



HAL
open science

Optimisation topologique des transferts thermiques et massiques dans un canal asymétriquement chauffé

Delphine Ramalingom Barbary

► **To cite this version:**

Delphine Ramalingom Barbary. Optimisation topologique des transferts thermiques et massiques dans un canal asymétriquement chauffé. Optimisation et contrôle [math.OC]. Université de la Réunion, 2017. Français. NNT : 2017LARE0038 . tel-01879640

HAL Id: tel-01879640

<https://theses.hal.science/tel-01879640v1>

Submitted on 24 Sep 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



École doctorale n° 542 : Sciences Technologies Santé

Doctorat Université de La Réunion

THÈSE

pour obtenir le grade de docteur délivré par

l'Université de La Réunion

Spécialité doctorale "Physique-Energétique"

présentée et soutenue publiquement par

Delphine RAMALINGOM BARBARY

le 13 Dec 2017

Optimisation topologique des transferts thermiques et massiques dans un canal asymétriquement chauffé

Jury

Lingai Luo,	Directrice de recherche, Université de Nantes	Rapporteur
Christophe Menezo,	Professeur, Université Savoie Mont Blanc	Rapporteur
Jean Castaing-Lasvignottes,	Maître de Conférences HDR, Université de La Réunion	Examineur
Jean-Luc Harion,	Professeur, École des Mines de Douai	Examineur
Alain Bastide,	Professeur, Université de La Réunion	Directeur
Pierre-Henri Cocquet,	Maître de Conférences, Université de La Réunion	Encadrant

Université de la Réunion - Laboratoire PIMENT
Le Tampon, France

T
H
È
S
E



Titre Optimisation topologique des transferts thermiques et massiques dans un canal asymétriquement chauffé

Résumé Les présents travaux de thèse envisagent une nouvelle technique d'optimisation au sens topologique dans des géométries de type canal vertical où se réalisent des transferts de chaleur conducto-convectifs en régime laminaire. Les équations qui décrivent l'écoulement du fluide et le transfert d'énergie sont discrétisées par la méthode des volumes finis. La première partie du mémoire présente une nouvelle technique d'optimisation et sa validation sur des cas d'études de la littérature (single pipe, bend pipe). Cette technique consiste à définir des fonctions d'interpolation de type sigmoïde et permet d'obtenir une amélioration de l'interface fluide-solide au cours du processus d'optimisation. La seconde partie met en évidence les phénomènes physiques dans le canal asymétriquement chauffé, notamment l'influence de la stratification thermique extérieure et du rayonnement de surface sur les quantités aérauliques et thermiques. Enfin, une nouvelle expression de la puissance mécanique pour contrôler les pertes de charge (malgré l'ajout de matière) dans le canal vertical combinée avec une nouvelle expression de la puissance thermique sont étudiées. Le problème ainsi posé est résolu pour un écoulement en convection naturelle. Pour les cas considérés, chacune des fonctions coût est optimisée sans détériorer l'autre. Nous comparons aussi les valeurs des puissances obtenues par notre algorithme avec celles couramment utilisées dans la littérature et montrons que ces nouvelles fonctionnelles sont performantes ainsi que les formes obtenues par optimisation topologique.

Mots clés : Optimisation topologique, transfert de chaleur et de masse, canal vertical asymétriquement chauffé, fonction d'interpolation, fonction objectif.

Title Topology optimization of heat and mass transfer in an asymmetrically heated vertical channel

Abstract This thesis deals with topology optimization of mass and heat transfer in the framework of the vertical asymmetrically-heated channel. The incompressible Navier-Stokes equations coupled to the convection-diffusion equation through the Boussinesq approximation are employed and are solved with the finite volume method. We first propose a new interpolation technique for heat transfer optimization and validate it on referenced cases such as the "single pipe" and the "bend pipe". This new technique consists in the introduction of sigmoid interpolation functions to obtain a better definition of the interface between fluid and solid domains, during the optimization process. We study then physical phenomenon in the asymmetrically heated channel, in particular the influence of thermal stratification outside the channel and surface radiation on thermal and dynamic quantities. We thus highlight the size variation of reversed flow at the exit of the channel and the plug-effect linked on external thermal stratification. Finally, we propose a new expression of mechanical power in order to control charges losses (despite addition of material) in the vertical channel combined with the expression of thermal power. In all considered cases, our algorithm succeeds to enhance one of the phenomenon modelled by our new cost functions without deteriorating the other one. We also compare the values of standard cost functions from the literature over iteration of our optimization algorithm and show that our new cost functions and optimized designs are effective.

Keywords : Topology optimization, heat and mass transfer, asymmetrically-heated vertical channel, interpolation function, objective function.



Remerciements

Je tiens à remercier en tout premier lieu mon directeur de thèse Alain Bastide sans qui cette aventure n'aurait jamais eu lieu. Son soutien, ses encouragements et sa confiance ont joué un rôle primordial dans la réussite de mes travaux, concrétisant pour moi, le projet professionnel dont je rêvais.

Je remercie également très chaleureusement Pierre-Henri Cocquet qui m'a beaucoup aidée sur les notions mathématiques. Sa rigueur et sa méthodologie ont été pour moi un modèle qui m'a permis d'explorer des pistes que je n'aurai peut-être pas envisagées autrement.

Je remercie également les membres du laboratoire PIMENT qui m'ont toujours réservé le meilleur accueil au cours de cette aventure. Leurs encouragements m'ont beaucoup touchée.

Je remercie les doctorants du laboratoire qui m'ont intégrée naturellement au sein de leur groupe. J'ai tout particulièrement apprécié l'état d'esprit de partage et d'échanges qui y régnait.

Je tiens à remercier les représentants du personnel et l'Établissement qui ont appuyé mes demandes de congés individuels de formation. Sans ces 10 mois qui m'ont été accordés, je n'aurais pas pu poursuivre ma thèse au delà de 2016.

Je remercie mes amis et ma famille qui m'ont aussi soutenu de très près au point de partager toutes mes joies et mes angoisses depuis le début de cette thèse.

Et, je remercie enfin David, mon mari, et ses deux enfants qui par des gestes quotidiens m'ont été d'un grand réconfort. Face aux changements de rythme de vie conséquents à mon investissement dans cette thèse, leur patience et leur soutien ont été exemplaires.

Table des matières

Table des matières	vii
Liste des figures	ix
Liste des tableaux	xi
1 Introduction à l'optimisation topologique	1
1.1 Contexte et enjeux	1
1.2 Modélisation des phénomènes de transfert	3
1.3 Équations physiques du problème conducto-convectif	11
1.4 Méthodes de résolution des problèmes d'optimisation	12
1.5 Conclusion du chapitre	23
2 Nouvelle technique d'interpolation pour l'optimisation des transferts de chaleur	25
2.1 Objectif de cette étude	26
2.2 Governing equation	26
2.3 Interpolation	27
2.4 Gradient computation with the adjoint model	30
2.5 Numerical example	33
2.6 Conclusion of the study	42
2.7 Conclusion du chapitre	42
3 Impact de la stratification thermique et du rayonnement de surface en convection naturelle	43
3.1 Abstract	44
3.2 Introduction	44
3.3 Problem setting	47
3.4 Results and discussions	50
3.5 Conclusion	64
3.6 Conclusion du chapitre	64
4 Optimisation topologique d'un problème multi-physiques en convection naturelle	65
4.1 Abstract	66
4.2 Introduction	66
4.3 Governing equations	68
4.4 Topology optimization formulation	69
4.5 Topology optimization methods	71
4.6 Results	73
4.7 Conclusion	82
4.8 Compléments sur la convection naturelle pure	83

4.9 Conclusion du chapitre	87
5 Conclusion et perspectives	89
5.1 Conclusion	89
5.2 Perspectives	90
5.3 Production scientifique	91
6 Références	93
A Le problème adjoint par la méthode des multiplicateurs de Lagrange	I

Liste des figures

1.1	Système et bilan énergétique	4
1.2	Schéma de transfert de chaleur par conduction	4
1.3	Schéma du transfert de chaleur convectif	5
1.4	Schéma de transfert de chaleur par rayonnement	5
1.5	Changement d'échelle par prise de moyenne volumique	7
1.6	Illustration conceptuelle des 3 méthodes pour l'optimisation structurelle	14
1.7	Illustration de la répartition en damier ou « checkerboard pattern »	19
2.1	Interpolation functions with $q = 1$ and $\alpha_0 = \alpha_{\max}/4$. Left : $\alpha_{\max} = 200$. Right : $\alpha_{\max} = 2000$	28
2.2	Single pipe and Bend pipe	34
2.3	Velocity magnitude distribution in the single pipe	36
2.4	Velocity magnitude distribution in the bend pipe	36
2.5	Temperature distribution in the bend pipe	37
2.6	α distribution in the single pipe	39
2.7	$h_\tau(\alpha)$ distribution in the single pipe and proportion of material Q_t added in the domain after optimization	39
2.8	$k_\tau(\alpha)$ distribution in the single pipe and value of functional objectif \mathcal{J} after optimization	40
2.9	α distribution in the bend pipe	40
2.10	$h_\tau(\alpha)$ distribution in the bend pipe and proportion of material Q_t added in the domain after optimization	41
2.11	$k_\tau(\alpha)$ distribution in the bend pipe and value of functional objectif \mathcal{J} after optimization	41
3.1	Geometry	48
3.2	Streamtraces for Cases 1 – 2 – 3 – 4 – 5 without radiation	51
3.3	Streamtraces for Cases 1 – 2 – 3 – 4 with radiation and TCorps	52
3.4	Vertical velocity profiles at the outlet of the channel (a) Case with thermal stratification only, (b) Case with both thermal stratification and surface radiation	53
3.5	Vertical velocity profiles at the outlet of the heated wall (a) Case with thermal stratification only, (b) Case with both thermal stratification and surface radiation	54
3.6	Vertical velocity profiles at half of the height of the channel (a) Case with thermal stratification only, (b) Case with both thermal stratification and surface radiation	55
3.7	Vertical velocity profiles at the entrance of heated wall (a) Case with thermal stratification only, (b) Case with both thermal stratification and surface radiation	56

3.8	Vertical velocity profiles at the inlet of the channel (a) Case with thermal stratification only, (b) Case with both thermal stratification and surface radiation	57
3.9	Dimensionless temperature of left (a) and right wall (b) –stratification Cases	59
3.10	Dimensionless temperature of left (a) and right wall (b) – stratification and surface radiation Cases	60
3.11	Thermal stratification at inlet as a function of time	61
3.12	Streamtraces at different time step for a time function thermal stratification	61
3.13	Variation of inlet mass flow rate in function of time	62
3.14	Evolution of vertical velocity as a function time for different probes in the channel	63
3.15	Variation of Nusselt number at $Y=A/2$ in function of time	63
4.1	Geometry of the problem	69
4.2	Optimized designs and streamtraces at various Ri for constant $Re = 400$. Orange corresponds to solid material and purple corresponds to the fluid domain.	74
4.3	Adimensional vertical component of the velocity for $Re = \{200, 400\}$ (a), Temperature and vertical component of the velocity (b) at the end of the hot plate of the channel $y = 3H/2$	77
4.4	Adimensional vertical velocity at various Ri for constant $Re = 400$	78
4.5	Adimensional temperature, vertical velocity, α and $h(\alpha)$ at the end section of the channel and for various Ri for constant $Re = 400$ - annotation d is used for the width of the flow section	79
4.6	Mechanical power (a) and thermal power (b) without optimization noticed Ref and after optimization	80
4.7	Comparison of cost functions computations throughout iterations - $Re = 400$, $Ri = 100$, $\omega = 0.5$	81
4.8	Optimization results for constant $Re = 200$ and $Ri = 400$: Optimized design, $\omega = 0.5$ (a), Adimensional vertical component of the velocity (b), Adimensional temperature field (c)	81
4.9	Valeurs des puissances thermique et mécanique sans et avec optimisation	85
4.10	Canal optimisé et lignes de courant	86
4.11	Composante verticale de la vitesse	86

Liste des tableaux

1.1	Quelques nombres sans dimension utilisés en mécanique des fluides	11
1.2	Algorithme d'optimisation	22
2.1	Size of the transition zones for $\alpha_{\max} = 200$, $M = \alpha_{\max}/2$, $\varepsilon = 0.1$ and $\alpha_0 = \alpha_{\max}/4$.	30
2.2	Size of the transition zones for $\alpha_{\max} = 2000$, $M = \alpha_{\max}/2$, $\varepsilon = 0.1$ and $\alpha_0 = \alpha_{\max}/4$.	30
2.3	Algorithm of topology optimization	34
3.1	Parameters of the different cases	50
3.2	Dynamic quantities for Cases with radiation	52
3.3	Dynamic quantities for case without radiation	52
3.4	Thermal quantities for Cases without radiation	58
3.5	Thermal quantities for Cases with radiation	58
4.1	Algorithm of topology optimization	73
4.2	Reduction factor of cost functions - ref corresponds to the value of cost functions without optimization	76

Liste des symboles

Lettres grecques

α	variable de conception, inverse de la perméabilité
α_0	paramètre dans les fonctions d'interpolation de type sigmoïde
β	direction de descente dans la méthode du gradient du gradient conjuguée
ϵ_i	facteur d'émission de la surface i
Γ	frontière, bord du domaine étudié Ω
γ_i	coefficient de pondération de \mathcal{J}_i
λ	conductivité thermique
ν	viscosité dynamique du fluide
Ω	domaine du modèle étudié
ω	coefficient de pondération normalisé
ρ	densité du fluide
σ	constante de Stefan-Boltzmann
τ	paramètre dans les fonctions d'interpolation de type sigmoïde
θ	température sans dimension
ξ	multiplicateurs de Lagrange

Lettres latines

m	débit massique sans dimension
\mathbf{n}	vecteur normale extérieure à la surface Γ
\mathbf{u}	vecteur vitesse
\mathcal{J}	fonction coût à optimiser
\mathcal{L}	lagrangien dans la méthode de Lagrange
\mathcal{R}	matrice des contraintes du problème étudié
Φ	flux d'énergie ou de chaleur
$\tilde{\mathbf{J}}$	système linéaire pour le rayonnement
\vec{e}_y	vecteur unité selon l'axe des ordonnées
C_p	capacité calorifique

d_w	largeur de l'écoulement retour en sortie du canal
h_c	coefficient de transfert de chaleur
h_τ	fonction d'interpolation de la variable α
k	conductivité thermique
k_τ	fonction d'interpolation de la conductivité thermique
l_w	longueur de l'écoulement retour en sortie du canal
Nu_1	nombre de Nusselt moyen sur la paroi chaude
$Nu_{1/2}$	nombre de Nusselt local calculé à mi-hauteur de la paroi chaude
Q_t	proportion de matière dans le domaine
q_{ri}	flux net radiatif émis par l'élément de surface i
Ra_b	nombre de Rayleigh modifié selon la longueur b
V_{tot}	volume total du domaine étudié
A	hauteur du canal étudié
b	largeur du canal
H	hauteur de la paroi chauffée du canal
p	pression statique sans dimension
Pr	nombre de Prandtl
Re	nombre de Reynolds
Ri	nombre de Richardson
S	surface d'une frontière du domaine
U	vitesse caractéristique du fluide
u	vitesse sans dimension
Y	variable suivant l'axe des ordonnées pour le canal

Indices

∞	à l'infini
b	mélange (bulk)
CN	de convection naturelle
f	composant fluide
in	entrée du domaine étudié
max	valeur seuil maximale
n	composante normale
out	sortie du domaine étudié
p	paroi
ref	données issues d'une simulation de référence
s	composant solide
t	composante tangentielle

Chapitre 1

Introduction à l'optimisation topologique

Sommaire

1.1 Contexte et enjeux	1
1.2 Modélisation des phénomènes de transfert	3
1.2.1 Les modes de transfert	4
1.2.2 Les phénomènes de transfert thermique dans les milieux poreux	6
1.3 Équations physiques du problème conducto-convectif	11
1.3.1 Équations de Brinkman pour l'écoulement en milieu poreux	11
1.3.2 Équation de l'énergie	12
1.4 Méthodes de résolution des problèmes d'optimisation	12
1.4.1 État de l'art	12
1.4.2 Verrous scientifiques et stratégies	17
1.4.3 Objectifs et orientations de la thèse	19
1.4.4 Méthodes et algorithme d'optimisation	20
1.5 Conclusion du chapitre	23

Dans un premier temps, ce chapitre énonce la stratégie de maîtrise d'énergie de la société contemporaine avant de rappeler les différents mécanismes de transferts de chaleur ainsi que les modèles mathématiques les décrivant en milieu poreux. Dans un second temps, nous explicitons les équations aux dérivées partielles utilisées dans les problèmes d'optimisation des transferts conducto-convectif. Un état de l'art sur les méthodes de résolution des problèmes d'optimisation est également présenté ainsi que les verrous scientifiques à lever. La fin du chapitre est consacrée à la description des méthodes numériques choisies et aux objectifs et orientations des travaux de la thèse .

1.1 Contexte et enjeux

Dans le contexte énergétique actuel, la hausse des prix de l'énergie et la raréfaction des sources d'énergie fossiles poussent la société industrielle contemporaine à devenir de plus en plus performante. Pour rester compétitifs, les industriels doivent non seulement garantir le meilleur rendement, mais également réduire leur consommation énergétique.

Ainsi, outre l'aspect financier et environnemental, ils doivent adopter des stratégies de maîtrise d'énergie. Cet objectif de performance énergétique passe en particulier par l'optimisation des différents systèmes de transferts de chaleur, quelle que soit leur taille. Ces systèmes correspondent souvent à des échangeurs de chaleur.

Les transferts de chaleur entre deux fluides à des températures différentes sont des phénomènes récurrents dans le secteur industriel. En effet, une majorité des activités de transformation nécessitent souvent à un stade de leur processus un échange de chaleur tel que l'évacuation d'une chaleur excédentaire, la réalisation d'un changement de phase, ou une conversion de cette chaleur en travail. Dans la plupart des cas, les deux fluides ne sont pas en contact, et le transfert s'effectue à travers une surface d'échange. Au sein de la paroi séparatrice, le mécanisme de transmission de la chaleur est la conduction, et, sur chacune des deux surfaces de contact avec les fluides, ce sont presque toujours les phénomènes de convection qui prédominent.

Les échangeurs de chaleur ou échangeurs thermiques occupent ainsi une place primordiale et indispensable dans tous les systèmes thermiques, qu'il soit pour un usage industriel (chimie, pétrochimie, sidérurgie, agroalimentaire, production d'énergie), pour l'automobile, l'aéronautique ou le bâtiment résidentiel ou tertiaire. L'échangeur thermique a pour fonction principale le transfert de l'énergie thermique d'un fluide vers un autre à des niveaux de température distincts. Il assure des fonctionnalités diverses et variées et peut servir, par exemple, à :

- préchauffer ou refroidir un liquide ou un gaz comme le climatiseur, la pompe à chaleur ou encore, le radiateur automobile ;
- récupérer la chaleur thermique avant son rejet dans le milieu naturel, par exemple, comme le fait un récupérateur sur air vicié dans une installation de ventilation à double flux ;
- capter la chaleur pour transmission à un usage domestique, comme les capteurs solaires thermiques, ainsi que les radiateurs domestiques ;
- transférer de l'énergie depuis un milieu qu'on veut garder confiné, comme dans une centrale nucléaire, vers un système plus accessible.

Les échangeurs de chaleur assurent aussi quelquefois le rôle de déshumidificateurs ou de condenseurs thermiques. Dans certains procédés de production d'énergie, ils peuvent être utilisés comme des évaporateurs qui contribuent à l'évaporation partielle ou complète d'un liquide. Enfin, ils peuvent avoir un rôle permettant la congélation et la fusion d'une phase liquide ou vapeur grâce à une paroi refroidie.

L'optimisation des échangeurs de chaleur concerne donc plusieurs secteurs de l'industrie. Les rendre plus compacts, plus légers avec moins de pertes de chaleur lors de leur conception est un élément essentiel de la stratégie de performance énergétique pour améliorer les performances et diminuer les coûts. C'est ainsi qu'a été conçue toute une nouvelle génération d'engins, de moteurs, de générateurs et de convertisseurs. Ceux-ci sont fabriqués plus compacts afin de réduire leur poids, ce qui engendre ainsi une économie lors de leur fonctionnement et aussi lors de leur conception (cf. Vargas and Bejan [126]), tout en augmentant leur rendement énergétique. Dans le secteur électronique, les circuits électriques deviennent plus denses et plus rapides et les puces des ordinateurs de type multiprocesseurs sont regroupées dans des espaces plus petits. Cette compacité augmente la densité de puissance dissipée des équipements, ce qui entraîne une augmentation des échanges thermiques. Par conséquent, notre compétence à réduire efficacement

la chaleur produite dans un petit volume est une réelle problématique. Cependant, étant donné les différents domaines concernés, il est important de disposer de méthodologies d'optimisation indépendantes de la géométrie prédéfinie de l'élément sujet à des échanges de chaleur. Cela permet d'aborder des configurations totalement différentes en s'affranchissant des contraintes lourdes, inhérentes au paramétrage des formes.

L'optimisation des transferts de chaleur peut être abordée de différentes manières en fonction de l'échelle à laquelle le système thermique est considéré. Dans le contexte industriel, l'optimisation des échanges thermiques relatifs à un processus signifie rechercher un agencement idéal des éléments sujets à des échanges de chaleur, tout en assurant un dimensionnement macroscopique optimal de chaque sous-système. Les études effectuées au cours de cette thèse envisagent l'optimisation des échanges de chaleur à une échelle plus microscopique. L'idée est de proposer de nouvelles géométries internes à des modèles d'échangeurs de chaleur en vue d'atteindre, suivant les besoins du concepteur, soit de meilleures performances thermiques soit une répartition optimale de matériau pour réduire, par exemple, le coût de production. L'échelle à laquelle les transferts sont considérés se situe donc au niveau de l'interface fluide-solide.

Pour résumer, le but du concepteur est de déterminer la meilleure organisation de matériau produisant de la chaleur pour satisfaire deux objectifs :

- minimiser la puissance nécessaire à la mise en mouvement du fluide, ce qui est économiquement lié au coût de fonctionnement du système ;
- maximiser l'énergie thermique transférée dans l'ensemble du système.

Nous pouvons noter que ces deux objectifs peuvent être antagonistes. En effet, augmenter la surface d'échange dans le but d'accroître le transfert thermique du solide au fluide entraîne une augmentation de la dissipation visqueuse le long de l'interface fluide-solide. Par conséquent, la perte de charge augmente inéluctablement. Les problématiques pour le concepteur sont donc les suivantes : Comment satisfaire le premier objectif au moindre détriment de l'autre ? Notamment, pour des cas où les pertes de charge sont incontournables et liées à un écoulement retour du fluide dans le système thermique ? Enfin, comment concevoir des formes qui seraient techniquement réalisables ?

Le canal asymétriquement chauffé aussi décrit comme deux plaques verticales entre lesquelles circule un fluide et soumis à un phénomène de transferts de chaleur conducto-convectif est un modèle très utilisé dans des systèmes d'ingénierie. Une part importante des dispositifs industriels tels que le mur Tombe [26, 49, 117], la cheminée solaire [10, 26, 73, 90], le refroidissement de panneaux photovoltaïques [32, 53] ou encore le refroidissement des circuits imprimés correspondent à ces géométries ouvertes. De plus, parmi ces systèmes industriels, la convection naturelle est un des principaux phénomènes de transfert d'énergie. La maîtrise et la compréhension des phénomènes liés à la convection naturelle sont toujours des enjeux majeurs dans la conception et le dimensionnement de ces systèmes. Enfin, l'étude du phénomène de convection naturelle dans des canaux verticaux a fait l'objet de nombreuses recherches depuis les travaux expérimentaux initiés par Elenbaas [42].

Les études effectuées dans cette thèse s'intéressent ainsi à l'optimisation topologique des échanges de chaleur et de masse dans un canal vertical asymétriquement chauffé avec un écoulement de convection naturelle prédominant. En amont des travaux d'optimisation au sens topologique de ces transferts, nos travaux focaliseront sur :

- la définition de l'interface fluide-solide pendant le processus d'optimisation ;
- les instabilités numériques liées aux techniques de filtres souvent utilisées pendant le processus d'optimisation ;

— les formulations physiques et mathématiques des objectifs de conception.

1.2 Modélisation des phénomènes de transfert

Comprendre les différents mécanismes par lesquels se fait le transfert de chaleur, c'est comprendre la façon dont l'énergie thermique est produite ou transférée au sein d'un système ou d'un système à l'autre. Cette analyse permet de déterminer comment améliorer ou limiter les transferts de chaleur au sein de systèmes thermiques tels que les échangeurs de chaleur.

Le problème d'optimisation est souvent abordé dans les configurations physiques et géométriques générales suivantes : un fluide s'écoule dans un domaine rectangulaire entre des parois adiabatiques et d'autres, chauffées par un flux de température ou une température constante. Les vitesses du fluide en entrée et en sortie ont des profils connus ou définis. La température du fluide en entrée est connue et laissée libre en sortie. La paroi générant un flux de chaleur pariétal transfère en régime stationnaire l'ensemble de la puissance qu'il produit au fluide.

Un transfert thermique dans un système ne se produit que s'il existe des gradients de température entre les différentes parties du système. Ce qui implique que celui-ci n'est alors pas en équilibre thermodynamique c'est-à-dire la température n'est pas uniforme dans tout le système. La thermique se propose de décrire quantitativement (dans l'espace et dans le temps) l'évolution des grandeurs caractéristiques du système, en particulier la température, entre l'état d'équilibre initial et l'état d'équilibre final. L'analyse des transferts de chaleur consiste à identifier les modes de transferts mis en jeu au cours de la transformation et à déterminer quantitativement la variation de température en chaque point du système au cours du temps.

La valeur instantanée de la température en tout point de l'espace est un scalaire, appelé champ de température. Le cas où le champ de température est indépendant du temps correspond à un régime dit permanent ou stationnaire. Le cas où le champ de température évolue avec le temps correspond au régime dit variable ou instationnaire. Dans le cadre de cette thèse, les problèmes d'optimisation de transferts thermiques sont traités en régime stationnaire.

Ce paragraphe rappelle d'abord les différents modes de transferts de chaleur nécessaires pour établir un bilan d'énergie. Pour plus de précisions, le lecteur est invité à se référer par exemple au livre écrit par Jannot [68] sur lequel s'appuie ce paragraphe. Ensuite, comme lors du processus d'optimisation topologique, la forme du domaine consiste aussi en des zones poreuses, nous rappelons les phénomènes de transferts (conduction et convection) en milieu poreux en nous appuyant sur l'article de Bories et al. [21] des Techniques de l'Ingénieur.

1.2.1 Les modes de transfert

Bilan d'énergie. Soit (\mathcal{S}) un système. Pour effectuer un bilan d'énergie, il faut établir l'inventaire des différents flux de chaleur qui influent sur l'état du système. Ils peuvent être de différents types comme indiqué sur la Figure 1.1. On applique ensuite le 1er principe de la thermodynamique :

$$\phi_e + \phi_g = \phi_s + \phi_{st}. \quad (1.1)$$

Les différents flux d'énergie s'expriment selon le mode de transfert impliqué. Il existe trois modes de transfert thermique fondamentaux : la conduction, la convection et le

rayonnement. En les reportant dans (1.1), on obtient ainsi l'équation différentielle décrivant l'évolution de la température en chaque point du système.

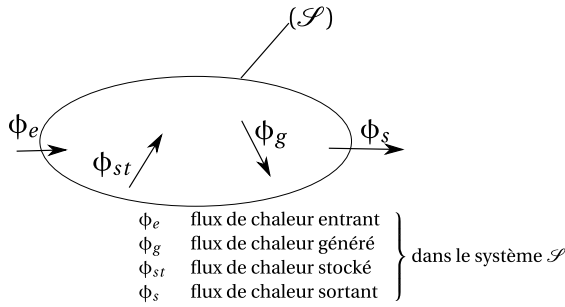


FIGURE 1.1 – Système et bilan énergétique

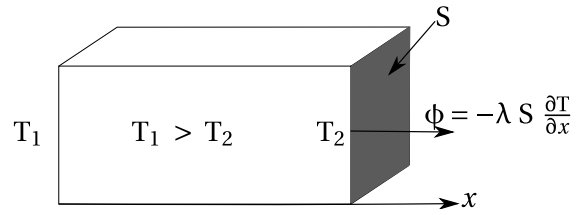


FIGURE 1.2 – Schéma de transfert de chaleur par conduction

Le transfert de chaleur par conduction. Le transfert de chaleur par conduction au sein d'un milieu opaque, s'effectue sans déplacement de matière et sous l'influence d'une différence de température. Ce transfert de chaleur résulte d'un transfert d'énergie cinétique d'une molécule à une autre molécule adjacente. La propagation de la chaleur par conduction à l'intérieur d'un corps s'effectue ainsi selon deux mécanismes distincts : une transmission par les vibrations des atomes ou molécules et une transmission par les électrons libres.

La théorie de la conduction repose sur l'hypothèse de Fourier qui se formule ainsi : « le flux ϕ est proportionnelle au gradient de température » (Figure 1.2) :

$$\phi = -\lambda S \text{ grad } T,$$

où ϕ est le flux de chaleur transmis par conduction (W), λ la conductivité du milieu ($\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$) et S l'aire de la section de passage du flux de chaleur (m^2).

Le transfert de chaleur par convection. Le transfert de chaleur par convection se produit entre un solide et un fluide, l'énergie étant transmise par déplacement du fluide. Le mouvement du fluide peut résulter de la différence de masse volumique due aux différences de température (on parle alors de convection libre ou naturelle) ou à des moyens purement mécaniques (on parle alors de convection forcée).

Ce mécanisme de transfert est illustré à la Figure 1.3 et est régi par la loi de Newton :

$$\phi_{conv} = h_c S (T_p - T_\infty),$$

où ϕ_{conv} est flux de chaleur transmis par convection (W), h_c le coefficient de transfert de chaleur par convection ($\text{W.m}^{-2}\text{°C}^{-1}$), T_p la température de surface du solide (°C), T_∞ la température du fluide loin de la surface du solide, et S l'aire de la surface de contact solide/fluide.

La valeur du coefficient de transfert de chaleur par convection h est fonction de la nature du fluide, de sa température, de sa vitesse et des caractéristiques géométriques de la surface de contact solide-fluide.

Le transfert de chaleur par rayonnement. Le transfert de chaleur par rayonnement est un transfert d'énergie électromagnétique entre deux surfaces. La prise en compte du rayonnement entre un solide et son milieu environnant est illustrée par la Figure 1.4 et se fait par la relation :

$$\phi_r = \sigma \epsilon_p S (T_p^4 - T_\infty^4), \quad (1.2)$$

où ϕ_r est le flux de chaleur transmis par rayonnement (W), σ la constante de Stefan ($5.67 \cdot 10^8 \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$), ϵ_p le facteur d'émission de la surface, T_p la température de la surface (K), T_∞ la température du milieu environnant la surface (K), et S l'aire de la surface (m^2).

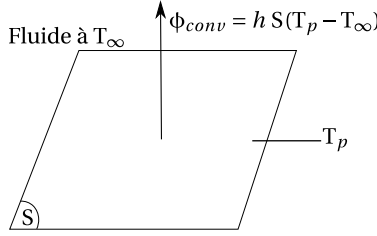


FIGURE 1.3 – Schéma du transfert de chaleur convectif

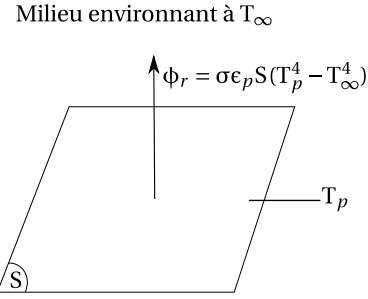


FIGURE 1.4 – Schéma de transfert de chaleur par rayonnement

Le flux de chaleur lié à un débit massique. Lorsqu'un débit massique \dot{m} de matière entre dans un système avec une température T_1 et en ressort avec une température T_2 , on doit considérer dans le bilan, le flux de chaleur entrant correspondant :

$$\phi_e = \dot{m} c (T_1 - T_2), \quad (1.3)$$

où ϕ_e est le flux de chaleur entrant dans le système (W), c la chaleur spécifique ($\text{J kg}^{-1}\text{K}^{-1}$), \dot{m} le débit massique (kg s^{-1}), et T_1, T_2 les températures d'entrée et de sortie (K).

Le stockage d'énergie. Le stockage d'énergie correspond à une augmentation d'enthalpie du système au cours du temps, d'où :

$$\phi_{st} = \rho V c \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (1.4)$$

où ϕ_{st} est le flux de chaleur stocké dans le système (W), c la chaleur spécifique ($\text{J kg}^{-1}\text{K}^{-1}$), V le volume (m^3), ρ la masse volumique (kg m^{-3}), et T la température (K).

La génération d'énergie. Elle intervient lorsqu'une autre forme d'énergie (chimique, électrique, mécanique, nucléaire) est convertie en énergie thermique. On peut l'écrire sous la forme suivante :

$$\phi_g = \dot{q} V, \quad (1.5)$$

où ϕ_g est le flux thermique généré dans le système (W), \dot{q} la densité volumique d'énergie générée (Wm^{-3}), et V le volume (m^3).

1.2.2 Les phénomènes de transfert thermique dans les milieux poreux

Pendant le processus d'optimisation, la forme du domaine consiste en des zones solides, fluides et poreuses. Pour simuler des écoulements fluides autour des obstacles poreux et solides ayant des géométries complexes, on utilise la méthode des milieux continus fictifs (Bories et al. [20]). Le principal avantage de cette méthode est son implémentation efficace pour représenter des structures complexes avec des frontières mobiles. Or, les formes des structures solides changent en permanence pendant le processus d'optimisation.

Les modèles mathématiques de description des transferts de chaleur en milieu poreux s'inspirent directement des méthodes qui sont traditionnellement utilisées en mécanique des milieux continus pour rechercher des expressions locales des lois de conservation. Dans ce paragraphe sont rappelées les formulations pour décrire les transferts de chaleur par conduction et par convection dans un milieu poreux.

La méthode consiste à représenter le milieu poreux par un milieu continu fictif équivalent et à effectuer un changement d'échelle par prise de moyenne volumique des équations de la thermodynamique sur un volume élémentaire représentatif. Une introduction à la prise de moyenne sur un volume élémentaire représentatif est proposée par Kaviani [70]. Cette méthode revient formellement à appliquer un opérateur de prise de moyenne volumique, noté $\langle \bullet \rangle$, aux divers champs dans le volume chargé en fluide afin de passer d'une description microscopique, régie par des équations de conservation locales telles qu'elles sont proposées en mécanique des milieux continus, à une description macroscopique correspondant à l'échelle du milieu continu fictif, équivalent au milieu poreux (cf. Figure 1.5). Le système d'équations macroscopiques obtenu évite d'avoir à spécifier la configuration individuelle de chaque phase (solide, fluide) et ne nécessite que la connaissance des conditions aux limites sur les frontières du milieu poreux.

Caractérisation d'un milieu poreux. Introduisons d'abord quelques notions de base associées aux propriétés structurales des milieux poreux.

1. La porosité est définie comme le rapport du volume des cavités sur le volume occupé par le milieu poreux. La porosité totale est l'espace poreux connecté à travers lequel s'effectue l'écoulement des fluides :

$$\epsilon_t = \frac{\text{volume des pores accessible}}{\text{volume de l'échantillon}}.$$

2. La surface spécifique est définie comme le rapport de l'aire de la surface totale des interfaces solide-pore A_{sf} au volume de l'échantillon V :

$$\alpha_A = \frac{A_{sf}}{V}.$$

3. La tortuosité géométrique est généralement définie comme le rapport de la longueur moyenne réelle L_e des lignes de courant du fluide traversant l'échantillon à la longueur L de ce dernier. L'effet de tortuosité induit une diminution de la diffusivité apparente à travers un milieu poreux, que l'on traduira par un facteur de tortuosité τ_g :

$$\tau = \left(\frac{L_e}{L} \right)^2.$$

Transfert de chaleur par conduction. Si sous l'action d'un gradient de température appliqué à un milieu poreux saturé par une seule phase, le fluide saturant reste immobile, le transfert thermique au sein du milieu poreux est purement conductif. On définit la conductivité thermique effective ou équivalente λ^* en utilisant une relation donnant le vecteur densité du flux thermique ϕ en fonction du gradient thermique analogue à la loi de Fourier pour les milieux homogènes :

$$\phi = -\lambda^* \nabla T.$$

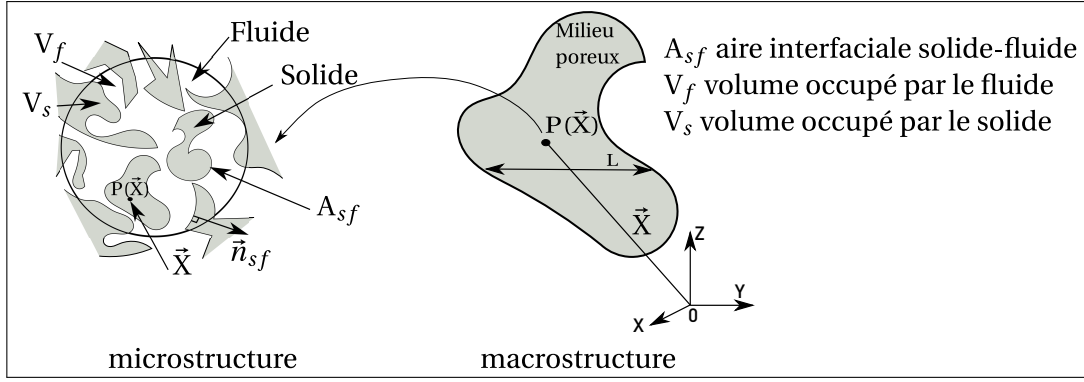


FIGURE 1.5 – Changement d'échelle par prise de moyenne volumique

Dans le cas anisotrope, cette expression peut être généralisée et λ^* devient alors un tenseur $\bar{\lambda}^*$ qui dépend des conductivités thermiques des phases fluides et solides, des fractions volumiques de chaque phase et de la structure du domaine poreux.

À l'échelle microscopique, les équations qui rendent compte du transfert de chaleur par conduction au sein d'un volume poreux limité par une surface S sont :

$$(\rho C_p)_s \frac{\partial T_s}{\partial t} = \nabla \cdot (\lambda_s \nabla T_s) \text{ dans } V_s, \quad (1.6)$$

$$(\rho C_p)_f \frac{\partial T_f}{\partial t} = \nabla \cdot (\lambda_f \nabla T_f) \text{ dans } V_f, \quad (1.7)$$

$$T_s = T_f \text{ sur } A_{sf} \quad (1.8)$$

$$\lambda_f \nabla T_f \cdot \mathbf{n}_{sf} = \lambda_s \nabla T_s \cdot \mathbf{n}_{sf} \text{ sur } A_{sf}. \quad (1.9)$$

Dans ces expressions V_s (resp. V_f) représente le volume occupé par la phase solide (resp. fluide), $A_{sf} = A_{fs}$ est l'aire de la surface de l'interface solide-fluide au sein du milieu poreux et \mathbf{n}_{sf} est le vecteur unitaire normal à l'interface solide-fluide, orienté positivement du solide vers le fluide. Après changement d'échelle par prise de moyenne volumique des équations ci-dessus, des termes supplémentaires traduisant les échanges conductifs entre phases et les effets de structure apparaissent. De plus, on simplifie les équations en admettant l'hypothèse de l'équilibre thermique local entre phases. Ce qui conduit au modèle suivant :

$$(\rho C_p)^* \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot \left[[\epsilon_t \lambda_f + (1 - \epsilon_t) \lambda_s] \nabla T + \frac{\lambda_f - \lambda_s}{V} \int_{A_{sf}} \mathbf{n}_{sf} (T_f - T) dA \right], \quad (1.10)$$

avec $(\rho C_p)^* = \epsilon_t (\rho C_p)_f + (1 - \epsilon_t) (\rho C_p)_s$.

Kaviany [71] montre que : $T_f - T = \mathbf{b}_f \cdot \nabla T$, où \mathbf{b}_f est un vecteur ne dépendant que de la géométrie de la structure poreuse, de λ_f et de λ_s . Ce qui donne la forme suivante pour décrire le transfert de chaleur par conduction :

$$(\rho C_p)^* \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\bar{\lambda}^* \nabla T), \quad (1.11)$$

avec $\bar{\lambda}^* = [\epsilon_t \lambda_f + (1 - \epsilon_t) \lambda_s] \bar{\mathbf{I}} + \frac{\lambda_f - \lambda_s}{V} \int_{A_{sf}} \mathbf{n}_{sf} \mathbf{b}_f dA$.

Lorsqu'un milieu poreux est macroscopiquement isotrope, la conductivité thermique équivalente est un scalaire λ^* . Celle-ci est généralement déterminée par voie expérimentale

ou évaluée à l'aide de modèles géométriques et statistiques, ou de corrélations empiriques (cf. Kaviany [71]).

Transfert de chaleur par convection. C'est le transfert de chaleur qui se manifeste lorsque le milieu poreux est saturé par un fluide unique non isotherme, en écoulement dans l'espace des pores, la structure poreuse étant fixe. Ce mode de transfert de chaleur résulte de la conduction thermique, précédemment introduite et du transport d'énergie par les particules fluides en mouvement. On distingue trois principaux types de transfert de chaleur par convection en milieu poreux : la convection naturelle, la convection mixte et la convection forcée. Compte tenu des faibles vitesses d'écoulement généralement observées en milieu poreux, les termes de compressibilité et de dissipation visqueuse peuvent être négligés dans l'équation macroscopique de l'énergie de la phase fluide :

$$(\rho c_p)_f \frac{\partial T_f}{\partial t} + (\rho c_p)_f \mathbf{u} \cdot \nabla T_f = \nabla \cdot (\lambda_f \nabla T_f). \quad (1.12)$$

Dans cette équation, le terme $(\rho c_p)_f \mathbf{u} \cdot \nabla T_f$ correspond au transport d'enthalpie par l'écoulement. Celui-ci est régi par les équations de la mécanique des fluides (équation de Navier-Stokes et de conservation de la masse) dans l'espace des pores ; quant à la phase solide, indéformable, son équation de l'énergie microscopique (1.6) demeure inchangée.

De la même façon que dans le cas de conduction thermique, on obtient les équations macroscopiques suivantes décrivant le transfert de chaleur par convection à l'échelle locale :

$$\epsilon_t \frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_f \mathbf{u}) = 0, \quad (1.13)$$

$$\mathbf{u} = \frac{\bar{k}}{\mu} \cdot (\nabla \rho - \rho_f \mathbf{g}) \quad \text{équation de Darcy,} \quad (1.14)$$

$$(\rho c_p)^* \frac{\partial T}{\partial t} + (\rho c_p)_f \mathbf{u} \cdot \nabla T = \nabla \cdot [(\bar{\lambda}^* + \bar{\lambda}_d) \cdot \nabla T], \quad (1.15)$$

avec \mathbf{g} l'accélération due à la pesanteur, \bar{k} le tenseur de perméabilité intrinsèque du milieu, \mathbf{u} la vitesse de filtration, $\bar{\lambda}_d$ le tenseur de conductivité thermique effective due à la dispersion et μ la viscosité dynamique du fluide.

Dans l'établissement de l'équation macroscopique de l'énergie (1.15), l'hypothèse de l'équilibre thermique locale est retenue. Plusieurs types de modélisation sont possibles, la plus employée est celle à deux équations s'appuyant sur une représentation schématique du milieu poreux par deux milieux continus fictifs. Ce modèle s'écrit le plus souvent comme suit :

$$(1 - \epsilon_t) (\rho c_p)_s \frac{\partial T_s}{\partial t} = \nabla \cdot (\bar{\lambda}_s^* \cdot \nabla T_s) - h_{sf} \alpha_A (T_s - T_f), \quad (1.16)$$

$$\epsilon_t (\rho c_p)_f \frac{\partial T_f}{\partial t} + (\rho c_p)_f \mathbf{u} \cdot \nabla T_f = \nabla \cdot (\bar{\lambda}_f^* \cdot \nabla T_f) - h_{sf} \alpha_A (T_f - T_s). \quad (1.17)$$

Ces équations qui décrivent le transfert de chaleur dans chacune des phases du volume représentatif sont couplées par le coefficient de transfert thermique entre phases h_{sf} qui dépend de la surface spécifique et de la structure de l'écoulement.

Les tenseurs de conductivités thermiques λ_s^* et λ_f^* sont des conductivités équivalentes incluant les effets de microstructures. Ils satisfont la relation :

$$\bar{\lambda}_s^* + \bar{\lambda}_f^* = \bar{\lambda}^* + \bar{\lambda}_d.$$

Lorsque $T_f = T_s = T$, l'addition de (1.16) et de (1.17) conduit à l'équation unique (1.15).

Le tenseur de conductivité thermique $\bar{\lambda}_d$ qui apparaît dans l'équation (1.15) est une fonction de la porosité, de la structure du domaine poreux, des propriétés thermiques des phases et des caractéristiques hydrodynamiques de l'écoulement intervenant par l'intermédiaire du nombre de Péclet Pe :

$$Pe = \frac{U d (\rho c_p)_f}{\epsilon_t \lambda_f},$$

d étant le diamètre des grains constituant le domaine poreux. Le nombre de Péclet est le paramètre déterminant de l'évolution de la dispersion thermique.

L'équation de Darcy (1.14) rend compte de la moyenne de l'écoulement au sein du milieu poreux et son domaine de validité est associé à des valeurs de Reynolds ($Re = U d/\nu$) inférieures à 10. Lorsque les conditions sont telles que l'équation de Darcy ne peut être utilisée, le modèle semi-heuristique suivant est souvent mis en œuvre pour décrire le bilan de quantité de mouvement d'un fluide visqueux newtonien en milieu poreux :

$$\underbrace{\frac{\rho_f}{\epsilon_t} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \frac{\mathbf{u}}{\epsilon_t} \right)}_{(a)} = \underbrace{(-\nabla p)}_{(b)} + \underbrace{\rho_f \mathbf{g}}_{(c)} + \underbrace{(\nabla \cdot \boldsymbol{\mu}_{eff}) \nabla \mathbf{u}}_{(d)} - \underbrace{\frac{\mu}{k} \mathbf{u}}_{(e)} - \underbrace{C_E \rho_f |\mathbf{u}| \mathbf{u}}_{(f)}, \quad (1.18)$$

avec :

- (a) les effets d'accélération macroscopiques (généralement négligeables),
- (b) le gradient de pression,
- (c) les forces de volume,
- (d) le terme de Brinkman faisant intervenir une viscosité effective μ_{eff} ,
- (e) le terme de Darcy (résultant des effets de viscosité à l'échelle microscopique),
- (f) le terme de Forchheimer (traduisant l'influence des effets d'inertie à l'échelle microscopique).

Le terme de Brinkman est souvent utilisé pour rendre compte du développement et des caractéristiques des couches limites macroscopiques au voisinage des interfaces (milieu poreux adjacent à une paroi solide imperméable, à un fluide homogène ou à un autre milieu poreux). En ce qui concerne la constante C_E du terme de Forchheimer, elle peut être estimée analytiquement pour les milieux poreux granulaires (cf. Macdonald et al. [88]).

En convection naturelle, les écoulements du fluide sont induits dans le champ de la pesanteur par les variations de masse volumique dues aux différences de température. La modélisation mathématique classique de ces écoulements et du transfert de chaleur qui est associé s'appuie sur les équations (1.13), (1.14), (1.15) dans lesquelles les variations de masse volumique du fluide sont données par une équation du type :

$$\rho_f(T) = \rho_f(T_0) [1 - \beta(T - T_0)], \quad (1.19)$$

avec β le coefficient d'expansion thermique et $\rho_f(T_0)$ la masse volumique à la température T_0 . On complète le système des équations (1.13), (1.14), (1.15) et (1.2.2) par l'ensemble des conditions aux limites avant la mise en œuvre des méthodes numériques de convection. Dans ce contexte, l'ensemble des phénomènes est caractérisé sous forme adimensionnelle par :

— le nombre de Rayleigh :

$$Ra^* = \frac{k \rho_f g \beta \Delta T H}{\mu [\lambda^* / (\rho c_p)_f]},$$

Nom	Définition	Description
Reynolds	$Re = \frac{U L}{\nu}$	$\frac{\text{forces d'inertie}}{\text{forces visqueuses}}$
Prandtl	$Pr = \frac{Pe}{Re} = \frac{\nu}{\kappa}$	$\frac{\text{diffusivité de la quantité de mouvement}}{\text{diffusivité de la chaleur}}$
Grashof	$Gr = \frac{g \beta \Delta T L^3}{\nu^2}$	$\frac{\text{forces de gravité}}{\text{forces visqueuses}}$
Richardson	$Ri = \frac{Gr}{Re^2} = \frac{g \beta \Delta T L}{U^2}$	$\frac{\text{énergie potentielle}}{\text{énergie cinétique}}$
Froude	$Fr = \frac{U^2}{gL}$	$\frac{\text{forces d'inertie}}{\text{forces de gravité}}$

TABLEAU 1.1 – Quelques nombres sans dimension utilisés en mécanique des fluides

rapport des forces de flottabilité à la viscosité et la diffusivité thermique. On retrouve dans cette expression les caractéristiques du fluide saturant les pores, $[\rho_f, \beta, (\rho c_p)_f, \mu]$ généralement choisies à la température moyenne du milieu, celles du milieu poreux $[k, \lambda^*, (\rho c_p)^*]$ et les variables de référence, l'échelle de longueur de référence H , l'écart de température de référence ΔT .

- les rapports d'aspects ou de forme de la configuration géométrique avec L une échelle de longueur de référence.

Il existe plusieurs nombres sans dimension qui apparaissent dans le processus d'adimensionnement des équations et beaucoup d'entre eux peuvent être liés comme le montre le tableau 1.1.

1.3 Équations physiques du problème conducto-convectif

Dans ce paragraphe, nous présentons les équations étudiées dans la thèse. Pendant le processus d'optimisation, la forme des structures solides change en permanence et consiste en des zones solides, fluides et poreuses. Les équations qui décrivent les phénomènes du problème sont les équations de Brinkman en milieu poreux et l'équation de l'énergie.

1.3.1 Équations de Brinkman pour l'écoulement en milieu poreux

Parmi les méthodes utilisées, nous avons la méthode de pénalisation de Brinkman qui est proposée pour résoudre des écoulements visqueux et incompressibles en pénalisant l'équation de la quantité de mouvement. L'idée principale est de modéliser les obstacles solides comme un milieu poreux avec une porosité proche de l'unité, mais une imperméabilité proche de zéro, c'est-à-dire une perméabilité proche de l'infini.

Un fluide incompressible en état stationnaire est régi par les équations de Navier-Stokes sous l'hypothèse de Boussinesq comme suit :

$$\rho_f \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mu_f \nabla^2 \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \quad (1.20)$$

$$\text{avec } \mathbf{f} = \rho_f (T_0) \beta (T - T_0) \mathbf{e}_z,$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (1.21)$$

où ρ_f est la densité du fluide, μ_f est la viscosité dynamique du fluide, \mathbf{u} est la vitesse du fluide, p est la pression et \mathbf{f} est une force. Ensuite, l'effet des conditions de non-glissement est mis en œuvre en ajoutant aux équations de Navier-Stokes le terme de pénalisation de Brinkman $\alpha \mathbf{v}$, qui est physiquement interprété comme la force de friction de Darcy [22, 116] :

$$\rho_f \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mu_f \nabla^2 \mathbf{u} + \alpha \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, \quad (1.22)$$

où α est le paramètre de pénalisation de Brinkman qui varie spatialement dans le domaine et dont les valeurs permettent de distinguer les régions fluides, des régions solides et des régions poreuses. Lorsque $\alpha = 0$, l'équation (1.22) devient l'équation classique de Navier-Stokes (1.20), ce qui correspond à la région du fluide. Lorsque α prend de grandes valeurs et tend vers $+\infty$, alors $\mathbf{u} = \alpha^{-1}(\mathbf{f} - \rho_f \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \mu_f \nabla^2 \mathbf{u})$, ce qui fait tendre formellement la vitesse vers 0 [8]. Ces zones correspondent au domaine solide et on notera $\alpha = \alpha_s$. De plus, dans le milieu poreux, le terme de convection devient négligeable et c'est l'équation classique de Brinkman qui est résolue :

$$-\mu_f \nabla^2 \mathbf{u} + \alpha_s \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}. \quad (1.23)$$

Dans la région dite solide, la vitesse est nulle voire proche de 0. La condition de non-glissement à la surface du solide est ainsi automatiquement satisfaite à l'interface fluide-solide. Il n'est plus nécessaire de spécifier explicitement la condition à la frontière fluide-solide. Ainsi des mouvements de fluide sont correctement résolus près des obstacles solides (Angot et al. [8], Khadra et al. [72]).

Dans la littérature, il est d'usage d'affecter la valeur 0 à $\alpha = \alpha_f$, correspondant à la région fluide. Mais la valeur de α_s correspondant aussi au paramètre de pénalité doit être correctement choisie. Selon Lee [84], les convergences de solution sont bonnes pour des valeurs de α_s supérieures à 10^6 , pour un nombre de Reynolds égal à 400.

1.3.2 Équation de l'énergie

Traditionnellement, l'équation de l'énergie s'exprime comme suit :

$$\rho_f C_p \mathbf{u} \nabla T - \nabla \cdot (\lambda \nabla T) = 0, \quad (1.24)$$

où T est la température, C_p et λ la conductivité thermique. Le terme de dissipation visqueuse est négligé comparé aux autres termes. Dans ces travaux, la conductivité thermique varie entre deux régions différentes comme suit :

- Région fluide ($\alpha_f = 0$) : $\lambda = \lambda_f$, la conductivité thermique du fluide
- Région solide ($\alpha_s = +\infty$) : $\lambda = \lambda_s$, la conductivité thermique du solide

Dans la région du solide, la vitesse du fluide tend vers 0 en lien avec la pénalisation de Brinkman, donc l'équation de l'énergie devient celle de la conduction pure sans le terme de convection :

$$-\nabla \cdot (\lambda_s \nabla T) = 0. \quad (1.25)$$

Dans la région du fluide, l'équation de l'énergie (1.24) se maintient dans sa forme originale avec la conductivité thermique du fluide :

$$\rho_f C_p \mathbf{u} \nabla T - \nabla \cdot (\lambda_f \nabla T) = 0 \quad (1.26)$$

1.4 Méthodes de résolution des problèmes d'optimisation

Dans ce paragraphe, après une brève introduction aux problèmes d'optimisation, nous identifions les verrous scientifiques à lever lors de la résolution de problèmes d'optimisation topologique en milieux continus. Et, après avoir positionné les éléments essentiels explorés au cours des travaux de la thèse, nous décrivons les méthodes et techniques numériques que nous utilisons.

1.4.1 État de l'art

Un problème d'optimisation de transferts conducto-convectifs peut se formuler ainsi :

$$\begin{aligned} & \text{Minimiser } \mathcal{J}(X, \alpha) \text{ tel que :} \\ & \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{R}(X, \alpha) = 0, \\ \text{B}(X|_{\Gamma}, \alpha) = x_0, \end{array} \right. \end{aligned} \quad (1.27)$$

où :

- $X = (u, p, \theta)$ sont les variables d'état qui définissent les grandeurs caractéristiques du problème : la vitesse u , la pression p et la température θ ;
- α est la variable de contrôle introduit comme le paramètre de pénalisation de Brinkman dans le paragraphe précédent § 1.3 ;
- les contraintes \mathcal{R} qui traduisent l'évolution des variables d'état en fonction du paramètre de contrôle et en respectant les lois de la physique. Ce sont nos équations physiques du problème conducto-convectif introduites au § 1.3.
- la fonctionnelle objectif ou coût \mathcal{J} qui définit les objectifs que l'on souhaite atteindre.
- B est un opérateur permettant de prendre en compte les conditions limites
- x_0 correspond aux conditions limites du problème

Dans la littérature, les problèmes d'optimisation peuvent être résolus selon trois méthodes identifiées par Bendsøe and Sigmund [15] : l'optimisation de taille, l'optimisation de forme et l'optimisation topologique. Chacune des méthodes se distingue par leurs hypothèses structurelles initiales et la manière d'obtenir la géométrie finale. La Figure 1.6 illustre ces différentes catégories d'optimisation, chacune dans leur état initial et dans leur état final. L'optimisation de taille est la plus classique des trois méthodes et est toujours largement utilisée par les ingénieurs, par exemple pour dimensionner une poutre de section transversale donnée contre la déformation. Pour cette méthode, la forme est définie a priori et la taille est redéfinie lors du processus d'optimisation. Aucune modification du modèle géométrique n'est possible. L'optimisation de forme est souvent limitée à de petits ajustements de la forme. Elle consiste à chercher une forme optimale par le biais de déformations. On peut admettre un changement des dimensions ainsi qu'une modification de la configuration de l'objet, mais il n'est pas permis d'altérer sa connectivité ou sa nature. Ainsi, pour cette méthode, la forme approximative est définie a priori et elle est ajustée par optimisation. L'optimisation topologique est une méthode qui permet non seulement de changer la forme de la structure, mais aussi de modifier sa topologie, c'est-à-dire la manière dont les éléments solide et fluide sont connectés entre eux. L'optimisation peut démarrer à partir d'un domaine formé complètement de matière, ou rempli totalement de fluide, ou encore un mélange de matière et de fluide. Toute modification

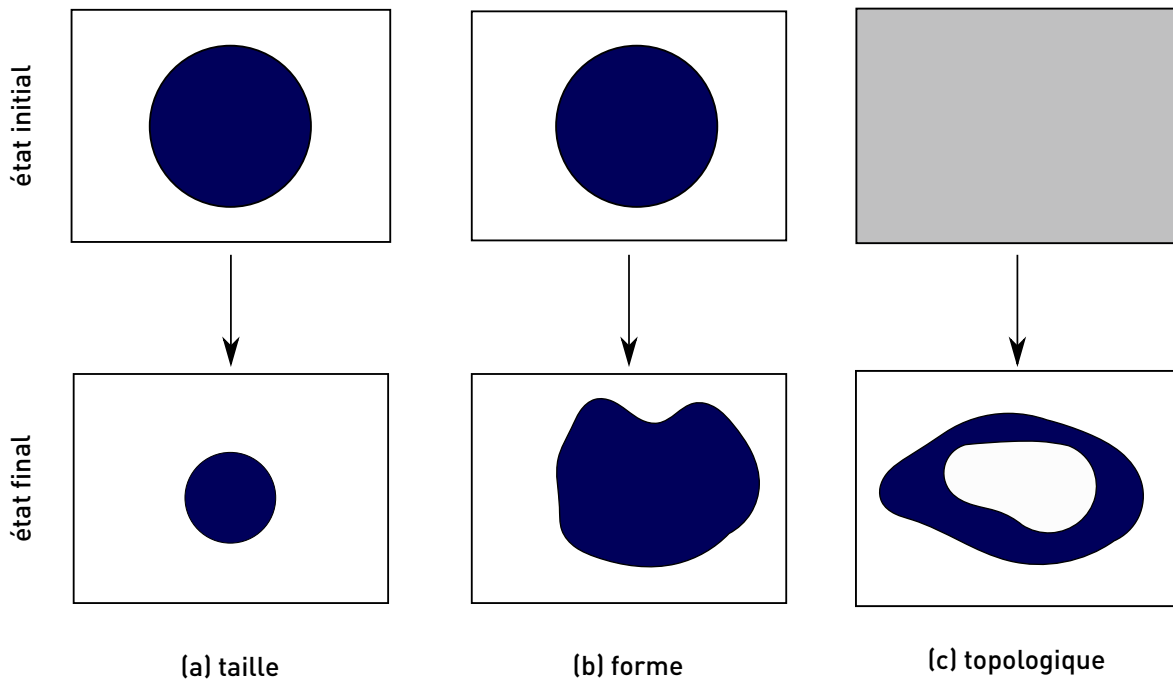


FIGURE 1.6 – Illustration conceptuelle des 3 méthodes pour l'optimisation structurelle

au sein de la matière est possible, la connectivité peut être repensée à chaque étape de l'optimisation, par ajout ou suppression de matière.

Chaque méthode possède ses propres avantages et inconvénients et le choix de la méthode dépend du problème physique étudié. Par exemple, les formes obtenues par optimisation topologique ne sont pas toutes techniquement réalisables. À l'inverse, l'optimisation de taille fournit des solutions qui sont technologiquement réalistes, mais, du fait d'un état initial très contraint, elles peuvent être éloignées de leur optimum mathématique.

Le but de l'optimisation topologique est de déterminer la répartition optimale de matériau pour un problème physique donné soumis à des contraintes de conception. Un paramètre local variant entre 0 et 1 est introduit de manière à indiquer les régions contenant du matériau ($\phi = 1$) et celles n'en contenant pas ($\phi = 0$). En optimisant les différentes variables, la connectivité structurelle du matériau à l'intérieur du domaine évolue.

L'optimisation topologique a été initiée par Bendsøe et al. [16]. Ils ont développé deux méthodes numériques simultanément : l'approche par densité ou l'approche SIMP (Solid Isotropic Microstructure with Penalization), et l'approche par homogénéisation. L'approche SIMP a été largement utilisée par Zhou and Rozvany [141] puis par Rozvany et al. [115]. Par cette approche, les propriétés topologiques du matériau sont interpolées selon la variable de contrôle, utilisée comme variable de conception. La méthode d'optimisation topologique a rencontré un large succès pour les problèmes de mécanique du solide comme le montrent les publications au cours de 10 dernières années Bendsøe and Sigmund [15], Eschenauer and Olhoff [43], Hassani and Hinton [57, 58, 59], Liang [86], Sigmund and Maute [118]. La méthode a depuis été étendue à d'autres domaines physiques comme l'acoustique [64, 75, 143], l'électromagnétique [40, 128, 140], la rhéologie [79], les systèmes fluidiques [19].

Borrvall and Petersson [22] ont introduit l'optimisation topologique pour des problèmes d'écoulement. Ils ont ajouté le terme de Darcy $\alpha \mathbf{u}$ à l'équation traditionnelle de Stokes, ce qui correspond à la multiplication du coefficient de friction de Darcy α à la vitesse (cf. Nield and Bejan [98]). Ils ont ensuite représenté la forme optimisée par une

répartition en deux phases de matériau ayant des propriétés distinctes : solides ($\alpha_s = +\infty$) et fluides ($\alpha_f = 0$). Il est important de noter que cette méthode analytique est une approche par domaine fictif avec une pénalisation de Brinkman (Angot et al. [8]) basée sur la théorie des milieux poreux, comme expliqué dans le § 1.2.2. On nomme d'ailleurs cette méthode « l'approche de Brinkman ». Afin de combiner cette stratégie avec la méthode traditionnelle d'optimisation topologique, le coefficient de friction de Darcy (α) est interpolé comme une fonction de variable locale ϕ . Ainsi, $\phi = 0$ indique une région contenant du fluide (i.e., $\alpha(0) = 0$) et $\phi = 1$ indique une région contenant du matériau, dite région solide (i.e., $\alpha(1) = +\infty$). Cela permet de passer d'un problème où le paramètre de contrôle est discret à un problème d'optimisation continu. Il existe d'autres méthodes alternatives à l'approche de Brinkman, comme la méthode ESO (Evolutionary Structural Optimization) Xie and Steven [133, 134] et la méthode du level-set Coffin and Maute [33], Lawry and Maute [82], Van Dijk et al. [125], Wang et al. [129], Zhou and Rozvany [141]. Celle-ci nécessite un effort de remaillage et de conservation de mémoire (book-keeping) au cours des processus d'optimisation. L'approche de Brinkman a été depuis utilisée pour des problèmes de transport Andreasen et al. [6] de flux réactifs Okkels and Bruus [101], de flux transitoires Deng et al. [38], Kreissl et al. [80], d'interaction fluide-structure Yoon [137].

Pour résoudre le système d'équations (1.27), des algorithmes spécifiques sont nécessaires pour atteindre un optimum global sous réserve qu'il existe et soit unique. Dans le cas général, le choix de la méthode dépend principalement de la complexité du problème d'optimisation topologique, c'est-à-dire du nombre de variables d'état, si les fonctions impliquées sont linéaires ou non, si elles sont convexes ou non.

D'abord, lorsque le système d'état n'est pas linéaire comme (1.27), des méthodes adaptées à l'optimisation non-linéaire doivent être appliquées. L'emploi de la méthode lagrangienne, appelée aussi méthode des multiplicateurs de Lagrange, est généralement favorisée (Becker et al. [14]). Cela consiste à transformer le problème avec contraintes en un problème sans contrainte.

Ensuite, dans les problèmes d'optimisation avec un grand nombre de variables d'état, les algorithmes basés sur le gradient sont souvent utilisés. Plusieurs algorithmes basés sur le gradient ont été développés dans la littérature (Bendsøe and Sigmund [15], Eschenauer and Olhoff [43], Hassani and Hinton [57, 58, 59], Liang [86], Sigmund and Maute [118]), mais le calcul des gradients de la fonction objectif \mathcal{J} selon les différentes variables d'état (on parle aussi de sensibilités) est assez coûteux en temps de calcul. Des méthodes adjointes (continues ou discrètes) ont alors été développées pour calculer ces gradients plus efficacement (Bendsøe and Sigmund [15]). L'avantage de la méthode adjointe est de calculer l'ensemble des sensibilités par deux solveurs indépendants du nombre de variables d'état. Un algorithme très connu et très utilisé est la méthode des asymptotes mobiles (MMA) développée par Svanberg [122, 123]. Cette méthode nécessite l'évaluation de la fonction objective et des contraintes, ainsi que de leurs gradients respectifs afin de créer une approximation locale et convexe du problème. Cette méthode a fait ses preuves dans de nombreux problèmes d'optimisation topologique de domaines physiques très variés, notamment pour des problèmes à contraintes multiples traités par Marck [93], Lee [84], Dede [37], Alexandersen [1], Borrvall and Petersson [22], Gersborg-Hansen et al. [52], Guest and Prévost [55], Olesen et al. [102].

Enfin, plusieurs auteurs ont essayé d'améliorer les algorithmes et les techniques d'optimisation topologiques en se concentrant sur les coûts de calcul. Par exemple, Guest and Genut [54] ont réduit la dimension du problème d'optimisation en utilisant des variables de conception adaptatives. Néanmoins, l'optimisation des transferts thermiques

pour des problèmes d'écoulement fluide est un sujet récent et les résultats sont assez dispersés dans la littérature. Dbouk [36] a mené une revue littéraire sur ce sujet, en recensant notamment les techniques d'optimisation développées pour des problèmes de transfert de masse et de chaleur, leurs avantages et leurs inconvénients ainsi que leurs limitations. Un résumé sur les études d'optimisation appliquées aux transferts de chaleur est listé dans le tableau 1.4.1 repris de l'article de Dbouk [36] :

Études	Type d'écoulement	Discrétisation	Adjoint	Optimiseur	Référence
1	Transitoire, laminaire, incompr.	FEM	Discret	MMA/SLP	Lee [84]
2	Station., laminaire, incompr.	FVM	Discret	MMA	Marck [93], Marck et al. [92]
3	Station., laminaire, incompr.	FEM	Continue	MMA	Dede [37]
4	Station., laminaire, incompr.	FEM	Discret	MMA parallèle	Alexandersen [1]
5	Station., turbulent, incompr.	FVM	Continue	ALM steepest descent	Kontoleontos et al. [77]
6	Station., laminaire, incompr.	FVM	Continue	MMA	Oevelen and Baelmans [100]
7	Station., laminaire, incompr.	FEM	Discret	n/a	Koga et al. [76]
8	Station., laminaire, incompr.	FEM	Continue	n/a	Yaji et al. [135]
9	Station., laminaire, incompr.	FEM	Discret	MMA	Yoon [137]
10	Station., laminaire, incompr.	FEM	n/a	MMA	Yoon [138]
11	Transitoire, laminaire, incompr.	XFEM	Discret	GCMMA	Coffin and Maute [33]
12	Station., laminaire, incompr.	XFEM	Discret	GCMMA	Coffin and Maute [33]
13	Station., laminaire, incompr.	FEM	n/a	n/a méthode gradient	Zhou et al. [142]

Yoon [137], Lee [84] et Marck [93] sont ainsi les premiers à proposer l'optimisation topologique pour des problèmes de transfert thermique conducto-convectifs. La majorité de ces problèmes ne résolvent que les transferts de chaleur conjugués en utilisant la méthode des éléments finis (FEM). Or Bruns [25] a démontré l'apparition de problèmes numériques dans le cas d'une discrétisation par FEM quand le terme d'advection est ajouté explicitement à l'équation de l'énergie. Il obtient en effet des oscillations non physiques dans les régions à faible masse volumique. Marck [93] a, quant à lui, fait le choix de la méthode des volumes finis. Comme beaucoup d'études en optimisation topologique, la finalité est d'établir une méthodologie capable d'aborder l'optimisation des transferts de masse et de chaleur, impliquant nécessairement la résolution d'un écoulement fluide. La méthode des volumes finis tire avantage de sa propriété intrinsèque de conservation de flux. Elle permet par ailleurs une meilleure compréhension physique du traitement mathématique du couplage pression-vitesse [31, 46, 47]. Ensuite, le secteur de l'industriel utilise déjà de nombreux codes commerciaux s'appuyant sur la méthode des volumes finis. Il est alors incontournable de concevoir un outil d'optimisation topologique dans le contexte de la mécanique des fluides numériques sans s'appuyer sur la méthode des volumes finis. Ce sont les raisons pour lesquelles la méthode de discrétisation choisie dans le cadre de cette thèse est celle des volumes finis.

Ensuite, la plupart des auteurs utilisent la méthode de pénalisation de Brinkman. Cependant, Lee [84] met en évidence les limites de la technique de pénalisation de Brinkman en obtenant des résultats contraires à l'objectif qui était de maximiser le refroidissement dans un canal en 3D. Il montre des imperfections près des interfaces fluide-solide liées aux oscillations dans la caractérisation des éléments (fluide ou solide) et des oscillations des champs de sensibilité. De même, Kreissl and Maute [78] obtiennent des solutions non physiques avec notamment l'existence d'une pression dans le domaine contenant du matériau. La première partie de cette thèse (cf. chapitre 2) explore une nouvelle méthode d'optimisation qui fait intervenir des fonctions de type sigmoïde à la place des fonctions d'interpolation (1.28), (1.29) afin de mieux définir l'interface fluide-solide lors du processus d'optimisation topologique.

La plupart des études considèrent des fonctionnelles objectifs de type énergie ou puissance. Lee [84] minimise la dissipation de l'énergie cinétique. Marck [93], Marck et al. [92],

Marck and Privat [91] proposent des fonctions multi-objectives pondérées. Ils cherchent à minimiser la puissance mise en œuvre pour mettre en mouvement le fluide tout en maximisant la puissance thermique récupérée. Koga et al. [76] minimisent la perte de pression dans l'écoulement du fluide et maximisent les effets de la dissipation de chaleur. Pour cela, ils considèrent la puissance thermique dissipée au sein de l'écoulement fluide, par le biais de l'expression de l'énergie potentielle donnée par Borrvall and Petersson [22] et la seconde fonctionnelle est donnée par Gersborg-Hansen et al. [52] et White [132]. Coffin and Maute [33] s'intéressent à minimiser la température à des endroits précis du domaine étudié. Et enfin, Zhou et al. [142] maximisent la réaction de l'écoulement à l'endroit où la température est imposée. Alexandersen [1], Alexandersen et al. [2] et Yoon [137] choisissent la compliance thermique comme définie par Bendsøe and Sigmund [15] pour minimiser la température de la source de chaleur. Oevelen and Baelmans [100] préfèrent la minimisation de la résistance thermique. D'autres auteurs optent pour la minimisation des différences de température entre l'entrée et la sortie du domaine comme Dede [37] ou Kontoleon et al. [77]. Ainsi, le choix de la fonctionnelle objectif est un vrai challenge pour poser correctement le problème d'optimisation de transfert thermique. Alexandersen [1] a mené une analyse sur les fonctionnelles objectif utilisées pour des problèmes de transferts thermiques de type conduction pure et il a abouti à la formulation de la compliance thermique. Dans le chapitre 4, nous explorons de nouvelles fonctionnelles objectif qui permettent soit de contrôler la diminution de la perte de charge dans le domaine étudié ou d'augmenter les transferts de chaleur transmis au fluide.

Concernant le mode de transfert thermique, le problème d'optimisation abordé par Yoon [137] relève du transfert de chaleur par convection forcée, Alexandersen et al. [2] étudie l'effet de la variation du nombre de Grashof pour un transfert de type convection naturelle, Coffin and Maute [33] mènent leur étude en convection naturelle et transitoire. Néanmoins, la discrétisation choisie est toujours la méthode des éléments finis ou la méthode des éléments finis étendus. Dans le dernier chapitre 4 de ce mémoire, nous étudions des problèmes d'optimisation conducto-convectifs en convection naturelle et convection naturelle pure, en employant, comme établi ci-dessus, la méthode des volumes finis.

Pour finir, comme la majorité des problèmes d'optimisation conducto-convectifs de la littérature, les problèmes d'optimisation abordés dans cette thèse seront traités en régime stationnaire.

1.4.2 Verrous scientifiques et stratégies

Plusieurs verrous scientifiques sont encore à lever en optimisation topologique. Un des points sensibles dans la résolution des problèmes d'optimisation est lié au caractère discret du paramètre de conception α qui conduit à l'obtention de zones intermédiaires entre le fluide et le solide. Le second point est relatif aux erreurs numériques aboutissant à des solutions irréalistes, notamment concernant l'existence d'écoulement dans le domaine contenant du matériau.

Plusieurs fonctions d'interpolation sont définies pour résoudre efficacement les problèmes d'optimisation topologique dans les milieux continus. Les fonctions d'interpolation utilisées par la plupart des auteurs sont rappelées dans ce paragraphe, comme la fonction d'interpolation de la variable de conception α et la fonction d'interpolation des propriétés topologiques du matériau intervenant dans la méthode SIMP.

Interpolation du coefficient de Brinkmann. Tout d'abord, en optimisation topologique, la répartition de matériau est paramétrée en définissant une variable de conception $\phi \in \{0, 1\}$. Cette variable discrète représente soit du matériau solide ($\phi = 1$), soit du fluide ($\phi = 0$). Une méthode classique pour résoudre le problème d'optimisation topologique lorsque le paramètre d'optimisation est une variable discrète est de la changer en une variable continue pour chaque élément associé au domaine étudié. Cette méthode permet d'obtenir des régions accessibles au fluide et d'autres non accessibles en affectant des valeurs comprises entre les valeurs minimales et maximales de cette variable de conception. En général, les auteurs utilisent la fonction d'interpolation du coefficient de Brinkman introduite par Borrvall and Petersson [22] ou une version reformulée de cette fonction convexe dépendant d'un paramètre de pénalité p appelée fonction RAMP (Rational Approximation of Material Properties) :

$$\alpha(\phi) = \alpha_s + (\alpha_f - \alpha_s) \phi \left(\frac{1+p}{\phi+p} \right), \quad p > 0 \quad (1.28)$$

où p est le paramètre de pénalité permettant de contrôler les régions intermédiaires pendant le processus d'optimisation. Ici, $\phi(r) = 0$ ou ϕ_{min} correspond à $\alpha_f = 0$ et $\phi(r) = 1$ correspond à $\alpha_s \approx \infty$ en l'élément du maillage r . Ensuite, le terme de pénalisation de Brinkman $\alpha_s \mathbf{u}$ est appliqué dans la région solide ($\phi = 1$) pour renforcer la condition de vitesse nulle dans la structure solide et la condition de non-glissement au niveau des parois solides. Dans le même temps, l'équation originale de Navier-Stokes est résolue dans la région dite fluide ($\phi = 0$). La formule (1.28) est fréquemment utilisée dans la littérature Alexandersen et al. [3], Dede [37], Kreissl et al. [80], Gersborg-Hansen et al. [52], Guest and Prévost [55], Lee [84], Olesen et al. [102], Andreasen and Sigmund [5].

Interpolation de la conductivité thermique. Ensuite, pour faire face à la différence de conductivités thermiques entre les régions contenant du matériau et les régions contenant du fluide, la plupart des auteurs choisissent d'interpoler également la conductivité thermique en utilisant la méthode SIMP (Solid Isotropic Material with Penalization). Cette méthode permet de traiter le caractère discret de la conductivité thermique suite à la répartition discrète de matériau. Ainsi, les auteurs Marck et al. [92], Alexandersen et al. [3], Rozvany et al. [115], Yoon [137] ont considéré une conductivité thermique continue fonction du paramètre d'optimisation η compris entre 0 et 1. Cette fonction est de type RAMP comme introduit par Stolpe and Svanberg [120] :

$$k(\alpha) = k_f + (k_s - k_f) \eta^p, \quad \text{avec } 0 \leq \eta \leq 1 \text{ and } p \geq 1, \quad (1.29)$$

et utilisée par Marck [93], Alexandersen et al. [3] et Lee [84]. Souvent, il s'agit d'ailleurs d'une conductivité thermique équivalente qui est calculée à la place de la viscosité dynamique. D'autres méthodes basées sur des fonctions linéaires ont été développées par Matsumori et al. [95] et Dede [37].

Difficulté liée au paramètre de pénalité. Dans les différentes fonctions d'interpolation utilisées dans la littérature et définies précédemment (1.28), (1.29), le paramètre de pénalité p permet de contrôler l'intensité de pénalisation des régions intermédiaires, entre le fluide et le solide. Borrvall and Petersson [22] expliquent que les fonctions d'interpolation linéaire entraînent des zones de transition trop grande pour avoir une solution optimale d'une "bonne" qualité. Marck et al. [92] ont noté par ailleurs que l'interface fluide-solide n'apparaît pas distinctement pour de faibles valeurs de p . Gersborg-Hansen et al. [52]

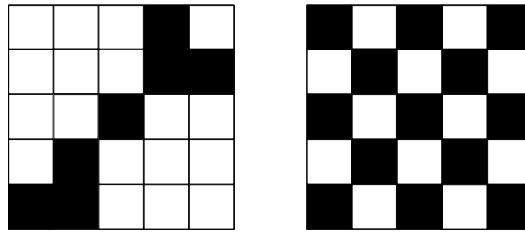


FIGURE 1.7 – Illustration de la répartition en damier ou « checkerboard pattern »

expliquent que si la fonction d'interpolation (1.28) approche une fonction linéaire, l'algorithme génère des formes dominées par la valeur maximale de α . L'analyse de ces auteurs amène à la conclusion suivante : plus la fonction (1.28) est convexe, c'est-à-dire plus la valeur de p est grande, plus l'algorithme d'optimisation tolère l'existence d'éléments ayant des valeurs intermédiaires entre les bornes 0 et 1, ce qui a pour effet une frontière non distinctement définie entre les régions fluides et solides.

La technique proposée par Borrvall and Petersson [22] et adoptée par beaucoup d'auteurs est de suivre une procédure en deux étapes : on cherche d'abord une forme optimisée avec de faibles valeurs de p ($p = 0.01$, par exemple), puis on s'en sert comme hypothèse initiale avant d'effectuer à nouveau l'optimisation topologique du problème considéré avec des valeurs de p plus élevées ($p = 0.1$ jusqu'à 1, par exemple). Cette deuxième étape facilite la pénalisation des valeurs intermédiaires de la variable α et de la forcer à prendre ses valeurs extrêmes 0 ou 1. En faisant de même pour (1.29), Alexandersen et al. [2] précisent que le paramètre p ainsi ajusté, pénalise la région intermédiaire en respectant la conductivité thermique équivalente des éléments du maillage.

Motif en damier ou « checkerboard pattern ».

Les répartitions de $\alpha(\phi)$ dites en « damier » sont des régions où la valeur de $\alpha(\phi)$ pour des éléments contigus du maillage, varie de manière périodique et alternée entre deux valeurs, généralement le fluide (0) et le solide (1). Si le maillage est formé de carrés ou de rectangles, la répartition ressemble à l'arrangement des cases noires et blanches dans un jeu de dames ou dans un jeu d'échecs, d'où le nom de « checkerboards patterns » en anglais (cf. Figure 1.7).

Ce type de résultat est courant en optimisation topologique de transfert de chaleur (cf. Lee [84], Marck [93]). L'alternance d'éléments appartenant au domaine solide et fluide crée des régions où les éléments solides ne sont pas correctement connectés. Lee [84] conclut son analyse en démontrant que ces difficultés numériques découlent des instabilités numériques liées à la méthode de pénalisation de Brinkman dans la mesure où le processus d'optimisation profite des erreurs et des faiblesses du modèle numérique. Kreissl and Maute [78] aboutissent à des formes optimales où la pression se diffuse dans le domaine qui contient du matériau, ce qui est physiquement incorrect comme solution.

Filtres. Il est possible de regarder le domaine discrétisé et la répartition de matière comme une image digitalisée. Chaque élément représente un pixel et la valeur de α au sein de chaque élément peut être associée à une échelle de gris où le blanc représente le fluide et le noir, le solide. Les répartitions en damier sont alors interprétées comme des bruits indésirables à éliminer. L'épuration de tels bruits peut être réalisée par des techniques de filtres semblables à celles qui sont utilisées en traitement d'image. Les filtres par produits de convolution comme souligné par Bendsøe and Sigmund [15] ont prouvé leur effica-

cité dans de nombreux cas d'étude. On peut alors filtrer la variable de conception α ou la sensibilité de la fonctionnelle objectif $\partial \mathcal{J} / \partial \alpha$. La méthode consiste en la définition d'une échelle de longueur indépendante de la taille du maillage, c'est un rayon de filtrage R , en dessous de laquelle tous les éléments prennent la même valeur de α ou de la sensibilité $\partial \mathcal{J} / \partial \alpha$. Les auteurs Marck et al. [92] et Alexandersen [1] ont confirmé que les filtres ont permis d'éviter les problèmes de damier ainsi que la dépendance de la forme optimisée au maillage.

1.4.3 Objectifs et orientations de la thèse

Ainsi, outre l'obtention d'une forme optimisée techniquement réalisable, un des points sensibles est la définition de l'interface fluide-solide à la fin du processus d'optimisation. Le Chapitre 2 porte sur l'introduction de nouvelles fonctions d'interpolation de type sigmoïde permettant d'améliorer la définition de la frontière fluide-solide pendant le processus d'optimisation. La taille de la zone intermédiaire, c'est-à-dire la zone ne correspondant ni au fluide ni au solide, a été calculée analytiquement et théoriquement pour montrer qu'elle a été réduite grâce à ces fonctions sigmoïdes. En plus d'une définition de frontière entre les deux domaines s'effectuant pendant l'optimisation topologique, cette nouvelle technique ne nécessite pas le recours aux filtres numériques et ne génère pas de motifs en damier. Nous l'avons validée sur deux cas référencés dans la littérature, à savoir le « single pipe » et le « bend pipe ».

Le Chapitre 4 s'intéresse aux transferts thermiques et massiques dans le canal vertical asymétriquement chauffé. En amont des travaux d'optimisation au sens topologique de ces transferts, une étude sur l'influence de la stratification thermique à l'extérieur du canal et l'influence du rayonnement de surface ont été évaluées sur différentes quantités thermiques et aérauliques. Cette étude a permis de mettre en évidence des grandeurs à prendre en compte pour définir nos fonctions objectifs dans les problèmes d'optimisation. Plus particulièrement, nous avons mis en évidence une variation de la taille de l'écoulement retour, ce qui contribue à augmenter les pertes de charge dans le canal. Nous avons aussi remarqué l'effet bouchon lié à la stratification thermique qui diminue la vitesse du fluide et influence donc l'énergie thermique au sein du canal.

Par la suite, nos travaux se sont concentrés sur l'expression de nouvelles fonctionnelles objectif dans le Chapitre 4. Nous proposons ainsi une nouvelle expression de la puissance mécanique pour contrôler les pertes de charge (malgré l'ajout de matière) dans le canal vertical et la combinons avec l'expression de la puissance thermique. Cette nouvelle fonction objectif aura pour effet de corriger les instabilités relevées en sortie du domaine avec les autres fonctions objectifs de la littérature. Le problème ainsi posé est résolu pour un écoulement en convection mixte, bien que la convection naturelle reste dominante, et pour des variations du nombre de Richardson compris entre 100 et 400. Les fonctions d'interpolation de type sigmoïde sont également utilisées et permettent l'obtention d'une frontière fluide-solide distincte. Enfin, nous avons exploré une fonctionnelle objectif qui permet de minimiser la puissance dissipée liée aux frottements pour un écoulement de convection naturelle dans le canal.

1.4.4 Méthodes et algorithmes d'optimisation

Dans ce paragraphe, nous présentons la méthode des multiplicateurs de Lagrange, la méthode du gradient et l'évaluation de la sensibilité de la fonctionnelle objectif. Notre objectif est de résoudre le problème d'optimisation avec contraintes (1.27). Il correspon-

dra au problème primal dans la suite de ce mémoire et il s'énonce ainsi : « Déterminer les variables d'état $X = (u, p, \theta)$ et la variable de contrôle α qui minimisent la fonctionnelle objectif \mathcal{J} sous contraintes des équations $\mathcal{R}(X, \alpha) = 0$ et de $B(X|_{\Gamma}, \alpha)$. »

Dans le cadre des travaux de cette thèse, nous avons adopté la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Le lecteur est invité à consulter Bergmann [17] pour les autres méthodes.

Méthode des multiplicateurs de Lagrange. Cette méthode permet de transformer le problème d'optimisation avec contraintes en un problème d'optimisation sans contrainte pour lequel une fonctionnelle de Lagrange est définie. Le minimum, s'il existe, est un point « stationnaire » de cette fonctionnelle de Lagrange. Le principe consiste à introduire des multiplicateurs de Lagrange ξ (appelés aussi variables adjointes) pour prendre en compte explicitement les contraintes $\mathcal{R}(X, \alpha)$ et $B(X|_{\Gamma}, \alpha)$ du problème. Dans ce mémoire, ce problème sera identifié comme le problème primal du problème d'optimisation. Le paramètre de contrôle est alors obtenu en résolvant un système d'équations aux dérivées partielles couplées. La fonctionnelle de Lagrange est définie de la manière suivante :

$$\mathcal{L}(X, \alpha, \xi) = \mathcal{J}(X, \alpha) - \langle \mathcal{R}(X, \alpha), \xi \rangle - \langle B(X|_{\Gamma}) - x_0, \xi \rangle,$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire L^2 qui peut être volumique ou surfacique.

Le problème d'optimisation sans contraintes devient alors : « Déterminer les variables d'état X , la variable de contrôle α et les variables adjointes ξ telles que la fonctionnelle de Lagrange \mathcal{L} présente un extremum, ce qui implique $\delta\mathcal{L} = 0$ » et donc :

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta X} \delta X + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\alpha} \delta\alpha + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\xi} \delta\xi = 0.$$

Par définition, la dérivée de Fréchet de \mathcal{L} au point x_m dans la direction δx est donnée par :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}(x_m + \epsilon \delta x) - \mathcal{L}(x_m)}{\epsilon}.$$

En supposant ensuite les variables X, α, ξ indépendantes¹, les dérivées de Fréchet de \mathcal{L} doivent être identiquement nulles, dans toutes les directions admissibles X, α, ξ , c'est-à-dire, quelles que soient les variations de $\delta X, \delta\alpha, \delta\xi$. Il en découle la relation suivante :

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta X} \delta X = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\alpha} \delta\alpha = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\xi} \delta\xi = 0.$$

On rappelle que cette condition n'est qu'une condition nécessaire à l'obtention d'un extremum global.

Comme détaillée dans la thèse de Tallet [124], l'annulation des dérivées de Fréchet suivant les variables adjointes ξ , suivant les variables d'état X et suivant la variable de contrôle α donne des conditions nécessaires qui forment un système d'équations aux dérivées partielles, appelé système optimal. Les solutions de ce système donnent des paramètres de contrôle optimal α_{opt} , des variables d'état optimales X_{opt} et des variables adjointes optimales ξ_{opt} .

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\xi} = 0 \Rightarrow \text{Equations d'état} \\ \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta X} = 0 \Rightarrow \text{Equations adjointes} \\ \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\alpha} = 0 \Rightarrow \text{Condition d'optimalité} \end{array} \right. \quad (1.30)$$

1. Cette hypothèse est en toute rigueur fautive, puisque les variables X et α sont liées par les contraintes physiques $\mathcal{R}(X, \alpha)$

Les équations d'état sont celles du problème primal (1.27). Par la suite, nous décrivons l'algorithme d'optimisation à direction de descente utilisée pour résoudre le problème optimal. La détermination des variables adjointes nous permettra ensuite d'aboutir à l'expression du gradient de la fonction objectif \mathcal{J} .

Pour la plupart des problèmes d'optimisation, il n'est pas possible de résoudre le problème optimal couplé (1.30) directement, car il est très coûteux en temps de calcul. Le problème primal est résolu de manière à avoir les variables d'état $[p, \mathbf{u}, \theta]$. La méthode de Gauss-Seidel de Nougier and Nougier [99] est employée pour résoudre le système matriciel, et l'algorithme SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations) de Patankar and Spalding [108] pour le couplage vitesse-pression. Pour la suite de la résolution du problème d'optimisation, des algorithmes ont été développés comme la méthode par équation adjointe décrite ci-après. D'autres méthodes peuvent être employées selon le nombre de paramètres et d'autres critères. Se référer alors à Bergmann [17] et à Tallet [124]).

Méthode de descente basée sur le gradient. Le problème d'optimisation sans contrainte consiste à trouver $\alpha_{\text{opt}} \in \mathbb{R}^n$ tel que $\mathcal{J}(\alpha_{\text{opt}}) \leq \mathcal{J}(\alpha)$, $\forall \alpha \in Q \subset \mathbb{R}^n$. Ce genre de problème est généralement résolu par des algorithmes d'optimisation dits de descente. Ces algorithmes sont de type itératif et ils consistent à approcher une solution par la récurrence :

$$\alpha_{k+1} = \alpha_k + w_k d_k,$$

où w_k est appelé le pas à effectuer le long de la direction de descente d_k et k représente une itération de l'algorithme considéré. d_k est une direction de descente de \mathcal{J} en α_k si :

$$\nabla \mathcal{J}(\alpha_k) \cdot d_k < 0.$$

Par définition, si d_k est une direction de descente, alors :

$$\mathcal{J}(\alpha_k + w_k d_k) < \mathcal{J}(\alpha_k), \text{ pour tout } w_k > 0 \text{ suffisamment petit.}$$

Pour utiliser la méthode à direction de descente, il faut donc déterminer :

- la direction de descente d_k
- le pas w_k

Les algorithmes de descente requièrent ainsi la connaissance de la fonctionnelle $\mathcal{J}(\alpha)$, de son gradient $\nabla \mathcal{J}(\alpha)$, et dans certains cas de la hessienne $\nabla^2 \mathcal{J}(\alpha)$. Les méthodes basées sur le gradient consistent à chercher la solution dans la direction opposée du gradient de la fonctionnelle, ce qui donne :

$$d_k = -\nabla \mathcal{J}(\alpha_k).$$

Une variante de la méthode du gradient, appelée méthode du gradient conjugué, développé par Hestenes and Stiefel [62], est souvent utilisée pour la minimisation de fonctionnelles quadratiques. C'est sur cette méthode que s'appuie l'algorithme d'optimisation utilisé pour les travaux de cette thèse. Cette méthode consiste à calculer une nouvelle direction de descente telle que :

$$d_{k+1} = -\nabla \mathcal{J}(c_{k+1}) + \beta_{k+1} d_k$$

où le terme β_{k+1} est fonction du gradient de la fonctionnelle et peut être calculé selon différentes méthodes Bergmann [17]. Dans le cadre de nos travaux, nous la calculons avec la méthode de Fletcher-Reeves :

$$\beta_{k+1} = \frac{\nabla \mathcal{J}_{k+1}^T \nabla \mathcal{J}_{k+1}}{\nabla \mathcal{J}_k^T \nabla \mathcal{J}_k}$$

-
0. Initialisation : $k = 0, \alpha_k = \alpha_{ini}$;
 1. Résoudre les équations d'état (1.30) afin d'obtenir les variables d'état $[p, \mathbf{u}, \theta]_k = [p, \mathbf{u}, \theta]_k(\alpha_k)$;
 2. Résoudre les équations adjointes (1.30) afin d'obtenir les variables adjointes $p^*, \mathbf{u}^*, \theta^*$;
 3. Évaluer la direction de descente $d_k = -\nabla \mathcal{J}(\alpha_k)$, grâce à la condition d'optimalité (1.30) ;
 4. Déterminer le pas $w_k > 0$ par recherche linéaire ;
 5. Déterminer un nouveau paramètre de contrôle $\alpha_{k+1} = \alpha_k + w_k d_k$;
 6. Projeter la nouvelle variable α_{k+1} telle que $\alpha_{k+1} = \max(0, \min(0, \alpha_{max}))$;
 7. Déterminer $d_{k+1} = -\nabla \mathcal{J}(\alpha_{k+1}) + \beta_{k+1} d_k$ par la méthode de Fletcher-Reeves pour obtenir β_{k+1} ;
 8. Incrémentation de $k = k + 1$;
- Retour à l'étape 1 si le critère de convergence $\nabla \mathcal{J}(\alpha_k) < \epsilon$ n'est pas satisfait
-

TABLEAU 1.2 – Algorithme d'optimisation

L'algorithme d'optimisation est décrit dans le tableau 1.2. Pour déterminer le gradient de la fonctionnelle objectif à l'étape 3 de l'algorithme 1.2, nous avons opté pour la méthode de l'équation adjointe décrite ci-après.

Méthode par l'équation adjointe En utilisant les propriétés d'un opérateur adjoint pour l'équation adjointe :

$$\left(\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial X}\right)^* \xi = \left(\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial X}\right)^* \Leftrightarrow \xi^* \left(\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial X}\right) = \left(\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial X}\right) \quad (1.31)$$

et la définition du gradient de la fonctionnelle objectif,

$$\frac{d\mathcal{J}}{d\alpha} = \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \alpha} \frac{dX}{d\alpha} + \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \alpha}$$

il découle l'expression suivante :

$$\frac{d\mathcal{J}}{d\alpha} = \xi^* \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial X} \frac{dX}{d\alpha} + \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \alpha}$$

Or $\mathcal{R}(X, \alpha) = 0$, d'où

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial X} \frac{dX}{d\alpha} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \alpha} = 0$$

et donc :

$$\frac{d\mathcal{J}}{d\alpha} = -\xi^* \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \alpha} \quad (1.32)$$

Comme l'équation (1.31) est indépendante du nombre de paramètres de contrôle, le système linéaire peut être résolu une seule fois. De plus, lorsque la condition d'optimalité est vérifiée (2.1), $d\mathcal{J}/d\alpha = 0$ est exactement vérifiée. L'étape 3 de l'algorithme 1.2 consiste donc à résoudre l'équation (1.32).

Ces méthodes sont faciles à implémenter et présentent un faible coût de calcul par itération. Par contre, la vitesse de convergence peut être faible et des oscillations numériques peuvent apparaître, lorsque le gradient de la fonctionnelle objectif tend vers 0, se référer à Vitale [127].

1.5 Conclusion du chapitre

Ce premier chapitre a permis de présenter les objectifs et orientations de nos travaux qui visent à contribuer aux méthodes d'optimisation topologique de problèmes conducto-convectif. Pour ce faire, nous avons rappelé les méthodes les plus utilisées de la littérature et avons mis en évidence les verrous scientifiques à lever. Nous proposons ainsi de nouvelles méthodes d'optimisation de transferts thermiques et massiques et l'appliquons au canal vertical asymétriquement chauffé. Ces nouvelles stratégies apportent des améliorations et peuvent être utilisées pour obtenir de meilleures performances thermiques, ou alors pour mieux contrôler l'ajout de matière dans le domaine influençant possiblement le coût global de production.

Chapitre 2

Nouvelle technique d'interpolation pour l'optimisation des transferts de chaleur

Sommaire

2.1 Objectif de cette étude	26
2.2 Governing equation	26
2.3 Interpolation	27
2.3.1 Interpolation of porosity using a sigmoid function	27
2.3.2 Comparison with standard RAMP interpolation function	28
2.3.3 Interpolation of the thermal conductivity	29
2.4 Gradient computation with the adjoint model	30
2.5 Numerical example	33
2.5.1 Studied Cases	34
2.5.2 Results	35
2.6 Conclusion of the study	42
2.7 Conclusion du chapitre	42

CE chapitre aborde une des premières difficultés rencontrées lors de la résolution des problèmes d'optimisation, à savoir la définition de la frontière fluide-solide. Nous proposons une nouvelle technique d'optimisation au sens topologique pour résoudre les problèmes de transferts thermiques. L'introduction de fonctions d'interpolation de type sigmoïde nous permet d'avoir une définition claire de la frontière entre les domaines fluide et solide en fin du processus d'optimisation. De plus, le recours au filtre pour corriger les erreurs numériques n'est plus nécessaire et enfin, la contrainte volumique explicitée dans la plupart des problèmes d'optimisation est traitée différemment, par le biais notamment d'un des paramètres de la sigmoïde. Cette nouvelle technique est validée pour deux cas d'étude connus de la littérature : le «single pipe» et le «bend pipe».

2.1 Objectif de cette étude

Cette étude¹ propose une nouvelle technique d'interpolation basée sur l'approche par densité pour résoudre les problèmes d'optimisation topologiques de transferts thermiques. La variable de conception α et la conductivité thermique équivalente k sont respectivement interpolées par une fonction $h_\tau(\alpha)$ et par une autre $k_\tau(\alpha)$ afin de fournir une transition continue entre les domaines fluide et solide. Ces fonctions d'interpolation évitent le recours à des techniques de régularisation tels que les filtres car les problèmes peuvent être résolus directement en une étape sans se préoccuper du paramètre de pénalité des fonctions d'interpolation de la littérature. De plus, ces fonctions d'interpolation permettent d'obtenir une plus petite zone de transition entre les région solide et fluide. Cela est démontré analytiquement et numériquement par le calcul explicite de la taille de ces zones et par sa comparaison avec les fonctions standards de la littérature. Afin de valider la nouvelle méthode, elle est appliquée à deux cas connus de la littérature : le « single pipe » et le « bend pipe ». Enfin, ces deux sigmoïdes, h_τ et k_τ font intervenir deux nouveaux paramètres dont les impacts sur les résultats de l'optimisation sont étudiés.

2.2 Governing equation

The main goal of this paper is to solve topology optimization problems for heat transfer in fluid flow. The latter can be written in the general form below :

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & \mathcal{J}(\mathbf{u}, p, \theta) = \int_{\Omega} \mathcal{J}_{\Omega}(\mathbf{u}, p, \theta) d\Omega + \int_{\Gamma} \mathcal{J}_{\Gamma}(\mathbf{u}, p, \theta) d\Gamma \\ \text{Subject to} \quad & \text{Governing equation for } (\mathbf{u}, p, \theta) \\ & \text{Boundary conditions on } \Gamma \end{aligned}, \quad (2.1)$$

where \mathbf{u} , p and θ are respectively the dimensionless velocity, pressure and temperature, Ω is a bounded open set of \mathbb{R}^d , $d = 2, 3$, with boundary $\Gamma = \partial\Omega$. The function \mathcal{J}_{Ω} and \mathcal{J}_{Γ} are some cost functional modeling a physical effect one wish to minimize. We assume that Γ can be decomposed as $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_{in} \cup \Gamma_{out}$ where Γ_{in} is the inlet, Γ_{out} the outlet and Γ_1, Γ_2 are going to be considered as walls.

For the governing equation, the flows considered in this study are assumed Newtonian and incompressible, steady and laminar. The inverse permeability field is introduced in the steady-state Navier-Stokes equations as a source term $h_\tau(\alpha)\mathbf{u}$ yielding a Brinkman model with a convection term. The set of dimensionless equations governing the conservation of momentum, mass and energy for incompressible steady-state fluid flow are the following :

$$\begin{aligned} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\nabla p + Re^{-1} \Delta \mathbf{u} - h_\tau(\alpha) \mathbf{u} + Ri \theta \vec{e}_y & \text{in } \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 & \text{in } \Omega, \\ \nabla \cdot (\mathbf{u} \theta) &= \text{div}(Re^{-1} Pr^{-1} k_\tau(\alpha) \nabla \theta) & \text{in } \Omega. \end{aligned} \quad (2.2)$$

The reduced dimensionless temperature is $\theta = (T - T_0)/\Delta T$ and the uniform heat flux $\bar{\Phi} = \partial_n \theta$ on some part of Γ_1 is equal to $\lambda_f \Delta T / l$, with λ_f the thermal conductivity of the fluid. Parameters governing the flow are the Reynolds number defined as $Re = U_0 l / \nu$, with U the reference velocity (i.e mean velocity here) and l is the hydraulic diameter, the Richardson number $Ri = Gr / Re^2$ where Gr is the Grashof number defined as $Gr = g \beta \Delta T l^3 / \nu^2$. $h_\tau(\alpha)$

1. Cette étude a fait l'objet d'un article intitulé "A new interpolation technique to deal with fluid-porous media interfaces for topology optimization of heat transfer" et soumis pour publication dans *Computers and Fluids*

corresponds to the ratio between a kinematic viscosity and a permeability and α is the spatially varying design variable field determined by the optimization algorithm. Regions with low permeability can be considered as solid regions since (at least formally) the velocity of the fluid vanishes in such region, and those with very high permeability regions are interpreted as pure fluid. The interpolation function for the adimensional thermal conductivity is given by $k_\tau(\alpha)$.

We consider the following set of boundary conditions :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u} &= 0, & \partial_n \theta &= -1 & \text{on } \Gamma_1, \\
 \mathbf{u} &= 0, & \partial_n \theta &= 0 & \text{on } \Gamma_2, \\
 \mathbf{u}_n &= 1, \mathbf{u}_t = 0, & \theta &= 0 & \text{on } \Gamma_{in}, \\
 \partial_n \mathbf{u} &= 0, & \partial_n \theta &= 0, \quad p = 0 & \text{on } \Gamma_{out},
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

where \mathbf{u}_n and \mathbf{u}_t are the normal and tangential components of primal velocities, respectively. To summarize, we require a constant horizontal velocity and a constant temperature θ_0 at the inlet, vanishing gradient for both velocity and temperature of fluid at the outlet. Homogeneous Dirichlet for the velocity and Neumann boundary condition are prescribed for the temperature on the walls. It is worth noting that boundary conditions on the outlet have been considered in Ramalingom et al. [113] and ensure that the fluid does not re-enter in the domain.

2.3 Interpolation

The goal of topology optimization is to end up with binary designs, i.e avoid that the design variables take other value than those representing the fluid or the solid. The most important thing is to be sure that the intermediate regions (the transition zones) are unattractive with respect to the optimization problem. This is usually carried out by penalizing the intermediate densities with respect to the material parameters, such as inverse permeability and effective conductivity. A standard approach is to use some convex interpolation (RAMP) function Alexandersen et al. [2], Borrvall and Petersson [22], Marck et al. [92]. In this section, we propose to use another interpolation function hence interpolate the inverse permeability and the effective conductivity using sigmoid functions. After giving the definition of our interpolation function, we show that the transition zones of the sigmoid are much smaller than those of the standard RAMP function therefore motivating the use of such method in topology optimization.

2.3.1 Interpolation of porosity using a sigmoid function

Inverse permeability is interpolated with a sigmoid function

$$h_\tau(\alpha, \alpha_0) = \alpha_{\max} \left(\frac{1}{1 + \exp(-\tau(\alpha - \alpha_0))} - \frac{1}{1 + \exp(\tau\alpha_0)} \right) \tag{2.4}$$

where $\alpha \in [0, \alpha_{\max}]$ with α_{\max} being the maximal value h_τ can reach. Direct computations show that $h_\tau(0, \alpha_0) = 0$ and that the following point-wise convergence holds

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} h_\tau(\alpha, \alpha_0) = \begin{cases} 0 & \text{if } \alpha < \alpha_0, \\ \alpha_0/2 & \text{if } \alpha = \alpha_0, \\ \alpha_{\max} & \text{if } \alpha > \alpha_0. \end{cases} \tag{2.5}$$

This shows that h_τ is a smooth regularization of a Heaviside step function. From (2.5), one can see that α_0 can be tuned to control the size of the fluid part in the computational domain. Finally, note that the definition of our interpolation function has to be changed when $\alpha_0 = 0$ since we require $\alpha \geq 0$ and (2.4) would lead to a regularization of a step function satisfying $h_\tau(0,0) = 0$ and, for any $\alpha > 0$, $h_\tau(\alpha,0) \rightarrow \alpha_{\max}/2$ as $\tau \rightarrow +\infty$. In order to cover this case, one can use the following interpolation function

$$h_\tau(\alpha,0) = \tilde{h}_\tau(\alpha) = 2 \alpha_{\max} \left(\frac{1}{1 + \exp(-\tau\alpha)} - \frac{1}{2} \right),$$

which satisfies $\tilde{h}_\tau(0) = 0$ and, if $\alpha > 0$, $\tilde{h}_\tau(\alpha) \rightarrow \alpha_{\max}$ as $\tau \rightarrow +\infty$.

2.3.2 Comparison with standard RAMP interpolation function

The RAMP function has been introduced in Borrvall and Petersson [22] and is defined as follows :

$$h_{q,R}(s) = \alpha_{\max} + (\alpha_{\min} - \alpha_{\max})(1 - s) \frac{1 + q}{1 - s + q}, \quad (2.6)$$

where $s \in [0, 1]$ is the design parameter and $\alpha_{\min}, \alpha_{\max}$ are respectively the minimal and maximal value the RAMP function can take. Again, some direct computations show that $h_{q,R}$ is a smooth and convex regularization of a Heaviside step function since $h_{q,R}(0) = \alpha_{\min}$ and, for any $s > 0$, $\lim_{q \rightarrow 0} h_{q,R}(s) = \alpha_{\max}$. In the sequel, we use $\alpha_{\min} = 0$ since this does not add any difficulties nor plus to the discussion. We now compare the performances of our sigmoid (2.4) with the standard RAMP function (2.6) by focusing on the size of their so-called transition zones. First, note that they are both defined on Ω but the transition zone only depends on the value of the design parameter $s(x)$ for $x \in \Omega$. As a result, we are going to consider that both functions have real domain and act on the interval $[0, 1]$. Also, to compare functions having the same domain and being both smooth regularization of step function as $q \rightarrow 0$, we rescale the sigmoids (2.4) thanks to the formula

$$h_{q,S}(s, \alpha_0) = h_{1/q}(\alpha_{\max}s, \alpha_0), \quad h_{q,S,0}(s) = \tilde{h}_{1/q}(s\alpha_{\max}), \quad s \in [0, 1].$$

By definition, the transition zones are the undesirable values of the design variable $s \in [0, 1]$ for which the velocity of the speed is not enough penalized to vanish or the value of the interpolation function is not small enough for considering these zones as fluid. As one can see from Figure 2.1, the sigmoid function has much smaller transition zone than the RAMP function.

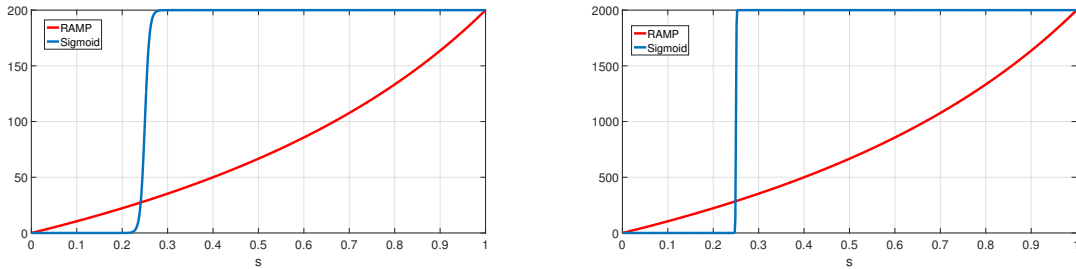


FIGURE 2.1 – Interpolation functions with $q = 1$ and $\alpha_0 = \alpha_{\max}/4$. Left : $\alpha_{\max} = 200$. Right : $\alpha_{\max} = 2000$.

To prove this claim and get more qualitative results we are going to compute explicitly the size of these transition zones. For a given small enough $\epsilon > 0$ and a large enough $M > 0$,

the latter are defined by

$$\mathcal{T}(f, \varepsilon, M) = \{s \in [0, 1] \mid \varepsilon \leq f(s) \leq M\}, \quad f \in \{h_{q,R}, h_{q,S}, h_{q,S,0}\}.$$

Since both interpolation function are increasing, they admit an inverse function f^{-1} and the transition zone is thus given by the interval $\mathcal{T}(f, \varepsilon, M) = [f^{-1}(\varepsilon), f^{-1}(M)]$ from which we infer that

$$|\mathcal{T}(f, \varepsilon, M)| = f^{-1}(M) - f^{-1}(\varepsilon). \quad (2.7)$$

It then only remains to compute the inverse of the sigmoid and RAMP functions. This is actually achieved by solving $f(s) = y$ for a given $y \in [0, \alpha_{\max}]$. These equations can be solved analytically using only direct computations and give

$$s = (h_{q,R})^{-1}(y) = 1 - q \frac{y - \alpha_{\max}}{\alpha_{\max} - y + (1 + q)(\alpha_{\min} - \alpha_{\max})} = y \frac{1 + q}{\alpha_{\max} q + y} \quad (2.8)$$

$$s = (h_{q,S})^{-1}(y) = \frac{\alpha_0}{\alpha_{\max}} - \frac{q}{\alpha_{\max}} \begin{cases} -\log\left(\frac{\alpha_{\max} - y(1 + \exp(-\alpha_0/q))}{\alpha_{\max} \exp(-\alpha_0/q) + y(1 + \exp(-\alpha_0/q))}\right) & \text{if } s \leq \alpha_0/\alpha_{\max} \\ \log\left(\frac{\alpha_{\max} - y(1 + \exp(-\alpha_0/q))}{\alpha_{\max} \exp(-\alpha_0/q) + y(1 + \exp(-\alpha_0/q))}\right) & \text{if } s \geq \alpha_0/\alpha_{\max} \end{cases}$$

$$s = (h_{q,S,0})^{-1}(y) = -\log\left(\frac{\alpha_{\max} - y}{\alpha_{\max} + y}\right) \frac{q}{\alpha_{\max}}.$$

The constraint on s in the definition of the inverse of $h_{q,S}$ comes from the fact that we have to solve an equation of the form $\exp((\alpha_0 - s\alpha_{\max})/q) = g(y)$ for a positive function g . Using (2.7) and (2.8), the size of the transition zones are finally

$$|\mathcal{T}(h_{q,R}, \varepsilon, M)| := \mathcal{T}_R = q\alpha_{\max} \frac{(1 + q)}{(\alpha_{\max} q + M)(\alpha_{\max} q + \varepsilon)} (M - \varepsilon),$$

$$|\mathcal{T}(h_{q,S}, \varepsilon, M)| := \mathcal{T}_S = \frac{q}{\alpha_{\max}} \log\left(\frac{\alpha_{\max} - M(1 + \exp(-\alpha_0/q))}{\alpha_{\max} \exp(-\alpha_0/q) + M(1 + \exp(-\alpha_0/q))}\right) + \frac{q}{\alpha_{\max}} \log\left(\frac{\alpha_{\max} - \varepsilon(1 + \exp(-\alpha_0/q))}{\alpha_{\max} \exp(-\alpha_0/q) + \varepsilon(1 + \exp(-\alpha_0/q))}\right),$$

$$|\mathcal{T}(h_{q,S,0}, \varepsilon, M)| := \mathcal{T}_{S,0} = \frac{q}{\alpha_{\max}} \log\left(\frac{(\alpha_{\max} - M)(\alpha_{\max} + \varepsilon)}{(\alpha_{\max} + M)(\alpha_{\max} - \varepsilon)}\right).$$

For $\alpha_0 = 0$, one can clearly see that $\mathcal{T}_{S,0} < \mathcal{T}_R$. To deal with the case $\alpha_0 > 0$, note that the parameter q is small since we wish the interpolation function to be close to an ideal step function. Also, we emphasize that $\alpha_0 > 0$ is going to depend on α_{\max} in order to control the percentage of fluid in Ω . Since α_{\max} has to be large enough, one gets that $z = \exp(-\alpha_0/q)$ is a small parameter and we can thus expand \mathcal{T}_S as $z \rightarrow 0$. This gives

$$\mathcal{T}_S = \frac{q}{\alpha_{\max}} \log\left(\frac{(\alpha_{\max} - M)(\alpha_{\max} - \varepsilon)}{M\varepsilon}\right) + O(\exp(-\alpha_0/q)),$$

from which one can see that $\mathcal{T}_S < \mathcal{T}_R$. Thanks to the factor q/α_{\max} , we can see that the intermediate zones of the sigmoid are in fact much smaller than those of the RAMP function. Some numerical calculation of the size of transition zone confirming this fact can be found in Table 2.1,2.2 for $\alpha_{\max} \in \{200, 2000\}$ and $q \in \{1, 10^{-4}, 10^{-5}\}$.

	\mathcal{T}_R	\mathcal{T}_S	$\mathcal{T}_{S,0}$
$q = 1$	0.6657	0.0380	0.0055
$q = 10^{-4}$	0.1665	3.8002×10^{-6}	5.4881×10^{-7}
$q = 10^{-5}$	0.0196	3.8002×10^{-7}	5.4881×10^{-8}

TABLEAU 2.1 – Size of the transition zones for $\alpha_{\max} = 200$, $M = \alpha_{\max}/2$, $\varepsilon = 0.1$ and $\alpha_0 = \alpha_{\max}/4$.

	\mathcal{T}_R	\mathcal{T}_S	$\mathcal{T}_{S,0}$
$q = 1$	0.6666	0.0050	5.4926×10^{-4}
$q = 10^{-4}$	0.6665	4.9517×10^{-7}	5.4926×10^{-8}
$q = 10^{-5}$	0.1666	4.9517×10^{-8}	5.4926×10^{-9}

TABLEAU 2.2 – Size of the transition zones for $\alpha_{\max} = 2000$, $M = \alpha_{\max}/2$, $\varepsilon = 0.1$ and $\alpha_0 = \alpha_{\max}/4$.

2.3.3 Interpolation of the thermal conductivity

The effective conductivity is interpolated using a sigmoid function similar to (2.4) :

$$k_\tau(\alpha, \alpha_0) = (k_s - k_f) \left(\frac{1}{1 + \exp(-\tau(\alpha - \alpha_0))} - \frac{1}{1 + \exp(\tau\alpha_0)} \right) + k_f \quad (2.9)$$

where $\alpha \in [0, \alpha_{\max}]$ is the design parameter, k_s and k_f are respectively the adimensional thermal diffusivity of the solid and of the fluid. Interpolation function (2.9) is again a smooth regularization of a Heaviside step function that satisfies $k_\tau(0, \alpha_0) = k_f$ together with the point-wise convergence

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} k_\tau(\alpha, \alpha_0) = \begin{cases} k_f & \text{if } \alpha < \alpha_0, \\ (k_f + k_s)/2 & \text{if } \alpha = \alpha_0, \\ k_s & \text{if } \alpha > \alpha_0. \end{cases}$$

Similarly to h_τ , the case $\alpha_0 = 0$ needs the following slight modification to still have, when $\tau \rightarrow +\infty$, a fluid-solid step function

$$k_\tau(\alpha, 0) = \tilde{k}_\tau(\alpha) = 2(k_s - k_f) \left(\frac{1}{1 + \exp(-\tau\alpha)} - \frac{1}{2} \right) + k_f.$$

The previous function then satisfies $\tilde{k}_\tau(0) = 0$ and, for any $\alpha > 0$, $\tilde{k}_\tau(\alpha) \rightarrow k_s$ as $\tau \rightarrow +\infty$. A RAMP-like interpolation function is also usually used for the thermal conductivity Alexandersen et al. [2], Marck et al. [92]. Computations similar to those of Section 2.3.2 can be done to prove that the transition zone of the sigmoid (2.9) are much smaller than those of the RAMP function hence motivating using such technique in topology optimization.

2.4 Gradient computation with the adjoint model

We chose to solve the optimization problem (2.1) with gradient-based optimization algorithm. The latter requires the computation of the gradient of the cost functional with respect to the design variable which needs the sensitivities of the solution to the state equation with respect to α . To do this, we are going to use the adjoint method (see e.g. Herzog and Kunisch [61], Hinze et al. [63], Petra and Stadler [109]) since it allows to compute

the gradient of \mathcal{J} efficiently, only by solving the so-called direct problem (the governing equation) and the adjoint model.

We adopt here the *differentiate then discretize* approach Gunzburger [56] which means that we need to compute the continuous adjoint model associated to (2.1) as done in Othmer [104], Qian and Dede [111]. The Lagrangian associated to the optimization problem (2.1) can then be defined as follows

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}((\mathbf{u}, \theta, p), (\mathbf{u}^*, \theta^*, p^*), \alpha) &:= \mathcal{J}(\mathbf{u}, \theta, p) - \int_{\Omega} p^* \operatorname{div} \mathbf{u} \, d\Omega \\
&- \int_{\Omega} \mathbf{u}^* \cdot [(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p - \operatorname{Re}^{-1} \Delta \mathbf{u} + h_{\tau}(\alpha, \alpha_0) \mathbf{u} - \operatorname{Ri} \theta \vec{e}_y] \, d\Omega \\
&- \int_{\Omega} \theta^* \cdot [\nabla \cdot (\mathbf{u} \theta) - \operatorname{div}(\operatorname{Re}^{-1} \operatorname{Pr}^{-1} k_{\tau}(\alpha, \alpha_0) \nabla \theta)] \, d\Omega \\
&- \int_{\Gamma_1} (\mathbf{u} \cdot \Phi_1 + (\partial_n \theta - 1) \psi_1) \, d\Gamma - \int_{\Gamma_2} (\mathbf{u} \cdot \Phi_2 + \partial_n \theta \psi_2) \, d\Gamma \\
&- \int_{\Gamma_{\text{in}}} ((\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\text{in}}) \cdot \Phi_{\text{in}} + \theta \psi_{\text{in}}) \, d\Gamma - \int_{\Gamma_{\text{out}}} (\partial_n \mathbf{u} \cdot \Phi_{\text{out}} + p q_{\text{out}} + \partial_n \theta \psi_{\text{out}}) \, d\Gamma
\end{aligned} \tag{2.10}$$

where $(\mathbf{u}^*, \theta^*, p^*, \Phi_l, \psi_l, q_{\text{out}})$, for $l \in \{1, 2, \text{in}, \text{out}\}$, can be seen as Lagrange multiplier (or adjoint variables). We emphasize that the variables $(\Phi_t, \psi_t, q_{\text{out}})$ are here to enforce the boundary conditions (2.3).

The adjoint model is defined thanks to the critical point of \mathcal{L} with respect to the state variables (\mathbf{u}, θ, p) . We use below the following notation for the derivative of an application $\mathcal{F} : x \in \mathbf{E} \mapsto \mathcal{F}(x) \in \mathbf{F}$, where \mathbf{E}, \mathbf{F} are normed spaces

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} [\delta x] := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{F}(x + \varepsilon \delta x) - \mathcal{F}(x)}{\varepsilon}. \tag{2.11}$$

First, since \mathcal{L} is linear with respect to the adjoint variables, it is worth noting that we recover the state equation (2.2)-(2.3) if, for $l \in \{1, 2, \text{in}, \text{out}\}$, we solve

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\mathbf{u}^*, \theta^*, p^*, \Phi_l, \psi_l, q_{\text{out}})} [\delta \mathbf{u}^*, \delta \theta^*, \delta p^*, \delta \Phi_l, \delta \psi_l, \delta q_{\text{out}}] = 0.$$

Using now (2.11) to differentiate the Lagrangian (2.10) with respect to the state variables, and integrating by parts to have no terms involving derivative of $(\delta \mathbf{u}, \delta \theta, \delta p)$, we end up with

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\mathbf{u}, \theta, p)} [\delta \mathbf{u}, \delta \theta, \delta p] &= \int_{\Omega} \frac{\partial \mathcal{J}_{\Omega}}{\partial (\mathbf{u}, \theta, p)} [\delta \mathbf{u}, \delta \theta, \delta p] \, d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{\partial \mathcal{J}_{\Gamma}}{\partial (\mathbf{u}, \theta, p)} [\delta \mathbf{u}, \delta \theta, \delta p] \, d\Gamma + \\
&\int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot (\nabla p^* - h_{\tau}(\alpha, \alpha_0) \mathbf{u}^* - (\nabla \mathbf{u})^{\text{T}} \mathbf{u}^* + \nabla \mathbf{u}^* \mathbf{u} + \theta \nabla \theta^* + \operatorname{Re}^{-1} \Delta \mathbf{u}^*) \, d\Omega \\
&+ \int_{\Omega} \delta \theta (\operatorname{div}(\operatorname{Re}^{-1} \operatorname{Pr}^{-1} k_{\tau}(\alpha, \alpha_0) \nabla \theta^*) + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta^* + \operatorname{Ri} \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{e}_y) \, d\Omega \\
&+ \int_{\Omega} \delta p \operatorname{div} \mathbf{u}^* \, d\Omega - \int_{\Gamma} \delta p (\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n}) \, d\Gamma \\
&+ \int_{\Gamma} \delta \mathbf{u} \cdot (-n p^* - n \theta \theta^* + \operatorname{Re}^{-1} \partial_n \mathbf{u}^* - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{u}^*) \, d\Gamma - \int_{\Gamma} \operatorname{Re}^{-1} \partial_n \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^* \, d\Gamma \\
&+ \int_{\Gamma} \delta \theta ((-\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \theta^* - \operatorname{Re}^{-1} \operatorname{Pr}^{-1} k_{\tau}(\alpha, \alpha_0) \partial_n \theta^*) \, d\Gamma + \int_{\Gamma} \theta^* \operatorname{Re}^{-1} \operatorname{Pr}^{-1} k_{\tau}(\alpha, \alpha_0) \partial_n \delta \theta \, d\Gamma \\
&- \int_{\Gamma_1} (\delta \mathbf{u} \cdot \Phi_1 + \partial_n \delta \theta \psi_1) \, d\Gamma - \int_{\Gamma_2} (\delta \mathbf{u} \cdot \Phi_2 + \partial_n \delta \theta \psi_2) \, d\Gamma \\
&- \int_{\Gamma_{\text{in}}} (\delta \mathbf{u} \cdot \Phi_{\text{in}} + \delta \theta \psi_{\text{in}}) \, d\Gamma - \int_{\Gamma_{\text{out}}} (\partial_n \delta \mathbf{u} \cdot \Phi_{\text{out}} + \delta p q_{\text{out}} + \partial_n \delta \theta \psi_{\text{out}}) \, d\Gamma
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Assuming that $(\delta \mathbf{u}, \delta \theta, \delta p, \Phi_l, \Psi_l, q_{out}) = 0$ for $l \in \{1, 2, in, out\}$, that the first derivatives of $\delta \mathbf{u}, \delta \theta$ vanish on Γ and solving $(\partial \mathcal{L} / \partial (\mathbf{u}, \theta, p)) [\delta \mathbf{u}, \delta \theta, \delta p] = 0$ yield the adjoint problem :

$$\begin{aligned} \nabla p^* - h_\tau(\alpha) \mathbf{u}^* + \theta \nabla \theta^* + Re^{-1} \Delta \mathbf{u}^* + \nabla \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{u} - (\nabla \mathbf{u})^T \mathbf{u}^* &= -\frac{\partial \mathcal{J}_\Omega}{\partial \mathbf{u}} \quad \text{in } \Omega \\ \text{div } \mathbf{u}^* &= -\frac{\partial \mathcal{J}_\Omega}{\partial p} \quad \text{in } \Omega \\ Ri \mathbf{u}^* \cdot \vec{e}_y + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta^* + \text{div} (Re^{-1} Pr^{-1} k_\tau(\alpha) \nabla \theta^*) &= -\frac{\partial \mathcal{J}_\Omega}{\partial \theta} \quad \text{in } \Omega. \end{aligned} \quad (2.13)$$

For the adjoint boundary condition, we are going to show how to obtain them on $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ since the other part of Γ can be done in the same spirit. On both walls, the primal velocity is fixed to zero (no-slip condition on the walls) and the heat flux either vanishes or is constant. Since $\text{div } \mathbf{u} = 0$ and \mathbf{u} is prescribed or null value, there will be $\delta \mathbf{u} = 0$, $\text{div } \delta \mathbf{u} = 0$ and $\partial_n \delta \theta = 0$. We recall a formula from Kangro and Nicolaidis [69, Lemma 7] that holds for any vector fields \mathbf{w} and reads

$$\partial_n \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} = \text{div } \mathbf{w} |_\Gamma - \text{div}_\Gamma \mathbf{w}_t - \kappa \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}, \quad (2.14)$$

where $\kappa = \text{div } \mathbf{n}$ is the curvature of Γ and div_Γ is the surface divergence operator. Since $\partial_n \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^* = (\partial_n \delta \mathbf{u})_n \cdot \mathbf{u}_n^* + (\partial_n \delta \mathbf{u})_t \cdot \mathbf{u}_t^*$ and $\delta \mathbf{u} = 0$ and $\text{div } \delta \mathbf{u} = 0$, formula (2.14) gives that

$$\partial_n \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^* = (\partial_n \delta \mathbf{u})_t \cdot \mathbf{u}_t^*.$$

The boundary conditions on $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ are then obtained from (2.12) by considering, for $l = 1, 2$, the following vanishing terms

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_l} Re^{-1} \partial_n \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^* d\Gamma &= \int_{\Gamma} Re^{-1} (\partial_n \delta \mathbf{u})_t \cdot \mathbf{u}_t^* d\Gamma = 0, \\ \int_{\Gamma_l} \delta p \left(\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n} - \frac{\partial \mathcal{J}_\Gamma}{\partial p} \right) d\Gamma &= 0, \\ \int_{\Gamma_l} \delta \theta \left((-\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \theta^* - Re^{-1} Pr^{-1} k_\tau(\alpha, \alpha_0) \partial_n \theta^* + \frac{\partial \mathcal{J}_\Gamma}{\partial \theta} \right) d\Gamma &= 0. \end{aligned} \quad (2.15)$$

The adjoint boundary conditions on Γ_{in} are obtained as above by taking $\delta \theta = 0$. For the outlet, we use $\partial_n \delta \theta = 0$, $\partial_n \delta \mathbf{u} = 0$ and $\delta p = 0$. Finally, we end up with the adjoint boundary condition

$$\begin{aligned} \text{On } \Gamma_1 \cup \Gamma_2: \quad u_t^* &= 0, \quad u_n \theta^* + Re^{-1} Pr^{-1} k_\tau(\alpha, \alpha_0) \partial_n \theta^* = \frac{\partial \mathcal{J}_\Omega}{\partial \theta}, \quad u_n^* = \frac{\partial \mathcal{J}_\Omega}{\partial p}, \\ \text{On } \Gamma_{in}: \quad u_n^* &= \frac{\partial \mathcal{J}_\Gamma}{\partial p} \quad u_t^* = 0, \quad \theta^* = 0, \\ \text{On } \Gamma_{out}: \quad u_n \theta^* &+ Re^{-1} Pr^{-1} k_\tau(\alpha, \alpha_0) \partial_n \theta^* = \frac{\partial \mathcal{J}_\Gamma}{\partial \theta}, \\ n p^* + n \theta \theta^* &+ Re^{-1} \partial_n u^* + u_n \mathbf{u}^* = \frac{\partial \mathcal{J}_\Gamma}{\partial \mathbf{u}}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Now solving $(\partial \mathcal{L} / \partial \alpha) [\delta \alpha] = 0$ for all $\delta \alpha$ yields

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_{\tau, \alpha_0}}{\partial \alpha} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^* + Re^{-1} Pr^{-1} \frac{\partial k_{\tau, \alpha_0}}{\partial \alpha} \nabla \theta \cdot \nabla \theta^* &= 0 \quad \text{in } \Omega \\ \frac{\partial k_{\tau, \alpha_0}}{\partial \alpha} \theta^* &= 0 \quad \text{on } \Gamma_1, \end{aligned} \quad (2.17)$$

which is the optimality condition. Finally, according to the adjoint method (see e.g. Gunzburger [56], Herzog and Kunisch [61], Petra and Stadler [109]), the gradient of the cost functional $\mathcal{J}(\mathbf{u}, \theta, p)$ at some α is given by

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \alpha}(\alpha) &= \frac{\partial h_{\tau, \alpha_0}}{\partial \alpha} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^* + \text{Re}^{-1} \text{Pr}^{-1} \frac{\partial k_{\tau, \alpha_0}}{\partial \alpha} \nabla \theta \cdot \nabla \theta^*, & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \alpha}(\alpha) &= \frac{\partial k_{\tau, \alpha_0}}{\partial \alpha} \theta^* & \text{on } \Gamma_1, \end{aligned} \quad (2.18)$$

where (\mathbf{u}, θ, p) satisfy (2.2-2.3) and $(\mathbf{u}^*, \theta^*, p^*)$ satisfy the adjoint problem (2.13-2.16).

Remark 1 *The adjoint variables $(\Phi_l, \psi_l, p_{out})$ used to enforce the boundary conditions (2.3) of the primal problem are not needed to solve the adjoint problem. Nevertheless, they can be determined using (2.13, 2.15) which cancel many terms in (2.12) and gives*

$$\begin{aligned} \Phi_l &= -n p^* - n \theta \theta^* + \text{Re}^{-1} \partial_n \mathbf{u}^* - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{u}^* + \frac{\partial \mathcal{J}_\Gamma}{\partial \mathbf{u}} \text{ on } \Gamma_l \\ \psi_l &= \theta^* \text{Re}^{-1} \text{Pr}^{-1} k_\tau(\alpha, \alpha_0) + \frac{\partial \mathcal{J}_\Gamma}{\partial \theta} \text{ on } \Gamma_l, l \in \{1, 2, in\}, \\ \Phi_{out} &= -\text{Re}^{-1} \mathbf{u}^*, \psi_{out} = \theta^* \text{Re}^{-1} \text{Pr}^{-1} k_\tau(\alpha, \alpha_0), q_{out} = -u_n^* - \frac{\partial \mathcal{J}_\Gamma}{\partial p}. \end{aligned}$$

Note finally that these adjoint variables are also not needed to compute the gradient of the cost functional with respect to the design variable since they does not appear in (2.18).

2.5 Numerical example

This section aims to validate the new interpolation technique. To do so, we investigate two objective functions. First objective function is related to the power dissipated by the fluid through the domain Ω and can be evaluated on the basis of total pressure losses as follows :

$$\mathcal{J}_1(\mathbf{u}, p, \theta) = - \int_\Gamma p_t \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\Gamma \text{ where } p_t = p + \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 \quad (2.19)$$

The second cost function is related to the maximization of the recoverable thermal power from the domain Ω and is given by

$$\mathcal{J}_2(\mathbf{u}, p, \theta) = \int_\Gamma \theta \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad (2.20)$$

We finally consider the following objective functional

$$\begin{aligned} \text{minimize : } \quad \mathcal{J}(\mathbf{u}, p, \theta) &= \mathcal{J}_1(\mathbf{u}, p, \theta) - \mathcal{J}_2(\mathbf{u}, p, \theta), \\ &= - \int_\Gamma (p_t + \theta) \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\Gamma \\ \text{subject to : } \quad &\text{Governing equation (2.2),} \\ &\text{Boundary conditions (2.3).} \end{aligned} \quad (2.21)$$

We notice that the objective function \mathcal{J} is a linear combination of both objective functions described above. It's taking place at the inlet and outlet flow boundary conditions and the combination involves the opposite of \mathcal{J}_2 since the optimization problem aims at minimizing the combinatory function \mathcal{J} . Using the notation from the general optimization problem (2.1), we have $\mathcal{J}_\Omega = 0$ and $\mathcal{J}_\Gamma(\mathbf{u}, p, \theta) = (p + \theta) \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$. The adjoint model is

then given by (2.13)-(2.16) where all the partial derivative of \mathcal{J}_Ω are zero and the following boundary conditions hold

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}^* &= \mathbf{0}, \quad \partial_n \theta^* = 0 && \text{on } \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \\
 u_\tau^* &= 0, \quad \theta^* = 0, \quad u_n^* = -u_n && \text{on } \Gamma_{in}, \\
 \theta^* u_n + \text{Re}^{-1} \text{Pr}^{-1} k_\tau(\alpha) \partial_n \theta^* &= -u_n && \text{on } \Gamma_{out}, \\
 p^* + \theta^* \theta + \text{Re}^{-1} \nabla_n \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n} + u_n^* u_n &= -(\theta + p) && \text{on } \Gamma_{out}.
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

As said in section 2.4, we propose to solve the topology optimization problem with a steepest descent algorithm where the gradient is computed thanks to the adjoint method. The main flow of the algorithm for the topology optimization is described in Table 2.3. The for-

Step 0.	Initialization : set all the constants $\text{Re}, \text{Ri}, \text{Pr}$
Step 1.	Solve the forward problem (2.2),(2.3) problem with the Finite Volume Method
Step 2.	Compute objective and constraint values
Step 3.	Compute sensitivities by adjoint method
Step 4.	Evaluate the optimality condition. If a stopping criterion is met, terminate the calculation
Step 5.	Update design variables α with $\alpha_{k+1} = -\nabla \mathcal{J}_{k+1} + \beta_{k+1}^{\text{PR}} \alpha_k$ and return to step 1

TABLEAU 2.3 – Algorithm of topology optimization

ward problem and the optimization processes are implemented using OpenFOAM Weller et al. [131]. In Step 5, the design variables are evaluated by using the conjugated-gradient descent direction method associated to Polack-Ribiere method $\beta_{k+1}^{\text{PR}} = \frac{\nabla \mathcal{J}_{k+1}^T (\nabla \mathcal{J}_{k+1} - \nabla \mathcal{J}_k)}{\nabla \mathcal{J}_k^T \nabla \mathcal{J}_k}$.

After optimization process, several results are compared as optimized designs, velocity magnitude distribution, temperature distribution, and lastly, we focus on fluid-solid interfaces. We also presents the objective function values for each simulation case. Finally, we investigate to vary the slope abscissa and the curve of sigmoid functions in order to evaluate their impact on the optimization problem. That corresponds to consider different values of α_0 and τ . In our study, α_0 will vary in $\{25, 50, 100\}$ which correspond respectively to $\{\alpha_{max}/8, \alpha_{max}/4, \alpha_{max}/2\}$ and τ will vary in $\{0.3, 0.7, 1.0\}$. In order to perform topology optimization, the α term may take a finite value between 0 and $\alpha_{max} = 200$.

2.5.1 Studied Cases

Two representative cases of topology optimization in fluid dynamics are investigated : the single pipe case and the bend pipe case. Figure 2.2 shows schematic illustrations of the two studied cases.

Design of a single pipe. We present here a benchmark numerical example used recently by Marck et al. [92] to illustrate the viability and efficiency of the methodology presented in this paper. The design domain consists in a cavity of side L . The computational domain is discretized using 100×100 elements. The inlet flow is located in the center of the west edge for a length of $L/5$. The outlet flow is lining up with it on the east edge. The rest of west and east edges are assumed to be adiabatic and will be called Γ_2 , whereas the whole north and south walls are subjected to a constant flux of temperature, called thereafter Γ_1 .

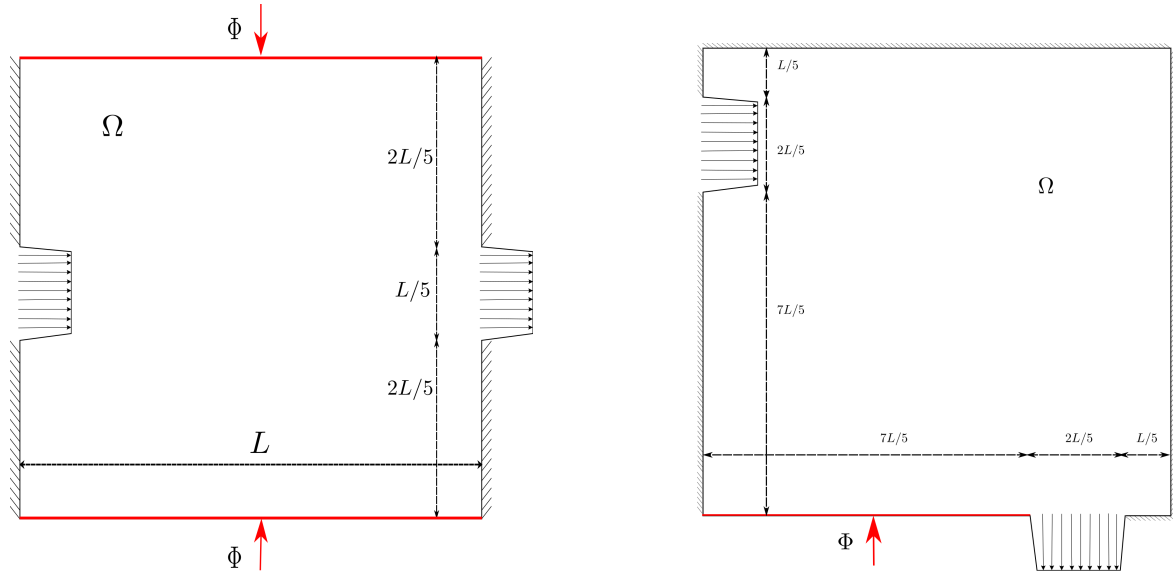


FIGURE 2.2 – Single pipe and Bend pipe

Design of a bend pipe. The second example has been studied by several authors as Borravall and Petersson [22] and Marck et al. [92]. The computational domain is also square-shaped, with a adimensional side $L = 1$, and the design grid is made of 100×100 elements. The inlet flow is located at $L/5$ of the west edge. The outlet flow is located on the south edge, at $L/5$ from the east edge. The length of both flow boundary conditions is set to $2L/5$. The part of the south edge located on the left of the outlet is subjected to a constant flux of temperature and will be called Γ_1 . The rest of the edges are assumed to be adiabatic and will be designated as Γ_2 .

Physical parameters. For the two representative cases studied in this section, the inlet flow is prescribed with a constant horizontal velocity equal to $U_0 = 0.04 \text{ m.s}^{-1}$ used in Reynolds number. The inlet temperature is fixed to $\theta = 0$. The outflow temperature condition is fixed to a zero gradient, as well as the velocity gradient. Hot walls are subject to a constant flux of temperature $\partial_n \theta = -1$. The Reynolds number based on the characteristic dimension of the inlet length and the average inlet velocity is $Re = 500$. The Rayleigh number is fixed to $Ra = 5 \times 10^5$. Prandtl number is set to 0.71. Grashof number has the following expression $Gr = Ra/Pr$. Adimensional thermal parameters are the following : $k_s = (9.88 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}) / (2.25 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1})$ [(Aluminum/Air) Diffusivities], $k_f = 1$.

2.5.2 Results

The aim of the problems defined above is to determine the optimal design that connects the inlet to the outlet of the cavity and that minimizes the objective function \mathcal{J} subjected to the constraints (2.2) and (2.3).

First of all, we compute \mathcal{J} without optimization for the two studied cases and we obtained respectively for the single pipe $J = 9.07 \cdot 10^{-3}$ and for the bend pipe $J = 6.38 \cdot 10^{-3}$. Compared to values issued from optimization process and referenced in Figure 2.8 and 2.11, they are reduced between 23% and 42% for the single pipe case, and between 18% and 19% for the bend pipe. So, the new method investigated here allows to both minimize the power dissipated by the fluid through the domain Ω and maximize the recoverable thermal power from the domain to the fluid.

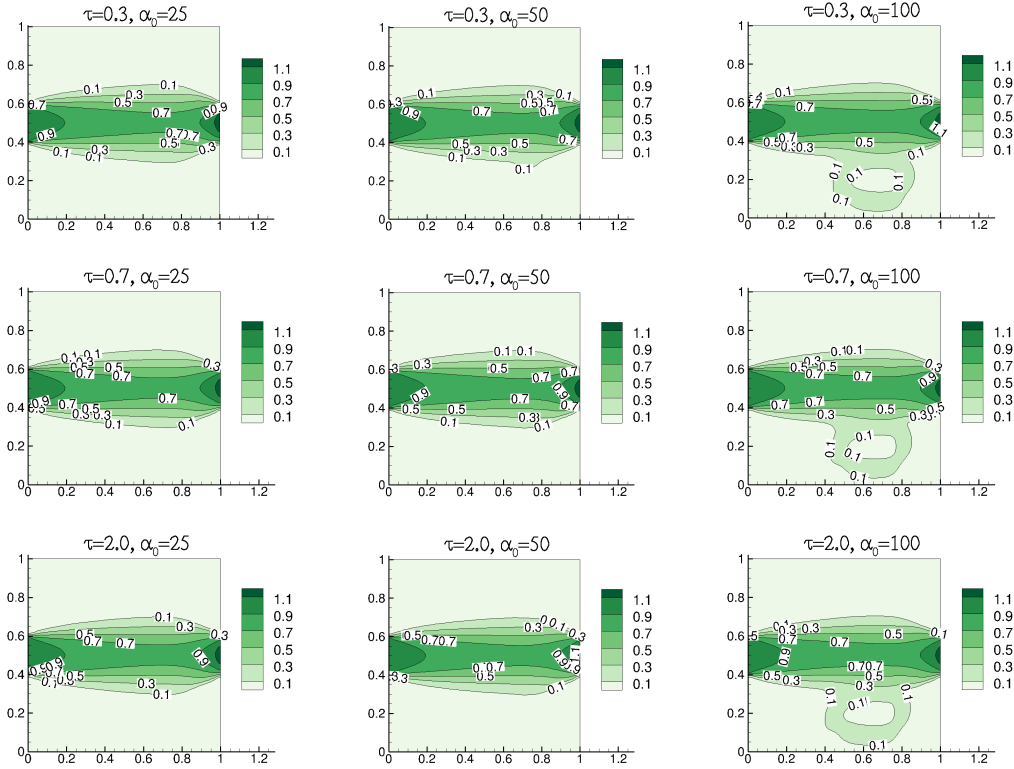


FIGURE 2.3 – Velocity magnitude distribution in the single pipe

Secondly, we plot velocity magnitude for various α_0 and τ values. After optimization of \mathcal{J} in the single pipe, we obtain an optimized design in which fluid is transported through the single pipe in a straight pipe (see Figure 2.3). It is quite closed to the optimized design obtained by Marck et al. [92] when the mechanical power and thermal power are considered with the same weighting coefficient. Similarly, fluid circulation forms a half circle whose center would be the left bottom corner of the square domain in the optimized bend pipe (see Figure 2.4). Contrary to the literature in fluid mechanics, the optimized path obtained for the flow is not as straight as possible. It can be explained by the fact that we consider here a heat transfer problem. So, the optimized pipe is larger and form a real bend because the fluid flow moves away from hot regions. Thereafter, we compared distribution of the parameter α in the domain for the two studied cases (see Figures 2.6 and 2.9). We recall that values less than α_0 are considered as fluid regions. We can notice that this method based on α_0 affected some values of α to the fluid regions, which would not be possible with other methods of the literature. Indeed, generally with the function (2.6), only value of α equal to zero is considered as fluid element. As can be seen on these figures, intermediate values for the fluid region exist. For example, we have different values of α between 0 and α_0 at right-top corner in Figure 2.9, or below the straight pipe for $\alpha_0 = 25$ in Figure 2.6.

As expected, the interpolation function $h_\tau(\alpha)$ suppresses these intermediate values noticed previously and affects these volume elements to pure fluid volume elements. Indeed, Figures 2.7 and 2.10 show the optimized designs for various α_0 and τ numbers. Compared to α distribution (Figures 2.6 and 2.9), they demonstrate that the interpolation function $h_\tau(\alpha)$ suppresses intermediate values corresponding neither to pure fluid nor to pure solid regions by affecting them to solid regions or fluid regions. However, in the bend pipe, a porous domain still exists near hot regions. Although fluid does not circulate

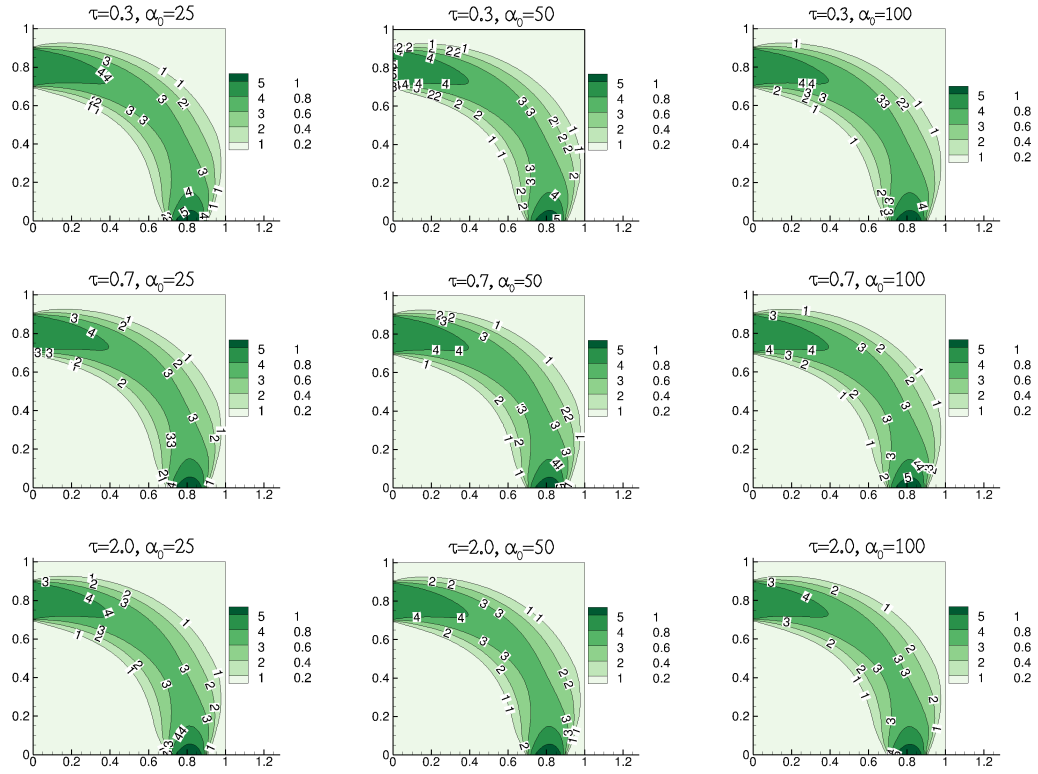


FIGURE 2.4 – Velocity magnitude distribution in the bend pipe

in this porous domain, its existence contributes to increasing thermal power recovered by the fluid. That is illustrated in Figure 2.5.

At last, it can be seen that thermal conductivity is well distributed, continuously, between fluid and solid regions. Figure 2.8 represents the distribution of material conductivity after the optimization process in the single pipe case. Compared to Figure 2.7, we observe that frontier between the two regions, fluid and solid, is well-established. For the bend pipe case, although intermediate regions exist, k_τ interpolation function allows to affect to this porous domain a conductivity closed to the fluid diffusivity (see Figure 2.11). Therefore, the function $k_\tau(\alpha)$ provides a continuous transition between the solid and the fluid domains.

Influence of α_0 . It can clearly be seen from Figures 2.7 and 2.10 that different designs are obtained for the different values of α_0 . As detailed in section 2.3, α_0 is depending of α_{max} in order to control the percentage of fluid in Ω . This parameter has a significant impact on the quantity of material adding in the domain and that can be illustrated by computing the proportion Q_t of material added in the domain Ω as follows :

$$Q_t = \frac{\int_{\Omega} h_\tau(\alpha) d\Omega}{\alpha_{max} V_{tot}} \text{ where } V_{tot} \text{ is the total volume of } \Omega \quad (2.23)$$

Calculation results are referenced in Figures 2.7 and 2.10. In the single pipe, when α_0 increases, quantity of material diminishes between 27.5% and 28%. That means fluid domain is more important and that contributes to the increase of \mathcal{J}_2 . So, that will influence the value of \mathcal{J} . In the bend pipe, when α_0 increases, quantity of material also diminishes between 3.6% and 16%. So, fluid domain is relatively more important than solid domain but not enough to significantly impact on the value of \mathcal{J} , hence, the small effect on values of \mathcal{J} (see Figure 2.11). So, parameter α_0 has a significant incidence on the proportion

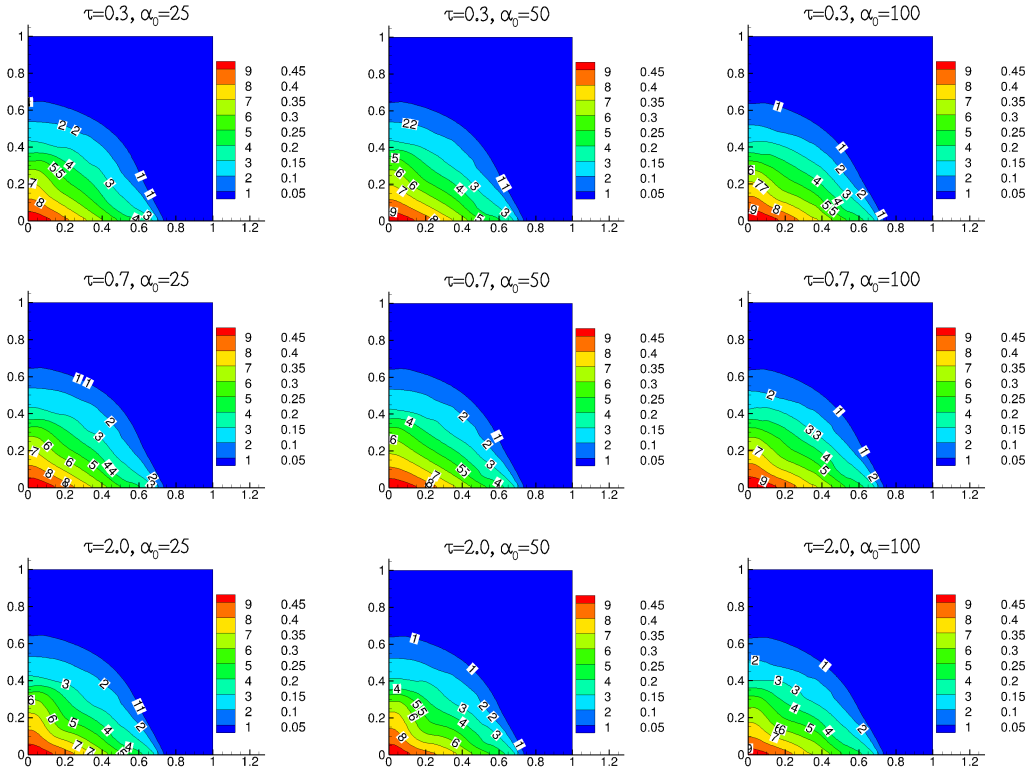


FIGURE 2.5 – Temperature distribution in the bend pipe

of fluid domain relatively to solid domain and therefore, can influence the value of the functional objective.

Futhermore, we observe a recirculation zone for $\alpha_0 = 100$ in the example of the optimized single pipe (see Figure 2.3). That can also be explained by the value of α_0 . Indeed, larger α_0 means that the proportion of fluid elements compared to α_{max} is bigger and thus fluid regions are more important. When $\alpha_0 = 100$, that means $\alpha_0 = \alpha_{max}/2$, the algorithm affects some value of $\alpha \in [0, 100]$ corresponding to fluid domain and so impacts on the size of fluid regions relatively to the solid regions in the domain.

Influence of τ . It can clearly be seen from Figures 2.7 and 2.10 that different designs are obtained for the different values of τ . The parameter τ in the interpolation functions $h_\tau(\alpha)$ and k_τ indicates the stiffness of the curve of the functions. It does not seem to impact significantly the optimization results. However, we can observe in Figure 2.11 that the frontier between the fluid and the solid is sharper when $\tau = 2.0$. In Figure 2.8, for $\tau = 0.3, \tau = 0.7$, we can notice residual material in fluid domain while they do not exist anymore when $\tau = 2.0$. As the same, the porous region identified in the bend pipe case between the main flow and the hot plate is defined mostly with the fluid diffusivity by the interpolation function. This impact does not influence significantly the result of the optimization computation when we compared their value in Figure 2.11 but it improves the thermal transition between fluid and solid regions. So, parameter τ seems to improve the thermal conductivity distribution during the process optimization.

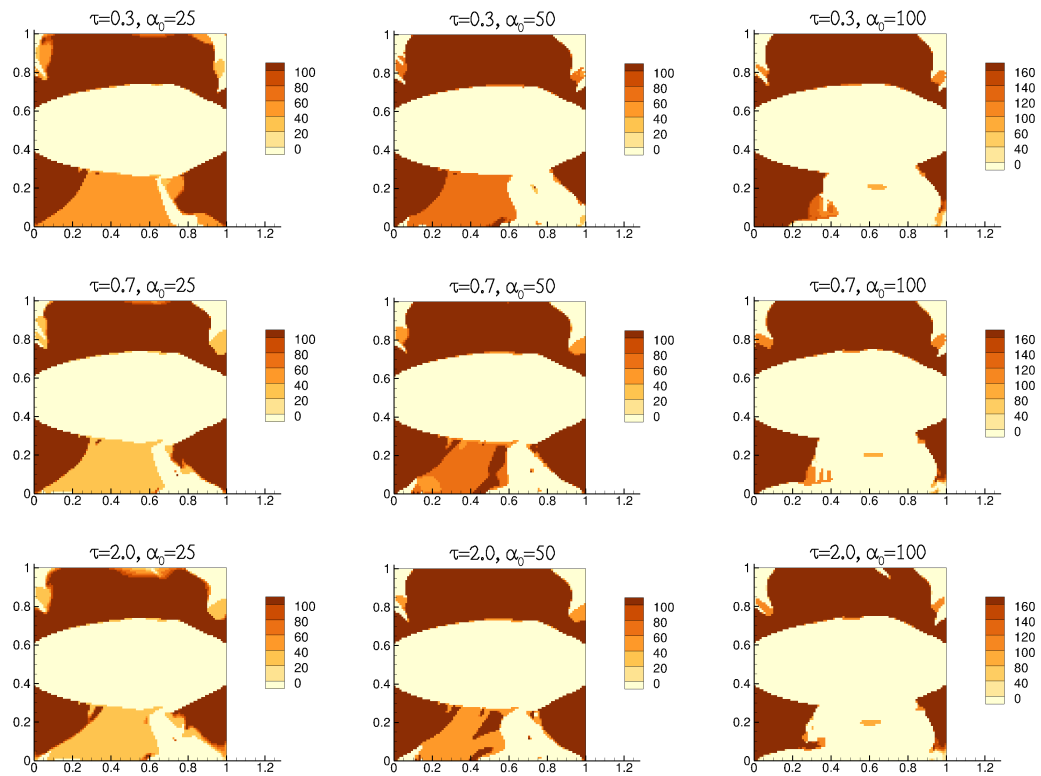


FIGURE 2.6 – α distribution in the single pipe

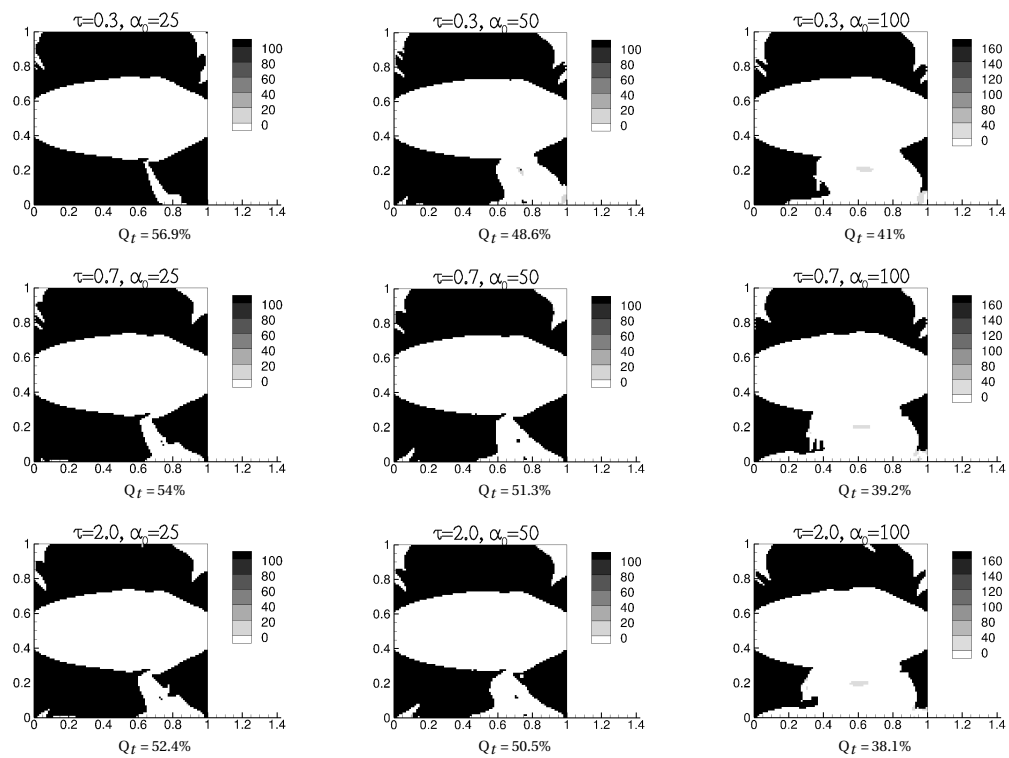


FIGURE 2.7 – $h_\tau(\alpha)$ distribution in the single pipe and proportion of material Q_t added in the domain after optimization

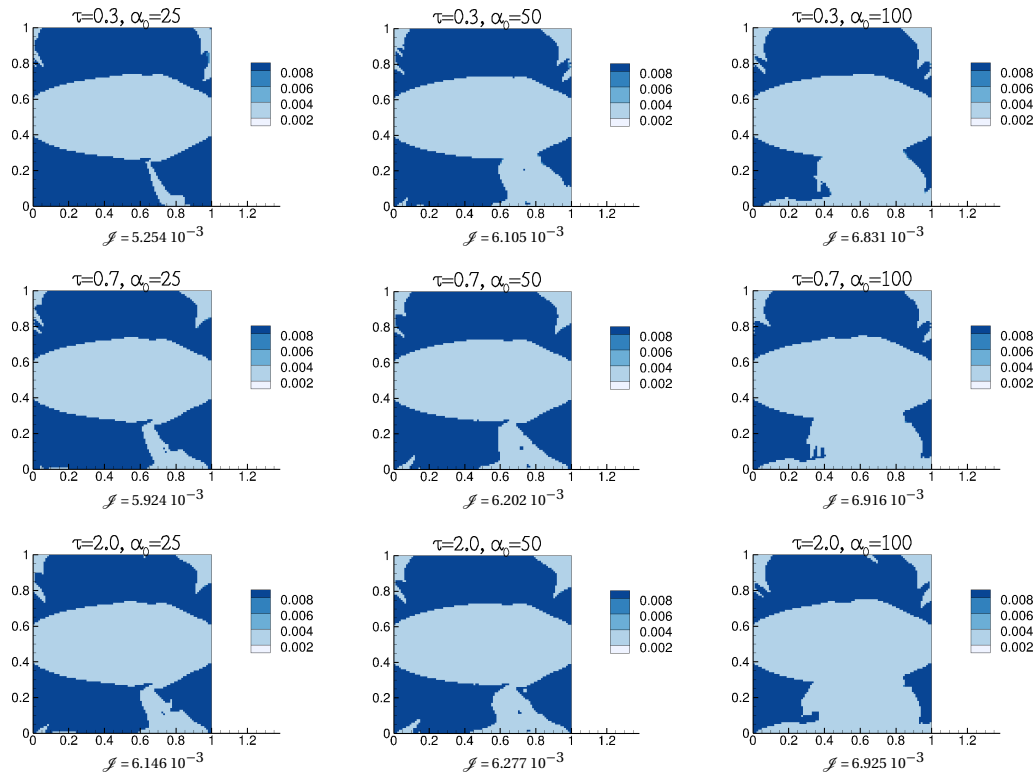


FIGURE 2.8 – $k_\tau(\alpha)$ distribution in the single pipe and value of functional objectif \mathcal{J} after optimization

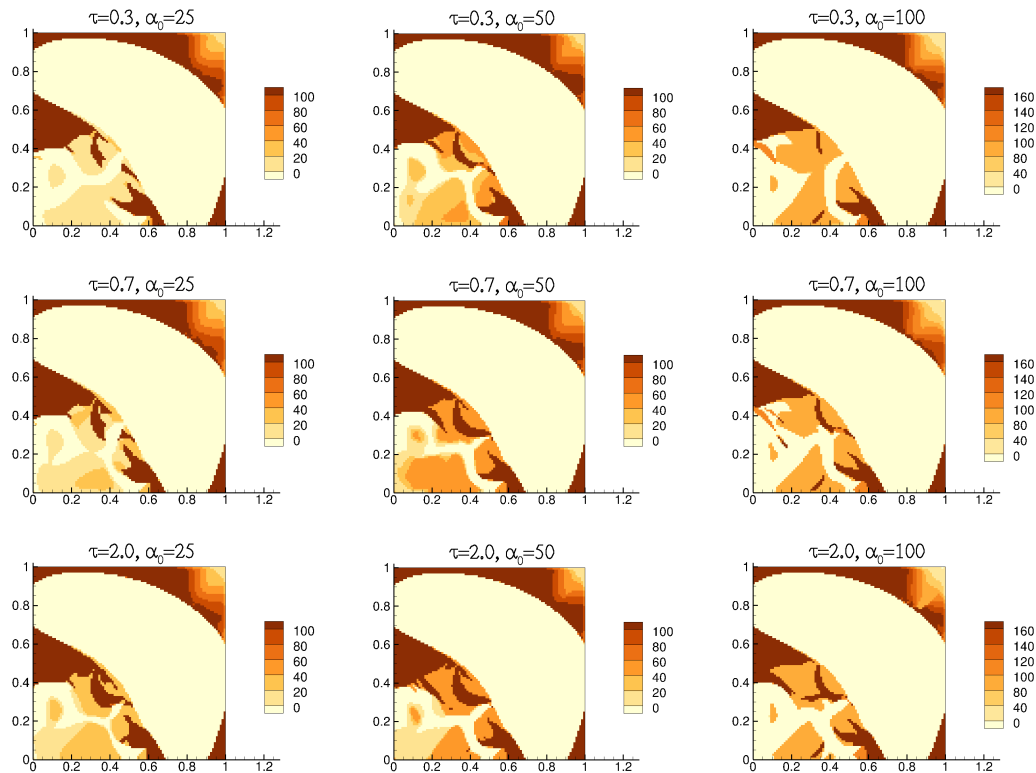


FIGURE 2.9 – α distribution in the bend pipe

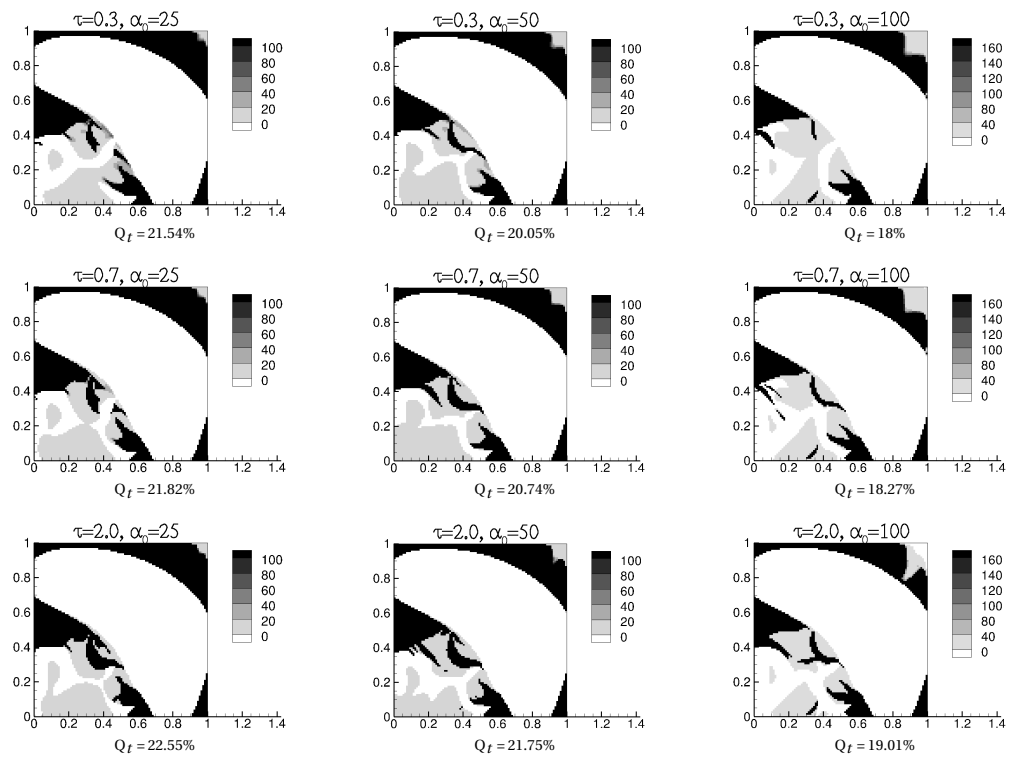


FIGURE 2.10 – $h_t(\alpha)$ distribution in the bend pipe and proportion of material Q_t added in the domain after optimization

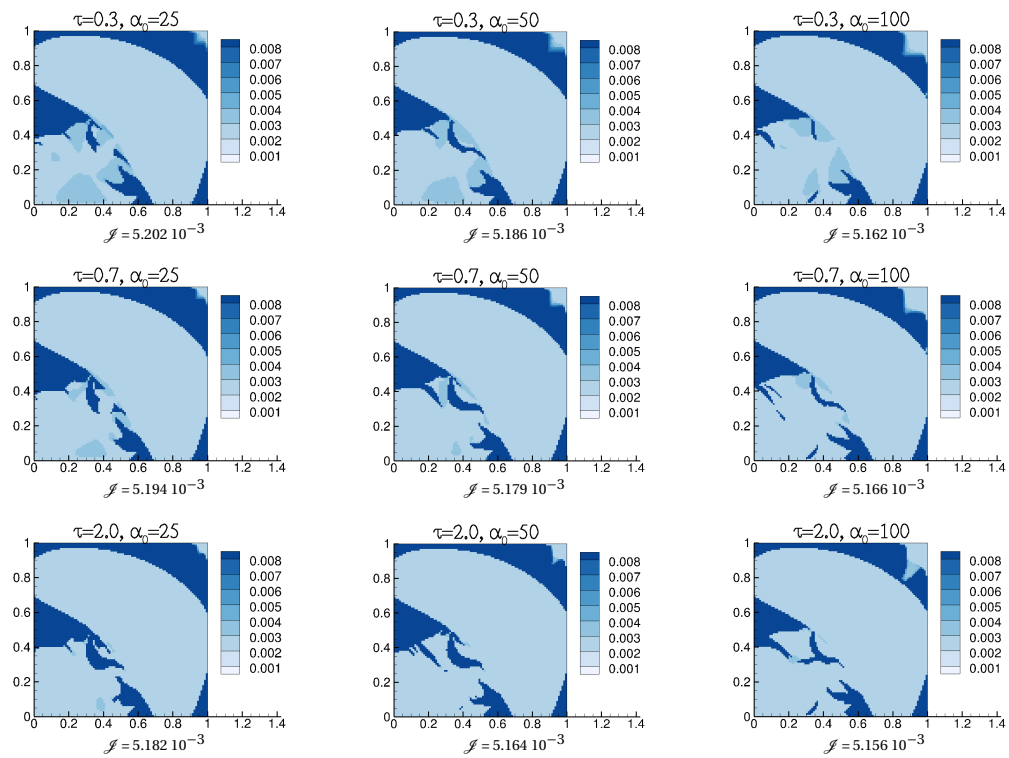


FIGURE 2.11 – $k_\tau(\alpha)$ distribution in the bend pipe and value of functional objective \mathcal{J} after optimization

2.6 Conclusion of the study

This study shows that the new interpolation technique based on sigmoid function is a viable method. Design material is well interpolated since intermediate regions between solid and fluid are suppressed hence giving a frontier between the two regions which is well-defined. Besides, the size of transition zones between fluid and solid regions is explicitly computed. The result is that the new interpolation functions reduce their size comparatively to the RAMP interpolation function. Therefore, the transition between fluid and solid is improving thanks to this sigmoid function for the effective conductivity. Computation of the size of transition zones could also be applied to other interpolation functions in order to evaluate the well-definition of the frontier between fluid and solid regions. This new interpolation technique do not require any regularization techniques since no checkerboards have been identified for the two studied cases. Two new parameters have been introduced : the abscissa slope of the sigmoid function α_0 and the curve of the sigmoid function τ . Their impact has been also investigated. α_0 has a significant impact on the quantity of material added in the domain during the optimization process. The larger α_0 is the bigger will be the fluid domain. The parameter τ has a small impact on the results of optimization. For the studied cases, the impact was seen after interpolation of thermal conductivity. Elements of porous domain have been affected to fluid diffusivity or solid conductivity, and therefore, the thermal transition between material is improved. So, this study has examined a new interpolation technique to deal with fluid-porous media interfaces for topology optimization of heat transfer problems. Further research might explore several type of flow regimes in optimization problems using these interpolation functions. Another possible area of future research would be to investigate new cost functions.

2.7 Conclusion du chapitre

Cette nouvelle technique d'interpolation de la variable de conception $h_\tau(\alpha)$ et de la conductivité du matériau $k_\tau(\alpha)$ donne des résultats satisfaisants concernant le zone de transition entre le fluide et le solide. Nous apportons ainsi une solution pour traiter la difficulté liée au paramètre de pénalité des autres fonctions d'interpolation connues dans la littérature. De la même manière, nous n'avons plus de motifs en damier à la fin du processus d'optimisation et il n'est plus nécessaire d'avoir recours à des filtres pour corriger les erreurs numériques. La seconde étape consiste alors à appliquer cette méthode à des problèmes d'optimisation pour des géométries utilisées par des industriels lors de la modélisation des échangeurs de chaleur, notamment.

Chapitre 3

Impact de la stratification thermique et du rayonnement de surface en convection naturelle

Sommaire

3.1 Abstract	44
3.2 Introduction	44
3.2.1 Boundary conditions for vertical channels	44
3.2.2 Thermal stratification	45
3.2.3 Flow reversal in vertical channel	45
3.2.4 Surface radiation	46
3.2.5 Aim of the present study	46
3.3 Problem setting	47
3.3.1 Model geometry	47
3.3.2 Mathematical formulation	48
3.3.3 Numerical method	49
3.3.4 Investigated configurations	49
3.4 Results and discussions	50
3.4.1 Linear thermal stratification	50
3.4.2 Thermal stratification as a function of time	58
3.5 Conclusion	64
3.6 Conclusion du chapitre	64

CE chapitre a pour premier objectif de rappeler les différentes études menées sur le canal asymétriquement chauffé. L'idée est de caractériser l'écoulement dans le canal en régime laminaire et d'évaluer les quantités aérauliques, c'est-à-dire, la vitesse, la pression totale, et les quantités thermiques telles que le nombre sans dimension de Nusselt, caractérisant le transfert de chaleur entre la paroi et le fluide. Le mouvement du fluide est animé par la convection naturelle. Le second objectif est d'étudier l'influence de paramètres extérieurs au canal tels que le rayonnement de surface et la stratification thermique afin d'identifier les grandeurs sensibles aux variations extérieures. Les résultats issus de cette étude permettront de préciser les grandeurs à considérer dans le cadre de l'optimisation des transferts de chaleur dans le canal.

3.1 Abstract

This paper¹ consists in a numerical study of the influence of thermal stratification and surface radiation on laminar airflow induced by natural convection in vertical, asymmetrically heated channels. Several cases are investigated in order to spotlight their influence on fluid dynamics and thermal quantities. Thermal stratification is obtained by a weak gradient of temperature outside of the channel, then the temperature at the bottom end of the channel is considered as a function of time. Significant effects on vertical velocities, mass flow and flow structure are shown. Surface radiation is also considered but appears less predominant than thermal stratification for the selected conditions of this paper. The impact on heat transfer is also evaluated for each studied configuration. It is observed that local and mean Nusselt numbers weakly increase for the investigated cases.

3.2 Introduction

Fluid flow and heat transfer between two vertical plates have applications in many widely used engineering systems ; for example, cooling and heating industrial and electronic equipment such as transistors, mainframe computers, plate heat exchangers, solar energy collectors, and cooling of nuclear reactor fuel elements. The problem of natural convection in vertical channels has been the focus of extensive investigations since the precursory experimental works performed by Elenbaas [42]. Authors studied free convection between vertical flat plates with symmetric or asymmetric heating, with uniform heat fluxes or constant temperatures. Numerically, they proposed two main approaches to solve the problem of natural convection flow in the channel : either a complete simulation of the channel and its external environment, or a truncated simulation considering the single channel with its geometric limitations. Naylor et al. [97] considered a semi-circular virtual extension at the entrance. Andreozzi et al. [7], Campo et al. [28] considered rectangular extensions at both ends of the channel. Their strategy consists to consider extended spatial domains at the entrance and at the exit where free stress or non-rotational flow conditions can be applied. However, natural convection flow is very sensitive to the size of the extensions. Liu and Tao [87] considered the channel in a closed reservoirs which surface is five times higher than the channel surface. Barozzi et al. [13] considered a cavity four times wider and three times longer than the channel. Gan [50] showed that the size of the computational domain influences the fluid flow. Suárez et al. [121] found that the computational domain including the whole channel must be 200 times larger and higher than the channel itself. Finally, Caltagirone [27] showed that this influence is not negligible when the fluid flow at the exit comes across the cavity wall. All these strategies lead to an increase in size of the computational domain which proves to be expensive, both in memory and in computational time. In our study, we chose to restrict the simulation to the channel height only and to model the thermal and dynamic boundary conditions at the exact aperture sections.

3.2.1 Boundary conditions for vertical channels

It is not obvious to set coherent boundary conditions at the geometrical limits because velocity and pressure values are not known a priori at the apertures of the channel. Des-

1. Cette étude a fait l'objet d'un article intitulé "Numerical study of natural convection in asymmetrically heated channel considering thermal stratification and surface radiation" et accepté pour publication dans *Numerical Heat Transfer Part A*

rayaud et al. [39] worked on a comparison exercise concerning the fluid flow and heat transfer in a vertical channel asymmetrically heated at a constant heat flux, without any downstream or upstream domain extensions. The effects of the four sets of open boundary conditions on fluid flow and heat transfer have been discussed. Brangeon et al. [23] implemented a numerical approach to study natural convection flows in an inclined and vertical channel. The study was based on an experimental configuration set up by Dupont et al. [41] and the comparison with their experimental data was led. They highlighted that local pressure boundary conditions provide an essentially flat velocity profile at the inlet, which is in better agreement with the experimental profile, contrarily to global pressure boundary conditions. 3D effects were also studied and show negligible effects on the main upward flow but improve the prediction of the reversal flow. According to their latest results, pressure boundary conditions at the top and bottom sections based on Local Bernoulli relation was chosen in this numerical study.

3.2.2 Thermal stratification

Thermal stratification of the external environment is often not considered in numerical studies although experiments showed its existence. Indeed, Garnier [51] and Zoubir [144] demonstrated the establishment of a thermal stratification in the reservoir containing the channel asymmetrically heated. Hemmer et al. [60] also observed that a thermal stratification is established in the tank surrounding the channel. Despite all of these observations, it is often estimated that this parameter has a too weak influence to affect both the dynamics and heat flow. For example, Hemmer et al. [60] observed a maximum of gap temperature of the order of 0.25 K in the tank. Similarly, Polidori et al. [110] measured a $0.5\text{ }^{\circ}\text{C}/m$ thermal stratification in their tank and, as it would not present evolution during the first five minutes following the initiation of the heating device, they estimated that the thermal stratification has no influence on the dynamics of the convective flow in the channel. Daverat [34] studied the influence of thermal stratification on the fluid flow in a vertical channel. He observed a diminution of chimney effect, of the mass flow, and an increase of the temperature of the wall for a $0.4\text{ }^{\circ}\text{C}/m$ thermal stratification. According to these previous studies, we notice that the influence of external thermal stratification on the flow in the channel can be interesting to investigate.

3.2.3 Flow reversal in vertical channel

The study of flow reversals in the case of pure natural convection in vertical channel was considered in only few works. Sparrow et al. [119] conducted an experiment to investigate the flow reversal in vertical parallel plates with water as the working flow. The flow reversal was formed by a pocket of recirculating flow when Ra/A ratio exceeded a certain magnitude. For the first time, the formation of pocket of recirculating flow was revealed by flow visualisations. It was found that the recirculation, fed by fluid drawn into the outlet section of the channel adjacent to the adiabatic wall, has no effect on the heat transfer at the heated wall. Chang and Lin [30] performed a numerical study to investigate the reversed flow and oscillating wake in an asymmetrically heated channel. The phenomenon of flow reversal was indicated near the upper adiabatic wall. It was more noticeable when the Rayleigh number increased. Kihm et al. [74] performed a numerical study matching smoke visualisation to investigate a problem of flow reversal of natural convection in isothermal vertical walls. They identified the occurrence of the onset in the upper central region because of isothermal vertical walls, and they indicated variations of

the entrance lengths with the Rayleigh numbers. Ospir et al. [103] conducted an experimental study on natural convection in an asymmetrically heated vertical plate with water as the working fluid. They investigated the evolution of flow reversal from a single cell to a final eight-shaped structure. Observations showed that the increase of the modified Rayleigh number resulted in an increase on the penetration of the flow reversal. Recently, Fu et al. [48] adopted the non-reflecting boundary, which was held at apertures considering the compressibility of fluid, to investigate the flow reversal of natural convection. The increase of the ratio of the width to the length of parallel plates makes the flow reversal became remarkable and drastic. The amount of fluid through the outlet flowing into parallel plates was gradually larger than that through the inlet flowing into parallel plates. In those situations, the fluids which were caused by the flow reversal through the outlet flowing into parallel plates, completely through the outlet flow out of parallel plates again. These different studies on the flow reversal in the channel show that this quantity can be sensitive to several parameters.

3.2.4 Surface radiation

Except some studies in literature, major of numerical investigations overlooked surface radiation in natural convection case. Similarly, we did not find in the literature any numerical studies about the combined thermal stratification in environment and surface radiation for the vertical channel case. However, Carpenter et al. [29] numerically studied the interaction of surface radiation with developing laminar natural convection in vertical parallel plate channels with asymmetric heating. They investigated the effects of five dimensionless parameters (heat flux ratio, Rayleigh number, aspect ratio, emissivity, and radiation number), and showed that radiation significantly alters the pure natural convection results since the maximum value of wall temperatures is reduced. The effect of surface radiation was reconsidered by Webb and Hill [130]. Their experiments were designed to determine local and average heat transfer characteristics for natural convection in a vertical parallel plate channel. They showed the importance of corrections for radiation and conduction losses and, they underlined the use of local thermophysical properties in correlating the data. Combined natural convection and thermal radiation in vertical parallel plate channels was experimentally investigated by Manca and Naso [89]. They showed that the effect of surface radiation is more important for asymmetric heating than for symmetric heating. Moreover, they emphasized that the flow patterns tend to those of symmetric heating for high wall emissivities. They also proposed correlations between local Nusselt numbers at various emissivities. Krishnan et al. [81] investigated experimentally laminar natural convection and surface radiation between vertical parallel plates by considering a central hot plate with high emissivity ($\epsilon = 0.85$) and two unheated polished plates ($\epsilon = 0.05$). This study highlights the significance of radiation at room temperature and they proposed a correlation for the average convective wall heat transfer. Recently, Li et al. [85] firstly added an effect of radiation on investigating the flow reversal of natural convection in asymmetrically heated vertical channels numerically. Experimental results of Webb and Hill [130] were used as boundary conditions at the inlet and outlet of the channel. Their results showed that the general effect of surface radiation is to delete the onset of flow reversal at the top part of the channel, to diminish the temperature of the heated walls and to increase the facing wall temperature.

3.2.5 Aim of the present study

This paper reports a numerical study of the influence of thermal stratification and surface radiation on the laminar airflow induced by natural convection in vertical, asymmetrically heated channels. Studied case conducted by the French Research Group AMETH in Desrayaud et al. [39] on natural convection in open-ended channels is taken as the model problem for carrying out the computations. The thermal stratification is created first by setting a constant bottom temperature different from the top temperature, in order to obtain a weak gradient of temperature between the entrance and the exit of the channel. Then, we consider a function of the temperature at the inlet of the channel. The influence of external surface radiation is investigated by considering also temperature of grey bodies (bottom and top channel) which are set to values in agreement with thermal stratification surrounding the channel. This case-study approach makes the originality of our investigation. To our knowledge, it's also the first numerical study on vertical, asymmetrically heated channels, that considers both thermal stratification and surface radiation and that evaluates their impact on natural convection. For the selected conditions of thermal stratification and radiation surface, it will be asserted that thermal stratification is a more important factor than surface radiation.

3.3 Problem setting

This paper reports a numerical study of the influence of thermal stratification and surface radiation on the laminar airflow induced by natural convection in vertical, asymmetrically heated channels. Studied case conducted by the French Research Group AMETH in Desrayaud et al. [39] on natural convection in open-ended channels is taken as the model problem for carrying out the computations. The thermal stratification is created first by setting a constant bottom temperature different from the top temperature, in order to obtain a weak gradient of temperature between the entrance and the exit of the channel. Then, we consider a function of the temperature at the inlet of the channel. The influence of external surface radiation is investigated by considering also temperature of grey bodies (bottom and top channel) which are set to values in agreement with thermal stratification surrounding the channel. This case-study approach makes the originality of our investigation. To our knowledge, it's also the first numerical study on vertical, asymmetrically heated channels, that considers both thermal stratification and surface radiation and that evaluates their impact on natural convection. For the selected conditions of thermal stratification and radiation surface, it will be asserted that thermal stratification is a more important factor than surface radiation. In order to reduce the computational time and to focus on the flow and heat transfer in the channel, we consider in this study a computational domain restricted to the channel geometry.

3.3.1 Model geometry

We consider a vertical parallel plate channel of width b and height $A = 2H$. One wall is partially heated at a constant and uniform heat flux Φ on its half-middle section and the remaining walls are adiabatic (see Figure (3.1)).

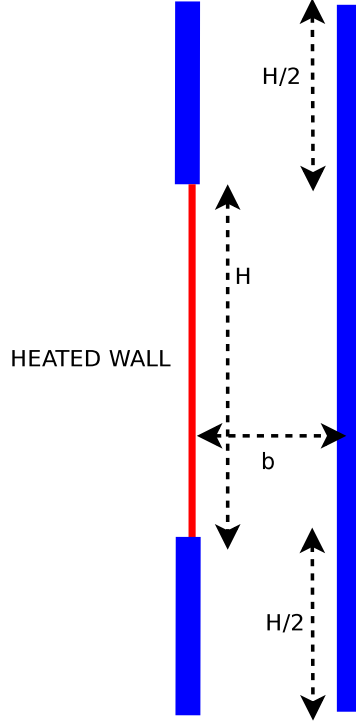


FIGURE 3.1 – Geometry

The fluid flow is assumed laminar and two-dimensional. Accounting for the small relative temperature difference occurring between the heated wall and the aperture, the Navier-Stokes and energy equations are expressed with the Boussinesq approximation. The viscous dissipation term in the energy equation is neglected. The energy equation and the one dealing with radiant interchanges amongst surfaces are coupled through the thermal boundary conditions.

3.3.2 Mathematical formulation

Governing equations. The governing flow and heat transfer equations, written in dimensionless and conservative form, read :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = -\nabla p + Pr Ra_b^{-1/2} \nabla^2 \mathbf{u} + Pr \theta \vec{e}_y \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \theta) = Ra_b^{-1/2} \nabla^2 \theta \quad (3.3)$$

with the reduced dimensionless temperature $\theta = (T - T_0)/\Delta T$. The dimensionless parameters governing the fluid flow and heat transfer are the Prandtl number $Pr = \nu/\kappa$ and the Rayleigh number $Ra_b = g\beta\Delta T b^3/(\nu\kappa)$. The characteristic velocity is defined as $U_{CN} = \kappa Ra_b^{1/2}/b$. In this study, as the fluid treated is air, we set the Prandtl number to 0.71, except for the last configuration where the fluid is water, corresponding to a Prandtl number of 7. We also set the Rayleigh number to $Ra_b = 5 \cdot 10^5$, corresponding to a laminar flow and, the reference temperature $T_0 = 298.15K$.

Surface radiation. For a given temperature distribution on the channel internal surfaces, the surface radiation problem is fully described by the linear system for radiosity

\tilde{J}_i (W/m^2). The net radiative heat flux resulting from surface radiation, which is defined in the hemisphere of a surface element, can be calculated by :

$$q_{r_i} = \frac{\epsilon_i}{1 - \epsilon_i} (\sigma T_i^4 - \tilde{J}_i) \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (3.4)$$

where σ is the Stefan-Boltzmann constant, m is the total number of surface elements and ϵ_i is the emissivity of the surface element i . In this paper, we consider that the emissivity of internal walls is equal to 0.1 and the emissivity of the surfaces corresponding to the bottom end and top end, are set to 0.9. The originality of this study is the temperature of bottom body and top body which are different to reference temperature. Indeed, we consider that they are located at a distance from the aperture of the channel, in a stratified ambient air.

3.3.3 Numerical method

The governing equations (3.1), (3.2) and (3.3) are discretized with the open source finite-volume code OpenFOAM. The Pressure-Implicit with Splitting of Operators (PISO) algorithm is applied for pressure-velocity coupling. The temporal term is discretized with the second-order implicit differencing scheme. The spatial discretization is handled with a central differencing scheme and a two-order collocated grid is adopted for the convective term in the energy equation.

3.3.4 Investigated configurations

Six configurations are investigated in this paper (see Table 3.1). According to the latest results produced by Brangeon et al. [23], we chose pressure boundary conditions at the apertures based on Local Bernoulli (LB) relation :

$$p(x, y) = -\frac{1}{2} v(x, y)^2 \quad (3.5)$$

At the outlet, two cases are considered :

$$\text{if } \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} > 0, p(x, y) = 0 \quad (3.6)$$

$$\text{else } p(x, y) = -\frac{1}{2} u(x, y)^2 \quad (3.7)$$

where \mathbf{n} is the outward unitary normal to the fluid part of computational domain. The boundary conditions along the walls are those of Desrayaud et al. [39], that is :

- imposed heat fluxes for the temperature with $\frac{\partial \theta}{\partial x} = -1$ on the heated wall, and $\frac{\partial \theta}{\partial x} = 0$ on the adiabatic walls ;
- non-slip boundary conditions for the velocity ;

In order to understand the effect of thermal stratification around the channel on natural convection, we proposed to create a weak gradient of temperature between the inlet and outlet. We consider first that the thermal stratification is a linear function. So we set a higher dimensionless temperature at the outlet or a lower dimensionless temperature at the inlet. The last configuration corresponds to the experimental case of Hemmer et al. [60] where they measured a thermal stratification of 0.25K in the tank containing the channel. We calculated the dimensionless temperature (0.0026) and we adapted the simulation in

order to consider the fluid as water, that means $Pr = 7$. Then, we completed the study by adding surface radiation. We assumed that temperature of bottom and top bodies are different from the reference temperature as they are in a stratified external environment. Finally, we considered the thermal stratification as a function and set it as the dimensionless temperature at the inlet of the channel. So, thermal boundary conditions at the bottom/top of the channel for the investigated configurations are the following :

1. **Case 1** : Reference Case
 $\theta(x, 0) = 0$ and $\theta(x, 2H) = 0$
2. **Case 2** : Thermal stratification case (-0.01)
 $\theta(x, 0) = -0.01$ and $\theta(x, 2H) = 0$.
3. **Case 3** : Thermal stratification case (+0.01)
 $\theta(x, 0) = 0$ and $\theta(x, 2H) = +0.01$.
4. **Case 4** : Thermal stratification case (0.005)
 $\theta(x, 0) = -0.005$ and $\theta(x, 2H) = +0.005$.
5. **Case 5** : Thermal stratification case (+0.0026) - Hemmer et al. [60]
 $\theta(x, 0) = 0$ and $\theta(x, 2H) = +0.0026$.
6. **Case 6** : Thermal stratification case $f(t)$

For this last studied-case, we define the temperature at the inlet as a function :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } t < 100 \\ -0.01 \sin^2\left(\frac{\pi}{50}(t-100)\right) & \text{if } 100 < t < 150 \\ 0 & \text{if } t > 150 \end{cases} \quad (3.8)$$

First of all, we compare dynamics and thermal quantities when we have a thermal stratified external environment. Quantities as mass flow rate exiting the channel (\dot{m}_{out}), mass flow rate entering through the top section (\dot{m}_{es}) or temperature at the inlet (θ_{outlet}) and temperature at the outlet (θ_{inlet}) are dimensionless. Secondly, we consider that the channel consists of four grey-diffuse, vertical surfaces (the three parts of left-hand side wall and the adiabatic right-hand side wall) and two horizontal surfaces regarded as grey radiators at an effective temperature of $T_{rad} = -0.03$ and $T_{rad} = 0.03$, respectively.

Case	1	2	3	4	5	6
θ_{outlet}	0	0	+0.01	0.005	0.0026	0
θ_{inlet}	0	-0.01	0	-0.005	0	$f(x, \theta)$

TABLEAU 3.1 – Parameters of the different cases

3.4 Results and discussions

3.4.1 Linear thermal stratification

Flow structure. Figure (3.2) presents the streamline patterns for the five configurations with a linear thermal stratification. As expected, we can observe a boundary layer-type flow which is developing near the heated wall due to the fluid supply from the bottom of the channel. At the same time, ambient fluid is entering the channel from the upper side of the unheated wall. This leads to the formation of a recirculation zone at the channel

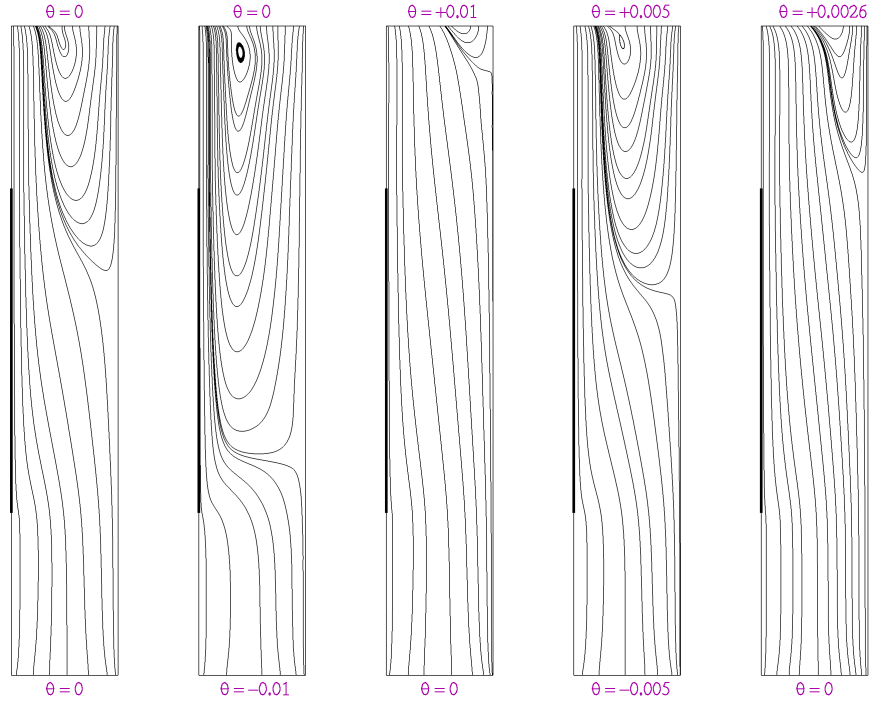


FIGURE 3.2 – Streamtraces for Cases 1 – 2 – 3 – 4 – 5 without radiation

outlet, near the unheated wall. So, as shown by Figure (3.2), thermal stratification outside the channel modifies clearly the flow structure in the channel. Moreover, Table 3.3 provides the depth l_w and the width d_w of recirculation flow for each studied case. Compared to the Reference Case, depth of the recirculation is bigger in Case 2 and Case 4, when the temperature at the inlet is lower than T_0 . The pocket like recirculation is smaller when temperature at inlet is equal or superior to the reference temperature, for example, Case 3 and Case 5. The increase of l_w is 67.5% in Case 2 and the decrease -82.4% in Case 3. Similarly, the width d_w of the pocket like recirculation is smaller when temperature at inlet is equal or superior to the reference temperature. For Case 2 and Case 4, considering only thermal stratification, the recirculation creates a vortex at the top section of the channel. It can be seen from Figure (3.2) that the size of these vortex increases by considering surface radiation and setting a temperature to grey bodies. It is apparent from Tables 3.3 and 3.2 that surface radiation diminishes the effect of thermal stratification on the size of downward recirculation. The depth of recirculation pocket grows of $+45.11\%$ for Case 2 and only $+9.7\%$ in Case 4. So, thermal stratification in external environment of the channel has a significant effect on the downward flow and its effect is mitigated through surface radiation. Yet, Li et al. [85] have shown that the general effect of surface radiation is to delete the onset of pocket like recirculation at the top part of the channel. We showed here that the effect of thermal stratification outside the channel is superior to the effect of surface radiation. So the pocket like recirculation still exists when we take into account surface radiation in numerical simulation.

Vertical velocity and mass flow rate. Figures (3.4),(3.5),(3.6),(3.7),(3.8) display the vertical component of the velocity at different horizontal section of the channel. Major differences are shown at the entrance section at $y = 0$ and $y = H/4$. The centred Case 4 is the closest approximation to the Reference Case without surface radiation. We notice that vertical velocities corresponding to cases where $\theta_{inlet} < T_0$ are below to vertical velocities for cases where $\theta_{inlet} > T_0$. Case 5 with $\theta_{outlet} = +0.0026$ presents the most important ve-

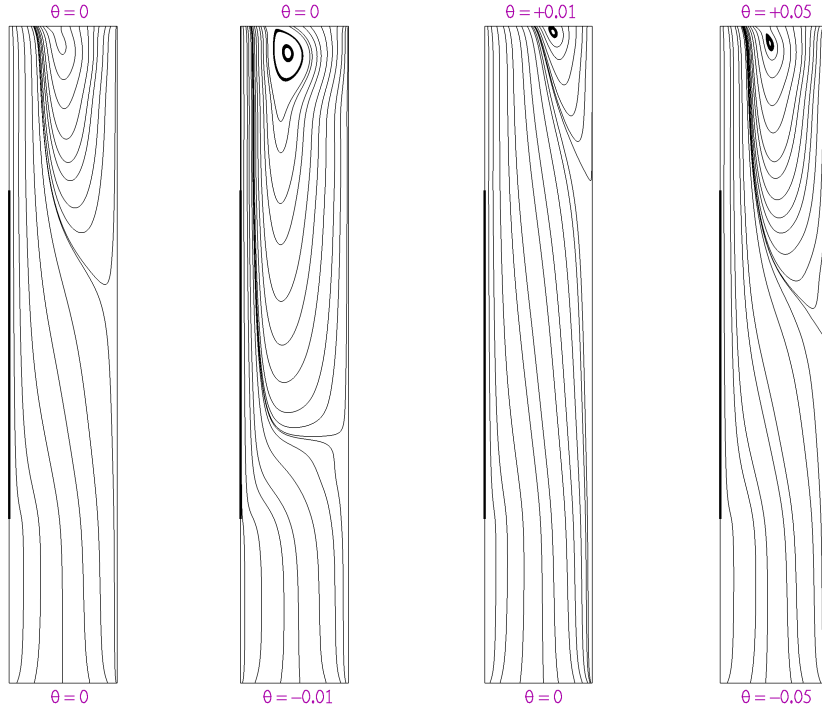


FIGURE 3.3 – Streamtraces for Cases 1 – 2 – 3 – 4 with radiation and TCorps

locities either the displayed section in the channel. Yet Hemmer et al. [60] considered in their study that the same thermal stratification in the tank has a too weak influence to affect the dynamics of the flow. We measured for our investigation an increase of +21.5% for the mass flow rate \dot{m}_{out} in the channel (Table 3.3). So, our result is not in agreement with their conclusion : $\theta_{inlet} > T_0$ diminishes vertical velocity in the channel. Furthermore, we remind that for this Case 5, the fluid is water ($Pr = 7.0$) contrarily to our Reference Case ($Pr = 0.71$). At the entrance of the channel, vertical velocities consist essentially of a flat profile at entrance instead of a parabolic profile with surface radiation. This flat velocity profile at the entrance reduces the mass flow rate in the channel (Table 3.2). For example in Case 2, mass flow rate \dot{m}_{out} decreases of -73% . As a consequence, a plug flow in the channel is produced, i.e. an effect opposite to the chimney effect. This has also been noticed by authors Daverat et al. [35] or Garnier [51]. Here, we complete their conclusion by the following result : opposite effect chimney due to thermal stratification is mitigated when we considered surface radiation.

Case	1	2	3	4
\dot{m}_{out}	10.26	3.57	8.94	14.49
\dot{m}_{es}	2.86	8.63	3.20	0.27
d_w	0.60	0.70	0.39	0.63
l_w	4.30	6.24	2.43	4.72

TABLEAU 3.2 – Dynamic quantities for Cases with radiation

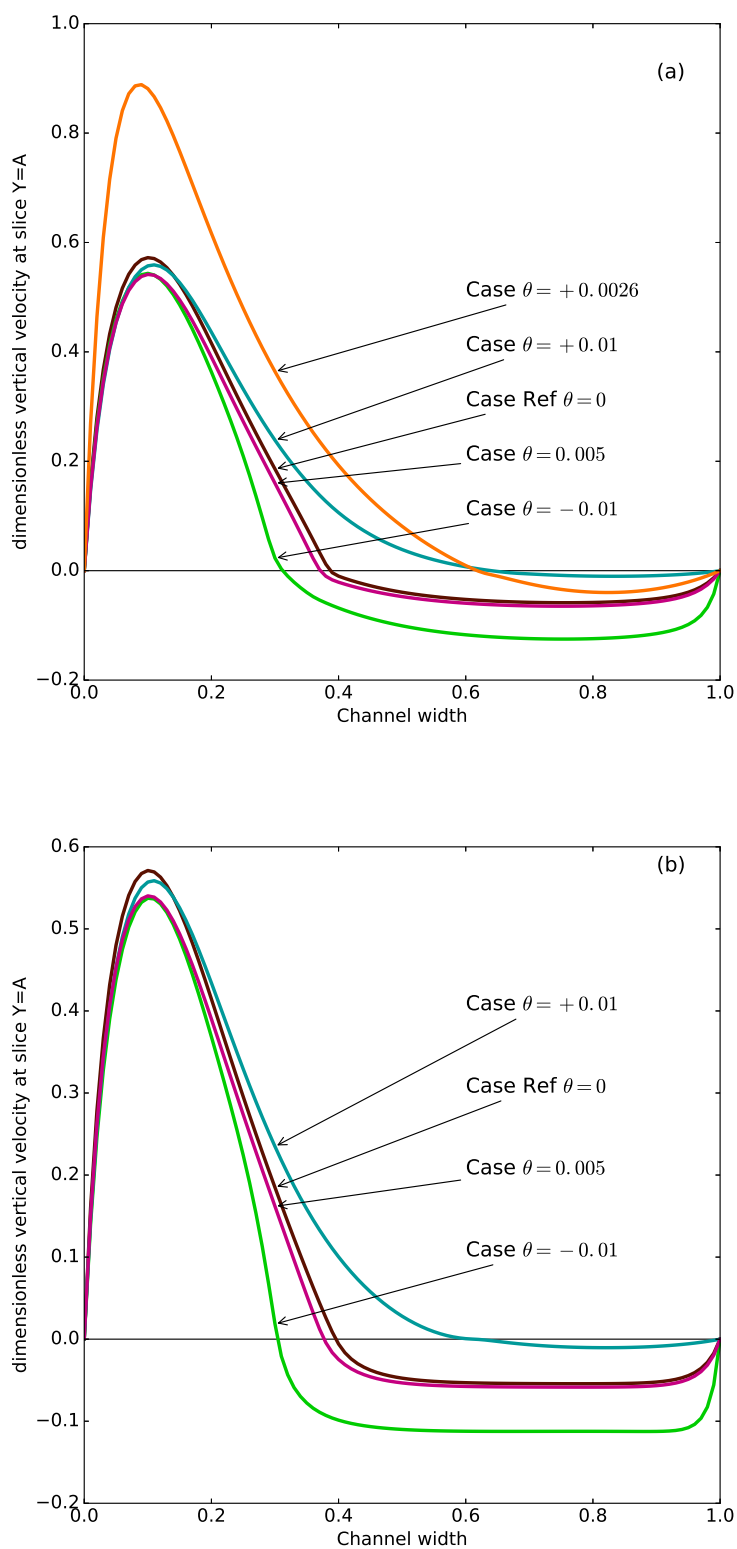


FIGURE 3.4 – Vertical velocity profiles at the outlet of the channel (a) Case with thermal stratification only, (b) Case with both thermal stratification and surface radiation

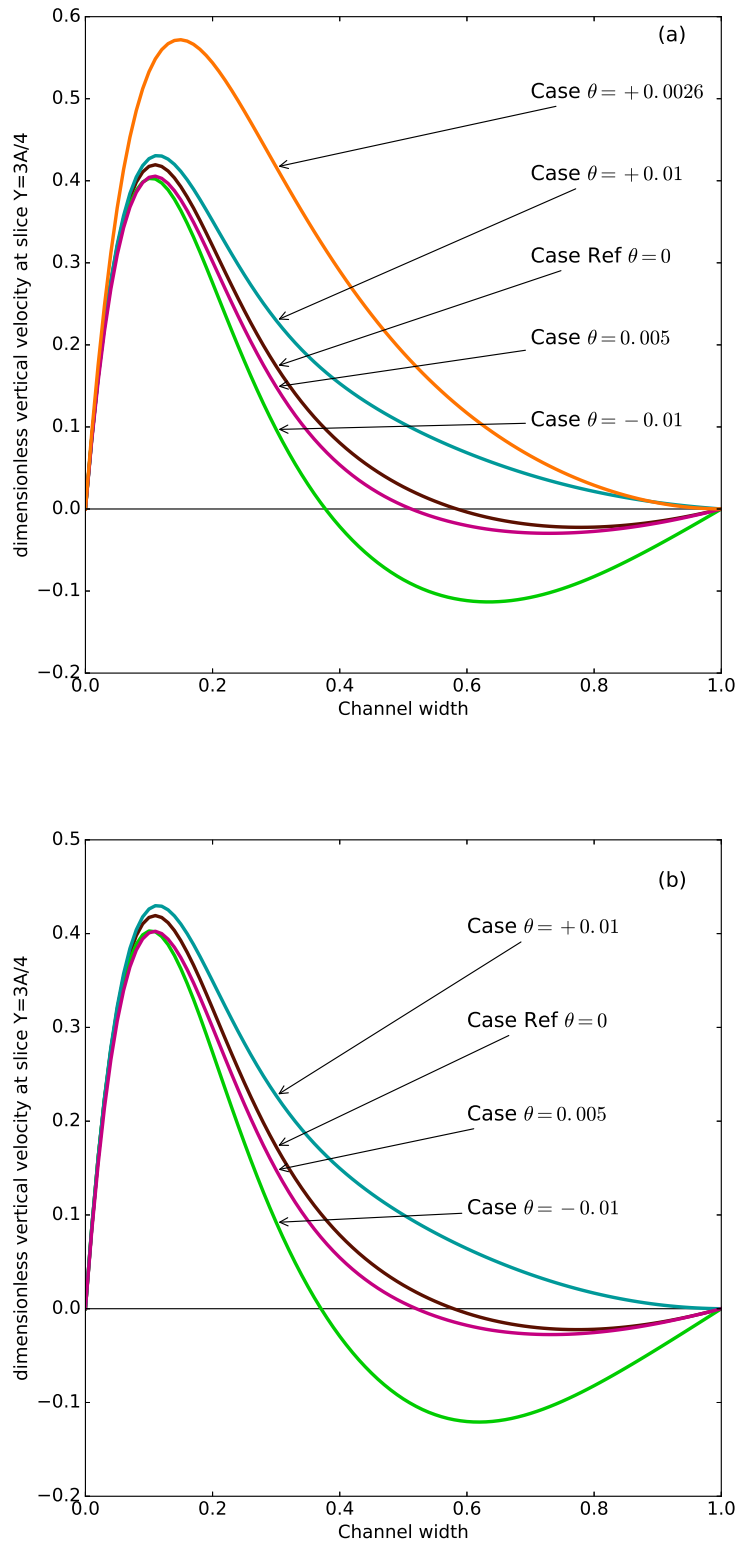


FIGURE 3.5 – Vertical velocity profiles at the outlet of the heated wall (a) Case with thermal stratification only, (b) Case with both thermal stratification and surface radiation

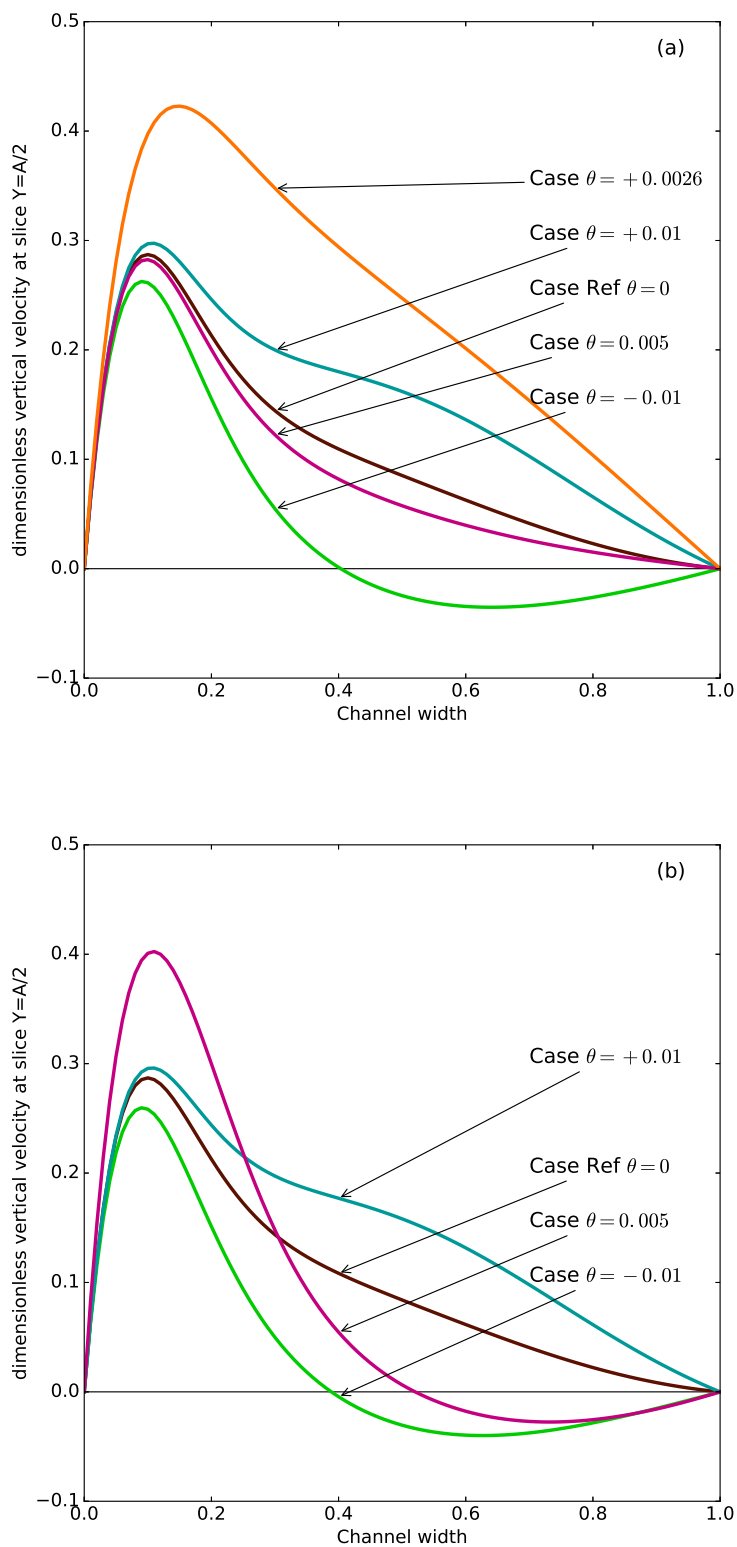


FIGURE 3.6 – Vertical velocity profiles at half of the height of the channel (a) Case with thermal stratification only, (b) Case with both thermal stratification and surface radiation

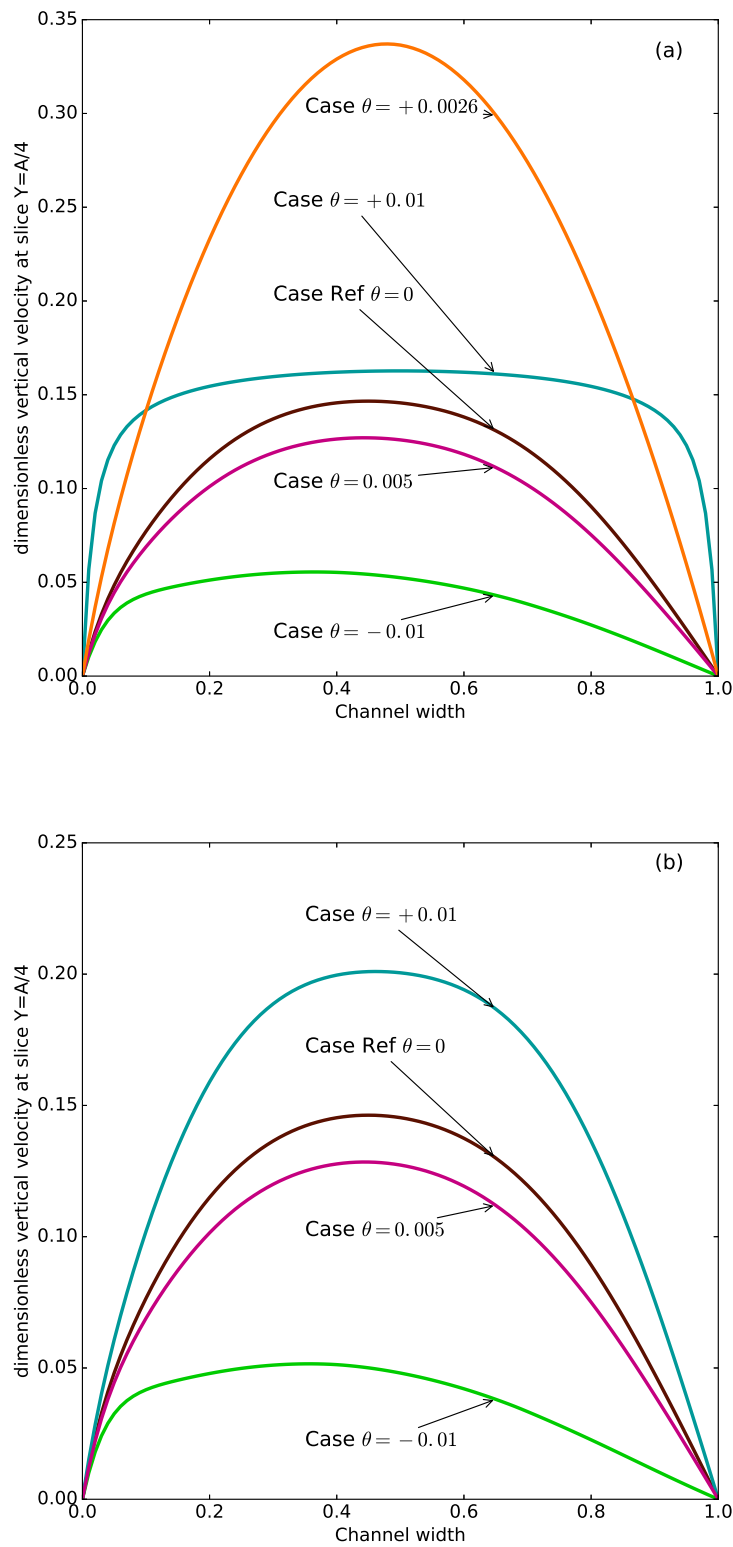


FIGURE 3.7 – Vertical velocity profiles at the entrance of heated wall (a) Case with thermal stratification only, (b) Case with both thermal stratification and surface radiation

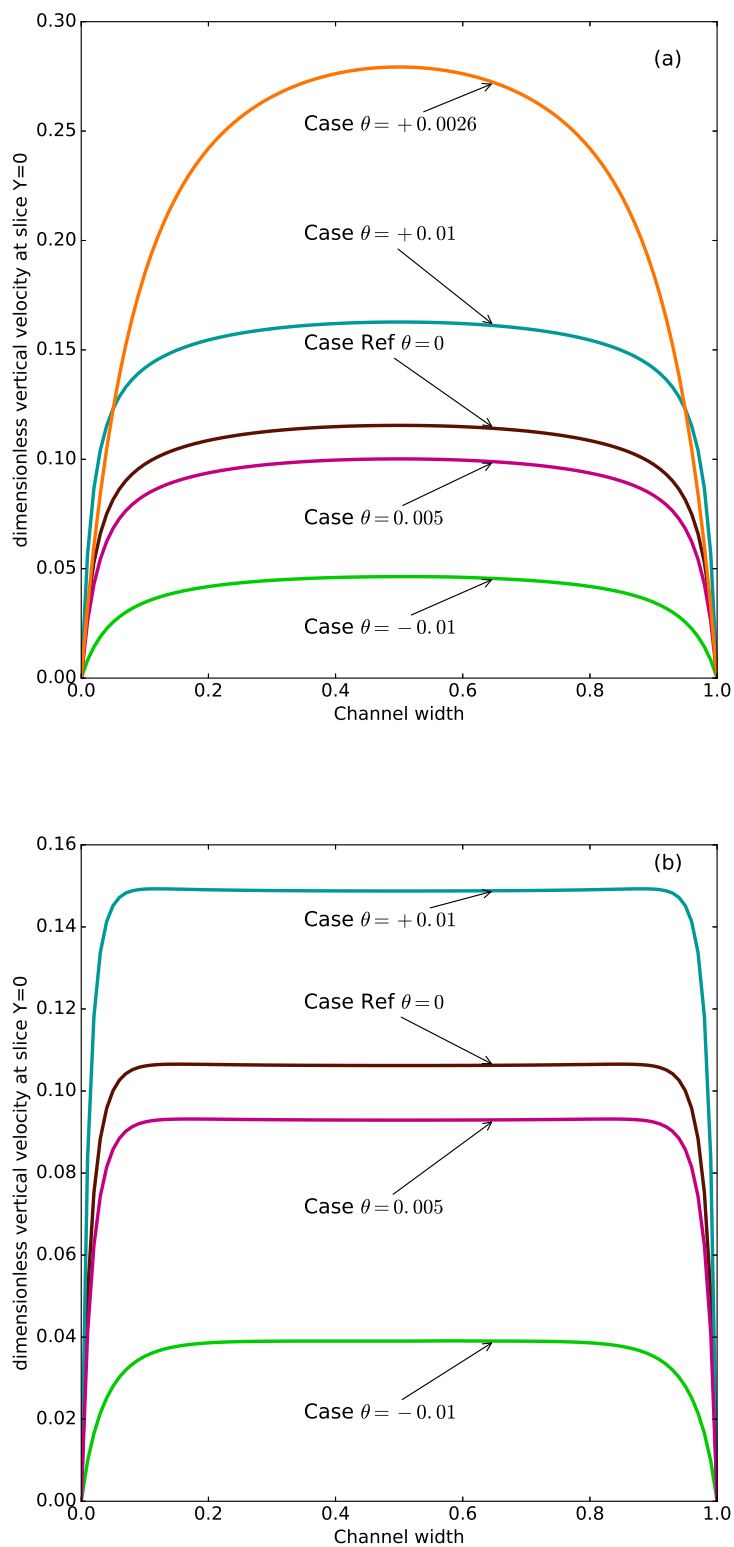


FIGURE 3.8 – Vertical velocity profiles at the inlet of the channel (a) Case with thermal stratification only, (b) Case with both thermal stratification and surface radiation

Case	1	2	3	4	5
\dot{m}_{out}	10.3	3.93	14.79	8.89	22.70
\dot{m}_{es}	2.79	7.76	0.26	3.22	2.02
d_w	0.61	0.70	0.32	0.63	0.55
l_w	4.05	6.78	0.71	4.10	2.95

TABLEAU 3.3 – Dynamic quantities for case without radiation

Heat transfer. Temperature field is not significantly altered by thermal stratification and surface radiation. Figure (3.9) shows the effect of thermal stratification on the temperature distributions along the two vertical plates. As it can be seen, dimensionless temperature of right plate increases range from -0.01 below the channel bottom end to 0.01 above the channel top end. In fact, right wall temperature remains low and close to that of the fluid entering at the bottom of the channel and to the boundary conditions at the outlet. The effect of surface radiation can be seen in Figure (3.10). This parameter slows down the heating of the right wall. So, as observed by authors, thermal stratification and surface radiation increase slightly the temperature of right wall. However, the combined effect does not increase this heating. Local number ($Nu_{1/2}$) and mean Nusselt number (Nu) weakly increase for the investigated Cases (Tables 3.4 and 3.5).

Case	1	2	3	4	5
$Nu_{1/2}$	6.20	6.16	6.31	6.34	6.24
Nu_1	6.74	6.77	6.90	6.89	6.79

TABLEAU 3.4 – Thermal quantities for Cases without radiation

Case	1	2	3	4
$Nu_{1/2}$	6.20	6.16	6.31	6.36
Nu_1	6.74	6.79	6.89	6.92

TABLEAU 3.5 – Thermal quantities for Cases with radiation

3.4.2 Thermal stratification as a function of time

The purpose of this studied case is to investigate how the fluid flow changes with thermal stratification variation at the inlet. We considered the inlet temperature as a function of time. Figure (3.11) represents the dimensionless temperature at the inlet of the channel for time step from $t = 90$ to $t = 180$. So for $t \in [100, 125]$, inlet temperature decreases to the value -0.01 and for $t \in [125, 150]$, inlet temperature increases to 0. Therefore, inlet temperature is lower to the reference temperature, contrarily to the outlet temperature which is equal to T_0 .

Streamlines. Changes can be observed in streamlines. Figure (3.12) shows different snapshot of streamlines at $t = 90$, $t = 120$, $t = 150$, $t = 180$. A vortex is created near the adiabatic wall when temperature at the inlet decreases. That creates an oscillation of streamlines located near the adiabatic wall. From $t = 150$, the pocket of recirculation is bigger. So, when temperature at the inlet decreases, flow enters deeper in the channel at the outlet. This increase in size of the pocket of recirculation is responsible for the creation of the vortex.

Mass flow rate. Figure (3.13) shows variation of the mass flow rate in function of time. As expected, when the temperature falls below T_0 , the mass flow rate increases. As the same,

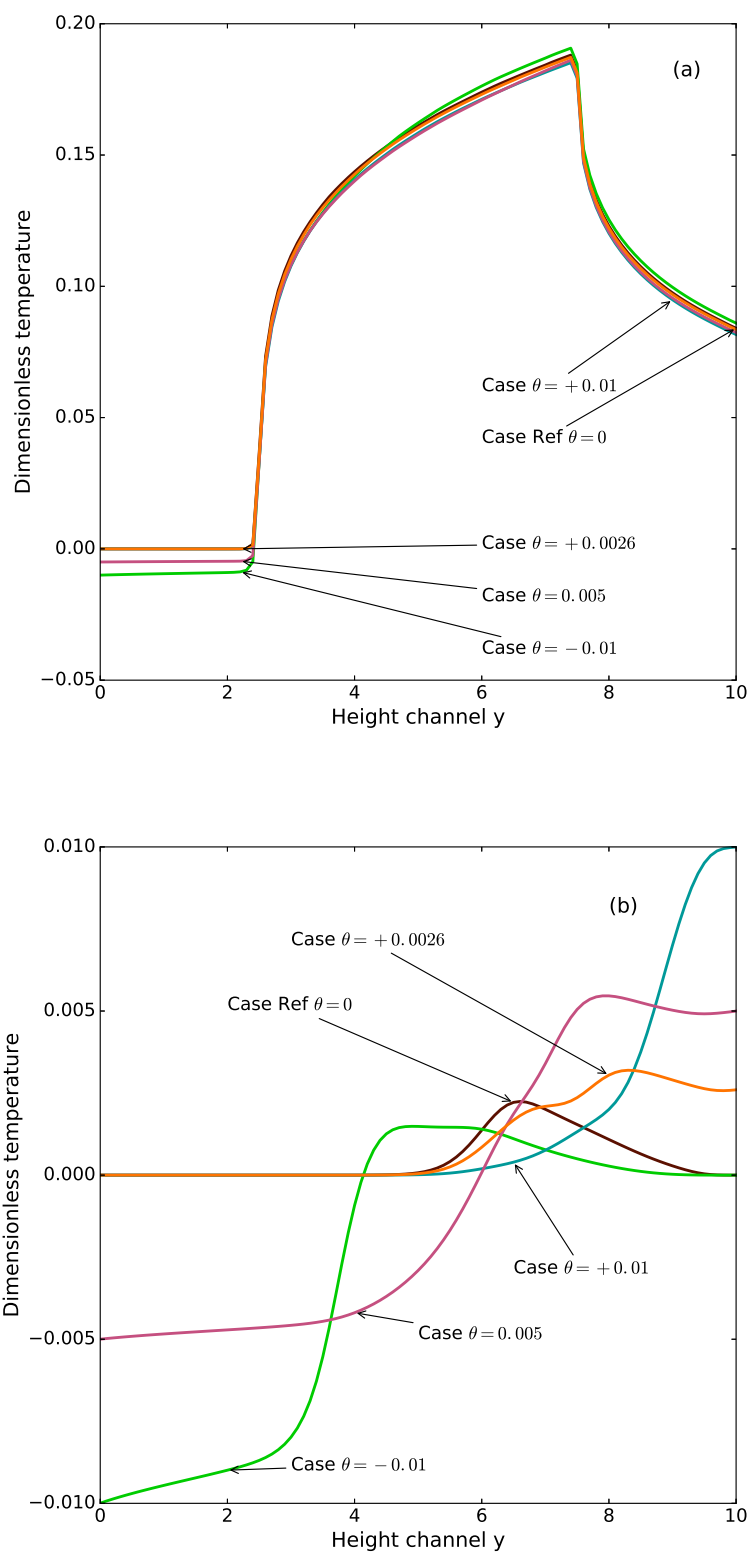


FIGURE 3.9 – Dimensionless temperature of left (a) and right wall (b) –stratification Cases

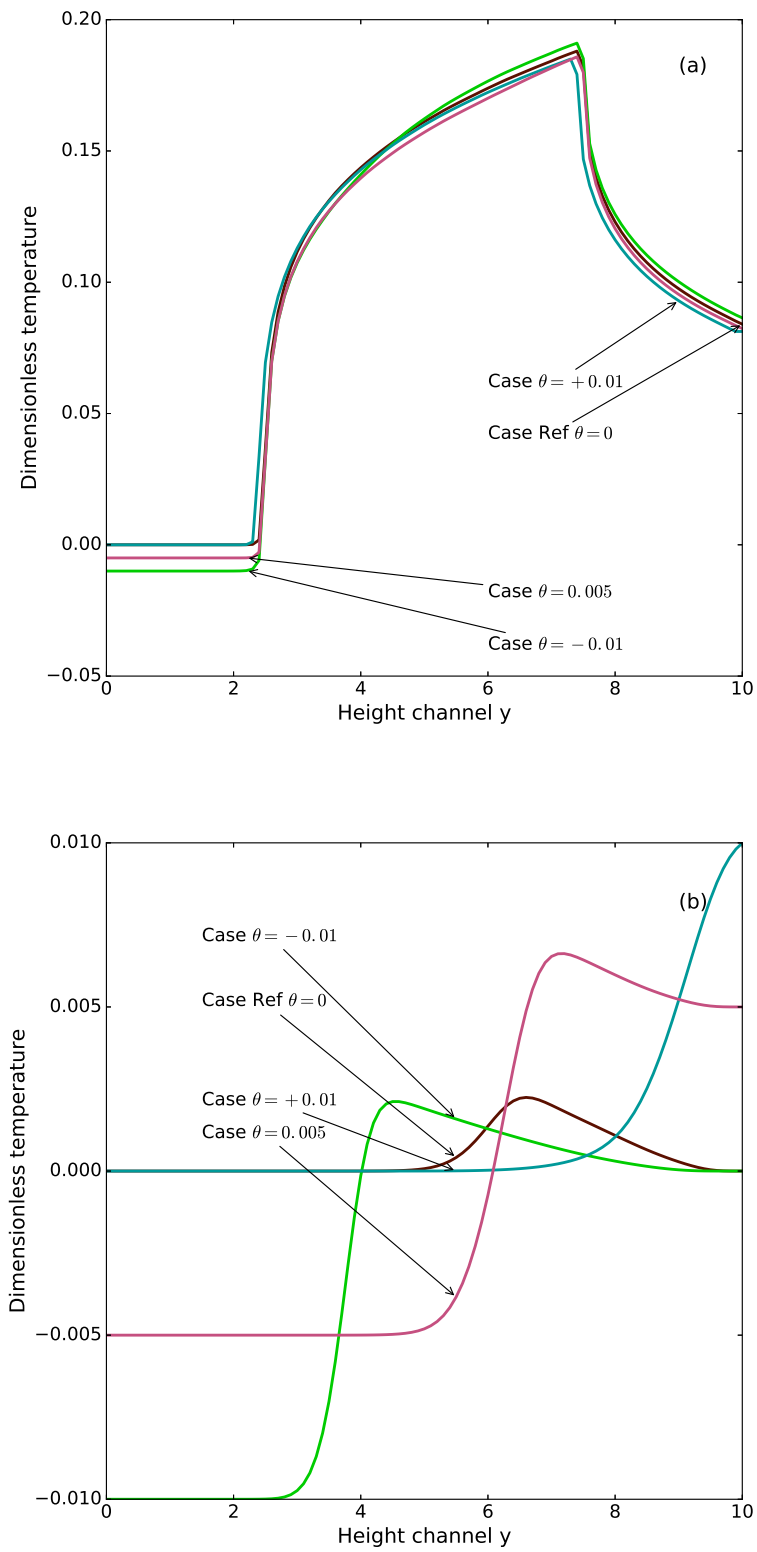


FIGURE 3.10 – Dimensionless temperature of left (a) and right wall (b) – stratification and surface radiation Cases

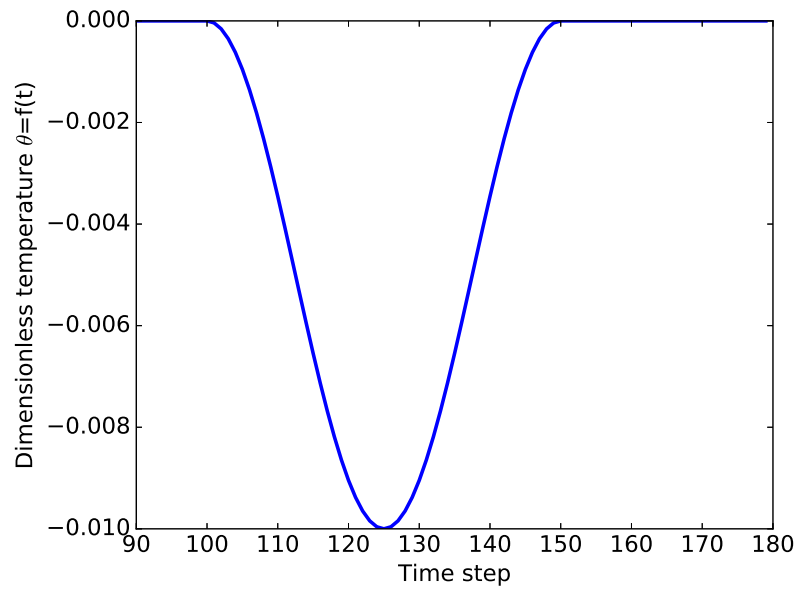


FIGURE 3.11 – Thermal stratification at inlet as a function of time

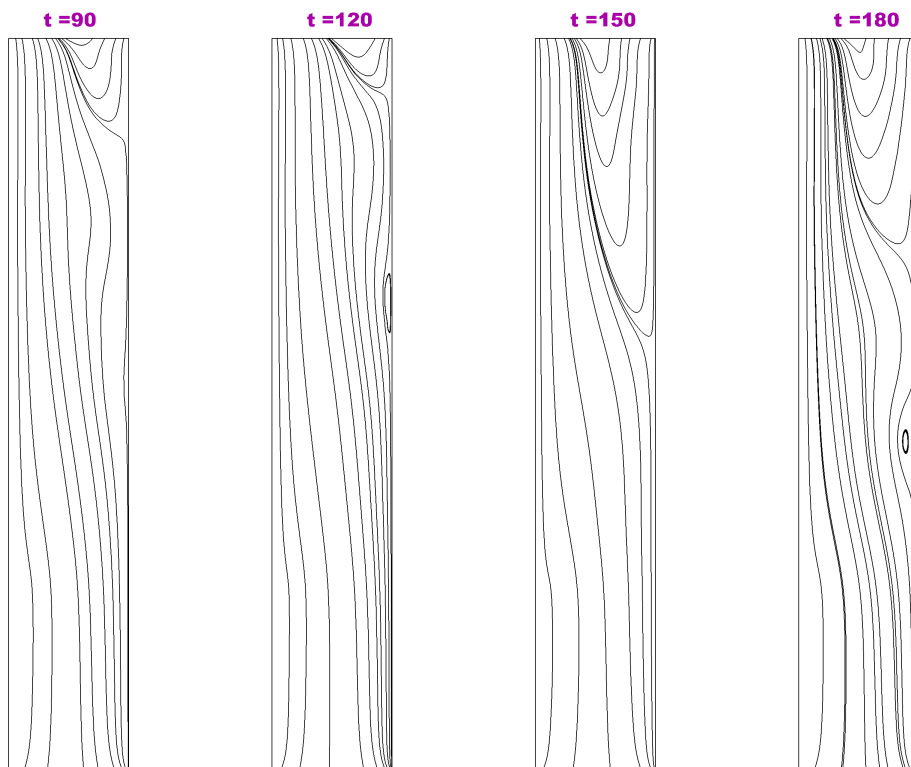


FIGURE 3.12 – Streamtraces at different time step for a time function thermal stratification

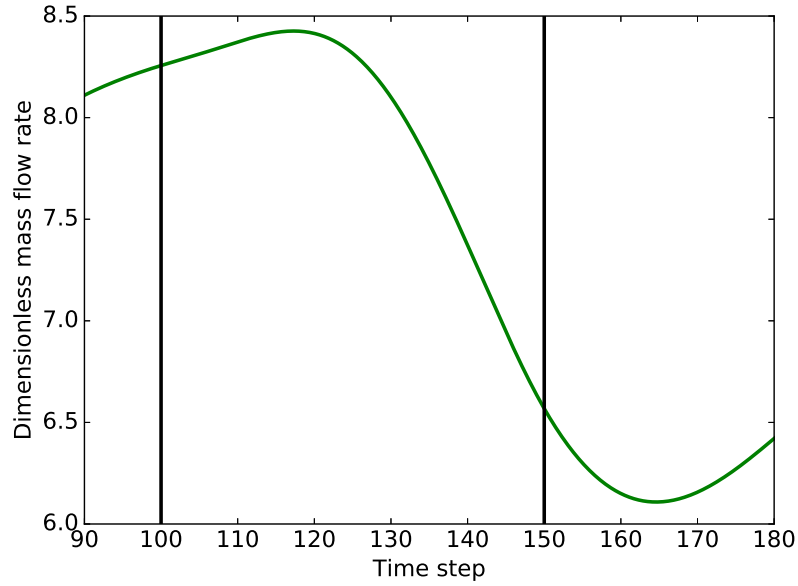


FIGURE 3.13 – Variation of inlet mass flow rate in function of time

when temperature increases to the value of T_0 , the mass flow rate decreases. But these changes are observed with a time lag of about $t = 25$. Moreover, mass flow rate is greater than mass flow rate reached for the Case 2 which considers surface radiation. So, fluctuations of inlet temperature influence significantly the mass flow rate at the apertures.

Vertical velocities. Vertical velocities are computed for probes located in the channel along the line $X = 0.5$ and represented in Figure (3.14). Five points are considered at different slices of the channel : $Y = 0$, $Y = A/4$, $Y = A/2$, $Y = 3A/4$ and $Y = A$. A decrease of the vertical velocity is observed for $t \in [120, 130]$. That corresponds to the range in which temperature at the inlet reached its minimum, -0.01 and starts to increase. Moreover, all velocities are greater to the values reached in the Case 2. Indeed, respective values of velocities for each slice in Case 2 considering surface radiation are : -0.11 , -0.1 , -0.03 , 0.05 , 0.04 . So, vertical velocities increased with fluctuations of inlet temperature.

Thermal quantities. Variation of local Nusselt number at mid-height of the hot plate in function of time looks like the variation of the inlet mass flow rate in function of time. Indeed, decrease of temperature occurs an augmentation of this parameter, with a time lag of about $t = 30$. We also noticed that its value remains superior to the value reached in the Case 2 with a linear thermal stratification where $Nu_{1/2}(A/2) = 6.16$. So, fluctuations of inlet temperature increase significantly thermal quantities as the local Nusselt number at the hot plate.

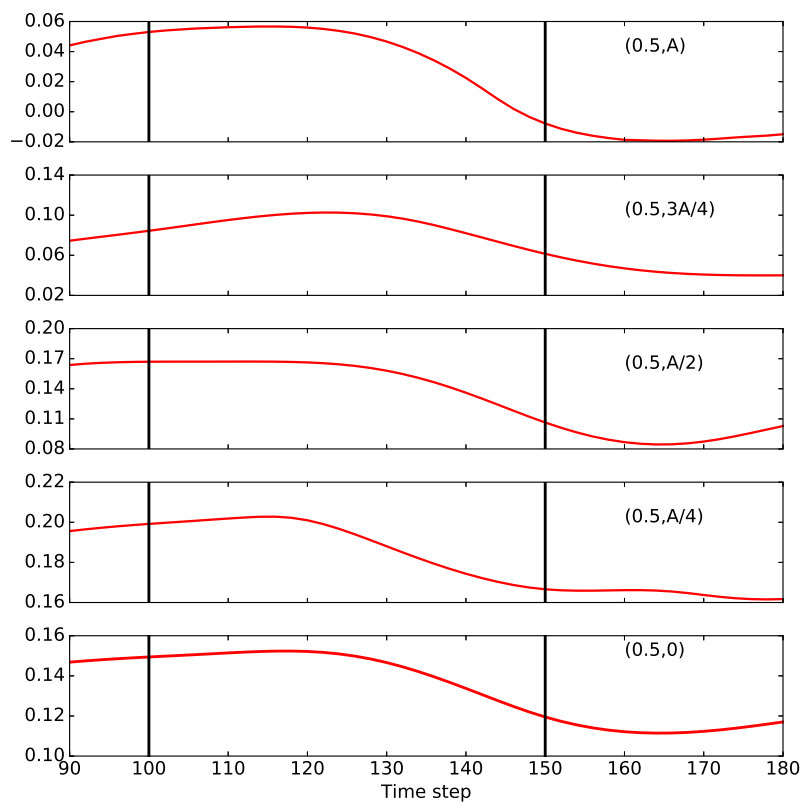


FIGURE 3.14 – Evolution of vertical velocity as a function time for different probes in the channel

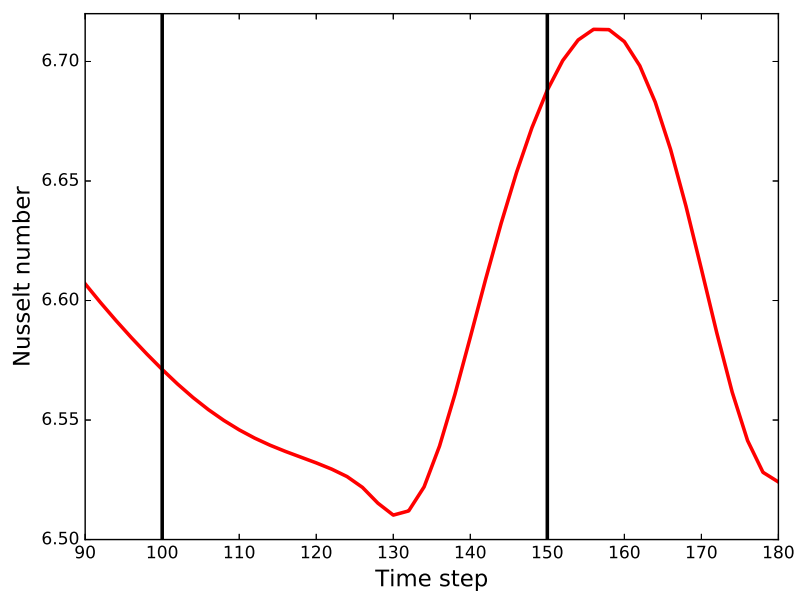


FIGURE 3.15 – Variation of Nusselt number at $Y=A/2$ in function of time

3.5 Conclusion

Thermal stratification of the external environment and surface radiation in natural convection case are investigated numerically for vertical channel asymmetrically heated. In order to have a more realistic numerical simulation, we considered that grey bodies front of the apertures got a temperature different from the reference temperature T_0 . Several conclusions have been drawn corresponding to the conditions of thermal stratification and surface radiation investigated.

1. Thermal stratification outside the channel and surface radiation has a significant effect on vertical velocities, mass flow rate and flow structure.
2. Surface radiation did not suppress the existence of flow reversal in the channel because of the predominating effect of thermal stratification.
3. The effect of surface radiation reduces the effect of thermal stratification, in particular the plug effect observed by authors Daverat et al. [35] and Garnier [51].
4. The impact on dynamics and heat transfer is more important if we consider the external thermal stratification as a function of time.

In conclusion, thermal stratification and surface radiation should not be neglected in numerical simulation. We have shown that thermal quantities are mainly impacted by the variation of temperature outside the channel. Nevertheless, this numerical study considering surface radiation is limited by only one value of emissivity for the adiabatic plates. Further experimental investigations are also needed to complete and validate the findings of this research.

3.6 Conclusion du chapitre

Suite à cette étude, nous avons mis en évidence que l'écoulement retour dans le canal vertical asymétriquement chauffé est incontournable. Or, il contribue au ralentissement du mouvement du fluide dans le canal et aux pertes de charges. Comment diminuer les pertes de charges ou du moins les limiter ? De la même façon, l'énergie thermique transférée à l'ensemble du système dépend de la vitesse de l'écoulement dans le canal. Comment maximiser les échanges thermiques ? Ce sont sur ces éléments que nous nous sommes appuyés pour définir les critères de nos fonctions objectifs et tenter ainsi d'optimiser les transferts de chaleur dans ce canal.

Chapitre 4

Optimisation topologique d'un problème multi-physiques en convection naturelle

Sommaire

4.1 Abstract	66
4.2 Introduction	66
4.3 Governing equations	68
4.4 Topology optimization formulation	69
4.4.1 Cost functions	70
4.4.2 Multi-objective optimization	70
4.5 Topology optimization methods	71
4.5.1 Interpolation functions	71
4.5.2 Adjoint problem	72
4.5.3 Implementation	72
4.6 Results	73
4.6.1 Varying Ri at constant Re = 400	73
4.6.2 Constant Ri = 400 and Re = 200	75
4.7 Conclusion	82
4.8 Compléments sur la convection naturelle pure	83
4.8.1 Formulation du problème d'optimisation	83
4.8.2 Résultats	84
4.9 Conclusion du chapitre	87

CE chapitre s'intéresse aux transferts thermiques et massiques dans le canal asymétriquement chauffé. Avant de l'explorer en convection naturelle pure en faisant le nombre de Rayleigh dans $\{5 \cdot 10^3, 5 \cdot 10^4, 5 \cdot 10^5\}$, on résout le problème en convection mixte, avec une vitesse en entrée assez faible pour que la convection naturelle soit dominante et en faisant varier le nombre de Richardson dans $\{100, 200, 400\}$. Nous adoptons pour ces deux études les nouvelles fonctions d'interpolation présentées au chapitre 2 permettant d'améliorer la définition de la frontière fluide-solide pendant le processus d'optimisation. L'originalité de nos travaux ici porte sur les nouvelles expressions des puissances thermiques et mécaniques utilisées comme fonctions coût lors de l'écriture du problème d'optimisation. Celles-ci permettent d'éviter les instabilités numériques souvent identifiées dans le cas de problème de convection sans pour autant avoir recours à des filtres numériques.

4.1 Abstract

This paper¹ deals with a multi-physics topology optimization problem in an asymmetrically heated channel, considering both pressure drop minimization and heat transfer maximization. The problem is modeled under the assumptions of steady-state laminar flow dominated by natural convection forces. The incompressible Navier-Stokes equations coupled to the convection-diffusion equation through the Boussinesq approximation are employed and are solved with the finite volume method. In this paper, we first propose two new objective functions : the first one takes into account work of pressures forces and contributes to the loss of mechanical power while the second one is related to thermal power and is linked to the maximization of heat exchanges. In order to obtain a well-defined fluid-solid interface during the optimization process, we use a sigmoid interpolation function for both the design variable field and the thermal diffusivity. We also use adjoint sensitivity analysis to compute the gradient of the cost functional. Results are obtained for various Richardson (Ri) and Reynolds (Re) number such that $100 < Ri < 400$ and $Re \in \{200, 400\}$. In all considered cases, our algorithm succeeds to enhance one of the phenomenon modelled by our new cost functions without deteriorating the other one. We also compare the values of standard cost functions from the literature over iteration of our optimization algorithm and show that our new cost functions have no oscillatory behavior. As an additional effect to the resolution of the multi-physics optimization problem, we finally show that the reversal flow is suppressed at the exit of the channel.

4.2 Introduction

Topology optimization is a powerful and a popular tool for designers and engineers to design process. Its notion was initially introduced in structural mechanics by Bendsøe et al. [16]. In order to increase the structural stiffness under certain load, they targeted the optimal material density distribution by identifying areas in which material should be added. They expressed the design problem in terms of real valued continuous function per point, with values ranging from zero (indicating the presence of void/absence of material) to unity (indicating solid). The method has then been developed to numerous problems in structural mechanics [43, 57–59, 86, 118, 129]. In fluid mechanics, the same idea was adapted to Stokes flows by Borrvall and Petersson [22], by introducing a real-valued inverse permeability multiplied by a kinematic viscosity dependent term into the flow equations. Domain areas corresponding to the fluid flow are those where α is equal to 0 or, in practice, inferior or equal to a user-defined positive number α_0 . Domain areas where α value are not equal to 0 or superior to α_0 define the part of the domain to be solidified [112]. The optimal solid walls to be designed correspond to the interfaces between the two aforementioned areas. So, the goal of topology optimization is to compute the optimal α field in order to minimize some objective function under consideration.

Contrary to topology optimization applied to design structure, research on topology optimization applied to heat transfer and fluid dynamics is quite recent. Dbouk [36] presented a review about topology optimization design methods that have been developed for heat transfer systems, and for each of them, he presented their advantages, limitations and perspectives. In topology optimization problems with large number of design variables, gradient-based algorithms are frequently used to compute accurate solutions

1. Cette étude a fait l'objet d'un article intitulé "A multi-physics optimization problem in natural convection for a vertical channel asymmetrically heated" et soumis pour publication dans *International Journal of Heat and Mass Transfer*

efficiently [2, 25, 76, 92, 105, 137]. This algorithm starts with a given geometry and iterates with information related to the derivatives (sensitivity derivatives) of the objective function with respect to the design variables. Among the methods used to compute the sensitivity derivatives required by gradient-based methods, the adjoint method [77, 92, 104, 105, 107] has been receiving a lot of attention since the cost of computing the necessary derivatives is independent from the number of design variables. Papoutsis-Kiachagias and Giannakoglou [107] present a review on continuous adjoint method applied to topology optimization for turbulent flows. Othmer [104] derived the continuous adjoint formulations and the boundary conditions on ducted flows for typical cost functions. He proposed an objective function that conduct to reduce pressure drop in open cavity. The originality of his method is the versatility of the formulation where the adjoint boundary conditions were expressed in a form that can be adapted to any commonly used objective function. Then, for the automotive industry, Othmer et al. [106] implemented several objective functions like dissipated power, equal mass flow through different outlets and flow uniformity. To describe the transition and interface between two different materials in the domain, the Solid Isotropic Material with Penalization (SIMP) technique [16, 141] is the mostly used in the literature as the interpolation technique in topology optimization. This approach represents the non-fluid regions as infinitely stiff, a penalty to the flow, such that no interaction is modeled. Yoon [137] presented a method for solving static fluid-structure interaction problems by converting the stresses at the fluid/solid interfaces into a volume integral representation. A new method of interpolation in order to improve the interface fluid/solid during the optimization process was presented by Ramalingom et al. [112]. They proposed to use two sigmoid functions in order to interpolate material distribution and thermal conductivity and show that the transition zones, that is the zones where the velocity of the fluid is too large to be considered as solid, can be made arbitrary small.

Convection typically is categorized, according to fluid motion origins, as forced, mixed or natural [66, 132]. All aforementioned references on heat transfer problems are dealt in case of forced or mixed convection. This means that the fluid motion is driven by a fan, pump or pressure gradient often modeled by a non-null velocity at entrance of the studied domain. Natural convection involves a heat dissipation mechanism where the fluid motion is governed by differences in buoyancy arising from temperature gradients. More precisely, the fluid is submitted to a small velocity, the corresponding heat rates are also much lower than those associated with forced convection. Bruns [25] applied topology optimization to convection-dominated heat transfer problems. He highlighted numerical instabilities in convection-dominated diffusion problems and justified them by the density-design-variable-based topology optimization. Alexandersen et al. [4] applied topology optimization to natural convection problems. He obtained complex geometries that improved the cooling of heat sinks. They encountered difficulties as oscillatory behaviour of the solver, namely a damped Newton method, used for the optimization computations. They also reported intermediate relative densities that amplified the natural convection effects leading to non-vanishing velocity in some solid parts of the computational domain. As a result, those zones are considered as solid by the optimization algorithm while they should be treated as fluid. Both authors used filtering techniques in order to avoid numerical instabilities [2, 24, 83, 84, 92].

In this paper, we deal with some topology optimization problems for heat and mass transfers, considering the physical case of an asymmetrically heated vertical channel. This geometry has been subject to numerous studies in the literature [11, 12, 65, 136]. The first investigations date back to 1942 with the works of Martinelli and Boelter [94] according to

the comprehensive review of Jackson et al. [67]. Developing and fully developed laminar free convection within heated vertical plates was subsequently investigated numerically by Bodoia and Osterle [18] and was experienced by Elenbaas [42]. Since then, many studies were carried out. This great interest can be explained by the fact that this configuration is encountered in several industrial devices such as solar chimney, energy collectors, electronic components and even in nuclear reactors. The optimization of these systems simultaneously demands compactness, efficiency and control of heat and mass transfers.

This paper investigates numerical instabilities that can be developed in convection-dominated diffusion problems [25, 139]. Instead of proposing methods to improve filtering techniques and avoid these instabilities, we propose a new expression of objective functions within the framework of topology optimization applied to an asymmetrically heated vertical channel. The geometry considered here is the model proposed by Desrayaud et al. [39] and corresponding to a boundary layer flow with a reversal flow at the exit [114]. We study the influence of Richardson number, which represents the importance of natural convection relative to the forced convection, in the optimized design. Our optimization algorithm succeeds especially to suppress the reversal flow and to increase the thermal exchanges in the channel for the range of Richardson numbers considered. Moreover, no numerical instabilities have been encountered during the optimization process and no filter techniques have been used. We finally compare the stability of our results at the end of the optimization process to those obtained with classical cost functions of the literature.

4.3 Governing equations

The flows considered in this paper are assumed to be in a steady-state laminar regime, newtonian and incompressible. Figure 4.1 shows the configuration of the computational domain Ω .

Physical properties of the fluid are kinematic viscosity ν and thermal conductivity λ_f . First, parameters governing the flow is the Reynolds number defined as $Re = U b/\nu$, with b being the width of the channel and U the reference velocity based on the average velocity at the channel entrance. The Prandtl number is defined as $Pr = \nu/k$. It describes the ratio between the momentum and thermal diffusivities of the fluid. For low Pr values, energy is transferred to the fluid by heat conduction since it prevails over convection. For high Pr values, energy is transferred through the fluid mainly thanks to convection. In this paper, we consider only fluids with small Prandtl that is $Pr < 1$. The Grashof number is defined as $Gr_b = g \beta \Delta T b^3/\nu^2$ and represents the ratio between buoyancy and viscous force. $\Delta T = -\phi/\lambda$, ϕ is the thermal flux on Γ_1 and λ is the thermal conductivity of the fluid. In thermal convection problems, Richardson number $Ri = Gr_b/Re^2$ represents the importance of natural convection relative to the forced convection. For values superior to unity, we know that the flow is dominated by natural convection. Under these assumptions and thanks to a method given in Borrvall and Petersson [22], the porosity field is introduced in the steady-state Navier-Stokes equation as a source term $h_\tau(\alpha)\mathbf{u}$ which yields a Brinkman-like model with a convection term. Therefore, the dimensionless form of the Navier-Stokes and energy equations are written as follows :

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 && \text{in } \Omega \\
 (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\nabla p + Re^{-1} \Delta \mathbf{u} - h_\tau(\alpha)\mathbf{u} + Ri \theta \vec{e}_y && \text{in } \Omega \\
 \nabla \cdot (\mathbf{u}\theta) &= \nabla \cdot (Re^{-1}Pr^{-1}k_\tau(\alpha)\nabla\theta) && \text{in } \Omega
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

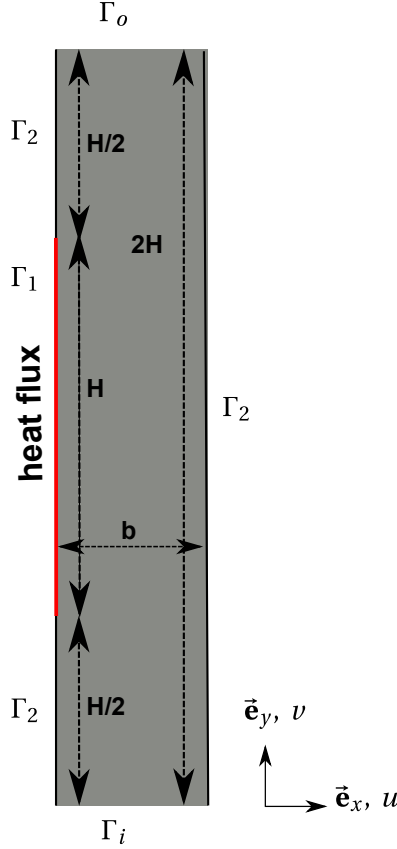


FIGURE 4.1 – Geometry of the problem

where (\mathbf{u}, p, θ) correspond respectively to dimensionless velocity, pression and temperature and are usually referred as the primal variable in the curent setting. Parameter α is the spatially varying design variable field determined by the optimization algorithm. For the natural-dominated convection problem, we consider the following boundary conditions :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u} &= 0, & \nabla p &= 0, & \partial_n \theta &= -1 & \text{on } \Gamma_1, \\
 \mathbf{u} &= 0, & \nabla p &= 0, & \partial_n \theta &= 0 & \text{on } \Gamma_2, \\
 \mathbf{u} &= u_i \mathbf{e}_y, & \nabla p &= 0, & \theta &= 0 & \text{on } \Gamma_i, \\
 \partial_n \mathbf{u} &= 0, & p &= 0, & \partial_n \theta &= 0 & \text{on } \Gamma_o,
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

where ∂_n is the normal derivative defined as $\partial_n = \mathbf{n} \cdot \nabla$.

4.4 Topology optimization formulation

The main goal of this paper is to solve a multi-physics optimization problem in the asymmetrically heated channel, considering both pressure drop minimization described by a first objective function \mathcal{J}_1 and heat transfer maximization described by a second objective function \mathcal{J}_2 . The optimization problem can be stated as :

$$\begin{aligned}
 \text{minimize : } & \mathcal{J} = \gamma_1 \mathcal{J}_1 + \gamma_2 \mathcal{J}_2, \\
 \text{subject to : } & \text{Governing equations (4.1),} \\
 & \text{Boundary conditions (4.2).}
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

where the cost function \mathcal{J} is the combination of the two objectives functions, γ_1 and γ_2 are weighting coefficients. It is easy to observe that, for $\gamma_1 \gg \gamma_2$, the multi-objective function is directed to a minimum power dissipation problem, while for $\gamma_1 \ll \gamma_2$, a maximum heat dissipation problem arises.

4.4.1 Cost functions

As indicated by several authors [76, 77, 84, 92], cost functions \mathcal{J}_1 and \mathcal{J}_2 are expressions of multi-physics powers that one either wish to minimize or to maximize. A classical cost function used by Marck et al. [92], Othmer [104] for evaluating total pressure losses is :

$$f(\mathbf{u}, p) = \int_{\Gamma} -\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} \left(p + \frac{1}{2} |u|^2 \right) dS. \quad (4.4)$$

Also, Kontoleon et al. [77], Marck et al. [92] evaluate the thermal power by this expression :

$$f(\mathbf{u}, \theta) = \int_{\Gamma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} \theta dS. \quad (4.5)$$

In our study, we propose to evaluate mechanical power and thermal power via two new expressions of both cost functions. As we will show below, these functions avoid numerical instabilities encountered in convection-dominated diffusion optimization problems and do not require the use of filter techniques. They will also permit to stabilize the optimization process. For a system with an inlet, an outlet, an average velocity and an average temperature, we define the thermal power as the product of the mass flow, the volume heat capacity and the difference of temperature between the entrance and the exit of the system. Likewise, mechanical power is defined as the product of mass flow rate and the difference of total pressure between the entrance and the exit of the system. In that way, we chose the work of pressure forces to minimize the power dissipated in the channel as used in systemic approach. Hence, the first cost function can be written as :

$$\mathcal{J}_1(\mathbf{u}, p) = -\frac{1}{|\Gamma_i|} \int_{\Gamma_i} p_t dS \int_{\Gamma_i} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS - \frac{1}{|\Gamma_o|} \int_{\Gamma_o} p_t dS \int_{\Gamma_o} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS, \quad (4.6)$$

where $p_t = p + 1/2 \mathbf{u}^2$ is the total pressure, Γ_i and Γ_o are respectively the entrance and the exit of the channel.

The second cost function concerns thermal exchange maximization and is given by :

$$\mathcal{J}_2(\mathbf{u}, p) = \frac{1}{|\Gamma_i|} \int_{\Gamma_i} \theta dS \int_{\Gamma_i} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS + \frac{1}{|\Gamma_o|} \int_{\Gamma_o} \theta dS \int_{\Gamma_o} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (4.7)$$

4.4.2 Multi-objective optimization

In multi-objective optimization, the challenge is to benefit from both objective functions. As introduced in previous subsection, the objective function based on maximization of thermal exchanges can involve the increase of pressure drop and conversely for the objective function relative to the dissipation of power. The set of solutions can be reached by using an Aggregate Objective Function (AOF), also known as the weighted-sum

approach, which is based on a linear combination of both objective functions [9, 96]. Before combining linearly the two functions, they must then be rescaled to have the same order of magnitude. This can be achieved as follows :

$$\hat{f} = \frac{f - f_{min}}{f_{max} - f_{min}} \quad (4.8)$$

where f is either \mathcal{J}_1 or \mathcal{J}_2 . As explicated by Marck et al. [92], the other four parameters are determined by solving both optimization problems independently (4.3) for $\min \mathcal{J}_1$ and $\max \mathcal{J}_2$ with maximal porosity (α_{max}). Consequently, both rescaled objective functions are ranged between 0 and 1. Such a rescaling allows to consider the following linear combination :

$$\hat{\mathcal{J}} = \omega \hat{\mathcal{J}}_1 - (1 - \omega) \hat{\mathcal{J}}_2 \quad (4.9)$$

where ω is the weight balancing the influence of each objective function ($\omega \in [0, 1]$). Note that this combination involves the opposite of \mathcal{J}_2 since the optimization algorithm aims at minimizing the combinatory function $\hat{\mathcal{J}}$. Thereafter, $\hat{\mathcal{J}}_1$ and $\hat{\mathcal{J}}_2$ are used only during the optimization process.

4.5 Topology optimization methods

Applying topology optimization to this problem aims to minimize an objective function \mathcal{J} by finding an optimal distribution of solid and fluid element in the computational domain. The goal of topology optimization is to end up with binary designs, i.e avoid that the design variables take other value than those representing the fluid or the solid. This is usually carried out by penalizing the intermediate densities with respect to the material parameters, such as inverse permeability and effective conductivity. A standard approach is to use interpolation functions. We also use gradient-based algorithm that relies on the continuous adjoint method.

4.5.1 Interpolation functions

The additional term $h_\tau(\alpha)$ in (4.1) physically corresponds to the ratio of a kinematic viscosity and a permeability. The interpolation function for the thermal diffusivity of each element is $k_\tau(\alpha)$, both functions were defined in Ramalingom et al. [112]. Regions with very high permeability can be considered as solid regions, and those with low permeability regions are interpreted as pure fluid.

Inverse permeability is thus interpolated with the following formula

$$h_\tau(\alpha) = \alpha_{max} \left(\frac{1}{1 + \exp(-\tau(\alpha - \alpha_0))} - \frac{1}{1 + \exp(\tau\alpha_0)} \right), \quad (4.10)$$

where α_0 is the abscissa slope of the sigmoid function, α_{max} is the maximum value that the design parameter α can take and is set to $2 \cdot 10^5$. In Ramalingom et al. [112], it is shown that the parameter α_0 is linked to the quantity of material added in the domain Ω . In the present study, we chose $\alpha_0 = 20$.

The difference in the adimensional thermal conductivities of the fluid and solid regions is considered through the interpolation of effective conductivity k_τ as follows :

$$k_\tau(\alpha) = \frac{1}{k_f} \left[k_f + (k_s - k_f) \left(\frac{1}{1 + \exp(-\tau(\alpha - \alpha_0))} - \frac{1}{1 + \exp(\tau\alpha_0)} \right) \right], \quad (4.11)$$

where k_s and k_f are respectively the thermal diffusivity of the fluid domains and the thermal conductivity of solid domains.

4.5.2 Adjoint problem

The Lagrange multiplier method [45] is used to get an optimization problem without constraints and can be used to get the sensitivity of the cost function \mathcal{J} . The Lagrangian is defined as

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{u}, p, \theta, \mathbf{u}^*, p^*, \theta^*, \alpha) &= \mathcal{J}(\mathbf{u}, p, \theta) \\ &+ \int_{\Omega} \mathcal{R}(\mathbf{u}, p, \theta) \cdot (\mathbf{u}^*, p^*, \theta^*) d\Omega, \end{aligned} \quad (4.12)$$

where $(\mathbf{u}^*, p^*, \theta^*)$ are the adjoint variables and $\mathcal{R}(\mathbf{u}, p, \theta) = 0$ corresponds to the governing equations (4.1). The critical points of \mathcal{L} with respect to the adjoint variables give the constraint of the optimization problem (4.3) while the critical point with respect to the primal variable yield the so-called adjoint problem. The latter can be derived as in Othmer [104] (see also [112]) and is given by

$$\begin{aligned} \nabla p^* - h_{\tau}(\alpha) \mathbf{u}^* + \theta \nabla \theta^* + Re^{-1} \Delta \mathbf{u}^* + \nabla \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{u} - (\mathbf{u}^* \cdot \nabla) \mathbf{u} &= 0 \quad \text{in } \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{u}^* &= 0 \quad \text{in } \Omega, \\ Ri \mathbf{u}^* \cdot \vec{e}_y + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta^* + \nabla \cdot (Re^{-1} Pr^{-1} k_{\tau}(\alpha) \nabla \theta^*) &= 0 \quad \text{in } \Omega, \end{aligned} \quad (4.13)$$

together with the boundary conditions

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^* &= 0, \quad \partial_n \theta^* = 0, \quad \partial_n p^* = 0 && \text{on } \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \\ u_t^* &= 0, \quad \theta^* = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial p} = -u_n^*, \quad \partial_n p^* = 0 && \text{on } \Gamma_i, \\ u_t^* &= 0, \quad \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \theta} = -\theta^* u_n - Re^{-1} Pr^{-1} k_{\tau}(\alpha) \partial_n \theta^* && \text{on } \Gamma_o, \\ \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} &= -p^* - \theta^* \theta - Re^{-1} \partial_n \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n} - u_n^* u_n - \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^* && \text{on } \Gamma_o, \end{aligned} \quad (4.14)$$

where $u_n = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ and the derivatives of \mathcal{J} defined in (4.3) with respect to (\mathbf{u}, p, θ) are given by

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial p} \right|_{\Gamma_i} &= -\gamma_1 \frac{1}{|\Gamma_i|} \int_{\Gamma_i} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS \\ \left. \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \theta} \right|_{\Gamma_o} &= \gamma_2 \frac{1}{|\Gamma_o|} \int_{\Gamma_o} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS \\ \left. \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\Gamma_o} &= -\gamma_1 \frac{1}{|\Gamma_o|} \mathbf{n} \int_{\Gamma_o} p_t dS - \gamma_1 \mathbf{u} \cdot \int_{\Gamma_o} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS \\ &\quad + \gamma_2 \frac{1}{|\Gamma_o|} \mathbf{n} \int_{\Gamma_o} \theta dS. \end{aligned} \quad (4.15)$$

We emphasize that the adjoint problem (4.13,4.14) has been derived for the cost function \mathcal{J} given by (4.3). Nevertheless, in the numerical result, we wish to minimize the rescaled cost function $\hat{\mathcal{J}}$ whose derivatives with respect to (\mathbf{u}, p, θ) are obtained thanks to (4.15) with

$$\gamma_1 = \frac{\omega}{\mathcal{J}_{1,max} - \mathcal{J}_{1,min}}, \quad \gamma_2 = \frac{-(1-\omega)}{\mathcal{J}_{2,max} - \mathcal{J}_{2,min}}.$$

4.5.3 Implementation

Topology optimization problem is solved by iterative calculations. The main steps of the algorithm for the topology optimization consist to compute sensitivities by adjoint method and evaluate the optimality condition. If a stopping criterion is met, the computation is terminated. The forward problem (4.1) and the adjoint problem (4.13) are implemented using OpenFOAM [44]. The optimality condition is given by the critical point of the Lagrangian with respect to the design parameter α as follows :

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_\tau}{\partial \alpha} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^* + \frac{\partial k_\tau}{\partial \alpha} \nabla \theta \cdot \nabla \theta^* &= 0 \quad \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial k_\tau}{\partial \alpha} \theta^* &= 0 \quad \text{with } \partial_n \theta = -1 \quad \text{on } \Gamma_1. \end{aligned} \quad (4.16)$$

The design variables are evaluated by using the conjugated-gradient descent direction method associated to Polack-Ribiere method. To summarize, the algorithm for the topology optimization is described in Table 4.1.

Step 0.	Initialization : set all the constants Re, Ri, Pr
Step 1.	Solve the forward problem (4.1),(4.2) problem with the Finite Volume Method
Step 2.	Compute objective and constraint values
Step 3.	Compute sensitivities by adjoint method
Step 4.	Evaluate the optimality condition. If a stopping criterion is met, terminate the calculation.
Step 5.	Project design variable α with $\alpha_k = \max(0, \min(\alpha, \alpha_{\max}))$
Step 6.	Update design variables α with $\alpha_{k+1} = -\nabla \mathcal{J}_{k+1} + \beta_{k+1}^{\text{PR}} \alpha_k$ and return to step 1

TABLEAU 4.1 – Algorithm of topology optimization

4.6 Results

First of all, it is important to note that the problem is purely academic and the values of various parameters as Prandtl number set to 0.71 corresponding to a fluid/liquid, and k_s/k_f have been therefore set to three. As they are in the range of realistic problems, they are thought to be representative of the problems that can be physically encountered.

The problem is investigated for $\text{Ri} = \{100, 200, 400\}$ under constant $\text{Re} = 400$ which is equivalent to increase the dominance of natural convection in the conducto-convection problem. These values have been chosen in accordance with the study of Li et al. [85] on reversal flows in the asymmetrically heated channel. The problem is also investigated for $\text{Re} = 200$ and $\text{Ri} = 400$ in order to highlight the effect of convection on the optimization results. We chose $\alpha_0 = 20$ and set α_{\max} to $2 \cdot 10^5$ keeping in mind that similar results have been obtained for $\alpha_{\max} = 10^6$.

Figure 4.3a shows the vertical velocity profile at the entrance of the channel for the two values of Re. For this study, we chose different values of ω in accordance with the importance given to the different costs function \mathcal{J}_1 or \mathcal{J}_2 . All results performed in this paper correspond to physical quantities, that is \mathcal{J}_1 and \mathcal{J}_2 . Moreover, in order to be sure that no material is added at the entrance of the channel during the optimization process, we solved the problem by imposing fluid domain at the lower part of the channel, i.e. $\alpha = 0$ for the element in $[0, 1] \times [0, 1]$.

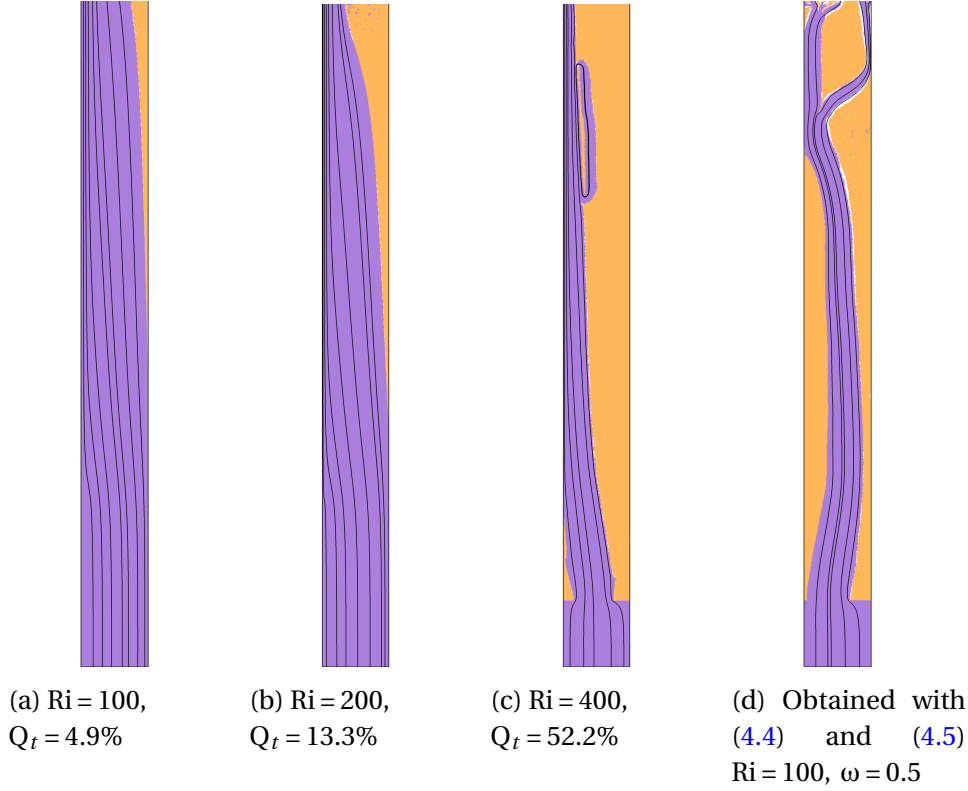


FIGURE 4.2 – Optimized designs and streamtraces at various Ri for constant Re = 400. Orange corresponds to solid material and purple corresponds to the fluid domain.

4.6.1 Varying Ri at constant Re = 400

It can be seen that the obtained designs at varying Ri (Figure 4.2) differ from one another, which is to be expected.

First of all, when the natural convection forces become more dominant, the optimization algorithm adds more material in the channel. We compute the proportion Q_t of material added in the domain Ω as follows :

$$Q_t = \frac{\int_{\Omega} h_{\tau}(\alpha) d\Omega}{\alpha_{max} V_{tot}}, \text{ where } V_{tot} \text{ is the total volume of } \Omega. \quad (4.17)$$

The proportion of material added in the vertical channel varies from 4.9% to 52.2%. It is referenced on Figure 4.2. Hence, the quantity of material increases when Richardson number increases.

Secondly, we can observe that the structure of the flow in the channel is modified. From Figure 4.2c, it can be seen that for Ri = 400, all of the material is kept close to the right wall of the domain and the flow circulation is obliged to be near the heated wall. This contributes to the second objective function corresponding to increase the thermal exchanges in the channel. Besides, temperature profiles at the exit of the channel are shown on Figure 4.3b.

It can also be observed that the flow reversal is suppressed after optimization process. Indeed, material added by the algorithm at the end of the channel prevent the fluid from re-entering in the channel. As can be seen on Figure 4.4, vertical component of the velocity has a positive value in the channel after optimization and is null or very small in the solid region, as expected. That means our interpolation function gives an optimized design with no physical error as a non-null velocity in the solid regions without connectivity (Kreissl and Maute [78] and Lee [84]). Moreover, value of vertical component of the

velocity increases when Ri increases (cf. Figure 4.3b). That is due to the reduction of the section for the flow circulation which causes an acceleration of the fluid in the channel. The width of flow circulation after optimization is referenced on Figure 4.5. It demonstrates also that the sigmoid function $h_{\tau}(\alpha)$ which interpolates the design variable α affects correctly volume elements to solid domains in order to avoid checkerboards. That brings to a well definition of the frontier fluid-solid as obtained by Ramalingom et al. [112].

With regard to cost functions computation at the end of the optimization process, we highlight the influence of Ri on thermal power and mechanical power. Indeed, as the Richardson number increases, the power due to work forces decreases and the thermal power in the channel increases. Figure 4.6 gives the computation of cost functions before optimization process and after the optimization. Hence, \mathcal{J}_1 is reduced by a factor 1.64 and \mathcal{J}_2 is reduced by a factor 1.51 (Table 4.2) for $Re = 400$ and for $Ri = 100$. When we compare \mathcal{J}_1 to its value without optimization \mathcal{J}_1^{Ref} , we notice that sometimes the optimization algorithm added material which contributes to rising friction forces and pressure losses as long as the heat dissipation increases. Hence, for the case $(Re, Ri) = (400, 200)$, \mathcal{J}_1 is reduced by a factor 1.13 while \mathcal{J}_2 is increased by a factor 0.46. On the contrary, for the case $(Re, Ri) = (400, 400)$, \mathcal{J}_1 is increased by a factor 0.26 while \mathcal{J}_2 is reduced by a factor 0.64. These cases illustrated that our algorithm permits to add material in the channel in order to contribute to one or other cost functions according to the weighted coefficient ω . Hence, for the case $(Re, Ri) = (400, 200)$, we chose to prioritize the minimization of mechanical power with $\omega = 0.85$. For the case $(Re, Ri) = (400, 400)$, we chose to prioritize the maximization of heat transfer with $\omega = 0.15$. We can conclude that the algorithm succeeds to minimize/maximize one or other cost functions by adding material without penalizing too much to one or other.

Figure 4.7 shows the computation of thermal power and mechanical power at each iteration of the optimization process. We can compare the evolution throughout iterations for the classical cost functions of the literature (Figure 4.7a) and for the cost functions proposed in our study (Figure 4.7a). Contrary to the cost functions (4.6) and (4.7), classical cost functions (4.4) and (4.5) present an oscillatory behavior when applied to our dominated-natural-convection problem. These instabilities lead to important oscillations of the adjoint pressure and the adjoint velocity (cf. Equation (4.13)). Moreover, as mathematical sign of velocity switches, our algorithm adds material in the domain in accordance with the optimality condition (cf. Equation (4.3)). Therefore, these numerical instabilities lead to a optimized design with a lot of quantity of material (Figure 4.2d) evaluated at $Q_t = 45.03\%$. Hence, we can conclude that the new expression of both cost functions gives a better stability of the computation at the end of the optimization process.

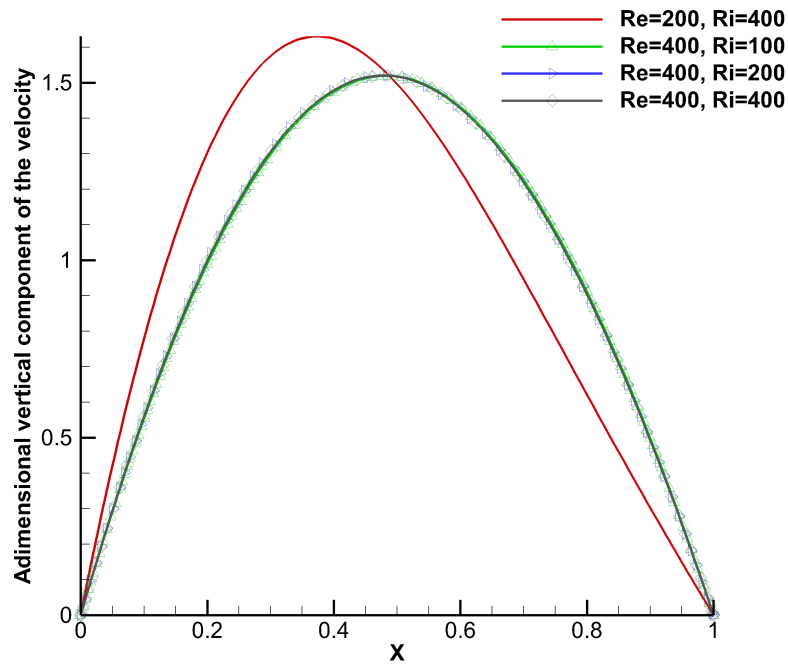
4.6.2 Constant $Ri = 400$ and $Re = 200$

In Li et al. [85], the authors considered the case $Re = 200$ and $Ri = 400$, which gives a dimensionless length of the reversal flows the most important of their study. As for $Re = 400$, we observe that the reversal flow is suppressed (cf. Figure 4.8b). A lot of material is added in the channel computed at $Q_t = 53.5\%$. The section for the circulation flow is also reduced. It is evaluated at $d = 0.16$, being the smallest width of circulation flow in this study. The flow circulation is thus imposed near the heated wall (cf. Figure 4.8a). Temperature field Figure 4.8b shows that heat surface exchanges are increased thanks to the material added by the algorithm. This phenomenon contributes to the objective function \mathcal{J}_2 . Table 4.2 indicates that \mathcal{J}_1 is reduced by a factor 3.6 and \mathcal{J}_2 is increased by

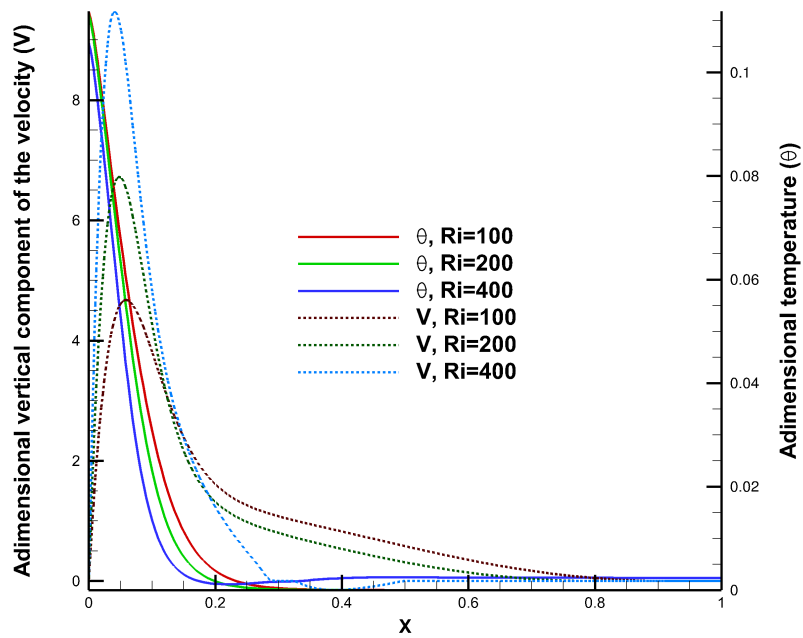
(Re, Ri)	(400, 100)	(400, 200)	(400, 400)	(200, 400)
$\mathcal{J}_1^{\text{ref}} / \mathcal{J}_1$	1.64	1.13	0.26	3.60
$\mathcal{J}_2^{\text{ref}} / \mathcal{J}_2$	1.51	0.46	0.64	3.09

TABLEAU 4.2 – Reduction factor of cost functions - ref corresponds to the value of cost functions without optimization

a factor 3.09, knowing $\omega = 0.5$ for this simulation case. It is important to note that for $\text{Re} = 200$, we can observe a very low vertical component of the velocity of 10^{-5} in some parts of the solid material (cf. 4.8b). So, when the vertical component of the velocity is higher, more material is added such as the section for the circulation flow is smaller. Velocity at the exit is higher and the thermal/mechanical power is respectively increased/reduced by a factor approximately 3.



(a)



(b)

FIGURE 4.3 – Adimensional vertical component of the velocity for $Re = \{200, 400\}$ (a), Temperature and vertical component of the velocity (b) at the end of the hot plate of the channel $y = 3H/2$

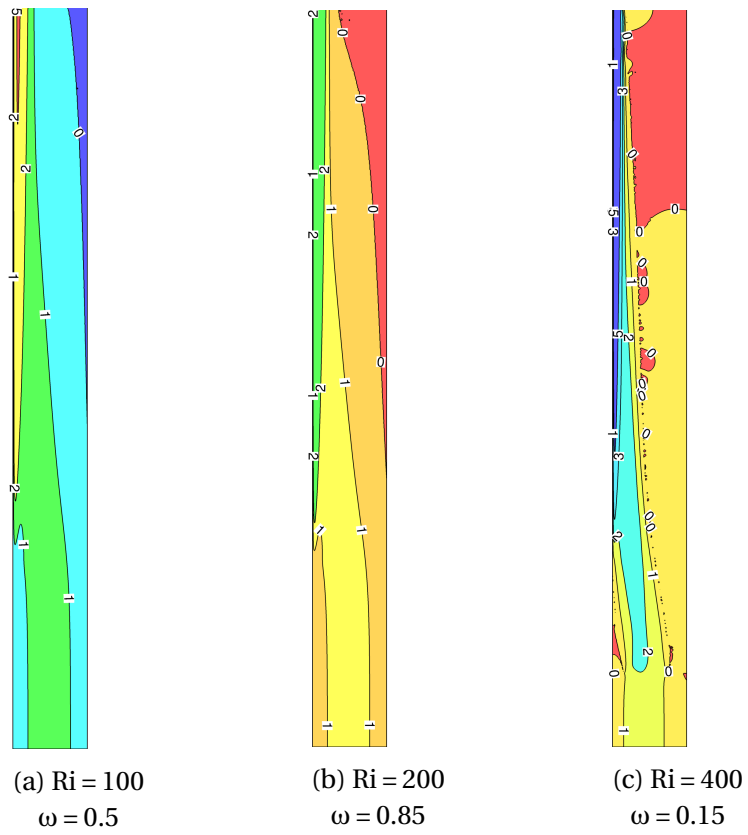
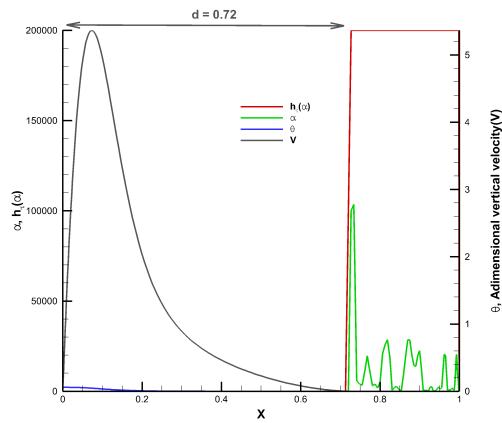
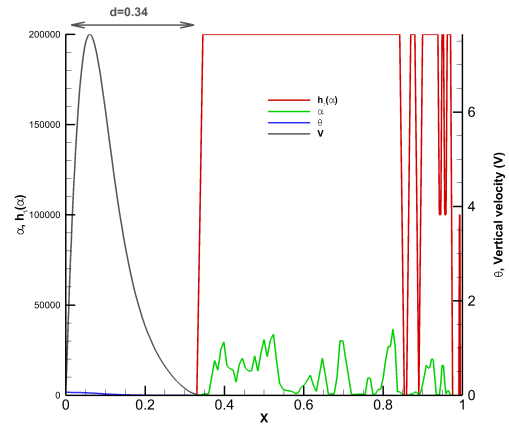


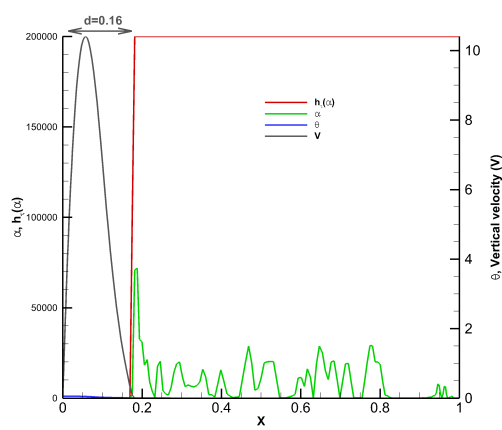
FIGURE 4.4 – Adimensional vertical velocity at various Ri for constant $Re = 400$



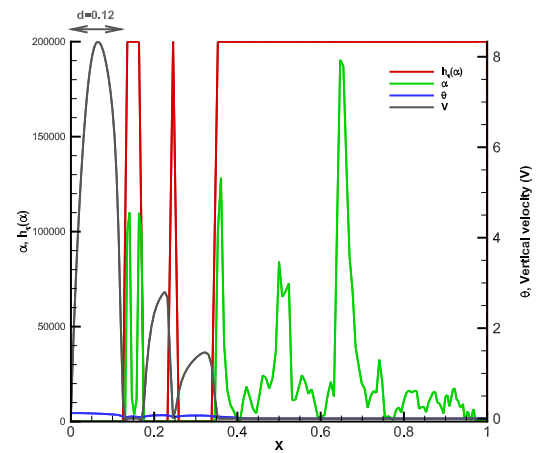
(a) $Re = 400, Ri = 100$



(b) $Re = 400, Ri = 200$

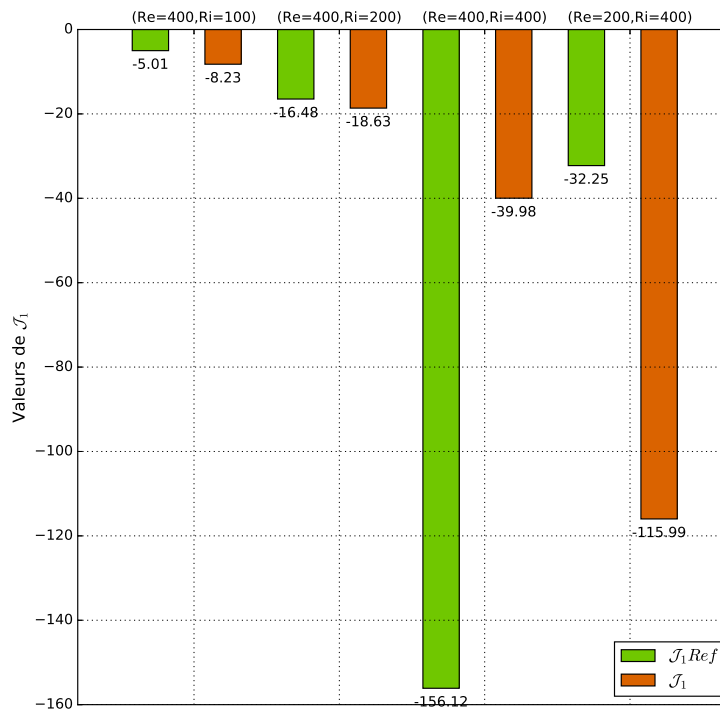


(c) $Re = 400, Ri = 400$

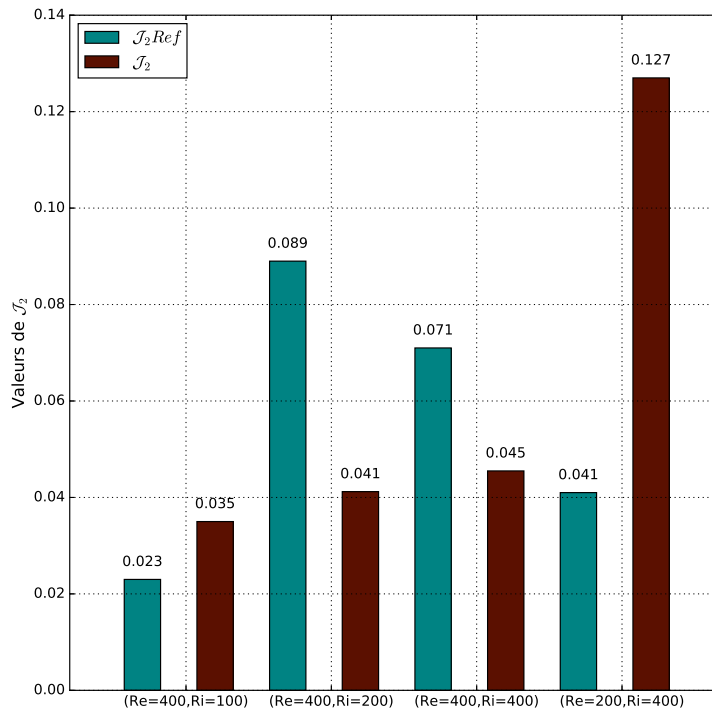


(d) $Re = 200, Ri = 400$

FIGURE 4.5 – Adimensional temperature, vertical velocity, α and $h(\alpha)$ at the end section of the channel and for various Ri for constant $Re = 400$ - annotation d is used for the width of the flow section

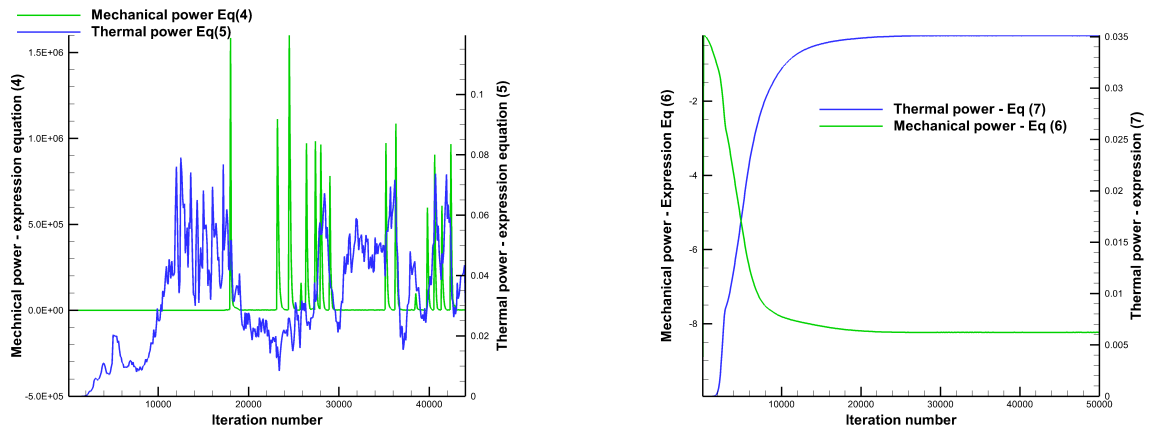


(a) J_1 values



(b) J_2 values

FIGURE 4.6 – Mechanical power (a) and thermal power (b) without optimization noticed Ref and after optimization



(a) Values of classical cost functions (4.4) and (4.5) over iterations for the minimization of $\hat{\mathcal{J}}$

(b) Values of new cost functions (4.6) and (4.7) over iterations for the minimization of $\hat{\mathcal{J}}$

FIGURE 4.7 – Comparison of cost functions computations throughout iterations - $Re = 400$, $Ri = 100$, $\omega = 0.5$

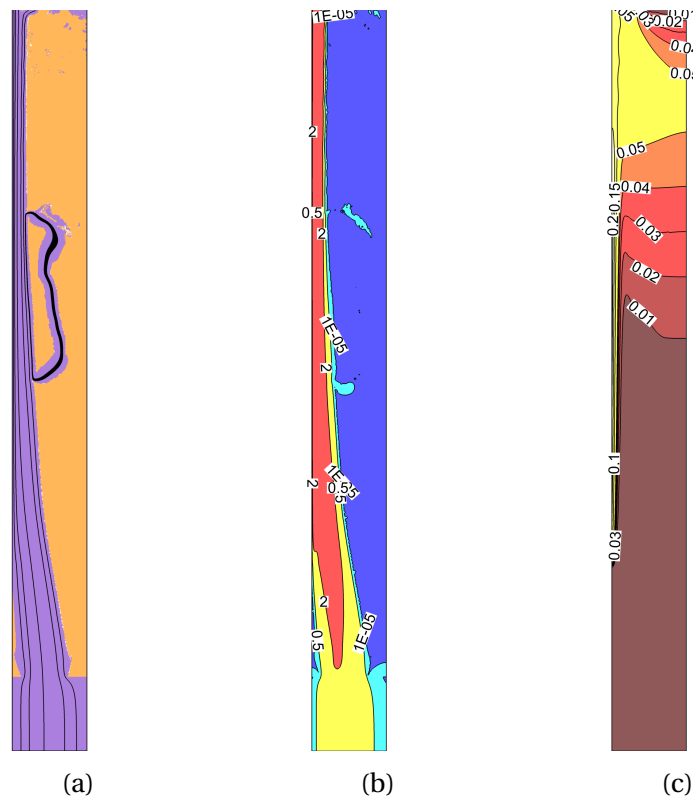


FIGURE 4.8 – Optimization results for constant $Re = 200$ and $Ri = 400$: Optimized design, $\omega = 0.5$
(a), Adimensional vertical component of the velocity (b), Adimensional temperature field (c)

4.7 Conclusion

A multi-physics optimization problem considering both pressure drop minimization and heat transfer maximization in the asymmetrically heated channel has been examined. The problem is handled in natural convection with several values of Richardson number. First of all, two objective functions are investigated representing the work of forces for the mechanical power and heat exchanges with the thermal power. In accordance with the physical problem considered, a weighted coefficient is chosen for the combined cost function. These functions allow to obtain optimal designs and they are relatively reduced in accordance with the weight affected to each of them. Several conclusions have been drawn. First of all, the reversal flow in the channel is suppressed at the end of the optimization. That contributes to reducing the loss of charges in the channel. Then, the new cost functions contribute to avoid the use of filter techniques as no numerical instabilities are observed. The stability of the computation at the end of the optimization process is better than this obtained with classical cost functions of the literature. For $Re = 400$, vertical component of the velocity increases when Ri number increases. The section for the circulation of flow is reduced. Concerning the fluid-solid boundary, they are well-defined during the optimization process thanks to two sigmoid functions used for the interpolation of both the design variable and the thermal diffusivity. Finally, the optimization algorithm is able to increase thermal exchanges while maintaining the loss of charges due to friction, thanks to the combined objective functions used. In conclusion, this study highlights the importance of the expression of cost function in a topology optimization problem. The influence of the Richardson is observed on vertical velocity value and on the quantity of material added in the optimized channel. As future work, we suggest a more complete heat and mass transfer model might be considered, as pure natural convection problems and radiation problems.

4.8 Compléments sur la convection naturelle pure

En convection naturelle, le couplage bidirectionnel du mouvement du fluide et des champs thermiques peut conduire à des champs présentant des comportements complexes. Comme expliqué par Coffin and Maute [33], au fur et à mesure que les différences de chaleur et de température appliquées augmentent, les vitesses des fluides entraîneront des instabilités dynamiques. Pourtant, la présence des phénomènes de convection naturelle dans bon nombre de systèmes industriels a fait croître l'intérêt porté par la communauté scientifique. La compréhension de l'environnement thermique de ces systèmes est incontournable pour l'élaboration des stratégies de contrôle ou d'optimisation des transferts de masse et de chaleur.

Très peu d'études en optimisation topologique ont été menées sur des systèmes de convection naturelle. Alexandersen et al. [2, 3] ont été les seuls exemples d'optimisation topologique des systèmes de convection naturelle pure. Ils ont utilisé la méthode de densité de Brinkman pour étudier des problèmes 2D et 3D en supposant un écoulement stable. Les équations d'état ont été discrétisées avec la méthode des éléments finis. L'optimisation topologique est réalisée avec la méthode adjointe en s'appuyant sur le calcul des sensibilités. L'étude montre que l'optimisation de topologique est une approche viable pour concevoir la géométrie de puits de chaleur rafraîchie par la convection naturelle et pour concevoir des micro-pompes alimentés par la convection naturelle. Les difficultés qu'ils ont rencontrées ont été principalement liée à des oscillations numériques du solveur utilisé (un "damped Newton" solveur) et aux régions intermédiaires entre le domaine fluide et solide, amplifiant alors l'effet de convection naturelle alors qu'une de leur fonction objectif était basée sur la maximisation du champ de vitesse du fluide. Par ailleurs, ils n'ont pas travaillé sur des fonctions coût relatives aux pertes de charge.

Dans cette partie, nous nous intéressons au problème d'optimisation des transferts thermiques et massiques avec un écoulement de convection naturelle pure. Cela signifie que nous laissons le champ de vitesse libre en entrée du canal vertical. Les fonctionnelles objectif considérées sont les mêmes que celles décrites dans la partie précédente (4.6) et (4.7) et sont aussi combinées par une somme pondérée (4.3). Après avoir énoncé les équations d'état associées au problème d'optimisation en convection naturelle pure, nous présentons les résultats obtenus en fin de processus d'optimisation pour différents nombres de Rayleigh.

4.8.1 Formulation du problème d'optimisation

Les équations sont rendues sans dimension par rapport à la vitesse caractéristique de convection naturelle, $U_{CN} = \kappa Ra^{1/2}/b$, à la largeur du canal b et à la différence de température ΔT entre les parois du canal et celle de l'air extérieur. La température de l'air extérieure est prise comme référence des températures. Le nombre de Prandtl, $Pr = \nu/\kappa$, est fixé à 0,71. Les équations qui régissent les écoulements d'air en convection naturelle avec les hypothèses précédentes s'expriment, en deux dimensions, pour le problème d'optimisation, de la manière suivante :

Minimiser \mathcal{J} tel que :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \\ (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\nabla p + Pr Ra_b^{-1/2} \nabla^2 \mathbf{u} - h_\tau(\alpha) \mathbf{u} + Pr \theta \vec{e}_y \\ \nabla \cdot (\mathbf{u} \theta) &= \text{div}(Ra_b^{-1/2} k_\tau(\alpha) \nabla \theta) \end{cases} \quad (4.18)$$

auquel on ajoute les conditions aux limites :

$$\begin{array}{llll}
 \mathbf{u} = 0, & \partial_n \theta = -1, & \text{sur } \Gamma_1 & \text{paroi chauffée} \\
 \mathbf{u} = 0, & \partial_n \theta = 0, & \text{sur } \Gamma_2 & \text{parois adiabatiques} \\
 \partial_n \mathbf{u} = 0, & \theta = 0, & \text{sur } \Gamma_i & \text{entrée du domaine} \\
 \partial_n \mathbf{u} = 0, & \partial_n \theta = 0, & p = 0, & \text{sur } \Gamma_o \text{ sortie du domaine}
 \end{array}$$

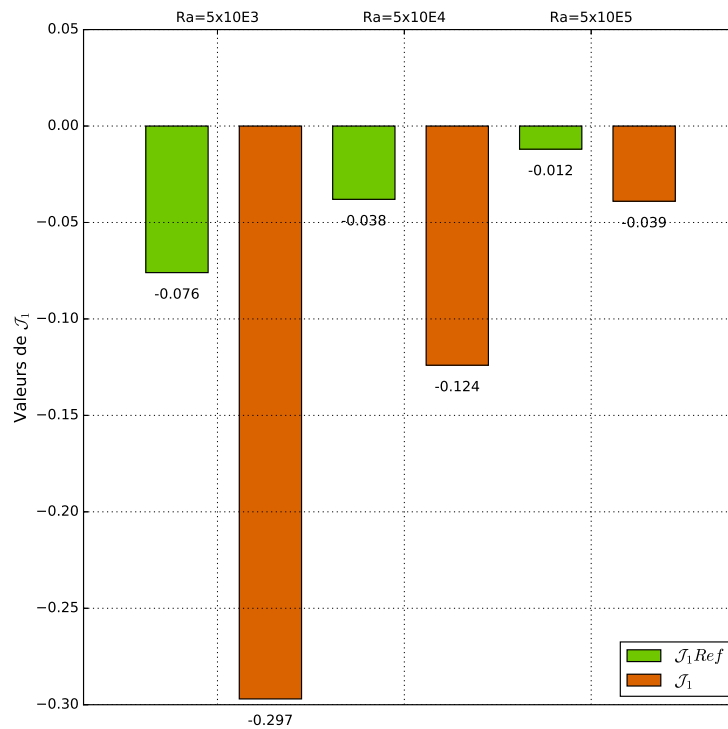
4.8.2 Résultats

Les simulations ont été faites avec un coefficient de pondération $\omega = 0.5$ et pour 3 valeurs du nombre de Rayleigh s'inspirant des travaux de Elenbaas [42] qui ont déterminé les différents modes d'écoulement en fonction d'un nombre de Rayleigh modifié (rapport du nombre de Rayleigh construit sur la largeur du canal par l'allongement du canal). Ainsi, nous faisons varier Ra_b dans $\{5 \cdot 10^3, 5 \cdot 10^4, 5 \cdot 10^5\}$.

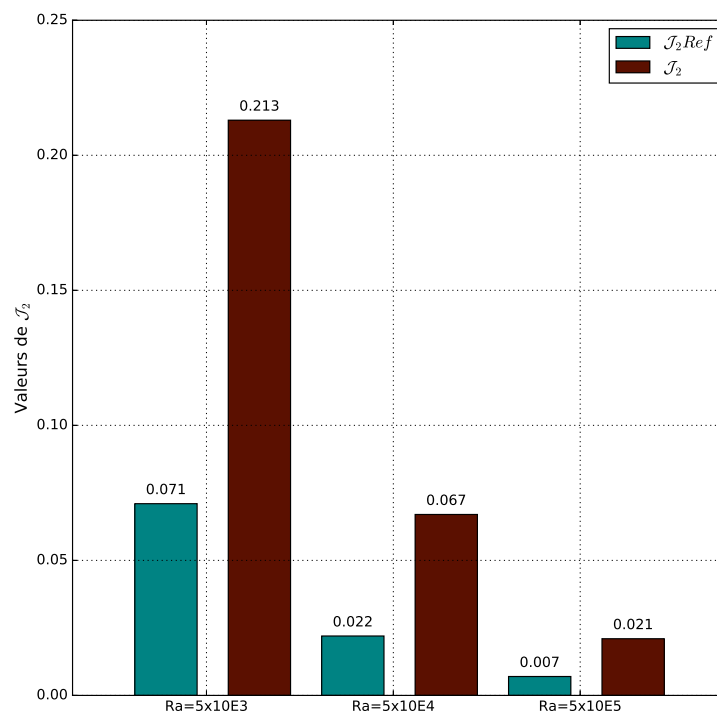
Dans un premier temps, on observe que l'algorithme d'optimisation permet bien de réduire la puissance mécanique et d'augmenter la puissance thermique (Figure 4.9). La puissance mécanique est ainsi divisée par un facteur de 3,9 pour $Ra_b = 5 \cdot 10^3$. La puissance thermique est à divisée par un facteur de 3 quelque soit le nombre de Rayleigh.

Ensuite, l'algorithme n'ajoute que 3,7% de matière dans le canal pour un nombre de Rayleigh égal à $5 \cdot 10^5$, ce qui est relativement faible comparée aux quantités ajoutées par l'algorithme dans l'étude précédente en convection naturelle dominante (cf. Figure 4.2). La Figure 4.10 montre le canal obtenu en fin d'optimisation pour les différents nombres de Rayleigh. On observe que la structure de l'écoulement n'est modifiée que pour $Ra_b = 5 \cdot 10^5$. Comme attendu et obtenu dans l'étude précédente, la vitesse verticale est nulle dans le domaine associé au solide et elle est plus élevée contre la paroi chauffée (Figure 4.11). De plus, des trous se dessinent dans la partie haute du matériau ajouté dans le canal. Ces trous jouent un rôle d'isolant pour la matériau ajouté.

Pour les 3 cas étudiés, l'algorithme ajoute une fine couche de matière qui englobe la paroi chauffée. Cet ajout de matière augmente les transferts thermiques et contribuent ainsi à augmenter la puissance thermique dans le canal.



(a) J_1 values



(b) J_2 values

FIGURE 4.9 – Valeurs des puissances thermique et mécanique sans et avec optimisation

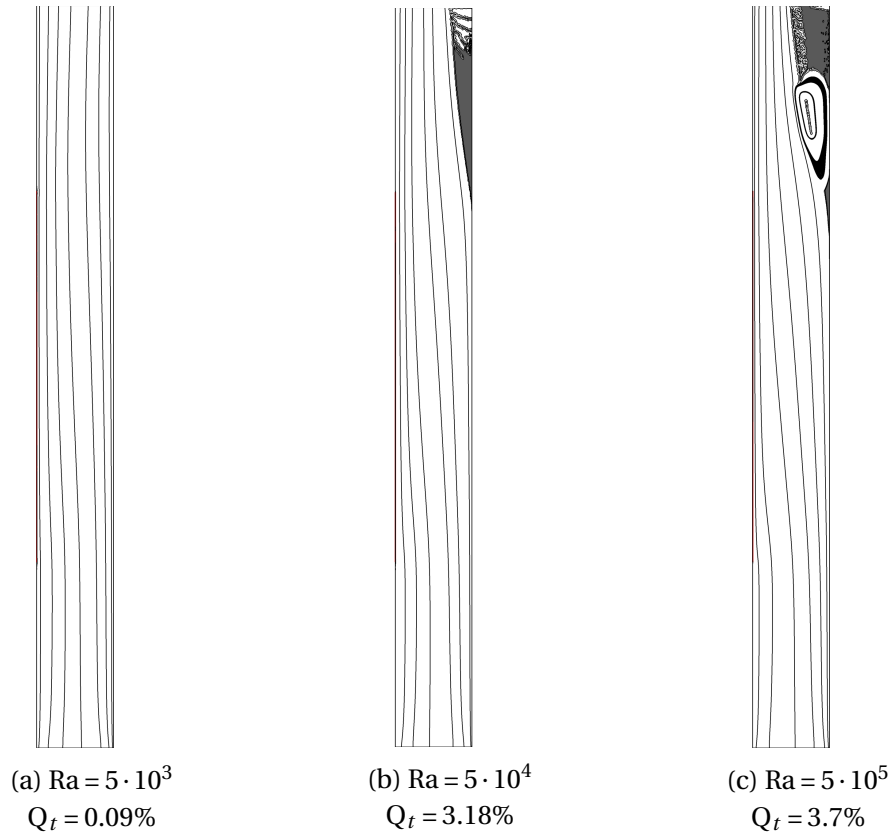


FIGURE 4.10 – Canal optimisé et lignes de courant

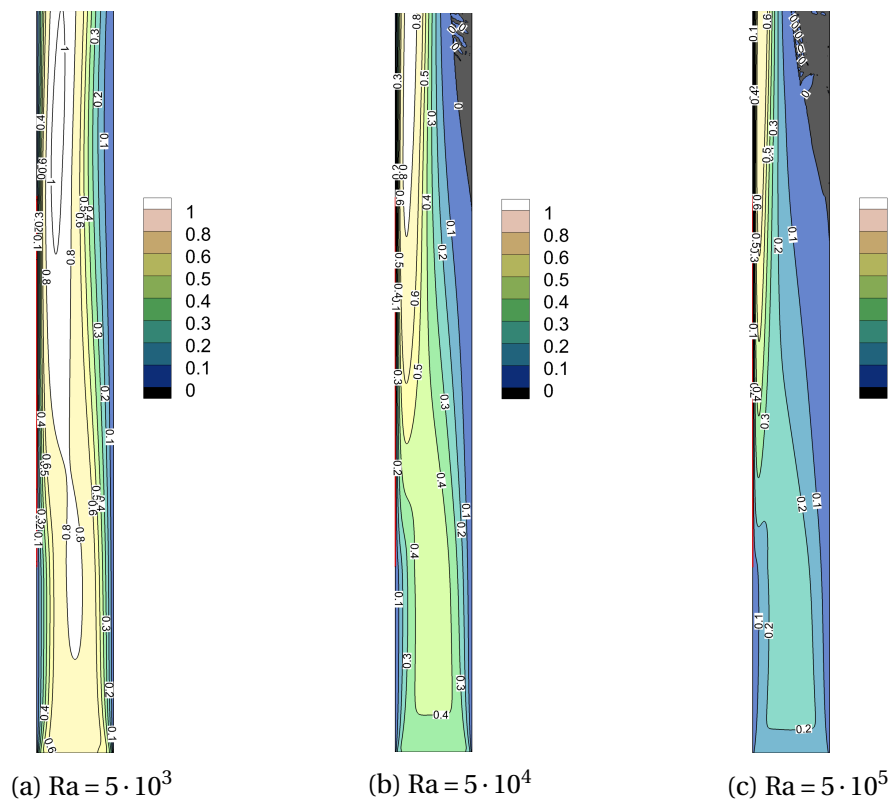


FIGURE 4.11 – Composante verticale de la vitesse

4.9 Conclusion du chapitre

Ces travaux en convection naturelle dominante et convection naturelle pure montrent que les nouvelles expressions de puissance mécanique et puissance thermique pour le problème conducto-convectif du canal vertical asymétriquement chauffé donnent des résultats satisfaisants en terme de stabilité de l'algorithme dans la mesure où les instabilités numériques rencontrées par les autres auteurs [1] sont évitées. En effet, en travaillant avec des fonctions objectif globaux et en s'appuyant sur des quantités physiques de type puissance, l'algorithme d'optimisation réussit à mettre de la matière dans le canal tout en contrôlant la puissance liées aux forces de frottements ou en augmentant les échanges de chaleur, suivant l'importance spécifiée pour chacune des fonctions coût au moment de la définition du problème d'optimisation.

Chapitre 5

Conclusion et perspectives

5.1 Conclusion

La présente thèse explore l'optimisation topologique des échanges de chaleur et de masse dans un canal vertical asymétriquement chauffé avec un écoulement en convection naturelle dominante. Les verrous scientifiques identifiés lors la résolution de problèmes d'optimisation en milieux continus ont été abordées et des stratégies ont été proposées, puis validées numériquement.

Dans un premier temps, nous avons abordé la définition de l'interface fluide-solide à la fin du processus d'optimisation. En effet, une méthode couramment utilisée en optimisation topologique consiste à pénaliser la vitesse du fluide dans la zone correspondant au solide avec l'aide d'un terme de Brinkmann. Comme le coefficient situé devant ce terme ne correspond qu'à deux états (0 pour le fluide et $\neq 0$ pour le solide), la stratégie est de recourir à des fonctions de régularisation qui permettent d'interpoler, entre autres, la conductivité thermique entre les domaines fluide et solide. Ces interpolations facilitent aussi l'utilisation des méthodes à base de gradient pour résoudre le problème d'optimisation. De plus, pour éviter les motifs en damier en fin d'optimisation, il est souvent conseillé d'utiliser des filtres numériques. Nos travaux ont porté sur l'introduction de nouvelles fonctions d'interpolation de type sigmoïde permettant d'améliorer la définition de la frontière fluide-solide pendant le processus d'optimisation. La taille de la zone intermédiaire, c'est-à-dire la zone ne correspondant ni au fluide ni au solide, a été calculée analytiquement et théoriquement pour montrer qu'elle a été réduite grâce à ces fonctions sigmoïdes. Outre le fait que la définition de la frontière entre les deux domaines s'effectue pendant l'optimisation topologique, cette nouvelle technique ne nécessite pas le recours aux filtres numériques et ne génère pas de motifs en damier. Nous l'avons validée sur deux cas référencés dans la littérature, à savoir le « single pipe » et le « bend pipe ».

Dans un second temps, nous nous sommes intéressés aux transferts thermiques et massiques dans le canal vertical asymétriquement chauffé. En amont des travaux d'optimisation au sens topologique de ces transferts, une étude sur l'influence de la stratification thermique à l'extérieur du canal et l'influence du rayonnement de surface ont été évaluées sur différentes quantités thermiques et aérauliques. Cette étude a permis de mettre en évidence des grandeurs à prendre en compte pour définir nos fonctions objectifs dans les problèmes d'optimisation. Plus particulièrement, nous avons mis en évidence une variation de la taille de l'écoulement retour, ce qui contribue à augmenter les pertes de charge dans le canal. Nous avons aussi remarqué l'effet bouchon lié à la stratification thermique qui diminue la vitesse du fluide et influence donc l'énergie thermique

au sein du canal. Nos travaux se sont concentrés sur l'expression de nouvelles fonctionnelles objectif. Nous proposons ainsi une nouvelle expression de la puissance mécanique pour contrôler les pertes de charge (malgré l'ajout de matière) dans le canal vertical et la combinons avec l'expression de la puissance thermique. Cette nouvelle fonction objectif aura pour effet de corriger les instabilités relevées en sortie du domaine avec les autres fonctions objectifs de la littérature. Le problème ainsi posé est résolu pour un écoulement en convection mixte, bien que la convection naturelle reste dominante, et pour des variations du nombre de Richardson compris entre 100 et 400. Les fonctions d'interpolation de type sigmoïde sont également utilisées et permettent l'obtention d'une frontière fluide-solide distincte. Enfin, nous avons utilisé ces nouvelles fonctions objectif en laissant libre la vitesse en entrée du canal (convection naturelle pure) et présentons les résultats obtenus pour différents nombres de Rayleigh compris entre $5 \cdot 10^3$ et $5 \cdot 10^5$.

Ces nouvelles fonctions d'interpolation (de type sigmoïde) et cette nouvelle expression de la puissance mécanique sont de nouvelles stratégies en optimisation topologique des transferts de chaleur et de masse. Elles permettent d'obtenir une frontière bien distincte entre les domaines fluide et solide pendant le processus d'optimisation. Sans avoir recours à des filtres numériques, l'effet damier couramment observé n'existe plus. Et enfin, la nouvelle expression de la puissance mécanique combinée à la puissance thermique permettent à l'algorithme d'optimisation de maximiser la puissance thermique tout en maintenant faible la puissance mécanique.

5.2 Perspectives

Indépendamment des stratégies d'optimisation proposées, les configurations étudiées reposent tout au long du manuscrit sur des hypothèses simplificatrices dans le but de limiter soient les ressources de calcul, soient les différents paramètres, afin de mieux cibler l'étude sur le processus d'optimisation et les verrous scientifiques identifiés. Il conviendrait ainsi de poursuivre nos travaux en 3-dimensions, en régime laminaire instationnaire et en régime turbulent.

De même, les études de transferts de chaleur dans le cadre de cette thèse sont effectuées en milieu isotrope. Or, nous pourrions envisager l'optimisation de ces transferts de chaleur en milieu anisotrope. Cela reviendrait à considérer un transfert de chaleur dans une direction et à modéliser un domaine équivalent à des matériaux stratifiés.

L'ensemble des configurations étudiées dans cette thèse emploie un maillage adapté uniquement à la géométrie du canal. Bien que la précision des calculs dépendent de la taille de ces éléments, en pratique, il n'est pas possible de raffiner uniformément leur taille pour des raisons évidentes de coûts de calcul. Toutefois, il est possible d'optimiser le maillage en le raffinant seulement dans des zones prédéfinies. Ainsi, dans le cas du canal vertical asymétriquement chauffé, le maillage a été raffiné le long des parois, afin de simuler plus précisément le phénomène de couches limites thermique et aérodynamique. La limite de notre méthode est liée à l'inadaptation du maillage au cours du processus d'optimisation. La matière ajoutée par l'algorithme d'optimisation devrait impliquer une réadaptation du maillage le long de l'interface fluide-solide afin de simuler plus précisément les couches limites thermique et aérodynamique qui s'y développent. Il serait donc judicieux d'avoir recours à des techniques de maillage adaptatif pendant le processus d'optimisation.

Ensuite, le canal vertical asymétriquement chauffé est une géométrie qui est rencon-

trée dans de nombreux secteurs industriels. Néanmoins, nos travaux numériques ont été purement académiques bien que la gamme des paramètres utilisées corresponde à des gammes de mesures qu'on peut enregistrer dans la réalité. Ce qui manque à notre étude est l'application de nos nouvelles techniques et de nos nouvelles expressions de fonctionnelles objectif sur un cas d'application industrielle. Par exemple, les cas du Mur Trombe ou du mur double-peau pourraient être traités comme cas d'application des méthodes d'optimisation proposées dans le cadre de cette thèse.

Pour poursuivre les investigations sur les fonctions coût, nous pouvons en explorer d'autres basées sur des critères dits locaux. L'idée des critères locaux repose sur l'utilisation des corrélations heuristiques entre les paramètres locaux de l'écoulement fluide et leur impact global. Cette stratégie peut être intéressante pour mieux définir la structure des champs (température, vitesse, ...) à l'intérieur du domaine à étudier et au plus près de l'interface fluide-solide. Une réflexion sur les définitions des quantités physiques à proximité de la frontière fluide-solide est déjà en cours et devrait permettre de définir les critères locaux pertinents. Ces critères locaux seront d'ailleurs complémentaires à des critères exprimés par une fonction coût de type surfacique.

Concernant l'amélioration des techniques employées en optimisation topologique, le travail qui pourrait nous intéresser serait les nouvelles techniques de pénalisation afin d'améliorer l'interface fluide-solide. Ces techniques pourraient également être étudiées afin d'obtenir non plus un solide "presque parfait" en fin d'optimisation, ce qui correspond à une zone où le fluide ne peut pas circuler, mais plutôt pour obtenir plusieurs types de matrices solides. Par exemple, nous souhaitons explorer l'obtention des milieux poreux modélisés par la loi de Darcy et la loi de Forchheimer.

Une approche expérimentale pour valider les performances obtenues et pour mieux les qualifier dans les configurations définies par optimisation topologique reste néanmoins le chantier le plus conséquent à mener à la suite de ces travaux. Cette étape lourde dans sa mise en œuvre est incontournable pour valider la forme obtenue numériquement et les techniques employées. Ce n'est qu'une fois cette étape effectuée que des améliorations et d'autres compléments d'études pourront être également envisagées.

Ainsi, bien que les résultats de nos travaux soient satisfaisants pour les hypothèses formulées, l'optimisation topologique des transferts de chaleur et de masse est un domaine qui nécessite des travaux supplémentaires tant expérimentaux que numériques afin d'améliorer les méthodes employées. Les perspectives énoncées ici forment une analyse objective du travail qui reste à réaliser et montrent qu'il reste encore des pistes à explorer et à développer.

5.3 Production scientifique

Les travaux de cette thèse ont fait l'objet de plusieurs productions scientifiques et ont été présentés à diverses conférences :

- D. Ramalingom, P.-H. Cocquet, A. Bastide, *Numerical study of natural convection in asymmetrically heated channel considering thermal stratification and surface radiation*, accepté pour publication Numerical Heat Transfer, Part A : Applications, 2017.
- D. Ramalingom, P.-H. Cocquet, A. Bastide, *A new interpolation technique to deal with fluid-porous media interfaces for topology optimization of heat transfer*, soumis pour publication dans Computers and Fluids, 2017.

- D. Ramalingom, P.-H. Cocquet, A. Bastide, *A multi-physics optimization problem in natural convection for a vertical channel asymmetrically heated*, soumis pour publication dans International Journal of Heat and Mass Transfer, 2017.
- P.-H. Cocquet, A. Bastide, D. Ramalingom, *Penalization model for Navier-Stokes-Darcy equations with application to porosity-oriented topology optimization*, soumis pour publication dans Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, 2017.
- D. Ramalingom, A. Bastide, *Impact of external surroundings on natural convection in a vertical channel asymmetrically heated*, European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS) 2016, 11 pages, 5-10 juin 2016, Crête.
- D. Ramalingom, P.-H. Cocquet, A. Bastide, *Optimisation topologique des échanges thermiques dans un canal vertical asymétriquement chauffé*, Congrès de la Société Française de Thermique 2017, 8 pages, 30 mai au 2 juin 2017, Marseille.

Chapitre 6

Références

- [1] Joe Alexandersen. *Topology Optimisation for Coupled Convection Problems*. PhD thesis, Technical University of Denmark, 2013.
- [2] Joe Alexandersen, Niels Aage, Casper Schousboe Andreasen, and Ole Sigmund. Topology optimisation for natural convection problems. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 76(10) :699–721, dec 2014. ISSN 02712091. doi : 10.1002/fld.3954. URL <http://doi.wiley.com/10.1002/fld.3954>.
- [3] Joe Alexandersen, Ole Sigmund, and Niels Aage. Topology optimisation of passive coolers for light-emitting diode lamps. In *11th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization*, number June, pages 3–7, 2015. doi : 10.13140/RG.2.1.3906.5446.
- [4] Joe Alexandersen, Ole Sigmund, and Niels Aage. Large scale three-dimensional topology optimisation of heat sinks cooled by natural convection. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 100 :876–891, 2016. ISSN 00179310. doi : 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2016.05.013. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2016.05.013>.
- [5] Casper Schousboe Andreasen and Ole Sigmund. Saturated poroelastic actuators generated by topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 43(5) :693–706, 2011. ISSN 1615147X. doi : 10.1007/s00158-010-0597-4.
- [6] Casper Schousboe Andreasen, Allan Roulund Gersborg, and Ole Sigmund. Topology optimization of microfluidic mixers. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 61(5) :498–513, 2009. ISSN 02712091. doi : 10.1002/fld.1964.
- [7] Assunta Andreozzi, Bernardo Buonomo, and Oronzio Manca. Numerical Investigation on Transient Natural Convection in Vertical Channels With Heated and Cooled Walls. In *ASME/JSME 2007 Thermal Engineering Heat Transfer Summer Conference collocated with the ASME 2007 InterPACK Conference*, pages 545–554. American Society of Mechanical Engineers, 2007.
- [8] Philippe Angot, Charles-Henri Bruneau, and Pierre Fabrie. A penalization method to take into account obstacles in incompressible viscous flows. *Numerische Mathematik*, 81(4) :497–520, 1999. ISSN 0029-599X.
- [9] Timothy Ward Athan and Panos Y. Papalambros. A Note on Weighted Criteria Methods for Compromise Solutions in Multi-Objective Optimization, 1996. ISSN 0305-215X.

- [10] Antonio Auletta, Oronzio Manca, Marilena Musto, and Sergio Nardini. Thermal design of symmetrically and asymmetrically heated channel-chimney systems in natural convection. *Applied Thermal Engineering*, 23(5) :605–621, 2003. ISSN 13594311. doi : 10.1016/S1359-4311(02)00241-7.
- [11] Evangellos Bacharoudis, Michalis Gr Vrachopoulos, Maria K. Koukou, Dionysios Margaris, Andronikos E. Filios, and Stamatis A. Mavrommatis. Study of the natural convection phenomena inside a wall solar chimney with one wall adiabatic and one wall under a heat flux. *Applied Thermal Engineering*, 27(13) :2266–2275, 2007. ISSN 13594311. doi : 10.1016/j.applthermaleng.2007.01.021.
- [12] B. F. Balunov, A. S. Babykin, R. A. Rybin, V. A. Krylov, V. N. Tanchuk, and S. A. Grigoriev. Heat transfer at mixed convection in vertical and inclined flat channels of the vacuum chamber of the ITER international thermonuclear reactor. *High Temperature*, 42(1) :126–133, 2004. ISSN 0018151X. doi : 10.1023/B:HITE.0000020100.11937.3f.
- [13] G S Barozzi, M A Corticelli, and E Nobile. Numerical simulation of time-dependent buoyant flows in an enclosed vertical channel. *Heat and mass transfer*, 35(2) :89–99, 1999. ISSN 0947-7411.
- [14] R Becker, H Kapp, and R Rannacher. Adaptive finite element methods for optimal control of partial differential equations : Basic concept. *Siam Journal on Control and Optimization*, 39(1) :113–132, 2000. ISSN 0363-0129. doi : 10.1137/S0363012999351097. URL [isi:000089068200006{%}5Cnfile://iwes002/bibliothek{\protect\T1\textdollar}/02pdf-Paper/B/Becker2000.pdf](http://www.siam.org/journals/SICOMP/39/1/1137.html).
- [15] Martin P. Bendsøe and Ole Sigmund. *Topology optimization : theory, methods, and applications*. Springer Science & Business Media, 2003. ISBN 978-3-642-07698-5. doi : 10.1007/978-3-662-05086-6. URL http://medcontent.metapress.com/index/A65RM03P4874243N.pdf{%}5Cnhttp://books.google.com/books?hl=en{%}&lr={&}id=NGmtmMhVe2sC{%}&oi=fnd{%}&pg=PA1{%}&dq=Topology+optimization:+theory,+methods,+and+applications{%}&ots=tHTK8R5Hwx{%}&sig=MNUFHS10jPfaJibpEeHnr-eJ_{_}s0{%}5Cnhttp://link.s
- [16] Martin Philip Bendsøe, Noboru Kikuchi, Martin Philip Bendsoe, Noboru Kikuchi, Martin Philip Bendsøe, and Noboru Kikuchi. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 71(2) :197–224, nov 1988. ISSN 00457825. doi : 10.1016/0045-7825(88)90086-2. URL <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0045782588900862>.
- [17] Michel Bergmann. Optimisation aérodynamique par réduction de modèle POD et contrôle optimal : application au sillage laminaire d’un cylindre circulaire, 2004.
- [18] J R Bodoia and J F Osterle. The Development of Free Convection Between Heated Vertical Plates. *Journal of Heat Transfer*, 84(1) :40–43, feb 1962. ISSN 0022-1481. URL <http://dx.doi.org/10.1115/1.3684288>.
- [19] Danail Bonchev, Armenag H Dekmezian, Eric Markel, and Alessandro Faldi. Topology-rheology regression models for monodisperse linear and branched polyethylenes. *Journal of applied polymer science*, 90(10) :2648–2656, 2003. ISSN 1097-4628.

- [20] Serge Bories, Abdelkader Mojtabi, Marc Prat, and Michel Quintard. *Transferts de chaleur dans les milieux poreux*. Ed. Techniques Ingénieur, 1996.
- [21] Serge Bories, Marc Prat, and Michel Quintard. Transferts de chaleur dans les milieux poreux - Conduction, convection, rayonnement. *Techniques de l'ingénieur*, 33(0) : 1–22, 2012. ISSN 1762-8741.
- [22] Thomas Borrvall and Joakim Petersson. Topology optimization of fluids in Stokes flow. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 41(1) :77–107, jan 2003. ISSN 02712091. doi : 10.1002/fld.426. URL <http://doi.wiley.com/10.1002/fld.426>.
- [23] B. Brangeon, P. Joubert, and A. Bastide. Influence of the dynamic boundary conditions on natural convection in an asymmetrically heated channel. *International Journal of Thermal Sciences*, 95 :64–72, sep 2015. ISSN 12900729. doi : 10.1016/j.ijthermalsci.2015.04.006. URL <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S1290072915001234>.
- [24] T. E. Bruns. A reevaluation of the SIMP method with filtering and an alternative formulation for solid-void topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 30(6) :428–436, 2005. ISSN 1615147X. doi : 10.1007/s00158-005-0537-x.
- [25] T. E. Bruns. Topology optimization of convection-dominated, steady-state heat transfer problems. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 50(15-16) : 2859–2873, 2007. ISSN 00179310. doi : 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2007.01.039.
- [26] S.a.M. A.M. Burek and a. Habeb. Air flow and thermal efficiency characteristics in solar chimneys and Trombe Walls. *Energy and Buildings*, 39(2) :128–135, feb 2007. ISSN 03787788. doi : 10.1016/j.enbuild.2006.04.015. URL <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0378778806001356>.
- [27] J.P. P. Caltagirone. Simulation d'une expérience de thermo-convection, 2006.
- [28] Antonio Campo, O Manca, and B Morrone. Inflow and Outflow Effects on Natural Convection in Partially Heated Vertical Parallel Plane Channels. In *ASME-IMECE*, pages 325–335, 1997.
- [29] J R Carpenter, D G Briggs, and V Sernas. Combined Radiation and Developing Laminar Free Convection Between Vertical Flat Plates With Asymmetric Heating. *Journal of Heat Transfer*, 98(1) :95–100, feb 1976. ISSN 0022-1481. URL <http://dx.doi.org/10.1115/1.3450476>.
- [30] T. S. Chang and T. F. Lin. On the reversed flow and oscillating wake in an asymmetrically heated channel. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 10(4) :443–459, 1990. ISSN 0271-2091. doi : 10.1002/fld.1650100407. URL <http://doi.wiley.com/10.1002/fld.1650100407>.
- [31] Eric Chénier, Robert Eymard, and Raphaële Herbin. A collocated finite volume scheme to solve free convection for general non-conforming grids, 2009. ISSN 00219991.

- [32] Jordi Cipriano, Guillaume Houzeaux, Daniel Chemisana, Chiara Lodi, and Jaime Martí-Herrero. Numerical analysis of the most appropriate heat transfer correlations for free ventilated double skin photovoltaic façades. *Applied Thermal Engineering*, 57(1-2) :57–68, 2013. ISSN 13594311. doi : 10.1016/j.applthermaleng.2013.03.056.
- [33] Peter Coffin and Kurt Maute. Level set topology optimization of cooling and heating devices using a simplified convection model. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 53(5) :985–1003, 2016. ISSN 16151488. doi : 10.1007/s00158-015-1343-8. URL <http://dx.doi.org/10.1007/s00158-015-1343-8>.
- [34] Christophe Daverat. *Étude expérimentale de la convection naturelle en canal verticale à flux de chaleur imposé*. PhD thesis, INSA Lyon, 2012. URL <http://theses.insa-lyon.fr/publication/2012ISAL0093/these.pdf>.
- [35] Christophe Daverat, H Pabiou, Christophe Ménézo, Hassan Bouia, and Shihe Xin. Experimental investigation of turbulent natural convection in a vertical water channel with symmetric heating : Flow and heat transfer. *Experimental Thermal and Fluid Science*, 2013. URL http://ac.els-cdn.com/S0894177712001719/1-s2.0-S0894177712001719-main.pdf?{}_tid=b79e814e-a51c-11e4-9b58-0000aacb35e{&}acdnat=1422250528{ }499ae3f75b7d6c6d286ea31574458b52.
- [36] Talib Dbouk. A review about the engineering design of optimal heat transfer systems using topology optimization. *Applied Thermal Engineering*, 112 :841–854, 2016. ISSN 13594311. doi : 10.1016/j.applthermaleng.2016.10.134. URL <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S135943111632645X>.
- [37] Em Dede. Multiphysics topology optimization of heat transfer and fluid flow systems. *proceedings of the COMSOL Users Conference*, 2009. URL [https://www.comsol.com/access/dl/papers/6282/Dede.pdf\\$%delimitter"026E3B2\\$nhhttp://www.comsol.se/papers/6282/download/Dede.pdf](https://www.comsol.com/access/dl/papers/6282/Dede.pdf$%delimitter).
- [38] Yongbo Deng, Zhenyu Liu, Ping Zhang, Yongshun Liu, and Yihui Wu. Topology optimization of unsteady incompressible Navier-Stokes flows. *Journal of Computational Physics*, 230(17) :6688–6708, 2011. ISSN 00219991. doi : 10.1016/j.jcp.2011.05.004.
- [39] G. Desrayaud, Eric Chénier, A. Joulin, Alain Bastide, Boris Brangeon, J.P. P. Caltagirone, Y. Cherif, R. Eymard, C. Garnier, S. Giroux-Julien, Others, Y. Harnane, P. Joubert, N. Laaroussi, S. Lassue, P. Le Quéré, R. Li, D. Saury, A. Sergent, S. Xin, and A. Zoubir. Benchmark solutions for natural convection flows in vertical channels submitted to different open boundary conditions. *International Journal of Thermal Sciences*, 72(January 2009) :18–33, oct 2013. ISSN 12900729. doi : 10.1016/j.ijthermalsci.2013.05.003. URL <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S1290072913001130>.
- [40] Maria B Dühring, Jakob S Jensen, and Ole Sigmund. Acoustic design by topology optimization. *Journal of sound and vibration*, 317(3) :557–575, 2008. ISSN 0022-460X.

- [41] Frédéric Dupont, Fabien Ternat, Sandrine Samot, and Ruddy Blonbou. Two-dimension experimental study of the reverse flow in a free convection channel with active walls differentially heated. *Experimental Thermal and Fluid Science*, 47 : 150–157, 2013. ISSN 08941777. doi : 10.1016/j.expthermflusci.2013.01.010. URL www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0894177713000289.
- [42] W. Elenbaas. Heat dissipation of parallel plates by free convection. *Physica*, 9(1) : 1–28, jan 1942. ISSN 00318914. doi : 10.1016/S0031-8914(42)90053-3. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0031891442900533>.
- [43] Hans A Eschenauer and Niels Olhoff. Topology Optimization of Continuum Structures : A review*. *Applied Mechanics Reviews*, 54(4) :331–390, 2001. ISSN 00036900. doi : 10.1115/1.1388075. URL <http://appliedmechanicsreviews.asmedigitalcollection.asme.org/article.aspx?articleid=1396619>.
- [44] G Henry Weller Et al. A tensorial approach to computational continuum mechanics using object- oriented techniques. *Computers in physics*, 12.6 :620–631, 1998.
- [45] Hugh Everett III. Generalized Lagrange multiplier method for solving problems of optimum allocation of resources. *Operations research*, 11(3) :399–417, 1963. ISSN 0030-364X.
- [46] R Eymard, R Herbin, and J C Latche. Convergence Analysis of a Colocated Finite Volume Scheme for the Incompressible Navier–Stokes Equations on General 2D or 3D Meshes. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 45(1) :1–36, 2005. doi : 10.1137/040613081. URL [http://link.aip.org/link/?SNA/45/1/1\\$%5Cdelimiter%26E3B2\\$npapers2://publication/doi/10.1137/040613081](http://link.aip.org/link/?SNA/45/1/1$%5Cdelimiter%26E3B2$npapers2://publication/doi/10.1137/040613081).
- [47] Robert Eymard and Raphaële Herbin. A new colocated finite volume scheme for the incompressible Navier-Stokes equations on general non matching grids. *Comptes Rendus Mathématique*, 344(10) :659–662, 2007. ISSN 1631073X. doi : 10.1016/j.crma.2007.03.025.
- [48] Wu Shung Fu, Shang Hao Huang, and Chung Gang Li. An investigation of unsteady flow reversal of natural convection in vertical parallel plates by the modified local one-dimensional inviscid relations method. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 86 :124–138, 2015. ISSN 00179310. doi : 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2015.02.032. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2015.02.032>.
- [49] Guohui Gan. A parametric study of Trombe walls for passive cooling of buildings. *Energy and Buildings*, 27(1) :37–43, 1998. ISSN 03787788. doi : 10.1016/S0378-7788(97)00024-8.
- [50] Guohui Gan. Simulation of buoyancy-driven natural ventilation of buildings—Impact of computational domain. *Energy and Buildings*, 42(8) :1290–1300, 2010. ISSN 0378-7788.
- [51] Charles Garnier. *Modélisation numérique des écoulements ouverts de convection naturelle au sein d'un canal vertical asymétriquement chauffé*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2014. URL <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01127340>.

- [52] A. Gersborg-Hansen, M. P. Bendsøe, and O. Sigmund. Topology optimization of heat conduction problems using the finite volume method. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 31(4) :251–259, 2006. ISSN 1615147X. doi : 10.1007/s00158-005-0584-3.
- [53] Stéphanie Giroux-Julien, Christophe Ménézo, Jeremie Vareilles, Herve Pabiou, Marco Fossa, and Eddie Leonardi. Natural convection in a nonuniformly heated channel with application to photovoltaic facades. *Computational Thermal Sciences*, 1(3) :231–258, 2009. ISSN 19402503. doi : 10.1615/ComputThermalScien.v1.i3.10.
- [54] J K Guest and L C S Genut. Reducing dimensionality in topology optimization using adaptive design variable fields. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 81(8) :1019–1045, 2010. doi : 10.1002/nme.2724.
- [55] James K. Guest and Jean H. Prévost. Topology optimization of creeping fluid flows using a Darcy-Stokes finite element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 66(3) :461–484, 2006. ISSN 00295981. doi : 10.1002/nme.1560.
- [56] Max D Gunzburger. *Perspectives in flow control and optimization*. SIAM, 2002. ISBN 089871527X.
- [57] B. Hassani and E. Hinton. A review of homogenization and topology optimization II—analytical and numerical solution of homogenization equations. *Computers & Structures*, 69(6) :719–738, 1998. ISSN 00457949. doi : 10.1016/S0045-7949(98)00132-1.
- [58] B. Hassani and E. Hinton. A review of homogenization and topology optimization I—homogenization theory for media with periodic structure. *Computers & Structures*, 69(6) :707–717, 1998. ISSN 00457949. doi : 10.1016/S0045-7949(98)00131-X.
- [59] B. Hassani and E. Hinton. Review of homogenization and topology optimization III - topology optimization using optimality criteria. *Computers and Structures*, 69(6) : 739–756, 1998. ISSN 00457949. doi : 10.1016/S0045-7949(98)00133-3.
- [60] C. Hemmer, C.V. Popa, A. Sergent, and G. Polidori. Heat and fluid flow in an uneven heated chimney. *International Journal of Thermal Sciences*, 107 :220–229, sep 2016. ISSN 12900729. doi : 10.1016/j.ijthermalsci.2016.04.015. URL <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S1290072916304501>.
- [61] Roland Herzog and Karl Kunisch. Algorithms for PDE-constrained optimization. *GAMM-Mitteilungen*, 33(2) :163–176, 2010. ISSN 1522-2608.
- [62] M.R. Hestenes and Eduard Stiefel. Methods of conjugate gradients for solving linear systems, 1952. ISSN 0091-0635. URL <http://nvlpubs.nist.gov/nistpubs/jres/049/jresv49n6p409{ }A1b.pdf>.
- [63] Michael Hinze, René Pinnau, Michael Ulbrich, and Stefan Ulbrich. *Optimization with PDE constraints*, volume 23. Springer Science & Business Media, 2008. ISBN 1402088396.
- [64] Chang-Hwan Im, Hyun-Kyo Jung, and Yong-Joo Kim. Hybrid genetic algorithm for electromagnetic topology optimization. *IEEE Transactions on Magnetics*, 39(5) : 2163–2169, 2003. ISSN 0018-9464.

- [65] F. P. Incropera. Convection Heat Transfer in Electronic Equipment Cooling. *Journal of Heat Transfer*, 110(4b) :1097, 1988. ISSN 00221481. doi : 10.1115/1.3250613.
- [66] Frank P. Incropera and David P. Dewitt. Introduction To Heat Transfer. *Igarss 2014*, (1) :1–5, 2014. ISSN 13514180. doi : 10.1007/s13398-014-0173-7.2.
- [67] J D Jackson, M A Cotton, and B P Axcell. Studies of mixed convection in vertical tubes. *International journal of heat and fluid flow*, 10(1) :2–15, 1989.
- [68] Yves Jannot. Transferts thermiques. *Ecole des Mines Nancy*, page 161, 2012. ISSN 01407007. doi : 10.1016/j.ijrefrig.2004.08.012.
- [69] Urve Kangro and Roy Nicolaidis. Divergence boundary conditions for vector Helmholtz equations with divergence constraints. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 33(3) :479–492, 1999. ISSN 0764583X. doi : 10.1051/m2an:1999148.
- [70] M Kaviany. Mechanical engineering series Principles of heat transfer in porous media second edition, 1995.
- [71] Massoud Kaviany. Fluid Mechanics. In *Principles of Heat Transfer in Porous Media*, pages 15–113. Springer, 1991.
- [72] K Khadra, P Angot, S Parneix, and J P Caltagirone. Fictitious domain approach for numerical modelling of Navier-Stokes equations. *Int. JOURNAL FOR NUMERICAL METHODS IN FLUIDS*, 34(April 1998) :651–684, 2000. ISSN 0271-2091. doi : 10.1002/1097-0363(20001230)34:8<651::AID-FLD61>3.0.CO;2-D.
- [73] Rakesh Khanal and Chengwang Lei. Solar chimney-A passive strategy for natural ventilation, 2011. ISSN 03787788.
- [74] K D Kihm, J H Kim, and L S Fletcher. Onset of flow reversal and penetration length of natural convective flow between isothermal vertical walls. *TRANSACTIONS-AMERICAN SOCIETY OF MECHANICAL ENGINEERS JOURNAL OF HEAT TRANSFER*, 117 :776, 1995. ISSN 0022-1481.
- [75] Dong-Hun Kim, Jan K Sykulski, and David A Lowther. The implications of the use of composite materials in electromagnetic device topology and shape optimization. *IEEE Transactions on Magnetics*, 45(3) :1154–1157, 2009. ISSN 0018-9464.
- [76] Adriano A. Koga, Edson Comini C Lopes, Helcio F. Villa Nova, Cícero R De Lima, and Emílio Carlos Nelli Silva. Development of heat sink device by using topology optimization. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 64 :759–772, 2013. ISSN 00179310. doi : 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2013.05.007. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2013.05.007>.
- [77] E. a. Kontoleonos, E. M. Papoutsis-Kiachagias, a. S. Zymaris, D. I. Papadimitriou, and K. C. Giannakoglou. Adjoint-based constrained topology optimization for viscous flows, including heat transfer. *Engineering Optimization*, 0273(December) : 1–21, 2012. ISSN 0305-215X. doi : 10.1080/0305215X.2012.717074.
- [78] Sebastian Kreissl and Kurt Maute. Levelset based fluid topology optimization using the extended finite element method. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 46(3) :311–326, 2012. ISSN 1615147X. doi : 10.1007/s00158-012-0782-8.

- [79] Sebastian Kreissl, Georg Pingen, Anton Evgrafov, and Kurt Maute. Topology optimization of flexible micro-fluidic devices. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 42(4) :495–516, 2010. ISSN 1615-147X.
- [80] Sebastian Kreissl, Georg Pingen, and Kurt Maute. Topology optimization for unsteady flow. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 87(13) : 1229–1253, 2011. ISSN 00295981. doi : 10.1002/nme.3151. URL <http://doi.wiley.com/10.1002/nme.3151>.
- [81] A S Krishnan, B Premachandran, C Balaji, and S P Venkateshan. Combined experimental and numerical approaches to multi-mode heat transfer between vertical parallel plates. *Experimental Thermal and Fluid Science*, 29(1) :75–86, 2004. ISSN 0894-1777.
- [82] Matthew Lawry and Kurt Maute. Level set topology optimization of problems with sliding contact interfaces. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 52(6) : 1107–1119, 2015. ISSN 16151488. doi : 10.1007/s00158-015-1301-5.
- [83] B. S. Lazarov and O. Sigmund. Filters in topology optimization based on Helmholtz-type differential equations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 86(6) :765–781, 2011. ISSN 00295981. doi : 10.1002/nme.3072.
- [84] Kyungjun Lee. *Topology Optimization of Convective Cooling System Designs*. PhD thesis, University of Michigan, 2012.
- [85] R. Li, M. Bousetta, E. Chénier, and G. Lauriat. Effect of surface radiation on natural convective flows and onset of flow reversal in asymmetrically heated vertical channels. *International journal of thermal sciences*, pages 9–27, 2013. URL http://ac.els-cdn.com/S1290072912002979/1-s2.0-S1290072912002979-main.pdf?{}_tid=8a08949c-5533-11e4-a420-0000aab0f6b{&}acdnat=1413464237{ }a1a20230e1ac1cf44957235fdc24b3cf.
- [86] Oing Quan Liang. Performance-based optimization : A review. *Advances in Structural Engineering*, 10(6) :739–753, 2007. ISSN 1369-4332. doi : 10.1260/136943307783571418. URL [GotoISI://WOS:000252480600012](http://www.isinet.com/doi/10.1260/136943307783571418).
- [87] J P Liu and W Q Tao. Numerische Ermittlung der natürlichen Konvektion um einen vertikalen Kanal in einer rechteckigen Kammer, 1996. ISSN 0947-7411.
- [88] I F Macdonald, M S El-Sayed, K Mow, and F a L Dullien. Flow through Porous Media—the Ergun Equation Revisited. *Industrial Engineering Chemistry Fundamentals*, 18 (3) :199–208, 1979. ISSN 0196-4313. doi : 10.1021/i160071a001. URL <http://pubs.acs.org/doi/abs/10.1021/i160071a001>.
- [89] Oronzio Manca and Vincenzo Naso. Experimental analysis of natural convection and thermal radiation in vertical channels. *ASME HTD*, 145(13-21) :132, 1990.
- [90] Oronzio Manca, Marilena Musto, and Vincenzo Naso. Experimental analysis of asymmetrical isoflux channel-chimney systems. *International journal of thermal sciences*, 42(9) :837–846, 2003. ISSN 1290-0729.

- [91] G. Marck and Y. Privat. On some shape and topology optimization problems in conductive and convective heat transfers. In *OPTI 2014 - An international conference on engineering and applied sciences optimization*, number June, 2014. ISBN 9789609999465.
- [92] G. Marck, M. Nemer, and J.-L. Harion. Topology optimization of heat and mass transfer problems : laminar flow. *Numerical Heat Transfer, Part B : ...*, 63(6) :508–539, 2013. ISSN 1040-7790. doi : 10.1080/10407790.2013.772001. URL <http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/10407790.2013.772001>.
- [93] Gilles Marck. *Optimisation Topologique des Transferts de Chaleur et de Masse - Application aux Échangeurs de Chaleur*. PhD thesis, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2012. URL <http://pastel.archives-ouvertes.fr/pastel-00819099>.
- [94] Raymond Constantine Martinelli and Llewellyn Michael Kraus Boelter. *The Analytical Prediction of Superposed Free and Forced Viscous Convection in a Vertical Pipe, by RC Martinelli and LMK Boelter...* University of California Press, 1942.
- [95] Tadayoshi Matsumori, Tsuguo Kondoh, Atsushi Kawamoto, and Tsuyoshi Nomura. Topology optimization for fluid-thermal interaction problems under constant input power. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 47(4) :571–581, 2013. ISSN 1615147X. doi : 10.1007/s00158-013-0887-8.
- [96] Achille Messac, Cyriaque Puemi-Sukam, and Emanuel Melachrinoudis. Aggregate objective functions and pareto frontiers : Required relationships and practical implications. *Optimization and Engineering*, 1(2) :171–188, 2000. ISSN 1389-4420.
- [97] D Naylor, J M Floryan, and J Do Tarasuk. A numerical study of developing free convection between isothermal vertical plates. *Journal of Heat Transfer*, 113(3) : 620–626, 1991. ISSN 0022-1481.
- [98] Donald A. Nield and Adrian Bejan. *Convection in porous media*. Springer, 2013. ISBN 9781461455417. doi : 10.1007/978-1-4614-5541-7.
- [99] Jean-Pierre Nougier and J P Nougier. *Méthodes de calcul numérique*, volume 3. Masson Paris, 1985.
- [100] Tijs Van Oevelen and Martine Baelmans. Application of Topology Optimization in a Conjugate. In *OPT-i 2014-1st International Conference on Engineering and Applied Sciences Optimization*, number 4-6 June, pages 532–577, 2014.
- [101] Fridolin Okkels and Henrik Bruus. Scaling behavior of optimally structured catalytic microfluidic reactors. *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, 75(1), 2007. ISSN 15393755. doi : 10.1103/PhysRevE.75.016301.
- [102] Laurits Højgaard Olesen, Fridolin Okkels, and Henrik Bruus. A high-level programming-language implementation of topology optimization applied to steady-state Navier-Stokes flow. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 65(7) :975–1001, feb 2006. ISSN 0029-5981. doi : 10.1002/nme.1468. URL <http://doi.wiley.com/10.1002/nme.1468>.

- [103] Dan Ospir, Catalin Popa, Cristian Chereches, Guillaume Polidori, and Stéphane Fohanno. Flow visualization of natural convection in a vertical channel with asymmetric heating. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 2012. URL http://ac.els-cdn.com/S0735193312000322/1-s2.0-S0735193312000322-main.pdf?{}_tid=b720e536-a51c-11e4-84bf-00000aab0f01{&}acdnat=1422250527{ }b3e80022a0874c48f9543903303ef862.
- [104] Carsten Othmer. A continuous adjoint formulation for the computation of topological and surface sensitivities of ducted flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 58(8) :861–877, nov 2008. ISSN 02712091. doi : 10.1002/fld.1770. URL <http://doi.wiley.com/10.1002/fld.1770>.
- [105] Carsten Othmer. Adjoint methods for car aerodynamics. *Journal of Mathematics in Industry*, 4(1) :6, 2014. ISSN 2190-5983. doi : 10.1186/2190-5983-4-6. URL <http://www.mathematicsinindustry.com/content/4/1/6>.
- [106] Carsten Othmer, Thomas Kaminski, and Ralf Giering. Computation of Topological Sensitivities in Fluid Dynamics : Cost Function Versatility. *Eccomas Cfd*, pages 1–12, 2006.
- [107] E M Papoutsis-Kiachagias and K C Giannakoglou. Continuous Adjoint Methods for Turbulent Flows, Applied to Shape and Topology Optimization : Industrial Applications. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 23(2) :255–299, 2016. ISSN 18861784. doi : 10.1007/s11831-014-9141-9. URL <http://link.springer.com/10.1007/s11831-014-9141-9>.
- [108] Suhas V Patankar and D Brian Spalding. A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows. *International journal of heat and mass transfer*, 15(10) :1787–1806, 1972. ISSN 0017-9310.
- [109] Noei Petra and Georg Stadler. Model variational inverse problems governed by partial differential equations. Technical report, 2011.
- [110] G. Polidori, S. Fatnassi, R. Ben Maad, S. Fohanno, and F. Beaumont. Early-stage dynamics in the onset of free-convective reversal flow in an open-ended channel asymmetrically heated. *International Journal of Thermal Sciences*, 88 :40–46, 2014. ISSN 12900729. doi : 10.1016/j.ijthermalsci.2014.09.011. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2014.09.011>.
- [111] Xiaoping Qian and Ercan M Dede. Topology optimization of a coupled thermal-fluid system under a tangential thermal gradient constraint. *Structural and Multi-disciplinary Optimization*, 54(3) :531–551, 2016. ISSN 1615-147X.
- [112] D Ramalingom, Pierre-Henri Cocquet, and Alain Bastide. A new interpolation technique to deal with fluid-porous media interfaces for topology optimization of heat transfer. *Submitted*, 2017.
- [113] Delphine Ramalingom, Pierre-Henri Cocquet, and Alain Bastide. Impact of external surroundings on natural convection in a vertical channel asymmetrically heated. In *European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS)*, 2016.

- [114] Delphine Ramalingom, Pierre-henri Cocquet, and Alain Bastide. Numerical study of natural convection in asymmetrically heated channel considering thermal stratification and surface radiation. *Numerical Heat Transfer, Part A : Applications*, 2017.
- [115] G. I. N. Rozvany, M. Zhou, and T. Birker. Generalized shape optimization without homogenization. *Structural Optimization*, 4(3-4) :250–252, 1992. ISSN 0934-4373. doi : 10.1007/BF01742754. URL <http://link.springer.com/10.1007/BF01742754>.
- [116] Enrique Sanchez-Palencia. *Non-Homogeneous Media And Vibration Theory*, volume 127. 1980. ISBN 978-3-540-10000-3. doi : 10.1007/3-540-10000-8. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1980LNP...127.....S>.
- [117] Jibao Shen, Stéphane Lassue, Laurent Zalewski, and Dezhong Huang. Numerical study on thermal behavior of classical or composite Trombe solar walls. *Energy and Buildings*, 39(8) :962–974, 2007. ISSN 03787788. doi : 10.1016/j.enbuild.2006.11.003.
- [118] Ole Sigmund and Kurt Maute. Topology optimization approaches : A comparative review, 2013. ISSN 1615147X.
- [119] E M Sparrow, G M Chrysler, and L F Azevedo. Observed flow reversals and measured-predicted Nusselt numbers for natural convection in a one-sided heated vertical channel. *Journal of Heat Transfer*, 106(2) :325–332, 1984. ISSN 0022-1481.
- [120] M. Stolpe and K. Svanberg. An alternative interpolation scheme for minimum compliance topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2001. ISSN 1615147X. doi : 10.1007/s001580100129.
- [121] Christian Suárez, Patrice Joubert, José L. Molina, and Francisco J. Sánchez. Heat transfer and mass flow correlations for ventilated facades. *Energy and Buildings*, 43(12) :3696–3703, 2011. ISSN 03787788. doi : 10.1016/j.enbuild.2011.10.002.
- [122] K Svanberg. The method of moving asymptotes—a new method for structural optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24(2) :359–373, 1987. ISSN 00295981. doi : 10.1002/nme.1620240207. URL <http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/nme.1620240207/abstract>.
- [123] Krister Svanberg. A class of globally convergent optimization methods based on conservative convex separable approximations. *SIAM Journal on Optimization*, 12(2) :555–573, 2002. ISSN 1052-6234. doi : 10.1137/S1052623499362822.
- [124] Alexandra Tallet. *Contrôle des écoulements par modèles d'ordre réduit, en vue de l'application à la ventilation naturelle des bâtiments*. PhD thesis, Université de La Rochelle, 2013.
- [125] N. P. Van Dijk, K. Maute, M. Langelaar, and F. Van Keulen. Level-set methods for structural topology optimization : A review, 2013. ISSN 1615147X.
- [126] Jose V.C. Vargas and Adrian Bejan. Thermodynamic optimization of finned cross-flow heat exchangers for aircraft environmental control systems. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 22(6) :657–665, 2001. ISSN 0142727X. doi : 10.1016/S0142-727X(01)00129-1.

- [127] Eric Vitale. Analyse et contrôle des écoulements instationnaires décollés, 2005.
- [128] Eddie Wadbro and Martin Berggren. Topology optimization of an acoustic horn. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 196(1) :420–436, 2006. ISSN 0045-7825.
- [129] Michael Yu Wang, Xiaoming Wang, and Dongming Guo. A level set method for structural topology optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192(1-2) :227–246, 2003. ISSN 00457825. doi : 10.1016/S0045-7825(02)00559-5.
- [130] B W Webb and D P Hill. High Rayleigh Number Laminar Natural Convection in an Asymmetrically Heated Vertical Channel. *Journal of Heat Transfer*, 111(3) :649–656, aug 1989. ISSN 0022-1481. URL <http://dx.doi.org/10.1115/1.3250732>.
- [131] Henry G Weller, G Tabor, Hrvoje Jasak, and C Fureby. A tensorial approach to computational continuum mechanics using object-oriented techniques. *Computers in physics*, 12(6) :620–631, 1998. ISSN 0894-1866.
- [132] Frank White. Fluid Mechanics. *McGraw-Hill, New York*, page 862, 2010. ISSN 1364-0321. doi : 10.1111/j.1549-8719.2009.00016.x.Mechanobiology. URL <http://www.amazon.com/Mechanics-Student-McGraw-Hill-Mechanical-Engineering/dp/0077422414>.
- [133] Y. M. Xie and G. P. Steven. A simple evolutionary procedure for structural optimization. *Computers and Structures*, 49(5) :885–896, 1993. ISSN 00457949. doi : 10.1016/0045-7949(93)90035-C.
- [134] Y M Xie and G P Steven. *Evolutionary Structural Optimization*. Springer, 1997. ISBN 978-1-4471-1250-1. doi : 10.1007/978-1-4471-0985-3{_}2. URL http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4471-0985-3{_}2.
- [135] Kentaro Yaji, Takayuki Yamada, Seiji Kubo, Kazuhiro Izui, and Shinji Nishiwaki. A topology optimization method for a coupled thermal-fluid problem using level set boundary expressions. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 81 :878–888, 2015. ISSN 00179310. doi : 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2014.11.005. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2014.11.005>.
- [136] R. Ben Yedder and E. Bilgen. Natural convection and conduction in Trombe wall systems. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 34(4-5) :1237–1248, 1991. ISSN 00179310. doi : 10.1016/0017-9310(91)90032-A.
- [137] Gil H. Yoon. Topological design of heat dissipating structure with forced convective heat transfer. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 24(6) :1225–1233, 2010. ISSN 1738494X. doi : 10.1007/s12206-010-0328-1.
- [138] Gil Ho Yoon. Topological layout design of electro-fluid-thermal-compliant actuator. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 209-212 :28–44, 2012. ISSN 00457825. doi : 10.1016/j.cma.2011.11.005.
- [139] Gil Ho Yoon and Yoon Young Kim. The element connectivity parameterization formulation for the topology design optimization of multiphysics systems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 64(12) :1649–1677, 2005. ISSN 00295981. doi : 10.1002/nme.1422.

- [140] Gil Ho Yoon, Jakob Søndergaard Jensen, and Ole Sigmund. Topology optimization of acoustic–structure interaction problems using a mixed finite element formulation. *International journal for numerical methods in engineering*, 70(9) :1049–1075, 2007. ISSN 1097-0207.
- [141] M. Zhou and G. I N Rozvany. The COC algorithm, Part II : Topological, geometrical and generalized shape optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 89(1-3) :309–336, 1991. ISSN 00457825. doi : 10.1016/0045-7825(91)90046-9.
- [142] Mingdong Zhou, Joe Alexandersen, Ole Sigmund, Claus B W Pedersen, and Claus B W Pedersen ClausPEDERSEN. Industrial application of topology optimization for combined conductive and convective heat transfer problems. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 54 :1045–1060, 2016. ISSN 1615-147X. doi : 10.1007/s00158-016-1433-2.
- [143] Shiwei Zhou, Wei Li, and Qing Li. Level-set based topology optimization for electromagnetic dipole antenna design. *Journal of Computational Physics*, 229(19) : 6915–6930, 2010. ISSN 0021-9991.
- [144] Amine Zoubir. *Etude des transferts thermo-convectifs dans un canal semi-ouvert : Application aux façades type double-peau*. PhD thesis, L’institut national des sciences appliquées de Lyon, 2014. URL <http://www.theses.fr/2014ISAL0003/document>.

Annexe A

Le problème adjoint par la méthode des multiplicateurs de Lagrange

Le problème d'optimisation avec contraintes peut s'énoncer de la manière suivante : Déterminer les variables d'état (\mathbf{u}, p, θ) qui minimisent la fonctionnelle objectif $\mathcal{J}(\mathbf{u}, p, \theta, \alpha)$ sous contraintes des équations d'état $\mathcal{R}(\mathbf{u}, p, \theta, \alpha) = 0$.

Cette méthode consiste à introduire les multiplicateurs de Lagrange $(\mathbf{u}^*, p^*, \theta^*)$ pour imposer chacune des contraintes du problème. On introduit alors la nouvelle fonctionnelle dite fonctionnelle de Lagrange :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{u}, p, \theta, \alpha, \mathbf{u}^*, p^*, \theta^*) &= \mathcal{J}(\mathbf{u}, p, \theta, \alpha) - \int_{\Omega} p^* \nabla \cdot \mathbf{u} \, d\Omega \\ &\quad - \int_{\Omega} \mathbf{u}^* \cdot [(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p - Pr Ra_b^{-1/2} \nabla^2 \mathbf{u} - Pr \theta \vec{e}_y + \alpha \mathbf{u}] \, d\Omega \\ &\quad - \int_{\Omega} \theta^* [\nabla(\mathbf{u}\theta) - \nabla \cdot (Ra_b^{-1/2} k(\alpha) \nabla \theta)] \, d\Omega \end{aligned} \tag{A.1}$$

où $(\mathbf{u}^*, p^*, \theta^*)$ vérifient les conditions de Dirichlet homogènes :

$$\begin{aligned} \text{Sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_2 &: \mathbf{u}^* = 0 \\ \text{Sur } \Gamma_{in} &: \theta^* = 0 \\ \text{Sur } \Gamma_{out} &: p^* = 0 \end{aligned}$$

Le problème d'optimisation initial avec contraintes est remplacé par le problème d'optimisation sans contrainte :

Déterminer les variables d'état $(\mathbf{u}, p, \theta, \alpha)$, la variable de contrainte α et les variables adjointes $(\mathbf{u}^*, p^*, \theta^*)$ telles que la fonctionnelle de Lagrange \mathcal{L} présente un extremum.

La fonctionnelle de Lagrange admet un extremum lorsque \mathcal{L} est rendue «stationnaire» par rapport à chacun de ses arguments. En effet, le calcul des variations impose alors $\partial \mathcal{L} = 0$, soit :

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p} \delta p + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} \delta \theta + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha} \delta \alpha + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{u}^*} \delta \mathbf{u}^* + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p^*} \delta p^* + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta^*} \delta \theta^* = 0 \tag{A.2}$$

En supposant par la suite, les variables $(\mathbf{u}, p, \theta, \alpha, \mathbf{u}^*, p^*, \theta^*)$ indépendantes¹, les dé-

1. Ce qui est faux en toute rigueur puisqu'elles sont liées entre elles par l'équation d'état $\mathcal{R}(\mathbf{u}, p, \theta) = 0$

rivées de Fréchet² de \mathcal{L} doivent être identiquement nulles dans toutes les directions $\mathbf{u}, p, \theta, \alpha, \mathbf{u}^*, p^*, \theta^*$ admissibles, c'est-à-dire, quelles que soient les variations $\delta\mathbf{u}, \delta p, \delta\theta, \delta\alpha, \delta\mathbf{u}^*, \delta p^*, \delta\theta^*$, qui doivent aussi vérifier les conditions de Dirichlet homogènes définies précédemment.

Annulation de la dérivée de Fréchet de \mathcal{L} suivant \mathbf{u}

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u} &= \int_{\Omega} \frac{\partial \mathcal{J}_{\Omega}}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{\partial \mathcal{J}_{\Gamma}}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u} d\Gamma \\ &\quad - \int_{\Omega} p^* \nabla \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega - \int_{\Omega} \theta^* \nabla (\delta \mathbf{u} \theta) d\Omega \\ &\quad - \int_{\Omega} \mathbf{u}^* \cdot [(\mathbf{u} \cdot \nabla) \delta \mathbf{u} + (\delta \mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - Pr Ra_b^{-1/2} \nabla^2 \delta \mathbf{u} + \alpha \delta \mathbf{u}] d\Omega \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

On peut réécrire l'équation précédente ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u} &= \underbrace{\int_{\Omega} \frac{\partial \mathcal{J}_{\Omega}}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u} d\Omega}_{T_1} + \underbrace{\int_{\Gamma} \frac{\partial \mathcal{J}_{\Gamma}}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u} d\Gamma}_{T_2} \\ &\quad - \underbrace{\int_{\Omega} p^* \nabla \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega}_{T_1} - \underbrace{\int_{\Omega} \theta^* \nabla (\delta \mathbf{u} \theta) d\Omega}_{T_2} \\ &\quad - \underbrace{\int_{\Omega} \mathbf{u}^* \cdot [(\mathbf{u} \cdot \nabla) \delta \mathbf{u} + (\delta \mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}] d\Omega}_{T_3} + \underbrace{\int_{\Omega} \mathbf{u}^* \cdot (Pr Ra_b^{-1/2} \nabla \cdot (\nabla \delta \mathbf{u})) d\Omega}_{T_4} \\ &\quad - \underbrace{\int_{\Omega} \mathbf{u}^* \cdot (\alpha \delta \mathbf{u}) d\Omega}_{T_5} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

On simplifie ensuite chaque terme T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 en factorisant par $\delta \mathbf{u}$. On utilise les intégrations par parties comme suit :

$$\int_{\Omega} f \nabla \cdot \mathbf{g} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{g} \cdot \nabla f d\Omega - \int_{\Gamma} f \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} d\Gamma$$

La factorisation du terme T_1 donne :

$$\int_{\Omega} p^* \nabla \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega = \int_{\Gamma} p^* \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\Gamma - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \nabla p^* d\Omega$$

La factorisation du terme T_2 donne :

$$\int_{\Omega} \theta^* \nabla (\delta \mathbf{u} \theta) d\Omega = \int_{\Gamma} \theta^* \theta \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\Gamma - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \theta \nabla \theta^* d\Omega$$

Le terme T_3 peut se réécrire ainsi :

$$\int_{\Omega} \mathbf{u}^* \cdot [(\mathbf{u} \cdot \nabla) \delta \mathbf{u} + (\delta \mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}] d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{u}^* \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla) \delta \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{u}^* \cdot (\delta \mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} d\Omega$$

2. La dérivée de Fréchet de \mathcal{L} au point x_0 dans la direction δx est donnée par :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}(x_0 + \epsilon \delta x) - \mathcal{L}(x_0)}{\epsilon}$$

D'une part, on peut noter le premier terme de l'équation ci-dessus ainsi :

$$\int_{\Omega} \mathbf{u}^* \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla) \delta \mathbf{u} \, d\Omega = \int_{\Omega} u_j^* u_i \partial_i \delta u_j \, d\Omega \quad (\text{A.5})$$

On utilise la relation ci-dessous où f et g sont deux fonctions scalaires :

$$\int_{\Omega} \partial_i (f g) \, d\Omega = \int_{\Omega} \partial_i f g \, d\Omega + \int_{\Omega} f \partial_i g \, d\Omega$$

et on obtient :

$$\int_{\Omega} u_j^* u_i \partial_i \delta u_j \, d\Omega = \int_{\Omega} \partial_i (u_j^* u_i \delta u_j) \, d\Omega - \int_{\Omega} \delta u_j \partial_i (u_j^* u_i) \, d\Omega \quad (\text{A.6})$$

De même pour la seconde partie de l'expression T_3 :

$$\int_{\Omega} \delta u_j \partial_i (u_j^* u_i) \, d\Omega = \int_{\Omega} \delta u_j \partial_i u_j^* u_i \, d\Omega + \int_{\Omega} \delta u_j u_j^* \partial_i u_i \, d\Omega$$

De plus, pour tout scalaire f , on a :

$$\int_{\Omega} \partial_i f \, d\Omega = \int_{\Gamma} n_i f \, d\Gamma$$

Ce qui nous donne dans A.6 :

$$\int_{\Omega} \partial_i (u_j^* u_i \delta u_j) \, d\Omega = \int_{\Gamma} n_i u_j^* u_i \delta u_j \, d\Gamma \quad (\text{A.7})$$

En remplaçant dans A.5, on obtient :

$$\int_{\Omega} u_j^* u_i \partial_i \delta u_j \, d\Omega = \int_{\Gamma} u_i n_i u_j^* \delta u_j \, d\Gamma - \int_{\Omega} \delta u_j u_i \partial_i u_j^* \, d\Omega - \int_{\Omega} \delta u_j u_j^* \partial_i u_i \, d\Omega$$

On peut réécrire A.5 ainsi :

$$\int_{\Omega} \mathbf{u}^* \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla) \delta \mathbf{u} \, d\Omega = \int_{\Gamma} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{u}^* \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Gamma - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}^* \, d\Omega - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^* (\nabla \cdot \mathbf{u}) \, d\Omega \quad (\text{A.8})$$

Comme $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, on simplifie ainsi :

$$\int_{\Omega} \mathbf{u}^* \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla) \delta \mathbf{u} \, d\Omega = \int_{\Gamma} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{u}^* \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Gamma - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{u} \, d\Omega \quad (\text{A.9})$$

D'autre part, on a :

$$\int_{\Omega} \mathbf{u}^* \cdot (\delta \mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{u}^* \cdot (\nabla \mathbf{u}) \delta \mathbf{u} \, d\Omega \quad (\text{A.10})$$

Pour un tenseur du second ordre A et deux vecteurs U et V , on a la relation suivante :

$$\mathbf{V} \cdot A \mathbf{U} = A^T \mathbf{V} \cdot \mathbf{U}$$

On peut ainsi écrire :

$$\int_{\Omega} \mathbf{u}^* \cdot (\delta \mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \, d\Omega = \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{u})^T \mathbf{u}^* \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega \quad (\text{A.11})$$

C'est ainsi qu'on obtient la factorisation du terme T_3 :

$$\int_{\Omega} \mathbf{u}^* \cdot [(\mathbf{u} \cdot \nabla) \delta \mathbf{u} + (\delta \mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}] d\Omega = \int_{\Gamma} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{u}^* \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{u})^T \mathbf{u}^* \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega \quad (\text{A.12})$$

Concernant le terme T_4 , on s'appuie sur la relation suivante :

$$\nabla \cdot (A\mathbf{U}) = \mathbf{U} \cdot (\nabla \cdot (A^T)) + A : \nabla \mathbf{U} \quad (\text{A.13})$$

où, A est un tenseur du second ordre, \mathbf{U} est un vecteur et $A : \nabla \mathbf{U}$ représente le produit doublement contracté.

Ce qui permet d'écrire :

$$\mathbf{u}^* \cdot (\nabla \cdot (\nabla \delta \mathbf{u})) = \nabla \cdot ((\nabla \delta \mathbf{u})^T \mathbf{u}^*) - (\nabla \delta \mathbf{u})^T : \nabla \mathbf{u}^* \quad (\text{A.14})$$

De plus, pour deux tenseurs du second ordre A et B , on a :

$$A : B^T = A^T : B$$

On obtient :

$$\mathbf{u}^* \cdot (\nabla \cdot (\nabla \delta \mathbf{u})) = \nabla \cdot ((\nabla \delta \mathbf{u})^T \mathbf{u}^*) - (\nabla \mathbf{u}^*)^T : \nabla \delta \mathbf{u} \quad (\text{A.15})$$

D'après la relation A.13, on a :

$$(\nabla \mathbf{u}^*)^T : \nabla \delta \mathbf{u} = \nabla \cdot ((\nabla \mathbf{u}^*)^T \delta \mathbf{u}) - \delta \mathbf{u} \cdot (\nabla \cdot (\nabla \mathbf{u}^*)) \quad (\text{A.16})$$

L'équation A.15 devient :

$$\mathbf{u}^* \cdot (\nabla \cdot (\nabla \delta \mathbf{u})) = \nabla \cdot ((\nabla \delta \mathbf{u})^T \mathbf{u}^*) - \nabla \cdot ((\nabla \mathbf{u}^*)^T \delta \mathbf{u}) + \delta \mathbf{u} \cdot (\nabla \cdot (\nabla \mathbf{u}^*)) \quad (\text{A.17})$$

On considère aussi la relation suivante pour tout vecteur \mathbf{F} :

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F} d\Omega = \int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad (\text{A.18})$$

Ce qui nous donne :

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot ((\nabla \delta \mathbf{u})^T \mathbf{u}^*) d\Omega = \int_{\Gamma} ((\nabla \delta \mathbf{u})^T \mathbf{u}^*) \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad (\text{A.19})$$

et

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot ((\nabla \mathbf{u}^*)^T \delta \mathbf{u}) d\Omega = \int_{\Gamma} (\nabla \mathbf{u}^*)^T \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \int_{\Gamma} \delta \mathbf{u} \cdot (\nabla \mathbf{u}^*) \mathbf{n} d\Gamma \quad (\text{A.20})$$

On simplifie alors le terme T_4 ainsi :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{u}^* \cdot (Pr Ra_b^{-1/2} \nabla \cdot (\nabla \delta \mathbf{u})) d\Omega &= Pr Ra_b^{-1/2} \int_{\Omega} \mathbf{u}^* \cdot (\nabla \cdot (\nabla \delta \mathbf{u})) d\Omega \\ &= Pr Ra_b^{-1/2} \int_{\Gamma} ((\nabla \delta \mathbf{u})^T \mathbf{u}^*) \cdot \mathbf{n} d\Gamma \\ &\quad - Pr Ra_b^{-1/2} \int_{\Gamma} \delta \mathbf{u} \cdot (\nabla \mathbf{u}^*) \mathbf{n} d\Gamma \\ &\quad + Pr Ra_b^{-1/2} \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot (\nabla \cdot (\nabla \mathbf{u}^*)) d\Omega \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

La factorisation du terme T_5 donne :

$$\int_{\Omega} \mathbf{u}^* \cdot (\alpha \delta \mathbf{u}) d\Omega = \int_{\Omega} \alpha \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^* d\Omega$$

La dérivée de Fréchet selon \mathbf{u} s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u} &= \int_{\Omega} \frac{\partial \mathcal{J}_{\Omega}}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{\partial \mathcal{J}_{\Gamma}}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u} d\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma} \delta \mathbf{u} \cdot (-p^* \mathbf{n} - \theta^* \theta \mathbf{n} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{u}^* - Pr Ra_b^{-1/2} (\nabla \mathbf{u}^*) \mathbf{n}) d\Gamma + Pr Ra_b^{-1/2} \int_{\Gamma} (\mathbf{u}^* \cdot (\nabla \delta \mathbf{u})) \mathbf{n} d\Gamma \\ &+ \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot (\nabla p^* - \theta \nabla \theta^* + \nabla \mathbf{u}^* \mathbf{u} - (\nabla \mathbf{u})^T \mathbf{u}^* + Pr Ra_b^{-1/2} (\nabla \cdot (\nabla \mathbf{u}^*)) - \alpha \mathbf{u}^*) d\Omega \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Cette égalité A.22 doit être vérifiée quelle soit la valeur de $\delta \mathbf{u}$. Il faut donc qu'elle le soit en particulier si $\delta \mathbf{u} \neq 0$ dans Ω et si $\delta \mathbf{u} = 0$ et $(\nabla \delta \mathbf{u}) \mathbf{n} = 0$ sur Γ , alors on a :

$$\nabla p^* - \theta \nabla \theta^* + \nabla \mathbf{u}^* \mathbf{u} - (\nabla \mathbf{u})^T \mathbf{u}^* + Pr Ra_b^{-1/2} (\nabla \cdot (\nabla \mathbf{u}^*)) - \alpha \mathbf{u}^* = \frac{\partial \mathcal{J}_{\Omega}}{\partial \mathbf{u}} \quad \text{dans } \Omega \quad (\text{A.23})$$

Annulation de la dérivée de Fréchet de \mathcal{L} suivant p

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p} \delta p &= \int_{\Omega} \frac{\partial \mathcal{J}_{\Omega}}{\partial p} \delta p d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{\partial \mathcal{J}_{\Gamma}}{\partial p} \delta p d\Gamma \\ &- \int_{\Omega} \mathbf{u}^* \cdot \nabla \delta p d\Omega \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

L'intégration par parties donne :

$$\int_{\Omega} \mathbf{u}^* \cdot \nabla \delta p d\Omega = \int_{\Gamma} \delta p \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n} d\Gamma - \int_{\Omega} \delta p \nabla \cdot \mathbf{u}^* d\Omega \quad (\text{A.25})$$

L'annulation de la dérivée de Fréchet A.24 se réécrit alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p} \delta p &= \int_{\Omega} \frac{\partial \mathcal{J}_{\Omega}}{\partial p} \delta p d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{\partial \mathcal{J}_{\Gamma}}{\partial p} \delta p d\Gamma \\ &- \int_{\Gamma} \delta p \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n} d\Gamma + \int_{\Omega} \delta p \nabla \cdot \mathbf{u}^* d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

Comme précédemment, l'équation A.26 doit être vérifiée pour toute valeur de δp . En particulier, si $\delta p \neq 0$ dans Ω et $\delta p = 0$ sur Γ , on a :

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^* = \frac{\partial \mathcal{J}_{\Omega}}{\partial p} \quad \text{dans } \Omega \quad (\text{A.27})$$

Annulation de la dérivée de Fréchet de \mathcal{L} suivant θ

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} \delta \theta &= \int_{\Omega} \frac{\partial \mathcal{J}_{\Omega}}{\partial \theta} \delta \theta d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{\partial \mathcal{J}_{\Gamma}}{\partial \theta} \delta \theta d\Gamma \\ &- \int_{\Omega} Pr \delta \theta \mathbf{u}^* \cdot \vec{e}_y d\Omega + \int_{\Omega} \theta^* \mathbf{u} \cdot \nabla \delta \theta d\Omega \\ &- \int_{\Omega} \theta^* \nabla \cdot (Ra_b^{-1/2} k(\alpha) \nabla \theta) d\Omega \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

On effectue les intégrations par parties comme suit :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \theta^* \mathbf{u} \cdot \nabla \delta \theta d\Omega &= + \int_{\Gamma} \delta \theta \theta^* \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\Gamma - \int_{\Omega} \delta \theta \nabla \cdot (\theta^* \mathbf{u}) d\Omega \\ &= \int_{\Gamma} \delta \theta \theta^* \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\Gamma - \int_{\Omega} \delta \theta (\mathbf{u} \cdot \nabla \theta^* + \theta^* \nabla \cdot \mathbf{u}) d\Omega \\ &= \int_{\Gamma} \delta \theta \theta^* \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\Gamma - \int_{\Omega} \delta \theta \mathbf{u} \cdot \nabla \theta^* d\Omega \quad \text{car } \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

De même :

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \theta^* \nabla \cdot (Ra_b^{-1/2} k(\alpha) \nabla \theta) d\Omega &= \int_{\Gamma} Ra_b^{-1/2} \theta^* k(\alpha) \nabla \delta \theta \cdot \mathbf{n} d\Gamma - \int_{\Omega} Ra_b^{-1/2} k(\alpha) \nabla \delta \theta \cdot \nabla \theta^* d\Omega \\
 &= \int_{\Gamma} Ra_b^{-1/2} \theta^* k(\alpha) \nabla \delta \theta \cdot \mathbf{n} d\Gamma - \int_{\Gamma} \delta \theta Ra_b^{-1/2} k(\alpha) \nabla \theta^* \cdot \mathbf{n} d\Gamma \\
 &\quad + \int_{\Omega} \delta \theta \nabla \cdot (Ra_b^{-1/2} k(\alpha) \nabla \theta^*) d\Omega
 \end{aligned} \tag{A.30}$$

L'annulation de la dérivée de Fréchet suivant θ donne :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} \delta \theta &= \int_{\Omega} \frac{\partial \mathcal{J}_{\Omega}}{\partial \theta} \delta \theta d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{\partial \mathcal{J}_{\Gamma}}{\partial \theta} \delta \theta d\Gamma \\
 &\quad - \int_{\Gamma} \delta \theta (\theta^* \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} + Ra_b^{-1/2} k(\alpha) \nabla \theta^* \cdot \mathbf{n}) d\Gamma + \int_{\Gamma} Ra_b^{-1/2} \theta^* k(\alpha) \nabla \delta \theta \cdot \mathbf{n} d\Gamma \tag{A.31} \\
 &\quad - \int_{\Omega} \delta \theta (Pr \mathbf{u}^* \cdot \vec{e}_y + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta^* + \nabla \cdot (Ra_b^{-1/2} k(\alpha) \nabla \theta^*)) d\Omega = 0
 \end{aligned}$$

Cette équation A.31 doit être vérifiée quelque soit la valeur de $\delta \theta$, donc en particulier, si $\delta \theta \neq 0$ dans Ω et $\delta \theta = 0$ et $\nabla \delta \theta \cdot \mathbf{n} = 0$ sur Γ , alors on a :

$$Pr \mathbf{u}^* \cdot \vec{e}_y + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta^* + \nabla \cdot (Ra_b^{-1/2} k(\alpha) \nabla \theta^*) = \frac{\partial \mathcal{J}_{\Omega}}{\partial \theta} \text{ dans } \Omega \tag{A.32}$$

Système d'équations adjointes

C'est ainsi qu'on déduit les équations d'état du système adjoint :

$$\left\{ \begin{array}{ll}
 \frac{\partial \mathcal{J}_{\Omega}}{\partial \mathbf{u}} = \nabla p^* - \theta \nabla \theta^* + \nabla \mathbf{u}^* \mathbf{u} - (\nabla \mathbf{u})^T \mathbf{u}^* + Pr Ra_b^{-1/2} (\nabla \cdot (\nabla \mathbf{u}^*)) - \alpha \mathbf{u}^* & \text{dans } \Omega \\
 \frac{\partial \mathcal{J}_{\Omega}}{\partial p} = \nabla \cdot \mathbf{u}^* & \text{dans } \Omega \\
 \frac{\partial \mathcal{J}_{\Omega}}{\partial \theta} = Pr \mathbf{u}^* \cdot \vec{e}_y + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta^* + \nabla \cdot (Ra_b^{-1/2} k(\alpha) \nabla \theta^*) & \text{dans } \Omega
 \end{array} \right. \tag{A.33}$$