



HAL
open science

Discrétisation et commande frontière de systèmes vibro-acoustiques, une approche hamiltonienne à ports

Vincent Trenchant

► **To cite this version:**

Vincent Trenchant. Discrétisation et commande frontière de systèmes vibro-acoustiques, une approche hamiltonienne à ports. Acoustique [physics.class-ph]. Université Bourgogne Franche-Comté, 2017. Français. NNT : 2017UBFCD066 . tel-01891374

HAL Id: tel-01891374

<https://theses.hal.science/tel-01891374>

Submitted on 9 Oct 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

SPIM

Thèse de Doctorat

UBFC

école doctorale **sciences pour l'ingénieur et microtechniques**

UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ



Discrétisation et commande de systèmes
vibro-acoustiques,
une approche hamiltonienne à ports

■ VINCENT TRENCHANT

SPIM

Thèse de Doctorat



école doctorale **sciences pour l'ingénieur et microtechniques**
UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ

THÈSE présentée par

VINCENT TRENCHANT

pour obtenir le

Grade de Docteur de
l'Université de Franche-Comté

Spécialité : **Automatique**

Discrétisation et commande de systèmes
vibro-acoustiques,
une approche hamiltonienne à ports

Soutenue publiquement le 27 Novembre 2017 devant le jury composé de :

LAURENT LEFÈVRE	Président	Professeur, Laboratoire de Conception et d'Intégration des Systèmes, Grenoble INP
BERNHARD MASCHKE	Rapporteur	Professeur, Université Claude Bernard Lyon 1
THOMAS HÉLIE	Rapporteur	Directeur de Recherche, Laboratoire des Sciences et Technologies de la Musique et du Son
DENIS MATIGNON	Examineur	Professeur, Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace
PAUL KOTYCZKA	Examineur	Maître de conférences, Technical University of Munich
MORVAN OUISSE	Examineur	Professeur, ENSMM
YANN LE GORREC	Directeur de thèse	Professeur, ENSMM
HÉCTOR RAMÍREZ	Encadrant de thèse	Maître de conférences, Université de Franche-Comté

À ma mère,

REMERCIEMENTS

Salut à toi qui t'apprête à parcourir ce manuscrit. J'aimerais que tu saches que le livre que tu tiens (ou le .pdf que tu consultes) ne te serait pas parvenu ou aurait été d'une qualité nettement moindre sans le concours d'un grand nombre de personnes. En guise d'ultime exercice pour mes travaux de thèse, je vais tenter ici de les remercier en en dressant une liste fatalement non exhaustive.

En tout premier lieu je tiens à remercier très chaleureusement mes deux encadrants de thèse, Yann Le Gorrec et Héctor Ramírez. Yann a été mon professeur depuis ma première année en école d'ingénieur et m'a transmis l'envie de faire de l'automatique. J'ai été le premier doctorant d'Héctor qui a su m'enseigner, toujours avec beaucoup d'amicalité, sa vision du monde de la recherche. Yann et Héctor m'ont guidé à travers ce doctorat en m'apportant une aide précieuse du début à la fin tout en faisant preuve de qualités humaines d'une grande valeur.

Ma gratitude va également aux membres du jury, Laurent Lefèvre, Thomas Hélie, Bernhard Maschke, Denis Matignon, Paul Kotyczka et Morvan Ouisse pour leurs remarques avisées et leurs commentaires sur mes travaux. Je tiens également à remercier chacun d'entre eux pour les discussions que nous avons pu avoir et les collaborations que nous avons pu mener tout au long de mon doctorat. Elles ont grandement contribué à la progression de mes travaux, ainsi que de prolifiques échanges avec Weiwei Hu, Arnaud Hubert, Gaël Matten, Lassi Paunonen, Flavio Ribeiro, Mei Wang et Hans Zwart que je tiens à remercier de même.

Si au cours de mes trois années de doctorat j'ai pu travailler dans des conditions optimales et dans un cadre exceptionnel, c'est aussi grâce à tout le personnel du département AS2M de FEMTO-ST et à l'équipe du LABEX-Action. Sans pouvoir citer les noms de tous ceux à qui va toute ma sympathie pour cela, je tiens à mentionner Houari Bettahar, Margot Billot, Adrian Ciubotariu, Marcelo Gaudenzi de Faria, Valérian Guelpa, Didace Habineza, Andrey Kudryavtsev, Thomas Schlinquer et Yongxin Wu qui mériteraient à eux seuls une page complète de remerciements.

Enfin, je tiens à remercier très tendrement mes amis et ma famille pour leurs indéfectibles soutiens et précieux encouragements, avec une pensée toute particulière pour mes grands-parents et ma mère qui n'ont pas pu voir la fin de cette aventure.

Bonne lecture.

SOMMAIRE

1	Contexte général	7
1.1	Généralités sur l'acoustique	8
1.2	Contrôle acoustique	11
1.2.1	Méthodes passives	11
1.2.2	Méthodes actives	13
1.3	Problème considéré	17
1.4	Conclusion	20
2	Modélisation hamiltonienne à ports	21
2.1	Systèmes hamiltoniens à ports en dimension finie	22
2.1.1	Exemple introductif aux systèmes hamiltoniens à ports	22
2.1.2	Interprétation géométrique	24
2.1.3	Quelques propriétés des SHP	26
2.1.3.1	Variation d'énergie	27
2.1.3.2	Interconnexion	27
2.1.4	Application au modèle d'un haut-parleur	28
2.2	Dimension infinie	31
2.2.1	Structure de Stokes-Dirac et SHP à paramètres distribués	31
2.2.2	Application à l'équation d'onde	33
2.2.2.1	Cas 2D	34
2.2.3	Prise en compte de la surface active	38
2.2.4	Extension aux coordonnées cylindriques sur un domaine circulaire	39
2.3	Conclusion	43

3	Discrétisation	45
3.1	Préambule	47
3.2	Motivations	47
3.3	Discrétisation 2D	53
3.3.1	Maillage rectilinéaire	54
3.3.2	Maillage triangulaire régulier	59
3.4	Simulations	70
3.4.1	Intégration temporelle	71
3.4.2	Cas 1D - Système en boucle ouverte	71
3.4.3	Cas 1D - Contrôle frontière	73
3.4.4	Cas 2D	74
3.4.5	Isotropie des schémas	78
3.5	Extension en coordonnées polaires	79
3.5.1	Cas d'un disque complet	85
3.5.2	Résultats numériques	86
3.6	Conclusion	87
4	Commande par interconnexion	89
4.1	Préambule	91
4.2	Energy shaping	92
4.3	Commande par interconnexion pour modeler la structure	95
4.3.1	Systèmes et architecture de commande	96
4.3.2	Synthèse de la commande	97
4.3.2.1	Stabilité du système en boucle fermée	98
4.3.3	Exemple d'application : le pendule	99
4.3.3.1	Robustesse	101
4.3.3.2	Résultats numériques	102
4.4	Dimension infinie	103
4.4.1	Exemple : "parabolisation" de l'équation d'onde canonique 1D	104

4.4.2	Commande par interconnexion de systèmes régis par deux lois de conservation en dimension infinie	107
4.4.2.1	Systèmes et architectures de commande	107
4.4.2.2	Calcul des invariants structuraux	108
4.4.2.3	Synthèse de la commande	110
4.4.2.4	Éléments de stabilité	111
4.4.3	Application au système vibro-acoustique	112
4.4.3.1	Robustesse	113
4.4.4	Simulations	114
4.4.4.1	Réponse à une condition initiale	115
4.4.4.2	Réponse à une entrée frontière	116
4.4.4.3	Robustesse	117
4.4.5	Extension 2D pour le système acoustique commandé à la frontière	119
4.5	Conclusion	121

LISTE DES FIGURES

1	Exemple de peau active développée à l'institut FEMTO-ST constituée d'un réseau de haut-parleurs et microphones . . .	3
1.1	Exemple d'utilisation de structure en nid d'abeille en aéronautique	12
1.2	Principe de base du contrôle actif par interférences [72]	13
1.3	Contrôle dans un conduit	15
1.4	Système vibro-acoustique actionné à la frontière [19]	17
1.5	Tube acoustique avec surface active	18
1.6	Paramétrisation des axes du tube selon le modèle, 1,2 ou 3D .	19
2.1	Système masse-ressort-amortisseur	22
2.2	Structure avec dissipation	26
2.3	Exemple d'interconnexion conservative de puissance	28
2.4	Schéma d'un haut parleur électrodynamique	29
2.5	Schématisation des conditions frontières du système	38
2.6	Schéma du domaine spatial considéré (portion d'anneau) . . .	40
3.1	Grilles en quinconce	49
3.2	Maillages en quinconce de x_d^1 et x_d^2	50
3.3	Valeurs propres de J_d comparées aux pulsations propres en dimension infinie (les valeurs propres multiples ne sont pas représentées)	53
3.4	Agencement des variables discrétisées	55
3.5	Maillage 2D	55
3.6	Exemples de maillages (pointillés) de domaines physiques (traits pleins) conduisant à une approximation en marches d'escaliers	59

3.7	Maillage triangulaire en quinconce pour $x^{\alpha..e}$	61
3.8	Exemple de maillages triangulaires réguliers en quinconce . .	64
3.9	Maillage triangulaire régulier en quinconce numéroté pour la discrétisation des variables d'état/effort	65
3.10	Propagation 1D d'une condition initiale gaussienne, compa- raison avec la méthode des différences finies, pas d'intégration $\tau \approx 44,4 \mu\text{s}$, $h \approx 2,0 \text{ cm}$	72
3.11	Propagation 1D d'une condition initiale gaussienne dans le cas d'un contrôle frontière, $\tau = 5 \mu\text{s}$, $h = 2 \text{ cm}$	74
3.12	Propagation d'une onde plane en boucle ouverte	75
3.13	Propagation d'une onde plane en boucle fermée	76
3.14	Diagramme de Bode en gain pour discrétisation rectilinéaire .	77
3.15	Diagramme de Bode en gain pour discrétisation triangulaire .	77
3.16	Isolines (lignes continues) de la propagation d'une condition initiale par maillage rectilinéaire, $\tau = 1 \text{ ms}$, $t = 10\tau$, $h_1 =$ $h_2 = 0,4 \text{ m}$	78
3.17	Isolines (lignes continues) de la propagation d'une condition initiale par maillage triangulaire, $\tau = 1 \text{ ms}$, $t = 10\tau$, $h = 0,5 \text{ m}$	79
3.18	Maillage d'une portion d'anneau en coordonnées polaires . .	81
3.19	Propagation d'une condition initiale gaussienne	86
3.20	Propagation d'une condition frontière sinusoïdale	86
4.1	Schéma de la structure d'interconnexion	96
4.2	Pendule simple	99
4.3	États du système en boucle fermée	102
4.4	États du système en boucle fermée avec erreur sur les para- mètres du correcteur	103
4.5	États du système en boucle fermée dans le cadre d'une com- mande modifiée pour le suivi de consigne	103
4.6	Réponse du système en boucle fermée à une condition initiale	116
4.7	Réponse du système en boucle fermée à une entrée frontière	117
4.8	Réponse du système en boucle fermée à une entrée frontière dans le cas d'une erreur de 50% sur μ_0	118

4.9 Réponse du système en boucle fermée pour $\mathcal{K} = K_1 \partial_\xi$ à une
entrée frontière dans le cas d'une erreur d'initialisation sur x_c 119

4.10 Réponse de $\Gamma(\xi_1, \frac{1}{2}L_2, t)$ au cours du temps en boucle fermée
à une entrée sinusoïdale le long de $\xi_1 = 0$ 120

LISTE DES TABLEAUX

2.1	Natures des variables pour différents domaines physiques . . .	25
2.2	Paramètres de Thiele et Small	29
3.1	Valeurs numériques pour la simulation sur un domaine circu- laire	87
4.1	Valeurs numériques pour la simulation en boucle fermée . . .	114

NOTATIONS

On introduit ici quelques notations importantes pour la lecture de cette thèse. Un tableau plus complet, récapitulant l'ensemble des notations définies au cours de chapitres, est mis à disposition du lecteur en annexe (Page 127-129).

$I_{i,j}$ et $0_{i,j}$ sont respectivement les matrices identité et nulle de dimension $i \times j$. Si aucune ambiguïté n'est possible, on les appellera simplement I ou 0 .

<i>Symbole</i>	<i>Description</i>
\mathbb{R} (resp. \mathbb{R}^+)	ensemble des réels (resp. des réels positifs)
\mathbb{R}^n	ensemble des vecteurs réels de dimension n
$\mathbb{R}^{n \times m}$	ensemble des matrices réelles de dimensions $m \times n$
$\Omega \subset \mathbb{R}^n$	domaine spatial de dimension $n \in \{1, 2, 3\}$
$\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^{n-1}$	frontière de Ω
$L^2(\mathcal{S}, \mathbb{R}^n)$	espace des fonctions de carré intégrable d'un espace \mathcal{S} dans \mathbb{R}^n
$H^1(\mathcal{S}, \mathbb{R}^n)$	espace de Sobolev des fonctions différentiables d'un espace \mathcal{S} dans \mathbb{R}^n
$t \in \mathbb{R}^+$	variable de temps
$\xi_n \in \Omega$	variable d'espace sur Ω en coordonnées cartésiennes
$\frac{\partial}{\partial x_1}$ ou ∂_{x_1}	dérivée partielle par rapport à une variable x_1
$\frac{\partial x}{\partial t}$ ou \dot{x}	dérivée partielle d'une variable $x(t)$ par rapport au temps
A^T	matrice transposée de la matrice A
\mathcal{S}^*	espace dual de \mathcal{S}
$grad(\cdot)$	opérateur gradient
$div(\cdot)$	opérateur divergent
$\Delta := div(grad(\cdot))$	opérateur laplacien
$\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2, \mathcal{S}}$	produit canonique au sens de la norme L_2 sur un espace \mathcal{S} tel que $\langle e, f \rangle_{L^2, \mathcal{S}} = \int_{\mathcal{S}} e^T f d\mathcal{S}$
Soient f et g deux fonctions à valeurs dans \mathbb{R} ,	
$f(x) = O(g(x))$	g domine f en 0, c'est à dire qu'il existe des constantes $d > 0$ et C telles que $\forall x, x < d \Rightarrow f(x) \leq C g(x) $
$f(x) = o(g(x))$	f est négligeable devant g , c'est à dire que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Cette thèse a été réalisée au sein du département Automatique et Systèmes Micro-Mécatroniques (AS2M) de l'institut FEMTO-ST, dans le contexte du Labex Action (contrat ANR-11-LABX-0001-01), Laboratoire d'excellence dédié aux systèmes intelligents intégrés dans la matière, dans le cadre du programme *Smart Skins*. Le but de ce programme est de proposer de nouveaux procédés de commande employant des réseaux de cellules d'actionneurs/-capteurs distribués sur une surface qui constitue une peau active (*smart skin*) dont un exemple développé à l'institut FEMTO-ST est donné Figure 1. L'un de ses principaux objectifs est de réaliser un contrôle de perturbations environnementales telles que des vibrations de structures ou des ondes acoustiques, tout en prêtant un intérêt particulier à l'aspect énergétique du problème de contrôle.



FIGURE 1: Exemple de peau active développée à l'institut FEMTO-ST constituée d'un réseau de haut-parleurs et microphones

L'utilisation de dispositifs actifs dans le but de réduire les effets des bruits est une thématique apparue dans les années 30 d'un point de vue théorique et dans les années 50 d'un point de vue pratique. Aujourd'hui, cette thématique présente un intérêt tout particulier compte tenu de la conjonction entre

la réduction du coût des systèmes électroniques de commande (microcontrôleurs, capteurs...) et de la prise de conscience de l'exposition au bruit issu du transport aérien, ferroviaire et routier comme un enjeu sociétal relevant de la santé publique.

L'étude de systèmes vibro-acoustiques est intrinsèquement multiphysique puisqu'elle comprend un aspect électrique et mécanique pour les dispositifs d'actionnement et un aspect purement acoustique issu de la mécanique des fluides. Par conséquent, nous choisissons dans cette thèse d'employer une approche multiphysique structurée basée sur la représentation des échanges entre différents domaines énergétiques, comme les énergies cinétiques et potentielles, au sein d'un système et entre différents systèmes à travers l'introduction de ports d'entrées/sorties. Il s'agit de l'approche des systèmes hamiltoniens à ports [90, 20].

Le premier chapitre présente le contexte physique dans lequel s'inscrivent les travaux de cette thèse. Des notions d'acoustiques y sont introduites afin de pouvoir, dans un second temps, donner un bref inventaire des différentes techniques de contrôle acoustique, actif ou passif. Dans une dernière partie, on y présente le système vibro-acoustique considéré dans cette thèse en précisant les différentes hypothèses qui sont faites pour sa modélisation et sa commande. Ce dernier est constitué d'un tube dans lequel se propage une onde acoustique. Une des frontières de ce tube comporte une surface active composée d'un réseau de haut-parleurs et microphones permettant d'agir sur l'onde acoustique dans le tube.

Le second chapitre se focalise sur la modélisation du système vibro-acoustique dans le cadre du formalisme hamiltonien à ports. On y définit les systèmes hamiltoniens à ports en dimension finie ainsi que la structure géométrique sur lesquels ils reposent : la structure de Dirac. La modélisation d'un haut-parleur composant notre système vibro-acoustique est donnée comme application de ce formalisme et des propriétés d'interconnexion et de conservation d'énergie qui en découlent. Dans une seconde partie, on présente l'extension du formalisme hamiltonien à ports en dimension infinie, que nous appliquons à l'équation d'onde interconnectée à un réseau de haut-parleurs afin de proposer un modèle complet du tube interconnecté à la surface active.

Dans le troisième chapitre, nous proposons une méthode de discrétisation spatiale basée sur l'utilisation de différences finies sur plusieurs grilles en quinconce qui préserve la structure hamiltonienne à ports de l'équation d'onde. Cette méthode permet entre autre d'interconnecter facilement le système discrétisé avec d'autres sous-systèmes, dans le cadre de l'interconnexion du système avec un ensemble d'actionneurs par exemple. Son principal avantage sur d'autres méthodes préservatives de structure réside dans sa

simplicité de mise en œuvre qui découle de l'utilisation de différences finies. Cette méthode est tout d'abord proposée dans le cas 1D, puis est étendue en 2D pour des maillages rectilinéaire et triangulaire réguliers. Des résultats numériques sont donnés pour les cas 1D et 2D, avec ou sans contrôle frontière. Dans le cas 2D, l'isotropie des schémas proposés est comparée. Nous réalisons enfin une extension de la méthode proposée dans le cas d'un système défini sur un domaine circulaire en coordonnées polaire.

Le quatrième chapitre concerne la commande du système vibro-acoustique. On y propose en particulier une méthode de synthèse de loi de commande distribuée pour les systèmes régis par deux lois de conservation en 1D en dimension finie et en dimension infinie. Une première partie introduit la notion d'invariants structuraux d'un système sur un exemple de commande visant à imposer la fonction d'énergie du système en boucle fermée. Une méthode exploitant les invariants structuraux dans le but d'imposer la structure même du système en boucle fermée est ensuite proposée. Une seconde partie étend la méthode proposée en dimension infinie dans le cadre d'un actionnement distribué dans le domaine. Cette méthode est appliquée à la formulation 1D du système vibro-acoustique. Plusieurs lois de commande issues de cette méthode sont proposées et illustrées par des résultats de simulation. La stabilité, la robustesse et les conditions d'application de ces lois sur un système 2D sont également étudiées.

CONTEXTE GÉNÉRAL

Le but de cette première partie est d'expliciter le contexte dans lequel s'inscrit cette thèse. On y propose une brève introduction à l'acoustique, puis aux contrôles acoustiques passif et actif. Enfin, on y présente un système vibro-acoustique particulier qui fera l'objet des travaux de cette thèse.

Sommaire

1.1	Généralités sur l'acoustique	8
1.2	Contrôle acoustique	11
	1.2.1 Méthodes passives	11
	1.2.2 Méthodes actives	13
1.3	Problème considéré	17
1.4	Conclusion	20

1.1/ GÉNÉRALITÉS SUR L'ACOUSTIQUE

Pour l'étude de la propagation du son comme pour de nombreux phénomènes physiques distribués dans l'espace, il convient de considérer le comportement de petites quantités de matière appelées particules [43]. Celles-ci sont considérées ponctuelles et on peut leur associer plusieurs grandeurs physiques comme un volume ou une masse. L'ordre de grandeur de ces particules élémentaires dépend fortement du système étudié. Par exemple, dans l'étude de flux routiers, une particule correspondra à un véhicule. Pour l'étude de phénomènes acoustiques, nous appellerons particule une petite quantité de matière de masse constante $M(\xi_n) \in \mathbb{R}^+$ où ξ_n représente les coordonnées spatiales de la particule, de volume $V(\xi_n, t) \in \mathbb{R}^+$, de vitesse particulaire $\mathcal{V}(\xi_n, t) \in \mathbb{R}^n$ et de pression $\mathcal{P}(\xi_n, t) \in \mathbb{R}^+$. On définit la masse volumique d'une particule par $\mathcal{M}(\xi_n, t) = \frac{M(\xi_n)}{V(\xi_n, t)}$.

Lorsqu'une particule oscille autour d'une vitesse constante dans le domaine élastique d'un matériau (fluide ou solide), on parle de vibration du matériau. La propagation de cette vibration définit une onde mécanique. On définit alors $\{v_0(\xi_n), p_0(\xi_n), \mu_0(\xi_n)\} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ les grandeurs constantes autour desquelles les variables $\{\mathcal{V}(\xi_n, t), \mathcal{P}(\xi_n, t), \mathcal{M}(\xi_n, t)\}$ subissent des variations $\{v(\xi_n, t), p(\xi_n, t), \mu(\xi_n, t)\} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ de telle sorte que :

$$\begin{cases} \mathcal{V}(\xi_n, t) = v_0(\xi_n) + v(\xi_n, t) \\ \mathcal{P}(\xi_n, t) = p_0(\xi_n) + p(\xi_n, t) \\ \mathcal{M}(\xi_n, t) = \mu_0(\xi_n) + \mu(\xi_n, t). \end{cases} \quad (1.1)$$

Lorsqu'une onde se propage dans une direction normale à la direction de $v(\xi_n, t)$, on parle d'onde transversale. C'est le cas par exemple d'une corde vibrante. Lorsque la direction de propagation est la même que celle de $v(\xi_n, t)$, on parle alors d'onde longitudinale. Une onde mécanique longitudinale est également appelée onde acoustique ou son.

Dans la suite, nous faisons un certain nombre d'hypothèses qui permettent de déduire un modèle linéaire d'une onde :

- on néglige la création d'entropie, et donc la dissipation de l'énergie interne, dans le domaine de propagation de l'onde ;
- on considère que v , p et μ , ainsi que leurs dérivées temporelles, sont infiniment petits de même ordre ;
- on considère le milieu de propagation homogène et sans écoulement, c'est à dire M , μ_0 et p_0 ne dépendent pas de l'espace et v_0 est nul.

Le comportement des variables précédemment définies est alors régi par l'équation d'Euler (1.2) et la conservation de quantité de matière (1.3), c'est

à dire par les équations aux dérivées partielles (EDP) suivantes [43] :

$$\mathcal{M} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + (\mathcal{V}.grad)(\mathcal{V}) \right) = -grad(\mathcal{P}) \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial t} + div(\mathcal{M}\mathcal{V}) = 0. \quad (1.3)$$

Remarque 1 : La notation $(\mathcal{V}.grad)(\mathcal{V})$ signifie que l'opérateur scalaire $(\mathcal{V}^\top.grad)$ est appliqué à chacune des composantes de \mathcal{V} , c'est à dire sur un exemple 3D en coordonnées cartésiennes $\xi_n = (\xi_1 \ \xi_2 \ \xi_3)^\top$ où $\mathcal{V} = (\mathcal{V}_1 \ \mathcal{V}_2 \ \mathcal{V}_3)^\top$:

$$(\mathcal{V}.grad)(\mathcal{V}) = \left(\mathcal{V}_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \mathcal{V}_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} + \mathcal{V}_3 \frac{\partial}{\partial \xi_3} \right) = \begin{pmatrix} v_1 \frac{\partial v_1}{\partial \xi_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial \xi_2} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial \xi_3} \\ v_1 \frac{\partial v_2}{\partial \xi_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial \xi_2} + v_3 \frac{\partial v_2}{\partial \xi_3} \\ v_1 \frac{\partial v_3}{\partial \xi_1} + v_2 \frac{\partial v_3}{\partial \xi_2} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial \xi_3} \end{pmatrix}.$$

Sachant que s'il existe deux réels a et b infiniment petits de même ordre, alors $ab \ll a$ et $ab \ll b$; on linéarise (1.2) (1.3) en utilisant (1.1) pour obtenir :

$$\mu_0 \frac{\partial v(\xi_n, t)}{\partial t} = -grad(p(\xi_n, t)) \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial \mu(\xi_n, t)}{\partial t} + \mu_0 div(v(\xi_n, t)) = 0. \quad (1.5)$$

L'hypothèse d'un processus isentropique permet de définir un facteur de compressibilité adiabatique constant. Il est caractéristique du matériau considéré et est défini tel que

$$\chi_s = -\frac{1}{V(\xi_n, t)} \frac{\partial V(\xi_n, t)}{\partial \mathcal{P}}$$

[2] Sous l'hypothèse d'un milieu homogène, χ_s ne dépend pas de l'espace et devient

$$\chi_s = \frac{1}{\mathcal{M}(\xi_n, t)} \frac{\partial \mathcal{M}(\xi_n, t)}{\partial \mathcal{P}} = \frac{1}{\mu_0(\xi_n) + \mu(\xi_n, t)} \frac{\partial (\mu_0(\xi_n) + \mu(\xi_n, t))}{\partial (p(\xi_n) + p(\xi_n, t))} \quad (1.6)$$

qui est linéarisé pour obtenir :

$$\chi_s = \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial \mu(\xi_n, t)}{\partial p}. \quad (1.7)$$

En injectant (1.7) dans (1.5), on obtient :

$$\frac{\partial \mu(\xi_n, t)}{\partial p} \frac{\partial p(\xi_n, t)}{\partial t} = -\mu_0 div(v(\xi_n, t)) \quad (1.8)$$

$$\chi_s \frac{\partial p(\xi_n, t)}{\partial t} = -\operatorname{div}(v(\xi_n, t)). \quad (1.9)$$

Les équations (1.4) et (1.9) sont deux EDP qui traduisent des lois de conservations, la loi d'Euler pouvant être considérée comme une équation de conservation de quantité de mouvement. Lorsque μ_0 et χ_s ne dépendent pas de ξ_n et en définissant l'opérateur laplacien $\Delta \bullet := \operatorname{div}(\operatorname{grad}(\bullet))$, (1.4) et (1.9) peuvent être associées pour donner l'équation de d'Alembert ou équation d'onde en v ou en p :

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v(\xi_n, t)}{\partial t^2} &= \Delta v(\xi_n, t) \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p(\xi_n, t)}{\partial t^2} &= \Delta p(\xi_n, t). \end{aligned} \quad (1.10)$$

La constante $c := \sqrt{\frac{1}{\chi_s \mu_0}}$ est la célérité de propagation de l'onde. Pour décrire complètement le comportement acoustique d'un milieu dans un domaine Ω , il est indispensable de considérer des conditions à la frontière \mathcal{B} . Celles-ci s'expriment par des valeurs de $v(\xi_n \in \mathcal{B}, t)$ ou $p(\xi_n \in \mathcal{B}, t)$ et traduisent des interactions du système avec son environnement. L'étude des interactions acoustiques entre solides et fluides a pour nom vibro-acoustique.

Les systèmes régis par une équation d'onde telle que (1.10) étant linéaires, ils relèvent du principe de superposition. En acoustique, la proposition suivante découle de ce principe :

Proposition 1 : Les variations de pressions induites par la propagation de deux ondes dans un même domaine spatial correspondent à la somme des variations de pressions induites par chacune de ces ondes.

Lorsque ces deux ondes sont sinusoïdales de même fréquence, on parle alors d'interférence. L'interférence peut-être destructive lorsque la somme des deux ondes résulte en une onde d'amplitude plus petite ou constructive dans le cas inverse. D'une manière générale, l'interférence de deux ondes n'est pas uniformément constructive ou destructive dans l'espace.

La densité d'énergie acoustique $\varepsilon(\xi_n, t)$ correspond à la somme de la densité d'énergie cinétique

$$\varepsilon_c(\xi_n, t) = \frac{1}{2} \mu_0 v(\xi_n, t)^\top v(\xi_n, t)$$

et de la densité d'énergie potentielle

$$\varepsilon_p(\xi_n, t) = \frac{1}{2} \chi_s p(\xi_n, t)^2.$$

1.2. CONTRÔLE ACOUSTIQUE

En découle l'expression des énergies cinétique

$$E_c(t) = \int_{\Omega} \varepsilon_c d\xi_n$$

et potentielle

$$E_p(t) = \int_{\Omega} \varepsilon_p d\xi_n.$$

On définit alors l'énergie totale du système, aussi appelée énergie mécanique ou énergie acoustique :

$$E_t(t) = E_c(t) + E_p(t). \quad (1.11)$$

Comme nous avons fait l'hypothèse d'un système non dissipatif, $E_t(t)$ est constant lorsqu'il n'y a pas d'échanges énergétiques à la frontière du domaine.

1.2/ CONTRÔLE ACOUSTIQUE

Un son indésirable est communément appelé un bruit. Limiter le bruit auquel est soumis un individu est un enjeu à fort impact social. Le contrôle du bruit est également crucial lorsqu'il s'agit d'isoler une structure, par exemple un bâtiment ou une aile d'avion, d'une exposition à des fréquences particulières pouvant entraîner sa dégradation. Le contrôle acoustique peut être de trois sortes [18] : soit un contrôle à la source où l'actionnement est positionné au plus près de l'origine du bruit, soit un contrôle du transfert où on opère entre la source et l'observateur, soit un contrôle près de l'observateur où on cherche à réduire le bruit près du récepteur. Dans chaque cas, les techniques de réduction de bruit peuvent être passives ou actives ; ou encore semi-passives, c'est à dire une combinaison des deux catégories précédentes.

1.2.1/ MÉTHODES PASSIVES

Les méthodes passives exploitent des mécanismes dissipatifs qui reposent soit sur l'utilisation de matériaux absorbants, soit sur la dissipation par effet de résonateur, c'est à dire le piégeage de l'énergie associée à une gamme de fréquences d'une onde par un dispositif vibratoire. Les méthodes passives qui utilisent des matériaux insonorisants et atténuants [6], [100], [75] présentent des performances qui conviennent principalement à l'atténuation des hautes et moyennes fréquences. L'utilisation d'absorbants sélectifs, isolateurs de vibrations [98] ou silencieux [64], permet une atténuation sélective de fréquences basses en agissant comme un filtre coupe-bande sur la propagation des ondes acoustiques. Ces techniques exploitent le principe du

résonateur de Helmholtz [96] qui isole dans une cavité les vibrations dont la fréquence dépend des dimensions de la cavité. Dans le cas d'un fluide dont l'écoulement ne doit pas être perturbé par les dispositifs d'atténuation du bruit, l'utilisation de cavités d'absorption normales à l'écoulement comme les résonateurs en nids d'abeilles [36] illustrés Figure 1.1 est une solution pour une bande de fréquences limitée.

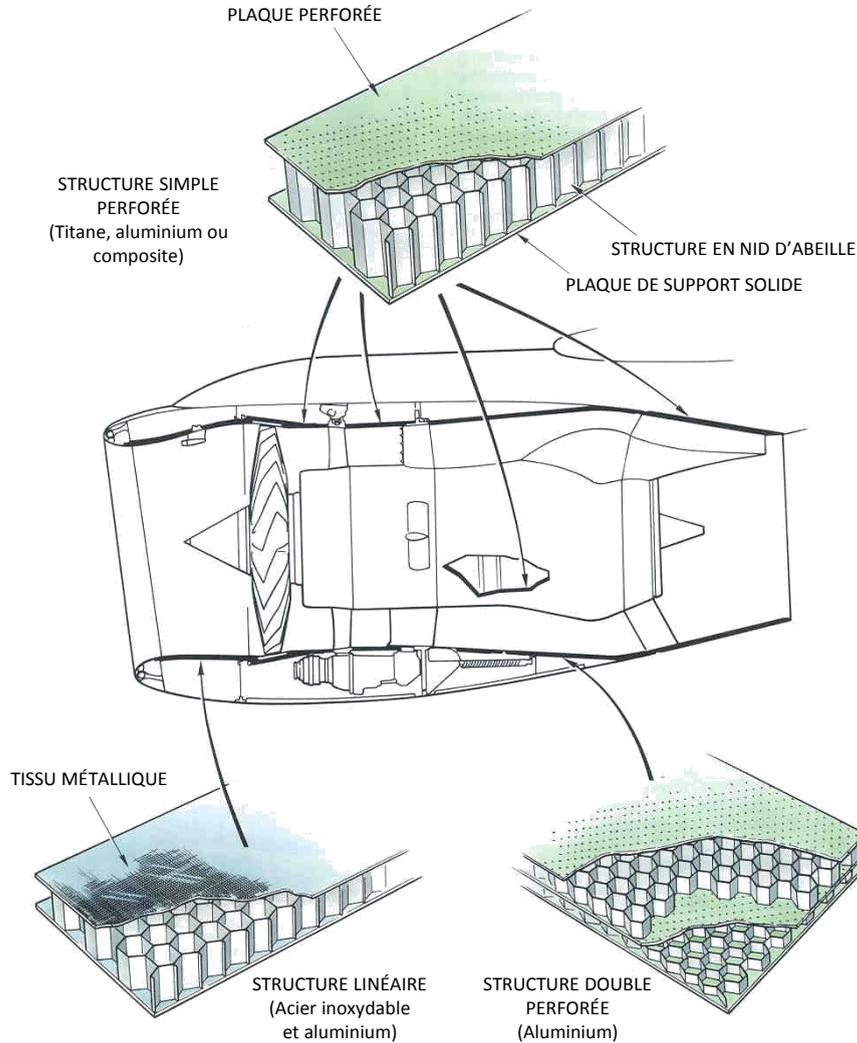


FIGURE 1.1: Exemple d'utilisation de structure en nid d'abeille en aéronautique

Ces méthodes conviennent donc à une atténuation hautes fréquences pour

l'utilisation de matériaux absorbants ou sur une plage fréquentielle très réduite pour la dissipation par effet résonateur. Pour une solution basses fréquences, large bande et peu encombrante, on emploie alors des méthodes de contrôle actives, ou semi-passives.

1.2.2/ MÉTHODES ACTIVES

Les auteurs de [23] définissent le contrôle actif comme étant l'ensemble des techniques en basses fréquences visant à supprimer le bruit acoustique par traitement du signal. Elles exploitent le principe d'interférences destructives entre un son généré par une source dite "source primaire" et des "sources secondaires" dont la sortie acoustique peut être contrôlée. Ces sources secondaires, que nous appellerons également par la suite actionneurs, peuvent être des haut-parleurs ou tout autre composant pouvant transmettre une vibration mécanique au milieu où se propage l'onde sonore. Limité en fréquence par l'électronique employée pour la mesure et la commande et par les actionneurs, le contrôle actif trouve son utilité pour des fréquences allant de 50 à 1000 Hz [27]. Ceci le rend complémentaire de techniques de passives qui atténuent efficacement les hautes fréquences.

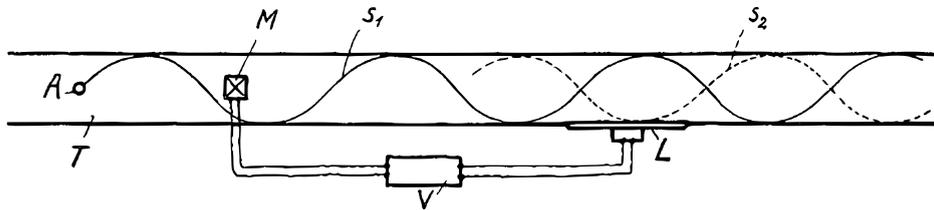


FIGURE 1.2: Principe de base du contrôle actif par interférences [72]

L'idée d'exploiter les interférences destructives d'ondes sonores afin d'atténuer un bruit est apparue dans la littérature en 1933 avec le brevet [72]. La Figure 1.2 extraite de [72] montre une onde S_1 issue d'une source A , représentée par une sinusoïde, qui est mesurée par un micro M au cours de sa propagation dans une conduite. Le traitement de cette mesure par le système V permet de générer via la source secondaire L une onde S_2 injectée dans la conduite en opposition de phase avec S_1 . S_2 est donc un "anti-bruit" qui crée une interférence destructive avec S_1 , la somme de ces deux ondes résultant d'après le principe de superposition en une onde de moindre amplitude, nulle dans le cas idéal. En dehors du cas de la propagation d'une

onde dans une conduite unidimensionnelle, ce même brevet propose également l'application 3D de ce principe pour une atténuation locale proche de la source secondaire, mais qui résulte en une interférence constructive, et donc une augmentation de l'amplitude de l'onde primaire, dans d'autres parties de l'espace.

Le contrôle acoustique actif a été par la suite largement étudié à partir des années 50, où il trouve ses premières applications suite aux travaux de Olson et May [65] et Simhouser et Hawley [78]. Ceux-ci aboutissent à la création dans les années 80 par Roure et Carme [12] du casque anti-bruit actif, qui permet une bonne atténuation entre 50 et 500 Hz. Conçu dans un premier temps à l'usage des pilotes, le casque anti-bruit est aujourd'hui l'application du contrôle actif la plus répandue et accessible au grand public. Comme le but d'un casque anti-bruit est d'isoler un point précis de l'espace de perturbations sonores, il est dans ce cas possible d'atténuer efficacement un bruit sans rencontrer de difficultés liées à des interférences constructives induites dans d'autres points de l'espace. Un autre domaine d'application correspond à un cas où les interférences constructives sont écartées par une approximation 1D du problème : le traitement du bruit dans des conduits d'aération [7] [16]. De nos jours, on trouve un nombre croissant d'applications de contrôle actif du son dans le domaine de l'automobile [22] où des systèmes de réduction de bruit d'habitacle commencent à apparaître dans des modèles haut de gamme avec des performances de l'ordre de 10 dB d'atténuation pour des fréquences en dessous de 100 Hz [39, 1].

En aéronautique, l'utilisation de systèmes de contrôle actif devient particulièrement avantageuse par rapport aux méthodes passives, pour faire face à des contraintes d'embarquabilité. De récents travaux conduisent à la mise en place de contrôle actif pour l'atténuation de bruit dans des cabines d'avions ou d'hélicoptères [21, 11, 44]. Le bruit engendré par les turboréacteurs est sujet à de nombreux travaux [51, 3] dont les applications expérimentales sont encore peu nombreuses ou encore confidentielles. On pourra néanmoins citer un brevet de la NASA [83] qui réalise un contrôle actif du bruit par injection contrôlée de gaz.

D'un point de vue méthodologique, deux grandes familles de méthodes actives se distinguent selon les mesures exploitées par les stratégies de commande des actionneurs. Dans le cas d'un contrôle dans une conduite 1D, on parlera dans le cadre du contrôle actif de *feedback* lorsque la mesure est en aval ou au même endroit que l'actionneur, cette mesure sera appelée "signal de contrôle". Lorsque la mesure se situe en amont de l'actionneur, on parle alors de "signal de référence" et de contrôle *feedforward*, voir Figure 1.3. En pratique, un microphone de contrôle est également employé dans le cas du

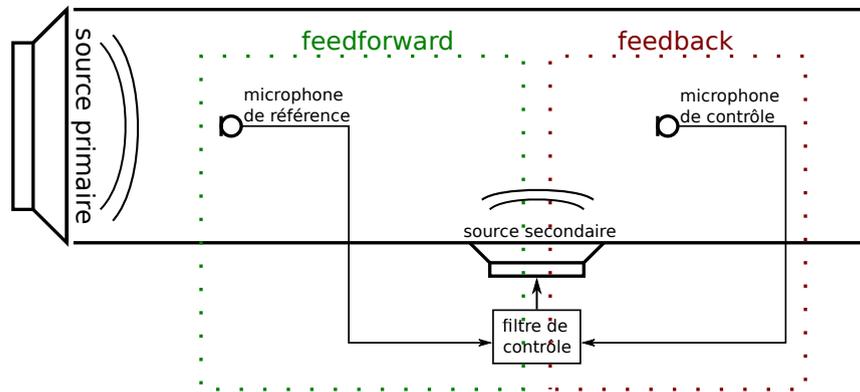


FIGURE 1.3: Contrôle dans un conduit

contrôle *feedforward* afin d'ajuster les paramètres de la stratégie de commande [18]. Ces deux méthodes ont chacune leurs avantages et inconvénients. Comme les systèmes de commande par *feedforward* nécessitent l'emploi d'un capteur supplémentaire afin d'obtenir un signal de référence, ils sont moins compacts et présentent un coût plus important que les systèmes de commande par *feedback*. Ces derniers sont en revanche moins robustes.

Les systèmes qui génèrent la commande des actionneurs à partir des mesures sont appelés dans le domaine de l'acoustique filtres de contrôle, numériques ou analogiques. Ces derniers ne seront pas traités par la suite car très rarement employés de nos jours. Les filtres numériques peuvent se présenter sous forme de circuits intégrés dédiés, de microcontrôleurs ou d'ordinateurs via interface logicielle. On utilise principalement en acoustique des algorithmes adaptatifs, dont les paramètres sont mis à jour automatiquement de manière à minimiser l'erreur mesurée par le microphone de contrôle et à s'adapter aux variations dans le temps des systèmes [60]. Parmi les plus employés on retiendra l'algorithme de la méthode des moindres carrés (*Least Mean Square*, LMS) et sa version modifiée incluant un filtrage du signal de référence (*Filtered-Reference Least Mean Square*, FxLMS) [71] [4].

Certains travaux de contrôle actif s'éloignent de la définition de [23] en le sens qu'ils ne traitent plus l'atténuation du bruit par création d'ondes destructives. Ils considèrent plus particulièrement l'interface entre les actionneurs et le milieu de propagation de l'onde pour élaborer des stratégies de commande influant sur l'absorption ou la réflexion des ondes sur ces actionneurs. Les actionneurs et capteurs sont colocalisés, ce qui permet une plus grande compacité des systèmes de contrôle. Par exemple, l'adaptation d'impédance active [28] permet de maximiser l'absorption d'une onde par les actionneurs et des travaux tels que [15] modifient la direction de pro-

pagation des ondes après réflexion sur un réseau d'actionneurs. Comme ces méthodes ne s'attachent pas à générer des ondes destructives en régime permanent mais à gérer une vitesse de vibration des actionneurs fonction des pressions mesurées par différents capteurs et de leurs dérivées, la prise en compte de la dynamique des actionneurs prend alors une place importante dans l'élaboration de la commande. Ces méthodes permettent de considérer de larges bandes de fréquences même si elles restent peu performantes pour les hautes fréquences en raison de limitations technologiques telles que la fréquence d'acquisition ou le temps de calcul des lois de commande. Coupler ces méthodes aux procédés d'atténuation passifs permet alors de couvrir une très large bande de fréquences. L'utilisation d'un grand nombre d'actionneurs/capteurs colocalisés distribués à la frontière permet l'utilisation dans la stratégie de commande d'une approximation de la dérivée spatiale de la pression, ce qui permet la mise en place de stratégies de commande distribuées spatialement [14].

Lorsqu'une technique de contrôle actif, par interférences destructives ou par contrôle des interactions fluide-actionneurs, est couplée à une méthode passive, on parle de méthode hybride ou semi-passive [37, 29]. Les actionneurs utilisés ont alors deux modes de fonctionnement, un premier en basses fréquences qui exploite les stratégies de commande du contrôle actif et un second en hautes fréquences qui met à profit les propriétés absorbantes des actionneurs sans commande ou de structures passives mises en place par ailleurs.

Dans le cas du contrôle actif par interférences de basses fréquences, lorsque l'actionneur est placé suffisamment proche de la source primaire, il est possible d'obtenir une atténuation globale du bruit [23]. Cette atténuation globale s'explique par l'absorption d'une partie de l'énergie acoustique par la source secondaire. On peut alors considérer que l'on se trouve dans le cas d'un contrôle semi-passif. Dans le cas d'atténuation de fréquences plus élevées, le même système permettra uniquement un contrôle local par interférences et engendra donc des interférences constructives dans certaines parties de l'espace. L'énergie acoustique résultant dans le domaine étudié sera alors plus grande que sans contrôle. Lorsqu'une atténuation globale est recherchée, il est donc intéressant d'utiliser une approche énergétique pour traiter les problèmes de contrôle actif [70]. De plus, comme le cœur de la vibro-acoustique est l'interaction entre fluide et solide, typiquement entre air et membranes de haut-parleurs, il est idéal d'aborder ce sujet par une approche permettant une formalisation des échanges énergétiques aux interconnexions entre le milieu de propagation d'une onde acoustique et les éléments de sa frontière. Les approches hamiltoniennes à ports sont particulièrement adaptées car elles reposent sur la représentation des échanges énergétiques entre les différents domaines énergétiques, comme les énergies

1.3. PROBLÈME CONSIDÉRÉ

cinétiques et potentielles, au sein d'un système et entre différents systèmes.

1.3/ PROBLÈME CONSIDÉRÉ

Dans cette thèse nous considérons un système composé d'un tube acoustique muni d'une source primaire en entrée qui injecte une onde considérée comme une perturbation à atténuer au cours de sa propagation le long du tube. L'actionnement est réalisé à la frontière par un réseau d'actionneurs-capteurs colocalisés appelé "peau active" ou "surface active".

Bien que très simple, ce système a pour objectif la validation du concept d'actionnement distribué qui pourra être mis en œuvre sur des structures complexes. Si les perspectives d'application de ces travaux de surface active dans un tube peuvent être multiples (secteurs routiers, conduites d'aération), l'objectif est une application dans le domaine de l'aéronautique, pour une atténuation active du bruit émis par une turbine.

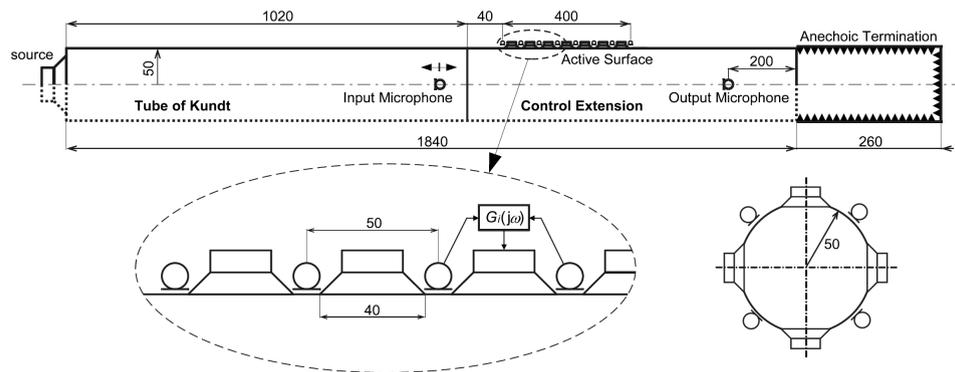


FIGURE 1.4: Système vibro-acoustique actionné à la frontière [19]

Les premiers travaux sur un tel système ont été réalisés par Thorp *et al.* [84] à partir d'anneaux piézoélectriques distribués le long d'un tube de section circulaire permettant une atténuation coupe-bande efficace autour de 2800 Hz. Les travaux de Collet, David *et al.* [13] introduisent la notion de surface active dans un tube acoustique. Les actionneurs alors employés sont des patches piézoélectriques et la stratégie de commande vise à renvoyer l'onde primaire vers sa source. Dans [19], dont est extraite la Figure 1.4, les patches piézoélectriques sont remplacés par un réseau de haut-parleurs. Ces travaux ont conduit récemment à la considération d'une surface active plane [15] employée pour l'atténuation de la propagation d'une onde dans un tube

de section carrée. Une version plus récente de ce système, Figure 1.5, est considérée dans la suite de cette thèse. La stratégie de commande employée dans [15] est issue des travaux de Montseny, Matignon *et al.* [62, 61, 58]. Elle vise à empêcher la propagation d'une onde acoustique dans le tube en repoussant l'onde en amont lorsqu'elle se réfléchit sur la surface active.



FIGURE 1.5: Tube acoustique avec surface active

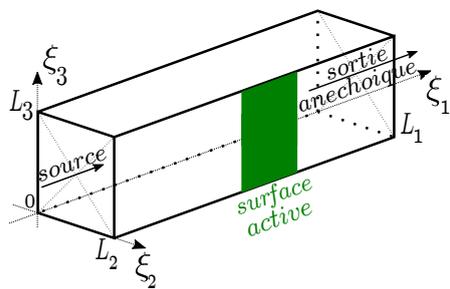
Les hypothèses suivantes seront faites pour la modélisation :

- Un grand nombre d'actionneurs sont employés, ce qui permet de considérer un actionnement distribué, à savoir un unique actionneur dont les paramètres dépendent des variables d'espace ;
- La sortie du tube est une sortie anéchoïque, c'est à dire une sortie parfaitement absorbante. Expérimentalement, cette condition est approximée par l'emploi d'une couche de matériau poreux suffisamment épaisse pour une atténuation jusque dans les basses fréquences ;
- La perturbation en entrée du tube, l'onde primaire, est une onde plane. C'est à dire que ses fronts d'onde sont des plans normaux à l'axe principal du tube ;
- La surface active est uniformément actionnée selon ξ_3 et se situe sur une face du tube, sur une portion définie selon l'axe principal de propagation.

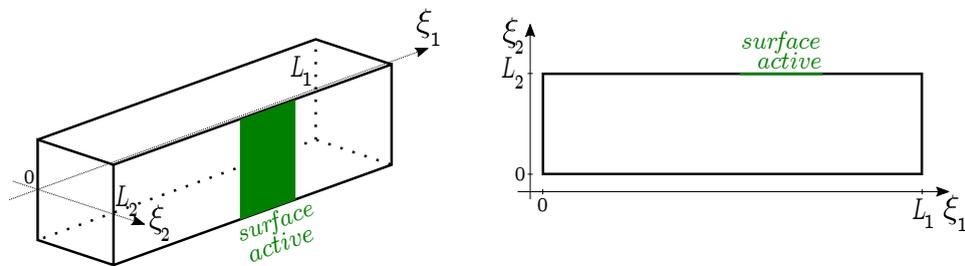
On paramétrise le tube selon trois axes (ξ_1, ξ_2, ξ_3) définis Figure 1.6(a). En ajoutant aux hypothèses précédentes le fait que l'actionnement est uniforme selon l'axe ξ_3 , on peut alors faire une approximation 2D du tube pour laquelle on définira les axes tels que présentés Figure 1.6(b). Le système sans surface active est un guide d'onde de section rectangulaire. L'onde acoustique qui le parcourt présente donc une fréquence de coupure, c'est à dire une fréquence à partir de laquelle une onde plane ne peut plus se propager dans le tube. Cette fréquence est définie telle que $f_c = \frac{c}{2\min(L_2, L_3)} = \frac{c}{2L_2}$ où

1.3. PROBLÈME CONSIDÉRÉ

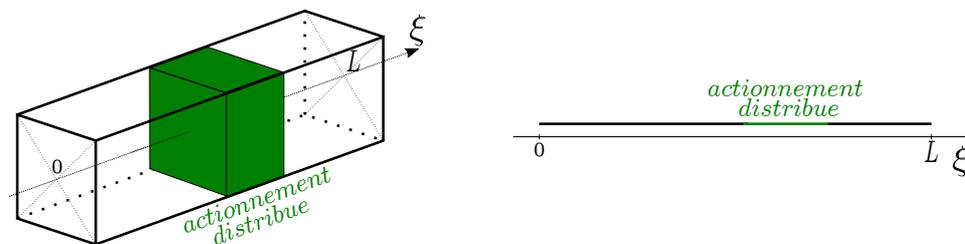
c est la célérité de propagation et (L_2, L_3) les dimensions d'une section du tube [69]. Lorsque l'on considère uniquement des fréquences inférieures à f_c , approximer le système en 1D revient à approximer l'actionnement frontière de la surface active par une action distribuée dans le domaine, c'est à dire que l'actionnement est réalisé en tout point du domaine spatial pour ξ_1 appartenant à la portion actionnée de l'axe principal. Une telle approximation conduit à une paramétrisation définie Figure 1.6(c).



(a) Paramétrisation des axes du tube



(b) Modèle 2D



(c) Modèle 1D

FIGURE 1.6: Paramétrisation des axes du tube selon le modèle, 1,2 ou 3D

1.4/ CONCLUSION

Dans ce premier chapitre, nous avons présenté le contexte applicatif général de l'étude qui sera menée dans la suite de ce document. La présentation de quelques notions d'acoustique élémentaire nous a permis de retrouver l'expression mathématique d'une onde acoustique comme combinaison d'équations aux dérivées partielles traduisant des lois de conservations. Un bref historique des techniques de contrôle passives et actives nous ont permis d'inventorier divers type de méthodes d'atténuation du bruit et de mettre en évidence l'intérêt d'une approche énergétique dans le cas où une atténuation globale est recherchée. Enfin, le système considéré dans cette thèse a été présenté. Le chapitre suivant introduira l'approche hamiltonienne à ports qui est une approche énergétique particulièrement adaptée à la représentation de lois de conservation et à l'expression des interconnexions entre différents systèmes, comme par exemple un fluide parcouru par une onde dans un domaine et un haut-parleur à la frontière de ce dernier.

MODÉLISATION HAMILTONIENNE À PORTS

Le but de ce chapitre est de proposer un modèle hamiltonien à ports du système vibro-acoustique considéré. Le formalisme hamiltonien à ports est dans un premier temps introduit à l'aide d'un exemple en dimension finie, puis appliqué aux haut-parleurs composant la surface active du système. Le même formalisme est généralisé aux systèmes en dimension infinie et un modèle hamiltonien à ports d'une onde acoustique est donné. L'interconnexion de l'onde acoustique et de la surface active est formulée pour obtenir le modèle hamiltonien à ports du système physique actionné à la frontière. Enfin, nous nous éloignons de la considération de notre système applicatif pour proposer une formulation hamiltonienne à ports d'une onde 2D en coordonnées polaires.

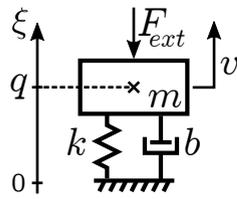
Sommaire

2.1	Systèmes hamiltoniens à ports en dimension finie	22
2.1.1	Exemple introductif aux systèmes hamiltoniens à ports	22
2.1.2	Interprétation géométrique	24
2.1.3	Quelques propriétés des SHP	26
2.1.4	Application au modèle d'un haut-parleur	28
2.2	Dimension infinie	31
2.2.1	Structure de Stokes-Dirac et SHP à paramètres distribués	31
2.2.2	Application à l'équation d'onde	33
2.2.3	Prise en compte de la surface active	38
2.2.4	Extension aux coordonnées cylindriques sur un domaine circulaire	39
2.3	Conclusion	43

2.1/ SYSTÈMES HAMILTONIENS À PORTS EN DIMENSION FINIE

2.1.1/ EXEMPLE INTRODUCTIF AUX SYSTÈMES HAMILTONIENS À PORTS

Les systèmes hamiltoniens à ports sont particulièrement adaptés pour la modélisation et la commande des systèmes multi-physiques. Ils ont été définis pour la première fois dans [57], et ont été par la suite largement utilisés pour décrire le comportement de systèmes complexes à travers l'étude de leurs échanges énergétiques internes et permettent de considérer des systèmes ouverts par l'introduction de ports d'entrées/sorties [90, 20]. Considérons à titre d'exemple le système masse-ressort-amortisseur présenté Figure 2.1 soumis à une force extérieure F_{ext} .



$m \in \mathbb{R}^+$: masse
 $k \in \mathbb{R}^+$: raideur
 $b \in \mathbb{R}^+$: coefficient d'amortissement
 $q \in \mathbb{R}$: position du centre de masse
 $v \in \mathbb{R}$: vitesse
 $F_{ext} \in \mathbb{R}$: force extérieure

FIGURE 2.1: Système masse-ressort-amortisseur

Une modélisation de ce système à l'aide du formalisme hamiltonien à ports a été proposé dans [90]. Les paramètres de masse m et de raideur k donnés sont invariants dans le temps. L'hamiltonien $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de ce système correspond à son énergie totale et est la somme de son énergie cinétique E_c et de son énergie potentielle E_p :

$$H(q, \mathfrak{p}) = \underbrace{\frac{1}{2}kq(t)^2}_{E_p} + \underbrace{\frac{1}{2m}\mathfrak{p}(t)^2}_{E_c} \quad (2.1)$$

où $\mathfrak{p}(t) := mv(t)$ est la quantité de mouvement du système. Les variables $\begin{pmatrix} q(t) \\ \mathfrak{p}(t) \end{pmatrix}$ sont appelées variables d'énergie du système et $\begin{pmatrix} kq(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$ sont appelées variables de co-énergie [20], découlant de H de telle sorte que $\frac{\partial H(x)}{\partial x} = \begin{pmatrix} kq \\ v \end{pmatrix}$. On définit $x(t) := \begin{pmatrix} q(t) \\ \mathfrak{p}(t) \end{pmatrix}$, $u(t) := F_{ext}(t)$ et $y(t) := v(t)$ comme étant respectivement l'état, l'entrée et la sortie du système. En considérant le lien entre $\dot{x}(t)$ et le gradient de l'hamiltonien par rapport à l'état $\frac{\partial H(x)}{\partial x} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q(t) \\ \mathfrak{p}(t) \end{pmatrix} =: Lx(t)$, on peut décrire le comportement du

2.1. SYSTÈMES HAMILTONIENS À PORTS EN DIMENSION FINIE

système par la représentation d'état

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -b \end{pmatrix} Lx(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} F_{ext}(t) \\ v(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} Lx(t). \end{cases} \quad (2.2)$$

Définition 1 : [90]. Un système hamiltonien à ports d'espace d'état \mathcal{X} de dimension n , d'espaces d'entrée et de sortie $\mathcal{U} = \mathcal{Y} = \mathbb{R}^m$ (avec $m \in \mathbb{N}$) et d'hamiltonien $H : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ est donné par

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (J(x) - R(x)) \frac{\partial H(x)}{\partial x} + g(x)u \\ y = g^\top(x) \frac{\partial H(x)}{\partial x} \end{cases} \quad (2.3)$$

où les matrices $J(x)$ et $R(x)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^{n \times n}$ satisfont $J(x) = -J^\top(x)$ et $R(x) = R^\top(x) \geq 0$.

La matrice d'état $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -b \end{pmatrix} L$ de (2.2) pouvant s'écrire sous la forme $(J - R)L$ où $J := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $R := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, on peut alors définir $g := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ la matrice d'entrée du système, et écrire le système sous la forme hamiltonienne à ports (2.3).

J représente les échanges entre les énergies cinétiques et potentielles, n'induisant pas de variation de l'énergie totale H . R traduit la dissipation d'énergie induisant une décroissance de H au cours du temps.

Remarque 2 : Le terme "système hamiltonien à ports" englobe une classe de systèmes plus large que celle donnée dans la définition précédente, notamment en incluant des systèmes pouvant présenter un terme de transmission directe, ou encore une structure résistive non linéaire. Un SHP à structure résistive non linéaire est donné [90] par

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = J(x) \frac{\partial H(x)}{\partial x} - \mathcal{R}(x(t), \frac{\partial H(x)}{\partial x}) + g(x)u(t) \\ y(t) = g^\top(x) \frac{\partial H(x)}{\partial x} \end{cases} \quad (2.4)$$

où $J(x) = -J^\top(x)$ et où $\mathcal{R}(x, \cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfait $\frac{\partial H}{\partial x}^\top(x) \mathcal{R}(x(t), \frac{\partial H(x)}{\partial x}) \geq 0$, pour tout $\frac{\partial H(x)}{\partial x} \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathcal{X}$.

2.1.2/ INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE

Le formalisme hamiltonien à ports repose sur la notion géométrique de structure de Dirac qui traduit les échanges d'énergie entre des variables dites de flux et d'effort [20]. La structure de Dirac traduit ces échanges internes au système et entre le système et son environnement. Nous définissons dans cette sous-section la structure de Dirac avant de préciser le sens physique des variables de flux et d'effort et d'illustrer cette définition sur le SHP (2.3).

Considérons une variable f appelée flux définie sur un espace vectoriel de dimension n noté \mathcal{F} . Notons $\mathcal{E} := \mathcal{F}^*$ l'espace dual de \mathcal{F} , c'est à dire l'espace des formes linéaires sur \mathcal{F} . \mathcal{E} est appelé espace des efforts e . L'application d'une forme linéaire $e \in \mathcal{E}$ sur $f \in \mathcal{F}$ est notée $\langle e, f \rangle$, produit dual défini sur $\mathcal{F} \times \mathcal{E}$. On définit $\langle | \rangle$ forme bilinéaire symétrique sur $\mathcal{F} \times \mathcal{E}$, telle que pour deux couples $(f_i, e_i) \in \mathcal{F} \times \mathcal{E}$, $i \in \{1, 2\}$,

$$\langle (f_1, e_1) | (f_2, e_2) \rangle := \langle e_1, f_2 \rangle + \langle e_2, f_1 \rangle. \quad (2.5)$$

Pour tout sous-espace $\mathcal{D} \subset \mathcal{F} \times \mathcal{E}$, on note \mathcal{D}^\perp l'ensemble des éléments de $\mathcal{F} \times \mathcal{E}$ orthogonaux à l'ensemble \mathcal{D} , c'est à dire

$$\mathcal{D}^\perp = \{(f_1, e_1) \in \mathcal{F} \times \mathcal{E} \text{ tels que } \langle (f_1, e_1) | (f_2, e_2) \rangle = 0 \forall (f_2, e_2) \in \mathcal{D}\}.$$

Définition 2 : [90]. On appelle structure de Dirac un sous-espace $\mathcal{D} \in \mathcal{F} \times \mathcal{E}$ tel que $\mathcal{D} = \mathcal{D}^\perp$.

D'un point de vue physique, le produit dual \langle, \rangle définit une puissance, c'est à dire une variation d'énergie. Pour tout $(f, e) \in \mathcal{D}$, la forme bilinéaire $\langle (f, e) | (f, e) \rangle = 2\langle e, f \rangle$ est nulle. \mathcal{D} définit une relation conservative de puissance entre le flux f et l'effort e .

Considérons un système dont l'énergie est définie par l'hamiltonien $H(x)$, fonction de \mathcal{X} dans \mathbb{R} . La variation d'énergie peut alors être réécrite sous la forme

$$\dot{H}(x) = \frac{\partial H(x)}{\partial x}^\top \dot{x}(t) = \left\langle \frac{\partial H(x)}{\partial x}, \dot{x}(t) \right\rangle,$$

\dot{x} définissant le vecteur des variables de flux. On définit e , vecteur des variables d'effort associées, par $e = \frac{\partial H}{\partial x}$. Des exemples courants de variables d'énergie, flux et effort sont donnés dans le Tableau 2.1.

2.1. SYSTÈMES HAMILTONIENS À PORTS EN DIMENSION FINIE

Domaine	Flux	Effort	Variables d'énergie/ État
Potentiel (translation)	vitesse	force	déplacement
Inertiel (translation)	force	vitesse	quantité de mouvement
Potentiel (rotation)	vitesse angulaire	couple	angle
Inertiel (rotation)	couple	vitesse angulaire	moment
Électrique	intensité	tension	charge
Magnétique	tension	intensité	flux magnétique

TABLEAU 2.1: Natures des variables pour différents domaines physiques

Définition 3 : [91]. *Considérons une structure de Dirac $\mathcal{D} \subset \mathcal{F} \times \mathcal{E}$ et l'hamiltonien $H(x) : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$, où x contient les variables d'énergie. Le système*

$$(f \in \mathcal{F}, e \in \mathcal{E}) = \left(\dot{x}, \frac{\partial H}{\partial x} \right) \in \mathcal{D} \quad (2.6)$$

est un SHP d'énergie totale H .

Illustrons cette définition en montrant que le SHP défini par (2.3) est associé à une structure de Dirac et donc que la définition 1 est bien incluse dans la définition 3. En utilisant les notations précédentes la structure sous-jacente à (2.3) s'écrit

$$\begin{cases} f = (J - R)e + gu \\ y = g^\top e. \end{cases} \quad (2.7)$$

• Dans le cas où $u = 0$ et $R = 0$ correspondant à un système non dissipatif isolé de son environnement, pour tout $(f, e) \in \mathcal{F} \times \mathcal{E}$,

$$\langle e, f \rangle = e^\top f = e^\top J e = 0$$

par antisymétrie de J . Dans [90] (propriété 6.6.4, page 141), il est montré que $\mathcal{D} \subset \mathcal{F} \times \mathcal{E}$ est une structure de Dirac si et seulement si $\langle e, f \rangle = 0 \forall (f, e) \in \mathcal{D}$ et $\dim \mathcal{D} = \dim \mathcal{F}$. Le SHP (2.6) isolé et non dissipatif repose donc sur une structure de Dirac.

• Dans le cas non-dissipatif ($R = 0$), on définit les variables d'effort et de flux augmentés des variables d'entrée/sortie telles que $e' := \begin{pmatrix} e \\ u \end{pmatrix}$ et $f' := \begin{pmatrix} f \\ -y \end{pmatrix}$. Ces nouvelles variables sont définies respectivement sur \mathcal{E}' et \mathcal{F}' qui correspondent à \mathcal{E} et \mathcal{F} augmentés des domaines de définition des ports d'entrée et sortie. On écrit alors le produit $\langle e', f' \rangle, \forall (f', e') \in \mathcal{F}' \times \mathcal{E}'$,

$$\langle e', f' \rangle = e'^\top f' = e'^\top \begin{pmatrix} J & g \\ -g^\top & 0 \end{pmatrix} e' = 0$$

par antisymétrie de $J' := \begin{pmatrix} J & g \\ -g^\top & 0 \end{pmatrix}$. Le sous-ensemble $\mathcal{D}' \subset \mathcal{F}' \times \mathcal{E}'$ tel que $f' = J' e' \forall (f', e') \in \mathcal{D}'$ et $\dim \mathcal{D}' = \dim \mathcal{F}'$ est alors une structure de Dirac sur laquelle repose (2.6).

• Dans le cas dissipatif ($R \neq 0$), on montre que la structure d'interconnexion entre éléments conservatifs et éléments dissipatifs est une structure de Dirac. Pour cela, on réécrit $R =: g_r^\top R_c g_r$ où R_c est une matrice symétrique définie positive et on définit les ports dissipatifs e_r, f_r de telle sorte que $f_r = -R_c e_r$ [89]. Il est alors possible d'écrire (2.6) sous la forme

$$\begin{cases} f = Je + gu + g_r e_r \\ y = g^\top e \\ f_r = g_r^\top e. \end{cases} \quad (2.8)$$

On définit de nouvelles variables $e'' := \begin{pmatrix} e' \\ e_r \end{pmatrix} \in \mathcal{E}''$ et $f'' := \begin{pmatrix} f' \\ -f_r \end{pmatrix} \in \mathcal{F}''$ où \mathcal{E}'' et \mathcal{F}'' correspondent respectivement à \mathcal{F}' et \mathcal{E}' augmentés des domaines de définition des ports dissipatifs. On a alors

$$\langle e'', f'' \rangle = e''^\top \begin{pmatrix} J' & g_r \\ -g_r^\top & 0 \end{pmatrix} e'' = 0$$

par antisymétrie de $\begin{pmatrix} J' & g_r \\ -g_r^\top & 0 \end{pmatrix}$. Le sous-ensemble $\mathcal{D}'' \subset \mathcal{F}'' \times \mathcal{E}''$ tel que $f'' = J'' e'' \forall (f'', e'') \in \mathcal{D}''$ et $\dim \mathcal{D}'' = \dim \mathcal{F}''$ est alors une structure de Dirac sur laquelle repose (2.6). Une représentation de cette structure est donnée par la Figure 2.2.

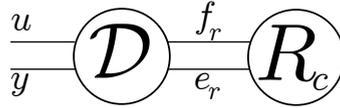


FIGURE 2.2: Structure avec dissipation

De ceci découlent des propriétés fondamentales des SHP.

2.1.3/ QUELQUES PROPRIÉTÉS DES SHP

Cette sous-section présente l'expression de la variation d'énergie des SHP ainsi qu'une propriété fondamentale des SHP qui est l'interconnexion de deux SHP. Un autre aspect fondamental de l'étude des systèmes hamiltoniens à ports est le développement de stratégies de commande dédiées aux SHP. Celui-ci ne sera pas traité dans cette section et le lecteur est invité à consulter le Chapitre 4 consacré à la commande pour plus d'informations à ce sujet.

2.1.3.1/ VARIATION D'ÉNERGIE

La variation d'énergie \dot{H} d'un SHP sous la forme (2.3) est donnée par :

$$\begin{aligned}\dot{H}(x) &= \frac{\partial H(x)}{\partial x}^\top \dot{x} = \frac{\partial H(x)}{\partial x}^\top \left((J - R) \frac{\partial H(x)}{\partial x} + gu(t) \right) \\ &= \frac{\partial H(x)}{\partial x}^\top J \frac{\partial H(x)}{\partial x} - \frac{\partial H(x)}{\partial x}^\top R \frac{\partial H(x)}{\partial x} + \frac{\partial H(x)}{\partial x}^\top gu(t).\end{aligned}$$

L'antisymétrie de J implique alors

$$\dot{H}(x) = -\frac{\partial H(x)}{\partial x}^\top R \frac{\partial H(x)}{\partial x} + \frac{\partial H(x)}{\partial x}^\top gu(t)$$

et $y^\top(t) = \frac{\partial H(x)}{\partial x}^\top g$ permet de conclure

$$\dot{H}(x) = -\frac{\partial H(x)}{\partial x}^\top R \frac{\partial H(x)}{\partial x} + y(t)^\top u(t) \leq y(t)^\top u(t). \quad (2.9)$$

Ceci montre que les ports d'entrée et de sortie du systèmes sont conjugués de puissance, c'est à dire que leur produit définit une variation d'énergie dans le temps. Dans le cas non dissipatif qui correspond à $R = 0$, la variation de l'hamiltonien est alors égale à la puissance échangée par le système avec son milieu environnant à travers ses ports d'entrée/sortie.

2.1.3.2/ INTERCONNEXION

L'interconnexion conservative de puissance de deux structures de Dirac est une structure de Dirac [90]. De ceci découle une propriété fondamentale des SHP qui est que l'interconnexion conservative de puissance de deux SHP est un SHP. Illustrons cette propriété en considérant deux SHP Σ_1 et Σ_2 définis tels que

$$\Sigma_1 \begin{cases} \dot{x}_1(t) = (J_1 - R_1) \frac{\partial H_1(x_1)}{\partial x_1} + \begin{pmatrix} g_1 & g'_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u'_1(t) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y'_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1^\top \\ g'^{\top}_1 \end{pmatrix} \frac{\partial H_1(x_1)}{\partial x_1} \end{cases} \quad (2.10a)$$

$$\Sigma_2 \begin{cases} \dot{x}_2(t) = (J_2 - R_2) \frac{\partial H_2(x_2)}{\partial x_2} + \begin{pmatrix} g_2 & g'_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2(t) \\ u'_2(t) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} y_2(t) \\ y'_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_2^\top \\ g'^{\top}_2 \end{pmatrix} \frac{\partial H_2(x_2)}{\partial x_2} \end{cases} \quad (2.10b)$$

et interconnectés comme illustré Figure 2.3 tels que

$$\begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = 0. \quad (2.10c)$$

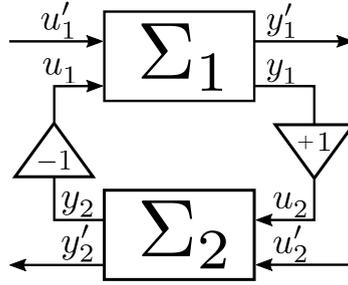


FIGURE 2.3: Exemple d'interconnexion conservatrice de puissance

Les équations (2.10) peuvent s'écrire sous la forme d'un système augmenté Σ_e

$$\Sigma_e \begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1 - R_1 & g_1 g_2^\top \\ -g_2 g_1^\top & J_2 - R_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H_1(x_1)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial H_2(x_2)}{\partial x_2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g'_1 & 0 \\ 0 & g'_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'_1(t) \\ u'_2(t) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} y'_1(t) \\ y'_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1^\top & 0 \\ 0 & g_2^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H_1(x_1)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial H_2(x_2)}{\partial x_2} \end{pmatrix}. \end{cases} \quad (2.11)$$

L'antisymétrie de la matrice $J_e := \begin{pmatrix} J_1 & g_1 g_2^\top \\ -g_2 g_1^\top & J_2 \end{pmatrix}$ garantit la conservation d'énergie totale du système augmenté lors d'échanges d'énergie entre Σ_1 et Σ_2 via l'interconnexion (2.10c). On parle alors d'interconnexion conservatrice de puissance. Définissant l'état et l'énergie totale du système augmenté $x_e(t) := \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ et $H_e(x_e) := H_1(x_1) + H_2(x_2)$, on a alors

$$\frac{\partial H_e(x_e)}{\partial x_e} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H_1(x_1)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial H_2(x_2)}{\partial x_2} \end{pmatrix}.$$

Le système Σ_e est donc bien un SHP d'entrée $\begin{pmatrix} u'_1(t) \\ u'_2(t) \end{pmatrix}$ et de sortie $\begin{pmatrix} y'_1(t) \\ y'_2(t) \end{pmatrix}$.

2.1.4/ APPLICATION AU MODÈLE D'UN HAUT-PARLEUR

Afin de modéliser les actionneurs composant la surface active du système vibro-acoustique considéré dans cette thèse, on s'intéresse dans cette partie à la modélisation d'un haut-parleur électrodynamique schématisé Figure 2.4.

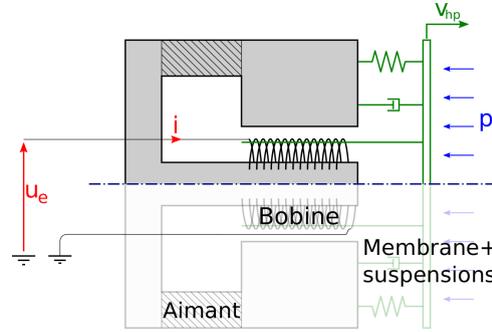


FIGURE 2.4: Schéma d'un haut-parleur électrodynamique

Le principe de ce haut-parleur est le suivant : une bobine d'inductance L_e , de résistance R_e et de longueur de fil l est plongée dans un champ magnétique constant transversal et uniforme d'amplitude B généré par un aimant permanent. Parcourue par un courant $i(t)$ résultant d'une tension d'entrée $u_e(t)$, la bobine est soumise à une force de Laplace motrice d'amplitude F_l et entre en mouvement suivant son axe, avec $F_l(t) = B_l i(t)$ où $B_l = B \times l$. Notons $\phi(t) := L_e i(t)$ le flux magnétique. Une membrane de surface S_d est liée à la bobine et est entraînée à la même vitesse pour une masse totale en déplacement M_{ms} . Cette membrane est fixée au bâti par un système de suspension de souplesse C_{ms} et de résistance mécanique R_{ms} . C'est la vibration de la membrane et sa propagation dans l'air qui est à l'origine du son émis par le haut-parleur. On note $q(t)$ le déplacement de la membrane, $v_{hp}(t)$ sa vitesse et $p(t) = M_{ms} v(t)$ sa quantité de mouvement. La membrane subit une contre-réaction d'amplitude $F_{ac}(t)$ proportionnelle à la pression acoustique $p(t)$ telle que $F_{ac}(t) = p(t) S_d$. Les paramètres décrits ci-avant sont appelés paramètres de Thiele et Small et permettent de décrire le comportement linéaire de la plupart des haut-parleurs [82, 79]. Ces paramètres sont récapitulés dans le Tableau 2.2.

Paramètres électromagnétiques :	Paramètres mécaniques :
L_e : inductance de la bobine à 1 kHz (mH)	C_{ms} : souplesse de la suspension (m/N)
R_e : résistance de la bobine (Ω)	R_{ms} : résistance mécanique de la suspension (N.s/m)
B_l : produit de l'intensité du champ magnétique et de la longueur de la bobine (T.m)	S_d : surface de la membrane (m^2)
	M_{ms} : masse de la partie mobile (kg)

TABLEAU 2.2: Paramètres de Thiele et Small

L'énergie totale H_{hp} du système est la somme des énergies cinétique E_c et potentielle E_p de la masse en mouvement et de l'énergie magnétique E_b emmagasinée dans la bobine :

$$H_{hp}(q, p, \phi) = \underbrace{\frac{1}{2C_{ms}}q(t)^2}_{E_p} + \underbrace{\frac{1}{2M_{ms}}p(t)^2}_{E_p} + \underbrace{\frac{1}{2L_e}\phi(t)^2}_{E_b}. \quad (2.12)$$

On choisit comme état $x_{hp}(t) = \begin{pmatrix} \phi \\ q \\ p \end{pmatrix}$, d'où

$$\frac{\partial H_{hp}(x_{hp})}{\partial x_{hp}} = \begin{pmatrix} i(t) \\ \left(\frac{q(t)}{C_{ms}}\right) \\ v_{hp}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{L_e} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_{ms}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{M_{ms}} \end{pmatrix} x_{hp}(t) =: Lx_{hp}(t).$$

Dans un cas linéaire et non-saturé, le système est régi par un système d'équations correspondant à la loi des mailles pour la partie électrique et à la loi d'Euler pour la partie mécanique, soit :

$$\begin{cases} u_e(t) = R_e i(t) + \dot{\phi}(t) + u_l(t) \\ \dot{p}(t) = F_l(t) - R_d \dot{q}(t) - \frac{q(t)}{C_{ms}} - F_{ac}(t) \end{cases}$$

où $u_l(t) := B_l \dot{q}(t)$, $F_l(t) := B_l i(t)$ expriment le couplage électro-mécanique dû aux forces de Lorentz. On peut alors écrire le système sous la forme

$$\begin{cases} \dot{x}_{hp}(t) = (J - R) \frac{\partial H_{hp}(x_{hp})}{\partial x_{hp}} + gu(t) \\ y(t) = g^\top \frac{\partial H_{hp}(x_{hp})}{\partial x_{hp}} \end{cases} \quad (2.13)$$

où $J := \begin{pmatrix} 0 & 0 & -B_l \\ 0 & 0 & 1 \\ B_l & -1 & 0 \end{pmatrix}$ est antisymétrique, $R := \begin{pmatrix} R_e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{ms} \end{pmatrix}$ est symétrique définie positive et $g := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Le système (2.13) est donc un SHP. $u(t) := \begin{pmatrix} u_e(t) \\ -F_{ac}(t) \end{pmatrix}$ et $y(t) = \begin{pmatrix} i(t) \\ v_{hp}(t) \end{pmatrix}$ sont respectivement les entrées et sorties du système et $y^\top u$ représente la puissance échangée par le système avec son environnement.

Remarque 3 : Dans la version la plus récente du système vibro-acoustique considéré (voir Chapitre 1), sont utilisés des haut-parleurs commandés en courant, ce qui permet en pratique de s'affranchir d'une éventuelle erreur d'identification du paramètre d'inductance L_e . La source de tension u_e est alors remplacée par une source de courant i directement proportionnel à la force de Laplace F_l qui agit sur la partie mécanique du système qui peut alors être assimilé à un système masse-ressort-amortisseur. Le système (2.13) se

simplifie alors de telle sorte que $H_{hp}(x_{hp}) = \frac{1}{2C_{ms}}q(t)^2 + \frac{1}{2M_{ms}}p(t)^2$, $J := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $R := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R_{ms} \end{pmatrix}$, $g := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B_l & 1 \end{pmatrix}$. Ses entrées et sorties sont alors $u(t) := \begin{pmatrix} i(t) \\ -F_{ac}(t) \end{pmatrix}$ et $y(t) = \begin{pmatrix} u_l(t) \\ v_{hp}(t) \end{pmatrix}$.

2.2/ DIMENSION INFINIE

Les systèmes dynamiques à paramètres distribués sont définis en considérant non plus seulement le temps, mais également l'espace comme paramètres indépendants sur lesquels les quantités physiques sont définies [20]. Les systèmes à paramètres distribués sont des systèmes décrits par des EDP linéaires ou non linéaires, éventuellement couplées avec des équations différentielles ordinaires (EDO), des équations intégrales ou intégréo-différentielles et des équations algébriques. Les systèmes à paramètres distribués sont représentés sur des espaces fonctionnels de dimension infinie [52].

2.2.1/ STRUCTURE DE STOKES-DIRAC ET SHP À PARAMÈTRES DISTRIBUÉS

Les SHP ont été étendus aux systèmes régis par des EDP (commandés à la frontière) dans [92] dans un contexte de géométrie différentiel et dans [50] dans un contexte formel. En dimension infinie, la formulation hamiltonienne à ports exprime les échanges d'énergie internes aux SHP à l'aide d'opérateurs différentiels. Les ports d'entrées-sorties sont exprimés à l'aide de variables d'effort et de flux à la frontière. Dans ce qui suit, on considère un espace Ω de dimension n muni d'un système de coordonnées ξ_n . La frontière de Ω est notée \mathcal{B} . Les variables d'énergie et de flux dans le domaine sont définies sur $L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$, avec $n \in \mathbb{N}$. On les notera respectivement $x(\xi_n, t)$ et $f(\xi_n)$. Les variables d'effort $e(\xi_n)$ dans le domaine sont définies sur $H^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$. L'effort et le flux ne décrivent complètement le comportement du système que lorsqu'ils sont complétés de leurs extensions à la frontière \mathcal{B} du domaine. Ces dernières sont notées $f_\partial \in H^{1/2}(\mathcal{B}, \mathbb{R}^n)$ et $e_\partial \in H^{-1/2}(\mathcal{B}, \mathbb{R}^n)$. On exprime alors l'espace étendu des flux $\mathcal{F} := L^2(\Omega, \mathbb{R}^n) \times H^{1/2}(\mathcal{B}, \mathbb{R}^n)$ et l'espace des efforts $\mathcal{E} := H^1(\Omega, \mathbb{R}^n) \times H^{-1/2}(\mathcal{B}, \mathbb{R}^n)$. On munit $\mathcal{F} \times \mathcal{E}$ du produit de puissance symétrisé [49] $\langle \cdot | \cdot \rangle$ défini tel que pour $(f^1, f_\partial^1, e^1, e_\partial^1)$, $(f^2, f_\partial^2, e^2, e_\partial^2)$ quelconques dans $\mathcal{F} \times \mathcal{E}$,

$$\begin{aligned} \langle (f^1, f_\partial^1, e^1, e_\partial^1) | (f^2, f_\partial^2, e^2, e_\partial^2) \rangle &= \langle e^2, f^1 \rangle_{L^2, \Omega} + \langle e^1, f^2 \rangle_{L^2, \Omega} \\ &\quad - \langle e_\partial^2, f_\partial^1 \rangle_{L^2, \mathcal{B}} - \langle e_\partial^1, f_\partial^2 \rangle_{L^2, \mathcal{B}}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Le produit $\langle \cdot | \cdot \rangle$ permet d'étendre la Définition 2 (page 24) d'une structure de

Dirac \mathcal{D} à la définition d'une structure de Stokes-Dirac en dimension infinie.

Définition 4 : Une structure de Stokes-Dirac est un sous-espace \mathcal{D} de $\mathcal{F} \times \mathcal{E}$ tel que $\mathcal{D} = \mathcal{D}^\perp$ où

$$\mathcal{D}^\perp = \{(f^1, f_\partial^1, e^1, e_\partial^1) \in \mathcal{F} \times \mathcal{E} \text{ tels que } \langle (f^1, f_\partial^1, e^1, e_\partial^1) | (f^2, f_\partial^2, e^2, e_\partial^2) \rangle = 0 \\ \forall (f^2, f_\partial^2, e^2, e_\partial^2) \in \mathcal{D}\}.$$

Un opérateur $\mathcal{J} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ tel que $f = \mathcal{J}e$ est antisymétrique par rapport au produit $\langle \cdot | \cdot \rangle$ lorsque (2.14) est nul pour tout couple $(f^1, f_\partial^1, e^1, e_\partial^1)$ et $(f^2, f_\partial^2, e^2, e_\partial^2)$ de $\mathcal{F} \times \mathcal{E}$.

Pour $(f, f_\partial, e, e_\partial) \in \mathcal{F} \times \mathcal{E}$, si $f = \mathcal{J}e$ avec \mathcal{J} antisymétrique par rapport au produit $\langle \cdot | \cdot \rangle$ en regard de (f_∂, e_∂) alors $(f, f_\partial, e, e_\partial)$ appartiennent à une structure de Stokes-Dirac \mathcal{D} .

Définition 5 : [66, 20] On considère la fonction $\mathcal{H}(x) := \int_\Omega \mathcal{H}(\xi_n, x, \partial_{\xi_n} x, \dots, \partial_{\xi_n}^{(m)} x) d\xi_n$ pour tout $x \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$ où \mathcal{H} est une fonction suffisamment dérivable de x et de ses dérivées jusqu'à l'ordre m . La dérivée variationnelle de \mathcal{H} notée $\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta x}$ est l'unique fonction qui satisfasse :

$$\mathcal{H}(x + \eta \delta x) = \mathcal{H}(x) + \eta \int_\Omega \frac{\delta \mathcal{H}(x)}{\delta x} \delta x d\xi_n + O(\eta^2) \quad (2.15)$$

pour tout $\eta \in \mathbb{R}$ et pour $\delta x(\xi_n)$ telle que ses dérivées successives par rapport à ξ_n d'ordre 0 à m ont un support compact¹.

Lorsque \mathcal{H} est uniquement fonction de x et pas de ses dérivées, alors [20]

$$\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta x} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}.$$

Il est par ailleurs montré dans [95] que $\mathcal{H}(x) = \frac{1}{2} \int_\Omega x(\xi_n)^\top (\mathcal{L}x(\xi_n)) d\Omega$ où \mathcal{L} est un opérateur coercif sur $L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Il est alors possible de donner une définition des systèmes hamiltoniens à ports en dimension infinie.

Définition 6 : Considérons l'hamiltonien $\mathcal{H}(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ où $x \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Définissons $f := \frac{\partial x}{\partial t}$, $e := \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta x}$ et (f_∂, e_∂) leurs extensions à la frontière \mathcal{B} . Supposons que $(f, e, f_\partial, e_\partial)$ appartiennent à une structure de Stokes-Dirac \mathcal{D} induite par un opérateur \mathcal{J} antisymétrique par rapport au produit $\langle \cdot | \cdot \rangle$. Alors le système

$$((f, f_\partial) \in \mathcal{F}, (e, e_\partial) \in \mathcal{E}) \in \mathcal{D} \quad (2.16)$$

1. sont à valeurs nulles sur la frontière \mathcal{B} de Ω

2.2. DIMENSION INFINIE

est un système hamiltonien à ports d'énergie totale \mathcal{H} et dont la représentation explicite est

$$\dot{x}(\xi_n, t) = \mathcal{J} \frac{\delta \mathcal{H}(x)}{\delta x}, \quad (2.17)$$

associée aux variables de ports à la frontière $\begin{pmatrix} f_\partial \\ e_\partial \end{pmatrix}$ avec $\frac{\delta \mathcal{H}(x)}{\delta x} = \mathcal{L}x(\xi_n, t)$.

Dans la suite de cette thèse, les arguments des variables ne sont pas explicités lorsqu'ils alourdiraient la notation et qu'aucune confusion n'est possible.

2.2.2/ APPLICATION À L'ÉQUATION D'ONDE

Dans cette partie, nous proposons la modélisation hamiltonienne à port d'une onde acoustique définie au chapitre précédent en n dimension par les lois de conservation

$$\begin{cases} \mu_0 \dot{v}(\xi_n, t) = -grad(p(\xi_n, t)) \\ \chi_s \dot{p}(\xi_n, t) = -div(v(\xi_n, t)). \end{cases} \quad (2.18)$$

On considère $\Gamma(\xi_n, t) = \chi_s p(\xi_n, t)$ qui représente physiquement l'opposé du coefficient d'expansion volumique $\alpha := \frac{\partial V}{V} = -\chi_s p$ par définition de χ_s , et $\theta(\xi_n, t) = \mu_0 v(\xi_n, t)$ la quantité de mouvement particulaire. On peut alors définir $x = \begin{pmatrix} \theta \\ \Gamma \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ où $n = n + 1$ et $\mathcal{L} = \begin{pmatrix} \mu_0^{-1} & 0 \\ 0 & \chi_s^{-1} \end{pmatrix}$ de telle sorte que

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} x^\top \mathcal{L} x d\xi_n$$

et $\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta x} = \mathcal{L}x$. x est alors la variable d'énergie découlant de \mathcal{H} .

On définit le flux f et l'effort e tels que

$$f := \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix}, \quad e := \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} := \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta x} = \mathcal{L} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

On peut alors réécrire l'équation d'onde sous la forme

$$f = \mathcal{J}e \text{ ou encore } \dot{x} = \mathcal{J} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta x} = \mathcal{J} \mathcal{L}x \quad (2.19)$$

où $\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 0 & -grad \\ -div & 0 \end{pmatrix}$. Tout comme l'équation de d'Alembert, cette écriture ne suffit pas à décrire le comportement du système et doit être complétée par des conditions frontières. Un jeu de variables de flux et d'effort

à la frontière est alors déterminé de telle sorte que l'antisymétrie de \mathcal{J} par rapport au produit $\langle \cdot | \cdot \rangle$ soit garantie. Le cas 1D est traité par *Le Gorrec et al.* dans [50] où il est démontré que le système unidimensionnel défini sur est un SHP pour des variables de ports à la frontière de la forme

$$\begin{pmatrix} f_\partial \\ e_\partial \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} e_1(0) \\ -e_2(L) \\ e_2(0) \\ e_1(L) \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

pour $\xi \in [0, L] \subset \mathbb{R}$ où $\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 0 & -\partial_\xi \\ -\partial_\xi & 0 \end{pmatrix}$ et où U est une matrice de rang plein telle que $U^\top \Sigma U = \Sigma$ pour $\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$.

2.2.2.1/ CAS 2D

Les cas 2D et 3D ont été traités de manière formelle dans [102]. Dans notre cas nous considérons un domaine rectangulaire muni de coordonnées cartésiennes $(\xi_1, \xi_2) \in \Omega := [0, L_1] \times [0, L_2]$ qui correspond à la formulation 2D du système physique présentée dans le chapitre précédent. Les résultats présentés dans cette partie ont fait l'objet d'une publication [85]. L'équation (2.19) s'écrit alors

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix}}_f = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\partial_{\xi_1} \\ 0 & 0 & -\partial_{\xi_2} \\ -\partial_{\xi_1} & -\partial_{\xi_2} & 0 \end{pmatrix}}_{\mathcal{J}} \underbrace{\begin{pmatrix} \mu_0^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \mu_0^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \chi_s^{-1} \end{pmatrix}}_e \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

2.2. DIMENSION INFINIE

Proposition 2 : Si les variables d'effort $e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$ de l'onde 2D sont définies sur un support compact, alors l'opérateur \mathcal{J} est antisymétrique, c'est à dire

$$\langle e^1, \mathcal{J}e^2 \rangle_{L^2, \Omega} = \langle -\mathcal{J}e^1, e^2 \rangle_{L^2, \Omega} \quad \forall \{e^1, e^2\} \in (L^2(\Omega, \mathbb{R}^3))^2.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \langle e^1, \mathcal{J}e^2 \rangle_{L^2, \Omega} &= \iint_{\Omega} (e^1)^\top \mathcal{J}e^2 d\Omega \\ &= - \int_0^{L_2} \int_0^{L_1} \left(e_1^1 \partial_{\xi_1} e_3^2 + e_2^1 \partial_{\xi_2} e_3^2 + e_3^1 \partial_{\xi_1} e_1^2 + e_3^1 \partial_{\xi_2} e_2^2 \right) d\xi_1 d\xi_2 \end{aligned}$$

qui devient par intégration par parties :

$$\begin{aligned} \langle e^1, \mathcal{J}e^2 \rangle_{L^2, \Omega} &= - \int_0^{L_2} [e_3^2 e_1^1 + e_1^2 e_3^1]_0^{L_1} d\xi_2 - \int_0^{L_1} [e_3^2 e_2^1 + e_2^2 e_3^1]_0^{L_2} d\xi_1 \\ &\quad + \int_0^{L_2} \int_0^{L_1} \left(e_1^2 \partial_{\xi_1} e_3^1 + e_2^2 \partial_{\xi_2} e_3^1 + e_3^2 \partial_{\xi_1} e_1^1 + e_3^2 \partial_{\xi_2} e_2^1 \right) d\xi_1 d\xi_2. \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} \langle -\mathcal{J}e^1, e^2 \rangle_{L^2, \Omega} &= \iint_{\Omega} -(\mathcal{J}e^1)^\top e^2 d\Omega \\ &= \int_0^{L_2} \int_0^{L_1} \left(e_1^2 \partial_{\xi_1} e_3^1 + e_2^2 \partial_{\xi_2} e_3^1 + e_3^2 \partial_{\xi_1} e_1^1 + e_3^2 \partial_{\xi_2} e_2^1 \right) d\xi_1 d\xi_2. \end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned} \langle e^1, \mathcal{J}e^2 \rangle_{L^2, \Omega} &= \langle -\mathcal{J}e^1, e^2 \rangle_{L^2, \Omega} \\ &\quad - \int_0^{L_2} [e_3^2 e_1^1 + e_1^2 e_3^1]_0^{L_1} d\xi_2 - \int_0^{L_1} [e_3^2 e_2^1 + e_2^2 e_3^1]_0^{L_2} d\xi_1 \end{aligned} \quad (2.22)$$

qui devient $\langle e^1, \mathcal{J}e^2 \rangle_{L^2, \Omega} = \langle -\mathcal{J}e^1, e^2 \rangle_{L^2, \Omega}$ dans le cas d'un domaine compact, ce qui complète cette démonstration. \square

En 2D, le produit de puissance symétrisé (2.14) de deux éléments de $\mathcal{F} \times \mathcal{E}$ s'écrit

$$\begin{aligned} \langle (f^1, f_{\partial}^1, e^1, e_{\partial}^1) | (f^2, f_{\partial}^2, e^2, e_{\partial}^2) \rangle &= \int_0^{L_2} \int_0^{L_1} (e^2)^\top f^1 d\xi_1 d\xi_2 + \int_0^{L_2} \int_0^{L_1} (e^1)^\top f^2 d\xi_1 d\xi_2 \\ &\quad - \left(\int_0^{L_2} (e_{\partial 1}^1)^\top f_{\partial 1}^2 d\xi_2 + \int_0^{L_1} (e_{\partial 2}^1)^\top f_{\partial 2}^2 d\xi_1 \right) - \left(\int_0^{L_2} (e_{\partial 1}^2)^\top f_{\partial 1}^1 d\xi_2 + \int_0^{L_1} (e_{\partial 2}^2)^\top f_{\partial 2}^1 d\xi_1 \right) \end{aligned}$$

où $e_{\partial}^i = \begin{pmatrix} e_{\partial 1}^i \\ e_{\partial 2}^i \end{pmatrix}$, $f_{\partial}^i = \begin{pmatrix} f_{\partial 1}^i \\ f_{\partial 2}^i \end{pmatrix}$ pour $i \in \{1, 2\}$.

Proposition 3 : [85]. L'ensemble des variables frontières assurant l'antisymétrie de \mathcal{J} par rapport au produit de puissance symétrisé $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est

$$\begin{pmatrix} f_{\partial}(\xi_1, \xi_2) \\ e_{\partial}(\xi_1, \xi_2) \end{pmatrix} = U \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -e_3(L_1, \xi_2) + e_3(0, \xi_2) \\ -e_1(L_1, \xi_2) + e_1(0, \xi_2) \\ e_1(L_1, \xi_2) + e_1(0, \xi_2) \\ e_3(L_1, \xi_2) + e_3(0, \xi_2) \\ -e_3(\xi_1, L_2) + e_3(\xi_1, 0) \\ -e_2(\xi_1, L_2) + e_2(\xi_1, 0) \\ e_2(\xi_1, L_2) + e_2(\xi_1, 0) \\ e_3(\xi_1, L_2) + e_3(\xi_1, 0) \end{pmatrix}$$

où U est une matrice de rang plein telle que $U^{\top} \Sigma U = \Sigma$ pour $\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$, avec I la matrice identité de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$.

Démonstration. Notons F_1 et F_2 les termes de (2.22) provenant de l'intégration par parties :

$$F_1 = - \int_0^{L_2} [e_3^2 e_1^1 + e_1^2 e_3^1]_0^{L_1} d\xi_2, \quad F_2 = - \int_0^{L_1} [e_3^2 e_2^1 + e_2^2 e_3^1]_0^{L_2} d\xi_1.$$

Ces termes peuvent s'écrire

$$F_1 = \int_0^{L_2} \left[\begin{pmatrix} e_1^1 & e_3^1 \end{pmatrix} Q \begin{pmatrix} e_1^2 \\ e_3^2 \end{pmatrix} \right]_0^{L_1} d\xi_2, \quad F_2 = \int_0^{L_1} \left[\begin{pmatrix} e_2^1 & e_3^1 \end{pmatrix} Q \begin{pmatrix} e_2^2 \\ e_3^2 \end{pmatrix} \right]_0^{L_2} d\xi_1.$$

en posant $Q := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Le développement des produits conduit à la définition d'une nouvelle matrice $Q_{ext} := \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & -Q \end{pmatrix}$ de telle sorte que

$$F_1 = \int_0^{L_2} \left(e_1^1(L_1, \xi_2) \ e_3^1(L_1, \xi_2) \ e_1^1(0, \xi_2) \ e_3^1(0, \xi_2) \right) Q_{ext} \begin{pmatrix} e_1^2(L_1, \xi_2) \\ e_3^2(L_1, \xi_2) \\ e_1^2(0, \xi_2) \\ e_3^2(0, \xi_2) \end{pmatrix} d\xi_2,$$

$$F_2 = \int_0^{L_1} \left(e_2^1(\xi_1, L_2) \ e_3^1(\xi_1, L_2) \ e_2^1(\xi_1, 0) \ e_3^1(\xi_1, 0) \right) Q_{ext} \begin{pmatrix} e_2^2(\xi_1, L_2) \\ e_3^2(\xi_1, L_2) \\ e_2^2(\xi_1, 0) \\ e_3^2(\xi_1, 0) \end{pmatrix} d\xi_1.$$

Suivant alors [50] (Définition 3.3 et Lemme 3.4), on définit $R_{ext} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} Q & -Q \\ I & I \end{pmatrix}$ qui satisfait $Q_{ext} = R_{ext}^{\top} \Sigma R_{ext}$, où $\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$. On peut alors écrire

$$F_1 = \int_0^{L_2} \begin{pmatrix} f_{\partial 1}^1 & e_{\partial 1}^1 \end{pmatrix} \Sigma \begin{pmatrix} f_{\partial 1}^2 \\ e_{\partial 1}^2 \end{pmatrix} d\xi_2, \quad F_2 = \int_0^{L_1} \begin{pmatrix} f_{\partial 2}^1 & e_{\partial 2}^1 \end{pmatrix} \Sigma \begin{pmatrix} f_{\partial 2}^2 \\ e_{\partial 2}^2 \end{pmatrix} d\xi_1$$

2.2. DIMENSION INFINIE

avec, pour $i \in \{1, 2\}$,

$$\begin{pmatrix} f_{\partial 1}^i \\ e_{\partial 1}^i \end{pmatrix} = UR_{ext} \begin{pmatrix} e_1^i(L_1, \xi_2) \\ e_3^i(L_1, \xi_2) \\ e_1^i(0, \xi_2) \\ e_3^i(0, \xi_2) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} f_{\partial 2}^i \\ e_{\partial 2}^i \end{pmatrix} = UR_{ext} \begin{pmatrix} e_2^i(\xi_1, L_2) \\ e_3^i(\xi_1, L_2) \\ e_2^i(\xi_1, 0) \\ e_3^i(\xi_1, 0) \end{pmatrix}.$$

Soit

$$\begin{pmatrix} f_{\partial 1}^i \\ e_{\partial 1}^i \end{pmatrix} = U \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -e_3^i(L_1, \xi_2) + e_3^i(0, \xi_2) \\ -e_1^i(L_1, \xi_2) + e_1^i(0, \xi_2) \\ +e_1^i(L_1, \xi_2) + e_1^i(0, \xi_2) \\ +e_3^i(L_1, \xi_2) + e_3^i(0, \xi_2) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} f_{\partial 2}^i \\ e_{\partial 2}^i \end{pmatrix} = U \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -e_3^i(\xi_1, L_2) + e_3^i(\xi_1, 0) \\ -e_2^i(\xi_1, L_2) + e_2^i(\xi_1, 0) \\ +e_2^i(\xi_1, L_2) + e_2^i(\xi_1, 0) \\ +e_3^i(\xi_1, L_2) + e_3^i(\xi_1, 0) \end{pmatrix}.$$

Définissant alors $e_{\partial}^i = \begin{pmatrix} e_{\partial 1}^i \\ e_{\partial 2}^i \end{pmatrix}$, $f_{\partial}^i = \begin{pmatrix} f_{\partial 1}^i \\ f_{\partial 2}^i \end{pmatrix}$, on obtient $\langle (f^1, f_{\partial}^1, e^1, e_{\partial}^1) | (f^2, f_{\partial}^2, e^2, e_{\partial}^2) \rangle = 0$ qui complète cette démonstration. \square

Remarque 4 : *Un choix judicieux de U permet de séparer les variables à chaque extrémité de la frontière. Une telle matrice peut être*

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

qui mène à

$$\begin{pmatrix} f_{\partial 1}^i(\xi_2) \\ e_{\partial 1}^i(\xi_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e_3^i(L_1, \xi_2) \\ e_1^i(0, \xi_2) \\ e_1^i(L_1, \xi_2) \\ e_3^i(0, \xi_2) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} f_{\partial 2}^i(\xi_1) \\ e_{\partial 2}^i(\xi_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e_3^i(\xi_1, L_2) \\ e_2^i(\xi_1, 0) \\ e_2^i(\xi_1, L_2) \\ e_3^i(\xi_1, 0) \end{pmatrix},$$

soit

$$\begin{pmatrix} f_{\partial}(\xi_1, \xi_2) \\ e_{\partial}(\xi_1, \xi_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e_3(L_1, \xi_2) \\ e_1(0, \xi_2) \\ -e_3(\xi_1, L_2) \\ e_2(\xi_1, 0) \\ e_1(L_1, \xi_2) \\ e_3(0, \xi_2) \\ e_2(\xi_1, L_2) \\ e_3(\xi_1, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p(L_1, \xi_2) \\ v_1(0, \xi_2) \\ -p(\xi_1, L_2) \\ v_2(\xi_1, 0) \\ v_1(L_1, \xi_2) \\ p(0, \xi_2) \\ v_2(\xi_1, L_2) \\ p(\xi_1, 0) \end{pmatrix}. \quad (2.23)$$

Comme l'opérateur \mathcal{J} est antisymétrique par rapport à $\langle \cdot | \cdot \rangle$, la Définition 6 implique donc que le système décrit par l'équation (2.21) associée aux variables de ports à la frontière (2.23) est un système hamiltonien à ports. La variation d'énergie de ce SHP correspond à la puissance échangée à travers la frontière du domaine 2D tel que

$$\dot{\mathcal{H}} = \int_0^{L_1} f_{\partial 2}^\top e_{\partial 2} d\xi_1 + \int_0^{L_2} f_{\partial 1}^\top e_{\partial 1} d\xi_2.$$

Les conditions à la frontière considérées, récapitulées Figure 2.5, sont les suivantes :

- $\xi_1 = 0 : v_1(0, \xi_2, t) = v_{in}(\xi_2, t)$, entrée de l'onde perturbatrice ;
- $\xi_2 = 0 : v_2(\xi_1, 0, t) = 0$, paroi rigide ;
- $\xi_1 = L_1 : v_1(L_1, \xi_2, t) = \frac{1}{\mu_0 c} p(L_1, \xi_2, t)$, approximation selon ξ_1 d'une condition parfaitement absorbante (anéchoïque) ;
- $\xi_2 = L_2, \xi_1 \notin [s_a, s_b] : v_2(\xi_1, L_2, t) = 0$, paroi rigide ;
- $\xi_2 = L_2, \xi_1 \in [s_a, s_b] : v_2(\xi_1, L_2, t) = u_{in}$, vitesse de l'actionneur distribué.

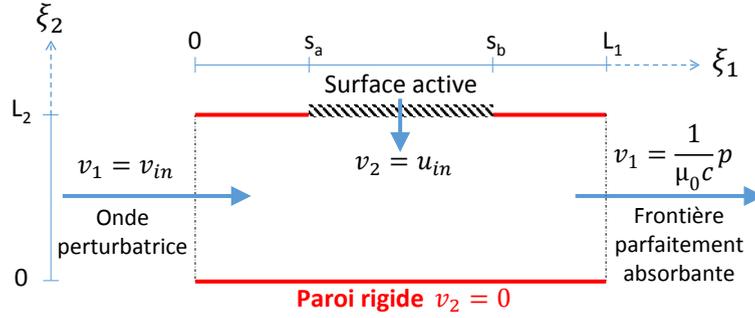


FIGURE 2.5: Schématisation des conditions frontières du système

2.2.3/ PRISE EN COMPTE DE LA SURFACE ACTIVE

Considérons maintenant l'interconnexion de l'équation d'onde 2D considérée et d'un réseau d'actionneurs supposés infinitésimaux et décrits localement par le modèle de haut-parleur présenté dans le chapitre précédent. La surface active est approximée par un système de haut-parleurs commandés en courant distribué sur une portion de la frontière $\xi_2 = L_2$ définie sur le segment $[s_a, s_b]$ avec $0 \leq s_a \leq s_b \leq L_1$. Ceci revient à considérer une infinité de haut-parleurs le long de cette partie de la frontière. On considère un système distribué selon $\xi_1 \in [s_a, s_b]$ dont les paramètres C_{ms} , M_{ms} et L_e sont constants et uniformes, le système (2.13) (page 30) s'écrit :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{q}(\xi_1, t) \\ \dot{p}(\xi_1, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -R_{ms} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{C_{ms}} q(\xi_1, t) \\ v_{hp}(\xi_1, t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B_l & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i(\xi_1, t) \\ -F_{ac}(\xi_1, t) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} u_l(\xi_1, t) \\ v_{hp}(\xi_1, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & B_l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{C_{ms}} q(\xi_1, t) \\ v_{hp}(\xi_1, t) \end{pmatrix}. \end{cases} \quad (2.24)$$

Son énergie mécanique est définie par $\mathcal{H}_{hp} = \frac{1}{2} \int_{s_a}^{s_b} \left(\frac{1}{C_{ms}} q^2 + \frac{1}{M_{ms}} p^2 \right) d\xi_1$.

Ce système interagit avec le système acoustique par le biais des relations

$$\begin{pmatrix} -F_{ac}(\xi_1, t) \\ v_2(\xi_1, L_2, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{hp}(\xi_1, t) \\ -p(\xi_1, L_2, t) \end{pmatrix}, \quad (2.25)$$

2.2. DIMENSION INFINIE

où $\xi_1 \in [s_a, s_b]$, qui correspondent à la continuité des variables de flux et à une somme nulle des variables d'effort.

Remarque 5 : *Comme on considère une infinité d'actionneurs le long de la frontière, le terme d'entrée $-F_{ac}$ est homogène à une densité linéique de force. Par ailleurs, l'approximation 2D de l'équation d'onde implique que le terme de "pression" p correspond à une force appliquée sur une ligne et non sur une surface. L'équation (2.25) est donc bien homogène.*

L'énergie totale du système augmenté est la somme de l'énergie acoustique et de l'énergie mécanique de la surface active

$$\mathcal{H}_a = \mathcal{H} + \mathcal{H}_{hp}.$$

On définit l'effort, l'état et le flux augmentés, respectivement

$$e_a = \begin{pmatrix} v_1(\xi_1, \xi_2, t) \\ v_2(\xi_1, \xi_2, t) \\ p(\xi_1, \xi_2, t) \\ i(\xi_1, t) \\ C_{ms}^{-1}q(\xi_1, t) \\ v_{hp}(\xi_1, t) \end{pmatrix}, \quad x_a = \begin{pmatrix} \theta_1(\xi_1, \xi_2, t) \\ \theta_2(\xi_1, \xi_2, t) \\ \Gamma(\xi_1, \xi_2, t) \\ \Phi(\xi_1, t) \\ q(\xi_1, t) \\ p(\xi_1, t) \end{pmatrix}, \quad f_a = \dot{x}_a$$

et le système augmenté

$$\begin{cases} f_a = \begin{pmatrix} \mathcal{J} & 0 \\ \mathcal{C} & (J - R) \end{pmatrix} e_a + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u_e \\ y_a = (0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0) e_a \end{cases} \quad (2.26)$$

où \mathcal{C} est un opérateur défini tel que $\mathcal{C} \left(\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta x} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (-p(\xi_1 \in [s_a, s_b], L_2, t))$. Ce système est défini pour le jeu de variables de ports à la frontière (2.23) privé de l'interface avec la surface active telle que $v_2(\xi_1 \in [s_a, s_b], L_2) = -v_{hp}(\xi_1)$:

$$\begin{pmatrix} f_{a\partial} \\ e_{a\partial} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p(L_1, \xi_2) \\ v_1(0, \xi_2) \\ -p(\xi_1 \notin [s_a, s_b], L_2) \\ v_2(\xi_1, 0) \\ v_1(L_1, \xi_2) \\ p(0, \xi_2) \\ v_2(\xi_1 \notin [s_a, s_b], L_2) \\ p(\xi_1, 0) \end{pmatrix}. \quad (2.27)$$

2.2.4/ EXTENSION AUX COORDONNÉES CYLINDRIQUES SUR UN DOMAINE CIRCULAIRE

Dans cette sous-section nous nous éloignons de notre cas d'étude vibro-acoustique pour étendre les Propositions 2 et 3 (pages 35 et 36) dans le

cadre d'un système 2D défini en coordonnées polaires. Le domaine spatial Ω considéré correspond pour ce cas à une portion d'anneau définie, comme illustré Figure 2.6. Les résultats présentés dans cette partie ont été inclus dans une soumission [86].

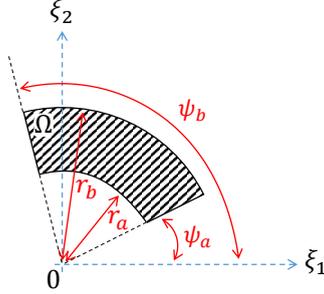


FIGURE 2.6: Schéma du domaine spatial considéré (portion d'anneau)

Les coordonnées spatiales $(r, \psi) \in \Omega$ où $r \in [r_a, r_b]$ et $\psi \in [\psi_a, \psi_b]$ correspondent respectivement au rayon et à l'angle en coordonnées polaires. On cherche à montrer que l'opérateur $\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 0 & -grad \\ -div & 0 \end{pmatrix}$ de l'équation d'onde (2.19) est antisymétrique dans ce système de coordonnées. En coordonnées polaires, le gradient et la divergence deviennent, pour $v = (v_1^\top \ v_2^\top) \in \mathbb{R}^2$ et $p \in \mathbb{R}$,

$$grad(p) = \begin{pmatrix} \partial_r p \\ \frac{1}{r} \partial_\psi p \end{pmatrix}, \quad div(v) = \partial_r(rv_1) + \frac{1}{r} \partial_\psi v_2,$$

L'opérateur \mathcal{J} devient alors

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\partial_r \\ 0 & 0 & -\frac{1}{r} \partial_\psi \\ -\frac{1}{r} \partial_r(r \cdot) & -\frac{1}{r} \partial_\psi & 0 \end{pmatrix}.$$

Définissons les variables d'effort $e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{E} = H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ et de flux $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{F} = L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ de telle sorte que $f = \mathcal{J}e$. Dans le cas acoustique, les variables d'effort e_1 et e_2 représentent respectivement les composantes tangentielle et radiale de la vitesse particulière, et e_3 représente la pression acoustique.

Proposition 4 : Si les variables d'effort $e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$ sont définies sur un support compact, alors l'opérateur \mathcal{J} est antisymétrique, c'est à dire

$$\langle e^1, \mathcal{J}e^2 \rangle_{L^2, \Omega} = \langle -\mathcal{J}e^1, e^2 \rangle_{L^2, \Omega} \forall \{e^1, e^2\} \in (L^2(\Omega, \mathbb{R}^3))^2.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \langle e^1, \mathcal{J}e^2 \rangle_{L^2, \Omega} &= \iint_{\Omega} (e^1)^\top \mathcal{J}e^2 d\Omega \\ &= \iint_{\psi_a, r_a}^{\psi_b, r_b} \left(-e_1^1 \partial_r e_3^2 - e_2^1 \frac{1}{r} \partial_\psi e_3^2 - e_3^1 \frac{1}{r} \partial_r (r e_1^2) - e_3^1 \frac{1}{r} \partial_\psi e_2^2 \right) r dr d\psi \end{aligned}$$

devient par intégration par partie :

$$\begin{aligned} \langle e^1, \mathcal{J}e^2 \rangle_{L^2, \Omega} &= - \int_{r_a}^{r_b} \left[e_2^1 e_3^2 + e_3^1 e_2^2 \right]_{\psi_a}^{\psi_b} dr \\ &\quad + \iint_{\psi_a, r_a}^{\psi_b, r_b} \left(\partial_r e_3^1 e_1^2 + \frac{1}{r} \partial_\psi e_3^1 e_2^2 + \frac{1}{r} \partial_r (r e_1^1) e_3^2 + \frac{1}{r} \partial_\psi e_2^1 e_3^2 \right) r dr d\psi. \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} \langle -\mathcal{J}e^1, e^2 \rangle_{L^2, \Omega} &= \iint_{\Omega} (-\mathcal{J}e^1)^\top e^2 d\Omega = \iint_{\psi_a, r_a}^{\psi_b, r_b} \left(\partial_r e_3^1 e_1^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{r} \partial_\psi e_3^1 e_2^2 + \frac{1}{r} \partial_r (r e_1^1) e_3^2 + \frac{1}{r} \partial_\psi e_2^1 e_3^2 \right) r dr d\psi. \end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned} \langle e^1, \mathcal{J}e^2 \rangle_{L^2, \Omega} &= \langle -\mathcal{J}e^1, e^2 \rangle_{L^2, \Omega} \\ &\quad - \int_{\psi_a}^{\psi_b} \left[r(e_1^1 e_3^2 + e_3^1 e_1^2) \right]_{r_a}^{r_b} d\psi - \int_{r_a}^{r_b} \left[e_2^1 e_3^2 + e_3^1 e_2^2 \right]_{\psi_a}^{\psi_b} dr, \end{aligned} \quad (2.28)$$

qui devient $\langle e^1, \mathcal{J}e^2 \rangle_{L^2, \Omega} = \langle -\mathcal{J}e^1, e^2 \rangle_{L^2, \Omega}$ dans le cas d'un domaine compact, ce qui complète cette démonstration. \square

En coordonnées polaires, le produit de puissance symétrisé de deux éléments de $\mathcal{F} \times \mathcal{E}$ (2.14) s'écrit

$$\begin{aligned} \langle (f^1, f_\partial^1, e^1, e_\partial^1) | (f^2, f_\partial^2, e^2, e_\partial^2) \rangle &= \iint_{\psi_a, r_a}^{\psi_b, r_b} (e^2)^\top f^1 r dr d\psi + \iint_{\psi_a, r_a}^{\psi_b, r_b} (e^1)^\top f^2 r dr d\psi \\ &\quad - \left(\int_{r_a}^{r_b} (e_{\partial 1}^1)^\top f_{\partial 1}^2 dr + \int_{\psi_a}^{\psi_b} (e_{\partial 2}^1)^\top f_{\partial 2}^2 d\psi \right) - \left(\int_{r_a}^{r_b} (e_{\partial 1}^2)^\top f_{\partial 1}^1 dr + \int_{\psi_a}^{\psi_b} (e_{\partial 2}^2)^\top f_{\partial 2}^1 d\psi \right) \end{aligned}$$

où $e_\partial^i =: \begin{pmatrix} e_{\partial 1}^i \\ e_{\partial 2}^i \end{pmatrix}$, $f_\partial^i =: \begin{pmatrix} f_{\partial 1}^i \\ f_{\partial 2}^i \end{pmatrix}$ pour $i \in \{1, 2\}$.

Proposition 5 : *L'ensemble des variables frontières assurant l'antisymétrie de \mathcal{J} par rapport au produit de puissance symétrisé $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est*

$$\begin{pmatrix} f_\partial(r, \psi) \\ e_\partial(r, \psi) \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \sqrt{r_b} e_1(r_b, \psi) \\ \sqrt{r_a} e_1(r_a, \psi) \\ e_2(r, \psi_b) \\ e_2(r, \psi_a) \\ -\sqrt{r_b} e_3(r_b, \psi) \\ \sqrt{r_a} e_3(r_a, \psi) \\ -e_3(r, \psi_b) \\ e_3(r, \psi_a) \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

où U est une matrice de rang plein telle que $U^\top \Sigma U = \Sigma$ pour $\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$, avec I la matrice identité de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$.

Démonstration. On cherche à éliminer les termes correspondant aux conditions frontières dans (2.28). On définit alors

$$F_A = - \int_{\psi_a}^{\psi_b} \left[r(e_1^1 e_3^2 + e_3^1 e_1^2) \right]_{r_a}^{r_b} d\psi, \quad F_B = - \int_{r_a}^{r_b} \left[e_2^1 e_3^2 + e_3^1 e_2^2 \right]_{\psi_a}^{\psi_b} dr \quad (2.30)$$

qui peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned} F_A &= \int_{\psi_a}^{\psi_b} \left[r \begin{pmatrix} e_1^1(r, \psi) & e_3^1(r, \psi) \end{pmatrix} Q \begin{pmatrix} e_1^2(r, \psi) \\ e_3^2(r, \psi) \end{pmatrix} \right]_{r_a}^{r_b} d\psi \\ &= \int_{\psi_a}^{\psi_b} \begin{pmatrix} e_1^1(r_b, \psi) & e_3^1(r_b, \psi) & e_1^1(r_a, \psi) & e_3^1(r_a, \psi) \end{pmatrix} Q_{ext} \begin{pmatrix} r_b e_3^2(r_b, \psi) \\ r_b e_1^2(r_b, \psi) \\ r_a e_3^2(r_a, \psi) \\ r_a e_1^2(r_a, \psi) \end{pmatrix} d\psi, \\ F_B &= \int_{r_a}^{r_b} \left[\begin{pmatrix} e_2^1(r, \psi) & e_3^1(r, \psi) \end{pmatrix} Q \begin{pmatrix} e_2^2(r, \psi) \\ e_3^2(r, \psi) \end{pmatrix} \right]_{\psi_a}^{\psi_b} dr \\ &= \int_{r_a}^{r_b} \begin{pmatrix} e_2^1(r, \psi_b) & e_3^1(r, \psi_b) & e_2^1(r, \psi_a) & e_3^1(r, \psi_a) \end{pmatrix} Q_{ext} \begin{pmatrix} e_3^2(r, \psi_b) \\ e_2^2(r, \psi_b) \\ e_3^2(r, \psi_a) \\ e_2^2(r, \psi_a) \end{pmatrix} dr \end{aligned} \quad (2.31)$$

en posant $Q = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $Q_{ext} = \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & -Q \end{pmatrix}$. En définissant $\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$, on réécrit F_A et F_B de telle sorte que

$$F_A = \int_{\psi_a}^{\psi_b} \begin{pmatrix} f_{\partial A}^1 & e_{\partial A}^1 \end{pmatrix} \Sigma \begin{pmatrix} f_{\partial A}^2 \\ e_{\partial A}^2 \end{pmatrix} d\psi, \quad F_B = \int_{r_a}^{r_b} \begin{pmatrix} f_{\partial B}^1 & e_{\partial B}^1 \end{pmatrix} \Sigma \begin{pmatrix} f_{\partial B}^2 \\ e_{\partial B}^2 \end{pmatrix} dr,$$

avec, pour $i \in \{1, 2\}$,

$$\begin{pmatrix} f_{\partial A}^i(\psi, t) \\ e_{\partial A}^i(\psi, t) \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \sqrt{r_b} e_1^i(r_b, \psi) \\ \sqrt{r_a} e_1^i(r_a, \psi) \\ -\sqrt{r_b} e_3^i(r_b, \psi) \\ \sqrt{r_a} e_3^i(r_a, \psi) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} f_{\partial B}^i(r, t) \\ e_{\partial B}^i(r, t) \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} e_2^i(r, \psi_b) \\ e_2^i(r, \psi_a) \\ -e_3^i(r, \psi_b) \\ e_3^i(r, \psi_a) \end{pmatrix}$$

avec $U^\top \Sigma U = \Sigma$. Définissant alors $e_{\partial}^i = \begin{pmatrix} e_{\partial A}^i \\ e_{\partial B}^i \end{pmatrix}$, $f_{\partial}^i = \begin{pmatrix} f_{\partial A}^i \\ f_{\partial B}^i \end{pmatrix}$, on obtient $\langle (f^1, f_{\partial}^1, e^1, e_{\partial}^1) | (f^2, f_{\partial}^2, e^2, e_{\partial}^2) \rangle = 0$ qui complète cette démonstration. \square

De façon similaire au cas 2D en coordonnées cartésiennes, comme l'opérateur \mathcal{J} est antisymétrique par rapport à $\langle \cdot | \cdot \rangle$, la Définition 6 implique donc que le système décrit par l'équation (2.19) en coordonnées polaires associée aux variables de ports à la frontière (2.29) est un système hamiltonien à ports. La variation d'énergie de ce SHP correspond à la puissance échangée à travers la frontière du domaine 2D tel que

$$\dot{\mathcal{H}} = \int_{r_a}^{r_b} f_{\partial B}^\top e_{\partial B} dr + \int_{\psi_a}^{\psi_b} f_{\partial A}^\top e_{\partial A} d\psi.$$

2.3/ CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons formulé notre problème vibro-acoustique dans le cadre des systèmes hamiltoniens à ports. L'exemple d'un simple système masse-ressort-amortisseur nous a permis de définir les SHP en dimension finie puis d'introduire la notion de structure de Dirac, structure géométrique sur laquelle reposent les SHP et induisant des propriétés fondamentales comme l'expression de la variation d'énergie et le fait que l'interconnexion conservative de puissance de deux SHP est un SHP. Le modèle d'un haut-parleur comme SHP a ensuite été présenté. Dans la seconde partie de ce chapitre, la présentation de l'extension des SHP en dimension infinie nous a permis de formuler le système acoustique comme SHP, en démontrant l'antisymétrie - pour un jeu particulier de variables à la frontière - de l'opérateur qui sous-tend son expression. Nous avons formulé le problème vibro-acoustique complet en considérant l'interconnexion de l'onde avec la surface active constituée d'une infinité de haut-parleurs. Nous avons étendu en coordonnées polaires les résultats concernant l'antisymétrie de l'opérateur qui sous-tend l'expression hamiltonienne à ports de l'équation d'onde pour un domaine spatial correspondant à une portion d'anneau. Dans le chapitre suivant, nous proposerons une méthode de discrétisation qui permet de conserver la structure hamiltonienne à ports des systèmes en dimension infinie afin de proposer une simulation du comportement du système en boucle ouverte comme en boucle fermée.

DISCRÉTISATION CONSERVATIVE DE STRUCTURE

Dans ce chapitre nous proposons une méthode de discrétisation spatiale permettant de préserver la structure hamiltonienne à ports des systèmes physiques de dimension infinie régis par l'équation d'onde lors de leur réduction. La méthode proposée se base sur l'utilisation de grilles en quinconce pour la discrétisation des différentes variables du système. Dans une première partie, l'utilisation de grilles en quinconce pour la discrétisation spatiale par l'utilisation de différences finies est exposée à travers l'exemple de l'équation d'onde 1D. Dans une deuxième partie, le cas 2D correspondant à notre tube acoustique est traité dans le cas de maillages rectilinéaires et triangulaires réguliers. Dans une troisième partie nous présentons des résultats numériques pour les cas 1D et 2D pour des maillages rectilinéaires et triangulaires réguliers. L'étude est réalisée pour des conditions frontières en boucle ouverte et en boucle fermée et l'isotropie des deux maillages est comparée. Dans une dernière partie, nous nous écartons du système physique considéré pour étendre notre méthode de discrétisation à l'équation d'onde 2D en coordonnées polaires.

Sommaire

3.1	Préambule	47
3.2	Motivations	47
3.3	Discrétisation 2D	53
3.3.1	Maillage rectilinéaire	54
3.3.2	Maillage triangulaire régulier	59
3.4	Simulations	70
3.4.1	Intégration temporelle	71

3.4.2	Cas 1D - Système en boucle ouverte	71
3.4.3	Cas 1D - Contrôle frontière	73
3.4.4	Cas 2D	74
3.4.5	Isotropie des schémas	78
3.5	Extension en coordonnées polaires	79
3.5.1	Cas d'un disque complet	85
3.5.2	Résultats numériques	86
3.6	Conclusion	87

3.1/ PRÉAMBULE

La discrétisation spatiale des systèmes de dimension infinie est un enjeu majeur pour la simulation et la commande des systèmes à paramètres distribués. Parmi toutes les méthodes standard, celles qui préservent les propriétés structurelles du système présentent un intérêt particulier dans l'optique de l'élaboration de lois de commande. Le but de cette partie est de revisiter les schémas classiques de différences finies afin de préserver la structure sous-jacente des équations d'onde 1D et 2D formulées à l'aide de l'approche hamiltonienne à ports. Une telle discrétisation garantit le respect du sens physique des variables de ports à la frontière, ce qui permet alors de considérer l'interconnexion de systèmes multi-physiques ouverts.

Plusieurs travaux [76, 30, 35, 63] proposent une discrétisation préservant la structure géométrique sous-jacente. Dans [30, 35], la structure du système est conservée à travers l'utilisation d'éléments finis mixtes pour l'approximation des variables d'énergie et d'effort. Il existe des applications de cette approche à la modélisation, la réduction et la commande [8, 54, 97, 49]. Cette approche a été étendue à travers l'utilisation d'approximations polynômiales d'ordres élevés dans [63]. Récemment, une méthode de discrétisation préservant la structure hamiltonienne à ports basée sur l'utilisation d'une méthode de Galerkin mixte a été développée pour des systèmes 1D régis par deux lois de conservation dans [46].

3.2/ MOTIVATIONS

Le principal avantage de la méthode des différences finies est sa simplicité. Elle se base sur l'approximation d'opérateurs différentiels via des développements de Taylor d'où sont déduits des schémas de discrétisation [9]. Certains de ces schémas peuvent s'avérer être particulièrement adaptés à des géométries particulières ou encore présenter une consistance¹ d'ordre élevée [59, 81]. Parmi ceux-ci, les schémas à base de grilles en quinconce [40, 26, 99] approximent sur chacune de ces grilles les différentes variables d'état selon leur natures géométriques respectives. Dans [40], un schéma en "saut de grenouilles" (*leapfrog*) est utilisé pour une équation de transport. Il y est montré que cette méthode, sous réserve qu'elle soit stable, préserve les lois de conservation, ce qui est une propriété importante pour l'étude de systèmes non dissipatifs. Toutefois, la méthode proposée n'est appliquée que sur des systèmes fermés. On peut considérer [45] comme une extension de cette méthode aux systèmes ouverts dans le cadre de la méthode des volumes

1. Une méthode est consistante d'ordre p si l'erreur commise en une étape de discrétisation est dominée par le pas de discrétisation à la puissance $p + 1$.

finis. Pour une étude fréquentielle en 2D, les auteurs de [38, 80, 77] considèrent deux grilles carrées intercroisées, l'une d'entre elles étant tournée d'un angle donné par rapport à la première. Un choix judicieux de cet angle permet d'obtenir des approximations d'ordres élevés, au prix d'une complexité importante du schéma de discrétisation. Une approche plus simple est proposée par R.W.Graves dans [31] où des différences finies sont employées sur des grilles en quinconce orthogonales. Il y montre que cette approche est particulièrement intéressante lorsque des contraintes de vitesse doivent être prises en compte à la frontière comme c'est le cas de la propagation d'onde en sismologie. En effet, l'utilisation de grilles en quinconce permet d'imposer les variables d'effort à la frontière, ce qui est particulièrement adapté à l'étude de systèmes ouverts ou interconnectés, tandis que des différences finies sur grille unique, que nous appellerons par la suite "différences finies traditionnelles", ne le permettent pas. Sur l'exemple acoustique, c'est alors la pression ou la vitesse particulière normale à la frontière qui peuvent être imposées alors que la méthode des différences finies traditionnelle ne permet d'imposer que la pression ou l'accélération normale.

La méthode que nous proposons dans ce chapitre est basée sur l'approximation des opérateurs qui définissent la structure de Stokes-Dirac en dimension infinie. Ces opérateurs sont approximés par des matrices qui définissent une structure de Dirac en dimension finie. En ce sens, le système en dimension finie découlant de cette méthode est un SHP reposant sur une structure de Dirac qui approxime la structure de Stokes-Dirac originale. Les résultats présentés dans ce chapitre dans les cas 1D et 2D rectilinéaire ont fait l'objet d'une publication [87].

Illustrons dans un premier temps l'utilisation l'emploi de différences finies basée sur des grilles en quinconce sur l'exemple de l'équation d'onde 1D. Rappelons tout d'abord l'équation d'onde linéaire en 1D (2.19)(2.20) décrite au chapitre précédent sur un domaine spatial Ω de coordonnée $\xi \in [0, L]$. Rappelons que les variables d'énergie sont contenues dans un vecteur $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^2)$ et que l'énergie totale de ce système est exprimée par

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \int_0^L x^\top \mathcal{L} x d\xi \quad (3.1)$$

où $\mathcal{L} = \begin{pmatrix} \mu_0^{-1} & 0 \\ 0 & \chi_s^{-1} \end{pmatrix}$. L'équation d'onde s'écrit alors

$$\underbrace{\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}}_f = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -\partial_\xi \\ -\partial_\xi & 0 \end{pmatrix}}_{\mathcal{J}} \underbrace{\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}}_e \quad (3.2)$$

où $f = \dot{x}$ et $e = \frac{\delta \mathcal{H}(x)}{\delta x} = \mathcal{L}x$. Un ensemble de variables à la frontière assurant

3.2. MOTIVATIONS

que le système décrit par (3.2) est un SHP est donné par $\begin{pmatrix} f\partial \\ e\partial \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1(0) \\ -e_2(L) \\ e_2(0) \\ e_1(L) \end{pmatrix}$.

Pour discrétiser ce système dans l'espace, définissons un pas spatial $h \in \mathbb{R}$ (constant dans cet exemple) et une première grille de discrétisation définie sur les points de coordonnées $\xi_k = kh$, $k \in \mathbb{N}$ tel qu'illustré sur la Figure 3.1.

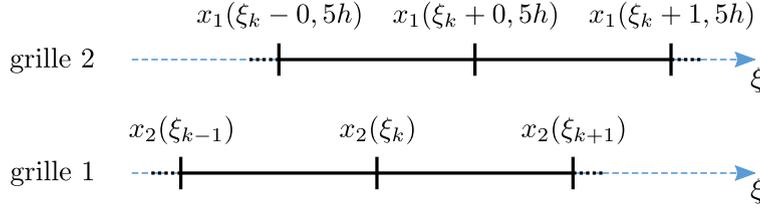


FIGURE 3.1: Grilles en quinconce

Nous choisissons de discrétiser sur les points de cette grille la variable d'état $x_2(\xi)$ associée à l'effort $e_2(\xi) = \chi_s^{-1}x_2(\xi)$. On obtient une approximation de $\partial_\xi e_2$ par différences finies centrées en combinant les développements de Taylor

$$\begin{aligned} e_2(\xi_k + 1) &= e_2(\xi_k + 0.5h) + \partial_\xi e_2(\xi_k + 0.5h)\frac{h}{2} + \partial_\xi^2 e_2(\xi_k + 0.5h)\frac{h^2}{8} + o(h^2) \\ e_2(\xi_k) &= e_2(\xi_k + 0.5h) - \partial_\xi e_2(\xi_k + 0.5h)\frac{h}{2} + \partial_\xi^2 e_2(\xi_k + 0.5h)\frac{h^2}{8} + o(h^2) \end{aligned}$$

pour obtenir

$$\partial_\xi e_2(\xi_k + 0.5h) \approx \frac{1}{h} (e_2(\xi_k + 1) - e_2(\xi_k)). \quad (3.3)$$

On constate alors que lorsque $e_2(\xi)$ est discrétisé sur les points de coordonnées ξ_k , l'approximation de $-\partial_\xi e_2(\xi) = f_1(\xi) = \dot{x}_1(\xi)$ est donnée par (3.3) sur les points de coordonnées $\xi_k + 0.5h$. Il est donc nécessaire de définir une seconde grille de discrétisation définie sur les points de coordonnées $\xi_k + 0.5h$ où on discrétise la variable d'état x_1 associée à l'effort $e_1(\xi) = \mu_0^{-1}x_1(\xi)$. On calcule l'approximation de $\partial_\xi e_1$ de même que précédemment pour obtenir

$$\partial_\xi e_1(\xi_k) \approx \frac{1}{h} (e_1(\xi_k + 0.5h) - e_1(\xi_k - 0.5h)) \quad (3.4)$$

qui est bien défini en ξ_k , c'est à dire sur la première grille.

Les approximations des dérivées spatiales étant issues de développements de Taylor d'ordre 2, la consistance des schémas de discrétisation présentés dans ce chapitre est également garantie d'ordre 2.

Remarque 6 : On peut combiner les schémas de discrétisation (3.3)(3.4) afin d'obtenir une approximation de l'opérateur ∂_ξ^2 qui donne par exemple pour une application sur e_2 :

$$\begin{aligned}\partial_\xi^2 e_2(\xi_k) &\approx \frac{1}{h}(\partial_\xi e_2(\xi_k + 0.5h) - \partial_\xi e_2(\xi_k - 0.5h)) \\ &\approx \frac{1}{h^2}(e_2(\xi_k + h) - 2e_2(\xi_k) + e_2(\xi_k - h)).\end{aligned}$$

On retrouve alors le schéma issu de la méthode des différences finies traditionnelle appliquée à la représentation classique de l'équation d'onde [59].

Intéressons-nous maintenant à l'application des schémas (3.3)(3.4) à tout le domaine 1D Ω où $\xi \in [0, L]$. Le choix des conditions frontières du système doit être l'objet d'une attention particulière. En effet, notre schéma permet d'imposer directement la valeur d'une variable d'effort à chaque frontière. Ceci implique de définir *a priori* une discrétisation de telle sorte que la variable discrétisée à l'extrémité corresponde à la variable d'effort imposé à la frontière correspondante (e_1 ou e_2). Nous considérons dans cette section l'exemple du maillage décrit par la Figure 3.2 pour un pas de discrétisation h constant. Dans cette configuration, on choisit d'imposer la valeur de e_2 à la frontière $\xi = 0$ et la valeur de e_1 à la frontière $\xi = L$. Les efforts à la frontières sont respectivement notés e_0^2 et e_{n+1}^1 .

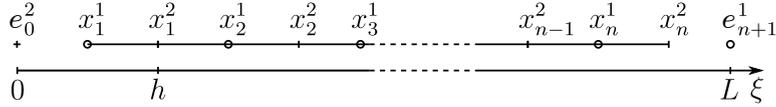


FIGURE 3.2: Maillages en quinconce de x_d^1 et x_d^2

Pour réaliser la discrétisation spatiale, les variables d'état sont approximées par le vecteur de dimension finie $x_d = (x_d^1 \ x_d^2)^\top$ avec $x_d^1 = (x_1^1 \ \dots \ x_n^1)^\top \in \mathbb{R}^n$ et $x_d^2 = (x_1^2 \ \dots \ x_n^2)^\top \in \mathbb{R}^n$. Les $x_{k \in \{1 \dots n\}}^{\{1,2\}}$ sont les approximations des états $x^{\{1,2\}}$ évalués respectivement en $\xi = \{(k-0,5)h, kh\}$ où $n \in \mathbb{N}$ est ici défini tel que $L = (n+0.5)h$. On définit un hamiltonien discret

$$H_d := \frac{1}{2} x_d^\top \mathcal{L}_d x_d = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n p \begin{pmatrix} x_i^1 & x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_0^{-1} & 0 \\ 0 & \chi_s^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i^1 \\ x_i^2 \end{pmatrix}$$

où $\mathcal{L}_d \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ est une matrice diagonale par blocs composée des éléments de \mathcal{L} évalués aux points correspondant aux maillages. Dans notre cas (relation linéaire entre variables d'état et variables d'effort),

$$\mathcal{L}_d = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{d1} & 0 \\ 0 & \mathcal{L}_{d2} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{L}_{d1} = \begin{pmatrix} \mu_0^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_0^{-1} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{L}_{d2} = \begin{pmatrix} \chi_s^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & \chi_s^{-1} \end{pmatrix}$$

3.2. MOTIVATIONS

où \mathcal{L}_{d1} et \mathcal{L}_{d2} appartiennent à $\mathbb{R}^{n \times n}$. Notons que $hH_d \approx \mathcal{H}$ dans le sens où hH_d converge vers \mathcal{H} quand n tend vers l'infini. Définissons le vecteur d'effort discret

$$e_d = \frac{\partial H_d(x_d)}{\partial x_d} = \mathcal{L}_d x_d$$

où $e_d = (e_d^1 \ e_d^2)^\top \in \mathbb{R}^{2n}$ avec $e_d^1 = (e_1^1 \ .. \ e_n^1)$ et $e_d^2 = (e_1^2 \ .. \ e_n^2)$. On applique alors un schéma de différences finies centré

$$\begin{cases} \frac{\partial e_1}{\partial \xi}(\xi_k, t) \approx \frac{e_1(\xi_{k+0,5}, t) - e_1(\xi_{k-0,5}, t)}{h} \approx \frac{e_k^1 - e_{k-1}^1}{h} \\ \frac{\partial e_2}{\partial \xi}(\xi_{k+0,5}, t) \approx \frac{e_2(\xi_{k+1}, t) - e_2(\xi_k, t)}{h} \approx \frac{e_{k+1}^2 - e_k^2}{h}. \end{cases}$$

On exprime f_d , une approximation discrète du flux $f = \mathcal{J}e$ tel que $f_d = \begin{pmatrix} f_d^1 \\ f_d^2 \end{pmatrix} = (f_1^1 \ .. \ f_n^1 \ f_1^2 \ .. \ f_n^2)^\top$ par

$$\begin{cases} f_d^1 = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} -1 & & & \\ 1 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -1 \end{pmatrix} e_d^2 + \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} e_0^2 \\ f_d^2 = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 1 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -1 \\ & & & 1 \end{pmatrix} e_d^1 + \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e_{n+1}^1 \end{cases}$$

où $\begin{pmatrix} -1 & & & \\ 1 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -1 \end{pmatrix} =: D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $\begin{pmatrix} 1 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -1 \\ & & & 1 \end{pmatrix} = -D^\top$. On peut alors exprimer le vecteur f_d

$$f_d = \begin{pmatrix} 0 & D \\ -D^\top & 0 \end{pmatrix} e_d + \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_0^2 \\ e_{n+1}^1 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

où $J_d := \begin{pmatrix} 0 & D \\ -D^\top & 0 \end{pmatrix}$ est antisymétrique et où $\frac{1}{h} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & -1 \end{pmatrix} =: g_d$ est la

matrice d'entrée du système.

Proposition 6 : La discrétisation spatiale par l'utilisation des différences finies sur grilles en quinconce du système 1D définit une structure de Dirac \mathcal{D}_d qui approxime la structure de Stokes Dirac originale. Le système discrétisé

$$\begin{cases} f_d = J_d e_d + g_d u_d \\ y_d = g_d^\top e_d, \end{cases} \quad (3.6)$$

où $u_d = e_d^\partial$ et $y_d =: f_d^\partial$, est alors un SHP.

Démonstration. On pose $e'_d = \begin{pmatrix} e_d \\ e_d^\partial \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} =: \mathcal{E}$, $f'_d = \begin{pmatrix} f_d \\ -f_d^\partial \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} =: \mathcal{F}$ et $J' = \begin{pmatrix} J_d & g_d \\ -g_d^\top & 0 \end{pmatrix} = -J'^\top$ tel que $f'_d = J'e'_d$. $\mathcal{D}_d \subset \mathcal{F} \times \mathcal{E}$ est une structure de Dirac si et seulement si $\mathcal{D}_d = \mathcal{D}_d^\perp$ avec $\mathcal{D}^\perp = \{(f_1, f_2) \in \mathcal{F} \times \mathcal{E} | \langle (f_1, e_1) | (f_2, e_2) \rangle = 0, \forall (f_2, e_2) \in \mathcal{D}\}$. Prenons deux couples (f'_a, e'_a) et (f'_b, e'_b) quelconques dans \mathcal{D}_d ,

$$\begin{aligned} \langle (f'_a, e'_a) | (f'_b, e'_b) \rangle &= \langle e'_a, f'_b \rangle + \langle e'_b, f'_a \rangle \\ &= \langle e'_a, J'e'_b \rangle + \langle e'_b, J'e'_a \rangle \\ &= \langle e'_a, J'e'_b \rangle - \langle e'_a, J'e'_b \rangle \\ &= 0 \Leftrightarrow (f'_a, e'_a) \in \mathcal{D}_d^\perp \Leftrightarrow \mathcal{D}_d \subset \mathcal{D}_d^\perp. \end{aligned}$$

Prenons $(f'_a, e'_a) \in \mathcal{D}_d^\perp$ et $(f'_b, e'_b) \in \mathcal{D}_d$, quelconques. On a alors

$$\begin{aligned} \langle (f'_a, e'_a) | (f'_b, e'_b) \rangle &= 0 \\ &= \langle e'_a, f'_b \rangle + \langle e'_b, f'_a \rangle \\ &= \langle e'_a, J'e'_b \rangle + \langle e'_b, f'_a \rangle \\ &= -\langle e'_b, J'e'_a \rangle + \langle e'_b, f'_a \rangle. \end{aligned}$$

Comme cette égalité est vraie pour tout $(f'_b, e'_b) \in \mathcal{D}_d$, on a alors $f'_a = J'e'_a$ qui implique que $(f'_a, e'_a) \in \mathcal{D}$ et donc $\mathcal{D}^\perp \subset \mathcal{D}_d$.

$\mathcal{D}_d = \mathcal{D}_d^\perp$ est donc bien une structure de Dirac et $f_d^\partial = g_d^\top e_d = \begin{pmatrix} \frac{1}{h} e_1^1 \\ -\frac{1}{h} e_n^2 \end{pmatrix}$. \square

La variation d'énergie du système est alors donnée par

$$\dot{H}_d(t) = \frac{1}{h} (e_0^2 e_1^1 - e_{n+1}^1 e_n^2) \quad (3.7)$$

qui tend vers $\frac{1}{h} \dot{\mathcal{H}}$, proportionnel à la variation d'énergie $\dot{\mathcal{H}}$, quand h tend vers 0.

On peut valider numériquement la discrétisation J_d de l'opérateur \mathcal{J} en comparant ses valeurs propres aux pulsations propres $\omega_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, du système en dimension infinie pour des conditions frontières correspondant à $e_2(0, t) = 0$ et $e_1(L, t) = 0$ dans le cas où la célérité $c = 1$ et pour $L = 1$. Pour ce choix de conditions aux frontières, on a les fréquences propres $f_k = \frac{c}{2L} k$ dont on déduit $\omega_k = 2\pi f_k = \frac{k\pi c}{L}$ [43]. Comme J_d est antisymétrique, ses valeurs propres sont purement imaginaires. La Figure 3.3 montre que la partie imaginaire des premières valeurs propres positives de J_d tend vers la valeur des pulsations propres du système en dimension infinie lorsque n augmente. Ce résultat met également en lumière le comportement "passe-bas" inhérent à l'utilisation des différences finies qui implique que le comportement basse fréquence du système est plus fidèlement reproduit par le système discrétisé.

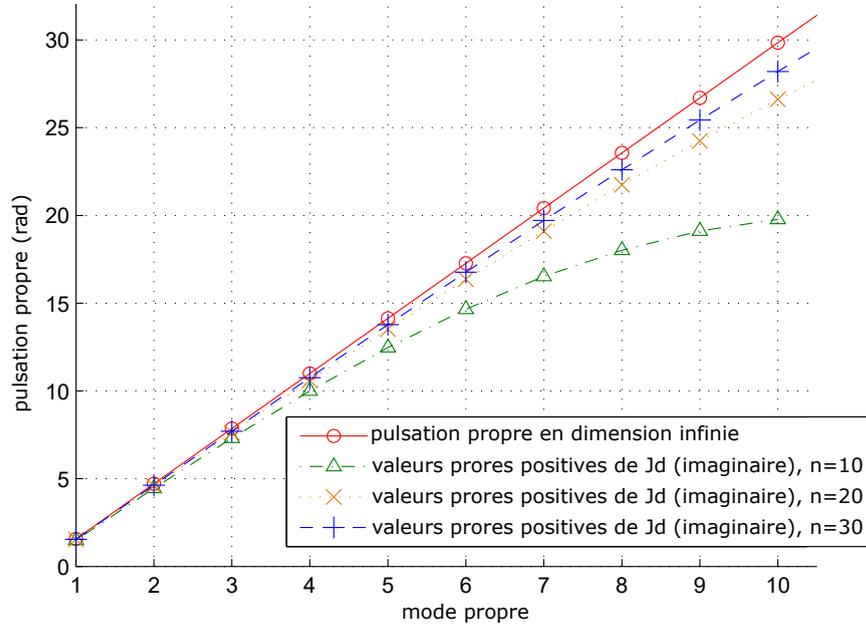


FIGURE 3.3: Valeurs propres de J_d comparées aux pulsations propres en dimension infinie (les valeurs propres multiples ne sont pas représentées)

3.3/ DISCRÉTISATION 2D

Pour le cas 2D, le choix d'un type de maillage, par exemple rectiligne ou triangulaire, impacte fortement les performances de la discrétisation. Dans le cas des différences finies, l'utilisation d'une grille rectilinéaire conduit à une bonne approximation de l'EDP considérée tout en restant relativement simple. On notera également que l'utilisation de la formulation hamiltonienne à ports du système pour la discrétisation sur des grilles rectilinéaires permet de choisir des pas de discrétisation différents sur chaque axe sans difficulté supplémentaire, ce qui n'est pas le cas dans la méthode des différences finies traditionnelle. Un maillage triangulaire régulier (également appelé maillage hexagonal [10]) peut, au prix d'une complexité de mise en œuvre plus importante, être un meilleur choix pour émuler l'isotropie de la propagation spatiale d'une onde [33]. En effet, comme le schéma triangulaire régulier est le plus compact des maillages structurés, il conduit à une propagation plus homogène dans l'espace. Des schémas de discrétisation pour maillages triangulaires sont proposés dans [101], parmi lesquels un schéma explicite d'ordre 2 qui conduit à une discrétisation simple et intuitive des opérateurs différentiels de premier ordre. Cette discrétisation est alors adaptée pour considérer les lois de conservation qui sous-tendent

l'équation d'onde. Un autre schéma, proposé initialement dans [41] et mis en oeuvre dans [33], s'appuie sur une propagation isotrope de l'onde le long des trois axes du maillage triangulaire pour discrétiser le laplacien, opérateur différentiel spatial d'ordre 2 de l'équation d'onde.

Rappelons tout d'abord l'équation d'onde linéaire en 2D (2.21)(2.23) (pages 34 et 37) décrite au chapitre précédent sur un domaine spatial Ω de coordonnées $\xi_1 \in [0, L_1]$, $\xi_2 \in [0, L_2]$. Rappelons que les variables d'énergie sont contenues dans un vecteur $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ et que l'énergie totale de ce système est exprimée par

$$\mathcal{H} = \int_0^{L_2} \int_0^{L_1} x^\top \mathcal{L} x d\xi_1 d\xi_2 \quad (3.8)$$

où $\mathcal{L} = \begin{pmatrix} \mu_0^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \mu_0^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \chi_s^{-1} \end{pmatrix}$. L'équation d'onde s'écrit alors

$$\underbrace{\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}}_f = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\partial_{\xi_1} \\ 0 & 0 & -\partial_{\xi_2} \\ -\partial_{\xi_1} & -\partial_{\xi_2} & 0 \end{pmatrix}}_{\mathcal{J}} \underbrace{\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}}_e \quad (3.9)$$

où $f = \dot{x}$ et $e = \frac{\delta \mathcal{H}(x)}{\delta x} = \mathcal{L}x$. Un ensemble de variables à la frontière assurant que le système décrit par (3.9) est un SHP est donné par

$$\begin{pmatrix} f_\partial \\ e_\partial \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e_3(L_1, \xi_2) \\ e_1(0, \xi_2) \\ -e_3(\xi_1, L_2) \\ e_2(\xi_1, 0) \\ e_1(L_1, \xi_2) \\ e_3(0, \xi_2) \\ e_2(\xi_1, L_2) \\ e_3(\xi_1, 0) \end{pmatrix}.$$

Nous proposons des schémas de discrétisation préservant la structure hamiltonienne à ports de ce système sur des maillages rectilinéaires puis triangulaires.

3.3.1/ MAILLAGE RECTILINÉAIRE

En 2D, l'approximation des opérateurs ∂_{ξ_1} et ∂_{ξ_2} nécessite l'introduction de trois grilles distinctes sur lesquelles sont respectivement discrétisées les trois variables d'état. L'agencement de ces trois grilles est décrit Figure 3.4 de telle sorte que chaque variable de flux associée à l'état discrétisé sur un point puisse être approximée à partir de points directement adjacents. h_1 et h_2 sont les pas de discrétisation selon les deux axes, choisis constants pour plus de simplicité.

3.3. DISCRÉTISATION 2D

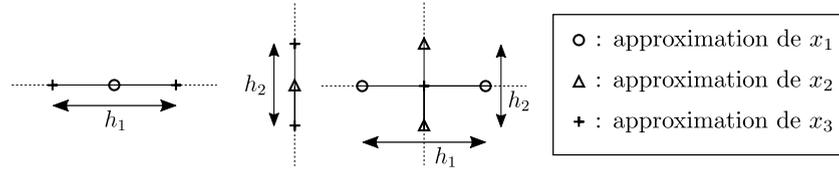


FIGURE 3.4: Agencement des variables discrétisées

Afin de considérer les conditions frontières du système physique définies Figure 2.5 (page 38), on choisit d'imposer $e_1 = v_1$ aux frontières $\xi_1 = 0$ et $\xi_1 = L_1$ et d'imposer $e_2 = v_2$ aux frontières $\xi_2 = 0$ et $\xi_2 = L_2$. Ce choix conduit à la construction de maillage du domaine complet décrit Figure 3.5.

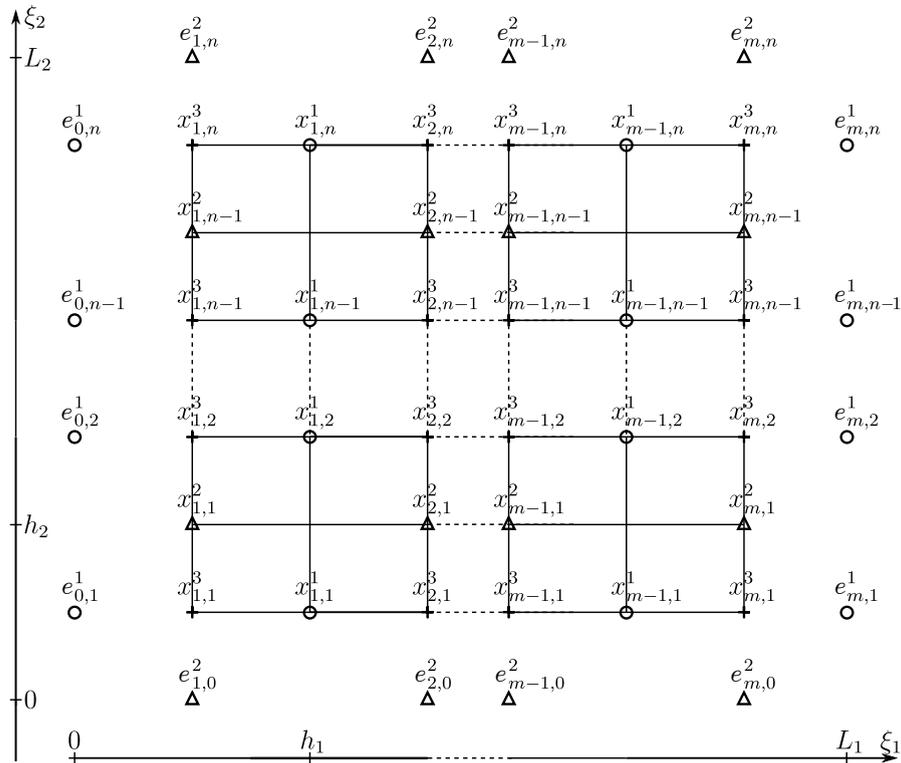


FIGURE 3.5: Maillage 2D

Les conditions frontières sont données par les efforts e_1 imposés sur les points à la frontière numérotés $(0, k_2)$ et (m, k_2) , $k_2 \in \{1 \dots n\}$ et e_2 sur les points numérotés $(k_1, 0)$ et (k_1, n) , $k_1 \in \{1 \dots n\}$. L'état continu x est remplacé dans le domaine discret par le vecteur de dimension finie

$$x_d = \left((x_d^1)^\top \quad (x_d^2)^\top \quad (x_d^3)^\top \right)^\top \in \mathbb{R}^{3mn-(m+n)} \text{ où}$$

$$\begin{cases} x_d^1 = \left(x_{1,1}^1 & x_{1,2}^1 & \dots & x_{m-1,n-1}^1 & x_{m-1,n}^1 \right)^\top \in \mathbb{R}^{(m-1)n} \\ x_d^2 = \left(x_{1,1}^2 & x_{1,2}^2 & \dots & x_{m,n-2}^2 & x_{m,n-1}^2 \right)^\top \in \mathbb{R}^{m(n-1)} \\ x_d^3 = \left(x_{1,1}^3 & x_{1,2}^3 & \dots & x_{m,n-1}^3 & x_{m,n}^3 \right)^\top \in \mathbb{R}^{mn} \end{cases} \quad (3.10)$$

et les variables frontières sont notées $e_d^\partial = \left((e_{d\partial}^1)^\top \quad (e_{d\partial}^2)^\top \quad (e_{d\partial}^3)^\top \right)^\top$ où

$$\begin{cases} e_{d\partial}^1 = \left(e_{0,1}^1 & e_{0,2}^1 & \dots & e_{0,n}^1 & e_{m,1}^1 & e_{m,2}^1 & \dots & e_{m,n}^1 \right)^\top \\ e_{d\partial}^2 = \left(e_{1,0}^2 & e_{1,n}^2 & e_{2,0}^2 & e_{2,n}^2 & \dots & e_{m,0}^2 & e_{m,n}^2 \right)^\top \\ e_{d\partial}^3 = \{\}. \end{cases} \quad (3.11)$$

Le fait que $e_{d\partial}^3$ soit égal à l'ensemble vide $\{\}$ dans ce cas particulier est dû au choix de conditions frontières uniquement sur e_1 et e_2 . On définit un hamiltonien discret

$$H_d(x_d) := x_d^\top \mathcal{L}_d x_d \quad (3.12)$$

où $\mathcal{L}_d \in \mathbb{R}^{(3mn-(m+n)) \times (3mn-(m+n))}$ est une matrice diagonale par blocs composée des éléments de \mathcal{L} évalués aux points correspondant aux maillages. Dans notre cas,

$$\mathcal{L}_d = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{d1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{L}_{d2} & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{L}_{d3} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{L}_{d1} = \begin{pmatrix} \mu_0^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_0^{-1} \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{L}_{d2} = \begin{pmatrix} \mu_0^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_0^{-1} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{L}_{d3} = \begin{pmatrix} \chi_s^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & \chi_s^{-1} \end{pmatrix}$$

où $L_{d1} \in \mathbb{R}^{(m-1) \times n}$, $L_{d2} \in \mathbb{R}^{m \times (n-1)}$ et $L_{d3} \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Notons que $h_1 h_2 H_d \approx \mathcal{H}$ dans le sens où $h_1 h_2 H_d$ converge vers \mathcal{H} quand n tend vers l'infini. Définissons le vecteur d'effort discret

$$e_d := \frac{\partial H_d}{\partial x_d} = \mathcal{L}_d x_d$$

avec $e_d =: \left((e_d^1)^\top \quad (e_d^2)^\top \quad (e_d^3)^\top \right)^\top$, où $e_d^{\{1..3\}}$ sont des vecteurs respectivement de mêmes dimensions que les vecteurs d'état $x_d^{\{1..3\}}$.

En prenant en compte le fait que

$$\begin{pmatrix} x_{i,j}^1 \\ x_{i,j}^2 \\ x_{i,j}^3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} x^1(\xi_i^1, \xi_{j-0,5}^2) \\ x^2(\xi_{i-0,5}^1, \xi_j^2) \\ x^3(\xi_{i-0,5}^1, \xi_{j-0,5}^2) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} e_{i,j}^1 \\ e_{i,j}^2 \\ e_{i,j}^3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} e^1(\xi_i^1, \xi_{j-0,5}^2) \\ e^2(\xi_{i-0,5}^1, \xi_j^2) \\ e^3(\xi_{i-0,5}^1, \xi_{j-0,5}^2) \end{pmatrix}$$

où $g_2 \in \mathbb{R}^{mn \times 2m}$ et $K_2 \in \mathbb{R}^{n \times 2}$ tel que $K_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vdots \\ \vdots & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. On peut alors exprimer le vecteur f_d

$$f_d = \begin{pmatrix} 0 & 0 & D_1 \\ 0 & 0 & D_2 \\ -D_1^\top & -D_2^\top & 0 \end{pmatrix} e_d + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ g_1 & g_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{d\partial}^1 \\ e_{d\partial}^2 \\ e_{d\partial}^3 \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

où $J_d := \begin{pmatrix} 0 & 0 & D_1 \\ 0 & 0 & D_2 \\ -D_1^\top & -D_2^\top & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice antisymétrique. On définit la matrice d'entrée $g_d := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ g_1 & g_2 \end{pmatrix}$.

Proposition 7 : La discrétisation spatiale par l'utilisation des différences finies sur grilles rectilinéaires en quinconce du système 2D définit une structure de Dirac \mathcal{D}_d qui approxime la structure de Stokes Dirac originale. Le système discrétisé

$$\begin{cases} f_d = J_d e_d + g_d u_d \\ y_d = g_d^\top e_d \end{cases} \quad (3.19)$$

où $u_d = e_d^\partial$ et $y_d =: f_d^\partial$ est alors un SHP.

Démonstration. On pose $e'_d = \begin{pmatrix} e_d \\ e_d^\partial \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3mn+(m+n)} =: \mathcal{E}$, $f'_d = \begin{pmatrix} f_d \\ -f_d^\partial \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3mn+(m+n)} =: \mathcal{F}$ et $J' = \begin{pmatrix} J_d & g_d \\ -g_d^\top & 0 \end{pmatrix} = -J'^\top$ tel que $f'_d = J' e'_d$. $\mathcal{D}_d \subset \mathcal{F} \times \mathcal{E}$ est une structure de Dirac si et seulement si $\mathcal{D}_d = \mathcal{D}_d^\perp$ avec $\mathcal{D}_d^\perp = \{(f_1, f_2) \in \mathcal{F} \times \mathcal{E} \mid \langle (f_1, e_1) \mid (f_2, e_2) \rangle = 0 \forall (f_2, e_2) \in \mathcal{D}_d\}$. Prenons deux couples (f'_a, e'_a) et (f'_b, e'_b) quelconques dans \mathcal{D}_d ,

$$\begin{aligned} \langle (f'_a, e'_a) \mid (f'_b, e'_b) \rangle &= \langle e'_a, f'_b \rangle + \langle e'_b, f'_a \rangle \\ &= \langle e'_a, J' e'_b \rangle + \langle e'_b, J' e'_a \rangle \\ &= \langle e'_a, J' e'_b \rangle - \langle e'_a, J' e'_b \rangle \\ &= 0 \Leftrightarrow (f'_a, e'_a) \in \mathcal{D}_d^\perp \Leftrightarrow \mathcal{D}_d \subset \mathcal{D}_d^\perp. \end{aligned}$$

Prenons $(f'_a, e'_a) \in \mathcal{D}_d^\perp$ et $(f'_b, e'_b) \in \mathcal{D}_d$, quelconques. On a alors

$$\begin{aligned} \langle (f'_a, e'_a) \mid (f'_b, e'_b) \rangle &= 0 = \langle e'_a, f'_b \rangle + \langle e'_b, f'_a \rangle \\ &= \langle e'_a, J' e'_b \rangle + \langle e'_b, f'_a \rangle \\ &= -\langle e'_b, J' e'_a \rangle + \langle e'_b, f'_a \rangle. \end{aligned}$$

Comme cette égalité est vraie pour tout $(f'_b, e'_b) \in \mathcal{D}_d$, on a alors $f'_a = J' e'_a$ et donc $\mathcal{D}_d^\perp \subset \mathcal{D}_d$. \mathcal{D}_d est donc bien une structure de Dirac et

$$f_d^\partial = \begin{pmatrix} \frac{1}{h_1} e_{1,1}^3 & \frac{1}{h_1} e_{1,2}^3 & \cdots & \frac{1}{h_1} e_{1,n}^3 & -\frac{1}{h_1} e_{m,1}^3 & -\frac{1}{h_1} e_{m,2}^3 & \cdots & -\frac{1}{h_1} e_{m,n}^3 \\ \frac{1}{h_2} e_{1,1}^3 & -\frac{1}{h_2} e_{1,n}^3 & \frac{1}{h_2} e_{2,1}^3 & -\frac{1}{h_2} e_{2,n}^3 & \cdots & \frac{1}{h_2} e_{m,1}^3 & -\frac{1}{h_2} e_{m,n}^3 \end{pmatrix}^\top.$$

□

La variation d'énergie du système est alors donnée par

$$\begin{aligned} \dot{H}_d(t) = (e_d^\partial)^\top f_d^\partial = \sum_{i=1}^m \frac{1}{h_1} \left(e_{i,0}^2 e_{i,1}^3 - e_{i,n}^2 e_{i,n}^3 \right) + \\ \sum_{j=1}^n \frac{1}{h_2} \left(e_{0,j}^1 e_{1,j}^3 - e_{m,j}^1 e_{m,j}^3 \right). \end{aligned} \quad (3.20)$$

qui tend vers $\frac{1}{h_1 h_2} \dot{H}$, proportionnel à la variation d'énergie \dot{H} , quand h_1 et h_2 tendent vers 0.

3.3.2/ MAILLAGE TRIANGULAIRE RÉGULIER

Un maillage triangulaire régulier permet d'obtenir un schéma compact pour une meilleure approximation de la solution. La variable de flux $f_3 = -\partial_{\xi_1} e_1 - \partial_{\xi_2} e_2$ est alors approximée à partir de six points adjacent au lieu de quatre pour le cas rectilinéaire. L'utilisation de trois axes spatiaux pour la caractérisation de la propagation d'une onde permet en outre un meilleur respect de l'isotropie de la propagation. L'utilisation d'un maillage régulier, qu'il soit rectilinéaire ou triangulaire, ne permet pas toujours de faire correspondre les points du maillage à la géométrie de la frontière du domaine spatial. Dans notre cas, utiliser un maillage triangulaire régulier sur un domaine rectangulaire induit la définition de points du maillage de chaque côté de la frontière physique comme illustré Figure 3.6.

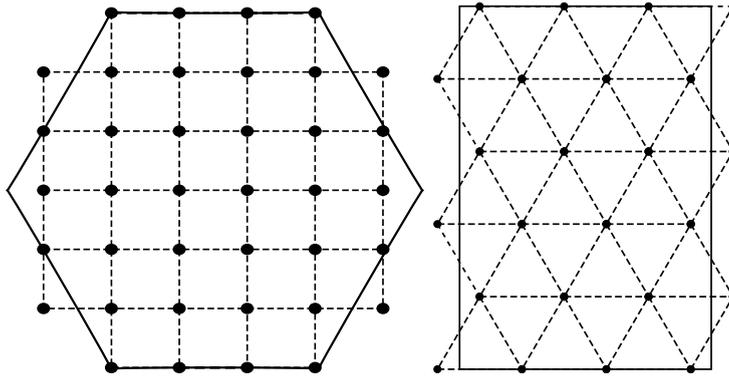


FIGURE 3.6: Exemples de maillages (pointillés) de domaines physiques (traits pleins) conduisant à une approximation en marches d'escaliers

Par soucis de simplicité, nous considérons ici l'approximation en marches d'escalier (*staircase approximation*), c'est à dire que le point du maillage le plus proche correspond à la frontière. Néanmoins, des travaux récents [34]

contournent ce problème en définissant des éléments non structurés basés sur des volumes finis pour faire correspondre la frontière du maillage à la géométrie du système discrétisé tout en mettant en oeuvre une méthode de différences finies dans le domaine. Dans la suite de cette section, on considère un maillage composé de triangles équilatéraux, ce qui ne permet donc pas de choisir un pas de discrétisation différent sur chaque axe.

Remarque 7 : *Un maillage triangulaire régulier sera généralement mieux adapté à des géométries présentant des frontières courbes car il correspondra mieux à la courbure de la frontière qu'un maillage rectilinéaire.*

Pour préserver la structure hamiltonienne à ports du système régi par l'équation d'onde 2D, il est nécessaire d'approximer les opérateurs différentiels du premier ordre gradient et divergence. Trois axes, α, β, γ , sont utilisés pour définir un maillage tel que montré sur la Figure 3.7. On note $\vec{u}_\alpha, \vec{u}_\beta, \vec{u}_\gamma$ les vecteurs unitaires de ces trois axes. Le pas de discrétisation h est défini Figure 3.7 comme étant égal à la longueur d'une arête des triangles constituant le maillage.

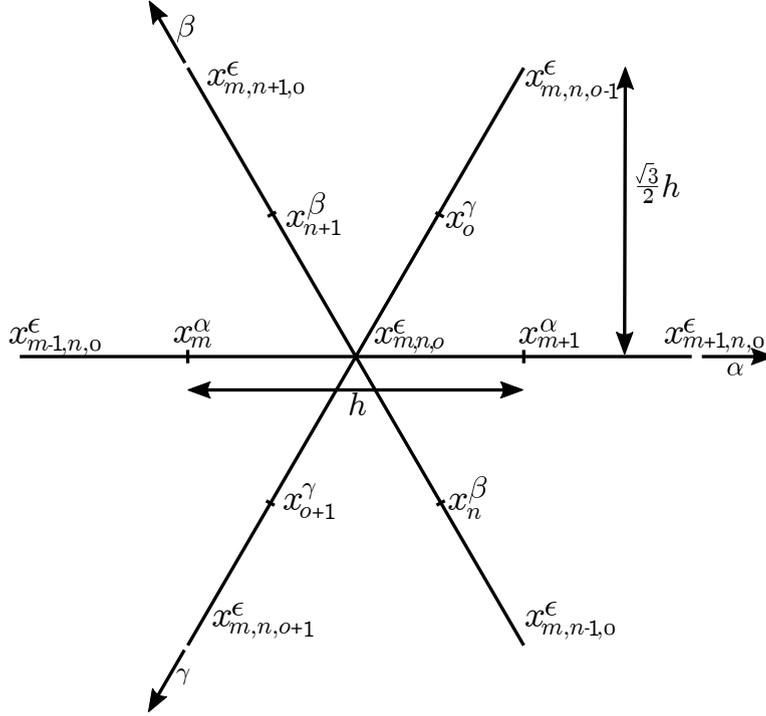
Il en résulte la définition d'un nouveau vecteur de variables d'état du système de dimension infinie, $(x_\alpha \ x_\beta \ x_\gamma \ x_\epsilon)^\top$, où les $x_{\alpha,\beta,\gamma}$ sont liés à l'état $(x_1 \ x_2 \ x_3)^\top$ par projection sur le repère cartésien, tels que

$$x_\alpha := x_1, \quad x_\beta := -\frac{1}{2}x_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}x_2, \quad x_\gamma := -\frac{1}{2}x_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}x_2 \quad \text{et} \quad e_\epsilon := x_3.$$

Les variables d'effort $(e_\alpha \ e_\beta \ e_\gamma \ e_\epsilon)^\top$ sont également définies en fonction de $(e_1 \ e_2)^\top$ par la même projection. Sur la Figure 3.7, les points sont numérotés à partir d'un point central arbitrairement numéroté par trois indices m, n et $o \in \mathbb{N}$ qui correspondent respectivement aux trois axes α, β et γ . Les approximations discrètes de $x_{\{\alpha,\beta,\gamma\}}$ s'écrivent respectivement x_m^α, x_n^β et x_o^γ . Ces indices sont incrémentés de 1 lorsqu'on numérote les points suivants des axes sur lesquels ils sont définis. L'approximation discrète de x_ϵ s'écrit $x_{m,n,o}^\epsilon$. Lorsqu'on considère le point suivant d'un des trois axes où x_ϵ est discrétisé, l'indice correspondant (m, n ou o) est incrémenté de 1. L'énergie totale du système est alors donnée par

$$\mathcal{H}(x_\alpha, x_\beta, x_\gamma, x_\epsilon) = \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} \left[\frac{1}{3} \frac{1}{\mu_0} (x_\alpha^2 + x_\beta^2 + x_\gamma^2) + \frac{1}{2} \frac{1}{\chi_s} x_\epsilon^2 \right] d\xi_1 d\xi_2 \quad (3.21)$$

où le premier terme dans l'intégrale correspond à la densité d'énergie cinétique E_c et le second terme à la densité d'énergie potentielle. En effet,


 FIGURE 3.7: Maillage triangulaire en quinconce pour $x^{\alpha..e}$

d'après l'expression de l'énergie dans les coordonnées d'origines il vient

$$\begin{aligned}
 E_c &= \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_0} (x_1^2 + x_2^2) \\
 &= \frac{1}{3} \frac{1}{\mu_0} \left(x_1^2 + \frac{1}{4} x_1^2 - \frac{\sqrt{3}}{2} x_1 x_2 + \frac{3}{4} x_2^2 + \frac{1}{4} x_1^2 + \frac{\sqrt{3}}{2} x_1 x_2 + \frac{3}{4} x_2^2 \right) \\
 &= \frac{1}{3\mu_0} x_1^2 + \frac{1}{3\mu_0} \left(-\frac{1}{2} x_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} x_2 \right)^2 + \frac{l_1}{3} \left(-\frac{1}{2} x_1 - \frac{\sqrt{3}}{2} x_2 \right)^2 \\
 &= \frac{1}{3\mu_0} (x_\alpha^2 + x_\beta^2 + x_\gamma^2).
 \end{aligned}$$

Dans [41] et [33], une approximation de l'opérateur laplacien pour l'équation d'onde s'appuie sur la symétrie du maillage triangulaire régulier. De ce schéma, symétrique pour chaque axe, découle naturellement le respect de l'isotropie de la propagation liée à l'opérateur Laplacien [33]

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} = \frac{2}{3} \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} \right). \quad (3.22)$$

Dans le même esprit, nous proposons une approximation des opérateurs différentiels d'ordre 1 de la représentation hamiltonienne à ports de l'onde. Définissons un point de coordonnées cartésiennes (ξ_k, ξ_l) et de coordonnées $(\alpha_m, \alpha_n, \gamma_o)$ dans notre nouveau système de coordonnées. Considérons l'opérateur gradient

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial x_3(\xi_k + 0.5h, \xi_l)}{\partial \alpha} = \frac{\partial x_\epsilon(\alpha_m + 0, 5h, \beta_n, \gamma_o)}{\partial \alpha} \\ \qquad \qquad \qquad \approx \frac{x_{m+1,n,o}^\epsilon - x_{m,n,o}^\epsilon}{h} \\ \\ \frac{\partial x_3(\xi_k - 0.25h, \xi_l + \frac{\sqrt{(3h)}}{4})}{\partial \beta} = \frac{\partial x_\epsilon(\alpha_m, \beta_n + 0, 5h, \gamma_o)}{\partial \beta} \\ \qquad \qquad \qquad \approx \frac{x_{m,n+1,o}^\epsilon - x_{m,n,o}^\epsilon}{h} \\ \\ \frac{\partial x_3(\xi_k + 0.25h, \xi_l + \frac{\sqrt{(3h)}}{4})}{\partial \gamma} = \frac{\partial x_\epsilon(\alpha_m, \beta_n, \gamma_o + 0, 5h)}{\partial \gamma} \\ \qquad \qquad \qquad \approx \frac{x_{m,n,o+1}^\epsilon - x_{m,n,o}^\epsilon}{h}. \end{array} \right. \quad (3.23)$$

L'approximation de l'opérateur divergent est quand à elle donnée par

$$\operatorname{div} \begin{pmatrix} x_\alpha(\alpha_m, \beta_n, \gamma_o) \\ x_\beta(\alpha_m, \beta_n, \gamma_o) \\ x_\gamma(\alpha_m, \beta_n, \gamma_o) \end{pmatrix} \approx \frac{2}{3h} (x_{m+1}^\alpha - x_m^\alpha + x_{n+1}^\beta - x_n^\beta + x_{o+1}^\gamma - x_0^\gamma). \quad (3.24)$$

On peut alors vérifier que la combinaison de ces opérateurs discrétisés conduit à une approximation du laplacien équivalente à (3.22). La grille de la Figure 3.7 peut être décrite comme l'interconnexion de SHP élémentaires définis grace à des hamiltoniens quadratiques représentant la contribution énergétique de chaque sous-système le long des différents axes

$$\Sigma_\alpha = \begin{cases} H_m^\alpha = \frac{1}{2} \frac{2}{3h\mu_0} (x_m^\alpha)^2 \\ \dot{x}_m^\alpha = 0 \frac{2}{3h\mu_0} x_m^\alpha + u_m^\alpha, \\ y_m^\alpha = \frac{2}{3h\mu_0} x_m^\alpha \end{cases}, \quad \Sigma_\beta = \begin{cases} H_n^\beta = \frac{1}{2} \frac{2}{3h\mu_0} (x_n^\beta)^2 \\ \dot{x}_n^\beta = 0 \frac{2}{3h\mu_0} x_n^\beta + u_n^\beta, \\ y_n^\beta = \frac{2}{3h\mu_0} x_n^\beta \end{cases}$$

3.3. DISCRÉTISATION 2D

$$\Sigma_\gamma = \begin{cases} H_o^\gamma = \frac{1}{2} \frac{2}{3h\mu_0} (x_o^\gamma)^2 \\ \dot{x}_o^\gamma = 0 \frac{2}{3h\mu_0} x_o^\gamma + u_o^\gamma, \\ y_o^\gamma = \frac{2}{3h\mu_0} x_o^\gamma \end{cases}, \quad \Sigma_\epsilon = \begin{cases} H_{m,n,o}^\epsilon = \frac{1}{2} \frac{1}{h\chi_s} (x_{m,n,o}^\epsilon)^2 \\ \dot{x}_{m,n,o}^\epsilon = 0 \frac{1}{h\chi_s} x_{m,n,o}^\epsilon + u_{m,n,o}^\epsilon \cdot \\ y_{m,n,o}^\epsilon = \frac{1}{h\chi_s} x_{m,n,o}^\epsilon \end{cases}$$

L'interconnexion conservatrice de puissance de ces sous-systèmes décrite par

$$\begin{pmatrix} u_m^\alpha \\ u_n^\beta \\ u_o^\gamma \\ u_{m,n,o}^\epsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & -1 \\ & 0_{3,3} & -1 \\ & & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_m^\alpha \\ y_n^\beta \\ y_o^\gamma \\ y_{m,n,o}^\epsilon \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{h\chi_s} x_{m-1,n,o}^\epsilon \\ \frac{1}{h\chi_s} x_{m,n-1,o}^\epsilon \\ \frac{1}{h\chi_s} x_{m,n,o-1}^\epsilon \\ -\frac{2}{3h\mu_0} (x_{m+1}^\alpha + x_{n+1}^\beta + x_{o+1}^\gamma) \end{pmatrix}$$

qui sur l'exemple de la grille de la Figure 3.7, mène au système discrétisé suivant

$$\left\{ \begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x}_m^\alpha \\ \dot{x}_{m+1}^\alpha \\ \dot{x}_n^\beta \\ \dot{x}_{n+1}^\beta \\ \dot{x}_o^\gamma \\ \dot{x}_{o+1}^\gamma \\ \dot{x}_{m,n,o}^\epsilon \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} & & & & -1 \\ & & & & -1 \\ & & 0_{6,6} & & -1 \\ & & & & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3h\mu_0} I_{6,6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{h\chi_s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_m^\alpha \\ x_{m+1}^\alpha \\ x_n^\beta \\ x_{n+1}^\beta \\ x_o^\gamma \\ x_{o+1}^\gamma \\ x_{m,n,o}^\epsilon \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} I_{6,6} \\ 0_{1,6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{h\chi_s} x_{m-1,n,o}^\epsilon \\ -\frac{1}{h\chi_s} x_{m+1,n,o}^\epsilon \\ \frac{1}{h\chi_s} x_{m,n-1,o}^\epsilon \\ -\frac{1}{h\chi_s} x_{m,n+1,o}^\epsilon \\ \frac{1}{h\chi_s} x_{m,n,o-1}^\epsilon \\ -\frac{1}{h\chi_s} x_{m,n,o+1}^\epsilon \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x_m^\alpha \\ x_{m+1}^\alpha \\ x_n^\beta \\ x_{n+1}^\beta \\ x_o^\gamma \\ x_{o+1}^\gamma \end{pmatrix} &= (I_{6,6} \ 0_{6,1}) \begin{pmatrix} x_m^\alpha \\ x_{m+1}^\alpha \\ x_n^\beta \\ x_{n+1}^\beta \\ x_o^\gamma \\ x_{o+1}^\gamma \\ x_{m,n,o}^\epsilon \end{pmatrix}. \end{aligned} \right. \quad (3.25)$$

Considérons maintenant la discrétisation de l'approximation 2D du système acoustique telle que considérée dans la section précédente, avec les mêmes

conditions (page 55) imposées à la frontière. Ces conditions reviennent dans le cas triangulaire à imposer e_α , e_β ou e_γ à la frontière. Le choix du pas de discrétisation h peut induire plusieurs configurations du maillage triangulaire et conduire à un nombre de triangles au long de l'axe ξ_2 qui peut alors être pair ou impair. Un exemple de maillage triangulaire régulier pour ce système est illustré Figure 3.8 pour un nombre pair de triangles par colonne. Le développement qui suit est toutefois valable quel que soit h , et donc pour un nombre de triangles par colonne pair ou impair.

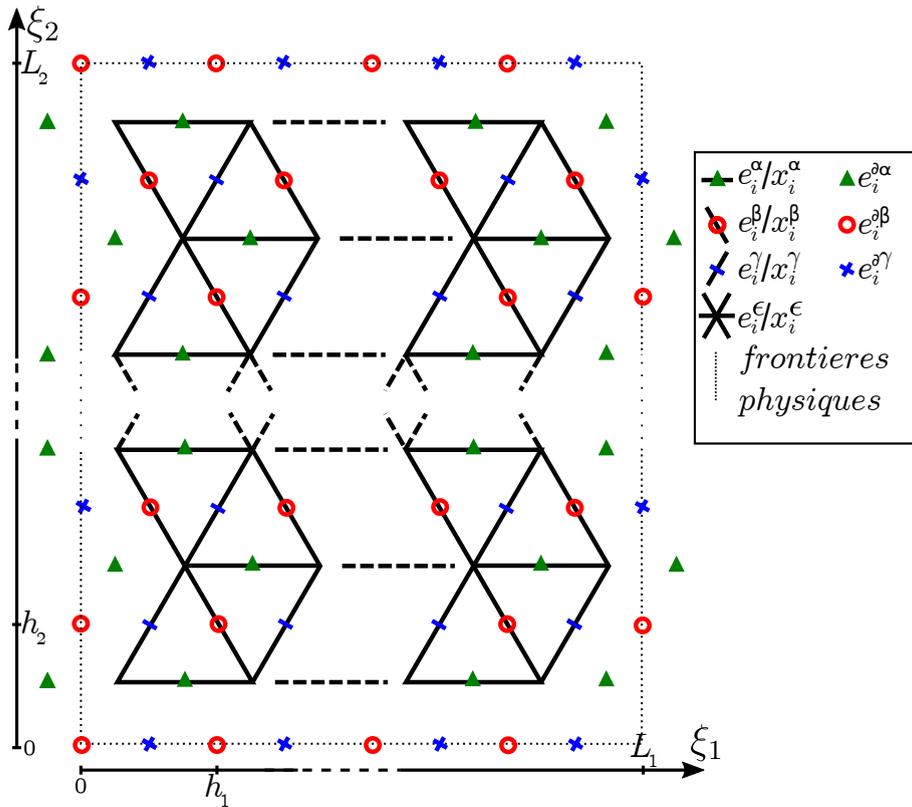


FIGURE 3.8: Exemple de maillages triangulaires réguliers en quinconce

Notons n_{tl} le nombre de triangles de même orientation par ligne et n_{tc} le nombre total de triangles par colonne. Comme la numérotation $x_{m,n,o}^\epsilon$ employée précédemment se base sur un système de trois coordonnées dans un espace 2D, un même point peut être écrit selon plusieurs indices. Par exemple, $x_{m,n-1,o}^\epsilon = x_{m+1,n,o+1}^\epsilon$. Cette redondance rend impossible d'exprimer l'interconnexion du schéma telle que définie sur la Figure 3.7 pour aboutir à une discrétisation de la grille complète. Il est donc nécessaire de définir une nou-

3.3. DISCRÉTISATION 2D

velle numérotation des points discrets. La manière la plus simple consiste à considérer une numérotation "pseudo cartésienne" telle que décrite sur la Figure 3.9.

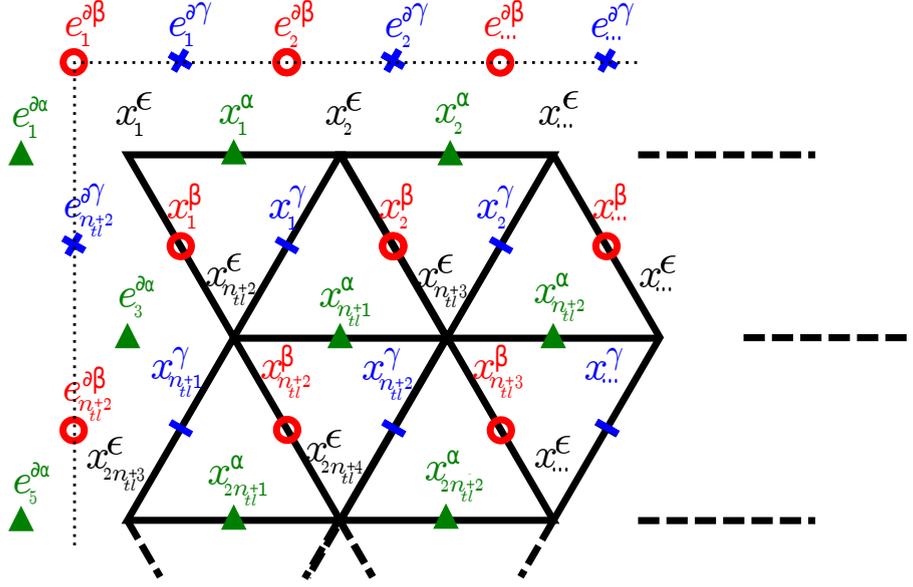


FIGURE 3.9: Maillage triangulaire régulier en quinconce numéroté pour la discrétisation des variables d'état/effort

Dans ce nouveau système de numérotation, pour chaque variable l'indice est incrémenté de 1 lorsqu'on se déplace de gauche à droite. On incrémente également l'indice de 1 entre le point le plus à droite d'une ligne et le point à l'extrême gauche de la ligne suivante. Les points à la frontière du domaine sont numérotés selon le même procédé. On définit en fonction de n_{tl} et n_{tc} les nombres n_α , n_β , n_γ et n_ϵ , qui sont les nombres de points où x_α , x_β , x_γ et x_ϵ sont approximés,

$$\begin{cases} n_\alpha = n_{tl}(n_{tc} + 1) \\ n_\beta = \begin{cases} (n_{tl} + 0, 5)n_{tc} & \text{si } n_{tc} \text{ pair} \\ 0, 5((n_{tl} + 1)(n_{tc} + 1) + (n_{tl}(n_{tc} - 1))) & \text{si } n_{tc} \text{ impair} \end{cases} \\ n_\gamma = \begin{cases} (n_{tl} + 0, 5)n_{tc} & \text{si } n_{tc} \text{ pair} \\ 0, 5(n_{tl}(n_{tc} + 1) + ((n_{tl} + 1)(n_{tc} - 1))) & \text{si } n_{tc} \text{ impair} \end{cases} \\ n_\epsilon = (n_{tl} + 1)(n_{tc} + 1) \\ n_d := \sum n_{\{\alpha \dots \epsilon\}} \end{cases}$$

On exprime alors le vecteur d'état discrétisé

$$x_d = \left((x_d^\alpha)^\top \quad (x_d^\beta)^\top \quad (x_d^\gamma)^\top \quad (x_d^\epsilon)^\top \right)^\top \in \mathbb{R}^{n_d} \text{ où}$$

$$\begin{cases} x_d^\alpha = (x_1^\alpha \dots x_{n_\alpha}^\alpha)^\top \\ x_d^\beta = (x_1^\beta \dots x_{n_\beta}^\beta)^\top \\ x_d^\gamma = (x_1^\gamma \dots x_{n_\gamma}^\gamma)^\top \\ x_d^\epsilon = (x_1^\epsilon \dots x_{n_\epsilon}^\epsilon)^\top. \end{cases}$$

De même, on définit en fonction de n_{tl} , n_{tc} les nombres $n_{\{\alpha \dots \epsilon\}}^\partial$ de points à la frontière où les efforts $e^{\partial\{\alpha \dots \epsilon\}}$ sont imposés

$$\begin{cases} n_\alpha^\partial = 2(n_{tc} + 1) \\ n_\beta^\partial = 2(n_{tl} + 1) + \begin{cases} n_{tc} & \text{si } n_{tc} \text{ pair} \\ n_{tc} - 1 & \text{so } n_{tc} \text{ impair} \end{cases} \\ n_\gamma^\partial = 2(n_{tl} + 1) + \begin{cases} n_{tc} & \text{si } n_{tc} \text{ pair} \\ n_{tc} + 1 & \text{si } n_{tc} \text{ impair} \end{cases} \\ n_\epsilon^\partial = 0 \\ n_d^\partial := \Sigma n_{\{\alpha \dots \epsilon\}}^\partial. \end{cases} \quad (3.26)$$

On exprime alors les variables d'efforts discrétisées à la frontière $e_{d1}^\partial = ((e_{d\partial}^\alpha)^\top \quad (e_{d\partial}^\beta)^\top \quad (e_{d\partial}^\gamma)^\top \quad (e_{d\partial}^\epsilon)^\top)^\top \in \mathbb{R}^{n_d^\partial}$ où

$$\begin{cases} e_{d\partial}^\alpha = (e_1^{\partial\alpha} \dots e_{n_\alpha^\partial}^{\partial\alpha})^\top \\ e_{d\partial}^\beta = (e_1^{\partial\beta} \dots e_{n_\beta^\partial}^{\partial\beta})^\top \\ e_{d\partial}^\gamma = (e_1^{\partial\gamma} \dots e_{n_\gamma^\partial}^{\partial\gamma})^\top \\ e_{d\partial}^\epsilon = (e_1^{\partial\epsilon} \dots e_{n_\epsilon^\partial}^{\partial\epsilon})^\top. \end{cases}$$

On définit un hamiltonien discret

$$H_d := \frac{1}{2} x_d^\top \mathcal{L}_d x_d \quad (3.27)$$

où $\mathcal{L}_d \in \mathbb{R}^{n_d \times n_d}$ est une matrice diagonale qui correspond à l'évaluation sur les points du maillage de $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathcal{L}$. Notons que

$$H_d = \sum_{i=1}^{n_\alpha} \frac{2}{3\mu_0} (x_i^\alpha)^2 + \sum_{j=1}^{n_\beta} \frac{2}{3\mu_0} (x_j^\beta)^2 + \sum_{k=1}^{n_\gamma} \frac{2}{3\mu_0} (x_k^\gamma)^2 + \sum_{l=1}^{n_\epsilon} \frac{1}{\chi_s} (x_l^\epsilon)^2$$

3.3. DISCRÉTISATION 2D

implique que $h^2 H_d$ tend vers \mathcal{H} quand n_d tend vers l'infini.

On définit le vecteur d'effort discret

$$e_d := \frac{\partial H_d}{\partial x_d} = \mathcal{L}_d x_d \quad (3.28)$$

avec $e_d =: \left((e_d^\alpha)^\top \ (e_d^\beta)^\top \ (e_d^\gamma)^\top \ (e_d^\epsilon)^\top \right)^\top$, où $e_d^{\{\alpha.. \epsilon\}}$ sont des vecteurs respectivement de mêmes dimensions que les vecteurs d'état $x_d^{\{\alpha.. \epsilon\}}$. Afin d'obtenir l'expression de l'approximation des variables de flux, il est nécessaire d'introduire les notations suivantes :

$$K_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n_{tl} \times n_{tn} + 1}$$

$$K_2 = I_{n_{tl} + 1}, \quad K_3 = \begin{pmatrix} & 0 \\ I_{n_{tl}} & \vdots \\ & 0 \end{pmatrix}, \quad K_4 = \begin{pmatrix} 0 & \\ \vdots & I_{n_{tl}} \\ 0 & \end{pmatrix}.$$

L'opérateur différentiel $\frac{\partial}{\partial \alpha}$ est approximé par l'opérateur matriciel $D_1 \in \mathbb{R}^{n_\alpha \times n_\epsilon}$

$$D_1 = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} K_1 & & \\ & \ddots & \\ & & K_1 \end{pmatrix},$$

l'opérateur $\frac{\partial}{\partial \beta}$ par la matrice $D_2 = D_2^+ - D_2^- \in \mathbb{R}^{n_\beta \times n_\epsilon}$ où

$$\begin{cases} D_2^+ = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} K_2 & & & \\ & K_3 & & \\ & & K_2 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0_{n_b, n_{tl} + 1} \end{pmatrix} \\ D_2^- = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} & & & & \\ & & & & \\ & & K_2 & & \\ 0_{n_b, n_{tl} + 1} & & & K_4 & \\ & & & & K_2 \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix} \end{cases}$$

et l'opérateur $\frac{\partial}{\partial \gamma}$ par la matrice $D_3 = D_3^+ - D_3^- \in \mathbb{R}^{n_\gamma \times n_\epsilon}$ où

$$\begin{cases} D_3^+ = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} & & K_3 & & \\ & & & K_2 & \\ 0_{n_c, n_{tl}+1} & & & & K_3 \\ & & & & \ddots \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \\ D_3^- = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} K_4 & & & & \\ & K_2 & & & \\ & & K_4 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0_{n_c, n_{tl}+1} \end{pmatrix}. \end{cases} \quad (3.29)$$

De plus, définissons les matrices²

$$\begin{aligned} K_1^\partial &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0_{(n_{tl}-1), 2} & \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad K_2^\partial = \begin{pmatrix} 0_{n_{tl}, 2} \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0_{n_{tl}, 2} \end{pmatrix}, \quad K_3^\partial = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0_{2n_{tl}, 2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ K_4^\partial &= \begin{pmatrix} K_2^\partial & & \\ & \ddots & \\ & & K_2^\partial \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2(n_{tl}+1)\text{inf}(n_{tc}/2) \times 2\text{inf}(n_{tc}/2)} \\ K_5^\partial &= \begin{pmatrix} K_3^\partial & & \\ & \ddots & \\ & & K_3^\partial \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2(n_{tl}+1)\text{sup}(n_{tc}/2) \times 2\text{sup}(n_{tc}/2)} \end{aligned} \quad (3.30)$$

et la matrice $g_d \in \mathbb{R}^{n_d \times n_d^\partial}$ d'entrée de l'effort frontière

$$\begin{aligned} g_d &= \frac{2}{3} \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 0_{n_\alpha + n_\beta + n_\gamma, n_d^\partial} \\ g_\alpha & g_\beta & g_\gamma \end{pmatrix} \\ \text{où } g_\alpha &= \begin{pmatrix} K_1 & & \\ & \ddots & \\ & & K_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n_\epsilon, n_\alpha^\partial}, \\ g_\beta &= \begin{pmatrix} 0_{n_{tl}+1} & & \\ & K_4^\partial & \\ & & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -I_{n_{tl}+1} & & \\ & 0 & \\ & & I_{n_{tl}+1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n_\epsilon, n_\beta^\partial}, \end{aligned}$$

2. $\text{inf}(x)$ est l'arrondi à l'entier inférieur de x et $\text{sup}(x)$ est l'arrondi à l'entier supérieur de x

$$g_\gamma = \begin{pmatrix} 0_{n_{tl}+1} & & \\ & K_5^\partial & \\ & & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -I_{n_{tl}+1} & & \\ & 0 & \\ & & I_{n_{tl}+1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n_\epsilon, n_\gamma^\partial}.$$

Une approximation des variables de flux discrétisées f_d est alors donnée par

$$f_d = J_d e_d + g_{d1} e_{d1}^\partial$$

$$\text{où } J_d = \begin{pmatrix} & & & -D_1 \\ & 0 & & -D_2 \\ & & & -D_3 \\ D_1^\top & D_2^\top & D_3^\top & 0 \end{pmatrix}.$$

Proposition 8 : *La discrétisation spatiale du système 2D par l'utilisation des différences finies sur grilles en quinconce pour un maillage triangulaire régulier définit une structure de Dirac \mathcal{D}_d qui approxime la structure de Stokes Dirac originale. Le système discrétisé*

$$\begin{cases} f_d = J_d e_d + g_d u_d \\ y_d = g_d^\top e_d \end{cases} \quad (3.31)$$

où $u_d = e_d^\partial$ et $y_d =: f_d^\partial$ est alors un SHP.

Démonstration. On pose $e'_d = \begin{pmatrix} e_d \\ e_d^\partial \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n_d+n_d^\partial} =: \mathcal{E}$, $f'_d = \begin{pmatrix} f_d \\ -f_d^\partial \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n_d+n_d^\partial} =: \mathcal{F}$ et $J' = \begin{pmatrix} J_d & g_d \\ -g_d^\top & 0 \end{pmatrix} = -J'^\top$ tel que $f'_d = J' e'_d$. $\mathcal{D} \subset \mathcal{F} \times \mathcal{E}$ est une structure de Dirac si et seulement si $\mathcal{D} = \mathcal{D}^\perp$ avec $\mathcal{D}^\perp = \{(f_1, f_2) \in \mathcal{F} \times \mathcal{E} \mid \langle (f_1, e_1) \mid (f_2, e_2) \rangle = 0 \forall (f_2, e_2) \in \mathcal{D}\}$. Prenons deux couples (f'_a, e'_a) et (f'_b, e'_b) quelconques dans \mathcal{D} ,

$$\begin{aligned} \langle (f'_a, e'_a) \mid (f'_b, e'_b) \rangle &= \langle e'_a, f'_b \rangle + \langle e'_b, f'_a \rangle \\ &= \langle e'_a, J' e'_b \rangle + \langle e'_b, J' e'_a \rangle \\ &= \langle e'_a, J' e'_b \rangle - \langle e'_a, J' e'_b \rangle \\ &= 0 \Leftrightarrow (f'_a, e'_a) \in \mathcal{D}^\perp \Leftrightarrow \mathcal{D} \subset \mathcal{D}^\perp. \end{aligned}$$

Prenons $(f'_a, e'_a) \in \mathcal{D}^\perp$ et $(f'_b, e'_b) \in \mathcal{D}$, quelconques. On a alors

$$\begin{aligned} \langle (f'_a, e'_a) \mid (f'_b, e'_b) \rangle &= 0 \\ &= \langle e'_a, f'_b \rangle + \langle e'_b, f'_a \rangle \\ &= \langle e'_a, J' e'_b \rangle + \langle e'_b, f'_a \rangle \\ &= -\langle e'_b, J' e'_a \rangle + \langle e'_b, f'_a \rangle. \end{aligned}$$

Comme cette égalité est vraie pour tout $(f'_b, e'_b) \in \mathcal{D}$, on a alors $f'_a = J'e'_a$ et donc $\mathcal{D}^\top \subset \mathcal{D}$. \mathcal{D} est donc bien une structure de Dirac pour

$$f_d^\partial = g_{d1}^\top e_d^\partial = \frac{1}{h} ((f_{d\partial}^\alpha)^\top (f_{d\partial}^\beta)^\top (f_{d\partial}^\gamma)^\top (f_{d\partial}^\epsilon)^\top)^\top$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{d\partial}^\alpha = \frac{2}{3} (e_1^\epsilon - e_{n_{tl}+1}^\epsilon e_{(n_{tl}+1)+1}^\epsilon - e_{2(n_{tl}+1)}^\epsilon e_{2(n_{tl}+1)+1}^\epsilon \\ \dots e_{n_{tc}(n_{tl}+1)+1}^\epsilon - e_{(n_{tc}+1)(n_{tl}+1)}^\epsilon)^\top \in \mathbb{R}^{n_\alpha^\partial} \\ f_{d\partial}^\beta = \frac{2}{3} (-e_1^\epsilon \dots - e_{n_{tl}+1}^\epsilon - e_{2(n_{tl}+1)+1}^\epsilon e_{2(n_{tl}+1)}^\epsilon - e_{4(n_{tl}+1)+1}^\epsilon \\ e_{4(n_{tl}+1)}^\epsilon \dots e_{(n_{tc})(n_{tl}+1)+1}^\epsilon \dots e_{(n_{tc}+1)(n_{tl}+1)}^\epsilon)^\top \in \mathbb{R}^{n_\beta^\partial} \\ f_{d\partial}^\gamma = \frac{2}{3} (e_1^\epsilon \dots e_{n_{tl}+1}^\epsilon - e_1^\epsilon e_{2(n_{tl}+1)}^\epsilon - e_{2(n_{tl}+1)+1}^\epsilon \\ - e_{4(n_{tl}+1)}^\epsilon \dots - e_{(n_{tc})(n_{tl}+1)+1}^\epsilon \dots - e_{(n_{tc}+1)(n_{tl}+1)}^\epsilon)^\top \in \mathbb{R}^{n_\gamma^\partial} \\ f_{d\partial}^\epsilon = \{\}. \end{array} \right.$$

□

Pour le schéma de discrétisation proposé, les conditions frontières sont imposées par les variables d'effort à la frontière e_d^∂ . S'il est possible d'imposer une condition sur e^ϵ avec la méthode des différences finies traditionnelles, ce n'est pas le cas pour une condition sur e^α , e^β ou e^γ . Notons qu'imposer e^α , e^β ou e^γ sur la frontière revient toujours à imposer la composante de $\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$ normale à la frontière du domaine car ces variables d'effort à la frontière influent sur l'approximation de l'opérateur divergence. Par exemple, on peut imposer une impédance normale Z au point M de la frontière en haut de la Figure 3.8 telle que $Z e^2(M, t) = e^3(M, t)$ en coordonnées cartésiennes en imposant $e_i^\beta = \frac{2}{3} Z^{-1} e_i^\epsilon$, $e_i^\gamma = -\frac{2}{3} Z^{-1} e_i^\epsilon$ où i est l'index discret correspondant au point M .

3.4/ SIMULATIONS

Dans cette partie, les méthodes de discrétisation proposées sont implémentées sur MATLAB®. Les avantages et limites des différents schémas numériques sont étudiés. On considérera les valeurs suivantes - correspondant à la propagation d'un son dans l'air - pour les applications numériques :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_0} &= 0,8163 \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \\ \frac{1}{\chi_s} &= 1,4161 \cdot 10^5 \text{ Pa} \end{aligned}$$

3.4. SIMULATIONS

$$c = 340 \text{ m.s}^{-1}.$$

3.4.1/ INTÉGRATION TEMPORELLE

Nous choisissons d'employer la règle du point milieu implicite (*implicit midpoint method*) pour sa simplicité et car elle est la seule méthode d'Euler consistante à l'ordre 2 [32]. Dans les travaux de [25], il est également montré que cette méthode induit une très faible erreur sur la représentation de l'énergie et que dans le cas linéaire, correspondant à un hamiltonien quadratique, elle coïncide avec la méthode du gradient discret et est conservative d'énergie. Pour une équation aux dérivées ordinaires définie par $\dot{x} = g(x)$ où $x \in \mathbb{R}^n$, la règle du point milieu pour un pas d'intégration temporel constant $\tau \in \mathbb{R}^+$ tel que $x_{k_t} \approx x(k_t\tau)$ ($k_t \in \mathbb{N}$) donne

$$x_{k_t+1} = x_{k_t} + \tau g \left(\frac{x_{k_t} + x_{k_t+1}}{2} \right).$$

On considère un SHP en dimension finie de la forme

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (J - R) \frac{\partial H(x, t)}{\partial x} + gu \\ y = g^\top \frac{\partial H}{\partial x} \end{cases}$$

où $H := \frac{1}{2}x^\top Lx$ est un hamiltonien de forme quadratique avec $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$, une matrice diagonale par blocs définie positive. $J = -J^\top$ et $R > 0$ appartiennent à $\mathbb{R}^{n \times n}$.

L'application de la règle du point milieu implicite à ce SHP donne

$$\begin{aligned} x_{k_t+1} &= x_{k_t} + \tau \left((J - R)L \frac{x_{k_t} + x_{k_t+1}}{2} + g \frac{u_{k_t} + u_{k_t+1}}{2} \right) \\ x_{k_t+1} &= \left(I_n - \frac{\tau}{2}(J - R)L \right)^{-1} \times \left(x_{k_t} + \frac{\tau}{2}((J - R)Lx_{k_t} + g(u_{k_t} + u_{k_t+1})) \right). \end{aligned}$$

Ce schéma peut être employé pour tout système avec $I_n - \frac{\tau}{2}(J - R)L$ inversible, le choix du pas d'intégration τ influant sur cette inversibilité.

3.4.2/ CAS 1D - SYSTÈME EN BOUCLE OUVERTE

La propagation d'une condition initiale gaussienne au centre du domaine

spatial 1D est présentée sur la Figure 3.10 pour des conditions frontières parfaitement réfléchissantes ($e_{d\partial}^1 = 0$). On considère sur cette figure un pas spatial $h = 2$ cm et un domaine de longueur $L = 1$ m. On simule le comportement du système sur un temps de $T = 20$ ms avec un pas de temps $\tau = 44.4 \mu\text{s}$. Le pas spatial est choisi de sorte qu'on puisse observer des différences significatives entre les différentes méthodes. Les deux premières sous-figures représentent les variables d'état discrétisées par la méthode des différences finies à grilles en quinconce proposée dans ce chapitre, pour une intégration temporelle selon la règle du point milieu implicite. Dans la seconde ligne de sous-figures l'intégration temporelle de Störmer Verlet, qui est une méthode symplectique à deux étapes pour systèmes à hamiltoniens séparables [32], est employée sur le même système discrétisé. Sur la figure en bas à gauche, une discrétisation spatiale et temporelle selon la méthode des différences finies traditionnelle est réalisée à partir de la représentation classique de l'équation d'onde. La sous-figure en bas à droite montre l'énergie totale au cours du temps pour les intégrations temporelles de Störmer Verlet et de la règle du point milieu.

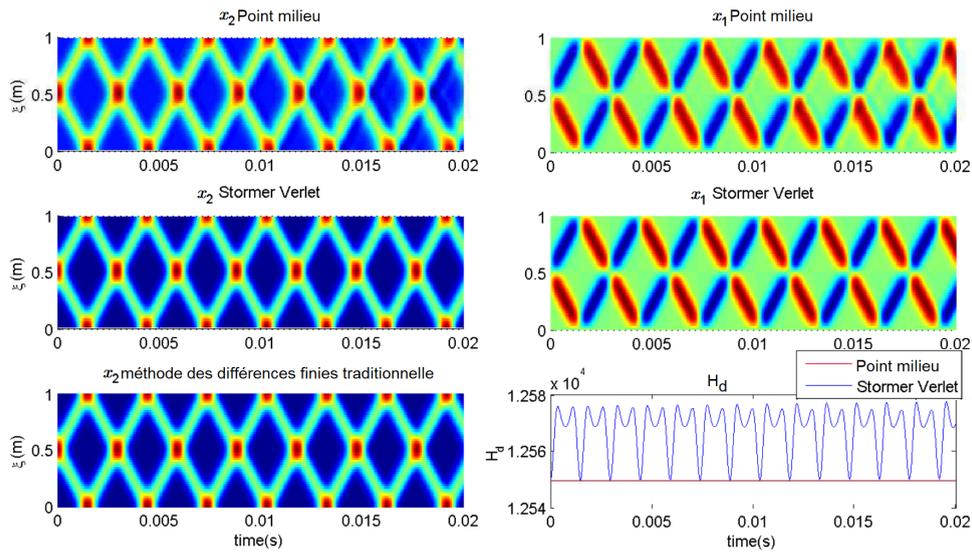


FIGURE 3.10: Propagation 1D d'une condition initiale gaussienne, comparaison avec la méthode des différences finies, pas d'intégration $\tau \approx 44,4 \mu\text{s}$, $h \approx 2,0$ cm

La Figure 3.10 illustre des avantages de la méthode de discrétisation spatiale par différences finies à grilles en quinconce sur les différences finies tradition-

nelles. On y voit que l'état complet du système est rendu explicite et que l'énergie totale peut donc être directement calculée à partir des variables d'état.

De la dispersion numérique peut être observée, particulièrement dans le cas de la méthode du point milieu lorsqu'elle est utilisée avec un pas d'intégration temporelle trop grand. Ces résultats suggèrent que si la dispersion numérique ne peut pas être limitée par le choix d'un pas temporel suffisamment petit, par exemple pour des raisons de puissance de calcul limitée, on peut choisir d'utiliser l'intégration de Stormer Verlet au lieu de la règle du point milieu. Cependant, comme on peut le voir sur la dernière sous-figure, ce choix se fait au prix d'une représentation moins réaliste de l'énergie totale du système. L'énergie totale du système doit en effet rester constante comme on considère un système conservatif. La méthode de Störmer Verlet est par conséquent moins adaptée pour l'élaboration de lois de commande basées sur l'énergie.

Dans la sous-section suivante, la méthode de discrétisation utilisant une intégration par la méthode du point milieu implicite est appliqué au système commandé à la frontière.

3.4.3/ CAS 1D - CONTRÔLE FRONTIÈRE

La propagation de la même condition initiale gaussienne est à présent considérée en boucle fermée, avec un contrôleur en place à la frontière $\xi = L = 1$ m. La simulation est réalisée pour un temps $T = 10$ ms et un pas temporel $\tau = 5 \mu\text{s}$ pour un pas spatial $h = 2$ cm. Un contrôle d'adaptation d'impédance correspondant à une condition parfaitement absorbante [47] est considéré. Cette loi est implémentée en imposant la condition frontière

$$e_d^\partial(2) = -\frac{h}{c\mu_0} f_d^\partial(2)$$

où $e_d^\partial(2)$ et $f_d^\partial(2)$ représentent respectivement la deuxième composante des vecteurs e_d^∂ et f_d^∂ . Cette condition peut également être interprétée comme étant l'interconnexion de l'équation d'onde discrétisée avec le contrôleur frontière

$$y_c = \frac{1}{c\mu_0} h u_c, \quad (3.32)$$

de telle sorte que

$$\begin{pmatrix} e_d^\partial(1) \\ e_d^\partial(2) \\ u_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_d^\partial(1) \\ f_d^\partial(2) \\ y_c \end{pmatrix}. \quad (3.33)$$

La Figure 3.11 illustre le comportement en boucle fermée du système et montre l'évolution de l'approximation de l'énergie totale.

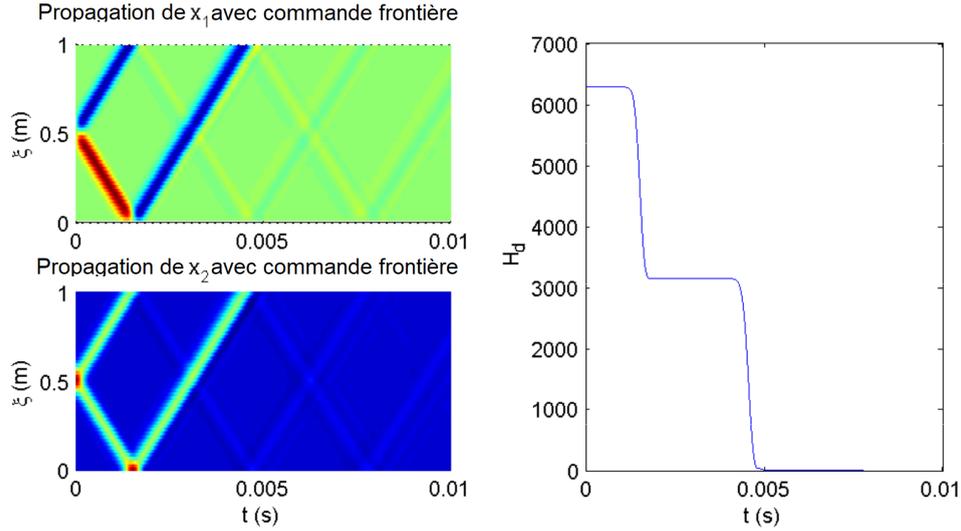


FIGURE 3.11: Propagation 1D d'une condition initiale gaussienne dans le cas d'un contrôle frontière , $\tau = 5 \mu\text{s}$, $h = 2 \text{ cm}$

On observe une dissipation valant approximativement la moitié de l'énergie totale initiale chaque fois que l'onde atteint la frontière en $\xi = 1$, ce qui correspond au comportement d'une frontière parfaitement absorbante. Comme les méthodes de discrétisation les plus utilisées telles que la méthode des différences finies ne permettent pas d'imposer directement les variables d'effort à la frontière, elles ne peuvent pas être directement utilisées afin d'étudier les performances de ce type de contrôle.

3.4.4/ CAS 2D

Cette sous-section présente des résultats numériques pour le système 2D issu des discrétisations rectilinéaire et triangulaire proposées dans ce chapitre. Des simulations en boucle ouverte et fermée sont présentées. On rappelle que dans un contexte acoustique, les variables d'effort e^3 et e^e représentent la pression acoustique p . La simulation est réalisée pour un temps $T = 0.2 \text{ s}$ pour un pas temporel de $\tau = 0.6 \text{ ms}$. Le même nombre de points discrétisés est utilisé pour les cas rectilinéaires et triangulaire $n_{tl} + 1 = m = 50$, $n_{tc+1} = n = 5$ avec un pas spatial unitaire $h = h_1 = h_2 = 1 \text{ m}$. Des condi-

3.4. SIMULATIONS

tions de parois parfaitement réfléchissantes $e_2 = 0$ sont imposées sur les frontières $\xi_2 = 0$ et $\xi_2 = L_2$. Pour une meilleure illustration des résultats, la sortie anéchoïque en $\xi_1 = L_1$ sur le système physique est remplacée par une condition parfaitement réfléchissante. L'entrée considérée est une onde plane sinusoidale injectée dans par la frontière en $\xi_1 = 0$. La longueur d'onde de cette entrée est choisie telle que $\lambda = \frac{L_1}{5}$, ce qui implique que la longueur du domaine spatial est un multiple de λ . Ce choix, combiné au choix d'une condition parfaitement réfléchissante en $\xi_1 = L_1$, correspond au pire scénario possible pour le cas triangulaire. En effet, la réflexion de l'onde sur la frontière $\xi_1 = L_1$ induit une interférence parfaitement constructive qui ne peut pas être simulée en utilisant le maillage triangulaire régulier à cause de l'approximation en marches d'escalier à la frontière.

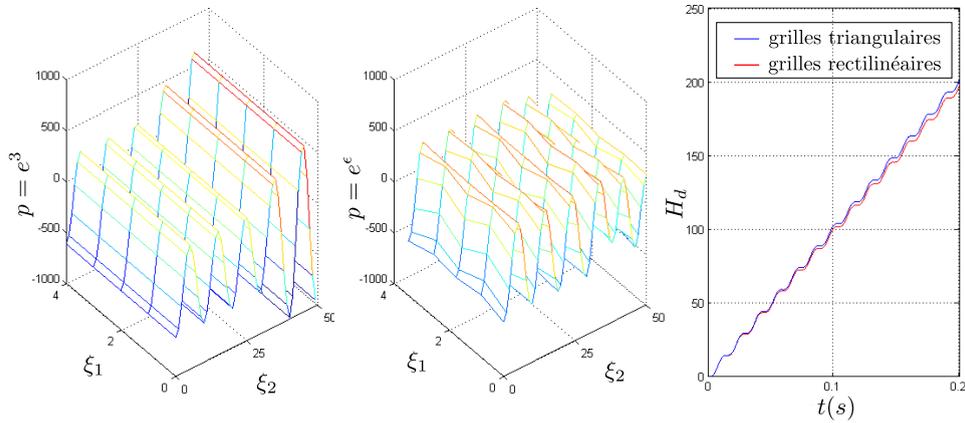


FIGURE 3.12: Propagation d'une onde plane en boucle ouverte

Les Figures 3.12 et 3.13 présentent respectivement les simulations en boucle ouverte et fermée. Sur ces figures, les images 3D montrent des profils de pression à $t = 0, 2$ s. Les courbes représentant l'évolution de l'hamiltonien Figure 3.12 montrent une évolution similaire de l'énergie totale pour les deux schémas de discrétisation. La différence entre les deux images 3D Figure 3.12 est due à l'approximation en marche d'escalier à la frontière $\xi_1 = L$ dans le cas du maillage triangulaire régulier. En effet, cette approximation ne permet pas la préservation de la forme de l'onde réfléchie dans ce scénario du pire. Ce résultat était attendu puisque le maillage triangulaire régulier est mieux adapté à des géométries plus complexes.

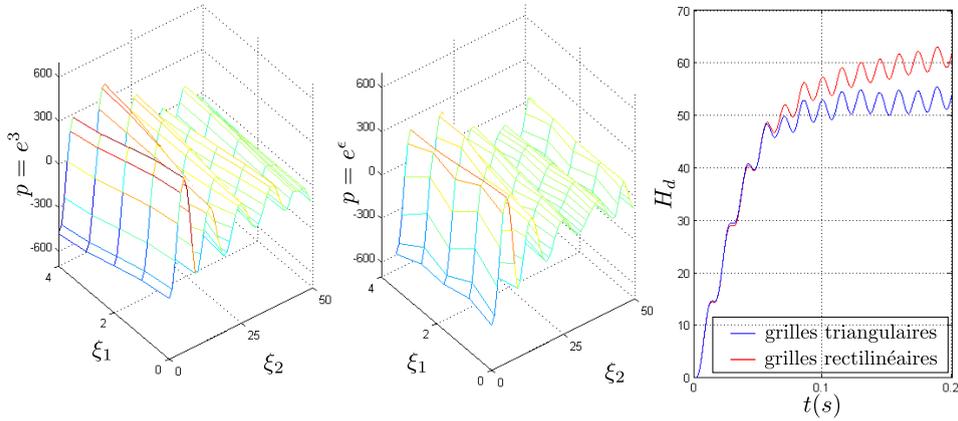


FIGURE 3.13: Propagation d'une onde plane en boucle fermée

Concernant le cas en boucle fermée illustré Figure 3.13, une loi de commande est mise en place sur une portion de la frontière $\xi_2 = 0$ telle que $\xi_1 \in \left[\frac{L_1}{3}, \frac{2L_1}{3}\right]$ qui correspond à la surface active du système physique. La loi de commande correspond à une condition frontière absorbante telle que $\frac{1}{\mu_0 c} e^2(\xi_1, 0, t) = e^3(\xi_1, 0, t)$. Les courbes représentant l'évolution de l'hamiltonien Figure 3.13 montre qu'en boucle fermée la simulation via maillage triangulaire conduit à une meilleure dissipation de l'énergie du système. Comme ce maillage permet une propagation numérique plus uniforme du fait de sa compacité, il est alors cohérent d'obtenir une variation d'énergie due à une condition absorbante le long de la frontière $\xi_1 = 0$ plus précise que dans le cas rectilinéaire. Ceci est particulièrement intéressant lorsqu'est considérée une méthode de commande basée sur la passivité comme IDA-PBC³ [68] qui s'appuie sur la dissipation d'énergie.

Les diagrammes de Bode en gain pour le système en boucle ouverte dans les cas de maillages rectilinéaire et triangulaire sont donnés respectivement Figure 3.14 et Figure 3.15. Les entrées considérées sont l'approximation discrète de $e^1(0, \frac{L_2}{2})$ dans le cas rectilinéaire, respectivement $e^\alpha(0, \frac{L_2}{2})$ dans le cas triangulaire, et les sorties sont l'approximation discrète de $e^3(L_1, \frac{L_2}{2})$ dans le cas rectilinéaire, respectivement $e^\epsilon(L_1, \frac{L_2}{2})$ dans le cas triangulaire. Ces choix correspondent aux centres des frontières opposées. Les diagrammes sont donnés pour différents nombres de points de discrétisation. La fréquence de coupure augmente lorsque le nombre de points augmente. La pente d'atténuation au-delà de la coupure augmente également avec le nombre de points. La forme des courbes est similaire pour les cas rectilinéaire et trian-

3. *Interconnexion and Damping Assignment - Passivity Based Control*

3.4. SIMULATIONS

gulaire, avec des anti-résonances au-delà de la fréquence de coupure dans le cas triangulaire. Ces diagrammes permettent d'évaluer numériquement si le nombre de points utilisés dans la discrétisation est suffisant pour étudier le comportement du système jusqu'à une certaine fréquence.

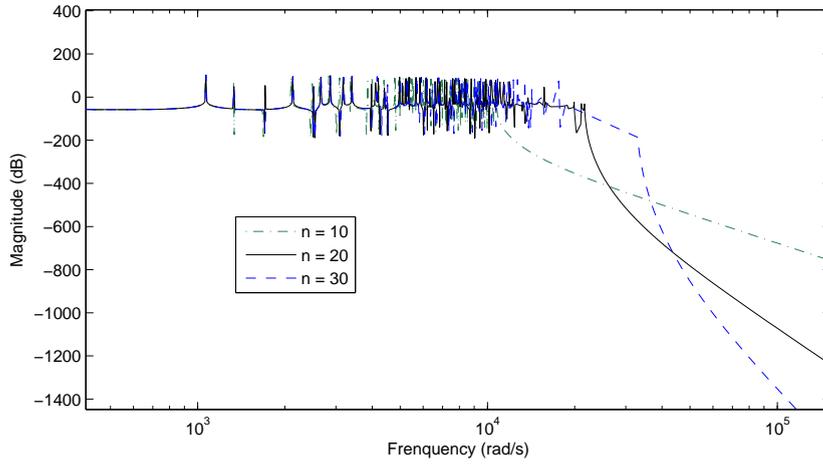


FIGURE 3.14: Diagramme de Bode en gain pour discrétisation rectilinéaire

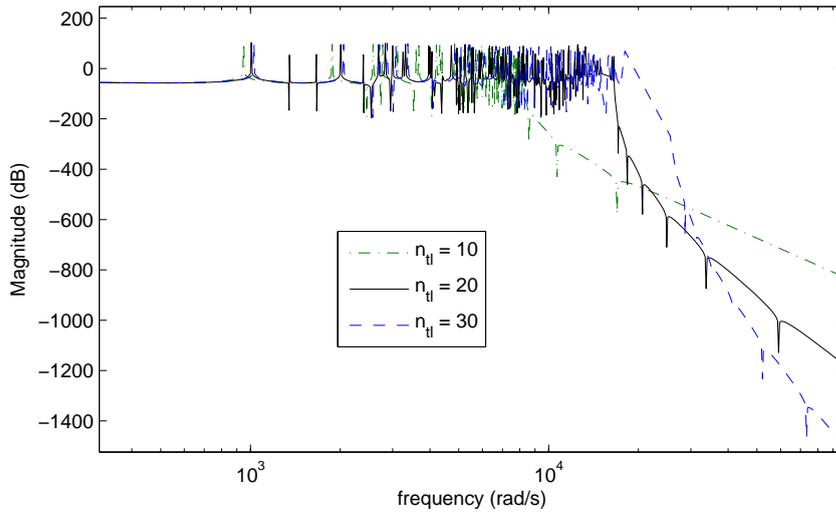


FIGURE 3.15: Diagramme de Bode en gain pour discrétisation triangulaire

3.4.5/ ISOTROPIE DES SCHÉMAS

Les Figures 3.16 et 3.17 montrent un tracé des lignes d'égaies pressions (isolines) de la propagation d'une condition initiale ponctuelle au centre d'un domaine 2D où $L_1 = L_2 = 20$ m. Ces figures montrent le profil de pression - vue 3D et vue de dessus - à $t = 10\tau$ pour un pas temporel $\tau = 1$ ms. Le pas spatial est choisi de telle sorte que les discrétisations conduisent à la définition de matrices J_d de tailles presque égales pour les cas rectilinéaire et triangulaire, ce qui permet de comparer les deux schémas pour un temps de calcul équivalent. Un tel choix est possible en considérant $h_1 = h_2 = 0.5$ m pour le cas rectilinéaire et $h = 0.5$ m pour le cas triangulaire, ce qui conduit à $J_d \in \mathbb{R}^{7400 \times 7400}$ et $J_d \in \mathbb{R}^{7371 \times 7371}$, respectivement. Ces figures montrent que le maillage triangulaire permet d'obtenir une meilleure représentation de l'isotropie de la propagation de l'onde. Comme la condition initiale considérée est ponctuelle, les différences entre les images 3D des deux figures s'expliquent par la mauvaise capacité des différences finies à considérer les hautes fréquences. Ceci illustre et justifie l'emploi du maillage triangulaire régulier lorsqu'il s'agit d'étudier la propagation d'une condition initiale sans considération de la géométrie des systèmes étudiés.

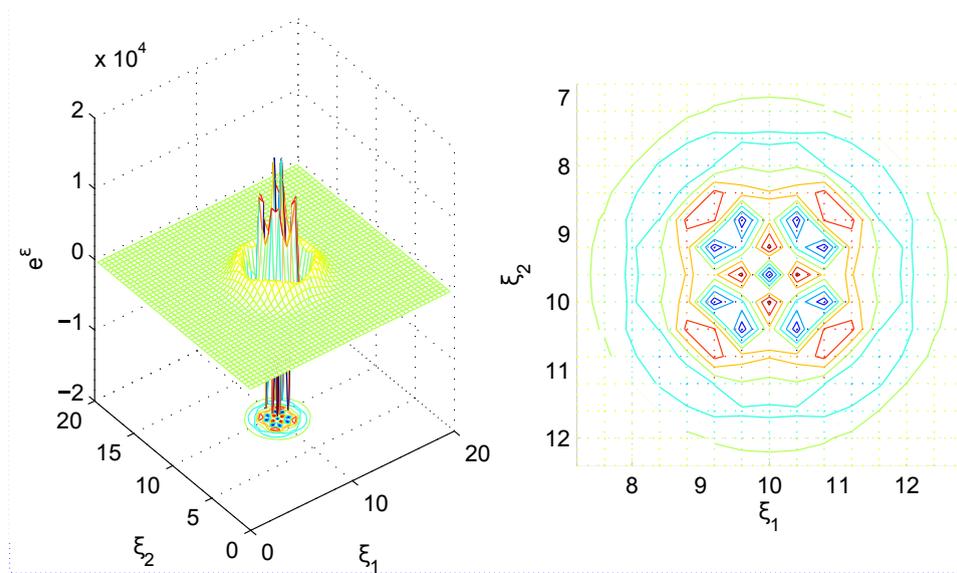


FIGURE 3.16: Isolines (lignes continues) de la propagation d'une condition initiale par maillage rectilinéaire, $\tau = 1$ ms, $t = 10\tau$, $h_1 = h_2 = 0,4$ m

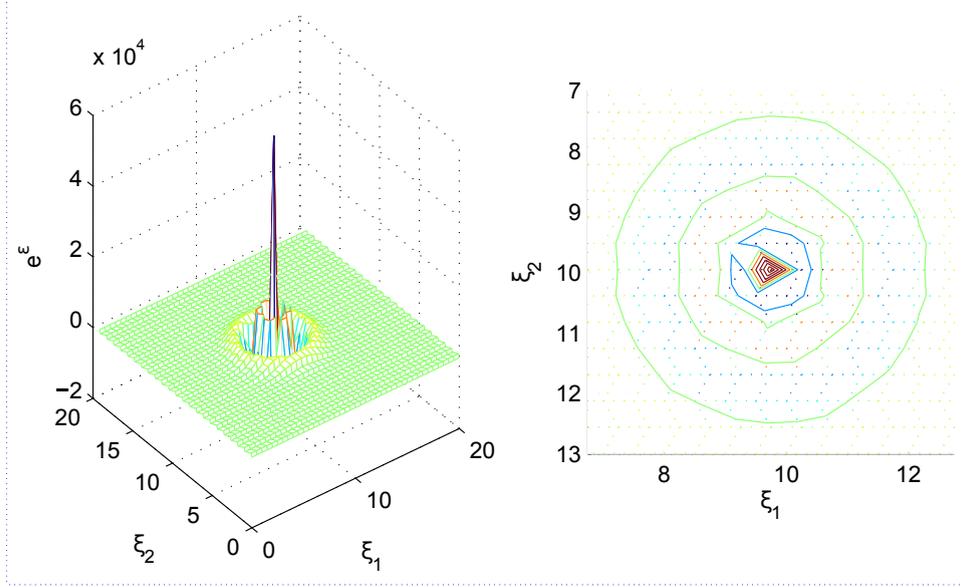


FIGURE 3.17: Isolines (lignes continues) de la propagation d'une condition initiale par maillage triangulaire, $\tau = 1$ ms, $t = 10\tau$, $h = 0,5$ m

3.5/ EXTENSION EN COORDONNÉES POLAIRES

Dans cette section nous nous éloignons de notre cas d'étude vibro-acoustique pour étendre notre méthode de discrétisation à une l'équation d'onde formulée en coordonnée polaire dans la Section 2.2.4 (page 39). Les résultats présentés dans cette partie ont été inclus dans une soumission [86]. Rappelons tout d'abord l'équation d'onde en coordonnées polaires (2.29) (2.19) sur un domaine spatial Ω de coordonnées spatiales $r \in [r_a, r_b]$ et $\psi \in [\psi_a, \psi_b]$. Rappelons que les variables d'énergie sont contenues dans un vecteur $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ et que l'énergie totale de ce système est exprimée par

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \int_{\psi_a}^{\psi_b} \int_{r_a}^{r_b} (x^\top \mathcal{L}x) r dr d\psi \quad (3.34)$$

où $\mathcal{L} = \begin{pmatrix} \mu_0^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \mu_0^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \chi_s^{-1} \end{pmatrix}$.

L'équation d'onde s'écrit alors

$$\underbrace{\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}}_f = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\partial_r \\ 0 & 0 & -\frac{1}{r}\partial_\psi \\ -\frac{1}{r}\partial_r(r\cdot) & -\frac{1}{r}\partial_\psi & 0 \end{pmatrix}}_{\mathcal{J}} \underbrace{\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}}_e \quad (3.35)$$

où $f = \dot{x}$ et $e = \frac{\delta\mathcal{H}(x)}{\delta x} = \mathcal{L}x$. Un ensemble de variables à la frontière assurant que le système décrit par (2.29) est un SHP est donné par

$$\begin{pmatrix} f_\partial \\ e_\partial \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \sqrt{r_b}e_1(r_b, \psi) \\ \sqrt{r_a}e_1(r_a, \psi) \\ e_2(r, \psi_b) \\ e_2(r, \psi_a) \\ -\sqrt{r_b}e_3(r_b, \psi) \\ \sqrt{r_a}e_3(r_a, \psi) \\ -e_3(r, \psi_b) \\ e_3(r, \psi_a) \end{pmatrix}.$$

Afin de proposer un schéma de discrétisation préservant la structure hamiltonienne à ports de ce système, considérons tout d'abord ce changement de variables

$$\begin{cases} f'_1 := f_1, & e'_1 := re_1, & x'_1 := x_1, \\ f'_i := rf_i, & e'_i := e_i, & x'_2 := rx_i, \quad i \in \{2, 3\}, \end{cases} \quad (3.36)$$

$j = \mathcal{J}e$ devient alors $f' = \mathcal{J}'e'$ où $f' = (f'_1 \ f'_2 \ f'_3)^\top$, $e' = (e'_1 \ e'_2 \ e'_3)^\top$ et $\mathcal{J}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\partial_r \\ 0 & 0 & -\partial_\psi \\ -\partial_r & -\partial_\psi & 0 \end{pmatrix}$. On retrouve alors l'opérateur correspondant au cas en coordonnées cartésiennes. La relation entre l'état et l'effort de ce nouveau système est alors définie par une matrice $\mathcal{L}' = \begin{pmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & r^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & r^{-1} \end{pmatrix} \mathcal{L}$ telle que $e' = \mathcal{L}'x'$ qui vérifie $\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta x'} = \mathcal{L}'e'$. En effet,

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \frac{1}{2} \int_{\psi_a}^{\psi_b} \int_{r_a}^{r_b} (x^\top \mathcal{L}x) r dr d\psi = \frac{1}{2} \int_{\psi_a}^{\psi_b} \int_{r_a}^{r_b} r x^\top \mathcal{L}x dr d\psi \\ &= \frac{1}{2} \int_{\psi_a}^{\psi_b} \int_{r_a}^{r_b} x^\top \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \end{pmatrix} \mathcal{L}'x dr d\psi = \frac{1}{2} \int_{\psi_a}^{\psi_b} \int_{r_a}^{r_b} x'^\top \mathcal{L}'x' dr d\psi \\ &\Rightarrow \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta x'} = \mathcal{L}'e'. \end{aligned}$$

On définit h et δ_ψ les pas de discrétisation spatiale respectivement définis selon l'axe radial et l'axe tangentiel. Comme précédemment, l'approximation des opérateurs différentiels $-\partial_r$ et $-\partial_\psi$ nécessite l'introduction de trois

3.5. EXTENSION EN COORDONNÉES POLAIRES

grilles distinctes sur lesquelles sont discrétisées les trois variables d'état x'_1 , x'_2 et x'_3 . Concernant le choix des conditions frontières, nous choisissons pour cet exemple d'imposer e'_1 à la frontière $r = r_a$, e'_3 pour $r = r_b$ et e'_2 aux frontières $\psi = \psi_a$ et $\psi = \psi_b$. Dans le contexte discret, ceci revient à imposer l'effort à la frontière sur les points que nous choisissons de numérototer ($0, k_1 \in \{1..n\}$), ($m+1, k_1 \in \{1..n\}$) et ($k_2 \in \{1..m\}, k_3 \in \{0, n+1\}$) pour les conditions sur e'_3 , e'_1 et e'_2 , respectivement. Pour ce choix de conditions à la frontière, les relations entre m , n et les dimensions physiques sont $h = \frac{r_b - r_a}{m+0.5}$ et $\delta_\psi = \frac{\psi_b - \psi_a}{n}$. Ce choix conduit à la construction du maillage du domaine décrit Figure 3.18.

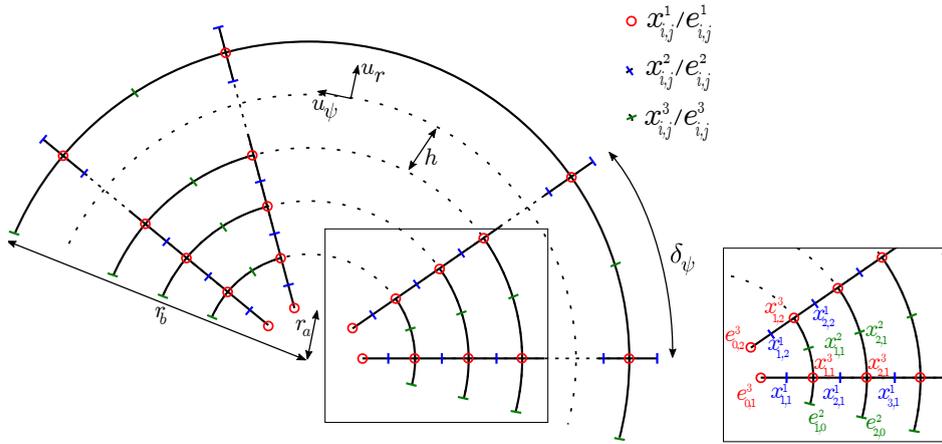


FIGURE 3.18: Maillage d'une portion d'anneau en coordonnées polaires

L'état continu x' est remplacé dans le domaine discret par le vecteur de dimension finie $x_d = \left((x_d^1)^\top \quad (x_d^2)^\top \quad (x_d^3)^\top \right)^\top \in \mathbb{R}^{3mn-m}$ où

$$\begin{cases} x_d^1 = (x_{1,1}^1 & x_{1,2}^1 & \dots & x_{m,n}^1)^\top \in \mathbb{R}^{mn} \\ x_d^2 = (x_{1,1}^2 & x_{1,2}^2 & \dots & x_{m,n-1}^2)^\top \in \mathbb{R}^{m(n-1)} \\ x_d^3 = (x_{1,1}^3 & x_{1,2}^3 & \dots & x_{m,n}^3)^\top \in \mathbb{R}^{mn} \end{cases} \quad (3.37)$$

et les variables d'effort imposées à la frontière sont notées $e_d^\partial = \left((e_{d\partial}^1)^\top \quad (e_{d\partial}^2)^\top \quad (e_{d\partial}^3)^\top \right)^\top \in \mathbb{R}^{2(m+n)}$ où

$$\begin{cases} e_{d\partial}^1 = (e_{m+1,1}^1 & e_{m+1,2}^1 & \dots & e_{m+1,n}^1)^\top \in \mathbb{R}^n \\ e_{d\partial}^2 = (e_{1,1}^2 & e_{1,2}^2 & e_{2,1}^2 & e_{2,2}^2 & \dots & e_{m,2}^2)^\top \in \mathbb{R}^{2m} \\ e_{d\partial}^3 = (e_{0,1}^3 & e_{0,2}^3 & \dots & e_{0,n}^3)^\top \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (3.38)$$

On définit un hamiltonien discret

$$H_d(x_d) := x_d^\top \mathcal{L}_d x_d \quad (3.39)$$

où $\mathcal{L}_d \in \mathbb{R}^{(3mn-m) \times (3mn-m)}$ est une matrice diagonale par blocs composée des éléments de \mathcal{L}' évalués aux points correspondant aux maillages. Notons que comme pour le cas cartésien, $h\delta_\psi \approx \mathcal{H}$ dans le sens où $h\delta_\psi$ converge vers \mathcal{H} quand n tend vers l'infini. Définissons le vecteur d'effort discret

$$e_d := \frac{\partial H_d}{\partial x_d} = \mathcal{L}_d x_d$$

avec $e_d =: \left((e_d^1)^\top \quad (e_d^2)^\top \quad (e_d^3)^\top \right)^\top$, où $e_d^{\{1..3\}}$ sont des vecteurs respectivement de mêmes dimensions que les vecteurs d'état $x_d^{\{1..3\}}$.

En prenant en compte le fait que

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} x_{i,j}^1 \\ x_{i,j}^2 \\ x_{i,j}^3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} x'_1((i-0.5)h, (j-0.5)\delta_\psi) \\ x'_2(ih, j\delta_\psi) \\ x'_3(ih, (j-0.5)\delta_\psi) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} e_{i,j}^1 \\ e_{i,j}^2 \\ e_{i,j}^3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} e'_1((i-0.5)h, (j-0.5)\delta_\psi) \\ e'_2(ih, j\delta_\psi) \\ e'_3(ih, (j-0.5)\delta_\psi) \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

on applique un schéma de différences finies centré

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial e_3}{\partial r}((i-0.5)h, (j-0.5)\delta_\psi) \\ \approx \frac{e^3(ih, (j-0.5)\delta_\psi) - e^3((i-1)h, (j-0.5)\delta_\psi)}{h} \approx \frac{e_{i,j}^3 - e_{i-1,j}^3}{h} \\ \\ \frac{\partial e_3}{\partial \psi}(ih, j\delta_\psi) \approx \frac{e^3((i-0.5)h, (j+0.5)\delta_\psi) - e^3((i-0.5)h, (j-0.5)\delta_\psi)}{\delta_\psi} \\ \approx \frac{e_{i,j+1}^3 - e_{i,j}^3}{\delta_\psi} \\ \\ \frac{\partial e_1}{\partial r}(ih, (j-0.5)\delta_\psi) \approx \frac{e^1((i+0.5)h, (j-0.5)\delta_\psi) - e^1((i-0.5)h, (j-0.5)\delta_\psi)}{h} \\ \approx \frac{e_{i+1,j}^1 - e_{i,j}^1}{h} \\ \\ \frac{\partial e_2}{\partial \psi}(ih, (j-0.5)\delta_\psi) \approx \frac{e^2(ih, j\delta_\psi) - e^2(ih, (j-1)\delta_\psi)}{\delta_\psi} \\ \approx \frac{e_{i,j}^2 - e_{i,(j-1)}^2}{\delta_\psi} \end{array} \right.$$

3.5. EXTENSION EN COORDONNÉES POLAIRES

On exprime une approximation discrète du flux $f' = \mathcal{J}'e'$, notée f_d , telle que $f_d = \left((f_d^1)^\top \quad (f_d^2)^\top \quad (f_d^3)^\top \right)^\top$.

$f_d^1 = -D_r e_d^3 + g_3 e_{d\partial}^3$ avec

$$D_r = \frac{1}{h} \left(I_{mn} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I_{m(n-1)} & 0 \end{pmatrix} \right) \quad \text{et} \quad g_3 = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} I_n \\ 0 \end{pmatrix}$$

où $D_r \in \mathbb{R}^{mn \times mn}$ et $g_3 \in \mathbb{R}^{mn \times n}$. $f_d^2 = -D_\psi e_d^3$ avec

$$D_\psi = \frac{1}{\delta_\psi} \begin{pmatrix} K_1 & & \\ & \ddots & \\ & & K_1 \end{pmatrix}, \quad K_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n-1 \times n}$$

où $D_\psi \in \mathbb{R}^{m(n-1) \times mn}$ et $K_1 \in \mathbb{R}^{n-1 \times n}$. $f_d^3 = f_{d1}^3 + f_{d2}^3$ avec

$$\begin{cases} f_{d1}^3 = D_r^\top e_d^1 + g_3 e_{d\partial}^1, \quad g_3 := \frac{1}{r} \begin{pmatrix} 0 \\ -I_n \end{pmatrix} \\ f_{d2}^3 = D_\psi^\top + g_2 e_{d\partial}^2, \quad g_2 := \frac{1}{\delta_\psi} \begin{pmatrix} 0 \\ \begin{pmatrix} K_2 & & \\ & \ddots & \\ & & K_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{cases} \quad (3.40)$$

où $g_2 \in \mathbb{R}^{(3mn-m) \times 2m}$ et $K_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times 2}$. On a alors

$$f_d = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -D_r \\ 0 & 0 & -D_\psi \\ D_r^\top & D_\psi^\top & 0 \end{pmatrix} e_d + (g_1 \quad g_2 \quad g_3) e_d^\partial \quad (3.41)$$

où $J_d := \begin{pmatrix} 0 & 0 & -D_r \\ 0 & 0 & -D_\psi \\ D_r^\top & D_\psi^\top & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice antisymétrique. On définit la matrice d'entrée $g_d := (g_1 \quad g_2 \quad g_3)$.

Proposition 9 : La discrétisation spatiale par l'utilisation des différences finies sur le maillage 2D en coordonnées polaires définit une structure de Dirac \mathcal{D}_d qui approxime la structure de Stokes Dirac originale. Le système discrétisé

$$\begin{cases} f_d = J_d e_d + g_d u_d \\ y_d = g_d^\top e_d \end{cases} \quad (3.42)$$

où $u_d = e_d^\partial$ et $y_d =: f_d^\partial$ est alors un SHP.

Démonstration. On pose $e'_d = \begin{pmatrix} e_d \\ e_d^\partial \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3mn-m+2(m+n)} =: \mathcal{E}$, $f'_d = \begin{pmatrix} f_d \\ -f_d^\partial \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3mn-m+2(m+n)} =: \mathcal{F}$ et $J' = \begin{pmatrix} J_d & g_d \\ -g_d^\top & 0 \end{pmatrix} = -J'^\top$ tel que $f'_d = J'e'_d$. $\mathcal{D}_d \subset \mathcal{F} \times \mathcal{E}$ est une structure de Dirac si et seulement si $\mathcal{D}_d = \mathcal{D}_d^\perp$ avec $\mathcal{D}_d^\perp = \{(f_1, f_2) \in \mathcal{F} \times \mathcal{E} \mid \langle (f_1, e_1) \mid (f_2, e_2) \rangle = 0 \ \forall (f_2, e_2) \in \mathcal{D}_d\}$.

Prenons deux couples (f'_a, e'_a) et (f'_b, e'_b) quelconques dans \mathcal{D}_d ,

$$\begin{aligned} \langle (f'_a, e'_a) \mid (f'_b, e'_b) \rangle &= \langle e'_a, f'_b \rangle + \langle e'_b, f'_a \rangle \\ &= \langle e'_a, J'e'_b \rangle + \langle e'_b, J'e'_a \rangle \\ &= \langle e'_a, J'e'_b \rangle - \langle e'_a, J'e'_b \rangle \\ &= 0 \Leftrightarrow (f'_a, e'_a) \in \mathcal{D}_d^\perp \Leftrightarrow \mathcal{D}_d \subset \mathcal{D}_d^\perp. \end{aligned}$$

Prenons $(f'_a, e'_a) \in \mathcal{D}_d^\perp$ et $(f'_b, e'_b) \in \mathcal{D}_d$, quelconques. On a alors

$$\begin{aligned} \langle (f'_a, e'_a) \mid (f'_b, e'_b) \rangle &= 0 \\ &= \langle e'_a, f'_b \rangle + \langle e'_b, f'_a \rangle \\ &= \langle e'_a, J'e'_b \rangle + \langle e'_b, f'_a \rangle \\ &= -\langle e'_b, J'e'_a \rangle + \langle e'_b, f'_a \rangle. \end{aligned}$$

Comme cette égalité est vraie pour tout $(f'_b, e'_b) \in \mathcal{D}_d$, on a alors $f'_a = J'e'_a$ et donc $\mathcal{D}_d^\perp \subset \mathcal{D}_d$. \mathcal{D}_d est donc bien une structure de Dirac. \square

Remarque 8 : Si $\psi_b - \psi_a = 0$ (ou 2π), le domaine spatial considéré a la forme d'un anneau. La discrétisation proposée est alors modifiée comme suit :

- $x_d^2 \in \mathbb{R}^{mn}$ et $K_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$;
- $e_{d\partial}^2 = \{\}$ et $g_2 = \{\}$.

Cette modification revient à connecter le modèle discret (3.42) à lui-même par sa variable frontière $e_{d\partial}^2$.

3.5.1/ CAS D'UN DISQUE COMPLET

Lorsqu'on considère un disque complet, le point central $r = r_a = 0$ doit être considéré séparément en raison du terme $\frac{1}{r}$ dans \mathcal{L}' [9]. Les approximations des variables de flux et d'effort à ce point, respectivement e_0^3 and f_0^3 , reposent sur l'approximation de l'opérateur divergence $-f_3(0,0) = \text{div} \begin{pmatrix} e_1(0,0) \\ e_2(0,0) \end{pmatrix}$. Si n est judicieusement choisi, il est possible d'approximer cette divergence par la moyenne d'approximations utilisant des schémas rectilinéaires ou triangulaires tels que présentés dans les Sections précédentes. Ceci conduit à l'approximation

$$-f_3(0,0) \approx \frac{1}{h} a_n \sum_{i=1}^n e_1(0.5h, i\delta_\psi) \quad (3.43)$$

où $a_n = 1$ for $n = 4$ d'après (3.13) (57) et $a_n = 2/3$ pour $n = 6$ d'après (3.24) (62). Lorsque $n = 4k$ or $n = 6k$, $k \in \mathbb{N}$, a_n est choisi tel que l'approximation de la divergence corresponde à la moyenne de k grilles rectilinéaires ou triangulaires évaluées séparément, ce qui plus généralement donne $a_n = \frac{4}{n}$, ce qui correspond au résultat donné dans [24, 9] dans le cadre d'un maillage sur une seule grille. Pour considérer le point central dans le modèle discret (3.42) qui approxime (e', f') , on considère le changement de variable suivant défini en $r = 0$:

$$f_3'' = f_3(0,0), \quad e_3'' = \frac{nh^2}{8} e_3(0,0), \quad x_3'' = x_3(0,0).$$

L'approximation de la divergence (3.43) conduit à

$$f_3'' \approx -\frac{1}{h} \frac{4}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{0.5h} e_1'(0.5h, i\delta_\psi). \quad (3.44)$$

On interconnecte alors le système discrétisé (3.42) avec le SHP suivant

$$f_3'' = \frac{8}{nh^2} (-1 \quad \dots \quad -1) u'', \quad y'' = \frac{8}{nh^2} (-1 \quad \dots \quad -1)^\top e_3'' \quad (3.45)$$

de telle sorte que $u'' = (e_{1,1}^1 \quad \dots \quad e_{1,n}^1)^\top \subset f_d^\partial$ et $e_{d\partial}^3 = -y''$. Cette interconnexion revient à faire les changements suivant au modèle discrétisé (3.42) :

- $x_d = \left((e_d^1)^\top \quad (e_d^2)^\top \quad (e_d^3)^\top \quad e_0^3 \right)^\top \in \mathbb{R}^{3mn-m+1}$;
- $D_\psi = \begin{pmatrix} D_\psi & 0 \\ & \vdots \\ & 0 \end{pmatrix}$, $D_r = \begin{pmatrix} D_r & \gamma \\ & 0 \end{pmatrix}$ avec $\gamma = \left(-\frac{8}{nh^2} \quad \dots \quad -\frac{8}{nh^2} \right)^\top \in \mathbb{R}^n$;
- $e_{d\partial}^3 = \{\}$ and $g_3 = \{\}$.

Ceci permet de considérer le point central où (3.42) n'est pas défini en connectant le modèle discret précédemment établie à un schéma dans un autre système de coordonnées.

3.5.2/ RÉSULTATS NUMÉRIQUES

Le système discretisé (3.42) est simulé en employé la règle du point milieu pour l'intégration temporelle. Les figures 3.19 et 3.20 montrent des profils de $x_3(r, \psi)$, correspondant à $\Gamma(r, \psi)$ dans le cadre acoustique au début, au milieu et à la fin du temps de simulation. Chaque instant "photographié" correspond à un nombre N_t (indiqué sur les courbes) de pas temporels τ .

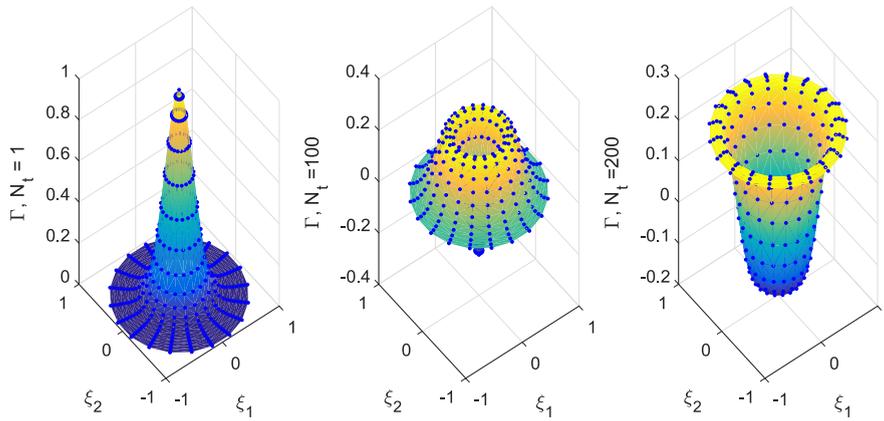


FIGURE 3.19: Propagation d'une condition initiale gaussienne

La Figure 3.19 illustre la réponse du système à une condition initiale gaussienne dans le cas d'un cercle complet et la Figure 3.20 illustre la réponse du système à une entrée frontière sinusoidale dans le cas d'une portion d'anneau.

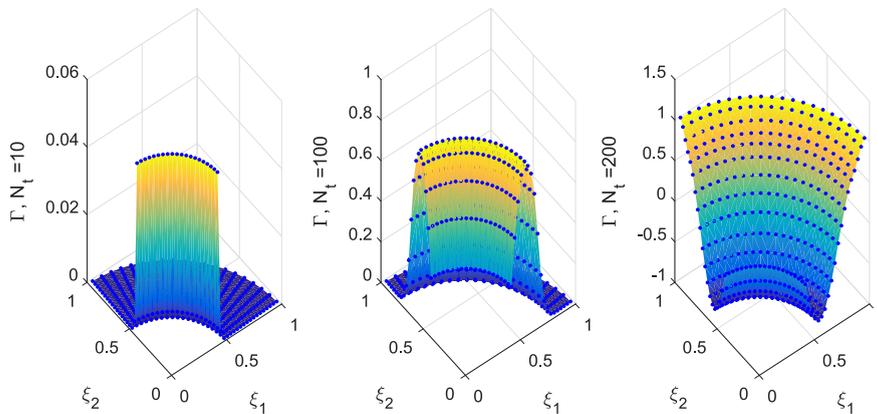


FIGURE 3.20: Propagation d'une condition frontière sinusoidale

3.6. CONCLUSION

Les simulations sont réalisées pour $t \in [0, T]$ en considérant les valeurs numériques récapitulées dans le Tableau 3.1, où $\mathcal{G}(0.2, 0)$ est une Gaussienne 2D centrée en $r = 0$ d'écart-type 0.2 m. On voit sur ces figures que l'onde se propage depuis $r = r_a$ et se réfléchit sur la frontière $r = r_b$ du domaine physique.

Par.	Values	Par.	Values
ψ_b	$\begin{cases} 2\pi \text{ Fig. 3.19} \\ 0, 5\pi \text{ Fig.3.20} \end{cases}$	r_a	$\begin{cases} 0 \text{ Fig. 3.19} \\ 0, 4 \text{ Fig.3.20} \end{cases}$
ψ_a	0m	r_b	1m
T	1 s	δ_t	5 ms
h	5, 13 cm	δ_ψ	$3, 14 \cdot 10^{-1}$
$e_{d\partial}^3(t)$	$\sin(2\pi t)$	$\Gamma_{t=0}$	$\mathcal{G}(0.2, 0)$

TABLEAU 3.1: Valeurs numériques pour la simulation sur un domaine circulaire

3.6/ CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons proposé une méthode de discrétisation pour les systèmes ouverts régis par une équation d'onde dans les cas 1D et 2D. Cette méthode repose sur l'utilisation de différences finies sur des grilles en quinconce afin de préserver la structure hamiltonienne à ports du système. Garantir que le système discrétisé est un SHP permet d'imposer les variables d'effort à la frontière du système discrétisé et de l'interconnecter avec des sous-systèmes tels que des contrôleurs. Cette propriété d'interconnexion permet également d'interconnecter le système discrétisé à un autre afin de considérer la propagation d'une onde sur un domaine à la géométrie complexe. Le principal intérêt de la méthode proposée sur d'autres méthodes conservant la structure, comme les éléments finis mixtes, est sa simplicité. En 2D, des maillages rectilinéaires et triangulaires ont été traités, ainsi qu'une extension aux coordonnées polaires. Les résultats numériques présentés justifient l'utilisation des méthodes proposées pour les cas 1D et 2D en boucle ouverte et fermée. Ils illustrent également les avantages d'un maillage triangulaire régulier sur un maillage rectilinéaire concernant l'isotropie de la propagation de l'onde. Enfin, la méthode proposée est étendue au cas d'un système 2D défini en coordonnées polaires sur une portion d'anneau. Les cas d'un anneau et d'un disque complets sont également traités. Le chapitre suivant porte sur la commande par interconnexion du système vibro-acoustique en dimension infinie.

COMMANDE PAR INTERCONNEXION

Ce dernier chapitre propose une méthode originale de synthèse de lois de commande basée sur les invariants structuraux et conçue pour le système vibro-acoustique. Cette méthode est de manière générale applicable pour la commande de systèmes régis par deux lois de conservations en dimension finie et en dimension infinie dans le cadre d'une commande distribuée dans l'espace. La première partie de ce chapitre est consacrée à la dimension finie. On présente la notion d'invariant structural sur l'exemple classique de commande par interconnexion dont le but est de modeler la fonction d'énergie (energy shaping) du système en boucle fermée. On propose ensuite une adaptation de cette méthode pour les systèmes de deux lois de conservations qui exploite les invariants structuraux dans le but de modeler non pas l'énergie mais la structure du système en boucle fermée. Cette méthode est appliquée à titre d'exemple au modèle (non linéaire) du pendule simple. Dans la deuxième partie, nous étendons cette méthode en dimension infinie aux systèmes régis par deux lois de conservation dans le cadre d'une commande distribuée dans le domaine. On montre que cette méthode permet de transformer un système hyperbolique en un système régi par une équation de propagation, d'absorption ou encore de diffusion, et la stabilité du système en boucle fermée est étudiée. Cette méthode est appliquée à l'exemple du système vibro-acoustique et la robustesse du système en boucle fermée est étudiée dans le cadre de cet exemple d'application. Des résultats numériques sont fournis pour chaque cas. Les lois de commandes issues de cette méthode pour le système vibro-acoustique sont finalement adaptées pour le cas 2D commandé à la frontière.

Sommaire

4.1	Préambule	91
4.2	Energy shaping	92
4.3	Commande par interconnexion pour modeler la structure	95
4.3.1	Systèmes et architecture de commande	96
4.3.2	Synthèse de la commande	97
4.3.3	Exemple d'application : le pendule	99
4.4	Dimension infinie	103
4.4.1	Exemple : "parabolisation" de l'équation d'onde canonique 1D	104
4.4.2	Commande par interconnexion de systèmes régis par deux lois de conservation en dimension infinie	107
4.4.3	Application au système vibro-acoustique	112
4.4.4	Simulations	114
4.4.5	Extension 2D pour le système acoustique commandé à la frontière	119
4.5	Conclusion	121

4.1/ PRÉAMBULE

La représentation hamiltonienne à ports est devenue au cours des dix dernières années particulièrement populaire dans le domaine de la théorie de la commande. En effet, la coeur de cette représentation est la considération de l'énergie, qui est une fonction candidate de Lyapunov naturelle pour l'étude de la stabilité ou la synthèse de loi de commande [42, 94]. Ces dix dernières années ont vu émerger de nombreuses méthodes de synthèse de lois de commande basées sur ce formalisme [93, 68]. Elles visent le plus souvent à modifier le taux de dissipation, la forme de la fonction d'énergie ou encore la structure du système en boucle fermée pour ce qui est de la méthode IDA-PBC (*Interconnection and Damping Assignment Passivity-Based Control*) [68, 74].

Parmi ces méthodes, une approche classique consiste à interconnecter le système original à un correcteur dynamique et à déterminer les invariants structuraux - définis plus loin - du système en boucle fermée afin de lier l'état du correcteur à celui du système et de modéliser la fonction d'énergie en boucle fermée (*energy shaping*). La stabilité est alors assurée par injection de dissipation (*damping injection*). Cette approche est la synthèse de loi de commande par immersion/réduction [48, 56, 55]. La commande de systèmes hamiltoniens à ports en dimension infinie dans le cadre de la commande frontière a conduit à l'élaboration de synthèses de lois de commande visant, comme en dimension finie, à augmenter la dissipation ou à modifier la fonction d'énergie en boucle fermée [93, 94, 73]. Dans [48, 56], les auteurs exploitent les invariants structuraux afin de mettre en place une commande par immersion/réduction.

Dans ce chapitre, nous proposons une méthode de synthèse de commande basée sur les invariants structuraux. L'originalité de cette méthode [88] repose sur le fait que les invariants structuraux sont exploités afin de modéliser la structure du système en boucle fermée et non pas afin de fixer la fonction d'énergie. L'interconnexion entre le système en boucle ouverte et le correcteur repose dans cette méthode sur une structure de gyrateur, qui ne préserve pas la structure hamiltonienne à ports en boucle fermée. Le correcteur résultant de notre méthode de synthèse peut conduire à une loi de commande par retour d'état ou alors être implémenté en utilisant uniquement des mesures et la commande, ce qui peut être un avantage lors de l'implémentation d'un contrôle en temps réel. Le principe général de la méthode est d'exploiter les invariants structuraux du système en boucle fermée afin de contrebalancer l'action d'une des lois de conservation qui régit le système. Dans un deuxième temps, une seconde boucle de contrôle modèle la structure en imposant le comportement dynamique des variables dont la

dynamique en boucle ouverte a été compensée. Le prix à payer pour l'utilisation de cette méthode est la perte de la structure hamiltonienne à ports et de ses propriétés pour l'analyse globale de stabilité et de robustesse. Nous proposons cette méthode de synthèse de commande en dimension finie et en dimension infinie pour des systèmes régis par deux lois de conservation. L'objectif de l'étude présentée en dimension finie, dont découlent des lois de commande simples, est de montrer qu'il est possible de transformer la structure du système en exploitant les invariants structuraux. En dimension infinie, le cas d'une commande distribuée dans un domaine 1D est considéré. En particulier, nous montrons qu'un système hyperbolique de deux équations de conservation peut être transformé en un système parabolique ou encore en un système d'absorption ou d'advection. Cette méthode, conçue pour l'équation d'onde, et pouvant donc s'appliquer à l'approximation 1D du système vibro-acoustique présenté Chapitre 1, peut être généralisée pour une large classe de systèmes incluant les cordes vibrantes et les poutres. La méthode proposée dans ce chapitre doit être considérée comme un premier pas vers la synthèse de commandes plus robustes, reposant par exemple sur l'utilisation d'observateurs en dimension infinie, et de commandes synthétisées directement à partir de modèles 2D et 3D commandés à la frontière.

4.2/ ENERGY SHAPING

Une approche classique de la synthèse de loi de commande par immersion/réduction exploite les invariants structuraux appelés fonctions de Casimir - définies ci-après - afin de lier les variables d'état du système à celles d'un correcteur et de modéliser la fonction d'énergie en boucle fermée par un choix judicieux de la fonction d'énergie du correcteur. Cette méthode est appelée *energy shaping*. Dans cette sous-Section, nous développons cette méthode sur l'exemple du haut-parleur commandé en courant présenté page 30. Pour cet exemple, on négligera l'action de la pression acoustique sur la membrane par soucis de simplicité. Rappelons tout d'abord que le modèle de ce système s'écrit

$$\begin{cases} \dot{x}_{hp}(t) = (J - R) \frac{\partial H_{hp}(x_{hp})}{\partial x_{hp}} + gu(t) \\ y(t) = g^\top \frac{\partial H_{hp}(x_{hp})}{\partial x_{hp}} \end{cases} \quad (4.1)$$

où $x_{hp} = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$ est défini sur $\mathcal{X} = \mathbb{R}^2$ avec q la position et p la quantité de mouvement de la membrane. $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R_{ms} \end{pmatrix}$, et $g = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. $H_{hp} : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ est l'énergie totale du système définie par

$$H_{hp}(q, p) = \frac{1}{2C_{ms}} q(t)^2 + \frac{1}{2M_{ms}} p(t)^2$$

4.2. ENERGY SHAPING

et $\frac{\partial H}{\partial x}(x) = \left(\frac{1}{C_{ms}^q} \right)_{\frac{1}{M_{ms}^p}}$. C_{ms} , M_{ms} et R_{ms} sont des paramètres physiques réels positifs constants. $u(t)$ représente le courant en entrée du système et $y(t)$ représente la tension aux bornes de la bobine du haut-parleur.

On cherche dans cet exemple à stabiliser la position de la membrane en $q = q^*$. Le modèle (4.1) est interconnecté avec un contrôleur de la forme

$$\begin{cases} \dot{x}_c(t) = (J_c - R_c) \frac{\partial H_c(x_c)}{\partial x_c} + B_c u_c(t) \\ y_c(t) = B_c^\top \frac{\partial H_c(x_c)}{\partial x_c} \end{cases} \quad (4.2)$$

où $x_c \in \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$ et $H_c : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, J_c est une matrice antisymétrique et R_c une matrice symétrique définie positive. L'interconnexion est réalisée selon la structure d'interconnexion conservatrice de puissance :

$$\begin{cases} u_c(t) = y(t) \\ u(t) = -y_c(t). \end{cases} \quad (4.3)$$

Le système en boucle fermée est alors

$$\dot{x}_e(t) = (J_e - R_e) \frac{\partial H_e(x_e)}{\partial x_e} \quad (4.4)$$

où $H_e(x_e) = H(x) + H_c(x_c)$ est l'énergie du système en boucle fermée, $x_e = \begin{pmatrix} x \\ x_c \end{pmatrix}$ et

$$J_e = \begin{pmatrix} J & -gB_c^\top \\ B_c g^\top & J_c \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad R_e = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R_c \end{pmatrix}.$$

Nous cherchons à établir un lien entre x et x_c afin de modifier par un choix approprié de H_c la fonction H_e telle qu'elle ait un minimum au point d'équilibre désiré. La relation entre x et x_c doit donc rester constante le long des trajectoires du système. Ceci nous conduit à introduire la notion de fonction de Casimir définie comme suit.

Définition 7 : [20, 53] Une fonction $C : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ non nulle telle que $\dot{C}(x) = 0$ le long des trajectoires du système est un invariant dynamique du système. Les invariants dynamiques indépendants de l'hamiltonien du système sont appelés fonctions de Casimir ou plus simplement Casimirs.

De cette définition découle

$$\dot{C}(x_e) = \frac{\partial C(x_e)}{\partial x_e} \dot{x}_e(t) = \frac{\partial C(x_e)}{\partial x_e} (J_e - R_e) \frac{\partial H_e(x_e)}{\partial x_e} = 0.$$

Comme cette égalité est vraie quelque soit $H_e(x_e)$, elle est alors équivalente à

$$\frac{\partial C(x_e)}{\partial x_e}(J_e - R_e) = 0. \quad (4.5)$$

Pour notre exemple de commande du système (4.4), on cherche des Casimirs de la forme $C = \Phi(x) - x_c$ avec $\Phi : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$. L'équation (4.5) devient alors

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \frac{\partial C}{\partial x} & \frac{\partial C}{\partial x_c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J - R & -gB_c^\top \\ B_c g^\top & J_c - R_c \end{pmatrix} = 0 \\ & \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial q} & \frac{\partial \Phi}{\partial p} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -R_{ms} \end{pmatrix} & -\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} B_c^\top \\ B_c \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} & J_c - R_c \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

qui est équivalent au système d'équations

$$\begin{cases} -\frac{\partial \Phi}{\partial p} = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial q} - R_{ms} \frac{\partial \Phi}{\partial p} - B_c = 0 \\ -(J_c - R_c) - \frac{\partial \Phi}{\partial p} B_c^\top = 0. \end{cases} \quad (4.6)$$

Les équations de (4.6) traduisent les conditions de compatibilité (*matching conditions*) qui conditionnent l'existence de Casimirs de la forme recherchée.

Remarque 9 : *La présence de dissipation peut empêcher l'existence de fonction de Casimir lorsqu'on considère les équation de compatibilités. Cette contrainte porte le nom de "dissipation obstacle" [20]. Dans le cadre de l'energy shaping, cette contrainte se traduit par le fait qu'il ne doit pas y avoir de dissipation dans la coordonnée dont on cherche à modeler le comportement [67]. Dans notre exemple, où on cherche à changer le point d'équilibre de la variable q , ceci revient à dire que la première composante de la matrice R dans (4.1) doit être nulle.*

On choisit la forme du correcteur (4.2) telle que $J_c - R_c = 0$ et $B_c = 1$ ce qui implique que $x_c \in \mathbb{R}$. Les conditions de compatibilité (4.6) conduisent alors à $\frac{\partial \Phi}{\partial p} = 0$ et $\frac{\partial \Phi}{\partial q} = 1$. Ceci implique que $\Phi(x) = q(t) - q(t=0)$ et permet alors de conclure que la fonction

$$C(x_e) = q(t) - q(t=0) + x_c(t) \quad (4.7)$$

est un Casimir du système en boucle fermée (4.4). Comme $\dot{C} = 0$, l'équation (4.7) implique que la différence entre $q(t)$ et $x_c(t)$ est constante dans le temps. Il est alors possible d'initialiser judicieusement le correcteur en choisissant $x_c(0) = q(0)$ de telle sorte que $x_c(t) = q(t)$. L'hamiltonien en

4.3. COMMANDE PAR INTERCONNEXION POUR MODELER LA STRUCTURE

boucle fermée $H_e(q, \mathfrak{p}, x_c)$ peut ainsi s'exprimer en termes de q et \mathfrak{p} c'est à dire $H_e(q, \mathfrak{p}) = H(q, \mathfrak{p}) + H_c(q, \mathfrak{p})$.

Maintenant que nous avons trouvé une relation entre l'état du correcteur et celui du système à commander, nous pouvons modifier le point d'équilibre de q en modelant la fonction d'énergie du système en boucle fermée. Pour réaliser cet *energy shaping*, on choisit une énergie en boucle fermée désirée $H_d(q, \mathfrak{p})$ qui admet un minimum pour $q = q^*$ où q^* est le point d'équilibre recherché pour q qui peut être interprété comme une consigne de position. La fonction

$$H_d(q, \mathfrak{p}) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{C_{ms}} + k \right) (q - q^*)^2 + \frac{1}{2M_{ms}} \mathfrak{p}^2$$

convient. On choisit alors l'hamiltonien du correcteur $H_c(x_c) = H_c(q)$ tel que l'hamiltonien du système en boucle fermée $H_e(q, \mathfrak{p}) = H(q, \mathfrak{p}) + H_c(q)$ soit égal à $H_d(q, \mathfrak{p})$. On choisit donc

$$H_c(q) = \frac{k}{2} (q^2) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{C_{ms}} + k \right) (-2qq^* + (q^*)^2) + \kappa.$$

où κ est une constante arbitrairement choisie pour garantir la positivité de H_c . On en déduit l'expression du contrôleur

$$\begin{cases} \dot{x}_c(t) = u_c(t) = \frac{1}{M_{ms}} \mathfrak{p}(t) \\ y_c(t) = \frac{\partial H_c(x_c)}{\partial x_c} = \frac{1}{C_{ms}} x_c(t) - \left(\frac{1}{C_{ms}} + k \right) q^*(t) \end{cases} \quad (4.8)$$

où k est le paramètre de contrôle. Le système en boucle fermée étant lui-même un SHP, il conserve les propriétés structurelles du système en boucle ouverte et ses performances peuvent être augmentées par simple retour négatif sur \mathfrak{p} (*damping injection*).

4.3/ COMMANDE PAR INTERCONNEXION POUR MODELER LA STRUCTURE

Nous avons présenté une méthode permettant de modeler l'énergie du système en boucle fermée. Dans cette sous-Section, nous proposons une nouvelle méthode de synthèse de loi de commande par interconnexion visant à modeler la structure même du système. Nous proposons également une étude de la stabilité de la loi synthétisée. Nous appliquons la méthode présentée dans cette Section à l'exemple du pendule simple illustré par des résultats de simulation.

4.3.1/ SYSTÈMES ET ARCHITECTURE DE COMMANDE

On considère une classe de SHP non linéaires régis par deux lois de conservation en dimension finie d'énergie totale

$$H(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_2^\top(t)L_2x_2(t) + \psi(x_1) \quad (4.9)$$

et définie telle que

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & G \\ -G^\top & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi(x_1)}{\partial x_1} \\ L_2x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ I_{n_2, n_2} \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{pmatrix} 0 & I_{n_2, n_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi(x_1)}{\partial x_1} \\ L_2x_2(t) \end{pmatrix} \end{cases} \quad (4.10)$$

où $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$, $x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$ avec $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, $G \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$, $L_2 \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$ symétrique définie positive et $\psi : \mathbb{R}^{n_1} \rightarrow \mathbb{R}^+$.

On interconnecte (4.10) à un contrôleur hamiltonien à ports d'énergie totale $H_c : \mathbb{R}^{n_1} \rightarrow \mathbb{R}$ de la forme

$$\begin{cases} \dot{x}_c(t) = 0 \cdot \frac{\partial H_c(x_c)}{\partial x_c} + B_c u_c(t) \\ y_c(t) = B_c^\top \frac{\partial H_c(x_c)}{\partial x_c} \end{cases} \quad (4.11)$$

où $x_c \in \mathbb{R}^{n_1}$ et $B_c \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$.

L'interconnexion est réalisée comme illustré Figure 4.1 selon le gyrateur défini par

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ u_c(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I_{n_2, n_1} \\ I_{n_1, n_2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t) \\ y_c(t) \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

Le système en boucle fermée issu de l'interconnexion de deux SHP via cette structure n'est pas un SHP.

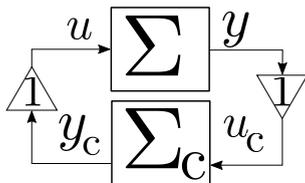


FIGURE 4.1: Schéma de la structure d'interconnexion

Remarque 10 : Nous choisissons de restreindre notre étude à des correcteurs de la forme (4.11). Notons toutefois qu'une plus large classe aurait pu être

4.3. COMMANDE PAR INTERCONNEXION POUR MODELER LA STRUCTURE

considérée avec

$$\begin{cases} \dot{x}_c(t) = (J_c - R_c) \frac{\partial H_c(x_c)}{\partial x_c} + B_c u_c(t) \\ y_c(t) = B_c^\top \frac{\partial H_c(x_c)}{\partial x_c} + (M_c - P_c) u_c \end{cases}$$

où J_c et R_c sont des matrices de $\mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$ et M_c et P_c sont des matrices de $\mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$ avec J_c et M_c antisymétriques et R_c et P_c symétriques définies positives.

L'interconnexion de (4.10) et de (4.11) via (4.12) conduit au système en boucle fermée :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_c(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & G & 0 \\ -G^\top & 0 & B_c^\top \\ 0 & B_c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi(x_1)}{\partial x_1} \\ L_2 x_2(t) \\ \frac{\partial H_c(x_c)}{\partial x_c} \end{pmatrix}. \quad (4.13)$$

Bien que la structure d'interconnexion choisie "casse" la structure hamiltonienne à ports et implique que le système (4.13) n'est pas un SHP, on peut néanmoins rechercher des fonctions de Casimir afin de lier l'état du contrôleur à celui du système en boucle ouverte et d'en dériver une loi de commande. On s'intéressera aux invariants structuraux de la forme

$$C(x_1, x_2, x_c) = \Phi_1(x_1) + \Phi_2(x_2) - x_c.$$

Appliquée à (4.13), l'équation (4.5) devient

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1(x_1)}{\partial x_1} & \frac{\partial \Phi_1(x_2)}{\partial x_2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & G & 0 \\ -G^\top & 0 & B_c^\top \\ 0 & B_c & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Il en découle que (4.13) admet des fonctions de Casimir dans le cas où les conditions de compatibilité suivantes sont respectées :

$$\begin{cases} -\frac{\partial \Phi_2(x_2)}{\partial x_2} G^\top = 0 \\ \frac{\partial \Phi_1(x_1)}{\partial x_1} G - B_c = 0 \\ \frac{\partial \Phi_2(x_2)}{\partial x_2} B_c^\top = 0. \end{cases} \quad (4.14)$$

4.3.2/ SYNTHÈSE DE LA COMMANDE

Le but de la commande est de contrebalancer le terme $-G^\top \frac{\partial \psi(x_1)}{\partial x_1}$ dans la deuxième ligne de (4.13). En d'autres termes, on cherche à annuler l'influence

de x_1 sur la dynamique de x_2 . Dans un second temps, on assignera une nouvelle dynamique à x_2 afin de dissiper l'énergie du système.

On choisit alors la forme du correcteur telle que $B_c = G$. Il en découle que $\frac{\partial \Phi_2(x_2)}{\partial x_2} = 0$ et $\frac{\partial \Phi_1(x_1)}{\partial x_1} = 1$, d'où $\Phi_1(x_1) = x_1 - x_1(0)$ et $\Phi_2(x_2) = \kappa$ où $\kappa \in \mathbb{R}$ ne dépend pas de t . La fonction

$$C(x_1, x_c) = x_1(t) - x_1(0) - x_c(t) + \kappa \quad (4.15)$$

est donc un Casimir du système en boucle fermée (4.13). Comme dans la sous-Section précédente, il est possible d'initialiser judicieusement le correcteur en choisissant $x_c(0) = x_1(0)$. On choisit l'hamiltonien du correcteur

$$H_c(x_c) = H_c(x_1) = \psi(x_1), \quad (4.16)$$

ce qui implique alors que le correcteur contrebalance l'action de $-G^\top \frac{\partial \psi(x_1)}{\partial x_1}$ dans la deuxième ligne de (4.13). Le système en boucle fermé peut alors être réécrit :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & G \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi(x_1) \\ L_2 x_2(t) \end{pmatrix}. \quad (4.17)$$

Afin d'imposer une nouvelle dynamique au système en boucle fermée, on met en place un retour additionnel tel que

$$u(t) = y_c(t) - Ky(t)$$

où $K \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$. Ce terme peut-être interprété comme un terme de transmission direct dans la structure du correcteur (4.11) qui est alors

$$\begin{cases} \dot{x}_c(t) = 0 \cdot \frac{\partial \psi(x_c)}{\partial x_c} + Gu_c(t) \\ y_c(t) = G^\top \frac{\partial \psi(x_c)}{\partial x_c} - Ku_c(t). \end{cases} \quad (4.18)$$

On note que le contrôleur peut être implémenté comme un retour d'état ou en utilisant uniquement des mesures, ce qui peut être un avantage lors de l'implémentation d'un contrôle en temps réel. Le système en boucle fermée est alors

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & G \\ 0 & -K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi(x_1) \\ L_2 x_2(t) \end{pmatrix}. \quad (4.19)$$

4.3.2.1/ STABILITÉ DU SYSTÈME EN BOUCLE FERMÉE

Dans cette sous-Section nous étudions la stabilité du système en boucle fermée (4.19). Introduisons tout d'abord la notion de stabilité exponentielle.

4.3. COMMANDE PAR INTERCONNEXION POUR MODELER LA STRUCTURE

Définition 8 : [42] Le point d'équilibre $x = x_\infty \in \mathbb{R}^n$ d'un système régi par l'équation aux dérivées ordinaires $\dot{x} = f(x)$ est dit "exponentiellement stable" si existent $t_0 \in \mathbb{R}^+$, $\sigma \in \mathbb{R}^+$ et $k \in \mathbb{R}^+$ tels que

$$\forall t \geq t_0, \|x(t) - x_\infty\| \leq ke^{-\sigma(t-t_0)}$$

où $\|\cdot\|$ est une des normes équivalentes en dimension finie.

La deuxième ligne de (4.19) a pour solution

$$x_2(t) = e^{-KL_2 t} x_2(0) \quad (4.20)$$

ce qui implique que $x_2(t)$ a un comportement purement dissipatif et est exponentiellement stable. Comme $\dot{x}_1(t) = GL_2 x_2(t)$, $\dot{x}_1(t)$ décroît exponentiellement vers 0 et x_1 converge donc exponentiellement vers une constante. Le système (4.19) est donc exponentiellement stable lorsqu'on choisit la matrice K du correcteur telle que KL_2 est définie positive.

On peut par ailleurs déduire l'expression de x_1 à partir de (4.20) telle que

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= GL_2 e^{-KL_2 t} x_2(0) \\ x_1(t) &= \int_0^t GL_2 e^{-KL_2 \tau} x_2(0) d\tau \\ x_1(t) &= -(KL_2)^{-1} GL_2 (I - e^{-KL_2 t}) x_2(0) \end{aligned}$$

$x_1(t)$ tend alors vers une constante $x_1^* = (KL_2)^{-1} GL_2 x_2(0)$ qu'il est possible de choisir en choisissant judicieusement K .

4.3.3/ EXEMPLE D'APPLICATION : LE PENDULE

Considérons à titre d'exemple l'application de notre méthode au pendule simple présenté dans le formalisme hamiltonien à ports dans [90].

Ce système est représenté Figure 4.2.

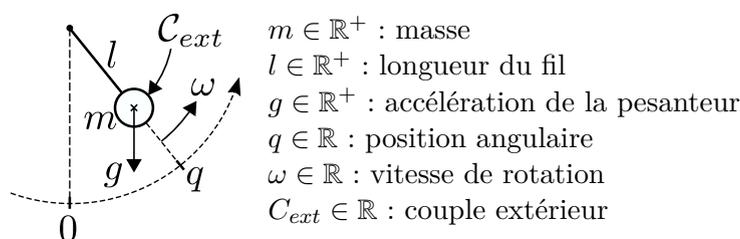


FIGURE 4.2: Pendule simple

Le fil du pendule est de longueur constante l et est considéré inextensible et la masse m est constante. La position du pendule l'angle q qu'il décrit par

rapport à la verticale. L'hamiltonien $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ de ce système correspond à son énergie totale et est la somme de son énergie cinétique E_c et de son énergie potentielle E_p :

$$H(q, p) = \underbrace{\frac{1}{2}mgl(1 - \cos(q))}_{E_p} + \underbrace{\frac{1}{2m}p(t)^2}_{E_c} \quad (4.21)$$

où $p(t) := m\omega(t)$ est le moment de rotation. On définit $x(t) := \begin{pmatrix} q(t) \\ p(t) \end{pmatrix}$, $u(t) := \mathcal{C}_{ext}$ et $y(t) := \omega(t)$ respectivement l'état, l'entrée et la sortie du système. En considérant que $\frac{\partial H(x)}{\partial x} = \begin{pmatrix} mgl \sin(q(t)) \\ \frac{1}{m}p(t) \end{pmatrix}$, on donne la formulation hamiltonienne à ports du problème :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{q}(t) \\ \dot{p}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} mgl \sin(q(t)) \\ \frac{1}{m}p(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} mgl \sin(q(t)) \\ \frac{1}{m}p(t) \end{pmatrix} \end{cases} \quad (4.22)$$

qui correspond à (4.10) pour $G = 1$, $n = 1$, $L_2 = \frac{1}{m}$ et $\psi(q) = mgl \sin(q(t))$. En appliquant la méthode proposée dans la sous-Section précédente, on définit le contrôleur

$$\begin{cases} \dot{x}_c(t) = 0 + u_c(t) \\ y_c(t) = mgl \sin(x_c(t)) - K u_c(t) \end{cases} \quad (4.23)$$

qui permet de transformer le système d'origine (4.22) en

$$\begin{pmatrix} \dot{q}(t) \\ \dot{p}(t) \\ \dot{x}_c(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -K & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} mgl \sin(q(t)) \\ \frac{1}{m}p(t) \\ mgl \sin(x_c(t)) \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

en utilisant le gyrateur $u(t) = y_c(t)$, $u_c(t) = y(t)$, et qui devient

$$\begin{pmatrix} \dot{q}(t) \\ \dot{p}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} mgl \sin(q(t)) \\ \frac{1}{m}p(t) \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

lorsque le correcteur est judicieusement initialisé, c'est à dire $x_c(0) = x_1(0)$. Le choix de $K > 0$ implique la stabilité exponentielle du système, comme nous l'avons montré dans la sous-Section précédente. $p(t)$ converge alors vers 0 et $q(t)$ converge vers une constante $q^* = \frac{p(0)}{K}$.

Remarque 11 : On voit que qu'il n'est pas possible de fixer à la fois la vitesse de convergence et le point d'équilibre de q . Si on cherche à atteindre une consigne $q(t) = q^*$, il est possible de modifier la fonction d'énergie du

4.3. COMMANDE PAR INTERCONNEXION POUR MODELER LA STRUCTURE

correcteur de telle sorte que le système en boucle fermée corresponde à un système masse-ressort (linéaire) de raideur κ , amorti par la dissipation induite par K . Ceci est possible en choisissant

$$H_c(x_c) = -\cos(x_c) - \kappa x_c(x_c - x_c^*) + \kappa_0$$

où κ_0 est une constante choisie de telle sorte que $H_c(x_c)$ soit de signe constant. H_c est alors négatif et le système en boucle fermée

$$\begin{pmatrix} \dot{q}(t) \\ \dot{p}(t) \\ x_c(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -K & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} mgl \sin(q(t)) \\ \frac{1}{m} p(t) \\ mgl \sin(x_c(t)) + \kappa(q^*(t) - x_c(t)) \end{pmatrix} \quad (4.26)$$

peut se réécrire en terme d'une interconnexion conservative de puissance entre deux SHP, tel que

$$\begin{pmatrix} \dot{q}(t) \\ \dot{p}(t) \\ x_c(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -K & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} mgl \sin(q(t)) \\ \frac{1}{m} p(t) \\ -(mgl \sin(x_c(t)) + \kappa(q^*(t) - x_c(t))) \end{pmatrix}. \quad (4.27)$$

On retrouve alors le cas de l'energy shaping présenté Section 4.2 et le système en boucle fermé se réduit à

$$\begin{pmatrix} \dot{q}(t) \\ \dot{p}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \kappa(q(t) - q^*) \\ \frac{1}{m} p(t) \end{pmatrix}. \quad (4.28)$$

lorsque le correcteur est initialisé tel que $x_c(0) = x_1(0)$.

4.3.3.1/ ROBUSTESSE

L'emploi d'un gyrateur pour contrebalancer une dynamique du système implique sans surprise que notre méthode de commande est peu robuste aux erreurs faites sur le correcteur. Néanmoins, on peut garantir la stabilité du système en boucle fermée dans le cas particulier où une erreur est commise sur les paramètres m , g et l dans le correcteur. Dans ce cas, q converge vers une constante qui ne correspond plus au q^* du cas sans erreur. Considérons le système en boucle fermée (4.24) dans le cas où une telle erreur ε est commise telle que

$$\begin{pmatrix} \dot{q}(t) \\ \dot{p}(t) \\ x_c(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -K & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} mgl \sin(q(t)) \\ \frac{1}{m} p(t) \\ (mgl + \varepsilon) \sin(x_c(t)) \end{pmatrix} \quad (4.29)$$

Proposition 10 : *Le système (4.29) est stable. Le système en boucle fermée (4.24) est donc robuste à une erreur commise sur les paramètres m , g et l du correcteur.*

Démonstration. Sans erreur d'initialisation sur x_c , on a $x_1 = x_c$. L'équation (4.29) implique alors

$$\begin{aligned} \dot{p}(t) &= -mgl \sin(q(t)) - \frac{K}{m} p(t) + (mgl + \varepsilon) \sin(x_c(t)) \\ \dot{p}(t) &= \varepsilon \sin(q(t)) - \frac{K}{m} p(t) \\ \Rightarrow \ddot{p}(t) &= \varepsilon \sin\left(\frac{1}{m} p(t)\right) - \frac{K}{m} \dot{p}(t) \end{aligned}$$

qui correspond alors à l'équation de comportement d'un pendule amorti, montré exponentiellement stable dans [42]. La décroissance exponentielle de $p(t)$ implique que \dot{q} décroît également exponentiellement vers 0 et q converge vers une constante. \square

4.3.3.2/ RÉSULTATS NUMÉRIQUES

On simule le comportement du système en boucle fermée (4.19) dans le cas où tous les paramètres physiques sont égaux à 1. Le paramètre de contrôle K est également choisi unitaire.

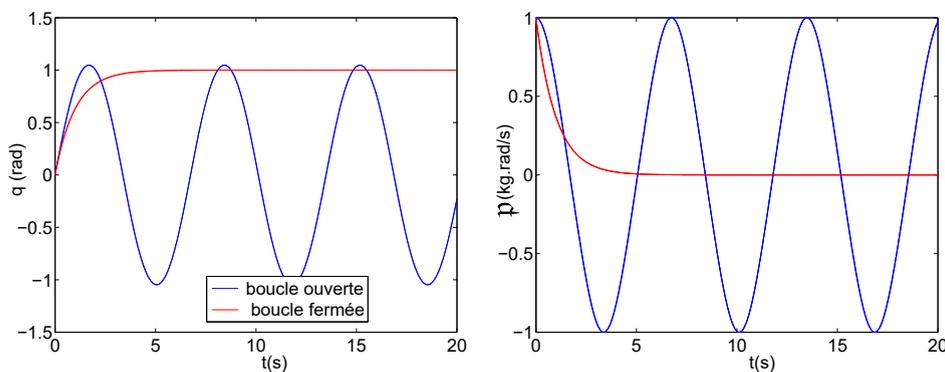


FIGURE 4.3: États du système en boucle fermée

La Figure 4.3 compare l'évolution des états du système en boucle ouverte et en boucle fermée répondant à une condition initiale en $p(0) = 1$. On y voit que le comportement oscillatoire du système en boucle ouverte est remplacé en boucle fermée par un comportement purement dissipatif selon p et que q converge alors vers une constante $q^* = \frac{p(0)}{K} = 1$. La Figure 4.4

illustre quant à elle le cas présenté dans la Section précédente (4.29) pour une erreur commise sur le correcteur telle que $\varepsilon = 0.5$.

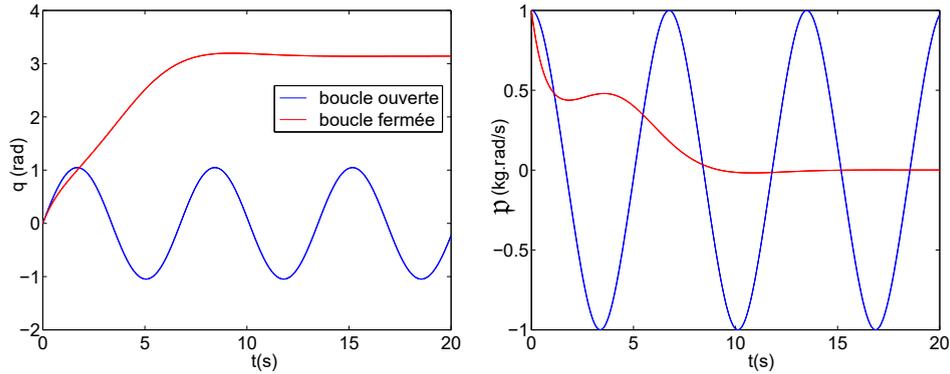


FIGURE 4.4: États du système en boucle fermée avec erreur sur les paramètres du correcteur

Remarque 12 : Le cas d'un suivi de consigne mentionné dans la Remarque 11 conduit aux résultats présentés Figure 4.5 pour $q^* = 1$, $K = 10$ et $\kappa = 10$. On rappelle que ce cas revient à faire de l'energy shaping tel que présenté dans la Section précédente.

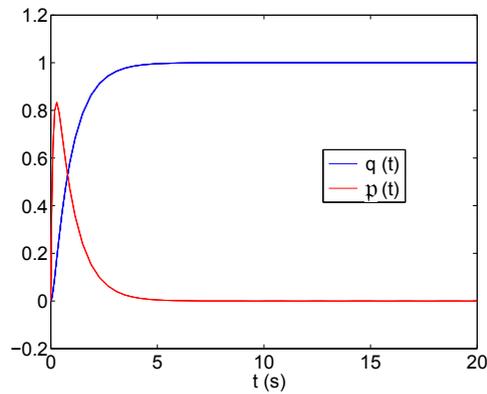


FIGURE 4.5: États du système en boucle fermée dans le cadre d'une commande modifiée pour le suivi de consigne

4.4/ DIMENSION INFINIE

Dans cette Section, nous étendons la méthode de synthèse de loi de commande présentée dans la Section précédente à la dimension infinie. Plus

précisément, nous étendons cette méthode aux systèmes définis sur un domaine spatial 1D régi par deux lois de conservation, avec un actionnement distribué dans le domaine. Nous considérons d'abord l'exemple de l'équation d'onde canonique 1D avant de considérer une plus large classe de systèmes. La stabilité des lois de commande est étudiée et des résultats numériques fournis. L'application de ces lois dans le cas d'un actionnement distribué à la frontière en 2D est également discuté. Les résultats présentés dans les deux prochaines sous-Sections ont fait l'objet d'une publication [88].

4.4.1/ EXEMPLE : "PARABOLISATION" DE L'ÉQUATION D'ONDE CANONIQUE 1D

On considère le modèle hamiltonien à ports de l'équation d'onde canonique définie sur un domaine spatial 1D ($\xi \in [0, L]$) avec commande et observation distribuées :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1(\xi, t) \\ \dot{x}_2(\xi, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\partial}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial}{\partial \xi} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(\xi, t) \\ x_2(\xi, t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(\xi, t) \\ y(\xi, t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(\xi, t) \\ x_2(\xi, t) \end{pmatrix} \end{cases} \quad (4.30)$$

où x_1 et x_2 appartiennent à $L^2([0, L], \mathbb{R})$. L'énergie de ce système est définie par

$$H(x_1, x_2) = \frac{1}{2} \int_0^L (x_1(\xi, t)^2 + x_2(\xi, t)^2) d\xi$$

et sa dérivée temporelle est [50] :

$$\dot{H}(x_1, x_2) = \int_0^L y^\top(\xi, t) u(\xi, t) d\xi + f_\partial^\top(\xi, t) e_\partial(\xi, t)$$

où

$$\begin{pmatrix} f_\partial(\xi, t) \\ e_\partial(\xi, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(0, t) \\ x_1(L, t) \\ x_2(0, t) \\ -x_2(L, t) \end{pmatrix}.$$

Sur cet exemple, le but de la commande est d'exploiter les techniques de commande par interconnexion pour transformer le système hyperbolique (4.30) en un système cible, parabolique, défini par

$$\frac{\partial x_2}{\partial t}(\xi, t) = \frac{\partial^2 x_2}{\partial \xi^2}(\xi, t). \quad (4.31)$$

La première étape consiste à connecter le système conservatif de puissance (4.30) à un contrôleur conservatif de puissance via un gyrateur afin de contrebalancer la propagation de l'onde. Comme en dimension finie, la structure du contrôleur et son initialisation sont choisies de façon à lier l'état du contrôleur à celui du système à travers un invariant structurel. On rappelle que les invariants sont habituellement utilisés afin de modifier la fonction d'énergie en boucle fermée [20], ce qui n'est pas le cas ici. Les invariants sont utilisés ici pour connecter l'état du contrôleur à celui du système afin de modifier la structure du système à travers l'utilisation d'un gyrateur. Dans cet exemple simple, le contrôleur est choisi sous la forme

$$\begin{cases} \dot{x}_c(\xi, t) = 0x_c(\xi, t) - \partial_\xi u_c(\xi, t) \\ y_c(\xi, t) = \partial_\xi x_c(\xi, t) \end{cases} \quad (4.32)$$

et est connecté au système à travers la relation (définissant un gyrateur)

$$\begin{pmatrix} u(\xi, t) \\ u_c(\xi, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(\xi, t) \\ y_c(\xi, t) \end{pmatrix}. \quad (4.33)$$

Le système en boucle fermée est alors défini tel que :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(\xi, t) \\ \dot{x}_2(\xi, t) \\ \dot{x}_c(\xi, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\partial_\xi & 0 \\ -\partial_\xi & 0 & \partial_\xi \\ 0 & -\partial_\xi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(\xi, t) \\ x_2(\xi, t) \\ x_c(\xi, t) \end{pmatrix}. \quad (4.34)$$

On notera que si le système (4.30) et le contrôleur sont deux systèmes hyperboliques, ce n'est pas le cas du système en boucle fermée (4.34). Ceci est dû à l'utilisation du gyrateur (4.33) pour l'interconnexion qui "casse" la structure hamiltonienne du système et permet de contrebalancer la propagation de l'onde. Comme en dimension finie, une propriété intéressante réside dans le fait que même si la structure est ici cassée par l'emploi du gyrateur, il existe des invariants structuraux. On cherche à déterminer ces invariants sous la forme

$$C(x_e) = \int_0^L (\Psi(\xi)^\top x_e(\xi, t)) d\xi \quad (4.35)$$

où $x_e = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_c \end{pmatrix}$ et $\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_c \end{pmatrix}$. Par définition, ces invariants satisfont

$$\dot{C} = 0 \Leftrightarrow \int_0^L \left(\frac{\delta C^\top}{\delta x_e} \dot{x}_e \right) d\xi = \langle \Psi, \dot{x}_e \rangle_{L^2, [0, L]} = 0, \quad (4.36)$$

ce qui équivaut d'après (4.34) à

$$\left\langle \Psi, \begin{pmatrix} 0 & -\partial_\xi & 0 \\ -\partial_\xi & 0 & \partial_\xi \\ 0 & -\partial_\xi & 0 \end{pmatrix} x_e \right\rangle_{L^2, [0, L]} = 0.$$

Après intégration par parties, cette égalité devient

$$\left\langle \left(\begin{array}{ccc} 0 & \partial_\xi & 0 \\ \partial_\xi & 0 & -\partial_\xi \\ 0 & \partial_\xi & 0 \end{array} \right) \Psi, x_e \right\rangle_{L^2, [0, L]} + \left[\Psi^\top \left(\begin{array}{ccc} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{array} \right) x_e \right]_0^L = 0.$$

L'équation (4.35) doit être satisfaite quel que soit x_e et l'égalité (4.37) est alors équivalente aux conditions :

$$\begin{cases} \partial_\xi (\psi_1 - \psi_c) = 0 \\ \partial_\xi \psi_2 = 0 \\ -\psi_1(0) - \psi_c(0) = \psi_1(L) + \psi_c(L) = 0 \\ \psi_2(0) = \psi_2(L) = 0. \end{cases} \quad (4.37)$$

qui sont satisfaites pour

$$\psi_2(\xi) = 0 \text{ et } \psi_1(\xi) = -\psi_c(\xi) = \psi$$

où ψ est indépendant de l'espace. D'après (4.35) il existe un invariant qui lie x_1 et x_c . Si les conditions initiales de x_c sont bien choisie, on a alors

$$x_c(\xi, t) = x_1(\xi, t)$$

et la commande $u = y_c$ est alors équivalente à

$$u(\xi, t) = \partial_\xi x_1(\xi, t)$$

qui simplifie la seconde ligne de l'équation (4.34).

Afin d'imposer au système original le comportement du système cible (4.31) on considère la loi de commande modifiée

$$u(\xi, t) = y_c + \partial_\xi^2 y.$$

Dans ce cas, le système en boucle fermée est équivalent à (4.31) et le contrôleur résultant est de la forme

$$\begin{cases} \dot{x}_x(\xi, t) = 0x_c(\xi, t) + \partial_\xi u_c(\xi, t) \\ y_c(\xi, t) = -\partial_\xi x_c(\xi, t) + \partial_\xi^2 u_c(\xi, t) \end{cases}$$

où x_c doit être initialisé tel que $x_c(\xi, 0) = x_1(\xi, 0)$. Nous voyons à travers cet exemple simple que la méthode présentée 4.3 peut être adaptée au contrôle distribué de systèmes hyperboliques. Le gyrateur et la structure du contrôleur sont employés pour contrebalancer la propagation de l'onde tandis qu'un terme additionnel de *feedback* est utilisé pour imposer la structure en boucle

fermée souhaitée. On notera que les invariants structuraux sont utilisés afin de lier l'état du contrôleur à l'état du système et que l'emploi de cette méthode sur un exemple très simple peut être généralisé à des systèmes plus complexes aux paramètres dépendants de l'espace. De plus, comme en dimension finie, le contrôleur peut être implémenté comme un retour d'état ou n'utiliser que des mesures, ce qui peut être un avantage lors de l'implémentation d'un contrôle en temps réel. Dans la partie suivante nous généralisons cette stratégie de synthèse de loi de commande à un plus large ensemble de systèmes.

4.4.2/ COMMANDE PAR INTERCONNEXION DE SYSTÈMES RÉGIS PAR DEUX LOIS DE CONSERVATION EN DIMENSION INFINIE

Attachons-nous maintenant à étendre notre méthode à une large classe de systèmes linéaires régis par deux lois de conservation en 1D. Nous formulerons d'abord la structure d'interconnexion puis expliciterons le calcul d'invariants structuraux pour ensuite développer la synthèse de la commande. Finalement, nous étudierons la stabilité de la commande.

4.4.2.1/ SYSTÈMES ET ARCHITECTURES DE COMMANDE

On considère à présent des systèmes de lois de conservation de la forme

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1(\xi, t) \\ \dot{x}_2(\xi, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{G} \\ -\mathcal{G}^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{L}_1(\xi)x_1(\xi, t) \\ \mathcal{L}_2(\xi)x_2(\xi, t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ I_{n_2, n_2} \end{pmatrix} u(\xi, t) \\ y(\xi, t) = \begin{pmatrix} 0 & I_{n_2, n_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{L}_1(\xi)x_1(\xi, t) \\ \mathcal{L}_2(\xi)x_2(\xi, t) \end{pmatrix} \end{cases} \quad (4.38)$$

où $x_1 \in L^2([0, L], \mathbb{R}^{n_1})$, $x_2 \in L^2([0, L], \mathbb{R}^{n_2})$, $\mathcal{L}_1(\xi) > 0 \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$ et $\mathcal{L}_2(\xi) > 0 \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$ et où

$$\mathcal{G} = G_0 + G_1 \frac{\partial}{\partial \xi} + G_2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}$$

avec $G_0, G_1, G_2 \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$. \mathcal{G}^* est l'adjoint formel de \mathcal{G} *i.e.*

$$\mathcal{G}^* = G_0^\top - G_1^\top \frac{\partial}{\partial \xi} + G_2^\top \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}.$$

Cette formulation générale (4.38) englobe un grand nombre de systèmes. Par exemple :

- L'équation d'onde 1D, traitée dans la partie précédente, où $n_1 = n_2 = 1$, $G_0 = 0$, $G_1 = 1$, $G_2 = 0$;

- L'équation de poutre d'Euler Bernouilli. Dans ce cas, $n_1 = n_2 = 1$, $G_0 = 0, G_1 = 0, G_2 = 1$;
- L'équation de poutre de Timoshenko. Dans ce cas, $n_1 = n_2 = 2$,

$$G_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, G_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, G_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ce système est connecté à un contrôleur hamiltonien à ports de la forme

$$\begin{cases} \dot{x}_c(\xi, t) = 0 \cdot \mathcal{Q}(\xi)x_c(\xi, t) + \mathcal{B}_c u_c(\xi, t) \\ y_c(\xi, t) = \mathcal{B}_c^* \mathcal{Q}(\xi)x_c(\xi, t) \end{cases} \quad (4.39)$$

où $\mathcal{Q} > 0 \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$ et où \mathcal{B}_c est un opérateur différentiel de la forme

$$\mathcal{B}_c = B_{c0} + B_{c1} \frac{\partial}{\partial \xi} + B_{c2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}$$

avec $B_{c0}, B_{c1}, B_{c2} \in \mathbb{R}^{(n_1 \times n_2)}$. La structure de la connexion est définie par le gyrateur

$$\begin{pmatrix} u(\xi, t) \\ y(\xi, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I_{n_2 \times n_1} \\ I_{n_1 \times n_2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_c(\xi, t) \\ y_c(\xi, t) \end{pmatrix} \quad (4.40)$$

Remarque 13 : Une plus large classe de contrôleurs aurait pu être considérée avec

$$\begin{cases} \dot{x}_c(\xi, t) = (\mathcal{J}_c - \mathcal{R}_c) \mathcal{Q}_c x_c(\xi, t) + \mathcal{B}_c(\xi) u_c(\xi, t) \\ y_c(\xi, t) = \mathcal{B}_c^*(\xi) x_c(\xi, t) \end{cases} \quad (4.41)$$

où \mathcal{J}_c est un opérateur anti-symétrique et \mathcal{R}_c un opérateur symétrique.

4.4.2.2/ CALCUL DES INVARIANTS STRUCTURAUX

Le système en boucle fermée correspondant à l'interconnexion de (4.38) à (4.39) via (4.33) est :

$$\dot{x}_e := \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{G} & 0 \\ -\mathcal{G}^* & 0 & \mathcal{B}_c^* \\ 0 & \mathcal{B}_c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{L}_1 x_1 \\ \mathcal{L}_2 x_2 \\ \mathcal{Q} x_c \end{pmatrix}. \quad (4.42)$$

Proposition 11 : Le système en boucle fermée (4.42) admet des invariants structuraux sous la forme

$$C(x_e) = \int_0^L \Psi^\top x_e d\xi \quad (4.43)$$

$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_c \end{pmatrix}$, avec $\psi_1 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n_1}$, $\psi_2 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n_2}$ et $\psi_c : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n_1}$, si

$$-\mathcal{G}\psi_2(\xi) = 0 = \mathcal{B}_c\psi_2(\xi) \quad (4.44)$$

$$\mathcal{G}\psi_1(\xi) + \mathcal{B}_c^*\psi_3(\xi) = 0 \quad (4.45)$$

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & G_1 & 0 \\ -G_1^\top & 0 & -B_{c1} \\ 0 & B_{c1}^\top & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1(\xi) \\ \psi_2(\xi) \\ \psi_3(\xi) \end{pmatrix} \right]_0^L = 0 \quad (4.46)$$

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & -G_2 & 0 \\ G_2^\top & 0 & B_{c2} \\ 0 & B_{c2}^\top & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1(\xi) \\ \psi_2(\xi) \\ \psi_3(\xi) \end{pmatrix} \right]_0^L = 0 \quad (4.47)$$

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & -G_2 & 0 \\ G_2^\top & 0 & B_{c2} \\ 0 & B_{c2}^\top & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{d\psi_1}{d\xi}(\xi) \\ \frac{d\psi_2}{d\xi}(\xi) \\ \frac{d\psi_3}{d\xi}(\xi) \end{pmatrix} \right]_0^L = 0. \quad (4.48)$$

Démonstration. Par définition, les invariants structuraux satisfont $\dot{C} = 0$ qui est équivalent à

$$\dot{C} = \int_0^L \left(\frac{\delta C}{\delta x_e} \right)^\top \dot{x}_e d\xi = 0 \quad (4.49)$$

où \dot{x}_e est défini par (4.42) et $\frac{\delta C}{\delta x}$ est égal à $\left(\frac{\delta C}{\delta x_e} \right)^\top = (\psi_1 \ \psi_2 \ \psi_3)$. Alors (4.49) est équivalent à

$$\dot{C} = \left\langle \Psi, \frac{dx_e}{dt} \right\rangle_{L^2, [0, L]} = \langle \Psi, \mathcal{J}_e x_e \rangle_{L^2, [0, L]} = 0 \quad (4.50)$$

avec

$$\mathcal{J}_e = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{G} & 0 \\ -\mathcal{G}^* & 0 & \mathcal{B}_c^* \\ 0 & \mathcal{B}_c & 0 \end{pmatrix}.$$

L'intégration par parties de (4.50) conduit à

$$\begin{aligned} \dot{C} &= \langle \mathcal{J}_e^* \Psi, x_e \rangle_{L^2, [0, L]} + \left[\langle J_{e1}^\top \Psi, x_e \rangle \right]_0^L + \\ &\left[\langle J_{e2}^\top \Psi, \frac{\partial x_e}{\partial \xi} \rangle \right]_0^L - \left[\langle J_{e2}^\top \frac{\partial \Psi}{\partial \xi}, x_e \rangle \right]_0^L = 0 \end{aligned} \quad (4.51)$$

qui doit être satisfait quel que soit x_e , et où on utilise la notation (par soucis de simplicité) :

$$\mathcal{J}_e = J_{e0} + J_{e1} \frac{\partial}{\partial \xi} + J_{e2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}.$$

Le premier élément du terme central de (4.51) induit que Ψ doit appartenir au noyau de \mathcal{J}_e^* , ce qui conduit aux équations (4.44) et (4.45). Les trois derniers termes conduisent aux conditions (4.46), (4.47) et (4.48). \square

4.4.2.3/ SYNTHÈSE DE LA COMMANDE

Le principal but du contrôleur est de contrebalancer la propagation de l'onde et d'assigner une nouvelle dynamique selon x_2 au moyen d'une seconde boucle de retour. Dans cette optique, nous choisissons \mathcal{B}_c égal à \mathcal{G} .

Proposition 12 : *En choisissant $\mathcal{B}_c = \mathcal{G}$, le système en boucle fermée (4.42) admet comme invariant structurel la fonction $C(x_e)$ définie par (4.43) avec $\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ 0 \\ -\psi_1 \end{pmatrix}$. Dans ce cas, le système hyperbolique (4.38) connecté au contrôleur dynamique (4.39) avec un feedback additionnel de la forme*

$$u = u_c + \mathcal{K}y, \quad \text{où} \quad \mathcal{K} = K_0 + K_1 \frac{\partial}{\partial \xi} + K_2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}$$

avec $K_0, K_1, K_2 \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$, et où $\mathcal{Q} = \mathcal{L}_1$ est équivalent au système

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t}(\xi, t) \\ \frac{\partial x_2}{\partial t}(\xi, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{G} \\ 0 & \mathcal{K} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{L}_1(\xi)x_1(\xi, t) \\ \mathcal{L}_2(\xi)x_2(\xi, t) \end{pmatrix}. \quad (4.52)$$

Le contrôleur résultant est de la forme

$$\begin{cases} \dot{x}_c(\xi, t) = 0 \cdot \mathcal{Q}(\xi)x_c(\xi, t) + \mathcal{G}u_c(\xi, t) \\ y_c(\xi, t) = \mathcal{G}^* \mathcal{Q}(\xi)x_c(\xi, t) + \mathcal{K}u_c(\xi, t). \end{cases} \quad (4.53)$$

Démonstration. Si \mathcal{B}_c est choisi égal à \mathcal{G} , cela implique que $B_{c0} = G_0$, $B_{c1} = G_1$, et $B_{c2} = G_2$. Alors si $\psi_2(\xi) = 0$, les conditions (4.44) à (4.48) sont satisfaites pour

$$\psi_c(\xi) = -\psi_1(\xi) \neq 0.$$

Si les conditions initiales sont choisies telles que $x_c(\xi, 0) = x_1(\xi, 0)$ alors l'invariant structuel est 0 et on obtient :

$$0 = \int_0^L (\psi_1(\xi)x_1(\xi, t) - \psi_c(\xi)x_c(\xi, t)) d\xi, \quad \forall t.$$

Alors, $x_c(\xi, t) = x_1(\xi, t)$ et la sortie du contrôleur est donnée par

$$y_c(\xi, t) = \mathcal{G}^* \mathcal{L}_1(\xi)x_1(\xi, t).$$

Si on combine ce contrôleur avec un *feedback* agissant sur la sortie du système, on obtient

$$u(\xi, t) = y_c(\xi, t) + \mathcal{K}y(\xi, t) = \mathcal{G}^* \mathcal{L}_1(\xi)x_1(\xi, t) + \mathcal{K}\mathcal{L}_2(\xi)x_2(\xi, t)$$

et le système en boucle fermée est équivalent à

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t}(\xi, t) \\ \frac{\partial x_2}{\partial t}(\xi, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{G} \\ 0 & \mathcal{K} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{L}_1(\xi)x_1(\xi, t) \\ \mathcal{L}_2(\xi)x_2(\xi, t) \end{pmatrix}. \quad (4.54)$$

□

Dans la sous-Section suivante, nous étudierons la stabilité de la loi de commande en fonction du choix de \mathcal{K} .

4.4.2.4/ ÉLÉMENTS DE STABILITÉ

Pour étudier la stabilité de (4.54), comme $x_1(\xi, t)$ n'influe pas sur la dynamique de $x_2(\xi, t)$, nous choisissons de considérer séparément la stabilité de $x_2(\xi, t)$ et d'en déduire celle de $x_1(\xi, t)$. Les résultats fournis dans cette partie n'incluent pas tous les choix possibles pour le correcteur et sont l'objet de travaux en cours. Ils permettent néanmoins de considérer des cas intéressants de transformation de la structure du système en boucle fermée. Introduisons tout d'abord la notion de stabilité exponentielle en dimension infinie.

Définition 9 : [17] L'EDP $\dot{x}(\xi, t) = f(\xi, t, x)$ où $\xi \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$ admet un équilibre $x(\xi, t) = x_\infty(\xi) \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$ dit "exponentiellement stable" si existent $t_0 \in \mathbb{R}^+$, $\sigma \in \mathbb{R}^+$ et $k \in \mathbb{R}^+$ tels que

$$\forall t \geq t_0, \|x(\xi, t) - x_\infty(\xi)\| \leq ke^{-\sigma(t-t_0)}$$

où

$$\|x(\xi, t) - x_\infty(\xi)\| = \sqrt{\langle x(\xi, t) - x_\infty(\xi), x(\xi, t) - x_\infty(\xi) \rangle_{L^2, \Omega}}.$$

Le choix de \mathcal{K} permet d'imposer le comportement en boucle fermée de $x_2(\xi, t)$. Parmi les choix possibles, on considère dans la suite trois cas particuliers : • $K_0 \neq 0, K_1 = 0, K_2 = 0$: le comportement de $x_2(\xi, t)$ est alors régi par une équation d'absorption

$$\dot{x}_2(\xi, t) = K_0 \mathcal{L}_2(\xi) x_2(\xi, t); \quad (4.55)$$

• $K_0 = 0, K_1 \neq 0, K_2 = 0$: le comportement de $x_2(\xi, t)$ est alors régi par une équation d'advection

$$\dot{x}_2(\xi, t) = K_1 \partial_\xi (\mathcal{L}_2(\xi) x_2(\xi, t)); \quad (4.56)$$

• $K_0 = 0, K_1 = 0, K_2 \neq 0$: le comportement de $x_2(\xi, t)$ est alors régi par une équation de diffusion

$$\dot{x}_2(\xi, t) = K_2 \partial_\xi^2 (\mathcal{L}_2(\xi) x_2(\xi, t)). \quad (4.57)$$

Notons que d'après la première ligne de (4.54),

$$x_1(\xi, t) = x_1(\xi, 0) + \int_0^t \mathcal{G} \mathcal{L}_2 x_2(\xi, \tau) d\tau \quad (4.58)$$

Dans le premier cas, où $x_2(\xi, t)$ obéit à (4.55), on trouve un cas similaire à celui traité en dimension finie Section 4.3.2.1. La deuxième ligne de (4.54) a dans ce cas pour solution

$$x_2(\xi, t) = x_2(\xi, 0)e^{K_0\mathcal{L}_2(\xi)t}$$

et est donc exponentiellement stable lorsque le paramètre de commande K_0 est défini négatif. On peut alors déduire de (4.58) :

$$\begin{aligned} x_1(\xi, t) &= x_1(\xi, 0) + \int_0^t \mathcal{G}\mathcal{L}_2 e^{K_2\mathcal{L}_2\tau} x_2(\xi, 0) d\tau \\ x_1(\xi, t) &= x_1(\xi, 0) + \mathcal{G}\mathcal{L}_2 (K_0\mathcal{L}_2(\xi))^{-1} (e^{K_0\mathcal{L}_2(\xi)t} - I)x_2(\xi, 0) \end{aligned}$$

qui tend exponentiellement vers une constante lorsque t tend vers l'infini pour $K_0 < 0$. Le système est alors exponentiellement stable.

Dans le deuxième cas, $x_2(\xi, t)$ obéit à l'équation (4.56) qui traduit une convection d'une condition initiale ou d'une entrée frontière dans un sens défini par le signe de K_1 . Si K_1 est défini positif, la convection est dirigée vers la frontière $\xi = 0$. Sans source à la frontière $\xi = L$, $x_2(\xi, t)$ devient exactement uniformément nul en un temps fini t_0 , ce qui implique sa stabilité exponentielle. D'après (4.58), $x_1(\xi, t)$ est alors égal, pour tout $t \geq t_0$, à

$$x_1(\xi, t) = x_1(\xi, 0) + \int_0^{t_0} \mathcal{G}\mathcal{L}_2 x_2(\xi, \tau) d\tau.$$

Le système est alors exponentiellement stable.

Dans le troisième cas, $x_2(\xi, t)$ obéit à l'équation (4.57) qui est une équation de diffusion. Cette équation n'est de manière générale pas exponentiellement stable. Toutefois, en l'absence de source à la frontière, la stabilité exponentielle est démontrée dans le cas d'une condition absorbante à la frontière dans [47]. Les auteurs de [5] ont quant à eux étudié une condition de stabilité exponentielle de l'équation de diffusion en fonction d'un terme additionnel d'absorption dans le domaine, correspondant à $K_0 < 0$. Toutefois, cette stabilité exponentielle selon x_2 ne permet pas directement de déduire la stabilité de x_1 et la démonstration de stabilité de ce cas est l'objet de travaux en cours. Des résultats numériques encourageants quant à cette stabilité ont été obtenus, c'est pourquoi nous continuons de considérer ce cas dans la suite.

4.4.3/ APPLICATION AU SYSTÈME VIBRO-ACOUSTIQUE

Illustrons à présent cette méthode de commande par interconnexion sur l'approximation 1D du système vibroacoustique actionné dans le domaine

dont le modèle est :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1(\xi, t) \\ \dot{x}_2(\xi, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\partial_\xi \\ -\partial_\xi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu_0} x_1(\xi, t) \\ \frac{1}{\chi_s} x_2(\xi, t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(\xi, t) \\ y(\xi, t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu_0} x_1(\xi, t) \\ \frac{1}{\chi_s} x_2(\xi, t) \end{pmatrix}. \end{cases} \quad (4.59)$$

On rappelle que la condition à la frontière $\xi = L$ est considérée parfaitement absorbante. Ce modèle correspond à la formulation générale (4.38) pour

$$G_0 = 0, G_1 = -1, G_2 = 0, \mathcal{L}_1(\xi) = \frac{1}{\mu_0}, \mathcal{L}_2(\xi) = \frac{1}{\chi_s}.$$

D'après la Proposition 12, le contrôleur défini tel que

$$\begin{cases} \dot{x}_c(\xi, t) = 0, \frac{1}{\mu_0} x_c(\xi, t) + \partial_\xi u_c(\xi, t) \\ y_c(\xi, t) = -\partial_\xi \left(\frac{1}{\mu_0} x_c(\xi, t) \right) (\xi, t) + \mathcal{K} u_c(\xi, t) \end{cases} \quad (4.60)$$

permet de transformer le système d'origine (4.59) en

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t}(\xi, t) \\ \frac{\partial x_2}{\partial t}(\xi, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{G} \\ 0 & K_0 + K_1 \partial_\xi + K_2 \partial_\xi^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{L}_1 x_1(\xi, t) \\ \mathcal{L}_2 x_2(\xi, t) \end{pmatrix} \quad (4.61)$$

en utilisant le gyrateur $u(\xi, t) = y_c(\xi, t)$, $u_c(\xi, t) = y(\xi, t)$.

Dans la suite, on considérera uniquement les trois cas particuliers $\mathcal{K} = K_0$, $\mathcal{K} = K_1 \partial_\xi$ et $\mathcal{K} = K_2 \partial_\xi^2$ traités dans la sous-Section précédente. L'application de la stratégie de commande au cas de l'équation d'onde acoustique permet d'étudier quelques aspects de la robustesse du système en boucle fermée.

4.4.3.1/ ROBUSTESSE

L'interconnexion employée dans notre stratégie de commande ayant pour but de contrebalancer la propagation de l'onde, notre méthode de commande est sans surprise peu robuste aux erreurs faites sur le correcteur. Néanmoins, on peut garantir la robustesse du système en boucle fermée dans un cas particulier d'erreur commises sur l'initialisation du correcteur.

Considérons le cas d'une erreur non nulle d'initialisation du correcteur $\nu(\xi) = x_c(\xi, 0) - x_1(\xi, 0)$.

Proposition 13 : Lorsque l'erreur d'initialisation du correcteur est uniforme dans l'espace, $\nu(\xi) = \nu$, le système en boucle fermée est stable.

Démonstration. L'existence de la fonction de Casimir définie par (4.43) avec $\Psi = (\Psi_1, 0, \Psi_1)$ implique que l'erreur $x_c(\xi, t) - x_1(\xi, t)$ est constante dans le temps et est donc égale à $\nu(\xi)$. On a alors

$$\begin{aligned}\dot{x}_2(\xi, t) &= -\partial_\xi \frac{1}{\mu_0} x_1(\xi, t) + \partial_\xi \frac{1}{\mu_0} x_c(\xi, t) + \mathcal{K} \frac{1}{\chi_s} x_2(\xi, t) \\ \dot{x}_2(\xi, t) &= \frac{1}{\mu_0} \partial_\xi \nu(\xi) + \mathcal{K} \frac{1}{\chi_s} x_2(\xi, t).\end{aligned}$$

Le terme $\partial_\xi \nu(\xi)$ étant nul quand $\nu(\xi) = \nu$ est indépendant de l'espace. Dans ce cas, on retrouve la seconde ligne de (4.54) et le système est stable. \square

On propose dans la suite de simuler le comportement du système pour les trois cas particuliers présentés dans la Section précédente, à savoir $\mathcal{K} = K_0$, $\mathcal{K} = K_1 \partial_\xi$ et $\mathcal{K} = K_2 \partial_\xi^2$.

4.4.4/ SIMULATIONS

Le système vibro-acoustique 1D en boucle fermée est simulé pour $t \in [0, T]$ en considérant les valeurs numériques du Tableau 4.1. Les simulations traitent le cas où une onde est injectée à la frontière du le système et le cas de la propagation d'une condition initiale dans le domaine. Ces cas sont respectivement notés "cas I" et "cas II" dans le Tableau 4.1. La condition frontière en $\xi = L$ est choisie purement absorbante comme c'est le cas sur notre système vibro-acoustique.

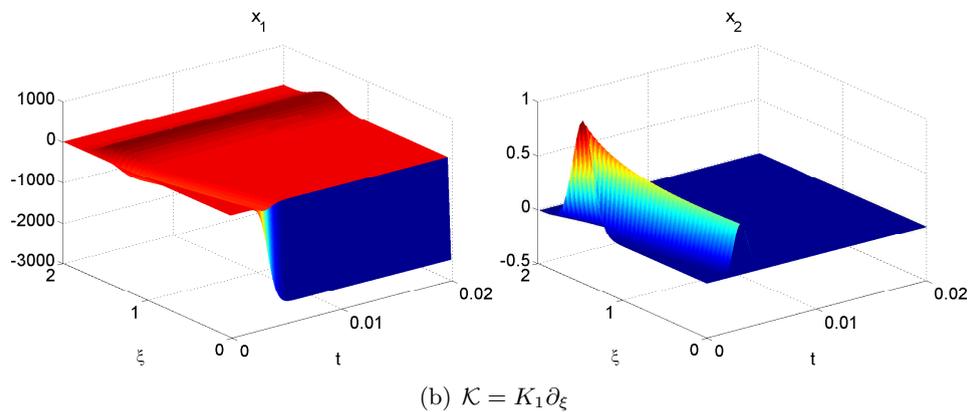
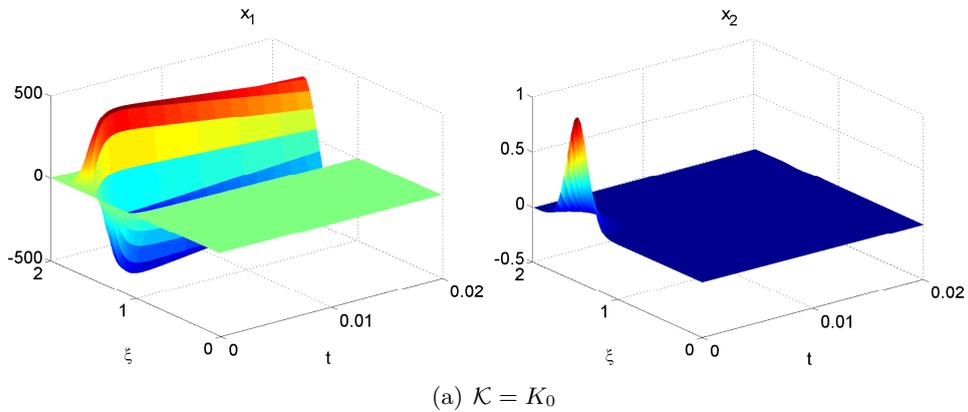
Paramètres	Valeurs	Paramètres	Valeurs
T	0,02 s	L	2 m
$x_1(\xi, 0)$	0	μ_0	1,225 kg.m ⁻³
$x_2(\xi, 0)$	$\begin{cases} 0 \text{ cas I} \\ F(1, 425; 0, 113) \text{ cas II} \end{cases}$	χ_s	7,061e ⁻⁶ Pa ⁻¹
$\frac{1}{\mu_0} x_1(\xi = L, t)$	$\begin{cases} \frac{1}{\chi_s} \sin(2\pi ft) \text{ cas I} \\ 0 \text{ cas II} \end{cases}$	f	330,16 Hz
K_0	-0.01	K_1	0.003
K_2	0.01		

TABLEAU 4.1: Valeurs numériques pour la simulation en boucle fermée

$F(1, 425; 0, 113)$ est une gaussienne unitaire centrée en $x = 1, 425$ m d'écart type 0.113 m. Les simulations sont réalisées à partir du simulateur présenté dans le chapitre précédent pour un pas temporel de $2, 5 \cdot 10^{-6}$ s et un pas spatial de $3, 76 \cdot 10^{-2}$ m.

4.4.4.1/ RÉPONSE À UNE CONDITION INITIALE

Les conditions initiales pour $p = \frac{1}{\chi_s} \Gamma$ sont définies par une gaussienne $F(1.425, 0.113)$ (cf Tableau 4.1). Les Figures 4.6(a), 4.6(b) et 4.6(c) montrent les réponses temporelles de l'état du système en boucle fermée respectivement dans les cas $\mathcal{K} = K_0$, $\mathcal{K} = K_1 \partial_\xi$ et $\mathcal{K} = K_2 \partial_\xi^2$. Dans le cas où $\mathcal{K} = K_0$, on peut voir Figure 4.6(a) que la gaussienne est atténuée sans se propager dans le domaine, ce qui correspond à une absorption pure. Lorsque $\mathcal{K} = K_1 \partial_\xi$, la Figure 4.6(b) montre que la condition initiale est convoyée vers $\xi = 0$ à une vitesse dépendant de K_1 . Enfin, le cas où $\mathcal{K} = K_2 \partial_\xi^2$, on peut voir Figure 4.6(c) que la gaussienne est atténuée de la même manière que pour un système régi par une équation de diffusion. Pour chacun de ces cas, on constate que $x_1(\xi, t)$ converge bien vers un profil constant.



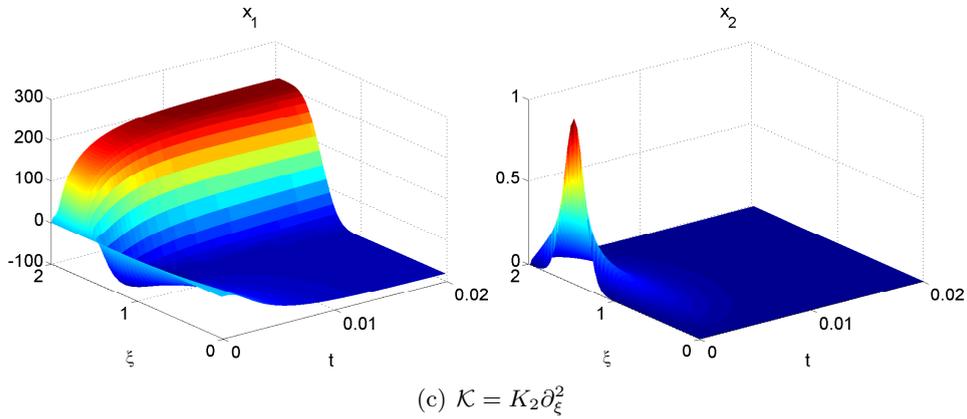
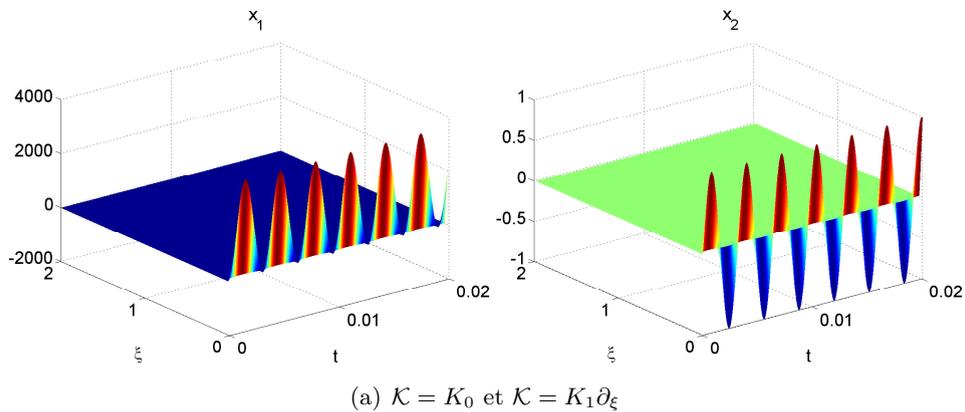


FIGURE 4.6: Réponse du système en boucle fermée à une condition initiale

4.4.4.2/ RÉPONSE À UNE ENTRÉE FRONTIÈRE

Dans ce nouveau cas d'étude, les conditions initiales sont nulles. La condition frontière sur $\frac{1}{\mu_0} x_1(0, t) = e_1(0, t) = \frac{1}{\chi_s} \sin(2\pi f t)$ (cf Tableau 4.1) est choisie comme étant l'entrée du système. La Figure 4.7 montre les réponses temporelles de l'état du système en boucle fermée. La Figure 4.7(a) correspond aux cas $\mathcal{K} = K_0$ et $\mathcal{K} = K_1 \partial_\xi$ pour lesquels les résultats sont identiques et la Figure 4.7(b) correspond au cas $\mathcal{K} = K_2 \partial_\xi^2$. La Figure 4.7(a) montre que la propagation de l'onde est complètement empêchée par la commande.



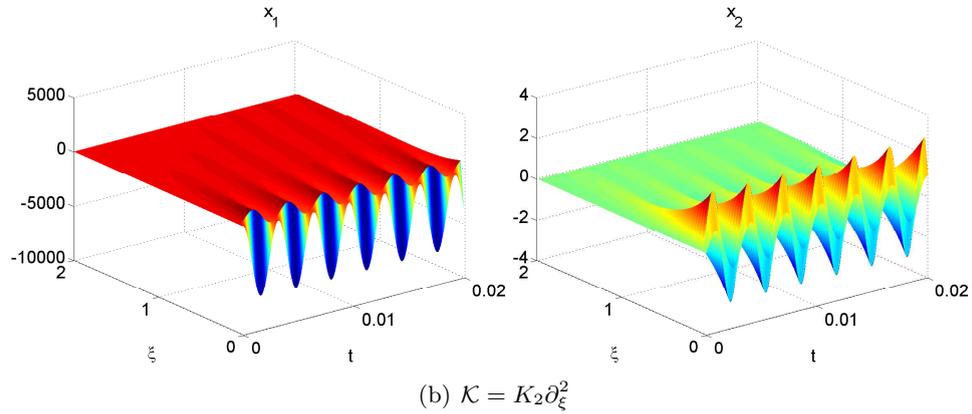
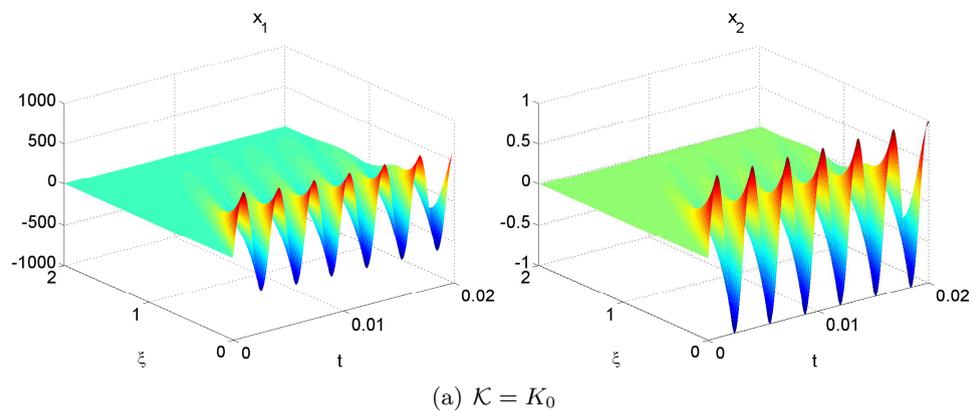


FIGURE 4.7: Réponse du système en boucle fermée à une entrée frontière

La Figure 4.7(b) montre que la sinusoïde appliquée à la frontière du système est rapidement atténuée lorsque la commande est mise en place. Choisir un coefficient de diffusion K_2 suffisamment grand permet d'empêcher l'onde d'atteindre la frontière opposée du domaine. Comme dans le cas de réponses à une condition initiale, on constate que $x_1(\xi, t)$ reste stable.

4.4.4.3/ ROBUSTESSE

Le contrôleur apparaît robuste à une sur-estimation des paramètres du système, c'est à dire lorsque le terme μ_0 implémenté dans (4.60) est en réalité supérieur au μ_0 physique.



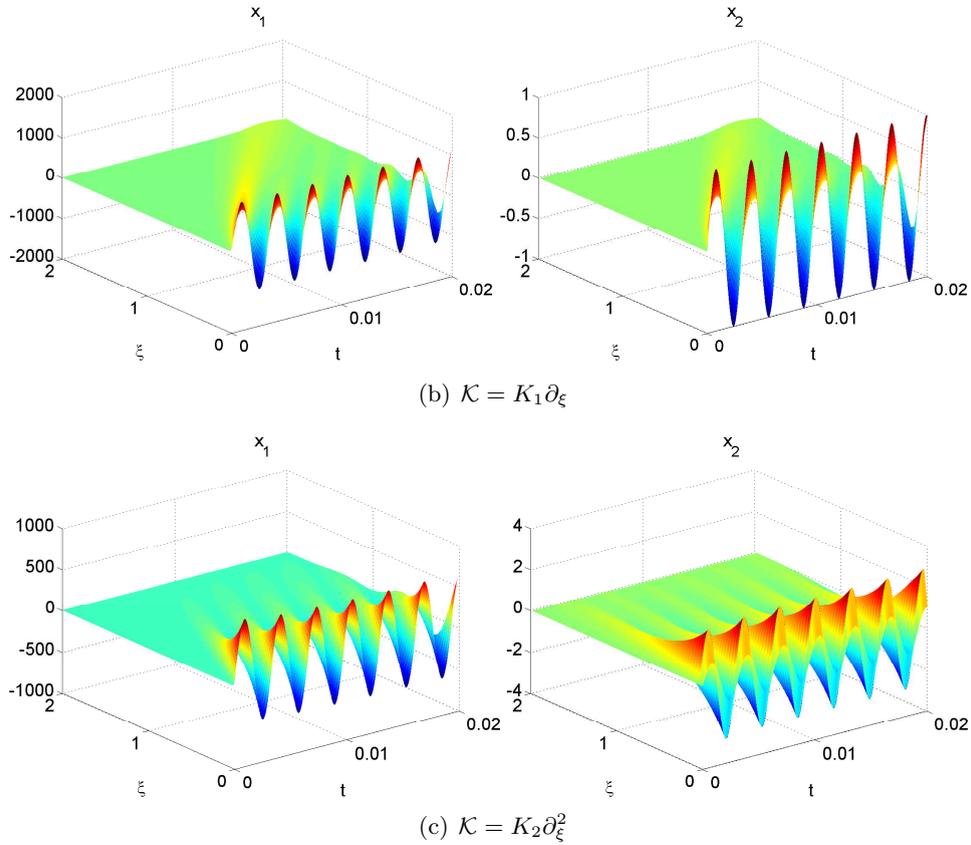


FIGURE 4.8: Réponse du système en boucle fermée à une entrée frontière dans le cas d'une erreur de 50% sur μ_0

On constate Figure 4.8 qu'une erreur de 50% sur ce paramètre induit une dégradation des performances en boucle fermée sans impact notable sur la stabilité du système pour les trois cas $\mathcal{K} = K_0$, $\mathcal{K} = K_1 \partial_\xi$ et $\mathcal{K} = K_2 \partial_\xi^2$.

On considère Figure 4.9 le cas où une erreur est commise sur $x_c(\xi, 0)$. On choisit une condition nulle sur $x_1(\xi, 0)$ et une condition gaussienne centrée en $\xi = 0,5$ m d'écart type 0,113 m. On observe que $x_2(\xi, t)$ converge alors vers un profil constant et que $x_1(\xi, t)$ diverge donc linéairement. Ceci illustre la grande sensibilité de notre synthèse de loi de commande aux erreurs d'initialisation. La robustesse de cette méthode en regard de cette erreur pourrait être améliorée en incluant une structure d'observateur au contrôleur.

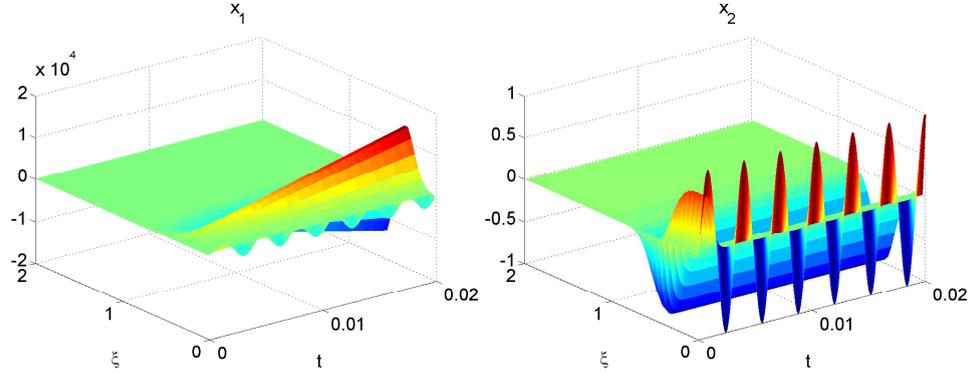


FIGURE 4.9: Réponse du système en boucle fermée pour $\mathcal{K} = K_1 \partial_\xi$ à une entrée frontière dans le cas d'une erreur d'initialisation sur x_c

Dans la sous-Section suivante, on s'intéresse à l'application de notre stratégie de commande 1D dans le cas d'un contrôle frontière 2D du tube vibro-acoustique.

4.4.5/ EXTENSION 2D POUR LE SYSTÈME ACOUSTIQUE COMMANDÉ À LA FRONTIÈRE

On rappelle l'écriture 2D d'une onde acoustique sur un domaine rectangulaire

$$\begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\Gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\partial_{\xi_1} \\ 0 & 0 & -\partial_{\xi_2} \\ -\partial_{\xi_1} & -\partial_{\xi_2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ p \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} f_\partial \\ e_\partial \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p(L_1, \xi_2, t) \\ v_1(0, \xi_2, t) \\ -p(\xi_1, L_2, t) \\ v_2(\xi_1, 0, t) \\ v_1(L_1, \xi_2, t) \\ p(0, \xi_2, t) \\ v_2(\xi_1, L_2, t) \\ p(\xi_1, 0, t) \end{pmatrix}. \quad (4.62)$$

On considère les conditions frontières présentées Figure 2.5 (Page 38) avec un actionnement tout le long de la frontière $\xi_2 = L_2$, ce qui correspond à $s_a = 0$ et $s_b = L_1$. Lorsque L_2 est très petit devant L_1 , on peut alors approximer $\partial_{\xi_2} v_2(\xi_1, \xi_2, t) \approx \frac{v_2(\xi_1, L_2, t) - v_2(\xi_1, 0, t)}{L_2}$ et (4.62) devient

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\Gamma} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -\partial_{\xi_1} \\ -\partial_{\xi_1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\partial_{\xi_2} \end{pmatrix} e_2 \\ &\approx \begin{pmatrix} 0 & -\partial_{\xi_1} \\ -\partial_{\xi_1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{-v_2(\xi_1, L_2) + v_2(\xi_1, 0)}{L_2}. \end{aligned} \quad (4.63)$$

Dans le cadre de l'approximation 1D du système commandé à la frontière présenté Chapitre 1 où $v_2(\xi_1, 0, t) = 0$ et où $v_2(\xi_1, L_2, t)$ correspond

à la vitesse de la membrane des actionneurs, il est alors possible de choisir $v_2(\xi_1, L_2, t) = w(\xi_1, t) = -L_2 u(\xi_1, t)$ où w est la loi de commande adaptée et où u est la loi de commande présentée dans la partie précédente.

La gamme de fréquences où l'approximation 1D pour un système sans actionnement est possible correspond à une fréquence en dessous d'une fréquence de coupure f_c au-delà de laquelle une onde transversale peut se propager [69]. Dans le cas d'un guide d'onde de section rectangulaire $L_2 \times L_3$ avec $L_2 \leq L_3$, $f_c = \frac{c}{2L_3}$ et dans le cas d'un guide d'onde cylindrique de diamètre D , $f_c = \frac{1.84c}{\pi D}$ où c est la célérité de l'onde. Dans le cas d'un domaine de section rectangulaire composé d'air ($c \approx 340 \text{ m.s}^{-1}$) où $L_1 \times L_2 \times L_3 = 2 \text{ m} \times 0,2 \text{ m} \times 0,2 \text{ m}$, on a alors $f_c = 850 \text{ Hz}$.

La Figure 4.10 représente le cas où le second feedback $\mathcal{K} = K_1 \partial_\xi$ transposé en 2D pour les dimensions données précédemment dans le Tableau 4.1 (page 114) avec comme seul paramètre supplémentaire le pas spatial de la simulation selon ξ_2 égal à 0,02 m. La Figure 4.10 représente $\Gamma(\xi_1, \frac{1}{2}L_2, t)$ au cours du temps. On y voit qu'une partie de l'onde en entrée du tube parvient à atteindre l'extrémité $\xi_1 = L_1$ du conduit. Jusque 10% de l'amplitude d'entrée parvient à traverser de part en part le domaine au début de la simulation ($t \approx 0,7 \text{ ms}$), puis moins de 3% à partir de $t \approx 1,2 \text{ ms}$. On en conclut que si l'approximation 1D du système en boucle ouverte conduit à des différences de performances notables avec le système 2D, on peut néanmoins utiliser la loi de commande synthétisée en 1D sur le système 2D.

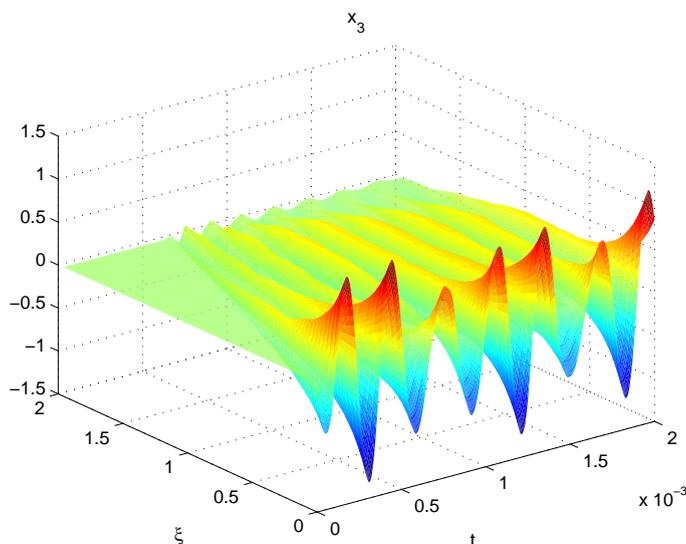


FIGURE 4.10: Réponse de $\Gamma(\xi_1, \frac{1}{2}L_2, t)$ au cours du temps en boucle fermée à une entrée sinusoïdale le long de $\xi_1 = 0$

D'après (4.63), appliquer notre méthode de synthèse de loi de commande 1D sur le système 2D revient à adapter $u(\xi_1, t)$ de manière à imposer $-\partial_{\xi_2} v_2(\xi_1, \xi_2, t) \approx \frac{v_2(\xi_1, L_2, t) - v_2(\xi_1, 0, t)}{L_2}$. Un lien peut alors être établi entre notre loi de commande et celle mise en place expérimentalement dans des travaux antérieurs [19] qui consiste à imposer $\partial_{\xi_2} v_2(\xi_1, L_2, t) = u'(\xi_1, t)$ avec

$$u'(\xi, t) = - \left(\frac{1}{\kappa} \dot{p}(\xi, t) - \partial_{\xi} p(\xi, t) \right) \quad (4.64)$$

avec κ le paramètre de commande. En effet, dans le cas où on choisit $\mathcal{K} = \partial_{\xi} K_1$ avec $K_1 > 0$ dans (4.61), ce qui correspond à imposer un comportement d'advection au système, la loi de commande issue de notre méthode correspond au retour d'état

$$\begin{aligned} u(\xi, t) &= \partial_{\xi} v_1(\xi, t) + K_1 \partial_{\xi} p(\xi, t) \\ &= - \left(\frac{1}{\chi_s} \dot{p}(\xi, t) - K_1 \partial_{\xi} p(\xi, t) \right). \end{aligned}$$

Notre loi de commande est par conséquent semblable à (4.64) et les deux lois coïncident pour un choix des paramètres de commande $\kappa = \chi_s$ et $K_1 = 1$.

4.5/ CONCLUSION

Nous avons proposé dans ce chapitre une stratégie de commande par interconnexion basée sur le calcul d'invariants structuraux du système afin de modéliser la structure du système en boucle fermée. Cette méthode a été proposée en dimension finie et en dimension infinie pour les systèmes régis par deux lois de conservation. Elle repose sur l'interconnexion du SHP en boucle ouverte avec un correcteur hamiltonien à ports via une structure d'interconnexion définie par un gyrateur. Cette interconnexion "casse" alors la structure hamiltonienne du système en boucle fermée. La mise en place d'une seconde boucle de retour permet alors de choisir la structure du système en boucle fermée. La stabilité du système en boucle fermée pour des choix particuliers de cette seconde boucle a été étudiée. Cette méthode a été appliquée au cas de la formulation 1D du système vibro-acoustique et la robustesse de la commande a été montrée pour des cas particuliers d'erreurs sur l'initialisation du correcteur. Nous avons proposé une extension de l'application des lois de commandes synthétisées dans le cas 2D commandé à la frontière et avons établi qu'un cas particulier de nos lois synthétisées coïncide avec la loi précédemment implémentée dans [19]. Des résultats en simulation ont été fournis.

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

CONCLUSION GÉNÉRALE

Dans cette thèse, nous nous sommes attachés à observer une problématique de vibro-acoustique à travers le prisme de l'automatique, et plus particulièrement du formalisme des systèmes hamiltoniens à ports. Ce point de vue a permis de mettre en lumière des problématiques de modélisation, de discrétisation et de commande qui ont été abordées au long des différents chapitres.

Nous avons proposé une représentation du système vibro-acoustique en interconnectant à la frontière un modèle d'onde 2D à un modèle de haut-parleur de dimension infinie. En démontrant l'antisymétrie de l'opérateur décrivant l'onde pour le jeu de variables frontières proposé dans notre modèle, nous avons montré que ce dernier repose sur une structure de Dirac et est un système hamiltonien à ports. Ces résultats ont été étendus dans le cadre d'un système en coordonnées polaires défini sur un domaine circulaire.

Nous avons développé une méthode de discrétisation spatiale du modèle qui repose sur l'utilisation de différences finies sur des grilles en quinconce pour l'approximation des opérateurs de dérivée spatiale. Cette méthode garantit que le système discrétisé repose sur une structure de Dirac qui approxime la structure de Dirac originelle et est également un système hamiltonien à ports. Cette propriété permet une représentation fidèle des lois de conservation qui sous-tendent l'équation d'onde ainsi qu'un respect du sens physique des conditions à la frontière. En outre, ceci permet d'interconnecter de manière directe le modèle discrétisé à d'autres systèmes d'équations aux dérivées ordinaires ou d'équations aux dérivées partielles discrétisées, par exemple pour considérer des géométries complexes. Le principal intérêt d'une telle méthode par rapport à d'autres discrétisations conservatives de structure est sa simplicité de mise en œuvre qui découle de l'utilisation de différences finies. Nous avons proposé cette méthode dans les cas 1D et 2D pour des maillages rectilinéaires ou triangulaires réguliers, et l'avons complété d'une intégration temporelle selon la règle du point milieu. Une extension de cette méthode dans le cadre d'un maillage circulaire est réalisée.

Concernant la commande du système, nous avons proposé une méthode

basée sur le contrôle par interconnexion via l'utilisation d'invariants structuraux, non pas dans le cadre de l'*energy shaping*, mais afin de remodeler la structure du système en boucle fermée pour atteindre un comportement cible. L'originalité de cette méthode réside en le fait que l'interconnexion entre le système et le contrôleur n'est pas conservative de puissance, mais repose sur une structure de gyrateur, tout en assurant que le système en boucle fermée admette des fonctions de Casimir. Nous avons proposé cette méthode en dimension finie et en dimension infinie pour des systèmes régis par deux lois de conservation. En dimension infinie, nous nous sommes focalisés sur un problème de commande distribuée en 1D. Les lois de commandes proposées issues de cette méthodes incluent des lois qui imposent au système en boucle fermée un comportement parabolique ou encore un comportement de convection ou d'absorption. Nous avons appliqué cette méthode de synthèse de lois de commande dans le cas de la formulation 1D du système vibro-acoustique et avons étudié la stabilité et la robustesse du système en boucle fermée. Enfin, nous avons proposé une extension de ces lois de commande pour le problème de commande frontière du système vibro-acoustique dans le cas 2D et montré qu'un cas particulier de loi de commande issu de notre méthode coïncide dans le cas 2D à une loi de commande ayant conduit à des résultats expérimentaux [19] performants dans des travaux antérieurs.

PERSPECTIVES

De nombreuses perspectives de recherche peuvent être conduites à partir de ces travaux.

Les premiers axes de perspectives concernent notre méthode de discrétisation basée sur l'utilisation de différences finies sur des grilles en quinconce. Une extension de cette méthode peut-être réalisée afin de pouvoir considérer des géométries quelconques. Une piste qui semble prometteuse serait de connecter un maillage structuré dans le domaine à un maillage composé d'éléments non structurés à la frontière. L'emploi de volumes finis dans ce but semble tout indiqué. En effet, B. Hamilton [34] propose d'ores et déjà une utilisation de différences finies connectées à des volumes finis à la frontière et P. Kotyczka [45] a proposé récemment une discrétisation 1D basée sur l'utilisation de volumes finis qui conserve la structure hamiltonienne à ports de systèmes régis par deux lois de conservation.

Un autre axe de perspective serait le couplage de notre méthode de discrétisation spatiale avec la méthode d'intégration temporelle du gradient discret présentée récemment notamment dans la thèse d'A. Falaize [25] dans le cadre de la simulation de systèmes audio et dans le formalisme hamiltonien

à ports.

Un axe plus prospectif qui fait actuellement l'objet de travaux consiste à montrer l'intérêt de cette méthode pour le calcul numérique parallèle. En effet, comme cette méthode considère le système discrétisé comme un ensemble de sous-systèmes élémentaires interconnectés, l'affectation du calcul des différences finies à plusieurs postes de calculs peut présenter un intérêt en terme de rapidité de calcul. Les travaux en cours sont menés dans le cadre d'une extension de notre méthode à la mécanique des milieux déformables en 2D pour un maillage rectilinéaire. Cette extension implique de considérer une quatrième grille en quinconce permettant de discrétiser les contraintes de cisaillement dans le matériau.

Concernant la commande en dimension infinie utilisant les invariants structuraux pour modeler la structure du système en boucle fermée, la méthode proposée dans cette thèse doit être considérée comme un premier pas vers des lois de commande plus performantes, notamment en terme de robustesse, générées dans le cadre de commande frontière en 2D et 3D.

Un axe de perspective est l'inclusion d'une structure d'observateur à la commande afin d'assurer la robustesse du système en boucle fermée aux erreurs d'initialisation. Nous pouvons également envisager d'étendre l'étude menée dans cette thèse à une plus large classe de contrôleur, ce qui pourrait permettre des degrés de libertés supplémentaires sur le choix du comportement imposé au système en boucle fermée. Enfin, nous pouvons réduire la distance entre notre étude théorique et l'application expérimentale en considérant une commande continue par morceaux qui correspondrait plus fidèlement au réseau d'actionneurs qui composent la surface active du système physique.

Nous n'avons pas pu obtenir de résultats expérimentaux stables basés sur nos lois de commande. Plusieurs raisons expliquent ceci. Premièrement, la version la plus récente du système expérimental comporte en entrée du tube un haut-parleur source incliné de 45° . L'hypothèse d'une onde plane en entrée du système qui justifie la formulation 2D du système (voir page 18) n'est alors plus valable. Enfin, le modèle particulier de haut-parleurs utilisés sur le système présente un second mode de vibration basses fréquences qui ne correspond pas au modèle assimilable à un système masse-ressort que nous avons proposé. La déformation de la membrane induite par l'excitation de ce mode empêche alors l'approximation de la dérivée spatiale de la pression qui est évaluée à partir des mesures des microphones placés de part et d'autre de la membrane. Un nouveau système expérimental, en cours de réalisation, devrait résoudre ces problèmes et permettre l'implémentation de nos lois de commande.

TABLEAU DES NOTATIONS

Notations introduites dans le Chapitre 1 : On considère $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine spatial de frontière \mathcal{B} et muni d'un repère décrit par coordonnées ξ_n . Lorsque le domaine de n n'est pas précisé, il s'agit de la dimension de Ω , soit $n \in \{1, 2, 3\}$.

<i>Symbole</i>	<i>Description</i>
$M(\xi_n), V(\xi_n, t), \mathcal{P}(\xi_n, t),$ $\mathcal{M}(\xi_n, t) \in \mathbb{R}^+$	masse, volume, pression et masse volumique d'une particule
$\mathcal{V}(\xi_n, t) \in \mathbb{R}^n$	vitesse particulière
$v_0(\xi_n), p_0(\xi_n), \mu_0(\xi_n)$ $v(\xi_n, t), p(\xi_n, t), \mu(\xi_n, t)$	$\mathcal{V}(\xi_n, t), \mathcal{P}(\xi_n, t), \mathcal{M}(\xi_n, t)$ en l'absence d'onde petites variations autour de $v_0(\xi_n), p_0(\xi_n), \mu_0(\xi_n)$
$\chi_s \in \mathbb{R}^+$	facteur de compressibilité adiabatique
$c \in \mathbb{R}^+$	célérité de propagation d'onde
$\varepsilon_c(\xi_n, t), E_c(t) \in \mathbb{R}^+$	densité d'énergie et énergie cinétiques
$\varepsilon_p(\xi_n, t), E_p(t) \in \mathbb{R}^+$	densité d'énergie et énergie potentielles
$\varepsilon(\xi_n, t), E_t(t) \in \mathbb{R}^+$	densité d'énergie et énergie totales
$L_1, L_2, L_3 \in \mathbb{R}^+$	dimensions du conduit acoustique
$f_c \in \mathbb{R}^+$	fréquence de coupure du conduit acoustique

Notations introduites dans le Chapitre 2 : les variables en minuscule écrites sans argument dépendent de (t) en dimension finie et de (ξ_n, t) en dimension infinie. Les matrices et opérateurs en majuscules indicées 1, 2, e sont relatifs aux systèmes respectivement notés Σ_1, Σ_2 et Σ_e .

Paramètres et variables du système masse-ressort-amortisseur :

$m, k, b \in \mathbb{R}^+$	paramètres de masse, raideur, amortissement
$q, v, \mathfrak{p}, F_{ext}(t) \in \mathbb{R}$	position, vitesse, quantité de mouvement, force

Paramètres et variables du haut-parleur :

$L_e, R_e, l \in \mathbb{R}^+$	inductance, résistance, longueur de la bobine
$C_{ms}, R_{ms} \in \mathbb{R}^+$	souplesse, résistance mécanique de la suspension
$B, B_l \in \mathbb{R}$	intensité du champ magnétique et $B_l = l * B$
$S_d, M_{ms} \in \mathbb{R}^+$	surface de membrane et masse de la partie mobile
$i, u_e \in \mathbb{R}$	courant parcourant la bobine et tension à ses bornes
$q, v_{hp}, \mathfrak{p}, \phi \in \mathbb{R}$	position, vitesse, quantité de mouvement, flux
$F_{ac}, F_l \in \mathbb{R}$	forces, pression et Laplace, subies par la membrane

Notations générales :

$\mathcal{U}, u \in \mathcal{U}, u_i$	espace, vecteur d'entrées et entrées, $i \in \mathbb{N}$
$\mathcal{Y}, y \in \mathcal{Y}, y_i$	espace, vecteur de sorties et sorties, $i \in \mathbb{N}$
$\mathcal{X}, \mathcal{F}, \mathcal{E}$	espaces d'état, de flux et d'effort
$x_i, e_i, f_i, x_i^k, e_i^k, f_i^k$	variables d'état, de flux et d'effort, $i, k \in \mathbb{N}$
x, e, f, x^k, e^k, f^k	vecteurs d'état, de flux et d'effort du système respectivement dans $\mathcal{X}, \mathcal{E}, \mathcal{F}$, $k \in \mathbb{N}$

$f_{\partial}, e_{\partial}$	vecteurs d'effort et de flux à la frontière
$\mathcal{D} \subset \mathcal{F} \times \mathcal{E}$	structure de Dirac
$H : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^+$	hamiltonien en dimension finie
$L, J, R \in \mathbb{R}^{n \times n}$	matrices respectivement définie positive, antisymétrique et symétrique définie positive, $n \in \mathbb{N}$
$g \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$	matrice d'entrée, $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$
$\mathcal{H} : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^+, \mathcal{H} : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^+$	hamiltonien et densité de l'hamiltonien en dimension infinie
$L, J, R \in \mathbb{R}^{n \times n}, g \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$	matrices relatives aux SHP en dimension finie, $n, n_1, n_2 \in \mathbb{N}$
$\mathcal{L} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{E}, \mathcal{J} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}, \mathcal{R} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$	opérateurs relatifs aux SHP en dimension infinie
$s_a, s_b \in [0; L_1]$	limites de la surface active

$U, \Sigma, Q, Q_{ext}, R_{ext}$ sont des matrices introduites pour la démonstration d'antisymétrie des opérateurs et \mathcal{C} : opérateur liant les vecteurs d'effort de l'onde et de flux de la surface active.

Notations introduites dans le Chapitre 3 : Pour simplifier les notations dans ce paragraphe, on définit ($i \in \{1, 2\}, j \in \mathbb{N}$) dans le cas 1D, ($i \in \{1, 2, 3\}, j \in \mathbb{N}^2$) dans le cas 2D rectilinéaire et ($i \in \{\alpha, \beta, \gamma, \epsilon\}, j \in \mathbb{N}$) dans les cas 2D triangulaire et circulaire. Le domaine spatial Ω est égal à $[0, L]$ dans le cas 1D et à $[0, L_1] \times [0, L_2]$ dans le cas 2D.

$h, h_{1,2} \in \mathbb{R}^+$	pas de discrétisation spatiale
$\xi_k = kh$	coordonnées de points discrétisés, $k \in \mathbb{N}$
$x_j^i, e_j^i, f_j^i \in \mathbb{R}$	variables d'état, d'effort, de flux discrétisées au point j
$x_d^i, e_d^i, f_d^i \in \mathbb{R}^k, k \in \mathbb{N}$	variables d'état, d'effort, de flux discrétisées
$x_d, e_d, f_d \in \mathbb{R}^k, k \in \mathbb{N}$	vecteurs d'état, d'effort, de flux discrétisés
$e_{d\partial}^i, f_{d\partial}^i \in \mathbb{R}^k, k \in \mathbb{N}$	variables d'effort, de flux à la frontière discrétisées
$e_{d\partial}, f_{d\partial} \in \mathbb{R}^k, k \in \mathbb{N}$	vecteurs d'effort, de flux à la frontière discrétisés
$J_d \in \mathbb{R}^{k \times k}$	matrice antisymétrique, $k \in \mathbb{N}$
$L_d, L_{d1}, L_{d2}, L_{d3} \in \mathbb{R}^{k \times k}$	matrice diagonale définie positive, $k \in \mathbb{N}$
$g_d \in \mathbb{R}^{k_1 \times k_2}$	matrice d'entrée, $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$
H_d, \mathcal{D}_d	hamiltonien et structure de Dirac en dimension finie
$u_c, y_c \in \mathbb{R}^k$	entrée et sortie du contrôleur frontière, $k \in \mathbb{N}$

$K_{\{1\dots\}4}, K_{\{1\dots\}5}^{\partial}, D, D_{\{1\dots\}3}, D_{\{r,\psi\}}, D_{\{1\dots\}3}^+, D_{\{1\dots\}3}^-, g_{\{1,2\}}$ et $g_{\{\alpha\dots\gamma\}}$ sont des matrices réelles introduites pour la discrétisation des opérateurs différentiels et des entrées frontières. Les entiers suivants sont définis pour numérotter les points discrets :

$n \in \mathbb{N}$	nombre de points où x_2 est défini, cas 1D
$m, n \in \mathbb{N}$	nombre de lignes et colonnes où x_2 est défini, cas rectilinéaire
$n_{tl}, n_{tl} \in \mathbb{N}$	nombre de triangles par ligne et par colonne, cas triangulaire
$n_i \in \mathbb{N}$	nombre de points où x_i est défini, cas triangulaire
$n_i^{\partial} \in \mathbb{N}$	nombre de points à la frontière où x_i est défini, cas triangulaire
$n_d \in \mathbb{N}$	total de points discrétisés dans le domaine, cas triangulaire
$n_d^{\partial} \in \mathbb{N}$	total de points discrétisés à la frontière, cas triangulaire
$m, n, o \in \mathbb{N}$	numérotation selon les trois axes, cas triangulaire
$m, n \in \mathbb{N}$	nombre de lignes et colonnes où x_3 est défini, cas circulaire

Notations introduites dans le Chapitre 4 : Les variables et opérateurs indicés c et e sont respectivement relatifs aux correcteurs et aux systèmes en boucle fermée. Posons $n_1, n_2 \in \mathbb{R}$.

Paramètres et variables du pendule simple :

$m, l, g \in \mathbb{R}^+$ masse, longueur du fil, accélération de la pesanteur
 $q, \omega, \mathfrak{p}, C_{ext} \in \mathbb{R}$ position, vitesse et moment de rotation, couple

Notations générales :

$B_c \in \mathbb{R}^{k_1, k_2}, k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ matrice d'entrée du correcteur en dimension finie
 $C : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ fonction de Casimir
 $G \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}, L_2 \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2},$ matrices et fonction relatives au SHP de deux lois
 $\psi : \mathbb{R}^{n_1} \rightarrow \mathbb{R}^+$ de conservations en dimension finie
 $K \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$ gain du second *feedback* en dimension finie
 $\mathcal{G} = G_0 + G_1 \partial_\xi + G_2 \partial_\xi^2$ avec $G_{\{0,1,2\}} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$
 $\mathcal{B}_c = B_{c0} + B_{c1} \partial_\xi + B_{c2} \partial_\xi^2$ avec $B_{c\{0,1,2\}} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$
 $\mathcal{K} = K_0 + K_1 \partial_\xi + K_2 \partial_\xi^2$ avec $K_{\{0,1,2\}} \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$
 $\varepsilon, \nu \in \mathbb{R}$ erreurs sur le paramètre et l'initialisation du correcteur
 $\Phi, \Phi_{\{1,2\}}$ sont des fonctions de l'état dans \mathbb{R} et $\Psi, \psi_{\{1,2,c\}}$ sont des fonctions de ξ dans $\mathbb{R}^{n_{\{1,2,1\}}}$ respectivement introduites afin de calculer les Casimirs selon une forme restreinte.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Honda, active noise cancellation. <https://www.honda.co.nz/technology/driving/anc/>. Consulté le 10-04-2017.
- [2] McGraw-hill dictionary of scientific and technical terms, 6e. s.v. "adiabatic compressibility.". <https://encyclopedia2.thefreedictionary.com/Adiabatic+compressibility>. Consulté le 02-10-2017.
- [3] A. O. Andersson. Active control of tone noise in engine ducts, Dec. 2 1997. US Patent 5,692,702.
- [4] I. T. Ardekani and W. Abdulla. FxLMS-based active noise control : A quick review. In *Asia Pacific Signal and Information Processing Association Annual (APSIPA) Summit and Conference, Xi'an, China, 2011*.
- [5] W. Arendt, C. J. Batty, et al. Exponential stability of a diffusion equation with absorption. *Differential Integral Equations*, 6(5) :1009–1024, 1993.
- [6] N. Atalla, R. Panneton, F. Sgard, and X. Olny. Acoustic absorption of macro-perforated porous materials. *Journal of Sound and Vibration*, 243(4) :659–678, 2001.
- [7] M. Bai and P. Zeung. Implementation of a broadband duct anc system using adaptive spatially feedforward structure. *Journal of sound and vibration*, 251(5) :891–903, 2002.
- [8] L. Bassi, A. Macchelli, and C. Melchiorri. An algorithm to discretize one-dimensional distributed port-Hamiltonian systems. In *Lagrangian and Hamiltonian Methods for Nonlinear Control 2006*, pages 61–73. Springer, 2007.
- [9] S. Bilbao. *Numerical sound synthesis : finite difference schemes and simulation in musical acoustics*. John Wiley & Sons, 2009.
- [10] S. Bilbao. Modeling of complex geometries and boundary conditions in finite difference/finite volume time domain room acoustics simulation. *IEEE Transactions on Audio, Speech, and Language Processing*, 21(7) :1524–1533, 2013.
- [11] G. D. Billoud. Active noise control system for closed spaces such as aircraft cabin, Jan. 29 2002. US Patent 6,343,127.

- [12] C. E. Carme and A. R. Roure. Method and apparatus for attenuating external origin noise reaching the eardrum, and for improving intelligibility of electro-acoustic communications, May 23 1989. US Patent 4,833,719.
- [13] M. Collet, K. A. Cunefare, and M. N. Ichchou. Wave motion optimization in periodically distributed shunted piezocomposite beam structures. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 20(7) :787–808, 2009.
- [14] M. Collet, P. David, and M. Berthillier. Active acoustical impedance using distributed electrodynamical transducers. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 125(2) :882 – 894, 2009.
- [15] M. Collet, M. Ouisse, M. Ichchou, and R. Ohayon. Semi-active optimization of 2D wave’s dispersion into shunted piezocomposite systems for controlling acoustic interaction. In *ASME 2011 Conference on Smart Materials, Adaptive Structures and Intelligent Systems*, pages 79 – 87. American Society of Mechanical Engineers, 2011.
- [16] W. G. Culbreth, E. W. Hendricks, and R. Hansen. Active cancellation of noise in a liquid-filled pipe using an adaptive filter. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 83(4) :1306–1310, 1988.
- [17] R. Curtain and H. Zwart. *An introduction to infinite-dimensional linear systems theory*. Texts in applied mathematics. Springer-Verlag, New York, USA, 1995.
- [18] P. David. *Contrôle actif du bruit en utilisant un réseau de transducteurs distribués*. PhD thesis, 2008.
- [19] P. David, M. Collet, and J.-M. Cote. Experimental implementation of acoustic impedance control by a 2D network of distributed smart cells. *Smart Materials and Structures*, 19(3) :035 – 028, 2010.
- [20] V. Duindam, A. Macchelli, S. Stramigioli, and H. Bruyninckx, editors. *Modeling and Control of Complex Physical Systems - The Port-Hamiltonian Approach*. Springer-Verlag, Berlin, Germany, 2009.
- [21] S. Elliot, P. Nelson, I. Stothers, and C. Boucher. In-flight experiments on the active control of propeller-induced cabin noise. *Journal of Sound and Vibration*, 140(2) :219–238, 1990.
- [22] S. Elliott. A review of active noise and vibration control in road vehicles. *ISVR Technical Memorandum*, (981), 2008.
- [23] S. Elliott and P. Nelson. Active noise control. *IEEE signal processing magazine*, 10(4) :12–35, 1993.
- [24] G. Evans, J. Blackledge, and P. Yardley. *Numerical methods for partial differential equations*. Springer Science & Business Media, 2012.

- [25] A. Falaize. *Modélisation, simulation, génération de code et correction de systèmes multi-physiques audios : approche par réseau de composants et formulation Hamiltonienne à Ports*. PhD thesis, Université Pierre & Marie Curie-Paris 6, 2016.
- [26] B. Fornberg. High-order finite differences and the pseudospectral method on staggered grids. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 27(4) :904–918, 1990.
- [27] C. Fuller and A. Von Flotow. Active control of sound and vibration. *IEEE Control Systems Magazine*, 15(6) :9–19, 1995.
- [28] M. Furstoss, D. Thenail, and M.-A. Galland. Surface impedance control for sound absorption : direct and hybrid passive/active strategies. *Journal of sound and vibration*, 203(2) :219–236, 1997.
- [29] M.-A. Galland, B. Mazeaud, and N. Sellen. Hybrid passive/active absorbers for flow ducts. *Applied acoustics*, 66(6) :691–708, 2005.
- [30] G. Golo, V. Talasila, A. Van der Schaft, and B. Maschke. Hamiltonian discretization of boundary control systems. *Automatica*, 40(5) :757–771, 2004.
- [31] R. W. Graves. Simulating seismic wave propagation in 3D elastic media using staggered-grid finite differences. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 86(4) :1091–1106, 1996.
- [32] E. Hairer, C. Lubich, and G. Wanner. *Geometric numerical integration : structure-preserving algorithms for ordinary differential equations*, volume 31. Springer Science & Business Media, 2006.
- [33] B. Hamilton and S. Bilbao. Hexagonal vs. rectilinear grids for explicit finite difference schemes for the two-dimensional wave equation. In *Proceedings of Meetings on Acoustics*, volume 19, page 015120. Acoustical Society of America, 2013.
- [34] B. Hamilton and A. Torin. Finite difference schemes on hexagonal grids for thin linear plates with finite volume boundaries. In *DAFx*, pages 5–12. Citeseer, 2014.
- [35] B. Hamroun, L. Lefèvre, and E. Mendes. Port-based modelling and geometric reduction for open channel irrigation systems. In *46th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 1578–1583. IEEE, 2007.
- [36] O. Hilbrunner. *Développement et optimisation d'un système de contrôle actif pour les absorbants acoustiques hybrides*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, 2003.
- [37] O. Hilbrunner, B. Mazeaud, and M.-A. Galland. Multi-cell digital feedback control for noise reduction through hybrid absorbers. In *9th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference and Exhibit*, page 3187, 2003.

- [38] B. Hustedt, S. Operto, and J. Virieux. Mixed-grid and staggered-grid finite-difference methods for frequency-domain acoustic wave modeling. *Geophysical Journal International*, 157(3) :1269–1296, 2004.
- [39] T. Inoue, H. Sano, A. Takahashi, K. Terai, H. Hashimoto, and I. Kaku-hari. Active noise control system, June 13 2006. US Patent 7,062,049.
- [40] A. Iserles. Generalized leapfrog methods. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 6(4) :381–392, 1986.
- [41] L. V. Kantorovich. *Approximate methods of higher analysis*. Noordhoff, 1958.
- [42] H. K. Khalil. *Nonlinear systems*. Prentice-Hall, 2002.
- [43] L. E. Kinsler, A. R. Frey, A. B. Coppens, and J. V. Sanders. *Fundamentals of acoustics, 4th Edition*, volume 1. 1999.
- [44] P. Konstanzer, M. Grunewald, P. Janker, and S. Storm. Aircraft interior noise reduction through a piezo tunable vibration absorber system. In *Proceedings of the 25th international congress of the aeronautical sciences (ICAS 2006)*, pages 1–6, 2006.
- [45] P. Kotyczka. Finite Volume Structure-Preserving Discretization of 1D Distributed-Parameter Port-Hamiltonian Systems. In *Proceedings of 2nd IFAC Workshop on Control of Systems Governed by Partial Differential Equations, Bertinoro, Italy*, pages 300–305, 2016.
- [46] P. Kotyczka, B. Maschke, and L. Lefèvre. Weak form of Stokes-dirac structures and geometric discretization of port-Hamiltonian systems. *arXiv preprint arXiv :1706.06156*, 2017.
- [47] M. Krstic and A. Smyshlyaev. *Boundary control of PDEs : A course on backstepping designs*, volume 16. Siam, 2008.
- [48] Y. Le Gorrec, A. Macchelli, H. Ramirez, and H. Zwart. Energy shaping of boundary controlled linear port-Hamiltonian systems. *IFAC Proceedings Volumes*, 47(3) :1580–1585, 2014.
- [49] Y. Le Gorrec, H. Peng, L. Lefèvre, B. Hamroun, and F. Couenne. Systèmes hamiltoniens à ports de dimension infinie : réduction et propriétés spectrales. *Journal Européen des Systèmes Automatisés (JESA)*, 45(7-10) :645–664, 2011.
- [50] Y. Le Gorrec, H. Zwart, and B. Maschke. Dirac structures and boundary control systems associated with skew-symmetric differential operators. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 44(5) :1864–1892, 2005.
- [51] L. Leylekian, M. Lebrun, and P. Lempereur. An overview of aircraft noise reduction technologies. *AerospaceLab*, (6) :1, 2014.
- [52] X. Li. *Observation and control of some distributed parameter systems*. Theses, Université Claude Bernard - Lyon I, Dec. 2009.

- [53] A. Macchelli. *Port Hamiltonian Systems : An unified approach for modelling and control of finite and infinite dimensional physical systems*. PhD thesis, Università di Bologna, 2002.
- [54] A. Macchelli. Energy shaping of distributed parameter port-Hamiltonian systems based on finite element approximation. *Systems & Control Letters*, 60(8) :579–589, 2011.
- [55] A. Macchelli. Boundary energy shaping of linear distributed port-Hamiltonian systems. *IFAC Proceedings Volumes*, 45(19) :120–125, 2012.
- [56] A. Macchelli, Y. Le Gorrec, H. Ramirez, and H. Zwart. On the synthesis of boundary control laws for distributed port-Hamiltonian systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 62(4) :1700–1713, 2017.
- [57] B. Maschke and A. Van der Schaft. Port controlled Hamiltonian systems : modeling origins and system theoretic properties. In *Proceedings of the 3rd IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems, NOLCOS'92*, pages 282–288, Bordeaux, France, June 1992.
- [58] D. Matignon, J. Audounet, and G. Montseny. Energy decay for wave equations with damping of fractional order. In *Fourth international conference on mathematical and numerical aspects of wave propagation phenomena*, volume 3, 1998.
- [59] S. Mazumder. *Numerical methods for partial differential equations, Finite difference and finite volume methods*. Elsevier, 2015.
- [60] F. Michaut and M. Bellanger. *Filtrage adaptatif : théorie et algorithmes*. Hermes Science Publication, Lavoisier, 2005.
- [61] G. Montseny. Diffusive representation of pseudo-differential time-operators. 1998.
- [62] G. Montseny, J. Audounet, and D. Matignon. Fractional integro-differential boundary control of the euler-bernoulli beam. In *Decision and Control, 1997., Proceedings of the 36th IEEE Conference on*, volume 5, pages 4973–4978. IEEE, 1997.
- [63] R. Moulla, L. Lefèvre, and B. Maschke. Geometric pseudospectral method for spatial integration of dynamical systems. *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems*, 17(1) :85–104, 2011.
- [64] M. L. Munjal. Analysis and design of mufflers - An overview of research at the Indian Institute of Science. *Journal of Sound and Vibration*, 211(3) :425–433, 1998.
- [65] H. F. Olson and E. G. May. Electronic sound absorber. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 25(6) :1130–1136, 1953.
- [66] P. J. Olver. *Applications of Lie groups to differential equations*, volume 107. Springer Science & Business Media, 2000.

- [67] R. Ortega, A. Van der Schaft, F. Castanos, and A. Astolfi. Control by Interconnection and Standard Passivity-Based Control of Port-Hamiltonian Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 53(11) :2527–2542, 2008.
- [68] R. Ortega, A. Van der Schaft, B. Maschke, and G. Escobar. Interconnection and damping assignment passivity based control of port-controlled Hamiltonian systems. *Automatica*, 38 :585–596, 2002.
- [69] M. Ouisse and E. Sadoulet-Reboul. Acoustique et vibro-acoustique, Bruit des systèmes industriels. Notes de cours de l’Ecole Nationale Supérieure de Mécanique et des Microtechniques, 2015.
- [70] Y. C. Park and S. D. Sommerfeldt. Global attenuation of broadband noise fields using energy density control. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 101(1) :350–359, 1997.
- [71] B. Pathak, P. Hirave, et al. FXLMS Algorithm for Feed forward Active Noise Cancellation. In *Proceedings of the International Conference on advances in Computer*, pages 18–22, 2012.
- [72] L. Paul. Process of silencing sound oscillations, June 9 1936. US Patent 2,043,416.
- [73] H. Ramirez, Y. Le Gorrec, A. Macchelli, and H. Zwart. Exponential stabilization of boundary controlled port-Hamiltonian systems with dynamic feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 59(10) :2849–2855, 2014.
- [74] H. Ramirez, Y. Le Gorrec, and B. Maschke. Interconnection and damping assignment-passivity based control of irreversible port Hamiltonian systems. *IFAC Proceedings Volumes*, 47(3) :9111–9116, 2014.
- [75] E. M. Salomons. Noise barriers in a refracting atmosphere. *Applied Acoustics*, 47(3) :217–238, 1996.
- [76] M. Seslija, A. Van der Schaft, and J. M. Scherpen. Discrete exterior geometry approach to structure-preserving discretization of distributed-parameter port-Hamiltonian systems. *Journal of Geometry and Physics*, 62(6) :1509–1531, 2012.
- [77] C. Shin and H. Sohn. A frequency-space 2-D scalar wave extrapolator using extended 25-point finite-difference operator. *Geophysics*, 63(1) :289–296, 1998.
- [78] E. D. Simshauser and M. E. Hawley. The Noise-Cancelling Headset - An Active Ear Defender. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 27(1) :207–207, 1955.
- [79] R. H. Small. Vented-box loudspeaker systems—part 1 : Small-signal analysis. *Journal of the Audio Engineering Society*, 21(5) :363–372, 1973.

- [80] I. Štekl and R. G. Pratt. Accurate viscoelastic modeling by frequency-domain finite differences using rotated operators. *Geophysics*, 63(5) :1779–1794, 1998.
- [81] J. C. Strikwerda. *Finite difference schemes and partial differential equations*. Siam, 2004.
- [82] N. Thiele. Loudspeakers in vented boxes : Part 1. *Journal of the Audio Engineering Society*, 19(5) :382–392, 1971.
- [83] R. H. Thomas, M. J. Czech, and A. A. Elmiligui. Active aircraft pylon noise control system, May 5 2015. US Patent 9,022,311.
- [84] O. Thorp, M. Ruzzene, and A. Baz. Attenuation of wave propagation in fluid-loaded shells with periodic shunted piezoelectric rings. *Smart materials and structures*, 14(4) :594, 2005.
- [85] V. Trenchant, Y. Fares, H. Ramirez, Y. Le Gorrec, and M. Ouisse. A port-Hamiltonian formulation of a 2D boundary controlled acoustic system. In *Conference on Lagrangian and Hamiltonian Methods for Non-Linear Control, LHMNLC'15.*, pages 1–8, Lyon - France, jul 2015.
- [86] V. Trenchant, W. Hu, H. Ramirez, and Y. Le Gorrec. Cylindrical staggered grids structure preserving finite difference for hyperbolic and parabolic partial differential equations. In *MATHMOD*, pages 1–6, 2018 (submitted).
- [87] V. Trenchant, H. Ramirez, Y. Le Gorrec, and P. Kotyczka. Structure preserving spatial discretization of 2D hyperbolic systems using staggered grids finite difference. In *American Control Conference (ACC), 2017*, pages 2491–2496. IEEE, 2017.
- [88] V. Trenchant, N. M. T. Vu, H. Ramirez, L. Lefèvre, and Y. Le Gorrec. On the use of structural invariants for the distributed control of infinite dimensional port-Hamiltonian systems. In *IEEE Conference on Decision and Control*, 2017 (accepted).
- [89] A. Van der Schaft. Port-Hamiltonian systems : an introductory survey. 2006.
- [90] A. Van der Schaft. *L2-gain and passivity techniques in nonlinear control*. Springer, 2017.
- [91] A. Van der Schaft, D. Jeltsema, et al. Port-Hamiltonian systems theory : An introductory overview. *Foundations and Trends® in Systems and Control*, 1(2-3) :173–378, 2014.
- [92] A. Van der Schaft and B. Maschke. Hamiltonian formulation of distributed-parameter systems with boundary energy flow. *Journal of Geometry and Physics*, 42(1–2) :166 – 194, 2002.
- [93] J. Villegas, H. Zwart, Y. Le Gorrec, and B. Maschke. Exponential stability of a class of boundary control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 54 :142–147, 2009.

- [94] J. Villegas, H. Zwart, Y. Le Gorrec, B. Maschke, and A. Van der Schaft. Stability and stabilization of a class of boundary control systems. In *44th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference, CDC-ECC*, pages 3850–3855, dec. 2005.
- [95] J. A. Villegas. *A port-Hamiltonian Approach to Distributed Parameter Systems*. PhD thesis, Universiteit Twente, 2007.
- [96] H. Von Helmholtz. Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 57 :1–72, 1860.
- [97] Y. Wu, B. Hamroun, Y. Le Gorrec, and B. Maschke. Power preserving model reduction of 2D vibro-acoustic system : A port Hamiltonian approach. In *Conference on Lagrangian and Hamiltonian Methods for Non-Linear Control, LHMNLC'15*, pages 206–211, Lyon - France, jul 2015.
- [98] C. Yilmaz and N. Kikuchi. Analysis and design of passive low-pass filter-type vibration isolators considering stiffness and mass limitations. *Journal of sound and vibration*, 293(1) :171–195, 2006.
- [99] Y. Q. Zeng and Q. H. Liu. A staggered-grid finite-difference method with perfectly matched layers for poroelastic wave equations. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 109(6) :2571–2580, 2001.
- [100] H. Zheng, C. Cai, G. Pau, and G. Liu. Minimizing vibration response of cylindrical shells through layout optimization of passive constrained layer damping treatments. *Journal of Sound and Vibration*, 279(3) :739–756, 2005.
- [101] D. W. Zingg and H. Lomax. Finite-difference schemes on regular triangular grids. *Journal of Computational Physics*, 108(2) :306–313, 1993.
- [102] H. Zwart and M. Kurula. The linear wave equation on N-dimensional spatial domains. MTNS, 2014.

Résumé :

Cette thèse répond à une problématique de commande frontière d'une conduite acoustique dont l'actionnement est assuré par un réseau d'actionneurs/capteurs co-localisés constituant une peau active. Pour faire face au caractère intrinsèquement multiphysique de ce problème vibro-acoustique, nous avons choisi une approche hamiltonienne à ports, approche structurée basée sur la représentation des échanges entre différents domaines énergétiques au sein d'un système et entre différents systèmes. Nous avons proposé une modélisation hamiltonienne à ports 2D de l'équation d'onde interconnectée à la frontière au système d'actionnement distribué. Nous avons développé une méthode de discrétisation spatiale basée sur l'utilisation de différences finies sur plusieurs grilles en quinconce qui préserve la structure hamiltonienne à ports de l'équation d'onde. Cette méthode permet en outre d'interconnecter facilement le système discrétisé avec d'autres sous-systèmes, dans le but de mettre en place un actionnement par exemple. Son principal avantage sur d'autres méthodes préservatives de structure réside dans sa simplicité de mise en œuvre qui découle de l'utilisation de différences finies. Concernant la commande du système vibro-acoustique, nous avons proposé une méthode de synthèse de loi de commande distribuée pour les systèmes régis par deux lois de conservation en 1D. L'originalité de cette méthode réside en le fait qu'elle repose sur le calcul d'invariants structuraux exploités afin de modifier la structure du système en boucle fermée. Les conditions d'application de ces lois sur un système 2D sont étudiées et des résultats numériques valident les lois de commande synthétisées.

Mots-clés : systèmes hamiltoniens à ports, différences finies à grilles en quinconce, commande par interconnexion, commande frontière, vibro-acoustique

Abstract:

This thesis deals with the boundary control of an acoustic duct by a network of co-localised sensors/actuators which constitutes a smart skin. In order to cope with this multiphysical problem, we chose to place our study in the framework of port-Hamiltonian systems, a structured approach based on the representation of energy exchanges between different energy domains between different systems or subsystems. We proposed a port-Hamiltonian model of the 2D wave equation interconnected through its boundary to the distributed actuation system. We developed a spatial discretization method based on the use of finite differences on several staggered grids that preserves the port-Hamiltonian structure of the wave equation. This method also permits to easily interconnect the discretized system with other subsystems, which is convenient for instance for control purposes. Its main advantage over other structure preserving methods is its simplicity of implementation. In order to control the vibro-acoustic system, we proposed a control law synthesis method for systems governed by two conservation laws in 1D. The originality of this method lies in the fact that it relies on the computation of structural invariants exploited in order to modify the structure of the system in closed loop. The conditions of application of these laws on a 2D system are studied and numerical results validate the synthesized control laws.

Keywords: port-Hamiltonian systems, control by interconnection, staggered grids finite differences, boundary control, vibroacoustic

■ École doctorale SPIM 16 route de Gray F - 25030 Besançon cedex

■ tél. +33 (0)3 81 66 66 02 ■ ed-spim@univ-fcomte.fr ■ www.ed-spim.univ-fcomte.fr