



**HAL**  
open science

# Couplages FEM-BEM faibles et optimisés pour des problèmes de diffraction harmoniques en acoustique et en électromagnétisme

Boris Caudron

► **To cite this version:**

Boris Caudron. Couplages FEM-BEM faibles et optimisés pour des problèmes de diffraction harmoniques en acoustique et en électromagnétisme. Analyse numérique [math.NA]. Université de Lorraine; Université de Liège, Belgique, 2018. Français. NNT : 2018LORR0062 . tel-01867450

**HAL Id: tel-01867450**

**<https://theses.hal.science/tel-01867450>**

Submitted on 4 Sep 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

---

# Couplages FEM-BEM faibles et optimisés pour des problèmes de diffraction harmoniques en acoustique et en électromagnétisme

## THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 25 Juin 2018

pour l'obtention des

Doctorats des Universités de Lorraine et de Liège

(Mention Mathématiques Appliquées)

par

Boris CAUDRON

### Composition du jury

*Président :* Hélène BARUCQ

*Directeurs :* Xavier ANTOINE  
Christophe GEUZAINÉ

*Rapporteurs :* François ALOUGES  
Sébastien PERNET

*Examineurs :* Stéphanie CHAILLAT-LOSEILLE  
Jean-Paul MARTINAUD



## Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Thales d'avoir financé ma thèse. Je suis très reconnaissant que Jean-Paul Martinaud et Samuel Nosal m'aient choisi pour mener à bien ce projet de recherche. Je les remercie par ailleurs vivement, au même titre que Gilles Salin et Nicolas Salles, pour leur aide au cours de cette thèse.

Je souhaite ensuite remercier Christophe Geuzaine et Xavier Antoine d'avoir supervisé ma thèse et pour les conseils dont ils m'ont fait part.

Un grand merci également à Sébastien Pernet et à Jean-Claude Nédélec pour les discussions que nous avons eues lors de la réalisation de cette thèse.

Je me dois aussi de remercier Sébastien Pernet ainsi que François Alouges pour avoir accepté d'être les rapporteurs de ma thèse. J'en profite enfin pour remercier Hélène Barucq et Stéphanie Chaillat-Loseille d'avoir fait partie de mon jury de thèse.

Pour finir, la réalisation de ma thèse aurait été beaucoup plus difficile sans le soutien de mes proches. Ils méritent donc toute ma gratitude.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>I Le problème de diffraction-transmission acoustique</b>	<b>5</b>
<b>1 Présentation du problème</b>	<b>7</b>
1.1 Un peu de physique . . . . .	9
1.2 Le problème de diffraction-transmission . . . . .	10
1.3 Cadre fonctionnel . . . . .	12
1.4 Représentations intégrales . . . . .	14
1.5 Champ lointain et surface équivalente sonar . . . . .	16
1.6 Couplages forts . . . . .	17
1.6.1 Couplage fort BEM-BEM . . . . .	18
1.6.2 Couplage fort FEM-BEM . . . . .	20
1.7 Le caractère bien posé de l'équation de Helmholtz . . . . .	22
1.8 Limites des couplages forts . . . . .	24
<b>2 Une proposition de couplage faible</b>	<b>27</b>
2.1 Principe de l'approche . . . . .	29
2.1.1 Reformulation du problème de diffraction-transmission . . . . .	29
2.1.2 Résolution du couplage faible . . . . .	31
2.1.3 Opérateurs de transmission optimaux . . . . .	33
2.2 Formulations pour la résolution des sous-problèmes . . . . .	34
2.2.1 Formulations pour la résolution du problème extérieur . . . . .	34
2.2.2 Formulations pour la résolution du problème intérieur . . . . .	39
2.2.3 Conflit sur les opérateurs optimaux . . . . .	40
2.3 Approximations des opérateurs DtN . . . . .	40
2.3.1 Opérateurs différentiels et espaces de Sobolev surfaciques . . . . .	40
2.3.2 Approximation microlocale des opérateurs DtN . . . . .	43
2.3.3 Approximation intégrale du DtN intérieur . . . . .	46
2.3.4 Approximations de Padé . . . . .	47
2.4 Cas particulier de la sphère unité . . . . .	49
2.4.1 Harmoniques sphériques et fonctions de Bessel . . . . .	50
2.4.2 Diagonalisation des opérateurs surfaciques . . . . .	52
2.4.3 Qualité des approximations des opérateurs DtN . . . . .	57
2.4.4 Convergence du couplage faible . . . . .	59
2.4.5 Problèmes de résonance du couplage faible . . . . .	62
2.4.6 Résolution itérative des sous-problèmes . . . . .	64

2.5	Conclusion . . . . .	65
<b>3</b>	<b>Discrétisation et résultats numériques</b>	<b>67</b>
3.1	Eléments finis et matrices associées . . . . .	69
3.1.1	Eléments finis surfaciques et matrices associées . . . . .	70
3.1.2	Eléments finis volumiques et matrices associées . . . . .	74
3.2	Les couplages forts . . . . .	76
3.2.1	Le couplage fort BEM-BEM . . . . .	76
3.2.2	Le couplage fort FEM-BEM . . . . .	77
3.2.3	Exemples de solutions . . . . .	78
3.3	Le couplage faible . . . . .	81
3.3.1	Formes discrètes des opérateurs de transmission . . . . .	81
3.3.2	Discrétisation des problèmes extérieurs . . . . .	82
3.3.3	Discrétisation des problèmes intérieurs . . . . .	86
3.4	Résultats numériques . . . . .	88
3.4.1	Couplage faible BEM-BEM . . . . .	88
3.4.2	Couplage faible FEM-BEM . . . . .	97
3.5	Conclusion . . . . .	103
<b>II</b>	<b>Le problème de diffraction-transmission électromagnétique</b>	<b>105</b>
<b>4</b>	<b>Présentation du problème</b>	<b>107</b>
4.1	Un peu de physique . . . . .	109
4.2	Le problème de diffraction-transmission . . . . .	109
4.3	Cadre fonctionnel . . . . .	111
4.4	Représentations intégrales . . . . .	112
4.5	Champ lointain et surface équivalente radar . . . . .	115
4.6	Couplages forts . . . . .	116
4.6.1	Couplage fort BEM-BEM . . . . .	116
4.6.2	Couplage fort FEM-BEM . . . . .	117
4.7	Le caractère bien posé du système de Maxwell harmonique . . . . .	118
<b>5</b>	<b>Une proposition de couplage faible</b>	<b>121</b>
5.1	Philosophie de l'approche . . . . .	123
5.1.1	Reformulation du problème de diffraction-transmission . . . . .	123
5.1.2	Résolution du couplage faible . . . . .	124
5.1.3	Opérateurs de transmission optimaux . . . . .	125
5.2	Résolution des sous-problèmes . . . . .	126
5.2.1	Résolution des problèmes extérieurs . . . . .	126
5.2.2	Résolution des problèmes intérieurs . . . . .	129
5.3	Approximations des opérateurs MtE . . . . .	129
5.3.1	Opérateurs différentiels et espaces de Sobolev surfaciques . . . . .	129
5.3.2	Approximation microlocale des opérateurs MtE . . . . .	131
5.3.3	Approximation intégrale du MtE intérieur . . . . .	133
5.3.4	Approximations de Padé . . . . .	134
5.4	Cas particulier de la sphère unité . . . . .	135
5.4.1	Harmoniques sphériques . . . . .	135

5.4.2	Diagonalisation des opérateurs surfaciques . . . . .	136
5.4.3	Qualité des approximations des opérateurs MtE . . . . .	142
5.4.4	Convergence du couplage faible . . . . .	144
5.4.5	Problèmes de résonance du couplage faible . . . . .	147
5.5	Conclusion . . . . .	151
<b>6</b>	<b>Discrétisation et résultats numériques</b>	<b>153</b>
6.1	Eléments finis et matrices associées . . . . .	155
6.1.1	Eléments finis scalaires surfaciques et matrices associées . . . . .	155
6.1.2	Eléments finis vectoriels surfaciques et matrices associées . . . . .	157
6.2	Le couplage fort BEM-BEM . . . . .	161
6.3	Le couplage faible : une première approche . . . . .	161
6.4	Le couplage faible <i>via</i> la décomposition de Helmholtz . . . . .	166
6.4.1	Reformulation du couplage faible . . . . .	166
6.4.2	Discrétisation du couplage faible reformulé . . . . .	171
6.5	Résultats numériques . . . . .	175
6.6	Conclusion . . . . .	180
	<b>Conclusion générale</b>	<b>181</b>
	<b>Annexes</b>	<b>185</b>
<b>A</b>	<b>Espaces de Sobolev surfaciques</b>	<b>187</b>
A.1	Espaces de Sobolev surfaciques scalaires . . . . .	187
A.2	Espaces de Sobolev surfaciques vectoriels . . . . .	189
A.3	Précisions sur les opérateurs différentiels surfaciques . . . . .	191
	<b>Bibliographie</b>	<b>193</b>



# Introduction

Les sonars et les radars sont des équipements incontournables des industries navale et aéronautique. Ces dispositifs de détection permettent, entre autres, de repérer des sous-marins et des avions. Leurs principes de fonctionnement respectifs sont en tout point similaires. Pour détecter un objet, sonars et radars émettent respectivement des ondes acoustiques et électromagnétiques dans sa direction. Les ondes émises sont alors en partie réfléchies par l'objet à détecter. Nous parlons de diffractions acoustique et électromagnétique [88]. Les ondes diffractées sont ensuite perçues par des capteurs, trahissant ainsi la présence de l'objet. Naturellement, plus les signaux détectés par les capteurs sont faibles, plus l'objet est furtif. En pratique, les furtivités acoustique et électromagnétique d'un objet sont respectivement mesurées par ses surfaces équivalentes sonar et radar. Ces quantités s'expriment en décibels et sont classiquement dénommées SES et SER. Elles caractérisent en fait la furtivité de l'objet lorsqu'il est éclairé par une onde acoustique ou électromagnétique monofréquentielle. Cette façon de quantifier la furtivité d'un objet est justifiée par la linéarité des équations aux dérivées partielles (EDP) sous-jacentes. Lors de la conception de sous-marins et d'avions militaires, il est bien sûr nécessaire de s'assurer que les prototypes proposés respectent les contraintes de SES et de SER définies au préalable. Ceci est généralement vérifié numériquement. Il est en effet beaucoup trop coûteux d'effectivement construire plusieurs prototypes pour ensuite mesurer leurs SES ou leurs SER.

Dans l'optique de calculer numériquement des SES et des SER, il est nécessaire de résoudre des problèmes de diffraction acoustiques et électromagnétiques tridimensionnels en régime harmonique [88]. Pour ces problèmes, la discrétisation des EDP posées dans le milieu extérieur, à savoir l'eau ou l'air, est connue pour être difficile. Les domaines associés au milieu extérieur sont en effet infinis. Il n'est donc pas possible de les mailler en vue d'une résolution par la méthode des éléments finis volumiques (Finite Element Method ou FEM en anglais). Deux approches classiques permettent toutefois de contourner cette difficulté. La première consiste à tronquer le domaine correspondant au milieu extérieur. Pour fermer le problème de diffraction approché ainsi généré et éliminer les réflexions parasites sur les surfaces de troncature, il est alors nécessaire d'utiliser des couches absorbantes parfaitement adaptées (Perfectly Matched Layers ou PML en anglais) [14, 16, 34, 101] ou des conditions (aux limites) absorbantes (Absorbing Boundary Conditions ou ABC en anglais) [5, 11, 12, 52]. Cette façon de procéder permet de discrétiser les EDP posées dans le milieu extérieur par la méthode des éléments finis volumiques. Elle semble *a priori* très intéressante. En effet, l'implémentation de la méthode des éléments finis volumiques ne présente pas de difficulté majeure. Ajouté à cela, les systèmes linéaires générés par cette méthode sont creux. L'approche consistant à tronquer le domaine associé au milieu extérieur présente toutefois le défaut d'approximer, au niveau continu, le problème de diffraction considéré. Ceci constitue une limitation sérieuse car la précision des calculs de SES et de SER est directement impactée par la qualité des PML et des ABC. Les problèmes de diffraction harmoniques peuvent également être résolus en remplaçant les EDP associées au milieu extérieur par des équations intégrales posées sur la surface de l'objet diffractant [88]. Cette approche connaît un succès grandissant car, contrairement aux méthodes de troncature de domaine, elle est exacte. Ajouté à cela, la discrétisation des équations intégrales surfaciques ne requiert pas de disposer d'un maillage volumique mais d'un maillage surfacique. Plusieurs méthodes peuvent être considérées pour discrétiser les équations intégrales surfaciques. Dans ce travail, nous nous intéressons à la méthode la plus fréquemment utilisée, à savoir la méthode des éléments finis surfaciques (Boundary Element Method ou BEM en anglais). Bien qu'elles présentent certains avantages, les équations intégrales surfaciques ont également des défauts. Elles font par exemple intervenir des opérateurs intégraux surfaciques, qui sont non locaux. Leur discrétisation génère par conséquent des matrices denses. Des méthodes de compression, comme la représentation sous forme de matrices hiérarchiques (Hierarchical Matrices ou H-Matrices en anglais) [18, 61] ou la méthode des multipôles rapide (Fast Multipole Method ou FMM en anglais) [59, 60, 79], ont toutefois été développées pour pallier ce problème. En plus de réduire les besoins en mémoire nécessaires au stockage des matrices issues de la discrétisation des équations intégrales surfaciques, les méthodes de compression permettent également d'effectuer des opérations algébriques sur ces matrices (décompositions LU, produits matrice-vecteur, etc...) avec une complexité faible. Pour finir, nous mentionnons que les opérateurs intégraux intervenant dans les équations intégrales surfaciques sont

construits à partir de noyaux singuliers. L'assemblage des matrices apparaissant lors de la discrétisation des équations intégrales surfaciques est donc technique et coûteux d'un point de vue computationnel puisqu'il requiert d'évaluer numériquement des intégrales singulières.

La discrétisation complète des problèmes de diffraction harmoniques est classiquement faite de trois manières différentes. La première approche consiste à ne travailler qu'avec des équations intégrales surfaciques et ne s'applique que si l'objet diffractant est non pénétrable ou pénétrable et homogène [23, 24, 25, 28, 31, 36, 37, 38, 42, 50, 62, 67, 72, 73, 75, 88, 91, 92, 103, 104]. Si l'objet diffractant est non pénétrable, les EDP du problème de diffraction harmonique sont uniquement posées dans le domaine correspondant au milieu extérieur. Il suffit alors de les reformuler en utilisant des équations intégrales surfaciques. Des EDP sont aussi posées dans l'objet diffractant si celui-ci est pénétrable. Elles peuvent également être substituées par des équations intégrales surfaciques si l'objet diffractant est homogène. Remarquons par ailleurs que cette première approche permet de traiter le cas d'objets diffractant constitués aussi bien de parties pénétrables et homogènes que de parties non pénétrables. Lorsque le domaine correspondant au milieu extérieur est tronqué, les problèmes de diffraction harmoniques sont intégralement discrétisés par la méthode des éléments finis volumiques et ceci quelle que soit la nature de l'objet diffractant. Dans le cas d'un objet diffractant pénétrable, il est également possible de discrétiser les EDP posées dans l'objet diffractant par la méthode des éléments finis volumiques et de reformuler celles associées au milieu extérieur par des équations intégrales surfaciques [13, 22, 27, 41, 46, 54, 55, 56, 63, 64, 65, 66, 71, 76, 77, 83, 84, 90, 95, 97, 99, 102, 105]. Cette approche est intéressante en cela qu'elle répond à des besoins émergents. Jusqu'à présent, les objets diffractant considérés dans les applications étaient généralement homogènes et isotropes par morceaux. Il n'y avait donc pas de réels besoins pour des méthodes permettant de traiter des matériaux inhomogènes et anisotropes. Ces matériaux commencent toutefois à susciter l'intérêt de la recherche académique et industrielle. Les méthodes de résolution adaptées à la prise en compte d'objets diffractant non homogènes et non isotropes, comme les techniques de troncature de domaine ou les couplages de formulations variationnelles volumiques et d'équations intégrales surfaciques, gagnent donc en popularité. En pratique, les méthodes de troncature de domaine peuvent cependant manquer de précision pour des calculs de SES et de SER. Les méthodes consistant à coupler des formulations variationnelles volumiques et des équations intégrales surfaciques, quant à elles, ne présentent pas ce problème. Elles sont donc particulièrement intéressantes du point de vue de l'ingénierie.

Quelles que soient la nature de l'objet diffractant et la méthode de discrétisation choisie, les problèmes de diffraction harmoniques sont d'autant plus difficiles à résoudre que la fréquence est élevée [53, 74]. Il s'agit d'une conséquence directe de leur caractère très fortement non défini positif. A haute fréquence, il est essentiel de mailler très finement les objets étudiés pour calculer avec précision les ondes diffractées. Par conséquent, les systèmes linéaires issus de la discrétisation des problèmes de diffraction harmoniques sont de grande taille. La résolution directe de ces systèmes requiert des ressources en temps de calcul et en mémoire très importantes, voire rédhibitoires. Il est donc nécessaire de s'orienter vers des méthodes de résolution itératives [93]. D'une manière générale, ces méthodes convergent toutefois lentement lorsqu'elles sont utilisées pour résoudre des problèmes de diffraction harmoniques. Il est par ailleurs possible qu'elles divergent. Pour pallier ce problème, il est classique de préconditionner les systèmes à résoudre. Il existe de nombreuses méthodes algébriques permettant de préconditionner de manière générique des systèmes linéaires. Nous pouvons par exemple mentionner les décompositions LU et de Cholesky incomplètes [93] ou encore les inverses approchés creux (SParse Approximate Inverse ou SPAI en anglais) [93]. Ces méthodes ne sont cependant pas robustes vis-à-vis des montées en fréquence lorsqu'elles sont utilisées pour résoudre des problèmes de diffraction harmoniques. Avec ces préconditionneurs, le nombre d'itérations nécessaires à la résolution de systèmes issus de la discrétisation de problèmes de diffraction harmoniques dépend en effet significativement de la fréquence considérée. Pour contourner ce problème, une solution consiste à construire des préconditionneurs spécifiques aux formulations utilisées pour résoudre les problèmes de diffraction harmoniques. Bien que cette problématique soit actuelle, il existe peu de préconditionneurs de ce type, qui plus est efficaces. Pour les formulations exclusivement basées sur des équations intégrales surfaciques, il est parfois possible d'exhiber des préconditionneurs analytiques. Nous pouvons notamment citer les préconditionneurs de type Calderón [4, 6]. En ce qui concerne les formulations construites strictement à partir de la méthode des éléments finis volumiques, quelques préconditionneurs, comme les méthodes multi-grilles ou de type "shifted laplacian", ont été développés [74]. La construction de préconditionneurs efficaces étant difficile, la recherche s'est orientée vers d'autres approches pour résoudre les problèmes de diffraction harmoniques. Actuellement, la tendance est plutôt au développement d'équations intégrales directement bien conditionnées au niveau continu par exemple [2, 7, 8, 17, 23]. Pour ce qui est des formulations entièrement volumiques à présent, les techniques de décomposition de domaines (Domain Decomposition Methods ou DDM en anglais) sont en plein essor [49, 100]. Pour résoudre un problème donné, ces méthodes partitionnent le domaine sur lequel il est posé en sous-domaines et résolvent des sous-problèmes associés à ces sous-domaines. L'inté-

---

rêt des méthodes de décomposition de domaine réside naturellement dans le fait qu’elles permettent de se ramener à la résolution de systèmes linéaires de plus petite taille. Remarquons que les sous-problèmes intervenant dans les méthodes de décomposition de domaine sont généralement résolus par des méthodes directes.

Dans le paragraphe précédent, nous n’avons donné aucune information spécifique concernant les couplages FEM-BEM, c’est-à-dire les méthodes basées sur le couplage de formulations variationnelles volumiques et d’équations intégrales surfaciques. Nous discutons à présent de ces méthodes. Classiquement, les couplages FEM-BEM sont construits en couplant des formulations variationnelles volumiques et des équations intégrales surfaciques au sein d’une même formulation [27, 41, 46, 54, 55, 56, 63, 64, 65, 66, 71, 76, 77, 83, 84, 90, 95, 97, 99, 102, 105]. Nous parlons alors de couplages forts FEM-BEM. Bien que naturelle, cette approche présente de gros inconvénients. Tout d’abord, les systèmes issus de la discrétisation des couplages forts FEM-BEM sont partiellement pleins, partiellement creux. La résolution directe de ces systèmes, qui est de toute façon à proscrire lors de montées en fréquence, est alors délicate car il n’existe pas d’algorithmes de résolution efficaces pour les systèmes dont les matrices sont constituées aussi bien de parties pleines que de parties creuses. Comme nous l’avons mentionné dans le paragraphe précédent, les méthodes itératives convergent, d’une manière générale, lentement, voire divergent, lorsqu’elles sont utilisées pour résoudre les couplages forts FEM-BEM. De plus, il n’existe actuellement pas de préconditionneurs robustes permettant de pallier ce problème et aucune piste viable n’a été proposée pour en obtenir. Pour finir, nous mentionnons qu’il serait intéressant d’avoir recours à la fois aux méthodes de décomposition de domaine et aux méthodes de compression pour construire des couplages FEM-BEM. Il n’existe toutefois pas de voie clairement identifiée pour implémenter les couplages forts FEM-BEM en combinant ces méthodes.

Pour pallier les limitations des couplages forts FEM-BEM, d’autres couplages FEM-BEM ont été proposés [13, 22]. Ces couplages correspondent concrètement à des méthodes de décomposition de domaine de Schwarz itérant entre deux sous-domaines, à savoir l’objet diffractant et le milieu extérieur. Conceptuellement, le fait de construire des couplages FEM-BEM comme des algorithmes de décomposition de domaine présente plusieurs avantages. Cela permet tout d’abord de ne coupler que faiblement les formulations variationnelles volumiques et les équations intégrales surfaciques. Avec cette approche, les sous-problèmes associés à l’objet diffractant sont en effet exclusivement discrétisés grâce à des formulations variationnelles volumiques. Les sous-problèmes rattachés au milieu extérieur quant à eux sont reformulés par équations intégrales surfaciques. Les couplages FEM-BEM basés sur les méthodes de décomposition de domaine sont alors dits faibles car, contrairement aux couplages forts FEM-BEM, ils ne couplent pas de formulations variationnelles volumiques et d’équations intégrales surfaciques au sein d’une même formulation. Les couplages faibles FEM-BEM sont également intéressants en cela que leurs sous-problèmes peuvent être résolus de manière optimisée. Pour résoudre les sous-problèmes intérieurs, il est par exemple possible d’avoir recours à des algorithmes de décomposition de domaine. La résolution des sous-problèmes extérieurs quant à elle peut être faite de manière itérative au moyen d’équations intégrales bien conditionnées et, qui plus est, en tirant parti des techniques de compression. Nous mentionnons à présent qu’il est plus simple, avec les couplages faibles FEM-BEM qu’avec les couplages forts FEM-BEM, d’augmenter de manière générique et découplée les ordres respectifs des éléments finis volumiques et surfaciques utilisés. Ceci est notamment intéressant pour contrer les phénomènes de pollution et de dispersion numériques apparaissant lors de montées en fréquence [68, 69]. Pour finir, les couplages faibles FEM-BEM, contrairement aux couplages forts FEM-BEM, présentent l’intérêt de pouvoir être implémentés avec un effort relativement modeste à partir de codes FEM et BEM généraux déjà existants et potentiellement très optimisés.

La robustesse et la vitesse de convergence des méthodes de décomposition de domaine dépendent fortement de la manière d’échanger de l’information entre les sous-domaines [48]. Concrètement, si les transferts d’information entre sous-domaines ne sont pas correctement réalisés, la convergence des algorithmes de décomposition de domaine peut être lente voire jamais atteinte. En pratique, la transmission d’information entre les sous-domaines passe par l’évaluation d’opérateurs, dits de transmission, définis sur les frontières des sous-domaines. Les opérateurs de transmission optimaux sont par ailleurs connus [49]. En acoustique, il s’agit d’opérateurs Dirichlet-to-Neumann (DtN) alors qu’en électromagnétisme, ce sont des opérateurs Magnetic-to-Electric (MtE). L’évaluation numérique de ces opérateurs est toutefois lourde d’un point de vue computationnel. Elle requiert en effet des ressources en temps de calcul et en mémoire importantes. Pour contourner ce problème, il est d’usage d’utiliser comme opérateurs de transmission des approximations des opérateurs DtN et MtE dont l’évaluation numérique est moins coûteuse. De nombreuses approximations des opérateurs DtN et MtE sont présentées dans la littérature. Utilisées comme opérateurs de transmission, ces approximations ne permettent pas d’exploiter pleinement le potentiel des méthodes de décomposition de domaine dans leur ensemble, et donc des couplages faibles FEM-BEM en particulier. Récemment, de nouvelles approximations des opérateurs DtN et MtE, dites de Padé, ont été proposées [9, 19]. Ces ap-

proximations ont été introduites grâce à des raisonnements microlocaux et correspondent concrètement à des approximations *quasi*-locales d'opérateurs pseudo-différentiels non locaux. Les approximations de Padé des opérateurs DtN et MtE ont déjà été utilisées avec succès comme opérateurs de transmission [20, 21]. Elles ont plus précisément été considérées pour résoudre des problèmes de diffractions harmoniques aussi bien acoustiques qu'électromagnétiques après troncature des domaines correspondant au milieu extérieur. Il a notamment été montré que les approximations de Padé permettaient de rendre le nombre d'itérations nécessaires à la convergence des méthodes de décomposition de domaine quasiment indépendant de la fréquence et du pas des maillages sous-jacents. Ces approximations sont donc particulièrement bien adaptées à la résolution de problèmes à haute fréquence.

Les approximations de Padé n'ont pas encore été utilisées comme opérateurs de transmission pour les couplages faibles FEM-BEM. Elles pourraient toutefois améliorer de manière significative la vitesse de convergence et la robustesse de ces méthodes. Il est notamment raisonnable de penser que les approximations de Padé permettent de rendre la vitesse de convergence des couplages faibles FEM-BEM très peu dépendante de la fréquence considérée et de la finesse du maillage. D'un point de vue applicatif, cela serait particulièrement intéressant pour des calculs très précis de SES et de SER à haute fréquence. Dans cette thèse, nous proposons donc de construire, à partir des approximations de Padé, des couplages faibles FEM-BEM permettant de résoudre des problèmes de diffraction harmoniques et pénétrables aussi bien acoustiques qu'électromagnétiques. Nous avons mentionné précédemment que les couplages FEM-BEM permettaient de traiter des objets diffractant anisotropes. Dans ce travail, nous ne considérerons toutefois que des objets diffractant isotropes. Nous nous concentrerons par ailleurs sur l'optimisation de la vitesse de convergence des couplages faibles que nous proposons. Les sous-problèmes ne seront donc pas résolus de manière optimisée comme cela a été évoqué auparavant mais par des méthodes de résolution directes. Remarquons à présent que les méthodes de décomposition de domaine à l'origine des couplages faibles FEM-BEM permettent également de construire, et ceci exactement de la même manière, des couplages faibles BEM-BEM. Nous introduirons donc, sans que cela ne requiert d'efforts supplémentaires, des couplages faibles BEM-BEM basés sur les approximations de Padé. Ces couplages faibles BEM-BEM sont bien sûr intéressants en cela qu'ils constituent une alternative au développement de couplages forts BEM-BEM bien conditionnés.

Ce manuscrit est organisé de la façon suivante. Dans une première partie, nous nous intéressons à la résolution numérique d'un problème de diffraction harmonique et pénétrable en acoustique. Le premier chapitre est consacré à l'introduction de ce problème et à quelques rappels techniques. Nous y présentons plus particulièrement les espaces de Sobolev et les opérateurs de trace associés au problème de diffraction acoustique, des résultats de représentation intégrale ainsi que les notions de champ lointain et de SES. Dans le premier chapitre, nous introduisons également deux exemples de couplages forts, à savoir un de type BEM-BEM et un autre de type FEM-BEM, permettant de résoudre le problème de diffraction acoustique. Ces couplages forts acoustiques nous sont notamment utiles pour expliquer plus en détails les limitations des couplages forts dans leur ensemble. Les couplages faibles BEM-BEM et FEM-BEM que nous avons développés pour résoudre le problème de diffraction acoustique sont présentés dans le deuxième chapitre. Ils sont tous les deux obtenus à partir d'une même reformulation équivalente du problème de diffraction acoustique. Celle-ci fait l'objet du début du deuxième chapitre. Dans ce chapitre, nous exhibons également des opérateurs de transmission optimaux pour les couplages faibles acoustiques et nous présentons les approximations par lesquelles nous avons choisi de les remplacer en pratique. Les formulations adoptées pour la résolution des sous-problèmes associés aux couplages faibles acoustiques sont aussi présentées dans le deuxième chapitre. La discrétisation et l'implémentation des couplages acoustiques forts et faibles, qu'ils soient de type BEM-BEM ou de type FEM-BEM, font l'objet du troisième chapitre. Nous y présentons également les résultats numériques obtenus concernant les couplages faibles BEM-BEM et FEM-BEM acoustiques. La seconde partie du manuscrit est consacrée à la résolution numérique d'un problème de diffraction harmonique et pénétrable en électromagnétisme. Ce problème est l'analogue exact de celui que nous considérons en acoustique. Les couplages faibles électromagnétiques BEM-BEM et FEM-BEM que nous proposons pour le résoudre sont donc construits de la même manière que les couplages faibles BEM-BEM et FEM-BEM acoustiques. Par conséquent, la seconde partie du manuscrit est très similaire à la première. Les quatrième et cinquième chapitres sont notamment des transpositions exactes des deux premiers. La discrétisation des couplages faibles électromagnétiques est toutefois significativement plus compliquée que celle des couplages faibles acoustiques. Elle requiert en particulier de reformuler le couplage faible électromagnétique par le biais de la décomposition de Helmholtz. Le sixième chapitre diffère donc du troisième. Enfin, dans une conclusion générale, nous rappelons dans les grandes lignes le travail accompli ainsi que les résultats obtenus. La conclusion du manuscrit comporte par ailleurs des perspectives de recherche pouvant faire suite à cette thèse.

Première partie

**Le problème de  
diffraction-transmission acoustique**



# Chapitre 1

## Présentation du problème

### Sommaire

---

1.1	Un peu de physique . . . . .	9
1.2	Le problème de diffraction-transmission . . . . .	10
1.3	Cadre fonctionnel . . . . .	12
1.4	Représentations intégrales . . . . .	14
1.5	Champ lointain et surface équivalente sonar . . . . .	16
1.6	Couplages forts . . . . .	17
1.6.1	Couplage fort BEM-BEM . . . . .	18
1.6.2	Couplage fort FEM-BEM . . . . .	20
1.7	Le caractère bien posé de l'équation de Helmholtz . . . . .	22
1.8	Limites des couplages forts . . . . .	24

---



## 1.1 Un peu de physique

Dans cette section inspirée des articles [15] de Bergmann et [80] de Martin, nous précisons l'origine physique des équations qui nous intéressent dans ce travail, à savoir les équations de Bergmann et de Helmholtz.

L'évolution d'un fluide parfait, c'est-à-dire non visqueux, contenu dans un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  est modélisée par deux équations, respectivement l'équation de conservation de la masse et l'équation d'Euler :

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad , \quad \rho(\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}) = -\nabla p + \rho \mathbf{g}. \quad (1.1)$$

Ici,  $p$ ,  $\mathbf{v}$  et  $\rho$  correspondent, dans l'ordre, à la pression, à la vitesse et à la masse volumique du fluide alors que  $\mathbf{g}$  désigne le champ de pesanteur. Le système (1.1) étant constitué d'un nombre d'équations insuffisant par rapport au nombre d'inconnues, il est nécessaire de lui ajouter une équation supplémentaire. L'équation d'état du fluide, qui exprime la pression comme une fonction  $f$  de la masse volumique et de l'entropie massique  $s$  du fluide, à savoir :

$$p = f(\rho; s), \quad (1.2)$$

constitue une solution classique pour pallier ce problème. Cette dernière fait toutefois intervenir une nouvelle inconnue, l'entropie massique. Par conséquent, il est nécessaire d'ajouter au système (1.1)-(1.2) une équation supplémentaire exprimant le fait que la dérivée particulaire de l'entropie massique est nulle :

$$\partial_t s + \mathbf{v} \cdot \nabla s = 0. \quad (1.3)$$

Avant de poursuivre, nous introduisons les quantités suivantes,  $c$  correspondant à la vitesse du son dans le fluide :

$$c = \sqrt{\partial_\rho f(\rho; s)} \quad , \quad h = \partial_s f(\rho; s).$$

Les équations (1.1), (1.2) et (1.3) sont non linéaires. Toutefois, si le fluide considéré est initialement au repos, à savoir  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ , et si il n'est que légèrement perturbé, il est possible de linéariser ces équations. Dans ce qui suit, l'indice 0 fait référence aux quantités correspondant au fluide au repos. Des équations (1.1), (1.2) et (1.3), il vient :

$$\nabla p_0 = \rho_0 \mathbf{g} \quad , \quad \rho_0 = \rho_0(\mathbf{x}) \quad , \quad p_0 = p_0(\mathbf{x}) \quad , \quad s_0 = s_0(\mathbf{x}) \quad , \quad c_0 = c_0(\mathbf{x}) \quad , \quad \nabla p_0 = c_0^2 \nabla \rho_0 + h_0 \nabla s_0.$$

Pour linéariser les équations (1.1), (1.2) et (1.3), il faut commencer par prescrire la forme de la masse volumique, de la pression et de l'entropie massique :

$$\rho(\mathbf{x}; t) = \rho_0(\mathbf{x}) + \tilde{\rho}(\mathbf{x}; t) \quad , \quad p(\mathbf{x}; t) = p_0(\mathbf{x}) + \tilde{p}(\mathbf{x}; t) \quad , \quad s(\mathbf{x}; t) = s_0(\mathbf{x}) + \tilde{s}(\mathbf{x}; t),$$

les quantités correspondant à la perturbation du fluide, à savoir  $\tilde{\rho}$ ,  $\tilde{p}$  et  $\tilde{s}$ , étant petites par rapport à celles du fluide au repos, soit :

$$|\tilde{\rho}| \ll \rho_0 \quad , \quad |\tilde{p}| \ll p_0 \quad , \quad |\tilde{s}| \ll s_0.$$

En injectant ces relations dans les équations (1.1), (1.2) et (1.3) et en négligeant les termes non linéaires, il vient :

$$\partial_t \tilde{\rho} + \operatorname{div}(\rho_0 \mathbf{v}) = 0 \quad , \quad \rho_0 \partial_t \mathbf{v} = -\nabla \tilde{p} + \tilde{\rho} \mathbf{g} \quad , \quad \partial_t \tilde{s} + \mathbf{v} \cdot \nabla s_0 = 0.$$

Un développement limité dans l'équation (1.2) permet d'obtenir la relation suivante :

$$\tilde{p} = c_0^2 \tilde{\rho} + h_0 \tilde{s}.$$

En dérivant cette équation par rapport au temps et en utilisant la première équation de (1.1) ainsi que l'équation (1.3), il vient :

$$\rho_0 \partial_t \mathbf{v} + \nabla \tilde{p} = \tilde{\rho} \mathbf{g} \quad , \quad \partial_t \tilde{p} + \rho_0 c_0^2 \operatorname{div} \mathbf{v} + \nabla p_0 \cdot \mathbf{v} = 0.$$

En pratique, il est souvent possible de négliger les termes liés à la gravité, à savoir  $\tilde{\rho} \mathbf{g}$  et  $\nabla p_0 \cdot \mathbf{v}$ , de sorte à obtenir [15] :

$$\rho_0 \partial_t \mathbf{v} + \nabla \tilde{p} = \mathbf{0} \quad , \quad \partial_t \tilde{p} + \rho_0 c_0^2 \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (1.4)$$

Dans cette première partie consacrée à l'acoustique, les champs d'application visés sont les sonars. Ces dispositifs fonctionnant en général à fréquence fixe, nous nous plaçons en régime harmonique. Les fonctions  $\tilde{p}$  et  $\mathbf{v}$  sont donc supposées de la forme :

$$\tilde{p} = \hat{p}(\mathbf{x}) e^{-i\omega t} \quad , \quad \mathbf{v} = \hat{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) e^{-i\omega t},$$

$\omega$  étant une pulsation. Sous ces hypothèses, le système (1.4) se réécrit de manière équivalente comme :

$$\rho_0 \operatorname{div}(\rho_0^{-1} \nabla \hat{p}) + \frac{\omega^2}{c_0^2} \hat{p} = 0 \quad , \quad \hat{\mathbf{v}} = \frac{1}{i\omega\rho_0} \nabla \hat{p}.$$

Il se réduit donc à une seule équation, connue sous le nom d'équation de Bergmann, qui s'écrit classiquement en faisant apparaître le nombre d'onde  $k = \omega c_0^{-1}$  :

$$\rho_0 \operatorname{div}(\rho_0^{-1} \nabla \hat{p}) + k^2 \hat{p} = 0.$$

Remarquons que le nombre d'onde est lié à la longueur d'onde  $\lambda$  par la relation  $k = 2\pi\lambda^{-1}$ .

Une fois l'équation de Bergmann résolue, nous pouvons calculer le champ de pression physique, à ne pas confondre avec  $\hat{p}$ , qui est donné par :

$$\mathcal{R}(\hat{p}) = \mathcal{R}(\hat{p}) \cos(\omega t) + \mathcal{I}(\hat{p}) \sin(\omega t).$$

Les champs  $\mathcal{R}(\hat{p})$  et  $\mathcal{I}(\hat{p})$  correspondent donc au champ de pression physique à des instants bien précis.

Par la suite, nous abandonnerons les notations de cette section liées aux petites perturbations autour de l'équilibre et l'équation de Bergmann sera écrite de manière générique :

$$\rho(\mathbf{x}) \operatorname{div}(\rho^{-1}(\mathbf{x}) \nabla u) + k^2(\mathbf{x})u = 0.$$

Afin de garantir l'unicité de sa solution, cette équation est classiquement associée à des conditions de Dirichlet ou de Neumann sur  $\partial\Omega$ . Une condition de Dirichlet permet de spécifier la valeur de la pression sur  $\partial\Omega$ . Une condition de Neumann impose quant à elle la valeur de la vitesse normale du fluide sur  $\partial\Omega$  puisque  $\hat{\mathbf{v}}$  est lié à  $\nabla \hat{p}$ .

Nous terminons cette section en faisant le lien entre l'équation de Bergmann et l'équation de Helmholtz :

$$\Delta u + k^2(\mathbf{x})u = 0.$$

Si le fluide considéré est homogène, c'est-à-dire que  $\rho$  et  $k$  sont constants, l'équation de Bergmann se réduit à l'équation de Helmholtz avec un nombre d'onde constant. Pour un fluide non homogène, il est également possible de se ramener à l'équation de Helmholtz, avec un nombre d'onde variable cette fois, quitte à effectuer une approximation. En effet, l'équation de Bergmann peut se réécrire comme :

$$\Delta u + k^2(\mathbf{x})u - \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} \nabla \rho(\mathbf{x}) \cdot \nabla u = 0,$$

et, en fonction du problème physique considéré, le terme  $\rho^{-1}(\mathbf{x}) \nabla \rho(\mathbf{x}) \cdot \nabla u$  peut être négligé [15].

## 1.2 Le problème de diffraction-transmission

Pour détecter un objet, que nous notons  $\Omega_-$ , un sonar envoie, dans la direction de cet objet, une onde de pression, notée  $u_{\text{inc}}$ , classiquement appelée onde incidente. Cette onde incidente n'est *a priori* définie que dans le domaine extérieur  $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega_-}$ , noté  $\Omega_+$ , où elle vérifie l'équation de Helmholtz suivante :

$$\Delta u_{\text{inc}} + k_+^2 u_{\text{inc}} = 0 \text{ dans } \Omega_+.$$

Le nombre d'onde extérieur  $k_+$  est supposé constant et réel. En effet, nous pouvons considérer le fluide constituant le milieu extérieur, typiquement de l'eau, comme étant homogène et non dissipatif. Dans les applications,  $u_{\text{inc}}$  est souvent une onde plane, c'est-à-dire qu'elle est de la forme :

$$u_{\text{inc}} = e^{i\mathbf{k}_+ \cdot \mathbf{x}} \quad \text{avec} \quad \mathbf{k}_+ = -k_+ \boldsymbol{\sigma}_{\text{inc}} \quad \text{et} \quad \|\boldsymbol{\sigma}_{\text{inc}}\| = 1.$$

Nous ferons par conséquent cette hypothèse. Le vecteur unitaire  $\boldsymbol{\sigma}_{\text{inc}}$  correspond, du point de vue de l'objet diffractant, à la direction dans laquelle se trouve le sonar. Il peut être représenté par deux angles en coordonnées sphériques :

$$\boldsymbol{\sigma}_{\text{inc}} = (\sin \theta_{\text{inc}} \cos \varphi_{\text{inc}}; \sin \theta_{\text{inc}} \sin \varphi_{\text{inc}}; \cos \theta_{\text{inc}}), \quad \text{avec} \quad 0 \leq \theta_{\text{inc}} \leq \pi \quad \text{et} \quad 0 \leq \varphi_{\text{inc}} \leq 2\pi.$$

D'un point de vue pratique, l'hypothèse selon laquelle  $u_{\text{inc}}$  est une onde plane est justifiée par le fait qu'une onde générée par une source ponctuelle, aussi appelée onde sphérique, a la même forme, dans une direction

donnée et à grande distance de sa source, qu'une onde plane. En effet, l'onde générée par une source ponctuelle située en  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$  est donnée par :

$$\frac{e^{ik_+ \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|}.$$

De plus, si  $\mathbf{x} = r\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{x}_0 + \tilde{\mathbf{x}}$  avec  $\|\boldsymbol{\sigma}\| = 1$ , nous avons :

$$\frac{e^{ik_+ \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} = \frac{e^{ik_+ r}}{r} e^{ik_+ \boldsymbol{\sigma} \cdot \tilde{\mathbf{x}}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right),$$

ce développement étant valable pour de grandes valeurs de  $r$  et uniforme pour des  $\tilde{\mathbf{x}}$  bornés. Plus précisément, si  $K \subset \mathbb{R}^3$  est compact, il existe  $r_0, M > 0$  tels que :

$$\forall \tilde{\mathbf{x}} \in K, \quad \forall r > r_0, \quad \left| \frac{e^{ik_+ \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} - \frac{e^{ik_+ r}}{r} e^{ik_+ \boldsymbol{\sigma} \cdot \tilde{\mathbf{x}}} \right| \leq \frac{M}{r^2}.$$

Dans ce travail, nous supposons que  $\Omega_-$  est constitué d'un fluide. Il s'agit donc d'un objet diffractant pénétrable. Plus précisément, cela signifie que, lorsque l'onde incidente atteint  $\Omega_-$ , une partie de cette onde pénètre  $\Omega_-$  alors que la partie restante est réfléchiée. Notons que si la totalité de l'onde incidente était réfléchiée par l'objet diffractant, celui-ci serait dit non pénétrable et correspondrait alors à un solide.

L'onde réfléchiée, notée  $u_+$ , vérifie, dans  $\Omega_+$ , la même équation de Helmholtz que  $u_{\text{inc}}$  ainsi qu'une condition portant sur son comportement asymptotique connue sous le nom de condition de radiation de Sommerfeld :

$$\Delta u_+ + k_+^2 u_+ = 0 \text{ dans } \Omega_+ \quad , \quad \partial_r u_+ - ik_+ u_+ = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right). \quad (1.5)$$

Nous insistons sur le fait que  $u_+$  ne correspond pas au champ de pression total dans  $\Omega_+$ , ce dernier étant donné par :

$$u_{\text{tot}} = u_+ + u_{\text{inc}}.$$

Telle que nous l'avons écrite, la condition de radiation signifie qu'il existe  $M, r_0 > 0$  tels que :

$$\forall r > r_0, \quad \forall \boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{S}, \quad |\nabla u_+(r\boldsymbol{\sigma}) \cdot \boldsymbol{\sigma} - ik_+ u_+(r\boldsymbol{\sigma})| \leq \frac{M}{r^2}.$$

la notation  $\mathbb{S}$  faisant référence à la sphère unité de  $\mathbb{R}^3$ . Dans la littérature, cette condition est très souvent rencontrée sous la forme :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{\frac{d-1}{2}} (\partial_r u - ik_+ u) = 0,$$

l'entier  $d \in \{2; 3\}$  correspondant à la dimension du domaine extérieur dans lequel est posée l'équation de Helmholtz. En dimension 3, la première forme de la condition de radiation implique la seconde mais la réciproque n'est pas vraie. Toutefois, si elles sont couplées à l'équation de Helmholtz, ces deux formes de la condition de radiation sont équivalentes. Physiquement, la condition de radiation traduit le fait que l'onde diffractée se propage vers l'infini. Nous parlons d'onde sortante [88]. D'un point de vue mathématique, elle permet de garantir l'unicité de l'onde diffractée.

Le champ de pression à l'intérieur de l'objet, noté  $u_-$ , vérifie quant à lui l'équation de Bergmann dans  $\Omega_-$  :

$$\rho_- \operatorname{div}(\rho_-^{-1} \nabla u_-) + k_-^2 u_- = 0 \text{ dans } \Omega_-. \quad (1.6)$$

Le nombre d'onde intérieur  $k_-$  et la masse volumique  $\rho_-$  de l'objet diffractant peuvent être des fonctions sur  $\Omega_-$ , l'objet diffractant n'étant *a priori* pas homogène. De plus, nous supposons ces fonctions réelles, ce qui revient implicitement à supposer que le fluide constituant  $\Omega_-$  est non dissipatif.

Pour que le problème soit bien posé, il est nécessaire d'ajouter des conditions aux limites, aussi appelées conditions de transmission, sur la surface, notée  $\Gamma$ , de  $\Omega_-$  :

$$u_- = u_+ + u_{\text{inc}} \text{ sur } \Gamma \quad , \quad \frac{1}{\rho_-} \partial_{\mathbf{n}} u_- = \frac{1}{\rho_+} (\partial_{\mathbf{n}} u_+ + \partial_{\mathbf{n}} u_{\text{inc}}) \text{ sur } \Gamma. \quad (1.7)$$

La première condition est une condition de Dirichlet exprimant la continuité du champ de pression total à travers  $\Gamma$ . La seconde condition, de type Neumann, traduit la continuité de la vitesse normale du fluide à travers  $\Gamma$ . Ici,  $\mathbf{n}$  désigne la normale unitaire sortante pour  $\Omega_-$  et  $\rho_+$  la masse volumique du fluide constituant

$\Omega_+$ .

Remarquons que lorsque  $\Omega_-$  n'est pas pénétrable, trois conditions aux limites sont classiquement considérées sur  $\Gamma$  :

$$u_+ = -u_{\text{inc}} \quad , \quad \partial_{\mathbf{n}} u_+ = -\partial_{\mathbf{n}} u_{\text{inc}} \quad , \quad \partial_{\mathbf{n}} u_+ - z u_+ = -\partial_{\mathbf{n}} u_{\text{inc}} + z u_{\text{inc}}.$$

Les deux premières expriment respectivement la nullité du champ total de pression et de la vitesse normale du fluide sur  $\Gamma$ . La troisième, de type Robin, permet de spécifier la valeur de l'impédance acoustique sur  $\Gamma$ , définie, avec les notations de la section précédente, par  $z = \frac{\hat{p}}{\hat{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{n}} \in \mathbb{C}$  [96].

Revenons-en à présent au cas où  $\Omega_-$  est pénétrable. En définissant  $\rho$  par :

$$\rho = \frac{\rho_+}{\rho_-},$$

nous obtenons l'écriture plus compacte suivante du problème de diffraction-transmission (1.5)-(1.6)-(1.7) :

$$\operatorname{div}(\rho \nabla u_-) + \rho k_-^2 u_- = 0 \text{ dans } \Omega_-, \quad (1.8a)$$

$$\Delta u_+ + k_+^2 u_+ = 0 \text{ dans } \Omega_+, \quad (1.8b)$$

$$\partial_r u_+ - i k_+ u_+ = \mathcal{O}_{r \rightarrow +\infty}(r^{-2}), \quad (1.8c)$$

$$u_- = u_+ + u_{\text{inc}} \text{ sur } \Gamma, \quad (1.8d)$$

$$\rho \partial_{\mathbf{n}} u_- = \partial_{\mathbf{n}} u_+ + \partial_{\mathbf{n}} u_{\text{inc}} \text{ sur } \Gamma. \quad (1.8e)$$

Nous terminons cette section en mentionnant le fait que le problème de diffraction-transmission (1.8) admet une unique solution sous réserve que  $\rho$ ,  $k_-$  et  $\Gamma$  soient suffisamment réguliers [81]. Par la suite, pour simplifier la présentation, nous supposons que  $\rho$  et  $k_-$  sont des fonctions de  $\mathcal{C}^\infty(\Omega_-)$  et que  $\Gamma$  est une surface  $\mathcal{C}^\infty$ .

### 1.3 Cadre fonctionnel

Maintenant que nous avons introduit le problème de diffraction-transmission (1.8), nous allons présenter des méthodes classiques permettant de le résoudre numériquement. Pour ce faire, il nous faut toutefois rappeler préalablement des notations, des définitions et des résultats techniques d'analyse fonctionnelle d'une part et de représentation intégrale d'autre part. Dans cette section inspirée des ouvrages [82, 86, 88], nous nous focalisons sur les rappels d'analyse fonctionnelle. Plus précisément, nous présentons les espaces de Sobolev avec lesquels nous travaillons ainsi que les définitions adoptées pour les opérateurs de trace. Nous rappelons également des résultats permettant d'écrire le problème de diffraction-transmission (1.8) sous forme variationnelle.

Les espaces de Sobolev associés à  $\Omega_-$  sont standards :

$$\mathbf{H}^1(\Omega_-) = \{u \in L^2(\Omega_-) : \nabla u \in \mathbf{L}^2(\Omega_-)\} \quad , \quad \mathbf{H}(\operatorname{div}, \Omega_-) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega_-) : \operatorname{div} \mathbf{u} \in L^2(\Omega_-)\},$$

$$\mathbf{H}^1(\Delta, \Omega_-) = \{u \in \mathbf{H}^1(\Omega_-) : \Delta u \in L^2(\Omega_-)\} = \{u \in \mathbf{H}^1(\Omega_-) : \nabla u \in \mathbf{H}(\operatorname{div}, \Omega_-)\}.$$

Il s'agit d'espaces vectoriels normés dont les normes sont données par :

$$\|u\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_-)} = \sqrt{\|u\|_{L^2(\Omega_-)}^2 + \|\nabla u\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_-)}^2} \quad , \quad \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}(\operatorname{div}, \Omega_-)} = \sqrt{\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_-)}^2 + \|\operatorname{div} \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega_-)}^2},$$

$$\|u\|_{\mathbf{H}^1(\Delta, \Omega_-)} = \sqrt{\|u\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_-)}^2 + \|\Delta u\|_{L^2(\Omega_-)}^2}.$$

Les espaces de Sobolev associés à  $\Omega_+$  sont des espaces locaux non standards :

$$\mathbf{H}_{\text{loc}}^1(\overline{\Omega_+}) = \bigcap_{R > R_0} \mathbf{H}^1(\Omega_+^R) \quad , \quad \mathbf{H}_{\text{loc}}(\operatorname{div}, \overline{\Omega_+}) = \bigcap_{R > R_0} \mathbf{H}(\operatorname{div}, \Omega_+^R),$$

$$\mathbf{H}_{\text{loc}}^1(\Delta, \overline{\Omega_+}) = \bigcap_{R > R_0} \mathbf{H}^1(\Delta, \Omega_+^R).$$

Ici,  $\Omega_+^R = \Omega_+ \cap B(0; R)$ ,  $B(0; R)$  désigne la boule ouverte de rayon  $R$  centrée sur l'origine et  $R_0$  est un réel strictement positif tel que  $\Omega_- \subset B(0; R_0)$ . Les espaces  $\mathbf{H}_{\text{loc}}^1(\overline{\Omega_+})$ ,  $\mathbf{H}_{\text{loc}}(\operatorname{div}, \overline{\Omega_+})$  et  $\mathbf{H}_{\text{loc}}^1(\Delta, \overline{\Omega_+})$  sont des espaces vectoriels localement convexes [26], leurs semi-normes étant données par :

$$|u|_{\mathbf{H}_{\text{loc}}^1(\overline{\Omega_+}), R} = \|u\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_+^R)} \quad , \quad |\mathbf{u}|_{\mathbf{H}_{\text{loc}}(\operatorname{div}, \overline{\Omega_+}), R} = \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}(\operatorname{div}, \Omega_+^R)},$$

$$|u|_{\mathbf{H}_{\text{loc}}^1(\Delta, \overline{\Omega_+}), R} = \|u\|_{\mathbf{H}^1(\Delta, \Omega_+^R)}.$$

Les opérateurs de trace de Dirichlet, de trace de Neumann et de trace normale, respectivement notés  $\gamma_D^\pm$ ,  $\gamma_N^\pm$  et  $\gamma_n^\pm$ , sont usuels :

$$\begin{aligned} \gamma_D^\pm : \mathbf{H}^1(\Omega_-) \otimes \mathbf{H}_{\text{loc}}^1(\overline{\Omega_+}) &\rightarrow \mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma) & \gamma_N^\pm : \mathbf{H}^1(\Delta, \Omega_-) \otimes \mathbf{H}_{\text{loc}}^1(\Delta, \overline{\Omega_+}) &\rightarrow \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \\ u &\mapsto u_{\pm}|_\Gamma & u &\mapsto \partial_n u_{\pm}|_\Gamma \\ \gamma_n^\pm : \mathbf{H}(\text{div}, \Omega_-) \otimes \mathbf{H}_{\text{loc}}(\text{div}, \overline{\Omega_+}) &\rightarrow \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \\ \mathbf{u} &\mapsto \mathbf{u}|_\Gamma \cdot \mathbf{n} \end{aligned}$$

Nous rappelons que  $\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  est un espace de Hilbert dont le dual est  $\mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  et qu'il peut, par exemple, être défini par les égalités suivantes :

$$\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma) = \gamma_D^-(\mathbf{H}^1(\Omega_-)) = \gamma_D^+(\mathbf{H}_{\text{loc}}^1(\overline{\Omega_+})).$$

Les opérateurs de trace précédents sont continus. La continuité dans les espaces vectoriels normés est une notion classique. Par exemple, la continuité de  $\gamma_D^-$  sur  $\mathbf{H}^1(\Omega_-)$  se traduit par :

$$\exists C > 0, \quad \forall u \in \mathbf{H}^1(\Omega_-), \quad \|\gamma_D^- u\|_{\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq C \|u\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_-)}.$$

En revanche, la notion de continuité dans les espaces vectoriels localement convexes est beaucoup moins connue [26]. A titre d'exemple, la continuité de  $\gamma_D^+$  sur  $\mathbf{H}_{\text{loc}}^1(\overline{\Omega_+})$  est équivalente à l'assertion suivante :

$$\exists R > R_0, \quad \exists C > 0, \quad \forall u \in \mathbf{H}_{\text{loc}}^1(\overline{\Omega_+}), \quad \|\gamma_D^+ u\|_{\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq C |u|_{\mathbf{H}_{\text{loc}}^1(\overline{\Omega_+}), R}.$$

A ce stade, il est possible de reformuler le problème de diffraction-transmission (1.8) dans le cadre du formalisme précédent. Il s'agit de trouver  $u \in \mathbf{H}^1(\Omega_-) \otimes \mathbf{H}_{\text{loc}}^1(\overline{\Omega_+})$  tel que :

$$\begin{cases} \text{div}(\rho \nabla u) + \rho k_-^2 u = 0 \text{ dans } \Omega_-, \\ \Delta u + k_+^2 u = 0 \text{ dans } \Omega_+, \\ \partial_r u - ik_+ u = \mathcal{O}_{r \rightarrow +\infty}(r^{-2}), \\ \gamma_D^- u = \gamma_D^+ u + \gamma_D^+ u_{\text{inc}} \text{ sur } \Gamma, \\ \gamma_n^- (\rho \nabla u) = \gamma_N^+ u + \gamma_N^+ u_{\text{inc}} \text{ sur } \Gamma, \end{cases}$$

la condition de radiation ayant un sens car  $u$  est  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\Omega_+$ . Nous remarquons par ailleurs que si  $\rho$  est constant, le problème de diffraction-transmission précédent se réécrit de manière équivalente comme :

$$\begin{cases} \Delta u + k_-^2 u = 0 \text{ dans } \Omega_-, \\ \Delta u + k_+^2 u = 0 \text{ dans } \Omega_+, \\ \partial_r u - ik_+ u = \mathcal{O}_{r \rightarrow +\infty}(r^{-2}), \\ \gamma_D^- u = \gamma_D^+ u + \gamma_D^+ u_{\text{inc}} \text{ sur } \Gamma, \\ \rho \gamma_n^- u = \gamma_N^+ u + \gamma_N^+ u_{\text{inc}} \text{ sur } \Gamma. \end{cases}$$

Nous terminons cette section en rappelant quelques résultats qui nous serviront pour écrire le problème de diffraction-transmission (1.8) sous forme variationnelle.

Tout d'abord, la dualité  $\mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)/\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  est liée au produit scalaire  $L^2(\Gamma)$ . Plus précisément,  $L^2(\Gamma)$  est classiquement injecté dans  $\mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  comme suit :

$$\forall u \in L^2(\Gamma), \quad \forall v \in \mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma), \quad \langle u; v \rangle_{\mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times \mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} = \int_\Gamma \bar{u} v \, d\Gamma.$$

Par la suite, dans l'optique d'alléger les notations, la dualité  $\mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)/\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  sera simplement notée  $\langle \cdot; \cdot \rangle$ .

La relation précédente permet notamment de comprendre les formules d'intégration par parties suivantes, classiques pour des fonctions de régularité  $\mathcal{C}^1$  et  $\mathcal{C}^2$  :

$$\forall \mathbf{u} \in \mathbf{H}(\text{div}, \Omega_-), \quad \forall v \in \mathbf{H}^1(\Omega_-), \quad \int_{\Omega_-} (\text{div } \mathbf{u}) v \, d\Omega_- = - \int_{\Omega_-} \mathbf{u} \cdot \nabla v \, d\Omega_- + \overline{\langle \gamma_n^- \mathbf{u}; \gamma_D^- v \rangle}, \quad (1.9)$$

$$\forall u \in \mathbf{H}^1(\Delta, \Omega_-), \quad \forall v \in \mathbf{H}^1(\Omega_-), \quad \int_{\Omega_-} (\Delta u) v \, d\Omega_- = - \int_{\Omega_-} \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega_- + \overline{\langle \gamma_N^- u; \gamma_D^- v \rangle}. \quad (1.10)$$

Pour finir, nous rappelons comment écrire sous forme variationnelle des équations dans  $\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  et  $\mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  :

$$\begin{aligned} u = v \text{ dans } \mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma) &\Leftrightarrow \forall w \in \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), \quad \langle w; u \rangle = \langle w; v \rangle, \\ u = v \text{ dans } \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) &\Leftrightarrow \forall w \in \mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma), \quad \langle u; w \rangle = \langle v; w \rangle. \end{aligned}$$

## 1.4 Représentations intégrales

Dans cette section, qui est basée sur les ouvrages [40] de Colton et Kress, [82] de McLean et [88] de Nédélec, nous rappelons des résultats concernant la représentation intégrale des solutions de l'équation de Helmholtz, le nombre d'onde  $k \in \mathbb{R}_+^*$  étant quelconque.

La théorie des représentations intégrales est basée sur le fait que les solutions de l'équation de Helmholtz sont intrinsèquement liées à des opérateurs intégraux volumiques, également appelés potentiels. Ces opérateurs sont construits à partir de la fonction de Green, notée  $G_k$  et définie sur  $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$  par :

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}, \quad G_k(\mathbf{x}) = \frac{e^{ik\|\mathbf{x}\|}}{4\pi\|\mathbf{x}\|}.$$

Cette dernière correspond à la solution fondamentale de l'équation de Helmholtz. Plus précisément,  $G_k$  vérifie, au sens des distributions, l'équation de Helmholtz suivante :

$$-\Delta G_k - k^2 G_k = \delta_0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3).$$

Bien qu'il soit relativement aisé d'obtenir l'expression de la solution fondamentale de l'équation de Helmholtz lorsque  $k$  est constant, ce n'est, d'une manière générale, pas le cas lorsque  $k$  est une fonction. Ceci explique notamment pourquoi les représentations intégrales sont majoritairement utilisées lorsque  $k$  est constant.

Les opérateurs de simple et de double couche volumiques associés à  $k$ , notés  $\mathcal{S}_k$  et  $\mathcal{D}_k$ , sont respectivement définis de  $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  et de  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  dans  $H^1(\Omega_-) \otimes H_{\text{loc}}^1(\overline{\Omega_+})$  comme suit :

$$\begin{aligned} \forall p \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma, \quad \mathcal{S}_k p(\mathbf{x}) &= \int_{\Gamma} G_k(\mathbf{x} - \mathbf{y}) p(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \\ \forall p \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma, \quad \mathcal{D}_k p(\mathbf{x}) &= \int_{\Gamma} \partial_{\mathbf{n}(\mathbf{y})} G_k(\mathbf{x} - \mathbf{y}) p(\mathbf{y}) d\mathbf{y}. \end{aligned}$$

Ils sont par ailleurs continus. Nous rappelons que la continuité de  $\mathcal{S}_k$  dans  $H^1(\Omega_-)$  se traduit par :

$$\exists C > 0, \quad \forall p \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), \quad \|\mathcal{S}_k p\|_{H^1(\Omega_-)} \leq C \|u\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)},$$

alors que sa continuité dans  $H_{\text{loc}}^1(\overline{\Omega_+})$  signifie que :

$$\forall R > R_0, \quad \exists C > 0, \quad \forall p \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), \quad \|\mathcal{S}_k p\|_{H_{\text{loc}}^1(\overline{\Omega_+}, R)} \leq C \|u\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)}.$$

Un des intérêts des opérateurs de simple et de double couche volumiques est qu'ils permettent de générer des solutions de l'équation de Helmholtz.

**Proposition 1.1** (Construction de solutions de l'équation de Helmholtz).

Soit  $p \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  (respectivement  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ ) et  $u = \mathcal{S}_k p$  (respectivement  $u = \mathcal{D}_k p$ ). La fonction  $u$  vérifie alors :

$$\Delta u + k^2 u = 0 \text{ dans } \Omega_- \cup \Omega_+ \quad , \quad \partial_r u - iku = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right).$$

Remarquons que cette proposition permet d'affirmer que  $\mathcal{S}_k$  et  $\mathcal{D}_k$  sont respectivement continus de  $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  et  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  dans  $H^1(\Delta, \Omega_-) \otimes H_{\text{loc}}^1(\Delta, \overline{\Omega_+})$ .

Maintenant que nous savons construire des solutions de l'équation de Helmholtz, nous aimerions déterminer leur traces de Dirichlet et de Neumann sur  $\Gamma$ . Pour cela, il est suffisant d'expliciter les traces sur  $\Gamma$  des opérateurs de simple et de double couche volumiques, ce qui se fait *via* l'introduction d'opérateurs intégraux surfaciques.

Les opérateurs intégraux surfaciques de simple couche, de double couche, de double couche adjoint et hyper-singulier, respectivement notés  $S_k$ ,  $D_k$ ,  $D_k^*$  et  $N_k$ , définis ci-dessous sont continus dans les espaces corres-

pondants :

$$\begin{aligned}
 S_k : \quad & \begin{array}{l} \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow \mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \\ p \mapsto S_k p \end{array} \quad \text{où } \forall \mathbf{x} \in \Gamma, \quad S_k p(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} G_k(\mathbf{x} - \mathbf{y}) p(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \\
 D_k : \quad & \begin{array}{l} \mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow \mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \\ p \mapsto D_k p \end{array} \quad \text{où } \forall \mathbf{x} \in \Gamma, \quad D_k p(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} \partial_{\mathbf{n}(\mathbf{y})} G_k(\mathbf{x} - \mathbf{y}) p(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \\
 D_k^* : \quad & \begin{array}{l} \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \\ p \mapsto D_k^* p \end{array} \quad \text{où } \forall \mathbf{x} \in \Gamma, \quad D_k^* p(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} \partial_{\mathbf{n}(\mathbf{x})} G_k(\mathbf{x} - \mathbf{y}) p(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \\
 N_k : \quad & \begin{array}{l} \mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \\ p \mapsto N_k p \end{array} \quad \text{où } \forall \mathbf{x} \in \Gamma, \quad N_k p(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} \partial_{\mathbf{n}(\mathbf{x})} \partial_{\mathbf{n}(\mathbf{y})} G_k(\mathbf{x} - \mathbf{y}) p(\mathbf{y}) d\mathbf{y}.
 \end{aligned}$$

Nous rappelons que  $D_k$  et  $D_k^*$  sont des opérateurs compacts.

Contrairement aux opérateurs intégraux volumiques, les opérateurs intégraux surfaciques sont définis par des intégrales singulières, ce qui constitue une difficulté théorique importante [88]. Nous ne précisons que très brièvement ce point. Le noyau  $G_k(\mathbf{x} - \mathbf{y})$  présente une singularité en  $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^{-1}$ , intégrable sur  $\Gamma$ . La définition de  $S_k$  que nous avons donnée est donc légitime. Les noyaux  $\partial_{\mathbf{n}(\mathbf{x})} G_k(\mathbf{x} - \mathbf{y})$  et  $\partial_{\mathbf{n}(\mathbf{y})} G_k(\mathbf{x} - \mathbf{y})$  quant à eux ont une singularité en  $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^{-2}$ , non intégrable sur  $\Gamma$ . Les intégrales définissant  $D_k$  et  $D_k^*$  ne peuvent alors pas être considérées en tant que telles et doivent être comprises au sens de la valeur principale de Cauchy. Enfin,  $\partial_{\mathbf{n}(\mathbf{x})} \partial_{\mathbf{n}(\mathbf{y})} G_k(\mathbf{x} - \mathbf{y})$  présente une singularité en  $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^{-3}$ , également non intégrable sur  $\Gamma$ . L'intégrale définissant  $N_k$  doit être interprétée au sens de la partie finie de Hadamard. Remarquons qu'il est aussi possible de définir  $N_k$  sans avoir recours à la partie finie comme suit :

$$\forall p \in \mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma), \quad N_k p = -\text{rot}_{\Gamma} \mathbf{S}_k(\text{rot}_{\Gamma} p) + k^2 \mathbf{n} \cdot \mathbf{S}_k(p \mathbf{n}),$$

l'opérateur de simple couche surfacique vectoriel  $\mathbf{S}_k$  étant défini de la même manière que son homologue scalaire.

Nous disposons à présent de tous les outils nécessaires pour exprimer les traces sur  $\Gamma$  des opérateurs de simple et de double couche volumiques.

**Proposition 1.2** (Traces des opérateurs de simple et de double couche volumiques).

Les traces de Dirichlet et de Neumann des opérateurs intégraux volumiques sont données par :

$$\begin{aligned}
 \gamma_D^- \mathcal{S}_k &= S_k \quad , \quad \gamma_D^+ \mathcal{S}_k = S_k \quad , \quad \gamma_D^- \mathcal{D}_k = -\frac{1}{2} Id + D_k \quad , \quad \gamma_D^+ \mathcal{D}_k = \frac{1}{2} Id + D_k, \\
 \gamma_N^- \mathcal{S}_k &= \frac{1}{2} Id + D_k^* \quad , \quad \gamma_N^+ \mathcal{S}_k = -\frac{1}{2} Id + D_k^* \quad , \quad \gamma_N^- \mathcal{D}_k = N_k \quad , \quad \gamma_N^+ \mathcal{D}_k = N_k.
 \end{aligned}$$

Nous terminons cette section en donnant un théorème de représentation, exprimant le fait que les opérateurs de simple et de double couche volumiques permettent de représenter les solutions de l'équation de Helmholtz.

**Proposition 1.3** (Représentation des solutions de l'équation de Helmholtz).

Soit  $u \in \mathbf{H}^1(\Omega_-) \otimes \mathbf{H}_{\text{loc}}^1(\overline{\Omega_+})$  tel que :

$$\Delta u + k^2 u = 0 \text{ dans } \Omega_- \cup \Omega_+ \quad , \quad \partial_r u - iku = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right).$$

En posant :

$$[\gamma_D u] = \gamma_D^- u - \gamma_D^+ u \quad , \quad [\gamma_N u] = \gamma_N^- u - \gamma_N^+ u,$$

nous avons :

$$u = \mathcal{S}_k[\gamma_N u] - \mathcal{D}_k[\gamma_D u] \text{ dans } \Omega_- \cup \Omega_+.$$

**Preuve**

Cette preuve, que nous donnons essentiellement à titre informatif, est sommaire et purement formelle.

Nous associons à  $u$  la distribution  $T_u$  définie par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3), \quad \langle T_u; \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} u \varphi d\mathbf{x}.$$

Cette dernière vérifie, au sens des distributions, l'équation de Helmholtz avec un second membre :

$$\Delta T_u + k^2 T_u = -s_{[\gamma_N u]} + d_{[\gamma_D u]}.$$

Les distributions  $s_{[\gamma_N u]}$  et  $d_{[\gamma_D u]}$ , communément et respectivement appelées distributions de simple et de double couche, sont définies par :

$$\langle s_{[\gamma_N u]}; \varphi \rangle = \int_{\Gamma} [\gamma_N u] \varphi \, d\Gamma \quad , \quad \langle d_{[\gamma_D u]}; \varphi \rangle = \int_{\Gamma} [\gamma_D u] \partial_{\mathbf{n}} \varphi \, d\Gamma.$$

La fonction de Green étant la solution fondamentale de l'équation de Helmholtz, nous en déduisons que :

$$T_u = G_k * s_{[\gamma_N u]} - G_k * d_{[\gamma_D u]},$$

et après quelques manipulations, il vient :

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega_- \cup \Omega_+, \quad u(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} G_k(\mathbf{x} - \mathbf{y}) [\gamma_N u](\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} - \int_{\Gamma} \partial_{\mathbf{n}(\mathbf{y})} G_k(\mathbf{x} - \mathbf{y}) [\gamma_D u](\mathbf{y}) \, d\mathbf{y},$$

la relation suivante étant utile pour aboutir à la formule précédente :

$$d_{[\gamma_D u]} = -\operatorname{div}(\mathbf{s}_{[\gamma_D u]}\mathbf{n}).$$

■

## 1.5 Champ lointain et surface équivalente sonar

Lorsqu'un sonar envoie une onde incidente sur un objet diffractant, l'onde diffractée  $u_+$  se propage dans toutes les directions de l'espace. Elle peut alors trahir la présence de l'objet diffractant si elle est détectée par des récepteurs associés au sonar. Ces récepteurs, comme le sonar lui-même, sont généralement éloignés de l'objet diffractant. Il est alors intéressant de connaître le comportement à l'infini de  $u_+$  pour quantifier la furtivité de l'objet diffractant. Dans cette optique, nous nous intéressons au comportement asymptotique des solutions de l'équation de Helmholtz sur  $\Omega_+$  vérifiant la condition de radiation (1.5). Etant donné que les opérateurs de simple et de double couche volumiques permettent de représenter ces solutions (voir Proposition 1.3), il est suffisant de préciser le comportement à l'infini des fonctions générées par ces opérateurs. Dans cette section,  $k \in \mathbb{R}_+^*$  et  $\mathbb{S}$  désigne la sphère unité de centre  $\mathbf{0}$ .

Les opérateurs de champ lointain associés à  $\mathcal{S}_k$  et  $\mathcal{D}_k$ , respectivement notés  $\mathcal{A}_k$  et  $\mathcal{B}_k$ , sont définis par :

$$\begin{aligned} \forall p \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), \quad \forall \boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{S}, \quad \mathcal{A}_k p(\boldsymbol{\sigma}) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} e^{-ik\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{y}} p(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}, \\ \forall q \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma), \quad \forall \boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{S}, \quad \mathcal{B}_k q(\boldsymbol{\sigma}) &= -\frac{ik}{4\pi} \int_{\Gamma} e^{-ik\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{y}} \mathbf{n}(\mathbf{y}) \cdot \boldsymbol{\sigma} q(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}. \end{aligned}$$

La proposition suivante [88] permet de comprendre l'intérêt de ces opérateurs et justifie également leur dénomination.

**Proposition 1.4** (Champ lointain des opérateurs intégraux volumiques).

Soit  $p \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  et  $q \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ . Nous disposons alors des développements asymptotiques suivants :

$$\mathcal{S}_k p(\mathbf{x}) = \frac{e^{ikr}}{r} \left[ \mathcal{A}_k p(\boldsymbol{\sigma}) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right) \right] \quad , \quad \mathcal{D}_k q(\mathbf{x}) = \frac{e^{ikr}}{r} \left[ \mathcal{B}_k q(\boldsymbol{\sigma}) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right) \right],$$

avec  $\mathbf{x} = r\boldsymbol{\sigma}$  et  $\|\boldsymbol{\sigma}\| = 1$ . Ces développements sont par ailleurs uniformes en  $\boldsymbol{\sigma}$ .

Les opérateurs de champ lointain sont intéressants en pratique puisqu'ils permettent de calculer l'intensité, à l'infini, des solutions de l'équation de Helmholtz sur  $\Omega_+$  vérifiant la condition de radiation (1.5). En effet, si  $u \in H_{\text{loc}}^1(\overline{\Omega_+})$  est une solution de l'équation de Helmholtz sur  $\Omega_+$  qui satisfait (1.5), nous disposons, de part les Propositions 1.3 et 1.4, du développement asymptotique suivant :

$$u(\mathbf{x}) = \frac{e^{ikr}}{r} \left[ u_{\infty}(\boldsymbol{\sigma}) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right) \right] \quad \text{avec} \quad \mathbf{x} = r\boldsymbol{\sigma} \quad , \quad \|\boldsymbol{\sigma}\| = 1,$$

l'opérateur de champ lointain  $u_\infty$  étant défini par :

$$u_\infty = -\mathcal{A}_k \gamma_N^+ u + \mathcal{B}_k \gamma_D^+ u.$$

Revenons-en à présent au problème de diffraction-transmission (1.8). L'opérateur de champ lointain de  $u_+$ , noté  $u_{+, \infty}$ , nous renseigne sur le niveau de furtivité de l'objet diffractant. Concrètement, plus le module de  $u_{+, \infty}$  est grand dans une direction, plus l'objet est visible dans cette direction par d'éventuels récepteurs. En pratique toutefois, la grandeur d'intérêt n'est pas le champ lointain mais la surface équivalente sonar, classiquement appelée SES. Pour une direction  $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{S}$  donnée, cette dernière est définie comme suit :

$$\text{SES}(\boldsymbol{\sigma}; \boldsymbol{\sigma}_{\text{inc}}) = 10 \log_{10} \left( 4\pi \frac{|u_{+, \infty}(\boldsymbol{\sigma})|^2}{|u_{\text{inc}}|^2} \right),$$

et s'exprime en décibels (dB). Remarquons qu'il existe deux types de SES. Si la direction de calcul de la SES correspond à la direction de l'onde incidente, autrement dit si  $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{\text{inc}}$ , nous parlons de SES monostatique. En pratique, cela revient à dire que le récepteur mesurant l'intensité de l'onde diffractée par l'objet diffractant se situe au même endroit que le sonar. En revanche, la SES est dite bistatique si sa direction de calcul n'est pas la direction de l'onde incidente, à savoir  $\boldsymbol{\sigma} \neq \boldsymbol{\sigma}_{\text{inc}}$ . D'un point de vue pratique, le récepteur mesurant l'intensité de l'onde diffractée par l'objet diffractant ne se trouve alors pas au même endroit que le sonar.

Nous terminons cette section en donnant quelques explications concernant la définition de la SES. Nous adoptons pour cela les notations de la section 1.1. La SES a pour but de mesurer, à grande distance d'un objet diffractant, l'intensité de l'onde **physique** de pression réfléchiée par celui-ci lorsqu'il est éclairé par une onde incidente. Cependant, la SES de l'objet diffractant est définie par :

$$10 \log_{10} \left( 4\pi \frac{|\hat{p}_{+, \infty}|^2}{|\hat{p}_{\text{inc}}|^2} \right),$$

et mesure donc l'intensité de l'onde complexe réfléchiée par l'objet diffractant. Bien que curieux, ceci est tout à fait normal. Les champs physiques de pression et de vitesse sont respectivement donnés par :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\tilde{p}_+) &= \mathcal{R}(\hat{p}_+ e^{-i\omega t}) = \mathcal{R}(\hat{p}_+) \cos(\omega t) + \mathcal{I}(\hat{p}_+) \sin(\omega t), \\ \mathcal{R}(\mathbf{v}_+) &= \mathcal{R}(\hat{\mathbf{v}}_+ e^{-i\omega t}) = \mathcal{R}(\hat{\mathbf{v}}_+) \cos(\omega t) + \mathcal{I}(\hat{\mathbf{v}}_+) \sin(\omega t). \end{aligned}$$

La puissance acoustique rayonnée à travers une sphère de grand rayon, notée  $S_R$ , est donnée par :

$$\int_{S_R} \mathcal{R}(\tilde{p}_+) \mathcal{R}(\mathbf{v}_+) \cdot \mathbf{n} dS_R.$$

De part la condition de radiation (1.5), nous savons que  $\nabla \hat{p}_+ \cdot \mathbf{n} \approx ik_+ \hat{p}_+$  sur  $S_R$ . Etant donné que  $\hat{\mathbf{v}}_+ = \frac{1}{i\omega\rho_{0,+}} \nabla \hat{p}_+$ , nous en déduisons que la puissance acoustique rayonnée à travers  $S_R$  est à peu près égale à :

$$\frac{k_+}{\omega\rho_{0,+}} \int_{S_R} [\mathcal{R}(\tilde{p}_+)]^2 dS_R,$$

et par conséquent, sa moyenne temporelle est donnée par :

$$\frac{k_+}{2\omega\rho_{0,+}} \int_{S_R} |\hat{p}_+|^2 dS_R.$$

C'est en cela qu'il est pertinent de regarder  $|\hat{p}_{+, \infty}|$  pour obtenir des informations sur l'onde physique de pression  $\mathcal{R}(\tilde{p}_+)$ .

## 1.6 Couplages forts

Dans cette section, nous présentons deux méthodes de résolution classiques du problème de diffraction-transmission (1.8). Ces méthodes couplent au sein d'une même formulation les équations correspondant respectivement aux parties intérieure et extérieure du problème. Nous parlons alors de couplages forts. La première méthode, qui correspond à un couplage fort BEM-BEM, n'est utilisable que si l'objet diffractant est homogène. La seconde est un couplage fort FEM-BEM et elle est adaptée à la résolution du problème de diffraction-transmission (1.8) quelle que soit la nature de l'objet diffractant, notamment lorsque celui-ci

est inhomogène.

Cette section n'a pas vocation à présenter les couplages forts les plus avancés ou les plus récents. Les couplages forts que nous introduisons ici sont parmi les plus standards. Dans ce travail, ils jouent dans un premier temps un rôle illustratif. Ils nous permettent en effet de discuter des limitations des couplages forts dans leur ensemble et de motiver l'introduction de nouveaux couplages que nous qualifierons de faibles. Ces couplages forts nous ont également servi de méthodes de référence pour valider numériquement les couplages faibles que nous introduirons par la suite.

### 1.6.1 Couplage fort BEM-BEM

Dans le cas d'un objet diffractant homogène, il est possible d'écrire des équations intégrales correspondant d'une part, au domaine intérieur  $\Omega_-$ , et d'autre part, au domaine extérieur  $\Omega_+$ . Pour obtenir un couplage fort BEM-BEM, il reste alors à combiner ces équations intégrales avec les conditions de transmission (1.8d)-(1.8e). Bien sûr, il existe autant de couplages forts BEM-BEM que de manières de combiner les équations mentionnées précédemment et la littérature à ce sujet est d'ailleurs très riche. Dans cette sous-section, nous n'introduisons qu'un seul couplage fort BEM-BEM pour ne pas surcharger la présentation. Une étude détaillée de cette méthode est donnée dans [42]. D'autres exemples de couplages forts BEM-BEM sont présentés dans les contributions des années 70 et 80 [72, 73] et dans les travaux plus récents [23, 24, 25, 37, 50, 67, 75, 91, 92], cette sélection n'ayant, ni la prétention, ni pour but, d'être exhaustive.

Le couplage fort BEM-BEM que nous présentons repose sur les représentations intégrales suivantes de la solution  $u$  du problème de diffraction-transmission (1.8) (voir Proposition 1.3) :

$$u = \mathcal{S}_{k_-} \gamma_N^- u - \mathcal{D}_{k_-} \gamma_D^- u \text{ dans } \Omega_- \quad , \quad u = -\mathcal{S}_{k_+} \gamma_N^+ u + \mathcal{D}_{k_+} \gamma_D^+ u \text{ dans } \Omega_+.$$

Dans ces représentations, les arguments des opérateurs intégraux volumiques correspondent aux traces de Dirichlet et de Neumann des solutions du problème de diffraction-transmission (1.8) et nous parlons alors de méthodes directes. Il est également possible de chercher des solutions du problème de diffraction-transmission (1.8) sous la forme générale suivante :

$$u = \mathcal{S}_{k_-} p_- + \mathcal{D}_{k_-} q_- \text{ dans } \Omega_- \quad , \quad u = \mathcal{S}_{k_+} p_+ + \mathcal{D}_{k_+} q_+ \text{ dans } \Omega_+,$$

les inconnues  $p_-$ ,  $q_-$ ,  $p_+$  et  $q_+$  n'étant *a priori* pas liées aux traces de Dirichlet et de Neumann de  $u$ . Nous parlons alors de méthodes indirectes.

**Proposition 1.5** (Couplage fort BEM-BEM).

Soit  $u \in H^1(\Omega_-) \otimes H_{\text{loc}}^1(\overline{\Omega_+})$  une solution du problème de diffraction-transmission (1.8). Les relations suivantes sont alors vérifiées :

$$\begin{pmatrix} -(D_{k_-} + D_{k_+}) & \mathcal{S}_{k_-} + \rho \mathcal{S}_{k_+} \\ -(\rho N_{k_-} + N_{k_+}) & \rho(D_{k_-}^* + D_{k_+}^*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_D^- u \\ \gamma_N^- u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \gamma_D^+ u_{\text{inc}} - D_{k_+} \gamma_D^+ u_{\text{inc}} + \mathcal{S}_{k_+} \gamma_N^+ u_{\text{inc}} \\ \frac{1}{2} \gamma_N^+ u_{\text{inc}} + D_{k_+}^* \gamma_N^+ u_{\text{inc}} - N_{k_+} \gamma_D^+ u_{\text{inc}} \end{pmatrix}. \quad (1.11)$$

Notons que si l'onde incidente est une onde plane, le second membre se simplifie en :

$$\begin{pmatrix} \gamma_D^+ u_{\text{inc}} \\ \gamma_N^+ u_{\text{inc}} \end{pmatrix}.$$

**Preuve**

La Proposition 1.3 appliquée à  $u|_{\Omega_-}$  prolongée par 0 dans  $\Omega_+$  fournit la représentation suivante :

$$u = \mathcal{S}_{k_-} \gamma_N^- u - \mathcal{D}_{k_-} \gamma_D^- u \text{ dans } \Omega_-.$$

De la même manière, nous obtenons :

$$u = -\mathcal{S}_{k_+} \gamma_N^+ u + \mathcal{D}_{k_+} \gamma_D^+ u \text{ dans } \Omega_+.$$

Les traces de Dirichlet et de Neumann de  $u$  sont alors données par (Proposition 1.2) :

$$\gamma_D^- u = \mathcal{S}_{k_-} \gamma_N^- u + \frac{1}{2} \gamma_D^- u - D_{k_-} \gamma_D^- u \quad , \quad \gamma_D^+ u = -\mathcal{S}_{k_+} \gamma_N^+ u + \frac{1}{2} \gamma_D^+ u + D_{k_+} \gamma_D^+ u,$$

$$\gamma_N^- u = \frac{1}{2} \gamma_N^- u + D_{k_-}^* \gamma_N^- u - N_{k_-} \gamma_D^- u \quad , \quad \gamma_N^+ u = \frac{1}{2} \gamma_N^+ u - D_{k_+}^* \gamma_N^+ u + N_{k_+} \gamma_D^+ u.$$

Pour conclure, il suffit d'injecter ces relations dans les conditions de transmission (1.8d)-(1.8e), qui doivent être interprétées comme suit :

$$\gamma_D^- u = \gamma_D^+ u + \gamma_D^+ u_{\text{inc}} \quad , \quad \rho \gamma_N^- u = \gamma_N^+ u + \gamma_N^+ u_{\text{inc}},$$

et d'éliminer  $\gamma_D^+ u$  et  $\gamma_N^+ u$  en utilisant ces mêmes conditions.

Si  $u_{\text{inc}}$  est une onde plane, elle vérifie l'équation de Helmholtz dans  $\Omega_-$  :

$$\Delta u_{\text{inc}} + k_{\pm}^2 u_{\text{inc}} = 0 \text{ dans } \Omega_-.$$

En prolongeant  $u_{\text{inc}}$  par 0 dans  $\Omega_+$  et en utilisant la Proposition 1.3, nous obtenons la représentation suivante :

$$u_{\text{inc}} = \mathcal{S}_{k_+} \gamma_N^- u_{\text{inc}} - \mathcal{D}_{k_+} \gamma_D^- u_{\text{inc}} \text{ dans } \Omega_-.$$

Les traces de Dirichlet et de Neumann de  $u_{\text{inc}}$  sont alors données par (Proposition 1.2) :

$$\gamma_D^- u_{\text{inc}} = \mathcal{S}_{k_+} \gamma_N^- u_{\text{inc}} + \frac{1}{2} \gamma_D^- u_{\text{inc}} - \mathcal{D}_{k_+} \gamma_D^- u_{\text{inc}} \quad , \quad \gamma_N^- u_{\text{inc}} = \frac{1}{2} \gamma_N^- u_{\text{inc}} + D_{k_+}^* \gamma_N^- u_{\text{inc}} - N_{k_+} \gamma_D^- u_{\text{inc}}.$$

Pour conclure, il suffit de remarquer que :

$$\gamma_D^- u_{\text{inc}} = \gamma_D^+ u_{\text{inc}} \quad , \quad \gamma_N^- u_{\text{inc}} = \gamma_N^+ u_{\text{inc}}.$$

■

Le fait de savoir que les traces de Dirichlet et de Neumann intérieures des solutions du problème de diffraction-transmission (1.8) sont elles-mêmes solution du couplage fort BEM-BEM (1.11) est intéressant en soi mais cela n'est pas suffisant. En effet, il faut également s'assurer qu'une solution du couplage fort BEM-BEM (1.11) permet de générer une solution du problème de diffraction-transmission (1.8). La proposition suivante traite de ce point et permet de conclure sur l'équivalence entre le problème de diffraction-transmission (1.8) et le couplage fort BEM-BEM (1.11).

**Proposition 1.6** (Equivalence du couplage fort BEM-BEM).

Soit  $p_- \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  et  $q_- \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  tels que :

$$\begin{pmatrix} -(D_{k_-} + D_{k_+}) & S_{k_-} + \rho S_{k_+} \\ -(\rho N_{k_-} + N_{k_+}) & \rho(D_{k_-}^* + D_{k_+}^*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_- \\ q_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \gamma_D^+ u_{\text{inc}} - \mathcal{D}_{k_+} \gamma_D^+ u_{\text{inc}} + \mathcal{S}_{k_+} \gamma_N^+ u_{\text{inc}} \\ \frac{1}{2} \gamma_N^+ u_{\text{inc}} + D_{k_+}^* \gamma_N^+ u_{\text{inc}} - N_{k_+} \gamma_D^+ u_{\text{inc}} \end{pmatrix}.$$

Posons :

$$p_+ = p_- - \gamma_D^+ u_{\text{inc}} \quad , \quad q_+ = \rho q_- - \gamma_N^+ u_{\text{inc}}.$$

Alors, la fonction  $u \in H^1(\Omega_-) \otimes H_{\text{loc}}^1(\overline{\Omega_+})$  définie par :

$$u = \mathcal{S}_{k_-} q_- - \mathcal{D}_{k_-} p_- \text{ dans } \Omega_- \quad , \quad u = -\mathcal{S}_{k_+} q_+ + \mathcal{D}_{k_+} p_+ \text{ dans } \Omega_+,$$

est solution du problème de diffraction-transmission (1.8).

**Preuve**

De part la Proposition 1.1, il suffit de vérifier que les conditions de transmission (1.8d)-(1.8e) sont satisfaites, les calculs étant similaires à ceux du premier point de la proposition précédente.

■

Pour que le couplage fort BEM-BEM (1.11) soit viable en pratique, il est également nécessaire que l'opérateur matriciel correspondant soit inversible, ce qui est effectivement le cas. Une preuve de ce résultat est donnée dans [42].

**Proposition 1.7** (Inversibilité du couplage fort BEM-BEM).

Si  $k_-$ ,  $k_+$  et  $\rho$  sont des réels strictement positifs, l'opérateur du couplage fort BEM-BEM (1.11) est inversible.

Cette proposition permet par ailleurs de montrer que le problème de diffraction-transmission (1.8) est bien posé, c'est-à-dire qu'il admet une unique solution dépendant continûment des données  $\gamma_D^+ u_{\text{inc}}$  et  $\gamma_N^+ u_{\text{inc}}$ .

Commençons par discuter de l'unicité de la solution. Supposons que  $u$  vérifie le problème de diffraction-transmission (1.8),  $u_{\text{inc}}$  étant supposé nul. Il s'ensuit que  $(\gamma_D^- u; \gamma_N^- u)$  est solution du couplage fort BEM-BEM (1.11), le second membre étant nul. Cela implique que  $\gamma_D^- u$  et  $\gamma_N^- u$  sont nuls et par conséquent,  $u$  est nul dans  $\Omega_-$ . Pour finir, de part les conditions de transmission (1.8d)-(1.8e),  $\gamma_D^+ u$  et  $\gamma_N^+ u$  sont également nuls et il en va de même pour  $u$  dans  $\Omega_+$ .

L'existence d'une solution au problème de diffraction-transmission (1.8) découle de la surjectivité de l'opérateur du couplage fort BEM-BEM (1.11) et de la Proposition 1.6.

Justifions à présent la continuité des solutions. L'opérateur du couplage fort BEM-BEM (1.11) est continu et inversible de  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ , qui est un espace de Hilbert, dans lui-même et par conséquent, il est d'inverse continu. Par continuité des opérateurs intégraux surfaciques, le second membre du couplage fort BEM-BEM (1.11) dépend de manière continue de  $(\gamma_D^+ u_{\text{inc}}; \gamma_N^+ u_{\text{inc}})$ . C'est donc également le cas pour  $(\gamma_D^- u; \gamma_N^- u)$  et de par les conditions de transmission (1.8d)-(1.8e), il en va de même pour  $(\gamma_D^+ u; \gamma_N^+ u)$ . Il reste alors à utiliser la Proposition 1.3 et la continuité des opérateurs intégraux volumiques pour conclure.

Nous terminons cette sous-section en rappelant que la dépendance continue des solutions  $u$  du problème de diffraction-transmission (1.8) en l'onde incidente est équivalente aux inégalités de stabilité suivantes :

$$\begin{aligned} \exists C > 0, \quad \|u\|_{H^1(\Omega_-)} &\leq C \left( \|\gamma_D^+ u_{\text{inc}}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} + \|\gamma_N^+ u_{\text{inc}}\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \right), \\ \forall R > R_0, \quad \exists C > 0, \quad |u|_{H_{\text{loc}}^1(\overline{\Omega_+}), R} &\leq C \left( \|\gamma_D^+ u_{\text{inc}}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} + \|\gamma_N^+ u_{\text{inc}}\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \right), \end{aligned}$$

les constantes  $C$  ne dépendant pas de l'onde incidente.

### 1.6.2 Couplage fort FEM-BEM

Nous avons déjà mentionné qu'il est difficile d'écrire des équations intégrales correspondant à la partie intérieure du problème de diffraction-transmission (1.8) lorsque l'objet diffractant n'est pas homogène. Par conséquent, nous choisissons de réécrire la partie intérieure du problème de diffraction-transmission (1.8) sous forme variationnelle, la finalité étant d'utiliser des éléments finis volumiques. Des équations intégrales correspondant à la partie extérieure du problème de diffraction-transmission (1.8) peuvent en revanche être écrites sans difficulté. Les couplages forts FEM-BEM sont alors obtenus en combinant ces équations intégrales et la formulation variationnelle mentionnée précédemment aux conditions de transmission (1.8d)-(1.8e). Dans cette sous-section, pour ne pas surcharger la présentation, nous nous focalisons sur un unique couplage fort FEM-BEM, introduit par M. Costabel [41], et connu, de part sa structure, sous le nom de couplage fort FEM-BEM symétrique. D'autres couplages forts FEM-BEM, standards ou plus avancés, appliqués directement au problème de diffraction-transmission (1.8) ou à des problèmes similaires, sont toutefois disponibles dans la littérature. Parmi les contributions des années 70 et 80, nous référons à [27, 71, 105]. Les travaux [46, 54, 55, 56, 64, 66, 76, 83, 84, 90, 95, 99] sont en revanche plus récents. Remarquons que cette sélection de références n'est pas exhaustive.

**Proposition 1.8** (Couplage fort FEM-BEM).

Soit  $u \in H^1(\Omega_-) \otimes H_{\text{loc}}^1(\overline{\Omega_+})$  une solution du problème de diffraction-transmission (1.8). Alors  $(u|_{\Omega_-}; \gamma_N^+ u)$  est solution de la formulation variationnelle suivante :

$$\begin{aligned} \forall v \in H^1(\Omega_-), \quad \int_{\Omega_-} \rho \nabla u \cdot \nabla \bar{v} \, d\Omega_- - \int_{\Omega_-} \rho k_-^2 u \bar{v} \, d\Omega_- - \left\langle \left( \frac{1}{2} Id - D_{k_+}^* \right) \gamma_N^+ u; \gamma_D^- v \right\rangle - \overline{\langle N_{k_+} \gamma_D^- u; \gamma_D^- v \rangle} \\ = \overline{\langle \gamma_N^+ u_{\text{inc}}; \gamma_D^- v \rangle} - \overline{\langle N_{k_+} \gamma_D^+ u_{\text{inc}}; \gamma_D^- v \rangle}, \end{aligned} \quad (1.12a)$$

$$\forall v \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), \quad \frac{1}{2} \langle v; \gamma_D^- u \rangle - \langle v; D_{k_+} \gamma_D^- u \rangle + \langle v; S_{k_+} \gamma_N^+ u \rangle = \frac{1}{2} \langle v; \gamma_D^+ u_{\text{inc}} \rangle - \langle v; D_{k_+} \gamma_D^+ u_{\text{inc}} \rangle. \quad (1.12b)$$

**Preuve**

En utilisant la formule d'intégration par parties (1.9) et le fait que  $u$  vérifie l'équation de Bergmann (1.8a) dans  $\Omega_-$ , nous obtenons :

$$\forall v \in H^1(\Omega_-), \quad \int_{\Omega_-} \rho \nabla u \cdot \nabla \bar{v} \, d\Omega_- - \int_{\Omega_-} \rho k_-^2 u \bar{v} \, d\Omega_- - \overline{\langle \gamma_n^-(\rho \nabla u); \gamma_D^- v \rangle} = 0.$$

De par la condition de Neumann (1.8e) du problème de diffraction-transmission (1.8), il vient :

$$\forall v \in H^1(\Omega_-), \quad \int_{\Omega_-} \rho \nabla u \cdot \nabla \bar{v} \, d\Omega_- - \int_{\Omega_-} \rho k_-^2 u \bar{v} \, d\Omega_- - \overline{\langle \gamma_N^+ u; \gamma_D^- v \rangle} = \overline{\langle \gamma_N^+ u_{\text{inc}}; \gamma_D^- v \rangle}.$$

En prolongeant  $u$  dans  $\Omega_-$  par 0 et en utilisant la Proposition 1.3, nous obtenons la représentation :

$$u = -\mathcal{S}_{k_+} \gamma_N^+ u + \mathcal{D}_{k_+} \gamma_D^+ u \text{ dans } \Omega_+.$$

Enfin, la Proposition 1.2 nous fournit les relations de trace suivantes :

$$\frac{1}{2} \gamma_D^+ u - \mathcal{D}_{k_+} \gamma_D^+ u + \mathcal{S}_{k_+} \gamma_N^+ u = 0 \quad , \quad \gamma_N^+ u = \frac{1}{2} \gamma_N^+ u - \mathcal{D}_{k_+}^* \gamma_N^+ u + N_{k_+} \gamma_D^+ u.$$

Il reste alors à substituer  $\gamma_N^+ u$  dans la formulation variationnelle en utilisant la seconde relation de trace et  $\gamma_D^+ u$  en utilisant la condition de Dirichlet (1.8d) du problème de transmission-diffraction (1.8). ■

De même que pour le couplage fort BEM-BEM (1.11), il est nécessaire de s'assurer qu'une solution du couplage fort FEM-BEM (1.12) permet de construire une solution du problème de diffraction-transmission (1.8). La proposition suivante précise ce point et nous permet d'affirmer que le problème de diffraction-transmission (1.8) et le couplage fort FEM-BEM (1.12) sont équivalents.

**Proposition 1.9** (Equivalence du couplage fort FEM-BEM).

Soit  $u \in H^1(\Omega_-)$  et  $q \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  vérifiant :

$$\begin{aligned} \forall v \in H^1(\Omega_-), \quad & \int_{\Omega_-} \rho \nabla u \cdot \nabla \bar{v} \, d\Omega_- - \int_{\Omega_-} \rho k_-^2 u \bar{v} \, d\Omega_- - \overline{\left\langle \left( \frac{1}{2} Id - \mathcal{D}_{k_+}^* \right) q; \gamma_D^- v \right\rangle} - \overline{\langle N_{k_+} \gamma_D^- u; \gamma_D^- v \rangle} \\ & = \overline{\langle \gamma_N^+ u_{\text{inc}}; \gamma_D^- v \rangle} - \overline{\langle N_{k_+} \gamma_D^+ u_{\text{inc}}; \gamma_D^- v \rangle}, \\ \forall v \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), \quad & \frac{1}{2} \langle v; \gamma_D^- u \rangle - \langle v; \mathcal{D}_{k_+} \gamma_D^- u \rangle + \langle v; \mathcal{S}_{k_+} q \rangle = \frac{1}{2} \langle v; \gamma_D^+ u_{\text{inc}} \rangle - \langle v; \mathcal{D}_{k_+} \gamma_D^+ u_{\text{inc}} \rangle. \end{aligned}$$

En prolongeant la fonction  $u$  dans  $\Omega_+$  par :

$$u = -\mathcal{S}_{k_+} q + \mathcal{D}_{k_+} p \text{ dans } \Omega_+ \quad \text{avec} \quad p = \gamma_D^- u - \gamma_D^+ u_{\text{inc}},$$

elle est solution du problème de diffraction-transmission (1.8).

**Preuve**

De la première ligne de cette formulation variationnelle, nous obtenons :

$$\text{div}(\rho \nabla u_-) + \rho k_-^2 u_- = 0 \text{ dans } \Omega_- \quad , \quad \gamma_n^-(\rho \nabla u) = \left( \frac{1}{2} Id - \mathcal{D}_{k_+}^* \right) q + N_{k_+} \gamma_D^- u + \gamma_N^+ u_{\text{inc}} - N_{k_+} \gamma_D^+ u_{\text{inc}}.$$

Les traces de Dirichlet et de Neumann extérieures de  $u$  sont données par (voir Proposition 1.2) :

$$\gamma_D^+ u = \frac{1}{2} p + \mathcal{D}_{k_+} p - \mathcal{S}_{k_+} q \quad , \quad \gamma_N^+ u = \frac{1}{2} q - \mathcal{D}_{k_+}^* q + N_{k_+} p.$$

Cela suffit à montrer que les conditions de transmission (1.8d)-(1.8e) du problème de diffraction-transmission (1.8) sont vérifiées. ■

Bien que le couplage fort FEM-BEM (1.12) soit équivalent au problème de diffraction-transmission (1.8), il présente le gros défaut de ne pas être bien posé pour certaines valeurs de  $k_+$ . Ceci est dû au fait que l'équation de Helmholtz dans  $\Omega_-$  n'est elle-même pas toujours bien posée. Ce point fait l'objet de la prochaine section à la fin de laquelle, il nous sera possible d'expliquer plus en détails les raisons de la dégénérescence du couplage fort FEM-BEM (1.12).

## 1.7 Le caractère bien posé de l'équation de Helmholtz

Dans cette section, nous rappelons des résultats concernant le caractère bien posé de l'équation de Helmholtz dans  $\Omega_-$  et dans  $\Omega_+$ , le nombre d'onde  $k \in \mathbb{R}_+^*$  étant quelconque.

L'équation de Helmholtz dans  $\Omega_-$  avec condition de Dirichlet ou de Neumann n'est pas toujours bien posée [88]. En effet, il existe  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+^*$ ,  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ ,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H^1(\Omega_-) \setminus \{0\}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H^1(\Omega_-) \setminus \{0\}$  tels que :

$$\begin{cases} -\Delta u_n = \lambda_n u_n & \text{dans } \Omega_- \\ \gamma_D^- u_n = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} -\Delta v_n = \mu_n v_n & \text{dans } \Omega_- \\ \gamma_N^- v_n = 0 \end{cases}.$$

Les  $(\lambda_n)$  et les  $(\mu_n)$  sont respectivement les valeurs propres du laplacien de Dirichlet et de Neumann associées aux fonctions propres  $(u_n)$  et  $(v_n)$ . Les problèmes suivants ne sont donc pas bien posés pour  $u \in H^1(\Omega_-)$ ,  $p \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  et  $q \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  :

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda_n u = 0 & \text{dans } \Omega_- \\ \gamma_D^- u = p \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \Delta u + \mu_n u = 0 & \text{dans } \Omega_- \\ \gamma_N^- u = q \end{cases}.$$

Toutefois, si  $k^2$  n'est pas une valeur propre du laplacien de Dirichlet, le problème suivant est bien posé pour  $u \in H^1(\Omega_-)$  et  $p \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  :

$$\Delta u + k^2 u = 0 \text{ dans } \Omega_- \quad , \quad \gamma_D^- u = p.$$

De même, si  $k^2$  n'est pas une valeur propre du laplacien avec condition de Neumann, le caractère bien posé du problème suivant est vrai pour  $u \in H^1(\Omega_-)$  et  $q \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  :

$$\Delta u + k^2 u = 0 \text{ dans } \Omega_- \quad , \quad \gamma_N^- u = q.$$

L'équation de Helmholtz dans  $\Omega_+$ , qu'elle soit associée à une condition de Dirichlet ou de Neumann, ne souffre pas quant à elle de phénomènes de résonance [88] et les problèmes suivants sont bien posés pour  $u \in H_{\text{loc}}^1(\Omega_+)$ ,  $p \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  et  $q \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  :

$$\Delta u + k^2 u = 0 \text{ dans } \Omega_+ \quad , \quad \gamma_D^+ u = p \quad , \quad \partial_r u - iku = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right),$$

$$\Delta u + k^2 u = 0 \text{ dans } \Omega_+ \quad , \quad \gamma_N^+ u = q \quad , \quad \partial_r u - iku = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right).$$

Le caractère mal posé de l'équation de Helmholtz intérieure n'est pas l'unique conséquence de l'existence des valeurs propres du laplacien. Ces dernières sont par exemple responsables de la non inversibilité de certains opérateurs intégraux surfaciques.

**Proposition 1.10** (Inversibilité d'opérateurs surfaciques).

Les opérateurs  $S_k$  et  $\frac{1}{2}Id - D_k^*$  sont inversibles si et seulement si  $k^2$  n'est pas une valeur propre du laplacien de Dirichlet. Plus précisément, si  $k^2$  est une valeur propre du laplacien de Dirichlet,  $S_k$  et  $\frac{1}{2}Id - D_k^*$  ne sont pas injectifs et il existe  $q \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \setminus \{0\}$  tel que :

$$S_k q = 0 \quad , \quad \left(\frac{1}{2}Id - D_k^*\right)q = 0.$$

**Preuve**

Nous supposons dans un premier temps que  $k^2$  est une valeur propre du laplacien de Dirichlet. Il existe alors  $u \in H^1(\Omega_-) \setminus \{0\}$  tel que :

$$\Delta u + k^2 u = 0 \text{ dans } \Omega_- \quad , \quad \gamma_D^- u = 0.$$

En prolongeant  $u$  par 0 dans  $\Omega_+$  et en utilisant la Proposition 1.3, nous obtenons la représentation :

$$u = \mathcal{S}_k \gamma_N^- u \text{ dans } \Omega_-.$$

Nous remarquons alors que  $\gamma_N^- u$  n'est pas nul dans  $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  sinon  $u$  serait nul dans  $H^1(\Omega_-)$ . Enfin, en prenant les traces de Dirichlet et de Neumann de la relation précédente (Proposition 1.2), il vient :

$$S_k \gamma_N^- u = 0 \quad , \quad \gamma_N^- u = \left(\frac{1}{2}Id + D_k^*\right) \gamma_N^- u.$$

Nous supposons à présent que  $k^2$  n'est pas une valeur propre du laplacien de Dirichlet.

Commençons par démontrer l'injectivité de  $S_k$ . Soit  $p \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  tel que  $S_k p = 0$ . Nous définissons  $u \in H^1(\Omega_-) \otimes H_{\text{loc}}^1(\overline{\Omega_+})$  par  $u = S_k p$  et il vient alors (Proposition 1.2) :

$$\gamma_D^- u = \gamma_D^+ u = S_k p = 0.$$

Etant donné que  $u$  vérifie l'équation de Helmholtz dans  $\Omega_-$  et que  $k^2$  n'est pas une valeur propre du laplacien de Dirichlet,  $u$  est nul dans  $H^1(\Omega_-)$ . De même,  $u$  vérifie l'équation de Helmholtz dans  $\Omega_+$  et la condition de radiation (1.5). Ainsi,  $u$  est nul dans  $H_{\text{loc}}^1(\overline{\Omega_+})$ . Nous en déduisons en particulier que :

$$\gamma_N^- u = \frac{1}{2}p + D_k^* p = 0 \quad , \quad \gamma_N^+ u = -\frac{1}{2}p + D_k^* p = 0.$$

Par conséquent,  $p = 0$  et donc  $S_k$  est injectif.

Prouvons à présent la surjectivité de  $S_k$ . Soit  $p \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ . Considérons  $u \in H^1(\Omega_-) \otimes H_{\text{loc}}^1(\overline{\Omega_+})$  tel que :

$$\Delta u + k^2 u = 0 \text{ dans } \Omega_- \cup \Omega_+ \quad , \quad \gamma_D^- u = \gamma_D^+ u = p \quad , \quad \partial_r u - iku = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right).$$

La Proposition 1.3 nous donne la représentation suivante :

$$u = \mathcal{S}_k[\gamma_N u] \text{ dans } \Omega_- \cup \Omega_+.$$

En prenant la trace de Dirichlet de cette relation (Proposition 1.2), il vient :

$$p = S_k[\gamma_N u],$$

ce qui prouve la surjectivité de  $S_k$ .

Démontrons maintenant l'injectivité de  $\frac{1}{2}Id - D_k^*$ . Soit  $p \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  tel que  $\frac{1}{2}p - D_k^* p = 0$ . Définissons  $u \in H^1(\Omega_-) \otimes H_{\text{loc}}^1(\overline{\Omega_+})$  par  $u = S_k p$ . Ainsi, nous avons (Proposition 1.2) :

$$\gamma_N^+ u = -\frac{1}{2}p + D_k^* p = 0.$$

De plus,  $u$  vérifie l'équation de Helmholtz dans  $\Omega_+$  et la condition de radiation (1.5). Cela implique que  $u$  est nul dans  $H_{\text{loc}}^1(\overline{\Omega_+})$ . Nous en déduisons alors que :

$$\gamma_D^- u = S_k p = \gamma_D^+ u = 0.$$

Puisque  $u$  vérifie l'équation de Helmholtz dans  $\Omega_-$  et  $k^2$  n'est pas une valeur propre du laplacien de Dirichlet,  $u$  est nul dans  $H^1(\Omega_-)$ . Ceci nous permet d'affirmer que :

$$\gamma_N^- u = \frac{1}{2}p + D_k^* p = 0 \quad , \quad \gamma_N^+ u = -\frac{1}{2}p + D_k^* p = 0.$$

Ainsi,  $p = 0$  et donc  $\frac{1}{2}Id - D_k^*$  est injectif.

Pour finir, nous prouvons la surjectivité de  $\frac{1}{2}Id - D_k^*$ . Donnons-nous  $p \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  et considérons  $u \in H^1(\Omega_-) \otimes H_{\text{loc}}^1(\overline{\Omega_+})$  satisfaisant :

$$\Delta u + k^2 u = 0 \text{ dans } \Omega_- \cup \Omega_+ \quad , \quad \gamma_D^- u = \gamma_D^+ u \quad , \quad \gamma_N^+ u = p \quad , \quad \partial_r u - iku = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right).$$

La Proposition 1.3 fournit la représentation intégrale suivante :

$$u = \mathcal{S}_k[\gamma_N u] \text{ dans } \Omega_- \cup \Omega_+.$$

En prenant la trace de Neumann de l'égalité précédente (Proposition 1.2), nous obtenons :

$$p = -\left(\frac{1}{2}Id - D_k^*\right)[\gamma_N u],$$

démontrant ainsi la surjectivité de  $\frac{1}{2}Id - D_k^*$ .

■

La proposition précédente permet de remarquer que le couplage fort FEM-BEM (1.12) n'est pas bien posé lorsque  $k_+$  est une valeur propre du laplacien de Dirichlet. Dans ce cas, il existe en effet  $q \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \setminus \{0\}$  tel que :

$$S_k q = 0 \quad , \quad \left( \frac{1}{2} Id - D_k^* \right) q = 0.$$

En notant  $u$  l'élément nul de  $H^1(\Omega_-)$ , il vient que :

$$\begin{aligned} \forall v \in H^1(\Omega_-), \quad \int_{\Omega_-} \rho \nabla u \cdot \nabla \bar{v} \, d\Omega_- - \int_{\Omega_-} \rho k_-^2 u \bar{v} \, d\Omega_- - \overline{\left\langle \left( \frac{1}{2} Id - D_{k_+}^* \right) q; \gamma_D^- v \right\rangle} - \overline{\langle N_{k_+} \gamma_D^- u; \gamma_D^- v \rangle} = 0, \\ \forall v \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), \quad \frac{1}{2} \langle v; \gamma_D^- u \rangle - \langle v; D_{k_+} \gamma_D^- u \rangle + \langle v; S_{k_+} q \rangle = 0. \end{aligned}$$

## 1.8 Limites des couplages forts

Lorsque la méthode des éléments finis volumiques est utilisée pour résoudre des problèmes d'ondes harmoniques éventuellement inhomogènes en trois dimensions, le nombre de degrés de liberté  $N_{\text{FEM}}$ , qui croît en  $k^3$ , devient rapidement prohibitif. En effet, les maillages considérés doivent être plus fins que la longueur d'onde pour correctement estimer les solutions. De plus, si la fréquence est élevée, il est même nécessaire de mailler beaucoup plus finement que la longueur d'onde et/ou d'augmenter l'ordre des éléments finis utilisés pour contrer les phénomènes de pollution et de dispersion numérique [68, 69]. Quoi qu'il en soit, bien que creux, les systèmes à résoudre sont de grande taille. Par conséquent, leur résolution par des méthodes directes n'est pas envisageable pour des raisons de temps de calcul. En effet, la complexité de ces méthodes est de l'ordre de  $N_{\text{FEM}}^3$ . Remarquons toutefois que cette complexité est généralement moins élevée pour les matrices issues de la méthode des éléments finis volumiques. Cela s'explique par le faible taux de remplissage de ces matrices. Plus précisément, le nombre de coefficients non nuls dans chaque ligne d'une matrice issue de la méthode des éléments finis volumiques est *quasi*-constant et très petit devant  $N_{\text{FEM}}$  [44]. Pour finir, les besoins en mémoire des méthodes de résolution directes sont également limitant. Il est par conséquent nécessaire de s'orienter vers des méthodes de résolution itératives. Pour ces méthodes, chaque itération nécessite le calcul d'un produit matrice-vecteur. Si les matrices considérées sont issues de la méthode des éléments finis volumiques, la complexité de tels produits est faible, à savoir de l'ordre de  $N_{\text{FEM}}$  et non de  $N_{\text{FEM}}^2$ . Les méthodes de résolution itératives semblent donc intéressantes *a priori* pour la résolution de problèmes d'ondes en régime harmonique. Toutefois, lorsqu'elles sont utilisées pour résoudre de tels problèmes, ces méthodes requièrent un nombre d'itérations très important pour converger, voire divergent [53]. Ajouté à cela, la construction de pré-conditionneurs permettant de réduire le nombre d'itérations nécessaires à la convergence des méthodes de résolution itératives appliquées aux problèmes d'ondes en régime harmonique reste un problème ouvert [74]. Les méthodes de décomposition de domaine (Domain Decomposition Methods ou DDM en anglais) constituent une alternative permettant de pallier les difficultés mentionnées dans ce paragraphe [49, 100]. En effet, il s'agit de méthodes itératives permettant de se ramener à des problèmes de plus petite taille qui sont eux résolus par des méthodes directes.

L'utilisation de la méthode des éléments finis surfaciques pour résoudre des équations intégrales génère quant à elle des matrices complexes et pleines dont la taille  $N_{\text{BEM}}$  est de l'ordre de  $k^2$ . Ceci est très limitant en pratique lorsque la fréquence est élevée. En effet, le stockage de telles matrices requiert des ressources importantes. De plus, la résolution des systèmes associés par le biais de méthodes directes, dont la complexité se comporte en  $N_{\text{BEM}}^3$ , est sérieusement limitée par des problèmes de temps de calcul et de mémoire. Pour finir, lorsqu'elles sont utilisées pour résoudre ces systèmes, les méthodes de résolution itératives sont affectées par la complexité importante (de l'ordre de  $N_{\text{BEM}}^2$ ) des produits matrice-vecteur. Pour pallier ce problème, une solution consiste à compresser les matrices en jeu. Cela permet d'une part, de diminuer les besoins en mémoire et d'autre part, de réduire la complexité des produits matrice-vecteur. Deux grandes classes de méthodes sont actuellement très utilisées pour compresser les matrices issues de la discrétisation d'équations intégrales par la méthode des éléments finis surfaciques, à savoir l'écriture sous forme de matrices hiérarchiques (hierarchical matrices ou H-matrices en anglais [18, 61]) et la méthode des multi-pôles rapides (Fast Multipole Method ou FMM en anglais [59, 60, 79]). Pour finir, remarquons que les équations intégrales peuvent être mal conditionnées au niveau continu. Il est alors nécessaire de les préconditionner, algébriquement [93] ou analytiquement [6], pour que le nombre d'itérations nécessaires à la convergence des méthodes de résolution itératives soit faible. Une alternative consiste à construire des équations intégrales bien conditionnées au niveau continu [7, 8, 23].

L'implémentation des couplages forts FEM-BEM requiert de coupler la méthode des éléments finis volumiques et la méthode des éléments finis surfaciques au sein d'une même formulation. Les systèmes associés

sont donc constitués aussi bien de parties pleines que de parties creuses. Par conséquent, de par leur construction, les couplages forts FEM-BEM sont fortement limités en ce qui concerne la résolution de problèmes à haute fréquence. En effet, le stockage des matrices qu'ils génèrent est coûteux. De plus, les ressources en mémoire et le nombre d'opérations nécessaires à la résolution directe des systèmes linéaires associés sont importants. Remarquons par ailleurs que le développement d'algorithmes optimisés pour la résolution directe de système partiellement creux et partiellement pleins est un problème ouvert. Si ils ne sont pas pré-conditionnés, les couplages forts FEM-BEM ne se prêtent pas non plus à une résolution itérative, la convergence étant très lente. Pour finir, la construction de pré-conditionneurs pour les couplages forts FEM-BEM est un sujet de recherche actuel. Dans l'optique de résoudre des problèmes à haute fréquence, il est nécessaire de coupler la méthode des éléments finis volumiques associée à une méthode de décomposition de domaine et la méthode des éléments finis surfaciques combinée à une méthode de compression. Toutefois, il n'existe actuellement pas de voie clairement identifiée permettant de combiner toutes ces méthodes au sein d'une même formulation en vue d'implémenter des couplages forts FEM-BEM. Dans cette thèse, nous choisissons donc d'étudier des méthodes alternatives ne couplant que faiblement la méthode des éléments finis volumiques et la méthode des éléments finis surfaciques par le biais de méthodes de décomposition de domaine basées sur la décomposition suivante de  $\mathbb{R}^3$  :

$$\mathbb{R}^3 = \Omega_- \sqcup \Gamma \sqcup \Omega_+.$$

Nous parlons alors de couplages faibles FEM-BEM. L'intérêt de cette approche réside dans le fait qu'elle permet de tirer profit séparément des méthodes de décomposition de domaine dans  $\Omega_-$  et des méthodes de compression pour  $\Omega_+$  [13, 22].

D'un point de vue pratique, les couplages faibles FEM-BEM sont intéressants en cela qu'ils permettent de réutiliser des codes déjà existants. Pour illustrer ce propos, supposons que nous disposions d'un code permettant de résoudre des problèmes relativement généraux par la méthode des éléments finis volumiques et d'un autre code conçu pour la résolution de problèmes arbitraires par la méthode des éléments finis surfaciques. D'une manière générale, de tels codes rendent la résolution d'un problème donné accessible, l'utilisateur n'ayant qu'à écrire une série d'instructions dans un script qui sont ensuite interprétées par les codes en question. Remarquons que les codes existants peuvent être très optimisés. Par exemple, le code permettant de résoudre des problèmes par la méthode des éléments finis volumiques pourrait être basé sur des techniques de décomposition de domaine et utiliser des algorithmes très performants pour la résolution de systèmes creux. De même, le code permettant de résoudre des problèmes par la méthode des éléments finis surfaciques pourrait avoir été construit à partir d'une méthode de compression et résoudre les systèmes pleins mais compressés de manière itérative. Disposant des codes existants, il est tentant de vouloir les réutiliser pour résoudre le problème de diffraction-transmission (1.8). Toutefois, coupler ces codes pour implémenter un couplage fort FEM-BEM peut se révéler particulièrement fastidieux. En effet, cela requiert typiquement d'utiliser les codes existants pour construire, d'une part, des matrices associées aux éléments finis volumiques et d'autre part, des matrices associées aux éléments finis surfaciques, pour ensuite les assembler dans une matrice de plus grande taille. Il peut même être nécessaire de modifier les sources des codes existants. Il serait dès lors préférable de pouvoir utiliser ces codes plus simplement. Dans cette optique, il est intéressant de coupler les codes existants par le biais de couplages faibles. En effet, ces derniers consistent, de manière très informelle, à résoudre alternativement des problèmes dans  $\Omega_-$  et  $\Omega_+$ , ce qui peut être fait avec les codes existants *via* de simples scripts, et à échanger de l'information à travers  $\Gamma$ . Remarquons que le couplage des deux codes existants requiert, et ceci de manière incontournable, de disposer d'une correspondance entre les degrés de liberté sur  $\Gamma$  des codes en question.

Lorsqu'ils sont résolus par la méthode des éléments finis surfaciques, les couplages forts BEM-BEM génèrent des systèmes complexes et pleins de grande taille. Une résolution directe n'est alors pas possible pour des raisons de temps de calcul et de besoins en mémoire. Il est donc nécessaire de résoudre ces systèmes de manière itérative tout en ayant recours aux méthodes de compression. Toutefois, les couplages forts BEM-BEM ne sont pas tous adaptés à une résolution itérative de par leurs propriétés spectrales. Par conséquent, la construction de couplages faibles BEM-BEM constitue une alternative pour la résolution itérative du problème de diffraction-transmission (1.8).

Nous terminons cette section en mentionnant que les couplages faibles BEM-BEM et FEM-BEM sont particulièrement intéressants, pour toutes les raisons qui ont été évoquées jusqu'à présent, dans le cadre de collaborations industrielles. Nous donnons ici un exemple très simpliste d'une telle collaboration. Dans cet exemple, les problèmes sous-jacents ont trait à l'électromagnétisme mais de telles problématiques pourraient également se rencontrer en acoustique. Supposons qu'un équipementier soit spécialisé dans la construction d'antennes destinées à équiper les avions d'un avionneur. L'avionneur cherche à optimiser la furtivité de ses

avions et réalise donc des simulations visant à les dimensionner pour qu'ils soient aussi furtifs que possible. L'équipementier quant à lui est intéressé par la directivité de ses antennes et les simule de sorte à obtenir la directivité désirée. Lorsque les deux entreprises ont atteint les objectifs qu'elles se sont fixés en termes de furtivité et de directivité, elles veulent vérifier, par la simulation, que le système constitué de l'avion et de l'antenne satisfait encore les contraintes de furtivité. Toutefois, pour des raisons de secret industriel, l'avionneur ne souhaite pas fournir la géométrie de son avion à l'équipementier et inversement. Si la méthode de simulation choisie correspond à un couplage fort, l'avionneur calcule les matrices relatives à son avion, l'équipementier calcule les matrices relatives à son antenne et la matrice totale du système est ensuite assemblée, sans que les deux entreprises ne mettent en commun les géométries de l'avion et de l'antenne. En revanche, si la méthode de simulation choisie correspond à un couplage faible, il n'y a pas d'assemblage final à faire, l'avionneur et l'équipementier n'ayant qu'à fournir des exécutables permettant de résoudre des sous-problèmes respectivement rattachés à l'avion et à l'antenne.

# Chapitre 2

## Une proposition de couplage faible

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Principe de l'approche . . . . .</b>	<b>29</b>
2.1.1	Reformulation du problème de diffraction-transmission . . . . .	29
2.1.2	Résolution du couplage faible . . . . .	31
2.1.3	Opérateurs de transmission optimaux . . . . .	33
<b>2.2</b>	<b>Formulations pour la résolution des sous-problèmes . . . . .</b>	<b>34</b>
2.2.1	Formulations pour la résolution du problème extérieur . . . . .	34
2.2.2	Formulations pour la résolution du problème intérieur . . . . .	39
2.2.3	Conflit sur les opérateurs optimaux . . . . .	40
<b>2.3</b>	<b>Approximations des opérateurs DtN . . . . .</b>	<b>40</b>
2.3.1	Opérateurs différentiels et espaces de Sobolev surfaciques . . . . .	40
2.3.2	Approximation microlocale des opérateurs DtN . . . . .	43
2.3.3	Approximation intégrale du DtN intérieur . . . . .	46
2.3.4	Approximations de Padé . . . . .	47
<b>2.4</b>	<b>Cas particulier de la sphère unité . . . . .</b>	<b>49</b>
2.4.1	Harmoniques sphériques et fonctions de Bessel . . . . .	50
2.4.2	Diagonalisation des opérateurs surfaciques . . . . .	52
2.4.3	Qualité des approximations des opérateurs DtN . . . . .	57
2.4.4	Convergence du couplage faible . . . . .	59
2.4.5	Problèmes de résonance du couplage faible . . . . .	62
2.4.6	Résolution itérative des sous-problèmes . . . . .	64
<b>2.5</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>65</b>

---



## 2.1 Principe de l'approche

Dans ce chapitre, nous proposons un couplage faible, qui peut être de type BEM-BEM comme de type FEM-BEM, permettant de résoudre le problème de diffraction-transmission que nous avons introduit dans la section 1.2, à savoir :

$$\operatorname{div}(\rho \nabla u) + \rho k_-^2 u = 0 \text{ dans } \Omega_-, \quad (2.1a)$$

$$\Delta u + k_+^2 u = 0 \text{ dans } \Omega_+, \quad (2.1b)$$

$$\partial_r u - ik_+ u = \mathcal{O}_{r \rightarrow +\infty}(r^{-2}), \quad (2.1c)$$

$$\gamma_D^- u = \gamma_D^+ u + \gamma_D^+ u_{\text{inc}}, \quad (2.1d)$$

$$\gamma_n^-(\rho \nabla u) = \gamma_n^+ u + \gamma_n^+ u_{\text{inc}}. \quad (2.1e)$$

Ce couplage correspond concrètement à une méthode de décomposition de domaine itérant entre les domaines intérieur  $\Omega_-$  et extérieur  $\Omega_+$ . Contrairement aux couplages forts BEM-BEM et FEM-BEM, cette méthode permet un découplage partiel des équations correspondant aux parties intérieure et extérieure du problème de diffraction-transmission (2.1).

### 2.1.1 Reformulation du problème de diffraction-transmission

Les méthodes de décomposition de domaine construites à partir de conditions de transmission similaires aux conditions (2.1d)-(2.1e) sont connues pour diverger [48]. Une solution pour pallier ce problème consiste à reformuler de manière équivalente ces conditions de transmission [48]. Dans l'optique de construire notre couplage faible, nous commençons donc par reformuler les conditions de transmission (2.1d)-(2.1e). Pour ce faire, nous introduisons deux opérateurs, appelés opérateurs de transmission :

$$T_- : \mathbb{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow \mathbb{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \quad , \quad T_+ : \mathbb{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow \mathbb{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma).$$

Sous réserve que  $T_- - T_+$  soit injectif, ce que nous supposons à présent, les conditions de transmission (2.1d)-(2.1e) sont équivalentes aux conditions de transmission suivantes :

$$\begin{cases} \gamma_n^-(\rho \nabla u) + T_- \gamma_D^- u = \gamma_n^+ u + T_- \gamma_D^+ u + \gamma_n^+ u_{\text{inc}} + T_- \gamma_D^+ u_{\text{inc}}, \\ \gamma_n^+ u + T_+ \gamma_D^+ u = \gamma_n^-(\rho \nabla u) + T_+ \gamma_D^- u - \gamma_n^+ u_{\text{inc}} - T_+ \gamma_D^+ u_{\text{inc}}. \end{cases} \quad (2.2)$$

Remarquons que si les conditions de transmission (2.1d)-(2.1e) sont vérifiées, il en va de même pour les conditions de transmission reformulées (2.2). L'injectivité de  $T_- - T_+$  permet de garantir que la réciproque est également vraie. Que cela soit pour la résolution du problème de diffraction-transmission (2.1) ou celle d'autres problèmes, les méthodes de décomposition de domaine sont très souvent construites en supposant que  $T_+ = -T_-$  (voir par exemple [13, 21, 48]). Dans ce travail, nous considérons toutefois qu'ils peuvent être différents pour plus de généralité et de souplesse. Comme nous l'avons mentionné précédemment, la reformulation des conditions de transmission permet de préconditionner le problème de diffraction-transmission (2.1) pour qu'il soit adapté à une résolution numérique itérative. La qualité du préconditionnement est naturellement liée au choix des opérateurs de transmission. Ce point sera abordé en détails dans ce travail.

Historiquement, les méthodes de décomposition de domaine ont d'abord été construites comme des algorithmes de point fixe. Cette approche consiste à construire récursivement des approximations de la solution  $u$  du problème à résoudre à partir d'une approximation initiale  $u_0$  de  $u$ . Un exemple d'une telle méthode pour le problème de diffraction-transmission (2.1) est donné ci-dessous :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} \operatorname{div}(\rho \nabla u_{n+1}) + \rho k_-^2 u_{n+1} = 0 \text{ dans } \Omega_- \\ \Delta u_{n+1} + k_+^2 u_{n+1} = 0 \text{ dans } \Omega_+ \\ \partial_r u_{n+1} - ik_+ u_{n+1} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right) \\ \gamma_n^-(\rho \nabla u_{n+1}) + T_- \gamma_D^- u_{n+1} = \gamma_n^+ u_n + T_- \gamma_D^+ u_n + \gamma_n^+ u_{\text{inc}} + T_- \gamma_D^+ u_{\text{inc}} \\ \gamma_n^+ u_{n+1} + T_+ \gamma_D^+ u_{n+1} = \gamma_n^-(\rho \nabla u_n) + T_+ \gamma_D^- u_n - \gamma_n^+ u_{\text{inc}} - T_+ \gamma_D^+ u_{\text{inc}} \end{cases} \quad (2.3)$$

Le couplage faible que nous proposons pour résoudre le problème de diffraction-transmission (2.1) n'est pas une méthode de décomposition de domaine de type point fixe. Il s'agit avant tout d'une reformulation du problème de diffraction-transmission (2.1) sous la forme d'une équation d'opérateurs. Cette équation correspond toutefois à une généralisation des méthodes de décomposition de domaine de type point fixe. En effet, nous verrons que sa résolution par des méthodes de point fixe est équivalente à des méthodes de décomposition de domaine du même type.

Pour aboutir à la reformulation du problème de diffraction-transmission (2.1), il est nécessaire d'introduire quelques définitions. Tout d'abord, nous définissons des opérateurs de trace, notés  $B_-$  et  $B_+$  :

$$B_- = \gamma_n^-(\rho\nabla) + T_- \gamma_D^-, \quad B_+ = \gamma_N^+ + T_+ \gamma_D^+.$$

A partir de ces opérateurs, il nous est possible de définir des quantités surfaciques, notées  $g_-$  et  $g_+$  :

$$g_- = B_- u \quad , \quad g_+ = B_+ u.$$

Bien que cela n'apparaîtra plus clairement qu'à la Proposition 2.3, la méthode de décomposition de domaine (2.3) permet d'interpréter  $g_-$  et  $g_+$  comme des quantités transmises respectivement de  $\Omega_+$  dans  $\Omega_-$  et de  $\Omega_-$  dans  $\Omega_+$ . Dans l'optique de reformuler le problème de diffraction-transmission (2.1), il nous est également nécessaire d'introduire des opérateurs de résolution, notés  $R_-$  et  $R_+$  :

$$\forall g \in \mathbb{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), \quad R_- g = \gamma_D^- u_- \quad , \quad \forall g \in \mathbb{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), \quad R_+ g = \gamma_D^+ u_+,$$

les fonctions  $u_- \in \mathbb{H}^1(\Omega_-)$  et  $u_+ \in \mathbb{H}_{\text{loc}}^1(\overline{\Omega_+})$  étant les solutions des problèmes suivants :

$$\operatorname{div}(\rho\nabla u_-) + \rho k_-^2 u_- = 0 \text{ dans } \Omega_- \quad , \quad B_- u_- = g, \tag{2.4}$$

$$\Delta u_+ + k_+^2 u_+ = 0 \text{ dans } \Omega_+ \quad , \quad B_+ u_+ = g \quad , \quad \partial_r u_+ - ik_+ u_+ = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right). \tag{2.5}$$

Les opérateurs de résolution correspondent aux analogues continus des codes pré-existants mentionnés à la fin du chapitre précédent. Ils ne sont bien définis que si les problèmes (2.4) et (2.5) sont bien posés. Cela dépend naturellement du choix des opérateurs de transmission mais à partir de maintenant, nous supposons que c'est effectivement le cas. Remarquons que les problèmes (2.4) et (2.5) correspondent aux sous-problèmes associés à la méthode de décomposition de domaine qu'est notre couplage faible.

Nous disposons à présent de tous les outils nécessaires pour reformuler le problème de diffraction-transmission (2.1).

**Proposition 2.1** (Couplage faible).

Si  $u$  est la solution du problème de diffraction-transmission (2.1),  $g_-$  et  $g_+$  sont solutions de :

$$(Id - S_\pi) \begin{pmatrix} g_- \\ g_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_N^+ u_{\text{inc}} + T_- \gamma_D^+ u_{\text{inc}} \\ -\gamma_N^+ u_{\text{inc}} - T_+ \gamma_D^+ u_{\text{inc}} \end{pmatrix}, \tag{2.6}$$

l'opérateur  $S_\pi$  étant défini à partir des opérateurs  $S_-$  et  $S_+$  par :

$$S_\pi = \begin{pmatrix} 0 & S_+ \\ S_- & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad S_- = Id - (T_- - T_+)R_- \quad , \quad S_+ = Id + (T_- - T_+)R_+.$$

**Preuve**

Les conditions de transmission reformulées (2.2) se réécrivent comme suit :

$$B_- u = B_+ u + (T_- - T_+) \gamma_D^+ u + \gamma_N^+ u_{\text{inc}} + T_- \gamma_D^+ u_{\text{inc}},$$

$$B_+ u = B_- u - (T_- - T_+) \gamma_D^- u - \gamma_N^+ u_{\text{inc}} - T_+ \gamma_D^+ u_{\text{inc}}.$$

La fonction  $u$  étant solution des problèmes suivants :

$$\operatorname{div}(\rho\nabla u) + \rho k_-^2 u = 0 \text{ dans } \Omega_- \quad , \quad B_- u = g_-,$$

$$\Delta u + k_+^2 u = 0 \text{ dans } \Omega_+ \quad , \quad B_+ u = g_+ \quad , \quad \partial_r u - ik_+ u = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right),$$

nous en déduisons que :

$$\gamma_D^- u = R_- g_- \quad , \quad \gamma_D^+ u = R_+ g_+.$$

Il vient alors :

$$g_- = g_+ + (T_- - T_+)R_+ g_+ + \gamma_N^+ u_{\text{inc}} + T_- \gamma_D^+ u_{\text{inc}},$$

$$g_+ = g_- - (T_- - T_+)R_- g_- - \gamma_N^+ u_{\text{inc}} - T_+ \gamma_D^+ u_{\text{inc}}.$$

■

La relation (2.6) est ce que nous appelons le couplage faible et elle constitue en fait une reformulation équivalente du problème de diffraction-transmission (2.1) comme en atteste la proposition suivante.

**Proposition 2.2** (Equivalence du couplage faible).

Soit  $g_-, g_+ \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  vérifiant :

$$(Id - S_\pi) \begin{pmatrix} g_- \\ g_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_N^+ u_{\text{inc}} + T_- \gamma_D^+ u_{\text{inc}} \\ -\gamma_N^+ u_{\text{inc}} - T_+ \gamma_D^+ u_{\text{inc}} \end{pmatrix}.$$

Définissons  $u \in H^1(\Omega_-) \otimes H_{\text{loc}}^1(\overline{\Omega_+})$  par :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\rho \nabla u_-) + \rho k_-^2 u_- &= 0 \text{ dans } \Omega_- \quad , \quad B_- u = g_-, \\ \Delta u + k_+^2 u &= 0 \text{ dans } \Omega_+ \quad , \quad B_+ u = g_+ \quad , \quad \partial_r u - ik_+ u = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right). \end{aligned}$$

Alors  $u$  est solution du problème de diffraction-transmission (2.1).

**Preuve**

Il suffit de vérifier que les conditions de transmission reformulées (2.2) sont satisfaites, les calculs étant identiques à ceux de la preuve précédente. ■

### 2.1.2 Résolution du couplage faible

Le couplage faible (2.6) ne se prête pas à une résolution directe. Ceci est dû au fait que l'opérateur  $Id - S_\pi$  est défini à partir des opérateurs de résolution  $R_-$  et  $R_+$ , qui correspondent, au niveau discret, à des algorithmes de résolution pour les problèmes intérieur (2.4) et extérieur (2.5). Pour illustrer ce propos, supposons que nous voulions résoudre l'équation suivante :

$$(Id - S_\pi) \begin{pmatrix} g_- \\ g_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_- \\ b_+ \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad b_-, b_+ \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma),$$

de manière directe. Sous forme variationnelle, cette équation s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} \forall e \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma), \quad \langle g_-; e \rangle - \langle g_+; e \rangle - \langle (T_- - T_+) R_+ g_+; e \rangle &= \langle b_-; e \rangle, \\ \forall e \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma), \quad \langle g_+; e \rangle - \langle g_-; e \rangle + \langle (T_- - T_+) R_- g_-; e \rangle &= \langle b_+; e \rangle. \end{aligned}$$

La méthode des éléments finis consiste à remplacer, dans la formulation variationnelle précédente,  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  et  $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  par des espaces de dimension finie les approchant :

$$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \approx \operatorname{Span}(e_i : i \in \{1; \dots; N\}) \quad , \quad H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \approx \operatorname{Span}(e_i : i \in \{1; \dots; N\}),$$

les éléments finis  $(e_i)_{i \in \{1; \dots; N\}}$  étant supposés réels. De part l'injection classique de  $L^2(\Gamma)$  dans  $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  (voir la section 1.3), les éléments finis  $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  doivent être compris comme des formes linéaires sur  $\operatorname{Span}(e_i : i \in \{1; \dots; N\})$ , à savoir :

$$e_i : v \mapsto \int_{\Gamma} e_i v \, d\Gamma.$$

Nous ne précisons pas, à ce stade, quels éléments finis nous utilisons dans ce travail. Ce point est toutefois traité en détails dans la sous-section 3.1.1.

Les inconnues de la formulation variationnelle,  $g_-$  et  $g_+$ , sont supposées être des éléments de  $\operatorname{Span}(e_i : i \in \{1; \dots; N\})$ . Par exemple,  $g_-$  s'écrit de la manière suivante :

$$g_- = \sum_{i=1}^N g_{-,i} e_i,$$

et nous notons  $\{g_-\}$  le vecteur colonne  $(g_{-,i})_{i \in \{1; \dots; N\}}$  correspondant aux coordonnées de  $g_-$  dans  $\operatorname{Span}(e_i : i \in \{1; \dots; N\})$ . Enfin,  $\operatorname{Span}(e_i : i \in \{1; \dots; N\})$  étant de dimension finie, il n'est pas nécessaire de tester

les égalités de la formulation variationnelle discrète contre tous les éléments de  $\text{Span}(e_i : i \in \{1; \dots; N\})$ , le faire contre les  $(e_i)_{i \in \{1; \dots; N\}}$  étant équivalent. *In fine*, nous obtenons la formulation variationnelle discrète suivante :

$$\begin{aligned} \forall j \in \{1; \dots; N\}, \quad \langle g_-; e_j \rangle - \langle g_+; e_j \rangle - \langle (T_- - T_+)R_+g_+; e_j \rangle &= \langle b_-; e_j \rangle, \\ \forall j \in \{1; \dots; N\}, \quad \langle g_+; e_j \rangle - \langle g_-; e_j \rangle + \langle (T_- - T_+)R_-g_-; e_j \rangle &= \langle b_+; e_j \rangle. \end{aligned}$$

Au niveau discret, les opérateurs de transmission,  $T_-$  et  $T_+$ , et les opérateurs de résolution,  $R_-$  et  $R_+$ , doivent être vus comme des opérateurs de  $\text{Span}(e_i : i \in \{1; \dots; N\})$  dans lui-même et nous notons  $\mathbb{T}_-$ ,  $\mathbb{T}_+$ ,  $\mathbb{R}_-$  et  $\mathbb{R}_+$  leurs matrices respectives. Nous rappelons par ailleurs que la matrice  $\mathbb{L}$  d'un opérateur  $L$  de  $\text{Span}(e_i : i \in \{1; \dots; N\})$  dans lui-même est définie par :

$$\forall j \in \{1; \dots; N\}, \quad Le_j = \sum_{i=1}^N \mathbb{L}_{i,j} e_i.$$

En introduisant la matrice symétrique  $\mathbb{J}_\Gamma$ , communément appelée matrice de masse, définie par :

$$\forall i, j \in \{1; \dots; N\}, \quad \mathbb{J}_{\Gamma, i, j} = \langle e_i; e_j \rangle,$$

la formulation variationnelle discrète se réécrit, sous forme matricielle, comme suit :

$$\begin{pmatrix} \mathbb{J}_\Gamma & -\mathbb{J}_\Gamma - \mathbb{J}_\Gamma(\mathbb{T}_- - \mathbb{T}_+)\mathbb{R}_+ \\ -\mathbb{J}_\Gamma + \mathbb{J}_\Gamma(\mathbb{T}_- - \mathbb{T}_+)\mathbb{R}_- & \mathbb{J}_\Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \{g_-\} \\ \{g_+\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{J}_\Gamma \{b_-\} \\ \mathbb{J}_\Gamma \{b_+\} \end{pmatrix}.$$

En pratique, la matrice précédente, qui n'est rien d'autre que la matrice variationnelle de  $Id - S_\pi$ , est trop coûteuse à assembler. En effet, elle requiert d'évaluer les quantités  $(R_-e_j)_{j \in \{1; \dots; N\}}$  et  $(R_+e_j)_{j \in \{1; \dots; N\}}$  et par conséquent, de résoudre  $N$  problèmes intérieurs (2.4) et  $N$  problèmes extérieurs (2.5). Le nombre d'éléments finis étant généralement très grand, cette approche n'est pas intéressante, voire réhilitoire, d'un point de vue computationnel. Remarquons que, en fonction de la complexité des opérateurs de transmission, l'assemblage des matrices  $\mathbb{T}_-$  et  $\mathbb{T}_+$  peut également être coûteux. Nous reviendrons plus en détails sur ce point dans la suite de ce travail.

Il est donc nécessaire de se rabattre sur des méthodes itératives pour résoudre le couplage faible (2.6). Historiquement, les méthodes de point fixe de Jacobi et de Gauss-Seidel [93] sont les premières méthodes à avoir été utilisées pour résoudre le couplage faible (2.6) [48, 87]. Par ailleurs, l'application de ces méthodes au couplage faible (2.6) peut se réécrire plus explicitement, et ceci de manière équivalente, sous la forme d'algorithmes de décomposition de domaine standards. La proposition suivante précise ce point, essentiellement à titre illustratif, pour la méthode de Jacobi. De par sa plus grande robustesse, nous avons toutefois choisi de recourir à la procédure GMRES (Generalized Minimal Residual Method [93]) pour résoudre le couplage faible (2.6).

**Proposition 2.3** (Couplage faible et méthode de Jacobi).

*La résolution du couplage faible (2.6) par la méthode de Jacobi, qui s'écrit comme suit :*

$$\begin{pmatrix} g_-^{n+1} \\ g_+^{n+1} \end{pmatrix} = S_\pi \begin{pmatrix} g_-^n \\ g_+^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma_N^+ u_{\text{inc}} + T_- \gamma_D^+ u_{\text{inc}} \\ -\gamma_N^+ u_{\text{inc}} - T_+ \gamma_D^+ u_{\text{inc}} \end{pmatrix},$$

*est équivalente à la résolution du problème de diffraction-transmission (2.1) avec les conditions de transmission reformulées (2.2) par la méthode de décomposition de domaine classique suivante :*

$$\text{div}(\rho \nabla u_{n+1}) + \rho k_-^2 u_{n+1} = 0 \text{ dans } \Omega_-,$$

$$\Delta u_{n+1} + k_+^2 u_{n+1} = 0 \text{ dans } \Omega_+ \quad , \quad \partial_r u_{n+1} - ik_+ u_{n+1} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right),$$

$$\gamma_n^-(\rho \nabla u_{n+1}) + T_- \gamma_D^- u_{n+1} = \gamma_N^+ u_n + T_- \gamma_D^+ u_n + \gamma_N^+ u_{\text{inc}} + T_- \gamma_D^+ u_{\text{inc}},$$

$$\gamma_N^+ u_{n+1} + T_+ \gamma_D^+ u_{n+1} = \gamma_n^-(\rho \nabla u_n) + T_+ \gamma_D^- u_n - \gamma_N^+ u_{\text{inc}} - T_+ \gamma_D^+ u_{\text{inc}}.$$

**Preuve**

La preuve est similaire à celles des Propositions 2.1 et 2.2. ■

Une fois le couplage faible (2.6) résolu, il reste à reconstruire, à partir de  $g_-$  et de  $g_+$ , la solution  $u$  du problème de diffraction-transmission (2.1) en résolvant les problèmes intérieur (2.4) et extérieur (2.5) suivants :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\rho \nabla u) + \rho k_-^2 u &= 0 \text{ dans } \Omega_- \quad , \quad B_- u = g_- , \\ \Delta u + k_+^2 u &= 0 \text{ dans } \Omega_+ \quad , \quad B_+ u = g_+ \quad , \quad \partial_r u - ik_+ u = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right) . \end{aligned}$$

Dans  $\Omega_+$ ,  $u$  est donnée par sa représentation intégrale (Proposition 1.3 page 15) :

$$u = -\mathcal{S}_{k_+} \gamma_N^+ u + \mathcal{D}_{k_+} \gamma_D^+ u \text{ dans } \Omega_+ ,$$

les traces de Dirichlet et de Neumann extérieures de  $u$  pouvant être calculées grâce aux relations :

$$\gamma_D^+ u = R_+ g_+ \quad , \quad \gamma_N^+ u + T_+ \gamma_D^+ u = g_+ .$$

Si le couplage faible (2.6) est de type FEM-BEM, la résolution du problème intérieur précédent donne directement  $u$  dans  $\Omega_-$ . En revanche, si le couplage faible (2.6) est de type BEM-BEM,  $u$  peut être reconstruite dans  $\Omega_-$  en utilisant le fait que (Proposition 1.3 page 15) :

$$u = \mathcal{S}_{k_-} \gamma_N^- u - \mathcal{D}_{k_-} \gamma_D^- u \text{ dans } \Omega_- ,$$

les traces de Dirichlet et de Neumann intérieures de  $u$  étant données par :

$$\gamma_D^- u = R_- g_- \quad , \quad \rho \gamma_N^- u + T_- \gamma_D^- u = g_- .$$

### 2.1.3 Opérateurs de transmission optimaux

Nous avons mentionné vouloir résoudre le couplage faible (2.6) en utilisant la procédure GMRES. Naturellement, la vitesse de convergence de cette méthode dépend des opérateurs de transmission utilisés et peut être très mauvaise si ces derniers ne sont pas choisis correctement. Notons également qu'une divergence de la procédure GMRES n'est pas exclue lorsqu'elle est utilisée avec réinitialisation. Dans cette sous-section, nous montrons qu'il existe des opérateurs de transmission, que nous qualifions d'optimaux, rendant la résolution du couplage faible (2.6) triviale. Ce résultat constitue une ligne directrice permettant de choisir correctement les opérateurs de transmission en pratique et nous reviendrons très largement sur ce point par la suite. Concrètement, les opérateurs de transmission optimaux correspondent à des opérateurs Dirichlet-to-Neumann, classiquement dénommés opérateurs DtN. Nous commençons donc par introduire ces opérateurs.

Si  $k \in \mathbb{R}_+^*$ , l'opérateur Dirichlet-to-Neumann extérieur, noté  $\Lambda_{+,k}$ , est continu et inversible à inverse continu de  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  dans  $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  et est défini par :

$$\forall p \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma), \quad \Lambda_{+,k} p = \gamma_N^+ u_p ,$$

la fonction  $u_p \in H_{\text{loc}}^1(\overline{\Omega_+})$  vérifiant :

$$\Delta u_p + k^2 u_p = 0 \text{ dans } \Omega_+ \quad , \quad \gamma_D^+ u_p = p \quad , \quad \partial_r u_p - ik u_p = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right) . \quad (2.7)$$

Si  $k, \sigma \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega_-})$ , l'opérateur Dirichlet-to-Neumann intérieur, noté  $\Lambda_{-,k,\sigma}$ , est défini par :

$$\forall p \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma), \quad \Lambda_{-,k,\sigma} p = \gamma_n^- (\sigma \nabla u_p) ,$$

la fonction  $u_p \in H^1(\Omega_-)$  satisfaisant :

$$\operatorname{div}(\sigma \nabla u_p) + \sigma k^2 u_p = 0 \text{ dans } \Omega_- \quad , \quad \gamma_D^- u_p = p . \quad (2.8)$$

Remarquons que  $\Lambda_{-,k,\sigma}$  est bien défini, auquel cas il est également continu de  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  dans  $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ , si et seulement si il n'existe aucun  $u \in H^1(\Omega_-) \setminus \{0\}$  tel que :

$$\operatorname{div}(\sigma \nabla u) + \sigma k^2 u = 0 \text{ dans } \Omega_- \quad , \quad \gamma_D^- u = 0 .$$

Si  $k$  et  $\sigma$  sont constants, cette condition revient à dire que  $k^2$  n'est pas une valeur propre du laplacien de Dirichlet.

De la même manière,  $\Lambda_{-,k,\sigma}$  est inversible, et son inverse est alors continu, si et seulement si il n'existe pas d'élément non nul  $u$  de  $H^1(\Omega_-)$  vérifiant :

$$\operatorname{div}(\sigma \nabla u) + \sigma k^2 u = 0 \text{ dans } \Omega_- \quad , \quad \gamma_n^-(\sigma \nabla u) = 0.$$

Si  $k$  et  $\sigma$  sont constants, cette condition est équivalente au fait que  $k^2$  n'est pas une valeur propre du laplacien de Neumann.

Ayant introduits les opérateurs DtN, nous pouvons à présent donner deux relations centrales permettant d'exhiber les opérateurs de transmission optimaux.

**Proposition 2.4** (Relations vérifiées par les opérateurs de résolution).

Nous disposons des relations suivantes :

$$(\Lambda_{-,k,-,\rho} + T_-)R_- = Id \quad , \quad (\Lambda_{+,k,+} + T_+)R_+ = Id.$$

**Preuve**

Soit  $g \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  et  $u \in H^1(\Omega_-)$  tels que :

$$\operatorname{div}(\rho \nabla u) + \rho k_-^2 u = 0 \text{ dans } \Omega_- \quad , \quad B_- u = g.$$

Nous pouvons réécrire la condition de bord comme suit :

$$(\Lambda_{-,k,-,\rho} + T_-)\gamma_D^- u = g.$$

Il suffit alors de remarquer que  $\gamma_D^- u = R_- g$  pour démontrer la première relation. La seconde se montre exactement de la même manière. ■

La proposition suivante est alors une conséquence directe de la précédente.

**Proposition 2.5** (Opérateurs optimaux).

Nous avons :

$$\begin{aligned} T_- = -\Lambda_{+,k,+} &\quad \Rightarrow \quad S_+ = 0, \\ T_+ = -\Lambda_{-,k,-,\rho} &\quad \Rightarrow \quad S_- = 0. \end{aligned}$$

Ce résultat est intéressant puisqu'il affirme qu'un bon choix des opérateurs de transmission permet d'assurer la nullité de  $S_\pi$ , ce qui rend le couplage faible (2.6) et sa résolution triviale. Mais ce résultat est en réalité plus profond que cela. Supposons que les opérateurs de transmission soient tels que  $S_- = 0$  ou  $S_+ = 0$ . L'opérateur  $S_\pi$  n'est alors pas nul. Toutefois, il est nilpotent et son spectre est donc réduit à  $\{0\}$ . Par conséquent,  $Id - S_\pi$  se prête *a priori* bien à une résolution par la procédure GMRES, la concentration du spectre de l'opérateur autour de 1 assurant en général une bonne vitesse de convergence pour cette méthode.

## 2.2 Formulations pour la résolution des sous-problèmes

Dans cette section, nous présentons les formulations adoptées pour la résolution des problèmes intérieurs (2.4) et extérieurs (2.5). Ces formulations sont introduites en toute généralité, c'est-à-dire sans spécifier la forme des opérateurs de transmission. Cette approche générique nous permet de présenter quelques résultats théoriques concernant les formulations considérées. Remarquons que les formes pratiques des opérateurs de transmission et des formulations utilisées pour la résolution des sous-problèmes (2.4) et (2.5) sont respectivement présentées dans les sections 2.3 et 3.3.

### 2.2.1 Formulations pour la résolution du problème extérieur

Le nombre d'onde étant constant dans  $\Omega_+$ , nous avons choisi de résoudre les problèmes extérieurs (2.5) par le biais d'équations intégrales. Remarquons qu'il existe d'autres approches pour résoudre des problèmes extérieurs. La plus classique consiste à tronquer le domaine dans l'optique d'utiliser la méthode des éléments finis volumiques. Une condition aux limites absorbante (Absorbing Boundary Condition ou ABC en anglais

[5, 11, 12]) peut alors être imposée sur la nouvelle frontière qui s'ajoute au problème. Une autre solution consiste à utiliser une couche absorbante parfaitement adaptée (Perfectly Matched Layer ou PML en anglais [16, 101]).

Nous commençons par proposer une formulation par équations intégrales équivalente au problème extérieur (2.5). Cette formulation correspond à la fois au pendant et à une généralisation de celle donnée dans [10] pour des problèmes extérieurs impédants classiques en électromagnétisme. Dans un second temps, nous proposons une approche permettant de préconditionner au niveau continu la formulation intégrale considérée dans l'optique d'une résolution itérative.

**Proposition 2.6** (Formulation pour la résolution du problème extérieur).

Soit  $g \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  et  $u \in H_{\text{loc}}^1(\overline{\Omega_+})$  tels que :

$$\Delta u + k_+^2 u = 0 \text{ dans } \Omega_+ \quad , \quad \gamma_N^+ u + T_+ \gamma_D^+ u = g \quad , \quad \partial_r u - ik_+ u = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right).$$

Nous avons alors :

$$\frac{1}{2} T_+^{-1} \gamma_N^+ u + D_{k_+} \gamma_D^+ u - S_{k_+} \gamma_N^+ u = \frac{1}{2} T_+^{-1} g \quad , \quad \frac{1}{2} T_+ \gamma_D^+ u - D_{k_+}^* \gamma_N^+ u + N_{k_+} \gamma_D^+ u = \frac{1}{2} g. \quad (2.9)$$

Réciproquement, si  $g \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ ,  $p \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  et  $q \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  sont tels que :

$$\frac{1}{2} T_+^{-1} q + D_{k_+} p - S_{k_+} q = \frac{1}{2} T_+^{-1} g \quad , \quad \frac{1}{2} T_+ p - D_{k_+}^* q + N_{k_+} p = \frac{1}{2} g,$$

la fonction  $u \in H_{\text{loc}}^1(\overline{\Omega_+})$  définie par :

$$u = -S_{k_+} q + D_{k_+} p \text{ dans } \Omega_+,$$

vérifie :

$$\Delta u + k_+^2 u = 0 \text{ dans } \Omega_+ \quad , \quad \gamma_N^+ u + T_+ \gamma_D^+ u = g \quad , \quad \partial_r u - ik_+ u = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right).$$

**Preuve**

Soit  $u$  la solution du problème extérieur (2.5). En prolongeant  $u$  par 0 dans  $\Omega_-$  et en utilisant la Proposition 1.3 page 15, nous obtenons la représentation suivante :

$$u = -S_{k_+} \gamma_N^+ u + D_{k_+} \gamma_D^+ u \text{ dans } \Omega_+.$$

En prenant les traces de Dirichlet et de Neumann (Proposition 1.2 page 15) de cette relation, il vient :

$$\frac{1}{2} \gamma_D^+ u - D_{k_+} \gamma_D^+ u + S_{k_+} \gamma_N^+ u = 0 \quad , \quad \frac{1}{2} \gamma_N^+ u + D_{k_+}^* \gamma_N^+ u - N_{k_+} \gamma_D^+ u = 0.$$

Il reste alors à utiliser la condition de bord pour conclure.

Pour démontrer la réciproque, il suffit de remarquer que les traces de Dirichlet et de Neumann de  $u$  sont données par (Proposition 1.2 page 15) :

$$\gamma_D^+ u = -S_{k_+} q + \frac{1}{2} p + D_{k_+} p \quad , \quad \gamma_N^+ u = \frac{1}{2} q - D_{k_+}^* q + N_{k_+} p.$$

Le calcul montre alors que la condition de bord est vérifiée. ■

Telle quelle, la formulation (2.9) n'a pas de raison d'être adaptée à une résolution itérative mais il est toutefois possible de la reformuler, ce qui revient concrètement à la préconditionner, pour la résoudre efficacement par la procédure GMRES.

**Proposition 2.7** (Formulation préconditionnée pour la résolution du problème extérieur).

En posant :

$$p = T_+^{-1} \gamma_N^+ u \quad , \quad q = T_+ \gamma_D^+ u,$$

la formulation initiale (2.9) se réécrit de manière équivalente comme suit :

$$\frac{1}{2} p + D_{k_+} T_+^{-1} q - S_{k_+} T_+ p = \frac{1}{2} T_+^{-1} g \quad , \quad \frac{1}{2} q - D_{k_+}^* T_+ p + N_{k_+} T_+^{-1} q = \frac{1}{2} g. \quad (2.10)$$

Les opérateurs des formulations initiale (2.9) et préconditionnée (2.10) sont soit simultanément inversibles, soit simultanément non inversibles puisque nous avons :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}Id - S_{k_+}T_+ & D_{k_+}T_+^{-1} \\ -D_{k_+}^*T_+ & \frac{1}{2}Id + N_{k_+}T_+^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & T_+^{-1} \\ T_+ & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & Id \\ Id & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}T_+ + N_{k_+} & -D_{k_+}^* \\ D_{k_+} & \frac{1}{2}T_+^{-1} - S_{k_+} \end{pmatrix}.$$

La formulation préconditionnée (2.10) est moins adaptée à une résolution directe que la formulation initiale (2.9) et ceci à cause des produits d'opérateurs  $D_{k_+}T_+^{-1}$ ,  $S_{k_+}T_+$ ,  $D_{k_+}^*T_+$  et  $N_{k_+}T_+^{-1}$ . Pour pallier ce problème, il est possible de résoudre la formulation préconditionnée (2.10) de manière directe en changeant d'inconnues pour séparer les opérateurs  $S_{k_+}$ ,  $D_{k_+}$ ,  $D_{k_+}^*$  et  $N_{k_+}$  des opérateurs  $T_+$  et  $T_+^{-1}$ . Toutefois, cela revient concrètement à se ramener à la formulation initiale (2.9).

Pour illustrer le fait que la formulation préconditionnée (2.10) est moins adaptée à une résolution directe que la formulation initiale (2.9), nous faisons appel aux notations et aux idées de la sous-section 2.1.2. Nous introduisons également les matrices variationnelles  $\mathbb{S}_{k_+}$ ,  $\mathbb{D}_{k_+}$ ,  $\mathbb{D}_{k_+}^*$  et  $\mathbb{N}_{k_+}$  des opérateurs  $S_{k_+}$ ,  $D_{k_+}$ ,  $D_{k_+}^*$  et  $N_{k_+}$  :

$$\begin{aligned} \forall i, j \in \{1; \dots; N\}, \quad \mathbb{S}_{k_+, i, j} &= \langle e_j; S_{k_+} e_i \rangle, & \forall i, j \in \{1; \dots; N\}, \quad \mathbb{D}_{k_+, i, j} &= \langle e_j; D_{k_+} e_i \rangle, \\ \forall i, j \in \{1; \dots; N\}, \quad \mathbb{D}_{k_+, i, j}^* &= \overline{\langle D_{k_+}^* e_i; e_j \rangle}, & \forall i, j \in \{1; \dots; N\}, \quad \mathbb{N}_{k_+, i, j} &= \overline{\langle N_{k_+} e_i; e_j \rangle}. \end{aligned}$$

La formulation variationnelle discrète de la formulation préconditionnée (2.10) s'écrit alors, sous forme matricielle, comme suit :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\mathbb{J}_\Gamma - \mathbb{S}_{k_+}^t \mathbb{T}_+ & \mathbb{D}_{k_+}^t \mathbb{T}_+^{-1} \\ -[\mathbb{D}_{k_+}^*]^t \mathbb{T}_+ & \frac{1}{2}\mathbb{J}_\Gamma + \mathbb{N}_{k_+}^t \mathbb{T}_+^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \{p\} \\ \{q\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\mathbb{J}_\Gamma \mathbb{T}_+^{-1} \{g\} \\ \frac{1}{2}\mathbb{J}_\Gamma \{g\} \end{pmatrix}.$$

Les opérateurs  $T_+$  et  $T_+^{-1}$  peuvent être compliqués en pratique de sorte que leur formes discrètes correspondent généralement à des algorithmes. Par conséquent, l'assemblage de  $\mathbb{T}_+$  est coûteux d'un point de vue computationnel. Ce point sera précisé dans la section 3.3. Il s'ensuit que l'assemblage de la matrice variationnelle de la formulation préconditionnée (2.10) est également coûteux puisqu'il requiert, sans contournement possible, de calculer la matrice  $\mathbb{T}_+$ , la décomposition LU de  $\mathbb{T}_+$  ainsi que les produits  $\mathbb{S}_{k_+}^t \mathbb{T}_+$ ,  $\mathbb{D}_{k_+}^t \mathbb{T}_+^{-1}$ ,  $[\mathbb{D}_{k_+}^*]^t \mathbb{T}_+$  et  $\mathbb{N}_{k_+}^t \mathbb{T}_+^{-1}$ .

La formulation variationnelle discrète de la formulation initiale (2.9), quant à elle, s'écrit, sous forme matricielle, comme suit :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\mathbb{J}_\Gamma \mathbb{T}_+ + \mathbb{N}_{k_+}^t & -[\mathbb{D}_{k_+}^*]^t \\ \mathbb{D}_{k_+}^t & \frac{1}{2}\mathbb{J}_\Gamma \mathbb{T}_+^{-1} - \mathbb{S}_{k_+}^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \{\gamma_D^+ u\} \\ \{\gamma_N^+ u\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\mathbb{J}_\Gamma \{g\} \\ \frac{1}{2}\mathbb{J}_\Gamma \mathbb{T}_+^{-1} \{g\} \end{pmatrix}.$$

Nous voyons donc que l'assemblage de la matrice de la formulation initiale (2.9) requiert de calculer moins de produits de matrices que celui de la matrice de la formulation préconditionnée (2.10). C'est en cela que la formulation préconditionnée (2.10) est moins adaptée à une résolution directe que la formulation initiale (2.9). Ceci est d'autant plus vrai qu'il est même possible de s'affranchir de l'assemblage de  $\mathbb{T}_+$ , du calcul de sa décomposition LU et de tout produit de matrices lors de la discrétisation de la formulation initiale (2.9). Ce point sera détaillé dans le Chapitre 3.

Maintenant que nous avons expliqué en quoi la formulation préconditionnée (2.10) n'est pas adaptée à une résolution directe, justifions du fait qu'elle se prête effectivement à une résolution itérative. Dans l'optique de préciser ce point, nous commençons par rappeler des relations liant les opérateurs DtN et les opérateurs intégraux surfaciques.

**Proposition 2.8** (Lien entre les opérateurs intégraux surfaciques et DtN).

Soit  $k \in \mathbb{R}_+^*$ . Les relations suivantes sont vérifiées :

$$-S_k \Lambda_{+,k} = \frac{1}{2}Id - D_k \quad , \quad -\Lambda_{+,k} S_k = \frac{1}{2}Id - D_k^* \quad , \quad N_k \Lambda_{+,k}^{-1} = \frac{1}{2}Id + D_k^*.$$

De plus, si l'opérateur DtN intérieur et son inverse sont bien définis, nous avons :

$$S_k \Lambda_{-,k,1} = \frac{1}{2}Id + D_k \quad , \quad \Lambda_{-,k,1} S_k = \frac{1}{2}Id + D_k^* \quad , \quad -N_k \Lambda_{-,k,1}^{-1} = \frac{1}{2}Id - D_k^*.$$

**Preuve**

Nous ne démontrons que les relations faisant intervenir le DtN intérieur, les arguments permettant de justifier celles associées au DtN extérieur étant similaires.

Commençons par prouver la première relation. Soit  $u \in H^1(\Omega_-)$  solution de l'équation de Helmholtz dans  $\Omega_-$ . En prolongeant  $u$  par 0 dans  $\Omega_+$ , la Proposition 1.3 page 15 nous donne la représentation suivante :

$$u = S_k \gamma_N^- u - D_k \gamma_D^- u \text{ dans } \Omega_-.$$

En prenant la trace de Dirichlet intérieure de cette relation, il vient (voir Proposition 1.2 page 15) :

$$S_k \gamma_N^- u = \frac{1}{2} \gamma_D^- u + D_k \gamma_D^- u,$$

ce qui s'écrit aussi :

$$S_k \Lambda_{-,k,1} \gamma_D^- u = \frac{1}{2} \gamma_D^- u + D_k \gamma_D^- u.$$

Comme  $k^2$  n'est pas une valeur propre du laplacien de Dirichlet, nous pouvons choisir  $u$  tel que  $\gamma_D^- u$  corresponde à n'importe quel élément de  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ , ce qui permet de conclure.

Démontrons à présent la seconde relation. Soit  $p \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  et  $u \in H^1(\Omega_-)$  définie par :

$$u = S_k p \text{ dans } \Omega_-.$$

La fonction  $u$  vérifie alors l'équation de Helmholtz dans  $\Omega_-$  et ses traces de Dirichlet et de Neumann sont données par (voir Proposition 1.2 page 15) :

$$\gamma_D^- u = S_k p \quad , \quad \gamma_N^- u = \frac{1}{2} p + D_k^* p.$$

Nous en déduisons alors que :

$$\Lambda_{-,k,1} S_k p = \frac{1}{2} p + D_k^* p.$$

Pour finir, la dernière relation se démontre comme la première à ceci près qu'il faut prendre la trace de Neumann et non la trace de Dirichlet :

$$-N_k \Lambda_{-,k,1}^{-1} \gamma_N^- u = \frac{1}{2} \gamma_N^- u - D_k^* \gamma_N^- u.$$

■

Nous disposons à présent de tous les outils pour expliquer en quoi la formulation préconditionnée (2.10) est adaptée à une résolution itérative. Comme pour le couplage faible (2.6), il existe des opérateurs optimaux pour lesquels la formulation préconditionnée (2.10) se prête *a priori* très bien à une résolution par la procédure GMRES.

**Proposition 2.9** (Opérateurs optimaux pour la formulation préconditionnée).

Nous notons  $\mathcal{O}$  l'opérateur de la formulation préconditionnée (2.10) :

$$\mathcal{O} : \begin{array}{ccc} H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) & \rightarrow & H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \\ \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} \frac{1}{2} p + D_{k_+} T_+^{-1} q - S_{k_+} T_+ p \\ \frac{1}{2} q - D_{k_+}^* T_+ p + N_{k_+} T_+^{-1} q \end{pmatrix} . \end{array}$$

Nous avons alors les implications suivantes :

$$\begin{array}{ll} T_+ = \Lambda_{+,k_+} & \Rightarrow Sp(\mathcal{O}) = \{1\} \quad , \quad T_+ = -\Lambda_{-,k_+,1} & \Rightarrow Sp(\mathcal{O}) = \{1\}, \\ T_+ = -\Lambda_{+,k_+} & \Rightarrow Sp(\mathcal{O}) = \{0\} \quad , \quad T_+ = \Lambda_{-,k_+,1} & \Rightarrow Sp(\mathcal{O}) = \{0\}. \end{array}$$

Dans la proposition précédente, il est implicite que  $\Lambda_{+,k_+}$  et  $\Lambda_{-,k_+,1}$  sont inversibles. C'est effectivement le cas pour  $\Lambda_{+,k_+}$  sans aucune restriction sur  $k_+$ . Il faut par contre imposer à  $k_+^2$  de n'être ni une valeur propre du laplacien de Dirichlet, ni une valeur propre du laplacien de Neumann pour que  $\Lambda_{-,k_+,1}$  soit bien défini et inversible (voir sous-section 2.1.3).

**Preuve**

Nous ne prouvons que la première implication, les autres se démontrant de la même manière.

Commençons par remarquer que si  $p \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ ,  $q \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  et  $\lambda \in \mathbb{C}$ , alors :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}p + D_{k_+} \Lambda_{+,k_+}^{-1} q - S_{k_+} \Lambda_{+,k_+} p \\ \frac{1}{2}q - D_{k_+}^* \Lambda_{+,k_+} p + N_{k_+} \Lambda_{+,k_+}^{-1} q \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} D_{k_+} \Lambda_{+,k_+}^{-1} q - D_{k_+} p = (\lambda - 1)p \\ D_{k_+}^* q - D_{k_+}^* \Lambda_{+,k_+} p = (\lambda - 1)q \end{cases} .$$

Si  $\lambda \neq 1$  est une valeur propre de  $\mathcal{O}$ , il existe  $(p; q) \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \setminus \{(0; 0)\}$  tel que :

$$\begin{cases} D_{k_+} \Lambda_{+,k_+}^{-1} q - D_{k_+} p = (\lambda - 1)p \\ D_{k_+}^* q - D_{k_+}^* \Lambda_{+,k_+} p = (\lambda - 1)q \end{cases}$$

En multipliant la première ligne par  $\Lambda_{+,k_+}$  et en remarquant que (cf. Proposition 2.8) :

$$\Lambda_{+,k_+} D_{k_+} = D_{k_+}^* \Lambda_{+,k_+} ,$$

il vient :

$$D_{k_+}^* q - D_{k_+}^* \Lambda_{+,k_+} p = (\lambda - 1) \Lambda_{+,k_+} p .$$

Par conséquent,  $(\lambda - 1)q = (\lambda - 1)\Lambda_{+,k_+} p$  donc  $q = \Lambda_{+,k_+} p$ . En injectant cette relation dans l'égalité précédente, nous voyons que  $(\lambda - 1)\Lambda_{+,k_+} p = 0$  donc  $q = p = 0$ , ce qui est en contradiction avec le fait que  $(p; q) \neq (0; 0)$ .

A présent, 1 est une valeur propre de  $\mathcal{O}$  si et seulement si il existe  $(p; q) \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \setminus \{(0; 0)\}$  tel que :

$$\begin{cases} D_{k_+} \Lambda_{+,k_+}^{-1} q - D_{k_+} p = 0 \\ D_{k_+}^* q - D_{k_+}^* \Lambda_{+,k_+} p = 0 \end{cases} \Leftrightarrow D_{k_+}^* q = D_{k_+}^* \Lambda_{+,k_+} p .$$

Il est alors simple d'exhiber des vecteurs propres de  $\mathcal{O}$  associés à la valeur propre 1. ■

Nous terminons cette sous-section en faisant le lien entre la proposition précédente et les méthodes de Brakhage-Werner généralisées [2, 7, 8, 9, 17]. Ces méthodes permettent de résoudre les problèmes de diffraction sound-soft :

$$u \in H_{\text{loc}}^1(\overline{\Omega_+}) \quad , \quad \Delta u + k_+^2 u = 0 \text{ dans } \Omega_+ \quad , \quad \gamma_D^+ u = g \quad , \quad \partial_r u - ik_+ u = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right) ,$$

et sound-hard :

$$u \in H_{\text{loc}}^1(\overline{\Omega_+}) \quad , \quad \Delta u + k_+^2 u = 0 \text{ dans } \Omega_+ \quad , \quad \gamma_N^+ u = g \quad , \quad \partial_r u - ik_+ u = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right) ,$$

en cherchant leurs solutions respectives sous la forme :

$$u = -\mathcal{S}_{k_+} T_s p + \mathcal{D}_{k_+} p \quad , \quad u = -\mathcal{S}_{k_+} q + \mathcal{D}_{k_+} T_h q ,$$

les opérateurs  $T_s$  et  $T_h$  étant respectivement définis de  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  dans  $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  et de  $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  dans  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ . Cette spécification de la forme des solutions est justifiée par le fait que ces dernières peuvent se représenter comme suit :

$$u = -\mathcal{S}_{k_+} \Lambda_{+,k_+} \gamma_D^+ u + \mathcal{D}_{k_+} \gamma_D^+ u .$$

Dans le cas du problème extérieur (2.5) et de la formulation préconditionnée (2.10), il n'est pas nécessaire de prescrire de cette manière la forme de la solution. En effet, puisque  $u$  vérifie  $\gamma_N^+ u + T_+ \gamma_D^+ u = g$ , des représentations intégrales similaires à celles utilisées dans les méthodes de Brakhage-Werner généralisées sont disponibles pour  $u$ . Pour finir, les équations intégrales associées aux méthodes de Brakhage-Werner généralisées, qui sont par ailleurs équivalentes aux problèmes initiaux, sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_s p = g \quad , \quad \mathcal{O}_s &= \frac{1}{2} Id + D_{k_+} - S_{k_+} T_s , \\ \mathcal{O}_h q = g \quad , \quad \mathcal{O}_h &= \frac{1}{2} Id - D_{k_+}^* + N_{k_+} T_h , \end{aligned}$$

et nous avons :

$$\begin{array}{llll}
 T_s = \Lambda_{+,k_+} & \Rightarrow & \mathcal{O}_s = Id, & T_h = \Lambda_{+,k_+}^{-1} & \Rightarrow & \mathcal{O}_h = Id, \\
 T_s = -\Lambda_{+,k_+} & \Rightarrow & \mathcal{O}_s = 2D_{k_+}, & T_h = -\Lambda_{+,k_+}^{-1} & \Rightarrow & \mathcal{O}_h = -2D_{k_+}^*, \\
 T_s = \Lambda_{-,k_+,1} & \Rightarrow & \mathcal{O}_s = 0, & T_h = \Lambda_{-,k_+,1}^{-1} & \Rightarrow & \mathcal{O}_h = 0, \\
 T_s = -\Lambda_{-,k_+,1} & \Rightarrow & \mathcal{O}_s = Id + 2D_{k_+}, & T_h = -\Lambda_{-,k_+,1}^{-1} & \Rightarrow & \mathcal{O}_h = Id - 2D_{k_+}^*.
 \end{array}$$

### 2.2.2 Formulations pour la résolution du problème intérieur

La méthode de résolution pour les problèmes intérieurs (2.4) dépend de l'homogénéité ou non de l'objet diffractant. Si ce dernier est homogène, nous pouvons résoudre les problèmes intérieurs (2.4) en utilisant indifféremment des équations intégrales et la méthode des éléments finis surfaciques (couplage faible BEM-BEM) ou la méthode des éléments finis volumiques (couplage faible FEM-BEM). En revanche, si l'objet diffractant n'est pas homogène, nous utilisons la méthode des éléments finis volumiques pour résoudre les problèmes intérieurs (2.4).

Lorsque le couplage faible (2.6) est de type BEM-BEM, la formulation intégrale que nous proposons pour résoudre les problèmes intérieurs (2.4) est l'analogie exact de la formulation adoptée pour les problèmes extérieurs (2.5). Elle est équivalente au problème intérieur (2.4) et naturellement adaptée à une résolution directe. De plus, il est possible de la reformuler pour la rendre adaptée à une résolution itérative.

**Proposition 2.10** (Formulation pour la résolution du problème intérieur).

La formulation permettant de résoudre le problème intérieur (2.4) est la suivante :

$$\frac{1}{2}\rho T_-^{-1}\gamma_{\bar{N}}u - D_{k_-}\gamma_{\bar{D}}u + S_{k_-}\gamma_{\bar{N}}u = \frac{1}{2}T_-^{-1}g \quad , \quad \frac{1}{2\rho}T_-\gamma_{\bar{D}}u + D_{k_-}^*\gamma_{\bar{N}}u - N_{k_-}\gamma_{\bar{D}}u = \frac{1}{2\rho}g. \quad (2.11)$$

En posant :

$$p = \rho T_-^{-1}\gamma_{\bar{N}}u \quad , \quad q = \frac{1}{\rho}T_-\gamma_{\bar{D}}u,$$

cette formulation se réécrit de manière équivalente comme suit :

$$\frac{1}{2}p - \rho D_{k_-}T_-^{-1}q + \frac{1}{\rho}S_{k_-}T_-p = \frac{1}{2}T_-^{-1}g \quad , \quad \frac{1}{2}q + \frac{1}{\rho}D_{k_-}^*T_-p - \rho N_{k_-}T_-^{-1}q = \frac{1}{2\rho}g. \quad (2.12)$$

**Proposition 2.11** (Opérateurs optimaux pour la formulation préconditionnée).

Nous notons  $\mathcal{O}$  l'opérateur de la formulation préconditionnée (2.12) :

$$\mathcal{O} : (p; q) \mapsto \left( \frac{1}{2}p - \rho D_{k_-}T_-^{-1}q + \frac{1}{\rho}S_{k_-}T_-p; \frac{1}{2}q + \frac{1}{\rho}D_{k_-}^*T_-p - \rho N_{k_-}T_-^{-1}q \right).$$

Nous avons alors :

$$\begin{array}{ll}
 T_- = \rho\Lambda_{+,k_-} & \Rightarrow \quad Sp(\mathcal{O}) = \{0\} \quad , \quad T_- = -\rho\Lambda_{+,k_-} & \Rightarrow \quad Sp(\mathcal{O}) = \{1\}, \\
 T_- = \Lambda_{-,k_-, \rho} & \Rightarrow \quad Sp(\mathcal{O}) = \{1\} \quad , \quad T_- = -\Lambda_{-,k_-, \rho} & \Rightarrow \quad Sp(\mathcal{O}) = \{0\}.
 \end{array}$$

Si le couplage faible (2.6) est de type FEM-BEM, les problèmes intérieurs (2.4) sont résolus grâce à une formulation variationnelle classique.

**Proposition 2.12** (Formulation variationnelle pour le problème intérieur).

La formulation variationnelle pour le problème intérieur (2.4) est la suivante :

$$\forall v \in H^1(\Omega_-), \quad \int_{\Omega_-} \rho \nabla u \cdot \nabla \bar{v} \, d\Omega_- - \int_{\Omega_-} \rho k_-^2 u \bar{v} \, d\Omega_- + \overline{\langle T_-\gamma_{\bar{D}}u; \gamma_{\bar{D}}v \rangle} = \overline{\langle g; \gamma_{\bar{D}}v \rangle}. \quad (2.13)$$

### 2.2.3 Conflit sur les opérateurs optimaux

Nous rappelons que pour le couplage faible (2.6), les opérateurs optimaux sont donnés par :

$$T_- = -\Lambda_{+,k_+} \quad , \quad T_+ = -\Lambda_{-,k_-, \rho}. \quad (2.14)$$

Pour les sous-problèmes (2.4) et (2.5) en revanche, les opérateurs optimaux sont les suivants :

$$T_- = \Lambda_{-,k_-, \rho} \quad , \quad T_- = -\rho\Lambda_{+,k_-} \quad , \quad T_+ = -\Lambda_{-,k_+,1} \quad , \quad T_+ = \Lambda_{+,k_+}, \quad (2.15)$$

les opérateurs pour le problème intérieur (2.4) n'étant effectivement optimaux que si le couplage faible (2.6) est de type BEM-BEM. Nous voyons donc apparaître un conflit sur le choix des opérateurs optimaux.

Notre but premier est de conditionner au mieux le couplage faible (2.6). Cela sera illustré par la suite mais les opérateurs de transmission (2.15) ne permettent pas d'atteindre cet objectif aussi bien que les opérateurs de transmission (2.14). Ajouté à cela, les opérateurs de transmission (2.15) sont intéressants lorsque nous cherchons à résoudre les sous-problèmes (2.4) et (2.5) par équations intégrales et de manière itérative. Dans ce travail, nous avons choisi de nous concentrer sur la résolution directe de ces problèmes. Il est par conséquent plus judicieux de se limiter à l'utilisation des opérateurs de transmission (2.14).

## 2.3 Approximations des opérateurs DtN

Comme nous l'avons vu, les opérateurs de transmission optimaux, que cela soit pour le couplage faible (2.6) ou les sous-problèmes (2.4) et (2.5), correspondent à des opérateurs DtN. D'un point de vue pratique, ceci est *a priori* problématique puisque l'évaluation numérique de ces opérateurs est coûteuse en temps de calcul et en mémoire. En effet, elle requiert de résoudre un des problèmes (2.7) ou (2.8). Si les opérateurs DtN sont associés à des milieux homogènes, les problèmes précédents peuvent être résolus par le biais de formulations intégrales et de la méthode des éléments finis surfaciques. Les systèmes à résoudre sont alors pleins, complexes et de grande taille. Une autre approche, qui permet de traiter le cas où les opérateurs DtN sont associés à des milieux non homogènes, consiste à résoudre les problèmes (2.7) et (2.8) en utilisant la méthode des éléments finis volumiques. Dans ce cas, les systèmes qui en découlent sont creux, complexes et de grande taille. Il s'ensuit que l'évaluation exacte des opérateurs DtN ne constitue pas une solution réaliste en pratique.

Une alternative consiste à évaluer les opérateurs DtN de manière approximative, dans l'idéal précisément et efficacement d'un point de vue computationnel. Dans cette section, nous présentons des approximations des opérateurs DtN permettant d'atteindre cet objectif. Nous précisons également comment ces approximations peuvent être hiérarchisées les unes par rapport aux autres en termes de qualité. Cette hiérarchisation sera confirmée dans la sous-section 2.4.3 par des résultats numériques. Dans ce travail, une approximation est considérée être de bonne qualité si son spectre est proche de celui de l'opérateur qu'elle approxime. Nous finissons par mentionner que la qualité des approximations des opérateurs DtN utilisées pour construire le couplage faible (2.6) impacte directement ses propriétés spectrales et donc sa vitesse de convergence. Des résultats numériques illustrant ce propos sont présentés dans la sous-section 2.4.4.

Les approximations des opérateurs DtN que nous présentons dans cette section sont construites à partir d'opérateurs différentiels surfaciques sur  $\Gamma$ . Nous faisons donc, dans une première sous-section inspirée de l'ouvrage [88], quelques rappels concernant ces opérateurs.

### 2.3.1 Opérateurs différentiels et espaces de Sobolev surfaciques

Les opérateurs gradient, divergence, rotationnel vectoriel, rotationnel scalaire et laplacien scalaire surfaciques sur  $\Gamma$ , respectivement notés  $\nabla_\Gamma$ ,  $\text{div}_\Gamma$ ,  $\mathbf{rot}_\Gamma$ ,  $\text{rot}_\Gamma$  et  $\Delta_\Gamma$ , peuvent être introduits pour des fonctions de régularité classique [88]. Leur définition rigoureuse demandant toutefois des développements conséquents en géométrie différentielle, nous ne la présenterons pas dans ce travail. Par la suite, nous utiliserons les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \forall u \in \mathcal{C}^2(\Gamma), \quad \Delta_\Gamma u &= \text{div}_\Gamma \nabla_\Gamma u = -\text{rot}_\Gamma \mathbf{rot}_\Gamma u, \\ \forall u \in \mathcal{C}^1(\Gamma), \quad \mathbf{rot}_\Gamma u &= \nabla_\Gamma u \wedge \mathbf{n}, \\ \forall \mathbf{u} \in \mathcal{C}_t^1(\Gamma), \quad \text{rot}_\Gamma \mathbf{u} &= \text{div}_\Gamma (\mathbf{u} \wedge \mathbf{n}), \\ \forall u \in \mathcal{C}^2(\Gamma), \quad \text{rot}_\Gamma \nabla_\Gamma u &= 0, \\ \forall u \in \mathcal{C}^2(\Gamma), \quad \text{div}_\Gamma \mathbf{rot}_\Gamma u &= 0, \end{aligned}$$

ainsi que les formules d'intégration par parties rappelées ci-dessous :

$$\begin{aligned}\forall u \in \mathcal{C}^1(\Gamma), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{C}_t^1(\Gamma), \quad \int_{\Gamma} u \operatorname{div}_{\Gamma} \mathbf{v} \, d\Gamma &= - \int_{\Gamma} \nabla_{\Gamma} u \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma, \\ \forall u \in \mathcal{C}^1(\Gamma), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{C}_t^1(\Gamma), \quad \int_{\Gamma} u \operatorname{rot}_{\Gamma} \mathbf{v} \, d\Gamma &= \int_{\Gamma} \mathbf{rot}_{\Gamma} u \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma, \\ \forall u \in \mathcal{C}^1(\Gamma) \quad \forall v \in \mathcal{C}^2(\Gamma), \quad \int_{\Gamma} u \Delta_{\Gamma} v \, d\Gamma &= - \int_{\Gamma} \nabla_{\Gamma} u \cdot \nabla_{\Gamma} v \, d\Gamma,\end{aligned}$$

l'ensemble  $\mathcal{C}_t^1(\Gamma)$  étant défini comme suit :

$$\mathcal{C}_t^1(\Gamma) = \{ \mathbf{u} \in \mathcal{C}^1(\Gamma) : \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \}.$$

Nous rappelons à présent que les opérateurs  $\nabla_{\Gamma}$ ,  $\operatorname{div}_{\Gamma}$ ,  $\mathbf{rot}_{\Gamma}$ ,  $\operatorname{rot}_{\Gamma}$  et  $\Delta_{\Gamma}$  peuvent également être définis pour des fonctions qui ne sont pas régulières au sens classique du terme. Plus précisément, nous disons que les fonctions  $u_1 \in L^2(\Gamma)$ ,  $u_2 \in L^2(\Gamma)$ ,  $\mathbf{u}_1 \in \mathbf{L}_t^2(\Gamma)$  et  $\mathbf{u}_2 \in \mathbf{L}_t^2(\Gamma)$  admettent respectivement un gradient surfacique faible dans  $\mathbf{L}_t^2(\Gamma)$ , un rotationnel surfacique vectoriel faible dans  $\mathbf{L}_t^2(\Gamma)$ , une divergence surfacique faible dans  $L^2(\Gamma)$  et un rotationnel surfacique scalaire faible dans  $L^2(\Gamma)$ , si il existe  $\mathbf{v}_1 \in \mathbf{L}_t^2(\Gamma)$ ,  $\mathbf{v}_2 \in \mathbf{L}_t^2(\Gamma)$ ,  $v_1 \in L^2(\Gamma)$  et  $v_2 \in L^2(\Gamma)$ , respectivement notés  $\nabla_{\Gamma} u_1$ ,  $\mathbf{rot}_{\Gamma} u_2$ ,  $\operatorname{div}_{\Gamma} \mathbf{u}_1$  et  $\operatorname{rot}_{\Gamma} \mathbf{u}_2$ , tels que :

$$\begin{aligned}\forall \varphi \in \mathcal{C}_t^{\infty}(\Gamma), \quad \int_{\Gamma} u_1 \operatorname{div}_{\Gamma} \varphi \, d\Gamma &= - \int_{\Gamma} \nabla_{\Gamma} u_1 \cdot \varphi \, d\Gamma, \\ \forall \varphi \in \mathcal{C}_t^{\infty}(\Gamma), \quad \int_{\Gamma} u_2 \operatorname{rot}_{\Gamma} \varphi \, d\Gamma &= \int_{\Gamma} \mathbf{rot}_{\Gamma} u_2 \cdot \varphi \, d\Gamma, \\ \forall \varphi \in \mathcal{C}^{\infty}(\Gamma), \quad \int_{\Gamma} \mathbf{u}_1 \cdot \nabla_{\Gamma} \varphi \, d\Gamma &= - \int_{\Gamma} \operatorname{div}_{\Gamma} \mathbf{u}_1 \varphi \, d\Gamma, \\ \forall \varphi \in \mathcal{C}^{\infty}(\Gamma), \quad \int_{\Gamma} \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{rot}_{\Gamma} \varphi \, d\Gamma &= \int_{\Gamma} \operatorname{rot}_{\Gamma} \mathbf{u}_2 \varphi \, d\Gamma.\end{aligned}$$

Nous introduisons alors naturellement les espaces de Sobolev surfaciques  $\mathbf{H}(\nabla_{\Gamma}, \Gamma)$ ,  $\mathbf{H}_t(\operatorname{div}_{\Gamma}, \Gamma)$ ,  $\mathbf{H}(\mathbf{rot}_{\Gamma}, \Gamma)$  et  $\mathbf{H}_t(\operatorname{rot}_{\Gamma}, \Gamma)$  :

$$\begin{aligned}\mathbf{H}(\nabla_{\Gamma}, \Gamma) &= \{ u \in L^2(\Gamma) : \nabla_{\Gamma} u \in \mathbf{L}_t^2(\Gamma) \}, \quad \mathbf{H}_t(\operatorname{div}_{\Gamma}, \Gamma) = \{ \mathbf{u} \in \mathbf{L}_t^2(\Gamma) : \operatorname{div}_{\Gamma} \mathbf{u} \in L^2(\Gamma) \}, \\ \mathbf{H}(\mathbf{rot}_{\Gamma}, \Gamma) &= \{ u \in L^2(\Gamma) : \mathbf{rot}_{\Gamma} u \in \mathbf{L}_t^2(\Gamma) \}, \quad \mathbf{H}_t(\operatorname{rot}_{\Gamma}, \Gamma) = \{ \mathbf{u} \in \mathbf{L}_t^2(\Gamma) : \operatorname{rot}_{\Gamma} \mathbf{u} \in L^2(\Gamma) \}.\end{aligned}$$

Munis des produits scalaires suivants :

$$\begin{aligned}\forall u, v \in \mathbf{H}(\nabla_{\Gamma}, \Gamma), \quad \langle u; v \rangle_{\mathbf{H}(\nabla_{\Gamma}, \Gamma)} &= \langle u; v \rangle_{L^2(\Gamma)} + \langle \nabla_{\Gamma} u; \nabla_{\Gamma} v \rangle_{\mathbf{L}_t^2(\Gamma)}, \\ \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}_t(\operatorname{div}_{\Gamma}, \Gamma), \quad \langle \mathbf{u}; \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{H}_t(\operatorname{div}_{\Gamma}, \Gamma)} &= \langle \mathbf{u}; \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{L}_t^2(\Gamma)} + \langle \operatorname{div}_{\Gamma} \mathbf{u}; \operatorname{div}_{\Gamma} \mathbf{v} \rangle_{L^2(\Gamma)}, \\ \forall u, v \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}_{\Gamma}, \Gamma), \quad \langle u; v \rangle_{\mathbf{H}(\mathbf{rot}_{\Gamma}, \Gamma)} &= \langle u; v \rangle_{L^2(\Gamma)} + \langle \mathbf{rot}_{\Gamma} u; \mathbf{rot}_{\Gamma} v \rangle_{\mathbf{L}_t^2(\Gamma)}, \\ \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}_t(\operatorname{rot}_{\Gamma}, \Gamma), \quad \langle \mathbf{u}; \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{H}_t(\operatorname{rot}_{\Gamma}, \Gamma)} &= \langle \mathbf{u}; \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{L}_t^2(\Gamma)} + \langle \operatorname{rot}_{\Gamma} \mathbf{u}; \operatorname{rot}_{\Gamma} \mathbf{v} \rangle_{L^2(\Gamma)},\end{aligned}$$

les espaces  $\mathbf{H}(\nabla_{\Gamma}, \Gamma)$ ,  $\mathbf{H}_t(\operatorname{div}_{\Gamma}, \Gamma)$ ,  $\mathbf{H}(\mathbf{rot}_{\Gamma}, \Gamma)$  et  $\mathbf{H}_t(\operatorname{rot}_{\Gamma}, \Gamma)$  sont des espaces de Hilbert et les opérateurs  $\nabla_{\Gamma}$ ,  $\operatorname{div}_{\Gamma}$ ,  $\mathbf{rot}_{\Gamma}$  et  $\operatorname{rot}_{\Gamma}$  sont alors continus :

$$\begin{aligned}\nabla_{\Gamma} : \mathbf{H}(\nabla_{\Gamma}, \Gamma) &\rightarrow \mathbf{L}_t^2(\Gamma) \quad , \quad \operatorname{div}_{\Gamma} : \mathbf{H}_t(\operatorname{div}_{\Gamma}, \Gamma) \rightarrow L^2(\Gamma), \\ \mathbf{rot}_{\Gamma} : \mathbf{H}(\mathbf{rot}_{\Gamma}, \Gamma) &\rightarrow \mathbf{L}_t^2(\Gamma) \quad , \quad \operatorname{rot}_{\Gamma} : \mathbf{H}_t(\operatorname{rot}_{\Gamma}, \Gamma) \rightarrow L^2(\Gamma).\end{aligned}$$

Nous montrons sans difficulté que :

$$\begin{aligned}\mathbf{H}(\mathbf{rot}_{\Gamma}, \Gamma) &= \mathbf{H}(\nabla_{\Gamma}, \Gamma) \quad , \quad \mathbf{H}_t(\operatorname{rot}_{\Gamma}, \Gamma) = \mathbf{H}_t(\operatorname{div}_{\Gamma}, \Gamma) \wedge \mathbf{n}, \\ \nabla_{\Gamma} \mathbf{H}(\nabla_{\Gamma}, \Gamma) &\subset \mathbf{H}_t(\operatorname{rot}_{\Gamma}, \Gamma) \quad , \quad \mathbf{rot}_{\Gamma} \mathbf{H}(\mathbf{rot}_{\Gamma}, \Gamma) \subset \mathbf{H}_t(\operatorname{div}_{\Gamma}, \Gamma),\end{aligned}$$

et que les formules suivantes sont toujours valables :

$$\begin{aligned}\mathbf{rot}_{\Gamma} &= \nabla_{\Gamma} \wedge \mathbf{n} \quad , \quad \operatorname{rot}_{\Gamma} = \operatorname{div}_{\Gamma}(\cdot \wedge \mathbf{n}), \\ \operatorname{rot}_{\Gamma} \nabla_{\Gamma} &= 0 \quad , \quad \operatorname{div}_{\Gamma} \mathbf{rot}_{\Gamma} = 0.\end{aligned}$$

Le laplacien scalaire surfacique quant à lui peut être défini sur un sous-espace de  $\mathbf{H}(\nabla_{\Gamma}, \Gamma) = \mathbf{H}(\mathbf{rot}_{\Gamma}, \Gamma)$  comme suit :

$$\begin{aligned}\forall u \in \mathbf{H}(\nabla_{\Gamma}, \Gamma), \quad \nabla_{\Gamma} u \in \mathbf{H}_t(\operatorname{div}_{\Gamma}, \Gamma) &\Rightarrow \Delta_{\Gamma} = \operatorname{div}_{\Gamma} \nabla_{\Gamma} u, \\ \forall u \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}_{\Gamma}, \Gamma), \quad \mathbf{rot}_{\Gamma} u \in \mathbf{H}_t(\operatorname{rot}_{\Gamma}, \Gamma) &\Rightarrow \Delta_{\Gamma} = -\operatorname{rot}_{\Gamma} \mathbf{rot}_{\Gamma} u,\end{aligned}$$

ces deux définitions étant équivalentes. Pour finir, nous disposons des formules d'intégration par parties suivantes :

$$\begin{aligned} \forall u \in \mathbf{H}(\nabla_\Gamma, \Gamma), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_t(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma), \quad \int_\Gamma u \operatorname{div}_\Gamma \mathbf{v} \, d\Gamma &= - \int_\Gamma \nabla_\Gamma u \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma, \\ \forall u \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}_\Gamma, \Gamma), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_t(\mathbf{rot}_\Gamma, \Gamma), \quad \int_\Gamma u \mathbf{rot}_\Gamma \mathbf{v} \, d\Gamma &= \int_\Gamma \mathbf{rot}_\Gamma u \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma, \\ \forall u, v \in \mathbf{H}(\nabla_\Gamma, \Gamma), \quad \nabla_\Gamma v \in \mathbf{H}_t(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma) \quad \Rightarrow \quad \int_\Gamma u \Delta_\Gamma v \, d\Gamma &= - \int_\Gamma \nabla_\Gamma u \cdot \nabla_\Gamma v \, d\Gamma. \end{aligned}$$

La généralisation des opérateurs  $\nabla_\Gamma$ ,  $\operatorname{div}_\Gamma$ ,  $\mathbf{rot}_\Gamma$ ,  $\mathbf{rot}_\Gamma$  et  $\Delta_\Gamma$  que nous venons de présenter est intéressante en pratique mais elle n'est toutefois pas suffisante. Par exemple, elle ne permet pas de parler du gradient surfacique ou du laplacien scalaire surfacique sur les espaces  $L^2(\Gamma)$  et  $H^{\pm\frac{1}{2}}(\Gamma)$ . Dans la suite de cette sous-section, pour pallier cette limitation, nous expliquons comment définir les opérateurs  $\nabla_\Gamma$ ,  $\operatorname{div}_\Gamma$ ,  $\mathbf{rot}_\Gamma$ ,  $\mathbf{rot}_\Gamma$  et  $\Delta_\Gamma$  sur les espaces  $H^s(\Gamma)$  et  $\mathbf{H}_t^s(\Gamma)$ ,  $s \in \mathbb{R}$ . Nous rappelons que, en vertu des égalités données ci-dessous, ces espaces sont des généralisations des espaces  $L^2(\Gamma)$ ,  $\mathbf{H}(\nabla_\Gamma, \Gamma)$  et  $\mathbf{L}_t^2(\Gamma)$  :

$$\mathbf{H}^0(\Gamma) = L^2(\Gamma) \quad , \quad \mathbf{H}^1(\Gamma) = \mathbf{H}(\nabla_\Gamma, \Gamma) \quad , \quad \mathbf{H}_t^0(\Gamma) = \mathbf{L}_t^2(\Gamma).$$

Classiquement, les espaces  $H^s(\Gamma)$  et  $\mathbf{H}_t^s(\Gamma)$  sont introduits par le biais de la théorie des distributions [88]. Ces définitions rendent alors la manipulation des éléments de  $H^s(\Gamma)$  et de  $\mathbf{H}_t^s(\Gamma)$  relativement compliquée. Lorsque  $\Gamma$  est  $C^\infty$ , ce que nous avons supposé, il existe des définitions équivalentes, et surtout beaucoup plus simples à manier, des espaces  $H^s(\Gamma)$  et  $\mathbf{H}_t^s(\Gamma)$  [88]. Nous avons donc choisi d'utiliser ces définitions alternatives des espaces  $H^s(\Gamma)$  et  $\mathbf{H}_t^s(\Gamma)$  pour généraliser les opérateurs  $\nabla_\Gamma$ ,  $\operatorname{div}_\Gamma$ ,  $\mathbf{rot}_\Gamma$ ,  $\mathbf{rot}_\Gamma$  et  $\Delta_\Gamma$ . Nous mentionnons par ailleurs que, dans l'optique d'alléger la présentation, qui est déjà conséquente, nous supposons que  $\Gamma$  est une surface connexe et simplement connexe. Cela permet notamment de simplifier légèrement les définitions des espaces  $H^s(\Gamma)$  et  $\mathbf{H}_t^s(\Gamma)$  et par conséquent celles des opérateurs  $\nabla_\Gamma$ ,  $\operatorname{div}_\Gamma$ ,  $\mathbf{rot}_\Gamma$ ,  $\mathbf{rot}_\Gamma$  et  $\Delta_\Gamma$ . Si  $\Gamma$  n'est pas connexe ou pas simplement connexe, les espaces  $H^s(\Gamma)$  et  $\mathbf{H}_t^s(\Gamma)$  ainsi que les opérateurs  $\nabla_\Gamma$ ,  $\operatorname{div}_\Gamma$ ,  $\mathbf{rot}_\Gamma$ ,  $\mathbf{rot}_\Gamma$  et  $\Delta_\Gamma$  peuvent être définis exactement de la même façon à un détail technique près ne présentant aucune difficulté [88]. Pour des raisons de brièveté, nous ne rappelons pas dans cette sous-section les définitions des espaces  $H^s(\Gamma)$  et  $\mathbf{H}_t^s(\Gamma)$  avec lesquelles nous travaillons. Ces définitions font toutefois l'objet de l'Annexe A. Nous nous contentons ici de donner deux propositions concernant les espaces  $H^s(\Gamma)$  et  $\mathbf{H}_t^s(\Gamma)$  permettant de comprendre la généralisation des opérateurs  $\nabla_\Gamma$ ,  $\operatorname{div}_\Gamma$ ,  $\mathbf{rot}_\Gamma$ ,  $\mathbf{rot}_\Gamma$  et  $\Delta_\Gamma$ .

Dans cette sous-section, la famille  $(e_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$  désigne une base orthonormale de  $L^2(\Gamma)$  vérifiant :

$$\begin{aligned} e_\ell \in \mathbb{R} \quad \text{p.p.} \quad , \quad (e_\ell) \subset \mathbf{H}(\nabla_\Gamma, \Gamma) \quad , \quad -\Delta_\Gamma e_\ell = \lambda_\ell e_\ell \quad , \quad e_0 = |\Gamma|^{-\frac{1}{2}}, \\ \lambda_0 = 0 \quad , \quad (\lambda_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}^*} \subset \mathbb{R}_+^* \quad , \quad \lambda_\ell \xrightarrow{\ell \rightarrow +\infty} +\infty, \end{aligned}$$

le laplacien scalaire surfacique devant être compris au sens faible que nous avons introduit précédemment, et les familles  $(\mathbf{e}_\ell^1)_{\ell \in \mathbb{N}^*}$  et  $(\mathbf{e}_\ell^2)_{\ell \in \mathbb{N}^*}$  sont définies comme suit :

$$\forall \ell \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{e}_\ell^1 = \nabla_\Gamma e_\ell \quad , \quad \forall \ell \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{e}_\ell^2 = \mathbf{rot}_\Gamma e_\ell.$$

**Proposition 2.13** (Séries dans les espaces  $H^s(\Gamma)$ ).

Soit  $s \in \mathbb{R}$ . Si  $u \in H^s(\Gamma)$ , il existe une suite  $(\alpha_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$  telle que :

$$u = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \alpha_\ell e_\ell \quad \text{dans } H^s(\Gamma) \quad , \quad \sum_{\ell=0}^{+\infty} (1 + \lambda_\ell)^s |\alpha_\ell|^2 = \|u\|_{H^s(\Gamma)}^2 < +\infty.$$

Si  $(\alpha_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ , la somme :

$$\sum_{\ell=0}^{+\infty} \alpha_\ell e_\ell,$$

converge dans  $H^s(\Gamma)$  si et seulement si :

$$\sum_{\ell=0}^{+\infty} (1 + \lambda_\ell)^s |\alpha_\ell|^2 < +\infty.$$

**Proposition 2.14** (Séries dans les espaces  $\mathbf{H}_t^s(\Gamma)$ ).

Soit  $s \in \mathbb{R}$ . Si  $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_t^s(\Gamma)$ , nous pouvons exhiber deux suites  $(\alpha_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}^*}, (\beta_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}^*} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$  telles que :

$$\mathbf{u} = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \alpha_\ell \mathbf{e}_\ell^1 + \beta_\ell \mathbf{e}_\ell^2 \quad \text{dans } \mathbf{H}_t^s(\Gamma) \quad , \quad \sum_{\ell=1}^{+\infty} \lambda_\ell^{s+1} (|\alpha_\ell|^2 + |\beta_\ell|^2) = \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}_t^s(\Gamma)}^2 < +\infty.$$

Si  $(\alpha_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}^*}, (\beta_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}^*} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$ , la convergence dans  $\mathbf{H}_t^s(\Gamma)$  de la somme :

$$\sum_{\ell=1}^{+\infty} \alpha_\ell \mathbf{e}_\ell^1 + \beta_\ell \mathbf{e}_\ell^2,$$

est équivalente à la condition suivante :

$$\sum_{\ell=1}^{+\infty} \lambda_\ell^{s+1} (|\alpha_\ell|^2 + |\beta_\ell|^2) < +\infty.$$

Soit  $s \in \mathbb{R}$ . Les opérateurs  $\nabla_\Gamma$ ,  $\text{div}_\Gamma$ ,  $\text{rot}_\Gamma$  et  $\text{rot}_\Gamma$  :

$$\begin{aligned} \nabla_\Gamma &: \mathbf{H}^{s+1}(\Gamma) \rightarrow \mathbf{H}_t^s(\Gamma) \quad , \quad \text{div}_\Gamma : \mathbf{H}_t^{s+1}(\Gamma) \rightarrow \mathbf{H}^s(\Gamma), \\ \text{rot}_\Gamma &: \mathbf{H}^{s+1}(\Gamma) \rightarrow \mathbf{H}_t^s(\Gamma) \quad , \quad \text{rot}_\Gamma : \mathbf{H}_t^{s+1}(\Gamma) \rightarrow \mathbf{H}^s(\Gamma), \end{aligned}$$

sont définis comme suit :

$$\begin{aligned} \forall u \in \mathbf{H}^{s+1}(\Gamma), \quad \nabla_\Gamma u &= \sum_{\ell=1}^{+\infty} \alpha_\ell \mathbf{e}_\ell^1 \quad \text{dans } \mathbf{H}_t^s(\Gamma) \quad \text{où} \quad u = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \alpha_\ell e_\ell \quad \text{dans } \mathbf{H}^{s+1}(\Gamma), \\ \forall \mathbf{u} \in \mathbf{H}_t^{s+1}(\Gamma), \quad \text{div}_\Gamma \mathbf{u} &= - \sum_{\ell=1}^{+\infty} \alpha_\ell \lambda_\ell e_\ell \quad \text{dans } \mathbf{H}^s(\Gamma) \quad \text{où} \quad \mathbf{u} = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \alpha_\ell \mathbf{e}_\ell^1 + \beta_\ell \mathbf{e}_\ell^2 \quad \text{dans } \mathbf{H}_t^{s+1}(\Gamma), \\ \forall u \in \mathbf{H}^{s+1}(\Gamma), \quad \text{rot}_\Gamma u &= \sum_{\ell=1}^{+\infty} \alpha_\ell \mathbf{e}_\ell^2 \quad \text{dans } \mathbf{H}_t^s(\Gamma) \quad \text{où} \quad u = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \alpha_\ell e_\ell \quad \text{dans } \mathbf{H}^{s+1}(\Gamma), \\ \forall \mathbf{u} \in \mathbf{H}_t^{s+1}(\Gamma), \quad \text{rot}_\Gamma \mathbf{u} &= \sum_{\ell=1}^{+\infty} \beta_\ell \lambda_\ell e_\ell \quad \text{dans } \mathbf{H}^s(\Gamma) \quad \text{où} \quad \mathbf{u} = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \alpha_\ell \mathbf{e}_\ell^1 + \beta_\ell \mathbf{e}_\ell^2 \quad \text{dans } \mathbf{H}_t^{s+1}(\Gamma). \end{aligned}$$

Ils sont alors continus. De plus, ils généralisent bien les notions de gradient, de divergence, de rotationnel vectoriel et de rotationnel scalaire surfaciques faibles que nous avons introduites précédemment. Des résultats précisant ce point sont donnés dans l'Annexe A. L'opérateur  $\cdot \wedge \mathbf{n}$  peut également être étendu aux espaces  $\mathbf{H}_t^s(\Gamma)$  (voir l'Annexe A pour plus de détails) et nous avons :

$$\forall \mathbf{u} \in \mathbf{H}_t^s(\Gamma), \quad \mathbf{u} \wedge \mathbf{n} = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \alpha_\ell \mathbf{e}_\ell^2 - \beta_\ell \mathbf{e}_\ell^1 \quad \text{dans } \mathbf{H}_t^s(\Gamma) \quad \text{où} \quad \mathbf{u} = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \alpha_\ell \mathbf{e}_\ell^1 + \beta_\ell \mathbf{e}_\ell^2 \quad \text{dans } \mathbf{H}_t^s(\Gamma).$$

Il est alors possible de montrer que les relations suivantes sont encore vérifiées :

$$\begin{aligned} \text{rot}_\Gamma &= \nabla_\Gamma \wedge \mathbf{n} \quad , \quad \text{rot}_\Gamma = \text{div}_\Gamma(\cdot \wedge \mathbf{n}), \\ \text{rot}_\Gamma \nabla_\Gamma &= 0 \quad , \quad \text{div}_\Gamma \text{rot}_\Gamma = 0. \end{aligned}$$

Pour finir, le laplacien scalaire surfacique peut être défini indifféremment à partir d'une des formules suivantes :

$$\Delta_\Gamma = \text{div}_\Gamma \nabla_\Gamma \quad , \quad \Delta_\Gamma = -\text{rot}_\Gamma \text{rot}_\Gamma.$$

Il est alors continu de  $\mathbf{H}^{s+2}(\Gamma)$  dans  $\mathbf{H}^s(\Gamma)$  et nous avons :

$$\forall u \in \mathbf{H}^{s+2}(\Gamma), \quad -\Delta_\Gamma u = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \alpha_\ell \lambda_\ell e_\ell \quad \text{dans } \mathbf{H}^s(\Gamma) \quad \text{où} \quad u = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \alpha_\ell e_\ell \quad \text{dans } \mathbf{H}^{s+2}(\Gamma).$$

### 2.3.2 Approximation microlocale des opérateurs DtN

Dans cette sous-section, nous expliquons comment obtenir des approximations pseudo-différentielles des opérateurs DtN en utilisant des techniques d'analyse microlocale. Dans l'optique de préciser l'origine de telles approximations, nous commençons par traiter le cas simple de l'opérateur DtN associé à un demi-espace. Nous expliquons ensuite formellement comment passer au cas d'une surface fermée, une présentation théorique complète demandant des développements trop longs.

### Cas du demi-espace

Calculons l'opérateur DtN pour le demi-espace  $\Omega = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\}$ . La frontière de  $\Omega$ , notée  $\Gamma$ , correspond alors au plan d'équation  $z = 0$  et la normale unitaire sur  $\Gamma$  sortante pour  $\Omega$ , notée  $\mathbf{n}$ , est donnée par  $\mathbf{n} = (0; 0; -1)$ . Soit  $u$  vérifiant l'équation de Helmholtz de nombre d'onde  $k \in \mathbb{R}_+^*$  dans  $\Omega$  :

$$\Delta u + k^2 u = 0.$$

En appliquant la transformée de Fourier partielle  $\mathcal{F}$  dans les plans d'équation  $z = C \in \mathbb{R}_+^*$  à l'équation précédente, il vient :

$$(\partial_z^2 + \lambda_{+,k}^1 \lambda_{-,k}^1) \mathcal{F}(u)(\xi_x; \xi_y; z) = 0,$$

les symboles  $\lambda_{+,k}^1$  et  $\lambda_{-,k}^1$  étant définis comme suit :

$$\lambda_{+,k}^1(\xi_x; \xi_y) = i\sqrt{k^2 - \xi_x^2 - \xi_y^2} \quad , \quad \lambda_{-,k}^1(\xi_x; \xi_y) = -i\sqrt{k^2 - \xi_x^2 - \xi_y^2}.$$

Nous rappelons par ailleurs que  $\mathcal{F}(u)$  est définie par :

$$\mathcal{F}(u)(\xi_x; \xi_y; z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} u(x; y; z) e^{-i(x\xi_x + y\xi_y)} dx dy.$$

Nous en déduisons alors que :

$$\mathcal{F}(u)(\xi_x; \xi_y; z) = A_+(\xi_x; \xi_y) e^{z\lambda_{+,k}^1(\xi_x; \xi_y)} + A_-(\xi_x; \xi_y) e^{z\lambda_{-,k}^1(\xi_x; \xi_y)}.$$

Il se trouve que  $A_-(\xi_x; \xi_y)$  est nul. En effet, si  $k^2 - \xi_x^2 - \xi_y^2$  est strictement négatif,  $e^{z\lambda_{-,k}^1(\xi_x; \xi_y)}$  diverge lorsque  $z$  tend vers  $+\infty$ , alors que  $e^{z\lambda_{+,k}^1(\xi_x; \xi_y)}$  reste borné. Par conséquent, en dérivant l'équation précédente par rapport à  $z$  et en prenant la trace de la relation obtenue sur  $\Gamma$ , nous obtenons :

$$\mathcal{F}(\partial_z u)(\xi_x; \xi_y; 0) = \lambda_{+,k}^1(\xi_x; \xi_y) \mathcal{F}(u)(\xi_x; \xi_y; 0),$$

soit :

$$\partial_{\mathbf{n}} u|_{\Gamma} = -\mathcal{F}_{\Gamma}^{-1} [\lambda_{+,k}^1(\xi_x; \xi_y) \mathcal{F}_{\Gamma}(u|_{\Gamma})],$$

la notation  $\mathcal{F}_{\Gamma}$  désignant la transformée de Fourier sur  $\Gamma$ . L'opérateur  $\mathcal{F}_{\Gamma}^{-1} [\lambda_{+,k}^1(\xi_x; \xi_y) \mathcal{F}_{\Gamma}]$  est l'opérateur pseudo-différentiel de symbole total  $\lambda_{+,k}^1$ . Il est classiquement noté  $ik\sqrt{Id + \frac{\Delta_{\Gamma}}{k^2}}$ , cette notation étant justifiée par le fait que :

$$\left[ \sqrt{Id + \frac{\Delta_{\Gamma}}{k^2}} \right]^2 = Id + \frac{\Delta_{\Gamma}}{k^2}.$$

En effet,  $k^2 - \xi_x^2 - \xi_y^2$  est le symbole total de l'opérateur de Helmholtz surfacique  $k^2 Id + \Delta_{\Gamma}$ , c'est-à-dire que si  $v$  est une fonction sur  $\Gamma$ , nous avons :

$$\mathcal{F}_{\Gamma}(k^2 v + \Delta_{\Gamma} v) = (k^2 - \xi_x^2 - \xi_y^2) \mathcal{F}_{\Gamma}(v).$$

Considérons à présent le problème de diffraction-transmission (1.8) à coefficients constants pour lequel :

$$\Omega_- = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 : z < 0\} \quad , \quad \Omega_+ = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\}.$$

De par ce qui vient d'être fait, nous avons :

$$\Lambda_{+,k} = ik\sqrt{Id + \frac{\Delta_{\Gamma}}{k^2}}.$$

Par symétrie, nous voyons par ailleurs que :

$$\Lambda_{-,k,\rho} = -ik\rho\sqrt{Id + \frac{\Delta_{\Gamma}}{k^2}}.$$

**Extension au cas courbe**

Nous expliquons à présent, dans les grandes lignes, comment approximer les opérateurs DtN lorsque  $\Gamma$  est une surface fermée et  $\Omega_-$  est convexe. La première étape consiste à redresser localement  $\Gamma$  à l'aide d'un système de cartes locales et de changements de variables liés au plan tangent [5]. Nous pouvons alors réécrire l'équation de Helmholtz avec un nombre d'onde constant comme une équation elliptique à coefficients variables dans un demi-espace. Il est ensuite possible de montrer que le symbole principal  $\lambda_{+,k}^1$  de l'opérateur DtN extérieur est localement le même que pour le demi-espace, à savoir :

$$\lambda_{+,k}^1 = i\sqrt{k^2 - \xi_x^2 - \xi_y^2}.$$

Pour obtenir ce résultat, il est nécessaire d'utiliser le développement asymptotique en symboles homogènes du symbole total  $\lambda_{+,k}$  de l'opérateur DtN extérieur  $\Lambda_{+,k}$  [5, 52] :

$$\lambda_{+,k} \approx \lambda_{+,k}^1 + \lambda_{+,k}^0 + \lambda_{+,k}^{-1} + \dots,$$

les symboles  $\lambda_{+,k}^j$  étant homogènes d'ordre  $j$  en  $(\xi_x; \xi_y; k)$ , à savoir :

$$\forall \mu > 0, \quad \forall j \in \{1; 0; -1; \dots\}, \quad \lambda_{+, \mu k}^j(\mu \xi_x; \mu \xi_y) = \mu^j \lambda_{+,k}^j(\xi_x; \xi_y).$$

Remarquons que le calcul des  $\lambda_{+,k}^j$  nécessite d'avoir recours à une factorisation micro-locale de Nirenberg de l'opérateur DtN extérieur [5, 52, 89]. Cette dernière permet en particulier de séparer les ondes sortant et entrant du domaine  $\Omega_+$ .

En première approximation, nous négligeons les termes d'ordre strictement inférieur à 1 dans le développement de  $\lambda_{+,k}$  :

$$\lambda_{+,k} \approx \lambda_{+,k}^1.$$

Nous choisissons donc d'approximer  $\Lambda_{+,k}$  par l'opérateur dont le symbole total est  $\lambda_{+,k}^1$ . De par sa forme, cet opérateur est toutefois difficilement exploitable en pratique. Pour contourner ce problème, commençons par remarquer que le symbole principal de l'opérateur :

$$\Lambda_{+,k}^{\text{sq}} = ik\sqrt{Id + \frac{\Delta_\Gamma}{k^2}},$$

est  $\lambda_{+,k}^1$ . Nous proposons alors d'approximer  $\Lambda_{+,k}$  par  $\Lambda_{+,k}^{\text{sq}}$ . Cette approximation n'est toutefois valable que dans les zones hyperbolique et elliptique, respectivement notées  $H$  et  $E$  :

$$H = \{(k; \xi_x; \xi_y) : k^2 - \xi_x^2 - \xi_y^2 \gg 0\}, \quad E = \{(k; \xi_x; \xi_y) : k^2 - \xi_x^2 - \xi_y^2 \ll 0\},$$

et pas dans la zone des rayons rasants, notée  $G$  :

$$G = \{(k; \xi_x; \xi_y) : k^2 - \xi_x^2 - \xi_y^2 \approx 0\}.$$

Cela peut s'expliquer par le fait que  $\Lambda_{+,k}^{\text{sq}}$  est un opérateur singulier dans la zone  $G$ . Remarquons que les zones hyperbolique et elliptique caractérisent respectivement les parties propagatives et évanescentes de l'onde. Pour pallier le problème d'approximation dans la zone des modes rasants, nous suivons la solution proposée dans [9] consistant à régulariser  $\Lambda_{+,k}^{\text{sq}}$  en introduisant un paramètre  $\epsilon$  :

$$\Lambda_{+,k}^{\text{sq}} = ik\sqrt{Id + \text{div}_\Gamma \left( \frac{1}{k_\epsilon^2} \nabla_\Gamma \right)} \quad \text{avec} \quad k_\epsilon = k + i\epsilon, \quad \epsilon > 0. \quad (2.16)$$

Par la suite, nous qualifierons d'approximation de type racine carrée l'approximation  $\Lambda_{+,k}^{\text{sq}}$ . Le paramètre  $\epsilon$  est optimisé de sorte à intégrer de façon approchée et locale les rayons rampants [9] :

$$\epsilon = 0.4k^{\frac{1}{3}}\kappa^{\frac{2}{3}},$$

la notation  $\kappa$  désignant la courbure moyenne de  $\Gamma$ . Nous nous contentons toutefois de remplacer  $\kappa$  par l'inverse du rayon de la sphère circonscrite à  $\Omega_-$ . Remarquons que  $\Lambda_{+,k}^{\text{sq}}$  fait intervenir un opérateur de type Helmholtz surfacique complexe symétrisé en vue d'une implémentation par la méthode des éléments finis surfaciques [9]. Plus précisément, la définition de  $\Lambda_{+,k}^{\text{sq}}$  est motivée par la relation suivante :

$$\forall u, v \in H^1(\Gamma), \quad k_\epsilon^{-2} \nabla_\Gamma u \in \mathbf{H}_t(\text{div}_\Gamma, \Gamma) \quad \Rightarrow \quad \int_\Gamma \text{div}_\Gamma (k_\epsilon^{-2} \nabla_\Gamma u) v \, d\Gamma = - \int_\Gamma k_\epsilon^{-2} \nabla_\Gamma u \cdot \nabla_\Gamma v \, d\Gamma.$$

Dans ce travail, de nombreux résultats numériques permettront d'affirmer indirectement, c'est-à-dire au travers de la vitesse de convergence du couplage faible (2.6), que  $\Lambda_{+,k}^{\text{sq}}$  est une bonne approximation de  $\Lambda_{+,k}$ . Dans la sous-section 2.4.3, la qualité de  $\Lambda_{+,k}^{\text{sq}}$  comme approximation de  $\Lambda_{+,k}$  est toutefois illustrée, lorsque  $\Gamma$  est une sphère, de manière plus directe.

L'opérateur  $\Lambda_{+,k}^{\text{sq}}$  peut lui-même être approximé générant ainsi ce que nous appelons l'approximation d'ordre zéro de  $\Lambda_{+,k}$ , notée  $\Lambda_{+,k}^0$  :

$$\Lambda_{+,k}^0 = ikId. \quad (2.17)$$

Cette approximation est d'autant plus valable que  $k$  est grand. Nous nous attendons toutefois à ce que  $\Lambda_{+,k}^0$  soit une bien moins bonne approximation de  $\Lambda_{+,k}$  que  $\Lambda_{+,k}^{\text{sq}}$ . Des résultats numériques confirmant ce propos lorsque  $\Gamma$  est une sphère sont présentés dans la sous-section 2.4.3.

Des arguments similaires conduisent à proposer des approximations semblables à  $\Lambda_{+,k}^{\text{sq}}$  et  $\Lambda_{+,k}^0$  pour l'opérateur DtN intérieur :

$$\Lambda_{-,k,\rho}^{\text{sq}} = -ik\rho \sqrt{Id + \text{div}_\Gamma \left( \frac{1}{k_\epsilon^2} \nabla_\Gamma \right)}, \quad (2.18)$$

$$\Lambda_{-,k,\rho}^0 = -ik\rho Id. \quad (2.19)$$

A ce stade, il est possible d'anticiper que l'approximation de type racine carrée est meilleure pour  $\Lambda_{+,k}$  qu'elle ne l'est pour  $\Lambda_{-,k,\rho}$ . Cela est par ailleurs confirmé numériquement pour la sphère dans la sous-section 2.4.3. Les opérateurs  $\Lambda_{+,k}^{\text{sq}}$  et  $\Lambda_{-,k,\rho}^{\text{sq}}$  ne sont pas locaux. Toutefois, ils le sont quasiment. Plus précisément, ils peuvent être aisément localisés. En effet, nous présentons dans la sous-section 2.3.4 une procédure efficace et précise d'approximation locale de ces opérateurs. Cette dernière repose sur des approximants de Padé adéquats de la racine carrée. Le DtN extérieur n'est pas un opérateur local mais n'est pas loin d'en être un, typiquement si l'objet diffractant est convexe et si le nombre d'onde est élevé. En revanche, l'opérateur DtN intérieur est un opérateur fortement non local. Physiquement, cela peut se comprendre en termes de rayons optiques. Pour illustrer cela, supposons que la surface extérieure de l'objet diffractant soit un miroir. Si un laser est pointé dans la direction de l'objet diffractant, le rayon issu du laser ne se réfléchit qu'une seule fois sur l'objet diffractant si ce dernier est convexe. *A contrario*, supposons maintenant que la surface intérieure de l'objet diffractant soit un miroir. Si un laser est allumé à l'intérieur de l'objet diffractant, le rayon issu du laser se réfléchit alors une infinité de fois sur la surface intérieure de l'objet diffractant.

Jusqu'à présent, nous avons donné des résultats d'approximation pour les opérateurs  $\Lambda_{+,k}$  et  $\Lambda_{-,k,\rho}$  lorsque  $k$  et  $\rho$  sont constants. Si  $k$  et  $\rho$  ne sont pas constants, nous nous autorisons à utiliser les extensions formelles des approximations déjà présentées. Remarquons que cette approche est appuyée par des considérations théoriques. En effet, la théorie des opérateurs pseudo-différentiels et l'analyse micro-locale permettent d'introduire de manière rigoureuse les approximations considérées lorsque  $k$  et  $\rho$  ne sont pas constants.

### 2.3.3 Approximation intégrale du DtN intérieur

Comme nous l'avons signalé,  $\Lambda_{-,k,\rho}^{\text{sq}}$  n'est pas une très bonne approximation de  $\Lambda_{-,k,\rho}$  car elle ne permet pas de prendre en compte les rayons multiples diffractés. Nous proposons alors une nouvelle approximation de  $\Lambda_{-,k,\rho}$  pour pallier ce problème. Celle-ci n'est toutefois valable que lorsque  $k$  et  $\rho$  sont constants. Par conséquent, dans cette sous-section,  $k$  et  $\rho$  sont supposés constants et strictement positifs.

Le point de départ pour trouver une meilleure approximation de  $\Lambda_{-,k,\rho}$  est de remarquer que  $\Lambda_{-,k,\rho} = \rho \Lambda_{-,k,1}$  et que  $\Lambda_{-,k,1}$  et  $\Lambda_{+,k}$  sont liés.

**Proposition 2.15** (Lien entre les opérateurs DtN).

*Si  $k^2$  n'est pas une valeur propre du laplacien de Dirichlet, nous avons :*

$$S_k(\Lambda_{-,k,1} - \Lambda_{+,k}) = Id.$$

*et par conséquent, nous disposons de la relation suivante :*

$$\Lambda_{-,k,1} = S_k^{-1} + \Lambda_{+,k}.$$

**Preuve**

La première relation se montre en utilisant la Proposition 2.8 alors que la seconde fait appel à la Proposition 1.10 page 22. ■

Concrètement, ce résultat nous permet de construire simplement des approximations de  $\Lambda_{-,k,\rho}$  à partir d'approximations de  $\Lambda_{+,k}$ . Il est alors naturel d'utiliser l'approximation de type racine carrée de  $\Lambda_{+,k}$  (2.16), que nous savons être de bonne qualité, pour construire une approximation intégrale de  $\Lambda_{-,k,\rho}$ , notée  $\Lambda_{-,k,\rho}^{\text{int}}$  :

$$\Lambda_{-,k,\rho}^{\text{int}} = \rho S_k^{-1} + ik\rho \sqrt{Id + \text{div}_\Gamma \left( \frac{1}{k_\epsilon^2} \nabla_\Gamma \right)}. \quad (2.20)$$

Des résultats numériques présentés dans la sous-section 2.4.3 montrent que, dans le cas de la sphère, la qualité de  $\Lambda_{-,k,\rho}^{\text{int}}$  en tant qu'approximation de  $\Lambda_{-,k,\rho}$  est comparable à celle de  $\Lambda_{+,k}^{\text{sq}}$  en tant qu'approximation de  $\Lambda_{+,k}$ .

Lorsque  $k$  et  $\rho$  ne sont pas constants, la relation :

$$\Lambda_{-,k,\rho} = \rho \Lambda_{-,k,1},$$

n'est pas vérifiée. En outre, les relations de la Proposition 2.15 sont également fausses puisque  $G_k$  n'est alors plus la solution fondamentale de l'équation de Helmholtz. Ceci explique pourquoi nous limitons l'utilisation de l'approximation intégrale (2.20) de  $\Lambda_{-,k,\rho}$  au cas où  $k$  et  $\rho$  sont constants.

Il est possible de montrer que le symbole principal de  $S_k^{-1}$  est  $-2\lambda_{+,k}^1$ . Par conséquent, si  $\epsilon = 0$ , le symbole principal de  $\Lambda_{-,k,\rho}^{\text{int}}$  correspond à celui  $\Lambda_{-,k,\rho}^{\text{sq}}$ , à savoir  $-\rho\lambda_{+,k}^1$ . Cela permet de comprendre plus précisément pourquoi  $\Lambda_{-,k,\rho}^{\text{int}}$  est une meilleure approximation de  $\Lambda_{-,k,\rho}$  que  $\Lambda_{-,k,\rho}^{\text{sq}}$ . Concrètement, l'opérateur  $\Lambda_{-,k,\rho}^{\text{int}}$  est une amélioration de  $\Lambda_{-,k,\rho}^{\text{sq}}$  car, étant construit à partir de l'opérateur intégral surfacique de simple couche, il est fortement non local. Remarquons que ce gain en qualité d'approximation est associé, en pratique, à un sur-coût computationnel, le temps de calcul et les besoins en mémoire nécessaires à l'évaluation de  $S_k^{-1}$  n'étant pas négligeables. Ce point est abordé en détails dans le Chapitre 3.

Les relations de Calderón suivantes nous montrent que  $N_k$  est un pseudo-inverse de  $S_k$  :

$$D_k^2 - S_k N_k = \frac{1}{4} Id \quad , \quad D_k^{*2} - N_k S_k = \frac{1}{4} Id.$$

En effet, nous rappelons que  $D_k$  et  $D_k^*$  sont des opérateurs compacts. Nous pourrions donc penser à remplacer  $S_k^{-1}$  par  $-4N_k$  dans la relation (2.20) de sorte à obtenir une approximation explicite de  $\Lambda_{-,k,\rho}$ . Nous avons toutefois constaté numériquement, dans le cas de la sphère unité, que cette approche n'est pas intéressante. En effet, elle dégrade de manière significative la qualité de  $\Lambda_{-,k,\rho}^{\text{int}}$ . Nous ne présentons pas de résultat pour illustrer ce point et nous ne reviendrons pas sur cette approche dans la suite de ce travail.

Dans la section précédente, nous avons donné les opérateurs optimaux pour le couplage faible (2.6) et pour les sous-problèmes (2.4) et (2.5). Il apparaît donc que les deux sous-problèmes (2.4) et (2.5) peuvent être définis à partir de  $\Lambda_{-,k,\rho}^{\text{int}}$ , ceci étant naturellement dépendant des choix faits pour les opérateurs de transmission. Toutefois, si les opérateurs de transmission sont optimaux pour le couplage faible (2.6), ce qui correspond au cas d'intérêt de cette étude,  $\Lambda_{-,k,\rho}^{\text{int}}$  ne peut intervenir que dans la définition du problème extérieur.

### 2.3.4 Approximations de Padé

Dans les sous-sections précédentes, nous avons proposé des approximations des opérateurs DtN construites à partir de l'opérateur suivant :

$$\sqrt{Id + \text{div}_\Gamma \left( \frac{1}{k_\epsilon^2} \nabla_\Gamma \right)}. \quad (2.21)$$

Tel quel, cet opérateur est non local. Il est donc difficilement utilisable en pratique. Pour illustrer ce propos, nous supposons que  $k$  et  $\epsilon$  sont constants. Nous faisons appel aux notations de la sous-section 2.1.2 et nous introduisons la matrice de raideur surfacique, notée  $\mathbb{H}_\Gamma$  :

$$\forall i, j \in \{1; \dots; N\}, \quad \mathbb{H}_{\Gamma, i, j} = \int_\Gamma \nabla_\Gamma e_i \cdot \nabla_\Gamma e_j.$$

La version discrète de l'opérateur (2.21) est alors donnée par :

$$\sqrt{Id - \frac{1}{k_\epsilon^2} \mathbb{J}_\Gamma^{-1} \mathbb{H}_\Gamma}.$$

Nous rappelons qu'il est effectivement possible de donner un sens à cette matrice. D'une manière générale, si une matrice carrée ne possède aucune valeur propre dans  $\mathbb{R}_-$ , cette dernière admet une unique racine carrée, appelée racine carrée principale, dont les valeurs propres sont à partie réelle strictement positive. Bien qu'il soit possible de calculer cette racine, le coût de cette opération est généralement élevé [47].

Pour rendre l'opérateur (2.21) plus facilement utilisable en pratique, nous adoptons une approche radicalement différente basée sur les approximations de Padé [85].

**Proposition 2.16** (Approximation de Padé de la racine).

L'approximation de Padé de la racine carrée d'ordre  $N_p$  avec une rotation de branche d'angle  $\theta_p$  est donnée par :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{R}(z) > -1 \\ \forall j \in \{1; \dots; N_p\} \quad z \neq -B_j^{-1} \end{array} \right. \Rightarrow (1+z)^{\frac{1}{2}} \approx R_0 - \sum_{j=1}^{N_p} \frac{A_j}{B_j(1+B_j z)},$$

avec :

$$R_0 = C_0 + \sum_{j=1}^{N_p} \frac{A_j}{B_j}, \quad A_j = \frac{e^{-i\frac{\theta_p}{2}} a_j}{(1+b_j(e^{-i\theta_p} - 1))^2}, \quad B_j = \frac{e^{-i\theta_p} b_j}{1+b_j(e^{-i\theta_p} - 1)},$$

$$a_j = \frac{2}{2N_p+1} \sin^2\left(\frac{j\pi}{2N_p+1}\right), \quad b_j = \cos^2\left(\frac{j\pi}{2N_p+1}\right), \quad C_0 = e^{i\frac{\theta_p}{2}} \left(1 + \sum_{j=1}^{N_p} \frac{a_j(e^{-i\theta_p} - 1)}{1+b_j(e^{-i\theta_p} - 1)}\right).$$

De là, nous proposons l'approximation formelle suivante de l'opérateur (2.21) :

$$\sqrt{Id + \operatorname{div}_\Gamma \left( \frac{1}{k_\epsilon^2} \nabla_\Gamma \right)} \approx R_0 Id - \sum_{j=1}^{N_p} \frac{A_j}{B_j} \left[ Id + B_j \operatorname{div}_\Gamma \left( \frac{1}{k_\epsilon^2} \nabla_\Gamma \right) \right]^{-1}. \quad (2.22)$$

L'opérateur (2.21) intervenant dans les approximations  $\Lambda_{+,k}^{\text{sq}}$ ,  $\Lambda_{-,k,\rho}^{\text{sq}}$  et  $\Lambda_{-,k,\rho}^{\text{int}}$  des opérateurs DtN peut alors être approché *via* la relation (2.22), générant ainsi de nouvelles approximations des opérateurs DtN, dites de Padé et notées  $\Lambda_{+,k}^{\text{sq},N_p,\theta_p}$ ,  $\Lambda_{-,k,\rho}^{\text{sq},N_p,\theta_p}$  et  $\Lambda_{-,k,\rho}^{\text{int},N_p,\theta_p}$ . Ces nouvelles approximations sont alors facilement utilisables en pratique puisque l'évaluation numérique de l'approximation (2.22) peut être effectuée avec un coût relativement faible. En effet, elle requiert la résolution de  $N_p$  équations complexes sur  $\Gamma$  de type Helmholtz et par conséquent, celle de  $N_p$  systèmes linéaires creux et complexes de taille raisonnable. Ce point sera détaillé dans la section 3.3.1. Remarquons que l'approximation (2.22) permet de comprendre la nature pseudo-locale de l'opérateur (2.21).

Plus  $N_p$  est grand, plus l'approximation (2.22) est précise. L'angle  $\theta_p$ , généralement choisi entre 0 et  $\frac{\pi}{2}$ , permet de faire tourner la branche de coupure de la racine complexe. Bien choisi, il conduit notamment à une très bonne approximation de  $\sqrt{1+z}$  lorsque  $z$  est proche de la branche de coupure et ceci pour de faibles valeurs de  $N_p$  (typiquement 2 ou 4). La rotation de branche permet donc de correctement évaluer la racine de la partie elliptique de l'opérateur :

$$Id + \operatorname{div}_\Gamma \left( \frac{1}{k_\epsilon^2} \nabla_\Gamma \right),$$

à savoir la zone où son symbole principal :

$$1 - \frac{1}{k_\epsilon^2} (\xi_x^2 + \xi_y^2),$$

est proche de la branche de coupure. Remarquons que l'introduction du paramètre  $\epsilon$  rend cet opérateur dissipatif et éloigne légèrement son symbole principal de la branche de coupure usuelle.

Nous terminons cette sous-section en mentionnant que la formule définissant l'opérateur (2.21), qui est donnée dans la prochaine proposition, permet également de comprendre l'intérêt de la rotation de branche. En effet, les  $(\lambda_\ell)$  étant arbitrairement grands,  $1 - \frac{\lambda_\ell}{k_\epsilon^2}$  est proche de la branche de coupure usuelle lorsque  $\ell$  est grand. Il est donc important de disposer d'une bonne approximation de la racine pour des nombres complexes proches de la branche de coupure usuelle.

**Proposition 2.17** (Continuité de l'opérateur racine).

Soit  $s \in \mathbb{R}$ . Si  $k$  et  $\epsilon$  sont constants, l'opérateur (2.21) est défini comme suit :

$$\forall u \in \mathbf{H}^{s+1}(\Gamma), \quad \sqrt{Id + \frac{\Delta_\Gamma}{k_\epsilon^2}} u = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \sqrt{1 - \frac{\lambda_\ell}{k_\epsilon^2}} \alpha_\ell e_\ell \quad \text{dans } \mathbf{H}^s(\Gamma) \quad \text{où} \quad u = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \alpha_\ell e_\ell \quad \text{dans } \mathbf{H}^{s+1}(\Gamma).$$

Il est donc continu de  $\mathbf{H}^{s+1}(\Gamma)$  dans  $\mathbf{H}^s(\Gamma)$ .

**Preuve**

Commençons par remarquer qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que :

$$\forall \ell \in \mathbb{N}, \quad |\lambda_\ell - k_\epsilon^2| \leq C(\lambda_\ell + 1),$$

puisque :

$$\lim_{\ell \rightarrow +\infty} \frac{|\lambda_\ell - k_\epsilon^2|}{\lambda_\ell + 1} = 1.$$

Soit à présent  $u \in \mathbf{H}^{s+1}(\Gamma)$ . Il existe alors une suite  $(\alpha_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$  telle que (voir Proposition 2.13) :

$$u = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \alpha_\ell e_\ell \quad \text{dans } \mathbf{H}^{s+1}(\Gamma) \quad , \quad \sum_{\ell=0}^{+\infty} (1 + \lambda_\ell)^{s+1} |\alpha_\ell|^2 < +\infty.$$

La somme définissant  $\sqrt{Id + \frac{\Delta_\Gamma}{k_\epsilon^2}} u$  converge alors bien dans  $\mathbf{H}^s(\Gamma)$  puisque (voir Proposition 2.13) :

$$|k_\epsilon|^{-2} \sum_{\ell=0}^{+\infty} (1 + \lambda_\ell)^s |\lambda_\ell - k_\epsilon^2| |\alpha_\ell|^2 \leq C |k_\epsilon|^{-2} \sum_{\ell=0}^{+\infty} (1 + \lambda_\ell)^{s+1} |\alpha_\ell|^2 < +\infty.$$

Pour finir, l'inégalité précédente se réécrit plus simplement comme suit :

$$\left\| \sqrt{Id + \frac{\Delta_\Gamma}{k_\epsilon^2}} u \right\|_{\mathbf{H}^s(\Gamma)}^2 \leq C |k_\epsilon|^{-2} \|u\|_{\mathbf{H}^{s+1}(\Gamma)}^2,$$

prouvant ainsi la continuité de  $\sqrt{Id + \frac{\Delta_\Gamma}{k_\epsilon^2}}$ . ■

## 2.4 Cas particulier de la sphère unité

Dans cette section, nous commençons par présenter des résultats de diagonalisation pour tous les opérateurs surfaciques que nous avons introduits jusqu'à présent. Lorsque  $\Gamma$  correspond à la sphère unité de  $\mathbb{R}^3$ , notée  $\mathbb{S}$ , ces opérateurs sont, sous certaines hypothèses pour certains d'entre eux, diagonalisables et nous disposons d'expressions analytiques pour leurs valeurs propres. Pour les opérateurs intégraux surfaciques et pour l'opérateur DtN extérieur, ceci est vrai sans aucune restriction. Pour l'opérateur DtN intérieur, il est en revanche nécessaire que le problème (2.8) soit à coefficients constants, c'est-à-dire que  $k, \sigma \in \mathbb{R}_+^*$ . De même, pour l'opérateur (2.21) et ses approximations de Padé, il faut que  $k \in \mathbb{R}_+^*$ . Enfin, pour les opérateurs de résolution et pour l'opérateur du couplage faible (2.6), l'objet diffractant doit être homogène.

Ces résultats de diagonalisation sont particulièrement intéressants car ils nous permettent d'effectuer, avec une grande simplicité d'implémentation, une première série de tests semi numériques/semi analytiques permettant de valider ce que nous avons présenté jusqu'à maintenant dans ce chapitre. Dans un premier temps, nous confirmons numériquement les qualités annoncées pour les approximations des opérateurs DtN proposées dans la section 2.3. Ensuite, nous validons la pertinence pratique du couplage faible (2.6). Pour finir, nous nous intéressons à la résolution itérative des sous-problèmes (2.4) et (2.5).

Les résultats de diagonalisation que nous présentons étant basés sur les harmoniques sphériques [88] et sur les fonctions de Bessel sphériques [1], nous commençons cette section par quelques rappels concernant ces outils.

### 2.4.1 Harmoniques sphériques et fonctions de Bessel

Pour définir les harmoniques sphériques, nous devons introduire les polynômes de Legendre ainsi que les fonctions de Legendre associées. Les polynômes de Legendre, notés  $(P_l)_{l \in \mathbb{N}}$ , sont définis par :

$$\forall l \in \mathbb{N}, \quad P_l = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dX^l} (X^2 - 1)^l,$$

ou de manière équivalente comme suit :

$$P_0 = 1 \quad , \quad P_1 = X \quad , \quad \forall l \in \mathbb{N}^*, \quad (l+1)P_{l+1} = (2l+1)XP_l - lP_{l-1}.$$

Les fonctions de Legendre associées, notées  $(P_l^m)_{\substack{l \in \mathbb{N} \\ 0 \leq m \leq l}}$ , sont définies à partir des polynômes de Legendre par :

$$\forall l \in \mathbb{N}, \quad \forall 0 \leq m \leq l, \quad \forall x \in ]-1; 1[, \quad P_l^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} P_l^{(m)}(x).$$

Les polynômes et les fonctions de Legendre sont des fonctions propres de certains opérateurs différentiels et constituent des familles orthogonales.

**Proposition 2.18** (Propriétés des polynômes de Legendre).

Les polynômes de Legendre vérifient les propriétés suivantes :

$$\forall l \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} \frac{d}{dX} \left( (1-X^2) \frac{d}{dX} P_l \right) + l(l+1)P_l = 0, \\ P_l(1) = 1, \end{cases} \quad , \quad \forall l, k \in \mathbb{N}, \quad \int_{-1}^1 P_l P_k dx = \frac{2}{2l+1} \delta_{l,k}.$$

**Proposition 2.19** (Propriétés des fonctions de Legendre associées).

Les fonctions de Legendre associées satisfont :

$$\forall l \in \mathbb{N}, \quad \forall 0 \leq m \leq l, \quad \forall x \in ]-1; 1[, \quad \frac{d}{dx} \left( (1-x^2) \frac{d}{dx} P_l^m(x) \right) + \left( l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right) P_l^m(x) = 0,$$

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad \forall k, l \geq m, \quad \int_{-1}^1 P_k^m P_l^m dx = \frac{2(l+m)!}{(2l+1)(l-m)!} \delta_{k,l}.$$

Nous disposons à présent de tous les outils nécessaires pour introduire les harmoniques sphériques scalaires de surface, notées  $(Y_l^m)_{\substack{l \in \mathbb{N} \\ -l \leq m \leq l}}$  :

$$\forall l \in \mathbb{N}, \quad \forall -l \leq m \leq l, \quad \forall \theta \in ]0; \pi[, \quad \forall \varphi \in [0; 2\pi[, \quad Y_l^m(\theta; \varphi) = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi(l+|m|)!}} P_l^{|m|}(\cos \theta) e^{im\varphi}.$$

L'intérêt des harmoniques sphériques scalaires de surface réside dans le fait qu'elles correspondent aux fonctions propres du laplacien surfacique scalaire sur  $\mathbb{S}$ .

**Proposition 2.20** (Propriétés des harmoniques sphériques scalaires de surface).

Les  $(Y_l^m)$  sont exactement les fonctions propres de  $-\Delta_{\mathbb{S}}$  et constituent une base orthonormale de  $L^2(\mathbb{S})$  :

$$\forall l \in \mathbb{N}, \quad \forall -l \leq m \leq l, \quad -\Delta_{\mathbb{S}} Y_l^m = l(l+1) Y_l^m.$$

Elles forment également une base orthogonale de  $H^{\pm \frac{1}{2}}(\mathbb{S})$ .

L'équation différentielle suivante est connue sous le nom d'équation de Bessel :

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0 \quad , \quad \nu \in \mathbb{R}.$$

Cette dernière admet une solution sous la forme d'une série entière, notée  $J_\nu$ , et connue sous le nom de fonction de Bessel de première espèce de paramètre  $\nu \in \mathbb{R}$  :

$$J_\nu(x) = \left( \frac{x}{2} \right)^\nu \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(-1)^i}{i! \Gamma(\nu + i + 1)} \left( \frac{x}{2} \right)^{2i}.$$

Pour certaines valeurs du paramètre  $\nu$ , les fonctions de Bessel de première espèce permettent de générer une base de l'espace des solutions de l'équation de Bessel.

**Proposition 2.21** (Base de l'espace des solutions de l'équation de Bessel).

Si  $\nu \notin \mathbb{Z}$ ,  $J_\nu$  et  $J_{-\nu}$  forment une base de l'espace des solutions de l'équation de Bessel.  
Si  $\nu \in \mathbb{Z}$ ,  $J_\nu$  et  $J_{-\nu}$  ne sont pas linéairement indépendantes puisque nous avons :

$$J_{-\nu} = (-1)^\nu J_\nu.$$

Si le paramètre  $\nu$  est un entier, il est donc nécessaire d'exhiber une autre solution de l'équation de Bessel pour obtenir une base de l'espace de ces solutions. Dans cette optique, nous introduisons la fonction  $Y_\nu$ , connue sous le nom de fonction de Bessel de seconde espèce de paramètre  $\nu \in \mathbb{R}$ , définie par :

$$Y_\nu(x) = \frac{\cos(\pi\nu)J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\pi\nu)}, \quad \text{si } \nu \notin \mathbb{Z},$$

$$Y_n(x) = \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{\cos(\pi\nu)J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\pi\nu)}, \quad \text{si } n \in \mathbb{Z}.$$

**Proposition 2.22** (Base de l'espace des solutions de l'équation de Bessel).

Si  $\nu \in \mathbb{R}$ ,  $J_\nu$  et  $Y_\nu$  forment une base de l'espace des solutions de l'équation de Bessel.

L'équation de Bessel n'est pas résolue en 0, c'est-à-dire que le coefficient devant la dérivée d'ordre maximal, à savoir  $x^2$ , s'annule en 0. Ses solutions peuvent donc ne pas avoir de limite finie en 0. La proposition suivante précise ce point.

**Proposition 2.23** (Comportement à l'origine des fonctions de Bessel).

Lorsque  $x$  tend vers 0 par la droite, les  $(J_\nu)_{\nu \in \mathbb{R}_+}$  admettent une limite finie alors que les  $(Y_\nu)_{\nu \in \mathbb{R}_+}$  ont une limite infinie.

Pour les problèmes de propagation d'ondes en régime harmonique, il est intéressant de travailler avec les fonctions de Hankel, notées  $H_\nu^1$  et  $H_\nu^2$ . Ces dernières sont définies, pour un paramètre  $\nu \in \mathbb{R}$ , comme suit :

$$H_\nu^1 = J_\nu + iY_\nu, \quad H_\nu^2 = J_\nu - iY_\nu.$$

Il existe de nombreuses variantes de l'équation de Bessel. Nous introduisons ici la seule qui est utile pour ce travail, à savoir l'équation de Bessel sphérique :

$$x^2 y'' + 2xy' + (x^2 - n(n+1))y = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Les fonctions de Bessel sphériques de première et de seconde espèce de paramètre  $n \in \mathbb{N}$ , notées respectivement  $j_n$  et  $y_n$ , sont construites à partir des fonctions de Bessel comme suit :

$$j_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{n+\frac{1}{2}}(x), \quad y_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} Y_{n+\frac{1}{2}}(x).$$

**Proposition 2.24** (Base de l'espace des solutions de l'équation de Bessel sphérique).

Les fonctions  $j_n$  et  $y_n$  forment une base de l'espace des solutions de l'équation de Bessel sphérique.

De même que pour les fonctions de Bessel, il est possible de préciser le comportement en 0 des fonctions de Bessel sphériques.

**Proposition 2.25** (Comportement en 0 des fonctions de Bessel sphériques).

Les limites des  $(j_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et des  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  lorsque  $x$  tend vers 0 par la droite sont respectivement finies et infinies.

Pour des problèmes de propagation d'ondes en régime harmonique, il est plus intéressant de considérer les fonctions de Hankel sphériques, notées  $h_n^1$  et  $h_n^2$ , et définies pour un paramètre  $n \in \mathbb{N}$  par :

$$h_n^1(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} H_{n+\frac{1}{2}}^1(x), \quad h_n^2(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} H_{n+\frac{1}{2}}^2(x).$$

La proposition suivante permet de comprendre l'intérêt des fonctions de Hankel sphériques. Les fonctions de Hankel sphériques de première espèce  $(h_n^1)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifient une condition sur leur comportement asymptotique similaire à la condition de radiation (2.1c) alors que ce n'est pas le cas pour les fonctions de Hankel sphériques de seconde espèce. Nous verrons dans la prochaine sous-section que les fonctions de Hankel sphériques de première espèce permettent de représenter et de générer des ondes diffractées.

**Proposition 2.26** (Comportement asymptotique des fonctions de Hankel sphériques).

Les fonctions  $(h_n^1)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifient :

$$h_n^{1'}(x) - ih_n^1(x) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

mais cela n'est pas le cas pour les  $(h_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Preuve**

La preuve repose sur la formule de Rayleigh :

$$\forall x > 0, \quad h_n^1(x) = -i(-x)^n \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx}\right)^n \frac{e^{ix}}{x}.$$

Par récurrence, il est possible de montrer qu'il existe des polynômes  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tels que :

$$\deg(P_n) \leq n, \quad P_n(0) = 1, \quad \forall x > 0, \quad \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx}\right)^n \frac{e^{ix}}{x} = i^n \frac{e^{ix}}{x^{n+1}} P_n\left(\frac{1}{x}\right).$$

Nous en déduisons alors que :

$$h_n^1(x) = \frac{e^{ix}}{x} \left[(-i)^{n+1} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right)\right], \quad h_n^{1'}(x) = \frac{e^{ix}}{x} \left[(-i)^n + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right)\right],$$

ce qui permet de montrer le développement asymptotique annoncé. Pour terminer cette preuve, il suffit de remarquer que :

$$h_n^2(x) = \frac{e^{-ix}}{x} \left[i^{n+1} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right)\right], \quad h_n^{2'}(x) = \frac{e^{-ix}}{x} \left[i^n + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right)\right],$$

puisque  $h_n^2 = \overline{h_n^1}$ . ■

## 2.4.2 Diagonalisation des opérateurs surfaciques

Dans cette sous-section, nous donnons des résultats de diagonalisation pour tous les opérateurs surfaciques introduits jusqu'à présent dans ce chapitre lorsque  $\Gamma$  correspond à la sphère unité de centre 0, notée  $\mathbb{S}$ . Ici,  $\mathcal{B}$  désigne la boule unité ouverte de centre 0.

Nous commençons par expliquer comment construire des solutions élémentaires modales de l'équation de Helmholtz, qu'elle soit posée sur  $\mathcal{B}$  ou sur  $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\mathcal{B}}$ .

**Proposition 2.27** (Solutions élémentaires modales de l'équation de Helmholtz).

Soit  $k \in \mathbb{R}_+^*$ . La fonction  $u = j_l(kr)Y_l^m(\theta; \varphi)$  vérifie :

$$\Delta u + k^2 u = 0 \text{ dans } \mathcal{B}.$$

Si  $u = h_l^1(kr)Y_l^m(\theta; \varphi)$ ,  $u$  satisfait :

$$\Delta u + k^2 u = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\mathcal{B}}, \quad \partial_r u - iku = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right).$$

**Preuve**

Pour montrer que l'équation de Helmholtz est vérifiée, il suffit de coupler le fait que  $j_l$  et  $h_l^1$  vérifient l'équation de Bessel sphérique (Proposition 2.24) à la Proposition 2.20 et à la relation :

$$\forall r > 0, \quad \forall \sigma \in \mathbb{S}, \quad [\Delta u](r\sigma) = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r [u(r\sigma)]) + \frac{1}{r^2} \Delta_{\mathbb{S}} [u(r\sigma)]. \quad (2.23)$$

Pour finir, la Proposition 2.26 montre que la condition de radiation est vérifiée. ■

Nous pouvons maintenant donner le résultat de diagonalisation pour les opérateurs intégraux surfaciques.

**Proposition 2.28** (Diagonalisation des opérateurs intégraux surfaciques).

Soit  $k \in \mathbb{R}_+^*$ . Les  $(Y_l^m)$  diagonalisent les opérateurs intégraux surfaciques associés à  $k$  :

$$S_k Y_l^m = s_k^l Y_l^m \quad , \quad D_k Y_l^m = d_k^l Y_l^m \quad , \quad D_k^* Y_l^m = d_k^l Y_l^m \quad , \quad N_k Y_l^m = n_k^l Y_l^m ,$$

avec :

$$s_k^l = ik j_l(k) h_l^1(k) \quad , \quad d_k^l = -\frac{1}{2} + ik^2 j_l'(k) h_l^1(k) \quad , \quad n_k^l = ik^3 j_l'(k) h_l^{1'}(k).$$

**Preuve**

Etant donné que les  $(Y_l^m)$  constituent une base de  $H^{\pm\frac{1}{2}}(\mathbb{S})$  (voir Proposition 2.20), il suffit de vérifier qu'il s'agit de vecteurs propres des opérateurs intégraux surfaciques.

Définissons  $u$  par :

$$u = j_l(kr) Y_l^m(\theta; \varphi) \text{ dans } \mathcal{B}.$$

La fonction  $u$  vérifie alors l'équation de Helmholtz dans  $\mathcal{B}$  (Proposition 2.27) et ses traces de Dirichlet et de Neumann sont données par :

$$\gamma_D^- u = j_l(k) Y_l^m \quad , \quad \gamma_N^- u = k j_l'(k) Y_l^m.$$

En prolongeant  $u$  par 0 dans  $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\mathcal{B}}$  et en utilisant la Proposition 1.3 page 15, nous obtenons la représentation :

$$u = k j_l'(k) S_k Y_l^m - j_l(k) D_k Y_l^m \text{ dans } \mathcal{B}.$$

En prenant les traces de Dirichlet et de Neumann de cette relation (voir Proposition 1.2 page 15), il vient :

$$\frac{1}{2} j_l(k) Y_l^m + j_l(k) D_k Y_l^m - k j_l'(k) S_k Y_l^m = 0, \quad (2.24)$$

$$\frac{1}{2} k j_l'(k) Y_l^m - k j_l'(k) D_k^* Y_l^m + j_l(k) N_k Y_l^m = 0. \quad (2.25)$$

Nous définissons à présent  $u$  par :

$$u = h_l^1(kr) Y_l^m(\theta; \varphi) \text{ dans } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\mathcal{B}}.$$

La fonction  $u$  vérifie l'équation de Helmholtz dans  $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\mathcal{B}}$  ainsi que la condition de radiation (2.1c) (Proposition 2.27) et nous avons :

$$\gamma_D^+ u = h_l^1(k) Y_l^m \quad , \quad \gamma_N^+ u = k h_l^{1'}(k) Y_l^m.$$

En prolongeant  $u$  par 0 dans  $\mathcal{B}$ , la Proposition 1.3 page 15 nous fournit la représentation intégrale suivante :

$$u = -k h_l^{1'}(k) S_k Y_l^m + h_l^1(k) D_k Y_l^m \text{ dans } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\mathcal{B}}.$$

En prenant les traces de Dirichlet et de Neumann de la relation précédente (voir Proposition 1.2 page 15), nous obtenons :

$$\frac{1}{2} h_l^1(k) Y_l^m - h_l^1(k) D_k Y_l^m + k h_l^{1'}(k) S_k Y_l^m = 0, \quad (2.26)$$

$$\frac{1}{2} k h_l^{1'}(k) Y_l^m + k h_l^{1'}(k) D_k^* Y_l^m - h_l(k) N_k Y_l^m = 0. \quad (2.27)$$

Il reste alors à faire des combinaisons linéaires des relations (2.24)-(2.27). Nous ne calculons que les valeurs propres de  $D_k$ , le raisonnement pour les autres opérateurs étant similaire.

En effectuant la combinaison linéaire  $h_l^{1'}(k)(2.24) + j_l'(k)(2.26)$ , nous obtenons :

$$(h_l^1(k) j_l'(k) - j_l(k) h_l^{1'}(k)) D_k Y_l^m = \frac{1}{2} (h_l^1(k) j_l'(k) + j_l(k) h_l^{1'}(k)) Y_l^m,$$

ce qui permet de conclure en utilisant la relation :

$$h_l^1(k) j_l'(k) - j_l(k) h_l^{1'}(k) = -\frac{i}{k^2}.$$

■

Nous donnons à présent des résultats de résolution modale pour les équations de Helmholtz intérieure et extérieure.

**Proposition 2.29** (Résolution modale de l'équation de Helmholtz intérieure).

Soit  $k \in \mathbb{R}_+^*$  et  $u \in H^1(\mathcal{B})$  vérifiant  $\Delta u + k^2 u = 0$  dans  $\mathcal{B}$ . Il existe alors une famille  $(\alpha_l^m)_{\substack{l \in \mathbb{N} \\ -l \leq m \leq l}} \subset \mathbb{C}$  telle que :

$$u = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l \alpha_l^m j_l(kr) Y_l^m(\theta; \varphi) \text{ dans } H^1(\mathcal{B}),$$

et les traces de Dirichlet et de Neumann de  $u$  sont données par :

$$\gamma_D^- u = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l \alpha_l^m j_l(k) Y_l^m, \quad \gamma_N^- u = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l \alpha_l^m k j_l'(k) Y_l^m.$$

**Preuve**

Nous ne donnons qu'une preuve formelle de ce résultat. Si  $r \in ]0; 1[$ , nous avons (Proposition 2.20) :

$$u(r\sigma) = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^m u_l^m(r) Y_l^m(\sigma) \quad \text{avec} \quad u_l^m(r) = \int_{\mathbb{S}} u(r\sigma) Y_l^{-m} d\mathbb{S}.$$

Or il s'avère que les  $(u_l^m)$  vérifient une équation similaire à l'équation de Bessel sphérique :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d}{dr} \right) u_l^m + r^2 k^2 u_l^m &= \int_{\mathbb{S}} \left( \partial_r (r^2 \partial_r [u(r\sigma)]) + r^2 k^2 u(r\sigma) \right) Y_l^{-m} d\mathbb{S} = - \int_{\mathbb{S}} \Delta_{\mathbb{S}} [u(r\sigma)] Y_l^{-m} d\mathbb{S} \\ &= - \int_{\mathbb{S}} u(r\sigma) \Delta_{\mathbb{S}} Y_l^{-m} d\mathbb{S} = l(l+1) \int_{\mathbb{S}} u(r\sigma) Y_l^{-m} d\mathbb{S} \\ &= l(l+1) u_l^m(r). \end{aligned}$$

Ce calcul repose en particulier sur la relation (2.23). La fonction  $u$  ayant une limite finie en 0, il en va de même pour les  $(u_l^m)$  et la Proposition 2.25 donne :

$$u_l^m(r) = \alpha_l^m j_l(kr).$$

■

Remarquons que les Propositions 2.27 et 2.29 permettent de déterminer les valeurs propres des laplaciens de Dirichlet et de Neumann dans  $\mathcal{B}$ .

**Proposition 2.30** (Valeurs propres des laplaciens de Dirichlet et de Neumann).

Les valeurs propres du laplacien de Dirichlet sont les carrés des zéros non nuls des fonctions :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \rightarrow & \mathbb{R} \\ r & \mapsto & j_l(r) \end{array}, \quad l \in \mathbb{N}.$$

Les valeurs propres non nulles du laplacien de Neumann correspondent aux carrés des zéros non nuls des fonctions :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \rightarrow & \mathbb{R} \\ r & \mapsto & j_l'(r) \end{array}, \quad l \in \mathbb{N}.$$

**Proposition 2.31** (Résolution modale de l'équation de Helmholtz extérieure).

Soit  $k \in \mathbb{R}_+^*$  et  $u \in H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\mathcal{B}})$  vérifiant :

$$\Delta u + k^2 u = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\mathcal{B}}, \quad \partial_r u - iku = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right).$$

Il existe alors une famille  $(\alpha_l^m)_{\substack{l \in \mathbb{N} \\ -l \leq m \leq l}} \subset \mathbb{C}$  telle que :

$$u = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l \alpha_l^m h_l^1(kr) Y_l^m(\theta; \varphi) \text{ dans } H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\mathcal{B}}).$$

En prenant les traces de Dirichlet et de Neumann de la relation précédente, nous obtenons :

$$\gamma_D^+ u = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l \alpha_l^m h_l^1(k) Y_l^m \quad , \quad \gamma_N^+ u = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l \alpha_l^m k h_l^{1'}(k) Y_l^m.$$

**Preuve**

La preuve est la même que pour l'équation de Helmholtz intérieure à ceci près que nous avons :

$$u_l^m(r) = \alpha_l^m h_l^1(kr).$$

En effet, comme  $u$  vérifie la condition de radiation (2.1c), les  $(u_l^m)$  satisfont :

$$\frac{d}{dr} u_l^m - i k u_l^m = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right).$$

■

Nous donnons à présent des résultats de diagonalisation pour les opérateurs DtN et pour l'opérateur (2.21) ainsi que ses approximations de Padé.

**Proposition 2.32** (Diagonalisation des opérateurs DtN).

Soit  $k \in \mathbb{R}_+^*$ . Les  $(Y_l^m)$  diagonalisent l'opérateur DtN extérieur :

$$\Lambda_{+,k} Y_l^m = k \frac{h_l^{1'}(k)}{h_l^1(k)} Y_l^m.$$

Si  $k^2$  n'est pas une valeur propre du laplacien de Dirichlet sur  $\mathcal{B}$ , les  $(Y_l^m)$  diagonalisent également l'opérateur DtN intérieur :

$$\Lambda_{-,k,1} Y_l^m = k \frac{j_l'(k)}{j_l(k)} Y_l^m.$$

**Preuve**

Etant donné que les  $(Y_l^m)$  constituent une base de  $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{S})$ , il suffit de vérifier qu'il s'agit de vecteurs propres des opérateurs DtN.

La fonction  $u = j_l(kr) Y_l^m$  vérifie l'équation de Helmholtz dans  $\mathcal{B}$  et ses traces de Dirichlet et de Neumann sont données par :

$$\gamma_D^- u = j_l(k) Y_l^m \quad , \quad \gamma_N^- u = k j_l'(k) Y_l^m.$$

De la même manière, si  $u = h_l^1(kr) Y_l^m$ ,  $u$  vérifie l'équation de Helmholtz dans  $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\mathcal{B}}$  ainsi que la condition de radiation (2.1c). Ses traces de Dirichlet et de Neumann sont données ci-dessous :

$$\gamma_D^+ u = h_l^1(k) Y_l^m \quad , \quad \gamma_N^+ u = k h_l^{1'}(k) Y_l^m.$$

■

**Proposition 2.33** (Diagonalisation de l'opérateur racine carrée).

Les fonctions  $(Y_l^m)$  diagonalisent l'opérateur racine carrée :

$$\sqrt{Id + \frac{\Delta_{\mathbb{S}}}{k_{\epsilon}^2}} Y_l^m = \sqrt{1 - \frac{l(l+1)}{k_{\epsilon}^2}} Y_l^m,$$

ainsi que ses approximations de Padé :

$$\left( R_0 Id - \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{B_i} \left( Id + \frac{B_i}{k_{\epsilon}^2} \Delta_{\mathbb{S}} \right)^{-1} \right) Y_l^m = \left( R_0 - \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{B_i} \left( 1 - \frac{B_i}{k_{\epsilon}^2} l(l+1) \right)^{-1} \right) Y_l^m.$$

**Preuve**

Il suffit d'utiliser les Propositions 2.17 et 2.20.

■

Couplée à la Proposition 2.28, la proposition précédente nous assure que les  $(Y_l^m)$  diagonalisent toutes les approximations des opérateurs DtN que nous avons présentées dans la section précédente. Par la suite, nous supposons donc que les  $(Y_l^m)$  diagonalisent les opérateurs de transmission  $T_-$  et  $T_+$  de la manière suivante :

$$\forall l \in \mathbb{N}, \quad \forall -l \leq m \leq l, \quad T_+ Y_l^m = t_l^+ Y_l^m, \quad \forall l \in \mathbb{N}, \quad \forall -l \leq m \leq l, \quad T_- Y_l^m = t_l^- Y_l^m.$$

Sous cette hypothèse, il est alors possible de donner une condition nécessaire pour que les sous-problèmes (2.4) et (2.5) soient bien posés ainsi que des résultats de résolution modale pour ces problèmes. Jusqu'à la fin de cette sous-section, nous supposons que  $k_-$  et  $\rho$  sont des réels strictement positifs.

**Proposition 2.34** (Le caractère bien posé des sous-problèmes).

Si  $T_-$  et  $T_+$  sont tels que les problèmes intérieur (2.4) et extérieur (2.5) sont bien posés, nous avons :

$$\begin{aligned} \forall l \in \mathbb{N}, \quad \rho k_- j_l'(k_-) + t_l^- j_l(k_-) &\neq 0, \\ \forall l \in \mathbb{N}, \quad t_l^+ h_l^1(k_+) + k_+ h_l^1'(k_+) &\neq 0. \end{aligned}$$

**Preuve**

Nous ne traitons que le cas du problème intérieur, le problème extérieur se traitant de la même manière. Supposons qu'il existe  $l \in \mathbb{N}$  tel que :

$$\rho k_- j_l'(k_-) + t_l^- j_l(k_-) = 0,$$

et  $u \in H^1(\mathcal{B})$  tel que :

$$\Delta u + k_-^2 u = 0 \text{ dans } \mathcal{B}, \quad \rho \gamma_N^- u + T_- \gamma_D^- u = Y_l^{m_0}, \quad m_0 \in \{-l; \dots; l\}.$$

En utilisant la condition de bord et la Proposition 2.29, nous obtenons :

$$(t_l^- j_l(k_-) + \rho k_- j_l'(k_-)) \alpha_l^{m_0} = 1,$$

ce qui n'est pas possible. ■

**Proposition 2.35** (Résolution modale du problème intérieur).

La solution du problème intérieur (2.4) :

$$u \in H^1(\mathcal{B}), \quad \Delta u + k_-^2 u = 0 \text{ dans } \mathcal{B}, \quad \rho \gamma_N^- u + T_- \gamma_D^- u = g,$$

est donnée par :

$$u = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{g_l^m}{\rho k_- j_l'(k_-) + t_l^- j_l(k_-)} j_l(k_- r) Y_l^m \quad \text{avec} \quad g = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l g_l^m Y_l^m.$$

**Preuve**

Il suffit d'utiliser la Proposition 2.29. ■

**Proposition 2.36** (Résolution modale du problème extérieur).

La solution  $u \in H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\mathcal{B}})$  du problème extérieur (2.5) :

$$\Delta u + k_+^2 u = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\mathcal{B}}, \quad \gamma_N^+ u + T_+ \gamma_D^+ u = g, \quad \partial_r u - i k_+ u = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right),$$

vérifie :

$$u = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{g_l^m}{t_l^+ h_l^1(k_+) + k_+ h_l^1'(k_+)} h_l^1(k_+ r) Y_l^m \quad \text{avec} \quad g = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l g_l^m Y_l^m.$$

**Preuve**

La Proposition 2.31 donne directement ce résultat. ■

Les deux propositions précédentes permettent de diagonaliser les opérateurs de résolution.

**Proposition 2.37** (Diagonalisation des opérateurs de résolution).

Les fonctions  $(Y_l^m)$  diagonalisent  $R_-$  et  $R_+$  :

$$R_- Y_l^m = \frac{j_l(k_-)}{\rho k_- j_l'(k_-) + j_l(k_-) t_l^-} Y_l^m, \quad R_+ Y_l^m = \frac{h_l^1(k_+)}{k_+ h_l^{1'}(k_+) + h_l^1(k_+) t_l^+} Y_l^m.$$

Pour finir, nous précisons le spectre de  $S_\pi$ .

**Proposition 2.38** (Spectre de  $S_\pi$ ).

Les  $(Y_l^m)$  diagonalisent  $S_-$  et  $S_+$  :

$$\begin{aligned} S_- Y_l^m &= \left( 1 - \frac{j_l(k_-)}{\rho k_- j_l'(k_-) + j_l(k_-) t_l^-} (t_l^- - t_l^+) \right) Y_l^m, \\ S_+ Y_l^m &= \left( 1 + \frac{h_l^1(k_+)}{k_+ h_l^{1'}(k_+) + h_l^1(k_+) t_l^+} (t_l^- - t_l^+) \right) Y_l^m. \end{aligned}$$

De là, nous en déduisons les valeurs propres de  $S_\pi$  :

$$\pm \sqrt{1 - \frac{j_l(k_-)}{\rho k_- j_l'(k_-) + j_l(k_-) t_l^-} (t_l^- - t_l^+)} \sqrt{1 + \frac{h_l^1(k_+)}{k_+ h_l^{1'}(k_+) + h_l^1(k_+) t_l^+} (t_l^- - t_l^+)}.$$

**Preuve**

Les résultats portant sur  $S_-$  et  $S_+$  se démontrent sans difficulté en revenant à leurs définitions.

Pour déterminer les valeurs propres de  $S_\pi$ , il est suffisant de montrer que :

$$Sp(S_\pi) = \pm \sqrt{Sp(S_- S_+)}.$$

Nous commençons par remarquer que  $\lambda \in \mathbb{C}^*$  est une valeur propre de  $S_\pi$  si et seulement si il existe  $(u; v) \in H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{S}) \times H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{S}) \setminus \{(0; 0)\}$  tels que :

$$\begin{cases} S_- S_+ v = \lambda^2 v \\ u = \frac{1}{\lambda} S_+ v \end{cases}.$$

Nous en déduisons alors que :

$$Sp(S_\pi) \setminus \{0\} = \pm \sqrt{Sp(S_- S_+)} \setminus \{0\}.$$

Pour conclure, il suffit de remarquer que,  $S_-$  et  $S_+$  étant diagonalisables dans la même base, nous avons :

$$S_\pi \text{ injectif} \Leftrightarrow S_- \text{ et } S_+ \text{ injectifs} \Leftrightarrow S_- S_+ \text{ injectif.}$$
■

### 2.4.3 Qualité des approximations des opérateurs DtN

Dans cette sous-section, nous analysons numériquement la qualité des approximations des opérateurs DtN présentées dans la section précédente lorsque  $\Gamma$  correspond à la sphère unité de  $\mathbb{R}^3$  de centre  $\mathbf{0}$ . Pour ce faire, nous comparons graphiquement les spectres de ces approximations et ceux des opérateurs DtN exacts correspondant. Toutefois, afin de faciliter l'interprétation des résultats, une transformation est appliquée à ces spectres. Plus précisément, pour juger de la qualité d'approximations  $\Lambda_{-,k,1}^{\text{app}}$  et  $\Lambda_{+,k}^{\text{app}}$  de  $\Lambda_{-,k,1}$  et de  $\Lambda_{+,k}$ ,  $k \in \mathbb{R}_+^*$ , nous nous intéressons aux spectres des opérateurs suivants :

$$\frac{1}{2} Id + D_k - S_k \Lambda_{-,k,1}^{\text{app}}, \quad \frac{1}{2} Id - D_k + S_k \Lambda_{+,k}^{\text{app}}. \quad (2.28)$$

La transformation des spectres que nous proposons est basée sur les relations (voir Proposition 2.8) :

$$\frac{1}{2}Id + D_k - S_k \Lambda_{-,k,1} = 0 \quad , \quad \frac{1}{2}Id - D_k + S_k \Lambda_{+,k} = 0.$$

De là, nous voyons que le critère permettant de déterminer si  $\Lambda_{-,k,1}^{\text{app}}$  et  $\Lambda_{+,k}^{\text{app}}$  sont de bonne qualité est alors très simple : si les spectres des opérateurs (2.28) sont concentrés autour de 0, cela signifie que les approximations correspondantes sont précises. Remarquons que les relations sur lesquelles nous avons construit la transformation des spectres correspondent concrètement à des définitions des opérateurs DtN. En effet, sous réserve que  $k^2$  ne soit pas une valeur propre du laplacien de Dirichlet, elles se réécrivent de manière équivalente comme suit (voir Proposition 1.10 page 22) :

$$\Lambda_{-,k,1} = S_k^{-1} \left( \frac{1}{2}Id + D_k \right) \quad , \quad \Lambda_{+,k} = -S_k^{-1} \left( \frac{1}{2}Id - D_k \right).$$

Dans l'optique de séparer les difficultés, nous commençons par analyser la qualité des approximations  $\Lambda_{-,k,1}^{\text{int}}$ ,  $\Lambda_{-,k,1}^{\text{sq}}$ ,  $\Lambda_{-,k,1}^0$ ,  $\Lambda_{+,k}^{\text{sq}}$  et  $\Lambda_{+,k}^0$  des opérateurs DtN. La Figure 2.1 présente les spectres transformés de ces approximations, le nombre d'onde  $k$  étant égal à 20. Nous avons ici choisi de représenter les 50 premières valeurs propres des spectres considérés. D'une manière générale, sauf mention explicite du contraire, tous les tests numériques basés sur les harmoniques sphériques ont été réalisés en se limitant aux 50 premières valeurs propres des opérateurs en jeu. Cette figure confirme bien ce que nous avons anticipé dans la section 2.3. La meilleure approximation de  $\Lambda_{-,k,1}$  est  $\Lambda_{-,k,1}^{\text{int}}$ , suivie de  $\Lambda_{-,k,1}^{\text{sq}}$  puis de  $\Lambda_{-,k,1}^0$ . De même,  $\Lambda_{+,k}^{\text{sq}}$  est une meilleure approximation de  $\Lambda_{+,k}$  que  $\Lambda_{+,k}^0$ . Enfin,  $\Lambda_{-,k,1}^{\text{int}}$  en tant qu'approximation de  $\Lambda_{-,k,1}$  est de qualité similaire à  $\Lambda_{+,k}^{\text{sq}}$  en tant qu'approximation de  $\Lambda_{+,k}$ .

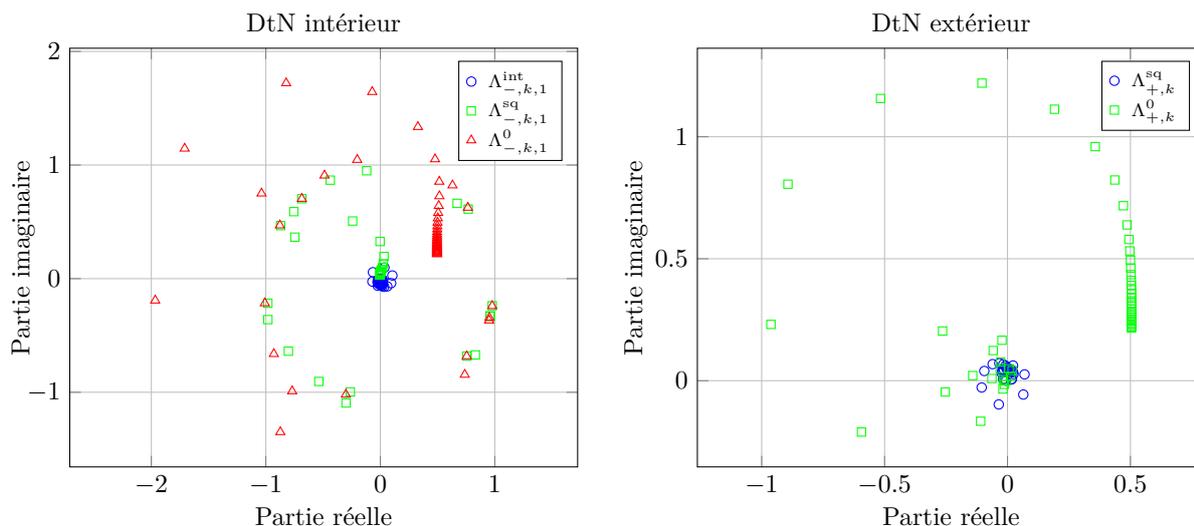
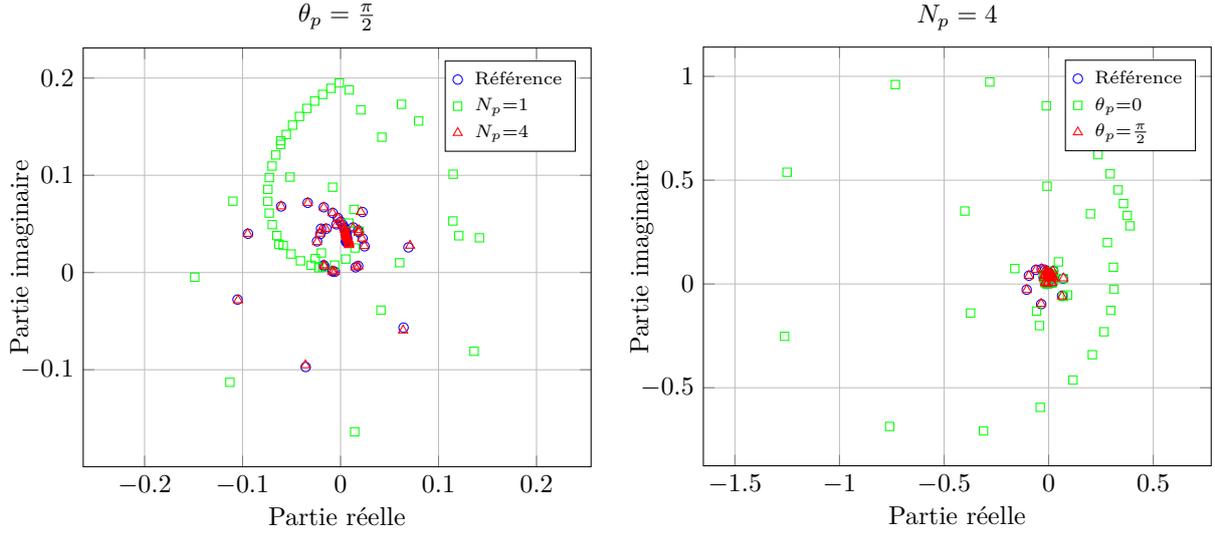


FIGURE 2.1 – Qualité des approximations  $\Lambda_{-,k,1}^{\text{int}}$ ,  $\Lambda_{-,k,1}^{\text{sq}}$ ,  $\Lambda_{-,k,1}^0$ ,  $\Lambda_{+,k}^{\text{sq}}$  et  $\Lambda_{+,k}^0$  des opérateurs DtN ( $k = 20$ )

Nous nous intéressons à présent à la qualité des approximations de Padé des opérateurs DtN. Il est bien sûr possible de réaliser une étude exhaustive consistant à évaluer la qualité de  $\Lambda_{+,k}^{\text{sq},N_p,\theta_p}$ ,  $\Lambda_{-,k,1}^{\text{sq},N_p,\theta_p}$  et  $\Lambda_{-,k,1}^{\text{int},N_p,\theta_p}$ , ceci pour plusieurs valeurs de  $N_p$  et de  $\theta_p$ , mais cela n'est pas nécessaire. En effet, le problème sous-jacent consiste concrètement à déterminer si la relation (2.22) est effectivement bien vérifiée et pour ce faire, il est suffisant d'évaluer la qualité de  $\Lambda_{+,k}^{\text{sq},N_p,\theta_p}$ , encore une fois, pour plusieurs valeurs de  $N_p$  et de  $\theta_p$ . La Figure 2.2 présente le spectre transformé de  $\Lambda_{+,k}^{\text{sq},N_p,\theta_p}$  pour quelques valeurs de  $N_p$  et de  $\theta_p$ , le nombre d'onde  $k$  étant à nouveau fixé à 20. Cette figure est composée de deux graphiques, à savoir un pour lequel  $\theta_p$  est égal à  $\frac{\pi}{2}$  et un autre pour lequel  $N_p$  est égal à 4. A titre de comparaison, sur ces deux graphiques figure une référence correspondant au spectre transformé de  $\Lambda_{+,k}^{\text{sq}}$ . Ces résultats confirment bien ce qui a été annoncé dans la sous-section 2.3.4. Plus  $N_p$  est grand et meilleure est l'approximation de Padé. Remarquons qu'il n'est pas nécessaire pour  $N_p$  d'être très grand pour que la relation (2.22) soit bien vérifiée,  $N_p = 4$  apparaissant déjà comme un bon compromis. Enfin, ces résultats illustrent l'intérêt de la rotation de branche sans laquelle les modes d'ordre élevé ne sont pas bien approximés.


 FIGURE 2.2 – Qualité des approximations  $\Lambda_{+,k}^{\text{sq},N_p,\theta_p}$  de l'opérateur DtN extérieur ( $k = 20$ )

#### 2.4.4 Convergence du couplage faible

Cette sous-section a essentiellement pour but de vérifier, sans grand effort d'implémentation, que le couplage faible (2.6) est pertinent d'un point de vue pratique, c'est-à-dire qu'il est effectivement possible de le résoudre en un nombre raisonnable d'itérations GMRES. Pour ce faire, nous supposons que l'objet diffractant est homogène puisque dans ce cas, nous disposons d'expressions analytiques pour les valeurs propres de l'opérateur du couplage faible (2.6). Nous pouvons alors assembler une matrice diagonale dont les coefficients correspondent à un certain nombre des premières valeurs propres de l'opérateur du couplage faible (2.6) et tester la convergence de la procédure GMRES appliquée à cette matrice. Cette approche est en effet intéressante pour évaluer la pertinence pratique du couplage faible (2.6) puisque la vitesse de convergence de la procédure GMRES dépend principalement du spectre de l'opérateur considéré. Dans l'optique de tester de manière robuste le couplage faible (2.6), nous choisissons par ailleurs d'exécuter plusieurs fois (100 fois) et avec des seconds membres aléatoires la procédure GMRES pour ensuite faire une moyenne des résultats obtenus.

Nous commençons par nous intéresser au cas où les deux opérateurs de transmission sont optimaux pour le couplage faible (2.6). Nous parlons alors de couplage faible optimisé et nous rappelons qu'il s'agit du cas d'intérêt de ce travail de recherche. Les premiers résultats que nous présentons ont été obtenus en utilisant les approximations  $\Lambda_{-,k_-, \rho}^{\text{int}}$ ,  $\Lambda_{-,k_-, \rho}^{\text{sq}}$ ,  $\Lambda_{-,k_-, \rho}^0$ ,  $\Lambda_{+,k_+}^{\text{sq}}$  et  $\Lambda_{+,k_+}^0$  des opérateurs DtN. Les figures correspondantes sont toutes constituées de six courbes respectivement associées à une paire d'opérateurs de transmission ( $T_-; T_+$ ), toutes les paires possibles étant considérées. Dans l'optique de ne pas surcharger ces figures, les notations pour les approximations des opérateurs DtN sont allégées dans les légendes. Par exemple,  $\Lambda_{-,k_-, \rho}^{\text{int}}$  et  $\Lambda_{+,k_+}^{\text{sq}}$  sont notés  $\Lambda_-^{\text{int}}$  et  $\Lambda_+^{\text{sq}}$ . La Figure 2.3 présente des historiques de convergence GMRES pour le couplage faible optimisé lorsque  $k_- = 20$ ,  $k_+ = 10$  et  $\rho = 5$ . Dans l'optique de faciliter la présentation des résultats, nous notons  $n_{\text{it}}^{\text{opt}}$  le nombre d'itérations nécessaires à la procédure GMRES, lorsqu'elle est appliquée au couplage faible optimisé, pour atteindre la tolérance prescrite. Remarquons que la tolérance GMRES a été fixée à  $10^{-6}$  pour tous les tests de convergence GMRES basés sur les harmoniques sphériques. La Figure 2.4 montre l'évolution de  $n_{\text{it}}^{\text{opt}}$  en fonction du nombre d'onde intérieur pour  $k_+ = 10$  et  $\rho = 5$ . D'un point de vue physique, il est effectivement possible de faire varier  $k_-$ ,  $k_+$  étant fixé. En effet, il suffit de changer le fluide constituant  $\Omega_-$ , le fluide constituant  $\Omega_+$  et la fréquence restant identiques. Le comportement de  $n_{\text{it}}^{\text{opt}}$  en fonction du nombre de valeurs propres considérées est donné, pour  $k_- = 20$ ,  $k_+ = 10$  et  $\rho = 5$ , dans la Figure 2.5. Enfin,  $n_{\text{it}}^{\text{opt}}$  est représenté en fonction de  $\rho$  lorsque  $k_- = 20$  et  $k_+ = 10$  dans la Figure 2.6.

Ces résultats sont cohérents avec ce que nous pouvions anticiper. Ce sont les meilleures approximations des opérateurs DtN qui donnent les meilleures convergences GMRES pour le couplage faible optimisé. De plus, les approximations  $\Lambda_{+,k_+}^{\text{sq}}$ ,  $\Lambda_{-,k_-, \rho}^{\text{sq}}$  et  $\Lambda_{-,k_-, \rho}^{\text{int}}$  des opérateurs DtN rendent  $n_{\text{it}}^{\text{opt}}$  très peu dépendant du nombre d'onde, ce qui est particulièrement intéressant lorsque la fréquence est élevée. Ces mêmes approximations permettent également de faire en sorte que  $n_{\text{it}}^{\text{opt}}$  soit quasiment indépendant du nombre de valeurs propres considérées. Cela nous laisse penser que, en pratique,  $n_{\text{it}}^{\text{opt}}$  sera quasiment indépendant du pas du

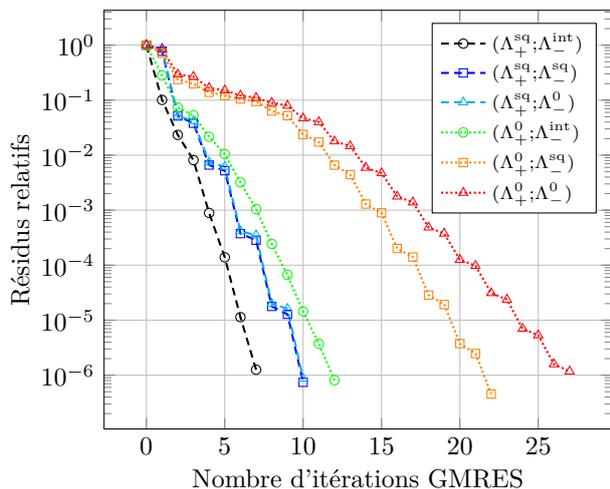


FIGURE 2.3 – Historiques de convergence GMRES pour le couplage faible optimisé

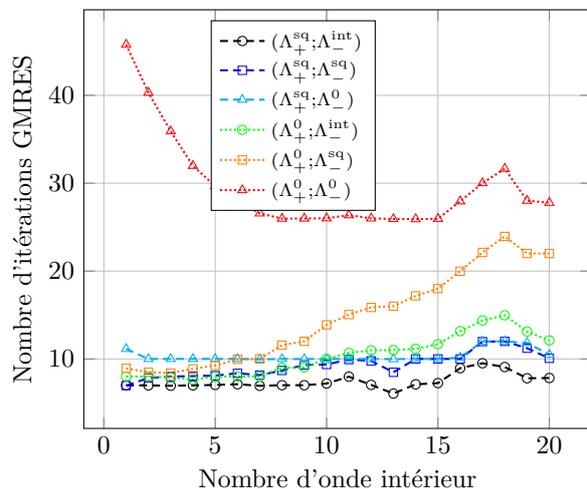
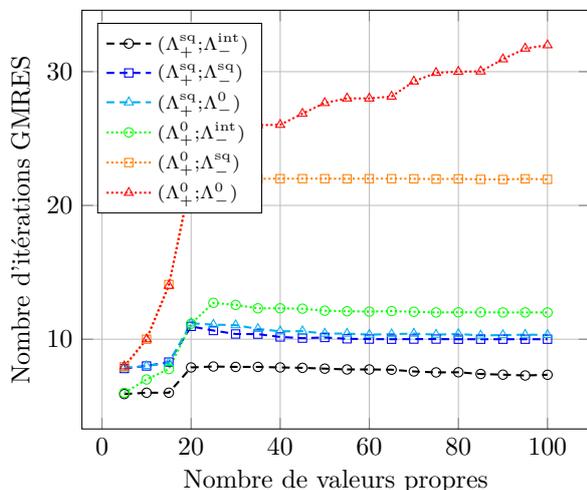
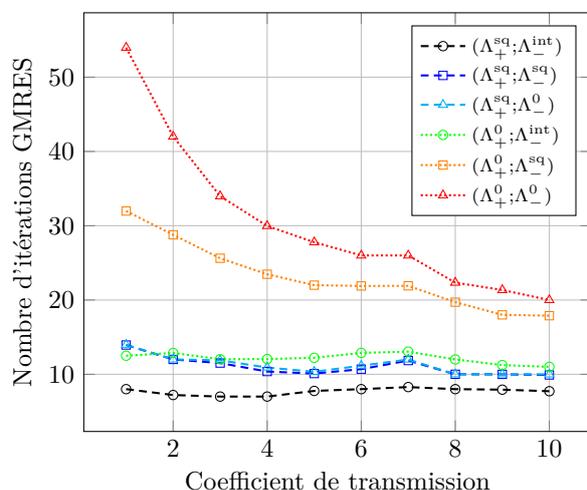

 FIGURE 2.4 – Nombre d'itérations GMRES en fonction de  $k_-$  pour le couplage faible optimisé


FIGURE 2.5 – Nombre d'itérations GMRES en fonction du nombre de valeurs propres pour le couplage faible optimisé


 FIGURE 2.6 – Nombre d'itérations GMRES en fonction de  $\rho$  pour le couplage faible optimisé

maillage lorsque les approximations  $\Lambda_{+,k_+}^{\text{sq},N_p,\theta_p}$ ,  $\Lambda_{-,k_-,\rho}^{\text{sq},N_p,\theta_p}$  et  $\Lambda_{-,k_-,\rho}^{\text{int},N_p,\theta_p}$  des opérateurs DtN seront impliquées. Notons par ailleurs que le coefficient de transmission  $\rho$  semble être régularisant dans le sens où  $n_{\text{it}}^{\text{opt}}$  décroît lorsque  $\rho$  croît. Pour finir, il est également intéressant de remarquer que si un des opérateurs de transmission correspond à une très bonne approximation d'un opérateur DtN alors que cela n'est pas le cas pour l'autre opérateur de transmission, la convergence GMRES n'est pas fortement dégradée par rapport au cas idéal où les deux opérateurs de transmission correspondent à de très bonnes approximations des opérateurs DtN. C'est une conséquence directe du fait que  $S_\pi$  est nilpotent si  $S_-$  ou  $S_+$  est nul.

Nous nous intéressons à présent à l'influence des paramètres  $N_p$  et  $\theta_p$  sur la convergence GMRES du couplage faible optimisé. Pour ne pas multiplier les figures, nous nous limitons toutefois au cas où les opérateurs de transmission correspondent (au signe près) aux approximations  $\Lambda_{-,k_-,\rho}^{\text{sq},N_p,\theta_p}$  et  $\Lambda_{+,k_+}^{\text{sq},N_p,\theta_p}$  des opérateurs DtN, le but étant essentiellement de confirmer que les valeurs de  $N_p$  et de  $\theta_p$  pour lesquelles la relation (2.22) est bien vérifiée assurent une bonne convergence GMRES pour le couplage faible optimisé. La Figure 2.7 présente, pour ce choix des opérateurs de transmission, l'évolution de  $n_{\text{it}}^{\text{opt}}$  en fonction du nombre d'onde intérieur lorsque  $k_+ = 10$  et  $\rho = 5$ . Cette figure est constituée de deux graphiques, à savoir un pour lequel  $\theta_p$  est égal à  $\frac{\pi}{2}$  et un autre pour lequel  $N_p$  est égal à 4. A titre de comparaison, sur ces deux graphiques se trouve une référence représentant le cas où les opérateurs de transmission correspondent aux approximations  $\Lambda_{-,k_-,\rho}^{\text{sq}}$  et  $\Lambda_{+,k_+}^{\text{sq}}$  des opérateurs DtN.

Les résultats sont en accord avec ce qui a été présenté dans la sous-section précédente. Seulement quelques

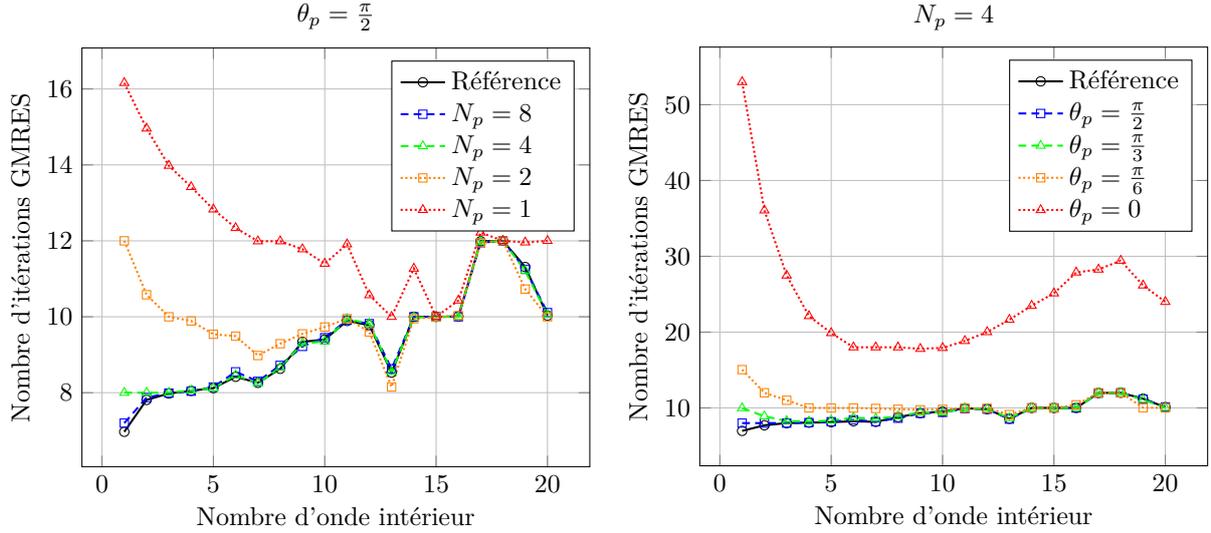


FIGURE 2.7 – Influence des paramètres de Padé sur la convergence GMRES du couplage faible optimisé

termes dans les approximations de Padé, typiquement 4, sont suffisants pour obtenir une très bonne convergence GMRES pour le couplage faible optimisé. Enfin, le fait de fixer  $\theta_p$  à  $\frac{\pi}{2}$  permet d'assurer une convergence GMRES optimale pour le couplage faible optimisé et nous observons de nouveau que la rotation de branche est absolument nécessaire.

Nous terminons cette sous-section en nous intéressant à la convergence GMRES pour le couplage faible (2.6) lorsque au moins un des opérateurs de transmission correspond à un opérateur optimal pour les sous-problèmes (2.4) et (2.5). Dans ce cas, il y a alors plusieurs manières de choisir les opérateurs de transmission que nous présentons de manière exhaustive. Avant de commencer cette présentation, nous rappelons cependant qu'il existe deux opérateurs de transmission optimaux pour chacun des sous-problèmes (2.4) et (2.5), l'un étant lié à un opérateur DtN intérieur, l'autre à un opérateur DtN extérieur. En pratique toutefois, le second est redondant. Nous n'en expliquons la raison que dans le cas du problème extérieur (2.5), le raisonnement étant similaire pour le problème intérieur (2.4). Les approximations des opérateurs optimaux pour le problème extérieur (2.5) sont les suivantes :

$$-\Lambda_{-,k_+,1}^{\text{int}}, \quad -\Lambda_{-,k_+,1}^{\text{sq}}, \quad -\Lambda_{-,k_+,1}^0, \quad \Lambda_{+,k_+}^{\text{sq}}, \quad \Lambda_{+,k_+}^0.$$

Or il se trouve que  $-\Lambda_{-,k_+,1}^{\text{sq}} = \Lambda_{+,k_+}^{\text{sq}}$  et  $-\Lambda_{-,k_+,1}^0 = \Lambda_{+,k_+}^0$ . Par conséquent, nous considérons, d'un point de vue pratique,  $-\Lambda_{-,k_+,1}$  comme l'unique opérateur optimal pour le problème extérieur (2.5).

Supposons dans un premier temps que  $T_-$  soit optimal pour le couplage faible (2.6) et que  $T_+$  le soit pour le problème extérieur (2.5). Nous parlons alors de couplage faible semi optimisé. Ce cas peut être particulièrement intéressant si le couplage faible (2.6) est de type FEM-BEM et pourrait certainement constituer une perspective de recherche. Dans ce contexte, il n'est en effet pas nécessaire de bien conditionner la résolution itérative par équations intégrales du problème intérieur (2.4) mais cela peut être intéressant pour le problème extérieur (2.5). Nous notons  $n_{\text{it}}^{\text{semi}}$  l'équivalent de  $n_{\text{it}}^{\text{opt}}$  pour le couplage faible semi-optimisé. Le premier graphique de la Figure 2.8 représente  $n_{\text{it}}^{\text{semi}}$  en fonction du nombre d'onde intérieur, avec  $k_+ = 10$  et  $\rho = 5$ , lorsque les opérateurs de transmission correspondent aux approximations  $\Lambda_{+,k_+}^{\text{sq}}$ ,  $\Lambda_{+,k_+}^0$ ,  $\Lambda_{-,k_+,1}^{\text{int}}$ ,  $\Lambda_{-,k_+,1}^{\text{sq}}$  et  $\Lambda_{-,k_+,1}^0$  des opérateurs DtN. Nous remarquons que par rapport au couplage faible optimisé, la convergence est peu impactée. Ceci est encore dû au fait que  $S_\pi$  est nilpotent si  $S_-$  ou  $S_+$  est nul.

Venons-en au cas où  $T_-$  est optimal pour le problème intérieur (2.4) et  $T_+$  l'est pour le couplage faible (2.6). Nous ne présentons pas de résultat numérique pour ce choix des opérateurs de transmission essentiellement car il n'est pas d'une grande pertinence en pratique. Si nous choisissons  $T_-$  de sorte à ce qu'il soit optimal pour le problème intérieur (2.4), cela signifie que le couplage faible (2.6) que nous considérons est de type BEM-BEM. Mais dans ce cas, optimiser la résolution d'un seul des sous-problèmes (2.4) et (2.5) ne présente pas un grand intérêt. En effet, une implémentation optimisée du couplage faible (2.6) résoudreait simultanément les deux sous-problèmes à chaque itération de la méthode GMRES. Si la résolution d'un seul des sous-problèmes est optimisée, l'autre sous-problème reste limitant et le gain en temps de calcul est *a priori* nul.

Pour finir, si  $T_-$  et  $T_+$  sont optimaux pour les sous-problèmes, nous parlons de couplage faible non optimisé. Ce cas ne concerne également que le couplage faible BEM-BEM et constitue conceptuellement une meilleure solution que l'approche précédente. Nous notons  $n_{it}^{non}$  l'analogue de  $n_{it}^{opt}$  pour le couplage faible non optimisé. Le second graphique de la Figure 2.8 présente l'évolution de  $n_{it}^{non}$  en fonction du nombre d'onde intérieur lorsque  $k_+ = 10$ ,  $\rho = 5$  et les opérateurs de transmission correspondent aux approximations  $\Lambda_{-,k_{\pm},1}^{int}$ ,  $\Lambda_{-,k_{\pm},1}^{sq}$  et  $\Lambda_{+,k_{\pm},1}^0$  des opérateurs DtN. Comme nous pouvions nous y attendre, la convergence GMRES est fortement dégradée dans ce cas et ceci à un point qui rendrait probablement cette méthode inutilisable en pratique, notamment lorsque la fréquence est élevée.

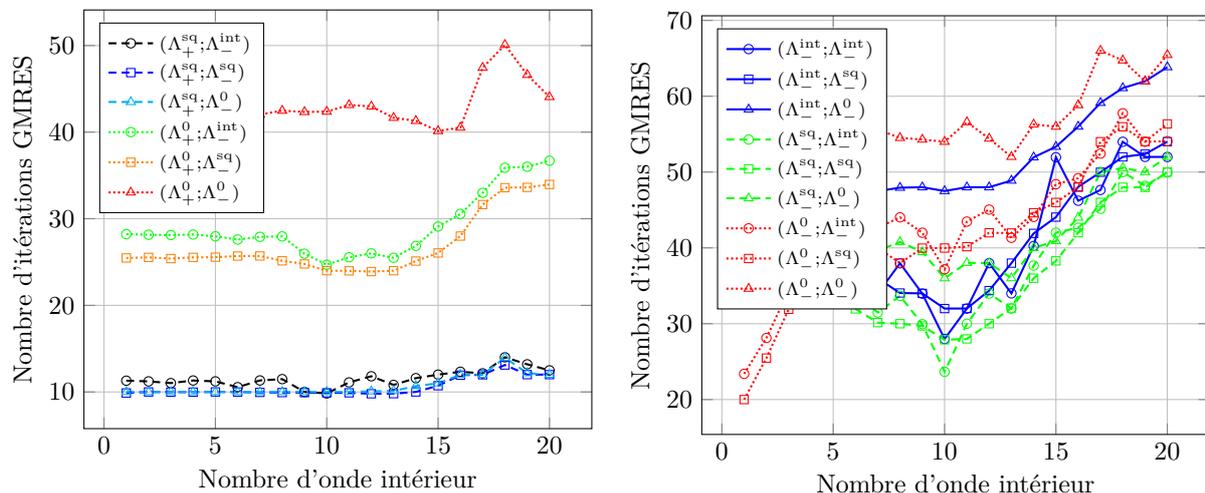


FIGURE 2.8 – Nombre d'itérations GMRES en fonction de  $k_-$  pour les couplages faibles semi (gauche) et non optimisé (droite)

#### 2.4.5 Problèmes de résonance du couplage faible

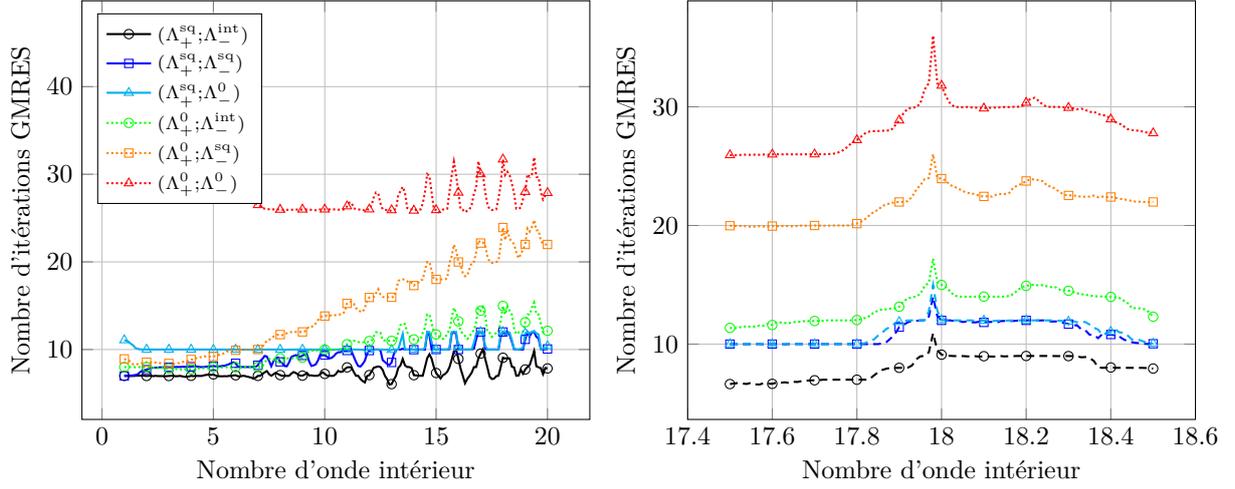
Dans la Figure 2.4, qui présente l'évolution de  $n_{it}^{opt}$  en fonction de  $k_-$  lorsque  $T_-$  et  $T_+$  correspondent aux approximations  $\Lambda_{-,k_-, \rho}^{int}$ ,  $\Lambda_{-,k_-, \rho}^{sq}$ ,  $\Lambda_{-,k_-, \rho}^0$ ,  $\Lambda_{+,k_+}^{sq}$  et  $\Lambda_{+,k_+}^0$  des opérateurs de transmission optimaux pour le couplage faible (2.14), nous avons fixé le pas de discrétisation du nombre d'onde intérieur à 1. Le premier graphique de la Figure 2.9 présente lui aussi les variations de  $n_{it}^{opt}$  en fonction de  $k_-$ , les opérateurs de transmission et les paramètres physiques étant identiques, mais avec un pas de discrétisation de 0.1. Notons que les marqueurs de données (cercles, carrés et triangles) ne sont pas placés tous les dixièmes d'unité mais toutes les unités. Ceci permet notamment une comparaison immédiate avec la Figure 2.4. Ces résultats nous laissent penser que le couplage faible optimisé souffre de problèmes de résonance puisque la valeur de  $n_{it}^{opt}$  augmente de manière très localisée lorsque  $k_-$  varie. Le second graphique de la Figure 2.9 donne une vue plus précise du pic localisé en  $k_- = 17.98$ . Notons que, pour ce graphique, le pas de discrétisation du nombre d'onde intérieur est de 0.01. De plus, les marqueurs de données sont placés tous les dixièmes d'unité pour des raisons de lisibilité.

Les résonances du couplage faible (2.6) sont dues au fait que les sous-problèmes (2.4) et (2.5) peuvent être très mal conditionnés voire mal posés. Dans l'optique d'expliquer ce phénomène, commençons par rappeler que les conditions suivantes sont nécessaires au caractère bien posé des problèmes (2.4) et (2.5) (Proposition 2.34) :

$$\begin{aligned} \forall l \in \mathbb{N}, \quad \rho k_- j_l'(k_-) + t_l^- j_l(k_-) &\neq 0, \\ \forall l \in \mathbb{N}, \quad t_l^+ h_l^1(k_+) + k_+ h_l^1(k_+) &\neq 0. \end{aligned}$$

Par ailleurs, si  $k_-^2$  n'est pas une valeur propre du laplacien de Dirichlet dans  $\mathcal{B}$ , ces conditions se réécrivent de manière équivalente comme suit (Proposition 2.30) :

$$\begin{aligned} \forall l \in \mathbb{N}, \quad \rho k_- \frac{j_l'(k_-)}{j_l(k_-)} + t_l^- &\neq 0, \\ \forall l \in \mathbb{N}, \quad k_+ \frac{h_l^1(k_+)}{h_l^1(k_+)} + t_l^+ &\neq 0, \end{aligned}$$


 FIGURE 2.9 – Nombre d'itérations GMRES en fonction de  $k_-$  pour le couplage faible optimisé

et expriment alors l'injectivité des opérateurs suivants :

$$\Lambda_{-,k_-, \rho} + T_- \quad , \quad \Lambda_{+,k_+} + T_+ . \quad (2.29)$$

Pour finir, remarquons que si  $T_-$  et  $T_+$  correspondent aux opérateurs de transmission optimaux pour le couplage faible (2.14), l'injectivité des opérateurs (2.29) est équivalente au fait que (Proposition 2.32) :

$$\forall l \in \mathbb{N}, \quad \rho k_- \frac{j_l'(k_-)}{j_l(k_-)} - k_+ \frac{h_l^1(k_+)}{h_l^1(k_+)} \neq 0 . \quad (2.30)$$

Numériquement, nous avons constaté que cette condition n'est pas toujours vérifiée. Le premier graphique de la Figure 2.10 présente le module des quantités (2.30) en fonction de  $l$  lorsque  $k_- = 17.98$ ,  $k_+ = 10$  et  $\rho = 5$ , ces paramètres correspondant au pic du second graphique de la Figure 2.9. Nous voyons donc que le module de la quantité (2.30) d'indice  $l = 15$  est anormalement petit. A titre de comparaison, les modules des quantités (2.30) sont représentés dans le second graphique de la Figure 2.10 lorsque  $k_- = 17.5$ ,  $k_+ = 10$  et  $\rho = 5$ .

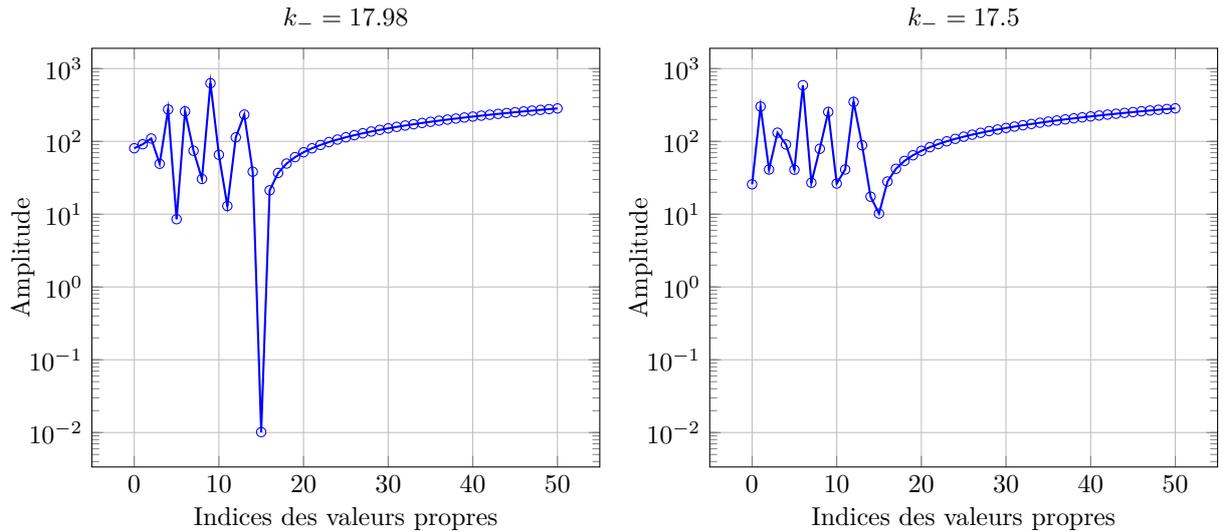


FIGURE 2.10 – Dégénérescence des sous-problèmes du couplage faible

Ces résultats suffisent à expliquer les résonances de la Figure 2.9. En effet, si les opérateurs (2.29) peuvent ne pas être injectifs lorsque  $T_-$  et  $T_+$  correspondent aux opérateurs de transmission optimaux pour le couplage faible (2.14), une de leurs valeurs propres sera proche de 0 si  $T_-$  et  $T_+$  sont choisis comme étant de bonnes approximations des opérateurs (2.14). Les résonances du couplage faible (2.6) sont donc dues au fait que les sous-problèmes (2.4) et (2.5) sont mal conditionnés. Concrètement, cela se traduit par une dégradation des

propriétés spectrales des opérateurs de résolution  $R_-$  et  $R_+$  pour certains jeux de paramètres  $(k_-; k_+; \rho)$ . Ceci impacte directement le spectre de l'opérateur du couplage faible (2.6) dont un des éléments se rapproche de 0, détériorant ainsi la vitesse de convergence GMRES. Ce phénomène est illustré par la Figure 2.11 qui présente le spectre de  $Id - S_\pi$  lorsque  $T_-$  et  $T_+$  correspondent aux approximations  $\Lambda_{+,k_+}^{\text{sq}}$ ,  $\Lambda_{-,k_-,\rho}^{\text{int}}$  et  $\Lambda_{-,k_-,\rho}^{\text{sq}}$  des opérateurs de transmission optimaux pour le couplage faible (2.14). Pour cette figure, les paramètres  $k_-$ ,  $k_+$  et  $\rho$  sont les mêmes que dans la Figure 2.10.

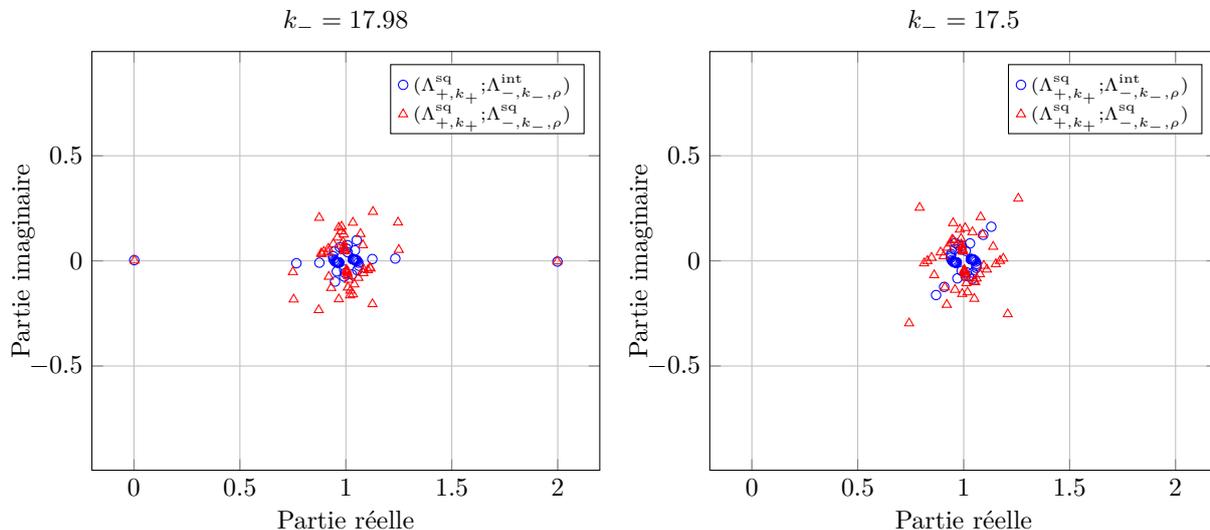


FIGURE 2.11 – Dégénérescence du spectre de l'opérateur du couplage faible

## 2.4.6 Résolution itérative des sous-problèmes

Nous terminons cette section en présentant quelques résultats concernant la résolution itérative des sous-problèmes (2.4) et (2.5). Cette approche ne sera pas approfondie dans la suite de ce travail mais il est intéressant d'en présenter certains aspects car elle pourrait constituer une nouvelle perspective de recherche. La vitesse de convergence de la procédure GMRES appliquée aux formulations pré-conditionnées (2.10) et (2.12) a été testée de la même manière que pour le couplage faible (2.6). Ici,  $k_-$  et  $\rho$  sont supposés être des réels strictement positifs.

Dans un premier temps, nous nous intéressons à la convergence GMRES des formulations pré-conditionnées (2.10) et (2.12) lorsque les opérateurs de transmission sont optimaux pour le couplage faible (2.6). La Figure 2.12 présente l'évolution du nombre d'itérations GMRES pour les formulations pré-conditionnées (2.10) et (2.12) en fonction du nombre d'onde intérieur lorsque  $k_+ = 10$ ,  $\rho = 5$  et les opérateurs de transmission correspondent aux approximations  $\Lambda_{-,k_-,\rho}^{\text{int}}$ ,  $\Lambda_{-,k_-,\rho}^{\text{sq}}$ ,  $\Lambda_{-,k_-,\rho}^0$ ,  $\Lambda_{+,k_+}^{\text{sq}}$  et  $\Lambda_{+,k_+}^0$  des opérateurs DtN. Comme nous pouvions nous y attendre, la convergence GMRES pour les sous-problèmes (2.4) et (2.5) n'est pas particulièrement bonne, le nombre d'itérations étant élevé et pouvant dépendre significativement du nombre d'onde.

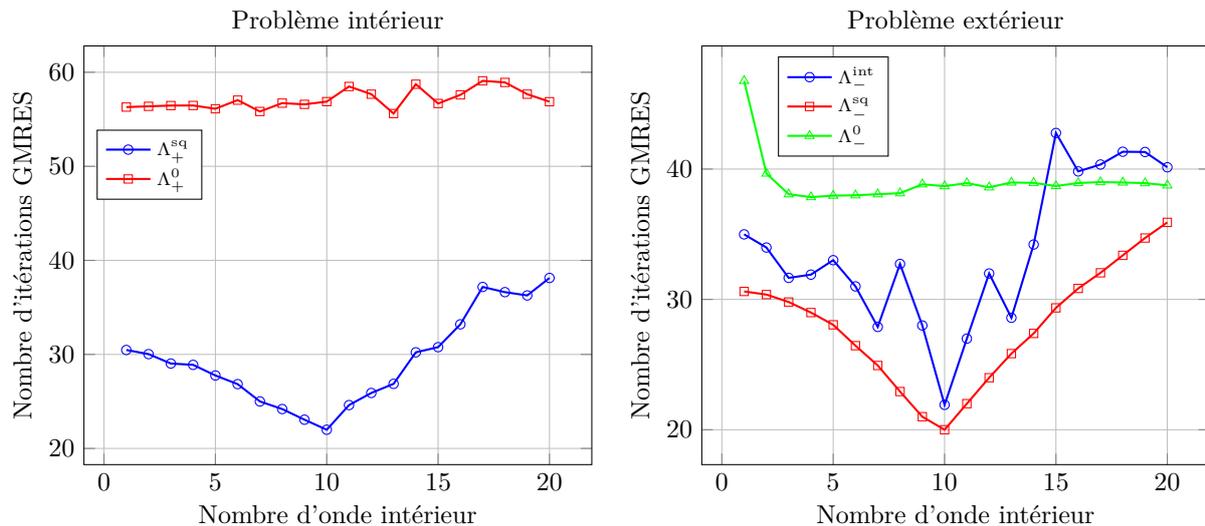
Venons-en à présent au cas où les opérateurs de transmission sont optimaux pour les sous-problèmes (2.4) et (2.5). Comme dans la sous-section 2.4.4, nous considérons que les sous-problèmes n'admettent respectivement qu'un seul opérateur optimal, à savoir :

$$T_- = \Lambda_{-,k_-,\rho} \quad , \quad T_+ = -\Lambda_{-,k_+,1}.$$

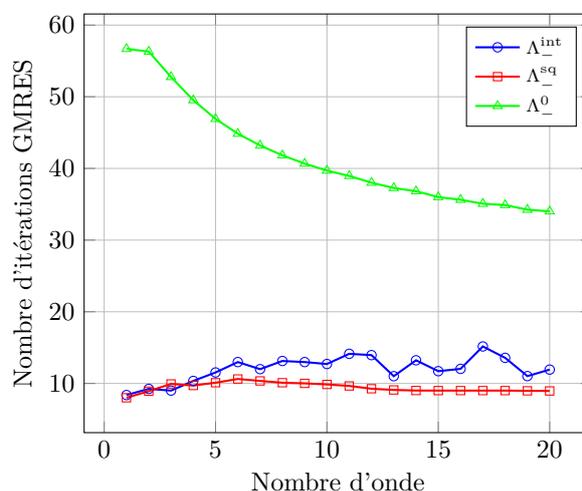
Si les opérateurs de transmission correspondent aux opérateurs précédents, les opérateurs des formulations pré-conditionnées (2.10) et (2.12) sont identiques au nombre d'onde près et correspondent respectivement à  $\mathcal{O}_{k_+}$  et à  $\mathcal{O}_{k_-}$ ,  $\mathcal{O}_k$  étant défini par :

$$\mathcal{O}_k = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}Id + S_k \Lambda_{-,k,1} & -D_k \Lambda_{-,k,1}^{-1} \\ D_k^* \Lambda_{-,k,1} & \frac{1}{2}Id - N_k \Lambda_{-,k,1}^{-1} \end{pmatrix}.$$

Remarquons que ce résultat est également valable lorsque les opérateurs de transmission sont choisis comme étant les approximations intégrales, de type racine carrée ou d'ordre zéro des opérateurs optimaux pour les sous-problèmes. Il suffit alors de remplacer  $\Lambda_{-,k,1}$  par  $\Lambda_{-,k,1}^{\text{int}}$ ,  $\Lambda_{-,k,1}^{\text{sq}}$  ou  $\Lambda_{-,k,1}^0$  dans la définition de  $\mathcal{O}_k$ .

FIGURE 2.12 – Nombre d'itérations GMRES en fonction de  $k_-$  pour les sous-problèmes non optimisés

La Figure 2.13 présente l'évolution du nombre d'itérations GMRES pour l'opérateur  $\mathcal{O}_k$  en fonction de  $k$ , l'opérateur  $\Lambda_{-,k,1}$  ayant été remplacé par ses approximations  $\Lambda_{-,k,1}^{\text{int}}$ ,  $\Lambda_{-,k,1}^{\text{sq}}$  et  $\Lambda_{-,k,1}^0$ . La convergence GMRES pour les formulations pré-conditionnées (2.10) et (2.12) est donc tout à fait satisfaisante lorsque les opérateurs de transmission sont optimaux pour les sous-problèmes. Pour finir, remarquons que la qualité de la convergence GMRES offerte par  $\Lambda_{-,k,1}^\sigma$  est surprenante au premier abord. En effet, nous savons que  $\Lambda_{-,k,1}^\sigma$  n'est pas une très bonne approximation de  $\Lambda_{-,k,1}$ . Toutefois, ces résultats se justifient simplement et nous limitons les explications au cas du problème extérieur (2.5), les arguments étant similaires dans le cas du problème intérieur (2.4). Commençons par rappeler que  $-\Lambda_{-,k+1}^\sigma = \Lambda_{+,k+1}^\sigma$  et que  $\Lambda_{+,k+1}^\sigma$  est optimal pour le problème extérieur (2.5). Ainsi, ce n'est pas  $-\Lambda_{-,k+1}^\sigma$  en tant qu'approximation de  $-\Lambda_{-,k+1}$  qui assure une bonne convergence GMRES pour le problème extérieur (2.5) mais  $-\Lambda_{-,k+1}^\sigma$  en tant que très bonne approximation de  $\Lambda_{+,k+1}$ .

FIGURE 2.13 – Nombre d'itérations GMRES en fonction de  $k$  pour les sous-problèmes optimisés

## 2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé un couplage faible, pouvant être aussi bien de type BEM-BEM que de type FEM-BEM, permettant de résoudre le problème de diffraction-transmission (2.1). Ce dernier correspond à une méthode de décomposition de domaine écrite sous la forme d'une équation qui est équivalente au problème de diffraction-transmission (2.1) :

$$(Id - S_\pi) \begin{pmatrix} g_- \\ g_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_N^+ u_{\text{inc}} + T_- \gamma_D^+ u_{\text{inc}} \\ -\gamma_N^+ u_{\text{inc}} - T_+ \gamma_D^+ u_{\text{inc}} \end{pmatrix}. \quad (2.31)$$

Nous rappelons que nous avons choisi de résoudre cette équation en utilisant la procédure GMRES. Nous avons ensuite exhibé des opérateurs de transmission  $T_-$  et  $T_+$ , dits optimaux, rendant l'équation (2.31) triviale, à savoir :

$$S_\pi = 0.$$

Ces opérateurs de transmission optimaux correspondent toutefois à des opérateurs DtN associés à  $\Omega_-$  et à  $\Omega_+$ . En pratique, leur évaluation est donc peu réaliste pour des raisons de temps de calcul et de besoins en mémoire. Pour pallier ce problème, nous avons introduit les approximations de type racine carrée, d'ordre zéro et intégrale des opérateurs DtN. L'évaluation des approximations de type racine carrée des opérateurs DtN demeurant limitante d'un point de vue computationnel, nous les avons elles-mêmes approximées générant ainsi des approximations de Padé des opérateurs DtN dont l'évaluation est beaucoup moins coûteuse. Le choix des opérateurs de transmission impacte directement les propriétés spectrales de l'opérateur  $Id - S_\pi$  et donc la vitesse de convergence de la procédure GMRES. Il est alors important que les approximations des opérateurs DtN que nous avons introduites soient de bonne qualité. Nous avons vérifié que cela était effectivement le cas pour la sphère par des tests semi-numériques/semi-analytiques. La meilleure approximation de l'opérateur DtN intérieur est l'approximation intégrale, suivie de l'approximation de type racine carrée et de l'approximation d'ordre 0. Notons que l'approximation intégrale n'est valable que lorsque le DtN intérieur est associé à un problème homogène. Pour l'opérateur DtN extérieur, l'approximation de type racine carrée est meilleure que l'approximation d'ordre 0. Enfin, pour les approximations de Padé, nous avons vu que la rotation de branche  $\theta_p$  devait être fixée à  $\frac{\pi}{2}$  et qu'il était suffisant que le nombre  $N_p$  de termes considérés soit égal à 4. Nous nous sommes ensuite assurés, encore une fois par des tests semi-numériques/semi-analytiques, que le nombre d'itérations GMRES nécessaires à la résolution de l'équation (2.31) était faible lorsque les opérateurs de transmission correspondent aux meilleures approximations des opérateurs DtN. Par ailleurs, nous avons également constaté dans ce cas que le nombre d'itérations GMRES permettant de résoudre le couplage faible (2.31) est quasiment indépendant du nombre d'onde et du nombre de valeurs propres considérées. Ceci nous laisse en particulier penser que le nombre d'itérations GMRES nécessaires à la résolution du couplage faible (2.31) sera, en pratique, indépendant du pas du maillage.

Tous les résultats que nous venons de rappeler seront confirmés, et ceci pour d'autres géométries que la sphère, dans le prochain chapitre qui est dédié à la résolution du couplage faible (2.31) par la méthode des éléments finis.

# Chapitre 3

## Discrétisation et résultats numériques

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Éléments finis et matrices associées</b>	<b>69</b>
3.1.1	Éléments finis surfaciques et matrices associées	70
3.1.2	Éléments finis volumiques et matrices associées	74
<b>3.2</b>	<b>Les couplages forts</b>	<b>76</b>
3.2.1	Le couplage fort BEM-BEM	76
3.2.2	Le couplage fort FEM-BEM	77
3.2.3	Exemples de solutions	78
<b>3.3</b>	<b>Le couplage faible</b>	<b>81</b>
3.3.1	Formes discrètes des opérateurs de transmission	81
3.3.2	Discrétisation des problèmes extérieurs	82
3.3.3	Discrétisation des problèmes intérieurs	86
<b>3.4</b>	<b>Résultats numériques</b>	<b>88</b>
3.4.1	Couplage faible BEM-BEM	88
3.4.2	Couplage faible FEM-BEM	97
<b>3.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>103</b>

---



Dans ce chapitre, nous expliquons dans un premier temps comment discrétiser les reformulations du problème de diffraction-transmission :

$$\operatorname{div}(\rho \nabla u) + \rho k_-^2 u = 0 \text{ dans } \Omega_-, \quad (3.1a)$$

$$\Delta u + k_+^2 u = 0 \text{ dans } \Omega_+, \quad (3.1b)$$

$$\partial_r u - ik_+ u = \mathcal{O}(r^{-2}), \quad (3.1c)$$

$$\gamma_D^- u = \gamma_D^+ u + \gamma_D^+ u_{\text{inc}}, \quad (3.1d)$$

$$\gamma_n^-(\rho \nabla u) = \gamma_n^+ u + \gamma_n^+ u_{\text{inc}}, \quad (3.1e)$$

introduites dans les chapitres précédents, à savoir le couplage faible, qu'il soit de type BEM-BEM ou de type FEM-BEM :

$$(Id - S_\pi) \begin{pmatrix} g_- \\ g_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_N^+ u_{\text{inc}} + T_- \gamma_D^+ u_{\text{inc}} \\ -\gamma_N^+ u_{\text{inc}} - T_+ \gamma_D^+ u_{\text{inc}} \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

la définition de l'opérateur  $S_\pi$  étant rappelée ci-dessous :

$$S_\pi = \begin{pmatrix} 0 & S_+ \\ S_- & 0 \end{pmatrix}, \quad S_- = Id - (T_- - T_+)R_-, \quad S_+ = Id + (T_- - T_+)R_+,$$

le couplage fort BEM-BEM :

$$\begin{pmatrix} -(D_{k_-} + D_{k_+}) & S_{k_-} + \rho S_{k_+} \\ -(\rho N_{k_-} + N_{k_+}) & \rho(D_{k_-}^* + D_{k_+}^*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_D^- u \\ \gamma_N^- u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_D^+ u_{\text{inc}} \\ \gamma_N^+ u_{\text{inc}} \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

et le couplage fort FEM-BEM :

$$\begin{aligned} \forall v \in H^1(\Omega_-), \quad & \int_{\Omega_-} \rho \nabla u \cdot \nabla \bar{v} \, d\Omega_- - \int_{\Omega_-} \rho k_-^2 u \bar{v} \, d\Omega_- - \overline{\left\langle \left( \frac{1}{2} Id - D_{k_+}^* \right) \gamma_N^+ u; \gamma_D^- v \right\rangle} - \overline{\langle N_{k_+} \gamma_D^- u; \gamma_D^- v \rangle} \\ & = \overline{\langle \gamma_N^+ u_{\text{inc}}; \gamma_D^- v \rangle} - \overline{\langle N_{k_+} \gamma_D^+ u_{\text{inc}}; \gamma_D^- v \rangle}, \end{aligned} \quad (3.4a)$$

$$\forall v \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), \quad \frac{1}{2} \langle v; \gamma_D^- u \rangle - \langle v; D_{k_+} \gamma_D^- u \rangle + \langle v; S_{k_+} \gamma_N^+ u \rangle = \frac{1}{2} \langle v; \gamma_D^+ u_{\text{inc}} \rangle - \langle v; D_{k_+} \gamma_D^+ u_{\text{inc}} \rangle. \quad (3.4b)$$

Nous présentons ensuite des résultats numériques confirmant que, si les opérateurs de transmission sont correctement choisis, les couplages faibles BEM-BEM et FEM-BEM sont effectivement viables en pratique, c'est-à-dire qu'il est possible de les résoudre en un nombre raisonnable d'itérations GMRES. Nous mentionnons par ailleurs que nous avons validé notre implémentation des couplages faibles en programmant également les couplages forts et en vérifiant que les solutions fournies par les couplages faibles correspondaient bien à celles calculées par les couplages forts.

### 3.1 Éléments finis et matrices associées

Nous commençons ce chapitre en faisant quelques rappels concernant les éléments finis utilisés pour la résolution du problème de diffraction-transmission (3.1), à savoir les éléments finis polynomiaux par morceaux de degré 1, connus plus simplement sous le nom d'éléments finis  $P_1$ , et les éléments finis polynomiaux par morceaux de degré 2 hiérarchiques, également appelés éléments finis  $P_2$  hiérarchiques. Notons que nous utilisons les mêmes éléments finis que le problème de diffraction-transmission (3.1) soit résolu par le biais d'un couplage fort ou d'un couplage faible. Nous introduisons également des matrices associées à ces éléments finis qui sont utiles pour écrire le couplage fort BEM-BEM (3.3), le couplage fort FEM-BEM (3.4) et le couplage faible (3.2), qu'il soit de type BEM-BEM ou type FEM-BEM, sous forme discrète.

Nous avons choisi d'utiliser des triangles pour mailler les surfaces et des tétraèdres pour mailler les volumes. Remarquons qu'il existe d'autres moyens pour générer des maillages. Par exemple, les surfaces peuvent être maillées par des quadrangles et les volumes par des hexaèdres. Toutefois, le maillage par des triangles et des tétraèdres est, à l'heure actuelle, la seule solution entièrement automatique pour mailler des surfaces et des volumes quelconques. Enfin, nous aurions également pu considérer des éléments surfaciques et volumiques courbes de sorte à approcher plus précisément les objets considérés. L'implémentation du couplage fort BEM-BEM (3.3) et du couplage faible (3.2) de type BEM-BEM ne requiert de disposer que d'un maillage de la surface de l'objet diffractant. En revanche, pour celle du couplage fort FEM-BEM (3.4) et du couplage faible (3.2) de type FEM-BEM, un maillage de l'objet diffractant lui-même est nécessaire.

Naturellement, le bord de ce maillage volumique correspond à un maillage de la surface de l'objet diffractant.

Nous notons  $N_s^2$ ,  $N_t^2$  et  $N_a^2$  les nombres de sommets, de triangles et d'arêtes du maillage de la surface de l'objet diffractant. De même, les nombres de sommets, de tétraèdres et d'arêtes du maillage de l'objet diffractant lui-même sont notés  $N_s^3$ ,  $N_t^3$  et  $N_a^3$ .

### 3.1.1 Éléments finis surfaciques et matrices associées

Dans cette sous-section,  $K$  désigne un triangle du maillage de la surface de l'objet diffractant et  $K_r$  le triangle unité. Nous supposons que les sommets de  $K$  sont numérotés de sorte à ce que  $\overrightarrow{M_1 M_2} \wedge \overrightarrow{M_1 M_3}$  corresponde, pour l'objet diffractant, à une normale sortante. Les triangles  $K$  et  $K_r$  sont représentés dans la Figure 3.1. Nous commençons par rappeler comment les éléments finis élémentaires sur  $K$  sont liés à ceux sur  $K_r$ .

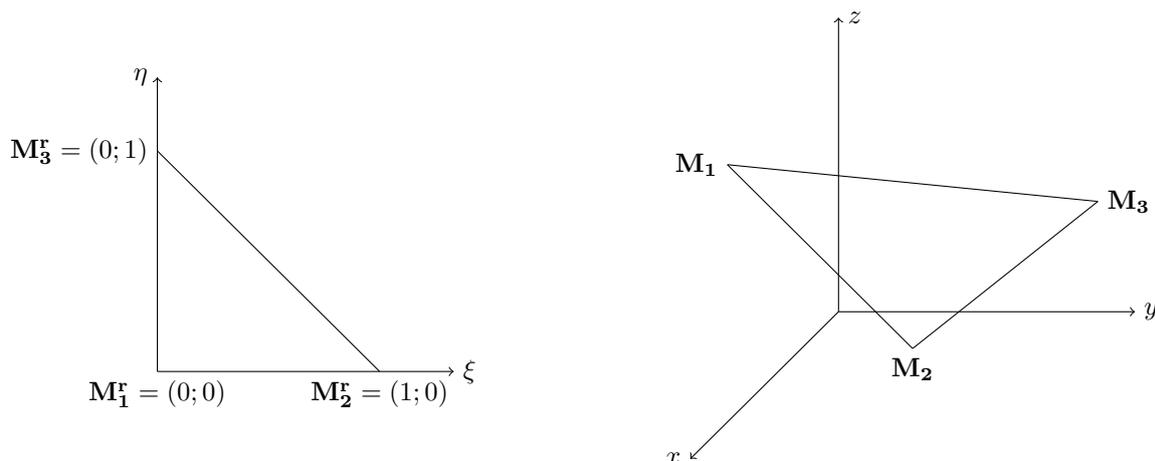


FIGURE 3.1 – Le triangle de référence  $K_r$  et le triangle  $K$

#### Éléments finis élémentaires sur $K_r$

Les éléments finis  $P_1$  élémentaires sur  $K_r$ , notés  $e_{K_r}^1$ ,  $e_{K_r}^2$  et  $e_{K_r}^3$ , sont définis par :

$$e_{K_r}^1 = 1 - \xi - \eta \quad , \quad e_{K_r}^2 = \xi \quad , \quad e_{K_r}^3 = \eta,$$

et nous avons :

$$\forall i, j \in \{1; 2; 3\}, \quad e_{K_r}^i(\mathbf{M}_j^r) = \delta_{ij}.$$

Les éléments finis  $P_2$  standards élémentaires sur  $K_r$  sont construits sur le même principe. Les points en lesquels nous imposons leur valeur à 0 ou 1 correspondent aux sommets de  $K_r$  et aux milieux de ses arêtes. Nous n'utilisons toutefois pas les éléments finis  $P_2$  standards mais les éléments finis  $P_2$  hiérarchiques dont l'intérêt est expliqué plus loin dans cette sous-section. Concrètement, les éléments finis  $P_2$  hiérarchiques élémentaires sur  $K_r$  sont construits en ajoutant aux éléments finis  $P_1$  élémentaires sur  $K_r$  les éléments finis élémentaires suivants :

$$e_{K_r}^4 = (1 - \xi - \eta)\xi \quad , \quad e_{K_r}^5 = (1 - \xi - \eta)\eta \quad , \quad e_{K_r}^6 = \xi\eta.$$

Il peut être intéressant de remarquer que  $e_{K_r}^4$ ,  $e_{K_r}^5$  et  $e_{K_r}^6$  correspondent, à un coefficient multiplicatif près, à savoir  $\frac{1}{4}$ , aux éléments finis  $P_2$  standards élémentaires sur  $K_r$  rattachés aux milieux des arêtes de  $K_r$ .

Nous terminons ce paragraphe en mentionnant que ce choix pour les éléments finis  $P_2$  hiérarchiques élémentaires sur  $K_r$  numérote de manière implicite les arêtes de  $K_r$ . L'arête 1 correspond à  $\mathbf{M}_1^r \mathbf{M}_2^r$ , l'arête 2 à  $\mathbf{M}_1^r \mathbf{M}_3^r$  et l'arête 3 à  $\mathbf{M}_2^r \mathbf{M}_3^r$ . Les arêtes de  $K$  sont naturellement numérotées de la même manière.

#### Éléments finis élémentaires sur $K$

Les éléments finis élémentaires sur  $K$ , qu'ils soient  $P_1$  ou  $P_2$  hiérarchiques, sont définis à partir de ceux sur  $K_r$  *via* un difféomorphisme de  $K_r$  sur  $K$ , noté  $\phi$ , connu sous le nom de "pull-back" :

$$\forall(\xi; \eta) \in K_r, \quad \phi(\xi; \eta) = \mathbf{M}_1 + \xi(\mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_1) + \eta(\mathbf{M}_3 - \mathbf{M}_1).$$

Concernant ce pull-back, il est intéressant de remarquer que :

$$\det(D\phi) = 2|K|,$$

$$\forall \mathbf{x} \in K, \quad \phi^{-1}(\mathbf{x}) = \left( \begin{array}{cc} \overrightarrow{\mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2} \cdot \overrightarrow{\mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2} & \overrightarrow{\mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2} \cdot \overrightarrow{\mathbf{M}_1 \mathbf{M}_3} \\ \overrightarrow{\mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2} \cdot \overrightarrow{\mathbf{M}_1 \mathbf{M}_3} & \overrightarrow{\mathbf{M}_1 \mathbf{M}_3} \cdot \overrightarrow{\mathbf{M}_1 \mathbf{M}_3} \end{array} \right)^{-1} (\mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_1 \quad \mathbf{M}_3 - \mathbf{M}_1)^t (\mathbf{x} - \mathbf{M}_1).$$

Les éléments finis  $P_1$  élémentaires sur  $K$ , notés  $(e_K^i)_{i \in \{1; \dots; 3\}}$ , et les éléments finis  $P_2$  hiérarchiques élémentaires sur  $K$ , notés  $(e_K^i)_{i \in \{1; \dots; 6\}}$ , sont donnés par la formule suivante :

$$\forall i \in \{1; \dots; 6\}, \quad e_K^i = e_{K_r}^i \circ \phi^{-1}.$$

Nous rappelons à présent comment construire les éléments finis  $P_1$  et  $P_2$  hiérarchiques globaux à partir des éléments finis  $P_1$  et  $P_2$  hiérarchiques élémentaires.

### Éléments finis globaux

Les éléments finis  $P_1$  globaux, que nous notons  $(e_i)_{i \in \{1; \dots; N_s^2\}}$ , sont rattachés aux nœuds du maillage. Les éléments finis  $P_2$  hiérarchiques globaux, que nous notons  $(e_i)_{i \in \{1; \dots; N_s^2 + N_a^2\}}$ , sont constitués des éléments finis  $P_1$  globaux et d'éléments finis rattachés aux arêtes du maillage, à savoir  $(e_i)_{i \in \{N_s^2 + 1; \dots; N_s^2 + N_a^2\}}$ . Le support d'un élément fini global rattaché à un nœud (respectivement une arête) du maillage est constitué de l'ensemble des triangles adjacents à ce nœud (respectivement cette arête). Restreint à un triangle de son support, un élément fini global rattaché à un nœud (respectivement une arête) du maillage correspond à l'élément fini élémentaire associé à ce triangle valant 1 (respectivement  $\frac{1}{4}$ ) en le nœud (respectivement au milieu de l'arête) définissant l'élément fini global. Autrement dit, si le nœud  $i \in \{1; \dots; N_s^2\}$  du maillage correspond au sommet  $k \in \{1; 2; 3\}$  du triangle  $K$ , nous avons :

$$e_{i|K} = e_K^k.$$

De même, lorsque l'arête  $i \in \{1; \dots; N_a^2\}$  du maillage et l'arête  $k \in \{1; 2; 3\}$  du triangle  $K$  coïncident, nous avons :

$$e_{i+N_s^2|K} = e_K^{k+3}.$$

Les éléments finis globaux sont donc des fonctions continues sur le maillage.

L'intérêt principal des éléments finis  $P_2$  hiérarchiques est de faciliter le passage des éléments finis  $P_2$  aux éléments finis  $P_1$  et inversement. Lorsque nous cherchons à passer des éléments finis  $P_2$  standards aux éléments finis  $P_1$  et inversement, nous pouvons naturellement utiliser une projection  $L^2$ . Cependant, si nous devons répéter un grand nombre de fois cette opération, les temps de calcul associés à cette approche deviennent limitants. Une solution consisterait à interpoler plutôt qu'à projeter. Passer des éléments finis  $P_2$  standards aux éléments finis  $P_1$  par interpolation est relativement aisé. Il s'agit simplement de conserver les valeurs associées aux nœuds du maillage et de laisser de côté celles associées aux milieux des arêtes. En revanche, passer des éléments finis  $P_1$  aux éléments finis  $P_2$  standards par interpolation n'est pas aussi direct. En effet, pour déterminer la valeur d'une fonction engendrée par les éléments finis  $P_1$  au milieu d'une arête, il faut calculer la moyenne de ses valeurs aux extrémités de cette arête. Comme l'illustre la proposition suivante, passer des éléments finis  $P_1$  aux éléments finis  $P_2$  hiérarchiques par interpolation ne nécessite pas d'effectuer ce processus de moyenne.

**Proposition 3.1** (Interpolation entre les éléments finis  $P_1$  et  $P_2$  hiérarchiques).

*L'opération suivante consiste à interpoler de l'espace des éléments finis  $P_2$  hiérarchiques vers l'espace des éléments finis  $P_1$  :*

$$\sum_{i=1}^{N_s^2 + N_a^2} u_i e_i \quad \mapsto \quad \sum_{i=1}^{N_s^2} u_i e_i. \quad (3.5)$$

*L'opérateur d'interpolation de l'espace des éléments finis  $P_1$  vers l'espace des éléments finis  $P_2$  hiérarchiques est le suivant :*

$$\sum_{i=1}^{N_s^2} u_i e_i \quad \mapsto \quad \sum_{i=1}^{N_s^2} u_i e_i. \quad (3.6)$$

**Preuve**

Pour démontrer le premier point, il suffit de remarquer que la valeur de  $\sum_{i=1}^{N_s^2+N_a^2} u_i e_i$  en le sommet  $i_0 \in \{1; \dots; N_s^2\}$  du maillage est  $u_{i_0}$ .

Justifions à présent le second point. L'interpolation de  $\sum_{i=1}^{N_s^2} u_i e_i$  s'écrit sous la forme générale  $\sum_{i=1}^{N_s^2+N_a^2} v_i e_i$ , les  $(v_i)$  étant à déterminer. En évaluant ces deux sommes sur les nœuds du maillage, il vient :

$$\forall i \in \{1; \dots; N_s^2\}, \quad v_i = u_i.$$

Considérons à présent l'arête  $i_0 \in \{1; \dots; N_a^2\}$  du maillage. Celle-ci relie deux points du maillage d'indices respectifs  $i_1, i_2 \in \{1; \dots; N_s^2\}$ . En évaluant  $\sum_{i=1}^{N_s^2} u_i e_i$  et  $\sum_{i=1}^{N_s^2+N_a^2} v_i e_i$  au milieu de l'arête  $i_0$ , nous obtenons :

$$\frac{v_{i_1} + v_{i_2}}{2} + \frac{v_{N_s^2+i_0}}{4} = \frac{u_{i_1} + u_{i_2}}{2}.$$

Nous en déduisons donc que :

$$\forall i \in \{1; \dots; N_a^2\}, \quad v_{N_s^2+i} = 0. \quad \blacksquare$$

Maintenant que nous avons présenté les éléments finis utilisés pour résoudre le problème de diffraction-transmission (3.1), nous introduisons des matrices associées à ces éléments finis permettant d'écrire le couplage fort BEM-BEM (3.3), le couplage fort FEM-BEM (3.4) et le couplage faible (3.2), qu'il soit de type BEM-BEM ou type FEM-BEM, sous forme discrète.

**Matrices associées aux éléments finis surfaciques**

Nous commençons par introduire les matrices des opérateurs d'interpolation entre les éléments finis  $P_1$  et les éléments finis  $P_2$  hiérarchiques. La matrice, notée  $\mathbb{P}_{\Gamma, P_2 \rightarrow P_1}$ , de l'opérateur effectuant l'opération d'interpolation (3.5) de l'espace des éléments finis  $P_2$  hiérarchiques vers l'espace des éléments finis  $P_1$  est donnée par :

$$\mathbb{P}_{\Gamma, P_2 \rightarrow P_1} = \begin{pmatrix} Id & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice de l'opérateur réalisant l'interpolation de l'espace des éléments finis  $P_1$  vers l'espace des éléments finis  $P_2$  hiérarchiques (3.6) est notée  $\mathbb{P}_{\Gamma, P_1 \rightarrow P_2}$  et est donnée par :

$$\mathbb{P}_{\Gamma, P_1 \rightarrow P_2} = \begin{pmatrix} Id \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nous introduisons à présent des matrices de masse et de raideur généralisées sur  $\Gamma$ . Si  $\tau$  est une fonction sur  $\Gamma$ , nous définissons les matrices  $\mathbb{J}_{\Gamma, P_\ell}^\tau$  et  $\mathbb{H}_{\Gamma, P_\ell}^\tau$  par :

$$\mathbb{J}_{\Gamma, P_\ell}^\tau = \left( \int_{\Gamma} \tau e_i e_j d\Gamma \right)_{i,j \in \{1; \dots; N\}}, \quad \mathbb{H}_{\Gamma, P_\ell}^\tau = \left( \int_{\Gamma} \tau \nabla_{\Gamma} e_i \cdot \nabla_{\Gamma} e_j d\Gamma \right)_{i,j \in \{1; \dots; N\}},$$

avec  $N = N_s^2$  si  $\ell = 1$  et  $N = N_s^2 + N_a^2$  si  $\ell = 2$ . Si  $\tau$  est égal à 1, ces matrices correspondent aux matrices de masse et de raideur classiques que nous notons simplement  $\mathbb{J}_{\Gamma, P_\ell}$  et  $\mathbb{H}_{\Gamma, P_\ell}$ .

Pour finir, nous rappelons les définitions des matrices variationnelles des opérateurs intégraux surfaciques. Si  $k \in \mathbb{R}_+^*$ , ces dernières, notées  $\mathbb{S}_k, \mathbb{D}_k, \mathbb{D}_k^*$  et  $\mathbb{N}_k$ , sont définies comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbb{S}_k &= \left( \langle e_j; \mathbb{S}_{k+} e_i \rangle \right)_{i,j \in \{1; \dots; N_s^2\}}, & \mathbb{D}_k &= \left( \langle e_j; \mathbb{D}_{k+} e_i \rangle \right)_{i,j \in \{1; \dots; N_s^2\}}, \\ \mathbb{D}_k^* &= \left( \overline{\langle \mathbb{D}_{k+}^* e_i; e_j \rangle} \right)_{i,j \in \{1; \dots; N_s^2\}}, & \mathbb{N}_k &= \left( \overline{\langle \mathbb{N}_{k+} e_i; e_j \rangle} \right)_{i,j \in \{1; \dots; N_s^2\}}. \end{aligned}$$

Dans l'optique de construire ces matrices en pratique, il est toutefois nécessaire d'exprimer plus simplement leurs coefficients. La proposition suivante permet non seulement de faire cela mais aussi de remarquer que  $\mathbb{S}_k$  et  $\mathbb{N}_k$  sont symétriques alors que  $\mathbb{D}_k$  et  $\mathbb{D}_k^*$  sont transposées l'une de l'autre :

$$\mathbb{S}_k^t = \mathbb{S}_k \quad , \quad \mathbb{N}_k^t = \mathbb{N}_k \quad , \quad \mathbb{D}_k^t = \mathbb{D}_k^*.$$

**Proposition 3.2** (Calcul des matrices variationnelles des opérateurs intégraux surfaciques).

Sous réserve de régularité suffisante pour  $u$  et  $v$ , nous avons :

$$\begin{aligned} \langle v; S_k u \rangle &= \int_{\Gamma} (S_k u) \bar{v} \, d\Gamma = \int_{\Gamma \times \Gamma} G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) u(\mathbf{y}) \bar{v}(\mathbf{x}) \, dy dx, \\ \langle v; D_k u \rangle &= \int_{\Gamma} (D_k u) \bar{v} \, d\Gamma = \int_{\Gamma \times \Gamma} \partial_{\mathbf{n}_y} G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) u(\mathbf{y}) \bar{v}(\mathbf{x}) \, dy dx, \\ \overline{\langle D_k^* u; v \rangle} &= \int_{\Gamma} (D_k^* u) \bar{v} \, d\Gamma = \int_{\Gamma \times \Gamma} \partial_{\mathbf{n}_x} G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) u(\mathbf{y}) \bar{v}(\mathbf{x}) \, dy dx, \\ \overline{\langle N_k u; v \rangle} &= \int_{\Gamma} (N_k u) \bar{v} \, d\Gamma = - \int_{\Gamma \times \Gamma} G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mathbf{rot}_{\Gamma} u(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{rot}_{\Gamma} \bar{v}(\mathbf{x}) \, dy dx + k^2 \int_{\Gamma \times \Gamma} G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) u(\mathbf{y}) \bar{v}(\mathbf{x}) \mathbf{n}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \, dy dx. \end{aligned}$$

### Assemblage des matrices variationnelles

Nous terminons cette sous-section en rappelant comment les matrices  $\mathbb{J}_{\Gamma, P_\ell}^\tau$ ,  $\mathbb{H}_{\Gamma, P_\ell}^\tau$ ,  $\mathbb{S}_k$ ,  $\mathbb{D}_k$ ,  $\mathbb{D}_k^*$  et  $\mathbb{N}_k$  sont assemblées en pratique. Les logiciels de maillage fournissent classiquement deux tables de correspondance. La première, que nous notons  $(n_{K,i}^s)$ , donne le numéro global  $n_{K,i}^s \in \{1; \dots; N_s^2\}$  du sommet  $i \in \{1; 2; 3\}$  du triangle  $K$ . La seconde, notée  $(n_{K,i}^a)$ , fournit le numéro global  $n_{K,i}^a \in \{1; \dots; N_a^2\}$  de l'arête  $i \in \{1; 2; 3\}$  du triangle  $K$ . Ces deux tables permettent d'en définir une troisième, que nous notons  $(n_{K,i})$ , comme suit :

$$n_{K,i} = \mathbf{1}_{1 \leq i \leq 3} n_{K,i}^s + \mathbf{1}_{4 \leq i \leq 6} (n_{K,i-3}^a + N_s^2).$$

Concrètement, si  $i \in \{1; \dots; 6\}$ ,  $n_{K,i} \in \{1; \dots; N_s^2 + N_a^2\}$  correspond au numéro global de l'élément fini  $P_2$  hiérarchique dont la restriction au triangle  $K$  correspond à  $e_K^i$ .

Les coefficients des matrices variationnelles se décomposent en sommes de contributions apportées par chaque triangle du maillage. Nous parlons de contributions élémentaires. L'écriture de cette décomposition est rendue très simple grâce à l'introduction des tables de correspondance. Par exemple, les coefficients de  $\mathbb{J}_{\Gamma, P_1}^\tau$ ,  $\mathbb{J}_{\Gamma, P_2}^\tau$  et  $\mathbb{S}_k$  sont donnés par :

$$\begin{aligned} \forall i, j \in \{1; \dots; N_s^2\}, \quad \int_{\Gamma} \tau e_i e_j \, d\Gamma &= \sum_{\substack{n_{K,k}^s=i \\ n_{K,l}^s=j}} \int_K \tau e_K^k e_K^l \, dK, \\ \forall i, j \in \{1; \dots; N_s^2 + N_a^2\}, \quad \int_{\Gamma} \tau e_i e_j \, d\Gamma &= \sum_{\substack{n_{K,k}^s=i \\ n_{K,l}^s=j}} \int_K \tau e_K^k e_K^l \, dK, \\ \forall i, j \in \{1; \dots; N_s^2\}, \quad \int_{\Gamma} (S_k e_i) e_j \, d\Gamma &= \sum_{\substack{n_{K,k}^s=i \\ n_{L,l}^s=j}} \int_L \int_K G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) e_K^k(\mathbf{y}) e_L^l(\mathbf{x}) \, dy dx. \end{aligned}$$

En pratique, les contributions élémentaires sont calculées puis assemblées dans la matrice triangle par triangle. Le moyen le plus simple pour calculer les contributions élémentaires associées à un triangle  $K$  consiste à ramener, en utilisant le pull-back, l'intégration sur  $K$  à une intégration sur  $K_r$  et à effectuer l'intégration sur  $K_r$  via une méthode de quadrature d'ordre suffisamment élevé pour qu'elle soit précise. Par exemple, les contributions élémentaires pour les matrices  $\mathbb{J}_{\Gamma, P_l}^\tau$  et  $\mathbb{H}_{\Gamma, P_l}^\tau$ ,  $l \in \{1; 2\}$ , sont données par :

$$\begin{aligned} \int_K \tau e_K^i e_K^j \, dK &= 2|K| \int_{K_r} \tau \circ \phi e_{K_r}^i e_{K_r}^j \, dK_r, \\ \int_K \tau \nabla_{\Gamma} e_K^i \cdot \nabla_{\Gamma} e_K^j \, dK &= 2|K| \int_{K_r} \tau \circ \phi D \phi^{-t} \nabla_{\Gamma} e_{K_r}^i \cdot D \phi^{-t} \nabla_{\Gamma} e_{K_r}^j \, dK_r. \end{aligned}$$

Si  $\tau$  est une fonction polynomiale, il est par ailleurs possible de choisir la méthode de quadrature de sorte qu'elle calcule de manière exacte les contributions élémentaires des matrices  $\mathbb{J}_{\Gamma, P_\ell}^\tau$  et  $\mathbb{H}_{\Gamma, P_\ell}^\tau$ ,  $\ell \in \{1; 2\}$ . En effet, nous rappelons qu'une méthode de quadrature d'ordre  $p \in \mathbb{N}$  est exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à  $p$ . Dans ce travail, nous avons utilisé les logiciels GetDP [51, 58] et BEM++ [98] pour assembler les matrices variationnelles que nous venons d'introduire, GetDP ayant servi à l'assemblage des matrices  $\mathbb{J}_{\Gamma, P_\ell}^\tau$  et  $\mathbb{H}_{\Gamma, P_\ell}^\tau$ , BEM++ à celui des matrices  $\mathbb{S}_k$ ,  $\mathbb{D}_k$ ,  $\mathbb{D}_k^*$  et  $\mathbb{N}_k$ . Notons que, de par les singularités des noyaux impliqués dans la définition des opérateurs intégraux surfaciques, le calcul des contributions élémentaires des matrices  $\mathbb{S}_k$ ,  $\mathbb{D}_k$ ,  $\mathbb{D}_k^*$  et  $\mathbb{N}_k$  est plus délicat que celles des matrices  $\mathbb{J}_{\Gamma, P_\ell}^\tau$  et  $\mathbb{H}_{\Gamma, P_\ell}^\tau$  [32, 33, 94].

### 3.1.2 Éléments finis volumiques et matrices associées

Les éléments finis volumiques que nous utilisons pour résoudre le problème de diffraction-transmission (3.1) sont conceptuellement identiques aux éléments finis surfaciques que nous venons d'introduire. Cette sous-section est par conséquent moins détaillée que la précédente. Ici,  $T$  représente un tétraèdre du maillage de l'objet diffractant et  $T_r$  le tétraèdre unité. Nous supposons que  $T$  est orienté positivement, c'est-à-dire que  $(\overrightarrow{\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2}; \overrightarrow{\mathbf{M}_1\mathbf{M}_3}; \overrightarrow{\mathbf{M}_1\mathbf{M}_4})$  forme une base directe de  $\mathbb{R}^3$ . Les tétraèdres  $T$  et  $T_r$  sont représentés dans la Figure 3.2.

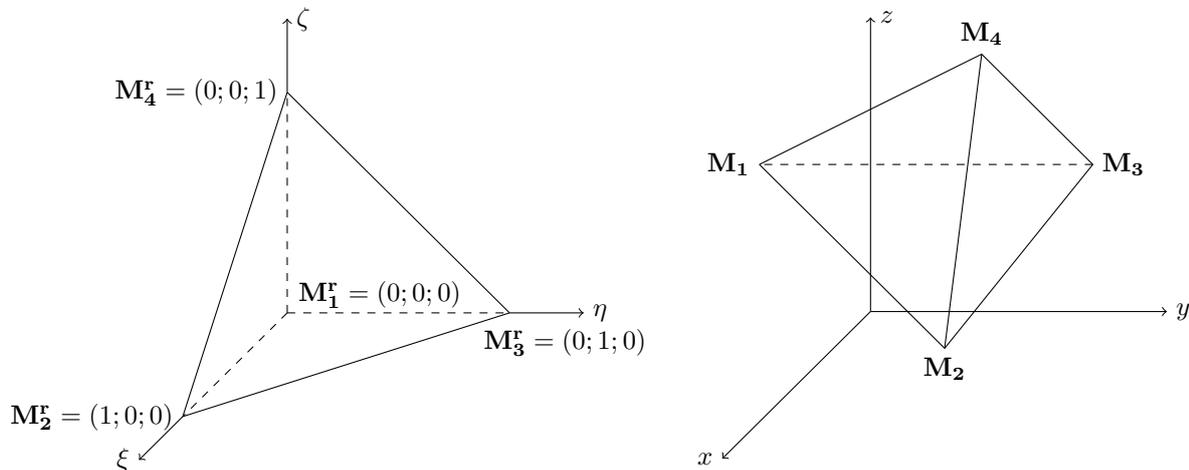


FIGURE 3.2 – Le tétraèdre de référence  $T_r$  et le tétraèdre  $T$

#### Éléments finis élémentaires sur $T_r$

Les éléments finis  $P_1$  élémentaires sur  $T_r$  sont notés  $f_{T_r}^1$ ,  $f_{T_r}^2$ ,  $f_{T_r}^3$  et  $f_{T_r}^4$  et sont définis par :

$$f_{T_r}^1 = 1 - \xi - \eta - \zeta \quad , \quad f_{T_r}^2 = \xi \quad , \quad f_{T_r}^3 = \eta \quad , \quad f_{T_r}^4 = \zeta.$$

Il s'ensuit que :

$$\forall i, j \in \{1; \dots; 4\}, \quad f_{T_r}^i(\mathbf{M}_j^r) = \delta_{ij}.$$

Les éléments finis  $P_2$  standards élémentaires sur  $T_r$  sont construits de la même manière. Leur valeur est imposée à 0 ou 1 aux sommets de  $T_r$  et aux milieux de ses arêtes. Nous avons toutefois choisi de ne pas utiliser les éléments finis  $P_2$  standards mais les éléments finis  $P_2$  hiérarchiques, les raisons de ce choix ayant déjà été exposées dans la sous-section précédente. Pour obtenir les éléments finis  $P_2$  hiérarchiques, il suffit d'ajouter aux éléments finis  $P_1$  élémentaires sur  $T_r$  les éléments finis élémentaires suivants :

$$f_{T_r}^5 = (1 - \xi - \eta - \zeta)\xi \quad , \quad f_{T_r}^6 = (1 - \xi - \eta - \zeta)\eta \quad , \quad f_{T_r}^7 = (1 - \xi - \eta - \zeta)\zeta,$$

$$f_{T_r}^8 = \xi\eta \quad , \quad f_{T_r}^9 = \xi\zeta \quad , \quad f_{T_r}^{10} = \eta\zeta.$$

Remarquons par ailleurs que, si ils sont multipliés par 4,  $f_{T_r}^5$ ,  $f_{T_r}^6$ ,  $f_{T_r}^7$ ,  $f_{T_r}^8$ ,  $f_{T_r}^9$  et  $f_{T_r}^{10}$  sont les éléments finis  $P_2$  standards élémentaires sur  $T_r$  associés aux milieux des arêtes de  $T_r$ . Pour finir, la manière dont nous avons choisi les éléments finis  $P_2$  hiérarchiques élémentaires numérote implicitement les arêtes de  $T_r$ . L'arête d'indice 1 est  $\mathbf{M}_1^r\mathbf{M}_2^r$ , celle d'indice 2  $\mathbf{M}_1^r\mathbf{M}_3^r$ , celle d'indice 3  $\mathbf{M}_1^r\mathbf{M}_4^r$ , celle d'indice 4  $\mathbf{M}_2^r\mathbf{M}_3^r$ , celle d'indice 5  $\mathbf{M}_2^r\mathbf{M}_4^r$  et celle d'indice 6  $\mathbf{M}_3^r\mathbf{M}_4^r$ . Les arêtes de  $T$  sont bien sûr numérotées de la même façon.

#### Éléments finis élémentaires sur $T$

Le pull-back, noté  $\phi$ , permettant de définir les éléments finis élémentaires sur  $T$ , qu'ils soient  $P_1$  ou  $P_2$  hiérarchiques, à partir de ceux sur  $T_r$  est le suivant :

$$\forall (\xi; \eta; \zeta) \in T_r, \quad \phi(\xi; \eta; \zeta) = \begin{pmatrix} x_1 + (x_2 - x_1)\xi + (x_3 - x_1)\eta + (x_4 - x_1)\zeta \\ y_1 + (y_2 - y_1)\xi + (y_3 - y_1)\eta + (y_4 - y_1)\zeta \\ z_1 + (z_2 - z_1)\xi + (z_3 - z_1)\eta + (z_4 - z_1)\zeta \end{pmatrix}.$$

Remarquons par ailleurs que :

$$\det(D\phi) = 6|T|.$$

Les éléments finis  $P_1$  élémentaires sur  $T$ , notés  $(f_T^i)_{i \in \{1, \dots, 4\}}$ , et les éléments finis  $P_2$  hiérarchiques élémentaires sur  $T$ , notés  $(f_T^i)_{i \in \{1, \dots, 10\}}$ , sont définis comme suit :

$$\forall i \in \{1; \dots; 10\}, \quad f_T^i = f_{T_r}^i \circ \phi^{-1}.$$

### Éléments finis globaux

Les éléments finis  $P_1$  globaux sont notés  $(f_i)_{i \in \{1, \dots, N_s^3\}}$  et sont rattachés aux nœuds du maillage. Les éléments finis  $P_2$  hiérarchiques globaux, notés  $(f_i)_{i \in \{1, \dots, N_s^3 + N_a^3\}}$ , correspondent aux éléments finis  $P_1$  globaux auxquels nous avons rajouté des éléments finis rattachés aux arêtes du maillage, à savoir  $(f_i)_{i \in \{N_s^3 + 1; \dots, N_s^3 + N_a^3\}}$ . Le support d'un élément fini global associé à un nœud ou à une arête du maillage est formé de l'ensemble des tétraèdres adjacents à ce nœud ou à cette arête. Si le sommet  $i \in \{1; \dots; N_s^3\}$  du maillage correspond au sommet  $k \in \{1; \dots; 4\}$  du tétraèdre  $T$ , nous avons :

$$f_{i|T} = f_T^k.$$

De la même manière, si  $i \in \{1; \dots; N_a^3\}$  est l'indice global de l'arête  $k \in \{1; \dots; 6\}$  de  $T$ , nous avons :

$$f_{i+N_s^3|T} = f_T^{k+4}.$$

La proposition suivante explique comment interpoler de l'espace des éléments finis  $P_1$  vers l'espace des éléments finis  $P_2$  et inversement.

**Proposition 3.3** (Interpolation entre les éléments finis  $P_1$  et  $P_2$  hiérarchiques).

Interpoler de l'espace des éléments finis  $P_2$  hiérarchiques vers l'espace des éléments finis  $P_1$  se résume à l'opération donnée ci-dessous :

$$\sum_{i=1}^{N_s^3 + N_a^3} u_i f_T^i \quad \mapsto \quad \sum_{i=1}^{N_s^3} u_i f_T^i. \quad (3.7)$$

L'opérateur suivant permet d'interpoler de l'espace des éléments finis  $P_1$  vers l'espace des éléments finis  $P_2$  hiérarchiques :

$$\sum_{i=1}^{N_s^3} u_i f_T^i \quad \mapsto \quad \sum_{i=1}^{N_s^3} u_i f_T^i. \quad (3.8)$$

### Matrices associées aux éléments finis volumiques

Nous commençons par introduire la matrice de l'équivalent discret de  $\gamma_D^-$ . La trace de Dirichlet d'un élément fini  $P_2$  hiérarchique volumique rattaché à un sommet (respectivement à une arête) se trouvant à la surface du maillage volumique correspond à l'élément fini  $P_2$  hiérarchique surfacique rattaché à ce sommet (respectivement à cette arête). Ainsi, la matrice, notée  $\mathbb{G}$ , de  $\gamma_D^-$  vu comme un opérateur de  $\text{Span}(f_i : i \in \{1; \dots; N_s^3 + N_a^3\})$  dans  $\text{Span}(e_i : i \in \{1; \dots; N_s^2 + N_a^2\})$  est donnée par :

$$\mathbb{G}_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } \gamma_D^- f_j = e_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Si  $\tau$  est une fonction sur  $\Omega_-$ , nous définissons les matrices de masse et de raideur généralisées sur  $\Omega_-$ , notées  $\mathbb{J}_{\Omega_-, P_2}^\tau$  et  $\mathbb{H}_{\Omega_-, P_2}^\tau$ , par :

$$\mathbb{J}_{\Omega_-, P_2}^\tau = \left( \int_{\Omega_-} \tau f_i f_j \, d\Omega_- \right)_{i, j \in \{1, \dots, N_s^3 + N_a^3\}}, \quad \mathbb{H}_{\Omega_-, P_2}^\tau = \left( \int_{\Omega_-} \tau \nabla f_i \cdot \nabla f_j \, d\Omega_- \right)_{i, j \in \{1, \dots, N_s^3 + N_a^3\}}.$$

Dans ce travail, nous nous sommes servis du logiciel GetDP [51, 58] pour assembler les matrices  $\mathbb{J}_{\Omega_-, P_2}^\tau$  et  $\mathbb{H}_{\Omega_-, P_2}^\tau$ . Ces matrices s'assemblent de la même manière que les matrices  $\mathbb{J}_{T, P_2}^\tau$  et  $\mathbb{H}_{T, P_2}^\tau$  :

$$\forall i, j \in \{1; \dots; N_s^3 + N_a^3\}, \quad \int_{\Omega_-} \tau f_i f_j \, d\Omega_- = \sum_{\substack{n_T, k=i \\ n_T, l=j}} \int_T \tau f_T^k f_T^l \, dT,$$

$$\forall i, j \in \{1; \dots; N_s^3 + N_a^3\}, \quad \int_{\Omega_-} \tau \nabla f_i \cdot \nabla f_j \, d\Omega_- = \sum_{\substack{n_T, k=i \\ n_T, l=j}} \int_T \tau \nabla f_T^k \cdot \nabla f_T^l \, dT,$$

la table  $(n_{T,i})$  étant définie à partir des tables de correspondance, notées  $(n_{T,i}^s)$  et  $(n_{T,i}^a)$ , pour les sommets et les arêtes du maillage :

$$n_{T,i} = \mathbf{1}_{1 \leq i \leq 4} n_{T,i}^s + \mathbf{1}_{5 \leq i \leq 10} (n_{T,i-4}^a + N_s^3).$$

Pour finir, nous rappelons que  $n_{T,i} \in \{1; \dots; N_s^3 + N_a^3\}$ , avec  $i \in \{1; \dots; 10\}$ , est le numéro global de l'élément fini  $P_2$  hiérarchique dont la restriction au tétraèdre  $T$  correspond à  $f_T^i$ .

## 3.2 Les couplages forts

Dans cette section, nous expliquons comment discrétiser le couplage fort BEM-BEM (3.3) et le couplage fort FEM-BEM (3.4). Nous avons choisi d'utiliser les éléments finis  $P_1$  pour discrétiser les termes issus des équations intégrales et les éléments finis  $P_2$  hiérarchiques pour ceux liés aux formulations variationnelles volumiques. Ce choix est lié à des questions de précision. En effet, les termes issus des équations intégrales sont obtenus à partir de représentations intégrales fournies par la Proposition 1.3 page 15. Ces représentations contiennent énormément d'information puisque les opérateurs de simple et de double couche volumiques sont des générateurs des solutions de l'équation de Helmholtz sur  $\Omega_- \cup \Omega_+$ . Par conséquent, une bonne précision peut être atteinte en discrétisant les termes issus des équations intégrales seulement avec des éléments finis  $P_1$ .

En revanche, les termes issus des formulations variationnelles volumiques contiennent moins d'information que ceux liés aux équations intégrales puisqu'ils ne sont pas construits à partir d'une solution fondamentale. De plus, comme nous l'avons mentionné à la fin du Chapitre 1, les formulations variationnelles volumiques sont connues pour être affectées par des phénomènes de dispersion et de pollution numérique importants. Concrètement, à moins que les maillages sous-jacents ne soient extrêmement fins, les formulations variationnelles volumiques fournissent des résultats peu précis lorsqu'elles sont discrétisées par des éléments finis  $P_1$ . Ceci est particulièrement problématique pour résoudre le couplage fort FEM-BEM (3.4) en n'utilisant que des éléments finis  $P_1$ . En effet, pour obtenir des résultats précis, il est nécessaire de disposer d'un maillage très fin de l'objet diffractant. Le nombre de degrés de liberté associés à la formulation variationnelle volumique est alors important. Ceci est toutefois inévitable pour obtenir des résultats précis. Conceptuellement, le problème vient ici du fait que, de par la finesse du maillage, le nombre de degrés de liberté associés aux équations intégrales est beaucoup plus important que nécessaire pour correctement estimer la solution du problème de diffraction-transmission (3.1). En effet, pour un pas de maillage donné, la résolution d'équations intégrales par le biais de la méthode des éléments finis surfaciques conduit, d'une manière générale, à des résultats bien plus précis que la méthode des éléments finis volumiques. Pour finir, remarquons que le nombre de degrés de liberté rattachés aux équations intégrales est d'autant plus pénalisant d'un point de vue computationnel que les matrices associées à ces inconnues sont denses et complexes.

Contrairement au couplage entre les éléments finis  $P_1$  surfaciques et les éléments finis  $P_1$  volumiques, le couplage entre les éléments finis  $P_1$  surfaciques et les éléments finis  $P_2$  hiérarchiques volumiques permet de ne pas démultiplier, sans que cela ne soit nécessaire, le nombre de degrés de liberté associés aux équations intégrales. En effet, il permet de discrétiser la formulation variationnelle volumique en utilisant des éléments finis d'ordre 2, ce qui améliore la précision des résultats, sans pour autant devoir disposer d'un maillage extrêmement fin de l'objet diffractant. De plus, les éléments finis volumiques d'ordre 2 permettent également de réduire le nombre de degrés de liberté associés à la formulation variationnelle volumique.

### 3.2.1 Le couplage fort BEM-BEM

Pour discrétiser le couplage fort BEM-BEM (3.3), nous utilisons sa formulation variationnelle :

$$\begin{aligned} \forall v \in \mathbb{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), & \quad - \langle v; (D_{k_-} + D_{k_+}) \gamma_D^- u \rangle + \langle v; (S_{k_-} + \rho S_{k_+}) \gamma_N^- u \rangle = \langle v; \gamma_D^+ u_{\text{inc}} \rangle, \\ \forall v \in \mathbb{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma), & \quad - \langle (\rho N_{k_-} + N_{k_+}) \gamma_D^- u; v \rangle + \langle \rho (D_{k_-}^* + D_{k_+}^*) \gamma_N^- u; v \rangle = \langle \gamma_N^+ u_{\text{inc}}; v \rangle. \end{aligned}$$

Cette formulation variationnelle est discrétisée par le biais de la méthode des éléments finis dont le principe a déjà été rappelé dans la sous-section 2.1.2. Nous approchons les espaces  $\mathbb{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  et  $\mathbb{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  de la manière suivante :

$$\mathbb{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \approx \text{Span}(e_i : i \in \{1; \dots; N_s^2\}) \quad , \quad \mathbb{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \approx \text{Span}(e_i : i \in \{1; \dots; N_s^2\}),$$

les  $(e_i)_{i \in \{1; \dots; N_s^2\}}$  correspondant aux éléments finis  $P_1$  présentés dans la sous-section 3.1.1. *In fine*, nous obtenons la formulation variationnelle discrète :

$$\begin{aligned} \forall j \in \{1; \dots; N_s^2\}, & \quad - \langle e_j; (D_{k_-} + D_{k_+}) \gamma_D^- u \rangle + \langle e_j; (S_{k_-} + \rho S_{k_+}) \gamma_N^- u \rangle = \langle e_j; \gamma_D^+ u_{\text{inc}} \rangle, \\ \forall j \in \{1; \dots; N_s^2\}, & \quad - \langle (\rho N_{k_-} + N_{k_+}) \gamma_D^- u; e_j \rangle + \langle \rho (D_{k_-}^* + D_{k_+}^*) \gamma_N^- u; e_j \rangle = \langle \gamma_N^+ u_{\text{inc}}; e_j \rangle. \end{aligned}$$

dont l'écriture matricielle est donnée dans la proposition suivante.

**Proposition 3.4** (Discrétisation du couplage fort BEM-BEM).

La version discrète de la formulation variationnelle du couplage fort BEM-BEM (3.3) s'écrit, sous forme matricielle, comme suit :

$$\begin{pmatrix} -(\mathbb{D}_{k_-}^t + \mathbb{D}_{k_+}^t) & \mathbb{S}_{k_-} + \rho \mathbb{S}_{k_+} \\ -(\rho \mathbb{N}_{k_-} + \mathbb{N}_{k_+}) & \rho(\mathbb{D}_{k_-} + \mathbb{D}_{k_+}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \{\gamma_{\bar{D}}^- u\} \\ \{\gamma_{\bar{N}}^- u\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{J}_{\Gamma, P_1} \{\gamma_{\bar{D}}^+ u_{\text{inc}}\} \\ \mathbb{J}_{\Gamma, P_1} \{\gamma_{\bar{N}}^+ u_{\text{inc}}\} \end{pmatrix}.$$

### 3.2.2 Le couplage fort FEM-BEM

Le couplage fort FEM-BEM (3.4) est également discrétisé par la méthode des éléments finis. Les espaces  $\mathbb{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  et  $\mathbb{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  sont approchés de la même manière que pour le couplage fort BEM-BEM (3.3). Enfin, pour l'espace  $\mathbb{H}^1(\Omega_-)$ , nous utilisons l'approximation suivante :

$$\mathbb{H}^1(\Omega_-) \approx \text{Span}(f_i : i \in \{1; \dots; N_s^3 + N_a^3\}),$$

les  $(f_i)_{i \in \{1; \dots; N_s^3 + N_a^3\}}$  correspondant aux éléments finis  $P_2$  hiérarchiques présentés dans la sous-section 3.1.2.

En introduisant les inconnues auxiliaires suivantes :

$$p = \left( \frac{1}{2} \text{Id} - D_{k_+}^* \right) \gamma_{\bar{N}}^+ u \quad , \quad q = N_{k_+} \gamma_{\bar{D}}^- u \quad , \quad r = N_{k_+} \gamma_{\bar{D}}^+ u_{\text{inc}},$$

le couplage fort FEM-BEM (3.4) se réécrit de manière équivalente comme suit :

$$\begin{aligned} \forall v \in \mathbb{H}^1(\Omega_-), \quad & \int_{\Omega_-} \rho \nabla u \cdot \nabla \bar{v} \, d\Omega_- - \int_{\Omega_-} \rho k_-^2 u \bar{v} \, d\Omega_- - \overline{\langle p; \gamma_{\bar{D}}^- v \rangle} - \overline{\langle q; \gamma_{\bar{D}}^- v \rangle} = \overline{\langle \gamma_{\bar{N}}^+ u_{\text{inc}}; \gamma_{\bar{D}}^- v \rangle} - \overline{\langle r; \gamma_{\bar{D}}^- v \rangle}, \\ \forall v \in \mathbb{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), \quad & \frac{1}{2} \langle v; \gamma_{\bar{D}}^- u \rangle - \langle v; D_{k_+} \gamma_{\bar{D}}^- u \rangle + \langle v; S_{k_+} \gamma_{\bar{N}}^+ u \rangle = \frac{1}{2} \langle v; \gamma_{\bar{D}}^+ u_{\text{inc}} \rangle - \langle v; D_{k_+} \gamma_{\bar{D}}^+ u_{\text{inc}} \rangle, \\ \forall v \in \mathbb{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma), \quad & \langle p; v \rangle = \left\langle \left( \frac{1}{2} \text{Id} - D_{k_+}^* \right) \gamma_{\bar{N}}^+ u; v \right\rangle, \\ \forall v \in \mathbb{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma), \quad & \langle q; v \rangle = \langle N_{k_+} \gamma_{\bar{D}}^- u; v \rangle, \\ \forall v \in \mathbb{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma), \quad & \langle r; v \rangle = \langle N_{k_+} \gamma_{\bar{D}}^+ u_{\text{inc}}; v \rangle. \end{aligned}$$

Pour discrétiser cette formulation variationnelle, nous supposons que :

$$u|_{\Omega_-} \in \text{Span}(f_i : i \in \{1; \dots; N_s^3 + N_a^3\}) \quad , \quad \gamma_{\bar{N}}^+ u, p, q, r \in \text{Span}(e_i : i \in \{1; \dots; N_s^2\}),$$

et nous obtenons alors la formulation variationnelle discrète :

$$\begin{aligned} \forall j \in \{1; \dots; N_s^3 + N_a^3\}, \quad & \int_{\Omega_-} \rho \nabla u \cdot \nabla f_j \, d\Omega_- - \int_{\Omega_-} \rho k_-^2 u f_j \, d\Omega_- - \overline{\langle \mathbb{P}_{\Gamma, P_1 \rightarrow P_2} p; \mathbb{G} f_j \rangle} - \overline{\langle \mathbb{P}_{\Gamma, P_1 \rightarrow P_2} q; \mathbb{G} f_j \rangle} \\ & = \overline{\langle \mathbb{P}_{\Gamma, P_1 \rightarrow P_2} \gamma_{\bar{N}}^+ u_{\text{inc}}; \mathbb{G} f_j \rangle} - \overline{\langle \mathbb{P}_{\Gamma, P_1 \rightarrow P_2} r; \mathbb{G} f_j \rangle}, \\ \forall j \in \{1; \dots; N_s^2\}, \quad & \frac{1}{2} \langle e_j; \mathbb{P}_{\Gamma, P_2 \rightarrow P_1} \mathbb{G} u \rangle - \langle e_j; D_{k_+} \mathbb{P}_{\Gamma, P_2 \rightarrow P_1} \mathbb{G} u \rangle + \langle e_j; S_{k_+} \gamma_{\bar{N}}^+ u \rangle \\ & = \frac{1}{2} \langle e_j; \gamma_{\bar{D}}^+ u_{\text{inc}} \rangle - \langle e_j; D_{k_+} \gamma_{\bar{D}}^+ u_{\text{inc}} \rangle, \\ \forall j \in \{1; \dots; N_s^2\}, \quad & \langle p; e_j \rangle = \left\langle \left( \frac{1}{2} \text{Id} - D_{k_+}^* \right) \gamma_{\bar{N}}^+ u; e_j \right\rangle, \\ \forall j \in \{1; \dots; N_s^2\}, \quad & \langle q; e_j \rangle = \langle N_{k_+} \mathbb{P}_{\Gamma, P_2 \rightarrow P_1} \mathbb{G} u; e_j \rangle, \\ \forall j \in \{1; \dots; N_s^2\}, \quad & \langle r; e_j \rangle = \langle N_{k_+} \gamma_{\bar{D}}^+ u_{\text{inc}}; e_j \rangle. \end{aligned}$$

Pour finir, la proposition suivante donne l'écriture matricielle de cette formulation variationnelle discrète.

**Proposition 3.5** (Discrétisation du couplage fort FEM-BEM).

La version discrète du couplage fort FEM-BEM (3.4) s'écrit, sous forme matricielle, comme suit :

$$\begin{pmatrix} \mathbb{H}_{\Omega_-, P_2}^\rho - \mathbb{J}_{\Omega_-, P_2}^{\rho k_-^2} & 0 & -\mathbb{G}^t \mathbb{J}_{\Gamma, P_2} \mathbb{P}_{\Gamma, P_1 \rightarrow P_2} & -\mathbb{G}^t \mathbb{J}_{\Gamma, P_2} \mathbb{P}_{\Gamma, P_1 \rightarrow P_2} \\ 0 & -\left( \frac{1}{2} \mathbb{J}_{\Gamma, P_1} - \mathbb{D}_{k_+} \right) & \mathbb{J}_{\Gamma, P_1} & 0 \\ -\mathbb{N}_{k_+} \mathbb{P}_{\Gamma, P_2 \rightarrow P_1} \mathbb{G} & 0 & 0 & \mathbb{J}_{\Gamma, P_1} \\ \left( \frac{1}{2} \mathbb{J}_{\Gamma, P_1} - \mathbb{D}_{k_+}^t \right) \mathbb{P}_{\Gamma, P_2 \rightarrow P_1} \mathbb{G} & \mathbb{S}_{k_+} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} \{u\} \\ \{\gamma_N^+ u\} \\ * \\ * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{G}^t \mathbb{J}_{\Gamma, P_2} \mathbb{P}_{\Gamma, P_1 \rightarrow P_2} \{\gamma_N^+ u_{\text{inc}}\} - \mathbb{G}^t \mathbb{J}_{\Gamma, P_2} \mathbb{P}_{\Gamma, P_1 \rightarrow P_2} \mathbb{J}_{\Gamma, P_1}^{-1} \mathbb{N}_{k_+} \{\gamma_D^+ u_{\text{inc}}\} \\ 0 \\ 0 \\ (\frac{1}{2} \mathbb{J}_{\Gamma, P_1} - \mathbb{D}_{k_+}^t) \{\gamma_D^+ u_{\text{inc}}\} \end{pmatrix},$$

les astérisques désignant des inconnues auxiliaires ne présentant pas d'intérêt pratique.

### 3.2.3 Exemples de solutions

Il n'est pas simple d'appréhender les solutions du problème de diffraction-transmission (3.1) et pour cette raison, nous en présentons quelques unes dans cette sous-section à titre illustratif. L'objet diffractant est ici supposé homogène et tous les graphiques que nous présentons ont été obtenus grâce au couplage fort BEM-BEM (3.3). Les Figures 3.4 et 3.5 présentent des graphiques de champ proche, de SES bistatique et de SES monostatique pour quatre objets différents :

- une sphère de rayon 1,
- un ellipsoïde d'équation  $\frac{x^2}{1.5^2} + \frac{y^2}{0.5^2} + \frac{z^2}{0.5^2} = 1$ ,
- un cube de côté 2,
- ce même cube dont l'un des coins est rentrant.

Tous ces objets sont centrés sur l'origine et le cube ainsi que le cube avec un coin rentrant sont alignés sur les axes. La Figure 3.3 est une représentation du cube avec un coin rentrant. Il s'agit du même objet que le cube considéré à ceci près que le sommet de coordonnées (1, 1, 1) est déplacé à l'origine.

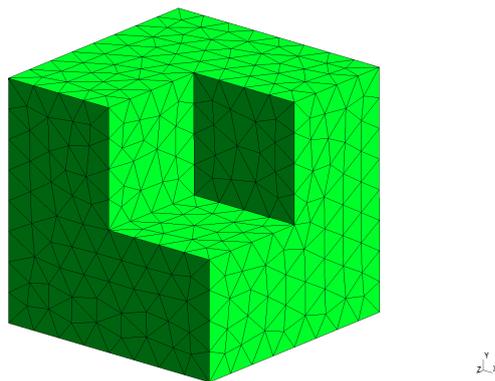


FIGURE 3.3 – Le cube avec un coin rentrant

Dans la Figure 3.4, pour laquelle  $k_- = 10$ ,  $k_+ = 5$  et  $\rho = 5$ , la première colonne de graphiques correspond au cas de la sphère et la seconde à celui de l'ellipsoïde. Pour la Figure 3.5,  $k_- = 5$ ,  $k_+ = 10$ ,  $\rho = 5$  et les colonnes de graphiques sont respectivement associées au cube et au cube avec un coin rentrant. Pour ces deux figures, la première ligne est constituée de graphiques de champ proche, la seconde de courbes de SES bistatique et la dernière de figures de SES monostatique. Le champ proche  $\mathcal{R}(u)$  est représenté dans le cas d'une onde incidente se propageant le long de l'axe ( $Ox$ ), le vecteur d'onde étant positivement proportionnel au vecteur  $(-1; 0; 0)$ . Pour la sphère, l'ellipsoïde et le cube, le champ proche est représenté dans le plan d'équation  $z = 0$  alors qu'il l'est dans le plan d'équation  $z = \frac{1}{2}$  pour le cube avec un coin rentrant. La SES bistatique a également été calculée dans le plan d'équation  $z = 0$  pour la même onde incidente et ceci pour plusieurs directions. Son évolution est donc naturellement représentée en fonction de l'angle des coordonnées polaires. Enfin, la SES monostatique, elle aussi, a été évaluée dans le plan d'équation  $z = 0$  et tracée en fonction de l'angle des coordonnées polaires.

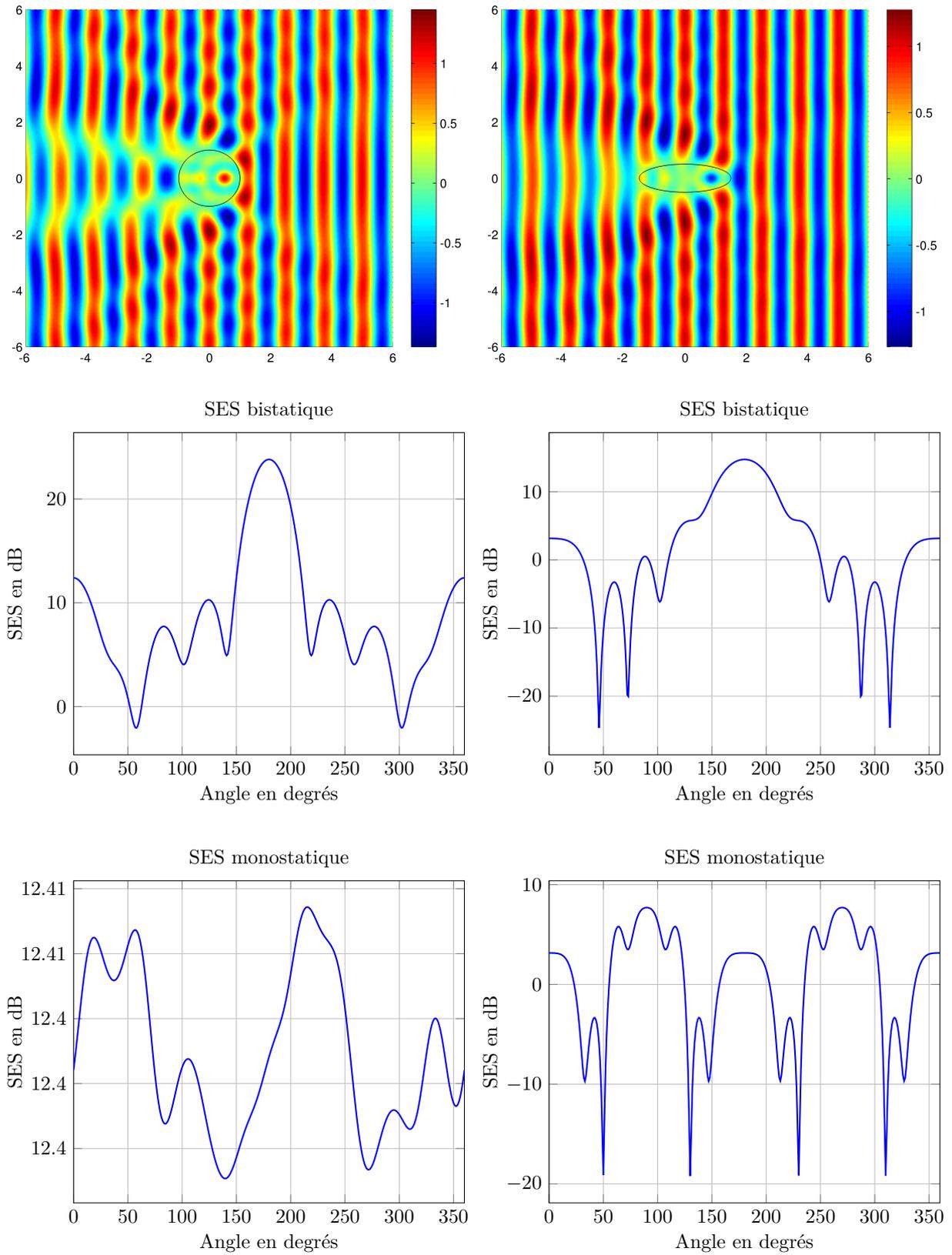


FIGURE 3.4 – Champ proche, SES bistatique et SES monostatique pour une sphère et un ellipsoïde

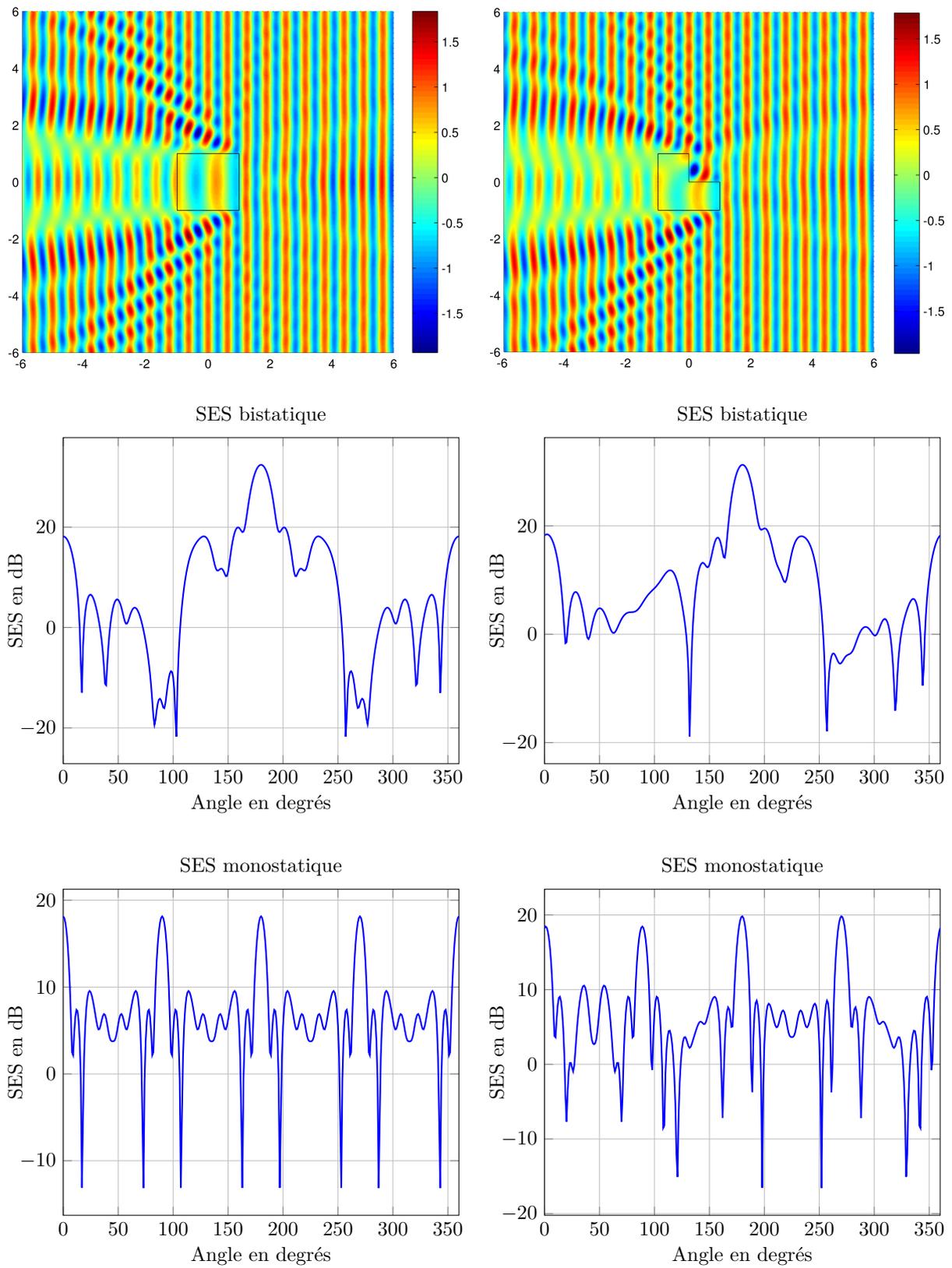


FIGURE 3.5 – Champ proche, SES bistatique et SES monostatique pour un cube et un cube avec un coin rentrant

### 3.3 Le couplage faible

Nous discrétisons le couplage faible (3.2), qu'il soit de type BEM-BEM ou de type FEM-BEM, de la même manière que les couplages forts BEM-BEM (3.3) et FEM-BEM (3.4). Les équations intégrales sont discrétisées grâce aux éléments finis  $P_1$  alors que les formulations variationnelles volumiques le sont grâce aux éléments finis  $P_2$  hiérarchiques. Les problèmes extérieurs :

$$\Delta u_+ + k_+^2 u_+ = 0 \text{ dans } \Omega_+ \quad , \quad B_+ u_+ = g \quad , \quad \partial_r u_+ - ik_+ u_+ = \mathcal{O}(r^{-2}), \quad (3.9)$$

sont par conséquent toujours discrétisés en utilisant les éléments finis  $P_1$  alors que pour les problèmes intérieurs :

$$\operatorname{div}(\rho \nabla u_-) + \rho k_-^2 u_- = 0 \text{ dans } \Omega_- \quad , \quad B_- u_- = g, \quad (3.10)$$

cela dépend de la nature du couplage faible (3.2). Si ce dernier est de type BEM-BEM, ce sont les éléments finis  $P_1$  qui sont utilisés. Toutefois, si le couplage faible (3.2) est de type FEM-BEM, la discrétisation des problèmes intérieurs (3.10) se fait en utilisant les éléments finis  $P_2$  hiérarchiques. Enfin, les inconnues du couplage faible (3.2) sont représentées par les éléments finis  $P_1$ , les opérateurs de résolution  $R_\pm$  sont vus comme des opérateurs de  $\operatorname{Span}(e_i : i \in \{1; \dots; N_s^2\})$  dans lui-même et il en va de même pour les opérateurs de transmission  $T_\pm$  qui sont par ailleurs discrétisés en utilisant les éléments finis  $P_1$ .

#### 3.3.1 Formes discrètes des opérateurs de transmission

Dans cette sous-section, nous expliquons comment discrétiser les approximations des opérateurs DtN proposées dans la section 2.3. Ces approximations sont discrétisées en utilisant les éléments finis  $P_1$ , ces derniers étant suffisants en termes de précision. La discrétisation des approximations  $\Lambda_{-,k,\rho}^0$  et  $\Lambda_{+,k}^0$  des opérateurs DtN est relativement aisée.

**Proposition 3.6** (Discrétisation des approximations d'ordre 0 des DtN).

Les formes discrètes des approximations  $\Lambda_{-,k,\rho}^0$  et  $\Lambda_{+,k}^0$  des opérateurs DtN intérieur et extérieur sont respectivement données par :

$$-i \mathbb{J}_{\Gamma, P_1}^{-1} \mathbb{J}_{\Gamma, P_1}^{k\rho} \quad , \quad i \mathbb{J}_{\Gamma, P_1}^{-1} \mathbb{J}_{\Gamma, P_1}^k.$$

Les approximations  $\Lambda_{+,k}^{\operatorname{sq}, N_p, \theta_p}$ ,  $\Lambda_{-,k,\rho}^{\operatorname{sq}, N_p, \theta_p}$  et  $\Lambda_{-,k,\rho}^{\operatorname{int}, N_p, \theta_p}$  des opérateurs DtN étant construites à partir des approximations de Padé de l'opérateur racine carrée :

$$\sqrt{\operatorname{Id} + \operatorname{div}_\Gamma \left( \frac{1}{k_\epsilon^2} \nabla_\Gamma \right)} \approx R_0 \operatorname{Id} - \sum_{j=1}^{N_p} \frac{A_j}{B_j} \left[ \operatorname{Id} + B_j \operatorname{div}_\Gamma \left( \frac{1}{k_\epsilon^2} \nabla_\Gamma \right) \right]^{-1}, \quad (3.11)$$

nous commençons par expliquer comment discrétiser ces dernières.

**Proposition 3.7** (Discrétisation des approximations de Padé de l'opérateur racine).

Les équivalents discrets des approximations de Padé de l'opérateur racine carrée (3.11), que nous notons  $\mathbb{P}_{\Gamma, P_1, k}^{N_p, \theta_p}$ , sont les suivants :

$$\mathbb{P}_{\Gamma, P_1, k}^{N_p, \theta_p} = R_0 \operatorname{Id} - \sum_{l=1}^{N_p} \frac{A_l}{B_l} \left( \mathbb{J}_{\Gamma, P_1} - B_l \mathbb{H}_{\Gamma, P_1}^{\frac{1}{k_\epsilon^2}} \right)^{-1} \mathbb{J}_{\Gamma, P_1}.$$

**Preuve**

Soit  $u \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  et  $v$  défini par :

$$v = R_0 u - \sum_{l=1}^{N_p} \frac{A_l}{B_l} \left[ \operatorname{Id} + B_l \operatorname{div}_\Gamma \left( \frac{1}{k_\epsilon^2} \nabla_\Gamma \right) \right]^{-1} u.$$

Nous avons alors :

$$v = R_0 u - \sum_{l=1}^{N_p} \frac{A_l}{B_l} u_l \quad , \quad \forall l \in \{1; \dots; N_p\}, \quad \left[ \operatorname{Id} + B_l \operatorname{div}_\Gamma \left( \frac{1}{k_\epsilon^2} \nabla_\Gamma \right) \right] u_l = u.$$

Les formulations variationnelles pour les inconnues auxiliaires  $(u_l)$ , que nous prendrons dans  $H^1(\Gamma)$ , sont les suivantes :

$$\forall l \in \{1; \dots; N_p\}, \quad \forall w \in H^1(\Gamma), \quad \int_{\Gamma} u_l \bar{w} d\Gamma - B_l \int_{\Gamma} \frac{1}{k_{\epsilon}^2} \nabla_{\Gamma} u_l \cdot \nabla_{\Gamma} \bar{w} d\Gamma = \int_{\Gamma} u \bar{w} d\Gamma.$$

Cela permet de conclure en remarquant que, sous forme matricielle, les versions discrètes de ces formulations variationnelles s'écrivent :

$$\forall l \in \{1; \dots; N_p\}, \quad \left( \mathbb{J}_{\Gamma, P_1} - B_l \mathbb{H}_{\Gamma, P_1}^{\frac{1}{k_{\epsilon}^2}} \right) \{u_l\} = \mathbb{J}_{\Gamma, P_1} \{u\}.$$

■

A partir de la proposition précédente, il est aisé d'obtenir les formes discrètes des approximations  $\Lambda_{+,k}^{\text{sq}, N_p, \theta_p}$ ,  $\Lambda_{-,k,\rho}^{\text{sq}, N_p, \theta_p}$  et  $\Lambda_{-,k,\rho}^{\text{int}, N_p, \theta_p}$  des opérateurs DtN.

**Proposition 3.8** (Discrétisation des approximations de type racine carrée des DtN).

Les analogues discrets des approximations  $\Lambda_{-,k,\rho}^{\text{sq}, N_p, \theta_p}$  et  $\Lambda_{+,k}^{\text{sq}, N_p, \theta_p}$  des opérateurs DtN intérieur et extérieur sont respectivement donnés par :

$$-i \mathbb{J}_{\Gamma, P_1}^{-1} \mathbb{J}_{\Gamma, P_1}^{k\rho} \mathbb{P}_{\Gamma, P_1, k}^{N_p, \theta_p}, \quad i \mathbb{J}_{\Gamma, P_1}^{-1} \mathbb{J}_{\Gamma, P_1}^k \mathbb{P}_{\Gamma, P_1, k}^{N_p, \theta_p}.$$

**Proposition 3.9** (Discrétisation des approximations intégrales du DtN intérieur).

Soit  $k, \rho \in \mathbb{R}_+^*$ . Les formes discrètes des approximations  $\Lambda_{-,k,\rho}^{\text{int}, N_p, \theta_p}$  de l'opérateur DtN intérieur sont données ci-dessous :

$$\rho \mathbb{I}_{\Gamma, P_1, k}^{N_p, \theta_p} \quad \text{avec} \quad \mathbb{I}_{\Gamma, P_1, k}^{N_p, \theta_p} = \mathbb{S}_k^{-1} \mathbb{J}_{\Gamma, P_1} + ik \mathbb{P}_{\Gamma, P_1, k}^{N_p, \theta_p}.$$

Nous terminons cette sous-section par une remarque importante concernant l'évaluation pratique des opérateurs de transmission. Nous avons écrit les formes discrètes des approximations des opérateurs DtN de manière condensée en faisant apparaître des inverses et des produits de matrices. Bien que cela soit possible, et nous reviendrons plus en détails sur ce point par la suite, cela ne signifie toutefois pas que des inverses et des produits de matrices doivent effectivement être calculés en pratique. Par exemple, la manière la plus standard, car la plus efficace sans contexte particulier, d'appliquer  $\mathbb{P}_{\Gamma, P_1, k}^{N_p, \theta_p}$  à un élément  $u$  de  $\text{Span}(e_i : i \in \{1; \dots; N_s^2\})$ , que nous assimilons à son vecteur coordonnées, consiste à résoudre, dans l'idéal en parallèle, les systèmes suivants :

$$\left( \mathbb{J}_{\Gamma, P_1} - B_l \mathbb{H}_{\Gamma, P_1}^{\frac{1}{k_{\epsilon}^2}} \right) \{u_l\} = \mathbb{J}_{\Gamma, P_1} \{u\}.$$

De même, pour appliquer  $\mathbb{I}_{\Gamma, P_1, k}^{N_p, \theta_p}$  à  $u$ , il est nécessaire d'appliquer  $\mathbb{P}_{\Gamma, P_1, k}^{N_p, \theta_p}$  à  $u$ , point que nous venons d'évoquer, et de résoudre le système suivant :

$$\mathbb{S}_k \{\tilde{u}\} = \mathbb{J}_{\Gamma, P_1} \{u\}.$$

### 3.3.2 Discrétisation des problèmes extérieurs

Dans cette sous-section, nous expliquons comment discrétiser la formulation initiale que nous avons proposée dans le chapitre précédent pour résoudre les problèmes extérieurs (3.9) :

$$\frac{1}{2} T_+^{-1} \gamma_N^+ u + D_{k_+} \gamma_D^+ u - S_{k_+} \gamma_N^+ u = \frac{1}{2} T_+^{-1} g \quad , \quad \frac{1}{2} T_+ \gamma_D^+ u - D_{k_+}^* \gamma_N^+ u + N_{k_+} \gamma_D^+ u = \frac{1}{2} g, \quad (3.12)$$

l'opérateur  $T_+$  étant optimal pour le couplage faible (3.2), à savoir que idéalement :

$$T_+ = -\Lambda_{-,k_-, \rho}.$$

La formulation variationnelle discrète de la formulation initiale (3.12) est donnée, sous forme matricielle, pour chaque approximation du DtN intérieur introduite dans la section 2.3, une discrétisation par éléments finis  $P_1$  étant par ailleurs suffisante en termes de précision. Le cas des approximations  $\Lambda_{-,k_-, \rho}^0$  et  $\Lambda_{-,k_-, \rho}^{\text{sq}, N_p, \theta_p}$  est toutefois un peu particulier. En effet, ces dernières peuvent être utilisées que l'objet diffractant soit homogène ou non. Nous présentons naturellement le cas plus général d'un objet diffractant non homogène, la réduction au cas d'un objet diffractant homogène étant immédiate.

**Proposition 3.10** (Approximations de type racine carrée du DtN intérieur).

Si  $T_+ = -\Lambda_{-,k_-, \rho}^{\text{sq}, N_p, \theta_p}$ , la formulation variationnelle discrète de la formulation initiale (3.12) s'écrit, sous forme matricielle, comme suit :

$$\begin{pmatrix} \mathbb{N}_{k_+} & -\mathbb{D}_{k_+} & \frac{1}{2}\mathbb{J}_{\Gamma, P_1} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \mathbb{D}_{k_+}^t & -\mathbb{S}_{k_+} & 0 & \frac{1}{2}\mathbb{J}_{\Gamma, P_1} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ -iR_0\mathbb{J}_{\Gamma, P_1}^{k-\rho} & 0 & \mathbb{J}_{\Gamma, P_1} & 0 & \dots & i\frac{A_1}{B_1}\mathbb{J}_{\Gamma, P_1}^{k-\rho} & \dots & 0 \\ 0 & -\mathbb{J}_{\Gamma, P_1} & 0 & iR_0\mathbb{J}_{\Gamma, P_1}^{k-\rho} & \dots & 0 & \dots & -i\frac{A_1}{B_1}\mathbb{J}_{\Gamma, P_1}^{k-\rho} \\ -\mathbb{J}_{\Gamma, P_1} & 0 & 0 & 0 & \mathbb{J}_{\Gamma, P_1} - B_1\mathbb{H}_{\Gamma, P_1}^{k-2} & (0) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ -\mathbb{J}_{\Gamma, P_1} & 0 & 0 & 0 & (0) & \mathbb{J}_{\Gamma, P_1} - B_{N_p}\mathbb{H}_{\Gamma, P_1}^{k-2} & \dots & (0) \\ 0 & 0 & 0 & -\mathbb{J}_{\Gamma, P_1} & \dots & \mathbb{J}_{\Gamma, P_1} - B_1\mathbb{H}_{\Gamma, P_1}^{k-2} & \dots & (0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -\mathbb{J}_{\Gamma, P_1} & \dots & (0) & \dots & \mathbb{J}_{\Gamma, P_1} - B_{N_p}\mathbb{H}_{\Gamma, P_1}^{k-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \{\gamma_D^+ u\} \\ \{\gamma_N^+ u\} \\ * \\ * \\ * \\ \vdots \\ * \\ * \\ * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\mathbb{J}_{\Gamma, P_1}\{g\} \\ \frac{1}{2}\mathbb{J}_{\Gamma, P_1}\{\tilde{g}\} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

les astérisques désignant des inconnues auxiliaires ne présentant pas d'intérêt pratique et la quantité  $\tilde{g}$  intervenant dans le second membre étant donnée par :

$$\begin{pmatrix} iR_0\mathbb{J}_{\Gamma, P_1}^{k-\rho} & -i\frac{A_1}{B_1}\mathbb{J}_{\Gamma, P_1}^{k-\rho} & \dots & -i\frac{A_{N_p}}{B_{N_p}}\mathbb{J}_{\Gamma, P_1}^{k-\rho} \\ -\mathbb{J}_{\Gamma, P_1} & \mathbb{J}_{\Gamma, P_1} - B_1\mathbb{H}_{\Gamma, P_1}^{k-2} & \dots & (0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\mathbb{J}_{\Gamma, P_1} & (0) & \dots & \mathbb{J}_{\Gamma, P_1} - B_{N_p}\mathbb{H}_{\Gamma, P_1}^{k-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \{\tilde{g}\} \\ * \\ \vdots \\ * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{J}_{\Gamma, P_1}\{g\} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**Preuve**

En posant :

$$v = T_+\gamma_D^+u \quad , \quad w = T_+^{-1}\gamma_N^+u \quad , \quad \tilde{g} = T_+^{-1}g,$$

la formulation initiale (3.12) devient :

$$\frac{1}{2}v - D_{k_+}^*\gamma_N^+u + N_{k_+}\gamma_D^+u = \frac{1}{2}g \quad , \quad \frac{1}{2}w + D_{k_+}\gamma_D^+u - S_{k_+}\gamma_N^+u = \frac{1}{2}\tilde{g},$$

et les formulations variationnelles de ces équations s'écrivent :

$$\begin{aligned} \forall e \in \mathbb{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma), \quad & \frac{1}{2}\langle v; e \rangle - \langle D_{k_+}^*\gamma_N^+u; e \rangle + \langle N_{k_+}\gamma_D^+u; e \rangle = \frac{1}{2}\langle g; e \rangle, \\ \forall e \in \mathbb{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), \quad & \frac{1}{2}\langle e; w \rangle + \langle e; D_{k_+}\gamma_D^+u \rangle - \langle e; S_{k_+}\gamma_N^+u \rangle = \frac{1}{2}\langle e; \tilde{g} \rangle. \end{aligned}$$

Enfin, les versions discrètes de ces formulations variationnelles, sous forme matricielle, sont données par :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\mathbb{J}_{\Gamma, P_1}\{v\} - \mathbb{D}_{k_+}\{\gamma_N^+u\} + \mathbb{N}_{k_+}\{\gamma_D^+u\} &= \frac{1}{2}\mathbb{J}_{\Gamma, P_1}\{g\}, \\ \frac{1}{2}\mathbb{J}_{\Gamma, P_1}\{w\} + \mathbb{D}_{k_+}^t\{\gamma_D^+u\} - \mathbb{S}_{k_+}\{\gamma_N^+u\} &= \frac{1}{2}\mathbb{J}_{\Gamma, P_1}\{\tilde{g}\}. \end{aligned}$$

Il reste alors à discrétiser les relations définissant  $v$ ,  $w$  et  $\tilde{g}$ . Commençons par traiter le cas de l'équation  $v = T_+\gamma_D^+u$ . En introduisant les inconnues auxiliaires  $(v_l)_{l \in \{1, \dots, N_p\}}$ , cette relation se réécrit comme suit :

$$v = ik_-\rho R_0\gamma_D^+u - ik_-\rho \sum_{l=1}^{N_p} \frac{A_l}{B_l} v_l \quad , \quad \left[ Id + B_l \text{div}_\Gamma \left( \frac{1}{k_{-, \epsilon}^2} \nabla_\Gamma \right) \right] v_l = \gamma_D^+u.$$

La formulation variationnelle discrète de la première équation consiste en une projection  $L^2(\Gamma)$  sur l'espace des éléments finis  $P_1$  :

$$\forall j \in \{1; \dots; N_s^2\}, \quad \int_\Gamma v e_j d\Gamma = iR_0 \int_\Gamma k_-\rho \gamma_D^+u e_j d\Gamma - i \sum_{l=1}^{N_p} \frac{A_l}{B_l} \int_\Gamma k_-\rho v_l e_j d\Gamma,$$

et s'écrit, sous forme matricielle, comme suit :

$$\mathbb{J}_{\Gamma, P_1}\{v\} = iR_0\mathbb{J}_{\Gamma, P_1}^{k-\rho}\{\gamma_D^+u\} - i \sum_{l=1}^{N_p} \frac{A_l}{B_l} \mathbb{J}_{\Gamma, P_1}^{k-\rho}\{v_l\}.$$

Enfin, les formulations variationnelles pour les inconnues auxiliaires  $(v_l)$ , que nous prendrons dans  $H^1(\Gamma)$ , sont les suivantes :

$$\forall l \in \{1; \dots; N_p\}, \quad \forall e \in H^1(\Gamma), \quad \int_{\Gamma} v_l \bar{e} d\Gamma - B_l \int_{\Gamma} \frac{1}{k_{-, \epsilon}^2} \nabla_{\Gamma} v_l \cdot \nabla_{\Gamma} \bar{e} d\Gamma = \int_{\Gamma} \gamma_D^+ u \bar{e} d\Gamma,$$

et leurs équivalents discrets s'écrivent, sous forme matricielle, comme suit :

$$\forall l \in \{1; \dots; N_p\}, \quad \left( \mathbb{J}_{\Gamma, P_1} - B_l \mathbb{H}_{\Gamma, P_1}^{k_{-, \epsilon}^2} \right) \{v_l\} = \mathbb{J}_{\Gamma, P_1} \{\gamma_D^+ u\}.$$

L'équation  $w = T_+^{-1} \gamma_N^+ u$  se discrétise de la même manière que la relation définissant  $v$ , requérant notamment l'introduction d'inconnues auxiliaires  $(w_l)_{l \in \{1; \dots; N_p\}}$ . Nous ne détaillons donc pas ce point et donnons directement la formulation variationnelle discrète sous forme matricielle :

$$i R_0 \mathbb{J}_{\Gamma, P_1}^{k_{-, \rho}} \{w\} - i \sum_{l=1}^{N_p} \frac{A_l}{B_l} \mathbb{J}_{\Gamma, P_1}^{k_{-, \rho}} \{w_l\} = \mathbb{J}_{\Gamma, P_1} \{\gamma_N^+ u\},$$

$$\forall l \in \{1; \dots; N_p\}, \quad \left( \mathbb{J}_{\Gamma, P_1} - B_l \mathbb{H}_{\Gamma, P_1}^{k_{-, \epsilon}^2} \right) \{w_l\} = \mathbb{J}_{\Gamma, P_1} \{w\}.$$

De la même manière, nous obtenons la forme discrète de la relation  $\tilde{g} = T_+^{-1} g$  :

$$i R_0 \mathbb{J}_{\Gamma, P_1}^{k_{-, \rho}} \{\tilde{g}\} - i \sum_{l=1}^{N_p} \frac{A_l}{B_l} \mathbb{J}_{\Gamma, P_1}^{k_{-, \rho}} \{\tilde{g}_l\} = \mathbb{J}_{\Gamma, P_1} \{g\} \quad , \quad \forall l \in \{1; \dots; N_p\}, \quad \left( \mathbb{J}_{\Gamma, P_1} - B_l \mathbb{H}_{\Gamma, P_1}^{k_{-, \epsilon}^2} \right) \{\tilde{g}_l\} = \mathbb{J}_{\Gamma, P_1} \{\tilde{g}\}.$$

■

De par l'introduction des inconnues auxiliaires, la matrice de la formulation initiale (3.12) est de taille conséquente, à savoir  $(2N_p + 4)N_s^2$  avec  $N_p = 4$  en pratique. Toutefois, sous réserve de disposer d'outils permettant de gérer les matrices creuses, son faible taux de remplissage permet de l'utiliser telle quelle sans que les besoins en mémoire ne soient rédhibitoires. Une autre alternative permettant d'utiliser en pratique la matrice de la formulation initiale (3.12) consiste à la compresser via l'élimination des inconnues auxiliaires. Pour ce faire, nous introduisons la forme discrète de l'opérateur de transmission  $T_+$  :

$$\mathbb{T}_+ = i \mathbb{J}_{\Gamma, P_1}^{-1} \mathbb{J}_{\Gamma, P_1}^{k_{-, \rho}} \mathbb{P}_{\Gamma, P_1, k_{-, \rho}}^{N_p, \theta_p},$$

et alors, la version discrète de la formulation initiale (3.12) se réécrit comme suit :

$$\left( \begin{array}{c|c} \frac{1}{2} \mathbb{J}_{\Gamma, P_1} \mathbb{T}_+ + \mathbb{N}_{k_+} & -\mathbb{D}_{k_+} \\ \mathbb{D}_{k_+} & \frac{1}{2} \mathbb{J}_{\Gamma, P_1} \mathbb{T}_+^{-1} - \mathbb{S}_{k_+} \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \{\gamma_D^+ u\} \\ \{\gamma_N^+ u\} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \frac{1}{2} \mathbb{J}_{\Gamma, P_1} \{g\} \\ \frac{1}{2} \mathbb{J}_{\Gamma, P_1} \{\tilde{g}\} \end{array} \right) \quad , \quad \mathbb{T}_+ \{\tilde{g}\} = \{g\}.$$

Cette approche peut paraître peu avantageuse d'un point de vue pratique puisqu'elle requiert de calculer des inverses et des produits de matrices. Toutefois, elle peut effectivement être intéressante d'un point de vue computationnel et ceci pour plusieurs raisons. Pour commencer, le fait de compresser la matrice de la formulation initiale (3.12) supprime tous les blocs creux de cette matrice et les compense en ajoutant des blocs pleins aux blocs denses déjà existants. Ainsi, aucun bloc existant ne voit son taux de remplissage dégradé.

Lors de la résolution du couplage faible (3.2), le problème extérieur (3.9) est résolu plusieurs fois. Il peut donc être intéressant, pour gagner en temps de calcul, d'utiliser la décomposition LU de la matrice de la formulation initiale (3.12) pour limiter les résolutions du problème extérieur (3.9) à de simples montées et descentes. Cependant, si la matrice de la formulation initiale (3.12) n'est pas compressée, sa décomposition LU peut présenter le gros défaut de nécessiter beaucoup de mémoire. En effet, la matrice de la formulation initiale (3.12) sous sa forme non compressée est de grande taille et même si elle est très creuse, ce n'est pas nécessairement le cas de sa décomposition LU dont le taux de remplissage peut être très élevé. Nous rappelons toutefois que ce problème peut être pallié sous réserve d'effectuer un prétraitement sur la matrice non compressée de la formulation initiale (3.12). En effet, il existe des algorithmes permettant de renuméroter efficacement les lignes et les colonnes des matrices creuses issues de la méthode des éléments finis surfaciques en deux dimensions de sorte à ce que leurs décompositions LU soient également creuses. Nous mentionnons par exemple les algorithmes de Cuthill-McKee [43, 78] et de degré minimum [3, 45, 57]. La matrice compressée de la formulation initiale (3.12) étant en revanche de petite taille et surtout pleine,

nous avons tout intérêt à utiliser sa décomposition LU, cette dernière nécessitant autant de mémoire que la matrice initiale.

Enfin, certaines matrices issues de l'assemblage de la matrice compressée de la formulation initiale (3.12) peuvent être réutilisées lors de la résolution du couplage faible (3.2). Toutefois, avant de préciser ce point, commençons par expliquer comment assembler la matrice compressée.

**1-** La première étape consiste, dans un premier temps, à assembler  $\mathbb{P}_{\Gamma, P_1, k_-}^{N_p, \theta_p}$  *via* la résolution de systèmes de la forme :

$$\left( \mathbb{J}_{\Gamma, P_1} - B_i \mathbb{H}_{\Gamma, P_1}^{\frac{1}{k_-^2}, \epsilon} \right) \{x\} = \{b\},$$

le vecteur  $\{b\}$  parcourant les vecteurs colonnes de  $\mathbb{J}_{\Gamma, P_1}$ , puis, dans un second temps, à calculer le produit  $\mathbb{J}_{\Gamma, P_1}^{k_- \rho} \mathbb{P}_{\Gamma, P_1, k_-}^{N_p, \theta_p}$ . Les systèmes précédents peuvent être résolus de manière directe en tirant profit du faible taux de remplissage des matrices en jeu ou encore en utilisant les décompositions LU de ces matrices limitant ainsi la résolution des systèmes à de simples remontées et descentes.

**2-** Nous pouvons alors commencer à assembler la matrice compressée de la formulation initiale (3.12) en remarquant que :

$$\mathbb{J}_{\Gamma, P_1} \mathbb{T}_+ = i \mathbb{J}_{\Gamma, P_1}^{k_- \rho} \mathbb{P}_{\Gamma, P_1, k_-}^{N_p, \theta_p}.$$

**3-** Nous assemblons ensuite la matrice  $\mathbb{T}_+$  en résolvant les systèmes suivants :

$$\mathbb{J}_{\Gamma, P_1} \{x\} = \{b\},$$

le vecteur  $\{b\}$  correspondant aux vecteurs colonnes de  $\mathbb{J}_{\Gamma, P_1}^{k_- \rho} \mathbb{P}_{\Gamma, P_1, k_-}^{N_p, \theta_p}$ . Ces systèmes peuvent être résolus de la même manière que ceux intervenant dans la première étape. Toutefois, il est également possible de tirer profit de la structure creuse de  $\mathbb{J}_{\Gamma, P_1}$  pour résoudre ces systèmes de manière itérative,  $\mathbb{J}_{\Gamma, P_1}$  se prêtant particulièrement bien à une résolution par la procédure GMRES.

**4-** Nous calculons alors la décomposition LU de  $\mathbb{T}_+$  et nous l'utilisons pour assembler le terme  $\mathbb{J}_{\Gamma, P_1} \mathbb{T}_+^{-1}$  *via* la résolution des systèmes :

$$\mathbb{T}_+^t \{x\} = \{b\},$$

le vecteur  $\{b\}$  représentant les vecteurs colonnes de  $\mathbb{J}_{\Gamma, P_1}$ . Bien qu'il puisse ne pas apparaître clairement, au premier abord, que la résolution de ces systèmes permette effectivement d'assembler le terme  $\mathbb{J}_{\Gamma, P_1} \mathbb{T}_+^{-1}$ , cela repose tout simplement sur le fait suivant :

$$\mathbb{M} = \mathbb{J}_{\Gamma, P_1} \mathbb{T}_+^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{T}_+^t \mathbb{M}^t = \mathbb{J}_{\Gamma, P_1}.$$

Une fois l'assemblage de la matrice compressée de la formulation initiale (3.12) terminé, il est intéressant de réutiliser la matrice  $\mathbb{T}_+$  ainsi que sa décomposition LU lors de la résolution du couplage faible (3.2). En effet, cette dernière requiert, entre autres, l'évaluation de l'opérateur de transmission  $T_+$  dont l'équivalent discret correspond à la multiplication par  $\mathbb{T}_+$ . Enfin, l'assemblage du second membre de la formulation initiale (3.12) nécessite de résoudre des équations du type :

$$\mathbb{T}_+ \{\tilde{g}\} = \{g\},$$

ce qui peut être fait en utilisant la décomposition LU de  $\mathbb{T}_+$ .

De par les avantages proposés par la compression de la matrice de la formulation initiale (3.12), nous avons choisi de nous limiter à cette approche pour résoudre les problèmes extérieurs (3.9). Remarquons que la version discrète compressée de la formulation initiale (3.12) a toujours la même forme quel que soit l'opérateur de transmission choisi, à savoir :

$$\left( \begin{array}{c} \frac{1}{2} \mathbb{J}_{\Gamma, P_1} \mathbb{T}_+ + \mathbb{N}_{k_+} \\ \mathbb{D}_{k_+}^t \end{array} \quad \begin{array}{c} -\mathbb{D}_{k_+} \\ \frac{1}{2} \mathbb{J}_{\Gamma, P_1} \mathbb{T}_+^{-1} - \mathbb{S}_{k_+} \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \{\gamma_D^+ u\} \\ \{\gamma_N^+ u\} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \frac{1}{2} \mathbb{J}_{\Gamma, P_1} \{g\} \\ \frac{1}{2} \mathbb{J}_{\Gamma, P_1} \{\tilde{g}\} \end{array} \right) \quad , \quad \mathbb{T}_+ \{\tilde{g}\} = \{g\}.$$

La compression de la matrice de la formulation initiale (3.12) permet donc d'implémenter très simplement le couplage faible (3.2) pour plusieurs  $T_+$ . En effet, si le couplage faible (3.2) a déjà été implémenté pour un opérateur de transmission  $T_+$  particulier, l'intégration d'un nouvel opérateur de transmission requiert

uniquement de spécifier la nouvelle forme de  $\mathbb{T}_+$ . De là, nous donnons naturellement les formes discrètes des opérateurs  $T_+$  correspondant aux approximations  $\Lambda_{-,k_-, \rho}^0$  et  $\Lambda_{-,k_-, \rho}^{\text{int}, N_p, \theta_p}$  de l'opérateur DtN intérieur :

$$\begin{aligned} T_+ = -\Lambda_{-,k_-, \rho}^0 &\Rightarrow \mathbb{T}_+ = i\mathbb{J}_{\Gamma, P_1}^{-1} \mathbb{J}_{\Gamma, P_1}^{k_-, \rho}, \\ T_+ = -\Lambda_{-,k_-, \rho}^{\text{int}, N_p, \theta_p} &\Rightarrow \mathbb{T}_+ = -\rho \mathbb{I}_{\Gamma, P_1, k_-}^{N_p, \theta_p}. \end{aligned}$$

Nous rappelons par ailleurs que, si  $T_+ = -\Lambda_{-,k_-, \rho}^{\text{int}, N_p, \theta_p}$ , l'objet diffractant est implicitement homogène, les approximations intégrales de l'opérateur DtN intérieur n'ayant pas de sens si l'objet diffractant n'est pas homogène.

Nous terminons cette sous-section en donnant, essentiellement à titre informatif, les matrices non compressées de la formulation initiale (3.12) lorsque  $T_+$  correspond aux approximations  $\Lambda_{-,k_-, \rho}^0$  et  $\Lambda_{-,k_-, \rho}^{\text{int}, N_p, \theta_p}$  de l'opérateur DtN intérieur.

**Proposition 3.11** (Approximation d'ordre 0 du DtN intérieur).

Si  $T_+ = -\Lambda_{-,k_-, \rho}^0$ , la matrice non compressée de la formulation initiale (3.12) est la suivante :

$$\begin{pmatrix} \mathbb{N}_{k_+} & -\mathbb{D}_{k_+} & \frac{1}{2}\mathbb{J}_{\Gamma, P_1} & 0 \\ \mathbb{D}_{k_+}^t & -\mathbb{S}_{k_+} & 0 & \frac{1}{2}\mathbb{J}_{\Gamma, P_1} \\ -i\mathbb{J}_{\Gamma, P_1}^{k_-, \rho} & 0 & \mathbb{J}_{\Gamma, P_1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{J}_{\Gamma, P_1} & 0 & i\mathbb{J}_{\Gamma, P_1}^{k_-, \rho} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \{\gamma_D^+ u\} \\ \{\gamma_N^+ u\} \\ * \\ * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\mathbb{J}_{\Gamma, P_1} \{g\} \\ \frac{1}{2}\mathbb{J}_{\Gamma, P_1} \{\tilde{g}\} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad i\mathbb{J}_{\Gamma, P_1}^{k_-, \rho} \{\tilde{g}\} = \mathbb{J}_{\Gamma, P_1} \{g\}.$$

**Proposition 3.12** (Approximations intégrales du DtN intérieur).

Si  $T_+ = -\Lambda_{-,k_-, \rho}^{\text{int}, N_p, \theta_p}$ , la formulation variationnelle discrète de la formulation initiale (3.12) s'écrit, sous forme matricielle non compressée, comme suit :

$$\begin{pmatrix} \mathbb{N}_{k_+} & -\mathbb{D}_{k_+} & 0 & 0 & \frac{1}{2}\mathbb{J}_{\Gamma, P_1} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \mathbb{D}_{k_+}^t & -\mathbb{S}_{k_+} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\mathbb{J}_{\Gamma, P_1} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\mathbb{J}_{\Gamma, P_1} & 0 & \mathbb{S}_{k_-} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ iR_0 k_- \rho \mathbb{J}_{\Gamma, P_1} & 0 & \rho \mathbb{J}_{\Gamma, P_1} & 0 & \mathbb{J}_{\Gamma, P_1} & 0 & \dots & -ik_- \rho \frac{A_1}{B_1} \mathbb{J}_{\Gamma, P_1} & -ik_- \rho \frac{A_{N_p}}{B_{N_p}} \mathbb{J}_{\Gamma, P_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbb{J}_{\Gamma, P_1} & 0 & \rho \mathbb{J}_{\Gamma, P_1} & 0 & iR_0 k_- \rho \mathbb{J}_{\Gamma, P_1} & \dots & 0 & -ik_- \rho \frac{A_1}{B_1} \mathbb{J}_{\Gamma, P_1} & \dots & -ik_- \rho \frac{A_{N_p}}{B_{N_p}} \mathbb{J}_{\Gamma, P_1} \\ -\mathbb{J}_{\Gamma, P_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbb{J}_{\Gamma, P_1} - B_1 \mathbb{H}_{\Gamma, P_1}^{k_- 2} & (0) & \dots & (0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\mathbb{J}_{\Gamma, P_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & (0) & \mathbb{J}_{\Gamma, P_1} - B_{N_p} \mathbb{H}_{\Gamma, P_1}^{k_- 2} & \dots & (0) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathbb{J}_{\Gamma, P_1} & \dots & \mathbb{J}_{\Gamma, P_1} - B_1 \mathbb{H}_{\Gamma, P_1}^{k_- 2} & \mathbb{J}_{\Gamma, P_1} - B_{N_p} \mathbb{H}_{\Gamma, P_1}^{k_- 2} & \dots & (0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & (0) & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathbb{J}_{\Gamma, P_1} & \dots & (0) & \mathbb{J}_{\Gamma, P_1} - B_{N_p} \mathbb{H}_{\Gamma, P_1}^{k_- 2} & \dots & \mathbb{J}_{\Gamma, P_1} - B_{N_p} \mathbb{H}_{\Gamma, P_1}^{k_- 2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \{\gamma_D^+ u\} \\ \{\gamma_N^+ u\} \\ * \\ * \\ * \\ * \\ \vdots \\ * \\ * \\ \vdots \\ * \\ * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\mathbb{J}_{\Gamma, P_1} \{g\} \\ \frac{1}{2}\mathbb{J}_{\Gamma, P_1} \{\tilde{g}\} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} iR_0 k_- \rho \mathbb{J}_{\Gamma, P_1} & \rho \mathbb{J}_{\Gamma, P_1} & -ik_- \rho \frac{A_1}{B_1} \mathbb{J}_{\Gamma, P_1} & \dots & -ik_- \rho \frac{A_{N_p}}{B_{N_p}} \mathbb{J}_{\Gamma, P_1} \\ -\mathbb{J}_{\Gamma, P_1} & \mathbb{S}_{k_-} & 0 & \dots & 0 \\ -\mathbb{J}_{\Gamma, P_1} & 0 & \mathbb{J}_{\Gamma, P_1} - B_1 \mathbb{H}_{\Gamma, P_1}^{k_- 2} & \dots & (0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\mathbb{J}_{\Gamma, P_1} & 0 & (0) & \dots & \mathbb{J}_{\Gamma, P_1} - B_{N_p} \mathbb{H}_{\Gamma, P_1}^{k_- 2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \{\tilde{g}\} \\ * \\ * \\ \vdots \\ * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbb{J}_{\Gamma, P_1} \{g\} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nous terminons cette sous-section en mentionnant que la matrice non compressée de la formulation initiale (3.12) est plus grande lorsque  $T_+ = -\Lambda_{-,k_-, \rho}^{\text{int}, N_p, \theta_p}$  que lorsque  $T_+ = -\Lambda_{-,k_-, \rho}^{\text{sq}, N_p, \theta_p}$ . Ceci est dû au fait que l'approximation  $\Lambda_{-,k_-, \rho}^{\text{int}, N_p, \theta_p}$  est construite à partir de l'inverse de l'opérateur de simple couche surfacique, ce qui nécessite l'introduction d'inconnues auxiliaires supplémentaires.

### 3.3.3 Discrétisation des problèmes intérieurs

Dans cette sous-section, nous expliquons comment discrétiser les problèmes intérieurs (3.10) que le couplage faible (3.2) soit de type BEM-BEM ou de type FEM-BEM. Nous rappelons que  $T_-$  est optimal pour le couplage faible (3.2) :

$$T_- = -\Lambda_{+, k_+}.$$

### Couplage faible BEM-BEM

Lorsque le couplage faible (3.2) est de type BEM-BEM, la discrétisation de la formulation initiale que nous avons choisi d'utiliser pour résoudre les problèmes intérieurs (3.10) :

$$\frac{1}{2}\rho T_-^{-1}\gamma_N^- u - D_{k_-}\gamma_D^- u + S_{k_-}\gamma_N^- u = \frac{1}{2}T_-^{-1}g \quad , \quad \frac{1}{2\rho}T_- \gamma_D^- u + D_{k_-}^* \gamma_N^- u - N_{k_-}\gamma_D^- u = \frac{1}{2\rho}g, \quad (3.13)$$

se fait exactement de la même manière que pour la formulation initiale (3.12) et par conséquent, ce paragraphe est volontairement succinct. La version discrète de la formulation initiale (3.13) s'écrit, sous forme matricielle compressée, comme suit :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2\rho}\mathbb{J}_{\Gamma,P_1}\mathbb{T}_- - \mathbb{N}_{k_-} & \mathbb{D}_{k_-} \\ -\mathbb{D}_{k_-}^t & \frac{\rho}{2}\mathbb{J}_{\Gamma,P_1}\mathbb{T}_-^{-1} + \mathbb{S}_{k_-} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \{\gamma_D^- u\} \\ \{\gamma_N^- u\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\rho}\mathbb{J}_{\Gamma,P_1}\{g\} \\ \frac{1}{2}\mathbb{J}_{\Gamma,P_1}\{\tilde{g}\} \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbb{T}_-\{\tilde{g}\} = \{g\}.$$

Enfin, les formes discrètes des différents opérateurs de transmission  $T_-$  sont données ci-dessous :

$$\begin{aligned} T_- = -\Lambda_{+,k_+}^{\text{sq},N_p,\theta_p} & \Rightarrow \mathbb{T}_- = -ik_+ \mathbb{P}_{\Gamma,P_1,k_+}^{N_p,\theta_p}, \\ T_- = -\Lambda_{+,k_+}^0 & \Rightarrow \mathbb{T}_- = -ik_+ Id. \end{aligned}$$

### Couplage faible FEM-BEM

Pour le couplage faible FEM-BEM, les problèmes intérieurs (3.10) sont discrétisés *via* la formulation variationnelle suivante :

$$\forall v \in \mathbb{H}^1(\Omega_-), \quad \int_{\Omega_-} \rho \nabla u \cdot \nabla \bar{v} \, d\Omega_- - \int_{\Omega_-} \rho k_-^2 u \bar{v} \, d\Omega_- + \overline{\langle T_- \gamma_D^- u; \gamma_D^- v \rangle} = \overline{\langle g; \gamma_D^- v \rangle}.$$

Nous commençons donc par expliciter cette formulation variationnelle pour les deux choix possibles de l'opérateur de transmission  $T_-$ .

**Proposition 3.13** (Formulations variationnelles pour les problèmes intérieurs).

Si  $T_- = -\Lambda_{+,k_+}^{\text{sq},N_p,\theta_p}$ , la formulation variationnelle pour le problème intérieur (3.10) est la suivante :

$$\begin{aligned} \forall v \in \mathbb{H}^1(\Omega_-), \quad & \int_{\Omega_-} \rho \nabla u \cdot \nabla \bar{v} \, d\Omega_- - \int_{\Omega_-} \rho k_-^2 u \bar{v} \, d\Omega_- - ik_+ R_0 \int_{\Gamma} \gamma_D^- u \gamma_D^- \bar{v} \, d\Gamma + ik_+ \sum_{l=1}^{N_p} \frac{A_l}{B_l} \int_{\Gamma} u_l \gamma_D^- \bar{v} \, d\Gamma \\ & = \overline{\langle g; \gamma_D^- v \rangle}, \\ \forall v \in \mathbb{H}^1(\Gamma), \quad & \int_{\Gamma} u_l \bar{v} \, d\Gamma - B_l \int_{\Gamma} \frac{1}{k_{+, \epsilon}^2} \nabla_{\Gamma} u_l \cdot \nabla_{\Gamma} \bar{v} \, d\Gamma = \int_{\Gamma} \gamma_D^- u \bar{v} \, d\Gamma. \end{aligned}$$

Si  $T_- = -\Lambda_{+,k_+}^0$ , la formulation variationnelle permettant de résoudre le problème intérieur (3.10) s'écrit comme suit :

$$\forall v \in \mathbb{H}^1(\Omega_-), \quad \int_{\Omega_-} \rho \nabla u \cdot \nabla \bar{v} \, d\Omega_- - \int_{\Omega_-} \rho k_-^2 u \bar{v} \, d\Omega_- - ik_+ \int_{\Gamma} \gamma_D^- u \gamma_D^- \bar{v} \, d\Gamma = \overline{\langle g; \gamma_D^- v \rangle}.$$

Enfin, nous donnons, sous forme matricielle, les formes discrètes des formulations variationnelles précédentes qui sont, contrairement au cas du couplage faible BEM-BEM, basées sur les éléments finis  $P_2$  hiérarchiques pour des questions de précision.

**Proposition 3.14** (Approximations de type racine carrée du DtN extérieur).

Si  $T_- = -\Lambda_{+,k_+}^{\text{sq},N_p,\theta_p}$ , la forme discrète de la formulation variationnelle du problème intérieur (3.10), écrite sous forme matricielle, est la suivante :

$$\begin{pmatrix} \mathbb{H}_{\Omega_-,P_2}^{\rho} - \mathbb{J}_{\Omega_-,P_2}^{\rho k_-^2} - ik_+ R_0 \mathbb{G}^t \mathbb{J}_{\Gamma,P_2} \mathbb{G} & ik_+ \frac{A_1}{B_1} \mathbb{G}^t \mathbb{J}_{\Gamma,P_2} & \cdots & ik_+ \frac{A_{N_p}}{B_{N_p}} \mathbb{G}^t \mathbb{J}_{\Gamma,P_2} \\ -\mathbb{J}_{\Gamma,P_2} \mathbb{G} & \mathbb{J}_{\Gamma,P_2} - B_1 \mathbb{H}_{\Gamma,P_2}^{\frac{1}{k_{+, \epsilon}^2}} & & (0) \\ \vdots & & \ddots & \\ -\mathbb{J}_{\Gamma,P_2} \mathbb{G} & (0) & & \mathbb{J}_{\Gamma,P_2} - B_{N_p} \mathbb{H}_{\Gamma,P_2}^{\frac{1}{k_{+, \epsilon}^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \{u\} \\ * \\ \vdots \\ * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{G}^t \mathbb{J}_{\Gamma,P_2} \mathbb{P}_{\Gamma,P_1 \rightarrow P_2} \{g\} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nous ne compressons pas cette matrice comme dans le cas du couplage faible BEM-BEM. Bien que cela soit possible, comme suit :

$$\left( \mathbb{H}_{\Omega_-, P_2}^\rho - \mathbb{J}_{\Omega_-, P_2}^{\rho k_-^2} + \mathbb{G}^t \mathbb{J}_{\Gamma, P_2} \mathbb{T}_- \mathbb{G} \right) \{u\} = \mathbb{G}^t \mathbb{J}_{\Gamma, P_2} \mathbb{P}_{\Gamma, P_1 \rightarrow P_2} \{g\} \quad , \quad \mathbb{T}_- = -ik_+ \mathbb{P}_{\Gamma, P_2, k_+}^{N_p, \theta_p},$$

$\mathbb{P}_{\Gamma, P_2, k_+}^{N_p, \theta_p}$  étant défini de la même manière que  $\mathbb{P}_{\Gamma, P_1, k_+}^{N_p, \theta_p}$ , l'intérêt de la compression est limité dans ce cas.

En effet, cette dernière dégrade le taux de remplissage de la matrice  $\mathbb{H}_{\Omega_-, P_2}^\rho - \mathbb{J}_{\Omega_-, P_2}^{\rho k_-^2} - ik_+ R_0 \mathbb{G}^t \mathbb{J}_{\Gamma, P_2} \mathbb{G}$  puisqu'elle lui ajoute des coefficients correspondant à des interactions surfaciques entre les éléments finis rattachés à un sommet ou à une arête du bord du maillage. Bien que le nombre de ces éléments finis soit faible devant le nombre total d'éléments finis, il n'est tout de même pas négligeable, limitant ainsi l'intérêt de la compression. Pour finir, la compression de la matrice permettant de résoudre le problème intérieur (3.10) requiert l'assemblage de  $\mathbb{P}_{\Gamma, P_2, k_+}^{N_p, \theta_p}$  et cette matrice n'est pas réutilisable pour évaluer  $T_-$  lors de la résolution du couplage faible (3.2) puisque, au niveau discret,  $T_-$  correspond à un opérateur de  $Span(e_i : i \in \{1; \dots; N_s^2\})$  dans lui-même.

**Proposition 3.15** (Approximation d'ordre 0 du DtN extérieur).

Si  $T_- = -\Lambda_{+, k_+}^0$ , la forme discrète de la formulation variationnelle du problème intérieur (3.10) s'écrit, sous forme matricielle, comme suit :

$$\left( \mathbb{H}_{\Omega_-, P_2}^\rho - \mathbb{J}_{\Omega_-, P_2}^{\rho k_-^2} - ik_+ \mathbb{G}^t \mathbb{J}_{\Gamma, P_2} \mathbb{G} \right) \{u\} = \mathbb{G}^t \mathbb{J}_{\Gamma, P_2} \mathbb{P}_{\Gamma, P_1 \rightarrow P_2} \{g\}.$$

## 3.4 Résultats numériques

Nous présentons ici des résultats numériques concernant la résolution par la méthode des éléments finis du couplage faible (3.2) optimisé. Nous commençons par nous intéresser au couplage faible de type BEM-BEM. Nous traiterons ensuite le cas du couplage faible de type FEM-BEM de manière moins exhaustive.

Le but premier de ce travail est de minimiser le nombre d'itérations GMRES nécessaires à la résolution du couplage faible (3.2). Des résultats que nous présentons dans cette section, nous pourrions affirmer quels opérateurs de transmission il faut choisir en pratique pour atteindre ce but. Notons toutefois que le temps de calcul d'une itération GMRES dépend du choix des opérateurs de transmission. Nous avons par exemple déjà mentionné que l'utilisation des approximations intégrales des opérateurs DtN intérieurs est plus coûteuse que celle des approximations de type racine carrée qui demande elle-même plus de ressources que celle des approximations d'ordre 0. Le temps de calcul d'une itération GMRES est également très dépendant de l'implémentation de l'évaluation des opérateurs de transmission et des opérateurs de résolution. Pour cette raison, nous ne présenterons pas les temps de calcul qu'il nous a fallu pour résoudre le couplage faible (3.2). En effet, notre implémentation du couplage faible (3.2) n'a pas été optimisée, de sorte que les temps de calculs que nous avons obtenus ne sont pas représentatifs du potentiel de la méthode. Par exemple, nous n'avons pas utilisé de méthodes de décomposition de domaine pour résoudre les problèmes intérieurs (3.10). Les problèmes extérieurs (3.9) ont quant à eux été résolus de manière directe et non itérative, qui plus est sans utiliser de méthodes de compression. Nous n'avons pas non plus résolu les problèmes intérieurs (3.10) et extérieurs (3.9) en parallèle à chaque itération de la procédure GMRES. Pour finir, nous n'avons pas cherché à paralléliser l'évaluation numérique des opérateurs de transmission.

### 3.4.1 Couplage faible BEM-BEM

Nous confirmons dans un premier temps que l'approximation (3.11) est précise si les paramètres  $N_p$  et  $\theta_p$  sont choisis comme suit :

$$N_p = 4 \quad , \quad \theta_p = \frac{\pi}{2}.$$

Pour ce faire, nous présentons, dans la Figure 3.6, l'évolution du nombre d'itérations GMRES pour le couplage faible BEM-BEM optimisé en fonction du nombre d'onde intérieur lorsque les opérateurs de transmission correspondent aux approximations  $\Lambda_{+, k_+}^{\text{sq}, N_p, \theta_p}$  et  $\Lambda_{-, k_-, \rho}^{\text{sq}, N_p, \theta_p}$  des opérateurs DtN. Pour cette figure, l'objet diffractant est la sphère mentionnée dans la sous-section 3.2.3,  $k_+ = 10$ ,  $\rho = 5$  et plusieurs paires de paramètres  $(N_p; \theta_p)$  sont considérées. Notons par ailleurs que la tolérance GMRES a été fixée à  $10^{-6}$ . Dans le premier graphique, la valeur de  $\theta_p$  est fixée à  $\frac{\pi}{2}$ . Dans le second,  $N_p$  est égal à 4. Enfin, le pas  $h$

du maillage est égal au cinquième de la plus petite longueur d'onde du problème de diffraction-transmission (3.1), à savoir :

$$h = \frac{1}{5} \min(\lambda_-; \lambda_+) \quad \text{avec} \quad \lambda_{\pm} = \frac{2\pi}{k_{\pm}}.$$

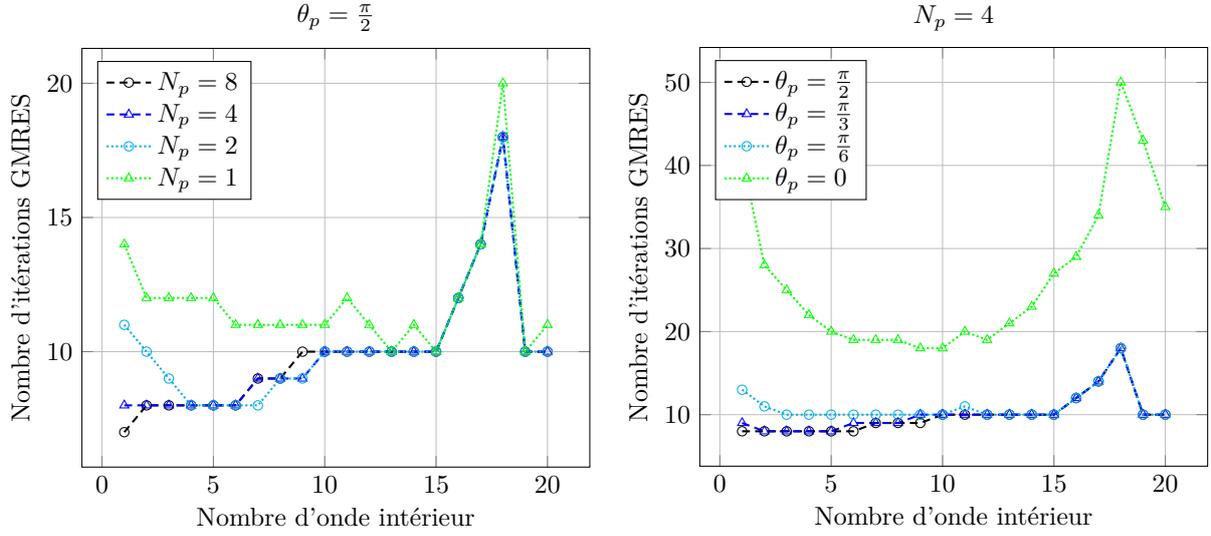


FIGURE 3.6 – Influence des paramètres  $N_p$  et  $\theta_p$  sur la convergence du couplage faible BEM-BEM optimisé

Les résultats de la Figure 3.6 confirment bien ceux de son analogue basé sur les harmoniques sphériques, à savoir la Figure 2.7. Il est suffisant de ne considérer que 4 termes dans les approximations de Padé afin d'obtenir une bonne convergence GMRES pour le couplage faible BEM-BEM optimisé. De plus, la valeur optimale de la rotation de branche est  $\frac{\pi}{2}$ . Par conséquent, à partir de maintenant et jusqu'à la fin de cette section, les valeurs de  $N_p$  et de  $\theta_p$  sont respectivement fixées à 4 et à  $\frac{\pi}{2}$  pour tous les résultats que nous présentons. Pour finir, remarquons que la Figure 3.6 illustre bien les phénomènes de résonance mentionnés dans la sous-section 2.4.5.

La Figure 3.7 montre l'évolution du nombre d'itérations GMRES pour le couplage faible BEM-BEM optimisé en fonction du nombre d'onde intérieur. Elle est formée de quatre graphiques qui correspondent tous à des géométries différentes, à savoir la sphère, l'ellipsoïde, le cube et le cube avec un coin rentrant mentionnés dans la sous-section 3.2.3. Ces graphiques sont constitués de six courbes chacune associée à une paire d'opérateurs de transmission  $(T_-; T_+)$ . Les opérateurs de transmission correspondent par ailleurs aux approximations  $\Lambda_{+,k_+}^{\text{sq},N_p,\theta_p}$ ,  $\Lambda_{+,k_+}^0$ ,  $\Lambda_{-,k_-, \rho}^{\text{int},N_p,\theta_p}$ ,  $\Lambda_{-,k_-, \rho}^{\text{sq},N_p,\theta_p}$  et  $\Lambda_{-,k_-, \rho}^0$  des opérateurs DtN. Les paramètres physiques  $k_-$ ,  $k_+$  et  $\rho$  diffèrent en fonction des géométries et sont indiqués sur la figure. Enfin, le pas du maillage et la tolérance GMRES sont choisis de la même manière que pour la Figure 3.6.

Les courbes de la Figure 3.7 suggèrent que le couplage faible BEM-BEM optimisé doit être basé sur les paires d'opérateurs de transmission suivantes :

$$\left( \Lambda_{+,k_+}^{\text{sq},N_p,\theta_p}; \Lambda_{-,k_-, \rho}^{\text{sq},N_p,\theta_p} \right) \quad , \quad \left( \Lambda_{+,k_+}^{\text{sq},N_p,\theta_p}; \Lambda_{-,k_-, \rho}^0 \right), \quad (3.14)$$

pour être robuste et adapté à des nombres d'onde élevés. En effet, même si ces paires ne sont pas optimales pour toutes les géométries, elles permettent d'obtenir de très bonnes convergences GMRES pour l'intégralité des objets diffractant considérés. De plus, quand bien même elles ne seraient pas optimales (sphère et ellipsoïde), les convergences GMRES proposées par les paires d'opérateurs de transmission (3.14) le sont quasiment. Nous rappelons que tout ceci s'explique par le fait que  $\Lambda_{+,k_+}^{\text{sq},N_p,\theta_p}$  est une très bonne approximation de  $\Lambda_{+,k_+}$ , ce qui permet d'assurer la *quasi-nilpotence* de  $S_\pi$ . Concrètement,  $\Lambda_{+,k_+}^{\text{sq},N_p,\theta_p}$  compense le fait que  $\Lambda_{-,k_-, \rho}^{\text{sq},N_p,\theta_p}$  et  $\Lambda_{-,k_-, \rho}^0$  ne sont pas de très bonnes approximations de  $\Lambda_{-,k_-, \rho}$ . Il est intéressant de remarquer que les convergences GMRES proposées par les paires d'opérateurs de transmission (3.14) sont *quasi-identiques* lorsque le nombre d'onde intérieur est élevé. Ceci est dû au fait que l'approximation suivante est d'autant plus précise que la valeur de  $k_-$  est importante :

$$\Lambda_{-,k_-, \rho}^{\text{sq}} \approx \Lambda_{-,k_-, \rho}^0.$$

En revanche, lorsque le nombre d'onde intérieur est faible,  $\Lambda_{-,k_-, \rho}^{\text{sq}, N_p, \theta_p}$  donne de meilleurs résultats que  $\Lambda_{-,k_-, \rho}^0$ . En pratique, nous pouvons donc imaginer implémenter le couplage faible BEM-BEM optimisé non pas à partir d'une seule mais des deux paires d'opérateurs de transmission (3.14). Cette solution consisterait à utiliser  $\Lambda_{-,k_-, \rho}^{\text{sq}, N_p, \theta_p}$  comme opérateur de transmission extérieur lorsque le nombre d'onde intérieur est faible à modéré et à remplacer  $\Lambda_{-,k_-, \rho}^{\text{sq}, N_p, \theta_p}$  par  $\Lambda_{-,k_-, \rho}^0$  pour des nombres d'onde intérieurs plus élevés, réduisant ainsi le coût d'une itération de la procédure GMRES. Les paires d'opérateurs de transmission (3.14) présentent un autre atout qui les rend particulièrement bien adaptées au cas où les nombres d'onde du problème de diffraction-transmission (3.1) sont élevés. En effet, ces paires d'opérateurs de transmission permettent d'obtenir la plus faible dépendance en le nombre d'onde intérieur du nombre d'itérations GMRES nécessaires à la résolution du couplage faible BEM-BEM optimisé. L'augmentation du nombre d'itérations GMRES dont il est ici question dépend toutefois de la géométrie considérée. Elle est en effet très faible pour la sphère, un peu plus importante pour l'ellipsoïde et significative pour le cube ainsi que le cube avec un coin rentrant. Concrètement, cela signifie que  $\Lambda_{+,k_+}^{\text{sq}}$  est une moins bonne approximation de  $\Lambda_{+,k_+}$  pour l'ellipsoïde, le cube et le cube avec un coin rentrant que pour la sphère. Ceci peut se justifier en remarquant que la sphère est l'objet le plus favorable pour que  $\Lambda_{+,k_+}^{\text{sq}}$  soit une bonne approximation de  $\Lambda_{+,k_+}$ . En effet, il s'agit d'un objet lisse, convexe et à courbure constante. L'ellipsoïde est aussi un objet lisse et convexe mais sa courbure n'est toutefois pas constante. Le cube lui est également convexe mais n'est pas lisse. Enfin, le cube avec un coin rentrant n'est ni convexe ni lisse. Pour finir, nous mentionnons que des travaux sur le développement de meilleures approximations de  $\Lambda_{+,k_+}$  que  $\Lambda_{+,k_+}^{\text{sq}}$  pour des polyèdres sont actuellement en cours (Modave, Geuzaine et Antoine).

Nous faisons à présent quelques commentaires sur les paires d'opérateurs de transmission suivantes :

$$\left( \Lambda_{+,k_+}^{\text{sq}, N_p, \theta_p}; \Lambda_{-,k_-, \rho}^{\text{int}, N_p, \theta_p} \right) \quad , \quad \left( \Lambda_{+,k_+}^0; \Lambda_{-,k_-, \rho}^{\text{int}, N_p, \theta_p} \right). \quad (3.15)$$

Dans le cas de la sphère, ces dernières offrent de bonnes convergences GMRES pour le couplage faible BEM-BEM optimisé. La convergence proposée par  $(\Lambda_{+,k_+}^0; \Lambda_{-,k_-, \rho}^{\text{int}, N_p, \theta_p})$  permet par ailleurs de confirmer que  $\Lambda_{-,k_-, \rho}^{\text{int}}$  est une bonne approximation de  $\Lambda_{-,k_-, \rho}$ . En effet,  $\Lambda_{+,k_+}^0$  n'est pas une approximation suffisamment précise de  $\Lambda_{+,k_+}$  pour rendre  $S_\pi$  *quasi-nilpotent*. Pour l'ellipsoïde, le cube et le cube avec un coin rentrant, les résultats pour les paires d'opérateurs de transmission (3.15) sont toutefois beaucoup plus mitigés. Remarquons que si certaines courbes stagnent à 50 itérations pour l'ellipsoïde, le cube et le cube avec un coin rentrant, ceci vient du fait que nous avons arrêté la procédure GMRES après 50 itérations. Sans cette limite, le nombre d'itérations GMRES serait beaucoup plus important. Dans l'optique d'expliquer les résultats obtenus pour l'ellipsoïde, le cube et le cube avec un coin rentrant, nous commençons par rappeler que l'approximation  $\Lambda_{-,k_-, \rho}^{\text{int}}$  est construite comme suit :

$$\Lambda_{-,k_-, \rho}^{\text{int}} = \rho(S_{k_-}^{-1} + \Lambda_{+,k_+}^{\text{sq}}).$$

De plus, nous savons que la qualité de  $\Lambda_{-,k_-, \rho}^{\text{int}}$  comme approximation de  $\Lambda_{-,k_-, \rho}$  est directement liée à celle de  $\Lambda_{+,k_+}^{\text{sq}}$  en tant qu'approximation de  $\Lambda_{+,k_+}$ . Pour le cube et le cube avec un coin rentrant, nous avons déjà établi que  $\Lambda_{+,k_+}^{\text{sq}}$  n'est pas une très bonne approximation de  $\Lambda_{+,k_+}$ . Il est donc normal que  $\Lambda_{-,k_-, \rho}^{\text{int}, N_p, \theta_p}$  n'approxime pas  $\Lambda_{-,k_-, \rho}$  de manière très précise. Il est toutefois surprenant que la paire d'opérateurs de transmission  $(\Lambda_{+,k_+}^{\text{sq}, N_p, \theta_p}; \Lambda_{-,k_-, \rho}^{\text{int}, N_p, \theta_p})$  offre une moins bonne convergence GMRES pour le couplage faible BEM-BEM optimisé que la paire  $(\Lambda_{+,k_+}^{\text{sq}, N_p, \theta_p}; \Lambda_{-,k_-, \rho}^{\text{sq}, N_p, \theta_p})$ . Cela suggère que la qualité des approximations de  $\Lambda_{-,k_-, \rho}$  obtenues à partir de la relation :

$$\Lambda_{-,k_-, \rho} = \rho(S_{k_-}^{-1} + \Lambda_{+,k_+}),$$

dépend très fortement de la qualité de l'approximation utilisée pour  $\Lambda_{+,k_+}$ . Plus précisément, une petite erreur sur l'approximation de  $\Lambda_{+,k_+}$  se traduit par une erreur beaucoup plus importante sur l'approximation de  $\Lambda_{-,k_-, \rho}$ . Pour finir, nous discutons du cas de l'ellipsoïde. Pour cette géométrie, nous avons déjà mentionné que  $\Lambda_{+,k_+}^{\text{sq}}$  est une bonne approximation de  $\Lambda_{+,k_+}$ , quoique de qualité légèrement inférieure au cas de la sphère. Les résultats pour la paire d'opérateurs de transmission  $(\Lambda_{+,k_+}^0; \Lambda_{-,k_-, \rho}^{\text{int}, N_p, \theta_p})$  semblent indiquer que cela est suffisant pour faire dégénérer  $\Lambda_{-,k_-, \rho}^{\text{int}}$ . Toutefois, cette dégénérescence apparaît comme étant modérée puisque la paire d'opérateurs de transmission  $(\Lambda_{+,k_+}^{\text{sq}, N_p, \theta_p}; \Lambda_{-,k_-, \rho}^{\text{int}, N_p, \theta_p})$  donne la meilleure convergence GMRES pour le couplage faible BEM-BEM optimisé. Concrètement,  $\Lambda_{+,k_+}^{\text{sq}}$  permet de compenser la dégénérescence de  $\Lambda_{-,k_-, \rho}^{\text{int}}$ .

Pour finir, les paires d'opérateurs de transmission :

$$(\Lambda_{+,k_+}^0; \Lambda_{-,k_-, \rho}^0) \quad , \quad (\Lambda_{+,k_+}^0; \Lambda_{-,k_-, \rho}^{\text{sq}, N_p, \theta_p}),$$

ne sont pas adaptées lorsque les nombres d'onde du problème de diffraction-transmission (3.1) sont élevés et ceci quelle que soit la géométrie considérée. En effet, le nombre d'itérations GMRES pour le couplage faible BEM-BEM optimisé construit à partir de ces paires d'opérateurs de transmission croît drastiquement avec le nombre d'onde intérieur. La mauvaise convergence GMRES proposée par ces choix des opérateurs de transmission est due au fait que  $\Lambda_{+,k_+}^0$ ,  $\Lambda_{-,k_-, \rho}^0$  et  $\Lambda_{-,k_-, \rho}^{\text{sq}}$  ne sont pas de bonnes approximations de  $\Lambda_{+,k_+}$  et  $\Lambda_{-,k_-, \rho}$ .

La Figure 3.8 montre des historiques de convergence GMRES pour le couplage faible BEM-BEM optimisé. Elle est conçue exactement de la même manière que la Figure 3.7 et ici aussi, les pas des maillages sont égaux au cinquième de la plus petite longueur d'onde en jeu. Les historiques de convergence GMRES sont intéressants pour plusieurs raisons. Dans un premier temps, ils permettent d'avoir une estimation du nombre d'itérations GMRES nécessaires pour atteindre un résidu relatif donné. Avec ces historiques, il est également possible de savoir si la vitesse de convergence est constante ou non tout au long de la procédure GMRES. Par exemple, pour les paires d'opérateurs de transmission suivantes :

$$(\Lambda_{+,k_+}^{\text{sq}, N_p, \theta_p}; \Lambda_{-,k_-, \rho}^{\text{sq}, N_p, \theta_p}) \quad , \quad (\Lambda_{+,k_+}^{\text{sq}, N_p, \theta_p}; \Lambda_{-,k_-, \rho}^0),$$

la vitesse de convergence GMRES semble être identique itération après itération. En revanche, pour les paires d'opérateurs de transmission :

$$(\Lambda_{+,k_+}^{\text{sq}, N_p, \theta_p}; \Lambda_{-,k_-, \rho}^{\text{int}, N_p, \theta_p}) \quad , \quad (\Lambda_{+,k_+}^0; \Lambda_{-,k_-, \rho}^{\text{int}, N_p, \theta_p}),$$

la vitesse de convergence GMRES à la première itération est très importante et diminue dès la seconde, cette diminution étant drastique dans le cas de l'ellipsoïde, du cube et du cube avec un coin rentrant. Pour finir, les historiques de convergence GMRES nous permettent de visualiser plus explicitement que les vitesses de convergence GMRES sont très faibles pour les paires d'opérateurs de transmission que nous savons mauvaises.

Dans la Figure 3.9, nous montrons l'évolution du nombre d'itérations GMRES pour le couplage faible BEM-BEM optimisé en fonction du raffinement du maillage, la tolérance GMRES étant égale à  $10^{-6}$ . Cette figure est elle aussi construite sur le même principe que la Figure 3.7. Le raffinement du maillage est ici quantifié grâce au nombre de points par longueur d'onde, noté  $n_\lambda$ . Plus précisément, le pas du maillage est donné par :

$$h = \frac{1}{n_\lambda} \min(\lambda_-; \lambda_+) \quad \text{avec} \quad \lambda_\pm = \frac{2\pi}{k_\pm}.$$

Pour les paires suivantes d'opérateurs de transmission :

$$(\Lambda_{+,k_+}^{\text{sq}, N_p, \theta_p}; \Lambda_{-,k_-, \rho}^{\text{sq}, N_p, \theta_p}) \quad , \quad (\Lambda_{+,k_+}^{\text{sq}, N_p, \theta_p}; \Lambda_{-,k_-, \rho}^{\text{int}, N_p, \theta_p}) \quad , \quad (\Lambda_{+,k_+}^0; \Lambda_{-,k_-, \rho}^{\text{sq}, N_p, \theta_p}) \quad , \quad (\Lambda_{+,k_+}^0; \Lambda_{-,k_-, \rho}^{\text{int}, N_p, \theta_p}),$$

le raffinement du maillage ne dégrade pas significativement la convergence GMRES pour le couplage faible BEM-BEM optimisé. Remarquons par ailleurs que le nombre d'itérations GMRES nécessaires à la résolution du couplage faible BEM-BEM optimisé est *quasi*-constant, voire constant dans certains cas, pour les paires d'opérateurs de transmission suivantes :

$$(\Lambda_{+,k_+}^{\text{sq}, N_p, \theta_p}; \Lambda_{-,k_-, \rho}^{\text{sq}, N_p, \theta_p}) \quad , \quad (\Lambda_{+,k_+}^{\text{sq}, N_p, \theta_p}; \Lambda_{-,k_-, \rho}^{\text{int}, N_p, \theta_p}).$$

Avec les paires d'opérateurs de transmission :

$$(\Lambda_{+,k_+}^{\text{sq}, N_p, \theta_p}; \Lambda_{-,k_-, \rho}^0) \quad , \quad (\Lambda_{+,k_+}^0; \Lambda_{-,k_-, \rho}^0),$$

la convergence GMRES pour le couplage faible BEM-BEM optimisé se détériore toutefois avec le raffinement du maillage. Par conséquent, pour construire un couplage faible BEM-BEM robuste, il semble préférable de ne pas considérer un usage mixte des paires d'opérateurs de transmission :

$$(\Lambda_{+,k_+}^{\text{sq}, N_p, \theta_p}; \Lambda_{-,k_-, \rho}^{\text{sq}, N_p, \theta_p}) \quad , \quad (\Lambda_{+,k_+}^{\text{sq}, N_p, \theta_p}; \Lambda_{-,k_-, \rho}^0),$$

comme nous l'avons suggéré précédemment mais de se limiter à l'utilisation de la paire d'opérateurs de transmission :

$$(\Lambda_{+,k_+}^{\text{sq}, N_p, \theta_p}; \Lambda_{-,k_-, \rho}^{\text{sq}, N_p, \theta_p}).$$

Les derniers résultats que nous donnons concernant le couplage faible BEM-BEM optimisé sont regroupés dans les Figures 3.10 et 3.11. Ils ont été obtenus en utilisant la paire d'opérateurs de transmission :

$$(\Lambda_{+,k_+}^{\text{sq},N_p,\theta_p}; \Lambda_{-,k_-, \rho}^{\text{sq},N_p,\theta_p}).$$

Les Figures 3.10 et 3.11 montrent des courbes de SES bistatique pour la sphère, l'ellipsoïde, le cube et le cube avec un coin rentrant mentionnés dans la sous-section 3.2.3. La SES bistatique a par ailleurs été calculée pour la même onde incidente et dans le même plan que dans la sous-section 3.2.3. Pour chacune des géométries considérées, deux graphiques sont donnés. Le premier représente l'évolution de la SES bistatique, l'angle des coordonnées polaires variant de  $0^\circ$  à  $360^\circ$ . Afin d'obtenir ce graphique, nous avons fixé la tolérance GMRES pour la résolution du couplage faible BEM-BEM optimisé à  $10^{-4}$ . Le second graphique présente des courbes de SES bistatique tracées sur de petites plages de variation de l'angle des coordonnées polaires et obtenues avec différentes tolérances GMRES. Dans un premier temps, le but de ce graphique est de vérifier que la SES converge lorsque la tolérance GMRES décroît. Nous avons donc choisi les plages de variation de l'angle des coordonnées polaires de sorte qu'elles illustrent au mieux cette convergence. Enfin, le second graphique nous montre que, en pratique, la tolérance GMRES ne doit pas dépasser  $10^{-3}$  pour correctement estimer la SES.

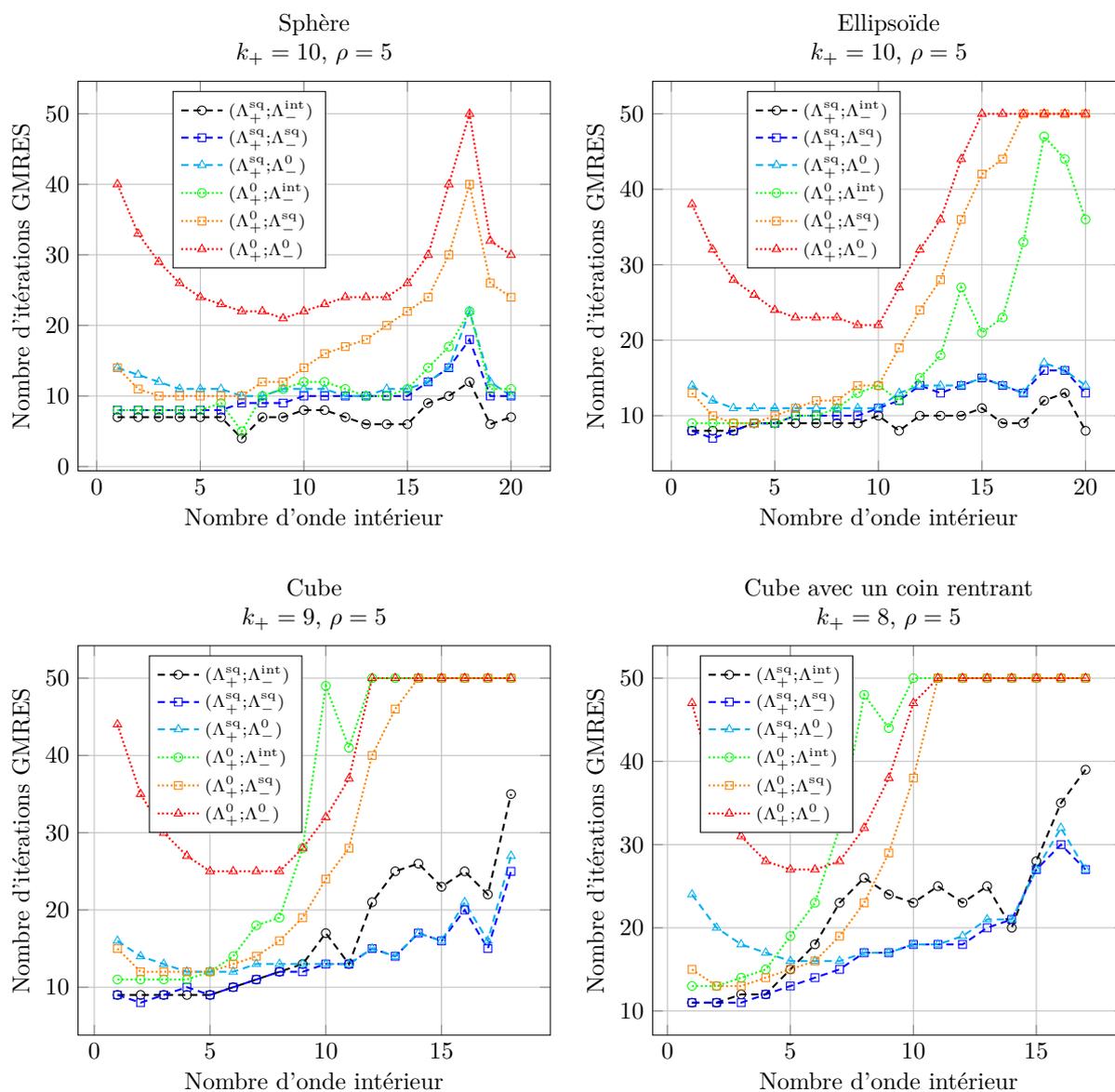


FIGURE 3.7 – Nombre d'itérations GMRES pour le couplage faible BEM-BEM optimisé en fonction du nombre d'onde intérieur

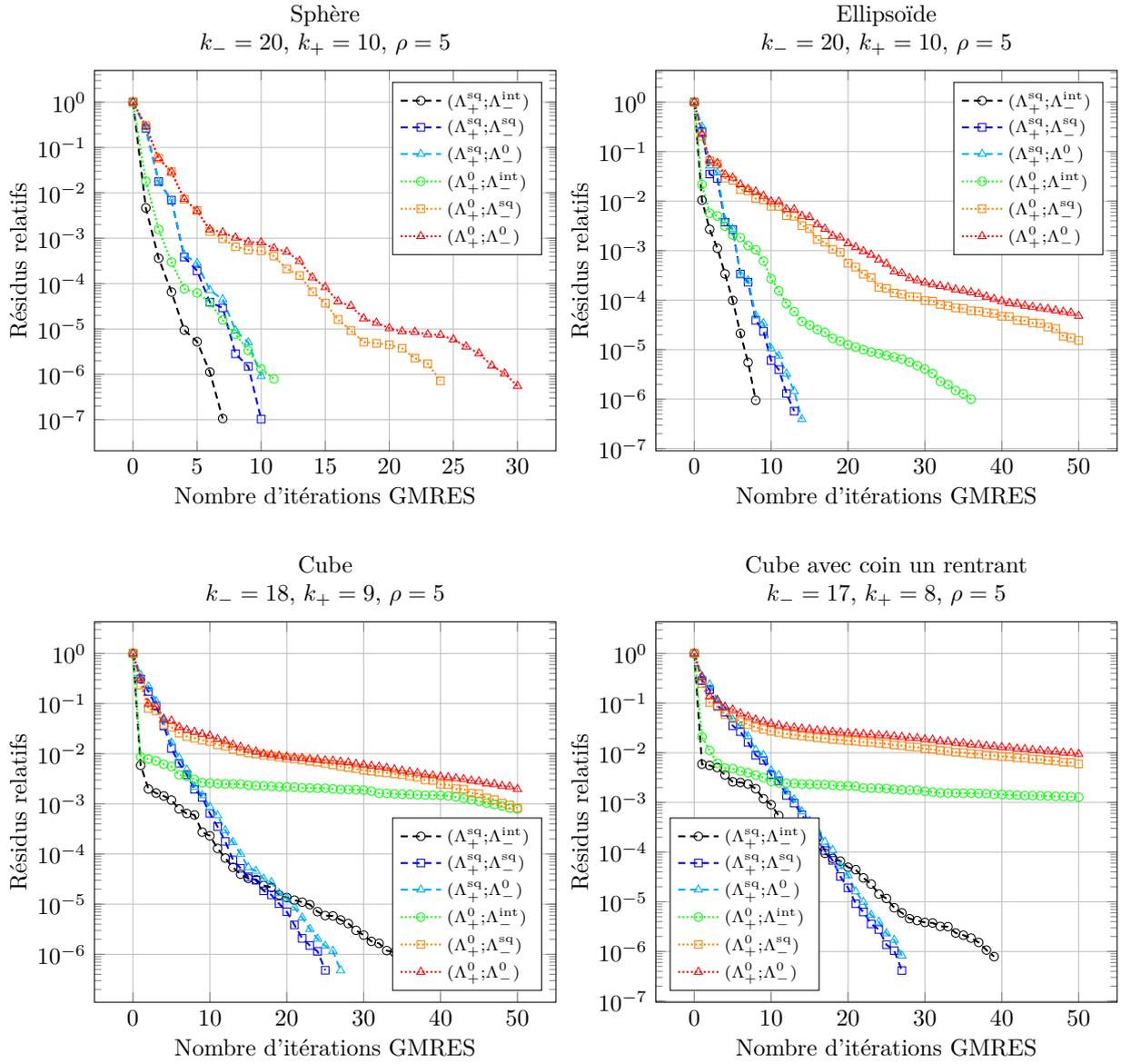


FIGURE 3.8 – Historiques de convergence GMRES pour le couplage faible BEM-BEM optimisé

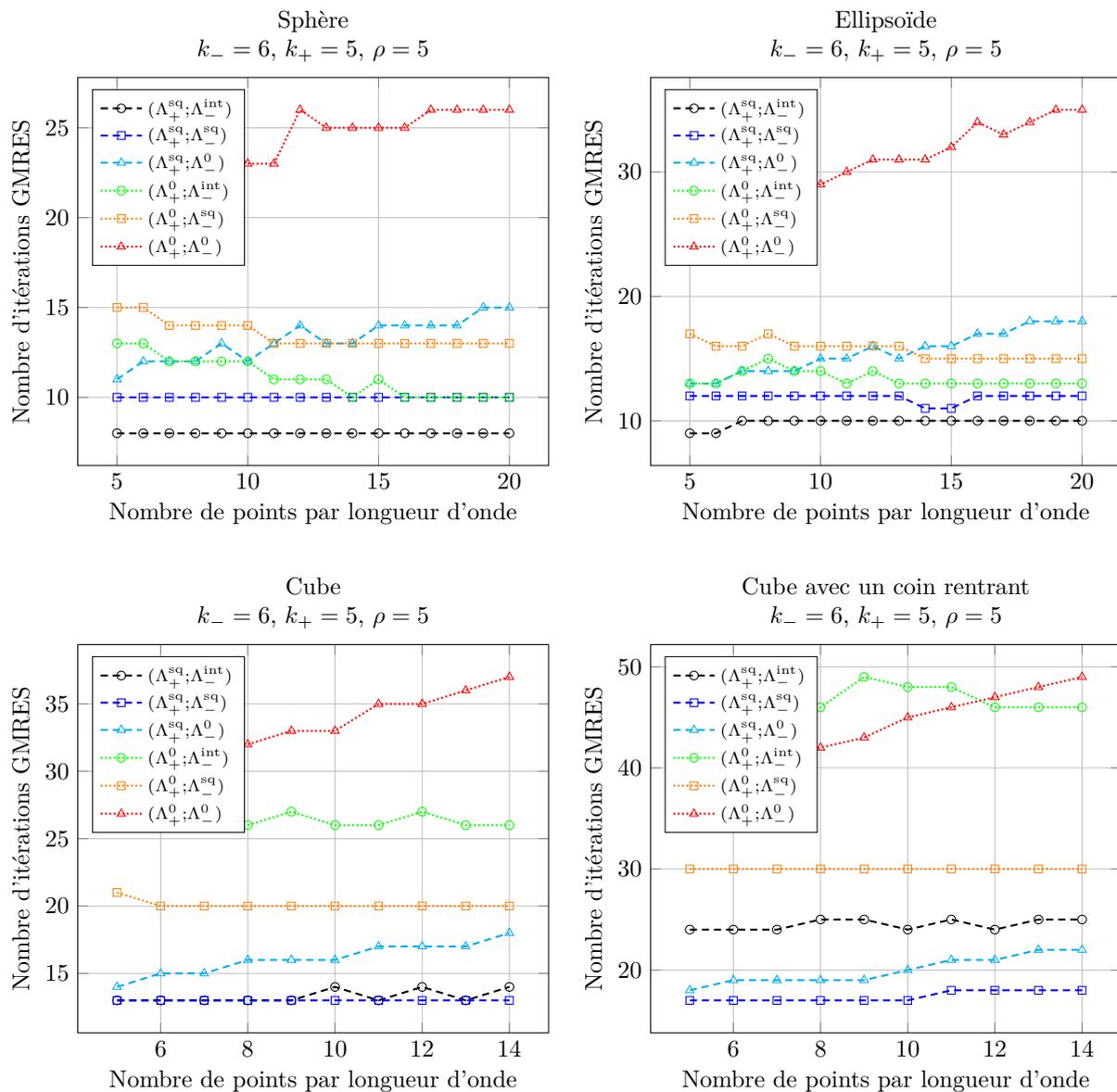


FIGURE 3.9 – Nombre d'itérations GMRES pour le couplage faible BEM-BEM optimisé en fonction du raffinement du maillage

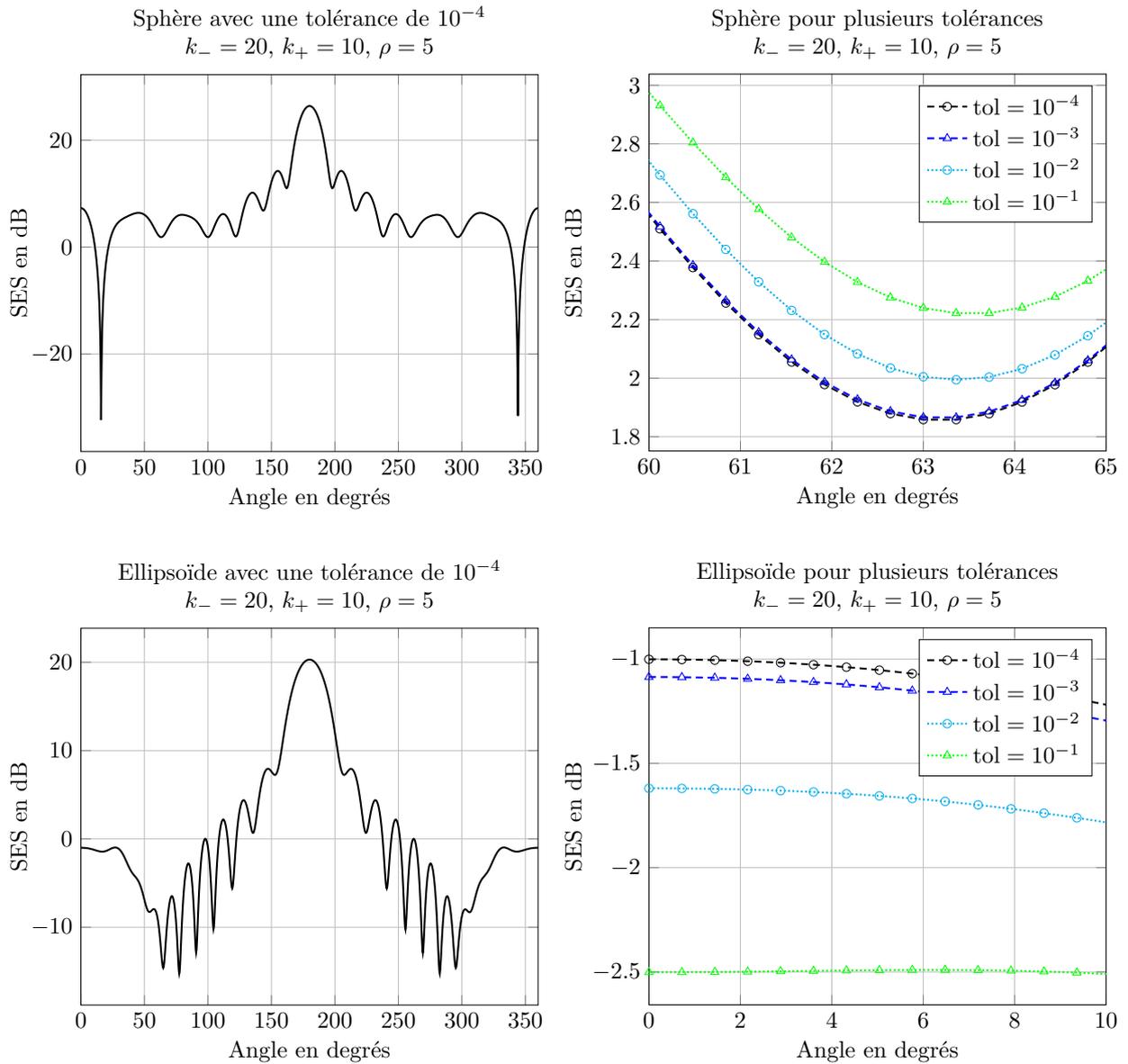


FIGURE 3.10 – Convergence de la SES par rapport à la tolérance GMRES pour le couplage faible BEM-BEM optimisé (sphère et ellipsoïde)

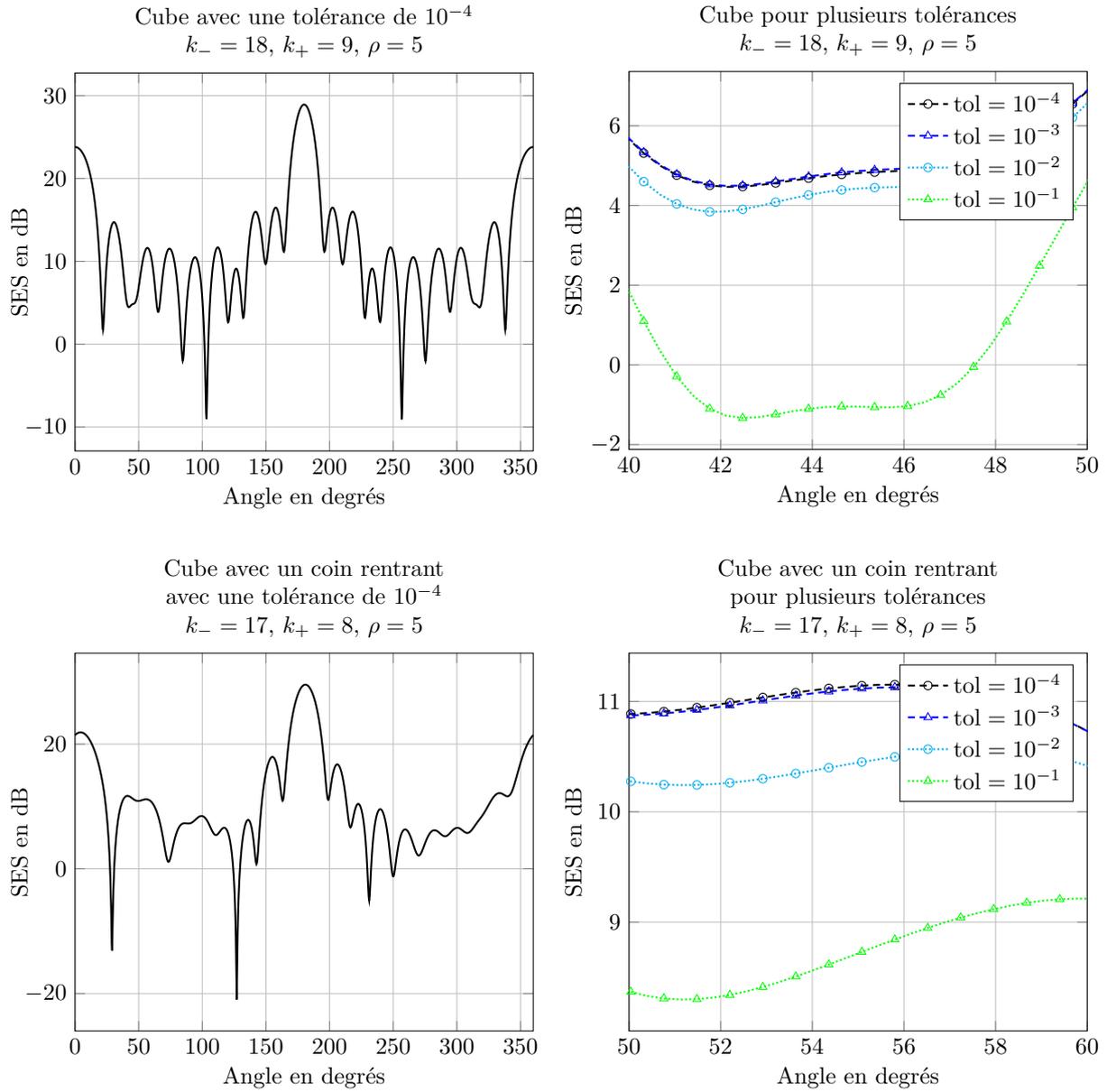


FIGURE 3.11 – Convergence de la SES par rapport à la tolérance GMRES pour le couplage faible BEM-BEM optimisé (cube et cube avec un coin rentrant)

### 3.4.2 Couplage faible FEM-BEM

Dans cette sous-section, nous nous limitons à confirmer la viabilité pratique du couplage faible FEM-BEM optimisé lorsque l'objet diffractant n'est pas homogène. Cette restriction aux objets diffractant non homogènes nous permet tout d'abord de ne pas multiplier les figures. Ajouté à cela, les résultats que nous avons présentés dans la sous-section précédente sont suffisants pour conclure sur la pertinence pratique du couplage faible optimisé lorsque l'objet diffractant est homogène et ceci indépendamment des méthodes utilisées pour résoudre les sous-problèmes. Nous rappelons en effet que, en pratique, le couplage faible optimisé n'est pas censé dépendre de manière significative de ces méthodes pourvu, bien entendu, qu'elles soient précises.

Nous avons testé le couplage faible FEM-BEM optimisé pour les mêmes géométries que le couplage faible BEM-BEM optimisé, à savoir la sphère, l'ellipsoïde, le cube et le cube avec un coin rentrant introduits dans la sous-section 3.2.3. Pour ces tests, les fonctions  $k_-$  et  $\rho$  ont été choisies comme suit :

$$k_-(\mathbf{x}) = k_{-,0}e^{-\|\mathbf{x}\|^2} \quad , \quad \rho(\mathbf{x}) = 2\rho_0e^{-\ln 2 \frac{\|\mathbf{x}\|^2}{r_{\max}^2}} \quad ,$$

la notation  $r_{\max}$  désignant le rayon maximal de l'objet diffractant considéré, à savoir :

$$r_{\max} = \max_{\mathbf{x} \in \Omega_-} \|\mathbf{x}\|.$$

Remarquons que les rayons maximaux de la sphère, de l'ellipsoïde, du cube et du cube avec un coin rentrant mentionnés précédemment sont respectivement égaux 1, 1.5,  $\sqrt{3}$  et  $\sqrt{3}$ . En outre, la fonction  $\rho$  vaut  $2\rho_0$  en l'origine et  $\rho_0$  en les points de  $\Omega_-$  les plus éloignés de l'origine. Pour finir,  $k_{-,0}$  et  $2\rho_0$  correspondent respectivement aux valeurs maximales des fonctions  $k_-$  et  $\rho$ .

Les résultats que nous présentons dans cette sous-section ont tous été obtenus en choisissant les paramètres des approximations de Padé de la sorte :

$$N_p = 4 \quad , \quad \theta_p = \frac{\pi}{2}.$$

Remarquons par ailleurs que les figures associées à ces résultats correspondent chacune, aussi bien en termes de contenu que de présentation, à l'analogue d'une des figures données dans la sous-section précédente pour le couplage faible BEM-BEM optimisé.

Dans la Figure 3.12, nous montrons l'évolution du nombre d'itérations GMRES nécessaires à la résolution du couplage faible FEM-BEM optimisé en fonction de  $k_{-,0}$ . La tolérance de la procédure GMRES a été fixée à  $10^{-6}$  et le pas du maillage sous-jacent au cinquième de la plus petite longueur d'onde, à savoir :

$$h = \frac{1}{5} \min(\lambda_-; \lambda_+) \quad \text{avec} \quad \lambda_- = \frac{2\pi}{\max(k_-)} = \frac{2\pi}{k_{-,0}} \quad , \quad \lambda_+ = \frac{2\pi}{k_+}.$$

Les résultats de cette figure sont en accord avec ce que nous avons observé dans la sous-section précédente pour le couplage faible BEM-BEM optimisé. La meilleure convergence GMRES pour le couplage faible FEM-BEM optimisé est notamment obtenue en utilisant la paire d'opérateurs de transmission :

$$(\Lambda_{+,k_+}^{\text{sq},N_p,\theta_p}; \Lambda_{-,k_-,\rho}^{\text{sq},N_p,\theta_p}).$$

Remarquons que, lorsque le nombre d'onde intérieur est élevé, les courbes associées aux paires d'opérateurs de transmission :

$$(\Lambda_{+,k_+}^{\text{sq},N_p,\theta_p}; \Lambda_{-,k_-,\rho}^{\text{sq},N_p,\theta_p}) \quad , \quad (\Lambda_{+,k_+}^{\text{sq},N_p,\theta_p}; \Lambda_{-,k_-,\rho}^0),$$

sont bien plus éloignées l'une de l'autre que pour le couplage faible BEM-BEM optimisé. Bien que cela puisse sembler contradictoire, il n'en est rien. Ces résultats se justifient en effet très simplement. Dans le cas de la sphère, par exemple, la valeur de  $k_-$  sur  $\Gamma$  est donnée par :

$$k_{-,0}e^{-1} \approx 0.37k_{-,0},$$

de sorte que même si  $k_{-,0} = 20$ , la valeur de  $k_-$  sur  $\Gamma$ , à savoir 7.36, est trop faible pour que l'approximation suivante soit précise :

$$\Lambda_{-,k_-,\rho}^{\text{sq},N_p,\theta_p} \approx \Lambda_{-,k_-,\rho}^0.$$

Dans la sous-section précédente, nous avons observé, pour certaines paires d'opérateurs de transmission, une croissance significative, en fonction du nombre d'onde intérieur, du nombre d'itérations GMRES nécessaires

à la résolution du couplage faible BEM-BEM optimisé. Notons que ce phénomène apparaît de manière beaucoup moins marquée dans la Figure 3.12. Cette très faible variation du nombre d'itérations GMRES par rapport au maximum du nombre d'onde intérieur ne doit toutefois pas être considérée comme une caractéristique intrinsèque et générique du couplage faible FEM-BEM optimisé. Elle est en effet très certainement spécifique au cas test considéré. De manière très informelle, il semblerait que le nombre d'itérations GMRES nécessaires à la résolution du couplage faible FEM-BEM optimisé soit plus sensible aux valeurs de  $k_-$  sur  $\Gamma$  qu'à ces valeurs sur  $\Omega_-$  tout entier.

La Figure 3.13 présente quant à elle l'impact du raffinement du maillage sur le nombre d'itérations GMRES nécessaires à la résolution du couplage faible FEM-BEM optimisé, la finesse du maillage étant caractérisée par le biais du nombre de points par longueur d'onde :

$$h = \frac{1}{n_\lambda} \min(\lambda_-; \lambda_+) \quad \text{avec} \quad \lambda_- = \frac{2\pi}{\max(k_-)} = \frac{2\pi}{k_{-,0}} \quad , \quad \lambda_+ = \frac{2\pi}{k_+}.$$

Remarquons que pour obtenir cette figure, nous nous sommes donnés une tolérance GMRES égale à  $10^{-6}$ . Contrairement au cas du couplage faible BEM-BEM optimisé, le nombre d'itérations GMRES nécessaires à la résolution du couplage faible FEM-BEM optimisé est légèrement plus sensible au raffinement du maillage lorsque les paires d'opérateurs de transmission suivantes sont utilisées :

$$(\Lambda_{+,k_+}^{\text{sq},N_p,\theta_p}; \Lambda_{-,k_-,\rho}^{\text{sq},N_p,\theta_p}).$$

Cette sensibilité est probablement due au fait que  $\Lambda_{-,k_-,\rho}^{\text{sq},N_p,\theta_p}$  approxime un peu moins bien  $\Lambda_{-,k_-,\rho}$  lorsque  $k_-$  et  $\rho$  sont variables. Quoiqu'il en soit, ce léger défaut du couplage faible FEM-BEM optimisé est quasiment insignifiant en pratique.

Pour finir, les Figures 3.14 et 3.15 montrent des courbes de SES obtenues grâce au couplage faible FEM-BEM optimisé et illustrent la convergence de la SES lorsque la tolérance de la procédure GMRES décroît. Elles ont été obtenues en fixant  $n_\lambda$  à 5 et en utilisant la paire d'opérateurs de transmission suivante :

$$(\Lambda_{+,k_+}^{\text{sq},N_p,\theta_p}; \Lambda_{-,k_-,\rho}^{\text{sq},N_p,\theta_p}).$$

Ces résultats nous montrent que la tolérance GMRES du couplage faible FEM-BEM optimisé, comme celle du couplage faible BEM-BEM optimisé, ne doit pas être plus grande que  $10^{-3}$  pour des calculs de SES.

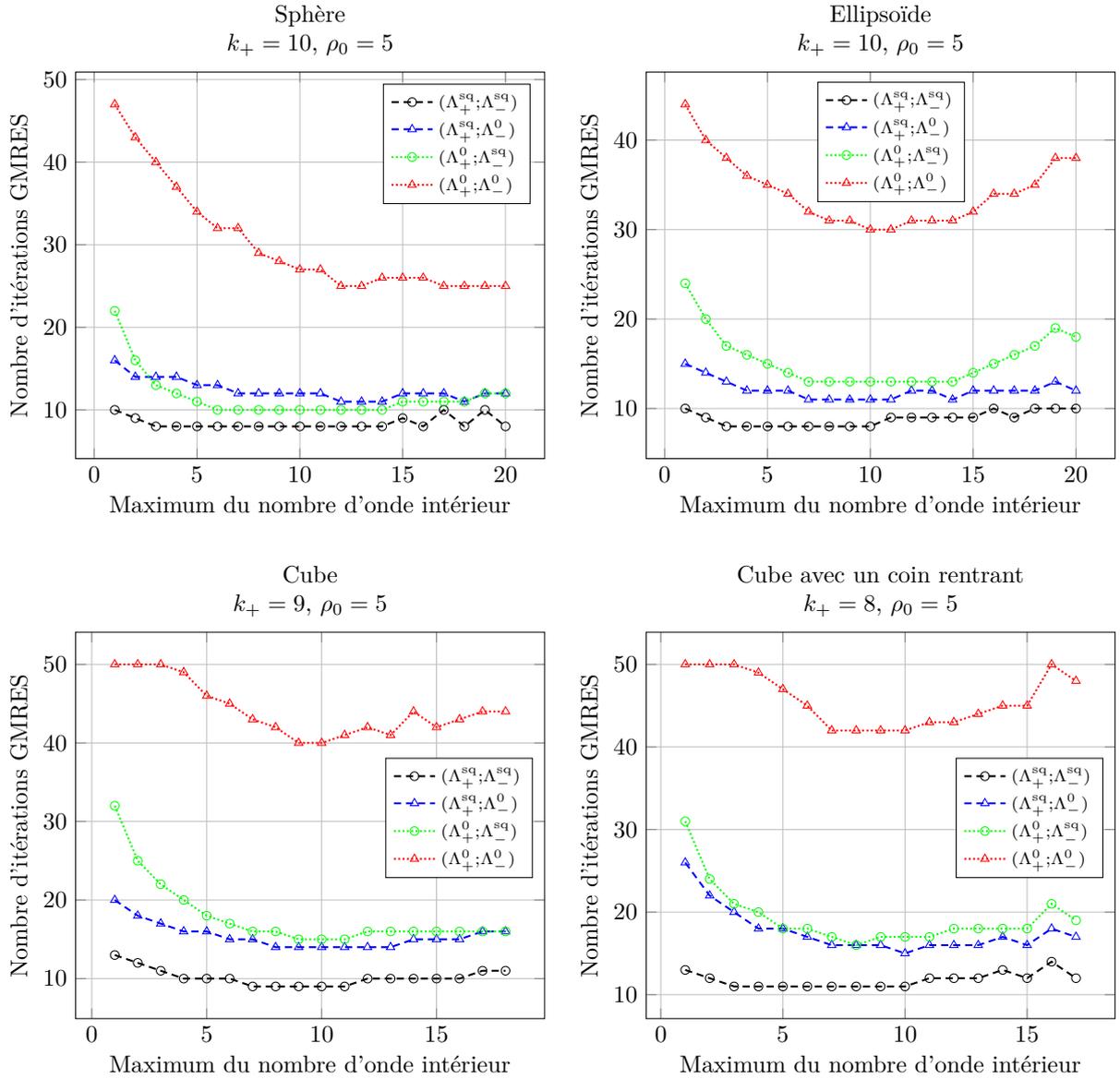


FIGURE 3.12 – Nombre d'itérations GMRES pour le couplage faible FEM-BEM optimisé en fonction du nombre d'onde intérieur

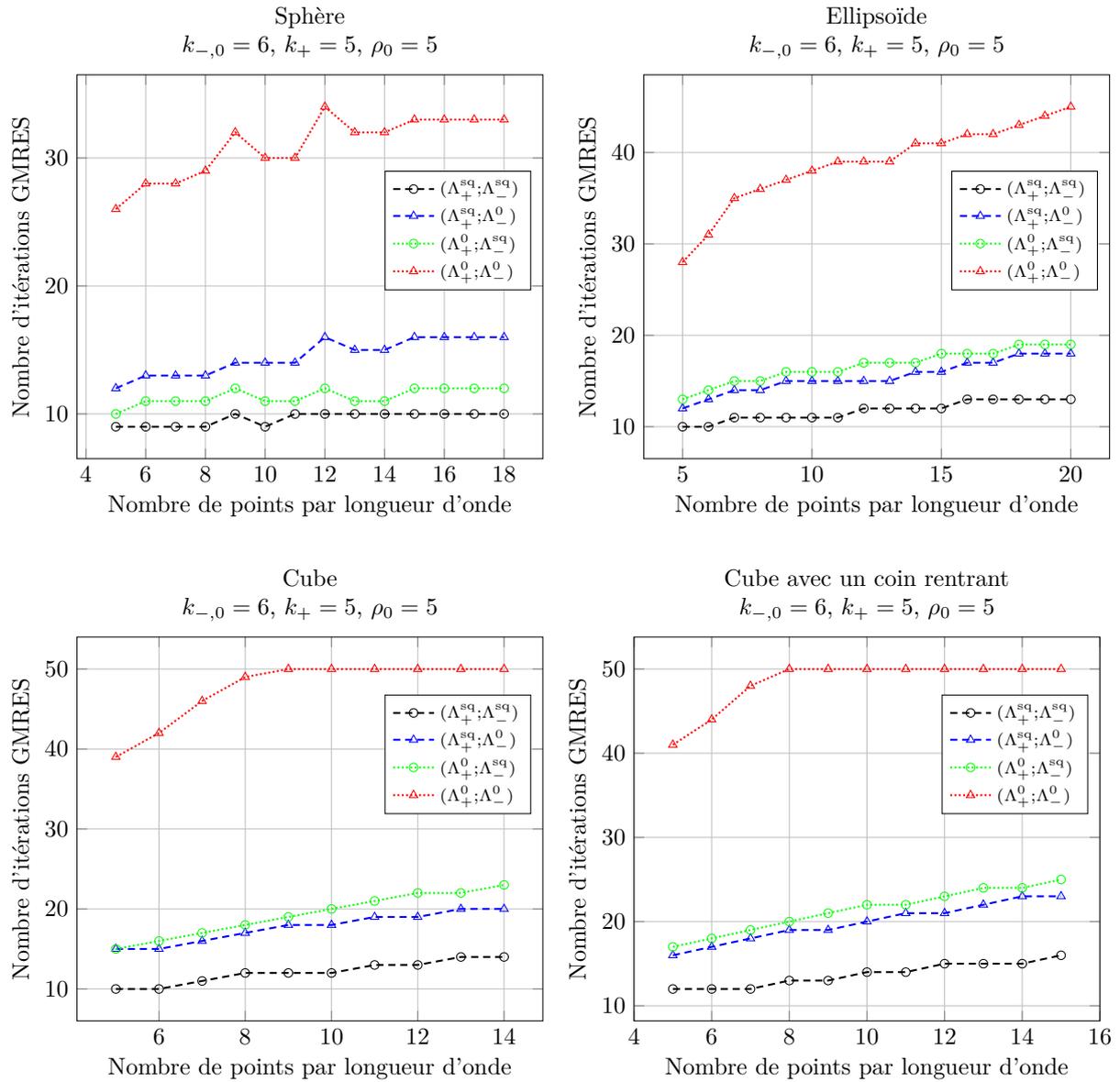


FIGURE 3.13 – Nombre d'itérations GMRES pour le couplage faible FEM-BEM optimisé en fonction du raffinement du maillage

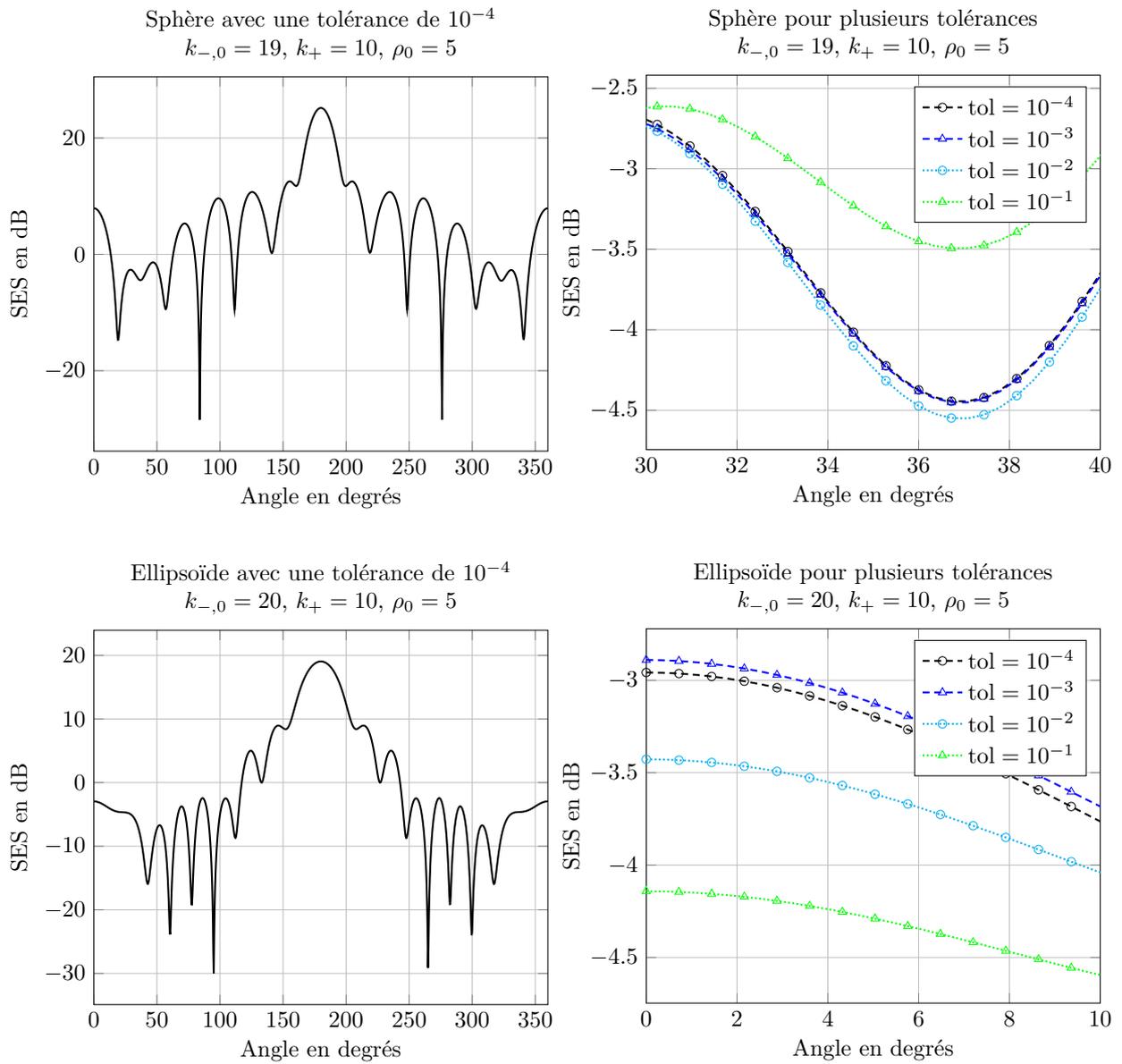


FIGURE 3.14 – Convergence de la SES par rapport à la tolérance GMRES pour le couplage faible FEM-BEM optimisé (sphère et ellipsoïde)

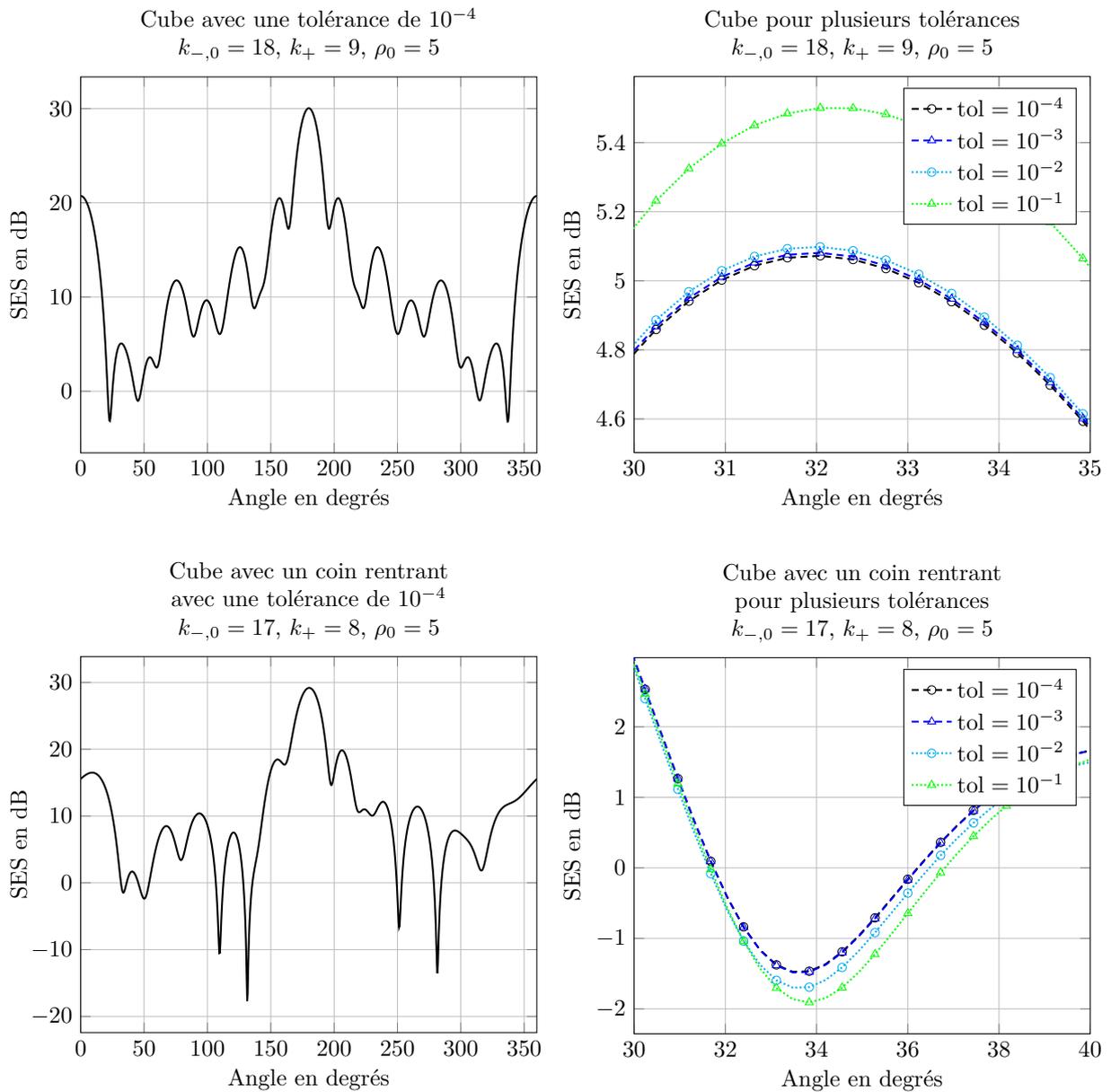


FIGURE 3.15 – Convergence de la SES par rapport à la tolérance GMRES pour le couplage faible FEM-BEM optimisé (cube et cube avec un coin rentrant)

### 3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons tout d'abord expliqué comment discrétiser le couplage faible optimisé et ceci qu'il soit de type BEM-BEM ou de type FEM-BEM. Nous avons notamment vu qu'il était plus intéressant, pour implémenter le couplage faible FEM-BEM optimisé, de coupler les éléments finis  $P_1$  surfaciques aux éléments finis  $P_2$  hiérarchiques volumiques que de les coupler aux éléments finis  $P_1$  volumiques. Nous avons également montré qu'il était pertinent d'un point de vue computationnel de compresser les matrices associées aux formulations variationnelles discrètes des équations intégrales utilisées pour résoudre les sous-problèmes.

Dans un second temps, nous avons présenté plusieurs résultats numériques qui nous ont amené à conclure que le couplage faible optimisé doit être construit à partir de la paire d'opérateurs de transmission :

$$(\Lambda_{+,k_+}^{\text{sq},N_p,\theta_p}; \Lambda_{-,k_-, \rho}^{\text{sq},N_p,\theta_p}) \quad \text{avec} \quad N_p = 4 \quad , \quad \theta_p = \frac{\pi}{2}, \quad (3.16)$$

pour être viable en pratique. En effet, cette paire d'opérateurs de transmission permet d'obtenir la plus faible dépendance de  $n_{\text{it}}^{\text{opt}}$  à la fois par rapport à  $k_-$  et par rapport à  $n_\lambda$ . Il est toutefois nécessaire de nuancer quelque peu ces propos. En effet, lorsque nous avons testé le couplage faible BEM-BEM optimisé pour le cube et le cube avec un coin rentrant, nous avons observé que la paire d'opérateurs de transmission (3.16) donnait lieu à une dépendance significative de  $n_{\text{it}}^{\text{opt}}$  en fonction de  $k_-$ . Nous rappelons que ce phénomène est dû au fait que  $\Lambda_{+,k_+}^{\text{sq}}$  n'est pas une très bonne approximation de  $\Lambda_{+,k_+}$  pour le cube et le cube avec un coin rentrant. L'utilisation comme opérateurs de transmission des approximations de  $\Lambda_{+,k_+}$  actuellement en cours de développement pour des polyèdres (Modave, Geuzaine et Antoine) pourrait donc constituer une perspective de recherche intéressante. Pour le couplage faible FEM-BEM optimisé construit à partir de la paire d'opérateurs de transmission (3.16), nous avons observé que  $n_{\text{it}}^{\text{opt}}$  dépendait légèrement de  $n_\lambda$  et qu'il ne semblait dépendre de  $k_-$  qu'à travers ses valeurs sur  $\Gamma$ . Pour finir, nous avons constaté que la tolérance GMRES utilisée pour la résolution du couplage faible optimisé doit être inférieure à  $10^{-3}$  pour des calculs de SES.

Dans la suite de ce travail, nous nous intéressons à la résolution numérique de l'équivalent électromagnétique du problème de diffraction-transmission (3.1). Nous montrons en particulier qu'il est possible d'introduire un couplage faible pour ce problème en suivant exactement les mêmes idées qu'en acoustique. De par leurs similitudes, nous avons choisi de structurer les parties sur l'acoustique et sur l'électromagnétisme de la même manière. En termes de contenu, les Chapitres 4 et 5 correspondent aux analogues exacts des Chapitres 1 et 2. Pour éviter les redites, ils sont par conséquent un peu moins détaillés que leurs homologues portant sur l'acoustique. Pour finir, nous mentionnons que des différences significatives entre l'acoustique et l'électromagnétisme apparaîtront dans le Chapitre 6. Ceci est dû au fait que la discrétisation du couplage faible en électromagnétisme soulève des difficultés techniques importantes.



Deuxième partie

**Le problème de  
diffraction-transmission  
électromagnétique**



# Chapitre 4

## Présentation du problème

### Sommaire

---

4.1	Un peu de physique . . . . .	109
4.2	Le problème de diffraction-transmission . . . . .	109
4.3	Cadre fonctionnel . . . . .	111
4.4	Représentations intégrales . . . . .	112
4.5	Champ lointain et surface équivalente radar . . . . .	115
4.6	Couplages forts . . . . .	116
4.6.1	Couplage fort BEM-BEM . . . . .	116
4.6.2	Couplage fort FEM-BEM . . . . .	117
4.7	Le caractère bien posé du système de Maxwell harmonique . . . . .	118

---



## 4.1 Un peu de physique

L'évolution des champs électrique  $\mathbf{E}$  et magnétique  $\mathbf{H}$  dans un matériau linéaire occupant un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  est régie par les équations de Maxwell :

$$-\epsilon(\mathbf{x})\partial_t \mathbf{E} + \mathbf{rot} \mathbf{H} = \mathbf{0} \quad , \quad \mu(\mathbf{x})\partial_t \mathbf{H} + \mathbf{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0}.$$

Ici,  $\epsilon$  et  $\mu$  désignent respectivement la permittivité électrique et la perméabilité magnétique du matériau. Dans cette partie dédiée à l'électromagnétisme, nous sommes intéressés par les radars. Comme pour les sonars, la fréquence des ondes générées par ces systèmes est généralement fixe. Par conséquent, nous choisissons, comme dans la partie sur l'acoustique, de travailler en régime harmonique. Nous supposons donc que le champ électromagnétique  $(\mathbf{E}; \mathbf{H})$  vérifie :

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{x})e^{-i\omega t} \quad , \quad \mathbf{H}(\mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{x})e^{-i\omega t},$$

Les équations de Maxwell sont alors équivalentes au système de Maxwell harmonique :

$$\mathbf{rot} \tilde{\mathbf{E}} - i\omega\mu(\mathbf{x})\tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{0} \quad , \quad \mathbf{rot} \tilde{\mathbf{H}} + i\omega\epsilon(\mathbf{x})\tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{0},$$

qui se réécrit en introduisant le nombre d'onde  $k$  et l'impédance  $Z$  du matériau :

$$k(\mathbf{x}) = \omega\sqrt{\epsilon(\mathbf{x})\mu(\mathbf{x})} \quad , \quad Z(\mathbf{x}) = \sqrt{\frac{\mu(\mathbf{x})}{\epsilon(\mathbf{x})}},$$

comme suit :

$$\mathbf{rot} \tilde{\mathbf{E}} - ik(\mathbf{x})Z(\mathbf{x})\tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{0} \quad , \quad \mathbf{rot} \tilde{\mathbf{H}} + ik(\mathbf{x})Z^{-1}(\mathbf{x})\tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{0}.$$

Nous rappelons qu'il ne faut pas confondre les champs électrique et magnétique physiques donnés ci-dessous :

$$\mathcal{R}(\tilde{\mathbf{E}}e^{-i\omega t}) = \mathcal{R}(\tilde{\mathbf{E}})\cos(\omega t) + \mathcal{I}(\tilde{\mathbf{E}})\sin(\omega t) \quad , \quad \mathcal{R}(\tilde{\mathbf{H}}e^{-i\omega t}) = \mathcal{R}(\tilde{\mathbf{H}})\cos(\omega t) + \mathcal{I}(\tilde{\mathbf{H}})\sin(\omega t),$$

avec leur homologue complexe, à savoir  $\tilde{\mathbf{E}}$  et  $\tilde{\mathbf{H}}$ .

Dans la suite de ce travail, le système de Maxwell harmonique sera écrit d'une manière plus alléguée, à savoir :

$$\mathbf{rot} \mathbf{E} - ik(\mathbf{x})Z(\mathbf{x})\mathbf{H} = \mathbf{0} \quad , \quad \mathbf{rot} \mathbf{H} + ik(\mathbf{x})Z^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{E} = \mathbf{0}.$$

Nous finissons cette section en mentionnant que le système de Maxwell harmonique n'est jamais couplé à des conditions de Dirichlet ou de Neumann imposées sur  $\partial\Omega$  comme c'est le cas en acoustique. L'unicité de la solution du système de Maxwell harmonique est en effet généralement assurée par des conditions de bord portant sur les composantes tangentielles des champs électrique et magnétique.

## 4.2 Le problème de diffraction-transmission

Le principe de fonctionnement des radars étant exactement le même que celui des sonars, le problème de diffraction-transmission électromagnétique que nous considérons dans cette partie est l'analogue parfait du problème de diffraction-transmission auquel nous nous sommes intéressés dans la partie sur l'acoustique. Nous le présentons par conséquent de manière plus succincte que dans la section 1.2.

L'onde électromagnétique incidente, notée  $(\mathbf{E}_{\text{inc}}; \mathbf{H}_{\text{inc}})$ , vérifie le système de Maxwell harmonique suivant dans le domaine extérieur  $\Omega_+$  :

$$\begin{cases} \mathbf{rot} \mathbf{E}_{\text{inc}} - ik_+Z_+\mathbf{H}_{\text{inc}} = \mathbf{0} \\ \mathbf{rot} \mathbf{H}_{\text{inc}} + ik_+Z_+^{-1}\mathbf{E}_{\text{inc}} = \mathbf{0} \end{cases} \quad \text{dans } \Omega_+.$$

Le nombre d'onde extérieur,  $k_+$ , et l'impédance extérieure,  $Z_+$ , sont supposés constants et réels. En pratique, le milieu extérieur est constitué d'air de sorte que l'impédance du milieu extérieur correspond à l'impédance du vide, classiquement notée  $Z_0$ . Dans ce travail, nous supposons que  $(\mathbf{E}_{\text{inc}}; \mathbf{H}_{\text{inc}})$  est une onde plane, à savoir :

$$\mathbf{E}_{\text{inc}} = \mathbf{e}e^{i\mathbf{k}_+\cdot\mathbf{x}} \quad , \quad \mathbf{H}_{\text{inc}} = \mathbf{h}e^{i\mathbf{k}_+\cdot\mathbf{x}},$$

les vecteurs  $\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{h}$  et  $\mathbf{k}_+$  vérifiant :

$$k_+Z_+^{-1}\mathbf{e} + \mathbf{k}_+ \wedge \mathbf{h} = \mathbf{0} \quad , \quad -k_+Z_+\mathbf{h} + \mathbf{k}_+ \wedge \mathbf{e} = \mathbf{0} \quad , \quad \mathbf{k}_+ = -k_+\boldsymbol{\sigma}_{\text{inc}} \quad , \quad \|\boldsymbol{\sigma}_{\text{inc}}\| = 1.$$

Notons que les choix suivants pour  $\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{h}$  et  $\mathbf{k}_+$  sont standards :

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_+ &= -k_+ \mathbf{e}_r \quad , \quad \mathbf{e} = \mathbf{e}_\theta \quad , \quad \mathbf{h} = -Z_+^{-1} \mathbf{e}_\varphi, \\ \mathbf{k}_+ &= -k_+ \mathbf{e}_r \quad , \quad \mathbf{e} = \mathbf{e}_\varphi \quad , \quad \mathbf{h} = Z_+^{-1} \mathbf{e}_\theta, \end{aligned}$$

la base  $(\mathbf{e}_r; \mathbf{e}_\theta; \mathbf{e}_\varphi)$  désignant le trièdre direct usuel en coordonnées sphériques. L'utilisation d'ondes planes comme ondes incidentes se justifie de la même manière qu'en acoustique. Une onde électromagnétique générée par un dipôle électrique ou magnétique ressemble, dans une direction donnée et à grande distance du dipôle, à une onde plane. En effet, les ondes électromagnétiques générées par des dipôles électrique et magnétique localisés en  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$  et respectivement associés aux vecteurs  $\mathbf{j}$  et  $\mathbf{m}$  sont les solutions des systèmes de Maxwell harmoniques suivants :

$$\begin{cases} \mathbf{rot} \mathbf{E} - ik_+ Z_+ \mathbf{H} = \mathbf{0} \\ \mathbf{rot} \mathbf{H} + ik_+ Z_+^{-1} \mathbf{E} = \mathbf{j} \delta_{\mathbf{x}_0} \end{cases} \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3) \quad , \quad \begin{cases} \mathbf{rot} \mathbf{E} - ik_+ Z_+ \mathbf{H} = \mathbf{m} \delta_{\mathbf{x}_0} \\ \mathbf{rot} \mathbf{H} + ik_+ Z_+^{-1} \mathbf{E} = \mathbf{0} \end{cases} \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3).$$

Par conséquent, elles sont données par [88] :

$$\begin{cases} \mathbf{E} = ik_+ Z_+ \left( \mathbf{Id} + \frac{1}{k_+^2} \nabla \operatorname{div} \right) \mathbf{j} G_{k_+}(\cdot - \mathbf{x}_0) \\ \mathbf{H} = \mathbf{rot}(\mathbf{j} G_{k_+}(\cdot - \mathbf{x}_0)) \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} \mathbf{E} = \mathbf{rot}(\mathbf{m} G_{k_+}(\cdot - \mathbf{x}_0)) \\ \mathbf{H} = -\frac{ik_+}{Z_+} \left( \mathbf{Id} + \frac{1}{k_+^2} \nabla \operatorname{div} \right) \mathbf{m} G_{k_+}(\cdot - \mathbf{x}_0) \end{cases} .$$

Si  $\mathbf{x} = r\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{x}_0 + \tilde{\mathbf{x}}$  avec  $\|\boldsymbol{\sigma}\| = 1$ , il est alors possible de vérifier que :

$$\begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{x}) = ik_+ Z_+ \frac{e^{ik_+ r}}{r} e^{ik_+ \boldsymbol{\sigma} \cdot \tilde{\mathbf{x}}} \boldsymbol{\sigma} \wedge (\mathbf{j} \wedge \boldsymbol{\sigma}) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right) \\ \mathbf{H}(\mathbf{x}) = ik_+ \frac{e^{ik_+ r}}{r} e^{ik_+ \boldsymbol{\sigma} \cdot \tilde{\mathbf{x}}} (\boldsymbol{\sigma} \wedge \mathbf{j}) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right) \end{cases} , \\ \begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{x}) = ik_+ \frac{e^{ik_+ r}}{r} e^{ik_+ \boldsymbol{\sigma} \cdot \tilde{\mathbf{x}}} (\boldsymbol{\sigma} \wedge \mathbf{m}) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right) \\ \mathbf{H}(\mathbf{x}) = -\frac{ik_+}{Z_+} \frac{e^{ik_+ r}}{r} e^{ik_+ \boldsymbol{\sigma} \cdot \tilde{\mathbf{x}}} \boldsymbol{\sigma} \wedge (\mathbf{m} \wedge \boldsymbol{\sigma}) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right) \end{cases} .$$

Dans ce travail, l'objet diffractant est supposé être constitué d'un matériau diélectrique. Il s'agit par conséquent d'un objet pénétrable. Le problème de diffraction-transmission électromagnétique que nous considérons s'écrit alors comme suit :

$$\begin{cases} \mathbf{rot} \mathbf{E}_- - ik_- Z_- \mathbf{H}_- = \mathbf{0} \\ \mathbf{rot} \mathbf{H}_- + ik_- Z_-^{-1} \mathbf{E}_- = \mathbf{0} \end{cases} \quad \text{dans } \Omega_-, \quad (4.1a)$$

$$\begin{cases} \mathbf{rot} \mathbf{E}_+ - ik_+ Z_+ \mathbf{H}_+ = \mathbf{0} \\ \mathbf{rot} \mathbf{H}_+ + ik_+ Z_+^{-1} \mathbf{E}_+ = \mathbf{0} \end{cases} \quad \text{dans } \Omega_+, \quad (4.1b)$$

$$Z_+ \mathbf{H}_+ \wedge \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} - \mathbf{E}_+ = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad (4.1c)$$

$$\mathbf{E}_- \wedge \mathbf{n} = \mathbf{E}_+ \wedge \mathbf{n} + \mathbf{E}_{\text{inc}} \wedge \mathbf{n} \quad \text{sur } \Gamma, \quad (4.1d)$$

$$\mathbf{H}_- \wedge \mathbf{n} = \mathbf{H}_+ \wedge \mathbf{n} + \mathbf{H}_{\text{inc}} \wedge \mathbf{n} \quad \text{sur } \Gamma. \quad (4.1e)$$

Le nombre d'onde intérieur,  $k_-$ , et l'impédance du matériau constituant l'objet diffractant, notée  $Z_-$ , sont ici supposés réels. Ils peuvent également être variables dans  $\Omega_-$  modélisant ainsi un objet diffractant non homogène. La condition de radiation satisfaite par l'onde réfléchie est dite de Silver-Müller. Elle est généralement écrite sous la forme :

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} r \left( Z_+ \mathbf{H}_+ \wedge \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} - \mathbf{E}_+ \right) = \mathbf{0}.$$

Bien que non équivalentes, ces deux formes de la condition de radiation le deviennent si elles sont couplées au système de Maxwell harmonique. Enfin, les conditions de transmission expriment respectivement la continuité tangentielle des champs électrique et magnétique totaux à travers  $\Gamma$ .

Si  $k_-$ ,  $Z_-$  et  $\Gamma$  sont suffisamment réguliers, le problème de diffraction-transmission (4.1) admet une unique solution [63]. Comme en acoustique, nous supposons, dans cette partie, que  $k_-$  et  $Z_-$  sont des fonctions de  $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega_-})$  et que  $\Gamma$  est une surface  $\mathcal{C}^\infty$ .

Nous terminons cette section en remarquant que l'objet diffractant serait non pénétrable si le matériau le constituant était un métal parfaitement conducteur. De plus, la trace tangentielle du champ électrique total dans  $\Omega_+$  serait nulle sur  $\Gamma$  nécessitant d'y imposer la condition aux limites suivante :

$$\mathbf{E}_+ \wedge \mathbf{n} = -\mathbf{E}_{\text{inc}} \wedge \mathbf{n}.$$

Une autre condition aux limites classiquement considérée lorsque l'objet diffractant est non pénétrable est la suivante [70, 96] :

$$\mathbf{n} \wedge (\mathbf{E}_+ \wedge \mathbf{n}) + z\mathbf{H}_+ \wedge \mathbf{n} = -\mathbf{n} \wedge (\mathbf{E}_{\text{inc}} \wedge \mathbf{n}) - z\mathbf{H}_{\text{inc}} \wedge \mathbf{n}.$$

Cette condition est qualifiée de condition d'impédance et permet par exemple de modéliser le fait qu'un objet diffractant constitué d'un métal parfaitement conducteur est recouvert d'une fine couche d'un matériau diélectrique.

### 4.3 Cadre fonctionnel

Nous rappelons à présent des définitions et des résultats d'analyse fonctionnelle nécessaires à l'étude du problème de diffraction-transmission électromagnétique (4.1). Cette section est basée sur les références [26, 30, 86, 88].

Les espaces de Sobolev volumiques associés au problème de diffraction-transmission électromagnétique (4.1) sont similaires à ceux introduits dans la partie sur l'acoustique. L'espace rattaché à  $\Omega_-$  est un espace vectoriel normé alors que celui sur  $\Omega_+$  est un espace vectoriel localement convexe :

$$\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega_-) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega_-) : \mathbf{rot} \mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega_-)\} \quad , \quad \mathbf{H}_{\text{loc}}(\mathbf{rot}, \overline{\Omega}_+) = \bigcap_{R>R_0} \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega_+^R).$$

Leurs norme et semi-normes respectives sont données ci-dessous :

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega_-)} = \sqrt{\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_-)}^2 + \|\mathbf{rot} \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_-)}^2} \quad , \quad |\mathbf{u}|_{\mathbf{H}_{\text{loc}}(\mathbf{rot}, \overline{\Omega}_+), R} = \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega_+^R)}.$$

En électromagnétisme, les traces d'intérêt ne sont pas les traces de Dirichlet et de Neumann mais les traces tangentielles. L'espace des traces tangentielles, noté  $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$ , est un espace de Hilbert et il est défini comme suit :

$$\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) : \text{div}_\Gamma \mathbf{u} \in \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)\},$$

l'espace  $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  désignant le dual de l'espace suivant :

$$\mathbf{H}_t^{\frac{1}{2}}(\Gamma) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma) : \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0\}.$$

Les opérateurs de trace tangentielle, notés  $\gamma_t^\pm$ , sont continus de  $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega_-) \otimes \mathbf{H}_{\text{loc}}(\mathbf{rot}, \overline{\Omega}_+)$  dans  $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$  et sont définis par :

$$\forall \mathbf{u} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega_-) \otimes \mathbf{H}_{\text{loc}}(\mathbf{rot}, \overline{\Omega}_+), \quad \gamma_t^\pm \mathbf{u} = \mathbf{u}_{\pm|\Gamma} \wedge \mathbf{n}.$$

Nous rappelons par ailleurs que la continuité de  $\gamma_t^+$  sur  $\mathbf{H}_{\text{loc}}(\mathbf{rot}, \overline{\Omega}_+)$  se traduit par :

$$\exists R > R_0, \quad \exists C > 0, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{H}_{\text{loc}}(\mathbf{rot}, \overline{\Omega}_+), \quad \|\gamma_t^+ \mathbf{u}\|_{\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)} \leq C |\mathbf{u}|_{\mathbf{H}_{\text{loc}}(\mathbf{rot}, \overline{\Omega}_+), R}.$$

Le fait que la divergence surfacique d'une trace tangentielle soit dans  $\mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  constitue une différence par rapport à l'acoustique. Cette condition est toutefois très simple à justifier. En effet, il est, par exemple, possible de montrer que :

$$\forall \mathbf{u} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega_-), \quad \text{div}_\Gamma (\gamma_t^- \mathbf{u}) = \gamma_n^- (\mathbf{rot} \mathbf{u}), \quad (4.2)$$

cette relation étant légitime puisque  $\mathbf{rot} \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega_-) \subset \mathbf{H}(\text{div}, \Omega_-)$ . La condition portant sur la régularité de la divergence surfacique des traces tangentielles est donc naturelle.

Avec le formalisme que nous venons d'introduire, le problème de diffraction-transmission (4.1) consiste à trouver  $(\mathbf{E}; \mathbf{H}) \in [\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega_-) \otimes \mathbf{H}_{\text{loc}}(\mathbf{rot}, \overline{\Omega}_+)]^2$  tel que :

$$\begin{cases} \mathbf{rot} \mathbf{E} - ik_- Z_- \mathbf{H} = \mathbf{0} & \text{dans } \Omega_- \\ \mathbf{rot} \mathbf{H} + ik_- Z_-^{-1} \mathbf{E} = \mathbf{0} & \text{dans } \Omega_- \\ \mathbf{rot} \mathbf{E} - ik_+ Z_+ \mathbf{H} = \mathbf{0} & \text{dans } \Omega_+ \\ \mathbf{rot} \mathbf{H} + ik_+ Z_+^{-1} \mathbf{E} = \mathbf{0} & \text{dans } \Omega_+ \\ Z_+ \mathbf{H} \wedge \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} - \mathbf{E} = \mathcal{O}(r^{-2}) \\ \gamma_t^- \mathbf{E} = \gamma_t^+ \mathbf{E} + \gamma_t^+ \mathbf{E}_{\text{inc}} \\ \gamma_t^- \mathbf{H} = \gamma_t^+ \mathbf{H} + \gamma_t^+ \mathbf{H}_{\text{inc}} \end{cases} \quad ,$$

où de manière équivalente, à trouver  $\mathbf{E} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega_-) \otimes \mathbf{H}_{\text{loc}}(\mathbf{rot}, \overline{\Omega_+})$  tel que :

$$\begin{cases} \mathbf{rot}\left(\frac{1}{k_- Z_-} \mathbf{rot} \mathbf{E}\right) - k_- Z_-^{-1} \mathbf{E} = \mathbf{0} & \text{dans } \Omega_- \\ \mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{E} - k_+^2 \mathbf{E} = \mathbf{0} & \text{dans } \Omega_+ \\ \frac{1}{ik_+} \mathbf{rot} \mathbf{E} \wedge \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} - \mathbf{E} = \mathcal{O}(r^{-2}) \\ \gamma_t^- \mathbf{E} = \gamma_t^+ \mathbf{E} + \gamma_t^+ \mathbf{E}_{\text{inc}} \\ \gamma_t^- \left(\frac{1}{k_- Z_-} \mathbf{rot} \mathbf{E}\right) = \frac{1}{k_+ Z_+} (\gamma_t^+ \mathbf{rot} \mathbf{E} + \gamma_t^+ \mathbf{rot} \mathbf{E}_{\text{inc}}) \end{cases} .$$

Nous rappelons à présent qu'il existe une forme bilinéaire continue anti-symétrique sur  $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma) \times \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$ , notée  $\langle \cdot; \cdot \rangle_{\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)}$ , telle que  $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$  est son propre dual par rapport à cette forme bilinéaire. Concrètement, cela signifie que si  $L$  est une forme linéaire continue sur  $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$ , il existe  $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$  tel que :

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma), \quad L(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{v}; \mathbf{u} \rangle_{\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)} .$$

Par ailleurs, si  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  sont des éléments suffisamment réguliers de  $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$ , nous avons :

$$\langle \mathbf{u}; \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)} = \int_\Gamma (\mathbf{u} \wedge \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma. \quad (4.3)$$

Dans cette partie, la forme bilinéaire  $\langle \cdot; \cdot \rangle_{\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)}$  sera tout simplement notée  $\langle \cdot; \cdot \rangle$ . Dans la partie sur l'acoustique, nous avons utilisé cette notation pour la dualité  $\langle \cdot; \cdot \rangle_{\mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times \mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}$ . Cette dualité n'intervenant pas dans la suite de ce travail, il n'y aura toutefois pas de confusion possible.

La relation (4.3) nous permet d'introduire la formule d'intégration par parties suivante, standard pour des fonctions de régularité  $\mathcal{C}^1$  :

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega_-), \quad \int_{\Omega_-} \mathbf{rot} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega_- - \int_{\Omega_-} \mathbf{u} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{v} \, d\Omega_- = \langle \gamma_t^- \mathbf{v}; \gamma_t^- \mathbf{u} \rangle. \quad (4.4)$$

Nous terminons cette section en rappelant comment reformuler des équations dans  $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$  de manière variationnelle :

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} \text{ dans } \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma) \quad \Leftrightarrow \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma), \quad \langle \mathbf{u}; \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}; \mathbf{w} \rangle.$$

## 4.4 Représentations intégrales

Des résultats de représentation intégrale similaires à ceux que nous avons donnés pour les solutions de l'équation de Helmholtz existent également pour les solutions du système de Maxwell harmonique. Dans cette section, nous rappelons ces résultats, qui sont par exemple présentés dans l'ouvrage [88], le nombre d'onde  $k \in \mathbb{R}_+^*$  et l'impédance  $Z \in \mathbb{R}_+^*$  étant quelconques.

Les opérateurs de simple et de double couche volumiques associés à  $k$ , respectivement notés  $\mathcal{T}_k$  et  $\mathcal{K}_k$ , sont continus de  $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$  dans  $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega_-) \otimes \mathbf{H}_{\text{loc}}(\mathbf{rot}, \overline{\Omega_+})$  et sont définis par :

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{j} \in \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma, \quad \mathcal{T}_k \mathbf{j}(\mathbf{x}) &= \int_\Gamma G_k(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mathbf{j}(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} + \frac{1}{k^2} \nabla \int_\Gamma G_k(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \text{div}_\Gamma \mathbf{j}(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}, \\ \forall \mathbf{j} \in \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma, \quad \mathcal{K}_k \mathbf{j}(\mathbf{x}) &= -\mathbf{rot} \int_\Gamma G_k(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mathbf{j}(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}. \end{aligned}$$

Nous rappelons, par exemple, que la continuité de  $\mathcal{T}_k$  dans  $\mathbf{H}_{\text{loc}}(\mathbf{rot}, \overline{\Omega_+})$  se traduit par :

$$\forall R > R_0, \quad \exists C > 0, \quad \forall \mathbf{j} \in \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma), \quad \|\mathcal{T}_k \mathbf{j}\|_{\mathbf{H}_{\text{loc}}(\mathbf{rot}, \overline{\Omega_+}), R} \leq C \|\mathbf{j}\|_{\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)} .$$

La construction de solutions du système de Maxwell harmonique à partir des opérateurs intégraux volumiques est détaillée dans la proposition suivante.

**Proposition 4.1** (Construction de solutions du système de Maxwell harmonique).

Soit  $\mathbf{j} \in \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$ . Nous définissons  $(\mathbf{E}; \mathbf{H}) \in [\mathbf{H}(\text{rot}, \Omega_-) \otimes \mathbf{H}_{\text{loc}}(\text{rot}, \overline{\Omega_+})]^2$  par :

$$\mathbf{E} = \mathcal{T}_k \mathbf{j} \quad \text{ou} \quad \mathbf{E} = \mathcal{K}_k \mathbf{j} \quad , \quad \mathbf{H} = \frac{1}{ikZ} \text{rot } \mathbf{E}.$$

Alors, nous avons les relations :

$$\mathbf{H} = -\frac{1}{ikZ} \mathcal{K}_k \mathbf{j} \quad \text{ou} \quad \mathbf{H} = ikZ^{-1} \mathcal{T}_k \mathbf{j},$$

et  $(\mathbf{E}; \mathbf{H})$  vérifie :

$$\begin{cases} \text{rot } \mathbf{E} - ikZ\mathbf{H} = \mathbf{0} \\ \text{rot } \mathbf{H} + ikZ^{-1}\mathbf{E} = \mathbf{0} \end{cases} \quad \text{dans } \Omega_- \cup \Omega_+,$$

$$Z\mathbf{H} \wedge \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} - \mathbf{E} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right) \quad \text{et} \quad \mathbf{E} \wedge \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} + Z\mathbf{H} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right).$$

### Preuve

Nous ne donnons qu'une preuve partielle de cette proposition. La vérification des conditions de radiation étant assez technique et n'ayant pas un grand intérêt pédagogique, nous ne traitons pas ce point. La démonstration des autres résultats est toutefois intéressante pour se familiariser avec les opérateurs intégraux volumiques.

Commençons par remarquer que si  $\mathbf{E} = \mathcal{T}_k \mathbf{j}$  ou  $\mathbf{E} = \mathcal{K}_k \mathbf{j}$ , alors :

$$\text{rot rot } \mathbf{E} - k^2 \mathbf{E} = \mathbf{0}. \quad (4.5)$$

Pour montrer cela, il est suffisant de traiter le cas où  $\mathbf{E} = \mathcal{T}_k \mathbf{j}$  puisque  $\text{rot } \mathcal{T}_k \mathbf{j} = -\mathcal{K}_k \mathbf{j}$ . La preuve repose sur les opérateurs de simple couche suivants qui sont continus de  $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  et  $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  dans  $H^1(\Omega_-) \cap H_{\text{loc}}^1(\overline{\Omega_+})$  et  $\mathbf{H}^1(\Omega_-) \cap \mathbf{H}_{\text{loc}}^1(\overline{\Omega_+})$  :

$$\mathcal{S}_k : p \mapsto \int_\Gamma G_k(\mathbf{x} - \mathbf{y}) p(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad , \quad \mathcal{S}_k : \mathbf{j} \mapsto \int_\Gamma G_k(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mathbf{j}(\mathbf{y}) d\mathbf{y}.$$

Nous rappelons que ces opérateurs génèrent des solutions des équations de Helmholtz scalaire et vectorielle :

$$\forall p \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), \quad \Delta \mathcal{S}_k p + k^2 \mathcal{S}_k p = 0 \quad \text{dans } \Omega_- \cup \Omega_+,$$

$$\forall \mathbf{j} \in \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), \quad \Delta \mathcal{S}_k \mathbf{j} + k^2 \mathcal{S}_k \mathbf{j} = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega_- \cup \Omega_+.$$

Nous vérifions sans difficulté que :

$$\text{rot rot } \mathcal{T}_k \mathbf{j} - k^2 \mathcal{T}_k \mathbf{j} = \nabla \text{div } \mathcal{S}_k \mathbf{j} - \nabla \mathcal{S}_k \text{div}_\Gamma \mathbf{j},$$

ce qui permet de conclure en utilisant la relation suivante :

$$\text{div } \mathcal{S}_k \mathbf{j} = \mathcal{S}_k \text{div}_\Gamma \mathbf{j}.$$

Ensuite, la seconde expression de  $\mathbf{H}$  s'obtient en remarquant que :

$$\text{rot } \mathcal{T}_k \mathbf{j} = -\mathcal{K}_k \mathbf{j} \quad , \quad \text{rot } \mathcal{K}_k \mathbf{j} = -k^2 \mathcal{T}_k \mathbf{j}.$$

Pour finir, l'équation (4.5) permet de montrer que  $(\mathbf{E}; \mathbf{H})$  vérifie le système de Maxwell harmonique. ■

Les opérateurs de simple et de double couche surfaciques associés à  $k$ , respectivement notés  $\mathbf{T}_k$  et  $\mathbf{K}_k$ , sont définis de  $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$  dans lui-même comme suit :

$$\forall \mathbf{j} \in \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma), \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma, \quad \mathbf{T}_k \mathbf{j}(\mathbf{x}) = \int_\Gamma G_k(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mathbf{j}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \wedge \mathbf{n}(\mathbf{x}) + \frac{1}{k^2} \nabla \int_\Gamma G_k(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \text{div}_\Gamma \mathbf{j}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \wedge \mathbf{n}(\mathbf{x}),$$

$$\forall \mathbf{j} \in \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma), \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma, \quad \mathbf{K}_k \mathbf{j}(\mathbf{x}) = \int_\Gamma \nabla_y G_k(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \wedge \mathbf{j}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \wedge \mathbf{n}(\mathbf{x}).$$

Ces opérateurs sont continus. De plus, l'opérateur  $\mathbf{K}_k$  est compact de  $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$  dans lui-même. Nous rappelons que les opérateurs intégraux surfaciques permettent d'explicitier les traces tangentielles des opérateurs intégraux volumiques comme en atteste la proposition suivante.

**Proposition 4.2** (Traces tangentielles des opérateurs intégraux volumiques).

Nous disposons des relations de trace suivantes :

$$\gamma_t^- \mathcal{T}_k = \mathbf{T}_k \quad , \quad \gamma_t^+ \mathcal{T}_k = \mathbf{T}_k \quad , \quad \gamma_t^- \mathcal{K}_k = -\frac{1}{2} \mathbf{Id} + \mathbf{K}_k \quad , \quad \gamma_t^+ \mathcal{K}_k = \frac{1}{2} \mathbf{Id} + \mathbf{K}_k.$$

Pour finir, nous donnons le théorème de représentation pour les solutions du système de Maxwell harmonique.

**Proposition 4.3** (Représentation des solutions du système de Maxwell harmonique).

Soit  $(\mathbf{E}; \mathbf{H}) \in [\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega_-) \otimes \mathbf{H}_{\text{loc}}(\mathbf{rot}, \overline{\Omega_+})]^2$  vérifiant :

$$\begin{cases} \mathbf{rot} \mathbf{E} - ikZ\mathbf{H} = 0 \\ \mathbf{rot} \mathbf{H} + ikZ^{-1}\mathbf{E} = 0 \end{cases} \quad \text{dans } \Omega_- \cup \Omega_+,$$

$$Z\mathbf{H} \wedge \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} - \mathbf{E} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right) \quad \text{ou} \quad \mathbf{E} \wedge \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} + Z\mathbf{H} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right).$$

En introduisant les quantités suivantes :

$$[\gamma_t \mathbf{H}] = \gamma_t^- \mathbf{H} - \gamma_t^+ \mathbf{H} \quad , \quad [\gamma_t \mathbf{E}] = \gamma_t^- \mathbf{E} - \gamma_t^+ \mathbf{E},$$

nous obtenons :

$$\begin{cases} \mathbf{E} = ikZ\mathcal{T}_k[\gamma_t \mathbf{H}] - \mathcal{K}_k[\gamma_t \mathbf{E}] \\ \mathbf{H} = -\mathcal{K}_k[\gamma_t \mathbf{H}] - ikZ^{-1}\mathcal{T}_k[\gamma_t \mathbf{E}] \end{cases} \quad \text{dans } \Omega_- \cup \Omega_+.$$

**Preuve**

Comme en acoustique, la preuve que nous présentons est formelle. Le raisonnement est basé sur le fait que  $G_k Id$  est la solution fondamentale de l'équation de Helmholtz vectorielle :

$$-(\Delta + k^2 \mathbf{Id})(G_k Id) = \delta_0 Id.$$

Nous définissons la distribution  $\mathbf{T}_E$  associée à  $\mathbf{E}$  comme suit :

$$\langle \mathbf{T}_E; \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{E} \varphi \, d\mathbf{x}.$$

Le rotationnel et la divergence de  $\mathbf{T}_E$  sont alors donnés par :

$$\mathbf{rot} \mathbf{T}_E = \mathbf{T}_{\mathbf{rot} \mathbf{E}} + \mathbf{s}_{[\gamma_t \mathbf{E}]} \quad , \quad \text{div} \mathbf{T}_E = \mathbf{T}_{\text{div} \mathbf{E}} - \mathbf{s}_{[\gamma_n \mathbf{E}]},$$

et  $\mathbf{T}_E$  vérifie donc, au sens des distributions, l'équation de Helmholtz vectorielle suivante :

$$-\Delta \mathbf{T}_E - k^2 \mathbf{T}_E = \mathbf{s}_{[\gamma_t \mathbf{rot} \mathbf{E}]} + \mathbf{rot} \mathbf{s}_{[\gamma_t \mathbf{E}]} + \nabla \mathbf{s}_{[\gamma_n \mathbf{E}]}.$$

Nous rappelons que les distributions de simple couche  $s_u$  et  $\mathbf{s}_u$  sont définies comme suit :

$$\langle \mathbf{s}_u; \varphi \rangle = \int_{\Gamma} \mathbf{u} \varphi \, d\Gamma \quad , \quad \langle s_u; \varphi \rangle = \int_{\Gamma} u \varphi \, d\Gamma.$$

La distribution  $\mathbf{T}_E$  est donc donnée par :

$$\mathbf{T}_E = G_k * \mathbf{s}_{[\gamma_t \mathbf{rot} \mathbf{E}]} + G_k * \mathbf{rot} \mathbf{s}_{[\gamma_t \mathbf{E}]} + G_k * \nabla \mathbf{s}_{[\gamma_n \mathbf{E}]},$$

et par conséquent, nous avons :

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) [\gamma_t \mathbf{rot} \mathbf{E}](\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} + \nabla \int_{\Gamma} G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) [\gamma_n \mathbf{E}](\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} + \mathbf{rot} \int_{\Gamma} G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) [\gamma_t \mathbf{E}](\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}.$$

La relation (4.2) et son analogue pour  $\Omega_+$  permettent de montrer que  $[\gamma_n \mathbf{E}] = \frac{iZ}{k} \text{div}_{\Gamma} [\gamma_t \mathbf{H}]$  d'où :

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = ikZ \left( \int_{\Gamma} G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) [\gamma_t \mathbf{H}](\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} + \frac{1}{k^2} \nabla \int_{\Gamma} G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \text{div}_{\Gamma} [\gamma_t \mathbf{H}](\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \right) + \mathbf{rot} \int_{\Gamma} G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) [\gamma_t \mathbf{E}](\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}.$$

Enfin, la formule pour  $\mathbf{H}$  est obtenue en prenant le rotationnel de la relation précédente et en utilisant les égalités :

$$\mathbf{rot} \mathcal{T}_k = -\mathcal{K}_k \quad , \quad \mathbf{rot} \mathcal{K}_k = -k^2 \mathcal{T}_k.$$

■

Remarquons que les Propositions 4.1 et 4.3 impliquent l'équivalence des conditions de radiation :

$$Z\mathbf{H} \wedge \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} - \mathbf{E} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right) \quad \text{et} \quad \mathbf{E} \wedge \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} + Z\mathbf{H} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad (4.6)$$

lorsqu'elles sont couplées au système de Maxwell harmonique. En effet, si  $(\mathbf{E}; \mathbf{H})$  est une solution du système de Maxwell harmonique associé à une de ces conditions de radiation, nous pouvons représenter  $(\mathbf{E}; \mathbf{H})$  grâce aux opérateurs intégraux volumiques et par conséquent, l'autre condition de radiation est vérifiée.

## 4.5 Champ lointain et surface équivalente radar

Dans cette section, nous précisons le comportement asymptotique des fonctions générées par les opérateurs intégraux volumiques. Nous introduisons également l'analogue de la surface équivalente sonar en électromagnétisme, à savoir la surface équivalente radar, classiquement dénommée SER. Ici,  $k \in \mathbb{R}_+^*$  et  $\mathbb{S}$  désigne la sphère unité de centre  $\mathbf{0}$ .

Les opérateurs de champ lointain, notés  $\mathcal{A}_k$  et  $\mathcal{B}_k$ , sont définis sur  $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$  par :

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{j} \in \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma), \quad \forall \boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{S}, \quad \mathcal{A}_k \mathbf{j}(\boldsymbol{\sigma}) &= \frac{1}{4\pi} \int_\Gamma e^{-iky \cdot \boldsymbol{\sigma}} \boldsymbol{\sigma} \wedge (\mathbf{j}(\mathbf{y}) \wedge \boldsymbol{\sigma}) \, d\mathbf{y}, \\ \forall \mathbf{j} \in \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma), \quad \forall \boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{S}, \quad \mathcal{B}_k \mathbf{j}(\boldsymbol{\sigma}) &= -\frac{ik}{4\pi} \int_\Gamma e^{-iky \cdot \boldsymbol{\sigma}} \boldsymbol{\sigma} \wedge \mathbf{j}(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}. \end{aligned}$$

Il sont respectivement associés à  $\mathcal{T}_k$  et à  $\mathcal{K}_k$  comme l'illustre la proposition suivante [88].

**Proposition 4.4** (Champ lointain des opérateurs intégraux volumiques).

Soit  $\mathbf{j} \in \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$ . Si  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ , nous définissons  $r$  et  $\boldsymbol{\sigma}$  comme suit :

$$\mathbf{x} = r\boldsymbol{\sigma} \quad , \quad \|\boldsymbol{\sigma}\| = 1.$$

Les développements asymptotiques suivants sont alors vérifiés uniformément en  $\boldsymbol{\sigma}$  :

$$\mathcal{T}_k \mathbf{j}(\mathbf{x}) = \frac{e^{ikr}}{r} \left[ \mathcal{A}_k \mathbf{j}(\boldsymbol{\sigma}) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right) \right] \quad , \quad \mathcal{K}_k \mathbf{j}(\mathbf{x}) = \frac{e^{ikr}}{r} \left[ \mathcal{B}_k \mathbf{j}(\boldsymbol{\sigma}) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right) \right].$$

Les Propositions 4.3 et 4.4 nous permettent, entre autres, de déterminer l'opérateur de champ lointain du champ électrique solution du problème de diffraction-transmission (4.1) :

$$\mathbf{E}_+(\mathbf{x}) = \frac{e^{ik_+r}}{r} \left[ \mathbf{E}_{+, \infty}(\boldsymbol{\sigma}) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right) \right] \quad , \quad \mathbf{E}_{+, \infty} = -ik_+ Z_+ \mathcal{A}_{k_+} \gamma_t^+ \mathbf{H} + \mathcal{B}_{k_+} \gamma_t^+ \mathbf{E}.$$

Comme en acoustique, ce n'est pas le champ lointain lui-même qui est intéressant d'un point de vue applicatif mais la surface équivalente radar. Pour une direction  $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{S}$  donnée, celle-ci est définie comme suit :

$$\text{SER}(\boldsymbol{\sigma}; \boldsymbol{\sigma}_{\text{inc}}) = 10 \log_{10} \left( 4\pi \frac{|\mathbf{E}_{+, \infty}(\boldsymbol{\sigma})|^2}{|\mathbf{E}_{\text{inc}}|^2} \right).$$

L'interprétation physique de la SER est similaire à celle de la SES. Concrètement, la SER permet de mesurer la puissance asymptotique moyenne du champ électromagnétique réel réfléchi par l'objet diffractant. En effet, la puissance électromagnétique traversant une sphère de grand rayon, notée  $S_R$ , s'exprime comme suit :

$$\int_{S_R} (\mathcal{R}(\mathbf{E}_+ e^{-i\omega t}) \wedge \mathcal{R}(\mathbf{H}_+ e^{-i\omega t})) \cdot \mathbf{n} \, dS_R.$$

Or, de par la condition de radiation (4.6), cette puissance peut être approximée de la sorte :

$$\frac{1}{Z_+} \int_{S_R} \mathcal{R}(\mathbf{E}_+ e^{-i\omega t}) \cdot \mathcal{R}(\mathbf{E}_+ e^{-i\omega t}) \, dS_R.$$

De là, nous en déduisons l'expression de la puissance électromagnétique moyenne transmise à travers  $S_R$  :

$$\frac{1}{2Z_+} \int_{S_R} |\mathbf{E}_+|^2 \, dS_R.$$

## 4.6 Couplages forts

Les couplages forts BEM-BEM et FEM-BEM que nous présentons dans cette section sont les analogues exacts de ceux que nous avons introduits dans la partie sur l'acoustique. Ces deux couplages forts nous permettent en premier lieu d'illustrer le fait que les couplages forts en électromagnétisme sont affectés par les mêmes limitations que les couplages forts en acoustique. Les limitations dont il est ici question ayant été présentées en détails à la fin du Chapitre 1, nous ne reviendrons pas sur ce point. Nous rappelons également que les couplages forts que nous avons choisi de présenter peuvent être utilisés pour valider numériquement les couplages faibles que nous proposons dans ce travail. Pour finir, nous mentionnons que d'autres exemples de couplages forts BEM-BEM et FEM-BEM sont par exemple présentés dans les références [28, 36, 38, 62, 103, 104] et [65, 77, 97, 102] respectivement.

### 4.6.1 Couplage fort BEM-BEM

Le couplage fort BEM-BEM que nous avons choisi de présenter est donné dans la proposition suivante. Remarquons que des études détaillées de ce couplage fort BEM-BEM sont proposées dans les références [31, 88].

**Proposition 4.5** (Couplage fort BEM-BEM).

Soit  $(\mathbf{E}; \mathbf{H}) \in [\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega_-) \otimes \mathbf{H}_{\text{loc}}(\mathbf{rot}, \overline{\Omega_+})]^2$  une solution du problème de diffraction-transmission (4.1). Les traces tangentielles de  $(\mathbf{E}; \mathbf{H})$  vérifient alors :

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} -(\mathbf{K}_{k_-} + \mathbf{K}_{k_+}) & ik_- Z_- \mathbf{T}_{k_-} + ik_+ Z_+ \mathbf{T}_{k_+} \\ -(ik_- Z_-^{-1} \mathbf{T}_{k_-} + ik_+ Z_+^{-1} \mathbf{T}_{k_+}) & -(\mathbf{K}_{k_-} + \mathbf{K}_{k_+}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_t^- \mathbf{E} \\ \gamma_t^- \mathbf{H} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \gamma_t^+ \mathbf{E}_{\text{inc}} - \mathbf{K}_{k_+} \gamma_t^+ \mathbf{E}_{\text{inc}} + ik_+ Z_+ \mathbf{T}_{k_+} \gamma_t^+ \mathbf{H}_{\text{inc}} \\ \frac{1}{2} \gamma_t^+ \mathbf{H}_{\text{inc}} - \mathbf{K}_{k_+} \gamma_t^+ \mathbf{H}_{\text{inc}} - ik_+ Z_+^{-1} \mathbf{T}_{k_+} \gamma_t^+ \mathbf{E}_{\text{inc}} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Lorsque l'onde incidente est une onde plane, le second membre s'écrit plus simplement comme suit :

$$\begin{pmatrix} \gamma_t^+ \mathbf{E}_{\text{inc}} \\ \gamma_t^+ \mathbf{H}_{\text{inc}} \end{pmatrix}.$$

#### Preuve

Cette proposition se démontre exactement de la même manière que la Proposition 1.5 page 18. ■

Le couplage fort BEM-BEM (4.7) est bien sûr équivalent au problème de diffraction-transmission (4.1).

**Proposition 4.6** (Equivalence du couplage fort BEM-BEM).

Soit  $\mathbf{j}_-, \mathbf{m}_- \in \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$  vérifiant :

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} -(\mathbf{K}_{k_-} + \mathbf{K}_{k_+}) & ik_- Z_- \mathbf{T}_{k_-} + ik_+ Z_+ \mathbf{T}_{k_+} \\ -(ik_- Z_-^{-1} \mathbf{T}_{k_-} + ik_+ Z_+^{-1} \mathbf{T}_{k_+}) & -(\mathbf{K}_{k_-} + \mathbf{K}_{k_+}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{m}_- \\ \mathbf{j}_- \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \gamma_t^+ \mathbf{E}_{\text{inc}} - \mathbf{K}_{k_+} \gamma_t^+ \mathbf{E}_{\text{inc}} + ik_+ Z_+ \mathbf{T}_{k_+} \gamma_t^+ \mathbf{H}_{\text{inc}} \\ \frac{1}{2} \gamma_t^+ \mathbf{H}_{\text{inc}} - \mathbf{K}_{k_+} \gamma_t^+ \mathbf{H}_{\text{inc}} - ik_+ Z_+^{-1} \mathbf{T}_{k_+} \gamma_t^+ \mathbf{E}_{\text{inc}} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Si nous introduisons les quantités suivantes :

$$\mathbf{m}_+ = \mathbf{m}_- - \gamma_t^+ \mathbf{E}_{\text{inc}} \quad , \quad \mathbf{j}_+ = \mathbf{j}_- - \gamma_t^+ \mathbf{H}_{\text{inc}},$$

la fonction  $(\mathbf{E}; \mathbf{H}) \in [\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega_-) \otimes \mathbf{H}_{\text{loc}}(\mathbf{rot}, \overline{\Omega_+})]^2$  définie par :

$$\begin{cases} \mathbf{E} = ik_- Z_- \mathcal{T}_{k_-} \mathbf{j}_- - \mathcal{K}_{k_-} \mathbf{m}_- \\ \mathbf{H} = -\mathcal{K}_{k_-} \mathbf{j}_- - ik_- Z_-^{-1} \mathcal{T}_{k_-} \mathbf{m}_- \end{cases} \text{ dans } \Omega_- \quad , \quad \begin{cases} \mathbf{E} = -ik_+ Z_+ \mathcal{T}_{k_+} \mathbf{j}_+ + \mathcal{K}_{k_+} \mathbf{m}_+ \\ \mathbf{H} = \mathcal{K}_{k_+} \mathbf{j}_+ + ik_+ Z_+^{-1} \mathcal{T}_{k_+} \mathbf{m}_+ \end{cases} \text{ dans } \Omega_+,$$

est solution du problème de diffraction-transmission (4.1).

#### Preuve

La preuve est identique à celle de la Proposition 1.6 page 19. ■

L'opérateur du couplage fort BEM-BEM (4.7) est inversible [31]. Le couplage fort BEM-BEM (4.7) peut donc effectivement être utilisé en pratique pour résoudre le problème de diffraction-transmission (4.1).

**Proposition 4.7** (Inversibilité du couplage fort BEM-BEM).

Si  $k_-$ ,  $k_+$ ,  $Z_-$  et  $Z_+$  sont des réels strictement positifs, l'opérateur du couplage fort BEM-BEM (4.7) est inversible.

La proposition précédente permet de prouver que le problème de diffraction-transmission (4.1) est bien posé, le raisonnement étant similaire à celui que nous avons donné pour l'acoustique. Ceci se traduit notamment par les inégalités de stabilité suivantes pour les solutions  $(\mathbf{E}; \mathbf{H})$  du problème de diffraction-transmission (4.1) :

$$\begin{aligned} \exists C > 0, \quad \|(\mathbf{E}; \mathbf{H})\|_{\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega_-)^2} &\leq C \left( \|\gamma_t^+ \mathbf{E}_{\text{inc}}\|_{\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)} + \|\gamma_t^+ \mathbf{H}_{\text{inc}}\|_{\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)} \right), \\ \forall R > R_0, \quad \exists C > 0, \quad |(\mathbf{E}; \mathbf{H})|_{\mathbf{H}_{\text{loc}}(\mathbf{rot}, \overline{\Omega_+})^2, R} &\leq C \left( \|\gamma_t^+ \mathbf{E}_{\text{inc}}\|_{\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)} + \|\gamma_t^+ \mathbf{H}_{\text{inc}}\|_{\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)} \right), \end{aligned}$$

les constantes  $C$  étant indépendantes de l'onde incidente.

### 4.6.2 Couplage fort FEM-BEM

L'analogue, pour le problème de diffraction-transmission (4.1), du couplage fort FEM-BEM présenté dans la partie sur l'acoustique est donné ci-dessous [63].

**Proposition 4.8** (Couplage fort FEM-BEM).

Soit  $(\mathbf{E}; \mathbf{H}) \in [\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega_-) \otimes \mathbf{H}_{\text{loc}}(\mathbf{rot}, \overline{\Omega_+})]^2$  une solution du problème de diffraction-transmission (4.1). Le couple  $(\mathbf{E}|_{\Omega_-}; \gamma_t^+ \mathbf{H})$  satisfait alors la formulation variationnelle suivante :

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{F} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega_-), \quad \int_{\Omega_-} \frac{1}{k_- Z_-} \mathbf{rot} \mathbf{E} \cdot \mathbf{rot} \overline{\mathbf{F}} d\Omega_- - \int_{\Omega_-} k_- Z_-^{-1} \mathbf{E} \cdot \overline{\mathbf{F}} d\Omega_- \\ + i \left\langle \gamma_t^- \overline{\mathbf{F}}; \left( \frac{1}{2} \mathbf{Id} + \mathbf{K}_{k_+} \right) \gamma_t^+ \mathbf{H} \right\rangle - k_+ Z_+^{-1} \langle \gamma_t^- \overline{\mathbf{F}}; \mathbf{T}_{k_+} \gamma_t^+ \mathbf{E} \rangle \\ = -i \langle \gamma_t^- \overline{\mathbf{F}}; \gamma_t^+ \mathbf{H}_{\text{inc}} \rangle - k_+ Z_+^{-1} \langle \gamma_t^- \overline{\mathbf{F}}; \mathbf{T}_{k_+} \gamma_t^+ \mathbf{E}_{\text{inc}} \rangle, \end{aligned} \quad (4.8a)$$

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma), \quad \frac{1}{2} \langle \mathbf{v}; \gamma_t^- \mathbf{E} \rangle - \langle \mathbf{v}; \mathbf{K}_{k_+} \gamma_t^- \mathbf{E} \rangle + ik_+ Z_+ \langle \mathbf{v}; \mathbf{T}_{k_+} \gamma_t^+ \mathbf{H} \rangle \\ = \frac{1}{2} \langle \mathbf{v}; \gamma_t^+ \mathbf{E}_{\text{inc}} \rangle - \langle \mathbf{v}; \mathbf{K}_{k_+} \gamma_t^+ \mathbf{E}_{\text{inc}} \rangle. \end{aligned} \quad (4.8b)$$

#### Preuve

La formule d'intégration par parties (4.4) permet d'écrire le système de Maxwell harmonique (4.1a) dans  $\Omega_-$  sous forme variationnelle :

$$\forall \mathbf{F} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega_-), \quad \int_{\Omega_-} \frac{1}{k_- Z_-} \mathbf{rot} \mathbf{E} \cdot \mathbf{rot} \overline{\mathbf{F}} d\Omega_- - \int_{\Omega_-} k_- Z_-^{-1} \mathbf{E} \cdot \overline{\mathbf{F}} d\Omega_- + i \langle \gamma_t^- \overline{\mathbf{F}}; \gamma_t^- \mathbf{H} \rangle = 0.$$

En prenant en compte la condition de trace tangentielle (4.1e) du problème de diffraction-transmission (4.1), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{F} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega_-), \quad \int_{\Omega_-} \frac{1}{k_- Z_-} \mathbf{rot} \mathbf{E} \cdot \mathbf{rot} \overline{\mathbf{F}} d\Omega_- - \int_{\Omega_-} k_- Z_-^{-1} \mathbf{E} \cdot \overline{\mathbf{F}} d\Omega_- + i \langle \gamma_t^- \overline{\mathbf{F}}; \gamma_t^+ \mathbf{H} \rangle \\ = -i \langle \gamma_t^- \overline{\mathbf{F}}; \gamma_t^+ \mathbf{H}_{\text{inc}} \rangle. \end{aligned}$$

La Proposition 4.3 appliquée à  $(\mathbf{E}; \mathbf{H})$  prolongé par  $(\mathbf{0}; \mathbf{0})$  dans  $\Omega_-$  nous fournit la représentation intégrale suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{E} = -ik_+ Z_+ \mathcal{T}_{k_+} \gamma_t^+ \mathbf{H} + \mathcal{K}_{k_+} \gamma_t^+ \mathbf{E} \\ \mathbf{H} = \mathcal{K}_{k_+} \gamma_t^+ \mathbf{H} + ik_+ Z_+^{-1} \mathcal{T}_{k_+} \gamma_t^+ \mathbf{E} \end{cases} \quad \text{dans } \Omega_+.$$

La Proposition 4.2 permet alors d'obtenir les relations de trace données ci-dessous :

$$\frac{1}{2} \gamma_t^+ \mathbf{E} - \mathbf{K}_{k_+} \gamma_t^+ \mathbf{E} + ik_+ Z_+ \mathbf{T}_{k_+} \gamma_t^+ \mathbf{H} = \mathbf{0} \quad , \quad \gamma_t^+ \mathbf{H} = \frac{1}{2} \gamma_t^+ \mathbf{H} + \mathbf{K}_{k_+} \gamma_t^+ \mathbf{H} + ik_+ Z_+^{-1} \mathbf{T}_{k_+} \gamma_t^+ \mathbf{E}.$$

Il suffit ensuite de remplacer  $\gamma_t^+ \mathbf{H}$  dans la formulation variationnelle grâce à la seconde relation de trace et  $\gamma_t^+ \mathbf{E}$  en se servant de la condition de trace tangentielle (4.1d) du problème de diffraction-transmission (4.1). ■

Le couplage fort FEM-BEM (4.8) est évidemment équivalent au problème de diffraction-transmission (4.1).

**Proposition 4.9** (Equivalence du couplage fort FEM-BEM).

Soit  $\mathbf{E} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega_-)$  et  $\mathbf{j} \in \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$  satisfaisant :

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{F} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega_-), \quad & \int_{\Omega_-} \frac{1}{k_- Z_-} \mathbf{rot} \mathbf{E} \cdot \mathbf{rot} \bar{\mathbf{F}} - \int_{\Omega_-} k_- Z_-^{-1} \mathbf{E} \cdot \bar{\mathbf{F}} + i \left\langle \gamma_t^- \bar{\mathbf{F}}; \left( \frac{1}{2} \mathbf{Id} + \mathbf{K}_{k_+} \right) \mathbf{j} \right\rangle \\ & - k_+ Z_+^{-1} \langle \gamma_t^- \bar{\mathbf{F}}; \mathbf{T}_{k_+} \gamma_t^- \mathbf{E} \rangle \\ & = -i \langle \gamma_t^- \bar{\mathbf{F}}; \gamma_t^+ \mathbf{H}_{\text{inc}} \rangle - k_+ Z_+^{-1} \langle \gamma_t^- \bar{\mathbf{F}}; \mathbf{T}_{k_+} \gamma_t^+ \mathbf{E}_{\text{inc}} \rangle, \\ \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma), \quad & \frac{1}{2} \langle \mathbf{v}; \gamma_t^- \mathbf{E} \rangle - \langle \mathbf{v}; \mathbf{K}_{k_+} \gamma_t^- \mathbf{E} \rangle + ik_+ Z_+ \langle \mathbf{v}; \mathbf{T}_{k_+} \mathbf{j} \rangle \\ & = \frac{1}{2} \langle \mathbf{v}; \gamma_t^+ \mathbf{E}_{\text{inc}} \rangle - \langle \mathbf{v}; \mathbf{K}_{k_+} \gamma_t^+ \mathbf{E}_{\text{inc}} \rangle. \end{aligned}$$

Si nous définissons  $\mathbf{H} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega_-)$  par  $\mathbf{H} = \frac{1}{ik_- Z_-} \mathbf{rot} \mathbf{E}$  et prolongeons  $(\mathbf{E}; \mathbf{H})$  dans  $\Omega_+$  comme suit :

$$\begin{cases} \mathbf{E} = -ik_+ Z_+ \mathcal{T}_{k_+} \mathbf{j} + \mathcal{K}_{k_+} \mathbf{m} \\ \mathbf{H} = \mathcal{K}_{k_+} \mathbf{j} + ik_+ Z_+^{-1} \mathcal{T}_{k_+} \mathbf{m} \end{cases} \text{ dans } \Omega_+ \text{ avec } \mathbf{m} = \gamma_t^- \mathbf{E} - \gamma_t^+ \mathbf{E}_{\text{inc}},$$

le champ  $(\mathbf{E}; \mathbf{H})$  est solution du problème de diffraction-transmission (4.1).

**Preuve**

En utilisant la partie volumique de la formulation variationnelle, nous montrons que :

$$\begin{aligned} \mathbf{rot} \left( \frac{1}{k_- Z_-} \mathbf{rot} \mathbf{E} \right) - k_- Z_-^{-1} \mathbf{E} &= \mathbf{0} \text{ dans } \Omega_-, \\ \gamma_t^- \mathbf{H} &= \left( \frac{1}{2} \mathbf{Id} + \mathbf{K}_{k_+} \right) \mathbf{j} + ik_+ Z_+^{-1} \mathbf{T}_{k_+} \gamma_t^- \mathbf{E} + \gamma_t^+ \mathbf{H}_{\text{inc}} - ik_+ Z_+^{-1} \mathbf{T}_{k_+} \gamma_t^+ \mathbf{E}_{\text{inc}}. \end{aligned}$$

De plus, la Proposition 4.2 nous permet de déterminer les traces tangentielles extérieures de  $(\mathbf{E}; \mathbf{H})$  :

$$\gamma_t^+ \mathbf{E} = \frac{1}{2} \mathbf{m} + \mathbf{K}_{k_+} \mathbf{m} - ik_+ Z_+ \mathbf{T}_{k_+} \mathbf{j} \quad , \quad \gamma_t^+ \mathbf{H} = \frac{1}{2} \mathbf{j} + \mathbf{K}_{k_+} \mathbf{j} + ik_+ Z_+^{-1} \mathbf{T}_{k_+} \mathbf{m}.$$

Ceci prouve que les conditions de transmission (4.1d)-(4.1e) du problème de diffraction transmission (4.1) sont vérifiées. ■

Pour finir, nous mentionnons qu'il existe des valeurs de  $k_+$  pour lesquelles le couplage fort FEM-BEM (4.8) n'est pas bien posé. Cette dégénérescence s'explique rigoureusement de la même manière que pour le couplage fort FEM-BEM que nous avons présenté dans la partie sur l'acoustique. Plus précisément, le système de Maxwell harmonique dans  $\Omega_-$  admet des fréquences de résonance. Ce point est abordé dans la prochaine section.

## 4.7 Le caractère bien posé du système de Maxwell harmonique

Dans cette section, nous supposons que le nombre d'onde  $k \in \mathbb{R}_+^*$  et l'impédance  $Z \in \mathbb{R}_+^*$  sont quelconques. Comme c'était le cas avec l'équation de Helmholtz, le système de Maxwell harmonique avec condition de trace tangentielle n'est pas toujours bien posé dans  $\Omega_-$  alors qu'il l'est toujours dans  $\Omega_+$  [86, 88].

Plus précisément, il existe  $(k_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+^*$ , ne dépendant pas de  $Z$ , et  $((\mathbf{E}_n; \mathbf{H}_n))_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega_-)^2 \setminus \{(\mathbf{0}; \mathbf{0})\}$  tels que :

$$\begin{cases} \mathbf{rot} \mathbf{E}_n - ik_n Z \mathbf{H}_n = \mathbf{0} \\ \mathbf{rot} \mathbf{H}_n + ik_n Z^{-1} \mathbf{E}_n = \mathbf{0} \end{cases} \text{ dans } \Omega_- \quad , \quad \gamma_t^- \mathbf{E}_n = \mathbf{0}.$$

Les  $(k_n)$  sont les valeurs propres du système de Maxwell harmonique intérieur avec condition de trace tangentielle et sont liés aux valeurs propres non nulles de l'opérateur  $\mathbf{rot} \mathbf{rot}$ , notées  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Concrètement, nous avons :

$$\mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{E}_n = \lambda_n \mathbf{E}_n \text{ dans } \Omega_- \quad , \quad k_n = \sqrt{\lambda_n}.$$

Il s'ensuit que le problème suivant est bien posé pour  $(\mathbf{E}; \mathbf{H}) \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega_-)^2$  et  $\mathbf{j} \in \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$  si et seulement si  $k$  ne correspond à aucun des  $(k_n)$  :

$$\begin{cases} \mathbf{rot} \mathbf{E} - ikZ\mathbf{H} = \mathbf{0} \\ \mathbf{rot} \mathbf{H} + ikZ^{-1}\mathbf{E} = \mathbf{0} \end{cases} \quad \text{dans } \Omega_- \quad , \quad \gamma_t^- \mathbf{E} = \mathbf{j}.$$

Pour finir, le système de Maxwell harmonique extérieur avec condition de trace tangentielle est bien posé pour  $(\mathbf{E}; \mathbf{H}) \in \mathbf{H}_{\text{loc}}(\mathbf{rot}, \overline{\Omega_+})^2$  et  $\mathbf{j} \in \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$  :

$$\begin{cases} \mathbf{rot} \mathbf{E} - ikZ\mathbf{H} = \mathbf{0} \\ \mathbf{rot} \mathbf{H} + ikZ^{-1}\mathbf{E} = \mathbf{0} \end{cases} \quad \text{dans } \Omega_+ \quad , \quad \gamma_t^+ \mathbf{E} = \mathbf{j} \quad , \quad Z\mathbf{H} \wedge \mathbf{e}_r - \mathbf{E} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right).$$

Remarquons que nous n'avons donné des résultats de type "bien-posé" que pour les systèmes de Maxwell harmoniques intérieur et extérieur couplés à une condition de trace tangentielle sur  $\mathbf{E}$ . Ces résultats sont également vrais lorsque les systèmes de Maxwell harmoniques intérieur et extérieur sont associés à une condition de trace tangentielle sur  $\mathbf{H}$ . Les champs électrique et magnétique jouent en effet un rôle symétrique dans le système de Maxwell harmonique. Plus précisément, le champ  $(\mathbf{E}; \mathbf{H})$  est solution du système de Maxwell harmonique de nombre d'onde  $k$  et d'impédance  $Z$  si et seulement si le champ  $(\mathbf{H}; -\mathbf{E})$  est solution du système de Maxwell harmonique de nombre d'onde  $k$  et d'impédance  $Z^{-1}$  :

$$\begin{cases} \mathbf{rot} \mathbf{E} - ikZ\mathbf{H} = \mathbf{0} \\ \mathbf{rot} \mathbf{H} + ikZ^{-1}\mathbf{E} = \mathbf{0} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \mathbf{rot} \mathbf{H} - ikZ^{-1}(-\mathbf{E}) = \mathbf{0} \\ \mathbf{rot}(-\mathbf{E}) + ikZ\mathbf{H} = \mathbf{0} \end{cases}.$$

De là, nous en déduisons que le problème extérieur suivant est bien posé :

$$\begin{cases} \mathbf{rot} \mathbf{E} - ikZ\mathbf{H} = \mathbf{0} \\ \mathbf{rot} \mathbf{H} + ikZ^{-1}\mathbf{E} = \mathbf{0} \end{cases} \quad \text{dans } \Omega_+ \quad , \quad \gamma_t^+ \mathbf{H} = \mathbf{j} \quad , \quad Z\mathbf{H} \wedge \mathbf{e}_r - \mathbf{E} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right),$$

et il en va de même pour le problème intérieur correspondant si  $k$  n'est pas une valeur propre du système de Maxwell harmonique intérieur avec condition de trace tangentielle :

$$\begin{cases} \mathbf{rot} \mathbf{E} - ikZ\mathbf{H} = \mathbf{0} \\ \mathbf{rot} \mathbf{H} + ikZ^{-1}\mathbf{E} = \mathbf{0} \end{cases} \quad \text{dans } \Omega_- \quad , \quad \gamma_t^- \mathbf{H} = \mathbf{j}.$$

Comme en acoustique, les valeurs propres du système de Maxwell harmonique intérieur avec condition de trace tangentielle sont à l'origine du défaut d'injectivité de certains opérateurs intégraux surfaciques.

**Proposition 4.10** (Inversibilité d'opérateurs surfaciques).

Les opérateurs  $\mathbf{T}_k$  et  $\frac{1}{2}\mathbf{Id} + \mathbf{K}_k$  sont inversibles uniquement si  $k$  n'est pas une valeur propre du système de Maxwell harmonique intérieur avec condition de trace tangentielle. Si  $k$  est effectivement une valeur propre du système de Maxwell harmonique intérieur avec condition de trace tangentielle,  $\mathbf{T}_k$  et  $\frac{1}{2}\mathbf{Id} + \mathbf{K}_k$  ne sont pas injectifs et les noyaux de ces opérateurs ont un élément  $\mathbf{j} \in \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma) \setminus \{\mathbf{0}\}$  en commun :

$$\mathbf{T}_k \mathbf{j} = \mathbf{0} \quad , \quad \left(\frac{1}{2}\mathbf{Id} + \mathbf{K}_k\right) \mathbf{j} = \mathbf{0}.$$

**Preuve**

La preuve est très similaire à celle de la Proposition 1.10 page 22. ■

Grâce à la proposition précédente, nous voyons que le couplage fort FEM-BEM (4.8) n'est pas bien posé si  $k_+$  est une valeur propre du système de Maxwell harmonique intérieur avec condition de trace tangentielle. En effet, il existe alors  $\mathbf{j} \in \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma) \setminus \{\mathbf{0}\}$  tel que :

$$\mathbf{T}_k \mathbf{j} = \mathbf{0} \quad , \quad \left(\frac{1}{2}\mathbf{Id} + \mathbf{K}_k\right) \mathbf{j} = \mathbf{0},$$

et en posant  $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ , nous avons :

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{F} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega_-), \quad & \int_{\Omega_-} \frac{1}{k_- Z_-} \mathbf{rot} \mathbf{E} \cdot \mathbf{rot} \overline{\mathbf{F}} - \int_{\Omega_-} k_- Z_-^{-1} \mathbf{E} \cdot \overline{\mathbf{F}} + i \left\langle \gamma_t^- \overline{\mathbf{F}}; \left(\frac{1}{2}\mathbf{Id} + \mathbf{K}_{k_+}\right) \mathbf{j} \right\rangle \\ & - k_+ Z_+^{-1} \langle \gamma_t^- \overline{\mathbf{F}}; \mathbf{T}_{k_+} \gamma_t^- \mathbf{E} \rangle = 0, \\ \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma), \quad & \frac{1}{2} \langle \mathbf{v}; \gamma_t^- \mathbf{E} \rangle - \langle \mathbf{v}; \mathbf{K}_{k_+} \gamma_t^- \mathbf{E} \rangle + ik_+ Z_+ \langle \mathbf{v}; \mathbf{T}_{k_+} \mathbf{j} \rangle = 0. \end{aligned}$$



# Chapitre 5

## Une proposition de couplage faible

### Sommaire

---

<b>5.1 Philosophie de l'approche . . . . .</b>	<b>123</b>
5.1.1 Reformulation du problème de diffraction-transmission . . . . .	123
5.1.2 Résolution du couplage faible . . . . .	124
5.1.3 Opérateurs de transmission optimaux . . . . .	125
<b>5.2 Résolution des sous-problèmes . . . . .</b>	<b>126</b>
5.2.1 Résolution des problèmes extérieurs . . . . .	126
5.2.2 Résolution des problèmes intérieurs . . . . .	129
<b>5.3 Approximations des opérateurs MtE . . . . .</b>	<b>129</b>
5.3.1 Opérateurs différentiels et espaces de Sobolev surfaciques . . . . .	129
5.3.2 Approximation microlocale des opérateurs MtE . . . . .	131
5.3.3 Approximation intégrale du MtE intérieur . . . . .	133
5.3.4 Approximations de Padé . . . . .	134
<b>5.4 Cas particulier de la sphère unité . . . . .</b>	<b>135</b>
5.4.1 Harmoniques sphériques . . . . .	135
5.4.2 Diagonalisation des opérateurs surfaciques . . . . .	136
5.4.3 Qualité des approximations des opérateurs MtE . . . . .	142
5.4.4 Convergence du couplage faible . . . . .	144
5.4.5 Problèmes de résonance du couplage faible . . . . .	147
<b>5.5 Conclusion . . . . .</b>	<b>151</b>

---



## 5.1 Philosophie de l'approche

Le couplage faible que nous proposons pour résoudre le problème de diffraction-transmission électromagnétique :

$$\begin{cases} \mathbf{rot} \mathbf{E} - ik_- Z_- \mathbf{H} = \mathbf{0} \\ \mathbf{rot} \mathbf{H} + ik_- Z_-^{-1} \mathbf{E} = \mathbf{0} \end{cases} \quad \text{dans } \Omega_-, \quad (5.1a)$$

$$\begin{cases} \mathbf{rot} \mathbf{E} - ik_+ Z_+ \mathbf{H} = \mathbf{0} \\ \mathbf{rot} \mathbf{H} + ik_+ Z_+^{-1} \mathbf{E} = \mathbf{0} \end{cases} \quad \text{dans } \Omega_+, \quad (5.1b)$$

$$Z_+ \mathbf{H} \wedge \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} - \mathbf{E} = \mathcal{O}(r^{-2}), \quad (5.1c)$$

$$\gamma_t^- \mathbf{E} = \gamma_t^+ \mathbf{E} + \gamma_t^+ \mathbf{E}_{\text{inc}}, \quad (5.1d)$$

$$\gamma_t^- \mathbf{H} = \gamma_t^+ \mathbf{H} + \gamma_t^+ \mathbf{H}_{\text{inc}}, \quad (5.1e)$$

est l'analogue exact du couplage faible présenté dans la partie sur l'acoustique. Ce chapitre sera par conséquent moins détaillé que le Chapitre 2.

### 5.1.1 Reformulation du problème de diffraction-transmission

Nous commençons par introduire les opérateurs de transmission nécessaires à la reformulation des conditions de transmission (5.1d)-(5.1e) du problème de diffraction-transmission (5.1) :

$$\mathbf{T}_- : \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma) \rightarrow \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma) \quad , \quad \mathbf{T}_+ : \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma) \rightarrow \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma).$$

Si les opérateurs de transmission sont tels que  $\mathbf{T}_- + \mathbf{T}_+$  est injectif, les conditions de transmission (5.1d)-(5.1e) du problème de diffraction-transmission (5.1) sont équivalentes aux conditions de transmission suivantes :

$$\begin{cases} \gamma_t^- \mathbf{H} + \mathbf{T}_- \gamma_t^- \mathbf{E} = \gamma_t^+ \mathbf{H} + \mathbf{T}_- \gamma_t^+ \mathbf{E} + \gamma_t^+ \mathbf{H}_{\text{inc}} + \mathbf{T}_- \gamma_t^+ \mathbf{E}_{\text{inc}} \\ \gamma_t^+ \mathbf{H} - \mathbf{T}_+ \gamma_t^+ \mathbf{E} = \gamma_t^- \mathbf{H} - \mathbf{T}_+ \gamma_t^- \mathbf{E} - \gamma_t^- \mathbf{H}_{\text{inc}} + \mathbf{T}_+ \gamma_t^- \mathbf{E}_{\text{inc}} \end{cases} . \quad (5.2)$$

Pour reformuler le problème de diffraction-transmission (5.1), nous devons tout d'abord introduire les opérateurs de trace intervenant dans la définition des sous-problèmes intérieur et extérieur associés au couplage faible :

$$\begin{aligned} \forall (\mathbf{E}; \mathbf{H}) \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega_-)^2, \quad \mathbf{B}_-(\mathbf{E}; \mathbf{H}) &= \gamma_t^- \mathbf{H} + \mathbf{T}_- \gamma_t^- \mathbf{E}, \\ \forall (\mathbf{E}; \mathbf{H}) \in \mathbf{H}_{\text{loc}}(\mathbf{rot}, \overline{\Omega_+})^2, \quad \mathbf{B}_+(\mathbf{E}; \mathbf{H}) &= \gamma_t^+ \mathbf{H} - \mathbf{T}_+ \gamma_t^+ \mathbf{E}. \end{aligned}$$

A partir de là, nous pouvons expliciter les inconnues du couplage faible :

$$\mathbf{g}_- = \mathbf{B}_-(\mathbf{E}; \mathbf{H}) \quad , \quad \mathbf{g}_+ = \mathbf{B}_+(\mathbf{E}; \mathbf{H}).$$

Il nous reste enfin à définir les opérateurs de résolution  $\mathbf{R}_-$  et  $\mathbf{R}_+$  associés aux sous-problèmes intérieur et extérieur du couplage faible :

$$\forall \mathbf{g} \in \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma), \quad \mathbf{R}_- \mathbf{g} = \gamma_t^- \mathbf{E}_- \quad , \quad \forall \mathbf{g} \in \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma), \quad \mathbf{R}_+ \mathbf{g} = \gamma_t^+ \mathbf{E}_+,$$

les champs  $(\mathbf{E}_-; \mathbf{H}_-) \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega_-)^2$  et  $(\mathbf{E}_+; \mathbf{H}_+) \in \mathbf{H}_{\text{loc}}(\mathbf{rot}, \overline{\Omega_+})^2$  étant les solutions des problèmes suivants :

$$\begin{cases} \mathbf{rot} \mathbf{E}_- - ik_- Z_- \mathbf{H}_- = \mathbf{0} \\ \mathbf{rot} \mathbf{H}_- + ik_- Z_-^{-1} \mathbf{E}_- = \mathbf{0} \end{cases} \quad \text{dans } \Omega_- \quad , \quad \mathbf{B}_-(\mathbf{E}_-; \mathbf{H}_-) = \mathbf{g}, \quad (5.3)$$

$$\begin{cases} \mathbf{rot} \mathbf{E}_+ - ik_+ Z_+ \mathbf{H}_+ = \mathbf{0} \\ \mathbf{rot} \mathbf{H}_+ + ik_+ Z_+^{-1} \mathbf{E}_+ = \mathbf{0} \end{cases} \quad \text{dans } \Omega_+ \quad , \quad \mathbf{B}_+(\mathbf{E}_+; \mathbf{H}_+) = \mathbf{g} \quad , \quad Z_+ \mathbf{H}_+ \wedge \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} - \mathbf{E}_+ = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right). \quad (5.4)$$

Comme dans la partie sur l'acoustique, nous insistons sur le fait que le caractère bien posé des problèmes (5.3) et (5.4) est dépendant du choix des opérateurs de transmission. Dans la suite de ce travail, nous supposons que les problèmes (5.3) et (5.4) sont effectivement bien posés de sorte que les opérateurs de résolution soient correctement définis.

La reformulation du problème de diffraction-transmission (5.1) est donnée dans la proposition suivante.

**Proposition 5.1** (Couplage faible).

Si  $(\mathbf{E}; \mathbf{H})$  est la solution du problème de diffraction-transmission (5.1), nous avons :

$$(\mathbf{Id} - \mathbf{S}_\pi) \begin{pmatrix} \mathbf{g}_- \\ \mathbf{g}_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_t^+ \mathbf{H}_{\text{inc}} + \mathbf{T}_- \gamma_t^+ \mathbf{E}_{\text{inc}} \\ -\gamma_t^+ \mathbf{H}_{\text{inc}} + \mathbf{T}_+ \gamma_t^+ \mathbf{E}_{\text{inc}} \end{pmatrix}, \quad (5.5)$$

l'opérateur  $\mathbf{S}_\pi$  étant défini ci-dessous :

$$\mathbf{S}_\pi = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{S}_+ \\ \mathbf{S}_- & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_- = \mathbf{Id} - (\mathbf{T}_+ + \mathbf{T}_-) \mathbf{R}_-, \quad \mathbf{S}_+ = \mathbf{Id} + (\mathbf{T}_+ + \mathbf{T}_-) \mathbf{R}_+.$$

**Preuve**

La preuve est très similaire à celle de la Proposition 2.1 page 30. ■

Pour finir, le couplage faible (5.5) est bien sûr une reformulation équivalente du problème de diffraction-transmission (5.1).

**Proposition 5.2** (Equivalence couplage faible/problème de diffraction-transmission).

Soit  $\mathbf{g}_-, \mathbf{g}_+ \in \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$  tels que :

$$(\mathbf{Id} - \mathbf{S}_\pi) \begin{pmatrix} \mathbf{g}_- \\ \mathbf{g}_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_t^+ \mathbf{H}_{\text{inc}} + \mathbf{T}_- \gamma_t^+ \mathbf{E}_{\text{inc}} \\ -\gamma_t^+ \mathbf{H}_{\text{inc}} + \mathbf{T}_+ \gamma_t^+ \mathbf{E}_{\text{inc}} \end{pmatrix}.$$

Si nous définissons le champ électromagnétique  $(\mathbf{E}; \mathbf{H}) \in [\mathbf{H}(\text{rot}, \Omega_-) \otimes \mathbf{H}_{\text{loc}}(\text{rot}, \overline{\Omega_+})]^2$  comme suit :

$$\begin{cases} \mathbf{rot} \mathbf{E}_- - ik_- Z_- \mathbf{H}_- = \mathbf{0} \\ \mathbf{rot} \mathbf{H}_- + ik_- Z_-^{-1} \mathbf{E}_- = \mathbf{0} \end{cases} \text{ dans } \Omega_- \quad , \quad \mathbf{B}_-(\mathbf{E}_-; \mathbf{H}_-) = \mathbf{g}_-,$$

$$\begin{cases} \mathbf{rot} \mathbf{E}_+ - ik_+ Z_+ \mathbf{H}_+ = \mathbf{0} \\ \mathbf{rot} \mathbf{H}_+ + ik_+ Z_+^{-1} \mathbf{E}_+ = \mathbf{0} \end{cases} \text{ dans } \Omega_+ \quad , \quad \mathbf{B}_+(\mathbf{E}_+; \mathbf{H}_+) = \mathbf{g}_+ \quad , \quad Z_+ \mathbf{H}_+ \wedge \mathbf{e}_r - \mathbf{E}_+ = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right).$$

ce dernier est solution du problème de diffraction-transmission (5.1).

**Preuve**

Les arguments sont les mêmes que ceux de la preuve de la Proposition 2.2 page 31. ■

### 5.1.2 Résolution du couplage faible

Le couplage faible (5.5), comme le couplage faible que nous avons présenté dans la partie sur l'acoustique, ne se prête pas à une résolution directe et ceci pour les mêmes raisons. Nous choisissons donc de le résoudre, lui aussi, par la procédure GMRES [93]. Nous précisons toutefois que la résolution du couplage faible (5.5) par le biais de méthodes de point fixe est équivalente à des algorithmes de décomposition de domaine plus classiques. Ceci est illustré dans la proposition suivante pour la méthode de Jacobi [93].

**Proposition 5.3** (Couplage faible et méthode de Jacobi).

L'application de la méthode de Jacobi au couplage faible (5.5) se traduit par le processus itératif d'approximation :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{g}_-^{n+1} \\ \mathbf{g}_+^{n+1} \end{pmatrix} = \mathbf{S}_\pi \begin{pmatrix} \mathbf{g}_-^n \\ \mathbf{g}_+^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma_t^+ \mathbf{H}_{\text{inc}} + \mathbf{T}_- \gamma_t^+ \mathbf{E}_{\text{inc}} \\ -\gamma_t^+ \mathbf{H}_{\text{inc}} + \mathbf{T}_+ \gamma_t^+ \mathbf{E}_{\text{inc}} \end{pmatrix}.$$

Ce dernier est par ailleurs équivalent à la méthode de décomposition de domaine classique suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{rot} \mathbf{E}_{n+1} - ik_\pm Z_\pm \mathbf{H}_{n+1} = \mathbf{0} \\ \mathbf{rot} \mathbf{H}_{n+1} + ik_\pm Z_\pm^{-1} \mathbf{E}_{n+1} = \mathbf{0} \end{cases} \text{ dans } \Omega_\pm \quad , \quad Z_+ \mathbf{H}_{n+1} \wedge \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} - \mathbf{E}_{n+1} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right),$$

$$\gamma_t^- \mathbf{H}_{n+1} + \mathbf{T}_- \gamma_t^- \mathbf{E}_{n+1} = \gamma_t^+ \mathbf{H}_n + \mathbf{T}_- \gamma_t^+ \mathbf{E}_n + \gamma_t^+ \mathbf{H}_{\text{inc}} + \mathbf{T}_- \gamma_t^+ \mathbf{E}_{\text{inc}},$$

$$\gamma_t^+ \mathbf{H}_{n+1} - \mathbf{T}_+ \gamma_t^+ \mathbf{E}_{n+1} = \gamma_t^- \mathbf{H}_n - \mathbf{T}_+ \gamma_t^- \mathbf{E}_n - \gamma_t^- \mathbf{H}_{\text{inc}} + \mathbf{T}_+ \gamma_t^- \mathbf{E}_{\text{inc}},$$

pour le problème de diffraction-transmission (5.1).

**Preuve**

Les calculs sont identiques à ceux des preuves des Propositions 5.1 et 5.2. ■

Pour finir, nous rappelons que, après avoir résolu le couplage faible (5.5), il est encore nécessaire de résoudre les problèmes intérieur (5.3) et extérieur (5.4) suivants :

$$\begin{cases} \mathbf{rot} \mathbf{E} - ik_- Z_- \mathbf{H} = \mathbf{0} \\ \mathbf{rot} \mathbf{H} + ik_- Z_-^{-1} \mathbf{E} = \mathbf{0} \end{cases} \text{ dans } \Omega_- \quad , \quad \mathbf{B}_-(\mathbf{E}; \mathbf{H}) = \mathbf{g}_-,$$

$$\begin{cases} \mathbf{rot} \mathbf{E} - ik_+ Z_+ \mathbf{H} = \mathbf{0} \\ \mathbf{rot} \mathbf{H} + ik_+ Z_+^{-1} \mathbf{E} = \mathbf{0} \end{cases} \text{ dans } \Omega_+ \quad , \quad \mathbf{B}_+(\mathbf{E}; \mathbf{H}) = \mathbf{g}_+ \quad , \quad Z_+ \mathbf{H} \wedge \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} - \mathbf{E} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right),$$

pour accéder à la solution  $(\mathbf{E}; \mathbf{H})$  du problème de diffraction-transmission (5.1).

**5.1.3 Opérateurs de transmission optimaux**

Il est également possible d'exhiber des opérateurs de transmission optimaux pour le couplage faible (5.5). Ces derniers ne sont toutefois pas liés à des opérateurs DtN comme pour le couplage faible que nous avons présenté dans la partie sur l'acoustique mais à leurs analogues électromagnétiques, à savoir les opérateurs Magnetic-to-Electric, classiquement dénommés opérateurs MtE.

Si  $k, Z \in \mathbb{R}_+^*$ , l'opérateur Magnetic-to-Electric extérieur, noté  $\mathbf{\Lambda}_{+,k,Z}$ , est défini de  $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$  dans lui-même par :

$$\forall \mathbf{j} \in \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma), \quad \mathbf{\Lambda}_{+,k,Z} \mathbf{j} = \gamma_t^+ \mathbf{H}_j,$$

le champ  $(\mathbf{E}_j; \mathbf{H}_j) \in [\mathbf{H}_{\text{loc}}(\mathbf{rot}, \overline{\Omega_+})]^2$  vérifiant :

$$\begin{cases} \mathbf{rot} \mathbf{E}_j - ik Z \mathbf{H}_j = \mathbf{0} \\ \mathbf{rot} \mathbf{H}_j + ik Z^{-1} \mathbf{E}_j = \mathbf{0} \end{cases} \text{ dans } \Omega_+ \quad , \quad \gamma_t^+ \mathbf{E}_j = \mathbf{j} \quad , \quad Z \mathbf{H}_j \wedge \mathbf{e}_r - \mathbf{E}_j = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right). \quad (5.6)$$

Il s'agit d'un opérateur continu et inversible à inverse continu.

Si  $k, Z \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega_-})$ , l'opérateur Magnetic-to-Electric intérieur, noté  $\mathbf{\Lambda}_{-,k,Z}$ , est défini comme suit :

$$\forall \mathbf{j} \in \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma), \quad \mathbf{\Lambda}_{-,k,Z} \mathbf{j} = \gamma_t^- \mathbf{H}_j,$$

le champ  $(\mathbf{E}_j; \mathbf{H}_j) \in [\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega_-)]^2$  satisfaisant :

$$\begin{cases} \mathbf{rot} \mathbf{E}_j - ik Z \mathbf{H}_j = \mathbf{0} \\ \mathbf{rot} \mathbf{H}_j + ik Z^{-1} \mathbf{E}_j = \mathbf{0} \end{cases} \text{ dans } \Omega_- \quad , \quad \gamma_t^- \mathbf{E}_j = \mathbf{j}. \quad (5.7)$$

L'opérateur  $\mathbf{\Lambda}_{-,k,Z}$  n'est bien défini que si il n'existe aucun champ  $(\mathbf{E}; \mathbf{H}) \in [\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega_-)]^2 \setminus \{(\mathbf{0}; \mathbf{0})\}$  tel que :

$$\begin{cases} \mathbf{rot} \mathbf{E} - ik Z \mathbf{H} = \mathbf{0} \\ \mathbf{rot} \mathbf{H} + ik Z^{-1} \mathbf{E} = \mathbf{0} \end{cases} \text{ dans } \Omega_- \quad , \quad \gamma_t^- \mathbf{E} = \mathbf{0}.$$

Dans ce cas, il est également continu. De plus,  $\mathbf{\Lambda}_{-,k,Z}$  est inversible si et seulement si il n'existe pas d'élément  $(\mathbf{E}; \mathbf{H})$  non nul de  $[\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega_-)]^2$  vérifiant :

$$\begin{cases} \mathbf{rot} \mathbf{E} - ik Z \mathbf{H} = \mathbf{0} \\ \mathbf{rot} \mathbf{H} + ik Z^{-1} \mathbf{E} = \mathbf{0} \end{cases} \text{ dans } \Omega_- \quad , \quad \gamma_t^- \mathbf{H} = \mathbf{0}.$$

Par ailleurs, si  $\mathbf{\Lambda}_{-,k,Z}$  est inversible, son inverse est continu. Pour finir, si  $k, Z \in \mathbb{R}_+^*$ , les conditions que nous avons données pour que  $\mathbf{\Lambda}_{-,k,Z}$  soit bien défini et inversible sont équivalentes au fait que  $k$  n'est pas une valeur propre du système de Maxwell harmonique intérieur avec condition de trace tangentielle.

Nous pouvons maintenant préciser les opérateurs de transmission optimaux pour le couplage faible (5.5) grâce à la proposition suivante.

**Proposition 5.4** (Relations vérifiées par les opérateurs de résolution).

Les opérateurs  $MtE$ , de transmission et de résolution sont liés par les relations suivantes :

$$(\mathbf{\Lambda}_{-,k_-,Z_-} + \mathbf{T}_-)\mathbf{R}_- = \mathbf{Id} \quad , \quad (\mathbf{\Lambda}_{+,k_+,Z_+} - \mathbf{T}_+)\mathbf{R}_+ = \mathbf{Id}.$$

**Preuve**

La preuve ressemble à celle de la Proposition 2.4 page 34. ■

**Proposition 5.5** (Opérateurs optimaux).

Les opérateurs de transmission optimaux pour le couplage faible (5.5) sont donnés ci-dessous :

$$\mathbf{T}_- = -\mathbf{\Lambda}_{+,k_+,Z_+} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{S}_+ = \mathbf{0} \quad , \quad \mathbf{T}_+ = \mathbf{\Lambda}_{-,k_-,Z_-} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{S}_- = \mathbf{0}.$$

Nous voyons donc que l'impact des opérateurs de transmission optimaux sur l'opérateur du couplage faible (5.5) est le même qu'en acoustique. Si les deux opérateurs de transmission sont optimaux,  $\mathbf{S}_\pi$  est nul. De plus, si un seul des opérateurs de transmission est optimal,  $\mathbf{S}_\pi$  est nilpotent et son spectre est par conséquent réduit à 0.

Dans la prochaine section, nous verrons qu'il existe également des opérateurs de transmission optimaux pour la résolution itérative des sous-problèmes (5.3) et (5.4). Ceux-ci sont toutefois différents des opérateurs de transmission optimaux pour le couplage faible (5.5). Comme nous l'avons fait dans la partie sur l'acoustique, nous nous limiterons en pratique, et ceci pour les mêmes raisons, à l'utilisation des opérateurs de transmission optimaux pour le couplage faible (5.5).

## 5.2 Résolution des sous-problèmes

Les formulations adoptées pour la résolution des sous-problèmes intérieurs (5.3) et extérieurs (5.4) sont les analogues exacts des formulations que nous avons utilisées pour résoudre les sous-problèmes du couplage faible présenté dans la partie sur l'acoustique.

### 5.2.1 Résolution des problèmes extérieurs

La formulation par équations intégrales que nous proposons pour résoudre le problème extérieur (5.4) est équivalente à ce dernier. Il s'agit d'une généralisation de la formulation donnée dans l'article [10].

**Proposition 5.6** (Formulation pour la résolution du problème extérieur).

Soit  $\mathbf{g} \in \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$  et  $(\mathbf{E}; \mathbf{H}) \in [\mathbf{H}_{\text{loc}}(\mathbf{rot}, \overline{\Omega_+})]^2$  tels que :

$$\begin{cases} \mathbf{rot} \mathbf{E} - ik_+ Z_+ \mathbf{H} = \mathbf{0} \\ \mathbf{rot} \mathbf{H} + ik_+ Z_+^{-1} \mathbf{E} = \mathbf{0} \end{cases} \quad \text{dans } \Omega_+ \quad , \quad \gamma_t^+ \mathbf{H} - \mathbf{T}_+ \gamma_t^+ \mathbf{E} = \mathbf{g}.$$

Les relations suivantes sont alors vérifiées :

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \mathbf{T}_+^{-1} \gamma_t^+ \mathbf{H} - \mathbf{K}_{k_+} \gamma_t^+ \mathbf{E} + ik_+ Z_+ \mathbf{T}_{k_+} \gamma_t^+ \mathbf{H} = \frac{1}{2} \mathbf{T}_+^{-1} \mathbf{g} \\ \frac{1}{2} \mathbf{T}_+ \gamma_t^+ \mathbf{E} - \mathbf{K}_{k_+} \gamma_t^+ \mathbf{H} - ik_+ Z_+^{-1} \mathbf{T}_{k_+} \gamma_t^+ \mathbf{E} = -\frac{1}{2} \mathbf{g} \end{cases} . \quad (5.8)$$

Réciproquement, si  $\mathbf{g}, \mathbf{m}, \mathbf{j} \in \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$  satisfont :

$$\frac{1}{2} \mathbf{T}_+^{-1} \mathbf{j} - \mathbf{K}_{k_+} \mathbf{m} + ik_+ Z_+ \mathbf{T}_{k_+} \mathbf{j} = \frac{1}{2} \mathbf{T}_+^{-1} \mathbf{g} \quad , \quad \frac{1}{2} \mathbf{T}_+ \mathbf{m} - \mathbf{K}_{k_+} \mathbf{j} - ik_+ Z_+^{-1} \mathbf{T}_{k_+} \mathbf{m} = -\frac{1}{2} \mathbf{g},$$

le champ  $(\mathbf{E}; \mathbf{H}) \in [\mathbf{H}_{\text{loc}}(\mathbf{rot}, \overline{\Omega_+})]^2$  défini ci-dessous :

$$\begin{cases} \mathbf{E} = -ik_+ Z_+ \mathcal{T}_{k_+} \mathbf{j} + \mathcal{K}_{k_+} \mathbf{m} \\ \mathbf{H} = \mathcal{K}_{k_+} \mathbf{j} + ik_+ Z_+^{-1} \mathcal{T}_{k_+} \mathbf{m} \end{cases} \quad \text{dans } \Omega_+,$$

est solution du problème extérieur (5.4).

**Preuve**

La preuve est similaire à celle de la Proposition 2.6 page 35. ■

La formulation (5.8) peut être préconditionnée, comme son homologue en acoustique, par le biais d'une reformulation, dans l'optique d'une résolution efficace par la procédure GMRES.

**Proposition 5.7** (Formulation préconditionnée pour la résolution du problème extérieur).

Si nous introduisons les quantités :

$$\mathbf{u} = \mathbf{T}_+ \gamma_t^+ \mathbf{E} \quad , \quad \mathbf{v} = \mathbf{T}_+^{-1} \gamma_t^+ \mathbf{H},$$

la formulation initiale (5.8) est équivalente au système suivant :

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \mathbf{v} - \mathbf{K}_{k_+} \mathbf{T}_+^{-1} \mathbf{u} + ik_+ Z_+ \mathbf{T}_{k_+} \mathbf{T}_+ \mathbf{v} = \frac{1}{2} \mathbf{T}_+^{-1} \mathbf{g} \\ \frac{1}{2} \mathbf{u} - \mathbf{K}_{k_+} \mathbf{T}_+ \mathbf{v} - ik_+ Z_+^{-1} \mathbf{T}_{k_+} \mathbf{T}_+^{-1} \mathbf{u} = -\frac{1}{2} \mathbf{g} \end{cases} . \quad (5.9)$$

Les relations données dans la prochaine proposition permettent de déterminer les opérateurs optimaux pour la formulation préconditionnée (5.9).

**Proposition 5.8** (Lien entre les opérateurs intégraux surfaciques et Magnetic-to-Electric).

Soit  $k, Z \in \mathbb{R}_+^*$ . Nous disposons des relations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \mathbf{Id} - \mathbf{K}_k &= ikZ \mathbf{\Lambda}_{-,k,Z} \mathbf{T}_k \quad , \quad \frac{1}{2} \mathbf{Id} + \mathbf{K}_k = -ikZ \mathbf{\Lambda}_{+,k,Z} \mathbf{T}_k, \\ \frac{1}{2} \mathbf{Id} + \mathbf{K}_k &= ikZ \mathbf{T}_k \mathbf{\Lambda}_{-,k,Z} \quad , \quad \frac{1}{2} \mathbf{Id} - \mathbf{K}_k = -ikZ \mathbf{T}_k \mathbf{\Lambda}_{+,k,Z}, \\ Z^2 \mathbf{\Lambda}_{-,k,Z}^2 &= -\mathbf{Id} \quad , \quad Z^2 \mathbf{\Lambda}_{+,k,Z}^2 = -\mathbf{Id}. \end{aligned}$$

Remarquons toutefois que les relations faisant intervenir l'opérateur  $\mathbf{\Lambda}_{-,k,Z}$  n'ont un sens que si ce dernier est bien défini c'est-à-dire si  $k$  n'est pas une valeur propre du système de Maxwell harmonique intérieur avec condition de trace tangentielle.

**Preuve**

Pour les quatre premières relations, la démonstration fait appel aux mêmes idées que la preuve de la Proposition 2.8 page 36. Les deux dernières égalités sont une conséquence de la symétrie du système de Maxwell harmonique. ■

**Proposition 5.9** (Opérateurs optimaux pour la formulation préconditionnée).

Si  $\mathcal{O}$  désigne l'opérateur de la formulation préconditionnée (5.9) :

$$\begin{aligned} \mathcal{O} : \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma) \times \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma) &\rightarrow \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma) \times \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma) \\ \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \mathbf{u} - \mathbf{K}_{k_+} \mathbf{T}_+ \mathbf{v} - ik_+ Z_+^{-1} \mathbf{T}_{k_+} \mathbf{T}_+^{-1} \mathbf{u} \\ \frac{1}{2} \mathbf{v} - \mathbf{K}_{k_+} \mathbf{T}_+^{-1} \mathbf{u} + ik_+ Z_+ \mathbf{T}_{k_+} \mathbf{T}_+ \mathbf{v} \end{pmatrix} , \end{aligned}$$

nous avons :

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_+ = -\mathbf{\Lambda}_{+,k_+,Z_+} &\Rightarrow \text{Sp}(\mathcal{O}) = \{1\} \quad , \quad \mathbf{T}_+ = \mathbf{\Lambda}_{-,k_+,Z_+} &\Rightarrow \text{Sp}(\mathcal{O}) = \{1\}, \\ \mathbf{T}_+ = \mathbf{\Lambda}_{+,k_+,Z_+} &\Rightarrow \text{Sp}(\mathcal{O}) = \{0\} \quad , \quad \mathbf{T}_+ = -\mathbf{\Lambda}_{-,k_+,Z_+} &\Rightarrow \text{Sp}(\mathcal{O}) = \{0\}. \end{aligned}$$

Notons que cette proposition n'est valable que si  $\mathbf{\Lambda}_{+,k_+,Z_+}$  et  $\mathbf{\Lambda}_{-,k_+,Z_+}$  sont inversibles. L'opérateur MtE extérieur  $\mathbf{\Lambda}_{+,k_+,Z_+}$  est inversible sans aucune restriction sur  $k_+$ . Il est toutefois nécessaire que  $k_+$  ne soit pas une valeur propre du système de Maxwell harmonique intérieur avec condition de trace tangentielle pour que  $\mathbf{\Lambda}_{-,k_+,Z_+}$  soit bien défini et inversible (voir sous-section 5.1.3).

**Preuve**

Toutes ces implications se montrant de la même façon, nous ne traitons que la première.

Remarquons tout d'abord que si  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$  et  $\lambda \in \mathbb{C}$ , nous avons :

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\mathbf{u} + \mathbf{K}_{k_+}\mathbf{\Lambda}_{+,k_+,Z_+}\mathbf{v} + ik_+Z_+^{-1}\mathbf{T}_{k_+}\mathbf{\Lambda}_{+,k_+,Z_+}^{-1}\mathbf{u} \\ \frac{1}{2}\mathbf{v} + \mathbf{K}_{k_+}\mathbf{\Lambda}_{+,k_+,Z_+}^{-1}\mathbf{u} - ik_+Z_+\mathbf{T}_{k_+}\mathbf{\Lambda}_{+,k_+,Z_+}\mathbf{v} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \mathbf{K}_{k_+}\mathbf{\Lambda}_{+,k_+,Z_+}\mathbf{v} - \mathbf{K}_{k_+}\mathbf{u} = (\lambda - 1)\mathbf{u} \\ \mathbf{K}_{k_+}\mathbf{\Lambda}_{+,k_+,Z_+}^{-1}\mathbf{u} - \mathbf{K}_{k_+}\mathbf{v} = (\lambda - 1)\mathbf{v} \end{cases} . \end{aligned}$$

Supposons à présent que  $\lambda \neq 1$  est une valeur propre de  $\mathcal{O}$ . Il existe alors  $(\mathbf{u}; \mathbf{v}) \in [\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)]^2 \setminus \{(\mathbf{0}; \mathbf{0})\}$  tel que :

$$\begin{cases} \mathbf{K}_{k_+}\mathbf{\Lambda}_{+,k_+,Z_+}\mathbf{v} - \mathbf{K}_{k_+}\mathbf{u} = (\lambda - 1)\mathbf{u} \\ \mathbf{K}_{k_+}\mathbf{\Lambda}_{+,k_+,Z_+}^{-1}\mathbf{u} - \mathbf{K}_{k_+}\mathbf{v} = (\lambda - 1)\mathbf{v} \end{cases} .$$

Si nous multiplions la seconde ligne par  $\mathbf{\Lambda}_{+,k_+,Z_+}$ , nous obtenons :

$$-\mathbf{K}_{k_+}\mathbf{u} + \mathbf{K}_{k_+}\mathbf{\Lambda}_{+,k_+,Z_+}\mathbf{v} = (\lambda - 1)\mathbf{\Lambda}_{+,k_+,Z_+}\mathbf{v} .$$

Il suffit en effet d'utiliser la relation suivante qui se démontre à partir de la Proposition 5.8 :

$$\mathbf{\Lambda}_{+,k_+,Z_+}\mathbf{K}_{k_+} = -\mathbf{K}_{k_+}\mathbf{\Lambda}_{+,k_+,Z_+} ,$$

Nous en déduisons alors que  $(\lambda - 1)\mathbf{\Lambda}_{+,k_+,Z_+}\mathbf{v} = (\lambda - 1)\mathbf{u}$  et donc  $\mathbf{u} = \mathbf{\Lambda}_{+,k_+,Z_+}\mathbf{v}$ . De là,  $(\lambda - 1)\mathbf{\Lambda}_{+,k_+,Z_+}\mathbf{v} = \mathbf{0}$  et par conséquent,  $\mathbf{u} = \mathbf{v} = \mathbf{0}$ . Ceci n'est toutefois pas possible puisque  $(\mathbf{u}; \mathbf{v}) \neq (\mathbf{0}; \mathbf{0})$ .

À présent, 1 appartient au spectre de  $\mathcal{O}$  si et seulement si il existe  $(\mathbf{u}; \mathbf{v}) \in [\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)]^2 \setminus \{(\mathbf{0}; \mathbf{0})\}$  tel que :

$$\begin{cases} \mathbf{K}_{k_+}\mathbf{\Lambda}_{+,k_+,Z_+}\mathbf{v} - \mathbf{K}_{k_+}\mathbf{u} = \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{k_+}\mathbf{\Lambda}_{+,k_+,Z_+}^{-1}\mathbf{u} - \mathbf{K}_{k_+}\mathbf{v} = \mathbf{0} \end{cases} \Leftrightarrow \mathbf{K}_{k_+}\mathbf{u} = \mathbf{K}_{k_+}\mathbf{\Lambda}_{+,k_+,Z_+}\mathbf{v} .$$

Cela suffit à prouver que le sous-espace propre de  $\mathcal{O}$  associé à 1 n'est pas trivial. ■

Comme en acoustique, il est intéressant de mettre en lumière les similitudes entre la formulation préconditionnée (5.9) et les équations intégrales qui apparaissent dans les méthodes de Brakhage-Werner généralisées. En électromagnétisme, ces méthodes sont utilisées pour résoudre le problème de diffraction par un objet constitué de métal parfaitement conducteur :

$$\begin{cases} \text{rot } \mathbf{E} - ik_+Z_+\mathbf{H} = \mathbf{0} \\ \text{rot } \mathbf{H} + ik_+Z_+^{-1}\mathbf{E} = \mathbf{0} \end{cases} \text{ dans } \Omega_+ \quad , \quad \gamma_t^+\mathbf{E} = \mathbf{g} \quad , \quad Z_+\mathbf{H} \wedge \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} - \mathbf{E} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right) .$$

La solution de ce problème est supposée de la forme :

$$\begin{cases} \mathbf{E} = -ik_+Z_+\mathcal{T}_{k_+}\mathbf{T}_+\mathbf{m} + \mathcal{K}_{k_+}\mathbf{m} \\ \mathbf{H} = \mathcal{K}_{k_+}\mathbf{T}_+\mathbf{m} + ik_+Z_+^{-1}\mathcal{T}_{k_+}\mathbf{m} \end{cases} ,$$

l'opérateur  $\mathbf{T}_+$  étant défini et linéaire de  $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$  dans lui-même. Le problème initial est alors équivalent à l'équation intégrale suivante :

$$\mathcal{O}\mathbf{m} = \mathbf{g} \quad , \quad \mathcal{O} = \frac{1}{2}\text{Id} + \mathbf{K}_{k_+} - ik_+Z_+\mathbf{T}_{k_+}\mathbf{T}_+ ,$$

et nous pouvons montrer que :

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_+ = \mathbf{\Lambda}_{+,k_+,Z_+} & \Rightarrow \mathcal{O} = \text{Id}, \\ \mathbf{T}_+ = -\mathbf{\Lambda}_{+,k_+,Z_+} & \Rightarrow \mathcal{O} = 2\mathbf{K}_{k_+}, \\ \mathbf{T}_+ = \mathbf{\Lambda}_{-,k_+,Z_+} & \Rightarrow \mathcal{O} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{T}_+ = -\mathbf{\Lambda}_{-,k_+,Z_+} & \Rightarrow \mathcal{O} = \text{Id} + 2\mathbf{K}_{k_+}. \end{aligned}$$

### 5.2.2 Résolution des problèmes intérieurs

Si le couplage faible (5.5) est de type BEM-BEM, nous utilisons, pour résoudre les problèmes intérieurs (5.3), des formulations similaires à celles adoptées pour la résolution des problèmes extérieurs (5.4).

**Proposition 5.10** (Formulation pour la résolution du problème intérieur).

La formulation adoptée pour la résolution du problème intérieur (5.3) est donnée ci-dessous :

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\mathbf{T}_-\gamma_t^-\mathbf{E} - \mathbf{K}_{k_-}\gamma_t^-\mathbf{H} - ik_-Z_-^{-1}\mathbf{T}_{k_-}\gamma_t^-\mathbf{E} = \frac{1}{2}\mathbf{g} \\ \frac{1}{2}\mathbf{T}_-^{-1}\gamma_t^-\mathbf{H} - \mathbf{K}_{k_-}\gamma_t^-\mathbf{E} + ik_-Z_-\mathbf{T}_{k_-}\gamma_t^-\mathbf{H} = \frac{1}{2}\mathbf{T}_-^{-1}\mathbf{g} \end{cases} \quad (5.10)$$

En introduisant les quantités :

$$\mathbf{u} = \mathbf{T}_-\gamma_t^-\mathbf{E} \quad , \quad \mathbf{v} = \mathbf{T}_-^{-1}\gamma_t^-\mathbf{H},$$

cette formulation est équivalente aux équations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\mathbf{u} - \mathbf{K}_{k_-}\mathbf{T}_-\mathbf{v} - ik_-Z_-^{-1}\mathbf{T}_{k_-}\mathbf{T}_-^{-1}\mathbf{u} = \frac{1}{2}\mathbf{g} \\ \frac{1}{2}\mathbf{v} - \mathbf{K}_{k_-}\mathbf{T}_-^{-1}\mathbf{u} + ik_-Z_-\mathbf{T}_{k_-}\mathbf{T}_-\mathbf{v} = \frac{1}{2}\mathbf{T}_-^{-1}\mathbf{g} \end{cases} \quad (5.11)$$

**Proposition 5.11** (Opérateurs optimaux pour la formulation préconditionnée).

Nous disposons des résultats suivants :

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_- = -\mathbf{\Lambda}_{+,k_-,Z_-} &\Rightarrow Sp(\mathcal{O}) = \{1\} \quad , \quad \mathbf{T}_- = \mathbf{\Lambda}_{-,k_-,Z_-} &\Rightarrow Sp(\mathcal{O}) = \{1\}, \\ \mathbf{T}_- = \mathbf{\Lambda}_{+,k_-,Z_-} &\Rightarrow Sp(\mathcal{O}) = \{0\} \quad , \quad \mathbf{T}_- = -\mathbf{\Lambda}_{-,k_-,Z_-} &\Rightarrow Sp(\mathcal{O}) = \{0\}, \end{aligned}$$

la notation  $\mathcal{O}$  désignant l'opérateur de la formulation préconditionnée (5.11) :

$$\mathcal{O} : (\mathbf{u}; \mathbf{v}) \mapsto \left( \frac{1}{2}\mathbf{u} - \mathbf{K}_{k_-}\mathbf{T}_-\mathbf{v} - ik_-Z_-^{-1}\mathbf{T}_{k_-}\mathbf{T}_-^{-1}\mathbf{u}; \frac{1}{2}\mathbf{v} - \mathbf{K}_{k_-}\mathbf{T}_-^{-1}\mathbf{u} + ik_-Z_-\mathbf{T}_{k_-}\mathbf{T}_-\mathbf{v} \right).$$

Pour finir, la formulation variationnelle utilisée pour résoudre les problèmes intérieurs (5.3) lorsque le couplage faible (5.5) est de type FEM-BEM est standard.

**Proposition 5.12** (Formulation variationnelle pour le problème intérieur).

La formulation variationnelle pour le problème intérieur (5.3) est la suivante :

$$\forall \mathbf{F} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega_-), \quad \int_{\Omega_-} \frac{1}{k_-Z_-} \mathbf{rot} \mathbf{E} \cdot \mathbf{rot} \bar{\mathbf{F}} - \int_{\Omega_-} k_-Z_-^{-1} \mathbf{E} \cdot \bar{\mathbf{F}} - i \langle \gamma_t^-\bar{\mathbf{F}}; \mathbf{T}_-\gamma_t^-\mathbf{E} \rangle = -i \langle \gamma_t^-\bar{\mathbf{F}}; \mathbf{g} \rangle.$$

## 5.3 Approximations des opérateurs MtE

Les opérateurs de transmission optimaux pour le couplage faible (5.5) et pour les sous-problèmes (5.3) et (5.4) sont des opérateurs MtE. L'évaluation numérique de ces opérateurs, comme celle des opérateurs DtN, est toutefois lourde d'un point de vue computationnel. Elle nécessite en effet la résolution d'un des problèmes (5.6) ou (5.7). Pour pallier cette difficulté, nous procédons comme dans la partie sur l'acoustique et choisissons d'utiliser des approximations des opérateurs MtE comme opérateurs de transmission plutôt que des opérateurs MtE exacts. Ces approximations, qui sont les analogues de celles que nous avons présentées pour les opérateurs DtN dans la partie sur l'acoustique, sont introduites dans cette section.

### 5.3.1 Opérateurs différentiels et espaces de Sobolev surfaciques

Dans cette sous-section, qui inspirée de l'ouvrage [88], nous faisons appel aux notations de la sous-section 2.3.1.

Les approximations de type racine carrée des opérateurs MtE sont construites, entres autres, à partir du laplacien vectoriel surfacique sur  $\Gamma$ . Pour des fonctions de régularité classique, cet opérateur est défini comme suit [88] :

$$\forall \mathbf{u} \in \mathcal{C}_t^2(\Gamma), \quad \mathbf{\Delta}_\Gamma \mathbf{u} = \nabla_\Gamma \operatorname{div}_\Gamma \mathbf{u} - \mathbf{rot}_\Gamma \operatorname{rot}_\Gamma \mathbf{u}.$$

Il peut naturellement être défini sur les espaces  $\mathbf{H}_t^s(\Gamma)$ ,  $s \in \mathbb{R}$ , grâce à cette formule. Il est alors continu de  $\mathbf{H}_t^{s+2}(\Gamma)$  dans  $\mathbf{H}_t^s(\Gamma)$  et nous avons :

$$\forall \mathbf{u} \in \mathbf{H}_t^{s+2}(\Gamma), \quad \Delta_\Gamma \mathbf{u} = - \sum_{\ell=1}^{+\infty} \lambda_\ell (\alpha_\ell \mathbf{e}_\ell^1 + \beta_\ell \mathbf{e}_\ell^2) \quad \text{dans } \mathbf{H}_t^s(\Gamma) \quad \text{où} \quad \mathbf{u} = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \alpha_\ell \mathbf{e}_\ell^1 + \beta_\ell \mathbf{e}_\ell^2 \quad \text{dans } \mathbf{H}_t^{s+2}(\Gamma).$$

Nous faisons à présent quelques rappels sur les espaces  $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$  et  $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}_\Gamma, \Gamma)$ . Ces espaces sont centraux en électromagnétisme puisqu'ils correspondent respectivement aux espaces de traces tangentielles et de composantes tangentielles.

Si  $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ , nous disons que  $\text{div}_\Gamma \mathbf{u} \in \mathbf{H}^{-\frac{3}{2}}(\Gamma)$  et  $\text{rot}_\Gamma \mathbf{u} \in \mathbf{H}^{-\frac{3}{2}}(\Gamma)$  appartiennent à  $\mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  si il existe respectivement  $v \in \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  et  $w \in \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  tels que :

$$\text{div}_\Gamma \mathbf{u} = \iota_{\mathbf{H}^{-\frac{1}{2}} \rightarrow \mathbf{H}^{-\frac{3}{2}}}(v) \quad \text{dans } \mathbf{H}^{-\frac{3}{2}}(\Gamma) \quad , \quad \text{rot}_\Gamma \mathbf{u} = \iota_{\mathbf{H}^{-\frac{1}{2}} \rightarrow \mathbf{H}^{-\frac{3}{2}}}(w) \quad \text{dans } \mathbf{H}^{-\frac{3}{2}}(\Gamma),$$

la notation  $\iota_{\mathbf{H}^{-\frac{1}{2}} \rightarrow \mathbf{H}^{-\frac{3}{2}}}$  désignant l'injection canonique de  $\mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  dans  $\mathbf{H}^{-\frac{3}{2}}(\Gamma)$  :

$$\begin{aligned} \iota_{\mathbf{H}^{-\frac{1}{2}} \rightarrow \mathbf{H}^{-\frac{3}{2}}} : \quad \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) &\rightarrow \mathbf{H}^{-\frac{3}{2}}(\Gamma) \\ u &\mapsto \iota_{\mathbf{H}^{-\frac{1}{2}} \rightarrow \mathbf{H}^{-\frac{3}{2}}}(u) : \quad \mathbf{H}^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \rightarrow \mathbb{C} \\ v &\mapsto \langle u; v \rangle_{\mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times \mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \end{aligned} .$$

Les espaces  $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$  et  $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}_\Gamma, \Gamma)$  sont alors définis comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma) &= \{ \mathbf{u} \in \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) : \text{div}_\Gamma \mathbf{u} \in \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \}, \\ \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}_\Gamma, \Gamma) &= \{ \mathbf{u} \in \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) : \text{rot}_\Gamma \mathbf{u} \in \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \}. \end{aligned}$$

Munis des produits scalaires suivants, ces espaces sont des espaces de Hilbert :

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma), \quad \langle \mathbf{u}; \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)} &= \langle \mathbf{u}; \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} + \langle \text{div}_\Gamma \mathbf{u}; \text{div}_\Gamma \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)}, \\ \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}_\Gamma, \Gamma), \quad \langle \mathbf{u}; \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}_\Gamma, \Gamma)} &= \langle \mathbf{u}; \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} + \langle \text{rot}_\Gamma \mathbf{u}; \text{rot}_\Gamma \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)}. \end{aligned}$$

Remarquons que l'opérateur suivant est alors un isomorphisme isométrique :

$$\begin{aligned} \cdot \wedge \mathbf{n} : \quad \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma) &\rightarrow \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}_\Gamma, \Gamma) \\ \mathbf{u} &\mapsto \mathbf{u} \wedge \mathbf{n} \end{aligned} .$$

Dans la suite de cette sous-section, nous présentons des résultats concernant l'espace  $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$ . Bien que nous ne les donnions pas pour éviter les redites, des résultats similaires peuvent également être obtenus, en utilisant l'isomorphisme  $\cdot \wedge \mathbf{n}$  par exemple, pour l'espace  $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}_\Gamma, \Gamma)$ .

La famille constituée des  $(\mathbf{e}_\ell^1)_{\ell \in \mathbb{N}^*}$  et des  $(\mathbf{e}_\ell^2)_{\ell \in \mathbb{N}^*}$  est une base orthogonale de  $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$ . De manière plus détaillée, nous avons :

$$\begin{aligned} \forall \ell, k \in \mathbb{N}^*, \quad \langle \mathbf{e}_\ell^1; \mathbf{e}_k^1 \rangle_{\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)} &= \left( \lambda_\ell^{\frac{1}{2}} + \lambda_\ell^2 (1 + \lambda_\ell)^{-\frac{1}{2}} \right) \delta_{\ell k}, \\ \forall \ell, k \in \mathbb{N}^*, \quad \langle \mathbf{e}_\ell^2; \mathbf{e}_k^2 \rangle_{\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)} &= \lambda_\ell^{\frac{1}{2}} \delta_{\ell k}, \\ \forall \ell, k \in \mathbb{N}^*, \quad \langle \mathbf{e}_\ell^1; \mathbf{e}_k^2 \rangle_{\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)} &= 0. \end{aligned}$$

Ajouté à cela, si  $\mathbf{u}$  est un élément de  $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$ , celui-ci s'écrit comme suit :

$$\mathbf{u} = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \alpha_\ell \mathbf{e}_\ell^1 + \beta_\ell \mathbf{e}_\ell^2 \quad \text{dans } \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma),$$

les suites  $(\alpha_\ell)$  et  $(\beta_\ell)$  vérifiant :

$$\forall \ell \in \mathbb{N}^*, \quad \alpha_\ell = \lambda_\ell^{-1} \langle \mathbf{u}; \mathbf{e}_\ell^1 \rangle_{\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times \mathbf{H}_t^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \quad , \quad \forall \ell \in \mathbb{N}^*, \quad \beta_\ell = \lambda_\ell^{-1} \langle \mathbf{u}; \mathbf{e}_\ell^2 \rangle_{\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times \mathbf{H}_t^{\frac{1}{2}}(\Gamma)},$$

$$\sum_{\ell=1}^{+\infty} \left( \lambda_{\ell}^{\frac{1}{2}} + \lambda_{\ell}^2 (1 + \lambda_{\ell})^{-\frac{1}{2}} \right) |\alpha_{\ell}|^2 + \lambda_{\ell}^{\frac{1}{2}} |\beta_{\ell}|^2 = \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma}, \Gamma)}^2 < +\infty.$$

Quitte à la remplacer par une norme équivalente, la norme sur  $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma}, \Gamma)$  peut être simplifiée. Plus précisément, dans la suite de ce travail, nous privilégierons l'utilisation de la norme donnée ci-dessous :

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma}, \Gamma)}^2 = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \lambda_{\ell}^{\frac{1}{2}} (\lambda_{\ell} |\alpha_{\ell}|^2 + |\beta_{\ell}|^2).$$

Pour finir, la proposition suivante est l'équivalent de la Proposition 2.14 page 43 pour l'espace  $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma}, \Gamma)$ .

**Proposition 5.13** (Séries dans l'espace  $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma}, \Gamma)$ ).

Si  $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma}, \Gamma)$ , il existe  $(\alpha_{\ell})_{\ell \in \mathbb{N}^*}, (\beta_{\ell})_{\ell \in \mathbb{N}^*} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$  tels que :

$$\mathbf{u} = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \alpha_{\ell} \mathbf{e}_{\ell}^1 + \beta_{\ell} \mathbf{e}_{\ell}^2 \quad \text{dans } \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma}, \Gamma) \quad , \quad \sum_{\ell=1}^{+\infty} \lambda_{\ell}^{\frac{1}{2}} (\lambda_{\ell} |\alpha_{\ell}|^2 + |\beta_{\ell}|^2) = \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma}, \Gamma)}^2 < +\infty.$$

Si  $(\alpha_{\ell})_{\ell \in \mathbb{N}^*}, (\beta_{\ell})_{\ell \in \mathbb{N}^*} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$ , la somme :

$$\sum_{\ell=1}^{+\infty} \alpha_{\ell} \mathbf{e}_{\ell}^1 + \beta_{\ell} \mathbf{e}_{\ell}^2,$$

converge dans  $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma}, \Gamma)$  si et seulement si :

$$\sum_{\ell=1}^{+\infty} \lambda_{\ell}^{\frac{1}{2}} (\lambda_{\ell} |\alpha_{\ell}|^2 + |\beta_{\ell}|^2) < +\infty.$$

### 5.3.2 Approximation microlocale des opérateurs MtE

Comme pour les opérateurs DtN, des approximations pseudo-différentielles des opérateurs MtE peuvent être introduites par le biais de raisonnements microlocaux [19]. Des arguments similaires ayant déjà été donnés dans la partie sur l'acoustique, nous nous contentons, dans cette sous-section, de légitimer l'introduction de ces approximations à partir de l'expression de l'opérateur MtE associé au demi-espace homogène suivant :

$$\Omega = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\}.$$

Dans l'optique de déterminer cette expression, nous nous donnons une solution  $(\mathbf{E}; \mathbf{H})$  du système de Maxwell harmonique dans  $\Omega$  :

$$\begin{cases} \text{rot } \mathbf{E} - ikZ\mathbf{H} = \mathbf{0} \\ \text{rot } \mathbf{H} + ikZ^{-1}\mathbf{E} = \mathbf{0} \end{cases} \quad \text{dans } \Omega,$$

le nombre d'onde  $k$  et l'impédance  $Z$  étant supposés réels et strictement positifs. A partir des équations précédentes, il est possible de montrer que :

$$\partial_z \mathbf{X} = i\lambda \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & M \\ M^{-1} & 0 \end{pmatrix}}_{\mathcal{M}} \mathbf{X}, \quad (5.12)$$

où :

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathcal{F}(E_x) \\ \mathcal{F}(E_y) \\ \mathcal{F}(H_x) \\ \mathcal{F}(H_y) \end{pmatrix}, \quad M = \frac{Z}{k\lambda} \begin{pmatrix} \xi_x \xi_y & k^2 - \xi_x^2 \\ -(k^2 - \xi_y^2) & -\xi_x \xi_y \end{pmatrix}, \quad \lambda = \sqrt{k^2 - \xi_x^2 - \xi_y^2},$$

et  $\mathcal{F}$  correspond à la transformée de Fourier partielle dans les plans d'équation  $z = C \in \mathbb{R}_+^*$  :

$$\mathcal{F}(u)(\xi_x; \xi_y; z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} u(x; y; z) e^{-i(x\xi_x + y\xi_y)} dx dy.$$

Pour obtenir la relation (5.12), il faut commencer par écrire le système de Maxwell harmonique coordonné par coordonnée. Les coordonnées  $E_z$  et  $H_z$  interviennent sans dérivée dans deux des équations obtenues. Il

reste alors à utiliser ces équations pour éliminer  $E_z$  et  $H_z$  des équations restantes et à appliquer la transformée de Fourier partielle. Remarquons que la relation (5.12) n'a de sens que si  $M$  est inversible, c'est-à-dire si  $k^2 - \xi_x^2 - \xi_y^2 \neq 0$ , et nous supposons que c'est effectivement le cas.

La matrice  $\mathcal{M}$  est diagonalisable et ses valeurs propres sont égales à  $\pm 1$ . En effet, de part l'inversibilité de  $M$ , 0 n'est pas valeur propre de  $\mathcal{M}$ . Ajouté à cela,  $\mu \in \mathbb{C}$  est une valeur propre de  $\mathcal{M}$  si et seulement si il existe  $(\mathbf{x}; \mathbf{y}) \in [\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C})]^2 \setminus \{(\mathbf{0}; \mathbf{0})\}$  tel que :

$$\mathbf{y} = \frac{1}{\mu} M^{-1} \mathbf{x} \quad , \quad \mu^2 = 1.$$

De là, il est aisé d'exhiber une base de vecteurs propres pour  $\mathcal{M}$  :

$$\mathcal{M} = PDP^{-1} \quad , \quad D = \text{Diag}(1, 1, -1, -1) \quad , \quad P = \begin{pmatrix} Id & Id \\ M^{-1} & -M^{-1} \end{pmatrix}.$$

Le système différentiel se réécrit alors :

$$\partial_z \mathbf{Y} = i\lambda D \mathbf{Y} \quad , \quad \mathbf{Y} = P^{-1} \mathbf{X},$$

et nous avons :

$$\mathbf{Y} = e^{i\lambda D z} \mathbf{Y}_0(\xi_x; \xi_y) = \begin{pmatrix} e^{i\lambda z} & & & (0) \\ & e^{i\lambda z} & & \\ & & e^{-i\lambda z} & \\ (0) & & & e^{-i\lambda z} \end{pmatrix} \mathbf{Y}_0(\xi_x; \xi_y).$$

Remarquons à présent que si  $k^2 - \xi_x^2 - \xi_y^2$  est strictement négatif,  $e^{-i\lambda z}$  diverge lorsque  $z$  tend vers  $+\infty$ . Par conséquent, les deux dernières composantes de  $Y_0$  sont nulles. Les deux dernières composantes de  $Y$  sont donc également nulles et nous en déduisons que :

$$\begin{pmatrix} \mathcal{F}(H_x) \\ \mathcal{F}(H_y) \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} \mathcal{F}(E_x) \\ \mathcal{F}(E_y) \end{pmatrix}.$$

En évaluant cette égalité en  $z = 0$ , nous obtenons :

$$\begin{pmatrix} \mathcal{F}_\Gamma(H_{y|\Gamma}) \\ -\mathcal{F}_\Gamma(H_{x|\Gamma}) \end{pmatrix} = \frac{1}{Z} \left( 1 - \frac{\xi_x^2 + \xi_y^2}{k^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 - \frac{\xi_y^2}{k^2} & \frac{\xi_x \xi_y}{k^2} \\ \frac{\xi_x \xi_y}{k^2} & 1 - \frac{\xi_x^2}{k^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{F}_\Gamma(E_{x|\Gamma}) \\ \mathcal{F}_\Gamma(E_{y|\Gamma}) \end{pmatrix},$$

la notation  $\mathcal{F}_\Gamma$  désignant la transformée de Fourier sur  $\Gamma = \partial\Omega$ . Remarquons à présent que les symboles totaux des opérateurs  $\Delta_\Gamma$  et  $\mathbf{rot}_\Gamma \mathbf{rot}_\Gamma$  sont respectivement donnés par :

$$-(\xi_x^2 + \xi_y^2) \mathbf{Id} \quad , \quad \begin{pmatrix} \xi_y^2 & -\xi_x \xi_y \\ -\xi_x \xi_y & \xi_x^2 \end{pmatrix},$$

puisque nous avons :

$$\mathcal{F}_\Gamma(\Delta_\Gamma \mathbf{u}) = -(\xi_x^2 + \xi_y^2) \mathcal{F}_\Gamma(\mathbf{u}) \quad , \quad \mathcal{F}_\Gamma(\mathbf{rot}_\Gamma \mathbf{rot}_\Gamma \mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \xi_y^2 & -\xi_x \xi_y \\ -\xi_x \xi_y & \xi_x^2 \end{pmatrix} \mathcal{F}_\Gamma(\mathbf{u}).$$

De là, nous en déduisons que :

$$\begin{pmatrix} H_{y|\Gamma} \\ -H_{x|\Gamma} \end{pmatrix} = \frac{1}{Z} \left( \mathbf{Id} + \frac{\Delta_\Gamma}{k^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \left( \mathbf{Id} - \frac{1}{k^2} \mathbf{rot}_\Gamma \mathbf{rot}_\Gamma \right) \begin{pmatrix} E_{x|\Gamma} \\ E_{y|\Gamma} \end{pmatrix},$$

ce qui s'écrit également :

$$\mathbf{H} \wedge \mathbf{n} = \frac{1}{Z} \left( \mathbf{Id} + \frac{\Delta_\Gamma}{k^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \left( \mathbf{Id} - \frac{1}{k^2} \mathbf{rot}_\Gamma \mathbf{rot}_\Gamma \right) ((\mathbf{E} \wedge \mathbf{n}) \wedge \mathbf{n}),$$

la notation  $\mathbf{n} = (0; 0; -1)$  désignant la normale unitaire sortante pour  $\Omega$ .

L'expression de l'opérateur MtE associé au demi-espace homogène nous conduit donc à proposer les approximations de type racine carrée suivantes de  $\Lambda_{-,k,Z}$  et de  $\Lambda_{+,k,Z}$  et ceci que  $k$  et  $Z$  soient constants ou non [19] :

$$\Lambda_{+,k,Z}^{\text{sq}} = -\frac{1}{Z} \left( \mathbf{Id} + \nabla_{\Gamma} \left( \frac{1}{k_{\epsilon}^2} \text{div}_{\Gamma} \right) - \text{rot}_{\Gamma} \left( \frac{1}{k_{\epsilon}^2} \text{rot}_{\Gamma} \right) \right)^{-\frac{1}{2}} \left( \mathbf{Id} - \text{rot}_{\Gamma} \left( \frac{1}{k_{\epsilon}^2} \text{rot}_{\Gamma} \right) \right) (\cdot \wedge \mathbf{n}), \quad (5.13)$$

$$\Lambda_{-,k,Z}^{\text{sq}} = \frac{1}{Z} \left( \mathbf{Id} + \nabla_{\Gamma} \left( \frac{1}{k_{\epsilon}^2} \text{div}_{\Gamma} \right) - \text{rot}_{\Gamma} \left( \frac{1}{k_{\epsilon}^2} \text{rot}_{\Gamma} \right) \right)^{-\frac{1}{2}} \left( \mathbf{Id} - \text{rot}_{\Gamma} \left( \frac{1}{k_{\epsilon}^2} \text{rot}_{\Gamma} \right) \right) (\cdot \wedge \mathbf{n}). \quad (5.14)$$

Le nombre d'onde est complexifié pour les mêmes raisons et de la même manière qu'en acoustique [19] :

$$k_{\epsilon} = k + i\epsilon \quad , \quad \epsilon = 0.39k^{\frac{1}{3}}\kappa^{\frac{2}{3}},$$

la notation  $\kappa$  faisant référence à la courbure moyenne de  $\Gamma$ . Dans ce travail, nous remplaçons toutefois  $\kappa$  par l'inverse du rayon de la sphère circonscrite à  $\Omega_-$ . Remarquons que les approximations  $\Lambda_{+,k,Z}^{\text{sq}}$  et  $\Lambda_{-,k,Z}^{\text{sq}}$  sont obtenues en symétrisant l'expression du MtE associé au demi-espace. En effet, de par les formules d'intégration par parties :

$$\begin{aligned} \forall u \in \mathbf{H}(\nabla_{\Gamma}, \Gamma), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_t(\text{div}_{\Gamma}, \Gamma), \quad \int_{\Gamma} u \text{div}_{\Gamma} \mathbf{v} \, d\Gamma &= - \int_{\Gamma} \nabla_{\Gamma} u \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma, \\ \forall u \in \mathbf{H}(\text{rot}_{\Gamma}, \Gamma), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_t(\text{rot}_{\Gamma}, \Gamma), \quad \int_{\Gamma} u \text{rot}_{\Gamma} \mathbf{v} \, d\Gamma &= \int_{\Gamma} \text{rot}_{\Gamma} u \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma, \end{aligned}$$

nous avons :

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}_t(\text{div}_{\Gamma}, \Gamma), \quad k_{\epsilon}^{-2} \text{div}_{\Gamma} \mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Gamma) &\Rightarrow \int_{\Gamma} \nabla_{\Gamma} (k_{\epsilon}^{-2} \text{div}_{\Gamma} \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma = - \int_{\Gamma} k_{\epsilon}^{-2} \text{div}_{\Gamma} \mathbf{u} \text{div}_{\Gamma} \mathbf{v} \, d\Gamma, \\ \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}_t(\text{rot}_{\Gamma}, \Gamma), \quad k_{\epsilon}^{-2} \text{rot}_{\Gamma} \mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Gamma) &\Rightarrow \int_{\Gamma} \text{rot}_{\Gamma} (k_{\epsilon}^{-2} \text{rot}_{\Gamma} \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma = \int_{\Gamma} k_{\epsilon}^{-2} \text{rot}_{\Gamma} \mathbf{u} \text{rot}_{\Gamma} \mathbf{v} \, d\Gamma. \end{aligned}$$

Pour finir, des approximations d'ordre 0 des opérateurs MtE sont obtenues en approximant à leur tour les opérateurs  $\Lambda_{-,k,Z}^{\text{sq}}$  et  $\Lambda_{+,k,Z}^{\text{sq}}$  :

$$\Lambda_{+,k,Z}^0 = -\frac{1}{Z} (\cdot \wedge \mathbf{n}), \quad (5.15)$$

$$\Lambda_{-,k,Z}^0 = \frac{1}{Z} (\cdot \wedge \mathbf{n}). \quad (5.16)$$

Comme en acoustique, nous nous attendons à ce que  $\Lambda_{+,k,Z}^{\text{sq}}$  approxime mieux  $\Lambda_{+,k,Z}$  que  $\Lambda_{-,k,Z}^{\text{sq}}$  n'approxime  $\Lambda_{-,k,Z}$ . Nous pouvons également anticiper que les approximations de bas ordre des opérateurs MtE sont de moins bonne qualité que les approximations de type racine carrée, excepté peut-être lorsque le nombre d'onde est élevé. Tout ceci sera confirmé dans les sous-sections 5.4.3 et 5.4.4, dans lesquelles nous présentons les résultats de tests semi-numériques/semi-analytiques pour la sphère unité homogène, et dans le Chapitre 6 lorsque nous résolvons le couplage faible (5.5) par la méthode des éléments finis.

### 5.3.3 Approximation intégrale du MtE intérieur

Pour pallier la qualité moyenne de  $\Lambda_{-,k,Z}^{\text{sq}}$  comme approximation de  $\Lambda_{-,k,Z}$ , nous introduisons une approximation intégrale de  $\Lambda_{-,k,Z}$ . Cette approximation est l'analogue exact de l'approximation intégrale que nous avons proposée pour l'opérateur DtN intérieur. Elle n'est par conséquent valable que lorsque  $k$  et  $Z$  sont constants.

Nous commençons par donner la formule liant  $\Lambda_{-,k,Z}$  et  $\Lambda_{+,k,Z}$ .

**Proposition 5.14** (Lien entre les opérateurs MtE).

*Si  $k$  n'est pas une valeur propre du système de Maxwell harmonique intérieur avec condition de trace tangentielle, nous disposons des relations équivalentes suivantes :*

$$ikZ \mathbf{T}_k (\Lambda_{-,k,Z} - \Lambda_{+,k,Z}) = \mathbf{Id} \quad , \quad \Lambda_{-,k,Z} = \frac{1}{ikZ} \mathbf{T}_k^{-1} + \Lambda_{+,k,Z}.$$

**Preuve**

La preuve est similaire à celle de la Proposition 2.15 page 46. ■

Ce résultat nous conduit à proposer l'approximation intégrale suivante de  $\Lambda_{-,k,Z}$  :

$$\Lambda_{-,k,Z}^{\text{int}} = \frac{1}{ikZ} \mathbf{T}_k^{-1} + \Lambda_{+,k,Z}^{\text{sq}}. \quad (5.17)$$

Bien sûr,  $\Lambda_{-,k,Z}^{\text{int}}$  est une meilleure approximation de  $\Lambda_{-,k,Z}$  que  $\Lambda_{-,k,Z}^{\text{sq}}$  pour les mêmes raisons que  $\Lambda_{-,k,\rho}^{\text{int}}$  approxime  $\Lambda_{-,k,\rho}$  plus précisément que  $\Lambda_{-,k,\rho}^{\text{sq}}$ . Ce point est par exemple illustré pour la sphère unité dans la sous-section 5.4.3.

### 5.3.4 Approximations de Padé

Certaines approximations des opérateurs MtE que nous avons proposées dans les sous-sections précédentes sont liées à l'opérateur suivant :

$$\left( \mathbf{Id} + \nabla_{\Gamma} \left( \frac{1}{k_{\epsilon}^2} \text{div}_{\Gamma} \right) - \text{rot}_{\Gamma} \left( \frac{1}{k_{\epsilon}^2} \text{rot}_{\Gamma} \right) \right)^{-\frac{1}{2}} \left( \mathbf{Id} - \text{rot}_{\Gamma} \left( \frac{1}{k_{\epsilon}^2} \text{rot}_{\Gamma} \right) \right) (\cdot \wedge \mathbf{n}). \quad (5.18)$$

Dans l'optique de ne pas avoir à évaluer numériquement la racine de l'opérateur :

$$\mathbf{Id} + \nabla_{\Gamma} \left( \frac{1}{k_{\epsilon}^2} \text{div}_{\Gamma} \right) - \text{rot}_{\Gamma} \left( \frac{1}{k_{\epsilon}^2} \text{rot}_{\Gamma} \right),$$

nous proposons, comme dans la partie sur l'acoustique, de remplacer l'opérateur (5.18) par ses approximations de Padé. Concrètement, cette approche repose sur l'approximation suivante (voir Proposition 2.16 page 48) :

$$\begin{aligned} & \sqrt{\mathbf{Id} + \nabla_{\Gamma} \left( \frac{1}{k_{\epsilon}^2} \text{div}_{\Gamma} \right) - \text{rot}_{\Gamma} \left( \frac{1}{k_{\epsilon}^2} \text{rot}_{\Gamma} \right)} \\ & \approx R_0 \mathbf{Id} - \sum_{l=1}^{N_p} \frac{A_l}{B_l} \left( \mathbf{Id} + B_l \left[ \nabla_{\Gamma} \left( \frac{1}{k_{\epsilon}^2} \text{div}_{\Gamma} \right) - \text{rot}_{\Gamma} \left( \frac{1}{k_{\epsilon}^2} \text{rot}_{\Gamma} \right) \right] \right)^{-1}, \end{aligned} \quad (5.19)$$

et nous permet de générer les approximations de Padé  $\Lambda_{+,k,Z}^{\text{sq},N_p,\theta_p}$ ,  $\Lambda_{-,k,Z}^{\text{sq},N_p,\theta_p}$  et  $\Lambda_{-,k,Z}^{\text{int},N_p,\theta_p}$  des opérateurs MtE. Comme en acoustique, nous nous attendons à ce que l'approximation (5.19) soit d'autant plus précise que  $N_p$  est grand. Enfin, la formule définissant l'opérateur (5.18), qui est donnée dans la prochaine proposition, suggère qu'une rotation de branche choisie de la même manière qu'en acoustique, à savoir  $\theta_p = \frac{\pi}{2}$ , devrait permettre d'obtenir des approximations précises des opérateurs MtE. En effet, le fait d'approximer l'opérateur (5.18) par des approximations de Padé revient concrètement à approximer les quantités :

$$\left( 1 - \frac{\lambda_{\ell}}{k_{\epsilon}^2} \right)^{\frac{1}{2}},$$

via ces mêmes approximations de Padé. Or nous avons déjà vu dans la partie sur l'acoustique que ces quantités étaient correctement approchées par les approximations de Padé lorsque  $\theta_p = \frac{\pi}{2}$ . Pour finir, nous mentionnons que la qualité de l'approximation (5.19) avec  $\theta_p = \frac{\pi}{2}$  sera confirmée par des tests numériques dans la sous-section 5.4.3.

**Proposition 5.15** (Continuité de l'opérateur racine).

Si  $k$  et  $\epsilon$  sont constants, l'opérateur (5.18) est défini pour  $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma}, \Gamma)$  par :

$$\begin{aligned} & \left( \mathbf{Id} + \frac{1}{k_{\epsilon}^2} \Delta_{\Gamma} \right)^{-\frac{1}{2}} \left( \mathbf{Id} - \frac{1}{k_{\epsilon}^2} \text{rot}_{\Gamma} \text{rot}_{\Gamma} \right) (\mathbf{u} \wedge \mathbf{n}) \\ & = \sum_{\ell=1}^{+\infty} -\beta_{\ell} \left( 1 - \frac{\lambda_{\ell}}{k_{\epsilon}^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \mathbf{e}_{\ell}^1 + \alpha_{\ell} \left( 1 - \frac{\lambda_{\ell}}{k_{\epsilon}^2} \right)^{\frac{1}{2}} \mathbf{e}_{\ell}^2 \quad \text{dans } \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma}, \Gamma), \end{aligned}$$

où :

$$\mathbf{u} = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \alpha_{\ell} \mathbf{e}_{\ell}^1 + \beta_{\ell} \mathbf{e}_{\ell}^2 \quad \text{dans } \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma}, \Gamma).$$

Il est donc continu de  $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma}, \Gamma)$  dans lui-même.

**Preuve**

La preuve repose sur la Proposition 5.13. Etant donné que  $\mathbf{u}$  est un élément de  $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma}, \Gamma)$ , nous avons :

$$\sum_{\ell=1}^{+\infty} \lambda_{\ell}^{\frac{1}{2}} (\lambda_{\ell} |\alpha_{\ell}|^2 + |\beta_{\ell}|^2) < +\infty.$$

La somme définissant :

$$\left( \mathbf{Id} + \frac{1}{k_{\epsilon}^2} \mathbf{\Delta}_{\Gamma} \right)^{-\frac{1}{2}} \left( \mathbf{Id} - \frac{1}{k_{\epsilon}^2} \mathbf{rot}_{\Gamma} \mathbf{rot}_{\Gamma} \right) (\mathbf{u} \wedge \mathbf{n}),$$

converge alors bien dans  $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma}, \Gamma)$  puisque nous avons :

$$\sum_{\ell=1}^{+\infty} \lambda_{\ell}^{\frac{1}{2}} \left( \lambda_{\ell} \left| 1 - \frac{\lambda_{\ell}}{k_{\epsilon}^2} \right|^{-1} |\beta_{\ell}|^2 + \left| 1 - \frac{\lambda_{\ell}}{k_{\epsilon}^2} \right| |\alpha_{\ell}|^2 \right) \leq C \sum_{\ell=1}^{+\infty} \lambda_{\ell}^{\frac{1}{2}} \left( |\beta_{\ell}|^2 + \lambda_{\ell} |\alpha_{\ell}|^2 \right) < +\infty,$$

avec :

$$C = \max_{\ell \in \mathbb{N}^*} \left( \lambda_{\ell} \left| 1 - \frac{\lambda_{\ell}}{k_{\epsilon}^2} \right|^{-1}, \lambda_{\ell}^{-1} \left| 1 - \frac{\lambda_{\ell}}{k_{\epsilon}^2} \right| \right).$$

Enfin, l'inégalité précédente s'écrit plus simplement comme suit :

$$\left\| \left( \mathbf{Id} + \frac{1}{k_{\epsilon}^2} \mathbf{\Delta}_{\Gamma} \right)^{-\frac{1}{2}} \left( \mathbf{Id} - \frac{1}{k_{\epsilon}^2} \mathbf{rot}_{\Gamma} \mathbf{rot}_{\Gamma} \right) (\mathbf{u} \wedge \mathbf{n}) \right\|_{\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma}, \Gamma)}^2 \leq C \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma}, \Gamma)}^2.$$

■

## 5.4 Cas particulier de la sphère unité

Comme en acoustique, si l'objet diffractant est une sphère homogène de rayon 1, tous les opérateurs surfaciques que nous avons présentés jusqu'à maintenant, à savoir les opérateurs intégraux surfaciques, les opérateurs MtE et leurs approximations, les opérateurs de résolution et l'opérateur du couplage faible (5.5), sont diagonalisables et nous pouvons expliciter analytiquement leurs valeurs propres. Dans cette section, nous présentons ces résultats et nous les utilisons pour effectuer des tests semi-numériques/semi-analytiques similaires à ceux que nous avons réalisés dans la partie sur l'acoustique. Tout d'abord, nous commençons par analyser la qualité des approximations des opérateurs MtE proposées dans la section précédente. Dans un second temps, nous testons la convergence GMRES du couplage faible (5.5) pour différentes paires d'opérateurs de transmission et nous nous assurons que certaines d'entre elles conduisent à des vitesses de convergence viables en pratique. Dans la partie sur l'acoustique, nous avons présenté des résultats concernant la résolution itérative des sous-problèmes associés au couplage faible. Nous rappelons que, dans ce travail, nous avons choisi de résoudre les sous-problèmes intervenant dans la définition des couplages faibles acoustique et électromagnétique par des méthodes directes. Pour éviter des redites non essentielles, nous ne discuterons donc pas de la résolution itérative des sous-problèmes (5.3) et (5.4).

### 5.4.1 Harmoniques sphériques

Dans la sous-section 2.4.1, nous avons introduit les harmoniques sphériques scalaires de surface  $(Y_l^m)_{\substack{l \in \mathbb{N} \\ -l \leq m \leq l}}$ . Nous rappelons que ces fonctions sont définies sur la sphère unité de  $\mathbb{R}^3$  de centre  $\mathbf{0}$ , notée  $\mathbb{S}$ . En électromagnétisme, nous avons besoin des harmoniques sphériques vectorielles de surface. Ces dernières sont notées  $(\mathbf{U}_l^m)_{\substack{l \in \mathbb{N}^* \\ -l \leq m \leq l}}$  et  $(\mathbf{V}_l^m)_{\substack{l \in \mathbb{N}^* \\ -l \leq m \leq l}}$  et sont définies par :

$$\forall l \in \mathbb{N}^*, \quad \forall -l \leq m \leq l, \quad \begin{cases} \mathbf{U}_l^m = \frac{1}{\sqrt{l(l+1)}} \nabla_{\mathbb{S}} Y_l^m \\ \mathbf{V}_l^m = \frac{1}{\sqrt{l(l+1)}} \mathbf{rot}_{\mathbb{S}} Y_l^m \end{cases}.$$

La proposition suivante [88] permet de comprendre l'intérêt des harmoniques sphériques vectorielles de surface.

**Proposition 5.16** (Propriétés des harmoniques sphériques vectorielles de surface).

Les fonctions  $(\mathbf{U}_l^m)$  et  $(\mathbf{V}_l^m)$  sont précisément les fonctions propres de  $-\Delta_{\mathbb{S}}$  :

$$-\Delta_{\mathbb{S}}\mathbf{U}_l^m = l(l+1)\mathbf{U}_l^m \quad , \quad -\Delta_{\mathbb{S}}\mathbf{V}_l^m = l(l+1)\mathbf{V}_l^m.$$

Elles forment une base orthonormale de  $\mathbf{L}_l^2(\mathbb{S})$  et nous fournissent une base orthonormale de  $\mathbf{L}^2(\mathbb{S})$  :

$$(Y_l^m \mathbf{n}) \quad , \quad (\mathbf{U}_l^m) \quad , \quad (\mathbf{V}_l^m).$$

Pour finir, la réunion des familles  $(\mathbf{U}_l^m)$  et  $(\mathbf{V}_l^m)$  constitue également une base orthogonale de  $\mathbf{H}_l^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\mathbb{S}}, \mathbb{S})$ .

### 5.4.2 Diagonalisation des opérateurs surfaciques

Dans cette sous-section,  $\Gamma$  correspond à  $\mathbb{S}$  et  $\mathcal{B}$  désigne la boule unité ouverte de  $\mathbb{R}^3$  de centre  $\mathbf{0}$ .

Comme pour l'équation de Helmholtz, il est possible d'exhiber des solutions élémentaires modales du système de Maxwell harmonique, soit-il posé sur  $\mathcal{B}$  ou sur  $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\mathcal{B}}$ .

**Proposition 5.17** (Solutions élémentaires modales du système de Maxwell harmonique).

Soit  $k, Z \in \mathbb{R}_+^*$ . Les champs  $(\mathbf{E}_1; \mathbf{H}_1)$  et  $(\mathbf{E}_2; \mathbf{H}_2)$  définis ci-dessous :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= \sqrt{l(l+1)} \frac{j_l(kr)}{r} Y_l^m(\theta; \varphi) \mathbf{e}_r + \frac{(rj_l(kr))'}{r} \mathbf{U}_l^m(\theta; \varphi) \quad , \quad \mathbf{H}_1 = \frac{k}{iZ} j_l(kr) \mathbf{V}_l^m(\theta; \varphi), \\ \mathbf{E}_2 &= j_l(kr) \mathbf{V}_l^m(\theta; \varphi) \quad , \quad \mathbf{H}_2 = \frac{1}{ikZ} \left( \sqrt{l(l+1)} \frac{j_l(kr)}{r} Y_l^m(\theta; \varphi) \mathbf{e}_r + \frac{(rj_l(kr))'}{r} \mathbf{U}_l^m(\theta; \varphi) \right), \end{aligned}$$

satisfont le système de Maxwell harmonique dans  $\mathcal{B}$  :

$$\begin{cases} \text{rot } \mathbf{E} - ikZ\mathbf{H} = \mathbf{0} \\ \text{rot } \mathbf{H} + ikZ^{-1}\mathbf{E} = \mathbf{0} \end{cases} \quad \text{dans } \mathcal{B}.$$

De même, les champs  $(\mathbf{E}_1; \mathbf{H}_1)$  et  $(\mathbf{E}_2; \mathbf{H}_2)$  donnés par :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= \sqrt{l(l+1)} \frac{h_l^1(kr)}{r} Y_l^m(\theta; \varphi) \mathbf{e}_r + \frac{(rh_l^1(kr))'}{r} \mathbf{U}_l^m(\theta; \varphi) \quad , \quad \mathbf{H}_1 = \frac{k}{iZ} h_l^1(kr) \mathbf{V}_l^m(\theta; \varphi), \\ \mathbf{E}_2 &= h_l^1(kr) \mathbf{V}_l^m(\theta; \varphi) \quad , \quad \mathbf{H}_2 = \frac{1}{ikZ} \left( \sqrt{l(l+1)} \frac{h_l^1(kr)}{r} Y_l^m(\theta; \varphi) \mathbf{e}_r + \frac{(rh_l^1(kr))'}{r} \mathbf{U}_l^m(\theta; \varphi) \right), \end{aligned}$$

vérifient le système de Maxwell harmonique dans  $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\mathcal{B}}$  ainsi que la condition de radiation :

$$\begin{cases} \text{rot } \mathbf{E} - ikZ\mathbf{H} = \mathbf{0} \\ \text{rot } \mathbf{H} + ikZ^{-1}\mathbf{E} = \mathbf{0} \end{cases} \quad \text{dans } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\mathcal{B}} \quad , \quad Z\mathbf{H} \wedge \mathbf{e}_r - \mathbf{E} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right).$$

**Preuve**

La démonstration est similaire à celle de la Proposition 2.27 page 52. En outre, elle est essentiellement calculatoire. Nous n'en donnons par conséquent que les grandes lignes. Les formules suivantes :

$$\text{rot}(a(\theta, \varphi) \mathbf{e}_r) = \frac{1}{r} \nabla_{\mathbb{S}} a \wedge \mathbf{e}_r \quad , \quad \text{rot}(a(r) \mathbf{A}(\theta, \varphi)) = \frac{a(r)}{r} \text{rot}_{\mathbb{S}} \mathbf{A}(\theta, \varphi) \mathbf{e}_r - \frac{(ra(r))'}{r} \mathbf{A}(\theta, \varphi) \wedge \mathbf{e}_r,$$

dans lesquelles  $a$  et  $\mathbf{A}$  sont des fonctions quelconques, permettent de montrer que le champ  $(\mathbf{E}_1; \mathbf{H}_1)$ , qu'il soit défini dans  $\mathcal{B}$  ou dans  $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\mathcal{B}}$ , vérifie le système de Maxwell harmonique. De par la symétrie de ce système, il en va alors de même pour le champ  $(\mathbf{E}_2; \mathbf{H}_2)$ . Enfin, les calculs justifiant que les champs  $(\mathbf{E}_1; \mathbf{H}_1)$  et  $(\mathbf{E}_2; \mathbf{H}_2)$  satisfont la condition de radiation sont similaires. Nous ne traitons donc que le cas de  $(\mathbf{E}_1; \mathbf{H}_1)$  :

$$Z\mathbf{H}_1 \wedge \mathbf{e}_r - \mathbf{E}_1 = -k \underbrace{(h_l^1(kr)' - ih_l^1(kr))}_{\mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right)} \mathbf{U}_l^m - \underbrace{\frac{h_l^1(kr)}{r}}_{\mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right)} (\mathbf{U}_l^m + \sqrt{l(l+1)} Y_l^m \mathbf{e}_r).$$

■

La proposition précédente est intéressante car elle permet d'obtenir un résultat de diagonalisation pour les opérateurs intégraux surfaciques.

**Proposition 5.18** (Diagonalisation des opérateurs intégraux surfaciques).

Soit  $k \in \mathbb{R}_+^*$ . Les  $(\mathbf{U}_l^m)$  et les  $(\mathbf{V}_l^m)$  diagonalisent les opérateurs  $\mathbf{T}_k$  et  $\mathbf{K}_k$ . Plus précisément, nous avons :

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_k \mathbf{U}_l^m &= t_l \mathbf{V}_l^m & , & \quad \mathbf{K}_k \mathbf{U}_l^m = k_l \mathbf{U}_l^m, \\ \mathbf{T}_k \mathbf{V}_l^m &= \tilde{t}_l \mathbf{U}_l^m & , & \quad \mathbf{K}_k \mathbf{V}_l^m = -k_l \mathbf{V}_l^m, \end{aligned}$$

où :

$$t_l = \frac{i}{k} \xi_l'(k) \psi_l'(k) \quad , \quad \tilde{t}_l = -\frac{i}{k} \xi_l(k) \psi_l(k) \quad , \quad k_l = \frac{i}{2} \left( \xi_l'(k) \psi_l(k) + \xi_l(k) \psi_l'(k) \right).$$

Les  $(\psi_l)$  et les  $(\xi_l)$  désignent respectivement les fonctions de Bessel-Ricatti et de Hankel-Ricatti d'ordre  $l$  et sont définies comme suit :

$$\psi_l(x) = x j_l(x) \quad , \quad \xi_l(x) = x h_l^1(x).$$

**Preuve**

La preuve est similaire à celle de la Proposition 2.28 page 53. ■

Remarquons que l'opérateur  $\mathbf{T}_k$  n'est pas diagonalisé au sens strict du terme par les  $(\mathbf{U}_l^m)$  et les  $(\mathbf{V}_l^m)$ . Plus précisément, la matrice de  $\mathbf{T}_k$  dans la base obtenue en entrelaçant les  $(\mathbf{U}_l^m)$  et les  $(\mathbf{V}_l^m)$  :

$$(\mathbf{U}_1^{-1}; \mathbf{V}_1^{-1}; \mathbf{U}_1^0; \mathbf{V}_1^0; \mathbf{U}_1^1; \mathbf{V}_1^1; \mathbf{U}_2^{-2}; \mathbf{V}_2^{-2}; \dots),$$

qui est bien sûr infinie, est diagonale par blocs de taille  $2 \times 2$  :

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \tilde{t}_1 \\ t_1 & 0 \end{pmatrix} & (0) & (0) & (0) & \dots \\ (0) & \begin{pmatrix} 0 & \tilde{t}_1 \\ t_1 & 0 \end{pmatrix} & (0) & & \\ (0) & (0) & \begin{pmatrix} 0 & \tilde{t}_1 \\ t_1 & 0 \end{pmatrix} & (0) & \\ (0) & & (0) & \begin{pmatrix} 0 & \tilde{t}_2 \\ t_2 & 0 \end{pmatrix} & \ddots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Nous expliquons à présent comment résoudre les systèmes de Maxwell harmoniques intérieur et extérieur en utilisant leurs solutions élémentaires modales.

**Proposition 5.19** (Résolution modale du système de Maxwell harmonique intérieur).

Soit  $k, Z \in \mathbb{R}_+^*$  et  $(\mathbf{E}; \mathbf{H}) \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \mathcal{B})^2$  tel que :

$$\begin{cases} \mathbf{rot} \mathbf{E} - ikZ \mathbf{H} = 0 \\ \mathbf{rot} \mathbf{H} + ikZ^{-1} \mathbf{E} = 0 \end{cases} \quad \text{dans } \mathcal{B}.$$

Il existe alors deux familles  $(\alpha_l^m)_{\substack{l \in \mathbb{N}^* \\ -l \leq m \leq l}}$ ,  $(\beta_l^m)_{\substack{l \in \mathbb{N}^* \\ -l \leq m \leq l}} \subset \mathbb{C}$  telles que les égalités suivantes :

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \sum_{l=1}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l \left( \alpha_l^m \sqrt{l(l+1)} \frac{j_l(kr)}{r} Y_l^m(\theta; \varphi) \mathbf{e}_r + \alpha_l^m \frac{(r j_l(kr))'}{r} \mathbf{U}_l^m(\theta; \varphi) + \beta_l^m j_l(kr) \mathbf{V}_l^m(\theta; \varphi) \right),$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \frac{1}{ikZ} \sum_{l=1}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l \left( \beta_l^m \sqrt{l(l+1)} \frac{j_l(kr)}{r} Y_l^m(\theta; \varphi) \mathbf{e}_r + \beta_l^m \frac{(r j_l(kr))'}{r} \mathbf{U}_l^m(\theta; \varphi) + k^2 \alpha_l^m j_l(kr) \mathbf{V}_l^m(\theta; \varphi) \right),$$

sont vérifiées dans  $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \mathcal{B})$ . De là, nous en déduisons les relations données ci-dessous :

$$\begin{aligned} \gamma_t^- \mathbf{E} &= \sum_{l=1}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l \left( \alpha_l^m (j_l(k) + k j_l'(k)) \mathbf{V}_l^m - \beta_l^m j_l(k) \mathbf{U}_l^m \right), \\ \gamma_t^- \mathbf{H} &= \frac{1}{ikZ} \sum_{l=1}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l \left( \beta_l^m (j_l(k) + k j_l'(k)) \mathbf{V}_l^m - k^2 \alpha_l^m j_l(k) \mathbf{U}_l^m \right). \end{aligned}$$

**Preuve**

La preuve que nous donnons est formelle. Pour tout  $r \in ]0; 1[$ , nous avons (voir Proposition 5.16) :

$$\mathbf{E}(r\boldsymbol{\sigma}) = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l \left( a_l^m(r) Y_l^m \mathbf{e}_r + b_l^m(r) \mathbf{U}_l^m + c_l^m(r) \mathbf{V}_l^m \right),$$

les fonctions  $(a_l^m)$ ,  $(b_l^m)$  et  $(c_l^m)$  étant données par :

$$a_l^m(r) = \int_{\mathbb{S}} \mathbf{E}(r\boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{e}_r Y_l^{-m} d\mathbb{S} \quad , \quad b_l^m(r) = \int_{\mathbb{S}} \mathbf{E}(r\boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{U}_l^{-m} d\mathbb{S} \quad , \quad c_l^m(r) = \int_{\mathbb{S}} \mathbf{E}(r\boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{V}_l^{-m} d\mathbb{S}.$$

Dans un premier temps, nous remarquons que :

$$a_0^0(r) = \frac{1}{\sqrt{4\pi r^2}} \int_{\partial B(0;r)} \mathbf{E}(\boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{e}_r d\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{4\pi r^2}} \int_{B(0;r)} \operatorname{div} \mathbf{E} dx = 0.$$

Nous vérifions également que :

$$a_l^m(r) = \frac{1}{r} \int_{\mathbb{S}} r\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{E}(r\boldsymbol{\sigma}) Y_l^{-m} d\boldsymbol{\sigma}.$$

Comme  $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x})$  satisfait l'équation de Helmholtz dans  $\mathcal{B}$  et admet une limite finie en  $\mathbf{0}$ , nous en déduisons qu'il existe  $(\alpha_l^m)_{\substack{l \in \mathbb{N}^* \\ -l \leq m \leq l}}$  tels que (voir preuve de la Proposition 2.29 page 54) :

$$a_l^m(r) = \alpha_l^m \frac{j_l(kr)}{r}.$$

Le champ  $\mathbf{E}$  étant à divergence nulle, nous avons :

$$\sqrt{l(l+1)} b_l^m(r) = - \int_{\mathbb{S}} \operatorname{div}_{\mathbb{S}}[\mathbf{E}_t(r\boldsymbol{\sigma})] Y_l^{-m} d\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{r} \int_{\mathbb{S}} \partial_r(r^2 \mathbf{E}_r(r\boldsymbol{\sigma})) Y_l^{-m} d\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r^2 a_l^m(r)),$$

ce calcul reposant sur l'expression en coordonnées sphériques de la divergence de  $\mathbf{E}$  :

$$\frac{1}{r} \partial_r(r^2 \mathbf{E}_r(r\boldsymbol{\sigma})) + \operatorname{div}_{\mathbb{S}}[\mathbf{E}_t(r\boldsymbol{\sigma})] = 0.$$

Par conséquent, quitte à redéfinir les  $(\alpha_l^m)$ , nous obtenons :

$$a_l^m(r) = \alpha_l^m \sqrt{l(l+1)} \frac{j_l(kr)}{r} \quad , \quad b_l^m(r) = \alpha_l^m \frac{(r j_l(kr))'}{r}.$$

Remarquons à présent que :

$$\sqrt{l(l+1)} c_l^m(r) = \int_{\mathbb{S}} \operatorname{rot}_{\mathbb{S}}[\mathbf{E}_t(r\boldsymbol{\sigma})] Y_l^{-m} d\boldsymbol{\sigma} = \int_{\mathbb{S}} r\boldsymbol{\sigma} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{E}(r\boldsymbol{\sigma}) Y_l^{-m} d\boldsymbol{\sigma}.$$

La fonction  $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{x})$  vérifie l'équation de Helmholtz dans  $\mathcal{B}$ . De plus, elle admet une limite finie en  $\mathbf{0}$ . Il existe donc une famille  $(\beta_l^m)_{\substack{l \in \mathbb{N}^* \\ -l \leq m \leq l}}$  telle que (voir preuve de la Proposition 2.29 page 54) :

$$c_l^m(r) = \beta_l^m j_l(kr).$$

Un raisonnement similaire fournit une représentation pour  $\mathbf{H}$  et *in fine*, nous avons :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{x}) &= \sum_{l=1}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l \left( \alpha_l^m \sqrt{l(l+1)} \frac{j_l(kr)}{r} Y_l^m(\theta; \varphi) \mathbf{e}_r + \alpha_l^m \frac{(r j_l(kr))'}{r} \mathbf{U}_l^m(\theta; \varphi) + \beta_l^m j_l(kr) \mathbf{V}_l^m(\theta; \varphi) \right), \\ \mathbf{H}(\mathbf{x}) &= \sum_{l=1}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l \left( \gamma_l^m \sqrt{l(l+1)} \frac{j_l(kr)}{r} Y_l^m(\theta; \varphi) \mathbf{e}_r + \gamma_l^m \frac{(r j_l(kr))'}{r} \mathbf{U}_l^m(\theta; \varphi) + \delta_l^m j_l(kr) \mathbf{V}_l^m(\theta; \varphi) \right), \end{aligned}$$

les coefficients  $(\alpha_l^m)$ ,  $(\beta_l^m)$ ,  $(\gamma_l^m)$  et  $(\delta_l^m)$  étant tels que :

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}) &= \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l \alpha_l^m \sqrt{l(l+1)} j_l(kr) Y_l^m \quad , \quad \mathbf{x} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{x}) = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l \sqrt{l(l+1)} \beta_l^m j_l(kr) Y_l^m, \\ \mathbf{x} \cdot \mathbf{H}(\mathbf{x}) &= \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l \gamma_l^m \sqrt{l(l+1)} j_l(kr) Y_l^m \quad , \quad \mathbf{x} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{H}(\mathbf{x}) = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l \sqrt{l(l+1)} \delta_l^m j_l(kr) Y_l^m. \end{aligned}$$

Les équations du système de Maxwell harmonique intérieur permettent alors de conclure. ■

Il est intéressant de remarquer que les Propositions 5.17 et 5.19 permettent d'expliciter les valeurs propres du système de Maxwell harmonique intérieur avec condition de trace tangentielle.

**Proposition 5.20** (Valeurs propres du système de Maxwell harmonique intérieur).

Les valeurs propres du système de Maxwell harmonique intérieur avec condition de trace tangentielle sont les zéros strictement positifs des fonctions :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \rightarrow & \mathbb{R} \\ r & \mapsto & j_l(r) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \rightarrow & \mathbb{R} \\ r & \mapsto & j_l(r) + rj_l'(r) \end{array} \quad \text{avec } l \in \mathbb{N}^*.$$

**Proposition 5.21** (Résolution modale du système de Maxwell harmonique extérieur).

Soit  $k, Z \in \mathbb{R}_+^*$  et  $(\mathbf{E}; \mathbf{H}) \in \mathbf{H}_{\text{loc}}(\mathbf{rot}, \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\mathcal{B}})^2$  satisfaisant :

$$\begin{cases} \mathbf{rot} \mathbf{E} - ikZ\mathbf{H} = 0 \\ \mathbf{rot} \mathbf{H} + ikZ^{-1}\mathbf{E} = 0 \end{cases} \quad \text{dans } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\mathcal{B}} \quad , \quad Z\mathbf{H} \wedge \mathbf{e}_r - \mathbf{E} = \mathcal{O}_{r \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{r^2} \right).$$

Nous pouvons alors exhiber deux familles  $(\alpha_l^m)_{\substack{l \in \mathbb{N}^* \\ -l \leq m \leq l}}, (\beta_l^m)_{\substack{l \in \mathbb{N}^* \\ -l \leq m \leq l}} \subset \mathbb{C}$  telles que, dans  $\mathbf{H}_{\text{loc}}(\mathbf{rot}, \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\mathcal{B}})$ , nous ayons :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{x}) &= \sum_{l=1}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l \left( \alpha_l^m \sqrt{l(l+1)} \frac{h_l^1(kr)}{r} Y_l^m(\theta; \varphi) \mathbf{e}_r + \alpha_l^m \frac{(rh_l^1(kr))'}{r} \mathbf{U}_l^m(\theta; \varphi) + \beta_l^m h_l^1(kr) \mathbf{V}_l^m(\theta; \varphi) \right), \\ \mathbf{H}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{ikZ} \sum_{l=1}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l \left( \beta_l^m \sqrt{l(l+1)} \frac{h_l^1(kr)}{r} Y_l^m(\theta; \varphi) \mathbf{e}_r + \beta_l^m \frac{(rh_l^1(kr))'}{r} \mathbf{U}_l^m(\theta; \varphi) + k^2 \alpha_l^m h_l^1(kr) \mathbf{V}_l^m(\theta; \varphi) \right). \end{aligned}$$

Par ailleurs, en prenant les traces tangentielles de ces égalités, il vient :

$$\begin{aligned} \gamma_t^+ \mathbf{E} &= \sum_{l=1}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l \left( \alpha_l^m (h_l^1(k) + kh_l^{1'}(k)) \mathbf{V}_l^m - \beta_l^m h_l^1(k) \mathbf{U}_l^m \right), \\ \gamma_t^+ \mathbf{H} &= \frac{1}{ikZ} \sum_{l=1}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l \left( \beta_l^m (h_l^1(k) + kh_l^{1'}(k)) \mathbf{V}_l^m - k^2 \alpha_l^m h_l^1(k) \mathbf{U}_l^m \right). \end{aligned}$$

**Preuve**

La démonstration est en tout point similaire à celle pour le système de Maxwell harmonique intérieur à ceci près que nous avons :

$$a_l^m(r) = \alpha_l^m \sqrt{l(l+1)} \frac{h_l^1(kr)}{r} \quad , \quad b_l^m(r) = \alpha_l^m \frac{(rh_l^1(kr))'}{r} \quad , \quad c_l^m(r) = \beta_l^m h_l^1(kr).$$

En effet, le champ  $(\mathbf{E}; \mathbf{H})$  peut être représenté grâce aux opérateurs  $\mathcal{T}_k$  et  $\mathcal{K}_k$  (voir Proposition 4.3 page 114) et il est alors possible de montrer que les fonctions  $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x})$  et  $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} \cdot \mathbf{H}(\mathbf{x})$  vérifient la condition de radiation de Sommerfeld. De là, nous obtenons :

$$\frac{d}{dr} (ra_l^m(r)) - ikra_l^m(r) = \mathcal{O}_{r \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{r^2} \right) \quad , \quad \frac{dc_l^m}{dr} - ikc_l^m = \mathcal{O}_{r \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{r^2} \right).$$

■

Nous pouvons maintenant donner des résultats de diagonalisation pour les opérateurs MtE et pour l'opérateur (5.18).

**Proposition 5.22** (Diagonalisation des opérateurs MtE).

Soit  $k, Z \in \mathbb{R}_+^*$ . Les  $(\mathbf{U}_l^m)$  et les  $(\mathbf{V}_l^m)$  diagonalisent l'opérateur MtE extérieur :

$$\mathbf{\Lambda}_{+,k,Z} \mathbf{U}_l^m = -\frac{1}{ikZ} \frac{h_l^1(k) + kh_l^{1'}(k)}{h_l^1(k)} \mathbf{V}_l^m \quad , \quad \mathbf{\Lambda}_{+,k,Z} \mathbf{V}_l^m = ikZ^{-1} \frac{h_l^1(k)}{h_l^1(k) + kh_l^{1'}(k)} \mathbf{U}_l^m,$$

ainsi que l'opérateur MtE intérieur sous réserve qu'il soit bien défini, c'est-à-dire si  $k$  n'est pas une valeur propre du système de Maxwell harmonique intérieur avec condition de trace tangentielle :

$$\mathbf{\Lambda}_{-,k,Z} \mathbf{U}_l^m = -\frac{1}{ikZ} \frac{j_l(k) + kj_l'(k)}{j_l(k)} \mathbf{V}_l^m \quad , \quad \mathbf{\Lambda}_{-,k,Z} \mathbf{V}_l^m = ikZ^{-1} \frac{j_l(k)}{j_l(k) + kj_l'(k)} \mathbf{U}_l^m.$$

**Preuve**

La preuve est similaire à celle de la Proposition 2.32 page 55. ■

**Proposition 5.23** (Diagonalisation de l'opérateur racine carrée).

Soit  $k \in \mathbb{R}_+^*$  et  $\epsilon \in \mathbb{R}$ . Les fonctions  $(\mathbf{U}_l^m)$  et  $(\mathbf{V}_l^m)$  diagonalisent l'opérateur racine carrée (5.18) :

$$\begin{aligned} \left( \mathbf{Id} + \frac{\Delta_S}{k_\epsilon^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \left( \mathbf{Id} - \frac{1}{k_\epsilon^2} \mathbf{rot}_S \mathbf{rot}_S \right) (\mathbf{U}_l^m \wedge \mathbf{n}) &= \left( 1 - \frac{l(l+1)}{k_\epsilon^2} \right)^{\frac{1}{2}} \mathbf{V}_l^m, \\ \left( \mathbf{Id} + \frac{\Delta_S}{k_\epsilon^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \left( \mathbf{Id} - \frac{1}{k_\epsilon^2} \mathbf{rot}_S \mathbf{rot}_S \right) (\mathbf{V}_l^m \wedge \mathbf{n}) &= - \left( 1 - \frac{l(l+1)}{k_\epsilon^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \mathbf{U}_l^m, \end{aligned}$$

et il en va de même pour ses approximations de Padé :

$$\begin{aligned} \left( R_0 - \sum_{i=1}^{N_p} \frac{A_i}{B_i} \left( \mathbf{Id} + B_i \frac{\Delta_S}{k_\epsilon^2} \right)^{-1} \right)^{-1} \left( \mathbf{Id} - \frac{1}{k_\epsilon^2} \mathbf{rot}_S \mathbf{rot}_S \right) (\mathbf{U}_l^m \wedge \mathbf{n}) &= \left( R_0 - \sum_{i=1}^{N_p} \frac{A_i}{B_i} \left( 1 - \frac{B_i}{k_\epsilon^2} l(l+1) \right)^{-1} \right)^{-1} \left( 1 - \frac{l(l+1)}{k_\epsilon^2} \right) \mathbf{V}_l^m, \\ \left( R_0 - \sum_{i=1}^{N_p} \frac{A_i}{B_i} \left( \mathbf{Id} + B_i \frac{\Delta_S}{k_\epsilon^2} \right)^{-1} \right)^{-1} \left( \mathbf{Id} - \frac{1}{k_\epsilon^2} \mathbf{rot}_S \mathbf{rot}_S \right) (\mathbf{V}_l^m \wedge \mathbf{n}) &= - \left( R_0 - \sum_{i=1}^{N_p} \frac{A_i}{B_i} \left( 1 - \frac{B_i}{k_\epsilon^2} l(l+1) \right)^{-1} \right)^{-1} \mathbf{U}_l^m. \end{aligned}$$

**Preuve**

Il suffit d'utiliser les Propositions 5.15 et 5.16. ■

De par les Propositions 5.18 et 5.23, les  $(\mathbf{U}_l^m)$  et les  $(\mathbf{V}_l^m)$  diagonalisent toutes les approximations des opérateurs MtE que nous avons proposées dans ce travail. Dans la suite de cette sous-section, nous supposons par conséquent que les  $(\mathbf{U}_l^m)$  et les  $(\mathbf{V}_l^m)$  diagonalisent les opérateurs de transmission  $\mathbf{T}_-$  et  $\mathbf{T}_+$  comme suit :

$$\forall l \geq 1, \quad \forall -l \leq m \leq l, \quad \begin{aligned} \mathbf{T}_- \mathbf{U}_l^m &= t_{l,\mathbf{U}}^- \mathbf{V}_l^m, & \mathbf{T}_- \mathbf{V}_l^m &= t_{l,\mathbf{V}}^- \mathbf{U}_l^m, \\ \mathbf{T}_+ \mathbf{U}_l^m &= t_{l,\mathbf{U}}^+ \mathbf{V}_l^m, & \mathbf{T}_+ \mathbf{V}_l^m &= t_{l,\mathbf{V}}^+ \mathbf{U}_l^m. \end{aligned}$$

De plus, les nombres d'onde  $k_\pm$  et les impédances  $Z_\pm$  sont supposés être des réels strictement positifs. Dans la prochaine proposition, nous donnons des conditions nécessaires au caractère bien posé des sous-problèmes (5.3) et (5.4).

**Proposition 5.24** (Caractère bien posé des sous-problèmes).

Si le problème intérieur (5.3) est bien posé, les conditions suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned} \forall l \geq 1, \quad (j_l(k_-) + k_- j_l'(k_-)) t_{l,\mathbf{V}}^- + i k_- Z_-^{-1} j_l(k_-) &\neq 0, \\ \forall l \geq 1, \quad \frac{1}{i k_- Z_-} (j_l(k_-) + k_- j_l'(k_-)) - j_l(k_-) t_{l,\mathbf{U}}^- &\neq 0. \end{aligned}$$

De même, lorsque le problème extérieur (5.4) est bien posé, nous avons :

$$\begin{aligned} \forall l \geq 1, \quad i k_+ Z_+^{-1} h_l^1(k_+) - (h_l^1(k_+) + k_+ h_l^{1'}(k_+)) t_{l,\mathbf{V}}^+ &\neq 0, \\ \forall l \geq 1, \quad \frac{1}{i k_+ Z_+} (h_l^1(k_+) + k_+ h_l^{1'}(k_+)) + h_l^1(k_+) t_{l,\mathbf{U}}^+ &\neq 0. \end{aligned}$$

**Preuve**

Ce résultat se démontre de la même manière que la Proposition 2.34 page 56. ■

Nous donnons à présent des résultats de résolution modale pour les problèmes intérieur (5.3) et extérieur (5.4).

**Proposition 5.25** (Résolution modale du problème intérieur).

La solution du problème intérieur (5.3) :

$$\begin{cases} \mathbf{rot} \mathbf{E} - ik_- Z_- \mathbf{H} = \mathbf{0} \\ \mathbf{rot} \mathbf{H} + ik_- Z_-^{-1} \mathbf{E} = \mathbf{0} \end{cases} \text{ dans } \mathcal{B} \quad , \quad \gamma_t^- \mathbf{H} + \mathbf{T}_- \gamma_t^- \mathbf{E} = \mathbf{g},$$

s'exprime comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \sum_{l=1}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l \left( \alpha_l^m \sqrt{l(l+1)} \frac{j_l(k_- r)}{r} Y_l^m(\theta; \varphi) \mathbf{e}_r + \alpha_l^m \frac{(r j_l(k_- r))'}{r} \mathbf{U}_l^m(\theta; \varphi) + \beta_l^m j_l(k_- r) \mathbf{V}_l^m(\theta; \varphi) \right), \\ \mathbf{H} &= \frac{1}{ik_- Z_-} \sum_{l=1}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l \left( \beta_l^m \sqrt{l(l+1)} \frac{j_l(k_- r)}{r} Y_l^m(\theta; \varphi) \mathbf{e}_r + \beta_l^m \frac{(r j_l(k_- r))'}{r} \mathbf{U}_l^m(\theta; \varphi) + k_-^2 \alpha_l^m j_l(k_- r) \mathbf{V}_l^m(\theta; \varphi) \right), \end{aligned}$$

où :

$$\mathbf{g} = \sum_{l=1}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l g_l^m \mathbf{U}_l^m + \tilde{g}_l^m \mathbf{V}_l^m,$$

$$\alpha_l^m = \frac{g_l^m}{(j_l(k_-) + k_- j_l'(k_-)) t_{l,\mathbf{V}}^- + ik_- Z_-^{-1} j_l(k_-)} \quad , \quad \beta_l^m = \frac{\tilde{g}_l^m}{\frac{1}{ik_- Z_-} (j_l(k_-) + k_- j_l'(k_-)) - j_l(k_-) t_{l,\mathbf{U}}^-}.$$

**Preuve**

Il suffit d'utiliser la Proposition 5.19. ■

**Proposition 5.26** (Résolution modale du problème extérieur).

La solution du problème extérieur (5.4) :

$$\begin{cases} \mathbf{rot} \mathbf{E} - ik_+ Z_+ \mathbf{H} = \mathbf{0} \\ \mathbf{rot} \mathbf{H} + ik_+ Z_+^{-1} \mathbf{E} = \mathbf{0} \end{cases} \text{ dans } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\mathcal{B}} \quad , \quad \gamma_t^+ \mathbf{H} - \mathbf{T}_+ \gamma_t^+ \mathbf{E} = \mathbf{g} \quad , \quad Z_+ \mathbf{H} \wedge \mathbf{e}_r - \mathbf{E} = \mathcal{O}_{r \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{r^2} \right),$$

est donnée ci-dessous :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \sum_{l=1}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l \left( \alpha_l^m \sqrt{l(l+1)} \frac{h_l^1(k_+ r)}{r} Y_l^m(\theta; \varphi) \mathbf{e}_r + \alpha_l^m \frac{(r h_l^1(k_+ r))'}{r} \mathbf{U}_l^m(\theta; \varphi) + \beta_l^m h_l^1(k_+ r) \mathbf{V}_l^m(\theta; \varphi) \right), \\ \mathbf{H} &= \frac{1}{ik_+ Z_+} \sum_{l=1}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l \left( \beta_l^m \sqrt{l(l+1)} \frac{h_l^1(k_+ r)}{r} Y_l^m(\theta; \varphi) \mathbf{e}_r + \beta_l^m \frac{(r h_l^1(k_+ r))'}{r} \mathbf{U}_l^m(\theta; \varphi) + k_+^2 \alpha_l^m h_l^1(k_+ r) \mathbf{V}_l^m(\theta; \varphi) \right), \end{aligned}$$

avec :

$$\mathbf{g} = \sum_{l=1}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l g_l^m \mathbf{U}_l^m + \tilde{g}_l^m \mathbf{V}_l^m,$$

$$\alpha_l^m = \frac{g_l^m}{ik_+ Z_+^{-1} h_l^1(k_+) - (h_l^1(k_+) + k_+ h_l^{1'}(k_+)) t_{l,\mathbf{V}}^+} \quad , \quad \beta_l^m = \frac{\tilde{g}_l^m}{\frac{1}{ik_+ Z_+} (h_l^1(k_+) + k_+ h_l^{1'}(k_+)) + h_l^1(k_+) t_{l,\mathbf{U}}^+}.$$

**Preuve**

Ce résultat découle directement de la Proposition 5.21. ■

A partir des deux propositions précédentes, nous pouvons obtenir le résultat de diagonalisation suivant pour les opérateurs de résolution.

**Proposition 5.27** (Diagonalisation des opérateurs de résolution).

Les fonctions  $(\mathbf{U}_l^m)$  et  $(\mathbf{V}_l^m)$  diagonalisent les opérateurs  $\mathbf{R}_-$  et  $\mathbf{R}_+$  :

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_-\mathbf{U}_l^m &= \frac{j_l(k_-) + k_-j'_l(k_-)}{(j_l(k_-) + k_-j'_l(k_-))t_{l,\mathbf{V}}^- + ik_-Z_-^{-1}j_l(k_-)}\mathbf{V}_l^m, \\ \mathbf{R}_-\mathbf{V}_l^m &= \frac{j_l(k_-)}{j_l(k_-)t_{l,\mathbf{U}}^- - \frac{1}{ik_-Z_-}(j_l(k_-) + k_-j'_l(k_-))}\mathbf{U}_l^m, \\ \mathbf{R}_+\mathbf{U}_l^m &= \frac{h_l^1(k_+) + k_+h_l^{1'}(k_+)}{-(h_l^1(k_+) + k_+h_l^{1'}(k_+))t_{l,\mathbf{V}}^+ + ik_+Z_+^{-1}h_l^1(k_+)}\mathbf{V}_l^m, \\ \mathbf{R}_+\mathbf{V}_l^m &= -\frac{h_l^1(k_+)}{h_l^1(k_+)t_{l,\mathbf{U}}^+ + \frac{1}{ik_+Z_+}(h_l^1(k_+) + k_+h_l^{1'}(k_+))}\mathbf{U}_l^m.\end{aligned}$$

Pour finir, nous nous intéressons aux opérateurs  $\mathbf{S}_-$ ,  $\mathbf{S}_+$  et  $\mathbf{S}_\pi$ .

**Proposition 5.28** (Spectre de  $\mathbf{S}_\pi$ ).

Les familles  $(\mathbf{U}_l^m)$  et  $(\mathbf{V}_l^m)$  diagonalisent les opérateurs  $\mathbf{S}_-$  et  $\mathbf{S}_+$  :

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_-\mathbf{U}_l^m &= \left(1 - \frac{(j_l(k_-) + k_-j'_l(k_-))(t_{l,\mathbf{V}}^- + t_{l,\mathbf{V}}^+)}{(j_l(k_-) + k_-j'_l(k_-))t_{l,\mathbf{V}}^- + ik_-Z_-^{-1}j_l(k_-)}\right)\mathbf{U}_l^m, \\ \mathbf{S}_-\mathbf{V}_l^m &= \left(1 - \frac{j_l(k_-)(t_{l,\mathbf{U}}^- + t_{l,\mathbf{U}}^+)}{j_l(k_-)t_{l,\mathbf{U}}^- - \frac{1}{ik_-Z_-}(j_l(k_-) + k_-j'_l(k_-))}\right)\mathbf{V}_l^m, \\ \mathbf{S}_+\mathbf{U}_l^m &= \left(1 + \frac{(h_l^1(k_+) + k_+h_l^{1'}(k_+))(t_{l,\mathbf{V}}^- + t_{l,\mathbf{V}}^+)}{-(h_l^1(k_+) + k_+h_l^{1'}(k_+))t_{l,\mathbf{V}}^+ + ik_+Z_+^{-1}h_l^1(k_+)}\right)\mathbf{U}_l^m, \\ \mathbf{S}_+\mathbf{V}_l^m &= \left(1 - \frac{h_l^1(k_+)(t_{l,\mathbf{U}}^- + t_{l,\mathbf{U}}^+)}{h_l^1(k_+)t_{l,\mathbf{U}}^+ + \frac{1}{ik_+Z_+}(h_l^1(k_+) + k_+h_l^{1'}(k_+))}\right)\mathbf{V}_l^m.\end{aligned}$$

Par conséquent, les valeurs propres de  $\mathbf{S}_\pi$  correspondent aux quantités données ci-dessous :

$$\begin{aligned}\pm &\sqrt{1 - \frac{(j_l(k_-) + k_-j'_l(k_-))(t_{l,\mathbf{V}}^- + t_{l,\mathbf{V}}^+)}{(j_l(k_-) + k_-j'_l(k_-))t_{l,\mathbf{V}}^- + ik_-Z_-^{-1}j_l(k_-)}} \sqrt{1 + \frac{(h_l^1(k_+) + k_+h_l^{1'}(k_+))(t_{l,\mathbf{V}}^- + t_{l,\mathbf{V}}^+)}{-(h_l^1(k_+) + k_+h_l^{1'}(k_+))t_{l,\mathbf{V}}^+ + ik_+Z_+^{-1}h_l^1(k_+)}} , \\ \pm &\sqrt{1 - \frac{j_l(k_-)(t_{l,\mathbf{U}}^- + t_{l,\mathbf{U}}^+)}{j_l(k_-)t_{l,\mathbf{U}}^- - \frac{1}{ik_-Z_-}(j_l(k_-) + k_-j'_l(k_-))}} \sqrt{1 - \frac{h_l^1(k_+)(t_{l,\mathbf{U}}^- + t_{l,\mathbf{U}}^+)}{h_l^1(k_+)t_{l,\mathbf{U}}^+ + \frac{1}{ik_+Z_+}(h_l^1(k_+) + k_+h_l^{1'}(k_+))}}.\end{aligned}$$

**Preuve**

Cette proposition se démontre exactement de la même manière que la Proposition 2.38 page 57. ■

### 5.4.3 Qualité des approximations des opérateurs MtE

Dans la partie sur l'acoustique, nous avons évalué graphiquement la qualité des approximations des opérateurs DtN que nous avons présentées. Plus précisément, nous avons tracé les premières valeurs propres de ces approximations après leur avoir appliqué une transformation facilitant l'interprétation des résultats. Nous adoptons naturellement la même approche pour analyser la qualité des approximations des opérateurs MtE que nous avons proposées dans la section précédente. Si  $\mathbf{\Lambda}_{-,k,Z}^{\text{app}}$  et  $\mathbf{\Lambda}_{+,k,Z}^{\text{app}}$  sont des approximations de  $\mathbf{\Lambda}_{-,k,Z}$  et de  $\mathbf{\Lambda}_{+,k,Z}$ ,  $k$  et  $Z$  étant supposés réels et strictement positifs, nous nous intéressons aux spectres des opérateurs suivants :

$$\frac{1}{2}\mathbf{Id} + \mathbf{K}_k - ikZ\mathbf{T}_k\mathbf{\Lambda}_{-,k,Z}^{\text{app}} \quad , \quad \frac{1}{2}\mathbf{Id} - \mathbf{K}_k + ikZ\mathbf{T}_k\mathbf{\Lambda}_{+,k,Z}^{\text{app}}. \quad (5.20)$$

En vertu des relations (voir Proposition 5.8) :

$$\frac{1}{2}\mathbf{Id} + \mathbf{K}_k - ikZ\mathbf{T}_k\mathbf{\Lambda}_{-,k,Z} = \mathbf{0} \quad , \quad \frac{1}{2}\mathbf{Id} - \mathbf{K}_k + ikZ\mathbf{T}_k\mathbf{\Lambda}_{+,k,Z} = \mathbf{0},$$

la concentration des spectres des opérateurs (5.20) autour de 0 est un indicateur de la qualité des approximations  $\Lambda_{-,k,Z}^{\text{app}}$  et  $\Lambda_{+,k,Z}^{\text{app}}$ . Remarquons que, si  $k$  n'est pas une valeur propre du système de Maxwell harmonique intérieur avec condition de trace tangentielle, les égalités précédentes sont équivalentes à celles données ci-dessous (voir Proposition 4.10 page 119) :

$$\Lambda_{-,k,Z} = \frac{1}{ikZ} \mathbf{T}_k^{-1} \left( \frac{1}{2} \mathbf{Id} + \mathbf{K}_k \right) \quad , \quad \Lambda_{+,k,Z} = -\frac{1}{ikZ} \mathbf{T}_k^{-1} \left( \frac{1}{2} \mathbf{Id} - \mathbf{K}_k \right),$$

et peuvent donc être comprises comme des définitions des opérateurs MtE. Pour finir, nous mentionnons que les opérateurs (5.20) peuvent être légèrement simplifiés. En effet, les opérateurs MtE ainsi que toutes les approximations que nous en avons proposées vérifient le résultat d'échelle suivant :

$$\begin{aligned} \Lambda_{-,k,Z} &= \frac{1}{Z} \Lambda_{-,k,1} \quad , \quad \Lambda_{+,k,Z} = \frac{1}{Z} \Lambda_{+,k,1}, \\ \Lambda_{-,k,Z}^{\text{app}} &= \frac{1}{Z} \Lambda_{-,k,1}^{\text{app}} \quad , \quad \Lambda_{+,k,Z}^{\text{app}} = \frac{1}{Z} \Lambda_{+,k,1}^{\text{app}}. \end{aligned}$$

Les opérateurs (5.20) se réécrivent alors comme suit :

$$\frac{1}{2} \mathbf{Id} + \mathbf{K}_k - ik \mathbf{T}_k \Lambda_{-,k,1}^{\text{app}} \quad , \quad \frac{1}{2} \mathbf{Id} - \mathbf{K}_k + ik \mathbf{T}_k \Lambda_{+,k,1}^{\text{app}} \quad (5.21)$$

et nous constatons en particulier que la qualité des approximations des opérateurs MtE ne dépend pas de  $Z$ .

Les figures que nous présentons dans cette sous-section sont les analogues exacts de celles que nous avons données dans la partie sur l'acoustique. A moins que nous ne précisions explicitement le nombre de valeurs propres considérées, tous les tests semi-numériques/semi-analytiques présentés dans cette section ont été réalisés en considérant les 100 premières valeurs propres des opérateurs en jeu. Par rapport à l'acoustique, le nombre de valeurs propres prises en compte a donc été doublé. Ce dédoublement du nombre de valeurs propres à considérer entre l'acoustique et l'électromagnétisme est en fait incontournable. Pour justifier cela, considérons, par exemple, les opérateurs racine carrée acoustique et électromagnétique. Les tests semi-numériques/semi-analytiques requièrent de tronquer les spectres de ces opérateurs, qui sont rappelés ci-dessous :

$$\begin{aligned} Sp \left( \left( \text{Id} + \frac{\Delta_{\mathbb{S}}}{k_{\epsilon}^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right) &= \left\{ \left( 1 - \frac{l(l+1)}{k_{\epsilon}^2} \right)^{\frac{1}{2}} : l \in \mathbb{N} \right\}, \\ Sp \left( \left( \mathbf{Id} + \frac{\Delta_{\mathbb{S}}}{k_{\epsilon}^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \left( \mathbf{Id} - \frac{1}{k_{\epsilon}^2} \text{rot}_{\mathbb{S}} \text{rot}_{\mathbb{S}} \right) (\cdot \wedge \mathbf{n}) \right) &= \left\{ \left( 1 - \frac{l(l+1)}{k_{\epsilon}^2} \right)^{\frac{1}{2}}, -\left( 1 - \frac{l(l+1)}{k_{\epsilon}^2} \right)^{-\frac{1}{2}} : l \in \mathbb{N}^* \right\}, \end{aligned}$$

à partir d'un certain  $l_{\max} \in \mathbb{N}^*$ . Pour que ces troncatures soient représentatives des opérateurs initiaux,  $l_{\max}$  doit être suffisamment grand de sorte que les zones hyperbolique, des rayons rasants et elliptique, respectivement caractérisées par les conditions suivantes :

$$k^2 - l(l+1) \gg 0 \quad , \quad k^2 - l(l+1) \approx 0 \quad , \quad k^2 - l(l+1) \ll 0,$$

soient toutes correctement représentées. De par les expressions des valeurs propres des opérateurs racine carrée,  $l_{\max}$  n'a par ailleurs pas de raison d'être choisi différemment en électromagnétisme et en acoustique. Remarquons à présent que les opérateurs racine carrée acoustique et électromagnétique admettent respectivement une et deux valeurs propres associées à chaque indice  $l$ . Concrètement, ce fait est à l'origine de l'inélectabilité du dédoublement du nombre de valeurs propres à considérer pour les tests semi-numériques/semi-analytiques en électromagnétisme.

Dans la Figure 5.1, nous montrons les valeurs propres des opérateurs (5.21) lorsque  $\Lambda_{-,k,1}^{\text{app}}$  et  $\Lambda_{+,k,1}^{\text{app}}$  correspondent aux approximations  $\Lambda_{-,k,1}^{\text{int}}$ ,  $\Lambda_{-,k,1}^{\text{sq}}$ ,  $\Lambda_{-,k,1}^0$ ,  $\Lambda_{+,k,1}^{\text{sq}}$  et  $\Lambda_{+,k,1}^0$  des opérateurs MtE. Le nombre d'onde est par ailleurs égal à 20. Les conclusions sont exactement les mêmes qu'en acoustique. En tant qu'approximation de  $\Lambda_{-,k,Z}$ ,  $\Lambda_{-,k,Z}^{\text{int}}$  est de meilleure qualité que  $\Lambda_{-,k,Z}^{\text{sq}}$  qui est elle-même plus précise que  $\Lambda_{-,k,Z}^0$ . De plus,  $\Lambda_{+,k,Z}^{\text{sq}}$  approxime mieux  $\Lambda_{+,k,Z}$  que  $\Lambda_{+,k,Z}^0$ . Enfin,  $\Lambda_{-,k,Z}^{\text{int}}$  et  $\Lambda_{+,k,Z}^{\text{sq}}$  approchent respectivement  $\Lambda_{-,k,Z}$  et  $\Lambda_{+,k,Z}$  avec un niveau de précision similaire.

La Figure 5.2 présente le spectre transformé de l'opérateur  $\Lambda_{+,k,Z}^{\text{sq}, N_p, \theta_p}$  pour plusieurs paires de paramètres  $(N_p; \theta_p)$  lorsque  $k = 20$ . Comme nous l'avions anticipé dans la sous-section 5.3.4, le fait de fixer la valeur de  $\theta_p$  à  $\frac{\pi}{2}$  permet, comme en acoustique, de rendre l'approximation (5.19) très précise. De plus, le fait de ne considérer que quatre termes dans les approximations de Padé semble demeurer suffisant en électromagnétisme.

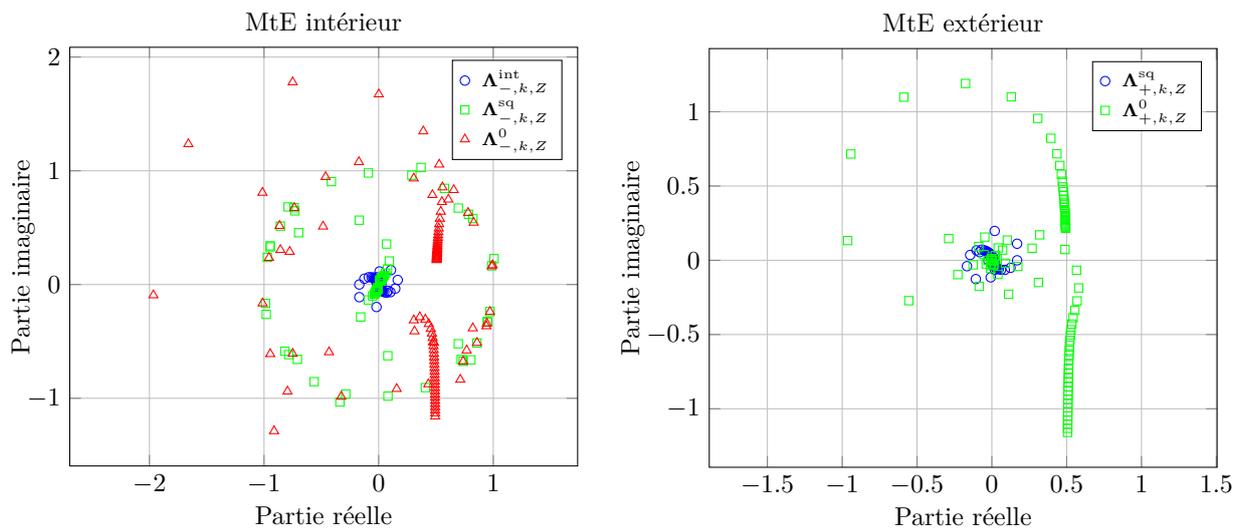


FIGURE 5.1 – Qualité des approximations  $\Lambda_{-,k,Z}^{\text{int}}$ ,  $\Lambda_{-,k,Z}^{\text{sq}}$ ,  $\Lambda_{-,k,Z}^0$ ,  $\Lambda_{+,k,Z}^{\text{sq}}$  et  $\Lambda_{+,k,Z}^0$  des opérateurs MtE ( $k = 20$ )

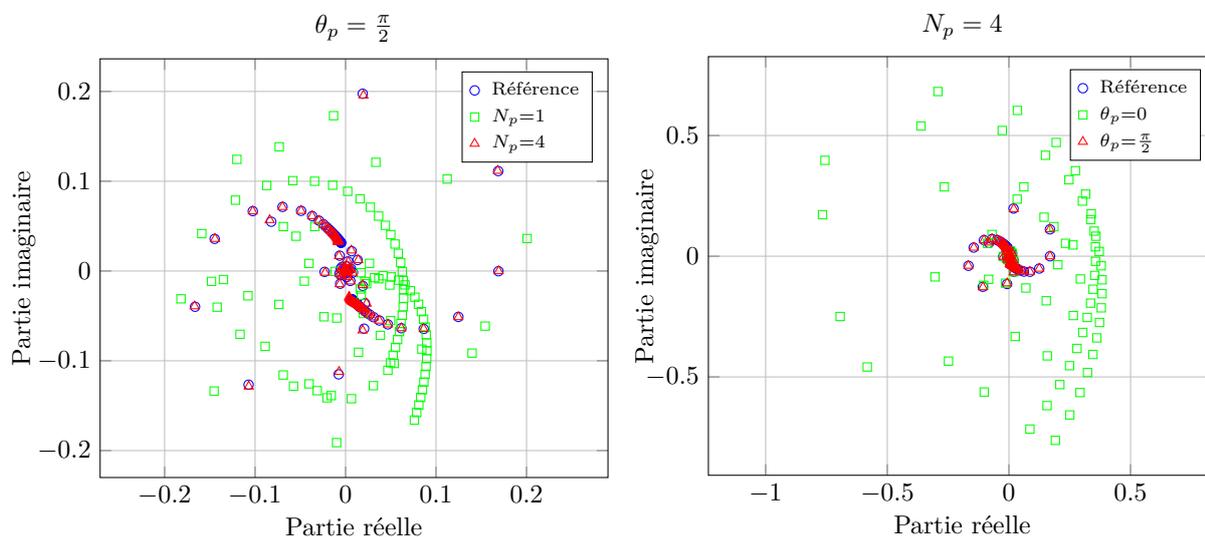


FIGURE 5.2 – Qualité des approximations  $\Lambda_{+,k,Z}^{\text{sq},N_p,\theta_p}$  de l'opérateur MtE extérieur ( $k = 20$ )

#### 5.4.4 Convergence du couplage faible

Nous nous assurons à présent qu'il est possible de résoudre le couplage faible (5.5) en un nombre modéré d'itérations GMRES. Nous nous intéressons principalement au couplage faible optimisé, c'est-à-dire au cas où les deux opérateurs de transmission sont optimaux pour le couplage faible (5.5) :

$$\mathbf{T}_- = -\mathbf{\Lambda}_{+,k_+,Z_+} \quad , \quad \mathbf{T}_+ = \mathbf{\Lambda}_{-,k_-,Z_-} .$$

Nous rappelons que nous avons également discuté de deux autres formes du couplage faible dans la partie sur l'acoustique, à savoir les couplages faibles semi-optimisé et non optimisé. Pour le couplage faible semi-optimisé, seul  $\mathbf{T}_-$  est optimal pour le couplage faible,  $\mathbf{T}_+$  étant optimal pour le problème extérieur. Les deux opérateurs de transmission sont en revanche optimaux pour les sous-problèmes intérieur et extérieur dans le cas du couplage faible non optimisé. Les résultats des tests semi-numériques/semi-analytiques pour ces variantes du couplage faible acoustique nous ont conduit à conclure que le couplage faible semi-optimisé pouvait constituer une solution intéressante en pratique alors que le couplage faible non optimisé n'était clairement pas viable. Dans cette sous-section, nous présenterons également quelques résultats confirmant la pertinence pratique du couplage faible semi-optimisé en électromagnétisme. Nous ne reviendrons toutefois pas sur le couplage faible non optimisé.

Quatre paramètres interviennent dans la définition du problème de diffraction-transmission électromagné-

tique, à savoir  $k_-$ ,  $k_+$ ,  $Z_-$  et  $Z_+$ . L'étude exhaustive de l'influence de tous ces paramètres sur la convergence GMRES du couplage faible (5.5) serait fastidieuse. Pour des raisons de brièveté, nous proposons donc de choisir les valeurs de  $k_{\pm}$  et de  $Z_{\pm}$  de sorte qu'elles soient représentatives d'une situation physique. En pratique, le matériau constituant  $\Omega_+$  correspond à de l'air. Il est donc naturel d'imposer :

$$\epsilon_+ = \epsilon_0 \quad , \quad \mu_+ = \mu_0,$$

les constantes  $\epsilon_0$  et  $\mu_0$  désignant respectivement la permittivité électrique et la perméabilité magnétique du vide :

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H.m}^{-1} \quad , \quad \epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}.$$

Remarquons que, de par ce choix, modifier la valeur de  $k_+$  revient concrètement à changer la fréquence des ondes en jeu. Nous rappelons à présent que, dans ce travail, l'objet diffractant est supposé être composé d'un matériau diélectrique. Nous avons par conséquent choisi d'imposer :

$$\epsilon_- = 4\epsilon_0 \quad , \quad \mu_- = \mu_0,$$

ces caractéristiques physiques étant représentatives d'un matériau diélectrique standard. De là, nous en déduisons en particulier que :

$$Z_- = \frac{Z_+}{2} \quad , \quad Z_+ = Z_0 \quad , \quad k_- = 2k_+.$$

Le problème de diffraction-transmission électromagnétique n'est alors paramétré que par le nombre d'onde extérieur  $k_+$ .

Les figures que nous présentons dans cette sous-section sont en tout point similaires à celles que nous avons montrées dans la partie sur l'acoustique. Elles ont toutes été obtenues en fixant la tolérance GMRES pour la résolution du couplage faible (5.5) à  $10^{-6}$ .

Les Figures 5.3, 5.4, 5.5 et 5.6 regroupent les résultats que nous présentons concernant le couplage faible optimisé. Dans les Figures 5.3, 5.4 et 5.5, les opérateurs de transmission correspondent aux approximations  $\mathbf{\Lambda}_{-,k,Z}^{\text{int}}$ ,  $\mathbf{\Lambda}_{-,k,Z}^{\text{sq}}$ ,  $\mathbf{\Lambda}_{-,k,Z}^0$ ,  $\mathbf{\Lambda}_{+,k,Z}^{\text{sq}}$  et  $\mathbf{\Lambda}_{+,k,Z}^0$  des opérateurs MtE. La Figure 5.3 présente les historiques de convergence GMRES de l'opérateur  $\mathbf{Id} - \mathbf{S}_{\pi}$  lorsque  $k_+ = 10$ . Les Figures 5.4 et 5.5, quant à elles, montrent l'évolution du nombre d'itérations GMRES nécessaires à la résolution du couplage faible optimisé en fonction du nombre d'onde extérieur et du nombre de valeurs propres considérées. Pour finir, la Figure 5.6 permet de visualiser l'influence des paramètres  $N_p$  et  $\theta_p$  sur la convergence GMRES du couplage faible optimisé. Elle présente en effet les variations, induites par une augmentation de  $k_+$ , du nombre d'itérations GMRES nécessaires à la résolution du couplage faible optimisé pour plusieurs paires de paramètres  $(N_p; \theta_p)$ . Notons que cette figure a été obtenue en utilisant les approximations  $\mathbf{\Lambda}_{-,k,Z}^{\text{sq}}$  et  $\mathbf{\Lambda}_{+,k,Z}^{\text{sq}}$  des opérateurs MtE comme opérateurs de transmission.

Le couplage faible semi-optimisé fait l'objet de la Figure 5.7. Celle-ci a été produite en ayant recours aux approximations  $\mathbf{\Lambda}_{-,k,Z}^{\text{int}}$ ,  $\mathbf{\Lambda}_{-,k,Z}^{\text{sq}}$ ,  $\mathbf{\Lambda}_{-,k,Z}^0$ ,  $\mathbf{\Lambda}_{+,k,Z}^{\text{sq}}$  et  $\mathbf{\Lambda}_{+,k,Z}^0$  des opérateurs MtE et montre la dépendance en  $k_+$  du nombre d'itérations GMRES nécessaires à la résolution du couplage faible semi-optimisé.

Les résultats présentés dans cette sous-section suggèrent que le couplage faible (5.5), qu'il soit optimisé ou semi-optimisé, est une méthode viable en pratique. En effet, pourvu que les opérateurs de transmission soient bien choisis, le couplage faible électromagnétique peut être résolu en un nombre relativement faible d'itérations GMRES. Remarquons par ailleurs que, comme pour le couplage faible acoustique, les meilleures convergences GMRES sont proposées par les approximations intégrales et de type racine carrée des opérateurs MtE. En effet, avec ces approximations, le nombre d'itérations GMRES nécessaires à la résolution du couplage faible électromagnétique est raisonnable et surtout très peu dépendant de la fréquence et du nombre de valeurs propres considérées.

Bien que les conclusions précédentes soient positives, nous nous devons de les nuancer quelque peu. Pour commencer, nous mentionnons que le nombre d'itérations GMRES nécessaires à la résolution du couplage faible est légèrement plus élevé en électromagnétisme qu'en acoustique. La résolution du couplage faible électromagnétique s'avère donc plus difficile que celle du couplage faible acoustique. Ce phénomène n'est pas surprenant et s'explique par la nature vectorielle du couplage faible électromagnétique. Pour finir, il semblerait que l'approximation (5.19) ne soit pas aussi précise, à basse fréquence, que son équivalent acoustique lorsque  $N_p = 4$ . Le fait de fixer la valeur de la rotation de branche à  $\frac{\pi}{2}$  reste toutefois optimal.

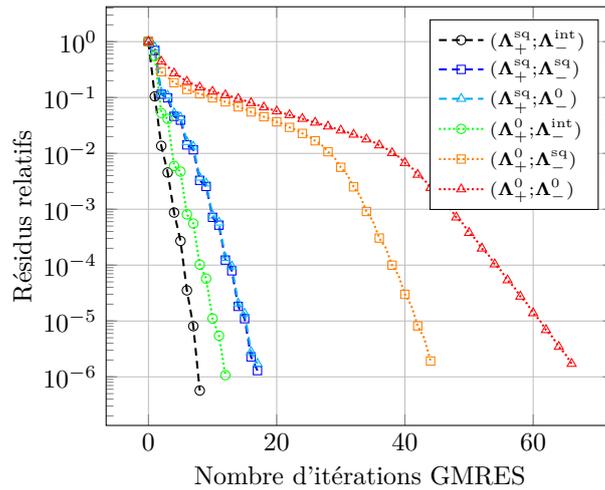


FIGURE 5.3 – Historiques de convergence GMRES pour le couplage faible optimisé

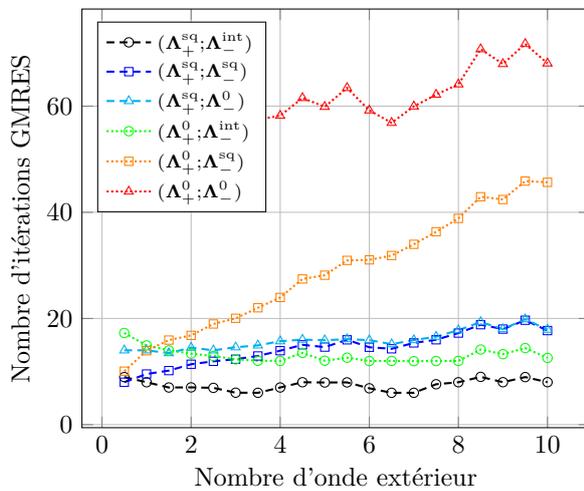


FIGURE 5.4 – Nombre d'itérations GMRES en fonction de  $k_+$  pour le couplage faible optimisé

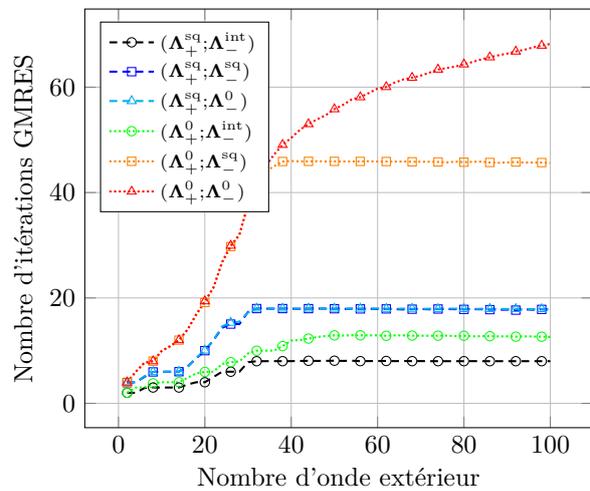


FIGURE 5.5 – Nombre d'itérations GMRES en fonction du nombre de valeurs propres pour le couplage faible optimisé

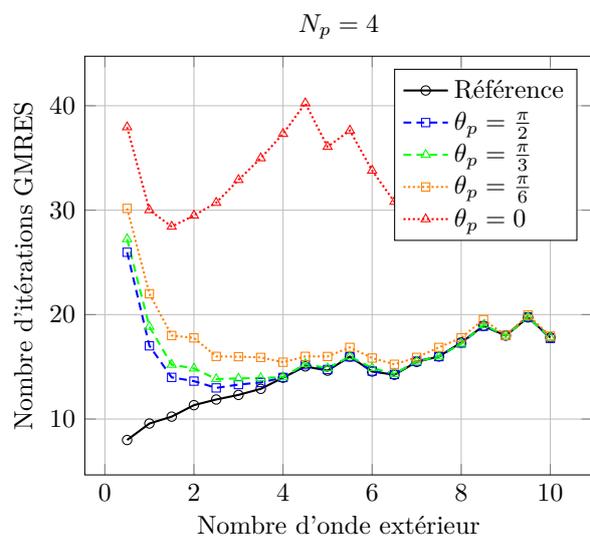
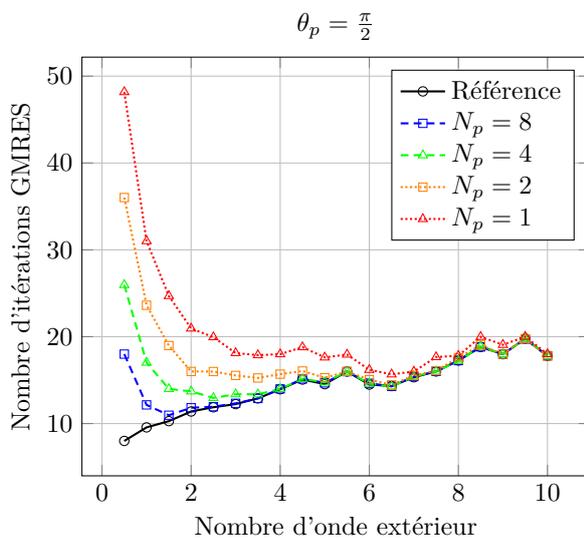
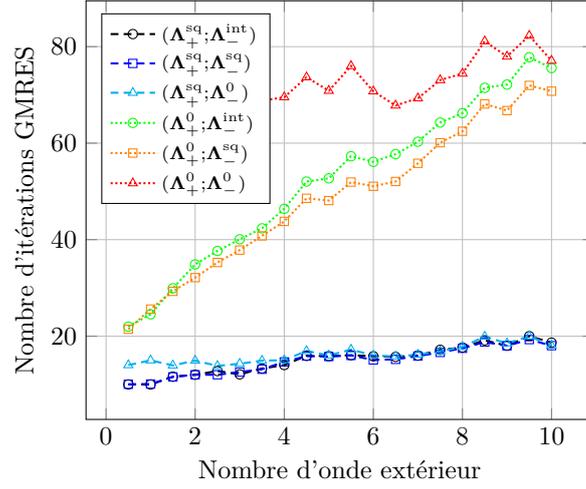
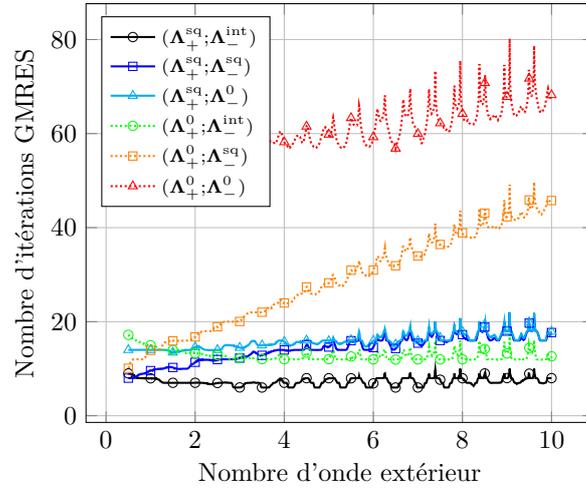


FIGURE 5.6 – Influence des paramètres de Padé sur la convergence GMRES du couplage faible optimisé


 FIGURE 5.7 – Nombre d'itérations GMRES en fonction de  $k_+$  pour le couplage faible semi-optimisé

### 5.4.5 Problèmes de résonance du couplage faible

Le couplage faible électromagnétique optimisé, comme son homologue acoustique, est affecté par des problèmes de résonances. Ce phénomène est illustré par la Figure 5.8. Pour ce qui est du contenu et de la présentation, cette dernière est identique à la Figure 5.4 à ceci près que le nombre d'onde extérieur y est discrétisé plus finement, à savoir avec un pas de 0.01. Remarquons que, pour des raisons de lisibilité, les marqueurs de données ont été placés comme dans la Figure 5.4, c'est-à-dire toutes les demi-unités.


 FIGURE 5.8 – Nombre d'itérations GMRES en fonction de  $k_+$  pour le couplage faible optimisé

Les résonances dont souffre le couplage faible électromagnétique optimisé s'expliquent de la même manière qu'en acoustique. Concrètement, les sous-problèmes intérieur (5.3) et extérieur (5.4) peuvent être très mal conditionnés. Dans l'optique de préciser ce point, nous rappelons que les conditions :

$$\begin{aligned} \forall l \geq 1, \quad & (j_l(k_-) + k_- j_l'(k_-)) t_{l,\mathbf{V}}^- + ik_- Z_-^{-1} j_l(k_-) \neq 0, \\ \forall l \geq 1, \quad & \frac{1}{ik_- Z_-} (j_l(k_-) + k_- j_l'(k_-)) - j_l(k_-) t_{l,\mathbf{U}}^- \neq 0, \\ \forall l \geq 1, \quad & ik_+ Z_+^{-1} h_l^1(k_+) - (h_l^1(k_+) + k_+ h_l^{1'}(k_+)) t_{l,\mathbf{V}}^+ \neq 0, \\ \forall l \geq 1, \quad & \frac{1}{ik_+ Z_+} (h_l^1(k_+) + k_+ h_l^{1'}(k_+)) + h_l^1(k_+) t_{l,\mathbf{U}}^+ \neq 0, \end{aligned}$$

sont nécessaires au caractère bien posé des sous-problèmes (5.3) et (5.4) (voir Proposition 5.24). Si  $k_-$  n'est pas une valeur propre du système de Maxwell harmonique intérieur avec condition de trace tangentielle, ces

conditions se reformulent comme suit (voir Proposition 5.20) :

$$\begin{aligned} \forall l \geq 1, \quad & t_{l,\mathbf{V}}^- + ik_- Z_-^{-1} \frac{j_l(k_-)}{j_l(k_-) + k_- j_l'(k_-)} \neq 0, \\ \forall l \geq 1, \quad & \frac{1}{ik_- Z_-} \frac{j_l(k_-) + k_- j_l'(k_-)}{j_l(k_-)} - t_{l,\mathbf{U}}^- \neq 0, \\ \forall l \geq 1, \quad & ik_+ Z_+^{-1} \frac{h_l^1(k_+)}{h_l^1(k_+) + k_+ h_l^{1'}(k_+)} - t_{l,\mathbf{V}}^+ \neq 0, \\ \forall l \geq 1, \quad & \frac{1}{ik_+ Z_+} \frac{h_l^1(k_+) + k_+ h_l^{1'}(k_+)}{h_l^1(k_+)} + t_{l,\mathbf{U}}^+ \neq 0. \end{aligned}$$

De plus, lorsque les opérateurs  $\mathbf{T}_-$  et  $\mathbf{T}_+$  correspondent aux opérateurs de transmission optimaux pour le couplage faible (5.5), les quatre inégalités précédentes se résument à celles données ci-dessous :

$$\forall l \geq 1, \quad -ik_+ Z_+^{-1} \frac{h_l^1(k_+)}{h_l^1(k_+) + k_+ h_l^{1'}(k_+)} + ik_- Z_-^{-1} \frac{j_l(k_-)}{j_l(k_-) + k_- j_l'(k_-)} \neq 0, \quad (5.22)$$

$$\forall l \geq 1, \quad \frac{1}{ik_- Z_-} \frac{j_l(k_-) + k_- j_l'(k_-)}{j_l(k_-)} - \frac{1}{ik_+ Z_+} \frac{h_l^1(k_+) + k_+ h_l^{1'}(k_+)}{h_l^1(k_+)} \neq 0. \quad (5.23)$$

Associées l'une à l'autre, les conditions (5.22) et (5.23) constituent l'analogie électromagnétique de la condition (2.30) que nous avons donnée à la page 63 dans la partie sur l'acoustique. Le caractère bien posé des sous-problèmes du couplage faible optimisé est donc plus contraignant en électromagnétisme qu'en acoustique.

Numériquement, nous avons observé que les conditions (5.22) et (5.23) peuvent ne pas être vérifiées pour certaines valeurs de  $k_+$ . Par exemple, la condition (5.22) n'est pas vraie si  $k_+ = 8.938$  et la condition (5.23) est fautive lorsque  $k_+ = 9.06$ . Ceci est illustré par la Figure 5.9 dans laquelle nous avons tracé le module des quantités intervenant dans les conditions (5.22) et (5.23) en fonction de  $l$  pour  $k_+ = 8.938$  et  $k_+ = 9.06$ . Pour finir, nous mentionnons que les valeurs 8.938 et 9.06 de  $k_+$  ne sont pas arbitraires. Elles correspondent en effet toutes les deux à des pics du nombre d'itérations GMRES dans la Figure 5.8.

Comme en acoustique, le mauvais conditionnement des opérateurs de résolution se traduit par une dégradation des propriétés spectrales de l'opérateur  $\mathbf{Id} - \mathbf{S}_\pi$ . Plus précisément, si la valeur de  $k_+$  est telle que les conditions (5.22) et (5.23) ne sont quasiment plus vérifiées, une des valeurs propres de  $\mathbf{Id} - \mathbf{S}_\pi$  est proche de 0. Ceci se traduit alors naturellement par une détérioration de la convergence GMRES du couplage faible optimisé. Dans la Figure 5.10, nous présentons le spectre de l'opérateur  $\mathbf{Id} - \mathbf{S}_\pi$  lorsque  $k_+ = 8.938$  et  $k_+ = 9.06$ , les opérateurs de transmission correspondant aux approximations  $\mathbf{\Lambda}_{-,k,Z}^{\text{int}}$ ,  $\mathbf{\Lambda}_{-,k,Z}^{\text{sq}}$  et  $\mathbf{\Lambda}_{+,k,Z}^{\text{sq}}$  des opérateurs MtE. A titre de comparaison, nous avons également tracé le spectre de l'opérateur du couplage faible optimisé pour  $k_+ = 9.2$ , cette valeur du nombre d'onde extérieur ne correspondant pas un pic du nombre d'itérations GMRES dans la Figure 5.8.

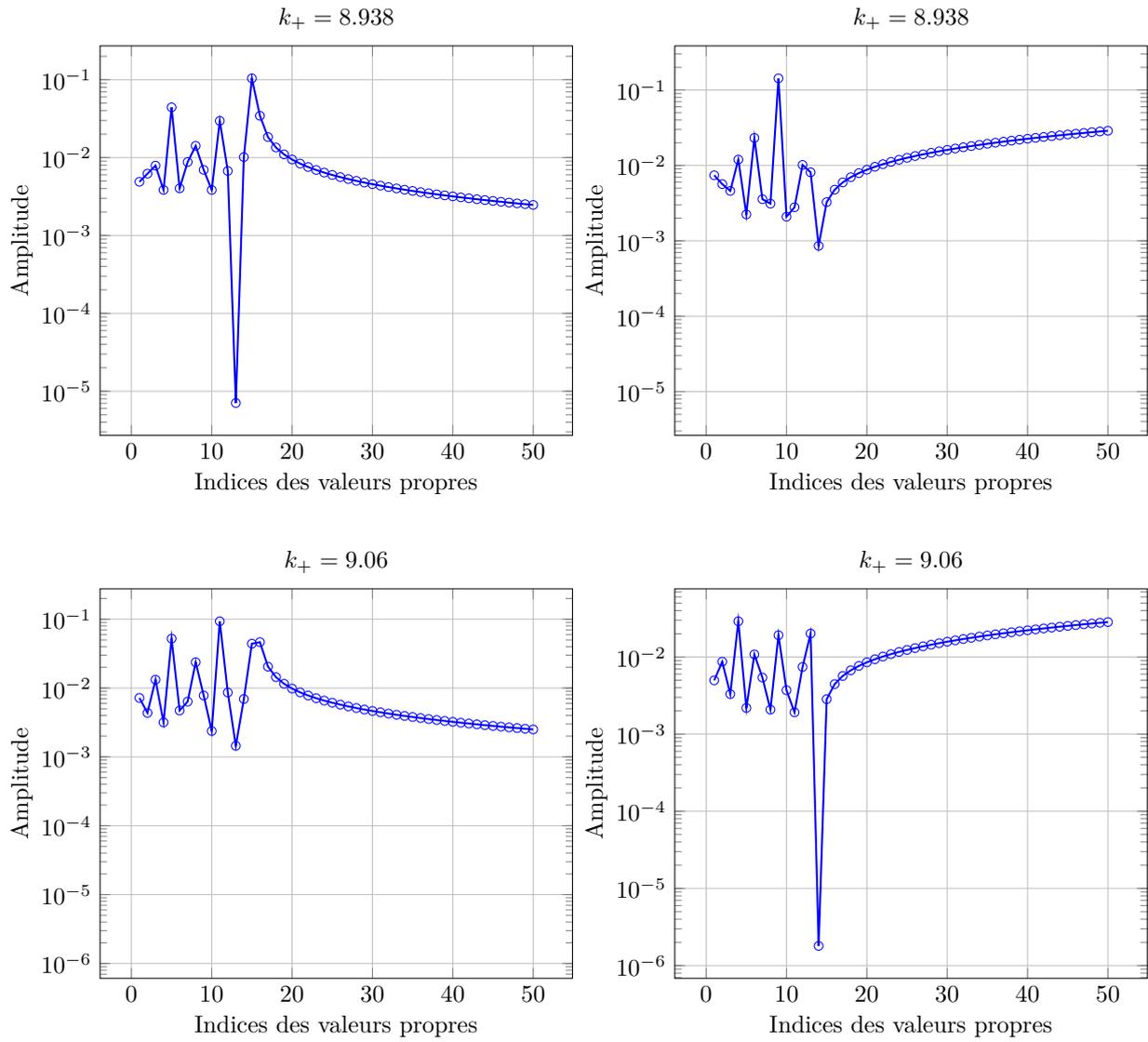


FIGURE 5.9 – Dégénérescence des sous-problèmes du couplage faible

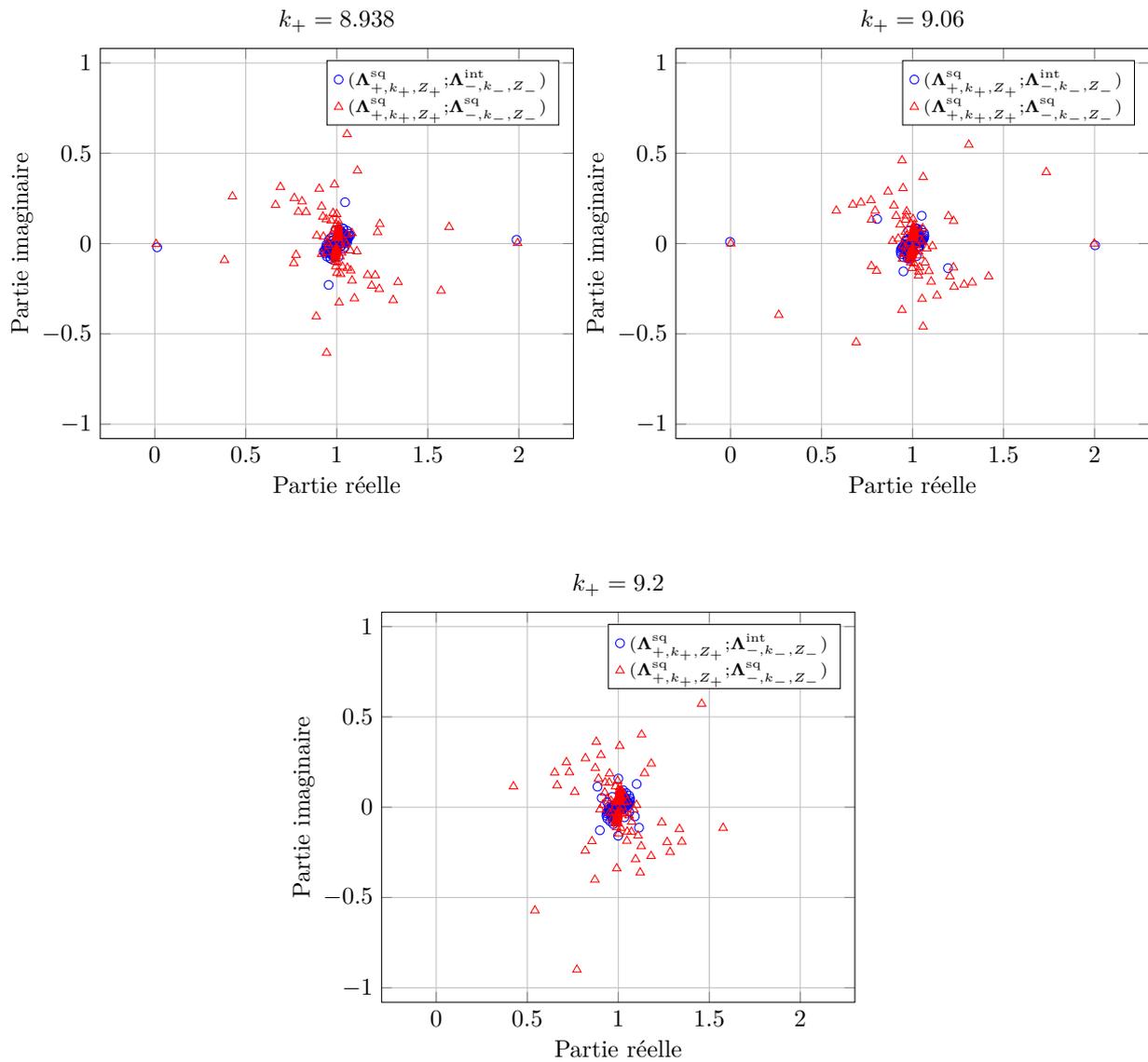


FIGURE 5.10 – Dégénérescence du spectre de l'opérateur du couplage faible

## 5.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons montré que le concept de couplage faible n'est pas restreint à l'acoustique. Nous avons en effet introduit un couplage faible permettant de résoudre le problème de diffraction-transmission électromagnétique (5.1). Ce couplage faible est construit de façon similaire à celui que nous avons proposé dans la partie sur l'acoustique et admet alors naturellement des opérateurs de transmission optimaux. Ces derniers ne sont toutefois pas liés à des opérateurs DtN mais à leurs équivalents électromagnétiques, à savoir les opérateurs MtE. D'un peu de vue computationnel, l'évaluation des opérateurs MtE, comme celle des opérateurs DtN, est coûteuse en temps de calcul et en mémoire. Pour contourner ce problème, nous avons proposé des approximations des opérateurs MtE similaires à celles que nous avons introduites pour les opérateurs DtN dans la partie sur l'acoustique, à savoir des approximations intégrales, de type racine carrée et d'ordre zéro. Pour ce faire, nous avons notamment eu recours, comme dans la partie sur l'acoustique, aux approximations de Padé de la racine carrée. Les résultats des tests semi-numériques/semi-analytiques que nous avons présentés pour la sphère nous ont montré que, en termes de précision, les approximations des opérateurs MtE se classent les unes par rapport aux autres de la même manière que les approximations des opérateurs DtN. Concrètement, la meilleure approximation de l'opérateur MtE intérieur est l'approximation intégrale suivie de l'approximation de type racine carrée puis de l'approximation d'ordre 0. Pour l'opérateur MtE extérieur, la hiérarchisation est identique à ceci près que cet opérateur n'admet pas d'approximation intégrale. Nous rappelons par ailleurs que l'approximation intégrale de l'opérateur MtE intérieur n'est valable que si l'objet diffractant est homogène. Nous avons également observé que les paramètres  $N_p$  et  $\theta_p$  intervenant dans les approximations de Padé des opérateurs MtE pouvaient être choisis de la même manière qu'en acoustique, à savoir :

$$N_p = 4 \quad , \quad \theta_p = \frac{\pi}{2}.$$

Remarquons toutefois que les approximations de Padé des opérateurs MtE semblent légèrement moins précises que les approximations de Padé des opérateurs DtN lorsque  $N_p = 4$ . Pour finir, les tests semi-numériques/semi-analytiques que nous avons effectués pour la sphère nous ont également permis de confirmer la pertinence pratique du couplage faible électromagnétique optimisé. En effet, si les opérateurs de transmission correspondent à des approximations précises des opérateurs MtE, le couplage faible (5.1) optimisé converge en un nombre relativement faible d'itérations GMRES, ce nombre étant par ailleurs très peu dépendant de la fréquence et du nombre de valeurs propres considérées. Pour ces mêmes approximations des opérateurs MtE, nous pouvons donc nous attendre à ce que, en pratique, le nombre d'itérations GMRES nécessaires à la résolution du couplage faible électromagnétique optimisé soit *quasi*-indépendant de la fréquence et du raffinement du maillage.

Dans le prochain chapitre, nous nous intéressons à la résolution numérique du couplage faible (5.1). Nous confirmons en particulier les conclusions des tests semi-numériques/semi-analytiques que nous avons présentés dans la section précédente. Pour finir, nous mentionnons que la discrétisation par la méthode des éléments finis du couplage faible électromagnétique est significativement plus difficile que celle du couplage faible acoustique. Bien que nous n'ayons pas vu apparaître de différences majeures entre l'acoustique et l'électromagnétisme pour le moment, la méthode que nous proposons pour discrétiser le couplage faible électromagnétique est fondamentalement différente de celle que nous avons utilisée pour la discrétisation du couplage faible acoustique.



# Chapitre 6

## Discrétisation et résultats numériques

### Sommaire

---

<b>6.1</b>	<b>Éléments finis et matrices associées . . . . .</b>	<b>155</b>
6.1.1	Éléments finis scalaires surfaciques et matrices associées . . . . .	155
6.1.2	Éléments finis vectoriels surfaciques et matrices associées . . . . .	157
<b>6.2</b>	<b>Le couplage fort BEM-BEM . . . . .</b>	<b>161</b>
<b>6.3</b>	<b>Le couplage faible : une première approche . . . . .</b>	<b>161</b>
<b>6.4</b>	<b>Le couplage faible <i>via</i> la décomposition de Helmholtz . . . . .</b>	<b>166</b>
6.4.1	Reformulation du couplage faible . . . . .	166
6.4.2	Discrétisation du couplage faible reformulé . . . . .	171
<b>6.5</b>	<b>Résultats numériques . . . . .</b>	<b>175</b>
<b>6.6</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>180</b>

---



Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la résolution numérique du problème de diffraction-transmission :

$$\begin{cases} \mathbf{rot} \mathbf{E} - ik_- Z_- \mathbf{H} = \mathbf{0} \\ \mathbf{rot} \mathbf{H} + ik_- Z_-^{-1} \mathbf{E} = \mathbf{0} \end{cases} \quad \text{dans } \Omega_-, \quad (6.1a)$$

$$\begin{cases} \mathbf{rot} \mathbf{E} - ik_+ Z_+ \mathbf{H} = \mathbf{0} \\ \mathbf{rot} \mathbf{H} + ik_+ Z_+^{-1} \mathbf{E} = \mathbf{0} \end{cases} \quad \text{dans } \Omega_+, \quad (6.1b)$$

$$Z_+ \mathbf{H} \wedge \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} - \mathbf{E} = \mathcal{O}(r^{-2}), \quad (6.1c)$$

$$\gamma_t^- \mathbf{E} = \gamma_t^+ \mathbf{E} + \gamma_t^+ \mathbf{E}_{\text{inc}}, \quad (6.1d)$$

$$\gamma_t^- \mathbf{H} = \gamma_t^+ \mathbf{H} + \gamma_t^+ \mathbf{H}_{\text{inc}}. \quad (6.1e)$$

Nous commençons par expliquer comment discrétiser les couplages BEM-BEM fort :

$$\begin{pmatrix} -(\mathbf{K}_{k_-} + \mathbf{K}_{k_+}) & ik_- Z_- \mathbf{T}_{k_-} + ik_+ Z_+ \mathbf{T}_{k_+} \\ -(ik_- Z_-^{-1} \mathbf{T}_{k_-} + ik_+ Z_+^{-1} \mathbf{T}_{k_+}) & -(\mathbf{K}_{k_-} + \mathbf{K}_{k_+}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_t^- \mathbf{E} \\ \gamma_t^- \mathbf{H} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_t^+ \mathbf{E}_{\text{inc}} \\ \gamma_t^+ \mathbf{H}_{\text{inc}} \end{pmatrix}, \quad (6.2)$$

et faible :

$$(\mathbf{Id} - \mathbf{S}_\pi) \begin{pmatrix} \mathbf{g}_- \\ \mathbf{g}_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_t^+ \mathbf{H}_{\text{inc}} + \mathbf{T}_- \gamma_t^+ \mathbf{E}_{\text{inc}} \\ -\gamma_t^+ \mathbf{H}_{\text{inc}} + \mathbf{T}_+ \gamma_t^+ \mathbf{E}_{\text{inc}} \end{pmatrix}. \quad (6.3)$$

Nous montrons ensuite des résultats numériques confirmant la pertinence pratique du couplage faible BEM-BEM électromagnétique optimisé. Remarquons par ailleurs que nos implémentations des couplages BEM-BEM fort et faible fournissent les mêmes résultats. Pour finir, nous mentionnons que, dans ce travail, nous ne discutons ni de la discrétisation, ni de la résolution numérique des couplages fort et faible FEM-BEM. Ces points n'ont en effet pas pu être investigués au cours de cette thèse pour des raisons de temps.

## 6.1 Éléments finis et matrices associées

Dans ce travail, nous utilisons les éléments finis de Raviart-Thomas d'ordre 0, classiquement appelés éléments finis  $RT_0$ , pour discrétiser les opérateurs intégraux surfaciques intervenant dans le couplage BEM-BEM fort et dans les sous-problèmes associés au couplage BEM-BEM faible. Notons qu'en dépit de leur dénomination, les éléments finis  $RT_0$  correspondent à des fonctions polynomiales de degré 1 par morceaux. Nous aurons également besoin des éléments finis  $P_2$  surfaciques scalaires standards à moyenne nulle, que nous appelons plus simplement éléments finis  $P_2^0$  surfaciques, pour discrétiser le couplage faible BEM-BEM. Pour le moment, nous ne précisons toutefois pas l'utilité de ces éléments finis. Dans cette première section, nous faisons donc quelques rappels concernant les éléments finis  $RT_0$  et  $P_2^0$  surfaciques. Nous introduisons également des matrices qui leur sont associées.

Comme dans la partie sur l'acoustique, nous avons choisi de mailler la surface de l'objet diffractant par des triangles. Nous continuons par ailleurs de noter  $N_s^2$ ,  $N_t^2$  et  $N_a^2$  les nombres de sommets, de triangles et d'arêtes constituant le maillage de  $\Gamma$ . Ajouté à cela,  $K$  désigne de nouveau un triangle quelconque de ce maillage. Le triangle de référence quant à lui est toujours noté  $K_r$ . Nous rappelons que nous avons représenté les triangles  $K$  et  $K_r$  dans la Figure 3.1 page 70. Pour finir, les sommets de  $K$  sont supposés être numérotés de sorte que  $\overrightarrow{\mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2} \wedge \overrightarrow{\mathbf{M}_1 \mathbf{M}_3}$  soit une normale sortante pour l'objet diffractant.

### 6.1.1 Éléments finis scalaires surfaciques et matrices associées

Les éléments finis  $P_2^0$  surfaciques sont construits à partir des éléments finis  $P_2$  surfaciques. Ces derniers se définissent de la même façon que les éléments finis  $P_2$  surfaciques hiérarchiques que nous avons introduits dans la sous-section 3.1.1. La présentation des éléments finis  $P_2$  surfaciques que nous donnons dans cette sous-section est par conséquent concise.

Les éléments finis  $P_2$  élémentaires sur  $K_r$  sont définis comme suit :

$$\begin{aligned} e_{K_r}^1 &= 2\xi^2 + 2\eta^2 + 4\xi\eta - 3\xi - 3\eta + 1 & , & \quad e_{K_r}^2 = 2\xi^2 - \xi & , & \quad e_{K_r}^3 = 2\eta^2 - \eta, \\ e_{K_r}^4 &= -4\xi^2 - 4\xi\eta + 4\xi & , & \quad e_{K_r}^5 = 4\xi\eta & , & \quad e_{K_r}^6 = -4\eta^2 - 4\xi\eta + 4\eta. \end{aligned}$$

Les fonctions  $e_{K_r}^1$ ,  $e_{K_r}^2$  et  $e_{K_r}^3$  sont donc rattachées aux sommets de  $K_r$ . Les fonctions  $e_{K_r}^4$ ,  $e_{K_r}^5$  et  $e_{K_r}^6$ , quant à elles, sont associées aux arêtes de  $K_r$ . En effet, nous vérifions sans difficulté que :

$$\forall i, j \in \{1; \dots; 6\}, \quad e_{K_r}^i(\mathbf{M}_j^r) = \delta_{ij},$$

les points  $\mathbf{M}_4^r$ ,  $\mathbf{M}_5^r$  et  $\mathbf{M}_6^r$  correspondant aux milieux des arêtes de  $K_r$ , à savoir :

$$\mathbf{M}_4^r = (0.5; 0) \quad , \quad \mathbf{M}_5^r = (0.5; 0.5) \quad , \quad \mathbf{M}_6^r = (0; 0.5).$$

Remarquons que la notation  $(e_{K_r}^i)_{i \in \{1, \dots, 6\}}$  désignait les éléments finis  $P_2$  hiérarchiques élémentaires sur  $K_r$  dans la partie sur l'acoustique. Etant donné que nous n'utilisons pas les éléments finis  $P_2$  surfaciques hiérarchiques dans ce chapitre, cela ne posera pas de problèmes de compréhension.

Les éléments finis  $P_2$  élémentaires sur  $K$  sont naturellement définis par le biais du pull-back  $\phi$  introduit dans la sous-section 3.1.1 :

$$\forall i \in \{1; \dots; 6\}, \quad e_K^i = e_{K_r}^i \circ \phi^{-1}.$$

Nous notons  $(e_i)_{i \in \{1, \dots, N_s^2 + N_a^2\}}$  les éléments finis  $P_2$  surfaciques globaux. La famille  $(e_i)_{i \in \{1, \dots, N_s^2 + N_a^2\}}$  est indexée de sorte que les  $(e_i)_{i \in \{1, \dots, N_s^2\}}$  et les  $(e_i)_{i \in \{N_s^2 + 1, \dots, N_s^2 + N_a^2\}}$  sont respectivement associés aux nœuds et aux arêtes du maillage. Concrètement, si le nœud d'indice  $i \in \{1; \dots; N_s^2\}$  du maillage correspond au sommet d'indice  $k \in \{1; 2; 3\}$  du triangle  $K$ , nous avons :

$$e_{i|K} = e_K^k.$$

De plus, si l'arête d'indice  $i \in \{1; \dots; N_a^2\}$  du maillage et l'arête d'indice  $k \in \{1; 2; 3\}$  du triangle  $K$  coïncident, nous avons :

$$e_{N_s^2 + i|K} = e_K^{k+3}.$$

Les éléments finis  $P_2^0$  surfaciques, que nous notons  $(e_i^0)_{i \in \{1; \dots; N_s^2 + N_a^2 - 1\}}$ , sont définis comme suit :

$$\forall i \in \{1; \dots; N_s^2 + N_a^2 - 1\}, \quad e_i^0 = e_i - \frac{\int_{\Gamma} e_i d\Gamma}{\int_{\Gamma} e_{N_s^2 + N_a^2} d\Gamma} e_{N_s^2 + N_a^2},$$

et constituent une base de l'espace suivant :

$$\left\{ p \in \text{Span}(e_i : i \in \{1; \dots; N_s^2 + N_a^2\}) : \int_{\Gamma} p d\Gamma = 0 \right\}.$$

Remarquons qu'il est possible d'expliciter les moyennes intervenant dans la définition de ces éléments finis. En effet, nous avons :

$$\forall i \in \{1; \dots; N_s^2\}, \quad \int_{\Gamma} e_i d\Gamma = 0 \quad , \quad \forall i \in \{1; \dots; N_a^2\}, \quad \int_{\Gamma} e_{N_s^2 + i} d\Gamma = \frac{1}{3} \sum_{n_{K,k}^a = i} |K|,$$

la table  $(n_{K,k}^a)$  ayant été introduite dans la sous-section 3.1.1.

Donnons-nous à présent un élément  $p$  de  $\text{Span}(e_i : i \in \{1; \dots; N_s^2 + N_a^2\})$  à moyenne nulle. En pratique, il est souvent nécessaire d'exprimer les coordonnées de  $p$  dans la base  $(e_i)_{i \in \{1; \dots; N_s^2 + N_a^2\}}$  à partir de celles dans la base  $(e_i^0)_{i \in \{1; \dots; N_s^2 + N_a^2 - 1\}}$  et réciproquement. Pour ce faire, nous définissons ci-dessous deux matrices de passage notées  $\mathbb{P}_{\Gamma, P_2^0 \rightarrow P_2}$  et  $\mathbb{P}_{\Gamma, P_2 \rightarrow P_2^0}$  :

$$\forall i \in \{1; \dots; N_s^2 + N_a^2 - 1\}, \quad e_i^0 = \sum_{j=1}^{N_s^2 + N_a^2} [\mathbb{P}_{\Gamma, P_2^0 \rightarrow P_2}]_{ji} e_j,$$

$$\mathbb{P}_{\Gamma, P_2 \rightarrow P_2^0} = \begin{pmatrix} 1 & (0) & 0 \\ & \ddots & \vdots \\ (0) & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nous vérifions alors sans difficulté que :

$$\{p\}_{P_2} = \mathbb{P}_{\Gamma, P_2^0 \rightarrow P_2} \{p\}_{P_2^0} \quad , \quad \{p\}_{P_2^0} = \mathbb{P}_{\Gamma, P_2 \rightarrow P_2^0} \{p\}_{P_2},$$

les notations  $\{p\}_{P_2}$  et  $\{p\}_{P_2^0}$  désignant les vecteurs coordonnées de  $p$  dans les bases  $(e_i)_{i \in \{1; \dots; N_s^2 + N_a^2\}}$  et  $(e_i^0)_{i \in \{1; \dots; N_s^2 + N_a^2 - 1\}}$ . Ces relations nous montrent par ailleurs que :

$$\mathbb{P}_{\Gamma, P_2 \rightarrow P_2^0} \mathbb{P}_{\Gamma, P_2^0 \rightarrow P_2} = Id.$$

Par la suite, nous aurons affaire aux matrices de masse et de raideur suivantes :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{J}_{\Gamma, P_2} &= \left( \int_{\Gamma} e_i e_j d\Gamma \right)_{i,j \in \{1, \dots, N_s^2 + N_a^2\}} , & \mathbb{H}_{\Gamma, P_2} &= \left( \int_{\Gamma} \nabla_{\Gamma} e_i \cdot \nabla_{\Gamma} e_j d\Gamma \right)_{i,j \in \{1, \dots, N_s^2 + N_a^2\}} , \\
 \mathbb{J}_{\Gamma, P_2^0} &= \left( \int_{\Gamma} e_i^0 e_j^0 d\Gamma \right)_{i,j \in \{1, \dots, N_s^2 + N_a^2 - 1\}} , & \mathbb{H}_{\Gamma, P_2^0} &= \left( \int_{\Gamma} \nabla_{\Gamma} e_i^0 \cdot \nabla_{\Gamma} e_j^0 d\Gamma \right)_{i,j \in \{1, \dots, N_s^2 + N_a^2 - 1\}} , \\
 \mathbb{J}_{\Gamma, P_2 \times P_2^0} &= \left( \int_{\Gamma} e_i e_j^0 d\Gamma \right)_{\substack{i \in \{1, \dots, N_s^2 + N_a^2\} \\ j \in \{1, \dots, N_s^2 + N_a^2 - 1\}}} , & \mathbb{H}_{\Gamma, P_2 \times P_2^0} &= \left( \int_{\Gamma} \nabla_{\Gamma} e_i \cdot \nabla_{\Gamma} e_j^0 d\Gamma \right)_{\substack{i \in \{1, \dots, N_s^2 + N_a^2\} \\ j \in \{1, \dots, N_s^2 + N_a^2 - 1\}}} , \\
 \mathbb{J}_{\Gamma, P_2^0 \times P_2} &= \left( \int_{\Gamma} e_i^0 e_j d\Gamma \right)_{\substack{i \in \{1, \dots, N_s^2 + N_a^2 - 1\} \\ j \in \{1, \dots, N_s^2 + N_a^2\}}} , & \mathbb{H}_{\Gamma, P_2^0 \times P_2} &= \left( \int_{\Gamma} \nabla_{\Gamma} e_i^0 \cdot \nabla_{\Gamma} e_j d\Gamma \right)_{\substack{i \in \{1, \dots, N_s^2 + N_a^2 - 1\} \\ j \in \{1, \dots, N_s^2 + N_a^2\}}} .
 \end{aligned}$$

Notons que les matrices  $\mathbb{J}_{\Gamma, P_2^0}$ ,  $\mathbb{J}_{\Gamma, P_2 \times P_2^0}$ ,  $\mathbb{J}_{\Gamma, P_2^0 \times P_2}$ ,  $\mathbb{H}_{\Gamma, P_2^0}$ ,  $\mathbb{H}_{\Gamma, P_2 \times P_2^0}$  et  $\mathbb{H}_{\Gamma, P_2^0 \times P_2}$  peuvent être obtenues à partir des matrices  $\mathbb{J}_{\Gamma, P_2}$  et  $\mathbb{H}_{\Gamma, P_2}$ . En effet, nous disposons des relations suivantes :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{J}_{\Gamma, P_2^0} &= \mathbb{P}_{\Gamma, P_2^0 \rightarrow P_2}^t \mathbb{J}_{\Gamma, P_2} \mathbb{P}_{\Gamma, P_2^0 \rightarrow P_2} , & \mathbb{H}_{\Gamma, P_2^0} &= \mathbb{P}_{\Gamma, P_2^0 \rightarrow P_2}^t \mathbb{H}_{\Gamma, P_2} \mathbb{P}_{\Gamma, P_2^0 \rightarrow P_2} , \\
 \mathbb{J}_{\Gamma, P_2 \times P_2^0} &= \mathbb{J}_{\Gamma, P_2} \mathbb{P}_{\Gamma, P_2^0 \rightarrow P_2} , & \mathbb{H}_{\Gamma, P_2 \times P_2^0} &= \mathbb{H}_{\Gamma, P_2} \mathbb{P}_{\Gamma, P_2^0 \rightarrow P_2} , \\
 \mathbb{J}_{\Gamma, P_2^0 \times P_2} &= \mathbb{P}_{\Gamma, P_2^0 \rightarrow P_2}^t \mathbb{J}_{\Gamma, P_2} , & \mathbb{H}_{\Gamma, P_2^0 \times P_2} &= \mathbb{P}_{\Gamma, P_2^0 \rightarrow P_2}^t \mathbb{H}_{\Gamma, P_2} .
 \end{aligned}$$

Pour finir, nous mentionnons que les relations liant les matrices  $\mathbb{J}_{\Gamma, P_2^0}$ ,  $\mathbb{J}_{\Gamma, P_2 \times P_2^0}$ ,  $\mathbb{J}_{\Gamma, P_2^0 \times P_2}$ ,  $\mathbb{H}_{\Gamma, P_2^0}$ ,  $\mathbb{H}_{\Gamma, P_2 \times P_2^0}$  et  $\mathbb{H}_{\Gamma, P_2^0 \times P_2}$  aux matrices  $\mathbb{J}_{\Gamma, P_2}$  et  $\mathbb{H}_{\Gamma, P_2}$  sont une conséquence directe de la proposition suivante.

**Proposition 6.1** (Changement de base pour les formes bilinéaires).

Soit  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels de dimensions respectives  $N_E$  et  $N_F$  et  $\mathcal{L}$  une forme bilinéaire sur  $E \times F$ . Nous nous donnons deux bases  $\mathcal{B}_E$  et  $\mathcal{B}'_E$  de  $E$  ainsi que deux bases  $\mathcal{B}_F$  et  $\mathcal{B}'_F$  de  $F$  :

$$\mathcal{B}_E = (e_i)_{i \in \{1, \dots, N_E\}} , \quad \mathcal{B}'_E = (e'_i)_{i \in \{1, \dots, N_E\}} , \quad \mathcal{B}_F = (f_i)_{i \in \{1, \dots, N_F\}} , \quad \mathcal{B}'_F = (f'_i)_{i \in \{1, \dots, N_F\}} .$$

La matrice de  $\mathcal{L}$  dans les bases  $\mathcal{B}_E$  et  $\mathcal{B}_F$ , notée  $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_E \times \mathcal{B}_F}^{\mathcal{L}}$ , est définie comme suit :

$$\forall i \in \{1, \dots, N_E\}, \quad \forall j \in \{1, \dots, N_F\}, \quad [\mathcal{M}_{\mathcal{B}_E \times \mathcal{B}_F}^{\mathcal{L}}]_{ij} = \mathcal{L}(e_i; f_j),$$

et la matrice de passage de  $\mathcal{B}'_E$  dans  $\mathcal{B}_E$ , que nous notons  $P_{\mathcal{B}'_E \rightarrow \mathcal{B}_E}$ , par :

$$\forall i \in \{1, \dots, N_E\}, \quad e'_i = \sum_{j=1}^{N_E} [P_{\mathcal{B}'_E \rightarrow \mathcal{B}_E}]_{ji} e_j .$$

Nous disposons alors du résultat suivant :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}'_E \times \mathcal{B}'_F}^{\mathcal{L}} = P_{\mathcal{B}'_E \rightarrow \mathcal{B}_E}^t \mathcal{M}_{\mathcal{B}_E \times \mathcal{B}_F}^{\mathcal{L}} P_{\mathcal{B}'_F \rightarrow \mathcal{B}_F} ,$$

les définitions des matrices  $\mathcal{M}_{\mathcal{B}'_E \times \mathcal{B}'_F}^{\mathcal{L}}$  et  $P_{\mathcal{B}'_F \rightarrow \mathcal{B}_F}$  étant similaires à celles des matrices  $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_E \times \mathcal{B}_F}^{\mathcal{L}}$  et  $P_{\mathcal{B}'_E \rightarrow \mathcal{B}_E}$ .

### 6.1.2 Eléments finis vectoriels surfaciques et matrices associées

Les éléments finis  $RT_0$  élémentaires sur  $K_r$ , notés  $\mathbf{e}_{K_r}^1$ ,  $\mathbf{e}_{K_r}^2$  et  $\mathbf{e}_{K_r}^3$ , sont définis comme suit :

$$\mathbf{e}_{K_r}^1 = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad \mathbf{e}_{K_r}^2 = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} , \quad \mathbf{e}_{K_r}^3 = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Les degrés de liberté associés à ces éléments finis correspondent aux flux à travers les arêtes de  $K_r$ . Nous disposons en effet du résultat suivant :

$$\forall i, j \in \{1; 2; 3\}, \quad \int_{\mathbf{M}_j^r \mathbf{M}_{j+1}^r} \mathbf{e}_{K_r}^i \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{M}_j^r \mathbf{M}_{j+1}^r} d\mathbf{M}_j^r \mathbf{M}_{j+1}^r = \delta_{ij},$$

le vecteur  $\mathbf{n}_{\mathbf{M}_i^r \mathbf{M}_{i+1}^r}$  désignant la normale unitaire sortante de  $K_r$  sur l'arête  $\mathbf{M}_i^r \mathbf{M}_{i+1}^r$ . Remarquons que nous avons ici adopté la convention circulaire sur les indices.

Par la suite, le plan contenant  $K$ , qui est généralement affine, est noté  $\mathcal{P}_A$ . Pour définir les éléments finis  $RT_0$  élémentaires sur  $K$ , nous munissons  $\mathcal{P}_A$  d'un système de coordonnées locales. Nous l'équiperons plus précisément du repère  $(\mathbf{M}_1; \tilde{\mathbf{e}}_1; \tilde{\mathbf{e}}_2)$ , les vecteurs  $\tilde{\mathbf{e}}_1$  et  $\tilde{\mathbf{e}}_2$  étant donnés ci-dessous :

$$\tilde{\mathbf{e}}_1 = \frac{\overrightarrow{\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2}}{\|\overrightarrow{\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2}\|} \quad , \quad \tilde{\mathbf{e}}_2 = \frac{\overrightarrow{\mathbf{M}_1\mathbf{M}_3} - (\overrightarrow{\mathbf{M}_1\mathbf{M}_3} \cdot \tilde{\mathbf{e}}_1)\tilde{\mathbf{e}}_1}{\|\overrightarrow{\mathbf{M}_1\mathbf{M}_3} - (\overrightarrow{\mathbf{M}_1\mathbf{M}_3} \cdot \tilde{\mathbf{e}}_1)\tilde{\mathbf{e}}_1\|}.$$

La Figure 6.1 permet de visualiser le triangle  $K$  dans le repère  $(\mathbf{M}_1; \tilde{\mathbf{e}}_1; \tilde{\mathbf{e}}_2)$ . Notons que les coordonnées dans  $(\mathbf{M}_1; \tilde{\mathbf{e}}_1; \tilde{\mathbf{e}}_2)$  d'un point  $\mathbf{x}$  de  $\mathcal{P}_A$ , que nous notons  $(\tilde{x}; \tilde{y})$ , sont définies par la relation suivante :

$$\mathbf{x} = \mathbf{M}_1 + \tilde{x}\tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{y}\tilde{\mathbf{e}}_2,$$

et vérifient par conséquent :

$$\tilde{x} = (\mathbf{x} - \mathbf{M}_1) \cdot \tilde{\mathbf{e}}_1 \quad , \quad \tilde{y} = (\mathbf{x} - \mathbf{M}_1) \cdot \tilde{\mathbf{e}}_2.$$

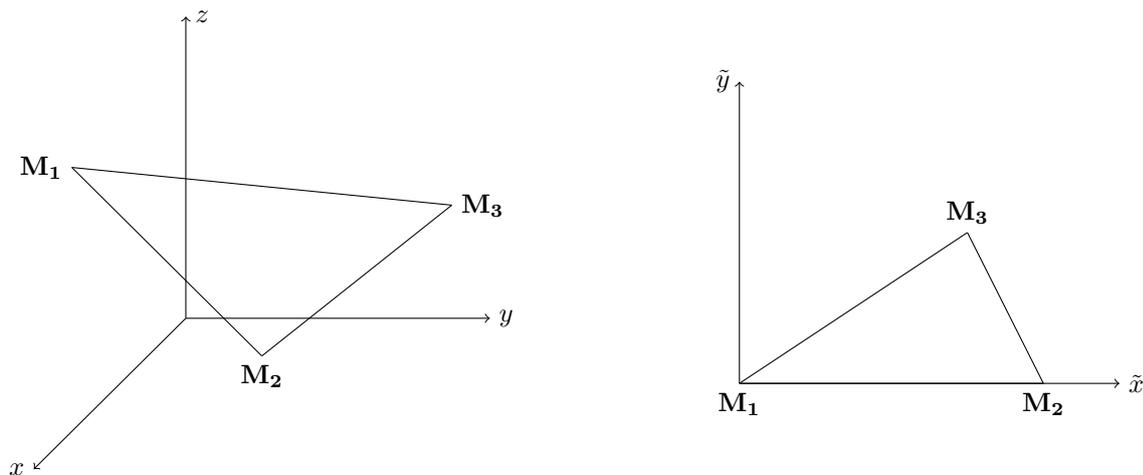


FIGURE 6.1 – Le triangle  $K$  dans le système de coordonnées locales

Dans cette sous-section, nous aurons également besoin du plan vectoriel parallèle à  $\mathcal{P}_A$ , noté  $\mathcal{P}_V$  et défini explicitement ci-dessous :

$$\mathcal{P}_V = \text{Span}(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2).$$

Remarquons que si  $\mathcal{P}_A$  est un plan vectoriel, il coïncide avec  $\mathcal{P}_V$  :

$$\mathcal{P}_A = \mathcal{P}_V.$$

Les plans  $\mathcal{P}_A$  et  $\mathcal{P}_V$  peuvent naturellement être identifiés à  $\mathbb{R}^2$  grâce aux bijections suivantes :

$$\tau_A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{P}_A \quad , \quad \tau_V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{P}_V \\ (\tilde{x}; \tilde{y}) \mapsto \mathbf{M}_1 + \tilde{x}\tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{y}\tilde{\mathbf{e}}_2 \quad , \quad (\tilde{x}; \tilde{y}) \mapsto \tilde{x}\tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{y}\tilde{\mathbf{e}}_2 .$$

De même,  $K$  correspond à un triangle, noté  $\tilde{K}$ , dans  $\mathbb{R}^2$  :

$$\tilde{K} = \tau_A^{-1}(K),$$

dont les sommets  $\tilde{\mathbf{M}}_1$ ,  $\tilde{\mathbf{M}}_2$  et  $\tilde{\mathbf{M}}_3$  sont précisés ci-dessous :

$$\tilde{\mathbf{M}}_1 = \tau_A^{-1}(\mathbf{M}_1) = (\tilde{x}_1; \tilde{y}_1) \quad , \quad \tilde{\mathbf{M}}_2 = \tau_A^{-1}(\mathbf{M}_2) = (\tilde{x}_2; \tilde{y}_2) \quad , \quad \tilde{\mathbf{M}}_3 = \tau_A^{-1}(\mathbf{M}_3) = (\tilde{x}_3; \tilde{y}_3).$$

Pour définir les éléments finis  $RT_0$  élémentaires sur  $K$ , nous utilisons ceux sur  $\tilde{K}$  comme intermédiaires. Ces derniers sont notés  $(\mathbf{e}_{\tilde{K}}^1)_{i \in \{1; \dots; 3\}}$  et définis par :

$$\forall i \in \{1; 2; 3\}, \quad \mathbf{e}_{\tilde{K}}^i = \frac{1}{\det(D\phi)} D\phi \mathbf{e}_{K_r}^i \circ \phi^{-1},$$

la fonction  $\phi$  désignant le pull-back entre  $K_r$  et  $\tilde{K}$  :

$$\forall (\xi; \eta) \in K_r, \quad \phi(\xi; \eta) = \begin{pmatrix} \tilde{x}_2 & \tilde{x}_3 \\ \tilde{y}_2 & \tilde{y}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}.$$

Etant donné que la jacobienne de  $\phi$ , notée  $D\phi$ , vérifie :

$$\det(D\phi) = 2|K|,$$

nous obtenons sans difficulté les relations suivantes :

$$\mathbf{e}_{\tilde{K}}^1 = \frac{1}{2|K|} \begin{pmatrix} \tilde{x} - \tilde{x}_3 \\ \tilde{y} - \tilde{y}_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_{\tilde{K}}^2 = \frac{1}{2|K|} \begin{pmatrix} \tilde{x} - \tilde{x}_1 \\ \tilde{y} - \tilde{y}_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_{\tilde{K}}^3 = \frac{1}{2|K|} \begin{pmatrix} \tilde{x} - \tilde{x}_2 \\ \tilde{y} - \tilde{y}_2 \end{pmatrix}.$$

Finalement, les éléments finis  $RT_0$  élémentaires sur  $K$ , à savoir  $\mathbf{e}_K^1$ ,  $\mathbf{e}_K^2$  et  $\mathbf{e}_K^3$ , sont définis par :

$$\forall i \in \{1; 2; 3\}, \quad \mathbf{e}_K^i = \tau_{\mathcal{V}} \circ e_{\tilde{K}}^i \circ \tau_{\mathcal{A}}^{-1},$$

et s'expriment plus simplement comme suit :

$$\mathbf{e}_K^1 = \frac{1}{2|K|}(\mathbf{x} - \mathbf{M}_3) \quad , \quad \mathbf{e}_K^2 = \frac{1}{2|K|}(\mathbf{x} - \mathbf{M}_1) \quad , \quad \mathbf{e}_K^3 = \frac{1}{2|K|}(\mathbf{x} - \mathbf{M}_2).$$

Les éléments finis  $RT_0$  globaux sont notés  $(\mathbf{e}_i)_{i \in \{1; \dots; N_a^2\}}$  et sont associés aux arêtes du maillage. Si  $i \in \{1; \dots; N_a^2\}$ , la fonction  $\mathbf{e}_i$  est supportée par les deux triangles adjacents à l'arête d'indice  $i$  du maillage. Restreinte à un de ces triangles, elle coïncide, au signe près, à l'élément fini  $RT_0$  élémentaire associé à ce triangle dont le flux à travers l'arête d'indice  $i$  du maillage vaut 1. Ceci peut s'exprimer plus explicitement comme suit. L'arête d'indice  $i \in \{1; \dots; N_a^2\}$  du maillage correspond à l'arête d'indice  $k \in \{1; 2; 3\}$  d'un premier triangle  $K$  et à celle d'indice  $l \in \{1; 2; 3\}$  d'un second triangle  $L$ . Nous avons alors :

$$\mathbf{e}_i = \epsilon_{K,k} \mathbf{e}_K^k + \epsilon_{L,l} \mathbf{e}_L^l,$$

où  $\epsilon_{K,k} \epsilon_{L,l} < 0$  et  $(\epsilon_{K,k})$  est une table de signes. Il s'ensuit en particulier que les éléments finis  $RT_0$  globaux sont des fonctions dont la composante normale est continue à travers les arêtes du maillage. Pour finir, il est intéressant de remarquer que si  $\mathbf{u}$  est une combinaison linéaire d'éléments finis  $RT_0$  globaux :

$$\mathbf{u} = \sum_{j=1}^{N_a^2} u_j \mathbf{e}_j,$$

si  $A$  est l'arête d'indice  $i \in \{1; \dots; N_a^2\}$  du maillage et si  $K$  est un triangle dont l'arête d'indice  $k \in \{1; 2; 3\}$  coïncide avec  $A$ , nous avons :

$$u_i = \epsilon_{K,k} \int_A \mathbf{u}|_K \cdot \mathbf{n}_A \, dA,$$

le vecteur  $\mathbf{n}_A$  correspondant à la normale unitaire sortante du triangle  $K$  sur l'arête  $A$ .

Maintenant que nous avons introduit les éléments finis  $RT_0$ , nous définissons ci-dessous des matrices variationnelles qui leur sont associées et dont nous avons besoin dans ce travail :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_{\Gamma} &= \left( \int_{\Gamma} (\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{n}) \cdot \mathbf{e}_j \, d\Gamma \right)_{i,j \in \{1; \dots; N_a^2\}}, & \mathbb{I}_{\Gamma} &= \left( \int_{\Gamma} \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j \, d\Gamma \right)_{i,j \in \{1; \dots; N_a^2\}}, \\ \mathbb{M}_{\Gamma, P_2 \times RT_0} &= \left( \int_{\Gamma} \nabla_{\Gamma} e_i \cdot \mathbf{e}_j \, d\Gamma \right)_{\substack{i \in \{1; \dots; N_s^2 + N_a^2\} \\ j \in \{1; \dots; N_a^2\}}}, & \mathbb{L}_{\Gamma, P_2 \times RT_0} &= \left( \int_{\Gamma} \nabla_{\Gamma} e_i \cdot (\mathbf{e}_j \wedge \mathbf{n}) \, d\Gamma \right)_{\substack{i \in \{1; \dots; N_s^2 + N_a^2\} \\ j \in \{1; \dots; N_a^2\}}}, \\ \mathbb{M}_{\Gamma, P_2^0 \times RT_0} &= \left( \int_{\Gamma} \nabla_{\Gamma} e_i^0 \cdot \mathbf{e}_j \, d\Gamma \right)_{\substack{i \in \{1; \dots; N_s^2 + N_a^2 - 1\} \\ j \in \{1; \dots; N_a^2\}}}, & \mathbb{L}_{\Gamma, P_2^0 \times RT_0} &= \left( \int_{\Gamma} \nabla_{\Gamma} e_i^0 \cdot (\mathbf{e}_j \wedge \mathbf{n}) \, d\Gamma \right)_{\substack{i \in \{1; \dots; N_s^2 + N_a^2 - 1\} \\ j \in \{1; \dots; N_a^2\}}}, \\ \mathbb{T}_k &= \left( \langle \mathbf{T}_k \mathbf{e}_i; \mathbf{e}_j \rangle \right)_{i,j \in \{1; \dots; N_a^2\}}, & \mathbb{K}_k &= \left( \langle \mathbf{K}_k \mathbf{e}_i; \mathbf{e}_j \rangle \right)_{i,j \in \{1; \dots; N_a^2\}}. \end{aligned}$$

Le réel  $k$  intervenant dans la définition des matrices  $\mathbb{T}_k$  et  $\mathbb{K}_k$  est ici supposé strictement positif. Remarquons que les matrices  $\mathbb{M}_{\Gamma, P_2^0 \times RT_0}$  et  $\mathbb{L}_{\Gamma, P_2^0 \times RT_0}$  peuvent être calculées à partir des matrices  $\mathbb{M}_{\Gamma, P_2 \times RT_0}$  et  $\mathbb{L}_{\Gamma, P_2 \times RT_0}$  (voir Proposition 6.1) :

$$\mathbb{M}_{\Gamma, P_2^0 \times RT_0} = \mathbb{P}_{\Gamma, P_2^0 \rightarrow P_2}^t \mathbb{M}_{\Gamma, P_2 \times RT_0} \quad , \quad \mathbb{L}_{\Gamma, P_2^0 \times RT_0} = \mathbb{P}_{\Gamma, P_2^0 \rightarrow P_2}^t \mathbb{L}_{\Gamma, P_2 \times RT_0}.$$

Il est par ailleurs aisé de vérifier que la matrice  $\mathbb{I}_{\Gamma}$  est symétrique et que la matrice  $\mathbb{R}_{\Gamma}$  est antisymétrique :

$$\mathbb{I}_{\Gamma}^t = \mathbb{I}_{\Gamma} \quad , \quad \mathbb{R}_{\Gamma}^t = -\mathbb{R}_{\Gamma}.$$

Il se trouve que les matrices  $\mathbb{T}_k$  et  $\mathbb{K}_k$  sont également symétriques :

$$\mathbb{T}_k^t = \mathbb{T}_k \quad , \quad \mathbb{K}_k^t = \mathbb{K}_k.$$

Ce résultat est toutefois moins immédiat et il est justifié par les relations données dans la prochaine proposition. Notons que ces relations sont également utiles pour assembler les matrices  $\mathbb{T}_k$  et  $\mathbb{K}_k$  en pratique.

**Proposition 6.2** (Calcul des matrices variationnelles des opérateurs intégraux surfaciques).

Si  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  sont des éléments suffisamment réguliers de  $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$ , nous avons :

$$\begin{aligned} \langle \mathbb{T}_k \mathbf{u}; \mathbf{v} \rangle &= \int_\Gamma (\mathbb{T}_k \mathbf{u}) \wedge \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \\ &= - \int_{\Gamma \times \Gamma} G_k(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mathbf{u}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, dy dx + \frac{1}{k^2} \int_{\Gamma \times \Gamma} G_k(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \text{div}_\Gamma \mathbf{u}(\mathbf{y}) \text{div}_\Gamma \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, dy dx, \\ \langle \mathbb{K}_k \mathbf{u}; \mathbf{v} \rangle &= \int_\Gamma (\mathbb{K}_k \mathbf{u}) \wedge \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \\ &= - \int_{\Gamma \times \Gamma} \nabla_{\mathbf{y}} G_k(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \wedge \mathbf{u}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, dy dx. \end{aligned}$$

Nous apportons à présent quelques précisions concernant l'assemblage des matrices variationnelles que nous venons d'introduire. En pratique, ces dernières sont naturellement calculées à partir de leurs matrices élémentaires. Par exemple, les coefficients des matrices  $\mathbb{I}_\Gamma$ ,  $\mathbb{L}_{\Gamma, P_2 \times RT_0}$  et  $\mathbb{K}_k$  sont donnés par :

$$\begin{aligned} \int_\Gamma \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j \, d\Gamma &= \sum_{\substack{n_{K,k}^a = i \\ n_{K,l}^a = j}} \epsilon_{K,k} \epsilon_{K,l} \int_K \mathbf{e}_K^k \cdot \mathbf{e}_K^l \, dK, \\ \int_\Gamma \nabla_\Gamma \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{e}_j \wedge \mathbf{n}) \, d\Gamma &= \sum_{\substack{n_{K,k}^a = i \\ n_{K,l}^a = j}} \epsilon_{K,l} \int_K \nabla_\Gamma \mathbf{e}_K^k \cdot (\mathbf{e}_K^l \wedge \mathbf{n}) \, dK, \\ \int_\Gamma (\mathbb{K}_k \mathbf{e}_i) \wedge \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_j \, d\Gamma &= - \sum_{\substack{n_{K,k}^a = i \\ n_{L,l}^a = j}} \epsilon_{K,k} \epsilon_{L,l} \int_L \int_K \nabla_{\mathbf{y}} G_k(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \wedge \mathbf{e}_K^k(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{e}_L^l(\mathbf{x}) \, dy dx, \end{aligned}$$

la table  $(n_{K,k})$  ayant été définie dans la sous-section 3.1.1 :

$$n_{K,i} = \mathbf{1}_{1 \leq i \leq 3} n_{K,i}^s + \mathbf{1}_{4 \leq i \leq 6} (n_{K,i-3}^a + N_s^2).$$

Il apparaît donc que les signes des coefficients des matrices élémentaires doivent être corrigés avant d'assembler les matrices élémentaires dans les matrices globales. Par exemple, les matrices élémentaires des matrices  $\mathbb{I}_\Gamma$ ,  $\mathbb{L}_{\Gamma, P_2 \times RT_0}$  et  $\mathbb{K}_k$  sont respectivement données, après correction des signes de leurs coefficients, par :

$$\begin{aligned} D_K \left( \int_K \mathbf{e}_K^k \cdot \mathbf{e}_K^l \, dK \right)_{k,l \in \{1,2,3\}} \quad D_K \quad , \quad \left( \int_K \nabla_\Gamma \mathbf{e}_K^k \cdot \mathbf{e}_K^l \wedge \mathbf{n} \, dK \right)_{\substack{k \in \{1, \dots, 6\} \\ l \in \{1,2,3\}}} \quad D_K, \\ D_K \left( - \int_L \int_K \nabla_{\mathbf{y}} G_k(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \wedge \mathbf{e}_K^k(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{e}_L^l(\mathbf{x}) \, dy dx \right)_{k,l \in \{1,2,3\}} \quad D_L, \end{aligned}$$

la matrice  $D_K$  étant définie ci-dessous :

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{K,1} & & (0) \\ & \epsilon_{K,2} & \\ (0) & & \epsilon_{K,3} \end{pmatrix}.$$

Comme dans la partie sur l'acoustique, les matrices élémentaires sont calculées en réécivant, grâce au pull-back, les intégrations sur  $K$  comme des intégrations sur  $K_r$ . Pour ce faire, la prochaine proposition peut se révéler particulièrement utile.

**Proposition 6.3** (Un résultat d'invariance par pull-back).

Soit  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  deux fonctions définies sur  $K$  et à valeurs dans  $\mathcal{P}_V$ . En définissant  $\hat{\mathbf{u}}$  et  $\hat{\mathbf{v}}$  sur  $K_r$  par :

$$\hat{\mathbf{u}} = D\phi^t \tau_V^{-1} \circ \mathbf{u} \circ \tau_A \circ \phi \quad , \quad \hat{\mathbf{v}} = D\phi^t \tau_V^{-1} \circ \mathbf{v} \circ \tau_A \circ \phi,$$

nous avons :

$$\int_K (\mathbf{u} \wedge \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} dK = \int_{K_r} (\hat{\mathbf{u}} \wedge \mathbf{n}) \cdot \hat{\mathbf{v}} dK_r.$$

### Preuve

Il suffit en effet de remarquer que :

$$\begin{aligned} \int_{K_r} (\hat{\mathbf{u}} \wedge \mathbf{n}) \cdot \hat{\mathbf{v}} dK_r &= \frac{1}{\det(D\phi)} \int_{\tilde{K}} D\phi \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} D\phi^t \tau_{\mathcal{V}}^{-1} \circ \mathbf{u} \circ \tau_{\mathcal{A}} \cdot \tau_{\mathcal{V}}^{-1} \circ \mathbf{v} \circ \tau_{\mathcal{A}} d\tilde{K} \\ &= \int_{\tilde{K}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tau_{\mathcal{V}}^{-1} \circ \mathbf{u} \circ \tau_{\mathcal{A}} \cdot \tau_{\mathcal{V}}^{-1} \circ \mathbf{v} \circ \tau_{\mathcal{A}} d\tilde{K} \\ &= \int_K \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tau_{\mathcal{V}}^{-1} \circ \mathbf{u} \cdot \tau_{\mathcal{V}}^{-1} \circ \mathbf{v} dK \\ &= \int_K (\mathbf{u} \wedge \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} dK. \end{aligned}$$

■

Pour finir, nous mentionnons que le calcul des matrices variationnelles des opérateurs intégraux surfaciques est une tâche difficile et ceci pour les mêmes raisons qu'en acoustique. Dans ce travail, ces matrices ont été assemblées grâce à des codes développés par Thales.

## 6.2 Le couplage fort BEM-BEM

Le couplage fort BEM-BEM (6.2) se discrétise de la même manière que son homologue acoustique. En approximant l'espace  $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$  comme indiqué ci-dessous :

$$\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma) \approx \text{Span}(\mathbf{e}_i : i \in \{1; \dots; N_a^2\}),$$

sa formulation variationnelle :

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma), \quad & \langle (ik_- Z_- \mathbf{T}_{k_-} + ik_+ Z_+ \mathbf{T}_{k_+}) \gamma_t^- \mathbf{H}; \mathbf{v} \rangle - \langle (\mathbf{K}_{k_-} + \mathbf{K}_{k_+}) \gamma_t^- \mathbf{E}; \mathbf{v} \rangle = \langle \gamma_t^+ \mathbf{E}_{\text{inc}}; \mathbf{v} \rangle, \\ \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma), \quad & - \langle (ik_- Z_-^{-1} \mathbf{T}_{k_-} + ik_+ Z_+^{-1} \mathbf{T}_{k_+}) \gamma_t^- \mathbf{E}; \mathbf{v} \rangle - \langle (\mathbf{K}_{k_-} + \mathbf{K}_{k_+}) \gamma_t^- \mathbf{H}; \mathbf{v} \rangle = \langle \gamma_t^+ \mathbf{H}_{\text{inc}}; \mathbf{v} \rangle, \end{aligned}$$

se réécrit comme suit :

$$\begin{aligned} \forall j \in \{1; \dots; N_a^2\}, \quad & \langle (ik_- Z_- \mathbf{T}_{k_-} + ik_+ Z_+ \mathbf{T}_{k_+}) \gamma_t^- \mathbf{H}; \mathbf{e}_j \rangle - \langle (\mathbf{K}_{k_-} + \mathbf{K}_{k_+}) \gamma_t^- \mathbf{E}; \mathbf{e}_j \rangle = \langle \gamma_t^+ \mathbf{E}_{\text{inc}}; \mathbf{e}_j \rangle, \\ \forall j \in \{1; \dots; N_a^2\}, \quad & - \langle (ik_- Z_-^{-1} \mathbf{T}_{k_-} + ik_+ Z_+^{-1} \mathbf{T}_{k_+}) \gamma_t^- \mathbf{E}; \mathbf{e}_j \rangle - \langle (\mathbf{K}_{k_-} + \mathbf{K}_{k_+}) \gamma_t^- \mathbf{H}; \mathbf{e}_j \rangle = \langle \gamma_t^+ \mathbf{H}_{\text{inc}}; \mathbf{e}_j \rangle. \end{aligned}$$

La version matricielle de cette formulation variationnelle discrète est donnée dans la prochaine proposition.

**Proposition 6.4** (Discrétisation du couplage fort BEM-BEM).

La formulation variationnelle discrète du couplage fort BEM-BEM (6.2) s'écrit, de manière condensée, comme suit :

$$\begin{pmatrix} -(ik_- \frac{Z_-}{Z_-} \mathbb{T}_{k_-} + ik_+ \mathbb{T}_{k_+}) & -(\mathbb{K}_{k_-} + \mathbb{K}_{k_+}) \\ -(\mathbb{K}_{k_-} + \mathbb{K}_{k_+}) & ik_- \frac{Z_-}{Z_+} \mathbb{T}_{k_-} + ik_+ \mathbb{T}_{k_+} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_+^{-1} \{\gamma_t^- \mathbf{E}\} \\ \{\gamma_t^- \mathbf{H}\} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \mathbb{R}_\Gamma \{\gamma_t^+ \mathbf{H}_{\text{inc}}\} \\ Z_+^{-1} \mathbb{R}_\Gamma \{\gamma_t^+ \mathbf{E}_{\text{inc}}\} \end{pmatrix}.$$

## 6.3 Le couplage faible : une première approche

La discrétisation du couplage faible BEM-BEM électromagnétique est significativement plus complexe que celle du couplage faible BEM-BEM acoustique. Ceci est dû au fait que les inconnues  $\mathbf{g}_-$  et  $\mathbf{g}_+$  du couplage faible BEM-BEM électromagnétique sont vectorielles alors que celles du couplage faible BEM-BEM acoustique sont scalaires. La principale difficulté lors de la discrétisation du couplage faible BEM-BEM électromagnétique consiste à bien choisir la manière de représenter  $\mathbf{g}_-$  et  $\mathbf{g}_+$  au niveau discret. Si les opérateurs de transmission sont, comme les opérateurs MtE, définis et à valeurs dans  $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$  :

$$\mathbf{T}_- : \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma) \rightarrow \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma) \quad , \quad \mathbf{T}_+ : \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma) \rightarrow \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma), \quad (6.4)$$

il est naturel d'utiliser les éléments finis  $RT_0$  pour discrétiser  $\mathbf{g}_-$  et  $\mathbf{g}_+$ . En effet, les inconnues du couplage faible BEM-BEM électromagnétique, dont les expressions sont rappelées ci-dessous :

$$\mathbf{g}_- = \gamma_t^- \mathbf{H} + \mathbf{T}_- \gamma_t^- \mathbf{E} \quad , \quad \mathbf{g}_+ = \gamma_t^+ \mathbf{H} - \mathbf{T}_+ \gamma_t^+ \mathbf{E},$$

appartiennent alors à  $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$  et les éléments finis  $RT_0$  sont adaptés à cet espace.

Dans cette section, nous nous intéressons au cas où les opérateurs de transmission correspondent aux approximations d'ordre 0 des opérateurs de transmission optimaux pour le couplage faible BEM-BEM électromagnétique :

$$\mathbf{T}_- = -\mathbf{\Lambda}_{+,k_+,Z_+}^0 = \frac{1}{Z_+}(\cdot \wedge \mathbf{n}) \quad , \quad \mathbf{T}_+ = \mathbf{\Lambda}_{-,k_-,Z_-}^0 = \frac{1}{Z_-}(\cdot \wedge \mathbf{n}).$$

Ces opérateurs de transmission sont les plus simples qui soient. Ils ne satisfont toutefois pas l'hypothèse (6.4) puisque nous avons :

$$\mathbf{\Lambda}_{-,k_-,Z_-}^0 : \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma) \rightarrow \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}_\Gamma, \Gamma) \quad , \quad \mathbf{\Lambda}_{+,k_+,Z_+}^0 : \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma) \rightarrow \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}_\Gamma, \Gamma).$$

Du point de vue de l'analyse fonctionnelle, l'approche consistant à utiliser les éléments finis  $RT_0$  pour discrétiser les inconnues du couplage faible BEM-BEM électromagnétique est alors litigieuse. En effet,  $\mathbf{g}_-$  et  $\mathbf{g}_+$  n'appartiennent pas à l'espace  $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$  mais à la somme suivante :

$$\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma) + \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}_\Gamma, \Gamma). \quad (6.5)$$

En termes de régularité, cette somme est un espace hybride. Ceci soulève par conséquent un certain nombre de problèmes. Les éléments finis  $RT_0$  et  $RT_0 \wedge \mathbf{n}$  ne sont par exemple pas adaptés à l'espace (6.5). En effet, les éléments finis  $RT_0$  permettent d'approximer l'espace  $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$  mais pas l'espace  $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}_\Gamma, \Gamma)$ . De même, en vertu de la relation :

$$\text{rot}_\Gamma = \text{div}_\Gamma(\cdot \wedge \mathbf{n}),$$

les éléments finis  $RT_0 \wedge \mathbf{n}$  sont adaptés à l'espace  $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}_\Gamma, \Gamma)$  mais pas à l'espace  $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$ . Remarquons également que la somme (6.5) n'est pas directe puisque les fonctions  $\mathcal{C}^\infty(\Gamma)$ , par exemple, sont à la fois contenues dans  $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$  et dans  $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}_\Gamma, \Gamma)$ . Il n'est donc pas possible de dissocier, car elles ne sont pas bien définies, les parties  $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$  et  $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}_\Gamma, \Gamma)$  d'un élément de l'espace (6.5) dans l'optique de les discrétiser séparément par le biais des éléments finis  $RT_0$  et  $RT_0 \wedge \mathbf{n}$  respectivement. En dépit des contre-indications que nous venons d'évoquer, nous choisissons tout de même de représenter  $\mathbf{g}_-$  et  $\mathbf{g}_+$  au niveau discret par les éléments finis  $RT_0$ . Ceci revient alors implicitement à projeter  $\gamma_t^- \mathbf{E} \wedge \mathbf{n}$  et  $\gamma_t^+ \mathbf{E} \wedge \mathbf{n}$ , qui sont des éléments de  $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}_\Gamma, \Gamma)$ , sur  $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$ .

Au niveau discret, il est alors nécessaire que l'opérateur  $\mathbf{Id} - \mathbf{S}_\pi$ , dont la définition est rappelée ci-dessous :

$$\mathbf{Id} - \mathbf{S}_\pi : \begin{pmatrix} \mathbf{g}_- \\ \mathbf{g}_+ \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \mathbf{g}_- - \mathbf{g}_+ - (\mathbf{T}_- + \mathbf{T}_+) \mathbf{R}_+ \mathbf{g}_+ \\ \mathbf{g}_+ - \mathbf{g}_- + (\mathbf{T}_- + \mathbf{T}_+) \mathbf{R}_- \mathbf{g}_- \end{pmatrix},$$

vérifie :

$$\mathbf{Id} - \mathbf{S}_\pi : [\text{Span}(\mathbf{e}_i : i \in \{1; \dots; N_a^2\})]^2 \rightarrow [\text{Span}(\mathbf{e}_i : i \in \{1; \dots; N_a^2\})]^2. \quad (6.6)$$

Etant donné que les formulations intégrales permettant de résoudre les sous-problèmes associés au couplage faible BEM-BEM électromagnétique sont discrétisées *via* les éléments finis  $RT_0$ , les versions discrètes des opérateurs de résolution sont telles que :

$$\mathbf{R}_\pm : \text{Span}(\mathbf{e}_i : i \in \{1; \dots; N_a^2\}) \rightarrow \text{Span}(\mathbf{e}_i : i \in \{1; \dots; N_a^2\}).$$

Les opérateurs de transmission discrets doivent donc satisfaire :

$$\mathbf{T}_\pm : \text{Span}(\mathbf{e}_i : i \in \{1; \dots; N_a^2\}) \rightarrow \text{Span}(\mathbf{e}_i : i \in \{1; \dots; N_a^2\}),$$

pour que la condition (6.6) soit vérifiée. Les opérateurs de transmission continus étant égaux, à une constante multiplicative près, à l'opérateur  $\cdot \wedge \mathbf{n}$ , leurs équivalents discrets vérifient toutefois naturellement :

$$\mathbf{T}_\pm : \text{Span}(\mathbf{e}_i : i \in \{1; \dots; N_a^2\}) \rightarrow \text{Span}(\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{n} : i \in \{1; \dots; N_a^2\}).$$

La difficulté ici consiste donc à construire une forme discrète de l'opérateur  $\cdot \wedge \mathbf{n}$  satisfaisant :

$$\cdot \wedge \mathbf{n} : \text{Span}(\mathbf{e}_i : i \in \{1; \dots; N_a^2\}) \rightarrow \text{Span}(\mathbf{e}_i : i \in \{1; \dots; N_a^2\}).$$

Une telle discrétisation de l'opérateur  $\cdot \wedge \mathbf{n}$  peut être obtenue très naturellement par projection  $\mathbf{L}_t^2(\Gamma)$  de l'espace des éléments finis  $RT_0 \wedge \mathbf{n}$  sur celui des éléments finis  $RT_0$ . Plus précisément, si  $\mathbf{u} \in \text{Span}(\mathbf{e}_i : i \in \{1; \dots; N_a^2\})$ , nous représentons  $\mathbf{u} \wedge \mathbf{n} \in \text{Span}(\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{n} : i \in \{1; \dots; N_a^2\})$  dans  $\text{Span}(\mathbf{e}_i : i \in \{1; \dots; N_a^2\})$  par l'élément  $\mathbf{v}$  de  $\text{Span}(\mathbf{e}_i : i \in \{1; \dots; N_a^2\})$  vérifiant :

$$\forall j \in \{1; \dots; N_a^2\}, \quad \int_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_j \, d\Gamma = \int_{\Gamma} (\mathbf{u} \wedge \mathbf{n}) \cdot \mathbf{e}_j \, d\Gamma,$$

ou, de manière équivalente :

$$\mathbb{I}_{\Gamma}\{\mathbf{v}\} = -\mathbb{R}_{\Gamma}\{\mathbf{u}\}.$$

In fine, nous aboutissons à la discrétisation suivante de l'opérateur  $\cdot \wedge \mathbf{n}$  :

$$\cdot \wedge \mathbf{n} = -\mathbb{I}_{\Gamma}^{-1} \mathbb{R}_{\Gamma}.$$

Pour implémenter le couplage faible BEM-BEM électromagnétique, il nous reste à préciser comment discrétiser les formulations intégrales :

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \mathbf{T}_{-}^{-1} \gamma_t^{-} \mathbf{H} - \mathbf{K}_{k_{-}} \gamma_t^{-} \mathbf{E} + ik_{-} Z_{-} \mathbf{T}_{k_{-}} \gamma_t^{-} \mathbf{H} = \frac{1}{2} \mathbf{T}_{-}^{-1} \mathbf{g} \\ \frac{1}{2} \mathbf{T}_{-} \gamma_t^{-} \mathbf{E} - \mathbf{K}_{k_{-}} \gamma_t^{-} \mathbf{H} - ik_{-} Z_{-}^{-1} \mathbf{T}_{k_{-}} \gamma_t^{-} \mathbf{E} = \frac{1}{2} \mathbf{g} \end{cases}, \quad (6.7)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \mathbf{T}_{+}^{-1} \gamma_t^{+} \mathbf{H} - \mathbf{K}_{k_{+}} \gamma_t^{+} \mathbf{E} + ik_{+} Z_{+} \mathbf{T}_{k_{+}} \gamma_t^{+} \mathbf{H} = \frac{1}{2} \mathbf{T}_{+}^{-1} \mathbf{g} \\ \frac{1}{2} \mathbf{T}_{+} \gamma_t^{+} \mathbf{E} - \mathbf{K}_{k_{+}} \gamma_t^{+} \mathbf{H} - ik_{+} Z_{+}^{-1} \mathbf{T}_{k_{+}} \gamma_t^{+} \mathbf{E} = -\frac{1}{2} \mathbf{g} \end{cases}, \quad (6.8)$$

permettant respectivement de résoudre les sous-problèmes intérieur et extérieur qui lui sont associés. Comme pour la discrétisation du couplage fort BEM-BEM (6.2), l'espace  $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma}, \Gamma)$  est approché par l'espace des éléments finis  $RT_0$  :

$$\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma}, \Gamma) \approx \text{Span}(\mathbf{e}_i : i \in \{1; \dots; N_a^2\}).$$

Les formulations variationnelles discrètes des systèmes (6.7) et (6.8) s'écrivent alors respectivement comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \gamma_t^{-} \mathbf{H} \cdot \mathbf{e}_j \, d\Gamma - \int_{\Gamma} (\mathbf{K}_{k_{-}} Z_{+}^{-1} \gamma_t^{-} \mathbf{E}) \wedge \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_j \, d\Gamma + ik_{-} \frac{Z_{-}}{Z_{+}} \int_{\Gamma} (\mathbf{T}_{k_{-}} \gamma_t^{-} \mathbf{H}) \wedge \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_j \, d\Gamma &= \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \mathbf{g} \cdot \mathbf{e}_j \, d\Gamma, \\ \frac{1}{2} \int_{\Gamma} Z_{+}^{-1} \gamma_t^{-} \mathbf{E} \cdot \mathbf{e}_j \, d\Gamma + \int_{\Gamma} (\mathbf{K}_{k_{-}} \gamma_t^{-} \mathbf{H}) \wedge \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_j \, d\Gamma + ik_{-} \frac{Z_{+}}{Z_{-}} \int_{\Gamma} (\mathbf{T}_{k_{-}} Z_{+}^{-1} \gamma_t^{-} \mathbf{E}) \wedge \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_j \, d\Gamma &= -\frac{1}{2} \int_{\Gamma} \mathbf{g} \wedge \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_j \, d\Gamma, \\ \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \gamma_t^{+} \mathbf{H} \cdot \mathbf{e}_j \, d\Gamma - \int_{\Gamma} (\mathbf{K}_{k_{+}} Z_{-}^{-1} \gamma_t^{+} \mathbf{E}) \wedge \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_j \, d\Gamma + ik_{+} \frac{Z_{+}}{Z_{-}} \int_{\Gamma} (\mathbf{T}_{k_{+}} \gamma_t^{+} \mathbf{H}) \wedge \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_j \, d\Gamma &= \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \mathbf{g} \cdot \mathbf{e}_j \, d\Gamma, \\ \frac{1}{2} \int_{\Gamma} Z_{-}^{-1} \gamma_t^{+} \mathbf{E} \cdot \mathbf{e}_j \, d\Gamma + \int_{\Gamma} (\mathbf{K}_{k_{+}} \gamma_t^{+} \mathbf{H}) \wedge \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_j \, d\Gamma + ik_{+} \frac{Z_{-}}{Z_{+}} \int_{\Gamma} (\mathbf{T}_{k_{+}} Z_{-}^{-1} \gamma_t^{+} \mathbf{E}) \wedge \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_j \, d\Gamma &= \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \mathbf{g} \wedge \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_j \, d\Gamma, \end{aligned}$$

l'entier  $j$  parcourant l'ensemble  $\{1; \dots; N_a^2\}$ . Pour finir, les formes matricielles de ces problèmes discrets sont données dans la prochaine proposition.

**Proposition 6.5** (Discrétisation des formulations initiales des sous-problèmes).

Les formulations variationnelles discrètes des formulations intégrales permettant de résoudre les sous-problèmes associés au couplage faible BEM-BEM électromagnétique s'écrivent, sous forme matricielle, comme indiqué ci-dessous :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \mathbb{I}_{\Gamma} + ik_{-} \frac{Z_{+}}{Z_{-}} \mathbb{T}_{k_{-}} & \mathbb{K}_{k_{-}} \\ -\mathbb{K}_{k_{-}} & \frac{1}{2} \mathbb{I}_{\Gamma} + ik_{-} \frac{Z_{-}}{Z_{+}} \mathbb{T}_{k_{-}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_{+}^{-1} \{\gamma_t^{-} \mathbf{E}\} \\ \{\gamma_t^{-} \mathbf{H}\} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbb{R}_{\Gamma} \{\mathbf{g}\} \\ \mathbb{I}_{\Gamma} \{\mathbf{g}\} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \mathbb{I}_{\Gamma} + ik_{+} \frac{Z_{-}}{Z_{+}} \mathbb{T}_{k_{+}} & \mathbb{K}_{k_{+}} \\ -\mathbb{K}_{k_{+}} & \frac{1}{2} \mathbb{I}_{\Gamma} + ik_{+} \frac{Z_{+}}{Z_{-}} \mathbb{T}_{k_{+}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_{-}^{-1} \{\gamma_t^{+} \mathbf{E}\} \\ \{\gamma_t^{+} \mathbf{H}\} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\mathbb{R}_{\Gamma} \{\mathbf{g}\} \\ \mathbb{I}_{\Gamma} \{\mathbf{g}\} \end{pmatrix}.$$

Tous les tests numériques présentés dans ce chapitre ont été effectués en supposant, comme dans le chapitre précédent, que :

$$\epsilon_{+} = \epsilon_0 \quad , \quad \mu_{+} = \mu_0 \quad , \quad \epsilon_{-} = 4\epsilon_0 \quad , \quad \mu_{-} = \mu_0.$$

Pour ces tests, la finesse des maillages est quantifiée grâce au nombre de points par longueur d'onde, noté  $n_\lambda$ . Plus précisément, le pas  $h$  des maillages est donné par :

$$h = \frac{1}{n_\lambda} \min(\lambda_-, \lambda_+) = \frac{\lambda_-}{n_\lambda}.$$

Le premier graphique de la Figure 6.2 correspond à l'historique de convergence GMRES du couplage faible BEM-BEM électromagnétique lorsque l'objet diffractant correspond à la sphère unité et :

$$k_+ = 5 \quad , \quad n_\lambda = 5 \quad , \quad \mathbf{T}_- = -\frac{1}{Z_+} \mathbb{I}_\Gamma^{-1} \mathbb{R}_\Gamma \quad , \quad \mathbf{T}_+ = -\frac{1}{Z_-} \mathbb{I}_\Gamma^{-1} \mathbb{R}_\Gamma.$$

Au-dessus de ce graphique, nous avons par ailleurs précisé les valeurs des erreurs relatives suivantes :

$$e_{\gamma_t^- \mathbf{E}} = \frac{\|\gamma_t^- \mathbf{E}_{\text{faible}} - \gamma_t^- \mathbf{E}_{\text{fort}}\|_{\mathbf{L}_t^2(\Gamma)}}{\|\gamma_t^- \mathbf{E}_{\text{fort}}\|_{\mathbf{L}_t^2(\Gamma)}} \quad , \quad e_{\gamma_t^- \mathbf{H}} = \frac{\|\gamma_t^- \mathbf{H}_{\text{faible}} - \gamma_t^- \mathbf{H}_{\text{fort}}\|_{\mathbf{L}_t^2(\Gamma)}}{\|\gamma_t^- \mathbf{H}_{\text{fort}}\|_{\mathbf{L}_t^2(\Gamma)}}.$$

Les notations  $(\gamma_t^- \mathbf{E}_{\text{faible}}; \gamma_t^- \mathbf{H}_{\text{faible}})$  et  $(\gamma_t^- \mathbf{E}_{\text{fort}}; \gamma_t^- \mathbf{H}_{\text{fort}})$  utilisées ci-dessus désignent les approximations de  $(\gamma_t^- \mathbf{E}; \gamma_t^- \mathbf{H})$ ,  $(\mathbf{E}; \mathbf{H})$  correspondant à la solution du problème de diffraction-transmission (6.1), respectivement fournies par les couplages BEM-BEM électromagnétiques faible et fort. Remarquons que les erreurs  $e_{\gamma_t^- \mathbf{E}}$  et  $e_{\gamma_t^- \mathbf{H}}$  se calculent simplement puisque :

$$\forall \mathbf{u} \in \text{Span}(\mathbf{e}_i : i \in \{1; \dots; N_a^2\}), \quad \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}_t^2(\Gamma)} = \sqrt{\langle \mathbb{I}_\Gamma \{\mathbf{u}\}; \{\mathbf{u}\} \rangle_{\mathcal{CN}_a^2}}.$$

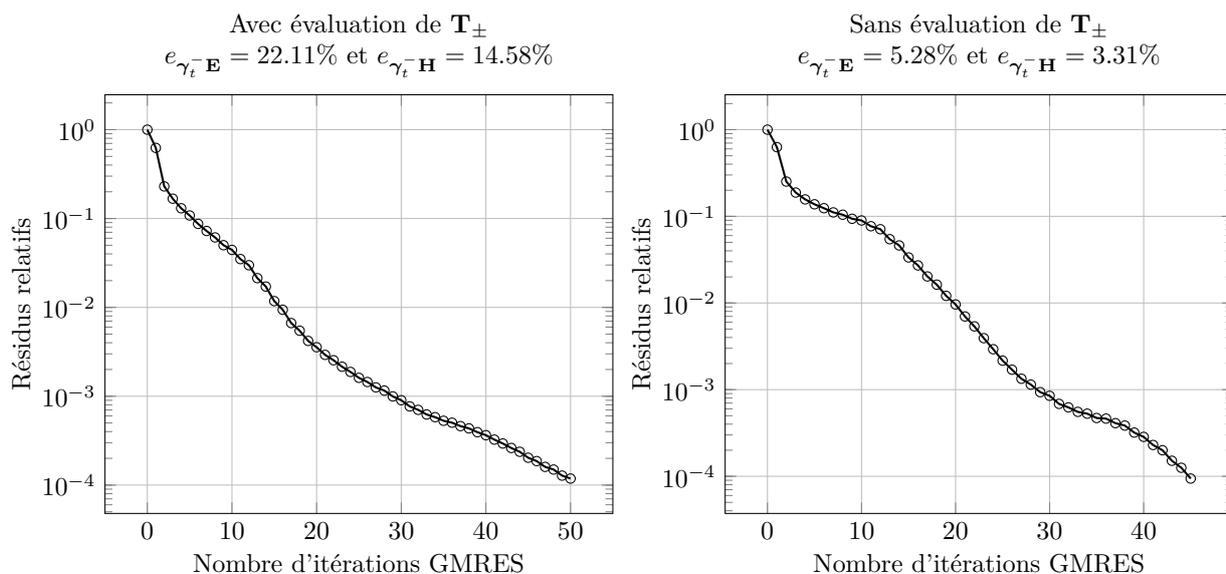


FIGURE 6.2 – Historiques de convergence GMRES du couplage faible BEM-BEM électromagnétique optimisé lorsque les opérateurs de transmission correspondent aux approximations d'ordre 0 des opérateurs de transmission optimaux et lorsque les inconnues  $\mathbf{g}_\pm$  sont représentées par les éléments finis  $RT_0$  ( $k_+ = 5$  et  $n_\lambda = 5$ )

Les courants électrique et magnétique calculés par le couplage faible BEM-BEM électromagnétique sont significativement différents de ceux calculés par le couplage fort BEM-BEM électromagnétique. Ceci vient de la discrétisation de l'opérateur  $\cdot \wedge \mathbf{n}$  que nous avons utilisée. D'une manière générale, une discrétisation de cet opérateur satisfaisant :

$$\cdot \wedge \mathbf{n} : \text{Span}(\mathbf{e}_i : i \in \{1; \dots; N_a^2\}) \rightarrow \text{Span}(\mathbf{e}_i : i \in \{1; \dots; N_a^2\}),$$

est nécessairement associée à une perte d'information puisqu'elle approxime les éléments de l'espace  $\text{Span}(\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{n} : i \in \{1; \dots; N_a^2\})$  par des éléments de l'espace  $\text{Span}(\mathbf{e}_i : i \in \{1; \dots; N_a^2\})$ . Pour illustrer ce propos, nous montrons à présent que le couplage faible BEM-BEM électromagnétique considéré dans cette section peut être implémenté sans qu'il soit nécessaire d'évaluer les opérateurs de transmission, et donc l'opérateur  $\cdot \wedge \mathbf{n}$ , et qu'il donne alors des résultats bien plus précis.

Commençons par rappeler que les opérateurs de résolution discrets sont définis comme suit :

$$\begin{aligned}\forall \mathbf{g} \in \text{Span}(\mathbf{e}_i : i \in \{1; \dots; N_a^2\}), \quad \mathbf{R}_- \mathbf{g} &= \gamma_t^- \mathbf{E}_-, \\ \forall \mathbf{g} \in \text{Span}(\mathbf{e}_i : i \in \{1; \dots; N_a^2\}), \quad \mathbf{R}_+ \mathbf{g} &= \gamma_t^+ \mathbf{E}_+, \end{aligned}$$

les champs  $(\mathbf{E}_-; \mathbf{H}_-) \in \mathbf{H}(\text{rot}, \Omega_-)^2$  et  $(\mathbf{E}_+; \mathbf{H}_+) \in \mathbf{H}_{\text{loc}}(\text{rot}, \overline{\Omega_+})^2$  satisfaisant :

$$\begin{cases} \text{rot } \mathbf{E}_- - ik_- Z_- \mathbf{H}_- = \mathbf{0} \\ \text{rot } \mathbf{H}_- + ik_- Z_-^{-1} \mathbf{E}_- = \mathbf{0} \end{cases} \text{ dans } \Omega_- \quad , \quad \begin{cases} \text{rot } \mathbf{E}_+ - ik_+ Z_+ \mathbf{H}_+ = \mathbf{0} \\ \text{rot } \mathbf{H}_+ + ik_+ Z_+^{-1} \mathbf{E}_+ = \mathbf{0} \end{cases} \text{ dans } \Omega_+,$$

$$\begin{aligned} \gamma_t^- \mathbf{H}_- + \mathbf{T}_- \gamma_t^- \mathbf{E}_- &= \mathbf{g} \quad , \quad \gamma_t^+ \mathbf{H}_+ - \mathbf{T}_+ \gamma_t^+ \mathbf{E}_+ = \mathbf{g}, \\ Z_+ \mathbf{H}_+ \wedge \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} - \mathbf{E}_+ &= \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right). \end{aligned}$$

Les opérateurs  $\mathbf{R}_-$  et  $\mathbf{R}_+$  renvoient donc la trace tangentielle d'un champ électrique. Il est bien sûr possible de définir des opérateurs similaires, notés  $\tilde{\mathbf{R}}_-$  et  $\tilde{\mathbf{R}}_+$ , renvoyant, cette fois, la trace tangentielle d'un champ magnétique :

$$\begin{aligned}\forall \mathbf{g} \in \text{Span}(\mathbf{e}_i : i \in \{1; \dots; N_a^2\}), \quad \tilde{\mathbf{R}}_- \mathbf{g} &= \gamma_t^- \mathbf{H}_-, \\ \forall \mathbf{g} \in \text{Span}(\mathbf{e}_i : i \in \{1; \dots; N_a^2\}), \quad \tilde{\mathbf{R}}_+ \mathbf{g} &= \gamma_t^+ \mathbf{H}_+. \end{aligned}$$

Nous disposons alors des relations suivantes :

$$\tilde{\mathbf{R}}_- + \mathbf{T}_- \mathbf{R}_- = \text{Id} \quad , \quad \tilde{\mathbf{R}}_+ - \mathbf{T}_+ \mathbf{R}_+ = \text{Id}.$$

Combinées au fait que :

$$\mathbf{T}_+ = \frac{Z_+}{Z_-} \mathbf{T}_-,$$

ces relations permettent d'obtenir une expression alternative de l'opérateur  $\text{Id} - \mathbf{S}_\pi$  :

$$\text{Id} - \mathbf{S}_\pi : \begin{pmatrix} \mathbf{g}_- \\ \mathbf{g}_+ \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \mathbf{g}_- + \frac{Z_-}{Z_+} \mathbf{g}_+ - \left(1 + \frac{Z_-}{Z_+}\right) \tilde{\mathbf{R}}_+ \mathbf{g}_+ \\ \mathbf{g}_+ + \frac{Z_+}{Z_-} \mathbf{g}_- - \left(1 + \frac{Z_+}{Z_-}\right) \tilde{\mathbf{R}}_- \mathbf{g}_- \end{pmatrix}. \quad (6.9)$$

Cette nouvelle expression de  $\text{Id} - \mathbf{S}_\pi$  est intéressante en cela qu'elle permet d'implémenter le couplage faible BEM-BEM électromagnétique en s'affranchissant des évaluations de l'opérateur  $\cdot \wedge \mathbf{n}$ . Le second graphique de la Figure 6.2 est l'analogie du premier à ceci près qu'il a été obtenu à partir d'une implémentation du couplage faible BEM-BEM électromagnétique basée sur l'expression (6.9) de l'opérateur  $\text{Id} - \mathbf{S}_\pi$ . Avec cette implémentation, les erreurs relatives  $e_{\gamma_t^- \mathbf{E}}$  et  $e_{\gamma_t^- \mathbf{H}}$  sont beaucoup plus faibles. Ceci confirme en particulier que la discrétisation :

$$\cdot \wedge \mathbf{n} = -\mathbb{I}_\Gamma^{-1} \mathbb{R}_\Gamma,$$

de l'opérateur  $\cdot \wedge \mathbf{n}$  n'est pas très précise. Notons toutefois que les deux historiques de convergence GMRES présentés dans la Figure 6.2 sont similaires.

Etant donné qu'elle a été obtenue à partir de la relation suivante :

$$\mathbf{T}_+ = \frac{Z_+}{Z_-} \mathbf{T}_-,$$

l'expression (6.9) de l'opérateur  $\text{Id} - \mathbf{S}_\pi$  ne peut pas être généralisée lorsque les opérateurs de transmission sont quelconques. Par conséquent, dans l'optique d'implémenter le couplage faible BEM-BEM électromagnétique pour les paires d'opérateurs de transmission suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_- &= -\Lambda_{+,k_+,Z_+}^{\text{sq}} \quad , \quad \mathbf{T}_+ = \Lambda_{-,k_-,Z_-}^0, \\ \mathbf{T}_- &= -\Lambda_{+,k_+,Z_+}^0 \quad , \quad \mathbf{T}_+ = \Lambda_{-,k_-,Z_-}^{\text{sq}}, \\ \mathbf{T}_- &= -\Lambda_{+,k_+,Z_+}^0 \quad , \quad \mathbf{T}_+ = \Lambda_{-,k_-,Z_-}^{\text{int}}, \end{aligned}$$

il est nécessaire de développer une méthode plus robuste permettant d'évaluer l'opérateur  $\cdot \wedge \mathbf{n}$ .

Nous terminons cette section en mentionnant que deux autres approches, à savoir les éléments finis de Buffa-Christiansen [4, 29] et la décomposition de Helmholtz proposée par Christiansen [35, 39], peuvent également être utilisées pour générer des discrétisations de  $\cdot \wedge \mathbf{n}$  satisfaisant :

$$\cdot \wedge \mathbf{n} : \text{Span}(\mathbf{e}_i : i \in \{1; \dots; N_a^2\}) \rightarrow \text{Span}(\mathbf{e}_i : i \in \{1; \dots; N_a^2\}).$$

Nous n'en dirons toutefois pas plus à ce sujet puisque nous cherchons à éviter ce genre de discrétisations pour les raisons déjà évoquées.

## 6.4 Le couplage faible *via* la décomposition de Helmholtz

Dans cette section, nous commençons par proposer une reformulation du couplage faible BEM-BEM électromagnétique basée sur la décomposition de Helmholtz. Nous expliquons ensuite comment implémenter le couplage faible BEM-BEM électromagnétique à partir de cette reformulation et ceci quelles que soient les approximations des opérateurs MtE utilisées comme opérateurs de transmission. Remarquons que si les opérateurs  $\mathbf{T}_\pm$  correspondent à des approximations de bas ordre des opérateurs MtE, la décomposition de Helmholtz permet de surmonter les difficultés que nous avons rencontrées dans la section précédente. Elle nous fournit plus précisément un moyen de discrétiser les inconnues du couplage faible BEM-BEM électromagnétique n'impliquant ni les éléments finis  $RT_0$  ni les éléments finis  $RT_0 \wedge \mathbf{n}$ . Ajouté à cela, elle simplifie grandement l'évaluation numérique de l'opérateur  $\cdot \wedge \mathbf{n}$ , cette dernière ne nécessitant alors plus de disposer de discrétisations du type :

$$\cdot \wedge \mathbf{n} : \text{Span}(\mathbf{e}_i : i \in \{1; \dots; N_a^2\}) \rightarrow \text{Span}(\mathbf{e}_i : i \in \{1; \dots; N_a^2\}).$$

### 6.4.1 Reformulation du couplage faible

Nous commençons par faire quelques rappels concernant la décomposition de Helmholtz sur les espaces  $\mathbf{H}_t^s(\Gamma)$ ,  $s \in \mathbb{R}$ . Dans cette optique, nous introduisons les espaces  $H^s(\Gamma)$  à moyenne nulle :

$$\begin{aligned} \forall s \geq 0, \quad H_0^s(\Gamma) &= \left\{ u \in H^s(\Gamma) : \int_{\Gamma} u \, d\Gamma = 0 \right\} \\ &= \left\{ u \in H^s(\Gamma) : \alpha_0 = 0 \quad \text{où} \quad u = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \alpha_\ell e_\ell \quad \text{dans } H^s(\Gamma) \right\}, \end{aligned}$$

ainsi que leurs homologues à exposant strictement négatif :

$$\begin{aligned} \forall s > 0, \quad H_0^{-s}(\Gamma) &= \left\{ u \in H^{-s}(\Gamma) : \langle u; 1 \rangle_{H^{-s}(\Gamma) \times H^s(\Gamma)} = 0 \right\} \\ &= \left\{ u \in H^{-s}(\Gamma) : \alpha_0 = 0 \quad \text{où} \quad u = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \alpha_\ell e_\ell \quad \text{dans } H^{-s}(\Gamma) \right\}. \end{aligned}$$

Nous rappelons également que le laplacien scalaire surfacique sur  $\Gamma$  est inversible si il est défini comme suit :

$$\Delta_\Gamma : H_0^{s+2}(\Gamma) \rightarrow H_0^s(\Gamma) \quad , \quad s \in \mathbb{R}.$$

**Proposition 6.6** (Décomposition de Helmholtz sur les espaces  $\mathbf{H}_t^s(\Gamma)$ ).

Si  $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_t^s(\Gamma)$ , il existe un unique couple  $(p; q) \in H_0^{s+1}(\Gamma) \times H_0^{s+1}(\Gamma)$  tel que :

$$\mathbf{u} = \nabla_\Gamma p + \text{rot}_\Gamma q \quad \text{dans } \mathbf{H}_t^s(\Gamma).$$

En outre, les potentiels  $p$  et  $q$  sont explicitement donnés par les relations suivantes :

$$\Delta_\Gamma p = \text{div}_\Gamma \mathbf{u} \quad \text{dans } H_0^{s-1}(\Gamma) \quad , \quad -\Delta_\Gamma q = \text{rot}_\Gamma \mathbf{u} \quad \text{dans } H_0^{s-1}(\Gamma).$$

Pour finir, nous mentionnons que la décomposition de Helmholtz sur  $\mathbf{H}_t^s(\Gamma)$  se résume concrètement à l'égalité indiquée ci-dessous :

$$\mathbf{H}_t^s(\Gamma) = \nabla_\Gamma H_0^{s+1}(\Gamma) \oplus \text{rot}_\Gamma H_0^{s+1}(\Gamma).$$

### Preuve

Si  $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_t^s(\Gamma)$ , il existe  $(\alpha_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}^*}, (\beta_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}^*} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$  tels que (voir Proposition 2.14 page 43) :

$$\mathbf{u} = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \alpha_\ell \mathbf{e}_\ell^1 + \beta_\ell \mathbf{e}_\ell^2 \quad \text{dans } \mathbf{H}_t^s(\Gamma) \quad , \quad \sum_{\ell=1}^{+\infty} \lambda_\ell^{s+1} (|\alpha_\ell|^2 + |\beta_\ell|^2) < +\infty.$$

En définissant  $p$  et  $q$  comme suit (voir Proposition 2.13 page 42) :

$$p = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \alpha_\ell e_\ell \quad \text{dans } H_0^{s+1}(\Gamma) \quad , \quad q = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \beta_\ell e_\ell \quad \text{dans } H_0^{s+1}(\Gamma),$$

il vient :

$$\mathbf{u} = \nabla_{\Gamma} p + \mathbf{rot}_{\Gamma} q \quad \text{dans } \mathbf{H}_t^s(\Gamma).$$

Il reste alors à appliquer les opérateurs  $\text{div}_{\Gamma}$  et  $\text{rot}_{\Gamma}$  à cette relation pour obtenir :

$$\Delta_{\Gamma} p = \text{div}_{\Gamma} \mathbf{u} \quad \text{dans } \mathbf{H}_0^{s-1}(\Gamma) \quad , \quad -\Delta_{\Gamma} q = \text{rot}_{\Gamma} \mathbf{u} \quad \text{dans } \mathbf{H}_0^{s-1}(\Gamma).$$

■

Dans cette sous-section, nous ne travaillerons qu'avec la décomposition de Helmholtz sur l'espace  $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ . Nous aurons notamment recours à l'opérateur de décomposition de Helmholtz associé. Cet opérateur fait l'objet de la prochaine proposition.

**Proposition 6.7** (Opérateur de décomposition de Helmholtz sur l'espace  $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ ).

L'opérateur de décomposition de Helmholtz, que nous notons  $\mathcal{H}$ , est défini de  $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  dans  $\mathbf{H}_0^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \times \mathbf{H}_0^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  comme suit :

$$\forall u \in \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), \quad \mathcal{H}u = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \quad \text{où } \mathbf{u} = \nabla_{\Gamma} p + \mathbf{rot}_{\Gamma} q \quad \text{dans } \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\Gamma).$$

Il s'agit d'un opérateur continu et inversible. Son inverse, noté  $\mathcal{H}^{-1}$ , est donné par :

$$\forall (p; q) \in \mathbf{H}_0^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \times \mathbf{H}_0^{\frac{1}{2}}(\Gamma), \quad \mathcal{H}^{-1} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \nabla_{\Gamma} p + \mathbf{rot}_{\Gamma} q,$$

et il est lui aussi continu. Les restrictions suivantes de l'opérateur de décomposition de Helmholtz sont bien définies :

$$\mathcal{H} : \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma}, \Gamma) \rightarrow \mathbf{H}_0^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \times \mathbf{H}_0^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \quad , \quad \mathcal{H} : \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}_{\Gamma}, \Gamma) \rightarrow \mathbf{H}_0^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \times \mathbf{H}_0^{\frac{3}{2}}(\Gamma).$$

Elles sont par ailleurs continues et inversibles à inverse continu. Pour finir, nous disposons des égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma}, \Gamma) &= \nabla_{\Gamma} \mathbf{H}_0^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \oplus \mathbf{rot}_{\Gamma} \mathbf{H}_0^{\frac{1}{2}}(\Gamma), \\ \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}_{\Gamma}, \Gamma) &= \nabla_{\Gamma} \mathbf{H}_0^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \oplus \mathbf{rot}_{\Gamma} \mathbf{H}_0^{\frac{3}{2}}(\Gamma). \end{aligned}$$

### Preuve

La continuité de l'opérateur :

$$\mathcal{H} : \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow \mathbf{H}_0^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \times \mathbf{H}_0^{\frac{1}{2}}(\Gamma),$$

se démontre sans difficulté en utilisant les Propositions 2.13 et 2.14 page 43. Il en va de même pour son inversibilité et la continuité de son inverse.

Pour prouver que la restriction :

$$\mathcal{H} : \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma}, \Gamma) \rightarrow \mathbf{H}_0^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \times \mathbf{H}_0^{\frac{1}{2}}(\Gamma),$$

est bien définie, il suffit de remarquer que si  $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma}, \Gamma)$ , nous avons (voir Proposition 5.13 page 131) :

$$\mathbf{u} = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \alpha_{\ell} \mathbf{e}_{\ell}^1 + \beta_{\ell} \mathbf{e}_{\ell}^2 \quad \text{dans } \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma}, \Gamma) \quad , \quad \sum_{\ell=1}^{+\infty} \lambda_{\ell}^{\frac{1}{2}} (\lambda_{\ell} |\alpha_{\ell}|^2 + |\beta_{\ell}|^2) < +\infty.$$

Le potentiel  $p$  fourni par la Proposition 6.6 :

$$p = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \alpha_{\ell} e_{\ell} \quad \text{dans } \mathbf{H}_0^{\frac{1}{2}}(\Gamma),$$

est alors un élément de  $\mathbf{H}_0^{\frac{3}{2}}(\Gamma)$ . Par ailleurs, la relation :

$$\mathbf{u} = \nabla_{\Gamma} p + \mathbf{rot}_{\Gamma} q,$$

que nous savons être vérifiée dans  $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  d'après la Proposition 6.6, est également satisfaite dans  $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma}, \Gamma)$  dans le sens où :

$$\nabla_{\Gamma} p \in \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma}, \Gamma) \quad , \quad \mathbf{rot}_{\Gamma} q \in \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma}, \Gamma).$$

Ceci justifie notamment la décomposition en somme directe que nous avons donnée pour l'espace  $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$ .

Pour finir, la continuité et l'inversibilité de l'opérateur :

$$\mathcal{H} : \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma) \rightarrow \mathbf{H}_0^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \times \mathbf{H}_0^{\frac{1}{2}}(\Gamma),$$

ainsi que la continuité de son inverse se démontrent grâce aux Propositions 2.13 page 42 et 5.13 page 131. Ajouté à cela, l'isomorphisme suivant :

$$\cdot \wedge \mathbf{n} : \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma) \rightarrow \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}_\Gamma, \Gamma),$$

permet de déduire les résultats concernant l'espace  $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}_\Gamma, \Gamma)$  à partir de ceux portant sur l'espace  $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$ . ■

Dans la section précédente, nous étions limités, entre autres, par le fait que la somme :

$$\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma) + \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}_\Gamma, \Gamma),$$

n'est pas directe. Il se trouve que la décomposition de Helmholtz permet de contourner ce problème. Elle nous fournit en effet des décompositions en somme directe des espaces de Sobolev surfaciques tangentiels avec lesquels nous travaillons :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) &= \nabla_\Gamma \mathbf{H}_0^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \oplus \mathbf{rot}_\Gamma \mathbf{H}_0^{\frac{1}{2}}(\Gamma), \\ \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma) &= \nabla_\Gamma \mathbf{H}_0^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \oplus \mathbf{rot}_\Gamma \mathbf{H}_0^{\frac{1}{2}}(\Gamma), \\ \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}_\Gamma, \Gamma) &= \nabla_\Gamma \mathbf{H}_0^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \oplus \mathbf{rot}_\Gamma \mathbf{H}_0^{\frac{3}{2}}(\Gamma). \end{aligned}$$

Grâce à ces résultats, nous pouvons reformuler de manière équivalente le couplage faible BEM-BEM électromagnétique continu de sorte que ses nouvelles inconnues correspondent aux décompositions de Helmholtz de ses inconnues actuelles. La reformulation du couplage faible BEM-BEM électromagnétique continu est présentée dans la prochaine proposition. L'obtention de cette reformulation ne présentant aucune difficulté, nous n'en donnons pas les détails. Nous rappelons que nous avons introduit le couplage faible BEM-BEM électromagnétique continu en supposant que les opérateurs de transmission satisfaisaient :

$$\mathbf{T}_- : \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma) \rightarrow \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma) \quad , \quad \mathbf{T}_+ : \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma) \rightarrow \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma).$$

La reformulation du couplage faible BEM-BEM électromagnétique continu est donc donnée sous ces hypothèses et l'opérateur  $\mathcal{H}$  sur lequel elle est basée doit être compris comme suit :

$$\mathcal{H} : \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma) \rightarrow \mathbf{H}_0^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \times \mathbf{H}_0^{\frac{1}{2}}(\Gamma).$$

**Proposition 6.8** (Reformulation du couplage faible BEM-BEM électromagnétique).

Le couplage faible BEM-BEM électromagnétique continu se réécrit comme suit :

$$(Id - S_\pi^\mathcal{H}) \begin{pmatrix} g_- \\ g_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{\text{inc}} + T_-^\mathcal{H} e_{\text{inc}} \\ -h_{\text{inc}} + T_+^\mathcal{H} e_{\text{inc}} \end{pmatrix},$$

où :

$$\begin{aligned} g_- &= \mathcal{H} \mathbf{g}_- & , & & g_+ &= \mathcal{H} \mathbf{g}_+ , \\ h_{\text{inc}} &= \mathcal{H} \gamma_t^+ \mathbf{H}_{\text{inc}} & , & & e_{\text{inc}} &= \mathcal{H} \gamma_t^+ \mathbf{E}_{\text{inc}} , \\ T_-^\mathcal{H} &= \mathcal{H} \mathbf{T}_- \mathcal{H}^{-1} & , & & T_+^\mathcal{H} &= \mathcal{H} \mathbf{T}_+ \mathcal{H}^{-1} , \\ S_\pi^\mathcal{H} &= \begin{pmatrix} 0 & S_+^\mathcal{H} \\ S_-^\mathcal{H} & 0 \end{pmatrix} & , & & S_-^\mathcal{H} &= Id - (T_-^\mathcal{H} + T_+^\mathcal{H}) R_-^\mathcal{H} , \\ R_-^\mathcal{H} &= \mathcal{H} \mathbf{R}_- \mathcal{H}^{-1} & , & & S_+^\mathcal{H} &= Id + (T_-^\mathcal{H} + T_+^\mathcal{H}) R_+^\mathcal{H} , \\ & & & & R_+^\mathcal{H} &= \mathcal{H} \mathbf{R}_+ \mathcal{H}^{-1} . \end{aligned}$$

Nous rappelons que les opérateurs de transmission optimaux pour le couplage faible BEM-BEM électromagnétique initial sont donnés par :

$$\mathbf{T}_- = -\mathbf{\Lambda}_{+,k_+,Z_+} \quad , \quad \mathbf{T}_+ = \mathbf{\Lambda}_{-,k_-,Z_-} .$$

Les opérateurs suivants :

$$T_-^{\mathcal{H}} = -\mathcal{H}\Lambda_{+,k_+,Z_+}\mathcal{H}^{-1} \quad , \quad T_+^{\mathcal{H}} = \mathcal{H}\Lambda_{-,k_-,Z_-}\mathcal{H}^{-1},$$

sont alors naturellement optimaux pour le couplage faible BEM-BEM électromagnétique reformulé. En effet, nous vérifions sans difficulté que :

$$\begin{aligned} T_-^{\mathcal{H}} = -\mathcal{H}\Lambda_{+,k_+,Z_+}\mathcal{H}^{-1} &\Rightarrow S_+^{\mathcal{H}} = 0, \\ T_+^{\mathcal{H}} = \mathcal{H}\Lambda_{-,k_-,Z_-}\mathcal{H}^{-1} &\Rightarrow S_-^{\mathcal{H}} = 0. \end{aligned}$$

Remarquons également que les spectres des opérateurs  $S_\pi^{\mathcal{H}}$  et  $\mathbf{S}_\pi$  sont identiques en vertu de la relation indiquée ci-dessous :

$$S_\pi^{\mathcal{H}} = \begin{pmatrix} \mathcal{H} & 0 \\ 0 & \mathcal{H} \end{pmatrix} \mathbf{S}_\pi \begin{pmatrix} \mathcal{H}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathcal{H}^{-1} \end{pmatrix}.$$

Nous pouvons donc nous attendre à ce que les convergences GMRES des couplages faibles BEM-BEM électromagnétiques initial et reformulé soient identiques.

En pratique, les opérateurs de transmission  $T_-^{\mathcal{H}}$  et  $T_+^{\mathcal{H}}$  sont de la forme :

$$\mathcal{H}\Lambda_{-,k,Z}^{\text{app}}\mathcal{H}^{-1} \quad \text{ou} \quad \mathcal{H}\Lambda_{+,k,Z}^{\text{app}}\mathcal{H}^{-1} \quad \text{avec} \quad k, Z \in \mathbb{R}_+^*,$$

les opérateurs  $\Lambda_{-,k,Z}^{\text{app}}$  et  $\Lambda_{+,k,Z}^{\text{app}}$  correspondant à des approximations des opérateurs  $\Lambda_{-,k,Z}$  et  $\Lambda_{+,k,Z}$ . Nous introduisons par conséquent les notations suivantes :

$$\Lambda_{-,k,Z}^{\mathcal{H}\text{-app}} = \mathcal{H}\Lambda_{-,k,Z}^{\text{app}}\mathcal{H}^{-1} \quad , \quad \Lambda_{+,k,Z}^{\mathcal{H}\text{-app}} = \mathcal{H}\Lambda_{+,k,Z}^{\text{app}}\mathcal{H}^{-1}.$$

Nous mentionnons également qu'il est possible d'obtenir des expressions beaucoup plus simples des opérateurs  $\Lambda_{\pm,k,Z}^{\mathcal{H}\text{-}0}$ ,  $\Lambda_{\pm,k,Z}^{\mathcal{H}\text{-sq}}$  et  $\Lambda_{\pm,k,Z}^{\mathcal{H}\text{-sq},N_p,\theta_p}$ . Pour commencer, les opérateurs  $\Lambda_{-,k,Z}^{\mathcal{H}\text{-}0}$  et  $\Lambda_{+,k,Z}^{\mathcal{H}\text{-}0}$  sont donnés par :

$$\Lambda_{-,k,Z}^{\mathcal{H}\text{-}0} = \frac{1}{Z} \begin{pmatrix} 0 & -Id \\ Id & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \Lambda_{+,k,Z}^{\mathcal{H}\text{-}0} = -\frac{1}{Z} \begin{pmatrix} 0 & -Id \\ Id & 0 \end{pmatrix},$$

ces relations étant justifiées par la prochaine proposition.

**Proposition 6.9** (L'opérateur de rotation et la décomposition de Helmholtz).

*L'opérateur de rotation :*

$$\cdot \wedge \mathbf{n} : \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\Gamma),$$

*vérifie :*

$$\cdot \wedge \mathbf{n} = \mathcal{H}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -Id \\ Id & 0 \end{pmatrix} \mathcal{H},$$

*l'opérateur de décomposition de Helmholtz devant être compris comme suit :*

$$\mathcal{H} : \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow \mathbf{H}_0^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \times \mathbf{H}_0^{\frac{1}{2}}(\Gamma).$$

**Preuve**

Si  $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ , il existe  $p, q \in \mathbf{H}_0^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  tels que :

$$\mathbf{u} = \nabla_{\Gamma} p + \mathbf{rot}_{\Gamma} q \quad \text{dans} \quad \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\Gamma).$$

Il suffit alors de remarquer que :

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{n} = -\nabla_{\Gamma} q + \mathbf{rot}_{\Gamma} p \quad \text{dans} \quad \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\Gamma). \quad \blacksquare$$

En ce qui concerne les opérateurs  $\Lambda_{-,k,Z}^{\mathcal{H}\text{-sq}}$  et  $\Lambda_{+,k,Z}^{\mathcal{H}\text{-sq}}$ , nous avons :

$$\Lambda_{-,k,Z}^{\mathcal{H}\text{-sq}} = \frac{1}{Z} \begin{pmatrix} 0 & -\left(Id + \frac{\Delta_{\Gamma}}{k_{\epsilon}^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \\ \left(Id + \frac{\Delta_{\Gamma}}{k_{\epsilon}^2}\right)^{\frac{1}{2}} & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \Lambda_{+,k,Z}^{\mathcal{H}\text{-sq}} = -\frac{1}{Z} \begin{pmatrix} 0 & -\left(Id + \frac{\Delta_{\Gamma}}{k_{\epsilon}^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \\ \left(Id + \frac{\Delta_{\Gamma}}{k_{\epsilon}^2}\right)^{\frac{1}{2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

L'opérateur  $\left(Id + \frac{\Delta_{\Gamma}}{k_{\epsilon}^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$  désigne ici l'inverse de l'opérateur  $\left(Id + \frac{\Delta_{\Gamma}}{k_{\epsilon}^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ , ce dernier étant effectivement inversible puisque  $k_{\epsilon} \in \mathbb{C}$ . Remarquons que ces expressions des opérateurs  $\Lambda_{-,k,Z}^{\mathcal{H}\text{-sq}}$  et  $\Lambda_{+,k,Z}^{\mathcal{H}\text{-sq}}$  découlent directement de la proposition suivante.

**Proposition 6.10** (L'opérateur racine carrée et la décomposition de Helmholtz).

Soit  $k, \epsilon \in \mathbb{R}_+^*$ . L'opérateur racine carrée électromagnétique :

$$\left( \mathbf{Id} + \frac{\Delta_\Gamma}{k_\epsilon^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \left( \mathbf{Id} - \frac{1}{k_\epsilon^2} \mathbf{rot}_\Gamma \mathbf{rot}_\Gamma \right) (\cdot \wedge \mathbf{n}) : \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma) \rightarrow \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma),$$

satisfait :

$$\left( \mathbf{Id} + \frac{\Delta_\Gamma}{k_\epsilon^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \left( \mathbf{Id} - \frac{1}{k_\epsilon^2} \mathbf{rot}_\Gamma \mathbf{rot}_\Gamma \right) (\cdot \wedge \mathbf{n}) = \mathcal{H}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -\left( \text{Id} + \frac{\Delta_\Gamma}{k_\epsilon^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \\ \left( \text{Id} + \frac{\Delta_\Gamma}{k_\epsilon^2} \right)^{\frac{1}{2}} & 0 \end{pmatrix} \mathcal{H},$$

l'opérateur de décomposition de Helmholtz étant défini comme suit :

$$\mathcal{H} : \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma) \rightarrow \mathbf{H}_0^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \times \mathbf{H}_0^{\frac{1}{2}}(\Gamma).$$

**Preuve**

Si  $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$ , il existe  $(\alpha_\ell), (\beta_\ell) \in \mathbb{C}^{N^*}$  tels que :

$$\mathbf{u} = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \alpha_\ell \mathbf{e}_\ell^1 + \beta_\ell \mathbf{e}_\ell^2 \quad \text{dans } \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma).$$

Il s'ensuit que (voir Proposition 6.7) :

$$\mathbf{u} = \nabla_\Gamma p + \mathbf{rot}_\Gamma q \quad \text{dans } \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma),$$

avec :

$$p = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \alpha_\ell e_\ell \quad \text{dans } \mathbf{H}_0^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \quad , \quad q = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \beta_\ell e_\ell \quad \text{dans } \mathbf{H}_0^{\frac{1}{2}}(\Gamma).$$

Etant donné que (voir Proposition 5.15 page 134) :

$$\begin{aligned} & \left( \mathbf{Id} + \frac{1}{k_\epsilon^2} \Delta_\Gamma \right)^{-\frac{1}{2}} \left( \mathbf{Id} - \frac{1}{k_\epsilon^2} \mathbf{rot}_\Gamma \mathbf{rot}_\Gamma \right) (\mathbf{u} \wedge \mathbf{n}) \\ &= \sum_{\ell=1}^{+\infty} -\beta_\ell \left( 1 - \frac{\lambda_\ell}{k_\epsilon^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \mathbf{e}_\ell^1 + \alpha_\ell \left( 1 - \frac{\lambda_\ell}{k_\epsilon^2} \right)^{\frac{1}{2}} \mathbf{e}_\ell^2 \quad \text{dans } \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma), \end{aligned}$$

nous obtenons (voir Proposition 2.17 page 49) :

$$\begin{aligned} & \left( \mathbf{Id} + \frac{1}{k_\epsilon^2} \Delta_\Gamma \right)^{-\frac{1}{2}} \left( \mathbf{Id} - \frac{1}{k_\epsilon^2} \mathbf{rot}_\Gamma \mathbf{rot}_\Gamma \right) (\mathbf{u} \wedge \mathbf{n}) \\ &= -\nabla_\Gamma \left( \text{Id} + \frac{\Delta_\Gamma}{k_\epsilon^2} \right)^{-\frac{1}{2}} q + \mathbf{rot}_\Gamma \left( \text{Id} + \frac{\Delta_\Gamma}{k_\epsilon^2} \right)^{\frac{1}{2}} p \quad \text{dans } \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma). \end{aligned}$$

■

Venons-en à présent aux opérateurs  $\Lambda_{-,k,Z}^{\mathcal{H}\text{-sq}, N_p, \theta_p}$  et  $\Lambda_{+,k,Z}^{\mathcal{H}\text{-sq}, N_p, \theta_p}$ . Si les conditions suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned} & \forall i \in \{1; \dots; N_p\}, \quad \forall \ell \in \mathbb{N}^*, \quad 1 - B_i \frac{\lambda_\ell}{k_\epsilon^2} \neq 0, \\ & \forall i \in \{1; \dots; N_p\}, \quad \forall \ell \in \mathbb{N}^*, \quad R_0 - \sum_{i=1}^{N_p} \frac{A_i}{B_i} \left( 1 - B_i \frac{\lambda_\ell}{k_\epsilon^2} \right)^{-1} \neq 0, \end{aligned}$$

les approximations de Padé de l'opérateur racine carrée électromagnétique sont bien définies et nous avons :

$$\begin{aligned} & \left( R_0 \mathbf{Id} - \sum_{i=1}^{N_p} \frac{A_i}{B_i} \left( \mathbf{Id} + \frac{B_i}{k_\epsilon^2} \Delta_\Gamma \right)^{-1} \right)^{-1} \left( \mathbf{Id} - \frac{1}{k_\epsilon^2} \mathbf{rot}_\Gamma \mathbf{rot}_\Gamma \right) (\cdot \wedge \mathbf{n}) \left( \sum_{\ell=1}^{+\infty} \alpha_\ell \mathbf{e}_\ell^1 + \beta_\ell \mathbf{e}_\ell^2 \right) \\ &= \sum_{\ell=1}^{+\infty} - \left( R_0 - \sum_{i=1}^{N_p} \frac{A_i}{B_i} \left( 1 - B_i \frac{\lambda_\ell}{k_\epsilon^2} \right)^{-1} \right)^{-1} \beta_\ell \mathbf{e}_\ell^1 + \left( 1 - \frac{\lambda_\ell}{k_\epsilon^2} \right) \left( R_0 - \sum_{i=1}^{N_p} \frac{A_i}{B_i} \left( 1 - B_i \frac{\lambda_\ell}{k_\epsilon^2} \right)^{-1} \right)^{-1} \alpha_\ell \mathbf{e}_\ell^2. \end{aligned}$$

Dans l'optique de ne pas alourdir la présentation, et parce que cela n'a aucune incidence sur la compréhension de la fin de cette sous-section, nous ne précisons pas les espaces de définition des approximations de Padé de l'opérateur racine carrée électromagnétique. A partir de la relation précédente, nous montrons sans difficulté que :

$$\begin{aligned} & \left( R_0 \mathbf{Id} - \sum_{i=1}^{N_p} \frac{A_i}{B_i} \left( \mathbf{Id} + \frac{B_i}{k_\epsilon^2} \Delta_\Gamma \right)^{-1} \right)^{-1} \left( \mathbf{Id} - \frac{1}{k_\epsilon^2} \mathbf{rot}_\Gamma \mathbf{rot}_\Gamma \right) (\cdot \wedge \mathbf{n}) \\ &= \mathcal{H}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & - \left( R_0 Id - \sum_{i=1}^{N_p} \frac{A_i}{B_i} \left( Id + B_i \frac{\Delta_\Gamma}{k_\epsilon^2} \right)^{-1} \right)^{-1} \\ \left( R_0 Id - \sum_{i=1}^{N_p} \frac{A_i}{B_i} \left( Id + B_i \frac{\Delta_\Gamma}{k_\epsilon^2} \right)^{-1} \right)^{-1} \left( Id + \frac{\Delta_\Gamma}{k_\epsilon^2} \right) & 0 \end{pmatrix} \mathcal{H}, \end{aligned}$$

l'opérateur de décomposition de Helmholtz devant ici être compris comme une généralisation de celui que nous avons introduit sur  $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  :

$$\mathcal{H} : \sum_{\ell=1}^{+\infty} \alpha_\ell \mathbf{e}_\ell^1 + \beta_\ell \mathbf{e}_\ell^2 \rightarrow \left( \sum_{\ell=1}^{+\infty} \alpha_\ell \ell \mathbf{e}_\ell; \sum_{\ell=1}^{+\infty} \beta_\ell \ell \mathbf{e}_\ell \right).$$

In fine, nous obtenons les expressions suivantes pour les opérateurs  $\Lambda_{-,k,Z}^{\mathcal{H}\text{-sq},N_p,\theta_p}$  et  $\Lambda_{+,k,Z}^{\mathcal{H}\text{-sq},N_p,\theta_p}$  :

$$\begin{aligned} \Lambda_{-,k,Z}^{\mathcal{H}\text{-sq},N_p,\theta_p} &= \frac{1}{Z} \begin{pmatrix} 0 & - \left( R_0 Id - \sum_{i=1}^{N_p} \frac{A_i}{B_i} \left( Id + B_i \frac{\Delta_\Gamma}{k_\epsilon^2} \right)^{-1} \right)^{-1} \\ \left( R_0 Id - \sum_{i=1}^{N_p} \frac{A_i}{B_i} \left( Id + B_i \frac{\Delta_\Gamma}{k_\epsilon^2} \right)^{-1} \right)^{-1} \left( Id + \frac{\Delta_\Gamma}{k_\epsilon^2} \right) & 0 \end{pmatrix}, \\ \Lambda_{+,k,Z}^{\mathcal{H}\text{-sq},N_p,\theta_p} &= -\frac{1}{Z} \begin{pmatrix} 0 & - \left( R_0 Id - \sum_{i=1}^{N_p} \frac{A_i}{B_i} \left( Id + B_i \frac{\Delta_\Gamma}{k_\epsilon^2} \right)^{-1} \right)^{-1} \\ \left( R_0 Id - \sum_{i=1}^{N_p} \frac{A_i}{B_i} \left( Id + B_i \frac{\Delta_\Gamma}{k_\epsilon^2} \right)^{-1} \right)^{-1} \left( Id + \frac{\Delta_\Gamma}{k_\epsilon^2} \right) & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Remarquons que l'opérateur :

$$\left( R_0 Id - \sum_{i=1}^{N_p} \frac{A_i}{B_i} \left( Id + B_i \frac{\Delta_\Gamma}{k_\epsilon^2} \right)^{-1} \right)^{-1} \left( Id + \frac{\Delta_\Gamma}{k_\epsilon^2} \right),$$

apparaissant dans ces relations approxime l'opérateur  $\left( Id + \frac{\Delta_\Gamma}{k_\epsilon^2} \right)^{\frac{1}{2}}$  intervenant dans les expressions des opérateurs  $\Lambda_{-,k,Z}^{\text{sq},N_p,\theta_p}$  et  $\Lambda_{+,k,Z}^{\text{sq},N_p,\theta_p}$ . Il est toutefois beaucoup plus direct d'approximer l'opérateur  $\left( Id + \frac{\Delta_\Gamma}{k_\epsilon^2} \right)^{\frac{1}{2}}$  comme indiqué ci-dessous :

$$\left( Id + \frac{\Delta_\Gamma}{k_\epsilon^2} \right)^{\frac{1}{2}} \approx R_0 Id - \sum_{i=1}^{N_p} \frac{A_i}{B_i} \left( Id + B_i \frac{\Delta_\Gamma}{k_\epsilon^2} \right)^{-1}.$$

Par conséquent, nous modifions les définitions des opérateurs  $\Lambda_{-,k,Z}^{\mathcal{H}\text{-sq},N_p,\theta_p}$  et  $\Lambda_{+,k,Z}^{\mathcal{H}\text{-sq},N_p,\theta_p}$  de sorte que :

$$\begin{aligned} \Lambda_{-,k,Z}^{\mathcal{H}\text{-sq},N_p,\theta_p} &= \frac{1}{Z} \begin{pmatrix} 0 & - \left( R_0 Id - \sum_{i=1}^{N_p} \frac{A_i}{B_i} \left( Id + B_i \frac{\Delta_\Gamma}{k_\epsilon^2} \right)^{-1} \right)^{-1} \\ R_0 Id - \sum_{i=1}^{N_p} \frac{A_i}{B_i} \left( Id + B_i \frac{\Delta_\Gamma}{k_\epsilon^2} \right)^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \\ \Lambda_{+,k,Z}^{\mathcal{H}\text{-sq},N_p,\theta_p} &= -\frac{1}{Z} \begin{pmatrix} 0 & - \left( R_0 Id - \sum_{i=1}^{N_p} \frac{A_i}{B_i} \left( Id + B_i \frac{\Delta_\Gamma}{k_\epsilon^2} \right)^{-1} \right)^{-1} \\ R_0 Id - \sum_{i=1}^{N_p} \frac{A_i}{B_i} \left( Id + B_i \frac{\Delta_\Gamma}{k_\epsilon^2} \right)^{-1} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

#### 6.4.2 Discrétisation du couplage faible reformulé

Dans cette sous-section, nous expliquons comment discrétiser le couplage faible BEM-BEM électromagnétique reformulé. Pour ce faire, nous introduisons les notations suivantes :

$$\text{Span}(P_2^0) = \text{Span}(e_i^0 : i \in \{1; \dots; N_s^2 + N_a^2 - 1\}) \quad , \quad \text{Span}(RT_0) = \text{Span}(e_i : i \in \{1; \dots; N_a^2\}).$$

Les inconnues du couplage faible BEM-BEM électromagnétique reformulé sont discrétisées par les éléments finis  $P_2^0$  :

$$g_- \in [\text{Span}(P_2^0)]^2 \quad , \quad g_+ \in [\text{Span}(P_2^0)]^2.$$

Il s'ensuit que les équivalents discrets des opérateurs de transmission, de résolution et du couplage faible vérifient :

$$\begin{aligned} Id - S_\pi^\mathcal{H} &: [\text{Span}(P_2^0)]^4 \rightarrow [\text{Span}(P_2^0)]^4, \\ T_-^\mathcal{H} &: [\text{Span}(P_2^0)]^2 \rightarrow [\text{Span}(P_2^0)]^2 \quad , \quad T_+^\mathcal{H} : [\text{Span}(P_2^0)]^2 \rightarrow [\text{Span}(P_2^0)]^2, \\ R_-^\mathcal{H} &: [\text{Span}(P_2^0)]^2 \rightarrow [\text{Span}(P_2^0)]^2 \quad , \quad R_+^\mathcal{H} : [\text{Span}(P_2^0)]^2 \rightarrow [\text{Span}(P_2^0)]^2. \end{aligned}$$

Remarquons que les opérateurs de résolution :

$$R_-^\mathcal{H} = \mathcal{H}\mathbf{R}_-\mathcal{H}^{-1} \quad , \quad R_+^\mathcal{H} = \mathcal{H}\mathbf{R}_+\mathcal{H}^{-1},$$

doivent en pratique être décomposés de la sorte :

$$\begin{aligned} R_-^\mathcal{H} &: [\text{Span}(P_2^0)]^2 \xrightarrow{\mathbf{R}_-\mathcal{H}^{-1}} \text{Span}(RT_0) \xrightarrow{\mathcal{H}} [\text{Span}(P_2^0)]^2, \\ R_+^\mathcal{H} &: [\text{Span}(P_2^0)]^2 \xrightarrow{\mathbf{R}_+\mathcal{H}^{-1}} \text{Span}(RT_0) \xrightarrow{\mathcal{H}} [\text{Span}(P_2^0)]^2. \end{aligned}$$

En effet, les sous-problèmes associés au couplage faible BEM-BEM électromagnétique reformulé sont résolus grâce aux formulations intégrales (6.7) et (6.8). Ajouté à cela, les inconnues de ces formulations intégrales sont représentées, au niveau discret, par les éléments finis  $RT_0$ .

Dans ce travail, nous proposons de discrétiser l'opérateur de décomposition de Helmholtz de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{H} : \text{Span}(RT_0) &\rightarrow [\text{Span}(P_2^0)]^2 \\ \mathbf{u} &\rightarrow \begin{pmatrix} \mathbb{H}_{\Gamma, P_2^0}^{-1} \mathbb{M}_{\Gamma, P_2^0 \times RT_0} \\ -\mathbb{H}_{\Gamma, P_2^0}^{-1} \mathbb{L}_{\Gamma, P_2^0 \times RT_0} \end{pmatrix} \{\mathbf{u}\}_{RT_0} \quad , \end{aligned}$$

la notation  $\{\mathbf{u}\}_{RT_0}$  désignant le vecteur coordonnées de  $\mathbf{u}$  dans la base  $(\mathbf{e}_i)_{i \in \{1, \dots, N_a^2\}}$  de  $\text{Span}(RT_0)$ . Concrètement, si  $\mathbf{u} \in \text{Span}(RT_0)$ , nous calculons les potentiels  $p$  et  $q$  de sa décomposition de Helmholtz grâce aux formulations variationnelles discrètes des équations suivantes :

$$\Delta_\Gamma p = \text{div}_\Gamma \mathbf{u} \quad , \quad -\Delta_\Gamma q = \text{rot}_\Gamma \mathbf{u}.$$

Ces formulations variationnelles sont indiquées ci-dessous :

$$\begin{aligned} \forall i \in \{1; \dots; N_s^2 + N_a^2 - 1\}, \quad &\int_\Gamma \nabla_\Gamma p \cdot \nabla_\Gamma e_i^0 d\Gamma = \int_\Gamma \mathbf{u} \cdot \nabla_\Gamma e_i^0 d\Gamma, \\ \forall i \in \{1; \dots; N_s^2 + N_a^2 - 1\}, \quad &\int_\Gamma \nabla_\Gamma q \cdot \nabla_\Gamma e_i^0 d\Gamma = - \int_\Gamma \mathbf{u} \wedge \mathbf{n} \cdot \nabla_\Gamma e_i^0 d\Gamma, \end{aligned}$$

et s'écrivent, sous forme matricielle, comme suit :

$$\mathbb{H}_{\Gamma, P_2^0} \{p\}_{P_2^0} = \mathbb{M}_{\Gamma, P_2^0 \times RT_0} \{\mathbf{u}\}_{RT_0} \quad , \quad \mathbb{H}_{\Gamma, P_2^0} \{q\}_{P_2^0} = -\mathbb{L}_{\Gamma, P_2^0 \times RT_0} \{\mathbf{u}\}_{RT_0}.$$

La notation  $\{\cdot\}_{P_2^0}$  correspond ici à l'équivalent de la notation  $\{\cdot\}_{RT_0}$  pour l'espace  $\text{Span}(P_2^0)$  et sa base canonique, à savoir  $(e_i^0)_{i \in \{1, \dots, N_s^2 + N_a^2\}}$ . Remarquons que le rotationnel scalaire surfacique de  $\mathbf{u}$  n'est pas une fonction. En effet,  $\mathbf{u}$  n'est pas un élément de  $\text{Span}(RT_0) \wedge \mathbf{n}$  mais de  $\text{Span}(RT_0)$ . Le rotationnel scalaire surfacique de  $\mathbf{u}$  doit donc être compris sous sa forme faible :

$$\forall i \in \{1; \dots; N_s^2 + N_a^2 - 1\}, \quad \langle \text{rot}_\Gamma \mathbf{u}; e_i^0 \rangle = \int_\Gamma \mathbf{u} \cdot \text{rot}_\Gamma e_i^0 d\Gamma.$$

Nous nous intéressons à présent à l'évaluation numérique des approximations des opérateurs MtE. En ce qui concerne les approximations  $\Lambda_{-,k,Z}^{\mathcal{H}-0}$  et  $\Lambda_{+,k,Z}^{\mathcal{H}-0}$ , cette tâche ne présente aucune difficulté. En effet, les équivalents discrets de ces opérateurs correspondent, à une constante multiplicative près, à l'opérateur :

$$\begin{pmatrix} 0 & -Id \\ Id & 0 \end{pmatrix} : [\text{Span}(P_2^0)]^2 \rightarrow [\text{Span}(P_2^0)]^2.$$

Concrètement, le fait d'avoir reformulé le couplage faible BEM-BEM électromagnétique par le biais de la décomposition de Helmholtz a rendu l'évaluation numérique de l'opérateur  $\cdot \wedge \mathbf{n}$  triviale.

Pour discrétiser les approximations  $\Lambda_{-,k,Z}^{\mathcal{H}\text{-sq},N_p,\theta_p}$  et  $\Lambda_{+,k,Z}^{\mathcal{H}\text{-sq},N_p,\theta_p}$  des opérateurs MtE, il est suffisant de déterminer la forme discrète de l'opérateur

$$R_0 Id - \sum_{i=1}^{N_p} \frac{A_i}{B_i} \left( Id + B_i \frac{\Delta_\Gamma}{k_\epsilon^2} \right)^{-1} : \text{Span}(P_2^0) \rightarrow \text{Span}(P_2^0).$$

Si  $p \in \text{Span}(P_2^0)$ , nous discrétisons la relation :

$$q = R_0 p - \sum_{i=1}^{N_p} \frac{A_i}{B_i} \left( Id + B_i \frac{\Delta_\Gamma}{k_\epsilon^2} \right)^{-1} p,$$

comme nous l'avons fait dans la partie sur l'acoustique, en introduisant des inconnues auxiliaires  $(p_i)_{i \in \{1, \dots, N_p\}}$  satisfaisant les formulations variationnelles discrètes indiquées ci-dessous :

$$\forall i \in \{1, \dots, N_p\}, \quad \forall j \in \{1, \dots, N_s^2 + N_a^2\}, \quad \int_\Gamma p_i e_j d\Gamma - \frac{B_i}{k_\epsilon^2} \int_\Gamma \nabla_\Gamma p_i \cdot \nabla_\Gamma e_j d\Gamma = \int_\Gamma p e_j d\Gamma.$$

Sous forme matricielle, ces formulations variationnelles s'écrivent comme suit :

$$\forall i \in \{1, \dots, N_p\}, \quad \left( \mathbb{J}_{\Gamma, P_2} - \frac{B_i}{k_\epsilon^2} \mathbb{H}_{\Gamma, P_2} \right) \{p_i\}_{P_2} = \mathbb{J}_{\Gamma, P_2} \mathbb{P}_{\Gamma, P_2^0 \rightarrow P_2} \{p\}_{P_2^0}.$$

Remarquons également que les  $(p_i)_{i \in \{1, \dots, N_p\}}$  sont à moyenne nulle. En effet, la fonction suivante :

$$\sum_{j=1}^{N_s^2 + N_a^2} e_j,$$

est identiquement égale à 1 et nous avons :

$$\forall i \in \{1, \dots, N_p\}, \quad \int_\Gamma p_i \sum_{j=1}^{N_s^2 + N_a^2} e_j d\Gamma - \frac{B_i}{k_\epsilon^2} \int_\Gamma \nabla_\Gamma p_i \cdot \nabla_\Gamma \sum_{j=1}^{N_s^2 + N_a^2} e_j d\Gamma = \int_\Gamma p \sum_{j=1}^{N_s^2 + N_a^2} e_j d\Gamma.$$

La fonction  $q$ , dont l'expression est donnée ci-dessous :

$$q = R_0 p - \sum_{i=1}^{N_p} \frac{A_i}{B_i} p_i,$$

est donc bien à moyenne nulle. *In fine*, nous obtenons :

$$\{q\}_{P_2^0} = \mathbb{P}_{\Gamma, P_2 \rightarrow P_2^0} \mathbb{P}_{\Gamma, P_2, k}^{N_p, \theta_p} \mathbb{P}_{\Gamma, P_2 \rightarrow P_2} \{p\}_{P_2},$$

la matrice  $\mathbb{P}_{\Gamma, P_2, k}^{N_p, \theta_p}$  étant définie comme suit :

$$\mathbb{P}_{\Gamma, P_2, k}^{N_p, \theta_p} = R_0 Id - \sum_{i=1}^{N_p} \frac{A_i}{B_i} \left( \mathbb{J}_{\Gamma, P_2} - \frac{B_i}{k_\epsilon^2} \mathbb{H}_{\Gamma, P_2} \right)^{-1} \mathbb{J}_{\Gamma, P_2}.$$

Les formes discrètes des opérateurs  $\Lambda_{-,k,Z}^{\mathcal{H}\text{-sq},N_p,\theta_p}$  et  $\Lambda_{+,k,Z}^{\mathcal{H}\text{-sq},N_p,\theta_p}$  sont donc données par :

$$\Lambda_{-,k,Z}^{\mathcal{H}\text{-sq},N_p,\theta_p} = \frac{1}{Z} \begin{pmatrix} 0 & - \left[ \mathbb{P}_{\Gamma, P_2 \rightarrow P_2^0} \mathbb{P}_{\Gamma, P_2, k}^{N_p, \theta_p} \mathbb{P}_{\Gamma, P_2 \rightarrow P_2} \right]^{-1} \\ \mathbb{P}_{\Gamma, P_2 \rightarrow P_2^0} \mathbb{P}_{\Gamma, P_2, k}^{N_p, \theta_p} \mathbb{P}_{\Gamma, P_2^0 \rightarrow P_2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Lambda_{+,k,Z}^{\mathcal{H}\text{-sq},N_p,\theta_p} = -\frac{1}{Z} \begin{pmatrix} 0 & - \left[ \mathbb{P}_{\Gamma, P_2 \rightarrow P_2^0} \mathbb{P}_{\Gamma, P_2, k}^{N_p, \theta_p} \mathbb{P}_{\Gamma, P_2^0 \rightarrow P_2} \right]^{-1} \\ \mathbb{P}_{\Gamma, P_2 \rightarrow P_2^0} \mathbb{P}_{\Gamma, P_2, k}^{N_p, \theta_p} \mathbb{P}_{\Gamma, P_2^0 \rightarrow P_2} & 0 \end{pmatrix},$$

Pour l'opérateur  $\Lambda_{-,k,Z}^{\mathcal{H}\text{-int},N_p,\theta_p}$ , nous proposons la discrétisation suivante :

$$\Lambda_{-,k,Z}^{\mathcal{H}\text{-int},N_p,\theta_p} = -\frac{1}{ikZ} \begin{pmatrix} \mathbb{H}_{\Gamma,P_2^0}^{-1} \mathbb{M}_{\Gamma,P_2^0 \times RT_0} \\ -\mathbb{H}_{\Gamma,P_2^0}^{-1} \mathbb{L}_{\Gamma,P_2^0 \times RT_0} \end{pmatrix} \mathbb{T}_k^{-1} \begin{pmatrix} \mathbb{L}_{\Gamma,P_2^0 \times RT_0}^t & \mathbb{M}_{\Gamma,P_2^0 \times RT_0}^t \\ \mathbb{M}_{\Gamma,P_2^0 \times RT_0}^t & -\mathbb{L}_{\Gamma,P_2^0 \times RT_0}^t \end{pmatrix} + \Lambda_{+,k,Z}^{\mathcal{H}\text{-sq},N_p,\theta_p}.$$

Cette dernière est toute simplement obtenue en discrétisant les relations :

$$\mathbf{u} = \mathbf{T}_k^{-1} \mathcal{H}^{-1} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \quad \text{avec } \mathbf{u} \in \text{Span}(RT_0) \quad \text{et } p, q \in \text{Span}(P_2^0),$$

par le biais de la formulation variationnelle discrète indiquée ci-dessous :

$$\forall j \in \{1; \dots; N_a^2\}, \quad \int_{\Gamma} (\mathbf{T}_k \mathbf{u}) \wedge \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_j \, d\Gamma = - \int_{\Gamma} \nabla_{\Gamma} p \cdot \mathbf{e}_j \wedge \mathbf{n} \, d\Gamma - \int_{\Gamma} \nabla_{\Gamma} q \cdot \mathbf{e}_j \, d\Gamma.$$

Notons que, sous forme matricielle, cette formulation variationnelle se résume à l'égalité :

$$\mathbb{T}_k \{\mathbf{u}\}_{RT_0} = -\mathbb{L}_{\Gamma,P_2^0 \times RT_0}^t \{p\}_{P_2^0} - \mathbb{M}_{\Gamma,P_2^0 \times RT_0}^t \{q\}_{P_2^0}.$$

La fin de cette sous-section est consacrée à l'évaluation numérique des opérateurs :

$$\mathbf{R}_- \mathcal{H}^{-1} : [\text{Span}(P_2^0)]^2 \rightarrow \text{Span}(RT_0) \quad \text{et} \quad \mathbf{R}_+ \mathcal{H}^{-1} : [\text{Span}(P_2^0)]^2 \rightarrow \text{Span}(RT_0).$$

Pour calculer les quantités :

$$\mathbf{R}_- \mathcal{H}^{-1} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{R}_+ \mathcal{H}^{-1} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \quad \text{avec } p, q \in \text{Span}(P_2^0),$$

nous résolvons tout simplement les formulations intégrales (6.7) et (6.8), la fonction  $\mathbf{g}$  étant donnée par :

$$\mathbf{g} = \nabla_{\Gamma} p + \text{rot}_{\Gamma} q.$$

Si les opérateurs de transmission correspondent aux approximations de bas ordre des opérateurs optimaux pour le couplage faible BEM-BEM électromagnétique :

$$T_-^{\mathcal{H}} = -\Lambda_{+,k_+,Z_+}^{\mathcal{H}\text{-0}}, \quad T_+^{\mathcal{H}} = \Lambda_{-,k_-,Z_-}^{\mathcal{H}\text{-0}},$$

ces formulations se discrétisent comme dans la section précédente :

$$\begin{aligned} \forall j \in \{1; \dots; N_a^2\}, \quad & \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \gamma_t^- \mathbf{H} \cdot \mathbf{e}_j \, d\Gamma - \int_{\Gamma} (\mathbf{K}_{k_-} Z_+^{-1} \gamma_t^- \mathbf{E}) \wedge \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_j \, d\Gamma + ik_- \frac{Z_-}{Z_+} \int_{\Gamma} (\mathbf{T}_{k_-} \gamma_t^- \mathbf{H}) \wedge \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_j \, d\Gamma \\ & = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \nabla_{\Gamma} p \cdot \mathbf{e}_j \, d\Gamma - \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \nabla_{\Gamma} q \cdot (\mathbf{e}_j \wedge \mathbf{n}) \, d\Gamma, \\ \forall j \in \{1; \dots; N_a^2\}, \quad & \frac{1}{2} \int_{\Gamma} Z_+^{-1} \gamma_t^- \mathbf{E} \cdot \mathbf{e}_j \, d\Gamma + \int_{\Gamma} (\mathbf{K}_{k_-} \gamma_t^- \mathbf{H}) \wedge \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_j \, d\Gamma + ik_- \frac{Z_+}{Z_-} \int_{\Gamma} (\mathbf{T}_{k_-} Z_+^{-1} \gamma_t^- \mathbf{E}) \wedge \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_j \, d\Gamma \\ & = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \nabla_{\Gamma} p \cdot (\mathbf{e}_j \wedge \mathbf{n}) \, d\Gamma + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \nabla_{\Gamma} q \cdot \mathbf{e}_j \, d\Gamma, \\ \forall j \in \{1; \dots; N_a^2\}, \quad & \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \gamma_t^+ \mathbf{H} \cdot \mathbf{e}_j \, d\Gamma - \int_{\Gamma} (\mathbf{K}_{k_+} Z_-^{-1} \gamma_t^+ \mathbf{E}) \wedge \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_j \, d\Gamma + ik_+ \frac{Z_+}{Z_-} \int_{\Gamma} (\mathbf{T}_{k_+} \gamma_t^+ \mathbf{H}) \wedge \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_j \, d\Gamma \\ & = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \nabla_{\Gamma} p \cdot \mathbf{e}_j \, d\Gamma - \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \nabla_{\Gamma} q \cdot (\mathbf{e}_j \wedge \mathbf{n}) \, d\Gamma, \\ \forall j \in \{1; \dots; N_a^2\}, \quad & \frac{1}{2} \int_{\Gamma} Z_-^{-1} \gamma_t^+ \mathbf{E} \cdot \mathbf{e}_j \, d\Gamma + \int_{\Gamma} (\mathbf{K}_{k_+} \gamma_t^+ \mathbf{H}) \wedge \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_j \, d\Gamma + ik_+ \frac{Z_-}{Z_+} \int_{\Gamma} (\mathbf{T}_{k_+} Z_-^{-1} \gamma_t^+ \mathbf{E}) \wedge \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_j \, d\Gamma \\ & = -\frac{1}{2} \int_{\Gamma} \nabla_{\Gamma} p \cdot (\mathbf{e}_j \wedge \mathbf{n}) \, d\Gamma - \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \nabla_{\Gamma} q \cdot \mathbf{e}_j \, d\Gamma. \end{aligned}$$

Remarquons que les problèmes discrets précédents peuvent s'écrire de manière plus condensée comme suit :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \mathbb{I} + ik_- \frac{Z_-}{Z_+} \mathbb{T}_{k_-} & \mathbb{K}_{k_-} \\ -\mathbb{K}_{k_-} & \frac{1}{2} \mathbb{I} + ik_- \frac{Z_-}{Z_+} \mathbb{T}_{k_-} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_+^{-1} \{\gamma_t^- \mathbf{E}\}_{RT_0} \\ \{\gamma_t^- \mathbf{H}\}_{RT_0} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbb{L}_{\Gamma,P_2^0 \times RT_0}^t & \mathbb{M}_{\Gamma,P_2^0 \times RT_0}^t \\ \mathbb{M}_{\Gamma,P_2^0 \times RT_0}^t & -\mathbb{L}_{\Gamma,P_2^0 \times RT_0}^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \{p\}_{P_2^0} \\ \{q\}_{P_2^0} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \mathbb{I} + ik_+ \frac{Z_+}{Z_-} \mathbb{T}_{k_+} & \mathbb{K}_{k_+} \\ -\mathbb{K}_{k_+} & \frac{1}{2} \mathbb{I} + ik_+ \frac{Z_+}{Z_-} \mathbb{T}_{k_+} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_-^{-1} \{\gamma_t^+ \mathbf{E}\}_{RT_0} \\ \{\gamma_t^+ \mathbf{H}\}_{RT_0} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\mathbb{L}_{\Gamma,P_2^0 \times RT_0}^t & -\mathbb{M}_{\Gamma,P_2^0 \times RT_0}^t \\ \mathbb{M}_{\Gamma,P_2^0 \times RT_0}^t & -\mathbb{L}_{\Gamma,P_2^0 \times RT_0}^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \{p\}_{P_2^0} \\ \{q\}_{P_2^0} \end{pmatrix}.$$

Si les opérateurs de transmission sont donnés par :

$$T_-^{\mathcal{H}} = -\Lambda_{+,k_+,Z_+}^{\mathcal{H}\text{-sq}} \quad , \quad T_+^{\mathcal{H}} = \Lambda_{-,k_-,Z_-}^{\mathcal{H}\text{-sq}} \quad \text{ou} \quad T_+^{\mathcal{H}} = \Lambda_{-,k_-,Z_-}^{\mathcal{H}\text{-int}}$$

les formulations intégrales (6.7) et (6.8) sont résolues en compressant les matrices issues de leur discrétisation :

$$\begin{aligned} & \frac{Z_+}{2} \begin{pmatrix} \mathbb{L}_{\Gamma,P_2^0 \times RT_0}^t & \mathbb{M}_{\Gamma,P_2^0 \times RT_0}^t \end{pmatrix} \mathbb{T}_-^{\mathcal{H}} \begin{pmatrix} \mathbb{H}_{\Gamma,P_2^0}^{-1} \mathbb{M}_{\Gamma,P_2^0 \times RT_0} \\ -\mathbb{H}_{\Gamma,P_2^0}^{-t} \mathbb{L}_{\Gamma,P_2^0 \times RT_0} \end{pmatrix} \frac{\{\gamma_t^- \mathbf{E}\}_{RT_0}}{Z_+} + \mathbb{K}_{k_-} \{\gamma_t^- \mathbf{H}\}_{RT_0} + ik_- \frac{Z_+}{Z_-} \mathbb{T}_{k_-} \frac{\{\gamma_t^- \mathbf{E}\}_{RT_0}}{Z_+} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbb{L}_{\Gamma,P_2^0 \times RT_0}^t & \mathbb{M}_{\Gamma,P_2^0 \times RT_0}^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \{p\}_{P_2^0} \\ \{q\}_{P_2^0} \end{pmatrix}, \\ & \frac{1}{2Z_+} \begin{pmatrix} \mathbb{L}_{\Gamma,P_2^0 \times RT_0}^t & \mathbb{M}_{\Gamma,P_2^0 \times RT_0}^t \end{pmatrix} [\mathbb{T}_-^{\mathcal{H}}]^{-1} \begin{pmatrix} \mathbb{H}_{\Gamma,P_2^0}^{-1} \mathbb{M}_{\Gamma,P_2^0 \times RT_0} \\ -\mathbb{H}_{\Gamma,P_2^0}^{-t} \mathbb{L}_{\Gamma,P_2^0 \times RT_0} \end{pmatrix} \{\gamma_t^- \mathbf{H}\}_{RT_0} + \mathbb{K}_{k_-} \frac{\{\gamma_t^- \mathbf{E}\}_{RT_0}}{Z_+} - ik_- \frac{Z_-}{Z_+} \mathbb{T}_{k_-} \{\gamma_t^- \mathbf{H}\}_{RT_0} \\ &= \frac{1}{2Z_+} \begin{pmatrix} \mathbb{L}_{\Gamma,P_2^0 \times RT_0}^t & \mathbb{M}_{\Gamma,P_2^0 \times RT_0}^t \end{pmatrix} [\mathbb{T}_-^{\mathcal{H}}]^{-1} \begin{pmatrix} \{p\}_{P_2^0} \\ \{q\}_{P_2^0} \end{pmatrix}, \\ & \frac{Z_-}{2} \begin{pmatrix} \mathbb{L}_{\Gamma,P_2^0 \times RT_0}^t & \mathbb{M}_{\Gamma,P_2^0 \times RT_0}^t \end{pmatrix} \mathbb{T}_+^{\mathcal{H}} \begin{pmatrix} \mathbb{H}_{\Gamma,P_2^0}^{-1} \mathbb{M}_{\Gamma,P_2^0 \times RT_0} \\ -\mathbb{H}_{\Gamma,P_2^0}^{-t} \mathbb{L}_{\Gamma,P_2^0 \times RT_0} \end{pmatrix} \frac{\{\gamma_t^+ \mathbf{E}\}_{RT_0}}{Z_-} + \mathbb{K}_{k_+} \{\gamma_t^+ \mathbf{H}\}_{RT_0} + ik_+ \frac{Z_-}{Z_+} \mathbb{T}_{k_+} \frac{\{\gamma_t^+ \mathbf{E}\}_{RT_0}}{Z_-} \\ &= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbb{L}_{\Gamma,P_2^0 \times RT_0}^t & \mathbb{M}_{\Gamma,P_2^0 \times RT_0}^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \{p\}_{P_2^0} \\ \{q\}_{P_2^0} \end{pmatrix}, \\ & \frac{1}{2Z_-} \begin{pmatrix} \mathbb{L}_{\Gamma,P_2^0 \times RT_0}^t & \mathbb{M}_{\Gamma,P_2^0 \times RT_0}^t \end{pmatrix} [\mathbb{T}_+^{\mathcal{H}}]^{-1} \begin{pmatrix} \mathbb{H}_{\Gamma,P_2^0}^{-1} \mathbb{M}_{\Gamma,P_2^0 \times RT_0} \\ -\mathbb{H}_{\Gamma,P_2^0}^{-t} \mathbb{L}_{\Gamma,P_2^0 \times RT_0} \end{pmatrix} \{\gamma_t^+ \mathbf{H}\}_{RT_0} + \mathbb{K}_{k_+} \frac{\{\gamma_t^+ \mathbf{E}\}_{RT_0}}{Z_-} - ik_+ \frac{Z_+}{Z_-} \mathbb{T}_{k_+} \{\gamma_t^+ \mathbf{H}\}_{RT_0} \\ &= \frac{1}{2Z_-} \begin{pmatrix} \mathbb{L}_{\Gamma,P_2^0 \times RT_0}^t & \mathbb{M}_{\Gamma,P_2^0 \times RT_0}^t \end{pmatrix} [\mathbb{T}_+^{\mathcal{H}}]^{-1} \begin{pmatrix} \{p\}_{P_2^0} \\ \{q\}_{P_2^0} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Cette approche ayant été présentée en détails dans la partie sur l'acoustique, nous n'en disons pas plus à ce sujet. Remarquons toutefois que pour les opérateurs de transmission suivants :

$$T_-^{\mathcal{H}} = -\Lambda_{+,k_+,Z_+}^{\mathcal{H}\text{-sq}} \quad , \quad T_+^{\mathcal{H}} = \Lambda_{-,k_-,Z_-}^{\mathcal{H}\text{-sq}}$$

l'assemblage des matrices compressées des formulations intégrales (6.7) et (6.8) ne nécessite pas de calculer les décompositions LU des matrices  $\mathbb{T}_-^{\mathcal{H}}$  et  $\mathbb{T}_+^{\mathcal{H}}$ . En effet, si les opérateurs de transmission sont choisis de la sorte, les inverses des matrices  $\mathbb{T}_-^{\mathcal{H}}$  et  $\mathbb{T}_+^{\mathcal{H}}$  sont explicitement donnés par la relation suivante :

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 0 & -\left[\mathbb{P}_{\Gamma,P_2 \rightarrow P_2^0} \mathbb{P}_{\Gamma,P_2,k}^{N_p,\theta_p} \mathbb{P}_{\Gamma,P_2^0 \rightarrow P_2}\right]^{-1} \\ \mathbb{P}_{\Gamma,P_2 \rightarrow P_2^0} \mathbb{P}_{\Gamma,P_2,k}^{N_p,\theta_p} \mathbb{P}_{\Gamma,P_2^0 \rightarrow P_2} & 0 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= - \begin{pmatrix} 0 & -\left[\mathbb{P}_{\Gamma,P_2 \rightarrow P_2^0} \mathbb{P}_{\Gamma,P_2,k}^{N_p,\theta_p} \mathbb{P}_{\Gamma,P_2^0 \rightarrow P_2}\right]^{-1} \\ \mathbb{P}_{\Gamma,P_2 \rightarrow P_2^0} \mathbb{P}_{\Gamma,P_2,k}^{N_p,\theta_p} \mathbb{P}_{\Gamma,P_2^0 \rightarrow P_2} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

## 6.5 Résultats numériques

Nous commençons par montrer que le couplage faible BEM-BEM électromagnétique reformulé est effectivement plus intéressant, d'un point de vue numérique, que le couplage faible BEM-BEM électromagnétique initial. Nous rappelons que le couplage faible BEM-BEM électromagnétique initial a déjà été testé dans la section 6.3. Pour ces tests, l'objet diffractant correspondait à la sphère unité. Par ailleurs, les opérateurs de transmission ont été choisis de sorte à coïncider avec les approximations d'ordre 0 des opérateurs de transmission optimaux :

$$\mathbf{T}_- = \frac{1}{Z_+} (\cdot \wedge \mathbf{n}) \quad , \quad \mathbf{T}_+ = \frac{1}{Z_-} (\cdot \wedge \mathbf{n}), \quad (6.10)$$

et les valeurs suivantes ont été données aux paramètres  $k_+$  et  $n_\lambda$  :

$$k_+ = 5 \quad , \quad n_\lambda = 5.$$

Deux formes du couplage faible BEM-BEM électromagnétique initial ont été implémentées. La première est la forme générique et repose sur les discrétisations suivantes des opérateurs de transmission :

$$\mathbb{T}_- = -\frac{1}{Z_+} \mathbb{I}_\Gamma^{-1} \mathbb{R}_\Gamma \quad , \quad \mathbb{T}_+ = -\frac{1}{Z_-} \mathbb{I}_\Gamma^{-1} \mathbb{R}_\Gamma.$$

Les résultats qu'elle a fourni se sont révélés peu précis. Ceci est dû au fait que les opérateurs de transmission discrets précédents représentent mal leurs homologues continus. La seconde forme du couplage faible BEM-BEM électromagnétique initial est spécifique aux opérateurs de transmission (6.10) et consiste à remplacer leur évaluation numérique par une évaluation exacte. Elle ne constitue pas une solution viable pour généraliser le couplage faible BEM-BEM électromagnétique initial à d'autres opérateurs de transmission mais elle est intéressante en cela qu'elle permet de s'affranchir des erreurs associées à l'évaluation numérique des opérateurs de transmission (6.10). La seconde forme du couplage faible BEM-BEM électromagnétique initial s'est avérée bien plus précise que la première et peut donc être considérée comme le couplage faible BEM-BEM électromagnétique initial de référence pour les opérateurs de transmission (6.10).

Les résultats des tests numériques effectués sur le couplage faible BEM-BEM électromagnétique initial ont été regroupés dans la Figure 6.2. A titre de comparaison, nous présentons, dans la Figure 6.3, les mêmes résultats mais pour le couplage faible BEM-BEM électromagnétique reformulé, l'objet diffractant,  $k_+$ ,  $n_\lambda$ ,  $\mathbf{T}_-$  et  $\mathbf{T}_+$  étant inchangés. Commençons par remarquer que la vitesse de convergence du couplage faible BEM-BEM électromagnétique reformulé est similaire à celle du couplage faible BEM-BEM électromagnétique initial. L'intérêt du couplage faible BEM-BEM électromagnétique reformulé réside en fait dans la précision des résultats qu'il fournit. Plus concrètement, le couplage faible BEM-BEM électromagnétique reformulé est aussi précis que le couplage faible BEM-BEM électromagnétique initial de référence.

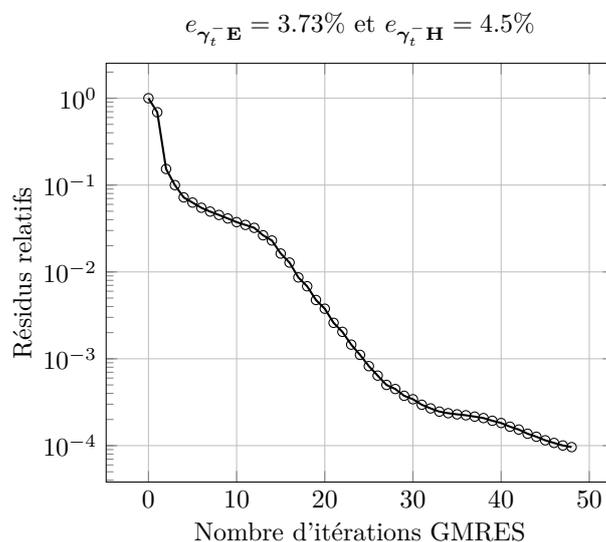


FIGURE 6.3 – Historique de convergence GMRES du couplage faible BEM-BEM électromagnétique reformulé lorsque les opérateurs de transmission correspondent aux approximations d'ordre 0 des opérateurs de transmission optimaux ( $k_+ = 5$  et  $n_\lambda = 5$ )

Jusqu'à la fin de cette section, nous nous intéressons exclusivement au couplage faible BEM-BEM électromagnétique reformulé. Dans l'optique d'évaluer sa robustesse vis-à-vis des montées en fréquence et des raffinements de maillage, nous avons effectué plusieurs tests numériques. Pour ces tests, les paramètres intervenant dans les approximations de Padé ont été choisis de la sorte :

$$N_p = 4 \quad , \quad \theta_p = \frac{\pi}{2}.$$

Aucune étude exhaustive concernant l'influence des paramètres  $N_p$  et  $\theta_p$  sur la vitesse de convergence du couplage faible BEM-BEM électromagnétique reformulé n'a été réalisée. Nous avons toutefois effectué quelques résolutions du couplage faible BEM-BEM électromagnétique reformulé pour des valeurs ciblées de  $N_p$  et de  $\theta_p$ . Les nombres d'itérations GMRES nécessaires à ces résolutions semblent indiquer que les valeurs des paramètres de Padé indiquées ci-dessus sont optimales en pratique.

Par la suite, pour simplifier la présentation, nous notons  $n_{it}$  le nombre d'itérations GMRES nécessaires à la résolution du couplage faible BEM-BEM électromagnétique reformulé. La Figure 6.4 illustre la dépendance de  $n_{it}$  en le nombre d'onde extérieur lorsque  $n_\lambda = 5$ . Dans la Figure 6.5, nous avons tracé  $n_{it}$  en fonction du raffinement du maillage pour  $k_+ = 2.5$ . Ces deux figures sont organisées de la même manière que leurs homologues présentés dans la partie sur l'acoustique. Pour les obtenir, nous avons fixé la tolérance GMRES

à  $10^{-4}$ . Ce choix est motivé par les résultats que nous avons obtenus en acoustique : une tolérance GMRES de  $10^{-4}$  est suffisante pour correctement estimer une SES. Remarquons qu'il y a des points manquants sur certaines courbes des Figures 6.4 et 6.5. Les données associées à ces points n'ont pas pu être calculées à cause de problèmes informatiques non identifiés.

Les résultats présentés dans les Figures 6.4 et 6.5 sont similaires à ceux que nous avons obtenus en acoustique. Les paires d'opérateurs de transmission les plus intéressantes sont les suivantes :

$$(\Lambda_+^{\mathcal{H}\text{-sq}}, \Lambda_-^{\mathcal{H}\text{-sq}}) \quad , \quad (\Lambda_+^{\mathcal{H}\text{-sq}}, \Lambda_-^{\mathcal{H}\text{-0}}). \quad (6.11)$$

Elles permettent en effet de minimiser la dépendance de  $n_{it}$  en la fréquence. Lorsque la fréquence est élevée, les paires d'opérateurs de transmission (6.11) proposent des vitesses de convergence similaires. A basse fréquence en revanche, la paire :

$$(\Lambda_+^{\mathcal{H}\text{-sq}}, \Lambda_-^{\mathcal{H}\text{-sq}}),$$

est légèrement plus performante. Les raisons de ce phénomène ont déjà été présentées dans la partie sur l'acoustique. Nous ne reviendrons donc pas sur ce point. Avec les paires d'opérateurs de transmission (6.11),  $n_{it}$  est par ailleurs quasiment indépendant du raffinement du maillage. Remarquons que cela n'était pas le cas en acoustique pour la paire d'opérateurs de transmission :

$$(\Lambda_+^{\text{sq}}, \Lambda_-^0).$$

Pour résoudre des problèmes à haute fréquence, il peut donc être intéressant d'implémenter le couplage faible BEM-BEM électromagnétique à partir de la paire d'opérateurs de transmission :

$$(\Lambda_+^{\mathcal{H}\text{-sq}}, \Lambda_-^{\mathcal{H}\text{-0}}),$$

et non à partir de la paire :

$$(\Lambda_+^{\mathcal{H}\text{-sq}}, \Lambda_-^{\mathcal{H}\text{-sq}}).$$

Cela permettrait en effet de réduire le coût computationnel d'une itération de la procédure GMRES.

Les paires d'opérateurs de transmission :

$$(\Lambda_+^{\mathcal{H}\text{-0}}, \Lambda_-^{\mathcal{H}\text{-sq}}) \quad , \quad (\Lambda_+^{\mathcal{H}\text{-0}}, \Lambda_-^{\mathcal{H}\text{-0}}),$$

ne doivent pas être considérées en pratique car elles engendrent une dépendance significative de  $n_{it}$  en la fréquence.

Nous terminons cette section en discutant des résultats obtenus pour les paires d'opérateurs de transmission :

$$(\Lambda_+^{\mathcal{H}\text{-sq}}, \Lambda_-^{\mathcal{H}\text{-int}}) \quad , \quad (\Lambda_+^{\mathcal{H}\text{-0}}, \Lambda_-^{\mathcal{H}\text{-int}}). \quad (6.12)$$

La Figure 6.4 peut laisser penser que l'approximation intégrale de l'opérateur MtE intérieur est très grossière. Dans cette figure, les courbes associées aux paires d'opérateurs de transmission (6.12) stagnent en effet au nombre maximum d'itérations que nous avons autorisées pour la procédure GMRES, à savoir 50. La Figure 6.5 suggère toutefois que l'approximation intégrale de l'opérateur MtE intérieur n'est grossière que si le maillage n'est pas suffisamment fin. En effet, la performance des paires d'opérateurs de transmission (6.12) s'améliore lorsque le nombre de points par longueur d'onde augmente. Remarquons par ailleurs que, si le nombre de points par longueur d'onde est assez élevé, la paire d'opérateurs de transmission :

$$(\Lambda_+^{\mathcal{H}\text{-sq}}, \Lambda_-^{\mathcal{H}\text{-int}}),$$

permet de faire converger le couplage faible BEM-BEM électromagnétique reformulé plus rapidement que la paire :

$$(\Lambda_+^{\mathcal{H}\text{-sq}}, \Lambda_-^{\mathcal{H}\text{-sq}}).$$

Quoi qu'il en soit, il est probablement préférable, pour des questions de robustesse, de se limiter à utiliser les paires (6.11) pour implémenter le couplage faible BEM-BEM électromagnétique reformulé. Pour finir, nous mentionnons que les paires d'opérateurs de transmission (6.12) exhibent un comportement surprenant dans le graphique de la Figure 6.4 associé à la sphère. D'une manière générale, les vitesses de convergence proposées par ces paires d'opérateurs de transmission sont très faibles lorsque  $n_\lambda = 5$ . Dans le cas de la sphère, les paires (6.12) font toutefois converger rapidement le couplage faible BEM-BEM électromagnétique reformulé pour certaines valeurs du nombre d'onde extérieur alors que  $n_\lambda = 5$ . Ce phénomène est étonnant et nous en ignorons les causes.

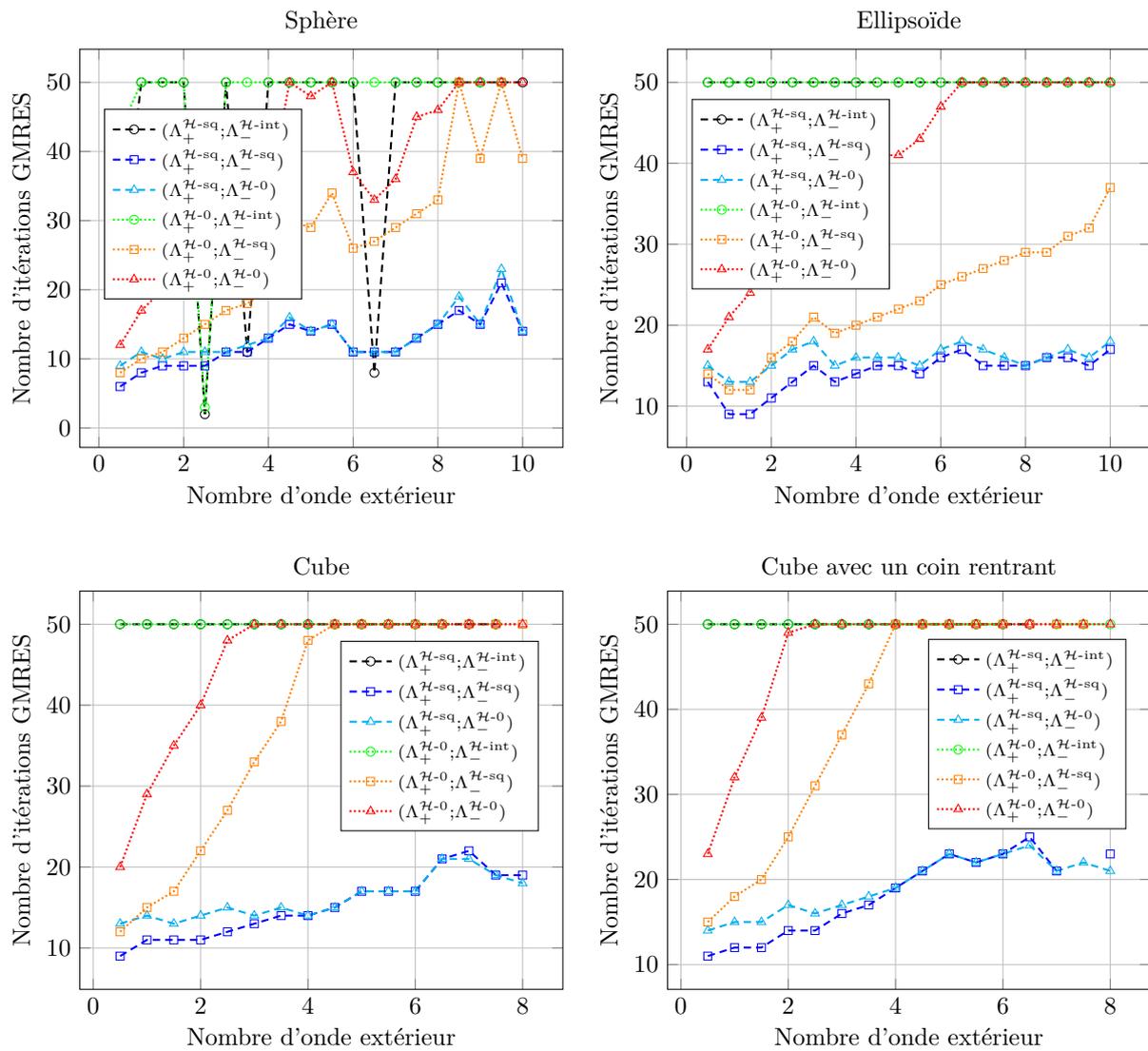


FIGURE 6.4 – Nombre d'itérations GMRES pour le couplage faible BEM-BEM électromagnétique reformulé en fonction du nombre d'onde extérieur

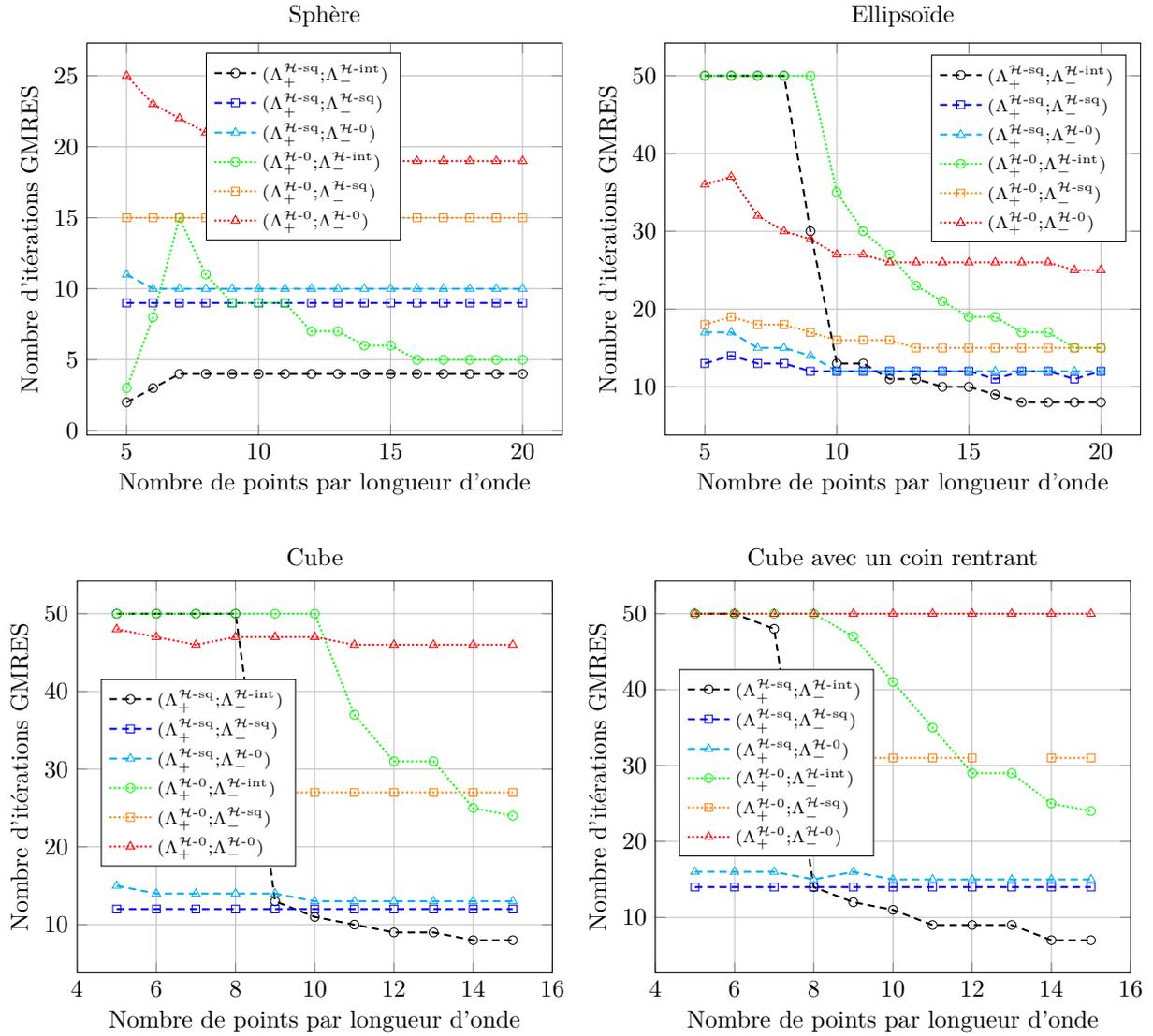


FIGURE 6.5 – Nombre d'itérations GMRES pour le couplage faible BEM-BEM électromagnétique reformulé en fonction du raffinement du maillage

## 6.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes tout d'abord penchés sur la discrétisation du couplage faible BEM-BEM électromagnétique. Cette tâche s'est révélée bien plus difficile qu'en acoustique. La discrétisation des inconnues du couplage faible BEM-BEM électromagnétique et l'évaluation numérique de l'opérateur de rotation  $\cdot \wedge \mathbf{n}$  sont en effet particulièrement délicates. L'approche consistant à représenter, au niveau discret, les inconnues du couplage faible BEM-BEM électromagnétique par les éléments finis  $RT_0$  semble *a priori* naturelle. Nous avons toutefois expliqué qu'elle n'est pas satisfaisante du point de vue de l'analyse fonctionnelle. Nous en rappelons brièvement les raisons. Lorsque les opérateurs de transmission correspondent à des approximations de bas ordre d'opérateurs MtE, les inconnues du couplage faible BEM-BEM électromagnétique ne sont pas des éléments de  $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$ . Ajouté à cela, pour un tel choix des opérateurs de transmission, le fait de discrétiser les inconnues du couplage faible BEM-BEM électromagnétique par les éléments finis  $RT_0$  impose de disposer d'une version discrète de l'opérateur de rotation vérifiant :

$$\cdot \wedge \mathbf{n} : \text{Span}(\mathbf{e}_i : i \in \{1; \dots; N_a^2\}) \rightarrow \text{Span}(\mathbf{e}_i : i \in \{1; \dots; N_a^2\}).$$

Une discrétisation de l'opérateur de rotation de cette forme n'est toutefois pas satisfaisante puisque, de manière exacte, nous avons :

$$\cdot \wedge \mathbf{n} : \text{Span}(\mathbf{e}_i : i \in \{1; \dots; N_a^2\}) \rightarrow \text{Span}(\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{n} : i \in \{1; \dots; N_a^2\}).$$

En dépit des contre-indications mentionnées ci-dessus, nous avons tout de même implémenté le couplage faible BEM-BEM électromagnétique en discrétisant ses inconnues grâce aux éléments finis  $RT_0$ . Des tests numériques ont alors montré que cette approche n'est pas optimale en termes de précision principalement. Pour pallier ce problème, nous avons reformulé le couplage faible BEM-BEM électromagnétique *via* la décomposition de Helmholtz. Cette reformulation est particulièrement intéressante car elle simplifie grandement la représentation au niveau discret des inconnues du couplage faible BEM-BEM électromagnétique ainsi que l'évaluation de l'opérateur de rotation. Elle permet par ailleurs de pallier les problèmes de précision du couplage faible BEM-BEM électromagnétique initial.

Dans un second temps, des tests de performance nous ont permis de conclure que le couplage faible BEM-BEM électromagnétique reformulé doit être implémenté à partir des paires d'opérateurs de transmission suivantes :

$$(\mathbf{\Lambda}_+^{\text{sq}}; \mathbf{\Lambda}_-^{\text{sq}}) \quad , \quad (\mathbf{\Lambda}_+^{\text{sq}}; \mathbf{\Lambda}_-^0).$$

Avec ces paires, le nombre d'itérations GMRES nécessaires à la résolution du couplage faible BEM-BEM électromagnétique reformulé dépend en effet faiblement de la fréquence. Il est également *quasi*-indépendant du raffinement du maillage. A basse fréquence, la paire  $(\mathbf{\Lambda}_+^{\text{sq}}; \mathbf{\Lambda}_-^{\text{sq}})$  conduit à des vitesses de convergence légèrement supérieures à celles proposées par la paire  $(\mathbf{\Lambda}_+^{\text{sq}}; \mathbf{\Lambda}_-^0)$ . Lorsque la fréquence est élevée en revanche, les performances de ces deux paires sont similaires. Pour la résolution de problèmes à haute fréquence, il n'est donc pas nécessaire d'implémenter le couplage faible BEM-BEM électromagnétique reformulé en utilisant la paire  $(\mathbf{\Lambda}_+^{\text{sq}}; \mathbf{\Lambda}_-^{\text{sq}})$ , le faire à partir de la paire  $(\mathbf{\Lambda}_+^{\text{sq}}; \mathbf{\Lambda}_-^0)$  étant suffisant. D'un point de vue computationnel, ceci est particulièrement intéressant. En effet, implémenter le couplage faible BEM-BEM électromagnétique reformulé en ayant recours à la paire  $(\mathbf{\Lambda}_+^{\text{sq}}; \mathbf{\Lambda}_-^0)$  et non à la paire  $(\mathbf{\Lambda}_+^{\text{sq}}; \mathbf{\Lambda}_-^{\text{sq}})$  permet de réduire le coût d'une itération GMRES. Pour finir, nous rappelons que nous avons effectué les tests de performance sur le couplage faible BEM-BEM électromagnétique reformulé en ayant choisi les paramètres de Padé comme indiqué ci-dessous :

$$N_p = 4 \quad , \quad \theta_p = \frac{\pi}{2}.$$

Bien que l'influence de ces paramètres sur la vitesse de convergence du couplage faible BEM-BEM électromagnétique reformulé n'ait pas été étudiée de manière exhaustive, quelques tests rapides nous ont montré que ce choix est optimal en pratique.

# Conclusion générale

Dans la première partie de cette thèse, nous nous sommes intéressés à un problème de diffraction-transmission harmonique, tridimensionnel et acoustique pour lequel l'objet diffractant peut être inhomogène. Nous avons tout d'abord présenté des méthodes de résolution classiques pour ce problème. Ces méthodes, qualifiées de couplages forts, sont caractérisées par le fait qu'elles combinent au sein d'une même formulation les équations associées aux domaines intérieur et extérieur du problème de diffraction-transmission. Le premier couplage fort que nous avons introduit est de type BEM-BEM. Cela signifie concrètement qu'il est exclusivement construit à partir d'équations intégrales surfaciques. Il ne peut donc être utilisé pour résoudre le problème de diffraction-transmission que si l'objet diffractant est homogène. Dans un second temps, nous avons présenté un couplage fort de type FEM-BEM. Nous rappelons que les couplages forts FEM-BEM sont obtenus à partir d'équations intégrales surfaciques et d'une formulation variationnelle volumique respectivement associées aux parties extérieure et intérieure du problème de diffraction-transmission. Ils permettent donc de résoudre le problème de diffraction-transmission que l'objet diffractant soit homogène ou non.

Nous avons ensuite expliqué que certains couplages forts BEM-BEM et que les couplages forts FEM-BEM dans leur ensemble, bien que classiques, n'étaient pas adaptés à la résolution du problème de diffraction-transmission lorsque la fréquence est très élevée. Nous en rappelons ici les raisons de manière très succincte. La discrétisation des couplages forts BEM-BEM par la méthode des éléments finis surfaciques génère des systèmes complexes, pleins et de grande taille. En pratique, ces systèmes doivent être compressés et résolus de manière itérative pour des raisons de besoins en mémoire et de temps de calcul. La résolution itérative ne constitue toutefois pas une approche viable pour tous les couplages forts BEM-BEM. En effet, la convergence des méthodes itératives peut être très lente pour certains de ces couplages. Les systèmes issus de la discrétisation des couplages forts FEM-BEM sont également complexes et de grande taille. Ils sont en revanche constitués à la fois de parties pleines et de parties creuses. Leur résolution doit aussi être faite de manière itérative, encore une fois pour des questions de mémoire et de temps de calcul. Les méthodes itératives convergent toutefois très lentement lorsqu'elles sont utilisées pour résoudre des couplages forts FEM-BEM. Il n'existe par ailleurs pas de préconditionneurs robustes permettant de pallier ce problème. Pour finir, il serait intéressant d'implémenter les couplages forts FEM-BEM en combinant les méthodes de compression et les méthodes de décomposition de domaine. Il n'y a toutefois aucune approche clairement définie à ce jour permettant d'arriver à cette fin.

Dans l'optique de contourner les limitations des couplages forts BEM-BEM et FEM-BEM, nous avons proposé un couplage faible, pouvant être aussi bien de type BEM-BEM que de type FEM-BEM, permettant de résoudre le problème de diffraction-transmission. Ce couplage faible correspond concrètement à une méthode de décomposition de domaine itérant entre l'objet diffractant et le milieu extérieur. Il ne s'agit toutefois pas d'une méthode de décomposition de domaine au sens classique du terme. En effet, le couplage faible est avant tout une reformulation équivalente du problème de diffraction-transmission. Cette reformulation ne peut être résolue efficacement que de manière itérative. De par sa grande robustesse, nous avons choisi de recourir à la procédure GMRES pour résoudre le couplage faible. Notons toutefois que le couplage faible peut également être résolu par le biais de méthodes de point fixe. Cette approche est par ailleurs équivalente à des algorithmes de décomposition de domaine standard.

Dans ce travail, nous avons choisi de résoudre les sous-problèmes associés au couplage faible de manière directe. Des formulations pour la résolution des sous-problèmes appropriées à cette approche ont donc été proposées. A titre informatif, nous avons toutefois expliqué comment préconditionner, au niveau continu, les formulations basées sur des équations intégrales surfaciques de sorte à les rendre adaptées à une résolution itérative.

Nous avons montré qu'il existe des opérateurs de transmission optimaux pour le couplage faible. Ces opérateurs permettent d'échanger de l'information de la meilleure façon possible entre l'objet diffractant et le

milieu extérieur. De manière plus rigoureuse, les opérateurs de transmission optimaux réduisent l'opérateur du couplage faible à l'identité rendant ainsi la résolution du couplage faible triviale. D'un point de vue pratique, les opérateurs de transmission optimaux présentent le gros défaut de correspondre à des opérateurs DtN. Les temps de calcul et les besoins en mémoire nécessaires à l'évaluation numérique des opérateurs DtN étant particulièrement importants, ceci constitue une limitation sérieuse. Pour pallier ce problème, nous avons proposé d'utiliser comme opérateurs de transmission des approximations des opérateurs DtN dont l'évaluation requiert beaucoup moins de ressources. Dans un premier temps, nous avons expliqué comment introduire, à partir de raisonnements microlocaux, des approximations de type racine carrée des opérateurs DtN associés à l'objet diffractant et au milieu extérieur. Des approximations d'ordre 0 des opérateurs DtN ont ensuite été déduites des approximations de type racine carrée. Dans l'optique de mieux prendre en compte sa nature non locale, nous avons également proposé une approximation intégrale de l'opérateur DtN associé à l'objet diffractant. Cette dernière est construite à partir de l'inverse de l'opérateur de simple couche surfacique et de l'approximation de type racine carrée de l'opérateur DtN associé au milieu extérieur. Enfin, nous avons présenté les approximations de Padé de l'opérateur racine carrée intervenant dans les approximations des opérateurs DtN. Nous rappelons que ces approximations de Padé permettent de réduire le coût en mémoire et en temps de calcul de l'évaluation numérique des opérateurs de transmission.

Les premiers tests numériques que nous avons effectués, qui étaient en réalité semi-numériques/semi-analytiques, concernaient la sphère unité homogène. Ces tests reposaient sur les expressions analytiques des valeurs propres de l'opérateur du couplage faible, des opérateurs DtN et des approximations des opérateurs DtN. Ils ont tout d'abord permis d'évaluer la qualité des approximations des opérateurs DtN présentées dans ce travail. Nous avons par exemple constaté que les approximations de type racine carrée sont plus précises que les approximations d'ordre 0. Nous avons également observé que l'opérateur DtN intérieur est mieux approché par son approximation intégrale que par son approximation de type racine carrée. Ajouté à cela, les approximations intégrale de l'opérateur DtN intérieur et de type racine carrée de l'opérateur DtN extérieur se sont révélées approximer les opérateurs DtN intérieur et extérieur respectivement avec le même niveau de précision. Grâce aux tests semi-numériques/semi-analytiques, les valeurs à donner aux paramètres intervenant dans les approximations de Padé des opérateurs DtN ont ensuite pu être déterminées. Nous avons en effet constaté qu'il est suffisant de ne considérer que quatre termes dans les approximations de Padé et que la rotation de branche doit être de 90 degrés. Par la suite, les tests semi-numériques/semi-analytiques ont apporté la première preuve concrète de la pertinence pratique du couplage faible. Pour finir, ils ont montré que le couplage faible souffre de problèmes de résonance.

Après avoir présenté les résultats des tests semi-numériques/semi-analytiques, nous avons expliqué comment discrétiser le couplage faible, qu'il soit de type BEM-BEM ou de type FEM-BEM. De manière très concise, les opérateurs de transmission et les équations intégrales ont été discrétisés en utilisant les éléments finis  $P_1$ . Pour les formulations variationnelles volumiques en revanche, nous avons eu recours, pour des questions de précision, aux éléments finis  $P_2$ . Concernant l'implémentation pratique du couplage faible, nous avons expliqué qu'il pouvait être intéressant de compresser les matrices issues de la discrétisation des formulations intégrales permettant de résoudre les sous-problèmes. La compression de ces matrices consiste concrètement à éliminer les inconnues auxiliaires qu'il est nécessaire d'introduire pour discrétiser les opérateurs de transmission. Pour finir, nous rappelons que nous avons validé nos implémentations des couplages faibles BEM-BEM et FEM-BEM en programmant également les couplages forts BEM-BEM et FEM-BEM.

A la fin de la partie sur l'acoustique, nous avons testé numériquement les couplages faibles BEM-BEM et FEM-BEM. Il en est ressorti que ces couplages doivent être construits à partir des approximations de type racine carrée des opérateurs DtN associés à l'objet diffractant et au milieu extérieur. Ce choix des opérateurs de transmission est le plus intéressant en cela qu'il permet de garantir la plus faible dépendance du nombre d'itérations GMRES nécessaires à la résolution du couplage faible en le nombre d'onde et le pas du maillage.

Dans un second temps, nous nous sommes penchés sur la résolution numérique d'un problème de diffraction-transmission électromagnétique. Ce problème étant l'analogue exact de celui considéré en acoustique, nous avons procédé, dans la seconde partie de cette thèse, de la même manière que dans la première. Pour commencer, deux couplages forts, un de type BEM-BEM et un autre de type FEM-BEM, permettant de résoudre le problème de diffraction-transmission électromagnétique ont été présentés. Ces couplages forts correspondent aux équivalents électromagnétiques de ceux introduits dans la partie sur l'acoustique. Nous avons ensuite proposé un couplage faible électromagnétique, similaire au couplage faible acoustique, adapté à la résolution du problème de diffraction-transmission électromagnétique. Dans l'optique de résoudre les sous-problèmes associés au couplage faible électromagnétique, les formulations adoptées pour la résolution des sous-problèmes du couplage faible acoustique ont alors été transposées à l'électromagnétisme.

---

Nous avons montré que le couplage faible électromagnétique admet, comme le couplage faible acoustique, des opérateurs de transmission optimaux. Ceux-ci ne sont toutefois pas liés à des opérateurs DtN mais à des opérateurs MtE. L'évaluation numérique des opérateurs MtE, comme celle des opérateurs DtN, requiert des ressources en temps de calcul et en mémoire importantes. Pour pallier ce problème, nous avons choisi de procéder de la même manière que pour le couplage faible acoustique, c'est-à-dire d'utiliser des approximations des opérateurs MtE comme opérateurs de transmission. Nous avons alors présenté des approximations des opérateurs MtE du même type que celles introduites pour les opérateurs DtN.

Des tests semi-numériques/semi-analytiques ont également été menés dans la partie sur l'électromagnétisme. Ils ont tout d'abord permis de constater que les approximations des opérateurs DtN et MtE présentées dans ce travail se hiérarchisent, en termes de précision, de la même manière. Ils ont aussi montré que les paramètres intervenant dans les approximations de Padé des opérateurs racine carrée peuvent avoir les mêmes valeurs en acoustique et en électromagnétisme. Pour finir, grâce aux tests semi-numériques/semi-analytiques, nous avons pu observer que le couplage faible électromagnétique souffre, comme le couplage faible acoustique, de problèmes de résonance.

Pour des questions de temps, seul le couplage faible électromagnétique de type BEM-BEM a été implémenté numériquement pendant cette thèse. Sa discrétisation s'est par ailleurs révélée particulièrement délicate. Lorsque nous avons cherché à discrétiser le couplage faible électromagnétique, nous avons en effet été confrontés à deux difficultés majeures, à savoir la représentation de ses inconnues au niveau discret et l'évaluation numérique de l'opérateur de rotation  $\cdot \wedge \mathbf{n}$ . Dans ce travail, il a notamment été expliqué en détails pourquoi il est préférable de ne pas discrétiser les inconnues du couplage faible électromagnétique par le biais des éléments finis  $RT_0$ . Pour contourner ce problème, nous avons reformulé le couplage faible électromagnétique grâce à la décomposition de Helmholtz. Cette reformulation est intéressante en cela qu'elle simplifie grandement la représentation des inconnues du couplage faible électromagnétique au niveau discret ainsi que l'évaluation numérique de l'opérateur de rotation. Enfin, des tests numériques ont montré que, d'une manière générale, le couplage faible électromagnétique doit être implémenté, comme le couplage faible acoustique et pour les mêmes raisons, à partir des approximations de type racine carrée des opérateurs MtE. Pour la résolution de problèmes à haute fréquence, il n'est toutefois pas nécessaire d'avoir recours à l'approximation de type racine carrée de l'opérateur MtE associé à l'objet diffractant. Cette dernière peut en fait être remplacée par son homologue d'ordre 0 sans que les performances du couplage faible électromagnétique n'en soient affectées pour autant. Ceci est particulièrement intéressant d'un point de vue computationnel. En effet, l'utilisation de l'approximation d'ordre 0 de l'opérateur MtE associé à l'objet diffractant permet de réduire le coût d'une itération de la procédure GMRES.

Pour finir, nous présentons quelques perspectives de recherche s'inscrivant dans la continuité de cette thèse. Il serait tout d'abord intéressant d'implémenter le couplage faible FEM-BEM électromagnétique afin de tester sa robustesse vis-à-vis des montées en fréquence et des raffinements de maillage. Ensuite, l'utilisation, comme opérateurs de transmission, des approximations de type racine carrée des opérateurs DtN en cours de développement pour les polyèdres (Modave, Geuzaine, Antoine) pourrait être explorée. Si cette approche se révélait fructueuse, il serait alors naturel de chercher à l'étendre à l'électromagnétisme. Il est par ailleurs raisonnable de penser que les nouvelles approximations de type racine carrée des opérateurs DtN extérieurs associés aux objets diffractant polyédriques permettent d'améliorer la précision des approximations intégrales des opérateurs DtN intérieurs correspondant. Nous rappelons à présent que les approximations intégrales des opérateurs DtN et MtE intérieurs ne sont pas bien définies lorsque les opérateurs de simple couche surfaciques acoustique et électromagnétique ne sont pas inversibles. Le fait de régulariser ces opérateurs pourrait permettre de contourner ce problème. Se pose alors la question du choix et de l'optimisation de la régularisation de sorte à obtenir les meilleures approximations possibles. Nous avons mentionné que les couplages faibles proposés dans ce travail souffrent de problèmes de résonance. Il serait donc intéressant de savoir si il est possible de remédier à ces problèmes.

En vue d'une industrialisation, les couplages faibles doivent être implémentés de manière optimisée et parallélisée. Cela permettrait en particulier d'évaluer plus précisément les potentiels de ces méthodes en termes de temps de calcul. Les formulations variationnelles volumiques doivent notamment être résolues par des algorithmes de décomposition de domaine. Pour résoudre les équations intégrales surfaciques à présent, il faut procéder de manière itérative et avoir recours aux méthodes de compression. Dans ce travail, nous n'avons proposé, pour la résolution de chaque sous-problème, qu'une seule formulation par équations intégrales surfaciques. D'autres formulations, potentiellement plus avantageuses d'un point de vue computationnel, pourraient toutefois être développées. Il serait également intéressant de réaliser des tests de performance

sur les versions semi-optimisées des couplages faibles FEM-BEM. Pour ces couplages faibles, nous rappelons que l'opérateur de transmission extérieur est optimal pour la résolution itérative des sous-problèmes extérieurs. Ceci est d'autant plus intéressant que nous avons constaté, grâce aux tests semi-numériques/semi-analytiques, que les vitesses de convergence des couplages faibles semi-optimisés étaient, certes un peu moins bonnes, mais proches de celles des couplages faibles optimisés. Pour des questions de précision, il faudrait implémenter les couplages faibles de sorte à pouvoir augmenter, au besoin, l'ordre des éléments finis volumiques et surfaciques utilisés. Cela permettrait notamment de contrer les phénomènes de pollution et de dispersion numérique lors de montées en fréquence.

D'un point de vue applicatif, il est essentiel que les couplages faibles puissent traiter des objets diffractant composés aussi bien de parties pénétrables que de parties non pénétrables. Les couplages faibles que nous avons proposés dans ce travail s'étendent immédiatement aux objets diffractant dont les matériaux en contact avec le milieu extérieur sont exclusivement pénétrables. Avec ces couplages faibles, il est également possible de traiter les objets diffractant dont certains des matériaux en contact avec le milieu extérieur sont non pénétrables. Il suffit en effet de redéfinir les objets diffractant en les entourant d'une fine couche du matériau constituant le milieu extérieur. Cette approche n'est toutefois pas optimale. Il serait en effet plus intéressant, d'un point de vue computationnel, d'utiliser les interfaces entre le milieu extérieur et les parties pénétrables de l'objet diffractant comme surface d'échange au cours de l'algorithme de décomposition de domaine. Ces interfaces correspondent cependant à des surfaces ouvertes, ce qui soulève un certain nombre de questions auxquelles nous n'avons pas été confrontés dans ce travail. Comment évaluer numériquement les approximations de Padé des opérateurs racine carrée acoustique et électromagnétique sur des surfaces ouvertes ? En particulier, quelles conditions les inconnues auxiliaires doivent-elles vérifier sur le bord de ces surfaces ouvertes ? Ajouté à cela, comment calculer numériquement des décompositions de Helmholtz sur des surfaces ouvertes ? Pour conclure, nous mentionnons qu'il serait intéressant d'étendre les couplages faibles FEM-BEM proposés dans ce travail au cas d'objets diffractant anisotropes.

# Annexes



# Annexe A

## Espaces de Sobolev surfaciques

Dans cette annexe, nous présentons une manière de définir les espaces  $H^s(\Gamma)$  et  $\mathbf{H}_t^s(\Gamma)$ ,  $s \in \mathbb{R}$ , lorsque  $\Gamma$  est  $C^\infty$ . Pour simplifier quelque peu la présentation, nous supposons que  $\Gamma$  est une surface connexe et simplement connexe. Si  $\Gamma$  n'est pas connexe ou pas simplement connexe, des définitions similaires des espaces  $H^s(\Gamma)$  et  $\mathbf{H}_t^s(\Gamma)$  peuvent également être données [88].

### A.1 Espaces de Sobolev surfaciques scalaires

Nous commençons par mentionner qu'il existe une base orthonormale de  $L^2(\Gamma)$ , notée  $(e_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ , vérifiant [88] :

$$e_\ell \in \mathbb{R} \text{ p.p.}, \quad (e_\ell) \subset \mathbf{H}(\nabla_\Gamma, \Gamma), \quad -\Delta_\Gamma e_\ell = \lambda_\ell e_\ell, \quad (\lambda_\ell) \subset \mathbb{R}_+, \quad \lambda_\ell \xrightarrow{\ell \rightarrow +\infty} +\infty. \quad (\text{A.1})$$

Le laplacien scalaire surfacique doit ici être compris au sens faible que nous avons introduit dans la sous-section 2.3.1. Nous rappelons que l'orthonormalité de la famille  $(e_\ell)$  dans  $L^2(\Gamma)$  se traduit par la condition suivante :

$$\forall \ell, k \in \mathbb{N}, \quad \langle e_\ell; e_k \rangle_{L^2(\Gamma)} = \delta_{\ell k}.$$

Le fait que les  $(e_\ell)$  forment une base de  $L^2(\Gamma)$  signifie, quant à lui, que pour tout  $u \in L^2(\Gamma)$ , il existe une unique suite  $(\alpha_\ell) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  telle que :

$$u = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \alpha_\ell e_\ell \quad \text{dans } L^2(\Gamma).$$

Remarquons par ailleurs qu'il est aisé d'expliciter la suite  $(\alpha_\ell)$  :

$$\forall \ell \in \mathbb{N}, \quad \alpha_\ell = \langle u; e_\ell \rangle_{L^2(\Gamma)},$$

et que cette dernière est de carré sommable :

$$\sum_{\ell=0}^{+\infty} |\alpha_\ell|^2 = \|u\|_{L^2(\Gamma)}^2.$$

En exploitant les propriétés (A.1), il est possible de montrer que la famille  $(e_\ell)$  est également une base, orthogonale cette fois, de  $\mathbf{H}(\nabla_\Gamma, \Gamma)$ . Plus précisément, nous avons :

$$\forall \ell, k \in \mathbb{N}, \quad \langle e_\ell; e_k \rangle_{\mathbf{H}(\nabla_\Gamma, \Gamma)} = (1 + \lambda_\ell) \delta_{\ell k}.$$

De plus, si  $u \in \mathbf{H}(\nabla_\Gamma, \Gamma)$ , il existe une unique suite  $(\alpha_\ell) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  telle que :

$$u = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \alpha_\ell e_\ell \quad \text{dans } \mathbf{H}(\nabla_\Gamma, \Gamma),$$

qui est alors donnée par :

$$\forall \ell \in \mathbb{N}, \quad \alpha_\ell = \langle u; e_\ell \rangle_{L^2(\Gamma)}.$$

Remarquons par ailleurs que la somme suivante est finie :

$$\sum_{\ell=0}^{+\infty} (1 + \lambda_\ell) |\alpha_\ell|^2 = \|u\|_{\mathbf{H}(\nabla_\Gamma, \Gamma)}^2.$$

Cette condition de sommabilité sur la suite  $(\alpha_\ell)$  caractérise en fait l'espace  $H(\nabla_\Gamma, \Gamma)$ . Nous disposons en effet du résultat suivant :

$$\forall u \in L^2(\Gamma), \quad u \in H(\nabla_\Gamma, \Gamma) \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{\ell=0}^{+\infty} (1 + \lambda_\ell) |\alpha_\ell|^2 < +\infty \quad \text{où} \quad u = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \alpha_\ell e_\ell \quad \text{dans } L^2(\Gamma).$$

La caractérisation précédente de  $H(\nabla_\Gamma, \Gamma)$  est intéressante en cela qu'elle permet de comprendre les définitions des espaces  $H^s(\Gamma)$  que nous donnons dans cette section. Ce point est précisé un peu plus loin.

Soit  $s$  un réel strictement positif. L'espace  $H^s(\Gamma)$  est défini comme suit :

$$H^s(\Gamma) = \left\{ u \in L^2(\Gamma) : \sum_{\ell=0}^{+\infty} (1 + \lambda_\ell)^s |\alpha_\ell|^2 < +\infty \quad \text{où} \quad u = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \alpha_\ell e_\ell \quad \text{dans } L^2(\Gamma) \right\}.$$

Muni du produit scalaire suivant,  $H^s(\Gamma)$  est un espace de Hilbert :

$$\forall u, v \in H^s(\Gamma), \quad \langle u; v \rangle_{H^s(\Gamma)} = \sum_{\ell=0}^{+\infty} (1 + \lambda_\ell)^s \alpha_\ell \bar{\beta}_\ell \quad \text{où} \quad u = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \alpha_\ell e_\ell, \quad v = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \beta_\ell e_\ell \quad \text{dans } L^2(\Gamma).$$

Ajouté à cela, les  $(e_\ell)$  constituent une base orthogonale de  $H^s(\Gamma)$ . Remarquons notamment que :

$$\forall \ell, k \in \mathbb{N}, \quad \langle e_\ell; e_k \rangle_{H^s(\Gamma)} = (1 + \lambda_\ell)^s \delta_{\ell k}.$$

Enfin, si  $u \in H^s(\Gamma)$  et si  $(\alpha_\ell) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  est l'unique suite telle que :

$$u = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \alpha_\ell e_\ell \quad \text{dans } H^s(\Gamma),$$

nous avons :

$$\forall \ell \in \mathbb{N}, \quad \alpha_\ell = \langle u; e_\ell \rangle_{L^2(\Gamma)}, \quad \sum_{\ell=0}^{+\infty} (1 + \lambda_\ell)^s |\alpha_\ell|^2 = \|u\|_{H^s(\Gamma)}^2 < +\infty.$$

Les définitions de l'espace  $H^s(\Gamma)$  et de son produit scalaire sont également valables si  $s$  est nul et nous constatons que :

$$H^0(\Gamma) = L^2(\Gamma) \quad , \quad \langle \cdot; \cdot \rangle_{H^0} = \langle \cdot; \cdot \rangle_{L^2}.$$

De même, nous vérifions sans difficulté que :

$$H^1(\Gamma) = H(\nabla_\Gamma, \Gamma) \quad , \quad \langle \cdot; \cdot \rangle_{H^1} = \langle \cdot; \cdot \rangle_{H(\nabla_\Gamma, \Gamma)}.$$

Les espaces  $H^s(\Gamma)$  peuvent donc être compris comme des généralisations des espaces  $L^2(\Gamma)$  et  $H(\nabla_\Gamma, \Gamma)$ . Pour finir, nous mentionnons le résultat suivant :

$$s_2 > s_1 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad H^{s_2}(\Gamma) \subset H^{s_1}(\Gamma),$$

l'injection linéaire correspondante étant par ailleurs continue :

$$\iota_{H^{s_2}(\Gamma) \rightarrow H^{s_1}(\Gamma)} : \begin{array}{ccc} H^{s_2}(\Gamma) & \rightarrow & H^{s_1}(\Gamma) \\ u & \mapsto & u \end{array}.$$

L'espace  $H^{-s}(\Gamma)$  est défini comme l'ensemble des formes linéaires continues sur  $H^s(\Gamma)$ . Equipé de la norme standard pour les applications linéaires continues :

$$\forall u \in H^{-s}(\Gamma), \quad \|u\|_{H^{-s}(\Gamma)} = \sup_{\|v\|_{H^s(\Gamma)}=1} |\langle u; v \rangle_{H^{-s}(\Gamma) \times H^s(\Gamma)}|,$$

l'espace  $H^{-s}(\Gamma)$  est un espace de Banach. Il s'agit de plus d'un espace de Hilbert puisque la norme sur  $H^{-s}(\Gamma)$  est engendrée par le produit scalaire suivant :

$$\forall u, v \in H^{-s}(\Gamma), \quad \langle u; v \rangle_{H^{-s}(\Gamma)} = \langle \tau^{-1}(v); \tau^{-1}(u) \rangle_{H^s(\Gamma)},$$

L'opérateur  $\tau$  correspondant à l'isométrie bijective anti-linéaire naturelle entre  $H^s(\Gamma)$  et  $H^{-s}(\Gamma)$  fournie par le théorème de Riesz :

$$\begin{array}{ccc} \tau : H^s(\Gamma) & \rightarrow & H^{-s}(\Gamma) \\ u & \mapsto & \tau(u) : H^s(\Gamma) \rightarrow \mathbb{C} \\ & & v \mapsto \langle v; u \rangle_{H^s(\Gamma)} \end{array} .$$

L'espace  $L^2(\Gamma)$  est injecté dans  $H^{-s}(\Gamma)$  par le biais de l'application continue et linéaire suivante :

$$\iota_{L^2 \rightarrow H^{-s}} : L^2(\Gamma) \rightarrow H^{-s}(\Gamma) \\ u \mapsto \iota_{L^2 \rightarrow H^{-s}}(u) : H^s(\Gamma) \rightarrow \mathbb{C} \\ v \mapsto \langle v; \bar{u} \rangle_{L^2(\Gamma)} .$$

La famille  $(\iota_{L^2 \rightarrow H^{-s}}(e_\ell))$ , dont les éléments sont abusivement mais classiquement notés  $(e_\ell)$ , est alors une base orthogonale de  $H^{-s}(\Gamma)$ . Notons que les normes des  $(e_\ell)$  dans  $H^{-s}(\Gamma)$  sont données par la relation suivante :

$$\forall \ell, k \in \mathbb{N}, \quad \langle e_\ell; e_k \rangle_{H^{-s}(\Gamma)} = (1 + \lambda_\ell)^{-s} \delta_{\ell k} .$$

De plus, si  $u \in H^{-s}(\Gamma)$ , l'unique suite  $(\alpha_\ell) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  telle que :

$$u = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \alpha_\ell e_\ell \quad \text{dans } H^{-s}(\Gamma),$$

vérifie :

$$\forall \ell \in \mathbb{N}, \quad \alpha_\ell = \langle u; e_\ell \rangle_{H^{-s}(\Gamma) \times H^s(\Gamma)} \quad , \quad \sum_{\ell=0}^{+\infty} (1 + \lambda_\ell)^{-s} |\alpha_\ell|^2 = \|u\|_{H^{-s}(\Gamma)}^2 < +\infty .$$

Enfin, nous remarquons sans difficulté que si  $s_2 > s_1 > 0$ ,  $H^{-s_1}(\Gamma)$  s'injecte continûment dans  $H^{-s_2}(\Gamma)$ , l'injection linéaire sous-jacente étant donnée ci-dessous :

$$\iota_{H^{-s_1} \rightarrow H^{-s_2}} : H^{-s_1}(\Gamma) \rightarrow H^{-s_2}(\Gamma) \\ u \mapsto \iota_{H^{-s_1} \rightarrow H^{-s_2}}(u) : H^{s_2}(\Gamma) \rightarrow \mathbb{C} \\ v \mapsto \langle u; v \rangle_{H^{-s_1}(\Gamma) \times H^{s_1}(\Gamma)} .$$

## A.2 Espaces de Sobolev surfaciques vectoriels

La construction des espaces  $\mathbf{H}_\ell^s(\Gamma)$  est similaire à celle des espaces  $H^s(\Gamma)$ . Elle repose sur le fait que la concaténation des familles  $(\mathbf{e}_\ell^1)_{\ell \in \mathbb{N}^*}$  et  $(\mathbf{e}_\ell^2)_{\ell \in \mathbb{N}^*}$  définies ci-dessous :

$$\forall \ell \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{e}_\ell^1 = \nabla_\Gamma e_\ell \quad , \quad \forall \ell \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{e}_\ell^2 = \mathbf{rot}_\Gamma e_\ell,$$

est une base orthogonale de  $\mathbf{L}_\ell^2(\Gamma)$  [88]. Concrètement, nous avons :

$$\forall \ell, k \in \mathbb{N}^*, \quad \langle \mathbf{e}_\ell^1; \mathbf{e}_k^1 \rangle_{\mathbf{L}_\ell^2(\Gamma)} = \langle \mathbf{e}_\ell^2; \mathbf{e}_k^2 \rangle_{\mathbf{L}_\ell^2(\Gamma)} = \lambda_\ell \delta_{\ell k} \quad , \quad \forall \ell, k \in \mathbb{N}^*, \quad \langle \mathbf{e}_\ell^1; \mathbf{e}_k^2 \rangle_{\mathbf{L}_\ell^2(\Gamma)} = 0 .$$

De plus, si  $\mathbf{u} \in \mathbf{L}_\ell^2(\Gamma)$ , il existe deux suites  $(\alpha_\ell), (\beta_\ell) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$  telles que :

$$\mathbf{u} = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \alpha_\ell \mathbf{e}_\ell^1 + \beta_\ell \mathbf{e}_\ell^2 \quad \text{dans } \mathbf{L}_\ell^2(\Gamma) .$$

Ces suites peuvent bien sûr s'expliciter :

$$\forall \ell \in \mathbb{N}^*, \quad \alpha_\ell = \lambda_\ell^{-1} \langle \mathbf{u}; \mathbf{e}_\ell^1 \rangle_{\mathbf{L}_\ell^2(\Gamma)} \quad , \quad \forall \ell \in \mathbb{N}^*, \quad \beta_\ell = \lambda_\ell^{-1} \langle \mathbf{u}; \mathbf{e}_\ell^2 \rangle_{\mathbf{L}_\ell^2(\Gamma)},$$

et elles vérifient par ailleurs :

$$\sum_{\ell=1}^{+\infty} \lambda_\ell (|\alpha_\ell|^2 + |\beta_\ell|^2) = \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}_\ell^2(\Gamma)}^2 < +\infty .$$

Notons que nous avons exclu  $\nabla_\Gamma e_0$  et  $\mathbf{rot}_\Gamma e_0$  des familles  $(\mathbf{e}_\ell^1)_{\ell \in \mathbb{N}^*}$  et  $(\mathbf{e}_\ell^2)_{\ell \in \mathbb{N}^*}$  parce qu'ils sont nuls. En effet, la fonction  $e_0$  est constante [88] :

$$\lambda_0 = 0 \quad , \quad e_0 = |\Gamma|^{-\frac{1}{2}} .$$

Si  $s > 0$ , l'espace  $\mathbf{H}_t^s(\Gamma)$  est défini par :

$$\mathbf{H}_t^s(\Gamma) = \left\{ \mathbf{u} \in \mathbf{L}_t^2(\Gamma) : \sum_{\ell=1}^{+\infty} \lambda_\ell^{s+1} (|\alpha_\ell|^2 + |\beta_\ell|^2) < +\infty \quad \text{où} \quad \mathbf{u} = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \alpha_\ell \mathbf{e}_\ell^1 + \beta_\ell \mathbf{e}_\ell^2 \quad \text{dans} \quad \mathbf{L}_t^2(\Gamma) \right\}.$$

Il jouit naturellement d'une structure d'espace de Hilbert, son produit scalaire étant donné ci-dessous pour  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}_t^s(\Gamma)$  :

$$\langle \mathbf{u}; \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{H}_t^s(\Gamma)} = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \lambda_\ell^{s+1} (\alpha_\ell \overline{\alpha'_\ell} + \beta_\ell \overline{\beta'_\ell}) \quad \text{où} \quad \mathbf{u} = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \alpha_\ell \mathbf{e}_\ell^1 + \beta_\ell \mathbf{e}_\ell^2, \quad \mathbf{v} = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \alpha'_\ell \mathbf{e}_\ell^1 + \beta'_\ell \mathbf{e}_\ell^2 \quad \text{dans} \quad \mathbf{L}_t^2(\Gamma).$$

La concaténation des familles  $(\mathbf{e}_\ell^1)_{\ell \in \mathbb{N}^*}$  et  $(\mathbf{e}_\ell^2)_{\ell \in \mathbb{N}^*}$  est alors une base orthogonale de  $\mathbf{H}_t^s(\Gamma)$ . Nous disposons en effet des relations suivantes :

$$\forall \ell, k \in \mathbb{N}^*, \quad \langle \mathbf{e}_\ell^1; \mathbf{e}_k^1 \rangle_{\mathbf{H}_t^s(\Gamma)} = \langle \mathbf{e}_\ell^2; \mathbf{e}_k^2 \rangle_{\mathbf{H}_t^s(\Gamma)} = \lambda_\ell^{s+1} \delta_{\ell k} \quad , \quad \forall \ell, k \in \mathbb{N}^*, \quad \langle \mathbf{e}_\ell^1; \mathbf{e}_k^2 \rangle_{\mathbf{H}_t^s(\Gamma)} = 0.$$

Ajouté à cela, si  $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_t^s(\Gamma)$ , nous avons :

$$\mathbf{u} = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \alpha_\ell \mathbf{e}_\ell^1 + \beta_\ell \mathbf{e}_\ell^2 \quad \text{dans} \quad \mathbf{H}_t^s(\Gamma),$$

les suites  $(\alpha_\ell), (\beta_\ell) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$  vérifiant :

$$\begin{aligned} \forall \ell \in \mathbb{N}^*, \quad \alpha_\ell &= \lambda_\ell^{-1} \langle \mathbf{u}; \mathbf{e}_\ell^1 \rangle_{\mathbf{L}_t^2(\Gamma)} \quad , \quad \forall \ell \in \mathbb{N}^*, \quad \beta_\ell = \lambda_\ell^{-1} \langle \mathbf{u}; \mathbf{e}_\ell^2 \rangle_{\mathbf{L}_t^2(\Gamma)}, \\ \sum_{\ell=1}^{+\infty} \lambda_\ell^{s+1} (|\alpha_\ell|^2 + |\beta_\ell|^2) &= \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}_t^s(\Gamma)}^2 < +\infty. \end{aligned}$$

Nous mentionnons à présent que l'opérateur  $\cdot \wedge \mathbf{n}$  est continu et isométrique de  $\mathbf{H}_t^s(\Gamma)$  dans lui-même. Pour finir, si  $s_1$  et  $s_2$  sont des réels positifs tels que  $s_2 > s_1$ ,  $\mathbf{H}_t^{s_2}(\Gamma)$  est un sous-espace de  $\mathbf{H}_t^{s_1}(\Gamma)$  et l'injection linéaire suivante est continue :

$$\iota_{\mathbf{H}_t^{s_2}(\Gamma) \rightarrow \mathbf{H}_t^{s_1}(\Gamma)} : \begin{array}{ccc} \mathbf{H}_t^{s_2}(\Gamma) & \rightarrow & \mathbf{H}_t^{s_1}(\Gamma) \\ \mathbf{u} & \mapsto & \mathbf{u} \end{array}.$$

L'espace  $\mathbf{H}_t^{-s}(\Gamma)$  correspond à l'ensemble des formes linéaires continues sur  $\mathbf{H}_t^s(\Gamma)$  muni de la norme classique pour les applications linéaires continues. Comme pour l'espace  $\mathbf{H}^{-s}(\Gamma)$ , il est possible de montrer que cette norme est engendrée par un produit scalaire défini à partir de l'isométrie bijective anti-linéaire naturelle entre  $\mathbf{H}_t^s(\Gamma)$  et  $\mathbf{H}_t^{-s}(\Gamma)$  que nous notons  $\tau$ . L'espace  $\mathbf{H}_t^{-s}(\Gamma)$  est donc un espace de Hilbert. L'espace  $\mathbf{L}_t^2(\Gamma)$  est injecté dans  $\mathbf{H}_t^{-s}(\Gamma)$  grâce à l'injection continue et linéaire donnée ci-dessous :

$$\iota_{\mathbf{L}_t^2 \rightarrow \mathbf{H}_t^{-s}} : \begin{array}{ccc} \mathbf{L}_t^2(\Gamma) & \rightarrow & \mathbf{H}_t^{-s}(\Gamma) \\ \mathbf{u} & \mapsto & \iota_{\mathbf{L}_t^2 \rightarrow \mathbf{H}_t^{-s}}(\mathbf{u}) : \mathbf{H}_t^s(\Gamma) \rightarrow \mathbb{C} \\ & & \mathbf{v} \mapsto \langle \mathbf{v}; \bar{\mathbf{u}} \rangle_{\mathbf{L}_t^2(\Gamma)} \end{array}.$$

La concaténation des familles  $(\mathbf{e}_\ell^1)_{\ell \in \mathbb{N}^*}$  et  $(\mathbf{e}_\ell^2)_{\ell \in \mathbb{N}^*}$  constitue alors une base orthogonale de  $\mathbf{H}_t^{-s}(\Gamma)$ . Plus explicitement, les relations suivantes sont vérifiées :

$$\forall \ell, k \in \mathbb{N}^*, \quad \langle \mathbf{e}_\ell^1; \mathbf{e}_k^1 \rangle_{\mathbf{H}_t^{-s}(\Gamma)} = \langle \mathbf{e}_\ell^2; \mathbf{e}_k^2 \rangle_{\mathbf{H}_t^{-s}(\Gamma)} = \lambda_\ell^{-s+1} \delta_{\ell k} \quad , \quad \forall \ell, k \in \mathbb{N}^*, \quad \langle \mathbf{e}_\ell^1; \mathbf{e}_k^2 \rangle_{\mathbf{H}_t^{-s}(\Gamma)} = 0.$$

En outre, tout élément  $\mathbf{u}$  de  $\mathbf{H}_t^{-s}(\Gamma)$  peut s'écrire comme suit :

$$\mathbf{u} = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \alpha_\ell \mathbf{e}_\ell^1 + \beta_\ell \mathbf{e}_\ell^2 \quad \text{dans} \quad \mathbf{H}_t^{-s}(\Gamma),$$

les suites  $(\alpha_\ell), (\beta_\ell) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$  étant définies par :

$$\forall \ell \in \mathbb{N}^*, \quad \alpha_\ell = \lambda_\ell^{-1} \langle \mathbf{u}; \mathbf{e}_\ell^1 \rangle_{\mathbf{H}_t^{-s}(\Gamma) \times \mathbf{H}_t^s(\Gamma)} \quad , \quad \forall \ell \in \mathbb{N}^*, \quad \beta_\ell = \lambda_\ell^{-1} \langle \mathbf{u}; \mathbf{e}_\ell^2 \rangle_{\mathbf{H}_t^{-s}(\Gamma) \times \mathbf{H}_t^s(\Gamma)},$$

et vérifiant :

$$\sum_{\ell=1}^{+\infty} \lambda_\ell^{-s+1} (|\alpha_\ell|^2 + |\beta_\ell|^2) = \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}_t^{-s}(\Gamma)}^2 < +\infty.$$

Il est également possible de définir l'opérateur  $\cdot \wedge \mathbf{n}$  sur  $\mathbf{H}_t^{-s}(\Gamma)$  comme suit :

$$\forall \mathbf{u} \in \mathbf{H}_t^{-s}(\Gamma), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_t^s(\Gamma), \quad \langle \mathbf{u} \wedge \mathbf{n}; \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{H}_t^{-s}(\Gamma) \times \mathbf{H}_t^s(\Gamma)} = \langle \mathbf{v}; \tau^{-1}(\mathbf{u}) \wedge \mathbf{n} \rangle_{\mathbf{H}_t^s(\Gamma)},$$

soit, de manière plus condensée :

$$\cdot \wedge \mathbf{n} = \tau \circ (\cdot \wedge \mathbf{n}) \circ \tau^{-1}.$$

L'opérateur  $\cdot \wedge \mathbf{n}$  est alors continu et isométrique de  $\mathbf{H}_t^{-s}(\Gamma)$  dans lui-même. Pour finir, si  $s_1$  et  $s_2$  sont des réels strictement positifs vérifiant  $s_2 > s_1$ , nous pouvons injecter  $\mathbf{H}_t^{-s_1}$  de manière continue dans  $\mathbf{H}_t^{-s_2}$  grâce à l'application linéaire donnée ci-dessous :

$$\begin{array}{ccc} \iota_{\mathbf{H}_t^{-s_1} \rightarrow \mathbf{H}_t^{-s_2}} : \mathbf{H}_t^{-s_1}(\Gamma) & \rightarrow & \mathbf{H}_t^{-s_2}(\Gamma) \\ \mathbf{u} & \mapsto & \iota_{\mathbf{H}_t^{-s_1} \rightarrow \mathbf{H}_t^{-s_2}}(\mathbf{u}) : \mathbf{H}_t^{s_2}(\Gamma) & \rightarrow & \mathbb{C} \\ & & \mathbf{v} & \mapsto & \langle \mathbf{u}; \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{H}_t^{-s_1}(\Gamma) \times \mathbf{H}_t^{s_1}(\Gamma)} \end{array} .$$

### A.3 Précisions sur les opérateurs différentiels surfaciques

Dans la sous-section 2.3.1, nous avons défini les opérateurs  $\nabla_\Gamma$ ,  $\text{div}_\Gamma$ ,  $\mathbf{rot}_\Gamma$  et  $\text{rot}_\Gamma$  sur les espaces  $\mathbf{H}^s(\Gamma)$  et  $\mathbf{H}_t^s(\Gamma)$  :

$$\begin{array}{ll} \nabla_\Gamma : \mathbf{H}^{s+1}(\Gamma) \rightarrow \mathbf{H}_t^s(\Gamma) & , \quad \text{div}_\Gamma : \mathbf{H}_t^{s+1}(\Gamma) \rightarrow \mathbf{H}^s(\Gamma), \\ \mathbf{rot}_\Gamma : \mathbf{H}^{s+1}(\Gamma) \rightarrow \mathbf{H}_t^s(\Gamma) & , \quad \text{rot}_\Gamma : \mathbf{H}_t^{s+1}(\Gamma) \rightarrow \mathbf{H}^s(\Gamma), \end{array}$$

et nous avons affirmé que ces opérateurs généralisaient les notions de gradient, de divergence, de rotationnel vectoriel et de rotationnel scalaire surfaciques faibles. Les résultats que nous donnons ci-dessous précisent ce propos :

$$\begin{array}{llll} \forall u \in L^2(\Gamma), \quad u \in \mathbf{H}(\nabla_\Gamma, \Gamma) & \Leftrightarrow & \exists \mathbf{v} \in \mathbf{L}_t^2(\Gamma), \quad \nabla_\Gamma u = \iota_{\mathbf{L}_t^2 \rightarrow \mathbf{H}_t^{-1}}(\mathbf{v}) & \text{dans } \mathbf{H}_t^{-1}(\Gamma), \\ \forall \mathbf{u} \in \mathbf{L}_t^2(\Gamma), \quad \mathbf{u} \in \mathbf{H}_t(\text{div}_\Gamma, \Gamma) & \Leftrightarrow & \exists v \in L^2(\Gamma), \quad \text{div}_\Gamma \mathbf{u} = \iota_{L^2 \rightarrow \mathbf{H}^{-1}}(v) & \text{dans } \mathbf{H}^{-1}(\Gamma), \\ \forall u \in L^2(\Gamma), \quad u \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}_\Gamma, \Gamma) & \Leftrightarrow & \exists \mathbf{v} \in \mathbf{L}_t^2(\Gamma), \quad \mathbf{rot}_\Gamma u = \iota_{\mathbf{L}_t^2 \rightarrow \mathbf{H}_t^{-1}}(\mathbf{v}) & \text{dans } \mathbf{H}_t^{-1}(\Gamma), \\ \forall \mathbf{u} \in \mathbf{L}_t^2(\Gamma), \quad \mathbf{u} \in \mathbf{H}_t(\text{rot}_\Gamma, \Gamma) & \Leftrightarrow & \exists v \in L^2(\Gamma), \quad \text{rot}_\Gamma \mathbf{u} = \iota_{L^2 \rightarrow \mathbf{H}^{-1}}(v) & \text{dans } \mathbf{H}^{-1}(\Gamma), \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \forall u \in \mathbf{H}(\nabla_\Gamma, \Gamma), \quad \nabla_\Gamma u = \iota_{\mathbf{L}_t^2 \rightarrow \mathbf{H}_t^{-1}}(\nabla_\Gamma u) & \text{dans } \mathbf{H}_t^{-1}(\Gamma), \\ \forall \mathbf{u} \in \mathbf{H}_t(\text{div}_\Gamma, \Gamma), \quad \text{div}_\Gamma \mathbf{u} = \iota_{L^2 \rightarrow \mathbf{H}^{-1}}(\text{div}_\Gamma \mathbf{u}) & \text{dans } \mathbf{H}^{-1}(\Gamma), \\ \forall u \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}_\Gamma, \Gamma), \quad \mathbf{rot}_\Gamma u = \iota_{\mathbf{L}_t^2 \rightarrow \mathbf{H}_t^{-1}}(\mathbf{rot}_\Gamma u) & \text{dans } \mathbf{H}_t^{-1}(\Gamma), \\ \forall \mathbf{u} \in \mathbf{H}_t(\text{rot}_\Gamma, \Gamma), \quad \text{rot}_\Gamma \mathbf{u} = \iota_{L^2 \rightarrow \mathbf{H}^{-1}}(\text{rot}_\Gamma \mathbf{u}) & \text{dans } \mathbf{H}^{-1}(\Gamma). \end{array}$$



# Bibliographie

- [1] M. Abramowitz and I. A. Stegun. *Handbook of mathematical functions : with formulas, graphs, and mathematical tables*, volume 55. Courier Corporation, 1964.
- [2] F. Alouges, S. Borel, and D. P. Levadoux. A stable well-conditioned integral equation for electromagnetism scattering. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 204(2) :440–451, 2007.
- [3] P. R. Amestoy, T. A. Davis, and I. S. Duff. An approximate minimum degree ordering algorithm. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 17(4) :886–905, 1996.
- [4] F. P. Andriulli, K. Cools, H. Bagci, F. Olyslager, A. Buffa, S. Christiansen, and E. Michielssen. A multiplicative Calderón preconditioner for the electric field integral equation. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 56(8) :2398–2412, 2008.
- [5] X. Antoine, H. Barucq, and A. Bendali. Bayliss–Turkel-like radiation conditions on surfaces of arbitrary shape. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 229(1) :184–211, 1999.
- [6] X. Antoine and Y. Boubendir. An integral preconditioner for solving the two-dimensional scattering transmission problem using integral equations. *International Journal of Computer Mathematics*, 85(10) :1473–1490, 2008.
- [7] X. Antoine and M. Darbas. Alternative integral equations for the iterative solution of acoustic scattering problems. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 58(1) :107–128, 2005.
- [8] X. Antoine and M. Darbas. Generalized combined field integral equations for the iterative solution of the three-dimensional Helmholtz equation. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 41(1) :147–167, 2007.
- [9] X. Antoine, M. Darbas, and Y. Y. Lu. An improved surface radiation condition for high-frequency acoustic scattering problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(33–36) :4060–4074, 2006.
- [10] A. Bachelot and V. Lange. Time dependent integral method for Maxwell’s system with impedance boundary condition. *WIT Transactions on Modelling and Simulation*, 11, 1995.
- [11] A. Bayliss, M. Gunzburger, and E. Turkel. Boundary conditions for the numerical solution of elliptic equations in exterior regions. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 42(2) :430–451, 1982.
- [12] A. Bayliss and E. Turkel. Radiation boundary conditions for wave-like equations. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 33(6) :707–725, 1980.
- [13] A. Bendali, Y. Boubendir, and M. B. Fares. A FETI-like domain decomposition method for coupling finite elements and boundary elements in large-size problems of acoustic scattering. *Computers & Structures*, 85(9) :526–535, 2007.
- [14] J.-P. Berenger. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *Journal of Computational Physics*, 114(2) :185–200, 1994.
- [15] P. G. Bergmann. The wave equation in a medium with a variable index of refraction. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 17(4) :329–333, 1946.
- [16] A. Bermúdez, L. Hervella-Nieto, A. Prieto, and R. Rodríguez. Perfectly matched layers for time-harmonic second order elliptic problems. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 17(1) :77–107, 2010.
- [17] S. Borel, D. P. Levadoux, and F. Alouges. A new well-conditioned integral formulation for Maxwell equations in three dimensions. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 53(9) :2995–3004, 2005.
- [18] S. Börm. *Efficient numerical methods for non-local operators : H2-matrix compression, algorithms and analysis*, volume 14. European Mathematical Society, 2010.
- [19] M. El Bouajaji, X. Antoine, and C. Geuzaine. Approximate local magnetic-to-electric surface operators for time-harmonic Maxwell’s equations. *Journal of Computational Physics*, 279 :241–260, 2014.

- [20] M. El Bouajaji, B. Thierry, X. Antoine, and C. Geuzaine. A quasi-optimal domain decomposition algorithm for the time-harmonic Maxwell's equations. *Journal of Computational Physics*, 294 :38–57, 2015.
- [21] Y. Boubendir, X. Antoine, and C. Geuzaine. A quasi-optimal non-overlapping domain decomposition algorithm for the Helmholtz equation. *Journal of Computational Physics*, 231(2) :262–280, 2012.
- [22] Y. Boubendir, A. Bendali, and M. B. Fares. Coupling of a non-overlapping domain decomposition method for a nodal finite element method with a boundary element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 73(11) :1624–1650, 2008.
- [23] Y. Boubendir, O. Bruno, D. Levadoux, and C. Turc. Integral equations requiring small numbers of Krylov-subspace iterations for two-dimensional smooth penetrable scattering problems. *Applied Numerical Mathematics*, 95 :82–98, 2015.
- [24] Y. Boubendir, V. Dominguez, D. Levadoux, and C. Turc. Regularized combined field integral equations for acoustic transmission problems. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 75(3) :929–952, 2015.
- [25] Y. Boubendir, C. Turc, and V. Domínguez. High-order Nyström discretizations for the solution of integral equation formulations of two-dimensional Helmholtz transmission problems. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 36(1) :463–492, 2015.
- [26] N. Bourbaki. *Espaces vectoriels topologiques : Chapitres 1 à 5*. Springer, 2007.
- [27] F. Brezzi and C. Johnson. On the coupling of boundary integral and finite element methods. *Calcolo*, 16(2) :189–201, 1979.
- [28] A. Buffa. Remarks on the discretization of some noncoercive operator with applications to heterogeneous Maxwell equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 43(1) :1–18, 2005.
- [29] A. Buffa and S. H. Christiansen. A dual finite element complex on the barycentric refinement. *Mathematics of Computation*, 76(260) :1743–1769, 2007.
- [30] A. Buffa and R. Hiptmair. Galerkin boundary element methods for electromagnetic scattering. In *Topics in computational wave propagation*, pages 83–124. Springer, 2003.
- [31] A. Buffa, R. Hiptmair, T. von Petersdorff, and C. Schwab. Boundary element methods for Maxwell transmission problems in Lipschitz domains. *Numerische Mathematik*, 95(3) :459–485, 2003.
- [32] A. Chernov and C. Schwab. Exponential convergence of Gauss-Jacobi quadratures for singular integrals over simplices in arbitrary dimension. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 50(3) :1433–1455, 2012.
- [33] A. Chernov, T. von Petersdorff, and C. Schwab. Exponential convergence of *hp* quadrature for integral operators with gevrey kernels. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 45(3) :387–422, 2011.
- [34] W. C. Chew and W. H. Weedon. A 3D perfectly matched medium from modified Maxwell's equations with stretched coordinates. *Microwave and Optical Technology Letters*, 7(13) :599–604, 1994.
- [35] S. H. Christiansen and J.-C. Nédélec. A preconditioner for the electric field integral equation based on Calderón formulas. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 40(3) :1100–1135, 2002.
- [36] X. Claeys and R. Hiptmair. Electromagnetic scattering at composite objects : a novel multi-trace boundary integral formulation. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 46(6) :1421–1445, 2012.
- [37] X. Claeys, R. Hiptmair, C. Jerez-Hanckes, and S. Pintarelli. Novel multi-trace boundary integral equations for transmission boundary value problems. *Unified transform for boundary value problems*, pages 227–258, 2014.
- [38] X. Claeys, R. Hiptmair, and E. Spindler. Second-kind boundary integral equations for electromagnetic scattering at composite objects. *Computers & Mathematics with Applications*, 74(11) :2650–2670, 2017.
- [39] F. Collino, F. Millot, and S. Pernet. Boundary-integral methods for iterative solution of scattering problems with variable impedance surface condition. *Progress In Electromagnetics Research*, 80 :1–28, 2008.
- [40] D. Colton and R. Kress. *Integral equation methods in scattering theory*. SIAM, 2013.
- [41] M. Costabel. Symmetric methods for the coupling of finite elements and boundary elements (invited contribution). In *Mathematical and Computational Aspects*, pages 411–420. Springer, 1987.
- [42] M. Costabel and E. Stephan. A direct boundary integral equation method for transmission problems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 106(2) :367–413, 1985.
- [43] E. Cuthill and J. McKee. Reducing the bandwidth of sparse symmetric matrices. In *Proceedings of the 1969 24th national conference*, pages 157–172. ACM, 1969.

- 
- [44] T. A. Davis. *Direct methods for sparse linear systems*, volume 2. SIAM, 2006.
- [45] T. A. Davis, J. R. Gilbert, S. I. Larimore, and E. G. Ng. A column approximate minimum degree ordering algorithm. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 30(3) :353–376, 2004.
- [46] A. de La Bourdonnaye. Some formulations coupling finite element and integral equation methods for Helmholtz equation and electromagnetism. *Numerische Mathematik*, 69(3) :257–268, 1995.
- [47] E. Deadman, N. J. Higham, and R. Ralha. Blocked Schur algorithms for computing the matrix square root. In *International Workshop on Applied Parallel Computing*, pages 171–182. Springer, 2012.
- [48] B. Després. *Méthodes de décomposition de domaine pour les problèmes de propagation d’ondes en régime harmonique. Le théorème de Borg pour l’équation de Hill vectorielle*. PhD thesis, 1991.
- [49] V. Dolean, P. Jolivet, and F. Nataf. *An introduction to domain decomposition methods : algorithms, theory, and parallel implementation*. SIAM, 2015.
- [50] V. Dominguez, M. Lyon, and C. Turc. Well-posed boundary integral equation formulations and Nyström discretizations for the solution of Helmholtz transmission problems in two-dimensional Lipschitz domains. *Journal of Integral Equations and Applications*, 28(3) :395–440, 2016.
- [51] P. Dular and C. Geuzaine. GetDP : A general environment for the treatment of discrete problems. 1997.
- [52] B. Engquist and A. Majda. Absorbing boundary conditions for numerical simulation of waves. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 74(5) :1765–1766, 1977.
- [53] O. G. Ernst and M. J. Gander. Why it is difficult to solve Helmholtz problems with classical iterative methods. *Numerical Analysis of Multiscale Problems*, 83 :325–363, 2012.
- [54] G. N. Gatica. Variational formulations of transmission problems via FEM, BEM and DtN mappings. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 182(3-4) :341–354, 2000.
- [55] G. N. Gatica, G. C. Hsiao, and F.-J. Sayas. Relaxing the hypotheses of Bielak-MacCamy’s BEM-FEM coupling. *Numerische Mathematik*, 120(3) :465–487, 2012.
- [56] G. N. Gatica and S. Meddahi. An a-posteriori error estimate for the coupling of BEM and mixed-FEM. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 20(5-6) :449–472, 1999.
- [57] A. George and J. W.H. Liu. The evolution of the minimum degree ordering algorithm. *SIAM Review*, 31(1) :1–19, 1989.
- [58] C. Geuzaine. GetDP : A general finite-element solver for the de Rham complex. *PAMM*, 7(1) :1010603–1010604, 2007.
- [59] L. Greengard and V. Rokhlin. A new version of the fast multipole method for the Laplace equation in three dimensions. *Acta Numerica*, 6 :229–269, 1997.
- [60] N. A. Gumerov and R. Duraiswami. *Fast multipole methods for the Helmholtz equation in three dimensions*. Elsevier, 2005.
- [61] W. Hackbusch. *Hierarchical matrices : algorithms and analysis*, volume 49. Springer, 2015.
- [62] R. F. Harrington. Boundary integral formulations for homogeneous material bodies. *Journal of electromagnetic waves and applications*, 3(1) :1–15, 1989.
- [63] R. Hiptmair. Coupling of finite elements and boundary elements in electromagnetic scattering. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 41(3) :919–944, 2003.
- [64] R. Hiptmair and P. Meury. Stable FEM-BEM coupling for Helmholtz transmission problems. ETH, Seminar für Angewandte Mathematik, 2005.
- [65] R. Hiptmair and P. Meury. Stabilized FEM–BEM coupling for Maxwell transmission problems. In *Modeling and computations in electromagnetics*, pages 1–38. Springer, 2008.
- [66] G. C. Hsiao. Some recent developments on the coupling of finite element and boundary element methods. *Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino*, pages 95–111, 1991.
- [67] G. C. Hsiao and L. Xu. A system of boundary integral equations for the transmission problem in acoustics. *Applied Numerical Mathematics*, 61(9) :1017–1029, 2011.
- [68] F. Ihlenburg and I. Babuška. Finite element solution of the Helmholtz equation with high wave number Part I : The h-version of the FEM. *Computers & Mathematics with Applications*, 30(9) :9–37, 1995.
- [69] F. Ihlenburg and I. Babuska. Finite element solution of the Helmholtz equation with high wave number Part II : The hp version of the FEM. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 34(1) :315–358, 1997.
- [70] J.-M. Jin. *The finite element method in electromagnetics*. John Wiley & Sons, 2015.
- [71] C. Johnson and J.-C. Nédélec. On the coupling of boundary integral and finite element methods. *Mathematics of Computation*, 35(152) :1063–1079, 1980.

- [72] R. E. Kleinman and P. A. Martin. On single integral equations for the transmission problem of acoustics. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 48(2) :307–325, 1988.
- [73] R. Kress and G. F. Roach. Transmission problems for the Helmholtz equation. *Journal of Mathematical Physics*, 19(6) :1433–1437, 1978.
- [74] D. Lahaye, J. Tang, and K. Vuik. *Modern solvers for Helmholtz problems*. Springer, 2017.
- [75] A. R. Laliena, M.-L. Rapún, and F.-J. Sayas. Symmetric boundary integral formulations for Helmholtz transmission problems. *Applied Numerical Mathematics*, 59(11) :2814–2823, 2009.
- [76] U. Langer and O. Steinbach. Coupled boundary and finite element tearing and interconnecting methods. In *Domain Decomposition Methods in Science and Engineering*, pages 83–97. 2005.
- [77] V. Levillain. *Couplage éléments finis-équations intégrales pour la résolution des équations de Maxwell en milieu hétérogène*. PhD thesis, Ecole Polytechnique, 1991.
- [78] W.-H. Liu and A. H. Sherman. Comparative analysis of the Cuthill-McKee and the reverse Cuthill-McKee ordering algorithms for sparse matrices. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 13(2) :198–213, 1976.
- [79] Y. Liu. *Fast multipole boundary element method : theory and applications in engineering*. Cambridge University Press, 2009.
- [80] P. A. Martin. Acoustic scattering by inhomogeneous spheres. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 111(5) :2013–2018, 2002.
- [81] P. A. Martin. Acoustic scattering by inhomogeneous obstacles. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 64(1) :297–308, 2003.
- [82] W. C. H. McLean. *Strongly elliptic systems and boundary integral equations*. Cambridge University Press, 2000.
- [83] S. Meddahi, F.-J. Sayas, and V. Selgás. Nonsymmetric coupling of BEM and mixed FEM on polyhedral interfaces. *Mathematics of Computation*, 80(273) :43–68, 2011.
- [84] S. Meddahi, J. Valdés, O. Menéndez, and P. Pérez. On the coupling of boundary integral and mixed finite element methods. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 69(1) :113–124, 1996.
- [85] F. A. Milinazzo, C. A. Zala, and G. H. Brooke. Rational square-root approximations for parabolic equation algorithms. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 101(2) :760–766, 1997.
- [86] P. Monk. *Finite element methods for Maxwell’s equations*. Oxford University Press, 2003.
- [87] F. Nataf. Interface connections in domain decomposition methods. In *Modern methods in scientific computing and applications*, pages 323–364. 2002.
- [88] J.-C. Nédélec. *Acoustic and electromagnetic equations : integral representations for harmonic problems*, volume 144. Springer-Verlag, 2001.
- [89] L. Nirenberg. Pseudodifferential operators and some applications. In *CBMS Regional Conf. Ser. in Math. AMS*, volume 17, pages 19–58, 1973.
- [90] G. Of and O. Steinbach. Is the one-equation coupling of finite and boundary element methods always stable? *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 93(6-7) :476–484, 2013.
- [91] M.-L. Rapún and F.-J. Sayas. Indirect methods with Brakhage-Werner potentials for Helmholtz transmission problems. In *Numerical Mathematics and Advanced Applications*, pages 1146–1154. 2006.
- [92] M.-L. Rapún and F.-J. Sayas. Mixed boundary integral methods for Helmholtz transmission problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 214(1) :238–258, 2008.
- [93] Y. Saad. *Iterative methods for sparse linear systems*. SIAM, 2003.
- [94] S. Sauter and C. Schwab. *Boundary element methods*. Springer, 2011.
- [95] F.-J. Sayas. The validity of Johnson-Nédélec’s BEM-FEM coupling on polygonal interfaces. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 47(5) :3451–3463, 2009.
- [96] T. B. A. Senior and J. L. Volakis. *Approximate boundary conditions in electromagnetics*. Number 41. IEE, 1995.
- [97] X.-Q. Sheng, J.-M. Jin, J. Song, C.-C. Lu, and W. C. Chew. On the formulation of hybrid finite-element and boundary-integral methods for 3-D scattering. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 46(3) :303–311, 1998.
- [98] W. Śmigaj, T. Betcke, S. Arridge, J. Phillips, and M. Schweiger. Solving boundary integral problems with BEM++. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 41(2) :6.1–6.40, 2015.

- 
- [99] O. Steinbach. A note on the stable one-equation coupling of finite and boundary elements. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 49(4) :1521–1531, 2011.
- [100] A. Toselli and O. B. Widlund. *Domain decomposition methods : algorithms and theory*, volume 34. Springer, 2005.
- [101] E. Turkel and A. Yefet. Absorbing PML boundary layers for wave-like equations. *Applied Numerical Mathematics*, 27(4) :533–557, 1998.
- [102] M. Vouvakis, K. Zhao, S.-M. Seo, and J.-F. Lee. A domain decomposition approach for non-conformal couplings between finite and boundary elements for unbounded electromagnetic problems in  $\mathbb{R}^3$ . *Journal of Computational Physics*, 225(1) :975–994, 2007.
- [103] P. Ylä-Oijala and M. Taskinen. Well-conditioned Müller formulation for electromagnetic scattering by dielectric objects. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 53(10) :3316–3323, 2005.
- [104] P. Ylä-Oijala, M. Taskinen, and S. Järvenpää. Analysis of surface integral equations in electromagnetic scattering and radiation problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 32(3) :196–209, 2008.
- [105] O. C. Zienkiewicz, D. W. Kelly, and P. Bettess. The coupling of the finite element method and boundary solution procedures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 11(2) :355–375, 1977.





## Résumé

Dans cette thèse, nous proposons de nouvelles méthodes permettant de résoudre numériquement des problèmes de diffraction harmoniques et tridimensionnels, aussi bien acoustiques qu'électromagnétiques, pour lesquels l'objet diffractant est pénétrable et inhomogène. La résolution de tels problèmes est centrale pour des calculs de surfaces équivalentes sonar et radar (SES et SER). Elle est toutefois connue pour être difficile car elle requiert de discrétiser des équations aux dérivées partielles posées dans un domaine extérieur. Etant infini, ce domaine ne peut pas être maillé en vue d'une résolution par la méthode des éléments finis volumiques. Deux approches classiques permettent de contourner cette difficulté. La première consiste à tronquer le domaine extérieur et rend alors possible une résolution par la méthode des éléments finis volumiques. Etant donné qu'elles approximent les problèmes de diffraction au niveau continu, les méthodes de troncature de domaine peuvent toutefois manquer de précision pour des calculs de SES et de SER. Les problèmes de diffraction harmoniques, pénétrables et inhomogènes peuvent également être résolus en couplant une formulation variationnelle volumique associée à l'objet diffractant et des équations intégrales surfaciques rattachées au domaine extérieur. Nous parlons de couplages FEM-BEM (Finite Element Method-Boundary Element Method). L'intérêt de cette approche réside dans le fait qu'elle est exacte au niveau continu. Les couplages FEM-BEM classiques sont dits forts car ils couplent la formulation variationnelle volumique et les équations intégrales surfaciques au sein d'une même formulation. Ils ne sont toutefois pas adaptés à la résolution de problèmes à haute fréquence. Pour pallier cette limitation, d'autres couplages FEM-BEM, dits faibles, ont été proposés. Ils correspondent concrètement à des algorithmes de décomposition de domaine itérant entre l'objet diffractant et le domaine extérieur. Dans cette thèse, nous introduisons de nouveaux couplages faibles FEM-BEM acoustiques et électromagnétiques basés sur des approximations de Padé récemment développées pour les opérateurs Dirichlet-to-Neumann et Magnetic-to-Electric. Le nombre d'itérations nécessaires à la résolution de ces couplages ne dépend que faiblement de la fréquence et du raffinement du maillage. Les couplages faibles FEM-BEM que nous proposons sont donc adaptés pour des calculs précis de SES et de SER à haute fréquence.

**Mots-clés:** Acoustique, Electromagnétisme, Diffraction harmonique, Eléments finis volumiques, Equations intégrales surfaciques, Décomposition de domaine.

## Abstract

In this doctoral dissertation, we propose new methods for solving acoustic and electromagnetic three-dimensional harmonic scattering problems for which the scatterer is penetrable and inhomogeneous. The resolution of such problems is key in the computation of sonar and radar cross sections (SCS and RCS). However, this task is known to be difficult because it requires discretizing partial differential equations set in an exterior domain. Being unbounded, this domain cannot be meshed thus hindering a volume finite element resolution. There are two standard approaches to overcome this difficulty. The first one consists in truncating the exterior domain and renders possible a volume finite element resolution. Given that they approximate the scattering problems at the continuous level, truncation methods may however not be accurate enough for SCS and RCS computations. Inhomogeneous penetrable harmonic scattering problems can also be solved by coupling a volume variational formulation associated with the scatterer and surface integral equations related to the exterior domain. This approach is known as FEM-BEM coupling (Finite Element Method-Boundary Element Method). It is of great interest because it is exact at the continuous level. Classical FEM-BEM couplings are qualified as strong because they couple the volume variational formulation and the surface integral equations within one unique formulation. They are however not suited for solving high-frequency problems. To remedy this drawback, other FEM-BEM couplings, said to be weak, have been proposed. These couplings are actually domain decomposition algorithms iterating between the scatterer and the exterior domain. In this thesis, we introduce new acoustic and electromagnetic weak FEM-BEM couplings based on recently developed Padé approximations of Dirichlet-to-Neumann and Magnetic-to-Electric operators. The number of iterations required to solve these couplings is only slightly dependent on the frequency and the mesh refinement. The weak FEM-BEM couplings that we propose are therefore suited to accurate SCS and RCS computations at high frequencies.

**Keywords:** Acoustics, Electromagnetics, Harmonic scattering, Volume finite elements, Surface integral equations, Domain decomposition.