



Contributions à l'amélioration de la performance des conditions aux limites approchées pour des problèmes de couche mince en domaines non réguliers

Alexis Auvray

► To cite this version:

Alexis Auvray. Contributions à l'amélioration de la performance des conditions aux limites approchées pour des problèmes de couche mince en domaines non réguliers. Autre. Université de Lyon, 2018. Français. NNT : 2018LYSEC018 . tel-01892574

HAL Id: tel-01892574

<https://theses.hal.science/tel-01892574>

Submitted on 10 Oct 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



ÉCOLE
CENTRALE LYON

Numéro d'ordre NNT : 2018LYSEC018

THÈSE de DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE LYON
opérée au sein de l'École centrale de Lyon

École Doctorale 512
École Doctorale InfoMaths

Spécialité de doctorat : Mathématiques et applications
Discipline : Mathématiques

Soutenue publiquement le 02/07/2018 par

Alexis Clément Auvray

**Contributions à l'amélioration de la performance
des conditions aux limites approchées pour des
problèmes de couche mince en domaines non
réguliers**

Devant le jury composé de :

M. Marc Dambrine	Professeur des universités, Université de Pau	Président
Mme Stéphanie Lohrengel	Maître de conférences, Université de Reims	Rapporteure
M. Clair Poignard	Chargé de recherche, INRIA Bordeaux	Rapporteur
Mme Sonia Fliss	Maître de conférences, ENSTA Paristech	Examinatrice
M. Yves Renard	Professeur des universités, INSA de Lyon	Examineur
M. Grégory Vial	Professeur des universités, École Centrale de Lyon	Directeur

Remerciements

De m'avoir pris comme padawan, je te remercie Grégory. Grâce à cette thèse, cette opportunité, que tu m'as offerte, j'ai pu découvrir de nouveaux univers, rencontrer nombre de personnes, apprendre, réfléchir, progresser, m'amuser... Autant d'expériences grandes et grandissantes. Aussi, ta sympathie, ta confiance, ta disponibilité, ta patience, ton aide, nos conversations — sérieuses ou non —, me furent précieuses tout au long de cette thèse ; par delà le travail effectué, elles seront le sceau de ces quatre années. Je suis heureux de t'avoir eu pour mentor, que la Force soit avec toi !

Je souhaite aussi remercier Stéphanie Lohrengel et Clair Poignard d'avoir été les rapporteurs de ma thèse ; leurs remarques, questions et corrections m'ont permis d'améliorer mes travaux et d'en envisager d'autres perspectives. Je remercie également Marc Dambrine, Sonia Fliss et Yves Renard d'avoir accepté d'être membres de mon jury de thèse.

Merci à ceux avec qui j'ai partagé ces années de thèse à l'École Centrale ; Alexandre, Céline, Christophette, Élisabeth, François, Hélène, Laurent, Malek, Martine, Philippe, René, Stéphane pour les permanent-e-s ; Laura, Loïc, Mathilde, Mélina, Mona, Nicolas pour les doctorant-e-s ; et finalement, Colette, Francis et Isabelle. Votre aide, votre sympathie et toutes nos conversations — allant de sujets peu sérieux, comme les mathématiques et la politique, à des sujets plus importants, tels que la culture geek ou « qui veut aller prendre l'apéro en terrasse ? » — auront rendu ces années bien agréables et auront été ma principale motivation à venir tous les jours au labo.

PS à mes héritiers du clan des croustillants : à l'instar de Loïc, j'ai pleinement foi en vous pour continuer la lutte afin d'obtenir le jacuzzi, le toit ouvrant et le mini-bar du bureau des doctorants.

Que je vous connaisse depuis longtemps : Antoine, Arthur, Bastien, Léo, Quentin, Thomas, Tristan ; ou plus récemment : Clément, Gérard, Greg, Kevin, Matthieu, Maxime, Mélanie, Quentin et Simon ; merci à tous pour votre amitié :)

Enfin, je remercie du fond du cœur ma famille ; votre soutien et votre affection m'ont porté là où je suis aujourd'hui !

À l'attention du lecteur : vous pouvez me signaler les coquilles et incohérences que vous trouveriez à l'adresse suivante : alexis.auvray@lilo.org. Merci :)

Table des matières

Remerciements	3
Table des figures	9
Introduction	13
1 Développements asymptotiques	21
1.1 Problème avec condition d'impédance de type Robin	21
1.1.1 Existence et unicité des solutions au problème	22
1.1.2 Premiers termes du développement	23
1.1.3 Développement à l'ordre n	31
1.2 Problème de transmission avec couche mince	34
1.2.1 Existence et unicité des solutions au problème	35
1.2.2 Premiers termes du développement	36
1.2.3 Développement à l'ordre n	42
1.3 Comparaison des problèmes avec condition d'impédance de type Robin et de transmission	46
1.4 Problème d'impédance avec condition de Ventcel	50
1.4.1 Existence et unicité des solutions au problème	50
1.4.2 Premiers termes du développement	52
1.4.3 Développement à l'ordre n	57
1.5 Comparaison des problèmes avec condition d'impédance de type Ventcel et de transmission	59
2 Conditions d'impédance modifiées	61
2.1 Introduction : stratégies	62
2.1.1 ... pour l'erreur L^2	62
2.1.2 ... pour les erreurs H^1 et L^∞	65
2.2 Simulation des profils	66
2.2.1 Méthodes de simulation des profils	66
2.2.2 Résultats sur les profils simulés	78
2.3 Mises en œuvre et résultats des stratégies	83
2.3.1 Condition d'impédance de type Robin à coefficient variable et correction de l'erreur L^2	83
2.3.2 Condition d'impédance de type Ventcel et correction de l'erreur L^2	93
2.3.3 Méthode de plaquage des profils et correction des erreurs H^1 et L^∞	95
2.4 Conclusion et perspectives	99

3	Extension à la dimension 3	101
3.1	Cas réguliers	101
3.1.1	... avec courbure	102
3.1.2	... sans courbure	104
3.2	Un premier cas irrégulier : l'extrusion du problème 2D	106
3.2.1	Problème de transmission extrudé	107
3.2.2	Problèmes avec condition d'impédance	109
3.2.3	Améliorations des erreurs entre problèmes de transmission et avec condition d'impédance	110
3.3	Un deuxième cas irrégulier : une singularité conique	117
3.3.1	Problème limite et visualisation de λ_1	119
3.3.2	Comparaison numérique des problèmes de transmission et d'impédance	120
3.4	Conclusion et perspectives	121
4	Construction et étude des profils	123
4.1	Profils du problème avec condition d'impédance de type Robin	124
4.1.1	Introduction et définitions	124
4.1.2	Existence et unicité de solutions variationnelles au problème de type profil	125
4.1.3	Développement « sur-variationnel »	127
4.1.4	Régularité elliptique et transformée de Mellin du terme sous-variationnel	132
4.1.5	Développement « sous-variationnel »	136
4.1.6	Conclusion	147
4.2	Profils du problème de transmission	148
4.2.1	Introduction et définitions	148
4.2.2	Existence et unicité de solutions variationnelles au problème de type profil	149
4.2.3	Développement « sur-variationnel »	150
4.2.4	Régularité elliptique et transformée de Mellin du terme sous-variationnel	154
4.2.5	Développement « sous-variationnel »	156
4.2.6	Conclusion	162
4.3	Profils du problème d'impédance avec condition de Ventcel	164
4.3.1	Introduction et définitions	164
4.3.2	Existence et unicité de solutions variationnelles au problème de type profil	165
4.3.3	Développement « sur-variationnel »	166
4.3.4	Régularité elliptique et transformée de Mellin du terme sous-variationnel	169
4.3.5	Développement « sous-variationnel »	170
4.3.6	Conclusion	174
	Conclusion générale et perspectives	177
A	Inégalités de Poincaré	179
B	Principes du maximum	181
C	Régularité du laplacien dans un angle droit	185

D	Espaces à poids et transformée de Mellin	187
D.1	Espaces à poids	187
D.2	La transformation de Mellin	190
D.2.1	Définitions	190
D.2.2	Transformation de Mellin et espaces à poids	193
E	Régularité elliptique des profils	197
E.1	Régularité elliptique du profil d'impédance avec condition de Robin	197
E.2	Régularité elliptique du profil d'impédance avec condition de Ventcel	204
	Bibliographie	213

Table des figures

1	Un domaine avec couche mince	14
2	Un domaine à coin avec couche mince	15
3	Domaine des profils du problème (4)	15
4	Domaine du problème de transmission	17
5	La fonction $\alpha_\bullet$	18
6	Relations entre les chapitres	20
1.1	Domaine du problème avec condition d'impédance de type Robin	22
1.2	Domaine des profils du problème avec condition d'impédance de type Robin .	25
1.3	Domaine du problème de transmission	34
1.4	Domaine des profils du problème de transmission	37
1.5	Domaine du problème de transmission.	46
1.6	Évolution des erreurs entre problèmes de transmission et et avec condition d'impédance en fonction de ϵ pour $\alpha = 2$	49
1.7	Domaine du problème avec condition d'impédance de type Ventcel	50
1.8	Domaine des profils du problème avec condition d'impédance de type Ventcel	53
2.1	Fonction $\alpha_\bullet$	63
2.2	Domaine de définition des profils du problème avec condition d'impédance de type Robin	67
2.3	Domaine de calcul des profils du problème avec condition d'impédance de type Robin.	67
2.4	Domaine de définitions des profils du problème de transmission.	71
2.5	Domaine de calcul des profils du problème de transmission.	71
2.6	Domaine de définition des profils du problème avec condition d'impédance de type Ventcel	73
2.7	Domaine de calcul des profils du problème avec condition d'impédance de type Ventcel tronqué	73
2.8	Traces sur Γ_v des profils avec diverses conditions au point A.	76
2.9	Profil d'impédance simulé p_r	79
2.10	Trace sur Γ_i^R de la différence entre deux profils Ventcel pour $\alpha = 2$, $\beta_1 =$ 0.5 , $\beta_2 = 2$	80
2.11	Fonction $\alpha_\bullet$	83
2.12	Évolution de $c^{(1)}$ en fonction de ρ_0	85
2.13	Domaine des profils du problème de transmission tronqué	85
2.14	Prolongement de $p_\bullet$ à Ω_e^R	89
2.15	ϵ_0 et la fonction ϵ	89
2.16	Couche privée d'une sous-couche d'épaisseur η	90
2.17	Évolution de la vitesse de convergence entre impédance et transmission en fonction de $\rho_\bullet$	92

2.18	Évolution de la vitesse de convergence entre impédance et transmission en fonction de $\rho_\bullet$	93
2.19	Évolution du $c_\beta^{(1)}$ en fonction de β	94
2.20	Évolution de la vitesse de convergence entre impédance et transmission en fonction de β	95
2.21	Évolution de la vitesse de convergence entre impédance et transmission en fonction de β (zoom).	96
2.22	Erreurs L^2 e H^1 de la méthode de plaquage des profils.	98
2.23	Erreur L^∞ de la méthode de plaquage des profils.	99
3.1	Domaine de transmission 3D.	102
3.2	Domaine de transmission 3D (vu de dessous).	102
3.3	Évolution de l'erreur entre problèmes de transmission et avec condition d'impédance dans le cas 3D avec courbure.	103
3.4	Évolution de l'erreur entre problèmes de transmission et avec condition d'impédance tenant compte de la courbure dans le cas 3D avec courbure.	104
3.5	Domaine de transmission 3D sans courbure.	105
3.6	Évolution de l'erreur entre problèmes de transmission et avec condition d'impédance dans le cas 3D sans courbure.	106
3.7	Domaine de transmission 3D irrégulier.	107
3.8	Γ_v et ses bords en dimension 3.	110
3.9	Évolution des erreurs entre problèmes de transmission et et avec condition d'impédance en fonction de ϵ pour $\alpha = 2$ en 3D.	111
3.10	Évolution de la vitesse de convergence entre problèmes de transmission et avec condition d'impédance en fonction de $\rho_\bullet$ en 3D.	112
3.11	Évolution de la vitesse de convergence entre problèmes de transmission et avec condition d'impédance en fonction de β en 3D.	113
3.12	Coupe 2D d'un domaine 3D comportant une singularité conique.	117
3.13	Maillage d'une « goutte ».	118
3.14	Maillage d'une « pomme ».	118
3.15	Différence entre impédance et transmission sur la goutte (échelle : $2 \cdot 10^{-8}$ en bleu, $5 \cdot 10^{-4}$ en vert, $7 \cdot 10^{-4}$ en jaune, 10^{-3} en rouge).	121
3.16	Différence entre impédance et transmission dans la pomme (échelle : $2 \cdot 10^{-5}$ en bleu, $5 \cdot 10^{-3}$ en vert, 10^{-2} en rouge).	121
3.17	Différence entre impédance et transmission dans un cône (échelle : $4 \cdot 10^{-9}$ en bleu, 10^{-3} en vert, $3 \cdot 10^{-3}$ en rouge).	121
4.1	Domaine des profils du problème avec condition d'impédance de type Robin .	124
4.2	Domaine de définition $\widehat{P}_r^0$	135
4.3	Pôles de $\widehat{P}_r^0$	139
4.4	Étape 0 : $\widehat{P}_r^0$ holomorphe.	140
4.5	Étape 1 : $\widehat{P}_r^0$ méromorphe.	140
4.6	Contour ouvert G_η	144
4.7	Bandes infinies ne comportant qu'un seul pôle chacune.	146
4.8	Domaine du profil de transmission.	148
4.9	Domaine de définition de $\widehat{Q}^0$	156
4.10	Pôles de $\widehat{Q}^0$	158
4.11	Étape 0 : $\widehat{Q}^0$ holomorphe.	159
4.12	Étape 1 : $\widehat{Q}^0$ méromorphe.	159
4.13	Bandes infinies ne comportant qu'un seul pôle chacune (encore).	163

4.14	Domaine des profils du problème avec condition d'impédance de type Ventcel.	165
4.15	Domaine de définition de $\widehat{P}_v^0$.	170
4.16	Bandes infinies ne comportant qu'un seul pôle chacune ; étape 1.	174
4.17	Bandes infinies ne comportant qu'un seul pôle chacune ; étape i.	174
C.1	Voisinage de O.	185
E.1	Domaine du profils d'impédance tronqué.	198
E.2	Domaine R^j .	202
E.3	Domaine du profil d'impédance Ventcel tronqué.	205
E.4	Domaine R^j (encore).	211

Introduction

Problèmes de transmission, les origines

Qu'elles soient artificielles ou non, les situations où deux matériaux (voire plus) sont en contact les uns avec les autres sont monnaie courante ; et ce dans une grande variété de domaines. Pour s'en convaincre, on pourra par exemple citer les différentes couches de roches et métaux du noyau planétaire ; l'atmosphère, ses différentes strates et la Terre ; un mur recouvert d'isolant ; un os entouré de chair.

Les différentes caractéristiques des constituants de ces systèmes sont alors à prendre en compte. Notamment lors de l'étude de leurs comportements face à divers phénomènes pouvant les affecter : électromagnétisme, diffusion de chaleur, déformation... En effet, la manière dont vont évoluer ces systèmes peut radicalement changer à l'interface de deux matériaux différents. À des fins de diversité, citons les sports de combat ; dans ceux-ci les protections des athlètes sont constituées de matériaux mous susceptibles d'absorber les impacts afin de minimiser l'énergie des chocs une fois arrivée à l'interface protection/corps et ainsi de laisser l'athlète indemne ; il ne viendrait à l'esprit de personne d'utiliser des protections en bois, celles-ci n'absorbant pas ou peu les chocs.

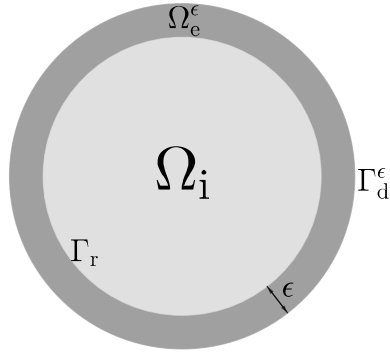
Les problèmes modélisant ces situations sont usuellement appelés problèmes de transmission, parmi eux nous nous intéressons plus particulièrement aux problèmes de transmission avec couche mince. Ceux-ci ont la particularité d'être posés sur des domaines composés de deux sous-domaines dont l'un est significativement plus petit que l'autre dans une direction, par exemple le domaine représenté sur la figure 1. Le problème (1) en est un représentant : il se décompose selon les deux sous-domaines Ω_i et Ω_e^ϵ , lesquels sont liés par des conditions à leur interface, notée Γ_r .

Ce type de problèmes de transmission est très fréquent. On pourra expliciter notamment des objets tels que : les œufs et leurs coquilles ; les cellules et leurs membranes ; les films plastiques protégeant des écrans ; la peinture sur un matériau.

De nombreuses études ont déjà été effectuées sur ces problèmes et pour des phénomènes variés ; on pourra citer en particulier [14, 16, 31] dans le cas de l'électromagnétisme ; [25] pour la chaleur ; [36] dans le cas des écoulements de Stokes ; [8, 32] pour la géo-physique ; [17, 18] dans le cas de matériaux composites ; [1, 4, 5] pour des problèmes d'élasticité ; [2] pour des couches d'épaisseur variable.

Cependant, les problèmes de transmission avec couche mince s'avèrent être complexes. Tenter de les résoudre par ordinateur peut être délicat, en particulier lorsque l'épaisseur ϵ de

la couche mince est très faible. En effet, cela nécessite une discrétisation à l'échelle de ϵ au niveau de la couche, ce qui peut impliquer des coûts et temps de calculs importants ainsi qu'un manque de précision. Devant ces difficultés, des tactiques d'approximations moins directes de ces problèmes ont été mises en place : les comprendre par le truchement de conditions d'impédance, aussi appelées conditions artificielles ou effectives.



$$\left\{ \begin{array}{l} -\alpha \Delta u_i^\epsilon = f_i \text{ dans } \Omega_i, \\ -\Delta u_e^\epsilon = f_e \text{ dans } \Omega_e^\epsilon, \\ u_i^\epsilon = u_e^\epsilon \text{ sur } \Gamma_r, \\ \alpha \partial_\nu u_i^\epsilon = -\partial_\nu u_e^\epsilon \text{ sur } \Gamma_r, \\ u_e^\epsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_d^\epsilon. \end{array} \right. \quad (1)$$

FIGURE 1 – Un domaine avec couche mince

Les problèmes avec conditions d'impédance

L'idée du problème d'impédance est qu'il est posé sur un domaine qui ne dépend pas de ϵ , autrement dit, que la couche est supprimée ; par exemple, un problème d'impédance associé au problème (1) ne serait posé que sur le domaine Ω_i représenté en figure 1. Ainsi, tous les problèmes inhérents à la couche sont évacués. Cependant, la suppression de la couche représente une perte d'information qui doit être compensée. Pour cela, le problème d'impédance devra comporter une condition limite sur Γ_r qui dépendra de ϵ .

C'est le développement asymptotique en fonction de ϵ de la solution du problème de transmission qui donne des informations sur les possibles conditions limites sur l'interface Γ_r ; ainsi un problème d'impédance associé à (1) est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\alpha \Delta v^\epsilon = f_i \text{ dans } \Omega_i, \\ \left(1 + \epsilon \frac{c(x)}{2} \right) v^\epsilon + \epsilon \alpha \partial_\nu v^\epsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_r, \end{array} \right. \quad (2)$$

où $c(x)$ désigne la courbure du domaine au point $x \in \Gamma_r$.

Cet « interprète » du problème (1) fournit une approximation de bonne qualité comme en témoignent les estimations d'erreur suivantes :

$$\|u_i^\epsilon - v^\epsilon\|_{1,\Omega_i} \leq C\epsilon^3. \quad (3)$$

Cependant, force est de remarquer que le domaine représenté en figure 1 est régulier ; il convient bien pour décrire un œuf mais s'avère moins pertinent pour modéliser un avion furtif et sa peinture. Ceci nous amène à nous poser la question suivante : quid des problèmes de transmission et leurs approximations lorsque le domaine est irrégulier ?

Les problèmes de transmission à coin

Un exemple de ces problèmes de transmission à coin est le problème (4) posé sur le domaine représenté en figure 2, où le coin est de type conique d'angle ω .

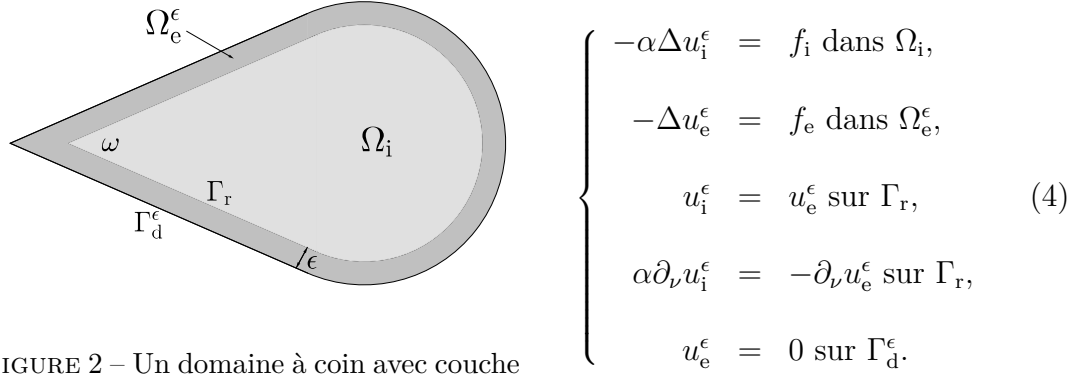


FIGURE 2 – Un domaine à coin avec couche mince

Le comportement de la solution u^ϵ des problèmes de la forme de (4) en fonction de l'épaisseur ϵ de la couche mince Ω_e^ϵ et de l'angle ω du coin a été étudié dans [34]. Il apparaît que lors de la construction du développement asymptotique de u^ϵ interviennent des singularités de la forme

$$s^j(r, \theta) = r^{\frac{j\pi}{\omega}} \sin\left(\frac{j\pi}{\omega}\theta\right), \quad \theta \in [0, \omega].$$

Ces singularités bloquent *a priori* la construction du développement asymptotique. À l'instar de [11], cette difficulté est contournée en les remplaçant par un autre objet : les profils. Ceux-ci peuvent être considérés comme proches des singularités dans le sens où ils héritent du comportement à l'infini de ces dernières. Leurs domaines de définitions sont des cônes infinis se confondant avec le coin du problème originel à ceci près que l'épaisseur de la couche mince est non plus de ϵ mais fixée arbitrairement (à 1 par exemple) ; on pourra observer sur la figure 3 le domaine des profils p^j associés au problème (4) et, dans le problème (5) qu'ils vérifient, le fait qu'ils se comportent à l'infini comme s^j .

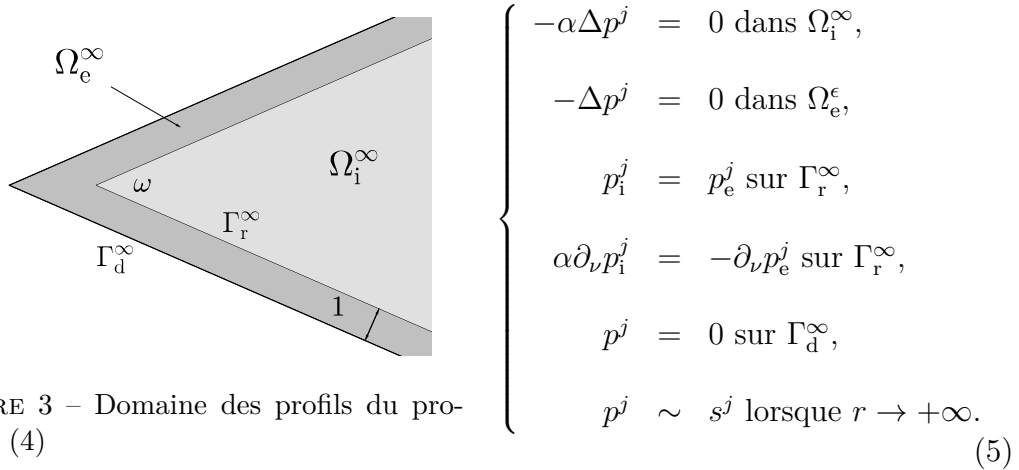


FIGURE 3 – Domaine des profils du problème (4)

Comparaison avec un problème avec condition d'impédance

Voyons maintenant comment se passe la comparaison du problème (4) avec son problème avec condition d'impédance associé. Ce dernier admet la même formulation que (2) mais est posé sur le domaine Ω_i représenté en figure 2.

Il possède un développement asymptotique similaire à celui du problème (4) : à chaque étape de sa construction, des singularités apparaissent et doivent être remplacées par des profils.

À partir de ces développements, on peut établir une estimation d'erreur entre les solutions u^ϵ du problème de transmission et v^ϵ du problème avec condition d'impédance. Ces estimations d'erreurs sont fournies par [34] :

$$\|u_i^\epsilon - v^\epsilon\|_{0,\Omega_i} \leq C[\log \epsilon] \epsilon^{\min(\frac{2\pi}{\omega}, 1 + \frac{\pi}{\omega}, 3)}, \quad (6)$$

$$\|u_i^\epsilon - v^\epsilon\|_{1,\Omega_i} \leq C[\log \epsilon] \epsilon^{\min(\frac{\pi}{\omega}, 3)}, \quad (7)$$

où $[\log \epsilon]$ désigne une dépendance polynômiale en $\log \epsilon$.

Comparons maintenant avec les erreurs commises dans le cas régulier – i.e. sans coin – du problème (1).

Pour un angle ω inférieur à $\frac{\pi}{3}$, les estimations (6) et (7) fournissent le même résultat que (3), l'erreur est en ϵ^3 ; cependant, on peut voir qu'au delà de $\frac{\pi}{3}$, l'erreur va rapidement se dégrader lorsque ω approche 2π pour finir en $O(\epsilon[\log \epsilon])$ pour l'erreur L^2 et $O(\sqrt{\epsilon}[\log \epsilon])$ pour l'erreur H^1 .

Cette baisse de vitesse de convergence s'avère gênante, ce qui conduit [34] à ouvrir en perspective la possibilité de considérer de nouvelles conditions d'impédance afin d'y pallier. Ainsi, l'objet de cette thèse est d'offrir, à ceux qui en auraient l'appétit, un petit panel de « nouvelles » conditions d'impédance permettant de réduire l'écart qui s'est creusé entre les cas régulier et irrégulier de l'approche du problème de transmission par celui avec condition d'impédance.

Problème de transmission étudié et nouveaux problèmes d'impédance

Le problème de transmission à coin qui servira de fil d'ariane à cette thèse est le problème (8) posé sur le domaine représenté en figure 4, où $\Gamma_n = \Gamma_n^1 \cup \Gamma_n^{2,\epsilon} \cup \Gamma_n^{3,\epsilon} \cup \Gamma_n^c$ et $\partial_\nu u_i^\epsilon$ et $\partial_\nu u_e^\epsilon$ désignent les dérivées normales extérieures à Ω_i et Ω_e^ϵ de u^ϵ .

Ici, la couche mince Ω_e^ϵ ne recouvre pas l'intégralité du domaine Ω_i contrairement aux problèmes (1) et (4) mais seulement une partie. C'est d'ailleurs de là que vient l'intérêt de ce problème car, hormis cela, l'angle du domaine Ω_i en O est plat. Le fait que la couche ne soit qu'à droite du point O va créer une singularité de façon artificielle en ce point en posant des conditions de bords différentes de chaque côté de O ; ceci se voit très aisément si l'on considère le problème limite, i.e. lorsque l'épaisseur de la couche est réduite à 0. On a alors à gauche de O une condition de Neumann et à droite une condition de Dirichlet.

On peut aussi voir le changement de conditions de bord à l'origine sur le problème avec condition d'impédance associé ; en effet, puisque qu'ici la courbure de la couche Ω_e^ϵ est nulle,

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\alpha \Delta u_i^\epsilon = f_i \text{ dans } \Omega_i, \\ \Delta u_e^\epsilon = f_e \text{ dans } \Omega_e^\epsilon, \\ u_i^\epsilon = u_e^\epsilon \text{ sur } \Gamma_r \\ \alpha \partial_\nu u_i^\epsilon = -\partial_\nu u_e^\epsilon \text{ sur } \Gamma_r \\ \partial_\nu u^\epsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_n, \\ u_e^\epsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_d^\epsilon. \end{array} \right.$$

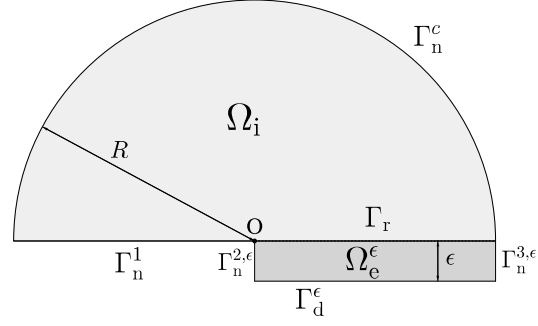


FIGURE 4 – Domaine du problème de transmission

la condition de Robin sur Γ_r du problème (2) nous donne comme problème :

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\alpha \Delta v^\epsilon = f_i \text{ dans } \Omega_i, \\ \partial_\nu v^\epsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_n, \\ v^\epsilon + \epsilon \alpha \partial_\nu v^\epsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_r. \end{array} \right.$$

On peut donc observer qu'en O se côtoient des conditions de Neumann et Robin. On verra lors de la construction des développements asymptotiques des problèmes (8) et (9) (ce dernier ayant déjà été effectué dans [11]) que les singularités — notées s^j — qu'y apparaissent correspondent à celles du cas $\omega = 2\pi$ du problème (4) :

$$s^j(r, \theta) = r^{\frac{1}{2}+j} \sin \left(\left(\frac{1}{2} + j \right) \theta \right), \theta \in [0, \pi].$$

Nous sommes en fait dans le pire des cas des estimations (6) et (7), autrement dit, nous avons pour vitesses de convergence des erreurs L^2 et H^1 en (à des termes logarithmiques près) ϵ et $\sqrt{\epsilon}$, respectivement. Ces dernières sont calculées à partir des développements asymptotiques (10) et (11) des solutions de nos deux problèmes.

Comme pour la construction du développement asymptotique de la solution du problème (4), les singularités vont être remplacées par des profils, notés q^j pour le problème (8) et p_r^j pour le problème (9). On obtient alors comme premiers termes :

$$u_i^\epsilon = u_{\text{reg},i}^0 + d^0 \chi_1(r) \sqrt{\epsilon} q_i^0 \left(\frac{r}{\epsilon}, \theta \right) + \epsilon u_{\varphi,i}^1 [\log \epsilon] + \epsilon u_{r,i}^1 + O_{H^1} \left(\epsilon^{\frac{3}{2}} \right), \quad (10)$$

et

$$v^\epsilon = v_{\text{reg}}^0 + c^0 \chi_1(r) \sqrt{\epsilon} p_r^0 \left(\frac{r}{\epsilon}, \theta \right) + \epsilon v_\varphi^1 [\log \epsilon] + \epsilon v_r^1 + O_{H^1} \left(\epsilon^{\frac{3}{2}} \right). \quad (11)$$

Une étude sur les différents termes en présence montre que $u_{\text{reg},i}^0 = v_{\text{reg}}^0$, $c^0 = d^0$ et $u_{r,i}^1 = v_r^1$. Elle montre de plus que les termes $u_{\varphi,i}^1$ et v_φ^1 apparaissent à cause du remplacement des singularités par les profils et sont construits par des procédés identiques. C'est donc la différence entre les profils q^j et p_r^j qui s'avère être à l'origine de la différence entre des premiers termes des développements asymptotiques (10) et (11). Autrement dit, cette différence est le facteur limitant de la vitesse de convergence entre nos deux solutions.

Amélioration de l'erreur L^2

Une étude précise sur l'origine de l'erreur L^2 entre les solutions des problèmes (8) et (9) :

$$\|u_i^\epsilon - v^\epsilon\|_{0,\Omega_i} \leq C\epsilon[\log \epsilon],$$

nous permet de montrer que le premier facteur limitant réside dans les différences entre $u_{\varphi,i}^1$ et v_φ^1 et entre q_i^0 et p_r^0 dans (10) et (11). Comme mentionné plus haut, $u_{\varphi,i}^1$ et v_φ^1 sont construits tous les deux à l'aide des profils p^j et q_i^j par un même procédé. Remontant ce procédé de construction, on aboutit au fait que la différence entre $u_{\varphi,i}^1$ et v_φ^1 est due à celle entre deux coefficients situés aux débuts des développements à l'infini des profils q^0 et p_r^0 de nos deux problèmes. Plus précisément, il s'agit des coefficients $c^{0(1)}$ et $d^{0(1)}$ dans les développements suivants : lorsque $r \rightarrow +\infty$,

$$p_r^0 = s^0 + p^{0(1)} + c^{0(1)}s^{-1} + O_{L^2}\left(r^{-\frac{3}{2}}\right), \quad (12)$$

et

$$q^0 = s^0 + p^{0(1)} + d^{0(1)}s^{-1} + O_{L^2}\left(r^{-\frac{3}{2}}\right), \quad (13)$$

où

$$p_r^{0(1)} = \alpha \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{r}} \left[(\pi - \theta) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \log r \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right].$$

Par ailleurs, une étude sur l'impact direct de la différence entre q_i^0 et p_r^0 nous montre que si $c^{0(1)}$ et $d^{0(1)}$ sont égaux, alors la différence entre q_i^0 et p_r^0 ne s'exprime plus en $O(\epsilon)$ mais en $O(\epsilon^2)$ et donc ne s'avère plus être un facteur limitant.

L'idée que nous allons développer consiste en l'introduction d'un paramètre supplémentaire dans la condition d'impédance du problème (9) sur lequel on pourra jouer afin d'égaliser ces deux coefficients — $c^{0(1)}$ et $d^{0(1)}$ — et ainsi transformer l'erreur en $O\left(\epsilon^{\frac{3}{2}}[\log \epsilon]\right)$.

La première voie que nous suivrons sera celle d'une condition d'impédance de type Robin multi-échelle avec coefficient variable sur Γ_r :

$$v_\bullet^\epsilon + \epsilon \alpha_\bullet \left(\frac{x}{\epsilon}\right) \partial_\nu v_\bullet^\epsilon = 0, \quad (14)$$

où $\alpha_\bullet$ est la fonction représentée sur la figure 5.

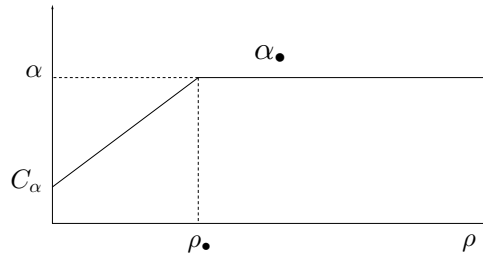


FIGURE 5 – La fonction $\alpha_\bullet$

Fort heureusement, le profil associé à la condition d'impédance (14) — noté $p_{r,\bullet}^0$ — admet le même développement (12) à l'infini que p_r^0 et peut donc être comparé directement à q^0

grâce à (13). L'objectif sera alors de trouver le paramètre $\rho_\bullet$ qui égalise nos deux coefficients $c_\bullet^{0(1)}$ et $d^{0(1)}$.

La seconde voie sera celle d'une condition d'impédance de type Ventcel :

$$v_\beta^\epsilon + \epsilon \alpha \partial_\nu v_\beta^\epsilon - \epsilon^2 \beta \partial_\tau^2 v_\beta^\epsilon = 0, \quad (15)$$

où ∂_τ^2 désigne la dérivée tangentielle seconde. De même que le profil $p_{r,\bullet}^0$, le profil associé à la condition de Ventcel (15) — noté $p_{v,\beta}^0$ — admet le même développement (12) à l'infini que p_r^0 et peut donc être comparé directement à q^0 . L'objectif consistera alors à déterminer β afin d'égaliser $c_\beta^{0(1)}$ et $d^{0(1)}$.

Amélioration de l'erreur H^1

L'étude de l'erreur H^1 :

$$\|u_i^\epsilon - v^\epsilon\|_{1,\Omega_i} \leq C\sqrt{\epsilon}[\log \epsilon],$$

nous montre que son origine est due à la différence entre les gradients des profils p^j et q^j dans (10) et (11). Cette différence étant globale, elle ne peut être supprimée par une déformation du problème (9) à l'aide de condition d'impédance de la forme de (14) ou (15).

L'idée est donc d'approcher u_i^ϵ par le début de son développement asymptotique :

$$w_i^\epsilon = u_{\text{reg},i}^0 + d^0 \chi_1 \sqrt{\epsilon} q_i^0 \left(\frac{r}{\epsilon}, \theta \right).$$

Ainsi, w_i^ϵ ne dépend pas de la couche Ω_ϵ et l'avantage conféré par le problème d'impédance est conservé tout en fournissant une meilleure estimation d'erreur :

$$\|u_i^\epsilon - w_i^\epsilon\|_{1,\Omega_i} \leq C\epsilon[\log \epsilon].$$

Là encore, les profils seront au cœur du travail à accomplir avec la nécessité d'obtenir numériquement q^0 . Cette approche sera d'ailleurs nommée d'après eux : méthode de plaquage des profils.

Organisation de la thèse

Le déroulement de la thèse va s'articuler selon le schéma représenté sur la figure 6.

Le premier chapitre a pour objectif la construction des développements asymptotiques des solutions des problèmes de transmission et avec condition d'impédance. Bien que ces constructions nécessitent des résultats sur les profils, ceux-ci ne seront étudiés qu'au dernier chapitre. En effet, leur étude est délicate et seul un petit nombre de résultats les concernant sont nécessaires à la construction des développements asymptotiques. Ainsi, afin de ne pas perdre de vue les objectifs de cette thèse et de bien saisir le pourquoi de leur intervention, ils ne seront donc pas étudiés en premier malgré leur rôle central ; divers encarts énonçant les résultats utiles pourvoient à nos besoins.

Le deuxième chapitre a pour vocation de présenter comment la méthode de plaquage des profils et conditions d'impédance (14) et (15) vont nous permettre d'améliorer les erreurs L^2 , H^1 et L^∞ . Nous y traitons de leurs efficacités théorique et numérique ainsi que de moyens

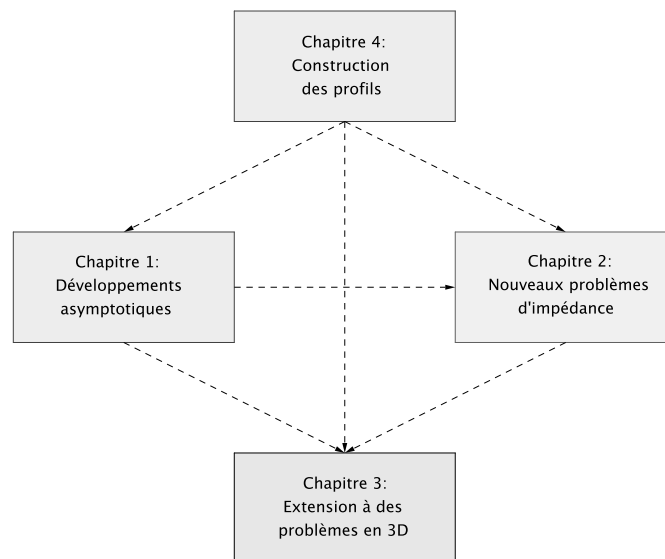


FIGURE 6 – Relations entre les chapitres

d'obtenir numériquement les profils.

Le troisième chapitre aborde des cas d'extensions tridimensionnelles des problèmes des chapitres précédents et étudie l'adaptabilité des diverses méthodes mises en œuvre au second chapitre à la dimension 3.

Le quatrième chapitre contient la construction et l'étude des profils des divers problèmes étudiés auparavant. Il peut être passé en première lecture. Afin de l'alléger, des résultats sur la régularité elliptique des profils ont été mis en annexe.

Finalement, viennent quelques annexes comportant divers résultats utilisés sporadiquement ou ponctuellement et qui ont été retirés du corps principal afin de l'alléger. On y trouve notamment une annexe sur les espaces à poids et la transformée de Mellin et des résultats de régularité elliptique.

Simulations numériques

Les simulations numériques ont été effectuées avec Freefem (voir [21]) et le couple Gmsh Getdp (voir [19]). La méthode de plaquage des profils n'a été testée que grâce à Freefem ; en effet, celle-ci requiert un certains nombres d'opérations successives qui ne sont pas, à ma connaissance, réalisables sur Getdp. Inversement, les simulations conduites sur la condition d'impédance de Ventcel n'ont été faite qu'avec Getdp car Freefem ne permet pas — encore une fois, à ma connaissance — de coder les conditions de Dirichlet ponctuelles nécessaires aux conditions de Ventcel.

Les dessins ont été faits avec Géogebra et les graphes ainsi que le post-traitement des données recueillies avec Matlab.

Chapitre 1

Développements asymptotiques

Ce chapitre a pour objectif de présenter les développements asymptotiques des problèmes de transmission et d'impédance. Le développement du problème avec impédance de type condition de Robin a été décrit brièvement dans [11], il est repris ici en détails d'une façon qui s'inspire aussi de [34]. Celui du problème de transmission est une adaptation de son analogue dans [34]. Le développement du problème avec impédance de type condition de Ventcel est original et s'inscrit dans la lignée de [6] ; il est basé sur celui avec condition de Robin tout en prenant en compte les différences dues à la dérivée tangentielle seconde.

L'accent sera mis sur la construction des premiers termes, d'une part, afin de bien saisir comment les profils interviennent ; d'autre part, afin d'identifier précisément les termes du développement et leur dépendance vis-à-vis des différents coefficients de singularité. Cette étude indispensable nous permettra alors d'effectuer une comparaison termes à termes des développements, ceci dans la visée de repérer comment ces différences détériorent l'approximation de la couche mince par une condition d'impédance. C'est forts de la compréhension des origines et dépendances de chaque terme en présence que nous pourrons par la suite mettre en œuvre des techniques visant à pallier ces détériorations.

Enfin, le lecteur profane souhaitant s'initier trouvera ici une version détaillée (et peut être plus abordable) du développement du problème d'impédance avec condition de Robin ; expliquant notamment pourquoi il est impossible de le construire sans faire intervenir les profils. Le lecteur familier pourra éventuellement se contenter d'un survol ou se concentrer sur le développement du problème d'impédance avec condition de Ventcel.

1.1 Problème avec condition d'impédance de type Robin

Il s'agit ici d'étudier et d'effectuer le développement asymptotique en fonction de ϵ de la solution v^ϵ du problème suivant :

$$\begin{cases} -\alpha \Delta v^\epsilon &= f_i \text{ dans } \Omega_i, \\ \partial_\nu v^\epsilon &= 0 \text{ sur } \Gamma_n, \\ v^\epsilon + \epsilon \alpha \partial_\nu v^\epsilon &= 0 \text{ sur } \Gamma_r \end{cases} \quad (1.1)$$

où le domaine Ω_i est un demi-disque et les domaines $\Gamma_n = \Gamma_n^1 \cup \Gamma_n^c$ et Γ_r sont définis sur la figure 1.1.

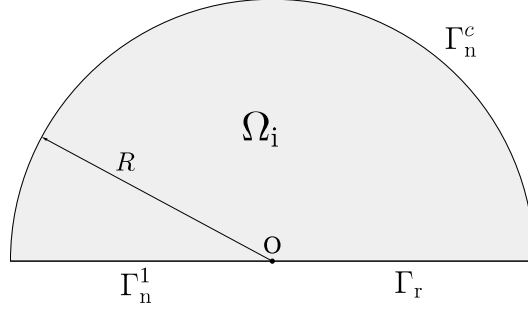


FIGURE 1.1 – Domaine du problème avec condition d'impédance de type Robin

La première sous-section a pour but de poser les résultats d'existence et d'unicité de solutions aux problèmes de la forme de (1.1). La seconde sous-section a pour objectif de présenter la construction des premiers termes du développement. Plus particulièrement, nous verrons pourquoi les singularités du problème limite empêchent la poursuite du développement justifiant ainsi la nécessité de les remplacer par les profils. Enfin, la troisième sous-section présente le développement et sa structure à tout ordre.

1.1.1 Existence et unicité des solutions au problème

On s'intéresse ici — pour $\epsilon > 0$ et $\alpha > 0$ fixés — aux problèmes de la forme :

$$\begin{cases} -\alpha \Delta v &= f \text{ dans } \Omega_i, \\ \partial_\nu v &= 0 \text{ sur } \Gamma_n, \\ v + \epsilon \alpha \partial_\nu v &= g \text{ sur } \Gamma_r, \end{cases} \quad (1.2)$$

où le domaine Ω_i est encore le domaine représenté sur la figure 1.1 et $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

Théorème 1.1. *Soient $f \in L^2(\Omega_i)$, $g \in L^2(\Gamma_r)$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Alors le problème (1.2) admet une unique solution $v \in H^1(\Omega_i)$ qui vérifie*

$$\|v\|_{H^1(\Omega_i)} \leq C \left(\|f\|_{L^2(\Omega_i)} + \frac{1}{\epsilon} \|g\|_{L^2(\Gamma_r)} \right),$$

où $C > 0$ est une constante indépendante de ϵ .

Démonstration. La formulation variationnelle associée à (1.2) est, pour tout $w \in H^1(\Omega_i)$,

$$a(v, w) = L(w),$$

où

$$a(v, w) = \alpha \int_{\Omega_i} \nabla v \cdot \nabla w + \frac{1}{\epsilon} \int_{\Gamma_r} vw,$$

et

$$L(w) = \int_{\Omega_i} fw + \frac{1}{\epsilon} \int_{\Gamma_r} gw.$$

Comme $\epsilon < 1$, on a pour tout $w \in H^1(\Omega_i)$,

$$a(w, w) \geq \alpha \|\nabla w\|_{0, \Omega_i} + \|w\|_{0, \Gamma_r}.$$

Par ailleurs, l'inégalité de Poincaré-Friedrichs du théorème A.1 nous dit qu'il existe une constante C dépendante de Ω_i telle que

$$\|\nabla w\|_{0, \Omega_i} + \|w\|_{0, \Gamma_r} \geq C \|w\|_{1, \Omega_i}.$$

D'où la coercivité de a .

Par inégalités de Cauchy-Schwarz et de trace, on obtient la continuité de L : pour tout $w \in H^1(\Omega_i)$,

$$L(w) \leq C \left(\|f\|_{0, \Omega_i} + \frac{1}{\epsilon} \|g\|_{0, \Omega_i} \right) \|w\|_{1, \Omega_i}.$$

Le théorème de Lax-Milgram nous donne alors l'existence et l'unicité d'une solution à (1.2) et l'inégalité de coercivité nous permet d'écrire

$$\|v\|_{1, \Omega_i} \leq C \left(\|f\|_{0, \Omega_i} + \frac{1}{\epsilon} \|g\|_{0, \Gamma_r} \right).$$

□

Remarque : L'estimation du théorème 1.1 peut en fait être améliorée de la façon suivante :

$$\|v\|_{H^s(\Omega_i)} \leq C \left(\|f\|_{L^2(\Omega_i)} + \|g\|_{L^2(\Gamma_r)} \right),$$

pour $s \in \left[1, \frac{3}{2}\right]$; on pourra se reporter — pour plus de détails — au lemme 2.1 de [11] par exemple. Ceci nous permet également de justifier les estimations en norme L^∞ à venir.

1.1.2 Premiers termes du développement

Pour commencer, injectons l'expression $v^\epsilon = \sum_{n \geq 0} \epsilon^n v^n$ dans (1.1). Nous la considérons comme une série formelle et ne nous intéressons donc pas à sa convergence. On obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} -\alpha \Delta v^n &= \delta_0^n f_i \text{ dans } \Omega_i, \\ \partial_\nu v^n &= 0 \text{ sur } \Gamma_n, \\ v^n &= -\alpha \partial_\nu v^{n-1} \text{ sur } \Gamma_r, \end{cases}$$

avec la convention $\partial_\nu v^{-1} = 0$.

Première approche :

Rang 0 : v^0 doit être solution de

$$\begin{cases} -\alpha \Delta v^0 &= f_i \text{ dans } \Omega_i, \\ \partial_\nu v^0 &= 0 \text{ sur } \Gamma_n, \\ v^0 &= 0 \text{ sur } \Gamma_r. \end{cases} \quad (1.3)$$

Définition 1.1. On note χ_k une fonction de troncature, C^∞ ; ne dépendant que de r sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ (donc radiale) et que de x sur $\mathbb{R}_+ \times [-1, 0]$; valant k pour $r < r_0$ ou $x \leq r_0$ (près de l'origine) et $1-k$ pour $r > r_1$ ou $x \geq r_1$ (loin de l'origine) avec $0 < r_0 < r_1$.

Nous utiliserons cette notation par la suite sous les formes χ_0 et χ_1 .

Supposons $f_i \in H^m(\Omega_i)$ avec $m \geq 0$ aussi grand que l'on veut, alors on sait par la théorie sur les problèmes à coin (voir [20] ou [28]) qu'il existe une unique solution à ce problème de la forme

$$v^0 = v_{\text{reg}}^0 + \chi_1(r) \sum_{j=0}^m c_j^0 s^j(r, \theta) = v_{\text{reg}}^0 + \chi_1(r) \sum_{j=0}^m c_j^0 \epsilon^{\frac{1}{2}+j} s^j\left(\frac{r}{\epsilon}, \theta\right), \quad (1.4)$$

où $v_{\text{reg}}^0 \in H^{m+2}(\Omega_i)$, $c_j^0 \in \mathbb{R}$ et s^j est défini par

$$s^j(r, \theta) = r^{j+\frac{1}{2}} \sin\left(\left(j + \frac{1}{2}\right)\theta\right).$$

Remarque : s^j appartient à $H^{j+1}(\Omega_i)$ mais pas à $H^{j+2}(\Omega_i)$.

Rang 1 : Cette fois-ci v^1 doit être solution de

$$\begin{cases} -\alpha \Delta v^1 &= 0 \text{ dans } \Omega_i, \\ \partial_\nu v^1 &= 0 \text{ sur } \Gamma_n, \\ v^1 &= -\alpha \partial_\nu v^0 \text{ sur } \Gamma_r. \end{cases}$$

Pour savoir s'il existe une solution à ce problème, il faut regarder la régularité de $\partial_\nu v^0$. Le terme limitant la régularité de v^0 dans sa décomposition est s^0 qui n'est que dans $H^1(\Omega_i)$ (en fait un peu mieux mais sans aller jusqu'à H^2), c'est donc sur lui qu'il faut se

concentrer. Plus précisément, $\partial_\nu = r^{-1}\partial_\theta$ sur Γ_r , il faut donc déterminer la régularité de

$$r^{-1}\partial_\theta s^0(r, \theta) = \frac{1}{2\sqrt{r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

Une évaluation directe nous affirme que cette fonction n'est pas dans $L^2(\Gamma_r)$ et donc pas dans $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_r)$. Ce défaut de régularité interrompt cette première méthode et nous oblige à en envisager une autre contournant ce problème. C'est l'objet de la deuxième approche.

Deuxième approche :

Cette approche nécessite l'utilisation des profils p_r^j . Ces derniers sont étudiés au chapitre 4, on en rappellera néanmoins l'essentiel dans le paragraphe suivant.

Profils du problème d'impédance

Les profils p_r^j du problème d'impédance avec condition de type Robin sont les solutions du problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \Delta p_r^j = 0 \text{ dans } \Omega_i^\infty, \\ \partial_\nu p_r^j = 0 \text{ sur } \Gamma_n^\infty, \\ p_r^j + \alpha \partial_\nu p_r^j = 0 \text{ sur } \Gamma_r^\infty, \\ p_r^j \sim s^j \text{ lorsque } r \rightarrow +\infty, \end{array} \right.$$

où $\Omega_i^\infty = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ et $\Gamma_n^\infty = \Gamma_n^{1,\infty}$ et Γ_r^∞ sont définis comme sur la figure 1.2.

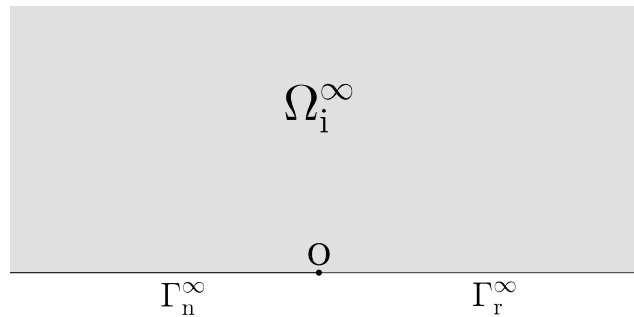


FIGURE 1.2 – Domaine des profils du problème avec condition d'impédance de type Robin

Pour cette partie, c'est leur comportement à l'infini qui nous intéressera principalement. Celui-ci est connu du fait qu'ils admettent une décomposition sous la forme suivante :

$$p_r^j = s^j + \chi_0(r) \sum_{n=1}^N p_r^{j,n} + P_r^{j,N},$$

où s^j , $p_r^{j,n}$ et $\chi_0 P^{j,N}$ appartiennent à

$$\mathcal{S}^\lambda(\Omega_1^\infty) = \left\{ w : w(r, \theta) = r^\lambda \sum_{l=0}^L \log^l r \psi_l(\theta), \psi_l \in \mathcal{C}^\infty([0, \pi]) \right\},$$

avec $N \geq j + 1$, $L \in \mathbb{N}$ et, respectivement, $\lambda = \frac{1}{2} + j$, $\lambda = \frac{1}{2} + j - n$ et $\lambda = \frac{1}{2} + j - N + 1$.

Pour plus de détails sur les $p_r^{j,n}$ et $P_r^{j,N}$, on se reportera au chapitre 4 section 4.1 où ils sont définis comme étant les solutions des problèmes (4.5), (4.6) et (4.11) et étudiés précisément.

Nous utiliserons en particulier le fait que

$$p_r^0 = s^0 + \chi_0 \underbrace{\left(p_r^{0(1)} + c^{0(1)} s^{-1} \right)}_{=p_r^{0,1}} + \chi_0 O_{L^2(\Omega_1^\infty)} \left(r^{-\frac{3}{2}} \log r \right), \quad (1.5)$$

avec $c^{0(1)} \in \mathbb{R}$ et

$$p_r^{0(1)} = \alpha \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{r}} \left[(\pi - \theta) \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) + \log r \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \right].$$

Développement

Rang 0 : On remplace les singularités s^j dans (1.4) par les profils p^j pour obtenir

$$\tilde{v}^0 = v_{\text{reg}}^0 + \chi_1(r) \sum_{j=0}^m c_j^0 \epsilon^{\frac{1}{2}+j} p_r^j \left(\frac{r}{\epsilon}, \theta \right) = v^0 + p_\epsilon^0$$

$$\text{avec } p_\epsilon^k = \chi_1(r) \sum_{j=0}^{m-k} c_j^k \epsilon^{\frac{1}{2}+j} \left(p_r^j - s^j \right) \left(\frac{r}{\epsilon}, \theta \right).$$

On définit alors le reste comme étant $r_\epsilon^0 = v^\epsilon - \tilde{v}^0$, lequel vérifie

$$\left\{ \begin{array}{lcl} -\alpha \Delta r_\epsilon^0 & = & \alpha \Delta p_\epsilon^0 \text{ dans } \Omega_i, \\ \partial_\nu r_\epsilon^0 & = & 0 \text{ sur } \Gamma_n, \\ r_\epsilon^0 + \epsilon \alpha \partial_\nu r_\epsilon^0 & = & -\epsilon \alpha \partial_\nu v_{\text{reg}}^0 \text{ sur } \Gamma_r. \end{array} \right. \quad (1.6)$$

En effet, sur Γ_r , on a

$$\epsilon \partial_\nu p_r^j \left(\frac{r}{\epsilon}, \theta \right) = -\epsilon \partial_y p_r^j \left(\frac{x}{\epsilon}, \frac{y}{\epsilon} \right) = \partial_Y p_r^j(X, Y).$$

Or $p_r^j + \alpha \partial_Y p_r^j = 0$ sur Γ_r^∞ . On en déduit que $(\mathcal{I} + \epsilon \alpha \partial_\nu) p^j \left(\frac{r}{\epsilon}, \theta \right) = 0$.

Lemme 1.1. Soit $k \in \mathbb{N}$, Δp_ϵ^k est à support dans la couronne $[r_0, r_1]$ et, pour tout $N \in \mathbb{N}$, s'exprime sous la forme

$$\Delta p_\epsilon^k = \sum_{j=0}^{m-k} \sum_{n=1}^N \epsilon^n c_j^k \varphi^{j,n}(r, \theta) [\log \epsilon] + O_{L^2(\Omega_i)}(\epsilon^{N+1} [\log \epsilon]),$$

où $\varphi^{j,n}[\log \epsilon]$ désigne un polynôme en $\log \epsilon$ à coefficients $\mathcal{C}^\infty$, à support dans la couronne $[r_0, r_1]$.

Démonstration. On a

$$\Delta p_\epsilon^k = \sum_{j=0}^{m-k} c_j^k \epsilon^{\frac{1}{2}+j} \Delta \left[\chi_1(r) (p_r^j - s^j) \left(\frac{r}{\epsilon}, \theta \right) \right].$$

Il suffit donc de se concentrer dans un premier temps sur le laplacien du second membre de l'égalité ci-dessus. Ayant (puisque p_r^j et s^j sont harmoniques)

$$\Delta \left[\chi_1(r) (p_r^j - s^j) \left(\frac{r}{\epsilon}, \theta \right) \right] = (p_r^j - s^j) \left(\frac{r}{\epsilon}, \theta \right) \Delta \chi_1(r) + 2 \nabla (p_r^j - s^j) \left(\frac{r}{\epsilon}, \theta \right) \cdot \nabla \chi_1(r),$$

il est clair que Δp_ϵ^j est à support dans la couronne $[r_0, r_1]$.

On a, pour $N \geq j + 1$,

$$p_r^j(r, \theta) = s^j(r, \theta) + \chi_0 \sum_{n=1}^N p_r^{j,n}(r, \theta) + P_r^{j,N}(r, \theta),$$

où $p_r^{j,n} \in \mathcal{S}^{\frac{1}{2}+j-n}(\Omega_i^\infty)$ et $P_r^{j,N} \in \mathcal{S}^{\frac{1}{2}+j-(N+1)}(\Omega_i^\infty)$.

Ainsi,

$$\nabla(p_r^j - s^j) = \nabla \chi_0 \sum_{n=1}^N p_r^{j,n} + \chi_0 \sum_{n=1}^N \nabla p_r^{j,n} + \nabla P_r^{j,N}.$$

Par ailleurs, en notant $\mu_n = \frac{1}{2} + j - n$, on a

$$p_r^{j,n} \left(\frac{r}{\epsilon}, \theta \right) = \epsilon^{-\mu_n} g_1^{\mu_n} [\log \epsilon](r, \theta),$$

et

$$\nabla p_r^{j,n} \left(\frac{r}{\epsilon}, \theta \right) = \epsilon^{-\mu_n+1} g_2^{\mu_n} [\log \epsilon](r, \theta),$$

où $g_1^{\mu_n}[\log \epsilon]$ et $g_2^{\mu_n}[\log \epsilon]$ désignent des polynômes en $\log \epsilon$; ces derniers sont issus de la structure des $p_r^{j,n}$, laquelle assure aussi qu'ils sont bien $\mathcal{C}^\infty$ dans la couronne $[r_0, r_1]$.

On en déduit donc que

$$\begin{aligned}
\Delta \left[\chi_1(r) \left(p_r^j - s^j \right) \left(\frac{r}{\epsilon}, \theta \right) \right] &= [\Delta \chi_1(r)] \sum_{n=1}^N p_r^{j,n} \left(\frac{r}{\epsilon}, \theta \right) + \underbrace{\left[2 \nabla \chi_1(r) \nabla \chi_0 \left(\frac{r}{\epsilon} \right) \right]}_{=\chi_\epsilon} \sum_{n=1}^N p_r^{j,n} \left(\frac{r}{\epsilon}, \theta \right) \\
&\quad + \underbrace{\left[2 \chi_0 \left(\frac{r}{\epsilon} \right) \nabla \chi_1(r) \right]}_{=\tilde{\chi}_\epsilon} \sum_{n=1}^N \nabla p_r^{j,n} \left(\frac{r}{\epsilon}, \theta \right) \\
&\quad + \underbrace{\Delta \chi_1 P_r^{j,N} \left(\frac{r}{\epsilon}, \theta \right) + 2 \nabla \chi_1 \nabla P_r^{j,N} \left(\frac{r}{\epsilon}, \theta \right)}_{=G^{j,N}(\epsilon)} \\
&= \left[[\Delta \chi_1(r)] \chi_0 \left(\frac{r}{\epsilon} \right) + \chi_\epsilon \right] \sum_{n=1}^N \epsilon^{-\mu_n} g_1^{\mu_n} [\log \epsilon] \\
&\quad + \tilde{\chi}_\epsilon \sum_{n=2}^{N+1} \epsilon^{-\mu_n} g_2^{\mu_{n-1}} [\log \epsilon] + G^{j,N}(\epsilon) \\
&= \sum_{n=1}^N \epsilon^{-\mu_n} \tilde{\varphi}^{j,n} [\log \epsilon] + \psi^{j,N}(\epsilon),
\end{aligned}$$

où

$$\tilde{\varphi}^{j,n} [\log \epsilon] = \left[[\Delta \chi_1(r)] \chi_0 \left(\frac{r}{\epsilon} \right) + \chi_\epsilon \right] g_1^{\mu_n} [\log \epsilon] + (1 - \delta_1^n) \tilde{\chi}_\epsilon g_2^{\mu_{n-1}} [\log \epsilon],$$

où δ_1^n désigne le symbole de Kronecker — et

$$\psi^{j,N}(\epsilon) = \tilde{\chi}_\epsilon \epsilon^{-\mu_{N+1}} g_2^{\mu_N} [\log \epsilon] + G^{j,N}(\epsilon).$$

En multipliant par $\epsilon^{\frac{1}{2}+j}$, on obtient alors

$$\epsilon^{\frac{1}{2}+j} \Delta \left[\chi_1(r) \left(p_r^j - s^j \right) \left(\frac{r}{\epsilon}, \theta \right) \right] = \sum_{n=1}^N \epsilon^n \tilde{\varphi}^{j,n} [\log \epsilon] + \epsilon^{\frac{1}{2}+j} \psi^{j,N}(\epsilon).$$

La formule donnant $\psi^{j,N}(\epsilon)$ et l'appartenance de $P_r^{j,N}$ à $\mathcal{S}^{\frac{1}{2}+j-(N+1)}(\Omega_i)$ nous permettent de voir que $\epsilon^{\frac{1}{2}+j} \psi^{j,N}(\epsilon) = O_{L^2(\Omega_i)}(\epsilon^{N+1} [\log \epsilon])$. $\square$

On déduit de ce lemme que, pour $N = 1$, $\Delta p_\epsilon^0 = \epsilon \sum_{j=0}^m c_j^0 \varphi^{j,1} [\log \epsilon] + O_{L^2(\Omega_i)}(\epsilon^2 [\log \epsilon])$

et donc, par l'estimation du théorème 1.1, que

$$\|r_\epsilon^0\|_{1,\Omega_i} \leq \|\partial_\nu v_{\text{reg}}^0\|_{0,\Gamma_r} + \epsilon \sum_{j=0}^m |c_j^0| \|\varphi^{j,1}\|_{0,\Omega_i} [\log \epsilon] + O_{L^2(\Omega_i)}(\epsilon^2 [\log \epsilon]).$$

On verra plus tard que les estimations sur les restes au rang 1 permettent en fait de montrer que l'on a

$$\|r_\epsilon^0\|_{1,\Omega_i} \leq C\epsilon[\log \epsilon].$$

Rang 1 : Dans (1.6), le second membre admet des contributions de deux origines : la partie régulière de v^0 et les profils. Ces deux origines invitent à poser deux problèmes afin de différencier les contributions à l'œuvre. On pose $v_\varphi^1[\log \epsilon]$ (qui représentera la contribution des profils) et v_r^1 (qui représentera la contribution de la partie régulière de v^0) les solutions des systèmes suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta v_\varphi^1[\log \epsilon] = \sum_{j=0}^m c_j^0 \varphi^{j,1}[\log \epsilon] \text{ dans } \Omega_i, \\ \partial_\nu v_\varphi^1[\log \epsilon] = 0 \text{ sur } \Gamma_n, \\ v_\varphi^1[\log \epsilon] = 0 \text{ sur } \Gamma_r, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} -\Delta v_r^1 = 0 \text{ dans } \Omega_i, \\ \partial_\nu v_r^1 = 0 \text{ sur } \Gamma_n, \\ v_r^1 = -\alpha \partial_\nu v_{\text{reg}}^0 \text{ sur } \Gamma_r. \end{array} \right. \quad (1.8)$$

(1.7)

Comme $v_{\text{reg}}^0 \in H^{m+2}(\Omega_i)$ on a $\partial_\nu v_{\text{reg}}^0 \in H^{m+\frac{1}{2}}(\Gamma_r)$. Par ailleurs, les autres seconds membres sont clairement $\mathcal{C}^\infty$. Cela justifie l'existence et l'unicité d'une solution à chacun des problèmes ci-dessus avec, de plus, une décomposition en parties régulière et singulière. On peut alors construire v^1 comme étant

$$v^1 = v_\varphi^1[\log \epsilon] + v_r^1,$$

solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta v^1 = \sum_{j=0}^m c_j^0 \varphi^{j,1}[\log \epsilon] \text{ dans } \Omega_i, \\ \partial_\nu v^1 = 0 \text{ sur } \Gamma_n, \\ v^1 = -\alpha \partial_\nu v_{\text{reg}}^0 \text{ sur } \Gamma_r. \end{array} \right. \quad (1.9)$$

On peut aussi écrire

$$v^1 = v_{\text{reg}}^1 + \chi_1(r) \sum_{j=0}^{m-1} c_j^1[\log \epsilon] \epsilon^{\frac{1}{2}+j} s^j \left(\frac{r}{\epsilon}, \theta \right),$$

où $v_{\text{reg}}^1 \in H^{m+1}(\Omega_i)$ et $c^1[\log \epsilon]$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1 en $\log \epsilon$. On constate ici que la partie régulière a perdu un cran de régularité et qu'une singularité a disparu.

Arrêtons-nous un instant afin d'expliquer le but de tout ceci. Si l'on regarde le problème vérifié par u^1 dans la première approche, on peut voir que l'on était bloqué à cause de la régularité du terme $\partial_\nu v^0$ sur Γ_r . Dans le problème ci-dessus, nous n'avons plus ce blocage du fait que $\partial_\nu v^0$ est remplacé par $\partial_\nu v_{\text{reg}}^0$ qui est bien dans $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_r)$. En contre-partie, un second membre est apparu sur Ω_i à cause du remplacement de la singularité par le profil au rang 0. Ce second membre, nous l'avons vu, est assez régulier pour continuer le développement asymptotique. Notons cependant l'introduction des $\log \epsilon$ dans ce dernier. Il s'agit maintenant de réitérer le principe.

Comme au rang 0, on pose

$$\tilde{v}^1 = v_{\text{reg}}^1 + \chi_1(r) \sum_{j=0}^{m-1} c_j^1 [\log \epsilon] \epsilon^{\frac{1}{2}+j} p_r^j \left(\frac{r}{\epsilon}, \theta \right) = v^1 + p_\epsilon^1,$$

$$\text{où } p_\epsilon^1 = \chi_1(r) \sum_{j=0}^{m-1} c_j^1 [\log \epsilon] \epsilon^{\frac{1}{2}+j} (p_r^j - s^j) \left(\frac{r}{\epsilon}, \theta \right) \text{ et}$$

$$r_\epsilon^1 = v^\epsilon - \tilde{v}^0 - \epsilon \tilde{v}^1 = r_\epsilon^0 - \epsilon \tilde{v}^1.$$

Ce dernier vérifie

$$\begin{cases} -\alpha \Delta r_\epsilon^1 &= \epsilon \alpha \Delta p_\epsilon^1 + O_{L^2(\Omega_i)}(\epsilon^2) \text{ dans } \Omega_i, \\ \partial_\nu r_\epsilon^1 &= 0 \text{ sur } \Gamma_n, \\ r_\epsilon^1 + \epsilon \alpha \partial_\nu r_\epsilon^1 &= -\epsilon^2 \alpha \partial_\nu v_{\text{reg}}^1 \text{ sur } \Gamma_r. \end{cases}$$

En effet, sur Ω_i — au vu des problèmes (1.6) et (1.9) vérifiés par r_ϵ^0 et v^1 et du lemme 1.1, on a

$$\Delta r_\epsilon^0 = \epsilon \Delta v^1 + O_{L^2(\Omega_i)}(\epsilon^2 [\log \epsilon]),$$

donc

$$\Delta r_\epsilon^1 = \Delta r_\epsilon^0 - \epsilon \Delta \tilde{v}^1 = \Delta r_\epsilon^0 - \epsilon \Delta v^1 - \epsilon \Delta p_\epsilon^1 = -\epsilon \Delta p_\epsilon^1 + O_{L^2(\Omega_i)}(\epsilon^2 [\log \epsilon]);$$

et sur Γ_r^∞ , comme $p_r^j - \alpha \partial_Y p_r^j = 0$, on en déduit que

$$r_\epsilon^1 + \epsilon \alpha \partial_\nu r_\epsilon^1 = \underbrace{r_\epsilon^0 + \epsilon \alpha \partial_\nu r_\epsilon^0}_{=-\epsilon \alpha \partial_\nu v_{\text{reg}}^0} - \epsilon \left(\underbrace{v_{\text{reg}}^1}_{=-\alpha \partial_\nu v_{\text{reg}}^0} + \epsilon \alpha \partial_\nu v_{\text{reg}}^1 \right) = -\epsilon^2 \alpha \partial_\nu v_{\text{reg}}^1.$$

Réutilisant le résultat énoncé au rang 0 sur Δp_ϵ^j , et grâce l'estimation du théorème 1.1, on aboutit à

$$\|r_\epsilon^1\|_{1,\Omega_i} \leq C \left(\epsilon \|\partial_\nu v_{\text{reg}}^1\|_{0,\Gamma_r} + \epsilon^2 \sum_{j=0}^{m-1} |c_j^1| \|\varphi^{j,1}\|_{0,\Omega_i} [\log \epsilon] + O_{L^2(\Omega_i)}(\epsilon^2 [\log \epsilon]) + O_{L^2(\Omega_i)}(\epsilon^3 [\log \epsilon]) \right).$$

De la même façon que pour le rang 0, on verra que l'on peut en fait avoir

$$\|r_\epsilon^1\|_{1,\Omega_i} \leq C \epsilon^2 [\log \epsilon].$$

On a donc, au rang 1 du développement asymptotique,

$$v^\epsilon = v_{\text{reg}}^0 + c^0 \chi_1(r) \sqrt{\epsilon} p_r^0 \left(\frac{r}{\epsilon}, \theta \right) + \epsilon v^1[\log \epsilon] + r_\epsilon^1, \quad (1.10)$$

ou encore

$$v^\epsilon = v_{\text{reg}}^0 + c^0 \chi_1(r) \sqrt{\epsilon} p_r^0 \left(\frac{r}{\epsilon}, \theta \right) + \epsilon v_\varphi^1[\log \epsilon] + \epsilon v_r^1 + O_{H^1(\Omega_i)}(\epsilon^2[\log \epsilon]). \quad (1.11)$$

1.1.3 Développement à l'ordre n

Théorème 1.2. *Soit $m \in \mathbb{N}^*$. La solution du problème (1.1) pour $f_i \in H^m(\Omega_i)$ admet pour développement asymptotique à l'ordre $n \in \{1, \dots, m\}$:*

$$v^\epsilon = \sum_{k=0}^n \epsilon^k v^k[\log \epsilon] + \sum_{k=0}^{n-1} \epsilon^{k+\frac{1}{2}} c^k[\log \epsilon] \chi_1(r) \left(p_r^k - s^k \right) \left(\frac{r}{\epsilon}, \theta \right) + r_\epsilon^n, \quad (1.12)$$

où :

- pour $k \in \{0, \dots, n\}$, $v^k[\log \epsilon]$ est un polynôme en $\log \epsilon$ de degré inférieur ou égal à k solution de

$$\begin{cases} -\Delta v^k[\log \epsilon] &= f^k[\log \epsilon] \text{ dans } \Omega_i, \\ \partial_\nu v^k[\log \epsilon] &= 0 \text{ sur } \Gamma_n, \\ v^k[\log \epsilon] &= -\alpha \partial_\nu v_{\text{reg}}^{k-1}[\log \epsilon] \text{ sur } \Gamma_r, \end{cases} \quad (1.13)$$

avec la convention $\partial_\nu v_{\text{reg}}^{-1} = 0$ et

$$f^k[\log \epsilon] = \begin{cases} f_i & \text{si } k = 0, \\ \sum_{j=0}^{m-(k-1)} c_j^{k-1} \varphi^{j,k}[\log \epsilon] & \text{sinon,} \end{cases}$$

où les $\varphi^{j,k}[\log \epsilon]$ proviennent du lemme 1.1 appliqué avec $N = m$; de plus, $v_{\text{reg}}^k[\log \epsilon] \in H^{m+2-k}(\Omega_i)$;

- $c^k[\log \epsilon]$ désigne un polynôme en $\log \epsilon$ de degré inférieur ou égal à k dont les coefficients sont des combinaisons linéaires des coefficients de singularité $c_j^0, \dots, c_j^{n-k-1}$, $j \in \{0, \dots, m-k\}$, issus des décompositions en parties régulière-singulière des fonctions $v^0, \dots, v^{n-k-1}$;
- le reste r_ϵ^n vérifie le problème

$$\begin{cases} -\alpha \Delta r_\epsilon^n &= \alpha \epsilon^n \Delta p_\epsilon^n + O_{L^2(\Omega_i)}(\epsilon^{n+1}[\log \epsilon]) \text{ dans } \Omega_i, \\ \partial_\nu r_\epsilon^n &= 0 \text{ sur } \Gamma_n, \\ r_\epsilon^n + \epsilon \alpha \partial_\nu r_\epsilon^n &= -\epsilon^{n+1} \alpha \partial_\nu v_{\text{reg}}^n[\log \epsilon] \text{ sur } \Gamma_r; \end{cases} \quad (1.14)$$

et on a l'estimation, pour $n \in \{1, \dots, m-1\}$ ($m > 2$),

$$\|r_\epsilon^n\|_{1,\Omega_i} = O\left(\epsilon^{n+1}[\log \epsilon]\right). \quad (1.15)$$

Démonstration. On procède par récurrence sur $n \in \{1, \dots, m\}$.

L'ordre 1 a été traité précédemment. Supposons $n > 1$ et le développement vrai au rang $n-1$. Commençons par construire $v^n[\log \epsilon]$ à l'aide du problème (1.13). Pour cela, il suffit de s'assurer que le second membre de (1.13) est bien défini pour $k = n$ et admet bien la régularité nécessaire.

Pour tout $j, k \in \{0, \dots, m\}$, les $\varphi^{j,k}$ sont construits indépendamment de la récurrence à l'aide des profils p_r^j , des singularités s^j , de la fonction de troncature χ_1 et du lemme 1.1 ; ils sont C^∞ à support compact dans Ω_i .

Par hypothèse, le terme $v^{n-1}[\log \epsilon]$ est construit et admet la décomposition en partie régulière-singulière suivante :

$$v^{n-1}[\log \epsilon] = v_{\text{reg}}^{n-1}[\log \epsilon] + \sum_{j=0}^{m-(n-1)} c_j^{n-1}[\log \epsilon] \chi_1(r) s^j(r, \theta),$$

avec $v_{\text{reg}}^{n-1}[\log \epsilon] \in H^{m+2-(n-1)}(\Omega_i)$. Les coefficients $c_j^{n-1}[\log \epsilon]$ nécessaires au second membre de la condition sur Ω_i du problème (1.13) sont donc obtenus à l'aide de cette décomposition. Le second membre sur Ω_i de (1.13) est donc entièrement défini et suffisamment régulier.

Par ailleurs, puisque $v_{\text{reg}}^{n-1}[\log \epsilon] \in H^{m-n+3}(\Omega_i)$, $\partial_\nu v_{\text{reg}}^{n-1}[\log \epsilon] \in H^{m-n+\frac{3}{2}}(\Omega_i)$. Comme $n \leq m$, $\partial_\nu v_{\text{reg}}^{n-1}[\log \epsilon]$ est suffisamment régulier, i.e. au moins dans $L^2(\Gamma_r)$.

On peut donc définir $v^n[\log \epsilon]$ comme étant la solution du problème (1.13) pour $k = n$; il admet la décomposition en partie régulière singulière suivante :

$$v^n[\log \epsilon] = v_{\text{reg}}^n[\log \epsilon] + \sum_{j=0}^{m-n} c_j^n[\log \epsilon] \chi_1(r) s^j(r, \theta),$$

avec $v_{\text{reg}}^n[\log \epsilon] \in H^{m+2-n}(\Omega_i)$.

Nous pouvons alors redéfinir le coefficient $c^k[\log \epsilon]$ — pour $k \in \{0, \dots, m-n\}$ — comme combinaison linéaire du précédent coefficient $c^k[\log \epsilon]$ donné par l'hypothèse de récurrence et du coefficient c_k^n obtenu par la décomposition en partie régulière-singulière de $v^n[\log \epsilon]$ ci-dessus. Pour $k \in \{m-n, \dots, m\}$, le coefficient $c^k[\log \epsilon]$ reste inchangé.

Ainsi, nous pouvons définir le reste d'ordre n à l'aide de la formule (1.12) comme étant :

$$r_\epsilon^n = v^\epsilon - \left[\sum_{k=0}^n \epsilon^k v^k[\log \epsilon] + \sum_{k=0}^{n-1} \epsilon^{k+\frac{1}{2}} c^k[\log \epsilon] \chi_1(r) (p_r^k - s^k) \left(\frac{r}{\epsilon}, \theta \right) \right];$$

ou encore

$$r_\epsilon^n = r_\epsilon^{n-1} - \epsilon^n \tilde{v}^n[\log \epsilon],$$

où

$$\tilde{v}^n[\log \epsilon] = v_{\text{reg}}^n[\log \epsilon] + \sum_{j=0}^{m-n} \epsilon^{\frac{1}{2}+j} c_j^n[\log \epsilon] \chi_1(r) p_r^j \left(\frac{r}{\epsilon}, \theta \right) = v^n[\log \epsilon] + p_\epsilon^n,$$

avec $p_\epsilon^n = \sum_{j=0}^{m-n} c_j^n [\log \epsilon] \chi_1(r) \epsilon^{\frac{1}{2}+j} (p_r^j - s^j) \left(\frac{r}{\epsilon}, \theta \right)$.

Le reste r_ϵ^n vérifie alors

$$\begin{cases} -\alpha \Delta r_\epsilon^n &= -\alpha \epsilon^n \Delta p_\epsilon^n + O_{L^2(\Omega_i)}(\epsilon^{n+1} [\log \epsilon]) \text{ dans } \Omega_i, \\ \partial_\nu r_\epsilon^n &= 0 \text{ sur } \Gamma_n, \\ r_\epsilon^n + \epsilon \alpha \partial_\nu r_\epsilon^n &= -\epsilon^{n+1} \alpha \partial_\nu v_{\text{reg}}^n [\log \epsilon] \text{ sur } \Gamma_r. \end{cases}$$

En effet, de la même façon qu'au rang 1 on observe que,

sur Ω_i : au vu des problèmes (1.13) (pour $k = n$) et (1.14) (avec $n - 1$ à la place de n) vérifiés par $v^n [\log \epsilon]$ et r_ϵ^{n-1} ,

$$\Delta r_\epsilon^n = \Delta r_\epsilon^{n-1} - \epsilon^n \Delta v^n [\log \epsilon] - \epsilon^n \Delta p_\epsilon^n = -\epsilon^n \Delta p_\epsilon^n + O_{L^2(\Omega_i)}(\epsilon^{n+1} [\log \epsilon]);$$

sur Γ_r : comme $p^j - \alpha \partial_Y p^j = 0$ sur Γ_r^∞ , on en déduit que

$$\begin{aligned} r_\epsilon^n + \epsilon \alpha \partial_\nu r_\epsilon^n &= \underbrace{r_\epsilon^{n-1} + \epsilon \alpha \partial_\nu r_\epsilon^{n-1}}_{=-\epsilon \alpha \partial_\nu v_{\text{reg}}^{n-1} [\log \epsilon]} - \epsilon \left(\underbrace{v_{\text{reg}}^n [\log \epsilon]}_{=-\alpha \partial_\nu v_{\text{reg}}^{n-1} [\log \epsilon]} + \epsilon \alpha \partial_\nu v_{\text{reg}}^n [\log \epsilon] \right) \\ &= -\epsilon^{n+1} \alpha \partial_\nu v_{\text{reg}}^n [\log \epsilon]. \end{aligned}$$

L'estimation du théorème 1.2 et le lemme 1.1 nous donnent alors

$$\begin{aligned} \|r_\epsilon^n\|_{1,\Omega_i} &\leq C \left(\epsilon^n \|\partial_\nu v_{\text{reg}}^n [\log \epsilon]\|_{0,\Gamma_r} + \epsilon^{n+1} \sum_{j=0}^{m-n} |c_j^n| \|\varphi^{j,n}\|_{0,\Omega_i} [\log \epsilon] \right) \\ &\quad + O_{L^2(\Omega_i)}(\epsilon^{n+1} [\log \epsilon]) + O_{L^2(\Omega_i)}(\epsilon^{n+2} [\log \epsilon]) \\ &= O_{H^1(\Omega_i)}(\epsilon^n [\log \epsilon]). \end{aligned}$$

Reste à voir comment on obtient l'estimation (1.15). Supposons que nous avons construit le développement jusqu'à l'ordre $n+1$ et donc r_ϵ^{n+1} avec l'estimation $r_\epsilon^{n+1} = O_{H^1(\Omega_i)}(\epsilon^{n+1} [\log \epsilon])$. On peut alors écrire

$$r_\epsilon^n = r_\epsilon^{n+1} + \epsilon^{n+1} \tilde{v}^{n+1},$$

où

$$\tilde{v}^{n+1} [\log \epsilon] = v_{\text{reg}}^{n+1} [\log \epsilon] + \sum_{j=0}^{m-(n+1)} c_j^{n+1} [\log \epsilon] \chi_1(r) p_r^j \left(\frac{r}{\epsilon}, \theta \right).$$

On a $\|v_{\text{reg}}^{n+1} [\log \epsilon]\|_{1,\Omega_i} \simeq [\log \epsilon]$ et $\epsilon^{\frac{1}{2}+j} \left\| p_r^j \left(\frac{r}{\epsilon}, \theta \right) \right\|_{1,\Omega_i} \simeq [\log \epsilon]$ en vertu du comportement à l'infini des profils. On en déduit que

$$\|r_\epsilon^n\|_{1,\Omega_i} \simeq \epsilon^{n+1} [\log \epsilon].$$

□

Remarque : le même développement asymptotique est valable si α dans la condition sur Γ_r de (1.1) est remplacé par une fonction $\alpha_\bullet : \Gamma_r \rightarrow \mathbb{R}_+$. Ceci provient de la remarque en fin de section 4.1.6 (page 147) qui nous dit que les profils ayant $\alpha_\bullet$ sur Γ_r admettent un développement à l'infini similaire à ceux ayant α .

1.2 Problème de transmission avec couche mince

Effectuons et étudions maintenant le développement asymptotique de la solution u^ϵ du problème de transmission :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\alpha \Delta u_i^\epsilon = f_i \text{ dans } \Omega_i, \\ \Delta u_e^\epsilon = f_e \text{ dans } \Omega_e^\epsilon, \\ u_i^\epsilon = u_e^\epsilon \text{ sur } \Gamma_r \\ \alpha \partial_\nu u_i^\epsilon = -\partial_\nu u_e^\epsilon \text{ sur } \Gamma_r \\ \partial_\nu u^\epsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_n, \\ u_e^\epsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_d^\epsilon, \end{array} \right. \quad (1.16)$$

où le domaine $\Omega^\epsilon = \overline{\Omega_i} \cup \overline{\Omega_e^\epsilon}$ est défini sur la figure 1.3, $\Gamma_n = \Gamma_n^1 \cup \Gamma_n^{2,\epsilon} \cup \Gamma_n^{3,\epsilon} \cup \Gamma_n^c$ et $\partial_\nu u_i^\epsilon$ et $\partial_\nu u_e^\epsilon$ désignent les dérivées normales de u^ϵ extérieures à Ω_i et Ω_e^ϵ — autrement dit, nous avons $\partial_\nu u_i^\epsilon = -\partial_y u_i^\epsilon$ et $\partial_\nu u_e^\epsilon = \partial_y u_e^\epsilon$.

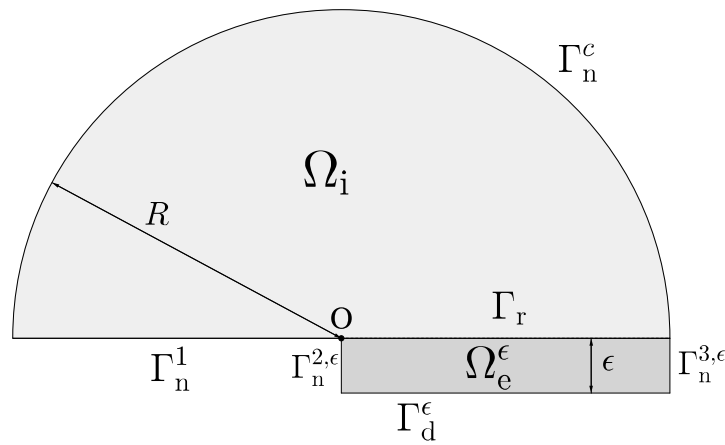


FIGURE 1.3 – Domaine du problème de transmission

Le schéma est le même que pour le problème d'impédance. Nous commencerons par étudier l'existence et l'unicité des solutions aux problèmes de la forme de (1.16). Puis nous construirons les premiers termes du développement avant d'en donner la structure générale.

1.2.1 Existence et unicité des solutions au problème

On s'intéresse ici — pour $\epsilon > 0$ fixé — aux problèmes de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\alpha \Delta u_i = f_i \text{ dans } \Omega_i, \\ \Delta u_e = f_e \text{ dans } \Omega_e^\epsilon, \\ u_i = u_e^\epsilon \text{ sur } \Gamma_r, \\ \alpha \partial_\nu u_i = -\partial_\nu u_e + g \text{ sur } \Gamma_r, \\ \partial_\nu u = 0 \text{ sur } \Gamma_n, \\ u_e = 0 \text{ sur } \Gamma_d^\epsilon. \end{array} \right. \quad (1.17)$$

Théorème 1.3. *On définit $\mathcal{V}$ par*

$$\mathcal{V} = \{w \in H^1(\Omega^\epsilon) : w|_{\Gamma_d^\epsilon} = 0\}.$$

Soient $f_i \in L^2(\Omega_i)$, $f_e \in L^2(\Omega_e^\epsilon)$, $g \in L^2(\Gamma_r)$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+^$. Alors le problème (1.17) admet une unique solution $u \in \mathcal{V}$ qui vérifie*

$$\|u\|_{H^1(\Omega^\epsilon)} \leq C \left(\|f_i\|_{L^2(\Omega_i)} + \|f_e\|_{L^2(\Omega_e^\epsilon)} + \|g\|_{L^2(\Gamma_r)} \right),$$

où $C > 0$ est une constante indépendante de ϵ .

Démonstration. La formulation variationnelle associée à (1.17) est, pour tout $w \in H^1(\Omega^\epsilon)$,

$$a(u, w) = L(w),$$

où

$$a(u, w) = \alpha \int_{\Omega_i} \nabla u \cdot \nabla w + \int_{\Omega_e^\epsilon} \nabla u \cdot \nabla w$$

et

$$L(w) = \int_{\Omega_i} f_i w + \int_{\Omega_e^\epsilon} f_e w + \int_{\Gamma_r} g w.$$

L'inégalité de Poincaré assure que a est coercive avec une constante de coercivité qui peut être majorée indépendamment de ϵ . Par ailleurs, par inégalités de Cauchy-Schwartz et de trace, on obtient la continuité de L : pour tout $w \in H^1(\Omega^\epsilon)$,

$$L(w) \leq C \left(\|f_i\|_{L^2(\Omega_i)} + \|f_e\|_{L^2(\Omega_e^\epsilon)} + \|g\|_{L^2(\Gamma_r)} \right) \|w\|_{H^1(\Omega^\epsilon)}.$$

Le théorème de Lax-Milgram fournit alors l'existence et l'unicité d'une solution à (1.17) et l'inégalité de coercivité nous donne que

$$\|u\|_{H^1(\Omega^\epsilon)} \leq C \left(\|f_i\|_{L^2(\Omega_i)} + \|f_e\|_{L^2(\Omega_e^\epsilon)} + \|g\|_{L^2(\Gamma_r)} \right).$$

□

1.2.2 Premiers termes du développement

On note $U_e^\epsilon(x, Y) = u_e^\epsilon(x, y)$ et $F_e(x, Y) = f_e(x, y)$ avec $Y = \epsilon^{-1}y$, la couche mince d'épaisseur ϵ est alors transformée en une couche d'épaisseur fixe égale à 1 – notons ici qu'il s'agit d'un choix arbitraire et que nous pourrions fixer l'épaisseur de la nouvelle couche en toute généralité à ϵ_0 , le développement se ferait de façon identique. De la même façon que pour le problème d'impédance, on injecte les expressions $u_i^\epsilon = \sum_{n \geq 0} \epsilon^n u_i^n$, $U_e^\epsilon = \sum_{n \geq 0} \epsilon^n U_e^n$ et $F_e = \sum_{n \in \mathbb{N}} \epsilon^n F_e^n$ (si F_e se décompose en fonction de ϵ) dans (1.16). On a alors cette fois-ci un découplage intérieur-extérieur (avec, à nouveau, les conventions $U_e^l = 0$ et $u_i^l = 0$ si $l < 0$) :

$$(1.18) \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial_Y^2 U_e^n = -\partial_x^2 U_e^{n-2} - F_e^{n-2} \text{ dans } \Omega_e^1, \\ \partial_Y U_e^n = -\alpha \partial_\nu u_i^{n-1} \text{ sur } \Gamma_r, \\ U_e^n = 0 \text{ sur } \Gamma_d^1, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} -\alpha \Delta u_i^n = \delta_0^n f_i \text{ dans } \Omega_i, \\ \partial_\nu u_i^n = 0 \text{ sur } \Gamma_n^1 \cup \Gamma_n^c, \\ u_i^n = U_e^n \text{ sur } \Gamma_r. \end{array} \right. \quad (1.19)$$

On remarque que les conditions de bords $\partial_\nu U_e^n = 0$ sur $\Gamma_n^2 \cup \Gamma_n^3$ du problème (1.16) n'apparaissent pas dans les équations ci-dessus, on verra en fait qu'elles sont automatiquement vérifiées par la suite.

Le même manque de régularité sur les seconds membres que pour le problème d'impédance empêche ici aussi la première approche développée plus haut. Forts de cette expérience, nous allons directement contourner ce problème en appliquant la méthode de remplacement des singularités par les profils. Nous allons utiliser les profils de transmission q^j (étudiés au chapitre 4) dont nous donnons un résumé ci-dessous.

Profils du problème de transmission

Les profils q^j du problème de transmission sont les solutions du problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \Delta q_i^j = 0 \text{ dans } \Omega_i^\infty, \\ \Delta q_e^j = 0 \text{ dans } \Omega_e^\infty, \\ q_i^j = q_e^j \text{ sur } \Gamma_r^\infty, \\ \alpha \partial_\nu q_i^j = -\partial_\nu q_e^j \text{ sur } \Gamma_r^\infty, \\ \partial_\nu q^j = 0 \text{ sur } \Gamma_n^\infty, \\ q_e^j = 0 \text{ sur } \Gamma_d^\infty, \\ q^j = s_0^j + o\left(r^{\frac{1}{2}+j-1}\right) \text{ lorsque } r \rightarrow +\infty, \end{array} \right.$$

où $\Omega_i^\infty = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, $\Omega_e^\infty = \mathbb{R}_+^* \times]-1, 0[$ et $\Gamma_n^\infty = \Gamma_n^{1,\infty} \cup \Gamma_n^{2,1}$, Γ_d^∞ et Γ_r^∞ sont définis comme sur le figure 4.8 et s_0^j est le prolongement continu par 0 de s^j à Ω_e^∞ .

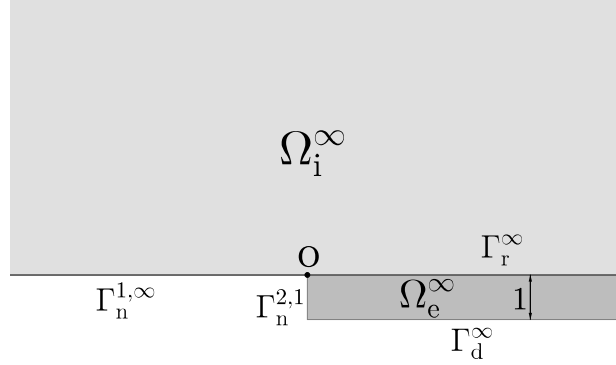


FIGURE 1.4 – Domaine des profils du problème de transmission

À l'instar des profils du problème d'impédance, les profils du problème de transmission admettent une décomposition sous la forme suivante :

$$q^j = s_0^j + \chi_0 \sum_{n=1}^N q^{j,n} + Q^{j,N}$$

où $q^{j,n}$ et $Q^{j,N}$ appartiennent à

$$\mathcal{S}^\lambda(\Omega^\infty) = \left\{ w : w_i \in \mathcal{S}^\lambda(\Omega_i^\infty), w_e \in \mathcal{S}^\lambda(\Omega_e^\infty) \text{ et } w_i = w_e \text{ sur } \Gamma_r^\infty \right\}$$

où

$$\mathcal{S}^\lambda(\Omega_i^\infty) = \left\{ w : w(r, \theta) = r^\lambda \sum_{l=0}^L \log^l r \psi_l(\theta), \psi_l \in \mathcal{C}^\infty([0, \pi]) \right\},$$

et

$$\mathcal{S}^\lambda(\Omega_e^\infty) = \left\{ w : w(x, y) = x^\lambda \sum_{l=0}^L \log^l x \psi_l(y), \psi_l \in \mathcal{C}^\infty([-1, 0]) \right\},$$

avec $N \geq j + 1$ et, respectivement, $\lambda = \frac{1}{2} + j$, $\lambda = \frac{1}{2} + j - n$ et $\lambda = \frac{1}{2} + j - N + 1$.

Pour plus de détails sur $q^{j,n}$ et $Q^{j,N}$, on pourra se reporter au chapitre 4 section 4.2 où ils sont définis et étudiés comme étant solutions des problèmes (4.20), (4.21) et (4.22).

En particulier, nous utiliserons

$$q^0 = s_0^0 + \chi_0 \left(q^{0(1)} + d^{0(1)} s_0^{-1} \right) + \chi_0 O_{L^2(\Omega^\infty)} \left(r^{-\frac{3}{2}} \log r \right), \quad (1.20)$$

avec $d^{0(1)} \in \mathbb{R}$ et

$$q^{0(1)} = \begin{cases} \alpha \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{r}} \left[(\pi - \theta) \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) + \log r \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \right] & \text{sur } \Omega_i^\infty, \\ \alpha \frac{y+1}{2\sqrt{x}} & \text{sur } \Omega_e^\infty. \end{cases}$$

On remarquera notamment que $q_i^{0(1)} = p^{0(1)}$, ce qui vient du fait qu'ils sont solutions des mêmes problèmes.

Remarque : si au début du développement asymptotique la couche mince n'est plus dilatée en une couche d'épaisseur 1 mais ϵ_0 , alors l'épaisseur de la couche Ω_ϵ^∞ des profils est aussi ϵ_0 et les résultats énoncés ci-dessus sont encore valables.

Développement

Rang 0 : Le problème extérieur admet clairement 0 pour solution. Le problème intérieur est alors celui de l'impédance au rang 0 et a déjà été résolu. On pose alors

$$\tilde{u}^0 = u_{\text{reg}}^0 + \chi_1 \sum_{j=0}^m c_j^0 \epsilon^{\frac{1}{2}+j} \left[q_i^j \left(\frac{r}{\epsilon}, \theta \right) + q_e^j \left(\frac{x}{\epsilon}, \frac{y}{\epsilon} \right) \right] = u^0 + q_\epsilon^0,$$

avec $u_{\text{e,reg}}^0 = 0$ et $q_\epsilon^0 = \chi_1 \sum_{j=0}^m c_j^0 \epsilon^{\frac{1}{2}+j} \left[\left(q_i^j - s^j \right) \left(\frac{r}{\epsilon}, \theta \right) + q_e^j \left(\frac{x}{\epsilon}, \frac{y}{\epsilon} \right) \right]$ et où χ_1 est défini dans la définition 1.1.

Notons ici que la dilatation par ϵ du profil extérieur q_e^j se fait dans les deux directions x et y ; cela permet d'une part, de capter le comportement à l'infini du profil dans la couche — d'autre part, de se ramener à couche d'épaisseur 1.

On note $r_\epsilon^0 = u^\epsilon - \tilde{u}^0$; ce dernier vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} -\alpha \Delta r_{\epsilon,i}^0 = \alpha \Delta q_{\epsilon,i}^0 \text{ dans } \Omega_i, \\ -\Delta r_{\epsilon,e}^0 = \Delta q_{\epsilon,e}^0 \text{ dans } \Omega_e^\epsilon, \\ r_{\epsilon,i}^0 = r_{\epsilon,e}^0 \text{ sur } \Gamma_r, \\ \alpha \partial_\nu r_{\epsilon,i}^0 = -\partial_\nu r_{\epsilon,e}^0 - \alpha \partial_\nu u_{\text{reg},i}^0 \text{ sur } \Gamma_r, \\ \partial_\nu r_\epsilon^0 = 0 \text{ sur } \Gamma_n, \\ r_{\epsilon,e}^0 = 0 \text{ sur } \Gamma_d^\epsilon. \end{array} \right. \quad (1.21)$$

Le fait que $\partial_\nu r_\epsilon^0$ soit nulle sur $\Gamma_n^{3,1} \cup \Gamma_n^c$ est dû à la troncature. Le lemme 1.1 admet un homologue dans le cas de la transmission nous donnant la décomposition de Δq_ϵ^k ; la démonstration en étant quasiment identique, nous ne la reproduirons pas.

Lemme 1.2. Soit $k \in \mathbb{N}$, Δq_ϵ^k est à support dans la couronne $[r_0, r_1]$ et, pour tout $N \in \mathbb{N}$, s'exprime sous la forme

$$\Delta q_\epsilon^k = \sum_{j=0}^{m-k} \sum_{n=1}^N \epsilon^n c_j^k \varphi^{j,n}(r, \theta) [\log \epsilon] + O_{L^2(\Omega^\epsilon)}(\epsilon^{N+1} [\log \epsilon]),$$

où $\varphi^{j,n}[\log \epsilon]$ désigne un polynôme en $\log \epsilon$ à coefficients $\mathcal{C}^\infty$, plats en 0, ce qui signifie que toutes ses dérivées s'annulent en 0.

On déduit de l'estimation du théorème 1.3 que $\|r_\epsilon^0\|_{1,\Omega_\epsilon} \leq \alpha \|\partial_\nu u_{\text{reg},i}^0\|_{0,\Gamma_r} + O_{L^2(\Omega^1)}(\epsilon[\log \epsilon])$.
On verra au rang 1 que ce résultat peut être amélioré.

Rang 1 : Comme pour le problème d'impédance, le second membre de (1.21) admet deux origines : la partie régulière de u_i et le profil q^0 . Une nouvelle fois, afin de bien différencier ces contributions, nous allons considérer deux problèmes. Cependant, contrairement au développement du problème d'impédance, nous avons ici en plus un découplage extérieur-intérieur. Le rang 0 donne donc naissance à deux problèmes extérieurs au rang 1 lesquels donneront naissance à leur tour à un problème intérieur chacun, donc deux problèmes intérieurs en tout.

Posons $U_{\varphi,e}^1$ et $U_{r,e}^1$ les solutions des problèmes suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_Y^2 U_{\varphi,e}^1 = 0 \text{ dans } \Omega_e^1, \\ \partial_\nu U_{\varphi,e}^1 = 0 \text{ sur } \Gamma_r, \\ U_{\varphi,e}^1 = 0 \text{ sur } \Gamma_d^1, \end{array} \right. \quad (1.22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial_Y^2 U_{r,e}^1 = 0 \text{ dans } \Omega_e^1, \\ \partial_Y U_{r,e}^1 = -\alpha \partial_\nu u_{\text{reg},i}^0 \text{ sur } \Gamma_r, \\ U_{r,e}^1 = 0 \text{ sur } \Gamma_d^1. \end{array} \right. \quad (1.23)$$

Le fait que le second membre de (1.22) soit nul provient du fait que, dans la définition du problème (1.18), le second membre sur Ω_e^1 ne fait intervenir que des termes d'ordre $n-2$; ce n'est qu'au rang 2 que l'on verra apparaître le rattrapage des profils avec un terme du type $\partial_Y^2 U_{\varphi,e}^2 = \sum_{j=0}^m \varphi_e^{j,1} [\log \epsilon]$.

Remarquons qu'au rang 0, il était clair que les conditions sur les dérivées normales de U_e^0 sur Γ_n^2 et Γ_n^3 étaient vérifiées puisque celui-ci est nul. Si cela est encore clair pour $U_{\varphi,e}^1$, il faut ici s'en assurer pour $U_{r,e}^1$; c'est l'objet du lemme suivant.

Lemme 1.3. *On a $\partial_\nu U_{r,e}^1 = 0$ sur Γ_n^2 et Γ_n^3 .*

Démonstration. Comme $U_{r,e}^1 = -\alpha \partial_\nu u_{\text{reg},i}^0(y+1)$, il suffit de voir que $\partial_x \partial_y u_{\text{reg},i}^0(x,0) = 0$ en $x=0$ et $x=R$. Pour f assez régulière, on aura $u_{\text{reg},i}^0$ dans $H^4(\Omega_i)$ et donc – par injection de Sobolev – dans $\mathcal{C}^2(\overline{\Omega_i})$. On aura alors $u_{\text{reg},i}^0 \in \mathcal{C}^2(\Omega_i)$ et $\partial^\beta u_{\text{reg},i}^0$ bornée et uniformément continue sur Ω_i pour $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ avec $0 \leq \beta_1 + \beta_2 \leq 2$.

Pour Γ_n^3 , on en déduit que $\partial_x \partial_y u_{\text{reg},i}^0(R,0) = \partial_y \partial_x u_{\text{reg},i}^0(R,0)$. Comme $\partial_\nu u_i^0 = 0$ sur Γ_n^c , on en déduit que $\partial_\nu u_{\text{reg},i}^0 = 0$ puisque la fonction de troncature χ_1 est plate et nulle loin de 0. Donc on a bien $\partial_\tau \partial_\nu u_{\text{reg},i}^0 = 0$ sur Γ_n^c , donc $\partial_y \partial_x u_{\text{reg},i}^0(R,0) = 0$, ce qu'il nous fallait.

Concernant Γ_n^2 , la condition sur les dérivées normales de s^0 et u^0 ainsi que les remarques précédentes sur la régularité de $u_{\text{reg},i}^0$ donnent que $\partial_\nu u_{\text{reg},i}^0(0,0) = 0$ donc $\partial_x \partial_y u_{\text{reg},i}^0(0,0) = 0$. $\square$

Remarque : on peut voir dans cette démonstration la nécessité de tronquer les profils. Une première approche avait été considérée où ceux-ci ne l'étaient pas, autrement dit, $\tilde{u}^0$ s'écrivait de la façon suivante :

$$\tilde{u}^0 = u_{\text{reg}}^0 + \sum_{j=0}^m c_j^0 \epsilon^{\frac{1}{2}+j} \left[q_i^j \left(\frac{r}{\epsilon}, \theta \right) + q_e^j \left(\frac{x}{\epsilon}, \frac{y}{\epsilon} \right) \right].$$

Si les profils n'étaient pas tronqués, il faudrait prendre en compte leur dérivée normale sur Γ_n^3 dans la démonstration précédente. Or rien ne nous garantit que celle-ci est nulle ; ceci amenait à une sur-détermination du problème induisant des incompatibilités. Nous sommes donc obligés de tronquer les profils du problème de transmission et donc ceux d'impédance si l'on veut pouvoir comparer les développements asymptotiques. La non présence des fonctions de troncatures avait pour effet la simplification des développements asymptotiques (le lemme 1.1 était par exemple) et les rendait plus lisibles.

On pose maintenant, comme pour l'impédance, $u_{i,\varphi}^1[\log \epsilon]$ et $u_{i,r}^1$ les solutions de

$$\begin{cases} -\alpha \Delta u_{\varphi,i}^1[\log \epsilon] &= \sum_{j=0}^m c_j^0 \varphi_i^{j,1}[\log \epsilon] \text{ dans } \Omega_i, \\ \partial_\nu u_{\varphi,i}^1[\log \epsilon] &= 0 \text{ sur } \Gamma_n^1 \cup \Gamma_n^c, \\ u_{\varphi,i}^1[\log \epsilon] &= U_{\varphi,e}^1 \text{ sur } \Gamma_r \end{cases} \quad (1.24)$$

et

$$\begin{cases} -\alpha \Delta u_{r,i}^1 &= 0 \text{ dans } \Omega_i, \\ \partial_\nu u_{r,i}^1 &= 0 \text{ sur } \Gamma_n^1 \cup \Gamma_n^c, \\ u_{r,i}^1 &= U_{r,e}^1 \text{ sur } \Gamma_r. \end{cases} \quad (1.25)$$

Enfin, notons $U_e^1 = U_{\varphi,e}^1 + U_{r,e}^1$ et $u_i^1 = u_{\varphi,i}^1[\log \epsilon] + u_{r,i}^1$. Afin de sommer ces deux derniers, on effectue une dilatation de Ω_e^1 pour retourner sur Ω_e^ϵ ; u_e^1 est alors solution de

$$\begin{cases} \partial_y^2 u_e^1 &= 0 \text{ dans } \Omega_e^\epsilon, \\ \partial_y u_e^1 &= -\epsilon^{-1} \alpha \partial_\nu u_{\text{reg},i}^0 \text{ sur } \Gamma_r, \\ u_e^1 &= 0 \text{ sur } \Gamma_4^\epsilon, \\ \partial_\nu u_e^1 &= 0 \text{ sur } \Gamma_n^{2,\epsilon} \cup \Gamma_n^{3,\epsilon}. \end{cases} \quad (1.26)$$

Comme pour le problème d'impédance, la régularité des seconds membres des problèmes ci-dessus nous garantit l'existence et l'unicité de leurs solutions. On remarquera de plus que u_e^1 est régulière, i.e. $u_e^1 = u_{e,\text{reg}}^1$. On peut alors définir u^1 par

$$u^1 = u_{\text{reg}}^1 + \sum_{j=0}^{m-1} c_j^1[\log \epsilon] \chi_1 \epsilon^{\frac{1}{2}+j} s_0^j \left(\frac{r}{\epsilon}, \theta \right),$$

avec $u_{\text{reg}}^1 \in H^{m-1}(\Omega^\epsilon)$ et on pose

$$\tilde{u}^1 = u_{\text{reg}}^1 + \sum_{j=0}^{m-1} c_j^1 [\log \epsilon] \chi_1 \epsilon^{\frac{1}{2}+j} \left[q_i^j \left(\frac{r}{\epsilon}, \theta \right) + q_e^j \left(\frac{x}{\epsilon}, \frac{y}{\epsilon} \right) \right] = u^1 + q_\epsilon^1,$$

avec $q_\epsilon^1 = \sum_{j=0}^{m-1} c_j^1 [\log \epsilon] \chi_1 \epsilon^{\frac{1}{2}+j} \left[\left(q_i^j - s^j \right) \left(\frac{r}{\epsilon}, \theta \right) + q_e^j \left(\frac{x}{\epsilon}, \frac{y}{\epsilon} \right) \right]$. On peut alors définir le reste au rang 1 par $r_\epsilon^1 = u^\epsilon - \tilde{u}^0 - \epsilon \tilde{u}^1 = r_\epsilon^0 - \epsilon \tilde{u}^1$, lequel vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} -\alpha \Delta r_{\epsilon,i}^1 = \epsilon \alpha \Delta q_{\epsilon,i}^1 + O_{L^2(\Omega_i)}(\epsilon^2 [\log \epsilon]) \text{ dans } \Omega_i, \\ -\Delta r_{\epsilon,e}^1 = \Delta q_{\epsilon,e}^0 + \epsilon \partial_x^2 u_e^1 + \epsilon \Delta q_{\epsilon,e}^1 \text{ dans } \Omega_e^\epsilon, \\ r_{\epsilon,i}^1 = r_{\epsilon,e}^1 \text{ sur } \Gamma_r, \\ \alpha \partial_\nu r_{\epsilon,i}^1 = -\partial_\nu r_{\epsilon,e}^1 - \epsilon \alpha \partial_\nu u_{\text{reg},i}^1 \text{ sur } \Gamma_r, \\ \partial_\nu r_\epsilon^1 = 0 \text{ sur } \Gamma_n, \\ r_{\epsilon,e}^1 = 0 \text{ sur } \Gamma_d^\epsilon. \end{array} \right.$$

En effet, sur Ω_i — au vu des problèmes (1.21), (1.24) et (1.25) vérifiés par r_ϵ^0 et $u_{\varphi,i}^1$ et $u_{r,i}^1$ et du lemme 1.2,

$$\Delta r_{\epsilon,i}^1 = \Delta r_{\epsilon,i}^0 - \epsilon \Delta \tilde{u}_i^1 = \Delta r_{\epsilon,i}^0 - \epsilon \Delta u_i^1 - \epsilon \Delta q_{\epsilon,i}^1 = -\epsilon \Delta q_{\epsilon,i}^1 + O_{L^2(\Omega_i)}(\epsilon^2 [\log \epsilon]);$$

sur Ω_e^ϵ — au vu des problèmes (1.21) et (1.26),

$$\Delta r_{\epsilon,e}^1 = \Delta r_{\epsilon,e}^0 - \epsilon \Delta \tilde{u}_e^1 = \Delta r_{\epsilon,e}^0 - \epsilon \Delta u_e^1 - \epsilon \Delta q_{\epsilon,e}^1 = -\Delta q_{\epsilon,e}^0 - \epsilon \partial_x^2 u_e^1 - \epsilon \Delta q_{\epsilon,e}^1;$$

et sur Γ_r ,

$$\begin{aligned} \alpha \partial_\nu r_{\epsilon,i}^1 + \partial_\nu r_{\epsilon,e}^1 &= -\alpha \partial_\nu u_{\text{reg},i}^0 - \epsilon (\alpha \partial_\nu \tilde{u}_i^1 + \partial_\nu \tilde{u}_e^1) \\ &= -\alpha \partial_\nu u_{\text{reg},i}^0 - \epsilon (\alpha \partial_\nu u_{\text{reg},i}^1 + \underbrace{\partial_\nu u_{\text{reg},e}^1}_{=\partial_\nu u_e^1}) \\ &= -\alpha \partial_\nu u_{\text{reg},i}^0 - \epsilon (\alpha \partial_\nu u_{\text{reg},i}^1 - \epsilon^{-1} \alpha \partial_\nu u_{\text{reg},i}^0) \\ &= -\epsilon \alpha \partial_\nu u_{\text{reg},i}^1. \end{aligned}$$

On déduit de l'estimation du théorème 1.3 et du lemme 1.2 que

$$\|r_\epsilon^1\|_{1,\Omega^\epsilon} = O_{L^2(\Omega^\epsilon)}(\epsilon [\log \epsilon]).$$

Remarque : les estimations *a priori* sur les restes de rang 0 et 1 sont en fait des exceptions. En effet, au rang 2, on peut voir que le terme $\Delta r_{\epsilon,e}^2$ contiendra encore $\epsilon \partial_x^2 u_e^1$ qui ne sera éliminé qu'au rang 3 (cf problème (1.18)); le reste $r_{\epsilon,e}^2$ s'exprimera donc *a priori* comme un $O_{L^2(\Omega^\epsilon)}(\epsilon [\log \epsilon])$ et non pas $\epsilon^2 [\log \epsilon]$. Il en va de même pour les rangs suivants. Ce n'est qu'une analyse *a posteriori* qui permettra d'obtenir de meilleures

estimations ; voyons d'ailleurs comment nous pouvons améliorer celle au rang 0 à partir du rang 1. On a

$$r_\epsilon^0 = r_\epsilon^1 + \epsilon \tilde{u}^1.$$

Par ailleurs,

$$\tilde{u}^1 = u_{\text{reg}}^1 + \sum_{j=0}^{m-1} c_j^1(\log \epsilon) \chi_1 \epsilon^{\frac{1}{2}+j} \left[q_i^j \left(\frac{r}{\epsilon}, \theta \right) + q_e^j \left(\frac{x}{\epsilon}, \frac{y}{\epsilon} \right) \right].$$

En vertu du comportement à l'infini des profils, on a

$$\left\| q_i^j \left(\frac{r}{\epsilon}, \theta \right) \right\|_{1, \Omega_i} \simeq \epsilon^{-(\frac{1}{2}+j)} [\log \epsilon] \quad \text{et} \quad \left\| q_e^j \left(\frac{x}{\epsilon}, \frac{y}{\epsilon} \right) \right\|_{1, \Omega_e^\epsilon} \simeq \epsilon^{-(\frac{1}{2}+j-1)} [\log \epsilon],$$

d'où

$$\epsilon^{\frac{1}{2}+j} \left[\left\| q_i^j \left(\frac{r}{\epsilon}, \theta \right) \right\|_{1, \Omega_i} + \left\| q_e^j \left(\frac{x}{\epsilon}, \frac{y}{\epsilon} \right) \right\|_{1, \Omega_e^\epsilon} \right] \simeq [\log \epsilon].$$

De plus $\|u_{\text{reg},i}^1\|_{1, \Omega_i} \simeq [\log \epsilon]$ et, puisque $u_e^1 = -\alpha \epsilon^{-1}(y + \epsilon) \partial_\nu u_{\text{reg},i}^0$, un calcul direct conduit à

$$\|u_{\text{reg},e}^1\|_{1, \Omega_e^\epsilon} \simeq \alpha \left(\sqrt{\epsilon} [\log \epsilon] + \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} [\log \epsilon] \right).$$

On en déduit donc que $\|r_\epsilon^0\|_{1, \Omega^\epsilon} \simeq \sqrt{\epsilon} \alpha [\log \epsilon]$. De la même façon, nous pourrions en utilisant le développement à l'ordre 2 obtenir que $\|r_\epsilon^1\|_{1, \Omega^\epsilon} \simeq \alpha \epsilon^{\frac{3}{2}} [\log \epsilon]$.

1.2.3 Développement à l'ordre n

Théorème 1.4. *Soit $m \in \mathbb{N}^*$. La solution du problème (1.16) pour $f_i \in H^m(\Omega_i)$ et $f_e \in H^m(\Omega_e^\epsilon)$ admet pour développement asymptotique à l'ordre $n \in \{1, \dots, m\}$:*

$$u^\epsilon = \sum_{k=0}^n \epsilon^k u^k [\log \epsilon] + \sum_{k=0}^{n-1} \epsilon^{k+\frac{1}{2}} c^k [\log \epsilon] \chi_1 \left[q_i^k \left(\frac{r}{\epsilon}, \theta \right) + q_e^k \left(\frac{x}{\epsilon}, \frac{y}{\epsilon} \right) \right] + r_\epsilon^n, \quad (1.27)$$

où :

- pour $k \in \{0, \dots, n\}$, $u_e^k [\log \epsilon]$ et $u_i^k [\log \epsilon]$ sont des polynômes en $\log \epsilon$ de degré inférieurs ou égaux à $k-1$ et k respectivement, solutions de

$$\begin{cases} \partial_Y^2 U_e^k [\log \epsilon] &= -\partial_x^2 U_e^{k-2} [\log \epsilon] - F_e^{k-2} [\log \epsilon] \text{ dans } \Omega_e^1, \\ \partial_Y U_e^k [\log \epsilon] &= -\alpha \partial_\nu u_{\text{reg},i}^{k-1} [\log \epsilon] \text{ sur } \Gamma_r, \\ U_e^k [\log \epsilon] &= 0 \text{ sur } \Gamma_d^1, \end{cases} \quad (1.28)$$

$$\begin{cases} -\Delta u_i^k[\log \epsilon] &= f_i^k[\log \epsilon] \text{ dans } \Omega_i, \\ \partial_\nu u_i^k[\log \epsilon] &= 0 \text{ sur } \Gamma_n, \\ u_i^k[\log \epsilon] &= -\alpha \partial_\nu U_e^k[\log \epsilon] \text{ sur } \Gamma_r, \end{cases} \quad (1.29)$$

avec les conventions $F_e(x, Y) = f_e\left(x, \frac{y}{\epsilon}\right)$, $U_e^k(x, Y) = u_e^k\left(x, \frac{y}{\epsilon}\right)$, $\partial_\nu u_{\text{reg}, i}^{-1} = 0$,

$$F_e^k[\log \epsilon] = \begin{cases} 0 & \text{si } k \in \{0, 1\}, \\ \delta_2^k F_e + \sum_{j=0}^{m-(k-2)} c_j^{k-2} \varphi_e^{j, k-1}[\log \epsilon] & \text{sinon,} \end{cases}$$

et

$$f_i^k[\log \epsilon] = \begin{cases} f_i & \text{si } k = 0, \\ \sum_{j=0}^{m-(k-1)} c_j^{k-1} \varphi_i^{j, k}[\log \epsilon] & \text{sinon,} \end{cases}$$

où les $\varphi^{j, k}[\log \epsilon]$ proviennent du lemme 1.2 appliqué avec $N = m$; de plus, $U_e^k[\log \epsilon] \in H^{m-k+\frac{3}{2}}(\Gamma_r) \cap H^{m-k+\frac{3}{2}}(\Omega_e^1)$ et $u_{\text{reg}, i}^k[\log \epsilon] \in H^{m+2-k}(\Omega_i)$;

- $c^k[\log \epsilon]$ désigne un polynôme en $\log \epsilon$ de degré inférieur ou égal à k dont les coefficients sont des combinaisons linéaire des coefficients de singularité $c_j^0, \dots, c_j^{n-k-1}$, $j \in \{0, \dots, m-k\}$, issus des décompositions en parties régulière-singulière des fonctions $u_i^0, \dots, u_i^{n-k-1}$;
- le reste r_ϵ^n vérifie le problème

$$\begin{cases} -\alpha \Delta r_{\epsilon, i}^n &= \alpha \epsilon^n \Delta q_{\epsilon, i}^n + O(\epsilon^{n+1}[\log \epsilon]) \text{ dans } \Omega_i, \\ -\Delta r_{\epsilon, e}^n &= \epsilon^{n-1} \Delta q_{\epsilon, e}^{n-1} - \epsilon^{n-1} \partial_x^2 u_e^{n-1}[\log \epsilon] \\ &\quad - \epsilon^n \partial_x^2 u_e^n[\log \epsilon] + \epsilon^n \Delta q_{\epsilon, e}^n \text{ dans } \Omega_e^\epsilon, \\ r_{\epsilon, i}^n &= r_{\epsilon, e}^n \text{ sur } \Gamma_r, \\ \alpha \partial_\nu r_{\epsilon, i}^n &= -\partial_\nu r_{\epsilon, e}^n - \epsilon^{n+1} \alpha \partial_\nu u_{\text{reg}, i}^n[\log \epsilon] \text{ sur } \Gamma_r, \\ \partial_\nu r_\epsilon^n &= 0 \text{ sur } \Gamma_n, \\ r_{\epsilon, e}^n &= 0 \text{ sur } \Gamma_d^\epsilon. \end{cases} \quad (1.30)$$

et on a l'estimation, pour $n \in \{1, \dots, m-2\}$ ($m > 3$),

$$\|r_\epsilon^n\|_{1, \Omega^\epsilon} = O\left(\epsilon^{n+\frac{1}{2}}[\log \epsilon]\right). \quad (1.31)$$

Démonstration. On procède par récurrence sur $n \in \{1, \dots, m\}$.

L'ordre 1 a été traité précédemment. Supposons $n > 1$ et le développement vrai au rang $n - 1$.

Pour tout $j, k \in \{0, \dots, m\}$, les $\varphi^{j,k}$ sont construits indépendamment de la récurrence à l'aide des profils q^j , des singularités s^j , de la fonction de troncature χ_1 et du lemme 1.2 ; ils sont $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans Ω^ϵ .

Le terme $u_i^{n-1}[\log \epsilon]$ est construit par hypothèse et admet la décomposition en partie régulière-singulière suivante :

$$u_i^{n-1}[\log \epsilon] = u_{\text{reg},i}^{n-1}[\log \epsilon] + \sum_{j=0}^{m-(n-1)} c_j^{n-1}[\log \epsilon] \chi_1(r) s^j(r, \theta),$$

avec $u_{\text{reg},i}^{n-1}[\log \epsilon] \in H^{m+2-(n-1)}(\Omega_i)$. Les coefficients $c_j^{n-1}[\log \epsilon]$ nécessaires aux seconds membres des problèmes (1.28) et (1.29) sont donc obtenus à l'aide de cette décomposition.

Commençons par construire $U_e^n[\log \epsilon]$ à l'aide du problème (1.28). Tous les termes du second membre de l'équation différentielle (1.28) sont suffisamment réguliers par rapport à Y pour que l'on puisse l'intégrer et ainsi construire $U_e^n[\log \epsilon]$.

La contribution en x à $U_e^n[\log \epsilon]$ est portée par les termes du type $\partial_\nu u_{\text{reg},i}^{k-1}[\log \epsilon]|_{\Gamma_r}$ (au travers des seconds membres $\partial_x^2 U_e^{n-2}[\log \epsilon] \in H^{m-n+\frac{3}{2}}(\Gamma_r)$ et $\partial_\nu u_{\text{reg},i}^{n-1}[\log \epsilon]$) dont le moins régulier est $\partial_\nu u_{\text{reg},i}^{n-1}[\log \epsilon]$ qui appartient à $H^{m-n+\frac{3}{2}}(\Gamma_r)$; on en déduit que

$$U_e^n[\log \epsilon] \in H^{m-n+\frac{3}{2}}(\Gamma_r) \cap H^{m-n+\frac{3}{2}}(\Omega_e^1).$$

La régularité de $U_e^n[\log \epsilon]$ étant la même dans Γ_r et Ω_e^1 car les $U_e^k[\log \epsilon]$ sont construits à partir des $\partial_\nu u_{\text{reg},i}^{k-1}[\log \epsilon]|_{\Gamma_r}$ étendus à Ω_e^1 par produit avec des fonctions régulières en Y sur un repère cartésien.

Construisons maintenant $u_i^n[\log \epsilon]$ à l'aide du problème (1.29). Pour cela, il suffit de s'assurer que le second membre de (1.29) est bien défini pour $k = n$ et admet bien la régularité nécessaire. D'après ce que l'on vient de voir, $U_e^n[\log \epsilon] \in H^{m-n+\frac{3}{2}}(\Gamma_r)$, le second membre de (1.29) est donc assez régulier pour qu'il admette une solution, on a ainsi construit u_i^n . Ce dernier admet la décomposition en parties régulière singulière suivante :

$$u_i^n = u_{\text{reg},i}^n[\log \epsilon] + \sum_{j=0}^{m-n} c_j^n[\log \epsilon] \chi_1 s^j(r, \theta),$$

avec $u_{\text{reg},i}^{n-1}[\log \epsilon] \in H^{m+2-n}(\Omega_i)$.

Nous pouvons alors redéfinir le coefficient $c^k[\log \epsilon]$ — pour $k \in \{0, \dots, m-n\}$ — comme combinaison linéaire du précédent coefficient $c^k[\log \epsilon]$ donné par l'hypothèse de récurrence et du coefficient c_k^n obtenu par la décomposition en parties régulière-singulière de $v^n[\log \epsilon]$ ci-dessus. Pour $k \in \{m-n, \dots, m\}$, le coefficient $c^k[\log \epsilon]$ reste inchangé.

Ainsi, nous pouvons définir le reste d'ordre n à l'aide de la formule (1.27) comme étant :

$$r_\epsilon^n = u^\epsilon - \left[\sum_{k=0}^n \epsilon^k u^k[\log \epsilon] + \sum_{k=0}^{n-1} \epsilon^{k+\frac{1}{2}} c^k[\log \epsilon] \chi_1 \left[\left(q_i^k - s^k \right) \left(\frac{r}{\epsilon}, \theta \right) + q_e^k \left(\frac{x}{\epsilon}, \frac{y}{\epsilon} \right) \right] \right];$$

ou encore

$$r_\epsilon^n = r_\epsilon^{n-1} - \epsilon^n \tilde{u}^n[\log \epsilon],$$

où

$$\tilde{u}^n[\log \epsilon] = u_{\text{reg}}^n[\log \epsilon] + \sum_{j=0}^{m-n} \epsilon^{\frac{1}{2}+j} c_j^n[\log \epsilon] \chi_1 \left[q_i^k \left(\frac{r}{\epsilon}, \theta \right) + q_e^k \left(\frac{x}{\epsilon}, \frac{y}{\epsilon} \right) \right] = u^n[\log \epsilon] + q_\epsilon^n,$$

$$\text{avec } q_\epsilon^n = \sum_{j=0}^{m-n} c_j^n[\log \epsilon] \chi_1 \epsilon^{\frac{1}{2}+j} \left[\left(q_i^k - s^k \right) \left(\frac{r}{\epsilon}, \theta \right) + q_e^k \left(\frac{x}{\epsilon}, \frac{y}{\epsilon} \right) \right].$$

De la même façon que l'on a déterminé les seconds membres du reste à l'ordre 1, on en déduit que r_ϵ^n vérifie :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\alpha \Delta r_{\epsilon,i}^n = \alpha \epsilon^n \Delta q_{\epsilon,i}^n + O(\epsilon^{n+1}[\log \epsilon]) \text{ dans } \Omega_i, \\ -\Delta r_{\epsilon,e}^n = \epsilon^{n-1} \Delta q_{\epsilon,e}^{n-1} - \epsilon^{n-1} \partial_x^2 u_e^{n-1}[\log \epsilon] \\ \quad - \epsilon^n \partial_x^2 u_e^n[\log \epsilon] + \epsilon^n \Delta q_{\epsilon,e}^n \text{ dans } \Omega_e^\epsilon, \\ r_{\epsilon,i}^n = r_{\epsilon,e}^n \text{ sur } \Gamma_r, \\ \alpha \partial_\nu r_{\epsilon,i}^n = -\partial_\nu r_{\epsilon,e}^n - \epsilon^{n+1} \alpha \partial_\nu u_{\text{reg},i}^n[\log \epsilon] \text{ sur } \Gamma_r, \\ \partial_\nu r_\epsilon^n = 0 \text{ sur } \Gamma_n, \\ r_{\epsilon,e}^n = 0 \text{ sur } \Gamma_d^\epsilon. \end{array} \right.$$

L'estimation du théorème 1.3 et le lemme 1.2 nous donnent alors

$$\|r_\epsilon^n\|_{1,\Omega^\epsilon} = O(\epsilon^{n-1}[\log \epsilon]).$$

Reste à montrer que l'on a (1.31). Pour cela, on procède comme pour le théorème 1.2, supposons que nous avons construit le développement jusqu'à l'ordre $n+2$ et donc r_ϵ^{n+2} avec l'estimation $r_\epsilon^{n+2} = O_{H^1(\Omega_i)}(\epsilon^{n+1})$. On peut alors écrire

$$r_\epsilon^n = r_\epsilon^{n+2} + \epsilon^{n+2} \tilde{u}^{n+2} + \epsilon^{n+1} \tilde{u}^{n+1},$$

où

$$\tilde{u}^l[\log \epsilon] = u_{\text{reg}}^l[\log \epsilon] + \sum_{j=0}^{m-l} \epsilon^{\frac{1}{2}+j} c_j^l[\log \epsilon] \chi_1 \left[q_i^k \left(\frac{r}{\epsilon}, \theta \right) + q_e^k \left(\frac{x}{\epsilon}, \frac{y}{\epsilon} \right) \right].$$

On a vu lors de la construction du terme de rang 1 que

$$\epsilon^{\frac{1}{2}+j} \left[\left\| q_i^j \left(\frac{r}{\epsilon}, \theta \right) \right\|_{1,\Omega_i} + \left\| q_e^j \left(\frac{x}{\epsilon}, \frac{y}{\epsilon} \right) \right\|_{1,\Omega_e^\epsilon} \right] \simeq [\log \epsilon].$$

Par ailleurs, on a $\|u_{\text{reg},i}^l\|_{1,\Omega_i} \simeq [\log \epsilon]$ et, comme au rang 1, on peut montrer que

$$\|u_{\text{reg},e}^l\|_{1,\Omega_e^\epsilon} \simeq \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} [\log \epsilon].$$

On en déduit alors que

$$\|r_\epsilon^n\|_{1,\Omega_i} \simeq \epsilon^{n+\frac{1}{2}} [\log \epsilon].$$

□

Remarque : Le théorème 1.4 est aussi valable pour le problème de transmission suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\alpha \Delta u_i^\epsilon = f_i \text{ dans } \Omega_i, \\ \Delta u_e^\epsilon = f_e \text{ dans } \Omega_e^\epsilon, \\ u_i^\epsilon = u_e^\epsilon \text{ sur } \Gamma_v, \\ \alpha \partial_\nu u_i^\epsilon = -\partial_\nu u_e^\epsilon \text{ sur } \Gamma_v, \\ \partial_\nu u^\epsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_n, \\ u^\epsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_d, \end{array} \right. \quad (1.32)$$

où le domaine $\Omega^\epsilon = \overline{\Omega_i} \cup \overline{\Omega_e^\epsilon}$ est défini sur la figure 1.5, $\Gamma_d = \Gamma_d^{1,\epsilon} \cup \Gamma_d^{2,\epsilon} \cup \Gamma_d^{3,\epsilon} \cup \Gamma_d^c$ et $\partial_\nu u_i^\epsilon$ et $\partial_\nu u_e^\epsilon$ désignent les dérivées normales extérieures à Ω_i et Ω_e^ϵ de u^ϵ .

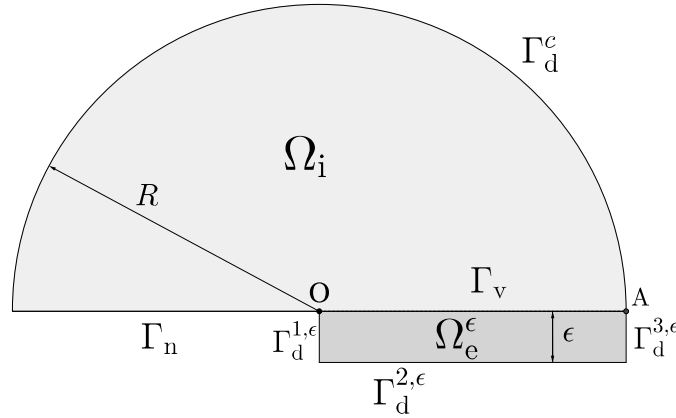


FIGURE 1.5 – Domaine du problème de transmission.

Les seules différences entre ces deux problèmes sont les conditions de bords sur $\Gamma_d^{1,\epsilon} = \Gamma_n^{2,\epsilon}$ et $\Gamma_d^{3,\epsilon} = \Gamma_n^{3,\epsilon}$ qui sont de type Neumann pour le problème (1.16) et Dirichlet pour (1.32). Les profils associés diffèrent alors naturellement de la même façon sur $\Gamma_d^{1,1} = \Gamma_n^{2,1}$ mais admettent des comportements à l'infini identiques.

1.3 Comparaison des problèmes avec condition d'impédance de type Robin et de transmission

Il s'agit ici d'effectuer la comparaison des deux solutions sur leur domaine commun : Ω_i . Nous notons, comme précédemment, u^ϵ la solution du problème de transmission et v^ϵ celle

du problème d'impédance. Sur Ω_i , on a pour $\epsilon \rightarrow 0$,

$$u_i^\epsilon = u_{\text{reg},i}^0 + d^0 \chi_1(r) \sqrt{\epsilon} q_i^0 \left(\frac{r}{\epsilon}, \theta \right) + \epsilon u_{\varphi,i}^1 [\log \epsilon] + \epsilon u_{r,i}^1 + O_{H^1} \left(\epsilon^{\frac{3}{2}} [\log \epsilon] \right)$$

et

$$v^\epsilon = v_{\text{reg}}^0 + c^0 \chi_1(r) \sqrt{\epsilon} p_r^0 \left(\frac{r}{\epsilon}, \theta \right) + \epsilon u_\varphi^1 [\log \epsilon] + \epsilon v_r^1 + O_{H^1} \left(\epsilon^{\frac{3}{2}} [\log \epsilon] \right).$$

Comme u_i^0 et v^0 vérifient les problèmes (1.3) et (1.19) (pour $n = 0$) qui sont identiques, on peut en déduire qu'ils sont égaux ainsi que leurs parties régulières : $u_{\text{reg},i}^0 = v_{\text{reg}}^0$ — et leurs coefficients de singularité : $c^0 = d^0$. Par ailleurs, on a une solution explicite au problème (1.23) vérifié par $U_{r,e}^1$:

$$U_{r,e}^1 = -\alpha \partial_\nu u_{\text{reg},i}^0(y+1)$$

Comme on vient de voir que $u_{\text{reg},i}^0$ et v_{reg}^0 sont égaux on en déduit que $v_r^1 = u_{r,i}^1$ puisqu'ils vérifient (1.8) et (1.25) qui sont du coup identiques. Par contre v_φ^1 et $u_{\varphi,i}^1$ sont a priori différents du fait que les seconds membres des équations (1.7) et (1.24) qu'ils résolvent le sont aussi. Précisons, comme $U_{\varphi,e}^1 = 0$, la seule différence provient de celle entre $\varphi^{0,1}$ et $\varphi_i^{0,1}$. Cette dernière est issue de la différence entre p_r^0 et q_i^0 .

D'après la décomposition sur/sous-variationnelle des profils p_r^j (voir (4.17)) et q^j (voir (4.29)), on a,

$$p_r^0 = s^0 + \chi_0 \left(p_r^{0(1)} + c^{0(1)} s^{-1} \right) + \chi_0 O_{L^2(\Omega_i^\infty)} \left(r^{-\frac{3}{2}} \log r \right),$$

et

$$q_i^0 = s^0 + \chi_0 \left(p_r^{0(1)} + d^{0(1)} s^{-1} \right) + \chi_0 O_{L^2(\Omega_i^\infty)} \left(r^{-\frac{3}{2}} \log r \right).$$

La principale différence entre les deux est donc due à la différence des constantes $c^{0(1)}$ et $d^{0(1)}$.

Regardons maintenant les normes L^2 et H^1 de la différence des solutions de transmission et d'impédance. En utilisant les remarques ci-dessus, on aboutit à

$$v^\epsilon - u_i^\epsilon = c^0 \sqrt{\epsilon} \chi_1(r) \left(p_r^0 - q_i^0 \right) \left(\frac{r}{\epsilon}, \theta \right) + \epsilon \left(v_\varphi^1 - u_{\varphi,i}^1 \right) (r, \theta) [\log \epsilon] + O_{H^1(\Omega_i)} \left(\epsilon^{\frac{3}{2}} [\log \epsilon] \right).$$

Commençons par la norme L^2 . La troncature fait que nous n'avons pas à nous préoccuper de ce qui se passe près de l'origine. On a, en effectuant le changement de variables $(r, \theta) = (\epsilon R, \theta)$ et en notant R_{Ω_i} le rayon du demi-disque Ω_i ,

$$\int_0^{R_{\Omega_i}} \int_0^\pi \left| \left(p_r^0 - q_i^0 \right) \left(\frac{r}{\epsilon}, \theta \right) \right|^2 r dr d\theta = \epsilon^2 \int_0^{\frac{R_{\Omega_i}}{\epsilon}} \int_0^\pi \left| \left(p_r^0 - q_i^0 \right) (R, \theta) \right|^2 R dR d\theta.$$

Comme, *a priori*, $c^{0(1)} \neq d^{0(1)}$, on a lorsque $R \rightarrow +\infty$,

$$\left| \left(p_r^0 - q_i^0 \right) (R, \theta) \right| \sim \frac{1}{\sqrt{R}},$$

d'où, lorsque $\epsilon \rightarrow 0$,

$$\int_0^{\frac{R_{\Omega_i}}{\epsilon}} \int_0^\pi \left| \left(p_r^0 - q_i^0 \right) (R, \theta) \right|^2 R dR d\theta \sim \frac{1}{\epsilon},$$

et donc

$$\int_0^{R_{\Omega_i}} \int_0^\pi \left| (p_r^0 - q_i^0) \left(\frac{r}{\epsilon}, \theta \right) \right|^2 r dr d\theta \sim \epsilon.$$

On en déduit que

$$\|v^\epsilon - u_i^\epsilon\|_{0,\Omega_i} \leq \epsilon \|v_\varphi^1 - u_{\varphi,i}^1\|_{0,\Omega_i} [\log \epsilon] + |c^{0(1)} - d^{0(1)}| O(\epsilon) + O_{L^2(\Omega_i)} \left(\epsilon^{\frac{3}{2}} [\log \epsilon] \right). \quad (1.33)$$

Remarque : Si on a $c^{0(1)} = d^{0(1)}$, alors lorsque $R \rightarrow +\infty$,

$$\left| (p_r^0 - q_i^0) (R, \theta) \right| \sim \frac{1}{R^{\frac{3}{2}}}.$$

En majorant alors $\epsilon^{-1} R_{\Omega_i}$ par $+\infty$ dans les intégrales ci-dessus, on aboutirait alors à

$$\left\| \chi_1(r) (p_r^0 - q_i^0) \left(\frac{r}{\epsilon}, \theta \right) \right\|_{0,\Omega_i} \leq C \|p_r^0 - q_i^0\|_{0,\Omega_i^\infty} \epsilon^2,$$

avec $\|p_r^0 - q_i^0\|_{0,\Omega_i^\infty}$ finie. Autrement dit, le terme $|c^{0(1)} - d^{0(1)}| O(\epsilon)$ disparaît de (1.33) pour aller dans le $O_{L^2(\Omega_i)} \left(\epsilon^{\frac{3}{2}} \log \epsilon \right)$ dès que $c^{0(1)} = d^{0(1)}$, ce qui justifie de le noter ainsi.

Passons à la semi-norme H^1 ; de la même façon on a

$$\begin{aligned} \left\| \nabla (p_r^0 - q_i^0) \left(\frac{r}{\epsilon}, \theta \right) \right\|_{0,\Omega_i}^2 &= \int_0^{R_{\Omega_i}} \int_0^\pi \left| \partial_r (p_r^0 - q_i^0) \left(\frac{r}{\epsilon}, \theta \right) \right|^2 r dr d\theta \\ &\quad + \int_0^{R_{\Omega_i}} \int_0^\pi \left| \frac{1}{r} \partial_\theta (p_r^0 - q_i^0) \left(\frac{r}{\epsilon}, \theta \right) \right|^2 r dr d\theta \\ &= \int_0^{R_{\Omega_i}} \int_0^\pi \left| \frac{1}{\epsilon} \partial_1 (p_r^0 - q_i^0) \left(\frac{r}{\epsilon}, \theta \right) \right|^2 r dr d\theta \\ &\quad + \int_0^{R_{\Omega_i}} \int_0^\pi \left| \frac{1}{r} \partial_\theta (p_r^0 - q_i^0) \left(\frac{r}{\epsilon}, \theta \right) \right|^2 r dr d\theta \\ &= \int_0^{\frac{R_{\Omega_i}}{\epsilon}} \int_0^\pi \left| \frac{1}{\epsilon} \partial_R (p_r^0 - q_i^0) (R, \theta) \right|^2 \epsilon^2 R dR d\theta \\ &\quad + \int_0^{\frac{R_{\Omega_i}}{\epsilon}} \int_0^\pi \left| \frac{1}{\epsilon R} \partial_\theta (p_r^0 - q_i^0) (R, \theta) \right|^2 \epsilon^2 R dR d\theta \\ &\leq \|\nabla (p_r^0 - q_i^0)\|_{0,\Omega_i^\infty}^2. \end{aligned}$$

Comme $\nabla (p_r^0 - q_i^0) (R, \theta) \sim R^{-\frac{3}{2}}$, $\|\nabla (p_r^0 - q_i^0)\|_{0,\Omega_i^\infty}^2$ est bien finie et on en déduit que

$$\|v^\epsilon - u_i^\epsilon\|_{1,\Omega_i} \leq C \sqrt{\epsilon} \|\nabla (p_r^0 - q_i^0)\|_{0,\Omega_i^\infty} + O_{H^1(\Omega_i)} (\epsilon [\log \epsilon]).$$

Finalement, pour la norme L^∞ , on a

$$\|v^\epsilon - u_i^\epsilon\|_{\infty,\Omega_i} \leq C \sqrt{\epsilon} \|p_r^0 - q_i^0\|_{\infty,\Omega_i^\infty} + O_{L^\infty(\Omega_i)} (\epsilon [\log \epsilon]).$$

En résumé, on a obtenu le théorème suivant

Théorème 1.5. *Pour $f_i \in H^m(\Omega_i)$ et $f_e \in H^m(\Omega_e)$, avec $m \in \mathbb{N}^*$, à supports compact dans Ω_i et Ω_e , les solutions v^ϵ du problème d'impédance (1.1) et u^ϵ du problème de transmission (1.16) vérifient :*

$$\|v^\epsilon - u_i^\epsilon\|_{0,\Omega_i} = O(\epsilon[\log \epsilon]), \quad (1.34)$$

$$\|v^\epsilon - u_i^\epsilon\|_{1,\Omega_i} = O(\sqrt{\epsilon}) \quad (1.35)$$

et

$$\|v^\epsilon - u_i^\epsilon\|_{\infty,\Omega_i} = O(\sqrt{\epsilon}). \quad (1.36)$$

Résultats confirmés numériquement comme on peut le voir sur la figure 1.6. Celle-ci représente l'évolution des L^2 , L^∞ et H^1 entre les solutions des problèmes de transmission et avec condition d'impédance en fonction de ϵ , en échelle $\log - \log$, pour : $\alpha = 2$, $f_i = \sin([R_{\Omega_i} - r]^2)y^3$ et $f_e = 0$. Comme on peut le voir, les pentes obtenues sont proches des attentes théoriques : 1 pour l'erreur L^2 et 0.5 pour les erreurs L^∞ et H^1 .

Remarques :

- Concernant la régularité nécessaire à l'obtention de l'estimation en norme L^∞ , on pourra se reporter à la remarque suivant le théorème 1.1.
- Si par hasard on a $c^{0(1)} = d^{0(1)}$ dans (4.17) et (4.29), alors l'estimation (1.34) devient

$$\|v^\epsilon - u_i^\epsilon\|_{0,\Omega_i} = O\left(\epsilon^{\frac{3}{2}}[\log \epsilon]\right).$$

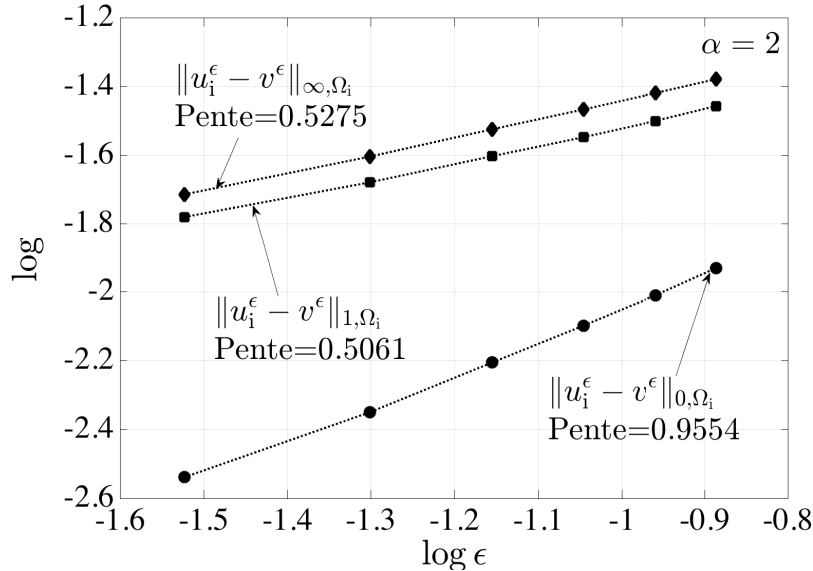


FIGURE 1.6 – Évolution des erreurs entre problèmes de transmission et avec condition d'impédance en fonction de ϵ pour $\alpha = 2$.

1.4 Problème d'impédance avec condition de Ventcel

Il s'agit ici, pour $\beta \geq 0$, d'étudier et d'effectuer le développement asymptotique de v_β^ϵ , solution du problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\alpha \Delta v_\beta^\epsilon = f_i \text{ dans } \Omega_i, \\ \partial_\nu v_\beta^\epsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_n, \\ v_\beta^\epsilon + \epsilon \alpha \partial_\nu v_\beta^\epsilon - \epsilon^2 \beta \partial_\tau^2 v_\beta^\epsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_v, \\ v_\beta^\epsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_d^c, O \text{ et } A \end{array} \right. \quad (1.37)$$

où Ω_i est le même demi-disque que précédemment et les points O et A sont définis comme sur la figure 1.7.

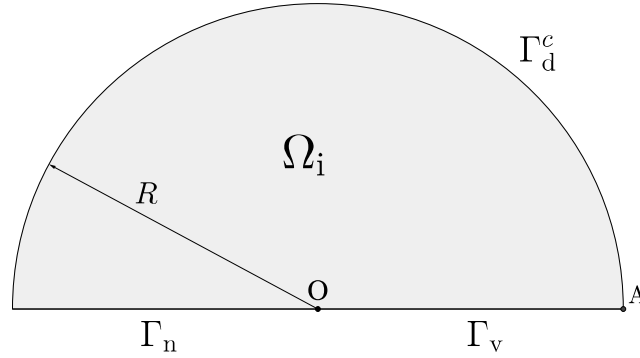


FIGURE 1.7 – Domaine du problème avec condition d'impédance de type Ventcel

Comme mentionné en introduction de chapitre, un problème similaire a déjà été étudié dans [6]. La principale différence avec le problème étudié ici réside dans les conditions de bords considérées. En effet, dans [6], on a le couple de conditions Dirichlet-Ventcel tandis que nous avons le trio Dirichlet-Neumann-Ventcel. Une condition de Ventcel fait apparaître des termes ponctuels dans les formulations variationnelles aux extrémités des bords concernés. Or dans le cas d'une condition de Dirichlet, ces termes ponctuels disparaissent naturellement tandis que non pour une condition de Neumann ; cela impose de fait une difficulté supplémentaire à traiter.

1.4.1 Existence et unicité des solutions au problème

On s'intéresse ici — pour $\epsilon > 0$ fixé — aux problèmes de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\alpha \Delta v = f \text{ dans } \Omega_i, \\ \partial_\nu v = 0 \text{ sur } \Gamma_n, \\ v + \epsilon \alpha \partial_\nu v - \epsilon^2 \beta \partial_\tau^2 v = g \text{ sur } \Gamma_v, \\ v = 0 \text{ sur } \Gamma_d^c, \text{ O et A,} \end{array} \right. \quad (1.38)$$

où le domaine Ω_i est encore le domaine représenté sur la figure 1.1.

La formulation variationnelle associée à (1.38) est :

$$a(v, w) = L(w),$$

où

$$a(v, w) = \alpha \int_{\Omega_i} \nabla v \cdot \nabla w + \frac{1}{\epsilon} \int_{\Gamma_v} vw + \epsilon \beta \int_{\Gamma_v} \partial_\tau v \partial_\tau w - [\partial_\tau v(A)w(A) - \partial_\tau v(O)w(O)],$$

et

$$L(w) = \int_{\Omega_i} fw + \frac{1}{\epsilon} \int_{\Gamma_r} gw.$$

On voit ici apparaître dans a les termes ponctuels mentionnés plus haut. Les termes intégraux invitent à poser le problème sur un domaine contenant à la fois $H^1(\Omega_i)$ et $H^1(\Gamma_v)$; mais tel quel, les termes ponctuels font que le problème est mal posé, il faut donc les évacuer. Le moyen naturel est de considérer des conditions de Dirichlet ponctuelles : $v(A) = v(O) = 0$. C'est pourquoi ce problème n'approche pas le problème de transmission (1.16) — qui n'a aucune raison a priori de vérifier de telles conditions ponctuelles —, mais le problème de transmission (1.32) qui les vérifient naturellement. On pose donc

$$\mathcal{V} = \{w \in H^1(\Omega_i) : \gamma_0(w) \in H^1(\Gamma_v), w(A) = w(O) = 0\},$$

où $\gamma_0(w)$ désigne la trace de w et muni de la norme

$$\|\cdot\|_{\mathcal{V}}^2 = \|\cdot\|_{H^1(\Omega_i)}^2 + \|\cdot\|_{H^1(\Gamma_v)}^2.$$

Il est toutefois légitime de se poser la question du caractère bien défini de conditions ponctuelles dans H^1 . Comme nous sommes en particulier dans $H^1(\Gamma_v)$ et que ce dernier s'injecte dans $\mathcal{C}(\overline{\Gamma_v})$, on en déduit qu'il y a bien un sens à poser des conditions sur O et A.

Sur $\mathcal{V}$, la forme bilinéaire a devient

$$a(v, w) = \alpha \int_{\Omega_i} \nabla v \cdot \nabla w + \frac{1}{\epsilon} \int_{\Gamma_v} vw + \epsilon \beta \int_{\Gamma_v} \partial_\tau v \partial_\tau w.$$

Comme $\epsilon < 1$, on a pour tout $w \in \mathcal{V}$,

$$a(w, w) \geq \min(1, \alpha, \epsilon \beta) \left(\|\nabla w\|_{0, \Omega_i}^2 + \|w\|_{0, \Gamma_v}^2 + \|\nabla w\|_{0, \Gamma_v}^2 \right).$$

L'inégalité de Poincaré-Friedrichs obtenue dans le corollaire A.1 du théorème A.1 nous permet alors de montrer que a est coercive sur $\mathcal{V}$ avec une constante de coercivité dépendante de ϵ :

$$\min(1, \alpha, \epsilon \beta) \|w\|_{\mathcal{V}}^2 \leq a(w, w).$$

Par ailleurs, par inégalités de Cauchy-Schwarz et de trace, on obtient la continuité de L : pour tout $w \in H^1(\Omega_i)$,

$$L(w) \leq C \left(\|f\|_{L^2(\Omega_i)} + \frac{1}{\epsilon} \|g\|_{L^2(\Gamma_v)} \right) \|w\|_{H^1(\Omega_i)},$$

Le théorème de Lax-Milgram nous donne alors l'existence et l'unicité d'une solution à (1.38) et l'inégalité de coercivité implique

$$\|w\|_{\mathcal{V}} \leq \frac{C}{\min(1, \alpha, \epsilon\beta)} \left(\|f\|_{L^2(\Omega_i)} + \frac{1}{\epsilon} \|g\|_{L^2(\Gamma_v)} \right).$$

On a ainsi obtenu le théorème suivant :

Théorème 1.6. *Soient $f \in L^2(\Omega_i)$, $g \in L^2(\Gamma_r)$, $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $\beta \in \mathbb{R}_+$. Alors le problème (1.38) admet une unique solution $v \in \mathcal{V}$ qui vérifie*

$$\|v\|_{\mathcal{V}} \leq \frac{C}{\min(1, \alpha, \epsilon\beta)} \left(\|f\|_{L^2(\Omega_i)} + \frac{1}{\epsilon} \|g\|_{L^2(\Gamma_r)} \right),$$

où $C > 0$, constante indépendante de ϵ , et

$$\mathcal{V} = \{w \in H^1(\Omega_i) : \gamma_0(w) \in H^1(\Gamma_v), w(A) = w(O) = 0\},$$

avec $\gamma_0(w)$ trace de w .

Remarque : On peut aussi travailler dans $\mathcal{V}$ sans les conditions de Dirichlet ponctuelles $v(A) = v(O) = 0$. Cela peut alors se traiter de deux façons :

- en ajoutant des conditions de Neumann ponctuelles $\partial_\tau v(O) = \partial_\tau v(A) = 0$ dans (1.38) ;
- en ajoutant des conditions de Robin ponctuelles $v(O) + \gamma_1 \partial_\tau v(O) = v(A) + \gamma_2 \partial_\tau v(A) = 0$ dans (1.38), ce qui se traduit par la présence de termes de la forme $\gamma_1 v(O)w(O)$ et $\gamma_2 v(A)w(A)$ dans la forme bilinéaire a .

Bien que les conditions de Dirichlet ponctuelles soient naturelles dans le cas du problème de transmission (1.32) (conditions de Dirichlet sur les bords de la couche) ; dans le cas du problème (1.16) (conditions de Neumann sur les bords de la couche), l'existence d'une naturelle héritée du problème de transmission n'est pas claire.

1.4.2 Premiers termes du développement

Profils du problème avec condition d'impédance de type Ventcel

Les profils $p_{v,\beta}^j$ du problème avec condition d'impédance de type Ventcel sont solutions de

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \Delta p_{v,\beta}^j = 0 \text{ dans } \Omega_1^\infty, \\ \partial_\nu p_{v,\beta}^j = 0 \text{ sur } \Gamma_n^\infty, \\ p_{v,\beta}^j + \alpha \partial_\nu p_{v,\beta}^j - \beta \partial_\tau^2 p_{v,\beta}^j = 0 \text{ sur } \Gamma_v^\infty, \\ p_{v,\beta}^j(O) = 0, \\ p_{v,\beta}^j \sim s^j \text{ lorsque } r \rightarrow +\infty, \end{array} \right.$$

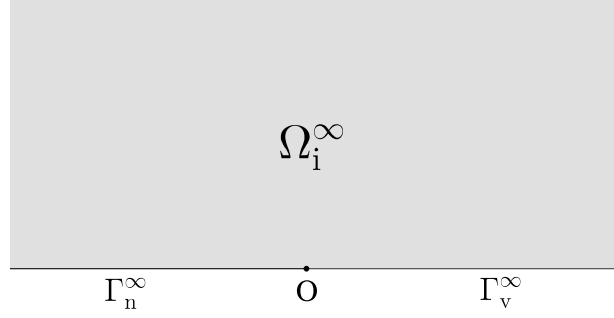


FIGURE 1.8 – Domaine des profils du problème avec condition d'impédance de type Ventcel

où $\Omega_i^\infty = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ et Γ_n^∞ et Γ_v^∞ sont définis comme sur la figure 4.1.

Encore une fois, dans cette partie, c'est leur comportement à l'infini qui nous intéressera. Celui-ci est connu du fait qu'ils admettent une décomposition sous la forme suivante :

$$p_{v,\beta}^j = s^j + \chi_0 \sum_{n=1}^N p_{v,\beta}^{j,n} + P_v^{j,N},$$

où s^j , $p_{v,\beta}^{j,n}$ et $\chi_0 P_v^{j,N}$ appartiennent à

$$\mathcal{S}^\lambda(\Omega_i^\infty) = \left\{ w : w(r, \theta) = r^\lambda \sum_{l=0}^L \log^l r \psi_l(\theta), \psi_l \in C^\infty([0, \pi]) \right\},$$

avec $N \geq j + 1$ et, respectivement, $\lambda = \frac{1}{2} + j$, $\lambda = \frac{1}{2} + j - n$ et $\lambda = \frac{1}{2} + j - N + 1$.

Pour plus de détails sur les $p_{v,\beta}^{j,n}$ et $P_v^{j,N}$, on se reportera au chapitre 4 section 4.3 où ils sont définis comme étant les solutions des problèmes (4.32), (4.34) et (4.35) et étudiés précisément.

Nous utiliserons en particulier le fait que, comme pour le profil du problème avec condition d'impédance de type Robin,

$$p_{v,\beta}^0 = s^0 + \chi_0 \left(p_r^{0(1)} + c_\beta^{0(1)} s^{-1} \right) + \chi_0 O_{L^2(\Omega_i^\infty)} \left(r^{-\frac{3}{2}} \log r \right), \quad (1.39)$$

avec $c_\beta^{0(1)} \in \mathbb{R}$ et

$$p_r^{0(1)} = \alpha \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{r}} \left[(\pi - \theta) \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) + \log r \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \right].$$

Développement

Supposons que $f_i \in H^m(\Omega_i)$ avec $m \geq 1$, à support compact dans Ω_i . Puis injectons l'expression $v_\beta^\epsilon = \sum_{n \geq 0} \epsilon^n v_\beta^n$ dans (1.37), on obtient alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left\{ \begin{array}{l} -\alpha \Delta v_\beta^n = \delta_0^n f_i \text{ dans } \Omega_i, \\ \partial_\nu v_\beta^n = 0 \text{ sur } \Gamma_n, \\ v_\beta^n = -\alpha \partial_\nu v_\beta^{n-1} + \beta \partial_\tau^2 v_\beta^{n-2} \text{ sur } \Gamma_v, \\ v_\beta^n = 0 \text{ sur } \Gamma_d^c, O \text{ et } A. \end{array} \right.$$

avec la convention $\partial_\nu v_\beta^{-1} = \partial_\tau^2 v_\beta^{-1} = \partial_\tau^2 v_\beta^{-2} = 0$.

Rang 0 : v_β^0 doit être solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} -\alpha \Delta v_\beta^0 = f_i \text{ dans } \Omega_i, \\ \partial_\nu v_\beta^0 = 0 \text{ sur } \Gamma_n, \\ v_\beta^0 = 0 \text{ sur } \Gamma_v, \\ v_\beta^0 = 0 \text{ sur } \Gamma_d^c, O \text{ et } A. \end{array} \right.$$

On retrouve le problème (1.3) : les termes de rang 0 des problèmes avec conditions d'impédances de Robin et Ventcel sont donc identiques. On peut alors écrire la décomposition en parties régulière-singulière de v_β^0 :

$$v_\beta^0 = v_{\beta,\text{reg}}^0 + \chi_1(r) \sum_{j=0}^m c_j^0 \epsilon^{\frac{1}{2}+j} s^j \left(\frac{r}{\epsilon}, \theta \right), \quad (1.40)$$

où $v_{\beta,\text{reg}}^0 \in H^{m+2}(\Omega_i)$.

Les conditions de Dirichlet en O et A sont bien vérifiées par v_β^0 . En effet, s^j étant continue et nulle sur Γ_v , on en déduit que $v_{\beta,\text{reg}}^0$ doit aussi l'être. Par ailleurs, $v_{\beta,\text{reg}}^0 \in H^{m+2}(\Omega_i)$ implique que $v_{\beta,\text{reg}}^0$ est continue sur Γ_v et vérifie les conditions de Dirichlet en O et A.

Comme pour les deux cas précédents, la singularité est remplacée par le profil $p_{v,\beta}^j$ associé au problème (voir section 4.3.6 pour l'essentiel des résultats). On pose alors

$$\tilde{v}_\beta^0 = v_{\beta,\text{reg}}^0 + \chi_1(r) \sum_{j=0}^m c_j^0 \epsilon^{\frac{1}{2}+j} p_{v,\beta}^j \left(\frac{r}{\epsilon}, \theta \right) = v_\beta^0 + p_\epsilon^0,$$

avec $p_\epsilon^0 = \chi_1(r) \sum_{j=0}^m c_j^0 \epsilon^{\frac{1}{2}+j} (p_{v,\beta}^j - s^j) \left(\frac{r}{\epsilon}, \theta \right)$.

Le reste défini comme $r_\epsilon^0 = v_\beta^\epsilon - \tilde{v}_\beta^0$ vérifie alors

$$\left\{ \begin{array}{l} -\alpha \Delta r_\epsilon^0 = \alpha \Delta p_\epsilon^0 \text{ dans } \Omega_i, \\ \partial_\nu r_\epsilon^0 = 0 \text{ sur } \Gamma_n, \\ r_\epsilon^0 + \epsilon \alpha \partial_\nu r_\epsilon^0 + \epsilon^2 \beta \partial_\tau^2 r_\epsilon^0 = -\epsilon \alpha \partial_\nu v_{\beta,\text{reg}}^0 + \epsilon^2 \beta \partial_\tau^2 v_{\beta,\text{reg}}^0 \text{ sur } \Gamma_r, \\ r_\epsilon^0 = 0 \text{ sur } \Gamma_d^c, O \text{ et } A. \end{array} \right. \quad (1.41)$$

On remarque ici que pour que le problème soit bien posé, il suffit que $\partial_\tau^2 v_{\beta,\text{reg}}^0 \in L^2(\Gamma_v)$. Une condition suffisante est $m \geq 1$; on a ainsi $v_{\beta,\text{reg}}^0 \in H^3(\Omega_i)$ (régularité non optimale). Le développement du problème d'impédance avec condition de type Ventcel demande donc plus de régularité que dans le cas d'une condition de type Robin.

Le lemme 1.1 est encore valable avec $p_{v,\beta}^j$ à la place de p_r^j . Plutôt que de le réécrire nous nous référerons donc directement à ce dernier. Il nous permet d'obtenir que $\Delta p_\epsilon^0 = \epsilon \sum_{j=0}^m c_j^0 \varphi^{j,1}[\log \epsilon] + O_{L^2(\Omega_i)}(\epsilon^2[\log \epsilon])$. L'estimation du théorème 1.6 nous permet alors d'obtenir :

$$\begin{aligned} \|r_\epsilon^0\|_{\mathcal{V}} &\leq \frac{C}{\min(1, \alpha, \epsilon\beta)} \left(\|\partial_\nu v_{\beta,\text{reg}}^0\|_{0,\Gamma_v} + \epsilon \|\partial_\tau^2 v_{\beta,\text{reg}}^0\|_{0,\Gamma_v} + \epsilon \sum_{j=0}^m |c_j^0| \|\varphi^{j,1}\|_{0,\Omega_i} [\log \epsilon] \right. \\ &\quad \left. + O(\epsilon^2[\log \epsilon]) \right) \\ &= O(\epsilon^{-1}). \end{aligned}$$

Cette estimation ne s'avère pas satisfaisante en l'état puisque le reste ne tend pas vers 0 *a priori*. Cependant, de la même façon que dans le cas du problème avec condition d'impédance de type Robin (voir remarque suivant le théorème 1.7), on peut montrer grâce à l'estimation des restes de rangs supérieurs que :

$$\|r_\epsilon^0\|_{\mathcal{V}} \leq C\epsilon[\log \epsilon].$$

Toutefois, contrairement au cas du problème avec condition d'impédance de type Robin, la seule estimation du reste de rang 1 ne suffit pas.

Rang 1 : À l'instar des deux développements précédents, le découplage en parties régulière-singulière du terme de rang 0 puis le remplacement des singularités par les profils invitent à poser deux problèmes au rang 1 afin de bien identifier les contributions de la partie régulière et des profils. On pose $v_{\beta,\varphi}^1[\log \epsilon]$ et $v_{\beta,r}^1$ les solutions des systèmes suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta v_{\beta,\varphi}^1[\log \epsilon] = \sum_{j=0}^m \varphi^{j,1}[\log \epsilon] \text{ dans } \Omega_i, \\ \partial_\nu v_{\beta,\varphi}^1[\log \epsilon] = 0 \text{ sur } \Gamma_n, \\ v_{\beta,\varphi}^1[\log \epsilon] = 0 \text{ sur } \Gamma_v \cup \Gamma_d^c, \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta v_{\beta,r}^1 = 0 \text{ dans } \Omega_i, \\ \partial_\nu v_{\beta,r}^1 = 0 \text{ sur } \Gamma_n, \\ v_{\beta,r}^1 = -\alpha \partial_\nu v_{\beta,\text{reg}}^0 \text{ sur } \Gamma_v, \\ v_{\beta,r}^1 = 0 \text{ sur } \Gamma_d^c. \end{array} \right.$$

Comme $v_{\beta,\text{reg}}^0 \in H^{m+2}(\Omega_i)$ on a $\partial_\nu v_{\beta,\text{reg}}^0 \in H^{m+\frac{1}{2}}(\partial\Omega_i)$. Par ailleurs, les autres seconds membres sont clairement $\mathcal{C}^\infty$. Cela justifie l'existence et l'unicité d'une solution à chacun des problèmes ci-dessus avec, de plus, une décomposition en parties régulière et

singulière. On note alors

$$v_\beta^1 = v_{\beta,\varphi}^1[\log \epsilon] + v_{\beta,r}^1,$$

la solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta v_\beta^1 = \sum_{j=0}^m \varphi^{j,1}[\log \epsilon] \text{ dans } \Omega_i, \\ \partial_\nu v_\beta^1 = 0 \text{ sur } \Gamma_n, \\ v_\beta^1 = -\alpha \partial_\nu v_{\beta,\text{reg}}^0 \text{ sur } \Gamma_v, \\ v_\beta^1 = 0 \text{ sur } \Gamma_d^c. \end{array} \right. \quad (1.42)$$

Comme $\partial_\nu v_{\beta,\text{reg}}^0 \in H^{m+\frac{1}{2}}(\Gamma_v)$, on peut aussi écrire

$$v_\beta^1 = v_{\beta,\text{reg}}^1 + \chi_1(r) \sum_{j=0}^{m-1} c_j^1(\log \epsilon) \epsilon^{\frac{1}{2}+j} s^j \left(\frac{r}{\epsilon}, \theta \right), \quad (1.43)$$

où $v_{\beta,\text{reg}}^1 \in H^{m+1}(\Omega_i)$ et $c_j^1(\log \epsilon)$ est une constante dépendant de $\log \epsilon$. On remarquera ici que le développement consomme un cran de régularité pour passer du rang 0 au rang 1 mais que pour passer du rang n à rang $n+1$, pour $n \geq 1$, il en consommera deux (à cause de la dérivée tangentielle seconde qui n'est pas encore apparue).

On pose

$$\tilde{v}_\beta^1 = v_{\beta,\text{reg}}^1 + \chi_1(r) \sum_{j=0}^{m-1} c_j^1(\log \epsilon) \epsilon^{\frac{1}{2}+j} p_{v,\beta}^j \left(\frac{r}{\epsilon}, \theta \right) = v_\beta^1 + p_\epsilon^1,$$

où $p_\epsilon^1 = \chi_1(r) \sum_{j=0}^{m-1} c_j^1(\log \epsilon) \epsilon^{\frac{1}{2}+j} (p_{v,\beta}^j - s^j) \left(\frac{r}{\epsilon}, \theta \right)$ et

$$r_\epsilon^1 = v_\beta^\epsilon - \tilde{v}_\beta^0 - \epsilon \tilde{v}_\beta^1 = r_\epsilon^0 - \epsilon \tilde{v}_\beta^1.$$

Ce dernier vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} -\alpha \Delta r_\epsilon^1 = \epsilon \alpha \Delta p_\epsilon^1 \text{ dans } \Omega_i, \\ \partial_\nu r_\epsilon^1 = 0 \text{ sur } \Gamma_n, \\ r_\epsilon^1 + \epsilon \alpha \partial_\nu r_\epsilon^1 - \epsilon^2 \beta \partial_\tau^2 r_\epsilon^1 = \epsilon^2 \beta \partial_\tau^2 v_{\beta,\text{reg}}^0 - \epsilon^2 \alpha \partial_\nu v_{\beta,\text{reg}}^1 + \epsilon^3 \beta \partial_\tau^2 v_{\beta,\text{reg}}^1 \text{ sur } \Gamma_v, \\ r_\epsilon^1 = 0 \text{ sur } \Gamma_d^c, \text{ O et A.} \end{array} \right. \quad (1.44)$$

Comme les seconds membres trouvés sur Γ_v , Γ_d^c , O et A ne sont pas forcément évidents, nous allons les détailler. Sur Γ_v , comme $p_{v,\beta}^0 + \alpha \partial_\nu p_{v,\beta}^0 - \beta \partial_\tau^2 p_{v,\beta}^0 = 0$, on en déduit que

$$\begin{aligned}
 r_\epsilon^1 + \epsilon \alpha \partial_\nu r_\epsilon^1 - \epsilon^2 \beta \partial_\tau^2 r_\epsilon^1 &= r_\epsilon^0 + \epsilon \alpha \partial_\nu r_\epsilon^0 - \epsilon^2 \beta \partial_\tau^2 r_\epsilon^0 - \epsilon \left(\underbrace{v_{\beta, \text{reg}}^1}_{= -\alpha \partial_\nu v_{\beta, \text{reg}}^0} + \epsilon \alpha \partial_\nu v_{\beta, \text{reg}}^1 - \epsilon^2 \beta \partial_\tau^2 v_{\beta, \text{reg}}^1 \right) \\
 &= \epsilon^2 \beta \partial_\tau^2 v_{\beta, \text{reg}}^0 - \epsilon^2 \alpha \partial_\nu v_{\beta, \text{reg}}^1 + \epsilon^3 \beta \partial_\tau^2 v_{\beta, \text{reg}}^1.
 \end{aligned}$$

On remarquera que la non apparition de la dérivée tangentielle seconde dans le problème (1.42) — lequel définit v_β^1 — fait que l'on a la présence d'un terme de rang 0 : $\partial_\tau^2 v_{\beta, \text{reg}}^0$, dans la condition sur Γ_ν du problème (1.44) ci-dessus. Étant cependant d'ordre 2 — i.e. multiplié par ϵ^2 —, elle n'apparaîtra qu'au rang 2 et sera donc traitée à ce moment-là.

Enfin, pour Γ_d^c , O et A, comme $\partial_\nu v_{\beta, \text{reg}}^0$ est continue sur $\overline{\Gamma_n \cup \Gamma_\nu}$ ($\partial_\nu v_{\beta, \text{reg}}^0 \in H^{m+\frac{1}{2}}(\partial\Omega_i)$ avec $m \geq 1$) et nulle sur Γ_n , on en déduit que $\partial_\nu v_{\beta, \text{reg}}^0(O) = 0$. Par ailleurs, les singularités s^j étant nulles sur $\overline{\Gamma_\nu}$ et donc en O, on déduit de la décomposition en parties régulière singulière (1.43) de v_β^1 et du problème (1.42) que l'on a $v_{\beta, \text{reg}}^1(O) = -\alpha \partial_\nu v_{\beta, \text{reg}}^0(O) = 0$. De plus, ayant $p_{\nu, \beta}^j(O) = 0$, on en déduit que $\tilde{v}_\beta^1(O) = 0$ et par conséquent, $r_\epsilon^1(O) = r_\epsilon^0(O) - \epsilon \tilde{v}_\beta^1(O) = 0$ au vu du problème (1.41) vérifié par r_ϵ^0 . De même, comme $v_{\beta, \text{reg}}^1 \in H^{m+1}(\Omega_i)$, $v_{\beta, \text{reg}}^1$ est continue sur Γ_d^c et puisque $v_{\beta, \text{reg}}^1 = v_\beta^1$ sur Γ_d^c on a $v_{\beta, \text{reg}}^1(A) = 0$ et donc $r_\epsilon^1(A) = 0$.

Réutilisant le lemme 1.1 et l'estimation du théorème 1.1, on aboutit à

$$\begin{aligned}
 \|r_\epsilon^1\|_{\mathcal{V}} &\leq \frac{C}{\min(1, \alpha, \epsilon\beta)} \left(\epsilon \|\partial_\nu v_{\beta, \text{reg}}^1\|_{0, \Gamma_\nu} + \epsilon^2 \sum_{j=0}^{m-1} |c_j^1| \|\varphi^{j,1}\|_{0, \Omega_i} [\log \epsilon] + O(\epsilon^3 [\log \epsilon]) \right) \\
 &= O(1).
 \end{aligned}$$

Comme on peut le voir dans la remarque suivant le théorème 1.7, on peut en fait montrer

$$\|r_\epsilon^1\|_{\mathcal{V}} \leq C \epsilon^2 [\log \epsilon].$$

On a donc, au rang 1 du développement asymptotique,

$$v_\beta^\epsilon = v_{\beta, \text{reg}}^0 + c^0 \chi_1(r) \sqrt{\epsilon} p_{\nu, \beta}^0 \left(\frac{r}{\epsilon}, \theta \right) + \epsilon v_{\beta, \varphi}^1 [\log \epsilon] + \epsilon v_{\beta, r}^1 + O_{\mathcal{V}}(\epsilon^2 [\log \epsilon]).$$

1.4.3 Développement à l'ordre n

Théorème 1.7. *Soit $m \in \mathbb{N}^*$. La solution du problème (1.37) pour $f_i \in H^m(\Omega_i)$ admet pour développement asymptotique à l'ordre $n \in \{1, \dots, m\}$:*

$$v_\beta^\epsilon = \sum_{k=0}^n \epsilon^k v_\beta^k [\log \epsilon] + \chi_1(r) \sum_{k=0}^{n-1} \epsilon^{k+\frac{1}{2}} c^k [\log \epsilon] \left(p_{\nu, \beta}^k - s^k \right) \left(\frac{r}{\epsilon}, \theta \right) + r_\epsilon^n, \quad (1.45)$$

où :

- pour $k \in \{0, \dots, n\}$, $v_\beta^k[\log \epsilon]$ est un polynôme en $\log \epsilon$ de degré inférieur ou égal à k solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta v_\beta^k[\log \epsilon] = f^k[\log \epsilon] \text{ dans } \Omega_i, \\ \partial_\nu v_\beta^k[\log \epsilon] = 0 \text{ sur } \Gamma_n, \\ v_\beta^k[\log \epsilon] = -\alpha \partial_\nu v_{\beta, \text{reg}}^{k-1}[\log \epsilon] + \beta \partial_\tau^2 v_{\beta, \text{reg}}^{k-2}[\log \epsilon] \text{ sur } \Gamma_v, \\ v_\beta^k[\log \epsilon] = 0 \text{ sur } \Gamma_d^c, \text{ O et A.} \end{array} \right. \quad (1.46)$$

avec les conventions $\partial_\nu v_{\beta, \text{reg}}^{-1} = \partial_\tau^2 v_{\beta, \text{reg}}^{-1} = \partial_\tau^2 v_{\beta, \text{reg}}^{-2} = 0$ et

$$f^k[\log \epsilon] = \begin{cases} f_i & \text{si } k = 0, \\ \sum_{j=0}^{m-(k-1)} c_j^{k-1} \varphi^{j,k}[\log \epsilon] & \text{sinon,} \end{cases}$$

où les $\varphi^{j,k}[\log \epsilon]$ proviennent du lemme 1.1 appliqué avec $N = m$; de plus, $v_{\beta, \text{reg}}^k[\log \epsilon] \in H^{m+2-k}(\Omega_i)$;

- $c^k[\log \epsilon]$ désigne un polynôme en $\log \epsilon$ de degré inférieur ou égal à k dont les coefficients sont des combinaisons linéaire des coefficients de singularité $c_j^0, \dots, c_j^{n-k-1}$, $j \in \{0, \dots, m-k\}$, issus des décompositions en parties régulière-singulière des fonctions $v^0, \dots, v^{n-k-1}$;
- le reste r_ϵ^n vérifie le problème

$$\left\{ \begin{array}{l} -\alpha \Delta r_\epsilon^n = \alpha \epsilon^n \Delta p_\epsilon^n + O_{L^2(\Omega_i)}(\epsilon^{n+1}[\log \epsilon]) \text{ dans } \Omega_i, \\ \partial_\nu r_\epsilon^n = 0 \text{ sur } \Gamma_n, \\ r_\epsilon^n + \epsilon \alpha \partial_\nu r_\epsilon^n - \epsilon^2 \beta \partial_\tau^2 r_\epsilon^n = \epsilon^{n+1} \beta \partial_\tau^2 v_{\beta, \text{reg}}^{n-1}[\log \epsilon] - \epsilon^{n+1} \alpha \partial_\nu v_{\beta, \text{reg}}^n[\log \epsilon] \\ \quad + \epsilon^{n+2} \beta \partial_\tau^2 v_{\beta, \text{reg}}^n[\log \epsilon] \text{ sur } \Gamma_v, \\ r_\epsilon^n = 0 \text{ sur } \Gamma_d^c, \text{ O et A;} \end{array} \right. \quad (1.47)$$

et on a l'estimation, pour $n \in \{1, \dots, m-1\}$ ($m > 2$),

$$\|r_\epsilon^n\|_V = O(\epsilon^{n+1}[\log \epsilon]). \quad (1.48)$$

Remarques : La démonstration étant quasiment identique à celle du théorème 1.2, nous ne la reproduisons pas. Il convient toutefois de faire quelques remarques afin de souligner les différences.

- Comme nous ne l'avons pas vu à l'ordre 1, notons que, à partir du rang 2, le terme $\partial_\tau^2 v_{\beta, \text{reg}}^{k-2}[\log \epsilon]$ de (1.46) n'est plus nul mais qu'il a cependant la même régularité que $\partial_\nu v_{\beta, \text{reg}}^{k-1}[\log \epsilon]$: il appartient à $H^{m-k+\frac{3}{2}}(\Omega_i)$; le second membre de (1.46) est donc assez régulier pour définir $v_\beta^k[\log \epsilon]$.

- Comme nous l'avons vu, l'estimation *a priori* du reste d'ordre n est d'ordre ϵ^{n-1} . Pour obtenir une estimation *a posteriori* d'ordre ϵ^{n+1} , il faut appliquer la même stratégie que dans la démonstration du théorème 1.2 : supposer que nous avons construit le développement jusqu'à l'ordre $n+2$ et donc r_ϵ^{n+2} avec l'estimation $r_\epsilon^{n+2} = O_{H^1(\Omega_i)}(\epsilon^{n+1}[\log \epsilon])$; on écrit alors

$$r_\epsilon^n = r_\epsilon^{n+2} + \epsilon^{n+2}\tilde{v}^{n+2} + \epsilon^{n+1}\tilde{v}^{n+1};$$

des estimations similaires à celles de la démonstration du théorème 1.2 nous donnent alors

$$r_\epsilon^n = O\left(\epsilon^{n+1}[\log \epsilon]\right).$$

1.5 Comparaison des problèmes avec condition d'impédance de type Ventcel et de transmission

Le problème de transmission qu'est censé approcher le problème avec condition d'impédance de type Ventcel est le problème (1.32). On a

$$v_\beta^\epsilon = v_{\beta,\text{reg}}^0 + c^0 \chi_1(r) \sqrt{\epsilon} p_{v,\beta}^0 \left(\frac{r}{\epsilon}, \theta \right) + \epsilon v_{\beta,\varphi}^1 [\log \epsilon] + \epsilon v_{\beta,r}^1 + O\left(\epsilon^{\frac{3}{2}} [\log \epsilon]\right)$$

et

$$u_i^\epsilon = u_{\text{reg},i}^0 + d^0 \chi_1(r) \sqrt{\epsilon} q_i^0 \left(\frac{r}{\epsilon}, \theta \right) + \epsilon u_{\varphi,i}^1 [\log \epsilon] + \epsilon u_{r,i}^1 + O\left(\epsilon^{\frac{3}{2}} [\log \epsilon]\right).$$

Les mêmes arguments et calculs que dans le cas du problème avec condition d'impédance de type Robin nous permettent d'obtenir que

$$\|v_\beta^\epsilon - u_i^\epsilon\|_{0,\Omega_i} \leq \epsilon \|v_{\beta,\varphi}^1 - u_{i,\varphi}^1\|_{0,\Omega_i} [\log \epsilon] + O_{L^2}\left(\epsilon^{\frac{3}{2}} [\log \epsilon]\right)$$

et

$$\|v_\beta^\epsilon - u_i^\epsilon\|_{1,\Omega_i} \leq C \sqrt{\epsilon} \|\nabla(p_{v,\beta}^0 - q_i^0)\|_{0,\Omega_i^\infty} + O_{L^2}(\epsilon [\log \epsilon]).$$

En résumé, nous avons obtenu le théorème suivant :

Théorème 1.8. *Pour $f_i \in H^m(\Omega_i)$ et $f_e \in H^m(\Omega_e^\epsilon)$, avec $m \in \mathbb{N}$ aussi grand que nécessaire, à supports compact dans Ω_i et Ω_e^ϵ . Les solutions v_β^ϵ du problème d'impédance (1.37) et u^ϵ du problème de transmission (1.32) vérifient :*

$$\|v_\beta^\epsilon - u_i^\epsilon\|_{0,\Omega_i} = O(\epsilon [\log \epsilon]), \quad (1.49)$$

$$\|v_\beta^\epsilon - u_i^\epsilon\|_{1,\Omega_i} = O(\sqrt{\epsilon}) \quad (1.50)$$

et

$$\|v_\beta^\epsilon - u_i^\epsilon\|_{\infty,\Omega_i} = O(\sqrt{\epsilon}). \quad (1.51)$$

1.5. COMPARAISON DES PROBLÈMES AVEC CONDITION D'IMPÉDANCE DE TYPE VENTCEL ET DE TRANSMISSION

Remarques :

- Concernant la régularité nécessaire à l'obtention de l'estimation en norme L^∞ , on pourra se reporter à la remarque suivant le théorème 1.1.
- Si par hasard on a $c_\beta^{0(1)} = d^{0(1)}$ dans (1.39) et (4.29), alors l'estimation (1.49) devient

$$\|v_\beta^\epsilon - u_i^\epsilon\|_{0,\Omega_i} = O\left(\epsilon^{\frac{3}{2}}[\log \epsilon]\right).$$

Chapitre 2

Conditions d'impédance modifiées

Ce chapitre a pour vocation de proposer quelques moyens de contrecarrer la dégradation de la vitesse de convergence entre solutions des problèmes d'impédance et de transmission. Nous avons vu en effet dans les théorèmes 1.5 et 1.8 que cette convergence était d'ordre ϵ pour l'erreur L^2 et $\sqrt{\epsilon}$ pour les erreurs H^1 et L^∞ alors que, dans le cas régulier — d'après [34] —, elle est d'ordre ϵ^2 (voire ϵ^3 lorsque la courbure de la couche mince est nulle) à la fois pour l'erreur L^2 et l'erreur H^1 .

Une première partie aura pour objectif de retourner sur les origines de cette perte de convergence et de proposer des méthodes alternatives visant à combler l'écart s'étant creusé entre cas régulier et non régulier. Deux approches seront distinguées : la correction de l'erreur L^2 et la correction des erreurs L^∞ et H^1 .

La correction de l'erreur L^2 s'effectuera selon deux moyens. Le premier consiste en l'utilisation d'une condition d'impédance — multi-échelle — à coefficient variable $\alpha_\bullet$ en lieu et place de α . La fonction $\alpha_\bullet$ est affine par morceaux, constante égale à α à partir d'un certain rang ; nous verrons que notre objectif sera de déterminer à quel moment $\alpha_\bullet$ doit devenir constante afin d'améliorer l'erreur L^2 . Le second moyen consiste en l'utilisation d'une condition d'impédance de type Ventcel. Celle-ci, contrairement à la première, n'est pas multi-échelle mais comporte une dérivée tangentielle seconde précédée d'une constante β . Dans ce cas, notre objectif sera de déterminer pour quelle(s) valeur(s) de β nous pouvons améliorer l'erreur L^2 . Dans les deux cas, cela nécessitera un travail particulier sur les profils.

La correction des erreurs H^1 et L^∞ ne pourra pas s'effectuer selon des conditions d'impédance modifiées, nous devons donc considérer un autre moyen : approcher la solution du problème de transmission par le début de son développement asymptotique. Ceci nécessitera aussi un travail particulier sur les profils ainsi que la capacité de calculer les coefficients de singularités de la solution du problème de transmission.

Des propositions émises naît la nécessité de simuler numériquement les profils ; une seconde partie sera donc consacrée à la satisfaction de ce besoin et à l'établissement de quelques résultats sur ces profils simulés.

Finalement, forts des résultats préalables, nous étudierons les validités théorique et pratique des méthodes proposées en première partie.

2.1 Introduction : stratégies

2.1.1 ... pour l'erreur L^2

Origine de l'erreur

Rappelons que l'erreur commise entre les solutions des problèmes de transmission et d'impédance avec condition de Robin pour la norme L^2 (établie au chapitre 1, page 48) avait été obtenue en comparant le début de leurs développements asymptotiques :

$$u_i^\epsilon = u_{\text{reg},i}^0 + d^0 \chi_1(r) \sqrt{\epsilon} q_i^0 \left(\frac{r}{\epsilon}, \theta \right) + \epsilon u_{\varphi,i}^1 [\log \epsilon] + \epsilon u_{r,i}^1 + O_{H^1} \left(\epsilon^{\frac{3}{2}} [\log \epsilon] \right)$$

et

$$v^\epsilon = v_{\text{reg}}^0 + c^0 \chi_1(r) \sqrt{\epsilon} p_r^0 \left(\frac{r}{\epsilon}, \theta \right) + \epsilon v_\varphi^1 [\log \epsilon] + \epsilon v_r^1 + O_{H^1} \left(\epsilon^{\frac{3}{2}} [\log \epsilon] \right).$$

Une comparaison terme à terme nous avait alors permis d'aboutir à (en notant que $u_{\text{reg},i}^0 = v_{\text{reg}}^0$, $c^0 = d^0$ et $u_{r,i}^1 = v_r^1$) :

$$\|v^\epsilon - u_i^\epsilon\|_{0,\Omega_i} \leq \epsilon \|v_\varphi^1 - u_{i,\varphi}^1\|_{0,\Omega_i} [\log \epsilon] + |c^{0(1)} - d^{0(1)}| O(\epsilon) + O_{L^2(\Omega_i)} \left(\epsilon^{\frac{3}{2}} [\log \epsilon] \right),$$

où les constantes $c^{0(1)}$ et $d^{0(1)}$ sont issues des développements asymptotiques à l'infini des profils (voir (4.17) et (4.29)).

On peut ici voir que les facteurs limitants sont $\|v_\varphi^1 - u_{i,\varphi}^1\|_{0,\Omega_i}$ et $|c^{0(1)} - d^{0(1)}|$. Nous avons déjà vu dans la remarque suivant (1.33) que si $c^{0(1)} = d^{0(1)}$ alors le terme

$$|c^{0(1)} - d^{0(1)}| O(\epsilon)$$

disparaît de l'équation.

Ceci nous pousse à nous concentrer sur l'origine des présences de v_φ^1 et $u_{i,\varphi}^1$ dans les développements asymptotiques. Ils y apparaissent à cause du remplacement des singularités par des profils à la première étape. En effet, ils sont solutions de problèmes ayant des seconds membres construits à l'aide des développements à l'infini des profils (voir lemme 1.1). Plus précisément, étant d'ordre 1 dans les développements asymptotiques des solutions des problèmes de transmission et d'impédance, ils sont associés aux termes d'ordre -1 dans les développements à l'infini des profils. Puisque ce sont eux que nous utiliserons par la suite, regardons les premiers termes des développements à l'infini des profils p_r^0 et q_i^0 (voir 4.17 et 4.29) :

$$p_r^0 = s^0 + \chi_0 \left(p_r^{0(1)} + c^{0(1)} s^{-1} \right) + \chi_0 O \left(r^{-\frac{3}{2}} \log^2 r \right)$$

et

$$q_i^0 = s^0 + \chi_0 \left(p_r^{0(1)} + d^{0(1)} s^{-1} \right) + \chi_0 O \left(r^{-\frac{3}{2}} \log^2 r \right).$$

On peut observer que la première différence à l'infini entre p_r^0 et q_i^0 est celle entre les coefficients du premier ordre $c^{0(1)}$ et $d^{0(1)}$. Par ailleurs, les procédés de construction des seconds membres des problèmes définissant v_φ^1 et $u_{i,\varphi}^1$ étant identiques, on en déduit que c'est encore la différence entre $c^{0(1)}$ et $d^{0(1)}$ qui est en fait le facteur limitant de l'erreur commise. Il

peut être « facile » de s'en convaincre en reprenant la démonstration du lemme 1.1 appliquée à

$$\sum_{j=0}^m c_j^0 \chi_1(r) \epsilon^{\frac{1}{2}+j} (p_r^j - q_i^j) \left(\frac{r}{\epsilon}, \theta \right).$$

Si l'on pouvait donc avoir $c^{0(1)} = d^{0(1)}$, nous gagnerions alors un ordre de vitesse de convergence :

$$\|v^\epsilon - u_i^\epsilon\|_{0,\Omega_i} = O_{L^2(\Omega_i)} \left(\epsilon^{\frac{3}{2}} [\log \epsilon] \right).$$

Cependant, p_r^0 et q_i^0 sont a priori différents ainsi que $c^{0(1)}$ et $d^{0(1)}$. Nous proposons donc de nous intéresser à des problèmes d'impédance légèrement différents — deux pour être exact — mais approchant toujours notre problème de transmission initial. En effet, en modifiant la condition d'impédance sur Γ_r de façon à introduire un paramètre supplémentaire, nous pourrions grâce à celui-ci faire en sorte que les coefficients du premier ordre des profils p_r^0 et $q_i^0 : c^{0(1)}$ et $d^{0(1)}$, soient égaux et alors gagner un ordre de vitesse de convergence.

Première stratégie : condition d'impédance de type Robin avec coefficient variable

La première de ces nouvelles conditions d'impédance consiste donc dans la considération du paramètre α dans la condition d'impédance sur Γ_r comme étant non plus une constante mais une fonction que l'on notera $\alpha_\bullet$. Cette fonction dépend d'un paramètre noté $\rho_\bullet$ sur lequel on jouera afin d'obtenir $c_\bullet^{0(1)} = d^{0(1)}$. La condition sur Γ_r devient alors une condition multi-échelle et nous avons comme nouveau problème d'impédance :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\alpha \Delta v^\epsilon = f_i \text{ dans } \Omega_i, \\ \partial_\nu v^\epsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_n, \\ v^\epsilon + \epsilon \alpha_\bullet \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \partial_\nu v^\epsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_r, \end{array} \right. \quad (2.1)$$

où $\alpha_\bullet$ sera affine sur $[0, \rho_\bullet]$ (valant C_α en 0) et constante égale à α sur $[\rho_\bullet, +\infty[$ comme on peut le voir sur la figure 2.1. Nous verrons que le choix pertinent correspond à $C_\alpha \leq \alpha$.

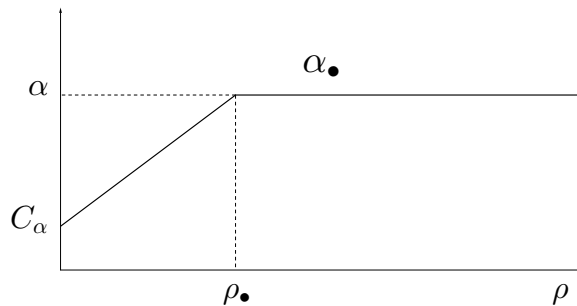


FIGURE 2.1 – Fonction $\alpha_\bullet$.

Remarque : Des versions plus lisses de la fonction $\alpha_\bullet$ pourrait être envisagées. Toutefois,

cela augmente le nombre de paramètres à déterminer sans, *a priori*, fournir de meilleurs résultats. Nous prenons donc $\alpha_\bullet$ sous la forme la plus simple possible.

Le problème (2.8) admet un développement asymptotique du même type que celui du problème d'impédance initial, ceci est mentionné dans la remarque suivant le théorème 1.2 (page 34). Cependant, les profils associés à ce problème sont légèrement différents (bien qu'ils connaissent eux aussi un développement à l'infini similaire à celui des profils du problème d'impédance initial, voir remarque en fin de section 4.1.6 page 147); ils sont définis comme étant solutions de :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \Delta p_{r_\bullet}^j = 0 \text{ dans } \Omega_i^\infty, \\ \partial_\nu p_{r_\bullet}^j = 0 \text{ sur } \Gamma_n^\infty, \\ p_{r_\bullet}^j + \alpha_\bullet \partial_\nu p_{r_\bullet}^j = 0 \text{ sur } \Gamma_r^\infty, \\ p_{r_\bullet}^j \sim s^j \text{ lorsque } r \rightarrow +\infty. \end{array} \right. \quad (2.2)$$

En effet, dans la construction des profils intervient la fonction de troncature χ_0 (qui vaut 0 dans un voisinage de l'origine) et rend donc le processus aveugle au fait que $\alpha_\bullet$ varie dans le voisinage de l'origine. Tous les résultats sur les profils d'impédance s'appliquent donc directement dans ce cas.

Du point de vue numérique, la condition multi-échelle demande que le raffinement du maillage soit suffisamment important pour la prendre en compte. Cependant, la singularité du problème fait qu'un raffinement important est d'ores et déjà nécessaire et qu'il n'y a pas besoin en pratique de raffiner plus pour prendre en compte cette condition multi-échelle.

Deuxième stratégie : condition d'impédance de type Ventcel

Cette deuxième stratégie opère pour les problèmes de transmission du type de (1.32) et non plus (1.16) (voir remarque suivant le théorème 1.1 pour la gestion des conditions ponctuelles). Elle consiste à introduire une dérivée tangentielle seconde dans la condition (dite alors de Ventcel) sur Γ_r — et que l'on notera dorénavant Γ_v — puis de jouer sur le paramètre β associé. Cette nouvelle condition n'est pas, cette fois-ci, multi-échelle; il s'agit du problème (1.37) étudié en section 1.4 que nous rappelons ci-dessous :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\alpha \Delta v^\epsilon = f_i \text{ dans } \Omega_i, \\ \partial_\nu v^\epsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_n, \\ v^\epsilon + \epsilon \alpha \partial_\nu v^\epsilon - \epsilon^2 \beta \partial_\tau^2 v^\epsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_v, \\ v^\epsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_d, \text{ O et A.} \end{array} \right.$$

Les profils associés à ce problème sont les solutions de (4.30) et ont été étudiées au chapitre 4 dans la section 4.3.

Dans les deux cas, il s'agit d'un travail sur les profils. Plus précisément, on veut être capable de déterminer numériquement les constantes $\rho_\bullet$ et β afin « d'égaliser » les constantes $c^{(1)}$ et $d^{(1)}$, ce qui pose la question de la simulation des profils. Comme cette question se pose aussi pour la méthode visant à améliorer les erreurs H^1 et L^∞ , nous la traiterons après avoir expliqué en quoi consiste cette dernière.

2.1.2 ... pour les erreurs H^1 et L^∞

Les méthodes améliorant l'erreur L^2 n'améliorent pas *a priori* les erreurs H^1 et L^∞ , il est donc nécessaire d'envisager un autre moyen pour celles-ci.

D'après le théorème 1.5, et plus particulièrement sa démonstration, les erreurs en normes H^1 et L^∞ sont données par :

$$\|v^\epsilon - u_i^\epsilon\|_{1,\Omega_i} \leq C\sqrt{\epsilon}\|\nabla(p_r^0 - q_i^0)\|_{0,\Omega_i^\infty} + O_{H^1(\Omega_i)}(\epsilon[\log \epsilon]),$$

et

$$\|v^\epsilon - u_i^\epsilon\|_{\infty,\Omega_i} \leq C\sqrt{\epsilon}\|p_r^0 - q_i^0\|_{\infty,\Omega_i^\infty} + O_{L^\infty(\Omega_i)}(\epsilon[\log \epsilon]).$$

Cette fois-ci, les facteurs limitants sont dûs à la différence entre p_r^0 et q_i^0 au lieu de la différence entre les premiers termes de leurs développements. L'idée que l'on a vue pour améliorer l'erreur L^2 ne s'applique donc pas ici. Il convient alors d'envisager d'autres façons d'approcher le problème de transmission.

Pour cela, rappelons que l'intérêt d'approcher la transmission par l'impédance est d'évaluer les problèmes engendrés par la couche de taille ϵ ; il convient donc de considérer des problèmes dont la géométrie ne dépend pas de ϵ . Si l'on observe le début du développement asymptotique de u^ϵ , solution du problème de transmission :

$$u_i^\epsilon = u_{i,\text{reg}}^0 + d^0 \chi_1(r) \sqrt{\epsilon} q_i^0 \left(\frac{r}{\epsilon}, \theta \right) + \epsilon u_{i,\varphi}^1 [\log \epsilon] + \epsilon u_{i,r}^1 + O_{H^1(\Omega_i)}(\epsilon^{\frac{3}{2}} [\log \epsilon]),$$

on peut constater que les problèmes qui définissent $u_{i,\text{reg}}^0$ et q_i^0 ne dépendent pas de ϵ . L'idée que nous proposons donc est d'approcher u_i^ϵ par le début de son développement asymptotique :

$$w_i^\epsilon = u_{i,\text{reg}}^0 + d^0 \chi_1(r) \sqrt{\epsilon} q_i^0 \left(\frac{r}{\epsilon}, \theta \right). \quad (2.3)$$

On a alors immédiatement que

$$\|u_i^\epsilon - w_i^\epsilon\|_{1,\Omega_i} = O(\epsilon[\log \epsilon]) \quad \text{et} \quad \|u_i^\epsilon - w_i^\epsilon\|_{\infty,\Omega_i} = O(\epsilon[\log \epsilon]), \quad (2.4)$$

ce qui est meilleur que l'approximation par l'impédance ou simplement par u_i^0 ($\|u_i^\epsilon - u_{i,\text{reg}}^0\|_{\Omega_i} = O(\sqrt{\epsilon})$). Cela nécessitera cependant de calculer $u_{i,\text{reg}}^0$ (ou plutôt u_i^0), q_i^0 et d^0 . Il suffira ensuite d'effectuer le changement variable $r \mapsto \epsilon^{-1}r$ sur le q_i^0 précalculé puis de projeter (ou plaquer) le résultat sur le domaine de $u_{i,\text{reg}}^0$ — lequel est le domaine intérieur de u_i^ϵ — pour obtenir l'approximation de ce dernier.

En outre, il y a une économie de temps de calcul : deux problèmes à résoudre quel que soit ϵ contre un problème par ϵ dans le cas d'un calcul direct ou de l'approximation par l'impédance.

Nous appellerons cette méthode par la suite : *méthode de plaquage des profils*.

2.2 Simulation des profils

Que ce soit pour le calcul du $\rho_\bullet$ du problème d'impédance avec condition de Robin à coefficient variable, du β du problème d'impédance avec condition de Ventcel ou parce qu'ils apparaissent explicitement dans la méthode de plaquage des profils, nous avons vu dans la section précédente que nous avons besoin de calculer numériquement les profils. La sous-section ci-dessous présente les méthodes mise en œuvre à cette fin ; nous commencerons par aborder la démarche commune aux trois types de profils puis nous regarderons leurs spécificités séparément. Nous verrons ensuite dans une seconde sous-section quelques résultats théoriques et numériques sur ces profils simulés.

2.2.1 Méthodes de simulation des profils

Démarche commune

Le point commun et premier problème qui se pose quant à la simulation de ces deux problèmes concerne les domaines sur lesquels ils sont posés : ils sont infinis ! Il est bien entendu impossible pour l'ordinateur de considérer de tels domaines, il faut donc se ramener à des domaines bornés. Ainsi, le demi plan et la demi bande infinis deviennent un demi disque et une demi bande finie (comme on peut le voir sur la figure 2.5 plus bas).

Ceci pose le deuxième problème : quelles conditions mettre sur les bords que nous venons de définir ? Nous avons opté pour la considération de conditions approchées tenant compte du comportement à l'infini des profils et donc nécessitant des domaines de grande taille. Cependant, d'autres moyens les simuler étaient envisageables, notamment par l'utilisation de conditions intégral-différentielles. Ces dernières auraient l'avantage de fournir des conditions exactes. Par ailleurs, elles ne nécessitent pas a priori de domaines de grandes tailles, ce qui constitue un autre avantage. Toutefois, elles sont plus difficiles à incorporer à un code éléments finis existant (voir [24]).

Profils du problème avec condition d'impédance de type Robin

On veut dans ce paragraphe déterminer un moyen de simuler le profil $p_{r\bullet}^0$ solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \Delta p_{r\bullet}^0 = 0 \text{ dans } \Omega_i^\infty, \\ \partial_\nu p_{r\bullet}^0 = 0 \text{ sur } \Gamma_n^\infty, \\ p_{r\bullet}^0 + \alpha_\bullet \partial_\nu p_{r\bullet}^0 = 0 \text{ sur } \Gamma_r^\infty, \\ p_{r\bullet}^0 \sim s^0 \text{ lorsque } r \rightarrow +\infty, \end{array} \right.$$

les cas $\alpha_\bullet$ constant et variable étant tous deux à considérer. Pour cela, comme mentionné plus haut, on commence par tronquer le domaine Ω_i^∞ en un demi-disque de rayon R comme on peut le voir sur les figures 2.2 et 2.3.

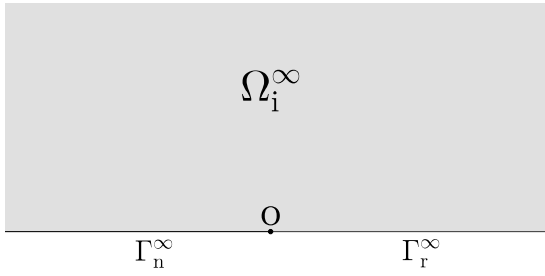


FIGURE 2.2 – Domaine de définition des profils du problème avec condition d'impédance de type Robin

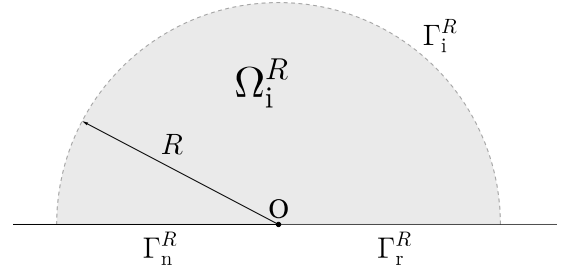


FIGURE 2.3 – Domaine de calcul des profils du problème avec condition d'impédance de type Robin.

Notons $p_{r\bullet}$ l'approximation de $p_{r\bullet}^0$; $p_{r\bullet}$ vérifie un problème de la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \Delta p_{r\bullet} = 0 \text{ dans } \Omega_i^R, \\ \partial_\nu p_{r\bullet} = 0 \text{ sur } \Gamma_n^R, \\ p_{r\bullet} + \alpha_\bullet \partial_\nu p_{r\bullet} = 0 \text{ sur } \Gamma_r^R, \\ + \text{ condition sur } \Gamma_i^R, \end{array} \right. \quad (2.5)$$

où la condition sur Γ_i^R est à déterminer. Plusieurs options s'offrent à nous, c'est l'objet du sous-paragraphe suivant.

Condition de bord sur Γ_i^R

La première idée consiste à utiliser des conditions de Dirichlet : $p_{r\bullet} = s^0$ ou de Neumann : $\partial_\nu p_{r\bullet} = \partial_\nu s^0$. Dans ces deux cas, l'existence et l'unicité d'une solution au problème (2.5) sont garanties. Cependant, nous pouvons aussi chercher une condition de bord de type Robin. En effet, nous en savons plus sur ce profil grâce à la formule (4.17) rappelée ci-dessous :

$$p_{r\bullet}^0 = s^0 + \chi_0 \left(p_r^{0(1)} + c_\bullet^{0(1)} s^{-1} \right) + \chi_0 O_{L^2(\Omega_i^\infty)} \left(r^{-\frac{3}{2}} \log r \right),$$

où

$$p_r^{0(1)} = \alpha \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{r}} \left[(\pi - \theta) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \log r \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right].$$

Rappelons que χ_0 est une fonction de troncature nulle proche de l'origine et valant 1 loin de celle-ci. Comme nous prendrons R grand afin de simuler une condition à l'infini, nous pourrions considérer que χ_0 vaut 1 sur le bord Γ_i^R .

Observons ensuite que, sur Γ_i^R ,

$$\partial_\nu s^0 = \frac{s^0}{2R} \quad \text{et} \quad \partial_\nu s^{-1} = -\frac{s^{-1}}{2R}.$$

L'inconvénient de s^{-1} est qu'il est associé à la constante $c^{0(1)}$ et $d^{0(1)}$ qui est inconnue. Il ne fait donc pas un bon candidat à une condition de bord que nous voulons explicite. Pour l'éliminer, le plus simple est d'utiliser une condition de Robin basée sur l'égalité ci-dessus. Nous avons sur Γ_i^R ,

$$\partial_\nu p_r^0 + \frac{1}{2R} p_r^0 = \left[\partial_\nu s^0 + \frac{1}{2R} s^0 \right] + \left[\partial_\nu p_r^{0(1)} + \frac{1}{2R} p_r^{0(1)} \right] + O_{L^2(\Omega_i^\infty)} \left(r^{-\frac{5}{2}} \log r \right).$$

Comme, toujours sur Γ_i^R ,

$$\partial_\nu s^0 + \frac{1}{2R} s^0 = \frac{s^0}{R},$$

et

$$\partial_\nu p_r^{0(1)} + \frac{1}{2R} p_r^{0(1)} = \alpha \frac{1}{2\pi R^{\frac{3}{2}}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right),$$

nous pouvons alors prendre comme condition de Robin

$$\partial_\nu p_{r_\bullet} + \frac{1}{2R} p_{r_\bullet} = g$$

avec

$$g = \frac{s^0}{R} + \alpha \frac{1}{2\pi R^{\frac{3}{2}}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

Comme $g \in L^2(\Gamma_i^R)$, on a donc existence et unicité de la solution au problème (2.5) pour cette condition de Robin. On obtient immédiatement la proposition suivante, laquelle nous donne les erreurs commises en fonction de R et de la condition choisie :

Proposition 2.1. *Soient $p_{r_\bullet}^j$ le profil solution du problème (2.2) et $p_{r_\bullet}$ la solution de (2.5). Si la condition sur Γ_i^R est de type :*

Dirichlet : $p_{r_\bullet} = s^0$, alors $\|p_{r_\bullet}^0 - p_{r_\bullet}\|_{1,\Omega_i^R} \leq C \|p_{r_\bullet}^0 - s^0\|_{0,\Gamma_i^R} = O_{L^2(\Gamma_i^R)}(\log R)$;

Neumann : $\partial_\nu p_{r_\bullet} = \partial_\nu s^0$, alors $\|p_{r_\bullet}^0 - p_{r_\bullet}\|_{1,\Omega_i^R} \leq C \|\partial_\nu p_{r_\bullet}^0 - \partial_\nu s^0\|_{0,\Gamma_i^R} = O_{L^2(\Gamma_i^R)}(R^{-1} \log R)$;

Robin : $\partial_\nu p_{r_\bullet} + \frac{1}{2R} p_{r_\bullet} = g$ avec $g = \frac{s^0}{R} + \alpha \frac{1}{2\pi R^{\frac{3}{2}}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$, alors

$$\|p_{r_\bullet}^0 - p_{r_\bullet}\|_{1,\Omega_i^R} \leq C \|p_{r_\bullet}^0 + 2R \partial_\nu p_{r_\bullet}^0 - g\|_{0,\Gamma_i^R} = O_{L^2(\Gamma_i^R)}(R^{-2} \log R).$$

Démonstration. Pour chaque condition, il suffit de calculer l'estimation *a priori* obtenue à partir du problème dont $p = p_{r_\bullet}^j - p_{r_\bullet}$ est solution :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \Delta p = 0 \text{ dans } \Omega_i^R, \\ \partial_\nu p = 0 \text{ sur } \Gamma_n^R, \\ p + \alpha_\bullet \partial_\nu p = 0 \text{ sur } \Gamma_r^R, \\ + \text{ condition sur } \Gamma_i^R. \end{array} \right.$$

□

C'est donc la condition de Robin que nous conserverons. Notons que la condition de Dirichlet ne fournit pas en réalité une approximation. Nous pouvons maintenant énoncer la proposition-définition suivante :

Définition 2.1. *L'approximation $p_{r_\bullet}$ du profil $p_{r_\bullet}^0$, profil du problème d'impédance avec condition de Robin, est définie comme l'unique solution du problème :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \Delta p_{r_\bullet} = 0 \text{ dans } \Omega_i^R, \\ \partial_\nu p_{r_\bullet} = 0 \text{ sur } \Gamma_n^R, \\ p_{r_\bullet} + \alpha_\bullet \partial_\nu p_{r_\bullet} = 0 \text{ sur } \Gamma_r^R, \\ \partial_\nu p_{r_\bullet} + \frac{1}{2R} p_{r_\bullet} = g \text{ sur } \Gamma_i^R, \end{array} \right.$$

où

$$g = \frac{s^0}{R} + \alpha \frac{1}{2\pi R^{\frac{3}{2}}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right);$$

la formulation variationnelle associée à ce problème est : pour tout $v \in H^1(\Omega_i^R)$,

$$\int_{\Omega_i^R} \nabla p_{r_\bullet} \cdot \nabla v + \int_{\Gamma_r^R} \frac{p_{r_\bullet} v}{\alpha_\bullet} + \frac{1}{2R} \int_{\Gamma_i^R} p_{r_\bullet} v = \int_{\Gamma_i^R} g v.$$

De plus on a

$$\|p_{r_\bullet}^0 - p_{r_\bullet}\|_{1, \Omega_i^R} = O_{L^2(\Gamma_i^R)}(R^{-2} \log R).$$

Comparaison de $p_{r_\bullet}$ pour différentes conditions de bord et différents R

Des simulations ont été effectuées afin de tester les différentes conditions de bord et de déterminer un rayon R à partir duquel l'approximation $p_{r_\bullet}$ de $p_{r_\bullet}^0$ pourrait être jugée comme étant satisfaisante. Comme il est impossible de comparer $p_{r_\bullet}$ à $p_{r_\bullet}^0$ numériquement, nous devons faire autrement.

Pour cela, prenons $R_1, R_2 \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $R_1 < R_2$, nous obtenons alors deux domaines $\Omega_i^{R_1}$ et $\Omega_i^{R_2}$ ($\Omega_i^{R_1} \subset \Omega_i^{R_2}$) sur lesquels nous calculerons les approximations de profils associées $p_{r,\bullet,1}$ et $p_{r,\bullet,2}$. Ces deux profils sont calculés à l'aide de la même condition de bord sur $\Gamma_i^{R_k}$, $k \in \{1, 2\}$. D'après la proposition 2.1, $p_{r,\bullet,2}$ fournit asymptotiquement une meilleure approximation de $p_{r,\bullet}^0$ que $p_{r,\bullet,1}$. Comparer deux approximations de profils calculées avec des conditions de bord différentes ne faisant guère sens, il a été préféré de ne pas comparer les différentes méthodes d'approximations à une approximation de référence (avec R_2 très grand); ce qui nécessitait par ailleurs de choisir l'une des méthodes à tester.

Par ailleurs, puisque les profils sont définis sur des domaines infinis, l'impact du rayon de troncature R devrait pouvoir être considéré comme négligeable. Autrement dit, l'erreur entre $p_{r,\bullet,1}$ et $p_{r,\bullet,2}$ (calculée sur $\Omega_i^{R_1}$) se doit d'être la plus petite possible pour que la méthode d'approximation puisse être considérée comme bonne outre les erreurs théoriques obtenues plus haut. Usuellement, nous fixerions R_2 et nous observerions la convergence de $p_{r,\bullet,1}$ vers $p_{r,\bullet,2}$ afin de déterminer pour quelle valeur de R_1 l'erreur commise est suffisamment petite. Ici, ce n'est pas le cas. En effet, comme l'erreur ne peut être calculée que sur $\Omega_i^{R_1}$ ($p_{r,\bullet,1}$ n'est pas défini sur $\Omega_i^{R_2}$), nous aurions été obligés de comparer les erreurs entre $p_{r,\bullet,1}$ et $p_{r,\bullet,2}$ calculées avec des valeurs de R_1 différentes. Ceci n'étant guère pratique et le but étant de voir l'évolution de l'erreur entre $p_{r,\bullet,1}$ et $p_{r,\bullet,2}$ pour des rayons R dépassant 150 afin de déterminer une valeur de R au delà de laquelle nous aurions peu d'intérêt à aller, cela n'a pas été fait. Nous fixons donc R_1 et faisons varier R_2 afin de voir comment l'erreur se dégrade; ainsi, nous n'observons pas de convergence dans les tableaux ci-dessous.

Les résultats suivants proviennent de tests effectués avec les paramètres $\alpha_\bullet = \alpha = 0.5$, et $R_1=150$.

Avec une condition de **Dirichlet** sur $\Gamma_i^{R_k}$, $k \in \{1, 2\}$, nous avons :

R_2	160	170	180	190	200
erreur relative L^2	$3.16.10^{-2}$	$5.85.10^{-2}$	$8.22.10^{-2}$	$1.033.10^{-1}$	$1.224.10^{-1}$
erreur relative H^1	$3.16.10^{-2}$	$5.85.10^{-2}$	$8.22.10^{-2}$	$1.034.10^{-1}$	$1.224.10^{-1}$

Pour **Neumann** :

R_2	160	170	180	190	200
erreur relative L^2	$2.25.10^{-2}$	$4.25.10^{-2}$	$6.04.10^{-2}$	$7.66.10^{-2}$	$9.12.10^{-2}$
erreur relative H^1	$2.25.10^{-2}$	$4.25.10^{-2}$	$6.04.10^{-2}$	$7.6.10^{-2}$	$9.12.10^{-2}$

Enfin, pour **Robin** :

R_2	160	170	180	190	200
erreur relative L^2	$3.35.10^{-5}$	$6.07.10^{-5}$	$8.27.10^{-5}$	$1.007.10^{-4}$	$1.161.10^{-4}$
erreur relative H^1	$3.40.10^{-5}$	$6.10.10^{-5}$	$8.30.10^{-5}$	$1.009.10^{-4}$	$1.162.10^{-4}$

Les trois méthodes sont donc de ce point de vue valables. En effet, l'erreur maximale observée est d'ordre $10^{-1}\%$ pour Dirichlet, $10^{-2}\%$ pour Neumann et $10^{-4}\%$ pour Robin; la meilleure est comme prévu celle de Robin. Dans tous les cas il y a très peu de différence entre $p_{r,\bullet,1}$ et $p_{r,\bullet,2}$, par la suite nous simulerons donc notre profil sur Ω_i^R avec $R = 150$.

Profils du problème de transmission

Le processus est le même que ci dessus, on tronque le domaine Ω_i^∞ en un demi-disque de rayon R et le domaine Ω_e^∞ en un pavé de longueur R comme on peut le voir sur les figures 2.4 et 2.5. On notera $\Omega^R = \overline{\Omega_i^R \cup \Omega_e^R}$, $\Gamma^R = \Gamma_i^R \cup \Gamma_e^R$ et $\Gamma_n = \Gamma_n^{1,R} \cup \Gamma_n^{2,1}$.

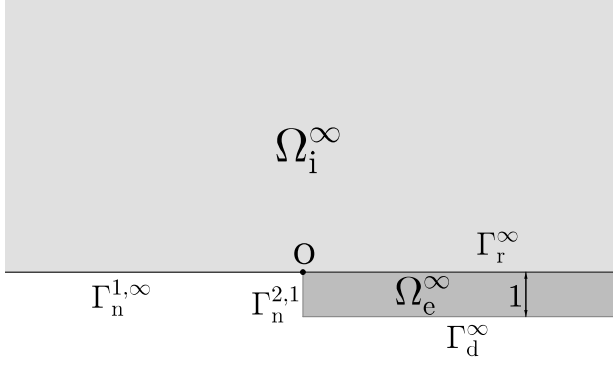


FIGURE 2.4 – Domaine de définitions des profils du problème de transmission.

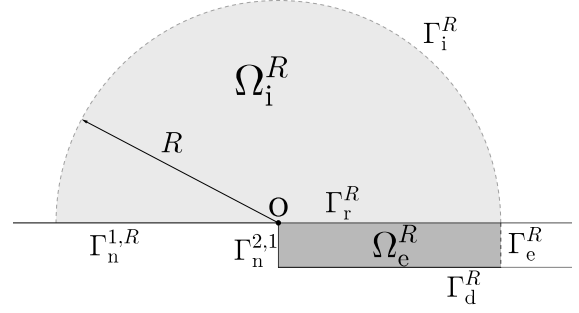


FIGURE 2.5 – Domaine de calcul des profils du problème de transmission.

Notons q l'approximation de q^0 , définie par un problème de la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \Delta q_i = 0 \text{ dans } \Omega_i, \\ \Delta q_e = 0 \text{ dans } \Omega_e^R, \\ q_i = q_e \text{ sur } \Gamma_r, \\ \alpha \partial_\nu q_i = -\partial_\nu q_e \text{ sur } \Gamma_r, \\ \partial_\nu q = 0 \text{ sur } \Gamma_n, \\ q_e = 0 \text{ sur } \Gamma_d^R, \\ + \text{ condition sur } \Gamma_i^R, \\ + \text{ condition sur } \Gamma_e^R, \end{array} \right. \quad (2.6)$$

où les conditions sur Γ_i^R et Γ_e^R sont à déterminer.

L'idée étant la même que pour le profil du problème d'impédance, allons droit au but. Comme nous avons (formule (4.29))

$$q^0 = s_0^0 + \chi_0 \left(q^{0(1)} + d^{0(1)} s_0^{-1} \right) + \chi_0 O_{L^2(\Omega_i^\infty)} \left(r^{-\frac{3}{2}} \log r \right),$$

où

$$q_i^{0(1)} = p_r^{0(1)} = \alpha \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{r}} \left[(\pi - \theta) \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) + \log r \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \right]$$

et

$$q_e^{0(1)} = -\alpha \frac{y+1}{\sqrt{x}},$$

il est clair que nous pouvons reprendre la même condition de Robin que précédemment sur Γ_i^R :

$$\partial_\nu q + \frac{1}{2R}q = g,$$

avec

$$g = \frac{s^0}{R} + \alpha \frac{1}{2\pi R^{\frac{3}{2}}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

Reste donc à déterminer une condition sur Γ_e^R . Comme nous avons sur Γ_e^R

$$\partial_\nu q_e^{0(1)} = -\frac{1}{2R}q_e^{0(1)},$$

selon le même principe que sur Γ_i^R , nous en déduisons que nous pouvons prendre comme condition de Robin sur Γ_e^R ,

$$\partial_\nu q + \frac{1}{2R}q = 0.$$

L'analogue de la proposition 2.1 est aussi valable pour le profil de transmission :

Proposition 2.2. *Soient q^j le profil solution du problème (4.18) et q la solution de (2.6). Si la condition sur Γ^R est de type :*

Dirichlet : $q = s_0^0$, alors $\|q^0 - q\|_{1,\Omega^R} \leq C\|q^0 - s_0^0\|_{0,\Gamma^R} = O_{L^2(\Gamma^R)}(\log R)$;

Neumann : $\partial_\nu q = \partial_\nu q s_0^0$, alors $\|q^0 - q\|_{1,\Omega^R} \leq C\|\partial_\nu q^0 - \partial_\nu s_0^0\|_{0,\Gamma^R} = O_{L^2(\Gamma^R)}(R^{-1} \log R)$;

Robin : $\partial_\nu q + \frac{1}{2R}q = \chi_{\Omega_i^R} g$ avec $g = \frac{s^0}{R} + \alpha \frac{1}{2\pi R^{\frac{3}{2}}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$, alors

$$\|q^0 - q\|_{1,\Omega^R} \leq C \left(\|q_i^0 + 2R\partial_\nu q_i^0 - g\|_{0,\Gamma_i^R} + \|q_e^0 + 2R\partial_\nu q_e^0\|_{0,\Gamma_e^R} \right) = O_{L^2(\Gamma^R)}(R^{-2} \log R).$$

De même, nous avons l'analogue de la proposition-définition 2.1 :

Définition 2.2. *L'approximation q du profil q^0 est définie comme l'unique solution du problème :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \Delta q_i = 0 \text{ dans } \Omega_i, \\ \Delta q_e = 0 \text{ dans } \Omega_e^R, \\ q_i = q_e \text{ sur } \Gamma_r, \\ \alpha \partial_\nu q_i = -\partial_\nu q_e \text{ sur } \Gamma_r, \\ \partial_\nu q = 0 \text{ sur } \Gamma_n, \\ q_e = 0 \text{ sur } \Gamma_d^R, \\ \partial_\nu q_i + \frac{1}{2R}q_i = g \text{ sur } \Gamma_i^R, \\ \partial_\nu q_e + \frac{1}{2R}q_e = 0 \text{ sur } \Gamma_e^R, \end{array} \right.$$

où

$$g = \frac{s^0}{R} + \alpha \frac{1}{2\pi R^{\frac{3}{2}}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right);$$

la formulation variationnelle associée à ce problème est : pour tout $v \in \mathcal{V}_q = \{v \in H^1(\Omega^R) : v|_{\Gamma_d^R} = 0\}$,

$$\int_{\Omega^R} (\alpha \chi_{\Omega_i^R} + \chi_{\Omega_e^R}) \nabla q \cdot \nabla v + \frac{\alpha}{2R} \int_{\Gamma_i^R} q_i v + \frac{1}{2R} \int_{\Gamma_e^R} q_e v = \int_{\Gamma_i^R} g v.$$

De plus on a

$$\|q^0 - q\|_{1,\Omega^R} = O_{L^2(\Gamma^R)}(R^{-2} \log R).$$

Profils du problème avec condition d'impédance de type Ventcel

On veut ici trouver un problème permettant d'approcher la solution $p_{v,\beta}^0$ du problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \Delta p_{v,\beta}^0 = 0 \text{ dans } \Omega_i^\infty, \\ \partial_\nu p_{v,\beta}^0 = 0 \text{ sur } \Gamma_n^\infty, \\ p_{v,\beta}^0 + \alpha \partial_\nu p_{v,\beta}^0 - \beta \partial_\tau^2 p_{v,\beta}^0 = 0 \text{ sur } \Gamma_v^\infty, \\ p_{v,\beta}^0 = 0 \text{ en } O, \\ p_{v,\beta}^0 \sim s^0 \text{ lorsque } r \rightarrow +\infty. \end{array} \right.$$

Comme précédemment, on tronque le domaine infini en un demi disque de grande taille (voir figures 2.6 et 2.7) et on note $p_{v,\beta}$ l'approximation de $p_{v,\beta}^0$ sur ce domaine.

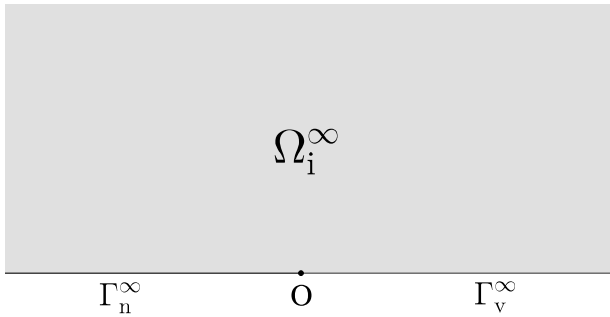


FIGURE 2.6 – Domaine de définition des profils du problème avec condition d'impédance de type Ventcel

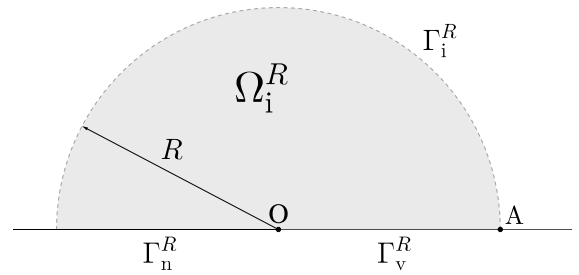


FIGURE 2.7 – Domaine de calcul des profils du problème avec condition d'impédance de type Ventcel tronqué

À l'instar des cas précédents, nous prendrons une condition de Robin sur Γ_i^R . En effet, les débuts des développements à l'infini des profils des problèmes avec conditions d'impédance

de types Robin et Ventcel sont identiques :

$$p_{v,\beta}^0 = s^0 + \chi_0 \left(p_{v,\beta}^{0(1)} + c^{0(1)} s^{-1} \right) + \chi_0 O_{L^2(\Omega_i^\infty)} \left(r^{-\frac{3}{2}} \log r \right)$$

où

$$p_{v,\beta}^{0(1)} = p_r^{0(1)} = \alpha \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{r}} \left[(\pi - \theta) \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) + \log r \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \right].$$

Le point de départ et les processus étant identiques, il en va de même pour la conclusion : nous utiliserons comme condition de bord sur Γ_i^R

$$\partial_\nu p_{v,\beta} + \frac{1}{2R} p_{v,\beta} = g,$$

avec

$$g = \frac{s^0}{R} + \alpha \frac{1}{2\pi R^{\frac{3}{2}}} \sin \left(\frac{\theta}{2} \right).$$

Cependant, la condition de Ventcel introduit une difficulté supplémentaire : elle nous impose de devoir trouver une condition au point A. Afin d'observer cela, regardons la formulation variationnelle du problème dont notre approximation p est solution :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \Delta p_{v,\beta} = 0 \text{ dans } \Omega_i^R, \\ \partial_\nu p_{v,\beta} = 0 \text{ sur } \Gamma_n^R, \\ p_{v,\beta} + \alpha \partial_\nu p_{v,\beta} - \beta \partial_\tau^2 p_{v,\beta} = 0 \text{ sur } \Gamma_v^R, \\ p_{v,\beta} = 0 \text{ en O}, \\ \partial_\nu p_{v,\beta} + \frac{1}{2R} p_{v,\beta} = g \text{ sur } \Gamma_i^R. \end{array} \right.$$

Pour tout $v \in \mathcal{V}_v = \{v \in H^1(\Omega_i^R) \cap H^1(\Gamma_v^R) / v(O) = 0\}$, on a

$$\alpha \int_{\Omega_i^R} \nabla p v \cdot \nabla v + \int_{\Gamma_v^R} p_{v,\beta} v - \beta \int_{\Gamma_v^R} \partial_\tau^2 p_{v,\beta} v + \frac{\alpha}{2R} \int_{\Gamma_i^R} p_{v,\beta} v = \alpha \int_{\Gamma_i^R} g v.$$

Ce qui devient à l'aide d'une intégration par parties sur Γ_v^R :

$$\alpha \int_{\Omega_i^R} \nabla p_{v,\beta} \cdot \nabla v + \int_{\Gamma_v^R} p_{v,\beta} v + \beta \int_{\Gamma_v^R} \partial_\tau p_{v,\beta} \partial_\tau v - \beta \partial_\tau p_{v,\beta}(A) v(A) + \frac{\alpha}{2R} \int_{\Gamma_i^R} p_{v,\beta} v = \alpha \int_{\Gamma_i^R} g v,$$

puisque $v \in \mathcal{V}_v$ et donc $v(O) = 0$.

Nous voyons donc que la condition de Ventcel fait apparaître dans la formulation variationnelle un terme ponctuel : $-\beta \partial_\tau p_{v,\beta}(A) v(A)$, qui fait que le problème est mal posé. Nous sommes donc contraints d'ajouter une condition ponctuelle en A afin d'éliminer ce terme, là encore, plusieurs choix s'offrent à nous.

Conditions ponctuelles en A

Puisque on veut $p_{v,\beta}^0 \sim s^0$ lorsque $r \rightarrow +\infty$ et que $s^0|_{\Gamma_v^R} = 0$, trois possibilités s'offrent à nous, une condition ponctuelle de :

Dirichlet, $p_{v,\beta}(A) = 0$;

Neumann, $\partial_x p_{v,\beta}(A) = 0$;

Robin, $\partial_x p_{v,\beta}(A) + \frac{1}{2R} p_{v,\beta}(A) = g(A)$ qui est en fait un prolongement de la condition de Robin sur Γ_i^R à A.

Ces trois conditions sont à mettre en lien avec la condition utilisée sur Γ_i^R mais pas forcément en correspondance : nous utiliserons comme précédemment la condition de Robin sur Γ_i^R et les trois conditions ci-dessus peuvent fonctionner avec. Les deux premières font disparaître le terme ponctuel. Avec la troisième il devient :

$$+\frac{\beta}{2R} p_{v,\beta}(A) v(A),$$

et devrait alors apparaître au second membre un autre terme ponctuel :

$$+g(A)v(A).$$

Le problème est alors bien posé sur l'espace variationnel $\mathcal{V}_v = \{w \in H^1(\Omega_i^R) : \gamma_0(w) \in H^1(\Gamma_v^R), w(O) = 0 \text{ (et éventuellement } w(A) = 0)\}$ et les termes ponctuels font bien sens puisque $H^1(\Gamma_v^R)$ s'injecte dans $\mathcal{C}^0(\Gamma_v^R)$.

Se pose alors la question qui s'est posée pour le profil d'impédance avec condition de Robin : quelle est l'erreur commise lorsqu'on calcule deux profils avec la même condition ponctuelle mais sur des rayons différents ? Des simulations ont été faites en ce sens.

Comparaison de $p_{v,\beta}$ pour différentes conditions ponctuelles et R

Pour cela, reprenons $R_1, R_2 \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $R_1 < R_2$ et les deux domaines $\Omega_i^{R_1}$ et $\Omega_i^{R_2}$ ($\Omega_i^{R_1} \subset \Omega_i^{R_2}$) sur lesquels nous calculerons les approximations de profils associées $p_{v,1}$ et $p_{v,2}$. Nous avons donc deux points A : A_k , $k \in \{1, 2\}$. Pour les mêmes raisons que dans le cas du choix de la condition de bord sur Γ_i^R , les deux profils sont calculés à l'aide de la même condition ponctuelle en A_k , $k \in \{1, 2\}$ et l'erreur est calculée sur $\Omega_i^{R_1}$. Les résultats suivant proviennent de tests effectués avec les paramètres $\alpha = \beta = 0.5$ et $R_1=150$.

Avec une condition de **Dirichlet** en A, nous avons :

R_2	160	170	180	190	200
erreur relative L^2	$1.4 \cdot 10^{-3}$	$1.5 \cdot 10^{-3}$	$1.6 \cdot 10^{-3}$	$1.7 \cdot 10^{-3}$	$1.7 \cdot 10^{-3}$
erreur relative H^1	$1.7 \cdot 10^{-3}$	$1.9 \cdot 10^{-3}$	$1.9 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-3}$

Pour **Neumann** et **Robin** (résultats inexplicablement identiques) :

R_2	160	170	180	190	200
erreur relative L^2	$2.416.10^{-5}$	$4.368.10^{-5}$	$5.889.10^{-5}$	$7.187.10^{-5}$	$8.193.10^{-5}$
erreur relative H^1	$2.481.10^{-5}$	$4.4.10^{-5}$	$5.918.10^{-5}$	$7.208.10^{-5}$	$8.211.10^{-5}$

Les erreurs fournies par les conditions de Neumann et Robin sont meilleures, ce sont donc elles que nous privilégierons. Cette infériorité de la condition de Dirichlet pouvait être attendue, en effet celle-ci impose une contrainte non naturelle au profil simulé comme on peut le voir sur la figure 2.8. Cette dernière représente la trace du profil sur Γ_v pour une condition ponctuelle de Neumann ou Robin (en haut) et de Dirichlet (en bas).

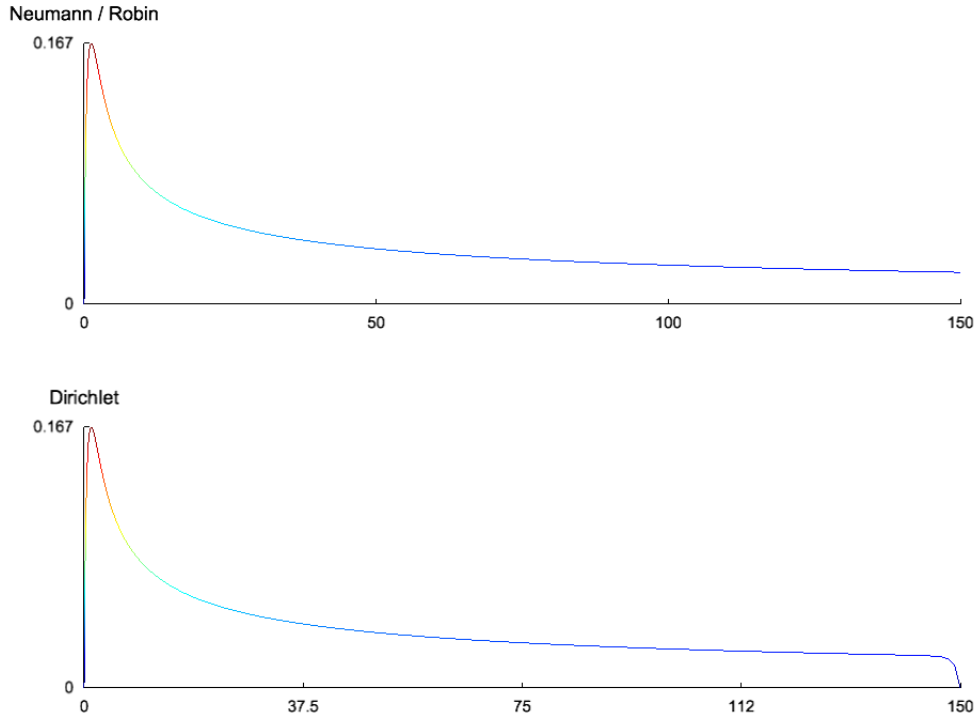


FIGURE 2.8 – Traces sur Γ_v des profils avec diverses conditions au point A.

Nous avons opté pour l'utilisation de la condition ponctuelle de Robin. Nous avons donc la proposition-définition suivante :

Définition 2.3. *L'approximation $p_{v,\beta}$ du profil $p_{v,\beta}^0$, profil du problème d'impédance avec condition de Ventcel, est définie comme l'unique solution du problème :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \Delta p_{v,\beta} = 0 \text{ dans } \Omega_i^R, \\ \partial_\nu p_{v,\beta} = 0 \text{ sur } \Gamma_n^R, \\ p_{v,\beta} + \alpha \partial_\nu p_{v,\beta} - \beta \partial_\tau^2 p_{v,\beta} = 0 \text{ sur } \Gamma_v^R, \\ p_{v,\beta}(O) = 0, \\ p_{v,\beta}(A) + 2R \partial_\tau p_{v,\beta}(A) = 0, \\ p_{v,\beta} + 2R \partial_\nu p_{v,\beta} = g \text{ sur } \Gamma_i^R, \end{array} \right.$$

où

$$g = \frac{s^0}{R} + \alpha \frac{1}{2\pi R^{\frac{3}{2}}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right);$$

la formulation variationnelle associée à ce problème est : pour tout $v \in \mathcal{V}_v = \{v \in H^1(\Omega_i^R) \cap H^1(\Gamma_v^R) / v(O) = 0\}$,

$$\alpha \int_{\Omega_i^R} \nabla p_{v,\beta} \cdot \nabla v + \int_{\Gamma_v^R} p_{v,\beta} v + \beta \int_{\Gamma_v^R} \partial_\tau p_{v,\beta} \partial_\tau v + \frac{\beta}{2R} p_{v,\beta}(A) v(A) + \frac{\alpha}{2R} \int_{\Gamma_i^R} p_{v,\beta} v = \alpha \int_{\Gamma_i^R} g v.$$

De plus, on a

$$\|p_{v,\beta}^0 - p_{v,\beta}\|_{\mathcal{V}_v} = O_{L^2(\Gamma_i^R)}(R^{-2} \log R),$$

$$\text{où } \|\cdot\|_{\mathcal{V}_v}^2 = \|\cdot\|_{1,\Omega_i^R}^2 + \|\cdot\|_{1,\Gamma_i^R}^2.$$

Approximation des coefficients de singularité $c^{0(1)}$ et $d^{0(1)}$

Regardons maintenant comment approcher $c^{0(1)}$ et $d^{0(1)}$. Usant du fait que la famille $\left(\sin\left(\left(\frac{1}{2} + n\right)\theta\right)\right)_n$ est orthogonale pour le produit scalaire usuel de $L^2(0, \pi)$, nous obtenons que

$$\int_{\Gamma_i^R} (p_r^0 - s^0 - p_r^{0(1)}) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \int_0^\pi (p_r^0 - s^0 - p_r^{0(1)}) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) R d\theta = c^{0(1)} \sqrt{R} \frac{\pi}{2} + O(R^{-\frac{1}{2}} \log R)$$

et donc

$$c^{0(1)} = \frac{2}{\pi \sqrt{R}} \int_{\Gamma_i^R} (p_r^0 - s^0 - p_r^{0(1)}) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + O(R^{-1} \log R).$$

Nous obtenons une formule analogue pour $d^{0(1)}$ et pouvons alors définir une approximation de $c^{0(1)}$ et $d^{0(1)}$.

Définition 2.4. On nomme $c^{(1)}$ l'approximation de $c^{0(1)}$ et $d^{(1)}$ celle de $d^{0(1)}$. Elles sont définies par

$$c^{(1)} = \frac{2}{\pi \sqrt{R}} \int_{\Gamma_i^R} (p_r - s^0 - p_r^{0(1)}) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right),$$

et

$$d^{(1)} = \frac{2}{\pi \sqrt{R}} \int_{\Gamma_i^R} (q - s^0 - q_i^{0(1)}) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

De plus, nous avons les estimations suivantes :

$$|c^{0(1)} - c^{(1)}| = O(R^{-1} \log R)$$

et

$$|d^{0(1)} - d^{(1)}| = O(R^{-1} \log R).$$

Remarque : Dans la suite, afin de bien visualiser la dépendance de la constante $c^{(1)}$ dans les paramètres $\rho_\bullet$ et β , on la notera $c_\bullet^{(1)}$, respectivement $c_\beta^{(1)}$, lorsque nous aurons $p_{r_\bullet}$, respectivement $p_{v,\beta}$, à la place de p_r .

2.2.2 Résultats sur les profils simulés

À partir des simulations effectuées, des observations ont été faites. Cette sous-section a pour vocation de démontrer théoriquement certaines de ces observations numériques ainsi que de faire état de ce qui n'a pu être démontré.

Proposition 2.3. *Les solutions des problèmes établis dans les définitions 2.1, 2.2 et 2.3 – p_r , $p_{v,\beta}$ et q_- , permettant de simuler les profils d'impédances et de transmission sont positives.*

Démonstration. On rappelle que

$$g(r, \theta) = \chi_{\Gamma_i^R}(r, \theta) \frac{1}{\sqrt{r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(1 + \frac{\alpha}{2\pi r}\right).$$

Ce dernier est clairement positif. L'application des théorèmes B.1 et B.2 (principes du maximum, pages 181 et 183) donne immédiatement le résultat à condition que nos solutions soient continues sur $\overline{\Omega_i^R}$ et $\overline{\Omega^R}$, ce que nous allons vérifier. D'après [20], [28], et [29], nous savons que les solutions de ces problèmes admettent des décompositions de forme :

$$u = u_{\text{reg}} + \chi_1(r) r^\nu [\log r] \varphi(\theta)$$

où $u_{\text{reg}} \in H^2(\Omega_i^R)$ et $[\log r]$ désigne une dépendance polynomiale en $\log r$.

Comme $H^2(\Omega_i^R)$ s'injecte dans $\mathcal{C}^0(\overline{\Omega_i^R})$ et $r \mapsto r^\nu [\log r]$ est continue sur $[0, R]$ pour $\nu > 0$, on en déduit donc la continuité. $\square$

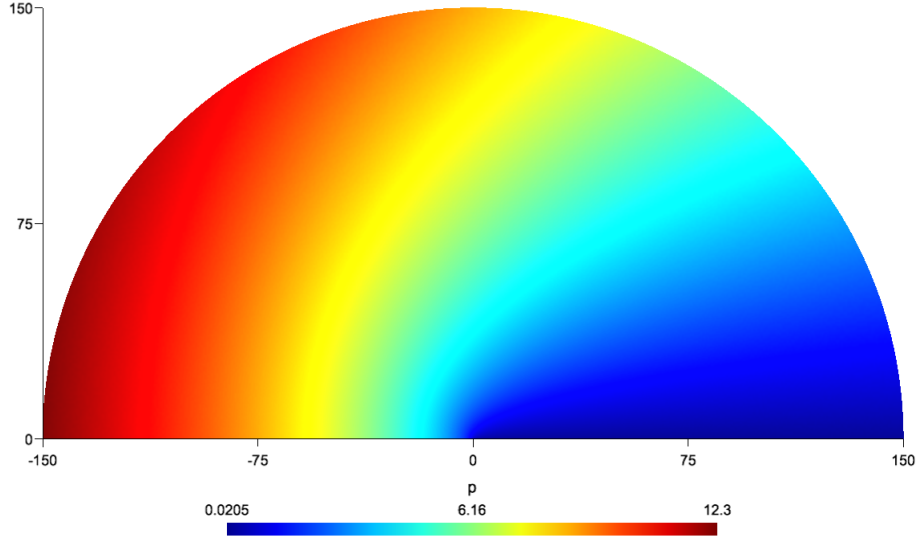
Remarque : On peut aussi obtenir la continuité en considérant p_α comme étant la solution du problème pénalisé

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \alpha \Delta p_\alpha & = & 0 \text{ dans } \Omega_i^R, \\ \partial_\nu p_\alpha & = & 0 \text{ sur } \Gamma_n^R, \\ \partial_\nu p_\alpha & = & -\alpha^{-1} p_\alpha \text{ sur } \Gamma_r^R, \\ p_\alpha + 2R \partial_\nu p_\alpha & = & 2Rg \text{ sur } \Gamma_i^R \end{array} \right.$$

et en utilisant les théorèmes 9.4 et 11.4 de [27].

La positivité des profils est confirmée par les simulations. On pourra l'observer sur la figure 2.9 par exemple.

On note $\mathcal{C}_{++}^{0,b}(\mathbb{R}_+)$ l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$, bornées et dont le minimum est strictement positif. Pour $\alpha_\bullet \in \mathcal{C}_{++}^{0,b}(\mathbb{R}_+)$, on rappelle que $p_{r_\bullet}$ est la solution du problème :


 FIGURE 2.9 – Profil d'impédance simulé p_r

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \Delta p_{r\bullet} = 0 \text{ dans } \Omega_i^R, \\ \partial_\nu p_{r\bullet} = 0 \text{ sur } \Gamma_n^R, \\ p_{r\bullet} + \alpha_\bullet \partial_\nu p_{r\bullet} = 0 \text{ sur } \Gamma_r^R, \\ p_{r\bullet} + 2R \partial_\nu p_{r\bullet} = 2Rg \text{ sur } \Gamma_i^R. \end{array} \right.$$

Proposition 2.4. 1. L'application $\alpha_\bullet \mapsto p_{r\bullet}$ est croissante de $\mathcal{C}_{++}^{0,b}(\mathbb{R}_+)$ dans $H^1(\Omega_i^R)$.
 2. L'application $\alpha_\bullet \mapsto c_\bullet^{(1)}$ est croissante de $\mathcal{C}_{++}^{0,b}(\mathbb{R}_+)$ dans $\mathbb{R}$.

Démonstration. 1. Soient $\alpha_\bullet, \alpha_o \in \mathcal{C}_{++}^{0,b}(\mathbb{R}_+)$ telles que $\alpha_\bullet \leq \alpha_o$, $p_{r\bullet}$ et p_{r_o} les solutions aux problèmes d'impédance de paramètres $\alpha_\bullet$ et α_o . On pose $p = p_{r_o} - p_{r\bullet}$; p vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta p = 0 \text{ dans } \Omega_i^R, \\ \partial_\nu p = 0 \text{ sur } \Gamma_n^R, \\ p + \alpha_o \partial_\nu p = -(\alpha_o - \alpha_\bullet) \partial_\nu p_{r\bullet} \text{ sur } \Gamma_r^R, \\ p + 2R \partial_\nu p = 0 \text{ sur } \Gamma_i^R. \end{array} \right. \quad (2.7)$$

Le lemme précédent et sa démonstration nous montrent que $p_{r\bullet}$ est continue - donc p aussi - et positive sur $\overline{\Omega_i^R}$. Or $p_{r\bullet} = -\alpha_\bullet \partial_\nu p_{r\bullet}$ sur Γ_r^R donc $-(\alpha_o - \alpha_\bullet) \partial_\nu p_{r\bullet} \geq 0$ sur Γ_r^R . Le théorème B.1 donne alors $p \geq 0$.

2. Immédiat d'après le point 1. et la définition de $c_\bullet^{(1)}$ (voir définition 2.4).

□

Une monotonie de la fonction $\beta \mapsto c_\beta^{(1)}$ a pu aussi être observée numériquement (voir figure 2.19) ; elle serait décroissante. Cependant, aucune monotonie n'a pu être démontrée ou observée pour la fonction de $\beta \mapsto p_{v,\beta}$, que ce soit sur Ω_i^R ou sur Γ_i^R . En effet, comme on peut le voir sur la figure 2.10, pour $\alpha = 2$, $\beta_1 = 0.5$, $\beta_2 = 2$, la différence $p_{v,2} - p_{v,1}$ change de signe sur Γ_i^R . Ceci interdit une éventuelle démonstration de la monotonie de $\beta \mapsto c_\beta^{(1)}$ de la même façon que pour la proposition 2.4 ci-dessus. Cette monotonie reste donc non démontrée et donc incertaine.

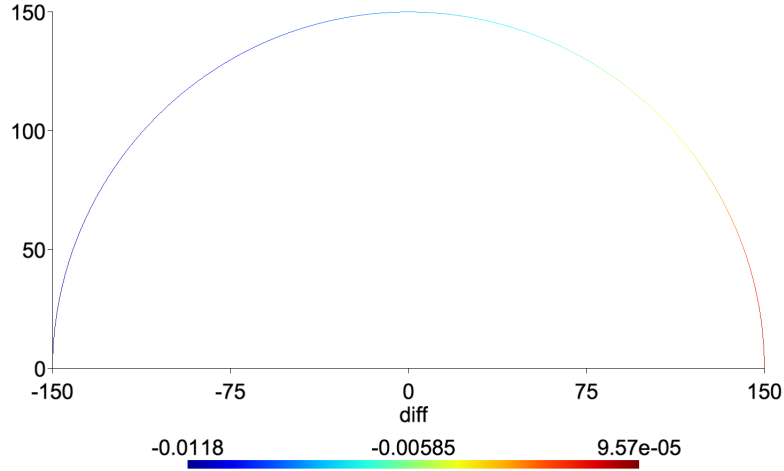


FIGURE 2.10 – Trace sur Γ_i^R de la différence entre deux profils Ventcel pour $\alpha = 2$, $\beta_1 = 0.5$, $\beta_2 = 2$.

Proposition 2.5. 1. L'application $\alpha_\bullet \mapsto p_{r_\bullet}$ est continue de $\mathcal{C}_{++}^{0,b}(\mathbb{R}_+)$ dans $H^1(\Omega_i^R)$.
 2. L'application $\alpha_\bullet \mapsto c_\bullet^{(1)}$ est continue de $\mathcal{C}_{++}^{0,b}(\mathbb{R}_+)$ dans $\mathbb{R}$.

Démonstration. 1. La formulation variationnelle de (2.7) est, pour tout $v \in H^1(\Omega_i^R)$,

$$\int_{\Omega_i} \nabla p \cdot \nabla v + \frac{1}{2R} \int_{\Gamma_i^R} p v + \int_{\Gamma_r^R} \frac{1}{\alpha_o} p v = \int_{\Gamma_r^R} (\alpha_o - \alpha_\bullet) \partial_\nu p_{r_\bullet} v.$$

En prenant $v = p$ et en appliquant les inégalités de Cauchy-Schwarz puis de trace, on aboutit à

$$\|\nabla p\|_{0,\Omega_i^R}^2 + \frac{1}{2R} \|p\|_{0,\Gamma_i^R}^2 + \left\| \frac{1}{\sqrt{\alpha_o}} p \right\|_{0,\Gamma_r^R}^2 \leq \|\alpha_o - \alpha_\bullet\|_{\infty,\Gamma_r^R} \|\partial_\nu p_{r_\bullet}\|_{0,\Gamma_r^R} \|p\|_{1,\Omega_i^R}.$$

Par ailleurs, puisque l'inégalité de Poincaré-Friedrichs A.1 assure que

$$\|p\|_{1,\Omega_i^R}^2 \leq C \left(\|\nabla p\|_{0,\Omega_i^R}^2 + \|p\|_{0,\Gamma_i^R}^2 \right),$$

on en déduit donc que

$$\|p\|_{1,\Omega_i^R}^2 \leq C \|\alpha_o - \alpha_\bullet\|_{\infty,\Gamma_r^R} \|\partial_\nu p_{r_\bullet}\|_{0,\Gamma_r^R} \|p\|_{1,\Omega_i^R}.$$

En utilisant la condition de Robin sur $\Gamma_{\mathbf{r}}^R : p_{\mathbf{r}\bullet} + \alpha_{\bullet} \partial_{\nu} p_{\mathbf{r}\bullet} = 0$, on aboutit à

$$\|\partial_{\nu} p_{\mathbf{r}\bullet}\|_{0,\Gamma_{\mathbf{r}}^R} = \left\| \frac{1}{\alpha_{\bullet}} p_{\mathbf{r}\bullet} \right\|_{0,\Gamma_{\mathbf{r}}^R} \leq C \|p_{\mathbf{r}\bullet}\|_{1,\Omega_{\mathbf{i}}^R},$$

d'où

$$\|p\|_{1,\Omega_{\mathbf{i}}^R}^2 \leq C \|\alpha_{\circ} - \alpha_{\bullet}\|_{\infty,\Gamma_{\mathbf{r}}^R} \|p_{\mathbf{r}\bullet}\|_{1,\Omega_{\mathbf{i}}^R} \|p\|_{1,\Omega_{\mathbf{i}}^R}.$$

Comme $\|p_{\mathbf{r}\bullet}\|_{1,\Omega_{\mathbf{i}}^R} \leq C \|g\|_{0,\Gamma_{\mathbf{i}}^R}$, on en déduit que

$$\|p\|_{1,\Omega_{\mathbf{i}}^R} \leq C \|\alpha_{\circ} - \alpha_{\bullet}\|_{\infty,\Gamma_{\mathbf{r}}^R},$$

et donc la continuité.

2. Il suffit de montrer la continuité de $\alpha_{\bullet} \mapsto I_{\bullet} = \int_0^{\pi} p_{\mathbf{r}\bullet}(r, \theta) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta$.

En utilisant les inégalités de Cauchy-Schwarz puis de trace et finalement le point 1, on obtient

$$|I_{\circ} - I_{\bullet}| \leq C \|\alpha_{\circ} - \alpha_{\bullet}\|_{\infty,\Gamma_{\mathbf{r}}^R},$$

d'où la continuité. □

Proposition 2.6. 1. L'application $\beta \mapsto p_{\mathbf{v},\beta}$ est continue de $\mathbb{R}_+$ dans $H^1(\Omega_{\mathbf{i}}^R) \cap H^1(\Gamma_{\mathbf{v}}^R)$.

2. L'application $\beta \mapsto c_{\beta}^{(1)}$ est continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$.

Démonstration. 1. Soient $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}_+$, $\beta_1 \leq \beta_2$ et $p_{\mathbf{v},1}$, $p_{\mathbf{v},2}$ les profils de Ventcel associés. On note $p = p_{\mathbf{v},2} - p_{\mathbf{v},1}$; il vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \Delta p = 0 \text{ dans } \Omega_{\mathbf{i}}^R, \\ \partial_{\nu} p = 0 \text{ sur } \Gamma_{\mathbf{n}}^R, \\ p + \alpha \partial_{\nu} p - \beta_2 \partial_{\tau}^2 p = -(\beta_2 - \beta_1) \partial_{\tau}^2 p_{\mathbf{v},1} \text{ sur } \Gamma_{\mathbf{v}}^R, \\ p(\mathbf{O}) = 0, \\ p(\mathbf{A}) + 2R \partial_{\tau} p(\mathbf{A}) = 0, \\ p + 2R \partial_{\nu} p = 0 \text{ sur } \Gamma_{\mathbf{i}}^R. \end{array} \right.$$

La formulation variationnelle de ce problème étant, pour tout $v \in \mathcal{V}_{\mathbf{v}}$,

$$\alpha \int_{\Omega_{\mathbf{i}}^R} \nabla p \cdot \nabla v + \int_{\Gamma_{\mathbf{v}}^R} p v + \beta^2 \int_{\Gamma_{\mathbf{v}}^R} \partial_{\tau} p \partial_{\tau} v + \frac{\beta_2}{2R} p(\mathbf{A}) v(\mathbf{A}) + \frac{\alpha}{2R} \int_{\Gamma_{\mathbf{i}}^R} p v = \int_{\Gamma_{\mathbf{v}}^R} (\beta_2 - \beta_1) \partial_{\tau}^2 p_{\mathbf{v},1} v.$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{\Gamma_v^R} (\beta_2 - \beta_1) \partial_\tau^2 p_v^1 v \right| &= |\beta_2 - \beta_1| \left| \partial_\tau p_{v,1}(A) v(A) - \int_{\Gamma_v^R} \partial_\tau p_{v,1} \partial_\tau v \right| \\
 &= |\beta_2 - \beta_1| \left| \frac{1}{2R} p_{v,1}(A) v(A) - \int_{\Gamma_v^R} \partial_\tau p_{v,1} \partial_\tau v \right| \\
 &\leq C |\beta_2 - \beta_1| \|p_{v,1}\|_{\mathcal{V}_v} \|v\|_{\mathcal{V}_v} \\
 &\leq C |\beta_2 - \beta_1| \|g\|_{0, \Gamma_1^R} \|v\|_{\mathcal{V}_v}.
 \end{aligned}$$

En prenant $v = p$ et en utilisant l'inégalité de Poincaré-Friedrichs A.1, on aboutit à

$$\|p\|_{\mathcal{V}_v} \leq C |\beta_2 - \beta_1|$$

et on a donc la continuité.

2. Immédiat par 1..

□

Enfin, énonçons un dernier lemme sur p_r dont nous aurons besoin par la suite.

Lemme 2.1. *On a $\partial_x p_r(0^+, 0) = -\infty$.*

Démonstration. On rappelle que p_r est solution du problème posé dans la définition 2.1 avec $\alpha_\bullet$ constante. Un développement en parties régulière-singulière similaire à ceux construits au chapitre 1 donne le comportement de p_r à proximité de l'origine :

$$p_r \sim_0 p_r(0, 0) + cs,$$

où $c \in \mathbb{R}$ est une constante et, d'après [20], s est une singularité de la forme

$$s(r, \theta) = r[(\pi - \theta) \sin \theta + \cos \theta \log r].$$

En utilisant le fait que

$$\partial_x = \cos \theta \partial_r - \frac{\sin \theta}{r} \partial \theta \quad \text{et} \quad \partial_y = \sin \theta \partial_r + \frac{\cos \theta}{r} \partial \theta,$$

on aboutit à

$$\partial_x s = \log r + 1 \quad \text{et} \quad \partial_y s = \pi - \theta.$$

Puisque, sur Γ_r , $\partial_y p_r = -\partial_\nu p_r = \alpha^{-1} p_r \geq 0$ d'après la proposition 2.3 – et que $\partial_y s|_{\theta=0} = \pi$, on en déduit que $c \geq 0$. La théorie des problèmes à coin nous dit que l'on peut dériver le développement asymptotique mentionné ci-dessus, on a donc que

$$\partial_x p_r|_{\Gamma_r} \sim_0 c \log x \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty.$$

□

Remarque : Bien que nous ne soyons pas parvenu à le prouver, les simulations ont constamment montré que $\partial_x p_r(x, 0) \leq 0$ sur Γ_r . Cependant, le lemme ci-dessus s'avère suffisant.

2.3 Mises en œuvre et résultats des stratégies

2.3.1 Condition d'impédance de type Robin à coefficient variable et correction de l'erreur L^2

Idée générale

Commençons par rappeler que nous nous intéressons ici au problème d'impédance suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\alpha \Delta v^\epsilon = f_i \text{ dans } \Omega_i, \\ \partial_\nu v^\epsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_n, \\ v^\epsilon + \epsilon \alpha_\bullet \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \partial_\nu v^\epsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_r, \end{array} \right. \quad (2.8)$$

où $\alpha_\bullet$ est représenté sur la figure 2.11.

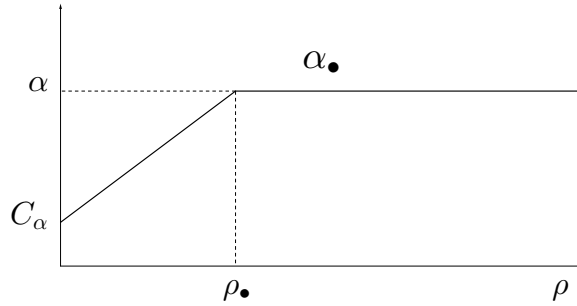


FIGURE 2.11 – Fonction $\alpha_\bullet$.

Notre but est de déterminer s'il existe un paramètre $\rho_\bullet$ de la fonction $\alpha_\bullet$ afin que $c^{(1)} = d^{(1)}$.

Remarquons que l'application $\rho_\bullet \mapsto \alpha_\bullet$ est continue et décroissante. Par ailleurs, rappelons que nous avons défini $c_\bullet^{(1)}$ dans la définition 2.4 à l'aide de la formule

$$c_\bullet^{(1)} = \frac{2}{\pi \sqrt{R}} \int_{\Gamma_i^R} (p_{r_\bullet} - s^0 - p_r^{0(1)}) \sin \left(\frac{\theta}{2} \right). \quad (2.9)$$

Ainsi, par application directe des propositions 2.4 ($\alpha_\bullet \mapsto c_\bullet^{(1)}$ croissante) et 2.5 ($\alpha_\bullet \mapsto c_\bullet^{(1)}$ continue) et en vertu de ce qui vient d'être dit, nous en déduisons que $\rho_\bullet \mapsto c_\bullet^{(1)}$ est continue et décroissante.

La décroissance a été confirmée numériquement comme on peut le voir sur la figure 2.12. De plus, on peut aussi voir sur ce graphe que $d^{(1)}$ est dans l'intervalle image de l'application ;

si ce fait pouvait être prouvé en toute généralité, alors l'existence d'une valeur de $\rho_\bullet$ satisfaisant $c_\bullet^{(1)} = d^{(1)}$ – et donc une augmentation de la vitesse de convergence – serait garantie.

L'idée est donc de montrer qu'il existe un $\rho_{\bullet,1}$ et un $\rho_{\bullet,2}$ – et donc un $\alpha_{\bullet,1}$ et un $\alpha_{\bullet,2}$ – tels que les coefficients $c_\bullet^{(1)}$ associés : $c_{\bullet,1}^{(1)}$ et $c_{\bullet,2}^{(1)}$ vérifient l'encadrement suivant :

$$c_{\bullet,2}^{(1)} \leq d^{(1)} \leq c_{\bullet,1}^{(1)};$$

le théorème des valeurs intermédiaires nous garantirait alors l'existence d'un $\rho_\bullet$ tel que $c_\bullet^{(1)} = d^{(1)}$.

La figure 2.12 nous montre que, pour $\rho_\bullet = 0$, i.e. $\alpha_\bullet = \alpha$, on a $c_\bullet^{(1)} \geq d^{(1)}$; il est donc naturel de considérer $\rho_{\bullet,1} = 0$. De même, la figure 2.12 montre que $c_\bullet^{(1)} \leq d^{(1)}$ lorsque $\rho_\bullet$ est grand ; nous considérerons donc naturellement $\rho_{\bullet,2} = +\infty$, i.e. $\alpha_\bullet = C_\alpha$. Notons que lorsque $\rho_\bullet = +\infty$, le problème d'impédance devient un autre problème d'impédance de constante C_α .

Remarque : Si $C_\alpha = 0$, ce nouveau problème d'impédance est en fait le cas limite du problème de transmission lorsque ϵ tend vers 0 :

$$\begin{cases} -\alpha \Delta v &= f_i \text{ dans } \Omega_i, \\ \partial_\nu v &= 0 \text{ sur } \Gamma_n, \\ v &= 0 \text{ sur } \Gamma_r. \end{cases} \quad (2.10)$$

Les profils associés vérifient :

$$\begin{cases} -\alpha \Delta p^j &= 0 \text{ dans } \Omega_i, \\ \partial_\nu p^j &= 0 \text{ sur } \Gamma_n, \\ p^j &= 0 \text{ sur } \Gamma_r, \\ p^j &\sim s^j \text{ lorsque } r \rightarrow +\infty; \end{cases} \quad (2.11)$$

dont

$$s^j + \sum_{n=-\infty}^{j-1} c^{j(n)} s^n$$

est solution. Il n'y a cependant pas *a priori* unicité des $c^{j(n)}$; nous ne pouvons donc pas approcher $c^{0(1)}$ dans ce cas-là.

Supposons $\rho_\bullet \in \{0, +\infty\}$, au vu des définitions de $c^{(1)}$ et $d^{(1)}$ (voir définition 2.4), une relation d'ordre entre $p_{r_\bullet}$ et q sur Γ_i^R aurait suffi. Toutefois, nous avons privilégié l'obtention d'un résultat plus fort : une relation d'ordre entre $p_{r_\bullet}$ et q sur Ω_i^R ; pour cela nous devons utiliser les principes du maximum énoncés en annexe B (voir théorèmes B.1 et B.2).

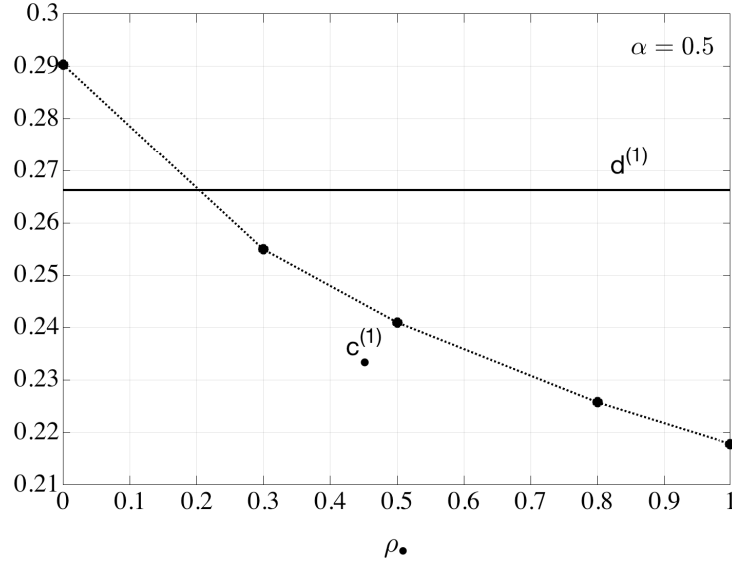
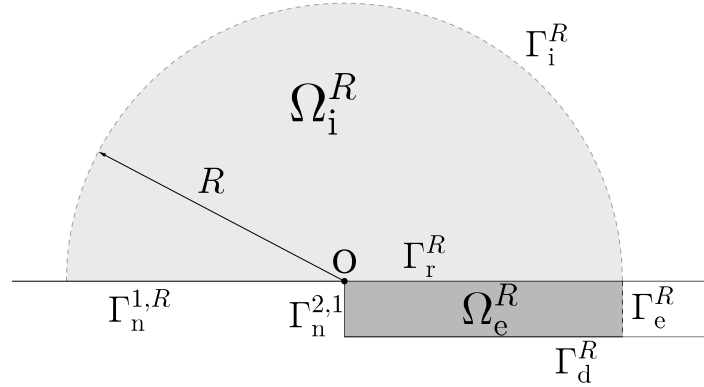

 FIGURE 2.12 – Évolution de $c^{(1)}$ en fonction de ρ_0 .


FIGURE 2.13 – Domaine des profils du problème de transmission tronqué

Comparaison de $p_{r_\bullet}$ et q sur Ω_i^R

Pour comparer $p_{r_\bullet}$ et q sur Ω_i^R , le moyen le plus naturel consiste à comparer $p_{r_\bullet}$ et q sur Γ_r^R (puisqu'ils vérifient des conditions identiques sur les autres bords de Ω_i^R) puis appliquer un principe du maximum B.1. Si l'on fait l'hypothèse $p_{r_\bullet} \geq q$ (ou $p_{r_\bullet} \leq q$) sur Γ_r^R , alors par application directe du théorème B.1 avec condition de Dirichlet sur Γ_r^R , alors on a $p_{r_\bullet} \geq q$ (ou $p_{r_\bullet} \leq q$) sur Ω_i^R et donc sur Γ_i^R . L'hypothèse n'a pu être confirmée théoriquement ; cependant, elle est aisément vérifiable numériquement.

Dans le cas du problème de transmission (1.16) — i.e. avec une condition de Neumann sur $\Gamma_n^{2,1}$ sur la figure 2.13 —, l'hypothèse a été infirmée numériquement. Cependant, lorsque nous avons effectué le développement asymptotique de la solution du problème de transmission (voir sous-section 1.2.2), nous avons dilaté la couche de taille ϵ en une couche de taille 1 ; toutefois, comme nous l'avons remarqué à l'époque, nous aurions aussi pu la dilater en une couche de taille ϵ_0 — ainsi la couche Ω_e^R du profil q serait aussi de taille ϵ_0 . Une question se pose alors : y a-t-il des ϵ_0 pour lesquels notre hypothèse est confirmée ; numériquement, la réponse est positive pour certaines valeurs de ϵ_0 strictement inférieures à 1 (0.5 par exemple).

Dans le cas du problème de transmission (1.32) — i.e. avec une condition de Dirichlet sur $\Gamma_n^{2,1}$ sur la figure 2.13 —, l'hypothèse a été confirmée numériquement aussi bien pour une couche d'épaisseur 1 que $\epsilon_0 < 1$.

Comparaison de $p_{r\bullet}$ et q sur Ω^R

Puisque une comparaison théorique directe sur Ω_i^R n'a pu être effectuée, nous avons alors envisagé de construire un prolongement $p_{r\bullet}$ à Ω_e^R afin de comparer les deux profils sur le domaine du profil du problème de transmission : Ω^R . Notons $p_{r\bullet,i} = p_{r\bullet}$ l'approximation du profil du problème d'impédance sur Ω_i^R et $p_{r\bullet,e}$ son prolongement à Ω_e^R .

Un prolongement naturel pour le cas $\alpha_\bullet = \alpha$

Supposons $\alpha_\bullet = \alpha$. Remarquons tout d'abord que si $p_{r\bullet,i}$ est identiquement nul sur Γ_r^R (et assez régulier dans son voisinage), alors son prolongement par 0 à Ω_e^R se compare à q_e par principe du maximum et les profils de transmission et d'impédance sont donc confondus.

Supposons maintenant $p_{r\bullet,i}$ non identiquement nul sur Γ_r^R . Le prolongement doit être construit de façon à respecter les conditions de transmission sur Γ_r^R . Considérons le prolongement à Ω_e^R suivant :

$$p_{r\bullet,e}(x, y) = p_{r\bullet,i}(x, 0) + \alpha y \partial_y p_{r\bullet,i}(x, 0) = (1 + y) p_{r\bullet,i}(x, 0).$$

On a ainsi, sur Γ_r^R , $p_{r\bullet,e}(x, 0) = p_i(x, 0)$ et $\partial_\nu p_{r\bullet,e}(x, 0) = -\alpha \partial_\nu p_{r\bullet,i}(x, 0)$, autrement dit, les conditions de transmissions sont bien respectées. Il faut maintenant s'intéresser aux signes des seconds membres du problème vérifiés par $p_{r\bullet,e}$ sur Ω_e^R afin de pouvoir les comparer à ceux de q et utiliser le principe du maximum B.1.

Γ_e^R : Etudions le signe de

$$\frac{1}{2R} p_{r\bullet,e}(R, y) + \partial_\nu p_{r\bullet,e}(R, y).$$

On a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2R} p_{r\bullet,e}(R, y) + \partial_\nu p_{r\bullet,e}(R, y) &= \left[\frac{1}{2R} p_{r\bullet,i}(R, 0) + \partial_\nu p_{r\bullet,i}(R, 0) \right] (1 + y) \\ &= g(R, 0)(1 + y) \\ &= 0 \\ &= \frac{1}{2R} q_e(R, y) + \partial_\nu p_e(R, y). \end{aligned}$$

Γ_d^R : On a immédiatement $p_{r\bullet,e} = 0 = q_e$.

$\Gamma_n^{2,1}$: Nous avons ici deux cas à traiter : le problème de transmission (1.16) avec la condition de Neumann sur $\Gamma_n^{2,1}$ dans la définition de q ; et le problème de transmission (1.32) avec la condition de Dirichlet sur ce même bord.

— Avec la condition de Neumann, le lemme 2.1 nous permet d'affirmer que $\partial_x p_{r\bullet,i}(0, 0) \leq 0$; on a donc $\partial_\nu p_{r\bullet,e} \geq 0 = \partial_\nu q_e$.

- Avec la condition de Dirichlet, on a $p_{r_\bullet,e}(0, y) = (1 + y)p_{r_\bullet,i}(0, 0) \geq 0 = q_e$ puisque $p_{r_\bullet,i}(0, 0) \geq 0$ d'après la proposition 2.3.

Ω_e^R : Il s'agit ici d'étudier le signe du Laplacien de $p_{r_\bullet,e}$. On a

$$\partial_y^2 p_{r_\bullet,e} = 0$$

et

$$\partial_x^2 p_{r_\bullet,e}(x, y) = (1 + y)\partial_x^2 p_{r_\bullet,i}(x, 0).$$

Les simulations tendent à montrer que $\partial_x^2 p_{r_\bullet,i}(x, 0) \geq 0$ puisque $x \mapsto p_{r_\bullet,i}^0(x, 0)$ serait convexe. On aurait donc $-\Delta p_{r_\bullet,e} \leq 0$. Cependant, rien ne nous permet de le prouver.

Puisque que, pour que le principe du maximum opère, il faut que $-\Delta p_{r_\bullet,e} \geq 0 = -\Delta q_e$, il est nécessaire d'envisager un autre prolongement.

Un prolongement moins naturel pour le cas $\alpha_\bullet = \alpha$

Considérons le prolongement légèrement modifié :

$$p_{r_\bullet,e}(x, y) = (1 + y)p_{r_\bullet,i}(x, 0) - cy^2$$

avec $c = \max_{\Gamma_f^R} \partial_x^2 p_{r_\bullet,i}$.

Remarquons tout d'abord que, en reprenant la démonstration du lemme 2.1, on aboutit au fait que $\partial_x^2 p_{r_\bullet,i}(x, 0) = r^{-1}$ et que donc $c = +\infty$, autrement dit que nous ne pouvons pas poser ce prolongement. Cependant, dans l'optique de rendre la démarche de construction du prolongement accessible, nous ferons fi cette information compromettante et supposons c fini ; nous reviendrons au cas c infini plus tard. Remarquons ensuite et alors que, puisque c ne dépend pas de x , ce prolongement vérifie les mêmes conditions de bords sur $\Gamma_n^{2,1}$ et Γ_e^R que le prolongement précédent. Par ailleurs, comme $1 + y \in [0, 1]$ sur Ω_e^R , on a

$$\Delta p_{r_\bullet,e}(x, y) = (1 + y)\partial_x^2 p_{r_\bullet,i}(x, 0) - 2c \leq 0.$$

Nous avons donc le signe voulu pour le laplacien. Reste à voir quel est le signe de la condition de bord sur Γ_d^R .

c < 0 C'est le cas favorable. En effet, on a alors $p_{r_\bullet,e} \geq 0$ et le principe du maximum nous dit alors que $p_{r_\bullet} \geq q$.

c > 0 C'est le cas défavorable. En effet, il est clair que dans ce cas $p_{r_\bullet,e}$ vaut $-c$ sur Γ_d^R et donc que le principe du maximum ne peut s'appliquer en l'état à cause du changement de signe.

Cependant, nous avons vu au paragraphe précédent où nous comparions $p_{r_\bullet}$ et q sur Ω_i^R que cette étude pouvait aussi s'effectuer sur une couche d'épaisseur ϵ_0 en lieu et place d'une couche d'épaisseur 1 (cf début du développement asymptotique de la solution du problème de transmission, sous-section 1.2.2). Une question se pose alors naturellement

ici : existe-t-il ϵ_0 tel que l'on puisse construire un prolongement avec $c > 0$? La réponse est oui comme nous allons le voir ci-dessous.

Soit $\gamma > 0$. Montrons que, pour tout $x \in [0, R]$, il existe $\epsilon(x) \in]-1, 0[$ tel que

$$p_{r_\bullet, e}(x, \epsilon(x)) = \gamma$$

(voir figure 2.14).

Soit $x \in [0, R]$. On veut résoudre

$$-c\epsilon(x)^2 + p_{r_\bullet, i}(x, 0)\epsilon(x) + p_{r_\bullet, i}(x, 0) - \gamma = 0.$$

On veut que le discriminant Δ_1 de ce polynôme soit strictement positif. En effet, si Δ_1 est nul, on a alors

$$\epsilon(x) = \frac{p_{r_\bullet, i}(x, 0)}{2c} \notin]-1, 0[.$$

Remarquons que Δ_1 est lui même un polynôme en $p_{r_\bullet, i}(x, 0)$:

$$\Delta_1 = p_{r_\bullet, i}(x, 0)^2 + 4cp_{r_\bullet, i}(x, 0) - 4c\gamma.$$

Notons Δ_2 le discriminant de ce polynôme. On a $\Delta_2 = 16(c^2 + c\gamma) > 0$, donc on aura $\Delta_1 > 0$ dès que $p_{r_\bullet, i}(x, 0) < p_1$ ou $p_{r_\bullet, i}(x, 0) > p_2$ où

$$p_{1,2} = -2 \left(c \pm \sqrt{c^2 + c\gamma} \right).$$

On a clairement que $p_1 < 0$ et $p_2 > 0$. Comme γ est fixé arbitrairement, on peut le choisir assez petit de façon que $p_{r_\bullet, i}(x, 0) > p_2$. On a alors $\Delta_1 > 0$ et les racines du polynôme sont

$$\epsilon_{1,2}(x) = \frac{p_{r_\bullet, i}(x, 0) \mp \sqrt{\Delta_1}}{2c}.$$

Il est alors facile de voir que $\epsilon_1(x) \in]-1, 0[$. Posons maintenant $\epsilon_0 = \min_{x \in [0, R]} |\epsilon_1(x)|$ et notons encore $\Gamma_d^{R_0}$ le bord $[0, R] \times \{-\epsilon_0\}$ (voir figure 2.15). On a ainsi $p_{r_\bullet, e} > 0$ sur $\Gamma_d^{R_0}$ et le principe du maximum nous dit que $p_{r_\bullet} > q$.

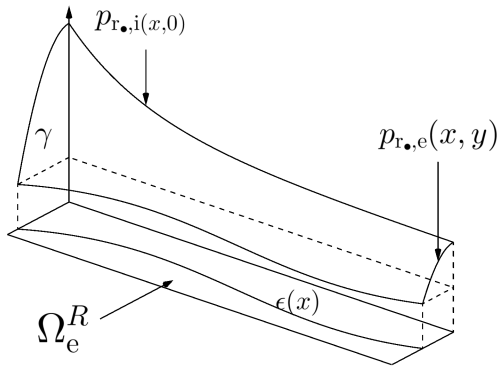
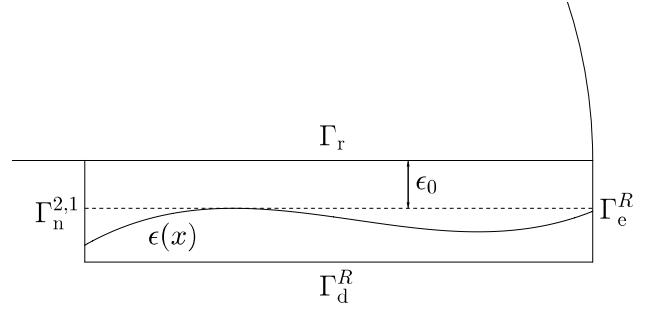
Remarque : on aurait aussi pu étendre par γ notre prolongement sur $[-1, \epsilon(x)]$, cependant rien ne nous aurait garanti la régularité nécessaire au point de raccord pour pouvoir calculer le laplacien.

À présent, voyons comment utiliser ce qui vient d'être fait tout en tenant compte du fait que $c = +\infty$.

Un prolongement encore moins naturel pour le cas $\alpha_\bullet = \alpha$

L'idée est donc de se ramener au cas précédent en arrivant à faire en sorte que c soit fini. Pour cela, le plus simple est de poser, pour un $\eta > 0$ à déterminer,

$$c = \max_{[\eta, R]} \partial_x^2 p_{r_\bullet, i}(x, 0).$$


 FIGURE 2.14 – Prolongement de $p_{r,\bullet}$ à Ω_e^R

 FIGURE 2.15 – ϵ_0 et la fonction ϵ

Ainsi, le problème en 0 est évité et c est bien fini. Ceci signifie que la comparaison ne va plus s'effectuer sur l'intégralité de la couche mais seulement sur une sous-partie de celle-ci : $\Omega_e^{R,\eta}$ comme on peut le voir sur la figure 2.16.

D'après la proposition 2.3, on a $p_{r,\bullet}(x, 0) \geq 0$ pour $x \in [0, R]$; par ailleurs, le lemme 2.1 — plus particulièrement sa démonstration — nous dit que $p_{r,\bullet}$ est strictement décroissante dans un voisinage à droite de 0. On en déduit que $p_{r,\bullet}(0, 0) > 0$.

Nous avons à présent deux cas.

- Si nous sommes dans le cas du problème (1.32), la condition de Dirichlet sur $\{0\} \times [-1, 0]$ nous donne $p_{r,\bullet}(0, 0) > q(0, 0)$, ce que nous voulons.
- Si nous sommes dans le cas du problème (1.16), la condition de Neumann sur $\{0\} \times [-1, 0]$ ne permet de conclure pas que $p_{r,\bullet}(0, 0) > q(0, 0)$. Nous sommes donc obligés d'en faire l'hypothèse si nous voulons poursuivre dans ce cas.

Puisque $p_{r,\bullet}(0, 0) > q(0, 0)$, par continuité nous pouvons déduire l'existence de $\eta > 0$ tel que, pour tout $x \in [0, \eta]$, tout $y \in [-1, 0]$, on a

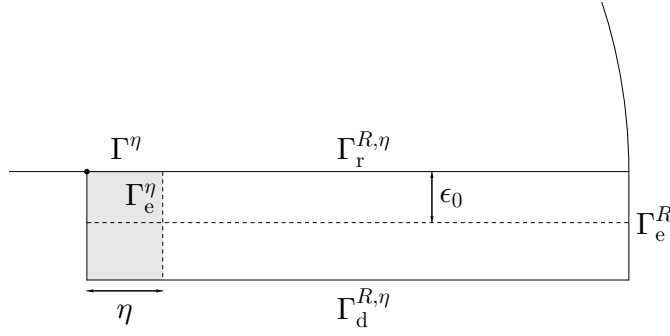
$$p_{r,\bullet}(x, 0) > q_e(x, y).$$

Notons $\Gamma^\eta = [0, \eta]$ et $\Gamma_e^\eta = \{\eta\} \times [-1, 0]$. Par définition de η nous avons alors $p_{r,\bullet} > q$ sur Γ^η .

Dans le paragraphe précédent, nous nous sommes attardées sur le cas où q était posé non pas sur une couche d'épaisseur 1 mais ϵ_0 ; à partir de maintenant, notons q_1 l'approximation du profil de transmission sur une couche d'épaisseur 1 et q_0 sur une couche d'épaisseur ϵ_0 . Puisque $\epsilon_0 < 1$, on a $q_{1,e}(x, -\epsilon_0) \geq 0 = q_{0,e}(x, -\epsilon_0)$; par ailleurs, comme q_1 et q_0 vérifient les mêmes conditions sur Ω^R et ses autres bords, l'application du principe du maximum B.1 nous dit que $q_1 > q_0$ pour tout $\epsilon_0 < 1$. Nous en déduisons que, pour tout $\epsilon_0 < 1$, nous avons $p_{r,\bullet} > q_0$ sur Γ^η .

Nous prolongeons ensuite $p_{r,\bullet}$ à la couche $\Omega_e^{R,\eta}$ à l'aide du prolongement vu au paragraphe précédent :

$$p_{r,\bullet,e}(x, y) = (1 + y)p_{r,\bullet,i}(x, 0) - cy^2$$


 FIGURE 2.16 – Couche privée d’une sous-couche d’épaisseur η

avec $c = \max_{\Gamma_r^{R,\eta}} \partial_x^2 p_{r,\bullet,i}$. Comme nous l’avons vu, nous pouvons déterminer l’existence d’un ϵ_0 (qui depend donc ici de η) tel que les conditions sur $\Omega_e^{R,\eta}$ et ses bords soient satisfaisantes, notamment $p_{r,\bullet,e} > q_{0,e}$ sur Γ_e^η . L’application du principe du maximum nous donne alors que $p_{r,\bullet} > q_0$ sur $\Omega^{R,\eta}$.

Enfin, puisque $p_{r,\bullet} > q_{1,e} \geq q_{0,e}$ sur $\Omega_e^R \setminus \Omega_e^{R,\eta}$, on en déduit que $p_{r,\bullet} > q_0$ sur Ω^R , ce que nous voulions.

Remarque : les simulations indiquent que la relation d’ordre entre $c_\bullet^{(1)}$ et $d^{(1)}$ semble encore être valable avec la couche d’épaisseur 1 et pas seulement avec une couche d’épaisseur $\epsilon_0 < 1$.

De la possibilité d’étendre le prolongement précédent au cas $\alpha_\bullet = C_\alpha$

Il faudrait maintenant prouver qu’il existe un $\rho_\bullet$ tel que $d^{(1)} > c_\bullet^{(1)}$. On obtiendrait ainsi l’encadrement de $d^{(1)}$ par deux valeurs de la fonction $\rho_\bullet \mapsto c_\bullet^{(1)}$ et l’existence d’un $\rho_\bullet$ tel que $c_\bullet^{(1)} = d^{(1)}$.

Pour cela, intéressons-nous au comportement à l’infini de $\rho_\bullet \mapsto \alpha_\bullet$. On a $\alpha_\bullet \rightarrow C_\alpha$ lorsque $\rho_\bullet \rightarrow +\infty$. Nous avons encore une fois deux cas : le problème de transmission (1.16) avec la condition de Neumann sur $\Gamma_n^{2,1}$ dans la définition de q ; et le problème de transmission (1.32) avec la condition de Dirichlet sur ce même bord.

- Si on a une condition de Neumann, on peut alors avoir $q_e(0,0) > 0$ et donc, grâce à un prolongement analogue à celui construit ci-dessus, prolonger la solution du problème d’impédance ayant pour condition sur Γ_r

$$p + C_\alpha \partial_\nu p = 0$$

de façon à ce que cette dernière soit inférieure à celle du problème de transmission, modulo le choix d’un C_α adéquat et l’hypothèse supplémentaire faite dans le cas $\alpha_\bullet = \alpha$.

- Si on a une condition de Dirichlet, la seule possibilité de construire un prolongement de $p_{r,\bullet}$ à Ω_e^R qui vérifie $p_{r,\bullet,e} \leq q$ sur Ω_e^R est d’avoir $p_{r,\bullet,e} \leq 0$ sur $\Gamma_n^{2,1}$. Cela impliquerait donc d’avoir $p_{r,\bullet,i}(0,0) = 0$ puisque, d’après la proposition 2.3, on sait que $p_{r,\bullet,i} \geq 0$ sur

Ω_i^R . Or nous avons vu que pour $C_\alpha \neq 0$ on a $p_{r_\bullet, i}(0, 0) > 0$; cela compromet donc l'idée de ce prolongement dans ce cas.

Reste à voir pour $C_\alpha = 0$; nous comparerions donc le profil du problème de transmission au profil du problème limite 2.11. Or on a vu qu'il n'y a unicité pas des coefficients — dont $c_\bullet^{(1)}$ fait partie — du développement asymptotique du profil limite, ce qui pose la question l'unicité de la limite de la fonction $\rho_\bullet \mapsto c_\bullet^{(1)}$.

Retour à une comparaison sur Ω_i^R pour le cas $\alpha_\bullet = C_\alpha$

C'est finalement le lemme qui nous donne l'existence de la borne inférieure de l'encadrement souhaité, à la fois pour le problème (1.16) et le problème (1.32).

Lemme 2.2. *Il existe $C_\alpha > 0$ et $\rho_\bullet > 0$ tel que $c_\bullet^{(1)} < d^{(1)}$.*

Démonstration. Comme nous l'avons vu précédemment, si $\rho_\bullet \rightarrow +\infty$, la condition de Robin sur Γ_i^R devient $p_{r_\bullet} + C_\alpha \partial_\nu p_{r_\bullet} = 0$ et si $C_\alpha \rightarrow 0$, alors $p_{r_\bullet} \rightarrow s^0$ dans L^∞ (et H^1 ?). Par ailleurs, par principe du maximum on a $q \geq s^0$ sur Ω_i^R .

Les formules d'approximations de $c^{(1)}$ et $d^{(1)}$ posées dans la définition 2.4 peuvent l'être avec $R - \delta$, $\delta > 0$, en lieu et place de R . Le fait de calculer $c^{(1)}$ et $d^{(1)}$ à partir de Γ_i^R a pour avantage un certain confort lors de la mise en œuvre numérique mais rien ne contraint à le faire : $c^{(1)}$ et $d^{(1)}$ fourniront de bonnes approximations de $c^{(1)}$ et $d^{(1)}$ tant que nous pourrons les calculer sur un rayon grand. Une question se pose toutefois : pourquoi avons-nous besoin d'introduire le paramètre δ ? Pour pouvoir répondre à cette question, il nous faut d'abord poursuivre quelque peu la démonstration.

On note $c_{\bullet, \delta}^{(1)}$ et $d_\delta^{(1)}$ les approximations de $c^{(1)}$ et $d^{(1)}$ calculées sur un rayon $R - \delta$. De même on note $c_{0, \delta}^{(1)}$ l'approximation de $c^{(1)}$ sur un rayon $R - \delta$ lorsque $p_{r_\bullet} \rightarrow s^0$.

Comme $q \geq s^0$, on a que $d_\delta^{(1)} \geq c_{0, \delta}^{(1)}$. En effet, comme α est fixé (ce sont C_α et $\rho_\bullet$ qui passent à la limite), le terme $p_{r_\bullet}^{(1)}$ ne disparaît pas de la définition de $c_{0, \delta}^{(1)}$ et on peut bien comparer les intégrales définissant $d_\delta^{(1)}$ et $c_{0, \delta}^{(1)}$.

Par ailleurs, $q - s^0$ étant harmonique, soit elle est constante, soit elle n'admet pas de minimum global à l'intérieur de Ω_i^R . Puisque q et s^0 vérifient la même condition de bord sur Γ_i^R mais avec des seconds membres différents, on en déduit que $q - s^0$ n'est pas constante. Elle n'admet donc pas de minimum global. Comme $q \geq s^0$, on en déduit que $q > s^0$ dans Ω_i^R et donc sur $\{z \in \Omega_i^R : |z| = R - \delta\}$. Voici la raison de l'apparition de δ , il s'agit de retourner à l'intérieur du domaine afin d'appliquer ce principe de comparaison puis en déduire que $d_\delta^{(1)} > c_{0, \delta}^{(1)}$.

Par convergence uniforme de $c_{\bullet, \delta}^{(1)}$ vers $c_{0, \delta}^{(1)}$ lorsque C_α tend vers 0 et $\rho_\bullet$ vers $+\infty$, on déduit qu'il existe $C_\alpha > 0$ et $\rho_\bullet$ tels que $d^{(1)} \geq c_\bullet^{(1)}$. $\square$

Mise en œuvre numérique

Concernant la mise en œuvre numérique, les résultats s'avèrent satisfaisants. Nous avons toujours observé que $c_{\bullet}^{(1)} \geq d^{(1)}$ pour $\rho_{\bullet} = 0$ et été capables de trouver aisément une valeur de $\rho_{\bullet}$ telle que $c_{\bullet}^{(1)} \leq d^{(1)}$. Ainsi grâce à une méthode de dichotomie, nous avons été en mesure de déterminer des valeurs de $\rho_{\bullet}$ telles que l'erreur commise entre $c_{\bullet}^{(1)}$ et $d^{(1)}$ soit inférieure à une tolérance fixée (10^{-6} dans les simulations).

Nous avons alors pu observer l'évolution de la vitesse de convergence de la solution du problème avec condition d'impédance à coefficient variable vers celle du problème transmission en fonction de $\rho_{\bullet}$ dans un voisinage de la valeur calculée de $\rho_{\bullet}$ à l'aide des profils. Comme l'illustrent les figures 2.17 (pour le problème de transmission (1.16)) et 2.18 (pour le problème de transmission (1.32)), nous avons pu constater une augmentation de la vitesse de convergence dans le voisinage du $\rho_{\bullet}$ (pour la figure 2.17, on a $\rho_{\bullet} \simeq 0.2$ d'après la figure 2.12; pour la figure 2.18, on a $\rho_{\bullet} \simeq 38$) d'environ 1 à un peu près 1.5, ce que nous avons prédit théoriquement; et ce pour diverses conditions initiales. De ce point de vue, la méthode est donc valide.

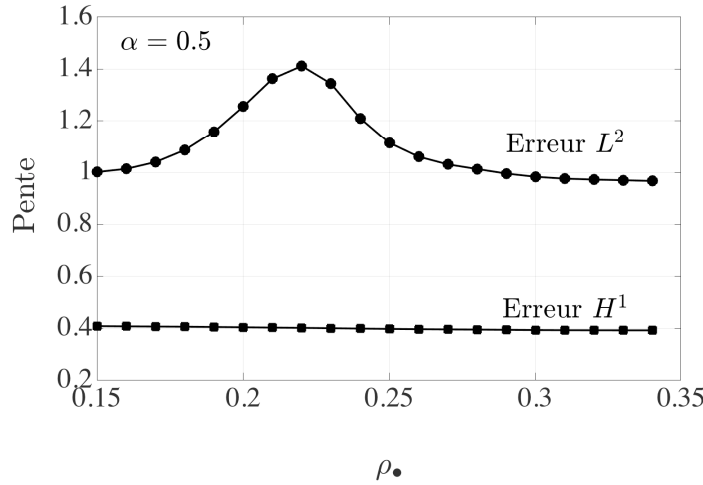


FIGURE 2.17 – Évolution de la vitesse de convergence entre impédance et transmission en fonction de $\rho_{\bullet}$.

Pour la mise en pratique de la méthode, i.e. de trouver le $\rho_{\bullet}$ des profils, il suffit de trouver une valeur de $\rho_{\bullet}$ tel que $d^{(1)} \geq c_{\bullet}^{(1)}$. En effet, on sait déjà que $c^{(1)} \geq d_{\bullet}^{(1)}$ pour $\rho_{\bullet} = 0$ (i.e. $\alpha_{\bullet} = \alpha$). Puis l'on procède par dichotomie.

Données utilisées pour les figures

Les figures 2.17 et 2.18 ont été obtenues avec les données suivantes : rayon du demi-disque Ω_i : $R_{\Omega_i} = 2$; épaisseur de la couche mince Ω_e^{ϵ} variant entre 0,03 et 0,12 avec un pas de 0,01; éléments du maillage : environ 82500 triangles; $\alpha = 0,5$; seconds membres : $f_i = y^3 \sin([R_{\Omega_i} - r]^2)$ et $f_e = 0$. D'autres valeurs de α , seconds membres et raffinement de maillages ont aussi été testés. On a ensuite appliqué l'algorithme ci-dessous avant de traiter les données recueillies sur Matlab;

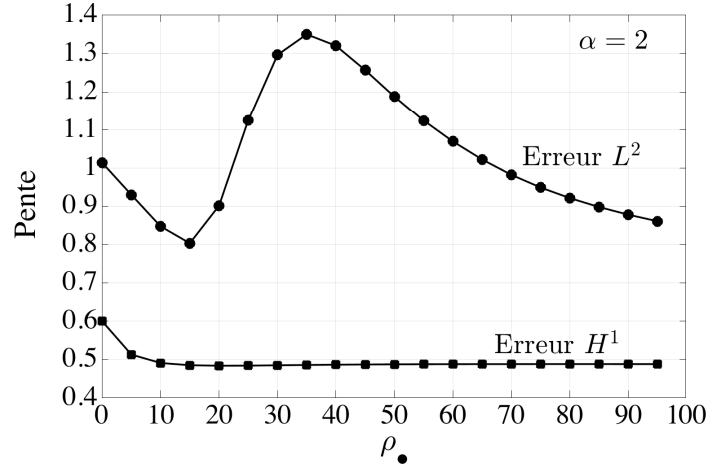


FIGURE 2.18 – Évolution de la vitesse de convergence entre impédance et transmission en fonction de $\rho_{\bullet}$.

Pour ϵ allant de 0,03 à 0,12 avec un pas de 0,01 ;
 Construire le domaine Ω^ϵ ;
 Pour ρ_0 allant de 0,15 à 0,35 avec un pas de 0,01 ;
 Calculer $\|u_i^\epsilon - v^\epsilon\|_{0,\Omega_i}$ puis la stocker ;
 Fin de la boucle sur $\rho_{\bullet}$;
 Fin de la boucle sur ϵ .

Bien qu'à la phase de post-traitement Matlab on regarde à $\rho_{\bullet}$ fixé l'erreur $\|u_i^\epsilon - v^\epsilon\|_{0,\Omega_i}$ en fonction de ϵ , ceci n'aurait pas été judicieux dans les calculs puisque cela aurait impliqué de construire plusieurs fois les mêmes maillages. Ainsi, effectuer d'abord la boucle sur ϵ puis celle sur $\rho_{\bullet}$ au lieu du contraire permet d'économiser des calculs.

2.3.2 Condition d'impédance de type Ventcel et correction de l'erreur L^2

Commençons par rappeler que nous tentons d'approcher le problème de transmission (1.32) par le problème d'impédance avec condition de Ventcel (1.37) ci-dessous :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\alpha \Delta v^\epsilon = f_i \text{ dans } \Omega_i, \\ \partial_\nu v^\epsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_n, \\ v^\epsilon + \epsilon \alpha \partial_\nu v^\epsilon - \epsilon^2 \beta \partial_\tau^2 v^\epsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_v \\ v^\epsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_d, \text{ O et A;} \end{array} \right.$$

notre moyen étant de déterminer le paramètre β tel que $c_\beta^{(1)} = d^{(1)}$.

Remarquons ici que le seul résultat que nous avons concernant l'application $\beta \mapsto c_\beta^{(1)}$ est que celle-ci est continue d'après la proposition 2.6. Comme nous l'indique la figure 2.10, nous n'avons pas de relation d'ordre entre les profils d'impédance Ventcel sur Γ_1^R . Cependant, on peut observer une monotonie des $c_\beta^{(1)}$ (voir figure 2.19). Elle est en revanche indémontrable à l'aide des outils développés à partir du principe du maximum puisqu'on ne peut appliquer ce dernier à la différence entre les profils.

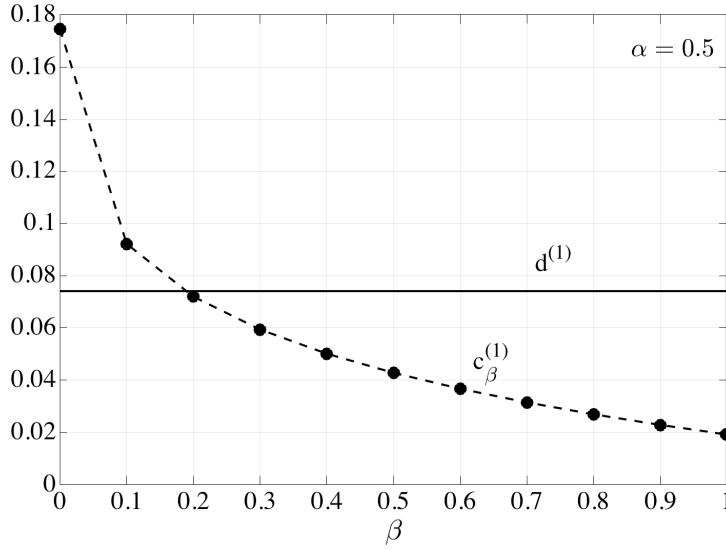


FIGURE 2.19 – Évolution du $c_\beta^{(1)}$ en fonction de β .

On remarquera aussi que la figure 2.19 nous montre que $d^{(1)}$ est dans l'image de l'application $\beta \mapsto c_\beta^{(1)}$. Étant donné ce qui vient d'être dit, il est clair que ce fait observé ne pourra être démontré comme nous l'avions tenté pour l'impédance à coefficient variable. Faute d'autres pistes, il restera donc à l'état de conjecture.

Cependant, la mise en pratique numérique peut s'effectuer avec le même mode opératoire que l'impédance à coefficient variable. Pour cela, on commence par chercher un β tel que $c_\beta^{(1)} \leq d^{(1)}$; ce qui suffit puisque $\beta = 0$ nous redonne le problème d'impédance classique et que nous avons déjà vu que celui-ci nous donne $c_\beta^{(1)} \geq d^{(1)}$. De nouveau, une méthode de dichotomie permet de déterminer un β tel que la différence entre $c_\beta^{(1)}$ et $d^{(1)}$ soit aussi petite que l'on veut. On peut alors observer le comportement de la vitesse de convergence de l'impédance vers la transmission dans un voisinage du β des profils en fonction de β .

À l'instar de la méthode de coefficient variable, on a pu observer une augmentation de la vitesse de convergence autour du β déterminé à l'aide des profils ($\simeq 0,2$ d'après la figure 2.19) dans les proportions prévues théoriquement (voir figure 2.20).

On remarquera le caractère raide de l'évolution de la vitesse de convergence entre impédance et transmission au voisinage de ce qui serait le β optimal. Des raffinements du pas en

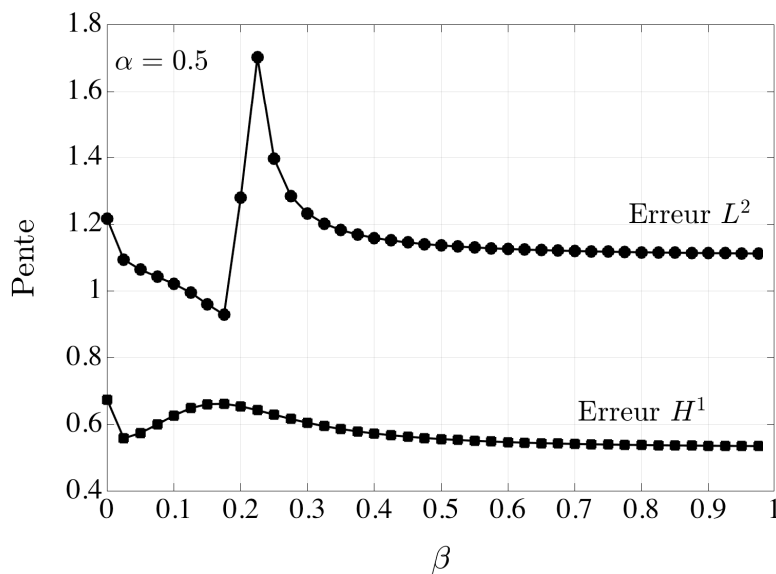


FIGURE 2.20 – Évolution de la vitesse de convergence entre impédance et transmission en fonction de β .

β permettent de voir que ce comportement est plus lisse que ne le laisse penser la figure 2.20 (voir figure 2.21).

La méthode, testée pour plusieurs conditions initiales, fonctionne donc dans son aspect numérique mais son efficacité n'a pu être prouvée. Notons par ailleurs qu'elle nécessite un logiciel permettant l'utilisation de formulations variationnelles à termes ou conditions ponctuels. Les simulations mettant en œuvre cette méthode n'ont pu être effectuées qu'à l'aide de Getdp, Freefem ne donnant pas – à ma connaissance – la possibilité d'utiliser des termes ponctuels.

Données utilisées pour les figures

Les figures 2.20 et 2.21 ont été obtenues avec les mêmes données initiales et algorithme que dans le cas de la condition de Robin à coefficient variable ; seule change la boucle sur ρ qui est remplacé par une boucle sur β allant de 0 à 1 avec un pas de 0,01.

2.3.3 Méthode de plaquage des profils et correction des erreurs H^1 et L^∞

Quelques aspects théoriques

Comme nous l'avons vu lorsque nous avons expliqué la méthode de plaquage des profils, la formule (2.3) nous donnant l'expression de w_i^ϵ – sensé approcher u_i^ϵ – impose de pouvoir

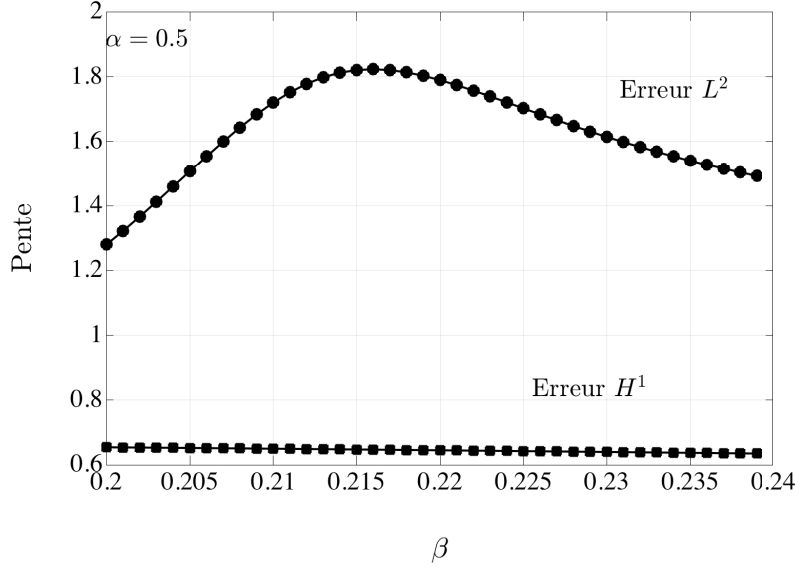


FIGURE 2.21 – Évolution de la vitesse de convergence entre impédance et transmission en fonction de β (zoom).

précalculer ces derniers ; nous avons vu comment plus haut. Par ailleurs, cela nécessite aussi l'utilisation d'une fonction de troncature et les calculs de $u_{i,\text{reg}}^0$ et du coefficient de singularité d^0 ; la fonction de troncature peut être choisie arbitrairement et celle utilisée sera donnée plus bas ; les calculs de $u_{i,\text{reg}}^0$ et d^0 sont abordés dans le paragraphe suivant. Enfin, dans un second paragraphe, nous nous attarderons sur l'influence du paramètre α dans cette méthode.

Calculs u_i^0 et d^0

Concernant $u_{i,\text{reg}}^0$, comme les expressions des singularités sont connues (voir formule (4.2)) et que

$$u_i^0 = u_{i,\text{reg}}^0 + d^0 \chi_1 s^0,$$

on voit que pour peu que d^0 soit connu le calcul de $u_{i,\text{reg}}^0$ est équivalent à celui de u_i^0 . Pour être plus précis, la formule (2.3) donnant w_i^ϵ peut être réécrite sous la forme :

$$w_i^\epsilon = u_i^0 + \sqrt{\epsilon} d^0 \chi_1(r) (q_i^0 - s^0) \left(\frac{r}{\epsilon}, \theta \right).$$

Comme u_i^0 est solution du problème

$$\begin{cases} -\alpha \Delta u_i^0 &= f_i \text{ dans } \Omega_i, \\ \partial_\nu u_i^0 &= 0 \text{ sur } \Gamma_n, \\ u_i^0 &= 0 \text{ sur } \Gamma_r, \end{cases}$$

il est aisé de l'obtenir. On est donc ramené au calcul de d^0 . Pour le calculer, nous utiliserons la technique déployée dans [20] que nous rappelons brièvement ci-dessous.

On appelle s^* la fonction singulière duale de s^0 définie par

$$s^* = -\chi_1 s^{-1} = \chi_1 \frac{1}{\sqrt{r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

Puisque s^* est dans $L^2(\Omega_i)$, on peut définir w^* comme étant la solution de

$$\begin{cases} \Delta w^* &= \Delta s^* \text{ dans } \Omega_i, \\ \partial_\nu w^* &= 0 \text{ sur } \Gamma_n, \\ w^* &= 0 \text{ sur } \Gamma_r. \end{cases}$$

On peut alors énoncer le lemme suivant :

Lemme 2.3. *On a*

$$d^0 = \frac{2}{\alpha\pi} \int_{\Omega_i} f_i(s^* - w^*).$$

Il suffit donc de calculer w^* pour obtenir d^0 .

Influence de α sur les erreurs commises

En reprenant la sous-section 1.2.2 qui détaille la construction des premiers termes du développement asymptotique de la solution du problème de transmission u^ϵ , on peut voir que le paramètre α intervient dans les majorations des restes. Ceci nous permet de préciser les estimations d'erreurs (2.4) en prenant acte de l'influence de α sur celles-ci :

$$\|u_i^\epsilon - w_i^\epsilon\|_{1,\Omega_i} = O(\alpha\epsilon) \quad \text{et} \quad \|u_i^\epsilon - w_i^\epsilon\|_{\infty,\Omega_i} = O(\alpha\epsilon). \quad (2.12)$$

Cela implique donc que la méthode de plaquage des profils ne sera pertinente que si la quantité $\alpha\epsilon$ est petite. Il s'agit d'une épée à double tranchant, si α est grand, cela contraint à des gammes de ϵ petits ; si α est petit, on aura plus de latitude quant aux gammes de ϵ et ou plus de précision.

Mise en œuvre numérique

Nous avons donc tous les moyens nécessaires pour calculer w_i^ϵ . La figure 2.22 nous donne la comparaison entre cette méthode et l'impédance pour $\alpha = 0.1$. On peut y voir que l'approximation par le problème avec condition d'impédance de type Robin est plus performante en matière d'erreur L^2 mais que pour ϵ assez petit, c'est la méthode de plaquage des profils qui l'emporte en matière d'erreur H^1 ; par ailleurs, les vitesses de convergence sont "proches" des attentes théoriques.

La figure 2.23 nous donne la comparaison pour la norme L^∞ entre cette méthode, l'approximation par le problème avec condition d'impédance de type Robin et l'approximation de u_i^ϵ par u_i^0 . Là encore, les vitesses de convergence sont « proches » des attentes théoriques. Cependant on peut noter que l'approximation par plaquages des profils offre un véritable gain par rapport à l'approximation par le problème avec condition d'impédance de type Robin ou l'approximation de u_i^ϵ par u_i^0 qui offrent des résultats très proches.

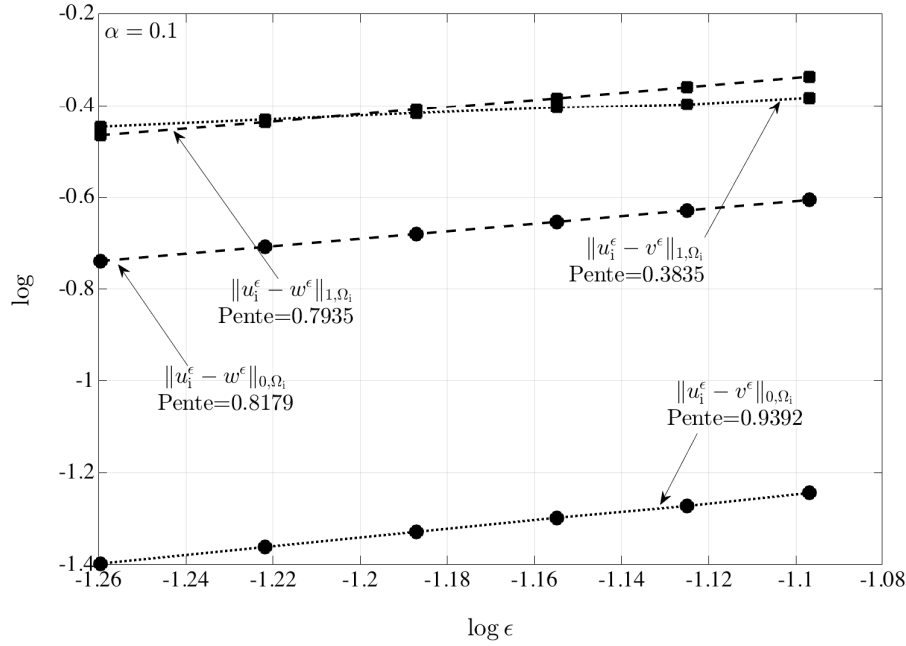


FIGURE 2.22 – Erreurs L^2 e H^1 de la méthode de plaquage des profils.

Cette méthode — testée pour diverses données initiales (voir paragraphe ci-dessous) — fournit donc les résultats attendus, ce qui est satisfaisant. Cependant, comme nous avons pu le voir, elle comporte quelques bémols.

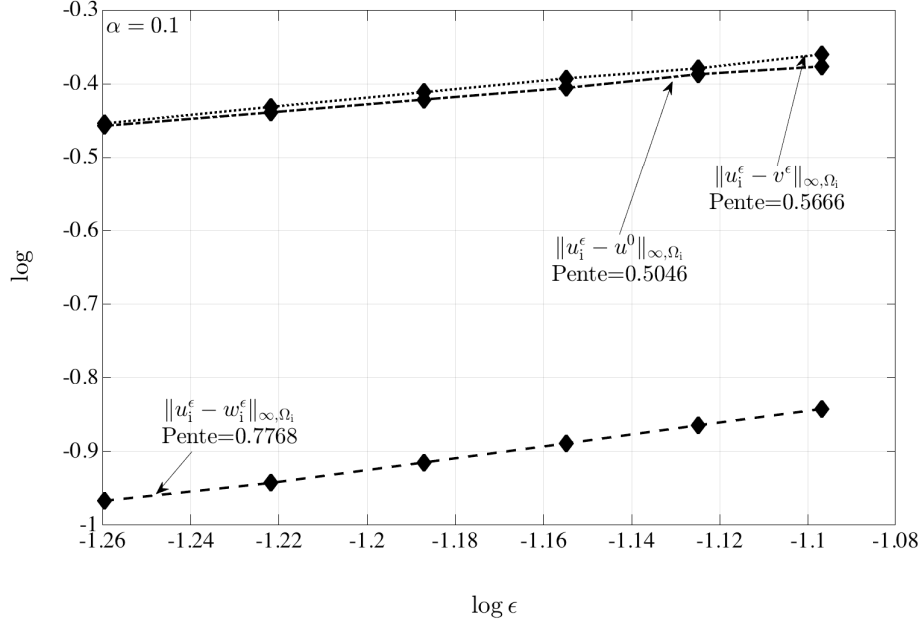
Les estimations d'erreurs entre u_i^ϵ et w_i^ϵ (voir (2.12)) dépendent de α , ce qui contraint la gamme de α utilisée de façon à ce que $\alpha\epsilon$ soit petit. Ici, nous avons pris $\alpha = 0.1$, pour des valeurs plus grandes, la méthode de plaquage des profils était moins performante que l'impédance.

Par ailleurs, cette méthode rencontre le même écueil que les méthodes d'impédance à coefficient variable et Ventcel, i.e. le potentiel manque de précision lors du calcul des profils et plus particulièrement leur comportement à l'infini.

Enfin, du point de vue de la mise en oeuvre numérique, elle demande une certaine souplesse de la part du logiciel utilisé. En effet, elle nécessite de pouvoir résoudre plusieurs problèmes les uns à la suite des autres et ou de sauvegarder les solutions et maillages pour ensuite les réutiliser. Mais aussi d'effectuer certains calculs à partir de ces solutions comme celui de d^0 et enfin de pouvoir projeter le profil obtenu sur son maillage sur celui de la transmission via une dilatation. À ma connaissance, Freefem est plus simple d'utilisation que Getdp sur ces aspects-là ; c'est pourquoi toutes les simulations de cette méthode ont été effectuées avec Freefem.

Données utilisées pour les figures

Les figures 2.22 et 2.23 ont été obtenues grâce aux données initiales suivantes : rayon du demi-disque Ω_i : $R_{\Omega_i} = 2$; épaisseur de la couche mince Ω_e^ϵ variant entre 0,055 et 0,08 avec un pas de 0,005 ; éléments des maillages : environ 83500 triangles pour le domaine Ω_i ; environ


 FIGURE 2.23 – Erreur L^∞ de la méthode de plaquage des profils.

772000 triangles pour le domaine Ω_i^R du profil avec raffinement autour de l'origine pour tenir compte au mieux de la singularité; $\alpha = 0, 1$; seconds membres : $f_i = y^3 \sin([R_{\Omega_i} - r]^2)$ et $f_e = 0$.

La fonction de troncature utilisée en lieu et place de χ_1 est :

$$T(r) = 1 - \left[\chi_{[R_2 \leq r \leq R]} + \chi_{[R_1 \leq r \leq R_2]} \left(6 \left(\frac{r - R_1}{R_2 - R_1} \right)^5 - 15 \left(\frac{r - R_1}{R_2 - R_1} \right)^4 + 10 \left(\frac{r - R_1}{R_2 - R_1} \right)^3 \right) \right]$$

où $0 \leq R_1 \leq R_2 \leq R_{\Omega_i}$, R_{Ω_i} étant le rayon du domaine des problèmes d'impédance et de transmission (et non pas des profils). Cette fonction est donc à support sur $[0, R_2]$ et vaut 1 sur $[0, R_1]$. Précisons que les meilleurs résultats ont été obtenus lorsque R_1 et R_2 sont éloignés, autrement lorsque le passage de 1 à 0 n'est pas trop rapide, nous avons pris ici $R_1 = R_{\Omega_i}/10$ et $R_2 = 9R_{\Omega_i}/10$.

2.4 Conclusion et perspectives

Nous avons développé dans ce chapitre trois méthodes pour obtenir de meilleures vitesses de convergence entre les problèmes d'impédance et de transmission.

Deux d'entre-elles permettent d'améliorer l'erreur L^2 , il s'agit des méthodes d'impédance à coefficient variable et de Ventcel. Elles ont pour principe d'imposer une condition sur Γ_r (ou Γ_v) ayant un paramètre que l'on peut ajuster de façon à augmenter la vitesse de convergence entre impédance et transmission. Le paramètre optimal s'obtient à partir des profils, ce qui

nous a conduit à développer des moyens de les simuler. Un certain nombre de résultats ont pu être démontrés sur ces profils simulés ; cependant, ils n'ont pas suffi à prouver complètement l'efficacité de nos deux méthodes ; en effet, l'efficacité de la méthode avec condition de Robin variable n'a été prouvée que pour l'un des deux problèmes de transmission — (1.32) pour être précis, l'autre nécessitant une hypothèse supplémentaire — tandis que la preuve de celle de la méthode avec condition de Ventcel semble sans issue. Toutefois, la mise en pratique numérique s'est avérée satisfaisante et indique donc que nos deux méthodes sont utilisables.

La dernière méthode vise à améliorer les erreurs L^∞ et H^1 . Elle ne consiste pas en un problème d'impédance au sens des deux premières méthodes ; il s'agit en fait d'approcher la solution du problème de transmission par le début de son développement asymptotique dont les termes possèdent le même avantage que le problème d'impédance : ils sont définis sur une géométrie indépendante de ϵ . Cette méthode demande aussi la capacité de simuler les profils mais aussi d'effectuer des transferts de maillages. Elle est relativement simple à mettre en œuvre et peu coûteuse en calculs. Cependant, elle ne s'avère supérieure à l'impédance classique que lorsque le rapport $\alpha\epsilon$ est petit.

Quelques perspectives à présent. La première d'entre elles seraient de prouver l'efficacité de la méthode visant à améliorer l'erreur L^2 grâce à la condition d'impédance de type Ventcel. Au vu des impasses dans lesquelles nous sommes tombées, cela nécessitera sans doute d'autres approches que celles que nous avons utilisées.

Par ailleurs, d'autres façons de simuler les profils pourraient être envisagées — notamment grâce à l'usage de condition de bords intrégro-différentielles — afin d'augmenter la précision des méthodes proposées.

Finalement, on pourra tenter de voir comment les méthodes proposées ici s'adaptent à d'autres problèmes tels que Lamé, Helmholtz ou Maxwell...

Chapitre 3

Extension à la dimension 3

À notre connaissance, l'approximation de problèmes de transmission par des problèmes d'impédance en 3D a peu été étudiée dans le cas non lisse. L'étude des singularités de problèmes elliptiques 3D, en revanche, a fait l'objet d'une littérature abondante; on pourra notamment se référer à [13, 20, 33].

Nous commençons ici par aborder deux cas réguliers : avec et sans courbure. Ces deux cas ne comportant pas de singularités, leurs développements asymptotiques sont similaires au cas 2D et ne sont donc pas refaits ici. Les simulations montrent que les vitesses de convergence empiriques sont globalement cohérentes avec les attentes théoriques.

Nous poursuivons ensuite avec le cas de l'extrusion du cas 2D abordé dans les chapitres précédents, lequel deviendra donc un problème d'arête. Nous y observons que le développement asymptotique se construit de façon identique au cas 2D; les profils s'avèrent même être ceux de la dimension 2. Il sera alors question de l'adaptabilité et de l'efficacité des méthodes proposées au chapitre 2 dans ce cas particulier de la dimension 3.

Finalement, nous étudions succinctement le cas d'un domaine 3D comportant une singularité conique mais sans arête; des simulations sont effectuées afin d'étudier la convergence entre les problèmes de transmission et impédance.

3.1 Cas réguliers

Le cas 3D régulier a déjà été étudié théoriquement. On pourra se référer à [16] pour ce qui est du choix des conditions d'impédance. Par ailleurs, le chapitre 1 de [34] qui donne le développement asymptotique du problème de transmission dans le cas 2D régulier et sa comparaison avec l'impédance s'adapte au cas 3D fournissant un autre point de référence. Ainsi, pour la condition d'impédance

$$v^\epsilon + \epsilon \alpha \partial_\nu v^\epsilon = 0,$$

ces précédents travaux nous montrent que l'on a les mêmes estimations entre problèmes de

transmission et avec condition d'impédance en 3D qu'en 2D (pour $k \in \{0, 1, \infty\}$) :

$$\|u_i^\epsilon - v^\epsilon\|_{k, \Omega_i} = O(\epsilon^2),$$

et lorsque la couche mince est sans courbure :

$$\|u_i^\epsilon - v^\epsilon\|_{k, \Omega_i} = O(\epsilon^3).$$

Le cas avec courbure peut voir sa performance améliorée si la condition d'impédance prend en compte la courbure moyenne (voir [16]). En notant $c(x)$ cette dernière au point $x \in \partial\Omega_i$, la condition d'impédance

$$v^\epsilon + \epsilon(1 - \epsilon c(x)) \alpha \partial_\nu v^\epsilon = 0 \quad (3.1)$$

nous donne à nouveau une erreur en $O(\epsilon^3)$.

Nous apportons dans cette section quelques illustrations numériques de ces vitesses de convergence.

3.1.1 ... avec courbure

Nous sommes placés sur le domaine illustré en figures 3.1 et 3.2. Il s'agit d'une demi-sphère Ω_i recouverte d'une couche mince Ω_ϵ^ϵ de taille ϵ sur sa partie hémisphérique.

Le bord hémisphérique extérieur est noté Γ_d^ϵ et celui faisant l'interface entre parties intérieure et extérieure est noté Γ_r ; on peut les observer sur la figure 3.2. La section plane de la demi-sphère est alors composée d'un disque : le bord inférieur de Ω_i noté Γ_n ; et d'un anneau : le bord inférieur de Ω_i noté Γ_n^ϵ (voir aussi figure 3.2).

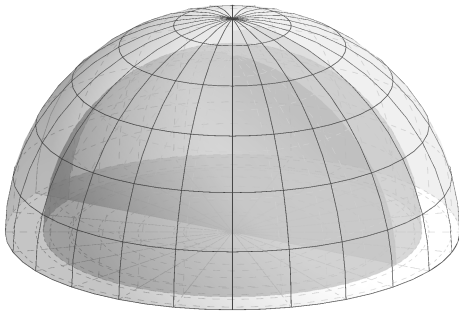


FIGURE 3.1 – Domaine de transmission 3D.

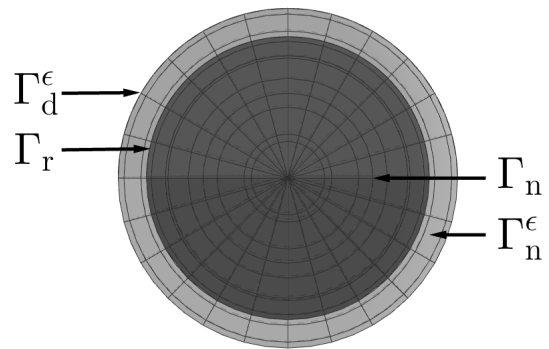


FIGURE 3.2 – Domaine de transmission 3D (vu de dessous).

Le problème de transmission simulé étant alors

$$\left\{ \begin{array}{l} -\alpha \Delta u_i^\epsilon = f_i \text{ dans } \Omega_i, \\ \Delta u_e^\epsilon = f_e \text{ dans } \Omega_e^\epsilon, \\ u_i^\epsilon = u_e^\epsilon \text{ sur } \Gamma_r, \\ \alpha \partial_\nu u_i^\epsilon = -\partial_\nu u_e^\epsilon \text{ sur } \Gamma_r, \\ \partial_\nu u^\epsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_n \cup \Gamma_n^\epsilon, \\ u_e^\epsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_d^\epsilon. \end{array} \right.$$

Et le problème avec condition d'impédance,

$$\left\{ \begin{array}{l} -\alpha \Delta v^\epsilon = f_i \text{ dans } \Omega_i, \\ v^\epsilon + \epsilon \alpha \partial_\nu v^\epsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_r, \\ \partial_\nu v^\epsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_n. \end{array} \right.$$

On remarquera que le domaine n'est pas lisse au voisinage de $\Gamma_n \cap \Gamma_r$ et $\Gamma_n^\epsilon \cap \Gamma_d^\epsilon$. Cependant, de la même façon que pour la dimension 2 dans l'annexe C, on peut montrer par symétrisation que la solution du problème est régulière au voisinage de ces cercles.

Des simulations ont été effectuées pour plusieurs valeurs de α , seconds membres et gammes de ϵ . Comme on peut le voir sur la figure 3.3, les résultats numériques sont cohérents par rapport aux attentes théoriques (même si les pentes ne sont pas exactement 2 comme attendu).

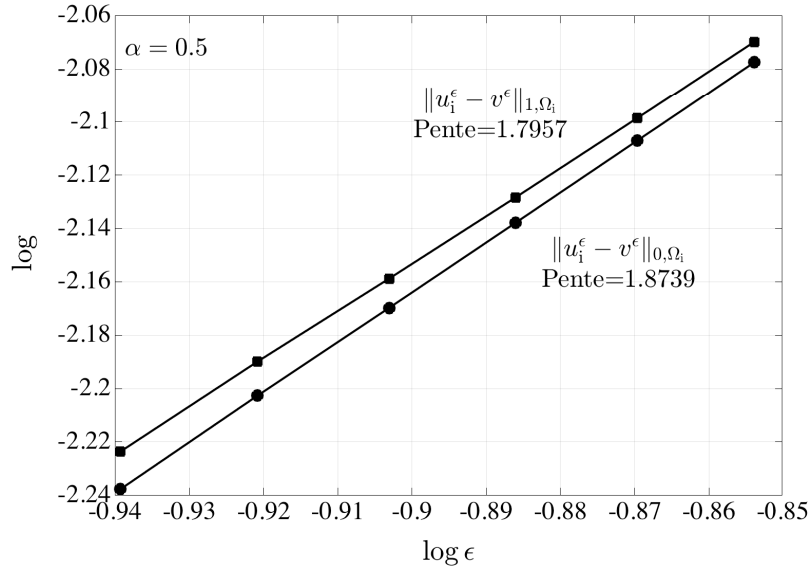


FIGURE 3.3 – Évolution de l'erreur entre problèmes de transmission et avec condition d'impédance dans le cas 3D avec courbure.

Dans le cas de la condition d'impédance tenant compte de la courbure moyenne (sur la demi-sphère de rayon 1) :

$$v^\epsilon + \epsilon(1 - \epsilon)\alpha\partial_\nu v^\epsilon = 0,$$

nous retrouvons des résultats cohérents avec les attentes théoriques comme on peut le voir sur la figure 3.4 (même si, une fois encore, les pentes ne sont pas exactement 3 comme attendu).

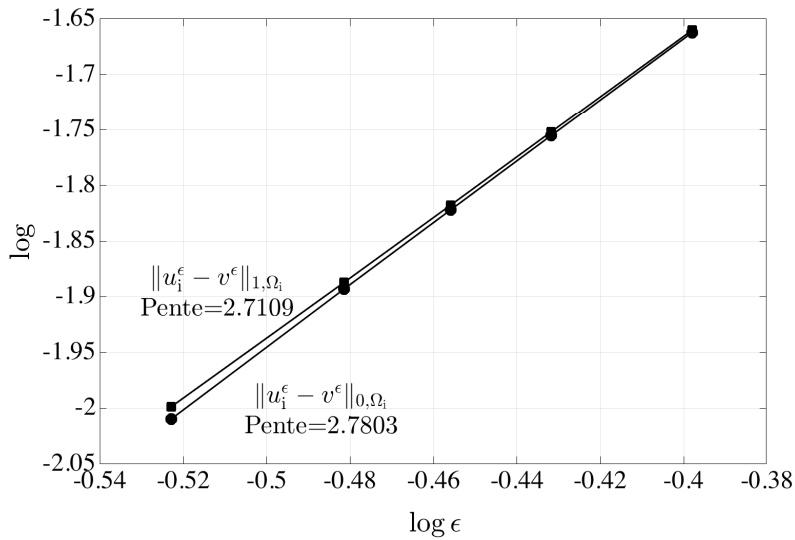


FIGURE 3.4 – Évolution de l'erreur entre problèmes de transmission et avec condition d'impédance tenant compte de la courbure dans le cas 3D avec courbure.

Données utilisées pour la figure

La figure 3.3 a été obtenue pour les données suivantes : rayon de la demi-sphère Ω_i : $R_{\Omega_i} = 1$; épaisseur de la couche mince Ω_e^ϵ variant entre 0,115 et 0,14 avec un pas de 0,005 ; éléments des maillages : environ 200000 tétraèdres pour le domaine Ω_i^ϵ ; $\alpha = 0,5$; seconds membres : $f_e = 0$ et $f_i = 1$.

La figure 3.4 a été obtenue avec des données identiques sauf pour la gamme de ϵ qui varie entre 0.3 et 0.4 et le nombre de tétraèdres : environ 150000.

3.1.2 ... sans courbure

Nous sommes placés sur le domaine illustré en figure 3.5. Il s'agit d'un cube Ω_i auquel est collée une couche mince Ω_e^ϵ de taille ϵ sur sa face inférieure.

Le bord horizontal inférieur de la couche mince Ω_e^ϵ est noté Γ_d^ϵ , le bord horizontal supérieur du cube Ω_i est noté Γ_d et celui faisant l'interface entre parties intérieure et extérieure est noté Γ_r ; les cotés verticaux sont notés Γ_n^j et $\Gamma_n^{j,\epsilon}$ pour $j \in \{1, 2, 3, 4\}$, on notera leur union Γ_n .

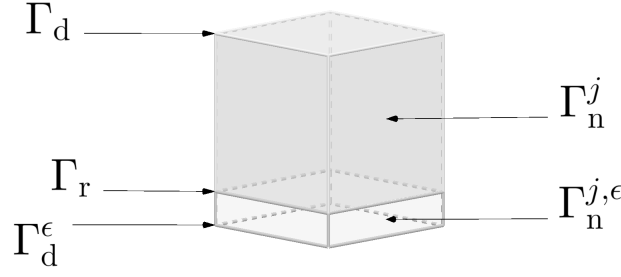


FIGURE 3.5 – Domaine de transmission 3D sans courbure.

Le problème de transmission simulé étant alors

$$\left\{ \begin{array}{l} -\alpha \Delta u_i^\epsilon = f_i \text{ dans } \Omega_i, \\ \Delta u_e^\epsilon = f_e \text{ dans } \Omega_e^\epsilon, \\ u_i^\epsilon = u_e^\epsilon \text{ sur } \Gamma_r, \\ \alpha \partial_\nu u_i^\epsilon = -\partial_\nu u_e^\epsilon \text{ sur } \Gamma_r, \\ \partial_\nu u_e^\epsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_n, \\ u_e^\epsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_d \cup \Gamma_d^\epsilon. \end{array} \right.$$

Et le problème d'impédance

$$\left\{ \begin{array}{l} -\alpha \Delta v^\epsilon = f_i \text{ dans } \Omega_i, \\ v^\epsilon + \epsilon \alpha \partial_\nu v^\epsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_r, \\ \partial_\nu v^\epsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_n, \\ v^\epsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_d. \end{array} \right.$$

Le fait d'avoir pris des conditions de Neumann sur les bords verticaux permet encore une fois de montrer par symétrisation (voir annexe C) que la solution est régulière.

Une nouvelle fois, des simulations ont été effectuées pour diverses valeurs de α , seconds membres et gammes de ϵ . On pourra en voir une illustration des résultats obtenus sur la figure 3.6.

Cette fois-ci, les résultats numériques ne correspondent pas aux attentes théoriques. Bien que les pentes soient clairement supérieures à 2 comme on peut le voir sur la figure 3.6, les pentes théoriques de 3 n'ont jamais pu être atteintes par les simulations effectuées. Ceci peut être dû à un manque de précision imputable à l'importance des calculs effectués en 3D et à la relative modestie des machines ayant servi à les effectuer, ne permettant pas le raffinement nécessaire. Notons toutefois que, sur la figure 3.6, les erreurs sont très petites et donc que le

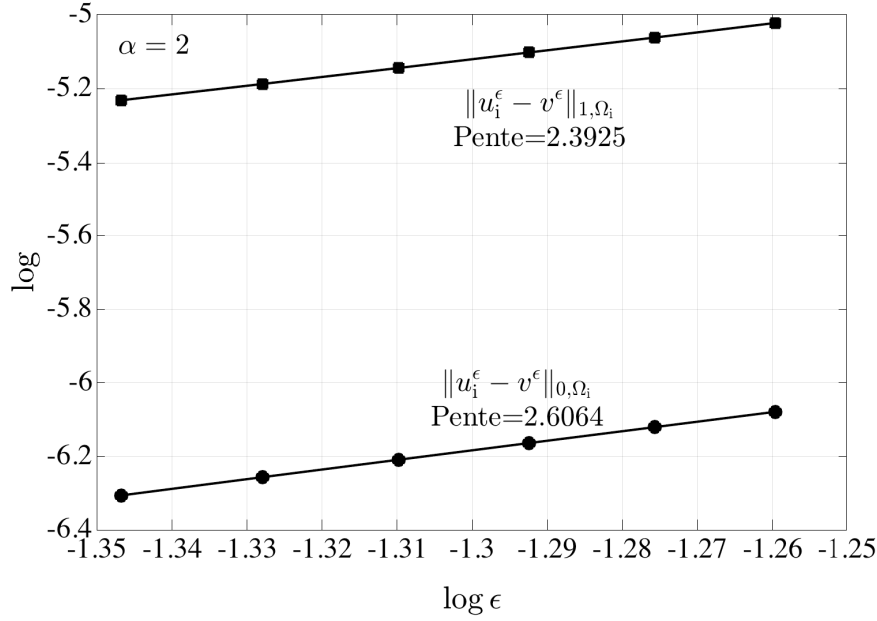


FIGURE 3.6 – Évolution de l'erreur entre problèmes de transmission et avec condition d'impédance dans le cas 3D sans courbure.

problème avec condition d'impédance fournit une approximation du problème de transmission de bonne qualité.

Données utilisées pour la figure

La figure 3.3 a été obtenue grâce aux données initiales suivantes : côté du cube Ω_i : 1 ; épaisseur de la couche mince Ω_e^ϵ variant entre 0,045 et 0,055 avec un pas de 0,005 ; éléments des maillages : environ 3700000 tétraèdres pour le domaine Ω_i^ϵ ; $\alpha = 2$; seconds membres : $f_e = 0$ et

$$f_i = \begin{cases} 1 - \exp(\tilde{r}^2 - \tilde{R}^2) & \text{si } r' \leq R', \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $\tilde{r}^2 = x^2 + (z - \tilde{R})^2$ avec $\tilde{R} = \frac{R_{\Omega_i}}{4}$, où R_{Ω_i} désigne le côté du cube.

3.2 Un premier cas irrégulier : l'extrusion du problème 2D

3.2.1 Problème de transmission extrudé

On effectue ici l'extrusion du problème (1.16) dans la direction z pour z allant de -1 à 1 . On obtient donc le cube

$$\Omega_i =]-1, 1[\times]0, 2[\times]-1, 1[,$$

auquel est adjointe la couche mince

$$\Omega_e^\epsilon =]0, 1[\times]-\epsilon, 0[\times]-1, 1[,$$

représentés sur la figure 3.7 ; le domaine est donc similaire à celui représenté sur la figure 3.5 à ceci près que la couche Ω_e^ϵ ne recouvre que la moitié de la face inférieure du cube.

La moitié de cette face ($[0, 1] \times \{0\} \times [-1, 1]$) qui fait interaction entre Ω_i et Ω_e^ϵ est encore notée Γ_r tandis que l'autre moitié de cette face ($[-1, 0] \times \{0\} \times [-1, 1]$) est notée Γ_n^0 . Les autres faces Γ_d , Γ_d^ϵ , Γ_n^j et $\Gamma_n^{j,\epsilon}$ sont définies comme dans le cas régulier sans courbure (voir figure 3.5) comme on peut le voir sur la figure 3.7. On notera Γ_n l'union des Γ_n^j et $\Gamma_n^{j,\epsilon}$.

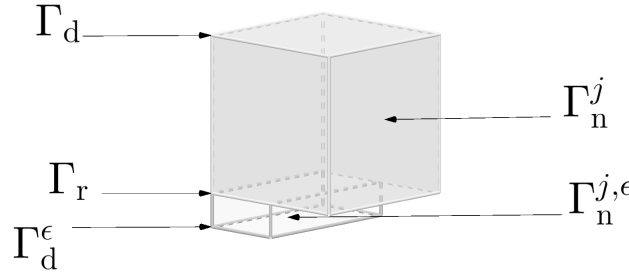


FIGURE 3.7 – Domaine de transmission 3D irrégulier.

La formulation du problème est légèrement transformée mais n'en reste pas moins très similaire à celle du cas 2D (problème (1.16)).

$$\left\{ \begin{array}{l} -\alpha \Delta u_i^\epsilon = f_i \text{ dans } \Omega_i, \\ \Delta u_e^\epsilon = f_e \text{ dans } \Omega_e^\epsilon, \\ u_i^\epsilon = u_e^\epsilon \text{ sur } \Gamma_r, \\ \alpha \partial_\nu u_i^\epsilon = -\partial_\nu u_e^\epsilon \text{ sur } \Gamma_r, \\ \partial_\nu u^\epsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_n, \\ u^\epsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_d \cup \Gamma_d^\epsilon. \end{array} \right. \quad (3.2)$$

S'agissant de l'extension naturelle de ce qui a été traité précédemment, il est légitime de se demander ce qu'il advient des stratégies mises en œuvre plus haut dans ce cas.

La première étape serait donc d'effectuer le développement asymptotique du problème (3.2) et des problèmes avec condition d'impédance associés. Cependant, comme nous allons

le voir plus bas, il est loin d'être nécessaire de refaire tout le travail effectué aux chapitres précédents.

Développement asymptotique du problème de transmission extrudé

Comme pour le cas 2D, l'idée est d'effectuer une dilatation de la couche Ω_ϵ^ϵ puis, en notant $U_\epsilon^\epsilon(x, Y, z) = u_\epsilon^\epsilon(x, y, z)$ avec $Y = \epsilon^{-1}y$, d'introduire formellement les expressions $u_i^\epsilon = \sum_{n \geq 0} \epsilon^n u_i^n$ et $U_\epsilon^\epsilon = \sum_{n \geq 0} \epsilon^n U_\epsilon^n$ dans (3.2).

On est alors censé retrouver des problèmes vérifiés par U_ϵ^n et u_i^n similaires aux problèmes (1.18) et (1.19). Cependant, comme le seul ordre 0 nous permettra d'appréhender les différences entre dimensions 2 et 3, nous n'avons donc pas besoin d'écrire les problèmes à l'ordre n pour le cas 3D.

En effet, à l'ordre 0, nous avons $U_\epsilon^0 = 0$ et u_i^0 vérifie

$$\begin{cases} -\alpha \Delta u_i^0 &= f_i \text{ dans } \Omega_i, \\ u_i^0 &= 0 \text{ sur } \Gamma_r, \\ \partial_\nu u_i^0 &= 0 \text{ sur } \Gamma_n. \end{cases}$$

Or, d'après [13], la décomposition en parties régulière-singulière de ce problème est

$$u_i^0 = u_{i,\text{reg}}^0 + \sum_{j=0}^m \partial_z^j d_j^0(z) \chi_1(r) \epsilon^{\frac{1}{2}+j} s^j \left(\frac{r}{\epsilon}, \theta \right),$$

où $u_{i,\text{reg}}^0 \in H^{m+2}(\Omega_i)$ et $z \mapsto d_j^0(z) \in \mathcal{C}^{m+2}([-1, 1])$.

On voit clairement ici la structure tensorielle du terme

$$(r, \theta, z) \mapsto \partial_z^j d_j^0(z) \chi_1(r) \epsilon^{\frac{1}{2}+j} s^j \left(\frac{r}{\epsilon}, \theta \right),$$

où le coefficient de singularité d_j^0 du cas 2D est remplacé par une fonction d'arête aussi appelée *stress intensity function* (dans le contexte de la mécanique des structures). Les singularités ne dépendent donc pas de z et on peut donc les remplacer par les mêmes profils q^j que dans le cas 2D pour continuer le développement qui sera donc quasi identique à celui effectué dans la section 1.2 ; on obtient alors l'analogie du théorème 1.4, la différence résidant dans le remplacement du coefficient de singularité d_j^k par les dérivées j -ème d'une fonction dépendante de z : $d_j^k(z)$.

Nous ne réécrivons donc pas le théorème mais nous contenterons de donner le début du développement : pour $f \in H^1(\Omega^\epsilon)$, la solution du problème (3.2) s'écrit

$$u_i^\epsilon = u_{i,\text{reg}}^0 + d^0(z) \chi_1(r) \sqrt{\epsilon} q_i^0 \left(\frac{r}{\epsilon}, \theta \right) + \epsilon u_{\varphi,i}^1 [\log \epsilon] + \epsilon u_{r,i}^1 + O_{H^1} \left(\epsilon^{\frac{3}{2}} [\log \epsilon] \right), \quad (3.3)$$

où $d^0(z)$ est combinaison linéaire des $\partial^j d_j^0(z)$ pour $j \in \{0, \dots, m\}$.

3.2.2 Problèmes avec condition d'impédance

Le fait que le problème de transmission (3.2) admette un développement similaire à celui de son analogue en dimension 2 incite naturellement à considérer les extrusions des problèmes (1.1) et (1.37). Le problème avec condition d'impédance de type Robin admet une formulation identique au cas de la dimension 2 :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\alpha \Delta v^\epsilon = f_i \text{ dans } \Omega_i, \\ \partial_\nu v^\epsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_n, \\ v^\epsilon + \epsilon \alpha \partial_\nu v^\epsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_r. \end{array} \right. \quad (3.4)$$

A contrario, le problème avec condition d'impédance de type Ventcel se voit modifié (ici on note $\Gamma_v = \Gamma_r$). En effet, la condition de bord sur Γ_v devient

$$v^\epsilon + \epsilon \alpha \partial_\nu v^\epsilon - \epsilon^2 \beta \Delta_{(x,z)} v^\epsilon = 0.$$

Remarquons que la dérivée tangentielle seconde ∂_τ^2 du problème (1.37) est ici remplacée par $\Delta_{(x,z)}$, laplacien dans le plan (x, z) en opposition à la dérivée normale sur Γ_v qui est dans la direction y (opérateur de Laplace-Beltrami sur Γ_v).

Dans le cas du problème (1.37), la dérivée tangentielle seconde ∂_τ^2 nous avait conduits à considérer des conditions de Dirichlet ponctuelles aux points O et A. L'extrusion de ces points mène naturellement à considérer des conditions de Dirichlet sur les droites $\partial\Gamma_v^1 = \{0\} \times \{0\} \times [-1, 1]$ et $\partial\Gamma_v^3 = \{1\} \times \{0\} \times [-1, 1]$ (voir figure 3.8).

Cependant, nous avons aussi à déterminer des conditions de bords sur les droites $\partial\Gamma_v^2 = [0, 1] \times \{0\} \times \{1\}$ et $\partial\Gamma_v^4 = [0, 1] \times \{0\} \times \{-1\}$; dans la mesure où nous avons d'ores et déjà des conditions de Neumann sur les Γ_n^j dont $\partial\Gamma_v^2$ et $\partial\Gamma_v^4$ sont des bords (voir figure 3.7), il est aussi naturel d'y prolonger ces conditions.

Nous avons donc pour problème avec condition d'impédance de type Ventcel :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\alpha \Delta v^\epsilon = f_i \text{ dans } \Omega_i, \\ \partial_\nu v^\epsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_n \cup \partial\Gamma_v^2 \cup \partial\Gamma_v^4, \\ v^\epsilon + \epsilon \alpha \partial_\nu v^\epsilon - \epsilon^2 \beta \Delta_{(x,z)} v^\epsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_v, \\ v^\epsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_d \cup \partial\Gamma_v^1 \cup \partial\Gamma_v^3. \end{array} \right. \quad (3.5)$$

Remarque : Les conditions de Neumann posées sur les arêtes $\partial\Gamma_v^2$ et $\partial\Gamma_v^4$ (voir figure 3.7) peuvent l'être car le problème (3.5) est posé sur l'espace variationnel

$$\mathcal{V} = \{w \in H^1(\Omega_i) : \gamma_0(w) \in H^1(\Gamma_v), w|_{\partial\Gamma_v^1} = w|_{\partial\Gamma_v^3} = 0\},$$

dont les éléments sont dans $H^1(\Gamma_v)$. En effet, cela nous permet de définir la dérivée normale sur $\partial\Gamma_v^2$ et $\partial\Gamma_v^4$ comme étant, non pas celle par rapport Ω_i qui n'est pas définie sur ces arêtes, mais celle par rapport à Γ_v qui — elle — est bien définie. Ainsi, poser les conditions de Neumann sur les arêtes $\partial\Gamma_v^2$ et $\partial\Gamma_v^4$ fait bien sens.

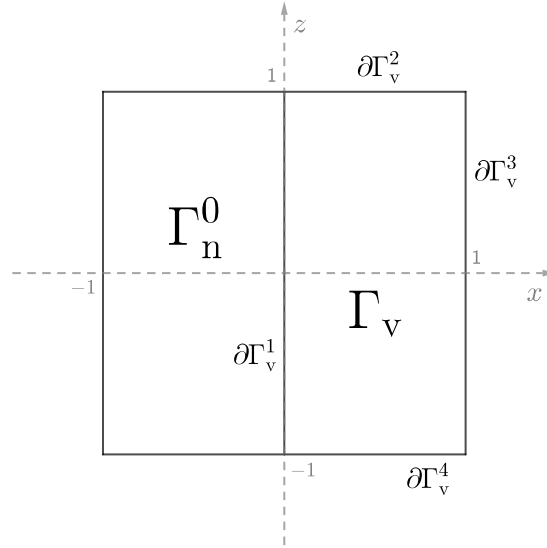


FIGURE 3.8 – Γ_v et ses bords en dimension 3.

Développements asymptotiques des problèmes avec condition d'impédance extrudés

Ce que l'on a vu pour le cas du problème de transmission est aussi valable pour les problèmes avec condition d'impédance extrudés : les développements asymptotiques sont identiques à leurs homologues du cas 2D (voir théorèmes 1.2 et 1.7) à la différence du remplacement du coefficient de singularité c^k par une fonction de singularité $c^k(z)$.

Nous avons donc pour le cas Robin

$$v^\epsilon = v_{\text{reg}}^0 + c^0(z)\chi_1(r)\sqrt{\epsilon}p_r^0\left(\frac{r}{\epsilon}, \theta\right) + \epsilon v_\varphi^1[\log \epsilon] + \epsilon v_r^1 + O_{H^1}\left(\epsilon^{\frac{3}{2}}[\log \epsilon]\right), \quad (3.6)$$

et pour le cas Ventcel

$$v^\epsilon = v_{\text{reg}}^0 + c^0(z)\chi_1(r)\sqrt{\epsilon}p_{v,\beta}^0\left(\frac{r}{\epsilon}, \theta\right) + \epsilon \tilde{v}_\varphi^1[\log \epsilon] + \epsilon v_r^1 + O_{H^1}\left(\epsilon^{\frac{3}{2}}[\log \epsilon]\right). \quad (3.7)$$

3.2.3 Améliorations des erreurs entre problèmes de transmission et avec condition d'impédance

Du fait que les développements asymptotiques de nos problèmes soient de même structure en 3D qu'en 2D, il en va de même pour les erreurs commises entre problème de transmission

et problème avec condition d'impédance — $O(\epsilon[\log \epsilon])$ pour l'erreur L^2 et $O(\sqrt{\epsilon})$ pour les erreurs H^1 et L^∞ ; autrement dit, les théorèmes 1.5 et 1.8 sont encore valables en dimension 3 (résultats confirmés numériquement, voir figure 3.9). Les stratégies mises en œuvre au chapitre 2 fonctionnent alors théoriquement dans ce cas-là aussi. Nous allons voir dans les paragraphes suivants ce qu'il en est de leur mise en pratique.

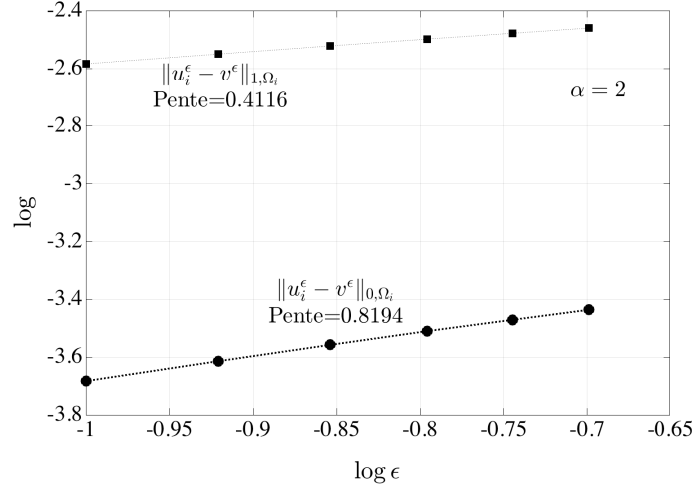


FIGURE 3.9 – Évolution des erreurs entre problèmes de transmission et avec condition d'impédance en fonction de ϵ pour $\alpha = 2$ en 3D.

Conditions d'impédances de type Robin à coefficient variable et de Ventcel et correction de l'erreur L^2

Comme on peut le voir dans les développements asymptotiques (3.3), (3.6) et (3.7), les profils du 3D sont en fait ceux du cas 2D. Comme les techniques visant à corriger l'erreur L^2 ne demandaient qu'un travail sur les profils, ces techniques s'appliquent directement au cas 3D. Précisément, les calculs des $\rho_\bullet$ et β optimaux se faisaient à partir des profils ; ces derniers ne dépendant pas ici de z , il en va de même pour $\rho_\bullet$ et β (contrairement à ce à quoi on pouvait s'attendre *a priori*). Il n'y a donc aucun travail supplémentaire à fournir, on se reportera au chapitre 2 sous-section 2.1.1 pour les détails.

Condition d'impédance de type Robin à coefficient variable

Pour ce qui est de la méthode de la condition d'impédance de type Robin à coefficient variable, rappelons que l'idée est d'approcher la solution du problème (3.2) par celle du problème

$$\left\{ \begin{array}{l} -\alpha \Delta v^\epsilon = f_i \text{ dans } \Omega_i, \\ \partial_\nu v^\epsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_n, \\ v^\epsilon + \epsilon \alpha_\bullet \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \partial_\nu v^\epsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_r, \end{array} \right.$$

où $\alpha_\bullet$ est la fonction définie sur la figure 2.1 dont on joue sur le paramètre $\rho_\bullet$ afin de maximiser la vitesse de convergence.

On peut voir sur la figure 2.12 que le ρ optimal donné par les profils est d'environ 0.2 pour $\alpha = 0,5$. En dimension 2, on avait observé sur la figure 2.17 une augmentation de la vitesse de convergence pour $\rho_\bullet$ proche de 0,2; on peut constater sur la figure 3.10 que le même phénomène est valable en dimension 3.

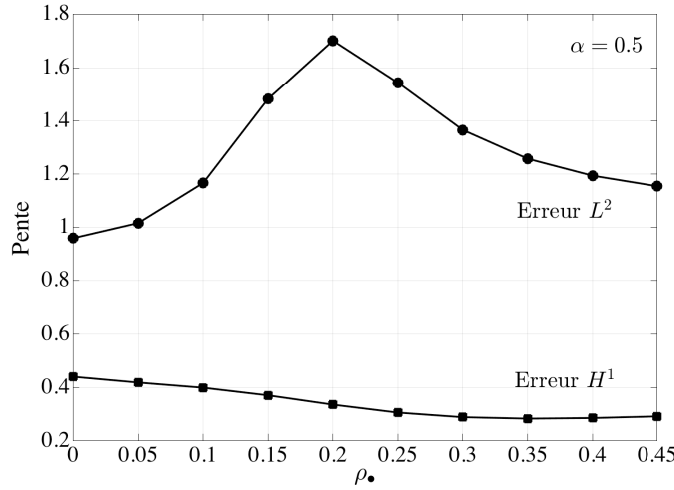


FIGURE 3.10 – Évolution de la vitesse de convergence entre problèmes de transmission et avec condition d'impédance en fonction de $\rho_\bullet$ en 3D.

On a donc une confirmation numérique de l'efficacité de la méthode de la condition d'impédance de type Robin à coefficient variable dans le cas de la dimension 3.

Condition d'impédance de type Ventcel

Rappelons que l'idée est d'approcher le solution du problème de transmission (3.2) par celle du problème (3.5) avec une vitesse de convergence accrue grâce à un jeu sur le paramètre β .

On peut voir sur la figure 2.19 que le β optimal donné par les profils est d'environ 0.2 pour $\alpha = 0,5$. En dimension 2, on avait observé sur les figure 2.20 et 2.21 une augmentation de la vitesse de convergence pour β proche de 0,2; on peut constater sur la figure 3.11 que le même phénomène est valable en dimension 3.

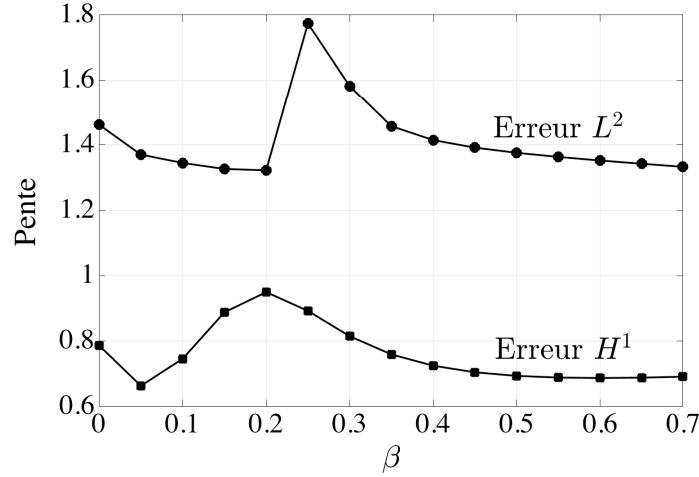


FIGURE 3.11 – Évolution de la vitesse de convergence entre problèmes de transmission et avec condition d'impédance en fonction de β en 3D.

Là encore, nous obtenons une confirmation numérique de l'efficacité de la méthode de la condition d'impédance de type Ventcel pour la dimension 3. On pourra remarquer que les pentes empiriques surpassent les attentes théoriques sur la figure 3.11 ; en particulier, pour $\beta = 0$ qui est l'équivalent du cas $\rho_\bullet = 0$ sur la figure 3.10 — autrement dit, l'équivalent sur problème avec condition d'impédance simple —, on peut constater que les pentes sont significativement plus élevées que pour son homologue de la figure 3.10. Une explication possible serait que les conditions de Dirichlet supplémentaires du problème (3.5) inhérentes à la condition de Ventcel aient réduit a priori la différence entre u_i^ϵ et v^ϵ .

Données utilisées pour les figures

Les figures 3.10 et 3.11 ont été obtenues avec les données suivantes : ϵ épaisseur de la couche mince Ω_ϵ^ϵ variant entre 0,1 et 0,15 avec un pas de 0,01 ; éléments du maillage : environ 600000 tétraèdres ; $\alpha = 0,5$; seconds membres : $f_e = 0$ et

$$f_i = \begin{cases} 1 - \exp(\tilde{r}^2 - \tilde{R}^2) & \text{si } r' \leq R', \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $\tilde{r}^2 = x^2 + (y - \tilde{R})^2$ avec $\tilde{R} = \frac{1}{2}$.

Méthode de plaquage des profils et correction des erreurs H^1 et L^∞

Comme nous l'avons vu au chapitre 2 sous-section 2.1.2, la méthode de plaquage des profils consiste à approcher la solution de (3.3), non pas par la solution d'un problème d'impédance, mais par le début de son développement asymptotique :

$$w_i^\epsilon = u_{i,\text{reg}}^0 + d^0(z)\chi_1(r)\sqrt{\epsilon}q_i^0\left(\frac{r}{\epsilon}, \theta\right),$$

avec pour erreurs commises

$$\|u_i^\epsilon - w_i^\epsilon\|_{1,\Omega_i} = O(\epsilon) \quad \text{et} \quad \|u_i^\epsilon - w_i^\epsilon\|_{\infty,\Omega_i} = O(\epsilon).$$

On avait vu alors que nous avions besoin de deux choses : approcher numériquement q^0 et calculer d^0 . On vient de voir que pour les profils, rien ne changeait ; reste donc à voir comment calculer $z \mapsto d^0(z)$, au travers de *formules d'extraction*.

Calcul de $z \mapsto d^0(z)$

En dimension 2, on avait obtenu d^0 grâce au lemme 2.3 ; ce lemme admet une extension au cas de la dimension 3.

L'idée est de se ramener à la dimension 2 en « découplant Ω_i en tranches dans la direction z », pour cela on pose

$$\Omega_i(z_0) = \{(x, y, z) \in \Omega_i : z = z_0\}.$$

On définit w^* alors comme étant la solution de

$$\begin{cases} \Delta_{(r,\theta)} w^* &= \Delta_{(r,\theta)} s^* \text{ dans } \Omega_i(z_0), \\ \partial_\nu w^* &= 0 \text{ sur } \Gamma_n \cap \{z = z_0\}, \\ w^* &= 0 \text{ sur } (\Gamma_r \cup \Gamma_d) \cap \{z = z_0\}, \end{cases}$$

où

$$s^* = -\chi_1 s^{-1} = \chi_1 \frac{1}{\sqrt{r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

On peut ainsi énoncer le lemme :

Lemme 3.1. *Pour tout z ,*

$$d^0(z) = \frac{2}{\pi} \int_{\Omega_i(z)} f_i(r, \theta, z) (s^* - w^*)(r, \theta).$$

Remarque : Si f_i est tensorielle dans le sens où : $f_i(r, \theta, z) = g(r, \theta)h(z)$ alors

$$d^0(z) = h(z) \frac{2}{\pi} \int_{\Omega_i(z)} g(r, \theta) (s^* - w^*)(r, \theta).$$

Puisque le domaine est homogène dans la direction z , le calcul de la fonction de singularité ne pose alors pas plus de difficulté que le cas de la dimension 2.

Si f_i n'est pas tensorielle dans le sens décrit ci-dessus, alors le calcul de $z \mapsto d^0(z)$ peut s'avérer fastidieux et il peut être plus judicieux d'effectuer l'approximation d'une autre manière.

Approximation de $z \mapsto d^0(z)$

On va ici utiliser les techniques déployées dans [12, 30] (voir aussi [35]). La partie théorique de ces techniques est contenue dans [12] ; [30] en contient un résumé ainsi que des exemples d'applications. Nous en expliquerons les grandes lignes et laisserons le lecteur intéressé s'y reporter.

On part du constat que $z \mapsto d^0(z)$ est suffisamment régulière. L'idée consiste alors à approcher $z \mapsto d^0(z)$ par le début de son développement en série dans une base adéquate.

En prenant $z \in [-1, 1]$, nous nous sommes placés dans le cas de [30] où la base en question nous est donnée : il s'agit de la famille des polynômes de Jacobi $J_m^{(k)}$, de degré k , vérifiant la relation d'orthogonalité

$$\int_{-1}^1 J_m^{(k)} J_m^{(n)} (1 - z^2)^m dz = \delta_n^k h_k,$$

pour $m \in \mathbb{N}$ et $h_k \in \mathbb{R}$.

Comme [30] nous fournit un certain nombre de résultats supplémentaires dans le cas $m = 2$ et que celui-ci s'avère satisfaisant compte tenu de notre objectif, nous supposons par la suite $m = 2$ et noterons $J^{(k)} = J_2^{(k)}$ afin d'alléger les notations. Notamment, nous avons

$$J^{(k)}(z) = \frac{1}{k^2 + 7k + 12} \sum_{l=0}^k \frac{(k + l + 4)!}{2^l l! (k - l)! (l + 2)!} (z - 1)^l, \quad (3.8)$$

et

$$h_k = \frac{2^5 (k + 1)(k + 2)}{(2k + 5)(k + 3)(k + 4)}. \quad (3.9)$$

L'application $z \mapsto d^0(z)$ se décompose dans cette base de Jacobi sous la forme

$$d^0 = \sum_{k \in \mathbb{N}} d_k J^{(k)}, \quad (3.10)$$

et si l'on note

$$d_N^0 = \sum_{k=0}^N d_k J^{(k)},$$

alors on a

$$|d^0 - d_N^0| = O(z^{N+1}).$$

Les coefficients d_k peuvent alors être obtenus grâce au produit scalaire :

$$d_k = \frac{1}{h_k} \int_{-1}^1 d^0 J^{(k)} (1 - z^2)^2 dz = \int_{-1}^1 d^0 B_J^{(k)} dz, \quad (3.11)$$

en notant

$$B_J^{(k)} = (1 - z^2)^2 \frac{J^{(k)}}{h_k}, \quad (3.12)$$

où $J^{(k)}$ est défini par (3.8) et h_k par (3.9).

L'enjeu consiste donc à déterminer la valeur de ce produit scalaire à partir des données du problème (3.2) et plus particulièrement u_i^0 qui — pour rappel — vérifie

$$\begin{cases} -\alpha \Delta u_i^0 &= f_i \text{ dans } \Omega_i, \\ \partial_\nu u_i^0 &= 0 \text{ sur } \Gamma_n, \\ u_i^0 &= 0 \text{ sur } \Gamma_r. \end{cases}$$

Une approximation de la valeur du produit scalaire de (3.11) nous est fournie dans [12] et [30] grâce à la forme bilinéaire anti-symétrique

$$J[R](u, v) = \int_{-1}^1 \int_0^\pi (\partial_\nu uv - u \partial_\nu v)|_{r=R} R d\theta dz, \quad (3.13)$$

où R est le rayon du cylindre $[0, R] \times [0, \pi] \times [-1, 1]$.

En effet, nous avons — toujours $m = 2$ —,

$$\alpha J[R](u_i^0, \mathcal{K}[B_J^{(k)}]) = \int_{-1}^1 d^0 B_J^{(k)} dz + O(R^{m+1}),$$

où

$$\mathcal{K}[B_J^{(k)}](r, \theta, z) = B_J^{(k)}(z) \psi_0(r, \theta) + \partial_z^2 B_J^{(k)}(z) \psi_2(r, \theta), \quad (3.14)$$

avec $B_J^{(k)}$ défini par (3.12),

$$\psi_0(r, \theta) = \frac{2}{\pi} r^{-\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right),$$

et

$$\psi_2(r, \theta) = -\frac{1}{\pi} r^{\frac{3}{2}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

Remarque : La somme définissant $\mathcal{K}[B_J^{(k)}]$ comporte en toute généralité un terme d'ordre 1 : $\partial_z B_J^{(k)}(z) \psi_1(r, \theta)$; cependant, nous sommes ici dans un cas particulier de [30] où $\psi_1 = 0$.

À partir de (3.11), nous pouvons alors énoncer le lemme suivant :

Lemme 3.2. *Une approximation de $z \mapsto d^0(z)$ est fournie, à partir de sa décomposition en série (3.10), par*

$$d_N^0 = \sum_{k=0}^N d_k J^{(k)},$$

avec comme erreur commise

$$|d^0 - d_N^0| = O(z^{N+1}).$$

Les coefficients d_k peuvent être approchés à partir du produit scalaire défini en (3.13) selon la formule suivante :

$$d_k = \alpha J[R](u_i^0, \mathcal{K}[B_J^{(k)}]) + O(R^3),$$

avec $\mathcal{K}[B_J^{(k)}]$ défini par (3.14).

Selon [30], l'erreur commise entre d_N^0 et d^0 peut être de l'ordre de 1% (ou moins) pour $R \simeq 0,1$ dans le cas où d^0 serait en réalité un polynôme. Cette erreur (pour le même ordre de grandeur de R) peut s'avérer toutefois de l'ordre de 10% dans le cas où d^0 aurait un comportement raide aux voisinages de -1 et 1 ou si le degré du polynôme n'est pas suffisant.

Mise en œuvre

La mise en œuvre numérique n'a pas fournie pour l'instant les résultats escomptés. Plusieurs facteurs entrent en ligne de compte.

Concernant l'application de la méthode d'approximation de $z \mapsto d^0(z)$, celle-ci s'est avérée instable. Lors des tests, des fonctions comme $z \mapsto (z^2 - 1)^2$ ont été approchées avec une erreur d'environ 2% tandis que d'autres comme $z \mapsto \cos(z\pi)$ l'ont été avec une erreur d'environ 20% voire plus comme $z \mapsto (z^2 - 1)$ qui cumulait 60% d'erreur. D'une part, [30] prévenait de la possibilité d'erreurs importantes aux voisinages de -1 et 1 , ce qui a pu être observé dans certains cas ; d'autre part, les calculs en 3D étant très coûteux, il n'a pu être pas été possible de raffiner le maillage suffisamment, ce qui aurait impacté la précision de nos approximations. Enfin, il est toujours possible que des erreurs de codage aient été faites et soient restées introuvées.

Concernant les autres étapes de la méthode de plaquage des profils, les erreurs dues – encore une fois – à un possible manque de raffinement des maillages sont venues s'ajouter à celle faites lors de l'approximation de $z \mapsto d^0(z)$. Notons aussi que nous retrouvons une difficulté du cas 2D, celle d'approcher les profils (voir chapitre 2).

Ces erreurs cumulées ont invalidé jusqu'à présent l'espoir d'une application fiable de la méthode. Toutes les simulations ont montré une grande instabilité des erreurs commises, l'évolution des erreurs n'étant même pas monotone en fonction de ϵ .

3.3 Un deuxième cas irrégulier : une singularité conique

On présente dans cette section quelques résultats numériques obtenus dans le cas d'un domaine comportant une singularité de type conique d'angle ω ; la figure 3.12 représente une coupe de ce domaine selon le plan (O, x, z) .

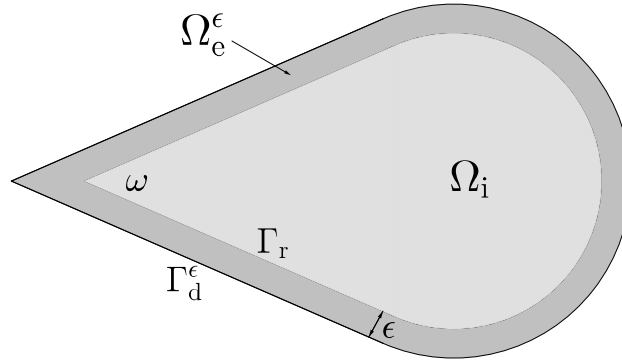


FIGURE 3.12 – Coupe 2D d'un domaine 3D comportant une singularité conique.

3.3. UN DEUXIÈME CAS IRRÉGULIER : UNE SINGULARITÉ CONIQUE

Le domaine peut être convexe ($\omega \in]0, \pi]$) — il a alors la forme d'une « goutte » —, ou non ($\omega \in]\pi, 2\pi]$) — il a alors la forme d'une « pomme ». Ceci peut s'observer sur les figures 3.13 et 3.14 représentant des maillages de ces domaines dans les cas convexe et non convexe.

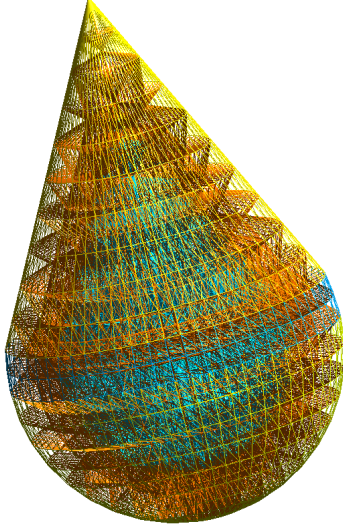


FIGURE 3.13 – Maillage d'une « goutte ».

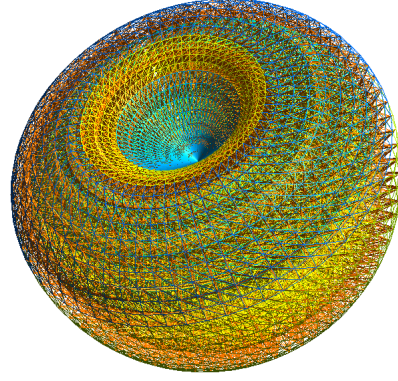


FIGURE 3.14 – Maillage d'une « pomme ».

On s'intéresse alors ici au problème de transmission ci-dessous à gauche et à son approximation par le problème avec condition d'impédance de type Robin ci-dessous à droite.

$$\left\{ \begin{array}{l} -\alpha \Delta u_i^\epsilon = f_i \text{ dans } \Omega_i, \\ -\Delta u_e^\epsilon = f_e \text{ dans } \Omega_e^\epsilon, \\ u_i^\epsilon = u_e^\epsilon \text{ sur } \Gamma_r, \\ \alpha \partial_\nu u_i^\epsilon = -\partial_\nu u_e^\epsilon \text{ sur } \Gamma_r, \\ u_e^\epsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_d^\epsilon. \end{array} \right. \quad (3.15)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\alpha \Delta v^\epsilon = f_i \text{ dans } \Omega_i, \\ v^\epsilon + \epsilon \alpha \partial_\nu v^\epsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_r. \end{array} \right. \quad (3.16)$$

Nous ne construirons pas le développement asymptotique de u^ϵ , le procédé est le même qu'au chapitre 1 : à chaque étape des singularités apparaissent et doivent être remplacées par les profils associés ; nous devrions donc obtenir un développement ayant la même forme que dans le théorème 1.4. La question qui se pose est : quels sont les premiers exposants de singularité λ_1 et de singularité duale λ_{-1} associés à ce problème ? En effet, au vu des travaux effectués dans [34] et au chapitre 1, on devrait avoir comme estimation d'erreur entre les solutions du problèmes de transmission et avec condition d'impédance :

$$\|u_i^\epsilon - v^\epsilon\|_{0, \Omega_i} = \begin{cases} O\left(\epsilon^{\min(2, \lambda_1 - \lambda_{-1})} [\log \epsilon]\right) & \text{si } \lambda_{-1} > -\frac{3}{2}, \\ O\left(\epsilon^{\min(2, \lambda_1 + \frac{3}{2})} [\log \epsilon]\right) & \text{si } \lambda_{-1} < -\frac{3}{2}; \end{cases} \quad (3.17)$$

et

$$\|u_i^\epsilon - v^\epsilon\|_{1,\Omega_i} = O\left(\epsilon^{\min(2,\lambda_1+\frac{1}{2})}[\log \epsilon]\right). \quad (3.18)$$

Remarques :

- L'estimation sur l'erreur H^1 se fait sous la condition $\lambda_{-1} < -\frac{1}{2}$ mais, comme nous pouvons le voir dans le tableau plus bas, celle-ci est toujours satisfaite.
- Une condition d'impédance tenant compte de la courbure du domaine comme la condition (3.1) permet d'améliorer les estimations d'erreurs (3.17) et (3.18) en remplaçant les 2 présents dans les min par des 3.

Les valeurs de λ_1 — ainsi que celles de λ_{-1} — se calculent à partir de la première valeur propre μ_1 du laplacien-beltrami sur une calotte sphérique d'ouverture ω ; la valeur propre μ_1 étant elle-même calculable modulo les zéros de fonctions de Legendre. On a alors, en dimension 3,

$$\lambda_{\pm 1} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \mu_1}.$$

On remarquera d'ailleurs la relation

$$\lambda_{-1} = -\lambda_1 - 1.$$

Le tableau suivant nous donne les valeurs de λ_1 , λ_{-1} et ordre de convergence entre problèmes de transmission et d'impédance pour quelques valeurs remarquables de ω :

$\frac{\omega}{2}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{5}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
λ_1	4,08	3,31	2,55	1,77	1	0,6	0,47	0,39	0,35	0
λ_{-1}	-5,08	-4,31	-3,55	-2,77	-2	-1,6	-1,47	-1,39	-1,35	-1

Pour plus de valeurs de λ_1 , un graphe est disponible dans [13].

3.3.1 Problème limite et visualisation de λ_1

Le premier terme des développements asymptotiques de u^ϵ et v^ϵ , solutions de (3.15) et (3.16), est la solution du problème limite ci-dessous :

$$\begin{cases} -\alpha \Delta u^0 &= f_i \text{ dans } \Omega_i, \\ u^0 &= 0 \text{ sur } \Gamma. \end{cases} \quad (3.19)$$

La théorie des problèmes à coin nous dit que u^0 se décompose en parties régulière et singulière :

$$u^0 = u_{\text{reg}}^0 + cr^{\lambda_1} \phi_{\lambda_1}(\theta, \varphi),$$

où (r, θ, ϕ) désigne les coordonnées sphériques, ϕ_{λ_1} une application dépendante de λ_1 (non nécessairement explicite) et c une constante.

Avec un second membre nul proche du coin, on peut s'attendre à ce que le comportement de u^0 proche du coin soit dicté par la singularité, *i.e.* que u^0 se comporte comme r^{λ_1} lorsque

r est proche de 0. Ceci a été vérifié numériquement pour diverses valeurs de ω comme on peut le voir sur le tableau suivant, où la valeur de λ_1 est estimée par ajustement asymptotique à la fonction $r \mapsto cr^{\lambda_1}$.

$\frac{\omega}{2}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{5}$	$\frac{5\pi}{6}$
$\lambda_1 (\simeq)$	4,02	3,29	2,27	1,44	0,54	0,41	0,39	0,35

Cela nous permet d'observer effectivement l'influence de l'ouverture ω du cône sur le comportement de la solution et nous donne une base solide sur laquelle continuer nos calculs.

Mise en œuvre de l'extraction

Les calculs de u^0 ont été effectués avec $f_i = \chi_{\{r>0.5\}}$ comme second membre et environ 450000 tétraèdres par maillage. Une fois récupérées les coordonnées des sommets du maillage et les valeurs de la solution en ces points, ces-dernières sont filtrées de façon à ne conserver que celles qui sont proches du coin et pas trop petites ($> 10^{-6}$), autrement dit, pas trop très du bord (sur lequel la solution s'annule et donc sur lequel on ne verrait pas grand chose). On trouve ensuite λ_1 par régression linéaire.

3.3.2 Comparaison numérique des problèmes de transmission et d'impédance

Les simulations visant à vérifier numériquement les vitesses de convergences attendues ne se sont pas avérées satisfaisantes. En effet, les vitesses de convergence données par (3.17) et (3.18) n'ont jamais pu être atteintes (que cela soit pour l'erreur L^2 ou H^1). Ceci peut s'expliquer par plusieurs facteurs.

Le premier serait le manque de précision sur les calculs ; en effet, les meilleures simulations donnaient à peine des erreurs relatives entre impédance et transmission de l'ordre de 5% et il n'a pas été possible de raffiner plus les maillages sans arriver à saturation mémoire de la machine.

Le second rejoint le premier, peut être que les gammes de ϵ testées n'étaient pas assez petites ; par manque de précision, il n'a pas été possible de prendre ϵ plus petit que 10^{-2} sans observer une perte totale de convergence entre les solutions des deux problèmes.

Le troisième est que — au vu des valeurs de λ_1 et λ_{-1} — les vitesses de convergences attendues étaient peut être trop grandes pour pouvoir être observées. On peut observer sur la figure 3.15 que le maximum de l'erreur n'est pas atteint à proximité de l'origine dans le cas convexe ; il faut être dans le cas non convexe pour que cela devienne visible comme sur la figure 3.16.

Ce phénomène a aussi été observé dans des cônes de révolutions, lesquels contiennent aussi une singularité d'arête en plus de celle du coin. En effet, comme on peut le voir sur la figure 3.17, l'erreur maximale n'est ni atteinte au coin ni à proximité de l'arête mais bel et bien au milieu du cône là où le domaine est régulier.

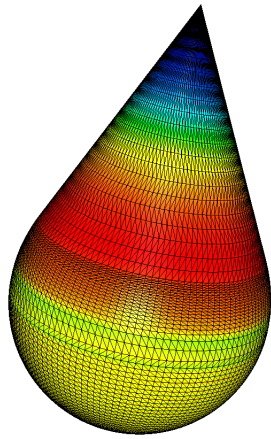


FIGURE 3.15 – Différence entre impédance et transmission sur la goutte (échelle : $2 \cdot 10^{-8}$ en bleu, $5 \cdot 10^{-4}$ en vert, $7 \cdot 10^{-4}$ en jaune, 10^{-3} en rouge).

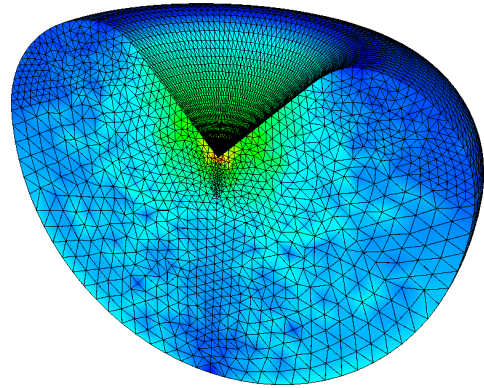


FIGURE 3.16 – Différence entre impédance et transmission dans la pomme (échelle : $2 \cdot 10^{-5}$ en bleu, $5 \cdot 10^{-3}$ en vert, 10^{-2} en rouge).

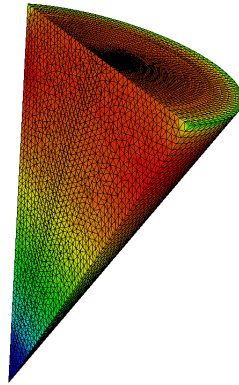


FIGURE 3.17 – Différence entre impédance et transmission dans un cône (échelle : $4 \cdot 10^{-9}$ en bleu, 10^{-3} en vert, $3 \cdot 10^{-3}$ en rouge).

3.4 Conclusion et perspectives

Nous avons abordé dans ce chapitre l'approximation du problème de transmission par celui avec condition d'impédance dans diverses situations de la dimension 3.

Les deux premières d'entre-elles sont les cas réguliers avec et sans courbure. Nous y avons observé que les développements asymptotiques sont identiques au cas 2D. Des simulations ont été effectuées et ont montré que les vitesses de convergence empiriques sont cohérentes avec les estimations théoriques. Notons toutefois un bémol pour le cas sans courbure qui — bien que donnant de meilleurs résultats que le cas avec courbure — reste assez loin des attentes théoriques.

La troisième situation abordée est celle du cas 2D des chapitres précédents extrudée en un problème 3D. Nous y avons vu que les développements asymptotiques s'effectuent de la même façon que dans le cas 2D (avec les mêmes profils) à ceci près que les coefficients de

singularité sont remplacés par des fonctions de singularité. Cela nous a permis de mettre facilement en œuvre les méthodes de correction de l'erreur L^2 : l'utilisation de conditions d'impédance multi-échelle de type Robin et de type Ventcel. Ces dernières se sont avérées aussi performantes qu'en 2D et ne demandent pas de travail supplémentaire. La mise en œuvre de la *méthode de plaquage des profils* nécessite, elle, un travail supplémentaire : l'extraction de la fonction de singularité. Cette extraction a fourni des résultats très variables (tantôt bons, tantôt mauvais), ce qui est sans doute l'un des facteurs de l'inopérabilité actuelle de la méthode ; notons toutefois que d'autres facteurs entrent en ligne de compte. Il faudrait donc travailler plus en amont afin d'en déterminer les causes et les corriger.

Passons à quelques perspectives. La première serait donc d'attester numériquement de l'opérabilité de la *méthode plaquage des profils*. La seconde sera naturellement l'étude du cas d'un domaine comportant une singularité de type conique, lequel a été abordé succinctement ici. Ceci nécessitera de construire les développements asymptotiques des différents problèmes et des profils qui y sont associés. On pourra ensuite s'intéresser à l'adaptabilité des différentes techniques proposées au sein de cette thèse ; celles-ci devraient s'avérer opérationnelles à condition de pouvoir calculer explicitement certains termes des développements asymptotiques comme nous l'avons fait au cours de cette thèse. La troisième étape sera alors de fusionner les deux cas précédents et donc d'avoir une singularité de type coin-arête. Finalement, on pourra étudier d'autres problèmes (Lamé, Helmholtz, Maxwell...) pour chacune des géométries possibles.

Chapitre 4

Construction et étude des profils

Ce chapitre, auto-contenu, peut être omis en première lecture par le lecteur familier avec ces objets. Il contient l'étude des profils des problèmes auxquels nous nous intéressons et plus particulièrement de leurs comportements à l'infini. Par exemple, le profil du problème avec condition d'impédance de type Robin vu en section 1.1.2 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \Delta p_r^j = 0 \text{ dans } \Omega_i^\infty, \\ \partial_\nu p_r^j = 0 \text{ sur } \Gamma_n^\infty, \\ p_r^j + \alpha \partial_\nu p_r^j = 0 \text{ sur } \Gamma_r^\infty, \\ p_r^j \sim s^j \text{ lorsque } r \rightarrow +\infty. \end{array} \right.$$

La construction des solutions des problèmes de profils se fait de façon itérative à partir de la singularité s^j ; les termes suivants s^j ayant un comportement à l'infini négligeable devant elle. Les premiers termes du développement de p^j à l'infini ne sont pas obtenus par la théorie variationnelle mais itérativement et complétés à l'aide d'un reste. À partir d'un certain rang — qui peut être déterminé explicitement — le reste du développement de p^j à l'infini peut être traité variationnellement et on a alors la décomposition :

$$p^j = s^j + \text{termes non-variationnels} + \text{terme variationnel}.$$

L'étude du comportement à l'infini du reste est effectuée à l'aide de la transformée de Mellin et des espaces à poids de Kondrat'ev. Des résultats sur la régularité elliptique des profils nécessaires mais très techniques pourront être trouvés dans l'annexe E qui leur est dédiée.

L'étude du profil pour le problème avec condition d'impédance de type Robin a été présentée succinctement dans [11], elle apparaît ici de façon plus détaillée, notamment grâce aux techniques employées dans [34] dont il s'agit d'une adaptation à un cas plus simple. Le lecteur profane en la matière pourra donc trouver ici l'occasion de s'initier.

L'étude du profil du problème de transmission est calquée sur son analogue de [34] ; il ne s'agit en fait que d'un cas légèrement différent. En conséquence, cette partie est plus succincte

et vise à présenter les différences avec le profil d'impédance et celui de [34].

La partie sur le profil pour le problème d'impédance avec condition de Ventcel est le cas réellement nouveau de ce chapitre bien qu'un cas similaire ait été étudié dans [6]. Malgré le fait que les techniques employées à son étude soient les mêmes que pour les cas précédents, l'apparition d'une dérivée tangentielle seconde dans une condition de bord requiert un certain nombre d'adaptations. Il peut être préférable de bien comprendre au préalable l'étude du profil du premier problème avec condition d'impédance avant de se plonger dans celle-ci.

4.1 Profils du problème avec condition d'impédance de type Robin

4.1.1 Introduction et définitions

Avant de pouvoir réellement introduire l'objectif de cette partie rappelons que Ω_i^∞ est le demi plan représenté sur la figure 4.1 et que (r, θ) désignent les coordonnées polaires centrées en O.

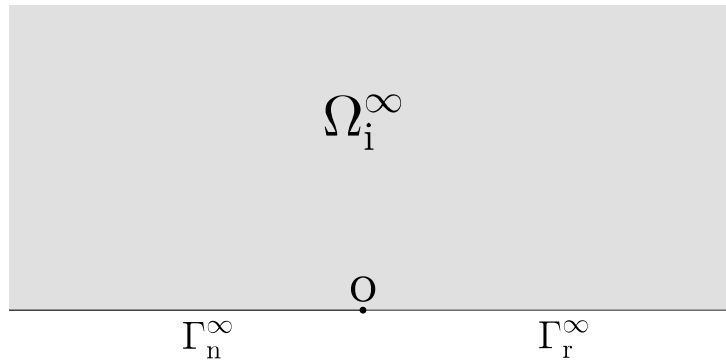


FIGURE 4.1 – Domaine des profils du problème avec condition d'impédance de type Robin

Nous avons vu lors du développement asymptotique de la solution du problème d'impédance v^ϵ (voir section 1.1.2) que des singularités s^j apparaissaient dès la première étape et bloquaient la poursuite du développement. Afin de contourner ce blocage et de poursuivre le développement, nous avons été conduits à remplacer ces singularités s^j par des profils p_r^j . Ces profils ont pour définition :

Définition 4.1. *On nomme profil du problème avec condition d'impédance de type Robin la*

solution du problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \Delta p_r^j = 0 \text{ dans } \Omega_i^\infty, \\ \partial_\nu p_r^j = 0 \text{ sur } \Gamma_n^\infty, \\ p_r^j + \alpha \partial_\nu p_r^j = 0 \text{ sur } \Gamma_r^\infty, \\ p_r^j \sim s^j \text{ lorsque } r \rightarrow +\infty, \end{array} \right. \quad (4.1)$$

où

$$s^j(r, \theta) = r^{j+\frac{1}{2}} \sin \left(\left(j + \frac{1}{2} \right) \theta \right). \quad (4.2)$$

Remarque : s^j est solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta s^j = 0 \text{ dans } \Omega_i^\infty, \\ \partial_\nu s^j = 0 \text{ sur } \Gamma_n^\infty, \\ s^j = 0 \text{ sur } \Gamma_r^\infty. \end{array} \right. \quad (4.3)$$

La compréhension de leur comportement à l'infini est cruciale pour la construction du développement asymptotique du problème d'impédance (comme on a pu le voir par exemple dans la démonstration du lemme 1.1). Précisément, le profil se décompose en deux parties : « sur-variationnelle » (ou non-variationnelle) et « sous-variationnelle » (ou variationnelle).

4.1.2 Existence et unicité de solutions variationnelles au problème de type profil

Les problèmes variationnels de type profil d'impédance sont de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\alpha \Delta u = f \text{ dans } \Omega_i^\infty, \\ \partial_\nu u = 0 \text{ sur } \Gamma_n^\infty, \\ u + \alpha \partial_\nu u = g \text{ sur } \Gamma_r^\infty. \end{array} \right. \quad (4.4)$$

Contrairement au problème (4.1), le problème (4.4) ne contient pas de condition sur le comportement à l'infini de ses solutions mais des données au second membre.

On introduit l'espace variationnel associé à ces problèmes :

$$\mathcal{V}_r = \{v \in L_{\text{loc}}^2(\Omega_i^\infty) : \nabla v \in L^2(\Omega_i^\infty), v|_{\Gamma_r^\infty} \in L^2(\Gamma_r^\infty)\}.$$

Afin de pouvoir utiliser le lemme de Lax-Milgram pour montrer l'existence de solutions au problème (4.4), il faut d'abord montrer que $\mathcal{V}_r$ est un espace de Hilbert ; c'est l'objet de la proposition suivante.

Proposition 4.1. $\mathcal{V}_r$ muni du produit scalaire

$$(u, v) = \alpha \int_{\Omega_i^\infty} \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\Gamma_r^\infty} uv$$

est un espace de Hilbert.

Démonstration. Soit $(v_n)_n \subset \mathcal{V}_r$ de Cauchy. Alors $(\nabla v_n)_n$ et $(v_n|_{\Gamma_r^\infty})_n$ sont de Cauchy dans $L^2(\Omega_i^\infty)$ et $L^2(\Gamma_r^\infty)$. Elles convergent donc : $\nabla v_n \rightarrow w$ dans $L^2(\Omega_i^\infty)$ et $v_n|_{\Gamma_r^\infty} \rightarrow u$ dans $L^2(\Gamma_r^\infty)$.

Notons $\Omega_0 = \Omega_i^\infty \cap B(O, r_0)$ et $\Gamma_0 = \Gamma_r^\infty \cap B(O, r_0)$. L'inégalité de Poincaré-Friedrichs nous donne :

$$\|v_n\|_{H^1(\Omega_0)} \leq C_0 \left(\|\nabla v_n\|_{L^2(\Omega_0)} + \|v_n\|_{L^2(\Gamma_0)} \right), \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

où C_0 ne dépend que de r_0 .

On en déduit que $(v_n)_n$ est de Cauchy dans $H^1(\Omega_0)$. Il existe donc $v_0 \in H^1(\Omega_0)$ tel que $v_n \rightarrow v_0$ dans $H^1(\Omega_0)$ et $\nabla v_0 = w|_{\Omega_0}$ et $v_0|_{\Gamma_0} = u|_{\Gamma_0}$.

Supposons que nous ayons construit par ce procédé v_1 et v_2 sur $\Omega_1 \subset \Omega_2$. Alors $v_2 = v_1$ sur Ω_1 . En effet, comme $\nabla v_1 = \nabla v_2 = w$ sur Ω_1 , on en déduit que $v_1 - v_2$ est constante p.p. dans Ω_1 . Or $v_1 = v_2 = u$ sur Γ_r^∞ , par théorème de trace on en déduit que $v_2 = v_1$ sur Ω_1 .

On peut alors étendre cette construction à Ω_i^∞ . □

Théorème 4.1. Soient $g \in L^2(\Gamma_r^\infty)$ et $f \in L_{\text{loc}}^2(\Omega_i^\infty)$ telle que $(1+r)f \in L^2(\Omega_i^\infty)$. Alors il existe une unique solution à (4.4) dans $\mathcal{V}_r$.

Démonstration. La formulation variationnelle attachée au problème (4.4) est

$$a(u, v) = \langle F, v \rangle$$

avec

$$a(u, v) = \alpha \int_{\Omega_i^\infty} \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\Gamma_r^\infty} uv$$

et

$$\langle F, v \rangle = \int_{\Omega_i^\infty} f v + \int_{\Gamma_r^\infty} g v.$$

La forme bilinéaire a est clairement continue et coercive pour la norme de $\mathcal{V}_r$. Reste à voir que la forme linéaire $\langle F, \cdot \rangle$ est continue. À cause de la définition de $\mathcal{V}_r$, on ne peut pas majorer directement l'intégrale sur Ω_i^∞ par une inégalité de Cauchy-Schwarz puisque v n'est pas dans $L^2(\Omega_i^\infty)$ en général ; il faut introduire des poids adéquats. On a

$$|\langle F, v \rangle| \leq \|(1+r)f\|_{L^2(\Omega_i^\infty)} \left\| \frac{v}{1+r} \right\|_{L^2(\Omega_i^\infty)} + \|g\|_{L^2(\Gamma_r^\infty)} \|v\|_{L^2(\Gamma_r^\infty)}.$$

Or $\left\| \frac{v}{1+r} \right\|_{L^2(\Omega_i^\infty)} \leq C \|v\|_{\mathcal{V}_r}$. En effet,

$$v(r, \theta) = v(r, 0) + \int_0^\theta \partial_\theta v(r, \tau) d\tau,$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{v(r, \theta)^2}{(1+r)^2} &\leq 2 \left(\frac{v(r, 0)^2}{(1+r)^2} + \frac{1}{(1+r)^2} \left[\int_0^\theta \partial_\theta v(r, \tau) d\tau \right]^2 \right) \\ &\leq 2\pi \left(\frac{v(r, 0)^2}{(1+r)^2} + \frac{1}{(1+r)^2} \int_0^\pi |\partial_\theta v(r, \tau)|^2 d\tau \right). \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+} \int_0^\pi \frac{v(r, \theta)^2}{(1+r)^2} r dr d\theta &\leq 2\pi \left(\int_{\mathbb{R}_+} \int_0^\pi \frac{v(r, 0)^2}{(1+r)^2} r dr d\theta + \int_{\mathbb{R}_+} \int_0^\pi \frac{\partial_\theta v(r, \tau)^2}{(1+r)^2} r d\tau dr d\theta \right) \\ &\leq 2\pi^2 \left(\int_{\mathbb{R}_+} \frac{v(r, 0)^2}{1+r} dr + \int_{\mathbb{R}_+} \int_0^\pi \frac{\partial_\theta v(r, \tau)^2}{(1+r)^2} r d\tau dr \right) \\ &\leq 2\pi^2 \left(\|v\|_{L^2(\Gamma_2^\infty)}^2 + \|\nabla v\|_{L^2(\Omega_i^\infty)}^2 \right) \\ &\leq 2\pi^2 \|v\|_{\mathcal{V}_r}^2. \end{aligned}$$

Donc

$$|\langle F, v \rangle| \leq \left(\|(1+r)f\|_{L^2(\Omega_i^\infty)} + \|g\|_{L^2(\Gamma_r^\infty)} \right) \|v\|_{\mathcal{V}_r}.$$

Le lemme de Lax-Milgram permet de conclure. $\square$

4.1.3 Développement « sur-variationnel »

Avant de commencer le développement, nous avons besoin d'introduire de nouveaux espaces fonctionnels.

Définition 4.2. On nomme $\mathcal{S}^\lambda(\Omega_i^\infty)$ et $\mathcal{S}^\lambda(\Gamma_r^\infty)$ les ensembles ci-dessous :

$$\mathcal{S}^\lambda(\Omega_i^\infty) = \left\{ u : u(r, \theta) = r^\lambda \sum_{l=0}^L \log^l r \psi_l(\theta), \psi_l \in \mathcal{C}^\infty([0, \pi]) \right\},$$

et

$$\mathcal{S}^\lambda(\Gamma_r^\infty) = \left\{ u|_{\Gamma_r^\infty} : u \in \mathcal{S}^\lambda(\Omega_i^\infty) \right\}.$$

Pour obtenir un développement à l'infini de p_r^j , on va formellement insérer dans (4.1) l'expression suivante :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p_r^{j,n}$$

où, pour tout n , $p_r^{j,n} \in \mathcal{S}^{\frac{1}{2}+j-n}(\Omega_i^\infty)$. Le terme ayant la puissance dominante de r de la somme est $p_r^{j,0}$ qui, comme s^j , est dans $\mathcal{S}^{\frac{1}{2}+j}(\Omega_i^\infty)$. Plus n est grand, plus la puissance de r du terme $p_r^{j,n}$ est petite. Ainsi cette somme se comportera bien comme s^j en l'infini.

On obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=0}^N \alpha \Delta p_r^{j,n} = 0 \text{ dans } \Omega_i^\infty, \\ \sum_{n=0}^N \partial_\nu p_r^{j,n} = 0 \text{ sur } \Gamma_n^\infty, \\ \sum_{n=0}^{+\infty} (p_r^{j,n} + \alpha \partial_\nu p_r^{j,n}) = 0 \text{ sur } \Gamma_r^\infty. \end{array} \right.$$

Intéressons nous à la somme sur Γ_r^∞ . Puisque $\partial_\nu = r^{-1} \partial_\theta$, le terme $\partial_\nu p_r^{j,n}$ appartiendra à $\mathcal{S}^{\frac{1}{2}+j-n-1}(\Omega_i^\infty)$ et donc $\partial_\nu p_r^{j,n-1}$ appartiendra à $\mathcal{S}^{\frac{1}{2}+j-n}(\Omega_i^\infty)$. L'idée est donc de regrouper les $p_r^{j,n}$ avec les $\partial_\nu p_r^{j,n-1}$ qui appartiennent au même espace :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p_r^{j,n} + \alpha \partial_\nu p_r^{j,n} = p_r^{j,0} + \sum_{n=1}^{+\infty} (p_r^{j,n} + \alpha \partial_\nu p_r^{j,n-1}).$$

Le découpage en deux de cette somme incite à considérer la suite problèmes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta p_r^{j,0} = 0 \text{ dans } \Omega_i^\infty, \\ \partial_\nu p_r^{j,0} = 0 \text{ sur } \Gamma_n^\infty, \\ p_r^{j,0} = 0 \text{ sur } \Gamma_r^\infty, \end{array} \right. \quad (4.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta p_r^{j,n} = 0 \text{ dans } \Omega_i^\infty, \\ \partial_\nu p_r^{j,n} = 0 \text{ sur } \Gamma_n^\infty, \\ p_r^{j,n} = -\alpha \partial_\nu p_r^{j,n-1} \text{ sur } \Gamma_r^\infty. \end{array} \right. \quad (4.6)$$

Proposition 4.2.

1. Les fonctions de la forme cs^j , c constante, sont solutions de (4.5).
2. Les fonctions de la forme

$$p_r^{j,n} = \sum_{l=0}^n c^{(l)} p_r^{j-l(n-l)}$$

sont solutions de (4.6) où $c^{(0)} = 1$ et les $p_r^{j-l(n-l)} \in \mathcal{S}^{\frac{1}{2}+j-n}(\Omega_i^\infty)$ sont construits itérativement comme étant solutions de

$$\begin{cases} \Delta p_r^{j(l)} &= 0 \text{ dans } \Omega_i^\infty, \\ \partial_\nu p_r^{j(l)} &= 0 \text{ sur } \Gamma_n^\infty, \\ p_r^{j(l)} &= -\alpha \partial_\nu p_r^{j(l-1)} \text{ sur } \Gamma_r^\infty. \end{cases} \quad (4.7)$$

pour $l \geq 1$ et $p_r^{j(0)} = s^j$. En particulier, $p_r^{j,n} \in \mathcal{S}^{\frac{1}{2}+j-n}(\Omega_i^\infty)$.

Démonstration.

1. C'est évident au vu du problème (4.3).
2. La preuve de ce lemme est principalement contenue dans [23], elle est aussi abordée dans [11]. Il s'agit d'une démonstration par construction ; nous ne la référons pas dans son entièreté mais donnerons les grandes lignes de la construction du premier terme $p_r^{j,1}$ pour $j = 0$. En effet, d'une part, cela simplifie les calculs mais ne change rien à l'idée de la preuve, d'autre part nous en aurons besoin dans les chapitres suivants. Remarquons toutefois que si les $p_r^{j-l(n-l)}$ appartiennent à $\mathcal{S}^{\frac{1}{2}+j-n}(\Omega_i^\infty)$, alors $p_r^{j,n}$ aussi.

Commençons par construire $p^{0(1)}$ tel qu'il soit solution de (4.7) :

$$\begin{cases} \Delta p_r^{0(1)} &= 0 \text{ dans } \Omega_i^\infty, \\ \partial_\nu p_r^{0(1)} &= 0 \text{ sur } \Gamma_n^\infty, \\ p_r^{0(1)} &= -\alpha \partial_\nu s^0 \text{ sur } \Gamma_r^\infty. \end{cases} \quad (4.8)$$

Cherchons des solutions de la forme

$$p(r, \theta) = \frac{1}{\sqrt{r}}(\varphi(\theta) + \psi(\theta) \log r).$$

En calculant Δp , nous aboutissons à

$$\Delta p = r^{-\frac{5}{2}} \left(\varphi'' + \frac{1}{4} \varphi - \psi + \left[\psi'' + \frac{1}{4} \psi \right] \log r \right).$$

Comme, sur Γ_r^∞ ,

$$\partial_\nu s^0 = -r^{-1} \partial_\theta s^0 = \frac{1}{2\sqrt{r}},$$

on en déduit que, pour qu'une fonction de la forme de p soit solution de (4.8), φ et ψ doivent vérifier les équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases} \psi'' + \frac{1}{4} \psi &= 0 \text{ sur }]0, \pi[, \\ \psi(0) &= 0, \\ \psi'(\pi) &= 0. \end{cases} \quad (4.9)$$

$$\begin{cases} \varphi'' + \frac{1}{4} \varphi &= \psi \text{ sur }]0, \pi[, \\ \varphi(0) &= \frac{\alpha}{2}, \\ \varphi'(\pi) &= 0. \end{cases} \quad (4.10)$$

Les solutions de (4.9) sont de la forme $\psi(\theta) = c \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ avec $c \in \mathbb{R}$. On a alors un second membre à (4.10) dont les solutions sont de la forme $\varphi(\theta) = c(\pi - \theta) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ et grâce aux conditions de bords on obtient $c = \frac{\alpha}{2\pi}$.

On a donc construit — et retrouvé la formule de [11],

$$p_r^{0(1)}(r, \theta) = \frac{\alpha}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{r}} \left((\pi - \theta) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \log r \right),$$

qui est bien solution de (4.8) et appartient à $\mathcal{S}^{-\frac{1}{2}}(\Omega_i^\infty)$, ce que l'on souhaitait.

En posant, avec $c^{0(1)} \in \mathbb{R}$,

$$p_r^{0,1} = p_r^{0(1)} + c^{0(1)} s^{-1},$$

on a bien $p_r^{0,1}$ dans $\mathcal{S}^{-\frac{1}{2}}(\Omega_i^\infty)$ solution de (4.6) pour $j = 0$ et $n = 1$. En effet, sur Γ_r^∞ , $s^{-1} = 0$ et $p_r^{0(1)} = -\alpha \partial_\nu s^0$ donc $p_r^{0,1} = -\alpha \partial_\nu p_r^{0,0}$.

□

Remarque : Notons qu'il n'y a pas unicité des solutions de (4.5) et (4.6), en effet n'importe quelle solution à laquelle on ajouterait $c s^{j-n}$ avec c constante serait encore solution.

De façon plus visuelle, on a un développement triangulaire inférieur dont la diagonale est composée des singularités :

$$\begin{aligned} p_r^{j,0} &= c^{(0)} s^j, \\ p_r^{j,1} &= p_r^{j(1)} + c^{j(1)} s^{j-1}, \\ p_r^{j,2} &= p_r^{j(2)} + c^{j(1)} p_r^{j-1(1)} + c^{j(2)} s^{j-2}, \\ &\dots \end{aligned}$$

On remarquera de plus que la construction de $p_r^{0(1)}$ aura nécessité l'introduction d'un terme polynomial de degré 1 en $\log r$. Ceci se généralise dans les constructions des itérées suivantes et on a alors que $p_r^{j(n)}$ — et donc $p_r^{j,n}$ — sont des polynômes de degré au plus n en $\log r$.

Nous allons à présent délaissier le cadre des séries formelles pour regarder ce qui se passe si l'on cherche à écrire p_r^j à l'aide d'un reste. Pour des raisons d'intégrabilité sur Γ_r^∞ que nous verrons plus bas, ceci nécessite l'introduction de la fonction de troncature radiale χ_0 (voir définition 1.1) . On écrira donc p_r^j sous la forme

$$p_r^j = s^j + \chi_0 \sum_{n=1}^N p_r^{j,n} + P_r^{j,N}.$$

Si s^j n'est pas concernée par la troncature χ_0 , c'est parce qu'elle ne pose pas de problème d'intégrabilité sur Γ_r^∞ puisque $s^j|_{\Gamma_r^\infty} = 0$. Par construction des $p_r^{j,n}$ et parce que χ_0 et ∂_ν commutent – puisque χ_0 est radiale –, nous aurons cette fois-ci sur Γ_r^∞ :

$$\sum_{n=0}^N (\mathcal{I} + \alpha \partial_\nu)(\chi_0 p_r^{j,n}) = \chi_0 \sum_{n=1}^N (p_r^{j,n} + \alpha \partial_\nu p_r^{j,n-1}) + \chi_0 \alpha \partial_\nu p_r^{j,N} = \chi_0 \alpha \partial_\nu p_r^{j,N}.$$

En effet, les conditions sur Γ_r^∞ des problèmes (4.5) et (4.6) font que nous avons alors une somme télescopique dont seul le terme $\partial_\nu p_r^{j,N}$ n'est pas annihilé. Pour que cette formulation de p_r^j vérifie les trois premières conditions de (4.1), $P_r^{j,N}$ doit vérifier :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \Delta P_r^{j,N} = -\alpha \Delta \left(\chi_0 \sum_{n=1}^N p_r^{j,n} \right) \text{ dans } \Omega_i^\infty, \\ \partial_\nu P_r^{j,N} = 0 \text{ sur } \Gamma_n^\infty, \\ P_r^{j,N} + \alpha \partial_\nu P_r^{j,N} = -\alpha \chi_0 \partial_\nu p_r^{j,N} \text{ sur } \Gamma_r^\infty. \end{array} \right. \quad (4.11)$$

Contrairement aux deux problèmes précédents, nous allons considérer (4.11) de façon variationnelle. C'est cette approche qui va déterminer jusqu'où N doit être poussé.

Le second membre

$$-\Delta \left(\chi_0 \sum_{n=1}^N p_r^{j,n} \right)$$

est à support dans $[R_0, R_1] \times [0, \pi]$. Ce n'est donc pas lui qui contraint notre approche.

La contrainte vient de $\chi_0 \partial_\nu p_r^{j,N}$. En effet, pour pouvoir appliquer le lemme de Lax-Milgram, il faut que ce dernier appartienne à $L^2(\Gamma_r^\infty)$. Une question qui se pose naturellement est alors : pour quels λ a-t-on $\chi_0 \mathcal{S}^\lambda(\Omega_i^\infty) \subset \mathcal{V}_r$? C'est l'objet du lemme suivant.

Lemme 4.1. *On a $\chi_0 \mathcal{S}^\lambda(\Omega_i^\infty) \subset \mathcal{V}_r$ pour $\lambda < -\frac{1}{2}$.*

Démonstration. Par définition de $\mathcal{S}^\lambda(\Omega_i^\infty)$, le comportement en l'infini de ses éléments est régi par r^λ . Par définition de $\mathcal{V}_r$ – et puisque $\chi_0|_{[0, R_0]} = 0$ –, il faut donc regarder pour quels λ on a :

$$\int_{R_0}^{+\infty} r^{2(\lambda-1)} r dr < +\infty \quad \text{et} \quad \int_{R_0}^{+\infty} r^{2\lambda} dr < +\infty.$$

Les deux conditions ci-dessus sont remplies dès que $2\lambda - 1 < -1$ et $2\lambda < -1$, donc dès que $\lambda < -\frac{1}{2}$. $\square$

Comme $p_r^{j,N} \in \mathcal{S}^{\frac{1}{2}+j-N}(\Omega_i^\infty)$ et $\partial_\nu = r^{-1} \partial_\theta$, $\partial_\nu p_r^{j,N} \in \mathcal{S}^{\frac{1}{2}+j-N-1}(\Omega_i^\infty)$. Ainsi, d'après le lemme 4.1, $\chi_0 \partial_\nu p_r^{j,N}|_{\Gamma_r^\infty}$ appartiendra à $L^2(\Gamma_r^\infty)$ si

$$j + \frac{1}{2} - N - 1 < -\frac{1}{2}$$

ou encore

$$N > j.$$

Pour $N > j$, le lemme de Lax-Milgram assure donc l'existence d'une unique solution à (4.11) dans $\mathcal{V}_r$. On a ainsi obtenu la proposition suivante.

Proposition 4.3. *Pour $N > j$, le problème (4.11) admet une unique solution $P_r^{j,N}$ dans $\mathcal{V}_r$.*

En résumé, nous avons obtenu le théorème suivant :

Théorème 4.2. *Pour $N > j$, le problème (4.1) admet une solution qui se décompose sous la forme*

$$p_r^j = \underbrace{s^j + \chi_0 \sum_{n=1}^N p_r^{j,n}}_{\text{sur-variationnel}} + \underbrace{P_r^{j,N}}_{\text{variationnel}} \quad (4.12)$$

où les $p_r^{j,n} \in \mathcal{S}^{\frac{1}{2}+j-N}(\Omega_i^\infty)$ sont solutions de (4.5) et (4.6) et $P_r^{j,N} \in \mathcal{V}_r$ solution de (4.11).

Notons ici qu'il n'y a pas unicité de la décomposition de p_r^j dans la mesure où il n'y pas unicité des solutions de (4.5).

Le comportement à l'infini des $p_r^{j,n}$ est connu. Reste à voir celui de $P_r^{j,N}$. C'est l'objet des parties suivantes.

Remarque : d'après ce que l'on a vu plus haut, on pourrait remplacer N par $j + 1$ dans (4.12).

4.1.4 Régularité elliptique et transformée de Mellin du terme sous-variationnel

L'étude du comportement du terme sous-variationnel va nécessiter l'utilisation d'espaces à poids et de la transformée de Mellin. Le propos de cette sous-partie est d'établir les résultats dont nous aurons besoin dans la sous-partie suivante. Ces résultats peuvent être admis en première lecture afin de faciliter la compréhension de la démarche globale de l'étude des profils.

Comme seul le comportement à l'infini de $P_r^{j,N}$ nous intéresse, nous allons nous affranchir des difficultés qui peuvent intervenir proche de 0 en le tronquant par χ_0 . Afin d'alléger les notations et puisque, comme nous le verrons par la suite, le comportement à l'infini de $P_r^{j,N}$ est dû à son appartenance à $\mathcal{V}_r$ qui ne dépend pas de N et j , nous écrirons :

$$P_r^0 = \chi_0 P_r^{j,N}.$$

P_r^0 résout alors

$$\begin{cases} \alpha \Delta P_r^0 &= \varphi \text{ dans } \Omega_i^\infty, \\ \partial_\nu P_r^0 &= 0 \text{ sur } \Gamma_n^\infty, \\ P_r^0 + \alpha \partial_\nu P_r^0 &= \psi \text{ sur } \Gamma_r^\infty, \end{cases} \quad (4.13)$$

où φ est à support dans la couronne $[R_0, R_1] \times [0, \pi]$ et $\psi = -\alpha \chi_0^2 \partial_\nu p_r^{j,N}$.

Avant de continuer, nous avons besoin de rappeler la définition des espaces à poids $K_\gamma^s(\Omega_i^\infty)$ et $\mathcal{K}_{\gamma-\frac{1}{2}}^{s-\frac{1}{2}}(\Gamma_r^\infty)$ introduits par Kondrat'ev dans [23]. On pourra se reporter à la section D.1 de l'annexe D pour plus de résultats concernant ces espaces.

Définition 4.3. Soient $\gamma \in \mathbb{R}$ et $s \in \mathbb{N}$, on définit $K_\gamma^s(\Omega_i^\infty)$ par

$$\mathcal{K}_\gamma^s(\Omega_i^\infty) = \left\{ u \in L_{\text{loc}}^2(\Omega_i^\infty) : r^{|\alpha|-s+\gamma} \partial_{(x,y)}^\alpha u \in L^2(\Omega_i^\infty), \forall \alpha \in \mathbb{N}^2, |\alpha| \leq s \right\},$$

muni de la norme

$$\|u\|_{\mathcal{K}_\gamma^s(\Omega_i^\infty)}^2 = \sum_{|\alpha| \leq s} \left\| r^{|\alpha|-s+\gamma} \partial_{(x,y)}^\alpha u \right\|_{L^2(\Omega_i^\infty)}^2.$$

On définit $\mathcal{K}_{\gamma-\frac{1}{2}}^{s-\frac{1}{2}}(\Gamma_r^\infty)$ par

$$\mathcal{K}_{\gamma-\frac{1}{2}}^{s-\frac{1}{2}}(\Gamma_r^\infty) = \left\{ u \in L_{\text{loc}}^2(\Gamma_r^\infty) : \exists v \in \mathcal{K}_\gamma^s(\Omega_i^\infty), v|_{\Gamma_r^\infty} = u \right\}$$

muni de la norme

$$\|u\|_{\mathcal{K}_{\gamma-\frac{1}{2}}^{s-\frac{1}{2}}(\Gamma_r^\infty)} = \inf \left\{ \|v\|_{\mathcal{K}_\gamma^s(\Omega_i^\infty)} : v \in \mathcal{K}_\gamma^s(\Omega_i^\infty), v|_{\Gamma_r^\infty} = u \right\}.$$

Dans la suite, pour u fonction, les notations $\check{u}$ et $\tilde{u}$ désigneront u en coordonnées polaires (r, θ) et (t, θ) où $t = \log r \in \mathbb{R}$.

À présent, nous allons voir deux lemmes nous donnant des résultats sur l'appartenance de P^0 aux espaces de type $K_\gamma^s(\Omega_i^\infty)$.

Lemme 4.2. $\forall \gamma \leq -1, P_r^0 \in \mathcal{K}_\gamma^0(\Omega_i^\infty)$.

Démonstration. $P_r^0 \in \mathcal{V}$ donc $\nabla P_r^0 \in L^2(\Omega_i^\infty)$ et $P_r^0 \in L^2(\Gamma_r^\infty)$. Par ailleurs, $\check{P}_r^0|_{[0, R_0] \times [0, \pi]} = 0$. On a

$$\check{P}_r^0(r, \theta) = \check{P}_r^0(r, 0) + \int_0^\theta \partial_\tau \check{P}_r^0(r, \tau) d\tau.$$

D'où

$$\check{P}_r^0(r, \theta)^2 \leq C \left(\check{P}_r^0(r, 0)^2 + \int_0^\pi \partial_\tau \check{P}_r^0(r, \tau)^2 d\tau \right).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \|r^\gamma P_r^0\|_{0, \Omega_i^\infty}^2 &= \int_{\Omega_i^\infty} r^{2\gamma} P_r^0(x, y)^2 d(x, y) \\ &= \int_{]R_0, +\infty[\times]0, \pi[} r^{2\gamma} \check{P}_r^0(r, \theta)^2 r d(r, \theta) \\ &\leq C \left(\int_{R_0}^{+\infty} r^{2\gamma+1} \check{P}_r^0(r, 0)^2 dr + \int_0^\pi \int_{R_0}^{+\infty} r^{2\gamma} \partial_\tau \check{P}_r^0(r, \tau)^2 r dr d\tau \right) \\ &\leq C \left(\int_{R_0}^{+\infty} r^{2\gamma+1} \check{P}_r^0(r, 0)^2 dr + \int_0^\pi \int_{R_0}^{+\infty} r^{2\gamma+2} (r^{-1} \partial_\tau \check{P}_r^0(r, \tau))^2 r dr d\tau \right). \end{aligned}$$

Pour pouvoir majorer cette dernière quantité par $C(\|P_r^0\|_{0, \Gamma_r^\infty}^2 + \|\nabla P_r^0\|_{0, \Omega_i^\infty}^2)$, il faut que $r^{2\gamma+1}$ et $r^{2\gamma+2}$ soient bornés sur $[R_0, +\infty[$. Ce qui est le cas si $2\gamma + 1 \leq 0$ et $2\gamma + 2 \leq 0$; d'où la condition $\gamma \leq -1$. $\square$

Lemme 4.3. $\forall m \in \mathbb{N}, P_r^0 \in \mathcal{K}_{m-1}^m(\Omega_i^\infty)$.

Démonstration. Il s'agit d'appliquer le théorème de *shift* E.1 (page 204) — résultat de régularité sur les solutions de (4.4) pour des seconds membres dans des espaces à poids $\mathcal{K}_\gamma^m(\Omega_i^\infty)$ — à P^0 pour $\gamma = m - 1$. En effet, P_r^0 vérifie le problème (4.13) qui est bien de la forme du problème (4.4) avec pour seconds membres φ et ψ . Le lemme précédent nous dit que l'hypothèse sur P_r^0 est vérifiée : $P_r^0 \in \mathcal{K}_{-1}^0(\Omega_i^\infty)$. Par ailleurs, φ étant à support compact dans Ω_i^∞ , il est clairement dans $\mathcal{K}_{m-1}^{m-2}(\Omega_i^\infty)$. Reste à voir pour ψ .

Par définition $\psi = -\alpha \chi_0^2 \partial_\nu p_r^{j,N}$, donc pour que ψ soit dans $\mathcal{K}_{\gamma-\frac{1}{2}}^{m-\frac{3}{2}}(\Gamma_r^\infty \cap]t > -1[)$, il faut que $\chi_0 r^{-1} \partial_\theta p_r^{j,N}$ soit dans $\mathcal{K}_\gamma^{m-1}(\Omega_i^\infty \cap]t > -1[)$. D'après le point (5) de la proposition D.1, on sait que si $v \in \mathcal{S}^\lambda(\Omega_i^\infty)$ alors $\chi_0 v \in \mathcal{K}_\gamma^s(\Omega_i^\infty)$ si, et seulement si, $\lambda + \gamma < s - 1$. Appliqué à ψ , on en déduit qu'il faut que $\gamma + \lambda - (m - 1) < -1$, autrement dit, $\lambda < -1$. Or, comme $\lambda = \frac{1}{2} + j - N$ et comme on a supposé que $N > j + 1$, on a $\lambda < -\frac{3}{2}$. L'application du théorème E.1 nous donne alors le résultat. $\square$

Afin de poursuivre, nous allons avoir besoin d'introduire un nouvel outil : la transformée de Mellin. Il s'agit d'une transformation de Laplace dans la direction radiale définie par la quantité suivante :

$$\hat{u}(\lambda) = \mathcal{M}[u](\lambda) = \int_0^{+\infty} r^{-\lambda} u(r, \theta) \frac{dr}{r}.$$

Les différents cadres permettant de donner un sens à cette quantité sont rappelés dans la section D.2 de l'annexe D. On pourra aussi de référer à [3]. Notons que $\hat{u}$ dépend de θ même

si cette dépendance n'est pas affichée afin d'alléger les écritures. Nous utiliserons le cadre des espaces à poids et les propriétés qui en découlent (voir section D.2.2). L'objet du lemme suivant est de définir $\widehat{P}_r^0$.

Lemme 4.4. *La transformée de Mellin de P_r^0 - notée $\widehat{P}_r^0$ - est bien définie pour $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$ et holomorphe pour $\operatorname{Re} \lambda > 0$ (voir figure 4.4).*

Démonstration. D'après le lemme 4.2, $P_r^0 \in \mathcal{K}_\gamma^0(\Omega_i^\infty)$. Or, d'après le lemme D.3, $\widehat{P}_r^0$ est bien définie pour $\operatorname{Re} \lambda = \xi = -\gamma - 1$ avec $\gamma \leq -1$, donc $\widehat{P}_r^0$ est bien définie pour $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$. $\square$

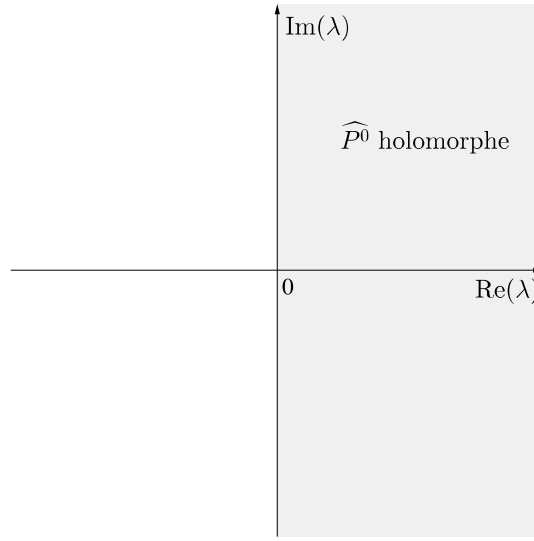


FIGURE 4.2 – Domaine de définition $\widehat{P}_r^0$.

Enfin, nous avons un lemme sur les transformées de Mellin du second membre de (4.13).

Lemme 4.5. *On pose $\lambda_N = \frac{1}{2} + j - N$ et $\lambda_N^i = \lambda_N - i$.*

1. $\widehat{\varphi}$ est bien définie et holomorphe sur $\mathbb{C}$,
2. $\widehat{\psi}$ est bien définie et holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{\lambda_N^1\}$, méromorphe sur $\mathbb{C}$.

Démonstration. On peut réécrire ψ sous la forme $\psi = \psi_c + \chi_{[r \geq R_1]} \psi_{\lambda_N^1}$ où ψ_c est à support dans $[R_0, R_1]$ et $\psi_{\lambda_N^1} \in \mathcal{S}^{\lambda_N^1}(\Omega_i^\infty)$.

Les transformées de Mellin de φ et ψ_c sont clairement holomorphes car ces derniers sont à supports compacts. Reste la transformée de Mellin de $\psi_{\lambda_N^1}$.

Pour cela, on va utiliser un résultat plus fort, une formule pour les transformées de Mellin des éléments de $\chi_{[r \geq R_1]} \mathcal{S}^\mu(\Omega_i^\infty)$. Soit $u \in \chi_{[r \geq R_1]} \mathcal{S}^\mu(\Omega_i^\infty)$, alors u peut s'écrire sous la forme

$$u(r, \theta) = \chi_{[r \geq R_1]}(r) r^\mu \sum_{l=0}^L \log^l \left(\frac{r}{R_1} \right) \psi_l(\theta).$$

4.1. PROFILS DU PROBLÈME AVEC CONDITION D'IMPÉDANCE DE TYPE ROBIN

En effectuant le changement de variable $t = \log r$ dans la formule de la transformée de Mellin on obtient

$$\hat{u}(\lambda) = \sum_{l=0}^L \psi_l(\theta) \int_{\log R_1}^{+\infty} e^{-(\lambda-\mu)t} (t - \log R_1)^l dt.$$

Une récurrence sur l permet de montrer que

$$\int_{\log R_1}^{+\infty} e^{-(\lambda-\mu)t} (t - \log R_1)^l dt = \frac{l!}{(\lambda - \mu)^{l+1}} R_1^{\mu-\lambda}.$$

D'où, pour $\operatorname{Re} \lambda > \operatorname{Re} \mu$,

$$\hat{u}(\lambda) = \sum_{l=0}^L \psi_l(\theta) \frac{(-1)^{l+1} l!}{(\lambda - \mu)^{l+1}} R_1^{\lambda-\mu}.$$

On a donc obtenu un prolongement méromorphe de $\hat{u}$ sur $\mathbb{C}$, holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{\mu\}$. On en déduit le résultat pour $\psi_{\lambda_N^1}$ avec $\mu = \lambda_N^1$. $\square$

4.1.5 Développement « sous-variationnel »

En passant en coordonnées (t, θ) , avec $t = \log r$, le demi-plan Ω_1^∞ devient alors une bande infinie de largeur π —, le système (4.13) devient

$$\left\{ \begin{array}{l} (\partial_t^2 + \partial_\theta^2) \widetilde{P}_r^0 = e^{2t} \widetilde{\varphi} \text{ dans } \mathbb{R} \times]0, \pi[, \\ \partial_\theta \widetilde{P}_r^0 = 0 \text{ sur } \mathbb{R} \times \{\pi\}, \\ \widetilde{P}_r^0 - \alpha e^{-t} \partial_\theta \widetilde{P}_r^0 = \widetilde{\psi} \text{ sur } \mathbb{R} \times \{0\}. \end{array} \right.$$

Puis, en passant à la transformée de Mellin pour $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$, on aboutit à

$$\left\{ \begin{array}{l} (\lambda^2 + \partial_\theta^2) \widehat{P}_r^0(\lambda) = \widehat{\varphi}(\lambda - 2) \text{ dans }]0, \pi[, \\ \partial_\theta \widehat{P}_r^0(\lambda) = 0 \text{ en } \pi, \\ \widehat{P}_r^0(\lambda) = \widehat{\psi}(\lambda) + \alpha \partial_\theta \widehat{P}_r^0(\lambda + 1) \text{ en } 0. \end{array} \right. \quad (4.14)$$

On s'intéresse donc aux problèmes de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\lambda^2 + \partial_\theta^2) P(\lambda) = f(\lambda) \text{ dans }]0, \pi[, \\ \partial_\theta P(\lambda) = 0 \text{ en } \pi, \\ P(\lambda) = g(\lambda) \text{ en } 0. \end{array} \right. \quad (4.15)$$

Lemme 4.6. Si $f(\lambda) \in L^2(]0, \pi[)$ et si

$$\lambda \notin \mathbb{Z}_{\frac{1}{2}} = \left\{ \frac{1}{2} + k, k \in \mathbb{Z} \right\},$$

alors il existe une unique solution à (4.15) dans $H^2(]0, \pi[)$. De plus, si $\lambda \mapsto (f(\lambda), g(\lambda))$ est méromorphe sur $\Pi \subset \mathbb{C}$, alors $\lambda \mapsto P(\lambda)$ l'est aussi; ses pôles sont ceux du second membre et les $\frac{1}{2} + k, k \in \mathbb{Z}$, lesquels proviennent de l'opérateur $\mathcal{A}$ associé à (4.15).

Remarque : Dans notre cas, f n'aura pas de pôles mais g si; ils seront de la forme $\frac{1}{2} + k, k \in \mathbb{Z}$. Nous aurons alors un phénomène de résonance : si λ est un pôle d'ordre m ($m = 1$ dans notre cas) pour l'opérateur et d'ordre l pour g , alors il sera un pôle d'ordre $m + l$ pour $\lambda \mapsto P(\lambda)$.

Démonstration. Il s'agit de voir l'injectivité et la surjectivité de l'opérateur

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\lambda) : H^2(]0, \pi[) &\longrightarrow L^2(]0, \pi[) \times \mathbb{R} \\ P(\lambda) &\longmapsto (f(\lambda), g(\lambda)) \end{aligned}$$

où $\mathcal{A}(\lambda)$ est défini par les équations (4.15).

Injectivité : Il s'agit de voir s'il existe des λ pour lesquels on a des solutions non triviales à (4.15) avec second membre nul.

Si $\lambda = 0$, alors $P(\lambda) = 0$. Sinon, $V(\lambda) = A \cos(\lambda\theta) + B \sin(\lambda\theta)$; les conditions de bord donnent alors des solutions non triviales si et seulement si $\lambda = \frac{1}{2} + k, k \in \mathbb{Z}$, ce qui n'est pas le cas ici.

Surjectivité : Pour $(f(\lambda), g(\lambda)) \in L^2(]0, \pi[) \times \mathbb{R}$, il faut résoudre

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_\theta^2 P(\lambda) + \lambda^2 P(\lambda) = f(\lambda) \text{ dans }]0, \pi[, \\ \partial_\theta P(\lambda) = 0 \text{ en } \pi, \\ P(\lambda) = g(\lambda) \text{ en } 0. \end{array} \right.$$

Si $\lambda = 0$, il suffit d'intégrer pour résoudre le système. Sinon, on pose $\partial_\theta P(\lambda) = Q(\lambda)$ et on veut alors résoudre

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_\theta Q(\lambda) + \lambda^2 P(\lambda) = f(\lambda), \\ \partial_\theta P(\lambda) - Q(\lambda) = 0. \end{array} \right.$$

Ce système avec second membre nul a alors pour base de solutions

$$\left\{ \begin{array}{l} P(\lambda) = a \cos(\lambda\theta) + b \sin(\lambda\theta), \\ Q(\lambda) = -a\lambda \sin(\lambda\theta) + b\lambda \cos(\lambda\theta). \end{array} \right.$$

Cette base est clairement analytique par holomorphie des cosinus et sinus complexes.

La méthode de variation de la constante nous permet d'obtenir

$$\begin{cases} \partial_\theta P(\lambda) - Q(\lambda) &= a' \cos(\lambda\theta) + b' \sin(\lambda\theta), \\ \partial_\theta Q(\lambda) + \lambda^2 P(\lambda) &= -a' \lambda \sin(\lambda\theta) + b' \lambda \cos(\lambda\theta). \end{cases}$$

Autrement dit

$$\begin{pmatrix} \cos(\lambda\theta) & \sin(\lambda\theta) \\ -\lambda \sin(\lambda\theta) & \lambda \cos(\lambda\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(\lambda) \end{pmatrix}.$$

En inversant la matrice, on obtient

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\lambda\theta) & -\frac{\sin(\lambda\theta)}{\lambda} \\ -\lambda \sin(\lambda\theta) & \frac{\cos(\lambda\theta)}{\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ f(\lambda) \end{pmatrix}.$$

On trouve la solution particulière

$$\begin{cases} a_0(\theta) &= -\int_0^\theta \frac{\sin(\lambda\tau)}{\lambda} f(\lambda)(\tau) d\tau, \\ b_0(\theta) &= \int_0^\theta \frac{\cos(\lambda\tau)}{\lambda} f(\lambda)(\tau) d\tau. \end{cases}$$

On cherche finalement a_1 et b_1 tels que

$$P(\lambda)(\theta) = (a_0(\theta) + a_1) \cos(\lambda\theta) + (b_0(\theta) + b_1) \sin(\lambda\theta)$$

satisfasse $P(\lambda)(0) = g(\lambda)$ et $\partial_\theta P(\lambda)(\pi) = 0$.

On trouve $a_1 = g(\lambda) - a_0(0) = g(\lambda)$ et $b_1 = (g(\lambda) + a_0(\pi)) \tan(\lambda\pi) - b_0(\pi)$ si $\lambda \neq \frac{1}{2} + k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Au vu de la forme de $P(\lambda)$, il est clair que ses pôles sont les $\frac{1}{2} + k$, $k \in \mathbb{Z}$ et ceux du second membre. □

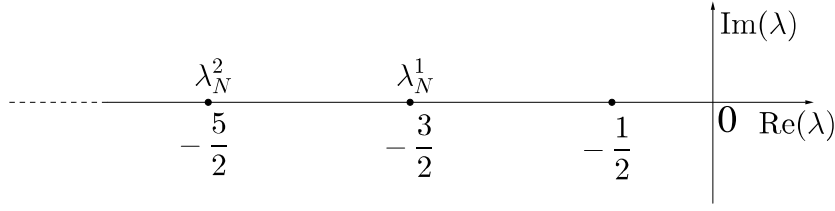
Théorème 4.3. $\widehat{P}_r^0$ se prolonge de façon méromorphe à $\mathbb{C}$. L'ensemble de ses pôles est

$$\mathcal{P}_{\mathcal{I}_r} = \mathbb{Z}_{\frac{1}{2}} \cap]-\infty, 0].$$

(Voir figure 4.3).

Démonstration. L'idée clé est celle de décalage. On procède étape par étape en prolongeant de façon méromorphe $\widehat{P}_r^0(\lambda)$ d'un demi-plan à un demi-plan plus grand en lui rajoutant une bande d'épaisseur 1 (décalage vers la gauche). À chaque étape il convient alors de prendre en compte les pôles qui apparaissent dans cette bande et ceux déjà présent dans le demi-plan précédent rappelés par le second membre du problème (4.15) dont les pôles de la solution sont donnés par le lemme 4.6. On note

$$\Lambda_N = \left\{ \lambda_N^i = \frac{1}{2} + j - (N + i), \ i \geq 1 \right\}.$$


 FIGURE 4.3 – Pôles de $\widehat{P}_r^0$.

Étape 1 : On définit $P(\lambda)$ par

$$P(\lambda) = \mathcal{A}(\lambda)^{-1}(\widehat{\varphi}(\lambda - 2), \widehat{\psi}(\lambda) + \alpha \partial_\theta \widehat{P}_r^0(\lambda + 1)).$$

D'après le lemme 4.5, $\widehat{\varphi}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et $\widehat{\psi}$ est méromorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{\lambda_N^1\}$. Par ailleurs, $\widehat{P}_r^0$ est holomorphe pour $\operatorname{Re} \lambda > 0$ d'après le lemme 4.4. Si on note $\Pi_a = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda > a\}$, alors $\lambda \mapsto \widehat{\psi}(\lambda) + \alpha \partial_\theta \widehat{P}_r^0(\lambda + 1)$ est holomorphe sur $\Pi_{-1} \cap \Pi_{\lambda_N^1} = \Pi_{-1}$ puisque $N > j$ implique que $\lambda_N^1 \leq -\frac{3}{2}$.

D'après le lemme 4.6, $P(\lambda)$ est donc méromorphe sur Π_{-1} ; l'ensemble de ses pôles étant $\mathbb{Z}_{\frac{1}{2}} \cap \Pi_{-1}$. Ils sont issus de l'opérateur, le second membre n'apportant aucune contribution. Or $\widehat{P}^0(\lambda)$ est solution de (4.14) sur $\Pi_0 \setminus \mathbb{Z}_{\frac{1}{2}}$; par unicité, on en déduit que $\widehat{P}_r^0(\lambda) = P(\lambda)$ sur $\Pi_0 \setminus \mathbb{Z}_{\frac{1}{2}}$. Comme $\widehat{P}_r^0(\lambda)$ est holomorphe sur Π_0 , on en déduit (par prolongement analytique) que les pôles de $P(\lambda)$ dans Π_0 sont artificiels.

Restent les pôles contenus dans $\Pi_{-1} \setminus \Pi_0 =]-1, 0] \times \mathbb{R}$. Le seul pôle qui y soit présent est $-\frac{1}{2}$. On a donc obtenu un prolongement méromorphe de $\widehat{P}_r^0(\lambda)$ à Π_{-1} dont le pôle est $-\frac{1}{2}$. On notera encore $\widehat{P}_r^0(\lambda)$ ce prolongement (voir figures 4.4 et 4.5).

Étape n : On procède par récurrence en répétant le processus décrit à l'étape 1. Supposons que nous ayons construit par ce procédé un prolongement méromorphe de $\widehat{P}_r^0$ à Π_{-n+1} .

Si n est assez grand, alors $\lambda_N^1 \in \Pi_{-n}$ sur lequel $\widehat{\psi}$ ne n'est plus holomorphe mais méromorphe de pôle λ_N^1 . Quant à $\partial_\theta \widehat{P}_r^0(\cdot + 1)$, il sera méromorphe sur Π_{-n} ; l'ensemble de ses pôles étant $(\mathbb{Z}_{\frac{1}{2}} \cup \Lambda_N) \cap]-n, 0] = \mathbb{Z}_{\frac{1}{2}} \cap]-n, 0]$ puisque $\Lambda_N \subset \mathbb{Z}_{\frac{1}{2}}$.

Si n n'est pas assez grand, les pôles de Λ_N n'apparaissent pas.

Le lemme 4.6 assure alors que

$$P(\lambda) = \mathcal{A}(\lambda)^{-1}(\widehat{\varphi}(\lambda - 2), \widehat{\psi}(\lambda) + \alpha \partial_\theta \widehat{P}_r^0(\lambda + 1))$$

est méromorphe sur Π_{-n} , l'ensemble de ses pôles étant encore $\mathbb{Z}_{\frac{1}{2}} \cap]-n, 0]$. Par unicité, $P(\lambda) = \widehat{P}_r^0(\lambda)$ sur Π_{-n+1} . Donc $P(\lambda)$ est un prolongement méromorphe de $\widehat{P}_r^0$ de Π_{-n+1} à Π_{-n} dont les nouveaux pôles sont $-\frac{1}{2} - n$ et éventuellement λ_N^1 .

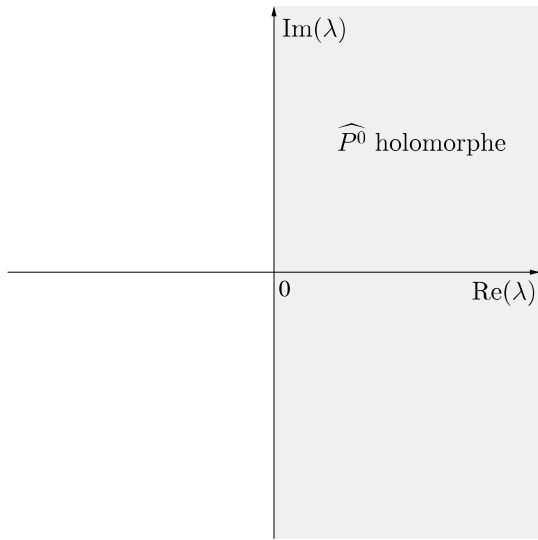


FIGURE 4.4 – Étape 0 : $\widehat{P}_r^0$ holomorphe.

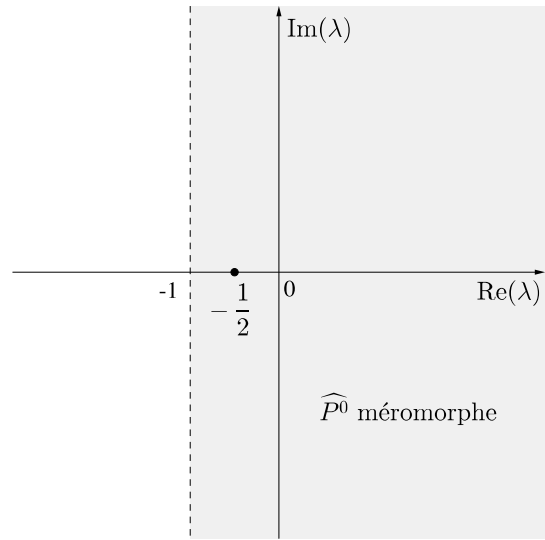


FIGURE 4.5 – Étape 1 : $\widehat{P}_r^0$ méromorphe.

□

Remarque : On a pu voir dans la démonstration ci-dessus que les pôles de l'opérateur $\mathcal{A}$ de (4.15) se confondent avec ceux du second membres. Comme mentionné dans la remarque suivant le lemme 4.6, on assiste alors à un phénomène de résonance. Par exemple, à l'étape 1, on a obtenu que $-\frac{1}{2}$ était un pôle d'ordre 1 car c'était le premier construit. À l'étape 2, ce pôle va résonner avec l'opérateur et deviendra donc un pôle d'ordre 2 tandis que $-\frac{3}{2}$ apparaîtra comme pôle d'ordre 1.

Le lemme suivant nous donne une condition permettant de savoir dans quel espace à poids $\mathcal{K}_\gamma^s(\Omega_i^\infty)$ on peut trouver un antécédent par transformation de Mellin au prolongement méromorphe de $\widehat{P}_r^0$ (que l'on note encore $\widehat{P}_r^0$). La démonstration de ce lemme fait appel à des espaces de Sobolev à poids : $H^s(I, \rho)$; on rappelle leurs définitions ci-dessous.

Définition 4.4. Soient $I \subset \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{N}$ et $\rho > 0$; $v \in H^s(I, \rho)$ si et seulement si

$$\|v\|_{H^s(I, \rho)}^2 = \sum_{|\beta| \leq s} \|\rho^{\beta_1} \partial^{\beta_2} v\|_{L^2(I)}^2 < +\infty,$$

où $\beta = (\beta_1, \beta_2)$.

Lemme 4.7. Soit $a \in \mathbb{R}_+$. Il existe P_r^a tel que $P_r^a \in \mathcal{K}_{m+a-1}^m(\Omega_i^\infty)$, pour tout $m \in \mathbb{N}$, et $\widehat{P}_r^0(\lambda) = \mathcal{M}[P_r^a](\lambda)$, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\text{Re } \lambda \geq -a$.

Remarque : On va en fait voir dans la démonstration que c'est vrai pour $a \in [-1, +\infty[$ et donc en particulier pour $a \in \mathbb{R}_+$.

Démonstration. On procède par récurrence sur $\lfloor a \rfloor$, partie entière de a en partant de -1 .

$\lfloor a \rfloor = -1$ D'après le lemme 4.3 et la proposition D.1, $P_r^0 \in \mathcal{K}_{m-1}^m(\Omega_i^\infty)$, donc $P_r^0 \in \mathcal{K}_{m+a-1}^m(\Omega_i^\infty)$ puisque $m-1 \geq m+a-1$. Par ailleurs, $\widehat{P}_r^0$ est bien défini pour $\operatorname{Re} \lambda \geq m - (m+a-1) - 1 = -a$ d'après le lemme 4.4.

$\lfloor a \rfloor \geq 0$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose le résultat vrai pour tout a tel que $\lfloor a \rfloor \leq n$.

Soit $a \in \mathbb{R}_+$ tel que $\lfloor a \rfloor \in]n, n+1]$. D'après le théorème D.1, il suffit de vérifier que, pour tout $\operatorname{Re} \lambda = \xi \in [-a, 0[$ (pour $\xi \geq 0$, on sait déjà que $\widehat{P}_r^0$ répond au problème),

$$I_m(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \left\| \widehat{P}_r^0(\xi + i\eta) \right\|_{H^m([0, \pi[; |\eta|])}^2 d\eta < +\infty.$$

Comme $\widehat{P}_r^0$ résout (4.14), on obtient par régularité elliptique et théorème de trace que

$$\left\| \widehat{P}_r^0(\lambda) \right\|_{H^m([0, \pi[; |\eta|])}^2 \leq C \left(\|\widehat{\varphi}(\lambda - 2)\|_{H^m([0, \pi[; |\eta|])}^2 + |\eta|^{2m} |\widehat{\psi}(\lambda)|^2 + \left\| \widehat{P}_r^0(\lambda + 1) \right\|_{H^{m+2}([0, \pi[; |\eta|])}^2 \right).$$

D'où

$$I_m(\xi) \leq C \left(\int_{\mathbb{R}} \|\widehat{\varphi}(\lambda - 2)\|_{H^m([0, \pi[; |\eta|])}^2 + |\eta|^{2m} |\widehat{\psi}(\lambda)|^2 d\eta + I_{m+2}(\xi + 1) \right),$$

avec $\lambda = \xi + i\eta$.

— Commençons par nous intéresser à

$$\int_{\mathbb{R}} |\eta|^{2m} |\widehat{\psi}(\lambda)|^2 d\eta.$$

Cette dernière quantité est égale à $\|\eta^m \widehat{\psi}(\lambda)\|_{0, \mathbb{R}}^2$. Comme tous les résultats sur la transformée de Mellin cités jusqu'ici sont énoncés pour la dimension 2, détaillons un peu.

On a

$$\begin{aligned} \eta^m \widehat{\psi}(\lambda) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-t\xi} \psi(t) \eta^m e^{-it\eta} (-1)^m (-1)^m dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-t\xi} \psi(t) \partial_t^m (e^{-it\eta}) (-1)^m dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \partial_t^m (e^{-t\xi} \psi(t)) e^{-it\eta} dt \quad (\text{i.p.p.}) \\ &= \mathcal{F}[\partial_t^m (e^{-t\xi} \psi(t))](\eta). \end{aligned}$$

Le théorème de Plancherel nous donne alors, pour $\xi \in [-a, 0]$,

$$\begin{aligned}
\| |\eta|^m \widehat{\psi}(\lambda) \|_{0,\mathbb{R}}^2 &= C \| \partial_t^m (e^{-t\xi} \psi(t)) \|_{0,\mathbb{R}}^2 \\
&\leq C(\xi) \sum_{k=0}^m \| e^{-t\xi} \partial_t^k \psi(t) \|_{0,\mathbb{R}}^2 \\
&= C(\xi) \| \psi \|_{\mathcal{K}_{m-\xi-1}^m(\Gamma_2^\infty)} \\
&\leq C \| \psi \|_{\mathcal{K}_{m+a-1}^m(\Gamma_2^\infty)}.
\end{aligned}$$

Quelques précisions méritent d'être apportées sur ce calcul. Le passage à la dernière ligne est valable puisque $m + a - 1 \geq m - \xi - 1$. L'égalité de l'avant dernière ligne provient du lemme D.2. La dépendance en ξ de $C(\xi)$ est polynomiale, elle provient de la dérivation. Comme $\xi \in [-a, 0]$, on peut borner cette constante par un monôme en a et obtenir la dernière inégalité. La raison de cette dépendance est visible dans la démonstration du lemme D.2. Cette même dépendance est à l'œuvre dans les autres quantités à évaluer. Cependant, tenant compte de la remarque qui vient d'être faite, nous ne la ferons pas apparaître. Poursuivons.

$$\begin{aligned}
\| \psi \|_{\mathcal{K}_{m+a-1}^m(\Gamma_r^\infty)} &\leq \| P_r^0 \|_{\mathcal{K}_{m+a-1}^m(\Gamma_r^\infty)} + \alpha \| r^{-1} \partial_\theta P_r^0 \|_{\mathcal{K}_{m+a-1}^m(\Gamma_r^\infty)} \\
&\leq C \| P_r^0 \|_{\mathcal{K}_{m+a-1}^{m+1}(\Gamma_r^\infty)} \\
&\leq C \| P_r^0 \|_{\mathcal{K}_{m+a-1}^{m+2}(\Omega_i^\infty)} \\
&\leq C \| P_r^0 \|_{\mathcal{K}_{m+2+[a]-1}^{m+2+[a]}(\Omega_i^\infty)}.
\end{aligned}$$

Cette dernière quantité étant finie d'après le lemme 4.3.

— Enchaînons avec

$$\int_{\mathbb{R}} \| \widehat{\varphi}(\lambda - 2) \|_{H^m([0, \pi[, |\eta|])}^2 d\eta.$$

Pour $\gamma = m + a + 1$, on a $m - \gamma - 1 = -a$ et donc d'après le théorème D.1, pour tout $\xi \geq -a$,

$$\int_{\mathbb{R}} \| \widehat{\varphi}(\lambda - 2) \|_{H^m([0, \pi[, |\eta|])}^2 d\eta \leq C \| \varphi \|_{\mathcal{K}_\gamma^m(\Omega_i^\infty)} < +\infty.$$

En effet, par définition de φ , celui-ci appartient à $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega_i^\infty)$ et donc à $\mathcal{K}_\gamma^m(\Omega_i^\infty)$ pour tous $\gamma \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{N}$.

— Finalement, il nous reste à considérer $I_{m+2}(\xi + 1)$. On aura « $I_{m+2}(\xi + 1) \leq C \| P_r^0 \|_{\mathcal{K}_\gamma^{m+2}}^2$ » dès que $\xi + 1 \geq m + 2 - \gamma - 1$ d'après le théorème D.1. Pour $\gamma = m + 2 + (a - 1) - 1$ on a $\xi + 1 \geq -a + 1$. Comme $[a - 1] \leq n$, par hypothèse de récurrence, il existe $P^{a-1} \in \mathcal{K}_{m+2-(a-1)-1}^{m+2}(\Omega_i^\infty)$ tel que, pour $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re} \lambda + 1 \geq -a + 1$, on ait $\widehat{P_r^0}(\lambda + 1) = \mathcal{M}[P_r^{a-1}](\lambda + 1)$.

Ainsi, pour $\xi \geq -a$, on a

$$I_{m+2}(\xi + 1) \leq C \|P_r^{a-1}\|_{\mathcal{K}_{m+2+(a-1)-1}^{m+2}(\Omega_i^\infty)}^2.$$

□

Le théorème suivant est le résultat final de cette partie. Il permet d'inverser la transformée de Mellin sur $\widehat{P}_r^0$ afin de déterminer la structure et le comportement à l'infini de P_r^0 . Sa démonstration est calquée sur son analogue de [34] ; on pourra aussi se référer à celle du théorème 3 de [3] qui offre un résultat essentiellement identique.

Théorème 4.4. 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Il existe des fonctions $p_r^\mu \in \mathcal{S}^\mu(\Omega_i^\infty)$ telles que

$$P_r^0 = \sum_{\mu \in \mathcal{P}_{\mathcal{I}_r} \cap [-n, 0]} p_r^\mu + R_n$$

avec $R_n \in \mathcal{K}_{m+n+\delta}^m(\Omega_i^\infty)$, $\delta > 0$, $m \in \mathbb{N}$.

2. Pour $\mu \in]-\infty, -\frac{3}{2}]$, les p_r^μ sont construits par récurrence à l'aide de

$$\begin{cases} \Delta p_r^\mu &= 0 \text{ dans }]0, +\infty[\times]0, \pi[, \\ \partial_\theta p_r^\mu &= 0 \text{ sur }]0, +\infty[\times \{\pi\}, \\ p_r^\mu &= \alpha r^{-1} \partial_\theta p_r^{\mu+1} \text{ sur }]0, +\infty[\times \{0\}. \end{cases}$$

Démonstration. 1. On utilise une technique de calcul des résidus. Soient $a, b \notin \mathcal{P}_{\mathcal{I}}$, $a < b$ et $\eta > 0$. On note G_n (voir figure 4.6) le contour de l'ouvert rectangulaire

$$a < \operatorname{Re} \lambda < b \text{ et } |\operatorname{Im} \lambda| < \eta.$$

La formule des résidus donne

$$\int_{G_\eta} e^{t\lambda} \widehat{P}_r^0(\lambda) d\lambda = 2i\pi \sum_{\mu \in \mathcal{P}_{\mathcal{I}_r} \cap]a, b[} \operatorname{Res}_{\lambda=\mu} e^{t\lambda} \widehat{P}_r^0(\lambda).$$

L'idée est de voir que, lorsque η tend vers $+\infty$, les côtés verticaux laissent apparaître des transformées de Mellin inverses et que, par ailleurs, les côtés horizontaux ne comptent pas.

Côtés Verticaux : Il s'agit de montrer qu'il existe une suite $(\eta_k)_k$ tendant vers l'infini telle que

$$\int_{-\eta_k}^{\eta_k} e^{t(\xi+iy)} \widehat{P}_r^0(\xi+iy) dy \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \mathcal{M}_\xi^{-1} \left[\widehat{P}_r^0 \right] (t).$$

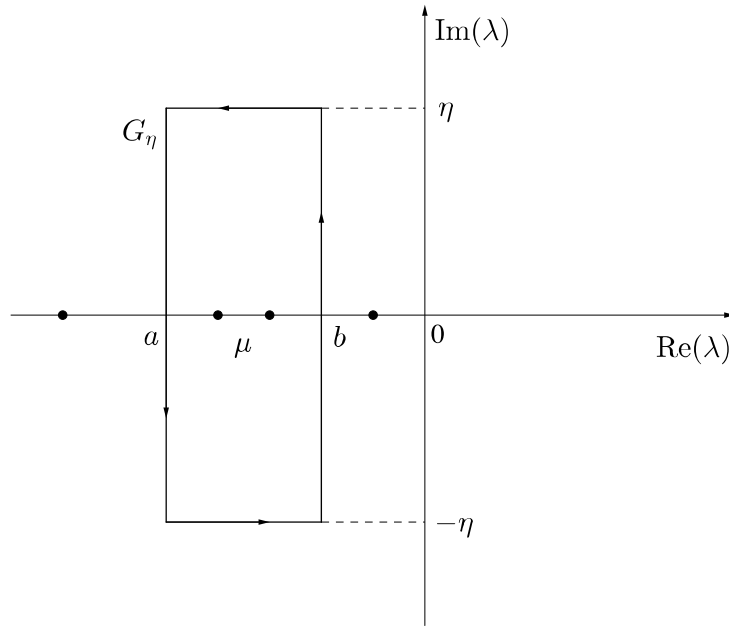


FIGURE 4.6 – Contour ouvert G_η .

On a

$$\begin{aligned}
 \int_0^\pi \int_{-\eta_k}^{\eta_k} |e^{t(\xi+iy)} \widehat{P}_r^0(\xi+iy)| dy d\theta &\leq e^{t\xi} \int_0^\pi \int_{\mathbb{R}} |\widehat{P}_r^0(\xi+iy)| dy d\theta \\
 &\leq \sqrt{\pi} e^{t\xi} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^\pi |\widehat{P}_r^0(\xi+iy)|^2 d\theta \right) dy \\
 &= \sqrt{\pi} e^{t\xi} \int_{\mathbb{R}} \|\widehat{P}_r^0(\xi+iy)\|_{0,]0,\pi[} dy
 \end{aligned}$$

Cette quantité étant finie d'après la démonstration du lemme 4.7, on en déduit l'existence de la suite souhaitée.

Côtés Horizontaux : L'idée, là encore, est de montrer qu'il existe une suite $(\eta_k)_k$ tendant vers l'infini telle que

$$I(\eta_k) = \int_a^b e^{t(\xi+i\eta_k)} \widehat{P}_r^0(\xi+i\eta_k) d\xi \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0.$$

On a

$$\int_{\mathbb{R}} \int_0^\pi |I(\eta)|^2 d\theta d\eta \leq C \int_a^b \int_{\mathbb{R}} \|\widehat{P}_r^0(\xi+i\eta)\|_{0,]0,\pi[} d\eta d\xi.$$

où C dépend de t , a et b .

Usant de nouveau de la démonstration du lemme 4.7, on obtient que

$$\int_a^b \int_{\mathbb{R}} \|\widehat{P}_r^0(\xi+i\eta)\|_{0,]0,\pi[} d\eta d\xi = \int_a^b I_0(\xi) d\xi < +\infty.$$

On en déduit alors l'existence de la suite voulue.

Ainsi, si l'on note $\mathcal{M}_\xi^{-1}[u]$ la transformée de Mellin inverse le long de la droite $\operatorname{Re} \lambda = \xi$, on a

$$\mathcal{M}_b^{-1} \left[\widehat{P}_r^0 \right] (r) - \mathcal{M}_a^{-1} \left[\widehat{P}_r^0 \right] (r) = \sum_{\mu \in \mathcal{P}_{\mathcal{I}_r} \cap]a, b[} \operatorname{Res}_{\lambda=\mu} r^\lambda \widehat{P}_r^0(\lambda). \quad (4.16)$$

Notons $p_r^\mu = \operatorname{Res}_{\lambda=\mu} r^\lambda \widehat{P}_r^0(\lambda)$. On a $p_r^\mu \in \mathcal{S}^\mu(\Omega_i^\infty)$. En effet, le développement en série de Laurent de $\widehat{P}_r^0$ étant

$$\widehat{P}_r^0(\lambda) = h(\lambda) + \sum_{p=1}^P \frac{c_p(\theta)}{(\lambda - \mu)^p}$$

avec h holomorphe en $\lambda = \mu$ et $P \geq 1$ (nous avons vu dans la démonstration du théorème 4.3 et la remarque qui la suit que $\widehat{P}^0$ admet *a priori* des pôles d'ordres P supérieurs à 1); et, par ailleurs, vu que

$$r^\lambda = r^\mu \sum_{l \geq 0} \frac{\log^l r}{l!} (\lambda - \mu)^l,$$

on en déduit que le résidu de $r^\lambda \widehat{P}_r^0(\lambda)$ en μ est

$$r^\mu \sum_{l=p-1}^\infty c_p(\theta) \frac{\log^l r}{l!}.$$

Il est clair que celui-ci appartient à $\mathcal{S}^\mu(\Omega_i^\infty)$. En appliquant (4.16) avec $b = 0$ et, pour $\delta \in]0, 1[$, $a = -(n + \delta) \notin \mathcal{P}$, on obtient

$$\mathcal{M}_0^{-1} \left[\widehat{P}_r^0 \right] (r) = \sum_{\mu \in \mathcal{P}_{\mathcal{I}_r} \cap]-(n+\delta), 0[} p_r^\mu + \mathcal{M}_{-(n+\delta)}^{-1} \left[\widehat{P}_r^0 \right] (r).$$

Le lemme 4.7 nous permet d'inverser la transformée de Mellin le long de la droite $\operatorname{Re} \lambda = 0$ et donc de pouvoir écrire $\mathcal{M}_0^{-1} \left[\widehat{P}_r^0 \right] = P_r^0$. L'utilisation du même lemme le long de la droite $\operatorname{Re} \lambda = -(n + \delta)$ nous permet d'affirmer qu'il existe $P^{-(n+\delta)} \in \mathcal{K}_{m+n+\delta}^m(\Omega_i^\infty)$ tel que $\mathcal{M}_{-(n+\delta)}^{-1} \left[\widehat{P}_r^0 \right] = P^{-(n+\delta)}$. On en déduit alors que

$$P_r^0 = \sum_{\mu \in \mathcal{P}_{\mathcal{I}_r} \cap]-(n+\delta), 0[} p_r^\mu + P^{-(n+\delta)}.$$

En notant $R_n = P^{-(n+\delta)}$, on obtient l'égalité voulue :

$$P_r^0 = \sum_{\mu \in \mathcal{P}_{\mathcal{I}_r} \cap]-(n+\delta), 0[} p_r^\mu + R_n.$$

2. On va procéder par récurrence sur i en partant du premier pôle qui nous assure d'être dans l'espace variationnel $\mathcal{V}_r : -\frac{3}{2}$. En effet, d'après le lemme 4.1 et le théorème 4.3, le

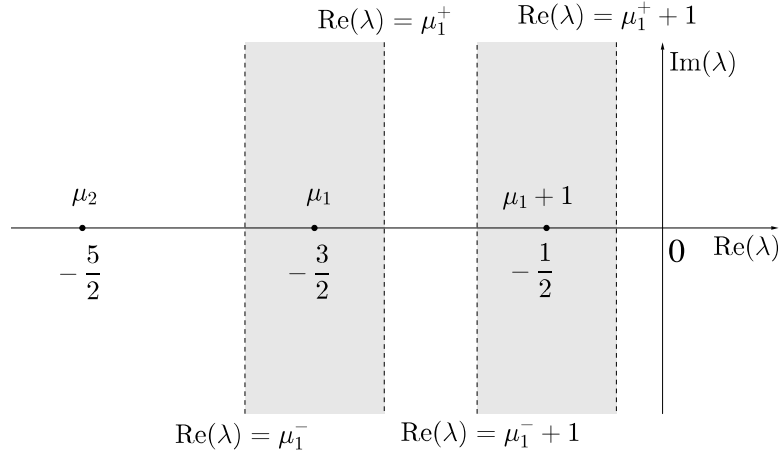


FIGURE 4.7 – Bandes infinies ne comportant qu'un seul pôle chacune.

premier $\lambda \in \mathcal{P}$ tel que $\lambda < -\frac{1}{2}$ est $-\frac{3}{2}$, d'où la définition de μ_i ci-dessous.

On note $\mu_i = -\frac{1}{2} - i$ et $\mu_i^\pm = \mu_i \pm \delta$ pour $i \geq 1$ tel que $\mu_i > \lambda_N^1$ – on suppose $N > j$ tel que cela soit vérifié – et $\delta > 0$ assez petit pour que μ_i soit le seul pôle dans l'intervalle $]\mu_i^-, \mu_i^+[$ (voir figure 4.7). On note aussi $a_i^\pm = -\mu_i^\mp$.

$i = 1$: En réappliquant le procédé décrit en première partie, on obtient

$$P_r^{a_1^+} - P_r^{a_1^-} = \text{Res}_{\lambda=\mu_1} r^\lambda \widehat{P}_r^0(\lambda) = p_r^{\mu_1}.$$

Par transformée de Mellin inverse sur le problème (4.14) le long des droites $\text{Re } \mu_1^\pm$, puis faisant la différence des deux problèmes, on obtient

$$\begin{cases} \Delta p_r^{\mu_1} &= \varphi^{a_1^+} - \varphi^{a_1^-} \text{ dans }]0, +\infty[\times]0, \pi[, \\ \partial_\theta p_r^{\mu_1} &= 0 \text{ sur }]0, +\infty[\times \{\pi\}, \\ p_r^{\mu_1} &= \psi^{a_1^+} - \psi^{a_1^-} + \alpha \frac{1}{r} \partial_\theta \left(P_r^{a_1^++1} - P_r^{a_1^-+1} \right) \text{ sur }]0, +\infty[\times \{0\}. \end{cases}$$

En effet,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{a_1^\pm}^{-1} \left[\widehat{P}_r^0(\lambda + 1) \right] (t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{(a_1^\pm + i\eta)t} \widehat{P}_r^0((a_1^\pm + 1) + i\eta) d\eta \\ &= e^{-t} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{((a_1^\pm + 1) + i\eta)t} \widehat{P}_r^0((a_1^\pm + 1) + i\eta) d\eta \\ &= e^{-t} \widetilde{P_r^{a_1^\pm + 1}}(t) \end{aligned}$$

d'après lemme 4.7.

Par ailleurs, $\widehat{\psi}$ et $\widehat{\varphi}$ ne comportent pas de pôles dans $]\mu_1^-, \mu_1^+[$ par hypothèse sur N . On en déduit par théorème des résidus que $\psi^{a_1^+} = \psi^{a_1^-}$ et $\varphi^{a_1^+} = \varphi^{a_1^-}$. Par contre, $\widehat{P}_r^0$ a un pôle dans $]\mu_1^- + 1, \mu_1^+ + 1[$ en la personne de $-\frac{1}{2}$. Donc $P_r^{a_1^++1} - P_r^{a_1^-+1} = p_r^{\mu_1+1}$ n'est pas nul. On a alors

$$\begin{cases} \Delta p_r^{\mu_1} &= 0 \text{ dans }]0, +\infty[\times]0, \pi[, \\ \partial_\theta p_r^{\mu_1} &= 0 \text{ sur }]0, +\infty[\times \{\pi\}, \\ p_r^{\mu_1} &= \alpha \frac{1}{r} \partial_\theta p_r^{\mu_1+1} \text{ sur }]0, +\infty[\times \{0\}. \end{cases}$$

$i > 1$: Le procédé est identique au cas précédent.

□

4.1.6 Conclusion

En résumé, nous avons donc obtenu l'existence d'un profil p_r^j solution du problème

$$\begin{cases} \alpha \Delta p_r^j &= 0 \text{ dans } \Omega_i^\infty, \\ \partial_\nu p_r^j &= 0 \text{ sur } \Gamma_n^\infty, \\ p_r^j + \alpha \partial_\nu p_r^j &= 0 \text{ sur } \Gamma_r^\infty, \\ p_r^j &\sim s^j \text{ lorsque } r \rightarrow +\infty. \end{cases}$$

sous la forme suivante :

$$p_r^j = s^j + \chi_0 \sum_{n=1}^N p_r^{j,n} + P_r^{j,N},$$

où s^j , $p_r^{j,n}$ et $P_r^{j,N}$ sont les solutions des problèmes (4.3), (4.5), (4.6) et (4.11) (la formule de s^j étant donnée par (4.2)) et $N = j + 1$. Les comportements à l'infini de s^j et $p_r^{j,n}$ sont connus du fait qu'ils appartiennent à

$$\mathcal{S}^\lambda(\Omega_i^\infty) = \left\{ u : u(r, \theta) = r^\lambda \sum_{l=0}^L \log^l r \psi_l(\theta), \psi_l \in \mathcal{C}^\infty([0, \pi]) \right\},$$

avec, respectivement, $\lambda = \frac{1}{2} + j$ et $\lambda = \frac{1}{2} + j - n$. Par ailleurs, le théorème 4.4 nous donne le comportement à l'infini de $P_r^{j,N}$ et donc de p_r^j . Plus grossièrement, on a donc

$$p_r^j(r, \theta) = s^j(r, \theta) + \chi_0 \sum_{n=1}^N p_r^{j,n} + \chi_0 O\left(r^{j-(N+1)} \log r\right).$$

En particulier, on a

$$p_r^0 = s^0 + \chi_0 \left(p_r^{0(1)} + c^{0(1)} s^{-1} \right) + \chi_0 O \left(r^{-\frac{3}{2}} \log r \right) \quad (4.17)$$

avec

$$p_r^{0(1)} = \alpha \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{r}} \left[(\pi - \theta) \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) + \log r \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \right].$$

Remarque : tous ces résultats sont encore valables si α dans la condition sur Γ_r^∞ est remplacé par une fonction $\alpha_\bullet$ constante égale à α pour $x \geq x_\alpha$ où $x_\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. En effet, la troncature χ_0 gommara toute différence de comportement entre $\alpha_\bullet$ et α pour $x \leq x_\alpha$ et l'étude du comportement à l'infini du profil sera exactement identique à celle menée ci-dessus. Nous réutiliserons donc directement ces résultats avec $\alpha_\bullet$ sur Γ_r^∞ à la place de α et profil associé sera noté $p_{r,\bullet}^j$. Notons toutefois que la constante $c^{0(1)}$ dans (4.17) sera *a priori* modifiée et sera alors notée $c_\bullet^{0(1)}$.

4.2 Profils du problème de transmission

L'étude des profils du problème de transmission suivant un processus similaire à celle du problème avec condition d'impédance, la structure de cette partie sera la même que celle de la partie 4.1.

4.2.1 Introduction et définitions

Nous avons ici besoin d'introduire quelques définitions supplémentaires. On note $\Omega^\infty = \overline{\Omega_i^\infty \cup \Omega_e^\infty}$ où Ω_i^∞ et Ω_e^∞ sont définis comme sur la figure 4.8.

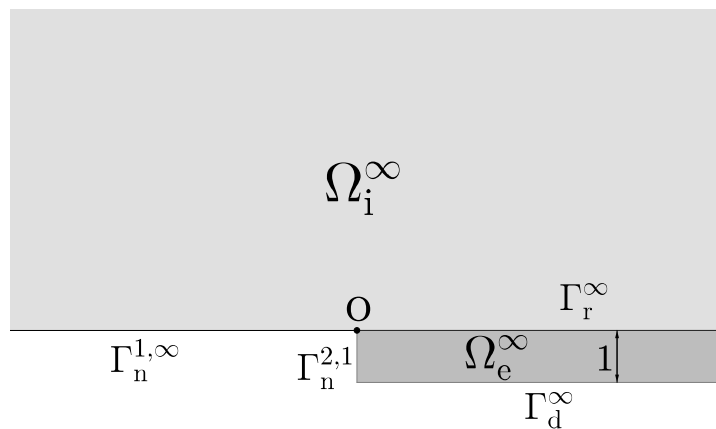


FIGURE 4.8 – Domaine du profil de transmission.

Définition 4.5.

$$\mathcal{S}^\lambda(\Omega_e^\infty) = \left\{ u : u(x, y) = x^\lambda \sum_{l=0}^L \log^l x \psi_l(y), \psi_l \in \mathcal{C}^\infty([-1, 0]) \right\},$$

et

$$\mathcal{S}^\lambda(\Omega^\infty) = \left\{ u : u_i \in \mathcal{S}^\lambda(\Omega_i^\infty), u_e \in \mathcal{S}^\lambda(\Omega_e^\infty) \text{ et } u_i = u_e \text{ sur } \Gamma_r^\infty \right\}.$$

Définition 4.6. On désigne par s_0^j le prolongement continu de s^j (voir définition ??) à Ω_e^∞ par 0.

Nous avons vu lors du développement asymptotique de la solution du problème de transmission u^ϵ (voir section 1.2.2) que les mêmes singularités s^j que pour le problème avec condition d'impédance apparaissaient dès la première étape et bloquent la poursuite du développement. Afin de contourner ce blocage et de poursuivre le développement, nous avons aussi été conduits à remplacer ces singularités s^j par des profils q^j , cette fois-ci correspondants au problème de transmission. Ces profils ont pour définition :

Définition 4.7. On nomme profil du problème de transmission (1.16) la solution du problème

$$\left\{ \begin{array}{l} -\alpha \Delta q_i^j = 0 \text{ dans } \Omega_i^\infty, \\ -\Delta q_e^j = 0 \text{ dans } \Omega_e^\infty, \\ q_i^j = q_e^j \text{ sur } \Gamma_r^\infty, \\ \alpha \partial_\nu q_i^j = -\partial_\nu q_e^j \text{ sur } \Gamma_r^\infty, \\ \partial_\nu q^j = 0 \text{ sur } \Gamma_n^\infty, \\ q_e^j = 0 \text{ sur } \Gamma_d^\infty, \\ q^j = s_0^j + o\left(r^{\frac{1}{2}+j}\right) \text{ lorsque } r \rightarrow +\infty. \end{array} \right. \quad (4.18)$$

Remarque : Pour le problème d'impédance, nous avons écrit comme condition à l'infini $p_r^j \sim s^j$; cette notation quelque peu abusive ne posait pas de problèmes à l'époque. Cependant, dans ce cas précis, elle aurait été erronée puisque – comme nous allons le voir par la suite – $q^j = s_0^j + O\left(r^{\frac{1}{2}+j-1}\right)$ et comme $s_0^j|_{\Omega_e^\infty} = 0$, nous aurions eu $q^j \sim r^{\frac{1}{2}+j-1}$ au lieu de $q^j \sim r^{\frac{1}{2}+j}$ dans Ω_e^∞ . Nous utiliserons donc dès maintenant cette nouvelle formulation qui exprime mieux le fait que q^j se comporte à l'infini comme s^j plus un reste négligeable devant ce dernier.

4.2.2 Existence et unicité de solutions variationnelles au problème de type profil

Les problèmes variationnels de type profil de transmission sont de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\alpha \Delta u_i = f_i \text{ dans } \Omega_i^\infty, \\ -\Delta u_e = f_e \text{ dans } \Omega_e^\infty, \\ u_i = u_e \text{ sur } \Gamma_r^\infty, \\ \alpha \partial_\nu u_i = -\partial_\nu u_e + g \text{ sur } \Gamma_r^\infty, \\ \partial_\nu u = 0 \text{ sur } \Gamma_n^\infty, \\ u_e = 0 \text{ sur } \Gamma_d^\infty. \end{array} \right. \quad (4.19)$$

Pour montrer l'existence et l'unicité de solutions variationnelles à ce type de problème, nous avons d'abord besoin de montrer que l'espace variationnel associé est bien un espace de Hilbert. C'est l'objet de la proposition suivante.

Proposition 4.4. *L'espace variationnel $\mathcal{W}$ associé au problème (4.19), défini par*

$$\mathcal{W} = \{w \in L_{\text{loc}}^2(\Omega^\infty) : \nabla w \in L^2(\Omega^\infty), w|_{\Gamma_d^\infty} = 0\},$$

et muni du produit scalaire

$$(u, w) = \alpha \int_{\Omega_i^\infty} \nabla u_i \cdot \nabla w_i + \int_{\Omega_e^\infty} \nabla u_e \cdot \nabla w_e$$

est un espace de Hilbert.

Démonstration. Elle est une adaptation immédiate de la démonstration de la proposition 4.1. $\square$

Théorème 4.5. *Soient $g \in L^2(\Gamma_r^\infty)$ et $f \in L_{\text{loc}}^2(\Omega^\infty)$ telle que $(1+r)f \in L^2(\Omega^\infty)$. Alors il existe une unique solution à (4.19) dans $\mathcal{W}$.*

Démonstration. C'est à nouveau une adaptation directe de la démonstration théorème 4.1 ; la seule difficulté supplémentaire provient des changements de variables qui diffèrent selon que l'on soit sur Ω_i^∞ ou Ω_e^∞ . $\square$

4.2.3 Développement « sur-variationnel »

Afin d'obtenir un développement de q^j , on va insérer formellement dans (4.18) – de la même façon que pour les profils du problème avec condition d'impédance de type Robin – l'expression suivante :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^{j,n}$$

où, pour tout n , $q^{j,n} \in \mathcal{S}^{\frac{1}{2}+j-n}(\Omega^\infty)$.

On obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha \Delta q_i^{j,n} = 0 \text{ dans } \Omega_i^\infty, \\ \sum_{n=0}^{+\infty} \Delta q_e^{j,n} = 0 \text{ dans } \Omega_e^\infty, \\ \sum_{n=0}^{+\infty} q_i^{j,n} = \sum_{n=0}^{+\infty} q_e^{j,n} \text{ sur } \Gamma_r^\infty, \\ \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha \partial_\nu q_i^{j,n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-\partial_\nu q_e^{j,n}) \text{ sur } \Gamma_r^\infty, \\ \sum_{n=0}^{+\infty} \partial_\nu q^{j,n} = 0 \text{ sur } \Gamma_n^\infty, \\ \sum_{n=0}^{+\infty} q_e^{j,n} = 0 \text{ sur } \Gamma_d^\infty. \end{array} \right.$$

Là encore, l'idée est de regrouper les termes ayant le même comportement à l'infini. Cependant, nous allons voir que nous avons un découplage intérieur-extérieur en plus de l'apparition d'une récurrence.

Sur Γ_r^∞ , on a

$$\partial_\nu q_i^{j,n} = r^{-1} \partial_\theta q_i^{j,n} \sim r^{\frac{1}{2}+j-(n+1)}, \quad r \rightarrow +\infty$$

et

$$\partial_\nu q_e^{j,n} = \partial_y q_e^{j,n} \sim x^{\frac{1}{2}+j-n}, \quad x \rightarrow +\infty.$$

On va donc regrouper $\partial_\nu q_e^{j,n}$ avec $\partial_\nu q_i^{j,n-1}$. On va ainsi pouvoir construire le terme extérieur de rang n à l'aide du terme intérieur de rang $n-1$. On utilisera alors l'autre condition sur Γ_r^∞ pour construire le terme intérieur de rang n à l'aide du terme extérieur de rang n .

Dans Ω_e^∞ , on a $\partial_x^2 q_i^{j,n} \sim r^{\frac{1}{2}+j-(n+2)}$ et $\partial_y^2 q_e^{j,n} \sim r^{\frac{1}{2}+j-n}$ lorsque $r \rightarrow +\infty$. On va donc regrouper $\partial_y^2 q_e^{j,n}$ avec $\partial_x^2 q_e^{j,n-2}$.

On aboutit ainsi à deux problèmes couplés :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_y^2 q_e^{j,n} = -\partial_x^2 q_e^{j,n-2} \text{ dans } \Omega_e^\infty, \\ \partial_y q_e^{j,n} = \alpha r^{-1} \partial_\theta q_i^{j,n-1} \text{ sur } \Gamma_r^\infty, \\ q_e^{j,n} = 0 \text{ sur } \Gamma_d^\infty, \end{array} \right. \quad (4.20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta q_i^{j,n} = 0 \text{ dans } \Omega_i^\infty, \\ \partial_\nu q_i^{j,n} = 0 \text{ sur } \Gamma_n^\infty, \\ q_i^{j,n} = q_e^{j,n} \text{ sur } \Gamma_r^\infty, \end{array} \right. \quad (4.21)$$

avec les conventions $\partial_x^2 q_e^{j,-2} = \partial_x^2 q_e^{j,-1} = \partial_\theta q_i^{j,-1} = 0$.

L'étude générique de ce type de problèmes relève de la théorie générale des problèmes à coin (on pourra se référer à [13] ou [23] par exemple) ; nous ne démontrerons donc pas le théorème suivant qui en découle.

Théorème 4.6. *Soient $f \in \mathcal{S}^{\lambda-2}(\Omega_e^\infty)$, $g \in \mathcal{S}^{\lambda-1}(\Gamma_2^\infty)$ et $h \in \mathcal{S}^\lambda(\Gamma_2^\infty)$. Alors les problèmes suivants :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_y^2 u = f \text{ dans } \Omega_e^\infty, \\ \partial_y u = g \text{ sur } \Gamma_2^\infty, \\ u = 0 \text{ sur } \Gamma_4^\infty, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta u = 0 \text{ dans } \Omega_i^\infty, \\ \partial_\nu u = 0 \text{ sur } \Gamma_1^\infty, \\ u = h \text{ sur } \Gamma_2^\infty, \end{array} \right.$$

admettent une solution, unique pour le problème intérieur. De plus, celles-ci appartiennent à $\mathcal{S}^\lambda$.

Forts de ce résultat, nous pouvons énoncer la proposition suivante :

Proposition 4.5. *Les fonctions de la forme*

$$q^{j,n} = \sum_{l=0}^n c^{(l)} q^{j-l(n-l)}$$

sont solutions de (4.20) et (4.21) où $c^{(0)} = 1$, $q^{j(0)} = s_0^j$ et $q^{j-l(n-l)} \in \mathcal{S}^{\frac{1}{2}+j-n}(\Omega^\infty)$. Les $q^{j(l)}$ étant eux aussi construits par récurrence à l'aide des problèmes suivants (avec les conventions $\partial_x^2 q_e^{j(-2)} = \partial_x^2 q_e^{j(-1)} = \partial_\theta q_i^{j(-1)} = 0$) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_y^2 q_e^{j(l)} = q_e^{j(l-2)} \text{ dans } \Omega_e^\infty, \\ \partial_y q_e^{j(l)} = -\alpha \partial_\nu q_i^{j(l-1)} \text{ sur } \Gamma_r^\infty, \\ q_e^{j(l)} = 0 \text{ sur } \Gamma_d^\infty, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta q_i^{j(l)} = 0 \text{ dans } \Omega_i^\infty, \\ \partial_\nu q_i^{j(l)} = 0 \text{ sur } \Gamma_n^\infty, \\ q_i^{j(l)} = q_e^{j(l)} \text{ sur } \Gamma_d^\infty. \end{array} \right.$$

Démonstration. On procède par récurrence

$n = 0$: 0 est solution du problème extérieur ci-dessus et cs^j du problème intérieur dans $\mathcal{S}^{\frac{1}{2}+j}(\Omega^\infty)$. Les solutions de (4.20) et (4.21) sont donc de la forme $q^{j,0} = cs_0^j$.

$n \geq 1$: Supposons que nous ayons construit les $q^{j(l)} \in \mathcal{S}^{\frac{1}{2}+j-l}(\Omega^\infty)$ solutions des problèmes extérieur et intérieur ci-dessus pour $l \in \{0, \dots, n-1\}$. L'application directe du théorème

4.6 à l'hypothèse de récurrence assure l'existence de $q^{j(n)} \in \mathcal{S}^{\frac{1}{2}+j-n}(\Omega^\infty)$ solution des deux problèmes. On peut alors construire $q^{j,n}$ à l'aide de la formule

$$q^{j,n} = \sum_{l=0}^n c^{(l)} q^{j-l(n-l)};$$

de plus, comme d'après le théorème 4.6 les $q^{j-l(n-l)} \in \mathcal{S}^{\frac{1}{2}+j-n}(\Omega^\infty)$, on en déduit que $q^{j,n}$ aussi. □

À nouveau, nous allons délaisser le cadre des séries formelles pour nous intéresser au cas où q^j est écrit à l'aide d'un reste. Ceci nécessite encore une fois l'introduction de la fonction de troncature χ_0 (voir définition 1.1). Nous écrirons q^j sous la forme

$$q^j = s_0^j + \chi_0 \sum_{n=1}^N q^{j,n} + Q^{j,N}.$$

Ainsi écrit, pour que q^j vérifie le problème (4.18), $Q^{j,N}$ doit vérifier

$$\left\{ \begin{array}{l} -\alpha \Delta Q_i^{j,N} = \alpha \Delta \left(\chi_0 \sum_{n=1}^N q_i^{j,n} \right) \text{ dans } \Omega_i^\infty, \\ -\Delta Q_e^{j,N} = \Delta \left(\chi_0 \sum_{n=1}^N q_e^{j,n} \right) \text{ dans } \Omega_e^\infty, \\ Q_i^{j,N} = Q_e^{j,N} \text{ sur } \Gamma_r^\infty, \\ \alpha \partial_\nu Q_i^{j,N} = -\partial_\nu Q_e^{j,N} - \alpha \chi \partial_\nu q_i^{j,N} \text{ sur } \Gamma_r^\infty, \\ \partial_\nu Q^{j,N} = 0 \text{ sur } \Gamma_n^\infty, \\ Q_e^{j,N} = 0 \text{ sur } \Gamma_d^\infty. \end{array} \right. \quad (4.22)$$

Ce problème se résout de façon variationnelle. Le second membre associé au laplacien étant à support dans la couronne $[R_0, R_1]$, il ne pose pas de problème ; la contrainte provient du terme $\chi_0 \partial_\nu q_i^{j,N}$. En effet, il faut que celui-ci soit dans $L^2(\Gamma_r^\infty)$. À nouveau se pose la question de savoir pour quels λ a-t-on l'inclusion de $\chi_0 \mathcal{S}^\lambda(\Omega^\infty)$ dans $\mathcal{W}$.

Le lemme suivant qui est l'homologue du lemme 4.1 nous donne la réponse. Nous noterons qu'un décalage vers la droite apparaît par rapport à l'impédance.

Lemme 4.8. *Pour que $\chi_0 \mathcal{S}^\lambda(\Omega^\infty) \subset \mathcal{W}$, il suffit que $\lambda < 0$.*

Démonstration. Similaire à celle du lemme 4.1, la condition donnée par l'intégrale de bord étant remplacée par une condition sur l'intégrale sur Ω_e^∞ . □

Nous sommes alors dans la même situation que pour l'impédance, nous devons avoir $N > j$. Sous cette condition, le théorème de Lax-Milgram assure l'existence et l'unicité d'une solution à (4.22) dans $\mathcal{W}$. Nous avons ainsi obtenu la proposition suivante :

Proposition 4.6. *Pour $N > j$, le problème (4.22) admet une unique solution $Q^{j,N}$ dans $\mathcal{W}$.*

En résumé, nous avons le théorème

Théorème 4.7. *Pour $N > j$, le problème (4.18) admet une solution qui se décompose sous la forme*

$$q^j = s_0^j + \underbrace{\chi_0 \sum_{n=1}^N q^{j,n}}_{\text{sur-variationnel}} + \underbrace{Q^{j,N}}_{\text{variationnel}}. \quad (4.23)$$

où les $q^{j,n} \in \mathcal{S}^{\frac{1}{2}+j-N}(\Omega^\infty)$ sont solutions de (4.20) et (4.21) et $Q^{j,N} \in \mathcal{W}$ solution de (4.22).

À l'instar de la section précédente, il nous reste maintenant à étudier $Q^{j,N}$.

Remarque : comme pour l'impédance, on pourrait remplacer N par $j + 1$ dans (4.23).

4.2.4 Régularité elliptique et transformée de Mellin du terme sous-variationnel

L'objet et les remarques de cette partie sont les mêmes que pour son homologue plus haut. Il y a cependant une différence avec le cas d'impédance. En effet, le domaine n'étant plus le même, l'ensemble des complexes pour lesquelles sera définie la transformée de Mellin s'en trouvera changé.

Posons, une fois encore,

$$Q^0 = \chi_0 Q^{j,N};$$

lequel résout

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta Q_i^0 = \varphi_i \text{ dans } \Omega_i^\infty, \\ \Delta Q_e^0 = \varphi_e \text{ dans } \Omega_e^\infty, \\ Q_i^0 = Q_e^0 \text{ sur } \Gamma_r^\infty \\ \alpha \partial_\nu Q_i^0 = -\partial_\nu Q_e^0 + \psi \text{ sur } \Gamma_r^\infty, \\ \partial_\nu Q^0 = \text{ sur } \Gamma_n^\infty, \\ Q_e^0 = 0 \text{ sur } \Gamma_d^\infty, \end{array} \right. \quad (4.24)$$

où φ est à support dans la couronne $[R_0, R_1] \times [0, \pi]$ et $\psi = -\alpha \chi_0^2 \partial_\nu q^{j,N}$.

Avant de pouvoir continuer, il nous faut introduire une définition supplémentaire. Comme pour les profils du problème avec condition d'impédance, nous avons besoin des espaces à

poids $\mathcal{K}_\gamma^s$ de Kondrat'ev (voir [23]); si nous avons déjà posé $\mathcal{K}_\gamma^s(\Omega_i^\infty)$ et $\mathcal{K}_{\gamma-\frac{1}{2}}^{s-\frac{1}{2}}(\Gamma_r^\infty)$ dans la définition 4.3, nous avons ici à définir $\mathcal{K}_\gamma^s(\Omega_e^\infty)$ et $\mathcal{K}_\gamma^s(\Omega^\infty)$.

Définition 4.8. Soient $\gamma \in \mathbb{R}$ et $s \in \mathbb{N}$, on définit $\mathcal{K}_\gamma^s(\Omega_e^\infty)$ et $\mathcal{K}_\gamma^s(\Omega^\infty)$ par

$$\mathcal{K}_\gamma^s(\Omega_e^\infty) = \left\{ u \in L_{\text{loc}}^2(\Omega_e^\infty) : x^{|\alpha|-s+\gamma} \partial_{(x,y)}^\alpha u \in L^2(\Omega_e^\infty), \forall \alpha \in \mathbb{N}^2, |\alpha| \leq s \right\}$$

et

$$\mathcal{K}_\gamma^s(\Omega^\infty) = \left\{ u : u_i \in \mathcal{K}_\gamma^s(\Omega_i^\infty), u_e \in \mathcal{K}_{\gamma+\frac{1}{2}}^{s+\frac{1}{2}}(\Omega_e^\infty) \text{ et } u_i = u_e \text{ sur } \Gamma_r^\infty \right\}.$$

Remarque : Notons qu'il y a une différence d'indice sur les espaces à poids auxquels appartiennent les différentes composantes de u dans la définition de $\mathcal{K}_\gamma^s(\Omega^\infty)$. Précisément, u_e est dans $\mathcal{K}_{\gamma+\frac{1}{2}}^{s+\frac{1}{2}}(\Omega_e^\infty)$ tandis que u_i est dans $\mathcal{K}_\gamma^s(\Omega_i^\infty)$. Ceci provient du fait que u est considéré en coordonnées cartésiennes sur Ω_e^∞ et polaires sur Ω_i^∞ : le changement de variables pour passer d'un système de coordonnées à l'autre engendre le décalage de $\frac{1}{2}$.

Par ailleurs, x peut être remplacé par r dans la définition de $\mathcal{K}_\gamma^s(\Omega_e^\infty)$ lorsqu'on s'intéresse au comportement de u à l'infini.

Nous pouvons maintenant énoncer deux lemmes sur l'appartenance de Q^0 aux espaces $\mathcal{K}_\gamma^s(\Omega^\infty)$.

Lemme 4.9. $\forall \gamma \leq -1, Q^0 \in \mathcal{K}_\gamma^0(\Omega^\infty)$.

Démonstration. Similaire à son homologue du cas impédance, la démonstration du lemme 4.2.

On note

$$(\bar{r}, \bar{\theta}) = \begin{cases} (r, \theta) & \text{sur } \Omega_i^\infty, \\ (x, y) & \text{sur } \Omega_e^\infty. \end{cases}$$

$Q^0 \in \mathcal{W}$ donc $\nabla Q^0 \in L^2(\Omega^\infty)$ et $Q^0 = 0$ sur Γ_d^∞ . Par ailleurs, $\check{Q}^0|_{[0,R_0] \times [-1,\pi]} = 0$.

On a

$$\check{Q}^0(\bar{r}, \bar{\theta}) = \underbrace{\check{Q}^0(\bar{r}, -1)}_{=0} + \int_{-1}^{\bar{\theta}} \partial_{\bar{\tau}} \check{Q}^0(\bar{r}, \bar{\tau}) d\bar{\tau}.$$

D'où

$$\check{Q}^0(\bar{r}, \bar{\theta})^2 \leq C \int_{-1}^{\pi} \partial_{\bar{\tau}} \check{Q}^0(\bar{r}, \bar{\tau})^2 d\bar{\tau}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \|\bar{r}^\gamma Q^0\|_{0,\Omega^\infty}^2 &= \int_{\Omega^\infty} \bar{r}^{2\gamma} Q^0(x, y)^2 dx dy \\ &\leq C \left(\int_0^\pi \int_{R_0}^{+\infty} r^{2\gamma} \partial_\tau \check{Q}_i^0(r, \tau)^2 r dr d\tau + \int_{-1}^0 \int_{R_0}^{+\infty} x^{2\gamma} \partial_y \check{Q}_e^0(x, y)^2 dx dy \right). \end{aligned}$$

Ici, on veut majorer cette dernière quantité par $C(\|\nabla Q_i^0\|_{0,\Omega_i^\infty}^2 + \|\nabla Q_e^0\|_{0,\Omega_e^\infty}^2)$. On retrouve pour l'intérieur la même condition que pour l'impédance : $2\gamma + 2 \leq 0$; pour l'extérieur, on doit avoir $2\gamma \leq 0$. D'où la condition $\gamma \leq -1$. $\square$

Lemme 4.10. $\forall m \in \mathbb{N}, Q^0 \in \mathcal{K}_{m-1}^m(\Omega^\infty)$.

La démonstration de ce lemme est - comme pour son homologue de l'impédance - basée sur l'étude de la régularité elliptique du profil. Celle-ci étant quasi-identique à celle de son analogue dans [34], nous ne la retranscrivons pas ici. Il en va de même pour certains des autres résultats qui vont suivre. Poursuivons avec la transformée de Mellin de Q^0 .

Lemme 4.11. *La transformée de Mellin de Q^0 - notée $\widehat{Q}^0$ - est bien définie pour $\operatorname{Re} \lambda \geq \frac{1}{2}$ et holomorphe pour $\operatorname{Re} \lambda > \frac{1}{2}$ (voir figure 4.11).*

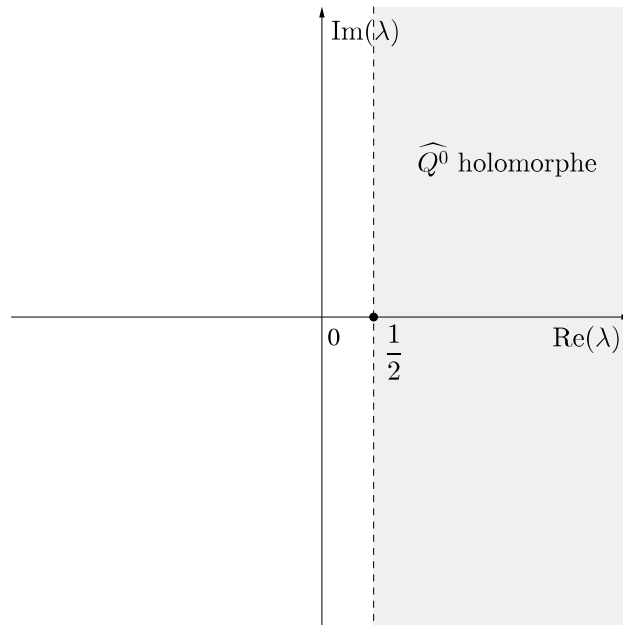


FIGURE 4.9 – Domaine de définition de $\widehat{Q}^0$.

Lemme 4.12. *On rappelle que $\lambda_N = \frac{1}{2} + j - N$ et $\lambda_N^i = \lambda_N - i$.*

1. $\widehat{\varphi}$ est bien définie et holomorphe sur $\mathbb{C}$,
2. $\widehat{\psi}$ est bien définie et holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{\lambda_N^1\}$, méromorphe sur $\mathbb{C}$.

4.2.5 Développement « sous-variationnel »

Le passage aux coordonnées $(\bar{t}, \bar{\theta})$ avec $\bar{t}$ égal à $\log r$ sur Ω_i^∞ , $\log x$ sur Ω_e^∞ , donne

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha(\partial_t^2 + \partial_\theta^2)\widetilde{Q}_i^0 = e^{2t}\widetilde{\varphi}_i \text{ dans } \mathbb{R} \times]0, \pi[, \\ (e^{-2t}(\partial_t^2 - \partial_t) + \partial_y^2)\widetilde{Q}_e^0 = \widetilde{\varphi}_e \text{ dans } \mathbb{R} \times]-1, 0[, \\ \widetilde{Q}_i^0 = \widetilde{Q}_e^0 \text{ sur } \mathbb{R} \times \{0\} \\ \alpha e^{-t}\partial_\theta\widetilde{Q}_i^0 = -\partial_y\widetilde{Q}_e^0 + \widetilde{\psi} \text{ sur } \mathbb{R} \times \{0\}, \\ \partial_n\widetilde{Q}^0 = \text{ sur } (\mathbb{R} \times \{\pi\}) \cup (\{0\} \times [-1, 0]), \\ \widetilde{Q}_e^0 = 0 \text{ sur } \mathbb{R} \times \{-1\}. \end{array} \right.$$

En passant alors à la transformée de Mellin pour $\operatorname{Re} \lambda \geq \frac{1}{2}$, on obtient de nouveau un découplage intérieur-extérieur :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_y^2 \widehat{Q}_e^0(\lambda) = \widehat{\varphi}_e(\lambda) + \lambda(\lambda - 1)\widehat{Q}_e^0(\lambda + 2) \text{ dans }]-1, 0[, \\ \partial_y \widehat{Q}_e^0(\lambda) = -\alpha \partial_\theta \widehat{Q}_i^0(\lambda + 1) + \widehat{\psi}(\lambda) \text{ en } 0, \\ \widehat{Q}_e^0(\lambda) = 0 \text{ en } -1 \end{array} \right. \quad (4.25)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} (\lambda^2 + \partial_\theta^2)\widehat{Q}_i^0(\lambda) = \widehat{\varphi}_i(\lambda - 2) \text{ dans }]0, \pi[, \\ \partial_\theta \widehat{Q}_i^0(\lambda) = 0 \text{ en } \pi, \\ \widehat{Q}_i^0(\lambda) = \widehat{Q}_e^0(\lambda) \text{ en } 0. \end{array} \right. \quad (4.26)$$

Ici, on s'intéresse donc aux problèmes du type

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_y^2 Q_e(\lambda) = f_1(\lambda) \text{ dans }]-1, 0[, \\ \partial_y Q_e(\lambda) = g_1(\lambda) \text{ en } 0, \\ Q_e(\lambda) = 0 \text{ en } -1 \end{array} \right. \quad (4.27)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} (\lambda^2 + \partial_\theta^2)Q_i(\lambda) = f_2(\lambda) \text{ dans }]0, \pi[, \\ \partial_\theta Q_i(\lambda) = 0 \text{ en } \pi, \\ Q_i(\lambda) = g_2(\lambda) \text{ en } 0. \end{array} \right. \quad (4.28)$$

Le traitement du problème (4.28) a déjà été effectué dans la partie impédance au lemme 4.15. Celui du problème (4.27) est donné par le lemme suivant (dont la démonstration est immédiate).

Lemme 4.13. Si $f_1(\lambda) \in L^2(]-1, 0[)$ alors il existe une unique solution à (4.27) dans $H^2(]-1, 0[)$:

$$Q_e(\lambda) = \int_{-1}^y \left[g_1(\lambda) - \int_u^0 f_1(\lambda) \cdot (v) dv \right] du.$$

De plus, si $\lambda \mapsto (f_1(\lambda), g_1(\lambda))$ est méromorphe sur $\Pi \subset \mathbb{C}$, alors $\lambda \mapsto Q_e(\lambda)$ l'est aussi ; ses pôles sont ceux du second membre.

Théorème 4.8. $\widehat{Q}^0$ se prolonge de façon méromorphe à $\mathbb{C}$. L'ensemble de ses pôles est

$$\mathcal{P}_T = \mathbb{Z}_{\frac{1}{2}} \cap \left] -\infty, \frac{1}{2} \right].$$

(Voir figure 4.10)

Remarque : on note un décalage de $\frac{1}{2}$ vers la droite par rapport à l'impédance.

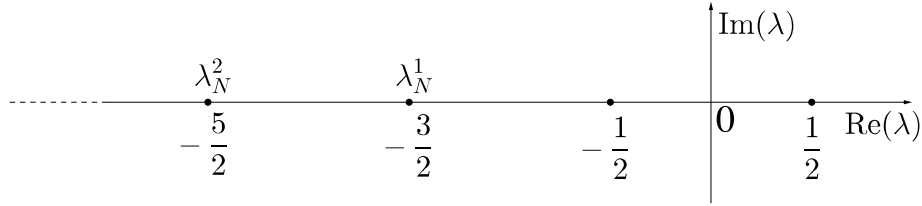


FIGURE 4.10 – Pôles de $\widehat{Q}^0$.

Démonstration. Le procédé est identique à celui du cas d'impédance. Nous ne donnerons donc les détails que pour la première étape afin de situer les différences dues à la transmission.

On note $\mathcal{A}_e$ l'opérateur défini par les équations (4.27), $\mathcal{A}_i$ l'opérateur défini par les équations (4.28) et on définit $Q(\lambda)$ par

$$Q_e(\lambda) = \mathcal{A}_e(\lambda)^{-1} \left(\widehat{\varphi}_e(\lambda) + \lambda(\lambda - 1)\widehat{Q}_e^0(\lambda + 2), \widehat{\psi}(\lambda) + \alpha\partial_\theta\widehat{Q}_i^0(\lambda + 1) \right),$$

et

$$Q_i(\lambda) = \mathcal{A}_i(\lambda)^{-1} \left(\widehat{\varphi}_i(\lambda - 2), \widehat{Q}_e^0(\lambda) \right).$$

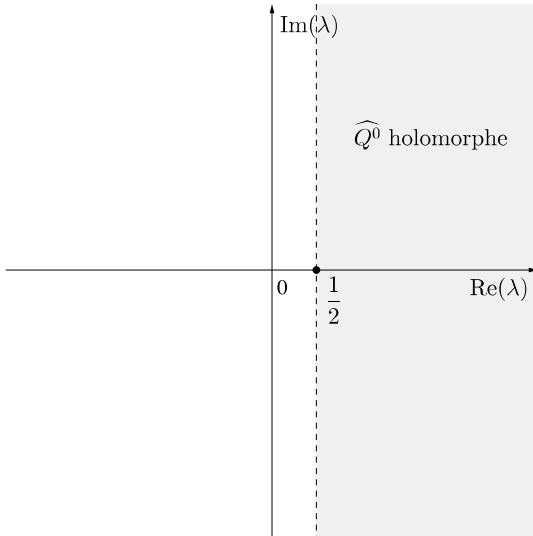
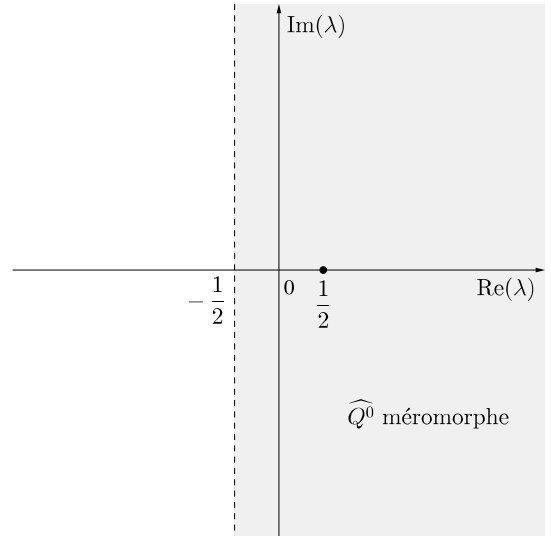
Commençons par traiter la partie extérieure. D'après le lemme 4.12, φ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et ψ est méromorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{\lambda_N^1\}$. Par ailleurs, $\widehat{Q}^0$ est holomorphe pour $\text{Re } \lambda > \frac{1}{2}$. On rappelle que $\Pi_a = \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{Re } \lambda > a\}$, on a alors $\lambda \mapsto \widehat{\psi}(\lambda) + \alpha\partial_\theta\widehat{Q}_i^0(\lambda + 1)$ est holomorphe sur $\Pi_{-\frac{1}{2}} \cap \Pi_{\lambda_N^1} = \Pi_{-\frac{1}{2}} -$ puisque $N > j$ implique que $\lambda_N^1 \leq -\frac{3}{2}$ - et $\lambda \mapsto \widehat{\varphi}_e(\lambda) + \lambda(\lambda - 1)\widehat{Q}_e^0(\lambda + 2)$ est holomorphe sur $\Pi_{-\frac{3}{2}}$.

D'après le lemme 4.13, $Q_e(\lambda)$ est donc holomorphe sur $\Pi_{-\frac{1}{2}}$. Comme Q_e et $\widehat{Q}_e^0$ vérifient le même problème sur $\Pi_{\frac{1}{2}}$, on en déduit qu'ils sont égaux sur $\Pi_{\frac{1}{2}}$ et on a donc obtenu un prolongement holomorphe de $\widehat{Q}_e^0$ à $\Pi_{-\frac{1}{2}}$. On notera encore $\widehat{Q}_e^0$ ce prolongement.

Passons maintenant à la partie intérieure. Comme $\widehat{\varphi}_i$ et $\widehat{Q}_e^0$ sont holomorphes sur $\Pi_{-\frac{1}{2}}$, le lemme 4.6 nous assure que $\widehat{Q}_i$ est méromorphe sur $\Pi_{-\frac{1}{2}}$; l'ensemble de ses pôles étant $\mathbb{Z}_{\frac{1}{2}} \cap \Pi_{-\frac{1}{2}}$. Ils sont issus de l'opérateur, le second membre n'apportant aucune contribution puisque, une fois encore, son pôle est $\lambda_N^1 \leq -\frac{3}{2}$. Ici aussi, puisque Q_i et $\widehat{Q}_i^0$ vérifient le même problème sur $\Pi_{\frac{1}{2}}$, on en déduit qu'ils sont égaux sur $\Pi_{\frac{1}{2}} \setminus \mathbb{Z}_{\frac{1}{2}}$. Comme $\widehat{Q}_i^0(\lambda)$ est holomorphe sur $\Pi_{\frac{1}{2}}$, on en déduit (par prolongement analytique) que les pôles de $Q_i(\lambda)$ dans $\Pi_{\frac{1}{2}}$ sont artificiels.

Restent les pôles contenus dans $\Pi_{-\frac{1}{2}} \setminus \Pi_{\frac{1}{2}} =]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times \mathbb{R}$. Le seul pôle qui y soit présent est $\frac{1}{2}$. On a donc obtenu un prolongement méromorphe de $\widehat{Q}_i^0(\lambda)$ à $\Pi_{-\frac{1}{2}}$ dont le pôle est $\frac{1}{2}$. On notera encore $\widehat{Q}_i^0(\lambda)$ ce prolongement.

Nous avons donc obtenu un prolongement méromorphe de $\widehat{Q}^0$ à $\Pi_{-\frac{1}{2}}$ dont le pôle est $\frac{1}{2}$ (voir figures 4.11 et 4.12). Comme pour le cas impédance on réitère le procédé décrit ci-dessus en prenant en compte les pôles du second membre dont l'apparition dépend du choix de N .


 FIGURE 4.11 – Étape 0 : $\widehat{Q}^0$ holomorphe.

 FIGURE 4.12 – Étape 1 : $\widehat{Q}^0$ méromorphe.

□

Comme pour le cas du problème avec condition d'impédance, le lemme suivant nous donne une condition permettant de savoir dans quelle espace à poids $\mathcal{K}_\gamma^s(\Omega^\infty)$ on peut trouver un antécédent par transformation de Mellin au prolongement méromorphe de $\widehat{Q}^0$ (que l'on note encore $\widehat{Q}^0$). La démonstration de ce lemme fait à nouveau appel aux espaces de Sobolev à poids $H^s(I, \rho)$ posés en définition 4.4.

Lemme 4.14. *Soit $a \in \mathbb{R}_+$. Il existe Q^a tel que $Q^a \in \mathcal{K}_{m+a-1}^m$, pour tout $m \in \mathbb{N}$, et $\widehat{Q^0}(\lambda) = \mathcal{M}[Q^a](\lambda)$, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re} \lambda \geq -a$.*

Remarque : Le principe étant le même que pour son homologue du cas impédance, nous ne donnerons qu'une ébauche de preuve, nous reposant sur les détails techniques déjà explicités.

Démonstration. On procède par récurrence sur $[a]$, partie entière de a en partant de -1.

$[a] = -1$ D'après les lemmes 4.10 et la proposition D.1, $Q^0 \in \mathcal{K}_{m-1}^m(\Omega^\infty)$, donc $Q^0 \in \mathcal{K}_{m+a-1}^m(\Omega^\infty)$ puisque $m-1 \geq m+a-1$. Par ailleurs, $\widehat{Q^0}$ est bien défini pour $\operatorname{Re} \lambda \geq m - (m+a-1) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - a$ d'après le lemme 4.11.

$[a] \geq 0$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose le résultat vrai pour tout a tel que $[a] \leq n$.

Soit $a \in \mathbb{R}_+$ tel que $[a] \in]n, n+1[$. D'après le théorème D.1, il suffit de vérifier que, pour tout $\operatorname{Re} \lambda = \xi \in [-a, 0[$ (là encore, pour $\xi \geq 0$, on sait déjà que $\widehat{Q^0}$ répond au problème),

$$I_m(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \left\| \widehat{Q^0}(\xi + i\eta) \right\|_{H^m([-1, \pi[; |\eta|])}^2 d\eta < +\infty.$$

Procédons, une fois de plus, par découplage intérieur-extérieur.

$$\begin{aligned} I_m(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} \left\| \widehat{Q^0}(\xi + i\eta) \right\|_{H^m([-1, \pi[; |\eta|])}^2 d\eta \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left\| \widehat{Q_i^0}(\xi + i\eta) \right\|_{H^m([0, \pi[; |\eta|])}^2 d\eta + \int_{\mathbb{R}} \left\| \widehat{Q_e^0}(\xi + i\eta) \right\|_{H^m([-1, 0[; |\eta|])}^2 d\eta \\ &= I_m^i(\xi) + I_m^e(\xi). \end{aligned}$$

Par régularité elliptique,

$$\begin{aligned} \left\| \widehat{Q_e^0}(\lambda) \right\|_{H^m([-1, 0[; |\eta|])} &\leq C \left(\left\| \widehat{\varphi_e}(\lambda) \right\|_{H^m([-1, 0[; |\eta|])} + \left\| \lambda(\lambda-1)\widehat{Q_e^0}(\lambda+2) \right\|_{H^m([-1, 0[; |\eta|])} \right. \\ &\quad \left. + \left\| \widehat{Q_i^0}(\lambda+1) \right\|_{H^{m+2}([-1, 0[; |\eta|])} + |\eta|^{2m} |\widehat{\psi}(\lambda)|^2 \right). \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \left\| \lambda(\lambda-1)\widehat{Q_e^0}(\lambda+2) \right\|_{H^m([-1, 0[; |\eta|])} &= \sum_{|\alpha| \leq m+2} \left\| |\eta|^{\alpha_1} \partial_\theta^{\alpha_2} \left(\lambda(\lambda-1)\widehat{Q_e^0}(\lambda+2) \right) \right\|_{[0, -1, 0[}^2 \\ &\leq C(\xi) \sum_{|\alpha| \leq m+2} \left\| |\eta|^{\alpha_1+2} \partial_\theta^{\alpha_2} \widehat{Q_e^0}(\lambda+2) \right\|_{[0, -1, 0[}^2 \\ &\leq C \sum_{|\alpha| \leq m+4} \left\| |\eta|^{\alpha_1} \partial_\theta^{\alpha_2} \widehat{Q_e^0}(\lambda+2) \right\|_{[0, -1, 0[}^2 \\ &= C \left\| \widehat{Q_e^0}(\lambda+2) \right\|_{H^{m+4}([-1, 0[; |\eta|])}^2. \end{aligned}$$

Ici aussi, $C(\xi)$ désigne une dépendance polynomiale en ξ de la constante, laquelle peut être majorée uniformément par le même argument que pour l'impédance.

On a aussi par régularité elliptique

$$\left\| \widehat{Q}_i^0(\lambda + 2) \right\|_{H^m(\mathbb{J}0, \pi[, |\eta|])} \leq C \left(\left\| \widehat{\varphi}_i(\lambda - 2) \right\|_{H^m(\mathbb{J}0, \pi[, |\eta|])} + \left\| \widehat{Q}_e^0(\lambda) \right\|_{H^{m+1}(\mathbb{J}0, \pi[, |\eta|])} \right).$$

On a donc

$$I_m^e(\xi) \leq C \left(\int_{\mathbb{R}} \left\| \widehat{\varphi}_e(\lambda) \right\|_{H^m(\mathbb{J}-1, 0[, |\eta|])}^2 + |\eta|^{2m} |\widehat{\psi}(\lambda)|^2 d\eta + I_{m+2}^i(\xi) + I_{m+4}^e(\xi) \right)$$

et

$$I_m^e(\xi) \leq C \left(\int_{\mathbb{R}} \left\| \widehat{\varphi}_i(\lambda - 2) \right\|_{H^m(\mathbb{J}-1, 0[, |\eta|])}^2 + I_{m+1}^e(\xi) \right).$$

On peut alors majorer les deux seconds membres de ces inégalités par les mêmes arguments pour la version impédance de ce lemme (voir démonstration lemme 4.7).

□

Théorème 4.9. 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Il existe des fonctions $q^\mu \in \mathcal{S}^\mu(\Omega^\infty)$ telles que

$$Q^0 = \sum_{\mu \in \mathcal{P}_T \cup [-p, 0]} q^\mu + R_n$$

avec $R_n \in \mathcal{K}_{m+n+\delta}^m$, $\delta > 0$, $m \in \mathbb{N}$.

2. Pour $\mu \in \left] -\infty, -\frac{3}{2} \right]$, les q^μ sont construits par récurrence à l'aide des problèmes extérieur-intérieur suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_y^2 q_e^\mu = -\partial_x^2 q_e^{\mu+2} \text{ dans } \Omega_e^\infty, \\ \partial_y q_e^\mu = \alpha \partial_\nu q_i^{\mu+1} \text{ sur } \Gamma_r^\infty, \\ q_e^\mu = 0 \text{ sur } \Gamma_d^\infty. \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta q_i^\mu = 0 \text{ dans } \Omega_i^\infty, \\ \partial_\nu q_i^\mu = 0 \text{ sur } \Gamma_n^{1,\infty}, \\ q_i^\mu = q_e^\mu \text{ sur } \Gamma_r^\infty. \end{array} \right.$$

Démonstration. 1. identique au 1. de la démonstration du théorème 4.4.

2. On reprend les notations établies lors de la démonstration du théorème 4.4. On note $\mu_i = -\frac{1}{2} - i$ et $\mu_i^\pm = \mu_i \pm \delta$ pour $i \geq 1$ tel que $\mu_i > \lambda_N^1$ – on suppose $N > j$ tel que cela soit vérifié – et $\delta > 0$ assez petit pour que μ_i soit le seul pôle dans l'intervalle $]\mu_i^-, \mu_i^+]$. On note aussi $a_i^\pm = -\mu_i^\mp$.

On procède une fois de plus par récurrence sur i en partant du premier pôle qui nous assure d'être dans l'espace variationnel $\mathcal{W} : \mu_1$. Le principe étant le même que pour l'impédance, nous ne détaillerons que le cas $i = 1$.

On a

$$Q^{a_1^+} - Q^{a_1^-} = \text{Res}_{\lambda=\mu_1} r^\lambda \widehat{Q^0}(\lambda) = q^{\mu_1}.$$

Appliquant la transformée de Mellin inverse le long des droites $\mu_1^\pm$ sur les problèmes 4.25 et 4.26, on obtient

$$\begin{cases} \partial_y^2 q_e^{\mu_1} &= \varphi_e^{a_1^+} - \varphi_e^{a_1^-} - \partial_x^2 \left(Q_e^{a_1^++2} - Q_e^{a_1^-+2} \right) \text{ dans } \Omega_e^\infty, \\ \partial_y q_i^{\mu_1} &= \alpha \partial_\nu \left(Q_i^{a_1^++1} - Q_i^{a_1^-+1} \right) + \psi^{a_1^+} - \psi^{a_1^-} \text{ sur } \Gamma_r^\infty, \\ q_e^{\mu_1} &= 0 \text{ sur } \Gamma_d^\infty \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \Delta q_i^{\mu_1} &= \varphi_i^{a_1^+} - \varphi_i^{a_1^-} \text{ dans } \Omega_i^\infty, \\ \partial_\nu q_i^{\mu_1} &= 0 \text{ sur } \Gamma_n^{1,\infty}, \\ q_i^{\mu_1} &= q_e^{\mu_1} \text{ sur } \Gamma_r^\infty. \end{cases}$$

Comme pour l'impédance, φ et ψ n'ont pas de pôles dans $]\mu_1^-, \mu_1^+]$. Donc, $\varphi^{a_1^+} - \varphi^{a_1^-} = \psi^{a_1^+} - \psi^{a_1^-} = 0$. Par contre, Q^0 admet des pôles en $\mu_1 + 1$ et $\mu_1 + 2$ d'après le théorème 4.8 (voir figure 4.13). Donc $Q_i^{a_1^++1} - Q_i^{a_1^-+1} = p_i^{\mu_1+1}$ et $Q_e^{a_1^++2} - Q_e^{a_1^-+2} = p_e^{\mu_1+2}$ ne sont pas nuls et on obtient bien les systèmes voulus. □

4.2.6 Conclusion

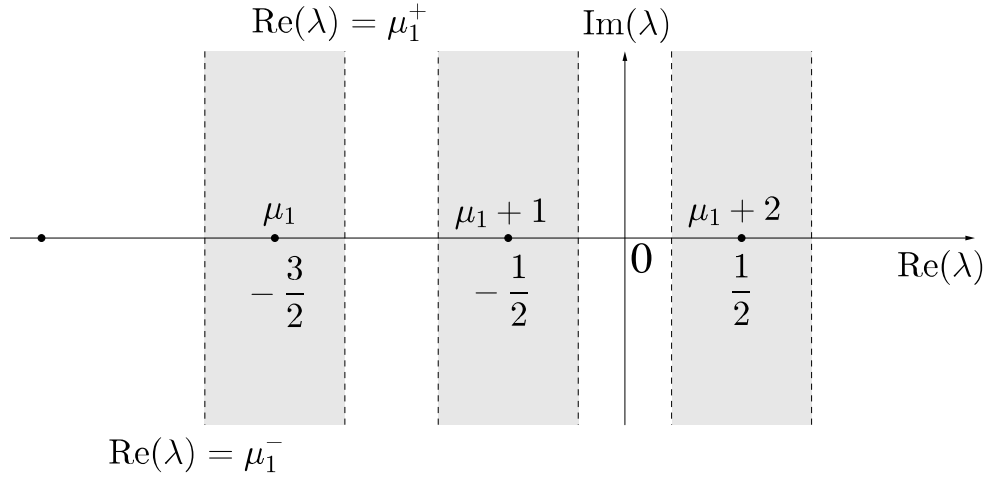


FIGURE 4.13 – Bandes infinies ne comportant qu'un seul pôle chacune (encore).

En résumé, nous avons donc obtenu l'existence d'un profil q^j solution du problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \Delta q_i^j = 0 \text{ dans } \Omega_i^\infty, \\ \Delta q_e^j = 0 \text{ dans } \Omega_e^\infty, \\ q_i^j = q_e^j \text{ sur } \Gamma_r^\infty, \\ \alpha \partial_\nu q_i^j = -\partial_\nu q_e^j \text{ sur } \Gamma_r^\infty, \\ \partial_\nu q^j = 0 \text{ sur } \Gamma_n^\infty, \\ q_e^j = 0 \text{ sur } \Gamma_d^\infty, \\ q^j = s_0^j + o\left(r^{\frac{1}{2}+j-1}\right) \text{ lorsque } r \rightarrow +\infty. \end{array} \right.$$

Il s'écrit sous la forme suivante :

$$q^j = s_0^j + \chi_0 \sum_{n=1}^N q^{j,n} + Q^{j,N},$$

où s_0^j (prolongement continu par 0 de s^j à Ω_e^∞), $q^{j,n}$ et $Q^{j,N}$ sont les solutions des problèmes (4.3), (4.20), (4.21) et (4.22) (la formule de s^j étant donnée par (4.2)) et $N = j + 1$. Les comportements à l'infini de s^j et $q^{j,n}$ sont connus du fait qu'ils appartiennent à

$$\mathcal{S}^\lambda(\Omega^\infty) = \left\{ u : u_i \in \mathcal{S}^\lambda(\Omega_i^\infty), u_e \in \mathcal{S}^\lambda(\Omega_e^\infty) \text{ et } u_i = u_e \text{ sur } \Gamma_r^\infty \right\},$$

où

$$\mathcal{S}^\lambda(\Omega_i^\infty) = \left\{ u : u(r, \theta) = r^\lambda \sum_{l=0}^L \log^l r \psi_l(\theta), \psi_l \in \mathcal{C}^\infty([0, \pi]) \right\},$$

et

$$\mathcal{S}^\lambda(\Omega_e^\infty) = \left\{ u : u(x, y) = x^\lambda \sum_{l=0}^L \log^l x \psi_l(y), \psi_l \in \mathcal{C}^\infty([-1, 0]) \right\}.$$

4.3. PROFILS DU PROBLÈME D'IMPÉDANCE AVEC CONDITION DE VENTCEL

Par ailleurs, le théorème 4.9 nous donne le comportement à l'infini de $Q^{j,N}$ et donc de q^j . Plus grossièrement, on a donc

$$q^j(r, \theta) = s_0^j(r, \theta) + \chi_0 q^{j,1}(r, \theta) + \chi_0 O\left(r^{j-\frac{3}{2}} \log r\right).$$

En particulier, on a

$$q^0 = s_0^0 + \chi_0 \left(q^{0(1)} + d^{0(1)} s_0^{-1} \right) + \chi_0 O\left(r^{-\frac{3}{2}} \log r\right), \quad (4.29)$$

où $d^{0(1)} \in \mathbb{R}$ et $q^{0(1)}$ vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_y^2 q_e^{0(1)} = 0 \text{ dans } \Omega_e^\infty, \\ \partial_y q_e^{0(1)} = 0 \text{ sur } \Gamma_r^\infty, \\ q_e^{0(1)} = 0 \text{ sur } \Gamma_d^\infty, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta q_i^{0(1)} = 0 \text{ dans } \Omega_i^\infty, \\ \partial_\nu q_i^{0(1)} = 0 \text{ sur } \Gamma_n^{1,\infty}, \\ q_i^{0(1)} = q_e^{0(1)} \text{ sur } \Gamma_r^\infty. \end{array} \right.$$

On a donc $q_e^{0(1)} = 0$ et le problème intérieur est alors identique à celui de son homologue pour l'impédance : $p^{0(1)}$; on peut donc prendre :

$$q_i^{0(1)} = p^{0(1)} = \alpha \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{r}} \left[(\pi - \theta) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \log r \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right].$$

4.3 Profils du problème d'impédance avec condition de Ventcel

Encore une fois, l'étude des profils du problème avec condition d'impédance de type Ventcel suivant un processus similaire à celle du problème avec condition d'impédance de type Robin, la structure de cette partie sera la même que celle de la partie 4.1.

4.3.1 Introduction et définitions

L'étude des profils d'impédance avec condition de Ventcel suit celle de l'impédance de condition de Robin. Nous contenterons donc d'en préciser les différences tandis que nous passerons sous silence les similitudes.

Définition 4.9. *On nomme profil du problème avec condition d'impédance de type Ventcel*

la solution du problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \Delta p_{v,\beta}^j = 0 \text{ dans } \Omega_i^\infty, \\ \partial_\nu p_{v,\beta}^j = 0 \text{ sur } \Gamma_n^\infty, \\ p_{v,\beta}^j + \alpha \partial_\nu p_{v,\beta}^j - \beta \partial_\tau^2 p_{v,\beta}^j = 0 \text{ sur } \Gamma_r^\infty, \\ p_{v,\beta}^j(O) = 0, \\ p_{v,\beta}^j \sim s^j \text{ lorsque } r \rightarrow +\infty. \end{array} \right. \quad (4.30)$$

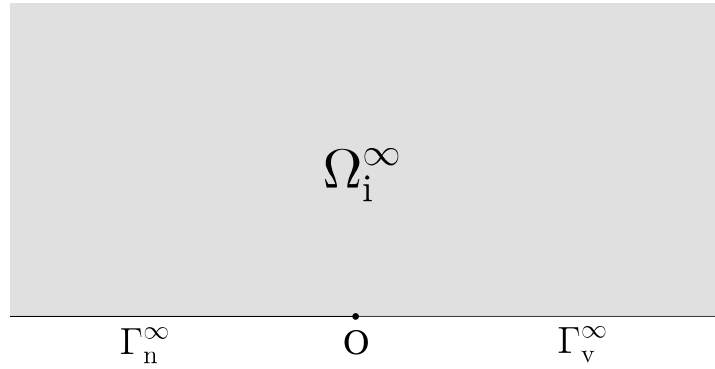


FIGURE 4.14 – Domaine des profils du problème avec condition d'impédance de type Ventcel.

4.3.2 Existence et unicité de solutions variationnelles au problème de type profil

Les problèmes variationnels de type profil avec condition d'impédance de type Ventcel sont de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\alpha \Delta u = f \text{ dans } \Omega_i^\infty, \\ \partial_\nu u = 0 \text{ sur } \Gamma_n^\infty, \\ u + \alpha \partial_\nu u - \beta \partial_\tau^2 u = g \text{ sur } \Gamma_v^\infty, \\ u(O) = 0. \end{array} \right. \quad (4.31)$$

L'espace variationnel associé aux problèmes de la forme de (4.31) :

$$\mathcal{V}_v = \left\{ v \in L_{\text{loc}}^2(\Omega_i^\infty) : \nabla v \in L^2(\Omega_i^\infty), v|_{\Gamma_v^\infty} \in L^2(\Gamma_v^\infty), \partial_\tau v|_{\Gamma_v^\infty} \in L^2(\Gamma_v^\infty), v(O) = 0 \right\}.$$

Cet espace est un peu exotique dans la mesure où il possède une condition de Dirichlet ponctuelle alors que nous sommes en dimension 2. Remarquons cependant que les conditions $v|_{\Gamma_v^\infty} \in L^2(\Gamma_v^\infty)$ et $\partial_\tau v|_{\Gamma_v^\infty} \in L^2(\Gamma_v^\infty)$ se traduisent par $v \in H^1(\Gamma_v^\infty)$. Or, pour tout $\Gamma \subset \Gamma_v^\infty$

4.3. PROFILS DU PROBLÈME D'IMPÉDANCE AVEC CONDITION DE VENTCEL

borné, on a $H^1(\Gamma_v^\infty) \subset H^1(\Gamma)$, ce dernier s'injectant de façon compacte dans $\mathcal{C}(\overline{\Gamma})$. On en déduit que la condition $v(O) = 0$ fait sens.

Proposition 4.7. $\mathcal{V}_v$ muni du produit scalaire

$$(u, v) = \int_{\Omega_i^\infty} \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\Gamma_v^\infty} uv + \int_{\Gamma_v^\infty} \partial_\tau u \partial_\tau v$$

est un espace de Hilbert.

Démonstration. Remarquons que $\mathcal{V}_v \subset \mathcal{V}_r$, où $\mathcal{V}_r$ est l'espace variationnel associé au profils avec condition d'impédance de Robin. Il suffit donc de prouver que $\mathcal{V}_v$ est fermé dans $\mathcal{V}_r$. Ce qui est immédiat aux vues de la forme de $\mathcal{V}_v$ et de la remarque sur la continuité faite ci-dessus. $\square$

Théorème 4.10. Soient $g \in L^2(\Gamma_v^\infty)$ et $f \in L^2_{\text{loc}}(\Omega_i^\infty)$ telle que $(1+r)f \in L^2(\Omega_i^\infty)$. Alors il existe une unique solution à (4.31) dans $\mathcal{V}_v$.

Démonstration. Identique à celle du théorème 4.1 . $\square$

4.3.3 Développement « sur-variationnel »

Comme précédemment on va insérer formellement dans (4.30) l'expression suivante :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p_{v,\beta}^{j,n}$$

où, pour tout n , $p_{v,\beta}^{j,n} \in \mathcal{S}^{\frac{1}{2}+j-n}(\Omega_i^\infty)$.

On obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha \Delta p_{v,\beta}^{j,n} = 0 \text{ dans } \Omega_i^\infty, \\ \sum_{n=0}^{+\infty} \partial_\nu p_{v,\beta}^{j,n} = 0 \text{ sur } \Gamma_n^\infty, \\ \sum_{n=0}^{+\infty} (p_{v,\beta}^{j,n} + \alpha \partial_\nu p_{v,\beta}^{j,n} - \beta \partial_\tau^2 p_{v,\beta}^{j,n}) = 0 \text{ sur } \Gamma_v^\infty, \\ \sum_{n=0}^{+\infty} p_{v,\beta}^{j,n}(O) = 0. \end{array} \right.$$

A l'instar des cas précédents, on regroupe les termes qui appartiennent aux mêmes espaces à partir de la condition sur Γ_v^∞ :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (p_{v,\beta}^{j,n} + \alpha \partial_\nu p_{v,\beta}^{j,n} - \beta \partial_\tau^2 p_v^{j,n}) = p_{v,\beta}^{j,0} + \underbrace{p_{v,\beta}^{j,1} + \alpha \partial_\nu p_{v,\beta}^{j,0}}_{\in \mathcal{S}^{\frac{1}{2}+j-1}} + \sum_{n=2}^{+\infty} \underbrace{(p_{v,\beta}^{j,n} + \alpha \partial_\nu p_{v,\beta}^{j,n-1} - \beta \partial_\tau^2 p_{v,\beta}^{j,n-2})}_{\in \mathcal{S}^{\frac{1}{2}+j-n}}.$$

Nous aboutissons cette fois-ci à trois problèmes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta p_{v,\beta}^{j,0} = 0 \text{ dans } \Omega_i^\infty, \\ \partial_\nu p_{v,\beta}^{j,0} = 0 \text{ sur } \Gamma_n^\infty, \\ p_{v,\beta}^{j,0} = 0 \text{ sur } \Gamma_v^\infty, \end{array} \right. \quad (4.32) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta p_{v,\beta}^{j,1} = 0 \text{ dans } \Omega_i^\infty, \\ \partial_\nu p_{v,\beta}^{j,1} = 0 \text{ sur } \Gamma_n^\infty, \\ p_{v,\beta}^{j,1} = -\alpha \partial_\nu p_{v,\beta}^{j,0} \text{ sur } \Gamma_v^\infty, \end{array} \right. \quad (4.33)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta p_{v,\beta}^{j,n} = 0 \text{ dans } \Omega_i^\infty, \\ \partial_\nu p_{v,\beta}^{j,n} = 0 \text{ sur } \Gamma_n^\infty, \\ p_{v,\beta}^{j,n} = -\alpha \partial_\nu p_{v,\beta}^{j,n-1} + \beta \partial_\tau^2 p_{v,\beta}^{j,n-2} \text{ sur } \Gamma_v^\infty. \end{array} \right. \quad (4.34)$$

Le cas des problèmes (4.32) et (4.33) est déjà traité dans la proposition 4.2, la proposition suivante traite de celui de (4.34).

Proposition 4.8. *Les fonctions de la forme*

$$p_{v,\beta}^{j,n} = \sum_{l=0}^n c^{(l)} p_{v,\beta}^{j-l(n-l)}$$

sont solutions de (4.34) où $c^{(0)} = 1$ et les $p_{v,\beta}^{j-l(n-l)} \in \mathcal{S}^{\frac{1}{2}+j-n}(\Omega_i^\infty)$ sont construits par itération à partir de $p_v^{j(0)} = s^j$ comme étant solutions de, pour $l \geq 2$,

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta p_{v,\beta}^{j(1)} = 0 \text{ dans } \Omega_i^\infty, \\ \partial_\nu p_{v,\beta}^{j(1)} = 0 \text{ sur } \Gamma_n^\infty, \\ p_{v,\beta}^{j(1)} = -\alpha \partial_\nu s^j \text{ sur } \Gamma_v^\infty; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta p_{v,\beta}^{j(l)} = 0 \text{ dans } \Omega_i^\infty, \\ \partial_\nu p_{v,\beta}^{j(l)} = 0 \text{ sur } \Gamma_n^\infty, \\ p_{v,\beta}^{j(l)} = -\alpha \partial_\nu p_{v,\beta}^{j(l-1)} + \beta \partial_\tau^2 p_{v,\beta}^{j(l-2)} \text{ sur } \Gamma_v^\infty. \end{array} \right.$$

En particulier, $p_{v,\beta}^{j,n} \in \mathcal{S}^{\frac{1}{2}+j-n}(\Omega_i^\infty)$.

Écrivons maintenant $p_{v,\beta}^j$ à l'aide d'un reste :

$$p_{v,\beta}^j = s^j + \chi_0 \sum_{n=1}^N p_{v,\beta}^{j,n} + P_v^{j,N}.$$

Remarquons que contrairement à la dérivée normale, la dérivée tangentielle ne commute pas avec χ_0 . Ceci occasionne l'apparition de termes supplémentaires ; en effet, pour qu'ainsi écrit, $p_{v,\beta}^j$ vérifie (4.30), $P_v^{j,N}$ doit vérifier :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \alpha \Delta P_v^{j,N} & = & f \text{ dans } \Omega_i^\infty, \\ \partial_\nu P_v^{j,N} & = & 0 \text{ sur } \Gamma_n^\infty, \\ P_v^{j,N} + \alpha \partial_\nu P_v^{j,N} - \beta \partial_\tau^2 P_v^{j,N} & = & g \text{ sur } \Gamma_v^\infty, \\ P_v^{j,N}(O) & = & 0, \end{array} \right. \quad (4.35)$$

avec

$$f = -\alpha \Delta \left(\chi_0 \sum_{n=1}^N p_{v,\beta}^{j,n} \right),$$

et

$$g = -\chi_0 (\alpha \partial_\nu p_{v,\beta}^{j,N} - \beta \partial_\tau^2 p_{v,\beta}^{j,N-1} - \beta \partial_\tau^2 p_{v,\beta}^{j,N-2}) + \beta \sum_{n=0}^N 2 \partial_\tau \chi_0 \partial_\tau p_{v,\beta}^{j,n} + p_{v,\beta}^{j,n} \partial_\tau^2 \chi_0.$$

Proposition 4.9. *Pour $N > j$, le problème (4.35) admet une unique solution $P_v^{j,N}$ dans $\mathcal{V}_v$.*

Démonstration. Remarquons que le second membre associé au Laplacien : f — ainsi que le deuxième terme de g :

$$\sum_{n=0}^N 2 \partial_\tau \chi_0 \partial_\tau p_{v,\beta}^{j,n} + p_{v,\beta}^{j,n} \partial_\tau^2 \chi_0,$$

sont $\mathcal{C}^\infty$ à support compact. Ils appartiennent donc à $L^2(\Omega_i^\infty)$ et $L^2(\Gamma_v^\infty)$.

Comme χ_0 annule la fonction au voisinage de 0, il ne reste donc que la question de l'intégrabilité en $+\infty$ du premier terme du second membre g sur Γ_v^∞ :

$$-\chi_0 \left(\underbrace{\alpha \partial_\nu p_{v,\beta}^{j,N} - \beta \partial_\tau^2 p_{v,\beta}^{j,N-1}}_{\in \mathcal{S}^{\frac{1}{2}+j-(N+1)}(\Omega_i^\infty)} - \underbrace{\beta \partial_\tau^2 p_{v,\beta}^{j,N-2}}_{\in \mathcal{S}^{\frac{1}{2}+j-N}(\Omega_i^\infty)} \right)$$

Or d'après la démonstration du lemme 4.1, on a $\chi_0 \mathcal{S}^\lambda(\Gamma_v^\infty) \subset \mathcal{V}_v$ pour $\lambda < -\frac{1}{2}$. On aura donc

$$\chi_0 (\alpha \partial_\nu p_{v,\beta}^{j,N} - \beta \partial_\tau^2 p_{v,\beta}^{j,N-1} - \beta \partial_\tau^2 p_{v,\beta}^{j,N-2}) \in L^2(\Gamma_v^\infty)$$

si

$$\frac{1}{2} + j - (N+1) < -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} + j - N < -\frac{1}{2}$$

et donc

$$N > j + 1.$$

Ainsi, pour $N > j + 1$, le lemme de Lax-Milgram assure donc l'existence d'une unique solution à (4.35) dans $\mathcal{V}_v$. $\square$

Nous avons obtenu ainsi obtenu le

Théorème 4.11. *Pour $j > N + 1$, le problème (4.30) a une solution qui se décompose sous la forme*

$$p_{v,\beta}^j = s^j + \chi_0 \sum_{n=1}^N p_{v,\beta}^{j,n} + P_v^{j,N}. \quad (4.36)$$

Remarquons que grâce à la troncature et au fait que s^j soit nulle sur Γ_v^∞ , il n'a pas été nécessaire d'imposer la condition de Dirichlet en O pour la partie sur-variationnelle; pour la partie sous-variationnelle, c'est en revanche indispensable. Le comportement à l'infini des $p_{v,\beta}^{j,n}$ étant connu, reste à voir, une fois encore, celui de $P_v^{j,N}$.

4.3.4 Régularité elliptique et transformée de Mellin du terme sous-variationnel

Comme seul le comportement à l'infini de $P_v^{j,N}$ nous intéresse, nous allons, à l'instar des cas précédents, nous affranchir des difficultés qui peuvent intervenir proches de 0 en le tronquant par χ_0 . Afin d'alléger les notations, nous écrirons :

$$P_v^0 = \chi_0 P_v^{j,N}.$$

P_v^0 résout alors

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \alpha \Delta P_v^0 & = & \varphi \text{ dans } \Omega_i^\infty, \\ \partial_\nu P_v^0 & = & 0 \text{ sur } \Gamma_n^\infty, \\ P_v^0 + \alpha \partial_\nu P_v^0 - \beta \partial_\tau^2 P_v^0 & = & \psi \text{ sur } \Gamma_v^\infty, \end{array} \right. \quad (4.37)$$

où φ est à support dans la couronne $[R_0, R_1] \times [0, \pi]$ et $\psi = \chi_0 g$.

Comme précédemment, commençons par établir l'appartenance de P_v aux espaces à poids $\mathcal{K}_\gamma^s$.

Lemme 4.15. $\forall \gamma \leq -1$, $P_v^0 \in \mathcal{K}_\gamma^0(\Omega_i^\infty) \cap \mathcal{K}_\gamma^0(\Gamma_v^\infty)$.

Démonstration. Idem démonstration lemme 4.2. □

Lemme 4.16. $\forall m \in \mathbb{N}$, $P_v^0 \in \mathcal{K}_{m-1}^m(\Omega_i^\infty) \cap \mathcal{K}_{m-1}^m(\Gamma_v^\infty)$.

Démonstration. Idem démonstration lemme 4.3. □

Nous pouvons maintenant nous atteler à la transformée de Mellin de P_v .

Lemme 4.17. *La transformée de Mellin de P_v^0 – notée $\widehat{P}_v^0$ – est bien définie pour $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$ et holomorphe pour $\operatorname{Re} \lambda > 0$ (voir figure 4.15).*

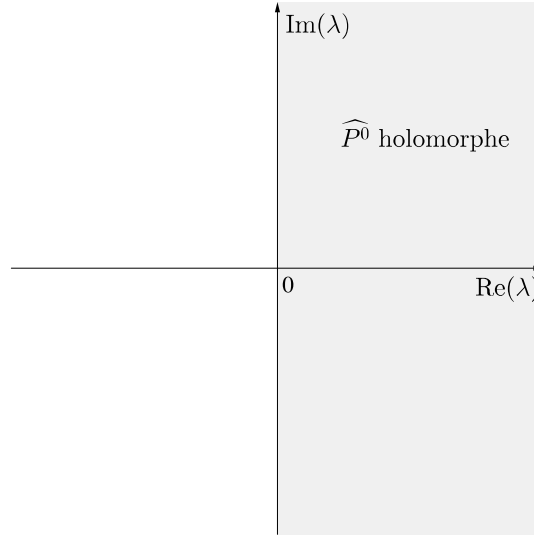


FIGURE 4.15 – Domaine de définition de $\widehat{P}_v^0$.

Démonstration. Idem démonstration lemme 4.4 (application directe des lemmes 4.15 et D.3). $\square$

Lemme 4.18. On pose $\lambda_N = \frac{1}{2} + j - N$ et $\lambda_N^i = \lambda_N - i$.

1. $\widehat{\varphi}$ est bien définie et holomorphe sur $\mathbb{C}$,
2. $\widehat{\psi}$ est bien définie et holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{\lambda_N^1, \lambda_N^2\}$, méromorphe sur $\mathbb{C}$.

Démonstration. Identique à celle du lemme 4.5. $\square$

4.3.5 Développement « sous-variationnel »

En passant en coordonnées (t, θ) avec $t = \log r$, le système (4.37) devient

$$\left\{ \begin{array}{l} (\partial_t^2 + \partial_\theta^2) \widetilde{P}_v^0 = e^{2t} \widetilde{\varphi} \text{ dans } \mathbb{R} \times]0, \pi[, \\ \partial_\theta \widetilde{P}_v^0 = 0 \text{ sur } \mathbb{R} \times \{\pi\}, \\ \widetilde{P}_v^0 - \alpha e^{-t} \partial_\theta \widetilde{P}_v^0 - \beta e^{-t} \partial_t (e^{-t} \partial_t \widetilde{P}_v^0) = \widetilde{\psi} \text{ sur } \mathbb{R} \times \{0\}. \end{array} \right.$$

En passant à la transformée de Mellin pour $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$, on aboutit à

$$\left\{ \begin{array}{l} (\lambda^2 + \partial_\theta^2) \widehat{P}_v^0(\lambda) = \widehat{\varphi}(\lambda - 2) \text{ dans }]0, \pi[, \\ \partial_\theta \widehat{P}_v^0(\lambda) = 0 \text{ en } \pi, \\ \widehat{P}_v^0(\lambda) = \widehat{\psi}(\lambda) + \alpha \partial_\theta \widehat{P}_v^0(\lambda + 1) + \beta(\lambda + 2)(\lambda + 1) \widehat{P}_v^0(\lambda + 2) \text{ en } 0. \end{array} \right. \quad (4.38)$$

Nous retrouvons donc le problème (4.15) dont le lemme 4.6 nous donne les conditions d'existence d'une solution. Ceci nous permet d'énoncer l'analogue du théorème 4.3.

Théorème 4.12. $\widehat{P}_v^0$ se prolonge de façon méromorphe à $\mathbb{C}$. L'ensemble de ses pôles est

$$\mathcal{P}_{\mathcal{I}_v} = \mathbb{Z}_{\frac{1}{2}} \cap]-\infty, 0].$$

Démonstration. Idem théorème 4.3. □

Remarque : Comme $\widehat{\psi}$ admet non plus un pôle mais deux : λ_N^1 et λ_N^2 , la résonance des pôles s'en trouve amplifiée.

Lemme 4.19. Soit $a \in \mathbb{R}_+$. Il existe P_v^a tel que $P_v^a \in \mathcal{K}_{m+a-1}^m$, pour tout $m \in \mathbb{N}$, et $\widehat{P}_v^0(\lambda) = \mathcal{M}[P_v^a](\lambda)$, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re} \lambda \geq -a$.

La preuve est quasiment identique à celle de son homologue, reprenons-en les grandes lignes et explicitons les différences.

Démonstration. On procède par récurrence sur $[a]$, partie entière de a en partant de -1 .

$[a] = -1$ D'après le lemme 4.16 et la proposition D.1, $P_v^0 \in \mathcal{K}_{m-1}^m(\Omega_1^\infty)$, donc $P_v^0 \in \mathcal{K}_{m+a-1}^m(\Omega_1^\infty)$ puisque $m-1 \geq m+a-1$. Par ailleurs, $\widehat{P}_v^0$ est bien défini pour $\operatorname{Re} \lambda \geq m - (m+a-1) - 1 = -a$ d'après le lemme 4.17.

$[a] \geq 0$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose le résultat vrai pour tout a tel que $[a] \leq n$.

Soit $a \in \mathbb{R}_+$ tel que $[a] \in]n, n+1]$. D'après le théorème D.1, il suffit de vérifier que, pour tout $\operatorname{Re} \lambda = \xi \in [-a, 0[$ (pour $\xi \geq 0$, on sait déjà que $\widehat{P}_v^0$ répond au problème),

$$I_m(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \left\| \widehat{P}_v^0(\xi + i\eta) \right\|_{H^m([0, \pi[; |\eta|])}^2 d\eta < +\infty.$$

Comme $\widehat{P}_v^0$ résout (4.38), on obtient par régularité elliptique et théorème de trace que

$$\begin{aligned} \left\| \widehat{P}_v^0(\lambda) \right\|_{H^m([0, \pi[; |\eta|])}^2 &\leq C \left(\left\| \widehat{\varphi}(\lambda - 2) \right\|_{H^m([0, \pi[; |\eta|])}^2 + |\eta|^{2m} |\widehat{\psi}(\lambda)|^2 \right. \\ &\quad + \left\| \widehat{P}_v^0(\lambda + 1) \right\|_{H^{m+2}([0, \pi[; |\eta|])}^2 \\ &\quad \left. + \left\| (\lambda + 2)(\lambda + 1) \widehat{P}_v^0(\lambda + 2) \right\|_{H^{m+2}([0, \pi[; |\eta|])}^2 \right). \end{aligned}$$

En reprenant la définition de $\|\cdot\|_{H^s(I, \rho)}$, on peut voir que

$$\left\| (\lambda + 2)(\lambda + 1) \widehat{P}_v^0(\lambda + 2) \right\|_{H^{m+2}([0, \pi[; |\eta|])}^2 \leq C(\xi) \left\| \widehat{P}_v^0(\lambda + 2) \right\|_{H^{m+4}([0, \pi[; |\eta|])}^2,$$

où la constante en ξ peut être majorer par une constante indépendante de celui-ci grâce

à l'hypothèse $\operatorname{Re} \lambda = \xi \in [-a, 0[$. On a donc

$$I_m(\xi) \leq C \left(\int_{\mathbb{R}} \|\widehat{\varphi}(\lambda - 2)\|_{H^m([0, \pi[|\eta|])}^2 + |\eta|^{2m} |\widehat{\psi}(\lambda)|^2 d\eta + I_{m+2}(\xi + 1) + I_{m+4}(\xi + 2) \right).$$

Le trois premiers termes du second membre de cette inégalité ont déjà été traité dans la démonstration du lemme 4.7. Le dernier terme se traite exactement de la même façon que le troisième.

□

Théorème 4.13. 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Il existe des fonctions $p_{v,\beta}^\mu \in \mathcal{S}^\mu(\Omega_i^\infty)$ telles que

$$P_v^0 = \sum_{\mu \in \mathcal{P}_{\mathcal{I}_v} \cap [-n, 0]} p_{v,\beta}^\mu + R_n$$

avec $R_n \in \mathcal{K}_{m+n+\delta}^m$, $\delta > 0$, $m \in \mathbb{N}$.

2. Pour $\mu \in]\lambda_N^1, -\frac{3}{2}]$, les $p_{v,\beta}^\mu$ sont construits par récurrence à l'aide de

$$\begin{cases} \Delta p_{v,\beta}^\mu &= 0 \text{ dans }]0, +\infty[\times]0, \pi[, \\ \partial_\theta p_{v,\beta}^\mu &= 0 \text{ sur }]0, +\infty[\times \{\pi\}, \\ p_{v,\beta}^\mu &= \alpha r^{-1} \partial_\theta p_{v,\beta}^{\mu+1} + (1 - \delta_\mu^{-\frac{3}{2}}) \beta \partial_r^2 p_{v,\beta}^{\mu+2} \text{ sur }]0, +\infty[\times \{0\}. \end{cases}$$

Remarque : on prêtera attention au fait que, dans la troisième équation du 2., le terme en ∂_r^2 n'intervient pas pour $p_{v,\beta}^{-\frac{3}{2}}$ mais est présent pour tous les autres.

Démonstration. 1. Identique à la démonstration du théorème 4.4.

2. On note $\mu_i = -\frac{1}{2} - i$ et $\mu_i^\pm = \mu_i \pm \delta$ pour $i \geq 1$ tel que $\mu_i > \lambda_N^1$ – on suppose $N > j$ tel que cela soit vérifié – et $\delta > 0$ assez petit pour que μ_i soit le seul pôle dans l'intervalle $]\mu_i^-, \mu_i^+[$. On note aussi $a_i^\pm = -\mu_i^\mp$.

On va procéder par récurrence sur i en partant du premier pôle qui nous assure d'être dans l'espace variationnel $\mathcal{V}_v : -\frac{3}{2}$. En effet, d'après le lemme 4.1 et le théorème 4.12, le premier $\lambda \in \mathcal{P}_{\mathcal{I}_v}$ tel que $\lambda < -\frac{1}{2}$ est $-\frac{3}{2}$, d'où la définition de μ_i .

$i = 1$: En appliquant le procédé décrit en première partie, on obtient

$$P_v^{a_1^+} - P_v^{a_1^-} = \operatorname{Res}_{\lambda=\mu_1} r^\lambda \widehat{P}_v^0(\lambda) = p_{v,\beta}^{\mu_1}.$$

En appliquant la transformée de Mellin inverse au problème (4.38) le long des

droites $\text{Re } \mu_1^\pm$, puis faisant la différence des deux problèmes, on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta p_{v,\beta}^{\mu_1} = \varphi^{a_1^+} - \varphi^{a_1^-} \text{ dans }]0, +\infty[\times]0, \pi[, \\ \partial_\theta p_{v,\beta}^{\mu_1} = 0 \text{ sur }]0, +\infty[\times \{\pi\}, \\ p_{v,\beta}^{\mu_1} = \psi^{a_1^+} - \psi^{a_1^-} + \alpha \frac{1}{r} \partial_\theta \left(P_v^{a_1^++1} - P_v^{a_1^-+1} \right) \\ \quad + \beta \partial_r^2 \left(P_v^{a_1^++2} - P_v^{a_1^-+2} \right) \text{ sur }]0, +\infty[\times \{0\}. \end{array} \right.$$

En effet, nous avons déjà vu dans la démonstration du théorème 4.4 – grâce au lemme 4.7 et aux propriétés de la transformée de Mellin – qu'il existe $P_v^{a_1^\pm+1} \in \mathcal{K}_{m+a_1^\pm}^m(\Omega_i^\infty)$ tel que

$$\mathcal{M}_{a_1^\pm}^{-1} \left[\widehat{P_v^0}(\lambda + 1) \right] (t) = e^{-t} \widetilde{P_v^{a_1^\pm+1}}(t).$$

On obtient de la même façon l'existence de $P_v^{a_1^\pm+1} \in \mathcal{K}_{m+a_1^\pm+1}^m(\Omega_i^\infty)$ tel que

$$\mathcal{M}_{a_1^\pm}^{-1} \left[(\lambda + 2)(\lambda + 1) \widehat{P_v^0}(\lambda + 2) \right] (t) = e^{-t} \partial_t \left[e^{-t} \partial_t \left(\widetilde{P_v^{a_1^\pm+2}}(t) \right) \right] = \partial_r^2 P_v^{a_1^\pm+2}.$$

À l'instar du cas d'impédance de type Robin, $\widehat{\psi}$ et $\widehat{\varphi}$ n'ont pas de pôles dans $]\mu_1^-, \mu_1^+[$ par hypothèse sur N . Donc, par théorème des résidus, $\psi^{a_1^+} = \psi^{a_1^-}$ et $\varphi^{a_1^+} = \varphi^{a_1^-}$. $\widehat{P_v^0}$ a un pôle dans $]\mu_1^- + 1, \mu_1^+ + 1[$ en $-\frac{1}{2}$ donc $P_v^{a_1^++1} - P_v^{a_1^-+1} = p_{v,\beta}^{\mu_1+1}$ n'est pas nul. Par contre $\widehat{P_v^0}$ n'a pas de pôle dans $]\mu_1^- + 2, \mu_1^+ + 2[$, donc $P_v^{a_1^++2} = P_v^{a_1^-+2}$ (voir figure 4.16). On a alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta p_{v,\beta}^{\mu_1} = 0 \text{ dans }]0, +\infty[\times]0, \pi[, \\ \partial_\theta p_{v,\beta}^{\mu_1} = 0 \text{ sur }]0, +\infty[\times \{\pi\}, \\ p_{v,\beta}^{\mu_1} = \alpha \frac{1}{r} \partial_\theta p_{v,\beta}^{\mu_1+1} \text{ sur }]0, +\infty[\times \{0\}. \end{array} \right.$$

$i > 1$ Le procédé est identique au cas précédant hormis le fait que $\widehat{P_v^0}$ admet un pôle dans $]\mu_i^- + 2, \mu_i^+ + 2[$ à partir du rang 2 (voir figure 4.17). Donc $P_v^{a_i^++2} - P_v^{a_i^-+2} = p_{v,\beta}^{\mu_i+2}$ n'est pas nul et on a alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta p_{v,\beta}^{\mu_i} = 0 \text{ dans }]0, +\infty[\times]0, \pi[, \\ \partial_\theta p_{v,\beta}^{\mu_i} = 0 \text{ sur }]0, +\infty[\times \{\pi\}, \\ p_{v,\beta}^{\mu_i} = \alpha \frac{1}{r} \partial_\theta p_{v,\beta}^{\mu_i+1} + \beta \partial_r^2 p_{v,\beta}^{\mu_i+2} \text{ sur }]0, +\infty[\times \{0\}. \end{array} \right.$$

□

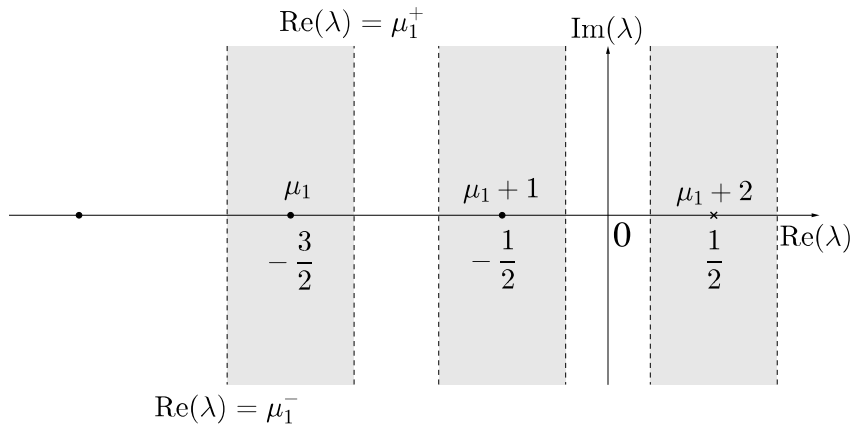


FIGURE 4.16 – Bandes infinies ne comportant qu'un seul pôle chacune ; étape 1.

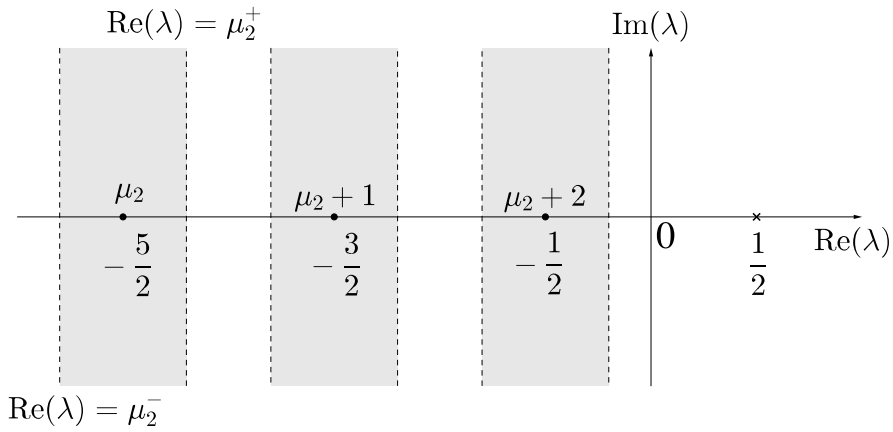


FIGURE 4.17 – Bandes infinies ne comportant qu'un seul pôle chacune ; étape i.

4.3.6 Conclusion

En résumé, nous avons donc obtenu l'existence d'un profil $p_{v,\beta}^j$ solution du problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \Delta p_{v,\beta}^j = 0 \text{ dans } \Omega_1^\infty, \\ \partial_\nu p_{v,\beta}^j = 0 \text{ sur } \Gamma_n^\infty, \\ p_{v,\beta}^j + \alpha \partial_\nu p_{v,\beta}^j - \beta \partial_\tau^2 p_{v,\beta}^j = 0 \text{ sur } \Gamma_v^\infty, \\ p_{v,\beta}^j(0) = 0, \\ p_{v,\beta}^j \sim s^j \text{ lorsque } r \rightarrow +\infty. \end{array} \right.$$

Il s'écrit sous la forme suivante :

$$p_{v,\beta}^j = s^j + \chi_0 \sum_{n=1}^N p_{v,\beta}^{j,n} + P_v^{j,N},$$

où s^j , $p_{v,\beta}^{j,n}$ et $P_v^{j,N}$ sont les solutions des problèmes (4.3), (4.32), (4.34) et (4.35) (la formule de s^j étant donnée par (4.2)) et $N = j + 2$. Les comportements à l'infini de s^j et $p_{v,\beta}^{j,n}$ sont connus du fait qu'ils appartiennent à

$$\mathcal{S}^\lambda(\Omega_i^\infty) = \left\{ u : u(r, \theta) = r^\lambda \sum_{l=0}^L \log^l r \psi_l(\theta), \psi_l \in \mathcal{C}^\infty([0, \pi]) \right\}.$$

Par ailleurs, le théorème 4.13 nous donne le comportement à l'infini de $P_v^{j,N}$ et donc de $p_{v,\beta}^j$. Plus grossièrement, on a donc

$$p_{v,\beta}^j(r, \theta) = s^j(r, \theta) + \chi_0 p_{v,\beta}^{j,1}(r, \theta) + \chi_0 O\left(r^{j-\frac{3}{2}} \log r\right).$$

En particulier, on a

$$p_{v,\beta}^0 = s^0 + \chi_0 \left(p_{v,\beta}^{0(1)} + c_\beta^{0(1)} s^{-1} \right) + \chi_0 O\left(r^{-\frac{3}{2}} \log r\right) \quad (4.39)$$

avec aux vues du problème vérifié par $p_{v,\beta}^{0(1)}$:

$$p_{v,\beta}^{0(1)} = p_r^{0(1)} = \alpha \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{r}} \left[(\pi - \theta) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \log r \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right].$$

Conclusion générale et perspectives

Le travail effectué dans cette thèse s'inscrit dans la lignée de [34]. À l'instar de ce dernier on a commencé par étudier la construction des développements asymptotiques des solutions des problèmes de transmission et avec condition d'impédance. Pour cela, les profils qui sont associés à ces problèmes ont dû aussi être étudiés et, plus particulièrement, leurs comportements à l'infini. La construction des développements asymptotiques nous a permis de mettre en lumière de manière précise les facteurs limitants de l'approximation de la solution du problème de transmission par celle du problème avec condition d'impédance. Forts de ces connaissances, diverses approches ont été proposées afin de venir pallier la perte de convergence entre les deux solutions.

Deux approches agissent sur l'erreur L^2 ; elles sont de même nature dans le sens où toutes deux sont des conditions d'impédance modifiées. La première est une condition multi-échelle de type Robin où le coefficient de la condition d'impédance est remplacé par une fonction. La seconde est une condition de type Ventcel : un terme d'ordre 2 comprenant une dérivée tangentielle seconde est ajouté à la condition d'impédance initiale.

La troisième approche — dite *méthode de plaquage des profils* — agit sur les erreurs H^1 et L^∞ ; elle est de nature différente des autres dans le sens où ce n'est pas une condition d'impédance à proprement parler mais en a les avantages. Elle consiste à approcher la solution du problème de transmission par le début de son développement asymptotique.

Ces trois approches nécessitent un travail particulier sur les profils et notamment la capacité de les simuler numériquement. Des travaux ont été effectués en ce sens, nous permettant de mettre en œuvre les stratégies proposées et de tester leur efficacité. Les simulations menées attestent de la validité numérique des trois approches alors que la validité théorique de celles-ci n'a pu être montrée que pour deux d'entre elles : la *méthode de plaquage des profils* et la condition multi-échelle de type Robin.

L'extension de ces problèmes à des cas tridimensionnels a ensuite été étudiée ; d'abord dans des cas réguliers puis irréguliers. Nous avons ensuite traité de l'adaptabilité des méthodes proposées dans le cas bidimensionnel au cas de la dimension 3. Les conditions multi-échelle de type Robin et de type Ventcel se sont avérées valides dans le cas du problème en dimension 2 extrudé en dimension 3 et ne demandent pas plus de travail. L'adaptation de la *méthode de plaquage des profils*, elle, demande un travail supplémentaire dans le cas de la dimension 3 : l'extraction de la fonction de singularité du problème.

Quelques perspectives à présent. Concernant le cas de la dimension 2, donnons tout d'abord deux perspectives d'ordre technique : la première serait de démontrer l'efficacité de

la condition de type Ventcel ; la seconde serait d'envisager d'autres méthodes de simulation des profils (notamment avec des conditions intégrô-différentielles, lesquelles sont parfaitement absorbantes) permettant ainsi d'améliorer leur approximation. Plus généralement, d'autres conditions d'impédance pourraient être élaborées prenant en compte plus fidèlement le comportement de la solution sur l'ensemble de la frontière (voir [9]). Par ailleurs, les approches développées ici pourraient être adaptées à d'autres problèmes (Lamé, Helmholtz, Maxwell...).

Concernant le cas de la dimension 3, le travail à venir reste important. Outre l'adaptabilité de nos méthodes à d'autres problèmes, celles-ci doivent d'abord se voir étudiées dans les autres géométries possibles en dimension 3. En effet, nous n'avons étudié ici que le cas de singularités de type arête mais pas de type coin et coin-arête. Ceci nécessitera aussi la construction des développements asymptotiques des solutions des problèmes de transmission et d'impédance dans ces cas-là et donc un travail sur les profils associés.

L'étude du laplacien dans le cas d'un domaine à coin semble *a priori* la plus abordable ; en effet, celle-ci devrait peu ou prou être similaire à celle menée au sein de cette thèse à ceci près que les singularités ne sont pas explicites. Les idées d'améliorations des conditions d'impédance proposées ici devraient elles aussi pouvoir s'adapter ; seule l'inexplicité des singularités et des profils pourrait contrevenir à sa mise en pratique.

L'étude du laplacien dans le cas de singularité de type arête-coin sera sans doute plus difficile à aborder et donc à voir dans un second temps ; peut être sera-t-il même plus facile d'étudier des problèmes *a priori* plus difficiles (Lamé, Helmholtz, Maxwell...) dans les cas arêtes et coins. Que la Force soit avec ceux qui poursuivront ces travaux.

Annexe A

Inégalités de Poincaré

Nous n'énoncerons pas les inégalités de Poincaré en toute généralité mais détaillerons celles de Poincaré-Friedrichs que nous utiliserons abondamment ainsi que son corollaire appliqué à des conditions de Ventcel.

Théorème A.1. (*Inégalité de Poincaré-Friedrichs*) Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné connexe lipschitzien et $\Gamma \subset \partial\Omega$ de mesure non nulle. Il existe une constante $C > 0$, dépendante de Ω , telle que pour tout $u \in H^1(\Omega)$,

$$C\|u\|_{1,\Omega}^2 \leq \|\nabla u\|_{0,\Omega}^2 + \|u\|_{0,\Gamma}^2.$$

Démonstration. Par l'absurde, supposons que

$$\forall C > 0, \exists u \in H^1(\Omega) / \|\nabla u\|_{0,\Omega}^2 + \|u\|_{0,\Gamma}^2 < C\|u\|_{0,\Omega}^2.$$

Prenant $C = \frac{1}{n}$, on aboutit à

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists u_n \in H^1(\Omega) / \|\nabla u_n\|_{0,\Omega}^2 + \|u_n\|_{0,\Gamma}^2 < \frac{1}{n}\|u_n\|_{0,\Omega}^2. \quad (\text{A.1})$$

Comme $\|u_n\|_{0,\Omega}^2 > 0$, on peut supposer $\|u_n\|_{0,\Omega}^2 = 1$. Par hypothèse sur Ω , l'injection de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte. Il existe donc une sous suite (u_{n_k}) de (u_n) qui converge dans $L^2(\Omega)$ et on note u sa limite.

Or $\nabla u_{n_k} \rightarrow 0$ dans $L^2(\Omega)$ d'après (A.1), (u_{n_k}) est donc de Cauchy dans $H^1(\Omega)$. Elle converge dans $H^1(\Omega)$, sa limite est u par unicité.

D'où $\nabla u_{n_k} \rightarrow \nabla u$ dans $L^2(\Omega)$, donc $\nabla u = 0$ p.p. sur Ω et donc $u = k$ constante p.p. sur Ω . Par continuité de la trace, $u_{n_k} \rightarrow u$ dans $L^2(\Gamma)$. Or $u_{n_k} \rightarrow 0$ d'après (A.1), donc $u = 0$ p.p. sur Γ . Or — en notant $\gamma_0(u)$ la trace de u — $\gamma_0(u) = \gamma_0(k) = k$, d'où $k = 0$ et donc $u = 0$ p.p. sur Ω , ce qui est absurde puisque $\|u\|_{1,\Omega} = 1$. $\square$

Nous avons le corollaire suivant :

Corollaire A.1. Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné connexe lipschitzien et $\Gamma \subset \partial\Omega$, de mesure non nulles. On pose

$$\mathcal{V} = \{u \in H^1(\Omega) : \gamma_0(u) \in H^1(\Gamma)\},$$

où $\gamma_0(u)$ désigne la trace de u sur $\partial\Omega$ et de norme associé

$$\|\cdot\|_{\mathcal{V}}^2 = \|\cdot\|_{1,\Omega}^2 + \|\cdot\|_{1,\Gamma}^2.$$

Il existe une constante $C > 0$, dépendante de Ω , telle que pour tout $u \in \mathcal{V}$,

$$\|u\|_{\mathcal{V}}^2 \leq C(\|\nabla u\|_{0,\Omega}^2 + \|\nabla u\|_{0,\Gamma}^2 + \|u\|_{0,\Gamma}^2).$$

Annexe B

Principes du maximum

Les principes du maximum énoncés dans cette annexe sont abondamment utilisés dans le chapitre 2 afin de comparer les différentes approximations des profils $p_{\bullet}^j$, $p_{v,\beta}^j$ et q^j . Précisément, ils nous permettent d'en établir la positivité et diverses relations d'ordres entre celles-ci. Étant dans un cas relativement simple, nous avons pu les adapter à partir du principe du maximum établi dans [7]; pour un principe du maximum sur des opérateurs plus généraux avec conditions de Robin, voir [26]

Théorème B.1. *Soit Ω ouvert borné connexe lipschitzien et $\partial\Omega$ son bord. On décompose son bord de la façon suivante : $\partial\Omega = \Gamma_d \cup \Gamma_n \cup \Gamma_r$ avec $\Gamma_d \neq \emptyset$ ou $\Gamma_r \neq \emptyset$.*

Soient $f \in L^2(\Omega)$, $g_n \in L^2(\Gamma_n)$, $g_r \in L^2(\Gamma_r)$ et a , respectivement c , strictement positives et bornées sur Ω , respectivement Γ_r .

On note $\mathcal{V} = \{v \in H^1(\Omega) : v|_{\Gamma_d} = 0\}$. Supposons que $u \in H^1(\Omega) \cap \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ vérifie, pour tout $v \in \mathcal{V}$,

$$\int_{\Omega} a \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\Gamma_r} c u v = \int_{\Omega} f v + \int_{\Gamma_n} g_n v + \int_{\Gamma_r} g_r v.$$

Si f , resp. u , resp. g_n , resp. g_r , est positive sur Ω , resp. Γ_d , resp. Γ_n , resp. Γ_r , alors u est positive sur Ω .

De même, si f , resp. u , resp. g_n , resp. g_r , est négative sur Ω , resp. Γ_d , resp. Γ_n , resp. Γ_r , alors u est négative sur Ω .

Démonstration. Basée sur la démonstration du théorème IX.27 de [7]. À cause de l'absence de termes du type

$$\int_{\Omega} u v$$

dans la formulation variationnelle vérifiée par u , nous ne pouvons appliquer directement cette méthode au problème vérifié par u , il nous faut passer par un problème approché et vérifier que sa solution converge bien vers u .

Problème approché et principe du maximum Soit $\epsilon > 0$. Supposons que $u_\epsilon \in H^1(\Omega) \cap \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ vérifie, pour tout $v \in \mathcal{V}$,

$$\int_{\Omega} a \nabla u_\epsilon \cdot \nabla v + \epsilon \int_{\Omega} u_\epsilon v + \epsilon \int_{\Gamma_n} u_\epsilon v + \int_{\Gamma_r} c u_\epsilon v = \int_{\Omega} f v + \int_{\Gamma_n} g_n v + \int_{\Gamma_r} g_r v.$$

Posons

$$K_\epsilon = \max \left\{ \sup_{\Omega} \frac{f}{\epsilon}, \sup_{\Gamma_d} u, \sup_{\Gamma_n} \frac{g_n}{\epsilon}, \sup_{\Gamma_r} \frac{g_r}{c} \right\}$$

et $v_\epsilon = (u_\epsilon - K_\epsilon)_+$ la partie positive de $u_\epsilon - K_\epsilon$. D'après le corollaire 3.1.12 de [22], $v_\epsilon \in H^1(\Omega)$ et $\nabla v_\epsilon = \chi_{[u_\epsilon > K_\epsilon]} \nabla u_\epsilon$. Comme $u_\epsilon \leq K_\epsilon$ sur Γ_d , $v_\epsilon \in \mathcal{V}$. On peut donc injecter v_ϵ dans la formulation variationnelle ci-dessus et obtenir que :

$$\int_{[u_\epsilon \geq K_\epsilon]} a |\nabla u_\epsilon|^2 + \epsilon \int_{\Omega} u_\epsilon v_\epsilon + \epsilon \int_{\Gamma_n} u_\epsilon v_\epsilon + \int_{\Gamma_r} c u_\epsilon v_\epsilon = \int_{\Omega} f v_\epsilon + \int_{\Gamma_n} g_n v_\epsilon + \int_{\Gamma_r} g_r v_\epsilon.$$

On en déduit alors

$$\begin{aligned} & \int_{[u_\epsilon \geq K_\epsilon]} a |\nabla u_\epsilon|^2 + \epsilon \int_{[u_\epsilon \geq K_\epsilon]} (u_\epsilon - K_\epsilon)_+^2 + \\ & \epsilon \int_{\Gamma_n \cap [u_\epsilon \geq K_\epsilon]} (u_\epsilon - K_\epsilon)_+^2 + \int_{\Gamma_r \cap [u_\epsilon \geq K_\epsilon]} c (u_\epsilon - K_\epsilon)_+^2 = \\ & \int_{\Omega} (f - \epsilon K_\epsilon) (u_\epsilon - K_\epsilon)_+ + \int_{\Gamma_n} (g_n - \epsilon K_\epsilon) (u_\epsilon - K_\epsilon)_+ + \int_{\Gamma_r} (g_r - c K_\epsilon) (u_\epsilon - K_\epsilon)_+. \end{aligned}$$

Le second membre de cette égalité étant négatif ou nul par définition de K_ϵ , on en déduit que $u_\epsilon \leq K_\epsilon$ p.p. sur Ω , Γ_n et Γ_r .

De même, en posant

$$k_\epsilon = \min \left\{ \inf_{\Omega} \frac{f}{\epsilon}, \inf_{\Gamma_d} u, \inf_{\Gamma_n} \frac{g_n}{\epsilon}, \inf_{\Gamma_r} \frac{g_r}{c} \right\}$$

et en considérant $-u_\epsilon$, on montre que $u_\epsilon \geq k_\epsilon$ p.p. sur Ω , Γ_n et Γ_r .

Passage à la limite On pose $e_\epsilon = u_\epsilon - u$. Lequel vérifie pour tout $v \in \mathcal{V}$,

$$\int_{\Omega} a \nabla e_\epsilon \cdot \nabla v + \epsilon \int_{\Omega} u_\epsilon v + \epsilon \int_{\Gamma_n} u_\epsilon v + \int_{\Gamma_r} c e_\epsilon v = 0. \quad (\text{B.1})$$

Montrons que, pour tout $v \in H^1(\Omega)$,

$$\epsilon \int_{\Omega} u_\epsilon v \rightarrow 0, \quad \epsilon \rightarrow 0.$$

En prenant $v = u_\epsilon$ dans la formulation variationnelle vérifiée par ce dernier, on obtient :

$$\begin{aligned} & \|a \nabla u_\epsilon\|_{0,\Omega}^2 + \epsilon \|u_\epsilon\|_{0,\Omega}^2 + \epsilon \|u_\epsilon\|_{0,\Gamma_n}^2 + \|c u_\epsilon\|_{0,\Gamma_r}^2 \\ & = \int_{\Omega} f u_\epsilon + \int_{\Gamma_n} g_n u_\epsilon + \int_{\Gamma_r} g_r u_\epsilon \\ & \leq C(\|f\|_{0,\Omega} + \|g_n\|_{0,\Gamma_n} + \|g_r\|_{0,\Gamma_r}) \|u_\epsilon\|_{1,\Omega}. \end{aligned}$$

Usant de l'inégalité de Poincaré (ou Poincaré-Friedrichs si $\Gamma_d = \emptyset$, voir théorème A.1), on a :

$$\begin{aligned} \|u_\epsilon\|_{1,\Omega}^2 &\leq C \left(\|\nabla u_\epsilon\|_{0,\Omega}^2 + \|u_\epsilon\|_{0,\Gamma_r}^2 \right) \\ &\leq C \left(\|a \nabla u_\epsilon\|_{0,\Omega}^2 + \|c u_\epsilon\|_{0,\Gamma_r}^2 + \epsilon \|u_\epsilon\|_{0,\Omega}^2 + \epsilon \|u_\epsilon\|_{0,\Gamma_n}^2 \right) \\ &\leq C \left(\|f\|_{0,\Omega} + \|g_n\|_{0,\Gamma_n} + \|g_r\|_{0,\Gamma_r} \right) \|u_\epsilon\|_{1,\Omega}. \end{aligned}$$

On a donc obtenu que u_ϵ est borné dans $H^1(\Omega)$ indépendamment de ϵ et on alors la limite souhaitée : pour tout $v \in H^1(\Omega)$

$$\epsilon \left| \int_{\Omega} u_\epsilon v \right| \leq \epsilon \|u_\epsilon\|_{0,\Omega} \|v\|_{0,\Omega} \leq C \epsilon \|v\|_{1,\Omega} \rightarrow 0.$$

D'où,

$$\epsilon \int_{\Omega} |u_\epsilon u| \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0.$$

On en déduit, lorsque $\epsilon \rightarrow 0$,

$$\epsilon \left| \int_{\Omega} u_\epsilon e_\epsilon \right| \leq \epsilon \left(\int_{\Omega} |u_\epsilon|^2 + \int_{\Omega} |u_\epsilon u| \right) \rightarrow 0$$

et que

$$\epsilon \left| \int_{\Gamma_n} u_\epsilon e_\epsilon \right| \rightarrow 0.$$

En prenant $v = e_\epsilon$ dans (B.1) et en faisant tendre $\epsilon \rightarrow 0$, on obtient

$$\|\nabla e_\epsilon\|_{0,\Omega}^2 + \|c e_\epsilon\|_{0,\Gamma_r}^2 \rightarrow 0.$$

Par ailleurs, l'inégalité de Poincaré (ou Poincaré-Friedrichs) s'applique à e_ϵ , on en déduit alors que

$$\|e_\epsilon\|_{1,\Omega}^2 \leq C \left(\|\nabla e_\epsilon\|_{0,\Omega}^2 + \|c e_\epsilon\|_{0,\Gamma_r}^2 \right) \rightarrow 0, \quad \epsilon \rightarrow 0.$$

Conclusion Comme $u_\epsilon \rightarrow u$ dans $H^1(\Omega)$ à une sous suite près, on en déduit que $u_\epsilon \rightarrow u$ p.p.. Si l'on suppose les hypothèses sur le signe des données initiales vérifiées, on a $u_\epsilon \geq 0$ p.p. ou $u_\epsilon \leq 0$ p.p. et en passant à la limite on obtient $u \geq 0$ ou $u \leq 0$.

□

Le même théorème est valable avec une condition de Ventcel à la place de celle de Robin :

Théorème B.2. Soit Ω ouvert et $\partial\Omega$ son bord. On décompose $\partial\Omega$ de la façon suivante : $\partial\Omega = \Gamma_d \cup \Gamma_n \cup \Gamma_v$ avec $\Gamma_d \neq \emptyset$ ou $\Gamma_v \neq \emptyset$. On note O et A les extrémités de Γ_v .

Soient $f \in L^2(\Omega)$, $g_n \in L^2(\Gamma_n)$, $g_v \in L^2(\Gamma_v)$. Soient a , respectivement b et c , strictement positives et bornées sur Ω , respectivement Γ_v . Finalement, soit d une constante positive.

On note $\mathcal{V} = \{v \in H^1(\Omega) \cap H^1(\Gamma_v) : v|_{\Gamma_d} = 0, v(O) = 0\}$. Supposons que $u \in H^1(\Omega) \cap H^1(\Gamma_v) \cap \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ vérifie, pour tout $v \in \mathcal{V}$,

$$\int_{\Omega} a \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\Gamma_v} c u v + \int_{\Gamma_v} b \partial_{\tau} u \partial_{\tau} v + du(A)v(A) = \int_{\Omega} f v + \int_{\Gamma_n} g_n v + \int_{\Gamma_v} g_v v.$$

Si f , resp. u , resp. g_n , resp. g_v , est positive sur Ω , resp. Γ_d , resp. Γ_n , resp. Γ_v , alors u est positive sur Ω .

De même, si f , resp. u , resp. g_n , resp. g_v , est négative sur Ω , resp. Γ_d , resp. Γ_n , resp. Γ_v , alors u est négative sur Ω .

La démonstration s'effectue de façon identique.

Annexe C

Régularité du laplacien dans un angle droit

Considérons Q_1 et Q_2 les quart de plans représentés dans la figure C.1.

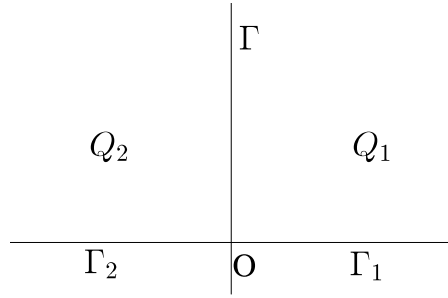


FIGURE C.1 – Voisinage de O.

Supposons que $u \in H^1(Q_1)$ soit solution du problème

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u = f \text{ sur } Q_1, \\ u = g \text{ sur } \Gamma_1, \\ + \text{ Dirichlet ou Neumann homogène sur } \Gamma, \end{array} \right.$$

où, pour $m \in \mathbb{N}$, $f \in H^m(Q)$ et $g \in H^{m+\frac{3}{2}}(\Gamma_1)$. On supposera de plus que f est à support compact et, pour $n \in \{0, \dots, m+1\}$, $g^{(n)}(O) = 0$ si n est pair, respectivement impair, dans le cas d'une condition de Dirichlet, respectivement Neumann.

On note $Q = \overline{Q_1 \cup Q_2}^\circ$, $\tilde{u}$ un prolongement de u à Q_2 et $\bar{u}$ la fonction définie sur Q par

$$\bar{u} = \left\{ \begin{array}{ll} u & \text{sur } Q_1, \\ \tilde{u} & \text{sur } Q_2. \end{array} \right.$$

Théorème C.1. *Soit $m \in \mathbb{N}$, il existe un prolongement $\tilde{u}$ de u à Q_2 tel que $\bar{u}$ soit dans $H^{m+2}(Q)$.*

Démonstration. Afin de préserver la continuité des dérivées de $\bar{u}$ sur Γ , on prolongera u par imparité si on a une condition de Dirichlet sur Γ :

$$\tilde{u}(x, y) = -u(-x, y), \quad (x, y) \in Q_2,$$

et par parité si on a une condition de Neumann :

$$\tilde{u}(x, y) = u(-x, y), \quad (x, y) \in Q_2.$$

D'après le théorème 3.44 de [15], $\bar{u} \in H^1(Q)$ et est donc solution de

$$\begin{cases} -\Delta \bar{u} &= \bar{f} \text{ sur } Q_1, \\ \bar{u} &= \bar{g} \text{ sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \end{cases}$$

où $\bar{f}$ et $\bar{g}$ ont été prolongées de la façon que u . Puisque $\bar{f} \in H^m(Q)$ et $\bar{g} \in H^{m+\frac{3}{2}}(\overline{\Gamma_1 \cup \Gamma_2})$, on en déduit que $\bar{u} \in H^{m+2}(Q)$. □

Corollaire C.1. *u est régulière au voisinage de O .*

Annexe D

Espaces à poids et transformée de Mellin

Cette annexe a pour vocation de présenter les espaces à poids et la transformation de Mellin et quelques-unes de leurs propriétés dont nous aurons besoin. Il s'agit, à quelques détails près, d'une reprise de [10] adaptée au cas des profils qui nous intéressent ; toutes les démonstrations ne seront donc pas reprises. Pour des définitions plus générales ou plus de résultats et les démonstrations manquantes, le lecteur pourra se reporter à [10] ou [3] par exemple.

D.1 Espaces à poids

On rappelle que Ω_i^∞ est le demi plan $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, Ω_e^∞ la bande infinie $\mathbb{R} \times]-1, 0[$ et Γ_r^∞ la demi-droite $\mathbb{R}_+^* \times \{0\}$.

Définition D.1. Soient $\gamma \in \mathbb{R}$ et $s \in \mathbb{N}$, on définit $K_\gamma^s(\Omega_i^\infty)$ par

$$K_\gamma^s(\Omega_i^\infty) = \left\{ u \in L_{\text{loc}}^2(\Omega_i^\infty) : r^{|\alpha|-s+\gamma} \partial_{(x,y)}^\alpha u \in L^2(\Omega_i^\infty), \forall \alpha \in \mathbb{N}^2, |\alpha| \leq s \right\},$$

muni de la norme

$$\|u\|_{K_\gamma^s(\Omega_i^\infty)}^2 = \sum_{|\alpha| \leq s} \left\| r^{|\alpha|-s+\gamma} \partial_{(x,y)}^\alpha u \right\|_{L^2(\Omega_i^\infty)}^2.$$

De même, on définit $K_\gamma^s(\Omega_e^\infty)$ par

$$K_\gamma^s(\Omega_e^\infty) = \left\{ u \in L_{\text{loc}}^2(\Omega_e^\infty) : r^{|\alpha|-s+\gamma} \partial_{(x,y)}^\alpha u \in L^2(\Omega_e^\infty), \forall \alpha \in \mathbb{N}^2, |\alpha| \leq s \right\}.$$

On pose alors

$$K_\gamma^s(\Omega^\infty) = \left\{ u : u_i \in K_\gamma^s(\Omega_i^\infty), u_e \in K_\gamma^{s+\frac{1}{2}}(\Omega_e^\infty) \text{ et } u_i = u_e \text{ sur } \Gamma_r^\infty \right\}.$$

Finalement, on définit $\mathcal{K}_{\gamma-\frac{1}{2}}^{s-\frac{1}{2}}(\Gamma_r^\infty)$ par

$$\mathcal{K}_{\gamma-\frac{1}{2}}^{s-\frac{1}{2}}(\Gamma_r^\infty) = \left\{ u \in L_{\text{loc}}^2(\Gamma_r^\infty) : \exists v \in \mathcal{K}_\gamma^s(\Omega_i^\infty), v|_{\Gamma_r^\infty} = u \right\}$$

muni de la norme

$$\|u\|_{\mathcal{K}_{\gamma-\frac{1}{2}}^{s-\frac{1}{2}}(\Gamma_r^\infty)} = \inf \left\{ \|v\|_{\mathcal{K}_\gamma^s(\Omega_i^\infty)} : v \in \mathcal{K}_\gamma^s(\Omega_i^\infty), v|_{\Gamma_r^\infty} = u \right\}.$$

Remarque : Étant amené à jongler entre les coordonnées cartésiennes (x, y) et polaires (r, θ) et (t, θ) où $t = \log r$, il convient d'établir une correspondance entre les espaces à poids en fonction des coordonnées dans lesquelles ils sont définis.

Notons encore une fois qu'il y a une différence d'indice sur les espaces à poids auxquels appartiennent les différentes composantes de u dans la définition de $\mathcal{K}_\gamma^s(\Omega^\infty)$. Précisément, u_e est dans $\mathcal{K}_\gamma^{s+\frac{1}{2}}(\Omega_e^\infty)$ tandis que u_i est dans $\mathcal{K}_\gamma^s(\Omega_i^\infty)$. Ceci provient du fait que u est considéré en coordonnées cartésiennes sur Ω_e^∞ et polaires sur Ω_i^∞ : le changement de variables pour passer d'un système de coordonnées à l'autre engendre le décalage de $\frac{1}{2}$.

Lemme D.1. $\forall \alpha \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \exists d_{\alpha, \beta} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^1), \beta \in \mathbb{N}^2, |\beta| \leq |\alpha|$, telles que

$$\partial_{(x,y)}^\alpha u = \sum_{0 \leq |\beta| \leq |\alpha|} r^{-|\alpha|} d_{\alpha, \beta}(\theta) (r \partial_r)^{\beta_1} \partial_\theta^{\beta_2} \tilde{u} = \sum_{0 \leq |\beta| \leq |\alpha|} e^{-t|\alpha|} d_{\alpha, \beta}(\theta) \partial_{(t, \theta)}^\beta \tilde{u}.$$

Réciproquement : $\forall \alpha \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \exists d_{\alpha, \beta}^* \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^1), \beta \in \mathbb{N}^2, |\beta| \leq |\alpha|$, telles que

$$\partial_{(t, \theta)}^\alpha \tilde{u} = \sum_{0 \leq |\beta| \leq |\alpha|} r^{|\alpha|} d_{\alpha, \beta}^*(\theta) \partial_{(x,y)}^\beta u.$$

La démonstration de ce lemme de calcul différentiel est laissé au lecteur. Le résultat est encore valable en dimension supérieure.

Lemme D.2. Soient $\gamma \in \mathbb{R}$ et $s \in \mathbb{N}$.

1. Le changement de variables $(x, y) \mapsto (t, \theta)$ induit un isomorphisme de $\mathcal{K}_\gamma^s(\Omega_i^\infty)$ dans

$$K_i = \left\{ u \in L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R} \times]0, \pi[) / e^{t(\gamma-s+1)} \tilde{u} \in H^s(\mathbb{R} \times]0, \pi[) \right\}.$$

2. Le changement de variables $(x, y) \mapsto (t, y)$ induit un isomorphisme de $\mathcal{K}_\gamma^s(\Omega_e^\infty)$ dans

$$K_e = \left\{ u \in L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R} \times]-1, 0[) / e^{t(\gamma-s+\frac{1}{2})} \tilde{u} \in H^s(\mathbb{R} \times]-1, 0[) \right\}.$$

Démonstration. Les démonstrations de (1) et (2) étant identiques, nous ne démontrerons que (1). On appelle

$$\widetilde{K}_i = \left\{ u/e^{t(\gamma-s+1)} \partial_{(t,\theta)}^\alpha \check{u} \in L^2(\mathbb{R} \times]0, \pi[), \forall |\alpha| \leq s \right\}.$$

Montrons que K_i est isomorphe à $\widetilde{K}_i$ puis $\widetilde{K}_i$ à $\mathcal{K}_\gamma^s(\Omega^\infty)$. Soit α tel que $|\alpha| \leq s$, notons $\xi = \gamma - s + 1$, nous avons

$$\begin{aligned} \partial_{(t,\theta)}^\alpha \left(e^{t\xi} \check{u} \right) &= \partial_t^{\alpha_1} \left(e^{t\xi} \partial_\theta^{\alpha_2} \check{u} \right) \\ &= \sum_{\beta_1 + \beta_2 = \alpha_1} \partial_t^{\beta_1} \left(e^{t\xi} \right) \partial_t^{\beta_2} \partial_\theta^{\alpha_2} \check{u} \\ &= \sum_{\beta_1 + \beta_2 = \alpha_1} \xi^{\beta_1} e^{t\xi} \partial_t^{\beta_2} \partial_\theta^{\alpha_2} \check{u} \end{aligned}$$

On en déduit que $u \in K_i$ si et seulement si $u \in \widetilde{K}_i$.

L'isomorphisme entre $\widetilde{K}_i$ et $\mathcal{K}_\gamma^s(\Omega_i^\infty)$ résulte du lemme précédent et des définitions des deux espaces. $\square$

Remarque : La démonstration de ce lemme, attentivement observée, montre une dépendance polynomiale de la constante en ξ dans la majoration de la norme K_i par la norme $\widetilde{K}_i$ et donc par la norme $\mathcal{K}_\gamma^s$. Celle-ci n'a guère d'impact lorsque nous sommes sur les demi-droites complexes où ξ est fixé. Par contre il faudra être vigilant lorsque l'on voudra utiliser ces résultats d'isomorphismes sur des demi-plans où ξ ne sera plus borné.

Avant d'énoncer la prochaine proposition, rappelons quelques définitions.

Définition D.2. On note χ_k une fonction de troncature, $\mathcal{C}^\infty$; ne dépendant que de r sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ (donc radiale) et que de x sur $\mathbb{R}_+ \times [-1, 0]$; valant k pour $r < r_0$ ou $x \leq r_0$ (près de l'origine) et $1 - k$ pour $r > r_1$ ou $x \geq r_1$ (loin de l'origine) avec $0 < r_0 < r_1$.

Définition D.3. On définit l'espace fonctionnel $\mathcal{S}^\lambda(\Omega_i^\infty)$ par :

$$\mathcal{S}^\lambda(\Omega_i^\infty) = \left\{ w : w(r, \theta) = r^\lambda \sum_{l=0}^L \log^l r \psi_l(\theta), \psi_l \in \mathcal{C}^\infty([0, \pi]) \right\},$$

Proposition D.1. Soient $\gamma \in \mathbb{R}$ et $s \in \mathbb{N}$, on a :

1. pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^2$, $|\alpha| \leq s$, l'application $\partial^\alpha : \mathcal{K}_\gamma^s(\Omega^\infty) \rightarrow \mathcal{K}_\gamma^{s-|\alpha|}(\Omega^\infty)$ est continue.
2. $\mathcal{K}_\gamma^s(\Omega^\infty) \subset \mathcal{K}_{\gamma-s}^0(\Omega^\infty)$.
3. Si $\gamma \leq \gamma'$, alors $\chi_1 \mathcal{K}_\gamma^s(\Omega^\infty) \subset \chi_1 \mathcal{K}_{\gamma'}^s(\Omega^\infty)$.
4. Si $\gamma \geq \gamma'$, alors $\chi_0 \mathcal{K}_\gamma^s(\Omega^\infty) \subset \chi_0 \mathcal{K}_{\gamma'}^s(\Omega^\infty)$.
5. Si $v \in \mathcal{S}(\Omega_i^\infty)$ alors $\chi_0 v \in \mathcal{K}_\gamma^s(\Omega_i^\infty)$ si, et seulement si, $\lambda + \gamma < s - 1$.

Démonstration. 1.

$$\begin{aligned}
 \|\partial^\alpha u\|_{\mathcal{K}_\gamma^{s-|\alpha|}(\Omega^\infty)}^2 &= \sum_{|\beta| \leq s-|\alpha|} \left\| r^{|\beta|-s+|\alpha|+\gamma} \partial^\beta (\partial^\alpha u) \right\|_{L^2(\Omega^\infty)}^2 \\
 &= \sum_{|\beta|+|\alpha| \leq s} \left\| r^{|\beta|+|\alpha|-s+\gamma} \partial^{\alpha+\beta} u \right\|_{L^2(\Omega^\infty)}^2 \\
 &\leq \|u\|_{\mathcal{K}_\gamma^s(\Omega^\infty)}^2.
 \end{aligned}$$

2. $\|u\|_{\mathcal{K}_{\gamma-s}^0(\Omega^\infty)}^2 = \|r^{\gamma-s}u\|_{L^2(\Omega^\infty)}^2 \leq \|u\|_{\mathcal{K}_\gamma^s(\Omega^\infty)}^2.$

3. Pour $\gamma < \gamma'$, il suffit d'écrire les définitions et de remarquer que

$$r^{|\alpha|-s+\gamma'} = r^{|\alpha|-s+\gamma} r^{\gamma'-\gamma} \leq C r^{|\alpha|-s+\gamma}.$$

De même avec $s' < s$ en majorant la somme sur $|\alpha| \leq s'$ par une somme sur $|\alpha| \leq s$.

4. Idem (3).

5. Comme le comportement en l'infini de $\partial^\alpha v$ est régi par $r^{\lambda-|\alpha|}$ et que la présence de la troncature fait que seul celui-ci nous intéresse, il suffit de regarder — par définition de $\mathcal{K}_\gamma^s(\Omega_i^\infty)$ — quand $r^{|\alpha|-s+\gamma} r^{\lambda-|\alpha|}$ est dans $L^2(\Omega_i^\infty)$. C'est le cas si et seulement si $2(\lambda + \gamma - s) + 1 < -1$, autrement dit, $\lambda + \gamma < s - 1$.

□

D.2 La transformation de Mellin

Nous définirons la transformée de Mellin d'abord dans $\mathbb{R}_+$ puis dans Ω_i^∞ et Ω_e^∞ en rappelant au passage quelques propriétés et liens avec la transformée de Fourier.

D.2.1 Définitions

Dans $\mathbb{R}^+$

Définition D.4. Soit $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^+)$, la transformée de Mellin de u , notée $\mathcal{M}[u]$ est définie pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ par :

$$\mathcal{M}[u](\lambda) = \int_0^{+\infty} r^{-\lambda} u(r) \frac{dr}{r}.$$

Comme l'intégrant est analytique en λ sur le support de u , les théorèmes d'inversions limite-intégrale permettent d'en déduire que $\mathcal{M}[u]$ est également analytique sur $\mathbb{C}$.

Nous avons de plus un lien explicite avec la transformée de Fourier. Pour voir cela écrivons $\lambda = \xi + i\eta$ et considérons le changement de variables $t = \ln r$, $\check{u}(t) = u(r)$. $\mathcal{M}[u]$ s'écrit alors comme :

$$\mathcal{M}[u](\lambda) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\xi t} e^{-i\eta t} \check{u}(t) dt.$$

$\mathcal{M}[u]$ est donc la transformée de Fourier de $t \mapsto e^{-\xi t} \check{u}(t)$ calculée au point η . Ce point de vue pourra s'avérer utile par la suite pour déduire des propriétés sur la transformée de Mellin à partir de la théorie hilbertienne de la transformée de Fourier.

Dans Ω^∞

On note

$$(\bar{r}, \bar{\theta}) = \begin{cases} (r, \theta) & \text{sur } \Omega_i^\infty, \\ (x, y) & \text{sur } \Omega_e^\infty. \end{cases}$$

et $u(x, y) = \tilde{u}(\bar{r}, \bar{\theta})$.

Définition D.5. Soit $u \in \mathcal{D}(\Omega^\infty)$. La transformée de Mellin est alors définie par :

$$\mathcal{M}[u](\lambda) = \int_0^{+\infty} \bar{r}^{-\lambda} \tilde{u}(\bar{r}, \bar{\theta}) \frac{d\bar{r}}{\bar{r}}.$$

De la même façon que précédemment, ie grâce au changement de variable $\bar{t} = \ln \bar{r}$, on peut voir $\mathcal{M}[u](\lambda)$ comme la transformée de Fourier partielle de $\bar{t} \mapsto e^{-\xi \bar{t}} \tilde{u}(\bar{t}, \bar{\theta})$ en η , avec $\bar{\theta}$ dans le rôle du paramètre.

Il faut garder à l'esprit que la transformée de Mellin dépend de $\bar{\theta}$ même si celui-ci n'apparaît pas dans les notations afin de les alléger quelque peu. La proposition suivante, via le théorème de dérivation sous le signe intégral, montre d'ailleurs que $\bar{\theta} \mapsto \mathcal{M}[u]$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $[-1, \pi]$. La fonction $\lambda \mapsto \mathcal{M}[u](\lambda)$ est donc analytique à valeurs dans $\mathcal{C}^\infty([-1, \pi])$.

Proposition D.2. Soit $u \in \mathcal{D}(\Omega^\infty)$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

- $\partial_{\bar{\theta}}^n \mathcal{M}[u](\lambda) = \mathcal{M}[\partial_{\bar{\theta}}^n u](\lambda)$,
- $\mathcal{M}[\partial_t^n u](\lambda) = \lambda^n \mathcal{M}[u](\lambda)$,
- $\partial_\lambda^n \mathcal{M}[u](\lambda) = \mathcal{M}[(-1)^n t^n \check{u}](\lambda)$.

Démonstration. $u \in \mathcal{D}(\Omega^\infty)$, on peut donc appliquer le théorème de dérivations sous l'intégrale. □

Dans $L^2(\Omega^\infty)$

A l'instar de la transformée de Fourier, la transformée de Mellin s'étend comme opérateur de L^2 dans L^2 . C'est l'objet du lemme suivant ; les définitions quasi-identiques ne diffèrent que par la droite complexe sur lesquels elles sont posées.

Lemme D.3. Soient $\gamma \in \mathbb{R}$ et $u \in L^2(\Omega^\infty)$.

1. Si $u \in \mathcal{K}_\gamma^0(\Omega_1^\infty)$, la transformée de Mellin $\mathcal{M}[u]$ de u est bien définie pour $\operatorname{Re} \lambda = \xi = -\gamma - 1$ comme fonction de $L^2(\mathbb{R} \times [0, \pi])$:

$$(\eta, \theta) \mapsto \mathcal{M}[u](\xi + i\eta) \in L^2(\mathbb{R} \times [0, \pi]).$$

La réciproque est vraie et on a :

$$\|u\|_{\mathcal{K}_\gamma^0(\Omega_1^\infty)}^2 \simeq \|\mathcal{M}[u](\xi + i.)\|_{L^2(\mathbb{R} \times [0, \pi])}^2.$$

2. Si $u \in \mathcal{K}_\gamma^0(\Omega_e^\infty)$, la transformée de Mellin $\mathcal{M}[u]$ de u est bien définie pour $\operatorname{Re} \lambda = \xi = -\gamma - \frac{1}{2}$ comme fonction de $L^2(\mathbb{R} \times [-1, 0])$:

$$(\eta, \theta) \mapsto \mathcal{M}[u](\xi + i\eta) \in L^2(\mathbb{R} \times [-1, 0]).$$

La réciproque est vraie et on a :

$$\|u\|_{\mathcal{K}_\gamma^0(\Omega_e^\infty)}^2 \simeq \|\mathcal{M}[u](\xi + i.)\|_{L^2(\mathbb{R} \times [-1, 0])}^2.$$

Démonstration. 1. D'une part on remarque que

$$\int_{\mathbb{R} \times [0, \pi]} |e^{-\xi t} \check{u}(t, \theta)|^2 d(t, \theta) = \int_{\mathbb{R}^+ \times [0, \pi]} |r^{-\xi} \tilde{u}(r, \theta)|^2 \frac{dr}{r} d\theta = \int_{\Omega_1^\infty} |r^{-\xi-1} u(x, y)|^2 d(x, y),$$

donc $(t, \theta) \mapsto e^{-\xi t} \check{u}(t, \theta) \in L^2(\mathbb{R} \times [0, \pi])$ si et seulement si $r^{-\xi-1} u \in L^2(\Omega_1^\infty)$, ie $u \in \mathcal{K}_\gamma^0(\Omega_1^\infty)$.

D'autre part on a, par les théorèmes de Fubini-Tonelli et Plancherel,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{M}[u](\xi + i.)\|_{L^2(\mathbb{R} \times [0, \pi])}^2 &= \int_{[0, \pi]} \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{M}[u](\xi + i\eta)|^2 d\eta d\theta \\ &= \int_{[0, \pi]} \int_{\mathbb{R}} \left| \mathcal{F} \left[e^{-\xi \cdot} u(., \theta) \right] (\eta) \right|^2 d\eta d\theta \\ &= 2\pi \int_{[0, \pi]} \int_{\mathbb{R}} |e^{-\xi t} u(t, \theta)|^2 dt d\theta \\ &= 2\pi \|u\|_{\mathcal{K}_\gamma^0(\Omega_1^\infty)}^2. \end{aligned}$$

2. Identique au (1) hormis pour le changement de variable qui a lieu directement en coordonnées cartésiennes et non polaires :

$$\int_{\mathbb{R} \times [-1,0]} |e^{-\xi t} \tilde{u}(t, \theta)|^2 d(t, \theta) = \int_{\Omega_e^\infty} |x^{-\xi} \tilde{u}(r, \theta)|^2 \frac{dx}{x} dy = \int_{\Omega_e^\infty} |x^{-\xi - \frac{1}{2}} u(x, y)|^2 d(x, y),$$

d'où la définition. □

Remarque : Si par ailleurs u est nulle dans un voisinage de 0 - resp. $+\infty$ -, alors par le point 4 - resp. 3 - de la proposition D.1, cette définition peut être étendue aux demi-plans complexes $\operatorname{Re} \lambda \geq -\gamma - 1$ et $\operatorname{Re} \lambda \geq -\gamma - \frac{1}{2}$ - resp. $\operatorname{Re} \lambda \leq -\gamma - 1$ et $\operatorname{Re} \lambda \leq -\gamma - \frac{1}{2}$. Ce sont ces extensions qui seront utilisées.

D.2.2 Transformation de Mellin et espaces à poids

La partie précédente donne un lien explicite entre transformation de Mellin et espace à poids à travers ce que l'on pourrait appeler théorème de Plancherel version Mellin. L'étape suivante est naturelle dans le sens où l'on veut pousser l'analogie avec Fourier et savoir si on peut inverser la transformée de Mellin.

Définition D.6. $L^2(\mathbb{R}, H^s(I)) = \left\{ u : \mathbb{R} \rightarrow H^s(I) / \int_{\mathbb{R}} \|u(x)\|_{H^s(I)}^2 dx < \infty \right\}$.

Théorème D.1. Soient $\gamma \in \mathbb{R}$ et $s \in \mathbb{N}$. On pose $\xi_i = s - \gamma - 1$, $\xi_e = s - \gamma - \frac{1}{2}$, $I_i =]0, \pi[$ et $I_e =]-\pi, 0[$.

1. Si $u \in \mathcal{K}_\gamma^s(\Omega_i^\infty)$, resp. $\mathcal{K}_\gamma^s(\Omega_e^\infty)$, alors sa transformée de Mellin est bien définie pour $\operatorname{Re} \lambda = \xi_i$, resp. $\operatorname{Re} \lambda = \xi_e$ comme fonction de $L^2(\mathbb{R})$ dans $H^s(I) : \eta \mapsto \mathcal{M}[u](\xi + i\eta)$ est dans $L^2(\mathbb{R}, H^s(I))$ avec $I = I_i$, resp. $I = I_e$. Plus précisément on a pour $\Omega = \Omega_i^\infty$ et $I = I_i$, resp. $\Omega = \Omega_e^\infty$ et $I = I_e$:

$$\|u\|_{\mathcal{K}_\gamma^s(\Omega)}^2 \simeq \int_{\mathbb{R}} \|\mathcal{M}[u](\xi + i\eta)\|_{H^s(I, |\eta|)}^2 d\eta,$$

$$\text{où, pour } \rho > 0, \|v\|_{H^s(I, \rho)}^2 = \sum_{|\beta| \leq s} \|\rho^{\beta_1} \partial^{\beta_2} v\|_{L^2(I)}^2.$$

2. Réciproquement, si $U(\lambda, \theta)$ est définie pour $\operatorname{Re} \lambda = \xi_i$, resp. $\operatorname{Re} \lambda = \xi_e$, de façon que $(\eta, \theta) \mapsto U(\xi + i\eta, \theta)$ soit dans $L^2(\mathbb{R}, H^s(I))$ pour $I = I_i$, resp. $I = I_e$ avec la condition

$$\int_{\mathbb{R}} \|U(\xi + i\eta, \theta)\|_{H^s(I, |\eta|)}^2 d\eta < +\infty,$$

alors, pour tout λ tel que $\operatorname{Re} \lambda = \xi_i$, resp. $\operatorname{Re} \lambda = \xi_e$, $U(\lambda, \theta)$ est la transformée de Mellin de u appartenant à $\mathcal{K}_\gamma^s(\Omega_i^\infty)$, resp. $\mathcal{K}_\gamma^s(\Omega_e^\infty)$, où u est donnée par

$$\tilde{u}(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} r^{\xi + i\eta} U(\xi + i\eta, \theta) d\eta. \quad (\text{D.1})$$

Démonstration. 1. Encore une fois, nous ne démontrerons le résultat que sur Ω_1^∞ . Soit $u \in \mathcal{K}_\gamma^s(\Omega_1^\infty)$. On a alors $u \in \mathcal{K}_{\gamma-s}^0(\Omega_1^\infty)$ et donc $\mathcal{M}[u](\lambda)$ est bien définie pour $\operatorname{Re} \lambda = \xi_i$ en vertu du lemme D.3. C'est la transformée de Fourier partielle de $(t, \theta) \mapsto e^{-t\xi_i} \check{u}(t, \theta)$ qui est dans $H^s(\mathbb{R} \times]0, \pi[)$ d'après le lemme D.2. Le théorème de Plancherel donne, pour tout $\beta \in \mathbb{N}^2$,

$$\left\| \partial_{(t,\theta)}^\beta (e^{-t\xi_i} \check{u}(t, \theta)) \right\|_{L^2(\mathbb{R} \times]0, \pi[)} \simeq \left\| \mathcal{F} \left[\partial_{(t,\theta)}^\beta (e^{-t\xi_i} \check{u}(t, \theta)) \right] \right\|_{L^2(\mathbb{R} \times]0, \pi[)}.$$

Or,

$$\mathcal{F} \left[\partial_{(t,\theta)}^\beta (e^{-t\xi_i} \check{u}(t, \theta)) \right] (\eta) = (-i\eta)^{\beta_1} \int_{\mathbb{R}} e^{-it\eta} e^{-t\xi_i} \partial_\theta^{\beta_2} \check{u}(t, \theta) dt. \quad (\text{D.2})$$

En effet, soit $v \in H^m(\mathbb{R} \times]0, \pi[)$, on pose $v_\theta : t \mapsto v(t, \theta)$. On a

$$\|v\|_{L^2(\mathbb{R} \times]0, \pi[)}^2 = \int_{]0, \pi[} \|v_\theta\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 d\theta.$$

D'où $\|v_\theta\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 < +\infty$ pour presque tout $\theta \in]0, \pi[$. Il en va de même pour les dérivées de v_θ et donc $v_\theta \in H^m(\mathbb{R})$. On en déduit que $v_\theta(t) \rightarrow 0$ lorsque $|t| \rightarrow +\infty$, pour presque tout $\theta \in]0, \pi[$. Appliquant ceci à $v(t, \theta) = e^{-t\xi_i} \partial_\theta^{\beta_2} \check{u}(t, \theta)$ qui est dans $H^{s-\beta_2}(\mathbb{R})$ par le lemme D.2, les termes de bord disparaissent dans l'i.p.p. qui permet d'obtenir (D.2).

Finalement,

$$\left\| \partial_{(t,\theta)}^\beta (e^{-t\xi_i} \check{u}(t, \theta)) \right\|_{L^2(\mathbb{R} \times G)} \simeq \left\| \eta^{\beta_1} \partial_\theta^{\beta_2} \mathcal{M}_\theta(\xi + i\eta) \right\|_{L^2(\mathbb{R} \times G)}.$$

En sommant sur β , on obtient (1).

2. Comme $\eta \mapsto U(\xi + i\eta)$ est dans $L^2(\mathbb{R}, H^s(]0, \pi[))$, sa transformée de Fourier inverse partielle $\mathcal{F}^{-1}[U(\xi + i., \theta)]$ est bien définie comme une fonction de $L^2(\mathbb{R}, H^s(]0, \pi[))$. La formule (D.1) donne alors $\check{u}(t, \theta) = e^{t\xi_i} \mathcal{F}^{-1}[U(\xi + i., \theta)](t)$. En particulier, $u \in K_{\gamma-s}^0(\Omega_1^\infty)$:

$$\begin{aligned}
 \|u\|_{\mathcal{K}_{\gamma-s}^0(\Omega_i^\infty)}^2 &= \int_{\Omega_i^\infty} r^{\gamma-s} |u(x, y)|^2 dx, y) \\
 &= \int_{\mathbb{R} \times]0, \pi[} |e^{t(\gamma-s+1)} \check{u}(t, \theta)|^2 dt, \theta) \\
 &= \int_{\mathbb{R} \times]0, \pi[} |e^{-t\xi} e^{t\xi} \mathcal{F}^{-1}[U(\xi + i., \theta)](t)|^2 dt, \theta) \\
 &= \int_{]0, \pi[} \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}^{-1}[U(\xi + i., \theta)](t)|^2 dt d\theta \\
 &= \int_{]0, \pi[} \|\mathcal{F}^{-1}[U(\xi + i., \theta)](t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 d\theta \\
 &= \int_{]0, \pi[} \|U(\xi + i\eta, \theta)(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 d\theta \quad (\text{Plancherel}) \\
 &= \int_{]0, \pi[} \int_{\mathbb{R}} |U(\xi + i\eta, \theta)(t)|^2 dt d\theta \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \|U(\xi + i\eta, .)(t)\|_{L^2(]0, \pi[)}^2 d\theta \\
 &\leq \int_{\mathbb{R}} \|U(\xi + i\eta, .)(t)\|_{H^s(]0, \pi[, |\eta|)}^2 d\theta.
 \end{aligned}$$

Sa transformée de Mellin est bien définie pour $\text{Re } \lambda = \xi_i$ et satisfait $\mathcal{M}[u](\lambda) = U(\lambda, \theta)$.
On conclut alors avec (1).

□

Remarque : en vertu de la remarque suivant le lemme D.2, l'équivalence des normes dans le point 1 du théorème ci-dessus peut être précisée de la façon suivante :

$$\int_{\mathbb{R}} \|\mathcal{M}[u](\xi + i\eta)\|_{H^s(I, |\eta|)}^2 d\eta \leq C(\xi) \|u\|_{\mathcal{K}_\gamma^s(\Omega)}^2$$

où $C(\xi)$ désigne une dépendance polynomiale en ξ .

Annexe E

Régularité elliptique des profils

Cette annexe a pour but de démontrer les théorèmes de *shift* qui nous permettront d'établir la régularité elliptique des profils étudiés au chapitre 4, notamment au travers des lemmes 4.3 et 4.16. Dans le cas de la condition d'impédance de type Robin, la démonstration du théorème de *shift* s'avère être une reprise plus simple de son homologue de [34]. Dans le cas de la condition d'impédance de type Ventcel, la démonstration s'adapte du cas précédent moyennant quelques difficultés supplémentaires dues à la dérivée tangentielle seconde.

E.1 Régularité elliptique du profil d'impédance avec condition de Robin

Il s'agit ici d'étudier la régularité elliptique de (4.4). Pour cela, on va regarder ce problème sur un domaine borné. Notons $\Omega_i^j = \Omega_i^\infty \cap B(O, R_j)$, $\Gamma_k^j = \Gamma_k^\infty \cap \overline{B(O, R_j)}$ pour $k \in \{n, r\}$ et $R_j \leq R_{j+1}$, $j \in \mathbb{N}$ (voir figure E.1). On regarde alors

$$\left\{ \begin{array}{l} -\alpha \Delta u = f \text{ dans } \Omega_i^j, \\ \partial_\nu u = 0 \text{ sur } \Gamma_n^j, \\ u + \alpha \partial_\nu u = g \text{ sur } \Gamma_r^j. \end{array} \right. \quad (\text{E.1})$$

Soit Ω ouvert tel que $\Omega_i^1 \subseteq \Omega \subseteq \Omega_i^3$. Pour u fonction sur Ω , on définit la distribution F_u — pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ — par

$$\langle F_u, \varphi \rangle = -\alpha \int_{\Omega} (\Delta u) \varphi dx + \int_{\Gamma_r} (u + \alpha \partial_\nu u) \varphi d\sigma.$$

Remarque : Dans les démonstrations qui suivent, nous aurons besoin de $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Notons que son support est en fait autorisé à toucher Γ_n et Γ_r , ce qui justifie la présence d'intégrale de φ sur ces bords.

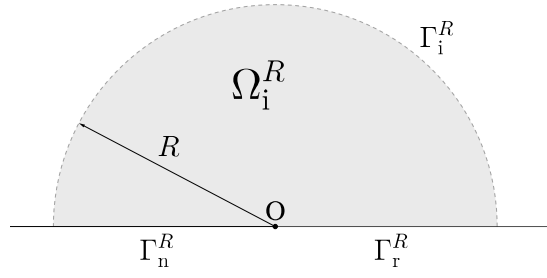


FIGURE E.1 – Domaine du profil d'impédance tronqué.

Lemme E.1. Si $\Delta u \in L^2(\Omega)$ et $u + \alpha \partial_\nu u \in L^2(\Gamma_r)$, alors il existe C , dépendant linéairement de α , tel que

$$\|F_u\|_{-1,\Omega} \leq C(\|\Delta u\|_{0,\Omega} + \|u + \alpha \partial_\nu u\|_{0,\Gamma_r}).$$

Démonstration. Identique à celle de son équivalent dans [34]. $\square$

Supposons maintenant que Ω et Ω' soient deux ouverts tels que $\Omega_i^1 \subseteq \Omega \subseteq \Omega_i^2$ et $\Omega_i^2 \subseteq \Omega' \subseteq \Omega_i^3$. Soit $\chi \in C^\infty(\Omega_i^3)$, radiale, telle que $\chi|_{\Omega_i^1} = 1$ et $\chi|_{\Omega_i^3 \setminus \Omega_i^2} = 0$.

Lemme E.2. Sous les hypothèses du théorème précédent, si $u \in H^1(\Omega')$, alors

$$\|u\|_{1,\Omega} \leq C(\alpha)(\|F_u\|_{-1,\Omega'} + \|u\|_{0,\Omega'}).$$

Démonstration. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega')$. On a

$$\begin{aligned} \langle F_{\chi u}, \varphi \rangle &= -\alpha \int_{\Omega'} (\Delta(\chi u)) \varphi dx + \int_{\Gamma_r'} (\chi u + \alpha \partial_\nu(\chi u)) \varphi d\sigma \\ &= -\alpha \int_{\Omega'} (\Delta \chi) u \varphi dx - 2\alpha \int_{\Omega'} (\nabla \chi \cdot \nabla u) \varphi dx - \int_{\Omega'} (\Delta u) \chi \varphi dx + \int_{\Gamma_r'} (u + \alpha \partial_\nu u) \chi \varphi d\sigma \\ &= \langle G_0, \varphi \rangle + \langle G_1, \varphi \rangle + \langle F_u, \chi \varphi \rangle. \end{aligned}$$

— Pour G_0 on a $|\langle G_0, \varphi \rangle| \leq C\alpha \|u\|_{0,\Omega'} \|\varphi\|_{0,\Omega'}$.

— Concernant G_1 , on a (puisque χ est radiale et $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega')$)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega'} (\nabla \chi \cdot \nabla u) \varphi dx &= \int_0^\pi \int_0^{R'} (\partial_r \tilde{\chi} \partial_r \tilde{u}) \tilde{\varphi} r dr d\theta \\ &= \int_0^\pi \underbrace{[\tilde{u} \partial_r \tilde{\chi} \tilde{\varphi} r]_0^{R'}}_{=0} - \int_0^{R'} \tilde{u} \partial_r (\partial_r \tilde{\chi} \tilde{\varphi} r) dr d\theta. \end{aligned}$$

Ainsi $|\langle G_1, \varphi \rangle| \leq C\alpha \|u\|_{0,\Omega'} \|\varphi\|_{1,\Omega'}$.

On en déduit donc que

$$|\langle F_{\chi u}, \varphi \rangle| \leq C(\alpha) (\|F_u\|_{-1, \Omega'} + \|u\|_{0, \Omega'}) \|\varphi\|_{1, \Omega'}.$$

Comme par ailleurs $\|u\|_{1, \Omega} \leq \|\chi u\|_{1, \Omega'} \leq \|F_{\chi u}\|_{-1, \Omega}$ (la seconde inégalité provenant du théorème de Lax-Milgram), on en déduit le résultat. $\square$

On a obtenu une majoration de type $H^{-1} \rightarrow H^1$. Il s'agit maintenant d'en déduire une majoration de type $H^s \rightarrow H^{s+2}$. Pour cela nous aurons besoin du lemme suivant dont la démonstration est dans [34].

Pour φ fonction sur Ω' et $h \in \mathbb{R}$, on définit $D_h \varphi$ pour tout $x \in \Omega$ par

$$D_h \varphi(x) = \frac{\varphi(x + h\vec{e}_1^\top) - \varphi(x)}{h}.$$

Lemme E.3. *Soit $m \in \mathbb{N}$. Pour h assez petit, on a l'existence de constantes C tel que*

$$1. \quad \forall \varphi \in H^{m+1}(\Omega'),$$

$$\|D_h \varphi\|_{m, \Omega} \leq C \|\varphi\|_{m+1, \Omega'}.$$

$$2. \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Gamma_r) / D_h \varphi \in \mathcal{D}(\Gamma_r),$$

$$\|D_h \varphi\|_{m-\frac{1}{2}, \Gamma_r} \leq C \|\varphi\|_{m+\frac{1}{2}, \Gamma_r}.$$

Fort de ce dernier lemme, nous pouvons démontrer la proposition suivante :

Proposition E.1. *Si $u \in H^1(\Omega_i^3)$ tel que, pour $s \in \mathbb{N}$, $\Delta u \in H^s(\Omega_i^3)$ et $u + \alpha \partial_\nu u \in H^{s+\frac{1}{2}}(\Gamma_r^3)$, alors $u \in H^{s+2}(\Omega_i^1)$ avec l'estimation :*

$$\|u\|_{s+2, \Omega_i^1} \leq C(\alpha) \left(\|\Delta u\|_{s, \Omega_i^3} + \|u + \alpha \partial_\nu u\|_{s+\frac{1}{2}, \Gamma_r^3} + \|u\|_{0, \Omega^3} \right).$$

Démonstration. On effectue une récurrence sur $s \in \mathbb{N}$.

Cas $s = 0$: On note $u_h = \chi D_h(\chi u)$ et on applique le lemme E.2 à $\Omega = \Omega_i^1$, $\Omega' = \Omega_i^2$ et u_h :

$$\|u_h\|_{1, \Omega_i^1} \leq C(\alpha) \left(\|F_{u_h}\|_{-1, \Omega_i^2} + \|u_h\|_{0, \Omega_i^2} \right). \quad (\text{E.2})$$

Il faut évaluer $\|F_{u_h}\|_{-1, \Omega_i^2}$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_i^2)$, on notera encore φ son prolongement par 0 à Ω_i^3 .

$$\begin{aligned}
\langle F_{u_h}, \varphi \rangle &= -\alpha \int_{\Omega_i^2} (\Delta(\chi D_h(\chi u))) \varphi dx + \int_{\Gamma_r^2} (\chi D_h(\chi u) + \alpha \partial_\nu(\chi D_h(\chi u))) \varphi d\sigma \\
&= \underbrace{-\alpha \int_{\Omega_i^2} (\Delta \chi) D_h(\chi u) \varphi dx - 2\alpha \int_{\Omega_i^2} (\nabla \chi \cdot \nabla D_h(\chi u)) \varphi dx}_{=\langle G, \varphi \rangle} \\
&\quad \underbrace{-\alpha \int_{\Omega_i^2} (\Delta D_h(\chi u)) \chi \varphi dx + \int_{\Gamma_r^2} (D_h(\chi u) + \alpha \partial_\nu D_h(\chi u)) \chi \varphi d\sigma}_{=\langle F_{D_h(\chi u)}, \chi \varphi \rangle}.
\end{aligned}$$

— Évaluons G . Pour cela, on va utiliser le fait que, si $D_h f$ et $D_{-h} g$ sont à support dans Ω_i^2 , alors :

$$\int_{\Omega_i^2} (D_h f) g = \int_{\Omega_i^2} f (D_{-h} g).$$

On a alors

$$-\langle G, \varphi \rangle = \alpha \int_{\Omega_i^2} (\chi u) \underbrace{D_{-h}(\Delta(\chi \varphi))}_{\in \mathcal{D}(\Omega_i^2)} + 2\alpha \int_{\Omega_i^2} \nabla(\chi u) \cdot \underbrace{D_{-h}(\nabla(\chi \varphi))}_{\in \mathcal{D}(\Omega_i^2)}.$$

D'où $\|G\|_{-1, \Omega_i^2} \leq C\alpha \|u\|_{1, \Omega_i^2}$.

— De même pour $F_{D_h(\chi u)}$.

$$\begin{aligned}
\langle F_{D_h(\chi u)}, \chi \varphi \rangle &= -\alpha \int_{\Omega_i^2} (\Delta D_h(\chi u)) \chi \varphi dx + \int_{\Gamma_r^2} (D_h(\chi u) + \alpha \partial_\nu D_h(\chi u)) \chi \varphi d\sigma \\
&= -\alpha \int_{\Omega_i^2} (\Delta(\chi u)) D_{-h}(\chi \varphi) dx + \int_{\Gamma_r^2} ((\chi u) + \alpha \partial_\nu(\chi u)) D_{-h}(\chi \varphi) d\sigma.
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
|\langle F_{D_h(\chi u)}, \chi \varphi \rangle| &\leq C(\alpha) \left(\|\Delta(\chi u)\|_{0, \Omega_i^2} \|D_{-h}(\chi \varphi)\|_{0, \Omega_i^2} \right. \\
&\quad \left. + \|\chi(u + \alpha \partial_\nu u)\|_{\frac{1}{2}, \Gamma_r^2} \|D_{-h}(\chi \varphi)\|_{-\frac{1}{2}, \Gamma_r^2} \right).
\end{aligned}$$

Par ailleurs, $\|D_{-h}(\chi \varphi)\|_{0, \Omega_i^2} \leq \|\chi \varphi\|_{1, \Omega_i^2} \leq \|\varphi\|_{1, \Omega^2}$ d'après le lemme E.3.

De même — et par inégalité de trace —, $\|D_{-h}(\chi \varphi)\|_{-\frac{1}{2}, \Gamma_r^2} \leq \|\chi \varphi\|_{\frac{1}{2}, \Gamma_r^2} \leq C\|\varphi\|_{1, \Omega_i^2}$.

Ainsi, $\|F_{D_h(\chi u)}\|_{-1, \Omega_i^2} \leq C(\alpha) \left(\|\Delta(\chi u)\|_{0, \Omega_i^2} + \|\chi(u + \alpha \partial_\nu u)\|_{\frac{1}{2}, \Gamma_r^2} \right)$.

On en déduit que

$$\|F_{u_h}\|_{-1, \Omega_i^2} \leq C(\alpha) \left(\|\Delta(\chi u)\|_{0, \Omega_i^2} + \|\chi(u + \alpha \partial_\nu u)\|_{\frac{1}{2}, \Gamma_r^2} + \|u\|_{1, \Omega_i^2} \right). \quad (\text{E.3})$$

Soit maintenant ω ouvert tel que $\Omega_i^2 \subseteq \omega \subseteq \Omega_i^3$. Le lemme E.3 nous dit que $\|u_h\|_{0,\Omega_i^2} \leq \|u\|_{1,\Omega_i^2}$. On peut alors déduire de (E.2) et (E.3) que

$$\|D_h u\|_{1,\Omega_i^1} \leq C(\alpha) \left(\|\Delta u\|_{0,\Omega_i^2} + \|u + \alpha \partial_\nu u\|_{\frac{1}{2},\Gamma_r^2} + \|u\|_{1,\omega} \right).$$

Lorsque $h \rightarrow 0$, on obtient une estimation pour toutes les dérivées d'ordre inférieur ou égal à 2 hormis ∂_y^2 (à cause de la translation dans la direction x). Il reste à obtenir une majoration pour cette dernière. Pour cela, écrivons $\partial_y^2 u = \Delta u - \partial_x^2 u$. On en déduit

$$\|u\|_{2,\Omega_i^1} \leq C(\alpha) \left(\|\Delta u\|_{0,\Omega_i^2} + \|u + \alpha \partial_\nu u\|_{\frac{1}{2},\Gamma_r^2} + \|u\|_{1,\omega} \right).$$

Usant des lemmes E.1 et E.2, nous obtenons

$$\|u\|_{1,\omega} \leq C(\alpha) \left(\|\Delta u\|_{0,\Omega_i^3} + \|u + \alpha \partial_\nu u\|_{\frac{1}{2},\Gamma_r^3} + \|u\|_{0,\Omega_i^3} \right).$$

Cette dernière égalité couplée à la précédente nous fournit le résultat pour $s = 0$.

Cas $s \geq 1$: On suppose que pour tous sous-domaines ω et ω' tels que $\Omega_i^1 \subseteq \omega \subseteq \omega' \subseteq \Omega_i^3$ et toute fonction v assez régulière

$$\|v\|_{s+1,\omega} \leq C(\alpha) \left(\|\Delta v\|_{s-1,\omega'} + \|v + \alpha \partial_\nu v\|_{s-\frac{1}{2},\Gamma_r'} + \|v\|_{0,\omega'} \right).$$

Supposons maintenant que $\Omega_i^1 \subseteq \omega \subseteq \Omega_i^2$. L'expression ci-dessus appliquée à u_h nous donne

$$\|u_h\|_{s+1,\Omega_i^1} \leq C(\alpha) \left(\|\Delta u_h\|_{s-1,\omega} + \|u_h + \alpha \partial_\nu u_h\|_{s-\frac{1}{2},\Gamma_r} + \|u_h\|_{0,\omega} \right).$$

À l'aide des techniques déployées dans le cas $s = 0$, nous obtenons

$$\|\Delta u_h\|_{s-1,\omega} \leq C(\alpha) \left(\|\Delta u\|_{s,\Omega_i^2} + \|u\|_{s+1,\Omega_i^2} \right)$$

et

$$\|u_h + \alpha \partial_\nu u_h\|_{s-\frac{1}{2},\Gamma_r} \leq C(\alpha) \|u + \alpha \partial_\nu u\|_{s+\frac{1}{2},\Gamma_r^2}.$$

On en déduit alors

$$\|u\|_{s+2,\Omega_i^1} \leq C(\alpha) \left(\|\Delta u\|_{s,\Omega_i^2} + \|u + \alpha \partial_\nu u\|_{s+\frac{1}{2},\Gamma_r^2} + \|u\|_{s+1,\Omega_i^2} \right).$$

L'hypothèse de récurrence permet alors de conclure :

$$\|u\|_{s+2,\Omega_i^1} \leq C(\alpha) \left(\|\Delta u\|_{s,\Omega_i^3} + \|u + \alpha \partial_\nu u\|_{s+\frac{1}{2},\Gamma_r^3} + \|u\|_{0,\Omega_i^3} \right).$$

□

Afin de continuer, établissons quelques notations. On pose

$$\mathcal{O}_i = e^{-2t}(\partial_t^2 + \partial_\theta^2), \quad \mathcal{O}_i^0 = (\partial_t^2 + \partial_\theta^2), \quad \mathcal{O}_{\text{tr}} = \mathcal{I} - \alpha e^{-t} \partial_\theta \text{ et } \mathcal{O}_{\text{tr}}^0 = \mathcal{I} - \alpha \partial_\theta.$$

Dans le domaine $]t_1, t_2[\times]0, \pi[$, $\mathcal{O}_i^0$ correspond au laplacien et, sur le bord $]t_1, t_2[\times \{0\}$, $-\partial_\theta$ à la dérivée normale. Si l'on considère l'étude de régularité menée jusqu'à présent de façon désincarnée, on voit qu'on peut l'appliquer à ces opérateurs dans les coordonnées (t, θ) . Il s'agit d'en déduire des résultats de régularité dans ces coordonnées, puis de retourner aux variables cartésiennes.

À l'instar de ce qui a été posé précédemment, on note $R^1 \subset R^2 \subset R^3$ trois ouverts de $\mathbb{R} \times]0, \pi[$ (voir figure E.4) définis par

$$R^j = \{(t, \theta) \in]-j\eta + t_0, t_0 + j\eta[\times]0, \pi[\}$$

pour $t_0, \eta > 0$. On note aussi γ^j , le bord associé à R^j en $\theta = 0$ et $\tilde{u}$ la fonction u dans les coordonnées (t, θ) .

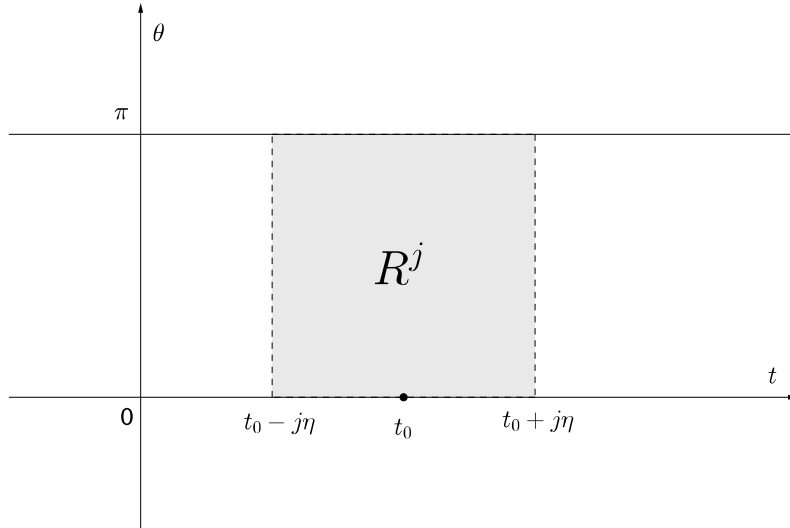


FIGURE E.2 – Domaine R^j .

Proposition E.2. *Il existe $\eta_0 \in]0, 1[$ tel que, pour tout $s \geq 0$ et tout $\eta < \eta_0$, on ait*

$$\|\tilde{u}\|_{s+2, R^1} \leq C \left(\|\mathcal{O}_i \tilde{u}\|_{s, R^3} + \|\mathcal{O}_{\text{tr}} \tilde{u}\|_{s+\frac{1}{2}, \gamma^3} + \|\tilde{u}\|_{0, R^3} \right),$$

où C dépend de s et η_0 mais pas de t_0 .

Démonstration. Soit $\chi \in \mathcal{D}(R^3)$ radiale (toujours afin de commuter avec ∂_θ) telle que $\chi|_{R^1} = 1$ et $\chi|_{R^3 \setminus R^2} = 0$. Procédons par récurrence sur s .

Cas $s = 0$: Appliquons la proposition E.1 à $\chi \tilde{u}$, on obtient

$$\|\chi \tilde{u}\|_{2, R^2} \leq C \left(\|\mathcal{O}_i^0(\chi \tilde{u})\|_{0, R^3} + \|\mathcal{O}_{\text{tr}}^0(\chi \tilde{u})\|_{\frac{1}{2}, \gamma^3} + \|\chi \tilde{u}\|_{0, R^3} \right).$$

Il s'agit de majorer chacune des normes du second membre ci-dessus.

— On a directement $\|\chi\tilde{u}\|_{0,R^3} \leq \|\tilde{u}\|_{0,R^3}$.

— Pour $\mathcal{O}_i^0$, on a $\|\mathcal{O}_i^0(\chi\tilde{u})\|_{0,R^3} \leq C \left(\|\mathcal{O}_i^0\tilde{u}\|_{0,R^3} + \|\tilde{u}\|_{1,R^3} \right)$ et

$$\|\mathcal{O}_i^0\tilde{u}\|_{0,R^3} = \|e^{2(t-t_0)}e^{2t_0}\mathcal{O}_i\tilde{u}\|_{0,R^3} \leq e^{4\eta}e^{2t_0}\|\mathcal{O}_i\tilde{u}\|_{0,R^3}.$$

En résumé,

$$\|\mathcal{O}_i^0(\chi\tilde{u})\|_{0,R^3} \leq C \left(e^{4\eta}e^{2t_0}\|\mathcal{O}_i\tilde{u}\|_{0,R^3} + \|\tilde{u}\|_{1,R^3} \right).$$

— Finalement, pour $\|\mathcal{O}_{\text{tr}}^0(\chi\tilde{u})\|_{\frac{1}{2},\gamma^3}$, on a

$$\begin{aligned} \|\mathcal{O}_{\text{tr}}^0(\chi\tilde{u})\|_{\frac{1}{2},\gamma^3} &= \|(\chi\tilde{u}) - \alpha\partial_\theta(\chi\tilde{u})\|_{\frac{1}{2},\gamma^3} \\ &= \|\chi(\tilde{u} - \alpha e^{-t}\partial_\theta\tilde{u}) + \alpha\chi(e^{-t} - 1)\partial_\theta\tilde{u}\|_{\frac{1}{2},\gamma^3} \\ &\leq C\|\mathcal{O}_{\text{tr}}\tilde{u}\|_{\frac{1}{2},\gamma^3} + (e^{2\eta} - 1)\|\chi\tilde{u}\|_{2,R^3}. \end{aligned}$$

Dans la dernière inégalité, on a effectué la majoration suivante

$$e^{-t} - 1 = e^{-(t-t_0)}e^{-t_0} - 1 \leq e^{2\eta} - 1$$

puisque $t_0 > 0$ et donc C n'en dépend pas.

Pour η assez petit ($\eta < \eta_0$), le terme contenant la norme d'ordre 2 peut être déplacé du second au premier membre de l'inégalité et comme $\chi|_{R^3 \setminus R^2} = 0$, on a alors

$$\|\chi\tilde{u}\|_{2,R^2} \leq C \left(e^{2t_0}\|\mathcal{O}_i\tilde{u}\|_{0,R^3} + \|\tilde{u}\|_{1,R^3} + \|\mathcal{O}_{\text{tr}}\tilde{u}\|_{\frac{1}{2},\gamma^3} + \|\tilde{u}\|_{0,R^3} \right).$$

Puisque $\chi|_{R^1} = 1$, on en déduit — avec C indépendant de t_0 — que

$$\|\tilde{u}\|_{2,R^1} \leq C \left(e^{2t_0}\|\mathcal{O}_i\tilde{u}\|_{0,R^3} + \|\tilde{u}\|_{1,R^3} + \|\mathcal{O}_{\text{tr}}\tilde{u}\|_{\frac{1}{2},\gamma^3} + \|\tilde{u}\|_{0,R^3} \right).$$

Par combinaison des lemmes E.1 et E.2 on en déduit que

$$\|\tilde{u}\|_{2,R^1} \leq C \left(e^{2t_0}\|\mathcal{O}_i\tilde{u}\|_{0,R^3} + \|\mathcal{O}_{\text{tr}}\tilde{u}\|_{\frac{1}{2},\gamma^3} + \|\tilde{u}\|_{0,R^3} \right).$$

Cas $s \geq 1$: Supposons que l'on ait

$$\|\tilde{u}\|_{s+1,R^1} \leq C \left(e^{2t_0}\|\mathcal{O}_i\tilde{u}\|_{s-1,R^3} + \|\mathcal{O}_{\text{tr}}\tilde{u}\|_{s-1+\frac{1}{2},\gamma^3} + \|\tilde{u}\|_{0,R^3} \right).$$

Le procédé décrit pour $s = 0$ et l'hypothèse de récurrence ci-dessus permettent d'en conclure le résultat :

$$\|\tilde{u}\|_{s+2,R^1} \leq C \left(e^{2t_0}\|\mathcal{O}_i\tilde{u}\|_{s,R^3} + \|\mathcal{O}_{\text{tr}}\tilde{u}\|_{s+\frac{1}{2},\gamma^3} + \|\tilde{u}\|_{0,R^3} \right).$$

□

Proposition E.3. *Sous les hypothèses de la proposition précédente, on a pour tout $\delta \in \mathbb{R}$ et $s \in \mathbb{N}$*

$$\begin{aligned} \|e^{\delta t} \tilde{u}\|_{s+2,]0, +\infty[\times]0, \pi[} &\leq C \left(\|e^{(\delta+2)t} \mathcal{O}_i \tilde{u}\|_{s,]-\eta_0, +\infty[\times]0, \pi[} + \|e^{\delta t} \mathcal{O}_{tr} \tilde{u}\|_{s+\frac{1}{2},]-\eta_0, +\infty[\times \{0\}} \right. \\ &\quad \left. + \|e^{\delta t} \tilde{u}\|_{0,]-\eta_0, +\infty[\times]0, \pi[} \right). \end{aligned}$$

Démonstration. Il suffit de multiplier les inégalités locales de la proposition précédentes par $e^{\delta t_0}$ et de les sommer pour $t_0 \in \eta \mathbb{N}^*$ puis de remarquer que, par le lemme D.2 (et plus particulièrement sa démonstration), les normes $\|e^t v\|_m$ et $e^{t_0} \|v\|_m$ sur R^j sont équivalentes. □

Le même lemme D.2 permet de traduire la proposition précédente sous la forme d'espace à poids :

Théorème E.1. *Soit u la solution du problème (4.4), si le second membre vérifie pour $s \geq 2$ et $\gamma \in \mathbb{R}$,*

$$f \in \mathcal{K}_\gamma^{m-2}(\Omega_i^\infty \cap]t > -1[) \quad \text{et} \quad g \in \mathcal{K}_{\gamma-\frac{1}{2}}^{m-\frac{3}{2}}(\Gamma_r^\infty \cap]t > -1[)$$

et si, de plus $u \in \mathcal{K}_{\gamma-m}^0(\Omega_i^\infty \cap]t > -1[)$, alors $u \in \mathcal{K}_\gamma^m(\Omega_i^\infty \cap]t > 0[)$.

E.2 Régularité elliptique du profil d'impédance avec condition de Ventcel

Adaptons à présent les démonstrations de régularité effectuées dans le cadre du problème avec condition d'impédance de type Robin au problème avec condition d'impédance de type Ventcel. L'une des différences réside dans le fait que la dérivée tangentielle seconde ∂_τ^2 — contrairement à la dérivée normale — ne commute pas avec la fonction de troncature χ . Ceci occasionne l'apparition d'un certain nombre de termes supplémentaires qui doivent être traités. L'autre différence provient du fait que nous sommes contraints de travailler, non plus sur $H^1(\Omega)$, mais sur $V_1(\Omega) = \{w \in H^1(\Omega) : \gamma_0(w) \in H^1(\Gamma_v)\}$; ce qui requiert aussi un certain nombre d'adaptation.

Pour étudier la régularité elliptique de (4.31) on va regarder ce problème sur un domaine borné. Notons $\Omega_i^j = \Omega_i^\infty \cap B(O, R_j)$, $\Gamma_k^j = \Gamma_k^\infty \cap \overline{B(O, R_j)}$ pour $k \in \{n, v\}$ et $R_j \leq R_{j+1}$, $j \in \mathbb{N}$ (voir figure E.3). On considère alors

$$\left\{ \begin{array}{l} -\alpha \Delta u = f \text{ dans } \Omega_i^j, \\ \partial_\nu u = 0 \text{ sur } \Gamma_n^j, \\ u + \alpha \partial_\nu u - \beta \partial_\tau^2 u = g \text{ sur } \Gamma_v^j, \\ u(O) = 0. \end{array} \right. \quad (\text{E.4})$$

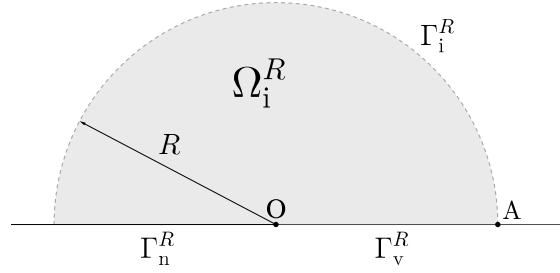


FIGURE E.3 – Domaine du profil d'impédance Ventcel tronqué.

Contrairement au cas de l'impédance Robin, l'espace variationnel associé à ce problème n'est pas $H^1(\Omega)$ mais $V_1(\Omega) = \{w \in H^1(\Omega) : \gamma_0(w) \in H^1(\Gamma_v)\}$. Les estimations que nous avons dans le cadre de Robin sur les normes H^{-1} deviendront ici des estimations sur les normes V_1^* . Notons que $H^{-1}(\Omega) \subset V_1^*(\Omega)$.

Soit Ω ouvert tel que $\Omega_i^1 \subseteq \Omega \subseteq \Omega_i^3$. Pour u fonction sur Ω , on définit la distribution F_u — pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ — par

$$\langle F_u, \varphi \rangle = -\alpha \int_{\Omega} (\Delta u) \varphi dx + \int_{\Gamma_v} (u + \alpha \partial_\nu u - \beta \partial_\tau^2 u) \varphi d\sigma.$$

Lemme E.4. *Si $\Delta u \in L^2(\Omega)$ et $u + \alpha \partial_\nu u - \beta \partial_\tau^2 u \in L^2(\Gamma_v)$, alors il existe C , dépendant linéairement de α , tel que*

$$\|F_u\|_{V_1^*(\Omega)} \leq C(\|\Delta u\|_{0,\Omega} + \|u + \alpha \partial_\nu u - \beta \partial_\tau^2 u\|_{0,\Gamma_v}).$$

Démonstration. Identique à celle de son équivalent dans [34]. □

Remarque : Rappelons que le support de $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ est autorisé à toucher Γ_n et Γ_v , justifiant ainsi la présence d'intégrale de φ sur ces bords.

Lemme E.5. *Sous les hypothèses du théorème précédent, si $u \in V_1(\Omega')$, alors*

$$\|u\|_{V_1(\Omega)} \leq C(\alpha, \beta)(\|F_u\|_{V_1^*(\Omega')} + \|u\|_{0,\Omega'} + \|u\|_{0,\Gamma_v'}).$$

Démonstration. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega')$. On a

$$\begin{aligned}
 \langle F_{\chi u}, \varphi \rangle &= -\alpha \int_{\Omega'} (\Delta(\chi u)) \varphi dx + \int_{\Gamma'_v} (\chi u + \alpha \partial_\nu(\chi u) - \beta \partial_\tau^2(\chi u)) \varphi d\sigma \\
 &= -\alpha \int_{\Omega'} (\Delta \chi) u \varphi dx - \beta \int_{\Gamma'_v} (\partial_\tau^2 \chi) u \varphi d\sigma \\
 &\quad - 2\alpha \int_{\Omega'} (\nabla \chi \cdot \nabla u) \varphi dx - 2\beta \int_{\Gamma'_v} (\partial_\tau u \partial_\tau \chi) \varphi d\sigma \\
 &\quad - \int_{\Omega'} (\Delta u) \chi \varphi dx + \int_{\Gamma'_v} (u + \alpha \partial_\nu u - \beta \partial_\tau^2 u) \chi \varphi d\sigma \\
 &= \langle G_0, \varphi \rangle + \langle G_1, \varphi \rangle + \langle F_u, \chi \varphi \rangle.
 \end{aligned}$$

— Pour G_0 on a $|\langle G_0, \varphi \rangle| \leq C(\alpha, \beta) \|u\|_{0,\Omega'} \|\varphi\|_{0,\Omega'}$ par inégalité de trace.

— Dans la démonstration du lemme E.2, nous avons vu que nous avons :

$$\left| \int_{\Omega'} (\nabla \chi \cdot \nabla u) \varphi dx \right| \leq \|u\|_{0,\Omega'} \|\varphi\|_{1,\Omega'}.$$

Par ailleurs, comme $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega')$, on a

$$\int_{\Gamma'_2} (\partial_\tau u \partial_\tau \chi) \varphi d\sigma = \int_0^{R'} (\partial_r \tilde{u} \partial_r \tilde{\chi}) \tilde{\varphi} dr = \underbrace{[\tilde{u} \partial_r \tilde{\chi} \tilde{\varphi}]_0^{R'}}_{=0} - \int_0^{R'} \tilde{u} \partial_r (\partial_r \tilde{\chi} \tilde{\varphi}) dr.$$

D'où $|\langle G_1, \varphi \rangle| \leq C(\alpha, \beta) (\|u\|_{0,\Omega'} + \|u\|_{0,\Gamma'_v}) \|\varphi\|_{H_1(\Omega')}.$

On en déduit donc que

$$|\langle F_{\chi u}, \varphi \rangle| \leq C(\alpha, \beta) \left(\|F_u\|_{V_1^*(\Omega')} + \|u\|_{0,\Omega'} + \|u\|_{0,\Gamma'_v} \right) \|\varphi\|_{V_1(\Omega')}.$$

Comme par ailleurs $\|u\|_{V_1(\Omega)} \leq \|\chi u\|_{V_1(\Omega')} \leq \|F_{\chi u}\|_{V_1^*(\Omega')}$ (la seconde inégalité provenant de la coercivité du produit scalaire de $V_1(\Omega')$), on en déduit le résultat. $\square$

On note $V_s(\Omega) = \{w \in H^s(\Omega) : \gamma_0(w) \in H^s(\Gamma_v)\}.$

Proposition E.4. Si $u \in V_1(\Omega_i^3)$ tel que, pour $s \in \mathbb{N}$, $\Delta u \in H^s(\Omega_i^3)$ et $u + \alpha \partial_\nu u - \beta \partial_\tau^2 u \in H^s(\Gamma_v^3)$, alors $u \in V_{s+2}(\Omega_i^1)$ avec l'estimation :

$$\|u\|_{V_{s+2}(\Omega_i^1)} \leq C(\alpha, \beta) \left(\|\Delta u\|_{s,\Omega_i^3} + \|u + \alpha \partial_\nu u - \beta \partial_\tau^2 u\|_{s,\Gamma_v^3} + \|u\|_{0,\Omega^3} + \|u\|_{0,\Gamma_v^3} \right).$$

Démonstration. On effectue une récurrence sur $s \in \mathbb{N}$.

Cas $s = 0$: On note $u_h = \chi D_h(\chi u)$ et on applique le lemme E.5 à $\Omega = \Omega_i^1$, $\Omega' = \Omega_i^2$ et u_h :

$$\|u_h\|_{V_1(\Omega_i^1)} \leq C(\alpha, \beta) \left(\|F_{u_h}\|_{H_1^*(\Omega_i^2)} + \|u_h\|_{0, \Omega_i^2} + \|u_h\|_{0, \Gamma_v^2} \right). \quad (\text{E.5})$$

Il faut évaluer $\|F_{u_h}\|_{V_1^*(\Omega_i^2)}$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_i^2)$, on notera encore φ son prolongement par 0 à Ω_i^3 .

$$\begin{aligned} \langle F_{u_h}, \varphi \rangle &= -\alpha \int_{\Omega_i^2} (\Delta(\chi D_h(\chi u))) \varphi dx \\ &\quad + \int_{\Gamma_v^2} [\chi D_h(\chi u) + \alpha \partial_\nu(\chi D_h(\chi u)) - \beta \partial_\tau^2(\chi D_h(\chi u))] \varphi d\sigma \\ &= \underbrace{-\alpha \int_{\Omega_i^2} (\Delta \chi) D_h(\chi u) \varphi dx - 2\alpha \int_{\Omega_i^2} (\nabla \chi \cdot \nabla D_h(\chi u)) \varphi dx}_{=\langle G_1, \varphi \rangle} \\ &\quad \underbrace{-\beta \int_{\Gamma_v^2} [\partial_\tau^2(\chi) D_h(\chi u)] \varphi d\sigma - 2\beta \int_{\Gamma_v^2} [\partial_\tau \chi \partial_\tau D_h(\chi u)] \varphi d\sigma}_{=\langle G_2, \varphi \rangle} \\ &\quad \underbrace{-\alpha \int_{\Omega_i^2} (\Delta D_h(\chi u)) \chi \varphi dx + \int_{\Gamma_v^2} [D_h(\chi u) + \alpha \partial_\nu D_h(\chi u) - \beta \partial_\tau^2 D_h(\chi u)] \chi \varphi d\sigma}_{=\langle F_{D_h(\chi u)}, \chi \varphi \rangle}. \end{aligned}$$

— En reprenant les calculs de la démonstration de la proposition E.1 qui permettent d'obtenir

$$\|G_1\|_{-1, \Omega_i^2} \leq C\alpha \|u\|_{1, \Omega_i^2}$$

on prouve

$$\|G_1\|_{V_1^*(\Omega_i^2)} \leq C\alpha \|u\|_{V_1(\Omega_i^2)}.$$

— Passons à G_2 . On a d'une part

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma_v^2} [\partial_\tau^2(\chi) D_h(\chi u)] \varphi d\sigma \right| &\leq C \|D_h(\chi u)\|_{-\frac{1}{2}, \Gamma_v^2} \|\varphi\|_{\frac{1}{2}, \Gamma_v^2} \\ &\leq C \|\chi u\|_{\frac{1}{2}, \Gamma_v^2} \|\varphi\|_{V_1(\Omega_i^2)} \\ &\leq C \|u\|_{V_1(\Omega_i^2)} \|\varphi\|_{V_1(\Omega_i^2)}. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\Gamma_v^2} [\partial_\tau \chi \partial_\tau (D_h(\chi u))] \varphi d\sigma \right| &= \left| \int_{\Gamma_v^2} D_h(\chi u) \partial_\tau \varphi d\sigma \right| \\
&\leq C \|\chi u\|_{\frac{1}{2}, \Gamma_v^2} \|D_{-h} \partial_\tau \varphi\|_{-\frac{1}{2}, \Gamma_v^2} \\
&\leq C \|u\|_{1, \Omega_i^2} \|\varphi\|_{\frac{1}{2}, \Gamma_v^2} \\
&\leq C \|u\|_{V_1(\Omega_i^2)} \|\varphi\|_{V_1(\Omega_i^2)}.
\end{aligned}$$

— De même pour $F_{D_h(\chi u)}$.

$$\begin{aligned}
\langle F_{D_h(\chi u)}, \chi \varphi \rangle &= -\alpha \int_{\%_{02}} (\Delta D_h(\chi u)) \chi \varphi dx \\
&\quad + \int_{\Gamma_v^2} [D_h(\chi u) + \alpha \partial_\nu D_h(\chi u) - \beta \partial_\tau^2 D_h(\chi u)] \chi \varphi d\sigma \\
&= -\alpha \int_{\Omega_i^2} (\Delta(\chi u)) D_{-h}(\chi \varphi) dx \\
&\quad + \int_{\Gamma_v^2} [(\chi u) + \alpha \partial_\nu(\chi u) - \beta \partial_\tau^2(\chi u)] D_{-h}(\chi \varphi) d\sigma \\
&= -\alpha \int_{\Omega_i^2} (\Delta(\chi u)) D_{-h}(\chi \varphi) dx + \int_{\Gamma_v^2} \chi [u + \alpha \partial_\nu u - \beta \partial_\tau^2 u] D_{-h}(\chi \varphi) d\sigma \\
&\quad - \beta \int_{\Gamma_v^2} [2\partial_\tau \chi \partial_\tau u + u \partial_\tau^2 \chi] D_{-h}(\chi \varphi) d\sigma.
\end{aligned}$$

Rappelons que, d'après le lemme E.3 et par inégalité de trace,

$$\|D_{-h}(\chi \varphi)\|_{0, \Omega_i^2} \leq \|\chi \varphi\|_{1, \Omega_i^2} \leq \|\varphi\|_{1, \Omega^2},$$

$$\|D_{-h}(\chi \varphi)\|_{-\frac{1}{2}, \Gamma_v^2} \leq \|\chi \varphi\|_{\frac{1}{2}, \Gamma_v^2} \leq C \|\varphi\|_{1, \Omega_i^2}$$

et

$$\|\partial_\tau D_{-h}(\chi \varphi)\|_{-\frac{1}{2}, \Gamma_v^2} \leq \|\partial_\tau(\chi \varphi)\|_{\frac{1}{2}, \Gamma_v^2} \leq C \|\varphi\|_{V_1(\Omega_i^2)}.$$

D'où

$$\left| \int_{\Gamma_v^2} [2\partial_\tau \chi \partial_\tau u + u \partial_\tau^2 \chi] D_{-h}(\chi \varphi) d\sigma \right| \leq C \|u\|_{H_1(\Omega_i^2)} \|\varphi\|_{V_1(\Omega_i^2)}$$

et

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{\Gamma_v^2} \chi[u + \alpha \partial_\nu u - \beta \partial_\tau^2 u] D_{-h}(\chi \varphi) d\sigma \right| &\leq C \|u + \alpha \partial_\nu u - \beta \partial_\tau^2 u\|_{0, \Gamma_v^2} \|D_{-h}(\chi \varphi)\|_{0, \Gamma_v^2} \\
 &\leq C \|u + \alpha \partial_\nu u - \beta \partial_\tau^2 u\|_{0, \Gamma_v^2} \|\varphi\|_{1, \Gamma_v^2} \\
 &\leq C \|u + \alpha \partial_\nu u - \beta \partial_\tau^2 u\|_{0, \Gamma_v^2} \|\varphi\|_{V_1(\Omega_i^2)}.
 \end{aligned}$$

On en déduit que (en reprenant les inégalités manquantes dans la démonstration de la proposition E.1),

$$\|F_{D_h(\chi u)}\|_{V_1^*(\Omega_i^2)} \leq C(\alpha, \beta) \left(\|\Delta(\chi u)\|_{0, \Omega_i^2} + \|\chi(u + \alpha \partial_\nu u - \beta \partial_\tau^2 u)\|_{0, \Gamma_v^2} + \|u\|_{V_1(\Omega_i^2)} \right).$$

Finalement,

$$\|F_{u_h}\|_{V_1^*(\Omega_i^2)} \leq C(\alpha, \beta) \left(\|\Delta(\chi u)\|_{0, \Omega_i^2} + \|\chi(u + \alpha \partial_\nu u - \beta \partial_\tau^2 u)\|_{0, \Gamma_v^2} + \|u\|_{V_1(\Omega_i^2)} \right). \quad (\text{E.6})$$

Soit maintenant ω ouvert tel que $\Omega_i^2 \subseteq \omega \subseteq \Omega_i^3$. Le lemme E.3 nous dit que $\|u_h\|_{0, \Omega_i^2} \leq \|u\|_{1, \Omega_i^2}$ (de même sur Γ_v^2). On peut alors déduire de (E.5) et (E.6) que

$$\|D_{u_h}\|_{V_1(\Omega_i^1)} \leq C(\alpha, \beta) \left(\|\Delta u\|_{0, \Omega_i^2} + \|u + \alpha \partial_\nu u - \beta \partial_\tau^2 u\|_{0, \Gamma_v^2} + \|u\|_{V_1(\Omega_i^2)} \right).$$

Lorsque $h \rightarrow 0$, on obtient une estimation pour toutes les dérivées d'ordre inférieur ou égal à 2 hormis ∂_y^2 (à cause de la translation dans la direction x). Il reste à obtenir une majoration pour cette dernière. Pour cela, écrivons $\partial_y^2 u = \Delta u - \partial_x^2 u$. On en déduit

$$\|u\|_{V_2(\Omega_i^1)} \leq C(\alpha, \beta) \left(\|\Delta u\|_{0, \Omega_i^2} + \|u + \alpha \partial_\nu u - \beta \partial_\tau^2 u\|_{0, \Gamma_v^2} + \|u\|_{V_1(\Omega_i^2)} \right).$$

Usant des lemmes E.4 et E.5, nous obtenons

$$\|u\|_{V_1(\omega)} \leq C(\alpha, \beta) \left(\|\Delta u\|_{0, \Omega_i^3} + \|u + \alpha \partial_\nu u - \beta \partial_\tau^2 u\|_{0, \Gamma_v^3} + \|u\|_{0, \Omega_i^3} + \|u\|_{0, \Gamma_v^3} \right).$$

Cette dernière égalité couplée à la précédente nous fournit le résultat pour $s = 0$.

Cas $s \geq 1$: On suppose que pour tous sous-domaines ω et ω' tels que $\Omega_i^1 \subseteq \omega \subseteq \omega' \subseteq \Omega_i^3$ et toute fonction v assez régulière

$$\|v\|_{V_{s+1}(\omega)} \leq C(\alpha, \beta) \left(\|\Delta v\|_{s-1, \omega'} + \|v + \alpha \partial_\nu v - \beta \partial_\tau^2 v\|_{s-1, \Gamma_v'} + \|v\|_{V_0(\omega')} \right).$$

Supposons maintenant que $\Omega_i^1 \subseteq \omega \subseteq \Omega_i^2$. L'expression ci-dessus appliquée à u_h nous donne

$$\|u_h\|_{V_{s+1}(\Omega_i^1)} \leq C(\alpha, \beta) \left(\|\Delta u_h\|_{s-1, \omega} + \|u_h + \alpha \partial_\nu u_h - \beta \partial_\tau^2 u_h\|_{s-1, \Gamma_v} + \|u_h\|_{V_0(\omega)} \right).$$

À l'aide des techniques déployées dans le cas $s = 0$, nous obtenons

$$\|\Delta u_h\|_{s-1,\omega} \leq C(\alpha) \left(\|\Delta u\|_{s,\Omega_1^2} + \|u\|_{V_{s+1}(\Omega^2)} \right),$$

et

$$\|u_h + \alpha \partial_\nu u_h - \beta \partial_\tau^2 u_h\|_{s-1,\Gamma_v} \leq C(\alpha, \beta) \left(\|u + \alpha \partial_\nu u - \beta \partial_\tau^2 u\|_{s,\Gamma_v^2} + \|u\|_{V_{s+1}(\Omega^2)} \right).$$

On en déduit alors

$$\|u\|_{V_{s+2}(\Omega_1^1)} \leq C(\alpha, \beta) \left(\|\Delta u\|_{V_s(\Omega_1^2)} + \|u + \alpha \partial_\nu u - \beta \partial_\tau^2 u\|_{s,\Gamma_v^2} + \|u\|_{V_{s+1}(\Omega_1^2)} \right).$$

L'hypothèse de récurrence permet alors de conclure :

$$\|u\|_{V_{s+2}(\Omega_1^1)} \leq C(\alpha, \beta) \left(\|\Delta u\|_{s,\Omega_1^3} + \|u + \alpha \partial_\nu u - \beta \partial_\tau^2 u\|_{s,\Gamma_v^3} + \|u\|_{V_0(\Omega_1^3)} \right).$$

□

On pose maintenant

$$\mathcal{O}_i = e^{-2t}(\partial_t^2 + \partial_\theta^2), \quad \mathcal{O}_i^0 = (\partial_t^2 + \partial_\theta^2), \quad \mathcal{O}_{tr} = \mathcal{I} - \alpha e^{-t} \partial_\theta - \beta e^{-2t} \partial_t^2 \text{ et } \mathcal{O}_{tr}^0 = \mathcal{I} - \alpha \partial_\theta - \beta \partial_t^2.$$

Dans le domaine $]t_1, t_2[\times]0, \pi[$, $\mathcal{O}_i^0$ correspond au laplacien et, sur le bord $]t_1, t_2[\times \{0\}$, $-\partial_\theta$ à la dérivée normale et ∂_t^2 à la dérivée tangentielle seconde. Si l'on considère l'étude de régularité menée jusqu'à présent de façon désincarnée, on voit qu'on peut l'appliquer à ces opérateurs dans les coordonnées (t, θ) . Il s'agit d'en déduire des résultats de régularité dans ces coordonnées, puis de retourner aux variables cartésiennes.

À l'instar de ce qui a été posé précédemment, on note $R^1 \subset R^2 \subset R^3$ trois ouverts de $\mathbb{R} \times]0, \pi[$ (voir figure E.4) définis par

$$R^j = \{(t, \theta) \in]-j\eta + t_0, t_0 + j\eta[\times]0, \pi[\}$$

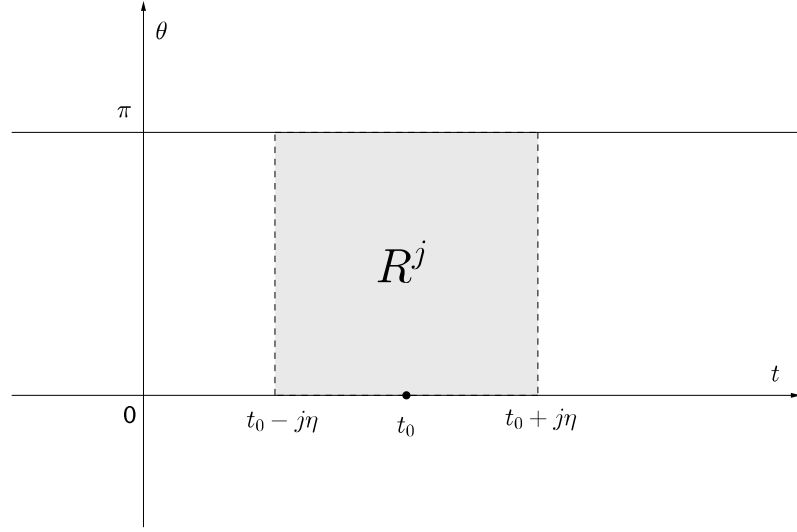
pour $t_0, \eta > 0$. On note aussi γ^j , le bord associé à R^j en $\theta = 0$ et $\tilde{u}$ la fonction u dans les coordonnées (t, θ) .

Proposition E.5. *Il existe $\eta_0 \in]0, 1[$ tel que, pour tout $s \geq 0$ et tout $\eta < \eta_0$, on ait*

$$\|\tilde{u}\|_{V_{s+2}(R^1)} \leq C \left(\|\mathcal{O}_i \tilde{u}\|_{s,R^3} + \|\mathcal{O}_{tr} \tilde{u}\|_{s+\frac{1}{2},\gamma^3} + \|\tilde{u}\|_{V_0(R^3)} \right)$$

où C dépend de s et η_0 mais pas de t_0 .

Démonstration. Soit $\chi \in \mathcal{D}(R^3)$ radiale (toujours afin de commuter avec ∂_θ) telle que $\chi|_{R^1} = 1$ et $\chi|_{R^3 \setminus R^2} = 0$. Procédons par récurrence sur s .


 FIGURE E.4 – Domaine R^j (encore).

Cas $s = 0$: Appliquons la proposition E.4 à $\chi\tilde{u}$, on obtient

$$\|\chi\tilde{u}\|_{V_2(R^2)} \leq C \left(\|\mathcal{O}_i^0(\chi\tilde{u})\|_{0,R^3} + \|\mathcal{O}_{tr}^0(\chi\tilde{u})\|_{0,\gamma^3} + \|\chi\tilde{u}\|_{V_0(R^3)} \right).$$

Il s'agit de majorer chacune des normes du second membre ci-dessus.

Usant de la démonstration de la proposition du cas Robin, nous avons

$$\|\chi\tilde{u}\|_{V_0(R^3)} \leq \|\tilde{u}\|_{V_0(R^3)}$$

et

$$\|\mathcal{O}_i^0(\chi\tilde{u})\|_{0,R^3} \leq C \left(e^{4\eta} e^{2t_0} \|\mathcal{O}_i\tilde{u}\|_{0,R^3} + \|\tilde{u}\|_{1,R^3} \right).$$

Le changement concerne $\|\mathcal{O}_{tr}^0(\chi\tilde{u})\|_{0,\gamma^3}$. On a, de la même façon que dans la démonstration de la version Robin de cette proposition,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{O}_{tr}^0(\chi\tilde{u})\|_{0,\gamma^3} &= \|(\chi\tilde{u}) - \alpha\partial_\theta(\chi\tilde{u}) - \beta\partial_t^2(\chi\tilde{u})\|_{0,\gamma^3} \\ &= \|\mathcal{O}_{tr}\tilde{u} + \alpha\chi(e^{-t} - 1)\partial_\theta\tilde{u} + \beta[\chi(e^{-2t} - 1)\partial_t^2\tilde{u} - 2\partial_t\tilde{u}\partial_t\chi - \tilde{u}\partial_t^2\chi]\|_{0,\gamma^3} \\ &\leq C\|\mathcal{O}_{tr}\tilde{u}\|_{0,\gamma^3} + (e^{2\eta} - 1)\|\chi\tilde{u}\|_{2,R^3} + (e^{4\eta} - 1)\|\chi\partial_t^2\tilde{u}\|_{0,\gamma^3} + C\|\tilde{u}\|_{1,\gamma^3}. \end{aligned}$$

Pour η assez petit ($\eta < \eta_0$), les termes contenant la norme d'ordre 2 et la dérivée seconde sur γ_3 peuvent être déplacés du second au premier membre de l'inégalité et comme $\chi|_{R^3 \setminus R^2} = 0$, on a alors

$$\|\chi\tilde{u}\|_{V_2(R^2)} \leq C \left(e^{2t_0} \|\mathcal{O}_i\tilde{u}\|_{0,R^3} + \|\tilde{u}\|_{H_1(R^3)} + \|\mathcal{O}_{tr}\tilde{u}\|_{0,\gamma^3} + \|\tilde{u}\|_{V_0(R^3)} \right).$$

Puisque $\chi|_{R^1} = 1$, on en déduit — avec C indépendant de t_0 — que

$$\|\tilde{u}\|_{V_2(R^1)} \leq C \left(e^{2t_0} \|\mathcal{O}_i\tilde{u}\|_{0,R^3} + \|\tilde{u}\|_{H_1(R^3)} + \|\mathcal{O}_{tr}\tilde{u}\|_{0,\gamma^3} + \|\tilde{u}\|_{V_0(R^3)} \right).$$

Par combinaison des lemmes E.4 et E.5 on en déduit que

$$\|\tilde{u}\|_{V_2(R^1)} \leq C \left(e^{2t_0} \|\mathcal{O}_i \tilde{u}\|_{0,R^3} + \|\mathcal{O}_{tr} \tilde{u}\|_{0,\gamma^3} + \|\tilde{u}\|_{V_0(R^3)} \right).$$

Cas $s \geq 1$: Supposons que l'on ait

$$\|\tilde{u}\|_{V_{s+1}(R^1)} \leq C \left(e^{2t_0} \|\mathcal{O}_i \tilde{u}\|_{V_{s-1}(R^3)} + \|\mathcal{O}_{tr} \tilde{u}\|_{s-1,\gamma^3} + \|\tilde{u}\|_{0,R^3} \right).$$

Le procédé décrit pour $s = 0$ et l'hypothèse de récurrence ci-dessus permettent d'en conclure le résultat :

$$\|\tilde{u}\|_{V_{s+2}(R^1)} \leq C \left(e^{2t_0} \|\mathcal{O}_i \tilde{u}\|_{s,R^3} + \|\mathcal{O}_{tr} \tilde{u}\|_{s,\gamma^3} + \|\tilde{u}\|_{V_0(R^1)} \right).$$

En utilisant l'injection de $H^{s+\frac{1}{2}}$ dans H^s on obtient

$$\|\tilde{u}\|_{V_{s+2}(R^1)} \leq C \left(\|\mathcal{O}_i \tilde{u}\|_{s,R^3} + \|\mathcal{O}_{tr} \tilde{u}\|_{s+\frac{1}{2},\gamma^3} + \|\tilde{u}\|_{V_0(R^3)} \right).$$

□

Proposition E.6. *Sous les hypothèses de la proposition précédente, on a pour tout $\delta \in \mathbb{R}$ et $s \in \mathbb{N}$*

$$\begin{aligned} \|e^{\delta t} \tilde{u}\|_{V_{s+2}(\llbracket 0, +\infty[\times]0, \pi])} &\leq C \left(\|e^{(\delta+2)t} \mathcal{O}_i \tilde{u}\|_{s,]-\eta_0, +\infty[\times]0, \pi[} + \|e^{\delta t} \mathcal{O}_{tr} \tilde{u}\|_{s+\frac{1}{2},]-\eta_0, +\infty[\times\{0\}} \right. \\ &\quad \left. + \|e^{\delta t} \tilde{u}\|_{V_0(\llbracket -\eta_0, +\infty[\times]0, \pi])} \right). \end{aligned}$$

Démonstration. Il suffit de multiplier les inégalités locales de la proposition précédente par $e^{\delta t_0}$ et de les sommer pour $t_0 \in \eta \mathbb{N}^*$ puis de remarquer que, par le lemme D.2 (et plus particulièrement sa démonstration), les normes $\|e^t v\|_{V_m}$ et $e^{t_0} \|v\|_{V_m}$ sur R^j sont équivalentes. □

Le même lemme D.2 permet de traduire la proposition précédente sous la forme d'espace à poids :

Théorème E.2. *Soit u la solution du problème (4.4), si le second membre vérifie pour $s \geq 2$ et $\gamma \in \mathbb{R}$,*

$$f \in \mathcal{K}_\gamma^{m-2}(\Omega_i^\infty \cap]t > -1[) \quad \text{et} \quad g \in \mathcal{K}_{\gamma-\frac{1}{2}}^{m-\frac{3}{2}}(\Gamma_v^\infty \cap]t > -1[),$$

et si, de plus $u \in \mathcal{K}_{\gamma-m}^0(\Omega_i^\infty \cap]t > -1[) \cap \mathcal{K}_{\gamma-m}^0(\Gamma_v^\infty \cap]t > -1[)$, alors

$$u \in \mathcal{K}_\gamma^m(\Omega_i^\infty \cap]t > 0[) \cap \mathcal{K}_\gamma^m(\Gamma_v^\infty \cap]t > 0[).$$

Bibliographie

- [1] M. V. Abdelkader and A. A. Moussa. Asymptotic study of thin elastic layer. *Applied Mathematical Sciences*, 7(108) :5385–5396, 2013. 13
- [2] H. Ammari and S. He. Effective impedance boundary conditions for an inhomogeneous thin layer on a curved metallic surface. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 46(5) :710–715, 1998. 13
- [3] H. Barucq, V. Mattesi, and S. Tordeux. The mellin transform. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01165453/>, 2015. 134, 143, 187
- [4] M. Bellieud, G. Geymonat, and F. Krasucki. Asymptotic analysis of a linear isotropic elastic composite reinforced by a thin layer of periodically distributed isotropic parallel stiff fibres. *Journal of Elasticity*, 122(1) :43–74, 2016. 13
- [5] M. Bonnet, A. Burel, M. Duruflé, and P. Joly. Effective transmission conditions for thin-layer transmission problems in elastodynamics. the case of a planar layer model. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 50(1) :43–75, 2016. 13
- [6] M. Bourlard, A. Maghnouji, S. Nicaise, and L. Paquet. Asymptotic expansion of the solution of a mixed dirichlet–ventcel problem with a small parameter. *Asymptotic Analysis*, 28(3, 4) :241–278, 2001. 21, 50, 124
- [7] H. Brezis, P. G. Ciarlet, and J. L. Lions. *Analyse fonctionnelle : théorie et applications*, volume 91. Dunod Paris, 1999. 181
- [8] C. D. Brown and R. J. Phillips. Crust-mantle decoupling by flexure of continental lithosphere. *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, 105(B6) :13221–13237, 2000. 13
- [9] F. Buret, M. Dauge, P. Dular, L. Krahenbuhl, V. Péron, R. Perrussel, C. Poignard, and D. Voyer. Eddy currents and corner singularities. *IEEE Transactions on Magnetics*, 48(2) :679–682, 2012. 178
- [10] M. Costabel and M. Dauge. Les problèmes à coin en 10 leçons. 187
- [11] M. Costabel and M. Dauge. A singularly mixed boundary value problem. *Communications in Partial Differential Equations*, 21(11-12) :1919–1949, 1996. 15, 17, 21, 23, 123, 129, 130
- [12] M. Costabel, M. Dauge, and Z. Yosibash. A quasi-dual function method for extracting edge stress intensity functions. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 35(5) :1177–1202, 2004. 115, 116
- [13] M. Dauge. *Elliptic boundary value problems on corner domains : smoothness and asymptotics of solutions*, volume 1341. Springer, 2006. 101, 108, 119, 152
- [14] M. Dauge, P. Dular, L. Krähenbühl, V. Péron, R. Perrussel, and C. Poignard. Corner asymptotics of the magnetic potential in the eddy-current model. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 37(13) :1924–1955, 2014. 13

- [15] G. Demengel and F. Demengel. *Espaces fonctionnels-Utilisation dans la résolution des équations aux dérivées partielles : Utilisation dans la résolution des équations aux dérivées partielles*. EDP Sciences, 2012. 186
- [16] B. Engquist and J. Nédélec. Effective boundary conditions for electromagnetic scattering in thin layers. *Rapport interne*, 278. 13, 101, 102
- [17] M. M. S. Fakhraabadi and N. Khani. Investigation of interphase effects on mechanical behaviors of carbon nanocone-based composites. *Mechanics & Industry*, 15(4) :287–292, 2014. 13
- [18] S. Gajjala, V. Ramachandran, and J. Somasekharan. Influence of interphase material and clay particle shape on the effective properties of epoxy-clay nanocomposites. *Composites Part B : Engineering*, 88 :11–18, 2016. 13
- [19] C. Geuzaine and J. Remacle. A three-dimensional finite element mesh generator with built-in preand post-processing facilities. *URL : gmsh. info*. 20
- [20] P. Grisvard. *Elliptic problems in nonsmooth domains*. SIAM, 2011. 24, 78, 82, 96, 101
- [21] F. Hecht. New development in freefem++. *Journal of numerical mathematics*, 20(3-4) :251–266, 2012. 20
- [22] A. Henrot and M. Pierre. *Variation et optimisation de formes : une analyse géométrique*, volume 48. Springer Science & Business Media, 2006. 182
- [23] V. A. Kondrat’ev. Boundary problems for elliptic equations in domains with conical or angular points. *Trans. Moscow Math. Soc.*, 16 :227–313, 1967. 129, 133, 152, 155
- [24] M. Lenoir, M. Vullierme-Ledard, and C. Hazard. Variational formulations for the determination of resonant states in scattering problems. *SIAM journal on mathematical analysis*, 23(3) :579–608, 1992. 66
- [25] J. Li, S. Rosencrans, X. Wang, and K. Zhang. Asymptotic analysis of a dirichlet problem for the heat equation on a coated body. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 137(5) :1711–1721, 2009. 13
- [26] G. M. Lieberman. Local estimates for subsolutions and supersolutions of oblique derivative problems for general second order elliptic equations. *Transactions of the American Mathematical Society*, 304(1) :343–353, 1987. 181
- [27] J.-L. Lions and E. Magenes. *Problèmes aux limites non homogènes et applications. Volume I*. Dunod, 1968. 78
- [28] Z. Mghazli. Regularity of an elliptic problem with mixed dirichlet-robin boundary conditions in a polygonal domain. *Calcolo*, 29(3) :241–267, 1992. 24, 78
- [29] S. Nicaise, H. Li, and A. Mazzucato. Regularity and a priori error analysis of a ventcel problem in polyhedral domains. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 40(5) :1625–1636, 2017. 78
- [30] N. Omer, Z. Yosibash, M. Costabel, and M. Dauge. Edge flux intensity functions in polyhedral domains and their extraction by a quasisidual function method. *International journal of fracture*, 129(2) :97–130, 2004. 115, 116, 117
- [31] R. Perrussel and C. Poignard. Asymptotic expansion of steady-state potential in a high contrast medium with a thin resistive layer. *Applied Mathematics and Computation*, 221 :48–65, 2013. 13
- [32] O. Polyansky, S. Korobeynikov, V. Sverdlova, A. Babichev, and V. Reverdatto. The influence of crustal rheology on plate subduction based on numerical modeling results. In *Doklady Earth Sciences*, volume 430, pages 158–162. Springer, 2010. 13

- [33] S. Rempel. Corner singularity for transmission problems in three dimensions. *Integral Equations and Operator Theory*, 12(6) :835–854, 1989. 101
- [34] G. Vial. *Analyse multi-échelle et conditions aux limites approchées pour un problème avec couche mince dans un domaine à coin*. PhD thesis, 2003. 15, 16, 21, 61, 101, 118, 123, 124, 143, 156, 177, 197, 198, 199, 205
- [35] Z. Yosibash, N. Omer, M. Costabel, and M. Dauge. Edge stress intensity functions in polyhedral domains and their extraction by a quasidual function method. *International journal of fracture*, 136(1) :37–73, 2005. 115
- [36] H. Zhao and Z. Yao. Boundary conditions for the stokes fluid in a bounded domain with a thin layer. *Kinetic and related models*, 9(4) :797–812, 2016. 13