeure donc la seule possibilité pour qu'il y ait un ensemble minimal qui ne soit pas simplement une orbite topologiquement fermée sur une surface hyperbolique. C'est le dernier cas à traiter pour connaître tous les types d'ensembles minimaux pour le flot horocyclique en dimension 2.

Que se passe-t-il en dimension supérieure ?

Considérons une variété hyperbolique M de dimension 3. L'étude du flot horocyclique en dimension 2 se généralise à l'étude du feuilletage horosphérique en dimension 3 ou plus (voir [Fer02] par exemple). Dans [CM10], il est prouvé que si u appartient à T^1M , alors si $\underline{\text{Inj}}(u(\mathbb{R}^+)) = 0$, l'horosphère issue de u est récurrente. On trouve par ailleurs dans [LM16] une étude détaillée des demi-géodésiques quasi-minimisantes et des conditions de finesse asymptotique sur $u(\mathbb{R}^+)$ en dimension 3.

Nous pourrions alors nous demander si le théorème A se généralise à la dimension supérieure. Le problème qui survient lorsque l'on essaie de construire une démonstration identique à celle du théorème A est que celle-ci repose sur des intersections de courbes dont l'existence n'est pas garantie en dimensions supérieure ou égale à 3.

Chapitre 4

Sur la relation entre feuille fortement stable et orbite horocyclique.

Considérons le fibré unitaire tangent T^1S d'une surface hyperbolique S que nous munirons d'une distance D . La feuille fortement stable d'un vecteur u dans T^1S relativement à D est définie par :

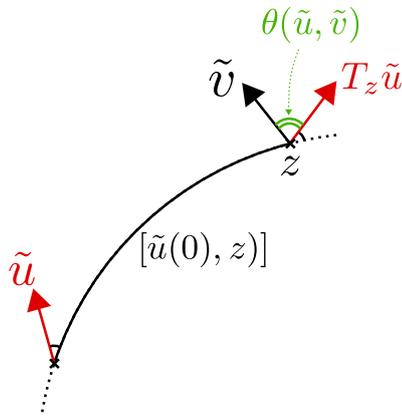
$$W^{ss}u = \{v \in T^1S \mid \lim_{t \rightarrow +\infty} D(g_t u, g_t v) = 0\}.$$

Nous verrons que lorsque $S = \mathbb{H}$, l'égalité d'ensembles $h_{\mathbb{R}}u = W^{ss}u$ est toujours vérifiée. Cette propriété semble caractéristique des orbites horocycliques, mais nous verrons cependant que les relations d'inclusion entre ces deux ensembles et leurs adhérences sont plus complexes que cela. Voici l'organisation de ce chapitre.

Quelques préparatifs dans $T^1\mathbb{H}$. Considérons une demi-géodésique $v(\mathbb{R}^+)$ faisant un tour autour d'une géodésique fermée simple γ par rapport à une demi-géodésique $u(\mathbb{R}^+)$ sur S . L'objectif de cette partie est la preuve de la proposition 4.1.5 qui permet de majorer la distance $D(g_t u, g_t v)$ pour tout temps $t \in \mathbb{R}^+$. Cette proposition est au coeur de la preuve du théorème E.

Etude de la relation d'inclusion entre $\overline{h_{\mathbb{R}}u}$ et $\overline{W^{ss}u}$. Nous verrons dans cette partie que l'égalité $\overline{h_{\mathbb{R}}u} = \overline{W^{ss}u}$ est toujours vérifiée (Théorème C).

Etude de la relation d'inclusion entre $h_{\mathbb{R}}u$ et $W^{ss}u$. Nous commencerons par le cas où $\text{Inj}(u(\mathbb{R}^+)) > 0$ qui généralise la situation dans \mathbb{H} : on a l'égalité $h_{\mathbb{R}}u = W^{ss}u$ (Théorème D). En revanche, nous verrons ensuite que lorsque $u(\mathbb{R}^+)$ croise une suite de géodésiques fermées de longueur tendant vers 0 (et donc en particulier la finesse asymptotique de $u(\mathbb{R}^+)$ est nulle), alors la feuille fortement stable $W^{ss}u$ contient une réunion indénombrable d'orbites horocycliques (Théorème E).

FIGURE 4.1 – Transport parallèle et angle $\theta(\tilde{u}, \tilde{v})$


4.1 Lemmes géométriques dans $T^1\mathbb{H}$

Commençons tout d'abord par fixer une distance pour travailler dans $T^1\mathbb{H}$. Prenons un vecteur \tilde{u} dans $T^1\mathbb{H}$ ainsi qu'un point z dans \mathbb{H} . Notons $T_z\tilde{u}$ le vecteur de $T_z^1\mathbb{H}$ déduit de \tilde{u} par transport parallèle le long du segment hyperbolique $[\tilde{u}(0), z]$. Si \tilde{v} est un autre vecteur de $T^1\mathbb{H}$, nous notons alors $\theta(\tilde{u}, \tilde{v})$ l'angle non orienté formé par les deux vecteurs $T_{\tilde{v}(0)}\tilde{u}$ et \tilde{v} . La figure 4.1 (où $\tilde{v}(0) = z$) résume cela. On considère la distance D suivante dans $T^1\mathbb{H}$. Pour tout \tilde{u} et \tilde{v} dans $T^1\mathbb{H}$, on pose

$$D(\tilde{u}, \tilde{v}) := d(\tilde{u}(0), \tilde{v}(0)) + \theta(\tilde{u}, \tilde{v}).$$

Elle est équivalente à la métrique D_S plus classique de Sasaki¹, mais elle nous permettra des calculs plus aisés.

Les isométries de \mathbb{H} conservant les angles, pour tout γ de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, on a $\theta(\gamma\tilde{u}, \gamma\tilde{v}) = \theta(\tilde{u}, \tilde{v})$. Ainsi, si $S = \Gamma \backslash \mathbb{H}$ est une surface hyperbolique, nous pouvons définir la distance suivante sur T^1S , que l'on note encore D par commodité. Pour tout u et v de T^1S , on pose :

$$D(u, v) = \min_{\gamma \in \Gamma} D(\tilde{u}, \gamma\tilde{v}).$$

Le premier lemme est tiré de [CM10]. Il est vrai en courbure variable, mais nous n'utiliserons que la version dans \mathbb{H} , dont nous redonnons ici une preuve.

Lemme 4.1.1. *Pour tout $\eta > 0$, il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout \tilde{u} et \tilde{v} dans $T^1\mathbb{H}$ tels que $\tilde{u}(\infty) = \tilde{v}(\infty)$ et $d(\tilde{u}(0), \tilde{v}(0)) < \epsilon$, on a $D(\tilde{u}, \tilde{v}) < \eta$.*

Démonstration. Procédons par l'absurde et considérons un $\eta > 0$ qui contredirait ce lemme. Prenons une suite $(\epsilon_n)_{\mathbb{N}}$ de nombres strictement positifs et convergeant vers 0. On considère alors pour tout n des vecteurs \tilde{u}_n et \tilde{v}_n tels que $\tilde{u}_n(\infty) = \tilde{v}_n(\infty)$ et $d(\tilde{u}_n(0), \tilde{v}_n(0)) < \epsilon_n$, et

$$D(\tilde{u}_n, \tilde{v}_n) = d(\tilde{u}_n(0), \tilde{v}_n(0)) + \theta(\tilde{u}_n, \tilde{v}_n) \geq \eta.$$

1. Celle-ci est définie par $D_S(u, v) = \sqrt{d^2(u(0), v(0)) + \theta^2(u, v)}$.

CHAPITRE 4. SUR LA RELATION ENTRE FEUILLE FORTEMENT
STABLE ET ORBITE HOROCYCLIQUE.

Pour n suffisamment grand, on a $\epsilon_n < \frac{\eta}{2}$ et donc $\theta(\tilde{u}_n, \tilde{v}_n) > \frac{\eta}{2}$.

Considérons maintenant pour tout n une isométrie γ_n de $\mathbb{P}\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ telle que $\gamma_n \tilde{u}(0) = i$. On peut considérer des sous-suites de $(\tilde{u}_n)_{\mathbb{N}}$ et de $(\tilde{v}_n)_{\mathbb{N}}$ telles que $\gamma_n \tilde{u}_n$ converge vers un certain vecteur \tilde{u} basé en i et $\gamma_n \tilde{v}_n$ converge vers un vecteur \tilde{v} lui aussi basé en i . Comme pour tout n suffisamment on a $\theta(\gamma_n \tilde{u}_n, \gamma_n \tilde{v}_n) = \theta(\tilde{u}_n, \tilde{v}_n) > \frac{\eta}{2}$, en particulier, $\tilde{u} \neq \tilde{v}$. Mais comme pour tout n on a $\gamma_n \tilde{u}(\infty) = \gamma_n \tilde{v}(\infty)$, alors $\tilde{u} = \tilde{v}$, ce qui est une contradiction. \square

Nous faisons ici une petite pause dans les lemmes géométriques pour discuter de la relation entre $h_{\mathbb{R}}\tilde{u}$ et $W^{ss}\tilde{u}$ dans $T^1\mathbb{H}$ car pour cela le lemme 4.1.1 suffit.

Le cas de \mathbb{H}

Considérons un vecteur \tilde{u} dans $T^1\mathbb{H}$ quelconque. D'après la proposition 2.1.3, l'orbite $h_{\mathbb{R}}\tilde{u}$ satisfaisait la propriété fondamentale :

$$\forall \tilde{v} \in h_{\mathbb{R}}\tilde{u}, \lim_{t \rightarrow +\infty} d(\tilde{u}(t), \tilde{v}(t)) = 0.$$

Nous allons démontrer une propriété plus forte : l'orbite horocyclique $h_{\mathbb{R}}\tilde{u}$ est égale à la feuille fortement stable $W^{ss}\tilde{u}$.

Proposition 4.1.2. *Pour tout \tilde{u} dans $T^1\mathbb{H}$, on a*

$$W^{ss}\tilde{u} = h_{\mathbb{R}}\tilde{u}.$$

Démonstration. Soit \tilde{v} dans $h_{\mathbb{R}}\tilde{u}$. On a $\lim_{t \rightarrow +\infty} d(\tilde{u}(t), \tilde{v}(t)) = 0$ et $g_t \tilde{u}(\infty) = \tilde{u}(\infty) = g_t \tilde{v}(\infty)$ pour tout t . En appliquant le lemme 4.1.1, on obtient alors directement $\lim_{t \rightarrow +\infty} D(g_t \tilde{u}, g_t \tilde{v}) = 0$. Ainsi, \tilde{v} appartient à $W^{ss}\tilde{u}$.

Soit maintenant \tilde{v} dans $W^{ss}\tilde{u}$. Cela implique que $\lim_{t \rightarrow +\infty} d(\tilde{u}(t), \tilde{v}(t)) = 0$. Par l'absurde, si $\tilde{v}(\infty) \neq \tilde{u}(\infty)$, on a directement $\lim_{t \rightarrow +\infty} d(\tilde{u}(t), \tilde{v}(t)) = +\infty$, donc nécessairement, $\tilde{v}(\infty) = \tilde{u}(\infty)$. Ensuite, d'après la proposition 1.1.11, on a $B_{\infty}(\tilde{u}(0), \tilde{v}(0)) = \lim_{t \rightarrow +\infty} d(\tilde{u}(t), \tilde{v}(t)) = 0$. Donc $\tilde{v} \in h_{\mathbb{R}}\tilde{u}$. \square

Suite des lemmes géométriques

Nous aurons besoin pour la suite d'un résultat de géométrie euclidienne.

Lemme 4.1.3 (Lemme de géométrie euclidienne). *Soient T_1 et T_2 deux triangles euclidiens de sommets respectifs $A_1 = A$, $B_1 = B$ et C_1 et $A_2 = A$, $B_2 = B$ et C_2 . Supposons que les angles \hat{A}_k et \hat{B}_k aux sommets A_k et B_k des triangles T_k appartiennent à $]0, \frac{\pi}{2}[$. On a alors l'implication*

$$\hat{A}_1 \geq \hat{A}_2 \Rightarrow \hat{B}_1 \geq \hat{B}_2.$$

Démonstration. Notons a_k , b_k et c_k les longueurs des côtés des triangles T_k opposées aux sommets A_k , B_k et C_k respectivement. Notons que l'on a $a := a_1 = a_2$ et $b := b_1 = b_2$. On utilise la relation des sinus de géométrie euclidienne pour obtenir :

$$\frac{a}{\sin(\hat{A}_1)} = \frac{b}{\sin(\hat{B}_1)} \text{ et } \frac{a}{\sin(\hat{A}_2)} = \frac{b}{\sin(\hat{B}_2)}.$$

De cela on déduit

$$\frac{\sin(\hat{A}_1)}{\sin(\hat{A}_2)} = \frac{\sin(\hat{B}_1)}{\sin(\hat{B}_2)}.$$

Puisque les angles \hat{A}_k et \hat{B}_k appartiennent à $]0, \frac{\pi}{2}[$, la conclusion est directe. \square

Pour les notations du lemme suivant, le lecteur peut se référer à la figure 4.2.

Lemme 4.1.4. *Définissons pour tout $s > 0$ le vecteur w_s de $T^1\mathbb{H}$ basé en i et tel que $w_s(\infty) = s$. Pour tout $l > 0$ on note $p(s, l)$ le point d'intersection entre la demi-géodésique $w_s(\mathbb{R}^+)$ et l'hypercycle $Hy(0, \infty; l + i)$.*

Notons $\theta(s, l)$ l'angle d'intersection entre le segment hyperbolique $[i, p(s, l)]$ et la portion $Hy(0, \infty; 0, p(s, l))$ de l'hypercycle $Hy(0, \infty; p(s, l))$ comprise entre 0 et $p(s, l)$. On a :

$$\lim_{\substack{s \rightarrow +\infty \\ l \rightarrow 0}} \theta(s, l) = 0,$$

au sens où pour tout $\epsilon > 0$, il existe S_ϵ et L_ϵ tels que si $s \geq S_\epsilon$ et $l \leq L_\epsilon$, alors $\theta(s, l) < \epsilon$.

Démonstration. Nous allons commencer par montrer que la première application partielle $\theta(\cdot, l) : s \mapsto \theta(s, l)$ admet une limite β_l lorsque $s \rightarrow +\infty$ et que la fonction $l \mapsto \beta_l$ converge vers 0 lorsque l tend vers 0.

Notons $\beta(s, l)$ l'angle entre la demi-géodésique $(0, p(s, l)]$ et la portion d'hypercycle $Hy(0, \infty; 0, p(s, l))$. Soient $s_1 \neq s_2$. Il existe une isométrie hyperbolique $\gamma : z \mapsto \lambda z$ telle que $\gamma p(s_1, l) = p(s_2, l)$. Cette isométrie conforme fixe $Hy(0, \infty; l + i) = Hy(0, \infty; p(s, l))$ et envoie $(0, p(s_1, l)]$ sur $(0, p(s_2, l)]$. Ainsi, $\beta(s_1, l) = \beta(s_2, l)$. Notons β_l cette valeur.

Observons ensuite que lorsque s tend vers $+\infty$, la distance entre i et la demi-géodésique $(0, p(s, l)]$ tend vers 0, donc l'angle $\theta(s, l) - \beta_l$ aussi et on a pour tout $l > 0$:

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \theta(s, l) = \beta_l. \quad (4.1)$$

De plus, pour tout s , on a

$$\lim_{l \rightarrow 0} \beta(s, l) = \lim_{l \rightarrow 0} \beta_l = 0. \quad (4.2)$$

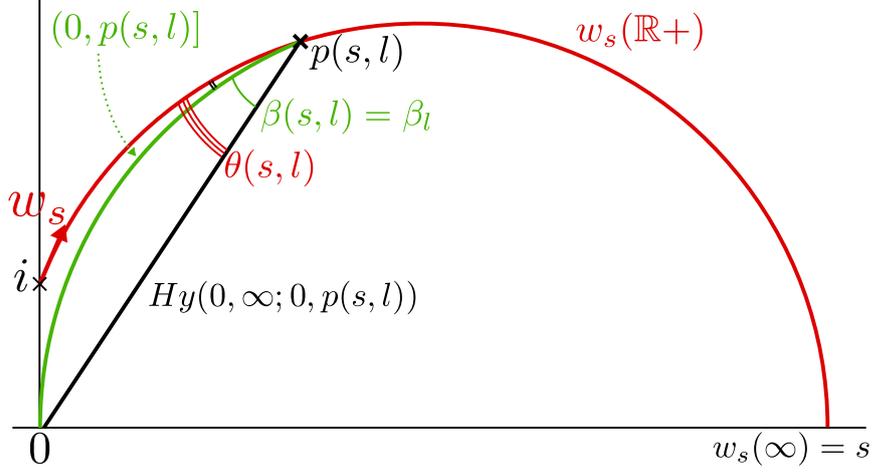
Nous allons maintenant montrer que la deuxième application partielle

$$\theta(s, \cdot) : l \mapsto \theta(s, l)$$

est croissante. Considérons pour cela $l_1 \leq l_2$ et le point $\xi \in \mathbb{R}$ au centre du cercle euclidien contenant $w_s(\mathbb{R}^+)$. Soient alors les deux triangles euclidiens T_1 et T_2 de sommets $0, \xi, p(s, l_1)$ et $0, \xi, p(s, l_2)$ respectivement. Notons \hat{A}_1 et \hat{B}_1 (resp. \hat{A}_2 et \hat{B}_2) les angles de T_1 (resp. T_2) aux sommets 0 et $p(s, l_1)$ (resp. 0 et $p(s, l_2)$). Alors, $l_1 \leq l_2$ entraîne $\hat{A}_1 \geq \hat{A}_2$. Le lemme 4.1.3 implique alors $\hat{B}_1 \geq \hat{B}_2$. Il suffit maintenant d'observer que $\pi/2 = \hat{B}_1 + \theta(s, l_1) = \hat{B}_2 + \theta(s, l_2)$ pour en déduire l'inégalité $\theta(s, l_1) \leq \theta(s, l_2)$. Ainsi, la fonction $\theta(s, \cdot) : l \mapsto \theta(s, l)$ est croissante.

Soit alors $\epsilon > 0$. D'après la limite (4.2), il existe L_ϵ tel que si $l \leq L_\epsilon$, alors $\beta_l < \epsilon/2$. D'après la limite (4.1), il existe S_ϵ tel que si $s \geq S_\epsilon$, alors $|\theta(s, L_\epsilon) - \beta_{L_\epsilon}| < \epsilon/2$. En particulier, $\theta(s, L_\epsilon) < \epsilon$. Enfin, puisque la fonction $\theta(s, \cdot) : l \mapsto \theta(s, l)$ est croissante, si $l \leq L_\epsilon$, alors $\theta(s, l) \leq \theta(s, L_\epsilon)$. Cela conclut. \square

FIGURE 4.2 – Lemme 4.1.4



Nous pouvons maintenant démontrer la proposition clef de cette première section. On rappelle que la définition des triplets en position $(\star\star)$ est donnée dans la définition 1.5.1.

Proposition 4.1.5. *Soient $\eta > 0$ et un triplet $(\tilde{u}, \tilde{v}, \gamma)$ en position $(\star\star)$ dans \mathbb{H} . Supposons de plus que la distance de $\tilde{u}(0)$ à (γ^-, γ^+) soit plus grande que 1. Notons $r = B_{\tilde{u}(\infty)}(\gamma^{-1}\tilde{u}(0), \tilde{u}(0))$.*

Il existe un nombre $\epsilon(\eta) > 0$ tel que si $l(\gamma) < \epsilon(\eta)$, l'inégalité suivante est vérifiée.

$$Q := \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \{ \min(D(g_{t+r}\tilde{v}, g_t\tilde{u}), D(g_{t+r}\tilde{v}, \gamma g_t\tilde{u})) \} < \eta.$$

Avant de rentrer dans le cœur de la démonstration, traduisons ce résultat sur une surface hyperbolique.

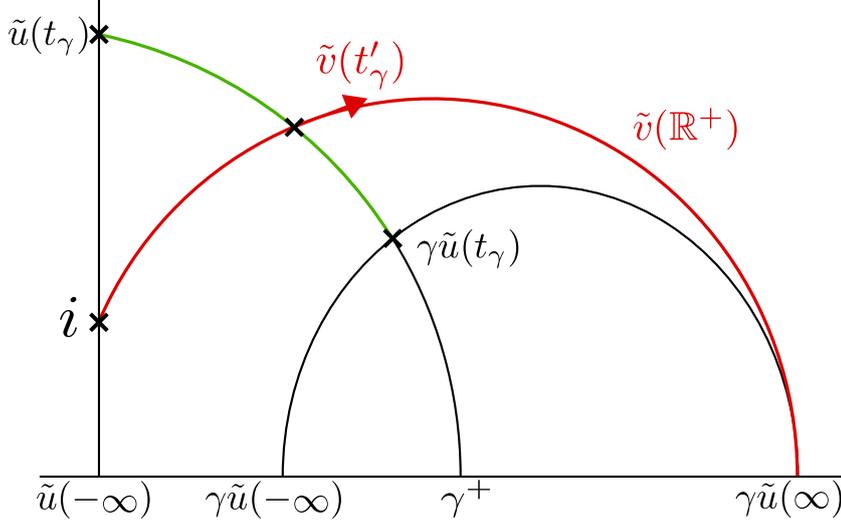
Corollaire 4.1.6. *Soient $S := \Gamma \backslash \mathbb{H}$ une surface hyperbolique, η un nombre strictement positif, et (u, v) un triplet en position $(\star\star)$ sur T^1S associé à un triplet $(\tilde{u}, \tilde{v}, \gamma)$. Supposons de plus que la distance de $\tilde{u}(0)$ à (γ^-, γ^+) soit plus grande que 1. Notons r le temps pris par $v(\mathbb{R}^+)$ pour faire un tour autour de γ par rapport à $u(\mathbb{R}^+)$.*

Il existe $\epsilon(\eta) > 0$ tel que si $l(\gamma) < \epsilon(\eta)$, alors pour tout t dans \mathbb{R}^+ on a

$$D(g_{t+r}v, g_tu) < \eta.$$

Démonstration de la proposition 4.1.5. Pour nos figures et nos raisonnements, nous supposons que γ^+ est positif. Ainsi, γ^- est négatif et $\tilde{v}(\infty) = \gamma\infty \geq \gamma^+$. Les raisonnements seraient identiques en supposant γ^+ négatif. Les figures sont faites avec $\tilde{u}(0) = i$ et $\tilde{u}(\infty) = \infty$ (ce que l'on peut toujours supposer, quitte à conjuguer γ dans $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$). Notons t_γ le temps tel que $\tilde{u}(t_\gamma) \in (\gamma^-, \gamma^+)$ (voir figure 4.3).

Commençons par montrer que la demi-géodésique $\tilde{v}(\mathbb{R}^+)$ croise le segment hyperbolique $[\tilde{u}(t_\gamma), \gamma\tilde{u}(t_\gamma)]$ en un point que l'on notera $\tilde{v}(t'_\gamma)$. Considérons la partie de \mathbb{H} délimitée par les géodésiques $(\tilde{u}(-\infty), \tilde{u}(\infty))$ et $(\gamma\tilde{u}(-\infty), \gamma\tilde{u}(\infty))$.

FIGURE 4.3 – Définition de t'_γ


Cette partie de \mathbb{H} est séparée en deux portions par le segment $[\tilde{u}(t_\gamma), \gamma\tilde{u}(t_\gamma)]$. L'une de ces deux portions contient le point de départ $\tilde{v}(0)$ de la demi-géodésique $\tilde{v}(\mathbb{R}^+)$, et l'autre contient des points de cette demi-géodésique s'accumulant vers son arrivée $\tilde{v}(\infty) = \gamma\tilde{u}(\infty)$. Ainsi, $\tilde{v}(\mathbb{R}^+)$ croise nécessairement le segment $[\tilde{u}(t_\gamma), \gamma\tilde{u}(t_\gamma)]$ en un point $\tilde{v}(t'_\gamma)$ (voir figure 4.3).

Remarquons dès maintenant que puisque $d(i, (\gamma^-, \gamma^+)) \geq 1$, nous avons $d(i, \tilde{u}(t_\gamma)) \geq 1$. Par ailleurs, nous venons de montrer que $\tilde{v}(\mathbb{R}^+)$ rencontre le segment géodésique $[\tilde{u}(t_\gamma), \gamma\tilde{u}(t_\gamma)]$ en un point $\tilde{v}(t'_\gamma)$. Ce point est donc à une distance de $\tilde{u}(t_\gamma)$ inférieure à $l(\gamma)$. Cela implique qu'en choisissant la longueur $l(\gamma)$ arbitrairement petite, la demi-géodésique $\tilde{v}(\mathbb{R}^+)$ peut être choisie arbitrairement proche de $\tilde{u}(\mathbb{R}^+)$. Dit autrement, plus la longueur $l(\gamma)$ est petite, plus $\tilde{v}(\infty)$ est grand.

Pour étudier la quantité Q , nous traitons les deux cas suivants séparément. Nous allons faire des calculs avec la distance D que l'on a définie au début de la section 4.1. Pour le premier cas ci-dessous, on se référera à la figure 4.4.

Premier cas : $t \in [0, t'_\gamma]$. Nous allons montrer que si la longueur $l(\gamma)$ est suffisamment petite, alors $D(g_{t+r}\tilde{v}, g_t\tilde{u}) < \eta$. Notons s_1 le temps satisfaisant $d(\tilde{v}(t), \tilde{u}(s_1)) = d(\tilde{v}(t), \tilde{u}(\mathbb{R}))$. On a la décomposition

$$D(g_{t+r}\tilde{v}, g_t\tilde{u}) \leq D(g_{t+r}\tilde{v}, g_t\tilde{v}) + D(g_t\tilde{v}, g_{s_1}\tilde{u}) + D(g_{s_1}\tilde{u}, g_t\tilde{u}). \quad (4.3)$$

Observons alors que d'après la proposition 1.5.2, on a la majoration $r \leq l(\gamma)$. Ainsi,

$$D(g_t\tilde{v}, g_{t+r}\tilde{v}) = d(\tilde{v}(t), \tilde{v}(t+r)) = |r| \leq l(\gamma).$$

Pour majorer le terme $D(g_{s_1}\tilde{u}, g_t\tilde{u})$, nous devons majorer $|s_1 - t|$. Pour cela, constatons d'abord que puisque les demi-géodésiques $[i, \infty)$ et $\tilde{v}(\mathbb{R}^+)$ n'ont pas la même extrémité, et puisque $t \leq t'_\gamma$, nous avons $d(\tilde{v}(t), \tilde{u}(s_1)) = d(\tilde{v}(t), \tilde{u}(\mathbb{R})) \leq d(\tilde{v}(t'_\gamma), \tilde{u}(\mathbb{R}))$. Ainsi,

$$d(\tilde{v}(t), \tilde{u}(s_1)) \leq d(\tilde{v}(t'_\gamma), \tilde{u}(t_\gamma)) \leq d(\tilde{u}(t_\gamma), \gamma\tilde{u}(t_\gamma)) = l(\gamma).$$

CHAPITRE 4. SUR LA RELATION ENTRE FEUILLE FORTEMENT
STABLE ET ORBITE HOROCYCLIQUE.

Par inégalité triangulaire, nous déduisons de cela que

$$d(\tilde{u}(0), \tilde{v}(t)) - d(\tilde{v}(t), \tilde{u}(s_1)) \leq d(\tilde{u}(0), \tilde{u}(s_1)) \leq d(\tilde{u}(0), \tilde{v}(t)) + d(\tilde{v}(t), \tilde{u}(s_1)).$$

D'où l'encadrement $t - l(\gamma) \leq s_1 \leq t + l(\gamma)$. Ainsi :

$$D(g_{s_1}\tilde{u}, g_t\tilde{u}) = d(\tilde{u}(s_1), \tilde{u}(t)) = |s_1 - t| \leq l(\gamma).$$

Il reste donc seulement à majorer le terme $D(g_t\tilde{v}, g_{s_1}\tilde{u})$ dans l'inégalité (4.3). Les notations à venir sont résumées dans la figure 4.4.

Nous venons de montrer que $d(\tilde{v}(t), \tilde{u}(s_1)) \leq l(\gamma)$. Puisque par définition de la distance D on a $D(g_t\tilde{v}, g_{s_1}\tilde{u}) = d(g_t\tilde{v}, g_{s_1}\tilde{u}) + \theta(g_t\tilde{v}, g_{s_1}\tilde{u})$, il nous faut maintenant majorer l'angle $\theta_1 := \theta(g_t\tilde{v}, g_{s_1}\tilde{u})$. Notons s_2 le temps tel que $d(\tilde{v}(t'_\gamma), \tilde{u}(\mathbb{R}^+)) = d(\tilde{v}(t'_\gamma), \tilde{u}(s_2))$. Notre stratégie est de commencer par montrer l'inégalité

$$\theta_1 \leq \theta(g_{t'_\gamma}\tilde{v}, g_{s_2}\tilde{u}) =: \theta_2,$$

puis de majorer l'angle θ_2 à son tour à l'aide du lemme 4.1.4.

Notons $\xi := \frac{1}{2}(\tilde{v}(-\infty) + \tilde{v}(\infty))$ le centre du cercle euclidien comprenant la demi-géodésique $\tilde{v}(\mathbb{R}^+)$. Comme observé plus haut, en choisissant $l(\gamma)$ suffisamment petit, on peut supposer $\tilde{v}(\infty)$ arbitrairement grand. En particulier, on peut supposer $|\tilde{v}(\infty)| \geq |\tilde{v}(0)|$. Donc le point ξ peut être supposé positif. Considérons alors les deux triangles euclidiens T_1 et T_2 de sommets $0, \xi, \tilde{v}(t)$ et $0, \xi, \tilde{v}(t'_\gamma)$ respectivement. Notons \hat{B}_1 (resp. \hat{B}_2) l'angle au sommet $\tilde{v}(t)$ (resp. $\tilde{v}(t'_\gamma)$) du premier (resp. second) triangle. Notons aussi \hat{A}_1 (resp. \hat{A}_2) l'angle au sommet 0 du premier (resp. second) triangle. Observons directement que les angles \hat{A}_k appartiennent à l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}]$. Par ailleurs, les angles \hat{B}_k étant inscrits dans un cercle euclidien, ils sont eux aussi compris dans l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}]$.

Alors, puisque $t \leq t'_\gamma$, on a $\hat{A}_1 \geq \hat{A}_2$ et on peut appliquer le lemme 4.1.3. Celui-ci donne alors que $\hat{B}_1 \geq \hat{B}_2$. Il ne reste plus qu'à remarquer que $\frac{\pi}{2} = \theta_1 + \hat{B}_1 = \theta_2 + \hat{B}_2$. L'inégalité $\hat{B}_1 \geq \hat{B}_2$ implique alors $\theta_1 \leq \theta_2$.

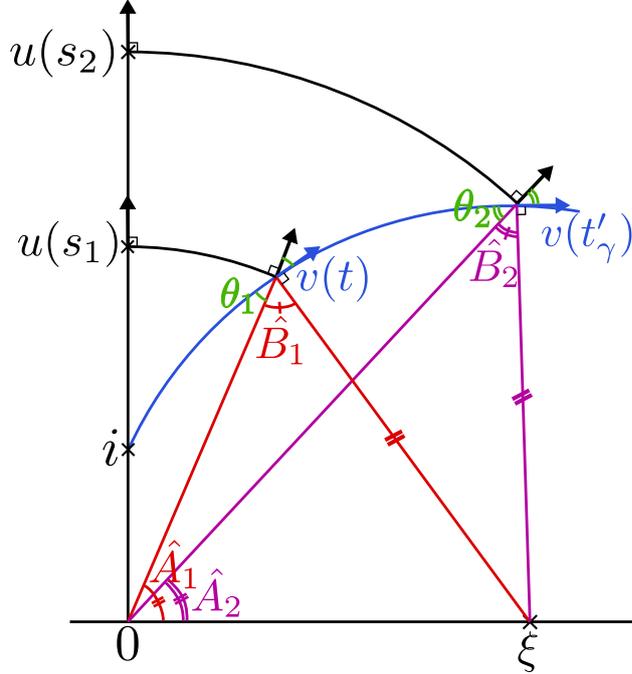
Il faut maintenant majorer l'angle θ_2 et nous utilisons le lemme 4.1.4. Définissons les réels $s = \tilde{v}(\infty)$ et $l(s)$ tels que $\tilde{v}(t'_\gamma)$ appartient à l'hypercycle $\text{Hy}(0, \infty; l(s) + i)$. L'angle θ_2 correspond alors à l'angle $\theta(s, l(s))$ du lemme 4.1.4. Comme déjà montré, en prenant $l(\gamma)$ arbitrairement petit, le point $\tilde{v}(t'_\gamma)$ est arbitrairement proche de $\tilde{u}(t'_\gamma)$, et donc l'hypercycle $\text{Hy}(0, \infty; l(s) + i)$ est arbitrairement proche de la géodésique $(0, \infty)$. Ainsi, $l(s)$ peut être choisi arbitrairement petit en choisissant $l(\gamma)$ suffisamment petit. Nous pouvons donc appliquer le lemme 4.1.4 pour obtenir que si $l(\gamma)$ est assez petit, l'angle θ_2 est plus petit que $\frac{\eta}{4}$.

Nous obtenons donc la majoration suivante :

$$\begin{aligned} D(g_t\tilde{v}, g_{s_1}\tilde{u}) &= d(\tilde{v}(t), \tilde{u}(s_1)) + \theta_1 \\ &\leq l(\gamma) + \theta_2 \\ &< l(\gamma) + \frac{\eta}{4}. \end{aligned}$$

En imposant maintenant $l(\gamma) < \frac{\eta}{4}$ et en regroupant toutes les majorations obtenues, l'inégalité (4.3) donne :

$$D(g_{t+r}\tilde{v}, g_t\tilde{u}) \leq 3l(\gamma) + \frac{\eta}{4} < 4\frac{\eta}{4} = \eta,$$

FIGURE 4.4 – Majoration pour $t \leq t'_\gamma$


ce qui conclut le premier cas.

Deuxième cas : $t \geq t'_\gamma$. Nous allons montrer que si la longueur $l(\gamma)$ est suffisamment petite, alors $D(g_{t+r}\tilde{v}, \gamma g_t\tilde{u}) < \eta$. Notons s_3 le temps tel que $d(\tilde{v}(t), \gamma\tilde{u}(s_3)) = d(\tilde{v}(t), \gamma\tilde{u}(\mathbb{R}))$. On décompose à nouveau :

$$D(g_{t+r}\tilde{v}, \gamma g_t\tilde{u}) \leq D(g_{t+r}\tilde{v}, g_t\tilde{v}) + D(g_t\tilde{v}, \gamma g_{s_3}\tilde{u}) + D(\gamma g_{s_3}\tilde{u}, \gamma g_t\tilde{u}) \quad (4.4)$$

et on majore terme à terme.

La majoration du premier terme est identique au cas précédent. Pour le deuxième terme, rappelons-nous que par définition $\tilde{v}(\infty) = \gamma\tilde{u}(\infty)$. Comme $t \geq t'_\gamma$, cela implique que $d(\tilde{v}(t), \gamma\tilde{u}(s_3)) \leq d(\tilde{v}(t'_\gamma), \gamma\tilde{u}(t'_\gamma)) \leq l(\gamma)$. En appliquant alors le lemme 4.1.1, nous obtenons que la distance $D(g_t\tilde{v}, \gamma g_{s_3}\tilde{u})$ peut être choisie arbitrairement petite en prenant $l(\gamma)$ arbitrairement petit.

Majorons enfin le troisième terme. On a

$$D(\gamma g_{s_3}\tilde{u}, \gamma g_t\tilde{u}) = d(\gamma\tilde{u}(s_3), \gamma\tilde{u}(t)) = |t - s_3|.$$

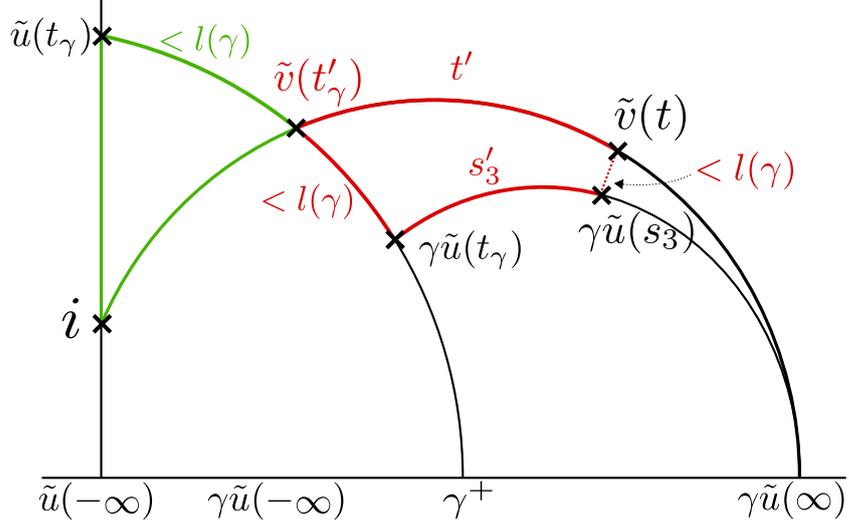
Définissons alors t' par $t = t'_\gamma + t'$ et s'_3 par $s_3 = t_\gamma + s'_3$ (voir figure 4.5). En appliquant l'inégalité triangulaire dans la zone rouge de la figure 4.5, nous obtenons

$$t' - 2l(\gamma) \leq s'_3 \leq l(\gamma) + t' + l(\gamma) = t' + 2l(\gamma).$$

En appliquant l'inégalité triangulaire dans la zone verte de la figure 4.5, nous obtenons

$$t'_\gamma - l(\gamma) \leq t_\gamma \leq t'_\gamma + l(\gamma).$$

FIGURE 4.5 – Majoration pour $t \geq t'_\gamma$



En additionnant ces inégalités, on obtient

$$t + t'_\gamma - 3l(\gamma) = t - 3l(\gamma) \leq s_3 \leq t' + t'_\gamma + 3l(\gamma) = t + 3l(\gamma),$$

ou encore

$$|s_3 - t| \leq 3l(\gamma).$$

Nous concluons alors en appliquant les majorations obtenues à l'inégalité (4.4). \square

4.2 L'adhérence d'une orbite horocyclique coïncide avec l'adhérence de la feuille fortement stable

Considérons maintenant un groupe fuchsien Γ et posons $S := \Gamma \backslash \mathbb{H}$. Notons d'ores et déjà que pour tout u dans T^1S , on a $h_{\mathbb{R}}u \subset W^{ss}u$. En effet, prenons v dans $h_{\mathbb{R}}u$ sur T^1S et γ dans Γ tel que $\gamma\tilde{v}$ appartient à $h_{\mathbb{R}}\tilde{u}$. D'après la proposition 4.1.2,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} D(g_t\tilde{u}, \gamma g_t\tilde{v}) = 0.$$

Or, par définition de la distance D sur T^1S , pour tout t on a

$$D(g_t u, g_t v) = \inf_{\alpha \in \Gamma} D(g_t \tilde{u}, \alpha g_t \tilde{v}).$$

Ainsi,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} D(g_t u, g_t v) = 0$$

et v appartient à $W^{ss}u$.

Nous allons maintenant montrer que l'adhérence d'une orbite horocyclique coïncide toujours avec l'adhérence de la feuille fortement stable.

4.2. L'ADHÉRENCE D'UNE ORBITE HOROCYCLIQUE COÏNCIDE
AVEC L'ADHÉRENCE DE LA FEUILLE FORTEMENT STABLE

Théorème C. *Soit $S := \Gamma \backslash \mathbb{H}$ une surface hyperbolique et u dans T^1S . On a*

$$\overline{h_{\mathbb{R}}u} = \overline{W^{ss}u}.$$

Démonstration. Puisque l'on sait déjà que l'orbite $h_{\mathbb{R}}u$ est incluse dans la feuille fortement stable $\subset W^{ss}u$, on a en particulier $\overline{h_{\mathbb{R}}u} \subset \overline{W^{ss}u}$. Nous allons maintenant montrer que $W^{ss}u$ est inclus dans $\overline{h_{\mathbb{R}}u}$.

Soit donc v dans $W^{ss}u$. D'après la proposition 2.3.2, montrer que v appartient à $\overline{h_{\mathbb{R}}u}$ revient à trouver une suite $(\gamma_n)_{\mathbb{N}}$ dans Γ telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n \tilde{u}(\infty) = \tilde{v}(\infty) \quad (4.5)$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} B_{\gamma_n \tilde{u}(\infty)}(i, \gamma_n \tilde{u}(0)) = B_{\tilde{v}(\infty)}(i, \tilde{v}(0)). \quad (4.6)$$

Puisque v appartient à $W^{ss}u$, on a $\lim_{t \rightarrow +\infty} D(g_t u, g_t v) = 0$. Cela implique qu'il existe une suite $(\gamma_n)_{\mathbb{N}}$ dans Γ ainsi qu'une suite de temps $(t_n)_{\mathbb{N}}$ qui converge vers $+\infty$ telles que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} D(\gamma_n g_{t_n} \tilde{u}, g_{t_n} \tilde{v}) = 0. \quad (4.7)$$

En particulier,

$$\theta(\gamma_n g_{t_n} \tilde{u}, g_{t_n} \tilde{v}) = 0.$$

Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n \tilde{u}(\infty) = \tilde{v}(\infty).$$

Il nous reste à montrer que la limite (4.6) est vérifiée avec la suite $(\gamma_n)_{\mathbb{N}}$. Quitte à conjuguer le groupe Γ dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, on peut supposer que $\tilde{v}(0) = i$. On a alors $B_{\tilde{v}(\infty)}(i, \tilde{v}(0)) = 0$. Remarquons que d'après la proposition 1.1.8,

$$\begin{aligned} B_{\gamma_n \tilde{u}(\infty)}(i, \gamma_n \tilde{u}(0)) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} d(i, \gamma_n \tilde{u}(t)) - d(\gamma_n \tilde{u}(0), \gamma_n \tilde{u}(t)) \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} d(i, \gamma_n \tilde{u}(t)) - t. \end{aligned}$$

Pour tout t , notons $\epsilon_t = d(\tilde{v}(t), \gamma_n \tilde{u}(t))$. D'après la limite (4.7), on a en particulier $\lim_{n \rightarrow +\infty} \epsilon_{t_n} = 0$. Or, par inégalité triangulaire, on a

$$d(i, \tilde{v}(t)) - \epsilon_t \leq d(i, \gamma_n \tilde{u}(t)) \leq d(i, \tilde{v}(t)) + \epsilon_t.$$

Comme \tilde{v} est basé en i , on a $d(i, \tilde{v}(t)) = t$. On a donc bien

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d(i, \gamma_n \tilde{u}(t)) - t = 0.$$

□

Nous pouvons déduire directement du théorème C le corollaire suivant sur les vecteurs $h_{\mathbb{R}}$ -périodiques.

Corollaire 4.2.1. *Si u est un élément de T^1S qui est $h_{\mathbb{R}}$ -périodique, alors $W^{ss}u = h_{\mathbb{R}}u$.*

Démonstration. Il suffit de constater que dans ce cas, $\overline{h_{\mathbb{R}}u} = h_{\mathbb{R}}u$. Comme $h_{\mathbb{R}}u \subset W^{ss}u$, et comme $\overline{h_{\mathbb{R}}u} = \overline{W^{ss}u}$ d'après le théorème C, nous obtenons bien $W^{ss}u = h_{\mathbb{R}}u$. □

4.3 Le cas d'un quotient $\Gamma \backslash \mathbb{H}$

Se pose alors la question de l'inclusion réciproque. Nous allons voir que la situation dépend du rayon d'injectivité.

4.3.1 Cas où $h_{\mathbb{R}}u = W^{ss}u$

Théorème D. *Soient $S := \Gamma \backslash \mathbb{H}$ une surface hyperbolique et u dans T^1S . On a l'implication*

$$(\text{Inj}(u(\mathbb{R}^+)) > 0) \implies (h_{\mathbb{R}}u = W^{ss}u).$$

Démonstration. Soit $\alpha := \text{Inj}(u(\mathbb{R}^+)) > 0$. Considérons un vecteur v appartenant à $W^{ss}u$ et prenons ε tel que $0 < 2\varepsilon < \alpha$. Les différentes notations de cette preuve sont résumées dans la Figure 4.6 ci-dessous, où on a supposé $\tilde{u}(\infty) = \infty$ (quitte à conjuguer Γ dans $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$, on peut supposer que c'est le cas).

Soit T_ε un temps tel que pour tout $t \geq T_\varepsilon$, on ait $d(u(t), v(t)) < \varepsilon$ et $d(\tilde{u}(t), \gamma\tilde{u}(t)) \geq \alpha$ pour tout γ dans Γ différent de l'identité. Prenons un temps $t \geq T_\varepsilon$. Il existe donc $\gamma_t \in \Gamma$ tel que $d(\tilde{u}(t), \gamma_t\tilde{v}(t)) < \varepsilon$.

Si $\gamma_t\tilde{v}(\infty) \neq \tilde{u}(\infty)$, on peut considérer $t' > t$ le plus grand temps $s > t$ tels que $d(\tilde{u}(s), \gamma_t\tilde{v}(s)) \leq \varepsilon$. Alors, $d(\tilde{u}(t'), \gamma_t\tilde{v}(t')) = \varepsilon$, et comme $t' > t > T_\varepsilon$, il existe $\gamma_{t'} \neq \gamma_t$ tel que $d(\tilde{u}(t'), \gamma_{t'}\tilde{v}(t')) < \varepsilon$.

On a $d(\gamma_{t'}\gamma_t^{-1}\tilde{u}(t'), \gamma_{t'}\tilde{v}(t')) = d(\tilde{u}(t'), \gamma_t\tilde{v}(t')) = \varepsilon$. D'où :

$$d(\tilde{u}(t'), \gamma_{t'}\gamma_t^{-1}\tilde{u}(t')) \leq d(\tilde{u}(t'), \gamma_{t'}\tilde{v}(t')) + d(\gamma_{t'}\tilde{v}(t'), \gamma_t\gamma_t^{-1}\tilde{u}(t')) < 2\varepsilon < \alpha,$$

ce qui contredit la définition de T_ε . Ainsi, $\gamma_t\tilde{v}(\infty) = \tilde{u}(\infty)$, et pour tout $s > t$ on a

$$d(\tilde{u}(s), \gamma_t\tilde{v}(s)) < d(\tilde{u}(t), \gamma_t\tilde{v}(t)) < \varepsilon.$$

De plus, la fonction $s \mapsto B_{\tilde{u}(\infty)}(\tilde{u}(s), \gamma_t\tilde{v}(s))$ est constante puisque les vecteurs \tilde{u} et \tilde{v} sont tous les deux dirigés vers $\tilde{u}(\infty)$. Posons

$$\eta := B_{\tilde{u}(\infty)}(\tilde{u}(t), \gamma_t\tilde{v}(t)) \leq d(\tilde{u}(t), \gamma_t\tilde{v}(t)) < \varepsilon.$$

Si $|\eta| > 0$, comme $v \in W^{ss}u$, il existe un temps T_η tel que si $s \geq T_\eta$, alors $d(u(s), v(s)) < |\eta|$ et $d(\tilde{u}(s), \gamma\tilde{u}(s)) \geq \alpha$ pour tout γ dans Γ différent de l'identité. Fixons $s \geq T_\eta$. On a

$$d(\tilde{u}(s), \gamma_t\tilde{v}(s)) \geq |B_{\tilde{u}(\infty)}(\tilde{u}(s), \gamma_t\tilde{v}(s))| = |B_{\tilde{u}(\infty)}(\tilde{u}(t), \gamma_t\tilde{v}(t))| = |\eta|.$$

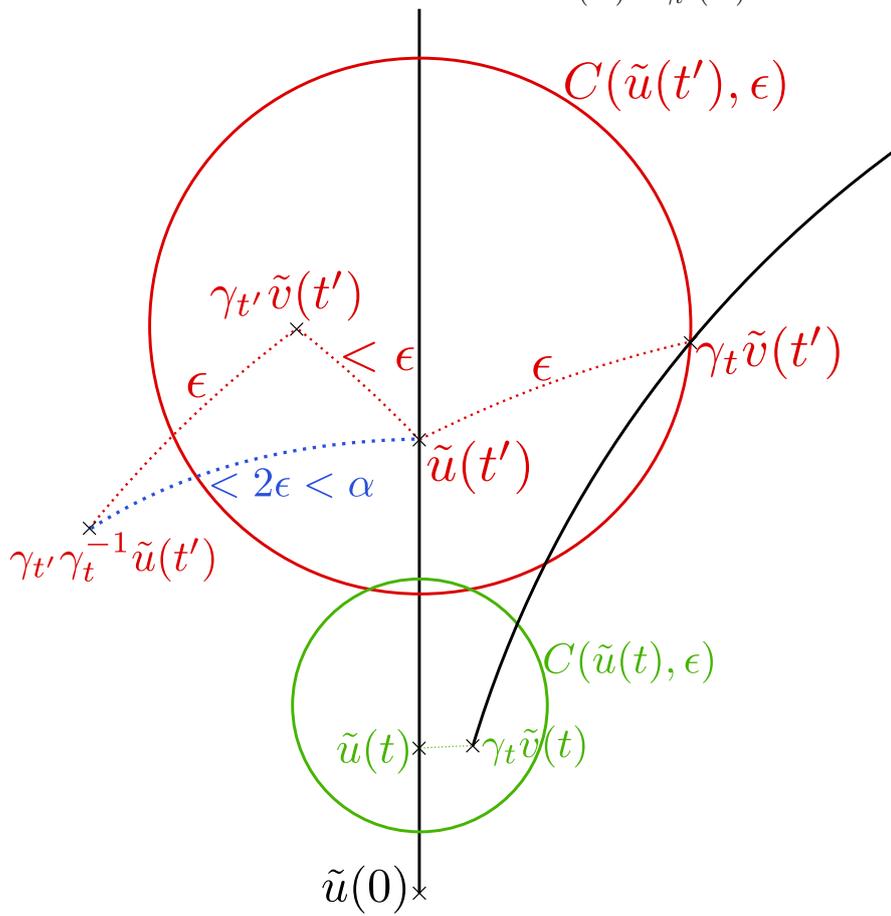
Il existe donc nécessairement un élément $\gamma_s \neq \gamma_t$ tel que $d(\tilde{u}(s), \gamma_s\tilde{v}(s)) < \eta < \varepsilon$. Alors :

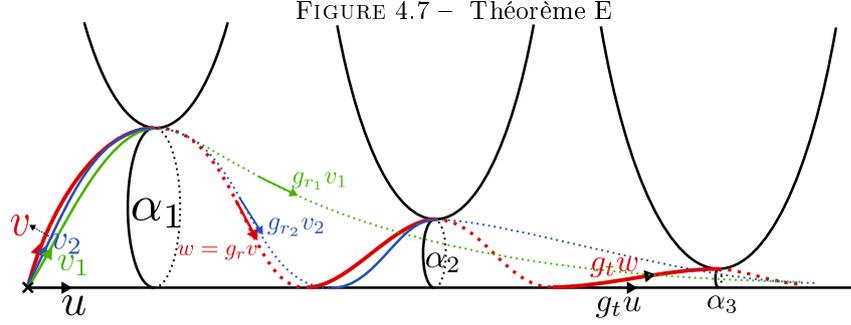
$$\begin{aligned} d(\tilde{u}(s), \gamma_s\gamma_t^{-1}\tilde{u}(s)) &\leq d(\tilde{u}(s), \gamma_s\tilde{v}(s)) + d(\gamma_s\tilde{v}(s), \gamma_s\gamma_t^{-1}\tilde{u}(s)) \\ &< \varepsilon + d(\tilde{u}(s), \gamma_t\tilde{v}(s)) \\ &< \alpha, \end{aligned}$$

ce qui contredit la définition de T_η . Ainsi, $\eta = 0$ et $\gamma_t\tilde{v}$ appartient à $h_{\mathbb{R}}\tilde{u}$, ce qui conclut. □

Ainsi, parmi les surfaces sur lesquelles l'égalité $h_{\mathbb{R}}u = W^{ss}u$ est toujours vérifiée, nous retrouvons entre autres les surfaces compactes, géométriquement finies sans cusps, ainsi que les revêtements abéliens de celles-ci.

FIGURE 4.6 – Démonstration de $\tilde{u}(\infty) = \gamma_t \tilde{v}(\infty)$





4.3.2 Cas où $h_{\mathbb{R}}u \subsetneq W^{ss}u$

Théorème E. Soient $S := \Gamma \backslash \mathbb{H}$ une surface hyperbolique géométriquement infinie et u dans T^1S . Supposons que la demi-géodésique $u(\mathbb{R}^+)$ croise une suite de géodésiques fermées de longueurs tendant vers 0. On a

$$h_{\mathbb{R}}u \subsetneq W^{ss}u.$$

De plus, $W^{ss}u$ est une réunion non dénombrable d'orbites horocycliques.

La démonstration de ce théorème nécessite plusieurs lemmes préparatoires. Quitte à conjuguer le groupe Γ , on peut supposer que $\tilde{u}(0) = i$ et $\tilde{u}(\infty) = \infty$. Nous nous servons du premier lemme ci-dessous pour choisir une suite particulière d'éléments $(\gamma_n)_{\mathbb{N}}$ dans Γ . On rappelle que la notation $\mathbb{H}_i^c(\gamma_n)$ désigne le complémentaire du demi-plan $\mathbb{H}_i(\gamma_n)$ qui a été défini dans la section 1.2.2 sur le domaine de Dirichlet.

Lemme 4.3.1. Il existe une suite $(\gamma_n)_{\mathbb{N}}$ dans Γ d'isométries hyperboliques toutes distinctes satisfaisant les points suivants.

- Les longueurs de translation $l(\gamma_n)$ décroissent et convergent vers 0.
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n^- = \lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n^+ = \infty$.
- $|\gamma_n^-| < |\gamma_{n+1}^-|$ et $|\gamma_n^+| < |\gamma_{n+1}^+|$ pour tout n .
- Les points fixes γ_n^- et γ_n^+ ont des signes opposés pour tout n et les points fixes γ_n^+ ont tous le même signe.
- Tous les demi-plans $\mathbb{H}_i^c(\gamma_n)$ sont disjoints. De plus, toutes les extrémités $e_1(\gamma_n)$ et $e_2(\gamma_n)$ dans $\mathbb{H}(\infty)$ des médiatrices $\partial\mathbb{H}_i(\gamma_n)$, avec $|e_1(\gamma_n)| < |\gamma_n^+| < |e_2(\gamma_n)|$, ont le même signe, et on a pour tout n

$$0 < |e_1(\gamma_n)| < |\gamma_n^+| < |e_2(\gamma_n)| < |e_1(\gamma_{n+1})| < |\gamma_{n+1}^+|.$$

Démonstration. Considérons les géodésiques fermées dont les longueurs tendent vers 0 que croise $u(\mathbb{R}^+)$. Quitte à passer à une sous-suite, on peut supposer que leurs longueurs décroissent. Elles se relèvent alors dans \mathbb{H} en des géodésiques qui sont les axes d'isométries hyperboliques toutes distinctes γ_n dans Γ dont les longueurs de translation $l(\gamma_n)$ sont décroissantes et convergent vers 0. Puisque les axes (γ_n^-, γ_n^+) rencontre la géodésique $(0, \infty)$, les points fixes γ_n^- et γ_n^+ sont de signes opposés.

Notons \tilde{q}_n le point d'intersection entre (γ_n^-, γ_n^+) et $[i, \infty)$ pour tout n . On a $\lim_n d(\tilde{q}_n, \gamma_n \tilde{q}_n) = \lim_n l(\gamma_n) = 0$. Ainsi, on peut appliquer la proposition 1.5.3 pour obtenir

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n^- = \lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n^+ = \infty.$$

Ainsi, en passant à une sous-suite, on peut supposer que $|\gamma_n^-| < |\gamma_{n+1}^-|$ et $|\gamma_n^+| < |\gamma_{n+1}^+|$ pour tout n .

Nous devons maintenant étudier les demi-plans $\mathbb{H}_i^c(\gamma_n)$. Nous allons commencer par montrer que si n est assez grand, quitte à remplacer certains éléments γ_n par γ_n^{-1} , ces demi-plans ne rencontrent pas la demi-géodésique $[i, \infty)$. Observons premièrement que pour tout n , le point $\gamma_n i$ (resp. $\gamma_n^{-1} i$) appartient au demi-hypercycle $\text{Hy}(\gamma_n; i, \gamma_n^+)$ (resp. $\text{Hy}(\gamma_n; i, \gamma_n^-)$) compris entre i et γ_n^+ (resp. entre i et γ_n^-). Mais l'hypercycle $\text{Hy}(\gamma_n; i)$, qui est une portion de cercle euclidien, rencontre l'horocycle $\text{Ho}(\infty; i)$ en au plus deux points. Alors, l'un de ces demi-hypercycle ne rencontre $\text{Ho}(\infty; i)$ que en i , et ses points ont donc tous une partie imaginaire plus petite que 1. Quitte à remplacer γ_n par γ_n^{-1} , on peut supposer que c'est le demi-hypercycle $\text{Hy}(\gamma_n; i, \gamma_n^+)$. Ainsi, $\text{Im}(\gamma_n i) < 1$. D'après la proposition 1.1.7, le bord à l'infini du demi-plan $\mathbb{H}_i^c(\gamma_n)$ ne contient pas le point ∞ et la médiatrice $\partial \mathbb{H}_i(\gamma_n)$ ne rencontre pas la demi-géodésique $[i, \infty)$. Quitte à passer à une sous-suite, on peut supposer que tous les points γ_n^+ ont le même signe.

Maintenant, remarquons que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e_1(\gamma_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} e_2(\gamma_n) = \infty. \quad (4.8)$$

En effet, puisque $|e_2(\gamma_n)| > |\gamma_n^+|$, et comme γ_n^+ converge vers $+\infty$, on a directement $\lim_{n \rightarrow +\infty} e_2(\gamma_n) = \infty$. Ensuite, supposons par l'absurde que quitte à extraire une sous-suite, $e_1(\gamma_n)$ converge vers un certain $\xi \neq \infty$. Alors la médiatrice $\partial \mathbb{H}_i(\gamma_n)$ du segment hyperbolique $[i, \gamma_n i]$ converge vers la géodésique (ξ, ∞) . Cela implique que les images $\gamma_n i$ convergent vers le point $i + 2\xi$ de \mathbb{H} , ce qui contredit le fait que Γ est discret.

Puisque les médiatrices $\partial \mathbb{H}_i(\gamma_n)$ ne rencontrent pas $[i, \infty)$, alors d'après les équations (4.8), on peut supposer en passant à une sous-suite, que pour tout n leurs extrémités $e_1(\gamma_n)$ et $e_2(\gamma_n)$ ont le même signe. Toujours d'après les équations (4.8), on peut de plus supposer que pour tout n , on a $0 < |e_1(\gamma_n)| < |\gamma_n^+| < |e_2(\gamma_n)| < |e_1(\gamma_{n+1})| < |\gamma_{n+1}^+| < |e_2(\gamma_{n+1})|$. En particulier, les demi-plans $\mathbb{H}_i^c(\gamma_n)$ sont tous disjoints. \square

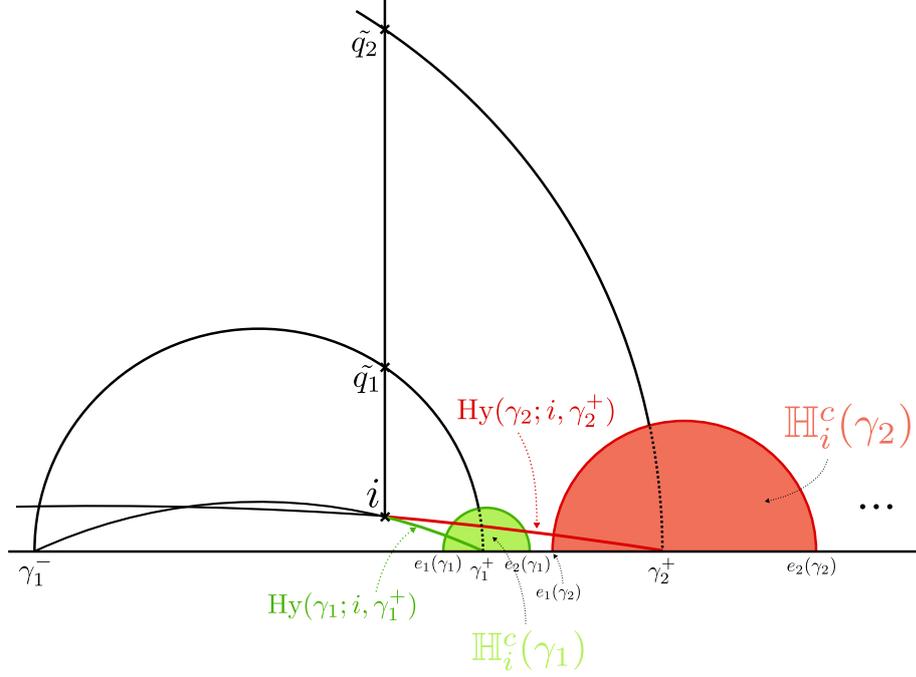
Les positions des éléments γ_n est des demi-plans $\mathbb{H}_i^c(\gamma_n)$ sont résumées dans la figure 4.8, où l'on a supposé que les points γ_n^+ sont positifs. Grâce au lemme ci-dessous, nous associons maintenant une suite de vecteurs $(\tilde{v}_n)_{\mathbb{N}}$ convergeant vers un vecteur \tilde{v} à toute sous-suite $(\alpha_n)_{\mathbb{N}}$ de $(\gamma_n)_{\mathbb{N}}$.

Lemme 4.3.2. *Considérons une sous-suite $\alpha = (\alpha_n)_{\mathbb{N}}$ de $(\gamma_n)_{\mathbb{N}}$. Notons \tilde{v}_n les vecteurs de $T^1 \mathbb{H}$ basés en i et dirigés vers $\beta_n \cdot \infty$, où $\beta_n := \prod_{k=0}^n \alpha_k$.*

La suite de vecteurs $(\tilde{v}_n)_{\mathbb{N}}$ converge vers un vecteur \tilde{v} de direction $\beta_\infty = (\prod_{k=0}^{\infty} \alpha_k) \cdot \infty$.

Démonstration. Nous allons montrer que la suite d'extrémités $(\tilde{v}_n(\infty))_{\mathbb{N}} = (\beta_n \cdot \infty)_{\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{H}(\infty)$, ce qui suffira puisque tous les vecteurs \tilde{v}_n sont basés

FIGURE 4.8 – Position des éléments γ_n



au même point. Pour cela, nous allons montrer que la suite de valeurs absolues $(|\beta_n \cdot \infty|)_{\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par $|\alpha_0^+|$.

Soit n un entier positif quelconque. Observons que d'après le point (i) de la proposition 1.1.21, on a

$$\alpha_{n+1}^- \wr \alpha_{n+1}^+ \wr \alpha_{n+1}\infty \wr \infty.$$

Ainsi, les points α_{n+1}^- et $\alpha_{n+1}\infty$ appartiennent à des composantes connexes distinctes de $\mathbb{H}(\infty) - \{\alpha_{n+1}^+, \infty\}$. Puisque les signes de α_{n+1}^- et α_{n+1}^+ sont opposés d'après le lemme 4.3.1, cela implique que α_{n+1}^+ et $\alpha_{n+1} \cdot \infty$ ont même signe et $|\alpha_{n+1}^+| < |\alpha_{n+1} \cdot \infty|$. Mais d'après le lemme 4.3.1, on a $0 < |\alpha_n^+| < |\alpha_{n+1}^+|$. Comme les signes de α_n^- et α_n^+ sont opposés, on a $\alpha_n^- \wr \alpha_n^+ \wr \alpha_{n+1}\infty \wr \infty$. D'après le point (ii) de la proposition 1.1.21, cela implique $\alpha_n^- \wr \alpha_n^+ \wr \alpha_n \alpha_{n+1}\infty \wr \alpha_n \infty$. Mais comme précédemment, α_n^+ , $\alpha_n \alpha_{n+1}\infty$ et $\alpha_n \infty$ ont même signe et

$$|\alpha_n^+| < |\alpha_n \alpha_{n+1}\infty| < |\alpha_n \infty|.$$

D'après le lemme 4.3.1, on a

$$0 < |\alpha_0^+| < |\alpha_1^+| < \dots < |\alpha_n^+|.$$

Pour k allant de $n-1$ à 0 , nous appliquons alors successivement le point (i) de la proposition 1.1.21 aux isométries α_k et aux points $\alpha_{k+1} \dots \alpha_{n+1}\infty$ et $\alpha_{k+1} \dots \alpha_n \infty$. Cela nous assure que pour tout k , les points $\alpha_{k+1} \dots \alpha_{n+1}\infty$ et $\alpha_{k+1} \dots \alpha_n \infty$ ont le même signe que α_k^+ .

Ensuite, pour k allant de $n-1$ à 0 , nous appliquons successivement le point (i) de la proposition 1.1.21 aux isométries α_k et aux points $\alpha_{k+1} \dots \alpha_{n+1} \infty$ et $\alpha_{k+1} \dots \alpha_n \infty$. C'est-à-dire aux situations

$$\alpha_k^- \wr \alpha_k^+ \wr \alpha_{k+1} \dots \alpha_{n+1} \infty \wr \alpha_{k+1} \dots \alpha_n \infty.$$

Lorsque $k = 0$, nous obtenons finalement

$$\alpha_0^- \wr \alpha_0^+ \wr \beta_{n+1} \infty \wr \beta_n \infty.$$

Une fois de plus, les points α_0^+ , $\beta_{n+1} \infty$ et $\beta_n \infty$ ont tous le même signe et

$$|\alpha_0^+| < |\beta_{n+1} \infty| < |\beta_n \infty|.$$

□

Notre but est maintenant de montrer que l'ensemble des sous-suites $(\alpha_n)_{\mathbb{N}}$ de $(\gamma_n)_{\mathbb{N}}$ telles que les vecteurs \tilde{v} associés par le lemme 4.3.2 se projettent sur des vecteurs v de $T^1 S$ appartenant à $g_{\mathbb{R}} W^{ss} u - g_{\mathbb{R}} h_{\mathbb{R}} u$ est indénombrable.

Notons $r_n := B_{\infty}(\beta_n^{-1} i, i)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Lemme 4.3.3. *Soit $(\alpha_n)_{\mathbb{N}}$ une sous-suite de $(\gamma_n)_{\mathbb{N}}$. On suppose que pour tout n dans \mathbb{N} , on a $l(\alpha_n) < 1/2^n$. Alors la suite $(r_n)_{\mathbb{N}}$ converge vers un certain nombre r .*

Démonstration. Fixons un entier naturel n . On a

$$|r_{n+1} - r_n| = |B_{\infty}(\beta_{n+1}^{-1} i, \beta_n^{-1} i)| = |B_{\infty}(\alpha_{n+1}^{-1} \beta_n^{-1} i, \beta_n^{-1} i)|.$$

Nous allons montrer que cette quantité est inférieure à $1/2^{n+1}$. Cela montrera que $(r_n)_{\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, qui converge donc dans \mathbb{R} . Observons que par hypothèse, $l(\alpha_{n+1}) < 1/2^{n+1}$. Définissons alors le vecteur \tilde{V} basé en $\beta_n^{-1} i$ et dirigé vers ∞ . Si l'on montre que la demi-géodésique $\tilde{V}(\mathbb{R}^+)$ rencontre l'axe $(\alpha_{n+1}^-, \alpha_{n+1}^+)$, en posant $\gamma = \alpha_{n+1}$, la proposition clef 1 page 48 appliquée à la demi-géodésique $\tilde{V}(\mathbb{R}^+)$ et à l'isométrie $\gamma = \alpha_{n+1}$ pour $k = 0$ donne directement la majoration cherchée.

Étudions donc la localisation du point $\tilde{V}(0) = \beta_n^{-1} i$. Pour tout entier l , notons H_l le demi-plan délimité par l'axe (α_l^-, α_l^+) et contenant i . Observons tout d'abord que les demi-plans H_l sont emboîtés d'après le lemme 4.3.1 : pour tout l , on a $H_l \subset H_{l+1}$. Observons de plus que puisque (α_l^-, α_l^+) rencontre $[i, \infty)$, le demi-plan H_l ne contient pas ∞ dans son bord à l'infini. Ainsi, pour tout point z de H_l , la demi-géodésique $[z, \infty)$ rencontre le bord de H_l , c'est-à-dire $\partial H_l = (\alpha_l^-, \alpha_l^+)$. Il nous suffit donc de montrer que le point $\beta_n^{-1} i$ appartient à H_n .

Il suffit d'observer pour cela que d'après la proposition 1.1.5, pour tout point z de H_l , l'hypercycle $\text{Hy}(\alpha_l; z)$ est entièrement inclus dans H_l . Ainsi, en appliquant successivement les éléments $\alpha_0^{-1}, \dots, \alpha_n^{-1}$ au point i , puisque les demi-plans H_l sont emboîtés, nous obtenons que pour tout $l \leq n$, le point $\alpha_l^{-1} \dots \alpha_0^{-1} i$ appartient à H_l . En particulier, $\alpha_n^{-1} \dots \alpha_0^{-1} i = \beta_n^{-1} i$ appartient à H_n , ce qui conclut. □

Nous pouvons maintenant énoncer le lemme central de cette démonstration. Pour une certaine sous-suite $(\alpha_n)_{\mathbb{N}}$ de $(\gamma_n)_{\mathbb{N}}$, en reprenant les notations du lemme 4.3.2, celui-ci permet de majorer pour tout n et pour tout $t \geq 0$ la distance du vecteur $g_{t+r_n} v_n$ au vecteur $g_t u$.

CHAPITRE 4. SUR LA RELATION ENTRE FEUILLE FORTEMENT
STABLE ET ORBITE HOROCYCLIQUE.

Lemme 4.3.4. *Il existe une sous-suite $(\alpha_n)_\mathbb{N}$ de $(\gamma_n)_\mathbb{N}$ telle que en reprenant les notations du lemme 4.3.2 et en notant $(t_l)_\mathbb{N}$ la suite de temps telle que $\tilde{u}(t_l) \in (\alpha_l^-, \alpha_l^+)$ pour tout l , on ait*

$$\forall n, l \in \mathbb{N}, \forall t \geq t_l, D(g_{t+r_n}v_n, g_t u) < \frac{1}{2^{l-1}}.$$

De plus, l'ensemble des sous-suites $(\alpha_n)_\mathbb{N}$ satisfaisant cette propriété est indénombrable

Démonstration. Nous allons extraire notre sous-suite $(\alpha_n)_\mathbb{N}$ par récurrence. A chaque fois que l'on aura choisi un élément α_k , on lui associera directement le temps t_k tel que $\tilde{u}(t_k) \in (\alpha_k^-, \alpha_k^+)$, l'élément $\beta_k = \alpha_0 \dots \alpha_k$ et le vecteur \tilde{v}_k basé en i et dirigé vers $\beta_k \cdot \infty$.

Pour tout n , notons $\eta_n = 1/2^n$ et $\epsilon(\eta_n)$ le minimum des nombres ϵ donnés par le lemme 4.1.1 et par la proposition 4.1.5 pour $\eta = \eta_n$. Pour tout n , on pose $\epsilon_n = \min(1/2^n, \epsilon(\eta_n))$. Nous dirons qu'un couple (\tilde{v}_n, t_l) satisfait la propriété (\mathcal{P}) si

$$(\mathcal{P}) \quad \text{pour tout } t \geq t_l \text{ on a } D(g_{t+r_n}v_n, g_t u) < \eta_l = 1/2^l.$$

Déterminons α_0 tel que $l(\alpha_0) < 1$ et le couple (\tilde{v}_0, t_0) associé satisfasse (\mathcal{P}) . Soit $J \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $j \geq J$, on ait $d(i, (\gamma_j^-, \gamma_j^+)) \geq 1$ et $l(\gamma_j) < \epsilon_0$. Prenons un $j \geq J$ et posons $\alpha_0 = \gamma_j$.

Observons que puisque la demi-géodésique $\tilde{u}(\mathbb{R}^+)$ rencontre l'axe (α_0^-, α_0^+) , le triplet $(\tilde{u}, \tilde{v}_0, \alpha_0)$ est en position $(\star\star)$. Alors, d'après la proposition 4.1.5, en posant $r_0 = B_\infty(\alpha_0^{-1}i, i)$ on a :

$$\sup_{t \in \mathbb{R}^+} \{ \min \{ D(g_{r_0+t}\tilde{v}_0, g_t \tilde{u}), D(g_{r_0+t}\tilde{v}_0, \alpha_0 g_t \tilde{u}) \} \} \leq \eta_0.$$

Cela implique que le couple (\tilde{v}_0, t_0) vérifie la propriété (\mathcal{P}) .

Supposons maintenant que pour un certain entier m , nous ayons construit des éléments $\alpha_0, \dots, \alpha_m$ tels que pour tous les entiers k et l dans $[0, m]$, on ait $l(\alpha_k) < \eta_k$ et le couple (\tilde{v}_k, t_l) satisfasse la propriété (\mathcal{P}) . Nous allons maintenant choisir un élément α_{m+1} tel que le couple (\tilde{v}_n, t_l) satisfasse la propriété (\mathcal{P}) pour tous les entiers n et l dans $[0, m+1]$.

Observons que puisque $\beta_k^{-1}\tilde{v}_k(\infty) = \infty$, on a $\lim_{t \rightarrow +\infty} d(\beta_k^{-1}\tilde{v}_k(t), \tilde{u}(\mathbb{R}^+)) = 0$. Ainsi, il existe un entier N tel que si $j \geq N$, toutes les demi-géodésiques $\beta_k^{-1}\tilde{v}_k(\mathbb{R}^+)$ pour $k \leq m$ croisent l'axe (γ_j^-, γ_j^+) à une distance strictement plus petite que $\epsilon_{m+1}/2$ de \tilde{q}_j (le point d'intersection entre (γ_j^-, γ_j^+) et $\tilde{u}(\mathbb{R}^+)$). De plus, si N est suffisamment grand, on a aussi $l(\gamma_j) < \epsilon_{m+1}/2$. Choisissons un entier $p \geq N$ quelconque tel que si l'on note p_m l'entier tel que $\alpha_m = \gamma_{p_m}$, alors $p > p_m$. On pose $\alpha_{m+1} = \gamma_p$.

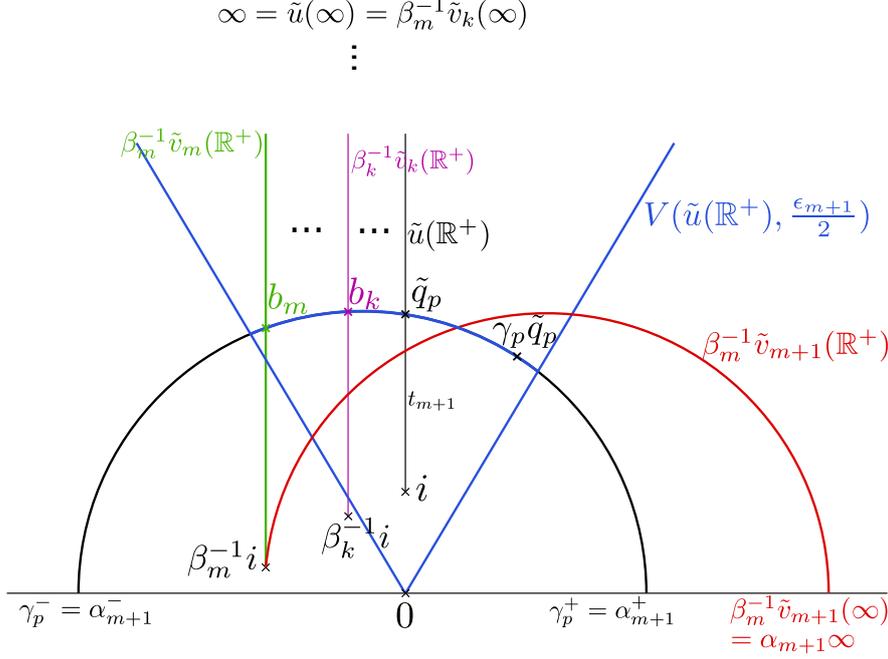
Pour tout $k \leq m$, notons b_k le point d'intersection de la demi-géodésique $\beta_k^{-1}\tilde{v}_k(\mathbb{R}^+)$ avec l'axe $(\gamma_p^-, \gamma_p^+) = (\alpha_{m+1}^-, \alpha_{m+1}^+)$. On a donc $d(b_k, \tilde{q}_p) < \epsilon_{m+1}/2$ pour tout $k \leq m$ (voir figure 4.9).

Posons $\beta_{m+1} = \alpha_{m+1}\beta_m$ et $t_{m+1} = d(i, \tilde{q}_p)$ (et donc $\tilde{u}(t_{m+1}) = \tilde{q}_p$). Nous allons maintenant distinguer trois cas pour montrer que pour tout n et l dans $[1, m+1]$, le couple (\tilde{v}_n, t_l) vérifie la propriété (\mathcal{P}) .

Premier cas : $n, l \leq m$. Direct par hypothèse sur les éléments $\alpha_0, \dots, \alpha_m$.

Deuxième cas : $n \leq m$ et $l = m+1$. Soit $t \geq t_l = t_{m+1}$. Nous allons chercher à majorer la distance $d(\beta_n^{-1}\tilde{v}_n(t+r_n), \tilde{u}(t))$ par ϵ_{m+1} pour appliquer

FIGURE 4.9 – Lemme du théorème E



le lemme 4.1.1 et conclure. Observons que puisque $\beta_n^{-1} \tilde{v}_n(\infty) = \tilde{u}(\infty)$, les deux demi-géodésiques $\beta_n^{-1} \tilde{v}_n(\mathbb{R}^+)$ et $\tilde{u}(\mathbb{R}^+)$ sont verticales et donc la fonction $t \mapsto d(\beta_n^{-1} \tilde{v}_n(t + r_n), \tilde{u}(t))$ est décroissante. Ainsi, on a

$$\begin{aligned} d(\beta_n^{-1} \tilde{v}_n(t + r_n), \tilde{u}(t)) &\leq d(\beta_n^{-1} \tilde{v}_n(t_{m+1} + r_n), \tilde{u}(t_{m+1})) \\ &\leq d(\beta_n^{-1} \tilde{v}_n(t_{m+1} + r_n), b_n) + d(b_n, \tilde{q}_p). \end{aligned}$$

Comme $b_n \in \beta_n^{-1} \tilde{v}_n(\mathbb{R}^+)$, on a

$$d(\beta_n^{-1} \tilde{v}_n(t_{m+1} + r_n), b_n) = |B_\infty(\beta_n^{-1} \tilde{v}_n(t_{m+1} + r_n), b_n)|.$$

Alors, comme $B_\infty(\beta_n^{-1} \tilde{v}_n(t_{m+1} + r_n), \tilde{u}(t_{m+1})) = B_\infty(\beta_n^{-1} \tilde{v}_n(t_{m+1} + r_n), \tilde{u}(0)) = 0$ d'après la proposition 1.1.10, et comme $\tilde{q}_p = \tilde{u}(t_{m+1})$, on a :

$$\begin{aligned} |B_\infty(\beta_n^{-1} \tilde{v}_n(t_{m+1} + r_n), b_n)| &= |B_\infty(\beta_n^{-1} \tilde{v}_n(t_{m+1} + r_n), \tilde{q}_p)| + |B_\infty(\tilde{q}_p, b_n)| \\ &= |B_\infty(\tilde{q}_p, b_n)| \\ &\leq d(\tilde{q}_p, b_n) \\ &< \frac{\epsilon_{m+1}}{2}. \end{aligned}$$

En conclusion,

$$d(\beta_n^{-1} \tilde{v}_n(t + r_n), \tilde{u}(t)) \leq 2d(b_n, \tilde{q}_p) < \epsilon_{m+1}$$

On déduit alors du lemme 4.1.1 que $D(g_{t+r_n} v_n, g_t u) \leq \eta_{m+1}$.

CHAPITRE 4. SUR LA RELATION ENTRE FEUILLE FORTEMENT
STABLE ET ORBITE HOROCYCLIQUE.

Troisième cas : $n = m+1$ et $l \leq m+1$. Soit $t \geq t_l$. On utilise la décomposition suivante.

$$D(g_{t+r_{m+1}}v_{m+1}, g_t u) \leq D(g_{t+r_{m+1}}v_{m+1}, g_{t+r_m}v_m) + D(g_{t+r_m}v_m, g_t u).$$

Pour la majoration du premier terme, nous allons utiliser la proposition 4.1.5. Observons pour cela que le triplet $(\beta_m^{-1}\tilde{v}_m, \beta_m^{-1}\tilde{v}_{m+1}, \alpha_{m+1})$ est en position $(\star\star)$. En effet, la demi-géodésique $\beta_m^{-1}\tilde{v}_m(\mathbb{R}^+)$ croise l'axe $(\alpha_{m+1}^-, \alpha_{m+1}^+)$ (voir démonstration du lemme 4.3.3) et le vecteur $\beta_m^{-1}\tilde{v}_{m+1}$ est basé en $\beta_m^{-1}i$ et dirigé vers $\alpha_{m+1}\infty$. Rappelons ici que nous avons choisi ϵ_{m+1} de sorte qu'il soit plus petit que le nombre $\epsilon(\eta_{m+1})$ fourni par la proposition 4.1.5.

Notons maintenant

$$R = r_{m+1} - r_m = B_\infty(\beta_{m+1}^{-1}i, \beta_m^{-1}i) = B_\infty(\alpha_{m+1}^{-1}\beta_m^{-1}\tilde{v}_m(0), \beta_m^{-1}\tilde{v}_m(0))$$

On applique alors la proposition 4.1.5 au triplet $(\beta_m^{-1}\tilde{v}_m, \beta_m^{-1}\tilde{v}_{m+1}, \alpha_{m+1})$:

$$\sup_{s \in \mathbb{R}^+} \{ \min(D(g_{s+R}\beta_m^{-1}\tilde{v}_{m+1}, g_s\beta_m^{-1}\tilde{v}_m), D(g_{s+R}\beta_m^{-1}\tilde{v}_{m+1}, \alpha_{m+1}g_s\beta_m^{-1}\tilde{v}_m)) \} < \eta_{m+1}.$$

Ou encore, puisque β_m est une isométrie de $T^1\mathbb{H}$,

$$\sup_{s \in \mathbb{R}^+} \{ \min(D(g_{s+R}\tilde{v}_{m+1}, g_s\tilde{v}_m), D(g_{s+R}\tilde{v}_{m+1}, \alpha_{m+1}g_s\tilde{v}_m)) \} < \eta_{m+1}.$$

Ainsi,

$$\sup_{s \in \mathbb{R}^+} D(g_{s+R}v_{m+1}, g_s v_m) < \eta_{m+1}.$$

En particulier, pour $s = t + r_m$, on obtient :

$$D(g_{t+r_{m+1}}v_{m+1}, g_{t+r_m}v_m) < \eta_{m+1}.$$

On majore maintenant le deuxième terme. Si $l \leq m$, alors par hypothèse sur les éléments $\alpha_0, \dots, \alpha_m$ on a $D(g_{t+r_m}v_m, g_t u) < \eta_l$. Sinon, si $l = m+1$, la majoration $D(g_{t+r_m}v_m, g_t u) < \eta_{m+1} = \eta_l$ a été obtenue dans le deuxième cas.

En sommant les deux termes, on obtient

$$D(g_{t+r_{m+1}}v_{m+1}, g_t u) < 2\eta_l,$$

Ce qui achève la démonstration. □

Nous pouvons enfin démontrer le théorème E.

Démonstration du théorème E. Soit $(\alpha_n)_\mathbb{N}$ une sous-suite de $(\gamma_n)_\mathbb{N}$ donnée par le lemme 4.3.4. En reprenant les notations du lemme 4.3.2 et du lemme 4.3.3, nous allons montrer que le vecteur $w := g_r v$ de T^1S appartient à $W^{ss}u$. Pour cela, on utilise la décomposition :

$$D(g_t w, g_t u) \leq D(g_t w, g_{t+r_n}v_n) + D(g_{t+r_n}v_n, g_t u).$$

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = r$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = v$ d'après les lemmes 4.3.2 et 4.3.3, on pour tout $t > 0$

$$\lim_n D(g_t w, g_{t+r_n}v_n) = 0.$$

De plus, d'après le lemme 4.3.4, pour tout n et tout l dans \mathbb{N}^* , si $t \geq t_l$, on a $D(g_{t+r_n}v_n, g_t u) < 1/2^{l-1}$. Puisque la suite $(1/2^l)_{\mathbb{N}}$ converge vers 0, on obtient par inégalité triangulaire

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} D(g_t w, g_t u) = 0,$$

c'est-à-dire $w \in W^{ss}u$.

Il reste maintenant à montrer que l'on peut construire un ensemble indénombrable de tels w tels que $w \notin h_{\mathbb{R}}u$. Pour une sous-suite α de $(\alpha_n)_{\mathbb{N}}$, nous noterons w^α le vecteur de $W^{ss}u$ construit comme précédemment. Considérons deux sous-suites $\alpha^1 := (\alpha_{1,n})_{\mathbb{N}}$ et $\alpha^2 := (\alpha_{2,n})_{\mathbb{N}}$ de $(\alpha_n)_{\mathbb{N}}$ distinctes données par le lemme 4.3.4. On a alors :

$$\tilde{w}^{\alpha^j}(\infty) = \left(\prod_{k=1}^{\infty} \alpha_{j,k} \right) \infty.$$

pour $j = 1, 2$. Comme les suites α^1 et α^2 sont distinctes, on peut considérer l le premier entier tel que $\alpha_{1,l} \neq \alpha_{2,l}$. Alors, si l'on avait $\tilde{w}^1(\infty) = \tilde{w}^2(\infty)$, on aurait

$$\xi_1 := \left(\prod_{k=l}^{\infty} \alpha_{1,k} \right) \infty = \left(\prod_{k=l}^{\infty} \alpha_{2,k} \right) \infty =: \xi_2.$$

Mais le point ξ_1 appartient au bord à l'infini du demi-plan $\mathbb{H}_i^c(\alpha_{1,l})$ tandis que le point ξ_2 appartient au bord à l'infini du demi-plan $\mathbb{H}_i^c(\alpha_{2,l})$. Ces demi-plans étant disjoints d'après le lemme 4.3.1, cela est impossible. Ainsi, les points $\tilde{w}^1(\infty)$ et $\tilde{w}^2(\infty)$ sont bien distincts.

Notons maintenant $W(\infty)$ l'ensemble des directions dans $\mathbb{H}(\infty)$ associées à tous les éléments \tilde{w} que nous avons construits via les sous-suites de $(\alpha_n)_{\mathbb{N}}$. C'est-à-dire

$$W(\infty) = \{ \xi \in \mathbb{H}(\infty) \mid \text{il existe une sous-suite } \alpha \text{ de } (\alpha_n)_{\mathbb{N}} \text{ telle que } \xi = \tilde{w}^\alpha(\infty) \}.$$

Puisque l'ensemble des sous-suites de $(\alpha_n)_{\mathbb{N}}$ est indénombrable, d'après le raisonnement précédent, l'ensemble $W(\infty)$ est indénombrable. L'ensemble produit $\Gamma \cdot W(\infty)$ est donc en particulier encore indénombrable. Notons alors enfin $B(\infty)$ le quotient $\Gamma \backslash (\Gamma \cdot W(\infty))$. Ce quotient est à nouveau indénombrable. Or, si $\Gamma \cdot \xi$ est une classe de $B(\infty)$, nous avons montré qu'il existe un élément \tilde{w}_ξ de $T^1\mathbb{H}$ dirigé vers ξ qui se projette sur un élément w_ξ sur T^1S appartenant à $W^{ss}u$. Par ailleurs, si $\Gamma \cdot \eta$ est une autre classe de $B(\infty)$, alors il existe un vecteur \tilde{w}_η de $T^1\mathbb{H}$ dirigé vers η qui se projette sur un élément w_η de T^1S appartenant lui aussi à $W^{ss}u$. Puisque les classes $\Gamma \cdot \xi$ et $\Gamma \cdot \eta$ sont distinctes, les orbites horocycliques $h_{\mathbb{R}}w_\xi$ et $h_{\mathbb{R}}w_\eta$ sont distinctes.

Ainsi, $W^{ss}u$ est bien une réunion indénombrable d'orbites horocycliques. \square

Nous pouvons maintenant déduire directement du théorème E ainsi que du corollaire 3.1.2 le résultat suivant. C'est le premier résultat fournissant l'allure d'une orbite horocyclique spécifique aux surfaces géométriquement infinies non fermée et non dense dans l'ensemble non errant.

Corollaire 4.3.5. *Soient $S := \Gamma \backslash \mathbb{H}$ une surface hyperbolique géométriquement infinie et u un élément de T^1S . Supposons que $u(\mathbb{R}^+)$ est une demi-géodésique*

CHAPITRE 4. SUR LA RELATION ENTRE FEUILLE FORTEMENT STABLE ET ORBITE HOROCYCLIQUE.

quasi-minimisante infinie rencontrant une suite de géodésiques fermées de longueurs convergeant vers 0.

Alors l'adhérence $\overline{h_{\mathbb{R}}u}$ est une réunion indénombrable de double orbites distinctes $g_{\mathbb{R}+}h_{\mathbb{R}}v$.

Questions et remarques

Peut-on généraliser le théorème E avec l'hypothèse $\underline{\text{Inj}}(u(\mathbb{R}^+)) = 0$?

La démonstration du théorème E utilise le fait que la demi-géodésique $u(\mathbb{R}^+)$ croise une suite de géodésiques fermées de longueurs tendant vers 0. On peut se demander si le théorème reste valable si l'on a seulement $\underline{\text{Inj}}(u(\mathbb{R}^+)) = 0$. Cela permettrait de donner une belle caractérisation de la différence en feuille fortement stable et orbite horocyclique. Nous obtiendrions en effet l'équivalence $h_{\mathbb{R}}u \neq W^{ss}u$ si et seulement si la finesse asymptotique de $u(\mathbb{R}^+)$ est nulle.

Que dire en dimension supérieure ? Le flot horocyclique se généralise en dimensions supérieures en considérant le feuilletage horosphérique. Pour leur part, les feuilles fortement stables peuvent être définies identiquement en dimensions supérieures. On peut alors s'interroger de la même manière sur les relations d'inclusions entre ces ensembles.

Index

- Axe de translation, 3
- Bout cuspidal, 21
- Demi-géodésique quasi-minimisante, 23
- Domaine de Dirichlet, 18
 - côté, 22
 - sommet, 22
- Ensemble limite, 17
 - conique, 17
 - horocyclique, 17
 - parabolique, 18
- Finesse asymptotique, 25
- Flûte hyperbolique, 26
 - fine, constante, épaisse, 28
 - non tordue, 26
 - tordue, 26
- Flot géodésique, 5
- Géodésique, 3
- Groupe de Schottky, 20
- Groupe fuchsien, 16
- Groupe non-élémentaire, 17
- Horocycle, 7
- Hypercycle, 4
- Isométries
 - elliptique, 2
 - hyperbolique, 2, 3
 - parabolique, 2, 9
- Longueur de translation, 3
- Médiatrice, 6
- Positions relatives de points limites, 10
- Trompette, 20

Bibliographie

- [Bas93] Ara Basmajian. Hyperbolic structures for surfaces of infinite type. *Journal de l'Ecole Polytechnique*, (1) :421–444, 1993.
- [Bea95] Alan Beardon. *The Geometry of Discrete Groups*. Graduate texts in mathematics, 91. Springer, New York, NY, 1995.
- [Bel18] Alexandre Bellis. On the links between horocyclic and geodesic orbits on geometrically infinite surfaces. *Journal de l'Ecole Polytechnique*, pages 443–454, 2018.
- [CM10] Yves Coudène and François Maucourant. Horocycles récurrents sur des surfaces de volume infini. *Geometriae Dedicata*, 149(1) :231–242, 2010.
- [Dal10] Françoise Dal'Bo. *Geodesic and Horocyclic Trajectories*. Universitext. Springer London, 2010.
- [Ebe73] Patrick Eberlein. Geodesic flows on negatively curved manifolds 2. *Transactions of the American Mathematical Society*, 178 :57–82, 1973.
- [Ebe77] Patrick Eberlein. Horocycle flows on certain surfaces without conjugate points. *Transactions of the American Mathematical Society*, 233 :1–36, 1977.
- [Fer02] Damien Ferte. Flot horosphérique des repères sur les variétés hyperboliques de dimension 3 et spectre des groupes kleinien. *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society*, 33(1) :99–123, Apr 2002.
- [Ghy92] Étienne Ghys. Dynamique des flots unipotents sur les espaces homogènes. *Séminaire Bourbaki*, 34 :93–136, 1991-1992.
- [GL17] Massey Gaye and Cheikh Lo. Sur l'inexistence d'ensembles minimaux pour le flot horocyclique. *Confluentes Mathematici*, 2017.
- [Haa96] Andrew Haas. Dirichlet points, garnett points, and infinite ends of hyperbolic surfaces. i. *Annales Academiae Scientiarum Fennicae. Series A I. Mathematica*, 21(1) :3–29, 1996.
- [Hed36] Gustav Arnold Hedlund. Fuchsian groups and transitive horocycles. *Duke Mathematical Journal*, 2 :530–542, 1936.
- [Hed39] Gustav Arnold Hedlund. The dynamics of geodesic flows. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 45(4) :241–260, 04 1939.
- [Kat92] Svetlana Katok. *Fuchsian Groups*. Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, 1992.
- [Kul04] Michael Kulikov. The horocycle flow without minimal sets. *C. R., Math., Acad. Sci. Paris*, 338(6) :477–480, 2004.

BIBLIOGRAPHIE

- [Led97] François Ledrappier. Horospheres on abelian covers. *Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática - Bulletin/Brazilian Mathematical Society*, 28(2) :363–375, 1997.
- [LM16] Cyril Lecuire and Mahan Mj. Horospheres in degenerate 3-manifolds. *ArXiv e-prints*, June 2016.
- [Mat16] Shigenori Matsumoto. Horocycle flows without minimal sets. *Journal of Mathematical Sciences (Japan)*, 23(3) :661–673, 2016.
- [MMO16] Curtis Tracy McMullen, Amir Mohammadi, and Hee Oh. Horocycles in hyperbolic 3-manifolds. 2016.
- [Par15] Frédéric Parkkonen, Jouni et Paulin. On the hyperbolic orbital counting problem in conjugacy classes. *Mathematische Zeitschrift*, 279(3) :1175–1196, 2015.
- [PDS12] Marc Peigné, Françoise Dal’Bo, and Andrea Sambusetti. On the horoboundary and the geometry of rays of negatively curved manifolds. *Pacific Journal of Mathematics*, 259(1) :55–100, 2012.
- [Poi82] Henry Poincaré. Théorie des groupes fuchsien. *Acta Mathematica*, 1 :1–62, 1882.
- [Rat91] Marina Ratner. Raghunathan’s topological conjecture and distributions of unipotent flows. *Duke Math. J.*, 63(1) :235–280, 06 1991.
- [Sar10] Omri Sarig. The horocycle flow and the laplacian on hyperbolic surfaces of infinite genus. *Geometric and Functional Analysis*, 19(6) :1757–1812, 2010.
- [Sch13] Barbara Schapira. Density of half-horocycles on geometrically infinite hyperbolic surfaces. *Ergod. Th. and Dynam. Sys.*, 33(4) :1162–1177, 2013.
- [Sta95] Alexander Starkov. Fuchsian groups from the dynamical viewpoint. *Journal of Dynamical and Control Systems*, 1(3) :427–445, 1995.

Résumé

On étudie le comportement topologique du flot horocyclique sur des surfaces hyperboliques géométriquement infinies. Cette étude est intimement liée à celle du flot géodésique sur ces surfaces.

Le premier chapitre commence par introduire les objets de géométrie hyperbolique que nous utiliserons. Il présente ensuite une classe de surfaces, les flûtes hyperboliques, qui couvrent une grande partie de la complexité des surfaces géométriquement infinies. Enfin, il aborde la notion de finesse asymptotique d'une demi-géodésique, qui donne la limite inférieure du rayon d'injectivité de la surface le long de la demi-géodésique.

Le deuxième chapitre est consacré aux propriétés classiques du flot horocyclique sur lesquelles nous baserons nos preuves.

Le troisième chapitre concerne l'étude de l'intersection entre l'adhérence de l'orbite horocyclique issue d'un vecteur u d'une surface hyperbolique et la demi-orbite géodésique issue de ce même vecteur. Nous montrons que si la finesse asymptotique de la demi-orbite géodésique issue de u est finie et si u n'est pas périodique pour le flot horocyclique, cette intersection contient une infinité divergente de points. Par ailleurs, si la finesse asymptotique est nulle, alors cette intersection est égale à toute la demi-orbite géodésique positive. Nous montrons cependant que même si la finesse asymptotique n'est pas nulle, la demi-orbite géodésique peut tout de même être contenue dans cette intersection.

Le quatrième chapitre étudie les liens entre une orbite horocyclique issue d'un vecteur u et la feuille fortement stable associée. Nous commençons par montrer que les adhérences de ces deux ensembles coïncident toujours. Cependant, cette propriété ne s'étend pas aux ensembles eux-mêmes et nous donnons ensuite une condition suffisante pour qu'ils ne coïncident pas. Nous montrons qu'alors la feuille fortement stable est une union d'une quantité non dénombrable d'orbites horocycliques.

Abstract

We study the topological behavior of the horocycle flow on geometrically infinite hyperbolic surfaces. This study and that of the geodesic flow are deeply interwoven.

The first chapter introduces the basic objects of hyperbolic geometry that we will use. Next, it presents a class of surfaces, the hyperbolic flutes, which carries most of the complexity of geometrically infinite surfaces. Then, it details the notion of asymptotic thinness for a half-geodesic, which determines the size of the most thin parts that this half-geodesic crosses.

The second chapter focuses on the classical properties of the horocycle flow on which we will base our proofs.

The third chapter presents the study of the intersection between the closure of a horocyclic orbit stemming from a vector u on a hyperbolic surface and the positive half-geodesic stemming from the same vector. We show that if the asymptotic thinness of the half-orbit stemming from u is finite and if u is not periodic for the horocycle flow, then this intersection contains an unbounded sequence of points. Moreover, if the asymptotic thinness is zero, then all the half-geodesic orbit is included in the intersection. However, we also prove that the half-geodesic orbit can be included in the intersection and even if the asymptotic thinness is not zero.

The fourth chapter studies the links between a horocyclic orbit starting from a vector u and the strong stable manifold associated to u . We first show that the closure of these two sets are always the same. However, we then give a sufficient condition for these two sets to be different and we prove that in this case, the strong stable manifold is a reunion of an uncountable number of horocyclic orbits.