



**HAL**  
open science

# Étude et simulation d'un modèle stratigraphique advecto-diffusif non-linéaire avec frontières mobiles

Nicolas Peton

► **To cite this version:**

Nicolas Peton. Étude et simulation d'un modèle stratigraphique advecto-diffusif non-linéaire avec frontières mobiles. Analyse numérique [math.NA]. Université Paris Saclay, 2018. Français. NNT : . tel-01895388v1

**HAL Id: tel-01895388**

**<https://theses.hal.science/tel-01895388v1>**

Submitted on 15 Oct 2018 (v1), last revised 23 Nov 2018 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Étude et simulation d'un modèle stratigraphique advecto-diffusif non-linéaire avec frontières mobiles

Thèse de doctorat de l'Université Paris-Saclay  
préparée à IFP Energies nouvelles

Spécialité de doctorat : Mathématiques et Informatique

École doctorale n°580 (STIC)  
Sciences et technologies de l'information et de la communication

Thèse présentée et soutenue à Rueil-Malmaison, le 12 octobre 2018, par

**Nicolas PETON**

Composition du Jury :

<b>Mme Pauline LAFITTE-GODILLON</b> Professeur des universités, CentraleSupélec, MICS	Présidente
<b>Mme Jocelyne ERHEL</b> Directrice de recherche, Inria Rennes Bretagne Atlantique	Rapporteur
<b>M. Jacques SAINTE-MARIE</b> Directeur de recherche, CEREMA, Inria Centre de Paris	Rapporteur
<b>M. Boris ANDREIANOV</b> Professeur des universités, Université de Tours, LMPT	Examineur
<b>M. François JAMES</b> Professeur des universités, Université d'Orléans, MAPMO	Examineur
<b>M. Quang Huy TRAN</b> Ingénieur de recherche, HDR, IFP Energies nouvelles	Directeur de thèse
<b>M. Clément CANCÈS</b> Chargé de recherche, HDR, Inria Lille Nord Europe	Co-Directeur de thèse
<b>Mme Sylvie WOLF</b> Ingénieur de recherche, IFP Energies nouvelles	Co-encadrante
<b>M. Didier GRANJEON</b> Ingénieur de recherche, IFP Energies nouvelles	Invité



# Table des matières

<b>Notations</b>	<b>7</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>9</b>
1.1 Contexte général . . . . .	9
1.1.1 Bassins sédimentaires . . . . .	9
1.1.2 Modélisation stratigraphique . . . . .	10
1.1.3 Objectifs de la thèse . . . . .	12
1.2 État de l'art . . . . .	14
1.2.1 Transport sédimentaire . . . . .	14
1.2.2 Flux d'eau . . . . .	15
1.2.3 Modèles multilithologiques . . . . .	16
1.3 Démarche méthodologique . . . . .	16
1.3.1 Transport non-linéaire . . . . .	16
1.3.2 Couplage avec les flux d'eau . . . . .	16
1.3.3 Prise en compte de multiples lithologies . . . . .	17
1.4 Travaux présentés dans ce manuscrit . . . . .	17
<b>2 Analyse numérique de l'équation du <math>p</math>-Laplacien instationnaire</b>	<b>19</b>
2.1 Étude dans le cas 1D . . . . .	20
2.1.1 Présentation du modèle . . . . .	20
2.1.2 Schéma numérique Volumes Finis . . . . .	21
2.1.3 Condition CFL . . . . .	22
2.1.4 Résultats numériques . . . . .	23
2.2 Étude dans le cas 2D . . . . .	26
2.2.1 Présentation du modèle . . . . .	26
2.2.2 Construction du schéma numérique Volumes Finis . . . . .	26
2.2.3 Assemblage et résolution du système . . . . .	34
2.2.4 Propriétés du schéma numérique . . . . .	35
2.2.5 Condition CFL . . . . .	37
2.2.6 Résultats numériques . . . . .	38
2.3 Récapitulatif . . . . .	42
<b>3 Modèle monolithologique sous contrainte de taux d'érosion maximal</b>	<b>43</b>
3.1 Présentation du modèle . . . . .	44
3.1.1 Diffusion des sédiments . . . . .	45

3.1.2	Limitation de l'érosion . . . . .	46
3.1.3	Modèle complet . . . . .	46
3.2	Propriétés du modèle . . . . .	47
3.3	Schéma numérique Volumes Finis . . . . .	49
3.3.1	Discrétisation de l'équation de conservation des sédiments . . . . .	49
3.3.2	Discrétisation de l'équation de complémentarité . . . . .	50
3.3.3	Conditions aux limites et données initiales . . . . .	51
3.4	Assemblage et résolution du système . . . . .	52
3.5	Propriétés du schéma numérique . . . . .	53
3.6	Résultats numériques . . . . .	58
3.6.1	Onde progressive . . . . .	58
3.6.2	Érosion d'une zone montagneuse . . . . .	61
3.7	Récapitulatif . . . . .	65
<b>4</b>	<b>Modélisation du couplage entre flux d'eau et transport des sédiments</b>	<b>67</b>
4.1	Algorithmes discrets . . . . .	68
4.2	Couplage sans transport gravitaire . . . . .	69
4.2.1	Dérivation d'un premier modèle . . . . .	69
4.2.2	Analyse théorique . . . . .	72
4.3	Couplage avec transport gravitaire . . . . .	75
4.3.1	Une première tentative . . . . .	76
4.3.2	Une hypothèse supplémentaire . . . . .	76
4.3.3	Analyse de stabilité non-linéaire . . . . .	78
4.4	Récapitulatif . . . . .	89
<b>5</b>	<b>Modèle monolithologique sous contrainte de taux d'érosion maximal avec prise en compte des flux d'eau</b>	<b>91</b>
5.1	Présentation du modèle . . . . .	92
5.1.1	Limitation de l'érosion . . . . .	92
5.1.2	Modèle complet . . . . .	93
5.2	Propriétés du modèle . . . . .	94
5.3	Schéma numérique Volumes Finis . . . . .	96
5.3.1	Discrétisation de l'équation de conservation de l'eau . . . . .	97
5.3.2	Discrétisation de l'équation de conservation des sédiments . . . . .	98
5.3.3	Discrétisation de l'équation de complémentarité . . . . .	99
5.3.4	Conditions aux limites et données initiales . . . . .	99
5.4	Assemblage et résolution du système . . . . .	100
5.5	Propriétés du schéma numérique . . . . .	102
5.6	Résultats numériques . . . . .	107
5.6.1	Formation d'un delta . . . . .	107
5.6.2	Formation de lacs . . . . .	109
5.7	Récapitulatif . . . . .	112

<b>6</b>	<b>Modèle multilithologique sous contrainte de taux d'érosion maximal avec prise en compte des flux d'eau</b>	<b>113</b>
6.1	Présentation du modèle . . . . .	114
6.1.1	Définition des flux de lithologies et couplage avec le transport de l'eau	115
6.1.2	Limitation de l'érosion . . . . .	117
6.1.3	Modèle complet . . . . .	117
6.2	Propriétés du modèle . . . . .	118
6.3	Schéma numérique Volumes Finis . . . . .	121
6.3.1	Discretisation de l'équation de conservation de l'eau . . . . .	121
6.3.2	Gestion des colonnes de sédiments . . . . .	121
6.3.3	Discretisation des équations de conservation des lithologies . . . . .	122
6.3.4	Discretisation de l'équation de complémentarité . . . . .	124
6.3.5	Discretisation de l'équation de fermeture . . . . .	125
6.3.6	Conditions aux limites et données initiales . . . . .	126
6.4	Assemblage et résolution du système . . . . .	128
6.5	Propriétés du schéma numérique . . . . .	131
6.6	Résultats numériques . . . . .	140
6.6.1	Influence de la bathymétrie . . . . .	140
6.6.2	Évolution d'un estuaire . . . . .	145
6.7	Récapitulatif . . . . .	150
<b>7</b>	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>151</b>
7.1	Bilan des résultats obtenus . . . . .	151
7.1.1	Transport non-linéaire des sédiments . . . . .	151
7.1.2	Couplage avec les flux d'eau . . . . .	151
7.1.3	Transposition au cas multilithologique . . . . .	152
7.2	Extensions possibles . . . . .	152
7.2.1	Améliorations de la physique . . . . .	152
7.2.2	Améliorations numériques . . . . .	153
	<b>Annexes</b>	<b>155</b>
<b>A</b>	<b>Solutions élémentaires de l'équation du <math>p</math>-Laplacien instationnaire</b>	<b>155</b>
A.1	Diffusion lente : $p > 2$ . . . . .	156
A.1.1	Cas 1D . . . . .	156
A.1.2	Cas 2D . . . . .	157
A.2	Diffusion rapide : $2d/(d + 1) < p < 2$ . . . . .	157
A.2.1	Cas 1D . . . . .	158
A.2.2	Cas 2D . . . . .	158
<b>B</b>	<b>Solution particulière pour le modèle monolithologique sans contrainte sur le taux d'érosion</b>	<b>161</b>
B.1	Configuration . . . . .	161
B.2	Calcul de la solution en domaine marin . . . . .	162
B.3	Calcul de la solution en domaine continental . . . . .	163
B.4	Solution complète . . . . .	164

<b>C</b>	<b>Application de la méthode de Newton sur un cas simplifié</b>	<b>167</b>
C.1	Présentation du problème . . . . .	167
C.2	Existence et unicité d'une solution . . . . .	168
C.3	Application de la méthode de Newton . . . . .	170
<b>D</b>	<b>Compléments sur le degré topologique</b>	<b>173</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>175</b>

# Notations

$\tilde{h}$	Hauteur d'eau
$h$	Hauteur de sédiments
$H_m$	Niveau de la mer
$E$	Taux d'érosion maximal
$\lambda$	Limiteur de flux
$\ell$	Lithologie
$L$	Nombre de lithologies
$\zeta$	Cote dans la direction $z$
$\mathfrak{F}_\ell$	Fraction en lithologie $\ell$
$c_\ell$	Concentration en lithologie $\ell$ dans la couche de sédiments
$c_\ell^s$	Concentration de surface en lithologie $\ell$
$T$	Temps
$p$	Exposant du $p$ -Laplacien
$d$	Dimension d'espace
$\mathcal{E}$	Énergie
$\tilde{K}$	Coefficient de diffusion de l'eau
$K_{g,m}$	Coefficient de diffusion gravitaire en domaine marin
$K_{g,c}$	Coefficient de diffusion gravitaire domaine continental
$K_m$	Coefficient de diffusion en domaine marin
$K_c$	Coefficient de diffusion en domaine continental
$K_{g,\ell,m}$	Coefficient de diffusion gravitaire de la lithologie $\ell$ en domaine marin
$K_{g,\ell,c}$	Coefficient de diffusion gravitaire de la lithologie $\ell$ en domaine continental
$K_{\ell,m}$	Coefficient de diffusion de la lithologie $\ell$ en domaine marin
$K_{\ell,c}$	Coefficient de diffusion de la lithologie $\ell$ en domaine continental
$\psi_g$	Primitive du coefficient de diffusion $K_g$
$\psi$	Primitive du coefficient de diffusion $K$
$\psi_{g,\ell}$	Primitive du coefficient de diffusion $K_{g,\ell}$
$\psi_\ell$	Primitive du coefficient de diffusion $K_\ell$
$\tilde{\mathbf{F}}$	Flux d'eau
$\mathbf{F}$	Flux de sédiments
$\mathbf{F}_\ell$	Flux de lithologie $\ell$
$\langle F \rangle$	Flux non limité sortant total de sédiments
$\rangle \lambda F \langle$	Flux limité entrant total de sédiments
$\tilde{\phi}$	Flux d'eau au bord du domaine
$\phi$	Flux de sédiments au bord du domaine
$\phi_\ell$	Flux de lithologie $\ell$ au bord du domaine



## Notations

---

$\Omega$	Domaine de calcul (rectangulaire)
$\partial\Omega$	Frontière du domaine de calcul
$\Gamma_l$	Bord de gauche du domaine de calcul
$\Gamma_r$	Bord de droite du domaine de calcul
$\Gamma_t$	Bord du haut du domaine de calcul
$\Gamma_b$	Bord du bas du domaine de calcul
$\mathbf{n}$	Normale unitaire sortante
$\Delta x$	Pas d'espace dans la direction $x$
$\Delta y$	Pas d'espace dans la direction $y$
$\Delta t$	Pas de temps
$N_x$	Nombre de mailles dans la direction $x$
$N_y$	Nombre de mailles dans la direction $y$
$\mathcal{M}_{i,j}$	Maille $i, j$
$\bar{B}$	Approximation de la norme du gradient de la hauteur de sédiments au carré
$\bar{\bar{B}}$	Approximation de la norme du gradient de la hauteur totale au carré

# Chapitre 1

## Introduction

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Contexte général</b>	<b>9</b>
1.1.1	Bassins sédimentaires	9
1.1.2	Modélisation stratigraphique	10
1.1.3	Objectifs de la thèse	12
<b>1.2</b>	<b>État de l'art</b>	<b>14</b>
1.2.1	Transport sédimentaire	14
1.2.2	Flux d'eau	15
1.2.3	Modèles multilithologiques	16
<b>1.3</b>	<b>Démarche méthodologique</b>	<b>16</b>
1.3.1	Transport non-linéaire	16
1.3.2	Couplage avec les flux d'eau	16
1.3.3	Prise en compte de multiples lithologies	17
<b>1.4</b>	<b>Travaux présentés dans ce manuscrit</b>	<b>17</b>

---

### 1.1 Contexte général

La connaissance de la composition sédimentaire du sous-sol est un élément essentiel, qui a aujourd'hui des applications dans de nombreux domaines : le stockage géologique du CO<sub>2</sub>, la gestion des ressources en eaux ou encore l'exploitation de l'énergie géothermique. Bien que paraissant très éloignés, chacun de ces domaines a besoin d'une description détaillée de la géométrie des couches sédimentaires, et en particulier de leur nature (teneur en sable, argile, carbonate...), afin de comprendre par exemple la circulation souterraine de l'eau et son impact sur la chaleur du sous-sol. Retracer l'histoire géologique des bassins sédimentaires, et ainsi mieux caractériser leur structure, est donc un enjeu primordial afin de localiser puis d'entamer l'étude des géoressources énergétiques.

#### 1.1.1 Bassins sédimentaires

Les bassins sédimentaires sont des zones d'accumulation de sédiments, situés généralement en domaine marin, mais pouvant également se rencontrer en domaine continental.

L'étendue de ces zones peut aller jusqu'à plusieurs milliers de kilomètres carrés, comme illustré sur la figure 1.1. Leur géométrie généralement sous forme de « cuvette » permet aux sédiments provenant de diverses origines de s'y accumuler. Au fil du temps, ces particules de matière se déposent alors sous forme de couches, encore appelées *strates*, dont la nature et la composition peuvent varier selon les conditions environnementales.

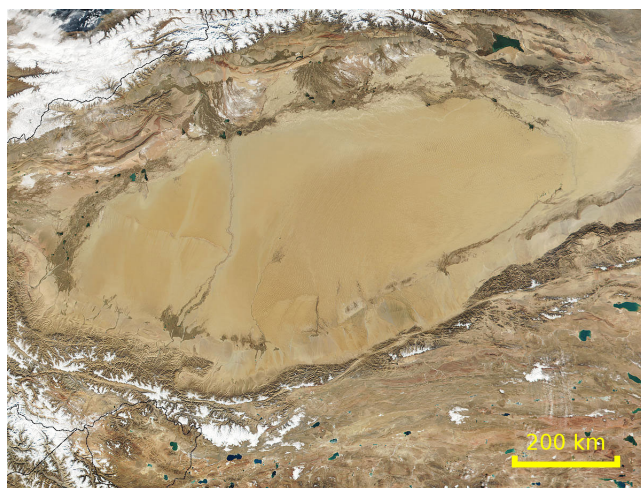


FIGURE 1.1 – Exemple de bassin sédimentaire : le désert du Taklamakan (Chine).

L'évolution des bassins sédimentaires fait appel à des processus physiques nombreux et complexes, dépendant principalement de trois paramètres. Le premier concerne l'accommodation, c'est-à-dire l'espace disponible dans le bassin pour la sédimentation. Il s'agit d'une conséquence directe des mouvements tectoniques, de la subsidence (correspondant à l'affaissement de la croûte terrestre), ainsi que des variations du niveau de la mer. On trouve ensuite les apports en sédiments. Ces derniers peuvent provenir de l'érosion de montagnes avoisinantes, du charriage par un cours d'eau, ou encore être produits in situ (carbonates, récifs coralliens). Enfin vient le transport des sédiments. La gravité joue ici un rôle essentiel, mais suivant le milieu ambiant, l'impact des fleuves et des courants marins doit également être pris en considération.

Tous ces processus s'étalent néanmoins sur de grandes échelles de temps, de l'ordre du million d'années, si bien que la simulation numérique est un outil indispensable afin d'appréhender le développement de la composition structurelle du sous-sol.

### 1.1.2 Modélisation stratigraphique

Afin de reproduire l'évolution des bassins sédimentaires, les géologues font appel à la simulation stratigraphique, dont le principe est schématisé sur la figure 1.2. Une étape préalable est l'acquisition de données de terrain, dont le but est d'obtenir une première estimation de la structure du sous-sol. La description des hétérogénéités sédimentaires repose généralement sur des données de puits ou de sismiques, leur interprétation et extrapolation. Le premier type de données, encore appelées *diagraphies*, sont des informations récupérées lors de forages, et permet d'identifier les types de sédiments présents ainsi que leurs propriétés physiques. Ce sont des données précises, mais très localisées, et dont le coût

d'obtention est généralement élevé. D'autre part, les données dites *sismiques* sont obtenues en émettant des ondes à la surface du sol, puis en enregistrant leurs réflexions lors de leur passage au travers des différents milieux. Cette méthode permet d'acquérir une estimation globale de la structure du bassin, mais qui se trouve être peu précise et peut être sujette à des interprétations variables.

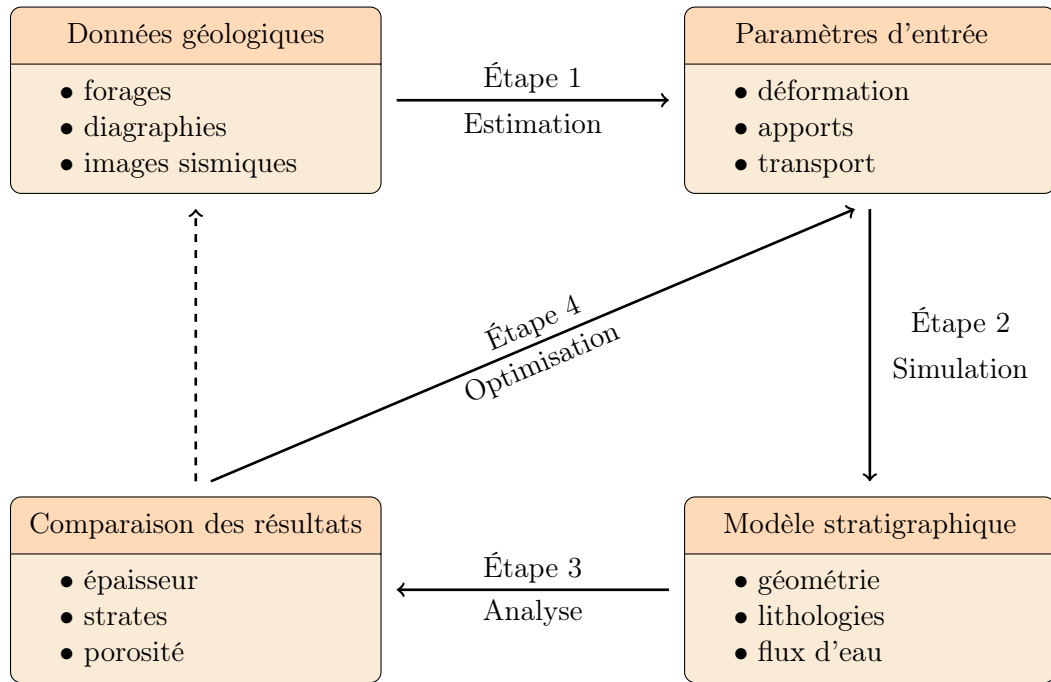


FIGURE 1.2 – Principe de la simulation stratigraphique.

Dans les configurations complexes ou mal connues, soit par manque de données, soit par une trop faible résolution de ces données, les méthodes classiques d'interpolation atteignent leur limite et il est nécessaire d'utiliser d'autres approches, telles que la modélisation orientée processus. Dans ce cadre, la problématique est de reconstituer l'évolution d'un bassin sédimentaire au cours du temps pour mieux caractériser la géométrie et la nature des couches sédimentaires. Les modèles stratigraphiques sont généralement divisés en deux catégories : les modèles géostatistiques et les modèles déterministes. La première famille de modèles ne s'intéresse qu'à l'état actuel du bassin sédimentaire, et utilise des lois statistiques pour interpoler les données de puits et de sismiques. Elle est généralement utilisée sur des zones d'étude réduites, de quelques kilomètres à dizaines de kilomètres, afin de proposer différentes simulations stochastiques de la répartition des faciès, toutes équiprobables et toutes calées aux données. Ces modèles nécessitent cependant beaucoup d'informations pour obtenir des images réalistes du sous-sol. La seconde famille de modèles propose une alternative dans le cas où les données sont disparates. Elle s'intéresse à l'évolution au cours des temps géologiques du bassin sédimentaire et repose sur la modélisation des processus géologiques.

Le cadre d'étude de cette thèse se situe dans la modélisation déterministe, et se focalise sur le transport des sédiments ainsi que sur l'écoulement de l'eau en surface. À nouveau,

il est possible de différencier deux sous-familles. On trouve en premier lieu les modèles particuliers, abordés dans les travaux de Harbaugh et al. [58, 67], qui se basent sur les équations de Navier-Stokes [21] et de lois physiques gouvernant le transport des sédiments, dans le but de reproduire le déplacement de chaque particule. Cette première catégorie permet de simuler en détail l'évolution d'une rivière ou d'un delta sur de courtes durées, typiquement quelques siècles à millénaires. Ils sont cependant difficilement utilisables sur de très longues durées, de l'ordre du million d'années, compte-tenu de la nature chaotique des processus physiques en jeu. La seconde catégorie regroupe les modèles diffusifs. Ces méthodes reposent sur une équation de diffusion afin de modéliser le transport des sédiments sur de très longues durées (quelques dizaines à centaines de milliers d'années), comme par exemple dans les travaux de Flemings et Jordan [36, 54]. C'est dans cette dernière configuration que s'inscrit le cadre de cette thèse, qui souhaite contribuer à l'étude de l'évolution des bassins sédimentaires sur des temps géologiques.

Une fois la simulation numérique effectuée vient l'étape de la validation. En particulier, l'objectif est de faire coïncider les résultats obtenus avec les observations acquises en premier lieu, comme par exemple l'épaisseur des strates ainsi que leur composition. Dans le but d'obtenir des résultats plus satisfaisants, il peut être nécessaire d'effectuer un calage avec les données de terrain. Cela implique d'effectuer de nouvelles simulations numériques, avec des paramètres en entrées différents. Faire appel à un modèle stratigraphique réaliste et efficace est alors indispensable, d'autant plus que le nombre de simulations à effectuer est important.

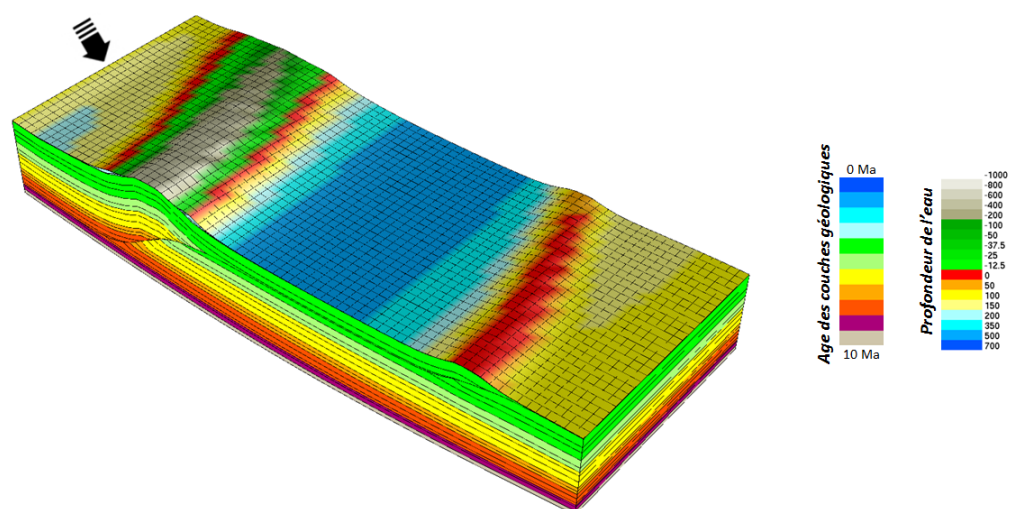
Dans ce but, le calculateur Dionisos développé depuis 1992 à IFP Energies nouvelles permet de simuler l'évolution de bassins sédimentaires sur de grandes échelles de temps (de l'ordre du million d'années) et d'espace (de l'ordre de la centaine de kilomètres). Le modèle physique sous-jacent s'appuie sur de nombreux processus, tels que la déformation du bassin, les apports en sédiments, ou encore la limitation de l'érosion.

### 1.1.3 Objectifs de la thèse

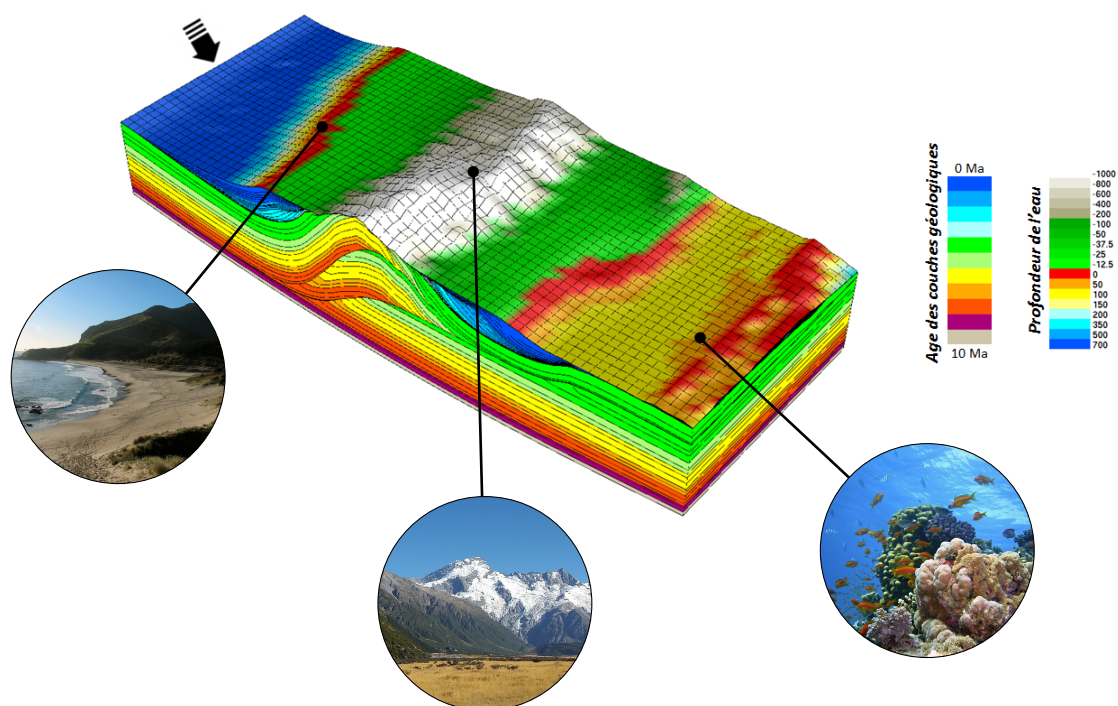
Ces dernières années, le modèle physique de Dionisos a continué son évolution et de nouveaux processus physiques ont dû être pris en compte. Cependant, les méthodes numériques n'ayant pas évolué en conséquence, des difficultés de résolution ont été observées dans certaines configurations. L'objectif de la thèse est alors de remédier à ce problème en développant des schémas numériques adéquats, afin de pouvoir intégrer ces nouveaux aspects physiques. Plus précisément, les processus sur lesquels nous allons nous focaliser sont les suivants :

1. le transport des sédiments par un flux non-linéaire par rapport à la pente du sol ;
2. les flux d'eau provenant des fleuves et des rivières ;
3. la prise en compte de différents types de sédiments.

Aujourd'hui dans Dionisos, une première version de transport non-linéaire des sédiments est employée [48], mais manque de robustesse. Le passage au non-linéaire est motivé par la volonté d'obtenir un plus grand réalisme au niveau des résultats. Notamment, les géologues souhaitent reproduire des « points d'arrêt » observés dans les systèmes naturels, ce qui n'est possible que si le mécanisme de diffusion qui sous-tend ce transport a lieu à vitesse finie, ce qui implique le caractère non-linéaire.



(a) Configuration il y a 4 millions d'années.



(b) Configuration actuelle.

FIGURE 1.3 – Exemple de simulation numérique mettant en jeu des reliefs variés : zones montagneuses, littorales, récifs coralliens.

Concernant le second point, l'évolution complète d'un bassin sédimentaire intégrant naturellement des écoulements d'eau, il est nécessaire de différencier les domaines fluviaux et continentaux. Ce processus peut entre autres causer le charriage de sédiments ainsi que la formation de lacs. Dans le cas présent, le but est de proposer une alternative à la méthode existante, qui soit fondée sur des EDP rigoureuses au niveau continu plutôt que sur un algorithme heuristique au niveau discret. En particulier, on recherche un couplage avec le transport des sédiments permettant de modéliser de manière plus précise l'interaction entre ces deux phénomènes.

Le dernier aspect se rattache à la considération de différents types de sédiments, ou *lithologies*. Il s'agit également d'un enjeu capital étant donné que les bassins sédimentaires font en général intervenir des sédiments de natures différentes. Il sera alors question de coupler cette notion aux processus précédemment définis. Par ce biais, l'objectif est de pouvoir analyser la structure du sous-sol en visualisant la formation des strates au cours du temps.

La modélisation physique du couplage entre tous ces éléments est cruciale afin de reproduire avec fidélité l'évolution de bassins sédimentaires. Par ailleurs, elle doit être accompagnée d'une analyse mathématique suffisamment fine afin de s'assurer du bon comportement tout aussi bien théorique que numérique des méthodes développées. Ces travaux permettront ainsi d'enrichir les méthodes existantes dans le calculateur, qui sera par la suite intégré sous la plateforme Arcane [50] afin d'offrir, entre autres, une version parallèle.

## 1.2 État de l'art

### 1.2.1 Transport sédimentaire

Historiquement, deux thèses à IFP Energies nouvelles ont permis de lancer Dionisos sur la bonne trajectoire. La première, celle de Granjeon en 1996 [47] (voir également [49]), s'est intéressée à la modélisation de processus sédimentaires sur de grandes échelles de temps et d'espace. En particulier, l'évolution de la hauteur de sédiments, notée par  $h$ , était régie par l'équation de conservation

$$\partial_t h + \operatorname{div}(\mathbf{F}) = 0. \quad (1.1)$$

Le flux de sédiments correspondant  $\mathbf{F}$  était considéré linéaire par rapport à la pente du sol, c'est-à-dire de la forme  $\mathbf{F} = -K\nabla h$ , où  $K$  représente un coefficient de diffusion dépendant du type de sédiment et du milieu ambiant. Par ailleurs, un taux d'érosion maximal  $E > 0$  a été introduit afin de modéliser la disponibilité limitée en sédiments. Cette contrainte a pour but de garantir la relation  $\partial_t h \geq -E$ . À cette fin, le flux  $\mathbf{F}$  est tronqué lorsque la diffusion « naturelle » s'avère trop importante. Numériquement, cette limitation a été prise en compte de manière astucieuse à travers un algorithme discret, couplée à un schéma explicite pour la résolution de l'équation de conservation. Par ailleurs, l'extension au cas de plusieurs lithologies a été développée en suivant l'exemple de Rivenæs [62].

Par la suite, lors de la thèse de Gervais en 2004 [42] (voir également [33, 43, 44]), la méthode de limitation de l'érosion a pu être interprétée au niveau continu. La première étape a consisté à introduire une nouvelle variable  $\lambda \in [0, 1]$ , qui sera plus tard appelée *limiteur de flux*. Cette inconnue a été intégrée à l'équation (1.1) dans le but de faire

apparaître le flux limité  $\lambda \mathbf{F}$  dans l'équation de bilan :

$$\partial_t h + \operatorname{div}(\lambda \mathbf{F}) = 0. \quad (1.2)$$

Cette dernière fut ensuite couplée à la condition de complémentarité

$$1 - \lambda \geq 0, \quad (1.3a)$$

$$\partial_t h + E \geq 0, \quad (1.3b)$$

$$(\partial_t h + E)(1 - \lambda) = 0, \quad (1.3c)$$

rassemblant les caractéristiques de  $\lambda$  et  $E$ . Nous reviendrons plus en détails sur cette formulation dans le chapitre 3. Une autre avancée importante fut l'élaboration d'un schéma numérique Volumes Finis implicite pour le système couplé (1.2)–(1.3). Cela a permis d'accélérer les temps de calcul par rapport à la version antérieure, via l'utilisation de pas de temps plus élevés. Par ailleurs, la résolution faisait intervenir une méthode de *variable-switching* (voir par exemple les travaux de Eymard et al. [34], section 7.3.2) pour différencier les zones étant ou non sous contrainte. D'autre part, des études théoriques dans le cas sans contrainte effectuées par Eymard et al. ont montré l'existence et l'unicité d'une solution faible [30], ainsi que la convergence d'un schéma numérique [31].

En parallèle, dans les années 2000 ont été menées des études dans le cas monolithologique en tenant compte de la contrainte sur le taux d'érosion. On pourra se référer pour cela aux travaux de Gagneux et al. [5, 6, 7, 40, 41], ainsi que ceux de Eymard et Gallouët [29]. Ces avancées ont permis d'appréhender le problème sous d'autres angles, qui sont certes riches d'enseignements, mais qui ne seront pas primordiaux dans l'optique de cette thèse.

### 1.2.2 Flux d'eau

Actuellement dans Dionisos, l'évolution de la quantité d'eau est calculée en fonction de la pente du sol au moyen d'un algorithme discret de type MFD (Multiple Flow Direction). De nombreuses variantes existent, dont certaines sont présentées par Freeman [39], Holmgren [53], Quinn et al. [60], et Tarboton [66]. Cette méthode souffre néanmoins de plusieurs défauts. Du côté numérique, en plus de ne pas être parallélisable, on observe un important effet d'orientation de maillage pouvant conduire à des résultats très variables. D'autre part, il est difficile de pouvoir y apporter d'éventuelles modifications sur le comportement de l'eau, contrairement au cadre continu où ce type d'opérations serait plus accessible.

Dernièrement, plusieurs thèses ont eu pour objectif de coupler le transport des sédiments avec les effets de l'eau au niveau continu, afin de simuler par exemple le ruissellement d'eau de pluie sur des surfaces agricoles ou encore l'érosion des sols : Delestre [23], Lê [57] et Ung [68]. Ces études portent cependant sur des échelles de temps courtes (de l'ordre de l'heure à la journée), tandis que nous nous intéressons ici à des temps de simulations très longs (de l'ordre du million d'années). La méthode de modélisation devra par conséquent être adaptée. Dans cette configuration, Birnir et al. [17] ont proposé une approche afin de modéliser le couplage entre ces deux processus.



### 1.2.3 Modèles multilithologiques

Dans la littérature, on peut distinguer deux types de modèles diffusifs permettant de tenir compte de plusieurs lithologies. Le premier s'appuie sur une méthode de tri parfait, employée par exemple par Paola et al. [51, 59]. Le principe consiste à déposer chaque type de sédiments indépendamment, et ce par ordre décroissant de la taille des grains. En d'autres termes, les sédiments les plus grossiers sont déposés dans un premier temps alors que le dépôt des sédiments fins est effectué en dernier. Cette méthode n'autorise donc pas le mélange des lithologies.

La deuxième approche est basée sur les travaux de Rivenæs [62]. Un coefficient de diffusion est associé à chaque lithologie afin de modéliser la transportabilité de celle-ci. Par ailleurs, la présence de chaque type de sédiments dans le bassin est caractérisée à travers une notion de concentration, qui permet ainsi leur mélange. Cette méthodologie a été reprise par Blum et al. [18] ou encore par Quiquerez et al. [61].

## 1.3 Démarche méthodologique

### 1.3.1 Transport non-linéaire

Le premier aspect à prendre en compte consiste à modifier le transport des sédiments afin de le rendre non-linéaire. Pour ce faire, un  $p$ -Laplacien sera introduit dans la définition du flux de matière, et ainsi obtenir la nouvelle formule  $\mathbf{F} = -\lambda K |\nabla h|^{p-2} \nabla h$ . Dans le cas où  $p > 2$ , il est connu que la vitesse de propagation est finie, contrairement au cas linéaire classique où  $p = 2$  [55]. Dans un travail préliminaire antérieur [27], Dumas s'est livré à une analyse en 1D du transport non-linéaire couplé à une contrainte sur le taux d'érosion. Les résultats obtenus ont été encourageants et motivent ainsi la poursuite des recherches dans cette voie. L'extension au cas 2D nécessite cependant la construction d'un schéma numérique adéquat, dans notre cas de type Volumes Finis. La principale difficulté réside dans l'approximation du terme  $|\nabla h|^{p-2}$  à chaque arête du maillage. On se basera pour cela sur une méthode développée par Andreianov et al. [3] pour la discrétisation du  $p$ -Laplacien en maillage cartésien.

### 1.3.2 Couplage avec les flux d'eau

Malgré de nombreuses tentatives, il n'a pas été possible d'interpréter l'algorithme MFD en termes d'EDP au niveau continu, contrairement au cas de la limitation du flux de sédiments où cette approche avait été réussie. Dans ces conditions, nous préconisons l'abandon de cet algorithme discret en faveur d'un modèle d'EDP établi à partir de la mécanique des fluides.

On se référera pour cela aux travaux de Birnir et al. [17] proposant une modélisation en temps long du transport couplé eau/sédiments. Plus précisément, on se basera sur les équations de Saint-Venant [11] ainsi que sur diverses lois empiriques liées au transport sédimentaire. Cette méthode permettra alors d'obtenir deux lois de conservations couplées modélisant l'évolution de la hauteur d'eau et la hauteur de sédiments. De plus, les flux de matière auront une forme dérivée du  $p$ -Laplacien, qu'il sera alors possible de discrétiser de manière adéquate grâce à l'étude effectuée préalablement.

### 1.3.3 Prise en compte de multiples lithologies

L'aspect multilithologique sera intégré en suivant le même esprit que celui de Gervais [42]. On définira pour cela deux notions de concentrations en chaque lithologie. La première, que nous appellerons *concentration de surface*, sera définie uniquement à la surface du bassin sédimentaire. Son rôle se résume à représenter le transport de chaque lithologie, qui a lieu uniquement en surface. La seconde sera quant à elle définie à l'intérieur du bassin et servira à visualiser la formation des différentes strates au cours du temps. Outre la nécessité d'élaborer un nouveau schéma numérique, la structure interne du bassin devra être discrétisée et gardée en mémoire à chaque pas de temps. Il s'agit là d'un élément essentiel afin de déterminer, par exemple, quel type de sédiment doit être transporté lors d'une phase d'érosion.

## 1.4 Travaux présentés dans ce manuscrit

La structure du manuscrit peut être globalement divisée en deux parties. Les chapitres 2 et 3 s'intéresseront à l'élaboration de modèles avec sédiments seuls. Les chapitres 4, 5 et 6 se pencheront ensuite sur la modélisation du couplage entre les sédiments et les effets de l'eau. Plus précisément, chaque partie est détaillée comme suit.

### Chapitre 2

Nous commencerons dans le chapitre 2 par étudier l'équation du  $p$ -Laplacien instationnaire

$$\partial_t h + \operatorname{div}(-|\nabla h|^{p-2} \nabla h) = 0, \quad p > 1.$$

En effet, il est judicieux de se familiariser dans un premier temps avec ce problème plus simple, dans la mesure où les modèles de transport que nous aborderons dans la suite découlent directement de cette équation. Nous nous intéresserons essentiellement à l'élaboration d'un schéma numérique, et en particulier à trouver une discrétisation convenable du terme  $|\nabla h|^{p-2}$ . Pour cela, nous nous inspirerons des travaux de Andreianov et al. [3]. Nous verrons également que l'équation du  $p$ -Laplacien instationnaire a un comportement différent suivant si  $p > 2$  ou  $p < 2$ . Plus précisément, dans le cas où  $p < 2$ , l'équation devient singulière et un traitement particulier doit être alors appliqué. Nous évoquerons par ailleurs l'effort supplémentaire qu'implique le traitement des conditions aux limites. Tous ces aspects seront illustrés sur différents cas tests en une et deux dimensions, avec comme point de comparaison la solution élémentaire dont le calcul est détaillé en annexe A.

### Chapitre 3

Avec les acquis du chapitre 2, nous serons en mesure d'aborder, dans le chapitre 3, un premier modèle stratigraphique. Ce dernier s'intéressera au transport des sédiments, composés pour le moment d'une lithologie, par un flux non-linéaire par rapport à la pente du sol. Cette non-linéarité sera modélisée via l'utilisation d'un  $p$ -Laplacien. Un coefficient

de diffusion gravitaire permettra également de différencier les domaines marins et continentaux. Ce flux non-linéaire sera par ailleurs soumis à une contrainte sur le taux d'érosion, laquelle s'exprime naturellement par le biais d'une condition de complémentarité. Le schéma numérique Volumes Finis que nous construirons pour la discrétisation généralise de manière immédiate celui étudié au chapitre 2. Pour conclure, ce modèle sera illustré à travers différents cas tests.

### Chapitre 4

Ensuite, à travers le chapitre 4 nous entreprendrons une réflexion sur l'incorporation des effets de l'eau dans le modèle de transport des sédiments. Cette sophistication permettra de prendre en compte l'impact des fleuves ainsi que des lacs. Après quelques brefs rappels sur les algorithmes discrets de type MFD et leurs inconvénients, nous relaterons deux tentatives de couplage, avec une analyse mathématique plus ou moins complète pour chaque modèle proposé. Celui que nous retiendrons in fine est basé sur les équations de Saint-Venant et sur diverses approximations empiriques. Une analyse de stabilité non-linéaire partielle lui sera consacrée, laquelle laisse entrevoir une bonne stabilité structurelle et espérer un bon comportement au niveau numérique.

### Chapitre 5

Le modèle stratigraphique retenu dans le chapitre 4 sera étudié plus en détails tout au long du chapitre 5. Nous commencerons par y intégrer une contrainte sur le taux d'érosion, qui sera à nouveau formulée par le biais d'une condition de complémentarité. Nous établirons ensuite un schéma numérique Volumes Finis en se conformant à la même philosophie qu'aux chapitres 2 et 3. Certaines de ses propriétés seront détaillées, parmi lesquelles l'existence d'au moins une solution discrète grâce à un argument de degré topologique. Cette partie se terminera par quelques tests permettant de mettre en lumière l'intérêt du modèle ainsi élaboré.

### Chapitre 6

Ce dernier chapitre abordera une extension du modèle étudié au chapitre 5, avec l'introduction de plusieurs lithologies. De nouvelles notions seront définies, telles que les concentrations au sein du bassin, ainsi que les concentrations de surface reflétant le transport des sédiments. Contrairement aux autres modèles étudiés, il sera nécessaire de garder en mémoire l'évolution de la structure interne du bassin, avec la notion de colonnes de sédiments. Pour cette ultime étape de complexification du modèle, nous élaborerons un schéma Volumes Finis adapté, toujours en adhérant aux principes de construction esquissés précédemment. Ici encore, nous serons en mesure de prouver l'existence d'au moins une solution discrète. Pour conclure ce chapitre, nous analyserons deux configurations simulant l'évolution de bassins sédimentaires.

## Chapitre 2

# Analyse numérique de l'équation du $p$ -Laplacien instationnaire

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Étude dans le cas 1D</b>	<b>20</b>
2.1.1	Présentation du modèle	20
2.1.2	Schéma numérique Volumes Finis	21
2.1.3	Condition CFL	22
2.1.4	Résultats numériques	23
<b>2.2</b>	<b>Étude dans le cas 2D</b>	<b>26</b>
2.2.1	Présentation du modèle	26
2.2.2	Construction du schéma numérique Volumes Finis	26
2.2.3	Assemblage et résolution du système	34
2.2.4	Propriétés du schéma numérique	35
2.2.5	Condition CFL	37
2.2.6	Résultats numériques	38
<b>2.3</b>	<b>Récapitulatif</b>	<b>42</b>

---

*En guise de préliminaire indispensable, nous nous intéressons à l'analyse de l'équation du  $p$ -Laplacien instationnaire*

$$\partial_t h + \operatorname{div} ( -|\nabla h|^{p-2} \nabla h ) = 0, \quad p > 1, \quad (2.1)$$

*munie d'une condition initiale et de conditions aux limites qui seront précisées ultérieurement. Cette brique élémentaire se trouve en effet au cœur des différents modèles physiques que nous étudierons dans les chapitres suivants, dans le but de simuler, par exemple, l'évolution d'une hauteur de sédiments. L'intérêt de considérer un  $p$ -Laplacien, et donc d'avoir un flux non-linéaire, est de pouvoir modéliser plus fidèlement divers phénomènes physiques, dont entre autres ce que les géologues appellent des « points d'arrêt » (« knickpoint » en anglais). Dans les travaux précédents de Gervais [42] et Granjeon [47], le flux de matière associé était choisi linéaire par rapport à la pente du sol, ce qui correspond au cas où  $p = 2$ . Puis, durant ces dernières années, une première version de transport non-linéaire a été*

conçue par les géologues d'IFPEN [48]. Seulement, les méthodes numériques sous-jacentes n'ont pas évolué avec le modèle. Cette inadéquation s'est traduite par des ralentissements au cours des simulations. Dans ce contexte, notre mission est de développer un schéma numérique mieux adapté, avec si possible des garanties théoriques.

Pour cela, nous nous concentrons d'abord sur l'élaboration d'un schéma numérique *Volumes Finis* pour l'équation (2.1), qui contient déjà l'essence des difficultés. L'une d'entre elles est, dans le cas bidimensionnel, de trouver une manière de discrétiser le terme  $|\nabla h|^{p-2}$  au niveau de chaque arête du maillage. Pour cela nous nous baserons sur des travaux de Andreianov et al. [3]. Comme nous le verrons également, un traitement particulier pour la prise en compte des conditions aux limites sera à effectuer. Dans la suite, une distinction importante sera faite suivant la valeur de l'exposant  $p$ . Dans le cas où  $p > 2$ , la vitesse de propagation est finie. Au contraire, dans le cas où  $p < 2$ , l'équation (2.1) devient singulière et la vitesse de propagation est infinie.

Ce chapitre est structuré de la manière suivante. Dans une première section, on s'intéressera au cas unidimensionnel afin de se familiariser avec la nature du problème à résoudre. Puis, dans une deuxième partie, l'étude du  $p$ -Laplacien sera menée dans le cas  $2D$ . En particulier, la construction d'un schéma numérique *Volumes Finis* adapté sera effectuée, comprenant une méthode d'approximation du terme  $|\nabla h|^{p-2}$ . L'efficacité de ce schéma sera illustrée avec des comparaisons par rapport à des solutions analytiques, dont les calculs sont détaillés en annexe A.

## 2.1 Étude dans le cas 1D

Commençons l'étude de l'équation du  $p$ -Laplacien instationnaire en dimension 1. Ce cas de figure étant relativement simple, il permet de mieux appréhender le problème, ainsi que de faire face à un premier point délicat lorsque  $p < 2$ .

### 2.1.1 Présentation du modèle

Soit  $\Omega = [0, L]$ , avec  $L > 0$ , un intervalle de  $\mathbb{R}$ . Considérons l'équation

$$\partial_t h + \partial_x F = 0, \quad \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_+, \quad (2.2a)$$

où la fonction inconnue  $h$  dépend de  $x \in \Omega$  et de  $t > 0$ , et où le flux est défini par

$$F = -|\partial_x h|^{p-2} \partial_x h, \quad p > 1. \quad (2.2b)$$

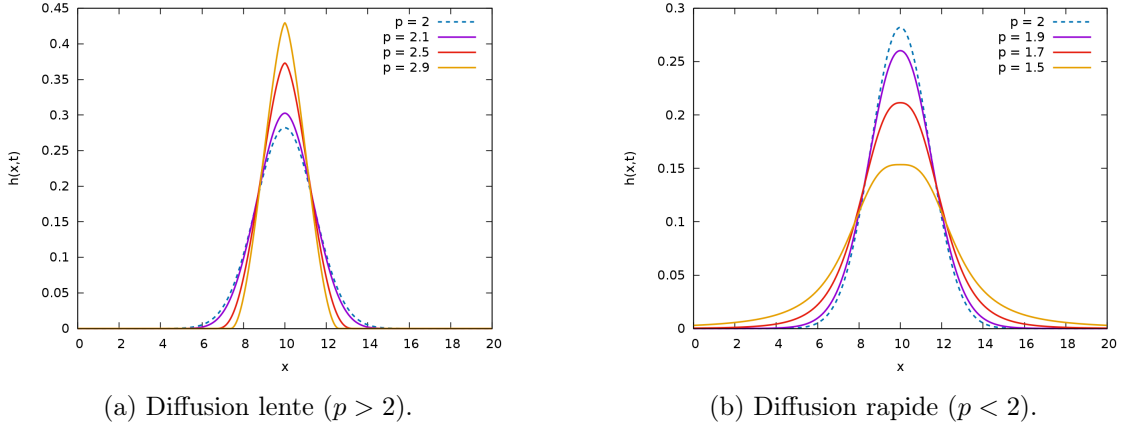
Sur le bord du domaine, nous imposons les conditions de Neumann

$$-F(x = 0, t) = \phi_0(t), \quad F(x = L, t) = \phi_L(t), \quad (2.3)$$

qui expriment la connaissance des flux normaux. En pratique, nous prescrivons toujours  $\phi_0(t) \leq 0$  et  $\phi_L(t) \leq 0$ , ce qui revient à spécifier des flux entrants. Enfin, pour compléter le modèle, nous le munissons de la donnée initiale

$$h(x, t = 0) = h_0(x), \quad \text{dans } \Omega. \quad (2.4)$$

L'équation (2.2) correspond à un problème de diffusion, linéaire si  $p = 2$ , non-linéaire si  $p \neq 2$ . À l'instar du cas linéaire, les solutions de (2.2) pour  $p > 1$  satisfont la conservation de la masse et le principe du maximum (voir les travaux de Di Benedetto et Herrero [24], ou encore de Kamin et Vázquez [55]). Par ailleurs, on pourra remarquer que les solutions de (2.2) pour  $p > 2$  ne se propagent pas à vitesse infinie, comme l'atteste le calcul de la solution élémentaire présenté à l'annexe A. De plus, comme illustré sur la figure 2.1, on peut voir que plus la valeur de  $p$  est grande, plus la diffusion est lente.


 FIGURE 2.1 – Solutions élémentaires au temps  $T = 1$ .

### 2.1.2 Schéma numérique Volumes Finis

Intéressons-nous à présent à la construction d'un schéma numérique pour le problème (2.2)–(2.4). Le domaine  $\Omega$  est découpé en  $N_x$  mailles uniformes de longueur  $\Delta x = L/N_x$ . Le centre de la maille  $i$  est noté  $x_i = (i - 1/2)\Delta x$ ,  $1 \leq i \leq N_x$ , et les bords de mailles ont pour abscisse  $x_{i+1/2} = i\Delta x$ ,  $0 \leq i \leq N_x$ . On cherche une approximation  $h_i^n$  de  $h(x_i, t^n)$ , où  $t^n$ ,  $n \geq 0$ , sont des instants discrets. Le pas de temps est noté  $\Delta t = t^{n+1} - t^n$ .

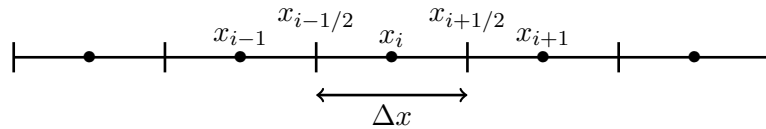


FIGURE 2.2 – Notations Volumes Finis.

Les  $h_i^n$  sont calculés par le schéma implicite en temps

$$\frac{h_i^{n+1} - h_i^n}{\Delta t} + \frac{F_{i+1/2}^{n+1} - F_{i-1/2}^{n+1}}{\Delta x} = 0, \quad (2.5a)$$

avec les flux numériques

$$F_{i+1/2}^{n+1} = - \left| \frac{h_{i+1}^{n+1} - h_i^{n+1}}{\Delta x} \right|^{p-2} \frac{h_{i+1}^{n+1} - h_i^{n+1}}{\Delta x}, \quad 1 \leq i \leq N_x - 1, \quad (2.5b)$$

et les flux de bord

$$F_{1/2}^{n+1} = -\frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \phi_0(t) dt, \quad F_{N_x+1/2}^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \phi_L(t) dt, \quad (2.5c)$$

à partir de la donnée initiale

$$h_i^0 = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} h_0(x) dx, \quad 1 \leq i \leq N_x. \quad (2.6)$$

Le schéma (2.5)–(2.6) est de type Volumes Finis et fait intervenir un système algébrique non-linéaire à chaque pas de temps. La résolution de ce système se fait par la méthode de Newton. Le cas où  $p > 2$  ne pose pas de problème particulier. En revanche, l'assemblage de la matrice Jacobienne est plus délicat dans le cas où  $p < 2$ . En effet, les dérivées des flux ont dans ce cas la forme

$$\frac{\partial F_{i+1/2}^{n+1}}{\partial h_i^{n+1}} = (p-1) \left| \frac{h_{i+1}^{n+1} - h_i^{n+1}}{\Delta x^2} \right|^{p-2}, \quad (2.7a)$$

$$\frac{\partial F_{i+1/2}^{n+1}}{\partial h_{i+1}^{n+1}} = -(p-1) \left| \frac{h_{i+1}^{n+1} - h_i^{n+1}}{\Delta x^2} \right|^{p-2}, \quad (2.7b)$$

et ne sont pas définies dans les zones plates. Il est alors nécessaire de les régulariser, par exemple en effectuant une troncature pour obtenir les dérivées approchées

$$\frac{\partial F_{i+1/2}^{n+1}}{\partial h_i^{n+1}} \simeq (p-1) \max \left( \left| \frac{h_{i+1}^{n+1} - h_i^{n+1}}{\Delta x^2} \right|, \varepsilon \right)^{p-2}, \quad (2.8a)$$

$$\frac{\partial F_{i+1/2}^{n+1}}{\partial h_{i+1}^{n+1}} \simeq -(p-1) \max \left( \left| \frac{h_{i+1}^{n+1} - h_i^{n+1}}{\Delta x^2} \right|, \varepsilon \right)^{p-2}, \quad (2.8b)$$

avec  $\varepsilon > 0$  petit. Cette régularisation permet de conserver les bonnes dérivées lorsque la norme du gradient est assez éloignée de zéro, et évite de travailler avec des valeurs arbitrairement grandes dans les zones plates.

### 2.1.3 Condition CFL

Le caractère implicite du schéma (2.5)–(2.6) permet a priori de prendre de grands pas de temps  $\Delta t$ . Néanmoins, de trop grandes valeurs peuvent induire des difficultés de convergence pour la méthode de Newton. Afin de disposer d'un ordre de grandeur convenable pour le réglage de  $\Delta t$ , nous nous appuyons sur la condition CFL de la version explicite du schéma, à savoir,

$$\frac{h_i^{n+1} - h_i^n}{\Delta t} + \frac{F_{i+1/2}^n - F_{i-1/2}^n}{\Delta x} = 0, \quad (2.9a)$$

avec

$$F_{i+1/2}^n = - \left| \frac{h_{i+1}^n - h_i^n}{\Delta x} \right|^{p-2} \frac{h_{i+1}^n - h_i^n}{\Delta x}, \quad 1 \leq i \leq N_x - 1. \quad (2.9b)$$

En effet, on peut établir que le schéma explicite (2.9) est stable au sens du principe du maximum

$$\min (h_{i-1}^n, h_i^n, h_{i+1}^n) \leq h_i^{n+1} \leq \max (h_{i-1}^n, h_i^n, h_{i+1}^n), \quad (2.10)$$

dans le cas  $\phi_0 = \phi_L = 0$ , si

$$\frac{\Delta t}{\Delta x^p} \max_i (|h_{i+1}^n - h_i^n|^{p-2}) \leq \frac{1}{2}, \quad \text{pour } p \geq 2, \quad (2.11a)$$

et

$$\frac{\Delta t}{\Delta x^p} \max_i \left( \max (|h_{i+1}^n - h_i^n|, \varepsilon \Delta x)^{p-2} \right) \leq \frac{1}{2}, \quad \text{pour } 1 < p < 2, \quad (2.11b)$$

avec le même paramètre  $\varepsilon$  qu'en (2.8). La condition suffisante (2.11a) peut être établie en exprimant le schéma explicite (2.9) sous la forme

$$\begin{aligned} h_i^{n+1} = & \left\{ 1 - \frac{\Delta t}{\Delta x^p} (|h_{i+1}^n - h_i^n|^{p-2} + |h_i^n - h_{i-1}^n|^{p-2}) \right\} h_i^n \\ & + \left\{ \frac{\Delta t}{\Delta x^p} |h_i^n - h_{i-1}^n|^{p-2} \right\} h_{i-1}^n + \left\{ \frac{\Delta t}{\Delta x^p} |h_{i+1}^n - h_i^n|^{p-2} \right\} h_{i+1}^n \end{aligned}$$

et en demandant une combinaison convexe au second membre. La démonstration de (2.11b) est analogue. Pour le schéma implicite (2.5)–(2.6), nous ajustons alors le pas de temps par

$$\frac{\Delta t}{\Delta x^p} \max_i (|h_{i+1}^n - h_i^n|^{p-2}) \leq \frac{\gamma}{2}, \quad \text{pour } p \geq 2, \quad (2.12a)$$

ou

$$\frac{\Delta t}{\Delta x^p} \max_i \left( \max (|h_{i+1}^n - h_i^n|, \varepsilon \Delta x)^{p-2} \right) \leq \frac{\gamma}{2}, \quad \text{pour } 1 < p < 2, \quad (2.12b)$$

où  $\gamma > 0$  est un paramètre fourni par l'utilisateur, en général entre 10 et 20.

#### 2.1.4 Résultats numériques

Nous présentons à présent différents cas tests afin d'illustrer le comportement du  $p$ -Laplacien instationnaire. L'état initial est composé d'une masse de Dirac au centre du domaine, puis l'évolution est simulée jusqu'au temps  $T = 1$ . Les résultats seront alors comparés à la solution élémentaire, dont les calculs sont présentés dans l'annexe A.

Dans le cas de la diffusion lente, c'est-à-dire si  $p > 2$ , on considère un domaine de taille  $L = 20$ . Ce dernier est discrétisé sur un maillage composé de 3201 mailles. Le système non-linéaire associé est résolu à l'aide de la méthode de Newton, pour laquelle le critère d'arrêt est choisi comme étant la norme  $L^\infty$  du résidu inférieure à  $10^{-6}$ . Le pas de temps est géré à partir de la condition CFL (2.11a). Les résultats au temps final pour différentes valeurs de  $p$  sont présentés en figure 2.3. Dans un premier temps, on peut remarquer que la solution numérique est bien à support compact, ce qui était attendu d'après la formule



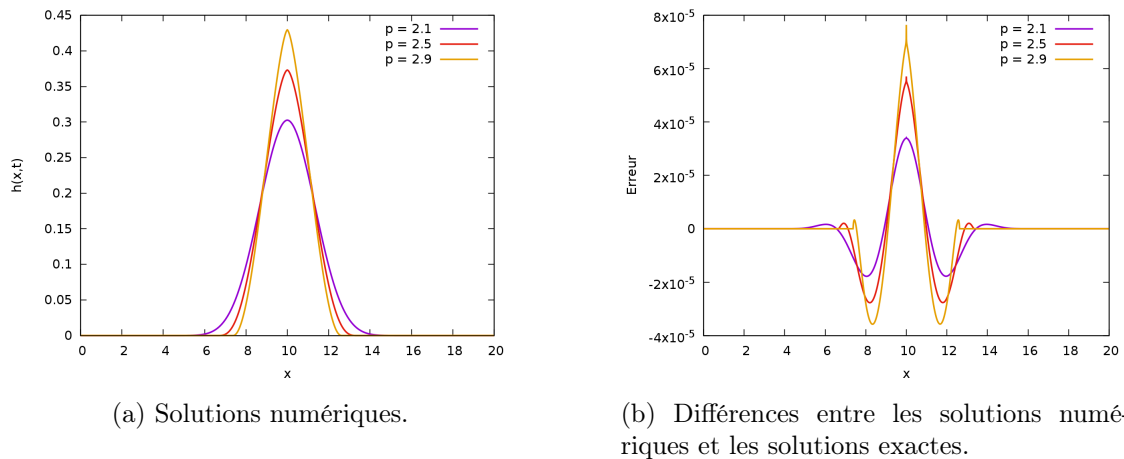


FIGURE 2.3 – Résultats numériques au temps  $T = 1$  en diffusion lente ( $p > 2$ ).

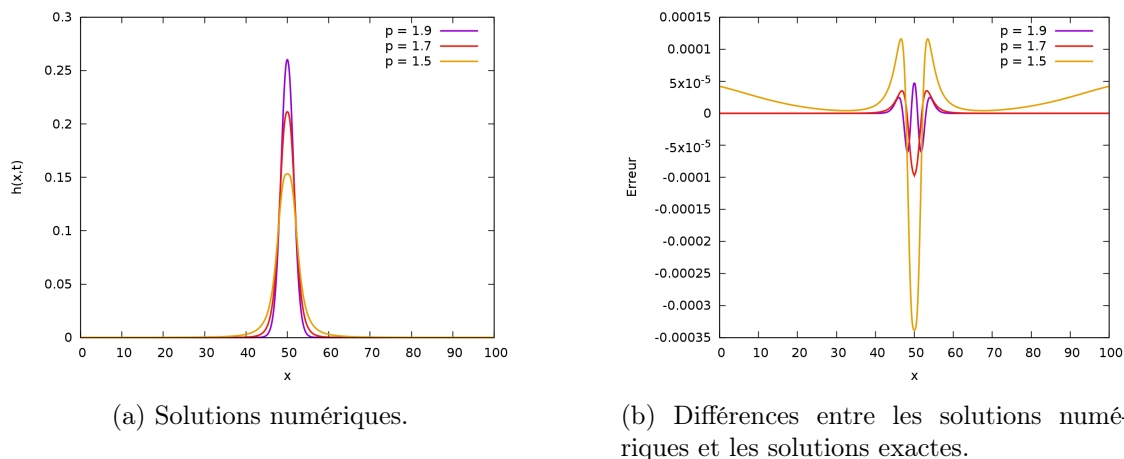


FIGURE 2.4 – Résultats numériques au temps  $T = 1$  en diffusion rapide ( $p < 2$ ).

de la solution exacte. Par ailleurs, le schéma numérique permet de fournir une bonne approximation étant donné le faible écart obtenu par rapport à la solution élémentaire.

Abordons à présent le cas de la diffusion rapide, autrement dit si  $p < 2$ . Dans cette configuration, un domaine plus grand est utilisé, à savoir de taille  $L = 100$ . Deux raisons expliquent ce changement. La première est due à la nature du problème, pour lequel la diffusion est plus importante par rapport au cas précédent. La seconde motivation est liée au profil de la solution élémentaire. Dans le cas où  $p < 2$ , la solution n'est plus à support compact, comme le montrent les calculs en annexe. En toute rigueur, il faudrait donc prescrire des conditions aux limites adéquates afin d'éviter un effet d'accumulation provoqué par des conditions de flux nuls aux bords. Néanmoins, cette deuxième configuration est considérée dans notre étude. Pour tenter d'atténuer les effets indésirables aux bords, un domaine de taille plus élevée est ainsi privilégié. Ce dernier est également discrétisé sur un maillage de 3201 mailles. Le système non-linéaire associé est résolu à l'aide de la méthode de Newton. Le critère d'arrêt correspondant est choisi égal à la norme  $L^\infty$  du résidu infé-

riure à  $10^{-6}$ . Le pas de temps est cette fois-ci géré à partir de la condition CFL (2.11b). Les résultats obtenus pour des valeurs de  $p$  variables sont rassemblés sur la figure 2.4. On remarque que la solution numérique approche globalement bien la solution exacte, même si l'erreur tend à augmenter lorsque la valeur de  $p$  diminue. Par ailleurs, pour  $p = 1.5$ , on peut distinguer l'effet d'accumulation au niveau des bords, dû au choix des conditions aux limites.

En figure 2.5 sont représentées les courbes de convergence pour différentes valeurs de  $p$ . Le tableau 2.1 rassemble quant à lui les ordres de convergence correspondants. On note tout d'abord que dans le cas de diffusion lente, la valeur de  $p$  ne semble pas influencer l'ordre de convergence, qui est proche de 2. En revanche, en diffusion rapide, l'ordre de convergence tend à diminuer lorsque  $p$  se rapproche de 1. La raison de cette perte d'ordre n'est pas encore établie, mais ne semble néanmoins pas liée à l'effet d'accumulation au niveau des bords. En effet, pour  $p = 1.7$  ce phénomène est négligeable, mais l'ordre de convergence est de 1.217.

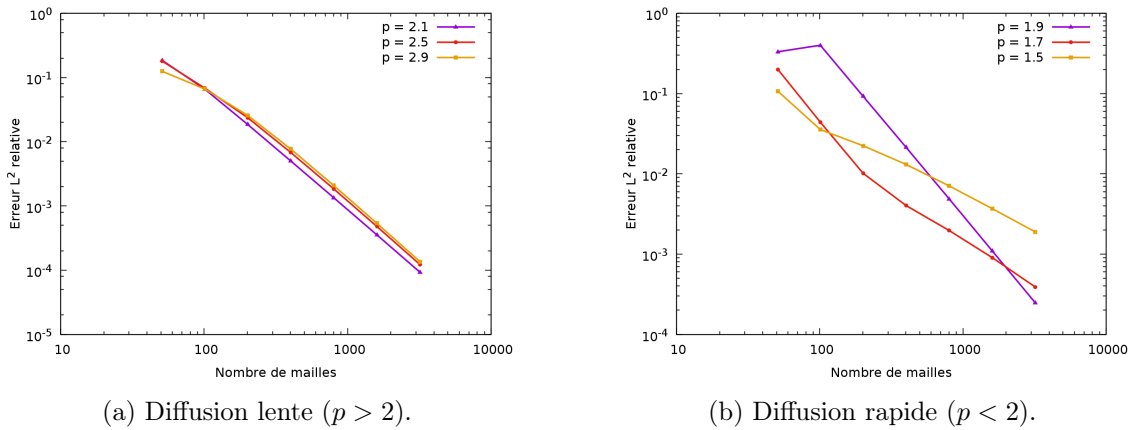


FIGURE 2.5 – Convergence du schéma numérique pour différentes valeurs de  $p$ .

Valeur de $p$	Ordre de convergence
1.5	0.965
1.7	1.217
1.9	2.151
2.1	1.936
2.5	1.973
2.9	1.988

TABLE 2.1 – Évolution de l'ordre de convergence du schéma en fonction de la valeur de  $p$ .

## 2.2 Étude dans le cas 2D

Intéressons-nous à présent à l'étude du  $p$ -Laplacien en 2D. En particulier, l'attention se porte ici sur l'élaboration d'un schéma numérique Volumes Finis adéquat. La méthode obtenue servira alors de base dans les modèles présentés dans les chapitres suivants.

### 2.2.1 Présentation du modèle

Soit  $\Omega = [0, L_x] \times [0, L_y]$  un domaine rectangulaire dans  $\mathbb{R}^2$ . Nous considérons l'équation

$$\partial_t h + \operatorname{div}(\mathbf{F}) = 0, \quad \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_+ \quad (2.13a)$$

où le flux est défini par

$$\mathbf{F} = -|\nabla h|^{p-2} \nabla h, \quad p > 1. \quad (2.13b)$$

Sur le bord du domaine, nous imposons la condition de Neumann

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = \phi(x, y, t), \quad \text{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}_+, \quad (2.14)$$

où  $\mathbf{n}$  représente la normale unitaire sortante de  $\Omega$ . En pratique, nous avons toujours  $\phi \leq 0$ , ce qui revient à spécifier des flux entrants. Enfin, pour compléter le modèle nous le munissons de la donnée initiale

$$h(x, y, t = 0) = h_0(x, y), \quad \text{dans } \Omega, \quad (2.15)$$

vérifiant  $h_* \leq h_0 \leq h^*$  avec  $h_*, h^* \in \mathbb{R}$ .

L'équation (2.13) correspond à un problème de diffusion, linéaire si  $p = 2$ , non-linéaire si  $p \neq 2$ . Comme pour le cas unidimensionnel, les solutions de (2.13) vérifient la conservation de la masse et le principe du maximum. Dans le cas d'un domaine infini ( $\Omega = \mathbb{R}^2$ ), il est possible de trouver un cadre fonctionnel permettant de démontrer l'existence et l'unicité de la solution (voir à nouveau les travaux de Di Benedetto et Herrero [24], ou encore de Kamin et Vázquez [55]). L'intérêt d'envisager (2.13) avec  $p > 2$  réside dans la propagation à vitesse finie de l'information, comme le montre le calcul de la solution élémentaire en annexe A.

### 2.2.2 Construction du schéma numérique Volumes Finis

Par rapport au cas unidimensionnel, l'élaboration d'un schéma numérique pour (2.13)–(2.15) est plus délicate. La difficulté essentielle se trouve dans l'approximation de la norme du gradient  $|\nabla h|$ . Aussi, nous allons présenter la construction du schéma en plusieurs étapes.

#### Semi-discrétisation implicite en temps

Commençons par discrétiser en temps tout en restant continu en espace. Soient  $t^n$ ,  $n \geq 0$ , les instants auxquels nous cherchons une approximation  $h^n(\cdot, \cdot)$  de la fonction  $h(\cdot, \cdot, t^n)$ . En notant le pas de temps par  $\Delta t = t^{n+1} - t^n$ , nous considérons le schéma implicite

$$\frac{h^{n+1} - h^n}{\Delta t} - \operatorname{div}(|\nabla h^{n+1}|^{p-2} \nabla h^{n+1}) = 0, \quad (2.16)$$

en partant de la donnée initiale  $h^0 = h_0$ . Vis-à-vis de la fonction inconnue  $h^{n+1}$ , nous avons affaire à un problème stationnaire elliptique de la forme

$$-\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + \alpha u = f, \quad \text{dans } \Omega, \quad (2.17a)$$

en ayant posé

$$u := h^{n+1}, \quad \alpha := \frac{1}{\Delta t}, \quad f := \frac{1}{\Delta t}h^n,$$

avec la condition de Neumann

$$-|\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \phi(\cdot, \cdot, t) dt, \quad \text{sur } \partial\Omega. \quad (2.17b)$$

### Discrétisation en espace

Dans la littérature, il existe de nombreux travaux (voir par exemple Barrett et Liu [12], Chow [22], Glowinski et Marroco [45]) portant sur l'approximation de Galerkin de certains systèmes voisins de (2.17), c'est-à-dire en domaine infini ou en domaine borné avec condition de Dirichlet. Ces travaux sont essentiellement théoriques, au sens où ils fournissent des estimations d'erreur a priori des méthodes d'approximation sans jamais se soucier de la faisabilité de leur implémentation. Nous allons voir un exemple simple que ces méthodes ne sont pas implémentables en pratique, du moins sans approximation supplémentaire.

Le domaine  $\Omega = [0, L_x] \times [0, L_y]$  est découpé en  $N_x \times N_y$  mailles uniformes, indexées par  $(i, j)$  et de taille  $\Delta x \times \Delta y = L_x/N_x \times L_y/N_y$ . Le centre de la maille  $(i, j)$  a pour coordonnées  $(x_i, y_j) = ((i - 1/2)\Delta x, (j - 1/2)\Delta y)$ . Cette maille est encore désignée par  $\mathcal{M}_{i,j} = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \times [y_{j-1/2}, y_{j+1/2}]$ , en introduisant les abscisses  $x_{i+1/2}$  et ordonnées  $y_{j+1/2}$  des faces. Le bord du domaine, noté  $\partial\Omega$ , est divisé en quatre parties :  $\Gamma_b$ ,  $\Gamma_t$ ,  $\Gamma_l$  et  $\Gamma_r$ . La solution approchée au centre de la maille  $\mathcal{M}_{i,j}$  est notée  $u_{i,j}$ .

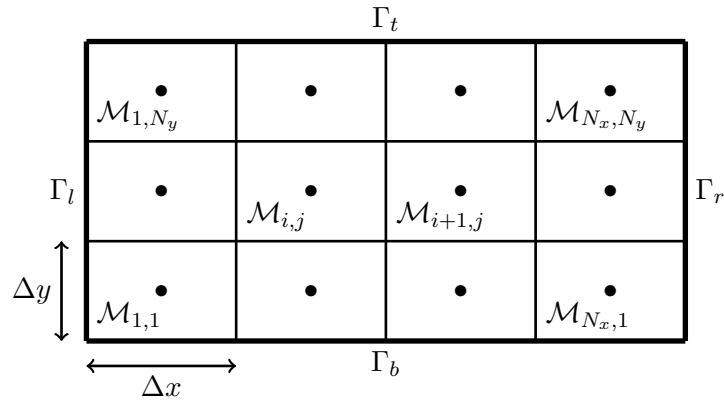


FIGURE 2.6 – Notations Volumes Finis.

Dans un premier temps, nous ignorons les conditions aux limites et faisons comme si le domaine était infini. Nous savons alors que l'équation

$$-\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + \alpha u = f \quad (2.18)$$

s'interprète comme la condition d'optimalité du problème de minimisation

$$u = \arg \min_{v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^2) \cap L^2(\mathbb{R}^2)} J(v), \quad (2.19a)$$

de la fonctionnelle d'énergie

$$J(u) = \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u|^p \, dx \, dy + \frac{\alpha}{2} \int_{\mathbb{R}^2} |u|^2 \, dx \, dy - \int_{\mathbb{R}^2} f u \, dx \, dy. \quad (2.19b)$$

Cette fonctionnelle est bien définie sur l'espace

$$\mathcal{V} = W^{1,p}(\mathbb{R}^2) \cap L^2(\mathbb{R}^2) \quad (2.20)$$

et est strictement convexe pour  $p > 1$ , ce qui donne un sens à la minimisation. Si  $\mathcal{V}_\delta$  est un sous-espace de  $\mathcal{V}$ , l'approximation de Galerkin consiste à considérer

$$u_\delta = \arg \min_{v \in \mathcal{V}_\delta} J(v). \quad (2.21)$$

Prenons par exemple comme  $\mathcal{V}_\delta$  l'espace des Éléments Finis  $\mathbb{Q}_1$  associés au maillage dual de celui décrit ci-dessus. Sur chaque maille rectangulaire  $\mathcal{R}_{i+1/2,j+1/2} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ , la solution approchée  $u_\delta$  est alors de la forme

$$\begin{aligned} u_\delta(x, y) = & u_{i,j} \frac{x_{i+1} - x}{\Delta x} \frac{y_{j+1} - y}{\Delta y} + u_{i+1,j} \frac{x - x_i}{\Delta x} \frac{y_{j+1} - y}{\Delta y} \\ & + u_{i,j+1} \frac{x_{i+1} - x}{\Delta x} \frac{y - y_j}{\Delta y} + u_{i+1,j+1} \frac{x - x_i}{\Delta x} \frac{y - y_j}{\Delta y}, \end{aligned} \quad (2.22)$$

où les  $u_{i,j}$  sont les degrés de liberté. Le gradient  $\nabla u_\delta$ , donné sur  $\mathcal{R}_{i+1/2,j+1/2}$  par

$$\frac{\partial u_\delta}{\partial x}(x, y) = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} \frac{y_{j+1} - y}{\Delta y} + \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i,j+1}}{\Delta x} \frac{y - y_j}{\Delta y}, \quad (2.23a)$$

$$\frac{\partial u_\delta}{\partial y}(x, y) = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta y} \frac{x_{i+1} - x}{\Delta x} + \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j}}{\Delta y} \frac{x - x_i}{\Delta x}, \quad (2.23b)$$

est affine par morceaux.

Le premier terme de la fonctionnelle d'énergie

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u_\delta|^p \, dx \, dy &= \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla u_\delta|^2)^{p/2} \, dx \, dy \\ &= \frac{1}{p} \sum_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2} \int_{\mathcal{R}_{i+1/2,j+1/2}} \left[ \left( \frac{\partial u_\delta}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_\delta}{\partial y} \right)^2 \right]^{p/2} \, dx \, dy \end{aligned} \quad (2.24)$$

fait alors intervenir des intégrales de fonctions quadratiques élevées à la puissance  $p/2$ . Ces intégrales ne sont malheureusement pas calculables quand  $p \neq 2$ .

Si, au lieu des Éléments Finis  $\mathbb{Q}_1$ , nous avons considéré les Éléments Finis  $\mathbb{P}_1$  comme dans les travaux de Barrett et Liu [12], il aurait été certes possible d'aller au bout des calculs de minimisation de  $J$  et d'obtenir des formules pour le schéma. Cependant, ce dernier a deux inconvénients. Le premier est que son stencil dépend de l'orientation des

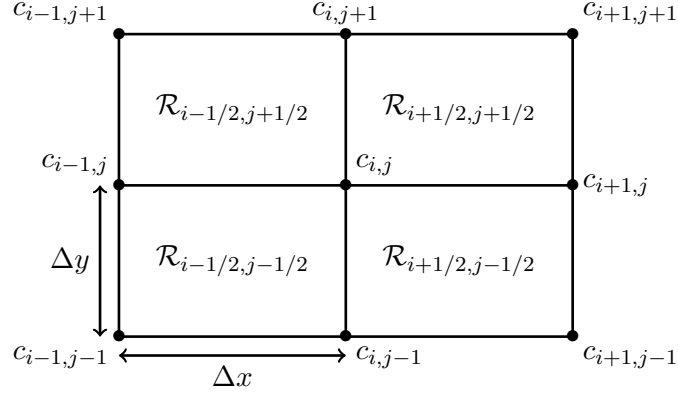
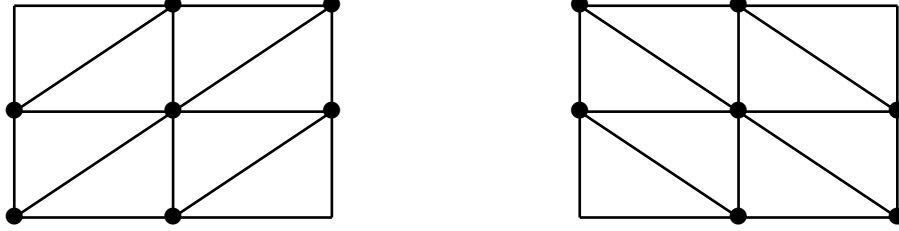

 FIGURE 2.7 – Mailles Éléments Finis faisant intervenir  $u_{i,j}$ .


FIGURE 2.8 – Stencil suivant l'orientation choisie pour les triangles.

triangles (mis à part le cas particulier où  $p = 2$ ), comme le montre la figure 2.8. Le second est qu'il n'est pas possible d'exprimer le schéma avec des flux localement conservatifs.

Plus récemment, Andreianov et al. [3] ont proposé un schéma de type Volumes Finis pour la discrétisation du  $p$ -Laplacien, avec une approximation non-triviale de  $|\nabla u|^{p-2}$ . Bien que ce schéma ne constitue pas une approximation de Galerkin au sens de (2.21), il existe une notion d'énergie à minimiser et c'est par ce biais que nous allons le présenter.

Pour ce faire, supposons que le domaine reste infini et plaçons-nous dans l'espace  $\mathcal{V}_\delta$  des fonctions  $u_\delta$  constantes par mailles primales  $\mathcal{M}_{i,j}$ , qui n'est pas un sous-espace de  $\mathcal{V}$ . Sur  $\mathcal{V}_\delta$ , nous définissons la fonctionnelle d'énergie discrète

$$\tilde{J}(u_\delta) = \frac{\Delta x \Delta y}{p} \sum_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2} B_{i+1/2,j+1/2}^{p/2} + \frac{\alpha \Delta x \Delta y}{2} \sum_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2} |u_{i,j}|^2 - \Delta x \Delta y \sum_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2} f_{i,j} u_{i,j}, \quad (2.25)$$

où chaque quantité

$$\begin{aligned} B_{i+1/2,j+1/2} &= \frac{1}{2} \left( \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i,j+1}}{\Delta x} \right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \left( \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j}}{\Delta y} \right)^2 \end{aligned} \quad (2.26)$$

représente une approximation de  $|\nabla u_\delta|^2$  sur la maille duale  $\mathcal{R}_{i+1/2,j+1/2}$ . Cette approxi-

mation est coercive, au sens où

$$B_{i+1/2,j+1/2} = 0 \quad \text{si et seulement si} \quad u_{i,j} = u_{i+1,j} = u_{i,j+1} = u_{i+1,j+1}.$$

Autrement dit, l'approximation de  $|\nabla u_\delta|^2$  sur  $\mathcal{R}_{i+1/2,j+1/2}$  est nulle si et seulement si les valeurs aux sommets de ce rectangle sont identiques. En utilisant cette approximation, nous pouvons approcher le premier terme de  $J$  par

$$\frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u_\delta|^p \simeq \frac{1}{p} \sum_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2} \int_{\mathcal{R}_{i+1/2,j+1/2}} B_{i+1/2,j+1/2}^{p/2} \, dx \, dy \quad (2.27a)$$

$$= \frac{\Delta x \Delta y}{p} \sum_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2} B_{i+1/2,j+1/2}^{p/2}, \quad (2.27b)$$

qui n'est autre que le premier terme de  $\tilde{J}$  définie en (2.25). Les autres termes de  $\tilde{J}$  s'interprètent aisément en se référant à  $J$ .

Pour réaliser le minimum de  $\tilde{J}$  sur  $\mathcal{V}_\delta$ , nous dérivons  $\tilde{J}$  par rapport à chaque  $u_{i,j}$  et cherchons à annuler cette dérivée partielle. Comme nous pouvons le voir sur la figure 2.7, le sommet  $(i,j)$  appartient à 4 rectangles différents. La dérivée partielle recherchée est alors donnée par la formule

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{J}}{\partial u_{i,j}}(u_\delta) &= \frac{\Delta x \Delta y}{p} \left( \frac{\partial B_{i-1/2,j-1/2}^{p/2}}{\partial u_{i,j}} + \frac{\partial B_{i-1/2,j+1/2}^{p/2}}{\partial u_{i,j}} + \frac{\partial B_{i+1/2,j-1/2}^{p/2}}{\partial u_{i,j}} + \frac{\partial B_{i+1/2,j+1/2}^{p/2}}{\partial u_{i,j}} \right) \\ &\quad + \alpha \Delta x \Delta y u_{i,j} - \Delta x \Delta y f_{i,j} \\ &= \frac{\Delta x \Delta y}{2} \left[ B_{i-1/2,j-1/2}^{p/2-1} \left( \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\Delta y^2} \right) \right. \\ &\quad + B_{i-1/2,j+1/2}^{p/2-1} \left( \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j} - u_{i,j+1}}{\Delta y^2} \right) \\ &\quad + B_{i+1/2,j-1/2}^{p/2-1} \left( \frac{u_{i,j} - u_{i+1,j}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\Delta y^2} \right) \\ &\quad \left. + B_{i+1/2,j+1/2}^{p/2-1} \left( \frac{u_{i,j} - u_{i+1,j}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j} - u_{i,j+1}}{\Delta y^2} \right) \right] \\ &\quad + \alpha \Delta x \Delta y u_{i,j} - \Delta x \Delta y f_{i,j}. \end{aligned}$$

Compte tenu du fait que  $\alpha = \Delta t^{-1}$  et  $f = h^n / \Delta t$ , la nullité de cette dérivée partielle implique

$$\frac{u_{i,j} - h_{i,j}^n}{\Delta t} + \frac{F_{i+1/2,j} - F_{i-1/2,j}}{\Delta x} + \frac{F_{i,j+1/2} - F_{i,j-1/2}}{\Delta y} = 0, \quad (2.28)$$

avec

$$F_{i+1/2,j}^i = -\frac{B_{i+1/2,j+1/2}^{p/2-1} + B_{i+1/2,j-1/2}^{p/2-1}}{2} \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x}, \quad (2.29a)$$

$$F_{i-1/2,j}^i = -\frac{B_{i-1/2,j+1/2}^{p/2-1} + B_{i-1/2,j-1/2}^{p/2-1}}{2} \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x}, \quad (2.29b)$$

$$F_{i,j+1/2}^i = -\frac{B_{i-1/2,j+1/2}^{p/2-1} + B_{i+1/2,j+1/2}^{p/2-1}}{2} \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta y}, \quad (2.29c)$$

$$F_{i,j-1/2}^i = -\frac{B_{i-1/2,j-1/2}^{p/2-1} + B_{i+1/2,j-1/2}^{p/2-1}}{2} \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\Delta y}. \quad (2.29d)$$

Pour chacun de ces flux, le premier terme du produit représente une discrétisation de  $|\nabla u|^{p-2}$ . Quant au second terme, il est une approximation standard de  $\nabla u \cdot \mathbf{n}_{i,j}$ . En guise d'exemple, le calcul du flux (2.29a) est illustré sur la figure 2.9.

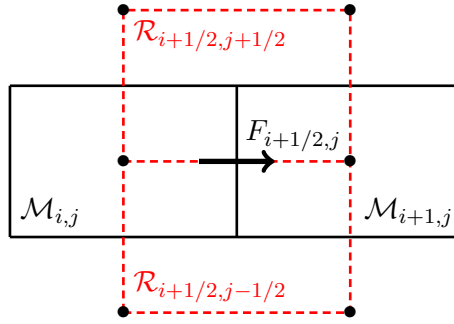


FIGURE 2.9 – Le calcul du flux  $F_{i+1/2,j}^i$  entre  $\mathcal{M}_{i,j}$  et  $\mathcal{M}_{i+1,j}$ , dont la formule est donnée en (2.29a), fait intervenir deux approximations  $B_{i+1/2,j-1/2}$  et  $B_{i+1/2,j+1/2}$  de  $|\nabla u|^2$  calculées sur les mailles duales  $\mathcal{R}_{i+1/2,j-1/2}$  et  $\mathcal{R}_{i+1/2,j+1/2}$  respectivement, à l'aide de la formule (2.26).

### Discrétisation semi-implicite en temps

À partir de maintenant, nous reprenons la notation  $h$  à la place de  $u$ . En 2D, l'approximation du terme  $|\nabla h|^{p-2}$  par une demi-somme de deux  $B_{i+1/2,j+1/2}^{p/2-1}$  étant assez lourde, nous choisissons de ne pas l'impliciter. Nous verrons par la suite que cela n'est pas très pénalisant au niveau des résultats. Le schéma numérique pour (2.13) s'écrit alors

$$\frac{h_{i,j}^{n+1} - h_{i,j}^n}{\Delta t} + \frac{F_{i+1/2,j}^{n+1} - F_{i-1/2,j}^{n+1}}{\Delta x} + \frac{F_{i,j+1/2}^{n+1} - F_{i,j-1/2}^{n+1}}{\Delta y} = 0, \quad (2.30)$$

où les flux numériques sont donnés par les formules semi-implicites

$$F_{i+1/2,j}^{n+1} = -\frac{1}{2} \left[ (B_{i+1/2,j-1/2}^n)^{\frac{p-2}{2}} + (B_{i+1/2,j+1/2}^n)^{\frac{p-2}{2}} \right] \frac{h_{i+1,j}^{n+1} - h_{i,j}^{n+1}}{\Delta x}, \quad (2.31a)$$

$$F_{i,j+1/2}^{n+1} = -\frac{1}{2} \left[ (B_{i-1/2,j+1/2}^n)^{\frac{p-2}{2}} + (B_{i+1/2,j+1/2}^n)^{\frac{p-2}{2}} \right] \frac{h_{i,j+1}^{n+1} - h_{i,j}^{n+1}}{\Delta y}, \quad (2.31b)$$



avec

$$\begin{aligned}
 B_{i+1/2,j+1/2}^n &= \frac{1}{2} \left( \frac{h_{i+1,j}^n - h_{i,j}^n}{\Delta x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{h_{i+1,j+1}^n - h_{i,j+1}^n}{\Delta x} \right)^2 \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left( \frac{h_{i,j+1}^n - h_{i,j}^n}{\Delta y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{h_{i+1,j+1}^n - h_{i+1,j}^n}{\Delta y} \right)^2
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

qui représente une approximation de  $|\nabla h|^2$  au temps  $t^n$  sur  $\mathcal{R}_{i+1/2,j+1/2}$ .

La situation où  $p < 2$  nécessite un traitement particulier dû à la présence de singularité dans les zones plates. En s'inspirant du cas en une dimension, nous introduisons une régularisation du terme pouvant potentiellement poser problème. Le schéma numérique correspondant est alors défini par :

$$\frac{h_{i,j}^{n+1} - h_{i,j}^n}{\Delta t} + \frac{F_{i+1/2,j}^{n+1} - F_{i-1/2,j}^{n+1}}{\Delta x} + \frac{F_{i,j+1/2}^{n+1} - F_{i,j-1/2}^{n+1}}{\Delta y} = 0, \tag{2.33}$$

avec

$$F_{i+1/2,j}^{n+1} = -\frac{1}{2} \left[ \max(B_{i+1/2,j-1/2}^n, \varepsilon)^{\frac{p-2}{2}} + \max(B_{i+1/2,j+1/2}^n, \varepsilon)^{\frac{p-2}{2}} \right] \frac{h_{i+1,j}^{n+1} - h_{i,j}^{n+1}}{\Delta x}, \tag{2.34a}$$

$$F_{i,j+1/2}^{n+1} = -\frac{1}{2} \left[ \max(B_{i-1/2,j+1/2}^n, \varepsilon)^{\frac{p-2}{2}} + \max(B_{i+1/2,j+1/2}^n, \varepsilon)^{\frac{p-2}{2}} \right] \frac{h_{i,j+1}^{n+1} - h_{i,j}^{n+1}}{\Delta y}, \tag{2.34b}$$

avec  $\varepsilon > 0$  petit, et où l'approximation du carré de la norme du gradient est donnée par la relation (2.32).

### Traitement des conditions aux limites

La construction des flux précédente nécessite néanmoins un ajustement dans le cas des flux tangentiels aux bords du domaine. Pour voir cela, basons-nous sur la figure 2.10. Pour le calcul du flux bleu, il est nécessaire de connaître la valeur des inconnues aux mailles internes au domaine, ce qui ne pose pas de difficulté. En revanche, pour le flux violet, on remarque que certaines données se situent hors du domaine. Afin de remédier à ce problème, on considère une couche de mailles fictives autour du domaine initial (mailles oranges). Il reste alors à savoir quelle valeur donner aux inconnues dans chacune de ces mailles. L'idée est d'essayer de déterminer ces valeurs en fonction des flux d'entrée imposés sur les bords. Autrement dit, on souhaite que la valeur des flux discrets entrants soit égale à la quantité injectée via la fonction  $\phi$ . Plus précisément, ces équations ont la forme

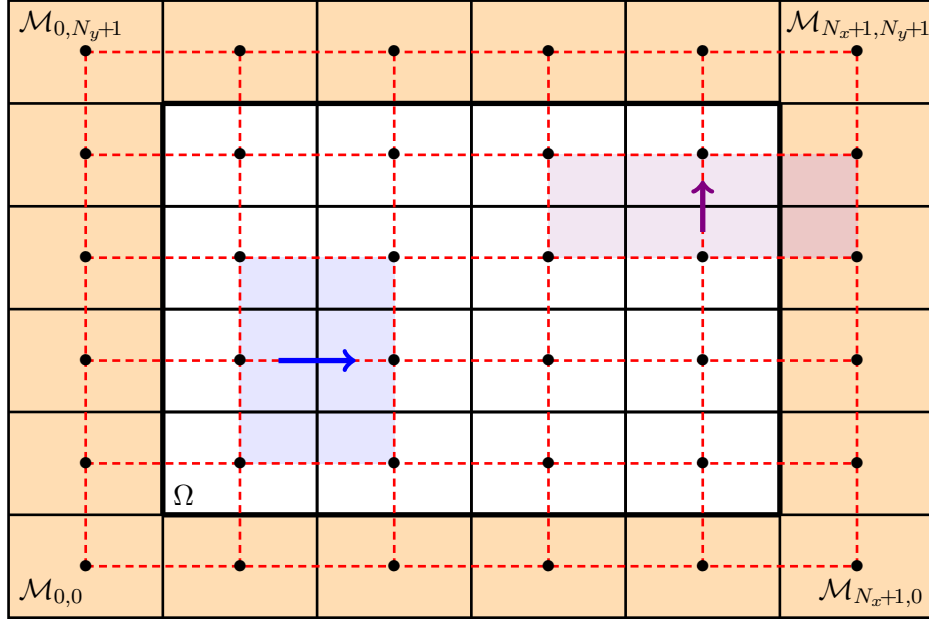


FIGURE 2.10 – Représentation du maillage en 2D : en blanc le domaine d'origine  $\Omega$ , en orange les mailles fictives et en rouge le maillage dual.

$$\Gamma_b : F_{i,1/2}^{n+1} + \frac{1}{\Delta x \Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{(i-1)\Delta x}^{i\Delta x} \phi(x, 0, t) dx dt = 0, \quad (2.35a)$$

$$\Gamma_l : F_{1/2,j}^{n+1} + \frac{1}{\Delta y \Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{(j-1)\Delta y}^{j\Delta y} \phi(0, y, t) dy dt = 0, \quad (2.35b)$$

$$\Gamma_t : F_{i,N_y+1/2}^{n+1} - \frac{1}{\Delta x \Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{(i-1)\Delta x}^{i\Delta x} \phi(x, L_y, t) dx dt = 0, \quad (2.35c)$$

$$\Gamma_r : F_{N_x+1/2,j}^{n+1} - \frac{1}{\Delta y \Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{(j-1)\Delta y}^{j\Delta y} \phi(L_x, y, t) dy dt = 0. \quad (2.35d)$$

Ces relations apparaissent alors comme des équations supplémentaires à monter dans le système à résoudre. En ce qui concerne les 4 mailles fictives situées aux coins du domaine, la démarche est différente. N'ayant pas de relation naturelle de flux au niveau des coins du domaine, nous choisissons d'utiliser une extrapolation afin de prendre en compte les 4 inconnues restantes. Les relations correspondantes sont

$$\mathcal{M}_{0,0} : h_{0,0}^{n+1} + h_{1,1}^{n+1} - h_{1,0}^{n+1} - h_{0,1}^{n+1} = 0, \quad (2.36a)$$

$$\mathcal{M}_{N_x+1,0} : h_{N_x+1,0}^{n+1} + h_{N_x,1}^{n+1} - h_{N_x+1,1}^{n+1} - h_{N_x,0}^{n+1} = 0, \quad (2.36b)$$

$$\mathcal{M}_{0,N_y+1} : h_{0,N_y+1}^{n+1} + h_{1,N_y}^{n+1} - h_{1,N_y+1}^{n+1} - h_{0,N_y}^{n+1} = 0, \quad (2.36c)$$

$$\mathcal{M}_{N_x+1,N_y+1} : h_{N_x+1,N_y+1}^{n+1} + h_{N_x,N_y}^{n+1} - h_{N_x,N_y+1}^{n+1} - h_{N_x+1,N_y}^{n+1} = 0. \quad (2.36d)$$

Quant à la donnée initiale  $h_0$ , elle est discrétisée via la formule

$$h_{i,j}^0 = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{\mathcal{M}_{i,j}} h_0(x, y) \, dx dy, \quad i = 1 \dots, N_x, \quad j = 1, \dots, N_y. \quad (2.37)$$

Enfin, il reste à initialiser les inconnues aux mailles fictives. Pour ce faire, deux solutions sont possibles. La première consiste à résoudre un système composé des équations (2.35)–(2.36), où la hauteur de sédiments dans le domaine  $\Omega$  est connue et donnée par la formule (2.37). La seconde est d'utiliser une extrapolation de la valeur des inconnues situées aux mailles voisines.

### 2.2.3 Assemblage et résolution du système

À chaque pas de temps, un système reliant les inconnues  $h_{i,j}$ ,  $i = 0, \dots, N_x + 1$ ,  $j = 0, \dots, N_y + 1$ , est à résoudre. Ce dernier comprend la discrétisation des équations de conservation, à savoir (2.30)–(2.31) si  $p > 2$  et (2.33)–(2.34) si  $p < 2$ , ainsi que les équations liées aux inconnues de bord (2.35)–(2.36). La résolution de ce système est effectuée par la méthode de Newton.

L'assemblage de la matrice Jacobienne nécessite une attention particulière dans le cas où  $p > 2$ . En effet, lors du calcul des dérivées associées aux équations (2.35), il est possible de se retrouver dans le cas où toutes ces dérivées sont nulles : c'est le cas dans les zones plates. Afin d'éviter un problème de singularité dans la matrice, nous effectuons l'opération présentée dans l'algorithme 1 pour traiter l'équation (2.35a). Une méthode similaire est effectuée pour les autres équations associées aux bords du domaine restants. Une fois la Jacobienne et le résidu assemblés, le système linéaire associé est résolu par la méthode du BiCGSTAB avec le préconditionneur ILU(0) à l'aide de la bibliothèque PETSc [8]. Pour avoir des précisions sur cette méthode, on pourra se diriger vers les travaux de Saad [63] et Van der Vorst [69].

---

**Algorithme 1** : Régularisation des dérivées de l'équation (2.35a).

---

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= (B_{i-1/2,1/2}^n)^{\frac{p-2}{2}} + (B_{i+1/2,1/2}^n)^{\frac{p-2}{2}} ; \\ \frac{\partial F_{i,1/2}^{n+1}}{\partial h_{i,0}^{n+1}} &\approx \frac{\max(\mathcal{B}, \varepsilon)}{2\Delta y} ; \\ \frac{\partial F_{i,1/2}^{n+1}}{\partial h_{i,1}^{n+1}} &\approx -\frac{\max(\mathcal{B}, \varepsilon)}{2\Delta y} ; \end{aligned}$$


---

**Remarque 2.1.** La résolution du problème peut s'effectuer via une méthode alternative, divisée en deux étapes. La première consiste à résoudre un système composé uniquement des équations et inconnues des mailles internes, à savoir (2.30)–(2.34). Dans ce système, les flux aux arêtes situées sur les bords du domaine sont remplacés par leur valeur exacte, donnée par la fonction  $\phi$ . Puis dans un second temps, un deuxième système est résolu. Celui-ci se concentre sur les mailles fictives et ne comprend que les équations (2.35)–(2.36). Les valeurs des inconnues des mailles internes qui interviennent sont alors traitées

comme des données, car étant calculées lors de la résolution du système précédent. Cette méthode permet un découplage des mailles internes et des maillages fictives, mais nécessite la résolution de deux systèmes. Elle sera seulement utilisée dans les preuves d'existence de solution aux schémas numériques (voir les théorèmes 2.1, 3.1, 5.1 et 6.1).

#### 2.2.4 Propriétés du schéma numérique

Passons à présent en revue quelques propriétés importantes du schéma numérique que nous venons d'élaborer.

**Proposition 2.1** (Préservation de la borne inférieure). *Pour tout  $n \geq 0$ , la borne inférieure est préservée :*

$$h_{i,j}^n \geq h_*. \quad (2.38)$$

*Démonstration.* La preuve se fait par récurrence. On suppose que  $p > 2$ . Pour  $n = 0$ , la relation se vérifie facilement en utilisant la discrétisation de la donnée initiale (2.37) :

$$h_{i,j}^0 = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{\mathcal{M}_{i,j}} h_0(x, y) \, dx dy \geq \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{\mathcal{M}_{i,j}} h_* \, dx dy = h_*.$$

Supposons la relation (2.38) vraie au temps  $t^n$ , et posons  $h_{i^*,j^*}^{n+1} = \min_{i,j} h_{i,j}^{n+1}$ . Il vient alors

$$F_{i^*+1/2,j^*}^{n+1} = -\frac{1}{2} \left[ (B_{i^*+1/2,j^*-1/2}^n)^{\frac{p-2}{2}} + (B_{i^*+1/2,j^*+1/2}^n)^{\frac{p-2}{2}} \right] \frac{h_{i^*+1,j^*}^{n+1} - h_{i^*,j^*}^{n+1}}{\Delta x} \leq 0.$$

Par une analyse similaire, nous avons la relation

$$\frac{F_{i^*+1/2,j^*}^{n+1} - F_{i^*-1/2,j^*}^{n+1}}{\Delta x} + \frac{F_{i^*,j^*+1/2}^{n+1} - F_{i^*,j^*-1/2}^{n+1}}{\Delta y} \leq 0.$$

En utilisant la définition du schéma numérique (2.30), on en déduit alors

$$h_{i,j}^{n+1} \geq h_{i^*,j^*}^{n+1} \geq h_{i^*,j^*}^n \geq h_*.$$

Le situation où  $p < 2$  se traite par un argument identique.  $\square$

**Proposition 2.2** (Conservation de la masse). *La variation de la masse est liée aux conditions aux limites. Plus précisément, pour tout  $n \geq 0$ , on a*

$$\Delta x \Delta y \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} h_{i,j}^n = \int_{\Omega} h_0(x, y) \, dx dy - \int_0^{t^n} \int_{\partial\Omega} \phi(x, y, t) \, d\sigma dt := M_h^n. \quad (2.39)$$

De plus, une borne supérieure sur  $h_{i,j}^n$  est donnée par

$$h_{i,j}^n \leq \frac{M_h^n}{\Delta x \Delta y} - (N_x N_y - 1) h_*. \quad (2.40)$$

*Démonstration.* La démonstration s'effectue par récurrence. Pour  $n = 0$ , le choix de discrétisation de la donnée initiale (2.37) permet d'avoir la relation

$$\Delta x \Delta y \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} h_{i,j}^0 = \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \int_{\mathcal{M}_{i,j}} h_0(x, y) \, dx dy = \int_{\Omega} h_0(x, y) \, dx dy.$$

Supposons la relation (2.39) vraie au temps  $t^n$ . Partant de la définition du schéma numérique (2.30), nous avons la première relation

$$\Delta x \Delta y \Delta t \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \left( \frac{h_{i,j}^{n+1} - h_{i,j}^n}{\Delta t} + \frac{F_{i+1/2,j}^{n+1} - F_{i-1/2,j}^{n+1}}{\Delta x} + \frac{F_{i,j+1/2}^{n+1} - F_{i,j-1/2}^{n+1}}{\Delta y} \right) = 0.$$

En utilisant la conservativité des flux et la définition des flux aux bords du domaine (2.35), nous en déduisons

$$\begin{aligned} \Delta x \Delta y \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} h_{i,j}^{n+1} &= \Delta x \Delta y \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} h_{i,j}^n - \Delta x \Delta t \sum_{i=1}^{N_x} (F_{i,1/2}^{n+1} - F_{i,N_y+1/2}^{n+1}) \\ &\quad - \Delta y \Delta t \sum_{j=1}^{N_y} (F_{1/2,j}^{n+1} - F_{N_x+1/2,j}^{n+1}) \\ &= \Delta x \Delta y \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} h_{i,j}^n - \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\partial\Omega} \phi(x, y, t) \, d\sigma dt. \end{aligned}$$

Il reste à utiliser l'hypothèse de récurrence

$$\begin{aligned} \Delta x \Delta y \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} h_{i,j}^{n+1} &= \int_{\Omega} h_0(x, y) \, dx dy - \int_0^{t^n} \int_{\partial\Omega} \phi(x, y, t) \, d\sigma dt \\ &\quad - \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\partial\Omega} \phi(x, y, t) \, d\sigma dt \\ &= \int_{\Omega} h_0(x, y) \, dx dy - \int_0^{t^{n+1}} \int_{\partial\Omega} \phi(x, y, t) \, d\sigma dt \end{aligned}$$

pour obtenir le résultat désiré. De plus, la relation (2.38) assure que la variable  $h_{i,j}^n$  reste positive. La valeur maximale de  $h_{i,j}^n$  dans une maille (après avoir supposé que toutes les autres contiennent la valeur minimale  $h_*$ ) est alors donnée par (2.40).  $\square$

Les deux propositions précédentes vont maintenant servir à prouver l'existence d'une solution au schéma numérique précédemment construit. On se basera pour cela sur la notion de degré topologique, également abordée par Droniou [25], Eymard et al. [32] et Kaviani [56].

**Théorème 2.1** (Existence d'une solution). *Soit  $(h_{i,j}^n)_{i,j}$  vérifiant (2.38) et (2.39). Alors pour tout  $\Delta t > 0$ , il existe au moins une solution  $(h_{i,j}^{n+1})_{i,j}$  au système non-linéaire (2.30)–(2.31), (2.35)–(2.36) si  $p > 2$ , (2.33)–(2.36) si  $p < 2$ , et vérifiant (2.38) ainsi que (2.39).*

*Démonstration.* Dans cette preuve, nous allons nous concentrer sur le système réduit au mailles internes, c'est-à-dire composé des équations (2.30)–(2.31) si  $p > 2$  et (2.33)–(2.34) si  $p < 2$ . En reprenant la remarque 2.1, les inconnues aux mailles fictives peuvent être mises à jour dans un second temps.

Nous allons utiliser ici un argument de degré topologique. On supposera dans la suite que  $p > 2$ , le cas où  $p < 2$  se traitant de manière similaire. Soit  $\mu \in [0, 1]$  et notons par  $(h_{i,j}^{\mu,n+1})_{i,j}$  la solution du schéma

$$\frac{h_{i,j}^{\mu,n+1} - h_{i,j}^n}{\Delta t} + \mu \left( \frac{F_{i+1/2,j}^{\mu,n+1} - F_{i-1/2,j}^{\mu,n+1}}{\Delta x} + \frac{F_{i,j+1/2}^{\mu,n+1} - F_{i,j-1/2}^{\mu,n+1}}{\Delta y} \right) = 0. \quad (2.41)$$

On remarque alors que dans le cas où  $\mu = 1$ , ce schéma correspond au schéma (2.30)–(2.31). Inversement, la situation où  $\mu = 0$  conduit à

$$h_{i,j}^{\mu,n+1} = h_{i,j}^n. \quad (2.42)$$

Dans cette configuration simple, le degré topologique peut se calculer et est égal à 1. La prochaine étape consiste à appliquer la propriété d'invariance par homotopie du degré topologique au schéma (2.41). Pour cela, il est nécessaire d'obtenir des estimations indépendantes de  $\mu$  sur les équations précédentes. On montre alors qu'il est possible d'adapter sans difficulté les preuves des propositions 2.1 et 2.2 afin d'avoir

$$h_* \leq h_{i,j}^{\mu,n+1} \leq \frac{M_h^{n+1}}{\Delta x \Delta y} - (N_x N_y - 1)h_*, \quad \forall \mu \in [0, 1], \quad (2.43)$$

où

$$M_h^{n+1} = \int_{\Omega} h_0(x, y) \, dx \, dy - \int_0^{t^{n+1}} \int_{\partial\Omega} \phi(x, y, t) \, d\sigma \, dt.$$

En conséquence, la solution  $(h_{i,j}^{\mu,n+1})_{i,j}$  appartient au compact  $[h_* - \varepsilon, M_h^{n+1}/(\Delta x \Delta y) + \varepsilon]^{N_x \times N_y}$ , avec  $\varepsilon > 0$ . Par l'invariance par homotopie du degré topologique, ce dernier vaut alors 1 pour tout  $\mu \in [0, 1]$ . En particulier, cela implique qu'il existe au moins une solution au schéma numérique.  $\square$

### 2.2.5 Condition CFL

Avant de pouvoir tester les schémas numériques précédents, il est nécessaire de savoir comment gérer les pas de temps au cours de la simulation. En nous basant sur la version explicite du schéma, nous choisissons ici d'imposer une condition de stabilité par combinaison convexe. Plus précisément, dans le cas où  $p > 2$ , le développement de l'expression

(2.30) conduit à

$$\begin{aligned}
 h_{i,j}^{n+1} = & \left[ 1 - \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right) \left( (B_{i-1/2,j-1/2}^n)^{\frac{p-2}{2}} + (B_{i-1/2,j+1/2}^n)^{\frac{p-2}{2}} \right. \right. \\
 & \left. \left. + (B_{i+1/2,j-1/2}^n)^{\frac{p-2}{2}} + (B_{i+1/2,j+1/2}^n)^{\frac{p-2}{2}} \right) \right] h_{i,j}^n \\
 & + \frac{\Delta t}{2\Delta x^2} \left[ (B_{i-1/2,j-1/2}^n)^{\frac{p-2}{2}} + (B_{i-1/2,j+1/2}^n)^{\frac{p-2}{2}} \right] h_{i-1,j}^n \\
 & + \frac{\Delta t}{2\Delta x^2} \left[ (B_{i+1/2,j-1/2}^n)^{\frac{p-2}{2}} + (B_{i+1/2,j+1/2}^n)^{\frac{p-2}{2}} \right] h_{i+1,j}^n \\
 & + \frac{\Delta t}{2\Delta y^2} \left[ (B_{i-1/2,j-1/2}^n)^{\frac{p-2}{2}} + (B_{i+1/2,j-1/2}^n)^{\frac{p-2}{2}} \right] h_{i,j-1}^n \\
 & + \frac{\Delta t}{2\Delta y^2} \left[ (B_{i-1/2,j+1/2}^n)^{\frac{p-2}{2}} + (B_{i+1/2,j+1/2}^n)^{\frac{p-2}{2}} \right] h_{i,j+1}^n.
 \end{aligned}$$

Il est facile de voir que la somme de tous les coefficients est égale à 1. De plus, les coefficients en facteur des termes  $h_{i-1,j}^n$ ,  $h_{i+1,j}^n$ ,  $h_{i,j-1}^n$ ,  $h_{i,j+1}^n$  sont positifs ou nuls par définition. Afin de satisfaire la condition de stabilité, il reste à imposer que le coefficient en facteur de  $h_{i,j}^n$  soit positif ou nul. Cela devant être vérifié pour tout  $i, j$ , la condition CFL considérée est définie par

$$\begin{aligned}
 \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right) \max_{i,j} \left[ (B_{i-1/2,j-1/2}^n)^{\frac{p-2}{2}} + (B_{i-1/2,j+1/2}^n)^{\frac{p-2}{2}} \right. \\
 \left. + (B_{i+1/2,j-1/2}^n)^{\frac{p-2}{2}} + (B_{i+1/2,j+1/2}^n)^{\frac{p-2}{2}} \right] \leq 1. \quad (2.44a)
 \end{aligned}$$

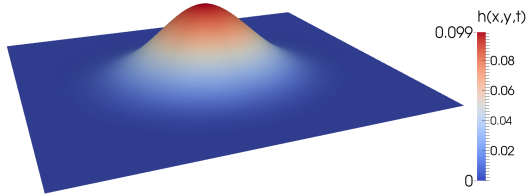
Dans le cas où  $p < 2$ , la méthode est la même mais fait intervenir la régularisation. La condition de stabilité dans pour ce cas est alors

$$\begin{aligned}
 \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right) \max_{i,j} \left[ \max(B_{i-1/2,j-1/2}^n, \varepsilon)^{\frac{p-2}{2}} + \max(B_{i-1/2,j+1/2}^n, \varepsilon)^{\frac{p-2}{2}} \right. \\
 \left. + \max(B_{i+1/2,j-1/2}^n, \varepsilon)^{\frac{p-2}{2}} + \max(B_{i+1/2,j+1/2}^n, \varepsilon)^{\frac{p-2}{2}} \right] \leq 1. \quad (2.44b)
 \end{aligned}$$

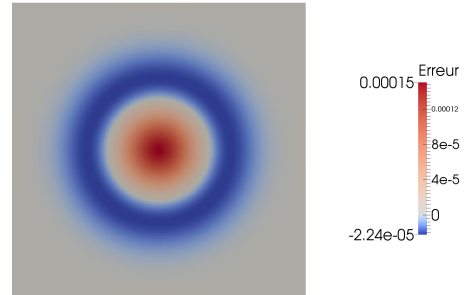
## 2.2.6 Résultats numériques

Regardons à présent le comportement du schéma numérique à travers quelques cas tests. Tout comme dans le cas 1D, nous allons comparer les résultats à la solution élémentaire, dont la formule complète est détaillée en annexe A. L'état initial est ainsi composé d'une masse de Dirac au centre du domaine, puis l'évolution est simulée jusqu'à  $T = 1$ .

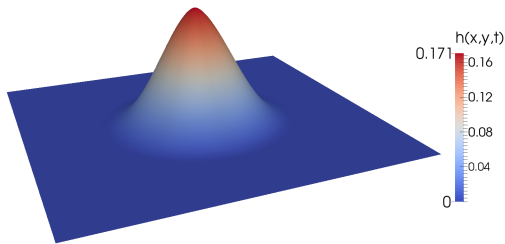
Intéressons-nous dans un premier temps au cas où  $p > 2$ . Le domaine choisi est de taille  $10 \times 10$ , discrétisé sur  $801 \times 801$  mailles. À chaque pas de temps, le système non-linéaire est résolu à l'aide de la méthode de Newton. Le critère d'arrêt associé est fixé à  $10^{-6}$  sur la norme  $L^\infty$  du résidu. Le pas de temps, quant à lui, est géré à partir de la condition CFL (2.44a). Les résultats obtenus pour différentes valeurs de l'exposant  $p$  sont présentés



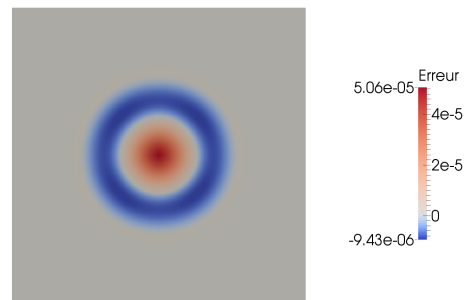
(a) Solution numérique pour  $p = 2.1$ .



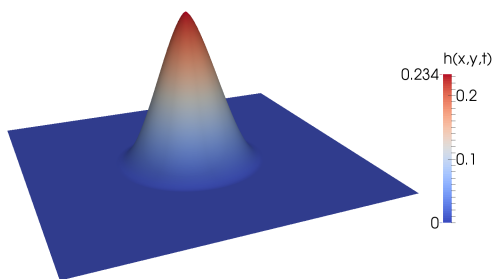
(b) Écart entre solution numérique et solution exacte  $h_{\text{num.}} - h_{\text{ex.}}$  pour  $p = 2.1$ .



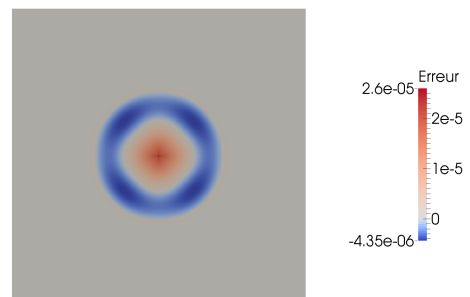
(c) Solution numérique pour  $p = 2.5$ .



(d) Écart entre solution numérique et solution exacte  $h_{\text{num.}} - h_{\text{ex.}}$  pour  $p = 2.5$ .



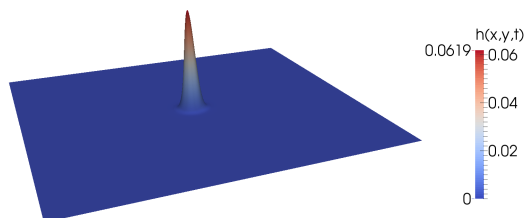
(e) Solution numérique pour  $p = 2.9$ .



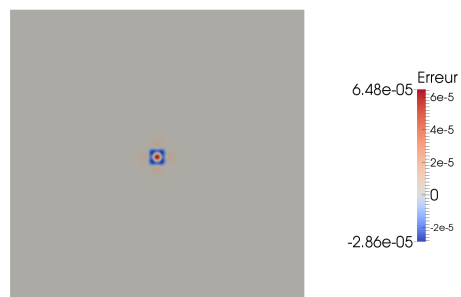
(f) Écart entre solution numérique et solution exacte  $h_{\text{num.}} - h_{\text{ex.}}$  pour  $p = 2.9$ .

FIGURE 2.11 – Résultats numériques au temps  $T = 1$  en diffusion lente ( $p > 2$ ).

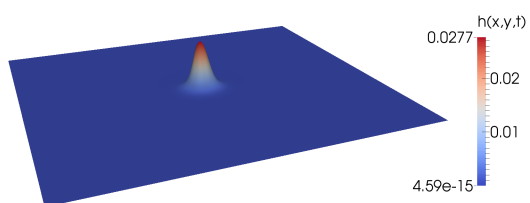




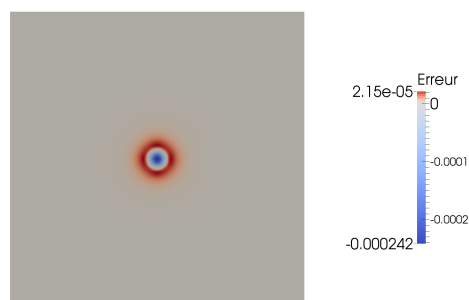
(a) Solution numérique pour  $p = 1.9$ .



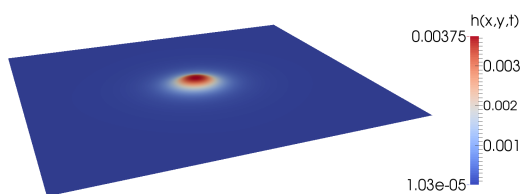
(b) Écart entre solution numérique et solution exacte  $h_{\text{num.}} - h_{\text{ex.}}$  pour  $p = 1.9$ .



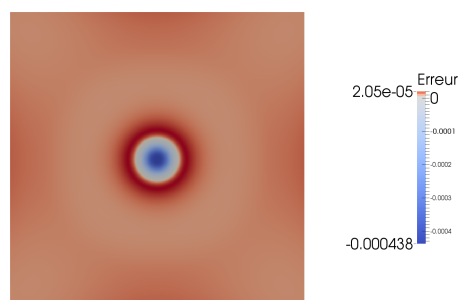
(c) Solution numérique pour  $p = 1.7$ .



(d) Écart entre solution numérique et solution exacte  $h_{\text{num.}} - h_{\text{ex.}}$  pour  $p = 1.7$ .

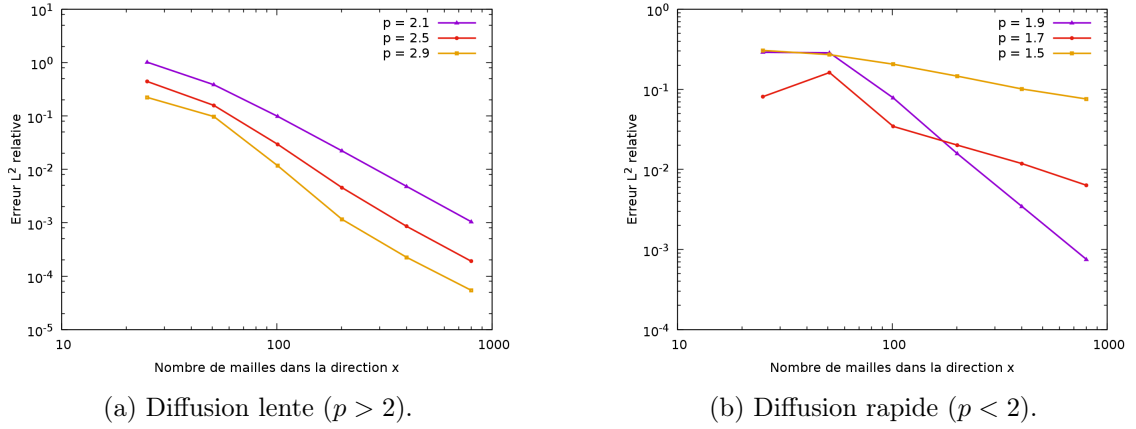


(e) Solution numérique pour  $p = 1.5$ .



(f) Écart entre solution numérique et solution exacte  $h_{\text{num.}} - h_{\text{ex.}}$  pour  $p = 1.5$ .

FIGURE 2.12 – Résultats numériques au temps  $T = 1$  en diffusion rapide ( $p < 2$ ).

FIGURE 2.13 – Convergence du schéma numérique pour différentes valeurs de  $p$ .

Valeur de $p$	Ordre de convergence
1.5	0.417
1.7	0.901
1.9	2.201
2.1	2.208
2.5	2.177
2.9	2.061

TABLE 2.2 – Évolution de l'ordre de convergence du schéma en fonction de la valeur de  $p$ .

en figure 2.11. Dans ce cas, les solutions numériques sont à support compact, tout comme la solution exacte. On peut également observer que la vitesse de diffusion ralentit lorsque  $p$  augmente. Enfin, l'écart avec la solution élémentaire étant faible, on peut en déduire que le schéma numérique permet de fournir une approximation correcte.

Penchons-nous à présent sur le cas de la diffusion rapide, c'est-à-dire lorsque  $p < 2$ . Dans cette situation, un domaine de taille  $200 \times 200$  est considéré, lequel est discrétisé sur  $801 \times 801$  mailles. À chaque itération en temps, le système non-linéaire est résolu par la méthode de Newton, avec le même critère d'arrêt que précédemment. Le pas de temps est lui géré à partir de la condition CFL (2.44b). En figure 2.12 sont rassemblés les résultats obtenus au temps final. Notons déjà qu'en 2D, nous ne pouvons ici effectuer des comparaisons que si  $p > 4/3$ . Cela est dû à l'expression de la solution exacte détaillée en annexe A. Pour  $1 < p < 4/3$ , la solution élémentaire n'a pas été calculée. Néanmoins, pour des précisions sur le comportement du  $p$ -Laplacien dans ce cas de figure, on pourra se référer à Di Benedetto et Herrero [24]. Les résultats obtenus ici reflètent un comportement similaire à celui observé en 1D. Plus précisément, on observe que plus la valeur de  $p$  diminue, plus la diffusion est rapide. En particulier, pour  $p = 1.5$ , on observe un important effet d'accumulation aux bords.

Par ailleurs, en analysant les résultats de convergence présentés sur la figure 2.13 et dans le tableau 2.2, on retrouve un ordre de convergence aux alentours de 2 dans le cas

de la diffusion lente. En revanche, on observe une perte de vitesse de convergence lorsque  $p < 2$ . À nouveau, les effets de bords ne semble a priori pas être la cause de ce phénomène, étant donné que ces derniers sont négligeables pour  $p = 1.7$  alors que l'ordre de convergence obtenu est de 0.9.

## 2.3 Récapitulatif

Dans ce chapitre nous avons mené une étude numérique de l'équation du  $p$ -Laplacien instationnaire dans le cadre des Volumes Finis. Bien qu'en 1D l'élaboration d'un schéma implicite paraisse assez naturelle, le cas bidimensionnel est loin d'être trivial avec la difficulté que pose la discrétisation de la norme du gradient. L'approche retenue pour traiter ce terme est basée sur les travaux de Andreianov et al. [3]. L'approximation qui en découle est néanmoins prise en compte de manière explicite, dans le but de s'affranchir d'une quantité conséquente de calculs. Un effet secondaire de cette méthode est de devoir considérer une couche de mailles fictives autour du domaine de calcul afin de pouvoir définir les flux tangentiels aux bords. À la vue des résultats numériques obtenus pour  $p > 2$ , le fait de ne pas travailler avec un schéma totalement implicite ne semble a priori pas être préjudiciable. En revanche, le cas de la diffusion rapide (correspondant à  $p < 2$ ) est davantage discutable. Dans cette configuration, il est nécessaire de régulariser les flux afin d'éviter des problèmes de singularité. Une perte d'ordre de convergence est observée lorsque  $p$  tend à diminuer, cependant la cause de ce phénomène reste à éclaircir.

Un premier modèle stratigraphique, qui sera étudié dans le chapitre suivant, est basé sur l'équation du  $p$ -Laplacien instationnaire avec  $p > 2$  afin de simuler le transport non-linéaire de sédiments. L'étude menée dans cette partie permettra alors de fournir une base de schéma numérique adéquat. La méthodologie sera également adaptée aux modèles abordés dans les chapitres 5 et 6.

## Chapitre 3

# Modèle monolithologique sous contrainte de taux d'érosion maximal

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Présentation du modèle . . . . .</b>	<b>44</b>
3.1.1	Diffusion des sédiments . . . . .	45
3.1.2	Limitation de l'érosion . . . . .	46
3.1.3	Modèle complet . . . . .	46
<b>3.2</b>	<b>Propriétés du modèle . . . . .</b>	<b>47</b>
<b>3.3</b>	<b>Schéma numérique Volumes Finis . . . . .</b>	<b>49</b>
3.3.1	Discrétisation de l'équation de conservation des sédiments . . . . .	49
3.3.2	Discrétisation de l'équation de complémentarité . . . . .	50
3.3.3	Conditions aux limites et données initiales . . . . .	51
<b>3.4</b>	<b>Assemblage et résolution du système . . . . .</b>	<b>52</b>
<b>3.5</b>	<b>Propriétés du schéma numérique . . . . .</b>	<b>53</b>
<b>3.6</b>	<b>Résultats numériques . . . . .</b>	<b>58</b>
3.6.1	Onde progressive . . . . .	58
3.6.2	Érosion d'une zone montagneuse . . . . .	61
<b>3.7</b>	<b>Récapitulatif . . . . .</b>	<b>65</b>

---

*Ce chapitre est dédié à un premier modèle stratigraphique digne d'intérêt pour les géologues. Monolithologique, il peut-être vu comme une extension des travaux effectués par Eymard et al. [33, 42]. La nouveauté réside dans la définition du flux de sédiments, qui est à présent choisi comme étant non-linéaire par rapport à la pente du sol. Cela se traduit par la prise en compte d'un  $p$ -Laplacien, avec  $p > 2$ . Rappelons que le passage à un flux non-linéaire est motivé par la volonté d'obtenir un plus grand réalisme du point de vue physique, avec notamment l'observation de « points d'arrêts ». Une première étude de ce modèle dans le cas 1D a fait l'objet d'un stage [27], dont les résultats ont encouragé la poursuite des travaux dans ce sens. Tout comme dans les travaux précédents, le transport des sédiments est couplé à une contrainte sur le taux d'érosion, mais cette fois-ci formulée à l'aide d'une condition de complémentarité. Ce modèle a fait l'objet d'un acte de congrès [20] à l'occasion de la conférence Finite Volumes for Complex Applications 8.*

*Ce chapitre débutera par la présentation du modèle en section 3.1, suivie de quelques unes de ses propriétés dans la section 3.2. Ensuite, dans la section 3.3 viendra la construction d'un schéma numérique Volumes Finis, qui sera basée sur l'étude du  $p$ -Laplacien instationnaire menée dans le chapitre 2. La partie 3.4 abordera alors la méthode de résolution qui sera effectuée par la méthode de Newton. À la suite de cela, en section 3.5 seront énoncées des propriétés au niveau discret, et en particulier l'existence d'une solution au schéma numérique. Pour conclure, la section 3.6 rassemblera les résultats numériques.*

*Ce modèle est une première étape avant de passer à la prise en compte de processus physiques supplémentaires. Les effets de l'eau permettant de simuler entre autres fleuves et précipitations sont introduits dans le chapitre 5. L'extension au cas de plusieurs lithologies sera quant à elle abordée au chapitre 6.*

### 3.1 Présentation du modèle

Dans un premier temps nous allons détailler la construction du modèle stratigraphique qui nous intéressera tout au long de ce chapitre. Celui-ci a pour but principal de simuler l'évolution de la hauteur de sédiments  $h$  au sein d'un bassin sédimentaire. Nous nous intéressons ici à deux processus essentiels, et qui serviront de base dans les chapitres suivants. En premier lieu, on trouve le transport des sédiments. C'est un élément important puisque c'est à travers lui qu'est contrôlée l'évolution de la morphologie du bassin. En particulier, que ce soit en domaine marin ou continental, la diffusion peut s'effectuer à des vitesses différentes. Cela se traduit en pratique par la présence d'une « cassure » au niveau du littoral, comme illustré sur la figure 3.1a. D'autre part, une contrainte sur le taux d'érosion est considérée. Outre le fait d'apporter plus de réalisme, elle permet de limiter le transport des sédiments dans les milieux où la diffusion est importante. Cela permet de reproduire non seulement le transport mais également la disponibilité en sédiments érodables. Cette limitation a ainsi pour but de reproduire des structures géologiques spécifiques, comme par exemple celles de la figure 3.1b. Dans le modèle stratigraphique présenté ici, les phénomènes de compaction des sédiments, de subsidence et de flexure ne sont pas pris en compte.



(a) Embouchure du fleuve Horton (Canada).



(b) Monument Valley (États-Unis).

FIGURE 3.1 – Exemples de reliefs.

### 3.1.1 Diffusion des sédiments

Dorénavant nous nous plaçons dans un domaine rectangulaire  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . Le premier point d'intérêt du modèle est la modélisation du transport des sédiments. Pour ce faire, le flux de matière est choisi comme étant non-linéaire par rapport à la pente du sol, via l'utilisation d'un  $p$ -Laplacien avec  $p > 2$ . Cette sophistication permet d'assurer que la diffusion se déroule à vitesse finie, comme nous avons pu le voir dans le chapitre 2. Le flux de sédiments est ainsi défini par

$$\mathbf{F} = -K_g(h)|\nabla h|^{p-2}\nabla h, \quad p > 2, \quad (3.1a)$$

ou de manière équivalente par

$$\mathbf{F} = -|\nabla h|^{p-2}\nabla\psi_g(h), \quad p > 2, \quad (3.1b)$$

avec

$$\psi_g(h) = \int_{H_m}^h K_g(s) ds, \quad (3.2)$$

où  $H_m$  représente le niveau de la mer. En particulier, un coefficient de diffusion gravitaire  $K_g$  est pris en compte. Ce dernier dépend de la hauteur de sédiments  $h$  dans le but de différencier le domaine marin ( $h < H_m$ ) et le domaine continental ( $h \geq H_m$ ) :

$$K_g(h) = \begin{cases} K_{g,m}, & \text{si } h < H_m, \\ K_{g,c}, & \text{si } h \geq H_m. \end{cases} \quad (3.3)$$

Du point de vue numérique, il est préférable de considérer le flux de sédiments comme étant défini sous la forme (3.1b). Cette version permet en effet de mieux gérer le caractère fortement discontinu de  $K_g$ , et ainsi de capturer de manière plus satisfaisante la ligne de côte séparant les domaines marins et continentaux, comme remarqué par Dumas [27] et Gervais [42]. Ainsi, une première équation de conservation permettant de modéliser le transport des sédiments est donnée par

$$\partial_t h + \operatorname{div}(-|\nabla h|^{p-2}\nabla\psi_g(h)) = 0, \quad \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}_+. \quad (3.4)$$

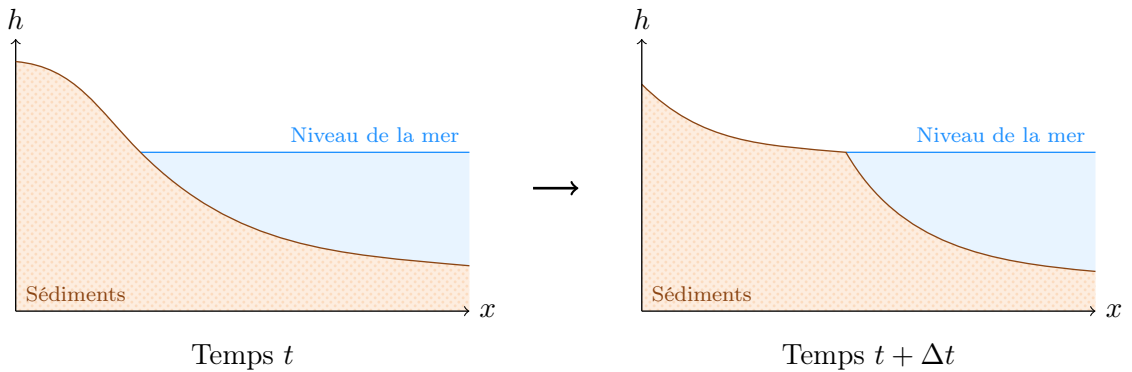


FIGURE 3.2 – Exemple d'évolution sans contrainte sur le taux d'érosion.

### 3.1.2 Limitation de l'érosion

La prise en compte de l'équation (3.4) seule est insuffisante pour reproduire fidèlement les observations de terrain. En particulier, le phénomène de diffusion peut s'avérer trop important dans certaines zones, comme illustré sur la figure 3.2. C'est par exemple le cas au niveau des falaises, où la pente  $\nabla h$  est importante.

Dans le but d'apporter plus de réalisme dans les résultats numériques, nous reprenons la même approche que Eymard et al. [33, 42] pour introduire une contrainte sur le taux d'érosion. Cela fait suite à la constatation que les processus de sédimentation et d'érosion ne sont pas symétriques. En effet : la disponibilité en sédiments érodables est limitée tandis que la sédimentation n'est soumise à aucune contrainte. Plusieurs approches pour modéliser cette limitation ont été formulées (voir [42] et les références s'y trouvant). Pour notre cas d'étude, un taux d'érosion maximal noté par  $E$  est introduit, et vérifie  $E(x, y) > 0$ . En pratique, ce dernier dépend de données physiques telles que le climat, le type de sédiments, ou encore la bathymétrie. On impose alors la relation suivante sur la vitesse d'érosion :

$$\partial_t h + E \geq 0, \quad \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}_+. \quad (3.5)$$

Il reste à présent à coupler cette contrainte avec le transport des sédiments. Pour cela, une nouvelle variable  $\lambda$ , appelée limiteur de flux, est introduite dans l'équation de conservation (3.4) via la formule

$$\partial_t h + \text{div}(\lambda \mathbf{F}) = 0, \quad \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}_+, \quad (3.6)$$

où  $\lambda \mathbf{F}$  représente le flux de sédiments limité. Dans le cas où la contrainte (3.5) est inactive, c'est-à-dire si le flux naturel (3.1b) vérifie  $\partial_t h + E \geq 0$  (ce qui est équivalent à  $\text{div}(\mathbf{F}) \leq E$ ), alors ce dernier n'a pas besoin d'être limité et  $\lambda = 1$ . Inversement, si le flux (3.1b) satisfait  $\partial_t h + E < 0$  (ou encore  $\text{div}(\mathbf{F}) > E$ ), une correction est nécessaire. Dans cette configuration, il est remplacé par  $\lambda \mathbf{F}$  avec  $0 < \lambda \leq 1$  dans le but d'avoir  $\partial_t h + E = 0$ . En d'autres termes, les relations suivantes sont vérifiées :

$$\partial_t h + E \geq 0, \quad 1 - \lambda \geq 0, \quad (\partial_t h + E)(1 - \lambda) = 0, \quad \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}_+. \quad (3.7)$$

Cette condition de complémentarité peut se reformuler sous la forme condensée

$$\min(1 - \lambda, \partial_t h + E) = 0, \quad \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}_+. \quad (3.8)$$

L'intérêt de l'ajout de la limitation sur l'érosion est illustré sur la figure 3.3. Par le biais de cette contrainte, le processus d'érosion ne peut pas s'effectuer au-delà d'une certaine limite, définie à partir de  $E$ .

### 3.1.3 Modèle complet

Le modèle couplé que nous allons étudier dans ce chapitre est composé de l'équation de conservation (3.4) et de l'équation de complémentarité (3.8). Dans cette dernière, le second argument de la fonction min est remplacé par  $E - \text{div}(\lambda \mathbf{F})$ , pour ne pas avoir à gérer de dérivée temporelle. Le système d'inconnues  $h$  et  $\lambda$  est alors

$$\partial_t h + \text{div}(\lambda \mathbf{F}) = 0, \quad \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}_+, \quad (3.9a)$$

$$\min(1 - \lambda, E - \text{div}(\lambda \mathbf{F})) = 0, \quad \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}_+, \quad (3.9b)$$

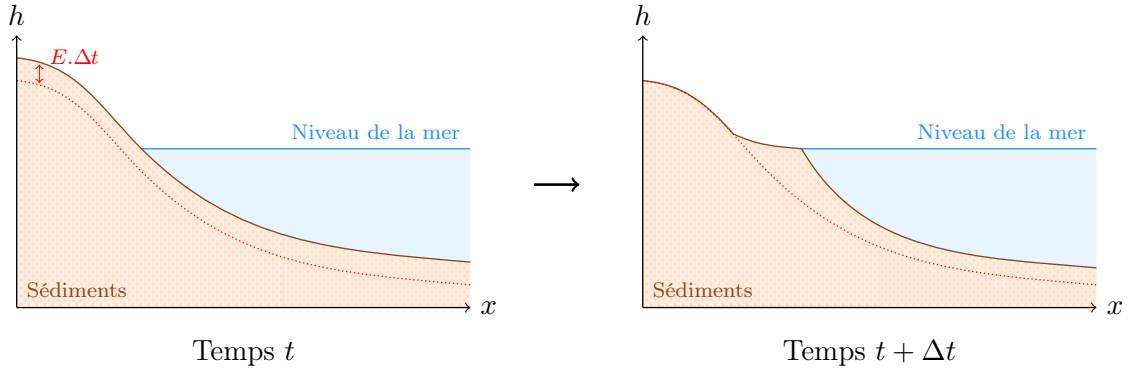


FIGURE 3.3 – Exemple d'évolution avec contrainte sur le taux d'érosion.

où  $\mathbf{F}$  est donné par (3.1b). Le modèle est complété par des conditions aux limites symbolisant des flux entrants de sédiments :

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = \phi \leq 0, \quad \text{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}_+, \quad (3.10a)$$

$$\lambda = 1, \quad \text{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}_+. \quad (3.10b)$$

Enfin, on se donne une topographie initiale

$$h(x, y, t = 0) = h_0(x, y), \quad \text{dans } \Omega, \quad (3.11)$$

vérifiant  $h_* \leq h_0 \leq h^*$  avec  $h_*, h^* \in \mathbb{R}_+$ . Remarquons qu'il n'est pas nécessaire de prescrire une condition initiale pour  $\lambda$ . L'équation (3.9b) étant instantanée en temps, connaître (3.11) suffit à déterminer la valeur de  $\lambda$  au temps  $T = 0$ .

## 3.2 Propriétés du modèle

Voyons à présent quelques propriétés vérifiées par le modèle stratigraphique au niveau continu. Nous supposons que les solutions  $h$  et  $\lambda$  sont suffisamment régulières pour justifier les calculs ci-dessous. On fera également l'hypothèse que le limiteur de flux  $\lambda$  est positif, ce qui sera démontré au niveau discret dans la proposition 3.4.

**Proposition 3.1** (Préservation de la borne inférieure sur la hauteur de sédiments). *Soit  $T > 0$ . La hauteur de sédiments au temps  $T$  vérifie la relation*

$$h(x, y, T) \geq h_*, \quad \text{dans } \Omega. \quad (3.12)$$

*Démonstration.* Dans un premier temps, on commence par multiplier l'équation de conservation (3.9a) par  $(h - h_*)^-$  (où  $a^- = \min(0, a)$ ) puis on intègre sur  $\Omega \times [0, T]$  :

$$\int_0^T \int_{\Omega} (h - h_*)^- \partial_t h \, dx \, dy \, dt + \int_0^T \int_{\Omega} (h - h_*)^- \operatorname{div}(\lambda \mathbf{F}) \, dx \, dy \, dt = 0.$$



En remarquant ensuite que  $2(h - h_*)^- \partial_t h = \partial_t \{(h - h_*)^-\}^2$  ainsi qu'en reformulant la deuxième intégrale, la formule précédente devient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{(h - h_*)^-\}^2 \Big|_{t=T} dx dy - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{(h - h_*)^-\}^2 \Big|_{t=0} dx dy \\ & + \int_0^T \int_{\Omega} \operatorname{div}(\lambda(h - h_*)^- \mathbf{F}) dx dy dt - \int_0^T \int_{\Omega} \lambda \nabla(h - h_*)^- \cdot \mathbf{F} dx dy dt = 0. \end{aligned}$$

Or par hypothèse on sait que  $h_0 \geq h_*$ . En utilisant la formule de Stokes ainsi qu'en explicitant la formule du flux de sédiments, on arrive à la nouvelle relation

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{(h - h_*)^-\}^2 \Big|_{t=T} dx dy &= - \int_0^T \int_{\partial\Omega} \lambda(h - h_*)^- \phi d\sigma dt \\ &\quad - \int_0^T \int_{\Omega} \lambda K_g(h) |\nabla h|^p \mathbb{1}_{\{h < h_*\}} dx dy dt \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

De cette inégalité on en déduit que la seule possibilité est d'avoir  $h \geq h_*$  sur  $\Omega \times [0, T]$ .  $\square$

**Proposition 3.2** (Conservation de la masse). *Soit  $T > 0$ . La masse de sédiments au temps  $T$  vérifie la relation*

$$\int_{\Omega} h|_{t=T} dx dy = \int_{\Omega} h_0 dx dy - \int_0^T \int_{\partial\Omega} \phi d\sigma dt. \quad (3.13)$$

*Démonstration.* Il suffit d'intégrer l'équation de conservation (3.9a) sur  $\Omega \times [0, T]$  :

$$\int_0^T \int_{\Omega} \partial_t h dx dy dt + \int_0^T \int_{\Omega} \operatorname{div}(\lambda \mathbf{F}) dx dy dt = 0,$$

qui peut s'écrire grâce à la formule de Stokes sous la forme

$$\int_{\Omega} h|_{t=T} dx dy - \int_{\Omega} h_0 dx dy + \int_0^T \int_{\partial\Omega} \lambda \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma dt = 0.$$

Il reste à utiliser les conditions aux limites (3.10) pour obtenir le résultat.  $\square$

Introduisons à présent la notion d'énergie du système par

$$\mathfrak{E}(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} h(x, y, t)^2 dx dy. \quad (3.14)$$

On a alors la propriété suivante :

**Proposition 3.3** (Estimation d'énergie). *Soit  $T > 0$ . Le système (3.9)–(3.11) vérifie l'estimation d'énergie*

$$\mathfrak{E}(T) = \mathfrak{E}(0) - \int_0^T \int_{\partial\Omega} h \phi d\sigma dt - \int_0^T \int_{\Omega} \lambda K_g(h) |\nabla h|^p dx dy dt. \quad (3.15)$$

*Dans le cas particulier où il n'y a aucun flux entrants (c'est-à-dire si  $\phi = 0$  sur  $\partial\Omega \times \mathbb{R}_+$ ), on a de plus une décroissance de l'énergie au cours du temps.*

*Démonstration.* La preuve consiste à multiplier l'équation (3.9a) par  $h$  puis à intégrer sur  $\Omega \times [0, T]$  :

$$\int_0^T \int_{\Omega} h \partial_t h \, dx \, dy \, dt + \int_0^T \int_{\Omega} h \operatorname{div}(\lambda \mathbf{F}) \, dx \, dy \, dt = 0,$$

ce qui peut se reformuler par

$$\int_0^T \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{h^2}{2} \, dx \, dy \, dt + \int_0^T \int_{\Omega} \operatorname{div}(\lambda h \mathbf{F}) \, dx \, dy \, dt - \int_0^T \int_{\Omega} \lambda \nabla h \cdot \mathbf{F} \, dx \, dy \, dt = 0.$$

En explicitant les intégrales et en utilisant la formule de Stokes, on obtient le résultat annoncé.  $\square$

### 3.3 Schéma numérique Volumes Finis

Afin d'approcher numériquement le modèle (3.9)–(3.11), un schéma Volumes Finis est maintenant présenté. Pour ce faire, nous allons nous baser sur le schéma élaboré dans le chapitre 2 pour l'équation du  $p$ -Laplacien instationnaire (avec  $p > 2$ ). Dans un premier temps nous nous pencherons sur l'équation de conservation (3.9a), suivi de l'équation de complémentarité (3.9b), et enfin nous terminerons par les conditions aux limites et la donnée initiale.

#### 3.3.1 Discrétisation de l'équation de conservation des sédiments

Tout d'abord, la dérivée temporelle est approchée par une méthode d'Euler implicite. En ce qui concerne les dérivées spatiales du flux, elles sont traitées via l'utilisation de différences finies. La discrétisation choisie pour l'équation de conservation (3.9a) est alors donnée par

$$\frac{h_{i,j}^{n+1} - h_{i,j}^n}{\Delta t} + \frac{(\lambda F)_{i+1/2,j}^{n+1} - (\lambda F)_{i-1/2,j}^{n+1}}{\Delta x} + \frac{(\lambda F)_{i,j+1/2}^{n+1} - (\lambda F)_{i,j-1/2}^{n+1}}{\Delta y} = 0. \quad (3.16)$$

Le flux limité  $\lambda \mathbf{F}$  est ensuite approché avec un décentrage amont de  $\lambda$  par rapport au signe de  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$  :

$$(\lambda F)_{i+1/2,j}^{n+1} = \lambda_{i,j}^{n+1} (F_{i+1/2,j}^{n+1})^+ + \lambda_{i+1,j}^{n+1} (F_{i+1/2,j}^{n+1})^-, \quad (3.17a)$$

$$(\lambda F)_{i,j+1/2}^{n+1} = \lambda_{i,j}^{n+1} (F_{i,j+1/2}^{n+1})^+ + \lambda_{i,j+1}^{n+1} (F_{i,j+1/2}^{n+1})^-, \quad (3.17b)$$

avec la convention  $a^+ = \max(0, a) \geq 0$  et  $a^- = \min(0, a) \leq 0$ . Le flux de sédiments non limité  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$  est quant à lui discrétisé par une formule semi-implicite. Pour cela, l'approximation du terme  $|\nabla h|^{p-2}$  est inspirée de la méthode développée pour le  $p$ -Laplacien instationnaire dans le chapitre 2 (voir la formule (2.32)). Le gradient restant est approché par une différence finie, ce qui conduit à

$$F_{i+1/2,j}^{n+1} = -\frac{1}{2} \left[ (B_{i+1/2,j+1/2}^n)^{\frac{p-2}{2}} + (B_{i+1/2,j-1/2}^n)^{\frac{p-2}{2}} \right] \frac{\psi_g(h_{i+1,j}^{n+1}) - \psi_g(h_{i,j}^{n+1})}{\Delta x}, \quad (3.18a)$$

$$F_{i,j+1/2}^{n+1} = -\frac{1}{2} \left[ (B_{i-1/2,j+1/2}^n)^{\frac{p-2}{2}} + (B_{i+1/2,j+1/2}^n)^{\frac{p-2}{2}} \right] \frac{\psi_g(h_{i,j+1}^{n+1}) - \psi_g(h_{i,j}^{n+1})}{\Delta y}. \quad (3.18b)$$

### 3.3.2 Discrétisation de l'équation de complémentarité

Regardons à présent le cas de l'équation de complémentarité. En premier lieu, il est nécessaire de discrétiser le taux d'érosion maximal  $E$  :

$$E_{i,j} = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{\mathcal{M}_{i,j}} E(x, y) \, dx \, dy. \quad (3.19)$$

Dans l'équation (3.9b), une première étape consiste alors à écrire la divergence discrète comme précédemment pour la relation (3.16) :

$$\min \left( 1 - \lambda_{i,j}^{n+1}, E_{i,j} - \frac{(\lambda F)_{i+1/2,j}^{n+1} - (\lambda F)_{i-1/2,j}^{n+1}}{\Delta x} - \frac{(\lambda F)_{i,j+1/2}^{n+1} - (\lambda F)_{i,j-1/2}^{n+1}}{\Delta y} \right) = 0. \quad (3.20)$$

Pour la suite des calculs, nous introduisons deux notations. La première correspond à la notion de *flux non limité sortant total* :

$$\langle F \rangle_{i,j}^{n+1} = \Delta y \left[ (F_{i+1/2,j}^{n+1})^+ - (F_{i-1/2,j}^{n+1})^- \right] + \Delta x \left[ (F_{i,j+1/2}^{n+1})^+ - (F_{i,j-1/2}^{n+1})^- \right], \quad (3.21a)$$

et la seconde celle de *flux limité entrant total* :

$$\begin{aligned} \rangle \lambda F \langle_{i,j}^{n+1} = \Delta y \left[ \lambda_{i-1,j}^{n+1} (F_{i-1/2,j}^{n+1})^+ - \lambda_{i+1,j}^{n+1} (F_{i+1/2,j}^{n+1})^- \right] \\ + \Delta x \left[ \lambda_{i,j-1}^{n+1} (F_{i,j-1/2}^{n+1})^+ - \lambda_{i,j+1}^{n+1} (F_{i,j+1/2}^{n+1})^- \right]. \end{aligned} \quad (3.21b)$$

L'équation (3.20) peut alors s'écrire de manière plus compacte sous la forme

$$\min \left( 1 - \lambda_{i,j}^{n+1}, E_{i,j} - \lambda_{i,j}^{n+1} \frac{\langle F \rangle_{i,j}^{n+1}}{\Delta x \Delta y} + \frac{\rangle \lambda F \langle_{i,j}^{n+1}}{\Delta x \Delta y} \right) = 0. \quad (3.22)$$

L'idée est maintenant de calibrer cette nouvelle relation. Pour cela, on pourra noter que résoudre  $\min(a, b) = 0$  est équivalent à résoudre  $\min(a, \gamma b) = 0$ , pour tout  $\gamma > 0$ . Dans le cas où  $\langle F \rangle_{i,j}^{n+1}$  est non nul, ce coefficient est choisi comme étant  $\gamma = \Delta x \Delta y / \langle F \rangle_{i,j}^{n+1}$ . La relation devient alors

$$\min \left( 1 - \lambda_{i,j}^{n+1}, \frac{\Delta x \Delta y E_{i,j} + \rangle \lambda F \langle_{i,j}^{n+1}}{\langle F \rangle_{i,j}^{n+1}} - \lambda_{i,j}^{n+1} \right) = 0.$$

Enfin, en remarquant que  $\min(a - c, b - c) = \min(a, b) - c$ , il est possible d'extraire le limiteur de flux de la fonction min afin d'obtenir la formule finale

$$\lambda_{i,j}^{n+1} = \min \left( 1, \frac{\Delta x \Delta y E_{i,j} + \rangle \lambda F \langle_{i,j}^{n+1}}{\langle F \rangle_{i,j}^{n+1}} \right). \quad (3.23)$$

Dans le cas particulier où  $\langle F \rangle_{i,j}^{n+1} = 0$ , la relation (3.22) se réduit à

$$\min \left( 1 - \lambda_{i,j}^{n+1}, E_{i,j} + \frac{\rangle \lambda F \langle_{i,j}^{n+1}}{\Delta x \Delta y} \right) = 0. \quad (3.24)$$

Or  $E$  étant strictement positif par définition, il s'ensuit que le deuxième argument de la fonction  $\min$  est lui aussi strictement positif (voir également la proposition 3.4). Le seul moyen de satisfaire l'équation est alors d'avoir  $\lambda_{i,j}^{n+1} = 1$ . Du point de vue physique, ce résultat n'est pas surprenant. En effet, avoir  $\langle F \rangle_{i,j}^{n+1} = 0$  signifie que la maille considérée n'admet aucun flux sortant, et donc en particulier, qu'elle n'est pas en érosion. Il n'y a donc pas de raison de faire intervenir un limiteur de flux pour satisfaire la contrainte de taux d'érosion maximal, d'où  $\lambda_{i,j}^{n+1} = 1$ .

### 3.3.3 Conditions aux limites et données initiales

En ce qui concerne la prise en compte des conditions aux limites, reprenons l'idée présentée dans le chapitre 2. Pour chaque maille fictive, une nouvelle équation est considérée afin de traiter les flux imposés aux bords du domaine. Sur ces mailles, le limiteur de flux est imposé égal à 1 afin de ne pas modifier la quantité entrante de sédiments donnée par  $\phi$ . Les équations considérées sont ainsi définies par

$$\Gamma_b : \quad F_{i,1/2}^{n+1} + \frac{1}{\Delta x \Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{(i-1)\Delta x}^{i\Delta x} \phi(x, 0, t) dx dt = 0, \quad (3.25a)$$

$$\Gamma_l : \quad F_{1/2,j}^{n+1} + \frac{1}{\Delta y \Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{(j-1)\Delta y}^{j\Delta y} \phi(0, y, t) dy dt = 0, \quad (3.25b)$$

$$\Gamma_t : \quad F_{i,N_y+1/2}^{n+1} - \frac{1}{\Delta x \Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{(i-1)\Delta x}^{i\Delta x} \phi(x, L_y, t) dx dt = 0, \quad (3.25c)$$

$$\Gamma_r : \quad F_{N_x+1/2,j}^{n+1} - \frac{1}{\Delta y \Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{(j-1)\Delta y}^{j\Delta y} \phi(L_x, y, t) dy dt = 0. \quad (3.25d)$$

Pour les quatre mailles fictives restantes au niveau des coins, la valeur des inconnues associées est déterminée par extrapolation des valeurs aux mailles voisines. Plus précisément, ces équations sont les suivantes :

$$\mathcal{M}_{0,0} : \quad h_{0,0}^{n+1} + h_{1,1}^{n+1} - h_{1,0}^{n+1} - h_{0,1}^{n+1} = 0, \quad (3.26a)$$

$$\mathcal{M}_{N_x+1,0} : \quad h_{N_x+1,0}^{n+1} + h_{N_x,1}^{n+1} - h_{N_x+1,1}^{n+1} - h_{N_x,0}^{n+1} = 0, \quad (3.26b)$$

$$\mathcal{M}_{0,N_y+1} : \quad h_{0,N_y+1}^{n+1} + h_{1,N_y}^{n+1} - h_{1,N_y+1}^{n+1} - h_{0,N_y}^{n+1} = 0, \quad (3.26c)$$

$$\mathcal{M}_{N_x+1,N_y+1} : \quad h_{N_x+1,N_y+1}^{n+1} + h_{N_x,N_y}^{n+1} - h_{N_x,N_y+1}^{n+1} - h_{N_x+1,N_y}^{n+1} = 0. \quad (3.26d)$$

Il reste maintenant à définir la discrétisation initiale de la hauteur de sédiments et du limiteur de flux. Tout d'abord, la donnée  $h_0$  est approchée par la formule

$$h_{i,j}^0 = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{\mathcal{M}_{i,j}} h_0(x, y) dx dy. \quad (3.27)$$

Ensuite vient la détermination de la valeur initiale de  $h$  au niveau des mailles fictives. Pour cela, en suivant la même démarche que dans le chapitre 2, il est possible soit de résoudre un système reliant la valeur de  $h$  et les flux imposés aux bords, soit d'extrapoler les valeurs issues de (3.27). Cette deuxième option est utilisée en pratique.

Localisation	Équation	Inconnue associée
Mailles internes	Équation de conservation sur $h$	$h$
	Équation de complémentarité	$\lambda$
Mailles fictives (bords)	Flux de sédiments imposé	$h$
Mailles fictives (coins)	Extrapolation de $h$	$h$

TABLE 3.1 – Liste des équations et des inconnues associées.

Enfin, la dernière étape concerne l'initialisation de  $\lambda$ . Cette donnée servira essentiellement à débiter la méthode de Newton au premier pas de temps (voir la section 3.4). Afin de limiter les problèmes de convergence de cette méthode, on choisit de calculer une valeur de départ du limiteur de flux n'étant pas trop éloignée de la solution recherchée (au lieu par exemple d'initialiser  $\lambda$  par la valeur 1 dans tout le domaine). Pour cela, plusieurs choix se présentent. Partons dans un premier temps de la discrétisation de l'équation de complémentarité (3.9b) au temps  $t^0$ . Les inconnues sont alors  $(\lambda_{i,j}^0)_{i,j}$ , tandis que les valeurs  $(h_{i,j}^0)_{i,j}$  sont déjà déterminées dans  $\Omega$  et dans les mailles fictives. Une première possibilité consiste à résoudre un système non-linéaire formé des  $N_x \times N_y$  équations de complémentarité. Une autre méthode consiste tout d'abord à trier les mailles internes par ordre topographique décroissant, puis à résoudre les équations (3.9b) dans ce même ordre. L'avantage de cette méthode est qu'elle ne nécessite pas la résolution de système. Cependant, un tri potentiellement important suivant le nombre de mailles est à effectuer, en faisant appel à l'algorithme Quicksort. Après comparaison du temps de calcul nécessaire pour chacune de ces méthodes, nous avons choisi de garder la méthode avec tri par ordre topographique qui a été la plus rapide sur les cas testés (en séquentiel). Cependant, la version parallélisée de la résolution du système non-linéaire peut s'avérer plus rapide que le tri, ce dernier n'étant pas parallélisable.

### 3.4 Assemblage et résolution du système

Le système à résoudre est composé des équations (3.16)–(3.19), (3.23)–(3.26), qui sont au nombre de  $2N_x N_y + 2(N_x + N_y) + 4$ . Le résumé des équations et des inconnues associées est indiqué dans le tableau 3.1. Contrairement aux travaux de Gervais [42] où la résolution numérique était effectuée par une méthode de *variable-switching*, nous utilisons ici une méthode de Newton-min. Il s'agit d'une méthode de Newton adaptée à la condition de complémentarité, dans laquelle les dérivées de l'équation (3.23) sont calculées en fonction de la valeur prise par la fonction min (voir par exemple Ben Gharbia [14]). L'avantage est de ne pas avoir à différencier les cas où la contrainte est active ou non, et ainsi d'avoir le même jeu d'équations et d'inconnues au sein du système.

Le système linéaire apparaissant à chaque itération de Newton est résolu via la méthode du BiCGStab associée au préconditionneur ILU(0) (voir par exemple les travaux de Saad [63] et Van der Vorst [69]), le tout à l'aide la bibliothèque PETSc [8]. La formation de la Jacobienne nécessite néanmoins une attention particulière. Les dérivées issues des équations (3.25) peuvent en effet conduire à un problème de singularité de la matrice. C'est le cas

lorsque la topographie est localement plate à l'instant  $t^n$  : les dérivées correspondantes sont alors égales à 0. Afin de remédier à cet inconvénient, les dérivées sont régularisées suivant la procédure indiquée dans l'algorithme 2.

---

**Algorithme 2** : Régularisation des dérivées de l'équation (3.25a). La démarche pour les autres dérivées issues de (3.25) est similaire.

---

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= (B_{i-1/2,1/2}^n)^{\frac{p-2}{2}} + (B_{i+1/2,1/2}^n)^{\frac{p-2}{2}} ; \\ \frac{\partial F_{i,1/2}^{n+1}}{\partial h_{i,0}^{n+1}} &\approx \frac{\max(\mathcal{B}, \varepsilon)}{2\Delta y} \psi'_g(h_{i,0}^{n+1}) ; \\ \frac{\partial F_{i,1/2}^{n+1}}{\partial h_{i,1}^{n+1}} &\approx -\frac{\max(\mathcal{B}, \varepsilon)}{2\Delta y} \psi'_g(h_{i,1}^{n+1}) ; \end{aligned}$$


---

### 3.5 Propriétés du schéma numérique

Maintenant que le modèle d'étude a été discrétisé, nous pouvons donner quelques propriétés du schéma numérique. En particulier, nous allons calculer des estimations sur la hauteur de sédiments et le limiteur de flux discrets. Ces estimations serviront ensuite à montrer l'existence d'une solution au schéma.

**Proposition 3.4** (Estimation sur le limiteur de flux). *Pour tout  $n \geq 0$ , le limiteur de flux discret vérifie l'estimation*

$$0 < \lambda_{i,j}^{n+1} \leq 1. \quad (3.28)$$

*Démonstration.* Dans la discrétisation (3.23), notons que  $\Delta x \Delta y E_{i,j} > 0$  et que  $\langle F \rangle_{i,j}^{n+1} \geq 0$ . Il reste alors à montrer que  $\rangle \lambda F \langle_{i,j}^{n+1} \geq 0$ . Pour cela, supposons que les mailles soient triées par ordre topographique décroissant, c'est-à-dire de la hauteur de sédiments la plus élevée vers la plus faible. En calculant le limiteur de flux dans cet ordre précis avec (3.23), et grâce au décentrage amont, on peut alors voir que le terme  $\rangle \lambda F \langle_{i,j}^{n+1}$  ne fait intervenir que les inconnues  $\lambda_{i,j}^{n+1}$  calculées dans les mailles précédentes. En particulier, pour la maille avec la hauteur de sédiments la plus élevée, on a  $\rangle \lambda F \langle_{i,j}^{n+1} = 0$  (à moins que celle-ci ne se trouve sur le bord du domaine avec la présence de flux entrants, et dans ce cas  $\rangle \lambda F \langle_{i,j}^{n+1} > 0$ ). Cette démarche prouve ainsi la relation (3.28).  $\square$

**Proposition 3.5** (Préservation de la borne inférieure sur la hauteur de sédiments). *Pour tout  $n \geq 0$ , la hauteur de sédiments est bornée inférieurement :*

$$h_{i,j}^n \geq h_*. \quad (3.29)$$

*Démonstration.* La démonstration se fait par récurrence. Pour  $n = 0$ , la relation se vérifie en utilisant la discrétisation de la donnée initiale (3.27) :

$$h_{i,j}^0 = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{\mathcal{M}_{i,j}} h_0(x, y) dx dy \geq \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{\mathcal{M}_{i,j}} h_* dx dy = h_*.$$

Supposons maintenant la relation (3.29) vraie au temps  $t^n$ , et posons  $h_{i^*,j^*}^{n+1} = \min_{i,j} h_{i,j}^{n+1}$ . En utilisant le fait que la fonction  $\psi$  est strictement croissante, il vient que

$$\frac{\psi(h_{i^*+1,j^*}^{n+1}) - \psi(h_{i^*,j^*}^{n+1})}{\Delta x} \geq 0,$$

ce qui revient à dire que  $F_{i^*+1/2,j^*}^{n+1} \leq 0$ . Par une analyse similaire des autres flux et en utilisant (3.28), il est possible d'en déduire que

$$\frac{(\lambda F)_{i^*+1/2,j^*}^{n+1} - (\lambda F)_{i^*-1/2,j^*}^{n+1}}{\Delta x} + \frac{(\lambda F)_{i^*,j^*+1/2}^{n+1} - (\lambda F)_{i^*,j^*-1/2}^{n+1}}{\Delta y} \leq 0.$$

La discrétisation de l'équation de conservation (3.16) permet de conclure :

$$h_{i,j}^{n+1} \geq h_{i^*,j^*}^{n+1} \geq h_{i^*,j^*}^n \geq h_*.$$

□

**Proposition 3.6** (Conservation de la masse). *La variation de la masse de sédiments est liée aux conditions aux limites. Plus précisément, pour tout  $n \geq 0$ , on a :*

$$\Delta x \Delta y \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} h_{i,j}^n = \int_{\Omega} h_0(x, y) dx dy - \int_0^{t^n} \int_{\partial\Omega} \phi(x, y, t) d\sigma dt := M_h^n. \quad (3.30)$$

De plus, une borne supérieure sur la hauteur de sédiments est donnée par

$$h_{i,j}^n \leq \frac{M_h^n}{\Delta x \Delta y} - (N_x N_y - 1) h_*. \quad (3.31)$$

*Démonstration.* La preuve s'effectue par récurrence. Pour  $n = 0$ , la discrétisation de la donnée initiale (3.27) permet d'avoir la relation

$$\Delta x \Delta y \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} h_{i,j}^0 = \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \int_{\mathcal{M}_{i,j}} h_0(x, y) dx dy = \int_{\Omega} h_0(x, y) dx dy.$$

Supposons maintenant la relation (3.30) vraie au temps  $t^n$ . Partant de la discrétisation de l'équation de conservation des sédiments (3.16), il vient

$$\Delta x \Delta y \Delta t \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \left( \frac{h_{i,j}^{n+1} - h_{i,j}^n}{\Delta t} + \frac{(\lambda F)_{i+1/2,j}^{n+1} - (\lambda F)_{i-1/2,j}^{n+1}}{\Delta x} + \frac{(\lambda F)_{i,j+1/2}^{n+1} - (\lambda F)_{i,j-1/2}^{n+1}}{\Delta y} \right) = 0.$$

En utilisant la conservativité des flux, la définition des flux imposés aux bords du domaine (3.25) ainsi que le fait que  $\lambda = 1$  dans les mailles fictives, la relation précédente peut se

simplifier par

$$\begin{aligned} \Delta x \Delta y \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} h_{i,j}^{n+1} &= \Delta x \Delta y \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} h_{i,j}^n - \Delta x \Delta t \sum_{i=1}^{N_x} (F_{i,1/2}^{n+1} - F_{i,N_y+1/2}^{n+1}) \\ &\quad - \Delta y \Delta t \sum_{j=1}^{N_y} (F_{1/2,j}^{n+1} - F_{N_x+1/2,j}^{n+1}) \\ &= \Delta x \Delta y \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} h_{i,j}^n - \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\partial\Omega} \phi(x, y, t) \, d\sigma \, dt. \end{aligned}$$

Il reste alors à se servir de l'hypothèse de récurrence pour obtenir le résultat :

$$\begin{aligned} \Delta x \Delta y \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} h_{i,j}^{n+1} &= \int_{\Omega} h_0(x, y) \, dx \, dy - \int_0^{t^n} \int_{\partial\Omega} \phi(x, y, t) \, d\sigma \, dt \\ &\quad - \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\partial\Omega} \phi(x, y, t) \, d\sigma \, dt \\ &= \int_{\Omega} h_0(x, y) \, dx \, dy - \int_0^{t^{n+1}} \int_{\partial\Omega} \phi(x, y, t) \, d\sigma \, dt. \end{aligned}$$

De plus, la relation (3.29) assure que la hauteur de sédiments reste positive. La hauteur maximale de sédiments contenue dans une maille (après avoir supposé que toutes les autres contiennent la hauteur minimale  $h_*$ ) est alors donnée par (3.31).  $\square$

**Proposition 3.7** (Estimation d'énergie discrète). *Soit  $N > 0$ . Le schéma numérique vérifie l'estimation d'énergie discrète*

$$\frac{\Delta x \Delta y}{2} \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} (h_{i,j}^N)^2 \leq \frac{\Delta x \Delta y}{2} \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} (h_{i,j}^0)^2 - \mathfrak{D} - \mathfrak{B}, \quad (3.32)$$

où  $\mathfrak{D} \geq 0$  est un terme de dissipation et où  $\mathfrak{B} \leq 0$  est un terme lié aux conditions aux limites. Dans le cas particulier où les flux de sédiments aux bords du domaine sont nuls,  $\mathfrak{B} = 0$  et l'énergie discrète décroît au cours du temps.

*Démonstration.* La première étape de la preuve consiste à multiplier l'équation (3.16) par  $\Delta x \Delta y \Delta t h_{i,j}^{n+1}$ , puis à sommer sur  $i, j$  et  $n$  :

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \sum_{n=0}^{N-1} \Delta x \Delta y h_{i,j}^{n+1} (h_{i,j}^{n+1} - h_{i,j}^n) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \sum_{n=0}^{N-1} \Delta y \Delta t h_{i,j}^{n+1} \left[ (\lambda F)_{i+1/2,j}^{n+1} - (\lambda F)_{i-1/2,j}^{n+1} \right] \\ &\quad + \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \sum_{n=0}^{N-1} \Delta x \Delta t h_{i,j}^{n+1} \left[ (\lambda F)_{i,j+1/2}^{n+1} - (\lambda F)_{i,j-1/2}^{n+1} \right] = 0, \end{aligned}$$



noté symboliquement par  $A + B + C = 0$ . Pour le terme  $A$  correspondant à la dérivée temporelle discrète, on utilise l'inégalité de convexité

$$\sum_{n=0}^{N-1} h_{i,j}^{n+1} (h_{i,j}^{n+1} - h_{i,j}^n) \geq \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{2} [(h_{i,j}^{n+1})^2 - (h_{i,j}^n)^2] = \frac{1}{2} [(h_{i,j}^N)^2 - (h_{i,j}^0)^2].$$

Concernant les parties  $B$  et  $C$ , l'idée est de réarranger les sommes en  $i$  et  $j$ , ce qui revient à effectuer des intégrations par parties discrètes. On montre alors que

$$B + C = \mathfrak{D} + \mathfrak{B},$$

avec

$$\begin{aligned} \mathfrak{D} &= \sum_{i=1}^{N_x-1} \sum_{j=1}^{N_y} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\Delta y \Delta t}{\Delta x} \lambda_{i+1/2,j}^{n+1} \left[ (B_{i+1/2,j-1/2}^n)^{\frac{p-2}{2}} + (B_{i+1/2,j+1/2}^n)^{\frac{p-2}{2}} \right] \\ &\quad \times (h_{i+1,j}^{n+1} - h_{i,j}^{n+1}) [\psi_g(h_{i+1,j}^{n+1}) - \psi_g(h_{i,j}^{n+1})] \\ &+ \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y-1} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\Delta x \Delta t}{\Delta y} \lambda_{i,j+1/2}^{n+1} \left[ (B_{i-1/2,j+1/2}^n)^{\frac{p-2}{2}} + (B_{i+1/2,j+1/2}^n)^{\frac{p-2}{2}} \right] \\ &\quad \times (h_{i,j+1}^{n+1} - h_{i,j}^{n+1}) [\psi_g(h_{i,j+1}^{n+1}) - \psi_g(h_{i,j}^{n+1})] \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathfrak{B} &= \sum_{j=1}^{N_y} \sum_{n=0}^{N-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{(j-1)\Delta y}^{j\Delta y} h_{1,j}^{n+1} \phi(0, y, t) + h_{N_x,j}^{n+1} \phi(L_x, y, t) dy dt \\ &+ \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{n=0}^{N-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{(i-1)\Delta x}^{i\Delta x} h_{i,1}^{n+1} \phi(x, 0, t) + h_{i,N_y}^{n+1} \phi(x, L_y, t) dx dt, \end{aligned}$$

où les limiteurs de flux sont définis par

$$\lambda_{i+1/2,j}^{n+1} = \begin{cases} \lambda_{i,j}^{n+1}, & \text{si } h_{i,j}^{n+1} > h_{i+1,j}^{n+1}, \\ \lambda_{i+1,j}^{n+1}, & \text{sinon,} \end{cases}$$

et

$$\lambda_{i,j+1/2}^{n+1} = \begin{cases} \lambda_{i,j}^{n+1}, & \text{si } h_{i,j}^{n+1} > h_{i,j+1}^{n+1}, \\ \lambda_{i,j+1}^{n+1}, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par la définition (3.2), on sait que la fonction  $\psi_g$  est strictement croissante. Combiné aux autres termes, on en déduit que  $\mathfrak{D} \geq 0$ . Par ailleurs, la fonction  $\phi$  étant négative ou nulle par (3.10a) et connaissant la borne inférieure sur  $h$  par (3.29), on a de plus que  $\mathfrak{B} \leq 0$ .  $\square$

Nous sommes à présent en mesure de démontrer l'existence d'au moins une solution au modèle stratigraphique discrétisé. Pour ce faire, un argument de degré topologique est utilisé. Des précisions concernant cette notion peuvent se trouver en annexe D et, par exemple, dans les travaux de Droniou [25], Eymard et al. [32] ou Kaviani [56].

**Théorème 3.1** (Existence d'une solution). *Soit  $(h_{i,j}^n)_{i,j}$  vérifiant (3.29) et (3.30). Alors pour tout  $\Delta t > 0$ , il existe au moins une solution  $(h_{i,j}^{n+1}, \lambda_{i,j}^{n+1})_{i,j}$  au système non-linéaire (3.16)–(3.19), (3.23)–(3.26) et vérifiant (3.28), (3.29) et (3.30).*

*Démonstration.* Pour mener la preuve, une variante du modèle complet (3.16)–(3.19), (3.23)–(3.26) est considérée. Le modèle utilisé dans cette preuve comprend uniquement les équations (3.16)–(3.19), (3.23)–(3.24), dans lesquelles les flux aux bords du domaine sont remplacés par leur expression exacte faisant intervenir la fonction  $\phi$ . Le calcul de la valeur des inconnues aux mailles fictives (qui ne nous intéresse pas ici) peut alors s'effectuer a posteriori, après avoir résolu le système restreint aux mailles internes. L'intérêt de cette manœuvre est de se concentrer sur les inconnues des mailles internes, et de ne pas avoir à calculer d'estimations pour les inconnues des mailles fictives.

La démonstration s'effectue par un argument de degré topologique. Soit  $\mu \in [0, 1]$  et notons par  $(h_{i,j}^{\mu,n+1}, \lambda_{i,j}^{\mu,n+1})_{i,j}$  la solution du schéma

$$\frac{h_{i,j}^{\mu,n+1} - h_{i,j}^n}{\Delta t} + \mu \left( \frac{(\lambda F)_{i+1/2,j}^{\mu,n+1} - (\lambda F)_{i-1/2,j}^{\mu,n+1}}{\Delta x} + \frac{(\lambda F)_{i,j+1/2}^{\mu,n+1} - (\lambda F)_{i,j-1/2}^{\mu,n+1}}{\Delta y} \right) = 0, \quad (3.33a)$$

$$\lambda_{i,j}^{\mu,n+1} + \mu - 1 - \mu \min \left( 1, \frac{\Delta x \Delta y E_{i,j} + \lambda F_{i,j}^{\mu,n+1}}{\langle F \rangle_{i,j}^{\mu,n+1}} \right) = 0. \quad (3.33b)$$

Remarquons tout d'abord que pour  $\mu = 1$ , ce schéma correspond à (3.16)–(3.23). Inversement, pour  $\mu = 0$  le système se réduit à

$$h_{i,j}^{\mu,n+1} = h_{i,j}^n, \quad (3.34a)$$

$$\lambda_{i,j}^{\mu,n+1} = 1. \quad (3.34b)$$

Le degré topologique dans ce cas simple peut se calculer et est égal à 1. L'idée est alors d'utiliser la propriété d'invariance par homotopie du degré topologique, et ainsi de s'assurer que ce dernier reste constant pour tout  $\mu \in [0, 1]$ . Pour cela, il est nécessaire de montrer quelques estimations indépendantes de  $\mu$  sur les équations (3.33). Concernant l'équation de complémentarité (3.33b), en reprenant l'idée de la preuve de la proposition 3.4, il vient

$$0 \leq 1 - \mu < \lambda_{i,j}^{\mu,n+1} \leq 1, \quad \forall \mu \in [0, 1]. \quad (3.35)$$

De la même manière, en adaptant la preuve des propositions 3.5 et 3.6, on montre sans difficulté que

$$h_* \leq h_{i,j}^{\mu,n+1} \leq \frac{M_h^{n+1}}{\Delta x \Delta y} - (N_x N_y - 1) h_*, \quad \forall \mu \in [0, 1], \quad (3.36)$$

où

$$M_h^{n+1} = \int_{\Omega} h_0(x, y) dx dy - \int_0^{t^{n+1}} \int_{\partial\Omega} \phi(x, y, t) d\sigma dt.$$

En conséquence de ces estimations, la solution  $(h_{i,j}^{\mu,n+1}, \lambda_{i,j}^{\mu,n+1})_{i,j}$  appartient au compact  $[h_* - \varepsilon, M_h^{n+1}/(\Delta x \Delta y) + \varepsilon]^{N_x \times N_y} \times [-\varepsilon, 1 + \varepsilon]^{N_x \times N_y}$ , avec  $\varepsilon > 0$ . Le degré topologique vaut alors 1 pour tout  $\mu \in [0, 1]$ , ce qui implique qu'il existe au moins une solution au schéma numérique.  $\square$

### 3.6 Résultats numériques

Afin d'illustrer le modèle stratigraphique, deux cas tests sont présentés. Le premier porte sur une configuration sans contrainte sur le taux d'érosion afin d'observer l'influence des coefficients de diffusion. Le second quant à lui met en avant l'intérêt de prendre en compte la limitation afin de reproduire des évolutions réalistes.

#### 3.6.1 Onde progressive

Cette première configuration représente la propagation d'une onde. En d'autres termes, la donnée initiale se retrouve translatée au cours du temps, sous réserve de prescrire les conditions aux limites adéquates. En particulier, la solution exacte peut se calculer, ce qui permet d'effectuer à nouveau une étude de convergence. Initialement construite pour le cas 1D (dont les calculs se trouvent en annexe B), cette dernière est étendue au cas 2D. Pour ce cas test, on considère un domaine de taille 10 km  $\times$  10 km discrétisé sur 400  $\times$  400 mailles. Le coefficient du  $p$ -Laplacien est fixé à 2.5 et la hauteur de la mer à  $H_m = 1$  km. Le système linéaire est résolu par la méthode de Newton-min, avec un critère d'arrêt sur la norme  $L^\infty$  du résidu égale à  $10^{-6}$  km. La gestion du pas de temps est effectuée à partir d'une condition CFL dérivée de (2.44a), à savoir

$$\begin{aligned} \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right) \max_{i,j} \left[ \frac{1}{2} \left\{ (B_{i-1/2,j-1/2}^n)^{\frac{p-2}{2}} + (B_{i-1/2,j+1/2}^n)^{\frac{p-2}{2}} \right\} \mathcal{K}(h_{i-1,j}^n, h_{i,j}^n) \right. \\ + \frac{1}{2} \left\{ (B_{i+1/2,j-1/2}^n)^{\frac{p-2}{2}} + (B_{i+1/2,j+1/2}^n)^{\frac{p-2}{2}} \right\} \mathcal{K}(h_{i,j}^n, h_{i+1,j}^n) \\ + \frac{1}{2} \left\{ (B_{i-1/2,j-1/2}^n)^{\frac{p-2}{2}} + (B_{i+1/2,j-1/2}^n)^{\frac{p-2}{2}} \right\} \mathcal{K}(h_{i,j-1}^n, h_{i,j}^n) \\ \left. + \frac{1}{2} \left\{ (B_{i-1/2,j+1/2}^n)^{\frac{p-2}{2}} + (B_{i+1/2,j+1/2}^n)^{\frac{p-2}{2}} \right\} \mathcal{K}(h_{i,j}^n, h_{i,j+1}^n) \right] \leq 1, \end{aligned}$$

où

$$\mathcal{K}(h_1, h_2) = \begin{cases} K_{g,m}, & \text{si } h_1 < H_m \text{ et } h_2 < H_m, \\ K_{g,c}, & \text{si } h_1 \geq H_m \text{ et } h_2 \geq H_m, \\ \frac{K_{g,m}(h_1 - H_m) - K_{g,c}(h_2 - H_m)}{h_1 - h_2}, & \text{si } h_1 < H_m \text{ et } h_2 \geq H_m, \\ \frac{K_{g,c}(h_1 - H_m) - K_{g,m}(h_2 - H_m)}{h_1 - h_2}, & \text{si } h_1 \geq H_m \text{ et } h_2 < H_m. \end{cases}$$

La donnée initiale (illustrée sur la figure 3.4) est quant à elle étendue au cas 2D à partir de la formule (B.13), avec comme paramètres  $h_\infty = 0$  km,  $U = 5$  km/Ma, ainsi qu'un coefficient de diffusion gravitaire marin égal à  $K_{g,m} = 1$  km<sup>2</sup>/Ma. Enfin, un flux entrant de sédiments est prescrit sur l'ensemble du bord gauche du domaine à partir de (B.12). Ce dernier, constant en espace, vérifie

$$- \int_0^T \int_0^{L_y} \phi(0, y, t) dy dt = \int_0^T 10Ub_\infty \left[ 1 + \frac{p-2}{p-1} \left( \frac{U}{K_{g,c}b_\infty^{p-2}} \right)^{\frac{1}{p-1}} Ut \right]^{\frac{p-1}{p-2}} dt.$$

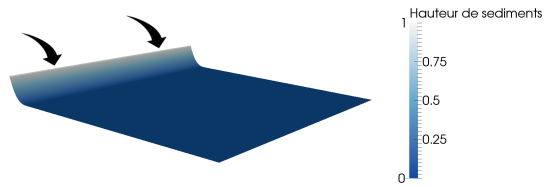
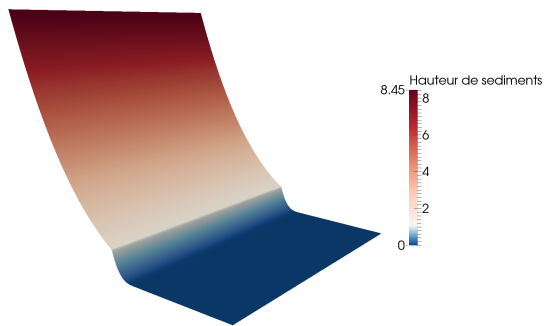
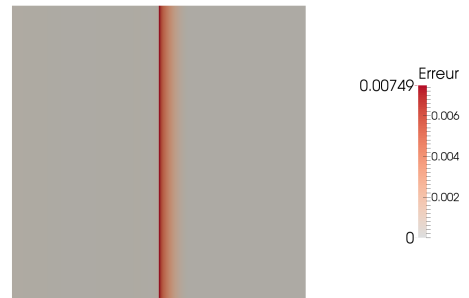
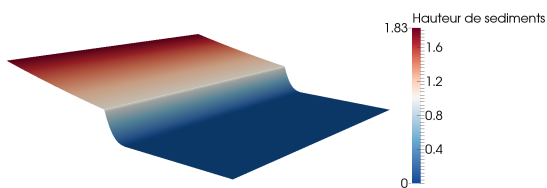
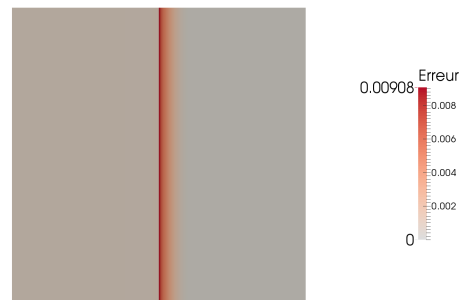


FIGURE 3.4 – État initial.

(a) Solution numérique pour  $K_{g,m} = 1 \text{ km}^2/\text{Ma}$  et  $K_{g,c} = 10 \text{ km}^2/\text{Ma}$ .(b) Écart entre solution numérique et solution exacte  $h_{\text{num.}} - h_{\text{ex.}}$  pour  $K_{g,m} = 1 \text{ km}^2/\text{Ma}$  et  $K_{g,c} = 10 \text{ km}^2/\text{Ma}$ .(c) Solution numérique pour  $K_{g,m} = 1 \text{ km}^2/\text{Ma}$  et  $K_{g,c} = 100 \text{ km}^2/\text{Ma}$ .(d) Écart entre solution numérique et solution exacte  $h_{\text{num.}} - h_{\text{ex.}}$  pour  $K_{g,m} = 1 \text{ km}^2/\text{Ma}$  et  $K_{g,c} = 100 \text{ km}^2/\text{Ma}$ .FIGURE 3.5 – Résultats numériques au temps  $T = 1 \text{ Ma}$ .

L'évolution du système est simulée pour deux configurations. Dans la première, la valeur du coefficient de diffusion gravitaire continental  $K_{g,c}$  est de  $10 \text{ km}^2/\text{Ma}$ . Puis il sera augmenté jusqu'à la valeur  $100 \text{ km}^2/\text{Ma}$ . La figure 3.5 rassemble les résultats obtenus au bout de 1 Ma.

La première remarque qui peut être faite est que la donnée initiale se retrouve bien translatée, et ce à la vitesse de propagation  $U$ . Ensuite, on peut noter que plus le coefficient de diffusion en domaine continental est fort, plus la cassure au niveau de la mer est importante. En comparant les écarts par rapport à la solution exacte, on observe que l'erreur se trouve concentrée au niveau de la transition entre le domaine marin et le domaine continental. Celle-ci restant néanmoins faible, le schéma numérique permet ainsi d'obtenir une bonne approximation de la solution.

Sur la figure 3.6 et dans le tableau 3.2 sont rassemblés des résultats de convergence du schéma numérique pour différentes valeurs du coefficient de diffusion gravitaire. Dans les cas où  $K_{g,m} = K_{g,c}$ , la convergence est d'ordre 2 en espace. En revanche, la vitesse de convergence décroît lorsque la diffusion gravitaire s'effectue à vitesse différente en domaine marin et continental.

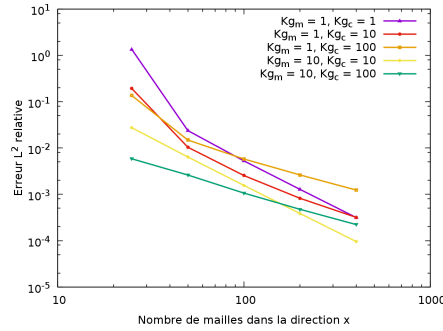


FIGURE 3.6 – Convergence du schéma numérique pour différentes valeurs des coefficients de diffusion.

Coefficients de diffusion ( $K_{g,m}, K_{g,c}$ ) en $\text{km}^2/\text{Ma}$	Ordre de convergence
(1,1)	2.018
(10,10)	2.008
(1,10)	1.367
(10,100)	1.093
(1,100)	1.083

TABLE 3.2 – Évolution de l'ordre de convergence du schéma en fonction des coefficients de diffusion.

### 3.6.2 Érosion d'une zone montagneuse

Dans ce second cas test, nous allons analyser l'évolution d'une structure montagneuse dans deux configurations. Le domaine associé est de taille  $180 \text{ km} \times 180 \text{ km}$ . Ce dernier est séparé en deux zones : un domaine continental (où  $K_{g,c} = 500 \text{ km}^2/\text{Ma}$ ), ainsi qu'un domaine marin (où  $K_{g,m} = 10 \text{ km}^2/\text{Ma}$ ). Le niveau de la mer est fixé à  $H_m = 0.3 \text{ km}$ . Deux flux entrants de sédiments constants au cours du temps sont pris en compte et vérifient

$$\begin{aligned} - \int_0^T \int_0^{L_y} \phi(0, y, t) dy dt &= 22T \text{ km}^3, \\ - \int_0^T \int_0^{L_y} \phi(L_x, y, t) dy dt &= 31T \text{ km}^3. \end{aligned}$$

Concernant les paramètres numériques, le domaine est discrétisé sur une grille régulière constituée de  $361 \times 361$  mailles. L'exposant pour le  $p$ -Laplacien dans (3.1b) est fixé à  $p = 2.5$ . À chaque pas de temps, le système non-linéaire est résolu en utilisant la méthode de Newton-min à une précision de  $10^{-5} \text{ km}$  pour la norme  $L^\infty$  du résidu sur  $h$  et  $10^{-5}$  pour  $\lambda$ . L'évolution du système est simulée sur une durée  $T = 1 \text{ Ma}$ . La variation du pas de temps est choisie de manière dynamique. La simulation débute avec  $\Delta t^0 = 10^{-4} \text{ Ma}$ . Si l'itération en temps est acceptée, le nouveau pas de temps est choisi par  $\Delta t^{n+1} = 1.1\Delta t^n$ , jusqu'à la valeur maximale  $10^{-3} \text{ Ma}$ . En revanche, si la méthode de Newton n'a pas convergé après 10 itérations, le pas de temps est rejeté et l'itération en temps est recommencée avec  $\Delta t^n = 0.5\Delta t^n$ .

Afin d'observer l'influence de la contrainte sur le taux d'érosion, dans un premier temps nous ne considérons pas de limitation sur le flux de sédiments. Pour cela, la contrainte est choisie de telle sorte que  $E \gg 1$  afin que le limiteur de flux  $\lambda$  garde la valeur constante 1 dans tout le domaine au cours de la simulation. Dans un deuxième temps, la contrainte sera activée en prenant  $E = 0.06 \text{ km}/\text{Ma}$ .

Dans la configuration sans contrainte sur le taux d'érosion (figure 3.7), nous pouvons observer qu'au bout de 1 Ma la diffusion a considérablement lissé le profil des montagnes, en particulier au niveau des zones pentues. On distingue également une cassure au niveau du littoral qui sépare le domaine continental et le domaine marin. Ce phénomène est dû au fort contraste entre les deux coefficients de diffusion  $K_{g,c}$  et  $K_{g,m}$ .

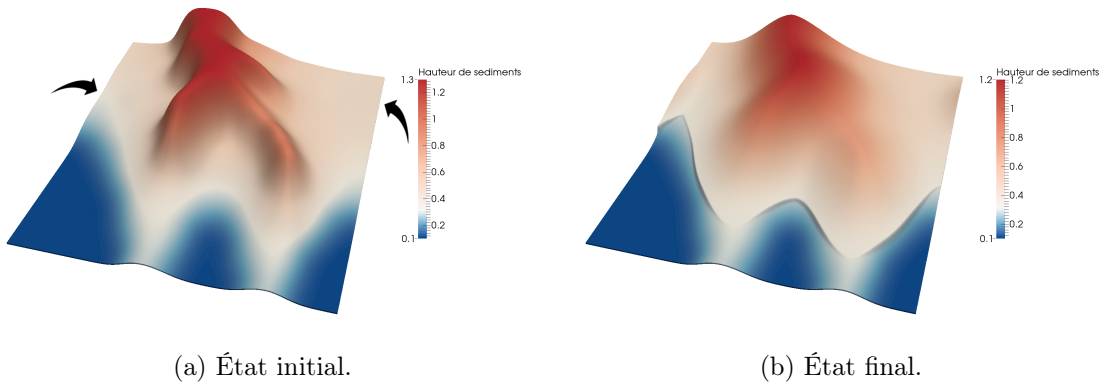


FIGURE 3.7 – Cas sans contrainte : évolution de la hauteur de sédiments (km).

Dans le tableau 3.3, certaines données issues de la simulation sont présentées. Nous pouvons voir que ce cas est relativement simple dans le sens où aucun pas de temps n'a été rejeté. Le nombre moyen d'itérations de Newton requis est plutôt faible, de même que le nombre moyen d'itérations du solveur linéaire. Cependant, de plus grandes valeurs des coefficients de diffusion peuvent complexifier la résolution du système, impliquant l'utilisation de pas de temps plus faibles.

Dans la deuxième configuration (figure 3.8) où la contrainte sur le taux d'érosion est prise en compte, le système a un comportement différent. Après 1 Ma, les régions montagneuses ont subi moins d'érosion que dans le cas précédent et leur structure est toujours reconnaissable. Les zones où la contrainte est active (c'est-à-dire où  $\lambda < 1$ ) peuvent être visualisées sur la figure 3.9. Nous pouvons voir que la contrainte est très active dans les zones correspondant aux flancs des montagnes ; ce sont en effet les zones où la diffusion naturelle est la plus importante. Le littoral séparant le domaine continental et le domaine marin est toujours présent, pour la même raison que précédemment.

En analysant les résultats rassemblés dans le tableau 3.3, quelques différences peuvent également être observées. Avec la même gestion du pas de temps, la méthode de Newton ne réussit pas toujours à converger (phénomène de cycles au niveau des itérées) et certains pas de temps sont rejetés. En effet, le système est plus difficile à résoudre : le nombre moyen

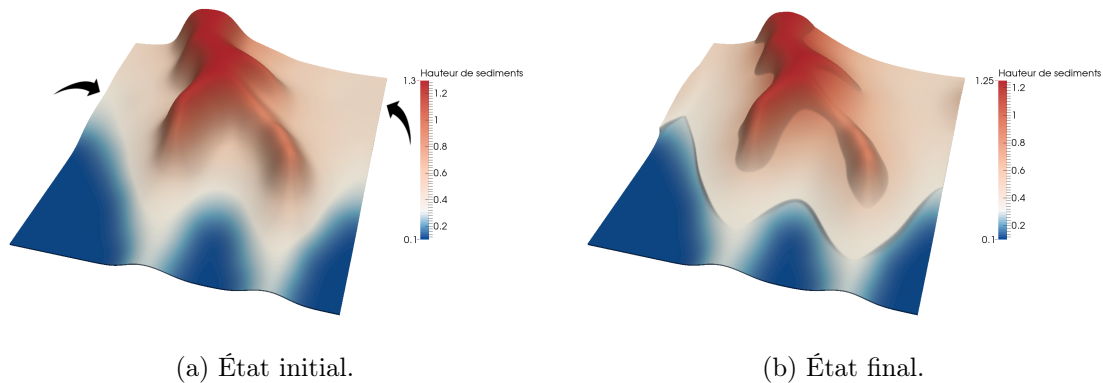


FIGURE 3.8 – Cas avec contrainte : évolution de la hauteur de sédiments (km).

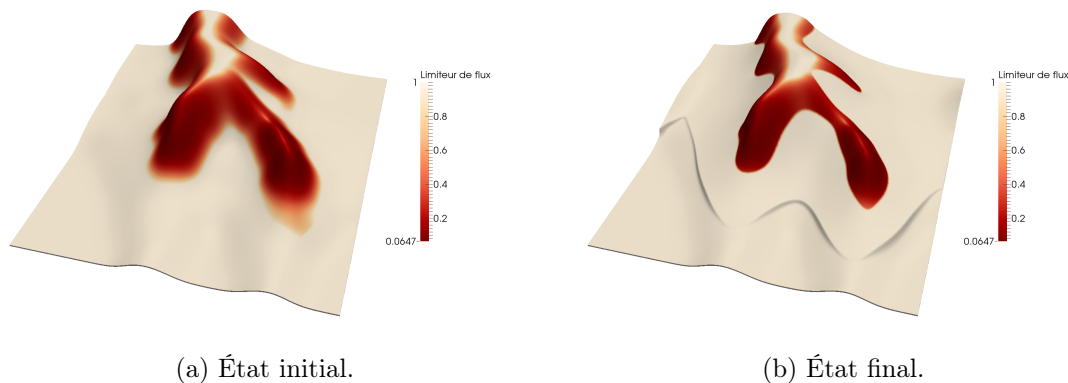


FIGURE 3.9 – Cas avec contrainte : évolution du limiteur de flux.

Donnée numérique	Sans contrainte	Avec contrainte
Pas de temps acceptés	1016	1209
Pas de temps refusés	0	84
Moyenne iter. Newton / pas de temps	1.99	2.39
Moyenne iter. solveur / iter. Newton	1.99	11.09
Temps de calcul (s)	789	1777

TABLE 3.3 – Résultats numériques.

d'itérations de Newton et celui d'itérations du solveur linéaire sont plus élevés que dans le cas sans contrainte. Cela explique l'augmentation du temps de calcul total nécessaire à la simulation.

### Influence de la contrainte sur la résolution numérique

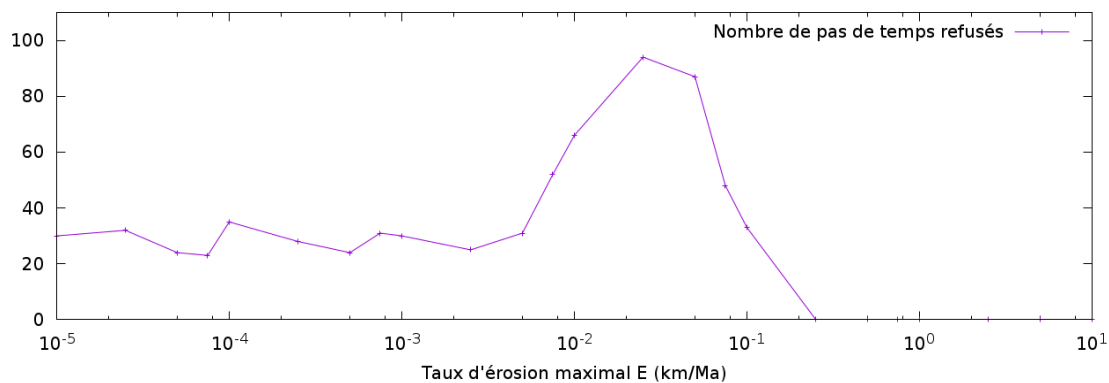
Cette partie a pour but de présenter une rapide analyse de l'influence de la contrainte  $E$  sur la difficulté de résolution du problème. Afin de mieux visualiser ce phénomène, reprenons le cas test précédent, et faisons varier la valeur de  $E$ . Tous les autres paramètres restent inchangés, y compris la gestion du pas de temps. Pour les tests qui suivent, la plage de variation de  $E$  est comprise entre  $10^{-5}$  km/Ma et 10 km/Ma.

En figure 3.10 est présentée l'évolution de plusieurs paramètres au fil des simulations : le nombre de pas de temps rejetés, le nombre moyen d'itérations de Newton et le nombre moyen d'itérations du solveur linéaire. Dans un premier temps, nous pouvons voir qu'au delà d'une certaine valeur de la contrainte, située autour de  $E = 1$  km/Ma, les trois paramètres précédents n'évoluent plus. Cela s'explique par le fait que la contrainte a une valeur trop élevée pour que le flux de sédiments ait besoin d'être limité. Le système a résoudre est alors équivalent au modèle sans contrainte sur le taux d'érosion.

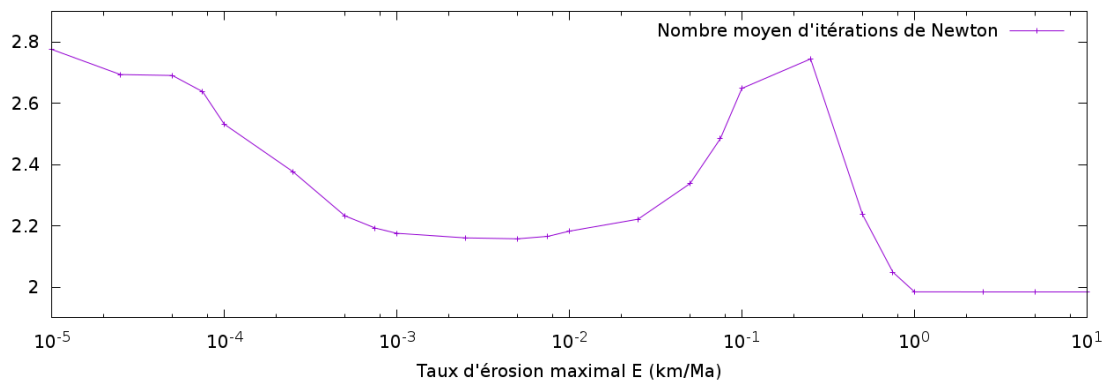
En dessous de cette valeur limite, les paramètres évoluent différemment. Sur la figure 3.10a nous pouvons voir une zone où le nombre de pas de temps rejetés est assez important (autour de  $E = 0.1 \sim 0.01$  km/Ma). Pour ces valeurs de  $E$ , les pas de temps au cours des simulations correspondantes doivent être plus faibles pour permettre à la méthode de Newton de converger. Concernant le nombre moyen d'itérations de Newton (voir la figure 3.10b), ce dernier ne subit pas de grandes variations au cours des simulations. Néanmoins nous pouvons noter que ce nombre est plus élevé lorsque la contrainte sur le taux d'érosion maximal est active. Enfin, pour le nombre moyen d'itérations du solveur linéaire présenté sur la figure 3.10c, nous pouvons observer que ce dernier augmente dès que la valeur de  $E$  diminue, jusqu'à une valeur maximale de 22 itérations en moyenne pour  $E \leq 10^{-3}$  km/Ma.

En résumé, on peut voir sur cet exemple que faire varier la valeur du taux d'érosion maximal induit un comportement non trivial. Néanmoins, quelques aspects peuvent être retenus. Tout d'abord, au-delà d'un certain seuil, la contrainte sur le taux d'érosion n'intervient plus au niveau de la topographie de la solution. Par ailleurs, augmenter la valeur de  $E$  à ce stade n'a pas d'influence sur la difficulté de résolution du système. Inversement, en choisissant de faibles valeurs pour  $E$ , on peut s'attendre à avoir une augmentation du nombre d'itérations de Newton ainsi que du solveur linéaire.

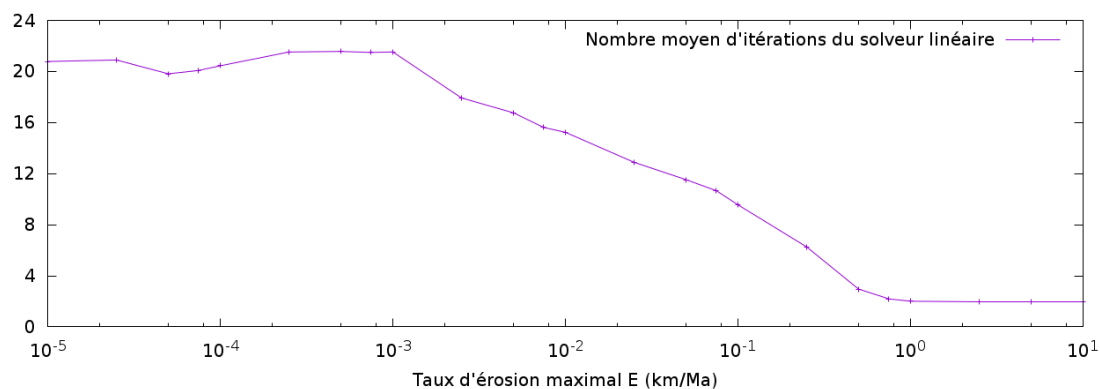




(a) Évolution du nombre de pas de temps rejetés en fonction de la valeur de  $E$ .



(b) Évolution du nombre d'itérations de Newton en fonction de la valeur de  $E$ .

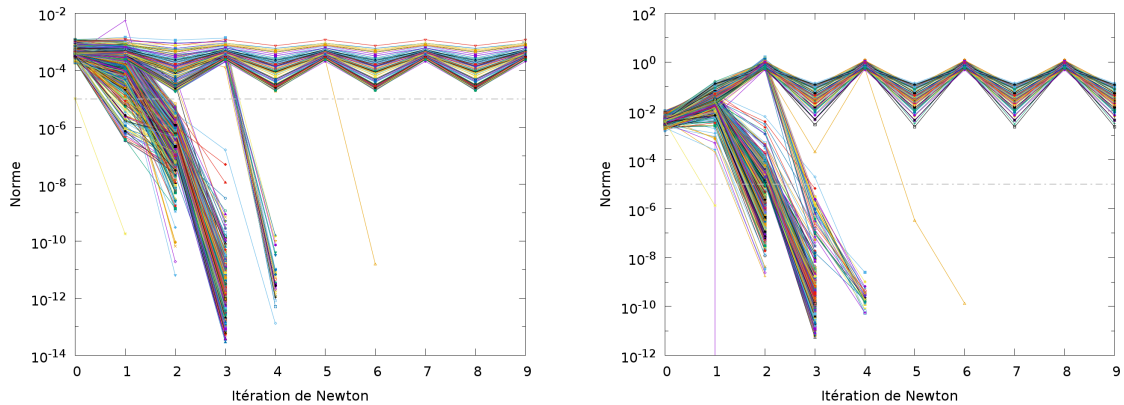


(c) Évolution du nombre d'itérations du solveur linéaire en fonction de la valeur de  $E$ .

FIGURE 3.10 – Cas avec contrainte : comparaison de l'évolution de différents paramètres en fonction du taux d'érosion maximal.

### Non convergence de la méthode Newton

Pour terminer l'étude de ce cas test, abordons un phénomène récurrent qui apparaît également dans les modèles étudiés dans les chapitres 5 et 6. Il s'agit de la non convergence de la méthode de Newton, qui se traduit par la présence de cycles au niveau des itérées. En guise d'illustration, sur la figure 3.11 est représentée l'évolution de la norme du résidu des équations (3.16) et (3.23), et ce à chaque pas de temps. On peut y voir que dans un grand nombre de cas le pas de temps est accepté, c'est-à-dire que la norme décroît rapidement jusqu'à passer sous le seuil précédemment défini. En revanche, dans certaines situations, la méthode ne parvient pas à converger et la norme prend alors un caractère oscillatoire entre deux valeurs. En pratique, le fait de prendre un pas de temps plus faible permet de remédier à ce problème. La fréquence de cette opération varie suivant la difficulté du problème, comme nous avons pu l'observer sur la figure 3.10a. Afin de tenter de donner une explication de ce phénomène, l'étude d'un cas simplifié est présentée en annexe C.



(a) Équation de conservation de la hauteur de sédiments.

(b) Équation de complémentarité.

FIGURE 3.11 – Cas avec contrainte : évolution de la norme  $L^\infty$  du résidu des équations pour la méthode de Newton.

## 3.7 Récapitulatif

L'étude de ce premier modèle stratigraphique a permis de confirmer le bon comportement observé en 1D dans le cadre du stage de Dumas [27]. Le transport non-linéaire des sédiments est modélisé à l'aide d'un flux analogue au  $p$ -Laplacien, tout en prenant en compte un coefficient de diffusion dépendant du milieu ambiant : marin ou continental. À cela est ajoutée une contrainte sur le taux d'érosion, écrite sous la forme d'une condition de complémentarité. Un schéma numérique Volumes Finis a été développé en se basant sur la démarche employée pour le  $p$ -Laplacien instationnaire dans le chapitre 2. Ce dernier admet de bonnes propriétés, dont l'existence d'au moins une solution discrète. Numériquement, un système regroupant l'ensemble des équations est résolu par la méthode de Newton-min. Les résultats obtenus sont satisfaisants, mais il est à noter des pas de temps trop élevés peuvent entraîner un phénomène d'oscillations entre les itérées de Newton.

La prochaine étape consiste à intégrer les flux d'eau. Pour ce faire, dans le chapitre suivant nous allons nous intéresser à la modélisation du couplage avec le transport des sédiments.

## Chapitre 4

# Modélisation du couplage entre flux d'eau et transport des sédiments

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Algorithmes discrets . . . . .</b>	<b>68</b>
<b>4.2</b>	<b>Couplage sans transport gravitaire . . . . .</b>	<b>69</b>
4.2.1	Dérivation d'un premier modèle . . . . .	69
4.2.2	Analyse théorique . . . . .	72
<b>4.3</b>	<b>Couplage avec transport gravitaire . . . . .</b>	<b>75</b>
4.3.1	Une première tentative . . . . .	76
4.3.2	Une hypothèse supplémentaire . . . . .	76
4.3.3	Analyse de stabilité non-linéaire . . . . .	78
<b>4.4</b>	<b>Récapitulatif . . . . .</b>	<b>89</b>

---

Au modèle stratigraphique « sédiments purs » présenté dans le chapitre 3, on souhaite apporter la prise en compte des flux d'eau afin de simuler l'impact des rivières et des lacs. Ces phénomènes ont de fortes interactions avec le transport des sédiments, c'est pourquoi il est capital de disposer d'un couplage robuste entre ces deux processus.

Dans la littérature, il existe des algorithmes heuristiques, conçus directement au niveau discret, qui tentent d'accomplir cette tâche et qui ont une grande importance pratique. Au premier rang de ces algorithmes figure le Multiple Flow Direction (MFD), décliné en maintes variantes, comme par exemple dans les travaux de Freeman [39], Holmgren [53], Quinn et al. [60], ou encore Tarboton [66]. Toutefois, outre la déficience « philosophique » due à l'absence d'une limite continue, ces algorithmes exhibent aussi le défaut d'une dépendance trop sensible à l'orientation du maillage. L'espoir que nous plaçons dans un modèle de couplage au niveau continu est de pouvoir remédier à ces faiblesses.

Dans la section 4.1, nous passons en revue le principe des algorithmes MFD ainsi que leurs inconvénients. Ensuite, dans la section 4.2, nous détaillerons la construction d'un premier couplage, sans prise en compte de la gravité. Certaines propriétés du modèle obtenu seront présentées, ainsi qu'un parallèle avec des problèmes d'écoulements diphasiques dans les conduites pétrolières [72]. Pour terminer, la section 4.3 abordera un couplage tenant compte de la gravité. Ici encore, des propriétés sur le modèle seront présentées, ce qui

*nous confortera dans l'idée que le couplage obtenu est pertinent. Toute cette procédure est nécessaire avant de poursuivre l'analyse sur des modèles plus complexes dans les chapitres suivants.*

## 4.1 Algorithmes discrets

Une première approche afin d'estimer les flux d'eau sur une topographie donnée réside dans l'utilisation d'algorithmes discrets, que l'on peut regrouper sous le terme Multiple Flow Direction (MFD). De nombreuses variantes existent, mais l'idée de base reste la même. Pour chaque maille, la quantité d'eau est distribuée aux mailles voisines d'élévation plus faible, au prorata de la pente. Les différences entre les algorithmes se situent principalement dans le calcul des proportions, mais nous ne rentrerons pas dans les détails ici. Pour davantage de précisions on pourra se référer, par exemple, aux travaux de Freeman [39], Holmgren [53], Quinn et al. [60], ou Tarboton [66].

On peut d'ores et déjà faire plusieurs remarques. L'emploi d'un algorithme de type MFD implique un découplage du calcul de l'évolution de la topographie de celle des flux d'eau. Plus précisément, la hauteur de sédiments peut être déterminée de manière implicite. Puis, connaissant cette donnée, le flux d'eau se calcule de façon explicite. On peut alors s'attendre à un couplage moins fort que si ces deux processus étaient déterminés implicitement. Deuxièmement, bien que ces algorithmes ne nécessitent pas la résolution de système, ils ne sont pas parallélisables. En effet, partant d'une source d'eau, la méthode de distribution des quantités aux mailles voisines est appelée récursivement jusqu'à avoir traité toutes les mailles concernées.

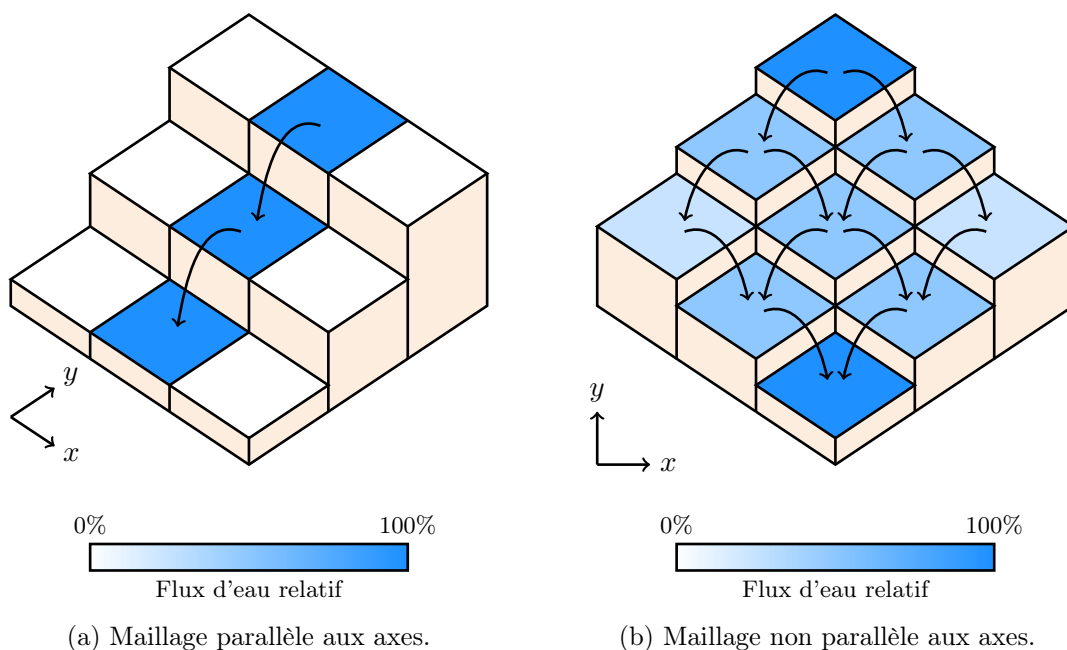


FIGURE 4.1 – Effet d'orientation de maillage pour l'algorithme MFD.

Cependant, un désavantage majeur de cette famille d'algorithmes est d'être particuliè-

rement sensible à l'orientation du maillage. Voyons cela sur un exemple simple. Considérons tout d'abord une topographie donnée par la fonction  $h(x, y) = y$ , avec une source d'eau placée dans la partie supérieure du domaine, comme illustré sur la figure 4.1. Regardons alors le comportement sur deux maillages cartésiens différents. Le premier, représenté sur la figure 4.1a, est choisi étant parallèle aux axes. À chaque itération de l'algorithme MFD, ce dernier ne détecte qu'une seule maille en contrebas pour le calcul des quantités d'eau. On observe alors que la trajectoire du flux d'eau est rectiligne et parallèle à l'axe  $y$ . Si à présent on considère un maillage identique mais pivoté d'un angle de 45 degrés, le comportement qui en résulte est différent. En effet, comme illustré sur la figure 4.1b, chaque maille est à présent reliée à deux mailles de plus faible topographie. Le flux d'eau a alors tendance à se diffuser sous forme de cône à partir de la source d'eau, et non plus de manière rectiligne comme précédemment. De plus, en raffinant chacun des deux maillages il serait souhaitable de converger vers la même solution, mais rien ne garantit un tel comportement a priori.

Pour toutes ces raisons, nous préférons chercher une méthode de couplage différente, en particulier au niveau continu, pour les flux d'eau et le transport des sédiments. De plus, le fait de connaître une équation gouvernant l'évolution de l'eau permettrait d'y apporter des ajustements éventuels plus aisément que via l'utilisation d'un algorithme discret.

## 4.2 Couplage sans transport gravitaire

Dans un premier temps, nous allons nous intéresser à un couplage sans tenir compte du transport gravitaire. La méthodologie adoptée consiste à relier des lois de transport de sédiments et de la mécanique des fluides. En particulier, l'objectif est de définir deux lois de conservation : une première pour la hauteur d'eau (notée par  $\tilde{h}$ ), et une seconde pour la hauteur de sédiments (notée par  $h$ ).

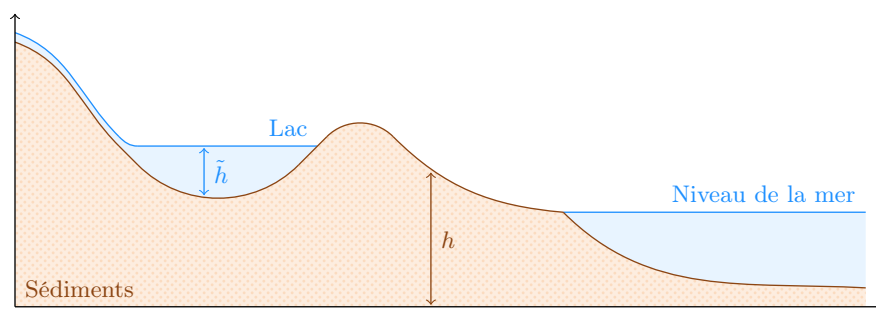


FIGURE 4.2 – Notations pour le modèle monolithologique avec flux d'eau.

### 4.2.1 Dérivation d'un premier modèle

Pour commencer, considérons un écoulement à l'échelle d'un chenal et plaçons-nous en régime stationnaire (étude du mouvement de l'eau sur de grandes durées), et uniforme

(variation lente du sol). Les équations de Saint-Venant [11] avec friction s'écrivent alors

$$\partial_t \tilde{h} + \operatorname{div}(\tilde{h}\tilde{\mathbf{u}}) = 0, \quad \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}_+, \quad (4.1a)$$

$$\partial_t(\tilde{h}\tilde{\mathbf{u}}) + \operatorname{div}(\tilde{h}\tilde{\mathbf{u}} \otimes \tilde{\mathbf{u}}) + g\tilde{h}\nabla(\tilde{h} + h) = -C|\tilde{\mathbf{u}}|\tilde{\mathbf{u}}, \quad \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}_+, \quad (4.1b)$$

où  $\tilde{\mathbf{u}}$  représente la vitesse de l'eau,  $g$  l'accélération de la pesanteur et  $C$  une constante. On effectue à présent l'adimensionnement de ces équations afin de comparer le poids de chaque terme pour les échelles de temps et d'espace qui nous intéressent. On considère ainsi les variables sans dimension

$$\check{h} := \frac{\tilde{h}}{\tilde{H}}, \quad \check{h} := \frac{h}{H}, \quad \check{\mathbf{u}} := \frac{\tilde{\mathbf{u}}}{\tilde{U}}, \quad \check{x} := \frac{x}{L}, \quad \check{y} := \frac{y}{L}, \quad \check{t} := \frac{t}{T},$$

que l'on injecte dans le système (4.1) :

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{H}}{T} \partial_i \check{h} + \frac{\tilde{H}\tilde{U}}{L} \operatorname{div}(\check{h}\check{\mathbf{u}}) &= 0, \\ \frac{\tilde{H}\tilde{U}}{T} \partial_i(\check{h}\check{\mathbf{u}}) + \frac{\tilde{H}\tilde{U}^2}{L} \operatorname{div}(\check{h}\check{\mathbf{u}} \otimes \check{\mathbf{u}}) + \frac{g\tilde{H}^2}{L} \check{h}\nabla\check{h} + \frac{g\tilde{H}H}{L} \check{h}\nabla\check{h} &= -C\tilde{U}^2|\check{\mathbf{u}}|\check{\mathbf{u}}. \end{aligned}$$

En imposant la relation  $\tilde{U} = L/T$ , les équations précédentes deviennent

$$\begin{aligned} \partial_i \check{h} + \operatorname{div}(\check{h}\check{\mathbf{u}}) &= 0, \\ \partial_i(\check{h}\check{\mathbf{u}}) + \operatorname{div}(\check{h}\check{\mathbf{u}} \otimes \check{\mathbf{u}}) + \frac{g\tilde{H}T^2}{L^2} \check{h}\nabla\check{h} + \frac{gHT^2}{L^2} \check{h}\nabla\check{h} &= -\frac{CL}{\tilde{H}}|\check{\mathbf{u}}|\check{\mathbf{u}}. \end{aligned}$$

Les domaines d'étude en simulation stratigraphique sont souvent de grande taille, avec  $L$  de l'ordre du kilomètre. Par ailleurs, les hauteurs d'eau sont faibles ( $\tilde{H}$  de l'ordre du mètre) mais les hauteurs de sédiments peuvent être plus importantes ( $H$  de l'ordre du kilomètre). Enfin, les durées considérées sont très élevées, avec  $T$  de l'ordre du million d'années. Ainsi, on peut en déduire les relations

$$\frac{g\tilde{H}T^2}{L^2} \gg 1, \quad \frac{gHT^2}{L^2} \gg 1, \quad \frac{CL}{\tilde{H}} \gg 1.$$

Nous admettons alors que les forces motrices (dans le cas présent la gravité) et de friction de l'eau sont à l'équilibre, les termes restants étant négligeables. Autrement dit, on admet la relation

$$|\tilde{\mathbf{u}}|\tilde{\mathbf{u}} = -\tilde{K}^2\tilde{h}\nabla(\tilde{h} + h), \quad (4.2)$$

où  $\tilde{K}^2 = g/C$  peut être vu comme le coefficient de Chézy [46]. Remarquons alors que les vecteurs  $\tilde{\mathbf{u}}$  et  $\nabla(\tilde{h} + h)$  sont colinéaires mais de sens opposés. Après avoir calculé  $|\tilde{\mathbf{u}}|$ , l'expression de la vitesse de l'eau est donnée par

$$\tilde{\mathbf{u}} = |\tilde{\mathbf{u}}| \left( -\frac{\nabla(\tilde{h} + h)}{|\nabla(\tilde{h} + h)|} \right) \quad (4.3a)$$

$$= -\tilde{K}\tilde{h}^{1/2}|\nabla(\tilde{h} + h)|^{-1/2}\nabla(\tilde{h} + h). \quad (4.3b)$$

Il s'ensuit que l'équation de conservation de la hauteur d'eau (4.1a) peut se reformuler par

$$\partial_t \tilde{h} + \operatorname{div} \left( -\tilde{K} \tilde{h}^{3/2} |\nabla(\tilde{h} + h)|^{-1/2} \nabla(\tilde{h} + h) \right) = 0, \quad \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}_+. \quad (4.4)$$

Cette démarche suit l'approche présentée par Birnir et al. [17]. Certaines différences sont à souligner néanmoins, notamment au niveau de la loi de Chézy (4.2). Différentes variantes peuvent en effet être utilisées : dans le cas présenté ici il s'agit de la relation de Darcy-Weisbach, tandis que dans le modèle développé par Birnir et al. intervenait la relation de Manning. Ces approches sont abordées plus en détails dans les ouvrages de Grangeon [47], de Smith et al. [65], ainsi que de Viollet et al. [70].

Intéressons-nous à présent au transport des sédiments. Pour des précisions sur les différentes lois empiriques qui vont être employées, on pourra se référer aux travaux de Grangeon [47] et aux références s'y trouvant. Tout d'abord, le flux de sédiments (noté par  $\mathbf{q}$ ) est choisi comme étant proportionnel à la contrainte de cisaillement de l'eau exercée sur les sédiments (notée par  $\boldsymbol{\tau}$ ), à la puissance 3/2 :

$$\mathbf{q} = k |\boldsymbol{\tau}|^{1/2} \boldsymbol{\tau}, \quad (4.5)$$

où  $k$  est une constante. Cette loi ne fait ici pas intervenir de contrainte de cisaillement critique, ce qui suppose que l'eau a assez de puissance pour maintenir un écoulement constant de sédiments. Ensuite, le flux d'eau étant stationnaire et uniforme par hypothèse, la contrainte  $\boldsymbol{\tau}$  peut se définir par la formule

$$\boldsymbol{\tau} = -\rho g \tilde{h} \nabla(\tilde{h} + h), \quad (4.6)$$

où  $\rho$  représente la masse volumique de l'eau, et  $g$  l'accélération de la pesanteur. Les deux dernières relations peuvent alors être combinées pour obtenir une nouvelle expression du flux de sédiments :

$$\mathbf{q} = -k(\rho g)^{3/2} \tilde{h}^{3/2} |\nabla(\tilde{h} + h)|^{1/2} \nabla(\tilde{h} + h). \quad (4.7)$$

Finalement, l'équation régissant le transport des sédiments que nous considérons est définie par

$$\partial_t h + \operatorname{div} \left( -K \tilde{h}^{3/2} |\nabla(\tilde{h} + h)|^{1/2} \nabla(\tilde{h} + h) \right) = 0, \quad \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}_+, \quad (4.8)$$

avec  $K = k(\rho g)^{3/2}$ . La première tentative de modélisation est ainsi composée des équations (4.4) et (4.8).

**Remarque 4.1.** En pratique, il est possible d'estimer les coefficients de diffusion  $\tilde{K}$  et  $K$  à partir de lois physiques. Cependant,  $\tilde{K}$  est défini à partir de lois hydrauliques (avec un temps caractéristique de l'ordre de l'heure à la journée), tandis que  $K$  est calculé avec des lois morphologiques (avec un temps caractéristique de l'ordre de l'année). Le couplage précédent fait donc intervenir des lois adaptées à des échelles de temps très différentes, qui induit des valeurs très hétérogènes pour ces constantes. Néanmoins, tout comme dans Dionisos, on s'intéresse ici davantage à l'impact de l'écoulement de l'eau moyenné sur de très grandes durées. Les valeurs de  $\tilde{K}$  et  $K$  sont alors modifiées, en respectant malgré tout l'hypothèse d'équilibre hydraulique. À travers les cas tests présentés dans les chapitres suivants, nous pourrons voir que cela permet tout de même de reproduire des comportements réalistes.



### 4.2.2 Analyse théorique

Cette partie a pour but de mener une étude du modèle (4.4),(4.8). Plus précisément, nous allons chercher une condition d'existence d'un invariant de Riemann fort. Pour cela, l'étude se basera sur des travaux analogues de Viviani [72] dans lesquels sont étudiés des modèles d'écoulements diphasiques dans les conduites pétrolières.

#### Reformulation du modèle

Dans un premier temps, nous allons reprendre l'écriture du modèle en faisant intervenir l'équation de Chézy. Cette formulation servira de base pour l'étude présentée ici. En reprenant les calculs effectués en première partie, le modèle (4.4),(4.8) est équivalent au système

$$\partial_t h + \operatorname{div}\left(-K\tilde{h}^{3/2}|\nabla(\tilde{h}+h)|^{1/2}\nabla(\tilde{h}+h)\right) = 0, \quad \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}_+, \quad (4.9a)$$

$$\partial_t \tilde{h} + \operatorname{div}(\tilde{h}\tilde{\mathbf{u}}) = 0, \quad \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}_+, \quad (4.9b)$$

$$\tilde{K}^2\tilde{h}\nabla(\tilde{h}+h) = -|\tilde{\mathbf{u}}|\tilde{\mathbf{u}}, \quad \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}_+. \quad (4.9c)$$

La prochaine étape consiste à effectuer un changement de variables. Pour cela, considérons les nouvelles variables que sont la hauteur totale  $H = \tilde{h} + h$  et la fraction d'eau  $Y = \tilde{h}/(\tilde{h} + h)$ . Le système (4.9) peut alors s'exprimer sous la forme

$$\partial_t H + \operatorname{div}(HU) = 0, \quad \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}_+, \quad (4.10a)$$

$$\partial_t(HY) + \operatorname{div}(HW) = 0, \quad \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}_+, \quad (4.10b)$$

$$HY\nabla H = -\tilde{K}^{-2}Y^{-2}|W|W, \quad \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}_+, \quad (4.10c)$$

avec  $W = Y\tilde{\mathbf{u}}$ . Le point clé ici est que la vitesse totale  $U = W - KH^{1/2}Y^{3/2}|\nabla H|^{1/2}\nabla H$  peut s'exprimer sous une forme indépendante de  $\nabla H$ . C'est ce que montre le résultat suivant.

**Lemme 4.1.** *La vitesse totale  $U$  ne dépend que de  $H$ ,  $Y$  et  $W$ .*

*Démonstration.* Par définition de  $U$ , nous avons la première relation

$$U = W + KH^{1/2}Y^{3/2}|\nabla H|^{3/2}\left(-\frac{\nabla H}{|\nabla H|}\right). \quad (4.11)$$

L'idée est alors d'utiliser l'expression de  $W$  pour réécrire les termes faisant intervenir  $\nabla H$ . Pour cela, à partir de la formule (4.3) définissant  $\tilde{\mathbf{u}}$ , on obtient l'égalité

$$W = -\tilde{K}H^{1/2}Y^{3/2}|\nabla H|^{-1/2}\nabla H. \quad (4.12)$$

De là, en prenant la norme nous arrivons à la relation

$$|W| = \tilde{K}H^{1/2}Y^{3/2}|\nabla H|^{1/2},$$

qui nous permet d'en déduire que

$$|\nabla H|^{3/2} = \tilde{K}^{-3}H^{-3/2}Y^{-9/2}|W|^3.$$

Or, par la définition de  $W$  donnée par (4.12),  $\nabla H$  et  $W$  sont colinéaires mais de sens opposés. Grâce à cette propriété, on obtient que

$$|\nabla H|^{3/2} \left( -\frac{\nabla H}{|\nabla H|} \right) = \tilde{K}^{-3} H^{-3/2} Y^{-9/2} |W|^3 \left( \frac{W}{|W|} \right).$$

Finalement, en injectant ce résultat dans l'expression (4.11), on obtient

$$U = W + \tilde{K}^{-3} K H^{-1} Y^{-3} |W|^2 W. \quad (4.13)$$

□

L'idée est alors de voir  $W$  comme une fonction de  $H$ ,  $Y$  et  $U$ , et de considérer ces dernières comme uniques variables du système (4.10).

### Étude dans le cas unidimensionnel

Nous procédons à présent à l'analyse du système (4.10) dans le cas unidimensionnel afin d'en déduire quelques propriétés. La première étape consiste à écrire le système sous forme quasi-linéaire. Pour cela, nous aurons besoin du résultat suivant.

**Lemme 4.2.**  *$W$  peut s'exprimer en fonction de  $H$ ,  $Y$  et  $U$ , indépendamment de  $\nabla H$ .*

*Démonstration.* En une dimension, la relation (4.13) se réduit à

$$U = W + \tilde{K}^{-3} K H^{-1} Y^{-3} W^3.$$

Le discriminant associé à cette équation cubique est égal à  $\Delta = -27\gamma^2 U^2 - 4\gamma$ , avec  $\gamma = \tilde{K}^{-3} K H^{-1} Y^{-3}$ . Par définition de  $\gamma$  nous pouvons en déduire que  $\Delta < 0$ , ce qui implique que l'équation n'admet qu'une seule solution réelle. □

Dans la suite nous utiliserons ainsi la notation  $W = \Lambda(H, Y, U)$ . Le système complet issu de (4.10) que nous étudions en une dimension est alors donné par

$$\partial_t H + \partial_x(HU) = 0, \quad \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}_+, \quad (4.14a)$$

$$\partial_t(HY) + \partial_x(HW) = 0, \quad \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}_+, \quad (4.14b)$$

$$\partial_x H = S, \quad \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}_+, \quad (4.14c)$$

avec le terme source  $S = -\tilde{K}^{-2} H^{-1} Y^{-3} |W|W$  ainsi que la loi de fermeture  $W = \Lambda(H, Y, U)$ . Après le développement des différentes dérivées, ce système peut se reformuler sous la forme quasi-linéaire

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ Y & H & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_A \partial_t \begin{pmatrix} H \\ Y \\ U \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} U & 0 & H \\ W + H \frac{\partial \Lambda}{\partial H} & H \frac{\partial \Lambda}{\partial Y} & H \frac{\partial \Lambda}{\partial U} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_B \partial_x \begin{pmatrix} H \\ Y \\ U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ S \end{pmatrix}. \quad (4.15)$$

L'étape suivante va consister à rechercher un invariant de Riemann fort au système (4.15).

**Définition 4.1.** On dit que  $\mathcal{I}(H, Y, U)$  est un invariant de Riemann fort s'il existe une équation de transport à vitesse  $\lambda$  sur  $\mathcal{I}$  (éventuellement avec un terme source), c'est-à-dire

$$\partial_t \mathcal{I} + \lambda \partial_x \mathcal{I} = \bar{S}. \quad (4.16)$$

Dans le but de trouver une condition pour l'existence d'un tel invariant, nous recherchons une condition de compatibilité. Pour cela, on forme une combinaison linéaire des équations du système (4.15) à l'aide d'une matrice uniligne notée par  $L = (l_1, l_2, l_3)$  :

$$L\mathcal{A}\partial_t \begin{pmatrix} H \\ Y \\ U \end{pmatrix} + L\mathcal{B}\partial_x \begin{pmatrix} H \\ Y \\ U \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ S \end{pmatrix}. \quad (4.17)$$

Cherchons alors s'il existe  $L$  tel que les vecteurs  $L\mathcal{A}$  et  $L\mathcal{B}$  soient colinéaires, de telle sorte que la relation de compatibilité (4.17) devienne

$$L' \left[ \alpha \partial_t \begin{pmatrix} H \\ Y \\ U \end{pmatrix} + \beta \partial_x \begin{pmatrix} H \\ Y \\ U \end{pmatrix} \right] = L \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ S \end{pmatrix}, \quad (4.18)$$

avec  $L' = (l'_1, l'_2, l'_3)$  une nouvelle matrice uniligne, et  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Une condition pour qu'une telle relation existe est d'avoir

$$\begin{aligned} L\mathcal{A} &= \alpha L', \\ L\mathcal{B} &= \beta L', \end{aligned}$$

d'où, en éliminant  $L'$ ,

$$L(\beta\mathcal{A} - \alpha\mathcal{B}) = 0. \quad (4.19)$$

Le vecteur  $L$  étant supposé non nul, pour que le problème (4.19) admette une solution il faut avoir  $\det(\beta\mathcal{A} - \alpha\mathcal{B}) = 0$ . Le calcul de ce déterminant donne

$$\begin{aligned} \det(\beta\mathcal{A} - \alpha\mathcal{B}) &= \begin{vmatrix} \beta - \alpha U & 0 & -\alpha H \\ \beta Y - \alpha(W + H \frac{\partial \Lambda}{\partial H}) & \beta H - \alpha H \frac{\partial \Lambda}{\partial Y} & -\alpha H \frac{\partial \Lambda}{\partial U} \\ -\alpha & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \alpha^2 H^2 \left( \alpha \frac{\partial \Lambda}{\partial Y} - \beta \right). \end{aligned}$$

Le système admet ainsi une valeur propre double  $\alpha = 0, \beta = 1$ , qui correspond à une vitesse de transport infinie, et une racine simple  $\alpha = 1, \beta = \frac{\partial \Lambda}{\partial Y}$  qui correspond à la vitesse de transport finie

$$\lambda = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\partial \Lambda}{\partial Y}. \quad (4.20)$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre double vérifient  $L\mathcal{A} = 0$ . Un calcul simple montre que dans ce cas  $L = (0, 0, 1)$ . La relation de compatibilité correspondante est alors la troisième équation du système, à savoir

$$\partial_x H = S. \quad (4.21)$$

Concernant les vecteurs propres associés à la valeur propre simple, ces derniers vérifient la relation  $L \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial Y} \mathcal{A} - \mathcal{B} \right) = 0$ . Après calculs, la solution s'écrit sous la forme

$$l_1 = -\frac{\partial \Lambda}{\partial U}, \quad (4.22a)$$

$$l_2 = 1, \quad (4.22b)$$

$$l_3 = -\frac{\partial \Lambda}{\partial U} \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial Y} - U \right) + Y \frac{\partial \Lambda}{\partial Y} - H \frac{\partial \Lambda}{\partial H} - W. \quad (4.22c)$$

La relation de compatibilité correspondante est alors donnée par

$$\begin{aligned} \left( -\frac{\partial \Lambda}{\partial U} + Y \right) (\partial_t H + \lambda \partial_x H) + H (\partial_t Y + \lambda \partial_x Y) \\ = \left( -\frac{\partial \Lambda}{\partial U} \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial Y} - U \right) + Y \frac{\partial \Lambda}{\partial Y} - H \frac{\partial \Lambda}{\partial H} - W \right) S. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Pour davantage de détails, on pourra se référer, par exemple, aux travaux de Hirsch [52]. Nous pouvons maintenant énoncer le résultat qui suit.

**Lemme 4.3.** *Il existe un invariant de Riemann fort si et seulement si la loi de fermeture  $\Lambda(H, Y, U)$  est linéaire en  $U$  :  $\Lambda(H, Y, U) = \Lambda_0(H, Y)U + \Lambda_1(H, Y)$  (loi de type Zuber-Findlay [73]).*

*Démonstration.* Pour commencer, notons qu'un invariant de Riemann fort  $\mathcal{I}(H, Y, U)$  vérifie

$$\partial_t \mathcal{I} + \lambda \partial_x \mathcal{I} = \frac{\partial \mathcal{I}}{\partial H} (\partial_t H + \lambda \partial_x H) + \frac{\partial \mathcal{I}}{\partial Y} (\partial_t Y + \lambda \partial_x Y) + \frac{\partial \mathcal{I}}{\partial U} (\partial_t U + \lambda \partial_x U).$$

Nous remarquons alors par identification avec (4.23) que si un invariant de Riemann existe, nécessairement il ne dépend pas de  $U$  :  $\mathcal{I} = \mathcal{I}(H, Y)$ . De plus, toujours par identification, nous pouvons en déduire que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{I}}{\partial H} &= -\frac{\partial \Lambda}{\partial U} + Y, \\ \frac{\partial \mathcal{I}}{\partial Y} &= H. \end{aligned}$$

Or comme  $\mathcal{I}$  ne dépend pas de  $U$ , il s'ensuit que  $\frac{\partial \Lambda}{\partial U}$  ne dépend pas de  $U$  non plus. Autrement dit,  $\Lambda$  est linéaire par rapport à  $U$ .  $\square$

### 4.3 Couplage avec transport gravitaire

La première approche détaillée dans la section précédente présentant de bonnes propriétés, nous pouvons considérer qu'il s'agit d'une bonne base. Afin de poursuivre sur cette lancée, tentons d'incorporer le transport gravitaire qui a été étudié dans le chapitre 3.

### 4.3.1 Une première tentative

Une manière de procéder est la suivante. Partant du flux de sédiments (4.7), on y ajoute un terme supplémentaire, correspondant au flux gravitaire (3.1b). La nouvelle équation de conservation est alors donnée

$$\partial_t h + \operatorname{div} \left( -K \tilde{h}^{3/2} |\nabla(\tilde{h} + h)|^{1/2} \nabla(\tilde{h} + h) - K_g |\nabla h|^{p-2} \nabla h \right) = 0, \quad \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}_+. \quad (4.24)$$

L'équation sur la hauteur d'eau (4.4) reste quant à elle inchangée. Remarquons alors que dans les zones sèches (c'est-à-dire où  $\tilde{h} = 0$ ), le nouveau modèle (4.4)–(4.24) a un comportement similaire au système étudié dans le chapitre 3. Inversement, en domaine fluvial ( $\tilde{h} > 0$ ), le transport des sédiments se compose d'une partie gravitaire et d'une partie due à l'entraînement de l'eau. Malheureusement, cette version admet certains inconvénients. En effet, le fait d'avoir un flux de sédiment dirigé pour une partie dans la direction  $\nabla h$  et une autre dans la direction  $\nabla(\tilde{h} + h)$  entraîne des difficultés autant du côté théorique que numérique. Certaines estimations, notamment sur la hauteur de sédiments, sont particulièrement compliquées à obtenir. Sans ces propriétés, il est par ailleurs impossible de montrer l'existence d'une solution au schéma numérique. De surcroît, au niveau des résultats de simulations, la présence d'oscillations numériques a été remarquée dans certaines configurations (voir figure 4.3).

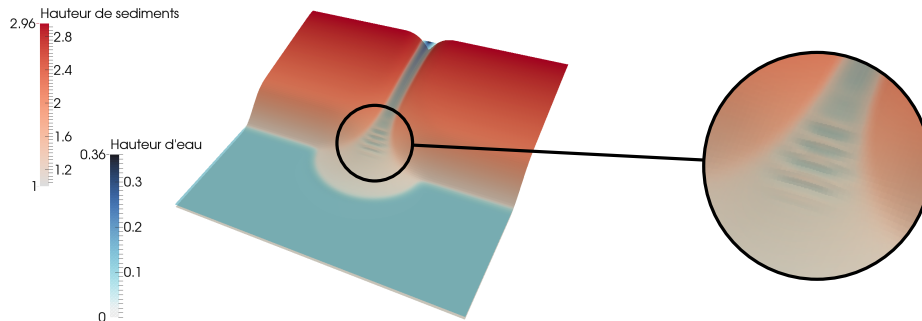


FIGURE 4.3 – Exemple de présence d'oscillations durant une simulation.

### 4.3.2 Une hypothèse supplémentaire

Dans le but de remédier à cette situation, une hypothèse supplémentaire au sein du flux de sédiments est effectuée. Ayant supposé que l'écoulement d'eau est stationnaire, cela se traduit par le fait que lorsque l'eau s'écoule sur une pente, seul un mince filet est présent. En conséquence, le gradient de la hauteur totale (eau + sédiments) peut être approché par le gradient de la hauteur de sédiments :  $\nabla(\tilde{h} + h) \approx \nabla h$ . Cette approximation n'est cependant pas valide au niveau des lacs. Dans ce cas de figure, on considère pour simplifier que le flux de sédiments suit la pente de la topographie  $\nabla h$ , c'est-à-dire que les sédiments sont denses et suivent le fond. Cet aspect est représenté sur la figure 4.4.

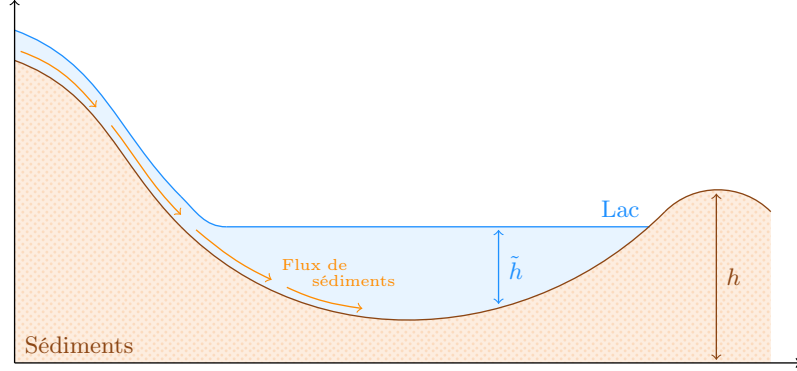


FIGURE 4.4 – Approximation de la direction du flux de sédiments en domaine lacustre.

Finalement, le couplage entre le flux d'eau et de sédiments qui est retenu pour la suite de ce chapitre est donnée par

$$\partial_t \tilde{h} + \operatorname{div}(\tilde{\mathbf{F}}) = 0, \quad \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}_+, \quad (4.25a)$$

$$\partial_t h + \operatorname{div}(\mathbf{F}) = 0, \quad \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}_+, \quad (4.25b)$$

où les flux sont définis par

$$\tilde{\mathbf{F}} = -\tilde{K} \tilde{h}^{3/2} |\nabla(\tilde{h} + h)|^{-1/2} \nabla(\tilde{h} + h), \quad (4.26a)$$

$$\mathbf{F} = -K(h) \tilde{h}^{3/2} |\nabla(\tilde{h} + h)|^{1/2} \nabla h - K_g(h) |\nabla h|^{p-2} \nabla h. \quad (4.26b)$$

De cette manière, le flux de sédiments est uniquement dirigé dans la direction  $\nabla h$ . Comme nous le verrons dans les sections suivantes, les estimations recherchées seront plus accessibles avec cette version, tout en gardant un comportement physique réaliste. Notons par ailleurs que les coefficients de diffusion  $K_g$  et  $K$  pourront prendre des valeurs différentes suivant le type de domaine considéré (marin ou continental) :

$$K_g(h) = \begin{cases} K_{g,m}, & \text{si } h < H_m, \\ K_{g,c}, & \text{si } h \geq H_m, \end{cases} \quad (4.27a)$$

$$K(h) = \begin{cases} K_m, & \text{si } h < H_m, \\ K_c, & \text{si } h \geq H_m. \end{cases} \quad (4.27b)$$

Ce modèle est en pratique complété par des conditions aux limites représentant des flux entrants d'eau et de sédiments

$$\tilde{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{n} = \tilde{\phi}(x, y, t) \leq 0, \quad \text{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}_+, \quad (4.28a)$$

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = \phi(x, y, t) \leq 0, \quad \text{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}_+, \quad (4.28b)$$

ainsi que par des données initiales

$$\tilde{h}(x, y, t = 0) = \tilde{h}_0(x, y), \quad \text{dans } \Omega, \quad (4.29a)$$

$$h(x, y, t = 0) = h_0(x, y), \quad \text{dans } \Omega, \quad (4.29b)$$

vérifiant  $0 \leq \tilde{h}_0 \leq \tilde{h}^*$  et  $0 \leq h_0 \leq h^*$ , avec  $\tilde{h}^*, h^* \in \mathbb{R}_+$ .

### 4.3.3 Analyse de stabilité non-linéaire

Cette partie est consacrée à une analyse de stabilité non-linéaire du système (4.25)–(4.29). L'analyse ne sera néanmoins que partielle, l'objectif principal étant de se convaincre que le système possède une bonne stabilité structurelle. L'idée générale est la suivante. On commence par se donner une suite de solutions approchées, que l'on note par  $(\tilde{h}_n, h_n)_n$ . Chaque élément de cette suite peut être vu comme étant une solution obtenue à l'aide d'un schéma numérique adapté. Nous supposons ici pour simplifier la présentation que  $(\tilde{h}_n, h_n)_n$  est une suite de solutions régulières au problème

$$\partial_t \tilde{h}_n + \operatorname{div}(\tilde{\mathbf{F}}_n) = 0, \quad \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}_+, \quad (4.30a)$$

$$\partial_t h_n + \operatorname{div}(\mathbf{F}_n) = 0, \quad \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}_+, \quad (4.30b)$$

où les flux correspondants sont définis par

$$\tilde{\mathbf{F}}_n = -\tilde{K} \tilde{h}_n^{3/2} |\nabla(\tilde{h}_n + h_n)|^{-1/2} \nabla(\tilde{h}_n + h_n), \quad (4.31a)$$

$$\mathbf{F}_n = -K(h_n) \tilde{h}_n^{3/2} |\nabla(\tilde{h}_n + h_n)|^{1/2} \nabla h_n - K_g(h_n) |\nabla h_n|^{p-2} \nabla h_n. \quad (4.31b)$$

Naturellement, on souhaiterait que cette suite admette une limite  $(\tilde{h}, h)$ , et vérifiant (4.25)–(4.29) lorsque  $n$  tend vers l'infini (ce qui correspondrait dans notre cas à  $\Delta t$ ,  $\Delta x$  et  $\Delta y$  tendant vers 0).

On fait le choix d'effectuer les calculs dans le cadre continu formel plutôt que dans le cadre discret. Cette deuxième option serait adaptée à une étude plus rigoureuse, mais demanderait au préalable la construction d'un schéma numérique totalement implicite (et non pas semi-implicite), suivie de quantités de calculs assez conséquentes. Le but étant essentiellement de se convaincre que le système d'étude admet de bonnes propriétés de compacité, nous nous contenterons d'une analyse formelle. Les calculs qui vont suivre suggèrent qu'un comportement similaire s'applique dans notre cas.

Sans perte de généralité, on suppose que les différents coefficients de diffusion sont égaux à 1. Dans un premier temps nous allons chercher un cadre fonctionnel afin que le problème (4.30) ait un sens. Plus précisément, on souhaite que les intégrales découlant de la formulation au sens des distributions soient bien définies :

$$\int_0^T \int_{\Omega} \chi \partial_t \tilde{h}_n \, dx \, dy \, dt - \int_0^T \int_{\Omega} \nabla \chi \cdot \tilde{\mathbf{F}}_n \, dx \, dy \, dt + \int_0^T \int_{\partial\Omega} \chi \tilde{\phi} \, d\sigma \, dt = 0, \quad (4.32a)$$

$$\int_0^T \int_{\Omega} \chi \partial_t h_n \, dx \, dy \, dt - \int_0^T \int_{\Omega} \nabla \chi \cdot \mathbf{F}_n \, dx \, dy \, dt + \int_0^T \int_{\partial\Omega} \chi \phi \, d\sigma \, dt = 0, \quad (4.32b)$$

pour toute fonction test  $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(\bar{\Omega} \times [0, T[)$ . Une fois le cadre fonctionnel défini, une étude formelle de convergence pourra être effectuée. Dans la suite on utilisera la notation  $\|\cdot\|_{L^p(L^q)} := \|\cdot\|_{L^p((0,T);L^q(\Omega))}$ , et une notation analogue pour  $\|\cdot\|_{L^p(W^{m,q})}$ . Par ailleurs,  $C$  et  $C^*$  désigneront des quantités indépendantes de  $\tilde{h}_n$  et  $h_n$  pouvant évoluer au cours des calculs.

#### Première étape : estimations a priori

Dorénavant, nous supposons que les solutions  $\tilde{h}_n$  et  $h_n$  sont suffisamment régulières pour que tous les calculs ci-dessous soient justifiés. On admet également qu'il existe  $r > 1$

tel que  $\tilde{\phi}_n, \phi_n \in L^r(L^r)$ . Nous cherchons dans un premier temps à obtenir des estimations a priori sur les solutions. On vérifiera dans un second temps que ces estimations seront suffisantes pour donner un sens aux équations (4.32). Commençons par montrer que les hauteurs  $\tilde{h}_n$  et  $h_n$  restent positives.

**Lemme 4.4.** *Pour tout  $0 < t^* < T$ , les relations suivantes sont vérifiées :*

$$\tilde{h}_n(\cdot, t^*) \geq 0, \quad (4.33a)$$

$$h_n(\cdot, t^*) \geq 0. \quad (4.33b)$$

*Démonstration.* Considérons l'équation sur  $\tilde{h}_n$  (4.32a) ainsi que la fonction test  $\chi(x, t) = \tilde{h}_n^-(x, t)\mathbb{1}_{\{t < t^*\}}$ . Après calculs, on obtient la relation

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} (\tilde{h}_n^-)^2|_{t=t^*} dx dy \leq - \int_0^{t^*} \int_{\partial\Omega} \tilde{h}_n^- \tilde{\phi} d\sigma dt \leq 0.$$

On en déduit alors que  $\tilde{h}_n^-(\cdot, t^*) = 0$  sur  $\Omega$ , ce qui revient à dire que  $\tilde{h}_n(\cdot, t^*) \geq 0$  sur  $\Omega$ . Pour montrer l'estimation sur  $h_n$ , on utilise une démarche analogue en partant de la relation (4.32b) avec la fonction test  $\chi(x, t) = h_n^-(x, t)\mathbb{1}_{\{t < t^*\}}$ .  $\square$

Nous allons maintenant présenter un résultat basé sur la conservation de l'eau et des sédiments.

**Lemme 4.5.** *Les relations suivantes sont vérifiées :*

$$\|\tilde{h}_n\|_{L^\infty(L^1)} \leq C, \quad (4.34a)$$

$$\|h_n\|_{L^\infty(L^1)} \leq C. \quad (4.34b)$$

*Démonstration.* Soit  $0 < t^* < T$ . Concentrons-nous sur la première estimation. Pour la démontrer, partons de l'équation (4.32a) avec la fonction test  $\chi(x, t) = \mathbb{1}_{\{t < t^*\}}$ . Les calculs mènent alors à la relation

$$\int_{\Omega} \tilde{h}_n|_{t=t^*} dx dy = \int_{\Omega} \tilde{h}_0 dx dy - \int_0^{t^*} \int_{\partial\Omega} \tilde{\phi} d\sigma dt.$$

Par le lemme 4.4 ainsi que les hypothèses sur les données initiales et les conditions aux limites, on en déduit

$$\begin{aligned} \|\tilde{h}_n(\cdot, t^*)\|_{L^1(\Omega)} &= \|\tilde{h}_0\|_{L^1(\Omega)} + \|\tilde{\phi}\|_{L^1(\partial\Omega \times [0, t^*])} \\ &\leq \|\tilde{h}_0\|_{L^1(\Omega)} + \|\tilde{\phi}\|_{L^1(\partial\Omega \times [0, T])}. \end{aligned}$$

Cette estimation étant valable pour tout  $t^*$ , on a obtenu une borne uniforme en temps, ce qui prouve (4.34a). Concernant la seconde estimation, on effectue une démarche identique en partant de la relation (4.32b) avec la même fonction test.  $\square$

À présent, nous allons démontrer un lemme qui apporte un contrôle supplémentaire sur l'équation (4.30b).



**Lemme 4.6.** *Les estimations suivantes sont vérifiées :*

$$\|h_n\|_{L^\infty(L^2)} \leq C, \quad (4.35a)$$

$$\|h_n\|_{L^p(W^{1,p})} \leq C, \quad (4.35b)$$

$$\int_0^T \int_\Omega \tilde{h}_n^{3/2} |\nabla(\tilde{h}_n + h_n)|^{1/2} |\nabla h_n|^2 \leq C. \quad (4.35c)$$

*Démonstration.* Commençons par multiplier l'équation (4.30b) par  $h_n$ , puis à intégrer sur  $\Omega$  :

$$\int_\Omega h_n \partial_t h_n \, dx \, dy + \int_\Omega h_n \operatorname{div}(\mathbf{F}_n) \, dx \, dy = 0.$$

Ensuite, on applique la formule de Stokes et on explicite la formule du flux pour obtenir

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_\Omega \frac{h_n^2}{2} \, dx \, dy + \int_\Omega \tilde{h}_n^{3/2} |\nabla(\tilde{h}_n + h_n)|^{1/2} |\nabla h_n|^2 \, dx \, dy \\ + \int_\Omega |\nabla h_n|^p \, dx \, dy + \int_{\partial\Omega} h_n \phi_n \, d\sigma = 0. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Penchons nous sur le terme de bord. Grâce à l'inégalité de Hölder et en se rappelant que  $\phi_n \leq 0$  et  $\tilde{h}_n \leq 0$ , on a l'estimation

$$\left| \int_{\partial\Omega} h_n \phi_n \, d\sigma \right| = - \int_{\partial\Omega} h_n \phi_n \, d\sigma \leq \|\phi_n\|_{L^{p'}(\partial\Omega)} \|h_n\|_{L^p(\partial\Omega)},$$

où  $p' = p/(p-1)$  est l'exposant conjugué de  $p$ . Ensuite, on applique l'inégalité de trace pour obtenir

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} h_n \phi_n \, d\sigma &\geq -C \|\phi_n\|_{L^{p'}(\partial\Omega)} \|h_n\|_{W^{1,p}(\Omega)} \\ &= -C \|\phi_n\|_{L^{p'}(\partial\Omega)} (\|h_n\|_{L^p(\Omega)} + \|\nabla h_n\|_{L^p(\Omega)}), \end{aligned}$$

suivie de l'inégalité de Poincaré-Wirtinger et de la relation (4.34b) qui conduisent à

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} h_n \phi_n \, d\sigma &\geq -C \|\phi_n\|_{L^{p'}(\partial\Omega)} \left( \left| \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega h_n \, dx \, dy \right| + (C^* + 1) \|\nabla h_n\|_{L^p(\Omega)} \right) \\ &\geq -C \|\phi_n\|_{L^{p'}(\partial\Omega)} (1 + \|\nabla h_n\|_{L^p(\Omega)}). \end{aligned}$$

En injectant l'inégalité précédente dans (4.36), après réécriture on arrive alors à la nouvelle relation

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_\Omega \frac{h_n^2}{2} \, dx \, dy + \int_\Omega \tilde{h}_n^{3/2} |\nabla(\tilde{h}_n + h_n)|^{1/2} |\nabla h_n|^2 \, dx \, dy \\ + \|\nabla h_n\|_{L^p(\Omega)}^p - C \|\nabla h_n\|_{L^p(\Omega)} \leq C^*. \end{aligned}$$

Ensuite, la prochaine étape consiste à employer la formule de Young qui nous donne

$$C \|\nabla h_n\|_{L^p(\Omega)} \leq \frac{\|\nabla h_n\|_{L^p(\Omega)}^p}{p} + \frac{C^{p'}}{p'},$$

où  $p$  et  $p'$  sont les mêmes exposants conjugués qu'auparavant. En remplaçant dans l'inégalité précédente, il en résulte

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{h_n^2}{2} dx dy + \int_{\Omega} \tilde{h}_n^{3/2} |\nabla(\tilde{h}_n + h_n)|^{1/2} |\nabla h_n|^2 dx dy + \frac{p-1}{p} \|\nabla h_n\|_{L^p(\Omega)}^p \leq C.$$

Pour terminer, il reste à intégrer en temps sur  $[0, t^*]$  avec  $0 < t^* < T$  afin d'obtenir l'inégalité finale

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} h_n|_{t=t^*}^2 dx dy + \int_0^{t^*} \int_{\Omega} \tilde{h}_n^{3/2} |\nabla(\tilde{h}_n + h_n)|^{1/2} |\nabla h_n|^2 dx dy dt \\ + \frac{p-1}{p} \int_0^{t^*} \|\nabla h_n\|_{L^p(\Omega)}^p dt \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} h_n|_{t=0}^2 + CT. \end{aligned}$$

De cette relation on en déduit les estimations annoncées. En particulier, par l'inégalité de Poincaré-Wirtinger on a

$$\|h_n\|_{L^p(W^{1,p})} = \|h_n\|_{L^p(L^p)} + \|\nabla h_n\|_{L^p(L^p)} \leq C(1 + \|\nabla h_n\|_{L^p(L^p)}) \leq C^*.$$

□

Nous avons ainsi obtenu des estimations sur la hauteur de sédiments. De manière analogue, on recherche maintenant des informations sur la hauteur d'eau.

**Lemme 4.7.** *Les estimations suivantes sont vérifiées :*

$$\|\tilde{h}_n\|_{L^{3/2}(W^{1,3/2})} \leq C, \quad (4.37a)$$

$$\|\tilde{h}_n\|_{L^{3/2}(L^6)} \leq C. \quad (4.37b)$$

En combinant avec l'estimation (4.34a), on obtient de plus

$$\|\tilde{h}_n\|_{L^{9/4}(L^{9/4})} \leq C. \quad (4.37c)$$

*Démonstration.* Dans un premier temps, on établit l'estimation (4.37a). La démarche consiste à multiplier l'équation (4.30a) par une fonction  $\varphi(\tilde{h}_n)$ , à déterminer, puis à intégrer sur  $\Omega$  :

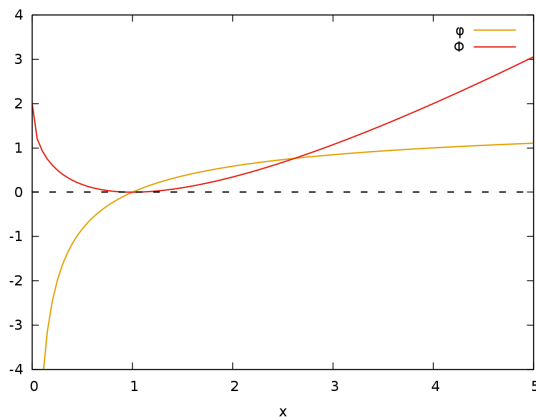
$$\int_{\Omega} \varphi(\tilde{h}_n) \partial_t \tilde{h}_n dx dy + \int_{\Omega} \varphi(\tilde{h}_n) \operatorname{div}(\tilde{\mathbf{F}}_n) dx dy = 0.$$

La formule de Stokes conduit alors à

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \Phi(\tilde{h}_n) dx dy + \int_{\Omega} \tilde{h}_n^{3/2} \varphi'(\tilde{h}_n) \nabla \tilde{h}_n \cdot |\nabla(\tilde{h}_n + h_n)|^{-1/2} \nabla(\tilde{h}_n + h_n) dx dy \\ + \int_{\partial\Omega} \tilde{\varphi}_n \varphi(\tilde{h}_n) d\sigma = 0, \quad (4.38) \end{aligned}$$

où  $\Phi$  est une primitive de  $\varphi$ . Afin de simplifier la seconde intégrale, l'idée est alors de choisir la fonction  $\varphi$  telle que  $\varphi'(\tilde{h}_n) = \tilde{h}_n^{-3/2}$ . Le choix se porte ici sur

$$\varphi'(\tilde{h}_n) = \tilde{h}_n^{-3/2}, \quad \varphi(\tilde{h}_n) = 2(1 - \tilde{h}_n^{-1/2}), \quad \Phi(\tilde{h}_n) = 2(\tilde{h}_n - 2\tilde{h}_n^{1/2} + 1).$$


 FIGURE 4.5 – Évolution des fonctions  $\varphi$  et  $\Phi$ .

Regardons alors le terme de bord. Comme  $\varphi(\tilde{h}_n) \leq 2$  et  $\tilde{\phi}_n \leq 0$ , on a l'estimation simple

$$\int_{\partial\Omega} \tilde{\phi}_n \varphi(\tilde{h}_n) \, d\sigma \geq -2 \|\tilde{\phi}_n\|_{L^1(\partial\Omega)}.$$

Ensuite, les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Young permettent d'obtenir

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} |\nabla(\tilde{h}_n + h_n)|^{-1/2} \nabla(\tilde{h}_n + h_n) \cdot \nabla \tilde{h}_n \, dx \, dy \\ &= \int_{\Omega} |\nabla(\tilde{h}_n + h_n)|^{-1/2} \nabla(\tilde{h}_n + h_n) \cdot (\nabla(\tilde{h}_n + h_n) - \nabla h_n) \, dx \, dy \\ &\geq \int_{\Omega} |\nabla(\tilde{h}_n + h_n)|^{3/2} \, dx \, dy - \int_{\Omega} |\nabla(\tilde{h}_n + h_n)|^{1/2} |\nabla h_n| \, dx \, dy \\ &\geq \frac{2}{3} \int_{\Omega} |\nabla(\tilde{h}_n + h_n)|^{3/2} \, dx \, dy - \frac{2}{3} \int_{\Omega} |\nabla h_n|^{3/2} \, dx \, dy. \end{aligned}$$

En injectant ces estimations dans (4.38) puis en intégrant en temps sur  $[0, t^*]$  avec  $0 < t^* < T$ , on arrive à la nouvelle estimation

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \Phi(\tilde{h}_n|_{t=t^*}) \, dx \, dy + \frac{2}{3} \int_0^{t^*} \int_{\Omega} |\nabla(\tilde{h}_n + h_n)|^{3/2} \, dx \, dy \, dt \\ & \leq \int_{\Omega} \Phi(\tilde{h}_n|_{t=0}) \, dx \, dy + \frac{2}{3} \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla h_n|^{3/2} \, dx \, dy \, dt + 2 \|\tilde{\phi}\|_{L^1(\partial\Omega \times [0, t^*])}. \end{aligned}$$

Or par les inégalités (4.34a) et (4.35b), on sait que le second membre est borné :

$$\int_{\Omega} \Phi(\tilde{h}_n|_{t=t^*}) \, dx \, dy + \frac{2}{3} \int_0^{t^*} \int_{\Omega} |\nabla(\tilde{h}_n + h_n)|^{3/2} \, dx \, dy \, dt \leq C.$$

En conséquence, par l'inégalité de Poincaré-Wirtinger et le fait que  $\Phi(\tilde{h}_n) \geq 0$ , on en déduit que

$$\|\tilde{h}_n + h_n\|_{L^{3/2}(W^{1,3/2})} \leq C.$$

De plus, l'inégalité triangulaire et les résultats précédents permettent d'obtenir

$$\|\tilde{h}_n\|_{L^{3/2}(W^{1,3/2})} \leq \|\tilde{h}_n + h_n\|_{L^{3/2}(W^{1,3/2})} + \|h_n\|_{L^{3/2}(W^{1,3/2})} \leq C.$$

Maintenant que l'estimation (4.37a) est établie, on cherche à montrer (4.37b) et (4.37c). Pour cela, on utilise l'injection de Sobolev  $W^{1,3/2}(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$  en dimension 2, ce qui implique directement

$$\|\tilde{h}_n\|_{L^{3/2}(L^6)} \leq C.$$

Pour davantage de détails sur les injections de Sobolev, on pourra se référer aux ouvrages de référence de Adams [2], Brezis [19], ou encore Evans [28]. Pour conclure, on utilise le théorème de Riesz-Thorin (voir par exemple Bergh et Löfström [15] ou Folland [37]) pour interpoler entre cette estimation et (4.34a), comme illustré sur la figure 4.6. On obtient en particulier que

$$\|\tilde{h}_n\|_{L^{9/4}(L^{9/4})} \leq C.$$

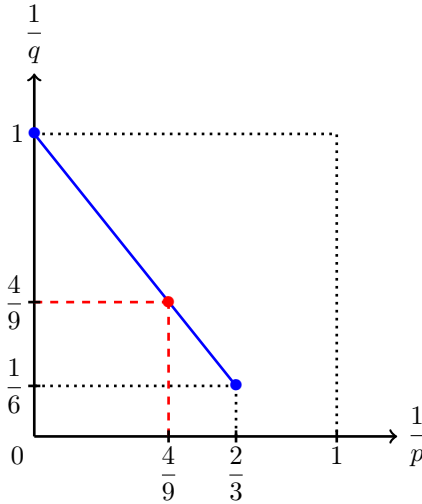


FIGURE 4.6 – Application du théorème de Riesz-Thorin pour  $L^\infty(L^1) \cap L^{3/2}(L^6)$ .

□

Nous allons maintenant vérifier que les espaces fonctionnels obtenus sont suffisants pour donner un sens à la formulation faible (4.32). Une première étape est donnée par le lemme suivant.

**Lemme 4.8.** *Soient  $\tilde{h}_n \in L^{9/4}(L^{9/4}) \cap L^{3/2}(W^{1,3/2})$  et  $h_n \in L^\infty(L^2) \cap L^p(W^{1,p})$ . Alors les flux d'eau  $\tilde{\mathbf{F}}_n$  et de sédiments  $\mathbf{F}_n$  sont intégrables sur  $\Omega \times [0, T]$ . Plus précisément, les estimations suivantes sont vérifiées :*

$$\|\tilde{\mathbf{F}}_n\|_{L^1(L^1)} \leq C, \tag{4.39a}$$

$$\|\mathbf{F}_n\|_{L^1(L^1)} \leq C. \tag{4.39b}$$

*Démonstration.* Commençons par analyser le flux d'eau. Par l'inégalité de Hölder et le lemme 4.7, on a l'estimation

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbf{F}}_n\|_{L^1(L^1)} &= \int_0^T \int_{\Omega} \tilde{h}_n^{3/2} |\nabla(\tilde{h}_n + h_n)|^{1/2} dx dy dt \\ &\leq \left( \int_0^T \int_{\Omega} \tilde{h}_n^{9/4} dx dy dt \right)^{2/3} \left( \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla(\tilde{h}_n + h_n)|^{3/2} dx dy dt \right)^{1/3} \\ &= \|\tilde{h}_n\|_{L^{9/4}(L^{9/4})}^{3/2} \|\nabla(\tilde{h}_n + h_n)\|_{L^{3/2}(L^{3/2})}^{1/2} \\ &\leq C. \end{aligned}$$

Penchons-nous à présent sur le flux de sédiments. Un premier calcul mène à

$$\|\mathbf{F}_n\|_{L^1(L^1)} \leq \int_0^T \int_{\Omega} \tilde{h}_n^{3/2} |\nabla(\tilde{h}_n + h_n)|^{1/2} |\nabla h_n| dx dy dt + \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla h_n|^{p-1} dx dy dt.$$

Par hypothèse, et comme  $\Omega$  et  $T$  sont bornés, on obtient la relation

$$\int_0^T \int_{\Omega} |\nabla h_n|^{p-1} dx dy dt = \|\nabla h_n\|_{L^{p-1}(L^{p-1})}^{p-1} \leq |\Omega|^{1/p} T^{1/p} \|\nabla h_n\|_{L^p(L^p)}^{p-1} \leq C.$$

Ensuite, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} \tilde{h}_n^{3/2} |\nabla(\tilde{h}_n + h_n)|^{1/2} |\nabla h_n| dx dy dt \\ \leq \left( \int_0^T \int_{\Omega} \tilde{h}_n^{3/2} |\nabla(\tilde{h}_n + h_n)|^{1/2} |\nabla h_n|^2 dx dy dt \right)^{1/2} \\ \times \left( \int_0^T \int_{\Omega} \tilde{h}_n^{3/2} |\nabla(\tilde{h}_n + h_n)|^{1/2} dx dy dt \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Le premier terme du produit est borné grâce au lemme (4.6). Quant au second terme, on utilise l'inégalité de Hölder, tout comme dans le traitement du flux d'eau. Ainsi, l'estimation

$$\|\mathbf{F}_n\|_{L^1(L^1)} \leq C$$

est satisfaite, ce qui conclut la preuve.  $\square$

Le résultat suivant permet ensuite de conclure sur l'objectif de cette sous-section.

**Lemme 4.9.** *Sous les mêmes hypothèses que la proposition 4.8, la formulation faible (4.32) est bien définie.*

*Démonstration.* Soit  $\chi \in C_c^\infty(\Omega \times [0, T])$ . On vérifie dans un premier temps que les termes liés aux dérivées temporelles sont bien définies. Pour ce faire,  $\chi$  étant à support compact et en employant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T \int_{\Omega} \chi \partial_t \tilde{h}_n dx dy dt \right| &= \left| \int_0^T \int_{\Omega} \tilde{h}_n \partial_t \chi dx dy dt \right| \\ &\leq \|\tilde{h}_n\|_{L^{9/4}(L^{9/4})} \|\partial_t \chi\|_{L^{9/5}(L^{9/5})} \\ &\leq C. \end{aligned}$$

De même, on a

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T \int_{\Omega} \chi \partial_t h_n \, dx \, dy \, dt \right| &= \left| \int_0^T \int_{\Omega} h_n \partial_t \chi \, dx \, dy \, dt \right| \\ &\leq \|h_n\|_{L^2(L^2)} \|\partial_t \chi\|_{L^2(L^2)} \\ &\leq C. \end{aligned}$$

Les intégrales liées aux flux se traitent aisément grâce au lemme 4.8, qui permet d'affirmer que

$$\left| \int_0^T \int_{\Omega} \nabla \chi \cdot \tilde{\mathbf{F}}_n \, dx \, dy \, dt \right| \leq \|\tilde{\mathbf{F}}_n\|_{L^1(L^1)} \|\nabla \chi\|_{L^\infty(L^\infty)} \leq C,$$

ainsi que

$$\left| \int_0^T \int_{\Omega} \nabla \chi \cdot \mathbf{F}_n \, dx \, dy \, dt \right| \leq \|\mathbf{F}_n\|_{L^1(L^1)} \|\nabla \chi\|_{L^\infty(L^\infty)} \leq C.$$

Les termes de bord quant à eux ne posent pas de problème dès que  $\tilde{\phi}_n, \phi_n \in L^q(\Omega \times [0, T])$  grâce à l'inégalité de Hölder.  $\square$

### Deuxième étape : compacité

Avant de passer à la phase de convergence à proprement dit, nous allons raffiner certaines estimations obtenues dans la partie précédentes.

**Lemme 4.10.** *Il existe  $\varepsilon > 0$  et  $\eta > 0$  tels que*

$$\|\tilde{h}_n\|_{L^\infty(L^{1+\varepsilon})} \leq C, \quad (4.40a)$$

$$\|\tilde{h}_n\|_{L^{9/4+\eta}(L^{9/4+\eta})} \leq C. \quad (4.40b)$$

*Démonstration.* Nous allons commencer par montrer qu'il existe  $\varepsilon > 0$  tel que l'on ait  $\|\tilde{h}_n\|_{L^\infty(L^{1+\varepsilon})} \leq C$  (autrement dit, on a une estimation légèrement meilleure que celle obtenue par la conservation de la masse). Pour ce faire, on multiplie l'équation (4.30a) par la fonction  $\varphi_\varepsilon$  vérifiant

$$\varphi'_\varepsilon(\tilde{h}_n) = \tilde{h}_n^{-1+\varepsilon}, \quad \varphi_\varepsilon(\tilde{h}_n) = \frac{\tilde{h}_n^\varepsilon - 1}{\varepsilon}, \quad \Phi_\varepsilon(\tilde{h}_n) = \frac{\tilde{h}_n^{1+\varepsilon} - 1}{\varepsilon(1+\varepsilon)} - \frac{\tilde{h}_n - 1}{\varepsilon},$$

où  $\Phi_\varepsilon$  est une primitive de  $\varphi_\varepsilon$ . Après avoir intégré en espace et appliqué la formule de Stokes, on arrive à

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \Phi_\varepsilon(\tilde{h}_n) \, dx \, dy + \int_{\Omega} \tilde{h}_n^{1/2+\varepsilon} \nabla \tilde{h}_n \cdot |\nabla(\tilde{h}_n + h_n)|^{-1/2} \nabla(\tilde{h}_n + h_n) \, dx \, dy \\ + \int_{\partial\Omega} \tilde{\phi}_n \varphi_\varepsilon(\tilde{h}_n) \, d\sigma = 0. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Concernant le terme de bord, par l'inégalité de Hölder on a

$$\int_{\partial\Omega} \tilde{\phi}_n \varphi_\varepsilon(\tilde{h}_n) \, d\sigma \geq -\|\tilde{\phi}_n\|_{L^{r'}(\partial\Omega)} \|\varphi_\varepsilon(\tilde{h}_n)\|_{L^r(\partial\Omega)},$$

avec  $r$  et  $r'$  des exposants conjugués. Or d'après l'estimation (4.37a) et l'inégalité de trace, pour tout  $r > 1$  il est possible de choisir un  $\varepsilon > 0$  (plus précisément  $\varepsilon < 3/(2r)$ ) afin que  $\|\varphi_\varepsilon(\tilde{h}_n)\|_{L^r(\partial\Omega)} \leq \|\varphi_\varepsilon(\tilde{h}_n)\|_{W^{1,r}(\Omega)} \leq C$ . De cette manière, on en déduit que le terme de bord a un sens dès que la quantité  $\|\tilde{\phi}_n\|_{L^{r'}(\partial\Omega)}$  est elle aussi finie. Ensuite, en adaptant une partie de la preuve du lemme 4.7, on montre grâce aux inégalités de Cauchy-Schwarz et de Young que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \tilde{h}_n^{1/2+\varepsilon} |\nabla(\tilde{h}_n + h_n)|^{-1/2} \nabla(\tilde{h}_n + h_n) \cdot \nabla \tilde{h}_n \, dx \, dy \\ \geq \frac{2}{3} \int_{\Omega} \tilde{h}_n^{1/2+\varepsilon} |\nabla(\tilde{h}_n + h_n)|^{3/2} \, dx \, dy - \frac{2}{3} \int_{\Omega} \tilde{h}_n^{1/2+\varepsilon} |\nabla h_n|^{3/2} \, dx \, dy. \end{aligned}$$

En particulier, en utilisant l'inégalité de Hölder on obtient

$$\int_{\Omega} \tilde{h}_n^{1/2+\varepsilon} |\nabla h_n|^{3/2} \, dx \, dy \leq \left( \int_{\Omega} \tilde{h}_n^{2+4\varepsilon} \, dx \, dy \right)^{1/4} \left( \int_{\Omega} |\nabla h_n|^2 \, dx \, dy \right)^{3/4}.$$

Les estimations (4.35b) et (4.37c) permettent de conclure que si  $\varepsilon$  est assez petit, alors la quantité précédente est finie (on rappelle que  $p > 2$ ). Pour terminer, il reste à injecter les estimations obtenues dans la relation (4.41) puis à intégrer en temps sur  $[0, t^*]$  avec  $0 < t^* < T$ , ce qui conduit à

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon(1+\varepsilon)} \int_{\Omega} \tilde{h}_n^{1+\varepsilon}|_{t=t^*} \, dx \, dy + \frac{2}{3} \int_0^{t^*} \int_{\Omega} \tilde{h}_n^{1/2+\varepsilon} |\nabla(\tilde{h}_n + h_n)|^{3/2} \, dx \, dy \, dt \\ \leq C + \frac{1}{\varepsilon(1+\varepsilon)} \int_{\Omega} \tilde{h}_n^{1+\varepsilon}|_{t=0} \, dx \, dy + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} \tilde{h}_n|_{t=t^*} \, dx \, dy - \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} \tilde{h}_n|_{t=0} \, dx \, dy. \end{aligned}$$

La conservation de la masse nous assure que

$$0 \leq \int_{\Omega} (\tilde{h}_n|_{t=t^*} - \tilde{h}_n|_{t=0}) \, dx \, dy \leq - \int_0^{t^*} \int_{\partial\Omega} \tilde{\phi}_n \, d\sigma \, dt \leq C.$$

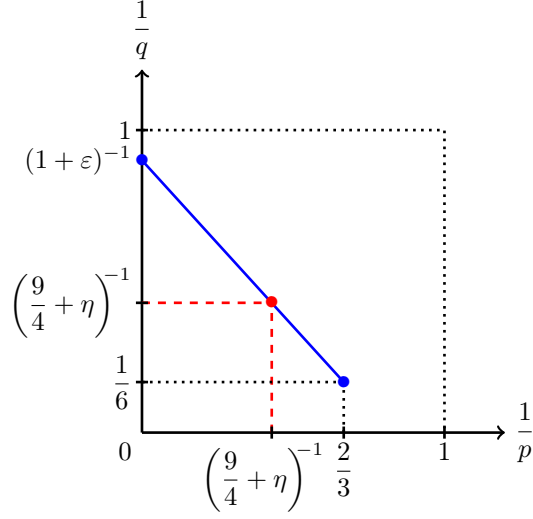
De plus, par hypothèse sur la donnée initiale, on a l'estimation  $\|\tilde{h}_n|_{t=0}\|_{L^{1+\varepsilon}(\Omega)} \leq C$ , qui implique

$$\|\tilde{h}_n\|_{L^\infty(L^{1+\varepsilon})} \leq C. \tag{4.42}$$

Pour conclure, il suffit d'appliquer le théorème de Riesz-Thorin avec (4.37b) et (4.42) (voir la figure 4.7) pour en déduire qu'il existe  $\eta > 0$  tel que

$$\|\tilde{h}_n\|_{L^{9/4+\eta}(L^{9/4+\eta})} \leq C.$$

□


 FIGURE 4.7 – Application du théorème de Riesz-Thorin pour  $L^\infty(L^{1+\epsilon}) \cap L^{3/2}(L^6)$ .

De ce résultat, il est possible d'en déduire une estimation légèrement meilleure sur les flux d'eau et de sédiments. En effet, en reprenant le lemme 4.8 avec l'hypothèse plus forte 4.40b, on obtient qu'il existe  $r_1, r_2 > 1$  tels que

$$\|\tilde{\mathbf{F}}_n\|_{L^{r_1}(L^{r_1})} \leq C, \quad (4.43a)$$

$$\|\mathbf{F}_n\|_{L^{r_2}(L^{r_2})} \leq C. \quad (4.43b)$$

Avant d'énoncer le prochain résultat, il est nécessaire de déterminer dans quel espace sont bornées les dérivées temporelles de  $\tilde{h}_n$  et  $h_n$ . Pour cela, on note que

$$\|\partial_t \tilde{h}_n\|_{L^{r_1}(W^{-1, r_1})} = \sup_{\substack{\chi \in L^{r'_1}(W_0^{1, r'_1}) \\ \chi \neq 0}} \frac{|\langle \partial_t \tilde{h}_n, \chi \rangle|}{\|\chi\|_{L^{r'_1}(W_0^{1, r'_1})}} \quad (4.44a)$$

$$= \sup_{\substack{\chi \in L^{r'_1}(W_0^{1, r'_1}) \\ \chi \neq 0}} \frac{|\langle \tilde{\mathbf{F}}_n, \nabla \chi \rangle|}{\|\chi\|_{L^{r'_1}(W_0^{1, r'_1})}} \quad (4.44b)$$

$$\leq \sup_{\substack{\chi \in L^{r'_1}(W_0^{1, r'_1}) \\ \chi \neq 0}} \frac{\|\tilde{\mathbf{F}}_n\|_{L^{r_1}(L^{r_1})} \|\nabla \chi\|_{L^{r'_1}(L^{r'_1})}}{\|\chi\|_{L^{r'_1}(W_0^{1, r'_1})}} \quad (4.44c)$$

$$\leq \|\tilde{\mathbf{F}}_n\|_{L^{r_1}(L^{r_1})} \quad (4.44d)$$

$$\leq C, \quad (4.44e)$$

où  $r'_1 = r_1/(r_1 - 1)$  est l'exposant conjugué de  $r_1$ . Pour simplifier les calculs, on a supposé ici que les fonctions test  $\chi$  sont nulles sur le bord, afin de ne pas avoir à gérer les conditions



aux limites. De manière analogue, on montre que

$$\|\partial_t h_n\|_{L^{r_2}(W^{-1,r_2})} \leq C. \quad (4.45)$$

Nous allons à présent nous pencher sur le lemme suivant.

**Lemme 4.11.** *Supposons les estimations (4.35b), (4.37a), (4.37c), (4.44) et (4.45) vérifiées. Alors, à sous-suite près, il existe deux fonctions  $\tilde{h}$  et  $h$  telles que*

$$\tilde{h}_n \rightarrow \tilde{h} \quad \text{fortement dans } L^\alpha(L^\alpha), \quad 1 \leq \alpha < 9/4 + \eta, \quad (4.46a)$$

$$h_n \rightarrow h \quad \text{fortement dans } L^\beta(L^\beta), \quad 1 \leq \beta < p. \quad (4.46b)$$

De plus,

$$\nabla \tilde{h}_n \rightharpoonup \nabla \tilde{h} \quad \text{dans } L^{3/2}(L^{3/2}), \quad (4.47a)$$

$$\nabla h_n \rightharpoonup \nabla h \quad \text{dans } L^p(L^p). \quad (4.47b)$$

*Démonstration.* Dans un premier temps, nous allons montrer que les suites  $(\tilde{h}_n)_n$  et  $(h_n)_n$  convergent presque partout (à sous-suite près). Pour ce faire, on utilise un résultat de Simon ([64], corollaire 4). Dans un cadre plus général, il serait également possible d'appliquer des travaux récents de Andreianov et al. [4]. Commençons par traiter le cas de la hauteur d'eau. Notons tout d'abord que les inclusions  $W^{1,3/2} \subset\subset L^{r_1} \subset W^{-1,r_1}$  sont satisfaites. On rappelle que  $X \subset\subset Y$  signifie que  $X$  s'injecte de manière compacte dans  $Y$ , ce qui est vérifié dans notre cas par les injections de Sobolev. Ensuite, grâce aux estimations (4.37a) et (4.44), on en déduit que  $(\tilde{h}_n)_n$  est relativement compact dans  $L^{3/2}(L^{r_1})$ . Il existe alors une sous-suite convergeant fortement dans  $L^{3/2}(L^{r_1})$ . Cela implique que  $(\tilde{h}_n)_n$  converge presque partout, toujours à sous-suite près. Un argument similaire est employé pour le cas de la hauteur de sédiments. Dans ce cas de figure, on utilise les injections  $W^{1,p} \subset\subset \mathcal{C}(\Omega) \subset L^{r_1} \subset W^{-1,r_1}$  (par hypothèse  $p$  est strictement supérieur à 2, qui est la dimension d'espace). Les estimations (4.35b) et (4.45) permettent alors de conclure que  $(h_n)_n$  admet une sous-suite qui converge presque partout. Il reste alors à utiliser une application du théorème de Vitali que l'on peut trouver dans l'ouvrage de Visintin ([71], proposition XI.3.11), permettant directement de conclure que

$$\tilde{h}_n \rightarrow \tilde{h} \quad \text{fortement dans } L^\alpha(L^\alpha), \quad 1 \leq \alpha < 9/4,$$

$$h_n \rightarrow h \quad \text{fortement dans } L^\beta(L^\beta), \quad 1 \leq \beta < p,$$

grâce aux estimations (4.35b) et (4.37c). Enfin, la suite  $(\nabla \tilde{h}_n)_n$  étant bornée dans  $L^{3/2}(L^{3/2})$ , elle converge faiblement vers une fonction  $\tilde{\mathcal{H}}$ . Par unicité de la limite,  $\tilde{\mathcal{H}}$  n'a d'autre choix que d'être égale à  $\nabla \tilde{h}$ . De même, on en déduit que  $(\nabla h_n)_n$  converge faiblement vers  $\nabla h$  dans  $L^p(L^p)$ .  $\square$

**Remarque 4.2.** Il est possible d'affiner l'estimation (4.46b). En effet, grâce à l'injection de Sobolev  $W^{1,p} \hookrightarrow L^\infty$  en dimension 2 (on rappelle que  $p > 2$ ), on en déduit que  $h_n \in L^p(L^\infty)$ . En combinant ce résultat avec l'estimation (4.35a), on peut à nouveau appliquer le théorème de Riesz-Thorin, comme représenté sur la figure 4.8.

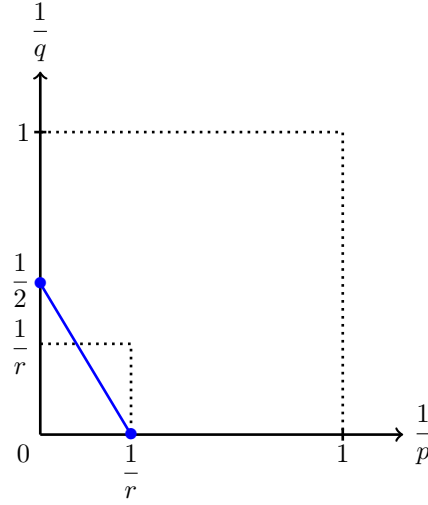


FIGURE 4.8 – Application du théorème de Riesz-Thorin pour  $L^\infty(L^2) \cap L^r(L^\infty)$ ,  $r > 2$ .

Terminons cette analyse de stabilité par énoncer le comportement général que l'on peut attendre d'une suite de solutions approchées. Comme nous avons pu le voir, les estimations (4.43) indiquent que les flux d'eau et de sédiments sont bornés, et par conséquent qu'ils convergent faiblement. Cependant, la difficulté est d'identifier les limites correspondantes. Malheureusement, les résultats obtenus jusqu'à présent ne permettent pas cette identification. Pour cela, il aurait fallu par exemple obtenir de la convergence forte sur les gradients. En revanche, ce que l'on peut affirmer est que

$$\tilde{h}_n^{3/2} |\nabla(\tilde{h}_n + h_n)|^{-1/2} \nabla(\tilde{h}_n + h_n) \rightharpoonup \tilde{h}^{3/2} \tilde{\Xi}, \quad \text{dans } L^{r_1}(L^{r_1}), \quad (4.48a)$$

$$\tilde{h}_n^{3/2} |\nabla(\tilde{h}_n + h_n)|^{1/2} \nabla h_n + |\nabla h_n|^{p-2} \nabla h_n \rightharpoonup \tilde{h}^{3/2} \Xi + \Xi_g, \quad \text{dans } L^{r_2}(L^{r_2}), \quad (4.48b)$$

et qu'à la limite, le système

$$\partial_t \tilde{h} - \operatorname{div}(\tilde{h}^{3/2} \tilde{\Xi}) = 0, \quad (4.49a)$$

$$\partial_t h - \operatorname{div}(\tilde{h}^{3/2} \Xi + \Xi_g) = 0, \quad (4.49b)$$

est satisfait au sens faible.

**Remarque 4.3.** Les calculs que nous venons d'effectuer peuvent s'adapter au niveau discret, via un schéma numérique adapté. En particulier, il est nécessaire de travailler avec un schéma totalement implicite. Les résultats d'analyse fonctionnelle employés (injections de Sobolev, inégalité de Poincaré-Wirtinger...) peuvent également s'adapter dans le cadre discret.

## 4.4 Récapitulatif

Ce chapitre s'est porté sur le couplage au nouveau continu du transport des sédiments avec les flux d'eau. Ce choix de modélisation fait suite au constat que la méthode de traitement actuelle, par un algorithme discret de type MFD, admet des inconvénients majeurs.

Le couplage retenu est basé sur les équations de Saint-Venant ainsi que sur plusieurs approximations empiriques issues de la sédimentologie. Un terme supplémentaire a été ajouté au sein du flux de sédiments afin de prendre en compte le transport gravitaire. Nous avons également mené une analyse de stabilité non-linéaire, certes partielle, mais qui laisse entrevoir une bonne stabilité structurelle du modèle ainsi construit.

L'étude sera étendue dans le chapitre suivant, avec entre autres, l'ajout d'une contrainte sur le taux d'érosion. Cette base de modélisation sera également employée lorsque nous aborderons le cas multilithologique dans le chapitre 6.

## Chapitre 5

# Modèle monolithologique sous contrainte de taux d'érosion maximal avec prise en compte des flux d'eau

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Présentation du modèle . . . . .</b>	<b>92</b>
5.1.1	Limitation de l'érosion . . . . .	92
5.1.2	Modèle complet . . . . .	93
<b>5.2</b>	<b>Propriétés du modèle . . . . .</b>	<b>94</b>
<b>5.3</b>	<b>Schéma numérique Volumes Finis . . . . .</b>	<b>96</b>
5.3.1	Discrétisation de l'équation de conservation de l'eau . . . . .	97
5.3.2	Discrétisation de l'équation de conservation des sédiments . . . . .	98
5.3.3	Discrétisation de l'équation de complémentarité . . . . .	99
5.3.4	Conditions aux limites et données initiales . . . . .	99
<b>5.4</b>	<b>Assemblage et résolution du système . . . . .</b>	<b>100</b>
<b>5.5</b>	<b>Propriétés du schéma numérique . . . . .</b>	<b>102</b>
<b>5.6</b>	<b>Résultats numériques . . . . .</b>	<b>107</b>
5.6.1	Formation d'un delta . . . . .	107
5.6.2	Formation de lacs . . . . .	109
<b>5.7</b>	<b>Récapitulatif . . . . .</b>	<b>112</b>

---

*Ce chapitre a pour ambition d'étudier un nouveau modèle stratigraphique, qui s'approche davantage de ce que souhaitent les géologues, dans la mesure où il couple les effets de l'eau, le transport des sédiments, ainsi qu'une contrainte sur le taux d'érosion. Plus concrètement, il s'agit d'ajouter au dernier modèle considéré au chapitre 4 (sous-section 4.3.2) la limitation du flux de sédiments, dans la même veine de ce qui avait été vu au chapitre 3. Une étude de ce modèle étendu assurera alors son bon comportement, tant du côté théorique que numérique.*

*Dans un premier temps, la section 5.1 se concentrera sur la définition du modèle étudié de ce chapitre, avec notamment le couplage avec une contrainte sur le taux d'érosion.*

*Certaines de ses propriétés seront par ailleurs présentées dans la section 5.2. Ensuite, l'élaboration d'un schéma numérique Volumes Finis sera abordée en section 5.3 en se basant sur les travaux présentés dans les chapitre précédents. La section 5.4 sera consacrée, quant à elle, aux propriétés du schéma numérique, et en particulier l'existence d'une solution discrète. Puis, la section 5.5 détaillera la méthode de résolution choisie, à savoir la méthode Newton. Pour conclure ce chapitre, des illustrations à travers différents cas tests seront présentées en section 5.6.*

## 5.1 Présentation du modèle

La première partie de ce chapitre est consacrée à la construction du nouveau modèle stratigraphique. Ce dernier est focalisé sur la prise en compte des flux d'eau, et plus particulièrement sur le couplage au niveau continu avec le transport des sédiments. Le but est de pouvoir simuler l'évolution de rivières et de fleuves (figure 5.1a), pouvant charrier des sédiments et ainsi altérer la morphologie du bassin. Un second aspect tout aussi important qui sera considéré à travers le modèle est la formation de lacs (figure 5.1b). Suite à l'étude menée dans le chapitre 4, on considère dorénavant le modèle de base constitué des équations (4.25).



(a) Rivière Chitina (États-Unis).



(b) Lac Moraine (Canada).

FIGURE 5.1 – Exemples de reliefs liés au transport de l'eau.

### 5.1.1 Limitation de l'érosion

Tout comme dans le modèle stratigraphique sans flux d'eau, une contrainte sur le taux d'érosion est considérée afin d'ajouter une touche de réalisme supplémentaire. L'approche, identique au chapitre 3, est rappelée ici. On commence par se donner un taux d'érosion maximal  $E > 0$  pouvant prendre différentes valeurs au sein du domaine, puis on demande que la relation

$$\partial_t h + E \geq 0, \quad \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}_+, \quad (5.1)$$

soit vérifiée. Ensuite, afin de coupler cette contrainte avec le transport des sédiments, un limiteur de flux  $0 < \lambda \leq 1$  est introduit pour obtenir l'équation de conservation modifiée

$$\partial_t h + \operatorname{div}(\lambda \mathbf{F}) = 0, \quad \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}_+, \quad (5.2)$$

où  $\lambda \mathbf{F}$  représente le flux de sédiments limité. Après réécriture, ce couplage se traduit sous la forme d'une contrainte de complémentarité

$$\min(1 - \lambda, \partial_t h + E) = 0, \quad \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}_+, \quad (5.3)$$

où le terme  $\partial_t h + E$  peut se formuler de manière équivalente par  $E - \operatorname{div}(\lambda \mathbf{F})$  en utilisant l'équation de conservation de la hauteur de sédiments (5.2).

### 5.1.2 Modèle complet

Résumons à présent le modèle qui sera considéré dans la suite de ce chapitre. Il regroupe les équations de conservation de la hauteur d'eau et de la hauteur de sédiments, ainsi que le couplage avec la contrainte sur le taux d'érosion. Le système d'inconnues  $\tilde{h}$ ,  $h$  et  $\lambda$  est alors donné par

$$\partial_t \tilde{h} + \operatorname{div}(\tilde{\mathbf{F}}) = 0, \quad \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}_+, \quad (5.4a)$$

$$\partial_t h + \operatorname{div}(\lambda \mathbf{F}) = 0, \quad \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}_+, \quad (5.4b)$$

$$\min(1 - \lambda, E - \operatorname{div}(\lambda \mathbf{F})) = 0, \quad \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}_+. \quad (5.4c)$$

Les flux d'eau et de sédiments sont, comme dans le chapitre 3, réécrits en faisant intervenir les primitives  $\psi_g$  et  $\psi$  des fonctions  $K_g$  et  $K$  :

$$\tilde{\mathbf{F}} = -\tilde{K}(\tilde{h}^+)^{3/2} |\nabla(\tilde{h} + h)|^{-1/2} \nabla(\tilde{h} + h), \quad (5.5a)$$

$$\mathbf{F} = -(\tilde{h}^+)^{3/2} |\nabla(\tilde{h} + h)|^{1/2} \nabla\psi(h) - |\nabla h|^{p-2} \nabla\psi_g(h), \quad (5.5b)$$

avec

$$\psi(h) = \int_{H_m}^h K(u) \, du, \quad (5.6a)$$

$$\psi_g(h) = \int_{H_m}^h K_g(u) \, du. \quad (5.6b)$$

À cela s'ajoutent des conditions aux limites représentant des flux entrants d'eau et de sédiments :

$$\tilde{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{n} = \tilde{\phi}(x, y, t) \leq 0, \quad \text{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}_+, \quad (5.7a)$$

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = \phi(x, y, t) \leq 0, \quad \text{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}_+, \quad (5.7b)$$

$$\lambda = 1, \quad \text{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}_+. \quad (5.7c)$$

Enfin, le modèle est complété par les conditions initiales

$$\tilde{h}(x, y, t = 0) = \tilde{h}_0(x, y), \quad \text{dans } \Omega, \quad (5.8a)$$

$$h(x, y, t = 0) = h_0(x, y), \quad \text{dans } \Omega, \quad (5.8b)$$

vérifiant  $0 \leq \tilde{h}_0 \leq \tilde{h}^*$  et  $h_* \leq h_0 \leq h^*$ , avec  $\tilde{h}^*, h_*, h^* \in \mathbb{R}_+$ .

**Remarque 5.1.** On pourra noter que des parties positives ont été introduites dans la définition des flux (5.5). En effet, on s'attend naturellement que la hauteur d'eau soit positive, ce qui est par ailleurs nécessaire avant de pouvoir élever cette quantité à la puissance  $3/2$ . Par ailleurs, cet ajout sera également utilisé au niveau discret, afin d'éviter des problèmes de non définition au cours des itérations de Newton.

## 5.2 Propriétés du modèle

Le modèle stratigraphique (5.4)–(5.8) admet certaines propriétés qui sont rassemblées dans cette section. Nous supposons ici que les solutions  $\tilde{h}$ ,  $h$  et  $\lambda$  sont suffisamment régulières pour justifier les calculs ci-dessous. On fera également l'hypothèse que le limiteur de flux  $\lambda$  est positif, ce qui sera démontré au niveau discret dans la proposition 5.5.

**Proposition 5.1** (Positivité de la hauteur d'eau). *Pour tout  $t \geq 0$ , la hauteur d'eau est positive ou nulle :*

$$\tilde{h} \geq 0, \quad \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}_+. \quad (5.9)$$

*Démonstration.* Soit  $T > 0$ . La démarche consiste à multiplier l'équation de conservation (5.4a) par  $\tilde{h}^-$  puis à sommer sur  $\Omega \times [0, T]$  :

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega} \tilde{h}^- \partial_t \tilde{h} \, dx \, dy \, dt \\ & + \int_0^T \int_{\Omega} \tilde{h}^- \operatorname{div} \left( -\tilde{K}(\tilde{h}^+)^{3/2} |\nabla(\tilde{h} + h)|^{-1/2} \nabla(\tilde{h} + h) \right) \, dx \, dy \, dt = 0. \end{aligned} \quad (5.10)$$

La première intégrale peut se reformuler en remarquant que

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} (\tilde{h}^-)^2 \right] = \tilde{h}^- \partial_t \tilde{h}.$$

En utilisant une identité vectorielle pour traiter la seconde, la relation (5.10) peut se réécrire sous la forme

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\tilde{h}^-)^2 \Big|_{t=T} \, dx \, dy - \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\tilde{h}^-)^2 \Big|_{t=0} \, dx \, dy \\ & - \int_0^T \int_{\Omega} \operatorname{div} \left( \tilde{K} \tilde{h}^- (\tilde{h}^+)^{3/2} |\nabla(\tilde{h} + h)|^{-1/2} \nabla(\tilde{h} + h) \right) \, dx \, dy \, dt \\ & + \int_0^T \int_{\Omega} \nabla \tilde{h}^- \cdot \tilde{K} (\tilde{h}^+)^{3/2} |\nabla(\tilde{h} + h)|^{-1/2} \nabla(\tilde{h} + h) \, dx \, dy \, dt = 0. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Or par hypothèse sur les données initiales,  $\tilde{h}_0$  est positif ou nul, ce qui implique  $\tilde{h}_0^- = 0$ . Par ailleurs, les produits  $\tilde{h}^- (\tilde{h}^+)^{3/2}$  et  $\nabla \tilde{h}^- (\tilde{h}^+)^{3/2}$  étant nuls sous hypothèse de régularité suffisante, les deux dernières intégrales le sont également. L'équation (5.11) se réduit alors simplement à

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} (\tilde{h}^-)^2 \Big|_{t=T} \, dx \, dy = 0.$$

Cette relation étant vraie pour tout  $T > 0$ , cela implique que  $\tilde{h}^- = 0$  sur  $\Omega \times \mathbb{R}_+$ . Autrement dit,  $\tilde{h} \geq 0$  sur  $\Omega \times \mathbb{R}_+$ .  $\square$

**Proposition 5.2** (Préservation de la borne inférieure sur la hauteur de sédiments). *Soit  $T > 0$ . La hauteur de sédiments au temps  $T$  vérifie la relation*

$$h(x, y, T) \geq h_*, \quad \text{dans } \Omega. \quad (5.12)$$

*Démonstration.* La preuve consiste dans un premier temps à multiplier l'équation de conservation (3.9a) par  $(h - h_*)^-$  puis à intégrer sur  $\Omega \times [0, T]$  :

$$\int_0^T \int_{\Omega} (h - h_*)^- \partial_t h \, dx \, dy \, dt + \int_0^T \int_{\Omega} (h - h_*)^- \operatorname{div}(\lambda \mathbf{F}) \, dx \, dy \, dt = 0.$$

En utilisant la relation  $2(h - h_*)^- \partial_t h = \partial_t \{(h - h_*)^-\}^2$  ainsi qu'en reformulant la deuxième intégrale, la formule précédente devient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{(h - h_*)^-\}^2 \Big|_{t=T} \, dx \, dy - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{(h - h_*)^-\}^2 \Big|_{t=0} \, dx \, dy \\ & + \int_0^T \int_{\Omega} \operatorname{div}(\lambda (h - h_*)^- \mathbf{F}) \, dx \, dy \, dt - \int_0^T \int_{\Omega} \lambda \nabla (h - h_*)^- \cdot \mathbf{F} \, dx \, dy \, dt = 0. \end{aligned}$$

Or par hypothèse sur la hauteur de sédiments initiale, on a  $h_0 \geq h_*$ . Ensuite, en utilisant la formule de Stokes ainsi qu'en explicitant la formule du flux de sédiments, on arrive à la nouvelle relation

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{(h - h_*)^-\}^2 \Big|_{t=T} \, dx \, dy &= - \int_0^T \int_{\partial\Omega} \lambda (h - h_*)^- \phi \, d\sigma \, dt \\ &\quad - \int_0^T \int_{\Omega} \lambda K(h) (\tilde{h}^+)^{3/2} |\nabla(\tilde{h} + h)|^{1/2} |\nabla h|^2 \mathbf{1}_{\{h < h_*\}} \, dx \, dy \, dt \\ &\quad - \int_0^T \int_{\Omega} \lambda K_g(h) |\nabla h|^p \mathbf{1}_{\{h < h_*\}} \, dx \, dy \, dt \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

De cette inégalité on en déduit que la seule possibilité est d'avoir  $h \geq h_*$  sur  $\Omega \times [0, T]$ .  $\square$

**Proposition 5.3** (Conservation de la masse). *Soit  $T > 0$ . Les masses d'eau et de sédiments au temps  $T$  vérifient les relations*

$$\int_{\Omega} \tilde{h}|_{t=T} \, dx \, dy = \int_{\Omega} \tilde{h}_0 \, dx \, dy - \int_0^T \int_{\partial\Omega} \tilde{\phi} \, d\sigma \, dt, \quad (5.13a)$$

$$\int_{\Omega} h|_{t=T} \, dx \, dy = \int_{\Omega} h_0 \, dx \, dy - \int_0^T \int_{\partial\Omega} \phi \, d\sigma \, dt. \quad (5.13b)$$

*Démonstration.* La démarche est identique à celle de la proposition 3.2 pour le modèle sans flux d'eau. Il suffit d'intégrer les équations de conservation (5.4a) et (5.4b) sur  $\Omega \times \mathbb{R}_+$  puis d'employer la formule de Stokes.  $\square$



On introduit à présent la notion d'énergie du système par

$$\mathfrak{E}(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} h(x, y, t)^2 dx dy. \quad (5.14)$$

Cette énergie satisfait la propriété suivante.

**Proposition 5.4** (Estimation d'énergie). *Soit  $T > 0$ . Le système (5.4)–(5.8) vérifie l'estimation d'énergie*

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}(T) = \mathfrak{E}(0) - \int_0^T \int_{\partial\Omega} h\phi d\sigma dt - \int_0^T \int_{\Omega} \lambda K_g(h) |\nabla h|^p dx dy dt \\ - \int_0^T \int_{\Omega} \lambda K(h) (\tilde{h}^+)^{3/2} |\nabla(\tilde{h} + h)|^{1/2} |\nabla h|^2 dx dy dt. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Dans le cas particulier où les flux entrants de sédiments sont nuls (c'est-à-dire si  $\phi = 0$  sur  $\partial\Omega \times \mathbb{R}_+$ ), on a de plus une décroissance de l'énergie au cours du temps.

*Démonstration.* La démonstration consiste dans un premier temps à multiplier l'équation de conservation (5.4b) par  $h$  puis à intégrer sur  $\Omega \times [0, T]$  :

$$\int_0^T \int_{\Omega} h \partial_t h dx dy dt + \int_0^T \int_{\Omega} h \operatorname{div}(\lambda \mathbf{F}) dx dy dt = 0,$$

ce qui peut se reformuler par

$$\int_0^T \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{h^2}{2} dx dy dt + \int_0^T \int_{\Omega} \operatorname{div}(\lambda h \mathbf{F}) dx dy dt - \int_0^T \int_{\Omega} \lambda \nabla h \cdot \mathbf{F} dx dy dt = 0.$$

Il reste alors à employer la formule de Stokes puis à expliciter flux de sédiments à partir de (5.5b).  $\square$

### 5.3 Schéma numérique Volumes Finis

Dans cette section, nous allons aborder la construction d'un schéma numérique Volumes Finis pour le modèle (5.4)–(5.8). Pour cela, nous nous baserons sur l'étude du  $p$ -Laplacien instationnaire menée dans le chapitre 2 ainsi que le schéma numérique développé pour le modèle monolithologique sans flux d'eau dans le chapitre 3. En particulier, on utilisera à nouveau la notation  $B_{i+1/2, j+1/2}^n$  définie en (2.32) pour l'approximation du terme  $|\nabla h|^2$ . De

la même manière, on notera par  $\bar{B}_{i+1/2,j+1/2}^n$  une estimation de  $|\nabla(\tilde{h} + h)|^2$ , c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \bar{B}_{i+1/2,j+1/2}^n &= \frac{1}{2} \left( \frac{\tilde{h}_{i+1,j}^n + h_{i+1,j}^n - \tilde{h}_{i,j}^n - h_{i,j}^n}{\Delta x} \right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \left( \frac{\tilde{h}_{i+1,j+1}^n + h_{i+1,j+1}^n - \tilde{h}_{i,j+1}^n - h_{i,j+1}^n}{\Delta x} \right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \left( \frac{\tilde{h}_{i,j+1}^n + h_{i,j+1}^n - \tilde{h}_{i,j}^n - h_{i,j}^n}{\Delta y} \right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \left( \frac{\tilde{h}_{i+1,j+1}^n + h_{i+1,j+1}^n - \tilde{h}_{i+1,j}^n - h_{i+1,j}^n}{\Delta y} \right)^2. \end{aligned} \quad (5.16)$$

### 5.3.1 Discrétisation de l'équation de conservation de l'eau

Commençons par nous intéresser à l'équation de conservation de la hauteur d'eau (5.4a). Avant d'entamer les calculs, reformulons-la sous la forme

$$\partial_t \tilde{h} + \operatorname{div} \left[ (\tilde{h}^+)^{3/2} \tilde{\mathbf{G}} \right] = 0,$$

avec

$$\tilde{\mathbf{G}} = -\tilde{K} |\nabla(\tilde{h} + h)|^{-1/2} \nabla(\tilde{h} + h).$$

La dérivée temporelle est tout d'abord approchée par une méthode d'Euler implicite. En ce qui concerne le flux d'eau, une première étape consiste à décentrer le terme  $(\tilde{h}^+)^{3/2}$  par rapport au signe de  $\tilde{\mathbf{G}} \cdot \mathbf{n}$  aux arêtes. Pour traiter ce dernier terme, une combinaison des approximations (5.16) est utilisée. Une régularisation est par ailleurs nécessaire étant donnée la puissance négative, tout comme dans le cas de  $p$ -Laplacien instationnaire avec  $p < 2$  (voir le chapitre 2). Tous ces aspects conduisent au schéma numérique

$$\frac{\tilde{h}_{i,j}^{n+1} - \tilde{h}_{i,j}^n}{\Delta t} + \frac{\tilde{F}_{i+1/2,j}^{n+1} - \tilde{F}_{i-1/2,j}^{n+1}}{\Delta x} + \frac{\tilde{F}_{i,j+1/2}^{n+1} - \tilde{F}_{i,j-1/2}^{n+1}}{\Delta y} = 0, \quad (5.17)$$

où le flux numérique est défini par

$$\tilde{F}_{i+1/2,j}^{n+1} = \left[ (\tilde{h}_{i,j}^{n+1})^+ \right]^{3/2} (\tilde{G}_{i+1/2,j}^{n+1})^+ + \left[ (\tilde{h}_{i+1,j}^{n+1})^+ \right]^{3/2} (\tilde{G}_{i+1/2,j}^{n+1})^-, \quad (5.18a)$$

$$\tilde{F}_{i,j+1/2}^{n+1} = \left[ (\tilde{h}_{i,j}^{n+1})^+ \right]^{3/2} (\tilde{G}_{i,j+1/2}^{n+1})^+ + \left[ (\tilde{h}_{i,j+1}^{n+1})^+ \right]^{3/2} (\tilde{G}_{i,j+1/2}^{n+1})^-, \quad (5.18b)$$

avec

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{i+1/2,j}^{n+1} &= -\frac{\tilde{K}}{2} \left[ \max(\bar{B}_{i+1/2,j-1/2}^n, \varepsilon)^{-1/4} + \max(\bar{B}_{i+1/2,j+1/2}^n, \varepsilon)^{-1/4} \right] \\ &\quad \times \frac{\tilde{h}_{i+1,j}^{n+1} + h_{i+1,j}^{n+1} - \tilde{h}_{i,j}^{n+1} - h_{i,j}^{n+1}}{\Delta x}, \end{aligned} \quad (5.19a)$$

$$\tilde{G}_{i,j+1/2}^{m+1} = -\frac{\tilde{K}}{2} \left[ \max(\bar{B}_{i-1/2,j+1/2}^n, \varepsilon)^{-1/4} + \max(\bar{B}_{i+1/2,j+1/2}^n, \varepsilon)^{-1/4} \right] \times \frac{\tilde{h}_{i,j+1}^{n+1} + h_{i,j+1}^{n+1} - \tilde{h}_{i,j}^{n+1} - h_{i,j}^{n+1}}{\Delta y}. \quad (5.19b)$$

### 5.3.2 Discrétisation de l'équation de conservation des sédiments

La discrétisation de l'équation de conservation de la hauteur de sédiments reprend globalement les mêmes idées que précédemment. Dans un premier temps, l'approximation du flux limité de sédiments fait intervenir un décentrage amont du limiteur de flux  $\lambda$  par rapport au signe de  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$  :

$$\frac{h_{i,j}^{n+1} - h_{i,j}^n}{\Delta t} + \frac{(\lambda F)_{i+1/2,j}^{n+1} - (\lambda F)_{i-1/2,j}^{n+1}}{\Delta x} + \frac{(\lambda F)_{i,j+1/2}^{n+1} - (\lambda F)_{i,j-1/2}^{n+1}}{\Delta y} = 0, \quad (5.20)$$

avec

$$(\lambda F)_{i+1/2,j}^{n+1} = \lambda_{i,j}^{n+1} (F_{i+1/2,j}^{n+1})^+ + \lambda_{i+1,j}^{n+1} (F_{i+1/2,j}^{n+1})^-, \quad (5.21a)$$

$$(\lambda F)_{i,j+1/2}^{n+1} = \lambda_{i,j}^{n+1} (F_{i,j+1/2}^{n+1})^+ + \lambda_{i,j+1}^{n+1} (F_{i,j+1/2}^{n+1})^-, \quad (5.21b)$$

où  $a^+ = \max(0, a)$  et  $a^- = \min(0, a)$ . Avant de poursuivre, réécrivons le flux de sédiments sous la forme

$$\mathbf{F} = (\tilde{h}^+)^{3/2} \mathbf{G} - |\nabla h|^{p-2} \nabla \psi_g(h),$$

avec

$$\mathbf{G} = -|\nabla(\tilde{h} + h)|^{1/2} \nabla \psi(h).$$

La discrétisation de  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$  consiste alors dans un premier temps à décentrer le terme  $(\tilde{h}^+)^{3/2}$  par rapport au signe de  $\mathbf{G} \cdot \mathbf{n}$ . Puis, pour tous les termes restants, il suffit d'adapter la méthode utilisée pour le  $p$ -Laplacien pour approcher les différentes norme de gradients. Plus précisément, les approximations sont données par

$$F_{i+1/2,j}^{m+1} = \left[ (\tilde{h}_{i,j}^{n+1})^+ \right]^{3/2} (G_{i+1/2,j}^{m+1})^+ + \left[ (\tilde{h}_{i+1,j}^{n+1})^+ \right]^{3/2} (G_{i+1/2,j}^{m+1})^- - \frac{1}{2} \left[ (B_{i+1/2,j-1/2}^n)^{\frac{p-2}{2}} + (B_{i+1/2,j+1/2}^n)^{\frac{p-2}{2}} \right] \frac{\psi_g(h_{i+1,j}^{n+1}) - \psi_g(h_{i,j}^{n+1})}{\Delta x}, \quad (5.22a)$$

$$F_{i,j+1/2}^{m+1} = \left[ (\tilde{h}_{i,j}^{n+1})^+ \right]^{3/2} (G_{i,j+1/2}^{m+1})^+ + \left[ (\tilde{h}_{i,j+1}^{n+1})^+ \right]^{3/2} (G_{i,j+1/2}^{m+1})^- - \frac{1}{2} \left[ (B_{i-1/2,j+1/2}^n)^{\frac{p-2}{2}} + (B_{i+1/2,j+1/2}^n)^{\frac{p-2}{2}} \right] \frac{\psi_g(h_{i,j+1}^{n+1}) - \psi_g(h_{i,j}^{n+1})}{\Delta y}, \quad (5.22b)$$

où

$$G_{i+1/2,j}^{m+1} = -\frac{1}{2} \left[ (\bar{B}_{i+1/2,j-1/2}^n)^{1/4} + (\bar{B}_{i+1/2,j+1/2}^n)^{1/4} \right] \frac{\psi(h_{i+1,j}^{n+1}) - \psi(h_{i,j}^{n+1})}{\Delta x}, \quad (5.23a)$$

$$G_{i,j+1/2}^{m+1} = -\frac{1}{2} \left[ (\bar{B}_{i-1/2,j+1/2}^n)^{1/4} + (\bar{B}_{i+1/2,j+1/2}^n)^{1/4} \right] \frac{\psi(h_{i,j+1}^{n+1}) - \psi(h_{i,j}^{n+1})}{\Delta y}. \quad (5.23b)$$

### 5.3.3 Discrétisation de l'équation de complémentarité

La méthode pour traiter l'équation de complémentarité est en tout point semblable à celle développée pour le modèle du chapitre 3, bien que le flux de sédiments soit différent. Ainsi, après avoir repris les notions de *flux non limité sortant total* défini par

$$\langle F \rangle_{i,j}^{n+1} = \Delta y \left[ (F_{i+1/2,j}^{n+1})^+ - (F_{i-1/2,j}^{n+1})^- \right] + \Delta x \left[ (F_{i,j+1/2}^{n+1})^+ - (F_{i,j-1/2}^{n+1})^- \right], \quad (5.24a)$$

et de *flux limité entrant total* représenté par

$$\begin{aligned} \lambda F \langle F \rangle_{i,j}^{n+1} = \Delta y \left[ \lambda_{i-1,j}^{n+1} (F_{i-1/2,j}^{n+1})^+ - \lambda_{i+1,j}^{n+1} (F_{i+1/2,j}^{n+1})^- \right] \\ + \Delta x \left[ \lambda_{i,j-1}^{n+1} (F_{i,j-1/2}^{n+1})^+ - \lambda_{i,j+1}^{n+1} (F_{i,j+1/2}^{n+1})^- \right], \end{aligned} \quad (5.24b)$$

la discrétisation de l'équation (5.4c) s'écrit sous la forme

$$\lambda_{i,j}^{n+1} = \min \left( 1, \frac{\Delta x \Delta y E_{i,j} + \lambda F \langle F \rangle_{i,j}^{n+1}}{\langle F \rangle_{i,j}^{n+1}} \right). \quad (5.25)$$

Dans le cas où  $\langle F \rangle_{i,j}^{n+1} = 0$ , on pose  $\lambda_{i,j}^{n+1} = 1$ .

### 5.3.4 Conditions aux limites et données initiales

Le prise en compte des conditions aux limites se fait comme suit. Pour chaque maille fictive aux bords du domaine, deux équations sont considérées : l'une est associée au flux d'eau entrant, et l'autre au flux de sédiments entrant. Dans le cas des flux d'eau, elles prennent la forme

$$\Gamma_b : \quad \tilde{F}_{i,1/2}^{n+1} + \frac{1}{\Delta x \Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{(i-1)\Delta x}^{i\Delta x} \tilde{\phi}(x, 0, t) dx dt = 0, \quad (5.26a)$$

$$\Gamma_l : \quad \tilde{F}_{1/2,j}^{n+1} + \frac{1}{\Delta y \Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{(j-1)\Delta y}^{j\Delta y} \tilde{\phi}(0, y, t) dy dt = 0, \quad (5.26b)$$

$$\Gamma_t : \quad \tilde{F}_{i,N_y+1/2}^{n+1} - \frac{1}{\Delta x \Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{(i-1)\Delta x}^{i\Delta x} \tilde{\phi}(x, L_y, t) dx dt = 0, \quad (5.26c)$$

$$\Gamma_r : \quad \tilde{F}_{N_x+1/2,j}^{n+1} - \frac{1}{\Delta y \Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{(j-1)\Delta y}^{j\Delta y} \tilde{\phi}(L_x, y, t) dy dt = 0. \quad (5.26d)$$

Pour traiter le cas des flux entrants de sédiments, des relations analogues sont définies :

$$\Gamma_b : \quad F_{i,1/2}^{n+1} + \frac{1}{\Delta x \Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{(i-1)\Delta x}^{i\Delta x} \phi(x, 0, t) dx dt = 0, \quad (5.27a)$$

$$\Gamma_l : \quad F_{1/2,j}^{n+1} + \frac{1}{\Delta y \Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{(j-1)\Delta y}^{j\Delta y} \phi(0, y, t) dy dt = 0, \quad (5.27b)$$

$$\Gamma_t : \quad F_{i,N_y+1/2}^{n+1} - \frac{1}{\Delta x \Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{(i-1)\Delta x}^{i\Delta x} \phi(x, L_y, t) dx dt = 0, \quad (5.27c)$$

$$\Gamma_r : \quad F_{N_x+1/2,j}^{n+1} - \frac{1}{\Delta y \Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{(j-1)\Delta y}^{j\Delta y} \phi(L_x, y, t) dy dt = 0. \quad (5.27d)$$

En ce qui concerne les quatre mailles fictives restantes aux coins, deux équations supplémentaires sont prises en compte. Elles consistent à extrapoler la valeur de la hauteur d'eau et de la hauteur de sédiments à partir des mailles voisines. Pour le premier cas, cela conduit à

$$\mathcal{M}_{0,0} : \quad \tilde{h}_{0,0}^{n+1} + \tilde{h}_{1,1}^{n+1} - \tilde{h}_{1,0}^{n+1} - \tilde{h}_{0,1}^{n+1} = 0, \quad (5.28a)$$

$$\mathcal{M}_{N_x+1,0} : \quad \tilde{h}_{N_x+1,0}^{n+1} + \tilde{h}_{N_x,1}^{n+1} - \tilde{h}_{N_x+1,1}^{n+1} - \tilde{h}_{N_x,0}^{n+1} = 0, \quad (5.28b)$$

$$\mathcal{M}_{0,N_y+1} : \quad \tilde{h}_{0,N_y+1}^{n+1} + \tilde{h}_{1,N_y}^{n+1} - \tilde{h}_{1,N_y+1}^{n+1} - \tilde{h}_{0,N_y}^{n+1} = 0, \quad (5.28c)$$

$$\mathcal{M}_{N_x+1,N_y+1} : \quad \tilde{h}_{N_x+1,N_y+1}^{n+1} + \tilde{h}_{N_x,N_y}^{n+1} - \tilde{h}_{N_x,N_y+1}^{n+1} - \tilde{h}_{N_x+1,N_y}^{n+1} = 0. \quad (5.28d)$$

L'extrapolation de la hauteur de sédiments est définie de manière similaire via les équations

$$\mathcal{M}_{0,0} : \quad h_{0,0}^{n+1} + h_{1,1}^{n+1} - h_{1,0}^{n+1} - h_{0,1}^{n+1} = 0, \quad (5.29a)$$

$$\mathcal{M}_{N_x+1,0} : \quad h_{N_x+1,0}^{n+1} + h_{N_x,1}^{n+1} - h_{N_x+1,1}^{n+1} - h_{N_x,0}^{n+1} = 0, \quad (5.29b)$$

$$\mathcal{M}_{0,N_y+1} : \quad h_{0,N_y+1}^{n+1} + h_{1,N_y}^{n+1} - h_{1,N_y+1}^{n+1} - h_{0,N_y}^{n+1} = 0, \quad (5.29c)$$

$$\mathcal{M}_{N_x+1,N_y+1} : \quad h_{N_x+1,N_y+1}^{n+1} + h_{N_x,N_y}^{n+1} - h_{N_x,N_y+1}^{n+1} - h_{N_x+1,N_y}^{n+1} = 0. \quad (5.29d)$$

Intéressons-nous à présent à l'initialisation des variables discrètes. En premier lieu, les hauteurs d'eau et de sédiments au sein du domaine sont calculées à partir des données initiales par

$$\tilde{h}_{i,j}^0 = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{\mathcal{M}_{i,j}} \tilde{h}_0(x, y) \, dx \, dy, \quad (5.30a)$$

$$h_{i,j}^0 = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{\mathcal{M}_{i,j}} h_0(x, y) \, dx \, dy. \quad (5.30b)$$

Ensuite, il faut définir des valeurs pour ces variables au niveau des mailles fictives. Une première solution, plus précise mais nécessitant un nombre important de calculs, consiste à résoudre un système composé des équations associées aux mailles fictives. Une alternative, qui est utilisée ici, est d'extrapoler les valeurs calculées précédemment à partir des données initiales.

Enfin, concernant l'initialisation du limiteur de flux dans le domaine, l'approche présentée dans le chapitre 3 est à nouveau utilisée. En d'autres termes, connaissant la hauteur de sédiments, il est possible de trier les mailles par ordre topographique décroissant. Il reste alors à employer la formule (5.25) dans cet ordre précis, afin d'éviter d'avoir à résoudre un système d'équations.

## 5.4 Assemblage et résolution du système

Numériquement, le système à résoudre est composé des équations (5.17)–(5.29), qui sont au nombre de  $3N_x N_y + 4(N_x + N_y) + 8$ . Le récapitulatif des équations et des inconnues qui leurs sont associées est indiqué dans le tableau 5.1.

Localisation	Équation	Inconnue associée
Mailles internes	Équation de conservation sur $\tilde{h}$	$\tilde{h}$
	Équation de conservation sur $h$	$h$
	Équation de complémentarité	$\lambda$
Mailles fictives (bords)	Flux d'eau imposé	$\tilde{h}$
	Flux de sédiments imposé	$h$
Mailles fictives (coins)	Extrapolation de $\tilde{h}$	$\tilde{h}$
	Extrapolation de $h$	$h$

TABLE 5.1 – Liste des équations et des inconnues associées.

La résolution est effectuée par la méthode de Newton-min, dont une description détaillée peut se trouver dans la thèse de Ben Gharbia [14]. Le système linéaire apparaissant à chaque itération est résolu en utilisant le solveur BiCGStab (voir par exemple les travaux de Saad [63] et Van der Vorst [69]) via la bibliothèque PETSc [8]. Le préconditionneur choisi est quant à lui ILU( $k$ ), avec  $k \geq 0$ . Lors de certaines simulations, ILU(0) s'avère cependant suffisant. Il est alors préférable de choisir un préconditionneur plus fort (ici ILU( $k$ ), avec  $k \geq 1$ ) afin de conserver de bonnes performances. En effet, bien que le coût en calcul de chaque itération devient plus élevé, la réduction du nombre total d'itérations a néanmoins permis d'observer une baisse du temps de calcul global. Les configurations nécessitant une adaptation du préconditionneur se trouvent être celles où la hauteur d'eau devient non nulle sur une grande partie du bord du domaine. Afin de mieux comprendre ce phénomène, regardons les équations (5.26) dans le cas où aucun flux d'eau ni de sédiments ne sont imposés. Considérons le premier cas où l'eau est absente des mailles internes tangentes au bord. Dans cette situation, les termes issus de la discrétisation de  $(\tilde{h}^+)^{3/2}$  se trouvent être nuls, et la résolution des équations associées s'effectue sans difficulté. En revanche, dans le cas où de l'eau est présente dans ces mailles, le système est amené à calculer une hauteur d'eau non nulle au niveau des mailles fictives. Si en pratique la solution correspondante se trouve facilement (dans cette situation  $\nabla(\tilde{h} + h) = 0$ ), la résolution numérique est plus complexe. En particulier, lors du calcul de la Jacobienne, la valeur élevée du coefficient de diffusion  $\tilde{K}$  va introduire des termes hétérogènes par rapport au reste de la matrice. En effet : les termes issus de l'équation de conservation de la hauteur d'eau (5.17), faisant eux aussi intervenir  $\tilde{K}$ , sont en partie compensés par le fait d'être multipliés par  $\Delta t$ .

Par ailleurs, il est important de garder le décentrement du flux d'eau (5.18) dans les équations (5.26), même si par définition les flux d'eau aux bords sont entrants (le sens du décentrement est alors connu). En effet, dans le cas contraire, il serait possible de se retrouver dans une configuration incohérente. Prenons le cas où une hauteur d'eau non nulle est présente près du bord du domaine, mais aucun flux d'eau ni de sédiments entrants ne sont spécifiés. Sans décentrement, deux solutions sont alors possibles :  $\tilde{h} = 0$  ou  $\nabla(\tilde{h} + h) = 0$ , la seconde étant la bonne (voir figure 5.2).

Tout comme dans le chapitre 3, il est nécessaire de prendre des précautions lors de l'assemblage de la Jacobienne. Sans modification, cette dernière peut présenter des problèmes de singularité, en particulier pour les équations (5.26) et (5.27). C'est le cas par exemple

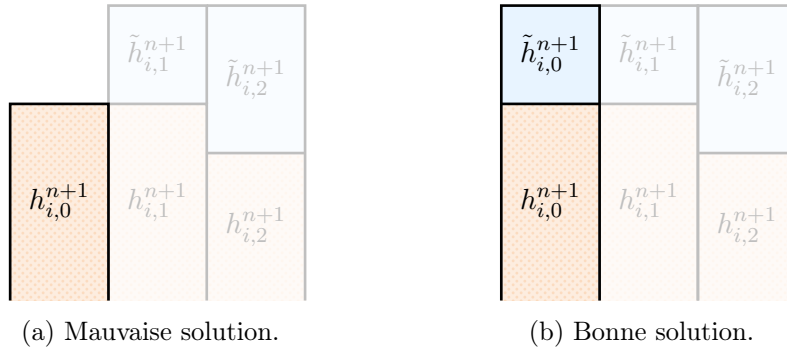


FIGURE 5.2 – Solutions possibles sans décentrement dans les équations aux bords du domaine pour  $\tilde{F}_{i,1/2}^{n+1} = F_{i,1/2}^{n+1} = 0$ .

en l'absence d'eau ou bien si la topographie au temps  $n$  présente une zone plate, tant au regard de la hauteur de sédiments que de la hauteur totale. Face à ces difficultés, des modifications de la matrice sont indispensables. En pratique, pour une équation donnée parmi la liste précédente, on commence par calculer l'ensemble de ses dérivées. Puis, si toutes ces quantités sont inférieures à un certain seuil (la Jacobienne présente alors une ligne nulle ou quasi-nulle), alors la valeur 1 est imposée sur l'emplacement de la diagonale afin de permettre l'inversion du système.

## 5.5 Propriétés du schéma numérique

Dans cette section, quelques propriétés du schéma numérique sont présentées. Ces dernières permettent en particulier de montrer l'existence d'une solution discrète.

**Proposition 5.5** (Estimation sur le limiteur de flux). *Pour tout  $n \geq 0$ , le limiteur de flux discret vérifie l'estimation*

$$0 < \lambda_{i,j}^{n+1} \leq 1. \quad (5.31)$$

*Démonstration.* Comme dans la proposition 3.4, la démonstration s'effectue en triant les mailles par ordre topographique décroissant, puis en utilisant cet ordre pour calculer les limiteurs de flux.  $\square$

**Proposition 5.6** (Positivité de la hauteur d'eau). *Pour tout  $n \geq 0$ , la hauteur d'eau discrète est positive ou nulle :*

$$\tilde{h}_{i,j}^n \geq 0. \quad (5.32)$$

*Démonstration.* La preuve s'effectue par récurrence. Dans un premier temps, le choix de discrétisation de la donnée initiale (5.30a) et les hypothèses sur  $\tilde{h}_0$  permettent d'avoir

$$\tilde{h}_{i,j}^0 = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{\mathcal{M}_{i,j}} \tilde{h}_0(x, y) \, dx \, dy \geq 0.$$

Supposons maintenant que la relation (5.32) soit vraie au temps  $t^n$ . Soit alors  $(i^*, j^*)$  tel que  $\tilde{h}_{i^*, j^*}^{n+1} < 0$  et montrons que cela conduit à une contradiction. Par définition du flux numérique (5.18)–(5.19) nous avons

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{i^*+1/2, j^*}^{n+1} &= \left[ (\tilde{h}_{i^*, j^*}^{n+1})^+ \right]^{3/2} (\tilde{G}_{i^*+1/2, j^*}^{n+1})^+ + \left[ (\tilde{h}_{i^*+1, j^*}^{n+1})^+ \right]^{3/2} (\tilde{G}_{i^*+1/2, j^*}^{n+1})^- \\ &= \left[ (\tilde{h}_{i^*+1, j^*}^{n+1})^+ \right]^{3/2} (\tilde{G}_{i^*+1/2, j^*}^{n+1})^- \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Après avoir mené une analyse similaire des autres flux, il est possible d'en déduire que

$$\frac{\tilde{F}_{i^*+1/2, j^*}^{n+1} - \tilde{F}_{i^*-1/2, j^*}^{n+1}}{\Delta x} + \frac{\tilde{F}_{i^*, j^*+1/2}^{n+1} - \tilde{F}_{i^*, j^*-1/2}^{n+1}}{\Delta y} \leq 0.$$

En utilisant le schéma numérique (5.17) ainsi que l'hypothèse de récurrence, il vient alors

$$\tilde{h}_{i^*, j^*}^{n+1} \geq \tilde{h}_{i^*, j^*}^n \geq 0,$$

ce qui mène à une contradiction. Par conséquent,  $\tilde{h}_{i, j}^{n+1} \geq 0$ .  $\square$

**Proposition 5.7** (Préservation de la borne inférieure sur la hauteur de sédiments). *Pour tout  $n \geq 0$ , la hauteur de sédiments est bornée inférieurement :*

$$h_{i, j}^n \geq h_*. \quad (5.33)$$

*Démonstration.* La démonstration se fait par récurrence. Pour  $n = 0$ , la relation se vérifie en utilisant la discrétisation de la donnée initiale (5.30b) :

$$h_{i, j}^0 = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{\mathcal{M}_{i, j}} h_0(x, y) \, dx \, dy \geq \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{\mathcal{M}_{i, j}} h_* \, dx \, dy = h_*.$$

Supposons maintenant la relation (5.33) vraie au temps  $t^n$ , et posons  $h_{i^*, j^*}^{n+1} = \min_{i, j} h_{i, j}^{n+1}$ . Tout d'abord, remarquons que  $G_{i^*+1/2, j^*}^{n+1} \leq 0$  étant donné que la fonction  $\psi$  est strictement croissante. Le flux numérique entre les mailles  $\mathcal{M}_{i^*, j^*}$  et  $\mathcal{M}_{i^*+1, j^*}$  vérifie alors

$$\begin{aligned} F_{i^*+1/2, j^*}^{n+1} &= -\frac{1}{2} \left[ (B_{i^*+1/2, j^*-1/2}^n)^{\frac{p-2}{2}} + (B_{i^*+1/2, j^*+1/2}^n)^{\frac{p-2}{2}} \right] \\ &\quad \times \frac{\psi_g(h_{i^*+1, j^*}^{n+1}) - \psi_g(h_{i^*, j^*}^{n+1})}{\Delta x} + \left[ (\tilde{h}_{i^*+1, j^*}^{n+1})^+ \right]^{3/2} (G_{i^*+1/2, j^*}^{n+1})^- \\ &\leq 0, \end{aligned}$$

la fonction  $\psi_g$  étant elle aussi strictement croissante. Par une analyse similaire des autres flux et en utilisant l'estimation (5.31), on en déduit que

$$\frac{(\lambda F)_{i^*+1/2, j^*}^{n+1} - (\lambda F)_{i^*-1/2, j^*}^{n+1}}{\Delta x} + \frac{(\lambda F)_{i^*, j^*+1/2}^{n+1} - (\lambda F)_{i^*, j^*-1/2}^{n+1}}{\Delta y} \leq 0.$$

Le schéma numérique (5.20) permet ensuite de conclure :

$$h_{i, j}^{n+1} \geq h_{i^*, j^*}^{n+1} \geq h_{i^*, j^*}^n \geq h_*.$$

$\square$



**Proposition 5.8** (Conservation de la masse). *La variation des masses d'eau et de sédiments est liée aux conditions aux limites. Plus précisément, pour tout  $n \geq 0$ , on a :*

$$\Delta x \Delta y \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \tilde{h}_{i,j}^n = \int_{\Omega} \tilde{h}_0(x, y) \, dx \, dy - \int_0^{t^n} \int_{\partial\Omega} \tilde{\phi}(x, y, t) \, d\sigma \, dt := M_h^n, \quad (5.34a)$$

$$\Delta x \Delta y \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} h_{i,j}^n = \int_{\Omega} h_0(x, y) \, dx \, dy - \int_0^{t^n} \int_{\partial\Omega} \phi(x, y, t) \, d\sigma \, dt := M_h^n. \quad (5.34b)$$

De plus, les bornes supérieures des hauteurs d'eau et de sédiments sont données par

$$\tilde{h}_{i,j}^n \leq \frac{M_h^n}{\Delta x \Delta y}, \quad (5.35a)$$

$$h_{i,j}^n \leq \frac{M_h^n}{\Delta x \Delta y} - (N_x N_y - 1) h_*. \quad (5.35b)$$

*Démonstration.* La preuve est similaire à celle de la proposition 3.6 pour le cas sans flux d'eau. Elle se base sur la conservativité des schémas (5.17) et (5.20) ainsi que sur la définition des flux imposés aux bords du domaine (5.26) et (5.27).  $\square$

**Proposition 5.9** (Estimation d'énergie discrète). *Soit  $N > 0$ . Le schéma numérique vérifie l'estimation d'énergie discrète*

$$\frac{\Delta x \Delta y}{2} \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} (h_{i,j}^N)^2 \leq \frac{\Delta x \Delta y}{2} \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} (h_{i,j}^0)^2 - \mathfrak{D} - \mathfrak{B}, \quad (5.36)$$

où  $\mathfrak{D} \geq 0$  est un terme de dissipation et où  $\mathfrak{B} \leq 0$  est un terme lié aux conditions aux limites. Dans le cas particulier où les flux de sédiments aux bords du domaine sont nuls,  $\mathfrak{B} = 0$  et l'énergie discrète décroît au cours du temps.

*Démonstration.* La première étape de la preuve consiste à multiplier l'équation (5.20) par  $\Delta x \Delta y \Delta t h_{i,j}^{n+1}$ , puis à sommer sur  $i, j$  et  $n$  :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \sum_{n=0}^{N-1} \Delta x \Delta y h_{i,j}^{n+1} (h_{i,j}^{n+1} - h_{i,j}^n) \\ & + \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \sum_{n=0}^{N-1} \Delta y \Delta t h_{i,j}^{n+1} \left[ (\lambda F)_{i+1/2,j}^{n+1} - (\lambda F)_{i-1/2,j}^{n+1} \right] \\ & + \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \sum_{n=0}^{N-1} \Delta x \Delta t h_{i,j}^{n+1} \left[ (\lambda F)_{i,j+1/2}^{n+1} - (\lambda F)_{i,j-1/2}^{n+1} \right] = 0, \end{aligned}$$

noté symboliquement par  $A + B + C = 0$ . Pour le terme  $A$  correspondant à la dérivée temporelle discrète, on utilise l'inégalité de convexité

$$\sum_{n=0}^{N-1} h_{i,j}^{n+1} (h_{i,j}^{n+1} - h_{i,j}^n) \geq \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{2} \left[ (h_{i,j}^{n+1})^2 - (h_{i,j}^n)^2 \right] = \frac{1}{2} \left[ (h_{i,j}^N)^2 - (h_{i,j}^0)^2 \right].$$

Concernant les parties  $B$  et  $C$ , l'idée est de réarranger les sommes en  $i$  et  $j$ , ce qui revient à effectuer des intégrations par parties discrètes. On montre alors que

$$B + C = \mathfrak{D} + \mathfrak{B}, \quad (5.37)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathfrak{D} = & \sum_{i=1}^{N_x-1} \sum_{j=1}^{N_y} \sum_{n=0}^{N-1} \Delta y \Delta t (h_{i,j}^{n+1} - h_{i+1,j}^{n+1}) \left[ \lambda_{i,j}^{n+1} (F_{i+1/2,j}^{n+1})^+ + \lambda_{i+1,j}^{n+1} (F_{i+1/2,j}^{n+1})^- \right] \\ & + \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y-1} \sum_{n=0}^{N-1} \Delta x \Delta t (h_{i,j}^{n+1} - h_{i,j+1}^{n+1}) \left[ \lambda_{i,j}^{n+1} (F_{i,j+1/2}^{n+1})^+ + \lambda_{i,j+1}^{n+1} (F_{i,j+1/2}^{n+1})^- \right], \end{aligned}$$

ainsi que

$$\begin{aligned} \mathfrak{B} = & \sum_{j=1}^{N_y} \sum_{n=0}^{N-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{(j-1)\Delta y}^{j\Delta y} h_{1,j}^{n+1} \phi(0, y, t) + h_{N_x,j}^{n+1} \phi(L_x, y, t) dy dt \\ & + \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{n=0}^{N-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{(i-1)\Delta x}^{i\Delta x} h_{i,1}^{n+1} \phi(x, 0, t) + h_{i,N_y}^{n+1} \phi(x, L_y, t) dx dt. \end{aligned}$$

De par la discrétisation du flux de sédiments (5.22)–(5.23), couplé au fait que les fonction  $\psi$  et  $\psi_g$  sont strictement croissantes, on peut en déduire que  $(h_{i,j}^{n+1} - h_{i+1,j}^{n+1})F_{i+1/2,j}^{n+1} \geq 0$  et que  $(h_{i,j}^{n+1} - h_{i,j+1}^{n+1})F_{i,j+1/2}^{n+1} \geq 0$ . Avec la proposition 5.5 nous sommes en mesure de conclure que  $\mathfrak{D} \geq 0$ . Par ailleurs, la fonction  $\phi$  étant négative ou nulle par hypothèse, et sachant que la hauteur de sédiments discrète est positive par la proposition 5.7, on a de plus que  $\mathfrak{B} \leq 0$ .  $\square$

Nous sommes à présent en mesure de montrer l'existence d'au moins une solution au schéma numérique.

**Théorème 5.1** (Existence d'une solution). *Soit  $(\tilde{h}_{i,j}^n)_{i,j}$  vérifiant (5.34a) et (5.32), ainsi que  $(h_{i,j}^n)_{i,j}$  vérifiant (5.34b) et (5.33). Alors pour tout  $\Delta t > 0$ , il existe au moins une solution  $(\tilde{h}_{i,j}^{n+1}, h_{i,j}^{n+1}, \lambda_{i,j}^{n+1})_{i,j}$  au système non-linéaire (5.17)–(5.29) et vérifiant (5.31), (5.34), (5.32) et (5.33).*

*Démonstration.* La preuve utilise une variante du modèle complet (5.17)–(5.29). Le modèle considéré dans cette preuve comprend seulement les équations (5.17)–(5.25), dans lesquelles les flux aux bords du domaine sont remplacés par leur expression exacte faisant intervenir les fonctions  $\tilde{\phi}$  et  $\phi$ . Le calcul de la valeur des inconnues aux mailles fictives (qui n'est pas l'objectif ici) peut alors s'effectuer a posteriori, après avoir résolu le système restreint aux mailles internes. L'intérêt de cette manœuvre est de se concentrer sur les inconnues des mailles internes, et de ne pas avoir à calculer d'estimations pour les inconnues des mailles fictives.

La preuve se base sur un argument de degré topologique (voir l'annexe D ainsi que les références [25, 32, 56] pour davantage de précisions). Soit  $\mu \in [0, 1]$ , et notons par

$(\tilde{h}_{i,j}^{\mu,n+1}, h_{i,j}^{\mu,n+1}, \lambda_{i,j}^{\mu,n+1})_{i,j}$  la solution du schéma numérique

$$\frac{\tilde{h}_{i,j}^{\mu,n+1} - \tilde{h}_{i,j}^n}{\Delta t} + \mu \left( \frac{\tilde{F}_{i+1/2,j}^{\mu,n+1} - \tilde{F}_{i-1/2,j}^{\mu,n+1}}{\Delta x} + \frac{\tilde{F}_{i,j+1/2}^{\mu,n+1} - \tilde{F}_{i,j-1/2}^{\mu,n+1}}{\Delta y} \right) = 0, \quad (5.38a)$$

$$\frac{h_{i,j}^{\mu,n+1} - h_{i,j}^n}{\Delta t} + \mu \left( \frac{(\lambda F)_{i+1/2,j}^{\mu,n+1} - (\lambda F)_{i-1/2,j}^{\mu,n+1}}{\Delta x} + \frac{(\lambda F)_{i,j+1/2}^{\mu,n+1} - (\lambda F)_{i,j-1/2}^{\mu,n+1}}{\Delta y} \right) = 0, \quad (5.38b)$$

$$\lambda_{i,j}^{\mu,n+1} + \mu - 1 - \mu \min \left( 1, \frac{\Delta x \Delta y E_{i,j} + \langle \lambda F \rangle_{i,j}^{\mu,n+1}}{\langle F \rangle_{i,j}^{\mu,n+1}} \right) = 0. \quad (5.38c)$$

Dans le cas où  $\mu = 1$ , ce dernier correspond au schéma (5.17)–(5.25). Inversement, pour  $\mu = 0$ , il se réduit à

$$\tilde{h}_{i,j}^{\mu,n+1} = \tilde{h}_{i,j}^n, \quad (5.39a)$$

$$h_{i,j}^{\mu,n+1} = h_{i,j}^n, \quad (5.39b)$$

$$\lambda_{i,j}^{\mu,n+1} = 1. \quad (5.39c)$$

Dans cette situation, le degré topologique peut se calculer sans difficulté et est égal à 1. L'objectif est à présent d'utiliser la propriété d'invariance par homotopie du degré topologique afin de montrer que ce dernier reste constant pour tout  $\mu \in [0, 1]$ . Pour cela, il est possible d'adapter les estimations précédemment obtenues au cas du schéma (5.38). Ces dernières doivent néanmoins être indépendantes de  $\mu$ . En reprenant la preuve de la proposition 5.5, dans un premier temps on montre sans difficulté que

$$0 \leq 1 - \mu < \lambda_{i,j}^{\mu,n+1} \leq 1, \quad \forall \mu \in [0, 1]. \quad (5.40)$$

Puis, à partir des propositions 5.8, 5.6 et 5.7, on obtient les estimations

$$0 \leq \tilde{h}_{i,j}^{\mu,n+1} \leq \frac{M_h^{n+1}}{\Delta x \Delta y}, \quad \forall \mu \in [0, 1], \quad (5.41a)$$

$$h_* \leq h_{i,j}^{\mu,n+1} \leq \frac{M_h^{n+1}}{\Delta x \Delta y}, \quad \forall \mu \in [0, 1], \quad (5.41b)$$

où les masses totales d'eau et de sédiments sont définies par

$$M_h^{n+1} = \int_{\Omega} \tilde{h}_0(x, y) \, dx \, dy - \int_0^{t^{n+1}} \int_{\partial\Omega} \tilde{\phi}(x, y, t) \, d\sigma \, dt,$$

$$M_h^{n+1} = \int_{\Omega} h_0(x, y) \, dx \, dy - \int_0^{t^{n+1}} \int_{\partial\Omega} \phi(x, y, t) \, d\sigma \, dt.$$

En conséquence, pour tout  $\varepsilon > 0$ , l'ensemble  $(\tilde{h}_{i,j}^{n+1}, h_{i,j}^{n+1}, \lambda_{i,j}^{n+1})_{i,j}$  appartient au compact  $[-\varepsilon, M_h^{n+1}/(\Delta x \Delta y) + \varepsilon]^{N_x \times N_y} \times [h_* - \varepsilon, M_h^{n+1}/(\Delta x \Delta y) + \varepsilon]^{N_x \times N_y} \times [-\varepsilon, 1 + \varepsilon]^{N_x \times N_y}$ . On en déduit alors que le degré topologique vaut 1 pour tout  $\mu \in [0, 1]$ , ce qui implique l'existence d'au moins une solution au schéma (5.17)–(5.25).  $\square$

## 5.6 Résultats numériques

Afin d'illustrer le modèle et l'impact des flux d'eau, deux cas tests sont maintenant présentés. Le premier s'intéresse à la formation d'un delta, tandis que le deuxième simule la formation de lacs.

### 5.6.1 Formation d'un delta

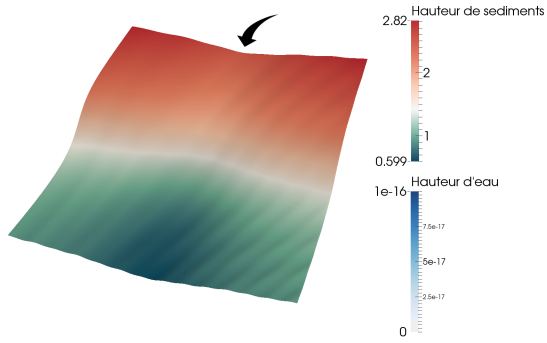
Cette première configuration a pour but de mettre en lumière l'impact des flux d'eau dans le modèle stratigraphique. On considère un domaine de taille 20 km par 20 km divisé en une zone marine et continentale, le niveau de la mer étant fixé à  $H_m = 1.4$  km. Le tableau 5.2 rassemble les valeurs prises par les divers coefficients de diffusion. Les coefficients de diffusion gravitaires sont volontairement choisis faibles afin de mettre en avant le transport des sédiments dû aux effets de l'eau. La valeur de  $\tilde{K}$  est quant à elle fixée à 20000 km<sup>1/2</sup>/Ma. Un taux d'érosion maximal est également pris en compte à hauteur de  $E = 0.1$  km/Ma. À cela sont ajoutés un flux entrant d'eau et de sédiments vérifiant

$$\begin{aligned} - \int_0^T \int_{\partial\Omega} \tilde{\phi} \, d\sigma \, dt &= 40T \text{ km}^3, \\ - \int_0^T \int_{\partial\Omega} \phi \, d\sigma \, dt &= 0.04T \text{ km}^3. \end{aligned}$$

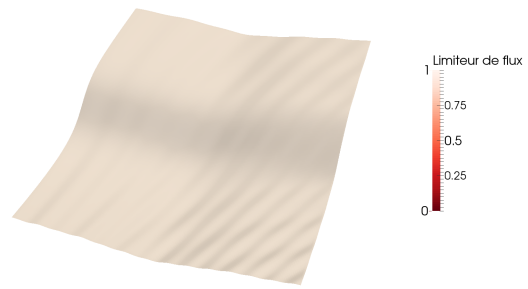
Le domaine d'étude est discrétisé sur une grille composée de  $200 \times 200$  mailles, et l'évolution du système est modélisée sur une durée  $T = 1$  Ma. La valeur de l'exposant du  $p$ -Laplacien dans le flux de sédiments (5.5b) est choisie égale à  $p = 2.5$ . Le système non-linéaire est approché à chaque pas de temps par la méthode de Newton-min, avec un critère d'arrêt sur la norme  $L^\infty$  du résidu de chaque équation. Ce dernier est de  $10^{-5}$  km pour les équations de conservations d'eau et de sédiments, ainsi que de  $10^{-5}$  pour l'équation de complémentarité. Concernant de la gestion du pas de temps, elle est choisie de manière dynamique. La simulation débute avec  $\Delta t^0 = 10^{-4}$  Ma. Puis, si le pas de temps courant est accepté, la valeur suivante est choisie égale à  $\Delta t^{n+1} = 1.1\Delta t^n$ , jusqu'à la valeur limite  $\Delta t_{\max} = 10^{-3}$  Ma. Inversement, si le pas de temps est refusé (c'est-à-dire si la méthode Newton n'a pas réussi à converger), l'itération en temps est recommencée avec la nouvelle valeur  $\Delta t^n = 0.5\Delta t^n$ .

Coefficient	Domaine	
	Marin	Continental
$K_g$ (km <sup>2</sup> /Ma)	0.01	0.04
$K$ (km <sup>1/2</sup> /Ma)	3000	10000

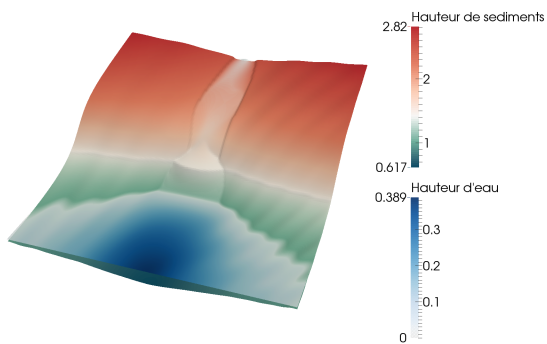
TABLE 5.2 – Valeur des coefficients de diffusion.



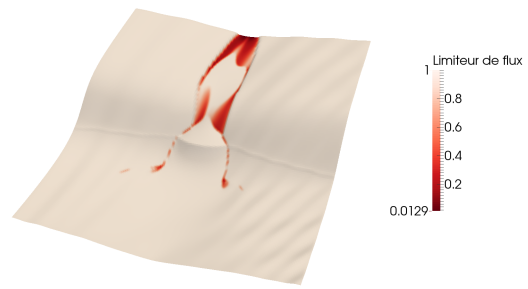
(a) Hauteurs d'eau et de sédiments initiales.



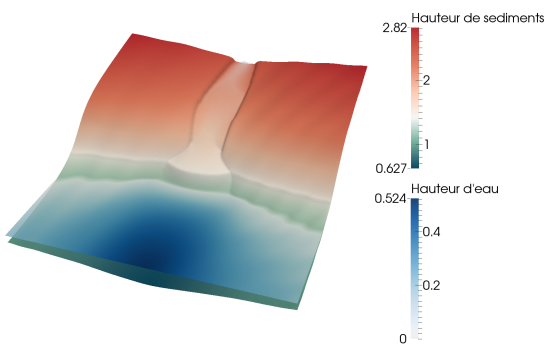
(b) Limiteur de flux initial.



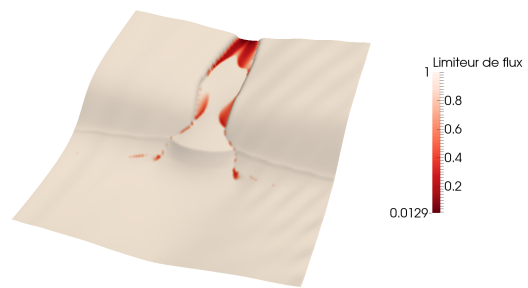
(c) Hauteurs d'eau et de sédiments à  $T = 0.5$  Ma.



(d) Limiteur de flux à  $T = 0.5$  Ma.



(e) Hauteurs d'eau et de sédiments à  $T = 1$  Ma.



(f) Limiteur de flux à  $T = 1$  Ma.

FIGURE 5.3 – Évolution des hauteurs d'eau et de sédiments (km) et du limiteur de flux.

L'évolution au cours du temps du système est illustrée sur la figure 5.3. La diffusion gravitaire étant très limitée, l'essentiel du transport des sédiments se fait via les flux d'eau. On remarque alors sur la figure 5.3c que l'eau a tendance à emporter une partie des sédiments de la partie continentale et ainsi de creuser la topographie. Par ailleurs, l'entraînement des sédiments étant relativement fort, le flux associé nécessite d'être limité (voir l'évolution du limiteur de flux) afin de satisfaire la contrainte sur le taux d'érosion. Un autre aspect intéressant repose sur la formation d'un delta au niveau de la ligne de côte. On peut observer en particulier un cassure, qui est due à la discontinuité des coefficients de diffusion.

Dans le tableau 5.3 sont rassemblées diverses données numériques. En particulier, on y montre l'influence du préconditionneur sur l'efficacité de résolution du problème. Parmi les cas de figure testés, tous montrent un faible nombre de pas de temps rejetés. On peut néanmoins observer que le choix du préconditionneur peut faire sensiblement varier le temps de calcul total. Pour ce cas test, il est en effet préférable d'employer ILU(2) ou ILU(3). À partir de ILU(4), le coût en calcul de chaque itération du solveur devient trop important pour espérer gagner en temps de calcul. Inversement, bien que pour ILU(0) le coût en calcul de chaque itération est relativement faible, un nombre important devant être effectué par le solveur implique un temps de calcul global élevé.

Donnée numérique	Préconditionneur				
	ILU(0)	ILU(1)	ILU(2)	ILU(3)	ILU(4)
Pas de temps acceptés	1117	1117	1117	1117	1117
Pas de temps refusés	40	40	40	40	40
Moyenne iter. Newton / pas de temps	5.92	5.12	4.85	4.55	4.33
Moyenne iter. solveur / iter. Newton	56.32	34.93	27.65	19.96	15.93
Temps de calcul (s)	4521	3456	3286	3277	3631

TABLE 5.3 – Résultats numériques.

### 5.6.2 Formation de lacs

L'objectif principal de ce test est de simuler le remplissage de lacs. Considérons pour cela un domaine de taille 20 km par 20 km divisé en une zone marine et une zone continentale. Le niveau de la mer séparant ces deux parties est fixé à  $H_m = 1.8$  km. La valeur des différents coefficients de diffusion est indiquée dans le tableau 5.4. La valeur de  $\tilde{K}$  est quant à elle fixée constante à  $10000 \text{ km}^{1/2}/\text{Ma}$ . À cela est imposé un taux d'érosion maximal  $E = 0.1$  km/Ma. Enfin, deux flux entrants représentant un mélange d'eau et de sédiments sont ajoutés aux bords du domaine, lesquels vérifient

$$\begin{aligned}
 - \int_0^T \int_{\partial\Omega} \tilde{\phi} \, d\sigma \, dt &= 46T \text{ km}^3, \\
 - \int_0^T \int_{\partial\Omega} \phi \, d\sigma \, dt &= 0.046T \text{ km}^3.
 \end{aligned}$$

Coefficient	Domaine	
	Marin	Continental
$K_g$ (km <sup>2</sup> /Ma)	40	5
$K$ (km <sup>1/2</sup> /Ma)	6000	3000

TABLE 5.4 – Valeur des coefficients de diffusion.

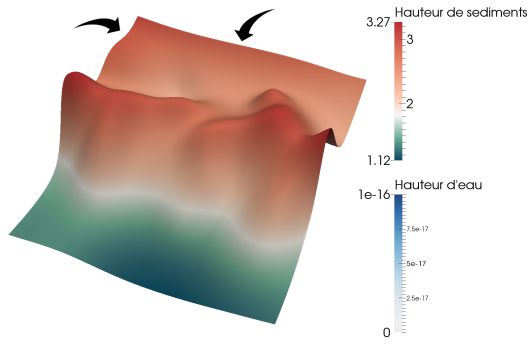
Concernant à présent les paramètres numériques : tout d'abord, le domaine est approché par une grille régulière de  $200 \times 200$  mailles, et l'évolution du système est simulée jusqu'à  $T = 1$  Ma. L'exposant du  $p$ -Laplacien dans le flux de sédiments (5.5b) est choisi égal à  $p = 2.5$ . La méthode de résolution est basée sur la méthode de Newton-min, avec les mêmes critères d'arrêt que pour le cas test précédent. La gestion du pas du temps est également identique.

L'évolution du système est illustrée sur la figure 5.4 à divers instants. Dans une première phase, les apports en eau permettent de remplir la partie supérieure du domaine avec la formation de lacs (figure 5.4c). Puis dans un second temps, lorsque la capacité de contenance a été atteinte, l'eau déverse en contrebas tout en emportant une partie des sédiments de la partie centrale du domaine (figure 5.4e). Par ailleurs, sur les figures représentant l'évolution du limiteur de flux, on observe que les principales zones où le flux de sédiment a besoin d'être limité (en rouge) correspondent aux flancs des zones montagneuses (là où  $\nabla h$  est important). À partir de  $T = 0.5$  Ma, une nouvelle zone sous contrainte apparaît dans la partie centrale du domaine. Elle est due au fait que l'eau se déverse depuis le lac supérieur vers la zone inférieure du domaine. Par cet effet, l'eau a tendance à emporter une partie des sédiments, mais afin de satisfaire la contrainte sur le taux d'érosion, le flux de sédiments a besoin d'être limité.

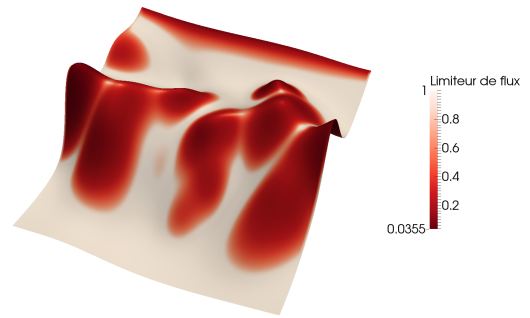
Dans le tableau 5.5 sont rassemblées diverses données numériques. À nouveau, on peut observer que le choix du préconditionneur peut affecter de manière non négligeable le temps de calcul nécessaire à la simulation. Parmi les configurations testées, ILU(2) et ILU(3) sont les plus performants pour ce test.

Donnée numérique	Préconditionneur				
	ILU(0)	ILU(1)	ILU(2)	ILU(3)	ILU(4)
Pas de temps acceptés	1077	1077	1077	1077	1075
Pas de temps refusés	26	26	26	26	26
Moyenne iter. Newton / pas de temps	5.53	4.88	4.59	4.40	4.23
Moyenne iter. solveur / iter. Newton	92.39	57.15	45.08	32.89	26.05
Temps de calcul (s)	6026	4519	4034	4017	4203

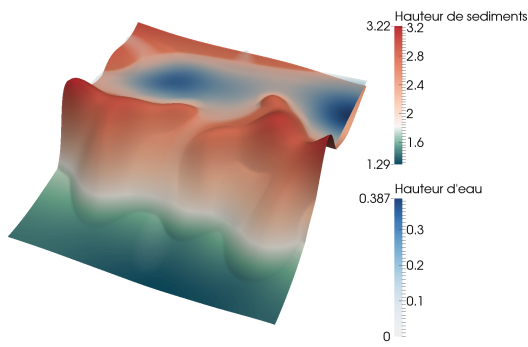
TABLE 5.5 – Résultats numériques.



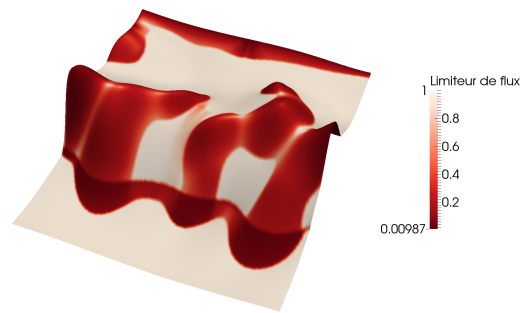
(a) Hauteurs d'eau et de sédiments initiales.



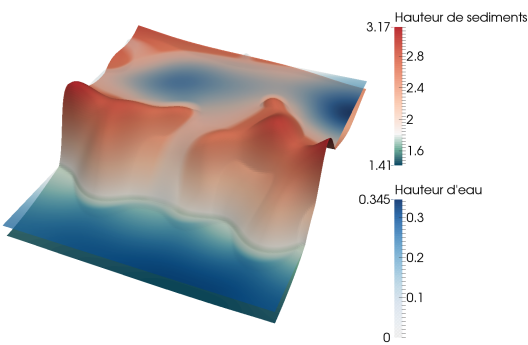
(b) Limiteur de flux initial.



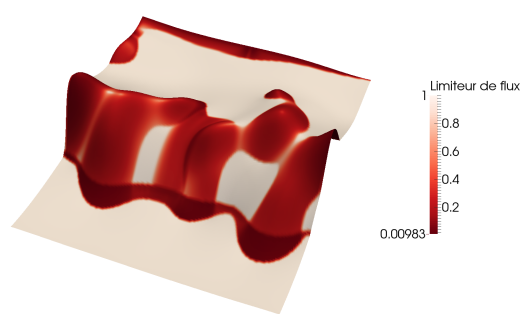
(c) Hauteurs d'eau et de sédiments à  $T = 0.5$  Ma.



(d) Limiteur de flux à  $T = 0.5$  Ma.



(e) Hauteurs d'eau et de sédiments à  $T = 1$  Ma.



(f) Limiteur de flux à  $T = 1$  Ma.

FIGURE 5.4 – Évolution des hauteurs d'eau et de sédiments (km) et du limiteur de flux.



## 5.7 Récapitulatif

Le modèle stratigraphique présenté dans ce chapitre permet, en combinant les résultats des chapitres 3 et 4, de simuler le couplage entre les flux de sédiments et les flux d'eau au niveau continu, en tenant compte d'une contrainte sur le taux d'érosion. Un schéma numérique Volumes Finis a été élaboré en se basant sur la méthode développée pour le  $p$ -Laplacien instationnaire dans le chapitre 2. En particulier, une couche de mailles fictives autour du domaine de calcul a été ajoutée, lesquelles sont associées à deux inconnues que sont la hauteur d'eau et de sédiments, afin de pouvoir définir les flux tangentiels correspondants aux bords. Plusieurs propriétés de ce schéma ont été démontrées, dont l'existence d'au moins une solution discrète. Par rapport au chapitre 3, la résolution numérique apparaît plus délicate, aussi l'usage d'un préconditionneur plus fort semble nécessaire afin de conserver de bonnes performances.

Le chapitre suivant se portera sur l'extension de ce modèle au cas de plusieurs lithologies. Une différence majeure sera alors de devoir prendre en compte la structure interne du bassin, ce qui n'était jusqu'à maintenant pas nécessaire.

## Chapitre 6

# Modèle multilithologique sous contrainte de taux d'érosion maximal avec prise en compte des flux d'eau

### Sommaire

---

<b>6.1</b>	<b>Présentation du modèle . . . . .</b>	<b>114</b>
6.1.1	Définition des flux de lithologies et couplage avec le transport de l'eau . . . . .	115
6.1.2	Limitation de l'érosion . . . . .	117
6.1.3	Modèle complet . . . . .	117
<b>6.2</b>	<b>Propriétés du modèle . . . . .</b>	<b>118</b>
<b>6.3</b>	<b>Schéma numérique Volumes Finis . . . . .</b>	<b>121</b>
6.3.1	Discrétisation de l'équation de conservation de l'eau . . . . .	121
6.3.2	Gestion des colonnes de sédiments . . . . .	121
6.3.3	Discrétisation des équations de conservation des lithologies . . . . .	122
6.3.4	Discrétisation de l'équation de complémentarité . . . . .	124
6.3.5	Discrétisation de l'équation de fermeture . . . . .	125
6.3.6	Conditions aux limites et données initiales . . . . .	126
<b>6.4</b>	<b>Assemblage et résolution du système . . . . .</b>	<b>128</b>
<b>6.5</b>	<b>Propriétés du schéma numérique . . . . .</b>	<b>131</b>
<b>6.6</b>	<b>Résultats numériques . . . . .</b>	<b>140</b>
6.6.1	Influence de la bathymétrie . . . . .	140
6.6.2	Évolution d'un estuaire . . . . .	145
<b>6.7</b>	<b>Récapitulatif . . . . .</b>	<b>150</b>

---

*Ce chapitre fait un pas de plus vers le réalisme en étendant le modèle stratigraphique présenté dans le chapitre 5 au cas de plusieurs lithologies. Il s'agit là d'un aspect essentiel afin de reproduire avec fidélité l'évolution de bassins sédimentaires, où interviennent naturellement différents types de sédiments. Notre démarche sera en partie fondée sur le modèle présenté par Gervais et Masson [42, 44], auquel seront ajoutés les effets de l'eau*

*ainsi que la non-linéarité du flux de sédiments, tout en conservant la limitation de l'érosion. Nous construirons un schéma numérique adapté, toujours en nous inspirant de l'étude du  $p$ -Laplacien instationnaire menée au chapitre 2. Une différence majeure par rapport aux modèles précédents sera de devoir garder en mémoire la structure interne du bassin.*

*La structure du chapitre est alors la suivante. Dans un premier temps, en section 6.1, on s'intéressera à la construction du modèle et la prise en compte des différentes lithologies, suivi de la présentation de quelques propriétés en section 6.2. Puis dans la section 6.3, un schéma numérique *Volumes Finis* sera élaboré en se basant sur l'étude menée dans les chapitres précédents. Ensuite, la section 6.4 détaillera la résolution basée sur la méthode de Newton ainsi que les particularités à prendre en compte lors de l'assemblage de la matrice Jacobienne. La section 6.5 rassemblera quant à elle des propriétés du schéma numérique, et en particulier l'existence d'une solution discrète, prouvée à l'aide d'un argument de degré topologique. Pour terminer, la section 6.6 se concentrera sur deux cas tests permettant d'illustrer les processus mis en avant dans ce chapitre.*

## 6.1 Présentation du modèle

Dans le domaine de la géologie, les sédiments peuvent être classés selon différents critères, comme par exemple leur nature (composition minérale) ou leur granulométrie (taille des grains). Parmi ces catégories, appelées lithologies, on peut citer les sables, les argiles ou encore les craies. Chaque type peut présenter des propriétés différentes, parmi lesquelles la transportabilité (c'est-à-dire la vitesse de diffusion), qui sera la caractéristique principale étudiée dans ce chapitre. L'objectif par rapport au chapitre 5 est alors de pouvoir prendre en compte ces différents types de sédiments afin de modéliser avec plus de précision l'évolution de bassins sédimentaires. En particulier, on souhaite visualiser le dépôt des sédiments sous forme de couches (ou encore strates), dont l'épaisseur et la composition en différentes lithologies peuvent évoluer au cours du temps (voir figure 6.1). Ainsi, dans cette section est présentée la construction du modèle multilithologique qui sera étudié dans ce chapitre.



(a) Dun Briste, Downpatrick Head (Irlande).



(b) Petrified Forest National Park (États-Unis).

FIGURE 6.1 – Exemples de reliefs avec différentes strates.

### 6.1.1 Définition des flux de lithologies et couplage avec le transport de l'eau

Dans un premier temps, une équation de conservation sur la hauteur d'eau est considérée. Elle est identique à celle obtenue dans le chapitre 5, à partir des équations de Saint-Venant en régime stationnaire et uniforme. La relation obtenue, rappelée ici, est donnée par

$$\partial_t \tilde{h} + \operatorname{div}(\tilde{\mathbf{F}}) = 0, \quad \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}_+, \quad (6.1)$$

où le flux d'eau prend la forme

$$\tilde{\mathbf{F}} = -\tilde{K}(\tilde{h}^+)^{3/2} |\nabla(\tilde{h} + h)|^{-1/2} \nabla(\tilde{h} + h). \quad (6.2)$$

Regardons à présent le cas des sédiments. Les notations utilisées dans la suite sont représentées sur la figure 6.2. On supposera dans la suite que les sédiments sont composés d'un mélange de  $L$  lithologies, caractérisées par les concentrations  $(c_\ell)_{\ell=1,\dots,L} \in [0,1]^L$  vérifiant

$$\sum_{\ell=1}^L c_\ell = 1. \quad (6.3)$$

Au lieu de considérer une équation de conservation sur la hauteur de sédiments comme précédemment, l'idée est plutôt de regarder la conservation de chaque fraction en lithologie  $\ell = 1, \dots, L$ . Cette dernière est calculée sur l'épaisseur de sédiments en chaque point du domaine, c'est-à-dire selon la cote  $\zeta \in [h_*, h(x, y, t)]$ , où  $h_*$  est la hauteur minimale de sédiments dans le domaine. Plus précisément, la notion de fraction en lithologie  $\ell$  est définie par la formule

$$\mathfrak{F}_\ell(x, y, t) = \int_{h_*}^{h(x, y, t)} c_\ell(x, y, \zeta, t) d\zeta, \quad \ell = 1, \dots, L. \quad (6.4)$$

La dérivée en temps de cette quantité s'écrit sous la forme

$$\partial_t \mathfrak{F}_\ell = c_\ell|_{\zeta=h} \partial_t h + \int_{h_*}^h \partial_t c_\ell d\zeta. \quad (6.5)$$

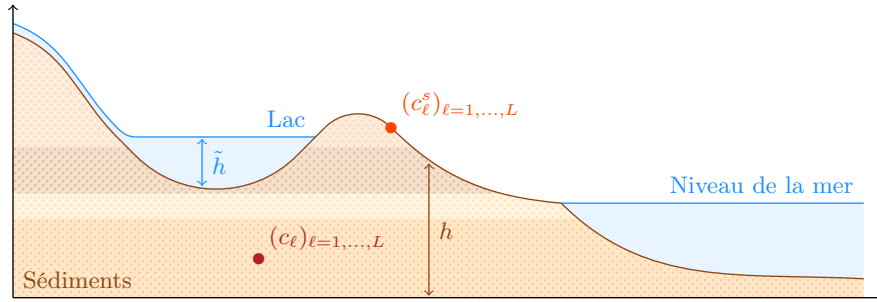


FIGURE 6.2 – Notations pour le modèle multilithologique.

On pourra noter que dans le cas monolithologique, cette notion permet de faire le lien avec le chapitre précédent étant donné que  $\mathfrak{F}_1 = h - h_*$ , qui implique que  $\partial_t \mathfrak{F}_1 = \partial_t h$ . Par ailleurs, la définition (6.4) sous-entend que la hauteur de sédiments  $h$  est supérieure à  $h_*$ , condition qui sera vérifiée dans la suite (voir la proposition 6.2).

Il faut à présent définir le flux de chaque lithologie  $\ell$ . Pour cela, on se base sur l'étude menée dans la section 5.1 ainsi que sur les travaux présentés par Gervais [42] et Rivenæs [62]. En partant de la formulation du flux de sédiments (5.5b), la première étape est d'adapter les coefficients de diffusion, pouvant prendre différentes valeurs suivant la lithologie étudiée. Plus précisément,  $K_g$  est remplacé par  $K_{g,\ell}$  et  $K$  par  $K_\ell$ , définis par

$$K_{g,\ell}(h) = \begin{cases} K_{g,\ell,m}, & \text{si } h < H_m, \\ K_{g,\ell,c}, & \text{si } h \geq H_m, \end{cases} \quad \ell = 1, \dots, L, \quad (6.6a)$$

$$K_\ell(h) = \begin{cases} K_{\ell,m}, & \text{si } h < H_m, \\ K_{\ell,c}, & \text{si } h \geq H_m, \end{cases} \quad \ell = 1, \dots, L, \quad (6.6b)$$

ce qui conduit à l'expression

$$-K_\ell(h)(\tilde{h}^+)^{3/2} |\nabla(\tilde{h} + h)|^{1/2} \nabla h - K_{g,\ell}(h) |\nabla h|^{p-2} \nabla h, \quad \ell = 1, \dots, L. \quad (6.7)$$

Ensuite, une deuxième notion de concentrations, appelées concentrations de surface et notées par  $(c_\ell^s)_{\ell=1,\dots,L} \in [0, 1]^L$ , est introduite. Uniquement définies à la surface du bassin sédimentaire, elles permettent d'exprimer le fait que le transport des sédiments n'a lieu qu'en surface, et permettent de caractériser leur concentration en différentes lithologies. Elles vérifient de plus la relation

$$\sum_{\ell=1}^L c_\ell^s = 1, \quad \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}_+. \quad (6.8)$$

Le transport des sédiments ne s'effectuant qu'en surface, les concentrations à l'intérieur du bassin restent inchangées au cours du temps, c'est-à-dire

$$\partial_t c_\ell = 0, \quad \text{sur } \Omega \times [h_*, h] \times \mathbb{R}_+, \quad \ell = 1, \dots, L. \quad (6.9)$$

Ces dernières ne peuvent donc varier que lors de sédimentation, où la composition des sédiments déposés est donnée par les concentrations de surface. Cela peut se résumer par le fait que si  $\partial_t h > 0$ , alors

$$c_\ell|_{\zeta=h} = c_\ell^s, \quad \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}_+, \quad \ell = 1, \dots, L. \quad (6.10)$$

Dans le cadre de l'érosion, les sédiments libérés des colonnes viennent abonder les sédiments transportés en surface. Ces éléments permettent par ailleurs d'écrire la dérivée temporelle de la fraction en lithologie  $\ell$  (6.5) sous la forme simplifiée

$$\partial_t \tilde{\mathfrak{F}}_\ell = c_\ell|_{\zeta=h} \partial_t h.$$

Le flux (6.7) est alors multiplié par la concentration de surface  $c_\ell^s$  afin de prendre en compte la disponibilité de la lithologie  $\ell$ . Ainsi, pour chaque lithologie, on considère l'équation de conservation

$$c_\ell|_{\zeta=h} \partial_t h + \text{div}(\mathbf{F}_\ell) = 0, \quad \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}_+, \quad \ell = 1, \dots, L. \quad (6.11)$$

où le flux est défini par la formule

$$\mathbf{F}_\ell = -K_\ell(h)c_\ell^s(\tilde{h}^+)^{3/2}|\nabla(\tilde{h}+h)|^{1/2}\nabla h - K_{g,\ell}(h)c_\ell^s|\nabla h|^{p-2}\nabla h, \quad \ell = 1, \dots, L. \quad (6.12)$$

### 6.1.2 Limitation de l'érosion

Tout comme dans les chapitres précédents, une contrainte sur le taux d'érosion est ajoutée au modèle. Pour cela, on considère un taux d'érosion maximal  $E > 0$ . On demande alors à ce que la relation

$$\partial_t h + E \geq 0, \quad \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}_+, \quad (6.13)$$

soit vérifiée. Puis, afin de coupler cette contrainte avec le transport des sédiments, un limiteur de flux  $0 < \lambda \leq 1$  est introduit dans chaque équation de conservation des lithologies (6.11) comme suit :

$$c_\ell|_{\zeta=h}\partial_t h + \text{div}(\lambda\mathbf{F}_\ell) = 0, \quad \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}_+, \quad \ell = 1, \dots, L. \quad (6.14)$$

Remarquons par ailleurs que sommer ces équations sur l'ensemble des lithologies conduit à l'expression

$$\partial_t h + \sum_{\ell=1}^L \text{div}(\lambda\mathbf{F}_\ell) = 0, \quad \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}_+. \quad (6.15)$$

Ces éléments peuvent alors se reformuler sous la condition de complémentarité

$$\min(1 - \lambda, \partial_t h + E) = 0, \quad \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}_+, \quad (6.16a)$$

ou de manière équivalente

$$\min\left(1 - \lambda, E - \sum_{\ell=1}^L \text{div}(\lambda\mathbf{F}_\ell)\right) = 0, \quad \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}_+. \quad (6.16b)$$

### 6.1.3 Modèle complet

Finalement, le modèle multilithologique étudié dans ce chapitre est donné par

$$\partial_t \tilde{h} + \text{div}(\tilde{\mathbf{F}}) = 0, \quad \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}_+, \quad (6.17a)$$

$$c_\ell|_{\zeta=h}\partial_t h + \text{div}(\lambda\mathbf{F}_\ell) = 0, \quad \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}_+, \quad \ell = 1, \dots, L, \quad (6.17b)$$

$$\min\left(1 - \lambda, E - \sum_{\ell=1}^L \text{div}(\lambda\mathbf{F}_\ell)\right) = 0, \quad \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}_+, \quad (6.17c)$$

$$\sum_{\ell=1}^L c_\ell^s = 1, \quad \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}_+, \quad (6.17d)$$

où les flux sont définis par les formules

$$\tilde{\mathbf{F}} = -\tilde{K}(\tilde{h}^+)^{3/2}|\nabla(\tilde{h}+h)|^{-1/2}\nabla(\tilde{h}+h), \quad (6.18a)$$

$$\mathbf{F}_\ell = -c_\ell^s(\tilde{h}^+)^{3/2}|\nabla(\tilde{h}+h)|^{1/2}\nabla\psi_\ell(h) - c_\ell^s|\nabla h|^{p-2}\nabla\psi_{g,\ell}(h), \quad \ell = 1, \dots, L. \quad (6.18b)$$

Pour chaque lithologie, les coefficients de diffusion sont pris en compte à travers leur primitive, c'est-à-dire

$$\psi_\ell(h) = \int_{H_m}^h K_\ell(u) du, \quad \ell = 1, \dots, L, \quad (6.19a)$$

$$\psi_{g,\ell}(h) = \int_{H_m}^h K_{g,\ell}(u) du, \quad \ell = 1, \dots, L. \quad (6.19b)$$

En ce qui concerne l'évolution des sédiments à l'intérieur du bassin, on impose

$$\partial_t c_\ell = 0, \quad \text{sur } \Omega \times [h_*, h] \times \mathbb{R}_+, \quad \ell = 1, \dots, L. \quad (6.20)$$

Ainsi, la relation (6.3) est préservée dans les colonnes de sédiments au cours du temps. Par ailleurs, en cas de sédimentation ( $\partial_t h > 0$ ), les concentrations dans la couche déposée sont définies par

$$c_\ell|_{\zeta=h} = c_\ell^s, \quad \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}_+, \quad \ell = 1, \dots, L. \quad (6.21)$$

Afin de compléter le modèle, les conditions aux limites suivantes sont prescrites :

$$\tilde{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{n} = \tilde{\phi}(x, y, t) \leq 0, \quad \text{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}_+, \quad (6.22a)$$

$$\mathbf{F}_\ell \cdot \mathbf{n} = \phi_\ell(x, y, t) \leq 0, \quad \text{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}_+, \quad \ell = 1, \dots, L, \quad (6.22b)$$

$$\lambda = 1, \quad \text{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}_+, \quad (6.22c)$$

$$\sum_{\ell=1}^L c_\ell^s = 1, \quad \text{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}_+, \quad (6.22d)$$

Elles comprennent notamment un flux d'eau entrant, ainsi qu'un flux entrant pour chaque lithologie. Les données initiales sont quant à elles définies par

$$\tilde{h}(x, y, t = 0) = \tilde{h}_0(x, y), \quad \text{dans } \Omega, \quad (6.23a)$$

$$h(x, y, t = 0) = h_0(x, y), \quad \text{dans } \Omega, \quad (6.23b)$$

$$c_\ell(x, y, \zeta, t = 0) = c_{\ell,0}(x, y, \zeta) \in [0, 1], \quad \text{dans } \Omega \times [h_*, h_0], \quad \ell = 1, \dots, L, \quad (6.23c)$$

et vérifient  $0 \leq \tilde{h}_0 \leq \tilde{h}^*$  et  $h_* \leq h_0 \leq h^*$  avec  $\tilde{h}^*, h_*, h^* \in \mathbb{R}_+$ , ainsi que  $\sum_{\ell=1}^L c_\ell = 1$ .

## 6.2 Propriétés du modèle

Cette section rassemble quelques propriétés du modèle (6.17)–(6.23) au niveau continu. Nous supposons ici que les solutions  $\tilde{h}$ ,  $h$ ,  $\lambda$  et  $(c_\ell^s)_{\ell=1,\dots,L}$  sont suffisamment régulières pour justifier les calculs ci-dessous. On fera également l'hypothèse que le limiteur de flux  $\lambda$  ainsi que les concentrations de surface  $(c_\ell^s)_{\ell=1,\dots,L}$  sont positifs. Ces propriétés seront démontrées au niveau discret dans les propositions 6.5 et 6.6.

**Proposition 6.1** (Positivité de la hauteur d'eau). *Pour tout  $t \geq 0$ , la hauteur d'eau est positive ou nulle :*

$$\tilde{h} \geq 0, \quad \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}_+. \quad (6.24)$$

*Démonstration.* La démonstration est identique à celle de la proposition 5.1.  $\square$

**Proposition 6.2** (Préservation de la borne inférieure sur la hauteur de sédiments). *Soit  $T > 0$ . La hauteur de sédiments au temps  $T$  vérifie la relation*

$$h(x, y, T) \geq h_*, \quad \text{dans } \Omega. \quad (6.25)$$

*Démonstration.* Commençons par sommer les équations de conservation des lithologies (6.17b) afin d'obtenir

$$\partial_t h + \sum_{\ell=1}^L \operatorname{div}(\lambda \mathbf{F}_\ell) = 0.$$

De là, on multiplie par le terme  $(h - h_*)^-$  puis on intègre sur  $\Omega \times [0, T]$  :

$$\int_0^T \int_\Omega (h - h_*)^- \partial_t h \, dx \, dy \, dt + \sum_{\ell=1}^L \int_0^T \int_\Omega (h - h_*)^- \operatorname{div}(\lambda \mathbf{F}_\ell) \, dx \, dy \, dt = 0.$$

En remarquant que  $2(h - h_*)^- \partial_t h = \partial_t \{(h - h_*)^-\}^2$ , puis en reformulant la deuxième intégrale, la relation précédente se réécrit sous la forme

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_\Omega \{(h - h_*)^-\}^2 \Big|_{t=T} \, dx \, dy - \frac{1}{2} \int_\Omega \{(h - h_*)^-\}^2 \Big|_{t=0} \, dx \, dy \\ & + \sum_{\ell=1}^L \int_0^T \int_\Omega \operatorname{div}(\lambda (h - h_*)^- \mathbf{F}_\ell) \, dx \, dy \, dt - \sum_{\ell=1}^L \int_0^T \int_\Omega \lambda \nabla (h - h_*)^- \cdot \mathbf{F}_\ell \, dx \, dy \, dt = 0. \end{aligned}$$

Or par hypothèse sur la hauteur de sédiments initiale, on a  $h_0 \geq h_*$ . En utilisant également la formule de Stokes ainsi qu'en explicitant la formule du flux de sédiments, l'égalité précédente devient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_\Omega \{(h - h_*)^-\}^2 \Big|_{t=T} \, dx \, dy &= - \int_0^T \int_{\partial\Omega} \lambda (h - h_*)^- \phi \, d\sigma \, dt \\ &\quad - \sum_{\ell=1}^L \int_0^T \int_\Omega \lambda c_\ell^s K_\ell(h) (\tilde{h}^+)^{3/2} |\nabla(\tilde{h} + h)|^{1/2} \\ &\quad \quad \quad \times |\nabla h|^2 \mathbf{1}_{\{h < h_*\}} \, dx \, dy \, dt \\ &\quad - \sum_{\ell=1}^L \int_0^T \int_\Omega \lambda c_\ell^s K_{g,\ell}(h) |\nabla h|^p \mathbf{1}_{\{h < h_*\}} \, dx \, dy \, dt \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

De cette inégalité on en déduit que la seule possibilité est d'avoir  $h \geq h_*$  sur  $\Omega \times [0, T]$ .  $\square$

**Proposition 6.3** (Conservation de la masse). *Soit  $T > 0$ . Les masses d'eau et de lithologie  $\ell = 1, \dots, L$  au temps  $T$  vérifient les relations*

$$\int_\Omega \tilde{h}|_{t=T} \, dx \, dy = \int_\Omega \tilde{h}_0 \, dx \, dy - \int_0^T \int_{\partial\Omega} \tilde{\phi} \, d\sigma \, dt, \quad (6.26a)$$

$$\int_\Omega \mathfrak{F}_\ell|_{t=T} \, dx \, dy = \int_\Omega \mathfrak{F}_\ell|_{t=0} \, dx \, dy - \int_0^T \int_{\partial\Omega} \phi_\ell \, d\sigma \, dt. \quad (6.26b)$$



De plus, la masse totale de sédiments au temps  $T$  vérifie

$$\int_{\Omega} h|_{t=T} dx dy = \int_{\Omega} h_0 dx dy - \sum_{\ell=1}^L \int_0^T \int_{\partial\Omega} \phi_{\ell} d\sigma dt. \quad (6.26c)$$

*Démonstration.* La démarche de la preuve concernant la masse d'eau est similaire à celle de la proposition 5.3 : on intègre l'équation de conservation (6.17a) sur  $\Omega \times [0, T]$  puis on utilise la formule de Stokes. La même méthode est utilisée pour la relation des lithologies, en notant que par définition, le terme d'accumulation dans les équations de conservation associées peut se reformuler par  $c_{\ell}|_{\zeta=h} \partial_t h = \partial_t \mathfrak{F}_{\ell}$ . Enfin, (6.26c) s'obtient en sommant (6.26b) sur  $\ell = 1, \dots, L$ .  $\square$

À présent, introduisons la notion d'énergie du système par

$$\mathfrak{E}(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} h(x, y, t)^2 dx dy. \quad (6.27)$$

Cette énergie satisfait la propriété suivante.

**Proposition 6.4** (Estimation d'énergie). *Soit  $T > 0$ . Le système (6.17)–(6.23) vérifie l'estimation d'énergie*

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}(T) = \mathfrak{E}(0) &- \sum_{\ell=1}^L \int_0^T \int_{\partial\Omega} h \phi_{\ell} d\sigma dt - \sum_{\ell=1}^L \int_0^T \int_{\Omega} \lambda c_{\ell}^s K_{g,\ell}(h) |\nabla h|^p dx dy dt \\ &- \sum_{\ell=1}^L \int_0^T \int_{\Omega} \lambda c_{\ell}^s K_{\ell}(h) (\tilde{h}^+)^{3/2} |\nabla(\tilde{h} + h)|^{1/2} |\nabla h|^2 dx dy dt. \end{aligned} \quad (6.28)$$

Dans le cas particulier où chaque flux entrant de lithologie est nul (c'est-à-dire si  $\phi_{\ell} = 0$  sur  $\partial\Omega \times \mathbb{R}_+$  pour  $\ell = 1, \dots, L$ ), on a de plus une décroissance de l'énergie au cours du temps.

*Démonstration.* Une première étape consiste à sommer les équations de conservation (6.17b) dans le but d'obtenir

$$\partial_t h + \sum_{\ell=1}^L \operatorname{div}(\lambda \mathbf{F}_{\ell}) = 0.$$

Ensuite, on multiplie la relation précédente par  $h$  puis on intègre sur  $\Omega \times [0, T]$  :

$$\int_0^T \int_{\Omega} h \partial_t h dx dy dt + \sum_{\ell=1}^L \int_0^T \int_{\Omega} h \operatorname{div}(\lambda \mathbf{F}_{\ell}) dx dy dt = 0,$$

que l'on peut reformuler par

$$\int_0^T \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{h^2}{2} dx dy dt + \sum_{\ell=1}^L \int_0^T \int_{\Omega} \operatorname{div}(\lambda h \mathbf{F}_{\ell}) dx dy dt - \sum_{\ell=1}^L \int_0^T \int_{\Omega} \lambda \nabla h \cdot \mathbf{F}_{\ell} dx dy dt = 0.$$

Il reste alors à employer la formule de Stokes puis à expliciter flux de lithologies à partir de (6.18b).  $\square$

### 6.3 Schéma numérique Volumes Finis

Abordons à présent la construction d'un schéma numérique pour approcher le modèle stratigraphique (6.17)–(6.23). La méthode se base en partie sur l'étude du  $p$ -Laplacien ainsi que sur le chapitre 5. Nous verrons par ailleurs que la gestion des colonnes de sédiments nécessite une attention particulière.

#### 6.3.1 Discrétisation de l'équation de conservation de l'eau

L'équation de conservation de la hauteur d'eau étant identique à celle du modèle présenté dans le chapitre 5, la discrétisation associée l'est tout autant. Le schéma numérique, que l'on rappelle ici, est défini par

$$\frac{\tilde{h}_{i,j}^{n+1} - \tilde{h}_{i,j}^n}{\Delta t} + \frac{\tilde{F}_{i+1/2,j}^{n+1} - \tilde{F}_{i-1/2,j}^{n+1}}{\Delta x} + \frac{\tilde{F}_{i,j+1/2}^{n+1} - \tilde{F}_{i,j-1/2}^{n+1}}{\Delta y} = 0, \quad (6.29)$$

où le flux d'eau est approché par les formules

$$\tilde{F}_{i+1/2,j}^{n+1} = \left[ (\tilde{h}_{i,j}^{n+1})^+ \right]^{3/2} (\tilde{G}_{i+1/2,j}^{n+1})^+ + \left[ (\tilde{h}_{i+1,j}^{n+1})^+ \right]^{3/2} (\tilde{G}_{i+1/2,j}^{n+1})^-, \quad (6.30a)$$

$$\tilde{F}_{i,j+1/2}^{n+1} = \left[ (\tilde{h}_{i,j}^{n+1})^+ \right]^{3/2} (\tilde{G}_{i,j+1/2}^{n+1})^+ + \left[ (\tilde{h}_{i,j+1}^{n+1})^+ \right]^{3/2} (\tilde{G}_{i,j+1/2}^{n+1})^-, \quad (6.30b)$$

avec

$$\tilde{G}_{i+1/2,j}^{n+1} = -\frac{\tilde{K}}{2} \left[ \max(\bar{B}_{i+1/2,j-1/2}^n, \varepsilon)^{-1/4} + \max(\bar{B}_{i+1/2,j+1/2}^n, \varepsilon)^{-1/4} \right] \times \frac{\tilde{h}_{i+1,j}^{n+1} + h_{i+1,j}^{n+1} - \tilde{h}_{i,j}^{n+1} - h_{i,j}^{n+1}}{\Delta x}, \quad (6.31a)$$

$$\tilde{G}_{i,j+1/2}^{n+1} = -\frac{\tilde{K}}{2} \left[ \max(\bar{B}_{i-1/2,j+1/2}^n, \varepsilon)^{-1/4} + \max(\bar{B}_{i+1/2,j+1/2}^n, \varepsilon)^{-1/4} \right] \times \frac{\tilde{h}_{i,j+1}^{n+1} + h_{i,j+1}^{n+1} - \tilde{h}_{i,j}^{n+1} - h_{i,j}^{n+1}}{\Delta y}. \quad (6.31b)$$

Pour davantage de précisions, on pourra se référer à la section 5.3.

#### 6.3.2 Gestion des colonnes de sédiments

Dans un premier temps il est préférable de regarder la gestion des colonnes au niveau discret. Pour cela, en se basant sur la procédure présentée par Gervais [42], la concentration  $c_{\ell,i,j}^{n+1}(\zeta)$  est définie comme étant la solution au temps  $t^{n+1}$  du système

$$\partial_t c_{\ell,i,j}(\zeta, t) = 0, \quad \zeta \in [h_*, h_{i,j}(t)], \quad t \in [t^n, t^{n+1}], \quad (6.32a)$$

$$c_{\ell,i,j}(h_{i,j}(t), t) = c_{\ell,i,j}^{s,n+1}, \quad \text{si } h_{i,j}^{n+1} > h_{i,j}^n, \quad t \in [t^n, t^{n+1}], \quad (6.32b)$$

$$c_{\ell,i,j}(\zeta, t^n) = c_{\ell,i,j}^n(\zeta), \quad \zeta \in [h_*, h_{i,j}^n], \quad (6.32c)$$

où  $h_{i,j}$  est une combinaison convexe de la hauteur de sédiments discrète entre les temps  $t^n$  et  $t^{n+1}$  :

$$h_{i,j}(t) = (1 - \alpha(t))h_{i,j}^n + \alpha(t)h_{i,j}^{n+1}, \quad \alpha(t) = \frac{t - t^n}{t^{n+1} - t^n}, \quad t \in [t^n, t^{n+1}].$$

La solution du système (6.32) se déduit aisément en différentiant la sédimentation de l'érosion. Regardons en premier lieu le cas de la sédimentation, c'est-à-dire si  $h_{i,j}^{n+1} > h_{i,j}^n$ . En intégrant (6.32a) entre  $t^n$  et  $t^{n+1}$  puis en utilisant (6.32c), cela conduit à

$$c_{\ell,i,j}^{n+1}(\zeta) = c_{\ell,i,j}(\zeta, t^{n+1}) = c_{\ell,i,j}(\zeta, t^n) = c_{\ell,i,j}^n(\zeta), \quad \zeta \in [h_*, h_{i,j}^n].$$

Soit maintenant  $t^* \in [t^n, t^{n+1}]$ . En intégrant à nouveau (6.32a), cette fois-ci entre  $t^*$  et  $t^{n+1}$ , et en se servant de (6.32b) ainsi que de (6.32c), on obtient la relation

$$c_{\ell,i,j}^{n+1}(\zeta) = c_{\ell,i,j}(\zeta, t^{n+1}) = c_{\ell,i,j}(\zeta, t^*) = c_{\ell,i,j}^{s,n+1}, \quad \text{avec } \zeta = h_{i,j}(t^*) \in [h_{i,j}^n, h_{i,j}^{n+1}].$$

Autrement dit, la solution au temps  $t^{n+1}$  revient à ajouter un bloc de taille  $h_{i,j}^{n+1} - h_{i,j}^n$  au dessus de la colonne au temps  $t^n$ , dont la composition est définie comme étant égale aux concentrations de surface  $(c_{\ell,i,j}^{s,n+1})_{\ell=1,\dots,L}$ . Inversement, en cas d'érosion, c'est-à-dire si  $h_{i,j}^{n+1} \leq h_{i,j}^n$ , une manipulation similaire permet d'avoir

$$c_{\ell,i,j}^{n+1}(\zeta) = c_{\ell,i,j}(\zeta, t^{n+1}) = c_{\ell,i,j}(\zeta, t^n) = c_{\ell,i,j}^n(\zeta), \quad \zeta \in [h_*, h_{i,j}^{n+1}].$$

Cela revient simplement à tronquer la colonne au temps  $t^n$  à la hauteur de sédiments au temps  $t^{n+1}$ , c'est-à-dire  $h_{i,j}^{n+1}$ . En résumé, la solution est donnée dans le cas de sédimentation par

$$c_{\ell,i,j}^{n+1}(\zeta) = \begin{cases} c_{\ell,i,j}^n(\zeta), & \zeta \in [h_*, h_{i,j}^n], \\ c_{\ell,i,j}^{s,n+1}, & \zeta \in [h_{i,j}^n, h_{i,j}^{n+1}], \end{cases} \quad \ell = 1, \dots, L, \quad (6.33a)$$

et en érosion par

$$c_{\ell,i,j}^{n+1}(\zeta) = c_{\ell,i,j}^n(\zeta), \quad \zeta \in [h_*, h_{i,j}^{n+1}], \quad \ell = 1, \dots, L. \quad (6.33b)$$

Cette construction est résumée sur la figure 6.3.

### 6.3.3 Discrétisation des équations de conservation des lithologies

La discrétisation des équations de conservation des lithologies présente quelques différences par rapport aux chapitres précédents. Intéressons-nous tout d'abord au terme d'accumulation. Partant de la notion de fraction en lithologie (6.4), la dérivée temporelle associée est approchée par le schéma d'Euler implicite

$$\frac{\mathfrak{F}_{\ell,i,j}^{n+1} - \mathfrak{F}_{\ell,i,j}^n}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \left( \int_{h_*}^{h_{i,j}^{n+1}} c_{\ell,i,j}^{n+1}(\zeta) d\zeta - \int_{h_*}^{h_{i,j}^n} c_{\ell,i,j}^n(\zeta) d\zeta \right). \quad (6.34)$$

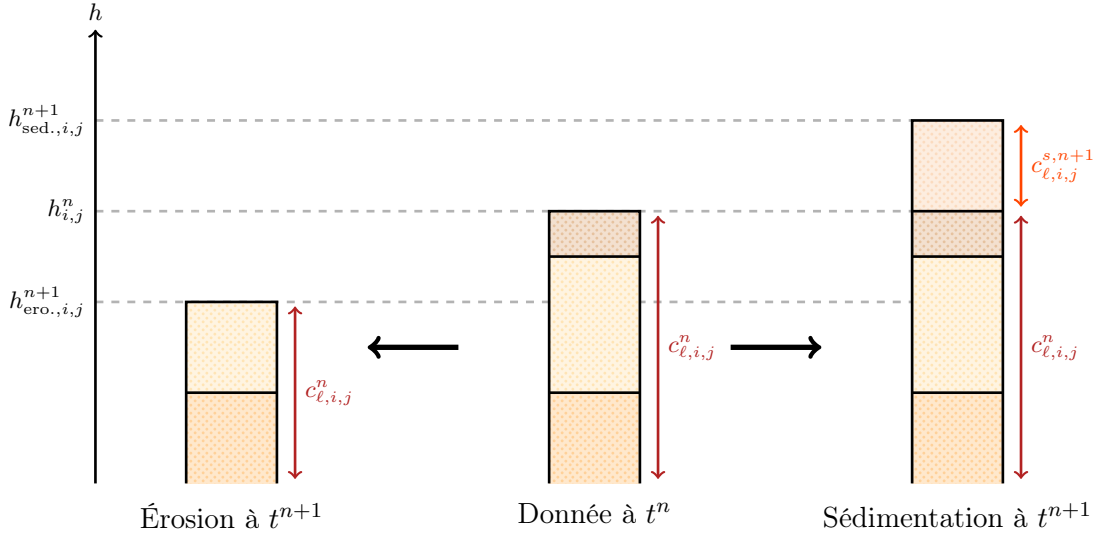


FIGURE 6.3 – Gestion des colonnes au niveau discret.

Ensuite, il suffit de différencier l'érosion et la sédimentation et ainsi d'utiliser les résultats de la sous-section précédente. Dans le cas où  $h_{i,j}^{n+1} > h_{i,j}^n$ , la relation (6.34) devient

$$\frac{\mathfrak{F}_{\ell,i,j}^{n+1} - \mathfrak{F}_{\ell,i,j}^n}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \left( \int_{h_*}^{h_{i,j}^n} c_{\ell,i,j}^n(\zeta) d\zeta + \int_{h_{i,j}^n}^{h_{i,j}^{n+1}} c_{\ell,i,j}^{s,n+1} d\zeta - \int_{h_*}^{h_{i,j}^n} c_{\ell,i,j}^n(\zeta) d\zeta \right) \quad (6.35a)$$

$$= c_{\ell,i,j}^{s,n+1} \frac{h_{i,j}^{n+1} - h_{i,j}^n}{\Delta t}. \quad (6.35b)$$

D'autre part, la situation où  $h_{i,j}^{n+1} \leq h_{i,j}^n$  mène à

$$\frac{\mathfrak{F}_{\ell,i,j}^{n+1} - \mathfrak{F}_{\ell,i,j}^n}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \left( \int_{h_*}^{h_{i,j}^{n+1}} c_{\ell,i,j}^n(\zeta) d\zeta - \int_{h_*}^{h_{i,j}^n} c_{\ell,i,j}^n(\zeta) d\zeta \right) \quad (6.36a)$$

$$= \frac{1}{\Delta t} \int_{h_{i,j}^n}^{h_{i,j}^{n+1}} c_{\ell,i,j}^n(\zeta) d\zeta. \quad (6.36b)$$

De manière plus concise, il est possible de combiner (6.35) avec (6.36) et ainsi d'obtenir la relation

$$\frac{\mathfrak{F}_{\ell,i,j}^{n+1} - \mathfrak{F}_{\ell,i,j}^n}{\Delta t} = c_{\ell,i,j}^{s,n+1} \frac{(h_{i,j}^{n+1} - h_{i,j}^n)^+}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta t} \left( \int_{h_{i,j}^n}^{h_{i,j}^{n+1}} c_{\ell,i,j}^n(\zeta) d\zeta \right)^-. \quad (6.37)$$

Cette formulation utilise le fait que les concentrations dans les colonnes restent comprises entre 0 et 1, résultat qui sera établi dans la proposition 6.6. Passons maintenant aux termes de flux. Notons que le flux de sédiments (6.18b) peut s'écrire  $\mathbf{F}_\ell = c_\ell^s \mathcal{F}_\ell$ , où  $\mathcal{F}_\ell$  n'est autre que le flux (5.5b) utilisé dans le chapitre 5. L'unique différence est située au niveau des coefficients de diffusion (et donc des fonctions  $\psi$  et  $\psi_g$ ) qui peuvent varier suivant la

lithologie considérée. La méthode d'approximation choisie consiste à décentrer le terme  $\lambda c_\ell^s$  par rapport au signe de  $\mathcal{F}_\ell \cdot \mathbf{n}$  aux arêtes. La discrétisation de l'équation (6.17b) s'écrit alors

$$c_{\ell,i,j}^{s,n+1} \frac{(h_{i,j}^{n+1} - h_{i,j}^n)^+}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta t} \left( \int_{h_{i,j}^n}^{h_{i,j}^{n+1}} c_{\ell,i,j}^n(\zeta) d\zeta \right)^- + \frac{(\lambda F_\ell)_{i+1/2,j}^{n+1} - (\lambda F_\ell)_{i-1/2,j}^{n+1}}{\Delta x} + \frac{(\lambda F_\ell)_{i,j+1/2}^{n+1} - (\lambda F_\ell)_{i,j-1/2}^{n+1}}{\Delta y} = 0, \quad (6.38)$$

avec les flux limités discrets

$$(\lambda F_\ell)_{i+1/2,j}^{n+1} = \lambda_{i,j}^{n+1} (c_{\ell,i,j}^{s,n+1})^+ (\mathcal{F}_{\ell,i+1/2,j}^{n+1})^+ + \lambda_{i+1,j}^{n+1} (c_{\ell,i+1,j}^{s,n+1})^+ (\mathcal{F}_{\ell,i+1/2,j}^{n+1})^-, \quad (6.39a)$$

$$(\lambda F_\ell)_{i,j+1/2}^{n+1} = \lambda_{i,j}^{n+1} (c_{\ell,i,j}^{s,n+1})^+ (\mathcal{F}_{\ell,i,j+1/2}^{n+1})^+ + \lambda_{i,j+1}^{n+1} (c_{\ell,i,j+1}^{s,n+1})^+ (\mathcal{F}_{\ell,i,j+1/2}^{n+1})^-. \quad (6.39b)$$

Les quantités  $\mathcal{F}_{\ell,i+1/2,j}^{n+1}$  et  $\mathcal{F}_{\ell,i,j+1/2}^{n+1}$  sont ensuite définies par analogie avec les formules (5.22a) et (5.22b). Ainsi, ces deux termes sont dans le cas présent égaux à

$$\mathcal{F}_{\ell,i+1/2,j}^{n+1} = [(\tilde{h}_{i,j}^{n+1})^+]^{3/2} (G_{\ell,i+1/2,j}^{n+1})^+ + [(\tilde{h}_{i+1,j}^{n+1})^+]^{3/2} (G_{\ell,i+1/2,j}^{n+1})^- - \frac{1}{2} \left[ (B_{i+1/2,j-1/2}^n)^{\frac{p-2}{2}} + (B_{i+1/2,j+1/2}^n)^{\frac{p-2}{2}} \right] \frac{\psi_{g,\ell}(h_{i+1,j}^{n+1}) - \psi_{g,\ell}(h_{i,j}^{n+1})}{\Delta x}, \quad (6.40a)$$

$$\mathcal{F}_{\ell,i,j+1/2}^{n+1} = [(\tilde{h}_{i,j}^{n+1})^+]^{3/2} (G_{\ell,i,j+1/2}^{n+1})^+ + [(\tilde{h}_{i,j+1}^{n+1})^+]^{3/2} (G_{\ell,i,j+1/2}^{n+1})^- - \frac{1}{2} \left[ (B_{i-1/2,j+1/2}^n)^{\frac{p-2}{2}} + (B_{i+1/2,j+1/2}^n)^{\frac{p-2}{2}} \right] \frac{\psi_{g,\ell}(h_{i,j+1}^{n+1}) - \psi_{g,\ell}(h_{i,j}^{n+1})}{\Delta y}, \quad (6.40b)$$

où

$$G_{\ell,i+1/2,j}^{n+1} = -\frac{1}{2} \left[ (\bar{B}_{i+1/2,j-1/2}^n)^{1/4} + (\bar{B}_{i+1/2,j+1/2}^n)^{1/4} \right] \frac{\psi_\ell(h_{i+1,j}^{n+1}) - \psi_\ell(h_{i,j}^{n+1})}{\Delta x}, \quad (6.41a)$$

$$G_{\ell,i,j+1/2}^{n+1} = -\frac{1}{2} \left[ (\bar{B}_{i-1/2,j+1/2}^n)^{1/4} + (\bar{B}_{i+1/2,j+1/2}^n)^{1/4} \right] \frac{\psi_\ell(h_{i,j+1}^{n+1}) - \psi_\ell(h_{i,j}^{n+1})}{\Delta y}. \quad (6.41b)$$

**Remarque 6.1.** On pourra noter que des parties positives ont été introduites vis-à-vis des concentrations de surface au niveau des équations (6.39). Cette démarche permet d'assurer que ces quantités restent positives à chaque instant, comme nous le verrons dans la proposition 6.6. Une autre méthode produisant globalement les mêmes effets consisterait à projeter les concentrations de surface sur  $\mathbb{R}_+$  à la fin de chaque itération en temps.

### 6.3.4 Discrétisation de l'équation de complémentarité

L'approximation de la condition de complémentarité reprend la même démarche présentée dans les chapitres 3 et 5. On commence par discrétiser le taux d'érosion maximal via la formule

$$E_{i,j} = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{\mathcal{M}_{i,j}} E(x, y) dx dy. \quad (6.42)$$

Pour la suite, on définit la notion de *flux non limité sortant total* par

$$\langle F \rangle_{i,j}^{n+1} = \sum_{\ell=1}^L (c_{\ell,i,j}^{s,n+1})^+ \left\{ \Delta y \left[ (\mathcal{F}_{\ell,i+1/2,j}^{n+1})^+ - (\mathcal{F}_{\ell,i-1/2,j}^{n+1})^- \right] + \Delta x \left[ (\mathcal{F}_{\ell,i,j+1/2}^{n+1})^+ - (\mathcal{F}_{\ell,i,j-1/2}^{n+1})^- \right] \right\}, \quad (6.43)$$

puis celle de *flux limité entrant total* par

$$\begin{aligned} \rangle \lambda F \langle_{i,j}^{n+1} &= \Delta y \sum_{\ell=1}^L \left\{ \lambda_{i-1,j}^{n+1} (c_{\ell,i-1,j}^{s,n+1})^+ (\mathcal{F}_{\ell,i-1/2,j}^{n+1})^+ - \lambda_{i+1,j}^{n+1} (c_{\ell,i+1,j}^{s,n+1})^+ (\mathcal{F}_{\ell,i+1/2,j}^{n+1})^- \right\} \\ &+ \Delta x \sum_{\ell=1}^L \left\{ \lambda_{i,j-1}^{n+1} (c_{\ell,i,j-1}^{s,n+1})^+ (\mathcal{F}_{\ell,i,j-1/2}^{n+1})^+ - \lambda_{i,j+1}^{n+1} (c_{\ell,i,j+1}^{s,n+1})^+ (\mathcal{F}_{\ell,i,j+1/2}^{n+1})^- \right\}. \end{aligned} \quad (6.44)$$

Une première discrétisation de l'équation (6.17c) est donnée par la relation

$$\min \left( 1 - \lambda_{i,j}^{n+1}, E_{i,j} - \sum_{\ell=1}^L \left\{ \frac{(\lambda F_{\ell})_{i+1/2,j}^{n+1} - (\lambda F_{\ell})_{i-1/2,j}^{n+1}}{\Delta x} + \frac{(\lambda F_{\ell})_{i,j+1/2}^{n+1} - (\lambda F_{\ell})_{i,j-1/2}^{n+1}}{\Delta y} \right\} \right) = 0,$$

qui peut se reformuler sous la forme plus compacte

$$\min \left( 1 - \lambda_{i,j}^{n+1}, E_{i,j} - \lambda_{i,j}^{n+1} \frac{\langle F \rangle_{i,j}^{n+1}}{\Delta x \Delta y} + \frac{\rangle \lambda F \langle_{i,j}^{n+1}}{\Delta x \Delta y} \right) = 0.$$

Dans le cas où  $\langle F \rangle_{i,j}^{n+1} \neq 0$ , il reste alors à multiplier le second argument de la fonction min par  $\gamma = \Delta x \Delta y / \langle F \rangle_{i,j}^{n+1} > 0$ , puis à extraire le limiteur de flux pour obtenir la formule finale

$$\lambda_{i,j}^{n+1} = \min \left( 1, \frac{\Delta x \Delta y E_{i,j} + \rangle \lambda F \langle_{i,j}^{n+1}}{\langle F \rangle_{i,j}^{n+1}} \right). \quad (6.45)$$

Dans la situation particulière où  $\langle F \rangle_{i,j}^{n+1} = 0$ , il est possible de reprendre l'argument présenté au chapitre 3. On en déduit alors que ce cas de figure implique  $\lambda_{i,j}^{n+1} = 1$ .

### 6.3.5 Discrétisation de l'équation de fermeture

L'équation de fermeture (6.17d) est discrétisée de manière simple par la relation

$$\sum_{\ell=1}^L c_{i,j}^{s,n+1} = 1. \quad (6.46)$$

### 6.3.6 Conditions aux limites et données initiales

La prise en compte des conditions aux limites est en partie similaire à celle du modèle présenté au chapitre 5. C'est le cas en particulier des flux entrants d'eau pour lesquels des équations supplémentaires sont associées à chaque maille fictive (sauf aux coins) :

$$\Gamma_b : \quad \tilde{F}_{i,1/2}^{n+1} + \frac{1}{\Delta x \Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{(i-1)\Delta x}^{i\Delta x} \tilde{\phi}(x, 0, t) dx dt = 0, \quad (6.47a)$$

$$\Gamma_l : \quad \tilde{F}_{1/2,j}^{n+1} + \frac{1}{\Delta y \Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{(j-1)\Delta y}^{j\Delta y} \tilde{\phi}(0, y, t) dy dt = 0, \quad (6.47b)$$

$$\Gamma_t : \quad \tilde{F}_{i,N_y+1/2}^{n+1} - \frac{1}{\Delta x \Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{(i-1)\Delta x}^{i\Delta x} \tilde{\phi}(x, L_y, t) dx dt = 0, \quad (6.47c)$$

$$\Gamma_r : \quad \tilde{F}_{N_x+1/2,j}^{n+1} - \frac{1}{\Delta y \Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{(j-1)\Delta y}^{j\Delta y} \tilde{\phi}(L_x, y, t) dy dt = 0. \quad (6.47d)$$

Ensuite, au lieu d'intégrer une nouvelle équation pour un flux entrant de sédiments,  $L$  équations sont considérées afin de définir la quantité entrante de chaque lithologie. Ces dernières se traitent de manière analogue au cas précédent. Pour  $\ell = 1, \dots, L$ , ces relations sont ainsi données par

$$\Gamma_b : \quad F_{\ell,i,1/2}^{n+1} + \frac{1}{\Delta x \Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{(i-1)\Delta x}^{i\Delta x} \phi_\ell(x, 0, t) dx dt = 0, \quad (6.48a)$$

$$\Gamma_l : \quad F_{\ell,1/2,j}^{n+1} + \frac{1}{\Delta y \Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{(j-1)\Delta y}^{j\Delta y} \phi_\ell(0, y, t) dy dt = 0, \quad (6.48b)$$

$$\Gamma_t : \quad F_{\ell,i,N_y+1/2}^{n+1} - \frac{1}{\Delta x \Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{(i-1)\Delta x}^{i\Delta x} \phi_\ell(x, L_y, t) dx dt = 0, \quad (6.48c)$$

$$\Gamma_r : \quad F_{\ell,N_x+1/2,j}^{n+1} - \frac{1}{\Delta y \Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{(j-1)\Delta y}^{j\Delta y} \phi_\ell(L_x, y, t) dy dt = 0. \quad (6.48d)$$

Dans le but de compléter le système d'équations, il est nécessaire d'associer à ces mailles fictives l'équation de fermeture

$$\sum_{\ell=1}^L c_{i,j}^{s,n+1} = 1. \quad (6.49)$$

Le traitement des mailles fictives situées aux coins, quant à lui, s'effectue comme dans le chapitre 5, à savoir l'extrapolation de la hauteur d'eau des mailles voisines avec les formules

$$\mathcal{M}_{0,0} : \quad \tilde{h}_{0,0}^{n+1} + \tilde{h}_{1,1}^{n+1} - \tilde{h}_{1,0}^{n+1} - \tilde{h}_{0,1}^{n+1} = 0, \quad (6.50a)$$

$$\mathcal{M}_{N_x+1,0} : \quad \tilde{h}_{N_x+1,0}^{n+1} + \tilde{h}_{N_x,1}^{n+1} - \tilde{h}_{N_x+1,1}^{n+1} - \tilde{h}_{N_x,0}^{n+1} = 0, \quad (6.50b)$$

$$\mathcal{M}_{0,N_y+1} : \quad \tilde{h}_{0,N_y+1}^{n+1} + \tilde{h}_{1,N_y}^{n+1} - \tilde{h}_{1,N_y+1}^{n+1} - \tilde{h}_{0,N_y}^{n+1} = 0, \quad (6.50c)$$

$$\mathcal{M}_{N_x+1,N_y+1} : \quad \tilde{h}_{N_x+1,N_y+1}^{n+1} + \tilde{h}_{N_x,N_y}^{n+1} - \tilde{h}_{N_x,N_y+1}^{n+1} - \tilde{h}_{N_x+1,N_y}^{n+1} = 0, \quad (6.50d)$$

ainsi que l'extrapolation de la hauteur de sédiments via les expressions

$$\mathcal{M}_{0,0} : \quad h_{0,0}^{n+1} + h_{1,1}^{n+1} - h_{1,0}^{n+1} - h_{0,1}^{n+1} = 0, \quad (6.51a)$$

$$\mathcal{M}_{N_x+1,0} : \quad h_{N_x+1,0}^{n+1} + h_{N_x,1}^{n+1} - h_{N_x+1,1}^{n+1} - h_{N_x,0}^{n+1} = 0, \quad (6.51b)$$

$$\mathcal{M}_{0,N_y+1} : \quad h_{0,N_y+1}^{n+1} + h_{1,N_y}^{n+1} - h_{1,N_y+1}^{n+1} - h_{0,N_y}^{n+1} = 0, \quad (6.51c)$$

$$\mathcal{M}_{N_x+1,N_y+1} : \quad h_{N_x+1,N_y+1}^{n+1} + h_{N_x,N_y}^{n+1} - h_{N_x,N_y+1}^{n+1} - h_{N_x+1,N_y}^{n+1} = 0. \quad (6.51d)$$

**Remarque 6.2.** Du fait de la structure des équations du système, on pourra remarquer qu'il n'est pas nécessaire de définir de colonnes de sédiments au niveau des mailles fictives. En effet, les relations (6.47) et (6.48) ne font intervenir que les concentrations de surface. Par ailleurs, seules les hauteurs d'eau et de sédiments étant utilisées dans les mailles fictives aux coins, les concentrations de surface n'ont pas non plus besoin d'y être définies.

La prochaine étape consiste à définir les différentes quantités initiales au niveau discret. Pour commencer, les hauteurs d'eau et de sédiments discrètes sont définies à partir de moyennes des données initiales sur chaque maille par

$$\tilde{h}_{i,j}^0 = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{\mathcal{M}_{i,j}} \tilde{h}_0(x, y) \, dx \, dy, \quad (6.52a)$$

$$h_{i,j}^0 = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{\mathcal{M}_{i,j}} h_0(x, y) \, dx \, dy. \quad (6.52b)$$

Concernant les concentrations en lithologies dans les colonnes, l'initialisation est plus subtile. Pour chaque maille  $\mathcal{M}_{i,j}$ , on commence par repérer le minimum local de la donnée initiale  $h_0$ , que l'on note par  $\underline{h}_{0,i,j}$ , comme indiqué sur la figure 6.4. Pour une côte  $\zeta$  inférieure à cette valeur, la concentration en lithologie  $\ell$  de la maille  $\mathcal{M}_{i,j}$  est moyennée sur l'ensemble des valeurs prises par la donnée  $c_{\ell,0}(x, y, \zeta)$ . Dans la section restante de la colonne, les concentrations sont réparties de façon homogène à partir des valeurs prises par les données initiales entre  $\underline{h}_{0,i,j}$  et  $h_0(x, y)$ . En d'autres termes, les concentrations dans les colonnes pour  $\ell = 1, \dots, L$  sont définies par

$$c_{\ell,i,j}^0(\zeta) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{\mathcal{M}_{i,j}} c_{\ell,0}(x, y, \zeta) \, dx \, dy, & \zeta \in [h_*, \underline{h}_{0,i,j}], \\ \frac{1}{\Delta x \Delta y (h_{i,j}^0 - \underline{h}_{0,i,j})} \int_{\mathcal{M}_{i,j}} \int_{h_{i,j}^0}^{h_0(x,y)} c_{\ell,0}(x, y, \zeta) \, d\zeta \, dx \, dy, & \zeta \in ]\underline{h}_{0,i,j}, h_{i,j}^0]. \end{cases} \quad (6.53)$$

Ce choix de discrétisation sera utile pour montrer la conservation de la masse de chaque lithologie dans la proposition 6.9. Du point de vue pratique, il peut ensuite être nécessaire d'effectuer une moyenne supplémentaire dans la direction  $\zeta$ , pour chaque colonne, afin d'avoir un nombre de strates limité.

Une fois cette étape effectuée, l'initialisation des concentrations de surface s'effectue par la formule naturelle

$$c_{\ell,i,j}^{s,0} = c_{\ell,i,j}^0(h_{i,j}^0), \quad \ell = 1, \dots, L. \quad (6.54)$$



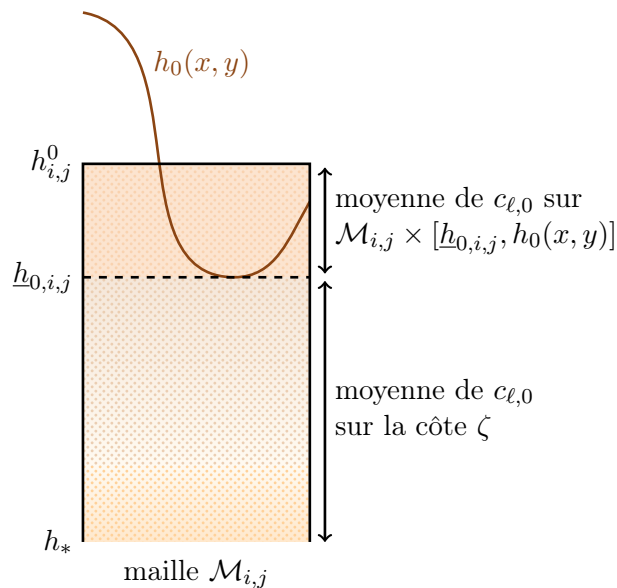


FIGURE 6.4 – Initialisation des concentrations dans les colonnes.

Afin de conclure l'initialisation du système, il reste à attribuer une valeur au limiteur de flux. Pour cela, connaissant la valeur des hauteurs d'eau et de sédiments ainsi que des concentrations de surface, la méthode présentée dans les chapitres précédents s'applique à nouveau. Dans un premier temps les mailles sont triées par ordre topographique décroissant. Puis la valeur de  $\lambda$  est calculée successivement dans cet ordre via la formule (6.45).

## 6.4 Assemblage et résolution du système

Le système à résoudre est composé des équations (6.29)–(6.31), (6.38)–(6.51), associées aux inconnues  $(\tilde{h}_{i,j}^{n+1}, h_{i,j}^{n+1}, \lambda_{i,j}^{n+1}, (c_{\ell,i,j}^{s,n+1})_{\ell=1,\dots,L})_{i,j}$ , dont le nombre total est de  $(L+3)N_x N_y + 2(L+2)(N_x + N_y) + 8$ . Un comparatif du nombre d'inconnues avec les modèles des chapitres 3 et 5 dans le cas où  $N_x = N_y$  est illustré sur la figure 6.5.

Le tableau 6.1, lui, présente un récapitulatif des équations ainsi que des inconnues associées lors de la résolution. Les concentrations au sein des colonnes ne sont pas des inconnues à proprement parler. En effet, connaissant les valeurs de la hauteur de sédiments  $h_{i,j}^{n+1}$  et des concentrations de surface  $(c_{\ell,i,j}^{s,n+1})_{\ell=1,\dots,L}$ , l'actualisation des colonnes s'effectue grâce aux relations (6.33). Cette procédure a donc lieu après avoir mené la résolution du système d'équations.

La résolution numérique s'effectue, comme précédemment, au moyen de la méthode de Newton-min (voir par exemple Ben Gharbia [14]). À chaque itération, un système linéaire est résolu via la méthode du BiCGStab associée à un préconditionneur de type ILU( $k$ ),  $k \geq 0$ . Pour davantage de précisions, on pourra à nouveau se référer aux travaux de Saad [63] et Van der Vorst [69]. L'assemblage de la Jacobienne est à nouveau assez délicate car de nombreuses configurations peuvent entraîner une singularité de la matrice. Il y a tout

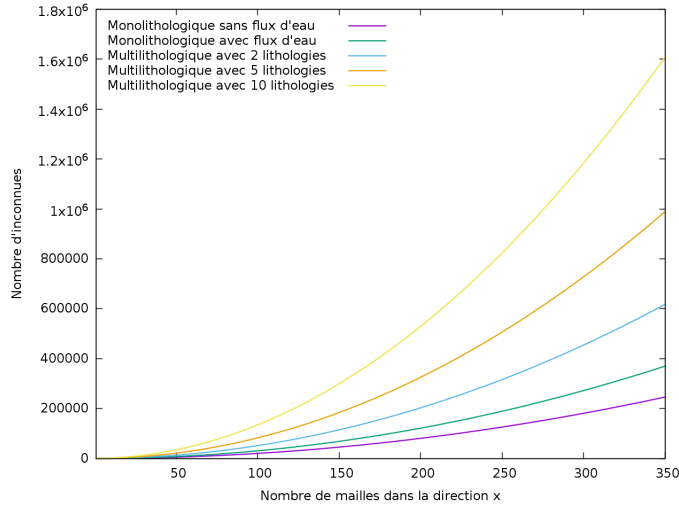


FIGURE 6.5 – Comparaison du nombre d’inconnues en fonction de la taille du maillage.

Localisation	Équation	Inconnue associée
Mailles internes	Équation de conservation sur $\tilde{h}$	$\tilde{h}$
	Équation de conservation de la litho. $\ell$	$c_\ell^s$
	Équation de complémentarité	$\lambda$
	Équation de fermeture	$h$
Mailles fictives (bords)	Flux d’eau imposé	$\tilde{h}$
	Flux de litho. $\ell$ imposé	$c_\ell^s$
	Équation de fermeture	$h$
Mailles fictives (coins)	Extrapolation de $\tilde{h}$	$\tilde{h}$
	Extrapolation de $h$	$h$

TABLE 6.1 – Liste des équations et des inconnues associées.

d’abord le cas des équations (6.47) et (6.48), pour lesquelles plusieurs situations peuvent poser problème : absence d’eau, topographie localement plate, ou encore concentrations de surface nulles (c’est-à-dire absence de certaines lithologies). Certains cas de singularité peuvent également surgir des mailles internes via les équations (6.38). Au cours des itérations de Newton, une situation non physique peut en effet survenir : une maille peut se trouver en érosion alors qu’elle n’admet que des flux entrants de lithologies aux arêtes. Par le choix de discrétisation, et en particulier le décentrage amont des concentrations de surface, les dérivées par rapport à ces quantités se trouvent alors être nulles. Plus précisément, sur l’ensemble de la Jacobienne, ces concentrations de surface interviennent dans ce cas uniquement dans une équation de fermeture. On voit alors que la matrice n’est pas inversible, non pas parce qu’une ligne est nulle, mais par le fait qu’elle admet plusieurs colonnes non linéairement indépendantes. Une autre configuration entraînant des difficultés est à nouveau liée aux équations (6.38). Il peut parfois arriver que chacune des dérivées asso-

ciées soient trop faibles et que la matrice soit alors presque singulière, comme par exemple dans le cas de faibles variations de topographie couplées à de faibles concentrations. Dans tous ces cas de figure, la matrice Jacobienne est modifiée en ajoutant la valeur 1 sur la diagonale correspondant aux lignes présentant des problèmes. De cette manière, on garanti l'inversion du système linéaire à chaque itération de Newton.

Abordons à présent la gestion du stockage des colonnes de sédiments. L'application directe de la méthode précédente conduit à une description des colonnes pouvant être très (voire trop) détaillée. L'exemple le plus explicite concerne les mailles étant en sédimentation tout au long d'une simulation. Dans ce cas de figure, à chaque pas de temps une nouvelle couche de sédiments est ajoutée aux colonnes concernées. On voit alors que plus le nombre de pas de temps est grand, plus le nombre de couches est important. Cela entraîne plusieurs inconvénients, le principal étant le temps non négligeable nécessaire à l'écriture de toutes les données dans les fichiers de sortie. Face à ce problème, une solution est d'imposer un nombre de couches maximal, identique pour chaque colonne. Une fois ce nombre atteint, il est alors nécessaire de fusionner certaines cellules en cas de nouvelle sédimentation. Ce processus est illustré sur la figure 6.6. Les concentrations dans la couche après fusion sont calculées par une moyenne pondérée au prorata des épaisseurs via la formule

$$c_{\ell,i,j}^{n+1}(\zeta) = \begin{cases} c_{\ell,i,j}^n, & \zeta \in [h_*, h_{i,j}^*[, \\ \frac{c_{\ell,i,j}^n (h_{i,j}^n - h_{i,j}^*) + c_{\ell,i,j}^{s,n+1} (h_{i,j}^{n+1} - h_{i,j}^n)}{h_{i,j}^{n+1} - h_{i,j}^*}, & \zeta \in [h_{i,j}^*, h_{i,j}^{n+1}]. \end{cases} \quad (6.55)$$

pour  $\ell = 1, \dots, L$ .

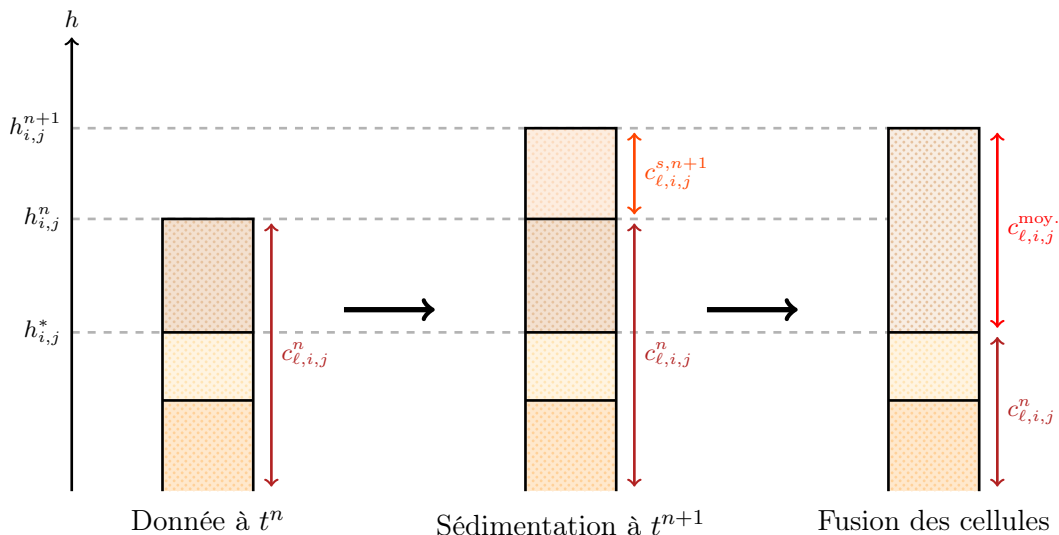


FIGURE 6.6 – Approximation des colonnes dans le cas d'un maximum de 3 strates.

Néanmoins, il est nécessaire d'apporter une précision supplémentaire afin d'obtenir des résultats acceptables. En effet : le mauvais cas de figure est de fixer le nombre maximal de couches  $\mathcal{N}$  constant tout au long de la simulation. Dans cette situation, une colonne uniquement en sédimentation sera composée de  $\mathcal{N} - 1$  strates correspondant aux  $\mathcal{N} - 1$

premiers pas de temps, puis d'une dernière couche qui sera la moyenne sur tout le reste de la simulation. Cette dernière est alors une approximation plutôt grossière, d'autant plus que le temps de simulation est long. Une solution face à ce phénomène est de définir un nombre de couches évoluant au fil de la simulation. Par exemple, après avoir divisé le temps de simulation  $T$  en  $\mathcal{N}_{\max}$  parties, le nombre de couches maximal à considérer est incrémenté de 1 à chaque nouvel intervalle de temps, en démarrant avec une couche. Autrement dit, le nombre de couches est défini par

$$\mathcal{N}(t) = n, \quad t \in \left[ \frac{(n-1)T}{\mathcal{N}_{\max}}, \frac{nT}{\mathcal{N}_{\max}} \right], \quad n \in \{1, \dots, \mathcal{N}_{\max}\}. \quad (6.56)$$

Cela permet d'obtenir une structure plus homogène des colonnes par rapport à la première configuration. Cette procédure est illustrée sur la figure 6.7.

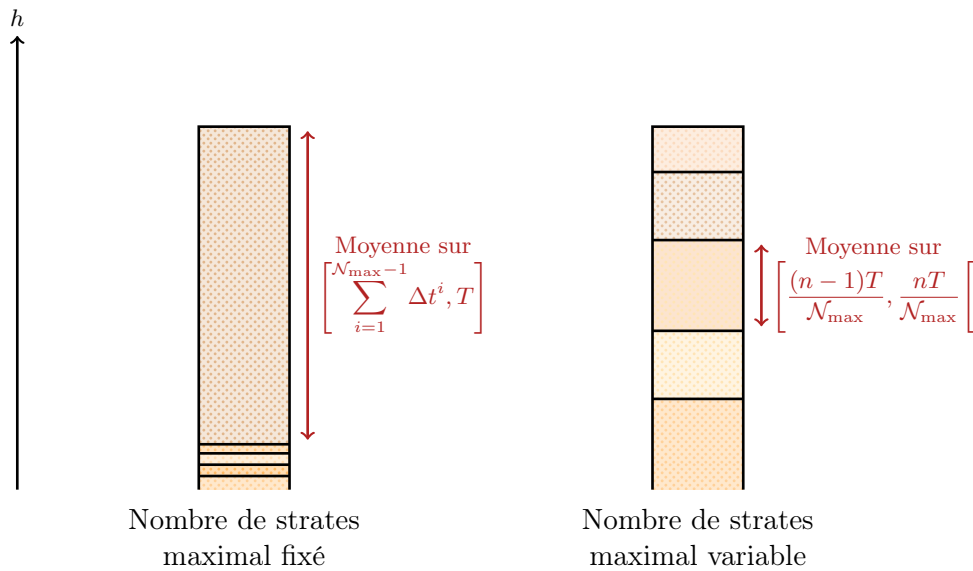


FIGURE 6.7 – Exemple de structures de colonnes dans le cas d'une maille en sédimentation avec un maximum de 5 strates au temps final.

## 6.5 Propriétés du schéma numérique

La discrétisation du modèle étant élaborée, intéressons-nous à présent aux propriétés satisfaites par le schéma numérique. Dans un premier temps, des estimations sur les différentes quantités sont prouvées. Ces dernières serviront ensuite à montrer l'existence d'au moins une solution grâce à un argument de degré topologique.

**Proposition 6.5** (Estimation sur le limiteur de flux). *Pour tout  $n \geq 0$ , le limiteur de flux discret vérifie l'estimation*

$$0 < \lambda_{i,j}^{n+1} \leq 1. \quad (6.57)$$

*Démonstration.* La preuve reprend l'idée de celles des propositions 3.4 et 5.5. Dans la formule (6.45), notons que  $\Delta x \Delta y E_{i,j} > 0$  et  $\langle F \rangle_{i,j}^{n+1} \geq 0$ . Il reste alors à montrer que  $\rangle \lambda F \langle_{i,j}^{n+1} \geq 0$ . Pour cela, supposons que les mailles soient triées par ordre topographique décroissant. Grâce au décentrage amont de  $\lambda$ , le terme  $\rangle \lambda F \langle_{i,j}^{n+1}$  ne fait intervenir que les limiteurs de flux calculés dans les mailles précédentes. Il s'ensuit que  $\rangle \lambda F \langle_{i,j}^{n+1} \geq 0$ , ce qui montre (6.57). Dans le cas particulier où  $\langle F \rangle_{i,j}^{n+1} = 0$ , on impose  $\lambda_{i,j}^{n+1} = 1$ .  $\square$

**Proposition 6.6** (Estimations sur les concentrations). *Pour tout  $n \geq 0$ , il existe des concentrations de surface vérifiant les estimations*

$$0 \leq c_{\ell,i,j}^{s,n+1} \leq 1, \quad \ell = 1, \dots, L. \quad (6.58)$$

*De plus, pour ce choix, les concentrations dans les colonnes vérifient*

$$0 \leq c_{\ell,i,j}^{n+1} \leq 1, \quad \ell = 1, \dots, L. \quad (6.59)$$

*Démonstration.* La démonstration s'effectue par récurrence sur  $n$ . Pour  $n = 0$ , la condition sur la donnée initiale (6.23c) et du choix de discrétisation (6.53)–(6.54) impliquent que  $c_{\ell,i,j}^0 \in [0, 1]$  et  $c_{\ell,i,j}^{s,0} \in [0, 1]$ , pour  $\ell = 1, \dots, L$ . Supposons maintenant les relations (6.58) et (6.59) vraies au temps  $t^n$ . Considérons alors le schéma numérique

$$\begin{aligned} c_{\ell,i,j}^{s,n+1} \frac{(h_{i,j}^{n+1} - h_{i,j}^n)^+}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta t} \left( \int_{h_{i,j}^n}^{h_{i,j}^{n+1}} c_{\ell,i,j}^n(\zeta) d\zeta \right)^- + \alpha (c_{\ell,i,j}^{n+1})^- \\ + \frac{(\lambda F_{\ell})_{i+1/2,j}^{n+1} - (\lambda F_{\ell})_{i-1/2,j}^{n+1}}{\Delta x} + \frac{(\lambda F_{\ell})_{i,j+1/2}^{n+1} - (\lambda F_{\ell})_{i,j-1/2}^{n+1}}{\Delta y} = 0, \end{aligned} \quad (6.60)$$

avec  $\alpha > 0$ , qui est une légère variante de la relation (6.38). L'idée est alors de prouver la positivité des concentrations de surface. Couplée à l'équation de fermeture (6.46), cela permettra d'obtenir l'estimation (6.58). Supposons donc par l'absurde que  $c_{\ell,i,j}^{s,n+1} < 0$ . La formule (6.60) implique alors

$$\begin{aligned} c_{\ell,i,j}^{s,n+1} \left\{ \alpha \Delta t + (h_{i,j}^{n+1} - h_{i,j}^n)^+ \right\} \\ = - \left( \int_{h_{i,j}^n}^{h_{i,j}^{n+1}} c_{\ell,i,j}^n(\zeta) d\zeta \right)^- \\ + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ \lambda_{i-1,j}^{n+1} (c_{\ell,i-1,j}^{s,n+1})^+ (\mathcal{F}_{\ell,i-1/2,j}^{n+1})^+ - \lambda_{i+1,j}^{n+1} (c_{\ell,i+1,j}^{s,n+1})^+ (\mathcal{F}_{\ell,i+1/2,j}^{n+1})^- \right\} \\ + \frac{\Delta t}{\Delta y} \left\{ \lambda_{i,j-1}^{n+1} (c_{\ell,i,j-1}^{s,n+1})^+ (\mathcal{F}_{\ell,i,j-1/2}^{n+1})^+ - \lambda_{i,j+1}^{n+1} (c_{\ell,i,j+1}^{s,n+1})^+ (\mathcal{F}_{\ell,i,j+1/2}^{n+1})^- \right\}. \end{aligned} \quad (6.61)$$

Par l'hypothèse de récurrence et l'estimation (6.57), il s'ensuit que le membre de droite de l'égalité (6.61) est positif ou nul. On en déduit alors que  $c_{\ell,i,j}^{s,n+1} \geq 0$ , ce qui conduit à une contradiction. En conséquence, le terme  $\alpha (c_{\ell,i,j}^{n+1})^-$  dans (6.60) est nul. En d'autres termes, si (6.38) admet des solutions  $c_{\ell,i,j}^{s,n+1}$ , alors au moins l'une d'elles est positive. Concernant les concentrations dans les colonnes, la méthode d'actualisation décrite par (6.33) et (6.55) permet d'assurer que ces quantités restent comprises entre 0 et 1.  $\square$

**Remarque 6.3.** Pour être plus précis, il serait possible de montrer que si l'équation (6.38) admet des solutions  $c_{\ell,i,j}^{s,n+1}$ , alors elles sont toutes positives dans les mailles non dégénérées. Les mailles dégénérées sont celles n'admettant que des flux de lithologies nuls aux arêtes, ce qui implique  $h_{i,j}^{n+1} = h_{i,j}^n$ . Dans ce cas particulier, les concentrations de surface peuvent être choisies arbitrairement, la seule condition à vérifier étant que leur somme soit égale à 1. La proposition 6.6 propose ainsi une solution pour que ces dernières soient néanmoins toujours comprises entre 0 et 1.

**Proposition 6.7** (Positivité de la hauteur d'eau). *Pour tout  $n \geq 0$ , la hauteur d'eau discrète est positive ou nulle :*

$$\tilde{h}_{i,j}^n \geq 0. \quad (6.62)$$

*Démonstration.* La preuve est identique à celle de la proposition 5.6.  $\square$

**Proposition 6.8** (Borne inférieure sur la hauteur de sédiments). *Pour tout  $n \geq 0$ , la hauteur de sédiments est bornée inférieurement :*

$$h_{i,j}^n \geq h_*. \quad (6.63)$$

*Démonstration.* La preuve se fait par récurrence. Pour  $n = 0$ , la relation se vérifie facilement en utilisant la discrétisation de la donnée initiale :

$$h_{i,j}^0 = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{\mathcal{M}_{i,j}} h_0(x, y) dx dy \geq \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{\mathcal{M}_{i,j}} h_* dx dy = h_*.$$

Supposons la relation (6.63) vraie au temps  $t^n$ , et posons  $h_{i^*,j^*}^{n+1} = \min_{i,j} h_{i,j}^{n+1}$ . Alors en utilisant le fait que la fonction  $\psi$  est strictement croissante ainsi que les propositions 6.5 et 6.6, nous avons

$$\frac{\psi_\ell(h_{i^*,j^*}^{n+1}) - \psi_\ell(h_{i^*,j^*}^n)}{\Delta x} \geq 0 \quad \text{et} \quad \frac{\psi_{g,\ell}(h_{i^*,j^*}^{n+1}) - \psi_{g,\ell}(h_{i^*,j^*}^n)}{\Delta x} \geq 0.$$

Par une analyse similaire et en utilisant les estimations sur les concentrations et le limiteur de flux, nous avons la relation

$$\sum_{\ell=1}^L \left( \frac{(\lambda F_\ell)_{i+1/2,j}^{n+1} - (\lambda F_\ell)_{i-1/2,j}^{n+1}}{\Delta x} + \frac{(\lambda F_\ell)_{i,j+1/2}^{n+1} - (\lambda F_\ell)_{i,j-1/2}^{n+1}}{\Delta y} \right) \leq 0.$$

En utilisant la définition du schéma numérique, nous en déduisons alors

$$h_{i,j}^{n+1} \geq h_{i^*,j^*}^{n+1} \geq h_{i^*,j^*}^n \geq h_*,$$

ce qui conclut la preuve.  $\square$

**Proposition 6.9** (Conservation de la masse). *La variation des masses d'eau et de lithologie  $\ell = 1, \dots, L$  est liée aux conditions aux limites. Plus précisément, pour tout  $n \geq 0$ , on a :*

$$\Delta x \Delta y \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \tilde{h}_{i,j}^n = \int_{\Omega} \tilde{h}_0(x, y) dx dy - \int_0^{t^n} \int_{\partial\Omega} \tilde{\phi}(x, y, t) d\sigma dt := M_h^n, \quad (6.64a)$$

$$\Delta x \Delta y \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \tilde{\mathfrak{F}}_{\ell,i,j}^n = \int_{\Omega} \tilde{\mathfrak{F}}_\ell(x, y, 0) dx dy - \int_0^{t^n} \int_{\partial\Omega} \phi_\ell(x, y, t) d\sigma dt := M_\ell^n. \quad (6.64b)$$

De plus, la variation de masse totale de sédiments vérifie

$$\Delta x \Delta y \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} h_{i,j}^n = \int_{\Omega} h_0(x, y) \, dx \, dy - \sum_{\ell=1}^L \int_0^{t^n} \int_{\partial\Omega} \phi_{\ell}(x, y, t) \, d\sigma \, dt := M_h^n, \quad (6.64c)$$

et les bornes supérieures sur les hauteurs d'eau et de sédiments ainsi que sur les fractions en lithologie  $\ell = 1, \dots, L$  sont données par

$$\tilde{h}_{i,j}^n \leq \frac{M_h^n}{\Delta x \Delta y}, \quad (6.65a)$$

$$\mathfrak{F}_{\ell,i,j}^n \leq \frac{M_{\ell}^n}{\Delta x \Delta y}, \quad (6.65b)$$

$$h_{i,j}^n \leq \frac{M_h^n}{\Delta x \Delta y} - (N_x N_y - 1) h_*. \quad (6.65c)$$

*Démonstration.* La preuve concernant la conservation de la masse d'eau se fait par récurrence, qui est similaire à celle de la proposition 5.8. Pour la relation sur les lithologies, on emploie la même méthode. Pour  $n = 0$ , en s'appuyant sur la définition (6.34) ainsi que sur le choix de discrétisation des concentrations (6.53), les premiers calculs mènent à

$$\begin{aligned} \Delta x \Delta y \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \mathfrak{F}_{\ell,i,j}^0 &= \Delta x \Delta y \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \int_{h_*}^{h_{i,j}^0} c_{\ell,i,j}^0(\zeta) \, d\zeta \\ &= \Delta x \Delta y \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \left\{ \int_{h_*}^{h_{0,i,j}} \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{\mathcal{M}_{i,j}} c_{\ell,0}(x, y, \zeta) \, dx \, dy \, d\zeta \right. \\ &\quad \left. + \int_{\underline{h}_{0,i,j}}^{h_{i,j}^0} \frac{1}{\Delta x \Delta y (h_{i,j}^0 - \underline{h}_{0,i,j})} \int_{\mathcal{M}_{i,j}} \int_{\underline{h}_{0,i,j}}^{h_0(x,y)} c_{\ell,0}(x, y, s) \, ds \, dx \, dy \, d\zeta \right\}. \end{aligned}$$

Après simplifications, puis en utilisant la définition de la fraction de lithologie au niveau continu (6.4), on arrive à

$$\begin{aligned} \Delta x \Delta y \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \mathfrak{F}_{\ell,i,j}^0 &= \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \int_{h_*}^{h_{0,i,j}} \int_{\mathcal{M}_{i,j}} c_{\ell,0}(x, y, \zeta) \, dx \, dy \, d\zeta \\ &\quad + \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \int_{\mathcal{M}_{i,j}} \int_{\underline{h}_{0,i,j}}^{h_0(x,y)} c_{\ell,0}(x, y, \zeta) \, d\zeta \, dx \, dy \\ &= \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \int_{\mathcal{M}_{i,j}} \int_{h_*}^{h_0(x,y)} c_{\ell,0}(x, y, \zeta) \, d\zeta \, dx \, dy \\ &= \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \int_{\mathcal{M}_{i,j}} \mathfrak{F}_{\ell}(x, y, 0) \, dx \, dy \\ &= \int_{\Omega} \mathfrak{F}_{\ell}(x, y, 0) \, dx \, dy. \end{aligned}$$

Supposons à présent la relation (6.64b) vraie au temps  $t^n$ , et montrons qu'elle est satisfaite au temps  $t^{n+1}$ . Considérons alors la discrétisation de l'équation de la lithologie  $\ell$  (6.38), dans lequel le terme d'accumulation est reformulé à l'aide de (6.34). En multipliant ce schéma par  $\Delta x \Delta y \Delta t$  et en sommant, on obtient

$$\Delta x \Delta y \Delta t \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \left( \frac{\mathfrak{F}_{\ell,i,j}^{n+1} - \mathfrak{F}_{\ell,i,j}^n}{\Delta t} + \frac{(\lambda F_\ell)_{i+1/2,j}^{n+1} - (\lambda F_\ell)_{i-1/2,j}^{n+1}}{\Delta x} + \frac{(\lambda F_\ell)_{i,j+1/2}^{n+1} - (\lambda F_\ell)_{i,j-1/2}^{n+1}}{\Delta y} \right) = 0.$$

Par la conservativité du schéma et la définition des flux de lithologies aux bords (6.48), la relation précédente se simplifie par

$$\Delta x \Delta y \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \mathfrak{F}_{\ell,i,j}^{n+1} = \Delta x \Delta y \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \mathfrak{F}_{\ell,i,j}^n - \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\partial\Omega} \phi_\ell(x, y, t) \, d\sigma \, dt.$$

Il reste alors à utiliser l'hypothèse de récurrence pour conclure :

$$\Delta x \Delta y \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \mathfrak{F}_{\ell,i,j}^{n+1} = \int_{\Omega} \mathfrak{F}_\ell(x, y, 0) \, dx \, dy - \int_0^{t^{n+1}} \int_{\partial\Omega} \phi_\ell(x, y, t) \, d\sigma \, dt.$$

Enfin, pour obtenir la relation sur la masse totale de sédiments, il suffit de sommer les équations (6.64b) sur  $\ell = 1, \dots, L$ .  $\square$

**Proposition 6.10** (Estimation d'énergie discrète). *Soit  $N > 0$ . Le schéma numérique vérifie l'estimation d'énergie discrète*

$$\frac{\Delta x \Delta y}{2} \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} (h_{i,j}^N)^2 \leq \frac{\Delta x \Delta y}{2} \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} (h_{i,j}^0)^2 - \mathfrak{D} - \mathfrak{B}, \quad (6.66)$$

où  $\mathfrak{D} \geq 0$  est un terme de dissipation et où  $\mathfrak{B} \leq 0$  est un terme lié aux conditions aux limites. Dans le cas particulier où les flux de lithologies aux bords du domaine sont nuls,  $\mathfrak{B} = 0$  et l'énergie discrète décroît au cours du temps.

*Démonstration.* La première étape consiste à sommer les équations de conservation des lithologies discrètes (6.38) afin d'obtenir

$$\frac{h_{i,j}^{n+1} - h_{i,j}^n}{\Delta t} + \sum_{\ell=1}^L \left\{ \frac{(\lambda F_\ell)_{i+1/2,j}^{n+1} - (\lambda F_\ell)_{i-1/2,j}^{n+1}}{\Delta x} + \frac{(\lambda F_\ell)_{i,j+1/2}^{n+1} - (\lambda F_\ell)_{i,j-1/2}^{n+1}}{\Delta y} \right\} = 0.$$

Ensuite, on multiplie l'équation précédente par  $\Delta x \Delta y \Delta t h_{i,j}^{n+1}$ , puis on somme sur  $i, j$  et



$n$  :

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \sum_{n=0}^{N-1} \Delta x \Delta y h_{i,j}^{n+1} (h_{i,j}^{n+1} - h_{i,j}^n) \\
 & + \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{\ell=1}^L \Delta y \Delta t h_{i,j}^{n+1} \left[ (\lambda F_\ell)_{i+1/2,j}^{n+1} - (\lambda F_\ell)_{i-1/2,j}^{n+1} \right] \\
 & + \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{\ell=1}^L \Delta x \Delta t h_{i,j}^{n+1} \left[ (\lambda F_\ell)_{i,j+1/2}^{n+1} - (\lambda F_\ell)_{i,j-1/2}^{n+1} \right] = 0,
 \end{aligned}$$

noté symboliquement par  $A + B + C = 0$ . Pour le terme  $A$  correspondant à la dérivée temporelle discrète, on utilise l'inégalité de convexité

$$\sum_{n=0}^{N-1} h_{i,j}^{n+1} (h_{i,j}^{n+1} - h_{i,j}^n) \geq \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{2} \left[ (h_{i,j}^{n+1})^2 - (h_{i,j}^n)^2 \right] = \frac{1}{2} \left[ (h_{i,j}^N)^2 - (h_{i,j}^0)^2 \right].$$

Concernant les parties  $B$  et  $C$ , l'idée est de réarranger les sommes en  $i$  et  $j$ , ce qui revient à effectuer des intégrations par parties discrètes. On montre alors que

$$B + C = \mathfrak{D} + \mathfrak{B},$$

avec

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{D} &= \sum_{i=1}^{N_x-1} \sum_{j=1}^{N_y} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{\ell=1}^L \Delta y \Delta t (h_{i,j}^{n+1} - h_{i+1,j}^{n+1}) \\
 & \quad \times \left[ \lambda_{i,j}^{n+1} (c_{\ell,i,j}^{s,n+1})^+ (\mathcal{F}_{\ell,i+1/2,j}^{n+1})^+ + \lambda_{i+1,j}^{n+1} (c_{\ell,i+1,j}^{s,n+1})^+ (\mathcal{F}_{\ell,i+1/2,j}^{n+1})^- \right] \\
 & + \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y-1} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{\ell=1}^L \Delta x \Delta t (h_{i,j}^{n+1} - h_{i,j+1}^{n+1}) \\
 & \quad \times \left[ \lambda_{i,j}^{n+1} (c_{\ell,i,j}^{s,n+1})^+ (\mathcal{F}_{\ell,i,j+1/2}^{n+1})^+ + \lambda_{i,j+1}^{n+1} (c_{\ell,i,j+1}^{s,n+1})^+ (\mathcal{F}_{\ell,i,j+1/2}^{n+1})^- \right],
 \end{aligned}$$

ainsi que

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{B} &= \sum_{j=1}^{N_y} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{\ell=1}^L \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{(j-1)\Delta y}^{j\Delta y} h_{1,j}^{n+1} \phi_\ell(0, y, t) + h_{N_x,j}^{n+1} \phi_\ell(L_x, y, t) dy dt \\
 & + \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{\ell=1}^L \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{(i-1)\Delta x}^{i\Delta x} h_{i,1}^{n+1} \phi_\ell(x, 0, t) + h_{i,N_y}^{n+1} \phi_\ell(x, L_y, t) dx dt.
 \end{aligned}$$

Il reste alors à utiliser la discrétisation du flux (6.40), ainsi que le fait que les fonction  $\psi$  et  $\psi_g$  sont strictement croissantes. Cela permet de déterminer que  $(h_{i,j}^{n+1} - h_{i+1,j}^{n+1}) \mathcal{F}_{\ell,i+1/2,j}^{n+1} \geq 0$  et que  $(h_{i,j}^{n+1} - h_{i,j+1}^{n+1}) \mathcal{F}_{\ell,i,j+1/2}^{n+1} \geq 0$ . Avec la proposition 6.5, on conclut que  $\mathfrak{D} \geq 0$ . D'autre part, les fonctions  $(\phi_\ell)_{\ell=1,\dots,L}$  étant négatives ou nulles par hypothèse, et sachant que la hauteur de sédiments discrète est positive par la proposition 6.8, on a de plus que  $\mathfrak{B} \leq 0$ .  $\square$

Avec les estimations précédentes, il est possible de montrer l'existence d'une solution au schéma numérique. C'est ce que dit le résultat suivant.

**Théorème 6.1** (Existence d'une solution). *Soit  $(\tilde{h}_{i,j}^n)_{i,j}$  vérifiant (6.64a) et (6.62),  $(h_{i,j}^n)_{i,j}$  vérifiant (6.64c) et (6.63), ainsi que  $(c_{\ell,i,j}^n)_{i,j}$  vérifiant (6.59) pour  $\ell = 1, \dots, L$ . Alors pour tout  $\Delta t > 0$ , il existe au moins une solution  $(\tilde{h}_{i,j}^{n+1}, h_{i,j}^{n+1}, \lambda_{i,j}^{n+1}, (c_{\ell,i,j}^{s,\mu,n+1})_{\ell=1,\dots,L})_{i,j}$  au système non-linéaire (6.29)–(6.31), (6.38)–(6.51) et vérifiant (6.57), (6.64), (6.62), (6.63), (6.59) et (6.58).*

*Démonstration.* La démonstration utilise une version alternative du modèle complet (6.29)–(6.31), (6.38)–(6.51). Le modèle utilisé dans cette preuve se contente des équations (6.29)–(6.31), (6.38)–(6.46), dans lesquelles les flux aux bords du domaine sont remplacés par leur expression exacte faisant intervenir les fonctions  $\tilde{\phi}$  et  $(\phi_\ell)_{\ell=1,\dots,L}$ . Le calcul de la valeur des inconnues aux mailles fictives (qui n'est pas le point d'intérêt ici) peut alors s'effectuer a posteriori, après avoir résolu le système restreint aux mailles internes. L'intérêt de cette manœuvre est de se concentrer sur les inconnues des mailles internes, et de ne pas avoir à calculer d'estimations pour les inconnues des mailles fictives.

La démarche employée dans la preuve est basée sur un argument de degré topologique (voir l'annexe D ainsi que les références [25, 32, 56] pour des précisions sur le sujet). Soit  $\mu \in [0, 1]$  et soit  $(\tilde{h}_{i,j}^{\mu,n+1}, h_{i,j}^{\mu,n+1}, \lambda_{i,j}^{\mu,n+1}, (c_{\ell,i,j}^{s,\mu,n+1})_{\ell=1,\dots,L})_{i,j}$  la solution du schéma numérique

$$\frac{\tilde{h}_{i,j}^{\mu,n+1} - \tilde{h}_{i,j}^n}{\Delta t} + \mu \left( \frac{\tilde{F}_{i+1/2,j}^{\mu,n+1} - \tilde{F}_{i-1/2,j}^{\mu,n+1}}{\Delta x} + \frac{\tilde{F}_{i,j+1/2}^{\mu,n+1} - \tilde{F}_{i,j-1/2}^{\mu,n+1}}{\Delta y} \right) = 0, \quad (6.67a)$$

$$\begin{aligned} c_{\ell,i,j}^{s,\mu,n+1} \frac{(h_{i,j}^{\mu,n+1} - h_{i,j}^n)^+}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta t} \left( \int_{h_{i,j}^n}^{h_{i,j}^{\mu,n+1}} c_{\ell,i,j}^n(\zeta) d\zeta \right)^- \\ + \mu \left( \frac{(\lambda F_\ell)_{i+1/2,j}^{\mu,n+1} - (\lambda F_\ell)_{i-1/2,j}^{\mu,n+1}}{\Delta x} + \frac{(\lambda F_\ell)_{i,j+1/2}^{\mu,n+1} - (\lambda F_\ell)_{i,j-1/2}^{\mu,n+1}}{\Delta y} \right) \\ + (1 - \mu) \left( c_{\ell,i,j}^{s,\mu,n+1} - c_{\ell,i,j}^n(h_{i,j}^n) \right) + \mu \alpha (c_{\ell,i,j}^{s,\mu,n+1})^- = 0, \end{aligned} \quad (6.67b)$$

$$\lambda_{i,j}^{\mu,n+1} + \mu - 1 - \mu \min \left( 1, \frac{\Delta x \Delta y E_{i,j} + \lambda F_{i,j}^{\mu,n+1}}{\langle F \rangle_{i,j}^{\mu,n+1}} \right) = 0, \quad (6.67c)$$

$$1 - \sum_{\ell=1}^L c_{\ell,i,j}^{s,\mu,n+1} = 0. \quad (6.67d)$$

Dans un premier temps, remarquons que la configuration dans laquelle  $\mu = 1$  correspond au schéma numérique (6.29)–(6.45). Inversement, dans le cas où  $\mu = 0$  le schéma se réduit à

$$\tilde{h}_{i,j}^{\mu,n+1} = \tilde{h}_{i,j}^n, \quad (6.68a)$$

$$h_{i,j}^{\mu,n+1} = h_{i,j}^n, \quad (6.68b)$$

$$\lambda_{i,j}^{\mu,n+1} = 1, \quad (6.68c)$$

$$c_{\ell,i,j}^{s,\mu,n+1} = c_{\ell,i,j}^n(h_{i,j}^n). \quad (6.68d)$$

Afin d'obtenir les relations (6.68b) et (6.68d), il suffit de sommer les équations (6.67b) et de déduire le résultat grâce à (6.59) et (6.67d). Dans ce cas particulier, le degré topologique est égal à 1. Il reste maintenant à montrer que pour tout  $\mu \in [0, 1]$ , toutes les variables du problème restent bornées, et indépendamment de  $\mu$ . Pour cela nous allons adapter les diverses estimations obtenues pour  $\mu = 1$ . Tout d'abord, concernant le limiteur de flux, la preuve de la proposition 6.5 s'adapte sans difficulté et conduit à

$$0 \leq 1 - \mu < \lambda_{i,j}^{\mu,n+1} \leq 1, \quad \forall \mu \in [0, 1]. \quad (6.69)$$

Regardons à présent les concentrations de surface. Pour ce cas de figure, on adapte la preuve de la proposition 6.6. Supposons par l'absurde que  $c_{\ell,i,j}^{s,\mu,n+1} < 0$  dans (6.67b). Il vient alors

$$\begin{aligned} & c_{\ell,i,j}^{s,\mu,n+1} \left\{ \Delta t (1 - \mu + \mu \alpha) + (h_{i,j}^{\mu,n+1} - h_{i,j}^n)^+ \right\} \\ &= - \left( \int_{h_{i,j}^n}^{h_{i,j}^{\mu,n+1}} c_{\ell,i,j}^n(\zeta) d\zeta \right)^- + (1 - \mu) c_{\ell,i,j}^n(h_{i,j}^n) \\ &+ \mu \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ \lambda_{i-1,j}^{\mu,n+1} (c_{\ell,i-1,j}^{s,\mu,n+1})^+ (\mathcal{F}_{\ell,i-1/2,j}^{\mu,n+1})^+ - \lambda_{i+1,j}^{\mu,n+1} (c_{\ell,i+1,j}^{s,\mu,n+1})^+ (\mathcal{F}_{\ell,i+1/2,j}^{\mu,n+1})^- \right\} \\ &+ \mu \frac{\Delta t}{\Delta y} \left\{ \lambda_{i,j-1}^{\mu,n+1} (c_{\ell,i,j-1}^{s,\mu,n+1})^+ (\mathcal{F}_{\ell,i,j-1/2}^{\mu,n+1})^+ - \lambda_{i,j+1}^{\mu,n+1} (c_{\ell,i,j+1}^{s,\mu,n+1})^+ (\mathcal{F}_{\ell,i,j+1/2}^{\mu,n+1})^- \right\}. \end{aligned}$$

Après une rapide étude de signe, on peut voir qu'en réalité  $c_{\ell,i,j}^{s,\mu,n+1} \geq 0$ , ce qui conduit à une contradiction. En particulier, cela implique que  $\mu \alpha (c_{\ell,i,j}^{s,\mu,n+1})^- = 0$ . Couplé avec l'équation de fermeture (6.67d), on en déduit que

$$0 \leq c_{\ell,i,j}^{s,\mu,n+1} \leq 1, \quad \ell = 1, \dots, L, \quad \forall \mu \in [0, 1]. \quad (6.70)$$

Enfin, en ce qui concerne les hauteurs d'eau et de sédiments, il suffit d'adapter la preuve de la proposition 6.9. On notera seulement que sommer les équations (6.67b) conduit à la relation

$$\frac{h_{i,j}^{\mu,n+1} - h_{i,j}^{\mu,n}}{\Delta t} + \mu \sum_{\ell=1}^L \left( \frac{(\lambda F_{\ell})_{i+1/2,j}^{\mu,n+1} - (\lambda F_{\ell})_{i-1/2,j}^{\mu,n+1}}{\Delta x} + \frac{(\lambda F_{\ell})_{i,j+1/2}^{\mu,n+1} - (\lambda F_{\ell})_{i,j-1/2}^{\mu,n+1}}{\Delta y} \right) = 0,$$

étant donné que

$$\sum_{\ell=1}^L (1 - \mu) \left( c_{\ell,i,j}^{s,\mu,n+1} - c_{\ell,i,j}^n(h_{i,j}^n) \right) = 0$$

par l'hypothèse (6.59) et l'équation de fermeture (6.67d). Cela permet d'en déduire les estimations

$$0 \leq \tilde{h}_{i,j}^{\mu,n+1} \leq \frac{M_{\tilde{h}}^{n+1}}{\Delta x \Delta y}, \quad \forall \mu \in [0, 1], \quad (6.71a)$$

$$h_* \leq h_{i,j}^{\mu,n+1} \leq \frac{M_h^{n+1}}{\Delta x \Delta y}, \quad \forall \mu \in [0, 1], \quad (6.71b)$$

où les masses totales d'eau et de sédiments sont définies par

$$M_{\tilde{h}}^{n+1} = \int_{\Omega} \tilde{h}_0(x, y) \, dx \, dy - \int_0^{t^{n+1}} \int_{\partial\Omega} \tilde{\phi}(x, y, t) \, d\sigma \, dt,$$

$$M_h^{n+1} = \int_{\Omega} h_0(x, y) \, dx \, dy - \int_0^{t^{n+1}} \int_{\partial\Omega} \phi(x, y, t) \, d\sigma \, dt.$$

Pour terminer, les arguments qui précèdent ainsi que la méthode d'actualisation des colonnes (6.33) et (6.55) permettent d'assurer que les concentrations dans les colonnes au temps  $t^{n+1}$ , c'est-à-dire  $(c_{\ell, i, j}^{\mu, n+1})_{\ell=1, \dots, L}$ , sont bien comprises entre 0 et 1.

En conclusion, la solution  $(\tilde{h}_{i, j}^{\mu, n+1}, h_{i, j}^{\mu, n+1}, \lambda_{i, j}^{\mu, n+1}, (c_{\ell, i, j}^{s, \mu, n+1})_{\ell=1, \dots, L})_{i, j}$  appartient au compact  $[-\varepsilon, M_{\tilde{h}}^{n+1}/(\Delta x \Delta y) + \varepsilon]^{N_x \times N_y} \times [h_* - \varepsilon, M_h^{n+1}/(\Delta x \Delta y) + \varepsilon]^{N_x \times N_y} \times [-\varepsilon, 1 + \varepsilon]^{(L+1) \times N_x \times N_y}$ . Ainsi, le degré topologique reste égal à 1 pour tout  $\mu \in [0, 1]$ , c'est-à-dire qu'il existe au moins une solution au schéma numérique.  $\square$

## 6.6 Résultats numériques

Dans cette section sont présentés différents cas tests permettant d'illustrer le modèle multilithologique étudié dans ce chapitre. Nous commencerons par une analyse de l'influence que peut avoir l'eustasie sur la structure des strates. Ensuite nous effectuerons une simulation dans une situation plus générale, mettant en jeu l'ensemble des différents processus étudiés jusqu'à présent.

### 6.6.1 Influence de la bathymétrie

Cette première configuration a pour but de représenter l'influence de l'eustasie (variations du niveau de la mer) sur le dépôt des sédiments. Pour cela, on considère un domaine de taille  $50 \text{ km} \times 75 \text{ km}$ . Les flux d'eau ne sont pas pris en compte dans cette situation. Les sédiments sont composés d'un mélange de trois lithologies, dont les coefficients de diffusion gravitaire sont donnés dans le tableau 6.2.

Lithologie	$K_{g,m}$ (km <sup>2</sup> /Ma)	$K_{g,c}$ (km <sup>2</sup> /Ma)
1	2	20
2	4	40
3	8	80

TABLE 6.2 – Valeur des coefficients de diffusion gravitaire.

Une contrainte sur le taux d'érosion est pris en compte à travers le taux d'érosion maximal  $E = 0.001 \text{ km/Ma}$ . Le point d'intérêt est porté sur le niveau de la mer, variable au cours du temps, comme représenté sur la figure 6.8. Son évolution est composée de plusieurs cycles :

- un cycle long de 30 Ma à 130 Ma,
- un cycle court de 145 Ma à 161 Ma,
- un cycle « mixte » de 203 Ma à 309 Ma.

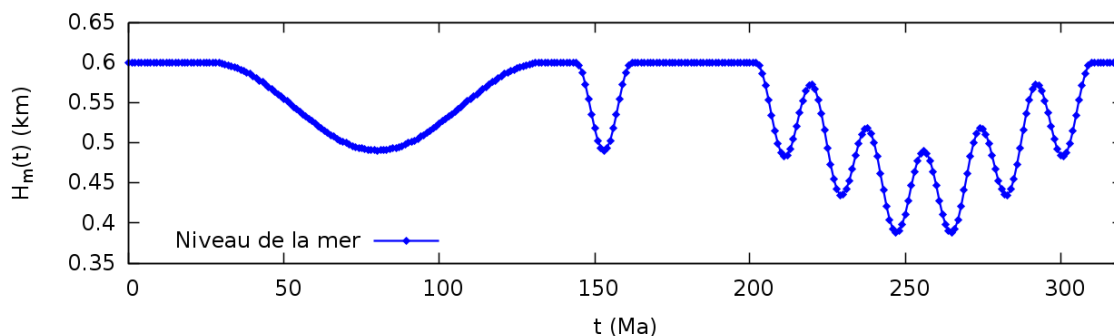


FIGURE 6.8 – Évolution du niveau de la mer.

Des flux entrants de lithologies sont également pris en compte, lesquels vérifient

$$\begin{aligned} - \int_0^T \int_0^{L_x} \phi_1(x, 0, t) dx dt &= 0.176T \text{ km}^3, \\ - \int_0^T \int_0^{L_x} \phi_2(x, 0, t) dx dt &= 0.88T \text{ km}^3, \\ - \int_0^T \int_0^{L_x} \phi_3(x, 0, t) dx dt &= 0.44T \text{ km}^3. \end{aligned}$$

Concernant les paramètres numériques, le domaine est discrétisé sur  $100 \times 150$  mailles, et l'évolution du système est simulée sur 320 Ma. L'exposant du  $p$ -Laplacien est choisi égal à  $p = 2.5$ . Les colonnes de sédiments sont quant à elles composées d'un maximum de 100 couches. La résolution du système est basée sur la méthode de Newton, avec un critère d'arrêt sur la norme  $L^\infty$  du résidu des équations. Ce dernier est égal à  $10^{-9}$  km pour les équations des lithologies et de  $10^{-5}$  pour les équations de complémentarité et de fermeture. Les systèmes linéaires à résoudre à chaque itération de Newton-min sont résolus par la méthode du BiCGStab associé au préconditionneur ILU(2), à l'aide de la bibliothèque PETSc. Enfin, concernant la gestion du pas de temps, celui-ci évolue de manière dynamique. La simulation commence avec  $\Delta t^0 = 10^{-4}$  Ma. Ensuite, si le pas de temps

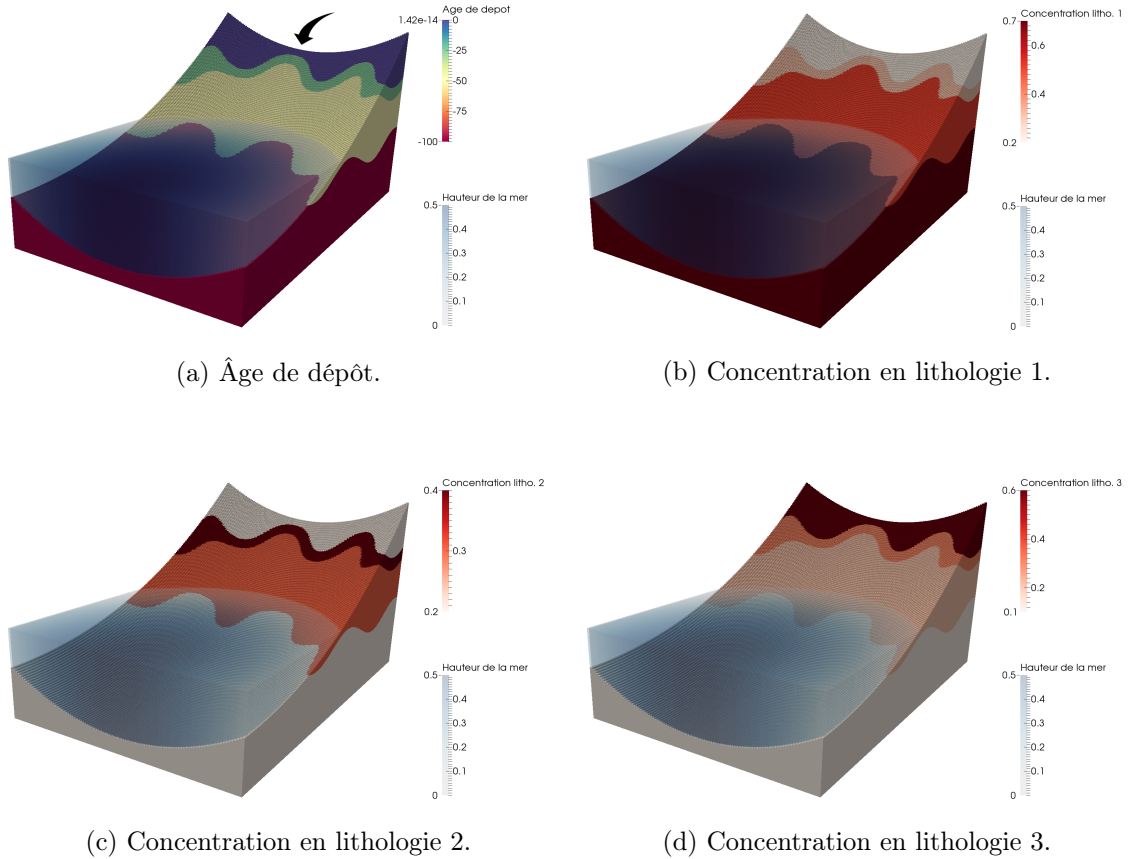


FIGURE 6.9 – Âge de dépôt et concentrations en lithologies au temps  $T = 0$  Ma.

courant est accepté, le pas de temps suivant est choisi égal à  $\Delta t^{n+1} = 1.1\Delta t^n$ , jusqu'à la valeur limite de  $\Delta t_{\max} = 0.02$  Ma. Inversement, si le pas de temps est refusé (c'est-à-dire si la méthode Newton n'a pas réussi à converger), l'itération en temps est recommencée avec la nouvelle valeur  $\Delta t^n = 0.5\Delta t^n$ .

L'état initial du système est représenté sur la figure 6.9. En particulier, on observe que différentes strates sont déjà présentes, avec des concentrations en lithologies variables. En figure 6.10 est illustré l'état final après les variations du niveau de la mer. Au bout de 320 Ma, on observe que la diffusion gravitaire a globalement lissé la topographie, mis à part dans l'extrémité supérieure du domaine où la contrainte sur le taux d'érosion est encore présente. Par ailleurs, on peut distinguer quelques structures géologiques à l'aide de la variation des différentes concentrations.

Afin de mieux les observer, une coupe en  $x = 25$  km est effectuée et illustrée sur les figures 6.11 et 6.12. Dans un premier temps, on peut voir que la lithologie 3, pour laquelle les coefficients de diffusion sont les plus forts, se retrouve principalement au fond du bassin. Inversement, les deux autres lithologies se déplaçant à vitesse moindre, elles se partagent l'espace restant. Ensuite, les structures de dépôts apparaissant sur les concentrations en lithologies peuvent être reliés aux sédiments déposés lors des différents cycles d'eustasie, comme indiqué en figure 6.12. On peut alors distinguer les marques laissées lors du cycle

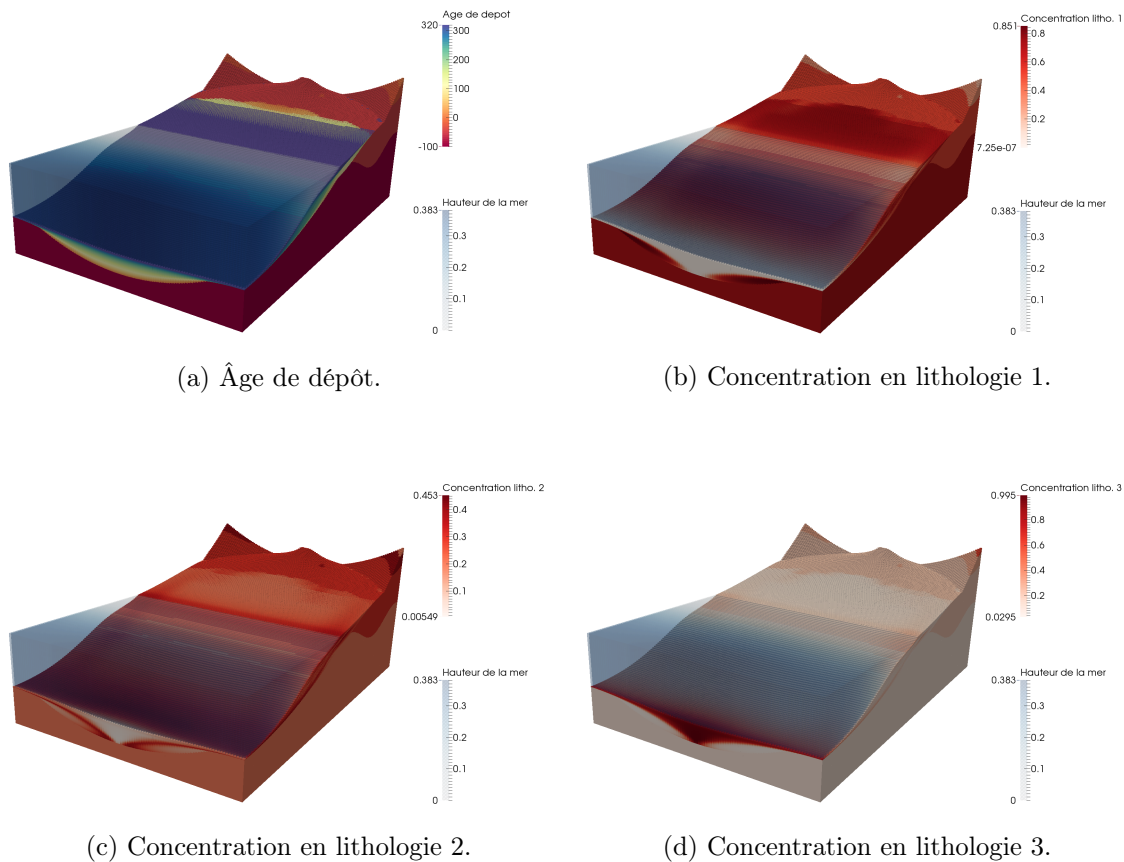


FIGURE 6.10 – Âge de dépôt et concentrations en lithologies au temps  $T = 320$  Ma.

court et du cycle long en figure 6.11. Le cycle mixte, lui, est plus délicat à distinguer. Pour un visuel plus précis, on pourrait envisager de raffiner le maillage.

Enfin, quelques données numériques sont rassemblées dans le tableau 6.3. Un certain nombre de pas de temps ont été refusés. Pour la plupart, cela est dû à un phénomène de cycle au niveau des itérées de Newton, comme nous l'avons abordé dans le chapitre 3 et l'annexe C.

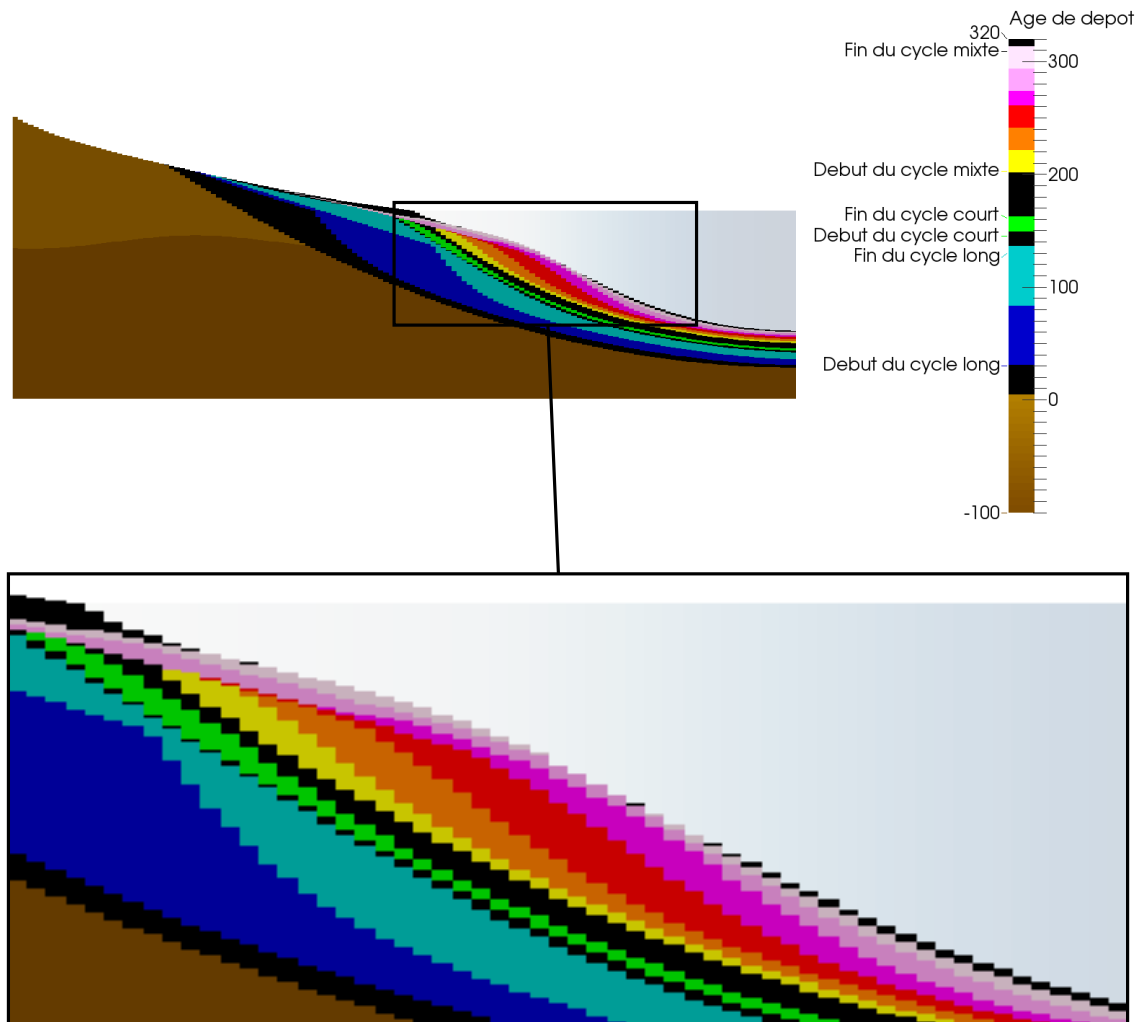
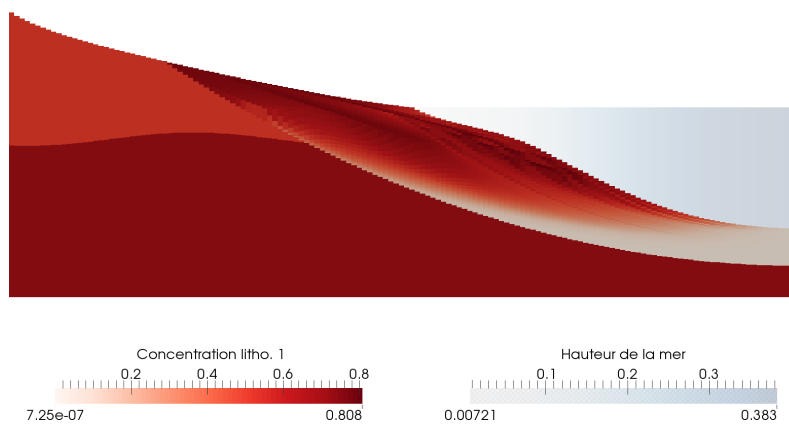
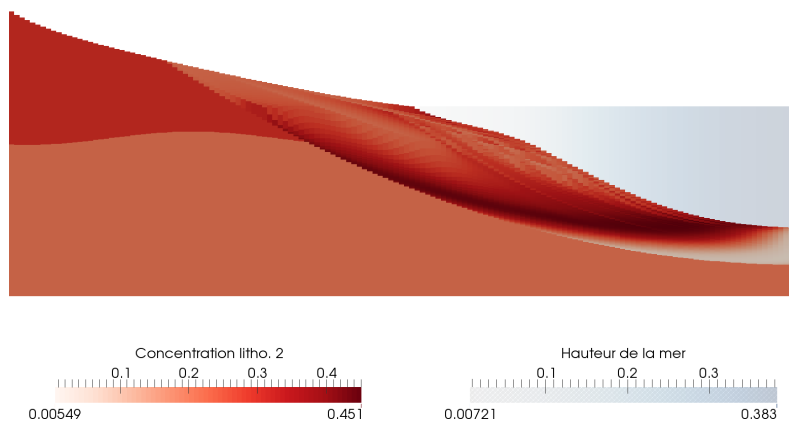


FIGURE 6.11 – Influence de l'eustasie sur le dépôt des sédiments.

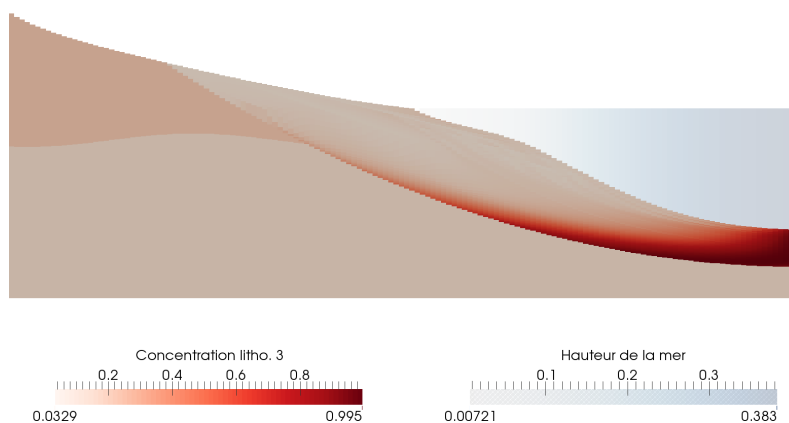




(a) Concentration en lithologie 1.



(b) Concentration en lithologie 2.



(c) Concentration en lithologie 3.

FIGURE 6.12 – Coupe en  $x = 25$  km : âge de dépôt et concentrations en lithologies au temps  $T = 320$  Ma.

Donnée numérique	Valeur
Pas de temps acceptés	16644
Pas de temps refusés	250
Moyenne iter. Newton / pas de temps	4.74
Moyenne iter. solveur / iter. Newton	5.28
Temps de calcul (h)	9.72

TABLE 6.3 – Résultats numériques.

### 6.6.2 Évolution d'un estuaire

La configuration étudiée dans cette sous-section représente l'évolution d'un estuaire. Le domaine initial est de taille  $120 \text{ km} \times 260 \text{ km}$ , et représente un domaine continental ainsi qu'un domaine marin. Le niveau de la mer séparant ces deux zones est fixé à  $H_m = 0.6 \text{ km}$ . Les sédiments sont composés d'un mélange de 4 différentes lithologies. Les coefficients de diffusion correspondants sont rassemblés dans le tableau 6.4. Concernant la valeur de  $\tilde{K}$ , cette dernière est fixée à  $10^6 \text{ km}^{1/2}/\text{Ma}$ . À cela s'ajoute une contrainte sur le taux d'érosion, dont le taux maximal est  $E = 0.008 \text{ km}/\text{Ma}$ . Concernant les conditions aux limites, plusieurs sources d'eau et de sédiments sont considérées, lesquelles sont détaillées dans le tableau 6.5.

Passons à présent aux paramètres numériques. Tout d'abord, le domaine est discrétisé sur  $48 \times 104$  mailles. Le temps de simulation est quant à lui égal à  $T = 4 \text{ Ma}$ . L'exposant du  $p$ -Laplacien présent dans les équations de conservation des lithologies (6.38) est fixé à  $p = 2.5$ . Les colonnes de sédiments sont composées d'un maximum de 100 couches. La résolution du système s'effectue par la méthode de Newton-min, associée à un critère d'arrêt sur la norme  $L^\infty$  du résidu. Plus précisément, il est égal à  $10^{-5} \text{ km}$  pour l'équation de conservation de l'eau,  $10^{-9} \text{ km}$  pour l'équation de conservation des lithologies, et  $10^{-5}$  pour les équations de complémentarité et de fermeture. Le système linéaire présent à chaque pas de temps est résolu à l'aide de la méthode du BiCGStab associé à un préconditionneur de type ILU( $k$ ),  $k \geq 1$ , le tout via la bibliothèque PETSc. Enfin, la gestion du pas de temps s'effectue de manière dynamique. La simulation débute avec  $\Delta t^0 = 10^{-10} \text{ Ma}$ . Cette valeur initiale est plus faible que sur les autres cas de figure. Il a en effet été remarqué que dans certaines configurations (c'est le cas ici), un pas de temps petit est nécessaire afin de

Lithologie	$K_m$ ( $\text{km}^{1/2}/\text{Ma}$ )	$K_c$ ( $\text{km}^{1/2}/\text{Ma}$ )	$K_{g,m}$ ( $\text{km}^2/\text{Ma}$ )	$K_{g,c}$ ( $\text{km}^2/\text{Ma}$ )
1	4000	9000	25	1500
2	11000	21000	60	1800
3	13000	28000	75	2400
4	24000	38000	200	3300

TABLE 6.4 – Valeur des coefficients de diffusion.

Flux de bord	Bord $\Gamma_b$	Bord $\Gamma_r$
$\tilde{\phi}$	$360T$	—
$\phi_1$	$0.36T$	$0.95T$
$\phi_2$	$0.18T$	$0.095T$
$\phi_3$	$0.036T$	$9.5T$
$\phi_4$	$0.018T$	$5.0T$

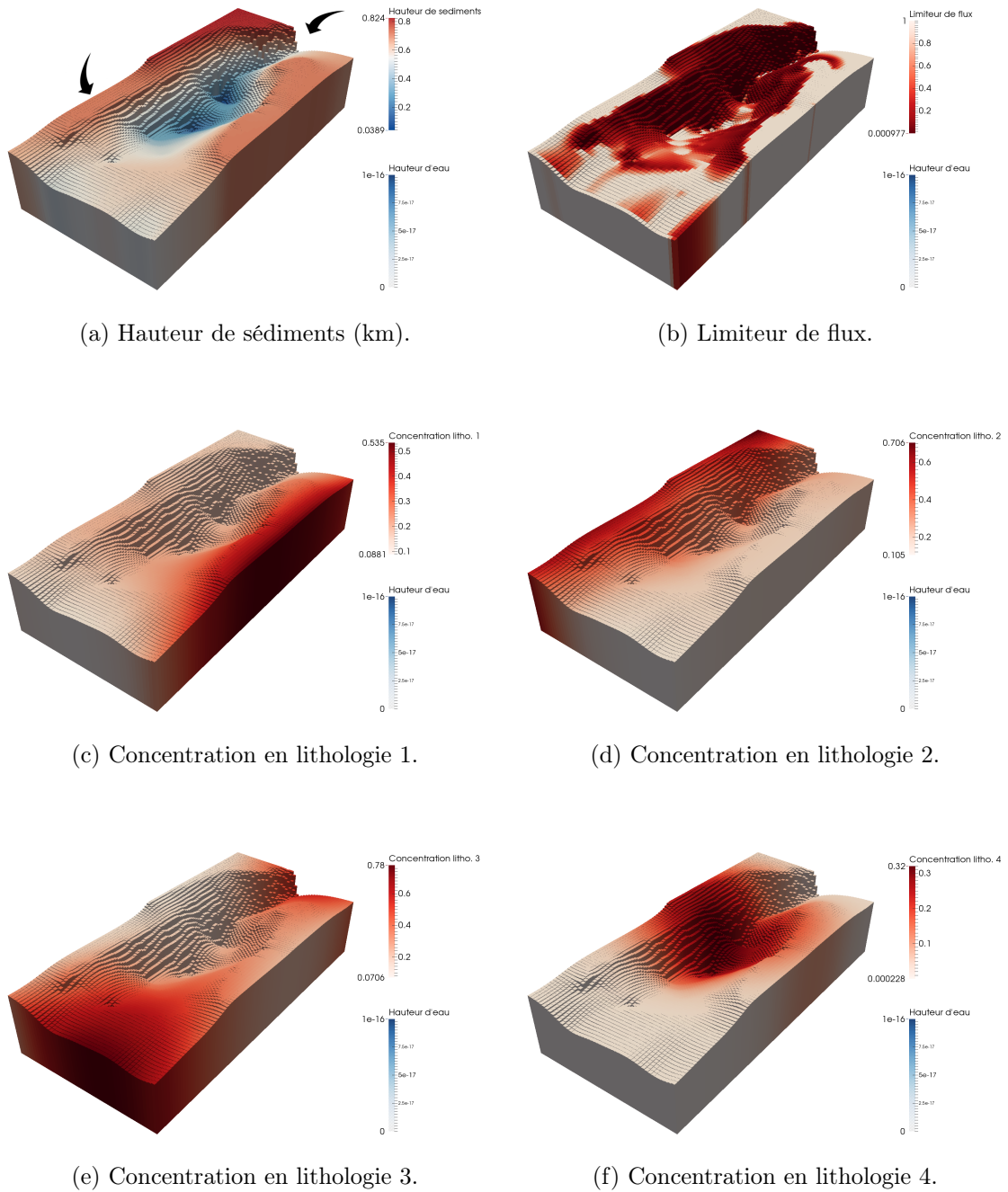
TABLE 6.5 – Valeur des flux injectés aux bords, intégrés sur  $\partial\Omega \times [0, T]$  (en  $\text{km}^3$ ).

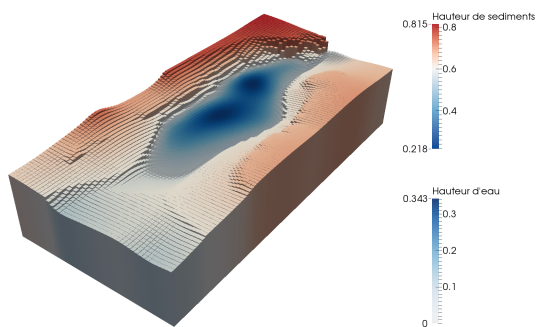
pouvoir commencer la simulation numérique. En pratique, de telles valeurs ne sont utiles qu'au commencement, et ne sont pas nécessaires pour le reste du temps de calcul. Par suite, si le pas de temps est accepté, le pas de temps qui suit est calculé par  $\Delta t^{n+1} = 1.1\Delta t^n$  jusqu'à la valeur limite  $\Delta t_{\max} = 0.005$  Ma. Si en revanche il est refusé (c'est-à-dire si la méthode de Newton n'a pas réussi à converger), l'itération en temps est recommencée avec la nouvelle valeur  $\Delta t^n = 0.5\Delta t^n$ .

L'état initial du système est illustré sur la figure 6.13. La contrainte sur le taux d'érosion est présente sur une partie importante du domaine, essentiellement dans les zones escarpées. La répartition des quatre lithologies est également représentée, comme par exemple la lithologie 4 qui se trouve localisée principalement en zone marine. La figure 6.14 rassemble l'état du système après 4 Ma. On peut déjà observer que la diffusion a permis de lisser le domaine. Par ailleurs, le contraste entre les coefficients de diffusion gravitaires engendre une cassure au niveau du littoral. Les concentrations en différentes lithologies se retrouvent également changées par rapport à l'état initial. Le cas le plus visible est celui de la lithologie 4, qui est associée aux coefficients de diffusion les plus importants. Cette dernière se retrouve alors essentiellement dans les minimums locaux de la topographie.

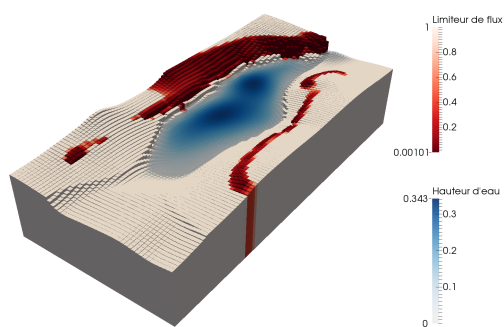
Afin d'avoir une vision plus précise de la structure du bassin, on effectue une coupe dans l'axe  $x = 84$  km. Les observations sont présentées en figure 6.15. Analysons dans un premier temps la zone marine. La lithologie 4 étant présente dans cette zone, et étant celle qui se diffuse le plus rapidement, elle se retrouve essentiellement au fond de l'affaissement principal. Le reste des dépôts est constitué des lithologies 1 et 2, ces dernières se situant globalement au niveau des zones continentales adjacentes. La lithologie 3 y étant peu présente, il est normal d'en trouver seulement en faible quantité. Par ailleurs, sur la partie gauche on note une concentration importante en lithologies 3 et 4. Cela s'explique par la proximité d'un flux entrant de sédiments sur le bord du domaine, lequel étant principalement composé de ces deux quantités.

Pour terminer, effectuons quelques commentaires sur les données numériques obtenues en fin de simulation, qui sont rassemblées dans le tableau 6.6. La simulation a été effectuée avec différents préconditionneurs. Comme dans le chapitre 5, on note que le choix de la méthode de résolution peut faire varier assez sensiblement les résultats. Dans notre cas de figure, le préconditionneur ILU(2) offre le meilleur compromis entre temps de calculs et efficacité de résolution. Au contraire, ILU(1) ne semble pas être suffisant dans le sens où un nombre important de pas de temps refusés est observé.

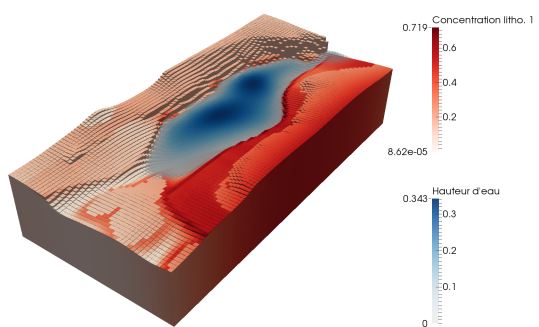
FIGURE 6.13 – Données au temps  $T = 0$  Ma.



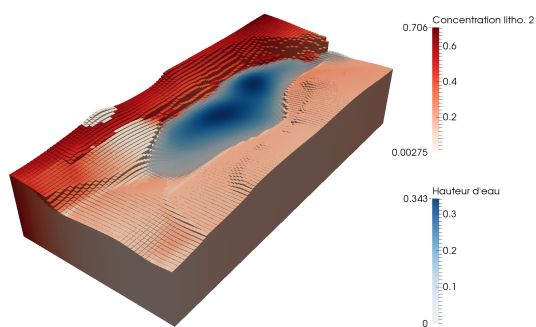
(a) Hauteurs d'eau et de sédiments (km).



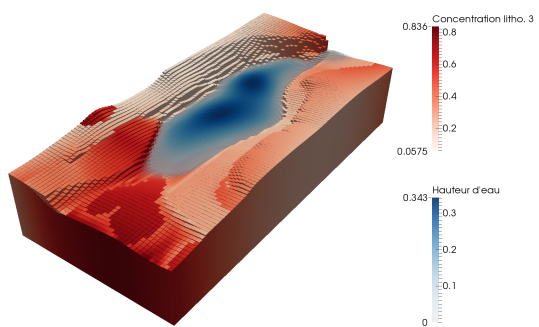
(b) Limiteur de flux.



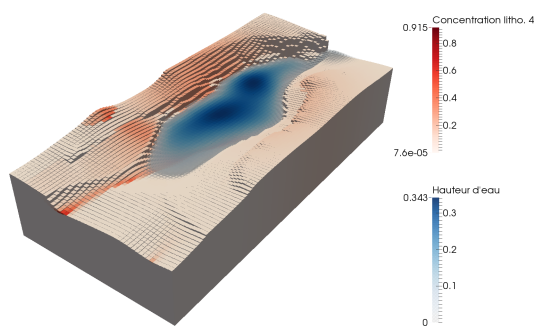
(c) Concentration en lithologie 1.



(d) Concentration en lithologie 2.

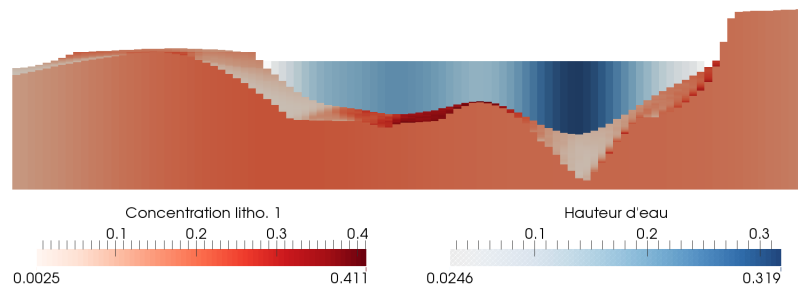


(e) Concentration en lithologie 3.

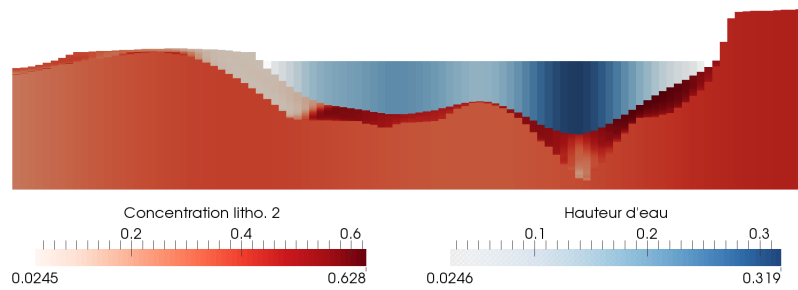


(f) Concentration en lithologie 4.

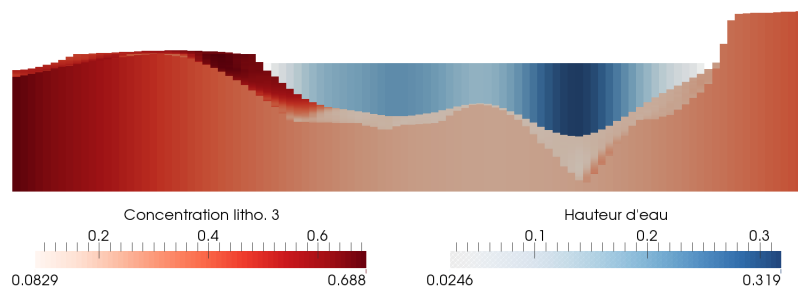
FIGURE 6.14 – Résultats au temps  $T = 4$  Ma.



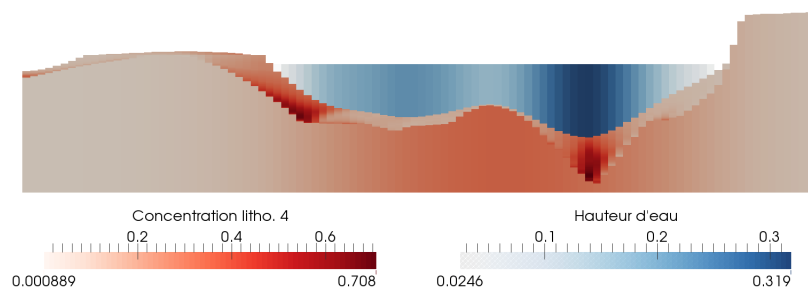
(a) Concentration en lithologie 1.



(b) Concentration en lithologie 2.



(c) Concentration en lithologie 3.



(d) Concentration en lithologie 4.

FIGURE 6.15 – Coupe en  $x = 84$  km : concentrations en lithologies au temps  $T = 4$  Ma.

Donnée numérique	Préconditionneur			
	ILU(1)	ILU(2)	ILU(3)	ILU(4)
Pas de temps acceptés	1216	1004	981	979
Pas de temps refusés	62	9	2	1
Moyenne iter. Newton / pas de temps	7.39	5.43	5.32	5.31
Moyenne iter. solveur / iter. Newton	11.66	7.70	6.02	5.33
Temps de calcul (s)	2171	1551	2063	2935

TABLE 6.6 – Résultats numériques.

## 6.7 Récapitulatif

Ce dernier modèle stratigraphique étudié dans cette thèse est une extension des travaux menés dans le chapitre 5 dans le cadre de plusieurs lithologies. Pour tenir compte de cet aspect, deux types de concentrations ont été associées à chaque type de sédiments. La première, appelée concentration de surface, est définie à la surface du bassin afin de modéliser le transport de matière. La seconde représente la répartition des lithologies à l'intérieur du bassin. Elle est supposée constante au cours du temps étant donné que le transport n'a lieu qu'en surface. La discrétisation du système couplant le transport des lithologies, les flux d'eau, ainsi qu'une contrainte sur le taux d'érosion a été effectuée par un schéma Volumes Finis, entre autres basé sur celui développé dans le chapitre précédent. Numériquement, il a été nécessaire d'apporter une discrétisation de la structure interne de la zone étudiée. En plus de chaque variable du système, à chaque maille est associée une colonne de sédiments permettant de visualiser le dépôt des différentes strates. Ces dernières sont par ailleurs indispensables afin de connaître les lithologies à être transportées en cas d'érosion. Une moyenne de la composition sédimentaire de ces strates a été implémentée dans le but d'obtenir une discrétisation homogène dans la direction  $z$ . L'analyse théorique des méthodes développées a permis d'établir de bonnes propriétés du schéma numérique, dont en particulier l'existence d'une solution discrète.

# Chapitre 7

## Conclusions et perspectives

### 7.1 Bilan des résultats obtenus

Dans cette thèse, nous avons exploré plusieurs modèles stratigraphiques destinés à retracer l’histoire et l’évolution des bassins sédimentaires. Nous avons étudié chacun de ces modèles tant du point de vue théorique — en poussant l’analyse mathématique aussi loin que possible — que du point de vue numérique — en produisant des simulations issues de configurations réelles. Ce faisant, nous nous sommes focalisés sur trois processus physiques essentiels : le transport des sédiments, le couplage de ce dernier avec les effets de l’eau, et la généralisation au cas de lithologies multiples. La prise en compte de ces différents éléments, qui constitue notre apport original à l’état existant en modélisation stratigraphique, a conduit à des résultats jugés très satisfaisants par les géologues. Aussi, notre méthodologie sera-t-elle intégrée à la prochaine version du calculateur Dionisos développé à IFPEN.

#### 7.1.1 Transport non-linéaire des sédiments

Notre première contribution a été de montrer la pertinence et la viabilité d’un flux de sédiments non-linéaire de type  $p$ -Laplacien en vue d’obtenir une vitesse de transport finie (pour  $p > 2$ ). Cette modification du flux s’est révélée de surcroît compatible avec la contrainte sur le taux d’érosion.

Toute la difficulté a résidé dans la construction d’un schéma numérique adéquat. D’une part, contrairement à Gervais [42], nous avons discrétisé directement l’équation de complémentarité exprimant la limitation du flux, ce qui épargne les complications informatiques liées à la méthode de *variable-switching*. D’autre part, nous avons proposé un schéma Volumes Finis semi-implicite dans lequel l’approximation du terme  $|\nabla h|^{p-2}$ , inspirée par Andreianov et al. [3], est garantie d’être coercive, à la différence d’autres approches Volumes Finis [26, 35] nécessitant une pénalisation. Ce choix a cependant entraîné la mise au point d’un traitement spécifique des conditions aux limites par le biais de mailles fictives.

#### 7.1.2 Couplage avec les flux d’eau

Notre deuxième contribution a porté sur l’écriture d’un couplage au niveau continu du transport des sédiments avec les effets de l’eau, ainsi que sur l’approximation numérique associée. Les résultats de simulation attestent la qualité de cette approche au regard des



exigences des géologues. Le remplacement de l'algorithme discret de type MFD par ce nouveau modèle de couplage constituera une évolution majeure de Dionisos.

Dans cette partie, nous avons dû faire face à plusieurs difficultés. Tout d'abord, celle de la modélisation physique, où il a fallu reprendre les équations de Saint-Venant et examiner leur comportement en régime asymptotique avant de pouvoir proposer des simplifications. Ensuite, celle de l'étude mathématique, où il s'est avéré délicat d'aller jusqu'au bout de certaines analyses, même si l'on dispose de résultats partiels. Enfin, la présence dans le système d'un  $p$ -Laplacien avec  $p < 2$  génère des singularités qu'il convient de gérer convenablement. Il est à noter que la résolution du modèle avec flux d'eau s'est souvent avérée plus complexe que celle du modèle sans flux d'eau, ce qui s'est traduit par l'utilisation systématique d'un préconditionneur plus fort.

### 7.1.3 Transposition au cas multilithologique

Notre troisième et dernière contribution a consisté à faire fructifier les deux réalisations précédentes dans le cas de plusieurs lithologies. Là encore, les résultats numériques ont été validés par les ingénieurs IFPEN.

Bien qu'il suffise en principe de suivre la démarche de Gervais [42], qui distingue deux notions de concentration comme expliqué au chapitre 6, cette partie a requis un travail d'implémentation conséquent. En effet, le caractère multilithologique implique une discrétisation dans la direction  $z$ , avec une gestion dynamique des colonnes de sédiments. Il en découle une description de la structure interne du bassin, ce qui permet une visualisation plus détaillée de l'évolution du dépôt des sédiments.

## 7.2 Extensions possibles

Bien que les travaux précédents aient notablement enrichi les fonctionnalités du modèle stratigraphique de Dionisos, ils demeurent modestes au regard de la diversité des phénomènes qui interviennent dans les systèmes naturels. L'ambition est alors de poursuivre l'enrichissement des processus physiques, pour lesquels de nouvelles méthodes numériques sont à développer. Nous dressons ci-dessous une liste non-exhaustive des améliorations potentielles.

### 7.2.1 Améliorations de la physique

Vis-à-vis du modèle stratigraphique multilithologique présenté dans le chapitre 6, plusieurs éléments peuvent être intégrés sans, a priori, poser de difficulté majeure. Tout d'abord, l'ajout de termes sources dans les équations de conservation permettrait de modéliser certains phénomènes, comme la production de carbonates, la pluie, ou encore l'évaporation. Ensuite, il serait envisageable de prendre en compte la subsidence, c'est-à-dire un socle non érodable sur lequel reposent les sédiments. Pour cela, les flux d'eau et de sédiments doivent tenir compte de la hauteur de ce socle, notée par  $H$ , en remplaçant la hauteur de sédiments  $h$  par la hauteur  $h + H$ . Il faut néanmoins veiller à garder une hauteur de sédiments positive. Un autre aspect ne nécessitant pas une modification importante du modèle est la compaction des sédiments. Pour cela, une nouvelle variable qu'est la porosité est ajoutée au système d'équations (6.17). Cette dernière est alors reliée à une

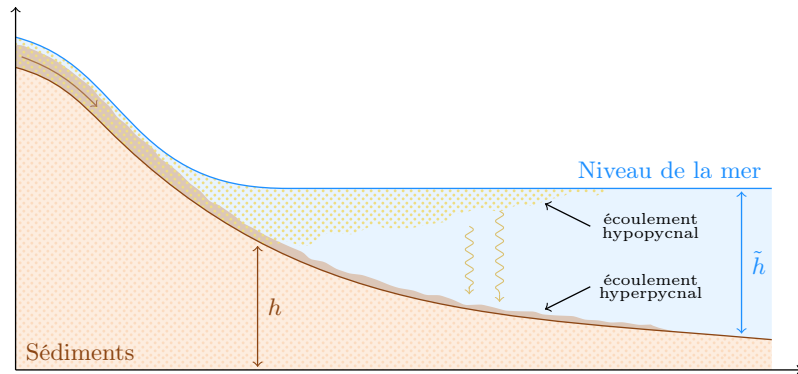


FIGURE 7.1 – Illustration du flux de sédiments à l'embouchure d'un fleuve.

loi sur l'épaisseur des sédiments permettant de modéliser l'entassement des sédiments sous leur propre poids.

Les processus précédemment évoqués sont actuellement pris en compte dans Dionisos. En revanche, d'autres éléments importants restent à intégrer au calculateur. C'est le cas notamment des phénomènes situés au niveau de l'embouchure des fleuves. Pour rappel, dans cette thèse nous avons supposé pour simplifier que le flux de sédiments suit toujours la pente du sol, comme illustré sur la figure 4.4. Seulement, la réalité a un aspect plus compliqué, comme illustré sur la figure 7.1. Plusieurs éléments sont à distinguer. Premièrement, en arrivant au niveau de l'embouchure des fleuves, les sédiments les plus lourds suivent effectivement la topographie  $\nabla h$ . Ce flux de matière sous-marin forme alors ce que l'on appelle un écoulement *hyperpycnal* (correspondant à une densité de l'écoulement plus forte que celle du fluide ambiant). Au contraire, les sédiments les plus fins vont avoir tendance à rester en surface, c'est-à-dire suivre la direction  $\nabla(\tilde{h} + h)$ , et ainsi former un écoulement *hypopycnal* (correspondant à une densité de l'écoulement plus faible que celle du fluide ambiant). Le panache ainsi formé peut s'étaler sur plusieurs kilomètres. Il a par ailleurs été observé que les particules présentes dans le panache en surface finissent par former une pluie de sédiments, qui contribuent in fine à l'écoulement hyperpycnal. La modélisation physique de ces phénomènes complexes est à ce jour toujours en cours d'étude.

### 7.2.2 Améliorations numériques

Quelques apports numériques au modèle actuel peuvent aider à améliorer les performances en matière de temps de calcul. Dans un premier temps, il serait possible de réduire quelque peu la taille du système non-linéaire à résoudre à chaque pas de temps. En effet, l'équation de fermeture (6.17d) peut-être éliminée, ce qui conduit à remplacer par exemple la variable  $c_1^s$  par  $1 - \sum_{\ell=2}^L c_\ell^s$ .

Une autre piste concerne la méthode de préconditionnement. Nous ne nous sommes pas focalisé sur cet aspect durant cette thèse, les résultats obtenus étant satisfaisants. Néanmoins, il pourrait être intéressant d'analyser d'autres types d'approches, comme dans le cadre de la thèse de Gervais [42, 44] où un préconditionnement par blocs s'est avéré efficace.

Enfin, bien que le calculateur Dionisos se base sur un maillage cartésien, une question

légitime concerne l'extension des méthodes développées dans le cas de maillages plus généraux. Dans cette perspective, l'usage de nouveaux schémas numériques paraît inévitable. La difficulté principale est alors, à nouveau, de trouver une discrétisation efficace des termes issus du  $p$ -Laplacien tels que  $|\nabla h|^{p-2}$ .

## Annexe A

# Solutions élémentaires de l'équation du $p$ -Laplacien instationnaire

### Sommaire

---

<b>A.1 Diffusion lente : <math>p &gt; 2</math></b> . . . . .	<b>156</b>
A.1.1 Cas 1D . . . . .	156
A.1.2 Cas 2D . . . . .	157
<b>A.2 Diffusion rapide : <math>2d/(d+1) &lt; p &lt; 2</math></b> . . . . .	<b>157</b>
A.2.1 Cas 1D . . . . .	158
A.2.2 Cas 2D . . . . .	158

---

Dans cette annexe, nous nous intéressons aux solutions de l'équation du  $p$ -Laplacien instationnaire

$$\partial_t h - \operatorname{div}(|\nabla h|^{p-2} \nabla h) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad t > 0, \quad p > 1, \quad (\text{A.1})$$

muni de la condition initiale

$$h(x, t = 0) = M\delta_0(x), \quad M > 0, \quad (\text{A.2})$$

où  $\delta_0$  représente la masse de Dirac prise en l'origine du domaine. Il est possible de montrer que le problème (A.1)–(A.2) admet une unique solution (voir Kamin et Vázquez [55]), dénommée Barentblatt [10], dont la forme générale est donnée par la formule

$$h(x, t) = \frac{1}{t^k} \left( C - q|\xi|_+^{\frac{p-1}{p-2}} \right)_+^{\frac{p-1}{p-2}}, \quad p \neq 2, \quad (\text{A.3})$$

avec les notations

$$k = \left( p - 2 + \frac{p}{d} \right)^{-1}, \quad \xi = \frac{x}{t^{k/d}}, \quad q = \frac{p-2}{p} \left( \frac{k}{d} \right)^{\frac{1}{p-1}}. \quad (\text{A.4})$$

La constante  $C$  quant à elle est déterminée via la condition

$$\int_{\mathbb{R}^n} h(x, t) \, dx = M, \quad (\text{A.5})$$

représentant la conservation de la masse.

En pratique, afin de pouvoir utiliser la formule (A.3), il est nécessaire de connaître la valeur prise par la constante  $C$ . Nous allons donc la déterminer, et ce dans les cas  $d = 1$  et  $d = 2$ . Ces solutions élémentaires sont employées dans le chapitre 2 afin de tester l'efficacité des différents schémas numériques proposés.

Il est par ailleurs important de différencier deux cas. Le premier est celui où  $p > 2$ , représentant la diffusion lente. La solution est alors à support compact pour tout  $t > 0$ , et la vitesse de propagation est finie. Inversement, pour le cas où  $p < 2$  la solution n'est pas à support compact. Cette configuration symbolise alors la diffusion rapide. La vitesse de propagation est infinie et pour tout  $t > 0$ ,  $h(x, t) > 0$ . Pour le cas particulier où  $p = 2$ , on retrouve l'équation de la chaleur classique, largement étudiée par exemple dans les ouvrages de Bamberger [9], Bass [13], Brezis [19], ou encore Fourier [38].

## A.1 Diffusion lente : $p > 2$

Commençons par traiter le cas où  $p > 2$ . La solution élémentaire est alors à support compact, qu'il est possible de déterminer explicitement à partir de l'expression (A.3) :

$$h(x, t) > 0 \quad \text{si et seulement si} \quad |x| < \left(\frac{C}{q}\right)^{\frac{p-1}{p}} t^{k/d}.$$

### A.1.1 Cas 1D

Dans le cas d'une dimension, les quantités (A.4) deviennent

$$k = \frac{1}{2(p-1)}, \quad \xi = \frac{x}{t^k}, \quad q = \frac{p-2}{p} k^{\frac{1}{p-1}}.$$

D'après la condition (A.5) et en utilisant la parité de la solution, la constante  $C$  vérifie la relation

$$\frac{2}{t^k} \int_0^{\left(\frac{C}{q}\right)^{\frac{p-1}{p}} t^k} \left(C - q \left(\frac{x}{t^k}\right)^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p-2}} dx = M.$$

Utilisons ensuite le changement de variables  $z = \frac{q}{C} \left(\frac{x}{t^k}\right)^{\frac{p}{p-1}}$ , qui satisfait  $0 \leq z \leq 1$  et  $dx = \left(\frac{C}{q}\right)^{\frac{p-1}{p}} \frac{p-1}{p} t^k z^{-\frac{1}{p}} dz$ . Il vient alors

$$\frac{2(p-1)}{p} C^{\frac{2(p-1)^2}{p(p-2)}} q^{\frac{1-p}{p}} \int_0^1 (1-z)^{\frac{p-1}{p-2}} z^{-\frac{1}{p}} dz = M.$$

On reconnaît ici la fonction bêta d'Euler [1], définie par

$$B(x, y) = \int_0^1 (1-z)^{y-1} z^{x-1} dz,$$

avec comme paramètres  $\frac{2p-3}{p-2}$  et  $\frac{p-1}{p}$ . On en déduit alors que la constante  $C$  peut s'écrire sous la forme

$$C = \left( \frac{Mpq \frac{p-1}{p}}{2(p-1)\text{B}\left(\frac{2p-3}{p-2}, \frac{p-1}{p}\right)} \right)^{\frac{p(p-2)}{2(p-1)^2}}. \quad (\text{A.6})$$

### A.1.2 Cas 2D

La méthodologie pour le cas en 2 dimensions est similaire à ce qui vient d'être présenté. Dans ce cas, les quantités (A.4) ont pour valeur

$$k = \frac{2}{3p-4}, \quad \xi = \frac{x}{t^{k/2}}, \quad q = \frac{p-2}{p} \left( \frac{k}{2} \right)^{\frac{1}{p-1}}.$$

La condition (A.5) conduit alors à la première relation

$$\frac{1}{t^k} \int_{|x| \leq t^{k/2} \left(\frac{C}{q}\right)^{\frac{p-1}{p}}} \left( C - q \left( \frac{|x|}{t^{k/2}} \right)^{\frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p-2}} dx = M.$$

Un changement de variables en coordonnées polaires paraît alors naturel. Ce dernier mène à la nouvelle égalité

$$\frac{2\pi}{t^k} \int_0^{t^{k/2} \left(\frac{C}{q}\right)^{\frac{p-1}{p}}} \left( C - q \left( \frac{r}{t^{k/2}} \right)^{\frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p-2}} r dr = M.$$

Afin de poursuivre les calculs, un nouveau changement de variables est nécessaire. Pour cela, posons  $z = \frac{q}{C} \left( \frac{r}{t^{k/2}} \right)^{\frac{p}{p-1}}$ , impliquant  $0 \leq z \leq 1$  et  $dr = \left( \frac{C}{q} \right)^{\frac{p-1}{p}} \frac{p-1}{p} t^{k/2} z^{-1/p} dz$ . Cela conduit à la nouvelle expression

$$\frac{2\pi(p-1)}{p} C^{\frac{(p-1)(3p-4)}{p(p-2)}} q^{\frac{2(1-p)}{p}} \int_0^1 (1-z)^{\frac{p-1}{p-2}} z^{\frac{p-2}{p}} dz = M.$$

La fonction bêta peut à nouveau se reconnaître, cette fois-ci avec les paramètres  $\frac{2p-3}{p-2}$  et  $\frac{2(p-1)}{p}$ . L'expression de la constante  $C$  est alors donnée par

$$C = \left( \frac{Mpq \frac{2(p-1)}{p}}{2\pi(p-1)\text{B}\left(\frac{2p-3}{p-2}, \frac{2(p-1)}{p}\right)} \right)^{\frac{p(p-2)}{(p-1)(3p-4)}}. \quad (\text{A.7})$$

## A.2 Diffusion rapide : $2d/(d+1) < p < 2$

Passons maintenant au cas de la diffusion rapide. La formule générale de la solution de l'équation du  $p$ -Laplacien peut, dans certains cas, toujours se calculer à partir de la formule (A.3). Une importante remarque peut déjà être faite : contrairement au cas où  $p > 2$ , la quantité  $q$  est négative. En conséquence, la partie positive dans la définition de la solution élémentaire (A.3) n'a pas d'influence. En d'autres termes, on observe que la solution dans le cas de diffusion rapide n'est pas à support compact, et pour tout  $t > 0$ ,  $h(x, t) > 0$ .

### A.2.1 Cas 1D

Dans le cas unidimensionnel, la valeur de  $k$ ,  $\xi$  et  $q$  sont les mêmes que pour le cas où  $p > 2$  en 1D. Comme précédemment, la relation (A.5) et la parité de la solution donnent la première égalité

$$\frac{2}{t^k} \int_0^\infty \left( C - q \left( \frac{|x|}{t^k} \right)^{\frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p-2}} dx = M.$$

On effectue ensuite un changement de variables, en faisant toutefois attention au signe de  $q$ . Posons  $z = \frac{-q}{C} \left( \frac{x}{t^k} \right)^{\frac{p}{p-1}}$ , impliquant  $0 \leq z \leq +\infty$  et  $dx = \left( \frac{C}{-q} \right)^{\frac{p-1}{p}} \frac{p-1}{p} t^k z^{-\frac{1}{p}} dz$ . Cela mène à la nouvelle expression

$$\frac{2(p-1)}{p} C^{\frac{2(p-1)^2}{p(p-2)}} (-q)^{\frac{1-p}{p}} \int_0^\infty (1+z)^{\frac{p-1}{p-2}} z^{-\frac{1}{p}} dz = M.$$

Bien que sous une forme différente, la forme intégrale n'est autre que la fonction bêta

$$B(x, y) = \int_0^{+\infty} (1+z)^{-x-y} z^{x-1} dz.$$

Cette dernière prend ici les paramètres  $\frac{2(p-1)^2}{p(2-p)}$  et  $\frac{p-1}{p}$ . Finalement, la valeur de la constante est donnée par la formule

$$C = \left( \frac{Mp(-q)^{\frac{p-1}{p}}}{2(p-1)B\left(\frac{2(p-1)^2}{p(2-p)}, \frac{p-1}{p}\right)} \right)^{\frac{p(p-2)}{2(p-1)^2}}. \quad (\text{A.8})$$

### A.2.2 Cas 2D

Dans ce cas de figure, la valeur de  $k$ ,  $\xi$  et  $q$  sont les mêmes que pour le cas où  $p > 2$ . Néanmoins, on peut d'ores et déjà faire une remarque importante. Pour  $p < 4/3$ , la valeur de  $k$  devient négative, et dans ce cas la quantité  $q$  n'est pas définie. En conséquence, on réduit ici le domaine d'étude aux valeurs  $4/3 < p < 2$ . La relation (A.5) s'écrit alors

$$\frac{1}{t^k} \int_{\mathbb{R}^2} \left( C - q \left( \frac{|x|}{t^k/2} \right)^{\frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p-2}} dx = M.$$

Après un changement de variables en coordonnées polaires, l'égalité précédente devient

$$\frac{2\pi}{t^k} \int_0^\infty \left( C - q \left( \frac{r}{t^k/2} \right)^{\frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p-2}} r dr = M.$$

Ensuite, un deuxième changement de variables est effectué en posant  $z = \frac{-q}{C} \left( \frac{r}{t^k/2} \right)^{\frac{p}{p-1}}$ , ce qui implique  $0 \leq z \leq +\infty$  et  $dr = \left( \frac{C}{-q} \right)^{\frac{p-1}{p}} \frac{p-1}{p} t^k/2 z^{-1/p} dz$ . Cela permet d'obtenir la nouvelle identité

$$\frac{2\pi(p-1)}{p} C^{\frac{(p-1)(3p-4)}{p(p-2)}} (-q)^{\frac{2(1-p)}{p}} \int_0^\infty (1+z)^{\frac{p-1}{p-2}} z^{-\frac{p-2}{p}} dz = M.$$

La fonction bêta apparaît à nouveau, avec comme paramètres  $\frac{(p-1)(3p-4)}{p(2-p)}$  et  $\frac{2(p-1)}{p}$ . La valeur de la constante  $C$  est dans ce cas donnée par

$$C = \left( \frac{Mp(-q)^{\frac{2(p-1)}{p}}}{2\pi(p-1)\text{B}\left(\frac{(p-1)(3p-4)}{p(2-p)}, \frac{2(p-1)}{p}\right)} \right)^{\frac{p(p-2)}{(p-1)(3p-4)}}. \quad (\text{A.9})$$

Comme nous avons pu le constater, le domaine de validité de la constante (et donc de la solution) est ici réduit. De manière plus générale, l'équation du  $p$ -Laplacien a un comportement différent suivant si  $1 < p < \frac{2d}{d+1}$  ou si  $\frac{2d}{d+1} < p < 2$ . Pour davantage d'informations on pourra par exemple se référer à Bidaut-Véron [16] ou encore Di Benedetto et Herrero [24].





## Annexe B

# Solution particulière pour le modèle monolithologique sans contrainte sur le taux d'érosion

### Sommaire

---

<b>B.1</b>	<b>Configuration . . . . .</b>	<b>161</b>
<b>B.2</b>	<b>Calcul de la solution en domaine marin . . . . .</b>	<b>162</b>
<b>B.3</b>	<b>Calcul de la solution en domaine continental . . . . .</b>	<b>163</b>
<b>B.4</b>	<b>Solution complète . . . . .</b>	<b>164</b>

---

Dans cette annexe est présentée la construction d'une solution particulière pour le modèle stratigraphique abordé dans le chapitre 3, dans le cas sans contrainte sur le taux d'érosion. On se place ici en dimension 1. L'équation de transport des sédiments s'écrit alors

$$\partial_t h + \partial_x (-K_g(h) |\partial_x h|^{p-2} \partial_x h) = 0, \quad p > 2, \quad (\text{B.1})$$

où le coefficient de diffusion vérifie

$$K_g(h) = \begin{cases} K_{g,m}, & \text{si } h < H_m, \\ K_{g,c}, & \text{si } h \geq H_m. \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

### B.1 Configuration

On s'intéresse ici à rechercher une solution sous la forme d'une onde progressive, c'est-à-dire du type

$$h(x, t) = f(x - Ut),$$

où  $U > 0$  est une vitesse donnée. La variable réduite  $\xi = x - Ut$  représente alors la phase.

Pour cela, partons d'une donnée initiale décroissante composée d'un domaine marin avec  $h(x = 0, t = 0) = H_m$ , comme illustré sur la figure B.1. Au-delà d'une certaine

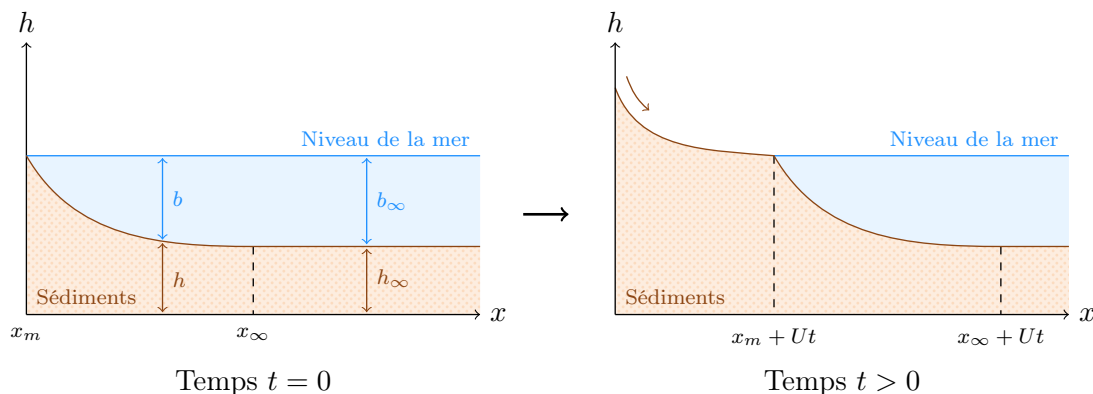


FIGURE B.1 – Exemple d'évolution sans contrainte sur le taux d'érosion.

valeur, notée par  $x_\infty$ , cette fonction reste constante avec une valeur  $h_\infty$ . Cette dernière est considérée comme une donnée du problème, qui servira en particulier à calculer la formule de la donnée initiale à employer. On vient ensuite injecter un flux de sédiments en  $x = 0$ , dont la quantité est à déterminer afin de pouvoir reproduire une onde progressive. Dans la solution attendue, comme  $\partial_x h(x, t) = f'(\xi) \leq 0$ , nous allons plutôt travailler avec la bathymétrie

$$b(\xi) = H_m - f(\xi)$$

afin d'avoir  $b'(\xi) \geq 0$ . On pourra par ailleurs noter que

$$\partial_t h(x, t) = Ub'(\xi), \quad (\text{B.3a})$$

et

$$|\partial_x h(x, t)|^{p-2} \partial_x h(x, t) = b'(\xi)^{p-2} (-b'(\xi)) = -b'(\xi)^{p-1}. \quad (\text{B.3b})$$

## B.2 Calcul de la solution en domaine marin

Commençons par chercher la forme de la fonction inconnue  $b$  en domaine marin. Dans cette configuration, la dérivée spatiale du flux s'écrit

$$\partial_x (K_{g,m} |\partial_x h|^{p-2} \partial_x h) = -K_{g,m} \frac{d}{d\xi} (b')^{p-1} = -K_{g,m} (p-1) b'' (b')^{p-2}.$$

Ensuite, grâce à l'équation (B.1) et à la relation (B.3a), on arrive à

$$Ub' = -K_{g,m} (p-1) b'' (b')^{p-2}.$$

Étant donné que sur l'intervalle  $[\xi_m, \xi_\infty]$  on a  $b' > 0$  par hypothèse, il est possible de diviser l'équation précédente par  $b'$  et ainsi obtenir

$$U = -K_{g,m} (p-1) b'' (b')^{p-3}. \quad (\text{B.4})$$

La prochaine étape consiste à intégrer la relation (B.4) entre  $\xi$  et  $\xi_\infty$ , avec  $\xi_m < \xi < \xi_\infty$ . Pour cela, on utilise que  $b'(\xi_\infty) = 0$  par hypothèse, ce qui implique

$$-U(\xi_\infty - \xi) = -K_{g,m} \frac{p-1}{p-2} b'(\xi)^{p-2},$$

et qui peut se reformuler par

$$b'(\xi) = \left( \frac{U}{K_{g,m}} \frac{p-2}{p-1} \right)^{\frac{1}{p-2}} (\xi_\infty - \xi)^{\frac{1}{p-2}}.$$

Ensuite, on intègre la relation obtenue, toujours entre les mêmes bornes, et cette fois-ci en utilisant le fait que  $b(\xi_\infty) = b_\infty > 0$  est connu (donnée du problème). On obtient ainsi la formule

$$b(\xi) = b_\infty - \left( \frac{U}{K_{g,m}} \right)^{\frac{1}{p-2}} \left( \frac{p-2}{p-1} \right)^{\frac{p-1}{p-2}} (\xi_\infty - \xi)^{\frac{p-1}{p-2}}. \quad (\text{B.5})$$

Il reste encore à déterminer la valeur de  $\xi_\infty$ . Pour ce faire, on utilise la condition  $b(\xi_m) = 0$ . En évaluant l'équation (B.5) en  $\xi = \xi_m$ , après calculs on aboutit à

$$\xi_\infty = \frac{p-1}{p-2} \left( \frac{K_{g,m} b_\infty^{p-2}}{U} \right)^{\frac{1}{p-1}}.$$

En injectant dans (B.5), il vient alors

$$b(\xi) = b_\infty - b_\infty \left[ 1 - \frac{p-2}{p-1} \left( \frac{U}{K_{g,m} b_\infty^{p-2}} \right)^{\frac{1}{p-1}} \xi \right]^{\frac{p-1}{p-2}}. \quad (\text{B.6})$$

Pour terminer avec le domaine marin, à l'aide de la relation (B.3b) et en utilisant le fait que  $\xi_m = 0$ , on notera que la valeur du flux au point  $\xi_m^+$  est donnée par

$$K_{g,m} b'(\xi_m^+)^{p-1} = U b_\infty. \quad (\text{B.7})$$

### B.3 Calcul de la solution en domaine continental

La détermination de la fonction  $b$  en domaine continental suit la même démarche que précédemment. Partons tout d'abord de la dérivée du flux qui s'écrit dans ce cas

$$\partial_x (K_{g,c} |\partial_x h|^{p-2} \partial_x h) = -K_{g,c} (p-1) b''(b')^{p-2},$$

ce qui conduit à la formule

$$U = -K_{g,c} (p-1) b''(b')^{p-3}. \quad (\text{B.8})$$

Ensuite, on intègre (B.8) entre  $\xi$  et  $\xi_m$ , avec  $\xi < \xi_m$ , et on utilise la continuité du flux au point  $\xi_m$ , à savoir

$$K_{g,c} b'(\xi_m^-)^{p-1} = K_{g,m} b'(\xi_m^+)^{p-1} = U b_\infty,$$

pour obtenir

$$-U(\xi_m - \xi) = K_{g,c} \frac{p-1}{p-2} \left[ \left( \frac{Ub_\infty}{K_{g,c}} \right)^{\frac{p-2}{p-1}} - b'(\xi)^{p-2} \right].$$

Cette dernière relation se réécrit afin d'obtenir la formule de  $b'$  :

$$b'(\xi) = \left[ \left( \frac{Ub_\infty}{K_{g,c}} \right)^{\frac{p-2}{p-1}} - \frac{p-2}{p-1} \frac{U}{K_{g,c}} \xi \right]^{\frac{1}{p-2}}.$$

Il reste alors à intégrer à nouveau entre  $\xi$  et  $\xi_m$  qui, après simplifications, conduit à

$$b(\xi) = b_\infty - b_\infty \left[ 1 - \frac{p-2}{p-1} \left( \frac{U}{K_{g,c} b_\infty^{p-2}} \right)^{\frac{1}{p-1}} \xi \right]^{\frac{p-1}{p-2}}. \quad (\text{B.9})$$

## B.4 Solution complète

Dans la partie du domaine située au-delà de  $\xi = \xi_\infty$ , la fonction  $b$  est étendue avec la valeur  $b(\xi_\infty) = b_\infty$ . On pourra noter par ailleurs que  $b'(\xi_\infty) = 0$ . Ainsi, la fonction  $b$  est donnée par

$$b(\xi) = \begin{cases} b_\infty - b_\infty \left[ 1 - \frac{p-2}{p-1} \left( \frac{U}{K_{g,c} b_\infty^{p-2}} \right)^{\frac{1}{p-1}} \xi \right]^{\frac{p-1}{p-2}}, & \text{si } \xi \leq 0, \\ b_\infty - b_\infty \left[ 1 - \frac{p-2}{p-1} \left( \frac{U}{K_{g,m} b_\infty^{p-2}} \right)^{\frac{1}{p-1}} \xi \right]_+^{\frac{p-1}{p-2}}, & \text{si } \xi \geq 0, \end{cases} \quad (\text{B.10})$$

ce qui peut se reformuler à l'aide de la hauteur  $h = H_m - b$  et des variables  $x$  et  $t$  par

$$h(x, t) = \begin{cases} h_\infty + (H_m - h_\infty) \left[ 1 - \frac{p-2}{p-1} \left( \frac{U}{K_{g,c} b_\infty^{p-2}} \right)^{\frac{1}{p-1}} (x - Ut) \right]^{\frac{p-1}{p-2}}, & \text{si } x \leq Ut, \\ h_\infty + (H_m - h_\infty) \left[ 1 - \frac{p-2}{p-1} \left( \frac{U}{K_{g,m} b_\infty^{p-2}} \right)^{\frac{1}{p-1}} (x - Ut) \right]_+^{\frac{p-1}{p-2}}, & \text{si } x \geq Ut. \end{cases} \quad (\text{B.11})$$

Le domaine continental n'étant pas infini mais tronqué en  $x = 0$ , il est nécessaire d'imposer un flux entrant à ce bord du domaine, lequel doit avoir la bonne quantité afin de conserver la propriété d'onde progressive de la solution. Pour cette raison, ce flux est défini par

$$\phi(x = 0, t) = (-K_{g,c} |\partial_x h|^{p-2} \partial_x h) \Big|_{x=0}(t) \quad (\text{B.12a})$$

$$= K_{g,c} b'(-Ut)^{p-1} \quad (\text{B.12b})$$

$$= Ub_\infty \left[ 1 + \frac{p-2}{p-1} \left( \frac{U}{K_{g,c} b_\infty^{p-2}} \right)^{\frac{1}{p-1}} Ut \right]^{\frac{p-1}{p-2}}. \quad (\text{B.12c})$$

Pour terminer, on déduit de la formule (B.11) que la donnée initiale à employer doit être égale à

$$h(x, t = 0) = h_{\infty} + (H_m - h_{\infty}) \left[ 1 - \frac{p-2}{p-1} \left( \frac{U}{K_{g,m} b_{\infty}^{p-2}} \right)^{\frac{1}{p-1}} x \right]_{+}^{\frac{p-1}{p-2}}. \quad (\text{B.13})$$



# Annexe C

## Application de la méthode de Newton sur un cas simplifié

### Sommaire

---

C.1	Présentation du problème . . . . .	167
C.2	Existence et unicité d'une solution . . . . .	168
C.3	Application de la méthode de Newton . . . . .	170

---

### C.1 Présentation du problème

Dans cette annexe, nous proposons de mettre en évidence un problème de convergence de la méthode de Newton qui a pu être observé dans les chapitres 3, 5 et 6. Pour cela, considérons un modèle simplifié, à savoir le modèle stratigraphique présenté dans le chapitre 3 dans le cas 1D et dans le cas linéaire  $p = 2$  :

$$\partial_t h + \partial_x(\lambda F) = 0, \tag{C.1a}$$

$$\min(1 - \lambda, E - \partial_x(\lambda F)) = 0, \tag{C.1b}$$

avec  $F = -K\partial_x h$  et  $K > 0$  constant. Le modèle (C.1) est discrétisé sur deux mailles, comme illustré sur la figure C.1.

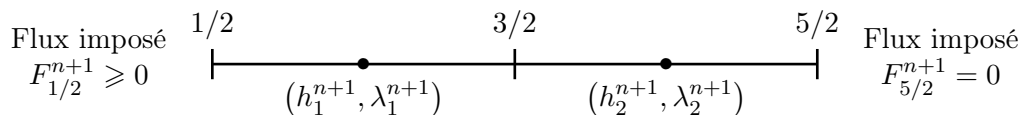


FIGURE C.1 – Discrétisation du problème.

Le problème se ramène alors à résoudre un système de 4 équations à 4 inconnues défini



par

$$h_1^{n+1} - h_1^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ \lambda_1^{n+1} (F_{3/2}^{n+1})^+ + \lambda_2^{n+1} (F_{3/2}^{n+1})^- - F_{1/2}^{n+1} \right] = 0, \quad (\text{C.2a})$$

$$h_2^{n+1} - h_2^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ \lambda_1^{n+1} (F_{3/2}^{n+1})^+ + \lambda_2^{n+1} (F_{3/2}^{n+1})^- \right] = 0, \quad (\text{C.2b})$$

$$\lambda_1^{n+1} - \min \left( 1, \frac{E_1 \Delta x + F_{1/2}^{n+1} - \lambda_2^{n+1} (F_{3/2}^{n+1})^-}{(F_{3/2}^{n+1})^+} \right) = 0, \quad (\text{C.2c})$$

$$\lambda_2^{n+1} - \min \left( 1, \frac{E_2 \Delta x + \lambda_1^{n+1} (F_{3/2}^{n+1})^+}{-(F_{3/2}^{n+1})^-} \right) = 0, \quad (\text{C.2d})$$

où  $F_{3/2}^{n+1} = -K(h_2^{n+1} - h_1^{n+1})/\Delta x$ . Dans la suite des calculs, les notations suivantes seront utilisées :

$$\begin{aligned} \varphi_1 &:= h_1^{n+1} - h_1^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ \lambda_1^{n+1} (F_{3/2}^{n+1})^+ + \lambda_2^{n+1} (F_{3/2}^{n+1})^- - F_{1/2}^{n+1} \right], \\ \varphi_2 &:= h_2^{n+1} - h_2^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ \lambda_1^{n+1} (F_{3/2}^{n+1})^+ + \lambda_2^{n+1} (F_{3/2}^{n+1})^- \right]. \end{aligned}$$

Considérons à présent le plan  $(h_1^{n+1}, h_2^{n+1})$ . Ce dernier peut être divisé en deux parties :

- zone I :  $h_1^{n+1} > h_2^{n+1}$  (i.e.  $F_{3/2}^{n+1} > 0$ ),
- zone II :  $h_1^{n+1} < h_2^{n+1}$  (i.e.  $F_{3/2}^{n+1} < 0$ ).

Les valeurs correspondantes de  $\lambda_1^{n+1}$  et  $\lambda_2^{n+1}$  y sont calculées (voir le tableau C.1), suivies des valeurs de  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  (voir le tableau C.2). Il est ensuite possible de différencier les cas suivant la valeur prise par les fonctions min et max. On s'aperçoit alors que le plan  $(h_1^{n+1}, h_2^{n+1})$  peut se diviser en 3 parties, définies par :

- zone A :  $-\frac{E_2 \Delta x^2}{K} < h_1^{n+1} - h_2^{n+1} < \frac{E_1 \Delta x^2}{K} + \frac{\Delta x}{K} F_{1/2}^{n+1}$ ,
- zone B<sub>1</sub> :  $\frac{E_1 \Delta x^2}{K} + \frac{\Delta x}{K} F_{1/2}^{n+1} < h_1^{n+1} - h_2^{n+1}$ ,
- zone B<sub>2</sub> :  $h_1^{n+1} - h_2^{n+1} < -\frac{E_2 \Delta x^2}{K}$ .

Les valeurs de  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  dans ces nouvelles zones sont également rassemblées dans le tableau C.2.

## C.2 Existence et unicité d'une solution

Avant d'appliquer la méthode de Newton, on souhaite montrer l'existence et l'unicité d'une solution pour toute donnée initiale  $(h_1^n, h_2^n)$ . Soit  $\varphi : (h_1^{n+1}, h_2^{n+1}) \mapsto (\varphi_1, \varphi_2)$ , où  $h_1^n$  et  $h_2^n$  jouent le rôle de paramètres. Le problème à résoudre revient alors à trouver  $h_1^{n+1}$  et  $h_2^{n+1}$  tels que  $\varphi(h_1^{n+1}, h_2^{n+1}) = 0$ . Dans un premier temps, supposons qu'il existe une solution dans la zone B<sub>1</sub>. Elle s'écrit alors

$$h^{n+1} = \begin{pmatrix} h_1^n - E_1 \Delta t \\ h_2^n + E_1 \Delta t + \frac{\Delta t}{\Delta x} F_{1/2}^{n+1} \end{pmatrix} =: h^{n,*}.$$

En utilisant le critère d'appartenance à  $B_1$ , on en déduit que

$$h_1^n - h_2^n > E_1 \left( 2\Delta t + \frac{\Delta x^2}{K} \right) + F_{1/2}^{n+1} \left( \frac{\Delta x}{K} + \frac{\Delta t}{\Delta x} \right). \quad (\text{C.3})$$

Cette nouvelle zone sera dénotée par  $B'_1$ . Réciproquement, à tout  $(h_1^n, h_2^n) \in B'_1$  correspond un couple  $(h_1^{n+1}, h_2^{n+1}) \in B_1$ . De plus, cette correspondance est unique car l'application linéaire associée est inversible.

Supposons à présent qu'une solution existe dans  $B_2$ . Dans ce cas, elle est donnée par

$$h^{n+1} = \begin{pmatrix} h_1^n + E_2 \Delta t + \frac{\Delta t}{\Delta x} F_{1/2}^{n+1} \\ h_2^n - E_2 \Delta t \end{pmatrix} =: h^{n,\sim}.$$

Le critère d'appartenance à la zone  $B_2$  conduit alors à la relation

$$h_1^n - h_2^n < -E_2 \left( 2\Delta t + \frac{\Delta x^2}{K} \right) - \frac{\Delta t}{\Delta x} F_{1/2}^{n+1}. \quad (\text{C.4})$$

Cette zone sera notée  $B'_2$  dans la suite. À nouveau, on peut voir que tout  $(h_1^n, h_2^n) \in B'_2$  est associé à un couple  $(h_1^{n+1}, h_2^{n+1}) \in B_2$ . Cette association est également unique, étant donné que l'application linéaire associée est inversible.

Enfin, supposons l'existence d'une solution dans la zone  $A$ . Après calculs, cette dernière peut s'écrire sous la forme

$$h^{n+1} = \begin{pmatrix} \frac{1+\gamma}{1+2\gamma} \left( h_1^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} F_{1/2}^{n+1} \right) + \frac{\gamma}{1+2\gamma} h_2^n \\ \frac{\gamma}{1+2\gamma} \left( h_1^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} F_{1/2}^{n+1} \right) + \frac{1+\gamma}{1+2\gamma} h_2^n \end{pmatrix} =: h^{n,\#},$$

où  $\gamma = K\Delta t/\Delta x^2$ . À partir du critère d'appartenance à  $A$ , on aboutit à la relation

$$\begin{aligned} -E_2 \left( 2\Delta t + \frac{\Delta x^2}{K} \right) - \frac{\Delta t}{\Delta x} F_{1/2}^{n+1} &< h_1^n - h_2^n \\ &< E_1 \left( 2\Delta t + \frac{\Delta x^2}{K} \right) + F_{1/2}^{n+1} \left( \frac{\Delta x}{K} + \frac{\Delta t}{\Delta x} \right). \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

Zone	$\lambda_1^{n+1}$	$\lambda_2^{n+1}$
I	$\min \left( 1, \frac{E_1 \Delta x + F_{1/2}^{n+1}}{F_{3/2}^{n+1}} \right)$	1
II	1	$\min \left( 1, \frac{E_2 \Delta x}{-F_{3/2}^{n+1}} \right)$

TABLE C.1 – Valeurs de  $\lambda_1^{n+1}$  et  $\lambda_2^{n+1}$ .

Zone	$\varphi_1$	$\varphi_2$
I	$h_1^{n+1} - h_1^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} F_{1/2}^{n+1} + \frac{\Delta t}{\Delta x} \min(F_{3/2}^{n+1}, E_1 \Delta x + F_{1/2}^{n+1})$	$h_2^{n+1} - h_2^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \min(F_{3/2}^{n+1}, E_1 \Delta x + F_{1/2}^{n+1})$
II	$h_1^{n+1} - h_1^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} F_{1/2}^{n+1} + \frac{\Delta t}{\Delta x} \max(F_{3/2}^{n+1}, -E_2 \Delta x)$	$h_2^{n+1} - h_2^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \max(F_{3/2}^{n+1}, -E_2 \Delta x)$
A	$(1 + \gamma)h_1^{n+1} - \gamma h_2^{n+1} - h_1^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} F_{1/2}^{n+1}$	$-\gamma h_1^{n+1} + (1 + \gamma)h_2^{n+1} - h_2^n$
$B_1$	$h_1^{n+1} - h_1^n + E_1 \Delta t$	$h_2^{n+1} - h_2^n - E_1 \Delta t - \frac{\Delta t}{\Delta x} F_{1/2}^{n+1}$
$B_2$	$h_1^{n+1} - h_1^n - E_2 \Delta t - \frac{\Delta t}{\Delta x} F_{1/2}^{n+1}$	$h_2^{n+1} - h_2^n + E_2 \Delta t$

 TABLE C.2 – Valeurs de  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$ , avec  $\gamma = \frac{K \Delta t}{\Delta x^2}$ .

Cette zone, qui est complémentaire à  $B'_1 \cup B'_2$ , sera appelée  $A'$ . Il est par ailleurs possible de montrer que tout  $(h_1^n, h_2^n) \in A'$  est associé à un couple  $(h_1^{n+1}, h_2^{n+1}) \in A$ , et que cette correspondance est unique par l'inversibilité du système linéaire (le déterminant est égal à  $(1 + 2\gamma)^{-1}$ ). Ainsi, pour toute donnée  $(h_1^n, h_2^n)$ , il existe toujours une unique solution  $(h_1^{n+1}, h_2^{n+1})$ .

### C.3 Application de la méthode de Newton

On se propose à présent d'appliquer la méthode de Newton pour chercher la solution  $(h_1^{n+1}, h_2^{n+1})$  et de suivre la trajectoire des itérées. Pour rappel, une itération générique de Newton s'écrit

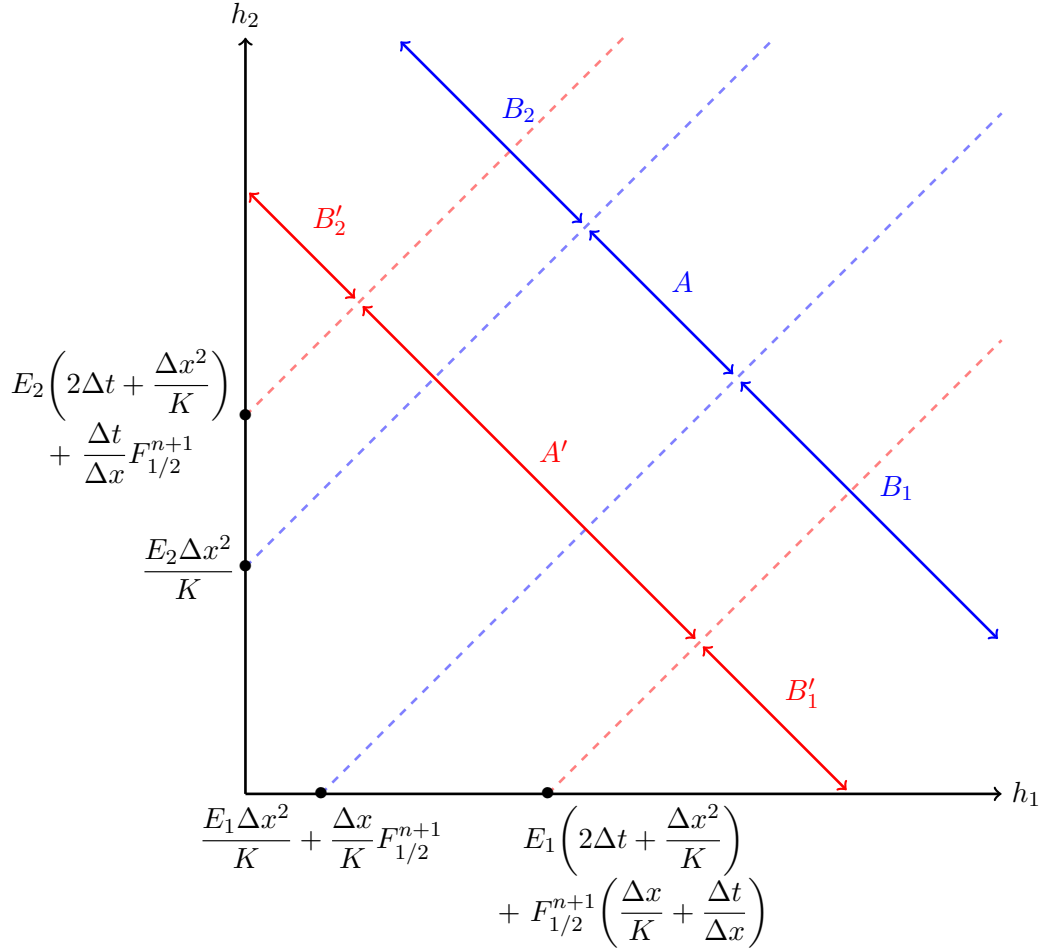
$$h^{(k+1)} = h^{(k)} - \nabla \varphi(h^{(k)})^{-1} \varphi(h^{(k)}),$$

où  $h^{(k)} = (h_1^{(k)}, h_2^{(k)})$ . Commençons par détailler l'expression de l'itérée  $k + 1$  suivant la localisation de l'itérée  $k$ . Si  $h^{(k)} \in B_1$ , alors

$$h^{(k+1)} = h^{(k)} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \left\{ h^{(k)} + \begin{pmatrix} -h_1^n + E_1 \Delta t \\ -h_2^n - E_1 \Delta t - \frac{\Delta t}{\Delta x} F_{1/2}^{n+1} \end{pmatrix} \right\} = h^{n,*}.$$

Passons au cas où  $h^{(k)} \in B_2$ . Dans cette configuration, on a

$$h^{(k+1)} = h^{(k)} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \left\{ h^{(k)} + \begin{pmatrix} -h_1^n - E_2 \Delta t - \frac{\Delta t}{\Delta x} F_{1/2}^{n+1} \\ -h_2^n + E_2 \Delta t \end{pmatrix} \right\} = h^{n,\sim}.$$


 FIGURE C.2 – Représentation des différentes zones du plan  $(h_1, h_2)$ .

Enfin, si  $h^{(k)} \in A$ , il vient

$$\begin{aligned}
 h^{(k+1)} &= h^{(k)} - \begin{pmatrix} 1 + \gamma & -\gamma \\ -\gamma & 1 + \gamma \end{pmatrix}^{-1} \left\{ \begin{pmatrix} 1 + \gamma & -\gamma \\ -\gamma & 1 + \gamma \end{pmatrix} h^{(k)} - \begin{pmatrix} h_1^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} F_{1/2}^{n+1} \\ h_2^n \end{pmatrix} \right\} \\
 &= h^{n,\#}.
 \end{aligned}$$

On peut alors noter que si les itérées  $k$  et  $k + 1$  appartiennent à la même région ( $A$ ,  $B_1$  ou  $B_2$ ), alors la méthode de Newton converge et  $h^{(n+1)} = h^{(k+1)}$ . Procédons maintenant à la méthode de Newton à proprement parler. Pour cela, partons de  $h^{(0)} = h^n$  et regardons le comportement des itérées suivant la zone où se situe  $h^n$ . Dans certaines configurations, la méthode de Newton converge en une itération. En utilisant les critères d'appartenance aux diverses zones, il est en effet possible de montrer que

- si  $h^n \in B'_1 \subset B_1$ , alors  $h^{(1)} = h^{n,*} \in B_1$  et  $h^{n+1} = h^{n,*}$ ,
- si  $h^n \in B'_2 \subset B_2$ , alors  $h^{(1)} = h^{n,\sim} \in B_2$  et  $h^{n+1} = h^{n,\sim}$ ,
- si  $h^n \in A$ , alors  $h^{(1)} = h^{n,\#} \in A$  et  $h^{n+1} = h^{n,\#}$ .

Il reste alors deux configurations à étudier. La première est celle où  $h^n \in B_1 \setminus B'_1$ . Dans ce cas  $h^{(1)} = h^{n,*} \notin B_1$ , mais on ne connaît pas a priori sa localisation. Si  $h^{n,*} \in A$ , alors  $h^{(2)} = h^{n,\#} \in A$  et il y a donc convergence en deux itérations avec  $h^{n+1} = h^{n,\#}$ . Regardons maintenant si  $h^{n,*} \in B_2$ . L'itérée suivante est alors donnée par  $h^{(2)} = h^{n,\sim}$ . Or comme par hypothèse  $h^n \in B_1$ , il est possible de montrer en se servant à nouveau du critère d'appartenance à  $B_1$  que  $h^{n,\sim} \in B_1$  aussi. Il s'ensuit que  $h^{(3)} = h^{n,*} = h^{(1)}$ . Dans ce cas de figure, la méthode de Newton ne converge donc pas et la suite des itérées oscille entre  $h^{n,*}$  et  $h^{n,\sim}$ .

Afin d'éviter ce comportement cyclique, il faut s'assurer que si  $h^n \in B_1 \setminus B'_1$ , alors  $h^{n,*} \in A$ . Cette condition s'écrit

$$-\frac{E_2 \Delta x^2}{K} < h_1^n - h_2^n - 2E_1 \Delta t - \frac{\Delta t}{\Delta x} F_{1/2}^{n+1} < \frac{E_1 \Delta x^2}{K} + \frac{\Delta x}{K} F_{1/2}^{n+1},$$

soit encore

$$h_1^n - h_2^n - \frac{E_1 \Delta x^2}{K} - \frac{\Delta x}{K} F_{1/2}^{n+1} < \Delta t \left( 2E_1 + \frac{F_{1/2}^{n+1}}{\Delta x} \right) < h_1^n - h_2^n + \frac{E_2 \Delta x^2}{K}.$$

Or comme  $h^n \in B_1 \setminus B'_1$ , la première inégalité est naturellement vérifiée. Il reste alors imposer la deuxième condition, c'est-à-dire

$$\Delta t < \frac{\Delta x}{2\Delta x E_1 + F_{1/2}^{n+1}} \left( h_1^n - h_2^n + \frac{E_2 \Delta x^2}{K} \right). \quad (\text{C.6})$$

La seconde configuration qui peut poser problème est celle où  $h^n \in B_2 \setminus B'_2$ . Pour le voir, reprenons l'analyse menée précédemment. La première itérée de Newton est donnée par  $h^{(1)} = h^{n,\sim} \notin B_2$ , mais sa localisation reste inconnue. Si  $h^{n,\sim} \in A$ , alors  $h^{(2)} = h^{n,\#} \in A$  et la méthode a convergé en deux itérations. Dans le cas  $h^{n,*} \in B_1$ , l'itérée suivante est  $h^{(2)} = h^{n,*}$ . Or étant donné que  $h^n \in B_2$ , le critère d'appartenance à  $B_2$  permet de déduire que  $h^{n,*} \in B_2$  également. Il s'ensuit que  $h^{(3)} = h^{n,\sim}$ , et on retrouve un phénomène oscillatoire entre les valeurs  $h^{n,\sim}$  et  $h^{n,*}$ .

Pour empêcher ce comportement de la méthode de Newton, il faut être sûr que si  $h^n \in B_2 \setminus B'_2$ , alors  $h^{n,\sim} \in A$ . Cela se ramène à satisfaire la condition

$$-\frac{E_2 \Delta x^2}{K} < h_1^n - h_2^n + 2E_2 \Delta t + \frac{\Delta t}{\Delta x} F_{1/2}^{n+1} < \frac{E_1 \Delta x^2}{K} + \frac{\Delta x}{K} F_{1/2}^{n+1},$$

c'est-à-dire

$$h_2^n - h_1^n - \frac{E_2 \Delta x^2}{K} < \Delta t \left( 2E_2 + \frac{F_{1/2}^{n+1}}{\Delta x} \right) < h_2^n - h_1^n + \frac{E_1 \Delta x^2}{K} + \frac{\Delta x}{K} F_{1/2}^{n+1}.$$

Or comme  $h^n \in B_2 \setminus B'_2$ , la première inégalité est satisfaite naturellement. Il faut néanmoins imposer la deuxième condition, qui revient à

$$\Delta t < \frac{\Delta x}{2\Delta x E_2 + F_{1/2}^{n+1}} \left( h_2^n - h_1^n + \frac{E_1 \Delta x^2}{K} + \frac{\Delta x}{K} F_{1/2}^{n+1} \right). \quad (\text{C.7})$$

En résumé, afin de garantir la convergence de la méthode de Newton il faut avoir les conditions suivantes :

- si  $h^{(0)} = h^n \in B_1 \setminus B'_1$ , alors la relation (C.6) doit être vérifiée,
- si  $h^{(0)} = h^n \in B_2 \setminus B'_2$ , alors la relation (C.7) doit être vérifiée.

## Annexe D

# Compléments sur le degré topologique

Cette annexe rassemble quelques éléments sur la notion de degré topologique de Brouwer. Cet outil utilisé dans les preuves des théorèmes 2.1, 3.1, 5.1 et 6.1 afin de démontrer l'existence de solutions aux divers schémas numériques. Pour avoir plus de précisions et trouver les preuves des résultats qui vont suivre, on pourra se référer aux travaux de Droniou [25], Eymard et al. [32] ou de Kavian [56]. Le degré topologique est défini à travers le théorème suivant.

**Théorème D.1.** *Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert borné,  $f \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$  et  $b \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$ . Il existe une unique application, qui associe à chaque triplet  $(f, \Omega, b)$  un entier relatif, et qui vérifie les propriétés suivantes :*

1. *Normalisation :  $\deg(\text{Id}, \Omega, b) = 1$ ,*
2. *Additivité : si  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  sont deux ouverts disjoints inclus dans  $\Omega$  avec  $b \notin f(\bar{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2))$ , alors  $\deg(f, \Omega, b) = \deg(f, \Omega_1, b) + \deg(f, \Omega_2, b)$ ,*
3. *Invariance par homotopie : si  $\mathcal{H} : \bar{\Omega} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $\beta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  sont deux fonctions continues telles que pour tout  $s \in [0, 1]$ ,  $\beta(s) \notin \mathcal{H}(\partial\Omega, s)$ , alors  $\deg(\mathcal{H}(\cdot, 0), \Omega, \beta(0)) = \deg(\mathcal{H}(\cdot, 1), \Omega, \beta(1))$ .*

*L'application  $\deg$  est appelée degré topologique de Brouwer.*

**Remarque D.1.** Pour  $f \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$  et  $b \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$  une valeur régulière, le degré topologique peut se calculer via la formule

$$\deg(f, \Omega, b) = \sum_{x \in f^{-1}(b)} \text{sgn} \det(J_f(x)), \quad (\text{D.1})$$

où  $J_f$  désigne la Jacobienne de  $f$ .

Le degré topologique vérifie de nombreuses propriétés. La proposition qui suit en rassemble quelques unes.

**Proposition D.1.** *Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert borné,  $f \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$  et  $b \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$ . Le degré topologique satisfait les propriétés suivantes :*

1. Pour tout  $z \in \mathbb{R}^n$ ,  $\deg(f, \Omega, b) = \deg(f - z, \Omega, b - z)$ ,
2.  $\deg(f, \Omega, \cdot)$  est constant sur les composantes connexes de  $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$ ,
3. Soit  $g \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ . Alors il existe  $\varepsilon > 0$  tel que si  $\|f - g\|_{L^\infty} < \varepsilon$ , alors  $\deg(f, \Omega, b) = \deg(g, \Omega, b)$ .

Le résultat principal à retenir, et qui est utilisé dans ce manuscrit, est le suivant.

**Proposition D.2.** Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert borné,  $f \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$  et  $b \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$ . Si  $\deg(f, \Omega, b) \neq 0$ , alors il existe  $x \in \Omega$  tel que  $f(x) = b$ .

*Démonstration.* La démonstration s'effectue par l'absurde. Supposons qu'il n'existe aucun  $x \in \Omega$  tel que  $f(x) = b$ . En appliquant la propriété d'additivité du théorème D.1 avec  $\Omega_1 = \Omega_2 = \emptyset$ , on obtient que  $\deg(f, \Omega, b) = \deg(f, \emptyset, b) + \deg(f, \emptyset, b)$ . Par ailleurs, en appliquant cette même propriété à l'ensemble vide, on a  $\deg(f, \emptyset, b) = 0$ . Il vient alors  $\deg(f, \Omega, b) = 0$ .  $\square$

# Bibliographie

- [1] M. ABRAMOWITZ AND I. A. STEGUN, eds., *Handbook of Mathematical Functions : with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*, Dover Publications, New York, 1970.
- [2] R. A. ADAMS, *Sobolev Spaces*, vol. 65 of Pure and Applied Mathematics, Academic Press, New York, 1975.
- [3] B. ANDREIANOV, F. BOYER, AND F. HUBERT, *Finite volume schemes for the  $p$ -Laplacian on Cartesian meshes*, M2AN, 38 (2004), pp. 931–959, <https://doi.org/10.1051/m2an:2004045>.
- [4] B. ANDREIANOV, C. CANCÈS, AND A. MOUSSA, *A nonlinear time compactness result and applications to discretization of degenerate parabolic-elliptic PDEs*, J. Funct. Anal., 273 (2017), pp. 3633–3670, <https://doi.org/10.1016/j.jfa.2017.08.010>.
- [5] S. N. ANTONTSEV, G. GAGNEUX, R. LUCE, AND G. VALLET, *New unilateral problems in stratigraphy*, M2AN, 40 (2006), pp. 765–784, <https://doi.org/10.1051/m2an:2006029>.
- [6] S. N. ANTONTSEV, G. GAGNEUX, R. LUCE, AND G. VALLET, *A non-standard free boundary problem arising from stratigraphy*, Anal. Appl., 4 (2006), pp. 209–236, <https://doi.org/10.1142/S0219530506000759>.
- [7] S. N. ANTONTSEV, G. GAGNEUX, AND G. VALLET, *Some stratigraphic control problems*, J. Appl. Mech. Tech. Phys., 44 (2003), pp. 821–828, <https://doi.org/10.1023/A:1026287705015>.
- [8] S. BALAY, S. ABHYANKAR, M. F. ADAMS, J. BROWN, P. BRUNE, K. BUSCHELMAN, L. DALCIN, V. EIJKHOUT, W. D. GROPP, D. KAUSHIK, M. G. KNEPLEY, L. C. MCINNES, K. RUPP, B. F. SMITH, S. ZAMPINI, H. ZHANG, AND H. ZHANG, *PETSc users manual*, Tech. Report ANL-95/11 - Revision 3.7, Argonne National Laboratory, 2016, <http://www.mcs.anl.gov/petsc>.
- [9] A. BAMBERGER, *Analyse, optimisation et filtrages numériques, compléments, analyse numérique de l'équation de la chaleur*, 1990.
- [10] G. I. BARENBLATT, *On self-similar motions of a compressible fluid in a porous medium*, Prikl. Mat. Mech., 16 (1952), pp. 679–698.
- [11] A. J. C. BARRÉ DE SAINT-VENANT, *Théorie du mouvement non permanent des eaux, avec application aux crues des rivières et à l'introduction de marées dans leurs lits*, Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences, 73 (1871), pp. 147–154, <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3030d/f147>.



- [12] J. W. BARRETT AND W. B. LIU, *Finite element approximation of the  $p$ -Laplacian*, Math. Comp., 61 (1993), pp. 523–537, <https://doi.org/10.1090/S0025-5718-1993-1192966-4>.
- [13] J. BASS, *Cours de Mathématiques : Topologie, Intégration, Distributions, Équations Intégrales, Analyse Harmonique*, vol. 3, Masson, 1971.
- [14] I. BEN GHARBA, *Résolution de problèmes de complémentarité. : Application à un écoulement diphasique dans un milieu poreux*, PhD thesis, Université Paris Dauphine (Paris IX), December 2012, <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00776617>.
- [15] J. BERGH AND J. LÖFSTRÖM, *Interpolation Spaces : An Introduction*, vol. 223 of Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer, Berlin, 1976, <https://doi.org/10.1007/978-3-642-66451-9>.
- [16] M. F. BIDAUT-VÉRON, *Self-similar solutions of the  $p$ -Laplace heat equation : the fast diffusion case*, Pacific J. Math., 227 (2006), pp. 201–269, <https://doi.org/10.2140/pjm.2006.227.201>.
- [17] B. BIRNIR, T. R. SMITH, AND G. E. MERCHANT, *The scaling of fluvial landscapes*, Computers & Geosciences, 27 (2001), pp. 1189–1216, [https://doi.org/10.1016/S0098-3004\(01\)00022-X](https://doi.org/10.1016/S0098-3004(01)00022-X).
- [18] J. BLUM, G. DOBRANSZKY, R. EYMARD, AND R. MASSON, *Identification of a stratigraphic model with seismic constraints*, Inverse Problems, 22 (2006), p. 1207, <https://doi.org/10.1088/0266-5611/22/4/006>.
- [19] H. BRÉZIS, P. CIARLET, AND J. LIONS, *Analyse fonctionnelle : théorie et applications*, Collection Mathématiques appliquées pour la maîtrise, Dunod, 1999.
- [20] C. CANCÈS, D. GRANJEON, N. PETON, Q. H. TRAN, AND S. WOLF, *Numerical scheme for a stratigraphic model with erosion constraint and nonlinear gravity flux*, in FVCA 8 - 2017 - International Conference on Finite Volumes for Complex Applications VIII, vol. 200 of Proceedings in Mathematics & Statistics, Springer, June 2017, pp. 327–335, [https://doi.org/10.1007/978-3-319-57394-6\\_35](https://doi.org/10.1007/978-3-319-57394-6_35).
- [21] S. CANDEL, *Mécanique des fluides*, Sciences Sup, Dunod, 2002.
- [22] S. S. CHOW, *Finite element error estimates for non-linear elliptic equations of monotone type*, Numer. Math., 54 (1989), pp. 373–393, <https://doi.org/10.1007/BF01396320>.
- [23] O. DELESTRE, *Simulation du ruissellement d'eau de pluie sur des surfaces agricoles*, PhD thesis, Université d'Orléans, 2010, <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00531377v3>.
- [24] E. DI BENEDETTO AND M. A. HERRERO, *Non-negative solutions of the evolution  $p$ -Laplacian equation. initial traces and Cauchy problem when  $1 < p < 2$* , Trans. Amer. Math. Soc., 314 (1989), pp. 187–224, <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1989-0962278-5>.
- [25] J. DRONIOU, *Degrés topologiques et applications*, June 2006, <http://users.monash.edu.au/~jdroniou/docs/degre.pdf>.
- [26] J. DRONIOU, *Finite volume schemes for fully non-linear elliptic equations in divergence form*, ESAIM : Math. Model. Numer. Anal., 40 (2006), pp. 1069–1100, <https://doi.org/10.1051/m2an:2007001>.

- 
- [27] F. DUMAS, *Étude et simulation d'un modèle stratigraphique*, master's thesis, Université de Cergy-Pontoise, 2014.
- [28] L. C. EVANS, *Weak Convergence Methods for Nonlinear Partial Differential Equations*, vol. 74 of CBMS Regional Conference Series, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1990.
- [29] R. EYMARD AND T. GALLOUËT, *Analytical and numerical study of a model of erosion and sedimentation*, SIAM Journal on Numerical Analysis, 43 (2006), pp. 2344–2370, <https://doi.org/10.1137/040605874>.
- [30] R. EYMARD, T. GALLOUËT, V. GERVAIS, AND R. MASSON, *Existence and uniqueness of a weak solution to a stratigraphic model*, in Numerical Mathematics and Advanced Applications, M. Feistauer, V. Dolejší, P. Knobloch, and K. Najzar, eds., Springer, Berlin, 2004, pp. 278–287, [https://doi.org/10.1007/978-3-642-18775-9\\_25](https://doi.org/10.1007/978-3-642-18775-9_25).
- [31] R. EYMARD, T. GALLOUËT, V. GERVAIS, AND R. MASSON, *Convergence of a numerical scheme for stratigraphic modeling*, SIAM J. Numer. Anal., 43 (2005), pp. 474–501, <https://doi.org/10.1137/S0036142903426208>.
- [32] R. EYMARD, T. GALLOUËT, M. GHILANI, AND R. HERBIN, *Error estimates for the approximate solutions of a nonlinear hyperbolic equation given by finite volume schemes*, IMA J. Numer. Anal., 18 (1998), pp. 563–594, <https://doi.org/10.1093/imanum/18.4.563>.
- [33] R. EYMARD, T. GALLOUËT, D. GRANJEON, R. MASSON, AND Q. H. TRAN, *Multilithology stratigraphic model under maximum erosion rate constraint*, Int. J. Numer. Meth. Eng., 60 (2004), pp. 527–548, <https://doi.org/10.1002/nme.974>.
- [34] R. EYMARD, T. GALLOUËT, AND R. HERBIN, *Finite volume methods*, in Techniques of Scientific Computing (Part 3), P. G. Ciarlet and J. L. Lions, eds., vol. VII of Handbook of Numerical Analysis, North-Holland, Elsevier, Amsterdam, 2000, pp. 713–1018, [https://doi.org/10.1016/S1570-8659\(00\)07005-8](https://doi.org/10.1016/S1570-8659(00)07005-8).
- [35] R. EYMARD, T. GALLOUËT, AND R. HERBIN, *Cell centred discretisation of non linear elliptic problems on general multidimensional polyhedral grids*, J. Numer. Math., 17 (2009), pp. 173–193, <https://doi.org/10.1515/JNUM.2009.010>.
- [36] P. B. FLEMINGS AND T. E. JORDAN, *A synthetic stratigraphic model of foreland basin development*, Journal of Geophysical Research : Solid Earth, 94 (1989), pp. 3851–3866, <https://doi.org/10.1029/JB094iB04p03851>.
- [37] G. B. FOLLAND, *Real Analysis : Modern Techniques and Their Applications*, Pure and Applied Mathematics : A Wiley Series of Texts, Monographs and Tracts, John Wiley & Sons, New York, 1999.
- [38] J. FOURIER, *Théorie analytique de la chaleur*, Firmin Didot, père et fils, 1822, <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k1045508v>.
- [39] T. G. FREEMAN, *Calculating catchment area with divergent flow based on a regular grid*, Computers & Geosciences, 17 (1991), pp. 413–422, [https://doi.org/10.1016/0098-3004\(91\)90048-I](https://doi.org/10.1016/0098-3004(91)90048-I).
- [40] G. GAGNEUX AND G. VALLET, *Sur des problèmes d'asservissements stratigraphiques*, ESAIM : Contr. Optim. Calcul. Varia., 8 (2002), pp. 715–739, <https://doi.org/10.1051/cocv:2002055>.

- [41] G. GAGNEUX AND G. VALLET, *A result of existence for an original convection-diffusion equation*, Rev. R. Acad. Cien. Serie A. Mat., 99 (2005), pp. 125–131.
- [42] V. GERVAIS, *Étude et Simulation d'un Modèle Stratigraphique Multi-Lithologique sous Contrainte de Taux d'Érosion Maximal*, PhD thesis, Université de Provence, Aix-Marseille I, November 2004, <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01445562>.
- [43] V. GERVAIS AND R. MASSON, *Mathematical and numerical analysis of a stratigraphic model*, ESAIM : Math. Model. Numer. Math., 38 (2004), pp. 585–611, <https://doi.org/10.1051/m2an:2004035>.
- [44] V. GERVAIS AND R. MASSON, *Numerical simulation of a stratigraphic model*, Comput. Geosci., 12 (2008), pp. 163–179, <https://doi.org/10.1007/s10596-007-9076-4>.
- [45] R. GLOWINSKI AND A. MARROCO, *Sur l'approximation, par éléments finis d'ordre un, et la résolution, par pénalisation-dualité d'une classe de problèmes de Dirichlet non linéaires*, RAIRO Anal. Numér., 9 (1975), pp. 41–76, [http://www.numdam.org/item?id=M2AN\\_1975\\_\\_9\\_2\\_41\\_0](http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1975__9_2_41_0).
- [46] W. H. GRAF AND M. S. ALTINAKAR, *Hydraulique fluviale : Écoulement et phénomènes de transport dans les canaux à géométrie simple*, vol. 16 of *Traité de Génie Civil*, Presses polytechniques et universitaires romandes, 2000.
- [47] D. GRANJEON, *Modélisation stratigraphique déterministe : Conception et applications d'un modèle diffusif 3-D multilithologique*, PhD thesis, Université de Rennes I, 1996, <https://geosciences.univ-rennes1.fr/IMG/pdf/Granjeon.pdf>.
- [48] D. GRANJEON, *Schéma numérique de Dionisos*. Note de travail IFPEN, 2013.
- [49] D. GRANJEON AND P. JOSEPH, *Concepts and applications of a 3-d multiple lithology, diffusive model in stratigraphic modeling*, Numerical Experiments in Stratigraphy : Recent Advances in Stratigraphic and Sedimentologic Computer Simulations, 62 (1999), pp. 197–210, [https://www.researchgate.net/publication/285273811\\_Concepts\\_and\\_applications\\_of\\_a\\_3-D\\_multiple\\_lithology\\_diffusive\\_model\\_in\\_stratigraphic\\_modeling](https://www.researchgate.net/publication/285273811_Concepts_and_applications_of_a_3-D_multiple_lithology_diffusive_model_in_stratigraphic_modeling).
- [50] G. GROPELLIER AND B. LELANDAIS, *The Arcane development framework*, in Proceedings of the 8th Workshop on Parallel/High-Performance Object-Oriented Scientific Computing, ACM, 2009, <https://doi.org/10.1145/1595655.1595659>.
- [51] P. L. HELLER AND C. PAOLA, *The large-scale dynamics of grain-size variation in alluvial basins, 2 : Application to syntectonic conglomerate*, Basin Research, 4 (1992), pp. 91–102, <https://doi.org/10.1111/j.1365-2117.1992.tb00146.x>.
- [52] C. HIRSCH, *Numerical Computation of Internal and External Flows : The Fundamentals of Computational Fluid Dynamics*, Elsevier Science, 2007.
- [53] P. HOLMGREN, *Multiple flow direction algorithms for runoff modelling in grid based elevation models : An empirical evaluation*, Hydrological Processes, 8 (1994), pp. 327–334, <https://doi.org/10.1002/hyp.3360080405>.
- [54] T. E. JORDAN AND P. B. FLEMINGS, *Large-scale stratigraphic architecture, eustatic variation, and unsteady tectonism : A theoretical evaluation*, Journal of Geophysical Research : Solid Earth, 96 (1991), pp. 6681–6699, <https://doi.org/10.1029/90JB01399>.

- 
- [55] S. KAMIN AND J. L. VÁZQUEZ, *Fundamental solutions and asymptotic behaviour for the  $p$ -Laplacian equation*, Rev. Mat. Iberoamericana, 4 (1988), pp. 339–354.
- [56] O. KAVIAN, *Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques*, vol. 13 of Mathématiques & Applications, Springer-Verlag, 1993.
- [57] M.-H. LÊ, *Modélisation multi-échelle et simulation numérique de l'érosion des sols de la parcelle au bassin versant*, PhD thesis, Université d'Orléans, 2012, <http://www.theses.fr/2012ORLE2059>.
- [58] P. A. MARTINEZ AND J. W. HARBAUGH, *Simulating Nearshore Environments*, vol. 12 of Computer Methods in the Geosciences, Pergamon Press, 1993.
- [59] C. PAOLA, P. L. HELLER, AND C. L. ANGEVINE, *The large-scale dynamics of grain-size variation in alluvial basins, 1 : Theory*, Basin Research, 4 (1992), pp. 73–90, <https://doi.org/10.1111/j.1365-2117.1992.tb00145.x>.
- [60] P. QUINN, K. BEVEN, P. CHEVALLIER, AND O. PLANCHON, *The prediction of hillslope flow paths for distributed hydrological modelling using digital terrain models*, Hydrological Processes, 5 (1991), pp. 59–79, <https://doi.org/10.1002/hyp.3360050106>.
- [61] A. QUIQUEREZ, P. ALLEMAND, AND G. DROMART, *Dibafill : a 3-d two-lithology diffusive model for basin infilling*, Computers & Geosciences, 26 (2000), pp. 1029–1042, [https://doi.org/10.1016/S0098-3004\(00\)00056-X](https://doi.org/10.1016/S0098-3004(00)00056-X).
- [62] J. C. RIVENÆS, *Application of a dual-lithology, depth-dependent diffusion equation in stratigraphic simulation*, Basin Research, 4 (1992), pp. 133–146, <https://doi.org/10.1111/j.1365-2117.1992.tb00136.x>.
- [63] Y. SAAD, *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2nd ed., 2003, <https://doi.org/10.1137/1.9780898718003>.
- [64] J. SIMON, *Compact sets in the space  $L^p(0, t; b)$* , Ann. Mat. Pur. Appl., 146 (1986), pp. 65–96, <https://doi.org/10.1007/BF01762360>.
- [65] M. W. SMITH, N. J. COX, AND L. J. BRACKEN, *Applying flow resistance equations to overland flows*, Progress in Physical Geography : Earth and Environment, 31 (2007), pp. 363–387, <https://doi.org/10.1177/0309133307081289>.
- [66] D. G. TARBOTON, *A new method for the determination of flow directions and upslope areas in grid digital elevation models*, Water Resources Research, 33 (1997), pp. 309–319, <https://doi.org/10.1029/96WR03137>.
- [67] D. M. TETZLAFF AND J. W. HARBAUGH, *Simulating Clastic Sedimentation*, Computer Methods in the Geosciences, Van Nostrand Reinhold, New-York, 1989.
- [68] P. UNG, *Simulation numérique du transport sédimentaire : Aspects déterministes et stochastiques*, PhD thesis, Université d'Orléans, 2016, <http://www.theses.fr/2016ORLE2019>.
- [69] H. VAN DER VORST, *Bi-CGSTAB : A Fast and Smoothly Converging Variant of Bi-CG for the Solution of Nonsymmetric Linear Systems*, SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing, 13 (1992), pp. 631–644, <https://doi.org/10.1137/0913035>.
- [70] P. VIOLLET, J. CHABARD, AND P. ESPOSITO, *Mécanique des fluides appliquée : écoulements incompressibles dans les circuits, canaux et rivières, autour des structures et dans l'environnement*, Presses de l'Ecole nationale des ponts et chaussées, 2003.

- [71] A. VISINTIN, *Models of Phase Transitions*, Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, Birkhäuser, Boston, 1996, <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4078-5>.
- [72] H. VIVIAND, *Modèles simplifiés d'écoulements dans les conduites pétrolières*, Rapport d'étude Principia IFP.RET.43.069.02, Principia Recherche Développement S.A., La Seyne-sur-Mer, 1996.
- [73] N. ZUBER AND J. A. FINDLAY, *Average volumetric concentration in two-phase flow systems*, J. Heat Transfer, 87 (1965), pp. 453–468, <https://doi.org/10.1115/1.3689137>.



**Titre :** Étude et simulation d'un modèle stratigraphique advecto-diffusif non-linéaire avec frontières mobiles

**Mots clés :** modèle stratigraphique, diffusion non-linéaire, inégalités variationnelles, volumes finis

**Résumé :** Retracer l'histoire d'un bassin est un préalable essentiel à toute recherche d'hydrocarbures. Pour cela, on a recours à un modèle stratigraphique, qui simule l'évolution des bassins sédimentaires sur de grandes échelles de temps (millions d'années) et d'espace (centaines de kilomètres). Le logiciel Dionisos, développé à IFPEN depuis 1992 et très apprécié par les compagnies pétrolières, permet d'effectuer ce type de calculs en prenant en compte deux grands processus physiques : (1) le transport gravitaire des sédiments dû à l'inclinaison du sol ; (2) l'écoulement de l'eau provenant des fleuves et des précipitations.

Le transport gravitaire est décrit par une équation de diffusion dans laquelle le flux de sédiments dépend de la pente du sol. Initialement, cette dépendance est linéaire. Pour mieux s'approcher des observations réelles, on souhaite la rendre non-linéaire par l'intermédiaire d'un p-Laplacien. Ce changement nécessite la conception d'une nouvelle méthode de

résolution numérique, qui doit offrir non seulement une grande rapidité d'exécution, mais aussi des garanties de robustesse et de précision des résultats. De plus, elle doit être compatible avec une contrainte sur le taux d'érosion présente dans le modèle. L'ajout de l'écoulement de l'eau est aussi une sophistication récente du modèle physique de Dionisos. Il se traduit par l'introduction d'une nouvelle équation aux dérivées partielles, couplée à celle du transport. Là encore, il est important d'élaborer une stratégie de résolution numérique innovante, en ce sens qu'elle doit être à la fois performante et bien adaptée au fort couplage de ces deux phénomènes.

L'objectif de cette thèse est de moderniser le cœur numérique de Dionisos afin de traiter plus adéquatement les processus physiques ci-dessus. On cherche notamment à élaborer un schéma implicite par rapport à toutes les inconnues qui étend et améliore le schéma actuel. Les méthodologies retenues serviront de base à la prochaine génération du calculateur.

**Title:** Numerical methods for a stratigraphic model with nonlinear diffusion and moving frontier areas

**Keywords:** stratigraphic model, nonlinear diffusion, variational inequalities, finite volumes

**Abstract:** An essential prerequisite to finding hydrocarbons is to trace back the history of a basin. To this end, geologists resort to a stratigraphic model, which simulates the evolution of sedimentary basins over large time scales (million years) and space (hundreds of kilometers). The Dionisos software, developed by IFPEN since 1992 and highly praised by oil companies, makes this type of calculation possible by accounting for two main physical processes: (1) the sediment transport due to gravity; (2) the flow of water from rivers and rains.

The gravity transport is described by a diffusion equation in which the sediment flow depends on the slope of the ground. Initially, this dependence is linear. To better match experimental observations, we wish to make it nonlinear by means of a p-Laplacian. This upgrade requires to design a dedicated numerical method which should not only run fast but also provide

guarantees of robustness and accuracy. In addition, it must be compatible with a constraint on the erosion rate in the present model. The water flow due to rivers and rains is also a recent enhancement brought to the physical model of Dionisos. This is achieved by introducing a new partial differential equation, coupled with that of sediment transport. Again, it is capital to work out an innovative numerical strategy, in the sense that it must be both efficient and well suited to the strong coupling of these two phenomena.

The objective of this thesis is to rejuvenate the numerical schemes that lie at the heart of Dionisos in order to deal more adequately with the physical processes above. In particular, we look for an implicit scheme with respect to all the unknowns that extends and improves the current scheme. The methodologies investigated in this work will serve as a basis for the next generation of stratigraphic modelling softwares.