



Géodésiques sur les surfaces hyperboliques et extérieurs des noeuds

José Andrés Rodríguez Migueles

► To cite this version:

José Andrés Rodríguez Migueles. Géodésiques sur les surfaces hyperboliques et extérieurs des noeuds. Géométrie algébrique [math.AG]. Université de Rennes, 2018. Français. NNT : 2018REN1S021 . tel-01865539

HAL Id: tel-01865539

<https://theses.hal.science/tel-01865539>

Submitted on 31 Aug 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE / UNIVERSITÉ DE RENNES 1

sous le sceau de l'Université Bretagne Loire

pour le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Mention : Mathématiques et leurs interactions

Ecole doctorale MathSTIC

présentée par

José Andrés Rodríguez Migueles

Préparée à l'unité de recherche UMR CNRS 6625 (IRMAR)
Institut de Recherche Mathématique de Rennes
U.F.R de Mathématiques

**Géodésiques sur les
surfaces
hyperboliques et
extérieurs des nœuds**

**Thèse soutenue à Rennes
le 9 juillet 2018**

devant le jury composé de :

Michel BOILEAU

Professeur à l'Université d'Aix-Marseille /
examineur

Pierre DEHORNOY

Professeur à l'Université de Grenoble-Alpes /
rapporteur

Anna LENZHEN

Professeure à l'Université de Rennes 1 /
examinatrice

Luisa PAOLUZZI

Professeure à l'Université d'Aix-Marseille /
examinatrice

Joan PORTI

Professeur à l'Université Autonome de Barcelone /
rapporteur

Juan SOUTO

DR CNRS à l'Université de Rennes 1 / *directeur de
thèse*

Remerciements

Cette thèse est possible grâce à l'aide et le soutien de nombreuses personnes, merci à tous qui ont partagé avec moi des moments de joie, de réflexion et de affliction.

Dans le côté des contributions pour ma formation mathématique:

Comenzare por agradecer a Juan Souto por su sinceridad, confianza, apoyo, guía y sobre todo por las divertidas matemáticas que me enseñó y compartimos.

Je remercie Pierre Dehornoy pour son disponibilité, les conversations, les réponses opportunes à mes questions sur les nœuds modulaires et d'avoir bien voulu rapporter ma thèse et soutien pour ma candidature aux post-docs. Aussi pour me donner l'opportunité de présenter mes résultats dans deux occasions à l'Institut Fourier.

Gracias a Joan Porti, por la amabilidad de escuchar mis resultados detenidamente, por las atinadas preguntas y observaciones en tu reporte que afinaron una parte fundamental de esta tesis. También, por la invitación a la Universidad Autónoma Barcelona.

J'aimerais aussi remercier Luisa Paoluzzi pour m'avoir permis, via ses remarques et commentaires opportuns, d'améliorer le manuscrit.

Thanks to Ania for our conversations while I was trying to understand geodesics and metrics on hyperbolic surfaces and for being part of my jury.

Je tiens à remercier Michel Boileau pour m'avoir fait l'honneur de faire partie de mon jury, le soutien pour ma candidature aux post-docs et les discussions qu'on a eu à Bordeaux.

Gracias a Max Neumann-Coto por escuchar mis resultados en mis visitas a México y fundamentalmente sus sugerencias para aclarar la prueba del Claim 4.12 y 4.13. También a Mario Eudave Muñoz y José Luis Cisneros por sus preguntas, conversaciones e invitaciones a platicar sobre mi tema de investigación en México. Especialmente agradezco a Alberto Verjovsky por su interés por mi trabajo, apoyo en las postulaciones al post-doc, preguntas y su motivación al hablar de matemáticas. Gracias a Valente por sus comentarios en mis escritos, los paseos y la comida, espero que, como dijo Poincaré, re-coincidir.

Je remercie à mon frère de thèse Cyril ainsi qu'à Simon et Olivier qui ont eu la gentillesse de corriger et remarquer mes erreurs de rédaction et d'orthographe de cette thèse et pour sa disponibilité à discuter. Aussi à Ludovic pour regarder attentivement mes résumés et de m'écouter de temps en temps. Merci Cyril Lecuire pour m'inviter à parler de mon sujet à Toulouse.

I was also greatly benefited from conversations with Tommaso, who has been listening to many of my ideas, some of them which ended in an upcoming paper. Thanks also for the food recommendations and long chats (not cats).

Merci au Centre Henri Lebesgue pour me donner l'opportunité de faire mes études en Rennes depuis le Master 2 et continuer mes études de thèse. Aussi aux membres des équipes de Théorie ergodique, Géométrie analytique pour les séminaires, groupes de travail et cours doctoraux. Ensuite, merci aux participants

du séminaire PAMPERS pour la bonne disposition pour partager ses connaissances. Merci aussi vivement à l'équipe administratif, en particulier Xhensila (pour être attentive a mon développement académique et personnelle), Valérie, Marie-Aude, Nicole, Hélène, Marie-Annick, Dominique, Maryse, Chantal, Aude, Olivier et Elodie.

Et puis il y a bien sur tous mes collègues (ex, post) doctorants de l'IRMAR: Mac, Adrien, Zoïs, Mercedes, Andrés, Alexandre, Camile, Youenn, María, Türkü, Jesus David, Shengyan, Phuong, Arame, Pierre, Thi, Felipe, Néstor, Axel, Yvan, Vincent, Christian, Federico, Basile, Tristan, Salomé, Charles, Marine, Damien, Arnaud, Ninon, Paul, Salim, Antonin, Maycol, Olga, Thiago,...

A todos los que influyeron e inspiraron mi gusto por las matemáticas en México, desde los retos matemáticos que nos ponía Colín hasta mi formación académica en la queridísima UNAM (Goya, Goya, Cachun, Cachun, Ra Ra, Univesidad!).

J'en viens maintenant aux remerciements plus personnels:

Con una gran sonrisa en el rostro doy gracias a mi esposa Maïa-Beleza por el amor incondicional, los acordes cotidianos, las discusiones, el cariño, la perseverancia hacia nuestros sueños, por las aventuras y la buena vibra.

Gracias a mis padres Luz y Jorge, por su apoyo incondicional, gran amor, sus dulces palabras y a la vida. También a mis queridos hermanos Esteban y Viviana, por levantarme el ánimo y las bromas. Gracias por brincar el charco año con año para aprovechar juntos las vacaciones. A Paty, Oscar, Oscar David y Neto por las porras y el apoyo.

A los 'Piñateros', Monica, Lourdes y Vladimir por los buenos momentos. También a toda los organizadores de eventos mexicanos que me permitían recordar nuestras costumbres.

Merci à les gens qui je partage moments très spéciales à Rennes, soit en jouant capoeira, les visites organises par le CMI, l'AMAP et l'harmonie de la ville stimulé par ses gentils habitants qui ont rendu mon séjour beaucoup plus facile et agréable.

Table des matières

Avant-propos	v
1 Introduction générale	1
2 Décomposition et géométrisation des 3-variétés	9
2.1 Décomposition des variétés de dimension 3	9
2.1.1 Décomposition sphérique	10
2.1.2 Surfaces incompressibles	10
2.1.3 Décomposition JSJ	11
2.1.4 Variétés de Seifert	13
2.2 Géométrisation des variétés de dimension 3	16
2.2.1 Théorème d'Hyperbolisation	18
2.2.2 Théorème de rigidité de Mostow	19
2.2.3 Volume des 3-variétés hyperboliques	21
3 La période de la fraction continue et nœuds modulaires	27
3.1 Codage des géodésiques fermées	28
3.2 Nœuds modulaires dans le gabarit de Lorenz	31
3.3 Majoration du volume	34
4 On volumes of complements of periodic geodesics	41
4.1 Introduction	41
4.2 Topology and geometry of $M_{\hat{\gamma}}$	44
4.2.1 Transversal homotopies	45
4.2.2 Topological type of $M_{\hat{\gamma}}$	47
4.2.3 Hyperbolicity of $M_{\hat{\gamma}}$	49
4.3 Sequences of geodesics with bounded volume complement . . .	52
4.4 Lower bound on the volume of $M_{\hat{\gamma}}$	57
4.4.1 Coding filling geodesics on surfaces by splitting along a simple closed geodesic	62

4.4.2	Lower bound of the volume of $M_{\hat{\gamma}}$ in terms of the length of γ	67
4.5	Further comments	71
Bibliographie		77

Avant-propos

Grâce au théorème d'hyperbolisation, nous savons précisément quand l'intérieur d'une variété de dimension 3 orientable, compacte, dont le bord est une réunion de tores, admet une métrique hyperbolique complète de volume fini, c'est-à-dire une métrique à courbure constante égale à -1 . Par ailleurs, d'après le théorème de rigidité de Mostow, cette structure géométrique est unique, donc tout invariant géométrique est également un invariant topologique. Cependant, trouver des liens pratiques entre la géométrie et la topologie est un problème difficile. La plupart des résultats décrits dans cette thèse visent à concrétiser le programme de géométrisation.

L'objectif principal de cette thèse est de mieux comprendre la géométrie de certains complémentaires de nœuds dans le fibré tangent unitaire projectif $PT^1\Sigma$ d'une surface hyperbolique donnée Σ . Ces nœuds proviennent du relèvement canonique dans $PT^1\Sigma$ de géodésiques fermées sur Σ , c'est-à-dire le champ des droites tangentes aux géodésiques. Il convient de noter que les résultats présentés ici peuvent être reformulés aussi pour les complémentaires dans le fibré tangent unitaire $T^1\Sigma$ des orbites périodiques du flot géodésique de Σ en fixant une orientation à la géodésique sous-jacente.

D'ailleurs, le complémentaire du relèvement canonique dans $PT^1\Sigma$ admet une métrique hyperbolique complète dès que la géodésique est remplissante dans Σ . Dans ce cas, son volume est un invariant topologique.

La thèse s'articule autour de l'étude du volume du complémentaire du relèvement canonique dans $PT^1\Sigma$. Pour structurer les résultats on va commencer par traiter le problème de la majoration du volume dans le cas particulier de la surface modulaire et dans un deuxième temps on va étudier la minoration et la majoration pour une surface hyperbolique en général.

Pour la majoration on sait que la question a déjà été traitée par Bergeron, Pinsky et Silberman, en construisant une triangulation idéale du complémentaire du relèvement canonique. Ils ont construit une telle triangulation avec un nombre de tétraèdres comparable à la longueur de la géodésique fermée co-

respondante. Dans cette thèse, nous commençons par construire des suites de géodésiques fermées remplissantes sur une surface hyperbolique dont les complémentaires ne sont pas homéomorphes entre eux et dont la suite des volumes respectifs est bornée. Notons qu’une suite de géodésiques fermées avec cette propriété avait été déjà trouvée par Bergeron, Pinsky et Silberman, mais notre méthode généralise la leur.

En ce qui concerne la minoration, on arrive à construire des géodésiques fermées remplissantes dont les complémentaires du relèvement canonique associé ont un volume aussi grand que l’on veut. En effet, c’est une conséquence de notre résultat principal qui donne une minoration combinatoire du volume du complémentaire, en termes des classes d’homotopie des arcs obtenus en coupant la géodésique et la surface le long d’une décomposition en pantalons donnée. Ceci donne une méthode pour construire des suites de géodésiques telles que les volumes des complémentaires associés sont minorés par la longueur des géodésiques correspondantes un à facteur logarithmique près.

Dans le cas de la surface modulaire on arrive à trouver une nouvelle majoration du volume proportionnelle au carré de la période de la fraction continue associée à la géodésique donnée. Cette majoration est meilleure que celle donnée par Bergeron, Pinsky et Silberman, pour une vaste famille de géodésiques fermées. Grâce à la minoration précédent, on arrive à trouver une suite de géodésiques sur la surface modulaire, dont les volumes des complémentaires sont minorés par la période de la fraction continue de chaque géodésique de la suite. Malheureusement, nos méthodes introduites pour la majoration en général permettent de construire des suites de géodésiques qui montrent que notre nouvelle majoration n’est pas optimale.

La thèse est organisée comme suit :

Le chapitre 1 donne une perspective de l’ensemble de la thèse. Nous rappelons d’abord les différentes notions qui nous serviront plus loin : la décomposition des variétés de dimension 3, le théorème d’hyperbolisation et le théorème de rigidité de Mostow. Puis nous énonçons les résultats qui seront prouvés dans les deux derniers chapitres.

Dans le chapitre 2 on explique la décomposition et la géométrisation des variétés de dimension 3. On énonce le théorème d’hyperbolisation en général. Ensuite, on explique comment la démonstration de Gromov-Thurston du théorème de rigidité de Mostow nous donne les concepts de base pour traiter l’étude du volume de nos 3-variétés hyperboliques.

Le but principal du chapitre 3 est de démontrer une majoration du volume

des complémentaires des relèvements canoniques pour des géodésiques fermées dans la surface modulaire en fonction de la période de la fraction continue des géodésiques.

Le chapitre 4 est consacré à la construction de suites de géodésiques fermées sur une surface hyperbolique telles que leurs complémentaires ne sont pas homéomorphes entre eux et dont la suite des volumes respectifs est bornée. D'autre part, on minore le volume du complémentaire à l'aide d'un réel explicite qui décrit une relation entre la géodésique et une décomposition en pantalons de la surface.

Remarque. La plupart des résultats de cette thèse sont rédigés dans l'article soumis pour publication [50].

Chapitre 1

Introduction générale

Soit Σ une surface hyperbolique complète, orientée et de type fini. Étant donné une géodésique fermée γ sur Σ on peut lui associer une 3-variété $M_{\hat{\gamma}}$, à savoir l'extérieur de $\hat{\gamma}$, le relèvement canonique relatif à γ , dans le fibré tangent unitaire projectif $PT^1\Sigma$. Dans certains cas on va utiliser la même notation $M_{\hat{\gamma}}$ pour désigner le complémentaire de $\hat{\gamma}$ dans $PT^1\Sigma$, ou bien le complémentaire de l'orbite périodique associée à la géodésique orientée γ dans $T^1\Sigma$.

Notons que, si on voit $M_{\hat{\gamma}}$ comme un extérieur de nœud, on a une 3-variété orientée et compacte qui a comme bord une collection finie de tores et qui est *irréductible* (c'est-à-dire que toute sphère plongée dans N borde une boule). En plus, le type topologique de $M_{\hat{\gamma}}$ ne dépend pas de la métrique hyperbolique donnée sur Σ . Cette dernière remarque est une conséquence du fait que deux géodésiques fermées relatives à différentes métriques hyperboliques mais qui appartiennent à la même classe de conjugaison du groupe fondamental de Σ sont *transversalement équivalentes* (voir sous-section 4.2.1).

Dans le cas général d'une 3-variété orientée, compacte et irréductible N , pour la munir d'une structure géométrique, nous savons grâce au théorème de géométrisation de Thurston et par le travail de Perelman [15], qu'il faut d'abord commencer par découper N le long d'une collection (éventuellement vide) minimale de tores plongés, incompressibles qui ne sont pas *parallèles au bord* et qui décomposent N en composantes connexes qui sont soit *atoroïdales* (c'est-à-dire, tout tore plongé incompressible dans N est parallèle au bord), soit des *variétés de Seifert* (une classe bien connue de 3-variétés, voir la sous-section 2.1.4).

Une telle collection est unique à isotopie près, et s'appelle la collection des *JSJ-tores de N* . La décomposition le long de cette collection de tores est

appelée la *décomposition JSJ* et les composantes connexes obtenues par le procédé précédent sont les *composantes JSJ* de N . Même si l'ensemble des 3-variétés irréductibles atoroidales et l'ensemble des 3-variétés de Seifert ont une intersection non vide (voir [33], IV.2.5 et IV 2.6) dans notre cas $M_{\tilde{\gamma}}$ n'appartient pas à cette intersection.

Afin d'associer une structure géométrique à chaque morceau de la décomposition JSJ de N , on rappelle la notion de *structure géométrique*.

En termes de géométrie riemannienne, une structure géométrique sur une variété N est la donnée d'une métrique riemannienne g complète et localement homogène. Ainsi N peut être décrite comme un quotient $\Gamma \backslash G/H$, où G est le groupe d'isométries du revêtement universel $(\tilde{M}, g)$ et Γ et H sont des sous-groupes du groupe de Lie G , Γ étant discret et H étant compact. Thurston a montré qu'il n'y a que 8 quotients de ce type (G/H) qui soient simplement connexes et qui admettent des quotients compacts.

Comme en dimension 2, les géométries les plus importantes sont celles qui sont à courbure constante : géométrie hyperbolique $\mathbb{H}^3$ de courbure -1, géométrie euclidienne $\mathbb{R}^3$ de courbure 0 et géométrie sphérique $\mathbb{S}^3$ de courbure +1. Pour les cinq autres géométries modèles on sait que les fibrés en cercles triviaux sur une surface, de caractéristique d'Euler strictement négative, ont une géométrie $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, tandis que les fibrés non triviaux ont une géométrie $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Les fibrés en cercles non triviaux sur $\mathbb{T}^2$ ont une *Nil*-géométrie, tandis que les fibrés $\mathbb{T}^2$ sur $\mathbb{S}^1$ ont une *Sol*-géométrie, (ou une *Nil*-géométrie, ou une géométrie de type $\mathbb{R}^3$). Finalement, les fibrés en cercles sur $\mathbb{S}^2$ ont une géométrie du type $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{S}^3$).

Un cas particulier du théorème de géométrisation est le théorème d'hyperbolisation de Thurston, qui dit que l'intérieur d'une 3-variété, non-Seifert, atoroidale, irréductible peut-être muni d'une métrique hyperbolique complète de volume fini si et seulement si la variété est fermée ou toutes les composantes de bord sont des tores [56] :

Théorème (d'Hyperbolisation). *L'intérieur d'une 3-variété orientée et compacte N avec des tores comme bord admet une métrique hyperbolique complète de volume fini, si et seulement si N est irréductible, (homotopiquement) atoroidale, avec un groupe fondamental infini et non homéomorphe à $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2$, $\mathbb{T}^2 \times I$ ou $K \tilde{\times} I$ (fibré tordu sur la bouteille de Klein).*

Pour nos 3-variétés $M_{\tilde{\gamma}}$ on a un critère en termes de la géodésique γ , qui implique l'existence d'une métrique hyperbolique complète [24] :

Théorème (Foulon-Hasselblatt). *Soit γ une géodésique fermée sur une surface hyperbolique Σ . Alors, $M_{\hat{\gamma}}$ admet une structure hyperbolique complète de volume fini, si et seulement si γ est remplissante dans Σ .*

Rappelons que γ est *remplissante* dans Σ si $\Sigma \setminus \gamma$ est une collection de disques ou de disques épointés, de manière équivalente, si l'intersection géométrique avec toute courbe fermée essentielle est non vide.

Retournons au cas général d'une 3-variété hyperbolique N de volume fini. Grâce au théorème de rigidité de Mostow [44], nous savons que N admet au plus une structure hyperbolique.

Théorème (de Rigidité de Mostow). *Soient N_1 et N_2 des 3-variétés hyperboliques connexes, orientées et de volume fini. Alors tout isomorphisme de groupes $\phi: \pi_1(N_1) \rightarrow \pi_1(N_2)$ est réalisé à conjugaison près par une isométrie de N_1 à N_2 .*

Par conséquent, on peut chercher des invariants géométriques de N sans spécifier la structure hyperbolique, car ce sont des invariants topologiques.

Dans le cadre de cette thèse on cherche plus précisément à estimer le volume de $M_{\hat{\gamma}}$ en termes des propriétés de la géodésique fermée γ sur Σ .

Remarque. *On considère pour être plus concret le cas où γ est remplissante. Même si pour une géodésique fermée, il est facile de généraliser nos résultats obtenus dans ce travail, en considérant le volume simplicial (voir sous-section 2.2.3) de $M_{\hat{\gamma}}$ au lieu du volume.*

Une façon d'estimer le volume de $M_{\hat{\gamma}}$ est de construire une métrique riemannienne g sur $M_{\hat{\gamma}}$. Même si cette métrique et la métrique hyperbolique g_0 n'ont rien à voir l'une avec l'autre, leur volumes sont liés par le résultat suivant dû à Besson, Courtois et Gallot [7] :

$$\text{Vol}(M_{\hat{\gamma}}, g_0) \leq \frac{h(g)^3}{8} \text{Vol}(M_{\hat{\gamma}}, g).$$

Ici, $h(g)$ est l'entropie volumique de $(M_{\hat{\gamma}}, g)$.

Malheureusement, ce beau résultat n'est pas facile à utiliser car il faut trouver une métrique riemannienne g dont on peut estimer l'entropie du volume. Heureusement, il y a une majoration beaucoup plus simple et combinatoire, en fonction du nombre de tétraèdres dans une triangulation idéale quelconque $\mathcal{T}_{\hat{\gamma}}$ de $M_{\hat{\gamma}}$:

$$\text{Vol}(M_{\hat{\gamma}}) \leq v_3 \cdot \#\mathcal{T}_{\hat{\gamma}},$$

où v_3 est le volume d'un tétraèdre idéal régulier dans $\mathbb{H}^3$.

Grâce à la méthode de la triangulation, il est possible de donner une majoration du volume de $M_{\hat{\gamma}}$ qui soit linéaire par rapport au nombre d'auto-intersection de γ . En utilisant cette méthode, Bergeron, Pinsky et Silberman donnent dans [8], une majoration qui est comparable à la longueur de γ .

Théorème (Bergeron-Pinsky-Silberman). *Étant donné une métrique hyperbolique X sur une surface Σ , il existe une constante $C_X > 0$ telle que, pour tout ensemble fini γ de géodésiques fermées remplissantes dans X , on a :*

$$\text{Vol}(M_{\hat{\gamma}}) \leq C_X \ell_X(\gamma).$$

où, $\ell_X(\gamma)$ désigne la longueur totale des géodésiques fermées γ dans X .

Néanmoins, il est facile de construire des suites de géodésiques fermées dont la longueur tend vers l'infini mais dont la suite des volumes des complémentaires de relèvements canoniques est bornée. Par exemple, supposons que γ est remplissante et que ϕ est un difféomorphisme de la surface représentant un élément d'ordre infini dans le groupe de difféotopies : alors la longueur des géodésiques dans la suite $\{\phi^n(\gamma)\}_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers l'infini, mais chaque $M_{\widehat{\phi^n(\gamma)}}$ est homéomorphe à $M_{\hat{\gamma}}$.

De plus, Bergeron, Pinsky et Silberman ont trouvé une suite de géodésiques fermées de longueur croissante dont les complémentaires ne sont pas homéomorphes entre eux, mais dont la suite de volumes respectifs est bornée.

Dans cette thèse, on construit des géodésiques fermées avec la même propriété, mais notre construction généralise leur méthode et donne une famille plus vaste d'exemples :

Théorème (4.1). *Étant donné une surface hyperbolique Σ , il existe une constante $V_0 > 0$ et une suite $\{\gamma_n\}$ des géodésiques remplissantes sur Σ , avec $M_{\hat{\gamma}_n} \not\cong M_{\hat{\gamma}_k}$ pour tout $k \neq n$, telles que $\text{Vol}(M_{\hat{\gamma}_n}) < V_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En plus, pour toute suite $\{X_n\}$ de métriques hyperboliques sur Σ , on a $\ell_{X_n}(\gamma_n) \nearrow \infty$.*

Il est important de noter que suite au théorème 4.1, on a trouvé un critère pour décider quand deux extérieurs des relèvements canoniques provenant de la même surface ne sont pas homéomorphes. On sait que si deux géodésiques fermées appartiennent à la même orbite du groupe de difféotopies, alors le type topologique des extérieurs de leurs relèvements canoniques respectifs sont homéomorphes. Inversement, nous prouvons dans [50] que c'est tout ce qui peut arriver si nous nous restreignons à des géodésiques fermées non nulles en homologie. Plus précisément :

Théorème (4.6). *Soient γ et η deux géodésiques fermées, où la classe de γ dans $H_1(\Sigma; \mathbb{R})$ n'est pas triviale. Alors $M_{\hat{\gamma}}$ est homéomorphe à $M_{\hat{\eta}}$ si et seulement s'il existe un difféomorphisme ϕ de Σ tel que $\phi(\gamma)$ est homotope à η .*

Il est bien connu en topologie de dimension 3 que le problème de donner une minoration pour le volume d'une 3-variété complète hyperbolique est un problème plus difficile que celui de donner une majoration. Il n'est donc pas surprenant que le théorème 4.5 utilise un résultat profond. Nous utilisons un résultat dû à Agol, Storm et Thurston [4] dans lequel ils donnent une minoration pour le volume de $M_{\hat{\gamma}}$ en fonction du volume simplicial du double d'une variété construite en coupant $M_{\hat{\gamma}}$ le long d'une surface incompressible. Ici on utilise les tores verticaux du $PT^1\Sigma$ au dessus des courbes d'une décomposition en pantalons, qui fournissent une famille, en général non-connexe, de tores percés incompressibles dans $M_{\hat{\gamma}}$.

Dans le résultat suivant, on désigne par γ -arc sur le pantalon P toute restriction de l'application γ à un sous-intervalle fermé I tel que $\gamma(\partial I) \subset \partial P$ et $\gamma(I^\circ) \subset P^\circ$. En plus, on dit que deux γ -arcs sur P sont dans la même classe s'il existe une homotopie dans le couple $(P, \partial P)$.

Théorème (4.5). *Étant donné une décomposition en pantalons $\Pi := \{P_i\}_{i=1}^{-\chi(\Sigma)}$ d'une surface hyperbolique Σ , et γ une géodésique remplissante, on a :*

$$\text{Vol}(M_{\hat{\gamma}}) \geq \frac{v_3}{2} \sum_{i=1}^{-\chi(\Sigma)} \#\{\text{classes d'homotopie des } \gamma\text{-arcs sur } P_i\} - 3,$$

où v_3 est le volume d'un tétraèdre idéal régulier.

Grâce au théorème 4.5 on peut construire une suite de géodésiques telle que la croissance du volume est linéaire par rapport à la longueur des géodésiques à un facteur logarithmique près.

Théorème (4.3). *Étant donné une métrique hyperbolique X sur la surface Σ , il existe une suite de géodésiques fermées remplissantes $\{\gamma_n\}$ dans Σ avec $\ell_X(\gamma_n) \nearrow \infty$ telle que,*

$$\text{Vol}(M_{\hat{\gamma}_n}) \geq c_X \frac{\ell_X(\gamma_n)}{\ln(\ell_X(\gamma_n))},$$

où c_X dépend de la métrique hyperbolique X .

Plus généralement, on peut appliquer les résultats précédents à des géodésiques fermées sur un 2-orbifold hyperbolique. Cela peut-être particulièrement

intéressant dans le cas de la surface modulaire $\Sigma_{mod} = \mathbb{H}^2 / \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ pour deux motifs principaux.

Le premier est qu'il est plus pratique de travailler avec le fibré tangent unitaire, au lieu de son projectivisé, car il est homéomorphe au complémentaire du nœud de trèfle, donc le relèvement canonique de toute géodésique fermée orientée sur la surface modulaire peut être considéré comme un nœud dans $\mathbb{S}^3$. En plus, dans [25] Ghys a observé que les orbites périodiques du flot géodésique sur la surface modulaire sont les nœuds de Lorenz. Pour plus d'informations sur ces nœuds voir [21] et [25].

Le deuxième est que les géodésiques fermées de la surface modulaire sont déterminées par la partie périodique de leur développement en fraction continue. Cela permet d'estimer d'autres invariants plus combinatoires comme la période d'un tel développement.

Bergeron, Pinsky et Silberman ([8], théorème 3.6) ont donné une majoration du volume, dans le cas de la surface modulaire, qui est proportionnelle à la période de la fraction continue de la géodésique plus la somme des logarithmes des coefficients correspondants. J'ai récemment prouvé une limite supérieure qui dépend uniquement de la période :

Théorème (3.1). *Pour la surface modulaire Σ_{mod} , il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute géodésique fermée γ dans Σ_{mod} , on a :*

$$\mathrm{Vol}(M_{\hat{\gamma}}) \leq C \cdot v_3 \cdot n_{\gamma}^2,$$

où n_{γ} est la période de la fraction continue de γ et v_3 est le volume d'un tétraèdre idéal régulier.

Malheureusement, on retrouve dans le cas modulaire l'analogue du théorème 4.1, qui montre que le résultat précédent n'est pas optimal :

Théorème (4.2). *Pour la surface modulaire Σ_{mod} , il existe une constante $V_0 > 0$ et une suite $\{\gamma_k\}$ de géodésiques fermées sur Σ_{mod} , avec $M_{\hat{\gamma}_n} \not\cong M_{\hat{\gamma}_k}$ pour tout $k \neq n$, telle que $\mathrm{Vol}(M_{\hat{\gamma}_k}) < V_0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et la période de la fraction continue de γ_k tend vers l'infini.*

En ce qui concerne la minoration du volume, nous arrivons à reformuler le théorème 4.3 en fonction de la période de la fraction continue de la géodésique pour une suite de géodésiques fermées sur la surface modulaire, comme suit :

Théorème (4.4). *Pour la surface modulaire Σ_{mod} , il existe une suite $\{\gamma_k\}$ de géodésiques fermées sur Σ_{mod} avec $n_{\gamma_k} \nearrow \infty$ telle que,*

$$\mathrm{Vol}(M_{\hat{\gamma}_k}) \geq v_3 \frac{n_{\gamma_k}}{12},$$

où n_{γ_k} est la période de la fraction continue de γ_k et v_3 est le volume d'un tétraèdre idéal régulier.

Chapitre 2

Décomposition et géométrisation des variétés de dimension 3

Ce chapitre est consacré à la présentation de quelques faits classiques de topologie et géométrie des 3-variétés comme la décomposition JSJ et le théorème d'hyperbolisation des 3-variétés. Ensuite nous soulignons l'idée pour montrer le théorème de rigidité de Mostow et ses conséquences pour l'étude du volume des 3-variétés hyperboliques.

2.1 Décomposition des variétés de dimension 3

L'objectif de cette section est de donner une description de la décomposition sphérique de 3-variétés, puis la décomposition torique, aussi appelée décomposition JSJ. Finalement on parle de la classification d'une famille de 3-variétés qui sont obtenues à partir de telles décompositions.

Dans la suite N désigne une variété lisse de dimension 3 orientée et compacte dont le bord est constitué d'une collection finie de tores.

Définition. Soit $\mathcal{F}$ une collection localement finie de surfaces proprement plongées dans N , deux à deux disjointes. On note $N \setminus \cup \mathcal{F}$ le complémentaire d'un voisinage tubulaire de $\cup \mathcal{F}$ dans N , qui sera appelé le *découpage* de N le long de $\mathcal{F}$. En plus, on dira que $S \in \mathcal{F}$ *sépare* N quand $N \setminus S$ a au moins deux composantes connexes.

2.1.1 Décomposition sphérique

Si l'on découpe N le long d'une collection finie $\mathcal{S}$ de 2-sphères plongées deux à deux disjointes, on obtient une collection finie $N_1, \dots, N_p$ de variétés compactes, orientées, dont le bord est constitué de sphères et de tores. Il est commode de recoller à chaque composante sphérique une 3-boule, de façon à obtenir une collection de variétés fermées ou qui ont comme bord une collection finie de tores. Ces variétés seront notées $\bar{N}_1, \dots, \bar{N}_p$, et leur réunion disjointe $\bar{N} \setminus \bigcup \mathcal{S}$.

On dit que N est *irréductible* si toute sphère S plongée dans N il existe une sous-variété $B \subset N$ homéomorphe à la boule unité B^3 telle que $S = \partial B$, alors $\bar{N} \setminus S$ a deux composantes : l'une est homéomorphe à N , l'autre à $\mathbb{S}^3$.

Définition. Soit N une 3-variété orientée et compacte. Une *décomposition sphérique* de N est une collection finie $\mathcal{S}$ de 2-sphères disjointes plongées dans N telle que chaque composante connexe de $\bar{N} \setminus \bigcup \mathcal{S}$ est irréductible.

Théorème (Kneser). *Toute 3-variété orientée et compacte admet une décomposition sphérique.*

Dans l'énoncé habituel de ce théorème (apparemment dû à J. Milnor [42]), on exige que les sphères de $\mathcal{S}$ soient séparantes, mais en contrepartie on autorise certains facteurs à être homéomorphes à $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$. L'énoncé ci-dessus, plus proche de l'énoncé original de Kneser [38], ne distingue pas les sphères séparantes des sphères non-séparantes.

2.1.2 Surfaces incompressibles

Soit S une surface compacte, proprement plongée dans N et sans composante connexe homéomorphe à $\mathbb{S}^2$ ou à $\mathbb{D}^2$. Un *disque de compression* pour S est un disque fermé D plongé dans N tel que $S \cap D = \partial D$ et ∂D ne borde pas de disque fermé dans S . On dira que S est *incompressible* (*compressible*) si elle n'admet pas (admet) un disque de compression. Un *disque de ∂ -compression* pour S est un disque fermé D , plongé dans N , dont le bord ∂D peut-être décomposé en deux arcs $\alpha = D \cap S$ et $\beta = D \cap \partial N$ d'intérieurs disjoints et tel qu'il n'existe pas de disque D' contenu dans S avec $\alpha \subset \partial D'$ et $\partial D' - \alpha \subset \partial N$. On dira que S est *∂ -incompressible* (*∂ -compressible*) si elle n'admet pas (admet) un disque de ∂ -compression.

On résume quelques propriétés des surfaces incompressibles dans la proposition suivante :

Proposition. *Soient une 3-variété N orientée et S une surface qui sépare N , sans composante connexe homéomorphe à $\mathbb{S}^2$ ou à $\mathbb{D}^2$. Alors :*

- *S est incompressible (∂ -incompressible) si et seulement si toutes ses composantes connexes sont incompressibles (∂ -incompressible),*
- *une composante connexe S_i de S est incompressible (∂ -incompressible) si et seulement si l'application*

$$i_*: \pi_1(S_i) \rightarrow \pi_1(M), (i_*: \pi_1(S_i, \partial S_i) \rightarrow \pi_1(N, \partial N)),$$

induite par l'inclusion $i: S_i \rightarrow N$, ($i: (S_i, \partial S_i) \rightarrow (N, \partial N)$) est injective,

- *supposons que S est homéomorphe à un tore $\mathbb{T}^2$ et que N est irréductible. Alors S est compressible si et seulement si elle borde un tore solide ou si elle est contenue dans une boule.*

2.1.3 Décomposition JSJ

On dit que N est *atoroïdale* si tout tore plongé dans N est compressible ou isotope à une composante de ∂N . On pourrait adapter la preuve du théorème de la décomposition sphérique pour montrer qu'il existe une collection finie $\mathcal{C}$ de tores incompressibles plongés dans N , deux à deux disjoints, telle que chaque composante de $N \setminus \bigcup \mathcal{C}$ est atoroïdale.

Une telle décomposition a toutefois le défaut de ne pas être canonique : considérons par exemple $T^1\Sigma$ le fibré tangent unitaire d'une surface Σ , orientée et de genre au moins 2. Alors pour toute courbe fermée simple essentielle $\gamma \subset \Sigma$ on obtient une tore incompressible T_γ en prenant la pré-image de γ par la projection $T^1\Sigma \rightarrow \Sigma$. Réciproquement, on peut montrer que tout tore incompressible dans $T^1\Sigma$ est isotope à une tore obtenu de cette façon. Les décompositions de $T^1\Sigma$ en morceaux atoroïdaux correspondent donc aux décompositions en pantalons de Σ , parmi lesquelles il n'y a aucune décomposition privilégiée.

La discussion précédente s'étend au cas où N est un fibré en cercles, c'est-à-dire une *variété de Seifert* (voir sous-section 2.1.4).

W. Jaco et P. Shalen [33] et K. Johannson [36] ont indépendamment montré que toute 3-variété orientée, compacte et irréductible admet une décomposition canonique le long de tores incompressibles en composantes qui sont atoroïdales ou de Seifert. Une construction a été donnée par W. Neumann et G. A. Swarup [46] en utilisant la notion suivante :

Définition. Un tore T plongé dans N est dit *canonique* s'il est incompressible, et si tout tore incompressible $T' \subset M$ est homotopiquement disjoint de T (rappelons que T' est dit homotopiquement disjoint de T s'il existe un tore T'' homotope à T' et disjoint de T).

Par exemple, la variété $T^1\Sigma$ décrite plus haut ne contient aucun tore canonique. En effet, si T est un tore incompressible, il existe une géodésique fermée simple essentielle $\gamma \subset \Sigma$ telle que T est isotope à T_γ . On peut toujours trouver une géodésique fermée simple $\gamma' \subset \Sigma$ intersectant γ . Il n'est pas difficile de voir que le tore incompressible $T_{\gamma'}$ n'est pas homotopiquement disjoint de T .

Plus généralement, si N est un fibré en cercles, alors N ne contient pas de tore canonique, sauf dans certains cas particuliers (par exemple $M = \mathbb{T}^2 \times I$).

Définition. Soit N une 3-variété compacte, orientée et irréductible. Une *décomposition JSJ* de N est une collection finie $\mathcal{C}$ de tores plongés dans N , deux à deux disjoints, canoniques, telle que tout tore canonique de N soit isotope à un et un seul membre de $\mathcal{C}$.

On a le théorème suivant relatif à la décomposition JSJ d'une 3-variété irréductible [46] :

Théorème (Décomposition JSJ). *Soit N une 3-variété orientée et irréductible qui a ses composantes de bord homéomorphes à une collection finie de tores. Alors N admet une décomposition JSJ, unique à isotopie près. En plus, cette décomposition $\mathcal{C}$ à la propriété suivante : chaque composante de $N \setminus \bigcup \mathcal{C}$ est un fibré en cercles ou atorödale.*

Notons que les propriétés d'être fibré en cercles et d'être atorödale ne sont pas exclusives : par exemple il existe des fibrés en cercles dont le groupe fondamental est fini. Cette classe coïncide avec celle des variétés sphériques, c'est-à-dire des variétés obtenues en quotientant $\mathbb{S}^3$ par un groupe fini d'isométries agissant librement.

Remarque. L'énoncé ci-dessus contient ce que l'on appelle la "théorie élémentaire" de la décomposition JSJ. Il permet une description complète des tores incompressibles plongés dans N : un tel tore est toujours homotope à un tore plongé dans une des composantes de Seifert de $N \setminus \bigcup \mathcal{C}$. La même propriété est en fait vérifiée pour tous les tores singuliers incompressibles, mais cela est plus difficile à prouver.

2.1.4 Variétés de Seifert

Nous allons rappeler brièvement certains résultats topologiques concernant les variétés de Seifert

Rappelons que toute *fibration de Seifert* sur une 3-variété peut être construite de la façon suivante.

Soit $\Sigma_{g,h}$ une surface du genre $g \in \mathbb{Z}$, avec h composantes de bord. Enlevons de $\Sigma_{g,h}$ un ensemble de $k \geq 0$ disques $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_k\}$. Cela donne k nouvelles composantes de bord, représentées par les courbes fermées simples $c_1, \dots, c_k$.

Considérons $(\Sigma_{g,h} - \mathcal{D}) \times \mathbb{S}^1$ le fibré trivial en cercles orienté sur $\Sigma_{g,h} - \mathcal{D}$, et soit f la classe d'homotopie de la fibre. Collons, de la façon suivante, k copies du tore solide $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$ aux tores du bord de $(\Sigma_{g,h} - \mathcal{D}) \times \mathbb{S}^1$ qui se projettent sur c_i . Choisissons un homéomorphisme qui envoie la courbe simple $p_i c_i + q_i f$, avec (p_i, q_i) une paire d'entiers premiers entre eux avec $p_i > 0$, dans le méridien $(\partial \mathbb{D}^2 \times \{*\})$ du i -ème tore solide $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$. Ce procédé est connue sous le nom de *remplissage de Dehn le long de la courbe $p_i c_i + q_i f$* . On désigne $S(g, h, (p_1, q_1), \dots, (p_k, q_k))$ la fibration de Seifert obtenue par la construction précédente.

Définition. Un 3-variété topologique N est appelée *variété de Seifert* si N admet une *fibration de Seifert*.

Une deuxième façon équivalente de définir les variétés de Seifert est en disant qu'elles admettent un feuilletage en cercles tel que chaque fibre f admet un voisinage tubulaire V_f fermé et fibré, homéomorphe à une tore fibré $T_{\mu,\nu}$ (le quotient du cylindre $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{R}$ muni de la fibration standard $\{\{d\} \times \mathbb{R} \mid d \in \mathbb{D}^2\}$ par un vissage d'axe $\{d\} \times \mathbb{R}$, de pas 1 et d'angle de rotation $\frac{2\pi\nu}{\mu}$). Cet homéomorphisme préserve les fibres et envoie f sur la fibre centrale de $T_{\mu,\nu}$. Les fibres f dont le voisinage V_f est homéomorphe à un tore exceptionnel (régulier) sont dites *exceptionnelles* si $\mu \neq 1$ (*régulières* si $\mu = 1$).

Naturellement on peut se demander quand deux fibrations de Seifert, S et S' sont orientablement isomorphes, c'est-à-dire lorsqu'il existe un homéomorphisme qui préserve l'orientation et envoie les fibres sur les fibres. On remarque que pour $S = S(g, h, (p_1, q_1), \dots, (p_k, q_k))$ les mouvements suivants ne changent pas le type d'isomorphisme orientée (voir [35] théorème 1.5 ou [41] proposition 10.3.11) :

- M1) $\{(p_i, q_i), (p_j, q_j)\} \rightarrow \{(p_i, q_i - p_i), (p_j, q_j + p_j)\};$
- M2) $\{(p_1, q_1), \dots, (p_k, q_k)\} \leftrightarrow \{(p_1, q_1), \dots, (p_k, q_k), (1, 0)\};$
- M3) $(p_i, q_i) \rightarrow (p_i, q_i - p_i)$, si $h > 0$;

(M4) les permutations des indices de la collection de paires $\{(p_i, q_i)\}$.

En plus, deux fibrations de Seifert sont orientablement isomorphes si et seulement si elles sont reliées par une suite finie de ces mouvements (voir [41], Proposition 10.3.11).

Remarque. Les variétés de Seifert

$$S(g, h; (p_1, q_1), \dots, (p_k, q_k)) \quad \text{et} \quad S(g, h; (p_1, -q_1), \dots, (p_k, -q_k)),$$

sont isomorphes par un homéomorphisme qui envoie les fibres dans les fibres avec une orientation opposée, mais en général elles ne sont pas orientablement isomorphes.

Ces mouvements permettent de classifier les variétés de Seifert à isomorphisme (orienté) près, mais avant de donner l'énoncé précis, nous devons introduire un invariant : le *nombre d'Euler* d'une fibration de Seifert.

C'est un fait bien connu que les fibrés en cercles orientés sur une surface fermée Σ_g peuvent être réalisés sous la forme de fibrations de Seifert $\{S(g, 0; (1, q))\}_{q \in \mathbb{Z}}$ (voir par exemple [43], Chapitre 1).

Un résultat classique de topologie algébrique dit que les fibrés en cercles orientés sur des surfaces fermées sont classés par leur nombre d'Euler, c'est-à-dire, l'intégrale sur la surface de base la classe caractéristique d'Euler.

Le nombre d'Euler peut être vu comme une obstruction pour que le fibré en cercles admette une section globale. Étant donné le fibré en cercles $S(g, 0; (1, q))$, nous savons que, par construction, il y a une section dans $\Sigma_g \times \{x\}$ où x est la projection de la fibre centrale du tore solide fibré.

Étant donnée fibration Seifert générale $S = S(g, h; (p_1, q_1), \dots, (p_k, q_k))$, nous définissons son numéro d'Euler comme $e(S) = \sum_{i=1}^k \frac{q_i}{p_i}$, où la somme précédente est définie seulement modulo $\mathbb{Z}$ quand $h \neq 0$.

Notons que, par définition, le nombre d'Euler modulo $\mathbb{Z}$ est un invariant sous les mouvements (M1) à (M4). La proposition suivante est valide (voir [35] Théorème 1.5 ou [41], corollaire 10.3.13) :

Proposition. *Considérons*

$$S = S(g, h; (p_1, q_1), \dots, (p_k, q_k)) \quad \text{et} \quad S' = S(g', h'; (p'_1, q'_1), \dots, (p'_{k'}, q'_{k'})),$$

deux fibrations de Seifert avec $p_i, p'_i \geq 2$. Elles sont orientablement isomorphes si et seulement si $g = g', h = h', k = k', e(S) = e(S')$, et, quitte à réordonner les indices, $p_i = p'_i, q_i = q'_i \pmod{p_i}$.

Jusqu'à présent, on se demande quand une variété de Seifert N admet-elle des fibrations de Seifert non isomorphes. Le résultat suivant ([34] théorèmes VI.17 et VI.18) répond à la question :

Proposition (Classification des fibrations de Seifert à difféomorphisme près). *Une variété de Seifert avec un bord non vide admet une unique fibration à isomorphisme près, sauf dans les cas suivants :*

- $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$, qui admet les fibrations $S = S(0, 1; (p, q))$ pour toute paire d'entiers premiers entre eux (p, q) ;
- $K \tilde{\times} I$ (fibré tordu sur la bouteille de Klein), qui admet deux fibrations de Seifert non isomorphes :

$$S_1 = S(-1, 1;) \quad \text{et} \quad S_2 = S(1, 1; (2, 1), (2, 1)).$$

Une variété de Seifert N , sans bord, qui n'a pas $\mathbb{S}^3$ ou $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ comme revêtement, admet une seule fibration de Seifert à isomorphisme près, sauf la variété $K \tilde{\times} \mathbb{S}^1$ qui admet les deux fibrations non isomorphes suivantes :

$$S_3 = S(0, 0; (2, 1), (2, 1), (2, -1), (2, -1)) \quad \text{et} \quad S_4 = S(-2, 0;).$$

Il existe une troisième manière de regarder les variétés de Seifert : elles peuvent être vues comme des fibrés en cercles sur des 2-orbifolds ayant seulement des points coniques singuliers. Nous renvoyons aux références classiques [52] et [57] pour une présentation des orbifolds de dimension 2. Il convient de souligner que ce point de vue est particulièrement utile pour montrer l'existence de métriques complètes localement homogènes sur les variétés de Seifert ([52], [11] ou la sous-section 2.2).

Étant donné $S = S(g, h, (p_1, q_1), \dots, (p_k, q_k))$, on associe à S sa base orbifold avec une surface sous-jacente de type (g, h) , et k points singuliers coniques d'ordre $p_1, \dots, p_k$. Il existe une extension naturelle de la caractéristique habituelle d'Euler aux 2-orbifolds, connue sous le nom de caractéristique orbifold (voir [52] ou [11]), notée χ_{orb} .

La caractéristique orbifold permet en premier lieu de distinguer les orbifolds admettant un revêtement fini lisse (les bons orbifolds) et ceux qui n'admettent pas un tel revêtement (les mauvais orbifolds).

Une liste complète des mauvais 2-orbifolds se trouve dans [52]. Les mauvais 2-orbifolds qui peuvent apparaître comme orbifolds de base des variétés de Seifert sont soit de type $\mathbb{S}^2(p)$ (surface sous-jacente $\mathbb{S}^2$ et un seul point conique d'ordre de singularité p) soit de type $\mathbb{S}^2(p, q)$ (surface sous-jacente $\mathbb{S}^2$ et deux points coniques d'ordre de singularité p et q).

Les variétés de Seifert qui sont associées à des mauvais 2-orbifolds appartiennent à une classe spécifique et bien comprise de quotients de $\mathbb{S}^3$: la classe des espaces lenticulaires (voir [35], section I.4) qui ont notamment des groupes fondamentaux isomorphes à des groupes cycliques finis.

D'autre part, les bons orbifolds sont munis de structures géométriques et la caractéristique orbifold détecte le type de géométrie qu'ils portent : à savoir, les bons orbifolds sont divisés en orbifolds elliptiques, euclidiens et hyperboliques selon $\chi_{orb} > 0$, $\chi_{orb} = 0$ ou $\chi_{orb} < 0$ (voir [57], théorème 13.3.6).

Donnons maintenant des précisions sur les variétés de Seifert avec un bord non vide, qui sont clairement des fibrés sur des 2-orbifolds avec bord. L'ensemble des 2-orbifolds à bord sont :

- 1) la collection de disques ayant un unique point singulier,
- 2) trois orbifolds euclidiens,
- 3) des orbifolds hyperboliques.

Les orbifolds euclidiens sont : $\mathbb{D}^2(2, 2)$, le disque avec deux points singuliers d'ordre 2, la bande de Möbius, et le cylindre. Notons qu'il n'y a que deux variétés de Seifert qui fibrent sur ces orbifolds : $K \tilde{\times} I$, fibrant sur $\mathbb{D}^2(2, 2)$, ou sur la bande de Möbius, et $\mathbb{T}^2 \times I$ fibrant sur cylindre.

Enfin, il existe une variété de Seifert unique sur la collection de disques avec un point singulier unique : le tore solide $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$. Par conséquent, sauf pour $K \tilde{\times} I$, $\mathbb{T}^2 \times I$, $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$, toutes les variétés de Seifert avec bord sont fibrés sur des 2-orbifolds hyperboliques.

2.2 Géométrisation des variétés de dimension 3

Dans cette section on va munir d'une structure géométrique les morceaux de la décomposition JSJ. Dans ce cas supposons que N est une 3-variété irréductible, atoroidale ou Seifert.

Définition. Une *géométrie modèle de dimension 3* est un couple (X, G) , où X est une 3-variété simplement connexe, et G est un groupe de difféomorphismes de X qui agit effectivement et transversalement. En plus on a besoin que, pour chaque $x \in X$, le stabilisateur $G_x \subset G$ soit compact. Une géométrie (X, G) est maximale s'il n'y a pas d'autre géométrie (X, G') avec $G \subsetneq G'$.

Pour N une 3-variété, une (X, G) -structure sur N est un atlas de cartes $\phi_i : U_i \rightarrow X$ où $U_i \subset N$ sont des ouverts, tel que chaque changement de carte

$\phi_i \circ \phi_j^{-1} \phi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_i(U_i \cap U_j)$ est la restriction d'un élément de G . On demande à cet atlas de recouvrir tout N et d'être maximal.

Cette définition de structure ne fait pas référence à la métrique riemannienne, mais elle est utilisable pour définir aussi une notion équivalente de structure géométrique. La raison pour laquelle la définition ci-dessus est préférée est parce qu'elle ne distingue pas les structures qui diffèrent par une homothétie. Ainsi, parler d'une (X, G) -structure complète au sens métrique a du sens.

On va présenter brièvement chacune des huit géométries possibles :

- La géométrie euclidienne $\mathbb{R}^3$, ou la géométrie à courbure constante 0. Les isométries qui préservent l'orientation sont données par les applications $x \rightarrow Ax + b$ où $A \in \text{SO}(3)$. Contrairement au cas bidimensionnel, les isométries ne sont pas seulement des rotations et des translations, mais aussi des vissages. En ce qui concerne la sous-section 2.1.4, ce sont exactement les espaces de variétés de Seifert où χ_{orb} et le nombre d'Euler sont nuls.
- La géométrie hyperbolique $\mathbb{H}^3$ sera décrite dans la sous-section 4.19.
- La géométrie sphérique $\mathbb{S}^3$, avec une courbure positive constante +1. Le groupe d'isométrie qui préserve l'orientation est $\text{SO}(3)$. En ce qui concerne la sous-section 2.1.4, ce sont exactement les espaces de variétés de Seifert où χ_{orb} est positive et le nombre d'Euler n'est pas nul.
- La géométrie $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, le groupe d'isométrie est $\text{Iso}(\mathbb{S}^2) \times \text{Iso}(\mathbb{R})$. Il y a sept variétés qui admettent une structure géométrique de type $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, les non-compactes ($\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, et deux fibrés en droites sur $\mathbb{P}^2$) et les compacts (deux fibrés en $\mathbb{S}^2$ sur $\mathbb{S}^1$, $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{S}^2$ et $\mathbb{P}^3 \# \mathbb{P}^3$). Soulignons que dans la classification de variétés de Seifert χ_{orb} est positive et le nombre d'Euler est nul.
- La géométrie *Nil* est le groupe de Lie tridimensionnel obtenu en considérant toutes les matrices 3×3 de la forme

$$\begin{bmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dans la classification des variétés de Seifert χ_{orb} est nul et le nombre d'Euler n'est pas nul.

- La géométrie *Sol* est l'un des deux géométries qui ne peut pas être modélisé comme une variété de Seifert. En fait, la géométrie *Sol* peut être

vue comme la géométrie des fibrés en tores sur $\mathbb{S}^1$. Donc, contrairement aux fibres unidimensionnelles des variétés de Seifert, nous avons ici des fibres de dimension 2.

- La géométrie $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, contrairement à $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, nous pouvons trouver une infinité de variétés ayant une géométrie modélisée sur $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Il suffit de prendre n'importe quelle surface hyperbolique et de considérer le produit avec $\mathbb{R}$. En raison de la structure du produit, nous savons que le groupe d'isométrie est simplement donné par $\text{Iso}(\mathbb{H}^2) \times \text{Iso}(\mathbb{R})$. En plus, toutes sont des variétés de Seifert où χ_{orb} est négatif et le nombre d'Euler est nul.
- La géométrie $\widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$ est le revêtement universel de $SL_2(\mathbb{R})$; c'est un fibré ayant pour base le plan hyperbolique $\mathbb{H}^2$. Le stabilisateur des points de la variété est $O_2(\mathbb{R})$. Le groupe d'isométrie possède 2 composantes connexes, la composante de l'identité a pour structure $SL_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Parmi les exemples, on trouve le fibré tangent unitaire d'une surface hyperbolique. En plus, toutes les variétés admettant cette géométrie sont des variétés de Seifert où χ_{orb} est négatif et le nombre d'Euler n'est pas nul.

2.2.1 Théorème d'Hyperbolisation

L'espace hyperbolique $\mathbb{H}^3$ est la seule 3-variété simplement connexe avec une courbure constante -1. Les modèles utilisés dans ce texte pour représenter l'espace hyperbolique seront les modèles du demi-espace supérieur et le modèle de Poincaré.

Le groupe $\text{Iso}_+(\mathbb{H}^3)$ d'isométries préservant l'orientation est isomorphe à $\text{PSL}_2(\mathbb{C})$ et il agit sur $\partial\mathbb{H}^3 = \mathbb{S}^2$ comme le groupe des *transformations de Möbius*, c'est-à-dire des compositions d'inversions par rapport à des cercles.

Une *3-variété hyperbolique* est une 3-variété riemannienne à courbure sectionnelle -1, ou de façon équivalente, une variété qui est le quotient de $\mathbb{H}^3$ par un sous-groupe sans torsion et discret de $\text{PSL}_2(\mathbb{C})$. Soulignez que de nombreuses propriétés géométriques et topologiques des variétés hyperboliques restent valables également dans le cas où la courbure est négative ou nulle. Par exemple, chaque 3-variété complète, simplement connexe à courbure non positive est difféomorphe à $\mathbb{R}^3$ et sa fonction de distance est convexe.

Une 3-variété qui admet une structure hyperbolique a les propriétés suivantes :

- elle est irréductible car si l'intérieur de N porte une métrique hyperbolique complète, son revêtement universel est difféomorphe à $\mathbb{R}^3$: tout plongement de la sphère dans N se relève en un plongement de la sphère dans $\mathbb{R}^3$, lequel se prolonge en un plongement de la boule d'après le théorème d'Alexander. Puisque l'action du groupe fondamental $\pi_1(N)$ sur son revêtement universel est sans point fixe, ce plongement de la boule dans $\mathbb{R}^3$ se projette en un plongement de la boule dans N ,
- elle est atoroidale, c'est une conséquence immédiate du lemme de Margulis qui, appliqué dans ce contexte, classe les sous-groupes abéliens d'un réseau dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$,
- $\pi_1(N)$ est infini car son revêtement universel n'est pas compact.

Un cas spécial du théorème de géométrisation de Thurston dit que l'inverse est aussi vrai :

Théorème (d'Hyperbolisation). *L'intérieur d'une 3-variété orientée et compacte N avec des tores comme bord admet une métrique hyperbolique complète de volume fini, si et seulement s'il est irréductible, (homotopiquement) atoroidal, avec groupe fondamental infini et non homéomorphe à $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2$, $\mathbb{T}^2 \times I$ ou $K \tilde{\times} I$ (fibré tordu en intervalles sur la bouteille de Klein).*

2.2.2 Théorème de rigidité de Mostow

Les structures hyperboliques présentent une forme de rigidité très forte à partir de la dimension 3. Le théorème suivant, prouvé par Mostow dans le cas des variétés fermées [44], affirme que deux variétés hyperboliques fermées ayant le même groupe fondamental sont nécessairement isométriques. Les hypothèses du théorème peuvent être allégées, il suffit de supposer les variétés complètes et de volume fini [49].

Théorème (de Rigidité de Mostow). *Soient N_1 et N_2 des 3-variétés hyperboliques connexes, orientées et de volume fini. Alors tout isomorphisme de groupes $\phi: \pi_1(N_1) \rightarrow \pi_1(N_2)$ est réalisé à conjugaison près par une isométrie de N_1 à N_2 .*

Cela équivaut à montrer que $\pi_1(N_1)$ et $\pi_1(N_2)$ sont conjugués dans le groupe d'isométries de l'espace hyperbolique. On note qu'en dimension 2 le résultat est faux. En fait, il existe un espace 6g-6 dimensionnel de métriques hyperboliques possibles sur chaque surface orientée fermée de genre $g \geq 2$ (voir B.4, [6]).

À ma connaissance, il y a trois preuves différentes du théorème de rigidité de Mostow pour les cas fermée (compacte et sans bord) : une preuve donnée par Gromov et Thurston [55], une preuve par Besson, Courtois et Gallot [7], et une preuve par Tukia [58].

La première étape est commune à toutes les preuves du théorème de Mostow. Il s'agit de montrer que tout isomorphisme entre les groupes fondamentaux de deux variétés hyperboliques fermées induit une équivalence d'homotopie $f: N_1 \rightarrow N_2$ qui se relève à une quasi-isométrie $\bar{f}: \mathbb{H}^3 \rightarrow \mathbb{H}^3$ entre les revêtement universels. L'application $\bar{f}$ donne un homéomorphisme du bord à l'infini de l'espace hyperbolique sur lui-même,

$$\partial \bar{f}: \partial \mathbb{H}^3 \rightarrow \partial \mathbb{H}^3,$$

qui satisfait la condition d'équivariance,

$$\partial \bar{f} \circ \gamma = \phi(\gamma) \circ \partial \bar{f} \quad \text{pour tous les } \gamma \in \pi_1(N_1).$$

Pour les preuves de Gromov-Thurston et de Tukia, l'objectif est de montrer que $\partial \bar{f}$ est la trace d'une isométrie de l'espace hyperbolique. Ensuite, en utilisant l'équivariance, nous pouvons étendre $\partial \bar{f}$ à $\mathbb{H}^3$ et en passant au quotient, pour obtenir l'isométrie voulue.

Afin d'atteindre cet objectif, la stratégie de base de Gromov et Thurston est de montrer que l'application $\partial \bar{f}$ envoie les tétraèdres idéaux réguliers sur les tétraèdres idéaux réguliers. Pour voir que c'est le cas, on utilise le fait que la norme de Gromov (voir sous-section 2.2.3) de la classe fondamentale est proportionnelle au volume de la variété.

Théorème 2.1 (Gromov-Thurston). *Si N est une variété hyperbolique de volume fini et orientée alors*

$$\|N\| = \frac{\text{Vol}(N)}{v_3},$$

où v_3 est le volume d'un tétraèdre idéal régulier.

Ce théorème est d'intérêt indépendant parce qu'il dit que le volume de toute variété hyperbolique compacte orientée est majoré par le nombre de simplexes d'une triangulation idéale quelconque.

La démonstration de Tukia [58] du théorème de Mostow est celle qui s'approche le mieux de la preuve originale de Mostow. Tukia utilise que si $\bar{f}$ est une quasi-isométrie alors $\partial \bar{f}$ est quasi-conforme et par le théorème de Radamacher-Stepanov (voir [59]) nous avons qu'elle est aussi p.p.t. différentiable. D'autre

part, puisque les variétés en question sont compactes, chaque point de $\partial\mathbb{H}^n$ est un point limite conique. Le théorème de rigidité de Mostow suit alors si nous appliquons à $h = \partial\bar{f}$ le théorème suivant :

Théorème (Tukia). *Étant donné Γ_1 un sous-groupe discret dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$, avec ξ un point conique, $h: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ un homéomorphisme différentiable en ξ avec une dérivée non nulle et $h\Gamma_1 h^{-1} \subset \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$. Alors h est une transformation de Möbius.*

Enfin, Besson, Courtois et Gallot obtiennent le théorème de Mostow à la suite d'un résultat plus général. Rappelons que l'entropie volumique $h(g)$ pour (Y, g) une n -variété riemannienne connexe compacte est :

$$h(g) := \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \log \mathrm{Vol}_p^g(R),$$

où $\mathrm{Vol}_p^g(R)$ est le volume de la boule de rayon R centrée au point p dans $\tilde{Y}$, le revêtement universel de Y .

Théorème (Besson-Courtois-Gallot). *Soit (Y, g) et (X, g_0) deux 3-variétés riemanniennes compactes et de courbure négative, telles que (X, g_0) est hyperbolique. Supposons que X et Y sont homotopiquement équivalentes. Alors,*

- i) $h(g)^3 \mathrm{Vol}(Y, g) \geq 8 \cdot \mathrm{Vol}(X, g_0)$.
- ii) *L'égalité est vraie si et seulement si X est isométrique à Y (après avoir multiplié g par $\frac{h(g)}{2}$).*

Le théorème de Mostow suit immédiatement en notant que $h(g) = 2$ pour les variétés hyperboliques. L'existence de l'application du bord est fondamentale dans la démonstration du théorème, comme $\tilde{X}$ et $\tilde{Y}$ sont des espaces δ -hyperboliques, on peut aussi obtenir $\partial\bar{f}$ un homéomorphisme ϕ -équivariant entre le bord à l'infini de leurs revêtements universels respectifs. Dans [7], la preuve de Besson, Courtois et Gallot se fonde sur le fait que $\partial\bar{f}$ s'étend à une application lisse $\bar{F}: \tilde{Y} \rightarrow \tilde{X}$ (extension barycentrique ou extension Douady-Earle) qui descend à $F: Y \rightarrow X$ homotopique à $\bar{f}$ et aussi en donnant des estimations sur le Jacobien de F .

2.2.3 Volume des 3-variétés hyperboliques

Dans cette sous-section, nous présentons les méthodes utilisées dans la thèse pour trouver une majoration et minoration du volume des complémentaires des relèvements canoniques dans le fibré tangent unitaire projectif

d'une surface hyperbolique. D'un côté, la majoration vient du fait que le volume simplicial de N majore le volume de N . De l'autre côté, on montre une minoration pour le volume de N en termes du volume simplicial du double d'une variété construite en coupant N le long d'une surface incompressible.

Volume simplicial

Définition. On appelle *simplexe idéal* à tout simplexe de $\mathbb{H}^3$ dont les sommets sont sur $\partial\mathbb{H}^3$ et dont les faces sont totalement géodésiques.

Dans la suite on note Δ un simplexe idéal quelconque, et $\text{Vol}(\Delta)$ son volume hyperbolique. La fonction volume atteint son maximum sur l'ensemble des simplexes idéaux. Ce résultat est intéressante car l'ensemble des simplexes idéaux munis d'une topologie raisonnable n'est pas compact (il s'identifie naturellement à l'ensemble des quadruplets de points distincts de $\mathbb{S}^2$).

Soit X un espace topologique et $S(X, \partial X; \mathbb{R})$ le *complexe des chaînes singulières* de $(X, \partial X)$. Plus précisément, $S_k(X, \partial X; \mathbb{R})$ est l'ensemble de combinaisons linéaires de k -simplexes. On note $\|c\|$ la norme l_1 de la k -chaîne c . Si α est la classe d'homologie dans $H_k^{\text{sing}}(X, \partial X; \mathbb{R})$, la *norme de Gromov relative à α* est définie par :

$$\|\alpha\| = \inf_{[c]=\alpha} \{\|c\| = \sum_{\sigma} |r_{\sigma}| \text{ telle que } c = \sum_{\sigma} r_{\sigma} \sigma\}.$$

Soit $f: X \rightarrow Y$ une fonction continue, α une classe d'homologie dans $H_k^{\text{sing}}(X, \partial X; \mathbb{R})$ et $c = \sum_{\sigma} r_{\sigma} \sigma$ un k -cycle qui représente α . Alors $f(c) = \sum_{\sigma} r_{\sigma} f \circ \sigma$ représente la classe d'homologie $f_*(\alpha)$. En plus,

$$\|f_*(c)\| \leq \sum_{\sigma} |r_{\sigma}| = \|c\|, \quad \text{donc} \quad \|f_*(\alpha)\| \leq \|\alpha\|.$$

Le *volume simplicial* d'une 3-variété connexe et orientée N est la norme de Gromov de la classe fondamentale relative de $(N, \partial N)$ dans $H_3^{\text{sing}}(N, \partial N; \mathbb{R})$ et la norme de Gromov est noté $\|N\|$. Notons qu'il n'est pas une norme, mais une pseudo-norme, car toute 3-variété fermée, connexe, orientée, sphérique ou euclidienne a volume nul.

Rappelons que grâce au théorème de de Rham la classe fondamentale est caractérisée par le fait que si Ω_N est une forme de volume pour une métrique riemannienne dans N , alors $\text{Vol}(N) = \langle \Omega_N, [N] \rangle$ où l'opérateur est défini de telle sorte que si $c = \sum_{\sigma} r_{\sigma} \sigma \in S_3(N, \partial N; \mathbb{R})$ alors,

$$\langle \Omega_N, c \rangle = \int_c \Omega_N := \sum_{\sigma} r_{\sigma} \int_{\Delta} \sigma^* \Omega_N. \quad (2.2.1)$$

Notons que l'opérateur est bien défini car il dépend seulement de la classe d'homologie de c par le théorème de Stokes.

Majoration du volume

On va montrer qu'étant donnée une triangulation idéale $\mathcal{T}_N$ de N on peut trouver une majoration qui dépend du nombre de tétraèdres dans la triangulation idéale.

$$\text{Vol}(N) \leq v_3 \cdot \#\mathcal{T}_N,$$

où v_3 est le volume d'un tétraèdre idéal régulier dans $\mathbb{H}^3$.

Ceci est équivalent à montrer une inégalité du théorème 2.1, à savoir :

Lemme. *Si N est une 3-variété hyperbolique orientée et de volume fini alors*

$$\|N\| \geq \frac{\text{Vol}(N)}{v_3}.$$

L'idée clé pour la preuve est la notion de *redressement* que nous allons expliquer dans la suite. Considérons un k -simplexe σ dans N . Relevons-le à un k -simplexe singulier noté $\tilde{\sigma}$ dans $\mathbb{H}^3$. Construisons $\text{str}(\tilde{\sigma})$, l'unique k -simplexe singulier géodésique avec des sommets $\tilde{\sigma}(e_0), \dots, \tilde{\sigma}(e_k)$ dans $\mathbb{H}^3$. Soit $\text{str}(\sigma) = \pi(\text{str}(\tilde{\sigma}))$ où π est la projection sur N . Cette définition ne dépend pas du relèvement choisi. Remarquablement, si $\sum_{\sigma} r_{\sigma} \sigma$ représente une classe, alors $\sum_{\sigma} r_{\sigma} \text{str}(\sigma)$ le représente aussi car l'inclusion de la chaîne du sous-complexe engendré par toutes les chaînes singulières redressées dans $S(N, \mathbb{R})$ induit un isomorphisme en homologie.

Soit Ω_N la forme de volume de N et soit $c = \sum_{\sigma} r_{\sigma} \sigma$ un redressement n -cycle singulier qui représente la classe fondamentale de N . Alors

$$\int_c \Omega_N = \sum_{\sigma} r_{\sigma} \int_{\Delta} \sigma^* \Omega_N = \sum_{\sigma} \pm r_{\sigma} \text{Vol}(\sigma(\Delta)) \leq \sum_{\sigma} |r_{\sigma}| \text{Vol}(\sigma(\Delta)).$$

Comme $\text{Vol}(\sigma(\Delta)) \leq v_3$. Ensuite on a :

$$\text{Vol}(N) = \int_c \Omega_N \leq \sum_{\sigma} |r_{\sigma}| v_3,$$

alors en prenant l'infimum,

$$\text{Vol}(N) \leq \|N\| v_3.$$

Volume des complémentaires d'entrelacs hyperboliques dans $\mathbb{S}^3$

Tout entrelacs $L \subset \mathbb{S}^3$ définit une 3-variété qui est l'intérieur d'une variété compacte, orientée qui a comme bord un ensemble de tores, à savoir, l'extérieur d'un voisinage régulier de L dans $\mathbb{S}^3$, noté $\mathbb{S}^3 \setminus L$. On dit que L est hyperbolique si $\mathbb{S}^3 \setminus L$ admet une métrique hyperbolique complète. Par le théorème de rigidité de Mostow, cette structure hyperbolique est unique, donc les invariants géométriques de $\mathbb{S}^3 \setminus L$, comme le volume, donnent des invariants topologiques.

Quand l'entrelacs a une seule composante on l'appelle nœud, dans ce cas Thurston a montré que tout nœud qui n'est ni torique ni un nœud satellite est hyperbolique.

Pour étudier les nœuds et les entrelacs on peut parfois exploiter leurs diagrammes. Il s'agit de projections d'un nœud ou un entrelacs sur un plan $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$, qui est compactifié à $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{S}^3$. On appelle la surface de projection le plan de projection du diagramme. On peut supposer que l'entrelacs a un diagramme qui est un graphe de valence 4 dans $\mathbb{S}^2$, avec des informations de croisement dessus-dessous à chaque sommet. Quand on étudie un entrelacs grâce aux diagrammes, il y a des mouvements évidents que l'on peut faire au diagramme qui n'affectent pas la classe d'isotopie de l'entrelacs ; par exemple, les mouvements de Reidemeister. Sans plus entrer dans les détails sur ces mouvements, nous voulons que nos diagrammes soient suffisamment réduits, de la manière indiquée par les définitions suivantes.

Un entrelacs est dit *premier* s'il n'est pas somme connexe d'autres entrelacs.

Supposons que L soit un entrelacs avec diagramme D . Le *nombre de croisement du diagramme*, noté $c(D)$, est le nombre de croisements dans D . Le nombre de croisements de L , noté $c(L)$, est défini comme le minimum des $c(D)$ sur tous les diagrammes D de L .

Dans [3], Adams a trouvé la majoration suivante pour le volume des complémentaires d'entrelacs hyperboliques dans $\mathbb{S}^3$:

Théorème (Adams). *Soit $D = D(L)$ un diagramme d'un entrelacs premier hyperbolique L , avec au moins 5 croisements. Alors*

$$\text{Vol}(\mathbb{S}^3 \setminus L) \leq (c(D) - 5)\bar{v}_3 + 4v_3,$$

où $\bar{v}_3$ est le volume d'un octaèdre hyperbolique régulier idéal et v_3 est le volume d'un tétraèdre hyperbolique régulier idéal.

La méthode consiste à subdiviser le complément de l'entrelacs en un union de tétraèdres et d'octaèdres, et à estimer le volume du complémentaire de

l'entrelacs en fonction de $\bar{v}_3$ ou v_3 . La subdivision en octaèdres a été décrite à l'origine par D. Thurston.

La majoration du théorème précédent est connue pour être asymptotiquement forte, dans le sens où il existe des diagrammes de nœuds et d'entrelacs L_n avec $\text{Vol}(\mathbb{S}^3 \setminus L_n)/c(L_n) \rightarrow \bar{v}_3$ quand n tend vers l'infini (voir [16]). D'autre part, cette majoration peut être arbitrairement loin d'être optimale. Cela est une conséquence du théorème suivant dû à Gromov ([14], Théorème 1.4) :

Théorème (Additivité de Gromov). *Soit N une 3-variété compacte orientée et avec des tores dans le bord. Soit N_0 un remplissage de Dehn le long de quelques tores du bord de N . Alors*

$$\|N_0\| \leq \|N\|.$$

Remarque. Il existe un autre nombre associé au diagramme qui s'appelle *nombre de twist du diagramme* qui est inférieur au nombre de croisement. Ce dernier majore le volume de $\mathbb{S}^3 \setminus L$, (voir [39]) mais pour nos cas particuliers il est égal au nombre de croisement du diagramme à facteur additif près.

Minoration du volume

Soit S une surface incompressible plongée dans N . Nous dénotons $N \setminus S$ le complémentaire d'un voisinage tubulaire de S dans N . Si on prend deux copies de $N \setminus S$ et qu'on le colle le long du bord par l'identité, on obtient le double de $N \setminus S$, qui est noté par $D(N \setminus S)$.

Le résultat principal pour montrer notre minoration est une application du théorème suivant dû à Agol, Storm et Thurston :

Théorème (Agol-Storm-Thurston). *Soit N une 3-variété hyperbolique de volume fini. Soit S une surface incompressible plongée dans N . Alors*

$$\text{Vol}(N) \geq \frac{v_3}{2} \|D(N \setminus S)\|.$$

La preuve du théorème repose sur des estimations géométriques dues à Perelman. Agol, Storm, and Thurston doublent $N \setminus S$ le long du bord et appliquent le flot de Ricci avec chirurgie. Ils montrent que la métrique dans les morceaux hyperboliques de $D(N \setminus S)$ convergent vers 1 avec bord totalement géodésique, en même temps que le volume diminue, tandis que le volume de la métrique sur les pièces restantes se réduit à 0.

Chapitre 3

La période de la fraction continue et le volume du complémentaire de nœuds modulaires

Soit Σ_{mod} la surface modulaire $\mathbb{H}^2/\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$. On associe à toute géodésique fermée orientée γ sur Σ_{mod} l'orbite périodique du flot géodésique dans le fibré tangent unitaire $T^1\Sigma_{mod}$, notée $\hat{\gamma}$. En plus, il y a un plongement unique de $T^1\Sigma_{mod}$ comme complément du nœud de trèfle dans $\mathbb{S}^3$. Par conséquent, les orbites périodiques du flot géodésique sur Σ_{mod} sont de nœuds dans $\mathbb{S}^3$. Dans la littérature ils sont appelés nœuds modulaires [21, 10]. En fait, dans [25] Ghys a observé que les nœuds modulaires sont de nœuds de Lorenz.

Il est bien connu qu'il y a un codage unique pour chaque géodésique fermée γ qui résulte de la partie périodique de la fraction continue d'un point attractif d'un relèvement quelconque de γ sur $\mathbb{H}^2$ [53]. Dans ce cas, un invariant naturel qui sera utilisé dans ce chapitre est la période de la fraction continue correspondant à γ .

Le but de ce chapitre est de donner une majoration du volume de $M_{\hat{\gamma}}$, le complémentaire dans le fibré tangent unitaire $T^1\Sigma$ de l'orbite périodique associée à la géodésique fermée orientée γ , qui ne dépend que de la période de la fraction continue associée à γ [51] :

Théorème 3.1. *Pour la surface modulaire Σ_{mod} , il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute géodésique fermée γ sur Σ_{mod} , on a :*

$$\mathrm{Vol}(M_{\hat{\gamma}}) \leq C \cdot v_3 \cdot n_{\gamma}^2,$$

où n_γ est la période de la fraction continue de γ et v_3 est le volume d'un tétraèdre idéal régulier.

L'approche consistant à estimer une majoration en termes de la fraction continue de γ a déjà été utilisée par Bergeron, Pinsky et Silberman dans ([8], section 3) mais leur majoration dépend linéairement de la somme des logarithmes des coefficients correspondant au développement en fraction continue de la géodésique. Par conséquent, notre majoration est meilleure pour toutes les géodésiques dont au moins l'un des coefficients est exponentiellement plus grand que le carré de la période.

3.1 Codage des géodésiques fermées sur la surface modulaire

On sait que les classes de conjugaison dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ sont en correspondance avec les géodésiques fermées sur la surface modulaire. Le résultat suivant nous permet de coder les classes de conjugaison dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ de façon unique :

Lemme. *Soit A un élément de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ qui possède deux valeurs propres distinctes dans $\mathbb{R}_+^*$ (c'est-à-dire hyperbolique). La classe de conjugaison de A dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ contient un représentant de la forme :*

$$\prod_{i=1}^{n_A} X^{k_i} Y^{m_i}$$

où $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $n_A > 0$ et k_i, m_i sont des entiers strictement positifs. En plus, le représentant est unique à permutation cyclique près des facteurs $X^{k_i} Y^{m_i}$. Réciproquement, tout produit non vide de tels facteurs est un élément de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ avec deux valeurs propres distinctes dans $\mathbb{R}_+^*$.

Considérons le modèle du demi-plan supérieur pour l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^2$, muni de la triangulation de Farey $\mathcal{F}$ (le triangle idéal avec les sommets 0, 1 et ∞ , et toutes ses images par réflexions successives par rapport à ses côtés). On sait que le groupe des isométries orientées de $\mathbb{H}^2$, qui préservent $\mathcal{F}$ est alors identifié à $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$.

Soit $\tilde{\alpha}$ la droite hyperbolique orientée qui va du point fixe répulsif de A au point fixe attractif. Alors $\tilde{\alpha}$ traverse une infinité de triangles $(\dots, t_{-1}, t_0, t_1, \dots)$ de $\mathcal{F}$ ou "triangles de Farey". On peut formellement écrire un mot bi-infini :

$$\omega_A := \dots LRRRLLRR \dots$$

où la k -ième lettre est R (resp. L) si et seulement si la droite $\tilde{\alpha}$ ressort de t_k par le côté situé à droite (resp. à gauche) du côté où elle entre. On dira que $\tilde{\alpha}$ tourne à droite (resp. tourne à gauche) en t_k . Le mot ω_A contient au moins un R et un L , parce que les extrémités de $\tilde{\alpha}$ sont distinctes. L'image de t_0 par A est un certain t_m ($m > 1$) et ω_A est périodique de période m .

On associe la matrice X à R et Y à L , des transformations paraboliques de $\mathbb{H}^2$ qui fixent respectivement les points 0 et ∞ . Soit B n'importe quel sous-mot de ω_A de longueur m , nous regardons B comme produit de matrices de transvection standard, et donc comme un élément de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. En étudiant l'action de X et de Y sur $\mathcal{F}$ on voit alors facilement que A et B sont conjuguées dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ puisque toutes deux sont de trace strictement positive. L'existence des k_i, m_i est démontrée.

On vérifie l'unicité de la manière suivante : d'une part, si A et B sont conjugués, il y a un élément de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ (respectant $\mathcal{F}$) qui envoie l'axe de A sur l'axe de B , donc A et B définissent le même mot ω_A à translation près. D'autre part, en considérant l'action de X et de Y sur $\mathbb{H}^2$, on voit qu'un produit de matrices de transvection standard comme dans l'énoncé du lemme définit toujours le mot $\prod_{i=1}^{n_A} X^{k_i} Y^{m_i}$, répété indéfiniment.

La fraction continue d'une géodésique fermée sur la surface modulaire

Dans cette sous-section on va préciser comment la suite $(k_1, m_1, \dots, k_{n_A}, m_{n_A})$ du lemme précédent est liée au développement en fraction continue du point fixe attractif de A . Pour plus de détails sur les résultats dans cette sous-section voir [20].

La fraction continue associée à $x \in \mathbb{R}_+^*$ peut être lue dans le pavage de Farey $\mathcal{F}$ comme suit. On joint x à un point de l'axe imaginaire du demi-plan supérieur par une demi-géodésique hyperbolique. Cet arc traverse une succession de triangles de $\mathcal{F}$. On étiquette ce arc comme précédemment avec des L et des R . Dans le cas exceptionnel où l'arc passe par un sommet du triangle, on choisit l'une ou l'autre des étiquettes. La suite résultante $L^{n_0} R^{n_1} L^{n_2} \dots$ avec $n_i \in \mathbb{N}$, est appelée la suite de coupe de x . Si $x > 1$ la suite commence par L , alors que si $0 < x < 1$ la suite commence par R . Notez que la suite de coupe est indépendante du point initial sur l'axe imaginaire. L'observation clé est :

Lemme. *Soit $x > 1$ avec une suite de coupe $L^{n_0} R^{n_1} L^{n_2} \dots$ avec $n_i \in \mathbb{N}$. Alors*

$$x = [n_0; n_1, n_2, \dots].$$

De la même façon si $0 < x < 1$ a une suite de coupe $R^{n_1}L^{n_2}R^{n_3}\dots$ avec $n_i \in \mathbb{N}$, alors

$$x = [0; n_1, n_2, \dots].$$

Pour gérer les nombres négatifs il suffit remplacer le nombre négatif x par $-1/x = [b_0; b_1, b_2, b_3, \dots]$ avec $b_0 \geq 0$, en utilisant un élément du group modulaire.

Exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice associée à la demi-géodésique hyperbolique $\tilde{\alpha}$ qui lie les points i et $(1+i)/2$. Alors $\tilde{\alpha}$ traverse l'axe imaginaire et finit par $(\sqrt{5}-1)/2$. En suivant $\tilde{\alpha}$, on constate que $\tilde{\alpha}$ a la suite de coupe $LRLRLR\dots$. Ensuite $(\sqrt{5}-1)/2 = [0; 1, 1, 1, 1, \dots]$.

On dit que deux nombres $x = [a_0; a_1, \dots]$, $y = [b_0; b_1, \dots]$ ont les mêmes queues s'il existe $k, l \in \mathbb{N}$ telle que $a_{k+r} = b_{l+r}$ pour toute $r \geq 1$. Ils ont les mêmes queues mod 2 si $k+l$ est paire. Pour comprendre cette définition, nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme. Soient $\tilde{\alpha}$ et $\tilde{\alpha}'$ des géodésiques orientées de $\mathbb{H}^2$ avec le même point d'extrémité positif x , alors les séquences de coupe de $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\alpha}'$ coïncident à partir d'un certain rang. En plus, $x = [a_0; a_1, \dots]$ et $y = [b_0; b_1, \dots]$ ont les mêmes queues mod 2 si et seulement s'il existe $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ telle que $g(x) = y$.

Il n'est pas difficile de voir algébriquement que tout nombre dont la fraction continue est presque périodique est quadratique, c'est-à-dire solution d'une équation de la forme :

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ avec } a \in \mathbb{N}^* \text{ et } b, c \in \mathbb{Z}.$$

Inversement, tout nombre quadratique a un développement presque périodique. Le résultat suivant permet d'établir une relation entre les points fixes d'une isométrie hyperbolique de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ et les nombres quadratiques :

Lemme. Soit x un irrationnel. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) x est fixé par une isométrie hyperbolique de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$;
- (ii) x est quadratique.

En conclusion, un élément de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ est hyperbolique si et seulement si'il est conjugué dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ à une isométrie de la forme $\prod_{i=1}^k X^{n_{2i-1}} Y^{n_{2i}}$, avec $n_j \in \mathbb{N}$ et son point fixe a la même queue mod 2 que le nombre quadratique $x = [0; \overline{n_1, n_2, \dots, n_{2k}}]$. À partir de maintenant nous notons k la période de la classe de conjugaison d'un élément dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$, ou bien de la géodésique fermée associée.

3.2 Nœuds modulaires dans le gabarit de Lorenz

Afin d'étudier la géométrie de $M_{\hat{\gamma}}$, nous allons commencer par construire explicitement un représentant de la classe d'isotopie de $\hat{\gamma}$, l'orbite périodique du flot géodésique dans $T^1\Sigma_{mod}$, à partir d'un représentant γ . Cela a été fait par Ghys [25], comme suit.

Un *gabarit* [9] est une surface branchée avec bord et un semi-flot expansif. Ce qui suit est un théorème de Ghys, s'appuyant sur un théorème de Birman et Williams [9] qui affirme que tout flot d'Anosov sur une 3-variété a un gabarit.

Théorème (Ghys). *L'ensemble des géodésiques périodiques sur la surface modulaire est en correspondance bijective avec l'ensemble des orbites périodiques sur T , le gabarit de Lorenz plongé dans le complémentaire du nœud de trèfle, à l'exclusion du bord de T . Sur tout sous-ensemble fini, la correspondance est réalisée par une isotopie ambiante.*

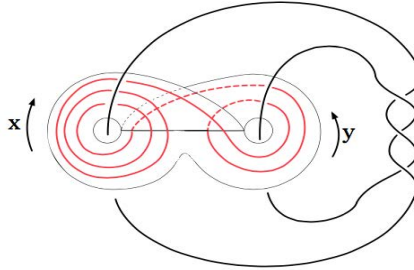


FIGURE 3.1: Le gabarit de Lorenz T dans le fibré tangent unitaire de la surface modulaire (complémentaire du nœud de trèfle dans $\mathbb{S}^3$) avec l'orbite périodique qui correspond au code X^3Y^2 .

Le gabarit de Lorenz nous dit, immédiatement, que nous pouvons associer un mot écrit avec les lettres X (pour gauche) et Y (pour droite) à toute orbite fermée sur le gabarit de Lorenz. Il n'y a pas de point de départ naturel pour une orbite, donc les mots X, Y utilisés pour la décrire sont primitifs à permutation cyclique près et il représente l'orbite périodique de la géodésique fermée associée au même code (voir section 3.1).

Paramétrage des orbites périodiques

Nous présentons maintenant une surface branchée avec bord lié au gabarit de Lorenz, que nous appelons le gabarit de tresse de Lorenz.

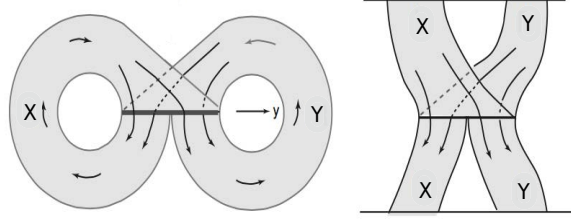


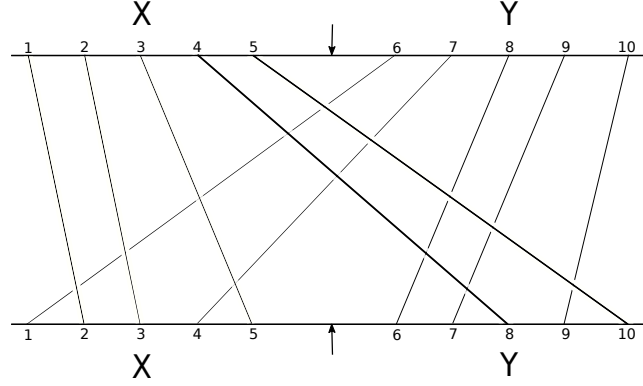
FIGURE 3.2: L'image à gauche est le gabarit de Lorenz. L'image à droite montre le découpage du gabarit de tresse de Lorenz.

Williams [60] fournit un algorithme pour localiser l'orbite périodique, sur le gabarit de tresse de Lorenz, d'une géodésique fermée à partir de son code en X, Y . Nous illustrons son algorithme, dans la figure 3.3, en montrant comment récupérer l'orbite à partir du mot, dans l'exemple $\omega := X^4Y^3XY^2$. Pour comprendre comment nous avons construit le nœud, le mot ω détermine ses 10 permutations cycliques et $\omega = \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{10}$, dans leur ordre naturel. On réorganise lexicographiquement ces 10 mots en utilisant la règle $X < Y$. La nouvelle position μ_i est donnée après chaque ω_i :

$X^4Y^3XY^2$	1	$Y^2XY^2X^4Y$	9
$X^3Y^3XY^2X$	2	$YXY^2X^4Y^2$	7
$X^2Y^3XY^2X^2$	3	$XY^2X^4Y^3$	4
$XY^3XY^2X^3$	5	$Y^2X^4Y^3X$	8
$Y^3XY^2X^4$	10	YX^4Y^3XY	6

Ceci détermine un nouvel ordre cyclique $(1, 2, 3, 5, 10, 9, 7, 4, 8, 6)$, où le brin i commence par μ_i et se termine par μ_{i+1} . Nous avons construit une tresse de permutation. Un brin de tresse i est un brin de sur-croisement si et seulement si $\mu_i < \mu_{i+1}$, sinon c'est un brin de sous-croisement. Dans l'exemple, il y a 5 (resp. 5) brins de sur-croisement (resp. brins de sous-croisement), donc 5 brins autour de l'oreille gauche et 5 autour de l'oreille droite. En commençant par la tresse de permutation et en traversant sa tresse fermée associée, on récupère le mot cyclique $X^4Y^3XY^2$. La tresse obtenue est l'appellée la *tresse de Lorenz* associée à $X^4Y^3XY^2$.

Dans une tresse de Lorenz, deux brins de sur-croisement (ou sous-croisement) ne se croisent jamais, de sorte que la permutation associée aux brins de sur-croisement détermine de façon unique le reste de la permutation.

FIGURE 3.3: La tresse de Lorenz associée à $X^4Y^3XY^2$

Pour donner une paramétrisation en général des tresses de Lorenz, supposons qu'il y a $p > 1$ brins de sur-croisement. Sur chaque brin de sur-croisement, la position de l'extrémité sera toujours plus grande que celle du point initial. Supposons que le i -ième brin commence à i et se termine à $i + d_i$. Puisque deux brins de sur-croisement ne se croisent jamais, nous avons la suite d'entiers positifs suivants :

$$d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_{p-1} \leq d_p.$$

Nous collectons ces données dans le vecteur suivante :

$$\bar{v}_L = \langle d_1, \dots, d_p \rangle_X, \quad 1 \leq d_1 \text{ et chaque } d_i \leq d_{i+1}.$$

Le vecteur $\bar{v}_L$ détermine les positions des brins partant de X (sur-croisement). Les brins partant de Y (sous-croisement) remplissent les positions restantes, de telle sorte que tous les croisements sont formés entre les X -brins et les Y -brins. Sur la figure 3.3, les flèches séparent les brins gauches et droits. Chaque d_i avec $i = 1, \dots, p$ est la différence entre les positions initiale et finale du i -ième brin de sur-croisement. L'entier d_i est aussi le nombre de brins qui passent sous le i -ième brin de tresse. Le vecteur $\bar{v}_L$ détermine une tresse fermée L avec $n = (p + d_p)$ brins, que nous appelons la représentation de la tresse de Lorenz de L . Toutes les orbites fermées dans le gabarit de Lorenz apparaissent de cette façon .

Les brins de sur-croisement se déplacent en groupes de brins *parallèles*, qui sont des brins de même pente, ou des brins équivalents dont les d_i associés coïncident. Si $d_{\mu_j} = d_{\mu_j+1} = \dots = d_{\mu_j+s_j+1}$, où s_j est le nombre de brins dans le j -ième groupe alors $r_j = d_{\mu_j}$. Ainsi, nous pouvons écrire $\bar{v}_L$ sous la forme :

$$\bar{v}_L = \langle d_{\mu_1}^{s_1}, \dots, d_{\mu_k}^{s_k} \rangle_X = \langle r_1^{s_1}, \dots, r_k^{s_k} \rangle_X, \quad 1 \leq s_i \text{ et } r_i < r_{i+1}.$$

Notons que

$$p = s_1 + \dots + s_k, \quad d_1 = r_1, \quad d_p = r_k.$$

La *période* de la géodésique associée γ se trouve en terms de la representation de tresse de $\hat{\gamma}$ par le nombre suivant :

$$t = \#\{i \mid i + d_i > p \text{ où } 1 \leq i \leq p\}.$$

Dans l'exemple précédent (voir figure 3.3), $\langle 1, 1, 2, 4, 5 \rangle_X = \langle 1^2, 2^1, 4^1, 5^1 \rangle_X$. Ainsi, $p = 5$, $k = 4$, $r_k = 5$, et $n = p + r_k = 10$ et la période est 2.

3.3 Majoration du volume des complémentaires des orbites périodiques

L'objectif de cette section est de démontrer le résultat suivant à partir de la triangulation idéal d'Adams [3] qui donne une majoration du volume des complémentaires d'entrelacs hyperboliques dans $\mathbb{S}^3$ (voir sous-section 2.2.3) :

Théorème 3.1. *Pour la surface modulaire Σ_{mod} , il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute géodésique fermée γ sur Σ_{mod} , on a :*

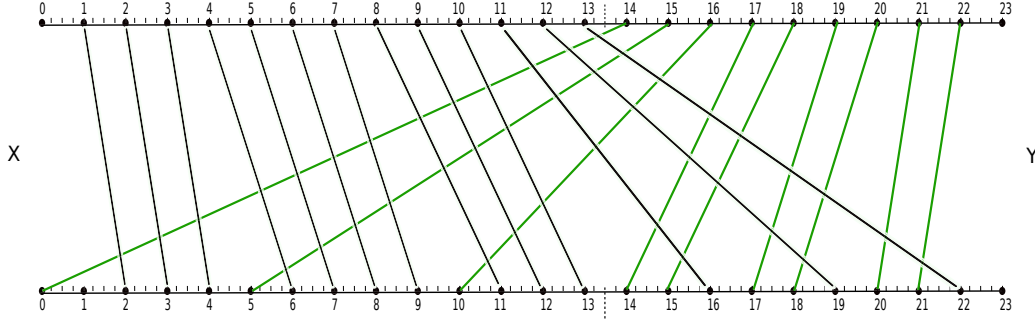
$$\text{Vol}(M_{\hat{\gamma}}) \leq C \cdot v_3 \cdot n_{\gamma}^2,$$

où n_{γ} est la période de la fraction continue de γ et v_3 est le volume d'un tétraèdre idéal régulier.

L'idée clé de la preuve est de construire un entrelacs L_{γ} associé à γ dans $\mathbb{S}^3$ tel que en faisant remplissage de Dehn le long d'une sous-famille de composantes de L_{γ} , on obtient $M_{\hat{\gamma}}$. Comme le remplissage de Dehn ne fait pas augmenter le volume simplicial (voir sous-section 2.2.3), il suffit d'estimer supérieurement le volume simplicial du complémentaire de l'entrelacs L_{γ} . Cette dernière est majorée linéairement par le nombre de croisement de L_{γ} [3].

L'entrelacs associé à une géodésique fermée

Pour arriver à s'imaginer un tel entrelacs on va exemplifier la construction de l'entrelacs pour le nœud associée à la géodésique fermée de code $X^7 Y X^2 Y^5 X^4 Y^3$, en ajoutant de nœuds triviaux. Comme on a vu dans la sous-section précédente on peut l'associer aussi le vecteur $\langle 1^3, 2^4, 3^3, 5^1, 7^1, 9^1 \rangle_X$. De façon équivalente si on change le paramétrage du nœud en utilisant la règle $Y < X$, on a aussi le vecteur $\langle 1^2, 2^2, 3^2, 6^1, 10^1, 14^1 \rangle_Y$. Aussi pour simplifier les

FIGURE 3.4: $X^7 Y X^2 Y^5 X^4 Y^3$.

figures dans cette sous-section on va enlever la composante du nœud du tréfle associée à $T^1 \Sigma_{mod}$ (voir figure la 3.1), mais on doit le tenir en compte, car grâce à lui notre entrelacs sera premier.

Considérons la tresse de Lorenz associée à γ , ou de façon équivalente le vecteur correspondant $\langle r_1^{s_1}, \dots, r_k^{s_k} \rangle_X$. De façon équivalente si on change le paramétrage du nœud en utilisant la règle $Y < X$, on a aussi le vecteur de la même taille $\langle l_1^{q_1}, \dots, l_k^{q_k} \rangle_Y$. Nous allons donner une projection de l'entrelacs L_γ sur le gabarit de tresse de Lorenz.

Soit m l'indice plus grand tel qu'il existe un brin sortant de l'intervalle $(\sum_{k=0}^{m-1} s_k, \sum_{k=0}^m s_k)$ qui rest dans la bande XX . Aussi soit m' l'indice analogue mais pour la bande YY .

Nous commençons par ajouter les suivantes $m + 1$ anneaux verticaux A_{X_i} délimités par des nœuds triviaux parallèles à la bande XX , qui enferment les intervalles

$$\left(\sum_{k=0}^{i-1} s_k + 3/4, \sum_{k=0}^i s_k + 1/4 \right) \quad \text{où } s_0 = 0 \text{ et } i < m,$$

et pour $i = m$ on a deux cas :

$$\left(\sum_{k=0}^{m-1} s_k + 3/4, \sum_{k=0}^m s_k + 1/4 \right), \quad \text{si } s_m \leq r_m.$$

Ou bien :

$$\left(\sum_{k=0}^{m-1} s_k + 3/4, \sum_{k=0}^{m-1} s_k + \left\lfloor \frac{s_m}{r_m} \right\rfloor r_m + 1/4 \right), \quad \text{si } s_m > r_m.$$

Finalement, pour $i = m + 1$ on ajoute un dernier anneau vertical qui enferme l'intervalle :

$$\left(\sum_{k=0}^m s_k + 3/4, p + 1/4 \right), \text{ si } s_m \leq r_m.$$

Ou bien :

$$\left(\sum_{k=0}^{m-1} s_k + \left\lfloor \frac{s_m}{r_m} \right\rfloor r_m + 3/4, p + 1/4 \right), \text{ si } s_m > r_m.$$

En cas il n'y a pas une tel m on considère que l'intervalle $(0, p + 1/4)$.

Notons que les brins sortant d'une même anneau A_{X_i} , pour $i \leq m$, sont parallèles.

On va faire le même construction pour la bande YY cette fois en considérant le vecteur $\langle l_1^{q_1}, \dots, l_k^{q_k} \rangle_Y$. Donc on aura la famille d'anneaux verticaux $\{A_{Y_j}\}_{j=1}^{m'+1}$ dans la bande YY .

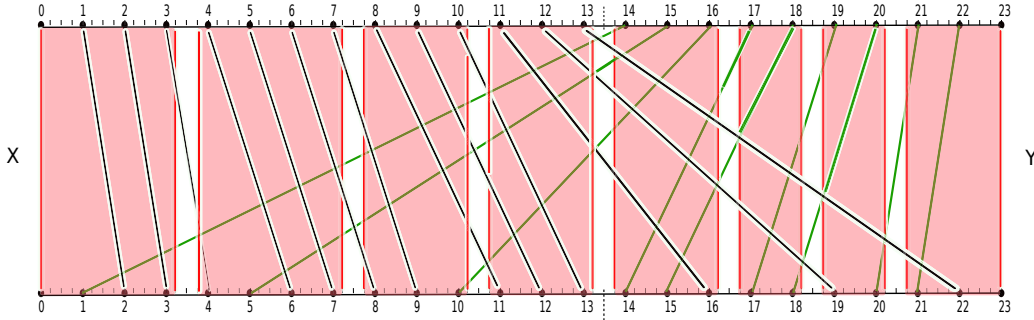


FIGURE 3.5: Les anneaux verticales de $X^7 Y X^2 Y^5 X^4 Y^3$.

Ensuite, on enlève la tresse de Lorenz et on ajoute un nœud trivial qui s'enroulera sur les anneaux verticales précédents, comme suit. En suivant les brins de la tresse de Lorenz associée à γ , on place un segment sur l'anneau correspondant dans un ordre croissant chaque fois que l'on passe par cet anneau. On obtient une suite de segments, puis on les relie dans leur ordre d'apparition. On obtient un nœud trivial en zigzag qui rebondit entre les anneaux XX et les anneaux YY , qui commence et se termine dans l'anneau A_{X_1} (voir la figure 3.6).

Finalement nous ajoutons un cercle de passage pour chaque paire de brins qui sort de l'anneau $A_{X_{m+1}}$. Le cercle de passage enfermera que le paire de brins

de sur-croisement. Également on construit les cercles de passage pour chaque paire de brins qui sort de l'anneau $A_{Y_{m'+1}}$, mais dans ce cas ils enferment que les paires de brins de sous-croisement. En fait, il y a certains tresse de Lorenz qui utilise moins cercles de passage, par exemple dans la tresse associée à $X^7YX^2Y^5X^4Y^3$, on utilisera que un cercle de passage.

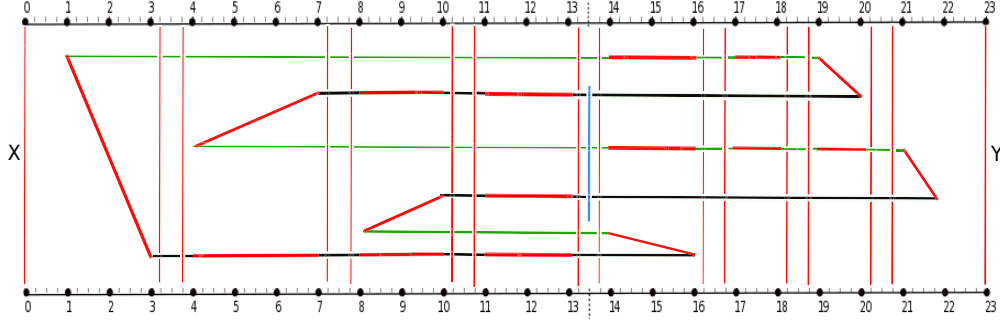


FIGURE 3.6: L_γ sans le composant du nœud de trèfle.

Afin de définir l'orientation du croisement du diagramme, on doit se rappeler que chaque segment dans une anneau vertical signifie que l'on traverse par l'anneau et que l'on suit l'orientation croisement donné par la tresse originale associée à γ . En ajoutant le nœud de trèfle, nous obtenons l'entrelacs L_γ .

Notez que le nombre total des anneaux construits est au plus deux fois la période de la géodésique fermée γ plus deux et le nombre de cercles de passage entre $A_{X_{m+1}}$ et $A_{Y_{m'+1}}$ est au plus les combinaisons en deux éléments sur le nombre maximal de brins qui sortent de ces anneaux (la période de γ). Donc le nombre de croisements de L_γ est proportionnel au carré de la période de γ .

Avant de continuer la démonstration du théorème 3.1 on va rappeler l'outil principal pour la preuve :

Remplissage de Dehn annulaire

Étant donné un anneau A plongé dans une 3-variété N orientée, soit $\partial A = L_{+1} \cup L_{-1}$. Orientons L_{+1} et L_{-1} de façon cohérente. À partir de ses bases $\{m_i, l_i\}$, $i = \pm 1$, où m_i est le méridien sur $\partial N(L_i)$ et l_i est une longitude sur $\partial N(L_i)$ induite par A pour $i = \pm 1$ (c'est-à-dire $l_i = \partial N(L_i) \cap A$).

Dans ces bases, la chirurgie de Dehn de $1/n$ sur L_{+1} et $-1/n$ sur L_{-1} donne l'homéomorphisme $N \cong N_{(L_+ \cup L_-)} \left(\frac{1}{n}, \frac{-1}{n} \right)$. Cet homéomorphisme est réalisé en coupant $N \cong N_{(L_+ \cup L_-)}$ le long de A après avoir tourné n fois, et en remplissant

le résultat de deux composantes du bord incidentes à A de façon triviale. Voir la figure 3.7 pour le cas $n = -2$ et son effet sur une courbe qui coupe A . Notez que cet homéomorphisme est l'identité à l'extérieur d'un voisinage de A .

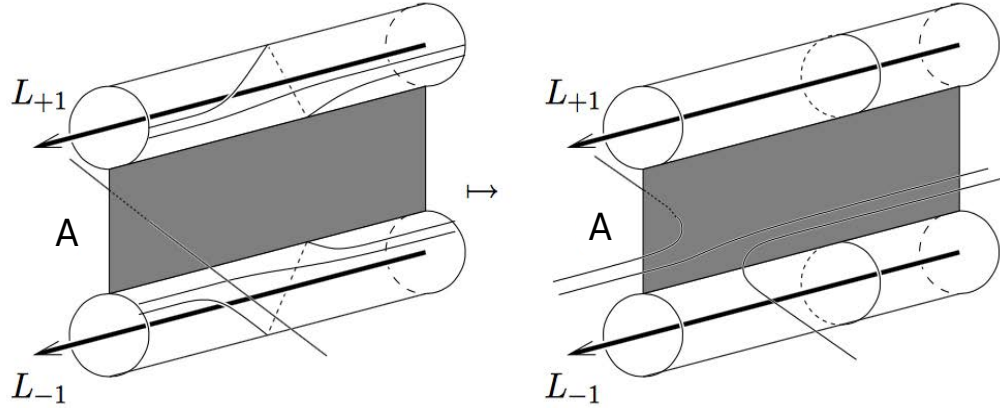


FIGURE 3.7: La chirurgie fait tourner les courbes le long de A .

Si une surface orientée S croise l'anneau A le long d'une courbe fermée simple c qui est essentielle dans A , alors l'homéomorphisme

$$N \rightarrow N_{(L_+ \cup L_-)} \left(\frac{1}{n}, \frac{-1}{n} \right)$$

restreint à S est la composition de n twists de Dehn. Si $n > 0$ et si on regrade S du même côté que L_+ , ce sont des twist de Dehn à gauche.

La preuve du théorème 3.1 est une conséquence du résultat suivant :

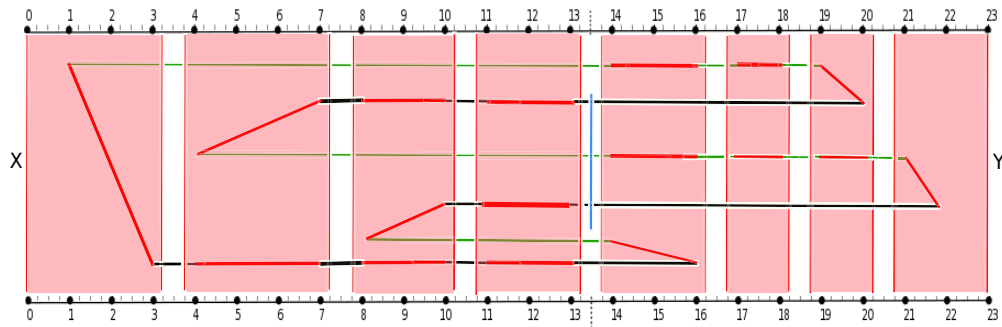


FIGURE 3.8: L_γ et les anneaux verticales.

Proposition 3.1. *Étant donnée γ une géodésique périodique γ sur Σ_{mod} , $M_{\hat{\gamma}}$ est obtenu en faisant un remplissage de Dehn le long les composantes du bord des anneaux verticaux et les cercles de passage de L_{γ} .*

Preuve. Pour les anneaux verticaux A_{X_i} avec $i < m$ on va faire un remplissage de Dehn annulaire de type $\frac{r_i}{s_i}$. Ensuite pour $i = m$ on a deux cas :

1. Si $s_m \leq r_m$, on fait un remplissage de Dehn annulaire de type 1 sur l'anneau A_{X_m} .
2. Si $r_m < s_m$, on fait un remplissage de Dehn annulaire de type $1/\left\lfloor \frac{s_m}{r_m} \right\rfloor$

Finalement, pour $i = m + 1$ ou quand il n'existe pas de m , on fait un remplissage de Dehn annulaire de type 1 sur le dernier anneau de la bande XX .

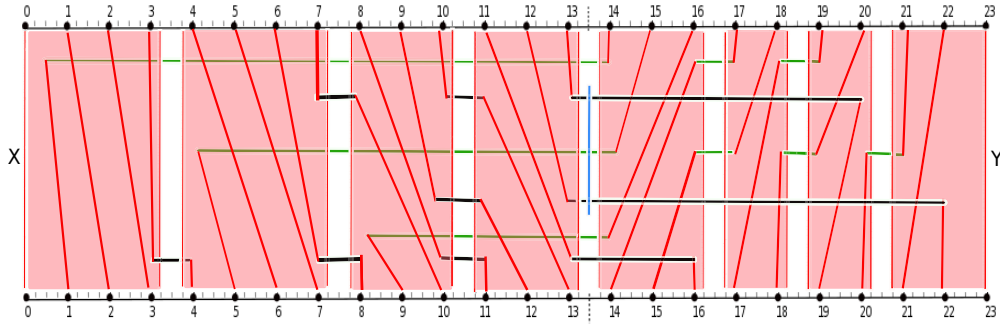


FIGURE 3.9: Après d'avoir fait le remplissage de Dehn annulaire le long tous les anneaux verticales associées à $X^7YX^2Y^5X^4Y^3$.

Ensuite, on fait le remplissage analogue pour la famille d'anneaux verticaux $\{A_{Y_j}\}_{j=1}^{m'+1}$ dans le band YY . L'effet d'avoir fait ces remplissages de Dehn annulaires sur L_{γ} nous dit que on obtiendra, après redressement, la configuration final pour les brins modulo quelques transpositions des couples de brins qui vont de la band XX à YY et vice-versa. Par exemple, dans l'entrelacs associée à $X^7YX^2Y^5X^4Y^3$, on constate l'existence d'une transposition grâce au croisement de deux brins qui vont de la bande XX à YY (voir la figure 3.10).

Notons que si on découpe la tresse obtenu, après d'avoir fait les remplissages de Dehn annulaire, le long la ligne qui sépare la bande XX de la bande YY on obtiendra, après redressement de point extrémales sur la ligne, la configuration recherché dans chaque bande. Par conséquent, pour obtenir la configuration final, il faut ajouter entre les bandes XX et YY une permutation des brins

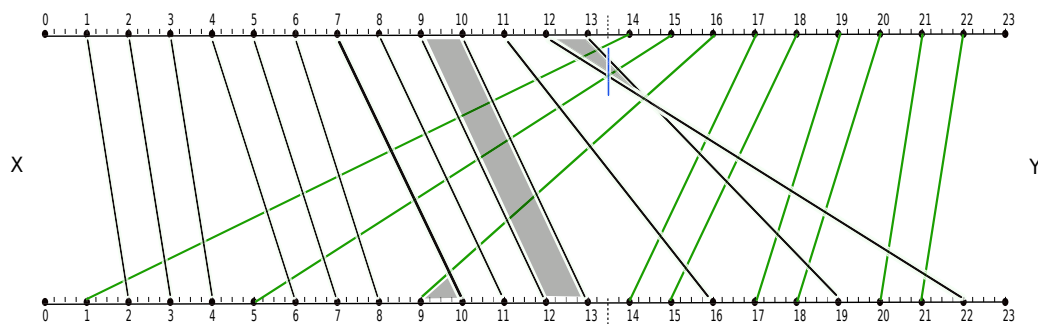


FIGURE 3.10: Avant de faire le remplissage de Dehn le long le cercle de passage associée à $X^7YX^2Y^5X^4Y^3$.

de sous-croisement et sur-croisement, ou bien, les voir à chaque permutation comme une composition des transpositions. Chaque transposition peut être réalisée en ajoutant pour chaque paire de brins du même type un cercle de passage [1] qui les enferment et après faire un remplissage de Dehn le long des cercles de passage de type 1, 0 ou -1, selon l'orientation du twist. $\square$

Chapitre 4

On volumes of complements of periodic geodesics

4.1 Introduction

Let Σ be a complete, orientable hyperbolic surface of finite area. Every closed geodesic γ in Σ has a canonical lift $\hat{\gamma}$ in the projective unit tangent bundle $PT^1\Sigma$, namely the image under the map $T^1\Sigma \rightarrow PT^1\Sigma$ of the corresponding periodic orbit of the geodesic flow. Such canonical lift $\hat{\gamma}$ is an embedding of $\mathbb{S}^1$ into $PT^1\Sigma$ and can then be considered as a knot in $PT^1\Sigma$.

More generally, given a closed geodesic in a hyperbolic 2-orbifold one can consider its canonical lift as a knot in the corresponding unit tangent bundle. This is possibly particularly interesting in the case of the modular surface $\Sigma_{mod} = \mathbb{H}^2/\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$, because its unit tangent bundle is homeomorphic to the complement of the trefoil knot in $\mathbb{S}^3$. Therefore, canonical lifts of closed geodesics on the modular surface can be seen as knots in $\mathbb{S}^3$. In fact, in [25] Ghys observed that the obtained knots are Lorentz knots. For facts about such knots [9, 10, 21].

The aim of this chapter is to study $M_{\hat{\gamma}}$, the complement of a regular neighborhood of the canonical lift $\hat{\gamma}$ in $PT^1\Sigma$, for a general hyperbolic surface Σ . Foulon and Hasselblatt [24] proved that $M_{\hat{\gamma}}$ admits a complete hyperbolic metric of finite volume as soon as γ fills the surface. Such metric is unique by the Mostow's Rigidity Theorem, meaning that any geometric invariant is a topological invariant. We will be interested in estimating the volume of $M_{\hat{\gamma}}$, when γ is a filling closed geodesic.

Our main result is to give a lower bound on the volume of the complement

$M_{\hat{\gamma}}$ (Theorem 4.5). We start however commenting on upper bounds for the volume of $M_{\hat{\gamma}}$. Bergeron, Pinsky and Silberman have already studied in [8] the problem of finding an upper bound, by giving one which is linear in the length of the geodesic. Nevertheless, it is easy to construct sequences of closed geodesics with length approaching to infinity but whose associated canonical lift complements have uniformly bounded volume. For example, suppose that γ is filling and ϕ is a diffeomorphism of the surface representing an infinite order element in the mapping class group : the length of the geodesics in the sequence $\{\phi^n(\gamma)\}_{n \in \mathbb{N}}$ tend to infinity as n grows, but every $M_{\widehat{\phi^n(\gamma)}}$ is homeomorphic to $M_{\hat{\gamma}}$. There are however more interesting examples :

Theorem 4.1. *Given a hyperbolic surface Σ , there exist a constant $V_0 > 0$ and a sequence $\{\gamma_n\}$ of filling closed geodesics on Σ , with $M_{\hat{\gamma}_n} \not\cong M_{\hat{\gamma}_k}$ for every $k \neq n$, such that $\text{Vol}(M_{\hat{\gamma}_n}) < V_0$ for every $n \in \mathbb{N}$. Moreover, for any sequence $\{X_n\}$ of hyperbolic metrics on Σ , we have that $\ell_{X_n}(\gamma_n) \nearrow \infty$.*

Bergeron, Pinsky and Silberman gave already in ([8], Example 3.1) examples satisfying Theorem 4.1 in the case of the modular surface. Their examples and the ones in the proof of Theorem 4.1 are different. To explain why this is the case we recall that in the modular surface ([8], Sec. 3) they found an upper bound which is proportional to the period plus the sum of the logarithms of the coefficients corresponding to the geodesic's continued fraction expansion. The examples provided in ([8], Example 3.1) have unbounded length but bounded period. On the other hand, the examples used to prove Theorem 4.1 have unbounded period. This yields :

Corollary 4.2. *For the modular surface Σ_{mod} , there exist a constant $V_0 > 0$ and a sequence $\{\gamma_k\}$ of filling closed geodesics on Σ_{mod} , with $M_{\hat{\gamma}_n} \not\cong M_{\hat{\gamma}_k}$ for every $k \neq n$, such that $\text{Vol}(M_{\hat{\gamma}_k}) < V_0$ for every $k \in \mathbb{N}$ and the period of the continued fraction expansion of γ_k tends to infinity.*

It is perhaps worth mentioning that there is a numerical example for Corollary 4.2 in ([13], Example 5.2). Even more interesting is that in their paper the authors presented numerical evidence of geodesics on the modular surface for which the volume's growth is linear in the geometric length of the geodesics. We show that, up to a logarithmic factor, such geodesics do actually exist in any hyperbolic surface :

Theorem 4.3. *Given a hyperbolic metric X on a surface Σ , there exist a sequence $\{\gamma_n\}$ of filling closed geodesics on Σ with $\ell_X(\gamma_n) \nearrow \infty$ such that,*

$$\text{Vol}(M_{\hat{\gamma}_n}) \geq c_X \frac{\ell_X(\gamma_n)}{\ln(\ell_X(\gamma_n))},$$

where c_X depends on the hyperbolic metric X .

Returning to the case of the modular surface, we can reformulate Theorem 4.3 in terms of the period of the geodesic's continued fraction expansion, as follows :

Theorem 4.4. *For the modular surface Σ_{mod} , there exist a sequence $\{\gamma_k\}$ of filling closed geodesics on Σ_{mod} with $n_{\gamma_k} \nearrow \infty$ such that,*

$$\text{Vol}(M_{\hat{\gamma}_k}) \geq v_3 \frac{n_{\gamma_k}}{12},$$

where n_{γ_k} is half the period of the continued fraction expansion of γ_k and v_3 is the volume of a regular ideal tetrahedra.

The reader might wonder why we put great emphasis on the period of the geodesics on the modular surface. The reason for this is that in a further research we intend to pursue an upper bound for the volume of the canonical lift complement which is linear in the period of the geodesic's continued fraction expansion.

We point out that the main ingredient to achieve the proofs of Theorem 4.3 and Theorem 4.4, is our next result which estimates a lower bound for the volume of the canonical lift complement in terms of combinatorial data between the geodesic and a given pants decomposition on Σ .

Theorem 4.5. *Given a pants decomposition $\Pi := \{P_i\}_{i=1}^{-\chi(\Sigma)}$ on a hyperbolic surface Σ , and γ a filling closed geodesic, we have that :*

$$\text{Vol}(M_{\hat{\gamma}}) \geq \frac{v_3}{2} \sum_{i=1}^{-\chi(\Sigma)} \#\{\text{homotopy classes of } \gamma\text{-arcs in } P_i\} - 3,$$

where v_3 is the volume of a regular ideal tetrahedra.

It is well known in 3-dimensional topology that giving a lower bound for the volume of a complete hyperbolic 3-manifolds is a more difficult problem than the upper bound, so it will be not surprising that Theorem 4.5 uses a more profound result ([4], Theorem 9.1) due to Agol, Storm and Thurston. This result allows us to give a lower bound in terms of the simplicial volume of the manifold constructed by doubling the pieces of $M_{\hat{\gamma}}$ that result from cutting it along the pre-image under the map $PT^1\Sigma \rightarrow \Sigma$ of the pants curves.

Before presenting the structure of this chapter, let us go back to the case of the modular surface. It will be interesting to calculate, by using Theorem

4.5, a lower bound for the geodesics in [13], which come from the ideal class group of the fields $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ with d a square-free positive integer bigger than 1. The interest of these closed geodesics is that they are uniformly distributed on $PT^1\Sigma_{mod}$ [22].

This chapter is organized as follows. After the introduction, we begin section 4.2 by presenting some well known facts on transversal homotopies, one of the main technical tools that allows us to deform the geodesics without changing the topological type of their canonical lift complement. We also recall some 3-manifold properties of $M_{\hat{\gamma}}$, such as its JSJ-decomposition, which relies on the result of the hyperbolicity of $M_{\hat{\gamma}}$ ([24], Theorem 1.12). The only new result found in section 4.2 is the following on the topological type of $M_{\hat{\gamma}}$, which maybe is interesting in its own right :

Theorem 4.6. *Let γ and η be two closed geodesics, where the class of γ in $H_1(\Sigma; \mathbb{R})$ is not trivial. Then $M_{\hat{\gamma}}$ is homeomorphic to $M_{\hat{\eta}}$ if and only if there is a diffeomorphism ϕ of Σ such that $\phi(\gamma)$ is homotopic to η .*

Section 4.3 is devoted to construct sequences of geodesic whose canonical lift complements are not homeomorphic and their volumes are universally bounded (Theorem 4.1). This sequence of canonical lifts is obtained by performing annular Dehn fillings on a link in $PT^1\Sigma$. It follows by using transversal homotopies that the length of the geodesic in the sequence is unbounded for any sequence of hyperbolic metrics. Specifically, one shows that the self-intersection number of the sequence is unbounded.

Later, in section 4.4 we prove our main result (Theorem 4.5) that gives a combinatorial lower bound on the volume of $M_{\hat{\gamma}}$. This allows to construct sequences of geodesics whose volume grows as the geodesic complexity increases, in terms of the length (Theorem 4.3) or in terms of the period (Corollary 4.4).

We conclude in section 4.5, by discussing what happens to the volume's lower bound on the lift complement if one changes the canonical lift to a non-canonical lift in $PT^1\Sigma$ over the same filling closed geodesic in the surface.

4.2 Topology and geometry of $M_{\hat{\gamma}}$

In this section we start noticing that the canonical lift can be defined for a larger set of closed curves on surfaces and recall a special type of homotopies between them which preserve the topological type of their canonical lift complement. Later, in Theorem 4.6 we prove that for any non null-homologous closed geodesic γ , the topological type of $M_{\hat{\gamma}}$ is determined by its mapping

class group orbit. Finally, we set some preliminaries on 3-dimensional manifolds in order to investigate the topological and geometrical features of $M_{\hat{\gamma}}$, for example we recall why the filling condition on γ implies that $M_{\hat{\gamma}}$ admits a unique hyperbolic structure.

4.2.1 Transversal homotopies

Any immersed closed curve γ on Σ , has a canonical lift into $PT^1\Sigma$ by considering:

$$\hat{\gamma}(s) := \left(\gamma(s), \frac{\dot{\gamma}(s)}{\|\dot{\gamma}(s)\|} \right).$$

It happens to be an embedding if γ is self-transverse, that is, an immersion without self-tangency points. Furthermore, we say that a homotopy $h: I \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \Sigma$, between two self-transverse closed curves h_0 and h_1 , is *transversal*, if h_t is self-transverse for all $t \in I$.

Notice that a transversal homotopy h on Σ , induces an isotopy between the respective canonical lifts $\hat{h}_0$ and $\hat{h}_1$,

$$\hat{h}: I \times \mathbb{S}^1 \rightarrow PT^1\Sigma \text{ where } \hat{h}(t, s) = \left(h_t(s), \frac{\dot{h}_t(s)}{\|\dot{h}_t(s)\|} \right).$$

By the isotopy extension lemma, there is an ambient isotopy $H: I \times PT^1\Sigma \rightarrow PT^1\Sigma$ between $\hat{h}_0$ and $\hat{h}_1$, extending the isotopy $\hat{h}$, that satisfies:

$$H(t, \hat{h}_0(s)) = \hat{h}_t(s).$$

It follows that the topological type of the canonical lift complement of a self-transverse closed curve is invariant under transversal homotopies. Recall now that in [28] Hass and Scott proved that two homotopic self-transverse closed curves with minimal self-intersection, are transversally homotopic. Therefore, for any self-transverse closed curve with minimal self-intersection, its canonical lift complement is homeomorphic to the canonical lift complement of the unique closed geodesic associated to it.

Putting all this together we get the following fact, which we record here for later use :

Lemma. *The homeomorphism type of $M_{\hat{\gamma}}$ is independent of the chosen hyperbolic metric on the hyperbolic surface.* $\square$

In the constructions of examples around this article, it will be important to characterize when a closed curve has minimal self-intersection. In ([27], Theorem 2) Hass and Scott proved the following result which will help us to decide when a closed curve on a surface has this property:

Theorem 4.7 (Hass-Scott). *Let α be a closed curve on a surface which has excess self-intersection. Then there is a singular 1-gon or 2-gon on the surface bounded by part of the image of α .*

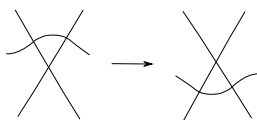


FIGURE 4.1: A third Reidemeister move.

A *third Reidemeister move* on a closed curve is a local move which corresponds to pushing a branch of a curve across a self-intersection, as shown in Figure 4.1, that is a special type of transversal homotopy. In ([28], Theorem 2.1, and [?] , Theorem 1) Hass and Scott, and later De Graaf and Schrijver, proved that if two closed curves with minimal self-intersection are in the same homotopy class, then there is a sequence of third Reidemeister moves and an ambient isotopy on the surface between them. Consequently, we have the following result which might exist in the literature of curves on surfaces, but we were not able to find it in this form useful for our study.

Corollary. *Let γ and η be two homotopic self-transverse closed curves with minimal self-intersection on Σ , then there is a homeomorphism between the non simply connected components of $\Sigma \setminus \gamma$ and $\Sigma \setminus \eta$.* $\square$

A closed curve α with minimal self-intersection on a surface Σ is said to be *filling* if $\Sigma \setminus \alpha$ is a collection of disks or once-punctured disks ; equivalently, if its geometric intersection with respect to any essential simple closed curve is not zero. By the previous result, we conclude that this property is preserved by transversal isotopies.

Corollary 4.8. *Given a self-transverse closed curve with minimal self-intersection, then the property of being filling over a surface is preserved by transversal homotopies.* $\square$

4.2.2 Topological type of $M_{\hat{\gamma}}$

In this subsection we prove that the canonical lift complement of a non null-homologous closed geodesic is determined by its mapping class group orbit.

Theorem 4.6. *Let γ and η be two closed geodesics, where the class of γ in $H_1(\Sigma; \mathbb{R})$ is not trivial. Then $M_{\hat{\gamma}}$ is homeomorphic to $M_{\hat{\eta}}$ if and only if there is a diffeomorphism ϕ of Σ such that $\phi(\gamma)$ is homotopic to η .*

Proof. By the discussion at the beginning of subsection 4.2.1 and the fact that diffeomorphisms preserve self-intersection number, we imply that closed geodesics in the same mapping class group orbit have homeomorphic canonical lift complements. This reduces the proof to one implication.

The first step is proving that every homeomorphism $f: M_{\hat{\gamma}} \rightarrow M_{\hat{\eta}}$, can be extended to a self-homeomorphism $\hat{f}$ of $PT^1\Sigma$ with $\hat{f}(\hat{\gamma}) = \hat{\eta}$. To show that this is the case, it is enough that f maps $m_{\hat{\gamma}}$, the meridian of $\hat{\gamma}$, to the meridian of $\hat{\eta}$. As the morphism in homology induced by the restriction of f on the boundary component corresponding to $\hat{\gamma}$ is an isomorphism, then we just need to prove the following claim:

Claim 4.9. *If the class of γ in $H_1(\Sigma; \mathbb{R})$ is not trivial, then, for the canonical lift $\hat{\gamma}$ in $PT^1\Sigma$ we have:*

$$\text{Ker}(H_1(\partial\mathcal{N}_{\hat{\gamma}}; \mathbb{R}) \xrightarrow{i_*} H_1(M_{\hat{\gamma}}; \mathbb{R})) = \text{Vect}_{\mathbb{R}}\{[m_{\hat{\gamma}}]\},$$

where $\mathcal{N}_{\hat{\gamma}}$ is a normal neighborhood of $\hat{\gamma}$.

Assuming Claim 4.9 we conclude the proof of Theorem 4.6, by showing that $\hat{f}$ induces a diffeomorphism on the surface Σ . Using the fact that the kernel of the morphism $\pi_*: \pi_1(PT^1\Sigma) \rightarrow \pi_1(\Sigma)$ is characteristic, we have the following morphism,

$$\text{Out}(\pi_1(PT^1\Sigma)) \rightarrow \text{Out}(\pi_1(\Sigma)).$$

By the Baer-Dehn-Nielsen Theorem, there exist $\phi \in \text{Diff}(\Sigma)$ associated to $\hat{f}$ such that,

$$\phi_* \circ \pi_* = \pi_* \circ \hat{f}_*.$$

Then $\phi_*([\gamma]) = \phi_* \circ \pi_*([\hat{\gamma}]) = \pi_* \circ \hat{f}_*([\hat{\gamma}]) = \pi_*([\hat{\eta}]) = [\eta]$, meaning that $\phi(\gamma)$ is homotopic to η . $\square$

It remains to prove Claim 4.9:

Proof of Claim 4.9. Notice that the image of the homology class of a longitude in $\partial\mathcal{N}_{\hat{\gamma}}$ under i_* is not trivial in $H_1(M_{\hat{\gamma}}; \mathbb{R})$ because $[\hat{\gamma}]$ is not trivial in $H_1(PT^1\Sigma; \mathbb{R})$ by hypothesis. Then it is enough to show that there is a non trivial element of $Vect_{\mathbb{R}}\{[m_{\hat{\gamma}}]\}$ whose image under i_* vanishes in $H_1(M_{\hat{\gamma}}; \mathbb{R})$. To prove this, consider the Mayer-Vietoris sequence in homology with real coefficients,

$$\dots \rightarrow H_2(PT^1\Sigma) \xrightarrow{\hat{\delta}} H_1(\partial\mathcal{N}_{\hat{\gamma}}) \xrightarrow{(i_*, j_*)} H_1(M_{\hat{\gamma}}) \oplus H_1(\mathcal{N}_{\hat{\gamma}}) \rightarrow H_1(PT^1\Sigma) \rightarrow \dots$$

Then by the exactness of the previous sequence, the last condition reduces to finding a surface on $PT^1\Sigma$ whose image under $\hat{\delta}$, the connecting morphism of the sequence, is a non trivial element of $Vect_{\mathbb{R}}\{[m_{\hat{\gamma}}]\}$.

Since the class of γ is not trivial in $H_1(\Sigma; \mathbb{Z})$, there is a non separating simple closed curve α such that $n[\alpha] = [\gamma]$ for some non zero integer n ([23], Proposition 6.2). Choose $[\beta]$ a primitive element in $H_1(\Sigma; \mathbb{Z})$ such that its algebraic intersection with $[\alpha]$ is one. Consider T_{β} the pre-image of β , a simple closed geodesic, under the map $PT^1\Sigma \rightarrow \Sigma$, which is a torus because $PT^1\Sigma$ is orientable. Then

$$\hat{\delta}([T_{\beta}]) = [\partial(T_{\beta} \cap \mathcal{N}_{\hat{\gamma}})] = \langle [\beta], [\gamma] \rangle [m_{\hat{\gamma}}] = n[m_{\hat{\gamma}}], \text{ with } n \neq 0.$$

□

Remark. By the discussion in section 4.2.1. If γ and η are two self-transverse closed curves with minimal self-intersection on Σ , where the class of γ in $H_1(\Sigma; \mathbb{R})$ is not trivial, then $M_{\hat{\gamma}}$ is homeomorphic to $M_{\hat{\eta}}$ if and only if there is a diffeomorphism ϕ of Σ such that $\phi(\gamma)$ is homotopic to η .

We conclude this subsection by giving a second proof of the fact that two closed geodesics in the same mapping class group orbit have homeomorphic canonical lift complements. This alternative proof relies on an action of the mapping class group of Σ into its unit tangent bundle, which leaves invariant the foliation given by the geodesic flow.

Let ϕ be in $\text{Diff}(\Sigma)$ and consider $\bar{\phi}: \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ a lift of ϕ . In that case we can give rise to a ϕ_* -equivariant homeomorphism of the boundary at infinity of the hyperbolic space to itself,

$$\partial\bar{\phi}: \partial\mathbb{H}^2 \rightarrow \partial\mathbb{H}^2.$$

Using the fact that $T^1\mathbb{H}^2$ is diffeomorphic to

$$\{(a_1, a_2, a_3) \in \partial\mathbb{H}^2 \times \partial\mathbb{H}^2 \times \partial\mathbb{H}^2 \mid a_i \neq a_j \forall i \neq j\},$$

quotiented via the fix-point free involution,

$$(a_1, a_2, a_3) \mapsto (a_2, a_1, a_3).$$

This diffeomorphism maps (a_1, a_2, a_3) to the unique unit tangent vector v normal to the geodesic in $\mathbb{H}^2$ with endpoints a_1, a_2 and pointing to a_3 .

From this point of view, we induce a ϕ_* -equivariant map,

$$\Phi: T^1\mathbb{H}^2 \rightarrow T^1\mathbb{H}^2 \text{ such that } \Phi(x, y, z) = (\partial\bar{\phi}(x), \partial\bar{\phi}(y), \partial\bar{\phi}(z)).$$

The ϕ_* -equivariance property, implies that the map Φ descends to

$$\hat{\Phi}: PT^1\Sigma \rightarrow PT^1\Sigma,$$

sending the orbits of the geodesic flow to themselves.

4.2.3 Hyperbolicity of $M_{\hat{\gamma}}$

In this subsection we study some 3-manifold properties of $M_{\hat{\gamma}}$. In particular we describe the J.S.J. decomposition of $M_{\hat{\gamma}}$, this is mainly due to Foulon and Hasselblatt ([24], Theorem 1.12), which states that the canonical lift complement over a filling closed geodesic is hyperbolic. This result is established by verifying the hypotheses of the Hyperbolization Theorem [56]:

Theorem (Hyperbolization Theorem). *The interior of a closed 3-manifold N with torus boundary admits a complete hyperbolic metric with finite volume if and only if it is irreducible, (homotopically) atoroidal, with infinite fundamental group and not homeomorphic to $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2$, $\mathbb{T}^2 \times [0, 1]$ or $K \tilde{\times} [0, 1]$ (the twisted interval bundle over the Klein bottle).*

We will begin by reviewing our list of definitions. For technical details see [29] and [33].

Suppose N is a compact, orientable 3-manifold with boundary. An embedded surface in N is said to be *compressible* if there is an essential circle (that is, one that bounds no disk in the surface) on it that bounds a disk in N . In the case where the embedded surface is not compressible, is said to be *incompressible*.

An incompressible torus is *boundary-parallel* if there is an isotopy from it into ∂N . That is, there is an embedded $\mathbb{T}^2 \times [0, 1]$ such that $\mathbb{T}^2 \times \{0\}$ parametrizes the given torus and $\mathbb{T}^2 \times \{1\}$ a boundary component.

The 3-manifold N is said to be *irreducible* if every embedded 2-sphere bounds a ball. In this case we also say that N is *homotopically atoroidal* if every

π_1 -injective map from the torus to N is homotopic to a map into ∂N . Being homotopically atoroidal is a stronger property than being *atoroidal* (here, atoroidal means that every incompressible torus in N is boundary-parallel). Nevertheless, the two notions agree except for some Seifert fibered manifolds (see [33], Lemma IV.2.6), which will not appear in this chapter.

Let us investigate for a given closed geodesic γ on Σ , which of properties on the Hyperbolization Theorem are satisfied by its canonical lift complement :

- $M_{\hat{\gamma}}$ is irreducible, because if $\mathbb{S}^2$ is embedded in $M_{\hat{\gamma}}$ and hence into $PT^1\Sigma$, then it bounds a ball B in $PT^1\Sigma$, by irreducibility of $PT^1\Sigma$. As $\mathbb{S}^2 \cap \hat{\gamma} = \emptyset$ we conclude that $\hat{\gamma}$ is embedded outside B , because if $\hat{\gamma}$ is inside B , then its projection to Σ would be nullhomotopic.
- $\pi_1(M_{\hat{\gamma}})$ is infinite, because the inclusion map $i: M_{\hat{\gamma}} \rightarrow PT^1\Sigma$ induces, by transversality, a π_1 -surjective map and $\pi_1(PT^1\Sigma)$ is infinite.

Definition 4.1. Let η be a simple closed geodesic on Σ , then we define the following embedded surfaces on $M_{\hat{\gamma}}$:

T_η the pre-image of η under the map $PT^1\Sigma \rightarrow \Sigma$, if $i(\eta, \gamma) = 0$,

and

$$(T_\eta)_{\hat{\gamma}} := (T_\eta) \setminus \mathcal{N}_{\hat{\gamma}}, \text{ if } i(\eta, \gamma) \neq 0.$$

- For the atoroidality of $M_{\hat{\gamma}}$, notice that if a simple closed geodesic η does not intersects γ in Σ . Then T_η is an embedded incompressible torus in $M_{\hat{\gamma}}$, ([24], Theorem B.8) which is not boundary-parallel. Therefore, a necessary condition for $M_{\hat{\gamma}}$ to be atoroidal is that γ fills Σ .
- Conversely, Foulon and Hasselblatt proved in ([24], Theorem 1.12) that the filling condition on γ is sufficient to provide atoroidality to $M_{\hat{\gamma}}$, and consequently a unique hyperbolic structure with finite volume.

Theorem (Foulon-Hasselblatt). *If γ is a filling self-transverse closed curve with minimal self-intersection number on a hyperbolic surface Σ , and $\tilde{\gamma}$ any continuous lift of γ . Then $M_{\tilde{\gamma}}$ is a hyperbolic manifold of finite volume.*

In the case where γ is just a non simple closed geodesic, that is $M_{\hat{\gamma}}$ is an irreducible 3-manifold with torus boundary, then by JSJ-decomposition Theorem [32, 36], we can canonically split $M_{\hat{\gamma}}$ along a finite (maybe empty) collection of disjoint and non-parallel nor boundary-parallel incompressible embedded tori into connected components which are either atoroidal or Seifert fibered:

Theorem (JSJ-decomposition). *Let N be a compact, irreducible 3-manifold with boundary. In the interior of N , there exists a family $C = \{T_1, \dots, T_r\}$ of disjoint tori that are incompressible and not boundary parallel, with the following properties:*

1. *each connected component of $N \setminus C$ is either a Seifert manifold or is atoroidal;*
2. *the family C is minimal among those satisfying (1).*

Moreover, such a family C is unique up to ambient isotopy.

We recall that the *characteristic submanifold* of N is the union of all Seifert fibered JSJ-components of N .

Corollary 4.10. *Let γ be a non simple closed geodesic in Σ . Denote by Σ_1 be the essential subsurface filled by γ , Σ_2 the closure in Σ of $\Sigma \setminus \Sigma_1$ and $M_{1\hat{\gamma}} := PT^1\Sigma_1 \setminus \mathcal{N}_{\hat{\gamma}}$. Then the JSJ-decomposition of $M_{\hat{\gamma}}$ in its atoroidal pieces and characteristic submanifold is:*

$$M_{1\hat{\gamma}} \cup PT^1\Sigma_2, \text{ with the respective splitting incompressible tori } T_{(\partial\Sigma_1 \setminus \partial\Sigma)}.$$

□

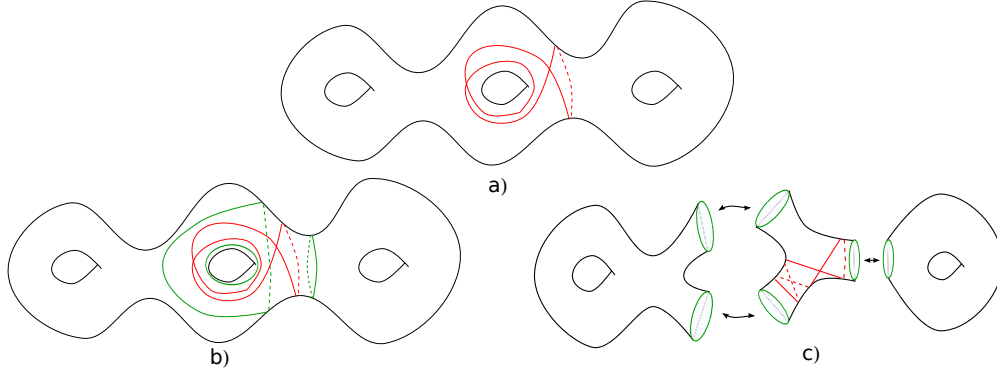


FIGURE 4.2: a) A non filling closed geodesic γ on Σ . b) Finding the essential subsurface on Σ filled by γ . c) The projection of the JSJ-decomposition of $M_{\hat{\gamma}}$.

Lastly, we point out that the embedded surfaces $(T_{\eta})_{\hat{\gamma}}$ on Definition 4.1 are also incompressible on $M_{\hat{\gamma}}$. These surfaces, will be important for our main result in section 4.4.

Lemma 4.11. *For every pair of intersecting closed geodesic η and γ in Σ , where η is simple, the embedded surface $(T_\eta)_{\hat{\gamma}}$ in $M_{\hat{\gamma}}$ is π_1 -injective.*

Proof. We consider, for the sake of concreteness, the case where the surface $(T_\eta)_{\hat{\gamma}}$ is separating and leave the non separating case to the reader. Let us split $M_{\hat{\gamma}}$ by $(T_\eta)_{\hat{\gamma}}$, into pieces N_1 and N_2 . By Van Kampen it is enough to show the π_1 -injectivity for the surface $(T_\eta)_{\hat{\gamma}}$ in N_i .

If the surface $(T_\eta)_{\hat{\gamma}}$ is not π_1 -injective, then by the Loop Theorem, there is an embedded disk D_0 whose interior is in the interior of N_i and whose boundary is an essential simple closed curve α in $(T_\eta)_{\hat{\gamma}}$.

As T_η is an incompressible surface in $PT^1\Sigma$ ([24], Theorem B.8), then α bounds a disk D_1 in T_η that intersects $\hat{\gamma}$. So by the irreducibility of $PT^1\Sigma$, the embedded sphere formed by $D_0 \cup D_1$ would bound a ball B in $PT^1\Sigma$.

By the periodicity of $\hat{\gamma}$, there is at least one arc of $\hat{\gamma}$ inside B with endpoints at D_1 . This arc is homotopic relative to the boundary to an arc in B that union with a simple arc in D_1 with the same endpoints, bounds a disk in N_i . Such homotopy inside $PT^1\Sigma$, induces a homotopy on Σ that reduces the intersection number between γ and η , contradicting the fact that γ and η are in minimal position. $\square$

4.3 Sequences of closed geodesics with uniformly bounded volume complement

In this section we prove one of our main results, Theorem 4.1, which provides a way of constructing sequences of closed geodesics of increasing length, whose canonical lift complements are not homeomorphic and whose volume are universally bounded by the volume of a link complement on $PT^1\Sigma$. Although this kind of examples already existed in the literature (see [8], Subsection 3.2 or [13], Example 5.2), we point out that our method generalizes the previous examples.

Theorem 4.1. *Given a hyperbolic surface Σ , there exist a constant $V_0 > 0$ and a sequence $\{\gamma_n\}$ of filling closed geodesic on Σ , with $M_{\hat{\gamma}_n} \not\cong M_{\hat{\gamma}_k}$ for every $k \neq n$, such that $\text{Vol}(M_{\hat{\gamma}_n}) < V_0$ for every $n \in \mathbb{N}$. Moreover, for any sequence $\{X_n\}$ of hyperbolic metrics on Σ , we have that $\ell_{X_n}(\gamma_n) \nearrow \infty$.*

Proof. Choose γ_0 and η closed geodesics on Σ such that the first one is filling, the second has a fixed orientation and $i(\gamma_0, \eta) > 1$.

For each intersection point between γ_0 and η , we measure the angle of intersection at that point by using the orientation of η and the right side on Σ with respect to η . Let p be a point of intersection of γ_0 with η that minimizes the angle.

Define γ_n the unique closed geodesic homotopic to the closed curve that starts at p , travels n times along η with its same orientation and then one time about γ_0 , that is

$$\eta^n *_p \gamma_0 \text{ (denoted as } \gamma_{n,0}).$$

Notice that $\gamma_{n,0}$ is not self-transverse, so we will slightly modify it to obtain one that is, in the following manner :

Choose a δ neighborhood of η such that all self-intersections of γ_0 that lie outside the geodesic η , also lie outside the δ neighborhood of η .

Erase the geodesic arc of γ_0 to which p belongs and is contained in the δ neighborhood of η . Link the extremal points by the geodesic segment η_n in the δ neighborhood of η that winds n times in the orientation of η . Let us denote this piecewise geodesic as $\gamma_{n,1}$.

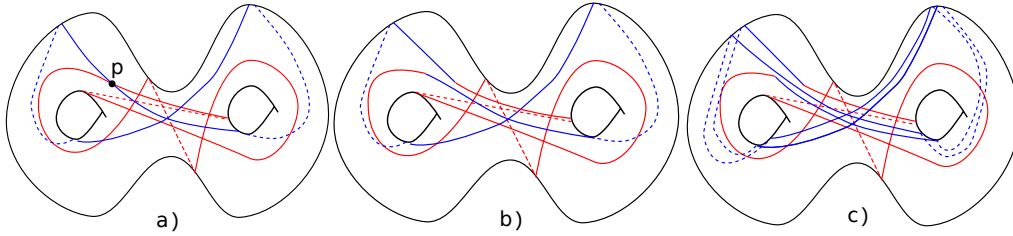


FIGURE 4.3: a) $\gamma_0 \cup \eta$, b) $\gamma_{1,1}$, and c) $\gamma_{2,1}$ on Σ .

Using elementary hyperbolic geometric, one easily shows that $\gamma_{n,1}$ has not self-tangency points, and the angle in the intersection points between $\gamma_{n,1} \setminus \eta_n$ and η_n are less than the angles in the gluing points.

Notice that by construction,

$$n^2 i(\eta, \eta) + n(i(\gamma_0, \eta) - 1) = \sharp(\gamma_{n,1} \cap \gamma_{n,1}).$$

Claim 4.12. $\gamma_{n,1}$ has the minimal number of self-intersection.

Proof. By Theorem 4.7, the proof reduces to show that $\gamma_{n,1}$ has no singular 1-gons nor 2-gons. Consider the lifts of $\gamma_{n,1}$ in the universal cover of Σ , which are piecewise geodesic lines in $\mathbb{H}^2$. It is enough to show that every pair of them

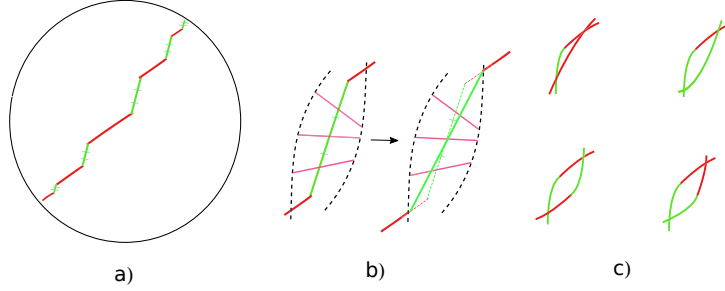


FIGURE 4.4: a) A lift of $\gamma_{n,0}$ in $\mathbb{H}^2$. b) The modification from $\widetilde{\gamma_{n,0}}$ to $\widetilde{\gamma_{n,1}}$. c) Possible bigons given by the intersection of two lifts of $\gamma_{n,1}$.

intersects at most once. Indeed, if there were two consecutive intersections they cannot happen in segments of the same geodesic segment lifts, so in between there must be at least one gluing point of two distinct geodesic segments.

If there is more than one gluing point in between the consecutive intersections, we would have geodesic side quadrilaterals whose sum of interior angles is bigger or equal to 2π , which is a contradiction in the hyperbolic plane.

The case where there is exactly one gluing point cannot happen thanks to the choice of p as the intersection points between γ_0 and η with minimal angle. $\square$

In order to make $\gamma_{n,1}$ smooth, just round the two corners of $\gamma_{n,1}$, and denote it by the same name. This gives us a self-transverse closed curve homotopically transversal to γ_n , which means that $M_{\hat{\gamma}_n} \cong M_{\widehat{\gamma_{n,1}}}$. By Theorem 4.6, $M_{\hat{\gamma}_n} \not\cong M_{\hat{\gamma}_k}$ for every $k \neq n$, because their self-intersection number, which is an invariant under the mapping class group action, is different for each element of the sequence $\{\gamma_n\}$. Moreover, for any sequence $\{X_n\}$ of hyperbolic metrics on Σ , we have that $\ell_{X_n}(\gamma_n) \nearrow \infty$, because the self-intersection number is increasing too.

The hyperbolicity of $M_{\hat{\gamma}_n}$ comes from the following fact :

Claim 4.13. γ_n is filling for every $n \in \mathbb{N}$.

Proof. Take the partition of Σ by γ_0 and draw η over this partition. Firstly we will be interested in comparing the partitions between $\Sigma \setminus \gamma_0$ and $\Sigma \setminus \gamma_{1,1}$.

Consider the four sides of the graph induced by $\gamma_0 \cup \eta$ that have p as vertex and cut them at p and glue them in a particular order that depends on the

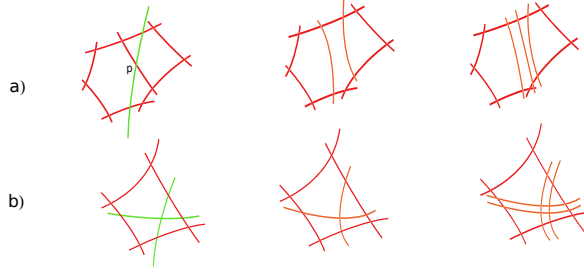


FIGURE 4.5: The images on the left are two examples of partitions of Σ via $\eta \cup \gamma_0$, on the center γ_1 , and on right for γ_2 . a) The partition around p . b) The partition where the arcs does not contain p .

orientation of η . Next, superpose the pair of new arcs to geodesic segments on η_1 .

In the case where the boundary discs of the partition of Σ by γ_0 does not contain p we simply consider the partition of the discs given by $\gamma_0 \cup \eta_1$.

Thus if γ_0 is filling then $\gamma_{1,1}$ is also filling. Moreover, as this property of being filling is preserved by transversal homotopy (Corollary 4.8), implies that γ_1 is also filling.

Notice that, $\Sigma \setminus \gamma_{n,1}$ is a subdivision of the partition given by $\gamma_{1,1}$, then γ_n is also filling. $\square$

Finally, in order to find an upper bound to the volume of all the hyperbolic 3-manifolds $M_{\hat{\gamma}_n}$ we will construct L_0 and L_1 , two knots inside $M_{\hat{\gamma}_0}$ and show that each $M_{\hat{\gamma}_n}$ is obtained by making Dehn surgery along L_0 and L_1 . As Dehn filling does not increase the simplicial volume ([14], Theorem 1.3), then:

$$\text{Vol}(M_{\hat{\gamma}_n}) \leq \|M_{\hat{\gamma}_0} \setminus \{L_0, L_1\}\|, \text{ for every } k \in \mathbb{N}.$$

For the construction of L_0 and L_1 , let θ be the angle of intersection of γ_0 and η at p . As the number of possible angles in the intersection of γ_0 and η is finite, there exist a small ε such that the following annulus :

$$A := \{(\eta(t), \dot{\eta}(t)e^{2i\pi s}) \mid t \in \mathbb{S}^1, s \in [0, \theta + \varepsilon]\} \subset PT^1\Sigma,$$

is intersected only once by $\hat{\gamma}_0$ at the point whose projection on Σ is p . Denote the boundary component of A associated to $\hat{\eta}$ as L_0 and let L_1 be the other boundary component of A .

Take V a solid torus inside the preimage the δ neighborhood of η under the map $\Sigma \rightarrow PT^1\Sigma$ which contains A and does not intersect other arcs of $\hat{\gamma}_0$ different from the one that intersects A .

Let V' be the resulting 3-manifold obtained by performing a $\frac{1}{n}$ Dehn surgery on one component of ∂A and a $\frac{-1}{n}$ Dehn surgery on the other component of ∂A inside V . By ([47], Theorem 2.1) there exist a diffeomorphism $\phi_n : V' \rightarrow V$ such that $\phi_n|_{\partial V'} = id$. Moreover, each homotopy class relative to the boundary of an arc transversal to the annulus is send to the homotopy class of the initial arc concatenated, at the point of intersection with the annulus, with an arc that winds along the soul of V n times.

In conclusion, the diffeomorphism ϕ_n extends to a self-homeomorphism of $PT^1\Sigma$ that sends the isotopy class of $\hat{\gamma}_0$ to $\hat{\gamma}_n$. $\square$

Remark. From Theorem 4.1, it is natural to look for bounds on the volume of $M_{\hat{\gamma}}$ invariant under the mapping class group action and more intrinsic than the self-intersection number.

We can also apply our method in Theorem 4.1 to explain why the volume of the sequence of geodesics found in (Example 5.2, [13]) is bounded. We recall that every closed geodesics on the modular surface is represented as a positive word in $x = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ and $y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, containing both symbols. Conversely, any such word encodes a unique periodic geodesic [53]. In that case, we refer to the code for a closed geodesic γ as $\omega(\gamma)$ and denote n_γ the number of (cyclic) subwords of the form xy in $\omega(\gamma)$. This coding arises from a continued fraction expansion (see [53]) where n_γ is exactly half the period of the (even) continued fraction corresponding to γ .

Corollary 4.2. *For the modular surface Σ_{mod} , there exist a constant $V_0 > 0$ and a sequence $\{\gamma_k\}$ of filling closed geodesics on Σ_{mod} , with $M_{\hat{\gamma}_n} \not\cong M_{\hat{\gamma}_k}$ for every $k \neq n$, such that $\text{Vol}(M_{\hat{\gamma}_k}) < V_0$ for every $k \in \mathbb{N}$ and the period of the continued fraction expansion of γ_k tends to infinity.*

Proof. Consider the closed geodesics γ_k whose code is of the form $\{x^2y\alpha^k\}$, where α is any positive word containing x and y that ends with y , whose representing geodesic intersects the geodesic encoded by x^2y more than once. Proceeding as in Theorem 4.1 one shows that the volume associated to $x^2y\alpha^k$ is bounded by the volume of

$$PT^1\Sigma_{mod} \setminus (\widehat{x^2y} \cup \hat{\alpha} \cup \widehat{\alpha_\theta}),$$

where $\widehat{\alpha_\theta}$ is a knot obtained by translating $\hat{\alpha}$ by some small angle θ in the fiber direction of $PT^1\Sigma_{mod}$. $\square$

Remark 4.14. *For the sequence of geodesics in Theorem 4.1, we observe that if we fix a suitable pants decomposition on Σ , then the homotopy classes of arcs in each pair of pants is bounded. The only thing that changes is the number of arcs in the fixed homotopy classes.*

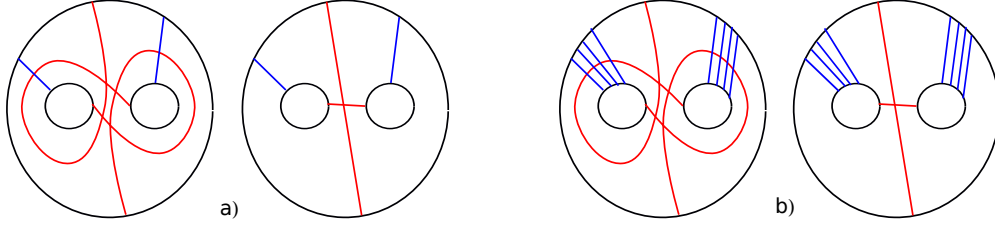


FIGURE 4.6: a) Cutting $(\gamma_{1,1}, \Sigma)$ of Figure 4.3b along a pants decomposition on Σ , and b) same for $(\gamma_{4,1}, \Sigma)$.

This remark is the motivation for our next main result, that we present in the following section.

4.4 Lower bound on the volume of $M_{\hat{\gamma}}$

In this section we prove a lower bound for the volume of the canonical lift complement (Theorem 4.5). The lower bound is obtained in terms of combinatorial data coming from the geodesic and a pants decomposition of the surface. We apply this result to find a sequence of geodesics in the modular surface where the lower bound can be written in terms of the period of the continued fraction extension of the geodesics (Corollary 4.4). We conclude by finding a sequence of geodesics on surfaces, whose lower bound is written in terms of their length (Theorem 4.3).

Theorem 4.5. *Given a pants decomposition $\Pi := \{P_i\}_{i=1}^{-\chi(\Sigma)}$ on a hyperbolic surface Σ , and γ a filling geodesic, we have that:*

$$\text{Vol}(M_{\hat{\gamma}}) \geq \frac{v_3}{2} \sum_{i=1}^{-\chi(\Sigma)} \#\{\text{homotopy classes of } \gamma\text{-arcs in } P_i\} - 3,$$

where v_3 is the volume of a regular ideal tetrahedra.

Given a pair of pants P , we say that two arcs $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow P$ with $\alpha(\{0, 1\}) \cup \beta(\{0, 1\}) \subset \partial P$ are in the same homotopy class in P , if there exist an homotopy $h : [0, 1]_1 \times [0, 1]_2 \rightarrow P$ such that:

$$h_0(t_2) = \alpha(t_2), \quad h_1(t_2) = \beta(t_2) \quad \text{and} \quad h([0, 1]_1 \times \{0, 1\}) \subset \partial P.$$

Remark 4.15. *The 3 on the lower bound of Theorem 4.5 comes from the fact that the γ -arcs configuration on P which are equivalent up to homotopy classes to a family of simple arcs without intersections, have at most 3 homotopy classes of γ -arcs on P . And these configurations does not contribute to the lower bound on Theorem 4.5. In fact, there are only six of those configurations:*

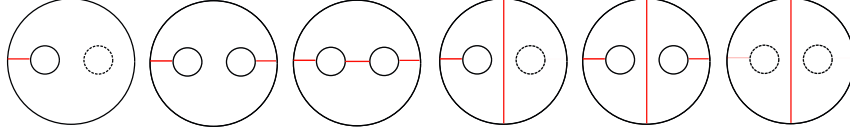


FIGURE 4.7: The only six γ -arcs configuration on P up to homotopy classes whose γ -arcs are simple arcs without intersections.

Before stating the main result to prove Theorem 4.5 we recall some definitions.

If N is a hyperbolic 3-manifold and $S \subset N$ is an embedded incompressible surface, we will use $N \setminus\!\!\setminus S$ to denote the manifold that is obtained by cutting along S ; it is homeomorphic to the complement in N of an open regular neighborhood of S . If one takes two copies of $N \setminus\!\!\setminus S$, and glues them along their boundary by using the identity diffeomorphism, one obtains the double of $N \setminus\!\!\setminus S$, which is denoted by $D(N \setminus\!\!\setminus S)$.

Definition 4.2. Let P be a pair of pants which belongs to a pants decomposition on a surface Σ and γ a closed geodesic having points in $\Sigma \setminus P$ such that $P \cap \gamma$ is finite set of geodesic arcs $\{\alpha_i\}$ connecting some boundary components of P . Then denote,

$$P_{\hat{\gamma}} \text{ as } PT^1P \setminus \bigcup_i \hat{\alpha}_i \cong (\mathbb{S}^1 \times P) \setminus \bigcup_i \hat{\alpha}_i.$$

And define,

$$D(P_{\hat{\gamma}}),$$

as gluing two copies of $PT^1P \setminus \bigcup_i \hat{\alpha}_i$ along the punctured tori coming from

$$\partial PT^1P \setminus \left(\partial PT^1P \cap \left(\bigcup_i \hat{\alpha}_i \right) \right),$$

by using the identity. Moreover, $D(P_{\tilde{\gamma}})$ is homeomorphic to

$$(\mathbb{S}^1 \times S^0) \setminus \bigcup_i D(\hat{\alpha}_i),$$

where S^0 is a surface of genus two (if $\sharp(\partial\Sigma \cap \partial P) = 0$), or a surface of type $(1, 2)$ (if $\sharp(\partial\Sigma \cap \partial P) = 2$) or a surface of type $(0, 4)$ (if $\sharp(\partial\Sigma \cap \partial P) = 1$), and $D(\hat{\alpha}_i)$ is an embedded closed curve on $\mathbb{S}^1 \times S^0$ obtained by gluing $\hat{\alpha}_i$ along the two points $\partial PT^1 P \cap \hat{\alpha}_i$ by the identity.

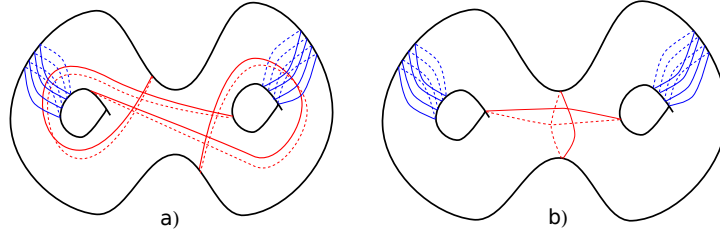


FIGURE 4.8: The projection of $D(P_{\gamma_{4,1}})$ over S^0 for Figure 4.6b where : a) is the right pair of pants and b) is the left pair of pants.

Let M be a connected, orientable 3-manifold with boundary and let $S(M; \mathbb{R})$ be the *singular chain complex* of M . More concretely, $S_k(M; \mathbb{R})$ is the set of formal linear combination of k -simplices, and we set as usual $S_k(M, \partial M; \mathbb{R}) = S_k(M; \mathbb{R})/S_k(\partial M; \mathbb{R})$. We denote by $\|c\|$ the l_1 -norm of the k -chain c . If α is a homology class in $H_k^{sing}(M, \partial M; \mathbb{R})$, the *Gromov norm* of α is defined as :

$$\|\alpha\| = \inf_{[c]=\alpha} \{\|c\| = \sum_{\sigma} |r_{\sigma}| \text{ such that } c = \sum_{\sigma} r_{\sigma} \sigma\}.$$

The *simplicial volume* of M is the Gromov norm of the fundamental class of $(M, \partial M)$ in $H_3^{sing}(M, \partial M; \mathbb{R})$ and is denoted by $\|M\|$.

The key ingredient to prove Theorem 4.5 is the following result due to Agol, Storm and Thurston ([4], Theorem 9.1):

Theorem (Agol-Storm-Thurston). *Let N be a compact manifold with interior a hyperbolic 3-manifold of finite volume. Let S be an embedded incompressible surface in N . Then*

$$\text{Vol}(N) \geq \frac{v_3}{2} \|D(N \setminus S)\|.$$

We now prove the lower bound for the volume of the canonical lift complement:

Proof of Theorem 4.5. Let $\{\eta_i\}_{i=1}^{3g-3}$ be the simple closed geodesics on the boundary of the pants decomposition Π . Consider the incompressible surface $S := \bigsqcup_{i=1}^{3g-3} (T_{\eta_i})_{\hat{\gamma}}$ in $M_{\hat{\gamma}}$ (Lemma 4.11). From ([4], Theorem 9.1) we deduce that:

$$\text{Vol}(M_{\hat{\gamma}}) \geq \frac{v_3}{2} \|D(M_{\hat{\gamma}} \setminus S)\| = \frac{v_3}{2} \sum_{i=1}^{-\chi(\Sigma)} \|D((P_i)_{\hat{\gamma}})\|.$$

For each pair of pants P we have:

$$v_3 \|D(P_{\hat{\gamma}})\| = v_3 \|D(P_{\hat{\gamma}})^{hyp}\| \geq \text{Vol}(D(P_{\hat{\gamma}})^{hyp}) \geq v_3 \# \{\text{cusps of } D(P_{\hat{\gamma}})^{hyp}\},$$

where $D(P_{\hat{\gamma}})^{hyp}$ is the atoroidal piece of $D(P_{\hat{\gamma}})$ (Remark 4.19), complement of the characteristic submanifold, with respect to its JSJ-decomposition. The first and third inequality come from [26] and [2] respectively.

In Lemma 4.16 we show that there is a injection between the homotopy classes of γ -arcs in P and the cusps of $D(P_{\hat{\gamma}})^{hyp}$, which completes the proof. $\square$

Since two isotopic $\hat{\gamma}$ -arcs in T^1P induce a homotopy between their projections in P , the number of homotopy classes of γ -arcs in P is less or equal than the number of isotopy classes of $\hat{\gamma}$ -arcs in T^1P . Therefore, it is enough to prove the following fact :

Lemma 4.16. *The number of isotopy classes of $\hat{\gamma}$ -arc in T^1P is less or equal than the number of cusps of $D(P_{\hat{\gamma}})^{hyp}$.*

Proof. Firstly we will define the following function:

$$\left\{ \begin{array}{c} \hat{\gamma}\text{-arcs in} \\ T^1P \end{array} \right\} \xrightarrow{\varphi} \left\{ \begin{array}{c} \text{cusps of} \\ D(P_{\hat{\gamma}})^{hyp} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \text{splitting tori of the} \\ \text{JSJ-decomposition of} \\ D(P_{\hat{\gamma}}) \end{array} \right\} \amalg \left\{ \begin{array}{c} \text{tori contained in} \\ \partial D(P_{\hat{\gamma}}) \cap D(P_{\hat{\gamma}})^{hyp} \end{array} \right\}.$$

If the boundary component on $D(P_{\hat{\gamma}})$ induced by the $\hat{\gamma}$ -arc in T^1P belongs to the characteristic submanifold of $D(P_{\hat{\gamma}})$, φ maps it to a splitting tori connecting the hyperbolic piece with the component of the characteristic submanifold where it is contained. Otherwise, φ sends it to the torus coming from its double.

If there are more isotopy classes of $\hat{\gamma}$ -arcs in T^1P than the number of cusps of $D(P_{\hat{\gamma}})^{hyp}$, then there are two torus, associated to non isotopic $\hat{\gamma}$ -arcs in T^1P , that belong to the same connected component of the characteristic submanifold. Meaning that, they are isotopic in the corresponding component and so in T^1P , but this contradicts the fact that they were not isotopic. $\square$

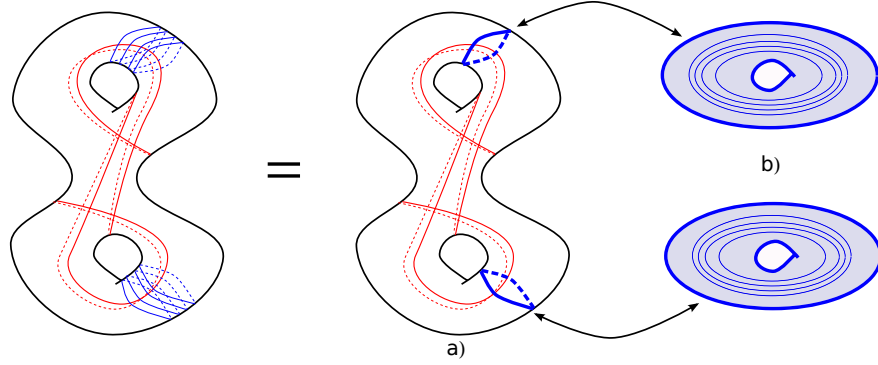


FIGURE 4.9: The JSJ-decomposition of $D(P_{\gamma_{4,1}})$ for Figure 4.8a where : a) is the projection of the hyperbolic piece over S^0 , and b) are the two Seifert components of the characteristic submanifold.

By Lemma 4.16 and proceeding as in Theorem 4.5, we give a lower bound for the simplicial volume of any continuous lift complement over a closed geodesic on a hyperbolic surface:

Corollary 4.17. *Given a pants decomposition $\Pi := \{P_i\}_{i=1}^{-\chi(\Sigma)}$ on a hyperbolic surface Σ and γ a closed geodesic, we have that for any continuous lift $\tilde{\gamma}$ we have ::*

$$\|M_{\tilde{\gamma}}\| \geq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{-\chi(\Sigma)} \#\{\text{isotopy classes of } \tilde{\gamma}\text{-arcs in } T^1 P_i\}. \quad \square$$

In the case of the canonical lift, we can prove a correspondance between the homotopy classes of γ -arcs in a pair of pants P and the isotopic classes of $\hat{\gamma}$ -arcs in $T^1 P$.

Remark 4.18. *If ω_1 and ω_2 are a pair of homotopic γ -arcs on P then their respective canonical lifts $\hat{\omega}_1$ and $\hat{\omega}_2$ are isotopic $\hat{\gamma}$ -arcs in $T^1 P$. Indeed, choose $\tilde{\omega}_1$ and $\tilde{\omega}_2$ be lifts on the universal cover starting in the same fundamental domain. Take an homotopy of geodesics that varies from $\tilde{\omega}_1$ to $\tilde{\omega}_2$ and project this homotopy to P . This will give us a homotopy h of geodesics arcs h_t that start in ω_1 and end in ω_2 . Notice that the image of the geodesic homotopy does not intersects other $\hat{\gamma}$ -arcs because of local unicity of the geodesics. Then we have that the geodesic homotopy induces an isotopy in $T^1 P$.*

In the following remark will be using a multicurve version of a result due to Kra ([30], Theorem 1) which is an analog result for the hyperbolicity and JSJ-decomposition of $M_{\tilde{\gamma}}$ for knots complements in $\mathbb{S}^1 \times S$, where S is a hyperbolic surface.

Remark 4.19. *Let be Ω the subset of γ -arcs on P having one arc for each homotopy class and in minimal position, then:*

1. *If the Ω -acr configuration on P is in the list of Remark 4.15, then $D(P_{\hat{\gamma}})$ does not have a hyperbolic piece (has zero simplicial volume). Because $D(P_{\hat{\Omega}})$ can be seen as a link complement on $\mathbb{S}^1 \times S^0$ (Definition 4.2) whose projection to the base surface S^0 is a union of disjoint simple curves (isotopic to simple closed geodesics).*
2. *If the Ω -acr configuration on P is not in the list of Remark 4.15, then there is at least one geometric intersection point. This means that $D(P_{\hat{\Omega}})$ can be seen as a link complement on $\mathbb{S}^1 \times S^0$ (Definition 4.2) whose projection to the base surface S^0 is a union closed curves transversally homotopic to a union closed geodesics, with at least one intersection point. By Corollary 4.10 we have that the JSJ-decomposition of $D(P_{\hat{\Omega}})$ has an atoroidal piece. Furthermore,*

$$D(P_{\hat{\gamma}})^{hyp} \cong D(P_{\hat{\Omega}})^{hyp}.$$

This result implies that there exist geodesics γ on Σ such that the $\text{Vol}(M_{\hat{\gamma}})$ can be as big as we want. Let us fix a pants decomposition on Σ , then for any $N \in \mathbb{N}$ there exist a closed geodesic with at least N homotopy classes of geodesic arcs in one pair of pants. This is constructed by taking N non homotopic geodesic arcs in a pair of pants and linking them to form a filling closed geodesic on Σ .

The lower bound of the volume of $M_{\hat{\gamma}}$ obtained in Theorem 4.5, does not have control on the length of the geodesic, even if each homotopy class of γ -arcs contributes to the length of γ . So a natural question is how big can the volume of $M_{\hat{\gamma}}$ be when the length of the filling close geodesic γ is bounded. In subsection 4.4.2 we try to understand this relation.

4.4.1 Coding filling geodesics on surfaces by splitting along a simple closed geodesic

This subsection gives a method for describing closed geodesics on hyperbolic surfaces that intersect a given simple closed geodesic. This will be useful for the results in the subsequents sections because it also allows us to identify the homotopy classes of geodesic arcs generated by splitting along the simple closed geodesic.

Let Σ be a hyperbolic surface and fix a simple closed geodesic β . By applying either HNN extensions or amalgamated products (see [54]), that is more

concretely van Kampen's Theorem, we can code closed geodesics on Σ as a product only involving certain sequences of elements. These elements come from the fundamental group of the connected components of the surface minus the simple closed geodesic β .

Let β be a separating (non-separating) simple closed geodesic on Σ . Denote by Σ^1 the union of β and one of the connected components of $\Sigma \setminus \beta$ and by Σ^2 the union of β with the other connected component (resp. let Σ^1 be the complement of $\mathcal{N}_\beta$ a maximal normal embedded neighborhood of β in Σ whose boundary is a closed geodesic). Choose a point $p \in \beta$ to be the base point of the fundamental group of Σ (resp. p in the self intersection of the closed geodesic which is the boundary of $\mathcal{N}_\beta$). As a consequence of van Kampen's Theorem, when β is separating, $\pi_1(\Sigma, p)$ is isomorphic to the free product of $\pi_1(\Sigma^1, p)$ with $\pi_1(\Sigma^2, p)$ amalgamated on the subgroup $\pi_1(\beta, p)$. If β is non-separating, $\pi_1(\Sigma, p)$ is isomorphic to the HNN extension of $\pi_1(\Sigma^1, p)$ relative to an isomorphism between two simple curves in the boundary of $\mathcal{N}_\beta$. Notice also that the simple closed geodesic τ inside $\mathcal{N}_\beta$ perpendicular to β , passing through p , represents the stable element, denoted by t .

Definition. Let β be a separating (non-separating) simple closed geodesic on Σ , and n be a positive integer. A finite sequence

$$(g_1, g_2, \dots, g_n) \quad (\text{resp. } (g_0, t^{\varepsilon_1}, g_1, t^{\varepsilon_2}, \dots, g_{n-1}, t^{\varepsilon_n}))$$

of elements of $\pi_1(\Sigma^1, p) *_{\beta} \pi_1(\Sigma^2, p)$ (resp. $\pi_1(\Sigma^1, p)^{*_{\beta}}$) is β -cyclically reduced if the following conditions holds:

1. each g_i is in one factor $\pi_1(\Sigma^1, p)$ or $\pi_1(\Sigma^2, p)$ (resp. $\varepsilon_i \in \{1, -1\}$ and $g_i \in \pi_1(\Sigma^1, p)$);
2. for each $i \in \{1, \dots, n-1\}$, g_i and g_{i+1} are not in the same factor, (resp. there is no consecutive subsequence of the form $(t^{\varepsilon}, g_i, t^{-\varepsilon})$ whose product is reducible);
3. if $n = 1$, then g_1 is not the identity (resp. for $n = 0$);
4. any cyclic permutation of the sequence satisfies (1)-(3).

The following statement allows, by fixing a minimal system of generators in $\pi_1(\Sigma^i, p)$, to associate to each oriented closed geodesic in Σ a cyclically reduced sequence. The interested reader can find this material in [18].

Theorem. 1. Let s be a conjugacy class of $\pi_1(\Sigma^1, p) *_{\beta} \pi_1(\Sigma^2, p)$ (resp. $\pi_1(\Sigma^1, p)^{*_{\beta}}$). Then there is a representative of s which can be written as a product:

$$g_1 g_2 \dots g_n \quad (\text{resp. } g_0 t^{\varepsilon_1} g_1 t^{\varepsilon_2} \dots g_{n-1} t^{\varepsilon_n}),$$

where $(g_1, g_2, \dots, g_n)$ (resp. $(g_0, t^{\varepsilon_1}, g_1, t^{\varepsilon_2}, \dots, g_{n-1}, t^{\varepsilon_n})$) is a β -cyclically reduced sequence.

2. If n is a positive integer and

$$(g_1, g_2, \dots, g_n) \text{ (resp. } (g_0, t^{\varepsilon_1}, g_1, t^{\varepsilon_2}, \dots, g_{n-1}, t^{\varepsilon_n}))$$

is β -cyclically reduced sequence then the product

$$g_1 g_2 \dots g_n \text{ (resp. } g_1 t^{\varepsilon_1} g_2 t^{\varepsilon_2} \dots g_n t^{\varepsilon_n})$$

is not the identity.

3. For any pair of β -cyclically reduced sequences representing the same conjugacy class in $\pi_1(\Sigma^1, p) *_{\beta} \pi_1(\Sigma^2, p)$ (resp. $\pi_1(\Sigma^1, p)^{*_{\beta}}$). The number of terms of the two sequences is the same.

Consider β any essential simple closed geodesic in $\Sigma_{1,1}$ and the HNN extension of $\pi_1(\Sigma_{1,1}, p)$ obtained by splitting $\Sigma_{1,1}$ along β :

$$\langle a, b, t \mid tat^{-1} = b \rangle,$$

where ab^{-1} represents the conjugacy class of a simple closed curve parallel to the boundary, t the stable element representing the class of τ and b representing the class of β .

Corollary 4.20. *Let γ be an oriented closed geodesic in $\Sigma_{1,1}$ intersecting β , with its β -cyclically reduced sequence of the form $(g_0, t, g_1, t, \dots, g_{n-1}, t)$ such that each g_i starts with $b^{\pm 1}$ and ends with $a^{\pm 1}$. Then the sequence of γ -arcs $(\gamma|_{I_1}, \gamma|_{I_2}, \dots, \gamma|_{I_n})$ that result from splitting γ along β satisfy the following properties:*

1. *the γ -arc $\gamma|_{I_i}$ is representative of (t, g_i, t) ;*
2. *the inclusion $\gamma|_{I_i} \subset \Sigma_{1,1} \setminus \beta$ holds;*
3. *if $\gamma|_{I_i}$ and $\gamma|_{I_j}$ are freely homotopic relative to β , then $g_i = g_j$.*

Proof. By Lemma 5.2 in [18] there exist sequence of curves $(\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1})$ such that the curve $\gamma_i \subset \Sigma^1$ is a representative of g_i .

Denote by $\bar{\gamma}$ the curve $\gamma_0 \tau \gamma_1 \tau \dots \gamma_{n-1} \tau$, which clearly is a representative of γ and consider the γ -arc $\gamma|_{I_i} \subset \Sigma_{1,1}$ which is homotopic relative to the boundary to the concatenation of arcs τ_0, γ_i and τ_1 , where τ_0 and τ_1 are the two τ -arcs from the intersection point of τ with β to p .

To prove 3) it is enough to show that there is an isomorphism between $\pi_1(\Sigma^1, p)$ and the group of free homotopy classes of arcs in $\Sigma_{1,1} \setminus \beta$ relative

to the boundary, which start in one component and end in the other. This isomorphism is given as follows, given α a loop based at p construct the arc $\tau_0 *_p \alpha *_p \tau_1$. The inverse of the isomorphism consist in collapsing the endpoints of a given arc to p along τ_0 and τ_1 . $\square$

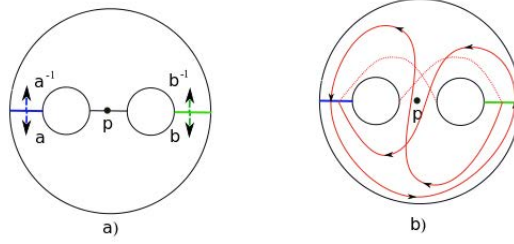


FIGURE 4.10: a) Orientation of the arcs transversal to the seam edges. b) Geodesic arc corresponding to the code $(t, bab^{-1}a^{-1}, t)$.

Remark 4.21. *The γ -arcs $\gamma|_{I_i}$ of Corollary 4.20 can be encoded by using two oriented seam geodesic arcs between β and the boundary of $\Sigma_{1,1}$. The coding comes from replacing each letter in g_i with an arc connecting one seam edge to another following the direction prescribed by g_i (see Figure 4.10).*

In the case when β is a separating simple closed geodesic on a hyperbolic surface Σ , by ([18], Lemma 3.2) we have the following result:

Corollary 4.22. *Let γ be an oriented closed geodesic in Σ intersecting the separating geodesic β . Consider its β -cyclically reduced sequence of the form $(g_1, g_2, \dots, g_n)$. Then the sequence of γ -arcs $(\gamma|_{I_1}, \gamma|_{I_2}, \dots, \gamma|_{I_n})$ that results from splitting γ along β satisfy that if we identify the endpoint of an arc $\gamma|_{I_i}$ along β , then the resulting loop is representative of the conjugacy class of g_i . $\square$*

The following result is a criterion to verify when the unique β -cyclically reduced sequence associated to γ in Corollary 4.20 is a filling geodesic.

Lemma 4.23. *Let γ be an oriented closed geodesic as in Corollary 4.20. If there exist a term g_i , in the β -cyclically reduced sequence of γ , with a sub word of the form $a^{\pm 1}b^{\pm 1}$ or $b^{\pm 1}a^{\pm 1}$. Then γ is filling.*

Proof. It is enough to show that there exist two simple loops formed by sub arcs α_1 and α_2 of γ such that $i(\alpha_1, \alpha_2) \neq 0$.

Since γ intersects β there exist $g_i \notin \langle a \rangle \cup \langle b \rangle$. Then γ is not a simple closed curve in $\Sigma_{1,1}$ and there is a simple loop formed by a sub arc α_1 of γ which is transversal to β ([18], Theorem 5.3).

By the Remark 4.21, the fact that there exist g_i with a sub word of the form $a^{\pm 1}b^{\pm 1}$ or $b^{\pm 1}a^{\pm 1}$ implies that there is a γ -arc $\gamma|_{I_i}$ corresponding to g_i (Corollary 4.20) that contains a sub arc α_2 which induces a loop homotopic to β . $\square$

A first application to the previous Lemma 4.23 and Theorem 4.5, is the following result.

Theorem 4.4. *For the modular surface Σ_{mod} , there exists a sequence $\{\gamma_k\}$ of filling closed geodesics on Σ_{mod} with $n_{\gamma_k} \nearrow \infty$ such that,*

$$\text{Vol}(M_{\hat{\gamma}_k}) \geq v_3 \frac{n_{\gamma_k}}{12},$$

where n_{γ_k} is half the period of the continued fraction expansion of γ_k and v_3 is the volume of a regular ideal tetrahedron.

Proof. Consider the family of closed geodesics $\{\gamma_k\}$ on the modular surface Σ_{mod} with the following coding

$$\omega(\gamma_k) := x^6 y x^{13} y x^{19} y x^{25} y \dots x^{6k+1} (x y^2 x^2 y).$$

Let us lift the family $\{\gamma_k\}$ to $\{\bar{\gamma}_k\}$ into the once-punctured modular torus cover, whose fundamental group is generated by $\{t := yx, a := y^{-1}x^{-1}\}$ and has the following presentation $\langle a, b, t \mid tat^{-1} = b \rangle$. Notice that if we split the once-punctured modular torus along the simple closed geodesic associated to a , then we rewrite the coding of the geodesics $\{\gamma_k\}$, and obtain the a -cyclic reduced words:

$$\omega_{1,1}(\bar{\gamma}_k) := ab^{-1}t(ab^{-1})^2t(ab^{-1})^3t\dots t(ab^{-1})^k a^{-1}b^{-1}t,$$

whose a -cyclic reduced word in the form of Corollary 4.20 is:

$$tb^{-1}(ab^{-1})atb^{-1}(ab^{-1})^2at\dots tb^{-1}(ab^{-1})^{k-1}a^{-1}t.$$

The closed geodesics $\bar{\gamma}_k$ are filling by Lemma 4.23 and by Corollary 4.20, the number of homotopy classes after splitting by the simple closed geodesic associated to a is $k+1$. So we have a lower bound of the volume of the canonical lift complement of $\hat{\gamma}_k$ given by $v_3 \frac{k+1}{12}$. $\square$

Remark. For the filling closed geodesics $\{\gamma_k\}$ on Corollary 4.4 we can also rewrite the combinatorial upper bound found by Bergeron, Pinsky and Silberman ([8], Theorem 3.5) for the volume of the canonical lift complement of $\hat{\gamma}_k$ in terms of n_{γ_k} , as

$$C n_{\gamma_k} \ln(n_{\gamma_k}),$$

where $n_{\gamma_k} = k + 1$ and C a positive constant that depends on Σ_{mod} .

4.4.2 Lower bound of the volume of $M_{\hat{\gamma}}$ in terms of the length of γ

Given P a pair of pants in a pants decomposition of a hyperbolic surface, we construct all possible non homotopic geodesic arcs on P whose length is bounded by some constant and then induce a filling geodesic which contains all this arcs. In this case, we have rewritten the lower bound for the volume of the canonical lift complement given by Theorem 4.5 in terms of the length of the geodesic.

Theorem 4.24. *Given a hyperbolic metric X on the surface $\Sigma_{1,1}$, there is a sequence $\{\gamma_n\}$ of filling closed geodesics on Σ with $\ell_X(\gamma_n) \nearrow \infty$ such that,*

$$\text{Vol}(M_{\hat{\gamma}_n}) \geq k_X \frac{\ell_X(\gamma_n)}{\ln(\ell_X(\gamma_n))},$$

where k_X depends on the hyperbolic metric X .

Proof. For the sake of concreteness, we will start proving the result for a particular hyperbolic metric on $\Sigma_{1,1}$. Fix the following representation $\rho: \pi_1(\Sigma_{1,1}) := \langle a, t \rangle \rightarrow \text{PSL}_2(\mathbb{C})$ such that

$$\rho(a) = A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 + \sqrt{2} \\ -1 + \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \rho(t) = T = \begin{pmatrix} -1 + \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 + \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Consider the splitting of $\Sigma_{1,1}$ along a simple close geodesic associated to A , then we have the HNN extension of $\pi_1(\Sigma_{1,1}, p) = \langle a, b, t \mid tat^{-1} = b \rangle$, with:

$$\rho(b) = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 + \sqrt{2} \\ 1 + \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Notice that ab^{-1} is freely homotopic to a simple loop that is retractable to the boundary of $\Sigma_{1,1}$.

For each $n \in \mathbb{N}$ we define the following A -cyclically reduced sequence :

$$(g_1, t, g_2, t, \dots, t, g_{12 \cdot (3^n - 1)}, t) \quad \text{where } g_i \in \langle a, b \rangle.$$

Moreover $\{g_i\}_{i=1}^{12 \cdot (3^n - 1)}$ is the set of different reduced words in $\langle a, b \rangle$ starting with b or b^{-1} , and ending with a or a^{-1} , which have word length at most n and at least 4.

By Corollary 4.20, the number of homotopy classes of arcs in each n^{th} -sequence is equal to $\#\{g_i\}_{i=1}^{12 \cdot (3^n - 1)} = 12 \cdot (3^n - 1)$. Let γ_n be the unique geodesic associated to the product of the n^{th} -sequence. Each one of the geodesics γ_n belongs to different mapping class group orbits, because in this case the self-intersection number of γ_n is bounded from below by the number of terms of the sequence, which grows exponentially. Therefore, by Lemma 4.23, $\{\gamma_n\}$ is a sequence of filling closed geodesics on $\Sigma_{1,1}$ with $\ell_{X_0}(\gamma_n) \nearrow \infty$.

By Theorem 4.5, we have that:

$$v_3 \cdot 6 \cdot (3^n - 1) = \frac{v_3}{2} \#\{\text{homotopy classes of } \gamma_n\text{-arcs}\} \leq \text{Vol}(M_{\hat{\gamma}_n}). \quad (4.4.1)$$

The last part of the proof consist in rewriting the combinatorial lower bound in terms of the length of γ_n . To do so, for each γ_n , let L_n be such that:

$$n = \frac{\ln(\ln(3)L_n) - \ln(\ln(\ln(3)L_n)) - \ln(3)}{\ln(3)}.$$

Using the trace of the matrices we can calculate the length of the geodesics associated to ab and t . In this way we give the following upper bound of the length of γ_n by using the word length with respect the generating set $\{a, b, t\}$:

$$\ell_{X_0}(\gamma_n) \leq 1.15 \cdot |g_1 t g_2 t \dots t g_{12 \cdot (3^n - 1)} t| \leq 1.15 \cdot 12 \cdot 3^n (n + 3) \leq 14 \cdot L_n.$$

Then,

$$6 \cdot (3^n - 1) \geq \frac{\ln(3)L_n}{\ln(\ln(3)L_n)}.$$

Finally, by inequality (4.4.1) we have that :

$$v_3 \frac{\ell_{X_0}(\gamma_n)}{\ln(\ell_{X_0}(\gamma_n))} \leq \text{Vol}(M_{\hat{\gamma}_n}).$$

The proof of this result for any hyperbolic metric, follows from the fact that any pair of hyperbolic metrics on a hyperbolic surface are bi-Lipschitz ([8], Lemma 4.1). $\square$

To generalize Theorem 4.24 to any hyperbolic surface Σ , consider the following method for extending a given closed geodesic that fills a subsurface of Σ

to a filling closed geodesic on Σ . Let β be a separating oriented simple closed geodesic on Σ and denote $\Sigma \setminus \beta$ by $\Sigma^1 \amalg \Sigma^2$.

Given two closed geodesics α_1 and α_2 on Σ^1 and Σ^2 respectively, choose a minimal length common perpendicular segment η between α_1 and α_2 , with extremal points p_1 and p_2 . Let $\alpha_1 \bar{\star} \alpha_2$ be the closed geodesic in the homotopy class of the piecewise closed geodesic $\bar{\alpha}_{1,2}$ that travels from p_1 along α_1 on the direction given by β , then follows η , continues from p_2 along α_2 on the same direction given by β and finishes by η^{-1} .

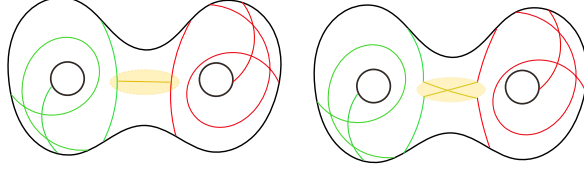


FIGURE 4.11: From $\bar{\alpha}_{1,2}$ to $\alpha_1 \bar{\star} \alpha_2$.

As $\bar{\alpha}_{1,2}$ is not self-transverse, we will slightly modify it to obtain one that does.

Take a δ neighborhood of η such that it does not contain self-intersection of α_1 and α_2 . Erase the segment of $\bar{\alpha}_{1,2}$ that is contained the δ neighborhood of the η geodesic segment, and link the consecutive extremal points in the same δ neighborhood by a pair of intersecting minimal length geodesic segments linking the remaining segments of $\bar{\alpha}_{1,2}$. This piecewise geodesic, denoted by $\alpha_1 \bar{\star} \alpha_2$, has not self-tangency points.

Claim 4.25. $\alpha_1 \bar{\star} \alpha_2$ has minimal self-intersection.

Proof. By Theorem 4.7, we just need to show that $\alpha_1 \bar{\star} \alpha_2$ has no singular 1-gons nor 2-gons. Indeed, take the lifts of $\alpha_1 \bar{\star} \alpha_2$ in the universal cover of Σ , which are piecewise geodesic lines. It is enough to show that every pair of them intersects at most once. Certainly, if there were two consecutive intersections they cannot happen in segments of the same geodesic segment, so in-between there must be at least one gluing point of two distinct geodesic segments. Moreover, from the fact that the angle on the gluing points is obtuse, there must be at least two gluing points in each 2-gon side. If that is the case, we would have geodesic side hexagons whose sum of interior angles is bigger or equal to 4π , which is a contradiction in the hyperbolic plane. $\square$

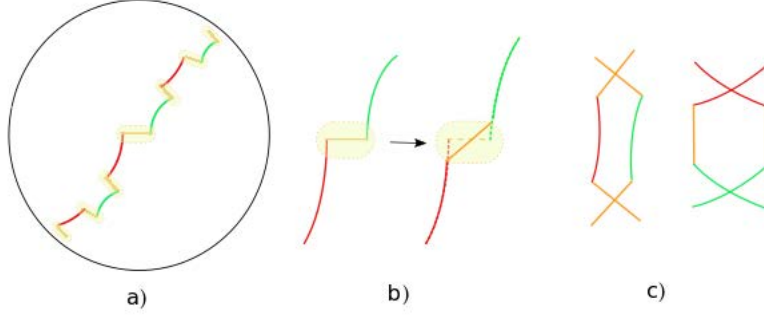


FIGURE 4.12: a) A lift of $\bar{\alpha}_{1,2}$ in $\mathbb{H}^2$. b) The modification from $\widetilde{\bar{\alpha}_{1,2}}$ to $\widetilde{\alpha_1 \bar{\star} \alpha_2}$ by erasing the segments $\tilde{\eta}$ and re-gluing. c) Possible bigons given by the intersection of two lifts of $\alpha_1 \bar{\star} \alpha_2$.

By rounding the four corners of $\alpha_1 \bar{\star} \alpha_2$, we get a self-transverse closed curve homotopically transversal to $\alpha_1 \star \alpha_2$, in particular this means that $M_{\widetilde{\alpha_1 \bar{\star} \alpha_2}} \cong M_{\widetilde{\alpha_1 \star \alpha_2}}$.

Claim 4.26. *If each α_i is a filling closed geodesic on each Σ^i , then $\alpha_1 \star \alpha_2$ is a filling closed geodesic on Σ .*

Proof. Notice that $\Sigma \setminus (\alpha_1 \cup \alpha_2)$ differs from $\Sigma \setminus (\alpha_1 \bar{\star} \alpha_2)$ only in the regions whose sides contain p_1 and p_2 . And $\alpha_1 \bar{\star} \alpha_2$ splits the ring around β in the original partition and deforms the other two adjacent regions, preserving their homeomorphism type. Moreover, as the property of being filling is preserved by transversal homotopy (Corollary 4.8), then $\alpha_1 \star \alpha_2$ is also filling. $\square$

Theorem 4.3. *Given a hyperbolic metric X on a surface Σ , there exist a sequence $\{\gamma_n\}$ of filling closed geodesics on Σ with $\ell_X(\gamma_n) \nearrow \infty$ such that,*

$$\text{Vol}(M_{\hat{\gamma}_n}) \geq c_X \frac{\ell_X(\gamma_n)}{\ln(\ell_X(\gamma_n))},$$

where c_X depends on the hyperbolic metric X .

Proof. If the surface Σ contains a once-punctured torus, choose a separating closed geodesic β such that $\Sigma \setminus \beta := \Sigma^1 \amalg \Sigma^2$, where Σ^1 is homeomorphic to $\Sigma_{1,1}$. Choose a pair of simple closed geodesics α and τ on Σ^1 such that $i(\alpha, \tau) = 1$. Consider the closed geodesics α_n on Σ^1 homotopic to the closed curves defined in Theorem 4.24. Extend $\{\alpha, \beta\}$ to a pants decomposition Π on

Σ . And fix η_0 a filling closed geodesic on Σ^2 . Then we construct γ_n the filling closed geodesics (Claim 4.26) associated to:

$$\alpha_n \star \eta_0.$$

By Theorem 4.5 we have that:

$$v_3 \cdot 6 \cdot (3^n - 1) = \frac{v_3}{2} \sum_{i=1}^{-\chi(\Sigma)} \#\{\text{homotopy classes of } \gamma\text{-arcs in } P_i\} \leq \text{Vol}(M_{\hat{\gamma}_n}). \quad (4.4.2)$$

The last part of the proof consist in rewriting the combinatorial lower bound in terms of the length of γ_n . By using the word length with respect the generating set $\{\alpha, \tau\}$ we can find constants c_X and ε_X that only depends on the metric such that:

$$c_X \frac{\ell_X(\gamma_n)}{\ln(\ell_X(\gamma_n))} \leq k_X \frac{\ell_X(\gamma_n) - \varepsilon_X}{\ln(\ell_X(\gamma_n))} \leq k_X \frac{\ell_X(\alpha_n)}{\ln(\ell_X(\alpha_n))} \leq v_3 \cdot 6 \cdot (3^n - 1).$$

Finally, by the inequality (4.4.2) we have that:

$$c_X \frac{\ell_X(\gamma_n)}{\ln(\ell_X(\gamma_n))} \leq \text{Vol}(M_{\hat{\gamma}_n}).$$

In the case where Σ is a n -punctured sphere, we consider $\pi : \Sigma' \rightarrow \Sigma$ a finite cover where Σ' contains a once-punctured torus, and the induced covering $\hat{\pi}$ from $PT^1\Sigma'$ to $PT^1\Sigma$. Consider the previous geodesics $\{\gamma_n\}$ on Σ' and $\{\pi(\gamma_n)\}$ in Σ . Then the volume of the complement of $\widehat{\pi(\gamma_n)}$ on $PT^1\Sigma$ is a constant (given by the degree of the covering) times the volume of the complement of the canonical lifts of all the translates of γ_n under the group of deck transformations on $PT^1\Sigma'$, which is grater than the volume corresponding to the complement of $\hat{\gamma}_n$ on $PT^1\Sigma'$. So the filling closed geodesics $\{\pi(\gamma_n)\}$ in Σ is the sequence wanted. $\square$

4.5 Further comments

As noticed by Foulon and Hasselblatt in ([24], Theorem 1.12) any continuous lift complement of a filling closed geodesic γ is a hyperbolic 3-manifold of finite volume. This volume is bounded from below by the isotopy classes of $\tilde{\gamma}$ -arcs in the unit tangent bundle over a given pants decomposition of the surface (Corollary 4.17). This gives rise to new questions, for example, how

the volume complement varies from the canonical lift to other lifts in $PT^1\Sigma$ over the same closed geodesic.

We start by showing that given a hyperbolic metric on a hyperbolic surface we can construct a sequence of closed geodesics and their respective non-canonical lifts, whose volume complement has a lower bound which is linear in the length of the geodesic.

Proposition 4.27. *For any hyperbolic metric X on Σ , there exist a sequence of $\{\gamma_n\}$ filling closed geodesics and respective lifts $\{\tilde{\gamma}_n\}$ in $PT^1\Sigma$ with $\ell_X(\gamma_n) \nearrow \infty$, such that,*

$$k_X \ell_X(\gamma_n) \leq \text{Vol}(M_{\tilde{\gamma}_n}),$$

where k_X is a positive constant that depends on the metric X . Moreover, there exists a constant $V_0 > 0$ such that for the canonical lift $\text{Vol}(M_{\tilde{\gamma}_n}) < V_0$ for every $n \in \mathbb{N}$.

By using techniques found in [17], this result could maybe be improved by constructing a sequence of non-canonical lifts, whose volume complement has a lower bound which is quadratic in the length of the geodesic. Motivated by this, we conjecture that the volume of the canonical lift complement minimizes the volume of the complement over all the possible lifts of a fixed filling closed geodesic on the surface.

Conjecture 4.3. *Given γ a filling closed geodesic on a hyperbolic surface, then*

$$\text{Vol}(M_{\tilde{\gamma}}) = \min_{\tilde{\gamma} \rightarrow \gamma} \{\text{Vol}(M_{\tilde{\gamma}})\}.$$

Proof of Proposition 4.27. We will start proving the statement for the case $\Sigma = \Sigma_{1,2}$. We start by splitting $\Sigma_{1,2}$ along a simple closed separating geodesic into pieces homeomorphic to $\Sigma_{1,1}$ and $\Sigma_{0,3}$. Choose a base point p and we write $\pi_1(\Sigma_{1,2}, p)$ as the amalgamated product along the previous separating simple geodesic, then $\pi_1(\Sigma_{1,1}, p) *_{\mathbb{Z}} \pi_1(\Sigma_{0,3}, p) = \langle a_1, t_1 \rangle *_{\mathbb{Z}} \langle a_2, b_2 \rangle$.

The first step consists on constructing the family of closed filling geodesics. For each $n \in \mathbb{N}$ we define the following cyclically reduced sequence:

$$(t_1^n a_1 t_1 a_1 t_1^{-1}, b_2, a_1, b_2, \dots, a_1, b_2) \text{ which has length } 2\lceil \ln(n) \rceil,$$

let γ_n be the unique geodesic associated to the product of this sequence.

By Corollary 4.22, consider the sequence of subintervals I_t , $\{I_{a_i}\}_{i=1}^{\lceil \ln(n) \rceil - 1}$ and $\{I_{b_i}\}_{i=1}^{\lceil \ln(n) \rceil}$ of $[0, \ell_X(\gamma_n)]$, such that $\gamma_n|_{I_t}$, $\gamma_n|_{I_{a_i}}$ and $\gamma_n|_{I_{b_i}}$ are respectively homotopic to $t_1^n a_1 t_1 a_1 t_1^{-1}$, a_1 and b_2 relative to the boundary in $\Sigma_{1,1}$. Since the

closed geodesics associated to a_1 and t_1 intersect each other, this implies that each $\gamma_n|_{I_{a_i}}$ intersects $\gamma_n|_{I_t}$ $n \pm 1$ times. Notice that γ_n is filling because by Lemma 4.23 $\gamma_n|_{I_t}$ is filling in $\Sigma_{1,1}$ and the piece corresponding to $\Sigma_{0,3}$ is split by $\gamma_n|_{I_{b_i}}$. We now construct the non-canonical lifts $\tilde{\gamma}_n$ by modifying the canonical lift $\hat{\gamma}_n$ in the pre-image of $\gamma_n|_{I_t}$ under the map $PT^1\Sigma \rightarrow \Sigma$.

We start by splitting the sub arc $\gamma_n|_{I_t}$ by the closed simple geodesic associated to a_1 in $\{\gamma_n|_{I_{t_j}}\}_{j=0}^n$ sub arcs. As there is an injection between the number of sub arcs $\{\gamma_n|_{I_{t_j}}\}_{j=0}^n$ and the set $\{0, 1\}^{[\ln(n)]}$, then to each sub arc we can associate a unique sequence.

Let us take the pre-image of $\gamma_n|_{I_{t_j}}$ in $PT^1\Sigma_{1,2}$ under the projection map $PT^1\Sigma \rightarrow \Sigma$. This is an annulus that contains $\hat{\gamma}_n|_{I_{t_j}}$ and $[\ln(n)]$ punctures corresponding to the intersection of $\gamma_n|_{I_{a_i}}$ with $\gamma_n|_{I_{t_j}}$. If the sequence associated to $\gamma_n|_{I_{t_j}}$ has 0 in the k -coordinate we do not modify the lift $\hat{\gamma}_n|_{I_{t_j}}$ in the fiber corresponding to the intersection with the $\gamma_n|_{I_{a_k}}$. If it has 1 in the k -coordinate then we modify $\hat{\gamma}_n|_{I_{t_j}}$ in such way that the new lift $\tilde{\gamma}_n|_{I_{t_j}}$ goes around the puncture generated by $\hat{\gamma}_n|_{I_{a_k}}$.

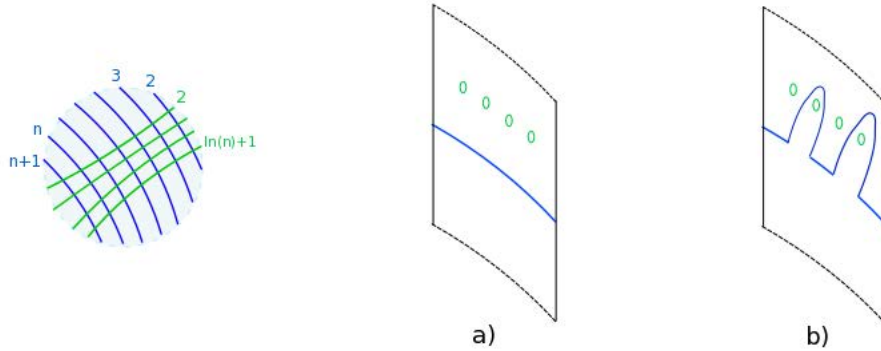


FIGURE 4.13: a) The lift $\hat{\gamma}_n|_{I_{t_j}}$, in the pre-image of $\gamma_n|_{I_{t_j}}$, and the $\gamma_n|_{I_{a_i}}$'s punctures. b) The new lift $\tilde{\gamma}_n|_{I_{t_j}}$, in the pre-image of $\gamma_n|_{I_{t_j}}$, associated to the sequence $(0, 1, 0, 1)$.

Claim 4.28. *Any pair of distinct sub arcs $\tilde{\gamma}_n|_{I_{t_j}}$ and $\tilde{\gamma}_n|_{I_{t_i}}$ are not ambient isotopic in*

$$(X, \partial X) := (T^1P \setminus \{\hat{\gamma}_n|_{I_{a_k}}\}_{k=1}^{[\ln(n)]-1}, \partial(T^1P \setminus \{\hat{\gamma}_n|_{I_{a_k}}\}_{k=1}^{[\ln(n)]-1})),$$

where P is the pair of pants after splitting the piece $\Sigma_{1,1}$ by the simple closed geodesic associated to a_1 .

Proof. Take $\gamma_n|_{I_{t_i}}$ and $\gamma_n|_{I_{t_j}}$ with $i \neq j$, and their respective sequence in $\{0, 1\}^{\lfloor \ln(n) \rfloor}$, then there exists a first coordinate k where the two sequence do not coincide. Consider an embedded surface S_k in $T^1P \setminus \{\hat{\gamma}_n|_{I_{a_k}}\}_{k=1}^{\lfloor \ln(n) \rfloor}$ bounding the arcs $\hat{\gamma}_n|_{I_{a_k}}$ and $\hat{\gamma}_n|_{I_{a_{k+1}}}$.

By the cup product in $H^*(X; \mathbb{Z})$ and Lefschetz duality we have the following paring :

$$H_2(X, \partial X; \mathbb{Z}) \times H_1(X, \partial X; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$$

such that $\langle [S_k], [\tilde{\gamma}_n|_{I_{t_j}}] \rangle \neq \langle [S_k], [\tilde{\gamma}_n|_{I_{t_i}}] \rangle$.

Then $[\tilde{\gamma}_n|_{I_{t_i}}] \neq [\tilde{\gamma}_n|_{I_{t_j}}]$, meaning that $\tilde{\gamma}_n|_{I_{t_i}}$ is not ambient isotopic to $\tilde{\gamma}_n|_{I_{t_j}}$ in $(X, \partial X)$. $\square$

The previous fact implies that the isotopy classes of $\hat{\gamma}$ -arcs in T^1P corresponding to $\{\tilde{\gamma}_n|_{I_{t_j}}\}_{j=1}^n$ are different. So by Corollary 4.17, we conclude that:

$$\frac{v_3}{2}n < \text{Vol}(M_{\tilde{\gamma}_n}).$$

Moreover, by Theorem 4.1, if we take the canonical lifts of the sequence $\{\gamma_n\}$, then there exists a constant $V_0 > 0$ such that $\text{Vol}(M_{\hat{\gamma}_n}) < V_0$ for every $n \in \mathbb{N}$.

To finish the case $\Sigma = \Sigma_{1,2}$, it is enough to estimate the length of γ_n by comparing it to its word length,

$$\ell_X(\gamma_n) \leq (4 + n + 2 \ln(n))\ell_{max} \leq 5n\ell_{max},$$

where ℓ_{max} is the maximal length of three simple closed curves representing a_1, t_1 and b_2 with the same base point.

We have proved the Proposition 4.27 for the case $\Sigma = \Sigma_{1,2}$. Suppose now that Σ contains a subsurface of topological type as $\Sigma_{1,2}$. Proceeding as in Theorem 4.3 we get the wanted sequence of filling closed geodesics on Σ , and their respective canonical lifts are constructed in the same way as in the previous case. Furthermore, if Σ does not contain a subsurface of topological type as $\Sigma_{1,2}$, we consider $\pi : \Sigma' \rightarrow \Sigma$ a finite cover where Σ' contains a subsurface $\Sigma_{1,2}$, and the induced covering $\hat{\pi}$ from $PT^1\Sigma'$ to $PT^1\Sigma$. Consider the previous geodesics $\{\gamma_n\}$ on Σ' and $\{\pi(\gamma_n)\}$ in Σ . Then the volume of the complement of $\hat{\pi}(\tilde{\gamma}_n)$ on $PT^1\Sigma$ is a constant (given by the degree of the covering) times the volume of the complement of the non-canonical lifts of all the translates of γ_n under the group of deck transformations on $PT^1\Sigma'$, which is grater than the volume corresponding to the complement of $\tilde{\gamma}_n$ on $PT^1\Sigma'$. So the filling closed geodesics $\{\pi(\gamma_n)\}$ in Σ and non-canonical lifts $\hat{\pi}(\tilde{\gamma}_n)$ on $PT^1\Sigma$ are the sequences wanted. $\square$

One of the question that arises from the fact that the topology of $M_{\tilde{\gamma}}$ does not depend on the metric given on Σ is to find a metric for each element in the sequence $\{\gamma_n\}$ of Proposition 4.27 (see also Theorem 4.3) which minimizes its length ([37], Lemma 3.1). This implies that the volume lower bounds (Corollary 4.17) in terms of the length with respect this particular metric will be larger. For example, in the following result, we choose for each γ_n on Proposition 4.27 a different hyperbolic metric on $\Sigma_{1,2}$ which can be interpreted as an approximation of the minimal metric associated to each γ_n , and rewrite the lower bound in terms of this new metrics.

Proposition 4.29. *There exist X_n hyperbolic metrics on $\Sigma_{1,2}$ corresponding to the closed geodesics γ_n of Proposition 4.27 with $\ell_{X_n}(\gamma_n) \nearrow \infty$, such that:*

$$\frac{v_3}{2\sqrt{2}} e^{\frac{\sqrt{\ell_{X_n}(\gamma_n)}}{2}} \leq \text{Vol}(M_{\tilde{\gamma}_n}),$$

where v_3 is the volume of a regular ideal tetrahedron and $\tilde{\gamma}_n$ are the sequence of lifts in Proposition 4.27.

Proof. For each $n \in \mathbb{N}$ we construct a hyperbolic metric X_n on $\Sigma_{1,2}$ by using the pants decomposition Π of Proposition 4.27. Let us fix the length of the boundary components of the pair of pants corresponding to the piece $\Sigma_{1,1}$ by $4\ln(\sqrt{2}n)$, this implies that the length of the seam arcs joining the boundary components is approximately $\frac{1}{n}$. Also fix the length of the boundary components of $\Sigma_{1,2}$ by a constant.

The conclusion follows from the following inequality, which results from the upper estimation of the geodesic length with respect the hexagonal decomposition induced by Π and the seam edges:

$$\ell_{X_n}(\gamma_n) \leq 4\ln(\sqrt{2}n)^2.$$

□

Bibliographie

- [1] C. Adams, *Thrice-punctured spheres in hyperbolic 3-manifolds*, Trans. Am. Math. Soc. 287 (1985) 645-656.
- [2] C. Adams, *Volumes of N -Cusped Hyperbolic 3-Manifolds*, J. London Math. Soc. (2) 38 (1988), no. 3, 555-565.
- [3] C. Adams, *Triple crossing number of knots and links*, J. Knot Theory Ramifications 22 (2013), no. 2, 1350006.
- [4] I. Agol, P. Storm et W. Thurston, *Lower bounds on volumes of hyperbolic Haken 3-manifolds*. J. Amer. Math. Soc. 20 (2007) No.4, 1053-1077.
- [5] M. Baker et A. Reid, *Arithmetic knots in closed 3-manifolds*, in Proceedings of Knots 2000, J. Knot Theory and its Ramifications 11, p. 903-920 (2002).
- [6] R. Benedetti et C. Petronio, *Lectures on Hyperbolic Geometry*, Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- [7] G. Besson, G. Courtois et S. Gallot, *A simple proof of the rigidity and minimal entropy theorems.*, Geom. Funct. Anal. 5 (1995), no. 5.
- [8] M. Bergeron, T. Pinsky et L. Silberman, *An Upper Bound for the Volumes of Complements of Periodic Geodesics*, International Mathematics Research Notices, Vol. 2017, No. 00, pp. 1-23.
- [9] J. Birman et R. Williams, *Knotted periodic orbits in dynamical systems -II : Knot holders for fibered knots*, Cont. Math 20, 1-60 (1983).
- [10] J. Birman et I. Kofman, *A new twist on Lorenz links*, J. Topol. 2 (2009) no. 2, p. 227-248.
- [11] F. Bonahon, *Geometric structures on 3-manifolds*, Handbook of geometric topology, North-Holland, Amsterdam, 2002, pp. 93-164.
- [12] R. Bott et L. W. Tu, *Differential forms in algebraic topology*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 82, Springer, Berlin, 1982.
- [13] A. Brandts, T. Pinsky et L. Silberman, *Volumes of hyperbolic three-manifolds associated to modular links*, arXiv :1705.04760v2.

- [14] M. Bucher, M. Burger, R. Frigerio, A. Iozzi, C. Pagliantini, M.B. Pozzetti, *Isometric embeddings in bounded cohomology*, Journal of Topology and Analysis 6 (01), 1-25.
- [15] H. Cao et X. Zhu. *A complete proof of the Poincaré and geometrization conjectures-applications of the Hamilton-Perelman theory of Ricci flow*, Asian Journal of Mathematics, 10(2) :165-492, 2006.
- [16] A. Champanerkar, I. Kofman, et J. Purcell, *Geometrically and diagrammatically maximal knots*, arXiv :1411.7915 [math.GT], v3 (2015).
- [17] A. Champanerkar, I. Kofman et J. Purcell. *Volume bounds for weaving knots* Algebraic and Geometric Topology, Vol. 16 (2016), No. 6, 3301-3323.
- [18] M. Chas, *Minimal intersection of curves on surfaces*, Geom. Dedicata 144 (2010) 25-60 MR.
- [19] M. Chas et S. P. Lalley. *Self-intersections in combinatorial topology : statistical structure*. Inventiones Mathematicae 188, no. 2 (2011) : 429-63.
- [20] F. Dal'bo *Geodesic and horocyclic trajectories*. Springer Urtext (2011), EDP Science-CNRS
- [21] P. Dehornoy *Les noeuds de Lorenz*, L'Enseignement Mathématique (2) 57 (2011), 211-280.
- [22] W. Duke. *Hyperbolic distribution problems and half-integral weight Mass forms*. Invent. Math., 92(1) :73-90, 1988.
- [23] B. Farb et D. Margalit, *A primer on mapping class groups*, volume 49 of Princeton Mathematical Series. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2012.
- [24] P. Foulon et B. Hasselblatt, *Contact Anosov flows on hyperbolic 3-manifolds*, Geom. Topol. 17 (2013) 1225-1252.
- [25] E. Ghys, *Knots and dynamics*, International Congress of Mathematicians. Vol. I, Eur. Math. Soc., Zürich, 2007, pp. 247-277. MR 2334193 (2008k :37001)
- [26] M. Gromov, *Volume and bounded cohomology*. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 56 (1982), 5-99. Zbl 0516.53046 MR 0686042
- [27] J. Hass et P. Scott. *Intersections of curves on surfaces*. Israel J. Math., 51(1-2) :90-120, 1985.
- [28] J. Hass et P. Scott. *Shortening curves on surfaces*. Topology , 33(1) :2543, 1994.

- [29] J. Hempel, *3-Manifolds*, Ann. of Math. Studies, No. 86. Princeton University Press, Princeton, N. J. (1976).
- [30] K. Ichihara et K. Motegi, *Sectional knots in Seifert fibered 3-manifolds*. Hyperbolic spaces and discrete groups, II (Japanese) (Kyoto, 2001). Srikaiseikikenkyusho Kkyroku No. 1270 (2002), 101-111. 57M25
- [31] K. Ichihara et K. Motegi, *Stably filling curves on a surface*, Kobe J. Math. 19 (2002), no. 1-2, 61-66.
- [32] W. H. Jaco and P. B. Shalen, *A new decomposition theorem for irreducible sufficiently-large 3-manifolds*, Algebraic and geometric topology, 1978, 71-84.
- [33] W. H. Jaco et P. B. Shalen, *Seifert fibered spaces in 3-manifolds*, vol. 21, Memoirs of the American Mathematical Society, no. 220, AMS Chelsea Publishing, 1979.
- [34] W. Jaco, *Lectures on three-manifold topology*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, vol. 43, 1980.
- [35] J. Jankins, W. D. Neumann, *Lectures on Seifert manifolds*, Brandeis University, 1983.
- [36] K. Johannson, *Homotopy equivalences of 3-manifolds with boundaries*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 761, Springer, Berlin, 1979.
- [37] S. Kerckhoff, *The Nielsen realization problem*, Ann. of Math. (2) 117 (1983).
- [38] H. Kneser. *Geschlossene Flächen in dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten*. Jber. Deutsch. Math.-Verein., 38 :248-260, 1929.
- [39] M. Lackenby, *The volume of hyperbolic alternating link complements*. With an appendix by I. Agol and D. Thurston, Proc. London Math. Soc. (3) 88 (2004) 204-224.
- [40] S.P. Lalley, *Statistical regularities of self-intersection counts for geodesics on negatively curved surfaces*. Duke Mathematical Journal 163, no. 6 (2014) : 1191-261.
- [41] B. Martelli, *An introduction to geometric topology*, arxiv : math/1610.02592, 2016.
- [42] J. Milnor. *A unique decomposition theorem for 3-manifolds*. Amer. J. Math. 84 :1-7, 1962.
- [43] J. M. Montesinos, *Classical tessellations and three-manifolds*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 1987.

- [44] G. D. Mostow. *Quasi-conformal mappings in n -space and the rigidity of hyperbolic space forms*. Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math., (34) , 1968.
- [45] W. D. Neumann et A. Reid, *Arithmetic of hyperbolic manifolds*. In TOPOLOGY '90, Proceedings of the Research Semester in Low Dimensional Topology at Ohio State University. De Gruyter Verlag (1992), 273-310.
- [46] W. D. Neumann et G. A. Swarup. *Canonical decompositions of 3-manifolds*. Geom. Topol.1 :21-40, 1997.
- [47] J. Osoinach, *Manifolds obtained by surgery on an infinite number of knots in S^3* , Topology 45, no. 4 (2006) : 725-33.
- [48] J. P. Otal, *Thurston's hyperbolization of Haken manifolds*, In Surveys in differential geometry, Vol. III (Cambridge, MA, 1996), pages 77-194. Int. Press, Boston, MA, 1998.
- [49] G. Prasad, *Strong rigidity of Q -rank 1 lattices*, Invent. Math. 21 (1973), 255-286.
- [50] J. A. Rodríguez-Migueles, *On volumes of complements of periodic geodesics*, arXiv :1711.10757v1.
- [51] J. A. Rodríguez-Migueles, *Periods of continuous fractions and modular knots*, in preparation.
- [52] P. Scott, *The geometries of 3-manifolds*, Bulletin of the London Mathematical Society 15 (1983), no. 5, 401-487.
- [53] C. Series, *The modular surface and continued fractions*, J. London Math. Soc. (2) 31 (1985), no. 1, 69-0. MR 810563
- [54] J.P. Serre, *Arbres, amalgames, SL_2* . Société Mathématique de France, Paris, 1977. Rédigé avec la collaboration de Hyman Bass, Astérisque, No. 46.
- [55] W.P. Thurston, *The geometry and topology of three-manifolds*, lecture notes, Princeton University, 1979.
- [56] W.P. Thurston, *Three-dimensional manifolds*, Klenian groups and hyperbolic geometry, Bull. Amer. Math. Soc. 6, 1982.
- [57] W.P. Thurston, *Three-dimensional geometry and topology* , vol. 1, Princeton university press, 1997.
- [58] P. Tukia, *Differentiability and rigidity of Mobius groups*, Invent. Math. 82 (1985). no. 3.
- [59] J. Vaisala, *Lectures on n -dimensional quasiconformal mappings*, Lecture Notes in Mathematics 229, Springer-Verlag, 1971.
- [60] R. F. Williams. *The structure of Lorenz attractors*. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., 50 :73-99, 1979.

GÉODÉSQUES SUR LES SURFACES HYPERBOLIQUES ET EXTÉRIEURS DES NŒUDS

Résumé

Grâce au théorème d'hyperbolisation, nous savons précisément quand l'intérieur d'une variété de dimension 3 orientée, compacte, dont le bord est une réunion de tores, admet une métrique hyperbolique complète de volume fini. Par ailleurs, d'après le théorème de rigidité de Mostow, cette structure géométrique est unique. Cependant, trouver des liens pratiques entre la géométrie et la topologie est un problème difficile. La plupart des résultats décrits dans cette thèse visent à concrétiser le programme de géométrisation.

Toute géodésique fermée orientée γ dans une surface hyperbolique Σ admet un relèvement canonique $\hat{\gamma}$ dans le fibré tangent unitaire $T^1\Sigma$ à Σ , et on peut donc voir $\hat{\gamma}$ comme un nœud dans la variété de dimension trois $T^1\Sigma$. Les complémentaires des nœuds ainsi construits $M_{\hat{\gamma}} = T^1\Sigma \setminus \hat{\gamma}$ admettent une structure hyperbolique.

Cette thèse a pour objet d'estimer le volume de $M_{\hat{\gamma}}$. Pour toute surface hyperbolique Σ on construit une suite $(\gamma_n)_n$ de géodésiques sur Σ , telle que les variétés $M_{\hat{\gamma}_n}$ ne sont pas homéomorphes entre elles et dont la suite des volumes respectifs est bornée. D'autre part, on minore le volume de $M_{\hat{\gamma}}$ à l'aide d'un réel explicite qui décrit une relation entre γ et une décomposition en pantalons de Σ . Ceci donne une méthode pour construire une suite $(\eta_n)_n$ de géodésiques telles que les volumes des $M_{\hat{\eta}_n}$ sont minorés en termes de la longueur de η_n .

Dans le cas particulier de la surface modulaire, on obtient des estimations du volume de $M_{\hat{\gamma}}$ en termes de la période de la fraction continue associée à γ .

Mots-clefs : flot géodésique, 3-variétés, volume, extérieur de nœud, géométrie hyperbolique, fraction continue.

GEODESICS ON HYPERBOLIC SURFACES AND KNOT COMPLEMENTS

Abstract

Due to the Hyperbolization Theorem, we know precisely when does the interior of a compact orientable 3-manifold whose boundary components are tori admit a complete hyperbolic metric of finite volume. Moreover, by the Mostow's Rigidity Theorem this geometric structure is unique. However, finding effective and computable connections between the geometry and topology is a challenging problem. Most of the results on this thesis fit into the theme of making the geometrization program more concrete and effective.

To every oriented closed geodesic γ on a hyperbolic surface Σ has associated a canonical lift $\hat{\gamma}$ on the unit tangent bundle $T^1\Sigma$ of Σ , and we can see $\hat{\gamma}$ as a knot in the 3-manifold $T^1\Sigma$. The knot complement given in this way $M_{\hat{\gamma}} = T^1\Sigma \setminus \hat{\gamma}$ has a hyperbolic structure.

The objective of this thesis is to estimate the volume of $M_{\hat{\gamma}}$. For every hyperbolic surface Σ we give a sequence $(\gamma_n)_n$ of geodesics on Σ , such that the manifolds $M_{\hat{\gamma}_n}$ are not homeomorphic with each other and the sequence of the corresponding volumes is bounded. We also give a lower bound of the volume of $M_{\hat{\gamma}}$ by an explicit real number which describes a relation between γ and a pants decomposition of Σ . This give us a method to construct a sequence $(\eta_n)_n$ of geodesics where the volume of $M_{\hat{\eta}_n}$ is bounded from below in terms of the length of η_n .

For the particular case of the modular surface, we obtain estimations for the volume of $M_{\hat{\gamma}}$ in terms of the period of the continuous fraction expansion of γ .

Keywords: geodesic flow, 3-manifolds, volume, knot complement, hyperbolic geometry, continuous fraction.