



Intersections lagrangiennes pour les sous-variétés monotones et presque monotones

Nassima Keddari

► To cite this version:

Nassima Keddari. Intersections lagrangiennes pour les sous-variétés monotones et presque monotones. Géométrie symplectique [math.SG]. Université de Strasbourg, 2018. Français. NNT : 2018STRAD030 . tel-01873368v2

HAL Id: tel-01873368

<https://theses.hal.science/tel-01873368v2>

Submitted on 25 Jun 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ÉCOLE DOCTORALE 269

IRMA

THÈSE présentée par :

Nassima KEDDARI

soutenue le : 26 septembre 2018

pour obtenir le grade de : **Docteur de l'université de Strasbourg**

Discipline/ Spécialité : mathématiques

**Intersections Lagrangiennes pour les
sous-variétés monotones et presque
monotones**

THÈSE dirigée par :

M. DAMIAN Mihai

Maître de conférence (HDR), université de Strasbourg

RAPPORTEURS :

M. BARRAUD Jean-François

Professeur, université de Toulouse

M. OANCEA Alexandru

Professeur, université Pierre et Marie Curie

AUTRES MEMBRES DU JURY :

M. LAUDENBACH François

Professeur émérite, université de Nantes

M. OPSHTEIN Emmanuel

Maître de conférence (HDR), université de Strasbourg

MME SANDON Sheila

Chargée de recherche, IRMA

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier grandement mon directeur de thèse, Mihai Damian. Vous avez été un mentor formidable pour moi. Outre votre appui scientifique, je tiens à vous remercier pour votre soutien continu et indéfectible, pour votre patience et votre motivation, tout au long de l'élaboration de cette thèse.

Jean-François Barraud et Alexandru Oancea m'ont fait l'honneur d'être rapporteurs de cette thèse ; je les en remercie profondément.

J'exprime tous mes remerciements à François Laudénbach, Emmanuel Opshtein et Sheila Sandon pour avoir accepté de participer au Jury de soutenance.

Mes remerciements vont également à l'examineur anonyme de mon article dont les retours ont contribué à améliorer grandement la qualité de celui-ci.

Je remercie mes collègues doctorants avec qui j'ai partagé ces années de thèse, en particulier ceux du bureau 117 : Charlotte, Simon, Arthur et Viet-Cuong.

Je tiens à remercier le personnel de L'IRMA, de l'UFR et de l'école doctorale qui ont toujours été à l'écoute et d'une grande aide dans toutes les démarches administratives.

Je remercie enfin les membres de ma famille qui ont toujours été à mes côtés et qui m'ont toujours encouragé

Table des matières

1	Introduction	5
2	Homologie de Floer Lagrangienne	16
2.1	Homologie de Floer Lagrangienne classique	16
2.1.1	Complexe de Floer pour l'équation de Cauchy-Riemann	16
2.1.2	Complexe de Floer pour l'équation de Floer	22
2.2	Homologie de Floer Lagrangienne relevée	25
2.3	Lien avec l'homologie singulière	27
2.3.1	Définition de la suite spectrale	27
2.3.2	Morphisme de suites spectrales	30
3	Intersections Lagrangiennes	32
3.1	Preuve du théorème 1.5	32
3.2	Lagrangiennes à courbure sectionnelle strictement négative	34
3.3	Fibration sur $\mathbf{S}^1$	35
3.4	Preuve du théorème 1.10	40
3.4.1	Le complexe de Floer minimal	40
3.4.2	Démonstration	42
3.4.3	Preuve du corollaire 1.12	44
3.5	Preuve de la proposition 1.14	45
4	Homologie de Floer Lagrangienne dans le cas presque monotone	47
4.1	Sous-variétés Lagrangiennes presque monotones	47
4.2	Homologie de Floer dans le cas presque monotone	52
4.2.1	Le complexe de Floer	52
4.2.2	Preuve de l'identité $d \circ d = 0$	59
4.3	Invariance	64
4.3.1	Équation de Floer et espaces des solutions	66
4.3.2	Le morphisme Φ^Γ	66
4.3.3	Preuve de la Propriété 4.22	68
4.3.4	Preuve de la Propriété 4.23	72
4.4	Homologie de Floer relevée dans le cas presque monotone	73
4.4.1	Complexe de Floer relevé	73

4.4.2	Le cas $N_L = 2$ et $x = y$	74
5	Applications de l'homologie de Floer Lagrangienne pour les sous-variétés presque monotones	76
5.1	Sous-variétés Lagrangiennes déplaçables	76
5.1.1	Complexe de Floer à coefficients dans un anneau de Novikov	76
5.1.2	Homologie de Floer d'une suite de Lagrangiennes presque monotones déplaçables	78
5.1.3	Lemmes préparatoires	80
5.1.4	Construction de l'application $\psi^{\mathbf{H}}$	82
5.1.5	Le morphisme φ	84
5.1.6	Preuve de la proposition 5.2.	86
5.1.7	Cas relevé	86
5.2	Lien avec l'homologie singulière	87
5.2.1	Définition des suites spectrales	87
5.2.2	Morphisme de suites spectrales	89
5.3	Preuve du théorème 1.19	90
5.4	Voisinage d'une sous-variété Lagrangienne et déplaçabilité	91
5.4.1	Preuve du théorème 1.21	91
5.4.2	Preuve du corollaire 1.22	92
5.4.3	Preuve du théorème 1.23	92
5.4.4	Preuve du corollaire 1.24	93

Chapitre 1

Introduction

Une variété lisse M est dite *symplectique* si elle est munie d'une 2-forme différentielle ω fermée et non dégénérée, appelée forme symplectique. L'hypothèse de non-dégénérescence de ω signifie que chaque espace vectoriel $(T_q M, \omega_q)$ est un espace vectoriel symplectique, M est donc nécessairement de dimension paire. Le premier exemple de variété symplectique est l'espace $\mathbf{R}^{2n}$ muni de la 2-forme :

$$\omega_0 = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i,$$

où $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ désigne les coordonnées sur $\mathbf{R}^{2n}$. Un autre exemple important est donné par l'espace cotangent T^*V d'une variété lisse V de dimension n . Il existe sur T^*V une 1-forme canonique, appelée forme de Liouville, définie en coordonnées locales par :

$$\lambda = \sum_{i=1}^n p_i dq_i.$$

Celle-ci définit une forme symplectique standard sur T^*V : $\omega = d\lambda$.

Une structure presque complexe sur M est un endomorphisme J du fibré tangent TM de M , telle que $J^2 = -Id$. Munis de cette structure, TM et T^*M définissent des fibrés vectoriels complexes de dimension n . On dit que J est calibrée par ω , si :

$$\forall X, Y \in TM, \quad \begin{cases} \omega(X, Y) = \omega(JX, JY) \\ (X, Y) \mapsto \omega(X, JY) \text{ est une métrique Riemannienne sur } M. \end{cases}$$

On note $\mathcal{J}_c(M, \omega)$ l'ensemble des structures presque complexes calibrées par ω . La première classe de Chern d'une variété symplectique M est un élément de $H^2(M, \mathbf{Z})$ que l'on définit à partir de son fibré tangent T^*M , vu comme fibré vectoriel complexe. Elle dépend, a priori, de la structure presque complexe choisie. On a alors une application :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{J}_c(M, \omega) & \rightarrow & H^2(M, \mathbf{Z}) \\ J & \mapsto & c_1(M, J) \end{array} .$$

L'ensemble $\mathcal{J}_c(M, \omega)$ est contractile et $H^2(M, \mathbf{Z})$ est discret, donc cette application est constante. Par conséquent, la première classe de Chern de M ne dépend pas de la structure presque complexe choisie, on la note $c_1(M)$. Cette classe définit un morphisme sur $\pi_2(M)$:

$$I_{c_1} : \pi_2(M) \rightarrow \mathbf{Z}.$$

On note $N_{c_1}(M)$ le générateur positif de l'image de ce morphisme, on l'appelle le nombre de Chern de la variété M .

Définition 1.1. *Une variété symplectique (M, ω) est dite monotone, s'il existe un réel $\alpha > 0$, tel que le morphisme I_{c_1} , associée à sa première classe de Chern, satisfait la relation :*

$$I_{c_1} = \alpha \omega, \quad (1.1)$$

où $\omega : \pi_2(M) \rightarrow \mathbf{R}$ désigne le morphisme défini par l'intégrale de la forme symplectique.

Une sous-variété Lagrangienne d'une variété symplectique (M^{2n}, ω) est une sous-variété de dimension n sur laquelle la forme symplectique s'annule. Par exemple, pour toute variété lisse V la section nulle de $(T^*V, d\lambda)$, notée par O_V , définit une sous-variété Lagrangienne de T^*V . Cet exemple est universel dans le sens suivant :

Théorème 1.2 (Weinstein). *Si $L \hookrightarrow (M, \omega)$ est une sous-variété Lagrangienne, alors il existe un voisinage $U(L)$ de L dans (M, ω) , un voisinage $V(L)$ de la section nulle dans $(T^*L, d\lambda)$ et un symplectomorphisme $f : U(L) \rightarrow V(L)$ (i.e f est un difféomorphisme qui préserve la forme symplectique.) tel que $f(L) = O_L$.*

Une fonction $H : M \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ est appelée fonction *Hamiltonienne*. On lui associe un champ de vecteurs dit *Hamiltonien*, $X_H : M \rightarrow TM$, défini à l'aide de la forme symplectique sur M par :

$$\omega(X_H, \cdot) = -dH.$$

Le flot Hamiltonien $(\phi_t^H)_{t \in [0, 1]}$ associé à H est le flot défini par X_H :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \phi_t^H = X_H \circ \phi_t^H \\ \phi_0^H = \text{id} \end{cases}$$

Pour tout $t \in [0, 1]$, ϕ_t^H est un symplectomorphisme. On appelle $(\phi_t^H)_{t \in [0, 1]}$ une *isotopie Hamiltonienne*.

Un problème intéressant en géométrie symplectique est de déterminer quand est-ce qu'une sous-variété Lagrangienne peut être disjointe d'elle-même par une isotopie Hamiltonienne. Les Lagrangiennes satisfaisant cette propriété sont appelées *déplaçables*. Par exemple, le fait que la diagonale dans $(M \times M; \omega \oplus \omega)$, pour M fermée,

ne peut-être disjointe d'elle-même est la célèbre conjecture d'Arnold. Une question qui en découle est de savoir s'il y a des minoration du nombre de points d'intersection entre L et son image par n'importe quelle isotopie Hamiltonienne. C'est pour étudier cette question que A.Floer développe dans [22] une théorie de Morse pour les intersections Lagrangiennes, appelée homologie de Floer Lagrangienne, avec laquelle il donne une minoration par la somme des nombres de Betti, dans le cas où $\pi_2(M, L) = 0$.

Dans [36] et [38], Y-G.Oh reprend la construction de A.Floer et la généralise à une classe plus large de sous-variétés Lagrangiennes dite *monotones*. Pour les définir, nous avons besoin du *morphisme de Maslov*. Rappelons la définition donnée par V.I. Arnold dans [2]. Tout d'abord, on considère l'ensemble des sous-espaces vectoriels Lagrangiens de $\mathbf{R}^{2n}$, appelé Grassmannienne des sous-espaces Lagrangiens et notée $\Lambda(n)$. L'espace $\Lambda(n)$ est une variété qui peut être identifiée à $U(n)/O(n)$, où $U(n)$ et $O(n)$ désignent, respectivement, le groupe unitaire et le groupe orthogonal. Cette identification permet d'obtenir une application de $\Lambda(n)$ dans le cercle, définie par le déterminant complexe au carré :

$$\Lambda(n) \xrightarrow{\det_{\mathbf{C}}^2} \mathbf{S}^1.$$

Soit L une sous-variété Lagrangienne de $\mathbf{R}^{2n}$. Pour tout lacet γ sur L , on associe un lacet $T_\gamma L$ dans $\Lambda(n)$. Le morphisme de Maslov associe à ce lacet le degré de l'application :

$$\mathbf{S}^1 \xrightarrow{\gamma} L \rightarrow \Lambda(n) \xrightarrow{\det_{\mathbf{C}}^2} \mathbf{S}^1.$$

On le note :

$$\mu : \pi_1(L) \rightarrow \mathbf{Z}.$$

Si L est une sous-variété Lagrangienne d'une variété symplectique plus générale M , pour tout lacet γ de L , on définit le morphisme de Maslov en trivialisant l'espace tangent de L le long de γ . Mais cette trivialisaton n'est pas unique à homotopie près, à moins de considérer les disques à bord sur L (Théorème 7.1.1 [4]). On définit ainsi $\mu : \pi_2(M, L) \rightarrow \mathbf{Z}$.

On note N_L le générateur positif du sous-groupe $\text{Im}(\mu) \subset \mathbf{Z}$, et on l'appelle *nombre de Maslov* de L .

Nous pouvons, à présent, donner la définition d'une sous-variété Lagrangienne monotone :

Définition 1.3. *Soit $L \hookrightarrow M$, une sous-variété Lagrangienne d'une variété symplectique (M, ω) . On dit que L est monotone s'il existe une constante $\eta > 0$ telle que :*

$$\mu = \eta\omega, \tag{1.2}$$

où $\omega : \pi_2(M, L) \rightarrow \mathbf{R}$ désigne le morphisme défini par l'intégrale de la forme symplectique.

La constante η s'appelle la constante de monotonie de L .

D'après le lemme 2.1 de [36], une sous-variété Lagrangienne monotone vit nécessairement dans une variété symplectique monotone. De plus, le morphisme de Chern et le morphisme de Maslov satisfont :

$$2I_{c_1} = \mu \circ i, \quad (1.3)$$

où $i : \pi_2(M) \rightarrow \pi_2(M, L)$ est l'application provenant de la suite exacte longue en homotopie définie par l'inclusion $L \subset M$:

$$\cdots \rightarrow \pi_2(M) \xrightarrow{i} \pi_2(M, L) \rightarrow \pi_1(L) \rightarrow \cdots .$$

En particulier, si M est monotone et $L \hookrightarrow M$ est une sous-variété Lagrangienne connexe, alors L est monotone. Dans ce cas $N_L = 2N_{c_1}(M)$. Plus généralement, dans sa thèse [24], A.Gadbled montre le résultat suivant :

Lemme 1.4 (Lemme 1.2.9 dans [24]). *Si L est une sous-variété Lagrangienne d'une variété symplectique monotone (M, ω) et si $\pi_1(L)$ est de q -torsion (c'est-à-dire $a^q = 1$ pour tout a de $\pi_1(L)$ avec $q \neq 0$), alors L est monotone dans M et $2N_{c_1}(M)$ divise qN_L .*

Dans ce mémoire, (M, ω) est une variété symplectique connexe fermée ou convexe à l'infini. Une variété convexe à l'infini a, dans de nombreux aspects, un comportement topologique similaire à une variété compacte (voir [19] pour une définition précise). Tous les groupes d'homologie et de cohomologie sont à coefficients dans $\mathbf{Z}_2$.

La première partie de ce mémoire est consacrée à la démonstration de plusieurs résultats concernant les intersections Lagrangiennes monotones. Cette partie est publiée dans [27]. On suppose que L est une sous-variété Lagrangienne monotone fermée de M . Tout d'abord on montre une inégalité qui va dans le sens de la conjecture d'Arnold pour les sous-variétés Lagrangiennes monotones $\mathbf{K}(\pi, 1)$:

Théorème 1.5. *Soit L une variété $\mathbf{K}(\pi, 1)$ admettant un plongement Lagrangien monotone dans M . Si L satisfait l'une des assertions suivantes :*

- (i) $N_L \geq 3$.
- (ii) L est orientable et $\pi_1(L)$ n'admet aucun élément non-trivial g dont la classe de conjugaison est finie.

Alors pour tout Φ^1 , temps 1 d'un flot Hamiltonien tel que l'intersection $\Phi^1(L) \cap L$ est transverse on a :

$$\#(\Phi^1(L) \pitchfork L) \geq 1 + \dim(H_1(L, \mathbf{Z}_2)).$$

Les variétés à courbure sectionnelle strictement négative sont des cas particuliers d'espaces $\mathbf{K}(\pi, 1)$. On démontre alors le corollaire suivant :

Corollaire 1.6. *Si L est une sous-variété Lagrangienne monotone orientable de M à courbure sectionnelle strictement négative telle que $H^1(L, \mathbf{Z}) \neq 0$, alors pour tout Φ^1 , temps 1 d'un flot Hamiltonien, tel que l'intersection $\Phi^1(L) \cap L$ est transverse on a :*

$$\#(\Phi^1(L) \cap L) \geq 1 + \dim(H_1(L, \mathbf{Z}/2)),$$

Remarque 1.7. Si $N_L \geq 3$, l'hypothèse sur l'orientabilité de L n'est pas nécessaire dans ce corollaire.

Par conséquent, les sous-variétés Lagrangiennes monotones à courbure sectionnelle strictement négative ne sont pas *déplaçables*, c'est-à-dire elles ne peuvent pas être disjointes d'elles-mêmes par une isotopie Hamiltonienne. En particulier on a :

Corollaire 1.8. *Il n'existe pas de plongement Lagrangien monotone à courbure sectionnelle strictement négative dans les variétés de Stein sous-critiques.*

En effet, par un résultat de P.Biran et K.Cieliebak dans [8], les sous-variétés Lagrangiennes des variétés de Stein sous-critiques sont déplaçables. Or par un théorème célèbre de Gromov [25], le premier groupe de cohomologie de ces Lagrangiennes est non-nul, on peut alors appliquer le corollaire 1.6 et on aboutit à une contradiction. Ce résultat a déjà été démontré par Y.Eliashberg, A.Givental et H.Hofer dans [18], K.Cieliebak et K.Mohnke dans [12] et C.Viterbo dans [42]. On peut voir le corollaire 1.6 comme un affinement de leurs résultats. En effet, K.Cieliebak et K.Mohnke se demandent dans leur article [12] s'il y a une approche par la théorie de Floer pour l'étude des plongements Lagrangiens faisant intervenir des Lagrangiennes à courbure sectionnelle strictement négative et le corollaire 1.6 est une première réponse dans cette direction.

Un autre cas particulier du théorème 1.5 concerne les sous-variétés Lagrangiennes monotones $\mathbf{K}(\pi, 1)$, de dimension supérieure à 6. En effet, si L est orientable et ne vérifie pas l'hypothèse (ii) du Théorème 1.5, nous pouvons montrer qu'alors, sous certaines conditions, L fibre sur le cercle. Donc, par contraposée, si L ne fibre pas sur le cercle, elle vérifie (ii). On obtient une autre version du théorème 1.5 :

Corollaire 1.9. *Soit L une variété $\mathbf{K}(\pi, 1)$ avec $\dim(L) \geq 6$, admettant un plongement Lagrangien monotone dans M . On suppose que $H_2(M, \mathbf{Q}) = 0$. Si L satisfait l'une des assertions suivantes :*

- (i) $N_L \geq 3$.
- (ii) L est orientable, son groupe de Whitehead $Wh(\pi_1(L))$ est nul et L ne fibre pas sur le cercle.

Alors pour tout Φ^1 , temps 1 d'un flot Hamiltonien, tel que l'intersection $\Phi^1(L) \cap L$ est transverse on a :

$$\#(\Phi^1(L) \cap L \geq 1) + \dim(H_1(L, \mathbf{Z}_2)),$$

Le second résultat sur les intersections Lagrangiennes concerne des sous-variétés Lagrangiennes plus générales :

Théorème 1.10. *Soit L une sous-variété Lagrangienne monotone de M satisfaisant l'une des assertions suivantes :*

- (i) $N_L \geq 3$.
- (ii) L est orientable et $\pi_1(L)$ n'admet aucun élément non-trivial g dont la classe de conjugaison est finie.

Soit $p : \tilde{L} \rightarrow L$, son revêtement universel. Si p induit l'application nulle en homologie sauf en degré 0, alors $HF(L, L) \neq 0$. Donc L n'est pas déplaçable.

Remarque 1.11. L'hypothèse (ii) du théorème 1.10 peut être remplacée par une autre plus faible (voir remarque 2.14) :

- (ii)' L est orientable et il n'existe pas d'élément $g \in \text{Im}(\pi_2(M, L) \rightarrow \pi_1(L))$ non-trivial ayant un nombre fini d'éléments conjugués.

Exemples. Pour $n > 1$, considérons le produit $\mathbf{RP}^n \times K$, où K est une variété $\mathbf{K}(\pi, 1)$. On la plonge dans $\mathbf{CP}^n \times T^*K$ par le plongement standard de $\mathbf{RP}^n$ dans $\mathbf{CP}^n$ et par la projection sur la section nulle pour K dans T^*K . Le nombre de Maslov de $\mathbf{RP}^n$ dans $\mathbf{CP}^n$ est $N_{\mathbf{RP}^n} = n + 1$ ([37]) et celui de K est nul car c'est la section nulle de T^*K . On obtient alors une sous-variété Lagrangienne monotone dont le nombre de Maslov est $N_{\mathbf{RP}^n \times K} = n + 1 \geq 3$ qui vérifie l'hypothèse (i) du théorème 1.10, donc elle n'est pas déplaçable. Cet exemple se déduit également de la formule de Künneth ([35]). Plus généralement, le théorème est vrai pour un plongement arbitraire de $\mathbf{RP}^n \times K$, dans une variété symplectique M telle que $\pi_2(M) = 0$ ou dont le nombre de Chern est $N_{c_1}(M) > 2$:

Corollaire 1.12. *Soit M une variété symplectique telle que $\pi_2(M) = 0$ ou telle que son nombre de Chern vérifie $N_{c_1}(M) > 2$. On considère le produit $\mathbf{RP}^n \times K$, où K est une variété à courbure sectionnelle strictement négative avec $H^1(K, \mathbf{Z}) \neq 0$. On suppose qu'il existe un plongement Lagrangien monotone et orientable $\mathbf{RP}^n \times K \hookrightarrow M$. Alors $\mathbf{RP}^n \times K$ n'est pas déplaçable dans M .*

Par le théorème de Gromov, mentionné ci-dessus, toute sous-variété L de $\mathbf{C}^n$ vérifie $H^1(L, \mathbf{Z}) \neq 0$. Donc on peut appliquer le corollaire 1.12 à $\mathbf{C}^n$, et on déduit le résultat suivant :

Corollaire 1.13. *Il n'existe pas de plongement Lagrangien monotone de $\mathbf{RP}^n \times K^m$ dans $\mathbf{C}^{n+m}$.*

De nouveau, ce résultat est un début de réponse à la question que se posent K.Cieliebak et K.Mohnke dans leur article [12], de savoir s'il y a une approche par la théorie de Floer pour étudier, par exemple, le plongement d'un produit d'une variété à courbure sectionnelle strictement positive et d'une variété à courbure sectionnelle strictement négative.

D'autre part, si on considère le plongement Lagrangien monotone :

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^{2n+1} &\hookrightarrow \mathbf{CP}^n \times \mathbf{C}^n \\ z &\mapsto ([z], \bar{z}), \end{aligned}$$

son nombre de Maslov est $N_{\mathbf{S}^{2n+1}} = 2n + 2 \geq 3$ et $\mathbf{S}^{2n+1}$ est déplaçable. La sous-variété $\mathbf{S}^{2n+1}$ ne vérifie pas les hypothèses du théorème 1.10, en effet, $p : \tilde{\mathbf{S}}^{2n+1} \rightarrow \mathbf{S}^{2n+1}$ est l'identité en homologie.

Le théorème 1.10 s'applique également au plongement de $\mathbf{RP}^n$ dans une variété symplectique avec $N_{\mathbf{RP}^n} \geq 3$. On retrouve alors un résultat de L.Buhovsky [11] et de P.Biran et O.Cornea [10]. Ils ont en fait prouvé, plus généralement, que pour toute sous-variété Lagrangienne monotone $L \hookrightarrow M$ dont l'anneau de cohomologie $H^*(L)$ est engendré par $H^1(L)$, on a $HF^*(L) \simeq H^*(L)$, où $HF^*(L)$ est la cohomologie de Floer de L . Ce résultat est démontré pour $N_L \geq 3$, mais on peut le généraliser au cas $N_L \geq 2$:

Proposition 1.14. *Soit L une sous-variété Lagrangienne monotone de M satisfaisant l'une des assertions suivantes :*

- (i) $N_L \geq 3$.
- (ii) L est orientable et $\pi_1(L)$ n'admet aucun élément non-trivial g dont la classe de conjugaison est finie.

Supposons que l'anneau de cohomologie $H^(L)$ est engendré par $H^1(L)$, alors la cohomologie de Floer de L vérifie :*

$$HF^*(L) \simeq H^*(L).$$

On peut appliquer cette proposition à un produit monotone de surfaces compactes $\Sigma_{g_1} \times \cdots \times \Sigma_{g_k}$ de genre $g_i > 1$. En effet il vérifie l'hypothèse (ii).

Comme mentionné dans la remarque 1.11, on peut affaiblir l'hypothèse (ii) en (ii)' :

- (ii)' L est orientable et il n'existe pas d'élément $g \in \text{Im}(\pi_2(M, L) \rightarrow \pi_1(L))$ non-trivial ayant un nombre fini d'éléments conjugués.

Si on considère un plongement Lagrangien monotone

$$\mathbf{RP}^n \times \Sigma_{g_1} \times \cdots \times \Sigma_{g_k} \hookrightarrow M,$$

avec Σ_{g_i} comme précédemment, alors l'assertion (ii)' est satisfaite à condition que $N_{c_1}(M) > 2$, où $N_{c_1}(M)$ est le nombre de Chern de M .

La preuve des résultats précédents repose sur l'homologie de Floer Lagrangienne et sur l'homologie de Floer *relevée* définie par M.Damian dans [16]. Celle-ci se définit à partir d'un complexe obtenu en relevant le complexe de Floer classique à un revêtement de la sous-variété Lagrangienne considérée. Par cette technique, M.Damian a obtenu plusieurs résultats dans [15] et [16], notamment la conjecture d'Audin :

Théorème 1.15 (Théorème 1.5 [15]). *Soit $L \hookrightarrow M$ une sous-variété Lagrangienne monotone déplaçable.*

- a) *Si L est un espace $\mathbf{K}(\pi, 1)$, alors $N_L = 2$ si L est orientable et $N_L \in \{1, 2\}$ si L n'est pas orientable.*

b) On note $\tilde{L}$ le revêtement universel de L . Si L est orientable et vérifie

$$H_{2i+1}(\tilde{L}) = 0,$$

pour tout entier i , alors $N_L = 2$.

c) De plus, pour toute structure complexe compatible avec la forme symplectique, une Lagrangienne L qui vérifie la condition b) a la propriété suivante : pour tout point $p \in L$, il existe un disque J -holomorphe $w : (D, \partial D) \rightarrow (M, L)$ tel que :

- l'indice de Maslov $\mu(w)$ est 2;
- $p \in w(\partial D)$;
- $w(\partial D)$ est non-nul dans $\pi_1(L)$.

Dans ces résultats, les sous-variétés Lagrangiennes monotones considérées sont déplaçables, ceci joue un rôle très important dans la preuve. Bien évidemment, comme on l'a vu précédemment, les sous-variétés Lagrangiennes ne sont pas toujours déplaçables. C'est le cas par exemple du plongement Lagrangien monotone de $\mathbf{S}^1 \hookrightarrow \mathbf{S}^2$, qui correspond à l'équateur de $\mathbf{S}^2$. En effet, il n'existe pas d'isotopie Hamiltonienne qui disjoint l'équateur de lui-même. Cependant, si on le translate légèrement on obtient une sous-variété Lagrangienne, ayant les mêmes propriétés topologiques que la sous-variété Lagrangienne de départ, mais déplaçable : on peut alors la disjointre d'elle-même par un demi-tour de la sphère. Cette Lagrangienne

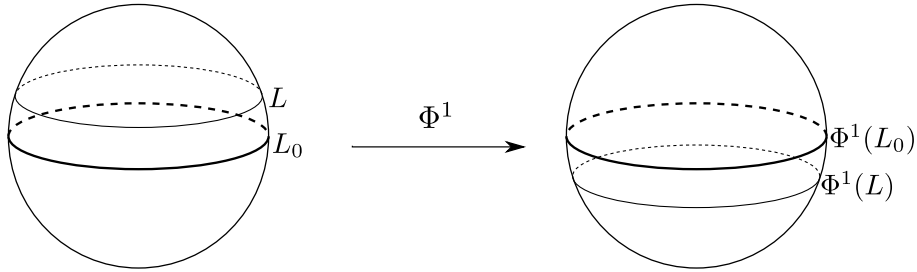


FIGURE 1.1 – Demi-tour de la Sphère

n'est pas monotone mais conserve certaines propriétés essentielles à la définition de l'homologie de Floer. C'est la notion de sous-variété Lagrangienne *presque monotone* :

Définition 1.16. Une sous-variété Lagrangienne $L \hookrightarrow M$ est dite *presque monotone* si elle est proche d'une sous-variété Lagrangienne monotone donnée $L_0 \hookrightarrow M$ dans la topologie C^1 .

L'exemple de l'équateur dans la sphère $\mathbf{S}^2$, est un cas particulier des variétés toriques. Une variété symplectique (M, ω) est dite torique si elle est munie d'une

action Hamiltonienne du tore de dimension n , noté $\mathbf{T}^n$. Cette action est définie par une application moment :

$$\begin{aligned}\Phi : M &\rightarrow \mathbf{R}^{2n} \\ x &\mapsto (H_1(x), \dots, H_n(x))\end{aligned}$$

où H_i désigne l'action Hamiltonienne du i^{me} -cercle de $\mathbf{T}^n$. L'image de M par l'application moment est un polytope que l'on note Δ . (voir par exemple [3] pour plus d'informations sur ces variétés).

Les fibres de l'application moment Φ définissent des tores Lagrangiens dans M . Lorsque M est monotone, M.Entov et L.Polterovich montre qu'il existe une fibre monotone et non déplaçable (théorème 1.9 [20]). D'après A.Gadbled, cette fibre est la seule fibre monotone (lemme 1.2.13 de [24]). De plus, si M est de dimension inférieure ou égale à 6, D.McDuff montre que toutes les autres fibres sont déplaçables (théorème 1.1 [31]).

Pour obtenir des informations sur une sous-variété Lagrangienne monotone (non déplaçable) donnée, l'idée est d'étudier les sous-variétés Lagrangiennes presque monotones et déplaçables, de son voisinage. Dans sa thèse [33], F.Ngô définit une homologie de Floer pour les sous-variétés Lagrangiennes presque monotones. Dans la deuxième partie de ce mémoire, on va généraliser sa construction au cas de l'homologie relevée et en déduire alors une partie du théorème 1.15 dans le cas non déplaçable. Avant d'énoncer le théorème, on rappelle la définition de l'énergie de déplacement d'une sous-variété Lagrangienne déplaçable :

Définition 1.17. Soit $L \hookrightarrow M$ une sous-variété Lagrangienne déplaçable. Son énergie de déplacement est :

$$e(L) = \inf_{\substack{H \in \mathcal{H}_c(M) \\ \Phi_H^1(L) \cap L = \emptyset}} \int_0^1 \max H_t - \min H_t dt$$

où $\mathcal{H}_c(M)$ désigne l'ensemble des fonctions Hamiltoniennes sur M dépendant du temps et à support compact.

Remarque 1.18. Dans cette définition,

$$\int_0^1 \max H_t - \min H_t dt$$

désigne la norme de Hofer de H et elle est notée $\|H\|$ (cf. [26]).

Théorème 1.19. Soit $L_0 \hookrightarrow M$ une sous-variété Lagrangienne monotone. On suppose qu'il existe une suite $(L_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de sous-variétés Lagrangiennes déplaçables qui tend vers L_0 dans la topologie C^1 et d'énergie de déplacement bornée. Alors :

- a) Si L_0 est un espace $\mathbf{K}(\pi, 1)$, alors $N_{L_0} = 2$ si L_0 est orientable et $N_{L_0} \in \{1, 2\}$ si L_0 n'est pas orientable.
b) On note $\tilde{L}_0$ le revêtement universel de L_0 . Si L_0 est orientable et vérifie

$$H_{2i+1}(\tilde{L}_0) = 0,$$

pour tout entier i , alors $N_{L_0} = 2$.

Remarque 1.20. Si L_0 est déplaçable elle-même, on prend la suite constante et on retrouve le théorème 1.15 de M.Damian.

On aimerait généraliser les résultats de non-déplaçabilité énoncés précédemment (théorèmes 1.10 et 1.5 ainsi que certains de leurs corollaires) aux sous-variétés Lagrangiennes presque monotones. Nous n'avons pas réussi à obtenir ces résultats, mais on montre que dans le cas où il existe une suite de Lagrangiennes convergeant vers une sous-variété Lagrangienne monotone, satisfaisant les résultats de non déplaçabilité précédents, alors l'énergie de déplacement de cette suite tend vers l'infini.

Théorème 1.21. Soit L_0 une sous-variété Lagrangienne monotone de M satisfaisant l'une des assertions suivantes :

- (i) $N_{L_0} \geq 3$.
(ii) L_0 est orientable et $\pi_1(L_0)$ n'admet aucun élément non-trivial g dont la classe de conjugaison est finie

Soit $p : \tilde{L}_0 \rightarrow L_0$, le revêtement universel de L_0 tel que p induit l'application nulle en homologie sauf en degré 0. S'il existe une suite $(L_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de sous-variétés Lagrangiennes déplaçables qui tend vers L_0 dans la topologie C^1 alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e(L_n) = +\infty.$$

On en déduit le corollaire suivant :

Corollaire 1.22. Soit M une variété symplectique telle que $\pi_2(M) = 0$ ou telle que son nombre de Chern vérifie $N_{c_1}(M) > 2$. On considère le produit $\mathbf{RP}^n \times K$, où K est une variété à courbure sectionnelle strictement négative avec $H^1(K, \mathbf{Z}) \neq 0$. On suppose qu'il existe un plongement Lagrangien monotone et orientable $\mathbf{RP}^n \times K \hookrightarrow M$. S'il existe une suite $(L_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de sous-variétés Lagrangiennes déplaçables qui tend vers $\mathbf{RP}^n \times K$ dans la topologie C^1 alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e(L_n) = +\infty.$$

On obtient le même genre de résultats pour les sous-variétés Lagrangiennes $\mathbf{K}(\pi, 1)$:

Théorème 1.23. Soit L_0 une variété $\mathbf{K}(\pi, 1)$ admettant un plongement Lagrangien monotone dans M . On suppose que L_0 satisfait l'une des assertions suivantes :

(i) $N_L \geq 3$.

(ii) L est orientable et $\pi_1(L)$ n'admet aucun élément non-trivial g dont la classe de conjugaison est finie.

S'il existe une suite $(L_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de sous-variétés Lagrangiennes déplaçables qui tend vers L_0 dans la topologie C^1 alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e(L_n) = +\infty.$$

On en déduit le corollaire suivant pour les Lagrangiennes à courbure sectionnelle strictement négative :

Corollaire 1.24. *On suppose que L_0 est une sous-variété Lagrangienne monotone orientable de M à courbure sectionnelle strictement négative telle que $H^1(L, \mathbf{Z}) \neq 0$. S'il existe une suite $(L_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de sous-variétés Lagrangiennes déplaçables qui tend vers L_0 dans la topologie C^1 alors :*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e(L_n) = +\infty.$$

Remarque 1.25 (Question ouverte). Une suite telle que définie dans les énoncés précédents existe-t-elle ? On pense qu'aucune Lagrangienne dans un voisinage C^1 de L_0 n'est déplaçable.

Le plan de ce mémoire est le suivant : au chapitre 2 on rappelle la définition de l'homologie de Floer et de l'homologie de Floer relevée dans le cas monotone, puis au chapitre 3, on présente la preuve des résultats sur les intersections Lagrangiennes. Au chapitre 4, on définit l'homologie de Floer et l'homologie de Floer relevée pour les sous-variétés Lagrangiennes presque monotones. Enfin, au chapitre 5, on démontre le théorème 1.19 et les résultats sur les voisinages non-déplaçables de sous-variétés Lagrangiennes monotones.

Chapitre 2

Homologie de Floer Lagrangienne

Soient (M^{2n}, ω) une variété symplectique connexe fermée ou convexe à l'infini et $L \hookrightarrow M$ une sous-variété Lagrangienne monotone fermée dont le nombre de Maslov vérifie $N_L \geq 2$. Soit $J \in \mathcal{J}_c(M, \omega)$, on note g la métrique définie par J sur M , donnée par la formule :

$$\forall X, Y \in TM, \quad g(X, Y) = \omega(X, JY).$$

2.1 Homologie de Floer Lagrangienne classique

Dans cette partie on rappelle la définition de l'homologie de Floer Lagrangienne dans le cas monotone. On commence par présenter la construction de Y-G. Oh dans [36] et [38] qui utilise un complexe de Floer défini à l'aide de l'équation de Cauchy-Riemann. Puis, celle utilisant un complexe de Floer défini à l'aide de l'équation de Floer, similaire à celle présentée par M. Audin et M. Damian dans [4]. On verra que ces deux complexes sont isomorphes et ont donc la même homologie.

2.1.1 Complexe de Floer pour l'équation de Cauchy-Riemann

Soient $H : M \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction Hamiltonienne lisse et $(\phi_t^H)_{t \in [0, 1]}$ le flot Hamiltonien correspondant. A une petite perturbation près, on peut choisir H tel que L soit transverse à $L_1 = \phi_H^1(L)$. On considère l'espace

$$\Delta = \{z \in C^\infty([0, 1], M) \mid z(0) \in L, z(1) \in L_1\}.$$

On définit sur Δ une 1-forme :

$$\forall z \in \Delta, \quad \text{si } Y \in T_z \Delta, \quad \nu_z(Y) = \int_0^1 \omega(z'(t), Y(t)) dt.$$

C'est une 1-forme fermée et les zéros de ν sont les chemins constants à valeur dans $L \cap L_1$. Le pseudo-gradient de ν pour la métrique :

$$\forall X, Y \in T\Delta, \quad g^\Delta(X, Y) = \int_0^1 g(X(t), Y(t)) dt,$$

est donné par :

$$\mathcal{X} = -Jz'(t).$$

Les trajectoires du pseudo-gradient $\mathcal{X}$ sont des applications $u : \mathbf{R} \times [0, 1] \rightarrow M$ vérifiant l'équation de Cauchy-Riemann avec conditions au bord :

$$(\mathcal{S}) \quad \begin{cases} \bar{\partial}_J u = \frac{\partial u}{\partial s} + J \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \\ u(\mathbf{R} \times \{0\}) \in L \\ u(\mathbf{R} \times \{1\}) \in L_1 \end{cases}.$$

L'énergie de ces bandes J -holomorphes est :

$$E(u) = \int_{\mathbf{R} \times [0, 1]} \left\| \frac{\partial u}{\partial s} \right\|_g^2.$$

Remarque 2.1. L'équation de Cauchy-Riemann, $\bar{\partial}_J u = 0$, implique que l'énergie et l'aire symplectique de la bande holomorphe u sont égales :

$$\begin{aligned} E(u) &= \int_{\mathbf{R} \times [0, 1]} \left\| \frac{\partial u}{\partial s} \right\|_g^2 \\ &= \int_{\mathbf{R} \times [0, 1]} \omega\left(\frac{\partial u}{\partial s}, J \frac{\partial u}{\partial s}\right) \\ &= \int_{\mathbf{R} \times [0, 1]} \omega\left(\frac{\partial u}{\partial s}, \frac{\partial u}{\partial t}\right) \\ &= \int_u \omega \\ &= \omega(u). \end{aligned}$$

En particulier, on en déduit que l'aire symplectique d'une bande holomorphe non constante est strictement positive.

On note $\mathcal{M}_J(L, L_1)$ l'espace des solutions de $(\mathcal{S})$ d'énergie finie :

$$\mathcal{M}_J(L, L_1) = \left\{ u : \mathbf{R} \times [0, 1] \rightarrow M \mid \bar{\partial}_J u = 0; \begin{array}{l} u(s, 0) \in L \\ u(s, 1) \in L_1 \end{array} ; E(u) < +\infty \right\}$$

et pour tous $x, y \in L \cap L_1$ on note $\mathcal{M}_J(x, y)$ l'espace des éléments de $\mathcal{M}_J(L, L_1)$ qui connectent x à y :

$$\mathcal{M}_J(x, y) = \left\{ u \in \mathcal{M}_J(L, L_1) \mid \begin{array}{l} \lim_{-\infty} u(s, \cdot) = x \\ \lim_{+\infty} u(s, \cdot) = y \end{array} \right\}.$$

Ces espaces vérifient :

Proposition 2.2 (A.Floer [22] ; Y-G.Oh [36]). *Pour tous $x, y \in L \cap L_1$, on a :*

$$\mathcal{M}_J(L, L_1) = \bigcup_{x, y \in L \cap L_1} \mathcal{M}_J(x, y).$$

De plus, si $J \in \mathcal{J}_c(M, \omega)$ est une structure complexe régulière (dans le sens où l'opérateur linéarisé de Cauchy-Riemann $D\bar{\partial}_J(u)$ est surjectif pour tout $u \in \mathcal{M}_J(x, y)$), l'espace $\mathcal{M}_J(x, y)$ est une variété lisse dont la dimension de la composante contenant u est donnée par l'indice de Maslov-Viterbo $\mu_u(x, y)$.

L'indice de Maslov-Viterbo $\mu_u(x, y)$ apparaissant dans la proposition 2.2, a été introduit par C.Viterbo dans [41]. Pour le calculer, on considère les chemins :

$$\begin{array}{ccc} \gamma_0 : [-\infty; +\infty] & \rightarrow & L \\ s & \mapsto & u(s, 0) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \gamma_1 : [-\infty; +\infty] & \rightarrow & L_1 \\ s & \mapsto & u(s, 1) \end{array} .$$

On construit un lacet dans T^*M , en concaténant $T_{\gamma_0}L$ et les espaces transverses à $T_{\gamma_1}L_1$. Cela définit alors un lacet dans le Grassmannienne $\Lambda(n)$, en trivialisant T^*M , sur u . L'indice de Maslov associé à ce lacet est l'indice de Maslov-Viterbo de u .

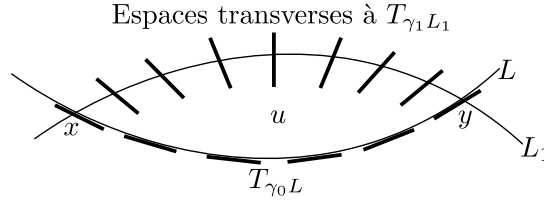


FIGURE 2.1 – Indice de Maslov-Viterbo

Remarque 2.3. La preuve est valable pour un couple de sous-variétés Lagrangiennes compactes transverses (L, L_1) quelconque, en particulier la condition de monotonie sur L n'est pas essentielle.

Définition du complexe

Pour tous $x, y \in L \cap L_1$, on considère l'espace $\mathcal{L}_J(x, y)$, défini par l'action de $\mathbf{R}$ sur $\mathcal{M}_J(x, y)$:

$$\mathcal{L}_J(x, y) := \mathcal{M}_J(x, y) / \mathbf{R}.$$

Pour tout $k \geq 0$, on note $\mathcal{L}_J^k(x, y)$ sa composante de dimension k . On définit le complexe de Floer Lagrangien :

$$CF(L, L_1; J) = (\mathbf{Z}_2 \langle L \cap L_1 \rangle, d^L) .$$

avec :

$$d^L(x) = \sum_{y \in L \cap L_1} \#_2 \mathcal{L}_J^0(x, y) \cdot y.$$

Pour s'assurer que d^L définit bien une différentielle, on doit montrer que, d'une part l'expression donnée pour d^L est bien définie, et d'autre part que $d^L \circ d^L = 0$. Tout ceci repose sur le théorème suivant qui regroupe les propositions 4.1 et 4.3 de [36] :

Théorème 2.4. Soient $x, y \in L \cap L_1$:

- (i) L'espace $\mathcal{L}_J^0(x, y)$ est une variété compacte de dimension 0.

(ii) Si $x \neq y$ ou si $x = y$ et $N_L \geq 3$, l'espace

$$\bar{\mathcal{L}}_J^1(x, y) := \mathcal{L}_J^1(x, y) \bigcup \bigcup_{z \in L \cap L_1} \mathcal{L}_J^0(x, z) \times \mathcal{L}_J^0(z, y)$$

est une variété compacte de dimension 1 dont le bord est formé des trajectoires brisées $\bigcup_{z \in L \cap L_1} \mathcal{L}_J^0(x, z) \times \mathcal{L}_J^0(z, y)$.

Idée de la preuve. La proposition 3.7 de [36] donne une description de la convergence des suites dans les espaces $\mathcal{M}_J(x, y)$ (c'est une application de la théorie des courbes holomorphes développée par M. Gromov [25]) :

Proposition 2.5. *Pour toute suite de bandes J -holomorphes $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ d'indice de Maslov-Viterbo constant égal à I dans $\mathcal{M}_J(x, y)$, il existe une sous-suite de $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ convergeant, dans la topologie C^∞ , vers un triplet $(\underline{u}, \underline{v}, \underline{w})$ où $\underline{u}$ est une trajectoire brisée reliant x à y ayant au plus k brisures pour un certain $k \geq 0$, $\underline{v}$ est une collection de sphères J -holomorphes et $\underline{w}$ est une collection de disques J -holomorphes à bord sur L ou L_1 , satisfaisant :*

$$I = \sum_{i=1}^k \text{indice}(u^i) + 2 \sum_j I_{c_1}(v^j) + \sum_\ell \mu(w^\ell) \quad (2.1)$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \omega(u_n) = \sum_i \omega(u^i) + \sum_j \omega(v^j) + \sum_\ell \omega(w^\ell) \quad (2.2)$$

Remarque 2.6. Faisons quelques remarques sur les termes apparaissant dans l'équation (2.1). Tout d'abord, pour $\underline{v} \neq \emptyset$, la monotonie de M implique que $I_{c_1}(v^j) > 0$ pour tout j , donc :

$$2 \sum_j I_{c_1}(v^j) \geq 2. \quad (2.3)$$

Deuxièmement, pour $\underline{w} \neq \emptyset$, on a, par la remarque 2.1, $\omega(w) > 0$. Donc, par la monotonie de L , on a :

$$\sum_\ell \mu(w^\ell) \geq N_L \geq 2. \quad (2.4)$$

Pour tout $h \geq 0$, on note $\mathcal{M}_J^h(x, y)$, la composante de dimension h de $\mathcal{M}_J(x, y)$. On considère une suite de bandes J -holomorphes $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ dans $\mathcal{M}_J^1(x, y)$, d'indice constant $I = 1$.

Si $x \neq y$, la trajectoire brisée $\underline{u}$ ne peut pas être vide. De plus, les équations (2.3) et (2.4) impliquent que $\underline{v}$ et $\underline{w}$ sont vides, sinon on aurait $I \geq 3$, ce qui est impossible. Si $x = y$, il est possible que $\underline{u} = \emptyset$. Mais si $\underline{v}$ ou $\underline{w}$ sont non-vides, on obtient $I \geq 2$, contradiction. Par conséquent, $\underline{u} \neq \emptyset$, $\underline{v} = \emptyset$ et $\underline{w} = \emptyset$. D'où la compacité de $\mathcal{M}_J^1(x, y)$ et donc de $\mathcal{L}_J^0(x, y)$. Ce qui démontre l'assertion (i).

Pour montrer (ii), on considère une suite (u_n) dans $\mathcal{M}_J^2(x, y)$. De nouveau, par un argument similaire, la suite (u_n) admet une sous-suite convergeant soit vers un

élément de $\mathcal{M}_J^2(x, y)$ soit vers une trajectoire brisée reliant x à y ayant une seule brisure. D'où la compacité de $\bar{\mathcal{L}}_J^1(x, y)$. De plus, par un argument de recollement (proposition 4.1 dans [22]), l'espace des trajectoires brisées $\cup_{z \in L \cap L_1} \mathcal{L}_J^0(x, z) \times \mathcal{L}_J^0(z, y)$ est le bord de $\bar{\mathcal{L}}_J^1(x, y)$. $\square$

Revenons à d^L : par le théorème 2.4, $\mathcal{L}_J^0(x, y)$ est une variété compacte de dimension 0 pour tous $x, y \in L \cap L_1$, elle est donc constituée d'un nombre fini de points et d^L est bien définie.

Calculons $d^L \circ d^L$:

$$d^L \circ d^L(x) = \sum_{y \in L \cap L_1} \sum_{z \in L \cap L_1} \#_2 \mathcal{L}_J^0(x, z) \#_2 \mathcal{L}_J^0(z, y) \cdot y,$$

Le terme $\#_2 \mathcal{L}_J^0(x, z) \#_2 \mathcal{L}_J^0(z, y)$ correspond au cardinal modulo 2 de l'espace des trajectoires brisées $\cup_{z \in L \cap L_1} \mathcal{L}_J^0(x, z) \times \mathcal{L}_J^0(z, y)$. Celui-ci, d'après le théorème 2.4, est, pour $N_L \geq 3$, le bord d'une variété compacte de dimension 1, d'où

$$\#_2 \mathcal{L}_J^0(x, z) \#_2 \mathcal{L}_J^0(z, y) = 0,$$

et par conséquent $d^L \circ d^L = 0$.

Preuve de $d^L \circ d^L = 0$ pour $N_L = 2$

Pour $N_L = 2$, réécrivons l'expression de $d^L \circ d^L$ en distinguant $x = y$ et $x \neq y$. On a :

$$d^L \circ d^L(x) = \sum_{y \neq x \in L \cap L_1} \sum_{z \in L \cap L_1} \#_2 \mathcal{L}_J^0(x, z) \#_2 \mathcal{L}_J^0(z, y) \cdot y + \sum_{z \in L \cap L_1} \#_2 \mathcal{L}_J^0(x, z) \#_2 \mathcal{L}_J^0(z, x) \cdot x.$$

Le cas $x \neq y$ correspond à l'assertion (ii) du théorème 2.4, donc :

$$\sum_{y \neq x \in L \cap L_1} \sum_{z \in L \cap L_1} \#_2 \mathcal{L}_J^0(x, z) \#_2 \mathcal{L}_J^0(z, y) \cdot y = 0$$

d'où

$$d^L \circ d^L(x) = \sum_{z \in L \cap L_1} \#_2 \mathcal{L}_J^0(x, z) \#_2 \mathcal{L}_J^0(z, x) \cdot x.$$

Le cas $x = y$ est exclu du théorème 2.4. En effet, si l'on considère une suite (u_n) dans $\mathcal{M}_J^2(x, x)$, d'après la proposition 2.5, elle admet une sous-suite convergeant vers une trajectoire brisée ayant au plus une brisure ou vers un disque J -holomorphe à bord sur L ou L_1 d'indice de Maslov 2. Ce dernier cas ne peut pas être exclu, c'est d'ailleurs ce qui arrive, par exemple, dans le cas du cercle monotone $\mathbf{S}^1 \hookrightarrow \mathbf{R}^2$ (Figure 2.1.1).

Dans cette exemple, la trajectoire brisée $u \# w$ est l'extrémité d'un chemin dans $\mathcal{L}_J^1(x, x)$ dont l'autre extrémité est un disque J -holomorphe D (Figure 2.1.1).

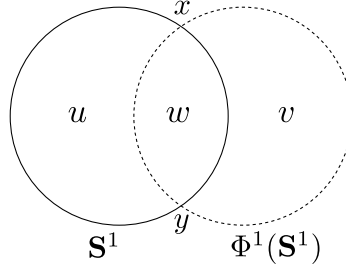


FIGURE 2.2 – Cercle monotone dans $\mathbf{R}^2$

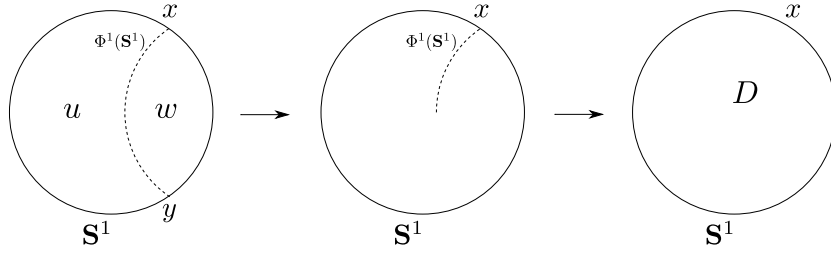


FIGURE 2.3 – Apparition d'un disque J -holomorphe

L'espace $\bar{\mathcal{L}}_J^1(x, x) := \mathcal{L}_J^1(x, x) \cup \bigcup_{z \in L \cap L_1} \mathcal{L}_J^0(x, z) \times \mathcal{L}_J^0(z, x)$ n'est donc pas compact. Néanmoins, Y-G. Oh montre dans [38] que, dans le cas monotone, l'ensemble des disques J -holomorphes à bord sur L ou L_1 et passant par le point x est fini. On peut donc les rajouter dans l'espace $\bar{\mathcal{L}}_J^1(x, x)$ pour le compactifier. Par un argument de recollement, il montre que le bord de $\bar{\mathcal{L}}_J^1(x, x)$ est formé de l'espace des trajectoires brisées de x à x et des disques J -holomorphes à bord sur L ou L_1 passant par x et d'indice de Maslov 2. L'expression de $d^L \circ d^L$ devient alors :

$$d^L \circ d^L(x) = (\Phi_L^2 + \Phi_{L_1}^2) \cdot x,$$

où Φ_L^2 et $\Phi_{L_1}^2$ désigne le nombre modulo 2 de disques J -holomorphes de Maslov 2 à bord respectivement sur L et L_1 , et dont le bord passe par x . De plus, puisque L_1 est l'image de L par une isotopie Hamiltonienne, on a le résultat suivant :

Théorème 2.7 (Y-G. Oh [38]). *Soit $L \hookrightarrow M$ une sous variété Lagrangienne monotone et L_1 son image par une isotopie Hamiltonienne, alors :*

$$\Phi_L^2 = \Phi_{L_1}^2.$$

D'où $d^L \circ d^L = 0$.

Finalement, pour toute sous-variété Lagrangienne monotone $L \hookrightarrow M$ avec $N_L \geq 2$, l'application d^L est bien une différentielle. L'homologie de Floer Lagrangienne est

l'homologie du complexe $CF(L, L_1; J) = (\mathbf{Z}_2\langle L \cap L_1 \rangle, d^L)$. Elle ne dépend pas du choix de la structure presque complexe J , ni de celui de l'isotopie Hamiltonienne (voir paragraphe 5 [36]). On la note $HF(L, L)$.

2.1.2 Complexe de Floer pour l'équation de Floer

L'idée de la deuxième version du complexe de Floer, que l'on présente ci-dessous, est de ne travailler que sur la Lagrangienne L . Pour cela on considère l'espace de chemins suivant :

$$\Omega = \{z \in C^\infty([0, 1], M) \mid z(0) \in L, z(1) \in L, [z] = 0 \in \pi_1(M, L)\}.$$

Le flot Hamiltonien (ϕ_t^H) induit une application naturelle entre Ω et Δ (l'espace de chemins entre L et L_1 défini précédemment) :

$$\begin{aligned} \Theta : \Omega &\rightarrow \Delta \\ z &\mapsto t \mapsto \phi_t^H(z(t)). \end{aligned}$$

On considère alors la 1-forme $\Theta^*\nu$ définie sur Ω . Plus précisément, pour tout $z \in \Omega$, on montre que :

$$\forall Y \in T_z\Delta, \quad \Theta^*\nu_z(Y) = \int_0^1 \omega(z'(t), Y(t))dt - dH(Y(t)).$$

Les zéros de $\Theta^*\nu$ correspondent, par cette application, à ceux de ν i.e les points d'intersections $L \cap L_1$. Sur Ω on définit la métrique suivante :

$$\forall X, Y \in T\Omega, \quad g^\Omega(X, Y) = \int_0^1 g(X(t), Y(t)).$$

Le pseudo-gradient de $\Theta^*\nu$ est alors donné par :

$$\hat{\mathcal{X}} = -(Jz'(t) - JX_H),$$

dont les trajectoires sont des applications $\hat{u} : \mathbf{R} \times [0, 1] \rightarrow M$ vérifiant une équation de Cauchy-Riemann perturbée, appelée équation de Floer, avec conditions au bord :

$$(\hat{\mathcal{S}}) \quad \begin{cases} \frac{\partial \hat{u}}{\partial s} + J \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} - JX_H(\hat{u}) = 0 \\ \hat{u}(\mathbf{R} \times \{0, 1\}) \in L \end{cases}, \quad (2.5)$$

avec X_H satisfaisant $\omega(X_H, \cdot) = -dH$. L'énergie de ces trajectoires est :

$$E(\hat{u}) = \int_{\mathbf{R} \times [0, 1]} \left\| \frac{\partial \hat{u}}{\partial s} \right\|_g^2.$$

On note $\mathcal{M}(H, J)$ l'espace des solutions de $(\hat{\mathcal{S}})$ d'énergie finie, et pour tous $x, y \in L \cap \phi_1^H(L)$:

$$\mathcal{M}_J(x, y; H) = \left\{ \hat{u} \in \mathcal{M}(H, J) \mid \begin{array}{l} \lim_{-\infty} \hat{u}(s, \cdot) = x \\ \lim_{+\infty} \hat{u}(s, \cdot) = y \end{array} \right\}.$$

On a un résultat analogue à la proposition 2.2 pour ces espaces :

Proposition 2.8. *Pour tous $x, y \in L \cap \phi_1^H(L)$, on a :*

$$\mathcal{M}(H, J) = \bigcup_{x, y \in L \cap \phi_1^H(L)} \mathcal{M}_J(x, y; H).$$

Si $J \in \mathcal{J}_c(M, \omega)$ est une structure complexe régulière, l'espace $\mathcal{M}_J(x, y; H)$ est une variété lisse.

On peut trouver la preuve de cette proposition au Chapitre 9 de [4] que l'on peut adapter au cas Lagrangien, ou dans [17]. On définit une version alternative du complexe de Floer :

$$CF(H, J) = (\mathbf{Z}_2 \langle L \cap L_1 \rangle, d^H).$$

avec :

$$d^H(x) = \sum_{y \in L \cap L_1} \#_2 \mathcal{L}_J^0(x, y; H) \cdot y,$$

où $\#_2 \mathcal{L}_J^0(x, y; H)$ est le cardinal modulo 2 de la composante de dimension 0 de

$$\mathcal{L}_J(x, y; H) := \mathcal{M}_J(x, y; H) / \mathbf{R}.$$

De plus, par des arguments de compacité et de recollement, analogues à ceux déjà présentés, on montre que l'application d^H est une différentielle et que l'homologie de ce complexe ne dépend pas du choix de la structure presque complexe, ni du choix de l'isotopie Hamiltonienne (cf. les chapitres 9 et 11 de [4]).

Remarque 2.9. Par la suite, on appellera "disques de Floer" les trajectoires satisfaisant (2.5).

Les complexes $CF(L, L_1; J)$ et $CF(H, J)$ sont liés par la proposition suivante :

Proposition 2.10 (Proposition 3.4 [17]). *Soit $J \in \mathcal{J}_c(M, \omega)$ une structure presque complexe et H une fonction Hamiltonienne sur M définissant le flot (ϕ_t^H) . L'application*

$$\hat{u}(s, t) \mapsto u(s, t) = \phi_t^H(\hat{u}(s, t)),$$

définit une bijection entre $\mathcal{M}(H, J)$ et $\mathcal{M}_{J'}(L, L_1)$, où $J' = (\phi_t^H)_ J (\phi_t^H)^{-1}$ et $L_1 = \phi_1^H(L)$. En particulier, elle définit une bijection entre $\mathcal{M}_J(x, y; H)$ et $\mathcal{M}_{J'}(x, y)$, pour tous $x, y \in L \cap \phi_1^H(L)$. De plus $E(\hat{u}) = E(u)$.*

Démonstration. On commence par montrer l'égalité des énergies :

$$\begin{aligned}
E(\hat{u}) &= \int_{\mathbf{R} \times [0,1]} \omega \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial s}, J \frac{\partial \hat{u}}{\partial s} \right) \\
&= \int_{\mathbf{R} \times [0,1]} \omega \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial s}, \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} \right) - \int_{\mathbf{R} \times [0,1]} \omega \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial s}, X^H(\hat{u}) \right) \\
&= \int_{\mathbf{R} \times [0,1]} \omega \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial s}, \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} \right) - \int_{\mathbf{R}} \int_{[0,1]} \omega \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} - X^H(\hat{u}), JX^H(\hat{u}) \right)
\end{aligned}$$

Comme ϕ_t^H préserve la forme symplectique pour tout t , on a :

$$\omega \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial s}, \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} \right) = \omega \left(\frac{\partial u}{\partial s}, \frac{\partial u}{\partial t} \right).$$

De plus, $\hat{u}$ est une trajectoire du pseudo-gradient $\hat{\mathcal{X}}$, défini précédemment, d'où :

$$\int_{[0,1]} \omega \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} - X^H(\hat{u}), JX^H(\hat{u}) \right) = 0.$$

Finalement on obtient :

$$\begin{aligned}
E(\hat{u}) &= \int_{\mathbf{R} \times [0,1]} \omega \left(\frac{\partial u}{\partial s}, \frac{\partial u}{\partial t} \right) \\
&= E(u)
\end{aligned}$$

Montrons, à présent, que les espaces $\mathcal{M}(H, J)$ et $\mathcal{M}_{J'}(L, L_1)$ sont en bijection. Soient $\hat{u} : \mathbf{R} \times [0, 1] \rightarrow M$ et $u : \mathbf{R} \times [0, 1] \rightarrow M$, deux applications satisfaisant pour tout $(s, t) \in \mathbf{R} \times [0, 1]$:

$$u(s, t) = \phi_t^H(\hat{u}(s, t)).$$

Par le calcul précédent, ces deux applications ont la même énergie. Il reste donc à montrer que $\hat{u}$ satisfait $\hat{\mathcal{S}}$ si et seulement si u satisfait $\mathcal{S}$. Les conditions au bord sont immédiates. De plus, $\hat{u}$ vérifie l'équation de Floer avec la structure complexe J si et seulement si u vérifie l'équation de Cauchy-Riemann avec la structure presque complexe J' , en effet :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \hat{u}}{\partial s} + J \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} - JX^H(\hat{u}) &= \frac{\partial(\phi_t^H)^{-1}(u)}{\partial s} + J \frac{\partial(\phi_t^H)^{-1}(u)}{\partial t} - JX^H \circ (\phi_t^H)^{-1}(u) \\
&= (\phi_t^H)^{-1} \frac{\partial u}{\partial s} + J (\phi_t^H)^{-1} \frac{\partial u}{\partial t} + J \frac{\partial(\phi_t^H)^{-1}}{\partial t}(u) - J \frac{\partial(\phi_t^H)^{-1}}{\partial t}(u) \\
&= (\phi_t^H)^{-1} \left(\frac{\partial u}{\partial s} + (\phi_t^H)_* J (\phi_t^H)^{-1} \frac{\partial u}{\partial t} \right) \\
&= (\phi_t^H)^{-1} \left(\frac{\partial u}{\partial s} + J' \frac{\partial u}{\partial t} \right)
\end{aligned}$$

□

On en déduit immédiatement le corollaire suivant :

Corollaire 2.11. *L'application $x \mapsto \phi_t^H(x)$ définit un isomorphisme de complexes entre $CF(H, J)$ et $CF(L, L_1; J')$.*

Ces complexes définissent donc la même homologie. On pourra alors, suivant la situation, utiliser alternativement l'un ou l'autre de ces complexes.

2.2 Homologie de Floer Lagrangienne relevée

Dans cette partie, on présente la construction de l'homologie de Floer Lagrangienne relevée faite par M.Damian dans [15].

Soit $p : \bar{L} \rightarrow L$ un revêtement connexe de L . Pour tout élément u de $\mathcal{M}_J(x, y)$, on définit un chemin associé $\gamma_u : [-\infty, +\infty] \rightarrow L$ par :

$$\gamma_u(s) = \begin{cases} u(s, 0) & \text{si } s \in]-\infty, +\infty[\\ x & \text{si } s = -\infty \\ y & \text{si } s = +\infty \end{cases}.$$

Le complexe de Floer relevé est donné par :

$$CF^{\bar{L}} = (\mathbf{Z}_2 \langle p^{-1}(L \cap L_1) \rangle, d^{\bar{L}}),$$

avec

$$\begin{aligned} d^{\bar{L}} : CF^{\bar{L}} &\rightarrow CF^{\bar{L}} \\ \bar{x} &\mapsto \sum_{\bar{y} \in p^{-1}(L \cap L_1)} n(\bar{x}, \bar{y}) \cdot \bar{y}, \end{aligned}$$

où $n(\bar{x}, \bar{y}) = \#_2 \{u \in \mathcal{L}^0(x, y) \mid \gamma_u \text{ se relève en un chemin entre } \bar{x} \text{ et } \bar{y}\}$.

L'application $d^{\bar{L}}$ est bien définie, en effet, $\mathcal{L}^0(x, y)$ est constitué d'un ensemble fini d'éléments et pour tout $u \in \mathcal{L}^0(x, y)$, le chemin associé γ_u admet un relèvement unique partant d'un point $\bar{x} \in \bar{L}$.

Pour montrer que $d^{\bar{L}}$ est une différentielle, on calcule $d^{\bar{L}} \circ d^{\bar{L}}$:

$$d^{\bar{L}} \circ d^{\bar{L}}(\bar{x}) = \sum_{\bar{y} \in p^{-1}(L \cap L_1)} \sum_{\bar{z} \in p^{-1}(L \cap L_1)} n(\bar{x}, \bar{z}) n(\bar{z}, \bar{y}) \cdot \bar{y}.$$

Le terme $n(\bar{x}, \bar{z}) n(\bar{z}, \bar{y})$ correspond au nombre de chemins brisés $\gamma_u * \gamma_v$ correspondant aux trajectoires brisées $u \# v \in \mathcal{L}_J^0(x, z) \times \mathcal{L}_J^0(z, y)$.

Si $N_L \geq 3$ ou si $N_L = 2$ avec $x \neq y$, on a vu dans le théorème 2.4 que l'espace des trajectoires brisées $\cup_{z \in L \cap L_1} \mathcal{L}_J^0(x, z) \times \mathcal{L}_J^0(z, y)$ est le bord d'une variété compacte de dimension 1, on peut donc regrouper par paires les chemins brisés correspondant au bord de chaque composante de la variété compacte de dimension 1 considérée. Le nombre de tels chemins brisés est pair. De plus, d'après la proposition 2.7 de [15], pour tout couple de chemins brisés $(\gamma_u * \gamma_v, \gamma_{u'} * \gamma_{v'})$ les chemins $\gamma_u * \gamma_v$ et $\gamma_{u'} * \gamma_{v'}$

sont homotopes. Il définissent donc le même chemin relevé entre deux éléments $\bar{x}$ et $\bar{y}$ de $\bar{L}$. D'où $\sum_{\bar{z}} n(\bar{x}, \bar{z})n(\bar{z}, \bar{y}) = 0$ et $d^{\bar{L}} \circ d^{\bar{L}} = 0$.

Dans le cas où $N_L = 2$ et $x = y$, on a vu dans la section 2.1.1, qu'il était possible d'avoir dans le bord de $\tilde{\mathcal{L}}_J^1(x, x)$ des disques J_0 -holomorphes de Maslov 2 à bord sur L ou L_1 . Si le nombre de ces disques, lorsqu'ils existent, est pair, il n'est pas toujours vrai que l'on puisse regrouper les chemins associés par paires homotopes. Reprenons l'exemple du cercle monotone $\mathbf{S}^1 \hookrightarrow \mathbf{R}^2$ (Figure 2.2). Si l'on considère le complexe

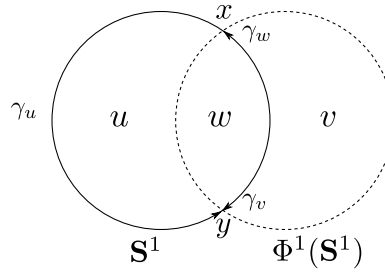


FIGURE 2.4 – Chemins brisés non homotopes

relevé pour le revêtement universel $\tilde{\mathbf{S}}^1$, on a :

$$d^{\tilde{\mathbf{S}}^1} \circ d^{\tilde{\mathbf{S}}^1}(\tilde{x}) = \sum_{\tilde{x}' \in p^{-1}(\tilde{x})} 1_{\gamma_u * \gamma_v} \cdot \tilde{x}' + 1_{\gamma_v * \gamma_u} \cdot \tilde{x}'.$$

Les chemins $\gamma_u * \gamma_v$ et $\gamma_v * \gamma_u$ ne sont clairement pas homotopes, donc $d^{\tilde{\mathbf{S}}^1} \circ d^{\tilde{\mathbf{S}}^1} \neq 0$. On ne peut donc pas toujours définir l'homologie relevée dans ce cas. Plus précisément, pour un élément générique $x \in L$, et pour tout $g \in \pi_1(L, x)$, si le nombre de disques J -holomorphes d'indice de Maslov 2, dont le bord est homotope à g et passant par le point x , est pair, alors l'homologie de Floer relevée est définie (voir [15] pour la preuve). Notons $\#_2^g(x)$ ce nombre modulo 2. Donc lorsque $\#_2^g(x) = 1$ pour un certain g , l'homologie de Floer relevée n'est pas définie. Dans ce cas M.Damian a montré le résultat suivant :

Proposition 2.12 (Damian - proposition 3.3 [16]). *Soit $L \subset M$ une sous-variété Lagrangienne monotone orientable dont le nombre de Maslov est $N_L = 2$. Supposons que, pour un certain $x \in L$ et un certain élément $g \in \pi_1(L)$ non trivial, on ait $\#_2^g(x) = 1$. Alors g a un nombre fini d'éléments conjugués dans $\pi_1(L)$. En particulier, le sous-groupe $Z(g) = \{\gamma \in \pi_1(L) \mid \gamma g = g \gamma\}$ est d'indice fini.*

La contraposée de cette proposition garantit un nombre pair de disques J -holomorphes d'indice de Maslov 2 dans chaque classe d'homotopie de $\pi_1(L)$. L'homologie de Floer relevée est définie sous l'hypothèse (ii) du théorème 1.5. Autrement dit :

Corollaire 2.13. *Si il n'existe pas d'élément $g \in \pi_1(L)$ non trivial dont le nombre d'éléments conjugués est fini, (i.e le sous-groupe $Z(g) = \{\gamma \in \pi_1(L) \mid \gamma g = g\gamma\}$ est d'indice fini) alors l'homologie de Floer relevée est définie pour tout revêtement $p : \bar{L} \rightarrow L$.*

Remarque 2.14. Cette condition (qui apparait également dans l'article [21] de JD.Evans et J.Kedra) peut être affaiblie en considérant uniquement les éléments de $\text{Im}(\pi_2(M, L) \rightarrow \pi_1(L))$. En effet, l'élément g , considéré précédemment, est la classe d'homotopie du bord d'un disque J -holomorphe dont l'indice de Maslov est égal à 2.

Lorsque l'homologie de Floer relevée est définie, elle ne dépend pas du choix de la structure presque complexe et du choix de l'isotopie Hamiltonienne. On la note $HF^{\bar{L}}(L, L)$.

2.3 Lien avec l'homologie singulière

A partir d'une isotopie Hamiltonienne bien choisie, Y-G.Oh dans [39], et P.Biran dans [7], définissent une filtration sur le complexe de Floer correspondant. Celle-ci induit une suite spectrale dont la première page se définit à l'aide de l'homologie singulière de L et qui converge vers $HF(L, L)$.

2.3.1 Définition de la suite spectrale

Soit f une fonction de Morse sur L , suffisamment C^2 -petite, telle que

$$L_1 = \{(q, df_q) \mid q \in L\},$$

reste dans un voisinage de Weinstein de L . Soit $H : M \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction Hamiltonienne sur M dont le flot Hamiltonien correspondant prolonge l'isotopie Lagrangienne $t \mapsto (q, tdf_q)$. Les points d'intersections $L \cap L_1$ correspondent aux points critiques de f . Soient x et y deux points critiques de f et $u \in \mathcal{M}_J(x, y)$. Si u reste dans le voisinage de Weinstein considéré alors son indice de Maslov-Viterbo est $\mu_u(x, y) = \text{ind}(x) - \text{ind}(y)$ (proposition 5 ; [41]). Si u sort du voisinage de Weinstein, on considère l'image de $u(\cdot, 1)$ par la projection $\pi_L : T^*L \rightarrow L$. On note c_u , la portion de la pré-image de cette projection délimitée par $u(\cdot, 1)$ et $\pi_L(u(\cdot, 1))$. Elle définit donc une bande à l'intérieur du voisinage de Weinstein considéré. Son aire symplectique satisfait alors (lemme 4.2, [39]) :

$$\omega(c_u) = f(y) - f(x) < 2 \sup f. \quad (2.6)$$

L'union des bandes c_u et u forme un disque D_u à bord sur L . L'indice de Maslov de D_u est un multiple de N_L , donc il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $\mu(D_u) = kN_L$. Dans la

proposition 4.1 de [39], Y-G. Oh donne une minoration uniforme strictement positive de l'énergie des bandes holomorphes sortant du voisinage de Weinstein. Donc, si on choisit f suffisamment petite telle que l'aire symplectique de c_u (inégalité (2.6)) est négligeable devant celle de u , on en déduit que l'aire symplectique de D_u est positive. Comme L est monotone, on a $k > 0$. Par ailleurs, c_u est contenue dans le voisinage de Weinstein, d'où $\mu_{c_u}(x, y) = \text{ind}(x) - \text{ind}(y)$. Finalement, on en déduit l'indice de Maslov-Viterbo de u :

$$\begin{aligned}\mu_u(x, y) &= \mu(D_u) - \mu_{c_u}(x, y) \\ &= kN_L - (\text{ind}(x) - \text{ind}(y)) \ ,\end{aligned}$$

avec $k > 0$.

La différentielle d^L , qui, on rappelle, compte le nombre de bandes J -holomorphes d'indice de Maslov-Viterbo égal à 1, se décompose alors en une somme finie d'opérateurs ([39]) :

$$d^L = d_0 + d_1 + \cdots + d_\nu,$$

où d_0 est la différentielle de Morse, $\nu = \left\lfloor \frac{\dim L + 1}{N_L} \right\rfloor$ et pour tout $k \in \{1, \dots, \nu\}$,

$$d_k : CF_\star(L, L_1; J) \rightarrow CF_{\star-1+kN_L}(L, L_1; J),$$

où le degré est donné par l'indice de Morse.

Soit $A = \mathbf{Z}_2[T^{N_L}, T^{-N_L}]$, le sous anneau des polynômes de Laurent à coefficients dans $\mathbf{Z}_2$. Le $\mathbf{Z}_2$ -module

$$C(L, L_1; J) = CF(L, L_1; J) \otimes A,$$

définit un module différentiel gradué filtré. En effet, (on omet $(L, L_1; J)$ pour simplifier la notation) :

1. C est une somme directe de sous-modules :

$$C = \bigoplus_{\ell \in \mathbf{Z}} C_\ell,$$

où $C_\ell = \bigoplus_{k \in \mathbf{Z}} CF_{\ell-kN_L} \otimes A^k$ et $A^k \subset A$ est le sous-groupe $\mathbf{Z}_2 \cdot T^{kN_L}$.

2. C a une différentielle d définie par :

$$d = d_0 \otimes 1 + d_1 \otimes T^{-N_L} + \cdots + d_\nu \otimes T^{-\nu N_L}.$$

3. C admet une filtration croissante $F_p C$ définie, pour tous $p, \ell \in \mathbf{Z}$, par

$$F_p C_\ell = \bigoplus_{k \leq p} CF_{\ell-kN_L} \otimes A^k.$$

La différentielle d respecte la filtration.

Dans notre cas $C_\ell = 0$ après un certain rang, on en déduit que cette filtration est bornée.

La filtration croissante de (C, d, F) définit une suite spectrale, donnons une idée des différentielles de cette suite. Si on développe l'identité $d^2 = 0$, la conservation des degrés donne plusieurs équations

$$\begin{aligned} d_0^2 &= 0 \\ d_0 d_1 + d_1 d_0 &= 0 \\ d_0 d_2 + d_1^2 + d_2 d_0 &= 0 \\ \dots etc. \end{aligned}$$

La première équation montre que d_0 définit une différentielle sur CF . La page 0 de notre suite spectrale correspond au complexe (CF, d_0) . Donc la première page est définie par l'homologie de (CF, d_0) , qui n'est autre que l'homologie singulière de L :

$$H(L) = \oplus_{i=0}^n H_i(L).$$

D'après la seconde équation, d_1 est définie sur $H(L)$. La troisième équation donne $d_1^2 = 0$ sur $H(L)$, i.e d_1 définit une différentielle sur $H(L)$. La deuxième page de notre suite spectrale est définie en utilisant l'homologie du complexe $(H(L), d_1)$ que l'on note :

$$H^{(2)}(L) = \oplus_{i=0}^n H_i^{(2)}(L).$$

Ainsi de suite, en utilisant les équations suivantes, on obtient que d_2 définit une différentielle sur $H^{(2)}(L)$, que d_3 définit une différentielle sur $H^{(3)}(L)$ etc. Ce processus s'arrête à la page $\nu = \left\lfloor \frac{\dim L + 1}{N_L} \right\rfloor$, en effet à partir de la page $\nu + 1$ l'homologie devient constante. On note la limite :

$$H^{(\infty)}(L) = \oplus_{i=0}^n H_i^{(\infty)}(L),$$

Le théorème suivant de P.Biran [7] donne une description de cette suite spectrale et montre que la limite $H^{(\infty)}(L)$ correspond à l'homologie de Floer Lagrangienne de L :

Théorème 2.15. *La suite spectrale $\{E_{p,q}^r, \delta_r\}$ converge vers l'homologie de Floer Lagrangienne de L , $HF(L, L)$ et satisfait les propriétés suivantes (tous les produits tensoriels sont sur $\mathbf{Z}_2$) :*

- $E_{p,q}^0 = CF_{p+q-pN_L} \otimes A^{pN_L}$, $\delta_0 = d_0 \otimes Id$.
- $E_{p,q}^1 = H_{p+q-pN_L}(L, \mathbf{Z}_2) \otimes A^{pN_L}$, $\delta_1 = d_1 \otimes T^{-N_L}(\cdot)$, où

$$d_1 : H_{p+q-pN_L}(L, \mathbf{Z}_2) \rightarrow H_{p+q-1-(p-1)N_L}(L, \mathbf{Z}_2)$$

est induit par la composante d_1 de la différentielle de Floer au niveau de l'homologie.

- Pour tout $r \geq 1$, $E_{p,q}^r$ est de la forme $E_{p,q}^r = V_{p,q}^r \otimes A^{pN_L}$ avec $\delta_r = d'_r \otimes T^{-rN_L}$, où $V_{p,q}^r$ sont des espaces vectoriels sur $\mathbf{Z}_2$ et

$$d'_r : V_{p,q}^r \rightarrow V_{p-r,q+r-1}^r$$

sont des morphismes définis pour tous p, q et satisfaisant $d'_r \circ d'_r = 0$. De plus,

$$V_{p,q}^{r+1} = \frac{\ker(V_{p,q}^r \rightarrow V_{p-r,q+r-1}^r)}{\operatorname{Im}(V_{p+r,q-r+1}^r \rightarrow V_{p,q}^r)},$$

et pour $r = 0, 1$ on a

$$V_{p,q}^0 = CF_{p+q-pN_L}, \quad V_{p,q}^1 = H_{p+q-pN_L}(L, \mathbf{Z}_2), \quad d'_1 = d_1.$$

— La suite spectrale dégénère à la page $\nu = \left\lfloor \frac{\dim L + 1}{N_L} \right\rfloor$ et pour tout $p \in \mathbf{Z}$,

$$\bigoplus_{q \in \mathbf{Z}} E_{p,q}^\infty \cong HF(L, L).$$

Dans les conditions du corollaire 2.13, i.e lorsque l'homologie de Floer relevée est définie, on construit de la même manière, à partir du complexe de Floer relevé, un module gradué filtré $(\bar{C}, \bar{d}, \bar{F})$. Celui-ci définit une suite spectrale $\{(\bar{E}_{p,q}^r, \bar{\delta}_r)\}$ qui vérifie une version relevée du théorème 2.15 : $\{(\bar{E}_{p,q}^r, \bar{\delta}_r)\}$ démarre par l'homologie singulière de $\bar{L}$ et converge vers l'homologie de Floer relevée de L , $HF^{\bar{L}}(L, L)$.

2.3.2 Morphisme de suites spectrales

Nous allons voir maintenant que l'application $p : \bar{L} \rightarrow L$ induit un morphisme entre les deux suites spectrales définies précédemment. Tout d'abord, rappelons la définition d'un morphisme de suites spectrales (pour plus de détails on renvoie au livre de J.McCleary [30]) :

Définition 2.16. Soient $\{(\bar{E}_{*,*}^r, \bar{\delta}_r)\}$ et $\{(E_{*,*}^r, \delta_r)\}$ deux suites spectrales. Un morphisme de suites spectrales est une suite de morphismes de modules bi-gradués

$$f_r : (\bar{E}_{*,*}^r, \bar{\delta}_r) \rightarrow (E_{*,*}^r, \delta_r),$$

pour tout r , de bidegré $(0, 0)$, tel que $f_r \circ \delta_r = \bar{\delta}_r \circ f_r$ et chaque f_{r+1} est induit par f_r en homologie.

On a le lemme suivant :

Lemme 2.17. L'application $p : \bar{L} \rightarrow L$ induit un morphisme $p_\star$ entre les suites spectrales $\{(\bar{E}_{p,q}^r, \bar{\delta}_r)\}$ et $\{(E_{p,q}^r, \delta_r)\}$.

Démonstration. Pour démontrer ce lemme, on utilise le théorème suivant (théorème 3.5 dans [30]) :

Théorème 2.18. Un morphisme de complexes gradués filtrés

$$\phi : (\bar{A}, \bar{d}, \bar{F}) \rightarrow (A, d, F),$$

induit un morphisme entre les suites spectrales associées.

Il suffit donc de prouver que p induit un morphisme entre $(\bar{C}, \bar{d}, \bar{F})$ et (C, d, F) . Un tel morphisme est défini de la manière suivante :

Définition 2.19. Soient $(\bar{A}, \bar{d}, \bar{F})$ et (A, d, F) deux complexes gradués filtrés. On dit que

$$\phi : (\bar{A}, \bar{d}, \bar{F}) \rightarrow (A, d, F),$$

est un morphisme de complexes gradués filtrés si $\phi : A \rightarrow \bar{A}$ est un morphisme de modules gradués tel que $\phi \circ d = \bar{d} \circ \phi$, et respecte la filtration i.e $\phi(F^p A) \subset \bar{F}^p \bar{A}$.

Par construction du complexe de Floer relevé, l'application de revêtement $p : \bar{L} \rightarrow L$ induit un morphisme $p_{\#}$ entre $CF^{\bar{L}}$ et CF . Donc $p_{\star} = p_{\#} \otimes 1 : \bar{C} \rightarrow C$ définit un morphisme de modules gradués. De plus, $p_{\star}$ satisfait les deux conditions de la définition 2.19 :

Il vérifie l'identité $p_{\star} \circ \bar{d} = d \circ p_{\star}$. Pour tout élément $\bar{x}$ de $CF^{\bar{L}}$, on a :

$$\begin{aligned} d^{\bar{L}}(\bar{x}) &= \sum_{\bar{y} \in p^{-1}(L \cap L_1)} n(\bar{x}, \bar{y}) \cdot \bar{y} \\ p(d^{\bar{L}}(\bar{x})) &= \sum_{y \in L \cap L_1} \sum_{\bar{y} \in p^{-1}(y)} n(\bar{x}, \bar{y}) \cdot y. \end{aligned}$$

Par définition de $n(\bar{x}, \bar{y})$, on a $\sum_{\bar{y} \in p^{-1}(y)} n(\bar{x}, \bar{y}) = n(x, y)$, où $x = p(\bar{x})$. Par conséquent :

$$\begin{aligned} p(d^{\bar{L}}(\bar{x})) &= \sum_{y \in L \cap L_1} n(x, y) \cdot y \\ &= d^L(x) \\ &= d^L(p(\bar{x})), \end{aligned}$$

d'où $p_{\star} \circ \bar{d} = d \circ p_{\star}$.

Il respecte la filtration. Par construction, le morphisme $p_{\star}$ préserve le degré, donc $p_{\star}(\bar{F}^p \bar{C}) \subset F^p C$. $\square$

Chapitre 3

Intersections Lagrangiennes

Dans ce chapitre, on démontre les théorèmes 1.5 et 1.10 et leurs corollaires.

3.1 Preuve du théorème 1.5

On démontre le résultat suivant :

Théorème 1.5. *Soit L une variété $\mathbf{K}(\pi, 1)$ admettant un plongement Lagrangien monotone dans M . Si L satisfait l'une des assertions suivantes :*

- (i) $N_L \geq 3$.
- (ii) L est orientable et $\pi_1(L)$ n'admet aucun élément non-trivial g dont la classe de conjugaison est finie

Alors pour tout Φ^1 , temps 1 d'un flot Hamiltonien, tel que l'intersection $\Phi^1(L) \cap L$ est transverse on a :

$$\#(\Phi^1(L) \cap L) \geq 1 + \dim(H_1(L, \mathbf{Z}_2)).$$

Démonstration. La preuve consiste à calculer l'image de $H_0(L)$ et $H_1(L)$ dans $H^\infty(L)$, la limite de la suite spectrale définie à la section 2.3.1.

Par la proposition 2.13, l'homologie de Floer relevée est définie pour tout revêtement connexe de $p : \bar{L} \rightarrow L$. D'après le théorème 2.15, il existe deux suites spectrales, l'une dont la première page est donnée par l'homologie singulière de L et qui converge vers $HF(L, L)$, et la seconde dont la première page est donnée par l'homologie singulière de $\bar{L}$ et qui converge vers $HF^{\bar{L}}(L, L)$.

Remarquons que, lorsque $\bar{L}$ est connexe, l'application $p_0 : H_0(\bar{L}, \mathbf{Z}_2) \rightarrow H_0(L, \mathbf{Z}_2)$ est toujours un isomorphisme, puisqu'il envoie le générateur de $H_0(\bar{L}, \mathbf{Z}_2)$ sur le générateur de $H_0(L, \mathbf{Z}_2)$.

L'image de $H_0(L)$. Commençons par calculer l'homologie de $(H_0(L), d_1)$. On a :

$$H_0^{(2)}(L) = \ker(d_1 : H_0(L) \rightarrow H_{-1+N_L}(L)).$$

Soit $p : \tilde{L} \rightarrow L$, le revêtement universel de L . L'application p induit un morphisme de suites spectrales, on a alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} H_0(\tilde{L}) & \xrightarrow{\bar{d}_1} & H_{-1+N_L}(\tilde{L}) \\ \downarrow p_0 & & \downarrow p_{-1+N_L} \\ H_0(L) & \xrightarrow{d_1} & H_{-1+N_L}(L) \end{array}$$

Lemme 3.1. *L'application $\bar{d}_1$ s'annule sur $H_0(\tilde{L})$ et l'application d_1 s'annule sur $H_0(L)$.*

Démonstration du lemme 3.1. Comme $\tilde{L}$ est une variété $\mathbf{K}(\pi, 1)$ simplement connexe, tous ses groupes d'homologie sont nuls sauf en degré 0. Donc $\bar{d}_1 = 0$ et le diagramme précédent implique que $d_1 = 0$. $\square$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} H_0^{(2)}(\tilde{L}) &= H_0(\tilde{L}); \\ H_0^{(2)}(L) &= H_0(L), \end{aligned}$$

et l'application $p_0^{(2)}$ est encore un isomorphisme.

On calcule maintenant l'homologie de $(H_0^{(2)}(L), d_2) = (H_0(L), d_2)$. Par le même argument, on obtient $d_2 = 0$ et $H_0^{(3)}(L) = H_0(L)$.

De manière analogue, on montre que pour tout $\ell \geq 2$, on a $d_\ell = 0$. Donc $H_0(L)$ survit dans la limite de la suite spectrale : $H_0^{(\infty)}(L) = H_0(L)$.

L'image de $H_1(L)$. Soit $h \in \pi_1(L)$ tel que son image $\hat{h} \in H_1(L)$ par le morphisme de Hurewicz est non-nulle. Les éléments de ce type engendrent $H_1(L)$. Soit $\bar{p} : \bar{L} \rightarrow L$, le revêtement de L associé au groupe $\langle h \rangle$. Par définition, L est une variété $K(\pi, 1)$ de dimension finie, son groupe fondamental est alors sans torsion, donc $h^m \neq 1$, pour tout entier m . D'où, $\pi_1(\bar{L}) = \mathbf{Z}$. La variété $\bar{L}$ est donc un équivalent homotopique de $\mathbf{S}^1$. On a le résultat suivant :

Lemme 3.2. $H_1^{(\infty)}(L) = H_1(L)$.

Démonstration. Soient h comme ci-dessus et $\bar{p} : \bar{L} \rightarrow L$, le revêtement associé. On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} H_1(\mathbf{S}^1) & \xrightarrow{\bar{d}_1} & H_{N_L}(\mathbf{S}^1) = 0 \\ \downarrow \bar{p}_1 & & \downarrow \bar{p}_{N_L} \\ H_1(L) & \xrightarrow{d_1} & H_{N_L}(L) \end{array}$$

Soit $\bar{h} \in H_1(\mathbf{S}^1)$, un antécédent de $\hat{h}$ par $\bar{p}_1$, on a :

$$\begin{aligned} d_1(\hat{h}) &= \bar{p}_{N_L} \circ \bar{d}_1(\hat{h}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Comme $H_1(L)$ est engendrée par les $\hat{h}$, l'application d_1 est nulle sur $H_1(L)$. D'où, $H_1^{(2)}(L) = H_1(L)$ pour $N_L \geq 3$. Si $N_L = 2$, on doit considérer également l'application $d_1 : H_0(L) \rightarrow H_1(L)$ qui, par le même raisonnement qu'au lemme 3.1, est nulle. Cela donne également $H_1^{(2)}(L) = H_1(L)$. Puis, de manière analogue, pour $N_L \geq 2$, on montre que d_2 est nulle sur $H_1^{(2)}(L) = H_1(L)$, donc $H_1^{(3)}(L) = H_1(L)$. Et ainsi de suite. Par conséquent, le groupe $H_1(L)$ survit dans la limite de la suite spectrale, d'où $H_1^{(\infty)}(L) = H_1(L)$. $\square$

On peut désormais démontrer le théorème 1.5 :

$$\begin{aligned} \Phi^1(L) \cap L &\geq \dim(HF(L, L)) \\ &= \sum_{k=0}^n \dim(H_k^\infty(L)) \\ &\geq \dim(H_0(L)) + \dim(H_1(L)) \\ &= 1 + \dim(H_1(L)) \end{aligned}$$

$\square$

3.2 Lagrangiennes à courbure sectionnelle strictement négative

Les sous-variétés Lagrangiennes à courbure sectionnelle strictement négative sont des espaces $K(\pi, 1)$. Ces Lagrangiennes vérifient le théorème de Preissmann [40] suivant :

Théorème 3.3. *Soit L une variété à courbure sectionnelle strictement négative. Alors tout sous-groupe Abélien de $\pi_1(L)$ est isomorphe à $\mathbf{Z}$.*

Ce théorème est l'ingrédient qui va nous permettre de démontrer le corollaire du théorème 1.5 suivant :

Corollaire 1.6. *Si L est une sous-variété Lagrangienne monotone orientable de M à courbure sectionnelle strictement négative telle que $H^1(L, \mathbf{Z}) \neq 0$, alors pour tout Φ^1 , temps 1 d'un flot Hamiltonien, tel que l'intersection $\Phi^1(L) \cap L$ est transverse on a :*

$$\#(\Phi^1(L) \cap L) \geq 1 + \dim(H_1(L, \mathbf{Z}/2)).$$

La démonstration de ce corollaire repose sur le lemme suivant :

Lemme 3.4. *Si $L \hookrightarrow M$ est une sous-variété orientable et de courbure sectionnelle strictement négative telle que $H^1(L, \mathbf{Z}) \neq 0$, alors la condition (ii) du théorème 1.5 est vérifiée.*

Démonstration. Par hypothèse, L est une variété à courbure strictement négative, donc c'est un espace $\mathbf{K}(\pi, 1)$. De plus, $H^1(L, \mathbf{Z}) \neq 0$, il existe alors un morphisme non nul $u : \pi_1(L) \rightarrow \mathbf{Z}$. Si le noyau de u est réduit à l'élément neutre, alors $\pi_1(L)$ est un sous-groupe de $\mathbf{Z}$, i.e $\pi_1(L) = n\mathbf{Z}$, pour un certain entier $n \geq 1$. Par conséquent, $\pi_1(L)$ est isomorphe à $\mathbf{Z}$. Cela implique que L est un espace $\mathbf{K}(\mathbf{Z}, 1)$, donc homotopiquement équivalent à $\mathbf{S}^1$. D'autre part, L est fermée et de dimension strictement supérieure à 1, on en déduit que $H_n(L, \mathbf{Z}) \neq 0$. On aboutit à une contradiction. D'où $\ker(u) \neq 0$.

On suppose qu'il existe un élément $g \in \pi_1(L)$ non-trivial tel que $Z(g) \subset \pi_1(L)$ est d'indice fini.

Supposons que $g \in \ker(u)$. Soit $h \in \pi_1(L)$ tel que $u(h) = 1$. Le sous-groupe $Z(g) \subset \pi_1(L)$ est d'indice fini, i.e la classe de conjugaison de g dans $\pi_1(L)$ est finie. Il existe donc un entier non nul k tel que $gh^k = h^k g$, d'où $\langle g, h^k \rangle$ est un groupe Abélien. De plus, ce groupe est différent de $\mathbf{Z}$. En effet, s'il existe des entiers non nuls m et n tels que :

$$g^m = (h^k)^n,$$

alors

$$u(g^m) = u(h^{kn}) = kn \neq 0.$$

Or $g \in \ker(u)$, on aboutit donc à une contradiction. Finalement, on a trouvé un sous-groupe $\langle g, h^k \rangle$ de $\pi_1(L)$, Abélien et différent de $\mathbf{Z}$. Cela contredit le théorème de Preissmann.

Supposons, à présent, que $g \notin \ker(u)$. Soit $h \in \ker(u)$ et $h \neq 0$. Comme précédemment, il existe un entier k non nul tel que $gh^k = h^k g$. Comme L est un espace $\mathbf{K}(\pi, 1)$ de dimension finie, $\pi_1(L)$ est sans torsion. D'où, $h^k \neq 0$. Donc, le sous-groupe $\langle g, h^k \rangle \subset \pi_1(L)$ est Abélien. Par le même raisonnement effectué précédemment, ce sous-groupe est différent de $\mathbf{Z}$. On aboutit de nouveau à une contradiction. $\square$

Démonstration du corollaire 1.6. Comme L est orientable et monotone, on a $N_L \geq 2$.

Si $N_L \geq 3$, on conclut par le théorème 1.5.

Si $N_L = 2$, par le lemme 3.4, la condition (ii) du théorème 1.5 est vérifiée. $\square$

3.3 Fibration sur $\mathbf{S}^1$

Dans cette section, on démontre le corollaire 1.9 :

Corollaire 1.9. *Soit L une variété $\mathbf{K}(\pi, 1)$ avec $\dim(L) \geq 6$, admettant un plongement Lagrangien monotone dans M . On suppose que $H_2(M, \mathbf{Q}) = 0$. Si L satisfait l'une des assertions suivantes :*

- (i) $N_L \geq 3$.
- (ii) L est orientable, son groupe de Whitehead $Wh(\pi_1(L))$ est nul et L ne fibre pas sur le cercle.

Alors pour tout Φ^1 , temps 1 d'un flot Hamiltonien, tel que l'intersection $\Phi^1(L) \cap L$ est transverse on a :

$$\#(\Phi^1(L) \pitchfork L) \geq 1 + \dim(H_1(L, \mathbf{Z}_2)),$$

Comme précisé dans l'introduction, pour prouver le corollaire 1.9, il suffit de montrer que pour L orientable, si l'assertion (ii) du théorème 1.5 n'est pas vérifiée alors L fibre sur le cercle. Cela repose sur un cas particulier du théorème 1' de F.Latour dans [28] :

Théorème 3.5 (Latour). *Soient L une variété fermée connexe avec $\dim(L) \geq 6$ et $u : \pi_1(L) \rightarrow \mathbf{Q}$ une application non nulle. La classe $[u] \in H^1(L, \mathbf{Q})$ contient une 1-forme sans zéros (i.e il existe une fibration $f : L \rightarrow \mathbf{S}^1$ avec $[f^*d\theta] = [u]$) si et seulement si u vérifie les conditions suivantes :*

- 1. $H_*(L, -u) = 0$.
- 2. $\tau(L, -u) = 0$.
- 3. $\ker(u)$ est de présentation finie.

Dans la deuxième condition, $\tau(L, -u) \in Wh(\pi_1(L); u)$ est la torsion de Whitehead associé à $-u$. Par hypothèse, $Wh(\pi_1(L)) = 0$, ce qui implique que $Wh(\pi_1(L); u) = 0$ (voir proposition 2.2.c de [13]). La condition 2. est donc satisfaite.

Dans la première condition, $H_*(L, -u)$ désigne l'homologie de Novikov associée à $-u$. L'homologie de Novikov a été construite par S.P Novikov dans [34], rappelons-en sommairement la définition. Tout d'abord, on considère l'anneau du groupe $\Lambda := \mathbf{Z}[\pi_1(L)]$, ses éléments sont les sommes finies $\sum n_i g_i$ où $n_i \in \mathbf{Z}$ et $g_i \in \pi_1(L)$. Pour toute série formelle $\lambda = \sum_{i=0}^{+\infty} n_i g_i \in \mathbf{Z}[[\pi_1(L)]]$, on note $\text{supp}(\lambda) = \{g_i \in \pi_1(L) \mid n_i \neq 0\}$. Étant donné une application $u : \pi_1(L) \rightarrow \mathbf{Q}$, l'anneau de Novikov associé à $(\pi_1(L), u)$ est :

$$\begin{aligned} \Lambda_u &:= \{\lambda \in \mathbf{Z}[[\pi_1(L)]] \mid \forall r \in \mathbf{R}, \text{supp}(\lambda) \cap u^{-1}([-\infty, r[) \text{ est fini}\} \\ &= \{\lambda = \sum_{i=0}^{+\infty} n_i g_i \mid n_i \in \mathbf{Z}, g_i \in \pi_1(L), \lim_{i \rightarrow \infty} u(g_i) = +\infty\}. \end{aligned}$$

L'homologie de Novikov $H_*(L, u)$ est l'homologie du complexe

$$\Lambda_u \otimes_{\Lambda} C^{\tilde{L}}(f, \xi),$$

où f est une fonction de Morse sur L , ξ est un gradient associé à une métrique générique sur L , et $C^{\tilde{L}}(f, \xi)$ le Λ -complexe de Morse libre obtenu en relevant les

lignes de gradient au revêtement universel.

Pour démontrer le corollaire 1.9, il suffit de prouver l'existence d'une application $u : \pi_1(L) \rightarrow \mathbf{Q}$ telle que les conditions du théorème 3.5 soient satisfaites. Comme la condition 2. est vraie par hypothèse, il ne reste qu'à montrer 1. et 3..

Démonstration du corollaire 1.9. On suppose que L est orientable et qu'il existe un élément non-trivial $g \in \pi_1(L)$ tel que g appartient à la classe du bord d'un disque J -holomorphe dont l'indice de Maslov est 2 et tel que $Z(g) \subset \pi_1(L)$ est d'indice fini. On commence par chercher une application $u : \pi_1(L) \rightarrow \mathbf{Q}$ telle que $u(g) \neq 0$. comme L est monotone, on peut définir le morphisme de Maslov μ sur $H_2(M, L; \mathbf{Z})$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \mu : H_2(M, L; \mathbf{Z}) &\rightarrow \mathbf{Z} \\ A &\mapsto \eta \int_A \omega, \end{aligned}$$

où η la constante de monotonie de L . L'inclusion $L \subset M$ donne la suite exacte longue :

$$\cdots \rightarrow H_2(M; \mathbf{Z}) \rightarrow H_2(M, L; \mathbf{Z}) \xrightarrow{\delta} H_1(L; \mathbf{Z}) \rightarrow \cdots$$

Par hypothèse $H_2(M, \mathbf{Q}) = 0$, cela implique que la partie libre de $H_2(M, \mathbf{Z})$ est nulle. Par conséquent, l'application δ envoie la partie libre de $H_2(M, L; \mathbf{Z})$ dans la partie libre de

$$H_1(L; \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}^r \oplus (\text{torsion}).$$

Donc il existe des entiers naturels non nuls $n_1, \dots, n_r$ tels que

$$\delta(H_2(M, L; \mathbf{Z})) = n_1 \mathbf{Z} \times \cdots \times n_r \mathbf{Z} \oplus (\text{torsion}).$$

L'application δ est un isomorphisme entre la partie libre de $H_2(M, L; \mathbf{Z})$ et $n_1 \mathbf{Z} \times \cdots \times n_r \mathbf{Z}$. On veut construire un morphisme $\mu' : H_1(L; \mathbf{Z}) \rightarrow \mathbf{Z}$ qui prolonge le morphisme de Maslov μ , c'est-à-dire tel que $\mu' \circ \delta = \mu$. Sur la partie de torsion, μ est nul, donc on pose $\mu' = 0$ sur la partie de torsion de $H_1(L; \mathbf{Z})$. Sur la partie libre on pose :

$$\begin{aligned} \mu' : \mathbf{Z}^r &\rightarrow \mathbf{Q} \\ (g_1, \dots, g_r) &\mapsto \frac{\mu \circ \delta^{-1}(n_1 g_1)}{n_1} + \cdots + \frac{\mu \circ \delta^{-1}(n_r g_r)}{n_r}. \end{aligned}$$

Vérifions, à présent, que le morphisme μ' , ainsi défini, satisfait $\mu' \circ \delta = \mu$. Soit $x \in H_2(M, L; \mathbf{Z})$, notons $x_l = (x_{1,l}, \dots, x_{r,l})$ sa partie libre et x_{tor} sa partie de torsion. On a :

$$\delta(x) = \delta(x_l) + \delta(x_{tor}),$$

où $\delta(x_l)$ appartient à la partie libre de $H_1(L; \mathbf{Z})$ et $\delta(x_{tor})$ à sa torsion. De plus, il

existe des entiers $g_1, \dots, g_r$ tels que $\delta((x_{1,l}, \dots, x_{r,l})) = (n_1 g_1, \dots, n_r g_r)$. D'où :

$$\begin{aligned}
\mu' \circ \delta(x) &= \mu'((n_1 g_1, \dots, n_r g_r)) + \mu'(\delta(x_{tor})) \\
&= \mu \circ \delta^{-1}(n_1 g_1) + \dots + \mu \circ \delta^{-1}(n_r g_r) + 0 \\
&= \mu(\delta^{-1}(n_1 g_1) + \dots + \delta^{-1}(n_r g_r)) + 0 \\
&= \mu(\delta^{-1}(n_1 g_1, \dots, n_r g_r)) + 0 \\
&= \mu(x_l) + \mu(x_{tor}) \\
&= \mu(x).
\end{aligned}$$

Finalement, par composition de μ' avec la projection :

$$P : \pi_1(L) \rightarrow \pi_1(L)/[\pi_1(L), \pi_1(L)] \simeq H_1(L; \mathbf{Z}),$$

on obtient une application $u : \pi_1(L) \rightarrow \mathbf{Q}$. L'élément $g \in \pi_1(L)$, choisi au début de cette preuve, vérifie $u(g) = 2$, donc u est non nulle.

Dans la proposition 3.3 de [14], M.Damian montre que sous certaines propriétés de finitude de $\ker(u)$, l'homologie de Novikov $H(L; -u)$ est nulle. Les propriétés de finitude considérées sont une généralisation de la notion de groupe de type fini et de présentation finie :

Définition 3.6. *On dit qu'un groupe G est de type F_m si et seulement si il existe un complexe simplicial $\mathbf{K}(G, 1)$ dont le m -squelette est fini.*

Donc pour un groupe, être de type F_1 est équivalent à être de type fini, F_2 est équivalent à être de présentation finie. Un groupe est F_∞ si il est F_m pour tout m . L'énoncé de la proposition 3.3 de [14] est le suivant :

Proposition 3.7 (Damian). *Soit L une variété compacte et connexe telle que son revêtement universel $\tilde{L}$ est m -connexe pour un certain entier $m \geq 1$ fixé. Si $u : \pi_1(L) \rightarrow \mathbf{R}$ est un morphisme tel que $\ker(u)$ est F_{m+1} , alors $H_*(L; \pm u) = 0$ pour $* \leq m$.*

Donc si $\ker(u)$ est au moins F_{n+1} la preuve est terminée.

Soit $p : \tilde{L} \rightarrow L$ le revêtement universel de L . On considère $\alpha \in H^1(L, \mathbf{Q})$ un élément de la classe de cohomologie de u et $p^* \alpha \in H^1(\tilde{L}, \mathbf{Q})$ son pull-back par p . Puisque $H^1(\tilde{L}, \mathbf{Q}) = 0$, la 1-forme $p^* \alpha$ est exacte. Donc il existe une application $\tilde{f} : \tilde{L} \rightarrow \mathbf{R}$ telle que $p^* \alpha = d\tilde{f}$, on l'appelle primitive de u :

Définition 3.8. *Une application $\tilde{f} : \tilde{L} \rightarrow \mathbf{R}$ est une primitive de $u : \pi_1(L) \rightarrow \mathbf{Q}$ si il existe une 1-forme $\alpha \in H^1(L; \mathbf{Q})$ dans la classe $[u]$ telle que $p^* \alpha = d\tilde{f}$.*

La différence entre deux primitives de u est bornée. En effet, si $\gamma : [0, 1] \rightarrow \tilde{L}$ est un chemin tel que $\gamma(0) = \tilde{x}$ et $\gamma(1) = g\tilde{x}$, pour un g appartenant à $\pi_1(L, x)$, alors

pour tout $\tilde{x} \in \tilde{L}$:

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(g\tilde{x}) - \tilde{f}(\tilde{x}) &= \int_{\gamma(0)}^{\gamma(1)} \tilde{f}(x) dx \\
&= \int_0^1 d\tilde{f}_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) dt \\
&= \int_0^1 p^* \alpha_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) dt \\
&= \int_g \alpha \\
&= u(g).
\end{aligned}$$

Ce calcul ne dépend pas du choix de $\tilde{f}$. Donc si $\tilde{h}$ est une autre primitive de $\tilde{\alpha}$, on a pour tout $\tilde{x} \in \tilde{L}$:

$$(\tilde{f} - \tilde{h})(\tilde{x}) = (\tilde{f} - \tilde{h})(g\tilde{x}).$$

Cette égalité implique que $\tilde{f} - \tilde{h}$ définit une fonction sur L . Par compacité de L , la fonction $\tilde{f} - \tilde{h}$ est bornée.

L'invariant de Beri, Neumann, Renz et Strebel ([5] et [6]) pour le groupe fondamental $\pi_1(L)$, noté $\Sigma^q(\pi_1(L))$ pour un certain $q \in \mathbf{N}$, est un sous-ensemble de

$$S(\pi_1(L)) = H^1(L, \mathbf{R})/\mathbf{R}_+^*.$$

Les éléments de $\Sigma^q(\pi_1(L))$ sont caractérisés de la manière suivante :

Définition 3.9. Une classe $[u] \in S(\pi_1(L))$ appartient à $\Sigma^q(\pi_1(L))$ s'il existe un réel $r > 0$ tel que l'inclusion

$$\{\tilde{x} \in \tilde{L} \mid \tilde{f}(\tilde{x}) \geq 0\} \xrightarrow{i_r} \{\tilde{x} \in \tilde{L} \mid \tilde{f}(\tilde{x}) \geq -r\},$$

où $\tilde{f} : \tilde{L} \rightarrow \mathbf{R}$ est une primitive de u , vérifie $\pi_\ell(i_r) = 0$ pour tout $\ell < q$.

Cette définition est indépendante du choix de $\tilde{f}$ puisque la différence entre deux primitives de u est bornée. L'invariant $\Sigma^q(\pi_1(L))$ est lié aux propriétés de finitude de $\ker(u)$:

Proposition 3.10 (Theorem B1 [5] et Theorem B [6] + proposition 3.1 [14]). On considère une application $u : \pi_1(L) \rightarrow \mathbf{Q}$, son noyau $\ker(u)$ est F_q si et seulement si u et $-u$ appartiennent à $\Sigma^q(\pi_1(L))$.

Donc afin de terminer la démonstration du corollaire 1.9, il suffit de montrer que u et $-u$ appartiennent à $\Sigma^{n+1}(\pi_1(L))$.

Soit $\bar{p} : \bar{L} \rightarrow L$ un revêtement intermédiaire de L associé au sous-groupe $Z(g)$ de $\pi_1(L)$:

$$\begin{array}{c}
\tilde{L} \\
\downarrow \tilde{p} \\
\bar{L} \\
\downarrow \bar{p} \\
L
\end{array}
\quad \begin{array}{c}
\curvearrowright \\
p
\end{array}$$

On définit $\bar{\alpha} = \bar{p}^* \alpha \in H^1(\bar{L}, \mathbf{Q})$ et $\bar{u} : \pi_1(L) \rightarrow \mathbf{Q}$ le morphisme correspondant. Il vérifie $\bar{u}(g) \neq 0$. Le revêtement $\bar{L}$ est une variété $\mathbf{K}(\pi, 1)$ fermée et connexe dont le groupe fondamental est $\pi_1(\bar{L}) = Z(g)$, donc d'après le lemme 5.2 de [6], le morphisme $\bar{u}$ définit un élément de $\Sigma^q(\pi_1(\bar{L}))$ pour tout q .

Soit β une 1-forme dans la classe $[u]$, alors $\bar{p}^* \beta$ est une 1-forme dans la classe $[\bar{u}]$ et $\tilde{p}^* \bar{p}^* \beta$ est une 1-forme exacte, elle définit donc une primitive $\tilde{f} : \tilde{L} \rightarrow \mathbf{R}$ de u et $\bar{u}$. Comme $[\bar{u}]$ appartient à $\Sigma^q(\pi_1(\bar{L}))$ pour tout q , il existe $r > 0$ tel que l'inclusion

$$\{\tilde{x} \in \tilde{L} \mid \tilde{f}(\tilde{x}) \geq 0\} \xrightarrow{i} \{\tilde{x} \in \tilde{L} \mid \tilde{f}(\tilde{x}) \geq -r\},$$

vérifie $\pi_\ell(i) = 0$ pour tout $\ell < q$. La fonction $\tilde{f}$ est également une primitive de u . Comme la caractérisation des éléments de $\Sigma^q(\pi_1(L))$, donnée à la définition 3.9, ne dépend pas du choix de la primitive, on en déduit que $[u] \in \Sigma^q(\pi_1(L))$ pour tout q , ce qui termine la démonstration. $\square$

3.4 Preuve du théorème 1.10

Rappelons l'énoncé du théorème :

Théorème 1.10. *Soit L une sous-variété Lagrangienne monotone de M satisfaisant l'une des assertions suivantes :*

- (i) $N_L \geq 3$.
- (ii) L est orientable et $\pi_1(L)$ n'admet aucun élément non-trivial g dont la classe de conjugaison est finie

Soit $p : \tilde{L} \rightarrow L$, son revêtement universel. Si p induit l'application nulle en homologie sauf en degré 0, alors $HF(L, L) \neq 0$, donc L n'est pas déplaçable.

Avant de prouver ce théorème, on présente la définition du *complexe de Floer minimal* construit par P.Biran et O.Cornea dans [10]. Ce complexe est l'ingrédient principal de la démonstration.

3.4.1 Le complexe de Floer minimal

Soit f une fonction de Morse sur L comme définie à la section 2.3.1. On avait défini le complexe de Floer gradué filtré associé à f :

$$C(L, L_1; J) = CF(L, L_1; J) \otimes A,$$

où $L_1 = \{(q, df_q) \mid q \in L\}$ et $A = \mathbf{Z}_2 [T^{N_L}, T^{-N_L}]$. La différentielle d de ce complexe se décompose en une somme finie d'opérateurs :

$$d = d_0 + d_1 + \cdots + d_\nu,$$

où d_0 est la différentielle de Morse $\nu = \left\lceil \frac{\dim L + 1}{N_L} \right\rceil$ et pour tout $k \in \{1, \dots, \nu\}$,

$$d_k : CF_\star(L, L_1; J) \rightarrow CF_{\star-1+kN_L}(L, L_1; J),$$

où le degré est donné par l'indice de Morse.

Si f est une fonction de Morse parfaite, i.e la différentielle de Morse d_0 est nulle, alors la preuve du théorème 1.10 est immédiate. En effet, si d_0 est nulle alors il en est de même de $\tilde{d}_0$, par définition du complexe relevé. On en déduit alors que pour tout i :

$$CF_i(L, L_1; J) = H_i(L),$$

et

$$CF_i^{\tilde{L}}(L, L_1; J) = H_i(\tilde{L}).$$

Soient x un élément non nul de $CF_0(L, L_1; J) = H_0(L)$, et $\tilde{x} \in H_0(\tilde{L})$ un relevé par p . Le but est de montrer que x est non nul dans $HF(L, L)$, i.e que x est un cycle mais n'est pas un bord pour la différentielle d . On calcule $d(x)$:

$$\begin{aligned} d(x) &= d \circ p(\tilde{x}) \\ &= p \circ \tilde{d}(\tilde{x}). \end{aligned}$$

L'élément $\tilde{d}(\tilde{x})$ appartient à une somme directe de $H_i(\tilde{L})$ pour certains indices $i > 0$. Par hypothèse, p induit l'application nulle en homologie en degré différent de 0, on en déduit que $p \circ \tilde{d}(\tilde{x}) = 0$. D'où $d(x) = 0$, i.e x est un cycle.

Si x est un bord, alors il existe un élément y appartenant à une somme directe de $H_i(L)$ pour certains indices $i > 0$, tel que $x = d(y)$. Par hypothèse $d_0 = 0$, donc $d = d_1 + \dots + d_\nu$. Pour tout $k \in \{1, \dots, \nu\}$ et pour tout $i > 0$, l'application d_k augmente le degré de $H_i(L)$ de $-1 + kN_L > 0$, donc $H_0(L)$ ne peut être atteint, i.e $d(y) \notin H_0(L)$. On aboutit à une contradiction. Donc x n'est pas un bord.

Dans le cas où L n'admet pas de fonction de Morse parfaite, P.Biran et O.Cornea ont construit dans [10] un *complexe minimal* sur L qui a la même homologie et qui vérifie la même propriété que le complexe de Floer défini à partir d'une fonction de Morse parfaite. Cette construction se fait dans un contexte algébrique plus général, nous la présentons ci-dessous.

Étant donné un espace vectoriel gradué G , à coefficients dans $\mathbf{Z}_2$, on considère le complexe de chaînes $\mathcal{C} = (G \otimes A^+, d)$ où $A^+ = \mathbf{Z}_2[T]$ avec $\deg(T) \geq 2$ et $d = d_0(x) + d_1(x)T$ avec $d_0(x) \in G$. Il est clair, par les hypothèses, que d_0 définit une différentielle sur G . On note $\mathcal{H}$ l'homologie de (G, d_0) . Pour tout d -morphisme ξ , on note ξ_0 le d_0 -morphisme correspondant (en mettant $T = 0$ dans ξ).

On a le résultat suivant :

Proposition 3.11 (Proposition 4.1.1 [10]). *Il existe un complexe de chaînes*

$$\mathcal{C}_{min} = (\mathcal{H} \otimes A^+, \delta), \quad \delta_0 = 0,$$

et des morphismes de chaîne $\phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_{min}$, $\psi : \mathcal{C}_{min} \rightarrow \mathcal{C}$ tels que $\phi \circ \psi = id$ et ϕ et ψ induisent un isomorphisme en d -homologie et ϕ_0 et ψ_0 induisent un isomorphisme en d_0 -homologie. Les propriétés précédentes caractérisent $\mathcal{C}_{min}$ à isomorphisme près.

Dans cette construction, il est important de travailler avec des coefficients d'exposants positifs. On définit donc le complexe de Floer à coefficients dans $A^+ = \mathbf{Z}_2[T^{N_L}] \subset A$:

$$C^+(L, L_1; J) = CF(L, L_1; J) \otimes A^+.$$

On lui applique la proposition 3.11 et on en déduit l'existence d'un complexe de Floer minimal :

Corollaire 3.12. *Pour tout triplet (L, f, J) tel que $(C^+(L, L_1; J), d)$ est défini, il existe un complexe $\mathcal{C}_{min}^+(L) = (H_*(L; \mathbf{Z}_2) \otimes A^+, \delta)$ avec $\delta_0 = 0$. De plus, il existe des morphismes de chaînes $\phi : C^+(L, L_1; J) \rightarrow \mathcal{C}_{min}^+(L)$ et $\psi : \mathcal{C}_{min}^+(L) \rightarrow C^+(L, L_1; J)$ qui induisent tous les deux un isomorphisme en homologie de Floer ainsi qu'en homologie de Morse et vérifient $\phi \circ \psi = id$. Le complexe $\mathcal{C}_{min}^+(L)$ avec ces propriétés est unique à isomorphisme près.*

Dans la preuve du théorème 1.10 on travaille sur l'anneau A , donc on définit $\mathcal{C}_{min}(L) = \mathcal{C}_{min}^+(L) \otimes_{A^+} A$ (cf. [10] p.2929).

Le fait que G soit de dimension finie n'intervient pas dans la preuve de la proposition 3.11, donc on peut appliquer cette construction au cas relevé : Si $N_L \geq 3$ ou $N_L = 2$ sous les hypothèses de la proposition 2.13, on définit pour tout revêtement $p : \bar{L} \rightarrow L$, un complexe de Floer relevé $(\bar{\mathcal{C}}_{min}, \bar{\delta})$, avec $\bar{\delta}_0 = 0$ et les morphismes de chaînes correspondants $\bar{\phi}$ et $\bar{\psi}$.

3.4.2 Démonstration

Démonstration du théorème 1.10. Soit f une fonction de Morse sur L telle que le complexe $C(L, L_1; J)$ est défini. On choisit f avec un unique minimum afin d'avoir un isomorphisme entre C_0 et $H_0(L)$. L'idée de la démonstration est de trouver un élément non nul x , de degré zero dans $C(L, f, J)$, qui est non nul dans $HF(L, L)$. Par la proposition 2.13, l'homologie de Floer relevée est définie pour tout revêtement de L . Soit $(\tilde{C}, \tilde{d})$ le complexe de Floer relevé associé au revêtement universel de L et $(\tilde{\mathcal{C}}_{min}, \tilde{\delta})$ le complexe de Floer relevé minimal correspondant.

1ère étape : le choix de x . Soit $\tilde{x}_{min}$ un élément non nul de $\tilde{\mathcal{C}}_{min,0}$. On a les isomorphismes suivants :

$$\tilde{\mathcal{C}}_{min,0} \xrightarrow{\sim} H_0(\tilde{L}) \xrightarrow[p]{\sim} H_0(L) \simeq C_0.$$

On note x l'image de $\tilde{x}_{min}$ par ces isomorphismes. On a choisi $\tilde{x}_{min} \neq 0$ donc $x \neq 0$.

2ème étape : x est un cycle. Soit $\tilde{x} = \tilde{\psi}(\tilde{x}_{min})$, on a :

$$\begin{aligned} d(x) &= d \circ p(\tilde{x}) \\ &= p \circ \tilde{d}(\tilde{x}), \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \tilde{d}_0 \circ \tilde{d}(\tilde{x}) &= \tilde{d}_0 \circ \tilde{d} \circ \tilde{\psi}(\tilde{x}_{min}) \\ &= \tilde{d}_0 \circ \tilde{\psi} \circ \tilde{\delta}(\tilde{x}_{min}) \\ &= \tilde{\psi} \circ \tilde{\delta}_0 \circ \tilde{\delta}(\tilde{x}_{min}). \end{aligned}$$

D'autre part, par définition de $\tilde{\mathcal{C}}_{min}$, $\tilde{\delta}_0 = 0$, d'où $\tilde{\delta}_0 \circ \tilde{\delta}(\tilde{x}_{min}) = 0$. On obtient alors $\tilde{d}_0 \circ \tilde{d}(\tilde{x}) = 0$. Comme p induit l'application nulle en homologie, on en déduit que $d(x)$ est un d_0 -bord i.e il existe $z \in C$ tel que $d(x) = d_0(z)$. On termine en montrant $d(x) = 0$, ce qui implique alors que x est un d -cycle.

Les espaces $C_0 (\simeq H_0(L))$ et $\mathcal{C}_{min,0}$ sont isomorphes, donc il existe $x_{min} \in \mathcal{C}_{min,0}$ tel que $\psi(x_{min}) = x$. Par construction du complexe de Floer minimal, on a $\phi \circ \psi(x_{min}) = x_{min}$ et :

$$\begin{aligned} \delta(x_{min}) &= \delta \circ \phi \circ \psi(x_{min}) \\ &= \phi \circ d(x) \\ &= \phi \circ d_0(z) \\ &= \delta_0 \circ \phi(z) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} d(x) &= d \circ \psi(x_{min}) \\ &= \psi \circ \delta(x_{min}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

3ème étape : x n'est pas un bord. Soit $x_{min} \in \mathcal{C}_{min,0}$ comme précédemment. Si x est un bord, alors x_{min} est également un bord. Cela est impossible puisque $\delta_0 = 0$. Donc x n'est pas un bord. $\square$

Rappelons les exemples d'applications du théorème 1.10 :

Exemples. Pour $n > 1$, considérons le produit $\mathbf{RP}^n \times K$, où K est une variété $\mathbf{K}(\pi, 1)$. On la plonge dans $\mathbf{CP}^n \times T^*K$ par le plongement standard de $\mathbf{RP}^n$ dans $\mathbf{CP}^n$ et par la projection sur la section nulle pour K dans T^*K . Le nombre de Maslov de $\mathbf{RP}^n$ dans $\mathbf{CP}^n$ est $N_{\mathbf{RP}^n} = n + 1$ ([37]) et celui de K est nul car c'est la section nulle de T^*K . On obtient alors une sous-variété Lagrangienne monotone dont le nombre de Maslov est $N_{\mathbf{RP}^n \times K} = n + 1 \geq 3$ et qui vérifie les hypothèses du théorème 1.10, donc elle n'est pas déplaçable.

D'autre part, si on considère le plongement Lagrangien monotone :

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^{2n+1} &\hookrightarrow \mathbf{CP}^n \times \mathbf{C}^n \\ z &\mapsto ([z], \bar{z}), \end{aligned}$$

son nombre de Maslov est $N_{\mathbf{S}^{2n+1}} = 2n + 2 \geq 3$ et $\mathbf{S}^{2n+1}$ est déplaçable. La sous-variété $\mathbf{S}^{2n+1}$ ne vérifie pas les hypothèses du théorème 1.10, en effet, $p : \tilde{\mathbf{S}}^{2n+1} \rightarrow \mathbf{S}^{2n+1}$ est l'identité en homologie.

3.4.3 Preuve du corollaire 1.12

Rappelons l'énoncé du corollaire :

Corollaire 1.12. *Soit M une variété symplectique telle que $\pi_2(M) = 0$ ou telle que son nombre de Chern vérifie $N_{c_1}(M) > 2$. On considère le produit $\mathbf{RP}^n \times K$, où K est une variété à courbure sectionnelle strictement négative avec $H^1(K, \mathbf{Z}) \neq 0$. On suppose qu'il existe un plongement Lagrangien monotone et orientable $\mathbf{RP}^n \times K \hookrightarrow M$. Alors $\mathbf{RP}^n \times K$ n'est pas déplaçable dans M .*

Démonstration. Par hypothèse, $\mathbf{RP}^n \times K$ est orientable. Le groupe fondamental de $\mathbf{RP}^n \times K$ est :

$$\pi_1(\mathbf{RP}^n \times K) = \mathbf{Z}_2 \times \pi_1(K).$$

Notons $L = \mathbf{RP}^n \times K$. On a le lemme suivant :

Lemme 3.13. *Si il existe un élément g dans $\text{Im}(\pi_2(M, L) \rightarrow \pi_1(L))$ non trivial ayant un nombre fini d'éléments conjugués dans $\pi_1(L)$, la composante de g dans $\pi_1(K)$ vérifie la même propriété dans $\pi_1(K)$.*

Démonstration du lemme 3.13. On suppose qu'il existe un élément non trivial $g \in \text{Im}(\pi_2(M, L) \rightarrow \pi_1(L))$ ayant un nombre fini d'éléments conjugués dans $\pi_1(L)$. L'élément g est soit de la forme $(0, h)$ soit $(1, h)$, où $h \in \pi_1(K)$.

Si $g = (0, h)$, alors le lemme 3.13 est évident.

Dans l'autre cas, $g = (1, h)$, le lemme 3.13 est également évident, sauf si $h = 0$.

On étudie donc le cas $g = (1, 0)$. On considère la suite exacte longue suivante, provenant de l'inclusion $L \subset M$:

$$\cdots \rightarrow \pi_2(M) \xrightarrow{i} \pi_2(M, L) \xrightarrow{j} \pi_1(L) \rightarrow \cdots$$

Puisque $g \in \text{Im}(\pi_2(M, L) \rightarrow \pi_1(L))$, il existe $g_{M,L} \in \pi_2(M, L)$ tel que $j(g_{M,L}) = g$. On a $2g = 0$, donc, $2g_{M,L}$ appartient à $\ker(j)$, donc également à $\text{Im}(i)$. Il existe $g_M \in \pi_2(M)$ tel que $i(g_M) = 2g_{M,L}$. Par la remarque 2.14, l'image de $g_{M,L}$ par le morphisme de Maslov est 2. Par conséquent, en utilisant la relation (1.3) on a :

$$2I_{c_1}(g_M) = \mu \circ i(g_M) = 4,$$

où I_{c_1} désigne le morphisme de Chern. D'où, $I_{c_1}(g_M) = 2$. On obtient une contradiction dans les deux cas : $\pi_2(M) = 0$ ou $N_{c_1}(M) > 2$. $\square$

Retournons à la preuve du corollaire 1.12. On suppose qu'il existe un élément non trivial g dans $\text{Im}(\pi_2(M, L) \rightarrow \pi_1(L))$ ayant un nombre fini d'éléments conjugués. Par le lemme 3.13, $\pi_1(K)$ vérifie la même propriété ; comme K est une variété orientable et de courbure sectionnelle strictement négative avec $H^1(K, \mathbf{Z}) \neq 0$, on peut lui appliquer le lemme 3.4. On en déduit que $\mathbf{RP}^n \times K$ satisfait l'hypothèse (ii) du théorème 1.5, elle n'est donc pas déplaçable dans M . $\square$

3.5 Preuve de la proposition 1.14

En cohomologie, toutes les constructions présentées dans la section 2.3 sont encore valides. En particulier, on a une version analogue du théorème 2.15 et du lemme 2.17 pour la cohomologie de Floer et la cohomologie de Floer relevée (qui est définie dans les conditions de la proposition 2.13). Ce sont les outils principaux de la preuve de

Proposition 1.14. *Soit L une sous-variété Lagrangienne monotone de M satisfaisant l'une des assertions suivantes :*

- (i) $N_L \geq 3$.
- (ii) L est orientable et $\pi_1(L)$ n'admet aucun élément non-trivial g dont la classe de conjugaison est finie

Supposons que l'anneau de cohomologie $H^(L)$ est engendré par $H^1(L)$, alors la cohomologie de Floer de L vérifie :*

$$HF^*(L) \simeq H^*(L).$$

Démonstration. Pour $N_L \geq 3$, la preuve de L.Buhovsky [11] est la suivante :

A la première page de la suite spectrale convergeant vers la cohomologie de Floer, on a $V^1 = H^*(L)$ et $\delta^1 : V^1 \rightarrow V^1$ est de degré $1 - N_L \leq -2$. Par hypothèse, V^1 est engendré par les éléments de degré 1, soit $a \in V^1$ l'un d'entre eux. Puisque $\deg(\delta^1) \leq -2$, on a $\delta^1(a) = 0$, donc $a \in \ker(\delta^1)$. D'autre part, la règle de Leibniz appliquée à δ implique que $\ker(\delta^1)$ est un sous-anneau de V^1 . Par conséquent, $\ker(\delta^1) = V^1$ et $\delta^1 = 0$. On a utilisé ici la structure produit sur $HF^*(L)$ (voir par exemple section 3.2 dans [11]).

La deuxième page est donnée par $V^2 = H^*(L)$ et $\delta^2 : V^2 \rightarrow V^2$ avec $\deg(\delta^2) = 1 - 2N_L \leq -5$. Le même argument montre que $\delta^2 = 0$, et ainsi de suite pour les pages suivantes. Donc $\delta^\ell = 0$ pour tout $\ell \geq 1$, la suite spectrale dégénère et $HF^*(L) \simeq H^*(L)$.

Pour $N_L = 2$, le seul problème qui nous empêche d'utiliser le raisonnement précédent apparaît à la première page de la suite spectrale. En effet, l'application δ^1 est de degré $1 - N_L = -1$, ce qui n'implique pas $\delta^1(a) = 0$, pour $a \in V^1$ de degré 1. Cependant, par l'hypothèse (ii), la cohomologie de Floer relevée est définie et le morphisme de suites spectrales induit par le revêtement universel $p : \tilde{L} \rightarrow L$ induit

le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} H_0(\tilde{L}) & \xleftarrow{\tilde{\delta}^1} & H_1(\tilde{L}) = 0 \\ p^0 \uparrow \wr & & \uparrow p^1 \\ H_0(L) & \xleftarrow{\delta^1} & H_1(L) \end{array}$$

qui donne $\delta^1(a) = 0$. Donc $\delta^1 = 0$ et $V^2 = H^*(L)$. Pour les pages suivantes, le raisonnement utilisé dans le cas $N_L \geq 3$ est encore valable puisque $\deg(\delta^\ell) \leq -3$ pour $\ell \geq 2$. Finalement, $HF^*(L) \simeq H^*(L)$. $\square$

On peut appliquer cette proposition à un produit monotone de surfaces compactes $\Sigma_{g_1} \times \cdots \times \Sigma_{g_k}$ de genre $g_i > 1$. En effet il vérifie l'hypothèse (ii).

Dans la proposition 1.14, on peut affaiblir l'hypothèse (ii) en (ii)' :

(ii)' *L est orientable et il n'existe pas d'éléments dans*

$\text{Im}(\pi_2(M, L) \rightarrow \pi_1(L))$ *dont la classe de conjugaison est finie.*

Si on considère un plongement Lagrangien monotone

$$\mathbf{RP}^n \times \Sigma_{g_1} \times \cdots \times \Sigma_{g_k} \hookrightarrow M,$$

avec Σ_{g_i} comme précédemment, alors, en utilisant le même raisonnement que dans la preuve du corollaire 1.12, assertion (ii)' est satisfaite à condition que $N_{c_1}(M) > 2$, où $N_{c_1}(M)$ est le nombre de Chern de M .

Chapitre 4

Homologie de Floer Lagrangienne dans le cas presque monotone

Dans [33], F.Ngô généralise l'homologie de Floer Lagrangienne au cas des sous-variétés Lagrangiennes *presque monotones*. Il utilise la version perlée du complexe de Floer définie par P.Biran et O.Cornea dans [9]. Dans cette partie nous allons adapter sa construction au complexe de Floer défini par des bandes holomorphes. On considère (M^{2n}, ω) une variété symplectique monotone fermée ou convexe à l'infini et $i_0 : L_0 \hookrightarrow M^{2n}$ une sous-variété Lagrangienne monotone fermée dont le nombre de Maslov est $N_{L_0} \geq 2$. On fixe une structure presque complexe $J_0 \in \mathcal{J}_c(M, \omega)$. Elle peut dépendre du temps mais on l'omet dans la notation. On note g_0 la métrique associée sur M :

$$\forall X, Y \in TM, \quad g_0(X, Y) = \omega(X, J_0 Y).$$

4.1 Sous-variétés Lagrangiennes presque monotones

Dans cette partie, on rappelle la définition et quelques propriétés des sous-variétés Lagrangiennes presque monotones données par F.Ngô dans [33].

Soit $E_{L,M}$ l'espace de Banach formé des plongements Lagrangiens dans M , muni de la topologie C^1 .

Définition 4.1. *Une sous-variété Lagrangienne $L \hookrightarrow M$ est presque monotone si elle est proche, dans la topologie C^1 , d'une sous-variété Lagrangienne monotone donnée.*

Soit $i_\alpha : L \hookrightarrow M$ une sous-variété Lagrangienne presque monotone, elle vit dans un voisinage C^1 -petit de $i_0 : L_0 \hookrightarrow M$, que l'on peut choisir tel que L appartient à un voisinage de Weinstein de L_0 . Si L est suffisamment proche de L_0 , le plongement $i_\alpha : L \hookrightarrow M$ correspond au graphe d'une 1-forme fermée dans un voisinage de la section nulle de T^*L_0 , que l'on note α . Pour $i_0 : L_0 \hookrightarrow M$, la 1-forme correspondante est $\alpha_0 \equiv 0$.

Remarque 4.2. Les sous-variétés Lagrangiennes presque monotones sont difféomorphes à la sous-variété Lagrangienne monotone de départ, elles conservent donc ses propriétés topologiques.

Les sous-variétés Lagrangiennes presque monotones vérifient une version perturbée de la relation de monotonie :

Proposition 4.3 (Ngô). *Soit $i : L_0 \hookrightarrow M$, une sous-variété Lagrangienne monotone fermée, on note η sa constante de monotonie. Si $i_\alpha : L_\alpha \hookrightarrow M$, est une sous-variété Lagrangienne C^1 -proche de L_0 , alors pour tout $A_\alpha \in \pi_2(M, L_\alpha)$:*

$$\omega(A_\alpha) = \eta\mu(A_\alpha) - \pi^*\alpha(\partial A_\alpha), \quad (4.1)$$

où $\pi : T^*L_0 \rightarrow L_0$ est la projection standard.

Démonstration. L'isotopie

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 1] \times L_0 &\rightarrow T^*L_0 \\ (s, q) &\mapsto (q, s\alpha_q) \end{aligned}$$

entre L_α et L_0 , induit un isomorphisme entre $\pi_2(M, L_0)$ et $\pi_2(M, L_\alpha)$. Par cette isotopie, un élément $A_\alpha \in \pi_2(M, L_\alpha)$ correspond à un élément $A \in \pi_2(M, L_0)$, en ajoutant à A_α le cylindre C_α formé par γ entre ∂A_α et $\pi(\partial A_\alpha)$.

Montrons l'équation (4.1) :

$$\begin{aligned} \omega(A_\alpha) &= \int_{A_\alpha} \omega \\ &= \int_A \omega - \int_{C_\alpha} \omega \\ &= \eta\mu(A) - \int_{C_\alpha} \omega \end{aligned} \quad (4.2)$$

On note λ la forme de Liouville sur T^*L_0 , on a :

$$\begin{aligned} \int_{C_\alpha} \omega &= \int_{C_\alpha} d\lambda \\ &= \int_{\partial C_\alpha} \lambda \\ &= \int_{\partial A_\alpha} \lambda - \int_{\partial A} \lambda \end{aligned}$$

Sur L_0 on a $\lambda = 0$ et sur L_α on a $\lambda = \pi^*\alpha$, d'où :

$$\int_{C_\alpha} \omega = \pi^*\alpha(\partial A_\alpha).$$

D'autre part, γ induit une homotopie entre les lacets de sous-espaces tangents Lagrangiens définis par ∂A et ∂A_α , puisque les disques le long desquels on trivialise le fibré tangent de T^*L_0 sont homotopes. On en déduit donc que :

$$\mu(A) = \mu(A_\alpha).$$

Finalement, on obtient la propriété voulue :

$$\omega(A_\alpha) = \eta\mu(A_\alpha) - \pi^*\alpha(\partial A_\alpha).$$

□

Les deux propriétés principales de cette partie (lemme 4.6 et proposition 4.7) reposent sur une version de la compacité de Gromov pour les disques pseudo-holomorphes à bord sur une Lagrangienne qui varie :

Proposition 4.4. *Soit $(L_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ une suite de sous-variétés Lagrangiennes convergeant vers L_0 , et $u_n : (D, \partial D) \rightarrow (M, L_n)$ une suite de disques J_0 -holomorphes non-constants, vérifiant $E(u_n) < K$. Il existe une courbe stable formée de disques J_0 -holomorphes $v_1, \dots, v_r$ à bord dans L_0 et de sphères J_0 -holomorphes $w_1, \dots, w_s$, avec au moins un de ces disques ou sphères non-constant, de sorte que :*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} E(u_n) = \sum_i E(v_i) + \sum_j E(w_j). \quad (4.3)$$

De plus, si pour tout n , $\mu(u_n) \leq I$, alors :

$$\sum_i \mu(v_i) + \sum_j 2I_{c_1}(w_j) \leq I, \quad (4.4)$$

avec égalité, si pour tout n , $\mu(u_n) = I$:

$$\sum_i \mu(v_i) + \sum_j 2I_{c_1}(w_j) = I. \quad (4.5)$$

Démonstration. Soit $(L_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ une suite de sous-variétés Lagrangiennes convergeant vers L_0 , et $u_n : (D, \partial D) \rightarrow (M, L_n)$ une suite de disques J_0 -holomorphes non-constants, vérifiant $E(u_n) < K$. Soit $U(L_0)$ un voisinage de Weinstein de L_0 contenant la suite $(L_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$. On considère une isotopie ψ_n de classe C^∞ à support dans $U(L_0)$, convergeant vers l'identité lorsque n tend vers $+\infty$ et telle que $\psi_n(L_n) = L_0$ pour tout n . Donc, pour tout n , le disque $\psi_n(u_n)$ est à bord sur L_0 et est pseudo-holomorphe pour la structure presque complexe $J_n = (\psi_n)_* J_0$. Par hypothèse, la suite (u_n) est d'énergie uniformément bornée, il en est de même de la suite $\psi_n(u_n)$, puisque ψ_n converge vers l'identité. Finalement, on obtient une suite de structures presque complexes (J_n) convergeant vers J_0 (car ψ_n converge vers l'identité) et une suite $\psi_n(u_n)$, de disques J_n -holomorphes à bord sur L_0 , d'énergie uniformément bornée. Donc, d'après le théorème de compacité de Gromov (théorème 1.5.B dans [25] ; voir aussi le théorème 3.3 de U.Frauenfelder dans [23]), la suite $\psi_n(u_n)$ admet une sous-suite convergente vers une courbe stable formée de disques J_0 -holomorphes $v_1, \dots, v_r$ à bord dans L_0 et de sphères J_0 -holomorphes $w_1, \dots, w_s$ avec au moins un de ces disques ou sphères non-constant. On a donc :

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} E(\psi_n(u_n)) = \sum_i E(v_i) + \sum_j E(w_j).$$

Et comme ψ_n converge vers l'identité, on a

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} E(\psi_n(u_n)) = \limsup_{n \rightarrow \infty} E(u_n),$$

d'où :

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} E(u_n) = \sum_i E(v_i) + \sum_j E(w_j).$$

D'autre part, des disques u_n et $\psi_n(u_n)$ sont, par définition de ψ_n , homotopes. Ces disques ont donc le même indice de Maslov. Par conséquent, si pour tout n , on a $\mu(u_n) \leq I$, alors :

$$\sum_i \mu(v_i) + \sum_j 2I_{c_1}(w_j) \leq I,$$

avec égalité si $\mu(u_n) = I$ pour tout n . □

Remarque 4.5. Cette proposition est également valable dans le cas d'une suite de disques vérifiant l'équation de Floer, d'énergie uniformément bornée et dont la suite de fonctions Hamiltoniennes intervenant dans l'équation de Floer converge vers 0. En utilisant le raisonnement de la preuve de la proposition 11.1.5 de [4], la proposition 4.4 s'adapte également à une suite de disques satisfaisant l'équation de Floer à paramètres.

Dans la construction de l'homologie de Floer, la propriété de monotonie permet de s'assurer que l'indice de Maslov des disques pseudo-holomorphes considérés, est strictement positif. Pour pallier ce problème dans le cas presque monotone, F.Ngô utilise une version plus faible de cette propriété :

Lemme 4.6 (Ngô). *Soit $L_0 \hookrightarrow M$ une sous-variété Lagrangienne monotone telle que $N_{L_0} \geq 2$. Pour tous $K > 0$ et $J_0 \in \mathcal{J}_c(M, \omega)$, il existe un voisinage $\mathcal{N}(L_0; J_0, K)$ de L_0 tel que pour tout $L \in \mathcal{N}(L_0; J_0, K)$ et tout disque J_0 -holomorphe non-constant, $u : (D, \partial D) \rightarrow (M, L)$, on a :*

$$\omega(u) < K \implies \mu(u) \geq 2.$$

Démonstration. Supposons qu'il existe K et J_0 tels que, pour tout voisinage $\mathcal{N}(L_0)$ de L_0 , il existe $L \in \mathcal{N}(L_0)$ et un disque J_0 -holomorphe $u : (D, \partial D) \rightarrow (M, L)$ tel que $\omega(u) < K$ et $\mu(u) < 2$.

On peut choisir, parmi ces sous-variétés Lagrangiennes, une suite $(L_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ convergeant vers L_0 , on obtient alors une suite de disques J_0 -holomorphes $u_n : (D, \partial D) \rightarrow (M, L_n)$ telle que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\omega(u_n) < K$ et $\mu(u_n) < 2$. Quitte à prendre une sous-suite, on peut supposer qu'il existe un entier $I < 2$ tel que $\mu(u_n) \leq I$ pour tout n . Par la proposition 4.4, il existe une courbe stable formée de disques J_0 -holomorphes $v_1, \dots, v_r$ à bord dans L_0 et de sphères J_0 -holomorphes $w_1, \dots, w_s$, avec au moins un de ces disques ou sphères non-constant, et telle que :

$$\sum_i \mu(v_i) + \sum_j 2I_{c_1}(w_j) \leq I < 2.$$

Supposons que la composante non-constante est un disque J_0 -holomorphe, on a :

$$\sum_i \omega(v_i) = \sum_i E(v_i) > 0.$$

Comme L_0 est monotone avec $N_{L_0} \geq 2$, on en déduit alors que $\sum_i \mu(v_i) \geq 2$. D'autre part,

$$\sum_j \omega(w_j) = \sum_j E(w_j) \geq 0,$$

d'où, $\sum_j 2I_{c_1}(w_j) \geq 0$, par la propriété de monotonie de M . Finalement, on obtient :

$$\sum_i \mu(v_i) + \sum_j 2I_{c_1}(w_j) \geq 2.$$

On obtient la même inégalité dans le cas où la composante non-constante est une sphère J_0 -holomorphe.

On aboutit à une contradiction. $\square$

On termine cette partie par un résultat qui mesure la perte de monotonie des sous-variétés Lagrangiennes presque monotones. Ce résultat est essentiel dans l'étape de recollement dans la preuve du théorème 4.17.

Proposition 4.7 (Ngô). *Soit $L_0 \hookrightarrow M$ une sous-variété Lagrangienne monotone. Pour tous $K > 0$, $\varepsilon > 0$ et $J_0 \in \mathcal{J}_c(M, \omega)$, il existe un voisinage $\mathcal{U}(L_0; \varepsilon, K)$ de L_0 , tel que pour tous $L \in \mathcal{U}(L_0; \varepsilon, K)$ et $A \in \pi_2(M, L)$ tel que :*

- $0 < \omega(A) < K$,
- *Il existe un disque J_0 -holomorphe $u : (D, \partial D) \rightarrow (M, L)$ tel que $[u] = A$,*

on a :

$$|\eta\mu(A) - \omega(A)| = |\pi^*\alpha(\partial A)| < \varepsilon,$$

où $\pi : T^*L_0 \rightarrow L_0$ est la projection standard.

Démonstration. On suppose qu'il existe $K > 0$ et $\varepsilon > 0$ tels que pour tout voisinage $\mathcal{U}(L_0)$ de L_0 , il existe $L_\alpha \in \mathcal{U}(L_0)$, et $A \in \pi_2(M, L_\alpha)$ vérifiant les hypothèses de la proposition 4.7 et tel que $|\pi^*\alpha(\partial A)| \geq \varepsilon$. On peut trouver une suite de plongements $(i_{\alpha_n})_{n \in \mathbf{N}^*}$ convergeant vers i_0 et une suite de disques J_0 -holomorphes $u_n : (D, \partial D) \rightarrow (M, L_{\alpha_n})$, telle que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $0 < \omega([u_n]) < K$, et $|\pi^*\alpha_n(\partial[u_n])| \geq \varepsilon$. Par la proposition 4.4, il existe une courbe stable, que l'on note $\mathbf{u}$, formée de disques J_0 -holomorphes à bord dans L_0 , et de sphères J_0 -holomorphes. Toujours par la proposition 4.4, cette limite satisfait :

$$|\eta\mu([\mathbf{u}]) - \omega([\mathbf{u}])| = |\pi^*\alpha(\partial[\mathbf{u}])| \geq \varepsilon.$$

Comme α_0 est la section nulle, on a $|\pi^*\alpha_0(\partial[\mathbf{u}])| = 0$. On aboutit à une contradiction. $\square$

4.2 Homologie de Floer dans le cas presque monotone

Dans cette partie, nous définissons l'homologie de Floer Lagrangienne dans le cas presque monotone. Nous présentons les deux descriptions du complexe de Floer définies au chapitre 4.12, adaptées au contexte presque monotone. Il y a deux différences principales par rapport au cas monotone. Premièrement, nous n'avons pas réussi à définir le complexe de Floer pour une isotopie Hamiltonienne quelconque, mais seulement lorsque celle-ci provient d'une isotopie Lagrangienne définie par une fonction de Morse "petite", comme dans la section 4.6 sur les suites spectrales. Et deuxièmement, l'espace des trajectoires permettant de définir la différentielle de Floer, que ce soit celles vérifiant l'équation de Cauchy-Riemann ou l'équation de Floer, est restreint aux trajectoires dont l'aire symplectique est bornée par une constante fixée. Ces deux hypothèses vont nous permettre d'appliquer les résultats présentés dans la partie 4.1.

4.2.1 Le complexe de Floer

On fixe des constantes $\varepsilon > 0$ et $K > 0$. Soit $L_0 \hookrightarrow M$ une sous-variété Lagrangienne monotone de constante de monotonie η et dont le nombre de Maslov N_{L_0} est supérieur ou égal à 2. On considère une sous-variété Lagrangienne presque monotone $L \hookrightarrow M$ appartenant à un voisinage $\mathcal{N}(L_0; J_0, K)$ de L_0 provenant du lemme 4.6 que nous rappelons :

Lemme 4.6 (Ngô). *Soit $L_0 \hookrightarrow M$ une sous-variété Lagrangienne monotone telle que $N_{L_0} \geq 2$. Pour tous $K > 0$ et $J_0 \in \mathcal{J}_c(M, \omega)$, il existe un voisinage $\mathcal{N}(L_0; J_0, K)$ de L_0 tel que pour tout $L \in \mathcal{N}(L_0; J_0, K)$ et tout disque J_0 -holomorphe non-constant, $u : (D, \partial D) \rightarrow (M, L)$, on a :*

$$\omega(u) < K \implies \mu(u) \geq 2.$$

Soit f une fonction de Morse sur L . On la choisit suffisamment C^2 -petite afin que, d'une part, l'isotopie Lagrangienne qu'elle définit :

$$\phi_t(L) = \{(q, td_q f) \mid q \in L\} \subset T^*L, \quad t \in [0, 1],$$

reste dans un voisinage de Weinstein $U(L)$ de L , et d'autre part :

$$\sup_{C^0} |f| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Pour tout point critique x de f , on note $\text{ind}(x)$ son indice de Morse. Soit $H : M \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction Hamiltonienne sur M , dont le flot Hamiltonien correspondant prolonge cette isotopie Lagrangienne. Les points d'intersections de L et $L_1 = \phi_1(L)$ sont les points critiques de f . En reprenant les notations de la section 2.1, on définit les deux versions du complexe de Floer dans le cas presque monotone.

Complexe de Floer pour l'équation de Cauchy-Riemann

On considère l'espace

$$\mathcal{M}_{J_0}(L, L_1; K) = \{u \in \mathcal{M}_{J_0}(L, L_1) \mid E(u) < K\}.$$

Pour tous points critiques x et y de f , on définit :

$$\mathcal{M}_{J_0}(x, y; K) = \left\{ u \in \mathcal{M}_{J_0}(L, L_1; K) \mid \begin{array}{l} \lim_{-\infty} u(s, \cdot) = x \\ \lim_{+\infty} u(s, \cdot) = y \end{array} \right\}.$$

Ces espaces vérifient la proposition 2.2, en effet, cette proposition est vraie pour un couple de sous-variétés Lagrangiennes quelconque, on a donc :

Proposition 4.8 (A.Floer [22]; Y-G.Oh [36]). *Pour tous $x, y \in L \cap L_1$, on a :*

$$\mathcal{M}_{J_0}(L, L_1; K) = \bigcup_{x, y \in L \cap L_1} \mathcal{M}_{J_0}(x, y; K).$$

Il existe un ensemble dense de structures régulières de $\mathcal{J}_c(M, \omega)$ que l'on note $\mathcal{J}(L, L_1)$ i.e pour tout $J_0 \in \mathcal{J}(L, L_1)$, l'opérateur linéarisé de Cauchy-Riemann $D\bar{\partial}_{J_0}(u)$ est surjectif pour tout $u \in \mathcal{M}_{J_0}(x, y; K)$. En particulier, telle que pour tout $J_0 \in \mathcal{J}(L, L_1)$, l'espace $\mathcal{M}_{J_0}(x, y; K)$ est une variété lisse dont la dimension est donnée par l'indice de Maslov-Viterbo $\mu_u(x, y)$ en un point $u \in \mathcal{M}_{J_0}(x, y; K)$.

Soit $\mathcal{L}_{J_0}(x, y; K)$, l'espace défini par l'action de $\mathbf{R}$ sur $\mathcal{M}_{J_0}(x, y; K)$:

$$\mathcal{L}_{J_0}(x, y; K) = \mathcal{M}_{J_0}(x, y; K) / \mathbf{R}.$$

On note $\mathcal{M}_{J_0}^k(x, y; K)$ et $\mathcal{L}_{J_0}^k(x, y; K)$, les composantes de dimension k de $\mathcal{M}_{J_0}(x, y; K)$ et $\mathcal{L}_{J_0}(x, y; K)$ respectivement.

Le complexe de Floer Lagrangien est défini par :

$$CF(L, L_1; J_0, K) = (\mathbf{Z}_2 \langle \text{Crit}(f) \rangle, d^L),$$

avec pour tout $x \in L \cap L_1$:

$$d(x) = \sum_{y \in L \cap L_1} \#_2 \mathcal{L}_{J_0}^0(x, y; K) \cdot y.$$

Complexe de Floer pour l'équation de Floer

Pour la version alternative du complexe de Floer, on considère le sous-espace des trajectoires de $\mathcal{M}(H, J_0)$ (défini au paragraphe 2.1.2) dont l'énergie est bornée par K :

$$\mathcal{M}(H, J_0; K) = \{\hat{u} \in \mathcal{M}(H, J_0) \mid E(\hat{u}) < K\},$$

et pour tous points critiques x et y de f :

$$\mathcal{M}_{J_0}(x, y; H, K) = \left\{ u \in \mathcal{M}_{J_0}(H, J_0; K) \mid \begin{array}{l} \lim_{-\infty} \hat{u}(s, \cdot) = x \\ \lim_{+\infty} \hat{u}(s, \cdot) = y \end{array} \right\}.$$

La proposition 2.8 s'applique dans le cas presque monotone, en effet la preuve présentée au chapitre 9 de [4], est valable pour des sous-variétés Lagrangiennes quelconques, d'où :

Proposition 4.9. *Pour tous $x, y \in \text{Crit}(f)$, on a :*

$$\mathcal{M}(H, J_0; K) = \bigcup_{x, y \in \text{Crit}(f)} \mathcal{M}_{J_0}(x, y; H, K).$$

Si $J_0 \in \mathcal{J}_c(M, \omega)$ est une structure presque complexe régulière, l'espace $\mathcal{M}_{J_0}(x, y; K)$ est une variété lisse.

Soit $\mathcal{L}_{J_0}(x, y; H, K)$, l'espace défini par l'action de $\mathbf{R}$ sur $\mathcal{M}_{J_0}(x, y; H, K)$:

$$\mathcal{L}_{J_0}(x, y; H, K) = \mathcal{M}_{J_0}(x, y; H, K) / \mathbf{R}.$$

On note $\mathcal{M}_{J_0}^k(x, y; H, K)$, et $\mathcal{L}_{J_0}^k(x, y; H, K)$, les composantes de dimension k de $\mathcal{M}_{J_0}(x, y; H, K)$ et $\mathcal{L}_{J_0}(x, y; H, K)$ respectivement.

Une version alternative du complexe de Floer est donnée par :

$$CF(H, J_0, K) = (\mathbf{Z}_2 \langle \text{Crit}(f) \rangle, d^H),$$

avec pour tout $x \in \text{Crit}(f)$:

$$d^H(x) = \sum_{y \in \text{Crit}(f)} \#_2 \mathcal{L}_{J_0}^0(x, y; H, K) \cdot y.$$

La proposition 2.10 s'applique également dans notre cas, en effet la preuve repose sur un calcul qui ne dépend pas des propriétés de la sous-variété Lagrangienne considérée. On a donc :

Proposition 4.10. *Soit $J \in \mathcal{J}_c(M, \omega)$ une structure presque complexe et H une fonction Hamiltonienne sur M définissant le flot (ϕ_t^H) . L'application*

$$\hat{u}(s, t) \mapsto u(s, t) = \phi_t^H(\hat{u}(s, t)),$$

conserve l'énergie, i.e $E(\hat{u}) = E(u)$. De plus, elle définit une bijection entre $\mathcal{M}(H, J_0)$ et $\mathcal{M}_{J'_0}(L, L_1)$, où $J'_0 = (\phi_t^H)_ J_0 (\phi_t^H)^{-1}$. En particulier, elle définit une bijection entre $\mathcal{M}_{J_0}(x, y; H, K)$ et $\mathcal{M}_{J'_0}(x, y; K)$, pour tous $x, y \in L \cap \phi_1^H(L)$.*

Remarque 4.11. Comme nous l'avons indiqué en introduction du Chapitre 4, les structures presque complexes peuvent dépendre du temps, mais on l'omet dans la notation.

Dans la suite de cette partie, on montre que $CF(H, J_0 : K)$ et $CF(L, L_1; J'_0, K)$ sont des complexes. On en déduit alors immédiatement le corollaire suivant :

Corollaire 4.12. *L'application $x \mapsto \phi_t^H(x)$ définit un isomorphisme de complexes entre $CF(H, J_0 : K)$ et $CF(L, L_1; J'_0, K)$.*

Ces complexes définissent donc la même homologie. On pourra donc, comme dans le cas monotone, utiliser alternativement l'un ou l'autre de ces complexes.

Indice de Maslov-Viterbo

Soit u une bande J_0 -holomorphe de $\mathcal{M}_{J_0}(x, y; K)$. Si u reste dans le voisinage $U(L)$, son indice de Maslov-Viterbo est $\mu_u(x, y) = \text{ind}(x) - \text{ind}(y)$ (proposition 5, [41]) et son aire symplectique est $\omega(u) = f(y) - f(x)$ (lemme 4.2, [39]).

Si u sort de $U(L)$, on considère la bande c_u appartenant à $\phi_t(L) = \{(q, td_q f) \mid q \in L\} \subset T^*L$, $t \in [0, 1]$, dont le bord est défini par $u(\cdot, 1)$ et $\phi_1^{-1}(u(\cdot, 1))$. En collant les bandes u et c_u , on obtient un disque D_u à bord sur L . Ce disque vérifie la proposition suivante :

Proposition 4.13. *Pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit et pour toute constante $K > 0$, il existe un voisinage $\mathcal{V}(L_0; J_0, \varepsilon, K)$ de L_0 tel que pour tout $L \in \mathcal{V}(L_0; J_0, \varepsilon, K)$, il existe une fonction de Morse $f : L \rightarrow \mathbf{R}$ vérifiant les hypothèses suivantes :*

- a. $\phi_t(L) = \{(q, td_q f) \mid q \in L\} \subset T^*L$, $t \in [0, 1]$, reste dans un voisinage de Weinstein $U(L)$ de L ;
- b. $\sup_{C^0} |f| < \frac{\varepsilon}{4}$,

et telle que pour tous $x, y \in \text{Crit}(f)$, toute bande J_0 -holomorphe $u \in \mathcal{M}_{J_0}(x, y; K)$, sortant du voisinage de Weinstein $U(L)$, le disque $D_u : (D, \partial D) \rightarrow (M, L)$, obtenu en collant les bandes u et c_u , vérifie :

$$\begin{cases} \omega(D_u) > 0 \\ \mu(D_u) \geq 2 \end{cases},$$

Démonstration. **1.** $\omega(D_u) > 0$. Par définition de D_u , on a :

$$\omega(D_u) = \omega(u) + \omega(c_u), \tag{4.6}$$

avec $\omega(c_u) = f(y) - f(x)$. Dans la proposition 4.1 de [39], Y-G. Oh donne une minoration uniforme strictement positive de l'aire symplectique des bandes pseudo-holomorphes sortant du voisinage de Weinstein de L . Ce résultat est vrai dans le cas général où L est une sous-variété Lagrangienne compacte, non nécessairement monotone. Il est donc applicable dans notre cas. Notons $m_L > 0$ le minorant, on peut choisir au départ la constante ε suffisamment petite telle que

$$|\omega(c_u)| < 2 \sup f < \frac{\varepsilon}{2} < m_L.$$

De l'égalité 4.6, on déduit alors que $\omega(D_u) > 0$.

2. $\mu(D_u) \geq 2$. On raisonne par l'absurde : supposons qu'il existe des constantes $\varepsilon > 0$, et $K > 0$, telles que pour tout voisinage $\mathcal{V}(L_0)$ de L_0 , il existe $L_\alpha \in \mathcal{V}(L_0)$ telle que pour toute fonction de Morse f sur L_α vérifiant les hypothèses *a.* et *b.* de la proposition 4.13, il existe $x, y \in \text{Crit}(f)$ et $u \in \mathcal{M}_{J_0}(x, y; K)$ sortant de $U(L_\alpha)$ telles que :

$$\mu(D_u) < 2.$$

Il existe donc une suite de plongements $i_{\alpha_n} : L_{\alpha_n} \rightarrow M$ convergeant vers $i_0 : L_0 \rightarrow M$, une suite de fonctions de Morse f_n convergeant vers 0 et une suite de bandes J_0 -holomorphes $u_n \in \mathcal{M}_{J_0}(x_n, y_n; K)$ sortant des voisinages de Weinstein $U(L_{\alpha_n})$, donc non-constants, telles que $\mu(D_{u_n}) < 2$. On considère une suite de fonctions Hamiltoniennes $H_n : M \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ convergeant vers 0, telle que pour tout n , le flot Hamiltonien correspondant à H_n prolonge l'isotopie Lagrangienne définie par df_n . Pour tout n , u_n s'identifie par la proposition 4.10 à un disque de Floer, $\hat{u}_n$, appartenant à l'espace $\mathcal{M}_{J_0}(x_n, y_n; H_n, K)$. On a $\hat{u}_n(s, t) = \phi_t^{-1}(u_n(s, t))$, donc en particulier, $u(\cdot, 0) = \hat{u}_n(\cdot, 0)$. Par définition de la bande c_{u_n} , on a

$$c_{u_n}(\cdot, 0) = \phi_1^{-1}(u_n(\cdot, 1)) = \hat{u}_n(\cdot, 1).$$

On en déduit que les disques D_{u_n} et $\hat{u}_n$ ont le même bord. Ils sont même homotopes. En effet, on définit une homotopie entre ces deux disques comme suit :

$$\forall \lambda \in [0, 1], \quad \mathbf{D}_\lambda : (s, t) \mapsto u_{n,\lambda}(s, t) \cup c_{n,\lambda},$$

où $u_{n,\lambda}(s, t) = \phi_{\lambda t}^{-1}(u_n(s, t))$ et $c_{n,\lambda}$ est la bande appartenant à $(\phi_t(L))_{t \in [0, 1]} \subset T^*L$, dont le bord est défini par $u_{n,\lambda}(\cdot, 1)$ et $\phi_1^{-1}(u_{n,\lambda}(\cdot, 1))$.

Ces disques ont donc le même indice de Maslov, $\mu(\hat{u}_n) = \mu(D_{u_n}) < 2$. Quitte à prendre une sous-suite, on peut supposer qu'il existe un entier $I < 2$ tel que $\mu(\hat{u}_n) \leq I$ pour tout n .

Les éléments de la suite $(\hat{u}_n)_n$ sont des disques de Floer non-constants, d'énergie uniformément bornée, d'indice de Maslov majoré par I et dont la suite de fonctions Hamiltoniennes correspondante tend vers 0. Par la remarque 4.5, la proposition 4.4 s'applique dans ce cas. Il existe donc une courbe stable formée de disques J_0 -holomorphes $v_1, \dots, v_r$ à bord dans L_0 , dont on peut supposer (sans perte de généralités) qu'au moins un est non-constant, et de sphères J_0 -holomorphes $w_1, \dots, w_s$ telle que :

$$\sum_i \mu(v_i) + \sum_j 2I_{c_1}(w_j) \leq I < 2.$$

On a $\sum_i \omega(v_i) = \sum_i E(v_i) > 0$, car au moins l'un des disques J_0 -holomorphes $v_1, \dots, v_r$ est non-constant. Comme L_0 est monotone et $N_{L_0} \geq 2$, on a $\sum_i \mu(v_i) \geq 2$. D'autre part, $\sum_j \omega(w_j) = \sum_j E(w_j) \geq 0$, donc $\sum_j 2I_{c_1}(w_j) \geq 0$ par la propriété de monotonie de M . Finalement on a :

$$\sum_i \mu(v_i) + \sum_j 2I_{c_1}(w_j) \geq 2.$$

On aboutit à une contradiction. □

On peut exprimer l'indice de Maslov-Viterbo de u :

$$\mu_u(x, y) = \mu(D_u) - \mu_{c_u}(x, y).$$

L'indice de Maslov de D_u est un multiple strictement positif de N_L , d'après la proposition 4.13. Comme c_u est contenue dans $U(L)$, on a $\mu_{c_u}(x, y) = \text{ind}(x) - \text{ind}(y)$, d'après le résultat de [41] cité ci dessus. Par conséquent :

$$\mu_u(x, y) = kN_L - (\text{ind}(x) - \text{ind}(y)),$$

avec $k \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$.

Propriété de "presque monotonie" de D_u

Le disque D_u , bien qu'il ne soit pas forcément J_0 -holomorphe, satisfait une propriété de "presque monotonie" semblable au lemme 4.7 de F.Ngô :

Lemme 4.14. *Pour tous $\varepsilon > 0$ assez petit et $K > 0$, il existe un voisinage $\mathcal{V}(L_0; J_0, \varepsilon, K)$ de L_0 , tel que pour tout $L \in \mathcal{V}(L_0; J_0, \varepsilon, K)$, il existe une fonction de Morse $f : L \rightarrow \mathbf{R}$ vérifiant les hypothèses suivantes :*

- a. $\phi_t(L) = \{(q, td_q f) \mid q \in L\} \subset T^*L$, $t \in [0, 1]$, reste dans un voisinage de Weinstein $U(L)$ de L ;*
- b. $\sup_{C^0} |f| < \frac{\varepsilon}{4}$,*

et telle pour toute bande J_0 -holomorphe $u \in \mathcal{M}_{J_0}^k(x, y; K)$ (pour un certain $k \geq 0$), sortant du voisinage de Weinstein $U(L)$, le disque $D_u : (D, \partial D) \rightarrow (M, L)$, obtenu en collant les bandes u et c_u , vérifie :

$$|\omega(D_u) - \eta\mu(D_u)| < \varepsilon.$$

Démonstration. On raisonne par l'absurde : supposons qu'il existe des constantes $\varepsilon > 0$, et $K > 0$, telles que pour tout voisinage $\mathcal{V}(L_0)$ de L_0 , il existe $L_\alpha \in \mathcal{V}(L_0)$ telle que pour toute fonction de Morse f sur L_α vérifiant les hypothèses *a.* et *b.* de la proposition 4.13, il existe $x, y \in \text{Crit}(f)$ et $u \in \mathcal{M}_{J_0}^k(x, y; K)$ sortant de $U(L_\alpha)$ telles que :

$$|\omega(D_u) - \eta\mu(D_u)| \geq \varepsilon.$$

Il existe donc une suite de plongements $i_{\alpha_n} : L_{\alpha_n} \rightarrow M$ convergeant vers $i_0 : L_0 \rightarrow M$, une suite de fonctions de Morse f_n convergeant vers 0 et une suite de bandes J_0 -holomorphes $u_n \in \mathcal{M}_{J_0}^k(x_n, y_n; K)$ sortant du voisinage de Weinstein $U(L_{\alpha_n})$, donc non-constantes, telles que :

$$|\omega(D_{u_n}) - \eta\mu(D_{u_n})| \geq \varepsilon.$$

Pour tout n , u_n s'identifie par la proposition 4.10 à un disque de Floer $\hat{u}_n$ appartenant à l'espace $\mathcal{M}_{J_0}(x_n, y_n; H_n, K)$, tel que $E(\hat{u}_n) = E(u_n)$. On a donc :

$$\begin{aligned} E(\hat{u}_n) &= \omega(u_n) \\ &= \omega(D_{u_n}) - \omega(c_{u_n}). \end{aligned}$$

Comme expliqué dans la démonstration de la proposition 4.13, les disques D_{u_n} et $\hat{u}_n$ ont le même indice de Maslov :

$$\mu(\hat{u}_n) = \mu(D_{u_n}) = \mu_{u_n}(x, y) + \text{ind}(y) - \text{ind}(x).$$

La bande u_n appartient à $\mathcal{M}_{J_0}^k(x_n, y_n; K)$, on a donc $\mu_u(x, y) = k$, d'où :

$$0 < \mu(\hat{u}_n) \leq k + n + 1.$$

L'indice de Maslov des disques $\hat{u}_n$ est bornée, on peut donc, quitte à prendre une sous-suite, supposer que cet indice est constant égal à I . De plus, pour tout n , on a :

$$\begin{aligned} |E(\hat{u}_n) - \eta\mu(\hat{u}_n)| &= |\omega(D_{u_n}) - \eta\mu(D_{u_n}) - \omega(c_{u_n})| \\ &\geq |\omega(D_{u_n}) - \eta\mu(D_{u_n})| - |\omega(c_{u_n})| \\ &\geq \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

D'où,

$$|\limsup_{n \rightarrow \infty} E(\hat{u}_n) - \eta I| \geq \frac{\varepsilon}{2} > 0$$

Les éléments de la suite $(\hat{u}_n)_n$ sont des disques de Floer non-constants, d'énergie uniformément bornée par K , d'indice de Maslov constant égal à I et dont la suite de fonctions Hamiltoniennes correspondante tend vers 0. Par la remarque 4.5, la proposition 4.4 s'applique dans ce cas. Il existe donc une courbe stable formée de disques J_0 -holomorphes $v_1, \dots, v_r$ à bord dans L_0 , dont on peut supposer (sans perte de généralités) qu'au moins un est non-constant, et de sphères J_0 -holomorphes $w_1, \dots, w_s$ telle que :

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} E(\hat{u}_n) = \sum_i E(v_i) + \sum_j E(w_j),$$

et :

$$I = \sum_i \mu(v_i) + \sum_j 2I_{c_1}(w_j).$$

Les courbes $v_1, \dots, v_r$ et $w_1, \dots, w_s$ sont J_0 -holomorphes donc leur énergie et aire symplectique sont confondues et comme M et L_0 sont monotones on obtient :

$$\begin{aligned} |\limsup_{n \rightarrow \infty} E(\hat{u}_n) - \eta I| &= |\sum_i E(v_i) + \sum_j E(w_j) - \eta I| \\ &= 0. \end{aligned}$$

On aboutit à une contradiction. □

Remarque 4.15. On considère un voisinage $\mathcal{W}(L_0; J_0, \varepsilon, K)$ de L_0 , inclus dans l'intersection de voisinages suivants :

$$\mathcal{N}(L_0; J_0, K) \cap \mathcal{U}(L_0; \varepsilon, K) \cap \mathcal{V}(L_0; J_0, \varepsilon, K),$$

où

- $\mathcal{N}(L_0; J_0, K)$ est le voisinage apparaissant dans le lemme 4.6,
- $\mathcal{U}(L_0; \varepsilon, K)$ est le voisinage apparaissant dans la proposition 4.7,
- $\mathcal{V}(L_0; J_0, \varepsilon, K)$ est le voisinage apparaissant dans le lemme 4.14.

Dans la démonstration de la proposition 4.14, on a montré comme étape intermédiaire le lemme suivant :

Lemme 4.16. *Si L appartient au voisinage défini à la proposition 4.14, alors pour tous $x, y \in \text{Crit}(f)$ et tout disque de Floer $\hat{u} \in \mathcal{M}_{J_0}(x, y; H, K)$ on a :*

$$|E(\hat{u}) - \eta\mu(\hat{u})| < \varepsilon.$$

Ce lemme sera utile dans la démonstration de l'invariance à la section 4.3.

4.2.2 Preuve de l'identité $d \circ d = 0$

Théorème 4.17 (Ngô - théorème 6.1.1 [33]). *Soit $L_0 \hookrightarrow (M, \omega)$ une sous-variété Lagrangienne monotone. On note $\eta > 0$ sa constante de monotonie. Pour toute structure presque complexe régulière $J_0 \in \mathcal{J}_{c, \text{reg}}(M, \omega)$, pour tous $\varepsilon > 0$ assez petit et $K > 2\eta(n+1) + 3\varepsilon$, il existe un voisinage $\mathcal{W}(L_0; J_0, \varepsilon, K)$ de L_0 tel que :*

$$d \circ d = 0,$$

où d est la différentielle du complexe $CF(L, L_1; J_0, K)$.

Démonstration. Soit L une sous-variété Lagrangienne presque monotone appartenant au voisinage $\mathcal{W}(L_0; J_0, \varepsilon, K)$, défini dans la remarque 4.15.

Pour prouver que $d^2 = 0$, il y a trois étapes :

- Compacité de l'espace $\mathcal{L}_J^0(x, y; K)$.
- Compactification de la composante de dimension 1 de $\mathcal{L}_{J_0}^1(x, y; K)$, notée $\bar{\mathcal{L}}_{J_0}^1(x, y; K)$.
- Recollement.

Pour les deux premières étapes, on reprend la preuve de Y-G. Oh dans [36] et [38], en insistant sur les points où la monotonie est utilisée, et alors on va adapter ses arguments dans notre cas.

On va donc s'intéresser au comportement d'une suite dans les espaces $\mathcal{L}_J^0(x, y; K)$ et $\mathcal{L}_{J_0}^1(x, y; K)$. Si tous les éléments d'une telle suite ont une énergie strictement inférieure à K , ce n'est, a priori, pas le cas pour sa limite (à sous-suite près). En effet, à la limite, la borne K pourrait être atteinte. Néanmoins, pour les espaces considérés, l'indice de Maslov-Viterbo de leurs éléments est borné, ce qui permet la conservation de l'inégalité stricte. On a alors le résultat suivant :

Lemme 4.18. *Si u est un élément de $\mathcal{L}_J^0(x, y)$ ou $\mathcal{L}_{J_0}^1(x, y)$, alors $E(u) < K$.*

Démonstration. Soient $u \in \mathcal{L}_{J_0}^1(x, y)$ et D_u le disque à bord sur L correspondant. Par le lemme 4.14 on a :

$$|\omega(D_u) - \eta\mu(D_u)| < \varepsilon.$$

De plus,

$$\begin{aligned} \mu(D_u) &= \mu_u(x, y) + \text{ind}(x) - \text{ind}(y) \\ &\leq 1 + n. \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} E(u) = \omega(u) &= \omega(D_u) - \omega(c_u) \\ &< \eta\mu(D_u) + \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \eta(n+1) + \frac{3\varepsilon}{2} \\ &< K. \end{aligned}$$

On obtient par le même raisonnement que tout élément u de $\mathcal{L}_{J_0}^0(x, y)$ satisfait $E(u) < K$. $\square$

Par ce lemme, la condition $E(u) < K$ des bandes pseudo-holomorphes considérées est donc automatique.

Compacité

La proposition 3.7 de [36], qui décrit le comportement des suites dans les espaces de trajectoires $\mathcal{M}_{J_0}(x, y; K)$, est également vraie pour des sous-variétés Lagrangiennes non monotones, on a donc :

Proposition 4.19. *Pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de $\mathcal{M}_{J_0}(x, y; K)$, d'indice de Maslov-Viterbo I constant, il existe une sous-suite de $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ convergeant vers une application $(\underline{u}, \underline{v}, \underline{w})$ où $\underline{u}$ est une trajectoire brisée avec k composantes, pour un certain $k \geq 0$, $\underline{v}$ est une collection de disques J_0 -holomorphes à bord sur L ou L_1 , et $\underline{w}$ est une collection de sphères J_0 -holomorphes, vérifiant :*

$$I = \sum_{i=1}^k \text{indice}(u^i) + \sum_j \mu(v^j) + 2 \sum_{\ell} I_{c_1}(w^\ell) \quad (4.7)$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \omega(u_n) = \sum_i \omega(u^i) + \sum_j \omega(v^j) + \sum_{\ell} \omega(w^\ell) \quad (4.8)$$

Dans le cas où la structure presque complexe J_0 dépend du temps, notons la $J_0(t)$, les éléments limites qui apparaissent dans cette proposition sont pseudoholomorphes pour un certain $J_0(t)$ à t fixé. Par abus de notation on note la structure simplement J_0 .

Remarque 4.20. Faisons quelques remarques sur les termes apparaissant dans l'équation (4.7). Tout d'abord, pour $\underline{w} \neq \emptyset$, la variété M étant monotone, on a $I_{c_1}(w^\ell) > 0$ pour tout ℓ donc :

$$2 \sum_{\ell} I_{c_1}(w^\ell) \geq 2. \quad (4.9)$$

Deuxièmement, pour $\underline{v} \neq \emptyset$, l'équation (4.8) nous donne l'inégalité $\sum_j \omega(v^j) < K$, donc par le lemme 4.6 :

$$\sum_j \mu(v^j) \geq 2. \quad (4.10)$$

Compacité de l'espace $\mathcal{L}_{J_0}^0(x, y; K)$.

Proposition 4.21. *Pour tous points critiques x et y de f , l'espace $\mathcal{L}_{J_0}^0(x, y; K)$ est une variété compacte de dimension 0.*

Démonstration de la proposition 4.21. On considère une suite de bandes J_0 -holomorphes $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ dans $\mathcal{M}_{J_0}^1(x, y)$, d'indice constant $I = 1$.

Si $x \neq y$, la trajectoire brisée $\underline{u}$ ne peut pas être vide. De plus, les équations (4.9) et (4.10) impliquent que $\underline{v}$ et $\underline{w}$ sont vides, sinon on aurait $I \geq 3$ ce qui est impossible. Si $x = y$, il est possible que $\underline{u} = \emptyset$. Mais si $\underline{v}$ ou $\underline{w}$ sont non-vides, on obtient $I \geq 2$, contradiction. Par conséquent, $\underline{u} \neq \emptyset$, $\underline{v} = \emptyset$ et $\underline{w} = \emptyset$. De plus, comme $I = 1$ il ne peut y avoir de brisure. $\square$

Compacité de l'espace $\bar{\mathcal{L}}_{J_0}^1(x, y; K)$. On considère une suite de bandes J_0 -holomorphes $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ dans $\mathcal{M}_{J_0}^2(x, y; K)$, d'indice constant $I = 2$.

Si $x \neq y$, on utilise le même argument que le paragraphe précédent.

Si $x = y$ il existe plusieurs sous-cas :

$$\underline{u} = \emptyset, \quad \underline{v} = \emptyset, \quad \underline{w} = \{w\} \text{ avec } I_{c_1}(w) = 1.$$

Cette possibilité est exclue, et l'argument utilisé par Y-G. Oh (p.971 de [36]) ne fait pas intervenir la monotonie. On suit donc sa démonstration. On considère l'ensemble des familles de sphères J_0 -holomorphes paramétrées dont la première classe de Chern est égale à 1 :

$$\mathcal{M}(\mathbf{S}^2, J_0, 1) = \{w : \mathbf{S}^2 \rightarrow M \mid \partial_{J_0} w = 0 ; I_{c_1}(w) = 1\}.$$

Pour un choix de J_0 régulière, $\mathcal{M}(\mathbf{S}^2, J_0, 1)$ est une variété de dimension $2n + 2$ (théorème 1.3.2 de [32]).

On considère l'image de l'application d'évaluation :

$$\begin{aligned} \text{ev} : \mathcal{M}(\mathbf{S}^2, J_0, 1) \times \mathbf{S}^2 / PSL(2, \mathbf{C}) &\rightarrow M \\ (w, z) &\mapsto w(z) \end{aligned}$$

où l'action de reparamétrisation par le groupe $PSL(2, \mathbf{C})$ est $(w \circ \psi^{-1}, \psi(z))$. On a

$$\dim(\mathcal{M}(\mathbf{S}^2, J_0, 1) \times \mathbf{S}^2 / PSL(2, \mathbf{C}) = 2n - 2.$$

Or $\dim M = 2n$, par conséquent pour un choix générique d'un point $x \in M$, l'intersection $ev^{-1}(x) \cap \mathcal{M}(\mathbf{S}^2, J_0, 1) \times \mathbf{S}^2 / PSL(2, \mathbf{C})$ est vide. Il ne passe donc aucune sphère J_0 -holomorphe par le point x .

$$\underline{u} = \emptyset, \quad \underline{v} = \{v\} \text{ avec } \mu(v) = 2, \quad \underline{w} = \emptyset.$$

Pour $N_L \geq 3$, ce cas est impossible.

Pour $N_L = 2$, ce cas ne peut pas être exclu. Le cas $N_L = 2$ sera traité à part et plus en détail par la suite.

Recollement

Dans cette étape, on montre que pour toutes bandes J_0 -holomorphes $u \in \mathcal{L}_{J_0}^0(x, z; K)$ et $v \in \mathcal{L}_{J_0}^0(z, y; K)$, la trajectoire brisée correspondante, $u \# v$, appartient au bord de $\bar{\mathcal{L}}_{J_0}^1(x, y; K)$, i.e elle correspond à l'extrémité d'un chemin de $\mathcal{L}_{J_0}^1(x, y; K)$. En ne tenant pas compte de la contrainte sur l'énergie, l'existence de ce chemin résulte de la proposition 4.1 de [22]. Même si les éléments de $\mathcal{L}_{J_0}^1(x, y; K)$ ont, par le lemme 4.18, automatiquement une aire symplectique strictement inférieure à K , cela n'est pas forcément vrai pour $u \# v$. On doit donc s'assurer que $\omega(u \# v) < K$. Pour cela, on adapte l'argument utilisé par F.Ngô dans [33].

Tout d'abord, par définition du voisinage $\mathcal{W}(L_0; J_0, \varepsilon, K)$, (remarque 4.15) auquel appartient L , si u et v sortent du voisinage de Weinstein $U(L)$, les disques correspondants, respectivement D_u et D_v , satisfont le lemme 4.14, i.e :

$$|\omega(D_u) - \eta\mu(D_u)| < \varepsilon,$$

et

$$|\omega(D_v) - \eta\mu(D_v)| < \varepsilon.$$

Par ailleurs, on a :

$$\begin{aligned} \mu(D_u) &= \mu_u(x, z) + \text{ind}(x) - \text{ind}(z) \\ &= 1 + \text{ind}(x) - \text{ind}(z) \\ &\leq 1 + n. \end{aligned}$$

De même, $\mu(D_v) \leq 1 + n$. D'où :

$$\begin{aligned} \omega(u \# v) &= \omega(u) + \omega(v) \\ &= \omega(D_u) + \omega(D_v) - \omega(c_u) - \omega(c_v) \\ &< \eta\mu(D_u) + \varepsilon + \eta\mu(D_v) + \varepsilon + 2\frac{\varepsilon}{2} \\ &< 2\eta(n+1) + 2\varepsilon + \varepsilon \\ &= 2\eta(n+1) + 3\varepsilon \\ &< K. \end{aligned}$$

Si l'une ou les deux bandes J_0 -holomorphes u et v restent dans $U(L)$, alors, $\omega(D_u) = 0$ et/ou $\omega(D_v) = 0$, et l'inégalité précédente reste vraie.

Le cas $N_L = 2$

Pour $N_L = 2$, si $x \neq y$, les étapes précédentes de compacité et de recollement sont vraies. Le problème se pose lorsque $x = y$. En effet, il y a dans ce cas un défaut de compacité de l'espace $\bar{\mathcal{L}}_{J_0}^1(x, x; K)$, lié à l'apparition possible de disques J_0 -holomorphes à bord sur L ou L_1 et d'indice de Maslov 2. Intéressons-nous d'un peu plus près à ces disques. On suit ici l'argument de [15]. Considérons l'espace :

$$\mathcal{P}_{L, J_0, K}^2 = \left\{ v : (D, \partial D) \rightarrow (M, L) \mid \begin{array}{l} \bar{\partial}_J v = 0 \\ \mu(v) = 2 \\ \omega(v) < K \end{array} \right\}.$$

Par les résultats de transversalité du chapitre 3 de [32], $\mathcal{P}_{L, J_0}^2$ est une variété de dimension $n + 2$, à condition que tout disque $v \in \mathcal{P}_{L, J_0, K}^2$ soit simple, i.e tel que l'ensemble des $z \in D$ satisfaisant :

$$dv(z) \neq 0, \quad v^{-1}(v(z)) = \{z\}.$$

est dense. Ceci est garanti par le théorème de décomposition de Lazzarini [29] combiné au lemme 4.6. En effet, étant donné un disque $v \in \mathcal{P}_{L, J_0, K}^2$, par le théorème de décomposition de Lazzarini, v peut s'écrire comme une combinaison linéaire de disques J_0 -holomorphes simples à bord sur L . Par le lemme 4.6, ces disques ont tous un indice de Maslov supérieur ou égal à 2. Or, $\mu(v) = 2$. Cette combinaison linéaire est donc réduite à un seul disque égal à v , d'où v est simple.

Par ailleurs, le lemme 4.6 garantit la compacité de $\mathcal{P}_{L, J_0, K}^2$. Donc, la pré-image, par l'application d'évaluation

$$\text{ev} : \mathcal{P}_{L, J_0, K}^2 \times \mathbf{S}^1 / PSL(2, \mathbf{R}) \rightarrow L,$$

d'un élément $x \in L$, correspond à l'ensemble des disques J_0 -holomorphes non paramétrés à bord sur L et d'indice de Maslov égal à 2. La variété $\mathcal{P}_{L, J_0, K}^2 \times \mathbf{S}^1 / PSL(2, \mathbf{R})$ est de dimension n , donc pour un choix générique de x , $\text{ev}^{-1}(x)$ est fini et son cardinal mod 2 ne dépend pas de x . Suivant la notation de [38], on note ce nombre $\Phi_L^2 \in \mathbf{Z}_2$.

L'autre espace de disques à considérer est :

$$\mathcal{P}_{L_1, J_0, K}^2 = \left\{ v : (D, \partial D) \rightarrow (M, L_1) \mid \begin{array}{l} \bar{\partial}_J v = 0 \\ \mu(v) = 2 \\ \omega(v) < K \end{array} \right\}.$$

Comme L_1 est l'image de L par une isotopie Hamiltonienne ϕ , définie au début de la section 4.2.1, il n'est pas difficile de montrer qu'elle induit une bijection entre $\mathcal{P}_{L_1, J_0, K}^2$

et $\mathcal{P}_{L, \phi_*^{-1}J_0, K}^2$. On considère $\mathcal{W}(J_0; \varepsilon, K) \subset \mathcal{J}_{c, reg}(M, \omega)$, un voisinage de J_0 défini tel que pour tout $J \in \mathcal{W}(J_0; \varepsilon, K)$, on a $L \in \mathcal{W}(L_0; J_0, \varepsilon, K)$. On peut choisir f assez petite telle que $\phi_*^{-1}J_0$ reste dans $\mathcal{W}(J_0; \varepsilon, K)$. On peut donc utiliser le raisonnement précédent pour montrer que $\mathcal{P}_{L, \phi_*^{-1}J_0, K}^2$ est une variété compacte de dimension $n+2$. De plus, pour un choix générique de x , sa pré-image par l'application d'évaluation :

$$\text{ev}_1 : \mathcal{P}_{L, \phi_*^{-1}J_0, K}^2 \times \mathbf{S}^1 / PSL(2, \mathbf{R}) \rightarrow L,$$

est finie et son cardinal mod 2 ne dépend pas de x , on note ce nombre $\Phi_{L_1}^2 \in \mathbf{Z}_2$. Soit $\mathcal{J}_{reg}(J_0, \phi_*^{-1}J_0)$ l'espace des homotopies lisses de structures presque complexes régulières reliant J_0 à $\phi_*^{-1}J_0$. On définit

$$\mathcal{W}_{\varepsilon, K}(J_0; J_0, \phi_*^{-1}J_0) = \mathcal{W}(J_0; \varepsilon, K) \cap \mathcal{J}_{reg}(J_0, \phi_*^{-1}J_0).$$

Soit $\{J^\lambda\}_{\lambda \in [0,1]}$ une homotopie dans $\mathcal{W}_{\varepsilon, K}(J_0; J_0, \phi_*^{-1}J_0)$, on considère l'espace

$$\mathcal{R}_{L, \{J^\lambda\}_{\lambda, K}}^2 = \{(\lambda, v, z) \mid 0 \leq \lambda \leq 1, (v, z) \in \mathcal{P}_{L, J^\lambda, K}^2 \times \mathbf{S}^1 / PSL(2, \mathbf{R})\}.$$

Par une preuve similaire à celle du théorème 3.1.8 de [32], cet espace définit un cobordisme entre $\mathcal{P}_{L, J_0, K}^2 \times \mathbf{S}^1 / PSL(2, \mathbf{R})$ et $\mathcal{P}_{L, \phi_*^{-1}J_0, K}^2 \times \mathbf{S}^1 / PSL(2, \mathbf{R})$, donc de dimension $n+1$. On considère l'application d'évaluation :

$$\begin{aligned} \text{ev}_c : \mathcal{R}_{L, \{J^\lambda\}_{\lambda, K}}^2 &\rightarrow L \\ (\lambda, v, z) &\mapsto v(z) \end{aligned}$$

Puisque ev_c est une application entre une variété de dimension $n+1$ et une variété de dimension n , pour un choix générique de $x \in L$, sa pré-image par ev_c est une variété de dimension 1 à bord. elle définit donc un cobordisme entre les disques passant par x de $\mathcal{P}_{L, J_0, K}^2 \times \mathbf{S}^1 / PSL(2, \mathbf{R})$ et $\mathcal{P}_{L, \phi_*^{-1}J_0, K}^2 \times \mathbf{S}^1 / PSL(2, \mathbf{R})$. On en déduit que le cardinal mod 2 de ces espaces est le même, i.e $\Phi_L^2 = \Phi_{L_1}^2$.

Revenons à la démonstration de $d \circ d = 0$ dans le cas où $N_L = 2$. Nous venons de voir que les disques qui empêchent la compacité de l'espace $\bar{\mathcal{L}}_{J_0}^1(x, x)$, sont en nombre fini. On les rajoute donc à la compactification pour obtenir un espace $\bar{\mathcal{L}}_{J_0}^1(x, x)$ compact. De plus, comme dans le cas monotone([38]), chacun de ces disques est le bord d'un segment dans $\bar{\mathcal{L}}_{J_0}^1(x, x)$. L'expression de $d \circ d$ devient alors :

$$d \circ d(x) = (\Phi_L^2 + \Phi_{L_1}^2) \cdot x.$$

Or $\Phi_L^2 = \Phi_{L_1}^2$, d'où $d \circ d(x) = 0$. □

4.3 Invariance

On a donc prouvé que $d \circ d = 0$ i.e l'homologie du complexe (CF, d) est bien définie, on la note $HF(L; J_0, \varepsilon, K, f)$. Le but de cette partie est de montrer que

cette homologie ne depend pas du choix de la fonction f et du choix d'une structure presque complexe régulière J dans le voisinage $\mathcal{W}(J_0; \varepsilon, K)$ de J_0 . Pour cela on utilise la seconde description du complexe de Floer (CF', d') , on suit la preuve de l'invariance du chapitre 11 de [4] et on l'adapte à notre situation.

Soient f^a et f^b deux fonctions de Morse sur L vérifiant les hypothèses du début de la section 4.2.1. On définit une homotopie lisse F reliant f^a à f^b :

$$\forall s \in \mathbf{R}, \quad F^s = (1 - \alpha(s))f^a + \alpha(s)f^b,$$

où α est une fonction plateau :

$$\alpha(s) = \begin{cases} 0, & \text{si } s \leq 0 \\ 1, & \text{si } s \geq 1 \end{cases}.$$

Soient H^a et H^b deux fonctions Hamiltoniennes sur M dont les flots Hamiltoniens correspondant prolongent les isotopies Lagrangiennes définies par f^a et f^b respectivement. Soit H une homotopie lisse de fonctions Hamiltoniennes sur M de H^a à H^b , telle que pour tout s , l'isotopie Hamiltonienne correspondant à H^s prolonge l'isotopie Lagrangienne définie par F^s . Soient J^a et J^b deux structures presque complexes régulières de $\mathcal{W}(J_0; \varepsilon, K)$ et J une homotopie lisse de $\mathcal{W}_{\varepsilon, K}(J_0; J^a, J^b)$. Plus précisément, $J : \mathbf{R} \rightarrow \text{End}(TM)$ est choisie telle que pour tout $s \in [0, 1]$ on a :

$$\begin{cases} J^s(\cdot) = J^a, & \text{si } s \leq -R \\ J^s(\cdot) = J^b, & \text{si } s \geq R \end{cases},$$

où $R \geq 1$ est une constante arbitraire. On obtient alors une homotopie lisse $\Gamma = (H, J)$ reliant (H^a, J^a) à (H^b, J^b) .

Le but de cette preuve est de construire un morphisme

$$\Phi^\Gamma : CF(H^a, J^a, K) \rightarrow CF(H^b, J^b, K),$$

vérifiant les deux propriétés suivantes :

Propriété 4.22. Si on a deux homotopies Γ_0 et Γ_1 reliant (H^a, J^a) à (H^b, J^b) , alors les morphismes Φ^{Γ_0} et Φ^{Γ_1} coïncident en homologie.

Propriété 4.23. Si on a trois couples (H^a, J^a) , (H^b, J^b) et (H^c, J^c) et Γ , Γ' et Γ'' sont trois homotopies reliant (H^a, J^a) à (H^c, J^c) , (H^a, J^a) à (H^b, J^b) et (H^b, J^b) à (H^c, J^c) respectivement, alors les morphismes $\Phi^{\Gamma''} \circ \Phi^{\Gamma'}$ et Φ^Γ sont homotopes, ils induisent alors le même morphisme en homologie.

En effet, si on applique ces résultats pour $(H^a, J^a) = (H^c, J^c)$ et $\Gamma = Id$, on en déduit que $\Phi^{\Gamma'}$ et $\Phi^{\Gamma''}$ sont des isomorphismes en homologie, inverse l'un de l'autre. La preuve de ces deux propriétés repose, comme dans la construction de l'homologie, sur trois étapes : transversalité, compacité et recollement.

Dans cette partie, nous travaillons avec le complexe de Floer défini à partir de l'équation de Floer (2.5). On notera u les disques de Floer, au lieu de $\hat{u}$, afin d'alléger le texte.

4.3.1 Équation de Floer et espaces des solutions

Étant donnée une homotopie $\Gamma^s = (H^s, J^s)$, on note g^s la métrique $\omega(\cdot, J^s \cdot)$ et on considère l'équation de Floer à paramètres :

$$\frac{\partial u}{\partial s} + J^s \frac{\partial u}{\partial t} - J^s X^s(u) = 0, \quad (4.11)$$

Pour $x \in \text{Crit}(f^a)$ et $y \in \text{Crit}(f^b)$, on définit l'espace des solutions de l'équation (4.11) d'énergie bornée reliant x et y :

$$\mathcal{M}_\Gamma(x, y; K) = \left\{ u : \mathbf{R} \times [0, 1] \rightarrow M \mid \begin{array}{ll} u \text{ satisfait (4.11)} & \lim_{-\infty} u(s, \cdot) = x \\ u(\mathbf{R} \times \{0, 1\}) \subset L & \\ E(u) < K & \lim_{+\infty} u(s, \cdot) = y \end{array} \right\}$$

Proposition 4.24. *Pour tout $x \in \text{Crit}(f^a)$ et $y \in \text{Crit}(f^b)$, l'espace $\mathcal{M}_\Gamma(x, y; K)$ est une variété. De plus, pour $k \in \{0, 1\}$, la composante de dimension k de $\mathcal{M}_\Gamma(x, y; K)$, à laquelle on rajoute les trajectoires brisées pour (H^a, J^a) et (H^b, J^b) , est compacte. Le nombre de ces brisures est borné par k .*

On note $\mathcal{M}_\Gamma^k(x, y; K)$ la composante de dimension k de $\mathcal{M}_\Gamma(x, y; K)$.

Démonstration. Pour tout $x \in \text{Crit}(f^a)$ et $y \in \text{Crit}(f^b)$, le théorème 11.1.7 de [4] sur la transversalité, s'adapte au cas Lagrangien. On en déduit que l'espace $\mathcal{M}_\Gamma(x, y; K)$ est une variété.

L'espace

$$\mathcal{M}_{\Gamma, K}^{0,1} = \bigcup_{\substack{x \in \text{Crit}(f^a), \\ y \in \text{Crit}(f^b)}} \mathcal{M}_\Gamma^0(x, y; K) \cup \mathcal{M}_\Gamma^1(x, y; K),$$

est compact pour la topologie C_{loc}^∞ . La preuve est similaire à celle du théorème 11.1.4 de [4], et repose sur la remarque 4.5 de la proposition 4.4 pour les disques satisfaisant l'équation de Floer à paramètres.

En considérant l'espace $\mathcal{M}_{\Gamma, K}^{0,1}$, on conclut la preuve de la même manière que celles des théorèmes 11.1.10 et 11.1.11 dans [4]. $\square$

4.3.2 Le morphisme Φ^Γ .

On définit Φ^Γ par :

$$\Phi^\Gamma : x \mapsto \sum_{y \in \text{Crit}(f^b)} \#_2 \mathcal{M}_\Gamma^0(x, y; K) \cdot y.$$

Puisque l'espace $\mathcal{M}_\Gamma(x, y; K)$ de dimension 0 est compact, Φ^Γ est bien défini. L'application Φ^Γ est un morphisme de complexes si et seulement si :

$$\Phi^\Gamma \circ d^a + d^b \circ \Phi^\Gamma = 0 \quad (4.12)$$

où d^a et d^b sont les différentielles des complexes $CF(H^a, J^a, K)$ et $CF(H^b, J^b, K)$. On considère l'espace

$$\begin{aligned} \Pi_\Gamma(x, y) = & \bigcup_{z \in \text{Crit}(f^a)} \mathcal{L}_{J^a}^0(x, z; H^a, K) \times \mathcal{M}_\Gamma^0(z, y; K) \\ & \bigcup \\ & \bigcup_{z \in \text{Crit}(f^a)} \mathcal{M}_\Gamma^0(z', y; K) \times \mathcal{L}_{J^b}^0(x, z'; H^b, K) \end{aligned}$$

Il satisfait le lemme suivant :

Lemme 4.25. *Les éléments de $\Pi_\Gamma(x, y)$ sont d'énergie strictement inférieure à K .*

Démonstration. Soit $z \in \text{Crit}(f^b)$. Soient $u \in \mathcal{L}_{J^a}^0(x, z; H^a, K)$ et $v \in \mathcal{M}_\Gamma^0(z, y; K)$. La trajectoire brisée $u \# v$ appartient à $\mathcal{L}_{J^a}^0(x, z; H^a, K) \times \mathcal{M}_\Gamma^0(z, y; K)$. Montrons que $E(u \# v) < K$. Les disques u et v satisfont au lemme 4.16 :

$$|E(u) - \eta\mu(u)| < \varepsilon \quad \text{et} \quad |E(v) - \eta\mu(v)| < \varepsilon.$$

D'autre part :

$$\dim_u \mathcal{L}_{J^a}(x, z; H^a, K) = \mu(u) - \text{ind}_{f^a}(x) + \text{ind}_{f^b}(z) - 1,$$

et

$$\dim_v \mathcal{M}_\Gamma(z, y; K) = \mu(v) - \text{ind}_{f^a}(z) + \text{ind}_{f^b}(y),$$

où les notations $\dim_u$ et $\dim_v$ signifient que l'on considère la dimension de la composante connexe de $\mathcal{L}_{J^a}(x, z; H^a, K)$ et $\mathcal{M}_\Gamma(z, y; K)$ respectivement, qui contient u et v respectivement. D'où :

$$\begin{aligned} \mu(u) &= \dim_u \mathcal{L}_{J^a}^0(x, z; H^a, K) + \text{ind}_{f^a}(x) - \text{ind}_{f^b}(z) \\ &\leq 1 + n \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \mu(v) &= \dim_v \mathcal{M}_\Gamma^0(z, y; K) + \text{ind}_{f^a}(z) - \text{ind}_{f^b}(y) \\ &\leq 0 + n \\ &= n. \end{aligned}$$

On peut maintenant conclure :

$$\begin{aligned} E(u \# v) &= E(u) + E(v) \\ &< \eta\mu(u) + \varepsilon + \eta\mu(v) + \varepsilon \\ &< \eta n + \varepsilon + \eta(n + 1) + \varepsilon \\ &< 2\eta(n + 1) + 2\varepsilon \\ &< K \end{aligned}$$

De la même manière, on montre que $E(u' \# v') < K$ pour $u' \# v'$ appartenant à $\mathcal{M}_\Gamma^0(z', y; K) \times \mathcal{L}_{J^b}^0(x, z'; H^b, K)$. $\square$

La relation (4.12) signifie que pour tous x et y , l'ensemble des trajectoires brisées avec une seule brisure, qui peuvent se former entre x et y , défini par $\Pi^\Gamma(x, y)$, possède un nombre pair d'éléments. C'est la conséquence du

Théorème 4.26. *L'espace*

$$\bar{\mathcal{M}}_\Gamma^1(x, y; K) = \mathcal{M}_\Gamma^1(x, y; K) \cup \Pi_\Gamma(x, y),$$

est une variété compacte de dimension 1 dont le bord est $\Pi_\Gamma(x, y)$.

Démonstration. Tout d'abord, d'après la proposition 4.24, l'espace $\bar{\mathcal{M}}_\Gamma^1(x, y; K)$ est une variété compacte.

Soit $z \in \text{Crit}(f^b)$. Soient $u \in \mathcal{L}_{J^a}^0(x, z; H^a, K)$ et $v \in \mathcal{M}_\Gamma^0(z, y; K)$. La trajectoire brisée $u \# v$ appartient à $\mathcal{L}_{J^a}^0(x, z; H^a, K) \times \mathcal{M}_\Gamma^0(z, y; K)$. Le théorème de recollement 11.1.6 de [4] garantit l'existence d'un chemin dans $\mathcal{M}_\Gamma^1(x, y; K)$ dont l'une des extrémités est $u \# v$. L'énergie de $u \# v$ est strictement inférieure à K par le lemme 4.25. Le raisonnement est analogue pour une trajectoire brisée $u' \# v'$ appartenant à $\mathcal{M}_\Gamma^0(z', y; K) \times \mathcal{L}_{J^b}^0(x, z'; H^b, K)$. $\square$

Remarque 4.27. Si $(H^a, J^a) = (H^b, J^b)$ et $\Gamma = Id$, on a :

$$\mathcal{M}_\Gamma^0(x, y; K) = \mathcal{M}_{J^a}^0(x, y; H^a, K).$$

De plus :

$$\mathcal{M}_{J^a}^0(x, y; H^a, K) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } x \neq y \\ \{x\} & \text{si } x = y \end{cases},$$

d'où $\Phi^\Gamma = Id$.

4.3.3 Preuve de la Propriété 4.22

Étant données deux homotopies Γ_0 et Γ_1 reliant (H^a, J^a) à (H^b, J^b) , on souhaite montrer que les morphismes de complexes, Φ^{Γ_0} et Φ^{Γ_1} , qu'elles définissent, coïncident en homologie. Pour cela, il faut montrer l'existence d'une homotopie de complexes entre Φ^{Γ_0} et Φ^{Γ_1} , c'est-à-dire, une application

$$S : CF(H^a, J^a, K) \rightarrow CF(H^b, J^b, K),$$

telle que

$$\Phi^{\Gamma_1} - \Phi^{\Gamma_0} = S \circ d^a + d^b \circ S.$$

Soit $\Gamma = (\Gamma_\lambda = (H_\lambda, J_\lambda))_{\lambda \in [0,1]}$ une homotopie reliant les homotopies Γ_0 et Γ_1 , telle que :

1. pour tout $\lambda \in [0, 1]$, Γ_λ est une homotopie lisse reliant (H^a, J^a) à (H^b, J^b) , comme définie au début du paragraphe 4.3 ;
2. Γ est constante dans un voisinage de $\lambda = 0$ et $\lambda = 1$;

3. il existe un réel $R > 0$, tel que pour tout $\lambda \in [0, 1]$:

$$\Gamma_\lambda(s) = \begin{cases} (H^a, J^a), & \text{si } s \leq -R \\ (H^b, J^b), & \text{si } s \geq R \end{cases}.$$

Pour tout $\lambda \in [0, 1]$, on considère l'équation de Floer à paramètres :

$$\frac{\partial u}{\partial s} + J_\lambda^s \frac{\partial u}{\partial t} - J_\lambda^s X_\lambda^s(u) = 0, \quad (4.13)$$

et pour tous $x \in \text{Crit}(f^a)$ et $y \in \text{Crit}(f^b)$, on considère l'espace des solutions de l'équation (4.13) d'énergie bornée reliant x et y :

$$\mathcal{M}_{\Gamma_\lambda}(x, y; K) = \left\{ u : \mathbf{R} \times [0, 1] \rightarrow M \mid \begin{array}{l} u \text{ satisfait (4.13)} \\ u(\mathbf{R} \times \{0, 1\}) \subset L \\ E(u) < K \end{array} ; \begin{array}{l} \lim_{-\infty} u(s, \cdot) = x \\ \lim_{+\infty} u(s, \cdot) = y \end{array} \right\}$$

et l'espace :

$$\mathcal{M}_\Gamma(x, y; K) = \{(\lambda, u) \mid \lambda \in [0, 1]; u \in \mathcal{M}_{\Gamma_\lambda}(x, y; K)\}.$$

Le théorème 11.3.2 de [4] traite d'un espace du type $\mathcal{M}_\Gamma(x, y; K)$ pour des cylindres satisfaisant une équation de Floer à paramètres. Dans notre cas, il s'agit de demi-cylindres dont les extrémités sont réduits aux points x et y . Ce théorème se montre alors de manière analogue, et on peut donc dire que, modulo une petite perturbation de H , l'espace $\mathcal{M}_\Gamma(x, y; K)$ est une variété à bord dont la dimension d'une composante contenant un élément u est :

$$\mu(u) + \text{ind}(y) - \text{ind}(x) + 1,$$

et le bord est

$$\partial \mathcal{M}_\Gamma(x, y; K) = (\{0\} \times \mathcal{M}_{\Gamma_0}(x, y; K)) \cup (\{1\} \times \mathcal{M}_{\Gamma_1}(x, y; K)).$$

La formule de la dimension est similaire à celle déjà vue dans le texte, mais on rajoute 1 à cause du paramètre λ .

Compacité des espaces $\mathcal{M}_\Gamma(x, y; K)$

Soient x et y des points critiques de f^a et f^b respectivement. On considère l'espace $\Pi_\Gamma(x, y)$, des trajectoires brisées :

$$\begin{aligned} \Pi_\Gamma(x, y) = & \bigcup_{z \in \text{Crit}(f^a)} \mathcal{L}_{J^a}^0(x, z; H^a, K) \times \mathcal{M}_\Gamma^0(z, y; K) \\ & \bigcup \\ & \bigcup_{z' \in \text{Crit}(f^b)} \mathcal{M}_\Gamma^0(x, z'; K) \times \mathcal{L}_{J^b}^0(z', y; H^b, K) \end{aligned}.$$

Cet espace vérifie le lemme suivant :

Lemme 4.28. *Les éléments de $\Pi_\Gamma(x, y)$ sont d'énergie strictement inférieure à K .*

Démonstration. La démonstration de ce lemme est analogue à celle du lemme 4.25. $\square$

Les espaces $\mathcal{M}_\Gamma(x, y; K)$ vérifient le théorème de compacité suivant :

Théorème 4.29. *Soient x et y des points critiques de f^a et f^b respectivement.*

(1.) $\mathcal{M}_\Gamma^0(x, y; K)$ est une variété compacte.

(2.) L'espace

$$\bar{\mathcal{M}}_\Gamma^1(x, y; K) = \mathcal{M}_\Gamma^1(x, y; K) \cup \Pi_\Gamma(x, y),$$

est une variété compacte de dimension 1 dont le bord est

$$\Pi_\Gamma(x, y) \cup (\{0\} \times \mathcal{M}_{\Gamma_0}^0(x, y; K)) \cup (\{1\} \times \mathcal{M}_{\Gamma_1}^0(x, y; K)).$$

Démonstration. Soient $x \in \text{Crit}(f^a)$ et $x \in \text{Crit}(f^a)$, on considère l'espace :

$$\mathcal{M}_{\Gamma, K}^{0,1} = \bigcup_{\substack{x \in \text{Crit}(f^a), \\ y \in \text{Crit}(f^b),}} \mathcal{M}_\Gamma^0(x, y; K) \bigcup \mathcal{M}_\Gamma^1(x, y; K).$$

C'est une variété compacte pour la topologie C_{loc}^∞ . Ce résultat se démontre de manière analogue à la proposition 4.24. On peut donc appliquer l'analogue du théorème 11.3.10 de [4] (voir aussi [17]), qui donne la compacité des espaces $\mathcal{M}_\Gamma^k(x, y; K)$, avec $k \in \{0, 1\}$, en leur ajoutant les trajectoires brisées, ayant un nombre de brisures inférieur à k , pour (H^a, J^a) et (H^b, J^b) .

(1.) Pour les variétés $\mathcal{M}_\Gamma^0(x, y; K)$, il ne peut y avoir de trajectoires brisées d'où la compacité.

(2.) On déduit également de ce qui précède, que $\bar{\mathcal{M}}_\Gamma^1(x, y; K)$ est une variété compacte de dimension 1. Par l'analogue du théorème 11.3.2 de [4], on sait que l'espace

$$\{0\} \times \mathcal{M}_{\Gamma_0}^0(x, y; K) \cup \{1\} \times \mathcal{M}_{\Gamma_1}^0(x, y; K)$$

appartient au bord de cette variété. Il nous reste à montrer qu'il en est de même pour $\Pi_\Gamma(x, y)$. Soit z un point critique de f^b . Soient $u \in \mathcal{L}_{J^a}^0(x, z; H^a, K)$ et $(\lambda, v) \in \mathcal{M}_\Gamma^0(z, y; K)$. On considère la trajectoire brisée $u\#(\lambda, v)$. D'après le théorème 11.3.14 de [4], il existe un chemin dans $\mathcal{M}_\Gamma^1(x, y; K)$, dont l'une des extrémités est $u\#(\lambda, v)$ et par le lemme 4.28, cette trajectoire a une énergie strictement inférieure à K . $\square$

Définition de l'homotopie S

On définit une application

$$S : CF(H^a, J^a, K) \rightarrow CF(H^b, J^b, K),$$

telle que pour tout générateur $x \in \text{Crit}(f^a)$:

$$S(x) = \sum_{y \in \text{Crit}(f^b)} \#_2 \mathcal{M}_\Gamma^0(x, y; K) \cdot y.$$

Cette application est bien définie car $\mathcal{M}_\Gamma^0(x, y; K)$ est une variété compacte de dimension 0, donc constituée d'un ensemble fini de points. On rappelle que l'on veut montrer l'égalité :

$$\Phi^{\Gamma_1} - \Phi^{\Gamma_0} = S \circ d^a + d^b \circ S.$$

On commence par calculer le membre de droite. Soit $x \in \text{Crit}(f^a)$:

$$\begin{aligned} & S \circ d^a + d^b \circ S(x) \\ &= S \sum_{z \in \text{Crit}(f^a)} \#_2 \mathcal{L}_{J^a}^0(x, z; H^a, K) \cdot z \\ & \quad + d^b \sum_{z' \in \text{Crit}(f^b)} \#_2 \mathcal{M}_\Gamma^0(x, z'; K) \cdot z' \\ &= \sum_{y \in \text{Crit}(f^b)} \sum_{z \in \text{Crit}(f^a)} \#_2 \mathcal{L}_{J^a}^0(x, z; H^a, K) \#_2 \mathcal{M}_\Gamma^0(z, y; K) \cdot y \\ & \quad + \sum_{y \in \text{Crit}(f^b)} \sum_{z' \in \text{Crit}(f^b)} \#_2 \mathcal{M}_\Gamma^0(x, z'; K) \#_2 \mathcal{L}_{J^b}^0(z', y; H^b, K) \cdot y \\ &= \sum_{y \in \text{Crit}(f^b)} \#_2 \Pi_\Gamma(x, y) \cdot y. \end{aligned}$$

On calcule le membre de gauche :

$$\Phi^{\Gamma_1} - \Phi^{\Gamma_0} = \sum_{y \in \text{Crit}(f^b)} \#_2 \mathcal{M}_{\Gamma_1}^0(x, y; K) \cdot y - \sum_{y \in \text{Crit}(f^b)} \#_2 \mathcal{M}_{\Gamma_0}^0(x, y; K) \cdot y.$$

Par le théorème 4.29,

$$\Pi_\Gamma(x, y) \cup (\{0\} \times \mathcal{M}_{\Gamma_0}^0(x, y; K)) \cup (\{1\} \times \mathcal{M}_{\Gamma_1}^0(x, y; K))$$

est le bord d'une variété compacte de dimension 1, c'est donc un ensemble formé d'un nombre pair d'éléments. En considérant le cardinal modulo 2 de ces espaces, on a :

$$\#_2 \Pi_\Gamma(x, y) = \#_2 \mathcal{M}_{\Gamma_1}^0(x, y; K) - \#_2 \mathcal{M}_{\Gamma_0}^0(x, y; K).$$

On en déduit alors l'égalité voulue :

$$\Phi^{\Gamma_1} - \Phi^{\Gamma_0} = S \circ d^a + d^b \circ S.$$

4.3.4 Preuve de la Propriété 4.23

Soient $\Gamma' = (H', J')$ et $\Gamma'' = (H'', J'')$ deux homotopies reliant (H^a, J^a) à (H^b, J^b) et (H^b, J^b) à (H^c, J^c) . On choisit ces homotopies comme au début du paragraphe 4.3. On rappelle que ces homotopies sont stationnaires pour $|s| > R$ pour une certaine constante $R > 0$ fixée. On souhaite construire une homotopie Γ reliant (H^a, J^a) à (H^c, J^c) et telle que le morphisme de complexes correspondant, Φ^Γ , coïncident en homologie avec $\Phi^{\Gamma''} \circ \Phi^{\Gamma'}$.

Pour tout $\rho > R$, on définit l'homotopie $\Gamma_\rho = (H_\rho, J_\rho)$ par :

$$H_\rho(s, t, p) = \begin{cases} H'(s + \rho, t, p), & \text{si } s \leq 0 \\ H''(s - \rho, t, p), & \text{si } s \geq 0 \end{cases},$$

et

$$J_\rho(s, p) = \begin{cases} J'(s + \rho, p), & \text{si } s \leq 0 \\ J''(s - \rho, p), & \text{si } s \geq 0 \end{cases}.$$

Cette homotopie est une concaténation de Γ' et Γ'' . D'après le lemme 11.5.1, à une perturbation près de Γ' et Γ'' , l'homotopie Γ_ρ est régulière, i.e les espaces sont des variétés. On peut alors définir un morphisme de complexes Φ^{Γ_ρ} comme au paragraphe 4.3.2. D'après la Propriété 4.22, les homotopies perturbées de Γ' et Γ'' définissent des morphismes de complexes isomorphes en homologie, on peut donc garder ces deux homotopies pour la suite.

Le but est de montrer qu'il existe un réel $\rho > R$ pour lequel $\Phi^{\Gamma''} \circ \Phi^{\Gamma'}$ et Φ^{Γ_ρ} coïncident. Soit $x \in \text{Crit}(f^a)$ et $y \in \text{Crit}(f^c)$. D'une part, on a :

$$\Phi^{\Gamma''} \circ \Phi^{\Gamma'}(x) = \sum_{y \in \text{Crit}(f^c)} \sum_{z \in \text{Crit}(f^b)} \#_2 \mathcal{M}_{\Gamma'}^0(x, z; K) \#_2 \mathcal{M}_{\Gamma''}^0(z, y; K) \cdot y.$$

D'autre part :

$$\Phi^{\Gamma_\rho}(x) = \sum_{y \in \text{Crit}(f^c)} \#_2 \mathcal{M}_{\Gamma_\rho}^0(x, y; K) \cdot y.$$

Il suffit donc de montrer que les espaces $\mathcal{M}_{\Gamma'}^0(x, z; K) \times \mathcal{M}_{\Gamma''}^0(z, y; K)$ et $\mathcal{M}_{\Gamma_\rho}^0(x, y; K)$ sont en bijection. Autrement dit, définir une application :

$$\chi_\rho : \mathcal{M}_{\Gamma'}^0(x, z; K) \times \mathcal{M}_{\Gamma''}^0(z, y; K) \rightarrow \mathcal{M}_{\Gamma_\rho}^0(x, y; K)$$

qui soit injective et surjective pour des valeurs assez grandes de ρ .

Soient $(u, v) \in \mathcal{M}_{\Gamma'}^0(x, z; K) \times \mathcal{M}_{\Gamma''}^0(z, y; K)$. L'image de (u, v) par χ_ρ est définie par un processus de recollement similaire à celui utilisé dans la partie 11.3.d de [4]. De plus, comme on l'a vu dans la démonstration du lemme 4.25, l'énergie de la trajectoire, obtenue ainsi par recollement, est également strictement inférieure à K . On en déduit donc que $\chi_\rho(u, v)$ appartient à l'espace $\mathcal{M}_{\Gamma_\rho}^0(x, y; K)$. La preuve de l'injectivité et de la surjectivité de χ_ρ est similaire à celle de [4](paragraphe 11.5).

4.4 Homologie de Floer relevée dans le cas presque monotone

Dans cette partie nous allons définir l'homologie de Floer relevée pour les sous-variétés Lagrangiennes presque monotones. Comme nous l'avons vu dans la section 2.2, pour un revêtement donné, le complexe de Floer relevé se définit en relevant les éléments du complexe classique. Donc les arguments de compacité et de recollement permettant de prouver que ce complexe est bien défini et où la propriété de monotonie de la Lagrangienne considérée intervient, découlent du cas presque monotone classique. Par conséquent, à partir du moment où le complexe de Floer classique est bien défini dans le cas presque monotone, la définition du complexe relevé en découle et il se définit alors de manière similaire au cas monotone. Autrement dit, il n'y a pas de difficulté spécifique cas presque monotone pour définir l'homologie de Floer relevée.

4.4.1 Complexe de Floer relevé

On se place dans le même contexte que la section 4.2.1. Soit $L_0 \hookrightarrow M$ une sous-variété Lagrangienne monotone de constante de monotonie η et dont le nombre de Maslov N_{L_0} est supérieur ou égal à 2. On fixe des constantes $\varepsilon > 0$, et $K > 2\eta(n+1) + 3\varepsilon$. On considère une sous-variété Lagrangienne presque monotone $L \hookrightarrow M$, appartenant à un voisinage $\mathcal{W}(L_0; J_0, \varepsilon, K)$ de L_0 comme défini au théorème 4.17. On fixe un revêtement $p : \bar{L} \rightarrow L$ de L . Soit f une fonction de Morse sur L , suffisamment C^2 -petite afin que, d'une part, l'isotopie Lagrangienne qu'elle définit :

$$\phi_t(L) = \{(q, td_q f) \mid q \in L\} \subset T^*L, \quad t \in [0, 1],$$

reste dans un voisinage de Weinstein $U(L)$ de L , et d'autre part :

$$\sup_{C^0} |f| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Soit $H : M \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction Hamiltonienne sur M , dont le flot Hamiltonien correspondant prolonge cette isotopie Lagrangienne.

Pour tout élément u de $\mathcal{M}_{J_0}(x, y; K)$, on définit un chemin associé $\gamma_u : [-\infty, +\infty] \rightarrow L$ par :

$$\gamma_u(s) = \begin{cases} u(s, 0) & \text{si } s \in]-\infty, +\infty[\\ x & \text{si } s = -\infty \\ y & \text{si } s = +\infty \end{cases}.$$

Le complexe de Floer relevé est donné par :

$$CF^{\bar{L}} = (\mathbf{Z}_2 \langle p^{-1}(L \cap L_1) \rangle, d^{\bar{L}}),$$

avec

$$\begin{aligned} d^{\bar{L}} : CF^{\bar{L}} &\rightarrow CF^{\bar{L}} \\ \bar{x} &\mapsto \sum_{\bar{y} \in p^{-1}(L \cap L_1)} n(\bar{x}, \bar{y}) \cdot \bar{y} \end{aligned}$$

où $n(\bar{x}, \bar{y}) = \#_2\{u \in \mathcal{L}^0(x, y; K) \mid \gamma_u \text{ se relève en un chemin entre } \bar{x} \text{ et } \bar{y}\}$.

D'après la proposition 4.21, $\mathcal{L}^0(x, y; K)$ est une variété compacte de dimension 0, elle est donc constituée d'un nombre fini d'éléments. De plus pour tout $u \in \mathcal{L}^0(x, y; K)$, le chemin associé γ_u admet un relèvement unique à partir d'un point $\bar{x} \in \bar{L}$. L'application $d^{\bar{L}}$ est donc bien définie.

Comme dans le cas monotone, lorsque $N_L \geq 3$ ou $N_L = 2$ avec $x \neq y$, l'égalité $d^{\bar{L}} \circ d^{\bar{L}} = 0$ provient, d'une part, du fait que l'espace des trajectoires brisées $\cup_{z \in L \cap L_1} \mathcal{L}_J^0(x, z; K) \times \mathcal{L}_J^0(z, y; K)$ est le bord d'une variété compacte de dimension 1. Et d'autre part, pour tout couple de chemins brisés $(\gamma_u * \gamma_v, \gamma_{u'} * \gamma_{v'})$, provenant des trajectoires brisées $u \# v$ et $u' \# v'$ bordant la même variété de dimension 1, les chemins $\gamma_u * \gamma_v$ et $\gamma_{u'} * \gamma_{v'}$ sont homotopes (la proposition 2.7 de [15] est vraie également dans le cas presque monotone). Il définissent donc le même chemin relevé entre deux éléments $\bar{x}$ et $\bar{y}$ de $\bar{L}$.

4.4.2 Le cas $N_L = 2$ et $x = y$

Comme pour le cas monotone, l'homologie de Floer relevée n'est pas toujours définie lorsque $N_L = 2$ et $x = y$. Dans ce cas les chemins γ_u sont des lacets passant par x . S'il existe un tel lacet dont le cardinal de la classe d'homotopie est impair, alors $d^{\bar{L}} \circ d^{\bar{L}} \neq 0$. Avec les notations données dans la section 4.2.1, on peut montrer un résultat similaire à la proposition 3.3 de [16] :

Proposition 4.30. *Soit $L_0 \hookrightarrow (M, \omega)$ une sous-variété Lagrangienne monotone dont le nombre de Maslov est $N_{L_0} = 2$. On considère $\mathcal{W}(L_0; J_0, \varepsilon, K)$ le voisinage de L_0 pour lequel l'homologie de Floer est définie. Soit $L \in \mathcal{W}(L_0; J_0, \varepsilon, K)$ une sous-variété Lagrangienne presque monotone. Supposons que pour un certain $x \in L$ et un certain élément $g \in \pi_1(L)$ non trivial tel que $g = \partial A$ avec $A \in \pi_2(M, L)$ satisfait $\omega(A) < K$, on ait $\#_2^g(x) = 1$. Alors g a un nombre fini d'éléments conjugués dans $\pi_1(L)$. En particulier, le sous-groupe $Z(g) = \{\gamma \in \pi_1(L) \mid \gamma g = g \gamma\}$ est d'indice fini.*

Démonstration. La preuve de la proposition 3.3 de [16] repose sur l'espace $\mathcal{P}_{L, J_0, K}^2$ des disques J_0 -holomorphes à bord sur L , d'indice de Maslov égal à 2 et d'énergie bornée par K et sur l'application d'évaluation

$$\text{ev} : \mathcal{P}_{L, J_0, K}^2 \times \mathbf{S}^1 / PSL(2, \mathbf{R}) \rightarrow L.$$

Si L n'est pas monotone, les espaces $\mathcal{P}_{L, J_0, K}^2$ et $\mathcal{P}_{L, J_0, K}^2 \times \mathbf{S}^1 / PSL(2, \mathbf{R})$ ne sont pas forcément des variétés compactes. Néanmoins, dans le cas presque monotone, nous avons montré que ce sont des variétés compactes de dimension $n + 2$ et n , respectivement (section 4.2.2; cas $N_L = 2$).

La preuve de la proposition 4.31 est alors complètement similaire à celle de la proposition 3.3 de [16]. $\square$

La contraposée de cette proposition 4.31 garantit un nombre pair de disques J -holomorphes d'indice de Maslov 2 dans chaque classe d'homotopie de $\pi_1(L)$ qui provient d'un élément $A \in \pi_2(M, L)$ avec $\omega(A) < K$. On obtient donc une condition pour laquelle l'homologie de Floer relevée est définie :

Corollaire 4.31. *S'il n'existe pas d'élément $g \in \pi_1(L)$ non trivial dont le nombre d'éléments conjugués est fini, (i.e le sous-groupe $Z(g) = \{\gamma \in \pi_1(L) \mid \gamma g = g\gamma\}$ est d'indice fini) alors l'homologie de Floer relevée est définie pour tout revêtement $p : \bar{L} \rightarrow L$.*

Lorsque l'homologie de Floer relevée est définie, son invariance par rapport au choix d'une structure presque complexe régulière dans le voisinage $\mathcal{W}(J_0; \varepsilon, K)$ de J_0 et du choix de l'isotopie Hamiltonienne se démontre de manière analogue au cas presque monotone de la version classique (section 4.3). On la note $HF^{\bar{L}}(L; J_0, \varepsilon, K)$.

Chapitre 5

Applications de l'homologie de Floer Lagrangienne pour les sous-variétés presque monotones

Dans ce chapitre on démontre le théorème 1.19 et les résultats de déplaçabilité du voisinage d'une sous-variété Lagrangienne monotone, énoncés en introduction. Pour cela, nous commençons par étudier l'effet de la déplaçabilité d'une sous-variété Lagrangienne presque monotone sur son homologie de Floer classique et relevée.

5.1 Sous-variétés Lagrangiennes déplaçables

Dans le cas monotone, l'homologie de Floer d'une sous-variété Lagrangienne déplaçable est nulle. Nous n'avons pas réussi à généraliser ce résultat dans le cas presque monotone, nous obtenons un résultat plus faible : si $(L_n)_{n \in \mathbf{N}}$, désigne une suite de sous-variétés Lagrangiennes, convergeant vers une sous-variété Lagrangienne monotone donnée, telle que L_n est déplaçable et son énergie de déplacement est bornée indépendamment de n , alors pour n assez grand, l'homologie de Floer est définie et nulle.

Comme dans la section précédente, nous travaillons avec le complexe de Floer défini à partir de l'équation de Floer (2.5). On notera u les disques de Floer, au lieu de $\hat{u}$, afin d'alléger le texte.

5.1.1 Complexe de Floer à coefficients dans un anneau de Novikov

Soit $L_0 \hookrightarrow M$ une sous-variété Lagrangienne monotone de constante de monotonie η et dont le nombre de Maslov N_{L_0} est supérieur ou égal à 2. On fixe des constantes $\varepsilon > 0$ et $K > 2\eta(n+1) + 3\varepsilon$. On considère une sous-variété Lagrangienne

presque monotone $L \hookrightarrow M$ appartenant au voisinage $\mathcal{W}(L_0; J_0, \varepsilon, K)$ du théorème 4.17.

Soit f^0 une fonction de Morse sur L satisfaisant les hypothèses du début de la section 4.2.1. Soit H^0 une fonction Hamiltonienne sur M dont l'isotopie Hamiltonienne correspondante prolonge l'isotopie Lagrangienne définie par f^0 et telle que :

$$\sup_{\mathcal{C}^0} |H^0| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

On considère l'anneau de Novikov suivant :

$$\Lambda = \left\{ \sum_{i=0}^{+\infty} n_i q^{r_i} \mid n_i \in \mathbf{Z}_2 ; r_i \in \mathbf{R} ; \forall c > 0, \#\{i \mid r_i < c\} < +\infty \right\}.$$

Le complexe de Floer à coefficients dans Λ , noté $CF(H^0, J_0, q, K)$, est défini par :

$$CF(H^0, J_0, q, K) = CF(H^0, J_0, K) \otimes \Lambda,$$

et sa différentielle, que l'on note $d^{H^0, q}$, est définie pour tout $x \in CF(H^0, J_0, q, K)$ par :

$$d^{H^0, q}(x) = \sum_{\substack{y \in \text{Crit}(f^0) \\ u \in \mathcal{L}_{J_0}^0(x, y; H^0, K)}} q^{\omega([u])} \cdot y.$$

Elle est bien définie car $\mathcal{L}_{J_0}^0(x, y; H^0, K)$ est finie. De plus, on a $d^{H^0, q} \circ d^{H^0, q} = 0$. En effet, pour tout $x \in CF(H^0, J_0, q, K)$:

$$d^{H^0, q} \circ d^{H^0, q}(x) = \sum_{\substack{y \in \text{Crit}(f^0) \\ u \in \mathcal{L}_{J_0}^0(x, z; H^0, K) \\ v \in \mathcal{L}_{J_0}^0(z, y; H^0, K)}} q^{\omega([u]) + \omega([v])} \cdot y,$$

et l'ensemble

$$\{(u, v) \in \mathcal{L}_{J_0}^0(x, z; H^0, K) \times \mathcal{L}_{J_0}^0(z, y; H^0, K) \mid \omega([u]) + \omega([v]) = r\}$$

est le bord d'une variété compacte de dimension 1 dont l'intérieur est

$$\{u \in \mathcal{L}_{J_0}^1(x, y; H^0, K) \mid \omega([u]) = r\}.$$

Remarque 5.1. L'espace $\{u \in \mathcal{L}_{J_0}^1(x, y; H^0, K) \mid \omega([u]) = r\}$ est bien une variété de dimension 1 car c'est une réunion de composantes connexes de $\mathcal{L}_{J_0}^1(x, y; H^0, K)$. En effet, tous les éléments appartenant à un voisinage de $v \in \{u \in \mathcal{L}_{J_0}^1(x, y; H^0, K) \mid \omega([u]) = r\}$ sont homotopes à v , ils sont alors également d'aire symplectique égale à r . Le sous-espace $\{u \in \mathcal{L}_{J_0}^1(x, y; H^0, K) \mid \omega([u]) = r\}$ est donc à la fois ouvert et

fermé. A noter que cela implique que, pour K fixé, les valeurs possibles de r forment un ensemble fini. En effet, dans le cas contraire, on peut choisir une suite $(u_n)_n$ dans $\mathcal{L}_{J_0}^1(x, y; H^0, K)$ avec $\omega(u_n) = r_n$ telle que $(r_n)_n$ soit une suite non constante. Dans le compactifié de $\mathcal{L}_{J_0}^1(x, y; H^0, K)$, la suite $(u_n)_n$ admet une sous-suite convergente. Notons u la limite et r son aire symplectique. Dans tout voisinage de u , il existe, pour n assez grand, des éléments u_n tels que $\omega(u_n) = r_n \neq r$. On aboutit à une contradiction.

On note $HF(L, q; J_0, \varepsilon, K)$ l'homologie de $(CF(H^0, J_0, q, K), d^{H^0, q})$. Ce changement de coefficients est essentiel dans cette partie, on renvoie à la remarque 5.9 pour plus de détails.

5.1.2 Homologie de Floer d'une suite de Lagrangiennes presque monotones déplaçables

On a le résultat suivant :

Proposition 5.2. *Soit $L_0 \hookrightarrow M$ une sous-variété Lagrangienne monotone. Soit $(L_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de sous-variétés Lagrangiennes déplaçables qui converge, dans la topologie C^1 , vers L_0 , de sorte que pour tout n l'énergie de déplacement de L_n , notée $e(L_n)$, est bornée. Alors pour tout $K > 0$ suffisamment grand, il existe un voisinage de L_0 tel que, pour tout L_n dans ce voisinage, l'homologie de Floer est bien définie et on a :*

$$HF(L_n, q; J_0, \varepsilon, K) = 0.$$

La preuve de cette proposition reprend l'idée générale de celle de F.Ngo dans [33].

Il suffit de démontrer que pour n assez grand, il existe un morphisme de complexes

$$\varphi : CF(H^0, J_0, q, K) \rightarrow CF(H^0, J_0, q, K),$$

qui est inversible et qui induit 0 en homologie. On définira φ de la forme $d^{H^0, q} \circ \psi + \psi \circ d^{H^0, q}$, où l'application ψ peut être vue comme une homotopie de complexes entre φ et le morphisme nul.

Soit $H : [0, 1] \times M \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction Hamiltonienne sur M à support compact, qui déplace L . On définit $\mathbf{H}$ une homotopie de fonctions Hamiltoniennes sur M , reliant H^0 à lui-même, en passant par la fonction Hamiltonienne H , et dépendant d'un paramètre $R \geq 0$. Par définition :

$$\mathbf{H}_R(s, t) = (1 - \beta_R(s))H^0 + \beta_R(s)H_t,$$

où $\beta_R : \mathbf{R} \rightarrow [0, 1]$ est une fonction plateau définie par :

$$\beta_R(s) = \begin{cases} 0, & \text{si } s \leq -R \text{ et } s \geq R \\ \chi(R), & \text{si } s \in \left[-\frac{R}{2}, \frac{R}{2}\right] \end{cases},$$

où $\chi : \mathbf{R}_+ \rightarrow [0, 1]$ est une fonction croissante qui vérifie :

$$\begin{cases} \beta_R(s) \leq \chi(R) \quad \forall s ; \\ \chi(0) = 0 ; \\ \chi(R) = 1 \end{cases} \quad \text{si } R \geq 1.$$

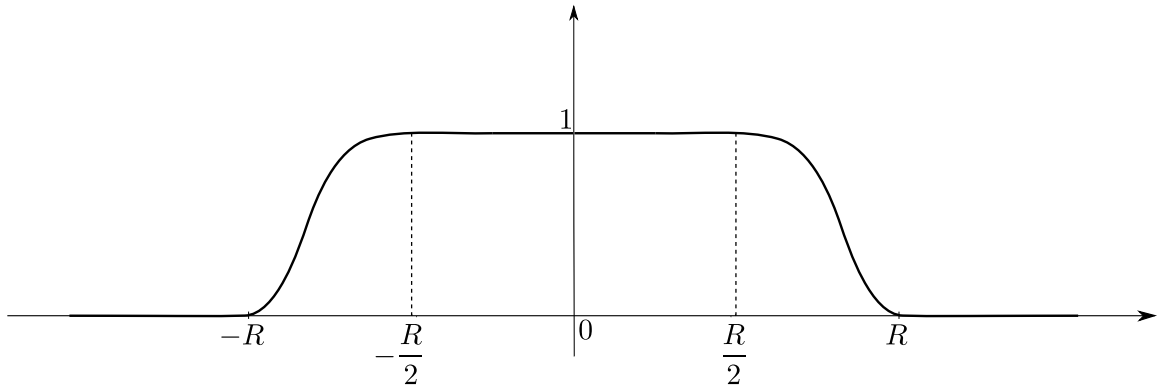


FIGURE 5.1 – Représentation graphique de la fonction β_R .

Pour tout $R \geq 0$, on considère l'équation de Floer à paramètres :

$$\frac{\partial u}{\partial s} + J_0 \frac{\partial u}{\partial t} - J_0 X_R^{s,t}(u) = 0, \quad (5.1)$$

où $X_R^{s,t}$ le champ de vecteurs Hamiltonien associé à $\mathbf{H}_R(s, t)$. L'espace de solutions de l'équation (5.1) reliant deux points critiques x et y de f^0 et d'énergie finie est :

$$\mathcal{M}_{L, \mathbf{H}, J_0}(x, y) = \left\{ (R, u : \mathbf{R} \times [0, 1] \rightarrow M) \mid \begin{array}{ll} u \text{ satisfait (5.1)} & \lim_{-\infty} u(s, \cdot) = x \\ u(\mathbf{R} \times \{0, 1\}) \subset L & ; \\ E(u) < +\infty & \lim_{+\infty} u(s, \cdot) = y \end{array} \right\}$$

De la même manière que dans la section 4.3, on montre que ces espaces sont des variétés. Plus précisément, ce sont des variétés à bord, dont le bord est donnée par $R = 0$:

$$\{(0, u) \in \mathcal{M}_{L, \mathbf{H}, J_0}(x, y)\}.$$

5.1.3 Lemmes préparatoires

Les éléments de $\mathcal{M}_{L,\mathbf{H},J_0}(x,y)$ sont des disques de Floer dont le cœur satisfait une équation de Floer du type (2.5) pour la fonction Hamiltonienne H . Celle-ci ne vérifie pas les hypothèses de la section 4.2.1, donc nous n'avons pas de contrôle sur l'énergie de ces disques, comme celui apparaissant dans le lemme 4.16. On peut, malgré tout, obtenir le même type d'informations grâce à la condition sur l'énergie de déplacement des éléments de la suite $(L_n)_{n \in \mathbf{N}}$, présente dans la proposition 5.2. C'est l'objet des deux lemmes présentés ici.

Lemme 5.3. *Soit (R, u) un élément de $\mathcal{M}_{L,\mathbf{H},J_0}(x,y)$, on note $[u] \in \pi_2(M, L)$ sa classe d'homotopie relative. On a :*

$$E(u) = \omega([u]) + \int_{[-R,R] \times [0,1]} \frac{\partial \mathbf{H}_R}{\partial s}(u) ds dt + \int_0^1 H_t^0(x) - H_t^0(y) dt.$$

Démonstration. La démonstration de ce lemme est purement calculatoire :

$$E(u) = \int_{\mathbf{R} \times [0,1]} \left\| \frac{\partial u}{\partial s} \right\|_{g_0}^2 ds dt$$

où g_0 est la métrique associée à J_0 .

$$\begin{aligned} E(u) &= \int_{\mathbf{R} \times [0,1]} \omega \left(\frac{\partial u}{\partial s}, J_0 \frac{\partial u}{\partial s} \right) ds dt \\ &= \int_{\mathbf{R} \times [0,1]} \omega \left(\frac{\partial u}{\partial s}, \frac{\partial u}{\partial t} - X_R^{s,t}(u) \right) ds dt \\ &= \int_{\mathbf{R} \times [0,1]} \omega \left(\frac{\partial u}{\partial s}, \frac{\partial u}{\partial t} \right) - \omega \left(\frac{\partial u}{\partial s}, X_R^{s,t}(u) \right) ds dt \\ &= \omega([u]) - \int_{\mathbf{R} \times [0,1]} d\mathbf{H}_R(s, t, u) \frac{\partial u}{\partial s} ds dt. \end{aligned}$$

Par la formule de la dérivée d'une fonction composée on a :

$$\frac{\partial}{\partial s} \mathbf{H}_R(s, t, u) = \frac{\partial \mathbf{H}_R}{\partial s}(u) + d\mathbf{H}_R(s, t, u) \frac{\partial u}{\partial s},$$

d'où :

$$E(u) = \omega([u]) + \int_{\mathbf{R} \times [0,1]} \frac{\partial \mathbf{H}_R}{\partial s}(u) - \frac{\partial}{\partial s} \mathbf{H}_R(s, t, u) ds dt.$$

Pour $s \notin [-R, R]$, $\mathbf{H}_R$ est constante égale à H^0 . Donc :

$$E(u) = \omega([u]) + \int_{[-R,R] \times [0,1]} \frac{\partial \mathbf{H}_R}{\partial s}(u) ds dt - \int_{\mathbf{R} \times [0,1]} \frac{\partial}{\partial s} \mathbf{H}_R(s, t, u) ds dt.$$

Soit $\sigma > R$, on a

$$\int_{[-\sigma,\sigma] \times [0,1]} \frac{\partial}{\partial s} \mathbf{H}_R(s, t, u) ds dt = \int_{[0,1]} H_t^0(u(\sigma, t)) - H_t^0(u(-\sigma, t)) dt,$$

d'où :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{R} \times [0,1]} \frac{\partial}{\partial s} \mathbf{H}_R(s, t, u) ds dt &= \lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \int_{[-\sigma, \sigma] \times [0,1]} \frac{\partial}{\partial s} \mathbf{H}_R(s, t, u) ds dt \\
&= \lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \int_{[0,1]} H_t^0(u(\sigma, t)) - H_t^0(u(-\sigma, t)) dt \\
&= \int_{[0,1]} H_t^0(y) - H_t^0(x) dt.
\end{aligned}$$

Finalement, on obtient :

$$E(u) = \omega([u]) + \int_{[-R, R] \times [0,1]} \frac{\partial \mathbf{H}_R}{\partial s}(u) ds dt + \int_0^1 H_t^0(x) - H_t^0(y) dt.$$

□

On déduit de ce lemme, une inégalité sur l'énergie des éléments de $\mathcal{M}_{L, \mathbf{H}, J_0}(x, y)$:

Lemme 5.4. *Soit (R, u) un élément de $\mathcal{M}_{L, \mathbf{H}, J_0}(x, y)$. Alors :*

$$|E(u) - \omega([u])| < 2e(L) + 2\varepsilon$$

Démonstration. On applique le lemme 5.3 et on obtient :

$$E(u) - \omega([u]) = \int_{[-R, R] \times [0,1]} \beta'(s)(H_t - H_t^0)(u(s, t)) ds dt + \int_0^1 H_t^0(x) - H_t^0(y) dt.$$

D'une part, on a :

$$|H_t(u(s, t))| \leq \max_M H_t \leq \|H\|,$$

où $\|H\|$ est la norme d'Hofer de H . En effet, si M est compacte, on peut supposer que $\min H_t \leq 0$ et $\max H_t \geq 0$, quitte à rajouter une constante C_t . Si M n'est pas compacte, on sait que $\max H_t \geq 0$ et $\min H_t \leq 0$, puisque H_t est à support compact. D'autre part, par définition de H^0 , on a :

$$\forall(s, t), \quad |H_t^0(u(s, t))| \leq \frac{\varepsilon}{4},$$

et

$$|H_t^0(x) - H_t^0(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Donc :

$$\begin{aligned}
|E(u) - \omega([u])| &\leq \int_{[-R, R]} |\beta'(s)| \cdot \|H\| ds + \int_{[-R, R]} |\beta'(s)| \cdot \frac{\varepsilon}{4} ds + \frac{\varepsilon}{2} \\
&\leq 2(\beta(0) - \beta(R)) \left(\|H\| + \frac{\varepsilon}{4} \right) + \frac{\varepsilon}{2} \\
&\leq 2\|H\| + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Cette inégalité étant vraie pour tout H , on peut choisir au départ un H tel que $\|H\| = e(L) + \frac{\varepsilon}{2}$. On en déduit :

$$\begin{aligned}
|E(u) - \omega([u])| &\leq 2e(L) + 3\frac{\varepsilon}{2} \\
&< 2e(L) + 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

□

5.1.4 Construction de l'application $\psi^{\mathbf{H}}$

Soit (L_n) une suite comme dans l'énoncé de la proposition 5.2. Fixons un n . Le lemme 5.4 implique qu'il existe une constante $C > 0$ indépendante de n telle que pour tout (R, u) dans $\mathcal{M}_{L_n, \mathbf{H}, J_0}(x, y)$ on a :

$$|E(u) - \omega([u])| < C.$$

Choisissons une constante $K > \max(C; 2\eta(n+1) + 3\varepsilon)$. Pour n assez grand, L_n appartient au voisinage $\mathcal{W}(L_0; J_0, \varepsilon, K)$ et l'homologie de Floer $HF(L_n, q; J_0, \varepsilon, K)$ est bien définie. L'entier n étant fixé, on appellera la Lagrangienne L_n plus simplement L .

On considère l'espace :

$$\mathcal{M}_{L, \mathbf{H}, J_0, K}(x, y) = \{(R, u) \in \mathcal{M}_{L, \mathbf{H}, J_0}(x, y) \mid E(u) < K\}.$$

Puisque l'on travaille sur une Lagrangienne fixée, on notera cet espace $\mathcal{M}_{\mathbf{H}, J_0, K}(x, y)$. C'est une variété et on note $\mathcal{M}_{\mathbf{H}, J_0, K}^k(x, y)$ sa composante de dimension k . Comme précédemment, nous nous intéresserons plus particulièrement au cas où $k = 0$ et $k = 1$.

Remarque 5.5. Comme nous l'avons précisé auparavant, $\mathcal{M}_{\mathbf{H}, J_0, K}(x, y)$ est une variété à bord dont le bord correspond aux éléments tels que $R = 0$. Analysons d'un peu plus près ce bord. Si $R = 0$, alors $\mathbf{H}$ est l'homotopie constante égale à H^0 . Par la remarque 4.27, cela correspond à la trajectoire constante égale à x . En particulier on a $\mu(u) = 0$. On en déduit que la dimension de la composante de $\mathcal{M}_{\mathbf{H}, J_0, K}(x, x)$ contenant $(0, u)$ est :

$$\begin{aligned} \dim_{(0, u)} \mathcal{M}_{\mathbf{H}, J_0, K}(x, x) &= \mu(u) + \text{ind}(x) - \text{ind}(x) + 1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

On en déduit que ces trajectoires sont dans le bord de la composante de dimension 1 de $\mathcal{M}_{\mathbf{H}, J_0, K}(x, x)$.

On définit une application $\psi^{\mathbf{H}}$:

$$\begin{aligned} \psi^{\mathbf{H}} : CF(H^0, J_0, q, K) &\rightarrow CF(H^0, J_0, q, K) \\ x &\mapsto \sum_{(R, u) \in \mathcal{M}_{\mathbf{H}, J_0, K}^0(x, y)} q^{\omega([u])} \cdot y. \end{aligned}$$

Notons que pour tout (R, u) appartenant à $\mathcal{M}_{\mathbf{H}, J_0, K}^0(x, y)$, on a $R \neq 0$. En effet, par la remarque 5.5, tous les éléments $(0, u)$ appartiennent à $\mathcal{M}_{\mathbf{H}, J_0, K}^1(x, y)$.

L'application $\psi^{\mathbf{H}}$ est bien définie si la variété $\mathcal{M}_{\mathbf{H}, J_0, K}^0(x, y)$ est constituée d'un nombre fini de points, cela revient donc à étudier la compacité de cette variété de dimension 0.

Soit $(R_n, u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite d'éléments non-constants de $\mathcal{M}_{\mathbf{H}, J_0, K}^0(x, y)$. Pour étudier la limite de cette suite, on considère le résultat suivant qui correspond à un résultat de P. Albers (théorème 4.37, [1]) adapté au cas presque monotone et à l'équation (5.1) :

Théorème 5.6. *Soit $L \hookrightarrow (M, \omega)$ une sous-variété Lagrangienne et $H : M \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction Hamiltonienne générique pour L . Soit $(R_n, u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{M}_{\mathbf{H}, J_0, K}^k(x, y)$, avec $k \in \{0, 1\}$. Alors :*

1. *Si $R_n \rightarrow R_\infty$ avec $0 < R_\infty < +\infty$ alors u_n possède une sous-suite convergeant vers trajectoire brisée où une seule brisure satisfait (5.1) pour R_∞ et les autres satisfont l'équation de Floer pour H^0 .*
2. *Si $R_n \rightarrow 0$ alors u_n possède une sous-suite convergeant vers une trajectoire constante satisfaisant l'équation (5.1) pour $R_\infty = 0$ ou vers un disque J_0 -holomorphe d'aire symplectique égale à K .*
3. *Si $R_n \rightarrow +\infty$ alors u_n possède une sous-suite convergeant vers une trajectoire qui se brise au moins une fois le long d'une orbite de X_H ou vers un disque J_0 -holomorphe d'aire symplectique égale à K .*

Preuve du théorème 5.6. D'après la preuve du théorème 4.37 de [1], les possibilités de limite de notre suite (R_n, u_n) sont celles énoncées dans le théorème 5.6 (1., 2., 3.) et dans chaque cas il peut y avoir l'apparition d'un ou plusieurs disques J_0 -holomorphes. L'apparition de tels disques est exclue dès lors que leur aire symplectique est strictement inférieure à K . En effet, si tel était le cas, alors par le lemme 4.6, l'indice de Maslov de chacun de ces disques serait supérieur ou égal à 2. Ceci est impossible puisque, par hypothèse, la variété $\mathcal{M}_{\mathbf{H}, J_0, K}^k(x, y)$ est de dimension $k < 2$. Examinons à présent chaque possibilité. Notons que $E(u_n) < K$ pour tout n , donc cette inégalité devient large à la limite.

Si $R_n \rightarrow R_\infty$ avec $0 < R_\infty < +\infty$. Puisque $R_\infty \neq 0$, la trajectoire limite n'est pas constante, donc si un disque J_0 -holomorphe apparaît, son énergie (donc son aire symplectique) est strictement inférieure à K . Il n'y a donc pas l'apparition de tels disques.

Si $R_n \rightarrow 0$, alors la trajectoire limite est constante, on ne peut donc pas exclure l'apparition d'un disque J_0 -holomorphe dont l'aire symplectique est égale à K .

Si $R_n \rightarrow +\infty$, alors la trajectoire limite brise au moins une fois le long d'une orbite de X_H , notons la $u_1 \# u_2$. Si u_1 et/ou u_2 n'est pas constante alors on raisonne comme dans le cas 1. Si u_1 et u_2 sont constantes alors on raisonne comme dans le cas 2. $\square$

Revenons à la définition de l'application $\psi^{\mathbf{H}}$. Comme $\Phi_1^H(L) \cap L = \emptyset$, le cas 3. est exclu. De plus, la remarque 5.5 exclut le cas 2. Il ne reste donc que le cas 1. i.e R_n converge vers un réel strictement positif, noté R_∞ et u_n possède une sous-suite convergeant vers trajectoire brisée u où une seule brisure satisfait (5.1) pour R_∞ et les autres satisfont l'équation de Floer pour H^0 . L'application u ne peut pas être une trajectoire brisée car le nombre de brisures est limité par la dimension de $\mathcal{M}_{\mathbf{H}, J_0, K}^0(x, y)$ qui est 0. De plus, $E(u_n) < K$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, il est donc

possible que $E(u) = K$. On doit alors considérer la compactification de l'espace $\mathcal{M}_{\mathbf{H}, J_0, K}^0(x, y)$ en incluant les trajectoires d'énergie égale à K . Dans tous les cas, $\mathcal{M}_{\mathbf{H}, J_0, K}^0(x, y)$ est inclus dans une variété compacte de dimension 0, elle est donc constituée d'un nombre fini de points et on en déduit que $\psi^{\mathbf{H}}$ est bien définie.

5.1.5 Le morphisme φ .

On définit l'application

$$\varphi : CF(H^0, J_0, q, K) \rightarrow CF(H^0, J_0, q, K),$$

par :

$$\varphi = d^{H^0, q} \circ \psi^{\mathbf{H}} + \psi^{\mathbf{H}} \circ d^{H^0, q}.$$

C'est clairement un morphisme de complexes. En effet d'une part :

$$d^{H^0, q} \circ \varphi = d^{H^0, q} \circ \psi^{\mathbf{H}} \circ d^{H^0, q},$$

et d'autre part :

$$\varphi \circ d^{H^0, q} = d^{H^0, q} \circ \psi^{\mathbf{H}} \circ d^{H^0, q}.$$

D'où

$$d^{H^0, q} \circ \varphi = \varphi \circ d^{H^0, q}.$$

Le morphisme φ satisfait le résultat suivant :

Proposition 5.7. $\varphi = Id + P$ où P est un morphisme à coefficients dans Λ contenant uniquement des puissances strictement positives de q .

La démonstration de cette proposition repose sur les arguments de compacité et de recollement habituels. Ceux-ci découlent du lemme suivant :

Lemme 5.8. *On considère l'espace*

$$\mathcal{M}_{\mathbf{H}, J_0, r}^1(x, y) = \{(R, u) \in \mathcal{M}_{\mathbf{H}, J_0}^1(x, y) \mid \omega([u]) = r\}.$$

On a les deux propriétés suivantes :

a. *Si $0 < r < K - C$ et $x \neq y$ ou si $x = y$ et $r \neq 0$ alors*

$$\mathcal{M}_{\mathbf{H}, J_0, r}^1(x, y) \cup \Pi_{\mathbf{H}}(x, y; r),$$

est une variété compacte de dimension 1 dont le bord est $\Pi_{\mathbf{H}}(x, y; r)$.

b. *Notons par $\{x\}$ la trajectoire constante qui est solution de l'équation de Floer associée à H^0 . On a*

$$\mathcal{M}_{\mathbf{H}, J_0, r=0}^1(x, x) \cup \Pi_{\mathbf{H}}(x, x; r=0) \cup \{x\},$$

est une variété compacte de dimension 1 dont le bord est $\Pi_{\mathbf{H}}(x, x; r=0) \cup \{x\}$.

Preuve du lemme 5.8. Remarquons d'abord que si $\omega([u]) = r < K - C$ alors $E(u) < K$. Ceci est une conséquence du lemme 5.4 :

$$E(u) < \omega([u]) + C < r + C < K - C + C = K.$$

Donc l'espace $\mathcal{M}_{\mathbf{H}, J_0, r}^1(x, y)$ est une composante connexe de $\mathcal{M}_{\mathbf{H}, J_0, K}^1(x, y)$ et de ce fait, c'est une variété.

Soit $(R_n, u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite d'éléments non-constants de $\mathcal{M}_{\mathbf{H}, J_0, r}^1(x, y)$. Cette suite satisfait le théorème 5.6. Comme $\Phi_1^H(L_n) \cap L_n = \emptyset$, seuls les cas 1. et 2. sont possibles, i.e R_n converge vers un réel positif, noté R_∞ et u_n possède une sous-suite convergeant vers une application u . De plus, la possibilité d'apparition d'un disque J_0 -holomorphe dans 2. est exclue, puisque, si tel était le cas, son aire symplectique serait égale à $r < K$.

Si $R_\infty = 0$ alors, par la remarque 4.27, u est la trajectoire constante égale à x . Ceci ne se produit que lorsque $r = 0$ et $x = y$.

Si $R_\infty \neq 0$, u_n possède une sous-suite convergeant vers une trajectoire brisée u où une seule brisure satisfait (5.1) pour R_∞ et les autres satisfont l'équation de Floer pour H^0 . Le nombre de brisures étant bornée par la dimension $\mathcal{M}_{\mathbf{H}, J_0, r}^1(x, y)$, il ne peut y avoir qu'une seule brisure. Elle converge donc vers un élément de $\Pi_{\mathbf{H}}(x, y; r)$. Par le même argument de recollement du théorème 4.26, tous les éléments de $\Pi_{\mathbf{H}}(x, y; r)$ appartiennent au bord de $\mathcal{M}_{\mathbf{H}, J_0, r}^1(x, y)$. $\square$

Preuve de la proposition 5.7. Pour tout $x \in CF(H^0, J_0, q, K)$ on a :

$$\begin{aligned} \varphi(x) = & \sum_{\substack{y \in \text{Crit}(f^0) \\ v \in \mathcal{L}_{J_0}^0(z, y; H^0)}} \sum_{(R, u) \in \mathcal{M}_{\mathbf{H}, J_0, K}^0(x, z)} q^{\omega([u]) + \omega([v])} \cdot y \\ & + \sum_{(R, v') \in \mathcal{M}_{\mathbf{H}, J_0, K}^0(x, z')} \sum_{\substack{y \in \text{Crit}(f^0) \\ u' \in \mathcal{L}_{J_0}^0(x, z'; H^0)}} q^{\omega([u']) + \omega([v'])} \cdot y. \end{aligned}$$

Pour $r \in \mathbf{R}$, notons

$$\begin{aligned} \Pi_{\mathbf{H}}(x, y; r) = & \{[v, (R, u)] \in \mathcal{L}_{J_0}^0(x, z; H^0) \times \mathcal{M}_{\mathbf{H}, J_0, K}^0(z, y) \mid \omega([u]) + \omega([v]) = r\} \\ & \cup \\ & \{[(R, v'), u'] \in \mathcal{M}_{\mathbf{H}, J_0, K}^0(x, z') \times \mathcal{L}_{J_0}^0(z', y; H^0) \mid \omega([u']) + \omega([v']) = r\}. \end{aligned}$$

Le cardinal modulo 2 de l'espace $\Pi_{\mathbf{H}}(x, y; r)$ est le coefficient de $q^r \cdot y$ dans $\varphi(x)$. Par le lemme 5.8 on a pour $x \neq y$ et $r < K - C$:

$$\#_2 \Pi_{\mathbf{H}}(x, y; r) = 0,$$

$$\#_2 \Pi_{\mathbf{H}}(x, x; r \neq 0) = 0,$$

et

$$\#_2 \Pi_{\mathbf{H}}(x, x; r = 0) = 1.$$

On en déduit donc l'expression de $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = x + \sum_{\substack{y \in \text{Crit}(f^0) \\ [(R, u), v] \in \Pi_{\mathbf{H}}(x, y; r \geq K - C)}} q^{\omega([u]) + \omega([v])} \cdot y,$$

où $\omega([u]) + \omega([v]) \geq K - C > 0$. □

5.1.6 Preuve de la proposition 5.2.

Preuve de la proposition 5.2. Par la proposition 5.7, le morphisme φ , défini à la section 5.1.5, est du type :

$$\varphi = Id + P$$

où P est un morphisme à coefficients dans Λ contenant uniquement des puissances strictement positives de q . Le morphisme φ est donc inversible, d'inverse :

$$\sum_{i=0}^{+\infty} P^i.$$

Remarque 5.9. C'est pour pouvoir inverser le morphisme φ que l'on a besoin d'introduire l'anneau Λ et de considérer le complexe de Floer à coefficients dans cet anneau.

Soit c un cycle de $CF(H^0, J_0, q, K)$. On a :

$$\begin{aligned} \varphi(c) &= d^{H^0, q} \circ \psi^{\mathbf{H}}(c) + \psi^{\mathbf{H}} \circ d^{H^0, q}(c) \\ &= d^{H^0, q}(\psi^{\mathbf{H}}(c)). \end{aligned}$$

On en déduit que l'image d'un cycle par φ est un bord. Le morphisme φ est donc nul en homologie.

Finalement, on a défini un isomorphisme φ qui est nul en homologie. Donc $HF(L, q; J_0, \varepsilon, K) = 0$. □

5.1.7 Cas relevé

On a un résultat analogue à la proposition 5.2 pour l'homologie de Floer relevée à coefficients dans Λ :

Proposition 5.10. *Soit $L_0 \hookrightarrow M$ une sous-variété Lagrangienne monotone. Soit $(L_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de sous-variétés Lagrangiennes déplaçables qui converge, dans la topologie C^1 , vers L_0 , de sorte que pour tout n l'énergie de déplacement de L_n , notée $e(L_n)$, est bornée. Alors il existe $K > 0$ et un voisinage de L_0 tel que, pour tout L_n dans ce voisinage, si l'homologie de Floer relevée est bien définie pour un revêtement connexe $\overline{L_n}$ de L_n , alors on a :*

$$HF^{\overline{L_n}}(L_n, q; J_0, \varepsilon, K) = 0.$$

La preuve est similaire au cas non relevé.

5.2 Lien avec l'homologie singulière

Nous allons définir deux suites spectrales l'une convergeant vers l'homologie de Floer et l'autre vers l'homologie de Floer relevée, similaires à celles décrites à la section 2.3. On définira également un morphisme entre ces deux suites spectrales.

5.2.1 Définition des suites spectrales

La construction de nos deux suites spectrales étant semblables, nous détaillerons seulement celle convergeant vers l'homologie de Floer.

Soit $L_0 \hookrightarrow M$ une sous-variété Lagrangienne monotone de constante de monotonie η et dont le nombre de Maslov N_{L_0} est supérieur ou égal à 2. On fixe des constantes $\varepsilon > 0$ et $K > 2\eta(n+1) + 3\varepsilon$. On considère une sous-variété Lagrangienne presque monotone $L \hookrightarrow M$, appartenant à un voisinage $\mathcal{W}(L_0; J_0, \varepsilon, K)$ de L_0 comme défini au théorème 4.17.

Ces suites spectrales seront utilisées, dans les démonstrations des résultats de cette dernière partie, combinées à la proposition 5.2. On doit donc les définir à partir des complexes de Floer à coefficients dans l'anneau Λ , qui, rappelons-le, est défini de la manière suivante :

$$\Lambda = \left\{ \sum_{i=0}^{+\infty} n_i q^{r_i} \mid n_i \in \mathbf{Z}_2 ; r_i \in \mathbf{R} ; \forall c > 0, \#\{i \mid r_i < c\} < +\infty \right\}.$$

Soit f une fonction de Morse sur L satisfaisant aux hypothèses de la section 4.2.1. On considère le complexe de Floer, défini à partir des solutions de l'équation de Cauchy-Riemann, à coefficients dans Λ :

$$CF(L, L_1; J_0, q, K) = CF(L, L_1; J_0, K) \otimes \Lambda,$$

et sa différentielle, que l'on note d^q , est définie pour tout $x \in CF(L, L_1; J_0, q, K)$ par :

$$d^q(x) = \sum_{\substack{y \in \text{Crit}(f) \\ u \in \mathcal{L}_{J_0}^0(x, y)}} \#_2 \mathcal{L}_{J_0}^0(x, y) q^{\omega([u])} \cdot y.$$

Comme dans le cas monotone, la différentielle d^q se décompose en une somme finie d'opérateurs :

$$d^q = d_0^q + d_1^q + \cdots + d_\nu^q,$$

où $\nu = \left\lfloor \frac{\dim L + 1}{N_L} \right\rfloor$ et pour tout $k \in \{1, \dots, \nu\}$,

$$d_k^q : CF_\star(L, L_1; J_0, q, K) \rightarrow CF_{\star-1+kN_L}(L, L_1; J_0, q, K),$$

où le degré est donné par l'indice de Morse. L'opérateur d_0^q correspond à la différentielle de Morse.

Remarque 5.11. Dans le complexe de Morse la différentielle compte des trajectoires qui ne sortent pas du voisinage de Weinstein $U(L)$ et donc dont l'aire symplectique est nulle. Le changement de coefficient ne modifie pas l'homologie de ce complexe, qui correspond donc à l'homologie singulière de L .

Soit $A = \mathbf{Z}_2[T^{N_L}, T^{-N_L}]$, le sous anneau des polynômes de Laurent à coefficients dans $\mathbf{Z}_2$. On considère le Λ -module

$$C = CF(L, L_1; J_0, q, K) \otimes A.$$

Il définit un module différentiel gradué filtré. En effet :

1. C est une somme directe de sous-modules :

$$C = \bigoplus_{\ell \in \mathbf{Z}} C_\ell,$$

où $C_\ell = \bigoplus_{k \in \mathbf{Z}} CF_{\ell-kN_L}(L, L_1; J_0, q, K) \otimes A^k$ et $A^k \subset A$ est le sous-groupe $\mathbf{Z}_2 \cdot T^{kN_L}$.

2. C a une différentielle d définie par :

$$d = d_0^q \otimes 1 + d_1^q \otimes T^{-N_L} + \cdots + d_\nu^q \otimes T^{-\nu N_L}.$$

3. C admet une filtration croissante $F_p C$ définie, pour tous $p, \ell \in \mathbf{Z}$, par

$$F_p C_\ell = \bigoplus_{k \leq p} CF_{\ell-kN_L}(L, L_1; J_0, q, K) \otimes A^k.$$

La différentielle d respecte la filtration.

Dans notre cas $C_\ell = 0$ après un certain rang, on en déduit que cette filtration est bornée.

La démonstration du théorème 2.15 de P.Biran ([7]) est purement algébrique, on a donc un résultat analogue pour le complexe (C, d) :

Théorème 5.12. *La suite spectrale $\{E_{p,s}^r, \delta_r\}$ converge vers l'homologie de Floer Lagrangienne de L , $HF(L, L)$ et satisfait les propriétés suivantes :*

- $E_{p,s}^0 = CF_{p+s-pN_L}(L, L_1; J_0, q, K) \otimes A^{pN_L}$, $\delta_0 = d_0^q \otimes Id$.
- $E_{p,s}^1 = H_{p+s-pN_L}(L) \otimes \Lambda \otimes A^{pN_L}$, $\delta_1 = d_1^q \otimes T^{-N_L}(\cdot)$, où

$$d_1^q : H_{p+s-pN_L}(L) \otimes \Lambda \rightarrow H_{p+s-1-(p-1)N_L}(L) \otimes \Lambda$$

est induit par la composante d_1^q de la différentielle de Floer au niveau de l'homologie.

- *Pour tout $r \geq 1$, $E_{p,s}^r$ est de la forme $E_{p,s}^r = V_{p,s}^r \otimes A^{pN_L}$ avec $\delta_r = d_r' \otimes T^{-rN_L}$, où $V_{p,s}^r$ sont des espaces vectoriels sur $\mathbf{Z}_2$ et*

$$d_r' : V_{p,s}^r \rightarrow V_{p-r,s+r-1}^r$$

sont des morphismes définis pour tous p, s et satisfaisant $d_r' \circ d_r' = 0$. De plus,

$$V_{p,s}^{r+1} = \frac{\ker(V_{p,s}^r \rightarrow V_{p-r,s+r-1}^r)}{\text{Im}(V_{p+r,s-r+1}^r \rightarrow V_{p,s}^r)},$$

et pour $r = 0, 1$ on a

$$V_{p,s}^0 = CF_{p+s-pN_L}(L, L_1; J_0, q, KK), \quad V_{p,s}^1 = H_{p+s-pN_L}(L) \otimes \Lambda, \quad d_1' = d_1^q.$$

- *La suite spectrale dégénère à la page $\nu = \left\lfloor \frac{\dim L + 1}{N_L} \right\rfloor$ et pour tout $p \in \mathbf{Z}$,*

$$\bigoplus_{s \in \mathbf{Z}} E_{p,s}^\infty \cong HF(L, q; J_0, \varepsilon, K).$$

Dans les conditions du corollaire 4.31, i.e lorsque l'homologie de Floer relevée est définie, on construit de la même manière, à partir du complexe de Floer relevé à coefficient dans Λ , un module gradué filtré $(\bar{C}, \bar{d}, \bar{F})$. Celui-ci définit une suite spectrale $\{(\bar{E}_{p,s}^r, \bar{\delta}_r)\}$ qui vérifie une version relevée du théorème 2.15 : la suite spectrale $\{(\bar{E}_{p,s}^r, \bar{\delta}_r)\}$ démarre par l'homologie singulière de $\bar{L}$ à coefficients dans Λ et converge vers l'homologie de Floer relevée de L , $HF^{\bar{L}}(L, q; \varepsilon, K)$.

5.2.2 Morphisme de suites spectrales

Soit $p : \bar{L} \rightarrow L$ un revêtement connexe de L . On suppose que l'homologie de Floer relevée est définie. Alors on peut définir un morphisme de suite spectrale entre $\{(\bar{E}_{p,s}^r, \bar{\delta}_r)\}$ et $\{(E_{p,s}^r, \delta_r)\}$:

Lemme 5.13. *L'application $p : \bar{L} \rightarrow L$ induit un morphisme $p_\star$ entre les suites spectrales $\{(\bar{E}_{p,s}^r, \bar{\delta}_r)\}$ et $\{(E_{p,s}^r, \delta_r)\}$.*

La démonstration est similaire à celle du lemme 5.13.

5.3 Preuve du théorème 1.19

Théorème 1.19. *Soit $L_0 \hookrightarrow M$ une sous-variété Lagrangienne monotone. On suppose qu'il existe une suite $(L_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de sous-variétés Lagrangiennes déplaçables qui tend vers L_0 dans la topologie C^1 et d'énergie de déplacement bornée. Alors :*

- a) *Si L_0 est un espace $\mathbf{K}(\pi, 1)$, alors $N_{L_0} = 2$ si L_0 est orientable et $N_{L_0} \in \{1, 2\}$ si L_0 n'est pas orientable.*
- b) *On note $\tilde{L}_0$ le revêtement universel de L_0 . Si L est orientable et vérifie*

$$H_{2i+1}(\tilde{L}_0) = 0,$$

pour tout entier i , alors $N_{L_0} = 2$.

Démonstration. Soit $L_0 \hookrightarrow M$ une sous-variété Lagrangienne monotone de constante de monotonie η . Soit $(L_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de sous-variétés Lagrangiennes déplaçables qui tend vers L_0 dans la topologie C^1 et d'énergie de déplacement bornée. D'après la proposition 5.10 il existe un voisinage de L_0 tel que pour tout L_n dans ce voisinage, si l'homologie de Floer relevée est bien définie alors elle est nulle. Soit L une telle Lagrangienne, on note $\tilde{L}$ son revêtement universel.

Dans la démonstration de la proposition 4.3, on a montré que les groupes d'homotopie $\pi_2(M, L_0)$ et $\pi_2(M, L)$ étaient isomorphes. De plus, les disques correspondants par cet isomorphisme ont le même indice de Maslov. On en déduit que les nombres de Maslov de L_0 et de L sont égaux.

Les outils utilisés dans la démonstration du théorème 1.5 de [15] sont l'homologie de Floer relevée et la suite spectrale qui en découle. Ceux-ci ont été définis dans les sections précédentes dans le cas presque monotone. Le théorème 1.19 se démontre alors de la même manière, on suit donc la preuve de [15].

Preuve de a) Supposons que $N_L \geq 3$. Dans ce cas l'homologie de Floer relevée est bien définie pour tout revêtement de L , donc en particulier pour $\tilde{L}$. Par la remarque 4.2, L possède les mêmes propriétés topologiques que L_0 . Comme L_0 est asphérique, il en est de même pour L . D'où, $H_i(\tilde{L}) = 0$ pour tout $i \neq 0$. On en déduit que les morphismes d_i , intervenant dans la suite spectrale définie à la section 5.2.1, sont tous nuls. Donc la suite spectrale dégénère à la première page, i.e l'homologie de Floer relevée est isomorphe à l'homologie singulière de $\tilde{L}$ à coefficients dans Λ . D'autre part, par hypothèse, l'homologie de Floer relevée de L est nulle. On aboutit à une contradiction. On en déduit que $N_L \leq 2$, et donc également $N_{L_0} \leq 2$. Si L_0 est orientable alors N_{L_0} est pair i.e $N_{L_0} = 2$. Sinon, $N_{L_0} \in \{1, 2\}$.

Preuve de b) Supposons que $N_L \geq 3$. La sous-variété L vérifie les mêmes hypothèses que L_0 (toujours par la remarque 4.2). Comme L est orientable, son nombre de Maslov est pair. Le degré de l'application

$$d_1 : H_{p+q-pN_L}(\tilde{L}, \mathbf{Z}_2) \rightarrow H_{p+q-1-(p-1)N_L}(\tilde{L}, \mathbf{Z}_2)$$

apparaissant dans la suite spectrale est donc impair. Par hypothèse, pour tout i , $H_{2i+1}(\tilde{L}, \mathbf{Z}_2) = 0$, on en déduit que $d_1 = 0$. D'où $V_2^{p,q} = V_1^{p,q}$ et

$$d_2 : H_{p+q-pN_L}(\tilde{L}, \mathbf{Z}_2) \rightarrow H_{p+q-1-(p-1)N_L}(\tilde{L}, \mathbf{Z}_2).$$

Par le même argument, $d_2 = 0$. Ainsi par le même raisonnement, on obtient $d_j = 0$ pour tout $j \in \{1, \dots, \nu\}$. La suite spectrale dégénère donc à la première page, on en déduit que l'homologie de Floer relevée est isomorphe à l'homologie singulière de $\tilde{L}$ à coefficients dans Λ . Or par hypothèse, $HF^{\tilde{L}}(L, L; \varepsilon, K) = 0$. On aboutit à une contradiction. Donc $N_{L_0} = N_L = 2$. $\square$

5.4 Voisinage d'une sous-variété Lagrangienne et déplaçabilité

La preuve des théorèmes 1.21 et 1.23 repose sur l'existence de l'homologie de Floer et de l'homologie de Floer relevée pour les sous-variétés Lagrangiennes presque monotones.

5.4.1 Preuve du théorème 1.21

Théorème 1.21. *Soit L_0 une sous-variété Lagrangienne monotone de M satisfaisant l'une des assertions suivantes :*

- (i) $N_{L_0} \geq 3$.
- (ii) L_0 est orientable et $\pi_1(L_0)$ n'admet aucun élément non-trivial g dont la classe de conjugaison est finie

Soit $p : \tilde{L}_0 \rightarrow L_0$, le revêtement universel de L_0 tel que p induit l'application nulle en homologie sauf en degré 0. S'il existe une suite $(L_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de sous-variétés Lagrangiennes déplaçables qui tend vers L_0 dans la topologie C^1 alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e(L_n) = +\infty.$$

Démonstration. Soit $L_0 \hookrightarrow M$ une sous-variété Lagrangienne monotone de constante de monotonie η et dont le nombre de Maslov N_{L_0} est supérieur ou égal à 2. Soit $(L_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de sous-variétés Lagrangiennes déplaçables qui tend vers L_0 dans la topologie C^1 . Pour n assez grand, les éléments de cette suite appartiennent au voisinage de L_0 apparaissant dans l'énoncé de la proposition 5.2. Soit L une telle Lagrangienne. Par la remarque 4.2, L possède les mêmes propriétés topologiques que L_0 . Elle vérifie donc l'une des hypothèses (i) ou (ii) : son homologie de Floer relevée est définie pour tout revêtement connexe. De plus, si on note $p : \tilde{L} \rightarrow L$ son revêtement universel, alors p induit l'application nulle en homologie sauf en degré 0. Pour appliquer la démonstration du théorème 1.10, on doit construire un complexe de Floer minimal dans le cas classique et dans le cas relevé. Cette construction, qui

est purement algébrique, est en tout point similaire au cas monotone. En suivant la démonstration du théorème 1.10 on obtient que l'homologie de Floer de L est non nulle. On conclut par la contraposée de la proposition 5.2. $\square$

5.4.2 Preuve du corollaire 1.22

Corollaire 1.22. *Soit M une variété symplectique telle que $\pi_2(M) = 0$ ou telle que son nombre de Chern vérifie $N_{c_1}(M) > 2$. On considère le produit $\mathbf{RP}^n \times K$, où K est une variété à courbure sectionnelle strictement négative avec $H^1(K, \mathbf{Z}) \neq 0$. On suppose qu'il existe un plongement Lagrangien monotone et orientable $\mathbf{RP}^n \times K \hookrightarrow M$. S'il existe une suite $(L_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de sous-variétés Lagrangiennes déplaçables qui tend vers $\mathbf{RP}^n \times K$ dans la topologie C^1 alors :*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e(L_n) = +\infty.$$

Démonstration. D'après la preuve du corollaire 1.12, $\mathbf{RP}^n \times K$ satisfait l'hypothèse (ii) du théorème 1.21. De plus, le revêtement universel de $\mathbf{RP}^n \times K$, induit l'application nulle en homologie sauf en degré 0. On peut donc conclure en appliquant le théorème 1.21. $\square$

5.4.3 Preuve du théorème 1.23

Théorème 1.23. *Soit L_0 une variété $\mathbf{K}(\pi, 1)$ admettant un plongement Lagrangien monotone dans M . On suppose que L_0 satisfait l'une des assertions suivantes :*

- (i) $N_L \geq 3$.
- (ii) L est orientable et $\pi_1(L)$ n'admet aucun élément non-trivial g dont la classe de conjugaison est finie.

S'il existe une suite $(L_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de sous-variétés Lagrangiennes déplaçables qui tend vers L_0 dans la topologie C^1 alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e(L_n) = +\infty.$$

Démonstration. Soit $L_0 \hookrightarrow M$ une sous-variété Lagrangienne monotone $\mathbf{K}(\pi, 1)$ de constante de monotonie η et dont le nombre de Maslov N_{L_0} est supérieur ou égal à 2. Soit $(L_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de sous-variétés Lagrangiennes déplaçables qui tend vers L_0 dans la topologie C^1 . Pour n assez grand, les éléments de cette suite appartiennent au voisinage de L_0 apparaissant dans l'énoncé de la proposition 5.2. Soit L une telle Lagrangienne. Comme nous l'avons expliqué dans la preuve du théorème 1.21, puisque L_0 est un espace $\mathbf{K}(\pi, 1)$ satisfaisant l'une des hypothèses (i) ou (ii), il en est de même de L . L'homologie de Floer relevée est donc définie pour tout revêtement connexe de L .

Le but est de montrer que $H_0(L) \otimes \Lambda$ survit dans la limite de la suite spectrale définie à la section 5.2.1. En effet, si tel est le cas, on en déduit que l'homologie de

Floer est non nulle et on conclut par la contraposée de la proposition 5.2.

Soit $p : L \rightarrow \tilde{L}$ le revêtement universel de L . D'après le lemme 5.13, p induit un morphisme entre les deux suites spectrales définies à la section 5.2.1. On reprend alors les arguments de la démonstration du théorème 1.5, pour le calcul de la limite de $H_0(L)$ dans la suite spectrale. On obtient alors : $H_0^\infty(L) = H_0(L) \otimes \Lambda$. $\square$

5.4.4 Preuve du corollaire 1.24

Corollaire 1.22. *On suppose que L_0 est une sous-variété Lagrangienne monotone orientable de M à courbure sectionnelle strictement négative telle que $H^1(L, \mathbf{Z}) \neq 0$. S'il existe une suite $(L_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de sous-variétés Lagrangiennes déplaçables qui tend vers L_0 dans la topologie C^1 alors :*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e(L_n) = +\infty.$$

Démonstration. Soit $L_0 \hookrightarrow M$ une sous-variété Lagrangienne monotone de constante de monotonie η et dont le nombre de Maslov N_{L_0} est supérieur ou égal à 2. Elle vérifie l'une des deux assertions suivantes :

- (i) $N_{L_0} \geq 3$.
- (ii) L_0 est orientable et $\pi_1(L_0)$ n'admet aucun élément non-trivial g dont la classe de conjugaison est finie

En effet, si $N_{L_0} = 2$ alors l'hypothèse $H^1(L_0, \mathbf{Z}) \neq 0$ implique, par le lemme 3.4, que la condition (ii) est vérifiée. De plus, une variété à courbure sectionnelle négative est, en particulier, une variété $\mathbf{K}(\pi, 1)$. On conclut en appliquant le théorème 1.23. $\square$

Bibliographie

- [1] P. Albers. A Lagrangian Piunikhin-Salamon-Schwarz Morphism and Two Comparison Homomorphisms in Floer Homology. *International Mathematics Research Notices*, 2008 :rnm134, 2008.
- [2] V.I. Arnol'd. Characteristic class entering in quantization conditions. *Funktsional'nyi Analiz i Ego Prilozheniya*, 1 :1–14, 1967.
- [3] M. Audin. *Torus actions on symplectic manifolds*, volume 93. Progress in Mathematics, 2004.
- [4] M. Audin and M. Damian. *Morse theory and Floer homology*. Springer, 2014.
- [5] R. Bieri, W. Neumann, and R. Strebel. A geometric invariant for discrete groups. *Invent. Math.*, 90 :451–477, 1987.
- [6] R. Bieri and B. Renz. Valuations on free resolutions and higher geometric invariants of groups. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 63 :464–497, 1998.
- [7] P. Biran. Lagrangian non-intersections. *Geometric and Functional Analysis*, 16 :279–326, 2006.
- [8] P. Biran and K. Cieliebak. Symplectic topology on subcritical manifolds. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 76 :712–753, 2001.
- [9] P. Biran and O. Cornea. Quantum Structures for Lagrangian Submanifolds. 2007.
- [10] P. Biran and O. Cornea. Rigidity and uniruling for Lagrangian submanifolds. *Geom. Topol.*, 13(5) :2881–2989, 2009.
- [11] L. Buhovsky. The Maslov class of Lagrangian tori and quantum products in Floer cohomology. *ArXiv Mathematics e-prints*, August 2006.
- [12] K. Cieliebak and K. Mohnke. Punctured holomorphic curves and Lagrangian embeddings. *Inventiones mathematicae*, 212(1) :213–295, Apr 2018.
- [13] M. Damian. *Homologie de Novikov et applications en topologie symplectique*. PhD thesis, Ecole polytechnique, 1999.
- [14] M. Damian. Formes fermées non singulières et propriétés de finitude des groupes. *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.*, 33(4) :301–320, 2000.
- [15] M. Damian. Floer homology on the universal cover, a proof of Audin's conjecture and other constraints on Lagrangian submanifolds. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 87 :433–462, 2012.

- [16] M. Damian. On the topology of monotone Lagrangian submanifolds. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 48(1) :237–252, January 2015.
- [17] Mihai Damian. Morse theory and Floer homology. *Lecture notes*, 2012.
- [18] Y. Eliashberg, A. Givental, and H. Hofer. *Introduction to Symplectic Field Theory*, pages 560–673. Birkhäuser Basel, Basel, 2010.
- [19] Y. Eliashberg and M. Gromov. Convex symplectic manifolds. *Several complex variables and complex geometry, Part, 2* :135–162, 1991.
- [20] M. Entov and L. Polterovich. Rigidsubsets of symplectic manifolds. *Compositio Mathematica*, 3(145) :773–826, 2009.
- [21] J.D. Evans and J. Kedra. Remarks on monotone Lagrangians in $\mathbf{C}^n$. *Math. Res. Lett*, 21(6) :1241–1255, 2014.
- [22] A. Floer. Morse theory for Lagrangian intersections. *J. Diff. Geom.*, 28 :513–547, 1988.
- [23] Urs Frauenfelder. Gromov convergence of pseudoholomorphic disks. *Journal of Fixed Point Theory and Applications*, 3(2) :215–271, Sep 2008.
- [24] A. Gadbled. *Sous-variétés Lagrangiennes monotones*. PhD thesis, Université Louis Pasteur - Strasbourg I, 2008.
- [25] M. Gromov. Pseudoholomorphic curves in symplectic manifolds. *Invent. Math.*, 82(2) :307–347, 1985.
- [26] H. Hofer. On the topological properties of symplectic maps. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh : Section A Mathematics*, 115(1-2) :25–38, 1990.
- [27] N. Keddari. New lower bounds on the number of intersections of monotone Lagrangian submanifolds. *Transactions of the American Mathematical Society*, 2018.
- [28] F. Latour. Existence de 1-formes fermées non-singulières dans une classe de cohomologie de de Rham. *Publ. Math. IHES*, 80, 1994.
- [29] L. Lazzarini. Existence of a somewhere injective pseudo-holomorphic disc. *Geometric & Functional Analysis GAFA*, 10(4) :829–862, Nov 2000.
- [30] J. McCleary. *A user's guide to spectral sequences*. Cambridge University Press, 2001.
- [31] D. McDuff. Displacing Lagrangian toric fibers via probes. *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, 82, 2011.
- [32] D. McDuff and D. Salamon. *J-holomorphic curves and symplectic topology*, volume 52 of *Colloquium publications*. American Mathematical Society, 2004.
- [33] F. Ngô. *Structures quantiques de certaines sous-variétés Lagrangiennes non-monotones*. PhD thesis, Université de Montréal et Université Libre de Bruxelles, 2010.

- [34] S.P. Novikov. Multivalued functions and functionals. An analogue of the Morse theory. *Soviet. Math. Dokl.*, 24(2) :222–226, 1981.
- [35] Alexandru Oancea. The Künneth formula in Floer homology for manifolds with restricted contact type boundary. *Mathematische Annalen*, 334(1) :65–89, Jan 2006.
- [36] Y-G. Oh. Floer cohomology of Lagrangian intersections and pseudoholomorphic disks. I. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 46(7) :949–993, 1993.
- [37] Y-G. Oh. Floer cohomology of Lagrangian intersections and pseudoholomorphic disks II : $(\mathbf{C}P^n, \mathbf{R}P^n)$. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 46(7) :995–1012, 1993.
- [38] Y-G. Oh. Addendum to : "Floer cohomology of Lagrangian intersections and pseudoholomorphic disks. I". *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 48(11) :1299–1302, 1995.
- [39] Y-G. Oh. Floer cohomology, spectral sequences, and the Maslov class of Lagrangian embeddings. *International Mathematics Research Notices*, 7 :305–346, 1996.
- [40] A. Preissmann. Quelques propriétés globales des espaces de Riemann. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 15(1) :175–216, December 1942.
- [41] C. Viterbo. Intersection de sous-variétés lagrangiennes, fonctionnelles d'action et indice des systèmes hamiltoniens. *Bull. Soc. math. France*, 115 :361–390, 1987.
- [42] C. Viterbo. Symplectic real algebraic geometry. *Preprint*, 2000.

Intersections Lagrangiennes pour les sous-variétés monotones et presque monotones

Résumé

Dans la première partie de cette thèse, on donne, sous certaines hypothèses, une minoration du nombre de points d'intersections d'une sous-variété Lagrangienne monotone L avec son image par une isotopie Hamiltonienne. Dans le cas où L est un espace $K(\pi, 1)$, et en particulier à courbure sectionnelle strictement négative, le minorant est $1 + \beta_1(L)$, où β_1 est le premier nombre de Betti à coefficients dans $\mathbb{Z}_2$. Une autre conséquence est la non-déplaçabilité d'un plongement Lagrangien monotone de $\mathbb{R}P^n \times K$ (où K est une sous-variété à courbure sectionnelle strictement négative telle que $H^1(K, \mathbb{Z}) \neq 0$) dans certaines variétés symplectiques.

Dans la seconde partie, on considère une sous-variété Lagrangienne monotone L non déplaçable. En utilisant l'homologie de Floer définie pour les Lagrangiennes qui sont C^1 -proches de L , on obtient des informations sur son nombre de Maslov. De plus, si L peut être approchée par une suite de Lagrangiennes déplaçables, alors, sous certaines hypothèses topologiques sur L , l'énergie de déplacement des éléments de cette suite tend vers l'infini.

Résumé en anglais

In the first part of the thesis, we give, under some hypotheses, a lower bound on the intersection number of a closed monotone Lagrangian submanifold L with its image by a generic Hamiltonian isotopy. For monotone Lagrangian submanifolds L which are $K(\pi, 1)$ and, in particular with negative sectional curvature, this bound is $1 + \beta_1(L)$, where β_1 is the first Betti number with coefficients in $\mathbb{Z}_2$. Another consequence, is the non-displaceability of a monotone Lagrangian embedding of $\mathbb{R}P^n \times K$ (where K is a submanifold with negative sectional curvature such that $H^1(K, \mathbb{Z}) \neq 0$) in some symplectic manifolds.

In the second part, given a closed monotone Lagrangian submanifold L , which is not displaceable, we use Floer homology defined on Lagrangians which are C^1 -close to L , to get information about its Maslov number. Besides, if L can be approached by a sequence of displaceable Lagrangians, then, under some topological assumptions on L , the displacement energy of the elements of this sequence converge to infinity.