



**HAL**  
open science

# Attracteurs d'ondes internes à trois dimensions : analyse par tracés de rayons et étude expérimentale

Grimaud Pillet

## ► To cite this version:

Grimaud Pillet. Attracteurs d'ondes internes à trois dimensions : analyse par tracés de rayons et étude expérimentale. Dynamique des Fluides [physics.flu-dyn]. Université de Lyon, 2018. Français. NNT : 2018LYSEN018 . tel-01868186

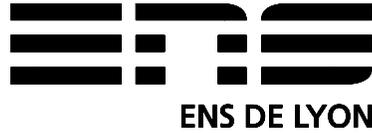
**HAL Id: tel-01868186**

**<https://theses.hal.science/tel-01868186>**

Submitted on 5 Sep 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Numéro National de Thèse : 2018LYSEN018

**THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE LYON**

opérée par

**l'École Normale Supérieure de Lyon**

**École Doctorale N°52**

**Physique & Astrophysique de Lyon**

**Spécialité de doctorat : Physique**

Soutenue publiquement le 06/07/2018, par :

**Grimaud PILLET**

---

**Attracteurs d'ondes internes à trois dimensions :**  
**Analyse par tracés de rayons et étude**  
**expérimentale**

---

Devant le jury composé de :

Jean-Marc CHOMAZ	<i>Laboratoire d'Hydrodynamique</i> DR CNRS à l'École Polytechnique	Président
Thierry DAUXOIS	<i>Laboratoire de Physique</i> DR CNRS à l'ÉNS de Lyon	Directeur de thèse
Olivier EIFF	<i>Institute of Hydromechanics</i> Professeur au KIT, Karlsruhe	Rapporteur
Caroline MULLER	<i>Laboratoire de Météorologie Dynamique</i> CR CNRS à l'ÉNS Paris	Examinatrice
Laure SAINT-RAYMOND	<i>UMPA</i> Professeur à l'ÉNS de Lyon	Examinatrice
Joël SOMMERIA	<i>LEGI</i> DR CNRS à l'Université Grenoble-Alpes	Rapporteur



# Remerciements

Je voudrais sincèrement remercier les membres du jury de cette thèse. En particulier Olivier Eiff et Joël Sommeria qui ont accepté de lire l'ébauche trop brouillonne de ce texte et qui ont proposé de précieux conseils pour l'améliorer. Bien sûr, cette thèse n'aurait rien été sans Thierry. La somme des travaux qu'il a fournis pendant ces trois années, et sa disponibilité ont été vitales pour mes recherches et pour ce manuscrit. Il a su tout au long de ma thèse, me mettre en relation avec des chercheurs très talentueux, Evgeny Ermanyuk, Leo Maas et Triantaphyllos Akylas, sans qui cette thèse serait bien moins aboutie.

Le labo m'a admirablement accueilli durant ces trois années. L'ambiance pour y travailler est parfaite. Pas besoin d'en savoir beaucoup sur le fonctionnement d'un laboratoire de recherche pour voir que celui-ci marche à merveille. Cela, on le doit à Thierry, mais aussi aux secrétaires. Un grand merci à elles, particulièrement Fatiha et Nadine.

Mes recherches n'auraient pu se faire sans les manip conçues et réalisées par l'atelier de la mécanique. La précision et la rigueur de Denis et Marc y sont pour beaucoup.

Je dois aussi beaucoup aux doctorants, post-doctorants et permanents de l'équipe "Ondes Internes", Sylvain en tête. Les réunions, discussions, conseils et programmes échangés m'ont été inestimables. Malheureusement, la tête trop souvent dans les nuages, je ne les ai pas aidés autant qu'il ne l'ont fait pour moi.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>9</b>
<b>I Introduction aux ondes internes</b>	<b>13</b>
A Théorie linéaire des ondes internes . . . . .	15
1. Physique des fluides stratifiés . . . . .	15
2. Propagation des ondes internes . . . . .	17
3. Réflexion des ondes internes . . . . .	25
B Les ondes internes dans la nature . . . . .	29
1. Les ondes internes dans l’océan . . . . .	29
2. Les ondes internes dans l’atmosphère . . . . .	35
C Étude expérimentale des ondes internes . . . . .	37
1. Obtention d’une stratification . . . . .	37
2. Génération des ondes internes . . . . .	39
3. Observation des ondes internes . . . . .	43
4. Outils d’analyse . . . . .	46
D Étude numérique des ondes internes . . . . .	50
1. Tracé de rayons . . . . .	50
2. Résolution numérique d’équations . . . . .	52
3. Simulations numériques . . . . .	52
<b>II Aspects non linéaires et réflexions sur des surfaces courbes en deux dimensions</b>	<b>55</b>
A Instabilité d’un faisceau d’ondes internes . . . . .	57
1. Instabilité Triadique Résonante (TRI) . . . . .	57
2. Génération de courant moyen . . . . .	65
B Génération d’harmoniques . . . . .	65
1. Travaux antérieurs . . . . .	65
2. Observation expérimentale . . . . .	67
C Réflexion sur une surface courbe . . . . .	68

1.	Théorie . . . . .	69
2.	Résultats expérimentaux . . . . .	74
<b>III Les attracteurs d'ondes bidimensionnels</b>		<b>83</b>
A	Introduction aux attracteurs d'ondes internes . . . . .	84
B	Géométrie trapézoïdale : Tracés de rayons . . . . .	88
1.	Définition de la géométrie . . . . .	88
2.	Diagramme $(d, \tau)$ . . . . .	90
C	Géométrie trapézoïdale : Étude expérimentale . . . . .	95
1.	Dispositifs expérimentaux . . . . .	95
2.	Attracteur $(1,1)$ . . . . .	96
3.	Autres régions . . . . .	102
<b>IV Attracteurs 3D : Approche numérique</b>		<b>105</b>
A	Propagation et réflexion en 3D . . . . .	108
1.	Propagation en 3D . . . . .	108
2.	Réflexion sur un plan incliné . . . . .	111
3.	Étude de la loi de réflexion . . . . .	114
B	Attracteurs 2D dans des géométries 3D . . . . .	121
1.	Choix de la géométrie . . . . .	121
2.	Attracteurs $(1,1)$ . . . . .	123
3.	Diagramme des phases . . . . .	131
4.	Cas de non piégeage . . . . .	137
C	Une géométrie totalement tridimensionnelle . . . . .	143
1.	Choix de la géométrie . . . . .	144
2.	Condition de piégeage . . . . .	145
3.	Attracteurs 3D . . . . .	146
<b>V Attracteurs 3D : Étude expérimentale</b>		<b>153</b>
A	Effets 3D sur la géométrie trapézoïdale . . . . .	154
1.	Prédiction par tracés de rayons . . . . .	154
2.	Dispositif expérimental . . . . .	157
3.	Étalement de l'attracteur . . . . .	158
B	Piégeage dans un canal . . . . .	162
1.	Choix des paramètres . . . . .	163
2.	Dispositif expérimental . . . . .	164
3.	Piégeage des ondes . . . . .	164
4.	Localisation du piégeage . . . . .	167

<b>VI Génération de courant moyen</b>	<b>175</b>
A Aspects Analytiques . . . . .	176
1. Contexte . . . . .	176
2. Analyse de Fan, Kataoka & Akylas (2018) . . . . .	177
B Résultats expérimentaux . . . . .	180
1. Dispositif expérimental . . . . .	180
2. Génération de courant moyen . . . . .	181
<b>Conclusion</b>	<b>197</b>



# Introduction

De nombreux marins et explorateurs scandinaves du XIX<sup>e</sup> siècle ont rapporté des récits d'un phénomène étrange apparaissant lors de la navigation dans certaines zones aux abords des côtes. Dans certaines embouchures et bras de mers, les bateaux se trouvaient parfois très fortement ralentis, sans raisons apparentes. Demeuré inexpliqué pendant de nombreuses années, ce mystère appelé "phénomène des eaux-mortes" a été résolu au début du XX<sup>e</sup> siècle grâce aux travaux de recherche de Vagn Walfrid Ekman. Il proposa une explication se basant sur le fort gradient de densité présent dans l'eau à ces endroits là.

En effet, dans les hautes latitudes du globe, on retrouve des profils océaniques typiques créés par l'érosion des glaciers, appelés Fjords. Dans ces Fjords, l'eau de surface issue des glaciers est très peu concentrée en sel. À l'inverse, quelques mètres en dessous, l'eau provenant des océans est très salée. À l'interface entre ces deux milieux, des ondes peuvent se propager, et influencer le mouvement d'un bateau, sans signature en surface.

Cet exemple est une manifestation de l'existence des ondes internes. Ces ondes, qui sont le sujet global d'étude de ma thèse, peuvent exister dès qu'un fluide présente une inhomogénéité en densité, c'est-à-dire dès qu'il est stratifié. C'est le cas de l'eau dans les océans, de l'air dans l'atmosphère, et même de l'intérieur des étoiles.

L'objectif global de cette thèse est de mieux comprendre la dynamique des ondes internes dans l'océan. Celles-ci sont générées essentiellement du fait de l'interaction entre les marées barotropes et la bathymétrie d'une part et du forçage par le vent à la surface d'autre part. Elles se propagent ensuite dans l'océan et interagissent avec d'autres ondes ou avec les topographies des fonds sous-marins. La compréhension de ces interactions est fondamentale pour modéliser la circulation océanique globale. En effet, les ondes internes interviennent dans le mélange de la stratification océanique et jouent alors un rôle dans la dynamique des courants à l'échelle de la planète. De manière à mieux tenir compte des ondes internes dans les simulation de la dynamique océanique et atmosphérique, il est essentiel de bien comprendre

la génération des ondes internes, leur propagation sur des grandes distances, et leur interactions avec l'environnement. On doit alors mieux comprendre ces phénomènes tridimensionnels.

Cet objectif sera examiné suivant trois axes. L'étude des réflexion des ondes internes est bien connue dans la littérature dans le cas idéalisé d'une surface plane [88]. Nous étudierons la réflexion d'ondes internes sur des surfaces courbes, ce qui permettra de se rapprocher du cas océanique réel. Le cœur de cette thèse portera sur l'étude d'une structure appelée attracteur d'ondes. Cette structure, largement étudiée expérimentalement en deux dimensions [58, 72, 45, 49, 61, 6, 11], permet de concentrer l'énergie des ondes internes. Cette focalisation d'énergie peut alors mener à un fort mélange de la stratification. Notre étude portera essentiellement sur les configurations tridimensionnelles (souvent abrégé 3D dans ce document), qui n'ont été que rarement considérées jusqu'alors [80, 81, 48]. Une dernière étude portera sur les interactions et instabilités entre ondes internes, notamment la génération de courant moyen.

Notre approche sera principalement expérimentale. Nous allons recréer des océans miniatures en laboratoire, générer des ondes internes et observer leurs comportements et interactions. Notre démarche sera appuyée par des calculs de trajectoires par ordinateur, permettant d'avoir des intuitions sur la propagation de ces ondes.

Cette thèse est organisée en six chapitres :

### **Introduction aux ondes internes**

Dans la première partie de ce chapitre, on établit les équations linéaires des ondes internes. Les hypothèses prises afin d'obtenir ces équations sont discutées en regard des conditions expérimentales dans lesquelles nous nous placerons par la suite. On rappelle les principales conséquences de la relation de dispersion sur la propagation et la réflexion des ondes internes. Nous replaçons ensuite l'étude de ces ondes dans le contexte océanique et atmosphérique, en décrivant la stratification de ces milieux et en discutant la validité des hypothèses faites dans la partie précédente. Nous revenons enfin au laboratoire, où nous décrivons les méthodes employées pour créer un fluide stratifié, générer ces ondes, les observer, les analyser.

### **Non linéarités et réflexions sur une surface courbe**

Ce chapitre est l'occasion de discuter de plusieurs effets non linéaires qui peuvent apparaître lors de la propagation et la réflexion des ondes internes. Nous abordons de manière théorique et expérimentale l'instabilité par Ré-

sonance Triadique (TRI), qui est la déstabilisation d'une onde interne en deux ondes secondaires, de pulsations et de longueurs d'ondes différentes. Puis nous nous intéressons à la génération d'harmoniques lors de l'interaction entre deux faisceaux d'ondes. Cette interaction est créée par le biais de la réflexion d'une onde interne sur une surface. En effet, au niveau de la zone de réflexion, a lieu une interaction entre le faisceau incident et le faisceau réfléchi. Nous finissons ce chapitre par une étude expérimentale détaillée de la réflexion d'une onde interne sur une surface courbe. On cherche à observer, en fonction de la courbure de la surface, la présence d'une onde rétro-réfléchie, prédite par la théorie. Cette dernière étude a été réalisée avec Bastien Gili-Tos, stagiaire au laboratoire en 2016.

### **Attracteurs 2D**

Après une brève introduction générale aux attracteurs d'ondes internes, nous étudions d'un point de vue théorique et expérimental le cas particulier des attracteurs dans une géométrie bidimensionnelle trapézoïdale. Le diagramme des phases de ce système est exploré à l'aide de tracés de rayons, puis expérimentalement. Nous avons également réalisé au début de ma thèse, avec Christophe Brouzet ancien doctorant de l'équipe, des expériences menant à une étude détaillée d'une zone particulière de ce diagramme. Cette étude montre que la dynamique de l'attracteur est fortement dépendante de la géométrie de celui-ci. L'article [11] détaille ces résultats ainsi que leurs liens avec l'instabilité triadique.

### **Attracteurs 3D : approche numérique**

Le cœur de cette thèse est l'étude des attracteurs en trois dimensions. Ce chapitre expose leurs propriétés d'un point de vue numérique et théorique. On détaille tout d'abord la propagation puis la réflexion des ondes en 3D. La loi de réflexion fait apparaître un phénomène de piégeage des ondes suivant une direction privilégiée. On étudie ce phénomène d'abord dans une géométrie simple, proche de celles étudiées en deux dimensions. Notre étude nous permet de faire le lien entre le piégeage et la présence des attracteurs d'ondes. Une géométrie plus complexe est finalement étudiée, et permet de postuler des conditions plus générale d'existence des attracteurs. Les développements de ce chapitre ont été grandement aidés par Leo Maas, spécialiste des attracteurs d'ondes internes.

### **Attracteurs 3D : approche expérimentale**

Ce chapitre est le pendant expérimental du chapitre précédent. Deux sé-

ries d'expériences visant à prouver l'effet de piégeage et la présence d'attracteurs sont réalisées. Tout d'abord on considère une géométrie quasi-bidimensionnelle trapézoïdale avec un forçage non homogène suivant la largeur. On montre que les attracteurs sont créés en même temps sur toute la largeur de la cuve. Puis on étudie une géométrie de canal, afin de créer une situation dans laquelle l'effet de piégeage est spectaculaire. Une quantification de cet effet de piégeage est proposée, à l'aide de la vérification de la relation de dispersion. Cette situation peut s'apparenter au cas concret océanique du canal du St Laurent, au Canada. Pour cette partie expérimentale, nous avons bénéficié de l'aide et des idées de Evgeny Ermanyuk, professeur invité et collaborateur de longue date. L'article [76] présente ces résultats expérimentaux ainsi que les principales idées sur le piégeage des rayons en 3D.

### **Génération de courant moyen**

Les idées développées dans ce dernier chapitre sont nées d'une collaboration avec Triantaphyllos Akylas et Takeshi Kataoka. Nous avons réalisé des expériences de génération de courant moyen dû à la propagation tridimensionnelle d'un faisceau d'ondes internes. Les résultats obtenus sont comparés avec une théorie développée et résolue numériquement par Akylas et Kataoka. La comparaison à faible forçage montre un bon accord entre les expériences et la théorie, dans le régime transitoire. À plus fort forçage, des effets non linéaires importants apparaissent et les simulations ne décrivent plus exactement ce qu'il se passe expérimentalement.

# Chapitre I

## Introduction aux ondes internes

---

<b>A</b>	<b>Théorie linéaire des ondes internes . . . . .</b>	<b>15</b>
1.	Physique des fluides stratifiés . . . . .	15
2.	Propagation des ondes internes . . . . .	17
2.a	Hypothèses simplificatrices . . . . .	17
2.b	Équation d'onde linéaire . . . . .	19
2.c	Validité des hypothèses . . . . .	23
3.	Réflexion des ondes internes . . . . .	25
3.a	Conditions aux limites . . . . .	25
3.b	Réflexion sur une paroi inclinée . . . . .	26
3.c	Focalisation . . . . .	27
<b>B</b>	<b>Les ondes internes dans la nature . . . . .</b>	<b>28</b>
1.	Les ondes internes dans l'océan . . . . .	29
1.a	Retour sur les hypothèses . . . . .	30
1.b	Génération des ondes internes . . . . .	32
1.c	Circulation océanique et mélange . . . . .	33
2.	Les ondes internes dans l'atmosphère . . . . .	35
<b>C</b>	<b>Étude expérimentale des ondes internes . . . . .</b>	<b>37</b>
1.	Obtention d'une stratification . . . . .	37
1.a	Méthodes de remplissage . . . . .	37
1.b	Mesure de la stratification . . . . .	38
2.	Génération des ondes internes . . . . .	39
2.a	Générateurs . . . . .	40
2.b	Ondes planes ou modes . . . . .	42
3.	Observation des ondes internes . . . . .	43
3.a	Schlieren synthétique . . . . .	43

	3.b	Vélocimétrie par Imagerie de Particules (PIV) . . . . .	44
	3.c	Lignes de colorant . . . . .	45
4.		Outils d'analyse . . . . .	46
	4.a	Algorithme de corrélation . . . . .	46
	4.b	Transformée de Hilbert . . . . .	46
	4.c	Diagramme temps-fréquence . . . . .	48
	4.d	Mesure de longueur d'onde . . . . .	49
<b>D</b>		<b>Étude numérique des ondes internes . . . . .</b>	<b>50</b>
	1.	Tracé de rayons . . . . .	50
	2.	Résolution numérique d'équations . . . . .	52
	3.	Simulations numériques . . . . .	52

---

## Introduction

Ce chapitre, découpé en 4 parties, est l'occasion d'introduire tous les outils et notions que nous utiliserons abondamment dans les chapitres suivants.

Dans la partie A, nous modélisons un milieu stratifié en faisant un certain nombre d'hypothèses, discutées par la suite. Une approche linéaire nous permet ensuite de formaliser la génération, la propagation et la réflexion des ondes internes.

La partie B replace l'étude des ondes internes dans un contexte naturel, dans l'atmosphère et dans l'océan. On s'intéresse à la génération, la propagation et la visualisation de ces ondes ainsi qu'à leurs rôles dans la dynamique globale du milieu dans lequel elles se propagent.

Les parties C et D introduisent les outils expérimentaux et numériques permettant d'étudier les ondes internes en laboratoire. Tout d'abord nous discutons la possibilité de créer des océans miniatures en laboratoire, puis nous présentons les méthodes de visualisation et de traitement des données expérimentales. Enfin un rapide aperçu des différentes méthodes numériques utilisables pour étudier les ondes internes est présenté.

## A Théorie linéaire des ondes internes

Dans cette partie théorique, nous allons identifier les principales propriétés des ondes internes. Pour ce faire, nous allons nous restreindre à l'aspect linéaire des ondes internes. Cette simplification est nécessaire pour la plupart des calculs. Après avoir modélisé un milieu stratifié, on montrera comment des oscillations peuvent naître dans ces milieux. La relation de dispersion nous donnera la façon dont se propagent les ondes. Nous finirons par l'étude des réflexions sur des surfaces planes.

### 1. Physique des fluides stratifiés

Les ondes internes sont des ondes qui apparaissent dans les fluides stratifiés.

Un fluide stratifié en densité est un fluide dont la densité est inhomogène, généralement dépendante de la hauteur. Dans un tel fluide, l'équilibre mécanique à la hauteur  $z$ , se traduit par la loi de l'hydrostatique

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\bar{\rho}(z)g \quad (\text{I.1})$$

où  $g$  est la constante de pesanteur,  $\bar{\rho}$  la densité du fluide à l'équilibre et  $P$  la pression. Pour tout ce document, nous choisissons l'orientation de l'axe

( $Oz$ ) selon la verticale ascendante.

Considérons maintenant l'aspect dynamique. Afin d'appliquer le principe fondamental de la dynamique, il nous faut définir une particule fluide. Sa taille doit être suffisamment grande pour que l'on puisse considérer des grandeurs d'ensemble sur la particule fluide, mais suffisamment petite pour considérer la densité constante au sein de la particule. Une particule de fluide, de densité  $\rho$ , placée dans un fluide de densité  $\bar{\rho}(z)$  est soumise à la poussée d'Archimède  $\vec{\Pi}_a$  ainsi qu'à la force de pesanteur. La résultante des forces, appelée flottabilité s'écrit :

$$\vec{R} = \vec{\Pi}_a(z) - \rho g \vec{e}_z = (\bar{\rho}(z) - \rho) g \vec{e}_z \quad (\text{I.2})$$

Si  $\rho < \bar{\rho}(z)$ , la particule subit une force résultante vers le haut, et tend à remonter, c'est le cas de la Fig. I.1. À l'inverse, si  $\rho > \bar{\rho}(z)$ , la particule est plus dense que le fluide environnant et tombe. De là, on en déduit que pour avoir un fluide stratifié stable, il faut que la densité du fluide diminue avec la hauteur.

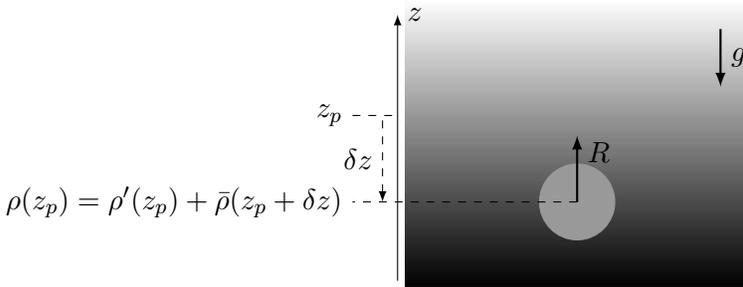


FIGURE I.1 – Oscillation d'une particule dans un fluide stratifié. Les nuances de gris indiquent la densité locale. La particule de fluide de densité  $\rho(z_p)$  est plongée dans un fluide de densité environnante  $\bar{\rho}(z_p + \delta z)$ . La résultante des forces  $\vec{R}$  est orientée suivant les  $z$  positifs. Notons que pour ce schéma  $\delta_z$  est négatif.

Considérons donc un fluide stable et écrivons le principe fondamental de la dynamique pour une particule de fluide, déplacée de  $\delta z$ , autour de sa

position d'équilibre  $z_p$  :

$$\bar{\rho}(z_p + \delta z) \frac{d^2 \delta z}{dt^2} = (\bar{\rho}(z_p + \delta z) - \bar{\rho}(z_p)) g \quad (\text{I.3})$$

$$\frac{d^2 \delta z}{dt^2} = \frac{g}{\bar{\rho}(z_p + \delta z)} \frac{\partial \bar{\rho}(z_p)}{\partial z} \delta z \quad (\text{I.4})$$

$$\frac{d^2 \delta z}{dt^2} = -N^2(z_p) \delta z \quad (\text{I.5})$$

L'équation (I.5) est l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique de pulsation  $N(z_p)$ . Cette pulsation caractéristique du milieu, appelée pulsation de flottabilité ou pulsation de Brunt-Väisälä, est définie par

$$N(z) = \sqrt{-\frac{g}{\bar{\rho}(z)} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z}} \quad (\text{I.6})$$

Ayant pris un fluide stable,  $\partial \bar{\rho} / \partial z < 0$ , la pulsation  $N$  est bien réelle. Une particule de fluide oscillera autour de sa position d'équilibre à la pulsation  $N$ . Plus  $N$  est important, plus la période de l'oscillation sera courte. À l'inverse, pour un fluide non stratifié,  $N = 0 \text{ rad.s}^{-1}$ , il n'y a pas d'oscillations. Pour l'instant nous n'avons pas considéré d'amortissement, les oscillations sont donc de durée infinie.

On voit alors comment des ondes peuvent apparaître dans un fluide stratifié. La flottabilité crée un mécanisme de rappel, chaque particule de fluide est un oscillateur de pulsation  $N$  autour de sa position d'équilibre. Une excitation à la fréquence des oscillateurs va donc mener à une onde propagative. On peut d'ores et déjà avoir une intuition de la relation de dispersion des ondes internes avec ce raisonnement. Si la fréquence d'excitation est plus faible que  $N$ , les particules ne peuvent pas osciller verticalement. En oscillant avec un certain angle par rapport à la verticale, la fréquence de l'oscillateur devient plus faible et peut correspondre à celle de l'excitation. On voit alors ici poindre de manière qualitative une propriété essentielle des ondes internes, l'angle de propagation est relié à la fréquence des oscillations.

## 2. Propagation des ondes internes

### 2.a Hypothèses simplificatrices

Nous allons nous placer dans un cadre assez restrictif afin de dégager les principales caractéristiques des ondes internes. Dans la partie 2.c, nous allons revenir sur la validité des hypothèses faites ici et voir en quoi les propriétés des ondes internes sont modifiées.

- Nous faisons tout d'abord l'approximation d'une pulsation  $N$  constante. D'un point de vue théorique, cela permettra de simplifier de nombreuses équations.  $N$  constant signifie que le gradient de densité doit être exponentiel :  $\rho(z) = \rho_0 e^{-N^2 z/g}$ , ce qui d'un point de vue expérimental est complexe à réaliser. Cependant, la distance typique de variation de  $\rho$  est  $\delta = g/N^2$ . Pour les stratifications que nous réaliserons, l'échelle de l'expérience sera toujours inférieure à la distance  $\delta$ , on peut donc faire un développement limité de l'exponentielle à l'ordre 1. De plus, avec l'approximation de Boussinesq que nous allons discuter dans la suite, la définition commune de  $N$  devient

$$N(z) = \sqrt{-\frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z}} \quad (\text{I.7})$$

On peut donc considérer expérimentalement qu'une stratification linéaire équivaut à une valeur de  $N$  constante.

Expérimentalement, réaliser une stratification linéaire est plus simple et plus stable qu'un autre type de stratification. En effet l'équation de diffusion de l'agent stratifiant  $c$  s'écrit, si l'on suppose une relation linéaire entre le flux et le gradient de l'agent stratifiant

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \Delta c \quad (\text{I.8})$$

Dans le cas d'une stratification linéaire,  $\partial c / \partial t = 0$ , la stratification n'évolue donc pas avec le temps.

- Nous considérons le fluide en jeu comme incompressible. De plus, nous négligeons la diffusion de l'agent stratifiant (qui dans notre cas est le chlorure de sodium). Le long d'une trajectoire, on peut donc écrire

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad (\text{I.9})$$

D'autre part, on peut toujours écrire l'équation de continuité, provenant de la conservation de la masse :

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad (\text{I.10})$$

En utilisant l'hypothèse d'incompressibilité, l'équation de continuité devient, comme on a l'habitude  $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$ . Cependant les équations (I.9) et (I.10) constituent deux relations indépendantes, l'hypothèse de conservation de la masse ayant juste été réécrite sous une forme

tenant compte de l'incompressibilité. Pour l'établissement des équations du mouvement, on prendra alors en compte ces deux équations indépendamment.

- Nous supposons pour l'instant, que la viscosité du fluide est nulle. Cela permet de simplifier le terme en  $\nu \Delta \vec{v}$  dans l'équation de Navier-Stokes.
- Une approximation souvent faite en géophysique est l'approximation de Boussinesq qui consiste à approximer  $\bar{\rho}(z)$  par  $\rho_0 = \langle \bar{\rho} \rangle$  la densité moyenne sur toute la stratification. On fait cette substitution dans tous les termes faisant intervenir  $\bar{\rho}(z)$ , sauf dans le terme de flottabilité puisqu'il contient la différence  $\rho' = \rho - \bar{\rho}(z)$ , la densité de la particule moins la densité à l'équilibre à la profondeur  $z$ .
- Nous ferons pour l'instant l'approximation d'un fluide bidimensionnel, contenu dans le plan  $xOz$ . On peut alors introduire la fonction courant  $\psi$  définie, dans le cas incompressible par

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -v_z \quad \text{et} \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = v_x \quad (\text{I.11})$$

qui permettra d'établir les équations du mouvement plus facilement.

- Nous étudions de plus des variations faibles des grandeurs d'intérêt  $(\rho, v, p)$ .

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{v}, \quad P = P_0 + p, \quad \rho = \bar{\rho}(z) + \rho'(x, y, z, t) \quad (\text{I.12})$$

avec  $|v| \ll |V|$ ,  $p \ll P$  et  $\rho' \ll \rho$ . Nous négligerons donc les termes faisant apparaître les produits des grandeurs  $v$ ,  $p$  et  $\rho'$  apparaissant dans l'équation de Navier-Stokes.

- Nous allons nous placer dans un référentiel galiléen. C'est-à-dire que nous allons négliger les forces de Coriolis et d'inertie d'entraînement dans l'application du principe fondamental de la dynamique. En pratique cela revient à négliger le terme  $\Omega \vec{z} \wedge \vec{v}$ , où  $\Omega$  est la vitesse de rotation du référentiel et  $\vec{v}$  la vitesse typique considérée. Pour quantifier l'effet de la force de Coriolis sur les trajectoires, on introduit généralement le nombre de Rossby, défini par  $R_o = v/(\Omega L_c)$  où  $L_c$  est une longueur caractéristique. On va supposer ici que  $R_o \gg 1$  et ainsi négliger l'effet de la rotation.

## 2.b Équation d'onde linéaire

Nous sommes en présence d'un milieu se composant d'une succession d'oscillateurs. Ce système possède un grand nombre de degrés de liberté, il

va donc pouvoir être le siège d'oscillations collectives, c'est à dire d'ondes. Nous allons donc chercher à écrire une équation d'onde pour ce système.

Avec nos hypothèses, les équations qui régissent l'évolution du fluide sont

$$\rho_0 \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad \text{Navier-Stokes suivant } x \quad (\text{I.13})$$

$$\rho_0 \frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial z} - \rho' g = 0 \quad \text{Navier-Stokes suivant } z \quad (\text{I.14})$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \left( \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) \rho = 0 \quad \text{Incompressibilité} \quad (\text{I.15})$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad \text{Conservation de la masse} \quad (\text{I.16})$$

On réécrit ces équations en utilisant la fonction courant. De plus, on simplifie la pression en dérivant l'équation (I.13) par  $\partial/\partial z$  et l'équation (I.14) par  $\partial/\partial x$  puis en les soustrayant. On obtient alors le système suivant

$$\rho_0 \frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} - \frac{\partial \rho'}{\partial x} g = 0 \quad (\text{I.17})$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \frac{N^2 \rho_0}{g} \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad (\text{I.18})$$

En combinant les deux équations, on peut éliminer  $\rho'$ , on obtient alors

$$\frac{\partial^2 \Delta \psi}{\partial t^2} + N^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0 \quad (\text{I.19})$$

L'équation obtenue a la même forme que des équations d'ondes classique (D'Alembert, Klein-Gordon) mais une différence fondamentale est que cette équation est anisotrope. En effet la dérivée par rapport à  $x$  brise la symétrie entre  $x$  et  $z$ . Évidemment c'est la force de gravité qui induit cette brisure de symétrie.

### Solutions en ondes planes

Nous allons chercher des solutions sous la forme d'ondes planes. On va donc raisonner avec un champ  $\psi$  complexe afin de simplifier les notations. Pour trouver le champ réel, il suffira de prendre  $(\psi + \psi^*)/2$ . Les solutions sont donc de la forme

$$\psi = \psi_0 e^{i(\omega t - k_x x - k_z z)} \quad (\text{I.20})$$

En introduisant cette forme dans l'équation (I.19), on obtient

$$\omega^2 (k_x^2 + k_z^2) = N^2 k_x^2 \quad (\text{I.21})$$

Cette relation de dispersion anisotrope est à la base de nombreuses propriétés spécifiques aux ondes internes. Introduisons l'angle  $\theta$  défini comme l'angle que fait le vecteur d'onde avec la verticale :  $\sin \theta = k_x / \sqrt{k_x^2 + k_z^2}$ . On obtient alors

$$\omega^2 = N^2 \sin^2 \theta \quad (\text{I.22})$$

Mise sous cette forme, la relation de dispersion montre explicitement que l'angle du vecteur d'onde est directement relié à la fréquence de l'onde, comme nous l'avions pressenti dans la discussion qualitative de la partie précédente. Le vecteur d'onde  $k$  n'est spécifié que par sa direction. La relation ne donne pas de contrainte sur les normes  $k_x$  et  $k_z$ , mais seulement sur leur rapport. Aucune longueur d'onde particulière n'est favorisée. Cette propriété aurait pu se deviner dès l'équation (I.19), qui ne faisait apparaître aucune échelle caractéristique.

Une autre conséquence de cette relation de dispersion est qu'une solution réelle n'existe que si  $\omega < N$ . Au delà, le vecteur d'onde est complexe et l'onde est exponentiellement amortie. Pour une valeur  $\omega$  imposée, inférieure à  $N$ , il existe alors quatre directions possibles pour le vecteur d'onde

$$\theta = \pm \arcsin \frac{\omega}{N} \quad \text{et} \quad \theta = \pi \pm \arcsin \frac{\omega}{N} \quad (\text{I.23})$$

Ces 4 directions sont *a priori* toutes possibles. Afin d'avoir plus d'intuition sur la façon dont se propage l'onde, calculons sa vitesse de phase  $c_\phi$  et sa vitesse de groupe  $c_g$ . Celles-ci peuvent facilement s'établir à partir de la relation de dispersion

$$c_\phi = \pm \frac{N \sin \theta}{k} (\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_z) \quad (\text{I.24})$$

$$c_g = \pm \frac{N \cos \theta}{k} (-\cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_z) \quad (\text{I.25})$$

On remarque que  $\vec{c}_\phi \cdot \vec{c}_g = 0$  : la vitesse de phase et la vitesse de groupe sont orthogonales. Cette propriété surprenante est encore une caractéristique typique des ondes internes. La vitesse de phase étant dirigée selon  $\vec{k}$ , et inclinée d'un angle  $\theta$  par rapport à la verticale, on en déduit que la vitesse de groupe est inclinée d'un angle  $\theta$  par rapport à l'horizontale. La direction de la vitesse particulière par rapport à l'horizontale  $\vec{v}$  est donnée par

$$\arctan \frac{v_z}{v_x} = - \arctan \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^{-1} \right) = - \arctan \frac{k_x}{k_z} = \pm \theta [\pi] \quad (\text{I.26})$$

La vitesse particulière est orientée dans la même direction que la vitesse de groupe. Cette propriété est plus répandue dans les domaines de ondes, c'est

le cas par exemple des ondes sonores. Par contre, l'orthogonalité de la vitesse de groupe avec les plans de phases est caractéristique des ondes internes.

On résume ces propriétés de propagation dans le schéma Fig. I.2.

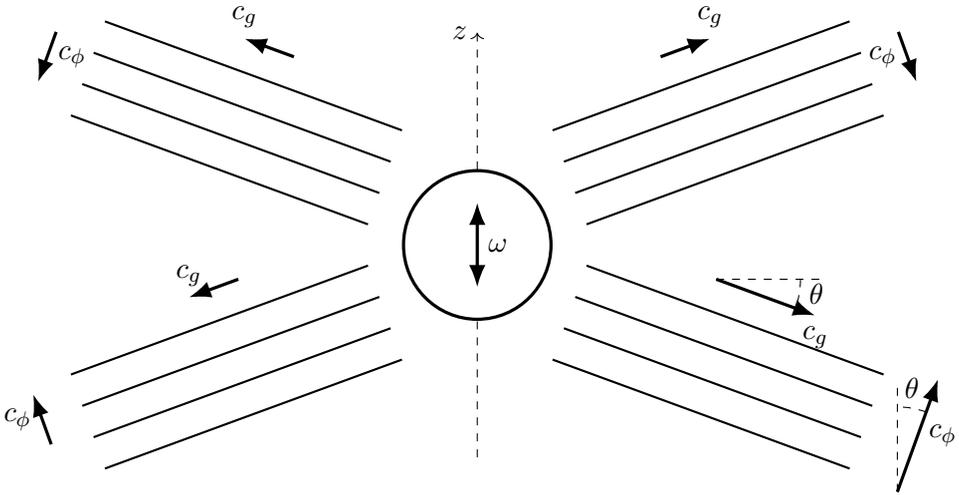


FIGURE I.2 – Oscillation d'un objet à la pulsation  $\omega$ , générant 4 faisceaux d'ondes internes, inclinés de  $\theta$ ,  $-\theta$ ,  $\pi - \theta$ ,  $-\pi + \theta$  par rapport à l'horizontale. Les vitesses de groupe  $c_g$  et de phase  $c_\phi$  sont représentées pour chaque faisceau.

Sur la Fig. I.2, un objet oscillant à la fréquence  $\omega$  génère 4 faisceaux d'ondes. Les vitesses de phases et de groupes sont dans des directions relatives telles que

$$\text{signe}(c_{g,x}) = \text{signe}(\omega c_{\phi,x}) \quad \text{et} \quad \text{signe}(c_{g,z}) = -\text{signe}(\omega c_{\phi,z}) \quad (\text{I.27})$$

Notons ici que la longueur d'onde, qui n'est pas prescrite par la relation de dispersion, est en fait imposée par la façon de générer les ondes. En effet la longueur d'onde générée sera dictée par l'objet oscillant créant le forçage. Dans nos expériences, nous allons utiliser des forçages qui ne génèrent qu'un seul faisceau de longueur d'onde contrôlée, en imposant une excitation de type onde plane, ou alors deux ondes planes se superposant donnant lieu à une structure dite de mode. On détaille Fig. I.3, dans le cas d'un forçage en ondes plane, la composition d'un faisceau d'ondes internes.

La vitesse particulière est représentée par les flèches grises. Les traits noirs obliques représentent les équi-phases typiques ( $0$  et  $\pm\pi$ ) de l'onde. Le

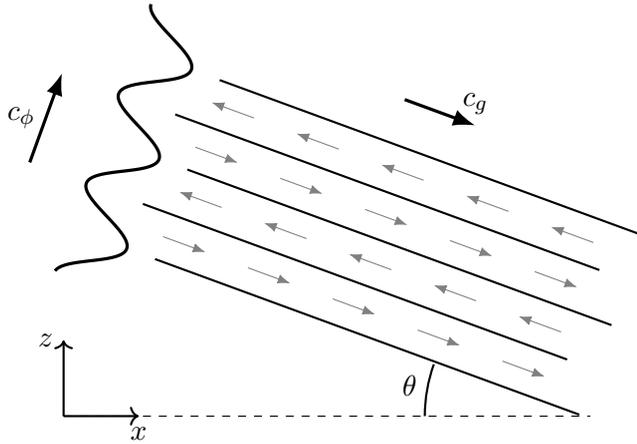


FIGURE I.3 – Champ de vitesse créé avec un forçage par un profil d’onde plane, représenté par la sinusoïde penchée. Les lignes noires représentent des iso-phases. La vitesse particulière est représentée par les flèches grises. Le faisceau d’ondes est incliné d’un angle  $\theta$  par rapport à l’horizontale.

forçage en ondes planes est indiqué par la sinusoïde penchée à gauche. La vitesse de phase  $c_\phi$ , inclinée d’un angle  $\theta$  par rapport à la verticale, indique le sens de propagation de la sinusoïde. La vitesse de groupe  $c_g$  est alignée avec la vitesse particulière et inclinée d’un angle  $\theta$  par rapport à l’horizontale.

## 2.c Validité des hypothèses

Maintenant que nous avons dégagé les principales propriétés des ondes internes, nous allons discuter la pertinence des hypothèses faites précédemment, dans le cadre de nos expériences. Bien sûr les expériences que nous allons réaliser en laboratoire ont pour but de représenter des situations naturelles. La pertinence des hypothèses vis-à-vis des conditions réelles de propagation des ondes internes sera discutée dans la partie B.

- Dans le cas d’une stratification non linéaire, le chemin suivi par les ondes n’est plus une ligne droite, mais une ligne courbe. Il faut donc être prudent quant au rapport de la longueur d’onde de l’onde sur la distance typique de variation de la stratification [49] avant d’appliquer les mêmes méthodes d’analyses et de prédictions que pour une stratification linéaire.
- Si l’on prend en compte la viscosité, on doit ajouter dans les équations

(I.13,I.14), le terme  $\nu\Delta\vec{v}$ . Les équations restent linéaires et on peut réécrire le système sous forme matricielle. En notant  $k$  la norme du vecteur d'onde, on obtient après quelques calculs :

$$\begin{pmatrix} -k^2(i\omega + \nu k^2) & i\frac{g}{\rho_0}k_x \\ iN^2\frac{\rho_0}{g}k_x & i\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi \\ \rho' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{I.28})$$

ce qui donne la relation de dispersion suivante :

$$k^2(i\omega + \nu k^2)i\omega + N^2k_x^2 = 0 \quad (\text{I.29})$$

Cette relation de dispersion peut conduire à des ondes évanescentes et modifie de manière générale la pulsation de l'onde par rapport au cas non visqueux. On peut montrer [5] que pour une viscosité prise égale à celle de l'eau  $\nu = 10^{-6}\text{m}^2.\text{s}^{-1}$ , la variation de pulsation est de moins de 1% dans les cas que nous allons considérer. Nous allons donc supposer que la viscosité est nulle dans la suite de ce manuscrit, pour le calcul de la relation de dispersion. Cependant, dans les chapitres II et VI, nous allons devoir prendre en compte la viscosité, afin d'expliquer certains phénomènes. La relation de dispersion restera cependant identique à celle du cas non visqueux.

- L'approximation de Boussinesq consiste à négliger la variation de densité avec  $z$  dans les termes autres que le terme de flottabilité. Cette approximation n'est alors valable que si la variation maximale  $\Delta\bar{\rho}$  est faible devant  $\rho_0$ . Dans nos expériences, la densité varie en moyenne entre  $1000\text{g.L}^{-1}$  et  $1050\text{g.L}^{-1}$ , l'approximation est donc valable à 5% près. Notons qu'il existe très peu de travaux théoriques sur les ondes internes en dehors de la validité de cette approximation.
- Le caractère bidimensionnel de l'écoulement est une hypothèse forte. Dans nos cuves, l'épaisseur est plus faible que les autres grandeurs d'un facteur 2 à 10 ce qui ne permet pas toujours de considérer *a priori* les écoulements comme bidimensionnels. Dans certains cas, la bidimensionalité des écoulements a été vérifiée *a posteriori*. L'étude des ondes internes et notamment des attracteurs d'ondes internes dans des géométries tridimensionnelles sera faite dans les chapitres IV et V.
- Dans nos expériences, le caractère non linéaire de la propagation des ondes internes dépend de l'amplitude du forçage mais également, des structures d'attracteurs que nous allons étudier. Expérimentalement, nous devons prendre en compte les non linéarités lors de l'observation

d'instabilités des faisceaux d'ondes internes. Elles seront étudiées dans les chapitres II et VI.

- Typiquement dans nos expériences,  $R_o \simeq 10^3 - 10^4$ . L'approximation qui consiste à négliger les termes dus à la rotation semble ici évidente, mais elle le sera moins dans le cas concret océanique.

### 3. Réflexion des ondes internes

#### 3.a Conditions aux limites

Nous ferons l'hypothèse de parois imperméables. Ces hypothèses sont tout à fait raisonnable pour les parois de nos dispositifs expérimentaux. Les ondes vont également se réfléchir sur des surfaces libres en haut de nos cuves. Étant donné la différence de masses volumique entre l'air et l'eau, on considérera que la réflexion sur une surface libre est identique à celle sur une paroi solide.

Dans le cas non visqueux, la condition aux limites est une condition de glissement sur la paroi, ce qui impose  $\Psi = C^{te}$  le long de la paroi. Nous prendrons cette constante nulle dans nos calculs. Cette condition n'est pas vérifiée pour une unique onde incidente  $\Psi_i = \Psi_0^i e^{i(\vec{k}^i \cdot \vec{x} - \omega t)}$ . On doit alors faire intervenir une onde réfléchie pour satisfaire la condition aux bords. En notant  $\Psi_r$  l'onde réfléchie, on peut écrire, sur la paroi

$$\Psi_0^i e^{i(\vec{k}^i \cdot \vec{x} - \omega t)} + \Psi_r(x, z, t) = 0 \quad (\text{I.30})$$

Traitons pour commencer le cas particulier d'une paroi verticale  $x = 0$ . On a alors

$$\Psi_r(0, z, t) = -\Psi_0^i e^{i(k_z^i z - \omega t)} \quad (\text{I.31})$$

Cette relation étant valable quelque soit  $t$  et  $z$ , on en déduit :

- L'onde réfléchie est également une onde plane
- L'onde réfléchie possède la même pulsation  $\omega$
- Le vecteur d'onde vertical  $k_z$  est invariant par réflexion :  $k_z^i = k_z^r = k_z$

En utilisant de plus la relation de dispersion des ondes internes, on a

$$\frac{k_x^i}{k_z^i} = \pm \tan \theta = \pm \frac{k_x^r}{k_z^r} \implies k_x^r = \pm k_x^i \quad (\text{I.32})$$

La condition  $k_x^r = k_x^i$  signifierait que le vecteur d'onde n'est pas modifié par la réflexion sur la paroi, donc que la vitesse de groupe non plus, et donc que l'onde traverserait la paroi, ce qui est proscrit. On a donc  $k_x^r = -k_x^i$ . L'angle de propagation de l'onde par rapport à la verticale est alors l'opposé

de celui de propagation. Dans ce cas particulier, la réflexion est dite spéculaire, c'est le cas de la réflexion de la plupart des ondes dont on a l'habitude (ondes acoustiques, mécaniques, lumineuses). Bien sûr le raisonnement est identique pour une paroi horizontale, sauf que cette fois-ci c'est l'angle de propagation par rapport à l'horizontale qui est conservé.

Nous allons maintenant analyser la réflexion sur une surface plane inclinée. Nous avons distingué ce dernier cas des réflexions sur des plans verticaux et horizontaux, car la réflexion n'est plus du tout spéculaire pour les plans inclinés.

### 3.b Réflexion sur une paroi inclinée

Adoptons la même démarche que dans la section précédente, cette fois-ci pour une paroi inclinée d'un angle  $\alpha$  par rapport à l'horizontale. Nous définissons alors les coordonnées associées au repère lié au plan

$$\eta = \cos(\alpha)x + \sin(\alpha)z \quad (\text{I.33})$$

$$\xi = \cos(\alpha)z - \sin(\alpha)x \quad (\text{I.34})$$

La condition de réflexion (I.31) s'écrit alors

$$\Psi_r(\xi = 0, \eta, t) = -\Psi_0^i e^{i(k_\eta^i \eta - \omega t)} \quad (\text{I.35})$$

De même l'onde réfléchi est une onde plane qui se propage à la même fréquence. Cette fois-ci, le vecteur d'onde conservé est  $k_\eta = \cos(\alpha)k_x + \sin(\alpha)k_z$ . On peut donc déterminer le vecteur d'onde réfléchi  $\vec{k}_r$ , avec le système d'équations suivant

$$\cos(\alpha)k_x^i + \sin(\alpha)k_z^i = \cos(\alpha)k_x^r + \sin(\alpha)k_z^r \quad (\text{I.36})$$

$$\frac{k_x^i}{k_z^i} = \frac{k_x^r}{k_z^r} = \pm \tan \theta \quad (\text{I.37})$$

Avant de discuter la résolution de l'équation et l'impact de la réflexion sur la longueur d'onde, notons que de même que précédemment, on peut déterminer de manière unique le vecteur d'onde réfléchi  $\vec{k}_r$ , en supprimant "à la main" la solution qui ne respecte pas la condition d'imperméabilité. Sans détailler tous les calculs, décrivons les 3 cas que l'on peut rencontrer, schématisés Fig. I.4.

Sur cette figure, on a tracé le rayon incident en vert et le rayon réfléchi en rouge. La croix des 4 possibilités de directions est représentée en gris.

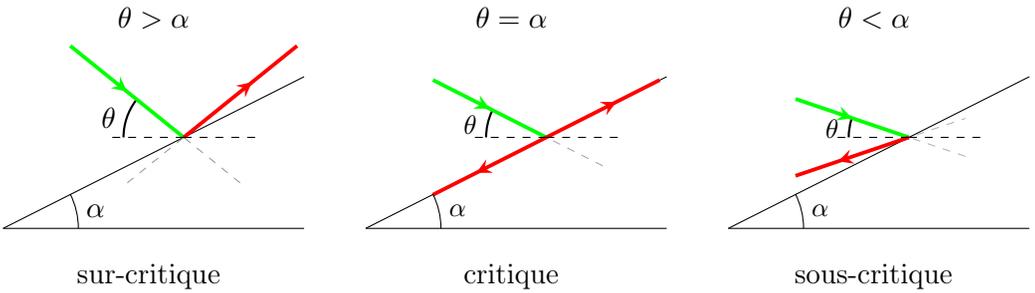


FIGURE I.4 – Les 3 cas de réflexion bidimensionnelle d’une onde sur une surface plane inclinée. Le rayon incident est représenté en vert, et le rayon réfléchi en rouge. En gris sont représentés les deux autres directions de propagation permises par la relation de dispersion, mais empêchées par la pente.

- Réflexion sur-critique :  $\theta > \alpha$ . C’est le cas de la figure I.4(a). La propagation vers le bas est empêchée par la pente. Le rayon repart vers le haut.
- Réflexion sous-critique :  $\theta < \alpha$ . C’est le cas de la figure I.4(c). La propagation vers la droite est empêchée par la pente. Le rayon repart vers la gauche.
- Réflexion critique :  $\alpha = \theta$ . C’est le cas de la figure I.4(b). Le rayon a théoriquement deux possibilités pour repartir.

Ce dernier cas est intéressant d’un point de vue expérimental et théorique. Théoriquement, le faisceau réfléchi possède des propriétés étonnantes : une longueur d’onde et une vitesse de groupe nulle, et une amplitude infinie. Des travaux réalisés par Dauxois & Young [19] montrent comment résoudre ce paradoxe en considérant les effets non linéaires tels que la création d’harmoniques. Expérimentalement, cette situation ne peut pas être atteinte exactement. Cependant, lorsqu’on s’approche de la réflexion critique, du fait de la forte concentration d’énergie, on observe bien la création d’harmoniques.

Dans les schémas que nous venons de discuter, nous n’avons pris en compte qu’un seul rayon se réfléchissant sur la paroi. On a donc caché les effets sur la longueur d’onde. Revenons alors sur le système (I.36) pour discuter ces effets.

### 3.c Focalisation

L’équation (I.36) stipule que la longueur d’onde (ou le vecteur d’onde) suivant la pente est conservée. Cela implique que la longueur d’onde totale

n'est pas conservée. En effet, si l'on exprime à partir du système (I.37), le rapport  $\gamma$  des vecteurs d'ondes incident et réfléchi, on obtient :

$$\gamma = \frac{k_r}{k_i} = \frac{\lambda_i}{\lambda_r} = \left| \frac{\sin(\theta + \alpha)}{\sin(\theta - \alpha)} \right| \quad (\text{I.38})$$

$\gamma > 1$  signifie que la longueur d'onde de l'onde réfléchi est plus petite que la longueur d'onde de l'onde incidente. Cela signifie que la réflexion a concentré l'énergie de l'onde interne. Cette focalisation de l'énergie dépend uniquement des deux angles  $\theta$  et  $\alpha$ . Cette focalisation peut se comprendre géométriquement. Plaçons-nous dans le cas d'une réflexion sous critique et traçons Fig. I.5 trois iso-phases de l'onde incidente, dans le cas d'une réflexion sur une surface horizontale et sur une surface inclinée.

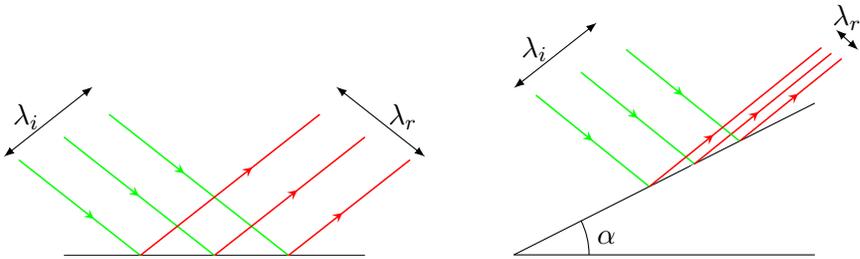


FIGURE I.5 – Réflexion d'un faisceau d'ondes internes sur une surface horizontale (à gauche) et inclinée (à droite). La longueur d'onde du faisceau incident en vert et réfléchi en rouge est indiquée.

Avec la construction que l'on a définie précédemment, on trace facilement les trois rayons réfléchis. Bien sûr dans le cas de la surface horizontale, la longueur d'onde est inchangée,  $\lambda_r = \lambda_i$ . Dans le cas de la surface plane, les surfaces iso-phases réfléchies sont beaucoup plus proches les uns des autres, synonyme d'augmentation d'énergie.

Lorsque  $\theta - \alpha \rightarrow 0$ , le paramètre de focalisation diverge. On retrouve le cas de la réflexion critique, tracé Fig. I.4(b).

Bien sûr, par principe de retour inverse des rayons<sup>1</sup>, on a une défocalisation si les rayons se propagent dans l'autre sens.

1. Ce principe s'applique étant donné que l'équation d'évolution ne fait intervenir qu'une dérivée seconde par rapport au temps

## B Les ondes internes dans la nature

En présence de gravité, les fluides se stratifient de manière naturelle. C'est pourquoi on rencontre des fluides stratifiés sur terre. Les deux principaux sont l'atmosphère d'une part et les océans, mers et certains lacs d'autre part.

Mentionnons seulement ici que les ondes internes peuvent également se rencontrer dans un contexte astrophysique. En effet, l'intérieur des planètes peut également être partiellement stratifié. Par exemple sur Terre, le noyau externe liquide est stratifié, et donc potentiellement siège d'ondes internes [73]. Des mesures réalisées par gravimétrie suggèrent la présence d'ondes internes inertielles dans ce noyau externe, suite à une série de violents séismes [65].

### 1. Les ondes internes dans l'océan

À la différence de nos expériences, l'océan est stratifié à la fois par un gradient de sel et par un gradient de température, chacun intervenant de manière significative dans l'évolution de la densité dans l'océan. Des mesures *in situ* sont réalisées à l'aide de sondes qui mesurent la salinité et la température et sont plongées sur toute la profondeur de l'océan. Ces sondes sont très chères et elles sont facilement abimées lors des mesures, ce qui explique que peu de mesures *in situ* sont disponibles. La figure I.6 montre des relevés réalisés dans l'océan Pacifique, extrait de [35].

Sur cette figure on remarque que l'océan peut se découper en trois couches :

- La couche homogène, située au niveau de la surface. Cette couche a une épaisseur typique de 100 m mais qui varie beaucoup en fonction de nombreux paramètres atmosphériques. L'homogénéisation de cette couche est due aux interactions de la surface avec l'atmosphère (vents, échanges thermiques).
- La pycnoclyne, couche de forte stratification, de l'ordre d'une centaine de mètres d'épaisseur, avec une pulsation de flottabilité d'environ  $10^{-2}$  rad.s<sup>-1</sup>. Une très forte stratification limite les mouvements entre la surface et les couches plus profondes de l'océan. La position de la pycnoclyne varie entre une centaine de mètres jusqu'à un kilomètre de la surface en fonction de nombreux paramètres comme la température de la surface, les latitudes et longitudes considérées, les vents...
- Une zone abyssale, qui s'étend de la pycnoclyne jusqu'à la topographie, de pulsation de flottabilité comprise entre  $10^{-3}$  et  $10^{-4}$  rad.s<sup>-1</sup>. C'est principalement cette dernière couche, de stratification quasi-linéaire, que nous essayons de modéliser avec nos expériences.

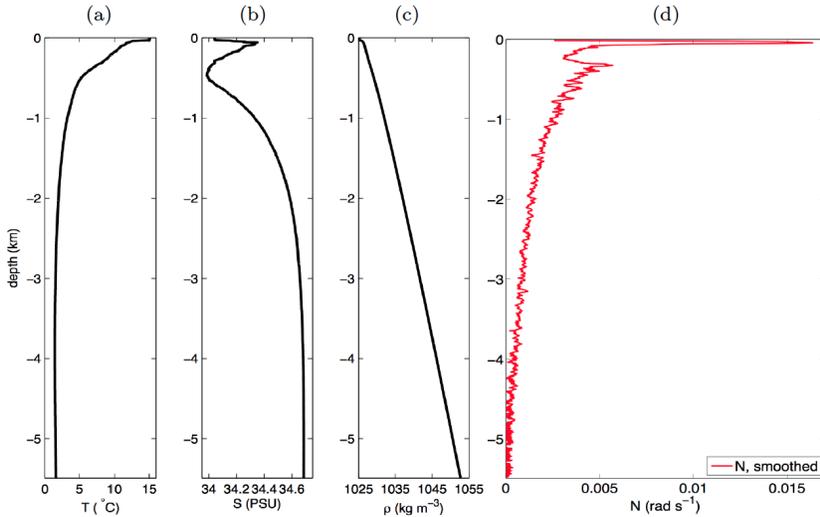


FIGURE I.6 – Mesures *in situ* des profils de température (a), salinité (b), densité (c), et pulsation de flottabilité (d) en fonction de la profondeur. Les mesures ont été réalisées à  $40^{\circ}\text{N}$  dans l'océan Pacifique. Données extraites de [35].

Les ondes internes portent bien leur nom : Du fait de la stratification des océans, les ondes ne peuvent apparaître que dans la pycnocline ou la couche abyssale plus profonde. On ne peut donc pas les observer directement comme les ondes à surface de l'eau ou les solitons. Cependant, des techniques ont été développées pour visualiser des traces laissées par la génération de ces ondes à la surface.

La première méthode consiste à observer les rugosités de la surface de l'eau, à l'aide d'une imagerie par Radar à Ouverture Synthétique (SAR en anglais). On montre Fig. I.7(a), un exemple de données résultant de cette méthode, permettant de visualiser la propagation des ondes internes [47]. Une autre méthode consiste à mesurer la température de la surface de l'eau grâce à des mesures aériennes infrarouge[27]. La figure I.7(b) montre des oscillations de la température de la surface de l'eau, signe de la présence d'ondes internes au niveau de la pycnocline.

Ces méthodes restent difficile à utiliser pour étudier les ondes internes océaniques, notamment celles qui ont lieu dans la zone abyssale, dont les signatures à la surface sont très faibles.

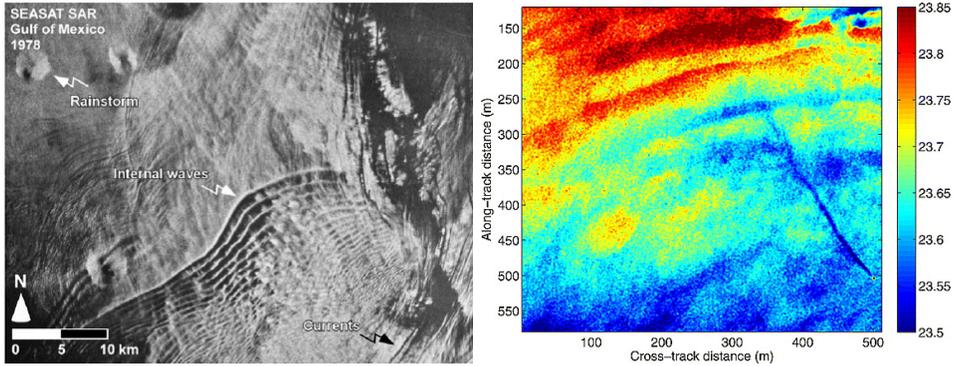


FIGURE I.7 – Visualisation d’ondes internes dans l’océan à travers leur signature sur les rugosités (à gauche) et la température (à droite) de la surface de l’eau. Extrait de [47] et [27]

### 1.a Retour sur les hypothèses

Pour faire les calculs, nous avons modélisé notre fluide avec un certain nombre d’hypothèses, qui seront pour la plupart vérifiées dans les expériences que nous allons mener en laboratoire. Mais ces hypothèses sont-elles acceptables pour décrire les ondes internes dans l’océan ? Nous allons revenir sur chacune d’elle, dans le contexte océanique, et discuter leur pertinence.

- Le profil de stratification n’est pas constant dans les océans, comme on peut le voir Fig. I.6. Cependant, en se restreignant à la zone située sous la pycnocline,  $N$  est plus ou moins constant, avec une valeur de  $10^{-3}$  à  $10^{-4}$   $\text{rad.s}^{-1}$ .
- L’échelle de dissipation visqueuse reste la même que pour dans nos expériences, cependant dans l’océan, les longueurs d’ondes caractéristiques des ondes internes sont de l’ordre de la centaine de mètres. Les ondes internes peuvent alors se propager sur des milliers de kilomètres avant d’être atténuées. On peut donc négliger la viscosité lors de la propagation de faisceaux. Cependant, si l’on se retrouve dans un cas de très forte focalisation, l’amplitude devenant très importante, les effets visqueux et la dissipation turbulente doivent être pris en compte.
- L’approximation de Boussinesq est encore mieux vérifiée dans l’océan que dans nos expériences. En effet, comme le montre la figure I.6, les variations de densité sont de quelques  $\text{g.L}^{-1}$ .
- L’hypothèse de bidimensionnalité n’est bien sûr pas vérifiée dans les

océans. Par contre, certaines topographies particulières peuvent, dans certains cas être approximées par des géométries bidimensionnelles, ou plutôt des géométries tridimensionnelles invariantes suivant une direction. Cette hypothèse est la plus fragile de celles que nous faisons, c'est pourquoi nous avons étudié dans cette thèse la propagation des ondes internes en trois dimensions.

- Le caractère non linéaire des ondes n'intervient que lors de fortes amplitudes, ou d'interactions entre faisceaux. Cette hypothèse n'est pas non plus vérifiée partout dans les océans, mais loin des zones de mélange et de fortes interactions, l'hypothèse de linéarité reste valable. De plus on montrera dans le chapitre suivant, que les solutions en ondes planes obtenues pour les équations linéaires vérifient également les équations non linéaires.
- Dans nos équations, nous avons négligé le terme linéaire des forces non galiléenne :  $\Omega_T \vec{z} \wedge \vec{v}$ . Pour les ondes internes dans l'océan, la pulsation  $f$  à considérer dépend de la latitude  $\lambda$  à laquelle les observations sont réalisées,  $f = 2\Omega_T \sin \lambda$ . En ordre de grandeur,  $R_o \simeq 10^{-2}$  ce qui ne permet pas de négliger les effets de la rotation. Dans le cas linéaire, l'introduction de ce terme modifie la relation de dispersion comme suit

$$\omega^2 = N^2 \sin^2 \theta + f^2 \cos^2 \theta \quad (\text{I.39})$$

L'ajout de la rotation crée une pulsation de coupure basse. En effet, pour que la pulsation soit réelle, il faut que  $f < \omega < N$  (si bien sûr  $f < N$ ). Cette modification ne modifie pas drastiquement la propagation des ondes dans l'océan, sauf à une latitude dite critique. À cette latitude  $2f = \omega$ , et l'onde transfère une partie de son énergie dans la génération de deux ondes filles de pulsation  $\omega/2$ . En dehors de la modification de la relation de dispersion, on peut noter que les particules de fluides n'effectuent plus des mouvements oscillants suivant la direction de propagation, mais des mouvements elliptiques, dont l'excentricité est contrôlée par  $\omega$  et  $f$ , dans des plans inclinés de l'angle  $\theta$  par rapport à l'horizontale.

## 1.b Génération des ondes internes

Les ondes internes dans l'océan sont générées majoritairement par deux mécanismes. Le premier provient de phénomènes atmosphériques violents comme des tempêtes, qui agitent la surface de l'océan. Ces mouvements sont transmis à la pycnocline, où des ondes internes sont alors générées [79]. Le second mécanisme, provient de l'interaction d'un courant océanique avec une

topographie sous marine. En effet, selon la vitesse typique du courant  $U$  et la hauteur de l'obstacle  $h$ , des ondes internes peuvent être générées. On introduit le nombre de Froude

$$Fr = \frac{U}{Nh} \quad (\text{I.40})$$

qui permet de quantifier le rapport entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle de l'écoulement. Si  $Fr < 1$ , la vitesse de l'écoulement n'est pas suffisante pour soulever les particules de fluide sur la hauteur de la topographie. Si  $Fr > 1$ , le courant soulève les particules de fluide vers un milieu moins dense. Comme vu en introduction, les particules vont alors osciller, créant ainsi des ondes internes.

D'où proviennent les courants dans les océans ? Une des principales sources de mouvement est dû au phénomène de marées. En effet, la marée est un mouvement global de l'eau, mais on peut de manière équivalente considérer l'eau immobile et la topographie en mouvement. On est donc ramené à la situation d'un objet oscillant dans un fluide stratifié. Les périodes de forçage principales sont d'environ 12 h (marée semi-diurne) ou 24 h (marée diurne), ce qui correspond à des pulsations de l'ordre de  $10^{-4} \text{ rad.s}^{-1}$ . Les ondes internes sont donc globalement très peu inclinées, bien que l'angle de propagation varie en fonction de la profondeur.

Une autre source importante de courants dans l'océan est dû aux refroidissements/réchauffements de l'eau. À cela s'ajoute la salinité qui participe également à la stratification. Nous allons voir quel est le rôle des ondes internes dans la circulation océanique globale.

### 1.c Circulation océanique et mélange

La circulation océanique à grande échelle appelée couramment circulation thermohaline, est pilotée comme son nom l'indique par des gradients de température et de salinité de l'eau sur la planète. De manière très schématique, on peut résumer la circulation thermohaline en plusieurs étapes. Les eaux salées des pôles plongent vers le fond des océans. Ce mouvement entraîne les eaux chaudes de surface proche de l'équateur, de faible densité. De même, une nouvelle aspiration a lieu au niveau des masses d'eau denses vers le haut, c'est la remontée convective. Une cellule de circulation est schématisée Fig. I.8(a).

En réalité, ce nom de circulation thermohaline est incorrect car de nombreux autres phénomènes ont des rôles primordiaux pour expliquer ces mou-

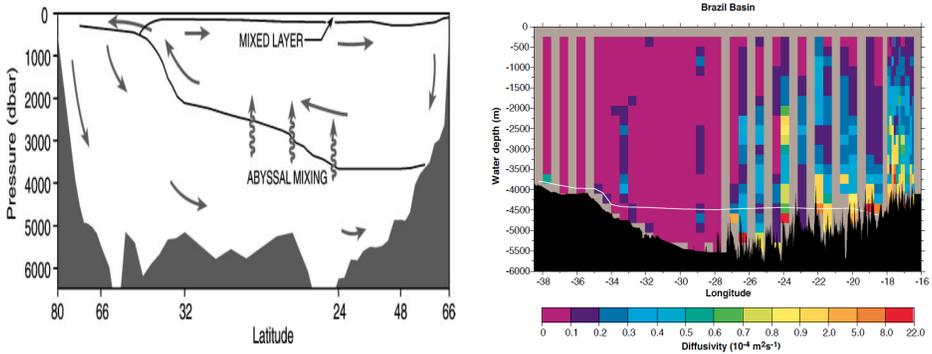


FIGURE I.8 – À gauche : Exemple d’une cellule de circulation océanique, extrait de [93]. À droite : Mesure *in situ* du coefficient de diffusion turbulente pour une section longitudinale du bassin du Brésil, extrait de [78]

vements. Entre autres, l’évaporation et le forçage dû aux vents y jouent des rôles non négligeables. De plus, la bathymétrie joue un rôle très important dans la circulation à l’échelle du globe. Tout ceci fait que la description simple de la cellule de circulation est plus une exception que la règle générale.

Sur le schéma Fig. I.8(a), les flèches en zigzag représentent le mélange, nécessaire pour que la stratification reste stable et que la remontée convective ait bien lieu. Ce mouvement est beaucoup plus coûteux énergétiquement que les deux autres étapes de la circulation, car des eaux denses (car froides et salées) doivent remonter proche de la surface. La puissance nécessaire pour que cette remontée ait lieu est de l’ordre de 1TW à 2TW [70]. L’énergie des marées transférée aux ondes internes est estimée à 1 TW [93].

Les ondes internes pourraient alors apporter en partie l’énergie nécessaire à la remontée convective et au maintien de la stratification. En effet, le mélange à ce niveau est décrit à l’aide d’un coefficient de diffusion turbulente<sup>2</sup> qui compare le flux vertical de densité à la variation verticale de densité. Plus ce coefficient est fort, plus il y a de mélange dans le fluide. Des mesures *in situ* de ce coefficient sont représentées Fig. I.9 [78].

Sur cette figure, on observe une diffusivité turbulente faible en dehors des zones possédant des topographies irrégulières. Les ondes internes étant plus facilement générées si la hauteur des topographies  $h$  est faible, elles ont plus de probabilité d’être créées au niveau des topographies irrégulières.

2. Ce coefficient est une sorte de diffusion effective, bien plus important que la diffusion moléculaire.

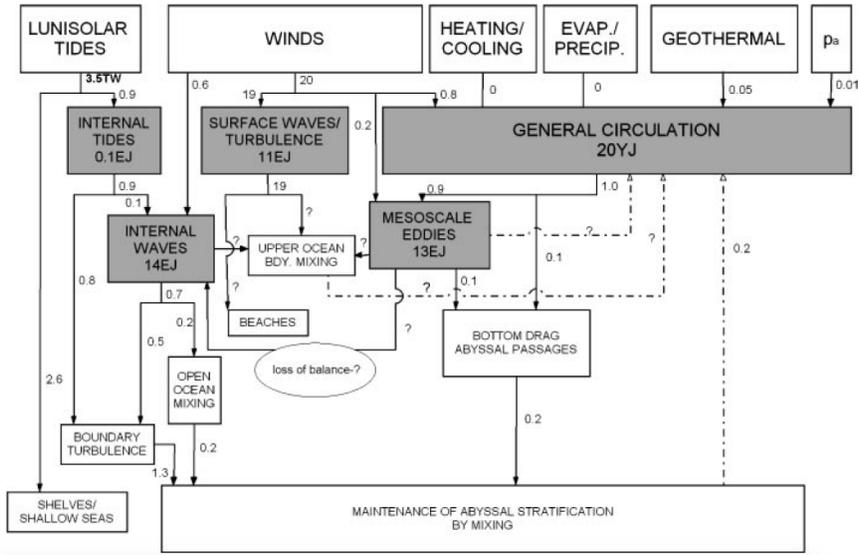


FIGURE I.9 – Bilan énergétique, des différents phénomènes physiques apportant de l'énergie à l'océan, ainsi que les principaux échanges énergiques ayant lieu au sein des océans. Extrait de [93], avec *erratum* "Interval waves 1.4 EJ".

Vraisemblablement, la présence d'ondes internes augmente le coefficient de diffusivité turbulente, ce qui renforce l'hypothèse de leur rôle sur la stratification océanique. Cette question est complexe et ne peut être prise séparément des autres échanges énergétiques qui ont lieu dans l'océan. Pour donner un aperçu de la complexité de ces échanges, un schéma, tiré de [93] résume les différents échanges énergétiques qui peuvent avoir lieu.

## 2. Les ondes internes dans l'atmosphère

De part sa facilité d'accès, l'atmosphère a été le premier fluide stratifié à être étudié. L'utilisation de ballons sondes a permis d'établir des profils de densité sur plusieurs dizaines de kilomètres, révélant une structure en couches complexe, dont une partie allant de 6 km à 18 km est présentée Fig. I.10

L'atmosphère étant compressible, les grandeurs tracées ici sont des quantités (température, densité,...) "potentielles". Dans notre raisonnement de début de chapitre, nous avons considéré les oscillations d'une particule de fluide qui montait et descendait dans un champ de densité, tout en gar-

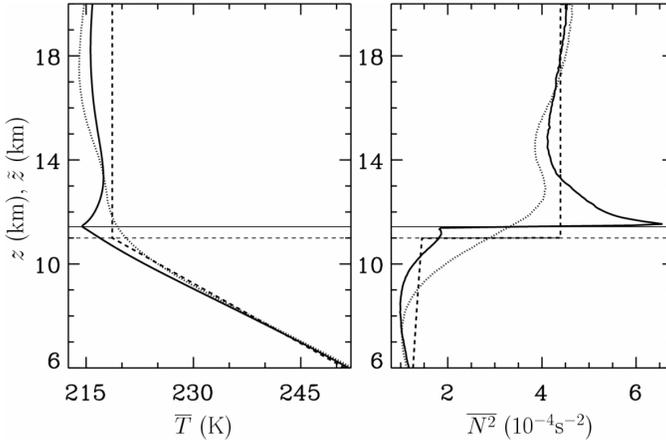


FIGURE I.10 – Profils de température (à gauche) et de pulsation de flottabilité (à droite) entre 6 et 20 km d’altitude, réalisés à  $45^\circ\text{N}$ . Les mesures proviennent de données récoltées par sonde radio pendant 5 ans. La ligne en traits pleins représente la position moyenne de la tropopause. Des profils similaires sont obtenus à d’autres latitudes. Extrait de [7].

dant sa densité propre. Pour un fluide compressible, une particule qui monte dans une zone de pression plus faible subit une détente, considérée comme adiabatique. Cette détente crée alors un refroidissement, qui augmente la densité de la particule et modifie alors sa dynamique. Il faut tenir compte des changements de température pour étudier la stabilité de la stratification. On compare alors les densités de particules fictives qui seraient ramenées adiabatiquement à la surface à la pression atmosphérique. Ces densités sont dites potentielles.

### Génération d’ondes internes

Dans le cas de la troposphère, la période de Brunt-Väisälä est de l’ordre de 10 minutes. Pour obtenir des ondes internes, le forçage doit avoir une fréquence de forçage de cet ordre de grandeur<sup>3</sup>. Des forçages suffisamment rapides peuvent apparaître : un vent suffisamment intense soufflant sur une topographie d’une taille de quelques kilomètres induit une excitation à la bonne fréquence. Une telle configuration peut se rencontrer dans la nature, comme par exemple sur la Fig. I.11, qui a été prise sur l’île d’Amsterdam, dans l’océan Indien ou au dessus d’une ville en Chine.

3. La limite basse est due à la rotation.

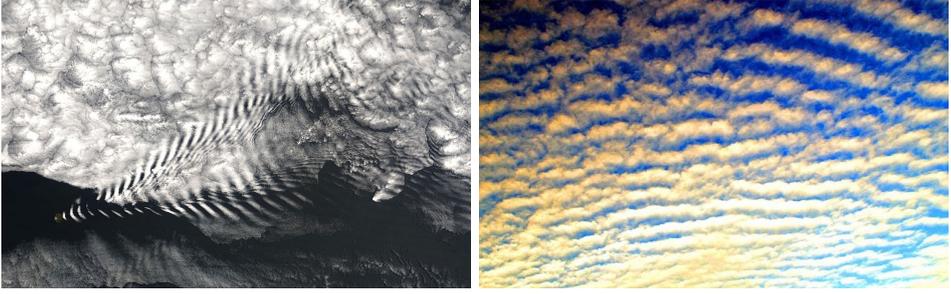


FIGURE I.11 – Ondes internes générées dans l’atmosphère et visualisées à l’aide des nuages, créées au dessus de l’île Amsterdam dans l’océan Indien (à gauche) et dans la ville de Shiyang (Chine).

Les ondes internes générées, en bas à gauche de la figure de gauche, induisent des mouvements verticaux de l’air. L’air humide à basse altitude est entraîné dans une zone à haute altitude, créant de la condensation et donc la formation de nuages, ce qui rend les ondes internes visibles.

Ces ondes peuvent devenir instables et induire du mélange dans l’atmosphère. La modélisation de ces phénomènes permettrait d’améliorer les modèles météorologiques actuels.

## C Étude expérimentale des ondes internes

Dans ce manuscrit, l’étude des ondes internes est principalement expérimentale. Pour ce faire nous allons créer des "océans miniatures". Par là, on entend un fluide stratifié linéairement en densité. Pour réaliser cette stratification, nous allons uniquement utiliser un gradient de sel. En effet, un gradient de température est bien plus complexe à maintenir constant au cours d’une expérience.

Les cuves en plexiglass dans lesquelles nous réaliserons nos expériences, sont de dimensions différentes en fonction des besoins expérimentaux. Nous préciserons avant chaque expérience, les dimensions de la cuve utilisée.

### 1. Obtention d’une stratification

#### 1.a Méthodes de remplissage

Dans toute nos expériences, nous réaliserons des stratifications linéaires. Une stratification linéaire peut facilement être obtenue grâce à la méthode

dite des deux bacs [74]. Cette méthode fonctionne si l'on souhaite remplir une cuve de section constante. L'idée est d'ajouter de l'eau de moins en moins salée au cours du remplissage. On dispose de bacs, un rempli d'eau pure et un d'eau salée, de même section  $S$  et de deux pompes. Si l'on injecte le fluide par le haut de la cuve, on doit d'abord injecter l'eau la plus salée, avec un débit  $Q_1$ . Le bac d'eau salée est alors relié à un flotteur permettant le remplissage par le haut. On souhaite ensuite ajouter de l'eau moins salée. Le bac d'eau pure est relié au bac d'eau salée avec un débit  $Q_2$ , et une hélice permettant d'homogénéiser le bac d'eau salée. Au cours du remplissage, l'eau dans le bac d'eau salée devient de moins en moins salée et donc on ajoute bien un fluide de moins en moins dense. En choisissant  $Q_1 = 2Q_2$ , on obtient une stratification linéaire.

Le temps de remplissage dans nos expériences varie en fonction de la cuve, mais est environ de 4 h. Un remplissage avec un débit faible limite le mélange lors du remplissage et permet d'obtenir une meilleure stratification. Ces contraintes expérimentales nous obligent à changer de stratification dès que l'on souhaite changer de type de forçage ou de géométrie. Récemment, notre équipe a mis au point un générateur dont chaque partie est entièrement pilotée par un moteur, permettant de changer les profils de générations d'ondes sans avoir à réaliser une nouvelle stratification.

## 1.b Mesure de la stratification

La stratification obtenue avec la méthode précédente est mesurée avec une sonde conductimétrique. La sonde que nous utilisons mesure à la fois la température et la conductance électrique du fluide entre deux plaques conductrices. La conductance électrique dépend de la concentration d'ions présents dans la solution, de la température et de la taille des plaques conductrices. Afin de convertir la tension de la sonde en densité  $\bar{\rho}(z)$  dans le fluide, nous devons étalonner la sonde. L'étalonnage se fait avec des échantillons de densités connus précisément grâce à un densimètre AntonPaar. Ce densimètre fonctionne en mesurant la fréquence de résonance d'un capillaire rempli du fluide à étudier. Cette méthode permet une mesure avec une précision de  $0.001 \text{ kg.L}^{-1}$ .

La sonde est ensuite attachée à un moteur permettant de descendre lentement dans le fluide, afin de créer le moins de mouvements possible. La température et la densité sont mesurées continuellement. Un exemple d'une mesure de la densité est représentée Fig. I.12. Une régression affine, représentée en traitillées, est tracée en décalé de la courbe pour être plus visible.

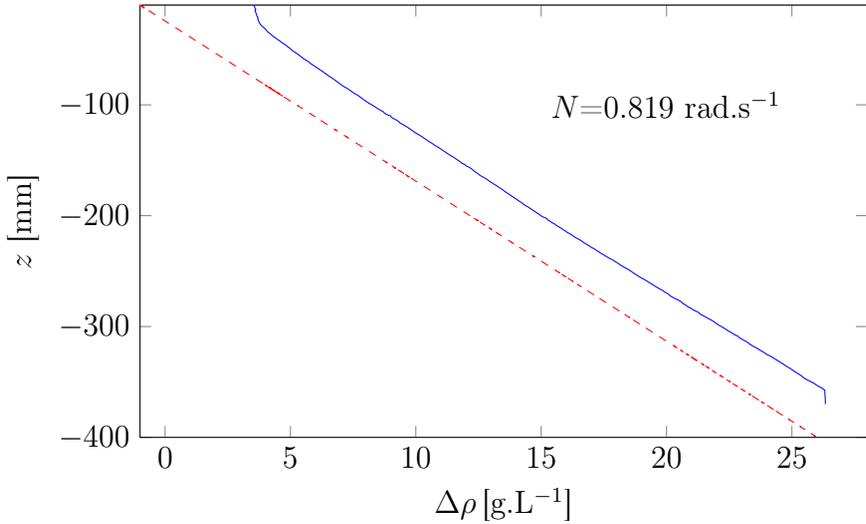


FIGURE I.12 – Exemple d’un profil de densité obtenu avec la sonde conductimétrique. Le profil de densité est tracé en bleu. La courbe rouge indique la régression linéaire permettant d’obtenir  $N = 0.819 \text{ rad.s}^{-1}$ .

La régression permet de trouver la valeur de  $N$  pour la stratification. On remarque que l’hypothèse de linéarité de la stratification est vérifiée sauf aux extrémités de la cuve. En effet, en haut et en bas de la cuve, on observe une couche homogène de quelques centimètres. Cette couche homogène est due en haut de la cuve à l’évaporation de l’eau sur le dessus de la cuve, ce qui augmente progressivement la densité. D’autres problèmes lors du remplissage augmentent la taille des couches homogène. Avec le temps, la taille de ces couches homogènes augmente, à cause des conditions aux bords, qui ne respectent pas les conditions de stationnarité de la stratification linéaire.

## 2. Génération des ondes internes

Maintenant que nous avons créé un dispositif permettant de préparer un fluide stratifié linéairement, nous devons trouver un moyen de générer des ondes, de forme et d’amplitude contrôlable et excitable à la fréquence voulue.

La génération contrôlée d’ondes internes n’est pas évidente. En effet la relation de dispersion n’imposant pas de longueur caractéristique, celle-ci est entièrement déterminée<sup>4</sup> par l’objet oscillant. Un étude détaillée de ce

4. au moment de la génération.

problème [36, 38] montre que les facteurs principaux jouant sur le spectre spatial de l'onde sont : la taille de l'objet, sa forme, l'amplitude des oscillations et l'épaisseur de la couche limite visqueuse (fonction de la fréquence d'oscillation).

## 2.a Générateurs

Deux types de générateurs ont été utilisés pendant cette thèse, suivant la taille de la cuve utilisée.

Le premier générateur a été développé par Gostiaux et al [38], caractérisé par Mercier et al [68] et amélioré par Bordes [8]. Ce générateur est composé d'un arbre à cames qui entraîne en rotation des disques (voir Fig. I.13). La position  $e$  du centre du disque par rapport au centre de l'arbre à cames est réglable et permet ainsi de modifier l'amplitude d'oscillation entre 0 et 15 mm. L'arbre est composé de 6 ergots, disposés tous les  $60^\circ$ . À cela s'ajoute le système d'encoches de fixation des disques sur l'arbre, qui est de trois types possibles, représenté en bas de la figure I.13. Soit les encoches sont alignées avec la direction de translation (A), soit elles sont déphasées de  $\pm 15^\circ$  (B et B'), soit elles sont déphasées de  $30^\circ$  (C). Avec ce système, chaque disque peut osciller avec une phase discrète, comprise entre  $0^\circ$  et  $345^\circ$ , avec un incrément minimal de  $15^\circ$  entre deux disques.

Le générateur est composé de 47 disques entraînant des plaques de 6 mm d'épaisseur. On peut alors forcer le fluide sur une hauteur maximale de 280 mm. En pratique, on ne peut pas générer de forçage sur les quelques centimètres au fond de la cuve, à cause du système de maintien des plaques et de l'arbre. Le générateur est conçu pour occuper exactement la largeur des cuves larges de 170 mm. En pratique, on ne force les ondes que sur 150 mm de large, toujours à cause du système de maintien.

L'entraînement de l'arbre à cames est réalisé par un moteur à courant continu. La tension délivrée dans l'induit du moteur permet de modifier la fréquence de rotation des disques. En pratique, en tenant en compte la valeur moyenne de  $N$ , les angles accessibles sont compris entre  $15 - 20^\circ$  et  $60 - 70^\circ$ . La limite inférieure est due aux frottements qui ont lieu entre les cames et qui empêchent les mouvements trop lents. La limite supérieure est due au fait que, pour des angles importants, on cherche à générer des ondes qui sont quasi verticales, avec un mouvement horizontal des plaques. L'efficacité du générateur diminue alors fortement quand  $\theta$  tend vers  $90^\circ$ .

Ce générateur permet alors de créer de nombreux profils d'excitations. Nous utiliserons principalement deux profils, l'onde plane ou le mode 1. Nous allons détailler ces deux types de profils dans la partie suivante.

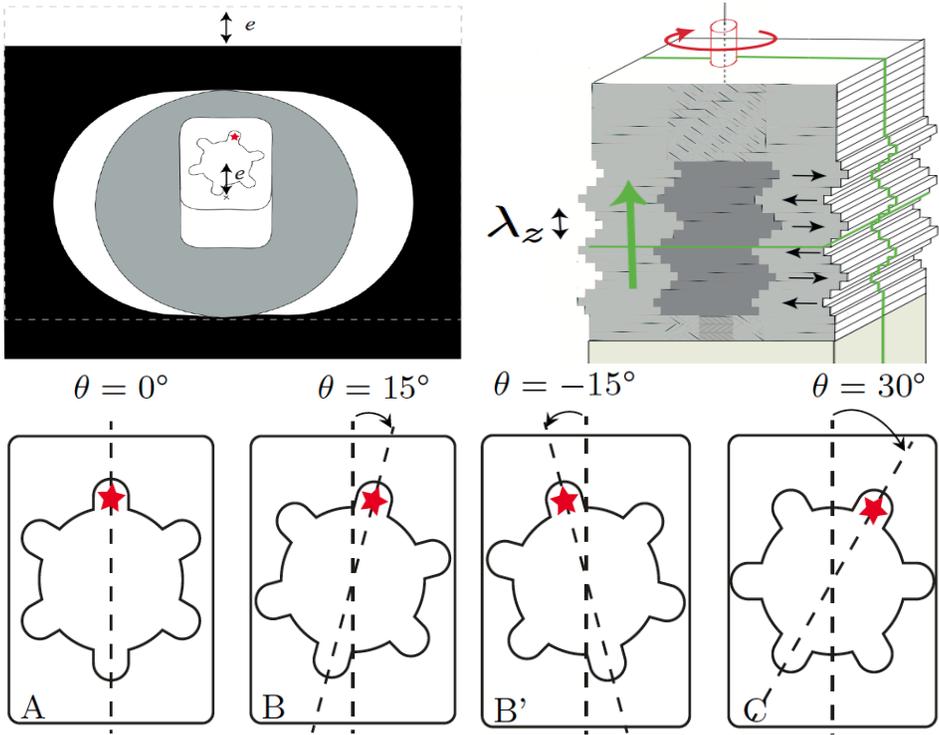


FIGURE I.13 – Générateur d’ondes interne. En haut à gauche : principe d’une came, d’excentricité  $e$  entraînant une plaque rectangulaire. En haut à droite : générateur composé d’un empilement de plaques, réglé pour générer une onde plane. Les plaques ont alors toutes la même excentricité, mais des phases différentes. En bas : différents types de disques possibles. Chaque cas diffère de par la position d’un des ergots (représenté par une croix rouge) par rapport à la direction de translation (indiquée par les traitillés).

Un autre générateur, utilisé seulement dans la grande cuve, permet de générer, sur quasiment toute la hauteur de la cuve ( 900 mm ), un mode 1. L’amplitude du générateur est réglable. Récemment, Géraldine Davis, avec l’aide des ateliers de mécanique et d’électronique de l’ENS, a développé un système permettant de contrôler de manière continue cette amplitude de forçage et donc d’en changer au cours d’une expérience. J’ai peu utilisé ce générateur, ainsi que la grande cuve durant ma thèse. Les mesures expérimentales obtenues avec cette cuve et ce forçage se situent principalement dans le chapitre III et dans l’annexe du chapitre V.

## 2.b Ondes planes ou modes

### Onde Plane

Avec le dispositif présenté Fig. I.13, on peut créer un profil de type onde plane. Pour cela on choisit pour les différentes plaques, la même amplitude et un déphasage constant entre deux plaques successives. Le mouvement des plaques s'effectue suivant  $x$ . On ne peut alors imposer que  $\lambda_z$ , la longueur d'onde suivant  $z$ . Le mouvement des plaques du générateur s'écrit :

$$\zeta(z, t) = a \sin(\omega t - k_z z) \quad (\text{I.41})$$

avec  $a$  l'amplitude du générateur,  $\omega$  la fréquence de forçage, et  $k_z$  le vecteur d'onde suivant  $z$ . Le champ de vitesse en tout point  $(x, z)$  de la cuve s'écrit :

$$v_x(x, z, t) = v_{x,0} \sin(\omega t - k_x x - k_z z) \quad (\text{I.42})$$

$$v_z(x, z, t) = v_{z,0} \sin(\omega t - k_x x - k_z z) \quad (\text{I.43})$$

Le vecteur d'onde  $k_x$  est déduit de  $k_z$  et de  $\omega$  avec la relation (I.21).

À cause de l'épaisseur des plaques et du déphasage minimal de  $15^\circ$  entre chaque plaque, on ne peut générer que 5 valeurs de  $\lambda$  possibles, en utilisant 3, 6, 8, 12 ou 24 plaques par longueur d'ondes, créant des  $\lambda_z$  valant 18 mm, 36 mm, 48 mm, 72 mm, 144 mm.

### Modes Verticaux

Le fait que le fluide soit compris entre deux parois horizontales, crée une sorte de cavité, pour laquelle il existe des excitation analogues a des modes propres. On impose que la vitesse verticale soit nulle sur les bords  $z = 0$  et  $z = H$ . Le formalisme en ondes planes n'est alors pas bien adapté pour décrire la propagation des ondes internes. En cherchant des solutions à ce problème sous la forme  $\Psi = f(z)e^{i(\omega t - k_x x)}$ , on obtient l'équation différentielle suivante

$$\frac{d^2 f}{dz^2} + k_x \left( \frac{N^2}{\omega^2} - 1 \right) f(z) = 0 \quad (\text{I.44})$$

Cette équation est celle d'un oscillateur harmonique de pulsation spatiale  $|k_x| \sqrt{\frac{N^2}{\omega^2} - 1}$ . Pour que les conditions aux limites soient respectées, la pulsation ne prend que certaines valeurs  $n$ , les modes propres :

$$k_x = \pm \frac{n\pi}{H} \left( \frac{N^2}{\omega^2} - 1 \right) \quad (\text{I.45})$$

Ainsi, les fonctions  $f_n$ , formant une base des solutions pour la fonction courant, s'écrivent

$$f_n(z) = \sin \left( \frac{n\pi z}{H} \right) \quad (\text{I.46})$$

**Mode 1** Pour générer un mode 1, nous imposerons une excitation des plaques du générateur de la forme

$$\zeta(z, t) = a \sin(\omega t) \cos\left(\frac{\pi z}{H}\right) \quad (\text{I.47})$$

Le champ de vitesse en tout point de la cuve s'écrit alors

$$v_x(x, z, t) = v_{x,0} \cos\left(\frac{\pi z}{H}\right) \cos(\omega t - k_x x) \quad (\text{I.48})$$

$$v_z(x, z, t) = v_{z,0} \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right) \sin(\omega t - k_x x) \quad (\text{I.49})$$

Un mode 1 peut être vu comme une superposition de deux ondes planes se propageant avec des vecteurs d'ondes  $k_z = \pm\pi/H$  opposés et le même vecteur  $k_x = \pi \tan \theta/H$ .

Ce type de forçage est intéressant du point de vue expérimental, car il permet de créer des ondes avec une grande longueur d'onde, donc d'avoir une plus faible dissipation.

### 3. Observation des ondes internes

Il nous faut maintenant trouver un moyen d'observer les ondes générées. Si la physique des ondes internes est connue depuis plus de cinquante ans, la visualisation des ondes s'est grandement améliorée depuis les années 2000, grâce au développement du traitement informatique.

#### 3.a Schlieren synthétique

La méthode de Schlieren synthétique, couramment abrégé Schlieren par abus de langage est une méthode optique utilisable lorsque l'indice optique du milieu est modifié. Dans notre cas, la concentration en sel est linéairement proportionnelle à l'indice optique. La traversée d'un milieu non-homogène en indice optique s'accompagne d'une déviation du rayon lumineux vers les zones de plus fort indice. On peut remonter au gradient d'indice optique à partir de la déviation de la lumière par passage dans la cuve seulement si l'on suppose que le champ d'indice optique est bidimensionnel. Cette méthode ne pourra alors plus être utilisée dans les chapitres où l'on explorera les aspects 3D de la propagation des ondes internes.

Afin de repérer facilement des déviations de rayons lumineux, on place derrière la cuve un écran composé de points blancs et noirs disposé aléatoirement<sup>5</sup>, représenté Fig. I.14(a). Ensuite, l'algorithme CIV détaillé dans la

---

5. Il est nécessaire d'avoir un motif aléatoire, sinon un déplacement égal a un vecteur de base du réseau apparaît comme nul.

partie 4.a, compare une photo sans mouvement avec la même photo lors de mouvements, ce qui permet de remonter au gradient d'indice optique, donc au gradient de densité locale et donc de visualiser la propagation des ondes internes.

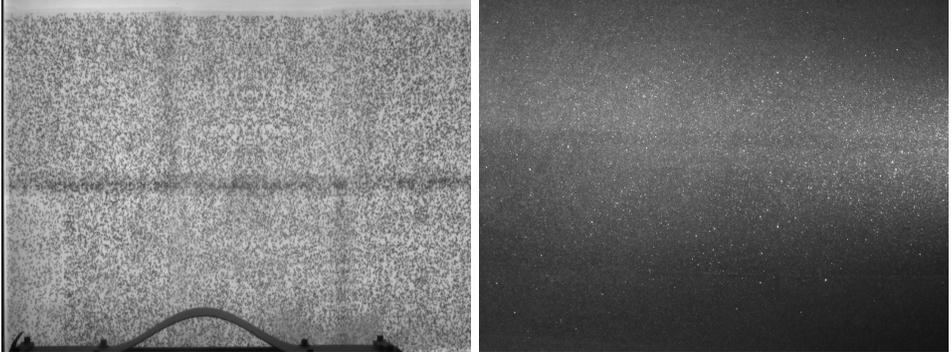


FIGURE I.14 – Exemples d'images obtenue lors d'une mesure par Schlieren (à gauche) et par PIV (à droite).

### 3.b Vélométrie par Imagerie de Particules (PIV)

La technique de Vélométrie par Imagerie de Particules appelée couramment PIV pour *Particule Image Velocimetry*, permet de mesurer directement le champ de vitesse. Pour cela des particules réfléchissantes sont introduites dans le fluide et sont éclairées par une nappe laser. Le suivi des particules permet alors de remonter directement aux mouvements du fluide. Le même algorithme CIV est utilisé pour traiter les images des particules, sauf que pour obtenir la vitesse des particules, on compare une image avec la suivante<sup>6</sup>. La distance parcourue et l'écart temporel entre les images permet de remonter au champ de vitesse sur toute la partie du fluide éclairée par la nappe laser. Ici, dans le cas d'écoulements bidimensionnels, on fait l'approximation que le champ de vitesse observé est invariant dans la largeur de la cuve. Cette méthode pourra être utilisée pour étudier une coupe bidimensionnelle d'écoulements tridimensionnels. Un exemple d'une image des particules illuminées par une nappe laser est présentée Fig. I.14 (b)

Les particules sont placées dans le fluide, soit dans les bacs au moment du remplissage, soit par dessus la cuve quelques temps avant de réaliser des

---

6. De manière plus générale, on compare deux images suffisamment proches temporellement afin que les déplacements considérés soient faibles.

mesures. Deux types de particules ont été utilisées dans nos expériences. Les premières sont des particules de borosilicate de densité  $1.1 \text{ kg.L}^{-1}$  et de diamètre moyen  $10 \mu\text{m}$ . Les secondes sont des particules de même diamètre, mais recouvertes d'une fine pellicule d'argent, afin de mieux réfléchir la lumière. Leur densité est donc plus élevée, de l'ordre de  $1.4 \text{ kg.L}^{-1}$ . Dans les deux cas, les particules ont une vitesse de sédimentation qui fait qu'elles tombent au fond de la cuve. Cette vitesse est en pratique négligeable par rapport aux vitesses en jeu dans nos expériences. Cependant, pour les particules les plus lourdes, cette sédimentation implique de remettre quotidiennement des particules dans le milieu, on doit donc les ajouter sur le dessus de la cuve, ce qui pose parfois des problèmes techniques.

### 3.c Lignes de colorant

Une dernière méthode de visualisation, non utilisée dans cette thèse, est de déposer dans le fluide des lignes de colorants. De la fluorescéine est imbibée sur des fils de cotons, tendus par une structure et espacés entre eux de quelques centimètres. Une fois la cuve remplie, on introduit la structure dans la cuve et on la translate, déposant ainsi du colorant sur certaines lignes d'iso-densité. Avec Géraldine Davis, nous avons réalisé un tel dispositif dans la grande cuve. La figure I.15 représente les lignes de colorant obtenues. Les zones de mélange proches des parois sont générées lors de l'entrée et de la sortie de la structure soutenant les fils.

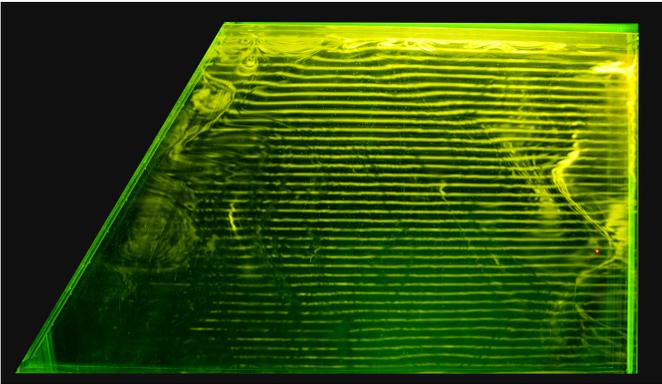


FIGURE I.15 – Lignes de fluorescéine déposées dans le fluide après stratification. La géométrie étudiée dans cet exemple est celle d'un trapèze.

Une déformation des lignes permet de remonter au champ de vitesse

du fluide. Cette méthode initialement introduite par Hopfinger [46] a été rendue quantitative par Flor [32], en soustrayant l'image initiale aux images suivantes. Un des problèmes de cette méthode est la diffusion de l'agent fluorant qui tend rapidement à grossir les lignes de colorant.

## 4. Outils d'analyse

### 4.a Algorithme de corrélation

Pour les méthodes de Schlieren et PIV, nous utilisons un algorithme permettant de calculer soit le déplacement de points noirs sur l'écran Schlieren par rapport à une image de référence, soit le déplacement de particules entre deux images. L'algorithme de corrélation, CIVx développé par Fincham & Delerce [28], est utilisé à travers l'interface *uvmat*, développée par Joel Sommeria. Chaque image est découpée en blocs, dont la taille doit être choisie en fonction du nombre de particules et de leurs tailles. Dans l'analyse de PIV, pour chaque bloc de l'image, à un temps  $t$  donné, l'algorithme cherche dans l'image à  $t + \delta t$ , à retrouver la position de chaque ancien bloc. Ainsi on obtient le vecteur déplacement global dans cette zone de l'espace pendant le temps  $\delta t$ . Pour l'analyse SS, on compare toujours l'image à un temps donné avec l'image initiale, prise avant de générer tout mouvement. L'interface *uvmat* permet de modifier la taille des blocs, des boîtes de recherche, de prendre en compte la rotation et la déformation des boîtes.

On montre Fig. I.16 un exemple du résultat du traitement CIVx réalisé sur des données de PIV, lors de la génération d'une onde plane.

### 4.b Transformée de Hilbert

La transformée de Hilbert est très utile pour l'étude des ondes internes. Cette méthode de démodulation, déjà appliquée pour les ondes thermocapillaires [33, 34], à été utilisée dans le contexte des ondes internes pour la première fois en 2008 [67]. Depuis cette méthode est devenue classique pour analyser les ondes internes.

#### Transformée de Hilbert en temps

*Stricto sensu*, la transformée de Hilbert est une transformation linéaire d'une fonction réelle  $s(t)$  permet d'associer au signal son équivalent imaginaire  $\hat{s}(t)$ . Dans ce cas la représentation analytique du signal est  $s_a = s(t) + i\hat{s}(t)$ . En exemple, appliquons cette définition sur une onde plane en

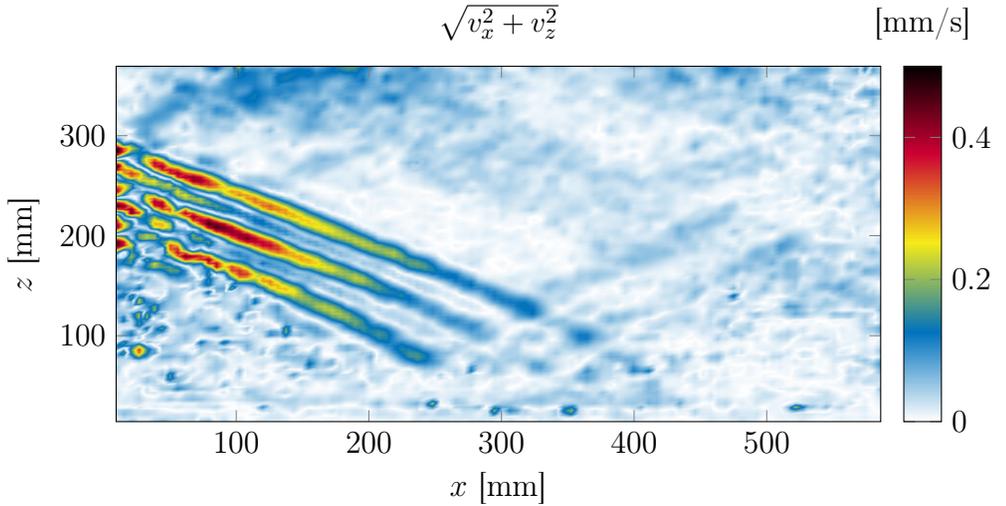


FIGURE I.16 – Exemple du champ de vitesses obtenu après traitement CIV d’une mesure de PIV. Le générateur, à droite, génère une onde plane comportant 3 longueurs d’ondes.

dimension 1

$$\psi(z, t) = A \cos(\omega t - k_z z) \text{ [Hilbert] Transformée de } \psi_a(z, t) = A e^{i(\omega t - k_z z)} \quad (\text{I.50})$$

Le champ à valeurs réelles a été transformé en son équivalent à valeur complexe, de telle sorte que  $\psi(z, t) = \text{Re}(\psi_a(z, t))$ . Cette opération peut être vue comme le fait de prendre la transformée de Fourier du signal et d’enlever les composantes de fréquences négatives, puis de multiplier par un facteur 2 pour toujours obtenir  $\psi(z, t) = \text{Re}(\psi_a(z, t))$ .

Dans toute cette thèse, nous appellerons par abus de langage<sup>7</sup>, transformée de Hilbert, l’opération de démodulation complexe qui se base sur cette transformation. À partir d’un signal temporel  $s(x, z, t)$ , nous réalisons les étapes suivantes :

- Calcul de la représentation analytique du signal  $s_a(x, z, t)$ .
- Transformée de Fourier temporelle du signal  $s_a$ .
- Filtrage passe-bande sur la fréquence que l’on souhaite conserver et multiplication par un facteur 2.
- Transformée de Fourier inverse du signal filtré.

7. Cet abus de langage est largement pratiqué dans la littérature.

- Calcul de la partie réelle du résultat précédent, afin de retrouver le champ réel, filtré à la fréquence souhaitée.

En pratique dans nos études, on utilisera majoritairement la transformée de Hilbert pour enlever le bruit d'un champ de vitesse ou de gradient de densité. En effet, dans la plupart de nos expériences, nous n'aurons qu'une seule fréquence présente, celle de forçage. Les autres fréquences présentes sont alors généralement du bruit lié à l'acquisition ou au traitement du signal. En pratique toujours, nous effectuerons, pour un temps  $t_0$  donné, une transformée de Fourier sur une fenêtre centrée autour de  $t_0$ , puis la transformée inverse, donnant finalement le champ réel filtré à un temps  $t_0$ . Cependant, la transformée de Fourier ayant été réalisée sur une zone du temps, l'image à  $t_0$  n'est pas exactement le champ physique filtré à la fréquence voulue, mais une moyenne sur la fenêtre temporelle du champ filtré. Bien sûr en fonction des situations, il faudra adapter la taille de la fenêtre temporelle, si l'on souhaite plutôt observer un régime transitoire ou permanent.

Une autre application courante que nous verrons aux chapitres II et VI, est de filtrer le signal à d'autres pulsations afin d'observer les effets non linéaires. En particulier, on filtrera à  $2\omega$  pour visualiser la génération d'harmoniques dans certains cas, ou bien à  $\omega = 0 \text{ rad.s}^{-1}$  pour visualiser la création de courant moyen, ou encore à  $\omega_1$  et  $\omega_2$  (avec  $\omega_1 + \omega_2 = \omega$ ) pour étudier l'Instabilité Résonante Triadique (TRI).

### Transformée de Hilbert en espace

On peut réaliser exactement le même traitement, mais en faisant cette fois des transformées de Fourier en espace. L'intérêt est alors de pouvoir filtrer, dans l'espace  $(k_x, k_z)$ , les ondes se propageant vers la gauche ou vers la droite, vers le haut ou vers le bas. Pour cela on utilisera des filtres conservant un quadrant de l'espace  $(k_x, k_z)$ . Attention, la transformée en espace doit forcément être précédée d'une transformée temporelle. Sinon, on ne peut pas distinguer les ondes de la forme  $e^{\omega t + k_x x}$  et  $e^{-\omega t - k_x x}$ , et de même pour  $z$ .

Cette transformée est particulièrement adaptée pour les ondes internes, qui peuvent, à une fréquence donnée, se propager suivant 4 directions différentes. On peut ainsi séparer les 4 directions de propagations. On donne Fig. I.17 un exemple, extrait de [67], qui montre en pratique la séparation des quatre faisceaux.

### 4.c Diagramme temps-fréquence

Dans les cas où les non linéarités ne peuvent plus être négligées, un forçage à  $\omega$  peut conduire entre autres à l'apparition d'harmoniques  $2\omega$ ,  $3\omega$ , de sous-

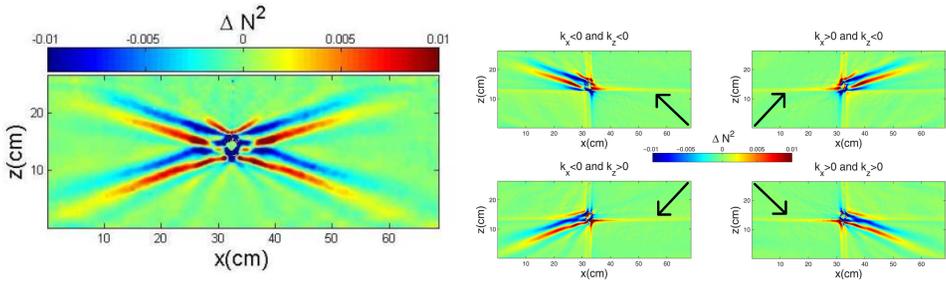


FIGURE I.17 – À gauche : Champ de gradient de densité obtenu lors de l’oscillation d’un objet situé au centre du fluide. À droite : champs obtenus après filtrage spatiale de Hilbert. Dans chaque sous figure, la flèche indique la zone de l’espace des  $k$  qui a été conservée lors du filtrage. Extrait de [67]

harmoniques  $\omega/2$ , ou bien de mouvement à fréquence nulle, appelé courant moyen. Afin de visualiser l’évolution de l’amplitude de ces différents termes au cours du temps, nous utilisons un diagramme dit temps-fréquence [31]. Grossièrement, cela consiste à faire une transformée de Fourier sur une petite fenêtre temporelle centrée sur un temps  $t_0$ , et décaler progressivement la valeur de  $t_0$ . On obtient alors une série de spectrogrammes. Mis bout à bout, on représente une évolution du contenu fréquentiel du signal au cours du temps.

En pratique on calculera, pour un signal  $s(x, z, t)$ , la grandeur

$$S_r(\omega, t) = \left\langle \left| \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \partial_r s(x, z, t') e^{i\omega t'} h(t - t') \right|^2 \right\rangle \quad (\text{I.51})$$

où  $r = x$  ou  $z$ . La moyenne se fait en général sur tout le champ afin de diminuer le bruit, mais peut se faire sur une région spécifique de l’espace.  $h$  représente une fenêtre de lissage. Le choix de la taille de la fenêtre de lissage est crucial. En effet, une grande fenêtre de lissage assure une bonne résolution fréquence, mais une mauvaise résolution temporelle, et *vice versa* si l’on choisit une petite fenêtre de lissage. Dans ces diagrammes, nous représenterons la grandeur  $\log_{10}(S_r(\omega, t)/S_0)$  où  $S_0 = \langle S_z(\omega, t) \rangle_t$  est la moyenne temporelle de la composante fréquentielle associée à l’onde mère.

#### 4.d Mesure de longueur d’onde

Afin de mesurer la longueur d’onde des ondes en jeu, on peut, dans la dernière étape de la transformée de Hilbert, prendre l’argument du champ

filtré, au lieu de la partie réelle. Cela permet d'avoir accès, toujours à un temps donné, à l'évolution spatiale de la phase.

De là, on peut calculer le gradient de la phase en tout point pour avoir directement accès à  $k$  et donc à  $\lambda$ . En pratique, on est rarement en présence d'un champ ayant une unique longueur d'onde sur tout l'espace. On sera donc amené à faire une sélection sur une zone ou une ligne et à prendre la valeur la plus probable dans la densité de probabilité (PDF) des valeurs de  $k$  obtenus.

## D Étude numérique des ondes internes

Par "simulation numérique", on entend généralement l'exécution d'un programme réalisé par ordinateur visant à simuler une situation physique. Cependant du point de vue du temps de calcul et de la pertinence des résultats, il est important de distinguer les simulations qui résolvent les équations physiques qui généralement sont très coûteux en temps, et les programmes qui ne modélisent pas la véritable situation physique, se basant généralement sur des approximations fortes.

Par la suite, nous allons utiliser beaucoup d'algorithmes de tracés de rayons, qui se basent en effet sur des hypothèses fortes concernant la propagation des ondes internes. Pour éviter toute confusion avec des "vraies" simulations numériques qui résolvent les équations de Navier-Stokes, nous n'emploierons pas les termes "simulations numérique" pour parler de ces algorithmes de tracés de rayons, qui sont très peu coûteux en temps.

### 1. Tracé de rayons

Nous avons vu que la réflexion sur des parois des ondes internes se fait selon certaines lois particulières. Pour nos travaux, nous cherchons à obtenir un programme qui prédise le parcours des ondes internes dans diverses géométries, afin de les étudier ensuite expérimentalement. Au lieu de chercher à résoudre numériquement les équations de Navier-Stokes pour notre problème, dans les différentes géométries étudiées, nous allons plutôt utiliser une méthode de résolution dite des caractéristiques. Cette méthode consiste à chercher des lignes caractéristiques sur lesquelles le champ d'intérêt (ici la fonction courant) ne varie pas. Notre programme calculera alors seulement la trajectoire de ces caractéristiques, sans faire une description de tout le champ d'onde associé.

Avant cela nous devons montrer que, dans notre modèle sans dissipation, l'énergie contenue dans un faisceau d'onde interne reste constant sur une caractéristique au cours de la propagation et lors de la réflexion. Repartons de l'équation hyperbolique obtenue dans le chapitre précédent pour la fonction courant, pour des ondes planes :

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{\omega^2}{N^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{I.52})$$

$$(\text{I.53})$$

En effectuant un redimensionnement approprié, propre à chaque géométrie, on se ramène à l'étude de l'équation suivante :

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{I.54})$$

$$\left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) = 0 \quad (\text{I.55})$$

En posant  $\xi = x + z$  et  $\eta = x - z$ , qui définissent les équations des caractéristiques, l'équation (I.55) devient

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta \partial \xi} = 0 \quad (\text{I.56})$$

ce que l'on peut résoudre en définissant deux fonctions arbitraires  $f_+$  et  $f_-$  des variables  $\eta$  et  $\xi$ ,  $\Psi(x, z) = f_+(\eta) + f_-(\xi)$ . Les conditions aux limites permettent alors de lier les deux fonctions. En supposant que dans notre géométrie pour l'instant quelconque, on ait un fond plat, c'est-à-dire que la fonction  $\Psi$  s'annule en  $z = 0$ , on obtient la condition suivante

$$f_-(x) = -f_+(x) \quad (\text{I.57})$$

La solution se réécrit alors  $\Psi(x, z) = f(\eta) - f(\xi)$ . En utilisant une seconde condition de réflexion sur une autre surface, on peut montrer [59] que  $f$  reste constante après réflexion.

Cette propriété nous permet de dire que la fonction courant reste constante le long d'une caractéristique, même après réflexion. On peut donc s'intéresser à la trajectoire des caractéristiques dans la géométrie. Attention cette "trajectoire" ne peut pas *a priori* être reliée à une évolution temporelle de la fonction courant. En effet pour établir l'équation (I.55), nous avons enlevé la dépendance temporelle de la fonction courant. L'approche des tracés de

rayon n'est alors *a priori* pas valide pour des régimes transitoires.

On remarque que cette méthode des caractéristiques ne fonctionne qu'en dimension 2 et que parce que l'équation (I.55) est factorisable. En dimensions trois, les courbes caractéristiques ne sont plus des lignes mais des arc de cônes. Comme nous le verrons dans le chapitre IV, on peut décrire la position de rayons d'ondes internes en paramétrant leur position sur le cône. On réalisera alors des simulations de tracés de rayons également en trois dimensions. Ces tracés ne permettront pas de remonter de manière analytique au champ de pression et de vitesse comme c'est le cas en deux dimensions, mais donneront une intuition sur la propagation en 3D.

## 2. Résolution numérique d'équations

Les équations que nous avons obtenues dans le cadre linéaire sont simples et solubles analytiquement. Dans le cadre non-linéaire, notamment concernant la génération de courant moyen abordée dans le chapitre VI, on sera amené, malgré de nombreuses hypothèses simplificatrices, à résoudre numériquement des équations. Les résolutions numériques présentées dans ce chapitre ont été réalisées par Takeshi Kataoka. La résolution spatiale consiste en une méthode pseudo spectrale sur une grille de  $128 \times 64 \times 64$ . L'évolution temporelle est réalisée avec une méthode Runge-Kutta à l'ordre 4.

## 3. Simulations numériques

Des simulations numériques directes des équations de Navier-Stokes peuvent être réalisées afin de confronter les résultats expérimentaux. De nombreuses simulations d'ondes internes ont déjà été réalisées, mais peu dans le cas particulier des attracteurs d'ondes internes [42, 44, 51]. Des comparaisons très précises ont été effectuées entre des expériences réalisées par Christophe Brouzet et des simulations numériques réalisées par Illias Sibgatullin, avec un excellent accord [13]. Le code utilisé pour ce dernier article est une version du code Nek5000 [29, 30] qui utilise principalement une méthode de résolution spectrale, ce qui a l'avantage de pouvoir simuler des géométries 3D complexes.

Dans cette thèse, nous n'utiliserons cependant pas de comparaison avec des simulations numériques directes.

## **Conclusion**

Les ondes internes sont présentes dès qu'un milieu stratifié est excité. Une théorie linéaire simple des ondes internes permet de dégager les propriétés principales de ces ondes. La relation de dispersion très particulière relie la fréquence avec l'angle de propagation de ces ondes. Cette loi est à l'origine de nombreuses propriétés troublantes des ondes internes, notamment le fait que la réflexion des ondes ne soit plus spéculaire.

Expérimentalement, nous pouvons créer des situations similaires à celles rencontrées dans l'océan, en créant un milieu stratifié stable, et en générant des ondes de diverses formes dans ce milieu. Au fil des années, notre équipe a développé de nombreux outils pour visualiser et analyser ces ondes. À cela, se rajoutent des tracés de rayons permettant de faire des prédictions et de concevoir des expériences.

Nous sommes donc armés pour étudier divers phénomènes apparaissant avec les ondes internes.



# Chapitre II

## Aspects non linéaires et réflexions sur des surfaces courbes en deux dimensions

---

<b>A</b>	<b>Instabilité d'un faisceau d'ondes internes . . . . .</b>	<b>57</b>
1.	Instabilité Triadique Résonante (TRI) . . . . .	57
1.a	Théorie . . . . .	57
1.b	Visualisation expérimentale . . . . .	61
2.	Génération de courant moyen . . . . .	65
<b>B</b>	<b>Génération d'harmoniques . . . . .</b>	<b>65</b>
1.	Travaux antérieurs . . . . .	65
2.	Observation expérimentale . . . . .	67
<b>C</b>	<b>Réflexion sur une surface courbe . . . . .</b>	<b>68</b>
1.	Théorie . . . . .	69
1.a	Position du problème . . . . .	69
1.b	Condition de radiation . . . . .	71
1.c	Interprétation . . . . .	72
1.d	Conditions d'obtention . . . . .	73
2.	Résultats expérimentaux . . . . .	74
2.a	Dispositif expérimental . . . . .	74
2.b	Observation de la BRW . . . . .	76
2.c	Espace des phases . . . . .	77
2.d	Effet de la viscosité . . . . .	79

---

## Introduction

Dès les premières études expérimentales de la génération et de la propagation de faisceaux d'ondes internes par Mowbray & Rarity dans les années 60, des écarts par rapport à la théorie linéaire ont été observés [20]. McEwan est l'un des premiers à prendre en compte théoriquement les non linéarités et les interactions entre ondes, et à faire des mesures pour vérifier ses prédictions [63, 64]. Depuis, de nombreuses études ont été réalisées sur les instabilités et aspects non linéaires lors de la propagation d'un faisceau d'ondes internes. On peut regrouper ces effets en deux grandes parties : d'un côté les interactions entre ondes, qui regroupent entre autre l'instabilité triadique appelée TRI pour *Triadic Resonance Instability*<sup>1</sup> et la génération d'harmoniques, et de l'autre côté la création de courant moyen (*Mean Flow* en anglais). Une récente étude fait le bilan des connaissances actuelles sur ces deux familles d'instabilités [18].

La partie A de ce chapitre sera consacrée à l'instabilité triadique. La théorie de cette instabilité sera développée succinctement puis sera illustrée qualitativement. L'instabilité générant un courant moyen sera seulement évoquée dans cette partie ; elle sera traitée de manière détaillée dans le chapitre VI.

La partie B commence par un bref historique des avancées théoriques concernant la génération d'harmoniques. Nous présenterons ensuite une expérience permettant d'illustrer qualitativement la génération d'harmoniques lors d'un rebond et de discuter des règles de Jiang et Marcus [50].

Dans la partie C, on s'attardera sur un aspect souvent non considéré, qui est la réflexion d'un faisceau sur une surface courbe. Cette nous amènera à montrer un écart important à la théorie des rayons, bien que l'on reste dans le cadre linéaire. La théorie de Baines développée dans l'article [4] sera présentée et des expériences quantitatives viendront valider cette théorie.

Dans tout ce chapitre, nous ferons encore l'approximation de considérer les phénomènes comme étant bidimensionnels.

---

1. parfois abusivement appelée PSI pour *Parametric Subharmonic Instability*, cette appellation n'étant valable que si les deux ondes secondaires générées ont la même pulsation, qui est alors la moitié de la pulsation de l'onde primaire.

## A Instabilité d'un faisceau d'ondes internes

Dans le chapitre précédent, nous avons établi les équation de propagation dans le cadre d'un fluide non visqueux et pour des mouvements faibles, ce qui permettait de négliger les termes non linéaires de l'équation. Nous allons ici revenir sur ces deux approximations et regarder l'effet de la viscosité et des non linéarités sur la propagation d'ondes internes. Nous restons cependant dans le cadre des approximations de Boussinesq, et des autres approximations faites au chapitre I.

### 1. Instabilité Triadique Résonante (TRI)

#### 1.a Théorie

L'Instabilité Triadique Résonante, abrégée TRI, est un mécanisme résonant d'interactions faisant intervenir trois ondes. De manière générale on parle de résonance d'ondes pour parler d'interactions résonantes entre un nombre quelconque d'ondes. Dans la suite de cette partie, nous n'allons parler que d'interactions triadiques, c'est-à-dire impliquant trois ondes, car c'est l'interaction qui est la plus susceptible de se produire, mais la démarche que nous emploierons est la même pour une interaction entre un nombre quelconque d'ondes. Comme nous allons le montrer, cette interaction provient des termes quadratiques dans les équations de Navier-Stokes.

Dans nos expériences, l'instabilité triadique intervient dans le cas où une onde plane de forte amplitude, appelée onde primaire, se déstabilise en transférant une partie de son énergie à deux ondes secondaires qui croissent à partir du bruit. Nous allons établir ces conditions en partant des équations d'évolutions non linéaires et en considérant une solution sous la forme d'une somme de trois ondes planes de fréquence  $\omega$  et de vecteur d'onde  $\vec{k}$  et en regardant les conditions pour que trois ondes puissent interagir de manière résonante.

Nous nous plaçons donc dans le même cadre d'étude que le chapitre 1, sauf que cette fois les termes non linéaires et la viscosité ne sont pas négligés. Les équations du mouvements s'écrivent alors

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \rho = 0 \quad (\text{II.1})$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (\text{II.2})$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p' - \frac{\rho'}{\rho_0} g \vec{z} + \nu \Delta \vec{v} \quad (\text{II.3})$$

Nous allons également utiliser l'opérateur jacobien, défini comme

$$J(f, g) = \partial_x f \partial_z g - \partial_x g \partial_z f \quad (\text{II.4})$$

afin de simplifier les notations. De plus, nous considérons toujours le mouvement comme étant bidimensionnel, nous pouvons donc réutiliser la fonction courant  $\psi$  définie par

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = v_x \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -v_z \quad (\text{II.5})$$

Avec ces nouvelles notations, les équations s'écrivent

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + J(\rho', \psi) = -\frac{N^2 \rho_0}{g} \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (\text{II.6a})$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t \partial z} + J(\partial_z \psi, \psi) = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x} + \nu \frac{\partial \Delta \psi}{\partial z} \quad (\text{II.6b})$$

$$-\frac{\partial \psi}{\partial t \partial x} + J(\partial_x \psi, \psi) = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial z} + \nu \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} - \frac{\rho'}{\rho_0} g \quad (\text{II.6c})$$

En combinant les équations (II.6c) et (II.6b), on peut éliminer la pression  $p'$ . On obtient alors

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + J(\rho', \psi) = -\frac{N^2 \rho_0}{g} \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (\text{II.7a})$$

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + J(\Delta \psi, \psi) = -\frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho'}{\partial x} + \nu \Delta^2 \psi \quad (\text{II.7b})$$

Dans la littérature, on introduit généralement la flottabilité  $b = g\rho'/\rho_0$ . En utilisant cette notation et en réécrivant les équations en mettant l'évolution temporelle à gauche et les termes de forçage à droite, on obtient

$$\frac{\partial b}{\partial t} = -N^2 \frac{\partial \psi}{\partial x} + J(b, \psi) \quad (\text{II.8a})$$

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} = -\frac{\partial b}{\partial x} + \nu \Delta^2 \psi + J(\Delta \psi, \psi) \quad (\text{II.8b})$$

Sous cette forme, on distingue bien quelles sont les sources de variations de flottabilité et de vitesse. Notons que les deux jacobiens représentent les seuls termes non linéaires de ces équations. Ce système d'équations décrit la dynamique non-linéaire en deux dimensions d'un fluide visqueux stratifié en densité, dans l'approximation de Boussinesq. Nous allons supposer une solution de la forme d'une somme de trois ondes planes, indexées par  $p = 0$ ,

1 ou 2 et regarder dans quelles conditions ces interactions sont résonantes. Les solutions pour la densité et la fonction courant s'écrivent alors

$$b = \sum_{p=0}^2 R_p(t) \exp(i(\vec{k}_p \cdot \vec{r}_p - \omega_j t)) + c.c. \quad (\text{II.9a})$$

$$\psi = \sum_{p=0}^2 \Psi_p(t) \exp(i(\vec{k}_p \cdot \vec{r}_p - \omega_j t)) + c.c. \quad (\text{II.9b})$$

L'interaction entre les trois ondes doit provenir des termes non linéaires de l'équation. Nous allons donc calculer séparément ces termes. La partie linéaire des équations (II.8a) et (II.8b) s'écrit

$$\frac{\partial b}{\partial t} + N^2 \frac{\partial \psi}{\partial x} = \sum_{p=0}^2 \left( \dot{R}_p - i\omega_p R_p + iN^2 k_{x,p} \Psi_p \right) e^{i(\vec{k}_p \cdot \vec{r} - \omega_p t)} + c.c. \quad (\text{II.10a})$$

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + \frac{\partial b}{\partial x} - \nu \Delta^2 \psi = - \sum_{p=0}^2 \left( \vec{k}_p^2 (\Psi_p - i\omega_p \Psi_p) + ik_{x,p} R_p + \nu \vec{k}_p^4 \Psi_p \right) e^{i(\vec{k}_p \cdot \vec{r} - \omega_p t)} + c.c. \quad (\text{II.10b})$$

Cette partie linéaire est forcée par les termes non linéaires écrit sous la forme de Jacobiens. Calculons leurs contributions.

$$\begin{aligned} J(b, \Psi) &= \sum_{p=0}^2 \sum_{p \neq q} [(-k_{x,p} k_{z,q} + k_{z,p} k_{x,q}) R_p \Psi_q] e^{i((\vec{k}_p + \vec{k}_q) \cdot \vec{r} - (\omega_p + \omega_q)t)} \\ &\quad - [(-k_{x,p} k_{z,q} + k_{z,p} k_{x,q}) R_p \Psi_q^*] e^{i((\vec{k}_p - \vec{k}_q) \cdot \vec{r} - (\omega_p - \omega_q)t)} + c.c. \end{aligned} \quad (\text{II.11a})$$

$$\begin{aligned} J(\Delta \Psi, \Psi) &= \sum_{p=0}^2 \sum_{p \neq q} [(k_{x,p} k_{z,q} - k_{z,p} k_{x,q}) k_p^2 \Psi_p \Psi_q] e^{i((\vec{k}_p + \vec{k}_q) \cdot \vec{r} - (\omega_p + \omega_q)t)} \\ &\quad - [(k_{x,p} k_{z,q} - k_{z,p} k_{x,q}) k_p^2 \Psi_p \Psi_q^*] e^{i((\vec{k}_p - \vec{k}_q) \cdot \vec{r} - (\omega_p - \omega_q)t)} + c.c. \end{aligned} \quad (\text{II.11b})$$

Notons tout d'abord que ces termes non linéaires sont nuls dans le cas d'une seule onde plane. Les solutions en ondes planes des équations linéarisés (II.8a) et (II.8b) sont donc aussi solutions des équations non linéaires. Cependant dans le cas d'une combinaison d'ondes planes, ces termes ne sont plus nuls.

Pour que l'égalité (II.8a) (resp. (II.8b)) soit valable, il faut que les arguments des exponentielles des termes des équations (II.10a) et (II.11a) (resp. (II.10b) et (II.11b)) soient les mêmes<sup>2</sup>, ce qui donne deux conditions, une sur les vecteurs d'ondes et une sur les pulsations des ondes :

$$\vec{k}_0 = \vec{k}_1 + \vec{k}_2 \quad (\text{II.12a})$$

$$\omega_0 = \omega_1 + \omega_2 \quad (\text{II.12b})$$

Sous ces conditions de résonances, et moyennant d'autres hypothèses<sup>3</sup>, on peut écrire des équations d'évolution pour les termes  $\Psi_p$  et  $R_p$ , qui décrivent une croissance exponentielle<sup>4</sup>. Ainsi, lors de la propagation d'une onde plane, parmi le bruit ambiant, les deux ondes secondaires vérifiant les conditions de résonances (II.12a) et (II.12b) vont être amplifiées. On retrouve bien ce qui est observé expérimentalement, c'est-à-dire la déstabilisation d'une onde primaire en deux ondes secondaires de plus faible pulsations.

Dans la littérature, on trouve souvent ces conditions de résonance avec des signes  $\pm$  à la place des signes  $+$ . Il ne s'agit que d'une convention sur l'onde qu'on choisit d'appeler onde primaire (baptisée aussi onde mère), qui est labellisée par 0. Le cas que nous rencontrons expérimentalement correspond à celui d'une onde mère se séparant en deux ondes secondaire ou ondes filles de pulsations plus petites. On est donc bien dans le cas où  $\omega_0 = \omega_1 + \omega_2$ . La génération d'harmoniques que nous allons étudier dans la partie B correspond à un cas où deux ondes interagissent et donnent naissance à une nouvelle onde de pulsation plus grande, on a alors  $\omega_0 = \omega_1 - \omega_2$ .

Notons également que cette instabilité n'est triadique que parce que nous avons cherché des solutions de la forme (II.9a) et (II.9b). En effet si nous avons considéré une superposition de  $n$  ondes planes, nous aurions obtenus les conditions de résonances suivantes :

$$\vec{k}_0 = \sum_{p=1}^n \vec{k}_p \quad (\text{II.13a})$$

$$\omega_0 = \sum_{p=1}^n \omega_p \quad (\text{II.13b})$$

Cependant on peut montrer que les taux de croissances sont d'autant plus faibles que le nombre d'ondes interagissant est grand. L'instabilité tria-

---

2. Les exponentielles formant une base, si les arguments des exponentielles ne sont pas égaux, les coefficients en pré-facteurs doivent être nuls, et on n'obtient pas d'instabilité.

3. La variation de l'amplitude de l'onde primaire est considérée comme lente et l'amplitude des ondes secondaires négligeable.

4. Au début du régime transitoire seulement.

dique apparaît alors au dépend des autres interactions dans notre cas. *In fine*, cette instabilité et ces conditions de résonances particulières sont majoritairement dues aux termes non linéaires dans l'équation de Navier-Stokes. On retrouve donc cette instabilité dans d'autres domaines de la physique où des termes analogues apparaissent, comme par exemple pour les ondes gravito-capillaires.

## 1.b Visualisation expérimentale

Au début de ma thèse, j'ai d'abord étudié avec Christophe Brouzet des structures appelées "attracteurs d'ondes internes" dans une géométrie considérée comme bidimensionnelle. Cette étude en deux dimensions fait l'objet du chapitre III. Retenons juste pour l'instant que les attracteurs permettent de focaliser les ondes internes sur une petite zone et ainsi créer des ondes de très fortes amplitudes. C'est dans ce cadre que nous avons pu observer l'instabilité triadique. Le but de cette partie est simplement de montrer qualitativement cette instabilité et ses conséquences.

Ces expériences de TRI ont été réalisées dans une cuve de  $1550 \times 920 \times 170$  mm<sup>3</sup>. La stratification linéaire a été réalisée en utilisant la méthode des deux bacs, donnant une pulsation de Brünt-Väisälä  $N = 0.87$  rad.s<sup>-1</sup>. Le mouvement du générateur est celui d'un mode 1, généré à l'aide de l'arbre à cames présenté précédemment. La méthode de visualisation utilisée est le Schlieren Synthétique, qui donne accès au gradient de densité dans la cuve. La figure II.1 présente trois images de la norme du gradient de densité, obtenues directement après utilisation de l'algorithme CIV. La figure de gauche (resp. milieu, droite) est obtenue après 45 (resp. 75, 215) périodes de forçage.

Tout d'abord sur la figure de gauche on observe, une structure d'attracteur<sup>5</sup>. Il n'y a qu'un seul angle de propagation  $\theta = 52^\circ$ , aux symétries  $\pi - \theta$ ,  $\pi + \theta$  et  $-\theta$  près. Sur la figure centrale, on observe en haut à droite, en plus de la structure précédente, un mouvement avec un autre angle de propagation, signe d'une autre fréquence d'oscillation que  $\omega_0$ . Ce mouvement n'est présent que sur une petite zone de l'image. En revanche, sur la figure de droite, après 215 périodes de forçage, l'instabilité s'est développée et a envahi totalement l'espace. La structure d'attracteur présente sur la figure de gauche n'est presque plus visible sur la figure de droite.

---

5. Cette structure en particulier est celle d'un attracteur (2,1). Pour ce chapitre, nous ne nous intéressons pas à cette structure ; elle nous sert ici seulement à concentrer l'énergie pour obtenir de la TRI.

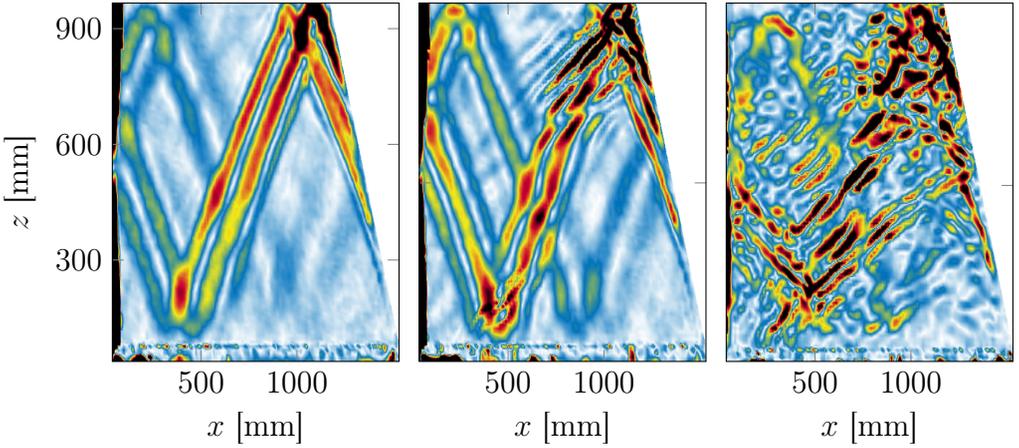


FIGURE II.1 – Norme du gradient de densité obtenu après 45 (resp. 75, 215) périodes de forçage à gauche (resp. centre, droite). L’angle de propagation est  $\theta = 52^\circ$  et  $N = 0.87 \text{ rad.s}^{-1}$  ce qui donne  $T = 9.16 \text{ s}$ . L’amplitude de forçage est de 4 mm.

S’agit-il bien de TRI? Nous avons montré que la TRI consistait en la création de deux nouvelles ondes à partir d’une onde mère. Or, nous n’avons vu *a priori* ici qu’une seule nouvelle onde. Afin de décortiquer le mouvement très complexe de la figure II.1, nous allons utiliser des outils déjà présentés : le temps fréquence et la transformée de Hilbert.

On calcule Fig. II.2 le temps fréquence du champ de gradient de densité présenté Fig. II.1.

À temps court, on n’observe qu’une seule fréquence sur la figure<sup>6</sup>, correspondant à la fréquence de forçage. Elle vaut environ  $\omega_0/N \approx 0.8$ , ce qui équivaut à un angle de propagation de  $52^\circ$ . Après environ 40 périodes de forçage, On voit apparaître deux nouvelles ondes de pulsations  $\omega_1$  et  $\omega_2$ . On remarque que les valeurs de ces nouvelles pulsations vérifient bien la condition de résonance triadique relative aux pulsations (II.12b) :

$$\frac{\omega_1}{N} \approx 0.45 \quad \text{et} \quad \frac{\omega_2}{N} \approx 0.35 \quad \implies \quad \omega_1 + \omega_2 \simeq \omega_0 \quad (\text{II.14})$$

Grâce au diagramme temps-fréquence, les deux ondes secondaires sont facilement identifiables alors qu’on ne les voit pas sur l’image brute. Les deux

6. Notons que le diagramme temps fréquence possède un très fort courant moyen, sur-ement dû a un artefact lors du traitement des images. En effet, ce courant apparaît dès le début de l’expérience, il ne peut pas provenir d’une instabilité. De plus, des expériences identiques réalisées en PIV ne montrent pas un tel courant.

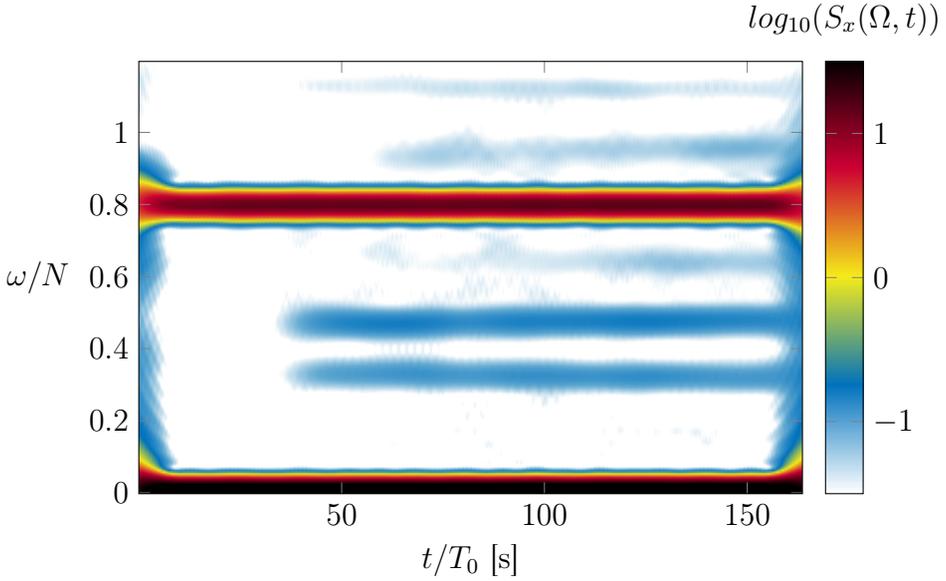


FIGURE II.2 – Temps-fréquence du champ de gradient de densité précédent.

angles de propagation étant  $\theta_1 \approx 20^\circ$  et  $\theta_2 \approx 26^\circ$ , les deux contributions sont difficilement distinguables sur la figure II.1. Afin de visualiser chaque onde séparément, on effectue une transformée de Hilbert en filtrant le signal à  $\omega_0$ ,  $\omega_1$  et  $\omega_2$ . Nous effectuons la transformation sur un temps long (32 périodes de l'onde mère), quand l'instabilité est bien développée, afin d'avoir des fortes amplitudes pour les ondes secondaires. Le résultat est présenté Fig. II.3

Le filtrage de Hilbert est réalisé pour  $\omega_0$  (resp.  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ) sur la figure de gauche (resp. milieu, droite). On distingue bien la séparation du champ en trois composantes. La forme d'attracteur est présente sur la figure de gauche. Sur les deux figures suivantes, on remarque bien deux nouveaux angles de propagations différents. L'instabilité est installée depuis longtemps car les ondes secondaires ont eu le temps de se propager et de rebondir plusieurs fois sur les parois.

Dans notre cas triadique, la seconde condition de résonance (II.12a) s'écrit :

$$\vec{k}_1 + \vec{k}_2 = \vec{k}_0 \quad (\text{II.15})$$

Pour vérifier cette condition, on ne peut pas calculer  $\vec{k}$  sur chacune des images de la figure Fig. II.3. En effet, cette condition n'est valable que lors de la création des ondes. La longueur d'onde variant dans notre géométrie (car il y a un rebond sur une pente inclinée), les longueurs d'ondes des ondes

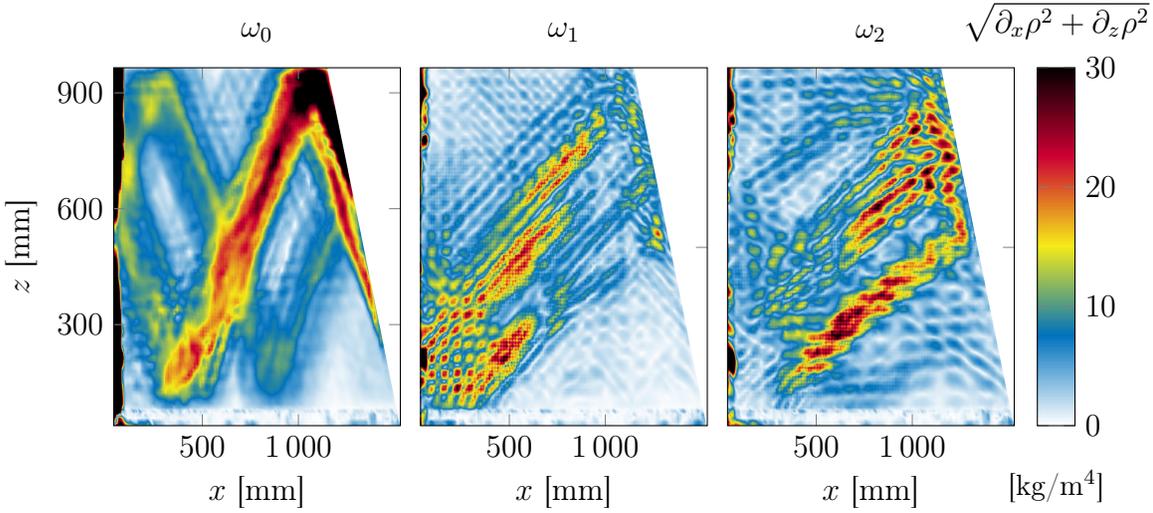


FIGURE II.3 – Transformée de Hilbert temporelle du champ de gradient de densité de l’expérience présentée dans les deux figures précédentes. La figure de gauche (resp. centre, droite) représente la partie du signal qui oscille à la fréquence  $\omega_0$  (resp.  $\omega_1, \omega_2$ ). Le filtrage de Hilbert à été réalisé sur 32 périodes de l’onde primaire.

secondaires changent au cours de la propagation. On peut appliquer les méthodes de dérivation de la phase présentées au chapitre précédent mais à temps court, lorsque l’instabilité n’est pas très développée. Dans notre cas, nous avons obtenus

$$\vec{k}_0 = \begin{vmatrix} -0.37 \pm 0.08 \\ 0.256 \pm 0.07 \end{vmatrix} \text{ cm}, \quad \vec{k}_1 = \begin{vmatrix} -0.69 \pm 0.15 \\ 1.28 \pm 0.3 \end{vmatrix} \text{ cm}, \quad \vec{k}_2 = \begin{vmatrix} -0.55 \pm 0.15 \\ -1.25 \pm 0.3 \end{vmatrix} \text{ cm} \quad (\text{II.16})$$

Les barres d’erreur sont assez importantes car l’instabilité est très peu installée au moment de la mesure de  $\vec{k}$ .

La relation (II.15) est vérifiée en tenant compte des grandes barres d’erreurs obtenus pour le calcul de  $\vec{k}$ . Il a été observé sur plusieurs expériences indépendantes et sur des simulations numériques directes qu’une des ondes secondaires possède un spectre en  $k$  proche d’une décomposition bi-modale. Ce comportement n’est pour l’instant pas compris et mérite d’être étudié plus en détails. Le fait que cette instabilité puisse apparaître avec le type de géométrie que l’on étudiera plus tard est contraignant d’un point de vue expé-

rimental. En effet, on a bien vu Fig. II.1 que si l'on s'intéresse seulement à la structure à la fréquence  $\omega_0$ , l'apparition d'autres fréquences complique beaucoup l'analyse. Même si l'on peut séparer les champs à différentes fréquences temporelles, la structure est modifiée par l'instabilité puisqu'une partie de l'énergie de l'attracteur est transmise aux ondes secondaires. Dans la suite de nos expériences, nous resterons prudents, notamment dans le choix des amplitudes de forçage, afin que les résultats ne soient pas perturbés par le développement de la TRI.

## 2. Génération de courant moyen

Évoquons seulement ici qu'un faisceau d'onde interne peut lors de sa propagation donner naissance à un écoulement moyen horizontal. Cette génération de courant moyen intervient entre autres pour un faisceau seul lors d'une propagation tridimensionnelle. En effet la variation de l'amplitude du faisceau dans la direction transverse à la direction de propagation est essentielle pour que le faisceau transfère une partie de son énergie à un courant moyen. Le chapitre VI est consacré à cette étude.

Notons également que l'on peut obtenir la génération de courant moyen dans un écoulement bidimensionnel, en faisant interagir deux faisceaux d'ondes [89] mais cette configuration n'a pas été étudiée dans ce manuscrit.

# B Interactions entre deux faisceaux : Génération d'harmoniques

## 1. Travaux antérieurs

Lors de la réflexion d'une onde interne sur un plan incliné, le faisceau incident et le faisceau réfléchi se superposent au niveau de la surface. Cette zone de superposition peut être plus ou moins grande en fonction de l'inclinaison  $\alpha$  de la pente, de l'angle de propagation de l'onde incidente  $\theta$  ainsi que de sa longueur d'onde. Nous ne nous intéresserons pas au courant moyen dans cette partie. Nous allons donc concentrer ici notre étude sur la génération d'harmoniques. Sauf mention contraire, dans cette partie, le mot harmonique ne fera référence qu'aux ondes de fréquences  $2\omega$ . Notons que le mécanisme de création de ces ondes est le même que la TRI. En effet, ici on est dans le cas où deux ondes de fréquences  $\omega$  se rencontrent et créent une onde à la fréquence  $2\omega$  respectant ainsi la condition de résonance temporelle.

S. Thorpe a été le premier à étudier ces interactions dans son article [91]. Partant des fonctions courant pour des ondes planes incidentes et ré-

fléchies satisfaisant les conditions de bords, il montre que ces deux champs interagissent via les termes non linéaires des équations de propagations, analogues à ceux des équations (II.9a) et (II.9b). Les termes d'ordre 2 obtenus comportent un terme à fréquence nulle, donc un terme de courant moyen et un terme à deux fois la fréquence de forçage  $\omega$ . Nous ne nous intéresserons pas aux termes d'ordre supérieurs, de très faible amplitude. Cependant un problème apparaît dans les calculs Thorpe, et l'onde harmonique créée ne respecte pas les conditions aux limites lors de la réflexion sur le plan incliné. Dans son article, Thorpe est obligé d'introduire une autre onde à la pulsation  $2\omega$  de manière *ad hoc* afin de respecter la condition d'imperméabilité.

Les travaux de Tabaei *et al.* [89] reprennent les calculs de Thorpe dans le cas d'un faisceau d'onde interne. Ils n'introduisent pas d'ondes supplémentaires afin de satisfaire la condition de bord, et décrivent les conditions géométriques d'obtentions d'harmoniques propagatives et la quantité d'énergie transférée sous cette forme. Une des premières visualisation expérimentale des ondes internes est présentée dans l'article de Gostiaux *et al.* [37]. Cependant la théorie faiblement non-linéaire développée par Tabaei *et al.* ne s'applique pas aux cas expérimentaux de l'article [37]. De plus, théoriquement, Jiang et Marcus [50] montrent que les conditions de génération d'harmoniques proposées par Tabaei *et al.* mènent dans certains cas à des rayons ne pouvant satisfaire la relation de dispersion. Ils proposent alors de nouvelles règles de sélection, qui vont au delà de la génération d'harmoniques puisqu'elles permettent de prédire quand l'interaction entre deux faisceaux quelconques donne lieu à une troisième onde, et si oui, dans quelle(s) direction(s). De plus, ils effectuent des simulations numériques de collisions de deux rayons, qui ne donnent parfois pas lieu à la génération d'harmoniques, alors que la théorie de Tabaei *et al.* en prédissent. D'autres simulations numériques [83, 43] et des expériences [83, 87, 39] vont également dans ce sens, en confirmant la théorie de Jiang et Marcus.

D'un point de vue théorique, pour l'instant seuls les aspects géométriques de la surface où a lieu la création d'harmoniques sont bien compris [50]. Les travaux de [83] prédissent que l'amplitude de ces harmoniques sera maximale lorsque les faisceaux incidents et réfléchis sont de même amplitude. Comme le décrit Nicolas Grisouard dans sa thèse [39], de nombreux phénomènes non linéaires interviennent lors de la réflexion, et pour l'instant notre description ne nous permet pas de savoir quantitativement quels seront les champs générés par cette réflexion.

## 2. Observation expérimentale

Cette courte partie permet d'illustrer expérimentalement la génération d'harmoniques d'un faisceau d'ondes. Nous avons observé ce phénomène lors d'expériences visant à créer une onde rétro-réfléchie (que nous discuterons dans la partie C). Pour une étude expérimentale et théorique détaillée de la génération d'harmoniques, on pourra se référer à [39, 18].

Nous avons réalisé nos expériences dans une cuve de  $1600 \times 425 \times 170 \text{ mm}^3$  stratifiée linéairement en utilisant la méthode des deux bacs. La pulsation de Brünt-Vaïšala pour l'expérience ci dessous est  $N = 0.92 \text{ rad.s}^{-1}$ . Une onde plane comportant deux longueurs d'ondes de 7 cm est générée avec une pulsation  $\omega = 0.41 \text{ rad.s}^{-1}$ . La méthode de visualisation utilisée est le Schlieren Synthétique, ce qui donne accès au gradient de densité dans la cuve. Dans l'expérience, l'onde se réfléchit sur une surface courbe proche d'un quart de cercle (voir Fig. II.4) réalisé avec une plaque de PVC courbée et fixé à un support placé au fond de la cuve. La figure II.4 présente le champ de gradient de densité filtré à  $\omega$  (à gauche) et  $2\omega$  (à droite).

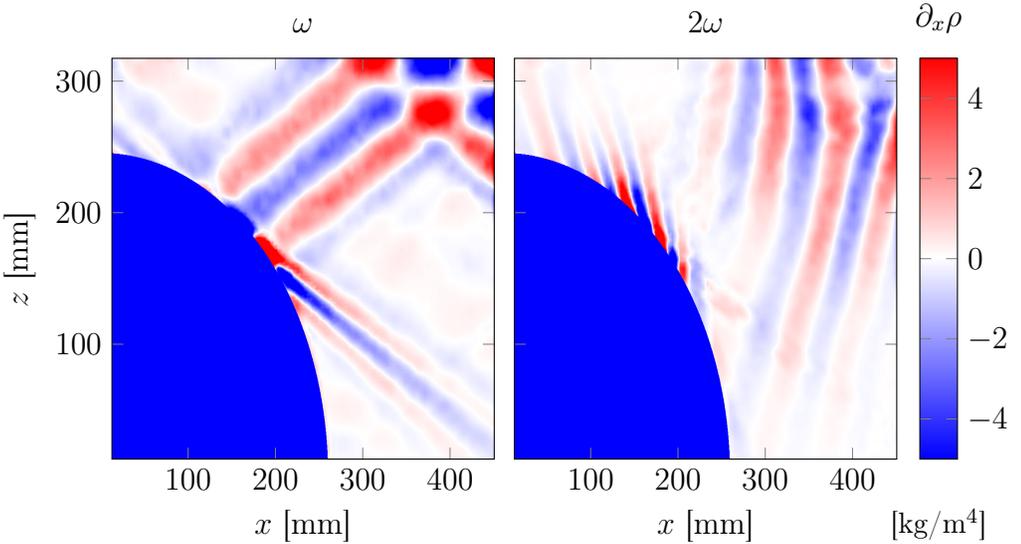


FIGURE II.4 – Transformée de Hilbert temporelle obtenue sur une expérience de rebond d'un faisceau d'onde sur une surface courbe. Le champ de gradient de densité suivant  $x$  est filtré à  $\omega$ , pulsation du faisceau principal sur la figure de gauche, et à  $2\omega$  sur la figure de droite.

L'onde forcée avec un angle  $\theta = 30^\circ$  rebondit d'abord sur la surface libre

en haut de la cuve puis sur la surface circulaire. La figure de droite, filtrée à  $2\omega$  montre qu'à chaque rebond, une onde est créée. L'angle de propagation de l'harmonique créée est beaucoup plus important. En effet, étant donné la pulsation de l'onde mère  $\omega = 0.41 \text{ rad.s}^{-1}$ , on s'attend à un angle de propagation d'environ  $68^\circ$ . On mesure expérimentalement  $\theta = 69 \pm 1^\circ$ .

Dans notre cas d'interaction d'un faisceau avec sa réflexion sur une paroi, les règles de Jiang et Marcus [50] stipulent que pour que l'interaction donne naissance à une onde harmonique, il faut qu'il y ait un changement de signe de la composante de la vitesse de groupe suivant  $z$ . Dans ce cas, un seul faisceau de l'onde à  $2\omega$  est créé<sup>7</sup>. Sur la figure II.4, la première réflexion sur la surface libre correspond bien à un changement de signe de  $c_z$ , comme le prévoit les règles de sélection de Jiang et Marcus. Dans le cas de la deuxième réflexion, la réflexion est plus complexe, car sur une surface courbe. Dans notre cas, même si ce n'est pas très visible sur la partie gauche de la figure de gauche, la réflexion est à la fois sur-critique (une partie du faisceau réfléchi repars vers le haut) et sous-critique (une partie du faisceau réfléchi repars vers le bas). On observe une génération d'harmonique. Pour que cela soit compatible avec les règles de Jiang et Marcus, la composante  $c_z$  doit changer de signe, la génération d'harmonique doit être alors associée à la réflexion sur-critique, bien que le rayon sous critique soit de plus forte amplitude.

Les règles de Jiang & Marcus sont donc respectées pour une réflexion sur une paroi horizontale. Dans le cas d'une réflexion sur une surface courbe, la situation est plus complexe et les règles de sélections ne nous permettent pas de conclure, notamment au niveau de l'amplitude des harmoniques, sans une étude préalable de la courbure de la surface.

Nous allons voir dans la partie suivante que l'étude des réflexion sur des surfaces courbes fait apparaître un nouveau phénomène de rétro-réflexion.

## C Réflexion sur une surface courbe

Toute cette partie s'appuie fortement sur l'article théorique de Baines [4] datant de 1971. Il prédit que lorsqu'un faisceau d'onde interne rebondit sur une surface non plane, en plus de l'onde réfléchie "classique", une onde peut se propager dans le sens contraire à l'onde incidente. Malgré l'ancienneté de cette prédiction, aucune expérience n'a montré clairement la présence de cette onde. À notre connaissance, seul un article de conférence de S. Dalziel [17]

---

7. Dans le cas de deux faisceaux se rencontrant, deux faisceau d'harmoniques sont créés. Mais ici, du fait de la pente, un seul des faisceaux est possible.

met en exergue dans le cas d'une unique expérience une onde rétro réfléchie après rebond sur une surface sinusoïdale, mais l'accent n'est pas mis sur cette onde dans l'article. Nous nous proposons dans cette partie de mettre en évidence expérimentalement ce phénomène et de décrire qualitativement les conditions d'obtention d'une telle réflexion, en fonction de la courbure de la surface. La figure II.5 schématise le problème. Afin de ne pas confondre avec l'onde rétro-réfléchie, l'onde habituellement appelé onde réfléchie est parfois labellisée "onde transmise".

## 1. Théorie

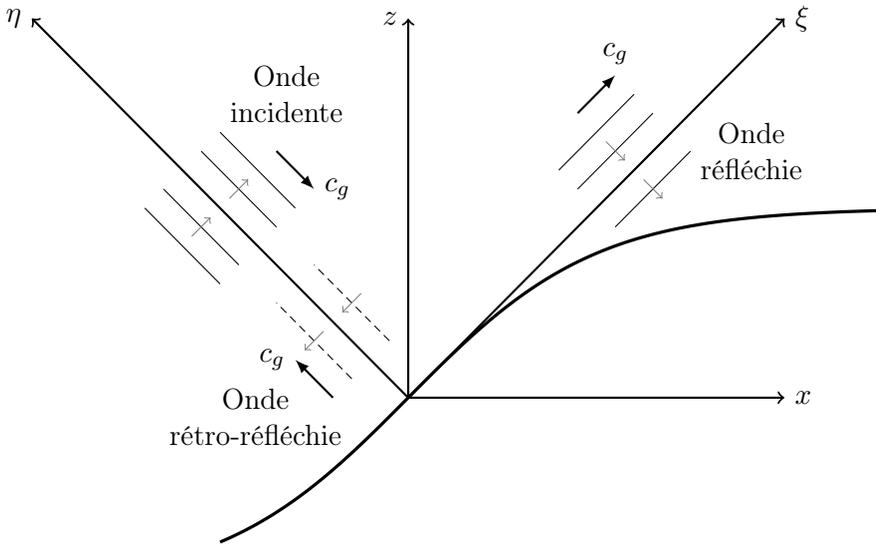


FIGURE II.5 – Schéma de réflexion d'un faisceau d'ondes internes sur une surface courbe. Les directions  $\xi$  et  $\eta$  sont définies comme étant les directions de propagation des ondes incidente et réfléchie. L'onde rétro-réfléchie ou *Back-Reflected Wave* est également représentée en traitillés.

### 1.a Position du problème

Notre but est de quantifier le rebond des ondes internes sur des surfaces courbes, considérées comme imperméables. Pour cela, nous nous plaçons dans une géométrie bidimensionnelle, ce qui permet d'utiliser la fonction courant  $\psi(x, z, t)$  afin de décrire le mouvement. De plus nous négligeons la viscosité.

L'équation de propagation de la fonction courant, établie dans le chapitre précédent, est la suivante :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta \psi + N^2 \psi_{xx} = 0 \quad (\text{II.17})$$

En supposant une dépendance temporelle de la forme  $\psi = \Psi(x, z)e^{-i\omega t}$ , on peut réécrire l'équation précédente :

$$\Psi_{xx} - c^2 \Psi_{zz} = 0 \quad \text{avec} \quad c^2 = \frac{\omega^2}{N^2 - \omega^2} \quad (\text{II.18})$$

avec  $\omega$  la pulsation de l'onde, comprise entre 0 et  $N$ . Cette équation est analogue à une équation d'onde avec  $x$  qui joue le rôle du temps et  $c$  la vitesse. On peut ainsi trouver la forme des solutions de l'équation (II.18) en faisant le changement de variable

$$\xi = z + cx \quad \text{et} \quad \eta = z - cx \quad (\text{II.19})$$

Ce changement de variable revient à se placer dans le repère lié à l'onde incidente (voir Fig. II.5). De plus nous pouvons, par un redimensionnement de la hauteur, prendre  $c = 1$ , afin d'avoir un repère orthogonal. Les solutions de (II.18) s'écrivent alors génériquement de la forme

$$\Psi = f(\xi) + g(\eta) \quad (\text{II.20})$$

En suivant les notations généralement introduites dans la littérature [4, 84], on peut réécrire l'équation de la surface courbe  $z = h(x)$  en fonction de  $\xi$  ou  $\eta$

$$\xi = -K(\eta) \quad \text{ou} \quad \eta = -H(\xi) \quad (\text{II.21})$$

Les signes  $-$  dans les définitions de  $H$  et  $K$  sont tels que ces deux fonctions soient croissantes.

On peut maintenant revenir à notre problème de réflexion sur une surface courbe. La condition de non pénétration à la frontière s'écrit simplement

$$\Psi = 0 \quad \text{sur la surface} \quad (\text{II.22})$$

Considérons une onde plane incidente de nombre d'onde  $k_1$  suivant  $\xi$  (donc de vitesse de groupe suivant les  $\eta$  négatifs).

$$\Psi_i = \Psi_0 \exp(ik_1\xi) \quad (\text{II.23})$$

La théorie linéaire suppose que l'onde plane transmise s'écrit simplement de la forme

$$\Psi_t = -\Psi_0 \exp(-ik_1 K(\eta)) \quad (\text{II.24})$$

Ainsi, on obtient bien  $\Psi_i + \Psi_t = 0$  sur la surface définie par  $\xi = -K(\eta)$ .

Cependant, du fait de la courbure de la surface, la décomposition spatiale de  $\Psi$  en série de Fourier n'est pas triviale, et on peut obtenir une partie des ondes planes de la décomposition qui ont une vitesse de groupe suivant les  $\xi$  décroissants, c'est-à-dire qui se rapprochent de la pente. La solution simple que la théorie propose satisfait bien la condition sur la surface, mais ne peut pas correspondre à notre problème d'une unique onde incidente arrivant sur une surface courbe depuis  $\eta = +\infty$ .

Nous allons expliciter plus en détail ce problème dans la sous partie suivante, mais vérifions tout de suite que ce problème n'apparaît pas lorsque l'on a une paroi plane. En effet, dans ce cas, l'équation de la pente s'écrit  $K = A\eta$ , avec  $A$  positif (voir Fig. II.5 et l'équation (II.21)). Ainsi l'onde réfléchie (II.24) est directement écrite sous la forme d'une onde plane. L'amplitude de la vitesse de phase de cette onde est  $\omega/(k_1 A)$ , négative suivant  $\eta$ , signe que l'onde plane réfléchie a bien une vitesse de groupe positive suivant  $\xi$  et donc que l'onde s'éloigne bien de la pente.

Comment trouver l'expression de l'onde réfléchie afin qu'elle satisfasse bien les conditions imposées par les sources d'ondes? Baines [4] a répondu à cette question<sup>8</sup> en exprimant une condition sur la fonction d'onde réfléchie, appelée condition de radiation.

### 1.b Condition de radiation

Supposons simplement que  $\Psi_t = F(\eta)$  et cherchons une condition sur  $F$  pour que le flux d'énergie associé à l'onde réfléchie soit dirigé suivant les  $\xi$  positifs. Écrivons la décomposition de  $F$  selon ses modes de Fourier :

$$F(\eta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \exp(-ik\eta) \hat{F}(k) dk + \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \exp(ik\eta) \hat{F}(-k) dk \quad (\text{II.25})$$

Le second terme de l'équation représente les ondes qui se propagent vers les  $\xi$  négatifs (voir Fig. II.5). Dans notre problème avec une source unique en

---

8. Une condition de radiation équivalente avait déjà été obtenue par Cox & Sandstrom [14] en 1962 pour la génération des ondes internes.

$\eta = +\infty$ , ce terme doit être nul. Cela conduit à la condition dite de radiation :

$$F(\eta) = \frac{i}{\pi} \mathcal{P} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\eta')}{\eta' - \eta} d\eta' \right] \quad (\text{II.26})$$

où  $\mathcal{P}$  désigne la valeur principale de l'intégrale. Dans son article, Baines réexprime cette condition sous la forme d'une équation de Fredholm de second type, mais aucune de ces expressions n'est facilement exploitable, et ne donne d'intuition sur la fonction courant réfléchie  $\Psi_r$ . Dans la sous-section suivante, nous allons tenter de dégager le sens physique de cette condition.

### 1.c Interprétation

Nous allons nous appuyer sur l'article de Sandstrom [84] afin de mieux expliciter les écarts à la prédiction par la théorie linéaire. Repartons de la solution simple supposée par la théorie :

$$\Psi_i + \Psi_t = 0 \quad \text{sur la surface} \quad (\text{II.27})$$

Séparons  $\Psi_t$  en deux parties, une qui satisfait la condition de radiation (II.26), notée  $\Psi_1$  et une autre partie qui, par construction, n'est composée que d'ondes se propageant suivant les  $\xi$  décroissants, notée  $\Psi_{t1}$ .

$$\Psi_t(\eta) = \Psi_1(\eta) + \Psi_{t1}(\eta) \quad (\text{II.28})$$

Afin d'annuler la partie ne satisfaisant pas à la condition de radiation, on rajoute artificiellement une source virtuelle d'ondes située en  $\eta = +\infty$  d'amplitude identique et de phase opposée à  $\Psi_{t1}$ . Cette source virtuelle donne lieu à une fonction courant  $\Psi_r(\xi)$  telle que

$$\Psi_r(\xi) - \Psi_{t1}(\eta) = 0 \quad \text{en} \quad \eta = -H(\xi) \quad (\text{II.29})$$

La somme  $\Psi_i + \Psi_1 + \Psi_r$  satisfait bien la condition limite de la paroi, mais  $\Psi_r$  a une partie ne satisfaisant pas à la condition de radiation. De même que précédemment, on peut écrire  $\Psi_r(\xi) = \Psi_2(\xi) + \Psi_{r2}(\xi)$  avec  $\Psi_{r2}$  ne satisfaisant pas à la condition de radiation. Il faut de nouveau considérer une source virtuelle, cette fois à  $\eta = +\infty$  permettant d'annuler la partie  $\Psi_{r2}$ . On voit bien que de cette façon, on peut construire deux suites de fonctions  $\Psi_{2p}$  et  $\Psi_{2p+1}$  telles que

$$\Psi_t(\eta) = \Psi_1(\eta) + \Psi_3(\eta) + \dots \quad (\text{II.30})$$

$$\Psi_r(\xi) = \Psi_2(\xi) + \Psi_4(\xi) + \dots \quad (\text{II.31})$$

et telle que

$$\Psi_i + \Psi_t + \Psi_r = 0 \quad (\text{II.32})$$

sur la surface, et chacune des ondes vérifie par construction la condition de radiation. On a ainsi construit, partant de la solution de la théorie linéaire, une suite de fonctions qui vérifient la condition de radiation et la condition limite sur la surface courbe. De plus chaque terme de la série sert à annuler une partie du terme précédent. L'amplitude de chaque nouveau terme diminue par rapport au précédent, car il correspond à une correction de celui-ci. La convergence de cette série a été explorée par Mied et Dungan [69], qui donnent aussi une manière numérique de trouver les amplitudes associées aux  $\Psi_p$ .

La construction précédente nous permet d'imaginer la possibilité d'une onde rétro-réfléchie. Cette onde très particulière est totalement contre-intuitive. Cette onde est appelée *Back-Reflected Wave* par Baines [4] ou encore *back-scattered wave* par Mied et Dungan [69], nous l'appellerons BRW par la suite.

Afin d'observer ce phénomène dans nos expériences, résumons les conditions générales pour visualiser cette onde et les caractéristiques principales de ce la BRW.

#### 1.d Conditions d'obtention

Sans spécifier la forme de la surface de réflexion, on peut quand même obtenir des conditions pour lesquelles la BRW peut ne pas exister. En effet, si l'on se place dans le cadre d'une surface dont l'équation est  $\mathcal{C}^2$  et toujours dans le cas d'une surface sur-critique, alors on peut montrer que l'amplitude de la BRW tend vers 0 lorsque la longueur d'onde de l'onde incidente tend vers 0 ou vers  $+\infty$ . La limite  $k \rightarrow 0$  correspond au cas où la courbure de la surface est grand devant le vecteur d'onde, c'est-à-dire que la longueur d'onde est très grande devant la distance caractéristique de la surface, qui paraît alors comme une aspérité sur une surface plane. De même, le cas  $k \rightarrow +\infty$  correspond à une onde dont la longueur d'onde est très petite devant la taille typique de la surface, qui est alors localement assimilable à un plan, la réflexion se fait alors aussi de manière classique.

Afin d'observer cette onde rétro-réfléchie, nous devons donc prévoir une surface dont la taille typique est de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde de l'onde incidente.

Dans l'article [4], certaines géométries particulières sont étudiées. Ces simplifications permettent à Baines de faire deux nouvelles prédictions, variables dans les trois cas particuliers étudiés :

- L'onde rétro-réfléchie ne possède qu'une seule longueur d'onde.
- L'énergie totale de l'onde rétro-réfléchie est de l'ordre de 10% à 20% de celle de l'onde incidente.

Ces résultats ont été obtenus pour des géométries particulières qui ne correspondent pas à notre dispositif expérimental. Cependant l'article de Baines suggère que ces résultats sont robustes, et donc nous nous attendons à des résultats vérifiant ces conditions dans nos expériences.

## 2. Résultats expérimentaux

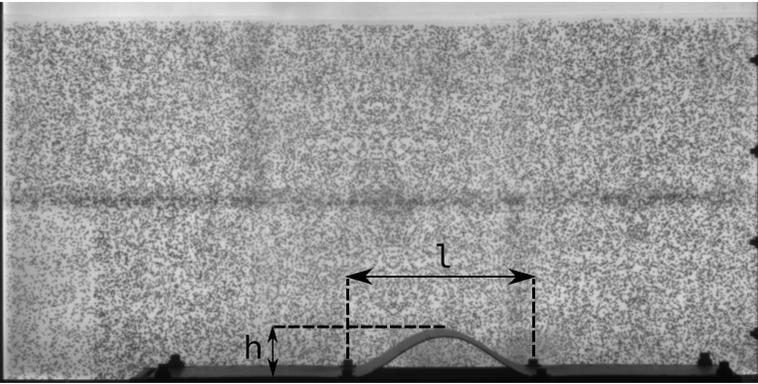


FIGURE II.6 – Image d'une des bosses utilisées pour effectuer les rebonds. Les grandeurs  $\ell$  et  $h$  permettent de décrire la courbure de la bosse. L'écran Schlieren permettant de faire les mesures se situe en arrière plan.

### 2.a Dispositif expérimental

Nous avons réalisé nos expériences dans une cuve de  $1600 \times 170 \times 425 \text{ mm}^3$  stratifiée uniformément, en utilisant la méthode des deux bacs. La stratification de la cuve a été mesurée avec une sonde conductimétrique permettant de connaître la valeur de la fréquence de Brunt-Vaisala  $N$ . Dans ces expériences, la fréquence typique de travail est  $N = 0.8 \text{ rad.s}^{-1}$ . La surface courbe consiste en une bosse de PVC de 2 mm d'épaisseur, de hauteur  $h$  et de longueur  $\ell$  fixée sur des rails en aluminium. (voir Fig. II.6). Différents trous ont été réalisés sur les bords de la bosse afin de pouvoir ajuster sa hauteur et

sa longueur en la fixant à différents endroits du rail. La bosse est bien sûr invariante par translation suivant sa largeur de la cuve et occupe quasiment toute la largeur de la cuve ; nous ne considérerons donc pas par la suite les effets tridimensionnels.

La génération d'ondes internes se fait à l'aide d'un générateur d'onde décrit précédemment. Le générateur nous permet de choisir la fréquence et la longueur d'onde de l'onde plane forcée. Dans toutes les expériences, l'oscillation du générateur est de la forme :

$$\zeta(z, t) = a \sin \left( \omega t + \frac{2\pi z}{\lambda_z} \right) \quad (\text{II.33})$$

où  $a = 4$  mm et  $\lambda_z = 145$  mm représentent respectivement l'amplitude du générateur et la longueur d'onde verticale du faisceau, fixées pour toutes les expériences de cette partie.

Les ondes internes sont visualisées grâce à la technique de Schlieren synthétique, dont l'écran de points aléatoires est placé en arrière plan de la Fig. II.6. Seule la partie centrée sur la bosse est visualisée dans cette image, et dans nos expériences. Le générateur se situe hors champ, à droite de la pente. Une caméra AVT (Allied Vision Technologie) Pike de  $2452 \times 2054$  pixels est utilisée pour enregistrer les mouvements. La caméra, suivie d'un objectif de focale 125 mm, se situe à 1700 mm du bords de la cuve, et l'écran à 520 mm du même bord de la cuve. La fréquence d'acquisition de la caméra est de 2 Hz pour toutes les expériences, ce qui est largement suffisant pour résoudre la fréquence principale du signal (qui est de l'ordre de 0.1 Hz).

Afin de déduire le champ de vitesse de l'onde, nous utilisons l'algorithme CIV présentée dans le chapitre précédent. Afin de déterminer si la BRW est présente, nous allons utiliser la transformation de Hilbert du signal, suivant les variables d'espaces. L'idée est la même que pour la transformation temporelle. On prend la transformée de Fourier du système temporellement puis spatialement, on filtre les fréquences (spatiales) qui nous intéressent, puis on fait la transformation inverse. Nous allons filtrer suivant les quatre quarts de l'espace des  $(k_x, k_z)$ , c'est-à-dire suivant  $(k_x, k_z > 0)$ ,  $(k_x > 0 > k_z)$ ,  $(0 > k_x, k_z)$ ,  $(k_z > 0 > k_x)$ . Cette décomposition nous permet de classer les ondes suivant leur direction de propagation. Ainsi, nous pourrons isoler les ondes qui vont vers la bosse, des ondes qui s'en éloignent, vers la gauche ou vers la droite.

## 2.b Observation de la BRW

Présentons une expérience dans laquelle l'observation de l'onde rétro-réfléchie est visible de manière spectaculaire. Pour cette géométrie, la hauteur vaut  $h = 36$  mm la longueur de la bosse est  $\ell = 260$  mm, soit environ deux fois la longueur d'onde incidente.

La figure Fig. II.7 montre le gradient de densité d'un faisceau d'onde interne se réfléchissant sur la bosse projeté suivant la direction de propagation de l'onde (c'est-à-dire suivant  $\xi$  ou  $\eta$  en fonction des quadrants), labellisée  $\sigma$  dans la figure. Les quatre images représentent les quatre quadrants définis précédemment, obtenus grâce à la transformée de Hilbert spatiale. Afin d'améliorer encore la qualité des images, le signal a été préalablement filtré suivant  $\omega$  avec une transformée de Hilbert temporelle. Sur chaque image, une flèche en haut à droite indique le sens de propagation de l'onde, donnant le quadrant dans lequel le champ est filtré.

Tout d'abord on observe Fig. II.7(a) l'onde incidente arrivant de la droite et Fig. II.7(b) l'onde réfléchie, suivant la théorie classique. On peut de plus clairement observer Fig. II.7(d) une onde qui est générée au niveau de la pente et qui repart dans le sens opposé à l'onde incidente Fig. II.7(a). L'absence de tout mouvement sur la Fig. II.7(c) permet de conclure que l'onde présente sur la Fig. II.7(d) ne provient que de la réflexion de l'onde incidente. Cette onde est donc bien, comme prédit par Baines, une onde rétro-réfléchie ou BRW. La figure comporte deux barres de couleurs, une liée aux figures (a) et (b) et l'autre liée aux figures (c) et (d), d'amplitude deux fois plus faible, afin de mieux distinguer les ondes dans chaque panel.

On peut alors revenir sur les prédictions de Baines concernant l'onde rétro-réfléchie :

- La BRW ne comporte qu'une seule longueur d'onde. La longueur d'onde mesurée est  $\lambda = (65 \pm 2)$  mm.
- L'amplitude de la BRW est approximativement deux fois plus faible que l'onde incidente. Si l'on considère le rapport de l'énergie totale entre la BRW et l'onde incidente, on trouve qu'environ 5% de l'énergie incidente est transférée sous forme de BRW. Cette mesure est comparable à la prédiction de Baines faite sur un exemple particulier de surface. Cependant, la viscosité intervient dans notre expérience, alors qu'elle n'est pas présente dans la théorie de Baines.

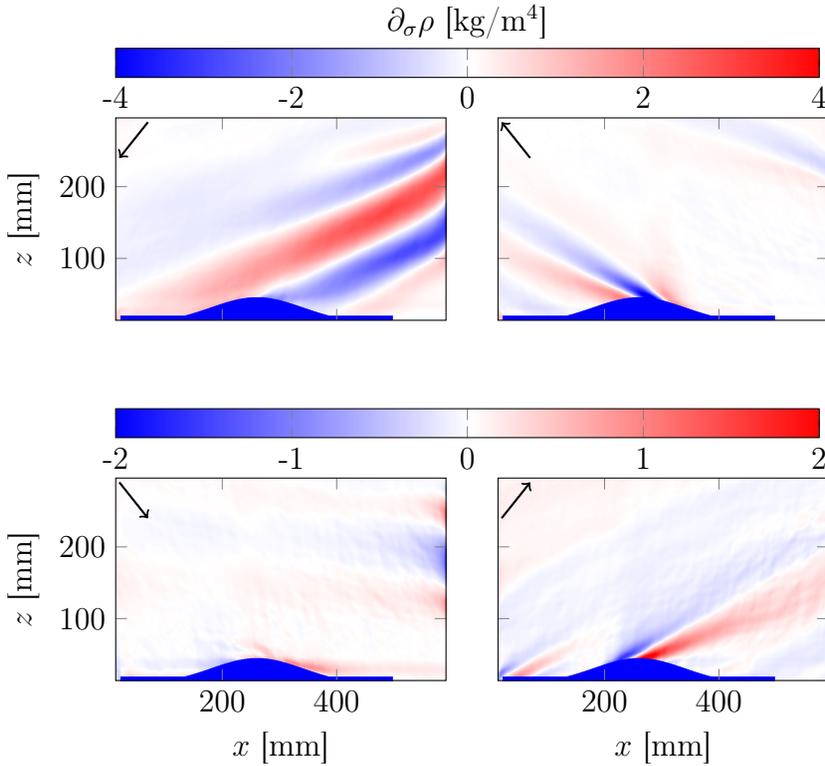


FIGURE II.7 – Transformée de Hilbert spatiale du gradient de densité suivant  $\sigma$ . Le filtrage spatial se fait suivant les 4 quadrants de l'espace des  $k$ , permettant de séparer les ondes suivant 4 directions de propagation. On a représenté en haut à gauche de chaque figure, la vitesse de groupe présente dans ce quadrant après filtrage. Afin de mieux visualiser le phénomène, l'amplitude de la barre de couleur associée aux deux images du bas est deux fois plus faible que celle correspondant aux deux images du haut.

### 2.c Espace des phases

Dans le paragraphe précédent, nous avons montré expérimentalement l'existence d'une onde rétro-réfléchie, contraire à la prédiction de la théorie des rayons, mais conformément à la littérature [4, 84, 69]. Nous allons maintenant faire varier la géométrie de la surface de rebond et observer dans quel cas la BRW existe.

Nous avons deux paramètres de géométrie à faire varier, la hauteur  $h$  et la longueur  $\ell$  de la bosse. Rappelons que, qualitativement, c'est le rapport entre

la longueur d'onde incidente et les dimensions de la bosse qui entre en jeu ici. Il faut donc adimensionner les variables  $h$  et  $\ell$  par la longueur d'onde de l'onde. Cependant, ce qu'il faut considérer lors de la réflexion est la longueur d'onde suivant les axes  $x$  et  $z$ . Nous avons donc pris comme paramètres de l'expérience, les grandeurs adimensionnées :

$$h^* = \frac{h \cos \theta}{\lambda} = \frac{h}{\lambda_z} \quad (\text{II.34})$$

$$\ell^* = \frac{\ell \sin \theta}{\lambda} = \frac{\ell}{\lambda_x} \quad (\text{II.35})$$

Ces nouvelles grandeurs adimensionnées doivent donc être comparées à 1, puisque les conditions intuitives d'apparition de BRW est  $h, \ell = O(\lambda)$ . Nous avons donc tracé, Fig. II.8, la présence ou l'absence de BRW, en fonction de  $h^*$  et  $\ell^*$ . Nous avons de plus distingué le cas où la BRW est présente, mais de très faible amplitude, ce qui permet de mieux préciser la frontière d'existence de l'onde. Bien sûr, notre dispositif expérimental ne permet pas de faire varier ces paramètres sur une grande gamme. Nous pouvons cependant tirer quelques résultats de nos expériences.

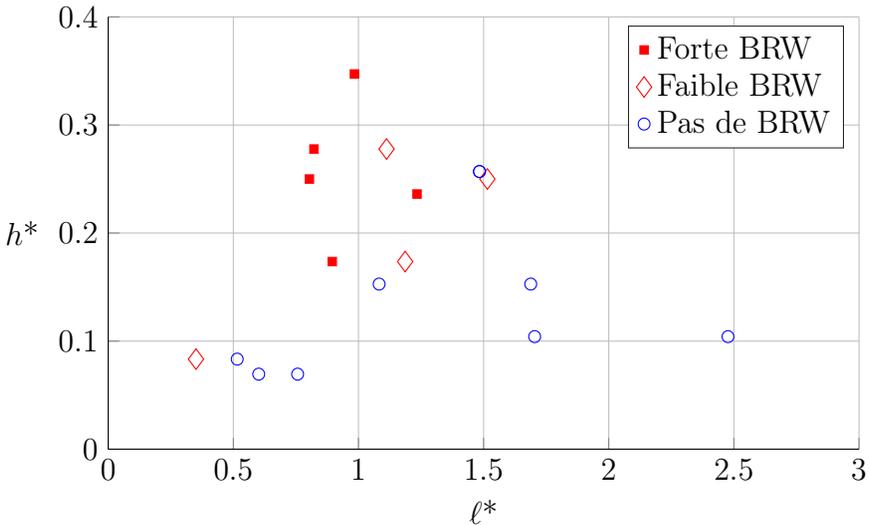


FIGURE II.8 – Carte de présence de la BRW en fonction de  $h^*$  et  $\ell^*$ . Chaque point représente une expérience. Les cas où l'onde rétro-réfléchie est présente sans ambiguïté dans les analyses sont représentés par des carrés rouges pleins. Les cas où la BRW n'est pas présente sont représentés par des cercles bleus creux. Les cas intermédiaires sont représentés par des losanges rouges creux.

Comme attendu intuitivement, pour  $h^* \ll 1$ , et  $\ell^* \gg 1$ , la surface est quasi plate, la réflexion est donc classique. Cette zone correspond à la partie en bas à droite du diagramme. Pour  $h^* \ll 1$  et  $\ell^* \ll 1$ , en bas à gauche du diagramme, la bosse peut se voir comme une petite aspérité à la surface d'un fond plat. En prenant en compte les effets de viscosité, que nous discuterons dans la partie suivante, on s'attend à ce que l'onde voit une surface plate, et donc à une réflexion classique. Même si nous n'avons pas pu l'explorer ici, pour  $h^* \gg 1$  et des faibles valeurs de  $\ell^*$ , on se trouve dans le cas limite de murs verticaux, la réflexion attendue est donc une réflexion sous-critique classique. Pour la partie en haut à droite du diagramme, les dimensions de la bosse sont trop grandes en comparaison de la longueur d'onde. L'onde se réfléchit alors sur une surface localement plane.

Ainsi la zone de présence des BRW est un îlot entouré par quatre zones limites pour lesquelles la réflexion est celle prévue par la théorie des rayons. Avec notre dispositif expérimental, nous n'avons pas pu explorer tous les contours de cet îlot, notamment pour des fortes valeurs de  $h^*$ , ce qui demande de contraindre fortement la surface. On pourrait envisager d'explorer cette zone soit en diminuant  $\lambda$ , soit en augmentant  $\theta$ .

Du fait du système de génération des ondes, diminuer grandement  $\lambda$  n'est en pratique pas possible. En effet, le profil de l'onde étant créé par des cames de quelques mm d'épaisseur, on ne peut pas diminuer trop  $\lambda$  au risque de ne plus générer un profil d'onde plane. Le forçage étant horizontal, il est difficile de forcer un mouvement oscillant pour des fortes valeurs de  $\theta$ , puisque le mouvement est alors quasiment vertical. L'efficacité de notre générateur est alors réduite, et l'amplitude de l'onde incidente faible.

## 2.d Effet de la viscosité

Afin de rendre encore plus frappant cet écart à la théorie linéaire, nous avons réalisé la même expérience que précédemment mais avec une bosse triangulaire. L'idée est de reproduire une des surfaces courbes pour lequel la BRW était fortement présente, mais uniquement avec deux plaques droite. Ainsi, avec cette géométrie triangulaire, la théorie des rayons s'applique très simplement et prévoit une réflexion sur-critique classique sur une ou les deux pentes, en fonction de la position et la taille du faisceau incident.

On se place donc dans les mêmes conditions que pour une expérience ayant générée une forte BRW :  $\lambda_z = 145$  mm,  $\theta = 42^\circ$ . On observe de même Fig. II.9, la transformée de Hilbert suivant les quatre quadrants de l'espace des  $k$ , du champ de gradient de densité suivant  $\sigma$ , préalablement

filtré temporellement à  $\omega$ .

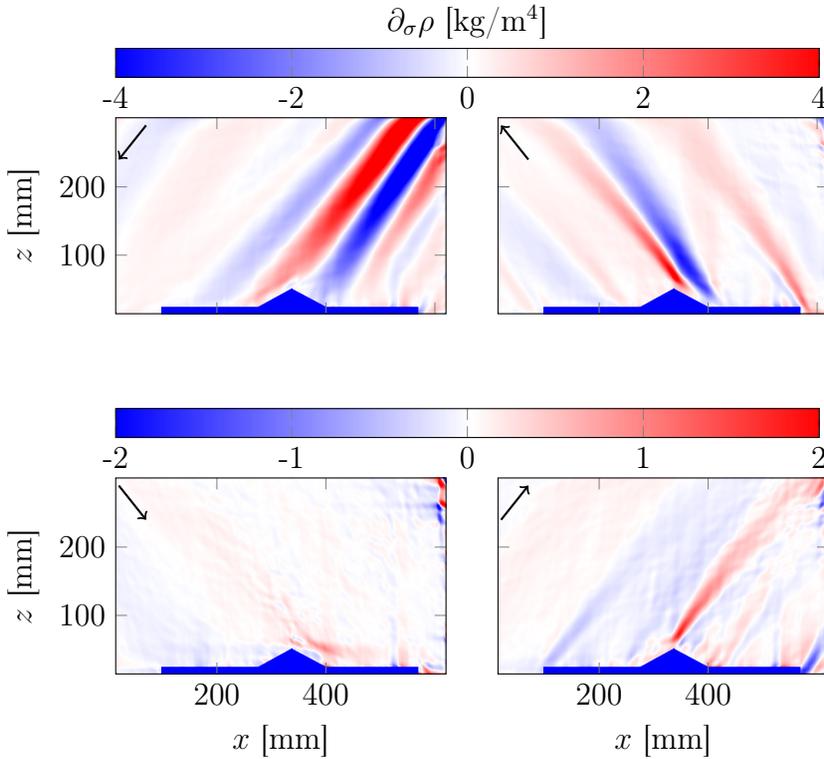


FIGURE II.9 – Transformée de Hilbert spatiale du gradient de densité suivant  $\sigma$  dans le cas d'une bosse triangulaire. L'amplitude de la barre de couleur associée aux deux images du bas est deux fois plus faible que celle correspondant aux deux images du haut.

On observe également très clairement une onde rétro-réfléchie. De même que sur la figure II.7, l'amplitude de la BRW est environ la moitié de l'onde incidente et le faisceau rétro-réfléchi ne possède qu'une seule longueur d'onde.

Lors de la réflexion, l'onde n'est pas affectée par les variations brusques de pente. La viscosité est bien sûr à l'œuvre ici. À la surface de la pente, une couche limite est présente. Son épaisseur est de quelques mm ce qui permet dans notre cas de lisser la surface triangulaire pour se retrouver dans le cas précédent d'une surface courbe.

Cet effet de la viscosité permet aussi de conclure qu'on ne s'attend pas à des modifications importantes de la réflexion sur une surface présentant des aspérités de quelques mm, ce qui correspond à la zone en bas à gauche de

notre diagramme.

## Conclusion

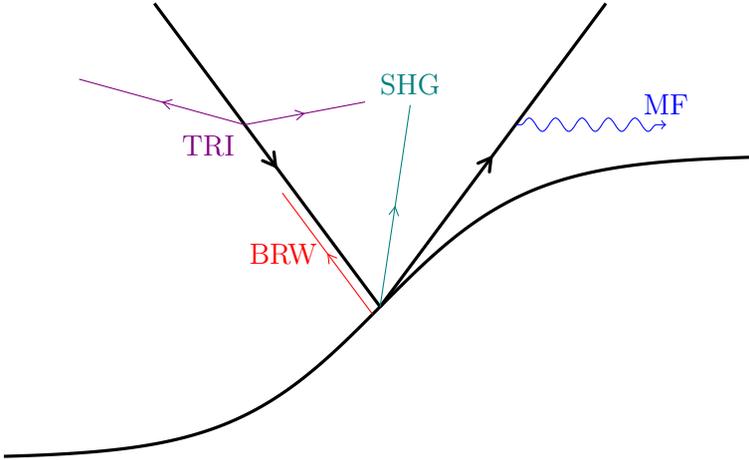


FIGURE II.10 – Schéma résumé représentant de nombreux écarts à la théorie linéaire des rayons. La TRI en mauve montre l'instabilité triadique. L'onde en rouge représente l'onde rétro-réfléchie (ou BRW) discutée dans la partie 3. Le sigle SHG associé à l'onde en vert signifie "Second Harmonic Generation" et représente la génération d'harmoniques. La flèche bleue représente le courant moyen qui sera discuté dans le chapitre VI.

Le schéma Fig. II.10 résume les principaux écarts à la théorie des rayons que nous avons décrits dans ce chapitre lors de la propagation et réflexion d'une onde interne sur une surface. La solution de la théorie linéaire des rayons est représentée en noir, et les écarts à cette théorie sont représentés en couleur. Détaillons chacun d'eux :

- La TRI pour Triadic Resonance Instability, représentée en mauve sur la figure II.10 est le fait qu'un faisceau d'onde peut se déstabiliser en donnant lieu à deux nouvelles ondes de pulsations spatiales et temporelles vérifiant les conditions (II.12a) et (II.12b).
- La SHG, pour Second Harmonic Génération, en vert sur la figure, peut apparaître lorsque deux faisceaux d'ondes de même fréquence se rencontrent. Ici, l'interaction provient de la superposition des faisceaux incidents et réfléchis lors de la réflexion sur une surface. Cette interaction peut créer une onde à la fréquence double de l'onde incidente.

Elle peut aussi être décrite comme une instabilité triadique, avec cette fois l'interaction entre deux ondes qui en donnent une troisième.

- La BRW ou *Back-Reflected Wave*, en rouge, est une onde rétro réfléchie qui se propage dans le sens opposé à l'onde incidente. Cette onde n'apparaît que lors d'une réflexion sur une surface dont la courbure est de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde incidente.
- Le *Mean Flow*, en bleu, ou courant moyen, apparaît lorsque l'amplitude de l'onde incidente varie suivant la direction transverse à la direction de propagation. Il sera étudié plus en détails dans le chapitre VI.

# Chapitre III

## Les attracteurs d'ondes bidimensionnels

---

<b>A</b>	<b>Introduction aux attracteurs d'ondes internes . . .</b>	<b>84</b>
<b>B</b>	<b>Géométrie trapézoïdale : Tracés de rayons . . . . .</b>	<b>88</b>
1.	Définition de la géométrie . . . . .	88
2.	Diagramme $(d, \tau)$ . . . . .	90
<b>C</b>	<b>Géométrie trapézoïdale : Étude expérimentale . . .</b>	<b>95</b>
1.	Dispositifs expérimentaux . . . . .	95
2.	Attracteur $(1,1)$ . . . . .	96
3.	Autres régions . . . . .	102
3.a	Attracteur $(2,1)$ . . . . .	102
3.b	Réflexion sous critique . . . . .	103

---

## Introduction

Dans les deux chapitres précédents, nous nous sommes essentiellement concentrés sur la propagation et la réflexion des ondes internes sans considérer le domaine de propagation. Dans cette partie, nous allons présenter une nouvelle composante propre à la propagation dans un domaine fermé : les attracteurs. En effet, à cause de la relation de dispersion très particulière des ondes internes, les réflexions successives dans une géométrie fermée vont, dans la très grande majorité des cas, faire converger l'onde sur un cycle limite. Après une introduction générale sur les attracteurs d'ondes, nous nous intéressons aux attracteurs créés dans une géométrie trapézoïdale bidimensionnelle, d'abord avec des algorithmes de tracés de rayons, puis expérimentalement.

Ce sujet d'étude n'est pas neuf. Le premier article sur les attracteurs d'ondes internes à été écrit par Maas & Lam en 1995 [59]. La première visualisation expérimentale est également due à Maas *et al.* [58] quelques années plus tard. Depuis, de nombreuses expériences [72, 45, 49, 61, 6, 11] ainsi que des simulations numériques [42, 44, 51, 13] et avancées théoriques [57, 60] ont été faites à ce sujet. Récemment le caractère instable de ces attracteurs 2D à travers l'instabilité de TRI été mis en évidence dans notre équipe [86, 12].

## A Introduction aux attracteurs d'ondes internes

L'approche choisie ici pour introduire les attracteurs d'ondes internes se fonde sur l'article de Maas & Lam [59]. La figure III.2 regroupe quelques images empruntés à cet article

Un système bien connu des physiciens qui conduit à un point fixe est l'application logistique. En fonction du paramètre de contrôle  $\mu$ , cette application  $T : x \rightarrow \mu x(1 - x)$  admet des points fixes, des doublement de périodes ou bien des comportements chaotiques. Pourtant, on peut appréhender ce système d'une façon simple en traçant la fonction  $T(x)$  ainsi que la droite  $y = x$ . Ainsi chaque itération de l'application  $T$  peut être calculée et représentée simplement, en reportant chaque valeur  $T(x_n)$ , sur l'axe  $x$  à l'aide de la droite unité, permettant ainsi de calculer  $T(x_{n+1})$ . Nous avons tracé Fig. III.1(a) cette application pour une valeur de  $\mu$  conduisant à un cycle.

Une autre manière d'étudier cette application logistique est de calculer l'exposant de Lyapunov associé. Intuitivement, l'exposant de Lyapunov d'un système peut être vu comme le taux de croissance (ou de décroissance) au

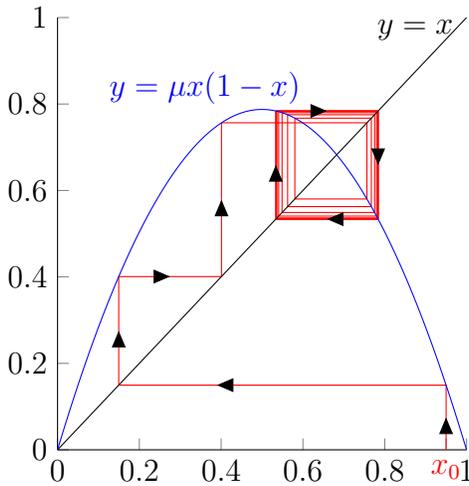


FIGURE III.1 – Application logistique pour une valeur de  $\mu$  conduisant à un cycle limite. La valeur initiale  $x_0$  est indiquée en rouge. La courbe bleue permet de calculer  $x_{n+1}$  connaissant  $x_n$ .

cours du temps, de la distance entre deux trajectoires infiniment proches. Dans le cas unidimensionnel, l'exposant de Lyapunov  $\lambda$  d'une application  $T$  peut être calculé grâce à l'équation suivante<sup>1</sup> :

$$\lambda = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \ln \left| \frac{dT(x_n)}{dx} \right| \quad (\text{III.1})$$

Le signe de l'exposant de Lyapunov permet de conclure très rapidement quant à la présence d'attracteurs ou non. En effet,  $\lambda < 0$  signifie que deux trajectoires avec des points de départ proches vont converger exponentiellement vite l'une vers l'autre. À l'inverse,  $\lambda > 0$  signifie que le système est (au moins localement) chaotique. Un écartement ou rapprochement polynomial entre deux trajectoires correspond à un exposant de Lyapunov nul.

Nous allons, pour commencer, prendre une géométrie simple de parabole représentée Fig. III.2(a) et utiliser une représentation visuelle similaire à celle de la Fig. III.1 afin d'appréhender les attracteurs d'ondes internes. Dans cette géométrie, la propagation des ondes se réduit à observer la position de

1. Cette définition peut se généraliser en dimension quelconque, en utilisant le théorème d'Oseledec [23]

réflexion d'une onde sur la surface libre au  $n$ -ième rebond, notée  $x_n$  et le sens de propagation dans le bassin, à savoir droite ou gauche.

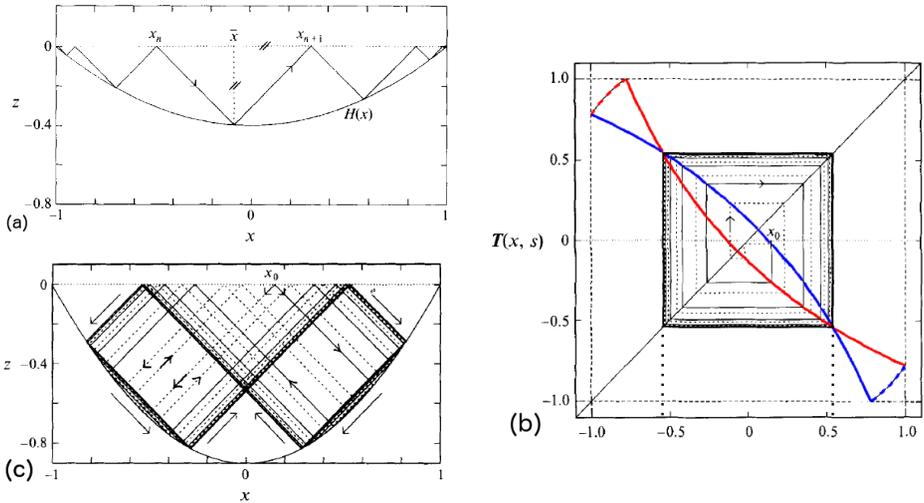


FIGURE III.2 – Figures extraites de [59]. En haut à gauche : géométrie parabolique. Les positions de la caractéristique sont repérées par les réflexions à la surface, notée  $x_n$ . L'équation de la parabole est  $H(x)$ . En bas à gauche : attracteur obtenu pour une certaine valeur de  $\tau$ . Deux positions initiales sont envisagées, en trait plein (resp. en trait tiretés), correspondant à un rayon partant vers la gauche (resp. vers la droite). Les deux caractéristiques convergent vers le même cycle limite, en forme d'ailes de papillons. Le sens de parcours est représenté par les grandes flèches. À droite : application  $T(x, s)$ . La courbe rouge (resp. bleue) représente l'application pour  $s = +1$  (resp.  $s = -1$ ). Deux trajectoires, en traitillés et en traits pleins noirs sont représentées. Elles convergent toutes les deux vers le cycle limite représenté en traits noirs pleins.

Dans le chapitre précédent, nous avons vu que la fonction de courant d'une onde interne reste constante le long d'une caractéristique, même après réflexion. On peut donc s'intéresser à la trajectoire des caractéristiques dans la géométrie parabolique. On peut alors calculer en partant d'un point  $x_0$ , les nouveaux points d'intersections  $x_1, x_2, \dots, x_n$  de la caractéristique avec la surface libre.

On définit une application  $T$  exactement comme dans le cas de l'application logistique, qui permet de trouver  $x_{n+1}$  en fonction de  $x_n$ . Cependant, du

fait de la propagation des ondes dans les deux sens de propagation, l'application  $T$  doit prendre en compte le sens de propagation de l'onde. On définit donc  $T : x, s \rightarrow T(x, s)$ , la variable  $s$  prenant les valeurs  $+1$  ou  $-1$  et précise si l'onde se propage vers la gauche ou vers la droite.

Dans l'exemple de la parabole, l'équation de  $H(x)$  est explicite, on calcule donc explicitement Fig. III.2(b) la quantité  $T(x, s)$  pour des paramètres de géométrie et d'angles de propagation donnés.

La figure III.2(b) est complexe à lire, et nous n'allons pas utiliser ce genre de représentation dans la suite de ce manuscrit. On peut donc en première lecture sauter ce paragraphe. Cependant cette approche est intéressante pour comprendre comment traiter les attracteurs d'ondes internes lorsqu'on est habitué à des attracteurs plus "classiques". L'application  $T(x, s)$  se compose de deux courbes, chacune en deux parties. La courbe en rouge (resp. bleue) correspond à l'application  $T(x, +1)$  (resp.  $T(x, -1)$ ). La trajectoire de la particule se construit en partant d'un point initial  $x_0$  puis en construisant le point suivant par réflexion sur une des deux courbes (en fonction de la valeur de  $s$ ). À chaque réflexion, en fonction de la position, l'onde peut soit changer de sens de propagation, soit garder le même sens de propagation. La partie en traitillés de chaque courbe (en haut à droite pour la courbe rouge et en bas à droite pour la courbe bleu) indique que l'onde garde le même sens de propagation, donc la même valeur de  $s$ , donc l'intersection suivante se fera avec la même courbe. À l'inverse, la partie en trait plein signifie que l'onde change de sens de propagation, la prochaine intersection se fera alors avec l'autre courbe. Avec ces règles de tracé, pour la géométrie correspondant aux courbes III.2(b), on voit apparaître un cycle limite. Un point initial  $x_0$  est considéré, avec deux directions de propagation opposées, représentées en trait plein ( $s_{init} = +1$ ) et en traitillés ( $s_{init} = -1$ ). Les deux trajectoires conduisent au même cycle limite carré, compris entre deux valeurs limites définies par les pointillées. Ce cycle limite se compose de deux points (sur la surface  $z = 0$ ) symétriques par rapport à l'origine. On remarque de plus une alternance entre  $s = +1$  et  $s = -1$ , l'onde change de sens de propagation entre les deux points. Ces informations sont suffisantes pour construire le cycle limite dans l'espace réel. La trajectoire réelle est représentée Fig. III.2(c). Il s'agit d'un attracteur d'ondes internes.

Cet exemple de géométrie parabolique nous a permis d'introduire les attracteurs de manière simple. Dans la suite, nous n'allons pas poursuivre l'analyse avec des graphiques du genre de celui figure III.2(b), car pour la géométrie trapézoïdale que nous allons étudier, il faudrait différentier quatre cas, selon si l'onde se déplace en haut à gauche, en bas à droite, etc. Notre

étude se fondera plus sur les valeurs des exposants de Lyapunov et les tracés des caractéristiques.

Il peut paraître surprenant que pour la très grande majorité des géométries fermés, la propagation des ondes internes conduit à la formation d'attracteurs. L'intuition venant des mathématiques nous fait dire que les trajectoires de boules sur des billards de diverses formes sont généralement chaotiques. Mais ces études dans diverses géométries 2D se basent sur une loi de réflexion spéculaire. Ici la loi de réflexion des ondes internes contraint beaucoup plus le système dans les choix de directions de propagation, et empêche tout chaos.

## B Géométrie trapézoïdale : Tracés de rayons

Nous allons étudier les attracteurs 2D dans une géométrie trapézoïdale définie Fig. III.3. Cette géométrie particulière a été introduite et longuement étudiée, d'abord théoriquement par L. Maas [59] puis expérimentalement et numériquement [58, 44, 11, 13].

Cette géométrie est choisie notamment pour sa simplicité. Elle ne possède qu'un seul côté qui ne soit ni vertical, ni horizontal. La focalisation n'a donc lieu que sur cette paroi. Les calculs et tracés de rayons sur cette géométrie sont donc faciles. D'un point de vue expérimental, c'est également une géométrie facilement réalisable. Cette géométrie sera étudiée à l'aide de tracés de rayons et expérimentalement durant toute la suite de ce chapitre. De plus, nous nous servons de cette géométrie de base pour réaliser des géométries 3D simples dans le chapitre consacré aux attracteurs en trois dimensions.

### 1. Définition de la géométrie

La géométrie est définie figure Fig. III.3(a) par un trapèze de hauteur  $H$  et de longueur  $L$  et d'angle  $\alpha$ . L'angle  $\theta$  d'inclinaison de la caractéristique est pris par rapport à l'horizontale. On définit alors  $x'$  et  $z'$  tels que

$$x' = \frac{2x}{L} - 1 \quad (\text{III.2})$$

$$z' = \frac{2z}{L} \sqrt{\frac{N^2}{\omega_0^2} - 1} \quad (\text{III.3})$$

Ce redimensionnement provient de la volonté de se retrouver exactement dans le cas de l'équation adimensionnée du chapitre précédent. La hauteur

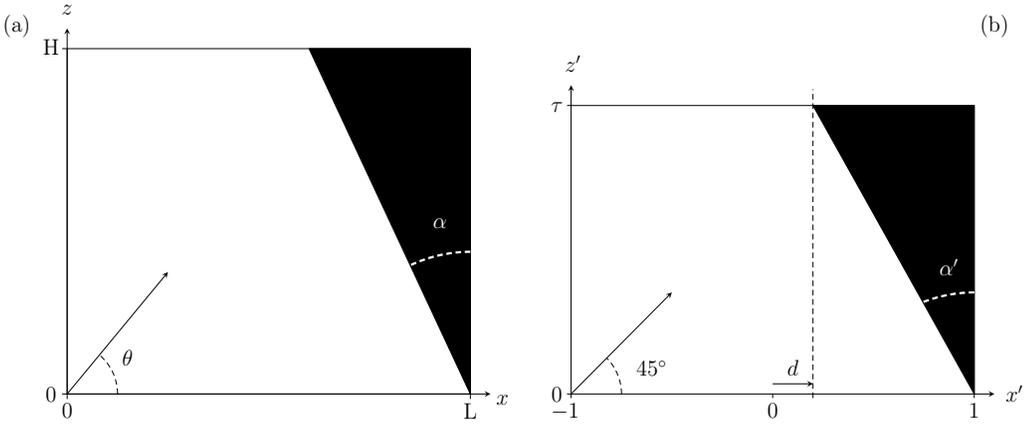


FIGURE III.3 – Géométrie de trapèze étudiée par la suite. La figure (a) indique la géométrie avec les paramètres physiques,  $H$ ,  $L$ ,  $\alpha$  et  $\theta$ , ainsi que les axes  $x$  et  $z$ . La figure (b) indique les paramètres de la géométrie redimensionnée, caractérisée par  $\tau$  et  $d$ , et avec un angle de propagation  $\theta = 45^\circ$ .

devient alors

$$\tau = \frac{2H}{L} \sqrt{\frac{N^2}{\omega_0^2} - 1} \quad (\text{III.4})$$

et la taille de la cuve peut être reliée à la position de la pente à la surface libre

$$d = 1 - \frac{2H}{L} \tan \alpha \quad (\text{III.5})$$

De plus, dans cette nouvelle géométrie, l'angle de propagation des ondes est toujours  $\theta = 45^\circ$ , et l'angle de la pente est défini par

$$\tan \alpha' = \tan \alpha \tan \theta \quad (\text{III.6})$$

Dans toute la suite de notre étude théorique, nous allons nous placer dans cette géométrie re-dimensionnée. Retenons que, de cette façon, l'angle de la pente est contrôlé par  $d$ , et l'angle de propagation des ondes est déterminé par  $\tau$ . Lors de la représentation des tracés de rayons, nous reviendrons à la géométrie réelle afin de mieux voir les différences dues à l'angle de propagation.

## 2. Diagramme $(d, \tau)$

Leo Maas a exploré cette géométrie théoriquement et numériquement. En calculant la fonction courant de manière exacte, on peut en déduire la valeur de l'exposant de Lyapunov  $\lambda$  en fonction des paramètres de la géométrie et de l'angle de propagation. En représentant  $\log_{10}(-\lambda)$  pour chaque point  $(d, \tau)$ , on obtient le diagramme présenté Fig. III.4

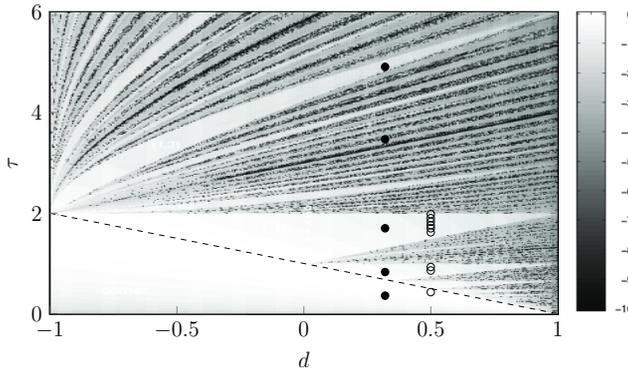


FIGURE III.4 – Diagramme  $(d, \tau)$  extrait de [58]. L'échelle des couleurs à droite représente la valeur de  $\log_{10}(-\lambda)$ . Les régions claires correspondent à des zones pour lequel l'exposant de Lyapunov est fortement négatif, donc une convergence rapide. Les régions plus foncées correspondent à des valeurs de  $\lambda$  proche de zéro, donc faiblement attractives. Les exemples de tracés de rayons dans cette partie sont représentés par les disques noirs situé à  $d = 0.32$  et les expériences présentées dans la partie suivante sont représentés par des cercles noirs à  $d = 0.5$ .

L'échelle des couleurs nous indique que les valeurs de  $\log_{10}(-\lambda)$  vont de approximativement 0 à -10, c'est-à-dire, des valeurs de  $\lambda$  comprises entre  $-1$  et  $-10^{-10}$ , donc toujours négatives. En effet, on peut montrer que l'exposant de Lyapunov est toujours négatif, ou (quasi) nul dans certains cas singuliers, mais jamais positif [59, 58]. À la différence des trajectoires dans des billards, ou de l'application logistique, il n'y a pas de chaos dans ces systèmes. À part quelques cas singuliers, toutes les trajectoires conduisent à un attracteur. Les zones les plus claires du diagramme sont celles pour lesquelles la convergence de deux trajectoires est la plus forte, c'est à dire les zones dans lesquelles les attracteurs focalisent le plus. Explorons ces zones à l'aide des algorithmes de tracé de rayons.

On choisit des valeurs de paramètres tels que le point ( $d = 0.32, \tau = 1.77$ ) soit dans la grande zone triangulaire du diagramme, située au dessus de la ligne en traitillés. On lance un rayon avec la position initiale ( $x = 0, z = H/3$ ). La trajectoire obtenue est représentée sur la figure Fig. III.5.

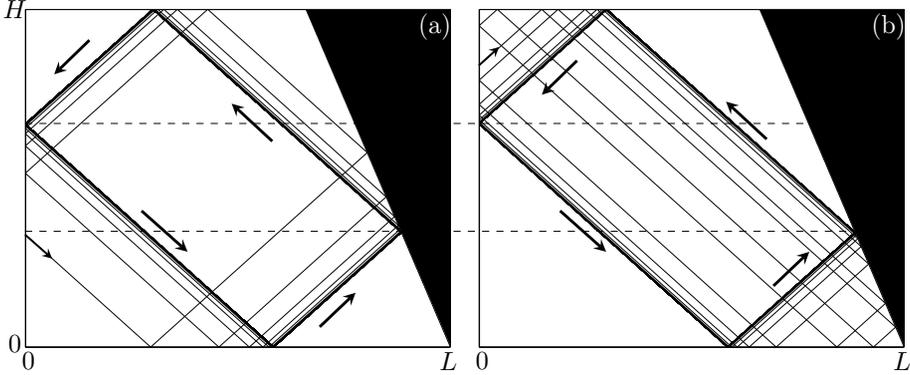


FIGURE III.5 – Tracé de rayons pour deux conditions initiales différentes. La petite flèche indique le point de départ du rayon et les flèches épaisses indique le sens de parcours de l'attracteur formé. Les traits tiretés noirs montrent que l'attracteur obtenu dans les deux cas est le même. Les paramètres géométriques sont  $H/L = 2/3, \alpha = 27^\circ$ , et  $\theta = 37^\circ$ , ce qui donne des paramètres  $(d, \tau) = (0.32, 1.77)$ .

On observe Fig. III.5(a) une convergence du rayon vers un cycle limite. Ce cycle limite se compose de quatre "branches" qui sont les quatre segments qui composent l'attracteur. Le sens de parcours du cycle limite est représenté par les flèches placées sur chaque branche. L'attracteur possède quatre réflexions sur les parois, trois réflexions sur les parois horizontales et une réflexion sur la paroi inclinée. Bien sûr, c'est cette réflexion sur la paroi inclinée qui est intéressante et qui, étant donné le sens de parcours de l'attracteur, conduit ici à la focalisation.

Sur la figure III.5(b), nous avons pris une nouvelle condition initiale d'un rayon partant cette fois d'une autre position et avec un angle  $\theta$  opposé au précédent. On remarque que l'attracteur obtenu est le même et qu'il est parcouru dans le même sens. En fait quelque soit le point initial, pour ces paramètres  $d$  et  $\tau$ , l'attracteur final obtenu sera le même. Cet attracteur est labellé (1,1) car il présente une réflexion sur la surface  $z = H$ , et une réflexion sur la paroi inclinée. Cet attracteur est le plus simple que l'on puisse créer,

c'est pourquoi il est très souvent étudié expérimentalement, théoriquement ou numériquement. De manière générale nous appellerons un attracteur  $(m,n)$ , un attracteur possédant  $m$  réflexions sur la surface et  $n$  réflexion sur la paroi inclinée.

Que se passe-t-il si l'on choisit d'autres valeurs de  $(d, \tau)$  tout en restant dans cette région ? Nous avons tracé Fig. III.6 en rouge deux autres attracteurs correspondants à la même valeur de  $d$  mais deux valeurs de  $\tau$  situés aux extrémités de la zone. On observe alors que l'attracteur obtenu dans les deux cas est toujours un attracteur  $(1,1)$ , mais sa forme est fortement modifiée par rapport aux figures III.5(a) et III.5(b). Chaque zone claire du diagramme correspond à un unique attracteur  $(m, n)$ , et que la forme de cet attracteur varie en fonction du point dans la zone considérée. Les limites de la zone  $(1,1)$  sont définies par  $\tau < 2$  pour le haut du triangle et  $\tau = 1 - d$  pour le bas du triangle (pour  $d < 0$ ). Pour une valeur de  $\tau$  égale à 2, l'attracteur  $(1,1)$  sera réduit à une ligne, et ne pourra plus exister pour des valeurs supérieures. Pour des valeurs de  $\tau$  en dessous de la ligne traitillée, c'est-à-dire pour  $\theta < \alpha$ , la réflexion sur la pente devient sous-critique.

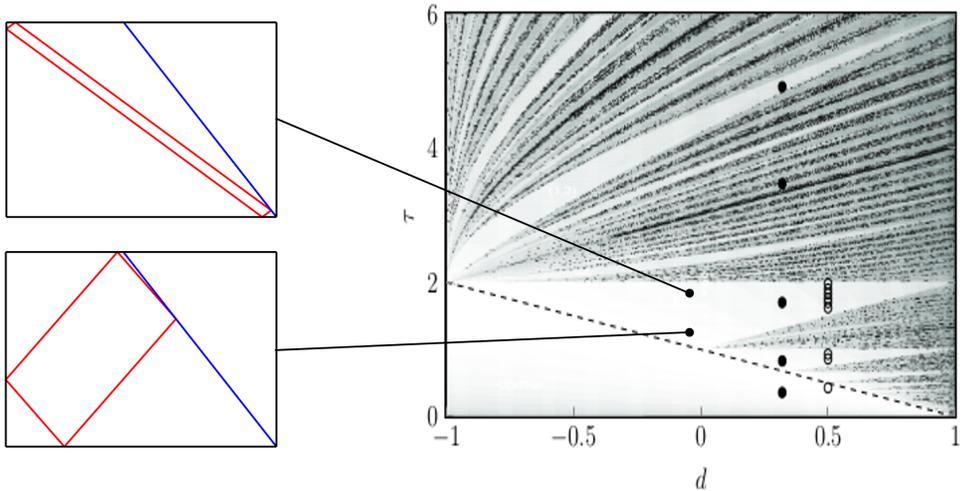


FIGURE III.6 – Deux exemples d'attracteurs placés sur le diagramme  $(d, \tau)$ , pour la même valeur de  $d$  et deux valeurs de  $\tau$  proches des frontières de la zone  $(1,1)$ . On reconnaît dans les deux cas l'attracteur  $(1,1)$ , déformé par rapport aux figures III.5(a) et III.5(b).

Explorons alors les autres régions remarquables du diagramme  $(d, \tau)$ .

Nous avons réalisé Fig. III.7 des tracés de rayons pour deux zones particulières du diagramme, représentée par les disques noirs sur le diagramme Fig. III.4.

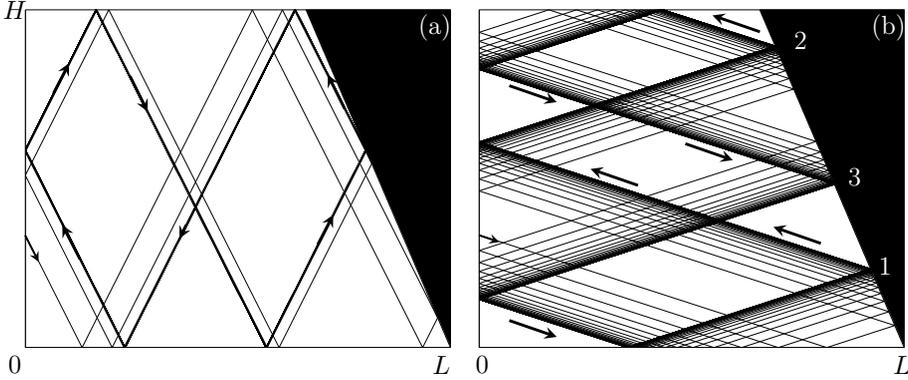


FIGURE III.7 – Tracé de rayons pour deux autres attracteurs. Les paramètres sont identiques à ceux de la figure III.5, excepté pour l'angle de propagation. Figure (a) :  $\theta = 58^\circ$ , donc  $\tau = 0.83$ , l'attracteur obtenu est un (2,1). Figure (b) :  $\theta = 15.2^\circ$ , donc  $\tau = 4.91$ , l'attracteur obtenu est un (1,3)

L'attracteur de gauche Fig. III.7(a) est un attracteur (2,1). Il possède une réflexion supplémentaire sur la surface, mais toujours qu'une seule réflexion sur la paroi inclinée, ce qui fait qu'il reste très proche de l'attracteur (1,1). Cependant la focalisation n'est pas identique. En effet cet attracteur apparaît pour un angle  $\theta$  plus proche de  $\pi/2 - \alpha$ , la focalisation est donc plus grande. L'exposant de Lyapunov est alors élevé en valeur absolue pour cet attracteur.

L'attracteur de droite Fig. III.7(b) est plus intéressant, il s'agit d'un attracteur (1,3) car il possède trois réflexions sur la paroi inclinée. D'après le sens de parcours de l'attracteur, deux de ces réflexions sont focalisante (les réflexions notées 1 et 2 sur le diagramme) et une défocalisante (notée 3 sur la figure). La focalisation dans ce cas sera moindre car la réflexion défocalisante compense exactement une des réflexions focalisantes. L'angle associé à cet attracteur étant plus faible que dans le cas (1,1), l'exposant de Lyapunov associé est plus faible.

On remarque dans le diagramme que ces attracteurs  $(m,n)$  existent pour des zones de plus en plus petites. Attention cependant à ne pas oublier que le diagramme est tracé en fonction de grandeurs adimensionnées. Expérimentalement, pour savoir quelles zones sont accessibles, il serait plus intéressant de tracer un diagramme  $(\alpha, \theta)$  car ce sont les paramètres que l'on contrôle

physiquement.

Que se passe-t-il dans les zones de diagramme où l'exposant de Lyapunov est très faible en valeur absolue ? Traçons Fig. III.8(a) le parcours des rayons pour des valeurs  $(d, \tau)$  donnant un exposant de Lyapunov quasi-nul.

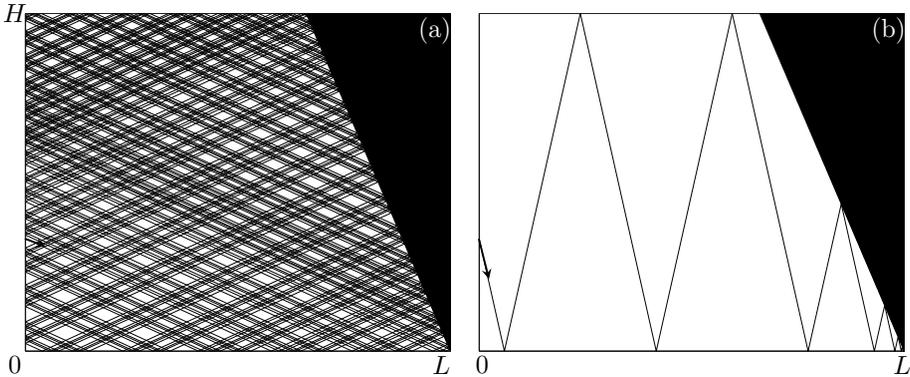


FIGURE III.8 – Tracé de rayons dans deux autres cas particuliers. Les paramètres sont identiques à ceux de la figure III.5, excepté pour l'angle de propagation. Figure (a) :  $\theta = 21^\circ$ , donc  $\tau = 3.47$ , l'attracteur obtenu possède de nombreuses réflexions sur la pente et sur la surface libre. Figure (b) :  $\theta = 75^\circ$ , donc  $\tau = 0.36$ , on obtient une convergence vers un attracteur-point situé dans le coin de la cuve.

On remarque que pour cette valeur, le trajet d'un rayon est très complexe et l'attracteur final occupe quasiment tout l'espace. La focalisation globale de l'attracteur est faible, mais positive. Le nombre de réflexions focalisantes doit donc être supérieur au nombre de réflexions défocalisantes. Cette propriété, très générale, nous permet de dire qu'il ne peut pas exister d'attracteur  $(m, 2n)$ . En effet, on ne peut pas construire d'attracteurs possédant un nombre pair de réflexions sur la paroi inclinée, toutes focalisantes. Et avec  $n$  réflexions focalisantes et  $n$  réflexions défocalisantes, on obtient une focalisation totale nulle, ce qui ne conduit pas à un attracteur. Ces régions avec exposant de Lyapunov strictement nul apparaissent pour des valeurs singulières de  $d$  et  $\tau$ . Pour ces valeurs, pour chaque condition initiale, on obtient un cycle limite différent. Numériquement ou expérimentalement, il est bien sûr impossible d'obtenir de telles conditions.

Une dernière zone reste à explorer, celle située sous la ligne en traitillés dans le diagramme Fig. III.4. Cette zone est définie par  $\tau < 1 - d$ , c'est à dire, ramené aux grandeurs physiques,  $\pi/2 - \alpha > \theta$ . On est donc dans le

cas d'une réflexion sous critique. Le tracé de rayon pour ce cas est présenté Fig. III.8(b). On voit que le rayon est piégé dans le coin de la pente. On est dans le cas où l'attracteur est réduit à un point.

On voit qu'avec cette simple géométrie trapézoïdale, des comportements très variés peuvent apparaître. Nous allons essayer de mettre en évidence ces divers comportements expérimentalement.

## C Géométrie trapézoïdale : Étude expérimentale

Une étude expérimentale détaillée des attracteurs bidimensionnels se trouve dans la thèse de Christophe Brouzet [10]. Certaines figures discutées dans ce chapitre ont été réalisées au début de ma thèse, à partir d'expériences effectuées en commun avec Christophe, et sont également présentes dans son manuscrit.

### 1. Dispositifs expérimentaux

Nous allons nous concentrer sur l'étude des attracteurs dans la géométrie trapézoïdale étudiée avec les tracés de rayons. Pour ce faire, nous allons utiliser deux dispositifs expérimentaux qui sont représentés par le schéma Fig. III.9

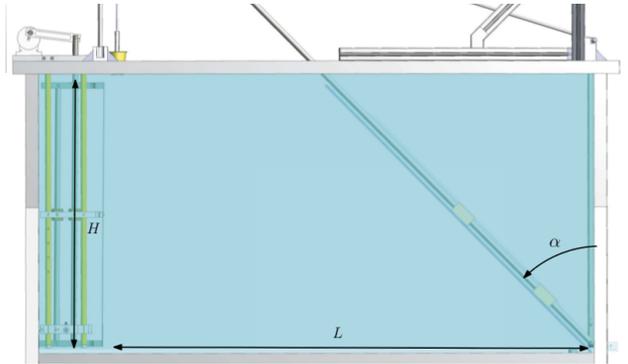


FIGURE III.9 – Dessin technique d'une des cuves utilisées. Le générateur, représenté à gauche, force les ondes sur une hauteur  $H$ . À droite, la pente est inclinée d'un angle  $\alpha$  par rapport à la verticale. La longueur  $L$  de la cuve est ici définie comme la distance entre le générateur et la pente, au fond de la cuve. La sonde conductimétrique est représentée à gauche au dessus du générateur.

Les deux dispositifs sont des cuves de taille  $H \times L \times W$ . Dans chacun d'eux est placée une pente d'inclinaison  $\alpha$  par rapport à la verticale. Les deux dispositifs diffèrent seulement par les dimensions  $H$  et  $L$ . Une des cuves est de taille  $435 \times 800 \times 170 \text{ mm}^3$  et l'autre fait  $900 \times 2000 \times 170 \text{ mm}^3$ . Du fait de la faible épaisseur de la cuve, on considère que ces dispositifs se comportent comme des géométries 2D. Le caractère bidimensionnel des mouvements générés à été vérifié dans la petite cuve par Brouzet [13] en réalisant plusieurs nappes laser  $xz$  à différentes positions  $y$  de la cuve. Les expériences de cette partie réalisées en Schlieren Synthétique ont été effectuées dans la grande cuve, donnant une meilleure visualisation des champs de vitesse. Cependant, au moment de faire ces expériences, nous n'avons pas encore réussi à obtenir des nappes laser satisfaisantes sur un plan  $xz$  de la cuve, notamment à cause de la trop forte absorption. Les visualisations par méthode PIV sont alors réalisées dans la cuve de taille  $435 \times 800 \times 170$ , avec un meilleur signal laser.

Tentons de retrouver expérimentalement les structures d'attracteurs obtenues avec les tracés de rayons. Nous allons commencer notre étude en prenant des paramètres de géométrie et de forçage menant à un attracteur (1,1). Nous prendrons dans toute cette partie un forçage de type mode 1 sur toute la hauteur du fluide, d'amplitude 2 mm.

## 2. Attracteur (1,1)

Pour des paramètres  $d = 0.5$  et  $\tau = 1.76$  (centré au milieu de la zone (1,1) du diagramme  $(d, \tau)$ ), on effectue une acquisition Schlieren. À partir du traitement CIV, on obtient le champ de gradient de densité sur toute la cuve. On représente alors Fig. III.10, le champ  $\sqrt{(\partial\rho'/\partial x)^2 + (\partial\rho'/\partial z)^2}$  dans le régime stationnaire.

Sur cette figure, on observe très clairement la forme de l'attracteur (1,1) attendue. La ligne tiretée est l'attracteur obtenu par tracé de rayons avec les mêmes paramètres géométriques. On observe que la branche numérotée 1 dans le diagramme est la plus énergétique. C'est normal puisque cette branche se situe juste après la paroi inclinée. La réflexion précédant la branche 1 vient de concentrer l'énergie. L'énergie diminue alors progressivement suivant le parcours de l'attracteur jusqu'à la branche 4, suivi d'une nouvelle réflexion sur la paroi inclinée qui focalise de nouveau l'énergie.

Dans une théorie sans dissipation, comme chaque rebond sur le plan incliné focalise l'énergie et que les autres rebonds ne défocalisent pas, l'épaisseur des branches est théoriquement infinie. Dans notre expérience, elle est contrôlée par la viscosité.

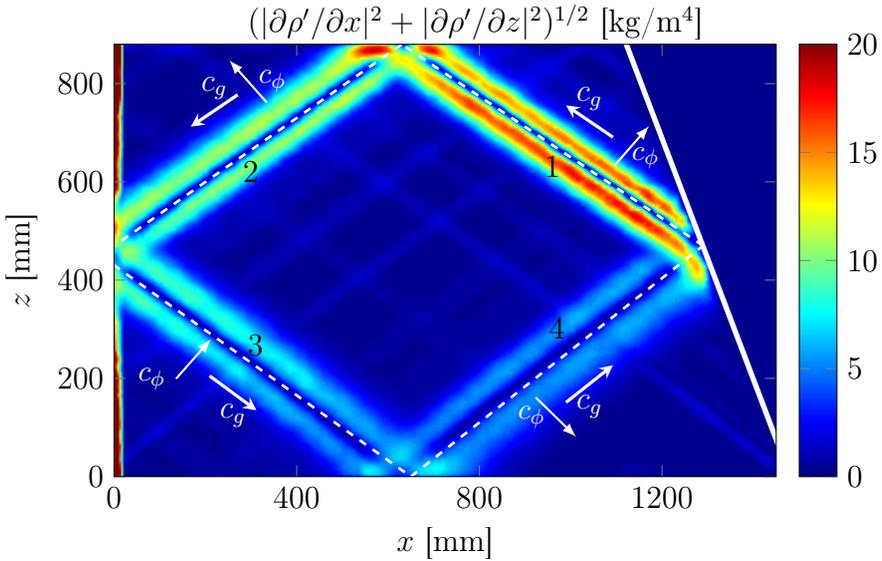


FIGURE III.10 – Norme instantanée du gradient de densité, filtré à la pulsation  $\omega$ , pour des paramètres donnant un attracteur (1,1).  $d = 0.5$  et  $\tau = 1.76$ . La prédiction obtenue par tracé de rayons est représentée en traits blancs. Le sens de propagation de l’onde est indiqué par les flèches. Les branches sont numérotées de 1 à 4, la branche 1 étant la plus énergétique, juste après la réflexion.

L’attracteur d’ondes internes peut être vu comme un outil permettant de passer des grandes longueurs d’ondes aux petites longueurs d’ondes. En effet, le forçage est ici fait sur toute la hauteur du fluide, la longueur d’onde verticale associée est alors  $2 \times 900 = 1800$  mm. Les longueurs d’ondes obtenues dans le régime stationnaire sont de l’ordre de 100 mm. On a donc, dûe à la focalisation, un transfert des grandes longueurs d’ondes vers les petites longueurs d’ondes. Cette propriété est très intéressante et pourrait expliquer en partie le mélange dans les océans. Pour que les eaux salées et douces se mélangent dans les océans, les mouvements du fluide doivent atteindre une longueur d’onde de l’ordre de l’échelle de dissipation visqueuse. Cette structure permet d’atteindre rapidement cette échelle. L’efficacité du mélange des attracteurs a déjà été explorée [51] notamment dans notre équipe [86, 12], et est encore un sujet de recherche actuel.

Nous n’avons considéré qu’un seul point donnant l’attracteur (1,1) dans le diagramme  $(d, \tau)$ . Quelle est la forme de l’attracteur (1,1) pour d’autres valeurs de  $d$  et  $\tau$  qui restent dans le triangle (1,1)? Nous avons réalisé plusieurs

expériences à  $d$  fixé en faisant varier  $\tau$  (ce qui est le plus commode expérimentalement). Ces différents points sont représentés par les cercles noirs sur la figure Fig. III.4. On représente Fig. III.11 les différents champs résultants.

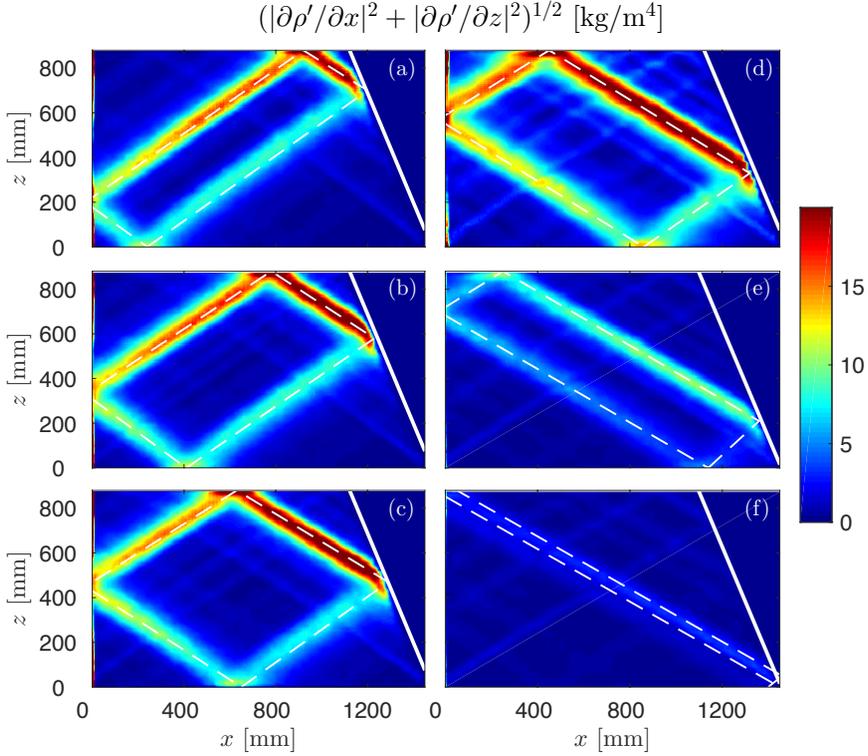


FIGURE III.11 – Amplitude de la norme du gradient de densité, filtré à  $\omega$ , pour différents paramètres donnant un attracteur (1,1). Pour toutes les images,  $d = 0.5$ , et  $\tau$  augmente et vaut 1.62 (a), 1.70 (b), 1.76 (c), 1.83 (d), 1.90 (e) et 1.98 (f). Les prédictions obtenues par tracé de rayons dans chaque cas sont représentées en traits blancs. Les positions de ces expériences dans le diagramme  $(d, \tau)$  sont représentées Fig. III.4 par les cercles noirs. La figure (c) correspond à la figure III.10

Les prédictions de l'algorithme de tracé de rayons sont superposées en traitillés aux figures. Pour cette figure, nous avons choisi de tracer l'amplitude de la partie oscillante, c'est à dire l'enveloppe du signal. En effet de manière générale dans le régime stationnaire, on peut écrire le champ de gradient de densité sur une branche comme  $A(\vec{r}) \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$ , nous ne représentons pour cette figure que l'amplitude  $A(\vec{r})$ . On perd l'information sur la longueur

d'onde des branches, mais cette image a l'avantage de ne pas dépendre du temps. La figure (c) correspond à l'amplitude de la Fig. III.10. On remarque que les prédictions s'accordent encore très bien avec les expériences. Dans chaque cas on retrouve la structure de l'attracteur (1,1) avec quatre branches d'énergie décroissante à partir de la pente.

Malgré le fait que le forçage soit constant, on voit clairement que l'énergie stockée dans l'attracteur n'est pas la même dans chaque cas. Nous avons donc enquêté sur l'aspect énergétique des attracteurs (1,1).

### Étude énergétique de la région d'attracteur (1,1)

Pour cette étude, comme nous voulons avoir directement accès à l'énergie cinétique, nous devons utiliser une visualisation PIV qui permet d'obtenir le champ des vitesses dans la cuve. Nous devons donc utiliser pour ces expériences la petite cuve de  $435 \times 800 \times 170 \text{ mm}^3$ .

Observons d'abord pour une expérience donnée, l'évolution temporelle de la moyenne de l'énergie cinétique adimensionnée sur toute la cuve.

$$K = \frac{\int_S dx dz 0.5(v_x^2 + v_z^2)}{0.5(a\omega_0)^2 S} \quad (\text{III.7})$$

On trace une évolution de  $K$  en fonction du temps Fig. III.12.

On observe tout d'abord un régime transitoire, d'une durée d'environ 25 périodes  $T_0$ . Tout au long de l'évolution, des oscillations de  $K$  ont lieu. Dans le régime stationnaire,  $K$  oscille entre deux valeurs notées  $K_{min}$  et  $K_{max}$ . Cette oscillation se fait à la pulsation  $2\omega$ . Pour comprendre l'origine de ces oscillations, il faut s'intéresser à la structure des branches de l'attracteur. On trace Fig. III.13 une coupe perpendiculaire à la branche 4 de l'attracteur (1,1) de la figure III.10.

Sur cette figure, est tracée en bleu la valeur du champ  $^2 \partial\rho/\partial x$ , ainsi que l'enveloppe de la branche, en traitillés noirs. Lors de la propagation, l'évolution de la phase va modifier le champ sous l'enveloppe, la norme du champ total va donc être modifiée par la phase absolue de la branche. La valeur de l'énergie cinétique dans une branche va donc osciller. Comme la phase oscille à la pulsation  $\omega$ , la phase de la norme du carré du champ oscille à la pulsation  $2\omega$ . On obtient alors, sur toute la cuve, une énergie cinétique qui évolue en fonction de l'enveloppe de chaque branche et des phases relatives

---

2. Cette courbe représente un champ de gradient de densité, permet seulement de comprendre l'origine des oscillations. Pour nos calculs, nous utiliserons bien les données obtenus avec la méthode PIV, pour avoir directement accès aux vitesses.

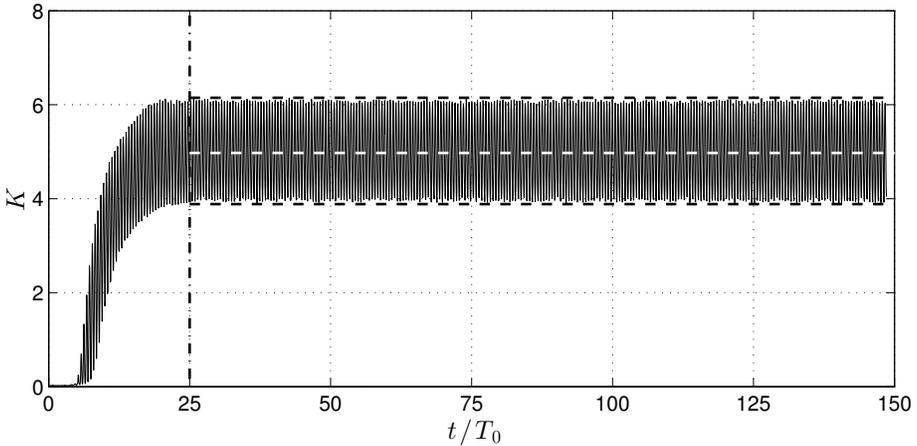


FIGURE III.12 – Exemple de l'évolution temporelle de l'énergie cinétique adimensionnée dans la cuve, pour une expérience menant à un attracteur (1,1). La ligne blanche tireté représente la valeur moyenne de l'énergie cinétique dans le régime stationnaire. Les deux lignes noires tiretés représentent les valeurs minimales et maximales  $K_{min}$  et  $K_{max}$  de l'énergie cinétique dans le régime stationnaire.

des ondes dans les branches. À cause de la dissipation visqueuse, l'énergie de chaque branche est différente. Cet effet d'oscillation dépend de l'épaisseur des branches, du nombre de longueurs d'ondes dans une branche, de la géométrie de l'attracteur... On s'attend donc à des valeurs de  $K_{min}$  et  $K_{max}$  différentes en fonction des paramètres de l'expérience.

Pour se convaincre de cela, nous avons effectué une série de 50 expériences pour différentes valeurs de  $d$  et  $\tau$ , tout en restant dans la zone de l'attracteur (1,1). Nous avons regardé l'évolution sur cette zone des deux quantités :  $\langle K \rangle$ , la valeur moyenne de l'énergie cinétique contenue dans l'attracteur, et  $R = K_{min}/K_{max}$ . L'évolution interpolée de ces grandeurs sont tracées par dessus la zone (1,1) du diagramme ( $d, \tau$ ), Fig. III.14.

$\langle K \rangle$  peut être vu comme la susceptibilité du système face au forçage. Pour certaines valeurs des paramètres, situées plutôt au milieu de la zone, le système emmagasine plus d'énergie que pour d'autres. On a alors un phénomène analogue à celui de la résonance d'un oscillateur forcé. Cependant la situation est différente puisqu'ici il n'y a pas de condition de résonance : toutes les fréquences conduisent à un attracteur. Les formes d'attracteurs ayant le maximum d'énergie cinétique sont situées au centre, donc de forme proche d'un carré. On comprend que pour les attracteurs "allongés" comme

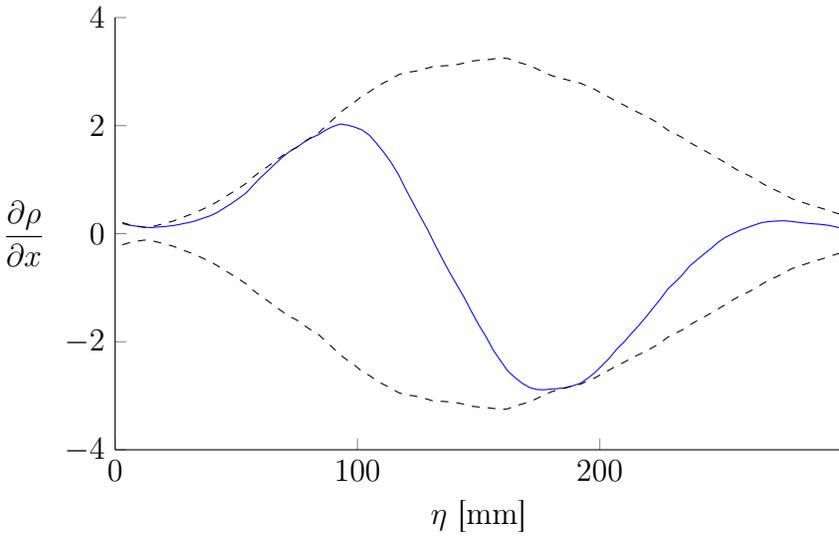


FIGURE III.13 – Gradient de densité suivant  $x$  d'une coupe perpendiculaire branche 4 de l'attracteur de la figure III.10. L'enveloppe du signal est représenté en traitillés, et le signal instantané est représenté en traits pleins bleu. L'abscisse  $\eta$  est la coordonnée qui paramètre une ligne perpendiculaire à la branche, l'origine ayant été ici prise au début de la branche.

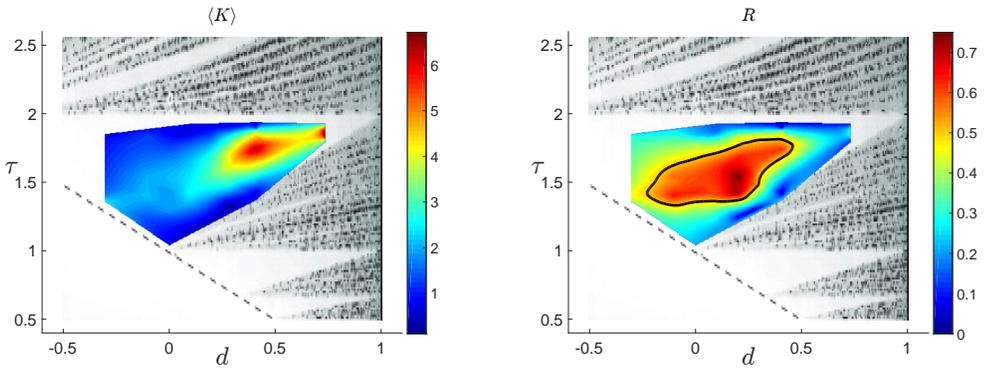


FIGURE III.14 – Structure de  $\langle K \rangle$  (à gauche) et  $R$  (à droite) dans l'espace  $(d, \tau)$  pour une partie de la zone de l'attracteur (1,1). Une partie du diagramme  $(d, \tau)$  est représentée en arrière-plan. La ligne noire en trait plein sur la figure de droite représente le contour à la valeur  $R = 0.5$ .

Fig. III.11(f), les interactions entre branches opposées peuvent conduire à

une diminution forte des vitesses et donc de l'énergie de l'attracteur.

Les valeurs de  $R$  nous renseignent sur l'amplitude de ces oscillations. Une forte valeur de  $R$  signifie que les oscillations à  $2\omega$  de l'énergie cinétique sont faibles. On voit ici encore l'effet de la géométrie de l'attracteur, qui fait que les oscillations dues à la phase sont faibles quand l'attracteur est carré, et fortes quand l'attracteur est allongé.

### 3. Autres régions

#### 3.a Attracteur (2,1)

De même que pour les figures III.7 et III.8, on peut tenter d'explorer expérimentalement d'autres régions du diagramme  $(d, \tau)$ . Notons encore qu'expérimentalement, on a accès à  $\alpha$  et  $\omega$  et pas directement à  $d$  et  $\tau$ . Certaines zones qui semblent suffisamment grandes pour être atteintes expérimentalement (notamment pour les grandes valeurs de  $\tau$ ) sont en réalité trop petites compte tenu de nos incertitudes expérimentales.

Nous avons cependant réussi à obtenir Fig. III.15 un attracteur (2,1) dans deux configurations différentes.

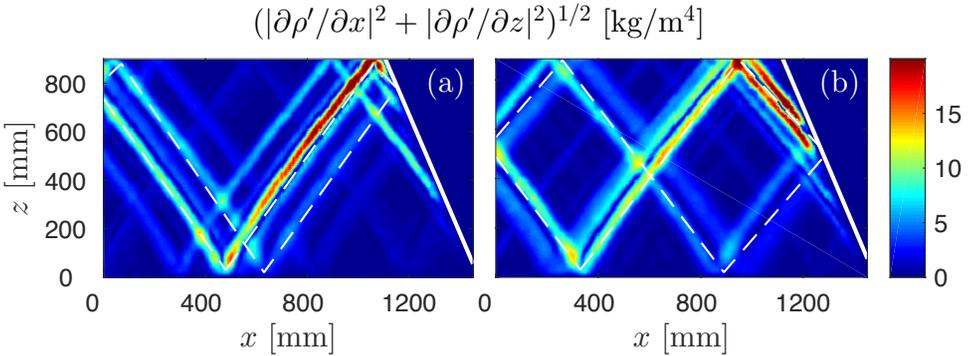


FIGURE III.15 – Norme du gradient de densité, filtré à  $\omega$ , pour  $d = 0.5$ . Sur la figure de gauche (resp. droite)  $\tau = 0.86$  (resp.  $\tau = 0.93$ ). Les prédictions par tracé de rayons sont représentées en traitillés blancs. Ces deux expériences sont représentées par des cercles noirs sur le diagramme  $(d, \tau)$ .

On reconnaît la structure de l'attracteur (2,1) comme prédite par les tracés de rayons Fig. III.15. De même que précédemment, on observe une décroissance de l'amplitude du signal le long de l'attracteur à partir de la réflexion focalisante sur la pente. Du point de vue de la focalisation et de

l'étude de la cascade énergétique vers les petites échelles, cet attracteur est différent du premier dans le sens où le facteur de focalisation étant plus fort, une plus grande amplitude est obtenue juste après la réflexion sur la paroi inclinée. Certains termes non linéaires, négligeables dans le cas d'une focalisation plus faible, sont ici non négligeables et peuvent mener à un régime transitoire et donc à une cascade d'énergie différente.

### 3.b Réflexion sous critique

Expérimentalement, Il est facile de se placer dans le cas de réflexions sous-critiques, correspondant au coin en bas à gauche du diagramme. Dans ce cas, on ne s'attend pas à avoir d'attracteur, mais on s'attend à concentrer l'énergie sur le coin en bas à droite de la cuve. Il est alors intéressant de vérifier si, conformément aux tracés de rayons Fig. III.8(b), les ondes sont bien piégées par la pente. Pour cela, on sépare le signal obtenu en deux parties, suivant si les ondes se propagent vers la gauche ou vers la droite de la cuve. On utilise la transformée de Hilbert en espace, en filtrant suivant les cas  $k_x > 0$  ou  $k_x < 0$ . On montre Fig. III.16 deux images de ce traitement appliqué à  $\partial\rho'/\partial x$ .

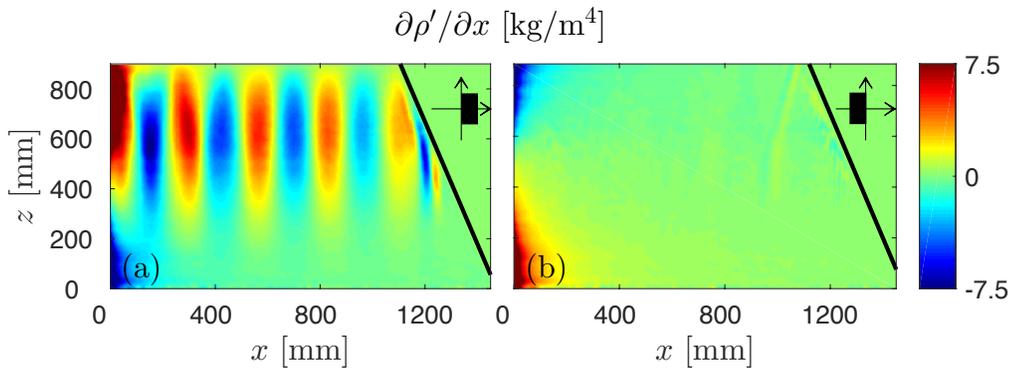


FIGURE III.16 – Gradient de densité horizontal, pour  $d = 0.5$ , et  $\tau = 0.43$ , position repérée par un cercle noir sur le diagramme  $(d, \tau)$ . L'attracteur obtenu est un point situé dans le coin ( $x = L, H = 0$ ). La composante horizontale de champ à été filtrée, selon les  $x$  croissants (a) ou les  $x$  décroissants (b). Les rectangles noirs en haut de chaque figure indique quelle partie de l'espace des vecteurs d'ondes  $k$  est conservée.

On observe alors bien une propagation des ondes suivant seulement une seule direction. Sur la figure III.16(a), on voit la structure de mode, du au forçage, qui se propage suivant les  $x$  positifs. La figure III.16(b) montre bien qu'aucune onde ne se propage suivant les  $k_x < 0$ . L'énergie est alors vraisemblablement concentrée dans le coin de la cuve sous la pente. Cependant, on ne voit aucun mouvement Fig. III.16 qui indique cela. Il s'agit ici d'une limitation de la méthode de Schlieren. Les ondes se concentrant sur une très faible portion de l'espace, l'amplitude du mouvement est tel que l'on crée des retournements, et mélange le fluide. Ce mélange s'accompagne d'un trouble qui dévie fortement et dans des directions très diverses, les rayons lumineux provenant de l'écran Schlieren. Cette méthode de visualisation ne peut plus alors être utilisée ici. Si l'on souhaite visualiser les retournements et les forts mouvements qui ont lieu dans le coin de la cuve, il faut utiliser un traitement PIV, en faisant néanmoins attention à ce que les mouvements restent bien bidimensionnels et que les particules ne quittent pas la nappe laser entre deux acquisitions d'images.

Dans toutes les expériences que nous avons réalisées, les prédictions de tracés de rayons ont été vérifiées. On pourra donc s'appuyer sur ces algorithmes de calcul de trajectoires pour tester par ordinateur des géométries d'intérêt avant de les réaliser expérimentalement.

## Conclusion

Ce chapitre a présenté les attracteurs d'ondes internes, de manière théorique et expérimentale, dans la géométrie trapézoïdale bidimensionnelle.

La partie A introduit les attracteurs d'ondes internes, en utilisant les outils habituellement utilisés pour traiter les attracteurs dans d'autres domaines de la physique, notamment les exposants de Lyapunov.

La partie B analyse théoriquement et à l'aide de tracé de rayons une géométrie particulière, celle d'un trapézoïde. Le diagramme III.4 regroupe les valeurs des exposants de Lyapunov en fonction des paramètres de cette géométrie, permettant de décrire les différents types d'attracteurs que l'on peut rencontrer dans cette géométrie.

La partie C présente les premières expériences que j'ai effectuées, de manière à étudier ce diagramme expérimentalement. Notamment, l'aspect énergétique des attracteurs (1,1) est explorée. On met ainsi en évidence que l'énergie transférée à l'attracteur dépend fortement de la position de l'attracteur dans le diagramme III.4.

# Chapitre IV

## Attracteurs 3D : Approche numérique

---

<b>A</b>	<b>Propagation et réflexion en 3D . . . . .</b>	<b>108</b>
1.	Propagation en 3D . . . . .	108
2.	Réflexion sur un plan incliné . . . . .	111
2.a	Conditions de réflexion . . . . .	111
2.b	Loi de réflexion . . . . .	113
2.c	Réflexion dans le cas général . . . . .	114
3.	Étude de la loi de réflexion . . . . .	114
3.a	Cas de réflexions sur-critiques : $s < 1$ . . . . .	116
3.b	Cas de réflexions critiques : $s = 1$ . . . . .	117
3.c	Cas de réflexions sous-critiques : $s > 1$ . . . . .	118
3.d	Focalisation ou piégeage? . . . . .	120
<b>B</b>	<b>Attracteurs 2D dans des géométries 3D . . . . .</b>	<b>121</b>
1.	Choix de la géométrie . . . . .	121
2.	Attracteurs (1,1) . . . . .	123
2.a	Temps de piégeage . . . . .	125
2.b	Temps de convergence . . . . .	127
2.c	Position du plan de focalisation . . . . .	129
3.	Diagramme des phases . . . . .	131
3.a	Attracteur (1,3) . . . . .	134
4.	Cas de non piégeage . . . . .	137
4.a	Attracteur $(n, 2)$ . . . . .	137
4.b	Les <i>whispering modes</i> . . . . .	139
<b>C</b>	<b>Une géométrie totalement tridimensionnelle . . . . .</b>	<b>143</b>

1.	Choix de la géométrie . . . . .	144
2.	Condition de piégeage . . . . .	145
3.	Attracteurs 3D . . . . .	146
3.a	Un quasi-attracteur 2D . . . . .	146
3.b	Plans de focalisation . . . . .	147
3.c	D'autres formes d'attracteurs 3D . . . . .	148

---

## Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons restreint notre étude des attracteurs d'ondes internes aux géométries bidimensionnelles. Bien sûr, la topographie des fonds sous-marins ne peut généralement pas être considérée comme 2D. Pour pouvoir davantage se rapprocher de cas océanographiques, nous allons dans ce chapitre prolonger l'étude des tracés de rayons à des géométries tridimensionnelles.

La propagation des ondes internes en trois dimensions a été étudiée pour la première fois d'un point de vue théorique par Phillips en 1963 [75] puis par Eriksen quelques années plus tard [25]. Dans la littérature, peu d'études ont été réalisées sur des tracés de rayons d'ondes internes en trois dimensions [71, 80]. Parmi ces études, les géométries de sphères et de coquilles sphériques ont été les plus explorées car elles revêtent un intérêt particulier en géophysique et surtout en astrophysique. En effet, pour modéliser l'intérieur des planètes gazeuses, on considère une enveloppe gazeuse stratifiée (au moins partiellement) entourant un cœur solide ou liquide [21]. Des ondes internes peuvent alors se propager dans cette coquille stratifiée et influencer de nombreux aspects de la dynamique de la planète [3]. Des études sur des ondes inertielles ont aussi été réalisées, dans des géométries sphériques [80, 81], mais aussi dans des bassins rectangulaires [62] ou paraboliques [22]. Les algorithmes de tracé de rayons en 3D dans ces géométries particulières ont montré que l'on retrouvait les mêmes attracteurs d'ondes que ceux obtenus en 2D. Contre toute attente, ces attracteurs restent bidimensionnels, c'est à dire que le cycle limite formant l'attracteur est contenu dans un plan.

Plusieurs questions se posent d'ores et déjà :

- Comment les ondes internes se propagent-elles et se réfléchissent-elles en 3D ? Étant donné la relation de dispersion, la propagation des ondes internes en 2D peut être décrite à l'aide de la croix de St Andrews, et trois types de réflexions existent en fonction de l'angle que fait la pente avec l'horizontale. En trois dimensions, il nous faut trouver les nouvelles lois de propagations et de réflexions.
- Comment les attracteurs bidimensionnels sont-ils créés dans des géométries 3D ? Dans quels cas ces attracteurs existent-ils ?
- Existe-il des attracteurs réellement tridimensionnels (c'est à dire des attracteurs dont le cycle limite ne peut être contenu dans un plan) ?

Nous allons répondre à ces questions, en cherchant d'abord les conditions de propagation et réflexion, puis en se plaçant dans une géométrie 3D très proche de celle du chapitre précédent, afin d'observer des attracteurs 2D. Puis

dans la dernière partie, nous étudierons une géométrie un peu plus complexe, permettant d'appréhender les attracteurs 3D.

La première partie de ce chapitre correspond à un travail déjà connu [75, 25, 62] mais nous essayerons d'apporter un éclairage nouveau sur ces résultats.

La seconde partie de cette thèse présente des travaux de tracés de rayons semblables à certaines études dans la bibliographie [62, 80, 81], mais des géométries en rotation.

La troisième partie étudie les attracteurs dans une géométrie purement tridimensionnelle, qui à notre connaissance n'est pas abordée dans la littérature.

## A Propagation et réflexion en 3D

### 1. Propagation en 3D

Comme dans les chapitres précédents, nous nous placerons dans le cas d'un fluide non visqueux et linéairement stratifié en densité suivant l'axe  $z$ , confondu avec l'axe de la pesanteur. Les équations de Navier-Stokes et de continuité s'écrivent alors :

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (\text{IV.1})$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (\text{IV.2})$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\rho - \bar{\rho}(z)}{\rho_0} g \quad (\text{IV.3})$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (\text{IV.4})$$

La seule différence avec les chapitres précédents se situe dans le fait que cette fois-ci, les trois dimensions entrent en jeu, la fonction courant ne nous permet alors pas de simplifier le système d'équations. Nous allons donc établir directement une équation sur la vitesse de l'onde. En dérivant l'équation (IV.3) par rapport au temps  $t$ , on peut faire apparaître  $N^2 = -\frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial z}$ . En

effet

$$\frac{\partial^2 v_z}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 p}{\partial t \partial z} - \frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (\text{IV.5})$$

$$= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 p}{\partial t \partial z} - \frac{g}{\rho_0} \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial \rho}{\partial z} \quad (\text{IV.6})$$

$$= -N^2 v_z - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 p}{\partial t \partial z} \quad (\text{IV.7})$$

Dérivons alors l'équation (IV.7) deux fois par rapport à  $x$

$$\frac{\partial^4 v_z}{\partial t^2 \partial x^2} + N^2 \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial t \partial z} \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \quad (\text{IV.8})$$

De même pour  $y$

$$\frac{\partial^4 v_z}{\partial t^2 \partial y^2} + N^2 \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial t \partial z} \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} \right) \quad (\text{IV.9})$$

Sommons les deux équations précédentes (IV.8) et (IV.9) et remplaçons  $\frac{-1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x}$  par  $\frac{\partial v_x}{\partial t}$  et  $\frac{-1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y}$  par  $\frac{\partial v_y}{\partial t}$  en vertu des équations (IV.1) et (IV.2). On obtient alors :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} \right) + N^2 \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} \right) = \frac{\partial^2}{\partial t \partial z} \left( \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial v_y}{\partial t} \right) \quad (\text{IV.10})$$

Dans le second membre de l'équation, on peut de nouveau inverser les dérivées suivant  $t$  et  $x$ . Utilisons cette fois l'équation d'incompressibilité pour remplacer  $\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}$  par  $-\frac{\partial v_z}{\partial z}$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} \right) + N^2 \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} \right) = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \quad (\text{IV.11})$$

On obtient finalement l'équation suivante pour  $v_z$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta v_z + N^2 \Delta_{\perp} v_z = 0 \quad (\text{IV.12})$$

où  $\Delta_{\perp} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ .

Afin de trouver une solution à cette équation, nous allons chercher une solution en ondes planes pour la vitesse verticale, de la forme  $v_z = v_{z0} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})}$ ,

avec  $\vec{k}$  le vecteur d'onde et  $\omega$  la pulsation de l'onde. Substituée dans l'équation (IV.12), on obtient

$$(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \omega^2 - N^2 (k_x^2 + k_y^2) = 0 \quad (\text{IV.13})$$

On retrouve alors une relation de dispersion similaire au cas bidimensionnel :

$$\frac{\omega^2}{N^2} = \frac{k_x^2 + k_y^2}{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} \quad (\text{IV.14})$$

$$\Leftrightarrow \frac{\omega}{N} = \pm \sin \theta \quad (\text{IV.15})$$

où  $\theta$  est toujours défini comme l'angle que fait le rayon d'onde avec l'horizontale ou le vecteur d'onde avec la verticale. Les ondes internes d'une fréquence  $\omega$  donnée restent donc astreintes à se déplacer avec un angle  $\theta$  fixé. En trois dimensions, cette condition donne un cône de possibilités. En effet, on peut traduire la condition précédente mathématiquement

$$v_z = \pm v_h \tan \theta \quad (\text{IV.16})$$

avec  $v_h$  la vitesse dans le plan horizontal  $(x,y)$ , de norme  $\sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ . En passant l'équation précédente au carré, on obtient

$$\frac{1}{\tan^2 \theta} v_z^2 = v_x^2 + v_y^2 \quad (\text{IV.17})$$

l'équation d'un cône d'ouverture  $\pi/2 - \theta$ . On définit dans la Fig. IV.1 l'angle  $\phi$  permettant de décrire la position du rayon sur le cône. Cet angle sera appelé dans la suite angle horizontal de propagation, par opposition avec l'angle  $\theta$  qui permet de positionner verticalement le rayon dans l'espace.

Pour l'instant, la référence de l'angle  $\phi$  est prise par rapport à l'axe  $y$ , de manière arbitraire, mais nous verrons l'utilité de cette convention par la suite.

La propagation d'un rayon d'onde interne à la fréquence  $\omega$  peut alors être décrit par sa position  $(x,y,z)$  et les deux angles  $(\theta, \phi)$ . Notons que, généralement, pour décrire la cinématique d'un objet, on utilise les trois composantes de position et de vitesse. Avec le jeu de paramètres que nous avons choisi, la norme du vecteur vitesse n'est pas connue. Cependant, comme en deux dimensions, la norme de la vitesse va être modifiée au cours des rebonds sur la paroi. De plus, nous ne nous intéressons ici qu'à la direction de propagation de l'onde dans le canal.

Dans toute la suite du chapitre, nous allons considérer que l'onde se propage à  $\theta = 45^\circ$  par rapport à la verticale. Cette considération permet

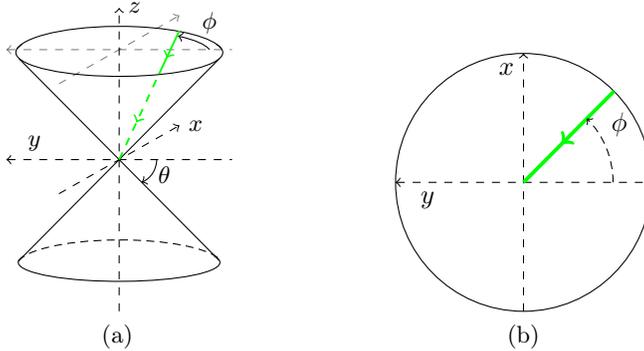


FIGURE IV.1 – Cône de propagation représentant l'espace des possibilités de propagation d'une onde interne avec un angle  $\theta$ . Un rayon d'onde interne d'angle horizontal  $\phi$  est représenté en vert. Vue en perspective (à gauche) et vue de dessus (à droite).

de simplifier de nombreuses équations et se fait sans perte de généralité car, quelle que soit l'inclinaison  $\theta$  des ondes, on peut étirer ou comprimer l'axe des  $z$  d'un facteur  $\tan \theta$  pour se ramener au cas  $\theta = 45^\circ$ . Dans ce cas là, dans le système de coordonnées choisi à la Fig. IV.1, les composantes de la vitesse de groupe (d'un rayon d'ondes internes) se propageant avec un angle  $\phi$  s'écrivent  $(v_x, v_y, v_z) = (v_z \sin \phi, -v_z \cos \phi, v_z)$ , ce qui donne bien  $v_z^2 = v_x^2 + v_y^2$ .

## 2. Réflexion sur un plan incliné

Maintenant que nous avons exhibé les nouveautés de la propagation des ondes internes en trois dimensions, nous allons chercher à obtenir la loi de réflexion de ces ondes sur une paroi inclinée. On comprend que la réflexion va être également plus complexe qu'en deux dimensions, où l'onde ne pouvait emprunter que deux chemins distincts. Ici, nous devons déterminer la position de l'onde sur le cône de propagation, c'est-à-dire l'angle  $\phi$  après le rebond.

### 2.a Conditions de réflexion

De même que dans le chapitre précédent, nous allons considérer une réflexion sur une paroi imperméable, c'est-à-dire que la vitesse normale à la paroi doit être nulle. Afin d'établir la loi de réflexion, nous allons considérer le rebond d'une onde interne sur un plan, incliné d'un angle  $\alpha$  par rapport

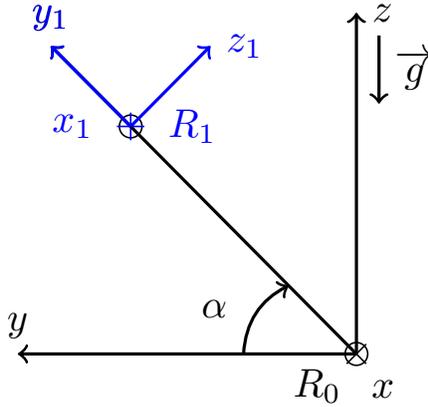


FIGURE IV.2 – Repères  $R_0$  et  $R_1$  utilisés pour décrire la réflexion sur une paroi inclinée d'un angle  $\alpha$ .

à l'horizontale, la stratification étant bien sûr toujours suivant la verticale (voir Fig. IV.2). Nous noterons les grandeurs exprimées dans le repère  $R_1$  avec un indice  $_1$  et pour alléger les notations, les grandeurs sans indices sont exprimées dans le repère  $R_0$ . Nous nous plaçons dans le repère  $R_1$ , lié au plan incliné, afin d'exprimer facilement la condition d'imperméabilité :

$$v_{z_1}(x, y, z = y \tan \alpha) = 0 \tag{IV.18}$$

où  $\vec{v}_1 = (v_{x_1} \equiv v_x, v_{y_1}, v_{z_1})$  sont les composantes du champ de vitesse dans le repère  $R_1$ . L'écriture de la vitesse particulière incidente et réfléchie s'écrit

$$A_i \exp \left[ i \left( \omega_i t - \vec{k}_i \cdot \vec{r}' \right) \right] + A_r \exp \left[ i \left( \omega_r t - \vec{k}_r \cdot \vec{r}' \right) \right] \tag{IV.19}$$

Au niveau de la paroi, cette équation donne entre autres le fait que la pulsation de l'onde  $\omega$  reste constante au cours de la propagation. L'angle  $\theta$  n'est donc pas modifié au cours du rebond. De plus, la condition d'imperméabilité sur la paroi et l'absence de viscosité dans notre modèle nous permettent d'affirmer que la composante de la vitesse de groupe orthogonale à la paroi doit s'annuler au niveau de la paroi. Par invariance selon la direction  $x$ , la composante de la vitesse de groupe suivant cette direction reste constante lors du choc. On peut alors résumer les conditions de réflexion suivant trois conditions :

- (a) La composante le long de la pente, transverse à la pente, est inchangée :  $v_{x,r} = v_{x,i}$ .
- (b) La composante normale à la pente change de signe :  $v_{z_1,r} = -v_{z_1,i}$ .
- (c) L'onde réfléchie se situe sur le même cône que l'onde incidente :  $\theta_i = \theta_r$ .

## 2.b Loi de réflexion

Pour établir une loi de réflexion, nous allons tout d'abord rester dans le cas particulier d'un plan incliné d'un angle  $\alpha$  par rapport à l'axe  $y$  du repère  $R_0$  introduit Fig. IV.2. Étant donné les composantes  $(v_{x,i}, v_{y,i}, v_{z,i})$  de la vitesse avant le choc dans le repère  $R_0$ , on cherche à obtenir la vitesse  $\vec{v}_r = (v_{x,r}, v_{y,r}, v_{z,r})$  après réflexion, dans le repère  $R_0$ . Les deux conditions (a) et (b) de réflexion obtenues précédemment sont valables dans le repère  $R_1$ , tourné d'un angle  $\alpha$  par rapport à l'axe  $\vec{x}$  :

$$v_{z_1,r} = -v_{z_1,i} \text{ et } v_{x_1,r} = v_{x_1,i} \quad (\text{IV.20})$$

La troisième condition, équivalente à dire que les ondes se propagent sur le cône d'ouverture  $\theta$ , s'exprime plus simplement dans le repère  $R_0$ . En exprimant donc les trois conditions (a), (b) et (c) dans le repère  $R_0$ , on obtient

$$v_{z,r} \cos \alpha - v_{y,r} \sin \alpha = -(v_{z,i} \cos \alpha - v_{y,i} \sin \alpha) \quad (\text{IV.21})$$

$$v_{x,r} = v_{x,i} \quad (\text{IV.22})$$

$$v_{z,r}^2 = v_{x,r}^2 + v_{y,r}^2 \quad (\text{IV.23})$$

$$v_{z,i}^2 = v_{x,i}^2 + v_{y,i}^2 \quad (\text{IV.24})$$

Les deux dernières équations représentent le fait que l'onde incidente et l'onde réfléchie se propagent sur le cône d'ouverture  $\pi/2 - \theta$ . En soustrayant cette équation à l'équation du cône pour l'onde réfléchie, on peut réécrire l'équation sous forme factorisée. De plus, en posant  $s = \tan \alpha$ , on peut encore simplifier le système d'équations ci-dessus. On obtient

$$v_{z,r} + v_{z,i} = s(v_{y,r} + v_{y,i}) \quad (\text{IV.25})$$

$$v_{x,r} = v_{x,i} \quad (\text{IV.26})$$

$$(v_{z,r} - v_{z,i})(v_{z,r} + v_{z,i}) = (v_{y,r} - v_{y,i})(v_{y,r} + v_{y,i}) \quad (\text{IV.27})$$

Dans le cas de parois non horizontales, le terme  $(v_{y,r} - v_{y,i})$  est non nul ; on peut donc remplacer  $(v_{y,r} + v_{y,i})$  par  $\frac{(v_{z,r} - v_{z,i})(v_{z,r} + v_{z,i})}{(v_{y,r} - v_{y,i})}$  dans la première

équation ci-dessus. On obtient alors un système de deux équations pour les inconnues  $v_{z,r}$  et  $v_{y,r}$  :

$$v_{z,r} + v_{z,i} = s(v_{y,r} + v_{y,i}) \quad (\text{IV.28})$$

$$v_{y,r} - v_{y,i} = s(v_{z,r} - v_{z,i}) \quad (\text{IV.29})$$

La résolution de ce système, avec l'invariance de la vitesse suivant  $x$  nous donne les équations suivantes :

$$v_{z,r} = \frac{-(1+s^2)v_{z,i} + 2sv_{y,i}}{1-s^2} \quad (\text{IV.30})$$

$$v_{y,r} = \frac{(1+s^2)v_{y,i} - 2sv_{z,i}}{1-s^2} \quad (\text{IV.31})$$

$$v_{x,r} = v_{x,i} \quad (\text{IV.32})$$

Grâce à ce système d'équations, on peut calculer la trajectoire de n'importe quel rayon d'onde interne. Dans les calculs qui seront effectués par la suite, à chaque rebond sur une paroi inclinée, on appliquera les transformations ci-dessus, suivie d'une renormalisation de la vitesse. En effet, comme en deux dimensions, la norme de la vitesse n'est pas conservée lors d'un rebond sur une paroi inclinée. Pour éviter toute divergence dans les calculs numériques, la norme de la vitesse est ramenée à 1 après chaque rebond.

## 2.c Réflexion dans le cas général

Dans le cas d'une surface de fond définie par l'équation  $z = h(x, y)$ , le gradient de la pente n'est plus forcément constant, ni aligné avec un des axes du repère initial  $R_0$ . Pour se ramener au cas précédent, il faut procéder en plusieurs étapes :

- Calculer  $\vec{\nabla}S(x, y) = -(\partial h/\partial x \vec{x} + \partial h/\partial y \vec{y})$ , qui est l'opposée de la projection sur le plan  $xy$  du gradient de la pente au point d'impact considéré. Dans le premier cas étudié,  $\vec{\nabla}S(x, y) = s \vec{y}$ .
- Effectuer une rotation du repère  $R_0$  d'axe  $z$  afin d'aligner l'axe  $y_1$  avec  $\vec{\nabla}S(x, y)$ .
- Utiliser le système d'équations (IV.31) afin de trouver la vitesse de l'onde réfléchie dans le repère tourné.
- Faire la rotation inverse pour obtenir les composantes  $(v_{x,r}, v_{y,r}, v_{z,r})$  dans le repère initial  $R_0$ .

On peut maintenant calculer la trajectoire d'une onde interne dans n'importe quelle géométrie. Mais avant cela, essayons de tirer de ces formules les principales conséquences sur la propagation des rayons.

### 3. Étude de la loi de réflexion

On se place de nouveau dans le cas de la géométrie simple d'une pente inclinée décrite précédemment. Afin de simplifier l'étude, on va établir une loi sur l'angle réfléchi  $\phi_r$  en fonction de l'angle incident  $\phi_i$ . Les angles  $\phi_i$  et  $\phi_r$  sont définis Fig. IV.3. Le rapport  $v_{x,r}/v_{z,r}$  donne directement :

$$\sin \phi_r = \frac{(1 - s^2)v_{x,i}}{-(1 + s^2)v_{z,i} + 2sv_{y,i}} \quad (\text{IV.33})$$

$$= \frac{(1 - s^2)v_{x,i}}{-(1 + s^2) - 2s \cos \phi_i} v_{z,i} \quad (\text{IV.34})$$

$$= \frac{(s^2 - 1) \sin \phi_i}{1 + s^2 + 2s \cos \phi_i} \quad (\text{IV.35})$$

On peut réécrire cette équation en terme uniquement de  $\sin \phi_i$  ce qui simplifiera son analyse :

$$\sin \phi_r = \frac{(s^2 - 1) \sin \phi_i}{1 + s^2 \pm 2s \sqrt{1 - \sin^2 \phi_i}} = f(\sin \phi_i, s) \quad (\text{IV.36})$$

Cette loi de réflexion, déjà démontrée par Phillips [75] a été explicitée par Manders & Maas [62], reste valable pour des murs horizontaux et verticaux. En effet, pour des murs horizontaux,  $s = 0$ , seule la composante suivant  $z$  de la vitesse est inversée, les deux autres composantes étant inchangées. D'après notre définition de  $\phi_r$ , on en déduit  $\phi_r = \phi_i - \pi$ , ce qui est en accord avec la formule (IV.36). Pour une réflexion sur un mur vertical,  $s = \pm\infty$ , on a alors  $(v_{x,r}, v_{y,r}, v_{z,r}) = (v_{x,i}, \mp v_{y,i}, \pm v_{z,i})$  donc  $\phi_r = -\phi_i$  ou  $\phi_r = \pi - \phi_i$ .

Afin de mieux comprendre la variation d'angle lors du rebond, au lieu de regarder l'angle réfléchi, il est plus judicieux de regarder le nouvel angle incident  $\phi'_i$  que fera le rayon lorsqu'il reviendra rebondir sur la paroi inclinée. On peut imaginer dans le cas du rayon vert de la Fig. IV.3, que le rayon réfléchi en rouge, va rebondir sur des murs verticaux et horizontaux pour finalement se réfléchir de nouveau sur la paroi avec un angle  $\phi'_i = \pi + \phi_r$  (rayon rouge en pointillé de la Fig. IV.3). Une trajectoire permettant ce type de réflexion est représentée Fig. IV.4(a). Bien sûr, ce n'est pas le cas général puisque le rayon peut par exemple ne taper que sur un mur vertical puis horizontal et revenir avec un angle  $\phi'_i = -\phi_r$  mais nous étudions pour l'instant un cas simple qui va permettre de tirer des propriétés globales sur cette loi de réflexion. Attention, dans la Fig. IV.4, les valeurs des angles  $\phi$  du rayon sont indiquées après chaque rebond, mais comme on regarde une

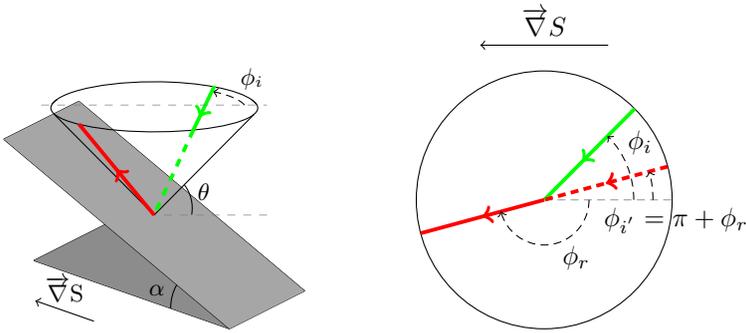


FIGURE IV.3 – Réflexion d’une onde interne sur une paroi inclinée d’un angle  $\alpha$  par rapport à l’horizontale. On définit  $\phi'_i$  comme l’angle que fait le rayon réfléchi comme si il était vu comme un nouveau rayon incident. Dans cet exemple, le nouveau rayon incident, tracé en traitillés, est tel que  $\phi'_i = \pi + \phi_r$ . Vue en perspective (à gauche) et de dessus (à droite).

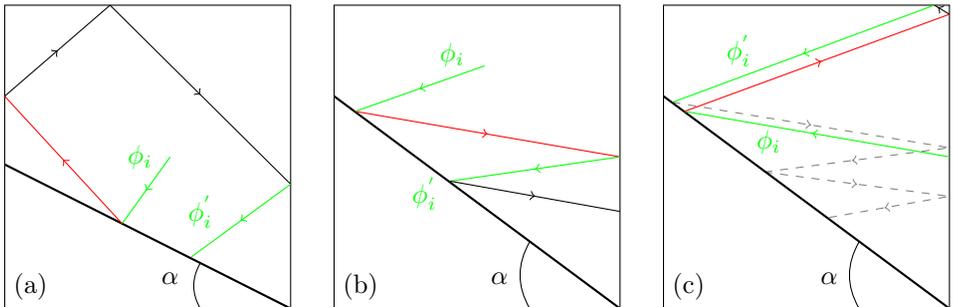


FIGURE IV.4 – Possibilités de rebonds d’un rayon dans le cas sur-critique (figure de gauche) et sous-critique (figure du milieu et de droite). À côté de chaque trajet, l’angle de propagation  $\phi$  est indiqué. Sur la figure de droite, le trajet du rayon est représenté en traitillés gris après le second rebond. Pour chaque figure, le rayon incident est représenté en vert, et le rayon réfléchi en rouge.

projection de la trajectoire sur un plan  $yz$ , l’angle  $\phi$  n’est pas directement visible.

Le gradient de la pente  $s$  étant donné, on peut alors étudier l’application  $f$  qui donne  $\phi'_i$  en fonction de  $\phi_i$ . Nous allons étudier séparément les cas  $s < 1$ ,  $s > 1$  et  $s = 1$ .

### 3.a Cas de réflexions sur-critiques : $s < 1$

Pour  $s < 1$ , on ne considère que le cône supérieur Fig. IV.1, le cône inférieur étant entièrement situé sous la pente. On trace donc Fig. IV.5, l'angle  $\phi'_i$  pour toutes les valeurs possibles de  $\phi_i$ , et ce pour plusieurs valeurs de  $s$  inférieures à 1. On trace également en noir la bissectrice  $\phi'_i = \phi_i$ .

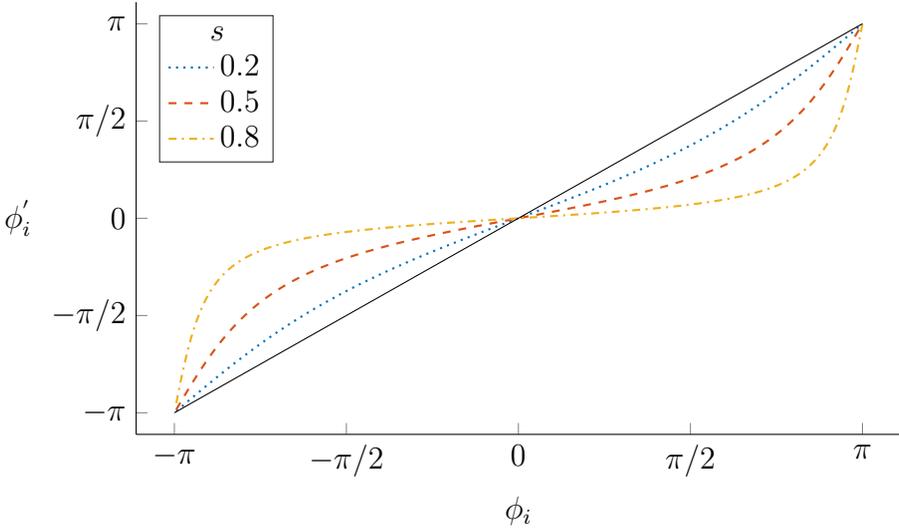


FIGURE IV.5 – Fonction  $\phi'_i = f(\phi_i, s)$  pour  $\phi_i \in [-\pi, \pi]$ , pour plusieurs valeurs de  $s$ . La bissectrice  $\phi'_i = \phi_i$  est représentée en noir.

La première chose remarquable Fig. IV.5 est que quelle que soit la valeur de  $s$ , la courbe intersecte la droite unité en 0. Ce qui signifie que  $\phi = 0^\circ$  est un point fixe de l'application  $f$  : l'angle  $\phi = 0^\circ$  d'un rayon d'onde interne reste inchangé après réflexion sur une paroi  $\forall s$ . Comme  $f'(0) < 1$  quelle que soit  $s$ , le point fixe  $\phi = 0$  est toujours stable. À l'inverse, les points fixes en  $\pm\pi$  sont instables car  $f'(\pm\pi) > 1$ . La réflexion sur une paroi inclinée d'un angle  $\alpha$  par rapport à  $y$  tend donc à aligner  $\phi$  avec l'axe  $y$  qui correspond ici à la direction du gradient de la pente  $\vec{\nabla}S$ . Cet effet, que nous appellerons par la suite piégeage, permet d'expliquer de nombreux résultats présents dans ce chapitre et le suivant. On voit ici qu'il est judicieux de choisir la référence de mesure des angles horizontaux telle que  $\phi = 0^\circ$  correspond à la direction de  $\vec{\nabla}S$ , lorsque celle-ci est constante. On remarque aussi Fig. IV.5 que plus  $s$  est proche de 1, plus l'effet de piégeage est rapide.

### 3.b Cas de réflexions critiques : $s = 1$

Dans ce cas théorique, l'angle de la pente coïncide avec l'angle d'ouverture du cône. Les formules donnant  $v_{y,r}$  et  $v_{z,r}$  divergent, la formule donnant l'application  $f$  reste cependant valable et donne  $\phi'_i = 0$  quelle que soit  $\phi_i$ . Le piégeage est donc total dès la première réflexion.

### 3.c Cas de réflexions sous-critiques : $s > 1$

À la différence du cas 2D, il n'y a *a priori* pas de modification brusque des possibilités de direction de propagation pour l'onde réfléchi lors du passage de  $s < 1$  à  $s > 1$ . En effet, sur la Fig. IV.6 on observe que le cône supérieur est partiellement inaccessible. Le schéma de droite montre une vue de dessus du cône et les zones accessibles pour les demi-cônes supérieur et inférieur. En calculant l'intersection du plan avec le cône, on voit que ces zones sont définies à l'aide de l'angle  $\phi_\ell = \arctan \sqrt{s^2 - 1}$ . Il faut donc restreindre  $\phi_i$  à l'intervalle  $[-\pi + \phi_\ell, \pi - \phi_\ell]$  pour le cône supérieur et  $[-\phi_\ell, \phi_\ell]$  pour le cône inférieur. La figure IV.7 présente à gauche les réflexions dans le cas du cône supérieur ( $v_{z,i} < 0$ ) et à droite les réflexions dans le cas du cône inférieur ( $v_{z,i} > 0$ ). Étudions les deux cas séparément.

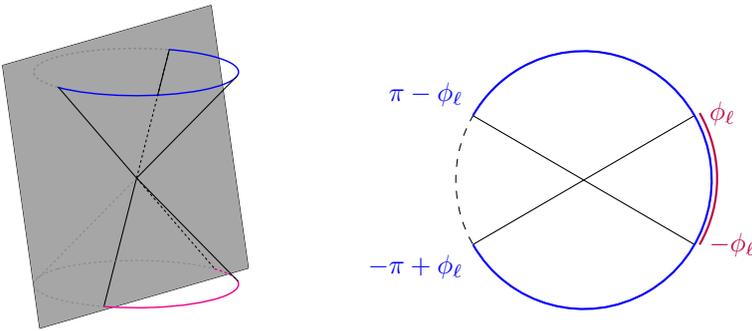


FIGURE IV.6 – Cône des possibilités de propagation dans le cas sous-critique. Le plan coupe partiellement le cône du haut et du bas (figure de gauche). Le secteur angulaire possible pour  $\phi_i$  sur le cône supérieur (resp. inférieur) est représenté en bleu (resp. mauve) sur les deux figures.

- Pour les ondes arrivant sur le cône supérieur,  $\phi_i \in [-\pi + \phi_\ell, \pi - \phi_\ell]$ . On peut alors montrer que  $v_{z,r}$  est tout le temps négatif, signe que l'onde réfléchi est sur le demi-cône inférieur. Alors que le rayon réfléchi aurait pu *a priori* se propager sur le cône supérieur avec un

autre angle, on retrouve quelque chose de similaire au cas bidimensionnel, avec un changement brusque de l'onde réfléchie du cône de propagation supérieur au cône de propagation inférieur.

Le cas de réflexions sur des parois verticales et horizontales afin que  $\phi'_i = \pi + \phi_r$  n'est donc pas possible. Il faut alors plutôt considérer le schéma Fig. IV.4(b) dans lequel l'onde ne se réfléchit que sur une paroi verticale avant de rebondir de nouveau sur la paroi inclinée. On a alors  $\phi'_i = -\phi_r$ . On trace alors Fig. IV.7 la fonction  $g = -f$ .

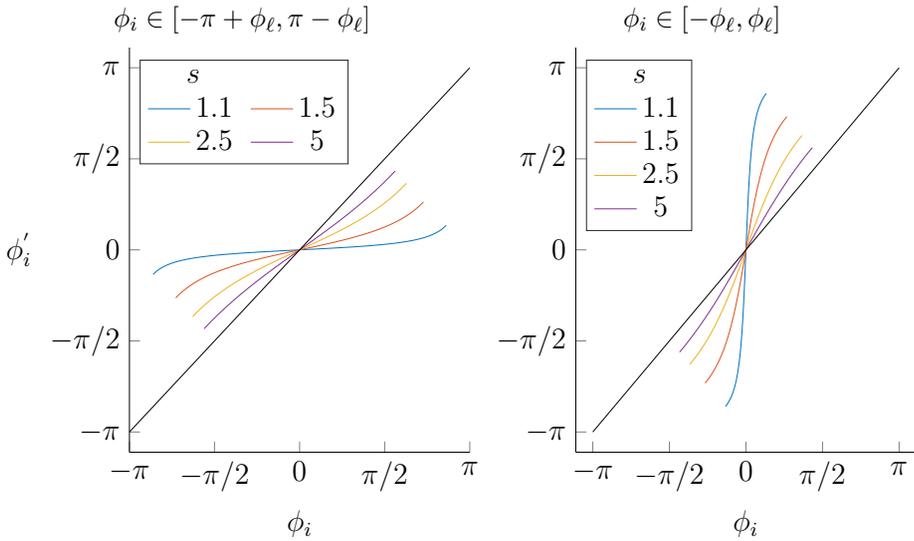


FIGURE IV.7 – Tracé de  $\phi'_i = g(\phi_i, s) = -f(\phi_i, s)$  pour plusieurs valeurs de  $s$ , dans le cas d'une onde arrivant depuis le cône supérieur (figure de gauche,  $v_{z,i} = -1$ ) et depuis le cône inférieur (figure de droite,  $v_{z,i} = 1$ ). La bissectrice  $\phi'_i = \phi_i$  est représentée en noir. Du fait du caractère sous-critique, seules certaines valeurs de  $\phi_i$  sont possibles. Elles sont indiquées en haut des figures.

On observe que, cette fois encore, la réflexion tend à faire converger l'angle de propagation vers  $\phi = 0$ , l'unique point fixe stable de l'application. Cependant dans la géométrie de canal que nous étudierons, ce cas est peu intéressant, car pour  $s > 1$  comme nous le verrons par la suite et comme on peut le deviner Fig. IV.4(b), tous les rayons convergent vers l'intersection du bas de la pente avec la verticale créant un attracteur dégénéré réduit à un point.

- Pour les ondes situées sur le cône inférieur,  $\phi_i \in [-\phi_\ell, \phi_\ell]$ . De même, on montre que  $v_{z,r} > 0$  quelle que soit  $\phi_i$ , l'onde se propage alors sur une partie du cône supérieur. Ce cas correspond en fait au cas précédent mais avec le sens des rayons inversés. On peut alors envisager une suite de réflexions tracées sur le schéma Fig. IV.4(c). On se ramène de nouveau à l'étude de  $g = -f$  mais avec  $v_{z,i} > 0$ . La fonction est tracée sur le graphe de gauche de la Fig. IV.7. La réflexion est cette fois dépiégeante dans le sens où  $|\phi'_i| > |\phi_i|$  quelle que soit  $s$ . Le point fixe 0 est instable. Cependant, on voit que avec ce type d'inclinaison, on ne peut pas avoir indéfiniment des rebonds sur la paroi tels que  $v_{z,i} > 0$  et on se ramène rapidement au cas précédent où  $v_{z,i} < 0$  (dessiné Fig. IV.4(c)). De plus, même si on imagine un canal infiniment haut, il n'y a pas d'effet d'"anti piégeage", avec une convergence vers  $\phi = \pi$ . En effet, au cours des itérations de la fonction  $g$ , on obtient une valeur de  $\phi'_i$  de plus en plus grande jusqu'à ce que  $\phi'_i > \phi_\ell$ . À ce moment là, on ne peut plus considérer de rebond avec  $v_z > 0$  et on se ramène donc au cas précédent et à la convergence vers  $\phi = 0$ .

En résumé, dans les situations que nous avons imaginées précédemment, quelle que soit la valeur de  $s$  et de  $\phi_i$ , l'onde finit toujours par être focalisée dans un plan orienté suivant  $\vec{\nabla}S$ . Ces situations ne sont pas exhaustives, mais nous ont permis de déduire cette propriété de piégeage. Nous verrons par la suite que l'effet de piégeage prend des formes plus complexe et peut dans certains cas ne pas avoir lieu.

### 3.d Focalisation ou piégeage ?

Nous avons nommé piégeage l'effet de l'alignement de l'angle  $\phi$  avec  $\vec{\nabla}S$ . Cet effet est *a priori* indépendant de l'effet de focalisation décrit dans le chapitre précédent. La focalisation a lieu lorsque la distance entre deux rayons diminue après le rebond. En 3D, on peut définir une focalisation en regardant l'écart angulaire  $\phi_2 - \phi_1$  entre deux rayons. La réflexion sur une paroi inclinée peut être piégeante ou dépiégeante comme le montre la Fig. IV.8.

La courbe en jaune représente la fonction  $f$  pour la valeur  $s = 0.8$ . Les croix représentent la valeur de l'angle  $\phi$  pour deux rayons, suivis pendant deux rebonds successifs sur la paroi inclinée. Les angles initiaux sont  $\phi_1$  et  $\phi_2$ . La représentation Fig. IV.8 montre que l'écart entre les deux rayons augmente après le premier rebond puis diminue de nouveau. En ce sens, la première réflexion est défocalisante alors que la deuxième réflexion est

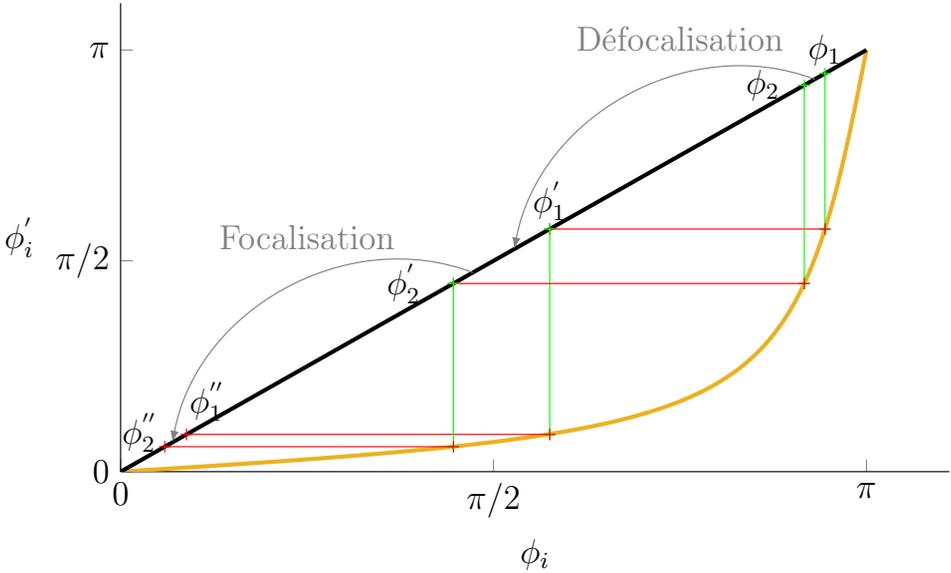


FIGURE IV.8 – Tracé de  $\phi'_i$  pour  $s = 0.8$  et pour  $\phi_i > 0$ . Deux rebonds successifs ont été représentés pour deux rayons d'angles initiaux  $\phi_1$  et  $\phi_2$ . Le code couleur est le même que précédemment, c'est à dire que les rayons incidents sont représentés en vert et les rayons réfléchis en rouge. La bissectrice  $\phi'_i = \phi_i$  est représentée en noir.

focalisante. Les deux réflexions sont piégeantes puisqu'elles font tendre les angles  $\phi_1$  et  $\phi_2$  vers 0. La défocalisation a lieu entre deux rayons  $\phi_1$  et  $\phi_2$  dès que  $f'(\phi) > 1$  sur l'intervalle  $[\phi_1, \phi_2]$  et inversement pour la focalisation, elle a lieu si  $f'(\phi) < 1$  sur cet intervalle. On voit que c'est bien le cas pour notre exemple Fig. IV.8.  $f'(\phi) > 1$  sur l'intervalle  $[\phi_1, \phi_2]$  donnant lieu à une défocalisation, puis  $f'(\phi) < 1$  sur l'intervalle  $[\phi'_1, \phi'_2]$  créant ainsi une focalisation.

Maintenant que nous avons compris l'effet de piégeage créé par la réflexion sur une pente inclinée, nous allons le mettre en évidence dans une géométrie simple. L'idée est de se placer dans le cas de la Fig. IV.4(a) afin d'observer un piégeage important.

## B Attracteurs 2D dans des géométries 3D

### 1. Choix de la géométrie

Dans toute cette partie, nous allons étudier une géométrie particulière, celle d'un canal avec pour fond une paroi inclinée comme indiqué sur la Fig. IV.9. C'est en fait la même géométrie que celle dans laquelle on s'est placée pour démontrer les lois de réflexions (IV.31). Étudier une géométrie de canal, et plus particulièrement cette géométrie simple a plusieurs intérêts :

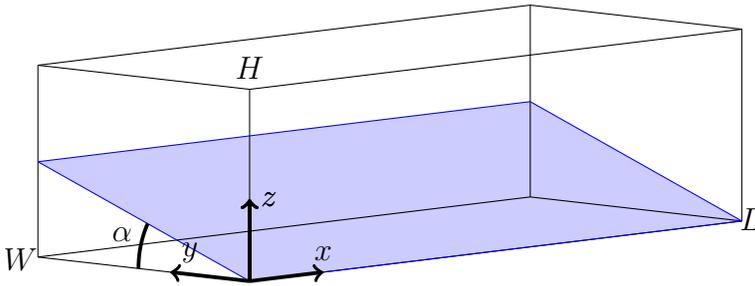


FIGURE IV.9 – Géométrie étudiée. La hauteur  $H$ , la longueur  $L$  et la largeur  $W$  du canal sont indiquées sur le schéma. Dans toutes les figures suivantes, les dimensions seront exprimées en mm afin de rester cohérent avec les conventions des autres chapitres.

- **Un intérêt géophysique**

On retrouve des topographies de type canal dans des estuaires et bras de fleuves qui sont stratifiés. Un cas particulier qui a attiré notre attention est celui de l'estuaire du canal du fleuve Saint Laurent, situé au Canada (appelé LSLE pour *Lower St. Lawrence Estuary* dans la littérature). Sa géométrie varie peu sur ses 1000 km de long, et le fond du canal est globalement lisse avec une géométrie "en U" [24]. Ce canal en particulier présente un important site de génération d'ondes internes dues à la marée [92]. Il est donc pertinent d'étudier la propagation et les réflexions des ondes internes dans ce type de géométries.

- **Un intérêt expérimental**

La topographie du fond choisie dans cette section consiste en une pente inclinée d'un angle  $\alpha$  par rapport à l'horizontale (voir Fig. IV.9), invariante suivant le long du canal. Elle est donc facile à reproduire expérimentalement. Nous explorerons dans la section suivante d'autres types de géométries.

- **Un intérêt théorique**

Dans la section précédente, nous avons vu que lorsqu'un rayon d'onde interne rebondit sur une pente inclinée si les rebonds se produisent toujours de sorte que  $\phi'_i = \phi_i$  (voir Fig. IV.4(a)), on peut obtenir une onde qui se propage avec un angle  $\phi = 0$  et donc dans un plan  $yz$  transverse au canal. On se retrouve alors dans le cas d'une propagation bidimensionnelle. Pour obtenir cet effet de piégeage, on peut penser à créer une géométrie transverse conduisant à des attracteurs. En effet, dans le cas d'attracteurs, le chemin de l'onde étant stationnaire, l'enchaînement des rebonds sur la paroi inclinée est périodique ; on peut donc comprendre l'évolution de l'angle  $\phi$  au cours de la propagation.

## 2. Attracteurs (1,1)

Commençons par l'étude de la propagation avec des paramètres tels que la géométrie transversale (*i.e.* la géométrie dans le plan  $yz$ ) permette de créer des attracteurs (1,1). Nous sommes alors bien sûr dans un cas d'une réflexion sur-critique. En effet, dans l'esprit de la section précédente, l'idée est de créer un système de rebonds dans lequel l'angle  $\phi_i$  d'incidence sur la paroi soit toujours entre 0 et  $\pi$ . Dans ce cas, on se place sur la partie droite de la courbe Fig. IV.5 et donc l'angle  $\phi$  tend vers le point fixe 0. Le cycle de l'attracteur (1,1) permet cela, car la réflexion sur la paroi se fait toujours de telle sorte que  $\phi'_i = \phi_i$ , comme on le voit dans le schéma de la Fig. IV.4(a).

Les paramètres importants pour les tracés de rayons sont les suivants :

- $(L, H, W, \alpha)$  qui contrôlent la géométrie du canal. La longueur du canal  $L$  n'a *a priori* pas d'importance. Nous prendrons  $L = 1000$  mm sauf mention contraire.
- $\theta$ , l'angle vertical de propagation des ondes. Dans cette section, on choisit  $\theta$  en accord avec  $H, W, \alpha$  tel que les valeurs de  $d$  et  $\tau$  de la géométrie transverse conduisent à un attracteur (1,1). Rappelons que dans les tracés de rayons, on se ramène toujours à un angle  $\theta = 45^\circ$  en modifiant la hauteur  $H$  d'un facteur  $\tan \theta$ .
- $(x_0, y_0, z_0, \phi_0)$ , les paramètres initiaux de lancer du rayon, et  $v_{z0}$  qui permet de choisir sur quel demi-cône est lancé le rayon.

Une première trajectoire de rayons d'ondes internes dans cette géométrie est tracée Fig. IV.10 en perspective et Fig. IV.11 de côté et de dessus. Dans ces deux représentations graphiques, la couleur du rayon change avec sa propagation pour mieux visualiser son avancement.

On voit Fig. IV.10 et Fig. IV.11(a) que le rayon, ayant initialement une

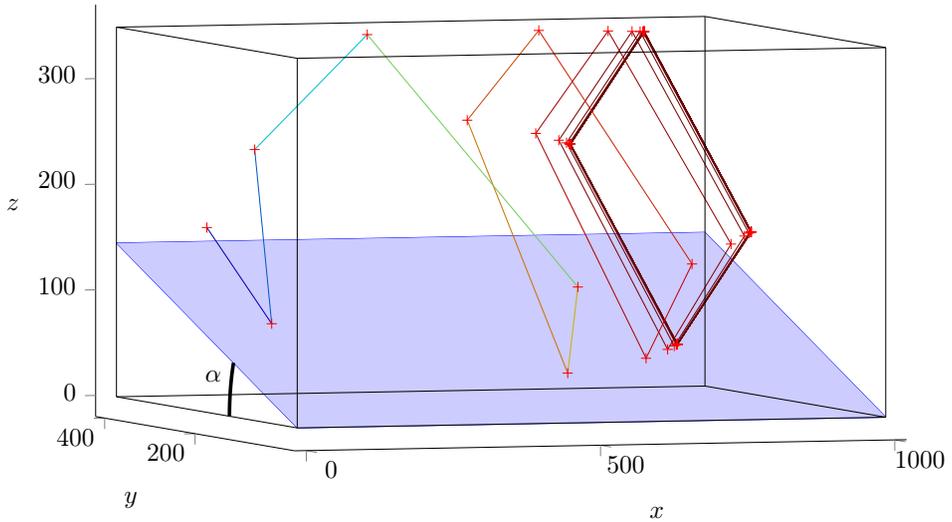


FIGURE IV.10 – Trajectoire des rayons dans la géométrie de canal étudié pour  $H = 350$ ,  $W = 400$ ,  $L = 1000$ ,  $\alpha = 20^\circ$ ,  $\theta = 35^\circ$ . Le point de départ est situé sur la paroi  $x = 0$ . Les rebonds sur les parois sont représentés par des croix rouges. La couleur du rayon change avec sa propagation pour mieux visualiser son avancement.

propagation dans la direction longitudinale du canal, finit avec une propagation totalement transverse après quelques rebonds. La Fig. IV.11(b) montre la structure créée dans le plan transverse, qui est bien celle d'un attracteur (1,1), identique à ceux obtenus avec le programme bidimensionnel. Une différence fondamentale avec la propagation 2D est que, de côté, les rayons ne se propagent pas avec les mêmes quatre angles  $\theta$ ,  $-\theta$ ,  $\pi - \theta$ ,  $\pi + \theta$ . En effet, c'est la projection  $\theta_\perp$  qui est visualisée dans la représentation de côté.  $\theta_\perp$  ne vaut  $\theta$  que lorsque  $\phi = 0$ .

**Comme attendu dans cette géométrie [62], en partant d'une propagation tridimensionnelle, on retrouve des attracteurs (1,1) bidimensionnels. Comme anticipé dans la section précédente, l'effet de piégeage est responsable de cette bidimensionalisation.** Nous avons ici choisi des valeurs de paramètres telles que le piégeage commence dès le premier rebond et telles que l'effet ne soit pas trop rapide afin de bien pouvoir le visualiser.

Plutôt que de regarder l'évolution de l'angle  $\phi$  au cours de la propaga-

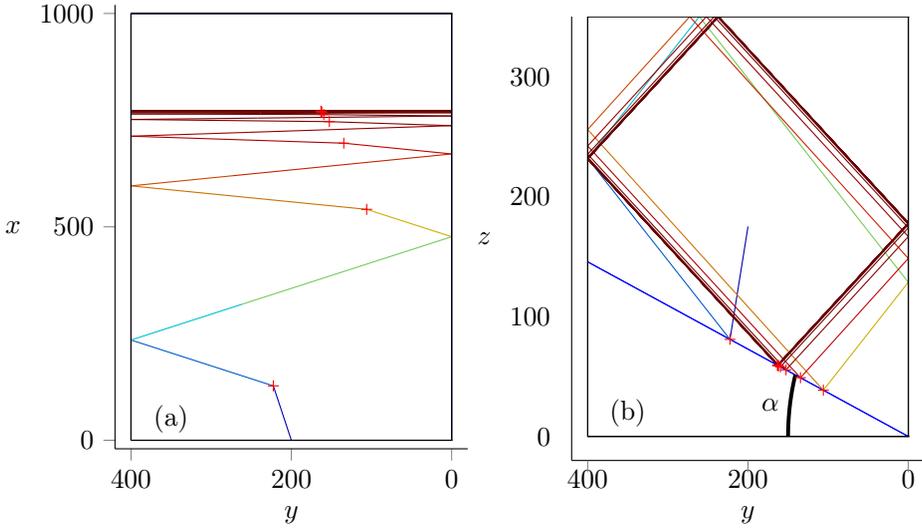


FIGURE IV.11 – Vue de dessus et de côté de la trajectoire de la Fig. IV.10. Seuls les rebonds sur la paroi inclinée ont été marqués par des croix rouges. On observe la convergence de  $\phi$  vers 0. Sur la figure de droite, on voit la forme du cycle limite qui est celle d’un attracteur (1,1). La couleur du rayon change avec sa propagation pour mieux visualiser son avancement.

tion, on peut s’intéresser à la vitesse  $v_x$  de propagation le long du canal. Théoriquement  $v_x$  reste constant alors que  $v_y$  et  $v_z$  tendent vers l’infini lors de la propagation. Dans les calculs de tracé de rayons effectués, afin de ne pas avoir des quantités qui divergent, on normalise la vitesse après chaque rebond. Ainsi lors du piégeage<sup>1</sup>,  $v_z \rightarrow \pm 1/\sqrt{2}$ ,  $v_y \rightarrow \pm 1/\sqrt{2}$  et  $v_x \rightarrow 0$ . On trace donc Fig. IV.12 la vitesse  $v_x$  en fonction du nombre de rebonds.

Chaque rebond est repéré par une croix. On observe que certains rebonds ne modifient pas  $v_x$  ; ce sont ceux sur les parois horizontales ou verticales. À l’inverse, les rebonds sur la paroi inclinée font diminuer  $v_x$ . On observe bien une alternance entre trois rebonds sur les parois verticales et horizontales, et un rebond focalisant sur la paroi inclinée, en accord avec la structure d’attracteur (1,1).

Physiquement, la vitesse  $v_x$  reste constante lors des rebonds et c’est la

---

1. On se place toujours dans le cas d’une propagation à  $\theta = 45^\circ$  sans perte de généralités.

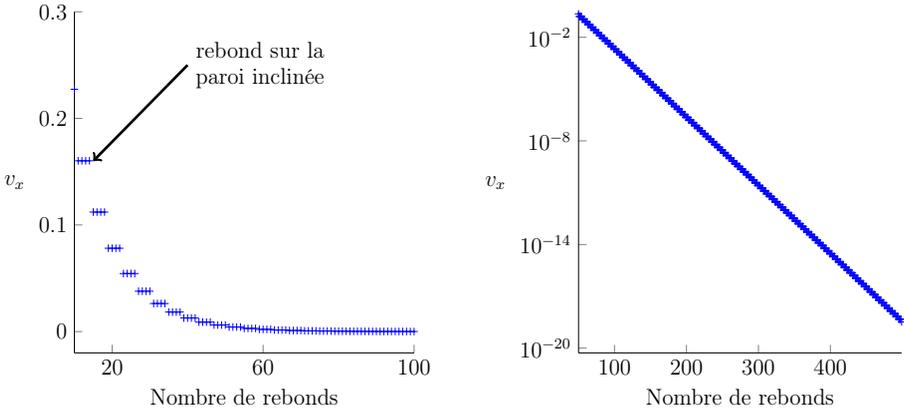


FIGURE IV.12 – Évolution de la vitesse  $v_x$  du rayon au cours de la propagation en échelle linéaire (figure de gauche) et semi-logarithmique (figure de droite). On observe une succession de trois rebonds non piégeants suivi d'un piégeant.

vitesse dans le plan transverse qui augmente exponentiellement. D'un point de vue océanographique, les ondes internes générées sont généralement d'amplitude suffisamment faible pour se propager sur des dizaines de milliers de kilomètres avant de s'atténuer. Dans un cas de piégeage d'énergie dans un plan transverse, l'énergie associée à la propagation suivant  $x$  sera négligeable. L'atténuation sera alors gouvernée par la distance parcourue transversalement à  $v_x$ .

### 2.a Temps de piégeage

Par analogie avec le coefficient de focalisation  $\gamma$  calculé au chapitre précédent, on peut calculer un coefficient  $\gamma_p$  qui traduit la vitesse de piégeage de l'onde. Étant donné l'étude précédente, notamment la Fig. IV.5, on s'attend à ce que le piégeage soit plus important pour des valeurs de  $s$  proches de 1.

Pour cela, regardons après un rebond la variation entre la vitesse avant le rebond  $v_x$  et la nouvelle vitesse normalisée  $v'_{x_n}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma_p} = \frac{v_x}{v'_{x_n}} &= \frac{v_x}{\frac{v_x}{\sqrt{v_x'^2 + v_y'^2 + v_z'^2}}} = \sqrt{v_x'^2 + v_y'^2 + v_z'^2} \\ &= \sqrt{v_x^2 + \frac{1}{(1-s^2)^2} [(v_y^2 + v_z^2)((1+s^2)^2 + 4s^2) - 8sv_yv_z(1+s^2)]} \end{aligned}$$

À la différence du cas 2D, ce coefficient ne dépend pas exclusivement de la géométrie. Afin d'obtenir un coefficient qui soit indépendant des composantes de la vitesse, il faut faire l'approximation que le rayon est déjà proche de la convergence, *i.e.* que  $v_x$  est déjà négligeable devant  $v_y$  et  $v_z$ . De plus, en utilisant la normalisation  $v_y^2 + v_z^2 \approx 1$  et  $v_y v_z = -1/2$ , on obtient

$$\gamma_p = \frac{v'_{x_n}}{v_x} = \frac{1 - s^2}{(1 + s)^2} \quad (\text{IV.37})$$

Dans le cadre de cette approximation, la convergence est exponentielle et  $v_x(N) = v_x(0) \gamma_p^N = v_x(0) e^{N \ln \gamma_p}$  avec  $N$  le nombre de rebonds. Ce coefficient  $\gamma_p$  est bien toujours inférieur à 1 et décroissant avec le gradient de la pente  $s$  et tend vers 0 quand  $s$  tend vers 1. Dans l'exemple présenté à la Fig. IV.12(b) cette approximation est très rapidement vérifiée. La pente de la Fig. IV.12(b) donne un coefficient directeur qui vaut  $\ln \gamma_{p,num} \simeq -0.091$ . La géométrie utilisée pour l'exemple de la Fig. IV.12 correspond à un angle de  $8^\circ$  soit  $s = 0.178^2$ . Pour comparer ce coefficient avec ce que prévoit la formule précédente, il faut faire attention au fait que seul un rebond sur quatre est piégeant et que les trois autres laissent inchangées les normes des vitesses. On doit diviser le coefficient théorique obtenu par 4. Après calcul, on obtient  $\ln \gamma_{p,th} \simeq -0.090$ .

## 2.b Temps de convergence

Il faut différencier le temps de piégeage, défini précédemment comme l'inverse de  $\ln \gamma_p$ , du temps de convergence, défini comme le temps que met le rayon pour être piégé. En effet, les rebonds successifs sur les bords verticaux et horizontaux du canal font qu'on ne se retrouve pas tout le temps dans le cas  $\phi'_i = \phi_i$  de la Fig. IV.4(a). Plusieurs rebonds dépiégeants peuvent s'enchaîner et retarder la convergence.

La Fig. IV.13 représente trois exemples avec des temps de convergence très différents. Entre les différents tracés, seule la position initiale  $y_0$  varie. Les dimensions de la cuve restent inchangées par rapport au calcul de rayons Fig. IV.10, cependant, afin de visualiser correctement cet effet, nous avons pris une valeur de  $\alpha$  plus faible pour que le piégeage soit plus lent. Nous avons modifié la valeur de  $\theta$  en fonction, afin d'obtenir un attracteur (1,1).

On observe dans les trois cas que la vitesse change de signe de nombreuses fois, preuve de rebonds sur les parois du canal. Puis l'on retrouve une convergence exponentielle vers 0, comme décrit précédemment. On voit que, dans

---

2. On a pris une faible valeur de  $s$  afin que le piégeage ne soit pas trop rapide

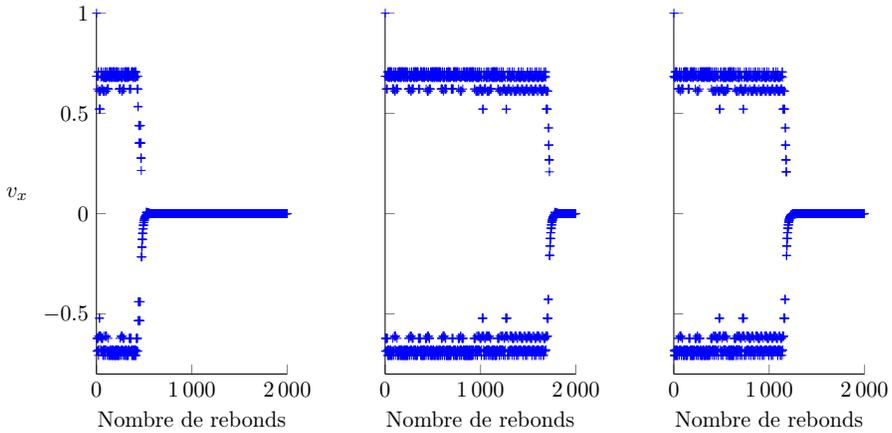


FIGURE IV.13 – Évolution de la vitesse  $v_x$  pour  $y_0 = 0.1W$  (gauche)  $y_0 = 0.5W$  (centre)  $y_0 = 0.85W$  (droite). Les paramètres de la géométrie sont  $H = 350$ ,  $L = 1000$ ,  $W = 400$ ,  $\alpha = 6^\circ$ ,  $\theta = 38.3^\circ$ . Les paramètres initiaux sont  $z_0 = 0.2H$ ,  $x_0 = 0$ ,  $\phi_0 = 90^\circ$ .

cet exemple, la phase de décroissance exponentielle se fait sur un nombre de rebonds négligeable devant la première phase d'évolution.

Le temps de piégeage défini dans le paragraphe précédent est en fait rarement la grandeur pertinente pour obtenir le temps de convergence de l'attracteur. La dynamique de piégeage du rayon étant principalement due à la première phase du régime dit transitoire. Dans cette phase, le rayon se déplace dans l'espace  $(x, y, z, \phi)$  jusqu'à tomber dans une zone de piégeage exponentielle. Pour mieux visualiser ces "puits" de convergence rapide, on a observé Fig. IV.14 le temps de convergence pour différentes valeurs de  $\phi_0$  et  $y_0$ .

Les zones noires représentent les valeurs de  $\phi_0$  et  $y_0$  pour lesquelles le piégeage a lieu en moins de  $N_c = 60$  rebonds<sup>3</sup>. Cette valeur  $N_c$  a été choisie au vu du temps de décroissance exponentielle observé Fig. IV.13. On voit alors qu'une grande région de l'espace des paramètres initiaux proches de  $\phi_0 = 0$  amène en moins de  $N_c$  rebonds à une convergence exponentielle. Dans les autres cas, en rouge sur la figure, le rayon effectue une successions

3. On a pris comme critère que le piégeage avait eu lieu si la vitesse après les  $N_c$  rebonds est inférieure à  $10^{-3}$ .

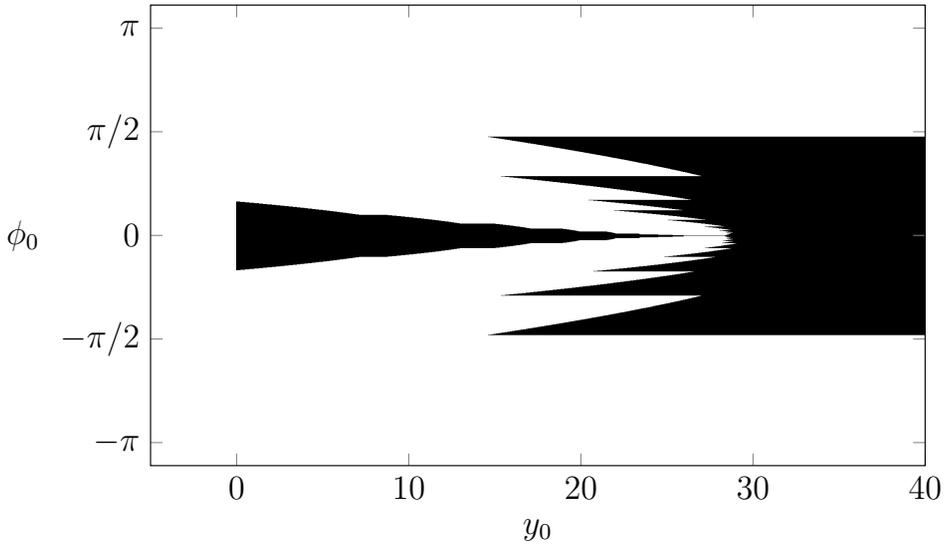


FIGURE IV.14 – Temps de convergence en fonction des paramètres initiaux  $\phi_0$  et  $y_0$ , les autres paramètres restant inchangées par rapport à la figure précédente. La zone noire représente les paramètres pour lesquelles le piégeage a lieu en moins de 60 rebonds.

de rebonds piégeant et non piégeant avant d'atteindre<sup>4</sup> des valeurs de  $\phi$  et  $y$  qui soient dans le puits de convergence.

En résumé, malgré une valeur de  $s$  proche de 1 qui laisserait supposer une décroissance rapide de  $v_x$ , en fonction de la géométrie et des conditions initiales, le piégeage peut être très long. Dans la suite de ce chapitre nous ne nous intéresserons pas au temps de piégeage d'un rayon. Cependant ces considérations sont importantes dès que l'on prend en compte la viscosité, et nous l'utiliserons notamment dans le chapitre suivant où l'on cherchera à obtenir un piégeage rapide afin de limiter les effets dissipatifs.

## 2.c Position du plan de focalisation

Au delà du temps de convergence, la position finale de l'attracteur en  $x$  est une question importante et sera également utile dans l'étude expérimentale. On note  $x_\infty$  la position du plan  $yz$  vers lequel le rayon converge. Il faut alors étudier systématiquement la position du plan de convergence en fonction des

4. Les autres paramètres de propagation,  $z$  et  $x$  ont un rôle moindre dans cette étude.

paramètres initiaux  $(x_0, y_0, z_0, \phi_0)$ . Cette étude, notamment la dépendance en  $y_0$  et  $z_0$ , sera d'une grande utilité pour le chapitre suivant.

Pour cela, on étudie au bout d'un nombre de rebonds  $N$  donné, quelle est la position  $x_\infty$  qu'a atteint le rayon dans le canal. Bien sûr, comme on l'a vu, la vitesse  $v_x$  n'atteint 0 qu'asymptotiquement ; le rayon ne converge alors jamais réellement dans un plan  $x = \text{cst}$ . Cependant, d'un point de vue numérique, on peut considérer que le rayon a convergé lorsque  $v_x$  est quelques ordres de grandeurs en dessous de  $v_y$  et  $v_z$ . En exemple, les Fig. IV.15(a) et (b) montrent pour plusieurs points initiaux les attracteurs correspondants. Dans la Fig. IV.15(a),  $x_0$  et  $\phi_0$  sont fixés et  $y_0$  et  $z_0$  varient. La couleur de l'attracteur formé correspond à celle du point initial. Dans la figure IV.15(b), la position du point initial est fixée à  $(x_0 = 0, y_0 = 0.5W, z_0 = 0.9H)$  et  $\phi_0$  varie.

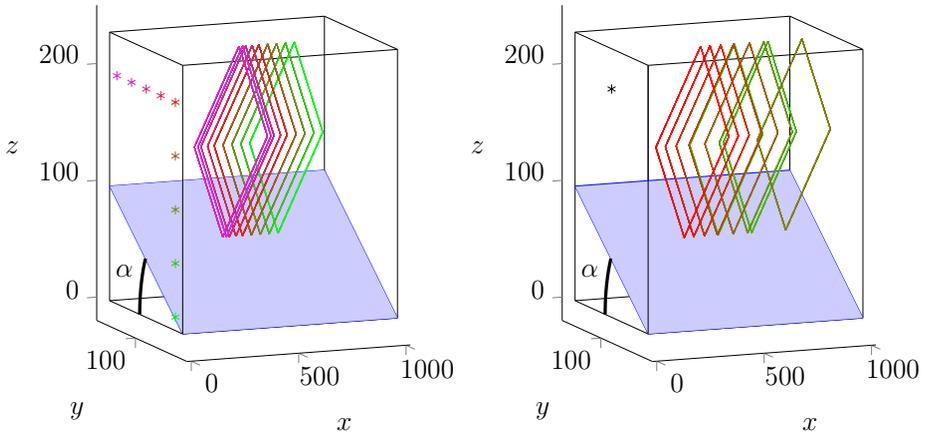


FIGURE IV.15 – Attracteurs obtenus pour différentes conditions initiales, les autres paramètres restant fixes. Sur la figure de gauche, les points de lancer initiaux  $y_0$  et  $z_0$  sont indiqués par les croix de même couleur que l'attracteur correspondant. Sur la figure de droite, seul l'angle initial  $\phi_0$  varie, entre  $20^\circ$  pour l'attracteur vert et  $90^\circ$  pour l'attracteur rouge, le point de lancer initial est indiqué en noir.

Les rayons focalisent tous vers la même forme d'attracteur, mais pas dans le même plan de focalisation. Cette variation n'est pas très importante quand  $y_0$  et  $z_0$  varient. Elle l'est par contre beaucoup plus quand  $\phi_0$  varie. Notamment, si  $\phi_0 = 0^\circ$ , on retrouve tout de suite le cas 2D et donc la position du plan de focalisation est  $x_\infty = x_0$ .

Avant de faire une étude systématique en fonction des paramètres initiaux, il faut préciser que comme dans le cas 2D, tous les points initiaux conduisent au même attracteur. La forme de l'attracteur est donnée par les paramètres  $d$  et  $\tau$ . Nuançons tout de suite cette dernière affirmation en précisant que pour certaines valeurs singulières des paramètres initiaux, les rayons peuvent échapper à la focalisation et ne jamais converger vers un attracteur dans un plan  $x = \text{cst}$ . Nous étudierons ces structures étranges appelés *whispering modes* dans la section 4.

On représente figure IV.16 une carte de la position du plan de focalisation  $x_\infty$  en fonction de  $y_0$  et  $z_0$  dans les deux cas  $v_z = 1$  (à gauche) et  $v_z = -1$  (à droite). La focalisation est généralement plus lente dans le cas  $v_z = 1$  car le premier rebond sur la paroi inclinée est retardé par rapport au cas  $v_z = -1$ . Mais ce n'est pas toujours le cas, les discontinuités présentes sont dues aux rebonds sur le bord  $x = L$  du canal, ce qui amène à des rebonds qui retardent le piégeage. La partie bleue foncée en bas à droite des deux figures représente la partie qui se situe sous la pente mise artificiellement à  $x_\infty = 0$ ; nous ne nous intéresserons pas à l'évolution de rayons dans cette région.

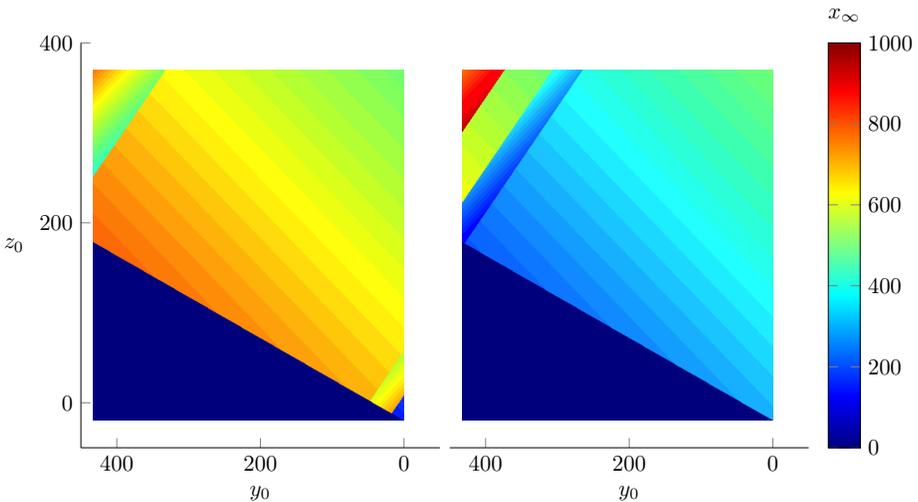


FIGURE IV.16 – Position du plan de focalisation  $x_\infty$  pour différentes conditions initiales de  $y_0$  et  $z_0$ . Les autres paramètres, notamment  $x_0$  et  $\phi_0$  sont fixés pour ces tracés. Pour la figure de gauche (resp. droite)  $v_z = 1$  (resp.  $v_z = -1$ ). Le triangle bleu foncé en bas à droite représente la zone inaccessible sous la pente.

Ces exemples montrent que même dans une géométrie simple donnant un attracteur (1,1) carré, la convergence vers le plan de focalisation peut être complexe et réserver des surprises.

### 3. Diagramme des phases

Étudions maintenant ce qu'il se passe dans d'autres cas que celui de l'attracteur (1,1). Par analogie avec le diagramme  $(d, \tau)$  présenté au chapitre 2, on peut tracer un diagramme similaire pour nos expériences, en prenant en compte les paramètres  $(\alpha, \theta, H, W)$  et en faisant un redimensionnement similaire à celui réalisé dans le chapitre 2. La géométrie transverse étant par construction identique à celle bidimensionnelle étudiée, on retrouve en fait exactement le même diagramme que celui du chapitre III, si on le trace en fonction de  $d$  et  $\tau$ . Nous allons plutôt tracer un diagramme en fonction de  $\theta$  et  $\alpha$  pour une géométrie donnée. Ce diagramme n'a pas l'universalité du diagramme  $(d, \tau)$  puisqu'il n'est valable que pour  $H$  et  $W$  données. Cependant, il permet de mieux visualiser les zones principales des attracteurs simples. De plus, les grandeurs  $H, L$  et  $W$  sont données par les dimensions de la cuve utilisée pour réaliser l'expérience. Ce ne sont donc pas des paramètres que l'on peut faire varier facilement et continûment<sup>5</sup>. Nous utilisons ici les valeurs  $H = 360$  mm et  $W = 410$  mm ( $L$  étant toujours égale à 1000 mm) qui correspondent aux valeurs utilisées dans les expériences présentées dans le chapitre suivant. Les conditions initiales sont également fixées et sans importance car, comme vu précédemment, (à part pour des valeurs très précises) les conditions initiales n'influent pas sur la forme de l'attracteur mais seulement sur la position du plan de focalisation.

Le diagramme des phases tracé Fig. IV.17 se compose de 2 figures. La figure de gauche (resp. droite) donne le nombre de rebonds  $N_p$  (resp.  $N_y$ ) de la structure stationnaire créée sur la paroi inclinée (resp. sur le mur vertical  $y = 0$ ). Les diagrammes ne sont tracés que pour  $\alpha < \arctan(H/W) \simeq 41^\circ$ , car pour des valeurs supérieures, la géométrie n'est plus celle d'un trapèze, mais celle d'un triangle et tous les attracteurs sont réduits à des points. La combinaison des deux figures permet donc de savoir de quel type d'attracteur il s'agit.

- Tout d'abord, on remarque que la partie diagonale supérieure de chaque figure est occupée par une zone bleu foncé. Cette zone, analogue à la zone inférieure gauche du diagramme  $(d, \tau)$ , représente les cas de réflexions sous-critiques dans lesquelles toutes les ondes

---

5. Ce n'est pas tout à fait vrai. On peut ne pas remplir la cuve sur toute la hauteur et dans le chapitre suivant nous réduirons artificiellement la valeur de  $W$ .

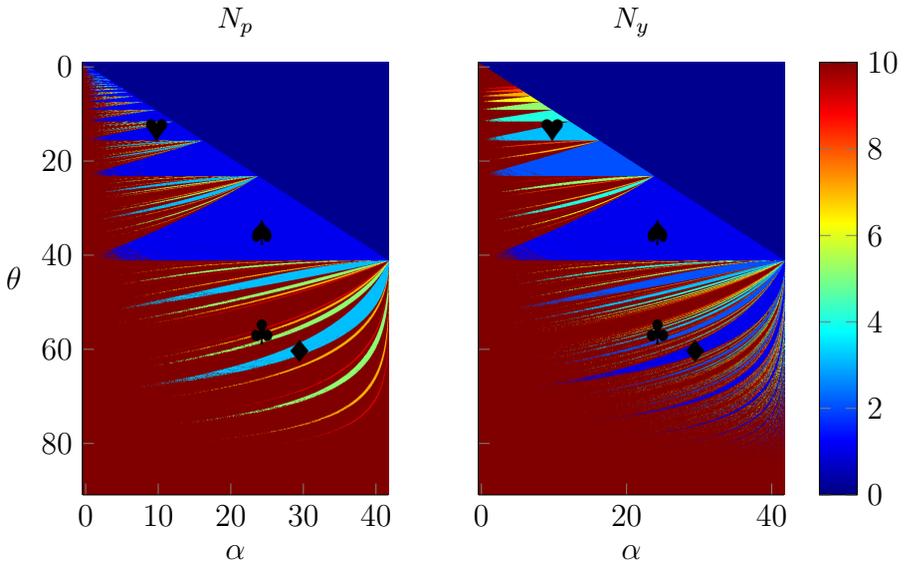


FIGURE IV.17 – Type d'attracteur créé en fonction des paramètres  $\alpha$  et  $\theta$  pour les valeurs  $H = 360$  mm et  $W = 410$  mm ( $L$  étant toujours égale à 1000 mm). La figure de gauche (resp. droite) donne le nombre de rebonds  $N_p$  (resp.  $N_y$ ) de l'attracteur. La zone triangulaire en haut à droite représente le cas des réflexions sous-critique où l'attracteur est réduit à un point. Les symboles ♠, ♥, ♦, ♣ correspondent aux coordonnées de 4 situations particulières tracées Fig. IV.18.

convergent vers le fond du canal en  $y = 0$  : l'attracteur est réduit à un point. On note que cette zone apparaît pour  $\alpha > \theta$ , ce qui correspond bien au cas de la réflexion sous-critique.

- Les secondes structures facilement identifiables sont les "langues" bleues sur le diagramme de gauche et colorées sur le diagramme de droite. Le fait que les langues soient toutes bleues sur le diagramme de gauche signifie que ces régions correspondent toutes à un attracteur avec un seul rebond sur la pente. Ce sont donc des attracteurs  $(n, 1)$ . La couleur de chaque langue sur le diagramme de droite indique la valeur  $N_y = n$ . Deux types d'attracteurs, un  $(1,1)$  et un  $(3,1)$  sont tracés en haut de la Fig. IV.18. Ces langues sont également présentes en bas à droite du diagramme  $(d, \tau)$  mais beaucoup moins visibles.
- D'autres sous-structures apparaissent dans ce couple de diagrammes,

notamment des langues secondaires colorées dans les deux diagrammes, signe d'attracteurs plus complexes  $(n, p)$ . Deux autres attracteurs, un  $(1,3)$  et un attracteur  $(9,4)$  sont tracés en bas de la Fig. IV.18. Une grande partie restante des figures correspond à  $(N_y, N_p) > 10$ .

Nous avons choisi cette valeur de 10 pour visualiser facilement les zones précédentes. Si l'on modifie la gamme de couleurs, on s'aperçoit que toutes les régions correspondent à des zones d'attracteurs plus ou moins complexes. **En effet, comme dans le diagramme  $(d, \tau)$ , pour tous les points  $(\alpha, \theta)$ , il existe attracteur.** Les seuls cas pour lesquels il n'y a pas d'attracteur apparaissent pour des valeurs singulières des paramètres, ce qui n'a pas de réalité numérique. On remarque qu'il n'existe pas de région avec  $N_p$  pair.

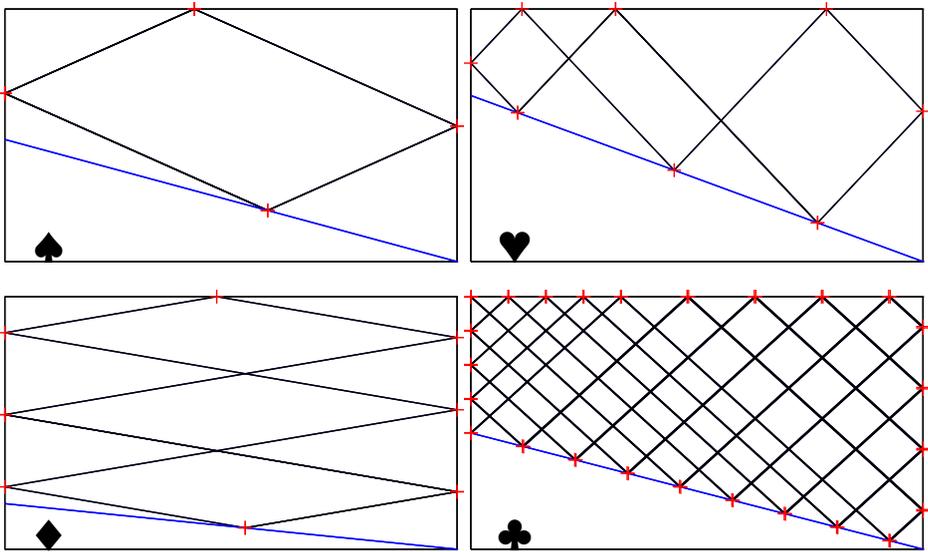


FIGURE IV.18 – Quatre exemples d'attracteurs placés sur le diagramme des phases précédent Fig. IV.17. ♠ Attracteur  $(1,1)$ , ♣ Attracteur  $(3,1)$ , ♦ Attracteur  $(1,3)$ , ♥ Attracteur  $(9,4)$ .

Cette propriété des attracteurs déjà discutée dans le chapitre précédent est très importante pour le piégeage et nous reviendrons sur cette remarque dans la section suivante.

### 3.a Attracteur (1,3)

Étudier un attracteur (1,3) permet de mieux comprendre comment le piégeage a lieu et dans quels cas il peut ne pas avoir lieu. En effet, nous avons vu dans le chapitre précédent que pour les attracteurs  $(1, 2n + 1)$ , il y a  $n$  réflexions qui sont défocalisantes et  $n + 1$  focalisantes, permettant ainsi à l'attracteur d'exister. En effet, en 2D, s'il y a plus de réflexions défocalisantes que focalisantes, les rayons s'éloignent en moyenne les uns des autres, expliquant l'absence d'attracteurs.

Le trajet des rayons dans le cas d'un attracteur (1,3) est tracé Fig. IV.19. Les réflexions numérotées 1 et 2 se font suivant la direction du gradient de la pente et sont donc focalisantes. La réflexion 3 se fait dans le sens contraire et est donc défocalisante. On considère ici que le parcours des rayons non encore totalement piégés dans un plan  $yz$  est quasi-identique à celui d'un attracteur (1,3) bidimensionnel. On peut s'en convaincre en regardant le parcours des rayons vu de dessus (Fig. IV.19 droite). Après un certain nombre de rebonds<sup>6</sup>, le rayon fait 3 rebonds sur la paroi du fond. La position des rebonds varie avec le piégeage mais pas leur nature focalisante ou défocalisante.

Qu'en est-il du piégeage dans ces cas là? D'après la discussion de la Fig. IV.5, nous avons vu que toutes les réflexions amènent au piégeage. Cependant pour que le piégeage ait lieu, nous avons supposé que les réflexions sur les murs verticaux et horizontaux étaient tels que  $\phi'_i = \phi_i$ . Ce qui n'est pas le cas ici.

La Fig. IV.20 présente la projection du rayon dans le plan  $xy$  dans le cas des trois réflexions de l'attracteur (1,3) de la Fig. IV.19.

La Fig. IV.20(a) (resp. (b),(c)) montre la réflexion numérotée 2 (resp. 3,1) dans la Fig. IV.19. Du fait du parcours formé par l'attracteur (1,3), le rayon réfléchi après la réflexion 2 arrive sur la pente avec un angle incident  $\phi_{i3} = -\phi_{r2}$ . La réflexion suivante se fait encore avec  $\phi_{i1} = -\phi_{r3}$ . On remarque alors que du point de vue de la réflexion 1, la réflexion 3 précédente a augmenté l'angle  $\phi$ , contribuant donc à un dépiégeage.

Cette propriété se traduit sur la vitesse  $v_x$  qui ne tend plus vers 0 de manière monotone. Le tracé de  $v_x$  dans le cas de la convergence vers l'attracteur (1,3) est tracé Fig. IV.21.

Mis à part les réflexions sur les parois verticales et horizontales qui ne

---

6. Ce nombre de rebonds dépend fortement des conditions initiales, de la même manière que dans la Fig. IV.13. Nous avons pris ici des paramètres qui permettaient de représenter clairement la convergence de l'attracteur.

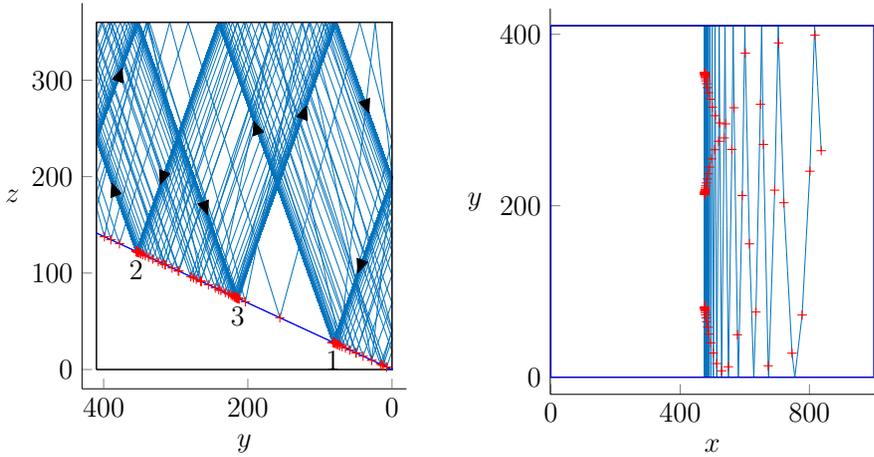


FIGURE IV.19 – Tracé de rayons dans une géométrie transverse donnant un attracteur (1,3) vue de côté (figure de gauche) et vue de dessus (figure de droite). Seuls les rebonds sur la paroi inclinée ont été marqués d’une croix rouge. Le début de la trajectoire du rayon, toujours à  $x = 0$ , n’a pas été représenté par souci de clarté. Sur la figure de gauche, le trajet des rayons a été représenté et les rebonds sur la paroi sont numérotés.

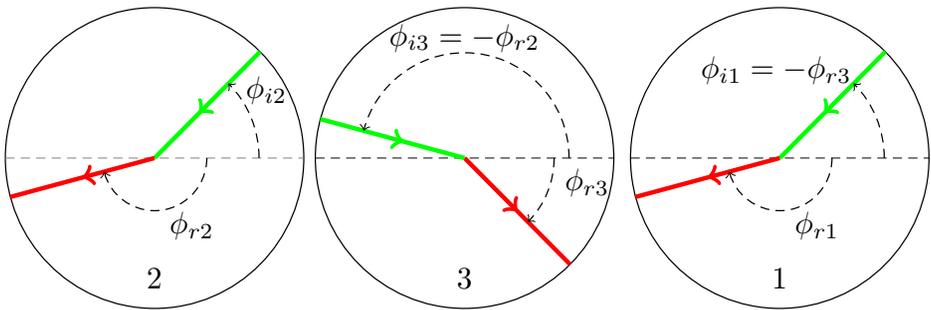


FIGURE IV.20 – Successions des trois réflexions sur la paroi inclinée pour la trajectoire de l’attracteur (1,3) représentée Fig. IV.19. Les rayons verts (resp. rouges) représentent les rayons incidents (resp. réfléchis)

changent pas la vitesse  $v_x$ , on observe bien deux types de réflexions. Les réflexions 1 et 2, qui diminuent  $v_x$  en valeur absolue et la réflexion 3 qui augmente  $v_x$  en valeur absolue. On voit bien que la convergence vers  $\phi = 0$

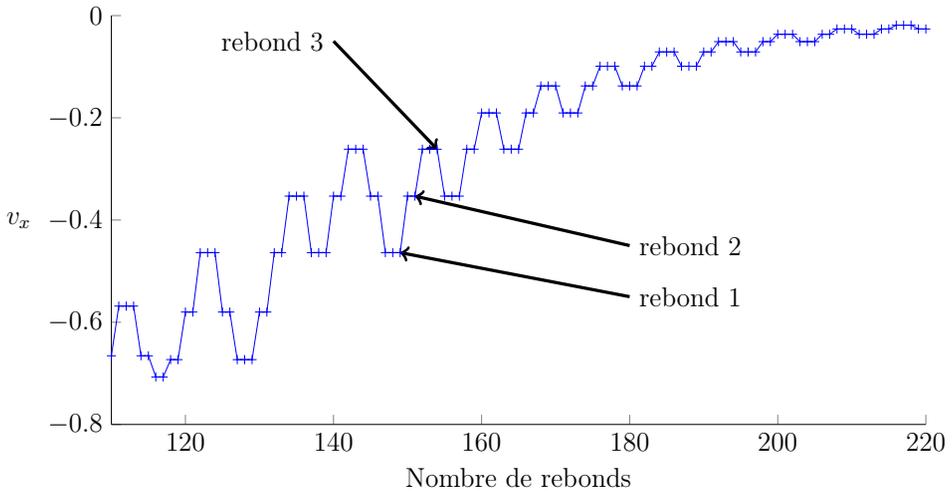


FIGURE IV.21 – Vitesse  $v_x$  au cours de la propagation pour le tracé de la Fig. IV.19. L’enchaînement de deux rebonds fait diminuer  $v_x$  en valeur absolue (rebonds numérotés 1 et 2), et un rebond augmente  $v_x$  en valeur absolue (rebond 3).

gagne du fait qu’on a deux fois plus de réflexions piégeantes que dépiégeantes.

Concernant la vitesse de convergence, le facteur  $\gamma_p$  est toujours donné par la formule (IV.37) mais multiplié par un facteur  $1/3$ . En effet, la succession des réflexions 2 et 3 laisse la vitesse  $v_x$  inchangée; Seulement un tiers des réflexions sur la paroi inclinée font effectivement diminuer la vitesse globalement.

En résumé de cette sous partie, comme dans le cas bidimensionnel, les attracteurs existent quelles que soient les valeurs des paramètres de géométries sauf pour des valeurs singulières. Numériquement ou expérimentalement on ne peut pas obtenir ces valeurs singulières. Pourrait-on alors conclure, que du point de vue de l’expérimentateur, le piégeage est toujours présent quelle que soit les paramètres? Et donc que la propagation 3D tends toujours à être bidimensionnelle? Comme on vient de le voir avec l’étude de l’attracteur (1,3), le piégeage peut être ralenti très fortement. Et nous allons montrer que dans certains cas, il peut aussi ne pas avoir lieu.

## 4. Cas de non piégeage

Le dépiégeage peut-il gagner sur le piégeage ? Nous avons évoqué précédemment deux cas dans lesquels le piégeage peut ne pas avoir lieu. Il s'agit des cas où les paramètres sont tels qu'en deux dimensions, un attracteur ne peut pas exister, et des *whispering modes*. Nous allons successivement revenir sur ces deux exemples d'abord de manière théorique, puis discuter leur réalité physique.

### 4.a Attracteur $(n, 2)$

Reprenons la figure IV.19. Que ce passe-t-il si l'on enchaîne seulement des réflexions de type 2-3-2-3 ? Comme rappelé précédemment, ce type de cas correspondrait à un attracteur  $(n, 2)$ , qui n'existe pas. En effet, dans le cas bidimensionnel, deux réflexions sur la paroi inclinée, une focalisante et une défocalisante, ne permettent pas de faire converger les rayons sur un cycle limite. En moyenne les rayons ne s'éloignent ni ne se rapprochent les uns des autres ; l'exposant de Lyapunov correspondant est nul.

Comme explicité dans le chapitre 2, ces cas n'apparaissent que pour des valeurs singulières des paramètres. Mais on peut se placer aussi proche que possible de ces valeurs et observer ce qu'il se passe dans le cas tridimensionnel.

La Fig. IV.22 montre que l'on peut obtenir un quasi-attracteur  $(1,2)$ . Il ne s'agit pas d'un attracteur au sens strict pour deux raisons. Premièrement le piégeage n'a pas lieu, on n'a donc pas de cycle limite à proprement parler. Deuxièmement cette structure n'est pas stationnaire. En effet si on attend suffisamment longtemps, on converge vers un véritable attracteur<sup>7</sup> beaucoup plus compliqué. Cependant, pour ces paramètres, le piégeage est très lent car en première approximation il y a autant de réflexions piégeantes que dépiégeantes, rendant la convergence parfois très lente. Si les paramètres sont choisis très proches d'une valeur singulière, le cycle limite a  $n$  réflexions focalisantes et  $n - 1$  réflexions défocalisantes avec  $n$  grand. On se ramène donc à un cas similaire à celui présenté pour l'attracteur  $(1,3)$  mais avec une convergence encore plus lente.

### 4.b Les *whispering modes*

Il existe une autre structure particulière pour lequel les rayons peuvent échapper au piégeage, il s'agit des *whispering gallery modes* que l'on pourrait appeler en français *galeries de chuchotements*. Ces structures particulières

---

7. Une structure avec plus de rebonds piégeants que dépiégeants.

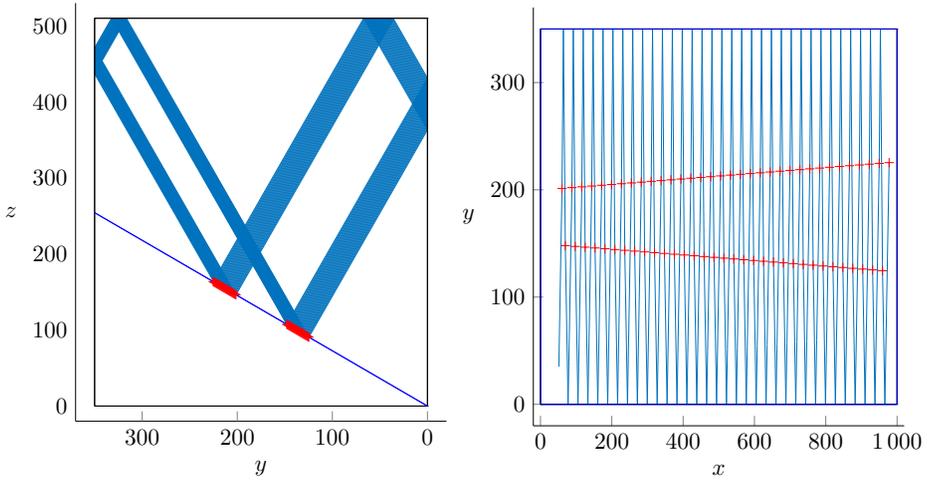


FIGURE IV.22 – Vue de côté (figure de gauche) et de dessus (figure de droite) du chemin des rayons pour une géométrie proche de celle d'un attracteur (1,2), pour lequel l'exposant de Lyapunov associé est nul. Les rebonds sur la paroi inclinée ont été représentés par des croix rouges.

ont été étudiées par Rabitti et Maas [81] pour des ondes inertielles dans les géométries sphériques. Ce nom vient de l'analogie avec certains modes des ondes sonores où la propagation se fait sur les parois<sup>8</sup> dans lesquels les ondes restent confinées sur les bords.

Dans notre cas, ces modes existent pour des paramètres et des conditions initiales très particulières. Ces conditions sont telles que le piégeage et le dépiégeage se compensent parfaitement.

La Fig. IV.23 montre une partie des trajets effectués par un rayon. Pour les valeurs de paramètres  $H = 360$ ,  $L = 500$ ,  $W = 410$ ,  $\theta = 39^\circ$ ,  $\alpha = 23.52^\circ$ , on obtient les valeurs  $d = 0.01$  et  $\tau = 1.88$  qui conduisent normalement à un attracteur (1,1).

Quelle est la structure de ce *whispering mode*? On voit tout d'abord que celui-ci ne s'étend pas sur toute la largeur du canal, mais reste concentré sur

8. Ces modes peuvent donner lieu à des expériences grandeur nature spectaculaires. Par exemple dans une pièce circulaire, pour parler à quelqu'un à l'autre bout de la pièce, il suffit de parler en direction du mur pour que l'onde acoustique se transmette. L'atténuation est beaucoup plus faible que dans le cas d'une propagation 3D libre, et ainsi chuchoter suffit pour être entendu.

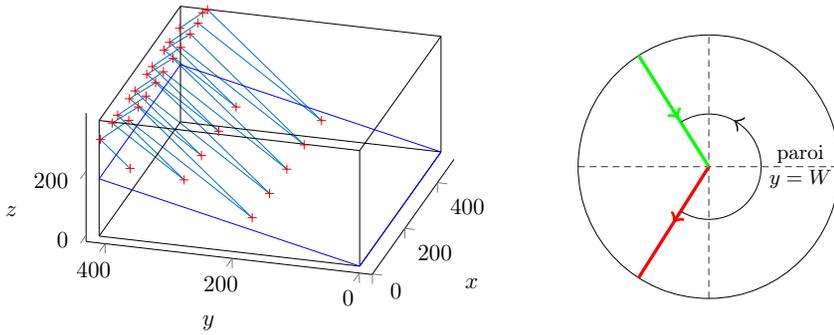


FIGURE IV.23 – À gauche, trajectoire d’un rayon dans le cas d’un *whispering mode* pour les conditions initiales  $\phi_0 = 122.476^\circ$ ,  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 320$ ,  $z_0 = 324$ . À droite, représentation de l’évolution de l’angle  $\phi$  de la trajectoire de gauche. Le rayon arrive sur la paroi inclinée avec un angle  $\phi_i$ , tracé en vert, et repart avec un angle  $\phi_r$ , tracé en rouge. La réflexion sur la paroi  $y = W$  transforme l’angle de propagation  $\phi$  en  $\pi - \phi$ , symbolisé par l’arc de cercle noir. Le nouveau rayon incident arrive avec l’angle  $\phi'_i = \phi_i$ . La géométrie choisie ( $d = 0.1$ ,  $\tau = 1.84$ ) conduit théoriquement à un attracteur (1,1).

un bord du canal. Si l’on regarde de plus près les valeurs prises par  $\phi$  lors de la propagation, on a en réalité qu’une seule valeur (aux symétries par rapport à  $x$  ou  $y$  près). Cette valeur est telle que l’angle réfléchi vérifie  $\phi_r = -\phi_i$ . Ainsi, comme on le voit sur la Fig. IV.23, le nouvel angle incident au rebond suivant est  $\phi'_i = -\phi_r = +\phi_i$ . On se retrouve donc dans un cas stationnaire.

On peut calculer théoriquement cet angle en utilisant la loi (IV.36). En effet, on cherche à obtenir  $\phi_r = -\phi_i$  c’est-à-dire

$$\frac{s^2 - 1}{1 + s^2 + 2s \cos \phi} = -1 \tag{IV.38}$$

$$(s^2 - 1) = -(1 + s^2 + 2s \cos \phi) \tag{IV.39}$$

$$-2s^2 = 2s \cos \phi \tag{IV.40}$$

$$\cos \phi = -s \tag{IV.41}$$

ce qui donne comme solution  $\phi = \pi - \arccos s = 180^\circ - 57.52^\circ = 122.48^\circ$  avec la valeur  $s = 0.537$  utilisée dans la Fig. IV.23. C’est bien la valeur obtenue avec l’algorithme de tracé de rayons.

Pour trouver ces valeurs particulières, on peut réutiliser le programme

permettant de calculer la distance  $x_\infty$  de l'attracteur en fonction des conditions initiales. Détecter les *whispering modes* revient à chercher les valeurs pour lesquelles on ne converge pas vers une valeur  $x_\infty$ . De plus on utilise le fait que dans la structure du *whispering mode* présentée, les rayons ne touchent pas la paroi  $y = 0$ . Cela permet de distinguer ces modes d'un cas où les rayons n'ont pas encore totalement convergé. On représente alors de la même manière que dans la Fig. IV.16, les *whispering modes* sur un diagramme en fonction des paramètres initiaux. Une étude préalable ayant montré que les variations en  $z_0$  et en  $x_0$  influent très peu sur l'existence et/ou la position des *whispering modes*, on n'étudiera pas ici leurs influences. Le calcul de la convergence ou non de  $\phi$  en fonction  $y_0$  et  $\phi_0$  est effectué Fig. IV.24 pour deux nombres de rebonds différents. Les zones de non convergence, c'est-à-dire les zones d'existence des *whispering modes* sont représentées en blanc, les autres couleurs indiquant toujours la valeur de  $x_\infty$ .

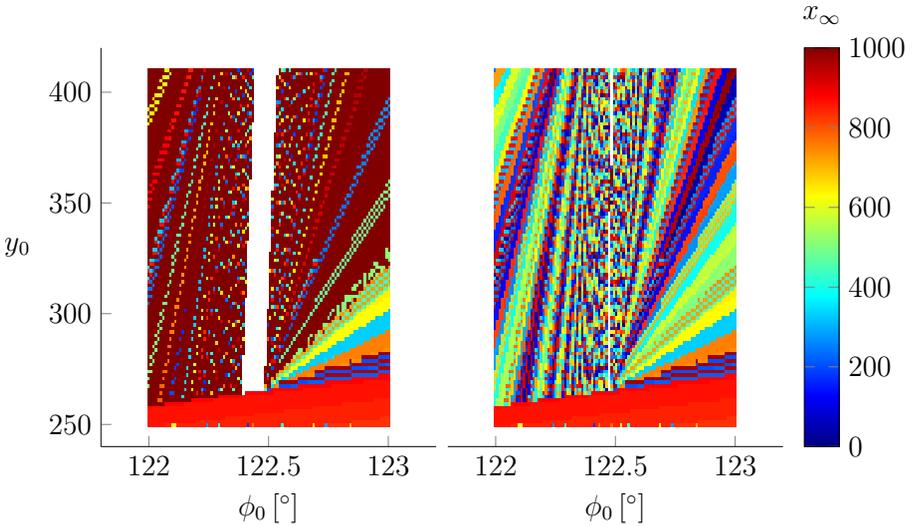


FIGURE IV.24 – Position du plan de focalisation  $x_\infty$  pour différentes conditions initiales de  $y_0$  et  $\phi_0$ . Les autres paramètres sont fixés pour ces calculs. Sur la figure de gauche,  $N = 10^4$  alors que sur la figure de droite, 100 fois plus de rebonds ont été effectués avant de s'intéresser à l'état final. Les zones blanches représentent les zones de non convergence, indiquant les *whispering modes*.

On observe tout d'abord sur la figure de gauche que la zone blanche

représentant les *whispering mode* se situe approximativement entre  $\phi_0 = 122.4^\circ$  et  $\phi_0 = 122.5^\circ$ , soit pour une plage de paramètres très faible. Dans le diagramme de droite de la Fig. IV.24, 100 fois plus de rebonds ont été effectués avant de vérifier la convergence. On observe alors que la zone de *whispering mode* est beaucoup plus fine, signe que la plupart des *whispering modes* du diagramme précédent n'en sont en fait pas, et convergent vers un attracteur si l'on attend suffisamment longtemps. Finalement, les "vrais" *whispering mode* qui ne convergent théoriquement jamais ne sont obtenus que pour des valeurs singulières des conditions initiales. C'est cohérent avec le calcul théorique de l'angle effectué précédemment, une seule valeur de  $\phi$  correspond à ce *whispering mode*.

Un autre type de *whispering mode* peut exister en utilisant cette fois les rebonds sur les bords du canal  $x = 0$  et  $x = L$ . En utilisant le principe de retour inverse des rayons, le rayon réfléchi par un premier rebond peut revenir exactement selon la direction du rayon incident, c'est-à-dire tel que  $\phi'_i = \phi_r$  (voir Fig. IV.25).

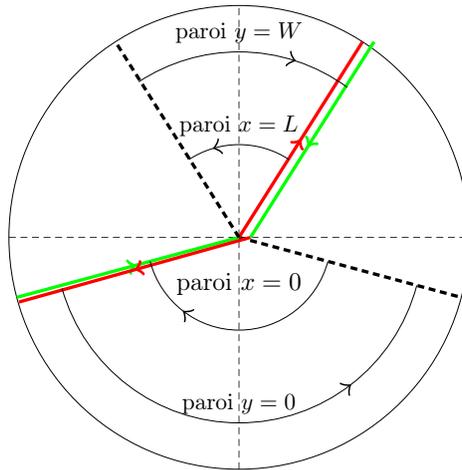


FIGURE IV.25 – Trajectoire des rayons dans le cas d'un autre *whispering mode*

Dans ce cas, si l'on enchaîne une succession de rebonds présentés Fig. IV.25, le rayon n'est jamais piégé. Cependant, afin d'avoir  $\phi'_i = \phi_r$ , il faut qu'entre chaque rebond sur la paroi inclinée, le rayon rebondisse sur une unique paroi verticale ( $y = 0$  ou  $y = W$ ) et une unique paroi horizontale ( $x = 0$  ou  $x = L$ ). Ces conditions ne sont réalisées que pour des géométries plus cubiques, loin de celles de canaux qui ont un intérêt géophysique pour les ondes internes.

Qu'en conclure alors sur le non-piégeage? Nous avons vu durant toute cette section que le piégeage est intimement lié à la présence d'attracteurs dans la géométrie de la coupe transverse du canal. En effet, en 2D, dès que les rebonds focalisants sont suffisants pour gagner sur les rebonds défocalisants, alors on a un attracteur. Cela signifie qu'en 3D les successions de rebonds vont conduire à un piégeage. Or, dans le type de géométrie que nous avons considérée, les attracteurs existent quels que soient les angles  $(\alpha, \theta)$  et les valeurs  $H$  et  $W$  sauf pour des valeurs singulières. Le piégeage a donc toujours lieu, sauf pour ces valeurs singulières.

On pourrait penser que ces conditions sur les paramètres sont beaucoup trop contraignantes pour qu'elles soient satisfaites expérimentalement. Cependant, du fait que les autres structures focalisent l'énergie, la dissipation est beaucoup plus grande pour ces structures. Ainsi si l'on injecte de l'énergie sur une gamme continue de fréquence, les seuls modes persistants seront ceux qui ont le plus faible taux de dissipation, c'est-à-dire justement les cas où le piégeage n'a pas lieu. Les *whispering modes* constituent une autre exception au piégeage. De même que précédemment, au vu des paramètres expérimentaux, on pourrait penser que ces modes ne sont pas observables. Cependant, dans la propagation d'ondes internes dans un canal suffisamment long, ces *whispering modes* pourraient être observés. En effet, si pour des valeurs de paramètres, le piégeage a lieu très tôt dans le canal, les *whispering modes* constituent le seul type de propagation qui peut échapper au piégeage. Une mesure loin en aval du canal révélerait alors ces modes si ils ont été excités en amont.

En outre, des mesures expérimentales ne permettraient pas de faire la différence entre les structures exactes ou les structures "transitoires" (*whispering mode*, ou cas de non attracteurs). Ainsi d'un point de vue expérimental, il est plus pertinent de considérer la Fig. IV.24(a) que la Fig. IV.24(b).

De plus, nous n'avons pas pris en compte l'atténuation visqueuse dans les tracés de rayons. Elle est faible pour les ondes internes créées dans les océans, puisqu'elles peuvent se déplacer sur des milliers de kilomètres avant de s'atténuer [82]. Cependant, dans nos calculs de tracés de rayons, la distance parcourue par les rayons avant d'être piégés peut être beaucoup plus grande. Notamment, dans le cas précédent du quasi attracteur (1,2), la convergence vers le vrai cycle limite peut ne jamais être observée expérimentalement au profit de la forme géométrique transitoire du quasi-attracteur.

Ainsi d'un point de vue expérimental, on ne peut espérer voir le piégeage que lorsqu'il est rapide. De plus, dans la problématique géophysique du piégeage dans le canal du Saint Laurent que nous avons exposée partie 1., nous devons aussi nous restreindre au cas où l'onde ne rebondit pas non plus sur le bord  $x = L$  du canal. En effet, notre modélisation très simpliste de canal suppose aussi qu'arrivée au bout du canal, l'onde se réfléchit simplement sur la paroi. En réalité, ce qui s'y passe est plus complexes et nécessite une description plus réaliste de la bathymétrie du bord. Une importante partie de l'énergie peut y être dissipée ou alors transmise dans la partie suivante du canal, malgré un talus océanique assez élevé [24].

## C Une géométrie totalement tridimensionnelle

Toutes les géométries étudiées précédemment étaient invariantes par translation suivant la longueur du canal. Nous nous intéressons ici à une géométrie "totalement" 3D dans le sens où la géométrie 2D transverse varie avec la propagation dans le canal. En plus de son intérêt fondamental, cette étude permet de se placer dans des conditions plus réalistes que celles des canaux précédemment étudiés. Comme pour le passage de la géométrie bidimensionnelle à tridimensionnelle, nous allons étudier une géométrie très proche de celle étudiée section B. En effet, la géométrie d'étude de cette partie, schématisée Fig. IV.26, consiste simplement en un fond plat ayant effectué une rotation d'angle  $\alpha$  par rapport à l'axe  $x$  et d'angle  $\beta$  par rapport à l'axe  $y$ . Cette géométrie diffère donc du canal Fig. IV.9 seulement par l'inclinaison supplémentaire  $\beta$  de la pente.

### 1. Choix de la géométrie

Précisons tout de suite que cette géométrie peut être décrite d'une autre manière. Les deux rotations peuvent se ramener à une seule rotation d'axe  $x'$ , obtenue par rotation d'un angle  $\psi$  négatif autour de  $z$ . Cet angle vérifie  $\tan \psi = -\tan \beta / \tan \alpha$  (voir Fig. IV.26). Dans ce nouveau repère ( $x'$ ,  $y'$ ,  $z' = z$ ), l'inclinaison de la pente est due à une rotation d'un angle  $\chi$  par rapport à l'axe  $y'$ . L'angle  $\chi$  vérifie la relation suivante :

$$\tan \chi = \frac{\tan \alpha + \tan \psi \tan \beta}{\sqrt{1 + \tan \psi^2}} \quad (\text{IV.42})$$

Dans toute la suite de l'étude de cette géométrie, nous préférons rester dans le repère ( $x$ ,  $y$ ,  $z$ ) lié aux murs verticaux et horizontaux du canal. En

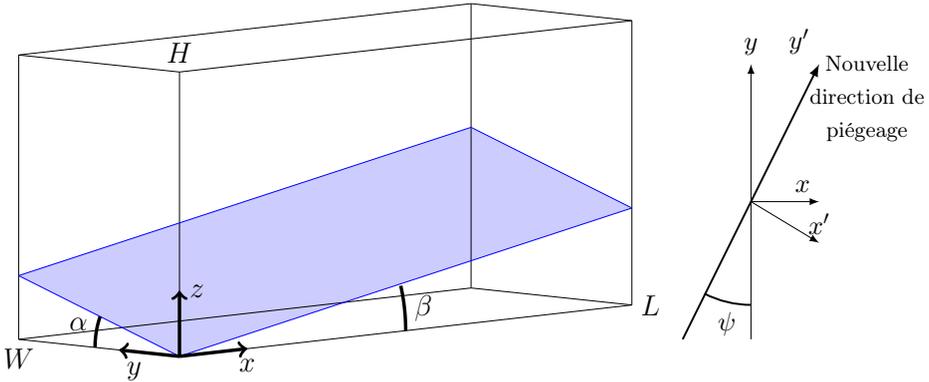


FIGURE IV.26 – Géométrie du canal incliné

particulier, nous continuerons à compter l'angle  $\phi$  par rapport à l'axe  $y$ . Cette convention permet de calculer plus facilement les angles réfléchis après rebonds sur les murs verticaux et horizontaux. Cependant il nous faut changer la fonction  $f$  permettant d'obtenir  $\phi'_i$  en fonction de  $\phi_i$ . En effet, l'effet de focalisation tend à aligner l'angle de propagation  $\phi$  selon le gradient de la pente qui n'est plus ici suivant  $y$ , mais suivant  $y'$ , tourné d'un angle  $\psi$  par rapport à  $y$ , comme montré sur la figure IV.26. Avec cette convention, la nouvelle loi (IV.36) donnant  $\phi_r$  en fonction de  $\phi_i$  s'écrit alors :

$$\sin(\phi_r - \psi) = \frac{(s^2 - 1) \sin(\phi_i - \psi)}{(1 + s^2) + 2s \cos(\phi_i - \psi)} \quad (\text{IV.43})$$

Nous noterons la fonction associée à cette transformation  $f_\psi$ . On a bien comme nouveau point fixe  $\phi_* = \psi$ .

## 2. Condition de piégeage

Comment l'effet de piégeage est-il alors modifié? Dans les géométries étudiées précédemment, les murs verticaux  $y = 0$  et  $y = L$  étaient orientés perpendiculairement à la direction de piégeage donnée par  $\vec{\nabla}S$ .

Ici ce n'est plus le cas. Si l'on considère une onde qui à un moment de sa propagation est piégée dans un plan transverse  $yz$ , la réflexion sur la paroi inclinée va avoir tendance à orienter l'onde suivant  $\vec{\nabla}S$  et donc à la faire sortir du plan transverse. À l'inverse, si l'on considère une onde qui se propage telle que  $\phi_i = \psi$ , une réflexion sur un mur vertical donnera  $\phi'_i = \pi - \phi$

dépiégeant alors l'onde.

De cette constatation on peut tout de suite déduire que dans cette géométrie, on ne peut pas obtenir d'attracteurs bidimensionnels comme précédemment. On peut en déduire une condition plus générale pour qu'une onde se propageant dans une géométrie 3D puisse converger dans un plan. **Il faut qu'en tout point du contour du plan, le vecteur  $\vec{\nabla}S$  soit contenu dans le plan, et que les parois verticales soient orthogonales à ce même plan**<sup>9</sup>. Dans notre géométrie, si l'on aligne les murs orthogonalement à  $\vec{\nabla}S$ , on retrouve bien sûr le cas de la première géométrie de canal étudié.

Cette condition permet de conclure sur la présence d'attracteurs bidimensionnels, mais ne dit rien sur la possibilité d'attracteurs 3D. Cette question est bien plus complexe que la précédente. Dans ce manuscrit, on se contentera de montrer quelques aspects nouveaux liés à ces changements. Ces résultats préliminaires montrent que l'étude et la classification des attracteurs et/ou des *whispering modes* dans une géométrie 3D quelconque est un travail de fourmi qui pour l'instant semble difficilement généralisable.

### 3. Attracteurs 3D

#### 3.a Un quasi-attracteur 2D

Malgré l'impossibilité apparente de créer des attracteurs 2D, on peut quand même se placer dans des cas où la géométrie transverse est proche de celle permettant des attracteurs (1,1) en 2D. Intuitivement, cela permet de considérer des structures composées d'un petit nombre de rebonds et donc plus simple à appréhender, si bien sûr elles existent. Exhibons une structure tridimensionnelle stationnaire obtenue pour les paramètres suivants :  $H = 650$ ,  $L = 1000$ ,  $W = 400$ ,  $\alpha = 20^\circ$ ,  $\beta = 7.5^\circ$ ,  $\theta = 42^\circ$ , et tentons de comprendre comment elle est construite.

Nous avons tracé Fig. IV.27 la structure stationnaire obtenue. La figure de gauche est une vue en perspective et la figure de droite est une vue de côté. Une vue de dessus zoomée sur le bord  $x = L$  du canal, est représentée et annotée sur la figure suivante Fig. IV.28.

Comme on le voit sur la figure de gauche, la structure est confinée proche du bord du canal  $x = L$ . De côté, la structure a une forme très proche de celle d'un attracteur (1,1). En revanche, vu de dessus, on voit clairement le caractère tridimensionnel. Deux rebonds ont lieu sur la paroi inclinée. La

---

9. Même si il est de norme infini, on peut définir l'orientation de  $\vec{\nabla}S$  pour des murs verticaux, mais la loi de réflexion d'une onde sur un mur vertical n'a pas tendance à orienter  $\phi$  suivant une direction privilégiée.

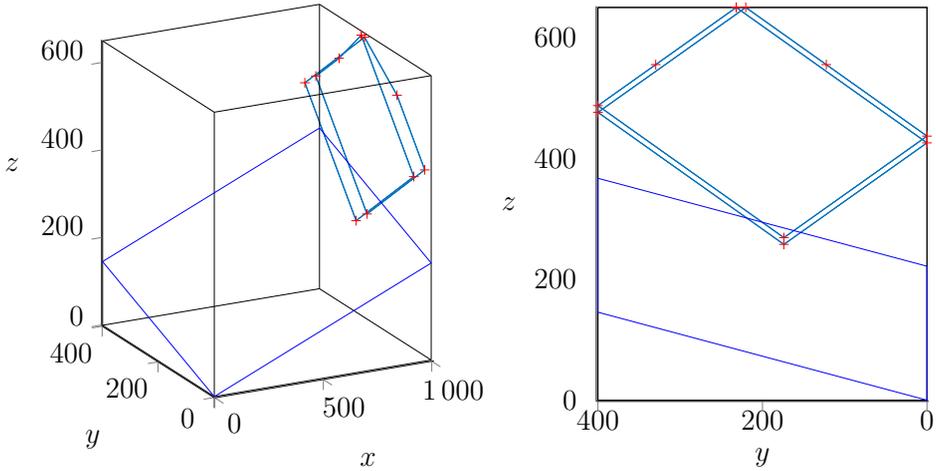


FIGURE IV.27 – Structure stationnaire créée dans le cas 3D pour les paramètres suivants :  $H = 650$ ,  $L = 1000$ ,  $W = 400$ ,  $\theta = 43.2^\circ$ ,  $\alpha = 20^\circ$ ,  $\beta = 12.5^\circ$ . La figure de gauche (resp droite) représente une vue en perspective (resp côté). Une vue de dessus dans laquelle seul le bord du canal a été représenté, est tracée et commentée Fig. IV.28.

succession des rebonds ainsi que les angles de propagation ont été représentés sur la vue de dessus du chemin de l'attracteur Fig. IV.28.

Suivons le trajet d'un rayon sur ce cycle en partant en bas à droite de la structure. Notons  $\phi_1$  l'angle initial, ici négatif. Après un rebond sur la paroi  $x = L$  et un sur la paroi  $y = W$ , le rayon rebondit sur la paroi inclinée. Le nouvel angle de propagation est  $\phi_2 = f_\psi(\pi + \phi_1)$ . Après trois réflexions sur des murs verticaux, le rayon rebondit de nouveau sur la paroi inclinée. Le nouvel angle de propagation  $\phi_3 = f_\psi(-\phi_2)$  doit être égal à  $-\pi - \phi_1$  afin que le rayon parcourt bien un cycle. L'angle  $\phi_1$  vérifie alors l'équation suivante :

$$\phi_1 = -\pi - f_\psi(-\phi_2) \quad (\text{IV.44})$$

$$= -\pi - f_\psi(-f_\psi(\pi + \phi_1)) \quad (\text{IV.45})$$

La résolution analytique de cette équation n'est pas possible, car entre autres,  $f_\psi(-\phi)$  n'est pas facilement simplifiable du fait de la présence de  $\psi$  qui brise la symétrie par rapport à l'axe  $y$ .

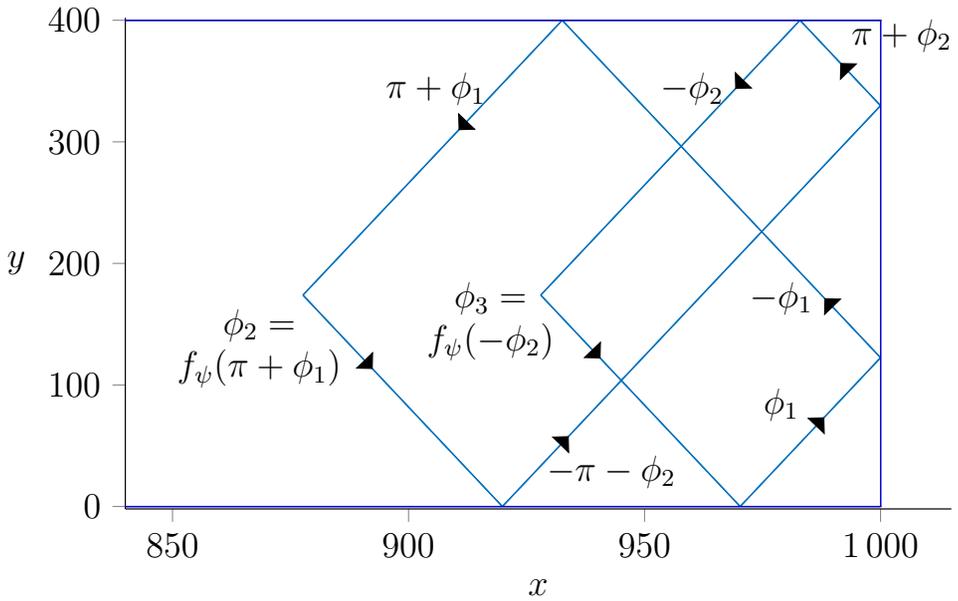


FIGURE IV.28 – Attracteur 3D de la Fig. IV.27 vu de dessus. Seul le bord du canal a été représenté ( $x$  allant de 850 à 1000) afin de mieux visualiser la forme de la structure.

### 3.b Plans de focalisation

Pour ces valeurs de paramètres, les formes des structures stationnaires obtenues ne sont pas toutes les mêmes. Cependant, toutes les structures sont des cycles limites, et ont toutes deux rebonds sur la paroi  $x = L$ , signe que le mécanisme d'existence de ces différentes structures est le même que celui de la structure présentée Fig. IV.28. Ce comportement diffère de la géométrie de canal simple où les attracteurs, bien que dans des plans différents, avaient tous la même forme. Ici la structure stationnaire créée dépend de la condition initiale<sup>10</sup>.

On montre Fig. IV.29 les structures stationnaires obtenues, pour les mêmes paramètres géométriques que précédemment, pour différentes valeurs de  $\phi_0$  (à gauche) et pour différentes valeurs de  $y_0$  et  $z_0$  (à droite).

On voit bien que malgré une légère variation dans la structure, le cycle limite est quasiment le même pour toutes les conditions initiales. On se rapproche donc du cas précédent, mais cette fois-ci, les attracteurs ne peuvent

10. Ce cas est également possible dans certaines géométries 2D.

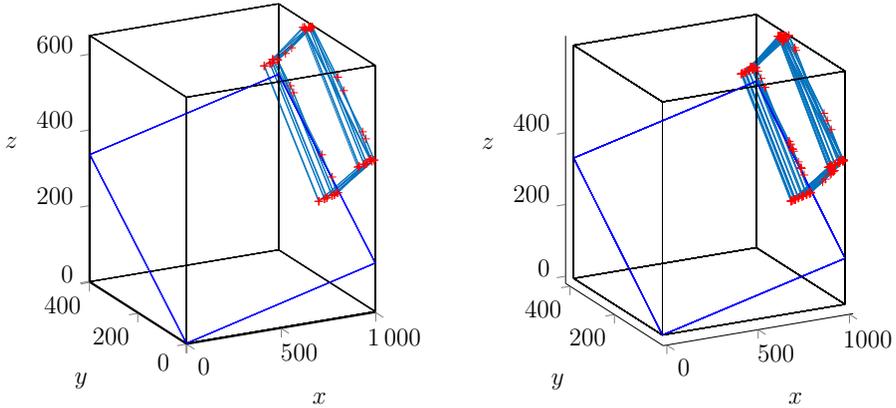


FIGURE IV.29 – Attracteurs obtenus pour différentes conditions initiales, en faisant varier  $\phi_0$  entre  $-80^\circ$  et  $80^\circ$  (à gauche) et en faisant varier  $y_0$  entre 0 et  $W$  ainsi que  $z_0$  entre 0 et  $H$  (à droite). Les paramètres géométriques restent les mêmes que dans la figure précédente.

être créés que très proche de la paroi  $x = L$ . Le changement de géométrie dans la longueur du canal fait que les zones de piégeage qui avant se répartissaient sur toute la longueur du canal, sont maintenant confinées dans une région beaucoup plus restreinte. On a donc un "super" attracteur dans le sens où l'énergie est focalisée dans une région beaucoup plus petite que précédemment.

### 3.c D'autres formes d'attracteurs 3D

Ici les valeurs sont telles qu'un seul rebond suffit pour piéger l'onde. Mais pour des valeurs plus faible de  $s$  et plus importantes de  $\psi$ , l'onde peut mettre longtemps avant de se piéger. La Fig. IV.30 présente deux exemples de structures plus complexes mais construites sur le même principe de piégeage progressif par les rebonds sur la paroi inclinée puis dépiégeage dû au rebond sur la paroi  $x = L$ .

Nous n'avons exhibé ici que quelques structures 3D stationnaires, toutes utilisant au moins un rebond sur la paroi  $x = L$ . Cependant, du fait de la compétition entre le piégeage de  $\phi$  selon la direction  $\vec{\nabla}S$  et les rebonds sur les parois verticales, d'autres structures plus complexes sont envisageables. De plus, la forte dépendance dans les conditions initiales sur la forme de l'attracteur laisse penser que les *whispering modes* existent plus facilement

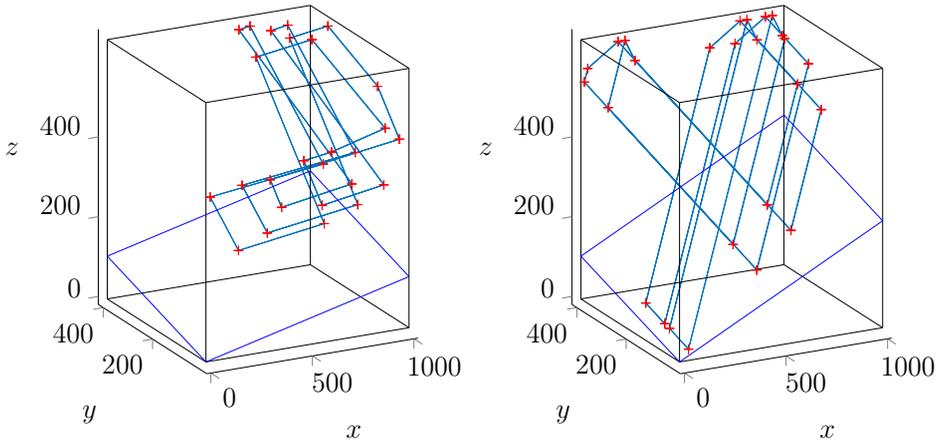


FIGURE IV.30 – Deux autres attracteurs obtenus. Pour la figure de gauche (resp. droite) les valeurs des angles sont :  $\alpha = 15^\circ$  (resp.  $15^\circ$ ),  $\beta = 7.3^\circ$  (resp.  $15^\circ$ ) et  $\theta = 30^\circ$  (resp.  $35^\circ$ ). Les autres paramètres restants inchangés par rapport au tracé précédent.

dans ces géométries.

## Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons d'abord rappelé les principales caractéristiques de la propagation en trois dimensions. Celle-ci présente une complexité bien plus grande que la propagation en deux dimensions, bien que la relation de dispersion reste inchangée par rapport à la propagation bidimensionnelle. La propagation des ondes sur un cône au lieu d'une croix fait apparaître un nouvel angle de propagation  $\phi$  qui permet de décrire la position de l'onde dans le plan horizontal. Nous avons étudié l'évolution de cet angle lors de réflexions sur des plans inclinés. Cette étude a montré l'apparition d'un phénomène très intéressant, que nous avons appelé piégeage, qui tend à aligner  $\phi$  avec le gradient de la pente inclinée lors de rebonds successifs sur cette pente.

Nous avons ensuite étudié en détail ce piégeage dans la géométrie simple d'un canal invariant par translation. La géométrie transverse est celle du trapèze étudié dans le chapitre précédent. Cette analyse a permis de faire le lien entre l'existence du piégeage et la présence d'attracteurs bidimensionnels. La

différence fondamentale est que dans le cas tridimensionnel, il n'existe pas qu'un seul attracteur vers lequel tous les rayons convergent, mais une infinité répartie suivant la longueur du canal. L'étude expérimentale de ce cas sera traitée dans le chapitre suivant.

Nous avons ensuite modifié la géométrie de ce canal suivant la longueur, brisant ainsi l'invariance par translation, pour faire un pas supplémentaire vers une structure réaliste. Dans cette nouvelle géométrie, nous avons montré qu'il n'existe pas d'attracteurs bidimensionnels. En effet, le phénomène de piégeage menant à un attracteur impose un certain nombre de contraintes. Il doit exister un plan dans lequel  $\vec{\nabla}S$  est inclus en tout point au contour de ce plan et que les parois verticales soient perpendiculaires à ce plan. Dans ce cas, si une onde se retrouve piégée dans ce plan, elle le reste.

Nous avons cependant exhibé, dans notre géométrie 3D, une structure tridimensionnelle, ayant des propriétés très similaires à des attracteurs. Cette structure est unique ce qui fait qu'expérimentalement il serait aisé de l'observer. Comme nous allons le voir dans le chapitre suivant, dans le cas des attracteurs 2D, il est facile d'identifier la structure du champ de vitesse, mais comme l'énergie est répartie sur une grande zone de l'espace, une étude énergétique est difficile. Pour la structure 3D de quasi-attracteur, toute l'énergie est concentrée sur le bord de la cuve, ce qui est facilement observable. Cependant, la structure précise de l'attracteur et sa forme tridimensionnelle sont plus complexes à analyser.



# Chapitre V

## Attracteurs 3D : Étude expérimentale

---

<b>A</b>	<b>Effets 3D sur la géométrie trapézoïdale . . . . .</b>	<b>154</b>
1.	Prédiction par tracés de rayons . . . . .	154
2.	Dispositif expérimental . . . . .	157
3.	Étalement de l'attracteur . . . . .	158
3.a	Régime stationnaire . . . . .	159
3.b	Régime transitoire . . . . .	160
<b>B</b>	<b>Piégeage dans un canal . . . . .</b>	<b>162</b>
1.	Choix des paramètres . . . . .	163
2.	Dispositif expérimental . . . . .	164
3.	Piégeage des ondes . . . . .	164
4.	Localisation du piégeage . . . . .	167

---

Les résultats principaux de ce chapitre ainsi que quelques résultats fondamentaux du chapitre précédent sur la propagation en trois dimensions font l'objet de la publication suivante :

G. PILLET, E. V. ERMANYUK, L. R. M. MAAS, I. N. SIBGATULLIN AND T. DAUXOIS, Internal Wave Attractors in 3D Geometries : trapping by oblique reflection, *Journal of Fluid Mechanics*, 2018, **845**, 203–225.

## Introduction

Dans ce chapitre, nous allons mettre en évidence de manière expérimentale le phénomène de piégeage, explicité au chapitre précédent, et ce grâce à deux dispositifs différents.

Le premier dispositif expérimental est identique à la géométrie trapézoïdale étudiée en deux dimensions, sauf que la largeur de la cuve est bien plus grande, afin de considérer les effets tridimensionnels. Avec cette géométrie, nous cherchons à comprendre quels sont les effets de la propagation tridimensionnelle sur une situation bien connue de création d'attracteur.

Le deuxième dispositif expérimental est une géométrie de canal dont le fond est une pente inclinée. Avec ce dispositif, on cherche tout d'abord à mettre en évidence le piégeage. On verra que ce piégeage peut être localisé dans une région de l'espace en fonction des paramètres de forçage et de la géométrie.

## A Effets 3D sur la géométrie trapézoïdale

Expérimentalement, il est plus simple de partir d'une expérience déjà étudiée, et de la complexifier légèrement. C'est ce que nous avons choisi de faire ici en partant de la géométrie de l'attracteur 2D présentée chapitre 2, que nous avons agrandie suivant la largeur afin de faire entrer en jeu les effets 3D, négligeables jusqu'alors [13]. Cette géométrie, représentée Fig. V.1 est tridimensionnelle pour deux raisons :

- La largeur de la cuve n'est pas négligeable devant les autres dimensions.
- le forçage n'a pas lieu sur toute la largeur de la cuve.

La question est alors de savoir, dans le cas d'attracteurs (1,1), ce qui diffère de la situation 2D. Que se passe-t-il au centre de la cuve ? Et sur les côtés, là où le forçage n'a pas lieu ?

Avant toute chose, notons que dans cette géométrie, on s'attend à un effet de piégeage suivant  $x$ . En effet, le vecteur  $\vec{\nabla}S$  est orienté cette fois suivant  $x$ , la référence  $\phi = 0^\circ$  est alors prise suivant l'axe  $x$ .

Nous visualiserons le mouvement à l'aide de coupes de la cuve suivant des plans  $xz$ , à différentes positions dans la dimension transverse  $y$ .

### 1. Prédiction par tracés de rayons

Un autre intérêt de réaliser des expériences dans une géométrie tridimensionnelle, est de tester les prédictions de notre algorithme de tracé de



FIGURE V.1 – Représentation du dispositif expérimental de la géométrie trapézoïdale vue en perspective (figure de gauche) et de dessus (figure de droite). Les paramètres pour cette expérience sont  $H = 320$  mm,  $L = 570$  mm,  $W = 800$  mm,  $\alpha = 57^\circ$ .

rayons en trois dimensions, et notamment de vérifier si l'effet de piégeage prédit existe vraiment. Le générateur d'onde, situé à  $(x = 0, y = 0)$  sur la figure V.1, est composé de plaques ayant un mouvement oscillant suivant  $x$ . Théoriquement, les ondes générées devraient avoir un angle de propagation  $\phi = 0^\circ$  dès leur création, c'est-à-dire être directement piégées suivant l'axe  $x$ . Dans ce cas, les tracés de rayons de notre algorithme se ramènent à des tracés en deux dimensions. Et comme la géométrie transverse est un trapèze avec des valeurs de  $d$  et  $\tau$  donnant un attracteur (1,1), on obtient un attracteur dans la zone de forçage et aucun rayon en dehors.

Afin d'avoir des effets tridimensionnels<sup>1</sup>, nous allons supposer que le générateur ne génère pas que des ondes transverses. Nous supposons que les angles  $\phi$  des ondes créées au niveau du générateur sont non nuls, mais assez faible, de l'ordre de quelques degrés, ce qui reste après tout une hypothèse assez naturelle. Dans ce cas, les ondes ne sont pas piégées initialement et auront alors un parcours tridimensionnel.

Nous effectuons donc des lancers de rayons pour plusieurs angles  $\phi$  proches de  $0^\circ$ . L'angle  $\theta$  reste constant et est choisi pour que les rayons forment un attracteur (1,1). Afin de simplifier les représentations, nous considérerons que tous les rayons sont lancés depuis le centre du générateur en  $x = 0, y = 0$  et  $z = H/2$ .

On trace Fig. V.2 les trajectoires de trois rayons, avec des angles initiaux différents. La trajectoire initiale est représentée en traitillés et le cycle limite obtenu est dessiné en traits plein. Sur la vue en perspective, on reconnaît la

1. et pour anticiper les résultats des expériences

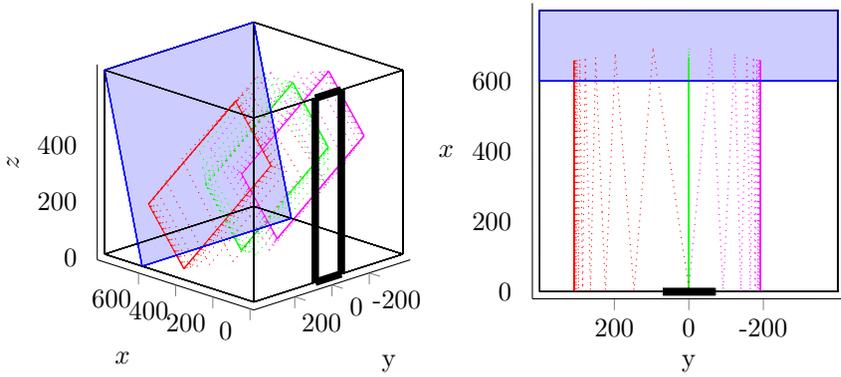


FIGURE V.2 – La géométrie trapézoïdale vue en perspective (figure de gauche) et de face (figure de droite). La pente est représentée par le rectangle bleu incliné. Le générateur est représenté par le rectangle noir dans le plan  $x = 0$ . Les trajectoires de trois rayons partant du centre du générateur, avec différents angles initiaux  $\phi_0$  sont représentées. Pour le rayon vert  $\phi_0 = 0$ , en rouge  $\phi_0 = 7^\circ$  et en magenta  $\phi_0 = -5^\circ$ .

forme d'attracteur (1,1) pour les trois cycles limites finaux. La vue de dessus montre qu'après une propagation tridimensionnelle, les rayons finissent piégés dans des plans  $yz$ . Le rayon vert est bien sûr piégé dès le début car son angle initial est  $0^\circ$ . Les deux autres rayons sont piégés après avoir parcouru une certaine distance, dépendante de l'angle  $\phi$  initial. Si cet effet est présent, on s'attend alors expérimentalement à avoir un champ de vitesse non nul en dehors de la zone de forçage.

Afin de savoir quelle est la répartition de l'énergie en dehors de la zone de forçage, on effectue un nouveau tracé de rayons, dans la géométrie de notre expérience, en prenant plusieurs rayons avec des angles initiaux différents. Sur la figure V.3, nous avons représenté les directions initiales de quelques rayons partant du centre et leurs cycles finaux. Les angles initiaux  $\phi$  sont répartis entre  $-5^\circ$  et  $5^\circ$ . Au vue de la répartition des plans  $yz$  de piégeage, un écart de seulement  $\pm 5^\circ$  en l'angle initial suffit pour que les attracteurs se répartissent sur toute la largeur de la cuve.

Il est difficile de savoir quel est expérimentalement la dispersion angulaire en  $\phi$  générée lors du forçage. Cette dispersion peut *a priori* dépendre de la façon dont sont générées les ondes, de la fréquence de forçage, de la viscosité... Cela étant, on s'attend dans les expériences à ce que les ondes créées aient des angles  $\phi$  initiaux non nuls et donc que les attracteurs ne soient pas répartis

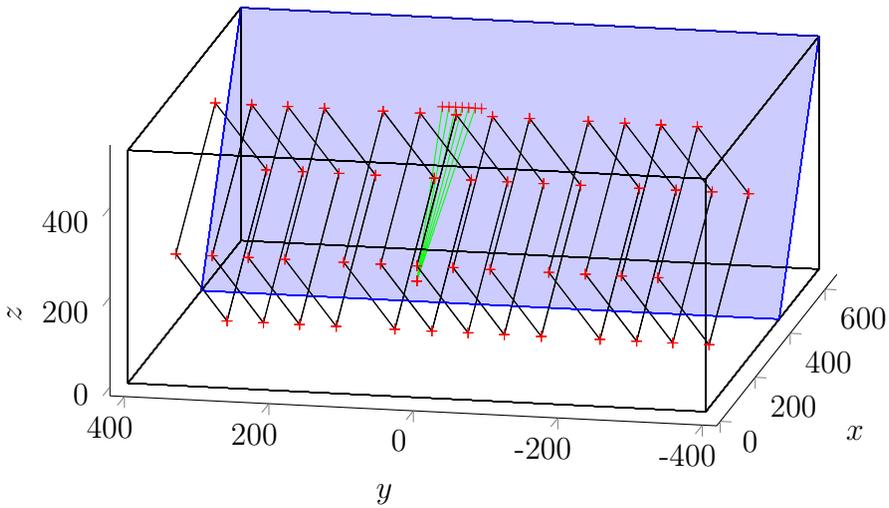


FIGURE V.3 – Tracé de rayons pour les mêmes paramètres géométriques que pour le dispositif expérimental. Les rayons partant du centre du générateur, avec différents angles  $\phi_0$  compris entre  $-5^\circ$  et  $+5^\circ$  sont représentés en vert, et les cycles limites atteints après quelques réflexions sont représentés en noir.

uniquement au centre de la cuve. Si l'effet de piégeage a bien lieu, et que la dispersion angulaire lors du forçage n'est pas négligeable, on devrait observer des attracteurs en dehors de la zone de forçage.

## 2. Dispositif expérimental

Le dispositif expérimental est représenté Fig. V.1. Ce dispositif vu de côté, c'est-à-dire dans le plan  $xz$ , est bien identique à la géométrie 2D étudiée au chapitre III. Nous avons réalisé nos expériences dans une cuve de  $1200 \times 800 \times 400 \text{ mm}^3$ . La géométrie d'étude est définie par  $W$ ,  $L$  et  $H$ . Ces deux derniers paramètres sont ajustables expérimentalement. La pente qui occupe toute la largeur de la cuve, a un angle réglable  $\alpha$  qui peut être supérieur à  $90^\circ$ . La longueur  $L$  de la géométrie est définie comme la plus grande des deux longueurs du trapèze de la géométrie transverse. C'est-à-dire que pour un angle  $\alpha$  supérieur (resp. inférieur) à  $90^\circ$ , la longueur  $L$  est prise en bas (resp. en haut) de la cuve. La hauteur  $H$  de remplissage de la cuve dépend des expériences, mais elle se situe généralement vers  $350 \text{ mm}$ . La stratification de la cuve a été mesurée avec une sonde conductimétrique permettant de connaître la valeur de la fréquence de Brunt-Vaisala  $N$ . Dans ces expériences,

la fréquence typique de travail est  $N = 0.8 \text{ rad.s}^{-1}$ .

La génération d'ondes internes se fait à l'aide du même générateur que précédemment qui permet de choisir la fréquence, la longueur d'onde verticale, et le nombre de longueurs d'onde contenues dans le faisceau d'onde plane forcée. Rappelons que ce générateur est large de 150 mm, ce qui correspond ici à un forçage sur moins de 20% de la largeur seulement. Pour toute nos expériences dans cette géométrie, l'oscillation du générateur est de la forme :

$$\zeta(z, t) = a \sin(\omega t) \cos(\pi z/H) \quad (\text{V.1})$$

où  $a = 5 \text{ mm}$  représente l'amplitude du générateur, fixée pour toutes les expériences de cette partie. Rappelons que l'oscillation du générateur à bien sûr lieu suivant  $x$ .

Puisque nous nous intéressons aux mouvements tridimensionnels, nous ne pouvons plus visualiser les ondes avec la méthode de schlieren synthétique, puisque cette méthode moyenne les mouvements sur toute la distance entre la caméra et l'écran. Nous allons donc utiliser la PIV, décrite dans le chapitre I, permettant de visualiser directement le mouvement du fluide en observant le déplacement des particules illuminées par un laser. Pour cela, nous plaçons dans le fluide des particules sphériques de  $10 \mu\text{m}$  de diamètre recouvertes d'argent, que nous illuminons à l'aide de nappes laser créées suivant différents plans  $xz$ . Les nappes lasers sont créées sur le dessus de la cuve à l'aide de miroirs et de deux lentilles divergentes accolées de focales  $-4 \text{ mm}$ . Ce dispositif optique peut coulisser le long de la cuve afin de créer des nappes à différentes valeurs de  $y$ . Les images sont enregistrées avec une caméra AVT (Allied Vision Technologie) Stingray de  $1382 \times 1034$  pixels située environ à  $1700 \text{ mm}$  du bord de la cuve. Un objectif de focale variable est utilisé afin de pouvoir faire facilement la mise au point sur les différentes nappes laser. La fréquence d'acquisition de la caméra est de  $2 \text{ Hz}$  pour toutes les expériences, ce qui est largement suffisant pour résoudre la fréquence principale du signal (qui est de l'ordre de  $0.1 \text{ Hz}$  pour les fréquences que nous utiliserons).

### 3. Étalement de l'attracteur

Nous avons réalisé des expériences visant à recréer les situations classiques déjà étudiées en 2D, mais avec notre dispositif 3D. Nous avons choisi les paramètres  $\alpha = 57^\circ$ ,  $H = 320 \text{ mm}$  et  $L = 360 \text{ mm}$ , ce qui donne des valeurs de  $d$  et  $\tau$  qui correspondent à un point dans la zone d'attracteur (1,1) dans le diagramme des phases présenté dans le chapitre III. Le choix de cette valeur

de l'angle  $\alpha$  peut sembler étrange car ce n'est pas ce qui est habituellement fait dans les expériences 2D.

D'un point de vue expérimental, cela se justifie car les particules de PIV sont ajoutées en haut de la cuve. Un angle  $\alpha$  positif empêche de placer des particules sous la pente, rendant impossible la visualisation du mouvement dans cette zone. Cependant des expériences ont été réalisées avec un angle  $\alpha$  supérieur à  $90^\circ$  pour être exactement dans la même géométrie que dans les expériences 2D. Les données brutes obtenues sont identiques à celles que nous allons présenter, mais elles sont plus bruitées, notamment sous la pente.

### 3.a Régime stationnaire

La première série d'expériences consiste à observer le régime permanent dans plusieurs plans  $xz$  à différents  $y$ . Pour cela, on génère des ondes en continu et on effectue les mesures après environ 120 périodes de forçage<sup>2</sup>. Les résultats sont présentés Fig. V.4.

La figure V.4 présente la projection sur un plan  $xz$  de la norme du champ de vitesse, pour différentes coupes de  $y = 25$  mm à  $y = 275$  mm. Le générateur étant situé à  $y = 0$  mm et faisant 150 mm de large. On observe quasiment le même champ de vitesses sur toutes les coupes réalisées. Signalons que les coupes symétriques pour des valeurs de  $y < 0$  cm ne sont pas représentées, car les plans étant situées plus loin de la caméra, moins de signal PIV parvient jusqu'au capteur et le signal est plus bruité. Nous avons cependant vérifié que les champs de vitesses obtenues étaient qualitativement identiques de part et d'autre de l'origine des  $y$ .

On retrouve bien le résultat prédit par les tracés de rayons, à savoir que la structure d'attracteur se propage sur toute la largeur de la cuve, bien que le forçage n'ait lieu qu'au centre. L'explication que nous fournissent les tracés de rayons nous suggère que le générateur ne force pas strictement les ondes avec un angle  $\phi = 0^\circ$ , mais qu'il existe une certaine dispersion angulaire autour de l'angle de forçage  $0^\circ$ . Les prédictions de la figure V.3 montrant qu'il suffit d'une variation de quelques degrés pour que les ondes générées à partir du centre du générateur se retrouvent sur les bords, cette explication est tout à fait plausible.

Cependant, intuitivement on peut penser à un autre mécanisme beaucoup plus simple et qui ne fait pas intervenir le piégeage, permettant d'expliquer l'invariance du champ de vitesse suivant  $y$ . On peut simplement supposer

---

2. Rien ne prouve pour l'instant que ce temps d'attente soit effectivement suffisant pour être dans le régime stationnaire.

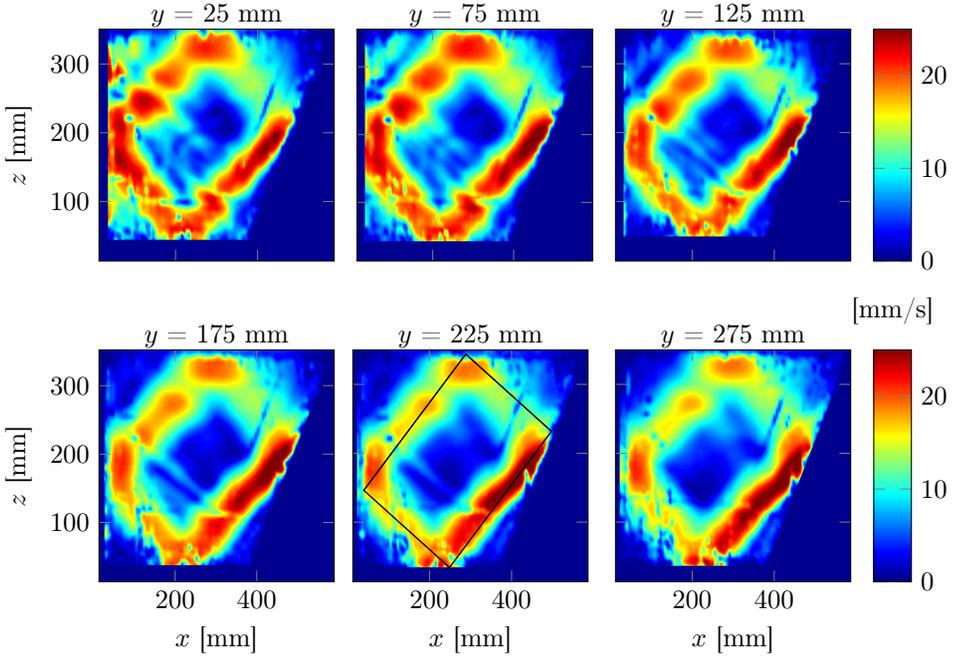


FIGURE V.4 – Norme de la vitesse, filtrée avec la transformée de Hilbert à la fréquence de forçage, pour différents plans  $xz$ . Pour le plan  $y = 225$  mm, le tracé de l’attracteur est superposé au champ de vitesse. Les paramètres expérimentaux sont  $L = 360$  mm,  $W = 800$  mm,  $H = 320$  mm,  $\alpha = 57^\circ$ ,  $N = 1.14$  rad.s $^{-1}$  et  $\omega = 0.515$  rad.s $^{-1}$

que le champ de vitesse est principalement créé dans la zone du forçage, puis qu’il se propage par viscosité vers les bords de la cuve. Afin de savoir si ce mécanisme est envisageable ou non, nous avons effectué une autre série d’expériences, en observant cette fois-ci le régime transitoire.

### 3.b Régime transitoire

Le but de cette étude en régime transitoire est de savoir si un simple mécanisme par viscosité peut expliquer le champ de vitesse des coupes observé Fig. V.4. Si un mécanisme par viscosité est à l’œuvre, le temps d’établissement du régime stationnaire sur les tranches excentrées sera beaucoup plus long qu’au centre. En effet, étant donné le champ de vitesse au centre de la cuve et la viscosité de l’eau, pour avoir des vitesses du même ordre de grandeur sur les côtés, il faudrait attendre de l’ordre de  $10^5$ s soit environ  $10^4$

périodes.

À l'inverse, le mécanisme que nous avons proposé en utilisant le piégeage et le fait que le générateur ne forçait pas les ondes strictement suivant la direction  $x$ , est beaucoup plus rapide. Le temps d'établissement d'une structure d'attracteur est quasiment identique que le rayon soit piégé au centre ou proche d'un bord de la cuve.

Avec exactement la même géométrie que précédemment, nous avons donc étudié l'établissement de l'attracteur pour plusieurs plans  $xz$ . Ainsi, entre chaque mesure, le générateur est éteint, et on attend d'avoir disparition totale du champ de vitesse avant de faire une nouvelle mesure pour une autre valeur de  $y$ .

Sur la figure V.5, nous avons tracé la norme de la vitesse  $\sqrt{v_x^2 + v_y^2}$  suivant l'axe  $z$  en fonction du temps et de la position en  $y$  de la nappe laser. Les oscillations à la fréquence  $2\omega_0$ , comme présentées dans le chapitre III ont été retirées afin de ne se concentrer que sur le régime transitoire.

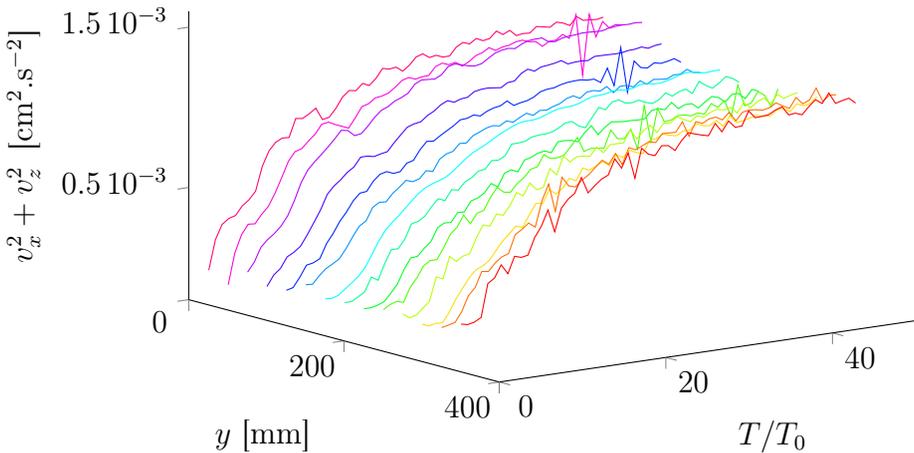


FIGURE V.5 – Évolution de  $v_x^2 + v_z^2$  en fonction du temps, pour des valeurs de  $y$  comprises entre 25 mm et 350 mm. Les oscillations à la fréquence de forçage ont été enlevées du signal afin de mieux visualiser le régime transitoire.

On voit bien que, pour toutes les coupes, du milieu à un bord de la cuve, tous les attracteurs croissent avec le même temps caractéristique et atteignent le régime stationnaire au bout de environ 30 périodes. Cette série d'expériences permet donc d'infirmer le mécanisme intuitif de propagation par viscosité. À elles seules, ces expériences ne permettent pas d'affirmer de

manière certaine que l'explication avec le piégeage est la bonne, mais elles donnent de forts arguments en sa faveur. Cette étude du régime transitoire nous permet également de vérifier *a posteriori* que la première expérience présentée Fig. V.4, effectuée après 120 périodes de forçage, correspondaient bien au régime stationnaire.

En conclusion, dans cette partie nous avons modifié la géométrie classique bidimensionnelle de trapèze. Dans cette nouvelle géométrie 3D, le forçage n'a lieu que sur 150 mm au milieu de la cuve, d'une largeur de 800 mm. Notre but était alors d'étudier le champ de vitesse en dehors de la zone de forçage. Nos expériences montrent que la structure d'attracteur est quasi invariante le long de la cuve. De plus, une étude du régime transitoire dans de nombreuses coupes de la cuve montre que le temps de création des attracteurs est identique sur toute la cuve, donnant du poids au mécanisme de piégeage.

L'effet de piégeage est donc bien présent dans cette expérience, mais peu spectaculaire, car les ondes sont forcées avec un angle déjà proche de  $0^\circ$ . La prochaine expérience a pour but de rendre l'effet de piégeage encore plus visible.

## B Piégeage dans un canal

L'expérience développée dans cette partie a été en partie imaginée à partir d'observations *in situ* faites dans l'estuaire du canal Saint Laurent situé au Canada [92]. Dans cet estuaire, des ondes internes de fortes amplitudes sont générées par la marée [15, 24]. Cependant des mesures d'amplitude quelques dizaines de kilomètres en aval de la zone de génération montrent que les ondes internes ont été grandement atténuées. Cette atténuation ne peut s'expliquer à l'aide de la viscosité, trop faible pour avoir un rôle sur de si courtes distances [2]. Le phénomène de piégeage semble un bon candidat pour expliquer cette diminution importante des ondes. En effet, si les ondes sont piégées selon la direction transverse au canal, la quantité d'ondes se propageant à une certaine distance est fortement diminuée. On cherche donc à reproduire expérimentalement une situation de piégeage d'ondes internes dans un canal. La bathymétrie de l'estuaire considéré est plutôt simple et peut se modéliser assez facilement par une géométrie transverse de parabole, quasi invariante dans le sens de propagation du canal. Nous allons encore simplifier cette modélisation en ne considérant qu'une unique pente d'angle  $\alpha$  sur toute la largeur du canal, comme représenté sur la figure V.6.

Cette simplification permet d'alléger la mise en place de l'expérience. On retrouve également la géométrie étudié dans le chapitre précédent, ce qui va



FIGURE V.6 – Dispositif expérimental de la géométrie de canal : Vue de perspective (figure de gauche) et de côté (figure de droite). Les paramètres utilisés pour cette expérience sont  $H = 360$  mm,  $L = 1000$  mm,  $W = 410$  mm et  $\alpha = 23^\circ$ .

nous permettre de nous appuyer sur les tracés de rayons pour trouver les bons choix de paramètres et interpréter les résultats.

## 1. Choix des paramètres

Contrairement à l'océan, dans nos expériences, du fait des relativement faibles longueurs d'ondes, la viscosité joue un rôle important. On souhaite alors prendre des paramètres amenant à un piégeage rapide. C'est-à-dire que l'on ne va pas considérer tous les cas où l'onde est piégée après de nombreux rebonds sur les extrémités  $x = 0$  et  $x = L$  de la cuve. Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, le meilleur candidat pour un piégeage rapide est la structure d'attracteur (1,1).

En plus de mettre en évidence le piégeage, nous souhaitons montrer la localisation du piégeage, c'est-à-dire le fait que les attracteurs formés, sous certaines conditions d'excitations, ne se répartissent pas entièrement dans la cuve, à la différence de la première expérience présentée dans ce chapitre.

Résumons alors toutes les contraintes expérimentales que nous devons prendre en compte pour prendre les meilleurs paramètres :

- Le piégeage doit se faire sur une distance assez faible devant l'atténuation visqueuse, mais ne doit pas avoir lieu trop près de la génération des ondes. La distance typique d'atténuation visqueuse dépend de la longueur d'onde, mais dans nos expériences, elle est de l'ordre du mètre.
- Le piégeage doit se faire sur une zone de taille faible devant la longueur

de la cuve, typiquement de l'ordre de 200-300 mm.

- Le cycle limite obtenu doit être facilement identifiable. Notamment la branche 1 de l'attracteur ne doit pas être trop proche de la pente, mais l'attracteur ne doit pas être non plus trop étroit.

L'optimisation de ces contraintes à été faite grâce aux études par tracés de rayons. Pour cela, nous avons considéré la distance moyenne parcouru par les rayons avant d'être focalisés, en fonction de la géométrie, l'angle et de la position du forçage. Cette étude nous a amené à prendre les paramètres suivants :  $H = 360$  mm,  $L = 1000$  mm,  $W = 410$  mm et  $\alpha = 23^\circ$ . Le forçage se fera à un angle proche de  $30^\circ$ . Deux types de forçage seront utilisés par la suite, selon que l'on souhaite étudier seulement le piégeage (Partie 3.) ou la localisation de ce piégeage (Partie 4.).

## 2. Dispositif expérimental

Pour ces expériences, le dispositif expérimental et les méthodes de visualisations sont identiques à celles présentées Section 2.. Une différence majeure réside dans le fait que la pente occupe cette fois toute la largeur  $W$  de la cuve et est inclinée d'un angle  $\alpha$ . La longueur de la pente étant fixée, l'angle  $\alpha$  dépend de  $W$ . La largeur de la cuve peut être artificiellement modifiée en disposant une plaque amovible sur toute la longueur  $L$ , ce qui permet de choisir  $\alpha$ . Le dispositif expérimental est représenté Fig. V.6.

## 3. Piégeage des ondes

Avant de faire des expériences visant à montrer la localisation des attracteurs, cherchons d'abord à montrer le piégeage, c'est à dire la convergence de la propagation des ondes dans des plans  $yz$ . Pour cela nous utilisons un forçage de type mode 1, créant des ondes avec des grandes longueurs d'ondes, et ainsi moins sujettes à l'atténuation. Le champ de vitesse pour un plan  $yz$  à  $x = 700$  mm est visible figure V.7.

Les traits noirs superposés à l'image représentent la trajectoire finale des ondes, donnée par les tracés de rayons. La simulation a été effectuée pour la même géométrie et pour la même fréquence de forçage que dans l'expérience. Qualitativement, on observe bien un champ de vitesse qui ressemble à celui d'un attracteur et qui correspond à celui attendu par les tracés de rayons.

Quantifions maintenant l'effet de piégeage. Pour cela, nous avons envisagé deux options. La première est de s'intéresser à la répartition énergétique dans le canal. En effet, si le piégeage est fort, l'énergie va rester concentrée dans la zone de forçage et être très faible après. Cependant cette méthode n'a pas

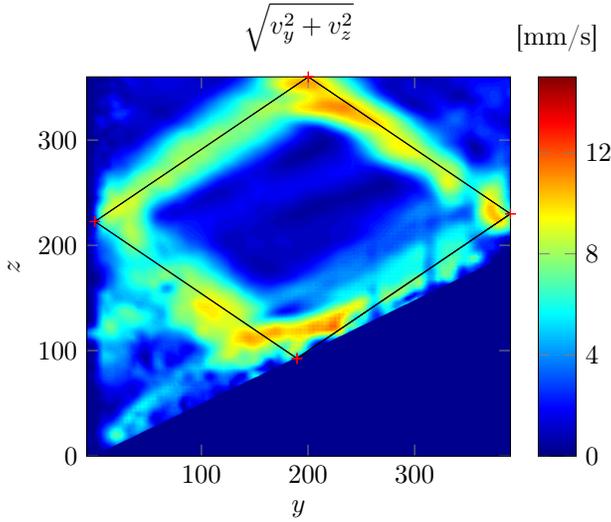


FIGURE V.7 – Amplitude de la norme de la vitesse, filtré avec la transformée de Hilbert à la pulsation de forçage  $\omega = 0.51 \text{ rad.s}^{-1}$  (avec  $N = 1.0 \text{ rad.s}^{-1}$ , pour la coupe à  $x = 700 \text{ mm}$ ). La trajectoire finale obtenue par les tracés de rayons est superposée à l'image. Le forçage est réalisé par un mode 1 d'amplitude 5 mm.

aboutie.

La seconde idée est de s'intéresser à l'angle de propagation des ondes. Dans les tranches étudiées, on a accès à la projection suivant un plan  $yz$  du champ de vitesse total. Si le piégeage est total, la projection du champ sur la coupe est équivalent au champ total. On définit l'angle de propagation transverse  $\theta_{\perp} = \arcsin(k_z/k_{\perp})$ , où  $k_{\perp} = (k_y^2 + k_z^2)^{1/2}$ . La comparaison de cet angle avec l'angle imposé par la fréquence de forçage  $\omega$  du générateur permet alors de quantifier l'effet de piégeage.

Pour calculer  $\theta_{\perp}$  de manière précise, on procède en plusieurs étapes :

- On effectue une transformée de Hilbert à la fréquence  $\omega$  sur le champ de vitesse  $\vec{v}(y, z, t)$ .
- On calcule l'énergie  $E_{\omega}(y, z, t)$  à partir du champ de vitesse  $\vec{v}_{\omega}(y, z, t)$ .
- On utilise une transformée de Fourier en espace pour passer de  $E_{\omega}(y, z, t)$  à  $E_{\omega}(k_y, k_z, t)$ .
- On utilise un changement de variable pour exprimer l'énergie en fonction de  $\vec{k}_{\perp}$  et  $\theta_{\perp}$ .
- On intègre l'énergie sur  $\vec{k}_{\perp}$  pour obtenir  $E_{\omega}(\theta_{\perp}, t)$ .

- On moyenne temporellement afin d'obtenir  $\langle E_\omega(\theta_\perp) \rangle_t$  noté par la suite  $E(\theta_\perp)$

Avoir avoir vérifié cette méthode sur des attracteurs 2D, appliquons-la aux ondes observées Fig. V.7 et traçons Fig. V.8 l'énergie  $E_\omega(\theta_\perp)$ .

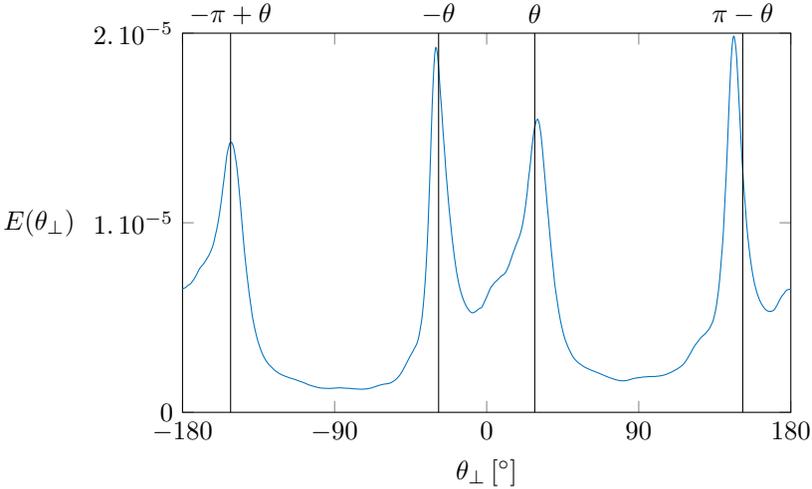


FIGURE V.8 – Répartition angulaire de la densité d'énergie  $E(\theta_\perp)$  pour le champ de vitesse filtré de la figure V.7. Les quatre lignes verticales représentent les quatre valeurs d'angles de propagation attendues compte tenu de la fréquence de forçage.

Les lignes verticales noires sont situées aux quatre abscisses où l'on s'attend à trouver de l'énergie, c'est à dire  $\theta$ ,  $-\theta$ ,  $-\pi + \theta$ ,  $\pi - \theta$ . Sur la Fig. V.8, on voit bien que la répartition énergétique se fait autour de ces axes verticaux, signe que l'onde vérifie bien la relation de dispersion. On peut conclure que, dans le cas du champ de vitesse présenté Fig. V.7, la propagation se fait en très grande majorité dans le plan de la nappe laser, signe donc d'un piégeage quasi-total.

La figure précédente nous permet d'affirmer que le piégeage a bien eu lieu dans cette expérience. Comparé à l'expérience de la partie précédente, ce piégeage est bien plus important, car l'angle  $\phi$  initial de forçage des ondes est proche de  $90^\circ$  et l'angle  $\phi$  final de propagation est nul.

La série suivante d'expériences vise à montrer que le piégeage peut être localisé dans une portion de la cuve. Cela permettra entre autres d'affirmer expérimentalement que le bord  $x = L$  de la cuve n'est pas nécessaire pour le piégeage. Ce qui donnera un plus grand poids quant à l'application de ces

études et du phénomène de piégeage dans des cas océaniques tel que l'estuaire du Saint Laurent.

#### 4. Localisation du piégeage

Pour arriver à obtenir un piégeage localisé dans notre cuve de "seulement" 1200 mm de long, nous devons cette fois générer des ondes sur une zone plus restreinte de l'espace. Afin de trouver les paramètres optimaux pour le forçage, on s'aide d'une simulation de tracé de rayons identique à celle présentée Fig. IV.16 du chapitre IV. On calcule les trajectoires des rayons d'ondes internes pour toutes les positions initiales  $(y, z)$  disponibles et on note la valeur  $x_\infty$  atteinte par les rayons lorsqu'ils finissent piégés. On obtient, pour les paramètres de l'expérience, la figure suivante.

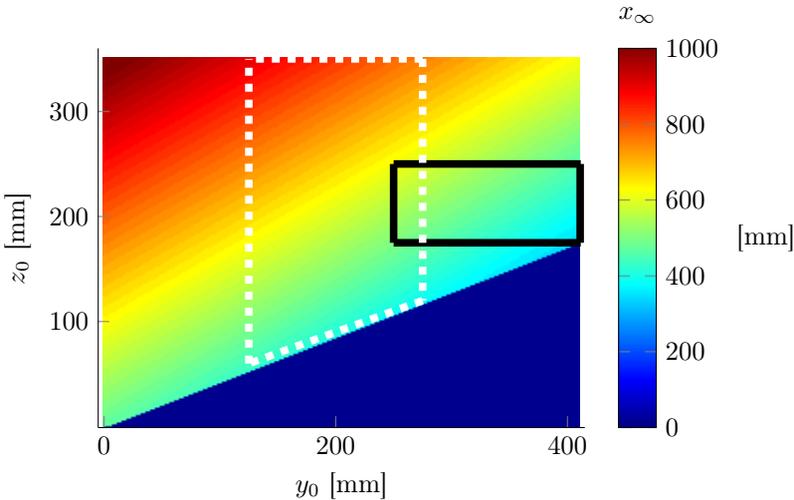


FIGURE V.9 – Carte des valeurs de  $x_\infty$  en fonction des paramètres initiaux  $y_0$  et  $z_0$ . Les autres paramètres de lancers sont  $x_0 = 0$  et  $\phi_0 = 90^\circ$ . Les paramètres de la géométrie correspondent à ceux de l'expérience. La région en traitillés blancs représente la localisation du forçage utilisée pour obtenir la figure V.7. La région en noir représente la localisation du forçage utilisé pour obtenir la figure V.10. Le triangle bleu correspond à la zone sous la pente, auquel nous ne nous intéressons pas.

On observe une forte dépendance de  $x_\infty$  en la position de forçage. La zone représentée en blanc correspond à l'emplacement du générateur dans le cas de l'expérience présentée Fig. V.7. On voit que dans ce cas on génère des attracteurs sur une grande région de la cuve, ce qui ne permet pas de montrer

la localisation. Nous devons alors prendre en compte plusieurs contraintes si l'on veut observer une localisation du piégeage :

- La zone de forçage doit se faire sur une hauteur réduite, afin de ne pas exciter une trop grande zone en  $x$  dans la cuve.
- La longueur d'onde typique du forçage ne doit pas être trop faible, afin de diminuer la dissipation.
- Les attracteurs générés ne doivent pas être situés trop près, ni trop loin du générateur, afin de visualiser une évolution de l'angle  $\theta_{\perp}$ .

L'optimisation des trois arguments ci-dessus nous ont amené à prendre un forçage de la forme d'un faisceau d'ondes plane, contenant une seule longueur d'onde de valeur  $\lambda = 75$  mm centré en ( $y = 325$  mm,  $z = 195$  mm). L'emplacement de ce forçage dans la largeur de la cuve est représenté par les traitillés noirs Fig. V.9. Ce forçage génère alors théoriquement une zone de piégeage située entre  $x = 400$  mm et  $x = 600$  mm.

Nous réalisons donc, avec ce forçage, et toujours dans la même géométrie, des mesures en régime stationnaire, en observant les champs de vitesse sur des tranches de  $x = 50$  mm à  $x = 700$  mm. On représente Fig. V.10 la norme du champ de vitesse filtré à la fréquence de forçage. Les tranches pour des valeurs de  $x$  supérieures à 400 mm n'ont pas été représentées car le champ de vitesse était négligeable dans cette région.

Qualitativement, on observe bien ce qu'on recherchait, c'est à dire une zone de piégeage localisée. En effet, avant  $x = 100$  mm on observe une forte amplitude, mais sans structure particulière. Entre  $x = 100$  mm et  $x = 250$  mm, on observe bien que l'énergie se structure sous la forme d'un attracteur (1,1). Puis, après  $x = 300$  mm, l'énergie est atténuée et possède moins la forme d'attracteur attendue.

Pourquoi une telle différence sur la position de la zone de piégeage, entre la valeur estimée (400 – 600 mm) et la valeur observée (100 – 250 mm)? Plusieurs raisons sont envisageables.

La première est que la carte Fig. V.9 varie fortement en fonction des paramètres géométriques. Une erreur de quelques dixièmes de degrés sur l'angle de la pente peut entraîner un changement important de la position de la zone de piégeage. De même, la couche homogène présente en haut de la cuve modifie la hauteur  $H$ . On a également montré dans le chapitre II que la couche limite a une forte importance sur la réflexion des ondes. L'onde voit alors une géométrie effective lissée par rapport à la géométrie que l'on impose. Tout cela fait que les paramètres géométriques ne peuvent pas être estimés très précisément.

Une deuxième raison est que, pour tracer la carte Fig. V.9, on a consi-

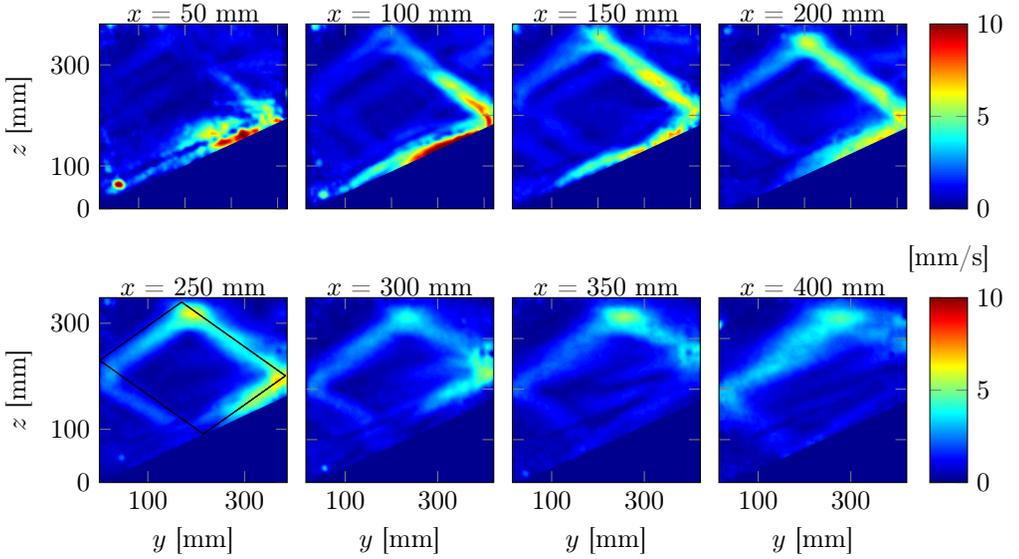


FIGURE V.10 – Amplitude de la norme de la vitesse, filtrée avec la transformée de Hilbert à la fréquence de forçage, pour différents plans  $yz$ . Pour le plan  $x = 250$  mm, les tracés de rayons obtenus sont superposés au champ de vitesse. Les paramètres expérimentaux sont  $L = 1000$  mm,  $W = 410$  mm,  $H = 360$  mm,  $\alpha = 23^\circ$ ,  $N = 0.89$  rad.s $^{-1}$  et  $\omega = 0.45$  rad.s $^{-1}$ . Le forçage se fait par un faisceau d'onde plane d'amplitude 5 mm et contenant une seule longueur d'onde de valeur 75 mm.

déré que les ondes étaient générées avec un angle  $\phi_0 = 90^\circ$ . Comme on l'a montré dans la partie A, pour un forçage de type mode 1, ce n'est pas le cas. Il est très difficile d'estimer la répartition de l'énergie forcée en fonction de l'angle. Cette répartition dépend *a priori* de la forme, de la fréquence et de l'amplitude du forçage... Comme pour la géométrie, la carte des positions  $x_\infty$  dépend aussi fortement de  $\phi_0$ .

Afin de quantifier ce piégeage, nous allons calculer la direction de propagation des ondes pour chaque tranche en  $x$ . Cependant, on ne peut pas aveuglément prendre l'abscisse du maximum dans la courbe de  $E_\omega(\theta)$  et décrire que cela représente l'angle de propagation. En effet, parfois l'énergie n'est pas piquée autour d'une valeur, et ainsi prendre le maximum ne correspond à rien. On donne un exemple Fig. V.11 de l'évolution de  $E(\theta_\perp)$  d'un champ de vitesse filtré spatialement par transformée de Hilbert pour  $k_y > 0$

et  $k_z > 0$ , correspondant donc à une branche d'un attracteur.

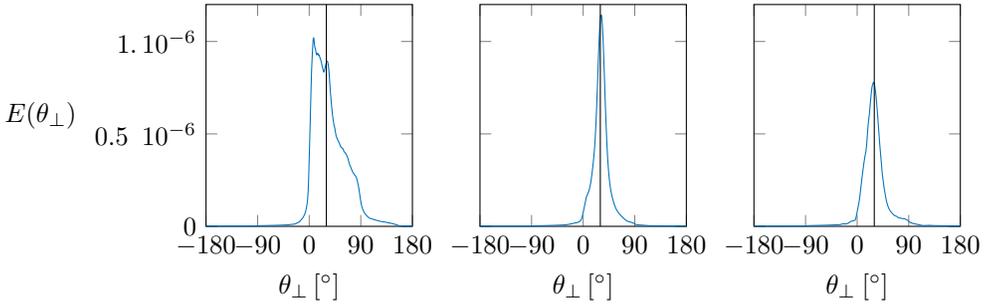


FIGURE V.11 – Exemple de la répartition angulaire de l'énergie  $E(\theta_\perp)$  pour la norme de la vitesse filtrée temporellement et spatialement pour  $k_z, k_y > 0$  pour trois plans  $yz$ .  $x = 50$  mm (resp. 250 mm, 450 mm) pour la figure de gauche (resp. milieu, droite).

On observe, proche du générateur ( $x = 50$  mm, courbe de gauche), que l'énergie ne se propage pas à la valeur attendue, représentée par la ligne verticale noire. L'énergie n'est pas non plus centrée sur un seul pic. Une partie de l'onde se propage quasiment transversalement à la nappe laser. Pour des  $x$  plus éloignés ( $x = 250$  mm, courbe du centre), l'énergie est quasi-entièrement focalisée autour d'un seul pic dont la valeur correspond à celle attendue par la relation de dispersion : le piégeage a eu lieu et les ondes se propagent quasiment suivant la nappe laser. Plus loin en aval ( $x = 450$  mm, courbe de droite), les ondes se propagent toujours à la valeur attendue, mais l'énergie est beaucoup moins importante. Cette décroissance est à la fois due au piégeage qui a eu lieu en amont et à l'amortissement visqueux.

Afin de savoir quand il est pertinent de prendre la position du maximum de l'énergie en fonction de  $\theta_\perp$ , Nous introduisons la quantité suivante :

$$R = \frac{\max(E(\theta_\perp))}{\int_{tranche} (v_y^2 + v_x^2) dy dz} \quad (\text{V.2})$$

qui est le rapport entre l'amplitude du pic dans le graphe  $E = f(\theta_\perp)$  et l'énergie totale présente dans la tranche. Si  $R$  est relativement grand, cela signifie que l'énergie est principalement focalisée autour d'un unique pic, et ainsi regarder la position du pic a du sens. À l'inverse, si cette quantité est faible, on ne peut pas définir de pic principal, ni de direction privilégiée de propagation de l'énergie.

On calcule alors ce rapport pour les deux branches les plus énergétiques, c'est-à-dire les branches 2 ( $k_y, k_z < 0$ ) et 1 ( $k_z < 0 < k_y$ ).

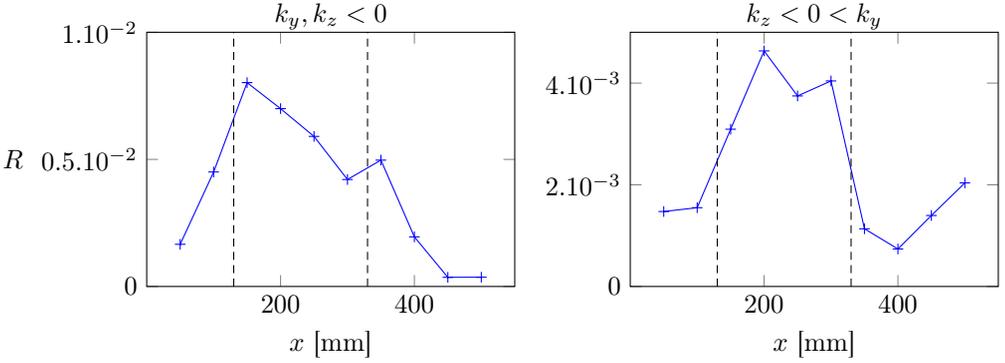


FIGURE V.12 – Rapport  $R$  en fonction de la position  $x$  du plan  $yz$ , pour les deux branches les plus énergétiques de l'attracteur. La branche 2 ( $k_y, k_z < 0$ ) est représentée à gauche et la branche 1 ( $k_z < 0 < k_y$ ) à droite. Les lignes en traitillés représentent la région où  $R > \max(R)/2$  pour la branche 1.

En s'intéressant à la branche la plus énergétique des deux, c'est à dire la courbe de droite, on peut définir un intervalle de confiance dans lequel  $R > \max(R)/2$ , représenté par les lignes en traitillés Fig. V.12. Dans cet interval, qui correspond à une zone comprise entre  $x = 130$  mm et  $x = 320$  mm, on peut s'intéresser à la position des pics dans les courbes  $E(\theta_\perp)$ . On trace Fig. V.13, pour les deux mêmes branches que précédemment, la position du pic principal en fonction de la position de la tranche en  $x$ .

L'intervalle défini sur la courbe précédente est également représenté sur ces courbes. Dans cet intervalle, on peut s'intéresser aux angles de propagations, et les comparer aux valeurs données par la relation de dispersion. Ces derniers sont représentés par les lignes noires horizontales dans les deux graphes Fig. V.13. On remarque que dans l'intervalle de confiance, la valeur de  $\theta_\perp$  est très proche de celle attendue. En dehors de l'intervalle, la direction de propagation n'est pas clairement définie. On peut donc affirmer que la propagation dans un plan transverse se fait à  $\theta_\perp = \theta$  dans l'intervalle de confiance défini précédemment. Ainsi dans cette zone, le piégeage est quasi total. Avant, la propagation ne s'effectue pas suivant une direction privilégiée, alors qu'après, l'énergie est plus faible. On a bien un piégeage localisé.

Cette expérience montre qu'il est possible d'obtenir expérimentalement un piégeage des ondes et une localisation du piégeage dans une zone réduite. Cette situation pourrait s'appliquer dans les océans, notamment dans

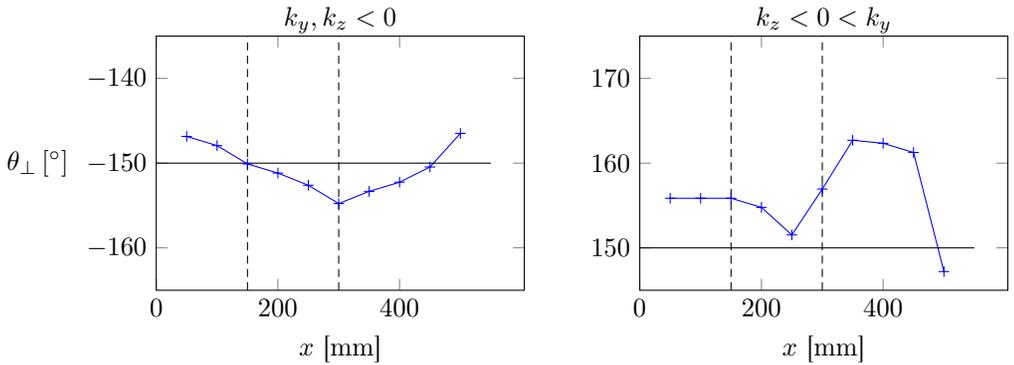


FIGURE V.13 – Position  $\theta_{\perp}$  du maximum d’amplitude de  $E(\theta_{\perp})$  en fonction de  $x$ . Les lignes en traitillés représentent la même zone que définie précédemment. Les lignes noires verticales représentent les valeurs de  $\theta$  attendues par la relation de dispersion.

l’estuaire du Saint Laurent. La topographie de cet estuaire est tel que, par rapport à nos expériences, le canal est très allongé,  $L \gg H, W$ . On peut alors facilement obtenir un piégeage localisé, sans nécessiter de rebond sur le bord  $x = L$  du canal, qui dans la réalité est bien sûr beaucoup plus complexe que dans notre expérience. Quant à la zone de localisation, il faudrait modéliser de manière précise la bathymétrie de cet estuaire pour avoir une idée de sa position par rapport à la zone de génération des ondes.

## Conclusion

Le but des expériences réalisées dans ce chapitre était de montrer de manière expérimentale le phénomène de piégeage des ondes. Pour cela nous avons pris des géométries très simples et similaires à celles étudiées pour comprendre le piégeage dans le chapitre précédent.

Dans les expériences réalisées partie A, on s’est placé dans une géométrie quasi identique à celle des attracteurs 2D, mais dans une cuve large et avec un forçage uniquement au centre de la cuve. On a alors montré expérimentalement que la propagation tridimensionnelle était telle que les attracteurs se répartissaient sur toute la largeur de la cuve. Une étude du régime transitoire dans différentes tranches de la cuve montre que l’établissement de la structure d’attracteur est très rapide, ce qui donne du poids au mécanisme de piégeage.

Dans les expériences de la partie B, notre but était de quantifier le pié-

geage. Bien que le forçage soit suivant  $x$ , les ondes finissent bien piégées dans des plans  $yz$ . Nous avons quantifié cet effet en calculant les angles de propagation des ondes dans les plans observés, et en les comparant aux angles attendus compte tenu de la fréquence de forçage. Dans une deuxième série d'expériences, nous avons montré que ce piégeage pouvait être localisé, c'est-à-dire que les plans  $yz$  dans lesquels convergent les ondes occupent une partie réduite de l'espace. Pour cela nous avons observé les angles de propagation pour différents plans  $yz$  du canal, montrant ainsi que le piégeage n'avait lieu que dans une faible zone de l'espace. Ce piégeage localisé pourrait s'appliquer dans des cas océanographiques tel que celui de l'estuaire du Saint Laurent.



# Chapitre VI

## Génération de courant moyen

---

<b>A</b>	<b>Aspects Analytiques . . . . .</b>	<b>176</b>
1.	Contexte . . . . .	176
2.	Analyse de Fan, Kataoka & Akylas (2018) . . . . .	177
<b>B</b>	<b>Résultats expérimentaux . . . . .</b>	<b>180</b>
1.	Dispositif expérimental . . . . .	180
2.	Génération de courant moyen . . . . .	181
2.a	Visualisation de l'écoulement . . . . .	181
2.b	Régime transitoire . . . . .	183
2.c	Régime permanent . . . . .	185
2.d	Comparaison avec le modèle théorique . . . . .	187

---

## Introduction

Ce chapitre expérimental, s'inscrit dans la continuité des expériences sur la génération de courant moyen réalisées par Guilhem Bordes durant sa thèse à l'ÉNS de Lyon [8]. Ces expériences ont donné lieu à un article dans lequel une description du phénomène est faite, à l'aide de la méthode des échelles multiples [9]. Ces résultats expérimentaux sont également discutés dans les articles [52] et [26].

Des développements théoriques très récents, par Fan, Akylas et & Kataoka [26] nous ont conduit à faire de nouvelles expériences afin de tester les prédictions théoriques. Nous utilisons exactement le même dispositif que Bordes [9], à savoir un générateur placé au centre d'une cuve forçant un faisceau d'ondes planes composée de trois longueurs d'ondes de valeur  $\lambda_z = 38$  mm. Nous réaliserons nos expériences avec deux amplitudes de forçages différentes, afin de tester les modèles dans les cas faiblement et fortement non linéaire.

Le caractère tridimensionnel du dispositif est, comme nous allons le voir, essentiel pour la génération de courant moyen.

## A Aspects Analytiques

### 1. Contexte

Dans le domaine des ondes internes, on appelle courant moyen, un mouvement du fluide à fréquence nulle, par opposition à la propagation d'une onde interne de fréquence non nulle. De par la relation de dispersion, ce courant ne peut être qu'horizontal. La génération de courant moyen sera ici étudiée par le biais de la propagation d'un faisceau d'ondes internes.

La première mention de la génération de courant moyen vient de Lighthill [55]. Il montre qu'à la manière des ondes acoustiques, en considérant des effets dissipatifs et les non linéarités, un faisceau d'ondes internes peut transférer une partie de son énergie à un courant.

Ces idées ont permis à Plumb & McEwan [77] de réaliser la première expérience quantitative de génération de courant moyen dans un fluide stratifié.

Depuis de nombreuses expériences [96] et développements théoriques ont été faits à ce propos. Une revue complète des avancées sur ce sujet à été publiée récemment [18].

Une série d'expériences et de comparaisons numériques, réalisée par Grisouard [39, 41] a montré l'importance des effets tridimensionnels dans la

génération du courant moyen. Depuis des études théoriques et des expériences ont été réalisées en trois dimensions, afin de saisir l'importance d'une dimension transverse sur la génération de courant moyen.

L'étude expérimentale de Bordes [9] est accompagnée d'un modèle théorique utilisant une description en échelles multiples afin de décrire l'évolution de l'enveloppe du faisceau d'ondes. Ce modèle théorique, permet de montrer l'importance de la variation transversale du faisceau dans la génération du courant moyen. Une étude théorique plus poussée du dispositif expérimental [9] à été réalisée par Kataoka & Akylas [52]. Dans cet article, des équations décrivant la création de courant moyen sont résolues numériquement et comparées aux données expérimentales, avec un accord qualitatif. Cependant une des hypothèses dans cet article est de considérer un faisceau étroit, c'est-à-dire que la taille du faisceau est faible devant la taille transversale typique de l'enveloppe. Cette condition n'est pas respectée dans l'expérience puisque la taille du faisceau est de 120 mm, et le forçage a lieu sur 150 mm de large.

Le dernier article de Fan, Kataoka & Akylas [26] prend en compte un modèle plus proche de l'expérience, qui décrit les interactions entre le courant moyen et le faisceau d'onde. Les résolutions numériques des équations qu'ils obtiennent permettent de retrouver des effets observés dans les expériences de Bordes, notamment le fléchissement du faisceau d'onde induit par le courant moyen. Nous allons décrire succinctement la théorie présentée dans l'article [26], et les équations qui y sont résolues, avant de les comparer dans la partie 2.d à nos expériences.

## 2. Analyse de Fan, Kataoka & Akylas (2018)

Cette section a pour but de résumer l'étude de Fan, Kataoka et Akylas [26], en l'adaptant à notre cas, c'est à dire sans rotation ( $f = 0$ ), et avec un changement de repère pour coïncider avec nos définitions. Nous allons cependant garder la plupart des notations et définitions. Entre autres, pour cette partie, nous indiquerons les dérivées partielles spatiales et temporelles par un indice en dessous de la variable dérivée. Ainsi  $U_T = \partial U / \partial T$ . De plus notons ici que toutes les grandeurs considérées dans l'article et dans cette section sont adimensionnées.

Les auteurs établissent les équations d'évolution du courant moyen à partir de la vorticité potentielle. Dans notre cas sans rotation, cette quantité est proportionnelle au rotationnel suivant  $z : \Omega_z = \left( \vec{\nabla} \wedge \vec{v} \right) \cdot \vec{z}$ .

L'importance de cette grandeur à été mise en évidence par Lighthill [56]. La dynamique de  $\Omega_z$  est associ e à un mouvement horizontal à fréquence

nulle, c'est-à-dire au courant moyen. Dans le cas linéaire et sans viscosité, cette dynamique est découplée de la propagation des ondes internes. Cependant en présence de perturbations, ces deux "modes" deviennent couplés, et un transfert d'énergie peut s'effectuer des ondes internes vers le courant moyen (ou réciproquement). C'est cette approche qui est utilisée dans cet article pour décrire la génération de courant moyen.

Le contexte de base est de considérer un faisceau d'ondes planes défini par le champ de vitesse suivant <sup>1</sup> :

$$(v_x, v_y, v_z) = (1, 0, 0) A(\eta, \xi, z) e^{i(\eta - \omega t)} + c.c. \quad (\text{VI.1})$$

où  $\xi$  la direction de propagation de l'onde et  $\eta$  est la direction de la vitesse de phase, comme défini dans les chapitres précédents.  $A(\eta, \xi, z)$  est l'enveloppe du faisceau, supposée varier lentement suivant ces trois directions. Un tel faisceau est abrégé dans le papier par MNMB pour *modulated nearly monochromatic beam*. On introduit un paramètre  $\epsilon$  qui contrôle la modulation de l'enveloppe du MNMB.  $\epsilon$  peut être vu comme le rapport entre la longueur d'onde du faisceau et la longueur caractéristique de variation de l'enveloppe. L'analyse en échelles multiples nécessite alors de bien choisir la puissance de ce paramètre  $\epsilon$  dans la définition des nouvelles variables évoluant lentement. Dans notre problème, quatre effets affectent la propagation d'un faisceau :

- La dispersion suivant la direction de propagation,  $\xi$
- La dispersion dans la direction transverse à la propagation,  $\eta$
- L'action du courant moyen
- L'atténuation visqueuse

Le choix habituellement fait dans la littérature est de considérer ces effets comme faibles, mais du même ordre de grandeur. Cette condition amène à une définition des nouvelles variables du système comme suit

$$X = \epsilon^2 \xi \quad (\text{VI.2})$$

$$Y = \epsilon y \quad (\text{VI.3})$$

$$Z = \epsilon \eta \quad (\text{VI.4})$$

$$T = \epsilon^2 t \quad (\text{VI.5})$$

$$\nu = \epsilon^2 \beta \quad (\text{VI.6})$$

Le paramètre  $\beta$  traduit le fait que le nombre de Reynolds ( $\propto 1/\nu$ ) doit être proportionnelle à  $\epsilon^{-2}$  pour que la dispersion et la dissipation agissent sur la même échelle spatiale.

---

1. Dans l'expression dans l'exponentielle, le temps est également adimensionné, car  $\omega$  est sans dimension.

Pour compléter le redimensionnement, on spécifie l'amplitude des champs dépendants des nouvelles coordonnées : Les vitesses  $(U, V, W)$ , la pression  $P$  et la densité  $R$ , en fonction de  $\epsilon$ . En stipulant des conditions sur la production et la variation de la vorticité potentielle selon  $T$ , on se ramène aux équations

$$(v_x, v_y, v_z) = \epsilon(U, 0, 0)e^{i(\eta-\omega t)} + c.c. + \epsilon^2(\bar{U}, \bar{V}, \bar{W}) + \dots \quad (\text{VI.7})$$

$$\rho = \epsilon R e^{i(\eta-\omega t)} + c.c. + \epsilon^2 \bar{R} + \dots \quad (\text{VI.8})$$

$$p = \epsilon P e^{i(\eta-\omega t)} + c.c. + \epsilon \bar{P} + \dots \quad (\text{VI.9})$$

Les termes  $\bar{U}, \bar{V}, \bar{W}, \bar{R}, \bar{P}$  ne sont pas multipli es par  $e^{i\omega t}$ , ce sont des termes à fr equance nulle, ils décrivent donc le courant moyen. Tous ces termes dépendent *a priori* des trois variables d'espace et du temps. On insère ensuite ces relations dans les équations de base décrivant un fluide stratifi e, avec viscosité. En premier lieu, on trouve à l'ordre 3 en  $\epsilon$ , une équation décrivant l'évolution de l'amplitude associ e à l'onde plane,  $U$

$$U_T + i\bar{W}U + c_g U_X - i \frac{\cos^2 \theta}{2\omega} U_{YY} + \frac{\beta}{2} U = 0 \quad (\text{VI.10})$$

où  $c_g$  est la vitesse de groupe. Cette équation lie la variation de  $U$  sur l'échelle de temps  $T$ , aux autres dérivées de  $U$ , par rapport à  $X$  et  $Y$ , ainsi qu'à la viscosité représentée par le terme en  $\beta U$ . Un dernier terme essentiel est  $i\bar{W}U$ , qui couple l'onde primaire avec  $\bar{W}$ , le terme associ e au courant moyen suivant  $z$ .

Pour fermer le système, il faut une équation d'évolution du courant moyen suivant  $z$ . L'établissement de cette équation se fait en considérant l'évolution de la densité potentielle. Toujours pour  $f = 0$ , l'équation se simplifie et on obtient :

$$[\bar{W}_{YY} + \omega^2 \bar{W}_{ZZ} - \delta(U^*U)_{YY}]_T = \beta \delta(U^*U)_{YY} \quad (\text{VI.11})$$

où  $\delta = 2 \sin^2 \theta / \omega$ . Cette équation montre les deux contributions principales à la création de courant, à l'ordre le plus bas en  $\epsilon$ .

- La première contribution est due au terme  $[\delta(U^*U)_{YY}]_T$ . Ce terme ne fait pas intervenir la viscosité, représentée dans cette analyse par  $\beta$ . On en conclut alors que la génération de courant moyen peut avoir lieu même dans un fluide non visqueux. Cette contribution nécessite cependant une variation latérale de l'amplitude associée au faisceau.
- La deuxième contribution fait intervenir le terme  $\beta \delta(U^*U)_{YY}$ . Cette contribution est quant à elle nulle dans un fluide non visqueux. Elle nécessite également une variation de l'amplitude suivant la largeur de

la cuve. Cependant, n'ayant pas de dérivée temporelle, c'est directement un terme de création de  $\bar{W}_{YY}$ , qui peut mener à une croissance linéaire du courant moyen en fonction du temps.

Cette analyse montre, entre autres, que le courant moyen généré à partir de la propagation d'un faisceau unique n'est possible que par une variation de l'amplitude du faisceau dans la direction transverse à la direction de propagation, que le fluide soit considéré comme visqueux ou non visqueux. Cette propriété nouvelle va à l'encontre des idées reçues selon lesquelles ce forçage nécessitait forcément un terme visqueux.

Faisons ici une parenthèse par rapport aux expériences présentées dans le chapitre précédent. Ces expériences ont été faites en trois dimensions et dans un contexte où la viscosité est assez importante. Pourquoi n'avons nous pas parlé de courant moyen dans ce contexte ? La plupart de ces expériences ont été réalisées avec un forçage de type mode 1, ce qui augmente fortement la longueur d'onde, et diminue ainsi la longueur d'atténuation visqueuse, le courant moyen est donc moins fort. De plus nous avons regardé les champs de vitesses dans des plans transverses à la direction de forçage, ce qui rend quasi-invisible la présence d'un éventuel courant moyen.

Les deux équations (VI.10) et (VI.11) forment un système décrivant l'évolution d'une onde plane, du courant moyen créé, et de l'interaction de l'un sur l'autre. Ce système est résolu numériquement dans l'article [26], en utilisant pour l'équation (VI.10) un terme de forçage dans le membre de droite, afin de mimer le forçage dans les expériences. Nous comparerons dans la partie 2.d les champs de vitesse obtenus lors de nos expériences avec ceux donnés par ces simulations. Ces comparaisons très récentes ne sont pas dans l'article [26]. Nous écrirons très prochainement un article en collaboration avec Akylas et Kataoka, où nous discuterons la comparaisons entre nos expériences et leurs théorie.

## B Résultats expérimentaux

### 1. Dispositif expérimental

Nous avons réalisé des expériences dans une cuve de  $1200 \times 800 \times 350$  mm<sup>3</sup>, stratifiée uniformément, en utilisant la méthode des deux bacs. Dans ces expériences, la fréquence typique de travail est  $N = 0.85$  rad.s<sup>-1</sup>. Comme dans le chapitre précédent, l'axe  $y$  est suivant la largeur de la cuve, de 800 mm,

et d'origine  $y = 0$  au centre de la cuve. La génération d'ondes se fait à l'aide du générateur à cames, placé en  $y = 0$ . Le générateur permet de choisir la fréquence et la longueur d'onde verticale de l'onde plane forcée. Dans toutes les expériences, l'oscillation du générateur est de la forme :

$$\zeta(z, t) = a \sin \left( \omega t + \frac{2\pi z}{\lambda_z} \right) \quad (\text{VI.12})$$

où  $a$  est l'amplitude du générateur en mm et  $\lambda_z$  est la longueur d'onde verticale du faisceau d'onde plane créée et vaut 38 mm. L'oscillation se fait sur une hauteur de 120 mm, située entre  $z = 150$  mm et  $z = 270$  mm. On force donc un faisceau d'ondes planes possédant 3 longueurs d'ondes. Ces paramètres d'onde plane sont les mêmes que ceux utilisés par Guilhem Bordes [9]. Pour nos expériences, l'amplitude du générateur sera soit de 5 mm, soit de 10 mm.

Comme la largeur de la cuve est très grande devant la taille de forçage, on s'attend à avoir une variation du champ de vitesse en fonction  $y$ . Nous ne pouvons donc pas visualiser les ondes avec la méthode de Schlieren, puisque cette méthode moyenne les mouvements sur toute la distance entre la caméra et l'écran. Nous allons donc utiliser la visualisation par PIV. Pour cela, nous plaçons dans le fluide des particules sphériques de 10  $\mu\text{m}$  de diamètre recouvertes d'argent, que nous illuminons à l'aide de nappes laser créées suivant différents plans  $xz$ . Pour ces expériences préliminaires, nous ne réaliserons quasiment que des tranches au centre de la cuve, c'est-à-dire à  $y = 0$ . Les images sont enregistrées avec une caméra AVT (Allied Vision Technologie) Stingray de  $1382 \times 1034$  pixels située environ à 1400 mm du bord de la cuve. Un objectif de focale variable est utilisé afin de pouvoir faire facilement la mise au point sur les différentes nappes laser. La fréquence d'acquisition de la caméra est de 2 Hz pour toutes les expériences, ce qui est largement suffisant pour résoudre la fréquence principale du signal (qui est de l'ordre de 0.1 Hz pour les fréquences que nous utiliserons).

## 2. Génération de courant moyen

### 2.a Visualisation de l'écoulement

Afin de visualiser le courant moyen obtenu, nous utilisons la méthode de filtrage par transformée de Hilbert, qui permet de séparer à la fois la composante à fréquence nulle, qui donnera le courant moyen, et la composante à la fréquence de forçage, qui donnera le forçage en ondes planes.

On trace Fig. VI.1 les deux champs instantanés obtenus après filtrages aux pulsations 0 et  $\omega$ , après un long temps de forçage<sup>2</sup>.

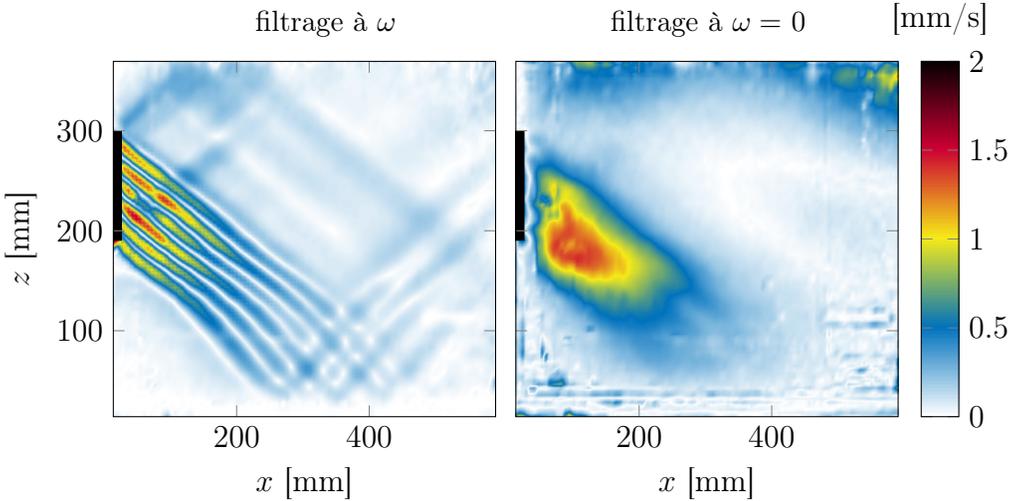


FIGURE VI.1 – Faisceau d’ondes planes (à gauche) et courant moyen (à droite) obtenus par filtrage de Hilbert d’une expérience de PIV, avec un forçage en ondes planes de 5 mm d’amplitude, dans le régime stationnaire. Le générateur est représenté par la barre verticale noire.

On observe à gauche la forme de l’onde plane créée. On distingue bien les trois longueurs d’ondes de l’onde plane. Comme la longueur d’onde est faible, l’effet de la viscosité est important, et le faisceau s’atténue rapidement. Sur la figure de droite, on observe un fort champ de vitesse, situé spatialement dans la même zone que l’onde plane, c’est-à-dire incliné du même angle. Pour se convaincre que cet écoulement est bien un courant moyen comme prédit par la théorie, traçons Fig. VI.2 les vitesses horizontales et verticales de ce courant à fréquence nulle.

On observe sur la figure de gauche, en dehors de mouvements situés au niveau de la couche de mélange, l’absence quasi totale de vitesse verticale, et un seul bloc de vitesse horizontale dirigée vers les  $x$  croissants. Ce mouvement correspond bien à un mouvement d’advection qui est celui de l’écoulement moyen. Il est intéressant de noter que ce mouvement d’advection se situe dans la zone inclinée du faisceau d’ondes. C’est donc une "instabilité" du

2. On vérifie *a posteriori* que ce temps d’attente est suffisant pour être dans le régime stationnaire.

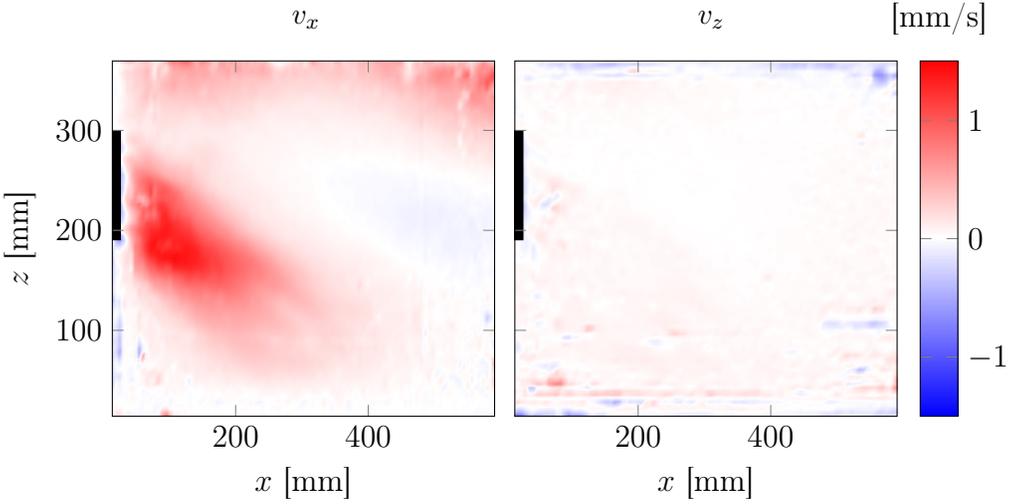


FIGURE VI.2 – Composante horizontale (à gauche) et verticale (à droite) du courant moyen de la figure VI.1(b). Le générateur est représenté par la barre verticale noire.

faisceau, qui a lieu tout au long de la propagation, qui génère ce courant. Cependant, le courant moyen crée une advection suivant  $x$ . Pour le forçage de cette expérience,  $a = 0.5$  mm, le courant moyen est suffisamment faible pour être atténué rapidement par viscosité, on ne voit alors pas l'effet du courant sur le faisceau. Pour un courant moyen plus fort, on s'attend à ce que le courant s'étale en dehors de la zone de propagation du faisceau.

## 2.b Régime transitoire

Afin de quantifier l'évolution de la génération de courant moyen en fonction du temps, nous avons réalisé de nombreux filtrages du champ total, à différents temps. Pour chaque filtrage obtenu, nous avons calculé l'amplitude relative associé au courant moyen et à l'onde plane. Afin de ne pas prendre en compte les effets visqueux, dépendant de l'angle de propagation, il faut comparer l'énergie des faisceaux proches du générateur. En pratique, on prend une zone de quelques centimètres de large proche du générateur, englobant verticalement tout le faisceau, on calcule l'énergie sur cette zone, puis on divise l'amplitude obtenue par la taille de la zone et par  $\cos \theta$  afin de ne pas avoir un biais dû à l'inclinaison du faisceau. On peut, pour  $a = 0.5$  mm, réaliser la même procédure pour le courant moyen car il est également

incliné.

On trace Fig. VI.3, ces amplitudes obtenues tous les 13  $T_0$  pour des fenêtres temporelles de  $26 T_0$ , pour l'onde plane (à gauche) et pour le courant moyen (à droite). L'amplitude associée à l'onde plane est notée  $\Omega$  tandis que celle du courant moyen est notée MF, pour *Mean Flow*.

Dans cette figure et dans les suivantes, les amplitudes associées aux deux composantes  $\omega$  et  $= 0$  sont tracés en U.A. (pour unités arbitraires). En effet, notre méthode de mesure de l'amplitude nécessite de considérer une zone et de faire la moyenne de l'amplitude donnée par la transformée de Fourier sur cette zone. Nous avons choisi une zone facilement définissable qui permet de comparer les expériences entre elles mais qui ne donne pas l'amplitude de l'onde de manière absolue. Pour ce faire, on aurait dû considérer la zone qui correspond exactement à l'étalement de l'onde primaire et du courant moyen dans chaque cas, et calculer l'amplitude moyenne pour cette région.

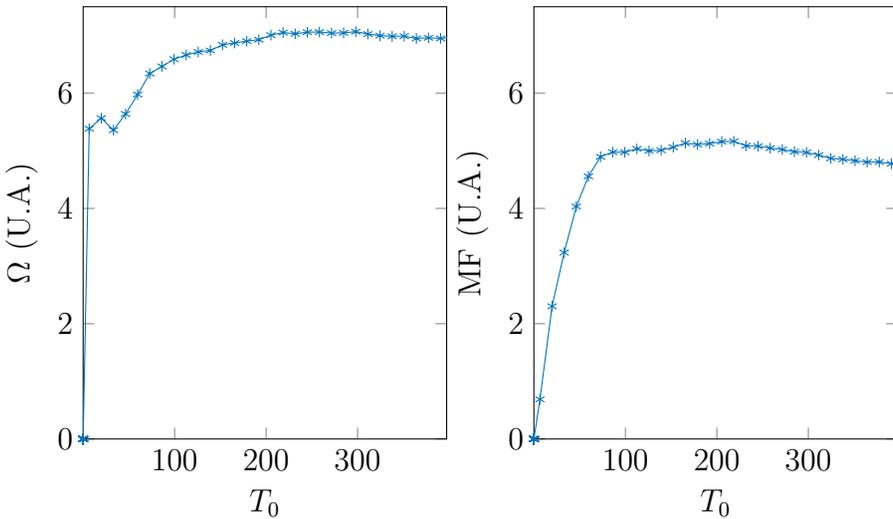


FIGURE VI.3 – Amplitude associée à l'onde plane (à droite) et au courant moyen (à gauche) dans la transformée de Fourier du signal. La transformée de Fourier est réalisée sur des fenêtres de taille  $26 T_0$ , espacées de  $13 T_0$ . Les amplitudes du courant moyen et de l'onde primaire sont en unités arbitraires (U.A.)

Sur la figure de gauche, l'amplitude des ondes planes atteint très rapidement sa valeur moyenne, alors que sur la figure de droite, l'amplitude liée au courant moyen présente un régime transitoire important. On peut noter que la rétroaction du courant moyen sur l'onde plane semble faible puisque

l'augmentation de l'amplitude associée au courant moyen ne modifie pas l'amplitude associée à l'onde plane.

### 2.c Régime permanent

Une question importante est de savoir, à amplitude fixée, quels paramètres favorisent cette génération de courant moyen. Pour ces expériences, nous avons fait varier l'angle de propagation pour les deux amplitudes  $a = 5$  mm et  $a = 10$  mm. Rappelons ici que la variation de la fréquence, entraîne une variation de la longueur d'onde, du fait de la façon dont on génère les ondes. De même que précédemment, nous avons analysé l'évolution temporelle du courant moyen et de l'onde plane pour des angles allant de  $\theta = 20^\circ$  à  $\theta = 55^\circ$ . Nous nous sommes ensuite intéressés à l'amplitude atteinte par les deux composantes du champ, dans le régime stationnaire.

#### Faible forçage

On compare Fig. VI.4 la valeur du plateau en fonction de l'angle, pour l'onde plane et pour le courant moyen, ainsi que pour le rapport  $R$  de l'amplitude du courant moyen divisée par l'amplitude de l'onde plane.

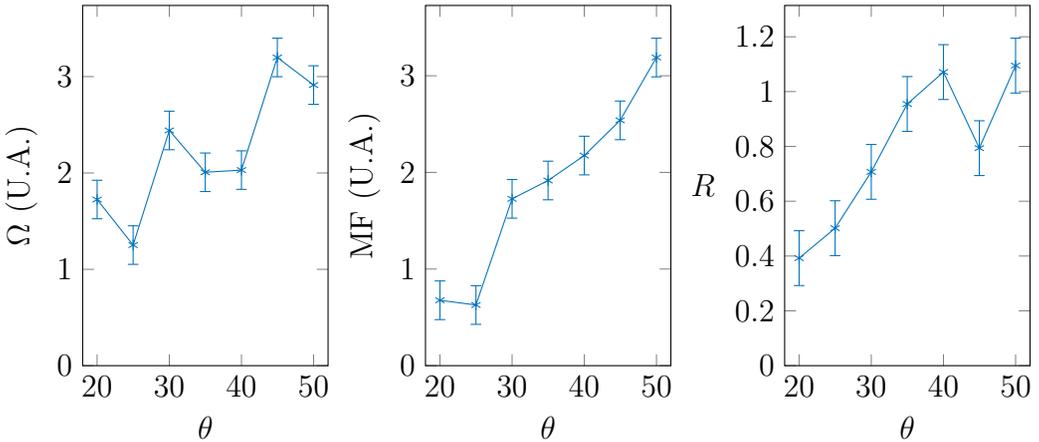


FIGURE VI.4 – Amplitude de l'onde plane (à gauche) et du courant moyen (au milieu) atteinte dans le régime stationnaire en fonction de l'angle de propagation des ondes. La grandeur  $R$  représente le rapport des deux grandeurs précédentes. Le forçage est de 5 mm.

La courbe associée à l'onde plane nous donne l'efficacité du générateur. Cette évolution en fonction de l'angle est suprenante car comme mentionné

dans le chapitre d'introduction, plus la fréquence de forçage est élevée, moins l'amplitude devrait être importante. En effet, le mouvement des plaques du générateur est horizontal, alors que les hautes fréquences correspondent à des mouvements quasi verticaux, l'onde forcée a alors une très faible amplitude. Expérimentalement, on ne retrouve pas ce fait, pour cette gamme d'angles. Mentionnons cependant que des expériences à plus haute fréquence ( $\theta > 60^\circ$ ) ont été réalisées mais ont été écartées des analyses car dans ces cas, l'amplitude de l'onde plane était trop faible et le bruit dominait. Pour cette gamme de fréquence, il semblerait que la génération des ondes soit plus efficace pour les "grands" angles. Notons cependant que notre méthode donne accès à l'amplitude de l'onde plane proche du générateur. Une étude complète de l'efficacité du générateur devrait également tenir compte du fait que les grandes fréquences sont atténuées plus rapidement.

La courbe donnant l'amplitude du courant moyen ne peut pas être discutée telle quelle. Puisque l'amplitude du courant moyen est directement reliée à celle de l'onde plane, et que celle-ci varie en fonction de l'angle, on considère la grandeur  $R$  qui est définie comme le rapport de l'amplitude du courant moyen divisée par l'amplitude associée à l'onde plane. Ainsi on s'affranchit de la variation de l'amplitude effective de l'onde plane créée.

On voit alors que l'amplitude du courant moyen croît avec l'angle, jusqu'à atteindre un plateau vers  $R = 1$ . Pour le cas où la génération de courant moyen est la plus forte,  $\theta \simeq 40$  à  $50^\circ$ , l'onde plane transfère plus de la moitié de son énergie au courant moyen. Ici l'effet de la viscosité est très important, comme on a pu le voir Fig. VI.1. Le terme de génération de courant moyen en présence de viscosité (voir eq.(VI.11)) domine. Dans l'océan, on ne peut pas s'attendre à un phénomène de cette envergure, car la viscosité est très faible.

### Fort forçage

Nous avons réalisé des expériences similaires pour  $a = 10$  mm. Dans ce cas, le courant moyen n'est pas spatialement localisé dans le faisceau de l'onde plane. Cet aspect sera détaillé dans la partie 2.d. Notons ici que l'on ne peut plus utiliser la même zone d'intégration proche du générateur pour calculer l'amplitude associée au courant moyen. Afin de comparer le courant moyen à l'onde plane, nous utilisons la même méthode d'intégration pour les deux champs, à savoir prendre quasiment toute la zone visualisée. Ces courbes ne pourront alors pas être comparées au cas de faible forçage. Les résultats de ces données sont tracées Fig. VI.5.

Sur cette série de figures, on remarque que  $R$  admet un maximum pour

$\theta = 40^\circ$ . Pour cette valeur, l'amplitude du courant moyen est bien supérieure à toutes les autres. On peut donc penser que pour cette mesure, une source extérieure à notre dispositif est à l'origine d'un courant moyen supplémentaire. Si l'on omet cette valeur, on retrouve un comportement similaire à celui dans le cas d'un faible forçage, c'est à dire une croissance de  $R$  suivi d'un plateau vers  $R = 1$ .

Bien sûr pour compléter cette étude, il faudrait obtenir le comportement pour des angles supérieurs à  $50^\circ$ , mais nous ne pouvons pas, avec le dispositif actuel, générer des ondes suffisamment énergétiques à ces angles.

## 2.d Comparaison avec le modèle théorique

Dans cette section, nous allons comparer les résultats obtenus avec les résolutions numériques des équations (VI.10) et (VI.11) dans le cas d'un forçage identique au notre.

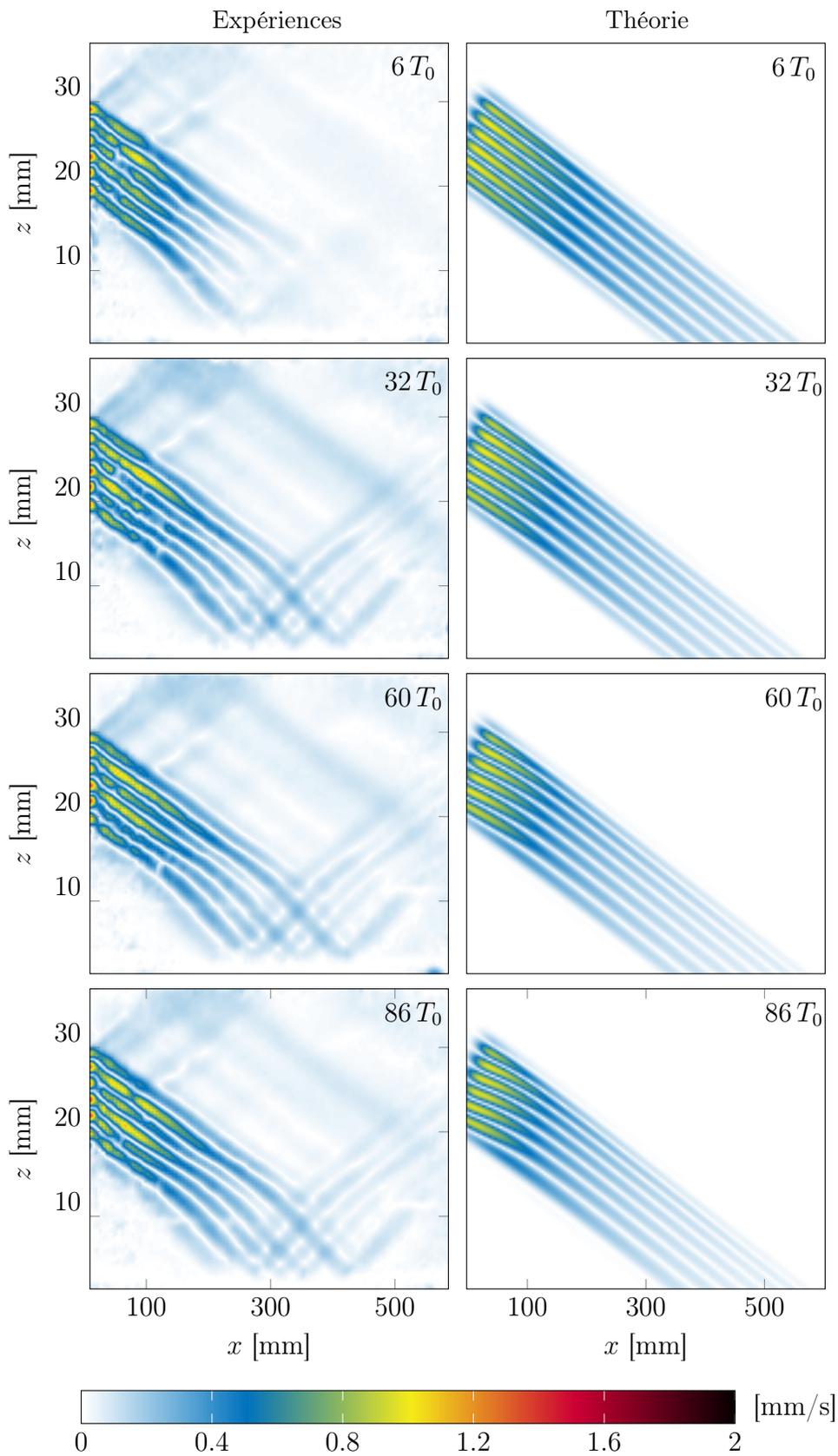
Nous avons effectué deux séries d'expériences, avec  $a = 5$  mm et  $a = 10$  mm. Le faible forçage permet de tester la théorie faiblement non linéaire qui prévoit l'apparition d'un courant moyen. Les expériences avec  $a = 10$  mm montrent les limites de cette théorie. Une première chose à noter est que les équations obtenues par Fan, Kataoka et Akylas [26] ne prédisent pas de saturation de l'amplitude du courant moyen. On ne fera alors que des comparaisons dans le régime transitoire.

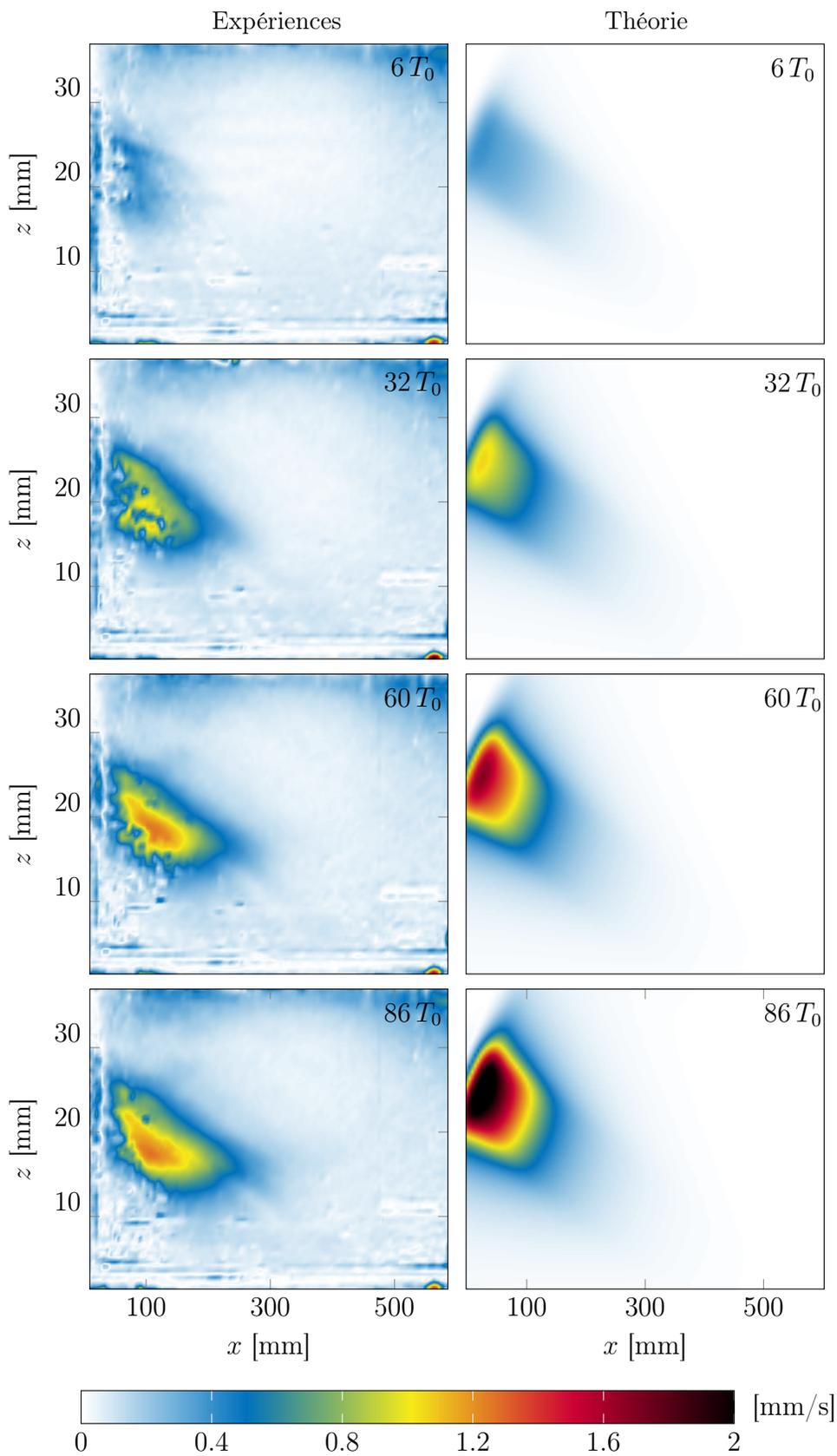
### Comparaison à faible forçage

Sur la double page suivante, nous comparons les images du régime transitoire pour  $\theta = 30^\circ$ ,  $a = 5$  mm, avec les champs obtenus par résolution numérique. Les images représentant l'onde plane sont sur la page de gauche et le courant moyen est représenté sur la page de droite. Pour chaque page, les images issues des expériences sont à gauche et les champs de vitesses théoriques sont à droite. Les échelles de couleur sur les deux colonnes de figures sont les mêmes. Les images expérimentales ont été obtenues par filtrage temporelle d'une fenêtre de  $12 T_0$ .

On observe un bon accord entre les expériences et la théorie. En effet, les amplitudes associées aux ondes planes et au courant moyen sont les mêmes. De plus, le courant moyen est également situé spatialement dans la zone de propagation des ondes. On peut cependant noter une légère différence dans la répartition spatiale du courant moyen qui "s'étale" un peu plus dans nos expériences.

La théorie faiblement non linéaire décrit donc bien, pour cette amplitude de forçage, le régime transitoire de création du courant moyen.





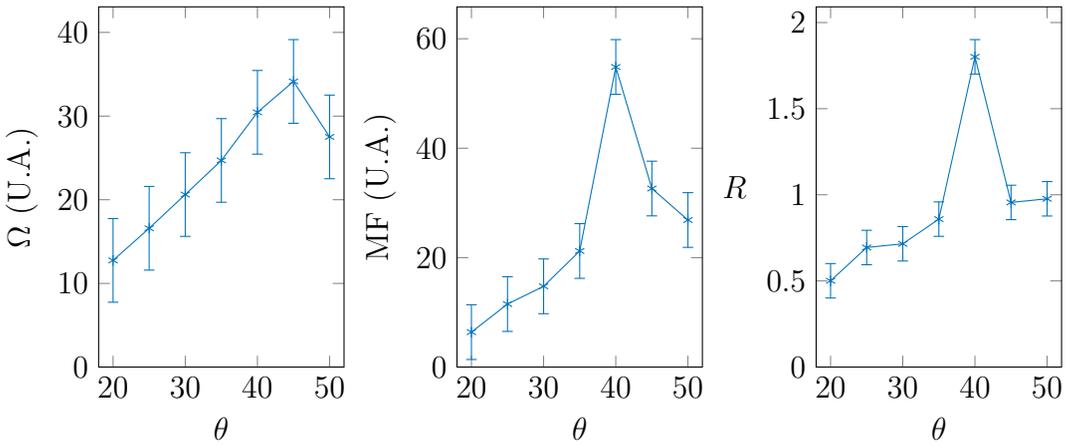


FIGURE VI.5 – Amplitudes de l’onde plane (à gauche) et du courant moyen (au milieu) atteints dans le régime stationnaire en fonction de l’angle de propagation des ondes. La grandeur  $R$  représente le rapport des deux grandeurs précédentes. L’amplitude du forçage est de 10 mm.

### Comparaison à fort forçage

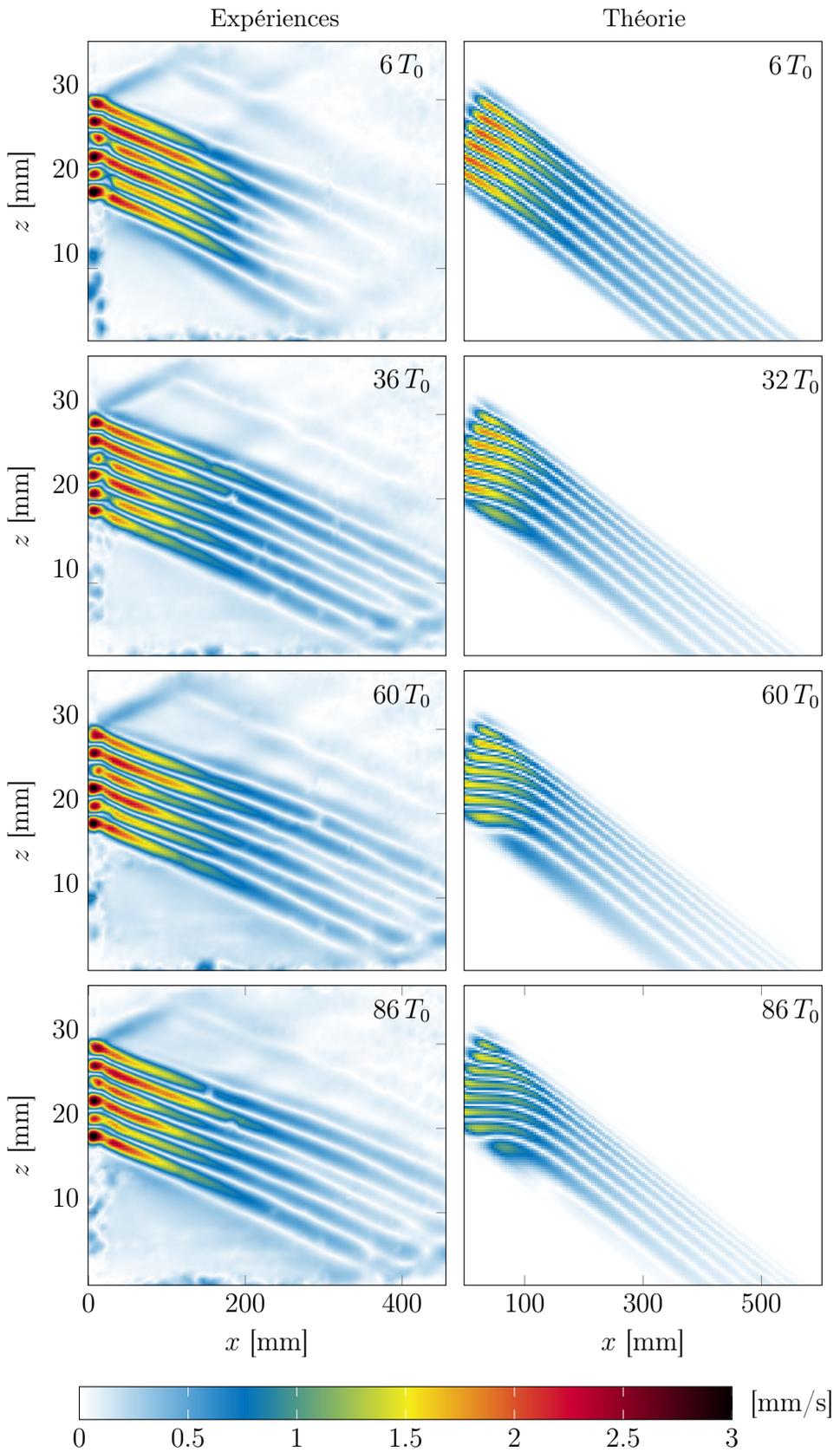
Comparons maintenant théorie et expérience dans le régime transitoire, dans le cas d’une plus forte amplitude  $a = 10$  mm, toujours pour  $\theta = 30^\circ$ . De même que précédemment, on présente sur la double page suivante les images représentant l’onde plane sur la page de gauche et le courant moyen sur la page de droite.

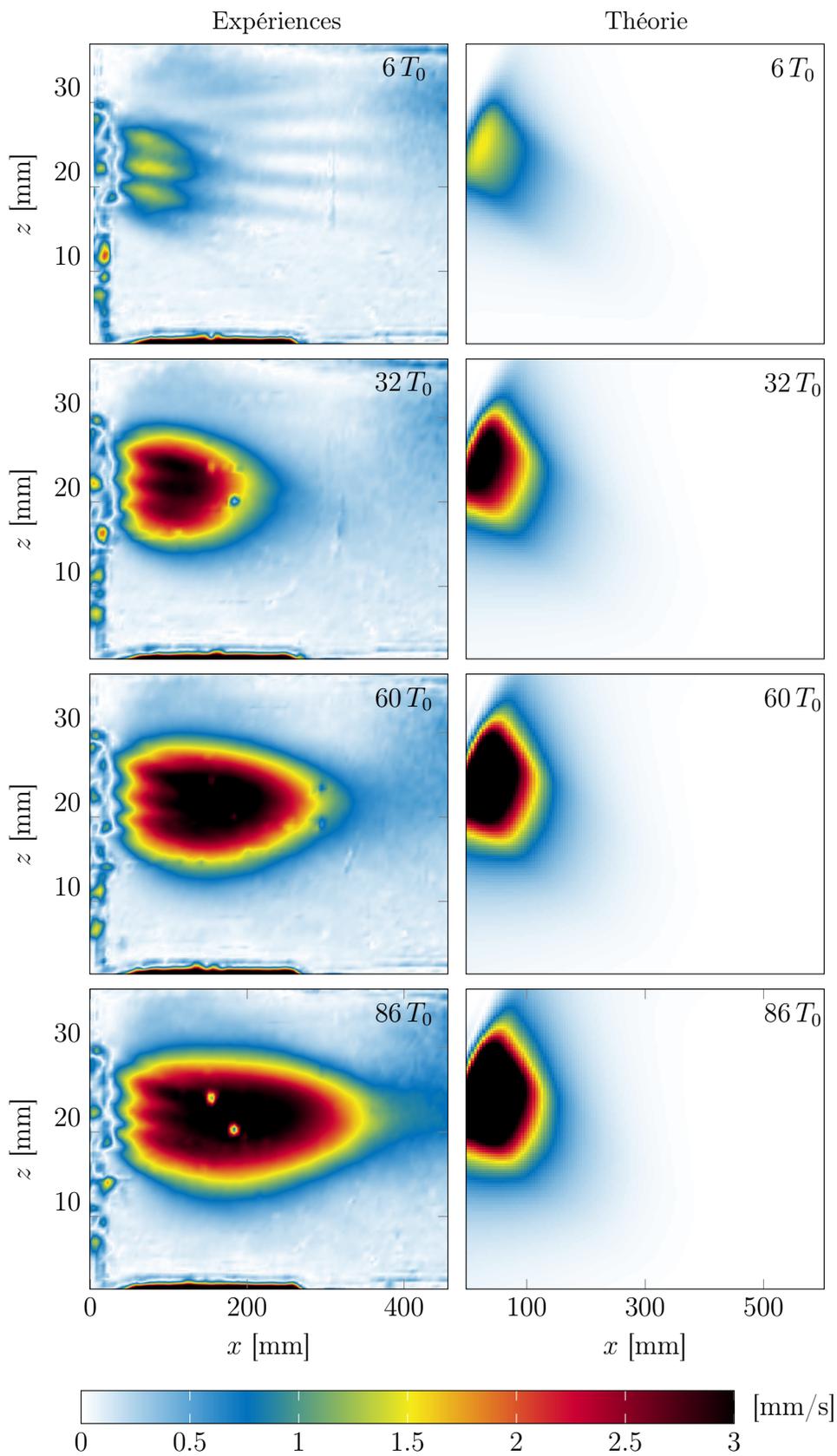
On remarque maintenant une différence qualitative entre le courant moyen observé et celui prédit.

Expérimentalement le courant moyen a maintenant une très forte composante dans une zone totalement horizontale, et ce dès les premières périodes de forçage. Comme anticipé, ce courant moyen est cette fois-ci suffisamment fort pour créer une advection en dehors de la zone de propagation du faisceau. Le courant n’est alors plus limité à la zone de propagation du faisceau, et s’en échappe dès sa création.

Sur les images expérimentales du courant moyen on peut deviner une faible composante inclinée selon l’angle  $\theta$ . Cette composante est sûrement due au forçage par le faisceau résultant, mais comme celui-ci est de très faible amplitude, le courant moyen associé est alors de nature similaire aux expériences précédentes.

La composante majoritaire reste alors celle quasi totalement horizontale. La théorie ne prévoit pas un tel comportement. Pour  $a = 10$  mm, le courant moyen prédit a une forme similaire à celui obtenu pour  $a = 5$  mm, avec seulement une amplitude plus importante. La résolution analytique prévoit cependant un fléchissement des faisceaux. Cette propriété n'est pas clairement visible dans notre expérience mais l'est dans les expériences de Bordes, discutées dans l'article [52].





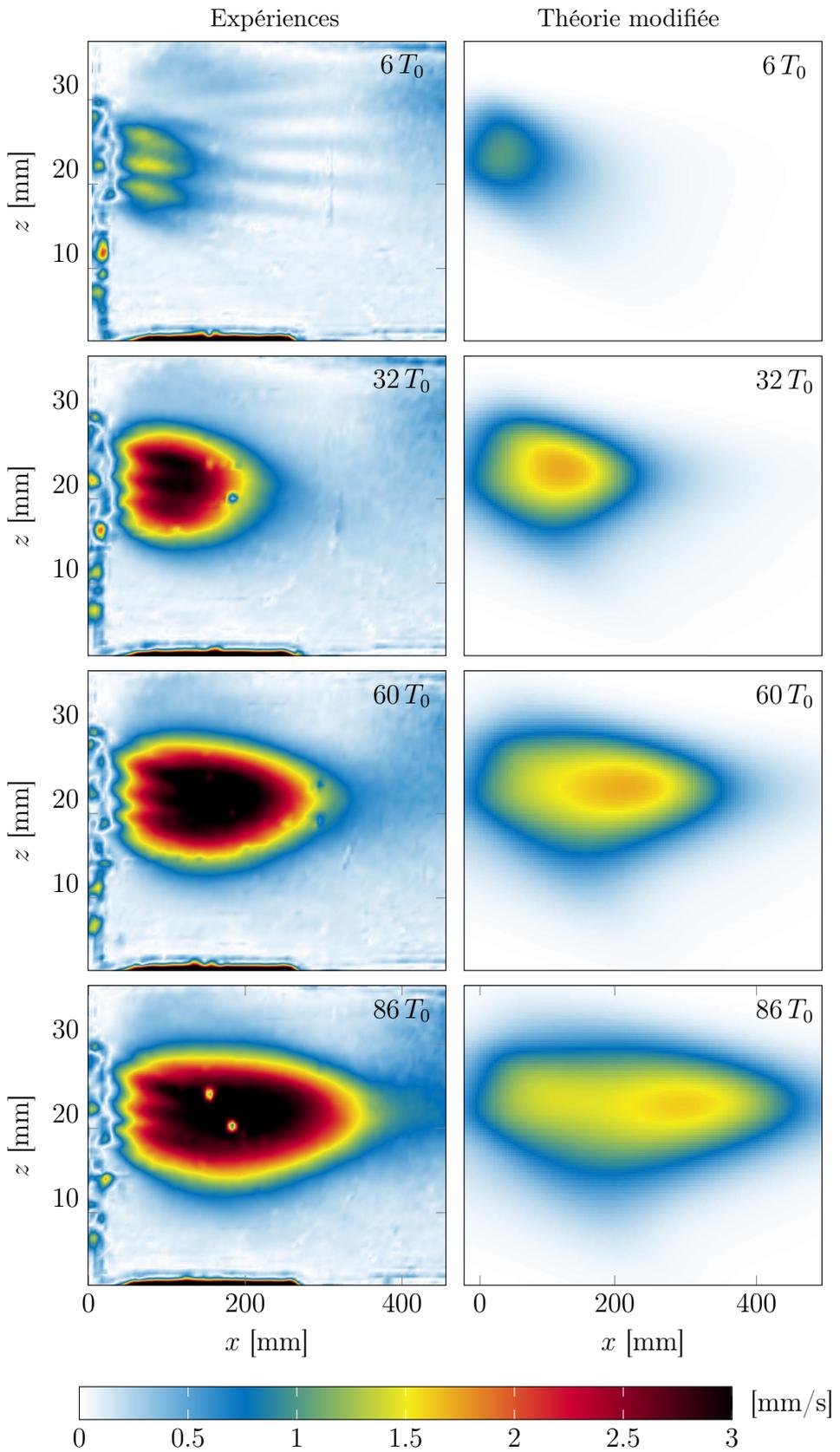
## Modification de la théorie

Pour pallier ce problème, Akylas et Kataoka ont très récemment complexifié le développement théorique présenté dans ce chapitre. En prenant en compte les termes d'ordre supérieur dans le développement des équations (VI.7) à (VI.9), on obtient des équations d'évolutions qui font intervenir des termes fortement non linéaires, qui étaient négligeables dans le cas du faible forçage.

La dernière figure présente, à gauche, les mêmes figures issues de l'expérience, pour  $a = 1\text{cm}$  et  $\theta = 30^\circ$ , mais avec à droite, les champs de vitesses obtenus avec la théorie modifiée.

On observe alors clairement que les nouveaux termes ajoutés modifient considérablement la forme et l'amplitude du champ moyen. Celui-ci n'est plus incliné suivant  $\theta$  mais quasi-totalement dirigé suivant  $x$ . L'advection suivant la direction horizontale est alors comparable à celle obtenue expérimentalement. Cependant l'amplitude du courant moyen dans la simulation est bien moindre. De plus, on observe que la théorie modifiée prévoit que le courant moyen advecté possède une sorte de "bulle" d'intensité plus élevée qui s'éloigne du générateur au cours du temps. Alors que nos expériences suggèrent que l'intensité du courant moyen, prise sur une ligne horizontale, décroît en s'éloignant du générateur.

Ces différences de comportements sont encore à comprendre. La théorie doit encore être approfondie notamment afin de comparer les amplitudes atteintes dans le régime stationnaire. De son côté l'expérience doit également être améliorée, afin de proposer des comparaisons pour plusieurs angles et à des temps plus long et également des coupes horizontales du courant moyen, qui permettraient des meilleurs comparaisons avec la théorie.



## Conclusion

La génération de courant moyen à partir de la propagation d'un faisceau d'ondes internes est encore mal comprise. Cependant, des études théoriques fondées sur un développement en échelles multiples ont permis de découvrir les éléments clés menant à ce phénomène. La variation d'amplitude du faisceau dans la direction transverse à la propagation est essentielle ; Ainsi la génération de courant moyen par propagation d'un faisceau d'ondes planes ne peut être observée qu'en trois dimensions.

Les expériences que nous avons réalisées avaient pour but de confronter les prédictions théoriques de Fan, Kataoka et Akylas [26]. Ces prédictions sur la forme et l'amplitude du courant moyen généré sont obtenues par résolution numérique d'équations obtenues à partir d'un développement en échelles multiples sur un faisceau d'ondes internes.

À faible amplitude, les expériences et la théorie s'accordent bien dans le régime transitoire. Dans le régime permanent, expérimentalement on observe que l'amplitude du courant moyen est de l'ordre de grandeur de celle de l'onde. Le rapport entre ces deux grandeurs a été étudié pour différentes expériences en fonction de l'angle de propagation, mais ne peut pas être expliqué par la théorie, qui ne prévoit pas de saturation.

À forte amplitude, on remarque une grande différence dans la forme du courant moyen obtenu dans le régime transitoire. En effet dans nos expériences le courant moyen a une composante verticale importante, alors que dans le modèle théorique, le courant moyen reste dans la zone de propagation du faisceau, comme dans le cas faiblement non linéaire. La théorie exposée dans l'article [26] ne prédit pas cet effet fortement non-linéaire. Très récemment, une amélioration du modèle a permis de retrouver cet effet, rapprochant ainsi la théorie des expériences.

Il faut bien sûr poursuivre dans cette voie là. Les comparaisons à des temps plus long pourraient contraindre encore plus le modèle et ainsi l'améliorer. Une étude pour différents angles et différentes longueurs d'ondes permettrait de valider la description théorique sur une large gamme de paramètres, ce qui aiderait ensuite de prédire l'importance de cette génération dans une situation océanique réelle.

# Conclusion

Les nombreux doctorants de l'équipe qui m'ont précédé ont grandement contribué à l'étude des ondes internes, de leur propagation, leur réflexions, leur conséquences sur la stratification...tout cela avec l'objectif de mieux de mieux décrire les phénomènes océaniques dus aux ondes internes. J'ai poursuivi cette quête selon trois axes : la réflexion sur des surfaces courbes, l'étude des attracteurs d'ondes internes dans des géométries tridimensionnelles et la création de courant moyen.

La réflexion sur des surfaces courbes est souvent idéalisée par le cas des surfaces planes, mais ce cas est peu présent dans l'océan. Une étude des surfaces courbes est alors pertinente pour décrire la situation réelle océanographique. Deuxièmement, les attracteurs d'ondes ont été principalement étudiés en 2D mais afin de savoir s'ils peuvent exister dans l'océan, le cas tridimensionnel doit être considéré. Enfin un faisceau d'ondes internes se propageant en trois dimensions est instable. Il peut notamment se déstabiliser en générant un courant moyen. La compréhension de ce phénomène permettrait de savoir s'il peut avoir lieu dans l'océan et si oui avec quelle ampleur.

Nous allons revenir sur les avancées dans chacune de ces parties, et détailler les questions qui restent en suspens à la suite de nos considérations.

## Réflexion sur une surface courbe

### Résumé

En deux dimensions, lors de la réflexion d'une onde sur une surface courbe, la théorie de Baines [4] prévoit dans certains cas l'existence d'une onde réfléchie dans le sens opposé de l'onde incidente. La présence de cette onde dépend de la courbure de la surface et de la longueur d'onde. Ce sujet à été très peu abordé expérimentalement dans la littérature. À notre connaissance, un seul article de conférence prend en compte l'existence d'une onde rétro-réfléchie lors de la réflexion sur une surface courbe [17]. Dans le chapitre II, nous avons

montré expérimentalement, pour la première fois de manière claire, l'existence de cette onde. Grâce à la transformée de Hilbert en espace, on peut clairement identifier ou non la présence de cette onde lors d'un rebond sur une bosse. Nous avons réalisé un diagramme des phases de présence de cette *Back Reflected Wave* (BRW) en fonction de la hauteur  $h^*$  et de la longueur  $\ell^*$  de la bosse, adimensionnées par la longueur d'onde de l'onde incidente. Cette étude montre en effet que l'onde rétro-réfléchie n'existe que lorsque les dimensions de la bosse sont légèrement inférieures à la longueur d'onde de l'onde incidente. Nous avons de plus étudié le rôle de la viscosité sur la réflexion. On a considéré une pente triangulaire ayant les mêmes paramètres  $h^*$  et  $\ell^*$  qu'une expérience sur une bosse courbe conduisant à une forte BRW. Bien que les tracés de rayons prévoient dans ce cas un comportement très simple pour l'onde réfléchie, du fait de la viscosité, la surface effective "vue" par l'onde est courbe, et on observe alors une onde rétro-réfléchie.

### Perspectives

L'étude du diagramme des phases gagnerait à être complétée, notamment en explorant les fortes valeurs de  $h^*$ . Cela permettrait de localiser la zone précise d'existence de la BRW. Pour ce faire, en plus de prendre des matériaux très souples pour gagner sur l'amplitude de variation de  $h^*$  dans nos dispositifs, on peut changer la longueur d'onde incidente et faire varier l'angle de propagation de l'onde. Pour cette étude, nous avons dû réaliser un remplissage pour chaque nouvelle géométrie et chaque nouvelle longueur d'onde. L'utilisation du générateur GOAL, développé récemment au laboratoire, nous permettrait alors, pour une géométrie donnée, de changer la longueur d'onde de l'onde sans avoir à vider puis remplir à nouveau la cuve. On peut aussi envisager un autre dispositif permettant de faire varier la géométrie de la surface depuis l'extérieur de la cuve. D'un point de vue théorique, la condition de radiation de Baines est difficile à exploiter. On pourrait cependant développer un calcul pour notre géométrie permettant de comparer les données expérimentales avec, entre autres, la longueur d'onde de l'onde rétro-réfléchie ainsi que son intensité.

## Attracteurs 3D : étude par tracés de rayons

### Résumé

Une première contribution de cette thèse à l'étude de la propagation des ondes internes est tout d'abord l'étude par tracés de rayons. Les lois de tracés de rayons en trois dimensions sont connues depuis longtemps [75], mais n'ont été explicitées que récemment [57]. Les attracteurs d'ondes en trois dimensions n'ont été étudiés par tracés de rayons que dans des géométries sphériques [80]. Nous avons voulu généraliser certains résultats de cet article en explicitant le lien entre les attracteurs bidimensionnels et l'effet de piégeage par réflexion sur une surface plane inclinée. On a montré dans une géométrie simple que le piégeage dans un plan transverse à la géométrie est lié à la possibilité d'obtenir un attracteur dans la géométrie bidimensionnelle associée. On donne ensuite des conditions plus générales s'appliquant dans une géométrie totalement tridimensionnelle pour obtenir un attracteur bidimensionnel. Cette étude est complétée par des tracés de structures purement tridimensionnels. Ces pseudo attracteurs présentent des caractéristiques similaires aux attracteurs bidimensionnels mais sont plus complexes à identifier et visualiser.

### Perspectives

L'étude par tracés de rayons des attracteurs en trois dimensions est nouvelle et de nombreuses choses restent à explorer. Tout d'abord on pourrait valider le critère d'existence des attracteurs bidimensionnels en trois dimensions, en considérant des géométries tridimensionnelles complexes. Ensuite une étude plus poussée des structures attractives totalement 3D est nécessaire. Existe-t-il de "vrais" attracteurs 3D ? Sont-ils autant présents que dans des géométries 2D ? Sont-ils présents dans l'océan ? Pour répondre à cette dernière question, on peut envisager de réaliser des tracés de rayons dans une géométrie qui est celle des fonds marins. En effet, comme des cartes bathymétriques de l'ensemble des fonds marins ont été réalisées, on pourrait alors, connaissant les principaux lieux de génération des ondes internes, calculer les trajectoires des rayons dans cette cuve géante.

## Attracteurs 3D : étude expérimentale

### Résumé

D'un point de vue expérimental, on a montré tout d'abord l'existence d'attracteurs bidimensionnels dans des géométries tridimensionnelles. La géométrie de départ est celle d'un trapèze, mais contrairement au cas 2D, la largeur de la cuve est cette fois comparable aux autres grandeurs. De plus le forçage n'est pas uniforme suivant la largeur. Cette expérience a montré que des attracteurs bidimensionnels sont créés sur les bords de la cuve comme au centre. Cette observation est en accord avec les tracés de rayons effectués dans cette géométrie.

La deuxième expérience a pour but de montrer de manière spectaculaire le phénomène de piégeage. Dans une géométrie de canal, nous avons quantifié cet effet et créé un piégeage localisé sur une partie du canal. Dans la littérature, des expériences similaires ont été réalisées, dans le cas d'ondes inertielles [62], et pour des ondes intertuelles dans des géométries axisymétriques [81] mais pas dans le contexte océanique d'ondes internes dans un canal. En effet, cette expérience peut être rapprochée de mesures *in situ* réalisées dans le canal du Saint Laurent au Canada. En effet ces mesures montrent que les ondes internes générées à l'embouchure du canal ne sont plus visibles quelques dizaines de kilomètres plus loin, ce qui ne peut pas s'expliquer par l'atténuation visqueuse. Le piégeage des ondes dans la direction transverse au canal est alors un bon candidat pour expliquer ce phénomène. L'article [76] présente ces résultats expérimentaux ainsi que les principales idées sur le piégeage des rayons en 3D.

### Perspectives

Afin de poursuivre dans cette direction, d'autres mesures *in situ* plus proches du lieu d'émission des ondes seraient intéressantes. De plus on pourrait expérimentalement et avec des calculs de trajectoires, raffiner la description de la topographie du canal du Saint Laurent afin de prédire précisément où pourraient se trouver ces ondes internes piégées.

Une autre étude expérimentale pourrait être réalisée dans la géométrie tridimensionnelle étudiée numériquement dans la partie 3. Une mesure proche de la paroi et au centre de la cuve devrait permettre de visualiser les structures attractives prévues.

## Courant moyen

### Résumé

Notre étude du courant moyen s'inscrit dans la continuité des études de Guilhem Bordes, ancien doctorant au laboratoire. En effet Guilhem a réalisé des expériences de génération de courant moyen dans une géométrie tridimensionnelle, qui ont donné lieu à un article [9]. Depuis de nombreux groupes s'intéressent au problème et essayent de décrire théoriquement ce transfert d'énergie [52, 26, 40]. Nous avons reproduit ces expériences de propagation d'un faisceau d'ondes planes dans une géométrie tridimensionnelle, en faisant varier l'amplitude de forçage et l'angle de propagation. Dans nos conditions expérimentales, cette propagation s'accompagne de la génération d'un fort courant moyen. Nos observations du courant moyen à deux amplitudes de forçages montrent une grande différence entre le cas faiblement non linéaire et fortement non linéaire. Ces observations sont comparées à une récente théorie réalisée par Fan, Akylas et Kataoka [26]. Dans le cas faiblement non linéaire, la théorie s'accorde avec les observations expérimentales, et le courant moyen est qualitativement de la bonne forme et de la bonne amplitude. Dans le cas fortement non linéaire, on observe un courant moyen quasi horizontal qui se propage en dehors de la zone définie par le faisceau d'ondes. Les données issues d'un premier modèle théorique ne reproduisaient pas cette tendance, mais récemment un développement plus poussé de la théorie a permis de retrouver l'advection de courant moyen en dehors de la zone de forçage.

### Perspectives

D'un point de vue expérimental, de nombreuses choses restent à explorer. Dans nos expériences, la forme du forçage a été prise identique à celle de Guilhem Bordes. Une étude faisant varier la longueur d'onde indépendamment de la fréquence, ainsi que le nombre de longueurs d'ondes du faisceau serait pertinente pour mieux comprendre la génération de courant moyen dans le cas du forçage par une onde plane tronquée. De plus, ici seules des visualisations verticales ont été effectuées. On peut également observer le courant moyen généré à l'aide du champ de vitesse horizontal, donnant davantage d'informations sur le faisceau tridimensionnel. D'un point de vue théorique, le modèle bien que récemment adapté pour décrire les effets fortement non linéaires, admet encore certains problèmes, notamment la saturation de l'amplitude du courant moyen, non observée théoriquement.



# Bibliographie

- [1] T. Akylas and H. Karimi. Oblique collisions of internal wave beams and associated resonances. *Journal of Fluid Mechanics*, 711:337–363, 2012.
- [2] M. H. Alford. Redistribution of energy available for ocean mixing by long-range propagation of internal waves. *Nature*, 423:159–162, 2003.
- [3] Q. André, A. J. Barker, and S. Mathis. Layered semi-convection and tides in giant planet interior. *arXiv:1710.10058 [astro-ph.EP]*, 2017.
- [4] P. Baines. The reflexion on internal/inertial waves from bumpy surfaces. *Journal of Fluid Mechanics*, 46:273–291, 1971.
- [5] B. Baptiste. *Ondes internes, de l’instabilité au mélange. Approche expérimentale*. PhD thesis, Laboratoire de Physique à l’ÉNS de Lyon, 2014.
- [6] F. Beckebanze, C. Brouzet, I. Sibgatullin, and L. R. M. Maas. Damping of quasi-two-dimensional internal wave attractors by rigid-wall friction. *Journal of Fluid Mechanics*, 841:614–635, 2018.
- [7] T. Birner. Fine-scale structure of the extratropical tropopause region. *Journal of Geophysical Research*, 111:D04104, 2006.
- [8] G. Bordes. *Interactions non-linéaires d’ondes et tourbillons en milieu stratifié ou tournant*. PhD thesis, Laboratoire de Physique à l’ÉNS de Lyon, 2012.
- [9] G. Bordes, A. Venaille, S. Joubaud, P. Odier, and T. Dauxois. Experimental observation of a strong mean flow induced by internal gravity waves. *Physics of Fluids*, 24:086602, 2012.
- [10] C. Brouzet. *Internal waves attractors: from geometrical focusing to non-linear energy cascade and mixing*. PhD thesis, Laboratoire de Physique à l’ÉNS de Lyon, 2016.
- [11] C. Brouzet, E. Ermanyuk, S. Joubaud, G. Pillet, and T. Dauxois. Internal wave attractors: different scenarios of instability. *Journal of Fluid Mechanics*, 811:554–568, 2017.

- [12] C. Brouzet, E. Ermanyuk, S. Joubaud, I. Sibgatullin, and T. Dauxois. Energy cascade in internal-wave attractors. *Europhysics Letters*, 113, 2016.
- [13] C. Brouzet, I. Sibgatullin, H. Scolan, E. Ermanyuk, and T. Dauxois. Internal wave attractors examined using laboratory experiments and 3d numerical simulations. *Journal of Fluid Mechanics*, 793:109–131, 2016.
- [14] C. S. Cox and H. Sandstrom. Coupling of surface and internal wavs in water of variable depth. *Oceanography Society of Japan*, 20<sup>th</sup> anniversary volume, 1962.
- [15] F. Cyr, D. Bourgault, and P. S. Galbraith. Behavior and mixing of a cold intermediate layer near a sloping boundary. *Ocean Dynamics*, 65(3):357–374, 2015.
- [16] J. C. B. da Silva, M. C. Buijsman, and J. M. Magalhaes. Internal waves on the upstream side of a large sill of the mascarene ridge: a comprehensive view of their generation mechanisms and evolution. *Deep Sea Research Part I: Oceanographic Research Papers*, 99:87–104, 2015.
- [17] B. Dalziel and A. Nye. Internal waves bouncing around basins. In *Norway-Scotland Internal Waves Symposium*, 2008.
- [18] T. Dauxois, S. Joubaud, P. Odier, and A. Venaille. Instability of internal gravity wave beams. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 50(1), February 2017.
- [19] T. Dauxois and W. R. Young. Near-critical reflection of internal waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 390:271–295, 1999.
- [20] R. Davis and A. Acrivos. Solitary internal waves in deep water. *Journal of Fluid Mechanics*, 29(3):593–607, 1967.
- [21] B. Dintrans, M. Rieutord, and L. Valdettaro. Gravito-inertial waves in a rotating stratified sphere or spherical shell. *Journal of Fluid Mechanics*, 398:271–297, 1999.
- [22] S. Drijfhout and L. R. M. Maas. Impact of channel geometry and rotation on the trapping of internal tides. *Journal of Physical Oceanography*, 37:2740–2774, 2007.
- [23] J-P. Eckmann and D. Ruelle. Ergodic theory of chaos and strange attractors. *Reviews of Modern Physics*, 57(3), July 1985.
- [24] M. I. El-Sabh and N. Silverberg. *Coastal and Estuarine Studies*. Oceanography of a Large-Scale Estuarine System: The St. Lawrence. Springer-Verlag, 1990.

- [25] C. C. Eriksen. Observations of internal wave reflection off sloping bottoms. *Journal of Geophysical Research: Oceans*, 87:2156–2202, 1982.
- [26] B. Fan, T. Kataoka, and T. R. Akylas. On three-dimensional internal gravity wave beams and induced large-scale mean flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 838, 2018.
- [27] J. T. Farrar, R. A. Weller, C. J. Zappa, and A. T. Jessup. Sea surface temperature signatures of oceanic internal waves in low winds. *Journal of Geophysical Research*, 112:C06014, 2007.
- [28] A. Fincham and G. Delerce. Advanced optimization of correlation imaging velocimetry algorithms. *Experiments in Fluids*, 29:S013–S022, 2000.
- [29] P. Fischer. An overlapping schwarz method for spectral element solution of the incompressible navier–stokes equations. *Journal of Computational Physics*, 133:84–101, 1997.
- [30] P. Fischer and JS. Mullen. Filter-based stabilization of spectral element methods. *Comptes Rendus de l Académie des Sciences - Series I – Analyse Numérique*, 332:265–270, 2001.
- [31] P. Flandrin. *Time-Frequency/Time-Scale Analysis*, volume 10. Academic Press, 1998.
- [32] J. B. Flór, J. W. M. Bush, and M. Ungarish. An experimental study on the spin up of a stratified fluid. *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics*, 98:277–296, 2004.
- [33] N. Garnier, A. Chiffaudel, F. Daviaud, and A. Prigent. Nonlinear dynamics of waves and modulated waves in 1d thermocapillary flows. i. general presentation and periodic solutions. *Physica D*, 174:1–29, 2003.
- [34] N. Garnier, A. Chiffaudel, F. Daviaud, and A. Prigent. Nonlinear dynamics of waves and modulated waves in 1d thermocapillary flows. ii. convective/absolute transitions. *Physica D*, 174:30–55, 2003.
- [35] T. Gerkema and J. Zimmerman. An introduction to internal waves. *Lecture Notes, Royal NIOZ*, page 207, 2008.
- [36] L. Gostiaux and T. Dauxois. Laboratory experiments on the generation of internal tidal beams over steep slopes. *Physics of Fluids*, 19(1):1–4, 2007.
- [37] L. Gostiaux, T. Dauxois, H. Didelle, J. Sommeria, and S. Viboud. Quantitative laboratory observations of internal wave reflection on ascending slopes. *Physics of Fluids*, 18:056602, 2006.
- [38] L. Gostiaux, H. Didelle, S. Mercier, and T. Dauxois. A novel internal waves generator. *Experiments in Fluids*, 42:123–130, 2007.

- [39] N. Grisouard. *Réflexions et réfractions non-linéaires d'ondes de gravité internes*. PhD thesis, Université de Grenoble, 2010.
- [40] N. Grisouard and O. Bühler. Forcing of oceanic mean flows by dissipating internal tides. *Journal of Fluid Mechanics*, 708:250–278, 2012.
- [41] N. Grisouard, M. Leclair, L. Gostiaux, and C. Staquet. Large scale energy transfer from an internal gravity wave reflecting on a simple slope. *Procedia IUTAM*, 8:119–128, 2013.
- [42] N. Grisouard, C. Staquet, and I. Pairaud. Numerical simulation of a two-dimensional internal wave attractor. *Journal of Fluids Mechanics*, 614:1–14, 2008.
- [43] N. Grisouard and L. Thomas. Oblique collisions of internal wave beams and associated resonances. *Journal of Fluid Mechanics*, 765:273–302, 2015.
- [44] J. Hazewinkel, N. Grisouard, and S. B. Dalziel. Comparison of laboratory and numerically observed scalar field of an internal wave attractor. *European Journal of Mechanics B/Fluids*, 30:51–56, 2011.
- [45] J. Hazewinkel, P. van Breevoort, S. B. Dalziel, and L. R. M. Maas. Observation of the wavenumber spectrum and evolution of an internal wave attractor. *Journal of Fluids Mechanics*, 598:373–382, 2008.
- [46] E. J. Hopfinger, J. B. Flór, J. M. Chomaz, and P. Bonneton. Internal waves generated by a moving sphere and its wake in a stratified fluid. *Experiments in Fluids*, 11:255–261, 1991.
- [47] C. R. Jackson, J. C. B. da Silva, G. Jeans, W. Alpers, and M. J. Caruso. Nonlinear internal waves in synthetic aperture radar imagery. *Journal of Oceanography*, 26(2):68–79, 2013.
- [48] J. Hazewinkel, L. R. M. Maas, and S. B. Dalziel. Tomographic reconstruction of internal wave patterns in a paraboloid. *Experiments in Fluids*, 50:247–258, 2011.
- [49] J. Hazewinkel, C. Tsimitri, L. R. M. Maas, and S. B. Dalziel. Observations on the robustness of internal wave attractors to perturbations. *Physics of Fluids*, 22:102017, 2010.
- [50] C. Jiang and P. Marcus. Selection rules for the nonlinear interaction of internal gravity waves. *Physical Review Letters*, 102(124502), 2009.
- [51] L. Jouve and G. I. Ogilvie. Direct numerical simulations of an inertial wave attractor in linear and nonlinear regimes. *Journal of Fluids Mechanics*, 745:223–250, 2014.

- [52] T. Kataoka and T. R. Akylas. On three-dimensional internal gravity wave beams and induced large-scale mean flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 769:621–634, 2015.
- [53] V. Klemas. Remote sensing of ocean internal waves: An overview. *Journal of Coastal Research*, 28-3:540–546, 2012.
- [54] M. Leclair, N. Grisouard, L. Gostiaux, C. Staquet, and F. Auclair. Reflexion of a plane wave onto a slope and wave-induced mean flow. *7th Int. Symp. on Stratified Flow*, August 2011.
- [55] J. Lighthill. *Waves in Fluids*. UK : Cambridge University Press, 1978.
- [56] J. Lighthill. Internal waves and related initial-value problems. *Dynamics of Atmospheres and Oceans*, 23:3–17, 1996.
- [57] L. R. M. Maas. Geometric focusing of internal waves. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 300:2757–2782, 2005.
- [58] L. R. M. Maas, D. Benielli, J. Sommeria, and F. P. A. Lam. Observation of an internal wave attractor in a confined stably stratified fluid. *Nature*, 388:557–561, 1997.
- [59] L. R. M. Maas and F. P. A. Lam. Geometric focusing of internal waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 300:1–41, 1995.
- [60] L. R. M. Maas and F. P. A. Lam. Internal wave focusing revisited; a reanalysis and new theoretical links. *Fluid Dynamics Research*, 40:95–122, 2008.
- [61] M. M. Manders and L. R. M. Maas. Observations of inertial waves in a rectangular basin with one sloping boundary. *Journal of Fluid Mechanics*, 493:59–88, 2003.
- [62] M. M. Manders and L. R. M. Maas. On the three-dimensional structure of the inertial wave field in a rectangular basin with one sloping boundary. *Fluid Dynamics Research*, 35:1–21, 2004.
- [63] A. McEwan. Degeneration of resonantly-excited standing internal gravity waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 50(03):431–448, 1971.
- [64] A. McEwan, D. Mander, and R. Smith. Forced resonant second-order interaction between damped internal waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 55(04):589–608, 1972.
- [65] P. Melchior and B. Ducarme. Detection of inertial gravity oscillations in the earth’s core with a superconducting gravimeter at brussels. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 42:129–134, 1986.

- [66] M. Mercier. *Étude expérimentale de la génération de structures linéaires et non-linéaires (solitons, solitons) en milieu stratifié*. PhD thesis, Laboratoire de Physique à l'ÉNS de Lyon, 2010.
- [67] M. Mercier, N. Garnier, and T. Dauxois. Reflection and diffraction of internal waves analysed with the hilbert transform. *Phys. Fluids*, 20(8):086601, 2008.
- [68] M. Mercier, D. Martinand, M. Mathur, L. Gostiaux, T. Peacock, and T. Dauxois. New wave generation. *Journal of Fluid Mechanics*, 657:308–334, 2010.
- [69] R. Mied and J. Dugan. Internal wave reflection from a sinusoidally corrugated surface. *Journal of Fluid Mechanics*, 76:259–272, 1976.
- [70] W. H. Munk and C. Wunsch. Abyssal recipes ii: energetics of tidal and wind mixing. *Deep sea research part I*, 45:1977–2010, 1998.
- [71] R. Nazarian and S. Legg. Internal wave scattering in continental slope canyons, part 1: Theory and development of a ray tracing algorithm. *Ocean Modelling*, 118:1–15, 2017.
- [72] G. I. Ogilvie. Wave attractors and the asymptotic dissipation rate of tidal disturbances. *Journal of Fluids Mechanics*, 543:19–44, 2005.
- [73] P. Olson. Internal wave in the earth's core. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, 51:183–215, 1977.
- [74] G. Oster and M. Yamamoto. Density gradient techniques. *Chem. Rev.*, 63(3):257–268, 1963.
- [75] O. M. Phillips. Energy transfer in rotating fluids by reflection of inertial waves. *Physics of Fluids*, 6:513–520, 1963.
- [76] G. Pillet, E. Ermanyuk, L. R. M. Maas, I. Sibgatullin, and T. Dauxois. Internal wave attractors in 3d geometries: trapping by oblique reflection. *Journal of Fluid Mechanics*, 845:203–225, 2018.
- [77] R. Plumb and A. McEwan. The instability of a forced standing wave in a viscous stratified fluid : A laboratory analogue of the quasi-biennial oscillation. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 35:18271839, 1978.
- [78] K. L. Polzin, J. M. Toole, J. R. Ledwell, and R. W. Schmitt. Spatial variability of turbulent mixing in the abyssal ocean. *Science*, 276:93–96, 1997.
- [79] J. Price. Internal wave wake of a moving storm. part i. scales, energy budget and observations. *Journal of Physical Oceanography*, 13:949–965, 1983.

- [80] A. Rabitti and L. R. M. Maas. Meridional trapping and zonal propagation of inertial waves in a rotating fluid shell. *Journal of Fluid Mechanics*, 729:445–470, 2013.
- [81] A. Rabitti and L. R. M. Maas. Inertial wave rays in rotating spherical fluid domains. *Journal of Fluid Mechanics*, 758:621–654, 2014.
- [82] R. D. Ray and G. T. Mitchum. Surface manifestation of internal tides in the deep ocean: observations from altimetry and island gauges. *Progress in Oceanography*, 40:135–162, 1997.
- [83] B. Rodenborn, D. Kiefer, H. Zhang, and L. Swinney. Harmonic generation by reflecting internal waves. *Physics of Fluids*, 23(026601), 2011.
- [84] H. Sandstrom. The effect of boundary curvature on reflection of internal waves. *Mémoires Société Royale des sciences de Liège*, 6(IV):183–190, 1972.
- [85] F. Saucier and J. Chassé. Tidal circulation and buoyancy effects in the St. Lawrence estuary. *Atmosphere-Ocean*, 38(4):505–556, 2000.
- [86] H. Scolan, E. Ermanyuk, and T. Dauxois. Nonlinear fate of internal wave attractors. *Physical Review Letter*, 110:234501, 2013.
- [87] S. Smith and J. Crockett. Experiments on nonlinear harmonic wave generation from colliding internal wave beams. *Experimental Thermal and Fluid Science*, 54:93–101, 2014.
- [88] B. Sutherland. *Internal Gravity Waves*. Cambridge University Press, 2010.
- [89] A. Tabaei, T. Akylas, and K. Lamb. Nonlinear effects in reflecting and colliding internal wave beams. *Journal of Fluid Mechanics*, 526:217–243, 2005.
- [90] A. Tabaei and T. R. Akylas. Nonlinear internal gravity wave beams. *Journal of Fluid Mechanics*, 482:141–161, 2003.
- [91] S. Thorpe. On the reflection of a train of finite-amplitude internal waves from a uniform slope. *Journal of Fluid Mechanics*, 178:279–302, 1987.
- [92] J. Wang, R. G. Ingram, and L. A. Mysak. Variability of internal tides in the Laurentian channel. *Journal of Geophysical Research*, 96(9):859–875, 1991.
- [93] C. Wunsch and R. Ferrari. Vertical mixing, energy, and the general circulation of the oceans. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 36(1):281–314, 2004.
- [94] JH. Xie and J. Vanneste. Boundary streaming with Navier boundary condition. *Physical Review E*, 89:063010, 2014.

- [95] S. Legg Y. Yi and R. Nazarian. The impact of topographic steepness on tidal dissipation at bumpy topography. *Fluids*, 2(55), 2017.
- [96] H. P. Zhang, B. King, and H. L. Swinney. Experimental study of internal gravity waves generated by supercritical topography. *Physics of Fluids*, 19:096602, 2007.

---

# Résumé

Les ondes internes de gravité jouent un rôle essentiel dans la dynamique océanique. La relation de dispersion anisotrope de ces ondes conduit à des lois de réflexion qui sont différentes de celles dont nous avons l'habitude avec les ondes acoustiques ou les rayons lumineux.

Dans cette thèse de doctorat, nous nous intéressons aux structures créées par ces ondes en deux dimensions puis en trois dimensions. Dans la plupart des géométries 2D, le parcours des ondes va converger vers un attracteur. Nous étudions d'abord expérimentalement, dans une géométrie trapézoïdale, l'aspect énergétique d'un de ces attracteurs d'ondes. Nous examinons ensuite expérimentalement la transformation de ces attracteurs dans des géométries tridimensionnelles. Dans certaines géométries, la réflexion des ondes conduit à un phénomène de piégeage dans un plan 2D. Ce phénomène, d'abord étudié à l'aide de tracés de rayons, a été reproduit dans une géométrie trapézoïdale ainsi que dans une géométrie de canal. Cette mise en évidence expérimentale du piégeage pourrait expliquer certaines mesures in-situ réalisées dans l'estuaire du Saint Laurent où la propagation des ondes internes est encore mal comprise.

Cette thèse est enrichie par deux études expérimentales portant sur la propagation et la réflexion d'un faisceau d'ondes internes : d'une part, la génération d'un courant moyen dans le cas d'un faisceau se propageant dans une géométrie tridimensionnelle et d'autre part la génération d'ondes rétro-réfléchies lors de la réflexion sur des surfaces courbes.