



**HAL**  
open science

# Coordination des décisions de planification dans une chaîne logistique

Siao-Leu Phouratsamay

► **To cite this version:**

Siao-Leu Phouratsamay. Coordination des décisions de planification dans une chaîne logistique. Recherche opérationnelle [math.OC]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2017. Français. NNT : 2017PA066547 . tel-01896726v1

**HAL Id: tel-01896726**

**<https://theses.hal.science/tel-01896726v1>**

Submitted on 16 Oct 2018 (v1), last revised 13 Dec 2018 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE DE DOCTORAT DE  
L'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE-CURIE

Présentée par :

**Siao-Leu PHOURATSAMAY**

Pour obtenir le grade de :  
DOCTEUR en INFORMATIQUE

Spécialité : Recherche opérationnelle

---

**Coordination des décisions de planification dans une chaîne  
logistique**

---

Devant le jury composé de :

M. Christian ARTIGUES <i>LAAS, Université de Toulouse, CNRS</i>	Examineur
M. Yves DALLERY <i>LGI, École Centrale de Paris</i>	Examineur
M. Stéphane DAUZÈRE-PÉRÈS <i>LIMOS, École des mines de Saint-Étienne</i>	Rapporteur
Mme. Safia KEDAD-SIDHOUM <i>LIP6, Université Pierre et Marie-Curie</i>	Directrice de thèse
M. Nicolas MAUDET <i>LIP6, Université Pierre et Marie-Curie</i>	Examineur
Mme. Fanny PASCUAL <i>LIP6, Université Pierre et Marie-Curie</i>	Co-encadrante de thèse
M. Bernard PENZ <i>G-SCOP, Grenoble INP</i>	Rapporteur

Date de soutenance : 27 novembre 2017



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction et positionnement des travaux</b>	<b>1</b>
1.1	Présentation d'une chaîne logistique . . . . .	2
1.1.1	Qu'est-ce-qu'une chaîne logistique? . . . . .	2
1.1.2	Niveaux de décision dans une chaîne logistique . . . . .	3
1.1.3	Activités d'une chaîne logistique . . . . .	3
1.2	Introduction à la gestion d'une chaîne logistique . . . . .	4
1.2.1	Nécessité de la coordination dans une chaîne logistique . . . . .	4
1.2.2	Partage d'informations et asymétrie d'information . . . . .	5
1.2.3	Introduction aux mécanismes de coordination par des contrats . . . . .	8
1.3	Les problèmes de lot-sizing . . . . .	9
1.3.1	Le problème de lot-sizing à un niveau . . . . .	9
1.3.2	Le problème de lot-sizing multi-niveaux . . . . .	14
1.4	Contributions . . . . .	17
<b>2</b>	<b>Coordination avec monopole du distributeur</b>	<b>19</b>
2.1	Introduction . . . . .	19
2.2	Rappel sur la résolution du problème 2ULS . . . . .	21
2.3	Information complète . . . . .	23
2.3.1	Contrat sans transfert d'argent . . . . .	23
	Définition du problème . . . . .	23
	Algorithme de programmation dynamique . . . . .	24
2.3.2	Contrat avec transfert sur le coût de stockage du distributeur . . . . .	27
	Définition du problème . . . . .	27
	Analyse de complexité . . . . .	28
2.3.3	Contrat avec transfert d'argent sur le coût total . . . . .	31
	Formulation mathématique du problème $P_{CT}$ . . . . .	31
	Déterminer le contrat optimal proposé par le fournisseur . . . . .	32
2.4	Asymétrie d'information . . . . .	32
2.4.1	Contrat sans transfert d'argent . . . . .	34
2.4.2	Contrat avec transfert d'argent . . . . .	35
	Formulation mathématique du problème . . . . .	35
	Résultat d'inapproximabilité . . . . .	36
2.5	Extension au cas avec plusieurs distributeurs . . . . .	37
2.5.1	Définition du problème . . . . .	37
2.5.2	Formulation mathématique . . . . .	38
2.6	Conclusion . . . . .	40
<b>3</b>	<b>Coordination avec monopole du fournisseur</b>	<b>43</b>
3.1	Introduction . . . . .	43
3.2	État de l'art . . . . .	45

3.2.1	Problèmes de lot-sizing avec sous-traitance . . . . .	45
3.2.2	Problèmes de coordination avec réservation de capacité . . . . .	46
3.3	Contrat avec paiement des coûts de stockage par le distributeur . . . . .	47
3.3.1	Définition du problème . . . . .	47
3.3.2	Résolution du problème 2ULS-FP . . . . .	49
3.4	Contrat de réservation de capacité et sous-traitance . . . . .	50
3.4.1	Définition du problème . . . . .	50
3.4.2	Transfert d'argent total . . . . .	51
3.4.3	Transfert d'argent sur une partie des coûts fixes du fournisseur . . . . .	62
3.4.4	Pas de transfert d'argent sur les coûts fixes du fournisseur . . . . .	66
3.5	Conclusion . . . . .	70
<b>4</b>	<b>Analyse expérimentale de la pertinence des contrats</b>	<b>73</b>
4.1	Monopole du distributeur . . . . .	73
4.1.1	Génération d'instances . . . . .	73
4.1.2	Analyse des résultats avec information complète . . . . .	74
4.1.3	Analyse des résultats avec asymétrie d'information . . . . .	76
4.1.4	Extension à plusieurs distributeurs . . . . .	80
4.2	Monopole du fournisseur . . . . .	81
4.2.1	Génération d'instances . . . . .	81
4.2.2	Analyse des résultats . . . . .	81
4.3	Conclusion . . . . .	87
<b>5</b>	<b>Problème de lot-sizing à deux niveaux avec capacité de stockage</b>	<b>89</b>
5.1	Introduction . . . . .	89
5.2	Formulation mathématique . . . . .	91
5.3	Étude du problème 2ULS-IB-R . . . . .	92
5.3.1	Propriétés de dominance . . . . .	92
5.3.2	Formules de récurrence . . . . .	94
	Calcul du coût d'un bloc . . . . .	95
	Calcul du coût optimal d'un sous-plan régulier . . . . .	96
	Calcul du coût de la chaîne logistique . . . . .	97
5.3.3	Analyse de complexité . . . . .	99
5.4	Complexité du problème 2ULS-IB-S . . . . .	100
5.5	Résolution du problème 2ULS-IB-SR . . . . .	102
5.6	Analyse des problèmes de lot-sizing avec une contrainte NLS . . . . .	104
5.6.1	Le problème ULS-IB-NLS . . . . .	104
5.6.2	Le problème 2ULS-IB-R-NLS . . . . .	106
5.6.3	Le problème 2ULS-IB-S-NLS . . . . .	106
5.6.4	Le problème 2ULS-IB-SR-NLS . . . . .	107
5.7	Conclusion . . . . .	107
	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>109</b>

# Table des figures

1.1	Exemple d'une chaîne logistique. . . . .	2
1.2	Réseau à coût fixe du problème ULS. . . . .	10
1.3	Exemple de système de production composé de trois niveaux. . . . .	14
1.4	Réseau à coût fixe pour le problème 2ULS. . . . .	15
2.1	Solution sans coordination de coût 4 pour le fournisseur. . . . .	20
2.2	Solution avec coordination de coût 3 pour le fournisseur avec une compensation égal à 1. . . . .	20
2.3	Situations possibles de l'algorithme de programmation dynamique de Zangwill (1969) . . . . .	22
2.4	Illustration du coût $H_i(t, t_1, t_2)$ quand $d_{t_1 t_2}$ unités sont stockées au niveau du fournisseur. . . . .	25
2.5	Illustration du coût $H_i(t, t_1, t_2)$ quand $t = t_1$ et $d_{t_1 t_2}$ unités sont envoyées au niveau du distributeur. . . . .	26
2.6	Illustration du coût $H_i(t, t_1, t_2)$ quand $t = t_1$ et $d_{t_1, t_3-1}$ unités sont envoyées au niveau du distributeur et $d_{t_3 t_2}$ unités sont stockées jusqu'à la période $t + 1$ au niveau du fournisseur. . . . .	26
2.7	Instance $\mathcal{I}$ du problème 2ULS-BOC. . . . .	29
2.8	Solution au problème 2ULS-BOC où $N = 3$ , $e_1 + e_3 \leq E$ et $v_1 + v_3 \geq V$ . . . . .	30
3.1	Schéma du mécanisme de coordination entre le fournisseur et le distributeur. . . . .	44
3.2	Solution du problème 2ULS-FP associée à l'instance $\mathcal{I}_c$ . . . . .	48
3.3	Instance $\mathcal{I}_1$ . . . . .	49
3.4	Solution du problème 2ULS-FP où $R = (1, 0)$ . . . . .	49
3.5	Représentation du coût $G_k$ où $R_{\alpha^k}$ est disponible à la période $\alpha^k$ et $d_{kt} \subseteq R_{\alpha^k}$ sont envoyées au niveau du distributeur à la période $k$ pour satisfaire les demandes de la période $k$ à $t$ . . . . .	50
3.6	Réseau à coût fixe du problème CLS-S-TC en considérant $T = 4$ et une capacité de production $R = (d_{12}, 0, d_{34}, 0)$ . . . . .	54
3.7	Solution du problème CLS-S-TC pour l'instance $\mathcal{I}_2$ vérifiant la propriété ZIO, de coût égal 5. . . . .	54
3.8	Solution du problème CLS-S-TC pour l'instance $\mathcal{I}_2$ sans la propriété ZIO, de coût égal 4. . . . .	54
3.9	sous-plan candidat $[2, 4]$ avec une sous-traitance à la période 2 tel que $R_2 = R_3 = R_4 = 0$ (propriété 3.4 (i)). . . . .	59
3.10	sous-plan candidat $[2, 4]$ avec une période de production saturée à la période 2 tel que $R_2 = d_{25}$ (propriété 3.4 (ii)). . . . .	59
3.11	sous-plan candidat $[2, 7]$ avec une sous-traitance à la période 2 tel que $R_2 = 0$ et il existe au moins une période $i \in \{3, \dots, 7\}$ telle que $R_i > 0$ (propriété 3.4 (iii)). . . . .	59

3.12	sous-plan candidat [2, 7] avec une sous-traitance à la période 3 tel que $R_2 = d_{23}$ (propriété 3.4 (iv)). . . . .	59
3.13	Représentation du réseau du problème CLS-S-FC où $T = 4$ et $R = (d_{12}, 0, d_{34}, 0)$ . . . . .	63
3.14	Instance $\mathcal{I}_3$ du problème CLS-S-FC. . . . .	64
3.15	Solution du problème CLS-S-FC associée à l'instance $\mathcal{I}_3$ . . . . .	64
3.16	Instance $\mathcal{I}$ du problème CLS-S-WFC considérée dans la preuve du théorème 3.1 (le nœud $p$ ainsi que les arcs sortants de ce nœud ne sont pas représentés). . . . .	69
3.17	Solution du problème CLS-S-WFC dans la preuve du théorème 3.1 où $N = 3$ et $\mathcal{S} = \{2, 3\}$ . . . . .	69
4.1	Explication du boxplot. . . . .	76
4.2	Gains du fournisseur pour les scénarios CS et CT pour chaque classe d'instances où $T = 10$ . . . . .	76
4.3	Espérance du gain du fournisseur pour le scénario CS pour chaque classe d'instances lorsque $p^D$ est privé et $T = 30$ . . . . .	78
4.4	Gain du distributeur (%) pour le scénario CS lorsque $\delta = 100$ . . . . .	82
4.5	Gain du distributeur (%) pour les scénarios ACF, SCF et TT lorsque $\delta = 100$ . . . . .	83
4.6	Gain du distributeur (%) pour le scénario CS lorsque $\delta = 1000$ . . . . .	84
4.7	Gain du distributeur (%) pour les scénarios ACF, SCF et TT lorsque $\delta = 1000$ . . . . .	85
4.8	Comparaison du gain du distributeur (%) pour les scénarios CS et TT pour $\delta = 100$ et $\delta = 1000$ . . . . .	86
5.1	Solutions pour l'instance $\mathcal{I}$ utilisée dans la preuve de la proposition 5.1. . . . .	92
5.2	Illustration des blocs et sous-plans réguliers sur une solution réalisable du problème 2ULS-IB-R où $T = 7$ . . . . .	93
5.3	Décomposition en sous-plans d'une solution du problème 2ULS-IB-R pour une instance où $T = 4$ . . . . .	95
5.4	Illustration du coût $w_{tijk}^{\alpha\gamma\beta}$ où $[i, j]$ est un sous-plan régulier et $X_{ij}$ unités sont disponibles à la période $t$ au niveau du fournisseur. . . . .	97
5.5	Illustration du coût $C_{tij}^{\alpha\beta}$ où $[i, j]$ est un sous-plan régulier et $t$ est une période de production au niveau du fournisseur. . . . .	98
5.6	Instance $\mathcal{I}_1$ du problème 2ULS-IB-S avec $n = 3$ et $\mathcal{S} = \{a_1, a_2, a_3\}$ . . . . .	101
5.7	Solution du problème 2ULS-IB-S associée à l'instance $\mathcal{I}_1$ avec $n = 3$ , $\mathcal{S} = \{a_1, a_2, a_3\}$ et $a_1 + a_3 = S$ . . . . .	102
5.8	Instance $\mathcal{I}_2$ du problème ULS-IB-NLS dans la preuve du théorème 5.3. . . . .	105
5.9	Solution du problème ULS-IB-NLS associée à l'instance $\mathcal{I}_2$ dans la preuve du théorème 5.3. . . . .	105
5.10	Solution du problème 2ULS-IB-R-NLS associée à l'instance définie dans la preuve du théorème 5.4. . . . .	106
5.11	Solution du problème 2ULS-IB-S-NLS dans la preuve du théorème 5.5. . . . .	107

# Liste des tableaux

2.1	Paramètres du distributeur dans l'exemple introductif. . . . .	20
2.2	Paramètres du fournisseur dans l'exemple introductif. . . . .	20
2.3	Paramètres du distributeur pour le problème $P_{ST}$ . . . . .	24
2.4	Paramètres du fournisseur pour le problème $P_{ST}$ . . . . .	24
2.5	Paramètres du distributeur pour le problème $P_{CS}$ . . . . .	28
2.6	Paramètres du fournisseur pour le problème $P_{CS}$ . . . . .	28
2.7	Paramètres du distributeur pour le problème $P_{CT}$ . . . . .	31
2.8	Paramètres du fournisseur pour le problème $P_{CT}$ . . . . .	31
2.9	Paramètres pour chaque profil de distributeur dans la preuve d'inapproximabilité. . . . .	36
2.10	Paramètres du fournisseur dans la preuve d'inapproximabilité. . . . .	36
2.11	Résumé des résultats de complexité pour les problèmes étudiés dans ce chapitre. . . . .	41
3.1	Résumé des résultats de complexité obtenus dans ce chapitre. . . . .	70
4.1	Description des classes d'instances où $\delta = 500$ . . . . .	74
4.2	Notations pour les différents scénarios lorsque le distributeur a le monopole. . . . .	74
4.3	Comparaison de la moyenne des gains du fournisseur (%) entre les différents scénarios où $T = 5$ . . . . .	75
4.4	Moyenne des gains du fournisseur (%) pour les scénarios ST, CS et CT lorsque $T = 10$ et $T = 20$ . . . . .	75
4.5	Moyenne de l'espérance du gain du fournisseur (%) quand $p^D$ est le coût privé. . . . .	78
4.6	Moyenne de l'espérance du gain du fournisseur (%) quand $f^D$ est privé. . . . .	79
4.7	Moyenne de l'espérance du gain du fournisseur (%) quand $h^D$ est privé. . . . .	79
4.8	Moyenne des gains du fournisseur (%) avec information complète pour les scénarios ST, CS et CT. . . . .	80
4.9	Moyenne de l'espérance du gain du fournisseur (%) pour le scénario CS lorsque $M = 3$ et $N_i = 2$ pour tout profil $i$ . . . . .	80
4.10	Description des classes d'instances. . . . .	81
4.11	Notations pour les différents scénarios lorsque le fournisseur a le monopole. . . . .	82
4.12	Moyenne des gains du fournisseur (%) pour les scénarios CS où $\delta = 100$ . . . . .	82
4.13	Moyenne des gains du fournisseur (%) pour les scénarios ACF, SCF et TT où $\delta = 100$ . . . . .	83
4.14	Moyenne des gains du fournisseur (%) pour le scénario CS où $\delta = 1000$ . . . . .	84
4.15	Moyenne des gains du fournisseur (%) pour les scénarios ACF, SCF et TT où $\delta = 1000$ . . . . .	85
5.1	Résultats de complexité des problèmes de lot-sizing à deux niveaux avec une capacité de stockage limitée et pas de contrainte NLS. . . . .	108
5.2	Résultats de complexité des problèmes de lot-sizing à deux niveaux avec une capacité de stockage limitée et la contrainte NLS. . . . .	108



# Liste des abréviations

<b>2ULS</b>	Two-level Uncapacitated Lot-Sizing
<b>2ULS-BOC</b>	Two-level Uncapacitated Lot-Sizing with Bounded Ordering Cost
<b>2ULS-FP</b>	Two-level Uncapacitated Lot-Sizing with Fixed Production
<b>2ULS-TC</b>	Two-level Uncapacitated Lot-Sizing with Total Cost
<b>2ULS-IB-R</b>	Two-level Uncapacitated Lot-Sizing with Inventory Bounds for the Retailer
<b>2ULS-IB-S</b>	Two-level Uncapacitated Lot-Sizing with Inventory Bounds for the Supplier
<b>2ULS-IB-SR</b>	Two-level Uncapacitated Lot-Sizing with Inventory Bounds for the Supplier and the Retailer
<b>ULS-IB-NLS</b>	Uncapacitated Lot-Sizing with Inventory Bounds and No Lot-Splitting
<b>2ULS-IB-R-NLS</b>	Two-level Uncapacitated Lot-Sizing with Inventory Bounds for the Retailer and No Lot-Splitting
<b>2ULS-IB-S-NLS</b>	Two-level Uncapacitated Lot-Sizing with Inventory Bounds for the Supplier and No Lot-Splitting
<b>2ULS-IB-SR-NLS</b>	Two-level Uncapacitated Lot-Sizing with Inventory Bounds for Supplier and the Retailer and No Lot-Splitting
<b>CLS</b>	Capacitated Lot-Sizing
<b>CCLS</b>	Constant Capacitated Lot-Sizing
<b>CLS-S</b>	Capacitated Lot-Sizing with Subcontracting
<b>CLS-S-FC</b>	Capacitated Lot-Sizing with Subcontracting and Fixed Cost
<b>CLS-S-TC</b>	Capacitated Lot-Sizing with Subcontracting and Total Cost
<b>CLS-S-WFC</b>	Capacitated Lot-Sizing with Subcontracting and Without Fixed Cost
<b>EOQ</b>	Economic Order Quantity
<b>LS-IB</b>	Lot-Sizing with Inventory Bounds
<b>MULS</b>	Multi-level Uncapacitated Lot-Sizing
<b>OWMR-CI</b>	One-Warehouse Multi-Retailers with Complete Information
<b>OWMR-AI</b>	One-Warehouse Multi-Retailers with Asymmetric Information
<b>ULS</b>	Uncapacitated Lot-Sizing
<b>ZIO</b>	Zero Inventory Ordering



# Liste des notations

## Paramètres

$T$	Horizon de temps
$\mathcal{T}$	Ensemble des périodes sur l'horizon de temps discret
$N$	Nombre de profils du distributeur
$\mathcal{N}$	Ensemble de tous les profils
$d_t$	Demande à satisfaire à la période $t$
$d_{tk}$	Demande cumulée entre les périodes $t$ et $k$
$p_t$	Coût de production unitaire du problème de lot-sizing mono-niveau à la période $t$
$f_t$	Coût de lancement du problème de lot-sizing mono-niveau à la période $t$
$h_t$	Coût de stockage du problème de lot-sizing mono-niveau à la période $t$
$C_t$	Capacité de production à la période $t$
$p_t^F$	Coût de production unitaire du fournisseur à la période $t$
$f_t^F$	Coût de lancement du fournisseur à la période $t$
$h_t^F$	Coût de stockage du fournisseur à la période $t$
$p_t^D$	Coût de réapprovisionnement unitaire du distributeur à la période $t$
$f_t^D$	Coût de lancement du distributeur à la période $t$
$h_t^D$	Coût de stockage du distributeur à la période $t$
$c_{opt}^D$	Coût optimal du distributeur
$c_{opt}^F$	Coût optimal du fournisseur
$P_i$	Probabilité qu'un distributeur soit de profil $i$
$c_{opt}^{D_i}$	Coût optimal du distributeur de profil $i$
$b_t$	Coût de sous-traitance unitaire du fournisseur à la période $t$
$R_t$	Réservation de capacité à la période $t$
$D_t$	Demandes couvertes par la réservation de capacité $R_t$
$u_t^D$	Capacité de stockage au niveau du distributeur à la période $t$

$u_t^F$  Capacité de stockage au niveau du fournisseur à la période  $t$

### Variables de décision

$x_t$  Quantité d'unités produites à la période  $t$  pour le problème de lot-sizing mono-niveau

$y_t$  Variable de lancement à la période  $t$  pour le problème de lot-sizing mono-niveau

$s_t$  Quantité d'unités stockées à la fin de la période  $t$  pour le problème de lot-sizing mono-niveau

$w_t$  Quantité d'unités sous-traitées à une période  $t$

$x_t^F$  Quantité d'unités produites à la période  $t$  au niveau du fournisseur

$y_t^F$  Variable de lancement du fournisseur à la période  $t$

$s_t^F$  Quantité d'unités stockées à la fin de la période  $t$  au niveau du fournisseur

$x_t^D$  Quantité d'unités approvisionnées à la période  $t$  au niveau du distributeur

$y_t^D$  Variable de lancement du distributeur à la période  $t$

$s_t^D$  Quantité d'unités stockées à la fin de la période  $t$  au niveau du distributeur

$z$  Variable représentant la quantité monétaire transférée entre le fournisseur et le distributeur

$x_{it}^F$  Quantité d'unités produites à la période  $t$  par le fournisseur pour un distributeur de profil  $i$

$y_{it}^F$  Variable de lancement du fournisseur à la période  $t$  associé à un distributeur de profil  $i$

$s_{it}^F$  Quantité d'unités stockées à la fin de la période  $t$  associé à un distributeur de profil  $i$

$x_{it}^D$  Quantité d'unités approvisionnées par le distributeur de profil  $i$  à la période  $t$

$y_{it}^D$  Variable de lancement du distributeur de profil  $i$  à la période  $t$

$s_{it}^D$  Quantité d'unités stockées à la fin de la période  $t$  par le distributeur de profil  $i$

$c_{ij}^D$  Coût total du distributeur de profil  $i$  qui déclare être de profil  $j$

$z_i$  Variable représentant la quantité monétaire transférée du fournisseur vers le distributeur de profil  $i$

$w_t^F$  Quantité d'unités sous-traitées au niveau du fournisseur à la période  $t$

$z_{CT}$  Variable représentant la quantité monétaire associée au coût total du fournisseur transférée du distributeur vers le fournisseur

## Chapitre 1

# Introduction et positionnement des travaux

Les travaux de cette thèse portent sur les problèmes de coordination de décisions de planification survenant dans une chaîne logistique afin de satisfaire la demande des clients à moindre coût. Le projet FUI intitulé "Risk, Credit Chain & Supply Chain Management"<sup>1</sup> dans lequel s'inscrit cette thèse a pour but d'intégrer des aspects financiers dans la gestion d'une chaîne logistique composée d'acteurs indépendants. En particulier, le besoin en fond de roulement<sup>2</sup> est un moyen de savoir si une entreprise gère de manière efficace sa trésorerie, plus précisément il indique si une entreprise peut subvenir à ses besoins financiers sans l'intervention d'un financement extérieur. Or, l'optimisation du besoin en fond de roulement a un lien étroit avec l'optimisation des stocks (Hofmann et Kotzab, 2010). Dans cette thèse, nous nous intéressons à la mise en place de mécanismes de coordination dans une chaîne logistique avec deux acteurs où chacun a ses propres objectifs à atteindre avec une prise en compte explicite des contraintes imposées sur les stocks. Les décisions de planification prises de manière indépendante par chaque acteur peut amener à une mauvaise performance de la chaîne logistique d'où la nécessité d'une coordination.

Ce chapitre introduit les notions utiles à la présentation de la problématique de coordination des décisions de planification au sein d'une chaîne logistique. Nous commencerons par présenter l'organisation d'une chaîne logistique ainsi que ses objectifs et les enjeux posés dans le cadre de son optimisation. Nous verrons que l'individualité des acteurs induit une sous-performance de la chaîne logistique causée entre autres par un manque de partage d'informations. De plus, les conflits entre les différents objectifs au sein d'une chaîne logistique nous amèneront à définir l'utilité de coordonner, à partir de contrats, les décisions de planification des acteurs composant une chaîne logistique.

La planification de production consiste à déterminer des quantités de production ainsi que les périodes où elles sont produites pour satisfaire des demandes discrètes sur un horizon de planification discret de sorte que les coûts soient minimisés. Ces problèmes correspondent à des problèmes de dimensionnement de lots ou *lot-sizing*. Quelques rappels utiles pour la présentation des résultats de nos travaux sont présentés dans ce chapitre.

---

1. Financement de la Région Île-de-France.

2. Le besoin en fond de roulement représente le montant qu'une entreprise doit payer pour couvrir ses besoins financiers dus aux décalages entre les décaissements (dépenses) et les encaissements (revenus) liés à son activité.

## 1.1 Présentation d'une chaîne logistique

### 1.1.1 Qu'est-ce-qu'une chaîne logistique ?

Une *chaîne logistique* peut être définie comme un ensemble d'acteurs dont le but est de transformer des matières premières en produits finis pour les vendre à des clients externes. Ainsi, une chaîne logistique peut être vue comme un *réseau logistique* composé de fournisseurs, de producteurs, d'entrepôts de stockage, de distributeurs et de clients dont le but est de satisfaire la demande des clients/consommateurs (Simchi-Levi *et al.*, 2008) (voir figure 1.1). Par exemple, dans une chaîne logistique classique, les produits finis sont fabriqués à partir de matières premières provenant d'un ou plusieurs fournisseurs. Ces matières premières sont ensuite envoyées puis transformées en produits finis dans des usines de production où des produits intermédiaires peuvent avoir été fabriqués. Les produits finis sont alors stockés temporairement dans des entrepôts avant d'être livrés à des centres de distribution ou directement aux clients. Le processus de fabrication d'un produit fini fait alors intervenir plusieurs *activités* au sein d'une chaîne logistique comme le stockage ou la fabrication de produits intermédiaires.

Différents flux circulent entre les différentes entités d'une chaîne logistique. Les *flux physiques* regroupent tous les produits physiques dont les matières premières, les produits intermédiaires et les produits finis. En général, ces flux circulent d'amont en aval dans une chaîne logistique (voir figure 1.1). Depuis quelques années, les nouvelles problématiques tels que le service après-vente ou le recyclage imposent également une circulation d'aval en amont. Des *flux financiers* associés aux flux physiques circulent d'aval en amont dans une chaîne logistique classique. Ils représentent en autres des coûts de production, de transport, de stockage ou d'immobilisation financière. Enfin, des *flux d'informations* peuvent s'échanger dans les deux sens de la chaîne logistique. Les acteurs d'une chaîne logistique étant des entités indépendantes, des échanges d'informations peuvent avoir lieu entre les acteurs. Ils concernent par exemple la demande du client externe, les coûts opérationnels ou le niveau de stock.

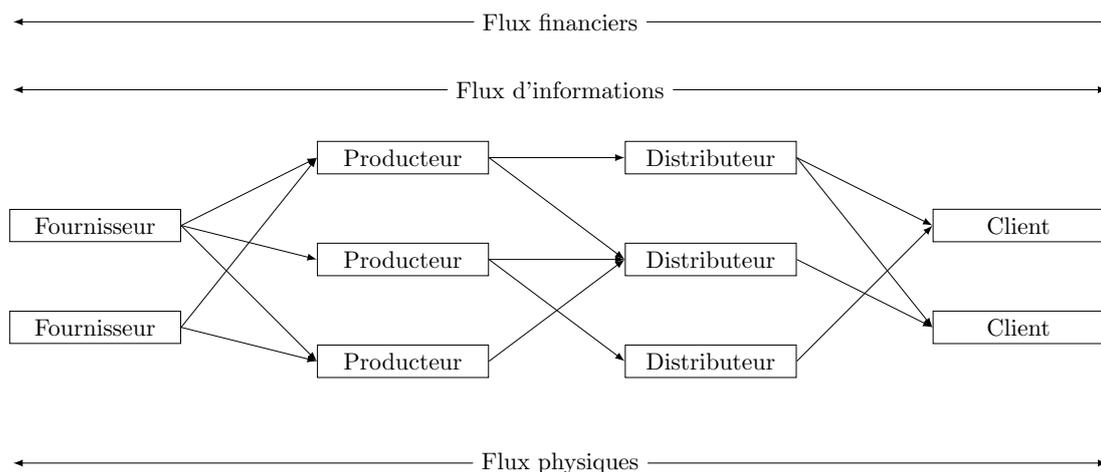


FIGURE 1.1 – Exemple d'une chaîne logistique.

Dans le cadre de la thèse, nous considérons une chaîne logistique composée d'un fournisseur, d'un distributeur et d'un unique produit fini. Nous nous intéressons à l'échange de flux physiques correspondant au produit fini allant du fournisseur au distributeur afin de satisfaire la demande exprimée au niveau du distributeur. Les flux financiers auxquels nous nous intéressons représentent les coûts de production et de stockage. Pour le fournisseur, ces coûts sont induits par la production et le stockage du produit fini. Pour le distributeur, ces coûts sont

induits par le réapprovisionnement auprès du fournisseur et le stockage du produit fini. Dans les chapitres 2 et 3, nous étudions également des flux financiers correspondant à des transferts d'argent entre le fournisseur et le distributeur.

### 1.1.2 Niveaux de décision dans une chaîne logistique

Le processus de fabrication des produits finis par les acteurs d'une chaîne logistique nécessite de prendre un ensemble de décisions. Il existe trois niveaux de décision (stratégique, tactique et opérationnelle) au sein d'une chaîne logistique. Ils dépendent de l'horizon de temps pour lequel les décisions sont prises et du niveau d'agrégation au sein de la chaîne logistique (Giard, 2003; Simchi-Levi *et al.*, 2008). Les différents niveaux de décision sont traités de manière séquentielle et hiérarchique ce qui entraîne des prises de décision indépendantes les unes des autres. Cependant, chaque niveau de décision a un impact sur les autres. Par exemple, les décisions possibles au niveau tactique ou opérationnel dépendent fortement de celles prises au niveau stratégique.

Les *décisions stratégiques* se réfèrent à un ensemble de décisions dont l'effet sur la chaîne logistique est à long terme (en général sur plusieurs années). Elles correspondent entre autres au choix et nombre des fournisseurs, à la localisation des entrepôts de stockage ou au choix des moyens de transport. À ce niveau, les décisions permettent de connaître la configuration de la chaîne logistique.

Les *décisions tactiques* représentent un ensemble de décisions à moyen terme pouvant aller de l'année à la semaine. Elles englobent par exemple les décisions qui concernent la gestion de la production, du transport et d'inventaire. En particulier, la gestion de la production inclut la planification de production dont les décisions vont dépendre de celles prises au niveau stratégique, par exemple le dimensionnement des capacités. La planification de production permet de définir les quantités à produire à chaque période de l'horizon de temps considéré pour satisfaire les demandes prévisionnelles des clients à moindre coût. Dans cette thèse, nous nous intéressons au problème de planification intervenant à ce niveau.

Pour finir, les *décisions opérationnelles* correspondent aux décisions prises à court terme, par exemple pour la journée. Elles permettent de gérer les décisions liées aux activités quotidiennes dans une chaîne logistique tels que l'ordonnancement ou le transport. Les incertitudes sur la demande étant plus faible à ce niveau, à partir des plans de production déterminés au niveau tactique, il est possible de définir des ordonnancements détaillés sur un horizon continu.

### 1.1.3 Activités d'une chaîne logistique

La fabrication des produits finis dans une chaîne logistique fait intervenir de nombreuses activités tels que le réapprovisionnement en matières premières et la vente des produits finis en passant par la production, le stockage et le transport (Simchi-Levi *et al.*, 2008). Nous nous intéressons dans le cadre de cette thèse à la production et au stockage.

La *gestion de la production* dans une chaîne logistique permet de savoir si une chaîne logistique peut réagir aux aléas de la demande des clients. L'activité de production consiste à gérer la transformation des matières premières en produits finis ainsi que leur fabrication. Il faut alors trouver un juste milieu entre la quantité à produire et les coûts induits. En effet, produire en grande quantité permet à la chaîne logistique d'être réactive et de faire face plus facilement à la variation de la demande. Cependant, les quantités produites qui ne sont pas utilisées doivent rester en stock engendrant ainsi des coûts plus élevés. Au contraire, produire en faible quantité rend la chaîne logistique moins réactive face aux aléas de la demande et peut entraîner des ruptures de stock. La chaîne logistique risque alors de dégrader sa qualité

de service. Le but de la gestion de production est de trouver un bon équilibre entre les quantités à produire et les coûts que la chaîne logistique doit investir dans la production, pour satisfaire la demande des clients.

La *gestion de stock* est également une activité centrale dans une chaîne logistique. Des contraintes telles que des demandes incertaines des clients ou des démarrages longs et coûteux de machines peuvent inciter la chaîne logistique à vouloir stocker des produits finis mais également des matières premières. Cependant, décider de stocker une grande quantité de produits comporte certains risques notamment pour les produits périssables et engendre des coûts de stockage supplémentaires. De plus, dans des centres de production organisés en juste-à-temps (Sugimori *et al.*, 1977), les entreprises cherchent à réduire les stocks et les coûts induits par ces stocks. De façon similaire, la gestion de stocks a pour but de trouver un bon compromis entre les quantités à stocker et les coûts que les entreprises sont prêtes à investir pour satisfaire la demande des clients.

Les décisions tactiques concernant la gestion de la production et du stockage nous amènent à étudier des problèmes de planification. Ces problèmes consistent à prendre des décisions de dimensionnement de lots qui consistent à déterminer la quantité de produits à fabriquer et les périodes où elles sont fabriquées (voir section 1.3) sur un horizon de temps discret. Le but est alors de trouver la meilleure manière de satisfaire la demande du client en minimisant les coûts induits par la production et le stockage.

## 1.2 Introduction à la gestion d'une chaîne logistique

### 1.2.1 Nécessité de la coordination dans une chaîne logistique

La *gestion d'une chaîne logistique* ou *Supply Chain Management* a été introduite dans les années 80 et a pris de l'ampleur dans les années 90. La gestion d'une chaîne logistique s'est développée suite à l'émergence des chaînes logistiques composées de plusieurs acteurs indépendants. Auparavant, les entreprises étaient des entités gérées de manière indépendante dont les problématiques étaient centrées sur la gestion de l'approvisionnement, de la production, du stock et de la distribution. Aujourd'hui, la gestion d'une chaîne logistique intègre d'autres problématiques liées au marketing, au service du client et à la finance, en plus de la gestion des activités initiales présentes dans une chaîne logistique. De ce fait, les différents acteurs composant une chaîne logistique ainsi que de nombreux chercheurs se sont rendus compte qu'il n'était plus suffisant de se focaliser sur l'efficacité d'un seul acteur mais plutôt sur l'ensemble de la chaîne logistique. D'une manière générale, la gestion d'une chaîne logistique considère la chaîne comme étant une seule entité au lieu de considérer chaque acteur indépendamment les uns des autres. Les objectifs sont alors d'améliorer les interactions entre les acteurs et de proposer une meilleure gestion des activités et des différents flux d'une chaîne logistique.

Comme indiqué dans la section précédente, une chaîne logistique à plusieurs niveaux est composée d'acteurs indépendants dont le but commun est de satisfaire les besoins des clients externes. De plus, chaque acteur possède également ses propres informations et contraintes ainsi que des objectifs financiers. Cependant, les activités au sein d'une chaîne logistique sont dépendantes les unes des autres. La performance d'un acteur de la chaîne logistique (par exemple la possibilité de répondre aux besoins des acteurs en amont, les coûts opérationnels) aura donc un impact sur l'ensemble de la chaîne logistique. En particulier, l'optimisation locale des activités de chaque acteur conduit à une performance non nécessairement optimale pour le système global. Cependant, il peut être intéressant de définir des mécanismes de coordination

entre les acteurs (Spengler, 1950; Tirole, 1988; Tsay *et al.*, 1999). Dans une chaîne logistique, un *mécanisme de coordination* correspond à une stratégie permettant de coordonner les décisions des acteurs de la chaîne logistique afin d'améliorer la performance du système global. Dans le contexte où les acteurs sont des entités indépendantes, il faut également mettre en place un mécanisme d'incitation afin de partager les bénéfices de la coordination entre les acteurs pour les persuader de collaborer.

La coordination peut se faire de manière *centralisée* ou *décentralisée* (Arshinder *et al.*, 2008; Li et Wang, 2007). Dans une chaîne logistique *centralisée*, les décisions sont prises de manière globale avec pour objectif de minimiser le coût global de la chaîne logistique. Pour se faire, il est possible de faire appel par exemple à un tiers qui pilotera l'ensemble de la chaîne logistique en ayant connaissance de toutes les informations de chaque acteur. Malheureusement, il est difficile de se placer dans ce cadre avec des acteurs individuels et les gains obtenus ne sont pas toujours répartis de manière équitable (Li et Wang, 2007). Dans ma thèse, nous nous plaçons dans le cadre d'une chaîne logistique *décentralisée* où les décisions sont prises localement avec la possibilité d'inciter les acteurs à dévier de leurs décisions optimales. Contrairement au cas centralisé, la méthode *décentralisée* cherche à utiliser les informations disponibles chez un acteur ainsi que des méthodes d'incitation pour faire en sorte que les acteurs prennent des décisions pour le bien du système global. La *collaboration* entre les acteurs est alors possible et se définit comme des prises de décisions dans le but d'atteindre des objectifs communs et d'avoir une meilleure performance par rapport au cas où les acteurs agissent individuellement.

Il existe plusieurs formes de mécanismes de coordination (Cachon, 2003; Sahin et Robinson, 2002; Li et Wang, 2007) tels que les contrats, la coordination des flux physiques ou le partage d'informations. Les *contrats* permettent de définir un ensemble d'engagements (par exemple la réservation d'une capacité de production par le fournisseur) entre les acteurs d'une chaîne logistique. La coordination des flux physiques a pour but d'avoir une meilleure gestion des flux physiques circulant entre les acteurs d'une chaîne logistique. Par exemple, le modèle du *vendor managed inventory*<sup>3</sup> est un mécanisme de coordination permettant de diminuer les stocks. La coordination par le partage d'informations survient lorsqu'il y a une *asymétrie d'information* entre les acteurs, *i.e.* les acteurs d'une chaîne logistique n'ont pas les mêmes connaissances sur les paramètres de coût de chacun (par exemple les coûts de production), la demande, ou encore le niveau de stock de chaque acteur (Chen, 2003). Dans les chapitres 2 et 3, nous nous intéressons aux mécanismes de coordination par l'intermédiaire des contrats dans lesquels nous intégrons la coordination des flux physiques et un transfert d'argent entre les acteurs. Dans le chapitre 2, nous étudions également le problème d'asymétrie d'information sur les paramètres de coût. Dans les sections suivantes, nous introduisons les problématiques concernant le partage d'informations et l'asymétrie d'information au sein d'une chaîne logistique ainsi que la coordination des acteurs de la chaîne à partir de contrats.

### 1.2.2 Partage d'informations et asymétrie d'information

Une chaîne logistique étant composée de différents acteurs indépendants, chaque acteur possède des informations locales qui sont privées entraînant une asymétrie d'information. Les acteurs indépendants sont réticents à partager leurs informations ce qui entraîne une inefficacité de la chaîne logistique (Lee *et al.*, 1997; Corbett et Tang, 1999; Corbett *et al.*, 2004), voir les exemples 1.1 et 1.2. Afin de coordonner leurs décisions, le partage d'informations peut être

3. Le *vendor managed inventory* est un modèle où le distributeur/client fournit des informations sur l'état de son stock à son fournisseur. En retour, le fournisseur prend la responsabilité de maintenir le niveau de stock de sorte que le distributeur/client puisse satisfaire sa demande (Grean et Shaw, 2002).

bénéfique à tous les acteurs du point de vue de la gestion du stock, du transport ou de la production.

Le manque de partage d'informations peut engendrer des effets négatifs sur la performance de la chaîne logistique. Dans une chaîne logistique à plusieurs niveaux, les informations sur la demande externe peuvent être de plus en plus faussées en amont de la chaîne logistique, engendrant entre autres une mauvaise gestion de la production due par exemple à la constitution de stocks dits de sécurité (Forrester, 1961; Lee *et al.*, 1997).

*Exemple 1.1.* Supposons que seul le distributeur connaît la demande. Le fournisseur reçoit un plan de réapprovisionnement sans connaître la demande à satisfaire. Il décide alors de produire plus d'unités que nécessaire pour que le distributeur ait un stock de sécurité afin d'anticiper une éventuelle hausse de la demande (provenant par exemple de ventes saisonnières). En répétant ce processus à chaque niveau de la chaîne logistique, la demande est surestimée et la gestion du stock devient difficile, engendrant un surcoût de stockage.

Les effets négatifs dus à la perte d'informations peuvent alors se répéter et s'accroître au sein de la chaîne logistique. Ce phénomène est appelé l'effet "coup de fouet", plus connu sous le nom de *bullwhip effect* (Lee *et al.*, 1997). Les auteurs ont déterminé quatre causes à l'origine de cet effet : les caractéristiques de la demande (élevée ou basse), la possibilité de pénurie, la difficulté de déterminer la production optimale, et la fluctuation des coûts de commande. Ce phénomène a amené les chercheurs à étudier la problématique du partage d'informations entre les acteurs.

Fugate *et al.* (2006) et Kumar et Pugazhendhi (2012) ont fourni un état de l'art sur le partage d'informations et ont montré qu'il permet d'améliorer la performance d'une chaîne logistique.

*Exemple 1.2.* Le partenariat industriel entre les entreprises Procter & Gamble (le fabricant) et Wal-Mart (le détaillant), qui remonte aux années 1980, est un exemple montrant que le partage d'informations entre les acteurs d'une chaîne logistique (Grean et Shaw, 2002) peut être bénéfique à la chaîne logistique. L'entreprise Procter & Gamble était divisée en plusieurs branches de production. Les différentes branches de production fournissaient les centres de distribution de Wal-Mart indépendamment les unes des autres. Malgré une telle organisation, le chiffre d'affaires de ces entreprises étaient en croissance. Les deux entreprises décident alors de revoir la manière dont ils gèrent leur relation pour améliorer le service auprès des clients et d'augmenter leur chiffre d'affaires. Dans ce but, elles développent ensemble un outil permettant aux deux entreprises de partager des informations dont le niveau de stock en temps réel de chaque centre de distribution de Wal-Mart. En connaissant le niveau de stock de chaque centre de distribution, l'entreprise Procter & Gamble pouvait gérer le réapprovisionnement des produits en temps réel sans avoir à attendre qu'un centre de distribution demande un réapprovisionnement, évitant ainsi d'avoir soit une rupture de stock soit un excès de stock. Cette nouvelle approche basée sur le partage d'informations a permis à ces entreprises d'augmenter considérablement leur chiffre d'affaires. Cette technique de collaboration où les informations sur les niveaux de stock sont transmises au niveau amont a ensuite été appelée *vendor managed inventory* dans la littérature.

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés à la coordination des décisions de planification dans le cas où les informations privées correspondent aux coûts opérationnels des acteurs. Lorsqu'un acteur possède plus d'informations que les autres, il a la possibilité de ne pas divulguer ses informations afin d'avoir un certain avantage ou bien de collaborer avec les autres en partageant totalement ou une partie de ses informations. Nous appellerons par la suite l'acteur qui a le plus (resp. le moins) d'informations *l'acteur dominant* (resp. *l'acteur dominé*). Le *jeu de sélection* (appelé *screening game* en anglais) (Stiglitz, 1975) est défini comme le fait que l'acteur dominé peut inciter l'acteur dominant à révéler ses informations. L'acteur dominant peut également décider de dévoiler une partie de ses informations privées; ce processus est connu

sous le nom de *signaling* dans la littérature (Spence, 1973). Dans le cadre de cette thèse, nous nous intéressons uniquement au jeu de sélection. L'acteur dominé peut améliorer sa situation en utilisant des mécanismes afin d'inciter l'acteur dominant à révéler ses informations. Parmi ces mécanismes de coordination, nous trouvons le jeu de Stackelberg, le jeu de sélection (Stiglitz, 1975) ou bien les enchères (Vickrey, 1961; Myerson, 1981). Dans le chapitre 2, le jeu de sélection est utilisée pour traiter le problème de coordination des décisions de planification avec asymétrie d'information.

*Le jeu de sélection.*

Stiglitz (1975) est le pionnier de la théorie de la sélection. À l'origine, ce jeu a été mis en place dans le but de pouvoir extraire des informations privées d'un agent prenant des décisions économiques. L'un des exemples fourni par Stiglitz (1975) consiste à étudier le salaire d'une population d'employés possédant leurs propres compétences. Pour cela, il considère dans son exemple deux profils  $E_1$  et  $E_2$  d'employés : ceux qui sont très compétents et ceux qui le sont moins. Si les profils d'employés étaient connus, chaque profil se verrait attribuer un salaire spécifique  $\theta_1$  et  $\theta_2$ . De plus, un employé est de profils  $E_1$  et  $E_2$  avec une probabilité  $p_1$  et  $p_2$  respectivement de sorte que  $p_1 + p_2 = 1$ . Dans son exemple, les employés ont le choix de participer au jeu de sélection ou non. Il fait l'hypothèse qu'il existe un processus de sélection permettant de faire une sélection parfaite induisant un coût  $c$  pour chaque employé qui choisit de participer. Le coût  $c$  est tel que

$$\theta_1 - \theta_2 > c > \theta_1 - \bar{\theta} \quad (\text{H1})$$

où  $\bar{\theta} = p_1\theta_1 + p_2\theta_2$ . L'auteur met en évidence deux équilibres : un équilibre sans jeu de sélection et un autre avec le jeu. Sans jeu de sélection, tous les employés reçoivent le même salaire  $\bar{\theta}$ . Il s'agit d'un équilibre car s'il y avait un jeu de sélection, un employé de profil  $E_1$  qui participe au jeu doit payer le coût de participation au jeu. Son salaire serait alors égal à  $\theta_1 - c < \bar{\theta}$  d'après l'hypothèse H1. Avec un jeu de sélection, les employés qui choisissent de ne pas participer reçoivent le salaire le plus bas ( $\theta_2$ ). Le salaire d'un employé de profil  $E_1$  qui choisit de participer est égal à  $\theta_1 - c$  (il doit payer le coût de participation  $c$ ). Les employés de profil  $E_2$  n'ont aucun intérêt à participer puisque leur salaire est égal à  $\theta_2$  sans participation. Il s'agit bien d'un équilibre car un employé de profil  $E_1$  a toujours intérêt à participer sinon son salaire serait égal à  $\theta_2 < \theta_1 - c$  par l'hypothèse H1. Le jeu de sélection permet alors de révéler les profils de chaque employé. Plus généralement, Stiglitz (1975) discute dans son article des avantages et des inconvénients de ce jeu.

Sucky (2006) et Mobini *et al.* (2014) ont étudié le problème de coordination dans une chaîne logistique à deux niveaux avec une asymétrie d'information et un jeu de sélection (se référer au chapitre 2 pour plus de détails). D'autres travaux ont considéré un autre mécanisme de coordination que le jeu de sélection. Viswanathan et Wang (2003), Esmaili et Zeepongsekul (2010) et Feng et Lu (2013) ont considéré un jeu de Stackelberg<sup>4</sup> pour traiter le problème de coordination dans une chaîne logistique avec asymétrie d'information. Chen (2007) et Lee et Kumara (2007) ont utilisé les mécanismes d'enchères<sup>5</sup> pour coordonner une chaîne logistique sous l'hypothèse d'asymétrie d'information composée d'un distributeur et plusieurs fournisseurs dans (Chen, 2007) et composée d'un fournisseur et plusieurs distributeurs dans (Lee et

4. Dans un jeu de Stackelberg, le joueur qui a le monopole (appelé leader) prend une décision en premier et l'impose aux autres joueurs. Les autres joueurs (appelés followers) prennent alors leurs décisions en tenant compte de celle du leader.

5. Un mécanisme d'enchères est un mécanisme de négociations où un joueur (par exemple un vendeur) met en compétition plusieurs joueurs pour atteindre un but (par exemple la vente d'un bien).

Kumara, 2007). La majorité des travaux existants dans la littérature sur l'asymétrie d'information dans une chaîne logistique concernent les problèmes de planification sur un horizon de temps continu, connus sous le nom de *Economic Ordering Quantity (EOQ)* (Harris, 1990). Peu de travaux ont considéré des problèmes de coordination avec asymétrie d'information dans le cadre des problèmes de dimensionnement de lots étudiés dans le chapitre 2 section 2.4.

Le manque de coordination peut amener à une mauvaise performance globale de la chaîne logistique même si le problème d'asymétrie d'information entre les acteurs est éliminé. Un des moyens de coordonner les décisions des acteurs consiste à établir des contrats entre eux afin de les inciter à agir pour le bien du système global.

### 1.2.3 Introduction aux mécanismes de coordination par des contrats

Cette section se place dans le cadre des problèmes de coordination des décisions de planification dans une chaîne logistique. D'après Tsay *et al.* (1999), les contrats permettent d'atteindre deux objectifs principaux : coordonner le système global en diminuant le coût total de la chaîne logistique de sorte qu'il soit le plus proche possible du coût qu'on atteindrait dans une gestion centralisée et partager les risques entre les acteurs de la chaîne logistique.

Dans une chaîne logistique à deux acteurs, certains contrats permettent au distributeur d'avoir de la flexibilité en lui autorisant à modifier sa quantité de commande originale (Tsay, 1999). D'autres autorisent des transferts d'argent entre les acteurs de sorte que le distributeur partage une partie de son revenu avec le fournisseur (Cachon et Lariviere, 2005). Pour plus de détails sur la coordination d'une chaîne logistique à partir de contrats, nous renvoyons le lecteur vers les articles suivants (Cachon, 2003; Li et Wang, 2007; Tsay *et al.*, 1999) pour des problèmes de planification sur un horizon de temps continu. Peu de travaux dans la littérature ont proposé d'étudier la mise en place de contrats dans le cadre des problèmes de dimensionnement de lots que nous étudions dans le cadre de cette thèse. Récemment, Hellion (2013) a effectué une thèse sur des contrats de stabilité dans une chaîne logistique composée de plusieurs fournisseurs, un distributeur et un produit. Ces contrats permettent de contrôler la quantité minimale de réapprovisionnement auprès du fournisseur, ainsi que les fenêtres de temps pour les réapprovisionnements. Le fournisseur a un contrat unique avec chaque distributeur défini par des capacités de production minimale et maximale qui sont stationnaires et une fenêtre de production dynamique. La fenêtre de temps dynamique permet d'assurer la fréquence des réapprovisionnements : un réapprovisionnement doit avoir lieu dans une fenêtre de temps fixée  $[t + Q + 1, t + R + 1]$ , où  $Q \leq R$  sont des paramètres et  $t$  est la période qui précède ce réapprovisionnement. Ce contrat de stabilité a été mis en œuvre dans une chaîne logistique canadienne composée d'une papetière et de ses fournisseurs. Des expérimentations ont montré que ce mécanisme est profitable aux acteurs de la chaîne logistique. Hellion (2013) a également proposé des algorithmes polynomiaux pour résoudre des variantes du problème de lot-sizing avec des quantités de production minimale et maximale, ainsi que des problèmes de lot-sizing avec fenêtre de temps de production.

Dans le cas où un des acteurs a le monopole au sein de la chaîne logistique, il peut imposer ses décisions. Les contrats permettent alors aux acteurs qui n'ont pas le monopole d'avoir plus de marge de manœuvre pour optimiser leurs coûts. De la même manière que la section précédente, nous dirons que l'acteur qui a (resp. n'a pas) le monopole est l'acteur dominant (resp. dominé) dans une chaîne logistique à deux niveaux. L'acteur dominant a le pouvoir d'imposer ses décisions. Dans les chapitres 2 et 3, nous étudierons des problèmes de coordination dans une chaîne logistique à deux acteurs où l'un d'eux a le monopole (soit le distributeur, soit le

fournisseur) et peut donc imposer son plan de production/réapprovisionnement. Afin de permettre à l'acteur dominé de modifier le plan qui lui est imposé, nous considérons le schéma de coordination suivant. Dans un premier temps, l'acteur dominant impose ses décisions de planification à l'acteur dominé ce qui peut induire un coût éventuellement élevé pour ce dernier. Dans un deuxième temps, afin de réduire son coût, l'acteur dominé peut inciter l'acteur dominant à modifier ses décisions en lui proposant un contrat composé d'un nouveau plan de production/réapprovisionnement. Le contrat proposé doit garantir que le coût de l'acteur dominant ne se dégrade pas s'il l'accepte. Nous disons alors que le contrat vérifie *la rationalité individuelle*. Afin de garantir cette propriété, le contrat est également associé à un transfert d'argent entre les acteurs. Ainsi, l'acteur dominé peut compenser l'éventuelle augmentation de coût de l'acteur dominant en lui proposant un nouveau plan et l'inciter à accepter le contrat. Différents scénarios liés aux transferts d'argent sont proposés dans les chapitres qui suivent. Un état de l'art plus détaillé sur les problèmes de coordination que nous avons traités sera également fourni.

La section suivante présente les problèmes de lot-sizing de base qui seront utiles dans l'étude des problèmes traités dans les chapitres suivants.

### 1.3 Les problèmes de lot-sizing

Le problème de lot-sizing a été introduit par Wagner et Whitin dans les années 50 (Wagner et Whitin, 1958). Il consiste à satisfaire une demande sur un horizon de temps discret de manière à minimiser les coûts de production et de stockage. Afin de satisfaire cette demande, il s'agit donc de déterminer le nombre d'unités à produire à chaque période. Ce problème est appelé *lot-sizing dynamique*, contrairement au problème sur un seul horizon de temps de discret.

Depuis les années 50, de nombreux travaux ont été menés pour étudier les problèmes de lot-sizing amenant à l'étude de plusieurs variantes du problème. Elles se distinguent entre autres par la nature de l'horizon de temps (continu ou discret), le nombre de niveaux considérés, le nombre de produits ainsi que des contraintes à prendre en compte telles que les capacités de production, ou de stockage.

Pochet et Wolsey (2006) ont publié un livre décrivant des résultats pour des problèmes de lot-sizing allant du problème de base à un niveau avec un produit et sans contrainte de capacité de production à des problèmes incluant par exemple une capacité de production ou plusieurs produits. Ils présentent plusieurs modélisations mathématiques des différents problèmes ainsi que des méthodes de résolution (programmation dynamique, approche polyédrale). Brahimi *et al.* (2006) ont proposé un état de l'art complet sur les problèmes de lot-sizing avec un produit. Une mise à jour récente de cet état de l'art a été faite par Brahimi *et al.* (2017).

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés aux modèles dynamiques avec un horizon de temps discret. L'état de l'art sur les problèmes de lot-sizing étant très vaste, nous proposons un état de l'art sur les problèmes en lien avec mes travaux de thèse. La première section présentera les résultats de base pour la résolution des problèmes de lot-sizing à un niveau et la deuxième portera sur les problèmes de lot-sizing à plusieurs niveaux.

#### 1.3.1 Le problème de lot-sizing à un niveau

Depuis les premiers travaux de Wagner et Whitin (1958) et de Manne (1958), de nombreux chercheurs se sont intéressés au problème de lot-sizing à un niveau avec un produit et sans

contrainte de capacité de production, connu sous le nom de problème ULS<sup>6</sup> dans la littérature.

### Le problème ULS.

Le but du problème ULS est de déterminer un plan de production permettant de satisfaire la demande discrète d'un unique produit de sorte que la somme des coûts de production, de lancement et de stockage soit minimisée.

#### Notations liées au problème ULS.

Soit  $\mathcal{T} = \{1, \dots, T\}$  l'ensemble des périodes sur l'horizon de temps où  $T$  représente le nombre de périodes. Nous notons par  $d_t$  la demande à satisfaire à la période  $t$ . Par la suite, la somme des demandes sur un intervalle de périodes consécutives  $[t, k]$  ( $\sum_{i=t}^k d_i$ ) est notée  $d_{tk}$ . La production d'une unité à une période  $t$  induit un coût de production unitaire  $p_t$  ainsi qu'un coût fixe de lancement production  $f_t$ . Le stockage d'une unité de la période  $t$  à la période  $t + 1$  induit un coût unitaire de stockage noté  $h_t$ . Lorsque la demande ou les paramètres de coût ne varient pas sur tout l'horizon de temps, nous disons qu'ils sont *stationnaires* ou *constants*. Par exemple, pour  $T = 3$ , le coût de stockage  $h = (1, 1, 1)$  est stationnaire.

Dans cette section, nous présentons la formulation mathématique dite *agrégée* Wagner et Whitin (1958) du problème ULS : la variable de production indique la période de production des unités de demande. Dans la formulation mathématique *désagrégée*, la variable de production indique la période de production des unités de demande ainsi que la période de consommation de ces unités. Cette formulation fait référence au problème de localisation<sup>7</sup> ou au problème de plus court chemin.

Les variables de décision du problème ULS sont les suivantes pour le modèle agrégé : la quantité d'unités produites à une période est donnée par  $x_t$ , la quantité d'unités stockées à la fin de la période  $t$  est notée  $s_t$ , enfin la variable de lancement  $y_t$  qui est égal à 1 si une production a lieu à la période  $t$ , et 0 sinon.

#### Réseau à coût fixe du problème ULS.

Zangwill (1968) a proposé de représenter le problème ULS par un réseau à coût fixe illustré dans la figure 1.2. Les nœuds 1 à  $T$  correspondent aux périodes. Un nœud source est ajouté pour représenter le flot total circulant dans le réseau  $d_{1T}$ . Les arcs reliant le nœud source à un nœud  $t$  représentent les arcs de production. Ils sont associés aux variables  $x_t$ ,  $y_t$  et aux coûts de production  $f_t$  et  $p_t$ . Les arcs de stockage sont les arcs  $(t, t + 1)$ . Ils sont associés à la variable de stock  $s_t$  et au coût de stockage  $h_t$ . Les demandes sont représentées par les arcs incidents extérieurs aux nœuds  $t = 1, \dots, T$ .

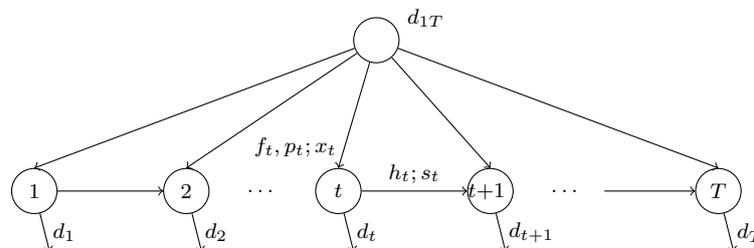


FIGURE 1.2 – Réseau à coût fixe du problème ULS.

6. ULS est l'acronyme anglais de Uncapacitated Lot-Sizing

7. Connu sous le nom de facility location problem

*Conventions pour la représentation du réseau.*

Dans la suite du manuscrit, le réseau associé à un problème de lot-sizing sera défini de la manière suivante :

- des arcs pleins pour illustrer une solution d'un problème de lot-sizing.
- des arcs en pointillés pour représenter une instance d'un problème de lot-sizing.

*Formulation mathématique du problème ULS.*

$$\min \sum_{t \in \mathcal{T}} (f_t y_t + p_t x_t + h_t s_t) \quad (1.1)$$

$$\text{s.c. } s_{t-1} + x_t = d_t + s_t \quad \forall t \in \mathcal{T}, \quad (1.2)$$

$$x_t \leq d_{tT} y_t \quad \forall t \in \mathcal{T}, \quad (1.3)$$

$$x_t, s_t \geq 0 \quad \forall t \in \mathcal{T},$$

$$y_t \in \{0, 1\} \quad \forall t \in \mathcal{T}.$$

La fonction objectif (1.1) représente la minimisation de la somme des coûts de production et du coût de stockage. La contrainte (1.2) correspond à la satisfaction de la demande à chaque période. Cette dernière contrainte est appelée contrainte de conservation de flot. La contrainte (1.3) permet d'assurer que la variable de lancement  $y_t$  vaut 1 si une production a lieu à la période  $t$ , *i.e.* si  $x_t > 0$ , et 0 sinon.  $d_{tT}$  représente un majorant sur la quantité d'unités qu'il est possible de produire à une période  $t$ .

En utilisant le fait que  $s_t = \sum_{i=1}^t x_i - d_{1t}$  pour tout  $t \in \mathcal{T}$ , il est possible d'avoir une formulation mathématique sans les variables de stockage.

*Variantes du problème ULS.*

Une variante du problème de lot-sizing mono-produit, notée CLS<sup>8</sup>, consiste à prendre en compte *une capacité de production limitée*. Cette contrainte de capacité de production se modélise en modifiant la contrainte (1.3) par :

$$x_t \leq C_t y_t \quad \forall t \in \mathcal{T} \quad (1.4)$$

où  $C_t$  représente la capacité de production à chaque période  $t$ . Lorsque la capacité de production est constante, *i.e.* qu'elle ne varie pas sur tout l'horizon de temps, le problème est noté CCLS<sup>9</sup>.

Dans le cas où la capacité de stockage est limitée, nous ajoutons à la formulation mathématique du problème ULS la contrainte suivante :

$$L_t \leq s_t \leq U_t \quad \forall t \in \mathcal{T} \quad (1.5)$$

où  $L_t$  et  $U_t$  représentent respectivement la quantité d'unités minimale et maximale pouvant être stockées à la fin de la période  $t$ . Les capacités de stockage  $L_t$  et  $U_t$  sont dites stationnaires ou constantes si elles ne varient pas sur tout l'horizon de temps. *Le problème de lot-sizing avec capacité de stockage limitée* est notée LS-IB<sup>10</sup>.

8. CLS signifie Capacitated Lot-Sizing.

9. CCLS est un acronyme pour Constant Capacitated Lot-Sizing.

10. LS-IB représente l'acronyme de Lot-Sizing with Inventory Bounds.

*Complexité et résolution des problèmes de lot-sizing à un niveau.*

De nombreux auteurs ont développé des méthodes de résolution exacte pour résoudre les problèmes de lot-sizing tels que la programmation dynamique, des approches polyédrales, des méthodes de coupes, de la relaxation lagrangienne ou des heuristiques (Pochet et Wolsey, 2006; Guner Goren *et al.*, 2010). Dans cette section, nous nous intéressons en particulier à la programmation dynamique.

La programmation dynamique consiste à résoudre un problème en le décomposant en sous-problèmes indépendants. Elle se base sur *le principe d'optimalité de Bellman* (Bellman, 1957) : la solution optimale d'un problème est une combinaison de solutions optimales des sous-problèmes qui le composent. La décomposition d'un problème en sous-problèmes repose sur une caractérisation structurelle des solutions optimales du problème.

Dans le cadre des problèmes de lot-sizing, les solutions optimales de certaines classes de problèmes possèdent des structures particulières. Elles seront détaillées par la suite et permettent de mettre en place des algorithmes de programmation dynamique pour la résolution de ces problèmes. Différents résultats sont présentés pour le problème ULS, le problème CLS ainsi que d'autres variantes du problème de lot-sizing.

Les premiers auteurs à avoir proposé un algorithme de programmation dynamique pour résoudre le problème ULS sont Wagner et Whitin (1958). Ils ont proposé une propriété de dominance définie de la manière suivante :

**Propriété 1.1 (Zero Inventory Ordering (ZIO), Wagner et Whitin (1958))**

Il existe une solution optimale du problème ULS vérifiant  $s_{t-1}x_t = 0$  pour tout  $t \in \mathcal{T}$ .

En d'autres termes, la propriété ZIO indique qu'il existe une solution optimale dans laquelle une production a lieu à une période  $t$  uniquement lorsque le stockant entrant à la période  $t$  est nul. Ainsi, une production permet de satisfaire un nombre entier de périodes de demande, *i.e.* si  $x_t > 0$  alors  $x_t = d_{tk}$  pour une période  $k \geq t$ . À partir de cette propriété, les auteurs ont proposé un algorithme de programmation dynamique en  $\mathcal{O}(T^2)$  pour résoudre le problème ULS. Lorsque les coûts sont *non-spéculatifs*, *i.e.*  $p_{t-1} + h_{t-1} \geq p_t$ , ils proposent un algorithme dont la complexité est en  $\mathcal{O}(T)$ .

Par la suite, Aggarwal et Park (1993), Federgruen et Tzur (1991) et Wagelmans et van Hoesel (1992) ont proposé d'améliorer la complexité en temps de calcul à partir de différents algorithmes de complexité  $\mathcal{O}(T \log T)$ .

**Problème de lot-sizing avec capacité de stockage limitée (LS-IB).**

Un autre aspect des problèmes de lot-sizing à un niveau que nous abordons dans cette section est *le problème de lot-sizing avec une capacité de stockage limitée*. Dans ce problème, il n'est pas possible de stocker plus que la capacité de stockage. Dans le chapitre 5 (voir p.)89, nous étendons le problème LS-IB au problème à deux niveaux, *i.e.* la capacité de stockage peut être limitée à un des deux niveaux ou aux deux niveaux. Love (1973) est le premier auteur à avoir étudié le problème LS-IB pour lequel il a proposé une propriété de dominance qui sera détaillée dans le chapitre 5. Cette propriété lui a permis de développer un algorithme de programmation dynamique en  $\mathcal{O}(T^3)$  pour résoudre le problème. De nombreux travaux ont ensuite été effectués afin soit d'améliorer la complexité de résolution, soit de prendre en compte d'autres caractéristiques (Toczyłowski, 1995; Vyve et Ortega, 2004; Atamtürk et Küçükyavuz, 2008; Hwang et van den Heuvel, 2012). Un état de l'art plus détaillé sur les problèmes LS-IB est proposé dans le chapitre 5.

van den Heuvel et Wagelmans (2008) ont montré que les formulations mathématiques des problèmes de lot-sizing suivants sont équivalents au problème LS-IB : le problème de lot-sizing avec des fenêtres de temps de production, le problème de lot-sizing avec du reconditionnement et le problème de lot-sizing avec des capacités de production cumulées. Le problème de lot-sizing avec reconditionnement peut représenter par exemple le recyclage des produits. Dans ce problème, à chaque période, une quantité de produits retournés entre dans le système. En plus de la production déjà présente initialement dans le système, ces retours peuvent être utilisés pour satisfaire la demande. Dans le problème de lot-sizing avec des capacités de production cumulées, la capacité de production qui n'est pas utilisée à une période peut être utilisée à la période suivante.

#### Problème de lot-sizing avec sous-traitance (CLS-S<sup>11</sup>).

Un autre aspect du problème de lot-sizing que nous étudions dans le cadre de cette thèse (voir chapitre 3) est le problème de lot-sizing avec sous-traitance que nous notons CLS-S. Dans la littérature, la notion de sous-traitance est connue sous le nom de *subcontracting* ou *outsourcing*. Le terme *subcontracting* définit la possibilité pour une entreprise de pouvoir acquérir une capacité de production plus élevée temporairement tandis que le terme *outsourcing* est un contrat avec une entreprise extérieure qui fournit des produits.

Le problème CLS-S se définit comme un problème de lot-sizing où deux coûts unitaires de production  $p_t$  et  $b_t \geq p_t$  sont considérés. Dans le problème CLS-S, la capacité de production est limitée. Les unités produites à une période  $t$  induisent un coût unitaire  $p_t$  tant que la capacité de production n'est pas atteinte. Au-delà de cette capacité, le coût unitaire de production est égal à  $b_t$ .

#### Formulation mathématique du problème CLS-S.

La variable  $w_t$  correspond à la quantité d'unités sous-traitées à une période  $t$ . La formulation mathématique du problème CLS-S est définie ci-dessous.

$$\min \sum_{t \in \mathcal{T}} (f_t y_t + p_t x_t + h_t s_t + b_t w_t) \quad (1.6)$$

$$\text{s.c. } s_{t-1} + x_t + w_t = d_t + s_t \quad \forall t \in \mathcal{T}, \quad (1.7)$$

$$x_t \leq C_t y_t \quad \forall t \in \mathcal{T}, \quad (1.8)$$

$$x_t, s_t, w_t \geq 0 \quad \forall t \in \mathcal{T},$$

$$y_t \in \{0, 1\} \quad \forall t \in \mathcal{T}.$$

La fonction objectif (1.6) consiste à minimiser la somme des coûts de production, de stockage et de sous-traitance. La contrainte (1.7) représente la contrainte de conservation de flot permettant de satisfaire la demande à partir d'une production ou d'une sous-traitance. La contrainte (1.8) assure que la capacité de production est respectée.

Sans sous-traitance, le problème CLS-S est un problème de lot-sizing avec capacité de production qui est NP-difficile (Florian *et al.*, 1980; Bitran et Yanasse, 1982). Avec une capacité de production constante, le problème CCLS peut être résolu par des algorithmes polynomiaux ((Akbalik et Rapine, 2012; Feng *et al.*, 2011; Kovalyov et Pesch, 2014; Ou, 2012)). Lorsque la sous-traitance et la production sont illimitées, résoudre le problème CLS-S revient à résoudre un problème ULS (Chu et Chu, 2007). Plusieurs algorithmes de programmation

11. CLS-S est l'acronyme de Capacitated Lot-Sizing with Subcontracting.

dynamique polynomiaux ont été proposés pour résoudre le problème CLS-S lorsque la capacité de production est constante (Sandbothe et Thompson, 1990; Atamtürk et Hochbaum, 2001; Chu *et al.*, 2013). Nous proposons un état de l’art plus détaillé dans le chapitre 3.

### 1.3.2 Le problème de lot-sizing multi-niveaux

Une autre extension du problème ULS consiste à prendre en compte plusieurs niveaux de production au lieu d’un seul pour représenter un système de production. Plusieurs systèmes de production existent dans la littérature : d’assemblage générale ou structure arborescente (Pochet et Wolsey, 2006). Dans ma thèse, nous nous sommes intéressés à un système de production en *série*. La figure 1.3 représente un tel système composé d’un fournisseur, d’un distributeur et d’un client. Le client doit satisfaire une demande en passant commande auprès d’un distributeur. Le distributeur doit ensuite satisfaire la commande du client en se réapprovisionnant auprès d’un fournisseur. Pour finir, le fournisseur doit satisfaire le réapprovisionnement du distributeur. Les problèmes de lot-sizing multi-niveaux permettent de représenter un tel système.

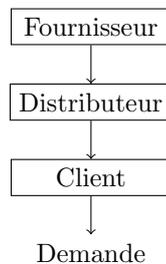


FIGURE 1.3 – Exemple de système de production composé de trois niveaux.

Dans le problème de lot-sizing à plusieurs niveaux et un produit, noté par MULS<sup>12</sup>, les demandes à chaque niveau sont dépendantes sauf la demande externe du dernier niveau. La production d’un produit à un niveau génère une demande à un niveau en amont. Dellaert *et al.* (2000) ont montré que le problème MULS avec une structure générale est NP-difficile. Un état de l’art sur le problème MULS est fourni par (Bahl *et al.*, 1987; Brahimi *et al.*, 2006). Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés au problème MULS en série introduit par Zangwill (1969), et plus particulièrement au problème à deux niveaux.

Le problème central de lot-sizing traité dans mes travaux est un problème de lot-sizing avec un produit et sans capacité de production à deux niveaux représentant une chaîne logistique à deux niveaux composée d’un fournisseur et d’un distributeur (voir figure 1.4) pour un seul produit. Ce problème est connu sous le nom de 2ULS<sup>13</sup>. Le niveau du distributeur correspond au dernier niveau où la demande externe est exprimée. Le distributeur doit satisfaire la demande d’un unique produit sur un horizon de temps discret fini. Afin de satisfaire la demande, le distributeur doit déterminer un *plan de réapprovisionnement* auprès de son fournisseur. Le fournisseur doit à son tour déterminer un *plan de production* afin de satisfaire le plan de réapprovisionnement du distributeur. Le but est alors de déterminer un plan de production et un plan de réapprovisionnement de manière à satisfaire la demande exprimée au niveau du distributeur tout en minimisant les coûts du fournisseur et du distributeur.

12. MULS est l’acronyme de Multi-level Uncapacitated Lot-Sizing.

13. La notation 2ULS fait référence au nom anglais Two-level Uncapacitated Lot-Sizing.

Notations liées au problème 2ULS.

Soit  $d_t$  la demande à satisfaire à la période  $t$  au niveau du distributeur. La production d'une unité à une période  $t$  induit un coût unitaire de production  $p_t^F$  et de réapprovisionnement  $p_t^D$  ainsi qu'un coût fixe de production  $f_t^F$  et de réapprovisionnement  $f_t^D$  pour le distributeur et pour le fournisseur respectivement. Le stockage d'une unité de la période  $t$  à la période  $t + 1$  induit un coût unitaire de stockage  $h_t^F$  au niveau du fournisseur et  $h_t^D$  au niveau distributeur respectivement.

La quantité d'unités produites à une période  $t$  au niveau du fournisseur est notée  $x_t^F$ . La quantité d'unités envoyées au niveau du distributeur est notée  $x_t^D$ . La quantité d'unités en stock à la fin de la période  $t$  au niveau du fournisseur et du distributeur est donnée par  $s_t^F$  et  $s_t^D$  respectivement. La variable  $y_t^F$  représente la variable de lancement qui est égale à 1 s'il y a une production à une période  $t$  au niveau du fournisseur. La variable de lancement  $y_t^D$  est égale à 1 s'il y a un réapprovisionnement à une période  $t$  au niveau du distributeur. Nous notons par  $c^D(y^D, x^D, s^D) = \sum_{t \in \mathcal{T}} (f_t^D y_t^D + p_t^D x_t^D + h_t^D s_t^D)$  le coût total du distributeur et  $c^F(y^F, x^F, s^F) = \sum_{t \in \mathcal{T}} (f_t^F y_t^F + p_t^F x_t^F + h_t^F s_t^F)$  celui du fournisseur.

Réseau à coût fixe du problème 2ULS.

Le réseau à coût fixe représentant le problème 2ULS est illustré dans la figure 1.4. Les nœuds 1 à  $T$  au niveau du fournisseur et du distributeur correspondent aux périodes. Un nœud source est ajouté pour représenter le flot total  $d_{1T}$  circulant dans le réseau. Les demandes externes sont représentées par les arcs incidents extérieurs aux nœuds  $1, \dots, T$  au niveau du distributeur. Les arcs reliant le nœud source aux nœuds  $1, \dots, T$  au niveau du fournisseur représentent les arcs de production. Ils sont associés aux variables de production  $x_t^F$  et de lancement  $y_t^F$ , ainsi qu'aux coûts de production  $p_t^F$  et de lancement  $f_t^F$ . Les arcs reliant les nœuds  $1, \dots, T$  au niveau du fournisseur aux nœuds  $1, \dots, T$  au niveau du distributeur représentent les arcs de réapprovisionnement. Comme pour les arcs de production, ces arcs sont associés aux variables de réapprovisionnement  $x_t^D$  et de lancement  $y_t^D$ , et aux coûts de réapprovisionnement  $p_t^D$  et de lancement  $f_t^D$ . Les arcs de stockage à chaque niveau sont représentés par les arcs  $(t, t + 1)$ . Ils sont associés aux variables de stockage  $s_t^F, s_t^D$  et aux coûts de stockage  $h_t^F, h_t^D$  au niveau du fournisseur et au niveau du distributeur respectivement.

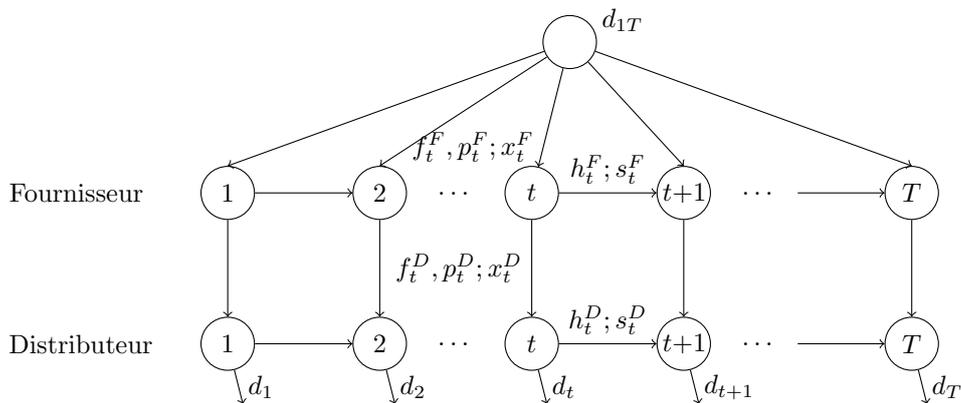


FIGURE 1.4 – Réseau à coût fixe pour le problème 2ULS.

*Formulation mathématique du problème 2ULS.*

La formulation mathématique que nous présentons ci-dessous correspond à la formulation agrégée.

$$\min \sum_{t \in \mathcal{T}} (f_t^D y_t^D + p_t^D x_t^D + h_t^D s_t^D) + \sum_{t \in \mathcal{T}} (f_t^F y_t^F + p_t^F x_t^F + h_t^F s_t^F) \quad (1.9)$$

$$\text{s.c. } s_{t-1}^D + x_t^D = d_t + s_t^D \quad \forall t \in \mathcal{T}, \quad (1.10)$$

$$s_{t-1}^F + x_t^F = x_t^D + s_t^F \quad \forall t \in \mathcal{T}, \quad (1.11)$$

$$x_t^D \leq d_{tT} y_t^D \quad \forall t \in \mathcal{T}, \quad (1.12)$$

$$x_t^F \leq d_{tT} y_t^F \quad \forall t \in \mathcal{T}, \quad (1.13)$$

$$x_t^D, s_t^D, x_t^F, s_t^F \geq 0 \quad \forall t \in \mathcal{T},$$

$$y_t^D, y_t^F \in \{0, 1\} \quad \forall t \in \mathcal{T}.$$

La fonction objectif (1.9) consiste à minimiser la somme des coûts de production, de réapprovisionnement et de stockage du distributeur et du fournisseur. Les contraintes (1.10) et (1.11) représentent les contraintes de conservation de flots permettant de satisfaire la demande. Les contraintes (1.12) assurent que les variables de lancement  $y_t^F$  valent 1 s'il y a une production à une période  $t$  au niveau du fournisseur, et 0 sinon. De la même manière, les contraintes (1.13) forcent les variables de lancement  $y_t^D$  à être égales à 1 si un réapprovisionnement a lieu à la période  $t$  au niveau du distributeur.

Une autre formulation basée sur la notion d'*échelon stock* introduite par (Clark et Scarf, 1960) permet de retrouver des sous-problèmes ULS. Cette formulation consiste à remplacer les variables de stockage par des variables d'échelon stock. Ces variables représentent le stock total du produit par période, *i.e.* la somme des quantités en stock à chaque niveau par période. Dans la formulation mathématique présentée, la demande du niveau du fournisseur dépend du niveau du distributeur. Cette nouvelle formulation permet d'avoir des sous-problèmes ULS à chaque niveau et ainsi de supprimer la dépendance entre les deux niveaux. D'autres formulations basées sur les problèmes de localisation et les problèmes de multi-commodités ont été proposées (Pochet et Wolsey, 2006). Ces formulations sont plus serrées que la formulation mathématique présentée précédemment, *i.e.* la solution de la relaxation linéaire de ces formulations sont meilleures que celle fournie par la formulation agrégée.

*Résolution par programmation dynamique.*

Zangwill (1969) a montré que la propriété ZIO de (Wagner et Whitin, 1958) reste valide à chaque niveau pour le problème MULS. Il a proposé un algorithme de programmation dynamique en  $\mathcal{O}(LT^4)$  pour résoudre le problème MULS où  $L$  représente le nombre de niveaux. Par la suite, van Hoesel *et al.* (2005) ont montré que l'algorithme de Zangwill (1969) a une complexité de  $\mathcal{O}(T^3)$  pour  $L = 2$ , *i.e.* pour le problème 2ULS. L'algorithme de (Zangwill, 1969) pour le cas  $L = 2$  est décrit dans le chapitre 2 à la section 2.2.

Melo et Wolsey (2010) ont amélioré la complexité de l'algorithme de Zangwill (1969) pour le cas  $L = 2$  en proposant un algorithme de programmation dynamique qui permet de résoudre le problème 2ULS en  $\mathcal{O}(T^2 \log T)$ . Leur algorithme consiste à déterminer de manière indépendante les périodes de réapprovisionnement au niveau du distributeur et les période de production au niveau du fournisseur, faisant apparaître des sous-problèmes ULS à résoudre.

Dans le problème MULS, une unique demande externe est exprimée au dernier niveau. Zhang *et al.* (2012) ont considéré le problème où une demande externe apparaît à chaque niveau en plus de la demande interne au système de production. Dans le cas à deux niveaux,

ils ont développé un algorithme de programmation dynamique en  $\mathcal{O}(T^3)$  pour résoudre ce problème. De plus, ils ont proposé une formulation étendue compacte du problème 2ULS.

D'autres travaux portant sur le problème de lot-sizing à deux niveaux avec capacité de production limitée sont proposés dans la littérature (van Hoesel *et al.*, 2005; Kaminsky et Simchi-Levi, 2003; Hwang *et al.*, 2016; Goisque et Rapine, 2017). Le problème de lot-sizing à deux niveaux avec une capacité de production qui peut être limitée au niveau du fournisseur et de la sous-traitance a été traité par Sargut et Romeijn (2007). Ils ont étudié le problème en considérant une capacité de production limitée ou non, une capacité de sous-traitance limitée ou non et plusieurs structures de coûts différentes. Pour le cas où la capacité de production est constante et limitée, la capacité de sous-traitance est non limitée et les paramètres de coût sont concaves, Sargut et Romeijn (2007) proposent un algorithme de programmation dynamique en  $\mathcal{O}(T^8)$ .

Peu de travaux ont considéré le problème de lot-sizing à deux niveaux avec une capacité de stockage limitée. Parmi ces travaux, on peut citer Jaruphongsa *et al.* (2004) et Hwang et Jung (2011). Ces travaux sont détaillés dans l'état de l'art du chapitre 5 dans lequel nous proposons une étude des problèmes de lot-sizing à deux niveaux en considérant une capacité de stockage sur les différents niveaux.

## 1.4 Contributions

Ce document est organisé en cinq chapitres, et suit l'ordre des contributions présentées ci-dessous. Dans cette thèse, nous proposons d'explorer de nouveaux problèmes de lot-sizing issus des problèmes de coordination des décisions de planification pouvant survenir dans une chaîne logistique. Nous nous intéressons à une chaîne logistique à deux niveaux composée d'un fournisseur et d'un distributeur en considérant le cas où le distributeur a le monopole et dans ce cas il impose au fournisseur son plan de réapprovisionnement de coût optimal, ou encore le cas où le fournisseur a le monopole et il peut imposer son plan de production de coût optimal au distributeur. Dans ce cadre, nous proposons de mettre en place des contrats afin de coordonner la chaîne logistique, *i.e.* de permettre à l'acteur dominé de modifier le plan qui lui est imposé et ainsi de diminuer son coût. La mise en place de ces contrats nous amène à étudier de nouvelles classes de problèmes de lot-sizing pour lesquelles nous cherchons à déterminer la complexité ainsi que des méthodes de résolution pour les résoudre.

Lorsque le distributeur a le monopole, notre but est de diminuer le coût du fournisseur. Les contrats que nous proposons considèrent différents scénarios selon que le transfert d'argent entre les acteurs inclut une partie ou la totalité du coût total du distributeur, ou une partie, ou la totalité du coût de stockage du distributeur, ou bien en considérant qu'aucun transfert d'argent n'a lieu entre les acteurs. La contrainte de rationalité individuelle que doivent satisfaire les contrats, *i.e.* le coût total du distributeur est au plus égal à son coût optimal en acceptant le contrat, induit une borne supérieure sur le coût du distributeur dans les problèmes de lot-sizing étudiés. Lorsque cette borne est sur le coût total du distributeur, nous avons développé un algorithme de programmation dynamique polynomial pour résoudre ce problème de lot-sizing. Nous proposons également une preuve de complexité pour un nouveau problème de lot-sizing comprenant une contrainte de borne sur le coût fixe et unitaire de réapprovisionnement. Nous avons également considéré le problème de coordination où le fournisseur ne connaît pas tous les paramètres de coût du distributeur. Dans ce cadre, nous avons montré qu'il n'existe pas d'algorithmes  $\epsilon$ -approchés à véracité garantie pour certaines classes de problèmes de lot-sizing avec asymétrie d'information. Ces résultats sont présentés dans le chapitre 2

Nous nous sommes également intéressés à la coordination d'une chaîne logistique où le fournisseur a le monopole. Nous cherchons alors à diminuer le coût du distributeur. Dans ce cas, le mécanisme de coordination que nous proposons nous amène à étudier différents problèmes de lot-sizing avec réservation de capacité et sous-traitance. De la même manière que pour le chapitre 2, la contrainte de rationalité individuelle entraîne l'ajout d'une contrainte qui impose que le coût total du fournisseur doit être au plus égal à son coût optimal dans les problèmes de lot-sizing avec sous-traitance que nous considérons. Dans notre problème de coordination, la réservation de capacité correspond à un plan de production vérifiant la propriété ZIO. De part cette spécificité, nous avons proposé des propriétés de dominance pour certaines classes de problème de lot-sizing avec sous-traitance. Ces propriétés de dominance nous ont permis de mettre en place des algorithmes de programmation dynamique polynomiaux pour résoudre ces problèmes. Ces problèmes sont décrits dans le chapitre 3.

Des analyses expérimentales dont le but est d'évaluer le gain du fournisseur et du distributeur associés aux contrats présentés dans les chapitres 2 et 3 respectivement sont présentées dans le chapitre 4. Ces analyses ont montré que les mécanismes de coordination proposés dans cette thèse sont pertinents pour améliorer la performance du système global.

Nous proposons également d'étendre l'étude du problème de lot-sizing à un niveau avec une capacité de stockage limitée au cas deux niveaux. Notre but est d'étudier la complexité de ces problèmes lorsque la capacité de stockage est limitée soit au niveau du distributeur, soit au niveau du fournisseur, ou aux deux niveaux. Nous proposons des propriétés de dominance basées sur la notion de *blocs* pour le problème où la capacité de stockage est limitée au niveau du distributeur. Nous avons développé un algorithme de programmation dynamique polynomial utilisant ces propriétés pour résoudre ce problème. Lorsque la capacité de stockage est limitée au niveau du fournisseur, nous montrons que ce problème est NP-difficile. Dans ce cas, nous proposons un algorithme de programmation dynamique pseudo-polynomial pour résoudre le problème de lot-sizing à deux niveaux avec une capacité de stockage limitée aux deux niveaux. Ces résultats se trouvent dans le chapitre 5.

## Chapitre 2

# Coordination avec monopole du distributeur

Dans ce chapitre, nous abordons le problème de coordination dans une chaîne logistique composée d'un fournisseur et d'un distributeur dans laquelle le distributeur a le monopole. Nous nous plaçons du point de vue du fournisseur afin de minimiser son coût. Nous proposons des mécanismes de coordination basés sur des contrats entre les acteurs où un transfert d'argent peut avoir lieu. Nous avons vu dans l'introduction générale que les informations propres à un acteur de la chaîne logistique telles que les paramètres de coût ne sont en général pas connues par les autres acteurs. De ce fait, dans notre étude, nous distinguerons le cas où les informations sont totalement partagées entre les acteurs et celui où une partie des informations sont privées. Notre but est de modéliser et d'analyser la complexité des problèmes induit par les mécanismes de coordination proposés.

### 2.1 Introduction

Dans une chaîne logistique composée de plusieurs acteurs possédant leurs propres objectifs, la coordination des décisions de planification des acteurs permet d'améliorer le coût total de la chaîne logistique.

Dans ce chapitre, nous faisons l'hypothèse que le distributeur a le monopole au sein de la chaîne logistique (Ailawadi *et al.*, 1995; Bloom et Perry, 2001). Il peut donc imposer son plan de réapprovisionnement au fournisseur. Lorsque les acteurs de la chaîne logistique prennent leurs décisions individuellement, le fournisseur n'a pas d'autre choix que de satisfaire le plan de réapprovisionnement imposé par le distributeur. Le coût du fournisseur pour satisfaire ce plan peut alors être élevé par rapport au coût provenant de décisions coordonnées. Dans le cas où les acteurs coordonnent leurs décisions de planification, le fournisseur a la possibilité de diminuer son coût. Un mécanisme de coordination possible est de laisser au fournisseur la possibilité de proposer un autre plan de réapprovisionnement au distributeur. Cependant, le fournisseur doit s'assurer que le plan de réapprovisionnement qu'il propose est optimal pour le distributeur pour qu'il l'accepte. Dans le cas où le plan proposé induit une augmentation de coût pour le distributeur, nous considérons que le fournisseur doit proposer une compensation qui se traduit sous la forme d'un transfert d'argent.

Exemple 2.1. Considérons l'instance suivante :

$t$	1	2	3
$f^D$	2	2	1
$p^D$	0	0	0
$h^D$	1	1	1
$d$	1	1	1

TABLE 2.1 – Paramètres du distributeur dans l'exemple introductif.

$t$	1	2	3
$f^F$	2	2	2
$p^F$	0	0	0
$h^F$	2	2	2

TABLE 2.2 – Paramètres du fournisseur dans l'exemple introductif.

Le plan de réapprovisionnement de coût optimal est donné par  $x^D = [2, 0, 1]$  de coût 4. Le plan de production de coût optimal pour satisfaire  $x^D$  est  $x^F = [2, 0, 1]$  de coût 4 (voir figure 2.1). Pour mieux coordonner leurs décisions, le fournisseur peut proposer le plan de réapprovisionnement suivant  $\bar{x}^D = [3, 0, 0]$  et une compensation égale à 1. Le plan de production de coût optimal pour satisfaire  $\bar{x}^D$  est alors  $\bar{x}^F = [3, 0, 0]$  de coût 2. Ainsi, le coût du fournisseur est égal à 3 (en incluant la compensation) au lieu de 4 (voir figure 2.2).

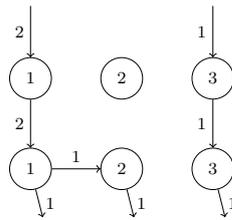


FIGURE 2.1 – Solution sans coordination de coût 4 pour le fournisseur.

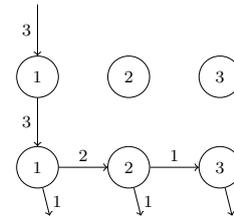


FIGURE 2.2 – Solution avec coordination de coût 3 pour le fournisseur avec une compensation égal à 1.

La revue de la littérature (Li et Wang, 2007; Cachon, 2003) montre que peu de travaux concernant la coordination des décisions de planification sur un horizon de temps discret existe. Nous proposons ici de mener une étude sur le problème de coordination en se focalisant sur la minimisation du coût du fournisseur dans un cadre dynamique. Un état de l'art sur les différents aspects de ce problème sera fourni dans les sections suivantes.

La proposition faite par le fournisseur constitue en pratique un contrat entre les deux acteurs. Dans notre étude, un contrat dit *non négociable* est proposé : le distributeur a le choix entre accepter le contrat ou le refuser. Ce contrat est composé d'un plan de réapprovisionnement et d'un transfert d'argent si le fournisseur est autorisé à payer une partie des coûts du distributeur. Nous considérons alors les différents scénarios suivants pour concevoir les contrats :

1. aucun transfert d'argent n'est autorisé entre les acteurs de la chaîne logistique. Le fournisseur doit alors proposer un contrat où le plan de réapprovisionnement est de coût optimal pour le distributeur.
2. Le fournisseur peut effectuer un transfert d'argent au distributeur pour compenser l'augmentation de son coût. On considère deux cas selon que le transfert d'argent couvre une partie ou la totalité du coût total du distributeur ou uniquement son coût de stockage.

Dans ce chapitre, nous analysons le problème de coordination en tenant compte des informations qui sont partagées ou non entre les acteurs. Dans un premier temps (section 2.3), nous faisons l'hypothèse que le fournisseur connaît avec certitude les coûts de réapprovisionnement

et de stockage du distributeur. Il peut alors calculer le coût optimal du distributeur et déterminer un contrat qui lui soit optimal. Dans un deuxième temps (section 2.4), nous considérons le cas où le distributeur possède des informations privées sur sa structure de coût. Dans ce cas, le fournisseur ne connaît pas un ou plusieurs paramètres de coût du distributeur. Nous proposons d'utiliser un *jeu de sélection*<sup>1</sup> (Stiglitz, 1975) pour modéliser ce problème de coordination. Dans le jeu de sélection, nous considérons plusieurs profils qui se différencient par rapport aux coûts du distributeur. Le fournisseur connaît tous les profils ainsi que la probabilité que le distributeur soit d'un certain profil. Le fournisseur propose des contrats de telle sorte que le distributeur choisit un contrat parmi ceux proposés et que l'espérance de coût du fournisseur soit minimisée.

**Contributions.** Notre objectif est de modéliser les problèmes de lot-sizing induits par la mise en place de contrats et d'étudier la complexité de ces problèmes. Nous proposons également des algorithmes de programmation dynamique polynomiaux afin de résoudre certains de ces problèmes. Nous considérons les différents cas suivants : soit le fournisseur a une information complète sur les coûts du distributeur, soit il ne connaît pas un ses paramètres de coût du distributeur. Pour ces deux cas, nous nous intéressons aux différents scénarios impliquant ou non un transfert d'argent. Lorsque le fournisseur a une information complète sur les coûts du distributeur, nous montrons que les problèmes de coordination avec un transfert d'argent total et sans transfert d'argent peuvent être résolus en temps polynomial. De plus, nous prouvons que le problème de coordination avec un transfert d'argent sur les coûts de stockage du distributeur est NP-difficile. Concernant l'étude de la coordination avec asymétrie d'information, le cas sans transfert d'argent peut encore être résolu en temps polynomial. Dans les cas avec transfert d'argent, nous montrons qu'il n'existe pas d'algorithme approché à véridité garantie pouvant résoudre ces problèmes. Une évaluation expérimentale du gain du fournisseur et de l'impact du partage d'information est proposée dans le chapitre 4.

**Plan du chapitre.** Pour commencer, nous rappelons dans la section 2.2 l'algorithme de programmation dynamique proposé par Zangwill (Zangwill, 1969) qui résout le problème 2ULS en temps polynomial. L'étude du problème de coordination où le fournisseur a une information complète sur les coûts du distributeur est proposée dans la section 2.3. Un état de l'art concernant la coordination d'une chaîne logistique avec information complète est fournie dans cette section. Dans la section 2.4, nous étudions le problème de coordination avec asymétrie d'information et proposons un état de l'art sur ce problème.

## 2.2 Rappel sur la résolution du problème 2ULS

Zangwill (1969) a proposé un algorithme de programmation dynamique qui résout le problème 2ULS en  $\mathcal{O}(T^3)$ . Par la suite, Melo et Wolsey (2010) ont développé un algorithme de programmation dynamique dont la complexité est en  $\mathcal{O}(T^2 \log T)$ . Dans cette section, nous présentons l'algorithme de Zangwill (1969) car nous étendons son algorithme dans la section 2.3.

L'algorithme de Zangwill (1969) se base sur des propriétés de dominance. Il a montré que la propriété ZIO reste valide pour le problème de lot-sizing à plusieurs niveaux, et donc en particulier pour le problème à deux niveaux. Soient  $t, t_1, t_2$  des périodes telles que  $1 \leq t \leq t_1 \leq t_2 \leq T$ . L'idée de l'algorithme de programmation dynamique est qu'à une période  $t$  donnée, soit les unités  $d_{t_1 t_2}$  sont entièrement envoyées au niveau du distributeur (voir figure 2.3

1. Voir section 1.2.2 du chapitre 1 p.5

cas 1), soit les unités  $d_{t_1 t_2}$  sont entièrement stockées au niveau du fournisseur jusqu'à la prochaine période  $t + 1$  (voir figure 2.3 cas 2), soit une partie des unités  $d_{t_1 t_2}$  est stockée au niveau fournisseur jusqu'à la période  $t + 1$  et l'autre partie est envoyée au niveau distributeur (voir figure 2.3 cas 3).

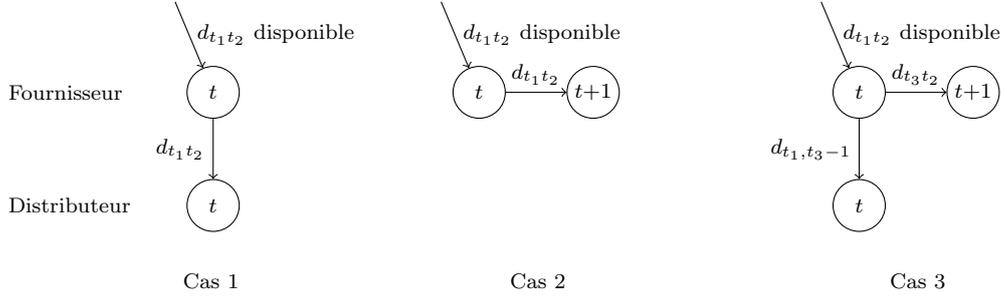


FIGURE 2.3 – Situations possibles de l'algorithme de programmation dynamique de Zangwill (1969)

Soit  $G_i(t, t_1, t_2)$  le coût minimum au niveau  $i$  pour convertir les unités  $d_{t_1 t_2}$  disponibles à la période  $t$  au niveau  $i$  en produit fini. Le coût  $G_i(t, t_1, t_2)$  sera égal à  $+\infty$  si la condition  $1 \leq t \leq t_1 \leq t_2 \leq T$  n'est pas respectée. Pour des raisons de lisibilité de l'algorithme, nous référençons le niveau du distributeur (resp. fournisseur) par le premier (resp. second) niveau. En utilisant la propriété structurelle des solutions dominantes, les formules de récurrence sont données par :

- si  $d_{t_1} > 0$ ,

$$G_i(t, t_1, t_2) = \min \{ h_t^i d_{t_1 t_2} + G_i(t + 1, t_1, t_2), \quad (2.1)$$

$$f_t^{i-1} + p_t^{i-1} d_{t_1 t_2} + G_{i-1}(t, t_1, t_2), \quad (2.2)$$

$$\min_{t_1+1 \leq t_3 \leq t_2} (f_t^{i-1} + p_t^{i-1} d_{t_1, t_3-1} + G_{i-1}(t, t_1, t_3-1) + h_t^i d_{t_3 t_2} + G_i(t + 1, t_3, t_2)) \} \quad (2.3)$$

$$\text{- si } d_{t_1} = 0, \quad G_i(t, t_1, t_2) = \begin{cases} G_i(t, t_1 + 1, t_2), & \text{si } t_1 < t_2 \\ 0, & \text{si } t_1 = t_2 \end{cases}$$

Le coût donné par l'équation (2.1) représente le stockage des unités  $d_{t_1 t_2}$  au niveau  $i$  jusqu'à la période  $t + 1$ . Le coût donné par l'équation (2.2) correspond à l'envoi des unités  $d_{t_1 t_2}$  au niveau  $i - 1$  à la période  $t$ . Enfin, l'envoi des unités  $d_{t_1, t_3-1}$  où  $t_1 + 1 \leq t_3 \leq t_2$  au niveau  $i - 1$  à la période  $t$  et le stockage des unités  $d_{t_3 t_2}$  de la période  $t$  à la période  $t + 1$  au niveau  $i$  est donné par l'équation (2.3).

L'initialisation de la récurrence est donnée par l'équation suivante :

$$G_1(t, t_1, t_2) = \begin{cases} 0, & \text{si } t = t_1 = t_2 \\ h_t^1 d_{\max(t+1, t_1), t_2} + G_1(t + 1, \max(t + 1, t_1), t_2), & \text{sinon} \end{cases}$$

Afin de connaître la quantité d'unités produites à chaque période au second niveau, il est nécessaire d'ajouter un troisième niveau fictif. La demande totale  $d_{1T}$  est disponible à la période 1 à ce niveau. De plus, le coût de stockage  $h_t^3$  de ce niveau est nul à chaque période  $t$ . Le coût optimal du problème 2ULS est alors égal à  $G_3(1, 1, T)$ .

Dans les sections suivantes, nous étudierons les mécanismes de coordination entre les acteurs. Tout d'abord, nous admettons que le fournisseur a une information complète des paramètres de coût du distributeur.

## 2.3 Information complète

Dans cette section, le fournisseur propose au distributeur un contrat non négociable  $(x^D, z)$  où  $x^D$  représente le plan de réapprovisionnement proposé au distributeur et  $z$  correspond à un éventuel transfert d'argent. Le contrat vérifie la contrainte dite de *Rationalité Individuelle* (RI) si le coût du distributeur associé au contrat ne dépasse pas son coût optimal  $c_{opt}^D$ . Le plan de réapprovisionnement de coût optimal du distributeur est calculé en résolvant un problème ULS (Wagner et Whitin, 1958). Étant donné que le fournisseur connaît les paramètres de coût du distributeur et la demande, il a la possibilité de calculer le coût optimal du distributeur. Le but du fournisseur est alors de minimiser son coût associé au contrat proposé, *i.e.* son coût total pour satisfaire le plan de réapprovisionnement  $x^D$  moins le transfert d'argent  $z$ .

**État de l'art.** La majorité des papiers qui traitent de la coordination dans une chaîne logistique avec information complète considère le problème EOQ. Nous vous renvoyons vers l'article de synthèse proposé par Li et Wang (2007) pour plus de détails. De nombreux travaux ont prouvé l'efficacité des mécanismes de coordination à partir de contrats pour améliorer le coût d'une chaîne logistique. Cachon (2003) propose un article de synthèse des contrats existants pour coordonner une chaîne logistique à plusieurs niveaux.

En revanche, peu de travaux traitent de problèmes de coordination avec une demande dynamique. Récemment, Geunes *et al.* (2016) ont considéré une chaîne logistique à deux niveaux composée d'un fournisseur et d'un distributeur. Ils proposent de coordonner les décisions de planification de la chaîne logistique à partir d'un jeu de Stackelberg<sup>2</sup>. Dans leur article, le fournisseur annonce ses coûts de production et/ou de stockage au distributeur pour le persuader de modifier son plan de réapprovisionnement. Ils ont montré qu'il était possible de diminuer le coût du fournisseur à partir des contrats de réduction de prix.

### 2.3.1 Contrat sans transfert d'argent

Dans cette section, nous considérons qu'aucun transfert d'argent n'est autorisé entre les acteurs avec la contrainte que le coût du distributeur associé au contrat proposé est au plus  $c_{opt}^D$ . Nous notons ce problème par  $P_{ST}$ .

#### Définition du problème

Dans le cas où le distributeur possède plusieurs plans de réapprovisionnement de coût optimal, le fournisseur peut choisir parmi ces plans celui qui minimisera son coût total. Ainsi, le problème consiste à déterminer parmi les plans de réapprovisionnement de coût  $c_{opt}^D$  celui qui minimise le coût du fournisseur. La formulation mathématique du problème  $P_{ST}$  est donnée

2. Un jeu de Stackelberg est défini par deux joueurs appelés "leader" et "suiveur". Le joueur leader commence par prendre ses décisions indépendamment du suiveur et le joueur suiveur prend ses décisions en fonction de celles du leader.

par :

$$\begin{aligned}
\min \quad & c^F(y^F, x^F, s^F) \\
\text{s.t.} \quad & (1.10), (1.10), (1.12), (1.13) \\
& y^D \leq x^D \quad \forall t \in \mathcal{T}, \tag{2.4} \\
& c^D(y^D, x^D, s^D) \leq c_{opt}^D \tag{RI\_ST} \\
& z \geq 0
\end{aligned}$$

Les contraintes (1.10), (1.10), (1.12), (1.13) correspondent aux contraintes du modèle mathématique du problème 2ULS (voir section 1.3.2 du chapitre 1 p.14). La contrainte (2.4) garantit que la variable de lancement  $y_t^D$  est nulle à une période  $t$  si aucun réapprovisionnement n'a lieu à cette période. Cette contrainte serait redondante si les coûts du distributeur étaient pris en compte dans la fonction objectif. La contrainte (RI\_ST) correspond à la contrainte de rationalité individuelle.

Ce problème est équivalent à résoudre un problème 2ULS sous la contrainte que le coût du distributeur ne doit pas dépasser son coût optimal. Le coût du fournisseur est alors égal à  $c^F(y^F, x^F, s^F) + c^D(y^D, x^D, s^D) - c_{opt}^D$ .

### Propriété 2.1

La collaboration entre les acteurs permet au fournisseur de pouvoir diminuer son coût d'un facteur  $M > 0$  arbitrairement élevé.

*Preuve.* Nous définissons l'instance suivante :

$t$	1	2
$f^D$	0	0
$p^D$	0	0
$h^D$	0	0
$d$	0	1

TABLE 2.3 – Paramètres du distributeur pour le problème  $P_{ST}$ .

$t$	1	2
$f^F$	0	0
$p^F$	0	$M$
$h^F$	$2M$	$2M$

TABLE 2.4 – Paramètres du fournisseur pour le problème  $P_{ST}$ .

Il existe deux plans de réapprovisionnement de coût optimal pour le distributeur donnés par  $\hat{x}^D = [0, 1]$  et  $\bar{x}^D = [1, 0]$  de coût 0. Le plan de production de coût optimal pour satisfaire  $\hat{x}^D$  est  $\hat{x}^F = [0, 1]$  et celui pour satisfaire  $\bar{x}^D$  est  $\bar{x}^F = [1, 0]$ . Dans le premier cas, le coût du fournisseur est égal à  $M$  alors qu'il est égal à 0 pour le dernier cas. Donc, du point de vue du fournisseur, il est plus intéressant de satisfaire le plan de réapprovisionnement  $\bar{x}^D$ . Le fournisseur peut alors proposer le contrat  $(\bar{x}^D, 0)$  au distributeur afin de s'assurer d'avoir un coût nul et non  $M$ .  $\square$

### Algorithme de programmation dynamique

Intuitivement, il est possible de résoudre le problème  $P_{ST}$  en énumérant tous les plans de réapprovisionnement de coût  $c_{opt}^D$  et vérifiant la propriété ZIO. Cependant, cette solution revient à déterminer tous les plans de réapprovisionnement du distributeur vérifiant la propriété ZIO puis de vérifier lesquels sont optimaux. L'énumération de tous les plans se fait en  $\mathcal{O}(T^T)$ ,

cette solution est donc de complexité exponentielle. Par la suite, nous proposons de déterminer le plan de réapprovisionnement de coût optimal  $c_{opt}^D$  minimisant le coût du fournisseur en temps polynomial à partir d'un algorithme de programmation dynamique.

Nous considérons l'algorithme de programmation dynamique proposé par Zangwill (1969) dont la complexité est en  $\mathcal{O}(T^3)$ . La propriété ZIO reste valide au niveau du fournisseur et du distributeur. Ainsi, les propriétés de dominance présentées dans la section 2.2 restent valides. L'algorithme que nous présentons se base également sur l'observation suivante. Au niveau du distributeur, comme la propriété ZIO est vérifiée, s'il y a un réapprovisionnement de  $d_{t_1 t_2}$  unités à la période  $t$ , alors aucun réapprovisionnement n'a lieu entre les périodes  $t$  et  $t_2$  et  $s_{t-1}^D = s_{t_2}^D = 0$ . Ainsi, si nous connaissons le coût total du distributeur pour satisfaire les demandes  $d_{t_1 t_2}$  à partir d'une période de réapprovisionnement  $t$ , il est possible de calculer le coût total du distributeur sur tout l'horizon en calculant de manière indépendante le coût minimum du distributeur satisfaisant les demandes  $d_{1,t-1}$  et  $d_{t_2+1,T}$ .

Un pré-calcul du coût minimum du distributeur pour satisfaire les demandes de la période  $t$  à la période  $k$ , où  $1 \leq t \leq k \leq T$ , est nécessaire pour mettre en œuvre notre algorithme. Nous notons ce coût par  $I(t, k)$ . Pour une valeur  $t$  fixée, le coût  $I(t, k)$  peut être calculé en résolvant un problème ULS en  $\mathcal{O}(T \log T)$  (Wagelmans et van Hoesel, 1992). Le coût  $I(t, k)$  peut donc être calculé en  $\mathcal{O}(T^2 \log T)$  pour toute paire de périodes  $(t, k)$  avec  $1 \leq t \leq k \leq T$ .

Rappelons que dans la présentation de l'algorithme, le niveau du distributeur (resp. fournisseur) correspond au premier (resp. second) niveau. Soient  $t, t_1, t_2$  des périodes telles que  $1 \leq t \leq t_1 \leq t_2 \leq T$ . Soit  $H_i(t, t_1, t_2)$  le coût minimum pour convertir des unités  $d_{t_1 t_2}$  disponibles à la période  $t$  au niveau  $i$  en produit fini tel que le coût total du distributeur ne dépasse pas son coût optimal  $c_{opt}^D$ . Le coût  $H_i(t, t_1, t_2)$  est égal à  $+\infty$  si le coût total du distributeur dépasse  $c_{opt}^D$ . De façon similaire à l'algorithme de Zangwill (1969), nous ajoutons un troisième niveau fictif tel que le coût de stockage  $h_t^3$  à ce niveau est nul pour tout  $t$ . Les formules de récurrence permettant de calculer  $H_i(t, t_1, t_2)$  sont obtenus à partir de celles proposées par Zangwill (1969) (voir section 2.2) en fixant un coût infini aux solutions qui violent la contrainte de rationalité individuelle. Le coût  $H_i(t, t_1, t_2)$  est calculé à partir des formules de récurrence présentées dans la section 2.2, sauf pour le cas où  $d_t > 0$  et  $i = 2$ .

Les figures 2.4, 2.5 et 2.6 représentent les trois cas décrits précédemment pour satisfaire les demandes de la période  $t_1$  à la période  $t_2$  lorsque  $d_{t_1 t_2}$  unités sont disponibles à la période  $t$  au niveau du fournisseur. Chaque terme du coût  $H_2(t, t_1, t_2)$  lorsque  $d_{t_1 t_2} > 0$ , décrit ci-dessous, est représenté dans les figures.

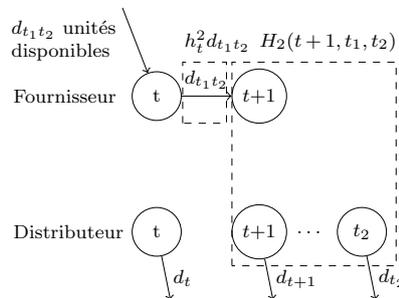


FIGURE 2.4 – Illustration du coût  $H_i(t, t_1, t_2)$  quand  $d_{t_1 t_2}$  unités sont stockées au niveau du fournisseur.

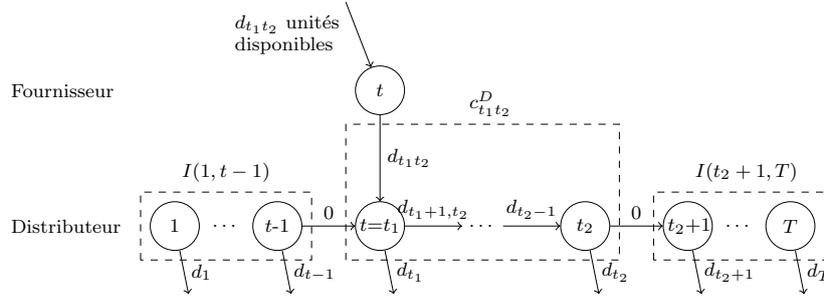


FIGURE 2.5 – Illustration du coût  $H_i(t, t_1, t_2)$  quand  $t = t_1$  et  $d_{t_1 t_2}$  unités sont envoyées au niveau du distributeur.

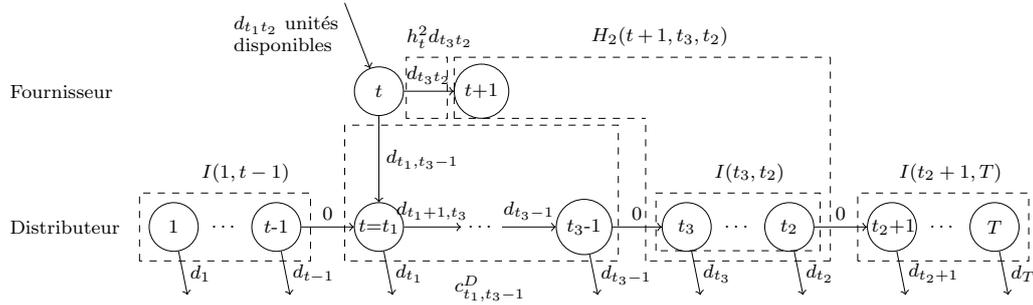


FIGURE 2.6 – Illustration du coût  $H_i(t, t_1, t_2)$  quand  $t = t_1$  et  $d_{t_1, t_3-1}$  unités sont envoyées au niveau du distributeur et  $d_{t_3 t_2}$  unités sont stockées jusqu'à la période  $t + 1$  au niveau du fournisseur.

Les formules de récurrence permettant de calculer  $H_2(t, t_1, t_2)$  sont données par :

$$\text{- si } d_{t_1} = 0, \quad H_i(t, t_1, t_2) = \begin{cases} H_i(t, t_1 + 1, t_2), & \text{si } t_1 < t_2 \\ 0, & \text{si } t_1 = t_2 \end{cases}$$

- si  $d_{t_1} > 0$ ,

$$H_3(t, t_1, t_2) = \min \left\{ \begin{aligned} & H_3(t + 1, t_1, t_2), f_t^2 + p_t^2 d_{t_1 t_2} + H_2(t, t_1, t_2), \\ & \min_{t_1+1 \leq t_3 \leq t_2} (f_t^2 + p_t^2 d_{t_1, t_3-1} + H_2(t, t_1, t_3 - 1) + H_3(t + 1, t_3, t_2)) \end{aligned} \right\}.$$

$$H_2(t, t_1, t_2) = \min \left\{ h_t^2 d_{t_1 t_2} + H_2(t + 1, t_1, t_2), \right.$$

$$\begin{aligned} & \underbrace{f_t^1 + p_t^1 d_{t_1 t_2} + H_1(t, t_1, t_2)}_{c_{t_1 t_2}^D} + \mathbb{1}(I(1, t_1 - 1) + c_{t_1 t_2}^D + I(t_2 + 1, T)), \\ & \min_{t_1+1 \leq t_3 \leq t_2} \left( \underbrace{f_t^1 + p_t^1 d_{t_1, t_3-1} + H_1(t, t_1, t_3 - 1)}_{c_{t_1, t_3-1}^D} + h_t^2 d_{t_3 t_2} + H_2(t + 1, t_3, t_2) \right. \\ & \left. + \mathbb{1}(I(1, t_1 - 1) + c_{t_1, t_3-1}^D + I(t_3, t_2) + I(t_2 + 1, T)) \right). \end{aligned} \quad (2.5)$$

où  $\mathbb{1}(c)$  est égal à 0 si  $c \leq c_{opt}^D$  et  $+\infty$  sinon. Dans l'équation (2.5), le coût  $I(1, t_1 - 1) + c_{t_1, t_2}^D + I(t_2 + 1, T)$  du deuxième terme représente le coût minimum du distributeur en imposant que la quantité  $d_{t_1 t_2}$  est envoyée à la période  $t$  au niveau du distributeur. Le coût  $I(1, t_1 - 1) + c_{t_1, t_3-1}^D + I(t_3, t_2) + I(t_2 + 1, T)$  du troisième terme correspond au coût minimum du distributeur sachant que  $d_{t_1, t_3-1}$  unités sont envoyées au niveau du distributeur à la période  $t$ . De plus, dans le troisième terme de l'équation (2.5), le coût minimum  $H_2(t + 1, t_3, t_2)$  est :

- soit différent de  $+\infty$ , dans ce cas le coût du distributeur pour satisfaire les demandes  $d_{t_3 t_2}$  calculé par  $H_2(t + 1, t_3, t_2)$  est égal à  $I(t_3, t_2)$ ,

- soit il est égal à  $+\infty$  ce qui implique que la solution où les demandes  $d_{t_3}, \dots, d_{t_4}$  avec  $t_3 \leq t_4 \leq t_3$  sont satisfaits par un réapprovisionnement à la période  $t$  ont déjà été élaguées parce que le coût total du distributeur dépasse  $c_{opt}^D$ .

L'initialisation de la récurrence se fait en posant  $H_1(t, t_1, t_2) = G_1(t, t_1, t_2)$ . Le coût optimal du problème  $P_{ST}$  est donné par  $H_3(1, 1, T)$ . Comme le pré-calcul du coût  $I(t, k)$  se fait en  $\mathcal{O}(T^2 \log T)$  pour tout  $t, k$ , la complexité de l'algorithme de programmation reste en  $\mathcal{O}(T^3)$ .

Remarquons qu'il n'est pas possible d'adapter l'algorithme de programmation dynamique possédant la meilleure complexité proposé par Melo et Wolsey (2010) pour résoudre notre problème. En effet, la décomposition des solutions utilisées dans leur algorithme ne nous permet pas de garantir la reconstitution d'une solution optimale si nous élaguons les solutions tel que le coût du distributeur dépasse  $c_{opt}^D$ .

### 2.3.2 Contrat avec transfert sur le coût de stockage du distributeur

Dans cette section, nous étudions le problème de coordination en autorisant un transfert d'argent sur les coûts de stockage du distributeur, noté  $P_{CS}$ . Ce type de transfert d'argent est également utilisé dans les contrats appelés *partage de coût* (Saha et Goyal, 2015). Mais dans ce contrat, il y a un degré de liberté lié à la fixation du coût qui va être partagé. En pratique, ce type de transfert d'argent peut aussi avoir lieu lorsque le fournisseur fait appel à des consignations de stocks (Braglia et Zavanella, 2003), *i.e.* le stock du fournisseur est localisé au niveau du distributeur.

#### Définition du problème

La formulation mathématique du problème est donnée par :

$$\begin{aligned}
\min \quad & c^F(y^F, x^F, s^F) + z \\
\text{s.t.} \quad & (1.10), (1.10), (1.12), (1.13) \\
& c^D(y^D, x^D, s^D) - z \leq c_{opt}^D \quad (\text{RI}) \\
& z \leq \sum_{t \in \mathcal{T}} h_t^D s_t^D \quad (2.6) \\
& z \geq 0
\end{aligned}$$

Les contraintes (1.10), (1.10), (1.12), (1.13) sont associées aux contraintes du problème 2ULS. Le coût du distributeur est égal à  $c^D(y^D, x^D, s^D) - z$ , et celui du fournisseur est défini par  $c^F(y^F, x^F, s^F) + z$ . La contrainte (RI) représente la contrainte de rationalité individuelle. La contrainte (2.6) assure que le transfert d'argent  $z$  couvre au plus les coûts de stockage du distributeur.

En sommant les contraintes (RI) et (2.6), nous obtenons la contrainte suivante :  $\sum_{t \in \mathcal{T}} (f_t^D y_t^D + p_t^D x_t^D) \leq c_{opt}^D$ . De plus, étant donné que le fournisseur veut minimiser son coût total et donc le transfert d'argent,  $z$  est exactement égal à la borne inférieure  $c^D(y^D, x^D, s^D) - c_{opt}^D$  obtenue à partir de la contrainte (RI). Dans ce cas, le coût du distributeur est égal à son coût optimal. Nous obtenons alors une nouvelle formulation mathématique pour le problème  $P_{CS}$  :

$$\begin{aligned}
\min \quad & c^F(y^F, x^F, s^F) \\
\text{s.t.} \quad & (1.10), (1.10), (1.12), (1.13) \\
& \sum_{t \in \mathcal{T}} (f_t^D y_t^D + p_t^D x_t^D) \leq c_{opt}^D \quad (2.7)
\end{aligned}$$

Le problème  $P_{CS}$  est équivalent au problème 2ULS sous la contrainte que le coût total de réapprovisionnement du distributeur ne doit pas dépasser son coût optimal. Nous notons ce dernier problème 2ULS-BOC, où BOC signifie *Bound on Ordering Cost*, et nous étudions dans la suite sa complexité.

### Propriété 2.2

Le fournisseur peut diminuer son coût d'un facteur  $M > 0$  arbitrairement élevé par rapport au problème de coordination sans transfert d'argent.

*Preuve.* Nous considérons l'instance suivante :

$t$	1	2
$f^D$	0	0
$p^D$	0	0
$h^D$	1	1
$d$	0	1

TABLE 2.5 – Paramètres du distributeur pour le problème  $P_{CS}$ .

$t$	1	2
$f^F$	0	0
$p^F$	0	$M$
$h^F$	$2M$	$2M$

TABLE 2.6 – Paramètres du fournisseur pour le problème  $P_{CS}$ .

Le plan de réapprovisionnement de coût optimal est donné par  $\bar{x}^D = [0, 1]$  de coût 0. Le plan de production  $\bar{x}^F = [0, 1]$  permettant de satisfaire  $\bar{x}^D$  est de coût optimal égal à  $M$ . Étant donné que le plan de réapprovisionnement de coût optimal est unique, le fournisseur ne peut pas améliorer son coût avec un contrat sans transfert d'argent. En revanche, en autorisant un transfert d'argent sur les coûts de stockage du distributeur, le fournisseur peut prendre en considération le plan de réapprovisionnement  $x^D = [1, 0]$  de coût 1 pour le distributeur. Le plan de production de coût optimal est  $x^F = [1, 0]$  de coût 0. Ainsi, le fournisseur peut proposer le contrat  $(x^D, 1)$  au distributeur. Le rapport entre les deux coûts du fournisseur est alors  $M$  qui peut être aussi grand que l'on veut.  $\square$

### Analyse de complexité

Remarquons que la contrainte (2.7) du modèle mathématique du problème 2ULS-BOC s'associe à une contrainte du problème de sac-à-dos qui est NP-difficile (Garey et Johnson, 1979). Nous proposons de montrer le résultat suivant :

#### Théorème 2.1

Le problème 2ULS-BOC est NP-difficile.

*Preuve.* Montrons que le problème 2ULS-BOC est NP-difficile par une réduction à partir du problème de sac-à-dos. Une instance du problème de sac-à-dos est donnée par : un ensemble  $\mathcal{N} = \{1, \dots, N\}$  de  $N$  objets, une utilité  $v_i$  pour tout  $i \in \mathcal{N}$ , un poids  $e_i$  pour tout  $i \in \mathcal{N}$ , une capacité  $E$  et une borne  $V \in \mathbb{N}$ . La résolution du problème de sac-à-dos consiste à répondre par oui ou non à la question suivante : existe-t-il un sous-ensemble  $\mathcal{S} \subset \mathcal{N}$  tel que  $\sum_{i \in \mathcal{S}} e_i \leq E$  et  $\sum_{i \in \mathcal{S}} v_i \geq V$  ?

Étant donné une instance du problème 2ULS-BOC et un entier  $K$ , la résolution du problème 2ULS-BOC consiste à déterminer la réponse à la question suivante : existe-t-il un plan de production  $x^F$  et un plan de réapprovisionnement  $x^D$  satisfaisant les demandes sous la

contrainte que  $c_P^D \leq c_{opt}^D$ , où  $c_P^D$  correspond au coût de réapprovisionnement du distributeur, et vérifiant  $c^D + c^F \leq K$  ?

Nous définissons une instance  $\mathcal{I}$  du problème 2ULS-BOC de la manière suivante (voir figure 2.7) :

- $T = 3N$ . Nous notons par  $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \mathcal{T}_3$  l'ensemble des périodes  $\{1, 4, \dots, 3i-2, \dots, 3N-2\}$ ,  $\{2, 5, \dots, 3i-1, \dots, 3N-1\}$ ,  $\{3, 6, \dots, 3i, \dots, 3N\}$  respectivement.
- Les coûts du distributeur sont définis par :
  - $f_t^D = 0$  pour tout  $t \in \mathcal{T}_1$ ,
  - $f_t^D = e_{(t+1)/3}$  pour tout  $t \in \mathcal{T}_2$ ,
  - $f_t^D = NM$  pour tout  $t \in \mathcal{T}_3$ , où  $M = \max_i \{E/N + \alpha_i, v_i + e_i + \alpha_i\}$  et  $\alpha_i = \max\{0, E/N - e_i\}$ ,
  - $h_t^D = E/N$  pour tout  $t \in \mathcal{T}_1$
  - $h_t^D = \alpha_{(t+1)/3}$  pour tout  $t \in \mathcal{T}_2$ ,
  - $h_t^D = NM$  pour tout  $t \in \mathcal{T}_3$ ,
  - $p_t^D = 0$  pour tout  $t \in \mathcal{T}$ .
- Les coûts du fournisseur sont définis par :
  - $f_t^F = M - E/N - \alpha_{(t+1)/3}$  pour tout  $t \in \mathcal{T}_1$ ,
  - $f_t^F = M - v_{(t+1)/3} - e_{(t+1)/3} - \alpha_{(t+1)/3}$  pour tout  $t \in \mathcal{T}_2$ ,
  - $f_t^F = NM$  pour tout  $t \in \mathcal{T}_3$
  - $h_t^F = NM$  pour tout  $t \in \mathcal{T}$
  - $p_t^F = 0$  pour tout  $t \in \mathcal{T}$
- $d_t = 0$  pour tout  $t \in \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ ,
- $d_t = 1$  pour tout  $t \in \mathcal{T}_3$
- $K = NM - V$ .

Une représentation de l'instance est donnée dans la figure 2.7. Nous associons les coûts fixes de production au arcs verticaux et les coûts de stockage aux arcs horizontaux.

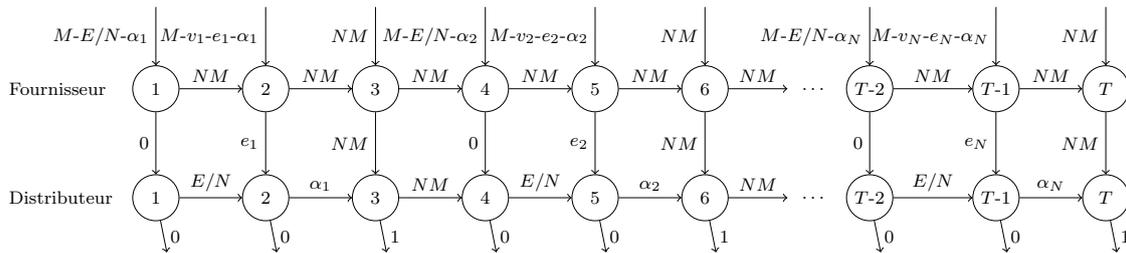


FIGURE 2.7 – Instance  $\mathcal{I}$  du problème 2ULS-BOC.

Nous allons montrer qu'il existe une réponse positive au problème de sac-à-dos si et seulement si il existe une réponse positive au problème 2ULS-BOC.

Nous commençons par montrer que le coût optimal du distributeur  $c_{opt}^D$  est égal à  $E$  pour l'instance  $\mathcal{I}$ . L'observation ci-dessous montre que le distributeur peut se réapprovisionner qu'à une période  $t \in \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ . De plus, il peut se réapprovisionner d'au plus une unité à chaque période de réapprovisionnement. Le coût pour satisfaire une demande  $d_t$  telle que  $t \in \mathcal{T}_3$  à partir de la période  $t$  est égal à  $f_t^D = NM$ . Celui pour satisfaire une demande  $d_t$  telle que  $t-1 \in \mathcal{T}_2$  est égal à  $f_{t-1}^D + h_{t-1}^D = e_{(t+1)/3} + \alpha_{(t+1)/3} < NM$ . Finalement, le coût du distributeur pour se réapprovisionner de  $d_t$  unités à la période  $t-2 \in \mathcal{T}_1$  est égal à  $h_{t-1}^D + h_{t-2}^D = E/N + \alpha_{(t+2)/3} <$

$NM$ . Ainsi, afin de diminuer le coût du distributeur, ce dernier doit se réapprovisionner soit à une période  $t - 1 \in \mathcal{T}_2$ , soit à une période  $t - 2 \in \mathcal{T}_1$  pour satisfaire une demande  $d_t$ . De plus, comme  $h_t^D = NM$  pour  $t \in \mathcal{T}_3$ , il ne peut avoir un stock positif uniquement entre une période  $t \in \mathcal{T}_1$  et une période  $k \in \mathcal{T}_3$ , et il ne stocke qu'au plus une unité.

Lorsque  $e_i < E/N$ , le distributeur se réapprovisionne d'une unité à la période  $3i - 1 \in \mathcal{T}_2$  ce qui induit un coût égal à  $f_{3i-1}^D + h_{3i-1}^D = e_i + \alpha_i = E/N$  (s'il se réapprovisionne à une période  $3i - 2 \in \mathcal{T}_1$ , son coût total serait égal à  $f_{3i-2}^D + h_{3i-2}^D + h_{3i-1}^D = E/N + \alpha_i > E/N$  puisque  $\alpha_i = E/N - e_i > 0$ ). Dans le cas où  $e_i \geq E/N$ , le distributeur se réapprovisionne d'une unité à la période  $3i - 2 \in \mathcal{T}_1$  induisant un coût égal à  $h_{3i-2}^D = E/N$  puisque  $\alpha_i = 0$ . De plus, étant donné qu'il doit satisfaire  $N$  demandes, le nombre de périodes de réapprovisionnement est égal à  $N$  avec un coût de  $E/N$  pour chaque réapprovisionnement. Ainsi, le coût optimal du distributeur  $c_{opt}^D$  est égal à  $E$ .

Supposons qu'il existe une solution  $\mathcal{S}$  au problème du sac-à-dos. Nous allons montrer qu'il existe une solution au problème 2ULS-BOC associé à l'instance  $\mathcal{I}$ . La figure 2.8 représente la solution du problème 2ULS-BOC où  $N = 3$ ,  $e_1 + e_3 \leq E$  et  $v_1 + v_3 \geq V$ . Seuls les arcs actifs sont représentés sur la figure. Pour chaque objet  $i \in \mathcal{S}$ , le fournisseur et distributeur produisent une unité à la période  $t = 3i - 1 \in \mathcal{T}_2$  ( $y_t^F = y_t^D = 1$ ,  $x_t^F = x_t^D = 1$ ). Le distributeur stocke l'unité jusqu'à la période  $3i$  pour satisfaire la demande de la période  $3i$  ( $s_t^D = 1$ ). Pour chaque objet  $i \notin \mathcal{S}$ , Le fournisseur et le distributeur produisent une unité à la période  $t = 3i - 2 \in \mathcal{T}_1$  pour satisfaire la demande de la période  $3i$  ( $y_t^F = y_t^D = 1$  et  $x_t^F = x_t^D = 1$ ). Le distributeur stocke alors l'unité jusqu'à la période  $3i$  ( $s_t^D = s_{t+1}^D = 1$ ). Puisque nous avons  $p_t^D = 0$  pour tout  $t \in \mathcal{T}$  et  $f_t^D = 0$  pour  $t \in \mathcal{T}_1$ , le coût de production du distributeur est égal à  $c_P^D(y^D, x^D, s^D) = \sum_{i \in \mathcal{S}} f_{3i-1}^D y_{3i-1}^D = \sum_{i \in \mathcal{S}} e_i$  qui est inférieur ou égal à  $E = c_{opt}^D$ . Le coût total du distributeur est égal à  $c^D(y^D, x^D, s^D) = c_P^D(y^D, x^D, s^D) + \sum_{i \in \mathcal{S}} (e_i + \alpha_i) + \sum_{i \in \mathcal{S}} h_{3i-1}^D s_{3i-1}^D + \sum_{i \notin \mathcal{S}} (h_{3i-2}^D s_{3i-2}^D + h_{3i-1}^D s_{3i-1}^D) = \sum_{i \in \mathcal{S}} (e_i + \alpha_i) + \sum_{i \notin \mathcal{S}} (E/N + \alpha_i)$ . Comme nous avons  $p_t^F = 0$  pour tout  $t \in \mathcal{T}$ , le coût total du fournisseur est donné par  $c^F(y^F, x^F, s^F) = \sum_{i \in \mathcal{S}} f_{3i-1}^F y_{3i-1}^F + \sum_{i \notin \mathcal{S}} f_{3i-2}^F y_{3i-2}^F = \sum_{i \in \mathcal{S}} (M - v_i - e_i - \alpha_i) + \sum_{i \notin \mathcal{S}} (M - E/N - \alpha_i)$ . Le coût total de la chaîne logistique est donc égal à  $c^D(y^D, x^D, s^D) + c^F(y^F, x^F, s^F) = \sum_{i \in \mathcal{S}} (e_i + \alpha_i) + \sum_{i \notin \mathcal{S}} (E/N + \alpha_i) + \sum_{i \in \mathcal{S}} (M - v_i - e_i - \alpha_i) + \sum_{i \notin \mathcal{S}} (M - E/N - \alpha_i) = \sum_{i \in \mathcal{S}} (M - v_i) + \sum_{i \notin \mathcal{S}} M = \sum_{i \in \mathcal{N}} M - \sum_{i \in \mathcal{S}} v_i \leq NM - V$ . Par conséquent, il existe une solution au problème 2ULS-BOC associée à l'instance  $\mathcal{I}$  de coût au plus  $NM - V$ .

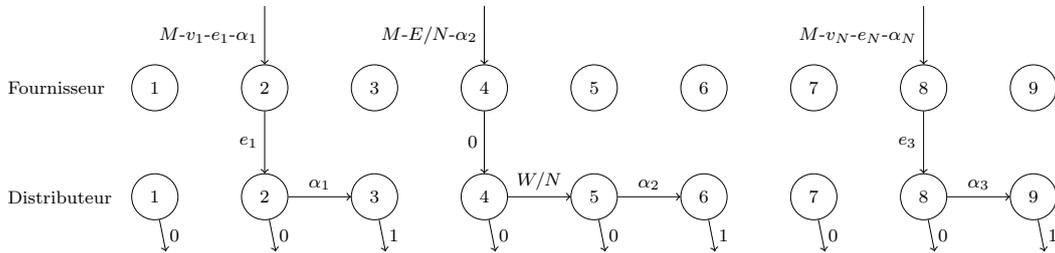


FIGURE 2.8 – Solution au problème 2ULS-BOC où  $N = 3$ ,  $e_1 + e_3 \leq E$  et  $v_1 + v_3 \geq V$

Réciproquement, supposons qu'il existe une solution au problème 2ULS-BOC associée à l'instance  $\mathcal{I}$ . Puisque  $h_t^F = NM$ , si le fournisseur produit, le distributeur se réapprovisionnera à la même période ( $y_t^F = y_t^D$  et  $x_t^F = x_t^D$  pour tout  $t$ ). Sinon, comme  $h_t^F = NM$ , s'il existe une période  $t$  où  $s_t^F > 0$ , le coût sera supérieur à  $NM - U$ . De plus, comme le distributeur peut se réapprovisionner d'au plus une unité à la période  $t \in \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$  (il stocke alors au plus une unité), pour satisfaire une demande à la période  $t \in \mathcal{T}_3$ , le fournisseur et le distributeur

doivent produire au plus une unité à une période  $t - 2 \in \mathcal{T}_1$  ou  $t - 1 \in \mathcal{T}_2$ . Montrons maintenant que le sous-ensemble de périodes  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}_2$  fourni une réponse positive au problème de sac-à-dos. Dans cette solution, l'objet  $i$  est choisi si et seulement si il y a une production à la période  $3i - 2 \in \mathcal{S}$ . Comme  $p_t^D = 0$  pour tout  $t \in \mathcal{T}$  et  $f_t^D = 0$  pour  $t \in \mathcal{T}_1$ , nous avons  $c_P^D(y^D, x^D, s^D) = \sum_{t \notin \mathcal{S}} f_t^D y_t^D + \sum_{i \in \mathcal{S}} f_t^D y_t^D = \sum_{i \in \mathcal{S}} e_{(t+1)/3}$ . Par définition du problème 2ULS-BOC,  $c_P^D(y^D, x^D, s^D) \leq c_{opt}^D$ , et donc  $c_P^D(y^D, x^D, s^D) = \sum_{i \in \mathcal{S}} e_{(t+1)/3} \leq E$ . De plus, comme  $p_t^D = p_t^F = 0$  pour tout  $t \in \mathcal{T}$  et  $f_t^D = 0$  pour  $t \in \mathcal{T}_1$ ,  $c^D(y^D, x^D, s^D) + c^F(y^F, x^F, s^F) = \sum_{i \notin \mathcal{S}} (f_t^F y_t^F + f_t^D y_t^D + h R_t s_t^D + h_{t+1}^D s_{t+1}^D) + \sum_{i \in \mathcal{S}} (f_t^F y_t^F + f_t^D y_t^D + h R_t s_t^D) = \sum_{i \notin \mathcal{S}} M + \sum_{i \in \mathcal{S}} (M - v_{(t+1)/3}) = NM - \sum_{i \in \mathcal{S}} v_{(t+1)/3}$ . De façon similaire, par définition du problème 2ULS-BOC, nous avons  $c^D + c^F \leq NM - V$  ce qui implique que  $\sum_{i \in \mathcal{S}} v_{(t+1)/3} \geq V$ . Ainsi, il existe une réponse positive au problème de sac-à-dos correspondant à l'ensemble  $\mathcal{S}$ .  $\square$

### 2.3.3 Contrat avec transfert d'argent sur le coût total

Dans cette section, nous étudions la possibilité pour le fournisseur de faire un transfert d'argent sur le coût total du distributeur. Nous notons ce problème par  $P_{CT}$ , où CT signifie Coût Total.

#### Formulation mathématique du problème $P_{CT}$ .

La variable  $z$  représente le transfert d'argent entre le fournisseur et le distributeur. La formulation mathématique du problème  $P_{CT}$  est donnée par :

$$\begin{aligned} \min \quad & c^F(y^F, x^F, s^F) + z & (2.8) \\ \text{s.t.} \quad & (1.10), (1.10), (1.12), (1.13) \\ & c^D(y^D, x^D, s^D) - z \leq c_{opt}^D & (RI) \\ & z \geq 0 \end{aligned}$$

Les contraintes (1.10), (1.10), (1.12) et (1.13) correspondent aux contraintes dans le modèle mathématique du problème 2ULS. Le coût total du distributeur est défini par  $c^D(y^D, x^D, s^D) - z$ . Celui du fournisseur est défini par  $c^F(y^F, x^F, s^F) + z$ . La fonction objectif (2.8) consiste à minimiser le coût total du fournisseur. La contrainte (RI) représente la contrainte de rationalité individuelle qui assure que le coût du distributeur associé au contrat  $(x^D, z)$  ne dépassera pas son coût optimal  $c_{opt}^D$ .

#### Propriété 2.3

Le fournisseur peut diminuer son coût d'un facteur  $M > 0$  arbitrairement élevé comparé au cas avec transfert d'argent sur le coût de stockage du distributeur.

*Preuve.* Considérons l'instance suivante :

$t$	1	2	3
$f^D$	0	0	0
$p^D$	1	0	1
$h^D$	1	1	1
$d$	0	1	1

TABLE 2.7 – Paramètres du distributeur pour le problème  $P_{CT}$ .

$t$	1	2	3
$f^F$	0	0	0
$p^F$	0	$M$	$M$
$h^F$	$2M$	$2M$	$2M$

TABLE 2.8 – Paramètres du fournisseur pour le problème  $P_{CT}$ .

Le plan de réapprovisionnement de coût optimal est  $x^D = [0, 1, 1]$  de coût 1. Le plan de production de coût optimal pour satisfaire  $x^D$  est donné par  $x^F = [0, 1, 1]$  de coût  $2M$ . Calculons le coût du fournisseur selon l'hypothèse faite sur le transfert d'argent :

- Si les acteurs décident de collaborer en autorisant un transfert d'argent uniquement sur le coût de stockage du distributeur, la solution optimale pour le fournisseur consiste à proposer le plan de réapprovisionnement  $\tilde{x}^D = [1, 1, 0]$ . Ce plan est de coût 3 pour le distributeur et de coût  $M$  pour le fournisseur (le plan optimal du fournisseur pour satisfaire  $\tilde{x}^D$  est égal à  $\tilde{x}^F = \tilde{x}^D$ ). Le fournisseur ajoute donc un paiement égal à 2 pour le distributeur, et a donc un coût total égal à  $M + 2$ .
- Si les acteurs décident de collaborer en autorisant un transfert d'argent sur le coût total du distributeur, la solution optimale du fournisseur est de proposer le plan de réapprovisionnement  $\bar{x}^D = [2, 0, 0]$  de coût 5 pour le distributeur. Le plan de production  $\bar{x}^F = [2, 0, 0]$  de coût 0 permettant de satisfaire  $\bar{x}^D$  est optimal pour le fournisseur. Le fournisseur ajoute alors un paiement égal à 4 pour le distributeur, et son coût total est donc égal à 4 au lieu de  $M + 2$  lorsque le transfert d'argent est sur le coût de stockage du distributeur.

Ainsi, le rapport entre les coûts du fournisseur dans ces deux solutions est  $(M + 2)/4$  ce qui peut être aussi grand que l'on veut.  $\square$

### Déterminer le contrat optimal proposé par le fournisseur

Étant donné que le fournisseur veut minimiser son coût total, le transfert d'argent  $z$  est exactement égal à la borne inférieure  $c^D(y^D, x^D, s^D) - c_{opt}^D$  donné par la contrainte (RI). En remplaçant  $z$  par cette borne, nous obtenons la formulation mathématique du problème 2ULS. Ainsi, le problème  $P_{CT}$  est équivalent au problème 2ULS qui peut être résolu en temps polynomial (voir section 2.2). Le coût du fournisseur est alors égal à  $c^F(y^F, x^F, s^F) + c^D(y^D, x^D, s^D) - c_{opt}^D$ . Le coût du distributeur est égal à son coût optimal  $c_{opt}^D$ . Dans ce cas, le contrat  $(x_{opt}^D, c^D(y_{opt}^D, x_{opt}^D, s_{opt}^D) - c_{opt}^D)$  proposé par le fournisseur permet d'optimiser le coût de la chaîne logistique, où  $y_{opt}^D, x_{opt}^D, s_{opt}^D$  correspond à la solution du distributeur déterminée par la résolution du problème 2ULS.

## 2.4 Asymétrie d'information

Dans cette section, nous considérons que le distributeur possède des informations privées sur ses paramètres de coût. Le fournisseur suppose que le distributeur a  $N$  profils représentant les différents profils possibles de distributeur par rapport à ses coûts. Nous notons  $\mathcal{N} = \{1, \dots, N\}$  l'ensemble de tous les profils (voir exemple 2.2). Le vrai profil du distributeur est nécessairement dans l'ensemble  $\mathcal{N}$ . De plus, le fournisseur connaît la probabilité  $P_i$  que le distributeur soit de profil  $i \in \mathcal{N}$  vérifiant  $\sum_{i \in \mathcal{N}} P_i = 1$ . Contrairement au cas où le fournisseur a une information complète sur la structure de coût du distributeur, un ensemble de contrats sera proposé au distributeur : chaque contrat étant associé à un profil. Le distributeur pourra alors choisir un contrat dans cet ensemble ou refuser tous les contrats proposés.

*Exemple 2.2.* Supposons que le fournisseur ne connaît pas le coût de stockage du distributeur, et qu'il peut fournir deux profils de distributeur : un profil avec un coût de stockage élevé, noté  $D_e$  et un autre avec un faible coût de stockage, noté  $D_f$ . Il sait qu'il peut fournir  $D_e$  avec une probabilité  $P_e$  et  $D_f$  avec une probabilité  $P_f$ . Il met alors en place un contrat  $C_e$  pour le profil  $D_e$  et un contrat  $C_f$  pour le profil  $D_f$  de sorte que son espérance de coût associé à ses contrats soit minimisée. Lorsque le

fournisseur propose ces deux contrats au distributeur, ce dernier choisira le contrat  $C_e$  (resp.  $C_f$ ) si son profil correspond au distributeur avec un coût de stockage élevé (resp. faible). Remarquons que comme le fournisseur ne sait pas si le distributeur de profil  $D_e$  ou  $D_f$ , le distributeur peut mentir et choisir le contrat  $C_e$  (resp.  $C_f$ ) même si son coût de stockage est faible (resp. élevé). Cependant par le principe de révélation (voir section 2.4 p.32), le fournisseur peut mettre en place des contrats de sorte que le distributeur de profil  $C_e$  (resp.  $C_f$ ) choisit honnêtement le contrat  $C_e$  (resp.  $C_f$ ).

Sous l'hypothèse de l'asymétrie d'information, il est possible que le distributeur ne déclare pas son véritable profil. En effet, un distributeur dont le véritable profil est le profil  $i$  peut avoir une incitation à choisir un contrat mis en place pour un distributeur de profil  $j \neq i$  qui minimise son coût. Nous disons qu'il n'y a pas de *vérification partielle* lorsque pour chaque profil  $i$ , l'ensemble des profils qu'un distributeur de profil  $i$  peut déclarer est l'intégralité de l'ensemble  $\mathcal{N}$ . Dans ce cas, le principe de révélation (Myerson, 1981) spécifie qu'il n'est pas possible d'implémenter un meilleur algorithme sachant que les acteurs peuvent mentir (et cherchent uniquement à minimiser leur coût). Par conséquent, nous pouvons réduire notre étude à l'ensemble des contrats qui assure que le distributeur va déclarer son profil de manière honnête. Ces contrats sont dits à *véracité garantie* (*incentive compatible* en anglais).

#### Notations

Pour différencier les profils, nous ajoutons un indice aux notations définis dans la section. La quantité d'unités produites à une période  $t$  pour un profil  $i$  est donnée par  $x_{it}^F$ . La quantité d'unités réapprovisionnées à une période  $t$  par un profil  $i$  est égale à  $x_{it}^D$ . La quantité d'unités en stock à la fin d'une période  $t$  au niveau du fournisseur (resp. distributeur) associé à un profil  $i$  est dénotée par  $s_{it}^F$  (resp.  $s_{it}^D$ ). La variable binaire associée au lancement à une période  $t$  au niveau du fournisseur (resp. distributeur) associé à un profil  $i$  est donnée par  $y_{it}^F$  (resp.  $y_{it}^D$ ). Le transfert d'argent associé à un distributeur de profil  $i$  est  $z_i$ . Le fournisseur a pour objectif de minimiser l'espérance de son coût  $\sum_{i \in \mathcal{N}} P_i (\sum_{t \in \mathcal{T}} (f_t^F y_{it}^F + p_t^F x_{it}^F + h_t^F s_{it}^F))$ . Nous notons  $c_{ij}^D = \sum_{t \in \mathcal{T}} (f_{it}^D y_{jt}^D + p_{it}^D x_{jt}^F + h_{it}^D s_{jt}^D)$  le coût total du distributeur lorsque le véritable profil du distributeur est le profil  $i$  et le profil qu'il déclare est le profil  $j$ . Les paramètres de coût sont associés au profil  $i$  et les variables sont relatives au profil  $j$ . Le coût optimal du distributeur de profil  $i$  est noté  $C_{opt}^{D_i}$ .

**État de l'art.** De nombreux auteurs ont étudié le problème de coordination d'une chaîne logistique avec asymétrie d'information pour le problème EOQ. Corbett et de Groot (2000) ont considéré un problème EOQ où le fournisseur n'a pas connaissance des coûts de stockage du distributeur. Afin d'influencer le comportement du distributeur, le fournisseur propose au distributeur un ensemble de contrats optimal avec des réductions de coût. Cependant, pour le problème EOQ, si le fournisseur connaît les coûts de réapprovisionnement du distributeur et sa quantité de réapprovisionnement optimal, il peut déduire le coût de stockage du distributeur. Dans ce cadre, l'asymétrie d'information n'est pas pertinente (Sucky, 2006). Sucky (2006) a étudié le problème EOQ où le fournisseur ne connaît pas les coûts de réapprovisionnement et de stockage du distributeur en considérant le jeu de sélection pour mettre en place des contrats. Il considère que le distributeur a deux profils possibles associés au paramètre de coût inconnu. Le fournisseur propose un ensemble de contrat composé d'un plan de réapprovisionnement et d'un transfert d'argent pour influencer les décisions du distributeur. Le modèle de coordination considéré dans son article induit un problème non convexe pour lequel il caractérise des ensembles de contrats qui peuvent être candidats pour être la solution optimale du fournisseur. Pishchulov et Richter (2016) ont étudié le même modèle que Sucky (2006) et ont proposé de compléter l'analyse de Sucky (2006) pour déterminer les ensembles de contrats

optimaux. Récemment, Kerkkamp *et al.* (2017) ont considéré le problème EOQ avec asymétrie d'information sur les paramètres de coût du distributeur et un nombre général de profils pour le distributeur, contrairement aux travaux de (Sucky, 2006; Pishchulov et Richter, 2016). Ils ont étudié le cas où le coût de stockage du distributeur est privé. Le but de leurs travaux est de mettre en place un ensemble de contrats pour chaque profil de distributeur à partir d'un jeu de sélection. Les auteurs ont proposé des propriétés structurelles définissant une solution optimale pour le fournisseur en analysant le graphe induit par les contraintes de rationalité individuelle et les contraintes à véracité garantie. Ils ont déterminé une condition suffisante garantissant qu'un ensemble de contrat optimal pour le fournisseur est composé d'un unique contrat pour chaque profil de distributeur. Dans le cas particulier avec deux profils, ils ont fourni une caractérisation complète de l'unique ensemble de contrats optimal.

Les travaux présentés par la suite considèrent le problème de coordination avec asymétrie d'information et une demande dynamique. Mobini *et al.* (2014) ont étudié une chaîne logistique à deux niveaux dont le but est de minimiser le coût du fournisseur. Les auteurs ont considéré un jeu de sélection avec plusieurs profils contrairement à la majorité des travaux présents dans la littérature qui prennent en considération que deux profils. Dans la formulation mathématique du problème, le nombre de contraintes à véracité garantie est quadratique. Le but principal de leur étude est de réduire le nombre de contraintes à véracité garantie dans la formulation. Lorsque les paramètres de coût inconnus sont stationnaires, ils ont montré qu'un nombre linéaire de contraintes est suffisant pour formuler le problème. Dudek et Stadtler (2005) proposent de coordonner une chaîne logistique à deux niveaux composée d'un fournisseur, un distributeur et plusieurs produits à partir d'un modèle de négociation entre les acteurs où le transfert d'argent est autorisé. Chaque acteur connaît uniquement ses propres paramètres de coût. Ils ont considéré une méthode centralisée où les décisions de planification sont synchronisées par un coordinateur qui a pour but de minimiser le coût du fournisseur. La synchronisation est faite à partir d'un échange d'informations sur les plans de réapprovisionnement, de production et des impacts sur leur coût. Dudek et Stadtler (2007) ont étendu les travaux de Dudek et Stadtler (2005) en considérant plusieurs distributeurs. Lee et Kumara (2007) ont étudié le problème de coordination dans une chaîne logistique avec un fournisseur et plusieurs distributeurs. Ils ont coordonné les décisions des acteurs en utilisant un modèle de marché d'enchères. Les acteurs n'ont pas besoin de révéler leurs coûts de production/réapprovisionnement, leurs capacités de production et la demande externe pendant le processus d'enchère. À chaque étape du processus, les informations révélées par chaque acteur concernent uniquement le stock (par exemple les coûts de stockage ou le niveau de stock).

### 2.4.1 Contrat sans transfert d'argent

Dans cette section, nous considérons le problème de coordination où il n'y a pas de transfert d'argent entre les acteurs. Nous notons ce problème  $P_{ST}^{AI}$  (où *AI* signifie asymétrie d'information).

Le transfert d'argent n'étant pas autorisé, les contrats proposés par le fournisseur satisfont nécessairement la contrainte de véracité garantie. En effet, le fournisseur veut minimiser l'espérance de son coût total en déterminant des contrats  $(x_{D_i}, 0)$  pour chaque profil  $i$  en garantissant que le coût du plan de réapprovisionnement  $x_{D_i}$  est égal à  $C_{opt}^{D_i}$ . Ainsi, le distributeur de profil  $i$  n'a aucun intérêt à choisir un contrat mis en place pour un autre profil.

Ce problème peut alors être décomposé en  $N$  sous-problèmes indépendants qui peuvent être résolus en temps polynomial. Chaque sous-problème correspond à un problème de coordination avec information complète  $P_{ST}$  présenté dans la section 2.3.1. La résolution de chaque sous-problème permet d'obtenir le plan de réapprovisionnement  $x_{opt}^{D_i}$  de coût optimal  $C_{opt}^{D_i}$  pour chaque profil. Le fournisseur propose alors au distributeur  $N$  contrats  $(x_{opt}^{D_i}, 0)$  pour chaque profil  $i \in \mathcal{N}$  en résolvant  $N$  fois le problème  $P_{ST}$ . Le problème  $P_{ST}^{AI}$  peut donc être résolu en  $\mathcal{O}(NT^3)$ .

## 2.4.2 Contrat avec transfert d'argent

Dans cette section, nous considérons le problème de coordination avec asymétrie d'information lorsqu'un transfert d'argent entre les acteurs de la chaîne logistique est autorisé. Nous notons  $P_{CS}^{AI}$  (resp.  $P_{CT}^{AI}$ ) le problème où le transfert d'argent est autorisé sur les coûts de stockage (resp. total) du distributeur.

### Formulation mathématique du problème

Contrairement au cas sans transfert d'argent, il faut déterminer des contrats satisfaisant la contrainte de véracité garantie. La formulation mathématique du problème  $P_{CS}^{AI}$  est donnée par :

$$\min \sum_{i \in \mathcal{N}} P_i(z_i + \sum_{t \in \mathcal{T}} (f_t^F y_{it}^F + p_t^F x_{it}^F + h_t^F s_{it}^F))$$

$$\text{s.t. } s_{i,t-1}^D + x_{it}^D = d_t + s_{it}^D \quad \forall i \in \mathcal{N}, \forall t \in \mathcal{T}, \quad (2.9)$$

$$s_{i,t-1}^F + x_{it}^F = x_{it}^D + s_{it}^F \quad \forall i \in \mathcal{N}, \forall t \in \mathcal{T}, \quad (2.10)$$

$$x_{it}^D \leq M_t y_{it}^D \quad \forall i \in \mathcal{N}, \forall t \in \mathcal{T}, \quad (2.11)$$

$$x_{it}^F \leq M_t y_{it}^F \quad \forall i \in \mathcal{N}, \forall t \in \mathcal{T}, \quad (2.12)$$

$$y_{it}^D \leq x_{it}^D \quad \forall i \in \mathcal{N}, \forall t \in \mathcal{T}, \quad (2.13)$$

$$c_{ii}^D - z_i \leq C_{opt}^{D_i} \quad \forall i \in \mathcal{N}, \quad (\text{RI})$$

$$c_{ii}^D - z_i \leq c_{ij}^D - z_j \quad \forall i \in \mathcal{N}, \forall j \in \mathcal{N}, \quad (\text{IC})$$

$$z_i \leq \sum_{t \in \mathcal{T}} h_{it}^D s_{it}^D \quad \forall i \in \mathcal{N}, \quad (2.14)$$

$$x_{it}^F, x_{it}^D, s_{it}^F, s_{it}^D \geq 0 \quad \forall t \in \mathcal{T}, \forall i \in \mathcal{N},$$

$$y_{it}^F, y_{it}^D \in \{0, 1\} \quad \forall t \in \mathcal{T}, \forall i \in \mathcal{N}$$

$$z_i \geq 0 \quad \forall i \in \mathcal{N}$$

Les contraintes (2.9) et (2.10) correspondent aux contraintes de conservation de flot pour chaque profil  $i \in \mathcal{N}$  à chaque niveau. Les contraintes (2.11) et (2.12) assurent que la variable de lancement est égale à 1 à une période  $t$  si une production a lieu à cette période pour chaque profil  $i \in \mathcal{N}$  à chaque niveau. Étant donné que nous ne minimisons pas le coût du distributeur, les contraintes (2.13) assurent que pour chaque profil  $i \in \mathcal{N}$ , la variable de lancement est égale à 0 à une période  $t$  s'il n'y a pas de production à cette période. La contrainte (RI) correspond à la contrainte de rationalité individuelle pour chaque profil  $i \in \mathcal{N}$ , qui assure que un distributeur de profil  $i$  ne sera pas incité à choisir un contrat qui n'a pas été mis en place pour son profil. La contrainte (IC) représente la contrainte de véracité garantie pour chaque profil  $i \in \mathcal{N}$ . La contrainte (2.14) garantit que pour chaque profil  $i \in \mathcal{N}$ , le transfert d'argent couvre uniquement les coûts de stockage du distributeur.

La formulation mathématique du problème  $P_{CT}^{AI}$  est identique à celle du problème  $P_{CS}^{AI}$  dans laquelle on supprime la contrainte (2.14). Contrairement au cas sans transfert d'argent, les problèmes  $P_{CS}^{AI}$  et  $P_{CT}^{AI}$  ne peuvent pas être décomposés en sous-problèmes à cause des contraintes couplantes (IC).

Remarquons également ici que le coût du fournisseur avec un transfert d'argent peut être arbitrairement élevé par rapport au cas sans transfert d'argent.

### Résultat d'inapproximabilité

Le problème  $P_{CS}$  étant NP-difficile, le problème  $P_{CS}^{AI}$  est alors au moins aussi difficile que ce dernier. En revanche, la complexité du problème  $P_{CT}^{AI}$  reste ouverte. Si nous relaxons la contrainte de véracité garantie, le problème peut alors se décomposer en  $N$  sous-problèmes avec information complète qui peuvent résolu en temps polynomial (voir section 2.3.3). Dans la suite, nous montrons qu'avec la contrainte de véracité garantie, le coût du fournisseur peut être arbitrairement élevé comparé au cas avec information complète.

#### Propriété 2.4

Soit  $c > 1$ . Il n'existe pas de mécanismes à véracité garantie  $c$ -approché pour les problèmes  $P_{CS}^{AI}$  et  $P_{CT}^{AI}$ .

*Preuve.* Soit  $c > 1$ . Considérons l'instance suivante où le coût de stockage du distributeur est privé :

Profil	1		2	
$P$	$1 - 1/c$		$1/c$	
$t$	1	2	1	2
$f^D$	0	0	0	0
$p^D$	0	0	0	0
$h^D$	1	0	$c$	0
$d$	0	1	0	1

TABLE 2.9 – Paramètres pour chaque profil de distributeur dans la preuve d'inapproximabilité.

$t$	1	2
$f^F$	0	$c^2$
$p^F$	0	0
$h^F$	$c^2$	0

TABLE 2.10 – Paramètres du fournisseur dans la preuve d'inapproximabilité.

Le plan de réapprovisionnement de coût optimal pour chaque profil de distributeur est  $x_{opt}^{D_1} = x_{opt}^{D_2} = [0, 1]$  de coût  $C_{opt}^{D_1} = C_{opt}^{D_2} = 0$ . Le coût total du fournisseur pour satisfaire ce plan est égal à  $c^2$ .

Lorsque le fournisseur connaît tous les paramètres de coût du distributeur, il peut proposer au distributeur un contrat satisfaisant la contrainte de rationalité individuelle en minimisant son coût. Si le distributeur est de profil 1, le contrat proposé est le suivant :  $(x_1^D, z_1)$  où  $x_1^D = [1, 0]$  et  $z_1 = 1$ . Le coût du distributeur en tenant compte le transfert d'argent est égal à 0. Le coût du fournisseur est alors égal à 1 (le coût du plan de production optimal  $x^F = [1, 0]$  permettant de satisfaire  $x_1^D$  est égal à 0, et le transfert d'argent  $z_1$  vaut 1). De la même manière, pour le profil 2, le fournisseur peut proposer le contrat  $(x_2^D, z_2)$  où  $x_2^D = [1, 0]$  et  $z_2 = c$ . Le coût du distributeur associé au contrat est égal à 0 et celui du fournisseur est égal à  $c$ . Ainsi, sous l'hypothèse d'une information complète entre les acteurs, l'espérance de coût du fournisseur est égal à  $P_1 + P_2c = (1 - 1/c)1 + 1 < 2$ .

Dans le cas où une asymétrie d'information est considérée sur le coût de stockage du distributeur, le fournisseur devrait prendre en compte les contrats suivants (nous examinons seulement les contrats qui sont intéressants pour le fournisseur par rapport à son coût) :

- Contrat C1 : ce contrat est défini par le plan de réapprovisionnement de coût optimal pour chaque profil de distributeur. Aucun transfert d'argent n'est alors nécessaire. Le contrat  $(x^D, z)$  est alors donné par  $x^D = [0, 1]$  et  $z = 0$ . Le coût du fournisseur associé à ce contrat est égal à  $c^2$ .
- Contrat C2 : le fournisseur propose un contrat défini par le plan de réapprovisionnement  $x^D = [1, 0]$  et un transfert d'argent égal à  $c$ . Les deux profils de distributeur ont une incitation à choisir ce contrat (le distributeur de profil 1 aura un coût négatif et le distributeur de profil 2 aura un coût égal à 0). Ce contrat induit un coût égal à  $c$  pour le fournisseur.
- Contrat C3 : le plan de réapprovisionnement proposé est identique à celui du contrat 2, i.e.  $x^D = [1, 0]$ , mais le transfert d'argent est égal à 1. Dans ce cas, seul le distributeur de profil 1 aura une incitation à choisir ce contrat (son coût serait alors égal à 0). Le coût du fournisseur associé à ce contrat est égal à 1.

La meilleure solution du point de vue du fournisseur et satisfaisant la contrainte de véracité garantie consiste uniquement à proposer le contrat C2 au distributeur. Ainsi, l'espérance de coût du fournisseur est égal à  $P_1c + P_2c = c$ . Remarquons que le fournisseur pourrait aussi proposer au distributeur l'ensemble de contrats composé du contrat 1 (qui est intéressant pour le profil 2) et du contrat C3 (qui est intéressant pour le profil 1). Cependant, l'espérance de coût du fournisseur serait alors égal à  $P_11 + P_2c^2 = (1 - 1/c) + c > c$ . Par conséquent, sous l'hypothèse d'une asymétrie d'information, l'espérance de coût du fournisseur est égal à  $c$  alors qu'il est inférieur à 2 avec un information complète. Le fournisseur augmente alors son coût d'un facteur supérieure à  $c/2$  lorsqu'il y a une asymétrie d'information. Lorsque  $c$  tend vers l'infini, ce ratio peut devenir arbitrairement élevé.  $\square$

Observons que dans la preuve précédente, nous avons considéré une instance où les coûts de lancement et de production sont nuls. La propriété 1 reste donc valide lorsque le transfert d'argent est uniquement autorisé sur les coûts de stockage du distributeur.

## 2.5 Extension au cas avec plusieurs distributeurs

Dans cette section, nous étendons le problème de coordination avec asymétrie d'information au cas avec un fournisseur et plusieurs distributeurs. Chaque distributeur doit satisfaire une demande pour un unique produit. Le problème de lot-sizing à deux niveaux avec un fournisseur et plusieurs distributeurs est connu sous le nom du problème *One-Warehouse Multi-Retailers*, que nous noterons OWMR par la suite. Arkin *et al.* (1989) ont montré que ce problème est NP-difficile. Les problèmes de coordination visant à diminuer le coût du fournisseur avec information complète et asymétrie d'information sont notés OWMR-CI et OWMR-AI respectivement. Le but de cette section est d'introduire la formulation mathématique de ces problèmes utilisées dans le chapitre 4 pour évaluer le gain du fournisseur lorsqu'il y a plusieurs distributeurs.

### 2.5.1 Définition du problème

De la même manière que pour le cas avec un distributeur, nous considérons les scénarios suivants : aucun transfert d'argent n'est autorisé entre le fournisseur et les distributeurs, le

transfert d'argent est autorisé soit sur le coût total des distributeurs, soit sur le coût de stockage des distributeurs. Nous considérons  $M$  distributeurs et posons  $\mathcal{M} = \{1, \dots, M\}$  l'ensemble de tous les distributeurs.

Le problème OWMR-CI consiste à déterminer un contrat par distributeur de sorte que le coût du fournisseur soit minimisé. La mise en place des contrats se fait de façon similaire au cas avec un distributeur. Pour chaque scénario, le coût total du distributeur  $m$  associé au contrat doit être au plus égal à son coût optimal  $c_m^D$ . Le coût optimal de chaque distributeur est déterminé en résolvant un problème ULS.

Pour le problème OWMR-AI, nous étendons le jeu de sélection. Chaque distributeur  $m$  est associé à  $N_m$  profils. Nous notons  $\mathcal{N}_m$  l'ensemble de tous les profils d'un distributeur  $m$ . Le fournisseur sait que le distributeur  $m$  est de profil  $i \in \mathcal{N}_m$  avec une probabilité  $P_i^m$  ( $\sum_{i \in \mathcal{N}_m} P_i^m = 1$ ). De la même manière que dans le cas avec un distributeur, le fournisseur propose à chaque distributeur  $m$  un ensemble de contrats, un pour chaque profil  $i \in \mathcal{N}_m$ . Nous devons alors considérer toutes les combinaisons de profils possibles parmi les distributeurs. Soit  $\mathcal{C}$  l'ensemble de toutes les combinaisons. Par exemple, pour  $M = 2$ , nous considérons que le distributeur 1 a  $N_1 = 2$  profils et le distributeur 2 a  $N_2 = 3$  profils. Dans ce cas, l'ensemble de toutes les combinaisons de profils est  $\mathcal{C} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$  où  $(i, j)$  signifie que le distributeur 1 est de profil  $i$  et le distributeur 2 de profil  $j$ . La probabilité d'avoir une combinaison  $c \in \mathcal{C}$  est égale à  $P_c = \prod_{m \in \mathcal{M}} P_{c_m}^m$ , où  $c_m$  est le profil du distributeur  $m$  dans la combinaison  $c \in \mathcal{C}$ . De plus, les contrats doivent également satisfaire les contraintes de rationalité individuelle et à véricité garantie afin d'assurer que chaque distributeur  $m$  aura aucune incitation à mentir.

Dans la section suivante, nous présentons la formulation mathématique des problèmes OWMR-CI et OWMR-AI.

## 2.5.2 Formulation mathématique

La formulation mathématique présentée pour le problème OWMR-AI est également basée sur le problème de multi-commodité (Cunha et Melo, 2016) qui est une formulation plus serrée que la formulation mathématique utilisant les variables agrégées. .

*Notations*

Le réapprovisionnement d'une unité à la période  $t$  par un distributeur  $m$  induit un coût fixe de réapprovisionnement  $f_t^{D,m}$  et un coût unitaire de réapprovisionnement  $p_t^{D,m}$ . Stocker des unités de la période  $t$  à la période  $t + 1$  induit un coût de stockage  $h_t^{D,m}$  pour le distributeur  $m$ . La demande d'un distributeur  $m$  à la période  $t$  est noté  $d_t^m$ .

Soit  $r_{ckt}^{F,m}$  la quantité d'unités produite par le fournisseur à la période  $t$  pour le distributeur  $m$  de profil  $c_m$ . Soit  $r_{ikt}^{D,m}$  la quantité d'unités envoyée au distributeur  $m$  de profil  $i$  pour satisfaire sa demande à la période  $t$ . Soit  $\sigma_{ckt}^{F,m}$  (resp.  $\sigma_{ikt}^{D,m}$ ) la quantité d'unités en stock au niveau du fournisseur (resp. distributeur de profil  $c_m$ ) à la fin de la période  $k$  pour satisfaire la demande du distributeur  $m$  de profil  $c_m$  (resp. sa demande) à la période  $t$ . La variable  $y_{ct}^F$  représente la variable de lancement du fournisseur à la période  $t$  associé à la combinaison  $c$ . La variable  $y_{it}^{D,m}$  représente la variable de lancement du distributeur  $m$  de profil  $i$  à la période  $t$ . Nous notons  $z_i^m$  le transfert d'argent du fournisseur associé au distributeur  $m$  de profil  $i$ . Le coût optimal du distributeur  $m$  de profil  $i$  est noté  $C_{opt}^{D,m,i}$ . Le coût total du distributeur  $m$  de profil  $i$  qui choisit un contrat mis en place pour un profil  $j$  est égal à  $C_{ij}^{D,m} = \sum_{t=1}^T (f_{it}^{D,m} y_{jt}^{D,m} + p_{it}^{D,m} x_{jt}^{D,m} + h_{it}^{D,m} s_{jt}^{D,m})$ .

La formulation mathématique du problème OWMR-AI lorsque le transfert d'argent est autorisé sur le coût de stockage des distributeurs est définie par :

$$\min \sum_{c \in \mathcal{C}} P_c \left( \sum_{t=1}^T (f_t^F y_{ct}^F + p_t^F x_{ct}^F + h_t^F s_{ct}^F) + \sum_{m=1}^M z_{c_m}^m \right)$$

$$\text{s.t. } \sigma_{i,k-1,t}^{D,m} + r_{ikt}^{D,m} = \delta_{kt} d_t^c + (1 - \delta_{kt}) \sigma_{ikt}^{D,m} \quad \forall m \in \mathcal{M}, \forall i \in \mathcal{N}_m, \forall 1 \leq k \leq t \leq T, \quad (2.15)$$

$$\sigma_{c,k-1,t}^{F,m} + r_{ckt}^{F,m} = r_{c_m kt}^{D,m} + \sigma_{ckt}^{F,m} \quad \forall c \in \mathcal{C}, \forall m \in \mathcal{M}, \forall 1 \leq k \leq t \leq T, \quad (2.16)$$

$$r_{ikt}^{D,m} \leq d_t^c y_{ik}^{D,m} \quad \forall m \in \mathcal{M}, \forall i \in \mathcal{N}_m, \forall 1 \leq k \leq t \leq T, \quad (2.17)$$

$$r_{ckt}^{F,m} \leq d_t^c y_{ck}^{F,m} \quad \forall c \in \mathcal{C}, \forall m \in \mathcal{M}, \forall 1 \leq k \leq t \leq T, \quad (2.18)$$

$$y_{ik}^{D,m} \leq r_{ikt}^{D,m} \quad \forall m \in \mathcal{M}, \forall i \in \mathcal{N}_m, \forall 1 \leq k \leq t \leq T, \quad (2.19)$$

$$\sum_{t=k}^T r_{ikt}^{D,m} = x_{ik}^{D,m} \quad \forall m \in \mathcal{M}, \forall i \in \mathcal{N}_m, \forall k \in \mathcal{T}, \quad (2.20)$$

$$\sum_{m=1}^M \sum_{t=k}^T r_{ckt}^{F,m} = x_{ck}^F \quad \forall c \in \mathcal{C}, \forall k \in \mathcal{T}, \quad (2.21)$$

$$\sum_{t=k}^T \sigma_{ikt}^{D,m} = s_{ik}^{D,m} \quad \forall m \in \mathcal{M}, \forall i \in \mathcal{N}_m, \forall k \in \mathcal{T}, \quad (2.22)$$

$$\sum_{m=1}^M \sum_{t=k}^T \sigma_{ckt}^{F,m} = s_{ck}^F \quad \forall c \in \mathcal{C}, \forall k \in \mathcal{T}, \quad (2.23)$$

$$C_{ii}^{D,m} - z_i^m \leq C_{opt}^{D,m,i} \quad \forall m \in \mathcal{M}, \forall i \in \mathcal{N}_m, \quad (2.24)$$

$$C_{ii}^{D,m} - z_i^m \leq C_{ij}^{D,m} - z_j^m \quad \forall m \in \mathcal{M}, \forall i, j \in \mathcal{N}_m, \quad (2.25)$$

$$z_i^m \leq \sum_{t=1}^T h_{it}^{D,m} s_{it}^{D,m} \quad \forall m \in \mathcal{M}, \forall i \in \mathcal{N}_m, \quad (2.26)$$

$$r_{ckt}^{F,m}, \sigma_{ckt}^{F,m} \geq 0 \quad \forall c \in \mathcal{C}, \forall m \in \mathcal{M}, \forall 1 \leq k \leq t \leq T,$$

$$y_{ct}^F \in \{0, 1\} \quad \forall c \in \mathcal{C}, \forall t \in \mathcal{T},$$

$$r_{ikt}^{D,m}, \sigma_{ikt}^{D,m} \geq 0 \quad \forall m \in \mathcal{M}, \forall i \in \mathcal{N}_m, \forall 1 \leq k \leq t \leq T,$$

$$y_{it}^{D,m} \in \{0, 1\} \quad \forall m \in \mathcal{M}, \forall i \in \mathcal{N}_m, \forall t \in \mathcal{T},$$

$$z_i^m \geq 0 \quad \forall m \in \mathcal{M}$$

où  $\delta_{kt}$  est égal à 1 si  $k = 1$ , et 0 sinon. Les contraintes (2.15) représente les contraintes de conservation de flot au niveau du distributeur pour satisfaire la demande de chaque distributeur. Les contraintes (2.16) correspondent aux contraintes de conservation de flot au niveau du fournisseur pour satisfaire les plans de réapprovisionnement des distributeurs de chaque combinaison. Les contraintes (2.17)-(2.18) forcent les variables de lancement à être égales à 1 si une production/réapprovisionnement a lieu. De la même manière que dans les sections précédentes, comme le coût total de chaque distributeur n'apparaît pas dans la fonction objectif, la contrainte (2.19) assure que la variable de lancement  $y_t^D$  est égale à 0 si aucun réapprovisionnement n'a lieu à la période  $t$ . Les contraintes (2.20)-(2.23) lient les variables de multi-commidités aux variables classiques des problèmes de lot-sizing. La contrainte de rationalité individuelle pour chaque distributeur est définie par la contrainte (2.24). La contrainte (2.25) correspond à la contrainte de véracité garantie assurant que chaque distributeur  $m$  de profil  $i$  n'ai pas d'incitation à choisir un contrat mis en place pour un autre profil. Les contraintes (2.26) garantissent que le transfert d'argent associé à chaque distributeur ne dépasse pas son coût de stockage.

Si le transfert d'argent n'est pas autorisé entre les acteurs, la formulation mathématique du

problème de coordination est identique à celle présentée en fixant les variables  $z_i^m$  à 0 et en supprimant les contraintes (2.25). La formulation mathématique du problème avec un transfert d'argent sur le coût total des distributeurs est obtenue en supprimant la contrainte (2.26) dans la formulation mathématique précédente.

Remarquons dans le problème OWMR-CI, chaque distributeur  $m$  a exactement un profil. Ainsi, il y a une unique combinaison possible et la contrainte à véracité garantie n'est alors pas nécessaire. La formulation mathématique des problèmes de coordination sous l'hypothèse d'information complète est alors identique à celle présentée en supprimant la contrainte (2.25).

La formulation mathématique présentée dans cette section sera utilisée pour évaluer le gain du fournisseur dans le chapitre 4.

## 2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une étude de coordination dans une chaîne logistique à deux niveaux où le monopole est détenu par le distributeur. Nous avons considéré que le fournisseur possède soit une information complète, soit une information partielle sur les paramètres de coût du distributeur. Nous avons proposé un mécanisme de coordination basé sur des contrats avec transfert d'argent pour améliorer le coût du fournisseur. Nous avons formulé différents problèmes selon les hypothèses posées sur l'information ou la possibilité de transfert d'argent. La complexité des problèmes issus de la mise en place des contrats a été étudiée. Les résultats obtenus sont reportés dans le tableau 2.11. Certains problèmes amènent à étudier de nouveaux problèmes de lot-sizing avec des contraintes de borne sur les coûts du distributeur. Lorsque le fournisseur a une information complète, la mise en place de contrat avec un transfert d'argent total sur les coûts du distributeur est équivalent à résoudre un problème lot-sizing à deux niveaux qui peut être résolu en temps polynomial. Nous avons vu que déterminer un contrat sans transfert d'argent revient à résoudre un problème de lot-sizing à deux niveaux en imposant que le coût total du distributeur soit égal à son coût optimal. Un algorithme de programmation dynamique en  $\mathcal{O}(T^3)$  a été proposé afin de résoudre ce problème de lot-sizing. Déterminer un contrat avec transfert d'argent sur les coûts de stockage du distributeur est équivalent à résoudre un problème de lot-sizing à deux niveaux en imposant que le coût de réapprovisionnement du distributeur soit au plus égal à son coût optimal. Nous avons montré que ce problème de lot-sizing est NP-difficile par une réduction à partir du problème de sac-à-dos. Lorsque le fournisseur a une asymétrie d'information sur les coûts du distributeur, nous avons proposé de mettre en place des contrats à partir d'un jeu de sélection. Nous avons vu que le cas sans transfert d'argent revient à déterminer plusieurs contrats sans transfert d'argent avec information complète. En revanche, la complexité des problèmes résultants de la mise en place de contrats avec transfert d'argent reste ouverte. Pour ce cas, nous avons montré qu'il n'existe pas d'algorithmes approchés à véracité garantie permettant de mettre en place des contrats avec transfert d'argent. Des expérimentations sont présentées dans le chapitre 4 afin d'évaluer le gain du fournisseur dans le cadre d'une coordination avec les contrats présentés dans ce chapitre. Dans le chapitre suivant, nous proposons une étude des problèmes de coordination lorsque le fournisseur a le monopole.

	Sans transfert (ST)	Transfert sur le stock (CS)	Transfert sur le coût total (CT)
Information complète	polynomial ( $\mathcal{O}(T^3)$ , section 2.3.1)	NP-difficile (section 2.3.2)	polynomial ( $\mathcal{O}(T^2 \log T)$ , section 2.3.3)
Asymétrie d'information	polynomial ( $\mathcal{O}(NT^3)$ , (section 2.4.2)	?	?

TABLE 2.11 – Résumé des résultats de complexité pour les problèmes étudiés dans ce chapitre.

### Perspectives

Dans les problèmes de coordination avec asymétrie d'information et un transfert d'argent entre les acteurs, l'ajout de la contrainte de véracité garantie semble changer la classe de complexité de ces problèmes. Suite à de nombreuses tentatives de preuve, cette question de complexité reste ouverte.

En pratique, il n'est pas évident de faire des transactions financières représentant un coût quelconque dans une chaîne logistique. De la même manière que pour le transfert sur le coût de stockage, une autre piste de recherche consiste alors à évaluer le gain du fournisseur avec un transfert d'argent qui soit uniquement sur le coût de réapprovisionnement du distributeur.

Par ailleurs, les problèmes traités dans ce chapitre ne considèrent qu'un unique produit. Une extension naturelle consiste à étudier une chaîne logistique avec plusieurs produits où des transferts d'argent peuvent être communs à tous les produits ou bien un sous-ensemble de produits.

L'étude présentée dans ce chapitre est une étude théorique des problèmes de coordination survenant dans les chaînes logistiques. Nous n'avons pas traité la question sur la manière dont les contrats proposés peuvent être appliqués en pratique. La gestion complexe des aspects financiers dans une chaîne logistique ne permet pas aux acteurs de faire des transactions financières facilement. De ce fait, il serait intéressant d'étudier comment le transfert d'argent entre les acteurs peut être mis en œuvre en pratique dans une chaîne logistique.

Des pistes d'étude plus générales seront présentées dans le chapitre de conclusion.



## Chapitre 3

# Coordination avec monopole du fournisseur

Nous étudions dans ce chapitre le problème de coordination dans une chaîne logistique à deux niveaux où le fournisseur a le monopole. Nous nous focalisons sur la minimisation du coût du distributeur. Dans ce cadre, nous étudions différents mécanismes de coordination permettant au distributeur de diminuer son coût total sans dégrader celui du fournisseur. Ces mécanismes impliquent en particulier la mise en place de contrats incluant un transfert d'argent du distributeur vers le fournisseur.

### 3.1 Introduction

Nous supposons que le fournisseur connaît la demande externe exprimée au niveau du distributeur et que ce dernier connaît tous les paramètres de coût du fournisseur. Nous définissons le plan de production de coût optimal comme étant le plan de production de coût minimum pour le fournisseur. Dans ce plan de production, le fournisseur ne stocke aucune unité<sup>1</sup> et ne paie donc aucun coût de stockage. Comme le fournisseur a le monopole, il peut imposer un plan de réapprovisionnement, qui est exactement égal à son plan de production optimal, au distributeur. Le coût de ce plan de réapprovisionnement peut être très élevé pour le distributeur. Dans ce chapitre, nous allons voir comment les acteurs peuvent coopérer pour que le coût du distributeur puisse diminuer sans dégrader le coût optimal du fournisseur.

Peu de travaux dans la littérature ont porté sur le problème de coordination sur un horizon de temps discret dans le cadre où le fournisseur a le monopole. Pour notre étude, nous nous sommes intéressés au contrat de réservation de capacité (Atamtürk et Hochbaum, 2001; Serel *et al.*, 2001) où le fournisseur réserve une capacité de production pour le distributeur. Dans la littérature, ce contrat est défini comme étant un contrat à long terme entre les deux acteurs de tel sorte que si la quantité de réapprovisionnement dépasse la capacité réservée, le coût unitaire de réapprovisionnement des unités qui dépasse la capacité est plus élevé.

Nous proposons de considérer le plan de production optimal comme une réservation de capacité faite par le fournisseur pour que le distributeur puisse satisfaire la demande : à chaque période, la capacité réservée correspond à la quantité produite par le fournisseur dans la solution optimale qu'il impose.

*Exemple 3.1.* Nous reprenons les notations définies dans la section 1.3.2 du chapitre 1 p.14. Considérons l'instance  $\mathcal{I}_c$  suivante (qui sera reprise dans les exemples suivants du chapitre) :  $T = 5$ ,  $p^F = (1, 0, 1, 0, 1)$ ,  $h^F = (2, 2, 3, 3, 3)$ ,  $f_t^F = 10$ ,  $f_t^D = 0$ ,  $p_t^D = 1$ ,  $h_t^D = 3$  et  $d_t = 2$  pour toute période

1. En pratique, il est possible que les unités soient entièrement stockées au niveau du distributeur avec la stratégie de stock en consignation. Le stock en consignation indique le fait que le stock est détenu chez un seul acteur. Dans notre cas, l'acteur qui détient toutes les unités en stock est le distributeur.

$t \in \{1, \dots, T\}$ . Le plan de production du fournisseur de coût optimal est égal à  $x_{opt}^F = (10, 0, 0, 0, 0)$  de coût  $c_{opt}^F = f_1^F + 10p_1^F = 20$ . En imposant son plan de production au distributeur, le fournisseur impose une réservation de capacité : le distributeur reçoit  $d_{15} = 10$  unités à la période 1 impliquant que le distributeur doit stocker des unités à chaque période. Le plan de réapprovisionnement du distributeur pour satisfaire les demandes est alors égal à  $x^D = x^F$  de coût total  $f_1^D + 10p_1^D + 8h_1^D + 6h_2^D + 4h_3^D + 2h_4^D = 70$ .

### Contributions.

Dans ce chapitre, nous proposons d'étudier différents contrats basés sur des transferts d'argent entre les acteurs de la chaîne logistique afin de diminuer le coût du distributeur. Nous considérons dans un premier temps que le distributeur propose au fournisseur de prendre en charge les coûts de stockage du fournisseur des unités qui sont stockées à son niveau. Nous montrons que ce problème de coordination peut être résolu en  $\mathcal{O}(T \log T)$  à partir d'un algorithme de programmation dynamique.

Dans un deuxième temps, l'étude de la coordination se base sur la possibilité de produire plus d'unités que la capacité réservée par le fournisseur si le distributeur paye le coût de production des unités produites au-delà de cette capacité. L'hypothèse que les unités ne sont pas stockées au niveau du fournisseur reste valide. Dans ce cas, le principe de la coordination (voir figure 3.1) repose dans un premier temps sur un contrat de réservation de capacité mis en place par le fournisseur. Puis dans un deuxième temps, le distributeur peut proposer au fournisseur un nouveau plan de réapprovisionnement à travers un contrat afin de diminuer son coût. Un transfert d'argent entre les acteurs peut être inclus dans le contrat pour compenser la dégradation du coût optimal du fournisseur.

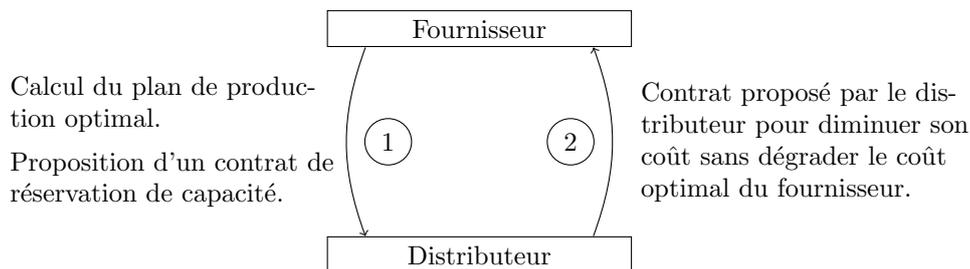


FIGURE 3.1 – Schéma du mécanisme de coordination entre le fournisseur et le distributeur.

Nous distinguerons plusieurs scénarios possibles : soit le distributeur propose un transfert d'argent sur une partie du coût total du fournisseur, soit il propose au fournisseur de payer les coûts fixes supplémentaires induits par le surplus de production, ou bien le distributeur ne prend pas en charge les coûts fixes supplémentaires du fournisseur. Nous montrons que le problème de coordination où le distributeur ne prend pas en charge les coûts fixes supplémentaires du fournisseur est NP-difficile. Pour les autres scénarios, nous proposons des algorithmes de programmation dynamique pour résoudre ces problèmes en temps polynomial.

**Plan du chapitre.** La section 3.2 présente un état de l'art sur les problèmes de lot-sizing avec réservation de capacité et sur les différents aspects de coordination avec un contrat de réservation de capacité. Nous présentons ensuite l'étude du problème de coordination où le distributeur propose au fournisseur de prendre en charge les coûts de stockage du fournisseur dans la section 3.3. L'analyse des différents scénarios de coordination pour lesquels le distributeur a la possibilité de modifier la réservation de capacité est proposée dans la section 3.4.

## 3.2 État de l'art

### 3.2.1 Problèmes de lot-sizing avec sous-traitance

Le contrat de réservation de capacité entre un fournisseur et un distributeur est définie comme un contrat dans lequel le fournisseur s'engage à réserver une capacité de production pour le distributeur (Serel *et al.*, 2001). Pour le distributeur, il est assuré de pouvoir se réapprovisionner auprès de son fournisseur jusqu'à la capacité qui lui a été réservée. Cependant, il peut se réapprovisionner au-delà de cette capacité soit en se réapprovisionnant auprès d'un autre fournisseur, soit son fournisseur lui permet de se réapprovisionner au-delà de la capacité réservée à un certain coût fixé par le fournisseur. Le problème de lot-sizing que le distributeur doit résoudre est alors un problème de lot-sizing avec sous-traitance que nous avons noté CLS-S. Dans la littérature, le problème de sous-traitance peut aussi être vu comme un problème de lot-sizing avec rupture de stock (Chu *et al.*, 2013). Le problème de lot-sizing avec rupture de stock (Sandbothe et Thompson, 1990) autorise la perte d'une partie du stock à chaque période en pénalisant chaque unité de stock perdue.

Sandbothe et Thompson (1990) ont étudié le problème de lot-sizing avec rupture de stock. Les auteurs ont considéré des paramètres de coût stationnaires. Ils ont proposé des propriétés de dominance afin de développer un algorithme de programmation dynamique. L'algorithme résout le problème en  $\mathcal{O}(T^3)$  lorsque la capacité de production est constante et en  $\mathcal{O}(2^T)$  lorsque la capacité de production varie sur l'horizon. Atamtürk et Hochbaum (2001) se sont intéressés au problème d'acquisition de capacité de production et de sous-traitance. Le problème d'acquisition de capacité consiste à dimensionner la capacité de production réservée par le fournisseur afin d'éviter un stock et un besoin en sous-traitance excessifs. Les auteurs montrent que le problème de lot-sizing avec acquisition de capacité et sous-traitance peut se résoudre à partir d'un algorithme de programmation dynamique en  $\mathcal{O}(T^5)$  avec un coût de production concave et une capacité de production constante. Ils ont également proposé des algorithmes polynomiaux pour différentes structures de coûts. Chu et Chu (2007) ont étudié le problème CLS-S avec capacité de stockage limitée. Lorsque la capacité de sous-traitance et de production sont non bornées, résoudre ce problème revient à résoudre un problème ULS avec borne de stockage. Les auteurs proposent un algorithme en  $\mathcal{O}(T^2 \log T)$  pour résoudre le problème où la capacité de sous-traitance est limitée à chaque période par la demande et les coûts de stockage et de sous-traitance sont stationnaires. Lee et Li (2013) ont considéré des problèmes de lot-sizing avec sous-traitance en considérant différentes hypothèses sur les paramètres de coût (quelconques, décroissants, croissants, stationnaires ou nuls). Les auteurs ont mis en place un algorithme en  $\mathcal{O}(T^3)$  pour le cas où les coûts fixes et unitaires de production sont décroissants et la capacité de production croissante. Lorsque tous les paramètres de coût sont quelconques et la capacité de production constante, ils ont montré que le problème peut être résolu à partir d'un algorithme en  $\mathcal{O}(T^4)$ .

Peu de travaux se sont intéressés aux problèmes de lot-sizing à deux niveaux avec réservation de capacité ou sous-traitance. Sargut et Romeijn (2007) ont considéré le problème de lot-sizing à deux niveaux avec une capacité de production limitée au niveau du fournisseur et une possibilité de sous-traitance s'il veut produire au-delà de la capacité disponible. Ils ont étudié le problème en considérant différentes structures de coût, une capacité de production limitée ou non, une capacité de sous-traitance limitée ou non. Dans le cas où la capacité de production est limitée, la capacité de sous-traitance non limitée et les paramètres de coût sont concaves, ils ont proposé un algorithme de programmation dynamique en  $\mathcal{O}(T^8)$ .

Les travaux présentés dans les sections suivantes traitent de différents aspects du problème CLS-S où la capacité de production correspond à un plan de production au niveau du fournisseur vérifiant la propriété ZIO.

### 3.2.2 Problèmes de coordination avec réservation de capacité

De nombreux contrats existent dans la littérature faisant intervenir les problèmes EOQ (Cachon, 2003). Parmi ces contrats, nous retrouvons les contrats suivants : *buy-back*, *minimum commitment*, *revenue sharing*, *quantity flexibility*, *capacity reservation* (Serel *et al.*, 2001). Dans notre problème, le plan de réapprovisionnement imposé par le fournisseur peut être considéré comme une capacité de production réservée par le fournisseur pour le distributeur. Ainsi, nous nous intéressons en particulier aux contrats de réservation de capacité. Serel *et al.* (2001) sont les premiers auteurs à avoir étudié le problème de coordination dans une chaîne logistique avec plusieurs fournisseurs, un distributeur et une demande stochastique. Le distributeur peut proposer un contrat de réservation de capacité au fournisseur qu'il préfère parmi plusieurs fournisseurs du marché. Si la capacité établie avec le contrat ne permet pas de satisfaire la demande, le distributeur a la possibilité de se réapprovisionner auprès des autres fournisseurs. Ils ont montré que cette méthode de coordination permet au fournisseur de mieux gérer sa capacité à long terme et au distributeur d'avoir un coût de réapprovisionnement plus intéressant. Inderfurth et Kelle (2011) ont étendu les travaux de Serel *et al.* (2001) dans le cas où les coûts de réapprovisionnement proposés par le marché sont incertains. Mathur et Shah (2008) ont proposé de coordonner une chaîne logistique composée d'un fournisseur, d'un distributeur et d'une demande stochastique à partir d'un contrat de réservation de capacité où les deux parties peuvent être pénalisées : le distributeur peut proposer un contrat où le fournisseur paye un coût s'il produit en dessous de la capacité réservée et le distributeur paye un coût pour les unités non utilisées de la capacité réservée. Les auteurs introduisent également dans ce contrat un coût permettant d'inciter le fournisseur à produire plus que la capacité à réserver. Si le fournisseur accepte le contrat, son problème consiste à déterminer une capacité de réservation qui maximise son revenu. Le problème du distributeur est d'établir les paramètres du contrat qui maximisent son revenu. Dans cet article, les auteurs proposent de déterminer les paramètres du contrat et la capacité à réserver à partir d'une analyse de l'expression du revenu de la chaîne logistique en considérant que la demande suit différentes distributions de probabilité. Une analyse expérimentale a été proposée pour illustrer les effets des paramètres du contrat sur la performance de la chaîne logistique. Erkoç et Wu (2005) ont étudié la coordination d'une chaîne logistique composée d'un fournisseur et d'un distributeur avec une demande stochastique à travers un contrat de réservation de capacité. Les auteurs ont proposé de coordonner la chaîne logistique avec un contrat comprenant des coûts de réservation partiellement déductibles et un contrat de réservation avec partage de coût où le distributeur paye une partie des coûts de réservation. Ils ont également déterminé le niveau de pénalité de non respect du contrat de réservation de capacité qui permet de coordonner la chaîne logistique, *i.e.* si le fournisseur ne réserve pas la capacité établie dans le contrat de réservation de capacité, il doit payer une pénalité.

Park et Kim (2014) ont considéré le contrat de réservation de capacité pour le problème de lot-sizing à deux niveaux avec un distributeur, plusieurs fournisseurs et un produit en incluant des contraintes industrielles. Ils proposent une formulation mathématique du problème et un algorithme basé sur la méthode de décomposition par horizon glissant<sup>2</sup> pour résoudre le

2. Avec la méthode d'implémentation par horizon glissant, au lieu de résoudre un problème en considérant l'horizon de temps, des sous-problèmes sont résolus en décomposant l'horizon de temps en plusieurs intervalles de périodes consécutives.

problème. Serel (2007) a étendu les travaux de Serel *et al.* (2001) en considérant un horizon de temps infini et une incertitude sur la disponibilité des produits au sein du marché. Il a montré à travers des expérimentations qu'en choisissant un coût et une capacité de réservation adaptés, le fournisseur peut faire en sorte que le distributeur ne s'approvisionne qu'auprès de lui sans passer par le marché.

Dans nos travaux, nous proposons de coordonner une chaîne logistique à deux acteurs avec des contrats basés sur le principe de réservation de capacité et des transferts d'argent entre les acteurs. Ces contrats nous amènent à étudier des problèmes de lot-sizing avec sous-traitance pour lesquels nous proposons une analyse de complexité ainsi que des algorithmes de programmation dynamique pour les résoudre. Dans la section suivante, nous présentons les travaux effectués sur le problème de coordination à partir d'un contrat où le distributeur propose au fournisseur de prendre en charge les coûts de stockage du fournisseur dans le but de diminuer son coût.

### 3.3 Contrat avec paiement des coûts de stockage par le distributeur

#### 3.3.1 Définition du problème

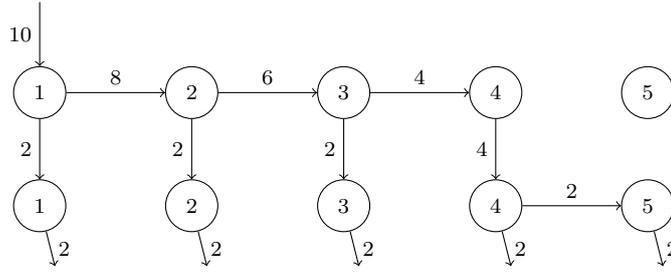
Dans cette section, nous considérons le problème de coordination où le distributeur ne modifie pas la réservation de capacité faite par le fournisseur, notée  $R_t$  pour tout  $t \in \{1, \dots, T\}$ .

Pour optimiser ses coûts, le distributeur peut proposer au fournisseur de prendre en charge les coûts de stockage des unités qui sont stockées au niveau du fournisseur. En effet, le fournisseur impose au distributeur que tout le stock se fait au niveau du distributeur. En proposant au fournisseur de prendre en charge les coûts de stockage des unités qui restent en stock à son niveau, le distributeur peut avoir plus de flexibilité sur ses périodes de réapprovisionnement sans modifier le plan de production optimal du fournisseur, et ainsi diminuer son coût. Nous notons ce problème 2ULS-FP où FP signifie *Fixed Production*. Le contrat  $(x^D, z)$  proposé par le distributeur est composé d'un nouveau plan de réapprovisionnement  $x^D$  et d'un transfert d'argent  $z = \sum_t h_t^F s_t^F$  sur les coûts de stockage du fournisseur. Ce contrat ne dégrade pas le coût optimal du fournisseur puisque le plan de production ne sera pas remis en cause, et les coûts de stockage sont compensés par un transfert d'argent. Le coût du distributeur associé à ce contrat est égal au coût du plan de réapprovisionnement  $x^D$  plus le transfert d'argent  $z$ .

#### Définition 3.1 (Gain du distributeur)

Le gain du distributeur pour un problème de coordination  $P$  est défini par  $c^D - c_P^D$  où  $c^D$  est le coût du distributeur lorsque le plan de réapprovisionnement est imposé par le fournisseur et  $c_P^D$  est le coût du distributeur associé au contrat du problème  $P$ .

*Exemple 3.2.* Nous reprenons l'instance  $\mathcal{I}_c$  définie dans l'exemple 3.1 p.43. Le plan de réapprovisionnement imposé par le fournisseur est  $x^D = (10, 0, 0, 0, 0)$ . Sans coordination, nous avons vu que le coût du distributeur est  $c^D = 70$ . Lorsque le distributeur peut prendre en charge les coûts de stockage du fournisseur, il peut proposer au fournisseur le contrat  $(\bar{x}^D, z)$  où  $\bar{x}^D = (2, 2, 2, 4, 0)$  impliquant que le fournisseur stocke 8 unités à la période 1, 6 unités à la période 2 et 4 unités à la période 3 (voir figure 3.2). Le transfert d'argent  $z$  correspondant au coût total de stockage du fournisseur est alors  $z = h_t^F s_t^F = 36$  et le coût total du distributeur est égal à  $c_{PF}^D = 2p_1^D + 2p_2^D + 2p_3^D + 4p_4^D + z = 46$ . Le gain du distributeur est alors égal à  $c^D - c_{PF}^D = 24$ .

FIGURE 3.2 – Solution du problème 2ULS-FP associée à l'instance  $\mathcal{I}_c$ .

*Formulation mathématique du problème 2ULS-FP.*

Déterminer un contrat  $(x^D, z)$  revient à résoudre un problème 2ULS où le plan de production du fournisseur est fixé à  $R$ . Les variables de décision correspondent aux variables de décisions du problème 2ULS (voir section 1.3.2 p.14).

$$c_{PF} = \min \quad c^D(y^D, x^D, s^D) + \sum_{t \in \mathcal{T}} h_t^F s_t^F \quad (3.1)$$

$$\text{s.t. } s_{t-1}^D + x_t^D = d_t + s_t^D \quad \forall t \in \mathcal{T}, \quad (3.2)$$

$$s_{t-1}^F + R_t = x_t^D + s_t^F \quad \forall t \in \mathcal{T}, \quad (3.3)$$

$$x_t^D \leq d_{tT} y_t^D \quad \forall t \in \mathcal{T},$$

$$s_0^D = s_T^D = s_0^F = s_T^F = 0,$$

$$x_t^D, s_t^D, s_t^F \geq 0 \quad \forall t \in \mathcal{T},$$

$$y_t^D \in \{0, 1\} \quad \forall t \in \mathcal{T}$$

La fonction objectif (3.1) consiste à minimiser le coût total du distributeur ainsi que les coûts de stockage du fournisseur. Les contraintes (3.2) et (3.3) correspondent aux contraintes de conservation du flot où le plan de production du fournisseur est fixé à  $R$ .

Ce problème peut être résolu à partir de l'algorithme résolvant le problème 2ULS qui a une complexité de  $\mathcal{O}(T^2 \log T)$  (Melo et Wolsey, 2010). Dans la section suivante, nous améliorons cette complexité en proposant un algorithme de programmation dynamique en  $\mathcal{O}(T \log T)$  pour résoudre ce problème.

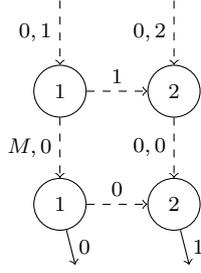
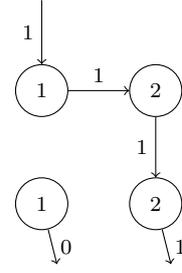
### Proposition 3.1

Le gain du distributeur associé au problème 2ULS-FP peut être arbitrairement grand par rapport au cas où il n'y a pas de coordination.

*Preuve.* Soit  $M > 0$ . Considérons l'instance  $\mathcal{I}_1$  suivante (voir figure 3.3) :  $T = 2$ ,  $d = (0, 1)$ ,  $f^D = (M, 0)$ ,  $p^F = (1, 2)$ ,  $p_t^D = h_t^D = f_t^F = 0$ ,  $h_t^F = 1$  pour tout  $t \in \{1, \dots, T\}$ .

Le plan de production  $x_{opt}^F = R = (1, 0)$  est de coût optimal égal à  $c_{opt}^F = 1$  pour le fournisseur. Le coût du distributeur associé au plan de réapprovisionnement  $x^D = R$  est de coût  $c^D = M$ . Dans le cadre du problème 2ULS-FP, la coordination entre les acteurs permet au distributeur de proposer un nouveau plan de réapprovisionnement  $\bar{x}^D = (0, 1)$  induisant le stockage d'une unité à la période 1 au niveau du fournisseur (voir figure 3.4). Le coût du distributeur est alors égal à  $\bar{c}^D = 1$ , qui représente le coût de stockage au niveau du fournisseur. Ainsi, comme  $c^D / \bar{c}^D = M$ , le gain du distributeur peut être arbitrairement grand.  $\square$

*Remarque.* Soit  $c_{PF}$  la valeur obtenue en résolvant à l'optimalité le modèle de programmation linéaire en nombres entiers du problème 2ULS-FP. Lorsqu'il existe un unique plan de production de coût

FIGURE 3.3 – Instance  $\mathcal{I}_1$ .FIGURE 3.4 – Solution du problème 2ULS-FP où  $R = (1, 0)$ .

optimal  $c_{opt}^F$ , la valeur optimale  $c_H$  du modèle mathématique  $P_H$  suivant est égale à  $c_{PF}$ .

$$\begin{aligned}
c_H = \min \quad & c^D(y^D, x^D, s^D) + c^F(y^F, x^F, s^F) \\
\text{s.t.} \quad & s_{t-1}^D + x_t^D = d_t + s_t^D \quad \forall t \in \mathcal{T}, \\
& s_{t-1}^F + x_t^F = x_t^D + s_t^F \quad \forall t \in \mathcal{T}, \\
& x_t^D \leq d_{tT} y_t^D \quad \forall t \in \mathcal{T}, \\
& x_t^F \leq d_{tT} y_t^F \quad \forall t \in \mathcal{T}, \\
& \sum_{t \in \mathcal{T}} (f_t^F y_t^F + p_t^F x_t^F) \leq c_{opt}^F \quad \forall t \in \mathcal{T}, \\
& x_t^D, s_t^D, s_t^F \geq 0 \quad \forall t \in \mathcal{T}, \\
& y_t^D \in \{0, 1\} \quad \forall t \in \mathcal{T}
\end{aligned} \tag{3.4}$$

En effet,  $R$  correspond à l'unique plan de production du fournisseur de coût optimal  $c_{opt}^F$  qui minimise  $\sum_{t \in \mathcal{T}} (f_t^F y_t^F + p_t^F x_t^F)$ . Ainsi, la contrainte (3.4) implique que le plan de production déterminé par la résolution du programme mathématique  $P_H$  est égal à  $R$ . En revanche, s'il existe plusieurs plan de production de coût optimal  $c_{opt}^F$ , nous avons  $c_H \leq c_{PF}$ . Nous pouvons remarquer que le programme mathématique  $P_H$  correspond au problème  $P_{CS}$  qui vise la détermination d'un contrat avec transfert d'argent sur les coûts de stockage et information complète lorsque le distributeur a le monopole (voir chapitre 2 section 2.3.3 p.31).

### 3.3.2 Résolution du problème 2ULS-FP

Dans cette section, nous proposons un algorithme de programmation dynamique en  $\mathcal{O}(T \log T)$  pour résoudre le problème 2ULS-FP.

Le fournisseur détermine son plan de production optimal  $R$  en résolvant un problème ULS. Le plan de production  $R$  satisfait donc la propriété ZIO. Comme dans le problème 2ULS-FP le plan de production du fournisseur est fixé à  $R$ , une solution de ce problème vérifie également la propriété ZIO au niveau du fournisseur et du distributeur. À chaque période  $t$  telle que  $R_t = d_{tk}$  ( $k \geq t$ ), une quantité  $R_t$  est donc disponible au niveau du fournisseur pour satisfaire les demandes de la période  $t$  à la période  $k$  au niveau du distributeur. En particulier, nous avons  $s_{t-1}^D = s_k^D = 0$ . Soit  $i$  une période telle que  $t \leq i \leq k$ . L'idée pour résoudre ce problème est de déterminer une période  $j$ ,  $i \leq j \leq k$ , telle que la quantité  $d_{ij}$  est envoyée au niveau du distributeur à la période  $i$  et la quantité  $d_{j+1,k}$  reste en stock au niveau du fournisseur. Le coût de stockage pour stocker  $d_{j+1,k}$  de la période  $i$  à la période  $j$  au niveau du fournisseur est pris en charge par le distributeur.

Soient  $t, k$  deux périodes telles que  $1 \leq t \leq k \leq T$  et  $R_t = d_{tk}$ . Soit  $i$  une période telle que  $t \leq i \leq k$ . La notation  $d_i \subseteq R_t$  signifie que la demande  $d_i$  est couverte par  $R_t$ . Pour chaque période  $i \in \{t, \dots, k\}$ , nous posons  $\alpha^i = t$  la période à laquelle  $d_i \subseteq R_t$ .

Soit  $G_t$  le coût total minimum pour satisfaire les demandes de la période 1 à la période  $t$  connaissant la capacité de production  $R$  réservée pour le distributeur par le fournisseur. L'idée de l'algorithme est de déterminer une période  $k$ ,  $1 \leq k \leq t$ , telle que  $d_{kt} \subseteq R_{\alpha^k}$  et les demandes  $d_{kt}$  sont satisfaites par une période de réapprovisionnement à la période  $k$  au niveau du distributeur. Si  $k > \alpha^k$ , les demandes  $d_{kt}$  sont restées en stock au niveau du fournisseur de la période  $\alpha^k$  à la période  $k - 1$ . Nous définissons la formule de récurrence de la manière suivante :

$$G_t = \min_{1 \leq k \leq t} \{G_{k-1} + f_k^D + p_k^D d_{kt} + \sum_{i=k}^{t-1} h_i^D d_{i+1,t} + h_{\alpha^k, k-1}^F d_{kt} + \mathbb{1}(d_{kt} \subseteq R_{\alpha^k})\} \quad (3.5)$$

où  $h_{i,j}^F = \sum_{l=i}^j h_l^F$  et  $\mathbb{1}(c)$  est égal à 0 si  $c$  est vraie et  $+\infty$  sinon. Dans l'équation (3.5), le terme  $f_k^D + p_k^D d_{kt} + \sum_{i=k}^{t-1} h_i^D d_{i+1,t}$  correspond à un réapprovisionnement à la période  $k$  au niveau du distributeur pour satisfaire les demandes  $d_{kt}$ . Le terme  $h_{\alpha^k, k-1}^F d_{kt}$  correspond au coût de stockage du fournisseur pour que les unités de demandes  $d_{kt}$  soient stockées au niveau du fournisseur entre les périodes  $\alpha^k$  et  $k - 1$  sachant que  $d_{kt}$  est disponible à la période  $\alpha^k$ . Le terme  $\mathbb{1}(d_{kt} \subseteq R_{\alpha^k})$  permet de déterminer si la quantité  $d_{kt}$  est bien disponible à la période  $\alpha^k$ , *i.e.* si les demandes  $d_{kt}$  sont couvertes par la réservation  $R_{\alpha^k}$ . Une représentation des différents termes de la formule de récurrence est fournie dans la figure 3.5. Une quantité d'unités  $R_{\alpha^k}$  est disponible à la période  $\alpha^k$  au niveau du fournisseur et peut être envoyée au niveau distributeur à partir de la période  $\alpha^k$ .

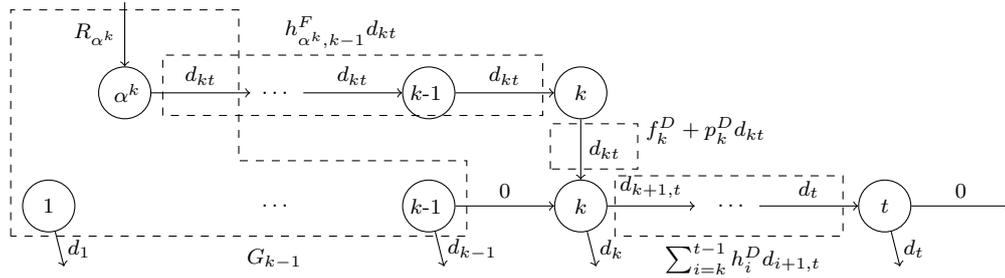


FIGURE 3.5 – Représentation du coût  $G_k$  où  $R_{\alpha^k}$  est disponible à la période  $\alpha^k$  et  $d_{kt} \subseteq R_{\alpha^k}$  sont envoyées au niveau du distributeur à la période  $k$  pour satisfaire les demandes de la période  $k$  à  $t$ .

L'initialisation se fait en posant  $G_0 = 0$ . Le coût optimal du problème 2ULS-FP est égal à  $G_T$ . Le coût  $G_T$  se calcule en  $\mathcal{O}(T \log T)$  en se basant sur l'algorithme proposé par Aggarwal et Park (1993).

## 3.4 Contrat de réservation de capacité et sous-traitance

### 3.4.1 Définition du problème

Nous considérons dans cette section le problème de coordination où le distributeur peut proposer un nouveau plan de production au fournisseur à partir du contrat de réservation de capacité. Du fait que le fournisseur a le monopole, nous supposons que les unités sont stockées uniquement au niveau du distributeur impliquant que le plan de production et le plan de réapprovisionnement sont identiques.

Afin de coordonner les décisions de planification des acteurs, si la capacité réservée par le fournisseur est dépassée, le distributeur prend en charge le coût de production unitaire des

unités qui sont produites au-delà de la réservation de capacité. Nous reprenons la notation CLS-S introduite dans le chapitre 1 pour les problèmes de lot-sizing avec sous-traitance.

#### Notations et variables de décision.

Comme la réservation de capacité correspond à un plan de production vérifiant la propriété ZIO, elle vérifie l'hypothèse suivante :

##### Hypothèse 3.1

Pour toute période  $t \in \{1, \dots, T\}$ , si  $R_t > 0$  alors  $R_t = d_{tk}$  avec  $k \geq t$  et  $R_i = 0$  pour tout  $i \in \{t + 1, \dots, k\}$ .

Nous notons  $D_t$  l'ensemble des demandes qui sont couvertes par la réservation de capacité  $R_t > 0$ . La production d'unités au-delà de  $R_t$  à une période  $t$  induit un coût de sous-traitance unitaire  $b_t$  pour le distributeur sous l'hypothèse suivante :

##### Hypothèse 3.2

Pour toute période  $t$ ,  $b_t \geq p_t^F$ .

La quantité d'unités produites en-dessous (resp. au-delà) de la réservation de capacité  $R_t$  à la période  $t$  est définie par la variable  $x_t^F$  (resp.  $w_t^F$ ). La quantité totale de réapprovisionnement du distributeur  $x_t^D$  à une période  $t$  est alors égale à  $x_t^F + w_t^F$ .

La production d'unités induit un coût fixe  $f^F$  au fournisseur. Si  $R_t = 0$  à une période  $t$ , sous-traiter des unités à cette période  $t$  induit également un coût fixe  $f^F$  au fournisseur. Ainsi, la possibilité de produire plus que  $R_t$  au niveau du fournisseur peut induire des coûts fixes de production qui n'étaient pas présents dans la solution optimale du fournisseur. Dans les sections suivantes, nous distinguerons les cas où le distributeur prend en charge (ou non) les coûts fixes du fournisseur si ce dernier ne les payait pas dans sa solution optimale. Le contrat  $(x^D, z)$  proposé par le distributeur est alors composé d'un nouveau plan de réapprovisionnement  $x^D = x^F + w^F$  et d'un transfert d'argent  $z$ .

Les sections suivantes présentent les travaux effectués pour les différents scénarios que nous proposons concernant le transfert d'argent. L'hypothèse 3.1 vérifiée par la réservation de capacité nous permet de mettre en place des algorithmes de programmation dynamique polynomiaux.

### 3.4.2 Transfert d'argent total

Comme dans le cas où le distributeur a le monopole<sup>3</sup>, nous étudions le problème de coordination où un transfert d'argent sur tous les coûts du fournisseur est possible entre les deux acteurs. Ce problème est noté CLS-S-TC, où TC signifie *Total Cost*. Pour diminuer son coût, le distributeur peut proposer au fournisseur un contrat  $(x^D, z)$  où le plan de réapprovisionnement est égal à  $x^F + w^F$  et le transfert d'argent  $z$  correspond au coût total de sous-traitance et une partie du coût total du fournisseur. De plus, le contrat doit être individuellement rationnel, *i.e.* le coût du fournisseur ne doit pas dépasser son coût optimal. Déterminer un tel contrat revient à minimiser le coût total du distributeur incluant le transfert d'argent et le coût total de sous-traitance sachant que le coût total du fournisseur est au plus égal à  $c_{opt}^F$ . Le coût du fournisseur associé au contrat est alors égal à  $\sum_{t \in \mathcal{T}} (f_t^F y_t^D + p_t^F x_t^F)$  moins le transfert d'argent  $z$ .

3. voir chapitre 2 section 2.3.3 p.31

*Exemple 3.4.* Considérons l'instance  $\mathcal{I}_c$  définie dans l'exemple 3.1 p.43. La réservation de capacité est  $R = (10, 0, 0, 0, 0)$  de coût  $c^D = 70$  pour le distributeur. Le coût optimal du fournisseur est  $c_{opt}^F = 20$ . Avec un transfert d'argent total sur les coûts du fournisseur, le distributeur peut déterminer un contrat  $(x^D, z)$  où  $x^D = x^F + w^F$  est défini de la manière suivante :  $x^D = (4, 0, 2, 4, 0)$  avec  $x^F = (4, 0, 0, 0, 0)$  et  $w^F = (0, 0, 2, 4, 0)$ . Le coût total du distributeur associé au plan de réapprovisionnement  $x^D$  est alors égal à  $c_T^D = 4p_1^D + 2p_3^D + 2p_4^D + 2h_1^D + 2h_4^D = 22$ . Le coût total du fournisseur associé au plan de production  $x^F$  est égal à  $c_T^F = f_1^F + f_3^F + f_4^F + 4p_1^F = 34$ . Afin que le contrat soit individuellement rationnel, le distributeur propose un transfert d'argent sur le coût total du fournisseur égal à  $\bar{z} = 14$ . Le transfert d'argent total  $z$  du contrat est donc  $2b_3 + 4b_4 + \bar{z} = 26$ . Ainsi, le coût du fournisseur associé au contrat est  $c_T^F - z = 20$  et celui du distributeur est  $c_T^D + z = 48$ . Le gain du distributeur est alors de  $c^D - c_T^D = 22$ .

### Présentation du problème CLS-S-TC.

*Formulation mathématique.*

Nous rappelons les variables de décision du problème. La variable de production pour les unités produites en-dessous de  $R_t$  est notée  $x_t^F$ . La variable de sous-traitance pour les unités produites au-delà de  $R_t$  est notée  $w_t^F$ . La variable de lancement associée au plan de réapprovisionnement  $x_t^D = x_t^F + w_t^F$  est notée  $y_t^D$ . La variable de stockage représentant la quantité d'unités en stock chez le distributeur à la fin de la période  $t$  est donnée par  $s_t^D$ . Le transfert d'argent sur le coût total du fournisseur est noté  $z_{CT}$ . La formulation mathématique du problème CLS-S-TC est définie par :

$$\min \sum_{t \in \mathcal{T}} (f_t^D y_t^D + p_t^D (x_t^F + w_t^F) + h_t^D s_t^D + b_t w_t^F) + z_{CT} \quad (3.6)$$

$$\text{s.t. } s_{t-1}^D + x_t^F + w_t^F = d_t + s_t^D \quad \forall t \in \mathcal{T}, \quad (3.7)$$

$$x_t^F + w_t^F \leq d_{tT} y_t^D \quad \forall t \in \mathcal{T}, \quad (3.8)$$

$$x_t^F \leq R_t \quad \forall t \in \mathcal{T}, \quad (3.9)$$

$$\sum_{t \in \mathcal{T}} (f_t^F y_t^D + p_t^F x_t^F) - z_{CT} \leq c_{opt}^F, \quad (3.10)$$

$$x_t^F, s_t^D, w_t^F \geq 0 \quad \forall t \in \mathcal{T},$$

$$y_t^D \in \{0, 1\} \quad \forall t \in \mathcal{T},$$

$$z_{CT} \geq 0.$$

La fonction objectif consiste à minimiser la somme du coût total du distributeur, du coût total de sous-traitance du fournisseur, et le transfert d'argent sur le coût total du fournisseur  $z_{CT}$  que le distributeur doit prendre en charge. La contrainte (3.7) représente la contrainte de conservation de flot. La contrainte (3.8) assure que la variable de lancement  $y_t^D$  est égale à 1 si une production ou une sous-traitance a lieu à une période  $t$ . La réservation de capacité faite par le fournisseur est prise en compte dans la contrainte (3.9) qui correspond à une contrainte de capacité de production. La contrainte (3.10) correspond à la contrainte de rationalité individuelle assurant que le coût du fournisseur est au plus égal à son coût optimal.

La variable de transfert  $z_{CT}$  peut être remplacée par sa borne inférieure  $\sum_{t \in \mathcal{T}} (f_t^F y_t^D +$

$p_t^F x_t^F) - c_{opt}^F$  (voir section 2.3.3 du chapitre 2 p.31). Nous obtenons alors la formulation mathématique suivante :

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{t \in \mathcal{T}} (f_t y_t^D + p_t x_t^F + h_t^D s_t^D + \bar{b}_t w_t^F) - c_{opt}^F \\
\text{s.t.} \quad & s_{t-1}^D + x_t^F + w_t^F = d_t + s_t^D \quad \forall t \in \mathcal{T}, \\
& x_t^F + w_t^F \leq d_{tT} y_t^D \quad \forall t \in \mathcal{T}, \\
& x_t^F \leq R_t \quad \forall t \in \mathcal{T}, \\
& x_t^F, s_t^D, w_t^F \geq 0 \quad \forall t \in \mathcal{T}, \\
& y_t^D \in \{0, 1\} \quad \forall t \in \mathcal{T}
\end{aligned}$$

où  $f_t = f_t^D + f_t^F$ ,  $p_t = p_t^D + p_t^F$  et  $\bar{b}_t = b_t + p_t^D$ . La formulation mathématique du problème CLS-S-TC ressemble à celle du problème CLS-S qui peut être résolu en temps polynomial lorsque l'on suppose que la capacité de production est stationnaire (Atamtürk et Hochbaum, 2001; Chu *et al.*, 2013; Lee et Li, 2013). Les différences sont les suivantes. D'une part, la variable de lancement est commune aux variables de production et de sous-traitance. Dans le problème CLS-S-TC, un coût fixe  $f_t$  est induit à une période  $t$  si une production a lieu à cette période, *i.e.*  $x_t^F > 0$ . De plus, si  $R_t = 0$  (et donc  $x_t^F = 0$ ) et qu'une sous-traitance a lieu à la période  $t$ , un coût fixe  $f_t$  est induit à la période  $t$ . D'autre part, la capacité de production de notre problème n'est pas stationnaire mais elle permet de couvrir un nombre entier de périodes de demande (hypothèse 3.1).

*Représentation du problème CLS-S-TC par un réseau à coût fixe.*

La figure 3.6 représente le réseau à coût fixe correspondant au problème CLS-S-TC. À titre d'exemple, nous considérons  $T = 4$  et une capacité de production  $R = (d_{12}, 0, d_{34}, 0)$ . Les nœuds du graphe correspondent aux périodes. Nous ajoutons deux nœuds  $p$  et  $s$  représentant le mode de production et le mode de sous-traitance respectivement. Un nœud source est également ajouté pour représenter le flot total  $d_{1T}$ . Nous disons qu'un arc est *actif* si le flot circulant sur cet arc est strictement positif. Les arcs  $(p, t)$  représentent les quantités de production  $x_t^F$  qui sont en-dessous de la capacité de production  $R_t$  et induisent un coût unitaire de production  $p_t$  s'ils sont actifs. Les arcs  $(p, t)$  tels que  $R_t = 0$  ne sont pas représentés puisqu'ils ne peuvent pas être actifs. Les arcs  $(s, t)$  sont associés aux quantités sous-traitées  $w_t^F$  et au coût de sous-traitance  $\bar{b}$ . Étant donné que le coût fixe  $f_t$  est commun à la production et à la sous-traitance, nous ajoutons un niveau fictif permettant de comptabiliser le coût fixe à une période  $t$  si une production ou une sous-traitance a lieu à la période  $t$  (sur la figure 3.6, il s'agit des quatre nœuds sous les nœuds  $s$  et  $p$ ). Les arcs verticaux reliant deux nœuds de la même période  $t$  sont donc associés au coût fixe  $f_t$ . Les arcs horizontaux correspondent aux quantités d'unités  $s_t^D$  stockées entre les périodes  $t$  et  $t + 1$ . Les demandes sont représentées par des arcs sortants obliques. Nous mettons également les valeurs des capacités de production en bas de la figure.

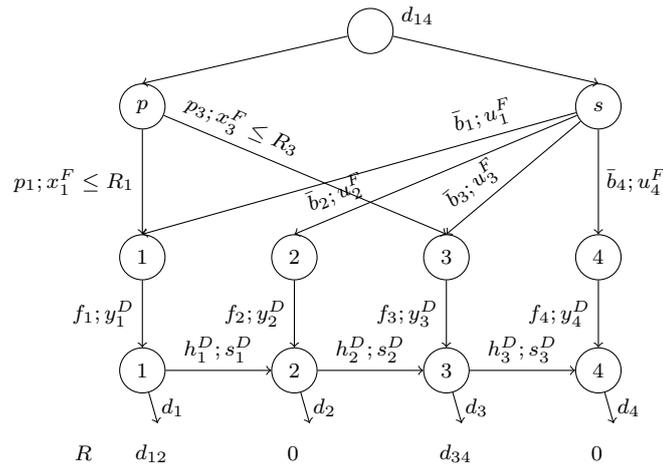


FIGURE 3.6 – Réseau à coût fixe du problème CLS-S-TC en considérant  $T = 4$  et une capacité de production  $R = (d_{12}, 0, d_{34}, 0)$ .

Par la suite, nous ne représenterons pas les coûts associés à chaque arc, le nœud source ainsi que les arcs dont le flot circulant est nul. Les nœuds du niveau fictif ainsi que les arcs associés au coût fixe ne seront également pas représentés dans les prochaines figures de cette section.

Il a été montré dans la littérature que le problème CLS est NP-difficile (Florian *et al.*, 1980). Cependant, la capacité de production considéré dans le problème CLS-S-TC correspond à un plan de production vérifiant la propriété ZIO (hypothèse 3.1). Cette particularité nous permet de mettre en évidence des propriétés de dominance qui seront utiles pour la résolution du problème CLS-S-TC.

### Propriétés de dominance du problème CLS-S-TC.

Pour commencer, observons qu’il n’existe pas toujours de solution optimale au problème CLS-S-TC pour laquelle la propriété ZIO est respectée au niveau du distributeur.

*Contre-exemple.* Considérons l’instance  $\mathcal{I}_2$  suivante :  $T = 3$ ,  $f^F = h^F = 0$ ,  $p^F = 1$ ,  $b = (2, 3, 3)$ ,  $f^D = (0, 0, 2)$ ,  $p^D = h^D = 0$  et  $d = 1$ . Les coûts du problème CLS-S-TC sont alors  $f = (0, 0, 2)$ ,  $\bar{b} = (2, 3, 3)$ ,  $p_t = 1$  et  $h_t^D = 0$  pour tout  $t \in \{1, \dots, T\}$ . La capacité de production  $R$  est donnée par le plan de production optimal du fournisseur. Celui-ci est égal à  $R = (1, 1, 1)$  et est de coût  $c_{opt}^F = 3$ . La solution du problème CLS-S-TC de coût minimum et vérifiant la propriété ZIO consiste à ne pas sous-traiter (voir figure 3.7), *i.e.*  $x^F = (1, 1, 1)$  et  $w^F = 0$ . Le coût de cette solution est égale à 5 alors que la solution optimale du problème CLS-S-TC est donnée par  $x^F = (1, 1, 0)$  et  $w^F = (1, 0, 0)$  de coût 4 (voir figure 3.8), et elle ne vérifie pas la propriété ZIO.

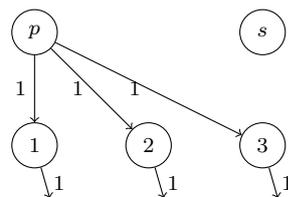


FIGURE 3.7 – Solution du problème CLS-S-TC pour l’instance  $\mathcal{I}_2$  vérifiant la propriété ZIO, de coût égal 5.

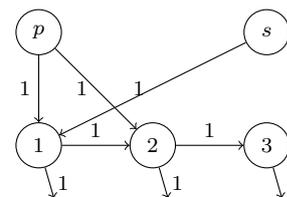


FIGURE 3.8 – Solution du problème CLS-S-TC pour l’instance  $\mathcal{I}_2$  sans la propriété ZIO, de coût égal 4.

Ainsi, pour résoudre efficacement ce problème, nous proposons d'autres propriétés de dominance pour le problème CLS-S-TC.

**Définition 3.2 (Période de production fractionnaire/saturée)**

Une période de production  $t \in \{1, \dots, T\}$  est dite *fractionnaire* si  $0 < x_t^F < R_t$ . Elle est dite *saturée* si  $x_t^F = R_t > 0$ .

**Définition 3.3 (sous-plan candidat)**

Soient  $t, k$  deux périodes telles que  $1 \leq t \leq k \leq T$ . L'intervalle  $[t, k]$  est un *sous-plan candidat* au niveau du distributeur si  $s_{t-1}^D = s_k^D = 0$  et  $s_i^D > 0$  pour toute période  $i \in \{t, \dots, k-1\}$ .

Dans la suite, nous posons  $j_1 = \min\{t < n \leq k | R_n > 0\}$  la première période (si elle existe) postérieure à  $t$  telle que  $R_{j_1} > 0$  et  $j_2 = \max\{t < n \leq k | R_n > 0\}$  la dernière période d'un sous-plan candidat  $[t, k]$  (si elle existe) postérieure à  $t$  telle que  $R_{j_2} > 0$  dans un sous-plan candidat  $[t, k]$ .

Les propriétés 3.1-3.3 suivantes définissent des propriétés de dominance pour le problème CLS-S-TC.

**Propriété 3.1**

$w_t^F(x_t^F - R_t) = 0$ , pour toute période  $t \in \{1, \dots, T\}$ .

En d'autres termes, une période de sous-traitance  $t$  a lieu uniquement lorsque la période  $t$  est également une période de production saturée.

*Preuve.* Comme  $b_t \geq p_t^F$  pour tout  $t \in \{1, \dots, T\}$ , nous avons  $p_t = p_t^D + p_t^F \leq p_t^D + b_t = \bar{b}_t$ . Il est alors plus intéressant de saturer la production avant de sous-traiter.  $\square$

Dans leur article, Atamtürk et Hochbaum (2001) ont décrit une proposition indiquant que dans un sous-plan candidat d'une solution dominante du problème CLS-S avec une capacité de production constante, il y a soit au plus une période de production fractionnaire, soit au plus une période de sous-traitance mais il ne peut pas y avoir les deux en même temps. La propriété 3.2 décrite ci-dessous découle de cette proposition.

**Propriété 3.2**

Soient deux périodes  $t, k$  telles que  $1 \leq t \leq k \leq T$ . Il existe une solution optimale du problème CLS-S-TC tel que pour tout sous-plan candidat  $[t, k]$  :

- (i) il y a soit au plus une période de production fractionnaire, soit au plus une période de sous-traitance mais il n'est pas possible d'avoir les deux en même temps.
- (ii) il n'est pas possible d'avoir une période de production fractionnaire et une période de production saturée.

*Preuve.* (i) La propriété 3.2 (i) découle des résultats de Zangwill (1968) sur la caractérisation des flots extrêmes dans un réseau à coût fixe. Dans un réseau à coût fixe avec une seule source et des capacités sur les arcs, le graphe induit par les arcs actifs dont le flot circulant n'atteint pas la capacité d'un flot extrême est acyclique.

Considérons un sous-plan candidat  $[t, k]$  dans une solution optimale du problème CLS-S-TC,  $1 \leq t \leq k \leq T$ . Pour prouver cette propriété, nous distinguons trois cas.

**Cas 1.** Supposons qu'il existe deux périodes de production fractionnaires  $i < j$  dans le sous-plan candidat  $[t, k]$ . Si  $R_i = d_{i\bar{i}}$ , la période de production fractionnaire  $i$  permet de couvrir les

demandes de la période  $i$  à une période  $l < \bar{i}$ . De plus, par l'hypothèse 3.1, nous avons  $R_n = 0$  pour tout  $n \in \{i, \dots, \bar{i}\}$  ce qui implique que  $j > l$ . Donc,  $s_l^D = 0$  ce qui contredit la définition du sous-plan candidat  $[t, k]$ .

Cas 2. Supposons qu'il existe deux périodes de sous-traitance  $i$  et  $j$ ,  $t \leq i < j \leq k$ , dans le sous-plan candidat  $[t, k]$ . Dans ce cas, comme la sous-traitance n'est pas limitée, l'arc de sous-traitance entrant dans le nœud  $i$  et les arcs entrants dans le nœud  $j$  (stock positif provenant de la sous-traitance à la période  $i$  et de la sous-traitance à la période  $j$ ) forment un cycle (le graphe induit n'est pas orienté). Comme les périodes de production  $i$  et  $j$  sont saturées (propriété 3.1), il n'est pas possible de transférer des unités vers ces périodes de production. Sans détériorer le coût de la solution, nous avons alors les deux possibilités suivantes :

- il est possible de transférer toutes les unités sous-traitées à la période  $j$  à la période de sous-traitance  $i$ . Il y a alors une unique période de sous-traitance dans le sous-plan candidat  $[t, k]$ .
- il est possible de transférer des unités sous-traitées à la période  $i$  à la période de sous-traitance  $j$  jusqu'à que  $s_{j-1}^D = 0$  ce qui contredit la définition du sous-plan candidat  $[t, k]$ .

Il existe donc une solution optimale où il y a une seule période de sous-traitance dans chaque sous-plan candidat.

Cas 3. Supposons qu'il existe une période de production fractionnaire  $i$  et une période de sous-traitance  $j$  dans le sous-plan candidat  $[t, k]$ . Le cas  $i = j$  n'est pas possible car une sous-traitance a lieu uniquement si la production est saturée. Supposons alors que  $i < j$  (le cas où  $i > j$  est similaire). Étant données que la production à la période  $i$  n'atteint pas sa capacité et que la sous-traitance n'est pas limitée, l'arc de production entrant dans le nœud  $i$  et les arcs entrants dans le nœud  $j$  (stock entrant positif provenant de la production à  $i$  et sous-traitance à la période  $j$ ) forme un cycle. Sans détériorer le coût de la solution, nous avons ces deux possibilités :

- il est possible de transférer des unités sous-traitées à la période  $j$  à la période de production  $i$  jusqu'à que la période de production  $i$  devienne saturée ou que toutes les unités aient été transférées. Dans ce cas, nous avons  $s_{j-1}^D = 0$  ce qui contredit la définition du sous-plan candidat  $[t, k]$ .
- il est possible de transférer des unités produites à la période  $i$  à la période de sous-traitance  $j$  jusqu'à que  $s_{j-1}^D = 0$  (la production à la période  $j$  est saturée par la propriété 3.1, il n'est donc pas possible de transférer des unités vers cet arc de production), ce qui contredit la définition du sous-plan candidat  $[t, k]$ .

Il existe donc toujours une solution optimale où il n'y a pas une période de production fractionnaire et une période de sous-traitance dans un même sous-plan candidat.

(ii) Par l'absurde, supposons qu'il existe une période de production fractionnaire  $i$  et une période de production saturée  $j$  telle que  $R_j > 0$  dans un sous-plan candidat  $[t, k]$ . Par la propriété 3.2(i), il n'y a pas de période de sous-traitance dans le sous-plan candidat  $[t, k]$ .

Cas 1. Supposons que  $i > j$ . Comme  $R_j = d_{jl}$  avec  $l \geq j$  et aucune sous-traitance n'a lieu entre les périodes  $j$  et  $l$ , par l'hypothèse 3.1, nous avons  $i > l$  et donc  $s_l^D = 0$  ce qui contredit la définition du sous-plan candidat  $[t, k]$ .

**Cas 2.** Supposons que  $i < j$ . Comme  $R_i = d_{il}$  ( $l \geq i$ ) et  $R_n = 0$  pour tout  $n \in \{i, \dots, l\}$  (hypothèse 3.1), nous avons  $l < j$ . Donc  $s_l^D = 0$  (il n'y a pas de sous-traitance possible entre les périodes  $i$  et  $l$ ), ce qui contredit la définition du sous-plan candidat  $[t, k]$ .

□

### Propriété 3.3

Soit  $[t, k]$  un sous-plan candidat tel que les périodes  $j_1$  et  $j_2$  existent,  $1 \leq t \leq k \leq T$ .

- (i) Une sous-traitance a lieu entre les périodes  $t$  et  $j_1 - 1$ .
- (ii) Si  $j_1 \neq j_2$ , pour chaque période  $i \in \{j_1, \dots, j_2 - 1\}$ , la quantité  $D_i$  est couverte soit par une unique période de sous-traitance, soit par une seule période de production saturée  $i$ .
- (iii) Les demandes  $d_{j_2k}$  doivent être sous-traitées dans le sous-plan candidat  $[t, k]$ .

*Preuve.* Soient  $t$  et  $k$  deux périodes telles que  $[t, k]$  est un sous-plan candidat et les périodes  $j_1$  et  $j_2$  existent dans ce sous-plan candidat.

(i) Par l'absurde, supposons qu'il n'y a aucune sous-traitance entre les périodes  $t$  et  $j_1 - 1$ . **Cas 1.** Si  $R_t = 0$ , alors par définition de  $j_1$ , il n'est pas possible de satisfaire les demandes de la période  $t$  à  $j_1 - 1$ .

**Cas 2.** Si  $R_t > 0$  alors par l'hypothèse 3.1 et par définition de  $j_1$ ,  $D_t = d_{t,j_1-1}$  et  $R_i = 0$  pour tout  $i \in \{t+1, \dots, j_1 - 1\}$ . Comme il n'y a pas de sous-traitance entre  $t$  et  $j_1 - 1$ , pour satisfaire  $D_t$ , la période  $t$  est une période de production saturée. Donc  $s_{j_1-1}^D = 0$  ce qui contredit la définition d'un sous-plan candidat.

(ii) Par la propriété 3.2(i), il n'y a pas de période de production fractionnaire dans le sous-plan candidat  $[t, k]$ . Chaque période de production saturée  $i \in \{j_1, \dots, j_2 - 1\}$  permet de couvrir exactement la quantité  $D_i$ . Donc chaque quantité  $D_j$ ,  $j_1 \leq j \leq j_2 - 1$ , qui n'est pas couverte par une période de production saturée est satisfaite par l'unique période de sous-traitance dans le sous-plan candidat  $[t, k]$  (qui existe par la propriété 3.3(i) et qui est unique par la propriété 3.2 (i)).

(iii) Supposons que les demandes  $d_{j_2k}$  ne sont pas satisfaites par une sous-traitance. Donc les demandes  $d_{j_2k}$  sont satisfaites par une période de production. Par la propriété 3.3 (ii), pour  $i \in \{t, \dots, j_2 - 1\}$ , une période de production qui couvre la quantité  $D_i$  est saturée. Nous allons montrer que les demandes  $d_{j_2k}$  ne peuvent pas être satisfaites par une production avant la période  $j_2$ . Soit  $j$  une période de production non saturée telle que  $j \in \{t, \dots, j_2 - 1\}$  et  $R_j > 0$  (et donc  $D_j$  est sous-traitée par la propriété 3.3 (ii)). Il est alors possible de produire  $d_{j_2k}$  à la période  $j$ . Si  $d_{j_2k} < R_j$ , alors il y a une période de production fractionnaire, ce qui est impossible (propriété 3.3). Si  $d_{j_2k} \geq R_j$ , alors la période de production  $j$  devient saturée. Cela revient à dire que la période de production  $j$  couvre  $D_j$  et une partie des demandes  $d_{j_2k}$  sont sous-traitées ce qui contredit l'hypothèse de départ. Ainsi, les demandes  $d_{j_2k}$  doivent être couvertes par une production à la période  $j_2$  ce qui implique que  $s_{j_2-1}^D = 0$ , contradiction avec la définition d'un sous-plan candidat.

□

Dans la suite, nous proposons un algorithme de programmation dynamique pour résoudre le problème CLS-S-TC en temps polynomial. Cet algorithme repose sur la caractérisation des solutions dominantes du problème.

### Résolution du problème CLS-S-TC par programmation dynamique.

Les propriétés 3.1-3.3 permettent de décomposer le plan de production d'une solution optimale du problème CLS-S-TC en sous-plan candidats indépendants. L'idée de l'algorithme de programmation dynamique est alors de déterminer une décomposition en sous-plan candidats du plan de production de sorte que le coût total du distributeur soit minimisé et le coût du fournisseur soit au plus égal à son coût optimal.

Dans un premier temps, nous présentons une propriété permettant de calculer le coût d'un sous-plan candidat. Puis dans un deuxième temps, nous définissons les formules de récurrence permettant de calculer le coût d'une solution partielle du problème CLS-S-TC.

Avant de présenter l'algorithme de programmation dynamique, nous définissons la propriété 3.4 nécessaire pour définir le coût d'un sous-plan candidat  $[t, k]$  à partir des propriétés 3.1-3.3. Cette propriété permet de déterminer, lorsque cela est possible, la période de production ou de sous-traitance dans un sous-plan candidat  $[t, k]$  ainsi que les quantités à produire ou à sous-traiter.

#### Propriété 3.4

Soient  $t, k$  deux périodes telles que  $[t, k]$  est un sous-plan candidat ( $1 \leq t \leq k \leq T$ ). Soit  $l$  la période de sous-traitance dans le sous-plan candidat  $[t, k]$  si elle existe. Nous avons les propriétés suivantes :

- (i) Si  $R_t = 0$  et si la période  $j_1$  n'existe pas dans le sous-plan candidat  $[t, k]$ , alors  $l = t$  et  $w_t^F = d_{tk}$ .
- (ii) Si  $R_t \geq d_{tk}$ , alors une unique période de production a lieu à la période  $t$  pour satisfaire les demandes  $d_{tk}$ .
- (iii) Si  $R_t = 0$  et les périodes  $j_1$  et  $j_2$  existent dans le sous-plan candidat  $[t, k]$ , alors  $l = t$ . De plus, les demandes  $d_{t, j_1-1}$  et  $d_{j_2 k}$  sont sous-traitées à la période  $t$ . Si  $j_1 \neq j_2$ , les quantités  $D_n > 0$  pour  $j_1 \leq n < j_2$  sont soit entièrement sous-traitées à la période  $t$ , soit entièrement produites à partir d'une période de production saturée  $n$ .
- (iv) Si  $0 < R_t < d_{tk}$ , alors les périodes  $j_1$  et  $j_2$  existent dans le sous-plan candidat  $[t, k]$ . Dans ce cas, une période de production saturée a lieu à la période  $t$  pour couvrir  $D_t = d_{t, j_1-1}$  et une période de sous-traitance  $l$  a forcément lieu entre les périodes  $t$  et  $j_1 - 1$ . De plus, les demandes  $d_{j_2 k}$  sont satisfaites par la période de sous-traitance  $l$ . Si  $j_1 \neq j_2$ , les quantités  $D_n > 0$  pour  $j_1 \leq n < j_2$  sont soit entièrement sous-traitées à la période  $l$ , soit entièrement produites à partir d'une période de production saturée à la période  $n$ .

Les figures 3.9-3.12 illustrent les différents cas présentés dans la propriété 3.4. La figure 3.9 illustre la propriété 3.4 (i) où nous considérons un sous-plan candidat  $[2, 4]$  avec une capacité de production nulle à chaque période. Une unique période de sous-traitance a lieu à la période  $l = 2$  pour satisfaire les demandes du sous-plan candidat. Dans la figure 3.10, nous avons illustré la propriété 3.4 (ii) avec un sous-plan candidat  $[2, 4]$  où  $R_2 = d_{25} \geq d_{24}$ . Les demandes du sous-plan candidat sont alors être satisfaites à partir d'une période de production fractionnaire qui a lieu à la période 2.

La figure 3.11 fournit un exemple satisfaisant la propriété 3.4 (iii) où un sous-plan candidat  $[2, 7]$  avec  $R_2 = 0$  et au moins une capacité de production non nulle dans ce sous-plan candidat. Nous avons  $j_1 = 3$  et  $j_2 = 6$ . Remarquons que  $D_6 = d_{68} = d_{67} + d_8$ . Comme nous considérons

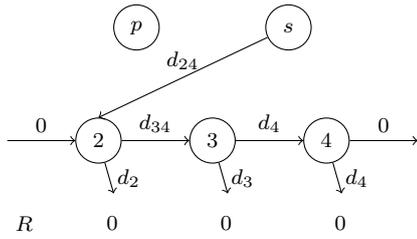


FIGURE 3.9 – sous-plan candidat  $[2, 4]$  avec une sous-traitance à la période 2 tel que  $R_2 = R_3 = R_4 = 0$  (propriété 3.4 (i)).

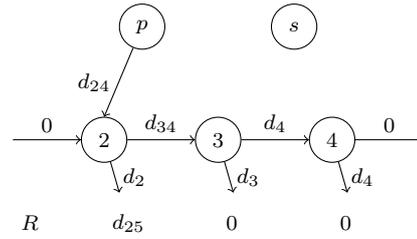


FIGURE 3.10 – sous-plan candidat  $[2, 4]$  avec une période de production saturée à la période 2 tel que  $R_2 = d_{25}$  (propriété 3.4 (ii)).

un sous-plan candidat allant jusqu'à la période 7, la quantité qui nous intéresse dans ce sous-plan candidat n'est pas  $D_6$  mais  $d_{67}$ . Dans cet exemple, les quantités  $d_2$  et  $d_{67}$  sont satisfaites par une sous-traitance à la période  $l = 2$ . Concernant les capacités de production strictement positives dans ce sous-plan candidat, la quantité  $D_3$  est sous-traitée à la période 2 et la quantité  $D_5$  est produite à partir d'une période de production saturée à la période 5.

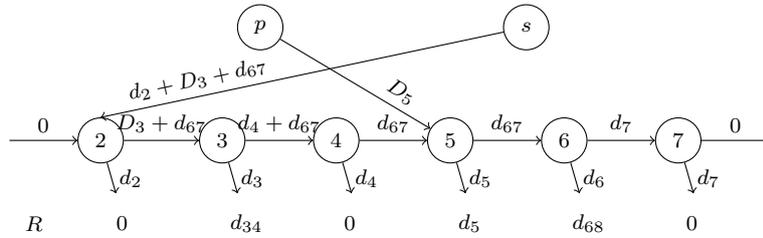


FIGURE 3.11 – sous-plan candidat  $[2, 7]$  avec une sous-traitance à la période 2 tel que  $R_2 = 0$  et il existe au moins une période  $i \in \{3, \dots, 7\}$  telle que  $R_i > 0$  (propriété 3.4 (iii)).

Pour finir, la propriété 3.4 (iv) est illustrée par la figure 3.12. Nous considérons un sous-plan candidat  $[2, 7]$  avec  $R_2 = d_{23} < d_{27}$  ( $\bar{t} = 3$ ),  $R_4 = d_4$  ( $j_1 = 4$ ),  $R_5 = d_{56}$  et  $R_7 = d_7$ . Une période de production saturée a lieu à la période 2 satisfaisant les demandes  $D_2 = d_{23}$ . Une période de sous-traitance a lieu à la période  $l = 3$  (on vérifie bien  $t \leq l \leq j_1 - 1$ ) où les quantités  $D_4 = d_4$  et  $d_7$  sont sous-traitées. La quantité  $D_5 = d_{56}$  est produite à partir d'une période de production saturée à la période 5.

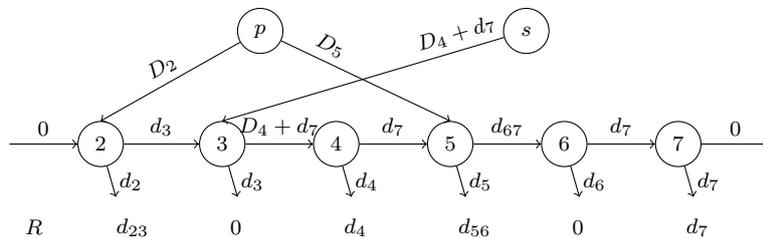


FIGURE 3.12 – sous-plan candidat  $[2, 7]$  avec une sous-traitance à la période 3 tel que  $R_2 = d_{23}$  (propriété 3.4 (iv)).

*Preuve de la propriété 3.4.* Soit  $[t, k]$  un sous-plan candidat avec  $1 \leq t \leq k \leq T$ . Nous notons par  $l$  la période de sous-traitance dans le sous-plan candidat  $[t, k]$  si elle existe.

(i) Supposons que  $R_t = 0$  et  $j_1$  n'existe pas, i.e.  $R_i = 0$  pour toute période  $i \in \{t + 1, \dots, k\}$  (voir figure 3.9). Puisqu'il y a au plus une période de sous-traitance dans un sous-plan candidat (propriété 3.2 (i)), les demandes ne peuvent être satisfaites qu'à partir d'une période de

sous-traitance à la période  $t$ . Ainsi,  $l = t$  et  $w_t^F = d_{tk}$ .

(ii) Supposons que  $R_t \geq d_{tk}$  (voir figure 3.10). La réservation de capacité de notre problème est telle que  $R_n = 0$  pour toute période  $n \in \{t+1, \dots, k\}$  (hypothèse 3.1). Dans ce cas, pour avoir une solution réalisable, les demandes  $d_{tk}$  doivent être satisfaites à partir d'une unique période de production à la période  $t$  (propriété 3.2 (ii)).

(iii) Faisons maintenant l'hypothèse que  $R_t = 0$  et que la période  $j_1$  existe dans le sous-plan candidat  $[t, k]$ . Afin d'avoir une solution réalisable, comme  $R_n = 0$  pour tout  $n \in \{t, \dots, j_1 - 1\}$  (par définition de  $j_1$ ), les demandes  $d_{t, j_1 - 1}$  doivent être satisfaites à partir d'une sous-traitance à la période  $t$ . Ainsi, nous avons  $l = t$ . Le reste de la propriété découle des propriétés 3.3(ii) et 3.3(iii).

(iv) Supposons maintenant que  $R_t = d_{t\bar{t}} < d_{tk}$ . Par définition de  $j_1$ , la période  $j_1$  est égale à  $\bar{t} + 1$  et la période  $j_2$  existe donc également. Nous devons uniquement montrer que la période  $t$  est une période de production saturée (le reste de la propriété provient de la propriété 3.3). En effet, si  $l = t$ , par la propriété 3.1, alors  $D_t$  doit être couverte par une période de production saturée  $t$ . Si  $l > t$ , afin d'avoir une solution réalisable,  $D_t$  doit être satisfaite par une période de production saturée. □

*Pré-calculs.*

Afin de calculer efficacement le coût d'un sous-plan candidat, nous pré-calculons les coûts de stockage. Nous notons  $h_{tk}^D = \sum_{i=t}^k h_i^D$  le coût de stockage cumulé de la période  $t$  à la période  $k$ . Le coût  $h_{1t}^D$  peut se calculer en  $\mathcal{O}(T)$ . Comme  $h_{tk}^D = h_{1k}^D - h_{1, t-1}^D$ , le calcul de  $h_{tk}^D$  peut se faire en temps constant. De la même façon, nous pouvons calculer les demandes cumulées  $d_{1t}$  en  $\mathcal{O}(T)$  et les demandes cumulées  $d_{tk}$  en temps constant. Nous posons  $H_{tk}^D = \sum_{i=t}^{k-1} h_i^D d_{i+1, k}$ . Le coût  $H_{1k}^D$  peut se calculer en  $\mathcal{O}(T)$ . Comme  $H_{tk}^D = H_{t-1, k}^D - h_{t-1}^D d_{tk}$ , les coûts  $H_{tk}^D$  peuvent se calculer en  $\mathcal{O}(T^2)$ .

Nous proposons également de pré-calculer les périodes où il est préférable de sous-traiter la quantité  $D_n$  à une période telle que  $1 \leq l < n < i \leq T$ . Soit  $\sigma(l, i) = \{n, l < n < i | R_n > 0 \text{ et } \bar{b}_l D_n + h_{l, n-1}^D D_n \leq f_n + p_n D_n\}$  l'ensemble des périodes  $n \in \{l+1, \dots, i-1\}$  où il est préférable de sous-traiter  $D_n > 0$  à la période  $l$ . Nous définissons  $B_i^l = \sum_{n \in \sigma(l, i)} (\bar{b}_l D_n + h_{l, n-1}^D D_n + H_{nn}^D)$  comme le coût total de sous-traitance et de stockage pour les périodes  $n \in \sigma(l, i)$  où les quantités  $D_n = d_{n\bar{n}}$  sont sous-traitées à la période  $l$ . Soit  $P_i^l = \sum_{n \notin \sigma(l, i)} (f_n \mathbb{1}(l < n < i \text{ et } R_n > 0) + p_n D_n + H_{nn}^D)$ .  $P_i^l$  représente le coût total de production où il est préférable d'avoir une période de production saturée entre les périodes  $l+1$  et  $i-1$  avec  $\mathbb{1}(c)$  est égal à 1 si  $c$  est vraie, et 0 sinon, et  $R_n = d_{n\bar{n}}$ . Pour tout  $l$  et  $i$  tels que  $1 \leq l \leq i \leq T$ , les périodes appartenant à l'ensemble  $\sigma(l, i)$ , les coûts  $B_i^l$  et les coûts  $P_i^l$  se déterminent en  $\mathcal{O}(T^3)$ .

*Calcul du coût d'un sous-plan candidat  $[t, k]$ .*

Soient  $t, k$  deux périodes telles que  $1 \leq t \leq k \leq T$  et  $[t, k]$  est un sous-plan candidat. Si les périodes  $j_1$  et  $j_2$  n'existent pas, nous posons  $j_1 = j_2 = +\infty$ .

À partir des pré-calculs et de la propriété 3.4, nous définissons le coût  $v_{tk}$  d'un sous-plan candidat  $[t, k]$  qui couvre les demandes de la période  $t$  à la période  $k$ , comme suit :

- Si  $R_t = 0$  et  $j_1 = +\infty$  (propriété 3.4 (i)), alors

$$v_{tk} = f_t + \bar{b}_t d_{tk} + H_{tk}^D. \quad (3.11)$$

L'équation (3.11) représente le cas où les demandes  $d_{tk}$  sont entièrement sous-traitées à la période  $t$  dans le sous-plan candidat  $[t, k]$ .

- Si  $R_t \geq d_{tk}$  (propriété 3.4 (ii)), alors

$$v_{tk} = f_t + p_t d_{tk} + H_{tk}^D. \quad (3.12)$$

L'équation (3.12) correspond au cas où les demandes  $d_{tk}$  sont entièrement satisfaites par une période de production à la période  $t$  dans le sous-plan candidat  $[t, k]$ .

- Si  $R_t = 0$  et  $j_1 < +\infty$  (propriété 3.4 (iii)), alors

$$v_{tk} = f_t + \bar{b}_t(d_{t,j_1-1} + d_{j_2k}) + B_{j_2}^t + P_{j_2}^t + H_{t,j_1-1}^D + h_{t,j_2-1}^D d_{j_2k} + H_{j_2k}^D. \quad (3.13)$$

Dans l'équation (3.13),  $\bar{b}_t(d_{t,j_1-1} + d_{j_2k})$  correspond au coût pour sous-traiter les demandes  $d_{t,j_1-1}$  et  $d_{j_2k}$  à la période  $t$ . Pour les quantités  $D_n$  avec  $j_1 \leq n < j_2$ ,  $B_{j_2}^t$  est égal au coût total de sous-traitance et de stockage des quantités  $D_n$  qu'il faut sous-traiter à la période  $t$  et  $P_{j_2}^t$  est égal au coût total de production et de stockage associé à une période de production saturée  $n$ . Le coût total de stockage pour satisfaire les demandes  $d_{t,j_1-1}$  et  $d_{j_2k}$  est égal à  $H_{t,j_1-1}^D + h_{t,j_2-1}^D d_{j_2k} + H_{j_2k}^D$ .

- Si  $0 < R_t < d_{tk}$  (propriété 3.4 (iv)), alors

$$v_{tk} = f_t + p_t D_t + H_{t,j_1-1}^D + \min_{t \leq l \leq j_1-1} \{ \mathbb{1}(l > t) f_l + \bar{b}_l d_{j_2k} + h_{l,j_2-1}^D d_{j_2k} + H_{j_2k}^D + B_{j_2}^l + P_{j_2}^l \}. \quad (3.14)$$

Dans l'équation (3.14),  $\min_{t \leq l \leq j_1-1} \{ \mathbb{1}(l > t) f_l + \bar{b}_l d_{j_2k} + h_{l,j_2-1}^D d_{j_2k} + H_{j_2k}^D + B_{j_2}^l + P_{j_2}^l \}$  permet de déterminer la période de sous-traitance  $l$  comprise entre  $t$  et  $j_1 - 1$  qui minimise le coût du sous-plan candidat  $[t, k]$ . Un coût fixe de production est induit si la période de sous-traitance a lieu après la période  $t$ . Similairement à l'équation précédente, sous-traiter les demandes  $d_{j_2k}$  induit un coût de sous-traitance égal à  $\bar{b}_l d_{j_2k}$ .  $B_{j_2}^l$  représente le coût total de sous-traitance et de stockage des périodes  $n \in \{l+1, \dots, j_2-1\}$  où il est plus intéressant de sous-traiter  $D_n$  à la période  $l$  que d'avoir une période de production saturée. À l'inverse,  $P_{j_2}^l$  est égal au coût total de production et de stockage des périodes  $n \in \{l+1, \dots, j_2-1\}$  où une période de production saturée à  $n$  est plus avantageuse en terme de coût. Le terme  $h_{l,j_2-1}^D d_{j_2k} + H_{j_2k}^D$  représente le coût de stockage pour satisfaire les demandes  $d_{j_2k}$  à partir d'une sous-traitance à la période  $l$ .

*Calcul du coût minimum pour satisfaire les demandes  $d_{1k}$ .*

De part la décomposition en sous-plan candidats indépendants, il est possible de calculer le coût minimum d'une solution partielle du problème CLS-S-TC. Soit  $G_k$  le coût minimum pour satisfaire les demandes de la période 1 à la période  $k$ . Le coût  $G_k$  est défini par :

$$G_k = \min_{1 \leq t \leq k} \{ G_{t-1} + v_{tk} \} \quad (3.15)$$

L'initialisation se fait en posant  $G_0 = 0$ . Le coût optimal est égal à  $G_T$ .

*Complexité de l'algorithme.*

Les pré-calculs se font en  $\mathcal{O}(T^3)$ . Pour  $t$  et  $k$  fixées, lorsque  $R_t < d_{tk}$ , les coûts  $v_{tk}$  se calculent en  $\mathcal{O}(T)$ . Pour les autres cas,  $v_{tk}$  se calcule en temps constant. Donc, pour tout  $t, k$  tels que  $1 \leq t \leq k \leq T$ , le coût  $v_{tk}$  se calcule en  $\mathcal{O}(T^3)$ . Pour tout  $k \in \{1, \dots, T\}$ , le coût  $G_k$  se

calculé en  $\mathcal{O}(T^2)$ , donc la complexité de l'algorithme de programmation dynamique est en  $\mathcal{O}(T^3)$ .

### 3.4.3 Transfert d'argent sur une partie des coûts fixes du fournisseur

Dans cette section, nous étudions le problème de coordination en supposant que le distributeur prend en charge le coût de sous-traitance unitaire du fournisseur des unités produites au-delà de la réservation de capacité  $R_t$  ainsi que les coûts fixes de production lorsque ceux-ci sont induits par des lancements non présents dans la solution optimale du fournisseur. Nous notons ce problème CLS-S-FC où FC *Fixed Cost*. Dans le cas où le distributeur paye des coûts fixes additionnels, le fournisseur est assuré de payer au plus son coût optimal  $c_{opt}^F$ . Le distributeur propose alors au fournisseur un contrat  $(x^D, z)$  composé d'un nouveau plan de réapprovisionnement  $x^D = x^F + w^F$  ainsi que d'un transfert d'argent  $z$  correspondant au coût total de sous-traitance et des coûts fixes de production additionnels du fournisseur.

*Exemple 3.6.* Considérons l'instance  $\mathcal{I}_C$  de l'exemple 3.1 (voir p. 43) où la réservation de capacité est égale à  $R = (10, 0, 0, 0, 0)$  de coût optimal  $c_{opt}^F = 20$ . Lorsque  $x^D = R$ , le coût total du distributeur est égal à  $c^D = 70$ . Si les acteurs décident de coordonner leurs décisions de planification, le distributeur peut proposer au fournisseur un contrat  $(x^D, z)$ . Le plan de réapprovisionnement  $\bar{x}^D = x^F + w^F$  est défini par  $x^F = (6, 0, 0, 0, 0)$  et  $w^F = (0, 0, 0, 4, 0)$ . Le coût total correspondant au coût de sous-traitance et aux coûts fixes du fournisseur pris en charge pas le distributeur est égal à  $z = 4b_4 + f_4^F = 18$  (il doit payer le coût fixe  $f_4^F$  qui n'était pas présent dans le plan de production optimal du fournisseur). Le coût total du distributeur associé au contrat est alors égal à  $c_{FC}^D = 6p_1^D + 4p_4^D + 4s_1^D + 2s_2^D + 2s_4^D + z = 52$ . Le coût total du fournisseur associé au contrat est égal à  $f_1^F + 6p_1^D = 16$ . Ainsi, le gain du distributeur est égal à  $c^D - c_{FC}^D = 18 \leq c_{opt}^F$ .

#### Présentation du problème.

*Formulation mathématique du problème CLS-S-FC.*

Outre la variable de lancement  $y_t^F$  qui vaut 1 si  $R_t > 0$  à la période  $t$ , la variable de lancement  $q_t$  permet de déterminer les coûts fixes de production du fournisseur que le distributeur doit prendre en charge. Elle est égal à 1 si une production a lieu à la période  $t$  et qu'il n'y avait pas eu de production à la période  $t$  dans la solution optimale du fournisseur, i.e.  $y_t^F = 0$  et  $w_t^F > 0$ . La formulation mathématique du problème CLS-S-FC est définie par :

$$\min \sum_{t \in \mathcal{T}} f_t^D(y_t^F + q_t) + p_t^D(x_t^F + w_t^F) + h_t^D s_t^D + b_t w_t^F + f_t^F q_t \quad (3.16)$$

$$\text{s.t. } s_{t-1}^D + x_t^F + w_t^F = d_t + s_t^D \quad \forall t \in \mathcal{T}, \quad (3.17)$$

$$x_t^F \leq R_t y_t^F \quad \forall t \in \mathcal{T}, \quad (3.18)$$

$$w_t^F \leq (d_{tT} - R_t)(y_t^F + q_t) \quad \forall t \in \mathcal{T}, \quad (3.19)$$

$$x_t^F \geq y_t^F \quad \forall t \in \mathcal{T}, \quad (3.20)$$

$$x_t^F, s_t^D, w_t^F \geq 0 \quad \forall t \in \mathcal{T},$$

$$y_t^F, q_t \in \{0, 1\} \quad \forall t \in \mathcal{T}$$

La fonction objectif (3.16) consiste à minimiser le coût total du distributeur incluant également le coût de sous-traitance et les coûts fixes additionnels qu'il doit prendre en charge. La contrainte (3.17) correspond à la contrainte de conservation de flot. La contrainte (3.18) assure que la quantité d'unités  $x_t^F$  ne dépasse pas la réservation de capacité  $R_t$  et que la variable de lancement  $y_t^F$  vaut 1 si  $y_t^F > 0$ . Cette contrainte correspond à une contrainte de capacité de production. Dans le cas où, à une période  $t$ , un lancement n'était pas présent dans la solution optimale du fournisseur, la variable  $y_t^F$  vaut 0. Il faut alors s'assurer que le distributeur paye le

coût fixe de production à la période  $t$  : la variable  $q_t$  doit être égale à 1 si on produit au dessus de  $R_t$  et  $y_t^F$  est égale à 0. La contrainte (3.19) assure que la variable de lancement  $q_t$  vaut 1 si  $w_t^F > 0$  et  $y_t^F = 0$ . Il est certain que le coût fixe de production à une période  $t$  est payé soit par le distributeur, soit par le fournisseur mais pas les deux. En effet, comme la variable  $q_t$  apparaît dans la fonction objectif, si la variable  $y_t^F$  vaut 1, la variable  $q_t$  sera égale à 0 même si  $w_t^F > 0$ . De plus, dans le cadre de notre problème, une sous-traitance a lieu à une période  $t$  uniquement lorsque la période  $t$  est une période de production saturée. Cette propriété est assurée par les contraintes (3.18)-(3.20) et le fait que le coût de sous-traitance est plus élevé que le coût de production unitaire du fournisseur.

Réseau à coût fixe associé au problème CLS-S-FC.

Le réseau représentant le problème CLS-S-FC est fourni dans la figure 3.13. Nous considérons à titre d'exemple  $T = 4$ , des coûts  $f^D, p^D, h^D, f^F$ , une demande  $d$  et  $R = (d_{12}, 0, d_{34}, 0)$  en faisant apparaître les variables et coûts associés des arcs sortants de  $p$  et  $s$  pour les périodes 1 à 4. Comme le distributeur paye les coûts fixes supplémentaires du fournisseur uniquement lorsque  $R_t = 0$ , il est possible de représenter le problème CLS-S-FC en utilisant le graphe du problème CLS-S-TC en associant des coûts différents sur les arcs. Le nœud  $p$  représente la production et le nœud  $s$  la sous-traitance. Un nœud est également ajouté pour représenter la disponibilité de la totalité de la demande  $d_{1T}$ . Les arcs  $(p, t)$  sont présents uniquement lorsque  $R_t > 0$  et sont associés au coût de production  $p_t^D$ . Les arcs  $(s, t)$  sont associés au coût unitaire de sous-traitance égal à  $p_t^D + b_t$ . Nous ajoutons également un niveau fictif pour représenter les coûts fixes. Si  $R_t > 0$ , l'arc vertical reliant deux nœuds de la même période  $t$  est associé au coût fixe  $f_t^D$  car une production est présente dans le plan de production optimal du fournisseur. Si  $R_t = 0$ , un coût fixe  $f_t^F$  additionnel est pris en charge par le distributeur et donc l'arc reliant deux nœuds de la même période  $t$  est associé au coût fixe  $f_t^D + f_t^F$ . Les arcs horizontaux sont associés au coût de stockage  $s_t^D$ . Les demandes sont également représentées par des arcs obliques sortants de chaque nœuds. Nous indiquons également la valeur de la réservation de capacité  $R$ . Le nœud source ne sera pas représenté dans la suite de cette section.

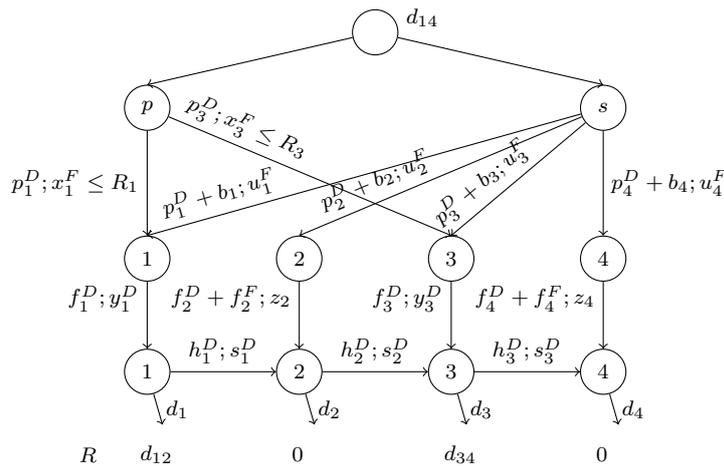


FIGURE 3.13 – Représentation du réseau du problème CLS-S-FC où  $T = 4$  et  $R = (d_{12}, 0, d_{34}, 0)$ .

Dans ce contexte, le coût du fournisseur peut également diminuer par rapport à son coût optimal.

**Propriété 3.5**

Le gain du distributeur associé au problème CLS-S-FC peut être arbitrairement grand par rapport au cas où il n'y a pas de coordination et le gain du fournisseur peut être positif.

*Preuve.* L'instance  $\mathcal{I}_3$  suivante montre qu'une solution au problème de coordination CLS-S-FC peut permettre au fournisseur de diminuer son coût. De plus, le gain du distributeur peut être diminué d'un facteur  $M > 0$  arbitrairement élevé.

Soient  $T = 2$ ,  $d = (1, 1)$ ,  $f^F = (0, 1)$ ,  $p_t^F = M$ ,  $h_t^F = 0$ ,  $f_t^D = p_t^D = 0$ ,  $h_t^D = M^2$  et  $b_t = M$  pour tout  $t \in \{1, \dots, T\}$ . La figure 3.14 représente l'instance où seuls les coûts sont indiqués sur les arcs (pour rappel, le deuxième niveau est un niveau fictif représentant les coûts fixes payés par le distributeur). La solution optimale du fournisseur est donnée par le plan de production  $R = (2, 0)$  de coût  $c_{opt}^F = 2M$ . Le coût du distributeur lorsque le plan de réapprovisionnement imposé est  $x^D = R$  est égal à  $c^D = M^2$ .

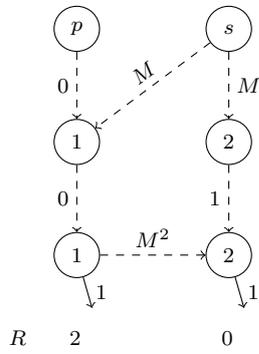


FIGURE 3.14 – Instance  $\mathcal{I}_3$  du problème CLS-S-FC.

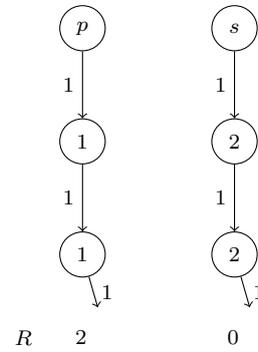


FIGURE 3.15 – Solution du problème CLS-S-FC associée à l'instance  $\mathcal{I}_3$ .

Si une coordination est possible entre les acteurs, le distributeur peut proposer au fournisseur un nouveau plan de réapprovisionnement  $\bar{x}^D = (1, 1)$  (voir figure 3.15). Le plan de production dont le coût de production unitaire est égal à  $p^F$  est  $\bar{x}^F = (1, 0)$  et celui dont le coût est  $b$  est  $w^F = (0, 1)$ . Le coût du distributeur associé à  $\bar{x}^D$  et  $w^F$  est alors égal à  $\bar{c}^D = b_2 w_2^F + f_2^F = M + 1$ . Le coût du fournisseur associé au plan de production  $\bar{x}^F$  est égal  $\bar{c}^F = M$ . Ainsi, le fournisseur a un gain positif et nous avons  $c_{opt}^F - \bar{c}^F = M$  et  $c^D / \bar{c}^D = M^2 / (M + 1)$ . Le gain du distributeur peut donc être augmenté d'un facteur  $M$  arbitrairement élevé.  $\square$

**Résolution du problème CLS-S-FC.**

Le problème CLS-S-FC peut être résolu en adaptant l'algorithme de programmation dynamique présenté dans la section 3.4.2. Les propriétés 3.1-3.4 restent valides pour le problème CLS-S-FC.

Nous reprenons les mêmes notations que celles définies dans la section 3.4.2 et rappelons que  $\bar{b}_t = p_t^D + b_t$ . Soit  $\sigma(l, i) = \{n, l < n < i | R_n > 0 \text{ et } \bar{b}_l D_n + h_{l, n-1}^D D_n \leq f_n^D + p_n^D D_n\}$  l'ensemble des périodes  $n \in \{l + 1, \dots, i + 1\}$  où il est plus intéressant de sous-traiter  $D_n > 0$  à la période  $l$ . Nous définissons  $B_i^l = \sum_{n \in \sigma(l, i)} (\bar{b}_l D_n + h_{l, n-1}^D D_n + H_{nn}^D)$  comme le coût total de sous-traitance et de stockage pour les périodes  $n \in \sigma(l, i)$  telles que les quantités  $D_n = d_{n\bar{n}}$  ( $\bar{n} \geq n$ ) sont sous-traitées à la période  $l$ . Le coût total de production et de stockage des périodes de production saturées entre les périodes  $l + 1$  et  $i - 1$  est défini par  $P_i^l = \sum_{n \notin \sigma(l, i)} (f_n^D \mathbb{1}(l < n < i \text{ et } R_n > 0) + p_n^D D_n + H_{nn}^D)$  où  $D_n = d_{n\bar{n}}$  et  $\mathbb{1}(c)$  est égal à 1 si  $c$  est vraie, et 0 sinon.

Nous reprenons la même idée que le calcul du coût  $v_{tk}$  d'un sous-plan candidat  $[t, k]$  présenté dans la section 3.4.2. À partir des pré-calculs et de la propriété 3.4, nous définissons

comme suit le coût  $w_{tk}$  d'un sous-plan candidat  $[t, k]$  qui couvre les demandes de la période  $t$  à la période  $k$  sachant que les coûts fixes additionnels du fournisseur sont pris en charge par le distributeur.

- Si  $R_t = 0$  et  $j_1 = +\infty$  (propriété 3.4 (i)), alors

$$w_{tk} = (f_t^D + f_t^F) + \bar{b}_t d_{tk} + H_{tk}^D. \quad (3.21)$$

Dans l'équation (3.21), les demandes  $d_{tk}$  sont entièrement sous-traitées à la période  $t$  dans le sous-plan candidat  $[t, k]$ . Dans ce cas, le distributeur doit également prendre en charge le coût fixe du fournisseur, et donc le coût fixe total payé par le distributeur est égal à  $f_t^D + f_t^F$ .

- Si  $R_t \geq d_{tk}$  (propriété 3.4 (ii)), alors

$$w_{tk} = f_t^D + p_t^D d_{tk} + H_{tk}^D. \quad (3.22)$$

L'équation (3.22) représente le cas où les demandes  $d_{tk}$  sont entièrement satisfaites par une production à la période  $t$  dans le sous-plan candidat  $[t, k]$ .

- Si  $R_t = 0$  et  $j_1 < +\infty$  (propriété 3.4 (iii)), alors

$$w_{tk} = (f_t^D + f_t^F) + \bar{b}_t (d_{t,j_1-1} + d_{j_2k}) + H_{t,j_1-1}^D + h_{t,j_2-1}^D + H_{j_2k}^D + B_{j_2}^t + P_{j_2}^t. \quad (3.23)$$

Dans l'équation (3.23),  $f_t^D + f_t^F$  correspond au coût fixe total pris en charge par le distributeur incluant la prise en charge du coût fixe additionnel du fournisseur. Le coût pour satisfaire les demandes  $d_{t,j_1-1}$  et  $d_{j_2k}$  à la période  $t$  à partir d'une sous-traitance à la période  $l$  est égal à  $\bar{b}_t (d_{t,j_1-1} + d_{j_2k}) + H_{t,j_1-1}^D + h_{l,j_2-1}^D + H_{j_2k}^D$ . Le coût total de sous-traitance et de stockage correspondant aux quantités  $D_n$  sous-traitées à la période  $t$  avec  $t < n \leq j_2$  est égal à  $B_{j_2}^t$ . Le coût total de production et de stockage où une production saturée a lieu à une période  $n \in \{t+1, \dots, j_2\}$  est égal à  $P_{j_2}^t$ .

- Si  $R_t < d_{tk}$  (propriété 3.4 (iv)), alors

$$w_{tk} = f_t^D + p_t^D D_t + H_{t,j_1-1}^D + \min_{t \leq l \leq j_1-1} \{ \mathbb{1}(l > t) (f_l^D + f_t^F) + \bar{b}_l d_{j_2k} + h_{l,j_2-1}^D d_{j_2k} + H_{j_2k}^D + B_{j_2}^l + P_{j_2}^l \}. \quad (3.24)$$

Dans l'équation (3.24),  $\min_{t \leq l \leq j_1-1} \{ \mathbb{1}(i > t) (f_l^D + f_t^F) + b_l d_{j_2k} + h_{l,j_2-1}^D d_{j_2k} + H_{j_2k}^D + B_{j_2}^l + P_{j_2}^l \}$  permet de déterminer la période de sous-traitance  $l$  comprise entre  $t$  et  $j_1 - 1$  qui minimise le coût du sous-plan candidat  $[t, k]$ . Un coût fixe de production  $f_l^D + f_t^F$  est induit si la période de sous-traitance a lieu après la période  $t$ . Le terme  $b_l d_{j_2k} + h_{l,j_2-1}^D d_{j_2k} + H_{j_2k}^D$  représente le coût total de sous-traitance et de stockage pour satisfaire les demandes  $d_{j_2k}$  à partir d'une sous-traitance à la période  $l$ . Similairement à l'équation précédente,  $B_{j_2}^l + P_{j_2}^l$  représente le coût total de sous-traitance, de stockage et de production entre les périodes  $l+1$  et  $j_2 - 1$ .

*Calcul du coût minimum pour satisfaire les demandes  $d_{1k}$ .*

De part la décomposition en sous-plans indépendant, il est possible de calculer le coût minimum d'une solution partielle du problème CLS-S-FC. Soit  $H_k$  le coût minimum pour satisfaire les demandes de la période 1 à la période  $k$  sous la contrainte que les coûts fixes additionnels du fournisseur sont pris en charge par le distributeur. Le coût  $H_k$  est défini par :

$$H_k = \min_{1 \leq t \leq k} \{ H_{t-1} + w_{tk} \} \quad (3.25)$$

L'initialisation se fait en posant  $H_0 = 0$ . Le coût optimal du problème CLS-S-FC est égal à  $H_T$ .

*Complexité de l'algorithme.*

Pour tout  $l$  et  $j$  tels que  $1 \leq l \leq j \leq T$ , l'ensemble  $\sigma(l, j)$ , le coût  $B_j^l$  et le coût  $P_j^l$  se déterminent en  $\mathcal{O}(T^3)$ . Pour  $t$  et  $k$  fixés, les coûts  $w_{tk}$  se calculent en  $\mathcal{O}(T)$ . Donc, pour tout  $t$  et  $k$  tels que  $1 \leq t \leq k \leq T$ , le coût  $w_{tk}$  se calcule en  $\mathcal{O}(T^3)$ . Pour tout  $k \in \{1, \dots, T\}$ , le coût  $H_k$  se calcule en  $\mathcal{O}(T^2)$ . La complexité de l'algorithme de programmation dynamique est donc en  $\mathcal{O}(T^3)$ .

### 3.4.4 Pas de transfert d'argent sur les coûts fixes du fournisseur

Le dernier scénario que nous considérons correspond au problème de coordination où le distributeur paye le coût de sous-traitance des unités dépassant la réservation de capacité. En revanche, il ne prend pas en charge les coûts fixes de production du fournisseur qui sont induits par une sous-traitance. Par la suite, nous notons ce problème CLS-S-WFC où WFC signifie *Without Fixed Cost*.

Dans ce cas, le contrat  $(x^D, z)$  proposé par le distributeur est composé d'un nouveau plan de réapprovisionnement  $x^D = x^F + w^F$  et d'un transfert d'argent  $z$  sur les coûts de sous-traitance. Contrairement au cas où le distributeur paye une partie des coûts fixes du fournisseur, le coût du fournisseur peut être supérieur à  $C_{opt}^S$  à cause des coûts fixes supplémentaires. Il faut donc s'assurer que le contrat proposé satisfait la contrainte de rationalité individuelle, *i.e.* le coût du fournisseur associé au contrat ne dépasse pas son coût optimal.

*Exemple 3.7.* Considérons l'instance suivante  $T = 6$ ,  $f_t^F = 10$ ,  $p_t^F = 1$ ,  $h_t^F = 2$ ,  $b_t = 2$ ,  $f_t^D = 0$ ,  $p_t^D = 1$ ,  $h_t^D = 3$  et  $d_t = 2$  pour tout  $t \in \{1, \dots, T\}$ . Le plan de production optimal pour le fournisseur est  $x_{opt}^F = R = (12, 0, 0, 0, 0, 0)$  de coût  $c_{opt}^F = 22$ . Le coût du distributeur induit par le plan de production imposé par le fournisseur est égal à  $c^D = p_1^D + 10h_1^D + 8h_2^D + 6h_3^D + 4h_4^D + 2h_5^D = 102$ . Si les acteurs décident de collaborer, le distributeur peut proposer au fournisseur le contrat  $(x^D, z)$  suivant sachant que le coût du fournisseur est au plus son coût optimal. Le plan de réapprovisionnement  $x^D$  est composé de  $x^F = (2, 0, 0, 0, 0, 0)$  et  $w^F = (0, 10, 0, 0, 0, 0)$ . Le transfert d'argent correspondant au coût total de sous-traitance est alors égal à  $10b_2 = 20$ . Ainsi, le coût total du distributeur associé à ce contrat est  $c_{WFC}^D = 2p_1^D + 8h_2^D + 6h_3^D + 4h_4^D + 2h_5^D + z = 82$ . Le coût du fournisseur associé à ce contrat est donné par  $f_1^F + 2p_1^D + f_2^F = 22 \leq c_{opt}^F$ . Le gain du distributeur en proposant ce contrat au fournisseur est  $c^D - c_{WFC}^D = 20$ .

#### Présentation du problème.

*Formulation mathématique du problème CLS-S-WFC.*

La quantité d'unités produites à la période  $t$  ne dépassant pas  $R_t$  est donnée par  $x_t^F$ . La quantité d'unités produites au-delà de  $R_t$  à la période  $t$  est notée  $w_t^F$ . Le distributeur se réapprovisionne de  $x_t^D = x_t^F + w_t^F$  unités à la période  $t$ . La variable de lancement  $y_t^D$  est égal à 1 si une production a lieu à la période  $t$ , *i.e.*  $x_t^F + w_t^F \geq 0$ . La quantité de stock à la fin de la période

$t$  est donnée par  $s_t^D$ .

$$\min \sum_{t \in \mathcal{T}} f_t^D y_t^D + p_t^D (x_t^F + w_t^F) + h_t^D s_t^D + b_t w_t^F \quad (3.26)$$

$$\text{s.t. } s_{t-1}^D + x_t^F + w_t^F = d_t + s_t^D \quad \forall t \in \mathcal{T}, \quad (3.27)$$

$$x_t^F + w_t^F \leq d_{tT} y_t^D \quad \forall t \in \mathcal{T}, \quad (3.28)$$

$$x_t^F \leq R_t \quad \forall t \in \mathcal{T}, \quad (3.29)$$

$$x_t^F \geq R_t q_t \quad \forall t \in \mathcal{T}, \quad (3.30)$$

$$w_t^F \leq (d_{tT} - R_t) q_t \quad \forall t \in \mathcal{T}, \quad (3.31)$$

$$\sum_{t \in \mathcal{T}} f_t^F y_t^D + p_t^F x_t^F \leq c_{opt}^F, \quad (3.32)$$

$$x_t^F, s_t^D, w_t^F \geq 0 \quad \forall t \in \mathcal{T},$$

$$q_t, y_t^D \in \{0, 1\} \quad \forall t \in \mathcal{T}$$

La fonction objectif (3.26) consiste à minimiser le coût total du distributeur ainsi que le coût total de sous-traitance  $b_t$  qu'il doit prendre en charge pour les unités qui sont produites au-delà de  $R_t$  à une période  $t$ . La contrainte (3.27) correspond à la contrainte de conservation du flot. La contrainte (3.28) force la variable de lancement  $y_t^D$  à être égale à 1 si un réapprovisionnement a lieu à la période  $t$ . Comme la variable  $q$  n'apparaît pas dans la fonction objectif, nous ne pouvons pas considérer les contraintes (3.18)-(3.20) pour assurer qu'une sous-traitance a lieu uniquement lorsque la production est saturée. La contrainte (3.29) assure que la quantité d'unités  $x_t^F$  ne dépasse pas la réservation de capacité  $R_t$ . La contrainte (3.30) force la variable  $q_t$  à être égal à 1 uniquement lorsque  $x_t^F$  atteint la capacité de réservation. Ainsi, les contraintes (3.30) et (3.31) assurent que la variable de sous-traitance  $w_t^F$  est positive seulement si une quantité  $R_t$  a déjà été produite à la période  $t$ . La contrainte (3.32) correspond à la contrainte d'individualité rationnelle permettant au coût total du fournisseur de ne dépasser pas son coût optimal.

*Réseau à coût fixe associé au problème CLS-S-WFC.*

Le réseau représentant le problème CLS-S-WFC est identique à celui du problème CLS-S-FC en adaptant les coûts sur chaque arc. Les arcs  $(p, t)$  sont associés au coût unitaire de production  $p_t^D$  et les arcs  $(s, t)$  sont associés au coût unitaire de sous-traitance  $p_t^D + b_t$ . Les arcs reliant deux nœuds de la même période sont associés au coût fixe  $f_t^D$ .

### Propriété 3.6

La coordination des décisions de planification à partir du problème CLS-S-WFC permet au distributeur d'acquies un gain arbitrairement élevé.

*Preuve.* La preuve de la propriété 3.6 suit le même raisonnement que celle de la propriété 3.5 en considérant l'instance suivante :  $T = 2$ ,  $d = (1, 1)$ ,  $p^F = (M, M + 1)$ ,  $f_t^F = h_t^F = 0$ ,  $f_t^D = p_t^D = 0$ ,  $h_t^D = M^2$  et  $b_t = M + 1$  pour tout  $t \in \{1, \dots, T\}$ , où  $M > 0$ .

Le plan de production optimal du fournisseur est égal à  $x^F = R = (2, 0)$  de coût  $c_{opt}^F = 2M$  et impliquant un coût égal à  $c^D = M^2$  au distributeur lorsque ce plan lui est imposé. Avec une coordination entre les deux acteurs, le distributeur peut proposer au fournisseur le plan de production suivant  $\bar{x}^S = (1, 0)$  et  $w^F = (0, 1)$  de coût  $c_{opt}^F$  pour le fournisseur et de coût  $\bar{c}^D = b_2 = M + 1$  pour le distributeur. Nous avons donc  $c^D / \bar{c}^D = M^2 / (M + 1)$  et le gain du distributeur peut être arbitrairement grand.  $\square$

### Complexité du problème CLS-S-WFC.

#### Théorème 3.1

Le problème CLS-S-WFC est NP-difficile.

*Preuve.* Nous faisons une réduction à partir du problème de sac-à-dos qui est un problème NP-difficile (Garey et Johnson, 1979).

Considérons une instance du problème de sac-à-dos définie par : un nombre d'objets  $N$ , une utilité  $v_i$  et un poids  $e_i$  pour chaque objet  $i \in \mathcal{N} = \{1, \dots, N\}$ , le poids du sac  $E$  et une utilité  $V$  à atteindre. La résolution du problème de sac-à-dos consiste à déterminer la réponse (oui ou non) à la question suivante : existe-t-il un sous-ensemble d'objets  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{N}$  vérifiant  $\sum_{i \in \mathcal{S}} e_i \leq E$  et  $\sum_{i \in \mathcal{S}} v_i \geq V$  ?

Étant donnée une instance du problème CLS-S-WFC et un entier  $B$ , nous posons  $c^D = \sum_{t \in \mathcal{T}} (f_t^D y_t^D + p_t^D (x_t + w_t^F) + h_t^D s_t^D + b_t w_t^F)$  et  $c_P^F = \sum_{t \in \mathcal{T}} (f_t^F y_t^D + p_t^F x_t)$ . La résolution du problème CLS-S-WFC consiste à déterminer la réponse à la question suivante : existe-t-il un plan de réapprovisionnement satisfaisant la demande tels que  $c_P^F \leq c_{opt}^F$  et  $c^D(y^D, x_t, s^D, w^F) \leq B$  ?

Considérons l'instance  $\mathcal{I}$  du problème CLS-S-WFC défini comme suit. Une représentation de l'instance est fournie dans la figure 3.16. Pour simplifier la figure, les nœuds et les arcs associés à des paramètres de coût nuls sur tout l'horizon n'apparaissent pas (pour notre instance il s'agit du nœud  $p$  ainsi que les arcs sortants de ce nœud).

- $T = 3N$ . Posons  $\mathcal{T}_1 = \{1, 4, \dots, 3i - 2, \dots, 3N - 2\}$  et  $\mathcal{T}_2 = \{2, 5, \dots, 3i - 1, \dots, 3N - 1\}$  et  $\mathcal{T}_3 = \{3, 6, \dots, 3i, \dots, N\}$ .
- $d_t = 0$  pour toute période  $t \in \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$  et  $d_t = 1$  pour toute période  $t \in \mathcal{T}_3$ .
- Les coûts du fournisseur sont donnés par :
  - $f_t^F = 0$  pour toute période  $t \in \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$  et  $f_t^F = e_{t/3}$  pour toute période  $t \in \mathcal{T}_3$ .
  - $p_t^F = E/N$  pour toute période  $t \in \mathcal{T}_1$  et  $p_t^F = E$  pour toute période  $t \in \mathcal{T}_2 \cup \mathcal{T}_3$ .
  - $h_t^F = 0$  pour toute période  $t \in \mathcal{T}$ .
  - $b_t = E$  pour toute période  $t \in \mathcal{T}$ .
- Posons  $M = \max_i(v_i)$ . Les coûts du distributeur sont donnés par :
  - $f_t^D = N(M + E)$  pour toute période  $t \in \mathcal{T}_1$ ,  $f_t^D = M$  pour toute période  $t \in \mathcal{T}_2$  et  $f_t^D = M - v_{t/3}$  pour toute période  $t \in \mathcal{T}_3$ .
  - $p_t^D = 0$  pour toute période  $t \in \mathcal{T}$ .
  - $h_t^D = 0$  pour toute période  $t \in \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$  et  $h_t^D = N(M + E)$  pour toute période  $t \in \mathcal{T}_3$ .
- La borne de coût  $B$  est fixée à  $N(M + E) - V$ .

Pour commencer, montrons que le coût optimal  $c_{opt}^F$  du fournisseur est égal à  $E$ . Un plan de production de coût optimal pour le fournisseur consiste à produire uniquement aux périodes  $t \in \mathcal{T}_1$  pour satisfaire les demandes. Puisque l'instance est composée de  $N$  demandes unitaires et que  $p_t^D = E/N$  pour toute période  $t \in \mathcal{T}_1$ , le coût optimal  $c_{opt}^F$  est égal à  $N \times E/N = E$ . La réservation de capacité  $R$  du problème CLS-S-WFC est égale à ce plan de production de coût optimal  $c_{opt}^F$ .

Supposons maintenant qu'il existe une solution  $\mathcal{S}$  au problème de sac-à-dos. La figure 3.17 représente une solution du problème CLS-S-WFC associée à l'instance  $\mathcal{I}$  où  $N = 3$  et  $\mathcal{S} = \{2, 3\}$  (seuls les arcs dont le flot est strictement positif sont représentés sur la figure). Pour tout

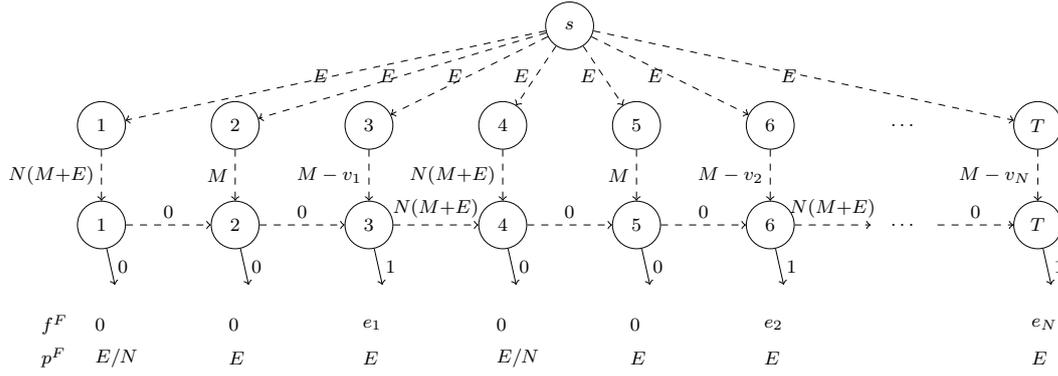


FIGURE 3.16 – Instance  $\mathcal{I}$  du problème CLS-S-WFC considérée dans la preuve du théorème 3.1 (le nœud  $p$  ainsi que les arcs sortants de ce nœud ne sont pas représentés).

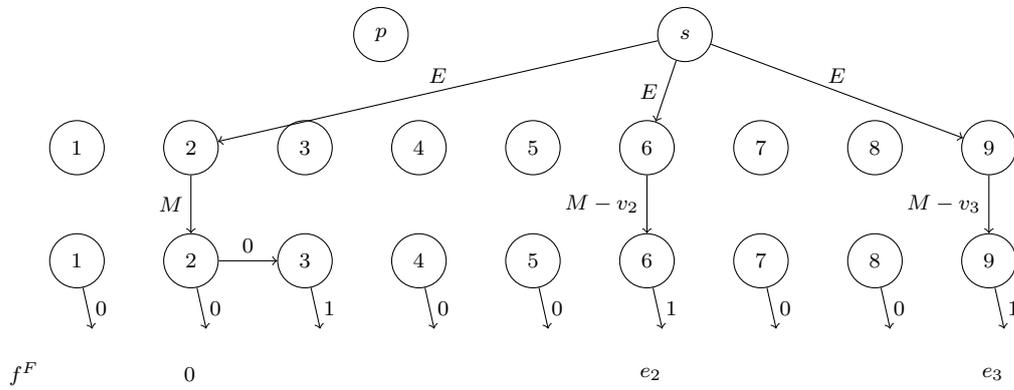


FIGURE 3.17 – Solution du problème CLS-S-WFC dans la preuve du théorème 3.1 où  $N = 3$  et  $\mathcal{S} = \{2, 3\}$ .

objet  $i \in \mathcal{S}$ , un réapprovisionnement a lieu à la période  $t = 3i \in \mathcal{T}_3$  pour satisfaire la demande  $d_t$ . Étant donné que  $R_t = 0$  pour toutes périodes  $t \notin \mathcal{T}_1$ , nous avons  $y_{3i}^D = 1, x_{3i}^D = 0$  et  $w_{3i}^F = 1$  pour tout  $i \in \mathcal{S}$ . Pour tout objet  $i \notin \mathcal{S}$ , le distributeur se réapprovisionne d'une unité à la période  $t = 3i - 1 \in \mathcal{T}_2$  et la stocke jusqu'à la période  $t + 1$  pour satisfaire la demande  $d_{t+1}$ . Similairement comme  $R_t = 0$  pour toute période  $t \notin \mathcal{T}_1$ , nous avons  $y_{3i-1}^D = 1, x_{3i-1}^D = 0$  et  $w_{3i-1}^F = 1$  pour tout  $i \notin \mathcal{S}$ . Ainsi, chaque demande est satisfaite à des périodes où  $R_t = 0$  et donc par une sous-traitance dont les coûts sont pris en charge par le distributeur. Le coût total de production du fournisseur est alors égal à  $c_P^F = \sum_{i \in \mathcal{S}} f_{3i}^F y_{3i}^D + \sum_{i \notin \mathcal{S}} f_{3i-1}^F y_{3i-1}^D = \sum_{i \in \mathcal{S}} e_i$ . Comme  $\mathcal{S}$  est une solution au problème de sac-à-dos,  $\sum_{i \in \mathcal{S}} e_i \leq E$  et donc  $c_P^F \leq E = c_{opt}^F$ . Le coût total du distributeur est donné par  $c^D = \sum_{i \in \mathcal{S}} (f_{3i}^D y_{3i}^D + (p_{3i}^D + b_{3i}) w_{3i}^F) + \sum_{i \notin \mathcal{S}} (f_{3i-1}^D y_{3i-1}^D + (p_{3i-1}^D + b_{3i-1}) w_{3i-1}^F) = \sum_{i \in \mathcal{S}} (M - v_i + E) + \sum_{i \notin \mathcal{S}} (M + E) = \sum_{i \in \mathcal{N}} (M + E) - \sum_{i \in \mathcal{S}} v_i = N(M + E) - \sum_{i \in \mathcal{S}} v_i \leq N(M + E) - V$  car  $\mathcal{S}$  est une solution au problème de sac-à-dos impliquant que  $\sum_{i \in \mathcal{S}} v_i \geq V$ . Il existe donc une solution au problème CLS-S-WFC pour l'instance  $\mathcal{I}$ .

Réciproquement, supposons que la réponse au problème CLS-S-WFC est "oui" : il existe une solution où le coût du distributeur est inférieure ou égal à  $N(M + E) - V$ . Étant donné que  $h_t^D = N(M + E)$  pour toute période  $t \in \mathcal{T}_3$ , le distributeur se réapprovisionne d'au plus une unité à chaque réapprovisionnement. Il y a donc  $N$  périodes de réapprovisionnement pour satisfaire toutes les demandes. Comme  $f_t^D = N(M + E)$  pour toute période  $t \in \mathcal{T}_1$ , le distributeur se réapprovisionne uniquement aux périodes  $t \in \mathcal{T}_2 \cup \mathcal{T}_3$  (car sinon le coût total du distributeur dépasserait  $N(M + E) - V$ ). Comme  $R_t = 0$  pour  $t \in \mathcal{T}_2 \cup \mathcal{T}_3$ , la production d'une

unité à une période  $t \in \mathcal{T}_2 \cup \mathcal{T}_3$  n'induit pas de coût de production unitaire au fournisseur. Soit  $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}_3$  l'ensemble des périodes où le distributeur se réapprovisionne à une période  $t \in \mathcal{T}_3$ . Montrons que l'ensemble  $\mathcal{S}$  fournit une réponse positive au problème de sac-à-dos.

Le coût total de production du fournisseur est égal à  $c_P^F = \sum_{t \in \mathcal{S}} f_t^F y_t^D + \sum_{t \notin \mathcal{S}} f_t^F y_t^D = \sum_{t \in \mathcal{S}} e_{t/3}$ . Par définition du problème CLS-S-WFC, nous avons  $c_P^F \leq W$  et donc  $\sum_{t \in \mathcal{S}} e_{t/3} \leq W$ .

Étant donné que  $p^D = 0$  et  $h_t^D = 0$  pour tout  $t \in \mathcal{T}_2$ , le coût total du distributeur est égal à  $c^D = \sum_{t \in \mathcal{S}} (f_t^D y_t^D + b_t w_t^F) + \sum_{t \notin \mathcal{S}} (f_t^D y_t^D + b_t w_t^F) = \sum_{t \in \mathcal{S}} (M - v_{t/3} + E) + \sum_{t \notin \mathcal{S}} (M + E) = N(M + E) - \sum_{t \in \mathcal{S}} v_{t/3}$ . Par définition du problème CLS-S-WFC,  $c^D \leq N(M + E) - V$  impliquant que  $\sum_{t \in \mathcal{S}} v_{t/3} \leq V$ . L'ensemble des objets associés aux périodes  $t \in \mathcal{S}$  fournit donc une réponse positive au problème de sac-à-dos.  $\square$

### 3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une étude des problèmes de coordination dans le cadre où le fournisseur a le monopole au sein d'une chaîne logistique à deux acteurs. Afin de pouvoir diminuer le coût du distributeur, nous avons proposé différents mécanismes de coordination par la mise en place de contrats. Ces contrats ont été inspirés des contrats de réservation de capacité. Lorsque le distributeur prend en charge les coûts de stockage du fournisseur sans modifier le plan de production optimal du fournisseur, un algorithme de programmation dynamique en  $\mathcal{O}(T \log T)$  a été développé dans le but de déterminer le contrat qui minimise le coût du distributeur. Pour déterminer le contrat où le distributeur considère un transfert d'argent sur le coût de sous-traitance du fournisseur et une partie du coût total du fournisseur, nous proposons des propriétés de dominance permettant de développer un algorithme de programmation en  $\mathcal{O}(T^3)$ . La possibilité de faire de la sous-traitance au niveau du fournisseur peut induire des coûts fixes qui n'étaient pas présents dans la solution optimale du fournisseur. Nous avons alors proposé d'étudier des contrats où le distributeur peut prendre en charge ou non les coûts fixes additionnels du fournisseur. Lorsque les coûts fixes additionnels et le coût total de sous-traitance du fournisseur sont pris en charge par le distributeur, nous avons montré qu'un contrat qui minimise le coût du distributeur peut être déterminé en  $\mathcal{O}(T^3)$  à partir d'un algorithme de programmation dynamique. Pour le cas où le distributeur prend uniquement en charge le coût total de sous-traitance du fournisseur, la contrainte que le contrat doit être individuellement rationnel rend le problème difficile. Une preuve de complexité est présentée montrant que le problème est NP-difficile. Dans le chapitre suivant, une analyse expérimentale est fournie afin de montrer que les contrats permettent au distributeur d'avoir un gain intéressant. Le tableau 3.1 résume les résultats obtenus pour les différents problèmes traités dans ce chapitre :

Problème	Complexité
2ULS-FP	polynomial ( $\mathcal{O}(T \log T)$ , section 3.3)
CLS-S-TC	polynomial ( $\mathcal{O}(T^3)$ , section 3.4.2)
CLS-S-FC	polynomial ( $\mathcal{O}(T^3)$ , section 3.4.3)
CLS-S-WFC	NP-difficile (section 3.4.4)

TABLE 3.1 – Résumé des résultats de complexité obtenus dans ce chapitre.

#### Perspectives

Dans nos travaux, nous avons considéré un plan de production optimal pour le fournisseur en supposant que toutes les unités sont stockées au niveau du distributeur. Il serait intéressant d'étudier la caractérisation d'un plan de production optimal pour le fournisseur où

des unités peuvent être stockées à son niveau. En effet, comme la demande est exprimée au niveau du distributeur, le plan de production optimal déterminé à partir d'un problème ULS n'est pas forcément optimal pour le fournisseur. De plus, le contrat proposé dans la section 3.3 permet au distributeur de prendre en charge les coûts de stockage du fournisseur. Une piste d'étude possible consisterait alors à reprendre les contrats de réservation de capacité avec sous-traitance présentés dans la section 3.4 et d'inclure un transfert d'argent sur les coûts de stockage du fournisseur pour permettre au distributeur d'avoir moins de stock à son niveau. La mise en place de ces contrats nous amènerait alors à étudier des problèmes de lot-sizing à deux niveaux avec sous-traitance, qui ont été peu étudiés dans la littérature.

Les études effectuées dans ce chapitre reposent sur le fait que le fournisseur connaît la demande du distributeur. Cependant, en pratique, il n'a pas toujours une connaissance complète et exacte de la demande exprimée au niveau du distributeur. Une piste de recherche serait alors de considérer une asymétrie d'information sur la demande et d'utiliser les outils de résolution présentés dans l'introduction pour mettre en place des contrats.

Une autre perspective de recherche serait de faire une étude théorique sur le lien entre les paramètres de coût et les contrats que nous avons présentés dans ce chapitre. L'idée serait d'identifier des hypothèses sur les paramètres de coût (par exemple que le coût de production soit stationnaire) pour lesquelles nous pouvons avoir une relation d'ordre pour les gains associés à chaque contrat et le prouver théoriquement, *i.e.* déterminer quel contrat serait le meilleur et lequel serait le moins bon parmi ceux proposés.



## Chapitre 4

# Analyse expérimentale de la pertinence des contrats

Ce chapitre fournit une analyse expérimentale pour les différents contrats présentés dans les chapitres 2 et 3. L'objectif de l'analyse n'est pas d'évaluer l'efficacité de la résolution des différents problèmes présentés dans les chapitres précédents. Notre objectif principal est d'évaluer la pertinence des contrats proposés à travers cette analyse. Lorsque le distributeur a le monopole, le but des analyses est d'évaluer le gain du fournisseur pour différentes classes d'instances. Nous proposons également de comparer le gain du fournisseur sous l'hypothèse d'information complète sur les paramètres de coût du distributeur et celui obtenu en cas d'asymétrie d'information sur un paramètre de coût du distributeur. Lorsque le fournisseur a le monopole, nous évaluons le gain du distributeur à partir des contrats proposés dans le chapitre 3.

Toutes les expérimentations dans ce chapitre utilisent les formulations mathématiques des différents problèmes présentés dans les chapitres 2 et 3. Elles sont effectuées en utilisant la librairie Concert Technology de CPLEX 12.6 sur un ordinateur Debian x86\_64 GNU/Linux possédant un processeur Intel Xeon(R) E5-1630 v3 3.70GHz et une mémoire RAM de 8Gb.

### 4.1 Monopole du distributeur

Dans cette section, nous présentons les résultats expérimentaux pour le cas où le distributeur a le monopole. Nous commençons par décrire dans la section 4.1.1 le schéma de génération des différentes classes d'instances utilisées dans nos tests. Nous présentons ensuite les résultats obtenus pour le cas avec information complète dans la section 4.1.2. Pour finir, dans la section 4.1.3, les résultats dans le cas avec asymétrie d'information sont fournis.

#### 4.1.1 Génération d'instances

Afin d'évaluer le gain du fournisseur, nous avons effectué des tests en considérant différentes hypothèses sur les paramètres de coût. Sauf si nous le mentionnons, les paramètres de coût utilisés dans nos expérimentations ne sont pas stationnaires. Le schéma de génération utilisés pour les expérimentations est basé sur celui proposé dans l'article de Zhang *et al.* (2012). Dans la suite, tous les paramètres sont tirés aléatoirement selon une loi uniforme  $(U)(\alpha, \beta)$ , les valeurs  $\alpha$  et  $\beta$  correspondent aux bornes des intervalles décrits ci-dessous. Les demandes sont générées aléatoirement  $[0, 300]$  sur un horizon de temps  $T \in \{5, 10, 20\}$ . Dans le but de comparer les résultats de cette section avec ceux où il y a une asymétrie d'information, nous considérons que  $p^D \in [1, 20] \cup [70, 90]$  ce qui nous permettra de prendre en compte les différents profils du distributeur lorsque le coût  $p^D$  est privé. Les paramètres de coût sont choisis aléatoirement dans les intervalles discrets décrits dans le tableau 4.1 où  $\delta = 500$ . Cette valeur

a été fixée suite aux tests préliminaires qui ont montré que d'autres valeurs de  $\delta$  ne changent pas l'analyse présentée dans cette section. Le coût fixe de production du fournisseur est égal à  $f_t^F = \delta p_t^F$  à chaque période  $t \in \{1, \dots, T\}$ . Des tests préliminaires nous ont amenés à considérer les quatre classes d'instances décrites dans le tableau 4.1. La classe A (resp. B) représente le cas où le coût de stockage  $h^F$  est faible (resp. élevé) et le coût de stockage  $h^D$  est faible. La classe C (resp. D) représente le cas où le coût de stockage  $h^F$  est faible (resp. élevé) et le coût de stockage  $h^D$  est élevé.

Pour chaque classe d'instances, 100 quintuplets  $(p^F, h^F, f^D, h^D, d)$  sont générés aléatoirement. Pour chaque quintuplet, nous choisissons aléatoirement deux coûts  $p^D$  tels que le premier est dans l'intervalle  $[1, 20]$  et le deuxième dans l'intervalle  $[70, 90]$ . Nous avons donc au total 200 instances pour chaque classe d'instances. À titre d'exemple, une instance de la classe A est générée telle que à chaque période  $t$ ,  $d_t$  est choisie aléatoirement dans  $[0, 300]$ ,  $h_t^F$  est tiré aléatoirement dans  $[0, 6]$ ,  $h_t^D$  est généré aléatoirement dans  $[0, 6]$ ,  $f_t^D = \delta c$  où  $c$  est choisi aléatoirement dans l'intervalle  $[1, 100]$ ,  $p_t^F$  est généré aléatoirement dans  $[1, 50]$  et  $p_t^D$  dans  $[1, 20]$ .

Classe	$h^F$	$p^F$	$h^D$	$p^D$	$f^D$
A	$[0,6]$	$[1,50]$	$[0,6]$	$[1,20] \cup [70,90]$	$\delta \times [1,100]$
B	$[12,18]$	$[1,50]$	$[0,6]$	$[1,20] \cup [70,90]$	$\delta \times [1,100]$
C	$[0,6]$	$[1,50]$	$[12,18]$	$[1,20] \cup [70,90]$	$\delta \times [1,100]$
D	$[12,18]$	$[1,50]$	$[12,18]$	$[1,20] \cup [70,90]$	$\delta \times [1,100]$

TABLE 4.1 – Description des classes d'instances où  $\delta = 500$ .

#### 4.1.2 Analyse des résultats avec information complète

Le gain du fournisseur calculé en pourcentage est donné par  $(1 - c_P^F/c^F) \times 100$  où  $c_P^F$  est le coût du fournisseur associé aux différents scénarios décrits dans le tableau 4.2 et  $c^F$  est le coût du fournisseur lorsque le distributeur impose son plan de réapprovisionnement de coût optimal. .

Nom	Scénario
ST	Sans transfert d'argent
CS	Transfert d'argent sur les coûts de stockage du distributeur
CT	Transfert d'argent sur le coût total du distributeur

TABLE 4.2 – Notations pour les différents scénarios lorsque le distributeur a le monopole.

S'il y a plusieurs plans de réapprovisionnement de coût optimal, nous choisissons celui qui est le plus coûteux pour le fournisseur. Les résultats sont décrits dans les tableaux 4.3 et 4.4. La colonne *Moy* (resp. *Max*) représente la moyenne (resp. maximale) du gain du fournisseur obtenus à partir des 200 instances pour chaque classe d'instances.

Classe	ST		CS		CT	
	Moy	Max	Moy	Max	Moy	Max
A	0.0	0.0	1.2	37.3	2.0	37.3
B	0.0	0.0	3.5	81.8	5.7	81.8
C	0.0	0.0	0.6	23.6	0.6	23.6
D	0.0	0.0	7.2	75.5	7.4	75.5

TABLE 4.3 – Comparaison de la moyenne des gains du fournisseur (%) entre les différents scénarios où  $T = 5$ .

Le tableau 4.3 présente la moyenne des gains du fournisseur pour les scénarios ST, CS et CT lorsque  $T = 5$ . Nous observons que le contrat sans transfert d'argent ne permet pas au fournisseur de diminuer son coût : la moyenne des gains (et le max du gain sur toutes les instances) est égal à 0% pour toutes les classes. Le fournisseur obtient des meilleurs résultats lorsque le coût de stockage est élevé (classes B et D). La moyenne des gains du fournisseur est au moins de 3.5% pour le problème CS et au moins de 5.7% pour le scénario CT. Donc, si son coût de stockage est élevé, ces deux contrats permettent au fournisseur d'avoir un gain d'au moins 3.5% sur un horizon de temps court. D'après les résultats, la différence de la moyenne des gains du fournisseur entre les scénarios CS et CT est d'au plus 2.2 points de pourcentage. Malgré la propriété 2.3, en pratique, le contrat avec un transfert d'argent sur les coûts de stockage du distributeur est presque aussi intéressant que celui avec un transfert d'argent total pour diminuer le coût du fournisseur.

Classe	$T = 10$						$T = 20$					
	ST		CS		CT		ST		CS		CT	
	Moy	Max	Moy	Max	Moy	Max	Moy	Max	Moy	Max	Moy	Max
A	0.0	0.0	5.9	54.6	6.9	54.6	0.0	0.0	12.2	63.3	12.2	63.3
B	0.0	0.0	15.7	74.7	17.3	74.7	0.0	0.0	27.3	75.4	27.9	75.4
C	0.0	0.0	2.2	31.9	2.2	31.9	0.0	2.3	3.0	27.1	3.0	27.1
D	0.0	0.0	11.5	56.9	11.5	56.9	0.0	0.0	14.0	40.5	14.0	40.5

TABLE 4.4 – Moyenne des gains du fournisseur (%) pour les scénarios ST, CS et CT lorsque  $T = 10$  et  $T = 20$ .

Le tableau 4.4 reporte la moyenne des gains du fournisseur en pourcentage pour chaque classe d'instances et chaque scénario. De la même manière que pour  $T = 5$ , le contrat sans transfert d'argent ne permet pas au fournisseur de diminuer son gain. Nous observons qu'il est tout de même possible de diminuer son gain avec ce contrat : pour  $T = 20$ , le max du gain du fournisseur pour la classe C est égal à 2.3%. Les résultats montrent que le fournisseur peut diminuer son coût pour toutes les classes d'instances à partir des contrats associés aux scénarios CS et CT. Le contrat associé au scénario CS permet toujours au fournisseur d'avoir une moyenne de gain qui est aussi significative que celle du scénario CT pour des horizons de temps plus élevés. Pour  $T = 10$ , la différence de la moyenne des gains est au plus de 2.4 points de pourcentage pour la classe B et les moyennes sont égales pour  $T = 20$ . Lorsque  $h^F$  est faible et  $h^D$  est élevé (classe C), le fournisseur ne peut pas diminuer son coût de manière significative par rapport aux autres classes. Pour  $T = 20$ , le gain du fournisseur est en moyenne de 3% pour la classe C alors qu'il est d'au moins 12.2% pour les autres classes. On peut expliquer ce résultat par le fait que le fournisseur n'a pas intérêt à transférer des unités pour les stocker au niveau du distributeur et de prendre en charge les coûts de stockage du distributeur puisque  $h^F < h^D$ . À l'inverse, le gain du fournisseur est le plus élevé pour la classe B où  $h^F > h^D$ .

Lorsque  $T = 20$ , le gain observé est de 27.3% alors qu'il est d'au plus 14% pour les autres classes. Dans ce cas, comme  $h^F > h^D$ , le fournisseur a intérêt à proposer un contrat où les unités sont stockées au niveau du distributeur et de payer une partie de ses coûts de stockage.

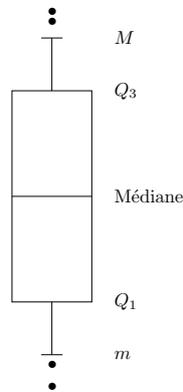


FIGURE 4.1 – Explication du box-plot.

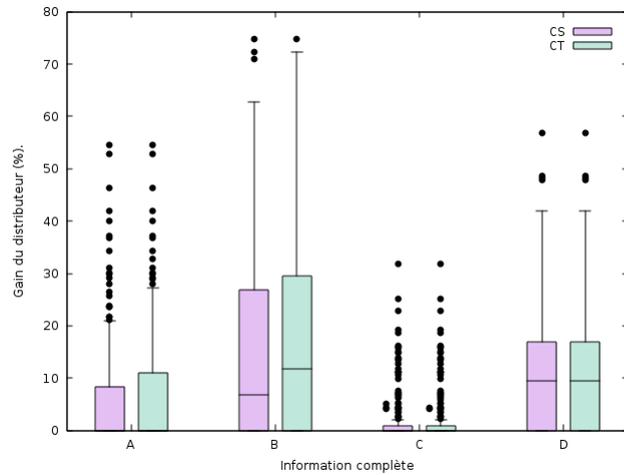


FIGURE 4.2 – Gains du fournisseur pour les scénarios CS et CT pour chaque classe d'instances où  $T = 10$ .

La lecture d'un boxplot se fait de la manière suivante (voir figure 4.1). La ligne du milieu représente la médiane, les côtés du boxplot représentent le premier et le troisième quartiles notés  $Q_1$  et  $Q_3$  respectivement. Les "moustaches" (les extrémités hors du boxplot) représentent la valeur maximale  $M$  et minimale  $m$  calculées suivant les formules  $M = \min(Q_3 + 1.5(Q_3 - Q_1), g_{\max})$  où  $g_{\max}$  est le gain maximal observé sur l'ensemble des valeurs et  $m = \min(Q_1 - 1.5(Q_3 - Q_1), g_{\min})$  où  $g_{\min}$  est le gain minimal observé sur l'ensemble des valeurs considérées. Les points isolés correspondent aux gains qui sont soit supérieurs à  $M$ , soit inférieurs à  $m$ . La figure 4.2 représente les résultats des scénarios CS et CT sous forme de boxplot quand  $T = 10$ . Sur la figure, nous pouvons observer qu'il y a une différence entre les gains associés au scénario CS et ceux associés au scénario CT. Pour la classe B, le gain du fournisseur est au moins égal à 6.8% avec le scénario CS et 11.8% avec le scénario CT pour la moitié des instances, et parmi ces instances, 25% d'entre-elles ont un gain au moins égal à 27% avec le scénario CS et 29.3% avec le scénario CT. Pour la classe A, les boxplots nous permettent de mieux la répartition des gains parmi toutes les instances. La médiane est à 0% pour les deux scénarios alors que dans le tableau 4.4, la moyenne des gains est égale à 5.9% pour le scénario CS et 6.9% pour le scénario CT.

### 4.1.3 Analyse des résultats avec asymétrie d'information

Dans cette section, nous fournissons une analyse expérimentale pour évaluer le gain du fournisseur dans le cas où soit  $f^D$ , soit  $p^D$ , ou  $h^D$  est privé. Pour les tests, nous avons utilisé la formulation étendue basée sur le problème de localisation (Pochet et Wolsey, 2006) pour la résolution des problèmes avec le solveur CPLEX.

L'hypothèse d'asymétrie d'information nécessite la génération de profils selon le coût privé du distributeur. Par la suite, les paramètres sont générés aléatoirement suivant une loi uniforme  $U[\alpha\beta]$  où  $\alpha$  et  $\beta$  correspondent aux bornes des intervalles décrits ci-dessous. Les paramètres de coût qui ne sont pas privés sont aléatoirement générés selon les classes d'instances

décrites dans le tableau 4.1. Le coût fixe du fournisseur est donné par  $f_t^F = \delta p_t^F$  avec  $\delta = 500$  s'il n'est pas privé.

La génération des paramètres de coût représentant les profils du distributeur se fait de la manière suivante. Pour chaque classe d'instances, nous créons 100 instances telles que  $T \in \{10, 20, 30\}$  et  $N \in \{2, 10\}$ . La probabilité  $P_i$  qu'un distributeur soit de profil  $i \in \mathcal{N}$  est tirée aléatoirement dans  $[0, 1]$ . Nous normalisons ensuite les valeurs de  $P_i$  de sorte que  $\sum_{i \in \mathcal{N}} P_i = 1$ . Les demandes sont choisies aléatoirement dans l'intervalle  $[0, 300]$ .

Si le coût de réapprovisionnement du distributeur  $p^D$  n'est pas privé, il est généré aléatoirement dans  $[1, 100]$ . Si le coût fixe de réapprovisionnement du distributeur  $f^D$  est privé, nous générons ce coût pour représenter les profils en posant  $f_1^D = \delta c$  où  $c$  est choisi aléatoirement dans l'intervalle  $[c_1^{D \min}, c_1^{D \max}] = [1, 20]$ . Le profil 1 représente un distributeur avec un coût fixe de réapprovisionnement qui n'est pas élevé. Les profils suivants sont créés de sorte que le coût fixe de réapprovisionnement soit croissant. Pour les profils  $i \in \{2, \dots, N\}$ ,  $f_i^D$  est tiré aléatoirement dans  $[c_{i-1}^{D \max} + 100/N, c_{i-1}^{D \max} + 20 + 100/N]$  (20 représente la longueur de l'intervalle et  $100/N$  nous permet de générer les différents profils du distributeur). Par exemple, pour une instance de classe A où  $N = 2$  de coût privé  $f^D$ , les coûts sont construits de la manière suivante :  $h^F, p^F, h^D$  sont aléatoirement choisis dans l'intervalle discret décrit dans le tableau 4.1,  $p^D$  est aléatoirement généré dans  $[1, 100]$ ,  $f_1^D$  est généré en posant  $f_{1t}^D = \delta c$  où  $c$  est aléatoirement choisi dans l'intervalle  $[1, 20]$  et  $f_2^D$  est généré en posant  $f_{2t}^D = \delta c$  où  $c$  est choisi dans l'intervalle  $[70, 90]$ . De la même manière, si  $p^D$  (resp.  $h^D$ ) correspond au coût privé,  $p_1^D$  (resp.  $h_1^D$ ) est choisi aléatoirement dans  $[p_1^{D \min}, p_1^{D \max}] = [1, 20]$  (resp.  $[h_1^{D \min}, h_1^{D \max}] = [0, 6]$ ), et pour chaque profil  $i \in \{2, \dots, N\}$ ,  $p_i^D$  (resp.  $h_i^D$ ) est aléatoirement généré dans  $[p_{i-1}^{D \max} + 100/N, p_{i-1}^{D \max} + 20 + 100/N]$  (resp.  $[h_{i-1}^{D \max} + 5, h_{i-1}^{D \max} + 7 + 5]$ ).

Afin de comparer nos résultats avec le cas où il y a une information complète, quand  $p^D$  est privé et  $N = 2$ , les instances sont construites à partir des instances utilisées pour l'analyse expérimentale avec information complète décrites dans la section 4.1.2 : sous l'hypothèse d'information complète, deux instances sont associées à un quintuplet  $(p^F, h^F, f^D, h^D, d)$ , une avec  $p^D \in [1, 20]$  et une autre avec  $p^D \in [70, 90]$ . Nous créons alors une instance avec asymétrie d'information où le distributeur de profil 1 est celle avec  $p^D \in [1, 20]$  et celui de profil 2 correspond à l'instance avec  $p^D \in [70, 90]$ . Remarquons que pour le cas où  $h^D$  est privé, il n'est pas nécessaire de différencier le cas où  $h^D$  est élevé ou non car les profils du distributeur sont générés de sorte que le coût de stockage associé aux profils est croissant. Dans ce cas, nous considérons donc uniquement les classes A et B.

#### Résultats expérimentaux

L'espérance du gain du fournisseur, en pourcentage, est égale à  $(1 - E[c_P^F]/E[c^F]) * 100$  où  $E[c_P^F]$  correspond à l'espérance du coût du fournisseur pour les scénarios ST, CS et CT et  $E[c^F]$  est l'espérance du coût du fournisseur lorsque le distributeur impose son plan de réapprovisionnement qui est le plus coûteux pour le fournisseur. Les résultats sont reportés dans les tableaux 4.5, 4.6 et 4.7. La colonne *Moy* (resp. *Max*) représente la moyenne (resp. maximale) de l'espérance du gain du fournisseur des 100 instances pour chaque classe d'instances.

		$T = 10$						$T = 20$					
		ST		CS		CT		ST		CS		CT	
$N$	Classe	Moy	Max	Moy	Max	Moy	Max	Moy	Max	Moy	Max	Moy	Max
2	A	0.0	0.0	5.6	43.9	6.4	43.9	0.0	0.0	12.1	60.6	12.1	60.6
2	B	0.0	0.0	15.0	63.9	16.2	63.9	0.0	0.0	27.2	63.9	27.7	63.9
2	C	0.0	0.0	2.2	29.5	2.2	29.5	0.0	1	2.6	15.6	2.6	15.6
2	D	0.0	0.0	10.8	41.3	10.8	41.3	0.0	0.0	13.8	34	13.8	34
10	A	0.0	0.0	5.8	47.5	6.8	47.5	0.0	1.4	9.5	31.7	9.6	31.7
10	B	0.0	0.0	11.0	51.6	12.5	51.6	0.0	0.3	22	54.8	22.6	54.8
10	C	0.0	0.2	2.2	20.4	2.2	20.4	0.0	0.0	2.5	12.2	2.5	12.2
10	D	0.0	1.7	7.0	33.2	7.0	33.2	0.0	0.0	11.8	37	11.8	37

TABLE 4.5 – Moyenne de l'espérance du gain du fournisseur (%) quand  $p^D$  est le coût privé.

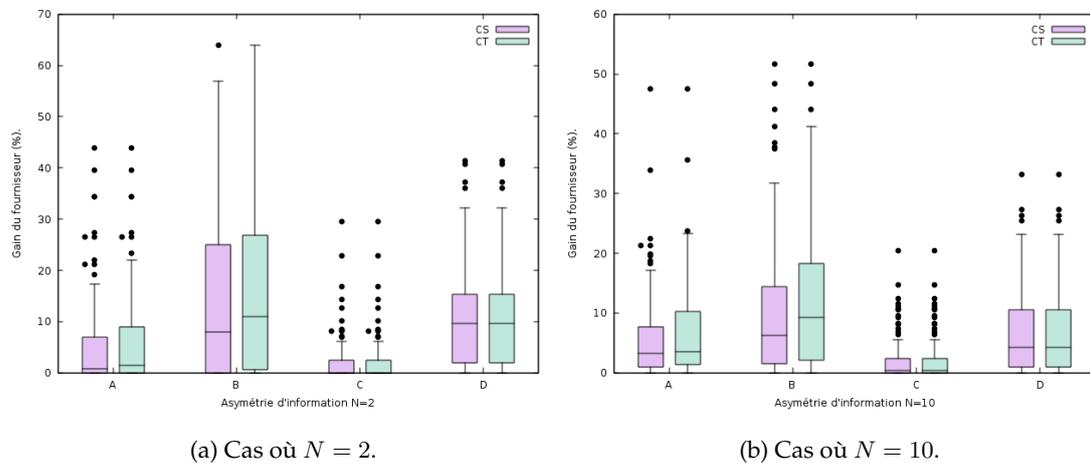


FIGURE 4.3 – Espérance du gain du fournisseur pour le scénario CS pour chaque classe d'instances lorsque  $p^D$  est privé et  $T = 30$ .

Le tableau 4.5 et les figures 4.3 (a), 4.3 (b) présentent les résultats pour le cas où le coût privé est  $p^D$  (une explication sur la lecture d'un boxplot est fournie dans la section 4.1.2). De la même manière que dans le cas avec information complète, le contrat sans transfert d'argent ne permet pas au fournisseur d'avoir un gain significatif comparé aux autres contrats. En effet, pour  $T = 10$ , seules les classes d'instances C et D avec  $N = 10$  ont un gain strictement positif avec une valeur maximale de 1.7%. Pour  $T = 20$ , il y a trois classes d'instances avec un gain positif dont la valeur maximale est 1.4%. Nous comparons les résultats quand  $N = 2$  avec ceux où nous faisons l'hypothèse que tous les paramètres de coût sont connus. Nous observons qu'en pratique l'asymétrie d'information ne détériore pas d'une manière significative le gain du fournisseur comparé au cas avec information complète, il y a une différence d'au plus 1 point de pourcentage entre les deux cas. Ainsi, bien que le coût du fournisseur avec asymétrie d'information peut augmenter d'un facteur arbitrairement élevé par rapport au cas avec information complète (2.4), ces résultats montrent qu'en pratique, son coût n'augmente pas significativement lorsqu'il y a asymétrie d'information. Le scénario CS permet au fournisseur d'avoir une moyenne de gain aussi significative que le scénario CT. Pour  $T = 10$ , la différence de gain entre ces deux scénarios est au plus de 1.5 points et pour  $T = 20$ , elle est au plus de 0.6 points. De plus, pour la classe A et  $N = 2$ , les boxplots montrent que 50% des instances ont un gain supérieur à 1% pour le scénario CS et supérieur à 1.5% pour le scénario CT. Parmi elles,

25% ont un gain entre 8% et 18.5% pour le scénario CS et un gain entre 9.9% et 22.5% pour le scénario CT. De la même manière que pour le cas avec information complète, la moyenne de l'espérance du gain du fournisseur est la moins élevée pour les instances de la classe C. Pour  $N = 2$ , il est égal à 2.6% pour la classe C quand  $T = 20$  alors qu'il est au moins égal à 12.1% pour les autres classes. De plus, le fournisseur a une moyenne la plus élevée avec la classe B (27.7% quand  $T = 20$  et  $N = 2$ ). Le nombre de profils semble avoir un faible impact sur la moyenne de l'espérance du gain du fournisseur. Pour la classe B et pour  $T = 20$ , il y a une différence de 5.2 points de pourcentage entre la moyenne quand  $N = 2$  (la moyenne est de 27.2%) et  $N = 10$  (la moyenne est de 22%). En particulier, pour la classe B et  $N = 2$ , la moyenne des gains obtenue avec le scénario CT est plus élevée qu'avec le scénario CS.

		$T = 10$						$T = 20$					
		ST		CS		CT		ST		CS		CT	
$N$	Classe	Moy	Max	Moy	Max	Moy	Max	Moy	Max	Moy	Max	Moy	Max
2	A	0.0	0.0	2.5	42.3	3.0	42.3	0.0	0.0	9.5	63.2	9.6	63.2
2	B	0.0	0.0	7.0	74.6	9.0	74.6	0.0	0.0	16.9	59.3	17.4	59.3
2	C	0.0	0.0	2.9	31.1	3.0	31.1	0.0	0.0	3.8	29.2	3.8	29.2
2	D	0.0	0.0	8.4	56	8.4	56	0.0	0.9	11.7	52.3	11.7	52.3
10	A	0.0	0.0	1.1	10.2	1.2	10.2	0.0	0.0	4.8	37.4	4.8	37.4
10	B	0.0	0.0	2.3	22.5	3.1	22.5	0.0	0.0	11.3	69.1	12.3	69.1
10	C	0.0	0.0	2.0	18.8	2.0	18.8	0.0	0.1	3.1	17.5	3.1	17.5
10	D	0.0	0.0	5.3	33.7	5.3	33.7	0.0	0.0	10.8	34.7	10.8	34.7

TABLE 4.6 – Moyenne de l'espérance du gain du fournisseur (%) quand  $f^D$  est privé.

		$T = 10$						$T = 20$					
		ST		CS		CT		ST		CS		CT	
$N$	Classe	Moy	Max	Moy	Max	Moy	Max	Moy	Max	Moy	Max	Moy	Max
2	A	0.0	0.0	2.5	22.3	2.6	22.3	0.0	0.0	4.1	30.1	4.2	30.1
2	B	0.0	0.0	6.7	42.9	7.4	42.9	0.0	0.0	10.7	50.4	10.8	50.4
10	A	0.0	0.0	0.6	8.3	0.6	8.3	0.0	0.0	1.0	11.1	1.0	11.1
10	B	0.0	0.0	2.0	14.2	2.2	14.2	0.0	0.0	3.7	15.5	3.7	15.5

TABLE 4.7 – Moyenne de l'espérance du gain du fournisseur (%) quand  $h^D$  est privé.

Quand le coût de stockage du distributeur  $h^D$  est privé, la moyenne de l'espérance du gain du fournisseur en moyenne n'est pas aussi élevée que lorsque les autres paramètres de coût sont privés. Pour  $T = 20$  et  $N = 2$ , la meilleure moyenne est égale à 10.8% quand  $h^D$  est privé alors qu'il est de 27.7% quand  $p^D$  est privé et de 17.4% lorsque  $f^D$  est privé. De plus, le nombre de profils semble avoir un impact important sur la moyenne de l'espérance du gain du fournisseur contrairement à l'observation faite lorsque le coût  $p^D$  était privé. Pour  $T = 20$ , la meilleure moyenne est égale à 3.7% quand  $N = 10$  et elle est égale à 10.8% quand  $N = 2$ . En effet, plus le nombre de profils augmente, plus le coût de stockage du distributeur est élevé. Cependant, lorsque  $h^D$  est élevé, le fournisseur ne diminue pas son coût de manière significative. Ainsi, si le nombre de profils avec un coût de stockage élevé augmente, la moyenne de l'espérance du gain du fournisseur ne sera pas aussi significative qu'avec peu de profils. De

plus, comme pour le cas où  $p^D$  et  $f^D$  sont inconnus, lorsque  $h^D$  est faible et  $h^F$  est élevé (classe B), la moyenne des gains obtenue est meilleure avec le scénario CT.

#### 4.1.4 Extension à plusieurs distributeurs

Sous l'hypothèse d'information complète, nous reprenons le même schéma de génération d'instances que dans la section 4.1.1. Les coûts du fournisseur et de chaque distributeur sont générés selon les classes d'instances décrites dans le tableau 4.1. De la même manière que pour le cas avec un distributeur, le but de cette section est d'évaluer le gain du fournisseur dans le cadre où il doit satisfaire le plan de réapprovisionnement de plusieurs distributeurs. Ainsi, nous considérons les paramètres  $M = 3$  et  $T = \{10, 20\}$  pour pouvoir résoudre les problèmes à l'optimalité (pour des valeurs  $M$  plus grandes, les problèmes ne sont pas tous résolus à l'optimal au bout d'une heure). Les résultats sont fournis dans le tableau 4.8.

Classe	$T = 10$						$T = 20$					
	ST		CS		CT		ST		CS		CT	
	Moy	Max	Moy	Max	Moy	Max	Moy	Max	Moy	Max	Moy	Max
A	0.0	0.0	9.3	61.3	11.4	61.3	0.0	0.0	13.9	58.1	14.2	58.1
B	0.0	0.0	17.7	65.2	21.4	65.2	0.0	0.0	30.2	69.9	31.1	69.9
C	0.0	0.0	4.4	24.7	4.4	24.7	0.0	0.0	4.1	24.5	4.1	24.5
D	0.0	0.0	13.9	48.8	13.9	48.8	0.0	0.0	12.9	35.6	12.9	35.6

TABLE 4.8 – Moyenne des gains du fournisseur (%) avec information complète pour les scénarios ST, CS et CT.

L'analyse faite pour le cas avec un distributeur est également valide dans le cas avec plusieurs distributeurs. Le scénario ST ne permet pas au fournisseur de diminuer son coût (il est nul pour toutes les classes d'instance). Dans le cas avec plusieurs distributeurs, nous pouvons observer que le scénario CS est moins bon que le scénario CT lorsque le coût  $h^D$  est faible. La plus grande différence entre les moyennes des gains du fournisseur est de 3.7 points de pourcentage pour la classe B lorsque  $T = 10$ .

Sous l'hypothèse d'asymétrie d'information, les expérimentations ont été effectuées en considérant  $M = 3$ ,  $N_i = 2$  pour tout  $i = 1, 2, 3$ . Les coûts du fournisseur sont générés dans les intervalles décrits dans le tableau 4.10. Les coûts de chaque distributeur sont générés de la même manière que dans la section 4.1.3. Comme les observations sont similaires au cas avec un distributeur, les résultats reportés dans le tableau 4.9 sont uniquement associés au scénario CS. Le mécanisme de coordination présenté dans le chapitre 2 permet donc également au fournisseur de diminuer son coût dans une chaîne logistique avec plusieurs distributeurs.

Classe	$p^D$ inconnu				$f^D$ inconnu				$h^D$ inconnu			
	$T = 10$		$T = 20$		$T = 10$		$T = 20$		$T = 10$		$T = 20$	
	Mean	Max	Mean	Max	Mean	Max	Mean	Max	Mean	Max	Mean	Max
A	8.6	52.9	13.4	49.2	3.4	30.4	9.9	53.7	3.2	20.6	4.8	22.4
B	16.3	61.4	28.9	65.2	9.2	50.0	20.6	55.1	6.9	26.5	11.8	31.9
C	3.8	20.3	3.7	18.6	3.9	26.8	4.3	16.7	-	-	-	-
D	12.7	35	12	31.4	10.3	36.8	12.9	30.0	-	-	-	-

TABLE 4.9 – Moyenne de l'espérance du gain du fournisseur (%) pour le scénario CS lorsque  $M = 3$  et  $N_i = 2$  pour tout profil  $i$ .

## 4.2 Monopole du fournisseur

Dans cette section, nous présentons les expérimentations dont le but est d'évaluer le gain du distributeur à partir des contrats mis en place dans le chapitre 3. Nous expliquons comment sont générées les instances utilisées dans nos tests dans la section 4.2.1. Dans la section 4.2.2, nous fournissons une analyse des résultats obtenus.

### 4.2.1 Génération d'instances

Les instances générées pour les expérimentations lorsque le fournisseur a le monopole sont basées sur celles présentées dans la section 4.1.1. Les différentes classes d'instances testées sont reportées dans le tableau 4.10. Les coûts fixes de production et de réapprovisionnement sont égaux à  $f_t^F = \delta p_t^F$  et  $f_t^D = 500p_t^D$ . Nous considérons  $T = 10$ ,  $d \in [0, 300]$  et  $\delta \in \{100, 500, 1000\}$  pour représenter le cas où  $f^F$  est moins élevé que  $f^D$  ( $\delta = 100$ ), le cas  $f^F$  est plus élevé que  $f^D$  ( $\delta = 1000$ ) et celui où ils sont similaires ( $\delta = 500$ ). À chaque période  $t$ , le coût de sous-traitance  $b_t$  est compris dans l'intervalle  $[p_t^F, p_t^F + 50]$ . Par la suite, les paramètres sont tirés aléatoirement suivant une loi uniforme  $(U)(\alpha, \beta)$  où  $\alpha$  et  $\beta$  représentent les bornes d'un intervalle. Par exemple, une instance de la classe A avec  $\delta = 100$  est créée de la manière suivante. L'horizon de temps est fixé à  $T = 10$  et à chaque période  $t$ ,  $d_t$  est choisi aléatoirement dans l'intervalle  $[0, 300]$ . Nous tirons aléatoirement les coûts de stockage  $h_t^D$  et  $h_t^F$  dans  $[0, 6]$ . Le coût de production du fournisseur  $p_t^F$  est choisi aléatoirement dans  $[1, 50]$  et le coût de réapprovisionnement du distributeur est choisi aléatoirement dans  $[1, 100]$ . Les coûts fixes de production et de réapprovisionnement sont égaux à  $f_t^F = 100p_t^F$  et  $f_t^D = 500p_t^D$ . Pour finir, le coût de sous-traitance  $b_t$  est choisi aléatoirement dans l'intervalle  $[p_t^F, p_t^F + 50]$ .

Des tests préliminaires ont montré que plus un horizon de temps est élevé plus le gain du distributeur est élevé mais l'analyse que nous proposons reste la même indépendamment de la longueur de l'horizon de temps. De plus, pour chaque classe d'instances, nous avons également observé que le gain du distributeur lorsque le coût de sous-traitance  $b$  est stationnaire est proche de son gain lorsque  $b$  n'est pas stationnaire. Pour chaque classe d'instances, nous faisons les hypothèses de coûts suivantes :  $f^F$  stationnaire,  $f^D$  stationnaire,  $p^F$  stationnaire ou  $p^D$  stationnaire. Pour chaque classe d'instances et chaque hypothèse sur les paramètres de coût, nous créons 200 instances. Dans les scénarios ACF, SCF et TT, le fournisseur ne stocke aucune unité à son niveau (donc  $h^F$  n'est pas pris en compte dans la mise en place du contrat). Ainsi, pour les expérimentations, il suffit de considérer les classes A ( $h^D$  faible) et C ( $h^D$  élevé).

Classe	$h^F$	$h^D$	$p^F$	$p^D$
A	[0,6]			
B	[12,18]	[0,6]	[1,50]	[1,100]
C	[0,6]			
D	[12,18]	[12,18]	[1,50]	[1,100]

TABLE 4.10 – Description des classes d'instances.

### 4.2.2 Analyse des résultats

Nous calculons le gain du distributeur en pourcentage par la formule suivante  $(1 - c_P^D / c^D) \times 100$  où  $c_P^D$  est le coût du distributeur obtenus pour chaque scénario présenté dans le chapitre 3 et  $c^D$  est le coût du distributeur lorsque le plan de réapprovisionnement est imposé. Par la suite, nous utilisons les notations du tableau 4.11 pour représenter les différents scénarios.

Nom	Scénario
CS	Transfert d'argent inclut le coût de stockage du fournisseur
SCF	Transfert d'argent sur le coût de sous-traitance
ACF	Transfert d'argent sur le coût de sous-traitance et les coûts fixes supplémentaires du fournisseur
TT	Transfert d'argent est autorisé sur le coût total du fournisseur

TABLE 4.11 – Notations pour les différents scénarios lorsque le fournisseur a le monopole.

Les résultats des expérimentations sont reportés dans les tableaux 4.12-4.15. La colonne *Moy* (resp. *Max*) représente la moyenne (resp. maximale) du gain du distributeur des 200 instances pour chaque classe d'instances.

Classe	$p^D$ stationnaire		$p^F$ stationnaire		$f^F$ stationnaire		$f^D$ stationnaire	
	Moy	Max	Moy	Max	Moy	Max	Moy	Max
A	0.1	4.4	24.4	68.8	14.5	56.6	8.5	68.2
B	0.0	0.0	9.8	52.9	5.4	44	4.5	34.9
C	8.1	44.9	36.7	71.8	24.0	57.3	15.0	60.9
D	0.1	8.2	15.1	50.3	10.8	42.5	5.6	37.2

TABLE 4.12 – Moyenne des gains du fournisseur (%) pour les scénarios CS où  $\delta = 100$ .

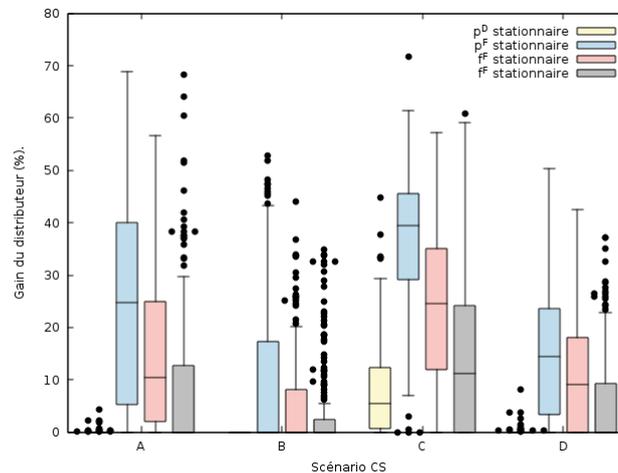


FIGURE 4.4 – Gain du distributeur (%) pour le scénario CS lorsque  $\delta = 100$ .

Nous analysons d'abord les résultats pour le scénario CS. La figure 4.5 illustre les résultats obtenus sous forme de boxplots lorsque  $\delta = 100$ . Les résultats des tests montrent que lorsque  $p^D$  est stationnaire, le scénario CS ne permet pas au distributeur de diminuer son coût, sauf pour la classe C ( $h^D$  est élevé et  $h^F$  est faible). Les moyennes de gains pour les classes A, B et D sont au maximum égales à 0.1%. Les résultats montrent également que pour chaque classe d'instances, la meilleure moyenne est obtenue lorsque  $p^F$  est stationnaire. Par exemple pour la classe A, la moyenne est égale à 24.4% lorsque  $p^F$  est stationnaire tandis qu'elle est au plus de 14.5% pour les autres hypothèses sur les paramètres de coût. Nous rappelons que

sans hypothèse de coordination, le fournisseur impose que toutes les unités soient stockées chez le distributeur. Avec le contrat associé au scénario CS, si le coût  $h^D$  est grand (classe C), le distributeur peut diminuer significativement son coût en prenant en charge le coût de stockage du fournisseur. Les boxplots confirment bien cette observation puisque pour chaque hypothèse faite sur les paramètres de coût, la médiane est plus élevée pour la classe C. En effet, ce contrat permet au distributeur d'avoir moins d'unités en stock ce qui est plus intéressant pour le distributeur lorsque  $h^D$  est élevé.

	Classe	ACF		SCF		TT	
		Moy	Max	Moy	Max	Moy	Max
$p^D$ stationnaire	A	6.4	53.4	6.4	53.4	8.6	57.5
	C	4.9	28.2	4.6	28.6	6.8	39.1
$p^F$ stationnaire	A	6.0	38.3	6.2	38.6	13.5	52.9
	C	16.9	54.1	17.1	54.2	27.8	58.1
$f^F$ stationnaire	A	14.8	61.2	15.1	61.2	19.3	69.7
	C	15.7	52.5	14.8	52.7	19.7	56.2
$f^D$ stationnaire	A	9.9	51.9	10.2	51.9	13.3	55.8
	C	9.1	44.5	9.0	44.9	11.2	46.8

TABLE 4.13 – Moyenne des gains du fournisseur (%) pour les scénarios ACF, SCF et TT où  $\delta = 100$ .

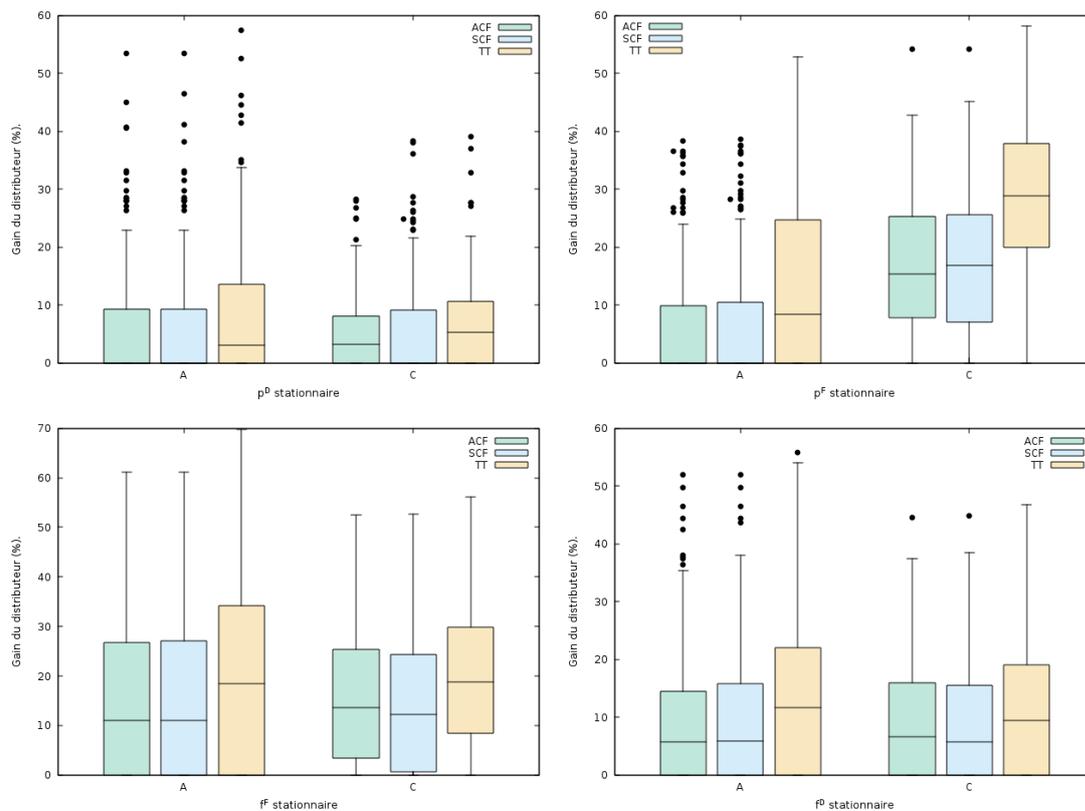


FIGURE 4.5 – Gain du distributeur (%) pour les scénarios ACF, SCF et TT lorsque  $\delta = 100$ .

Nous allons maintenant analyser les scénarios ACF, SCF et TT. Pour chaque classe d'instances et chaque hypothèse sur les paramètres de coût, le scénario TT est le meilleur. Sur

les figures, la médiane de ce scénario est toujours plus élevée par rapport aux autres scénarios. Les boxplots permettent d'avoir une meilleure représentation du gain du fournisseur. Par exemple, pour la classe A et  $p^F$  stationnaire, les boxplots indiquent que la médiane est nulle et 25% des instances ont un gain supérieur ou égal à 9% pour les scénarios ACF et SCF, alors que la moyenne des gains est égale à 6.2% et 6% pour les scénarios ACF et SCF respectivement. D'après les résultats du tableau 4.13, la moyenne des gains pour ACF et SCF sont proches. La plus grande différence de moyenne observée est égale à 0.9 points de pourcentage pour la classe C lorsque  $f^F$  est stationnaire. En revanche, une différence de gain, sur les figures, nous observons des différences de gains plus important entre ces deux scénarios que dans le tableau. Pour la classe C ( $h^D$  grand) où  $p^D$  est stationnaire, la médiane des gains est plus élevée pour le scénario ACF. Donc dans ce cas, le distributeur a plus intérêt à prendre en charge les coûts fixes du fournisseur afin de pouvoir diminuer son stock.

Classe	$p^D$ stationnaire		$p^F$ stationnaire		$f^F$ stationnaire		$f^D$ stationnaire	
	Moy	Max	Moy	Max	Moy	Max	Moy	Max
A	0.3	11.6	23.9	67.2	18.9	59	10.7	67.7
B	0.0	8.5	10.8	48.1	8.6	59.1	4.1	59
C	12.7	44.7	36.7	63.8	38.8	61.9	16.1	71
D	0.3	19.4	15.4	42.5	14.3	50.3	5.9	46.1

TABLE 4.14 – Moyenne des gains du fournisseur (%) pour le scénario CS où  $\delta = 1000$ .

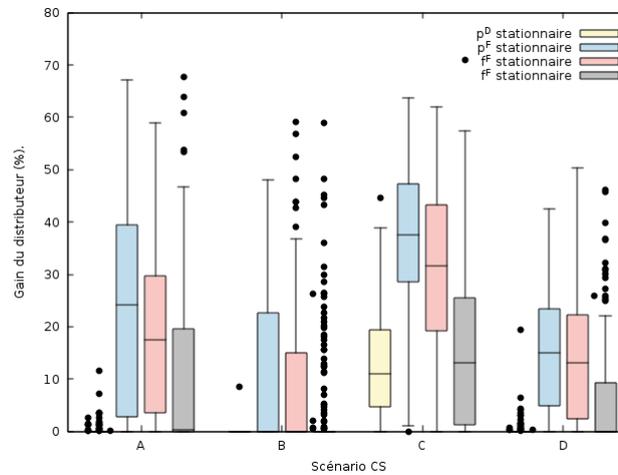


FIGURE 4.6 – Gain du distributeur (%) pour le scénario CS lorsque  $\delta = 1000$ .

	Classe	ACF		SCF		TT	
		Moy	Max	Moy	Max	Moy	Max
$p^D$ stationnaire	A	1.2	27.5	1.3	35.1	1.9	39.9
	C	1.9	37.3	1.1	37.9	3.5	38.1
$p^F$ stationnaire	A	2.2	30.7	2.7	35.8	7.1	46.5
	C	8.6	36.7	7.9	39.6	15.4	46.9
$f^F$ stationnaire	A	5.4	57.3	6.2	64.7	9.5	76.8
	C	7.6	60.0	6.4	56.8	12.6	64.3
$f^D$ stationnaire	A	5.5	48.6	5.5	45.1	8.5	56.8
	C	4.4	33.1	3.5	34.5	6.9	45.1

TABLE 4.15 – Moyenne des gains du fournisseur (%) pour les scénarios ACF, SCF et TT où  $\delta = 1000$ .

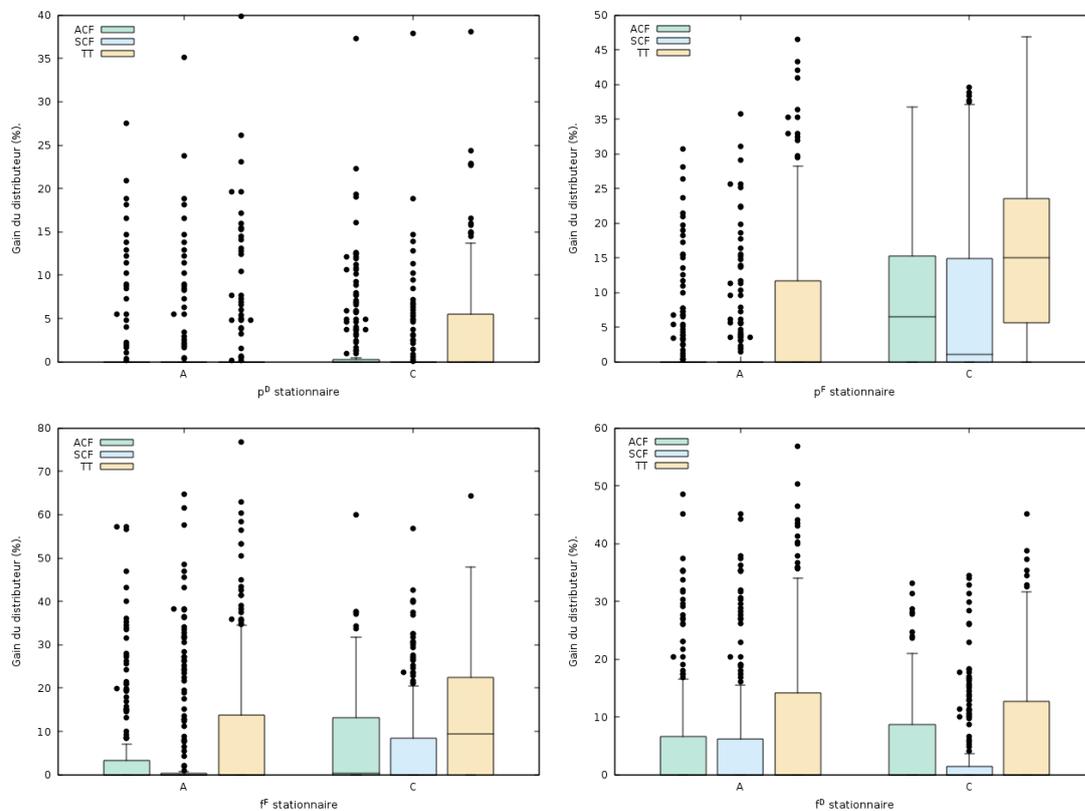


FIGURE 4.7 – Gain du distributeur (%) pour les scénarios ACF, SCF et TT lorsque  $\delta = 1000$ .

L'analyse faite pour  $\delta = 100$  s'applique également dans le cas où  $\delta = 1000$  pour le scénario CS. En revanche, pour les autres scénarios, les résultats ne sont pas similaires. Les résultats reportés dans le tableau 4.15 montrent que les moyennes des gains du distributeur sont toujours meilleures avec les scénarios TT. De plus, sur la figure 4.7, les médianes associées au scénario TT sont plus élevées pour toutes les classes d'instances et les hypothèses sur les paramètres de coût. Pour les scénarios ACF et SCF, la moyenne des gains est différente pour plusieurs classes d'instances contrairement au cas où  $\delta = 100$ . Parmi toutes les classes d'instances et les hypothèses sur les paramètres de coût, seule la classe A avec  $f^F$  stationnaire a une moyenne identique pour les deux scénarios (égale à 5.5%), mais une valeur de gain maximum différente

(48.6% pour ACF et 45.1% pour SCF). Nous observons que pour la classe C, le scénario ACF est le meilleur pour toutes les hypothèses sur les paramètres de coût. La différence entre les moyennes des gains du fournisseur est au minimum égale à 0.7 points de pourcentage lorsque  $p^F$  est stationnaire. En effet,  $\delta = 1000$  représente un coût fixe élevé pour le fournisseur, donc lorsque  $h^D$  est grand (classe C), il est intéressant pour le distributeur de prendre en charge les coûts  $f^F$  induits par la sous-traitance afin qu'il puisse diminuer son niveau de stock. De plus, d'après les boxplots, la moyenne des gains du distributeur lorsque  $h^D$  est faible (classe A) n'est pas élevée avec les scénarios ACF et SCF sauf pour le cas où  $f^D$  est stationnaire.

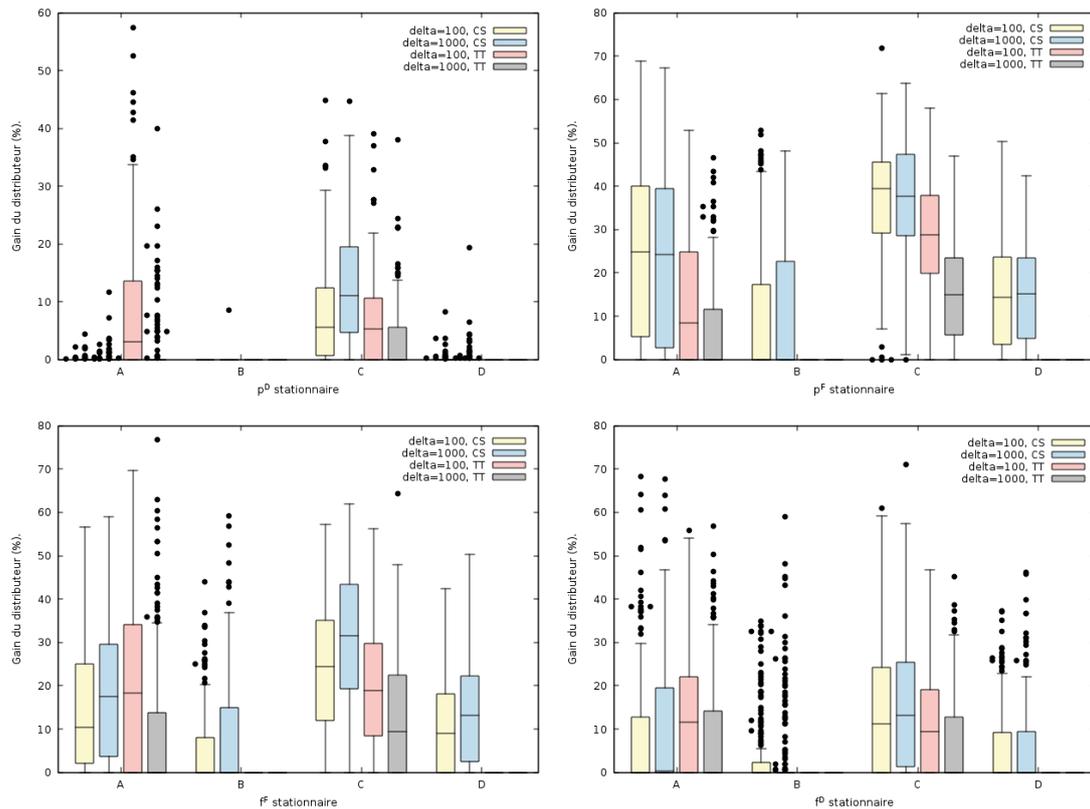


FIGURE 4.8 – Comparaison du gain du distributeur (%) pour les scénarios CS et TT pour  $\delta = 100$  et  $\delta = 1000$ .

Parmi les trois scénarios ACF, SCF et TT, les observations précédentes ont montré que les gains obtenus à partir du scénario TT sont les meilleurs. Afin de déterminer quel scénario est le meilleur, nous allons comparer les gains du distributeur entre les scénarios CS et TT. La figure 4.8 représente les gains du distributeur des instances où  $\delta = 100$  et  $\delta = 1000$  pour les scénarios CS et TT. Nous observons que lorsque le coût de stockage du distributeur est élevé (classe C), le scénario CS fournit les meilleurs gains. De plus, les gains du distributeur associés au scénario CS sont plus élevés pour  $\delta = 1000$  (la médiane est plus élevée quand  $\delta = 1000$ ), sauf pour les classes A et D et  $p^F$  stationnaire. En effet, plus  $\delta$  est grand, plus  $f^F$  est élevé. Et donc, dans son plan de production optimal, le fournisseur fait moins de lançements ce qui induit un coût de stockage élevé pour le distributeur. Le scénario CS est donc plus profitable au distributeur lorsque  $\delta$  est élevé. Pour la classe A ( $h^D$  est faible), le scénario TT est le plus intéressant pour le distributeur (la médiane est plus élevée avec ce scénario sauf pour le cas où  $p^F$  est stationnaire).

### 4.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons évalué les gains obtenus par le fournisseur à partir des contrats mis en place dans le chapitre 2 lorsque le distributeur a le monopole. Nous avons vu que le contrat sans transfert d'argent ne permet pas au fournisseur de diminuer son coût. En revanche, les résultats de l'analyse ont mis en avant le fait que le gain obtenu par le contrat où le transfert d'argent inclut les coûts de stockage du distributeur est aussi important que celui obtenu lorsque le transfert d'argent est sur le coût total du distributeur. De plus, les tests ont montré qu'en utilisant le jeu de sélection, l'asymétrie d'information n'a pas un impact significatif sur les gains du fournisseur par rapport au cas où tous les paramètres de coût sont connus par les acteurs.

Nous avons également analysé les gains du distributeur à partir des contrats présentés dans le chapitre 3 lorsque le fournisseur a le monopole. Les tests ont montré que le contrat pour lequel le distributeur prend en charge les coûts de stockage du fournisseur est plus intéressant lorsque  $h^D$  est élevé. En revanche, ce scénario n'est pas intéressant pour le distributeur lorsque  $p^D$  est stationnaire. D'après les résultats des expérimentations, lorsque le coût fixe  $f^F$  est faible par rapport à  $f^D$ , les scénarios ACF et SCF permettent au distributeur d'avoir un gain similaire. Cette analyse expérimentale nous a permis d'observer que le contrat avec un transfert d'argent sur le coût total du fournisseur est celui qui est le plus intéressant pour le distributeur parmi les contrats n'autorisant pas de stock au niveau du fournisseur.

Les expérimentations ont montré que les mécanismes de coordination présentés dans les chapitres 2 et 3 permettent de diminuer le coût de l'acteur dominé.



## Chapitre 5

# Problème de lot-sizing à deux niveaux avec capacité de stockage

Contrairement aux chapitres précédents, les travaux présentés dans ce chapitre ne traitent pas des problèmes de coordination de décisions de planification dans une chaîne logistique. Dans ce chapitre, nous nous intéressons au problème de lot-sizing à deux niveaux en considérant que le stockage peut être limité. étudions la complexité des différents problèmes de lot-sizing lorsque la capacité de stockage est imposée au niveau du fournisseur, au niveau du distributeur, ou aux deux niveaux.

### 5.1 Introduction

En pratique, il n'est pas possible de considérer que des unités peuvent être stockées de manière illimitée dans des entrepôts. Prenons l'exemple des industries pharmaceutiques (Atamtürk et Küçükyavuz, 2008) où les produits doivent être stockés dans un entrepôt où la température est contrôlée. Cette contrainte de stock limité dans les entrepôts nous a amené à considérer différents problèmes de lot-sizing à deux niveaux selon que la capacité de stockage est limitée au niveau du distributeur, au niveau du fournisseur ou bien aux deux niveaux.

#### État de l'art

Pour commencer, nous proposons un état de l'art sur les *problèmes de lot-sizing à un niveau avec capacité de stockage (LS-IB)*. Le problème LS-IB a été introduit par Love (1973), il a développé un algorithme de programmation dynamique en  $\mathcal{O}(T^3)$  pour le résoudre sous hypothèse que les coûts de production et de stockage soient concaves par morceaux et avec prise en compte du retard sur la demande. Gutiérrez *et al.* (2008) ont proposé un autre algorithme dont la complexité est identique à celle de l'algorithme proposé par Love (1973) mais avec un meilleur temps de calcul en pratique. Cependant, van den Heuvel *et al.* (2011) ont montré que leur algorithme ne fournit pas toujours une solution optimale au problème LS-IB. Toczyłowski (1995) et Liu (2008) ont amélioré la complexité de l'algorithme de Love (1973) en passant de  $\mathcal{O}(T^3)$  en  $\mathcal{O}(T^2)$ . Par la suite, Önal *et al.* (2012) ont montré que l'algorithme de Liu (2008) n'est pas valide dans un cas général et ont proposé une correction de leur algorithme dont la complexité reste en  $\mathcal{O}(T^2)$ . Atamtürk et Küçükyavuz (2008) ont fourni une étude du problème LS-IB en considérant de plus un coût fixe de stockage. Les auteurs ont développé un algorithme de programmation dynamique en  $\mathcal{O}(T^2)$  pour résoudre ce problème. Il ont également effectué une étude polyédrale du problème LS-IB en considérant deux modèles différents, l'un où le coût de stockage est linéaire et l'autre avec un coût fixe de stockage. Les auteurs

ont proposé un algorithme de séparation exact pour chaque problème. Ils ont également effectué des tests numériques pour montrer que les inégalités qu'ils proposent sont efficaces pour résoudre le problème LS-IB avec coût fixe de stockage. Le problème LS-IB a également été étudié en considérant de plus un retard sur la demande (Hwang et van den Heuvel, 2012), une rupture de stock (Hwang *et al.*, 2013b; Liu *et al.*, 2007; Liu et Tu, 2008) ou une capacité de production (Akbalik *et al.*, 2015; Erenguc et Aksoy, 1990).

Peu de travaux sur les *problèmes de lot-sizing à deux niveaux avec capacité de stockage* existent dans la littérature. Jaruphongsa *et al.* (2004) ont étudié le problème de lot-sizing à deux niveaux avec des fenêtres de temps sur la demande et une capacité de stockage stationnaire au niveau du fournisseur. Les fenêtres de temps permettent d'avoir plus de flexibilité pour satisfaire les demandes : au lieu d'être satisfaite à une période donnée, elles peuvent être satisfaites dans un sous-ensemble de périodes consécutives et fixées. Des hypothèses sur les paramètres de coût ont été faites. Ils supposent par exemple que le coût de production est décroissant. Ces hypothèses ont permis aux auteurs de développer un algorithme de programmation dynamique en  $\mathcal{O}(T^3)$  pour résoudre le problème de lot-sizing à deux niveaux avec capacité de stockage stationnaire au niveau du fournisseur. Un algorithme de programmation dynamique en  $\mathcal{O}(T^4)$  a été proposé par (Hwang et Jung, 2011) pour résoudre le problème de lot-sizing à deux niveaux avec capacité de stockage stationnaire au niveau du distributeur et une fonction de coût concave. Récemment, Hwang *et al.* (2013a) ont étudié un problème de lot-sizing multi-niveaux en considérant une contrainte de capacité de stockage stationnaire à un niveau arbitraire. Afin de résoudre ce problème, ils se sont intéressés aux "chemins basiques" (appelés *basis path* dans leur article) dans le réseau induit par les arcs actifs. Ils ont montré que dans ce réseau, il existe un unique chemin reliant deux nœuds du niveau où la capacité de stockage est limitée. À partir de cette propriété, ils ont proposé un algorithme de programmation dynamique en  $\mathcal{O}(LT^7)$  afin de résoudre ce problème, où  $L$  est le nombre de niveau.

### Contributions et plan du chapitre

Dans ce chapitre, nous présentons une étude de complexité de différents problèmes 2ULS avec capacité de stockage. Nous considérons que la capacité de stockage est limitée soit au niveau du fournisseur, soit au niveau du distributeur ou aux deux niveaux. Ce chapitre est organisé de la manière suivante : les formulations mathématiques des différents problèmes étudiés sont décrites dans la section 5.2. Dans la section 5.3, nous étudions le problème de lot-sizing à deux niveaux avec une capacité de stockage au niveau du distributeur, que nous notons 2ULS-IB-R. L'algorithme de programmation dynamique proposé par Hwang *et al.* (2013a) permet de résoudre ce problème en  $\mathcal{O}(T^7)$  si la capacité de stockage au niveau du distributeur est stationnaire. Nous améliorons la complexité de leur algorithme en proposant un algorithme de programmation dynamique polynomial en  $\mathcal{O}(T^4)$  pour résoudre le problème 2ULS-IB-R avec une capacité de stockage quelconque. La complexité de l'algorithme de Hwang et Jung (2011) pour résoudre ce problème est identique à l'algorithme que nous proposons dans la section 5.3. Cependant, contrairement à leur résultat, nous proposons un algorithme de programmation dynamique basé sur des propriétés structurelles spécifiques au problème de lot-sizing avec capacité de stockage pour lesquelles nous présentons des preuves de validité. Jaruphongsa *et al.* (2004) ont proposé un algorithme de programmation dynamique polynomial pour résoudre le problème 2ULS avec une capacité de stockage stationnaire au niveau du fournisseur. Dans la section 5.4, nous montrons que, dans un cas général, le problème 2ULS avec une capacité de stockage au niveau du fournisseur, noté 2ULS-IB-S, est NP-difficile. Nous présentons un algorithme de programmation dynamique pseudo-polynomial pour résoudre le problème 2ULS avec une capacité de stockage aux deux niveaux, noté 2ULS-IB-SR, dans la section 5.5. Nous

proposons également dans la section 5.6 une analyse de complexité pour cette classe de problèmes sous la contrainte No Lot-Splitting (NLS) que nous définissons par la suite par une demande qui doit être satisfaite par une unique période de réapprovisionnement.

## 5.2 Formulation mathématique

Nous rappelons les notations utilisés pour les paramètres de coût ainsi que les variables de décision du problème 2ULS définies dans le chapitre 1 à la section 1.3. Le coût unitaire de réapprovisionnement (resp. production) du distributeur (resp. fournisseur) à une période  $t$  est noté  $p_t^D$  (resp.  $p_t^F$ ). Le paramètre  $f_t^D$  (resp.  $f_t^F$ ) représente le coût fixe de production (resp. réapprovisionnement) du distributeur (resp. fournisseur) à une période  $t$ . Le coût de stockage à la période  $t$  du distributeur (resp. fournisseur) est noté  $h_t^D$  (resp.  $h_t^F$ ). La capacité de stockage au niveau du distributeur (resp. fournisseur) à la période  $t$  est notée  $u_t^D$  (resp.  $u_t^F$ ).

La quantité d'unités produite au niveau du distributeur et du fournisseur à une période  $t$  est donnée par  $x_t^D$  et  $x_t^F$  respectivement. La quantité d'unités stockées à la fin de la période  $t$  au niveau du distributeur et du fournisseur est égale à  $s_t^D$  et  $s_t^F$  respectivement. Enfin, la variable de lancement associée au réapprovisionnement et à la production à une période  $t$  est donnée par  $y_t^D$  et  $y_t^F$  respectivement. La formulation mathématique du problème 2ULS-IB-R est obtenue à partir de celle du problème 2ULS en ajoutant une contrainte de borne sur les variables de stockage :

$$\min \sum_{t \in \mathcal{T}} (f_t^D y_t^D + p_t^D x_t^D + h_t^D s_t^D) + \sum_{t \in \mathcal{T}} (f_t^F y_t^F + p_t^F x_t^F + h_t^F s_t^F)$$

$$\text{s.c. } s_{t-1}^D + x_t^D = d_t + s_t^D \quad \forall t \in \mathcal{T}, \quad (5.1)$$

$$s_{t-1}^F + x_t^F = x_t^D + s_t^F \quad \forall t \in \mathcal{T}, \quad (5.2)$$

$$x_t^D \leq d_{tT} y_t^D \quad \forall t \in \mathcal{T}, \quad (5.3)$$

$$x_t^F \leq d_{tT} y_t^F \quad \forall t \in \mathcal{T}, \quad (5.4)$$

$$s_t^D \leq u_t^D \quad \forall t \in \mathcal{T}, \quad (5.5)$$

$$x_t^D, s_t^D, x_t^F, s_t^F \geq 0 \quad \forall t \in \mathcal{T}, \quad (5.6)$$

$$y_t^D, y_t^F \in \{0, 1\} \quad \forall t \in \mathcal{T}. \quad (5.7)$$

Les contraintes (5.1) et (5.2) représentent les contraintes de conservation de flots. Les contraintes (5.3) et (5.4) forcent les variables de lancement à être égales à 1 si une production a lieu à une période  $t$ . La contrainte (5.5) assure que le nombre d'unités en stock à une période  $t$  ne dépasse pas la capacité de stockage  $u_t^D$ . Les contraintes (5.6) et (5.7) représentent les domaines de définition des variables. La formulation mathématique du problème 2ULS-IB-R peut être renforcée en remplaçant le majorant  $d_{tT}$  dans la contrainte (5.3) par  $\min(d_t + u_t^D, d_{tT})$ .

Pour le problème 2ULS-IB-S nous remplaçons la contrainte (5.5) par la contrainte suivante :

$$s_t^F \leq u_t^F \quad \forall t \in \mathcal{T}. \quad (5.8)$$

De la même manière, il est possible de renforcer la formulation mathématique du problème 2ULS-IB-S en utilisant  $\min(d_t + u_t^F, d_{tT})$  comme majorant dans la contrainte (5.4). La formulation mathématique du problème 2ULS-IB-SR est donnée par la formulation mathématique précédente en ajoutant également la contrainte (5.8).

### 5.3 Étude du problème 2ULS-IB-R

Nous présentons dans cette section des propriétés structurelles qui sont vérifiées par une solution optimale du problème 2ULS-IB-R. Ces propriétés nous ont permis de développer un algorithme de programmation en  $\mathcal{O}(T^4)$  pour résoudre ce problème. Pour des raisons de lisibilité, comme la capacité de stockage est uniquement limitée au niveau du distributeur, l'indice  $D$  du paramètre  $u_t^D$  sera omise et nous noterons la capacité de stockage par  $u_t$ .

Comme proposé par (Love, 1973) et (Toczyłowski, 1995), nous pouvons faire l'hypothèse suivante, sans perte de généralité :

#### Hypothèse 5.1

$$u_{t-1} \leq u_t + d_t \text{ pour toute période } t \in \mathcal{T}.$$

#### 5.3.1 Propriétés de dominance

Dans cette section, nous proposons des propriétés de dominance qui seront utiles pour déterminer une méthode de résolution efficace du problème 2ULS-IB-R.

Dans un premier temps, nous montrons que la propriété ZIO n'est pas valide pour le problème 2ULS-IB-R au niveau du distributeur. Cette propriété n'était également plus valide pour le problème LS-IB (Love, 1973; Liu, 2008).

#### Propriété 5.1

Pour le problème 2ULS-IB-R, le coût de la meilleure solution satisfaisant la propriété ZIO au niveau du distributeur peut être arbitrairement mauvais par rapport au coût d'une solution optimale ne vérifiant pas la propriété ZIO.

*Preuve.* Considérons l'instance  $\mathcal{I}$  suivante :  $T = 2$ ,  $d = (0, B + 1)$ ,  $f^F = (0, 1)$ ,  $p^D = (0, 1)$ ,  $u = (B, B)$ , où  $B > 0$  est une constante,  $h_t^F = p_t^F = f_t^D = h_t^D = 0$  pour toute période  $t \in \mathcal{T}$ . La meilleure solution satisfaisant la propriété ZIO au niveau du distributeur est donnée par  $x^F = (d_2, 0)$  et  $x^D = (0, d_2)$ . Le coût associé à cette solution est égal à  $B + 1$  alors que la solution optimale de coût 1 est donnée par  $x^F = (d_2, 0)$  et  $x^D = (B, 1)$  (voir figure 5.1). Cette dernière solution ne satisfait pas la propriété ZIO.

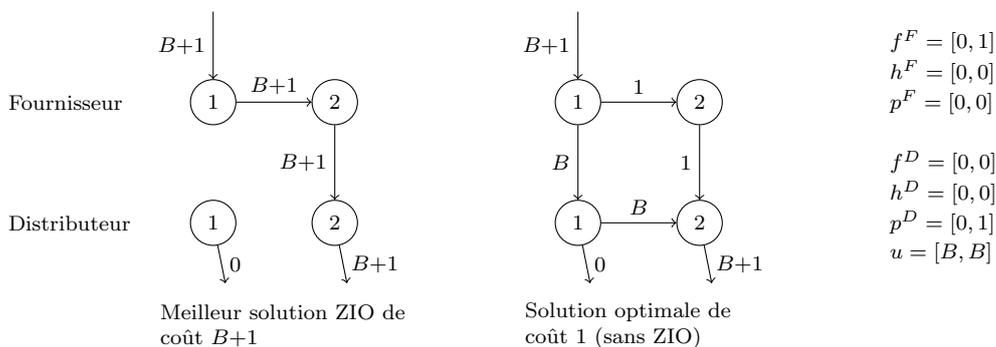


FIGURE 5.1 – Solutions pour l'instance  $\mathcal{I}$  utilisée dans la preuve de la proposition 5.1.

□

Dans la suite, nous proposons d'autres propriétés structurelles basées sur la notion de "bloc", introduit par (Love, 1973) dans le cas du problème mono-niveau. Une solution du problème 2ULS-IB-R est définie par  $(y^F, x^F, s^F, y^D, x^D, s^D)$ . Les propriétés structurelles que nous

présentons par la suite s'appliquent au triplet  $(f^D, x^D, s^D)$  (le niveau du distributeur) d'une solution du problème 2ULS-IB-R. Nous présentons tout d'abord quelques définitions nécessaires à la description des propriétés de dominance.

**Définition 5.1 (Sous-plan)**

Soient  $i, j$  deux périodes telles que  $1 \leq i \leq j \leq T$ . Un sous-plan  $[i, j]$  au niveau du distributeur est définie par les quantités  $(x_i^D, \dots, x_j^D, s_i^D, \dots, s_j^D)$ .

**Définition 5.2 (Sous-plan régulier)**

Soient  $i, j$  deux périodes tel que  $1 \leq i \leq j \leq T$ . Un sous-plan régulier  $[i, j]$  est un sous-plan  $[i, j]$  vérifiant  $s_{i-1}^D \in \{0, u_{i-1}\}$  et  $s_j^D \in \{0, u_j\}$ .

**Définition 5.3 (Bloc)**

Soient  $i, j$  deux périodes tel que  $1 \leq i \leq j \leq T$ . Soient  $\alpha \in \{0, u_{i-1}\}$  et  $\beta \in \{0, u_j\}$ . Un bloc  $[i, j]_\beta^\alpha$  est un sous-plan régulier  $[i, j]$  où  $s_{i-1}^D = \alpha$ ,  $s_j^D = \beta$  et  $0 < s_t^D < u_t$  pour toute période  $t \in \{i, \dots, j-1\}$ .

En d'autres termes, un bloc  $[i, j]_\beta^\alpha$  est un sous-plan régulier  $[i, j]$  dans lequel la quantité d'unités en stock entre les périodes  $i$  et  $j$  est strictement positive mais n'atteint pas la capacité de stockage. Ainsi, un sous-plan régulier est composé d'un ou plusieurs blocs. La figure 5.2 illustre la définition des blocs et de sous-plans réguliers pour une solution réalisable du problème 2ULS-IB-R où  $T = 7$ .

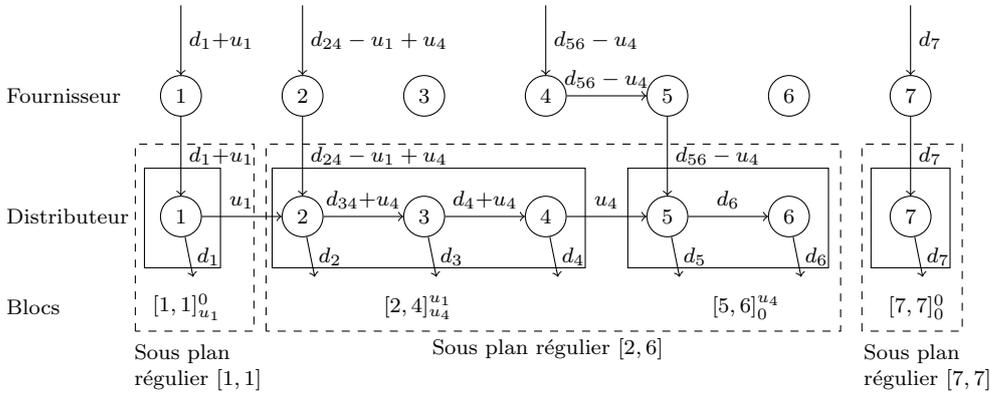


FIGURE 5.2 – Illustration des blocs et sous-plans réguliers sur une solution réalisable du problème 2ULS-IB-R où  $T = 7$ .

Le nombre d'unités devant être envoyé au niveau du distributeur pour un sous-plan  $[i, j]$  est égale à  $X_{ij} = d_{ij} - s_{i-1}^D + s_j^D$ . En particulier, dans un bloc  $[i, j]_\beta^\alpha$ , nous avons  $X_{ij} = d_{ij} - \alpha + \beta$ . Nous présentons dans ce qui suit les propriétés de dominance vérifiées par une solution optimale du problème 2ULS-IB-R.

**Théorème 5.1**

Soit  $\mathcal{P}$  l'ensemble des points satisfaisant les contraintes (5.1)-(5.7) du problème 2ULS-IB-R. Un point  $(y^D, x^D, s^D, y^F, x^F, s^F) \in \mathcal{P}$  est un point extrême si et seulement si :

1. au plus une période de réapprovisionnement a lieu dans un bloc  $[i, j]_\beta^\alpha$  pour tout couple de périodes  $(i, j)$  tel que  $1 \leq i \leq j \leq T$ ,  $\alpha \in \{0, u_{i-1}\}$  et  $\beta \in \{0, u_j\}$ .
2. la propriété ZIO est valide au niveau du fournisseur.

Le théorème 5.1 découle des propriétés sur les flots extrêmes dans un réseau à coût fixe avec des coûts concaves (Zangwill, 1968). Dans un réseau avec une seule source, un flot extrême forme un arbre couvrant<sup>1</sup> du réseau. Ceci implique qu'entre deux périodes de stockage  $i$  et  $j$  où le stock entrant à la période  $i$  est soit 0 soit  $u_{i-1}$  et le stock sortant à la période  $j$  est soit 0 soit  $u_j$ , il y a au plus un arc de réapprovisionnement avec un flot strictement positif. Comme le problème 2ULS-IB-R est un réseau à coût fixe avec des coûts affines, le théorème 5.1 est une application directe de la caractérisation des points extrêmes dans ces réseaux.

### Propriété 5.2

Un point extrême de  $\mathcal{P}$  satisfait les propriétés suivantes au niveau du distributeur pour  $i, j$  tel que  $1 \leq i \leq j \leq T$ ,  $\alpha \in \{0, u_{i-1}\}$  et  $\beta \in \{0, u_j\}$  :

- (i) si  $[i, j]_\beta^0$  est un bloc avec une période de réapprovisionnement alors cette période est égale à  $i$ .
- (ii) si  $[i, j]_{u_j}^\alpha$  est un bloc avec une période de réapprovisionnement alors cette période est égale à  $j$ .

*Preuve.* (i) Si  $d_i > 0$ , alors la période  $i$  est nécessairement une période de réapprovisionnement puisque  $s_{i-1}^D = 0$ . Si  $d_i = 0$  et  $[i, j]_\beta^0$  est un bloc alors par définition  $s_i^D > 0$  et  $s_{i-1}^D = 0$ , ceci implique que la période  $i$  est forcément une période de réapprovisionnement.

(ii) Supposons que le réapprovisionnement (qui est unique) a lieu à la période  $k$  dans le bloc  $[i, j]_{u_j}^\alpha$  avec  $i \leq k < j$ . Par l'hypothèse 5.1, nous avons  $u_k \leq u_{k+1} + d_{k+1} \leq u_{k+2} + d_{k+2} + d_{k+1} \leq \dots \leq u_j + d_{k+1, j}$ . Deux cas sont alors possibles :

Cas 1 :  $u_k = u_j + d_{k+1, j}$ . Comme  $s_j^D = u_j$ , pour satisfaire les demandes,  $s_k^D$  doit être égale à  $u_k$  ce qui n'est pas possible car  $[i, j]_{u_j}^\alpha$  est un bloc.

Cas 2 :  $u_k < u_j + d_{k+1, j}$ . Dans ce cas, une période de réapprovisionnement supplémentaire doit être considérée pour satisfaire les demandes  $d_{k+1, j}$  et garantir  $s_j^D = u_j$  ce qui n'est pas possible (voir théorème 5.11).

Le réapprovisionnement doit donc avoir lieu à la période  $j$  dans un bloc  $[i, j]_{u_j}^\alpha$ .  $\square$

Dans la section suivante, nous présentons un algorithme de programmation dynamique qui résout le problème 2ULS-IB-R en s'appuyant sur les propriétés du théorème 5.1 et sur la propriété 5.2.

### 5.3.2 Formules de récurrence

Le principe de l'algorithme est de déterminer la décomposition en blocs du plan de réapprovisionnement à partir des résultats présentés dans la section précédente.

Soient  $i, j$  deux périodes telles que  $1 \leq i \leq j \leq T$ . Nous considérons un sous-plan régulier  $[i, j]$  d'une solution du problème 2ULS-IB-R. Rappelons que par définition,  $[i, j]$  n'est pas nécessairement un bloc sauf si nous avons  $0 < s_k^D < u_k$  pour tout  $k \in \{i, \dots, j-1\}$ . Supposons qu'une quantité d'unités  $X_{ij} = d_{ij} - s_{i-1}^D + s_j^D$  est disponible à une période  $t$  au niveau du fournisseur, i.e.  $X_{ij}$  provient soit d'une production à la période  $t$ , soit du stock à la période  $t-1$ , de sorte que la propriété ZIO reste vérifiée au niveau du fournisseur. Le but est de décomposer le sous-plan régulier  $[i, j]$  en blocs en satisfaisant la propriété 5.2.

1. L'arbre couvrant d'un graphe connexe  $G$  est un partiel de  $G$  acyclique et connexe qui couvre tous les nœuds du graphe  $G$ .

*Exemple 5.1.* Considérons le graphe de la figure 5.3 représentant les sous-plans  $[1, 1]_{u_1}^0$ ,  $[2, 3]_0^{u_1}$  et  $[4, 4]_0^0$  d'une solution du problème 2ULS-IB-R pour une instance où  $T = 4$ . Au niveau du fournisseur, une quantité  $X_{11} = d_1 + u_1$  est disponible à la période  $t = 1$  et une quantité  $X_{24} = d_{24} - u_1$  est disponible à la période 2 et à la période 3. Dans cet exemple,  $[2, 4]$  est un sous-plan régulier composé des blocs  $[2, 3]_0^{u_1}$  et  $[4, 4]_0^0$ .

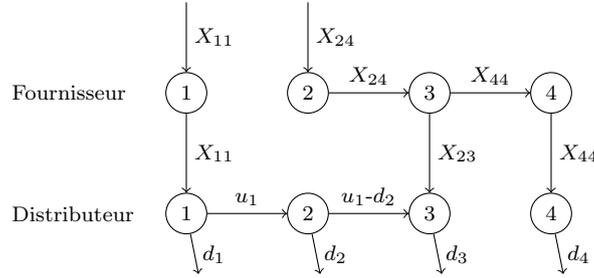


FIGURE 5.3 – Décomposition en sous-plans d'une solution du problème 2ULS-IB-R pour une instance où  $T = 4$ .

Les formules de récurrence sont définies dans l'ordre suivant sur l'intervalle de périodes  $[i, j]$  : le coût  $\phi_{ijk}^{\alpha\beta}$  d'un bloc  $[i, j]_{\beta}^{\alpha}$ , les coûts nécessaires pour calculer le coût d'un sous-plan régulier en incluant le coût de stockage du fournisseur ( $w_{ijk}^{\alpha\gamma\beta}$ ,  $v_{tij}^{\alpha\beta}$  et  $G_{tij}^{\alpha\beta}$ ) et pour finir le coût  $C_{tij}^{\alpha\beta}$  de la chaîne logistique.

### Calcul du coût d'un bloc

Soit  $\phi_{ijk}^{\alpha\beta}$  le coût lié à la satisfaction des demandes du bloc  $[i, j]_{\beta}^{\alpha}$  sachant qu'il y a dans ce bloc soit aucune période de réapprovisionnement, soit une unique période de réapprovisionnement : la période  $k$  (voir théorème 5.1). Nous notons  $\phi_{ij-}^{\alpha\beta}$  le coût d'un bloc  $[i, j]_{\beta}^{\alpha}$  sans période de réapprovisionnement.

- D'après la propriété 5.2(i), le coût  $\phi_{ijk}^{0\beta}$  est défini de la manière suivante :

$$\phi_{ijk}^{0\beta} = \begin{cases} f_i^D + p_i^D X_{ij} + \sum_{n=i}^j h_n^D (d_{n+1,j} + \beta) & \text{si } k = i \text{ et } 0 < d_{ij} + \beta \leq u_i, \\ 0 & \text{si } i = j \text{ et } d_{ij} + \beta = 0, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le coût total de réapprovisionnement à la période  $i$  dans un bloc  $[i, j]_{\beta}^0$  est  $f_i^D + p_i^D X_{ij}$  et le coût total de stockage dans ce bloc est  $\sum_{n=i}^j h_n^D (d_{n+1,j} + \beta)$ .

- Si  $[i, j]_{u_j}^{u_{i-1}}$  est un bloc tel que  $u_{i-1} = d_{ij} + u_j$ , alors les demandes du bloc peuvent être satisfaites sans réapprovisionnement entre les périodes  $i$  et  $j$  puisque  $s_{i-1}^D = u_{i-1}$ . Sinon d'après la propriété 5.2(ii),  $X_{ij}$  unités doivent être envoyées à la période  $j$ . De plus, il faut s'assurer que la capacité de stockage n'est pas dépassée et que les demandes  $d_{i,j-1}$  peuvent être satisfaites à partir des unités en stock à la fin de la période  $i-1$ , i.e.  $u_{i-1} > d_{i,j-1}$ . Ainsi, le coût  $\phi_{ijk}^{u_{i-1}u_j}$  du bloc  $[i, j]_{u_j}^{u_{i-1}}$  est défini par :

$$\phi_{ijk}^{u_{i-1}u_j} = \begin{cases} \sum_{n=i}^j h_n^D (u_{i-1} - d_{in} + u_j) & \text{si } u_{i-1} = d_{ij} + u_j, \\ f_k^D + p_k^D X_{ij} + \sum_{n=i}^{j-1} h_n^D (u_{i-1} - d_{in}) + h_j^D u_j & \text{si } k = j \text{ et } d_{ij} + u_j > u_{i-1} > d_{i,j-1}, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

• Dans un bloc  $[i, j]_0^{u_{i-1}}$ , si  $u_{i-1} < d_{ij}$ , alors la quantité  $X_{ij}$  peut être envoyée à n'importe quelle période  $k$  entre  $i$  et  $j$ . Dans ce cas, il faut s'assurer que la contrainte de capacité de stockage n'est pas violée et que les demandes du bloc peuvent être satisfaites : la quantité d'unités en stock  $u_{i-1}$  permet de satisfaire les demandes  $d_{i,k-1}$  ( $u_{i-1} > d_{i,k-1}$ ), et les demandes  $d_{k+1,j}$  peuvent être satisfaites, i.e.  $u_k \geq d_{k+1,j}$ . Le coût  $\phi_{ijk}^{u_{i-1}0}$  est alors égal à :

$$\phi_{ijk}^{u_{i-1}0} = \begin{cases} f_k^D + p_k^D X_{ij} + \sum_{n=i}^{k-1} h_n^D (u_{i-1} - d_{in}) + \sum_{n=k}^{j-1} h_n^D d_{n+1,j} & \text{si } d_{ij} > u_{i-1} > d_{i,k-1} \\ & \text{et } u_k \geq d_{k+1,j}, \\ \sum_{n=i}^{j-1} h_n^D (u_{i-1} - d_n) & \text{si } u_{i-1} = d_{ij}, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

### Calcul du coût optimal d'un sous-plan régulier

Soit  $G_{tij}^{\alpha\beta}$  le coût minimum pour satisfaire les demandes  $d_{ij}$  d'un sous-plan régulier  $[i, j]$  en supposant qu'une quantité  $X_{ij}$  est disponible à la période  $t$  au niveau du fournisseur avec  $1 \leq i \leq j \leq T$ ,  $1 \leq t \leq j$ ,  $s_{i-1}^D = \alpha$  et  $s_j^D = \beta$ . Le calcul du coût  $G_{tij}^{\alpha\beta}$  nécessite le calcul des coûts des blocs qui composent le sous-plan  $[i, j]$ . Ainsi, afin de calculer  $G_{tij}^{\alpha\beta}$  efficacement, il faut déterminer une bonne décomposition du sous-plan  $[i, j]$ .

- Soit  $w_{tijk}^{\alpha\gamma\beta}$  le coût optimal du sous-plan régulier  $[i, j]$  en supposant que :
  - une quantité  $X_{ij}$  est disponible à la période  $t$  au niveau du fournisseur,
  - $s_{i-1}^D = \alpha$  et  $s_j^D = \beta$ ,
  - $k$  est la période de réapprovisionnement du premier bloc  $[i, l]_\gamma^\alpha$  composant le sous-plan  $[i, j]$  avec  $i \leq l < j$ ,  $\gamma \in \{0, u_l\}$  (voir figure 5.4).

Le but est de trouver la période  $l$  ( $k \leq l < j$ ) tel que  $[i, l]_\gamma^\alpha$  est le premier bloc du sous-plan régulier  $[i, j]$  avec un réapprovisionnement à la période  $k$  dans une solution optimale. Le coût  $w_{tijk}^{\alpha\gamma}$  est donné par :

$$w_{tijk}^{\alpha\gamma\beta} = \min_{k \leq l < j} \{ \phi_{ilk}^{\alpha\gamma} + G_{k,l+1,j}^{\gamma\beta} + \sum_{p=t}^{k-1} h_p^F X_{ij} \}. \quad (5.9)$$

Le premier terme  $\phi_{ilk}^{\alpha\gamma}$  dans l'équation (5.9) représente le coût pour satisfaire les demandes du bloc  $[i, l]_\gamma^\alpha$  avec un réapprovisionnement à la période  $k$ . Le second terme  $G_{k,l+1,j}^{\gamma\beta}$  dans l'équation (5.9) représente le coût minimum pour satisfaire les demandes d'un sous-plan régulier  $[l+1, j]$  sachant que la quantité  $X_{l+1,j}$  est disponible à la période  $k$  au niveau du fournisseur. Pour finir, le dernier terme  $\sum_{p=t}^{k-1} h_p^F X_{ij}$  représente le coût de stockage de  $X_{ij}$  unités de la période  $t$  à la période  $k$  au niveau du fournisseur.

Une représentation du coût  $w_{tijk}^{\alpha\gamma\beta}$  est décrite dans la figure 5.4. Une quantité d'unités  $X_{ij}$  est disponible à la période  $t$  au niveau du fournisseur. Au niveau du distributeur,  $[i, l]_\gamma^\alpha$  est le premier bloc du sous-plan régulier  $[i, j]$ , où  $s_{i-1}^D = \alpha$  et  $s_j^D = \beta$ . Une quantité  $X_{il}$  est envoyée à la période  $k$  dans ce bloc. Au niveau du fournisseur, une quantité  $X_{ij}$  est stockée de la période  $t$  à la période  $k$  et une quantité  $X_{l+1,j}$  est disponible à la période  $k$  pour satisfaire les demandes du sous-plan  $[l+1, j]$ . Les différents termes qui définissent le coût  $w_{tijk}^{\alpha\gamma\beta}$  sont représentés dans la figure 5.4.

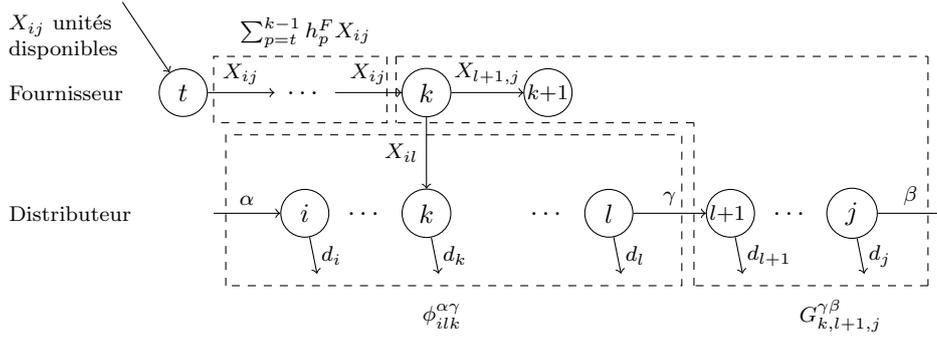


FIGURE 5.4 – Illustration du coût  $w_{tij}^{\alpha\gamma\beta}$  où  $[i, j]$  est un sous-plan régulier et  $X_{ij}$  unités sont disponibles à la période  $t$  au niveau du fournisseur.

- Soit  $v_{tij}^{\alpha\beta}$  le coût minimum d'un sous-plan régulier  $[i, j]$  composé d'au moins deux blocs tel que  $X_{ij}$  unités sont disponibles à la période  $t$  au niveau du fournisseur ( $1 \leq t \leq j$ ),  $s_{i-1}^D = \alpha$  et  $s_j^D = \beta$ . Par la suite, nous notons  $l^* = \operatorname{argmin} w_{tij}^{\alpha\gamma\beta}$ . Le premier bloc du sous-plan régulier  $[i, j]$  est  $[i, l^*]_\gamma^\alpha$  et la période de réapprovisionnement dans ce bloc est  $k$  si elle existe. Le coût  $v_{tij}^{\alpha\beta}$  est alors donné par :

$$v_{tij}^{\alpha\beta} = \min_{i \leq k < j; \gamma \in \{0, u_{l^*}\}} \{w_{tijk}^{\alpha\gamma\beta}\}. \quad (5.10)$$

- À partir de la définition de  $v_{tij}^{\alpha\beta}$ , il est possible de calculer le coût minimum  $G_{tij}^{\alpha\beta}$  d'un sous-plan régulier en supposant que :

- $X_{ij}$  unités sont disponibles à la période  $t$  au niveau du fournisseur
- les coûts fixes du fournisseur  $f^S$  ne sont pas inclus.

Le coût  $G_{tij}^{\alpha\beta}$  est défini par :

$$G_{tij}^{\alpha\beta} = \begin{cases} \min \left\{ \min_{t \leq k \leq j} \{ \phi_{ijk}^{\alpha\beta} + \sum_{l=t}^{k-1} h_l^F X_{ij} \}, v_{tij}^{\alpha\beta} \right\}, & \text{si } X_{ij} > 0 \\ \phi_{ij-}^{\alpha\beta}, & \text{si } X_{ij} = 0. \end{cases} \quad (5.11)$$

Dans l'équation (5.11), le terme  $\min_{t \leq k \leq j} \{ \phi_{ijk}^{\alpha\beta} + \sum_{l=t}^{k-1} h_l^F X_{ij} \}$  représente le coût minimum d'un sous-plan  $[i, j]$  composé d'un seul bloc, et  $v_{tij}^{\alpha\beta}$  est le coût minimum de  $[i, j]$  lorsqu'il est composé d'au moins deux blocs. Si  $[i, j]_\beta^\alpha$  n'est pas un bloc ou si  $k < i$  alors le coût  $\phi_{ijk}^{\alpha\beta}$  est égal à  $+\infty$ . Si  $i > j$  ou  $t > j$ , nous fixons  $G_{tij}^{\alpha\beta}$  à  $+\infty$ .

### Calcul du coût de la chaîne logistique

Soit  $C_{tij}^{\alpha\beta}$  le coût minimum de la chaîne logistique pour satisfaire les demandes  $d_{ij}$  du sous-plan régulier  $[i, j]$  en supposant que :

- la première période de production au niveau du fournisseur est supérieure ou égale à  $t$ , avec  $1 \leq i \leq j \leq T$ ,  $1 \leq t \leq j$ ,
- le stock entrant à la période  $i$  est  $\alpha \in \{0, u_{i-1}\}$ ,
- le stock sortant à la période  $j$  est  $\beta \in \{0, u_j\}$ .

La quantité totale d'unités envoyée dans le sous-plan régulier est égal à  $X_{ij}$ . Le but est de déterminer les périodes de production afin de satisfaire les demandes du sous-plan régulier  $[i, j]$ , et telles que la propriété ZIO soit vérifiée au niveau du fournisseur.

Si  $X_{ij} = 0$ , alors aucune production n'est nécessaire au niveau du fournisseur. Le coût est alors égal au coût de la chaîne logistique  $G_{tij}^{\alpha\beta}$  du sous-plan  $[i, j]$  avec  $s_{i-1}^D = \alpha$  et  $s_j^D = \beta$  :

$$C_{tij}^{\alpha\beta} = G_{tij}^{\alpha\beta}. \quad (5.12)$$

Si  $X_{ij} > 0$ , alors la quantité  $X_{ij}$  est complètement ou partiellement produite à une période  $t$  ou à une période ultérieure si aucune production n'a lieu à la période  $t$  au niveau du fournisseur. Le coût  $C_{tij}^{\alpha\beta}$  est défini par l'équation suivante où  $\mathbb{1}(x)$  est une fonction égale à 0 si  $x = 0$  et  $+\infty$  sinon (voir figure 5.5).

$$C_{tij}^{\alpha\beta} = \min \left\{ C_{t+1,i,j}^{\alpha\beta}, f_t^F + p_t^F X_{ij} + G_{tij}^{\alpha\beta}, \right. \\ \left. \min_{i \leq l < j; \gamma \in \{0, u_l\}} \{ \min(f_t^F + p_t^F X_{il}, \mathbb{1}(X_{il})) + G_{til}^{\alpha\gamma} + C_{t^*+1,l+1,j}^{\gamma\beta} \} \right\}, \quad (5.13)$$

où  $t^*$  est la dernière période de réapprovisionnement au niveau du distributeur dans le sous-plan régulier  $[i, l]$  ( $t^*$  est déterminée et mémorisée lorsque le coût  $G_{til}^{\alpha\gamma}$  est calculé). La période  $t^* + 1$  est la première période où le fournisseur peut produire pour satisfaire les demandes du sous-plan régulier  $[l + 1, j]$ . Si aucune période de réapprovisionnement n'a lieu dans le sous-plan régulier  $[i, l]$ , alors nous posons  $t^* = t$ .

Le premier terme de l'équation (5.13) correspond au cas où aucune production n'a lieu à la période  $t$  au niveau du fournisseur. Le second terme de l'équation (5.13) correspond au cas où une quantité d'unités  $X_{ij}$  est produite à la période  $t$  au niveau du fournisseur. Enfin, le dernier terme de l'équation (5.13) représente le cas où une quantité  $X_{ij}$  est partiellement produite à la période  $t$  au niveau du fournisseur : une quantité  $X_{il} > 0$  est produite à la période  $t$  pour satisfaire les demande du sous-plan régulier  $[i, l]$  avec  $i \leq l < j$ . Étant donné que la propriété ZIO est valide au niveau du fournisseur, le fournisseur produit une quantité  $X_{l+1,j}$  après la période  $t^*$ .

Une représentation du dernier terme dans la définition du coût  $C_{tij}^{\alpha\beta}$  est fournie dans la figure 5.5. Dans cette figure, une quantité d'unités  $X_{il}$  est produite à la période  $t$  au niveau du fournisseur pour satisfaire les demandes du sous-plan régulier  $[i, l]$  où  $s_{i-1}^D = \alpha$  et  $s_t^D = \gamma \in \{0, u_l\}$ . La période  $t^*$  correspond à la dernière période de réapprovisionnement dans le sous-plan régulier  $[i, l]$ . Puisque la propriété ZIO est valide au niveau du fournisseur, nous avons  $s_{t^*}^F = 0$ . Ainsi, la prochaine période candidate pour qu'une production ait lieu au niveau du fournisseur est la période  $t^* + 1$  si elle existe. Les termes présents dans la définition du coût  $C_{tij}^{\alpha\beta}$  sont représentées dans la figure 5.5.

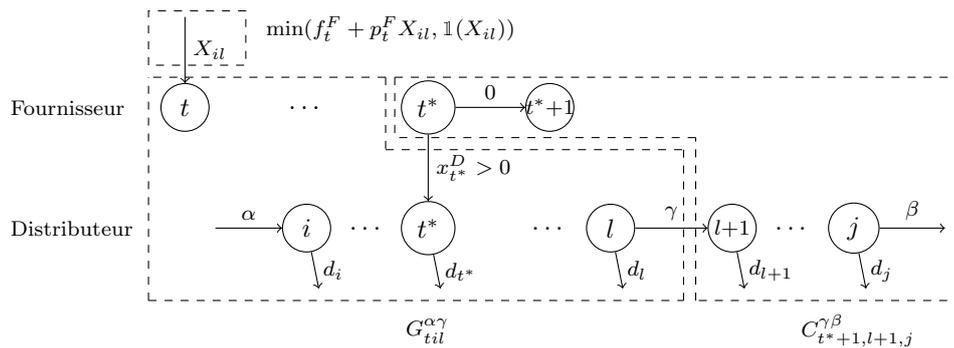


FIGURE 5.5 – Illustration du coût  $C_{tij}^{\alpha\beta}$  où  $[i, j]$  est un sous-plan régulier et  $t$  est une période de production au niveau du fournisseur.

### Coût optimal.

Le coût optimal pour satisfaire les demandes du sous-plan régulier  $[1, T]$  est égal à  $C_{11T}^{00}$  puisque  $s_0^D = 0$  et  $s_T^D = 0$ .

### 5.3.3 Analyse de complexité

Une phase de pré-traitement a lieu pour calculer les demandes  $d_{1j}$ , avec  $j \in \{1, \dots, T\}$ , en  $\mathcal{O}(T)$ . Ainsi, chaque quantité  $d_{ij}$  pour tout  $i, j \in \{1, \dots, T\}$  peut être calculée en temps constant ( $d_{ij} = d_{1j} - d_{1,i-1}$ ). De plus, les coûts de stockage requis dans le calcul de chaque composante de coût sont pré-calculés et mémorisés en  $\mathcal{O}(T^3)$ .

Le coût  $\phi_{ijk}^{\alpha\beta}$  peut donc être calculé et stocké en  $\mathcal{O}(T^3)$  pour tout  $i, j, k \in \{1, \dots, T\}$ ,  $\alpha \in \{0, u_{i-1}\}$  et  $\beta \in \{0, u_j\}$ . De plus, les coûts  $G_{tij}^{\alpha\beta}$  et  $v_{tij}^{\alpha\beta}$  peuvent être calculés en  $\mathcal{O}(T^4)$  pour tout  $t, i, j \in \{1, \dots, T\}$ ,  $\alpha \in \{0, u_{i-1}\}$  et  $\beta \in \{0, u_j\}$ , et stockés en mémoire. Enfin, le coût  $w_{tijk}^{\alpha\gamma\beta}$  est calculé en  $\mathcal{O}(T^5)$   $t, i, j, k \in \{1, \dots, T\}$ ,  $\alpha \in \{0, u_{i-1}\}$  et  $\beta \in \{0, u_j\}$ . La complexité de l'algorithme de programmation dynamique présenté pour calculer le coût  $C_{11T}^{00}$  est donc en  $\mathcal{O}(T^5)$ .

Dans ce qui suit, nous montrons que la complexité en temps pour calculer le coût  $w_{tijk}^{\alpha\gamma\beta}$  peut être amélioré. Nous pouvons obtenir une complexité  $\mathcal{O}(T^4)$  en généralisant le résultat de (Atamtürk et Küçükyavuz, 2008) pour le cas à deux niveaux. Dans ce but, nous commençons par rappeler l'observation de (Atamtürk et Küçükyavuz, 2008) pour le niveau du distributeur. Nous proposons également une preuve de validité de leur observation.

#### Observation 5.1

Pour tout  $1 \leq i \leq k \leq j \leq T$ ,  $\alpha \in \{0, u_{i-1}\}$  et  $\beta \in \{0, u_j\}$ , nous avons :

- (i) si  $\phi_{ijk}^{\alpha\beta} = +\infty$ , alors  $\phi_{i-1,j,k}^{\alpha'\beta} = +\infty$  où  $\alpha' = 0$  si  $\alpha = 0$  et  $\alpha' = u_{i-2}$  si  $\alpha = u_{i-1}$ .
- (ii) si  $\phi_{ijk}^{0\beta} \neq +\infty$ , alors  $\phi_{i-1,j,k}^{0\beta} = +\infty$ .
- (iii) si  $\phi_{ijk}^{u_{i-1}\beta} \neq +\infty$ , alors :
 
$$\phi_{i-1,j,k}^{u_{i-2}\beta} = \begin{cases} \phi_{ijk}^{u_{i-1}\beta} + \Delta_1 & \text{si } u_{i-2} > d_{i-1,k-1}, u_{i-2} < u_{i-1} + d_{i-1} \text{ et } d_{ij} + \beta > u_{i-1}, \\ \phi_{ijk}^{u_{i-1}\beta} + \Delta_2 & \text{et } u_{i-2} > d_{i-1,k-1}, u_{i-2} < u_{i-1} + d_{i-1} \text{ et } d_{ij} + \beta = u_{i-1}, \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$
 où  $\Delta_1 = h_{i-2}^D u_{i-2} + (p_k^D - \sum_{l=i-1}^{k-1} h_l^D)(u_{i-1} - u_{i-2} + d_{i-1})$  et  $\Delta_2 = f_k^D + \Delta_1$ .

*Preuve.* (i) Si  $\phi_{ijk}^{\alpha\beta} = +\infty$ , alors le sous-plan régulier  $[i, j]$  avec une unique période de réapprovisionnement à la période  $k$ ,  $s_{i-1}^D = \alpha$  et  $s_j^D = \beta$  n'est pas un bloc. Les violations observées dans le sous-plan régulier  $[i, j]$  sont également présentes dans le sous-plan régulier  $[i-1, j]$ .

(ii) Si  $\phi_{ijk}^{0\beta} \neq +\infty$ , alors  $[i, j]_\beta^0$  est un bloc, et par la propriété 5.2(i) il y a un réapprovisionnement à la période  $k = i$ . Nous considérons un sous-plan régulier  $[i-1, j]$  avec une période de réapprovisionnement à la période  $k$ ,  $s_{i-2}^D = 0$  et  $s_j^D = \beta$ . Si  $d_{i-1} = 0$ , alors le sous-plan régulier  $[i-1, j]$  n'est pas un bloc puisque  $s_{i-2}^D = 0$ . Si  $d_{i-1} > 0$ , alors la demande  $d_{i-1}$  ne peut pas être couverte et le sous-plan  $[i-1, j]$  n'est donc pas un bloc.

(iii) si  $\phi_{ijk}^{u_{i-1}\beta} \neq +\infty$ , alors  $[i, j]_\beta^{u_{i-1}}$  est un bloc avec une période de réapprovisionnement à  $k$ , si elle existe. Nous considérons un sous-plan régulier  $[i-1, j]$  avec une unique période de réapprovisionnement à la période  $k$ ,  $s_{i-2}^D = u_{i-2}$  et  $s_j^D = \beta$ . Il faut alors de déterminer si  $[i-1, j]$  est un bloc.

Par l'hypothèse 5.1 (voir p.92), nous avons  $u_{i-2} \leq u_{i-1} + d_{i-1}$ . Si  $u_{i-2} = u_{i-1} + d_{i-1}$ , alors  $[i-1, j]$  n'est pas un bloc car dans ce cas  $s_{i-1}^D = u_{i-1}$ . Si  $u_{i-2} < u_{i-1} + d_{i-1}$ , alors  $s_{i-1}^D < u_{i-1} \leq d_{ij} + \beta$ , et un réapprovisionnement doit avoir lieu à la période  $k$  dans le sous-plan  $[i-1, j]$ .

De plus, si  $u_{i-2} > d_{i-1,k-1}$ , alors  $[i-1, j]_{\beta}^{u_{i-2}}$  est un bloc. Le distributeur doit alors s'approvisionner d'une quantité  $u_{i-1} - u_{i-2} + d_{i-1} > 0$  en plus de la quantité  $X_{ij} = d_{ij} - u_{i-1} + \beta$  à la période  $k$ . Dans ce cas, la quantité d'unités en stock entre les périodes  $k$  et  $j$  reste inchangée dans le bloc  $[i-1, j]_{\beta}^{u_{i-2}}$ . Comme la demande  $d_{i-1}$  doit être couverte par  $u_{i-2}$ , il y a  $u_{i-1} - u_{i-2} + d_{i-1}$  unités en moins dans le stock entre les périodes  $i-1$  et  $k-1$ . Le coût  $\phi_{i-1,j,k}^{u_{i-2}\beta}$  du bloc  $[i-1, j]_{\beta}^{u_{i-2}}$  peut être calculé à partir du coût  $\phi_{ijk}^{u_{i-1}\beta}$  en considérant deux cas.

**Cas 1.** Supposons qu'une quantité  $X_{ij} > 0$  est envoyée à la période  $k$  dans le bloc  $[i, j]_{\beta}^{u_{i-1}}$ . Le coût du bloc  $[i-1, j]_{\beta}^{u_{i-2}}$  est alors égal à :  $\phi_{ijk}^{u_{i-1}\beta} + h_{i-2}^D u_{i-2} + (p_k^D - \sum_{l=i-1}^{k-1} h_l^D)(u_{i-1} - u_{i-2} + d_{i-1}) = \phi_{ijk}^{u_{i-1}\beta} + \Delta_1$ .

**Cas 2.** Supposons qu'aucun réapprovisionnement n'a lieu dans le bloc  $[i, j]_{\beta}^{u_{i-1}}$ . Il faut alors prendre en compte un coût fixe de réapprovisionnement  $f_k^D$  pour calculer le coût du bloc  $[i-1, j]_{\beta}^{u_{i-2}}$ , qui est défini par :  $\phi_{ijk}^{u_{i-1}\beta} + f_k^D + \Delta_1 = \phi_{ijk}^{u_{i-1}\beta} + \Delta_2$ .  $\square$

Par conséquent, pour toute période  $i, k, t, j$  telles que  $1 \leq i \leq k \leq j \leq T$  et  $1 \leq t \leq j$ , le coût  $w_{ijk}^{\alpha\gamma\beta}$  peut être calculé en  $\mathcal{O}(T^4)$ . Ainsi, la complexité de l'algorithme de programmation dynamique pour résoudre le problème 2ULS-IB-R est  $\mathcal{O}(T^4)$ .

Dans la section suivante, nous présentons l'étude du problème 2ULS-IB-S où la capacité de stockage est limitée au niveau du fournisseur, mais ne l'est plus au niveau du distributeur. Nous allons montrer que ce problème est NP-difficile.

## 5.4 Complexité du problème 2ULS-IB-S

Jaruphongsat *et al.* (2004) ont proposé un algorithme de programmation dynamique polynomial pour résoudre le problème 2ULS-IB-S avec des fenêtres de temps sur la demande dans le cas où la capacité de stockage est constante sur tout l'horizon. Ils ont supposé que  $h^F \leq h^D$  et que les coûts fixes et unitaires de production sont décroissants. Les hypothèses faites sur les coûts et la capacité de stockage stationnaire ont permis de résoudre le problème en temps polynomial. Dans cette section, nous considérons le problème 2ULS-IB-S avec une structure de coûts générale et une capacité de stockage non stationnaire. Nous montrons que le problème est NP-difficile et proposons dans la section suivante un algorithme de programmation dynamique pseudo-polynomial pour le résoudre.

### **Théorème 5.2**

Le problème 2ULS-IB-S est NP-difficile.

*Preuve.* Nous montrons que le problème 2ULS-IB-S est NP-difficile en faisant une réduction à partir du problème de la somme de sous-ensembles qui est un problème NP-difficile (Garey et Johnson, 1979). Nous appellerons ce problème par sa traduction anglaise SUBSET-SUM.

Considérons une instance du problème de SUBSET-SUM définie par : un entier  $S$  et un ensemble  $\mathcal{S}$  de  $n$  entiers  $(a_1, \dots, a_n)$ . Résoudre le problème subset sum consiste à répondre par oui ou non à la question suivante : existe-t-il un sous-ensemble  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{S}$  tel que  $\sum_{a_i \in \mathcal{A}} a_i = S$  ?

La résolution du problème 2ULS-IB-S consiste à déterminer l'existence d'une réponse positive à la question suivante : étant donné un entier  $B$  et une instance du problème 2ULS-IB-S, existe-t-il un plan de production et de réapprovisionnement satisfaisant la demande, tel que la capacité de stockage au niveau du fournisseur soit respectée, et tel que le coût total de la chaîne logistique est au plus égale à  $B$  ?

Étant donnée une instance de SUBSET-SUM, nous définissons une instance  $\mathcal{I}_1$  du problème 2ULS-IB-S de la manière suivante. Une représentation de l'instance  $\mathcal{I}_1$  est donnée dans la figure 5.6. Les coûts fixes et unitaires de production du distributeur (resp. fournisseur) sont indiqués en bas (resp. en haut) du graphe. Au niveau du fournisseur, les valeurs sur les arcs horizontaux représentent les capacités de stockage.

- $T = 2n + 1$ . Notons par  $\mathcal{T}_1$  (resp.  $\mathcal{T}_2$ ) l'ensemble des périodes impaires (resp. paires) dans l'ensemble  $\{1, \dots, 2n\}$ .
- $d_t = 0$  pour tout  $t \in \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ ,  $d_T = S$
- $f_t^F = 1$  pour tout  $t \in \mathcal{T}_1$ ,  $f_t^F = 2S$  pour tout  $t \in \mathcal{T}_2 \cup \{T\}$   
 $f_t^D = 2S$  pour tout  $t \in \mathcal{T}_1 \cup \{T\}$ ,  $f_t^D = 0$  pour tout  $t \in \mathcal{T}_2$
- $h_t^F = h_t^D = 0$  pour tout  $t \in \{1, \dots, T\}$
- $p_t^D = 0$  pour tout  $t \in \{1, \dots, T\}$   
 $p_t^F = 1 - 1/a_{\lceil \frac{t}{2} \rceil}$  pour tout  $t \in \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ ,  $p_T^S = 0$
- $u_t^F = a_{\lceil \frac{t}{2} \rceil}$  pour tout  $t \in \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ ,  $u_T^F = 0$
- la borne de coût  $B$  est égale à  $S$ .

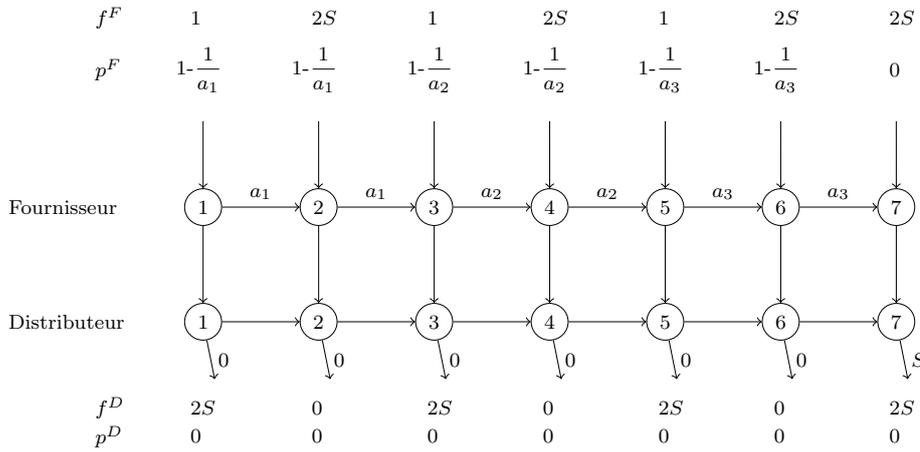


FIGURE 5.6 – Instance  $\mathcal{I}_1$  du problème 2ULS-IB-S avec  $n = 3$  et  $S = \{a_1, a_2, a_3\}$ .

Observons que si le fournisseur produit une quantité  $x_t^F = a_{\lceil \frac{t}{2} \rceil}$  à une période  $t \in \mathcal{T}_1$ , alors son coût total de production est égal à  $f_t^F + p_t^F x_t^F = 1 + (1 - 1/a_{\lceil \frac{t}{2} \rceil})a_{\lceil \frac{t}{2} \rceil}$  qui est exactement égal à  $x_t^F$ . Si  $x_t^F < a_{\lceil \frac{t}{2} \rceil}$  à une période  $t \in \mathcal{T}_1$ , alors le coût total de production est égal à  $f_t^F + p_t^F x_t^F = 1 + (1 - 1/a_{\lceil \frac{t}{2} \rceil})x_t^F = x_t^F + 1 - x_t^F/a_{\lceil \frac{t}{2} \rceil} > x_t^F$ . À partir de cette observation, montrons qu'il existe une solution au problème 2ULS-IB-S de coût au plus  $S$  si et seulement si il existe une solution au problème SUBSET-SUM.

Dans un premier temps, supposons qu'il existe une solution  $\mathcal{A}$  au problème SUBSET-SUM. Montrons alors qu'il existe une solution de coût  $S$  au problème 2ULS-IB-S. La figure 5.7 représente la solution du problème 2ULS-IB-S associée à une instance particulière  $\mathcal{I}_1$  (dans cette figure, nous avons uniquement représenté les arcs dont le flot est strictement positif). Dans le cas général, pour chaque entier  $a_i$  dans l'ensemble  $\mathcal{A}$ , le fournisseur produit une quantité  $a_i$  à la période  $t = 2i - 1 \in \mathcal{T}_1$  et stocke cette unité jusqu'à la période  $t + 1$ . La capacité de stockage n'est pas dépassée puisqu'elle est égale à  $a_i$ . D'après l'observation précédente, le coût total de production pour produire  $a_i$  unités à une période  $t \in \mathcal{T}_1$  est égal à  $a_i$ . Comme  $\sum_{a_i \in \mathcal{A}} a_i = S$ , le coût total du fournisseur est égal à  $S$ . Le distributeur se réapprovisionne ensuite de  $a_i$  unités à une période  $t = 2i \in \mathcal{T}_2$  et les stocke jusqu'à la période  $T$ . Comme  $f_t^D = 0$  pour toute période

$t \in \mathcal{T}_2$  et  $h_t^D = p_t^D = 0$  pour toute période  $t \in \mathcal{T}$ , le coût total du distributeur est égal à 0. Ainsi, il existe une solution au problème 2ULS-IB-S de coût au plus  $S$ .

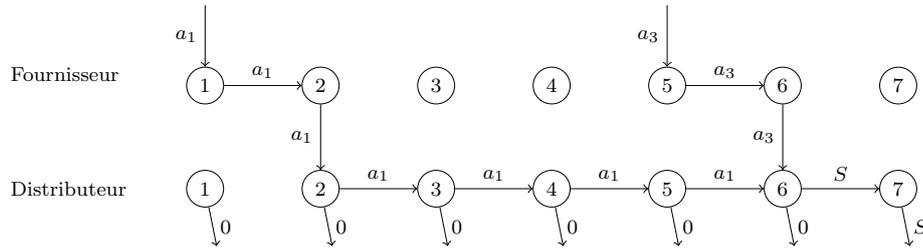


FIGURE 5.7 – Solution du problème 2ULS-IB-S associée à l'instance  $\mathcal{I}_1$  avec  $n = 3$ ,  $\mathcal{S} = \{a_1, a_2, a_3\}$  et  $a_1 + a_3 = S$ .

Supposons maintenant qu'il existe une solution de coût au plus  $S$  au problème 2ULS-IB-S. Montrons que le sous-ensemble de périodes  $\mathcal{U}$  où le fournisseur produit fournit une solution au problème subset sum. Comme  $f_t^F = 2S$  pour toute période  $t \in \mathcal{T}_2$ , le fournisseur doit produire à une période  $t \in \mathcal{T}_1$ , sinon son coût dépasserait  $S$ . De même, comme  $f_t^D = 2S$  pour toute période  $t \in \mathcal{T}_1$ , le distributeur doit se réapprovisionner à une période  $t \in \mathcal{T}_2$ . Le fournisseur doit donc stocker les unités qu'il produit jusqu'à la période suivante. De plus, afin de ne pas dépasser la capacité de stockage, le fournisseur peut stocker au plus  $u_t^F = a_{\lceil \frac{t}{2} \rceil}$  unités entre les périodes  $t$  et  $t+1$ . Ainsi, le fournisseur peut produire au plus  $a_{\lceil \frac{t}{2} \rceil}$  unités à une période  $t \in \mathcal{T}_1$ . À une période  $t \in \mathcal{T}_2$ , le distributeur se réapprovisionne de toutes les unités qui sont stockées au niveau du fournisseur et les stocke jusqu'à la période  $T$  avec un coût nul. Par l'observation précédente, si le fournisseur produit à une période  $t$ , alors  $x_t^F = a_{\lceil \frac{t}{2} \rceil}$  (il s'agit de la seule manière pour produire  $a_{\lceil \frac{t}{2} \rceil}$  unités avec un coût d'au plus  $a_{\lceil \frac{t}{2} \rceil}$  de sorte que le coût total soit égal à  $S$ ). Ainsi, nous avons  $\sum_{t \in \mathcal{U}} a_{\lceil \frac{t}{2} \rceil} = S$  ce qui implique qu'il existe une solution au problème de SUBSET-SUM.  $\square$

Florian *et al.* (1980) ont montré que le problème de lot-sizing avec une capacité de production est NP-difficile. Il est intéressant de remarquer que dans la preuve du théorème 5.2, la capacité de stockage à une période  $t$  agit comme une capacité de production puisque le fournisseur ne peut pas envoyer à la même période les unités qu'il produit au niveau du distributeur.

## 5.5 Résolution du problème 2ULS-IB-SR

Dans la section précédente, nous avons montré que le problème 2ULS-IB-S est NP-difficile. En posant  $u_t^D = \sum_{t=1}^T d_t$ , nous pouvons transformer une instance du problème 2ULS-IB-SR en une instance du problème 2ULS-IB-S. Ainsi, le problème 2ULS-IB-SR est au moins aussi difficile que le problème 2ULS-IB-S. Dans cette section, nous présentons un algorithme de programmation dynamique pseudo-polynomial pour résoudre le problème 2ULS-IB-SR, ce qui montre que ce problème est NP-difficile au sens faible.

Nous rappelons que  $s_t^D \in \{0, 1, \dots, u_t^D\}$  (resp.  $s_t^F \in \{0, 1, \dots, u_t^F\}$ ) est la quantité d'unités en stock à la fin de la période  $t$  au niveau du distributeur (resp. fournisseur). Le principe de l'algorithme est de considérer toutes les valeurs possibles de stock  $s_t^D$  (resp.  $s_t^F$ ) au niveau du distributeur (resp. fournisseur). Remarquons que la propriété ZIO n'est plus valide au niveau du distributeur et du fournisseur pour le problème 2ULS-IB-SR.

- Soit  $C_t^i(X)$  le coût de production de  $X$  unités au niveau  $i \in \{D, F\}$  à la période  $t$ . Le coût  $C_t^i(X)$  est défini par :

$$C_t^i(X) = \begin{cases} f_t^i + p_t^i X, & \text{si } X > 0 \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

- Soit  $V_t(s_{t-1}^D, s_t^D, s_{t-1}^F, s_t^F)$  le coût total de la chaîne logistique pour satisfaire la demande  $d_t$  quand :
  - $s_{t-1}^D$  (resp.  $s_{t-1}^F$ ) unités sont stockées à la période  $t - 1$ ,
  - $s_t^D$  (resp.  $s_t^F$ ) unités sont stockées à la période  $t$  au niveau du distributeur (resp. fournisseur),
  - $X^D = s_t^D + d_t - s_{t-1}^D$  (resp.  $X^F = s_t^F + X^D - s_{t-1}^F$ ) unités sont envoyées (resp. produites) à la période  $t$  au niveau du distributeur (resp. fournisseur).

Le coût  $V_t(s_{t-1}^D, s_t^D, s_{t-1}^F, s_t^F)$  est défini par :

$$V_t(s_{t-1}^D, s_t^D, s_{t-1}^F, s_t^F) = \begin{cases} C_t^D(X^D) + C_t^F(X^F) & \text{si } s_t^D \leq u_t^D, s_t^F \leq u_t^F \text{ et } s_t^D + s_t^F \leq d_{tT}, \\ +\infty, & \text{sinon.} \end{cases}$$

- Soit  $H_t(s_{t-1}^D, s_{t-1}^F)$  le coût minimum pour satisfaire les demandes  $d_{tT}$  où  $s_{t-1}^D$  (resp.  $s_{t-1}^F$ ) unités sont stockées à la période  $t - 1$  au niveau du distributeur (resp. fournisseur). À partir de la définition du coût  $V_t(s_{t-1}^D, s_t^D, s_{t-1}^F, s_t^F)$ , nous pouvons calculer le coût  $H_t(s_{t-1}^D, s_{t-1}^F)$  de la manière suivante :

$$H_t(s_{t-1}^D, s_{t-1}^F) = \min_{s_t^D \in \mathcal{S}_t^D, s_t^F \in \mathcal{S}_t^F} \{V_t(s_{t-1}^D, s_t^D, s_{t-1}^F, s_t^F) + H_{t+1}(s_t^D, s_t^F)\},$$

où  $\mathcal{S}_t^D = \{\max(0, s_{t-1}^D - d_t), \dots, M_t^D\}$ , avec  $M_t^D = \min(u_t^D, d_{tT})$ , et  $\mathcal{S}_t^F = \{\max(0, s_{t-1}^F - X^D), \dots, M_t^F\}$ , avec  $M_t^F = \min(u_t^F, d_{tT})$ .  $\mathcal{S}_t^D$  (resp.  $\mathcal{S}_t^F$ ) correspond aux niveaux de stock possibles à la période  $t$  sachant que  $s_{t-1}^D$  (resp.  $s_{t-1}^F$ ) unités sont en stock à la période  $t - 1$  au niveau du distributeur (resp. fournisseur), et que le stock à chaque niveau est limité.

### Coût optimal.

Le coût optimal pour satisfaire les demandes  $d_{1T}$  en supposant que  $s_0^D = s_0^F = 0$  est donné par  $H_1(0, 0)$ . Nous initialisons la récurrence en posant  $H_{T+1}(s_t^D, s_t^F) = 0$  pour toutes valeurs  $s_t^D$  et  $s_t^F$  pour assurer la faisabilité de la solution.

### Analyse de complexité

Le coût  $V_t(s_{t-1}^D, s_t^D, s_{t-1}^F, s_t^F)$  peut être calculé en  $\mathcal{O}(u_{t-1}^F u_{t-1}^D M_t^D M_t^F)$  pour chaque période  $t$ . Ainsi, le coût optimal  $H_1(0, 0)$  se calcule en  $\mathcal{O}(\sum_{i=1}^T (u_{i-1}^F u_{i-1}^D M_i^D M_i^F))$ . Cet algorithme de programmation dynamique est pseudo-polynomial : le problème 2ULS-IB-SR n'est donc pas NP-difficile au sens fort.

Jusqu'à présent, nous avons présenté l'étude de problèmes de lot-sizing à deux niveaux avec capacité de stockage sans contrainte sur le nombre de réapprovisionnement pour couvrir une demande. Dans la section suivante, nous considérons les problèmes de lot-sizing avec capacité de stockage en imposant que la demande doit être couverte par un unique réapprovisionnement au niveau du distributeur.

## 5.6 Analyse des problèmes de lot-sizing avec une contrainte NLS

Jaruphongsra *et al.* (2004) ont introduit le problème de lot-sizing où chaque demande doit être satisfaite par un unique réapprovisionnement, *i.e.* la demande ne peut pas être découpée au niveau du distributeur. Cette contrainte est dite sans découpage de la demande. Nous appellerons cette contrainte par sa traduction anglaise *No Lot-Splitting (NLS)*. En pratique, cette contrainte peut être observée lorsque les conditions de livraison du produit chez le distributeur nécessitent un unique envoi, ou encore pour des questions de traçabilité.

Nous notons  $x_{kt}^D \geq 0$  la quantité d'approvisionnement à la période  $k$  pour satisfaire la demande  $d_t$  au niveau du distributeur. Nous avons  $\sum_{i=1}^t x_{it}^D = d_t$ .

### Définition 5.4 (Contrainte NLS)

Un plan de réapprovisionnement  $x^D$  satisfait la contrainte NLS s'il n'existe pas deux périodes  $l$  et  $k$ ,  $1 \leq l < k \leq t \leq T$  tels que  $x_{lt}^D > 0$  et  $x_{kt}^D > 0$ , pour tout  $t$ .

Les problèmes 2ULS-IB-R et 2ULS-IB-S avec la contrainte NLS sont notés 2ULS-IB-R-NLS et 2ULS-IB-S-NLS respectivement. Il est intéressant d'analyser la complexité du problème à un niveau avec une capacité de stockage et la contrainte NLS, noté par ULS-IB-NLS, avant d'étudier les problèmes à deux niveaux.

### 5.6.1 Le problème ULS-IB-NLS

Par la suite, nous reprenons les notations du problème de lot-sizing à un niveau présenté dans la section 1.3.1 (voir p.9). Remarquons que le problème LS-IB peut être résolu en temps polynomial (Love, 1973; Atamtürk et Küçükyavuz, 2008). Le théorème 5.3 montre qu'ajouter la contrainte NLS au problème LS-IB rend le problème NP-difficile au sens fort.

### Théorème 5.3

Le problème ULS-IB-NLS avec une capacité de stockage est stationnaire est NP-difficile au sens fort.

*Preuve.* Montrons que le problème de 3-PARTITION qui est NP-difficile au sens fort (Garey et Johnson, 1979) peut être réduit au problème ULS-IB-NLS en temps polynomial. Nous rappelons qu'une instance du problème de 3-PARTITION est définie par un entier  $b$  et  $3m$  entiers  $(a_1, \dots, a_{3m})$  tels que  $\sum_{i=1}^{3m} a_i = mb$ . Nous supposons que  $b/4 < a_i < b/2$  pour tout  $i \in \{1, \dots, 3m\}$ . Résoudre le problème de 3-PARTITION consiste à déterminer s'il existe une partition  $A_1 \cup \dots \cup A_m$  de  $\{1, \dots, 3m\}$  tel que  $\sum_{i \in A_j} a_i = b$  pour tout  $j \in \{1, \dots, m\}$ .

Résoudre le problème ULS-IB-NLS consiste à déterminer s'il existe une réponse positive à la question suivante : existe-t-il une solution (un plan de production) du problème ULS-IB-NLS de coût au plus  $B$ ?

Nous définissons une instance  $\mathcal{I}_2$  du problème ULS-IB-NLS de la manière suivante. L'instance  $\mathcal{I}_2$  est illustrée par la figure 5.8. Les coûts fixes de production sont indiqués en haut de chaque nœud. Les capacités de stockage sont représentées sur les arcs horizontaux.

- $T = 5m$ . Notons par  $\mathcal{T}_1$  (resp.  $\mathcal{T}_2$ ) l'ensemble des périodes impaires (resp. paires) de l'ensemble  $\{1, \dots, 2m\}$ .
- $d_t = 0$  pour tout  $t \in \mathcal{T}_1$
- $d_t = (m - t/2)b$  pour tout  $t \in \mathcal{T}_2$
- $d_t = a_{t-2m}$  pour tout  $t \in \{2m + 1, \dots, T\}$ .

- $f_t = 0$  pour tout  $t \in \mathcal{T}_1$
- $f_t = 1$  pour tout  $t \in \mathcal{T}_2 \cup \{2m + 1, \dots, T\}$ .
- $h_t = p_t = 0$  pour tout  $t \in \{1, \dots, T\}$ .
- $u_t = mb$  pour tout  $t \in \{1, \dots, T\}$ .
- la borne de coût  $B$  est fixée à 0.

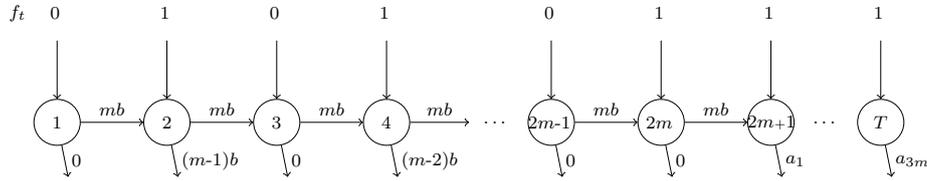


FIGURE 5.8 – Instance  $\mathcal{I}_2$  du problème ULS-IB-NLS dans la preuve du théorème 5.3.

Montrons qu'il existe une solution au problème ULS-IB-NLS de coût au plus 0 si et seulement si il existe une solution au problème de 3-PARTITION.

Supposons qu'il existe une solution  $(A_1, \dots, A_{3m})$  au problème de 3-PARTITION. La solution du problème ULS-IB-NLS associée à l'instance  $\mathcal{I}_2$  est illustrée par la figure 5.9 où seuls les arcs dont le flot est strictement positif sont représentés. À chaque période  $t \in \mathcal{T}_1$ , la quantité d'unités produites est  $x_t = \sum_{i \in A_{(t+1)/2}} a_i + d_{t+1} = b + b(m - \frac{t+1}{2})$ . Comme le coût total de production est nul pour toute période  $t \in \mathcal{T}_1$ , produire ces unités à chaque période  $t \in \mathcal{T}_1$  induit un coût nul. À chaque période  $t \in \mathcal{T}_2$ , la demande  $d_t$  est satisfaite et  $b$  unités sont stockées ce qui implique qu'il y a exactement  $s_t = \frac{t}{2}b$  unités en stock à la fin de chaque période  $t$ . Ainsi, à chaque période  $t \in \mathcal{T}_1$ , la capacité de stockage  $u_t = mb$  n'est pas dépassée puisque la quantité d'unités en stock à la période  $t$  est égal à  $s_{t-1} + x_t = \frac{t-1}{2}b + (m - \frac{t-1}{2})b = mb$ . Chaque demande pour toute période  $t < 2m$  est satisfaite et  $mb$  unités restent en stock à la période  $2m$  pour satisfaire les demandes de la période  $2m + 1$  à  $T$ . Étant donné que le coût de stockage est nul, le coût total de cette solution est égal à 0. De plus, elle vérifie bien la contrainte NLS puisque chaque demande est satisfaite par un unique réapprovisionnement.

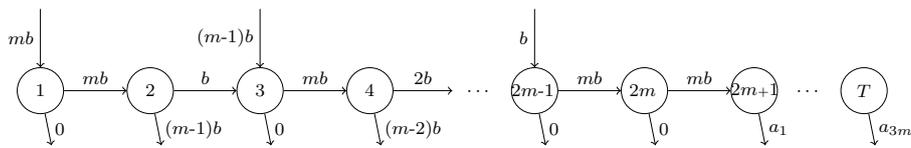


FIGURE 5.9 – Solution du problème ULS-IB-NLS associée à l'instance  $\mathcal{I}_2$  dans la preuve du théorème 5.3.

Réciproquement, supposons qu'il existe une solution au problème ULS-IB-NLS de coût au plus 0. Comme  $f_t = 1$  pour toute période  $t \in \mathcal{T}_2 \cup \{2m + 1, \dots, T\}$ , il n'est pas possible de produire à ces périodes. Toutes les productions ont alors lieu à une période  $t \in \mathcal{T}_1$ . Étant donné qu'à chaque période  $t \in \mathcal{T}_2$ ,  $d_t = (m - \frac{t}{2})b$ ,  $u_{t-1} = mb$  et  $mb$  unités doivent être disponibles à la période  $2m$ , il faut stocker exactement  $\frac{t}{2}b$  unités entre les périodes  $t \in \mathcal{T}_2$  et  $t + 1$ . Ainsi, à chaque période  $t \in \mathcal{T}_1$ , il faut produire  $x_t = d_{t+1} + b$  unités afin de pouvoir satisfaire toutes les demandes. En respectant la contrainte NLS, chaque demande  $d_t$ , pour tout  $t \in \{2m + 1, \dots, T\}$ , est satisfaite par un unique réapprovisionnement à une période  $t \in \mathcal{T}_1$ . Il existe donc une partition de l'ensemble des périodes  $\{2m + 1, \dots, T\}$  en  $m$  ensembles  $(A_1, \dots, A_m)$  tel que  $\sum_{i \in A_j} d_i = b$  pour tout  $j \in \{1, \dots, m\}$ . Comme chaque demande  $d_t$  pour tout  $t \in \{2m + 1, \dots, T\}$  correspond à un entier dans  $(a_1, \dots, a_{3m})$ , il existe une solution au problème de 3-PARTITION.  $\square$

### 5.6.2 Le problème 2ULS-IB-R-NLS

#### Théorème 5.4

Le problème 2ULS-IB-R-NLS avec une capacité de stockage stationnaire est NP-difficile au sens fort.

*Preuve.* La preuve consiste à faire une réduction à partir du problème ULS-IB-NLS, qui est NP-difficile au sens fort (théorème 5.3). Nous transformons une instance du problème ULS-IB-NLS en une instance du problème 2ULS-IB-R-NLS comme suit. Les paramètres du distributeur sont égaux à ceux du problème ULS-IB-NLS, i.e.  $u_t^D = u_t$ ,  $f_t^D = f_t$ ,  $p_t^D = p_t$  et  $h_t^D = h_t$  pour tout  $t \in \{1, \dots, T\}$ . Les coûts du fournisseur sont tous nuls, i.e.  $f_t^F = h_t^F = p_t^F = 0$  pour tout  $t \in \{1, \dots, T\}$ . La demande du problème 2ULS-IB-R-NLS est identique à celle du problème ULS-IB-NLS. Étant donné que les coûts du fournisseur sont nuls, le coût d'une solution optimale du problème ULS-IB-NLS est égal au coût optimal de la solution associée à l'instance du problème 2ULS-IB-R-NLS (voir figure 5.10).

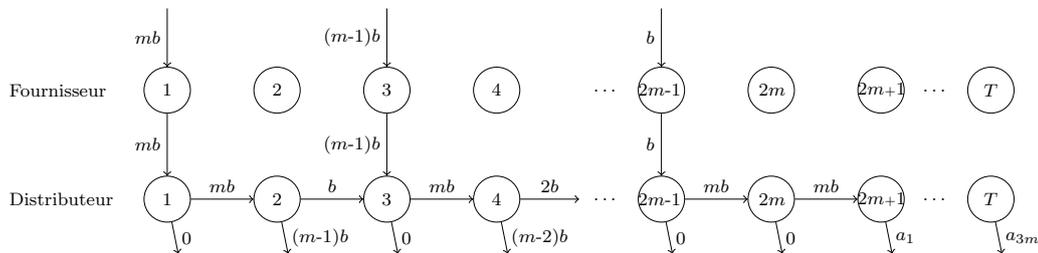


FIGURE 5.10 – Solution du problème 2ULS-IB-R-NLS associée à l'instance définie dans la preuve du théorème 5.4.

Par le théorème 5.3, le problème 2ULS-IB-R-NLS est également NP-difficile au sens fort.  $\square$

### 5.6.3 Le problème 2ULS-IB-S-NLS

Jaruphongsa *et al.* (2004) ont prouvé que le problème 2ULS-IB-S-NLS avec des fenêtres de temps sur la demande est NP-difficile. Nous montrons dans cette section que ce problème est NP-difficile au sens fort sans les fenêtres de temps sur la demande.

#### Théorème 5.5

Le problème 2ULS-IB-S-NLS avec une capacité de stockage stationnaire est NP-difficile au sens fort.

*Preuve.* Similairement à la preuve du théorème 5.4, nous faisons une réduction à partir du problème ULS-IB-NLS. Nous transformons une instance du problème ULS-IB-NLS en une instance du problème 2ULS-IB-S-NLS de la manière suivante. Les paramètres du fournisseur correspondent aux paramètres du problème ULS-IB-NLS, i.e.  $u_t^F = u_t$ ,  $f_t^F = f_t$ ,  $p_t^F = p_t$  et  $h_t^F = h_t$  pour tout  $t \in \{1, \dots, T\}$ .

Les coûts de production du distributeur sont tous nuls, i.e.  $f_t^D = p_t^D = 0$  pour  $t \in \{1, \dots, T\}$  et  $h_t^D = M$  pour tout  $t \in \{1, \dots, T\}$ , où  $M$  est un majorant (nous pouvons fixer  $M = \sum_{t=1}^T (h_t + p_t)$ ). De cette manière, dans une solution optimale du problème 2ULS-IB-S-NLS, aucune unité ne sera stockée au niveau du distributeur. Les demandes du problème 2ULS-IB-S-NLS sont identiques à celles du problème ULS-IB-NLS. Comme  $f_t^R = p_t^R = 0$ , le coût

d'une solution optimale du problème 2ULS-IB-S-NLS est égal au coût optimal du problème ULS-IB-NLS associé. La figure 5.11 représente une telle solution.

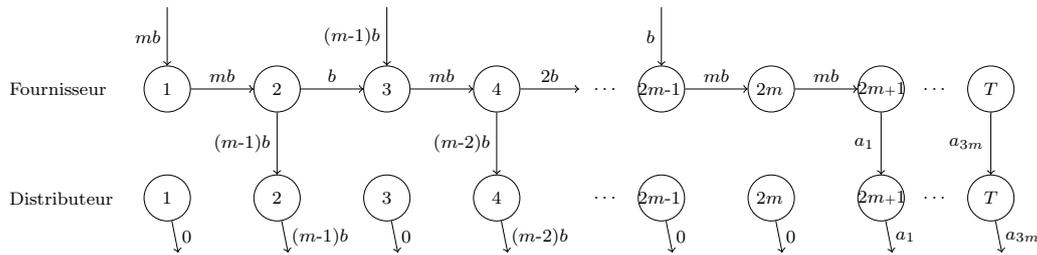


FIGURE 5.11 – Solution du problème 2ULS-IB-S-NLS dans la preuve du théorème 5.5.

Ainsi, par le théorème 5.3, le problème 2ULS-IB-S-NLS est NP-difficile au sens fort.  $\square$

#### 5.6.4 Le problème 2ULS-IB-SR-NLS

Le problème 2ULS-IB-SR-NLS est au moins aussi difficile que le problème 2ULS-IB-S-NLS qui est NP-difficile au sens fort (théorème 5.5).

##### **Théorème 5.6**

Le problème 2ULS-IB-SR-NLS avec une capacité de stockage stationnaire est NP-difficile au sens fort.

La preuve du théorème est identique à celle du théorème 5.5 en imposant une capacité de stockage au niveau du distributeur induisant qu'aucune unité n'est stockée à ce niveau dans une solution optimale.

## 5.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une analyse de complexité des problèmes de lot-sizing à deux niveaux avec capacité de stockage. Nous avons proposé un algorithme de programmation dynamique en  $\mathcal{O}(T^4)$  pour résoudre le problème où la capacité de stockage est limitée au niveau du distributeur. Pour le cas où la contrainte de capacité de stockage est imposée au niveau du fournisseur, nous avons montré que le problème est NP-difficile. Un algorithme de programmation dynamique pseudo-polynomial est présenté pour résoudre ce problème, ce qui montre qu'il est NP-difficile au sens faible. Nous avons également montré qu'en ajoutant la contrainte de no lot-splitting, le problème ULS avec contrainte de capacité de stockage ainsi que le problème 2ULS avec des contraintes de capacité au niveau du distributeur, au niveau du fournisseur ou aux deux niveaux sont NP-difficile au sens fort.

Les tableaux suivants résument les résultats de complexité pour le problème de lot-sizing à deux niveaux avec une capacité de stockage :

Problème	Complexité
LS-IB	polynomial Atamtürk et Küçükyavuz (2008), Love (1973)
2ULS-IB-R	polynomial (Section 5.3)
2ULS-IB-S	polynomial avec des coûts spécifiques et une capacité stationnaire (Jaruphongsra <i>et al.</i> , 2004)
	NP-difficile (Section 5.4)
2ULS-IB-SR	NP-difficile (Section 5.5)

TABLE 5.1 – Résultats de complexité des problèmes de lot-sizing à deux niveaux avec une capacité de stockage limitée et pas de contrainte NLS.

Problème	Complexité
LS-IB	NP-difficile au sens fort (Section 5.6.1)
2ULS-IB-R-NLS	NP-difficile au sens fort (Section 5.6.2)
2ULS-IB-S-NLS	NP-difficile avec des fenêtres de temps et une capacité constante (Jaruphongsra <i>et al.</i> , 2004)
	NP-difficile au sens fort (Section 5.6.3)
2ULS-IB-SR-NLS	NP-difficile au sens fort (Section 5.6.4)

TABLE 5.2 – Résultats de complexité des problèmes de lot-sizing à deux niveaux avec une capacité de stockage limitée et la contrainte NLS.

### Perspectives

Une extension possible à cette étude est l'amélioration de la complexité pour résoudre le problème 2ULS-IB-R. De plus, la complexité du problème 2ULS-IB-S avec des structures de coûts quelconques et une capacité de stockage stationnaire reste un problème ouvert. Le problème de lot-sizing avec une capacité de production stationnaire peut être résolu en temps polynomial alors que le cas général est NP-difficile. Ce problème étant proche de notre problème avec une capacité de stockage, cela nous laisse penser qu'il serait possible de trouver un algorithme polynomial pour le cas avec une capacité de stockage stationnaire au niveau du fournisseur.

Une autre perspective possible est de considérer un problème de lot-sizing où le fournisseur et le distributeur partagent le même entrepôt de stockage. La capacité de stockage devient alors commun aux deux niveaux. La complexité de ce problème est ouvert. Cependant, étant donné que le problème où la capacité de stockage au niveau du fournisseur est NP-difficile, le problème avec une capacité de stockage devrait également être NP-difficile.

D'un point de vue pratique, il serait également intéressant de développer des algorithmes efficaces et exactes pour résoudre les problèmes qui ont été montrés NP-difficile. Des pistes d'étude consistent à améliorer la complexité de l'algorithme de programmation dynamique présenté dans la section 5.5, ou à étudier la formulation mathématique afin de déterminer des inégalités valides.

Nous avons montré que le problème de lot-sizing à deux niveaux avec une capacité de stockage au niveau du distributeur est polynomial. Une question intéressante à se poser serait de déterminer si ce problème reste polynomial en considérant en plus une contrainte de capacité de production stationnaire au niveau du distributeur.

# Conclusion et perspectives

Dans cette thèse, nous avons étudié des mécanismes de coordination des décisions de planification au sein d'une chaîne logistique à deux niveaux. Nous avons vu que dans une chaîne logistique composée de deux acteurs indépendants où l'un d'entre-eux a le monopole, le coût de l'acteur n'ayant pas le monopole peut être très mauvais. Notre but a alors été de minimiser le coût de l'acteur dominé par un moyen d'incitation qui est le contrat. Après avoir exploré les travaux existants dans la littérature concernant les problèmes de coordination et la mise en place de contrats, nous avons constaté que la majorité des travaux ont porté sur à des problèmes EOQ. Mes travaux se sont alors tournés vers la mise en place de contrats entre les acteurs d'une chaîne logistique dans le cadre des problèmes de lot-sizing dynamique. Nous nous sommes intéressés à l'analyse de la complexité de nouveaux problèmes de lot-sizing issus de la mise en place des contrats et à leur résolution, notamment par des algorithmes de programmation dynamique.

Dans le chapitre 2, nous avons considéré le problème de coordination où le distributeur a le monopole au sein de la chaîne logistique. Pour diminuer le coût du fournisseur, nous avons proposé des contrats basés sur des transferts d'argent entre les acteurs. Les acteurs étant individuels et indépendants, des hypothèses ont également été faites sur les informations connues par le fournisseur : soit le distributeur et le fournisseur partagent les mêmes informations concernant les coûts du distributeur (information complète), soit le fournisseur ne connaît qu'une partie des coûts du distributeur (asymétrie d'information). Dans le cas avec information complète, nous avons montré que le problème avec un transfert d'argent sur le coût total du fournisseur est équivalent à la résolution d'un problème 2ULS qui est polynomial. Nous avons développé un algorithme de programmation dynamique polynomial pour résoudre le problème de coordination dans le cas où aucun transfert d'argent n'est autorisé entre les acteurs. Nous avons également prouvé qu'un transfert d'argent sur les coûts de stockage du distributeur rend le problème NP-difficile. Dans le cas avec asymétrie d'information, les contrats proposés doivent satisfaire une contrainte de véracité garantie. Nous avons montré qu'il n'existe pas d'algorithme approché à véracité garantie avec un rapport d'approximation constant pour le problème de coordination avec un transfert d'argent, que le transfert soit sur les coûts de stockage ou le coût total du distributeur.

Dans le chapitre 3, nous nous sommes intéressés au cas où le fournisseur a le monopole au sein de la chaîne logistique. Dans ce cadre, le plan de production imposé par le fournisseur est tel que toutes les unités sont stockées au niveau du distributeur. Tout d'abord, nous avons étudié un contrat où le distributeur prend en charge les coûts de stockage du fournisseur et un algorithme de programmation dynamique polynomial a été proposé pour déterminer le contrat. Nous avons également proposé de coordonner les décisions de planification des acteurs en s'inspirant des contrats de réservation de capacité. Le plan de production imposé par le fournisseur peut être vu comme une capacité réservée par le fournisseur pour le distributeur. Dans le cadre de la coordination, le fournisseur propose au distributeur un contrat où le distributeur peut dépasser la capacité réservée par le fournisseur à condition qu'il paye les coûts de production du fournisseur pour les unités produites au-delà de la capacité réservée.

Afin de diminuer le coût total du distributeur, nous avons proposé d'étudier des contrats basés sur un transfert d'argent incluant une partie des coûts de production du fournisseur. La mise en place des contrats étudiés dans ces chapitres nous a amené à étudier de nouveaux problèmes de lot-sizing avec sous-traitance. Nous avons montré qu'il existe un algorithme de programmation dynamique polynomial pour résoudre le problème dans le cas où le transfert d'argent porte sur le coût total du fournisseur, ou dans le cas où le transfert inclut des coûts fixes supplémentaires induits la sous-traitance. Nous avons prouvé que le problème où le distributeur ne prend pas en charge les coûts fixes supplémentaires est NP-difficile.

Une analyse expérimentale a été présentée dans le chapitre 4. Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés à l'évaluation du gain du fournisseur (resp. distributeur) dans le cas où le distributeur (resp. fournisseur) a le monopole en proposant les différents contrats étudiés dans les chapitres précédents. Dans le cas où le distributeur a le monopole, cette analyse a montré que l'approche de coordination proposée dans cette thèse est intéressante car elle permet au fournisseur d'avoir un gain est significatif dans le cas où il y a un transfert d'argent. Nous avons observé que le contrat où le transfert d'argent porte uniquement sur le coût de stockage permet au fournisseur d'avoir un gain très proche de celui qu'il aurait avec un transfert d'argent sur le coût total (par exemple, dans le cas avec information complète, pour  $T = 10$ , il y a une différence d'au plus 1.6 points de pourcentage). Dans le cas où le fournisseur a le monopole, les analyses expérimentales ont montré que le contrat où le distributeur prend en charge les coûts de stockage du fournisseur peut lui permettre de diminuer son coût de manière significative lorsque son coût de stockage est élevé (son gain peut atteindre 50% lorsque  $p^F$  est stationnaire). Parmi les contrats pour lesquels le transfert d'argent n'inclut pas les coûts de stockage du fournisseur, celui avec un transfert d'argent sur le coût total du fournisseur est le plus intéressant pour le distributeur. Nous avons également observé que lorsque le transfert est sur le coût total du fournisseur, les instances pour lesquelles le gain du distributeur est le meilleur correspondent au cas où le coût de fixe du fournisseur est stationnaire.

Les études faites dans les chapitres précédents se sont focalisées sur les problèmes de coordination qui surviennent dans une chaîne logistique à deux niveaux. Dans le chapitre 5, nous nous sommes intéressés à un autre problème de lot-sizing à deux niveaux : nous avons proposé d'étudier des problèmes où la capacité de stockage peut être limitée, ce problème ayant été peu étudiée dans la littérature pour les problèmes multi-niveaux. Cette contrainte est intéressante car en pratique, les entrepôts de stockage possèdent une capacité qui est limitée. Nous avons développé un algorithme de programmation dynamique polynomial pour le cas où la capacité de stockage est limitée au niveau du distributeur. Dans le cas où elle est limitée au niveau du fournisseur, nous avons montré que le problème est NP-difficile. Nous avons proposé un algorithme de programmation dynamique pseudo-polynomial pour résoudre ce problème lorsque la capacité de stockage est limitée aux deux niveaux.

Les travaux de ma thèse ont mis en avant de nouveaux problèmes de lot-sizing pour lesquels nous avons montré qu'ils étaient polynomiaux ou NP-difficiles. Une poursuite d'étude naturelle pour pour cette dernière classe de problèmes consiste à utiliser des méthodes exactes telles que la programmation dynamique pseudo-polynomial, des méthodes de coupes, des algorithmes de *Branch-and-Cut*, ou bien des méthodes de décomposition pour les résoudre. Dans le chapitre 5, nous avons montré que le problème 2ULS-IB-S est NP-difficile. Il existe de nombreuses études polyédrales pour les problèmes de lot-sizing (Pochet et Wolsey, 2006). Pour le problème 2ULS-IB-S, il serait intéressant de déterminer des inégalités valides en se basant sur les différentes formulations existantes pour les problèmes à deux niveaux. Ces inégalités valides pourraient ensuite être utilisées par un algorithme de *Branch-and-Cut*.

Dans le chapitre 2, nous avons introduit la problématique d'asymétrie d'information entre deux acteurs d'une chaîne logistique. Sous l'hypothèse d'asymétrie d'information, une contrainte couplante représentant la contrainte de véracité garantie doit être prise en compte dans les problèmes de coordination avec transfert d'argent qu nous avons présenté pour inciter les acteurs à ne pas mentir. De part la nature de cette contrainte (du fait qu'elle soit couplante), nous pensons que la classe de complexité de ces problèmes change lorsqu'on inclut cette contrainte. Cependant la preuve n'est pas si évidente, et la question sur la complexité des problèmes de coordination avec transfert d'argent reste ouverte. Par ailleurs, en faisant une relaxation lagrangienne où la contrainte relâchée correspond à la contrainte de véracité garantie, nous nous retrouvons avec des sous-problèmes indépendants par rapport aux profils. Pour le problème avec transfert d'argent sur le coût total du distributeur, les sous-problèmes induits peuvent être résolus par des algorithmes polynomiaux. En revanche, pour le cas avec un transfert d'argent sur les coûts de stockage, les sous-problèmes induits sont NP-difficiles (voir section 2.3.2). Dans ce cas, nous pouvons effectuer une double relaxation en relâchant également la contrainte de rationalité individuelle, ou bien proposer un algorithme de résolution efficace pour le sous-problème induit.

Dans cette thèse, nous avons étudié le problème de coordination d'un point de vue théorique. Une question intéressante à se poser consiste à se demander comment les transferts d'argent inclus dans les contrats présentés peuvent être mis en place en pratique. Pour cela, une piste d'étude serait d'investiguer les problématiques financières et le partage des risques dans une chaîne logistique.

Il existe peu de travaux s'intéressant aux problèmes de coordination des décisions de planification dans le cadre dynamique, contrairement au cas continu. Ainsi, de nombreuses perspectives existent suite aux travaux proposés dans ma thèse. L'une d'entre-elles consiste à étudier d'autres contrats existants dans la littérature (Cachon, 2003) tels que le contrat avec partage de revenu. Dans ce dernier, l'acteur qui n'a pas le monopole partage un pourcentage (qui est à déterminer) avec celui qui a le monopole. Il serait également intéressant d'étudier les contrats avec transfert d'argent combinés à des contraintes pratiques telles qu'une production minimale, ou une capacité de stockage à ne pas dépasser.

Dans le chapitre 3, nous avons proposé un contrat reposant sur la réservation de capacité et la sous-traitance. Cependant, dans ce contrat, le fournisseur a la possibilité d'imposer que toutes les unités soient stockées chez le distributeur. En pratique, la capacité de stockage du distributeur peut être limitée. De plus, nous avons montré que le problème 2ULS avec une capacité de stockage limitée au niveau du distributeur peut être résolu en temps polynomial. Il serait alors intéressant d'étudier ce problème de coordination en considérant une capacité de stockage au niveau du distributeur. Cette contrainte peut amener le fournisseur à stocker à son niveau, ce qui nous conduirait à étudier un problème de lot-sizing à deux niveaux avec une sous-traitance et une capacité de stockage limitée au niveau du distributeur. Le problème de lot-sizing mono-niveau avec une capacité de stockage limitée et de la sous-traitance peut être résolu en temps polynomial (Chu et Chu, 2007). À notre connaissance, le problème à deux niveaux n'a pas encore été étudié dans la littérature. De plus, il existe des algorithmes polynomiaux pour les problèmes de lot-sizing à deux niveaux avec une capacité de production et de sous-traitance stationnaires au niveau du fournisseur (Sargut et Romeijn, 2007).

Une autre extension possible est de considérer que le fournisseur a une capacité de production stationnaire. Dans ce cas, le fournisseur doit résoudre un problème CCLS pour déterminer son plan de production de coût optimal. Du point de vue du distributeur, le contrat mis en place doit prendre en compte la capacité de réservation et la capacité de production du fournisseur. Cette capacité se traduit alors comme une capacité de sous-traitance limitée dans le problème

de coordination. Atamtürk et Hochbaum (2001) ont montré que le problème CCLS avec une capacité de sous-traitance stationnaire peut être résolu par un algorithme de programmation dynamique polynomial. Il serait alors intéressant d'étudier la complexité de ce problème de coordination et de proposer une méthode de résolution. Ensuite, une capacité de stockage limitée pourrait être intégrée au modèle de coordination.

Le problème de coordination que nous avons étudié dans ma thèse considère deux acteurs indépendants dans une chaîne logistique. Or, de nombreux acteurs interviennent dans les activités de la chaîne logistique. Une extension serait alors de considérer plusieurs acteurs dans une chaîne logistique où des relations plus ou moins fortes existent entre-eux. Par exemple, un distributeur peut avoir un fournisseur préféré et inversement. Une piste d'étude consisterait à étudier le problème de coordination où les acteurs peuvent faire des coalitions entre-eux. Le but serait alors de déterminer des coalitions en tenant compte des affinités de chaque acteur avec les autres ainsi que le partage de gain optimal entre les acteurs d'une même coalition.

Nous avons choisi de coordonner les décisions de planification dans un cadre d'intégration verticale, *i.e.* de considérer les différents niveaux d'activités dans une chaîne logistique (dans ma thèse il s'agit de la production et de la distribution). Une poursuite d'étude possible serait de coordonner les décisions de planification en considérant une intégration horizontale dans le cadre des problèmes de lot-sizing. Dans une intégration horizontale, nous prenons en compte les acteurs intervenant dans un même niveau (et donc une même activité) de la chaîne logistique. Un problème de coordination qu'il serait intéressant d'étudier dans ce cadre consisterait à mettre en place un contrat entre deux ou plusieurs acteurs d'un même niveau afin qu'ils déterminent un unique plan de production commun. Par exemple, au niveau de la distribution, le contrat permettrait à plusieurs distributeurs de déterminer d'une quantité de réapprovisionnement commune auprès d'un fournisseur afin d'amortir le coût fixe de production. De plus, d'après le contrat existant sur les prix de gros, le fournisseur pourrait les inciter à s'approvisionner en grande quantité en leur proposant un prix plus bas.

Une dernière piste de recherche consiste à considérer une chaîne logistique composée d'au moins trois niveaux. Dans ce cas, il n'est pas évident d'appliquer directement le mécanisme de coordination présenté dans cette thèse. En effet, chaque décision de planification prise à un niveau affecte les décisions des autres acteurs. Plaçons nous dans le cadre d'une chaîne logistique à trois acteurs (un fournisseur, un producteur et un distributeur). Une première remarque est que si le monopole est détenu par le producteur (et donc par le niveau au milieu de la chaîne), le problème de coordination est différent. Le producteur impose son plan de production au distributeur et son plan de réapprovisionnement au fournisseur. Cependant, le distributeur et le fournisseur ne peuvent pas proposer chacun un contrat au fournisseur de manière indépendante. En effet, le contrat proposé par le distributeur au producteur a un impact sur le plan de production du fournisseur (de même, si le fournisseur propose un contrat au producteur, cela aura un impact sur le plan de réapprovisionnement du distributeur). Supposons maintenant que l'acteur qui a le monopole est le distributeur. Il impose alors son plan de réapprovisionnement au producteur, puis le producteur se réapprovisionne auprès du fournisseur. Dans ce cas, une piste d'étude est d'étudier le mécanisme de coordination suivant afin de diminuer le coût du fournisseur et du producteur. Le producteur propose au distributeur un contrat composé d'un plan de réapprovisionnement et d'un transfert d'argent vérifiant la contrainte de rationalité individuelle. Si le distributeur accepte ce contrat, le producteur propose alors au fournisseur un contrat composé d'un plan de réapprovisionnement ainsi qu'un partage de revenu de sorte que le coût du producteur ne se détériore pas.

# Bibliographie

- AGGARWAL, A. et PARK, J. K. (1993). Improved algorithms for economic lot size problems. *Operations Research*, 41(3):549–571.
- AILAWADI, K. L., BORIN, N. et FARRIS, P. W. (1995). Market power and performance : A cross-industry analysis of manufacturers and retailers. *Journal of Retailing*, 71(3):211 – 248.
- AKBALIK, A., PENZ, B. et RAPINE, C. (2015). Capacitated lot sizing problems with inventory bounds. *Annals of Operations Research*, 229(1):1–18.
- AKBALIK, A. et RAPINE, C. (2012). Polynomial time algorithms for the constant capacitated single-item lot sizing problem with stepwise production cost. *Operations Research Letters*, 40(5):390 – 397.
- ARKIN, E., JONEJA, D. et ROUNDY, R. (1989). Computational complexity of uncapacitated multi-echelon production planning problems. *Operations Research Letters*, 8(2):61 – 66.
- ARSHINDER, KANDA, A. et DESHMUKH, S. (2008). Supply chain coordination : Perspectives, empirical studies and research directions. *International Journal of Production Economics*, 115(2):316 – 335. Institutional Perspectives on Supply Chain Management.
- ATAMTÜRK, A. et HOCHBAUM, D. S. (2001). Capacity acquisition, subcontracting, and lot sizing. *Management Science*, 47(8):1081–1100.
- ATAMTÜRK, A. et KÜÇÜKYAVUZ, S. (2008). An  $o(n^2)$  algorithm for lot sizing with inventory bounds and fixed costs. *Oper. Res. Lett.*, 36(3):297–299.
- BAHL, H. C., RITZMAN, L. P. et GUPTA, J. N. D. (1987). Or practice—determining lot sizes and resource requirements : A review. *Operations Research*, 35(3):329–345.
- BELLMAN, R. (1957). *Dynamic Programming*. Princeton University Press.
- BITRAN, G. R. et YANASSE, H. H. (1982). Computational complexity of the capacitated lot size problem. *Management Science*, 28(10):1174–1186.
- BLOOM, P. N. et PERRY, V. G. (2001). Retailer power and supplier welfare : The case of walmart. *Journal of Retailing*, 77(3):379 – 396.
- BRAGLIA, M. et ZAVANELLA, L. (2003). Modelling an industrial strategy for inventory management in supply chains : The 'consignment stock' case. *International Journal of Production Research*, 41(16):3793–3808.
- BRAHIMI, N., ABSI, N., DAUZÈRE-PÉRÈS, S. et NORDLI, A. (2017). Single-item dynamic lot-sizing problems : An updated survey. *European Journal of Operational Research*.
- BRAHIMI, N., DAUZERE-PERES, S., NAJID, N. M. et NORDLI, A. (2006). Single item lot sizing problems. *European Journal of Operational Research*, 168(1):1 – 16.

- CACHON, G. P. (2003). Supply chain coordination with contracts. *Handbooks in operations research and management science*, 11:227–339.
- CACHON, G. P. et LARIVIERE, M. A. (2005). Supply chain coordination with revenue-sharing contracts : Strengths and limitations. *Management Science*, 51(1):30–44.
- CHEN, F. (2003). Information sharing and supply chain coordination. *Handbooks in Operations Research and Management Science*, 11:341 – 421. Supply Chain Management : Design, Coordination and Operation.
- CHEN, F. (2007). Auctioning supply contracts. *Management Science*, 53(10):1562–1576.
- CHU, C., CHU, F., ZHONG, J. et YANG, S. (2013). A polynomial algorithm for a lot-sizing problem with backlogging, outsourcing and limited inventory. *Computers & Industrial Engineering*, 64(1):200 – 210.
- CHU, F. et CHU, C. (2007). Polynomial algorithms for single-item lot-sizing models with bounded inventory and backlogging or outsourcing. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, 4(2):233–251.
- CLARK, A. J. et SCARF, H. (1960). Optimal policies for a multi-echelon inventory problem. *Management Science*, 6(4):475–490.
- CORBETT, C. J. et de GROOTE, X. (2000). A supplier’s optimal quantity discount policy under asymmetric information. *Management Science*, 46(3):444–450.
- CORBETT, C. J. et TANG, C. S. (1999). *Designing Supply Contracts : Contract Type and Information Asymmetry*, pages 269–297. Springer US, Boston, MA.
- CORBETT, C. J., ZHOU, D. et TANG, C. S. (2004). Designing supply contracts : Contract type and information asymmetry. *Management Science*, 50(4):550–559.
- CUNHA, J. et MELO, R. (2016). On reformulations for the one-warehouse multi-retailer problem. *Annals of Operations Research*, 238(1):99–122.
- DELLAERT, N., JEUNET, J. et JONARD, N. (2000). A genetic algorithm to solve the general multi-level lot-sizing problem with time-varying costs. *International Journal of Production Economics*, 68(3):241 – 257.
- DUDEK, G. et STADTLER, H. (2005). Negotiation-based collaborative planning between supply chains partners. *European Journal of Operational Research*, 163(3):668–687.
- DUDEK, G. et STADTLER, H. (2007). Negotiation-based collaborative planning in divergent two-tier supply chains. *International Journal of Production Research*, 45(2):465–484.
- ERENGUC, S. et AKSOY, Y. (1990). A branch and bound algorithm for a single item nonconvex dynamic lot sizing problem with capacity constraints. *Computers & Operations Research*, 17(2):199 – 210.
- ERKOC, M. et WU, S. D. (2005). Managing high-tech capacity expansion via reservation contracts. *Production and Operations Management*, 14(2):232–251.
- ESMAEILI, M. et ZEEPHONGSEKUL, P. (2010). Seller-buyer models of supply chain management with an asymmetric information structure. *International Journal of Production Economics*, 123(1):146 – 154.

- FEDERGRUEN, A. et TZUR, M. (1991). A simple forward algorithm to solve general dynamic lot sizing models with  $n$  periods in  $O(n \log n)$  or  $O(n)$  time. *Management Science*, 37(8):909–925.
- FENG, Q. et LU, L. X. (2013). Supply chain contracting under competition : Bilateral bargaining vs. stackelberg. *Production and Operations Management*, 22(3):661–675.
- FENG, Y., CHEN, S., KUMAR, A. et LIN, B. (2011). Solving single-product economic lot-sizing problem with non-increasing setup cost, constant capacity and convex inventory cost in  $O(n \log n)$  time. *Computers & Operations Research*, 38(4):717 – 722.
- FLORIAN, M., LENSTRA, J. K. et KAN, A. H. G. R. (1980). Deterministic production planning : Algorithms and complexity. *Management Science*, 26(7):669–679.
- FORRESTER, J. W. (1961). *Industrial Dynamics*. MIT press, Cambridge.
- FUGATE, B., SAHIN, F. et MENTZER, J. T. (2006). Supply chain management coordination mechanisms. *Journal of Business Logistics*, 27(2):129–161.
- GAREY, M. R. et JOHNSON, D. S. (1979). *Computers and Intractability : A Guide to the Theory of NP-Completeness*. W. H. Freeman.
- GEUNES, J., ROMEIJN, H. E. et van den HEUVEL, W. (2016). Improving the efficiency of decentralized supply chains with fixed ordering costs. *European Journal of Operational Research*, 252(3):815–828.
- GIARD, V. (2003). *Gestion de la production et des flux*. Collection Gestion. Economica.
- GOISQUE, G. et RAPINE, C. (2017). An efficient algorithm for the 2-level capacitated lot-sizing problem with identical capacities at both levels. *European Journal of Operational Research*, 261(3):918 – 928.
- GREAN, M. et SHAW, M. J. (2002). *Supply-Chain Partnership between P&G and Wal-Mart*, pages 155–171. Springer US, Boston, MA.
- GUNER GOREN, H., TUNALI, S. et JANS, R. (2010). A review of applications of genetic algorithms in lot sizing. *Journal of Intelligent Manufacturing*, 21(4):575–590.
- GUTIÉRREZ, J., SEDEÑO-NODA, A., COLEBROOK, M. et SICILIA, J. (2008). An efficient approach for solving the lot-sizing problem with time-varying storage capacities. *European Journal of Operational Research*, 189(3):682 – 693.
- HARRIS, F. W. (1990). How many parts to make at once. *Operations Research*, 38(6):947–950.
- HELLION, B. (2013). *Contrats de stabilité pour la planification tactique dans une chaîne logistique : nouveaux modèles de dimensionnement de lots*. Thèse de doctorat, Université de Grenoble, GSCOP.
- HOFMANN, E. et KOTZAB, H. (2010). A supply chain-oriented approach of working capital management. *Journal of Business Logistics*, 31(2):305–330.
- HWANG, H.-C., AHN, H.-S. et KAMINSKY, P. (2016). Algorithms for the two-stage production-capacitated lot-sizing problem. *Journal of Global Optimization*, 65(4):777–799.
- HWANG, H.-C., DAUZÈRE-PÉRÈS, S., van den HEUVEL, W. et WAGELMANS, A. (2013a). Solving a multi-level lot-sizing problem with inventory bounds. *International Conference on Lot-Sizing (IWLS 2013)*. Brussel, Belgium.

- HWANG, H.-C. et JUNG, H.-G. (2011). Warehouse capacitated lot-sizing for a two-stage supply chain. In *The 2011 KORMS/KIIE Spring Joint Conference on 26 May*, pages 914–917, Incheon, Korea.
- HWANG, H.-C. et van den HEUVEL, W. (2012). Improved algorithms for a lot-sizing problem with inventory bounds and backlogging. *Naval Research Logistics (NRL)*, 59(3-4):244–253.
- HWANG, H.-C., van den HEUVEL, W. et WAGELMANS, A. P. M. (2013b). The economic lot-sizing problem with lost sales and bounded inventory. *IIE Transactions*, 45(8):912–924.
- INDERFURTH, K. et KELLE, P. (2011). Capacity reservation under spot market price uncertainty. *International Journal of Production Economics*, 133(1):272 – 279.
- JARUPHONGSA, W., ÇETINKAYA, S. et LEE, C.-Y. (2004). Warehouse space capacity and delivery time window considerations in dynamic lot-sizing for a simple supply chain. *International Journal of Production Economics*, 92(2):169 – 180.
- KAMINSKY, P. et SIMCHI-LEVI, D. (2003). Production and distribution lot sizing in a two stage supply chain. *IIE Transactions*, 35(11):1065–1075.
- KERKKAMP, R. B. O., van den HEUVEL, W. et WAGELMANS, A. P. M. (2017). Two-echelon supply chain coordination under information asymmetry with multiple types. *Omega*.
- KOVALYOV, M. Y. et PESCH, E. (2014). An  $o(n \log n)$  algorithm for a single-item capacitated lot-sizing problem with linear costs and no backlogging. *International Journal of Production Research*, 52(13):3758–3761.
- KUMAR, R. S. et PUGAZHENDHI, S. (2012). Information sharing in supply chains : An overview. *Procedia Engineering*, 38(Supplement C):2147 – 2154. INTERNATIONAL CONFERENCE ON MODELLING OPTIMIZATION AND COMPUTING.
- LEE, C.-Y. et LI, X. (2013). Economic lot sizing : The capacity reservation model. *Operations Research Letters*, 41(6):670 – 674.
- LEE, H. L., PADMANABHAN, V. et WHANG, S. (1997). Information distortion in a supply chain : The bullwhip effect. *Management Science*, 43(4):546–558.
- LEE, S. et KUMARA, S. (2007). Decentralized supply chain coordination through auction markets : dynamic lot-sizing in distribution networks. *International Journal of Production Research*, 45(20):4715–4733.
- LI, X. et WANG, Q. (2007). Coordination mechanisms of supply chain systems. *European Journal of Operational Research*, 179(1):1–16.
- LIU, T. (2008). Economic lot sizing problem with inventory bounds. *European Journal of Operational Research*, 185(1):204 – 215.
- LIU, X., CHU, F., CHU, C. et WANG, C. (2007). Lot sizing with bounded inventory and lost sales. *International Journal of Production Research*, 45(24):5881–5894.
- LIU, X. et TU, Y. (2008). Production planning with limited inventory capacity and allowed stockout. *International Journal of Production Economics*, 111(1):180 – 191. Managing Supply Chain Network.
- LOVE, S. F. (1973). Bounded production and inventory models with piecewise concave costs. *Management Science*, 20(3):313–318.

- MANNE, A. S. (1958). Programming of economic lot sizes. *Management Science*, 4(2):115–135.
- MATHUR, P. P. et SHAH, J. (2008). Supply chain contracts with capacity investment decision : Two-way penalties for coordination. *International Journal of Production Economics*, 114(1):56 – 70.
- MELO, R. A. et WOLSEY, L. A. (2010). Uncapacitated two-level lot-sizing. *Oper. Res. Lett.*, 38(4):241–245.
- MOBINI, Z., van den HEUVEL, W. et WAGELMANS, A. (2014). Designing multi-period supply contracts in a two-echelon supply chain with asymmetric information. *Econometric Institute Report 2014-28*.
- MYERSON, R. B. (1981). Optimal auction design. *Mathematics of Operations Research*, 6(1):58–73.
- ÖNAL, M., van den HEUVEL, W. et LIU, T. (2012). A note on "the economic lot sizing problem with inventory bounds". *European Journal of Operational Research*, 223(1):290–294.
- OU, J. (2012). Economic lot sizing with constant capacities and concave inventory costs. *Naval Research Logistics (NRL)*, 59(7):497–501.
- PARK, S. I. et KIM, J. S. (2014). A mathematical model for a capacity reservation contract. *Applied Mathematical Modelling*, 38(5–6):1866 – 1880.
- PISHCHULOV, G. et RICHTER, K. (2016). Optimal contract design in the joint economic lot size problem with multi-dimensional asymmetric information. *European Journal of Operational Research*, 253(3):711 – 733.
- POCHET, Y. et WOLSEY, L. A. (2006). *Production Planning by Mixed Integer Programming (Springer Series in Operations Research and Financial Engineering)*. Springer-Verlag New York, Inc., Secaucus, NJ, USA.
- SAHA, S. et GOYAL, S. (2015). Supply chain coordination contracts with inventory level and retail price dependent demand. *International Journal of Production Economics*, 161(Supplement C):140 – 152.
- SAHIN, F. et ROBINSON, E. P. (2002). Flow coordination and information sharing in supply chains : Review, implications, and directions for future research. *Decision Sciences*, 33(4):505–536.
- SANDBOTHE, R. A. et THOMPSON, G. L. (1990). A forward algorithm for the capacitated lot size model with stockouts. *Operations Research*, 38(3):474–486.
- SARGUT, F. Z. et ROMEIJN, H. E. (2007). Capacitated production and subcontracting in a serial supply chain. *IIE Transactions*, 39(11):1031–1043.
- SEREL, D. A. (2007). Capacity reservation under supply uncertainty. *Computers & Operations Research*, 34(4):1192 – 1220.
- SEREL, D. A., DADA, M. et MOSKOWITZ, H. (2001). Sourcing decisions with capacity reservation contracts. *European Journal of Operational Research*, 131(3):635 – 648.
- SIMCHI-LEVI, D., KAMINSKY, P. et SIMCHI-LEVI, E. (2008). *Designing and Managing the Supply Chain : Concepts, Strategies, and Case Studies*. McGraw-Hill higher education. McGraw-Hill/Irwin.

- SPENCE, M. (1973). Job market signaling\*. *The Quarterly Journal of Economics*, 87(3):355–374.
- SPENGLER, J. J. (1950). Vertical integration and antitrust policy. *Journal of Political Economy*, 58(4):347–352.
- STIGLITZ, J. (1975). The theory of "screening," education, and the distribution of income. *American Economic Review*, 65(3):283–300.
- SUCKY, E. (2006). A bargaining model with asymmetric information for a single supplier-single buyer problem. *European Journal of Operational Research*, 171(2):516–535.
- SUGIMORI, Y., KUSUNOKI, K., CHO, F. et UCHIKAWA, S. (1977). Toyota production system and kanban system materialization of just-in-time and respect-for-human system. *International Journal of Production Research*, 15(6):553–564.
- TIROLE, J. (1988). *The Theory of Industrial Organization*. The Theory of Industrial Organization. The MIT Press, Cambridge, Massachusetts.
- TOCZYŁOWSKI, E. (1995). An  $o(t^2)$  algorithm for the lot-sizing problem with limited inventory levels. In *Emerging Technologies and Factory Automation, 1995. ETFA '95, Proceedings., 1995 INRIA/IEEE Symposium on*, volume 3, pages 77–85 vol.3.
- TSAY, A. A. (1999). The quantity flexibility contract and supplier-customer incentives. *Management Science*, 45(10):1339–1358.
- TSAY, A. A., NAHMIAS, S. et AGRAWAL, N. (1999). *Modeling Supply Chain Contracts : A Review*, pages 299–336. Springer US, Boston, MA.
- van den HEUVEL, W., GUTIÉRREZ, J. M. et HWANG, H.-C. (2011). Note on “an efficient approach for solving the lot-sizing problem with time-varying storage capacities”. *European Journal of Operational Research*, 213(2):455 – 457.
- van den HEUVEL, W. et WAGELMANS, A. P. (2008). Four equivalent lot-sizing models. *Operations Research Letters*, 36(4):465 – 470.
- van HOESEL, S., ROMEIJN, H. E., MORALES, D. R. et WAGELMANS, A. P. M. (2005). Integrated lot sizing in serial supply chains with production capacities. *Management Science*, 51(11): 1706–1719.
- VICKREY, W. (1961). Counterspeculation, auctions, and competitive sealed tenders. *The Journal of Finance*, 16(1):8–37.
- VISWANATHAN, S. et WANG, Q. (2003). Discount pricing decisions in distribution channels with price-sensitive demand. *European Journal of Operational Research*, 149(3):571 – 587.
- VYVE, M. V. et ORTEGA, F. (2004). Lot-sizing with fixed charges on stocks : the convex hull. *Discrete Optimization*, 1(2):189 – 203.
- WAGELMANS, A. et van HOESEL, S. (1992). Economic lot sizing : An  $o(n \log n)$  algorithm that runs in linear time in the wagner-whitin case. *Operations Research*, 40:S145–S156.
- WAGNER, H. M. et WHITIN, T. M. (1958). Dynamic version of the economic lot size model. *Management Science*, 5(1):89–96.
- ZANGWILL, W. I. (1968). Minimum concave cost flows in certain networks. *Management Science*, 14(7):429–450.

- 
- ZANGWILL, W. I. (1969). A backlogging model and a multi-echelon model of a dynamic economic lot size production system—a network approach. *Management Science*, 15(9):506–527.
- ZHANG, M., KÜÇÜKYAVUZ, S. et YAMAN, H. (2012). A polyhedral study of multiechelon lot sizing with intermediate demands. *Operations Research*, 60(4):918–935.